

**Marek Czuba**

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

---

## ZASTOSOWANIE ROZKŁADÓW ALFA-STABILNYCH DO SZACOWANIA WARTOŚCI NARAŻONEJ NA RYZYKO

---

**Streszczenie:** Artykuł pokazuje, jakie konsekwencje niosą ze sobą złe założenia co do rozkładu stóp zwrotu pochodzących z finansowych szeregów czasowych podczas szacowania wartości narażonej na ryzyko (VaR). W pierwszej części autor wprowadza w tematykę VaR. Druga część pracy przedstawia rodzinę rozkładów alfa-stabilnych. Trzeci rozdział opisuje sposoby estymacji parametrów oraz kwantyle dla rozkładów alfa-stabilnych. Czwarta część prezentuje, jakie wartości przybiera VaR szacowany metodą kwantylową przy zastosowaniu rozkładu normalnego oraz rozkładów alfa-stabilnych. Do badania posłużyło 325 szeregów czasowych reprezentujących spółki oraz indeksy warszawskiej GPW. Wyniki pokazały, iż stosując rozkłady alfa-stabilne do szacowania VaR (przy poziomie tolerancji 1%), otrzymujemy średnio 1,81 razy większe wartości aniżeli podczas zastosowania rozkładu normalnego.

**Słowa kluczowe:** wartość narażona na ryzyko, rozkłady alfa-stabilne, estymacja parametrów rozkładów alfa-stabilnych, szacowanie kwantyle rozkładów alfa-stabilnych.

### 1. Koncepcja wartości narażonej na ryzyko (*Value at Risk*)<sup>1</sup>

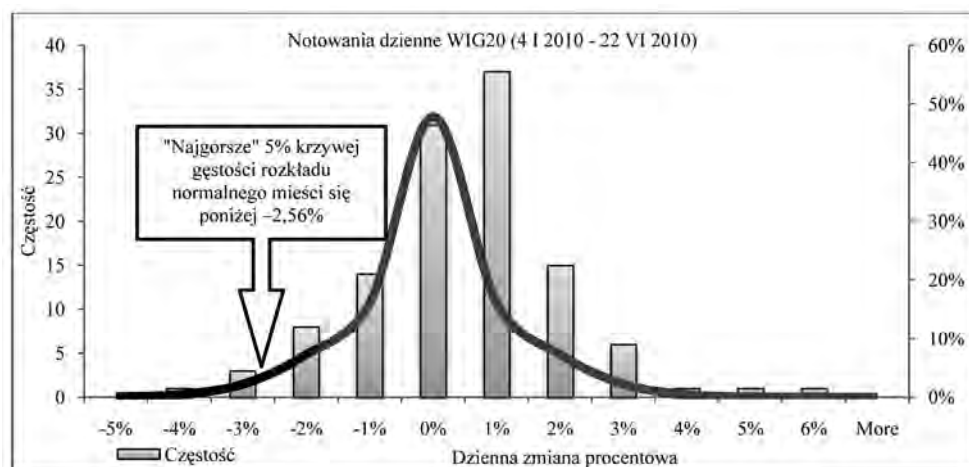
Wartość narażona na ryzyko (*Value at Risk* – VaR) wychodzi z intuicyjnego założenia, że ryzykiem dla inwestora jest możliwość straty na wartości portfela inwestycyjnego. Najważniejszym pytaniem, na jakie odpowiada VaR, jest: „Jak wiele mogę stracić z prawdopodobieństwem  $x\%$  w zadanym horyzoncie czasowym?”<sup>2</sup>. Łatwo dostrzec, że powyższe pytanie zawiera trzy kluczowe elementy: poziom tolerancji, przedział czasowy oraz wyestymowaną, na podstawie dwóch poprzednich elementów, stratę kapitału (wyrażoną w jednostkach pieniężnych lub procentowych). Na przykład jeżeli zarządzający portfelem inwestycyjnym wyszacował swój dzienny VaR na 2 mln dol. przy poziomie tolerancji 1%, oznacza to, że istnieje zaledwie 1% szans na to, że jego dzienna strata przekroczy 2 mln dolarów.

---

<sup>1</sup> Na bazie pracy magisterskiej Marka Czuby pt. „Zastosowanie rozkładów  $\alpha$ -stabilnych do szacowania *Value at Risk* oraz wyceny binarnych opcji typu Cash or Nothing”, Nowy Sącz 2006.

<sup>2</sup> Tłumaczenie „How much can I lose with  $x\%$  probability over a pre-set horizon”, RiskMetrics-Technical Document, J.P. Morgan.

Pomimo koncepcyjnej prostoty VaR ma jedną wadę – bardzo precyzyjne oszacowanie jego wartości jest dużym wyzwaniem. Jedną z elementarnych metod szacujących VaR jest metoda kwantylowa. Jest to bardziej ogólny wariant metody wariancji-kowariancji, która wywodzi się z metody historycznej. Metoda historyczna, najprostsza i dająca początek pozostałym, sortuje otrzymane stopy zwrotu, układając je w koszyki od „najgorszych” do „najlepszych” (tworzony jest histogram). Następnie wysuwa założenie, iż historia, z punktu widzenia ryzyka, będzie się powtarzać. Znacznie lepsza metoda wariancji-kowariancji zakłada normalność rozkładu stóp zwrotu. Dzięki takiemu założeniu wiemy, że potrzebujemy zaledwie dwóch parametrów – średniej oraz odchylenia standardowego, aby narysować krzywą rozkładu. Położenie wybranego poziomu tolerancji znajdujemy, używając kwantyla rozkładu normalnego. Zaletą takiego podejścia jest fakt, iż dowolny kwantyl rozkładu normalnego (czyli poziom tolerancji dla VaR) możemy szybko wyznaczyć za pomocą funkcji parametrów tego rozkładu. Rysunek 1 przedstawia naniesienie krzywej rozkładu normalnego na histogram oraz wskazanie wartości VaR przy poziomie tolerancji w wysokości 5%. Łatwo wywnioskować, że przy szacowaniu *Value at Risk* metodą kwantylową bardzo ważny jest dobór odpowiedniego rozkładu danych. Jak wynika z rys. 1, krzywa rozkładu normalnego „uogólniła” wejściowe dane, dopasowując ich rozkład do postaci gaussowskiej. Niestety, dużą wadą rozkładu normalnego jest brak „grubych ogonów”. Ich brak może być szczególnie widoczny podczas szacowania *Value at Risk*, gdyż właśnie ta cecha jest najważniejsza z punktu widzenia tej miary ryzyka. Miara ryzyka, jaką jest wartość narażona na ryzyko, poszukuje obserwacji, które znajdują się właśnie na końcach ogonów, a krzywa rozkładu normalnego



**Rys. 1.** Histogram stóp zwrotu indeksu WIG20 na przełomie 4 I 2010-22 VI 2010 wraz z naniesioną krzywą rozkładu normalnego

Źródło: opracowanie własne.

wygładza tę część rozkładu. Dlatego szeregi czasowe, w których często pojawiają się obserwacje odstające od średniej (a do takich możemy zaliczyć m.in. finansowe szeregi czasowe), mogą generować nieprecyzyjne oszacowania wartości narażonej na ryzyko.

Wyeliminowanie wspomnianej wady może zostać dokonane poprzez zmianę rozkładu danych na bardziej dopasowany do wejściowych danych. Biorąc pod uwagę, że w niniejszym artykule wartość narażona na ryzyko będzie szacowana dla szeregów czasowych pochodzących z warszawskiej GPW, jako alternatywna do rozkładu normalnego została wybrana rodzina rozkładów alfa-stabilnych. Powodem wybrania tej grupy rozkładów jest fakt, że w literaturze tematu<sup>3</sup> wielu autorów wskazało, że rozkłady alfa-stabilne są znacznie lepiej dopasowane do szeregów czasowych opisujących zmiany cen akcji giełdowych. Dodatkowe argumenty zastosowania rozkładów alfa-stabilnych do danych opisujących finansowe szeregi czasowe znajdują się w kolejnym punkcie niniejszego artykułu.

## 2. Charakterystyka rozkładów alfa-stabilnych<sup>4</sup>

Rozkłady alfa-stabilne opisywane są przez cztery parametry:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$ . Parametry  $\alpha$  oraz  $\beta$  są odpowiedzialne za kształt rozkładu, z kolei dwa pozostałe  $\sigma$  i  $\mu$  decydują jedynie o jego położeniu. Obecnie istnieją tylko trzy znane postacie funkcji gęstości prawdopodobieństwa (PDF) dla rozkładów alfa-stabilnych. Oto ich parametryzacje [Nolan 2005]:

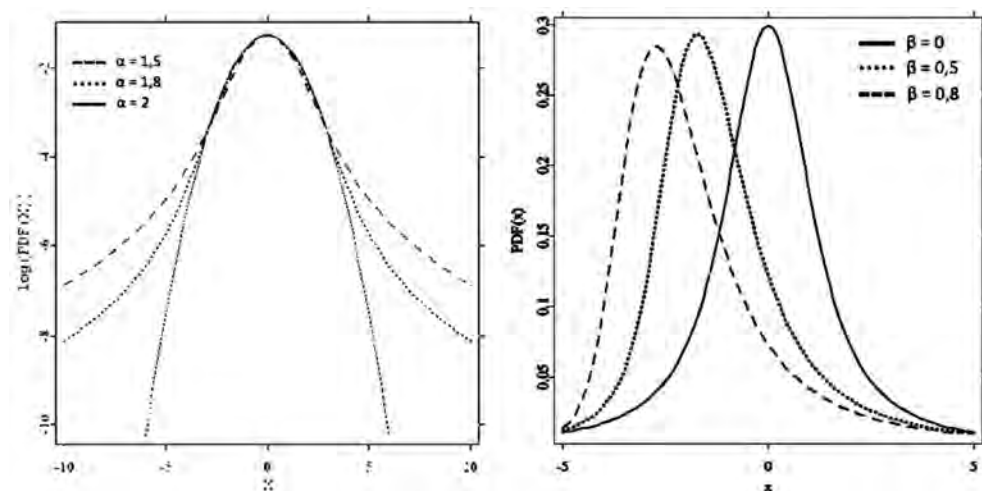
- $S_2(\sigma, 0, \mu) \rightarrow$  klasyczny, gaussowski rozkład normalny,
  - $S_1(\sigma, 0, \mu) \rightarrow$  rozkład Cauchego,
  - $S_{0,5}(\sigma, 1, \mu) \rightarrow$  rozkład Léwiego,
- gdzie:

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu).$$

Najciekawszym parametrem rozkładów  $\alpha$ -stabilnych jest parametr  $\alpha \in (0, 2]$  zwany wykładnikiem charakterystycznym. Określa on grubość ogonów rozkładu. Im  $\alpha$  bliższa zeru, tym rozkład jest bardziej „oderwany od podłoża”. Parametr  $\beta \in [-1, 1]$ , zwany parametrem skośności, jest odpowiedzialny za skośność rozkładu. Wpływ parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  na kształt rozkładów  $\alpha$ -stabilnych został zaprezentowany na rys. 2.

<sup>3</sup> M.in. Mandelbrot (1963), Fama (1965), Samuelson (1967), Roll (1970), Embrechts (1997), Rachev, Mittnik (2000), McCulloch (1996), Stuck i Kleiner (1974), Zolotarev (1986), Nikiasi Shao (1995).

<sup>4</sup> Na bazie pracy magisterskiej Marka Czuby pt. „Zastosowanie rozkładów  $\alpha$ -stabilnych do szacowania Value atRisk oraz wyceny binarnych opcji typu Cash or Nothing”, Nowy Sącz 2006.



**Rys. 2.** Wpływ parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  na kształt rozkładów alfa-stabilnych

Źródło: [Borak, Härdle, Weron 2005].

Ostatnie dwa parametry rozkładów alfa-stabilnych to  $\sigma \in \mathbb{R}_+$ , czyli parametr skali, oraz  $\mu \in \mathbb{R}$ , czyli parametr przesunięcia. Parametr przesunięcia  $\mu$ , przesuwa położenie rozkładu w lewo lub w prawo względem osi  $X$ . Z kolei parametr skali  $\sigma$  „zwęża” lub „rozszerza” rozkład względem  $\mu$  proporcjonalnie do  $\sigma$ .

**Tabela 1.** Wyniki statystyk Kołmogorowa (K) oraz Andersona–Darlinga (AD) dla trzech indeksów oraz czterech wybranych rozkładów

Indeks	WIG20		DAX		DJIA		Mediana wyników
	K	AD	K	AD	K	AD	
Normalny	0,063	269,75	0,067	131,02	0,083	3,40	65,552
Mieszanka normalnych	0,028	0,087	0,028	0,116	0,153	42,469	0,102
$\alpha$ -stabilny	0,020	<b>0,074</b>	<b>0,020</b>	<b>0,070</b>	<b>0,011</b>	<b>0,046</b>	<b>0,033</b>
Hiperboliczny	<b>0,015</b>	0,116	0,043	0,075	0,016	910,387	0,059

Źródło: [Jasik 2005].

Aby podkreślić słuszność wyboru rozkładów alfa-stabilnych do szacowania wartości narażonej na ryzyko dla szeregów czasowych, jakimi posługują się finansiści, w tab. 1 przytoczone zostały wyniki dwóch testów statystycznych. Pierwszym z nich jest statystyka Kołmogorowa. Rozstrzyga ona, czy zaproponowany rozkład nie jest „za niski” lub „za wysoki” w okolicach mediany w stosunku do empirycznego rozkładu. Ciekawszym testem jest statystyka Andersona–Darlinga, która określa do-

pasowanie rozkładu w okolicy wartości ekstremalnych, czyli na ogonach rozkładu. Statystyka ta sprawdza, czy ogony proponowanego rozkładu nie są „za grube” lub „za cienkie” w stosunku do oryginalnego rozkładu. Mając na myśli szacowanie VaR, który korzysta głównie z wartości ekstremalnych, obserwujemy, że wyniki tego testu są bardzo istotne. Im bliższe zero są wyniki testu, tym lepiej wybrany rozkład odzwierciedla dane empiryczne.

Wyniki pokazują, że powszechnie stosowany rozkład normalny najgorzej odzwierciedla dane empiryczne. Jego dopasowanie wokół średniej jest satysfakcjonujące, jednak test pokrycia z wartościami ekstremalnymi pokazał drastycznie wysokie wartości. Narzuca się wniosek, iż nie powinniśmy stosować rozkładu Gaussa do szacowania finansowych miar oraz wskaźników opartych na ekstremalnych wartościach rozkładu. Z drugiej strony możemy stwierdzić, że rodzina rozkładów  $\alpha$ -stabilnych najdokładniej odzwierciedliła wszystkie wybrane do analizy dane. Przytoczone wyniki testów wspierają ideę niniejszego artykułu, która ma na celu pokazanie, jak mylne wyniki możemy uzyskać, szacując globalną miarę ryzyka, jaką jest VaR, przy źle dobranym rozkładzie.

### 3. Metodyka estymacji parametrów oraz kwantyli dla rozkładów alfa-stabilnych<sup>5</sup>

Do oszacowania wartości narażonej na ryzyko metodą kwantylową potrzebna jest wiedza na temat sposobu szacowania dowolnego kwantyla dla wybranego rozkładu danych. W przypadku rozkładów alfa-stabilnych oszacowanie kwantyla rozkładu może zostać dokonane dopiero po określeniu parametrów rozkładu. Obecnie istnieje kilka metod szacowania parametrów opisujących rozkłady alfa-stabilne. Na potrzeby niniejszego artykułu wartości parametrów będą szacowane metodą wyprowadzoną przez J. Hustona McCullocha [McCulloch 1986]. Określa ona, że do wyestymowania parametrów z wybranego szeregu stóp zwrotów potrzebnych jest pięć kwantyli:

- kwantyl 0,95 =  $x_{0,95}$
- kwantyl 0,75 =  $x_{0,75}$
- kwantyl 0,50 =  $x_{0,50}$
- kwantyl 0,25 =  $x_{0,25}$
- kwantyl 0,05 =  $x_{0,05}$

Za pomocą wskazanych kwantyli powinniśmy wyznaczyć estymatory parametrów  $\alpha$  oraz  $\beta$ , czyli  $v_\alpha$  i  $v_\beta$ :

$$v_\alpha = \frac{x_{0,95} - x_{0,05}}{x_{0,75} - x_{0,25}} \quad v_\beta = \frac{x_{0,95} + x_{0,05} - 2x_{0,50}}{x_{0,95} - x_{0,05}} \quad (1)$$

<sup>5</sup> Tamże.

Wiedząc, że parametry  $\alpha$  oraz  $\beta$  są funkcją estymatorów  $v_\alpha$  i  $v_\beta$ , gdzie  $\alpha = \Psi_1(v_\alpha, v_\beta)$ , natomiast  $\beta = \Psi_2(v_\alpha, v_\beta)$ , możemy skorzystać z odpowiednich tabel [McCulloch 1986] i odczytać wartość szukanych parametrów. Warto jednak zwrócić uwagę, że dla parametru  $\alpha$  zachodzi zależność  $\Psi_1(v_\alpha, -v_\beta) = \Psi_1(v_\alpha, v_\beta)$ . Z kolei dysponując parametrami  $\alpha$  oraz  $\beta$ , możemy wyznaczyć parametr skali  $\sigma$ , co należy dokonać poprzez estymator  $v_\sigma = \Psi_3(\alpha, \beta)$ , pamiętając że  $\Psi_3(\alpha, -\beta) = \Psi_3(\alpha, \beta)$ . Wartość estymatora  $v_\sigma$  może zostać odczytana z tabeli [McCulloch 1986], a następnie przekształcona w parametr skali przy zastosowaniu wzoru:

$$\sigma = \frac{x_{0,75} - x_{0,25}}{v_\sigma} \quad (2)$$

Ostatni z poszukiwanych parametrów, czyli parametr przesunięcia  $\mu$ , może zostać wyznaczony poprzez estymator  $v_\mu$ , który jest zadany wzorem:

$$v_\mu = x_{0,50} + \sigma * \Psi_4(\alpha, \beta) \quad (3)$$

Wykorzystywana jest tutaj funkcja parametrów  $\alpha$  oraz  $\beta$ , której wynik odczytujemy z tabeli [McCulloch 1986], pamiętając że  $\Psi_4(\alpha, -\beta) = -\Psi_4(\alpha, \beta)$ . Dysponując estymatorem  $v_\mu$ , możemy oszacować wartość samego parametru przesunięcia  $\mu$ , stosując następujące równanie:

$$\mu = v_\mu - \beta\sigma \tan \frac{\pi\alpha}{2} \quad (4)$$

Znając już metodologię wyznaczania parametrów rozkładu, możemy przejść do sposobu szacowania kwantyla dla rozkładu alfa-stabilnego. Niżej opisana technika pochodzi z publikacji J.P. Nolana [Nolan 2005, rozdz. 1, par. 1.5, s. 19]. W celu wyznaczenia wartości kwantyla rzędu  $\lambda$ , czyli  $z_\lambda$ , autor posłużył się estymatorem  $v_\lambda = \Psi_\lambda(\alpha, \beta)$ . Niedogodność związana z szacowaniem estymatora kwantyla polega na tym, iż jego wartość zależy jednocześnie od wartości  $\alpha$  i  $\beta$ . W związku z tym dla każdego rzędu kwantyla istnieje osobna tablica do odczytu jego wartości. Na potrzeby niniejszej pracy korzystałem z tablic udostępnionych przez J.P. Nolana, zawierających 171 rzędów kwantyla<sup>6</sup>. Korzystając z tabel, należy pamiętać, że jeżeli  $\beta < 0$ , wówczas  $z_\lambda(\alpha, \beta) = z_{1-\lambda}(\alpha, -\beta)$ . Po oszacowaniu estymatora ostatnim krokiem do wyznaczenia wartości kwantyla dla wybranego rzędu  $\lambda$  jest przeskalowanie estymatora według następującej formuły:

$$z_\lambda = \sigma v_\lambda + (\mu + \beta\sigma \tan \frac{\pi\alpha}{2}) \quad (5)$$

Przedstawiona metodologia pozwala skutecznie oszacować parametry rozkładów alfa-stabilnych oraz wybrane kwantyle tych rozkładów, co umożliwia kalkulacje VaR.

<sup>6</sup> Oryginalne tablice (plik quantile.dat) można odszukać na domowej stronie J.P. Nolana <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/stable.html> (24.06.2010).

#### 4. Estymacja parametrów rozkładu oraz wartości narażonej na ryzyko dla stóp zwrotu spółek notowanych na GPW w Warszawie

W niniejszej części pracy wskazana wcześniej metodologia zostanie wykorzystana do oszacowania parametrów rozkładu dla stóp zwrotu spółek pochodzących z warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych. Do badań wybrano 325 spółek, dla których pobrane zostały wszystkie stopy zwrotu, począwszy od dnia debiutu spółki na GPW. Jedyny wprowadzony limit mówił, iż liczba stóp zwrotu dla pojedynczej spółki musi wynosić przynajmniej 100, co tworzy relatywnie reprezentacyjną grupę. Częściowe wyniki badań zostały zaprezentowane w tab. 2. Znajduje się tam 10 spółek, które charakteryzują się największym oraz najmniejszym poziomem wykładnika  $\alpha$ , odpowiedzialnego za grubość ogonów rozkładu. Dla każdej z tych spółek wyznaczona została wartość narażona na ryzyko (dla trzech poziomów tolerancji: 0,5%, 1% oraz 5%) przy założeniu, że rozkład stóp zwrotu jest albo rozkładem normalnym, albo rozkładem alfa-stabilnym.

**Tabela 2.** VaR przy poziomie tolerancji 0,5%, 1% oraz 5% przy użyciu rozkładu normalnego oraz alfa-stabilnego dla 10 spółek charakteryzujących się najmniejszą oraz największą wartością parametru  $\alpha$

Nazwa	$\alpha$	VaRprzy 0,5%			VaRprzy 1%			VaRprzy 5%		
		Norm.	$\alpha$ -stab.	$\alpha / N$	Norm.	$\alpha$ -stab.	$\alpha / N$	Norm.	$\alpha$ -stab.	$\alpha / N$
ORZEL	<b>0,8591</b>	-17,9%	-88,0%	<b>4,92</b>	-16,3%	-60,4%	<b>3,70</b>	-12,0%	-12,5%	<b>1,05</b>
PRAGMAINK	<b>0,8782</b>	-6,6%	-47,1%	<b>7,15</b>	-6,0%	-24,8%	<b>4,16</b>	-4,2%	-4,2%	<b>1,01</b>
FON	<b>0,8947</b>	-28,9%	-87,4%	<b>3,02</b>	-26,5%	-61,2%	<b>2,31</b>	-19,6%	-14,1%	<b>0,72</b>
K2INTERNT	0,9748	-7,1%	-42,0%	<b>5,88</b>	-6,5%	-23,2%	<b>3,58</b>	-4,6%	-4,8%	<b>1,04</b>
CAMMEDIA	<b>0,9917</b>	-7,5%	-39,0%	<b>5,21</b>	-6,8%	-21,7%	<b>3,20</b>	-4,8%	-4,6%	<b>0,96</b>
SKOK	<b>1,0131</b>	-9,9%	-29,9%	<b>3,02</b>	-8,9%	-16,3%	<b>1,83</b>	-6,4%	-3,5%	<b>0,56</b>
LSTCAPITA	<b>1,0730</b>	-17,4%	-66,6%	<b>3,83</b>	-15,9%	-43,5%	<b>2,74</b>	-11,6%	-11,9%	<b>1,03</b>
QUANTUM	<b>1,0920</b>	-7,2%	-31,1%	<b>4,35</b>	-6,5%	-17,9%	<b>2,76</b>	-4,7%	-4,4%	<b>0,95</b>
PEMUG	<b>1,1028</b>	-12,5%	-38,0%	<b>3,03</b>	-11,4%	-22,5%	<b>1,98</b>	-8,2%	-5,8%	<b>0,71</b>
SEKO	<b>1,1358</b>	-7,2%	-33,4%	<b>4,62</b>	-6,6%	-19,8%	<b>3,02</b>	-4,7%	-5,2%	<b>1,12</b>
...	↓	...	...	...	...	...	...	...	...	...
CEZ	<b>1,6201</b>	-5,9%	-11,4%	<b>1,92</b>	-5,4%	-7,8%	<b>1,46</b>	-3,8%	-3,6%	<b>0,93</b>
CYFRPLSAT	<b>1,6243</b>	-5,3%	-9,6%	<b>1,81</b>	-4,8%	-6,7%	<b>1,39</b>	-3,4%	-3,2%	<b>0,94</b>
TPSA	<b>1,6376</b>	-5,7%	-10,5%	<b>1,85</b>	-5,1%	-7,3%	<b>1,43</b>	-3,7%	-3,5%	<b>0,97</b>
BUDVARCEN	<b>1,6516</b>	-9,7%	-14,7%	<b>1,51</b>	-8,9%	-10,4%	<b>1,18</b>	-6,4%	-5,2%	<b>0,82</b>
PKOBP	<b>1,6659</b>	-6,0%	-9,8%	<b>1,64</b>	-5,4%	-6,9%	<b>1,28</b>	-3,8%	-3,6%	0,93
PEKAO	<b>1,6663</b>	-6,2%	-10,3%	<b>1,65</b>	-5,6%	-7,3%	<b>1,29</b>	-4,0%	-3,7%	<b>0,92</b>
KGHM	<b>1,6699</b>	-7,5%	-12,4%	<b>1,65</b>	-6,8%	-8,8%	<b>1,30</b>	-4,8%	-4,5%	<b>0,93</b>
LOTOS	<b>1,6811</b>	-6,2%	-10,3%	<b>1,66</b>	-5,6%	-7,4%	<b>1,30</b>	-4,0%	-3,8%	<b>0,94</b>
B3SYSTEM	<b>1,7056</b>	-9,8%	-16,4%	<b>1,67</b>	-8,9%	-11,8%	<b>1,33</b>	-6,4%	-6,0%	<b>0,94</b>
PKNORLEN	<b>1,8020</b>	-5,5%	-6,9%	<b>1,26</b>	-4,9%	-5,4%	<b>1,09</b>	-3,5%	-3,3%	<b>0,94</b>

Źródło: opracowanie własne.

Warto zwrócić uwagę, iż dla wszystkich 325 wybranych do badania spółek rozkład stóp zwrotu nie jest podobny do rozkładu normalnego (na podstawie wartości wykładnika charakterystycznego  $\alpha$ ). Wartość parametru  $\alpha$  wyniosła średnio 1,39 i jest ona znacznie oddalona od wartości normalnej równej 2 ( $\alpha \in (0, 2]$ ). Jest to jedna z głównych przyczyn, która powoduje, iż wyniki zaprezentowane w tab. 2 pokazują, że istnieją znaczne różnice w wartościach VaR, szczególnie przy poziomie tolerancji 0,5%. Wewnątrz tej grupy, dla 10 spółek z najmniejszymi wartościami parametru  $\alpha$ , VaR przy założeniu, że stopy zwrotu mogą być opisane poprzez rozkład alfa-stabilny, był średnio ponad 4,2 razy większy od wartości narażonej na ryzyko zakładającej gaussowski rozkład stóp zwrotu (w ekstremalnym przypadku nawet 7 razy większy). W grupie 10 spółek z największym parametrem  $\alpha$  wartości te były średnio 1,8 razy większe (w najgorszym przypadku 2,2 razy większe). Z kolei dla wszystkich 325 spółek wybór rozkładów alfa-stabilnych generował średnio 2,5-krotnie większe wartości VaR aniżeli dla tej samej miary mierzonej za pomocą rozkładu normalnego. Jeśli przeanalizujemy koszyk wartości narażonych na ryzyko przy poziomie tolerancji równym 1%, wysnujemy podobne wnioski. W tym przypadku jednak skala różnic między wartościami VaR stosującymi rozkłady alfa-stabilne a oryginalnymi, wykorzystującymi rozkłady normalne jest znacznie mniejsza. Dla wszystkich 325 badanych spółek wyniki przy zastosowaniu rozkładów alfa-stabilnych były 1,81 razy większe aniżeli podczas zastosowania rozkładu normalnego (w najgorszym przypadku 4,16). Jak widać, wnioski pozostają wciąż takie same, jednak skala zjawiska ulega zmniejszeniu wraz ze wzrostem poziomu tolerancji. Ostatecznie dla koszyka, w którym wartość narażona na ryzyko szacowana była dla poziomu tolerancji wynoszącego 5%, nie zauważamy znacznych różnic w wartościach VaR, stosując czy to rozkład normalny, czy to rozkład alfa-stabilny. Związane jest to z faktem, że coraz bardziej oddalamy się od wartości ekstremalnych, ku wartości średniej, gdzie rozkład normalny dobrze odzwierciedla dane empiryczne (co pokazała również statystyka Kołmogorowa – tab.1).

Reasumując, szacowanie VaR, przy założeniu, że rozkład stóp zwrotu danych empirycznych jest rozkładem normalnym, może generować wysoce nieprecyzyjne oszacowania dla poziomów tolerancji mniejszych od 5%. Sztandarowymi przykładami takich nieprecyzyjnych oszacowań mogą być dane tab. 3, która pokazuje wartość VaR dla trzech poziomów tolerancji (0,5%, 1% oraz 5%) przy założeniu, iż rozkład stóp zwrotu jest albo rozkładem normalnym, albo rozkładem alfa-stabilnym. Instrumentami, dla których szacowana była wartość narażona na ryzyko, są główne indeksy warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych. Wyniki dla wybranych indeksów są zgodne z wynikami dla spółek notowanych na GPW w Warszawie. Widzimy, że oszacowania VaR dla rozkładu alfa-stabilnego generują znacznie większe wartości w porównaniu z wynikami oszacowań w przypadku zastosowania rozkładu normalnego. Efekt ten zwiększa się wraz ze zmniejszaniem poziomu tolerancji.

Dla przykładu, inwestując w warszawski indeks giełdowy WIG20 i szacując VaR dla poziomu tolerancji 0,5%, możemy wyprowadzić wniosek, że istnieje jedna



**Tabela 3.** VaR przy poziomie tolerancji 0,5%, 1% oraz 5% przy użyciu rozkładu normalnego oraz alfa-stabilnego dla głównych indeksów warszawskiej GPW

Nazwa	$\alpha$	VaR przy 0,5%			VaR przy 1%			VaR przy 5%		
		Norm.	$\alpha$ -stab.	$\alpha / N$	Norm.	$\alpha$ -stab.	$\alpha / N$	Norm.	$\alpha$ -stab.	$\alpha / N$
WIG	1,4471	-5,1%	-12,0%	<b>2,37</b>	-4,6%	-7,7%	<b>1,69</b>	-3,2%	-2,9%	<b>0,89</b>
WIG20	1,5378	-5,1%	-11,0%	<b>2,15</b>	-4,6%	-7,3%	<b>1,59</b>	-3,3%	-3,1%	<b>0,95</b>
MWIG40	1,4991	-3,3%	-8,4%	<b>2,51</b>	-3,0%	-5,4%	<b>1,81</b>	-2,1%	-2,1%	<b>0,99</b>
SWIG80	1,4591	-4,0%	-11,1%	<b>2,80</b>	-3,6%	-7,1%	<b>1,99</b>	-2,5%	-2,6%	<b>1,03</b>

Źródło: opracowanie własne.

szansa na dwieście, że nasza dzienna strata przekroczy 5,1% (zakładając, że rozkład stóp zwrotu z indeksu WIG20 może być opisany rozkładem normalnym). Biorąc pod uwagę, że VaR jest powszechną miarą ryzyka, niektóre fundusze inwestycyjne lub banki inwestycyjne mogą dostosować swój poziom zabezpieczeń właśnie do wspomnianej wysokości. Tymczasem, jeśli oszacujemy tę samą miarę ryzyka, zakładając jednak, iż rozkład stóp zwrotu z indeksu WIG20 może być opisany poprzez rozkład alfa-stabilny (który, jak wspomniano we wcześniejszych rozdziałach, lepiej opisuje rozkłady stóp zwrotu dla danych finansowych), wówczas otrzymamy wynik wskazujący, iż mamy 0,5% szans na dzienną stratę w wysokości 11%. Wynik ten jest przeszło dwukrotnie większy od wcześniej zakładanego. Jeśli zaistnieje taka sytuacja, wówczas zabezpieczające się według tej miary ryzyka instytucje finansowe mogą nie być przygotowane na straty w tej wysokości, co może grozić poważnymi skutkami finansowymi.

Precyzyjne szacowanie miar ryzyka jest bardzo istotnym zadaniem, którego konsekwencje mogą nieść poważne skutki dla instytucji finansowych. Należy pamiętać, że stosowany często rozkład normalny uogólnia dane empiryczne, co może znacznie wpływać na wyniki generowane przez globalnie stosowane miary ryzyka, co niniejszy artykuł miał za zadanie pokazać.

## Literatura

- Bates S., McLaughlin S., *The Estimation of Stable Distribution Parameters*, Department of Electrical Engineering, University of Edinburgh, Edinburgh, 2000.
- Borak S., Härdle W., Weron R., *Stable distributions*, SFB 649 Discussion Paper 2005-2008.  
<http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/stable.html>.
- Jammalamadaka S.R., Srikanth K.I., *A Sample Estimate of the Index of Stability for Symmetric Stable Distributions*, Department of Statistics and Applied Probability, University of California, Santa Barbara 2003.
- Jasik D., *Dobór rozkładów do opisu stóp zwrotu indeksów giełdowych*, AGH, Kraków 2005.
- Linsmeier T., Pearson N., *Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk*, University of Illinois at Urbana-Champaign, July 1996.

- Manganelli S., Engle R., *Value at Risk models in finance*, Working Paper no. 75, European Central Bank, August 2001.
- McCulloch J.H., *Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters*, Department of Economics, The Ohio State University, Columbus 1986.
- Nolan J.P., *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*, Math/Stat Department, American University, January 11, 2005.
- Nolan J.P., *Statistical Techniques with Heavy Tailed and Stable Distributions*, Enterprise Risk Management Workshop, Washington DC, January 15, 2004.

### **APPLYING ALFA-STABLE DISTRIBUTIONS TO CALCULATE VALUE AT RISK**

**Summary:** This article shows the results we may get when we apply mismatched probability density function to calculate Value at Risk. The author compares VaR calculated using Gaussian probability distribution with VaR calculated using alfa-stable probability distribution. The results show that VaR calculated with alfa-stable probability distribution generates much higher values than VaR calculated using Gaussian probability distribution. For example, calculating VaR with 0,5% tolerance level and alfa-stable probability distribution generates in average 2,5 times higher values then the same VaR but with Gaussian probability distribution. The empirical part was based on 325 stock companies form WSE.