

Tomasz Bartłomowicz

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
e-mail: tomasz.bartlomowicz@ue.wroc.pl

IMPLEMENTACJA METODY *ANALYTIC HIERARCHY PROCESS* W PAKIECIE AHPMETHOD PROGRAMU R

IMPLEMENTATION OF ANALYTIC HIERARCHY PROCESS METHOD IN AHPMETHOD OF R PACKAGE

DOI: 10.15611/ie.2016.3.02

Streszczenie: Jedną z metod wspomagającą podejmowanie decyzji w warunkach złożonego problemu decyzyjnego, zawierającego więcej niż jedno kryterium decyzyjne, jest metoda *Analytic Hierarchy Process* (AHP). Ze względu na dekompozycyjny charakter metody jest to również narzędzie pomiaru i analizy preferencji konsumentów. Celem artykułu jest prezentacja autorskiego pakietu AHPmethod dla programu R. W artykule, oprócz funkcji pakietu AHPmethod, zaprezentowano zastosowanie pakietu w badaniach marketingowych na przykładzie pomiaru preferencji nabywców telefonów komórkowych.

Słowa kluczowe: *Analytic Hierarchy Proces* (AHP), pakiet AHPmethod, program R.

Summary: Analytic Hierarchy Process (AHP) is one of the methods used in the analysis of complex decision-making problems where there are more than one decision criterion. Due to the nature of the decompositional approach, AHP enables the fragmentation of the complex decision problem and the creation of final ranking. This means a potential opportunity to use AHP method to measure the consumers' preferences. The main aim of the article is to present the author's AHPmethod package for R program. The paper presents functions of the package and the use of the AHPmethod package in marketing research on the example of the measurement and analysis of consumer preferences.

Keywords: Analytic Hierarchy Proces (AHP), AHPmethod package, R program.

1. Wstęp

W badaniach marketingowych złożone zagadnienia przedstawia się w postaci hierarchii, określając cel, alternatywy, kryteria (subkryteria) itd. Strukturalne traktowanie problemu pozwala na sprowadzenie złożonego problemu decyzyjnego do skończo-

nego zbioru wariantów decyzyjnych w przypadku danych zarówno ilościowych, jak i jakościowych. Metodami wspomagającymi podejmowanie decyzji w takich warunkach są najczęściej rozwiązania należące do kategorii wielokryterialnych metod podejmowania decyzji MCDM (*Multiple Criteria Decision Making*), z których najpopularniejszymi i jednocześnie najprostszymi w zastosowaniu są modele sum i iloczynów ważonych WSM (*Weighted Sum Models*) oraz WPM (*Weighted Product Models*). Jednym z rozwiązań należących do tej kategorii jest metoda AHP (*Analytic Hierarchy Process*).

Ze względu na dekompozycyjny charakter metody AHP może być ona traktowana zarówno jako metoda rozwiązywania złożonych problemów decyzyjnych, jak również jako metoda pomiaru i analizy preferencji. Przykładów takiego zastosowania metody AHP dostarcza literatura przedmiotu [Saaty 1977; 1980; 1990; 2001; 2010; Meißner, Decker 2009; Chuang 2001; Vargas 1990; Bartłomowicz 2015; Trzaskalik (red.) 2014; Trzaskalik 2014].

W artykule zaprezentowano implementację metody *Analytic Hierarchy Process* w postaci modułu programu R, który jest aktualnie jednym z najważniejszych, niekomercyjnych programów przeznaczonych do analizy statystyczno-ekonomicznej oferowanych na zasadach licencji GNU GPL¹. Tym samym celem artykułu jest prezentacja autorskiego pakietu AHPmethod opracowanego dla programu R, który może być stosowany m.in. w pomiarze preferencji konsumentów. Oprócz funkcji w artykule zaprezentowano zastosowanie pakietu w badaniach marketingowych na przykładzie pomiaru preferencji nabywców smartfonów.

2. Metoda *Analytic Hierarchy Process*

AHP (*Analytic Hierarchy Process*) to metoda łącząca w sobie elementy matematyki oraz psychologii; umożliwiająca rozwiązanie problemu, który zawiera więcej niż jedno kryterium decyzyjne. Metoda opracowana została przez Thomasa L. Saaty'ego², który zaproponował jej wykorzystanie w wielu dziedzinach, m.in.: zarządzaniu, politologii, socjologii, produkcji, transporcie itd. [Saaty 1977; 1980; McCaffrey 2005; Trzaskalik (red.) 2014; Trzaskalik 2014].

Metoda AHP, w celu ułatwienia optymalnych wyborów, gdy decydent ma do dyspozycji większą liczbę kryteriów, umożliwia utworzenie tzw. rankingu finalnego wariantów decyzyjnych [Saaty 1980]. Oznacza to, że metoda AHP pozwala sprowadzić złożony problem do skończonego zbioru wariantów decyzyjnych, co pozwala podjąć decyzję w sposób obiektywny. Metoda potwierdza swoje praktyczne zastosowanie dla problemów, w których dane wejściowe są istotnie zróżnicowane, tj. wyrażane nie tylko w postaci wartości mierzalnych [Satty 2001].

¹ GNU GPL – oprogramowania bezpłatnego i wolnego (z dostępem do kodu źródłowego).

² Metodę po raz pierwszy przedstawiono w 1977 r. w artykule *A scaling method for priorities in hierarchical structures*, opublikowanej w *Journal of Mathematical Psychology* [Saaty 1977; 1980].

W metodzie AHP w pierwszym kroku procedury przedstawia się strukturę problemu w postaci hierarchii, określając cel główny³ (ewentualnie cele pomocnicze), warianty (alternatywy) oraz kryteria (ewentualnie subkryteria). W kolejnym kroku określone są preferencje decydenta (konsumenta) za pomocą względnych ocen ważności wariantów (alternatyw) oraz kryteriów. Oceny te powstają przez porównywanie parami wszystkich obiektów znajdujących się na danym poziomie hierarchii. Preferencje określone są dla wszystkich poziomów, a oceny wyrażane są za pomocą wartości liczbowych. Zaproponowana przez Saaty'ego [Saaty 1997] skala pomiaru zakłada wartości od 1 do 9 (por. tab. 1).

Tabela 1. Skala Saaty'ego

Wartość	Stopień ważności (ocena obiektu A względem B)
1	jednakowa ważność (A jest jednakowo preferowane z B)
3	nieznaczna ważność (A jest bardziej preferowane niż B)
5	wyraźna ważność (A jest dużo bardziej preferowane niż B)
7	bardzo wyraźna ważność (A jest bardzo silnie preferowane w porównaniu z B)
9	absolutna ważność (A jest ekstremalnie preferowane w porównaniu z B)
(2, 4, 6, 8)	wartości pośrednie

Źródło: [Saaty 1977].

Ocena obiektu A względem B wykorzystuje głównie wartości: 1, 3, 5, 7, 9, natomiast ocena obiektu B względem A – zakładając spójność macierzy preferencji – wykorzystuje wartości odwrotne (np. 1/9 oznacza, że B jest ekstremalnie preferowane w porównaniu z A). Wartości pośrednie: 2, 4, 6, 8, oraz odwrotne do nich przyporządkowuje się w przypadku trudności w klasyfikacji wyniku, gdy leży on między wyszczególnionymi w klasyfikacji cechami [Chuang 2001]. Na podstawie uzyskanych ocen na każdym poziomie hierarchii tworzone są kwadratowe macierze preferencji (np. macierz ocen wariantów względem danego kryterium):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{ij} & a_{2n} \\ \dots & 1/a_{ij} & \dots & a_{in} \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & 1/a_{in} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

W kolejnym kroku dokonuje się analizy spójności macierzy przez odpowiednie przekształcenia wektorów własnych macierzy (1) [Saaty 1980; Saaty, Alexander

³ Cel główny określany jest jako stan, który zamierzamy osiągnąć przez rozwiązanie danego zagadnienia; jest to warunek zawierający istotę problemu. Cele pomocnicze to cele wyróżnione w analizowanym problemie, przyczyniające się do osiągnięcia celu głównego [Saaty 2008].

1989; Chuang 2001], obliczając w ten sposób indeks zgodności CI (*Consistency Index*) według formuły (2):

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}, \quad (2)$$

gdzie: λ_{\max} – maksymalna wartość wektora własnego macierzy preferencji rzędu n ,
 n – liczba porównywanych charakterystyk (rzęd macierzy).

Na jego podstawie wyznacza się tzw. współczynnik zgodności CR (*Consistency Ratio*) według formuły (3):

$$CR = \frac{CI}{RI}, \quad (3)$$

gdzie: RI – tabelaryczna⁴ wartość indeksu zgodności macierzy rzędu n .

Przyjmuje się, że współczynnik zgodności jest akceptowany (porównania charakterystyk są konsekwentne), gdy wartość CR jest mniejsza niż 10% lub równa 10%. Następnie oblicza się rankingi poszczególnych charakterystyk odpowiednio dla pierwszego i kolejnych kryteriów. W kroku ostatnim, w celu uzyskania rankingu końcowego, zestawia się warianty ze wszystkimi kryteriami, a następnie przemnaża się je przez odpowiadające im wektory wag. Uzyskane wyniki umożliwiają podjęcie ostatecznej decyzji wyboru [Saaty 1977; 1980; Domański 1997].

3. Pakiet AHPmethod programu R

Pakiet AHPmethod to autorskie [Bartłomowicz 2016] rozszerzenie programu R, zawierające implementację metody *Analytic Hierarchy Process*. Na podobieństwo innych pakietów środowiska R pakiet AHPmethod jest dostępny na zasadzie licencji GNU GPL (darmowy i z dostępem do kodu źródłowego). Aby możliwe było prawidłowe działanie pakietu, wymagane jest środowisko R [R Development Core Team 2011]. Pakiet można pobrać i zainstalować ze strony internetowej⁵ Katedry Ekonometrii i Informatyki UE we Wrocławiu (<http://keii.ue.wroc.pl/AHPmethod/>).

W aktualnej wersji (1.04) pakiet AHPmethod obejmuje 16 funkcji programu R (por. tab. 2), które wspomagają wielokryterialne podejmowanie decyzji zgodnie z metodologią metody AHP, tj. m.in. z wykorzystaniem najpopularniejszych metod estymacji wektora wag. Ponadto w pakiecie znajdują się narzędzia umożliwiające zaprojektowanie badania ankietowego w postaci funkcji generujących zestaw ma-

⁴ Idea obliczania wartości współczynnika zgodności bazuje na porównaniu faktycznego indeksu z indeksem oczekiwanym dla danego rzędu macierzy. Współczynnik CR jest wykorzystywany na etapie oceny spójności macierzy preferencji i umożliwia odpowiedź na pytanie, czy preferencje decydena powinny ulec przededefiniowaniu [Saaty 1980].

⁵ Docelowo przewiduje się umieszczenie pakietu w repozytorium CRAN.

cierzy preferencji na podstawie informacji odnośnie do przeprowadzanego eksperymentu (rozwiązywanego problemu decyzyjnego).

Tabela 2. Funkcje pakietu AHPmethod programu R

Charakterystyka funkcji	
AHP.design(alternatives, criteria, data) – funkcja konwertuje wektor ocen danego respondenta do postaci kwadratowych macierzy preferencji	
AHP.form(alternatives, criteria) – funkcja generuje listę macierzy preferencji do oceny przez respondenta	
AHP.calculations(alternatives, criteria, data, estimation="EV", criteria=0.01) – funkcja wyznacza podstawowe charakterystyki danego badania	
AHP.summary(alternatives, criteria, ahp.calculations) – funkcja wyznacza ostateczne wyniki badania	
ConsistencyIndex(matrix) – funkcja wyznacza wartość indeksu zgodności CI macierzy preferencji	
ConsistencyRatio(matrix) – funkcja wyznacza wartość współczynnika zgodności CR macierzy preferencji	
MaxEigenValue(matrix) – funkcja wyznacza maksymalną wartość wektora własnego macierzy preferencji	
WeightsMatrix(weights.vector) – funkcja na podstawie wartości wektora wag wyznacza odtworzoną macierz preferencji (tzw. macierz A(w))	
MatrixUnlist(matrix) – funkcja konwertuje element listy do postaci macierzy	
EV.method(matrix, criterion=0.01) – funkcja szacuje wartości wektora wag z wykorzystaniem metody wektora własnego (<i>EigenVector method</i>)	
NRS.method(matrix) – funkcja szacuje wartości wektora wag z wykorzystaniem metody sumy znormalizowanych wierszy (ang. <i>Normalization of the Row Sum method</i>)	
NRCS.method(matrix) – funkcja szacuje wartości wektora wag z wykorzystaniem metody sumy odwrotności znormalizowanych kolumn (<i>Normalization of Reciprocals of Column Sum method</i>)	
AMNC.method(matrix) – funkcja szacuje wartości wektora wag z wykorzystaniem metody średniej znormalizowanych kolumn (<i>Arithmetic Mean of Normalized Columns method</i>)	
NGMR.method(matrix) – funkcja szacuje wartości wektora wag z wykorzystaniem metody średniej geometrycznej wierszy (ang. <i>Normalization of Geometric Means of Rows method</i>)	
MAD(matrix, weights.matrix) – funkcja wyznacza wartość średniego odchylenia (błędu) bezwzględnego	
RMSD(matrix, weights.matrix) – funkcja wyznacza wartość pierwiastka odchylenia (błędu) średniokwadratowego	
Argumenty funkcji	
alternatives	wektor z nazwami wariantów (alternatyw)
criteria	układ eksperymentu (problemu decyzyjnego)
data	zbiór danych z ocenami respondentów (preferencjami)
matrix	kwadratowa macierz preferencji
estimation	metoda estymacji wektora wag (argument opcjonalny, domyślnie estimation="EV")
criterion	kryterium dla metody wektora własnego (argument opcjonalny, domyślnie criterion=0.01)
ahp.calculations	wyniki obliczeń metodą AHP
weights.vector	wektor wag
weights.matrix	odtworzona kwadratowa macierz preferencji

Źródło: opracowanie własne.

Szczegółowa charakterystyka wszystkich dostępnych funkcji oraz wybrane przykłady zastosowania pakietu AHPmethod w podejmowaniu decyzji (pomiarze preferencji) dostępne są w dokumentacji pakietu (<http://keii.ue.wroc.pl/AHPmethod/>).

4. Przykłady zastosowania pakietu AHPmethod

W przykładzie ilustrującym pomiar preferencji konsumentów z wykorzystaniem pakietu AHPmethod zaproponowano identyfikację preferencji nabywców smartfonów [Bartłomowicz 2015]. W badaniu przedstawiono do oceny następujące warianty telefonów: Apple iPhone 6, BlackBerry Z10, Samsung Galaxy S5 oraz Nokia Lumia 1020. W analizie wykorzystano smartfony należące do tego samego segmentu cenowego, różniące się pod względem uwzględnionych kryteriów: systemu operacyjnego, rozmiaru ekranu oraz aparatu fotograficznego:

```
> library(AHPmethod)
> data(smartphones)
> print(smart.alternatives)
[1] "Apple iPhone 6" "BlackBerry Z10" "Samsung Galaxy S5" "Nokia Lumia 1020"

> print(smart.criteria)
      system      ekran      aparat
1      iOS 8 4,7 cala 8 Mpix zpp*
2 BlackBerry 10 OS 4,2 cala      8 Mpix
3      Android 4.4 5,0 cali      13 Mpix
4 Windows Phone 8 4,5 cala      41 Mpix
```

Zgodnie z procedurą metody AHP, podczas badania określone zostały preferencje z wykorzystaniem skali Saaty'ego dla wszystkich poziomów hierarchii, tzn. dokonano zarówno oceny ważności kryteriów względem celu jak i wariantów (alternatyw) względem kryteriów. Przykładowe deklarowane oceny (na przykładzie respondenta nr 1) wygenerowane za użyciu funkcji AHP.design() przedstawiają się następująco:

```
> library(AHPmethod)
> data(smartphones)
> smart.design=AHP.design(smart.alternatives, smart.criteria, smart.data)
> print(smart.design)
$criteria
      system screen camera
system 1      5      8
screen 0.2    1      0.25
camera 0.125 4      1
$system
      iOS 8      BlackBerry 10 OS Android 4.4 Windows Phone 8
iOS 8      1      7      3      5
BlackBerry 10 OS 0.1428571 1      0.2      0.1666667
Android 4.4 0.3333333 5      1      3
Windows Phone 8 0.2      6      0.3333333 1
$screen
      4,7 in      4,2 in 5,0 in      4,5 in
```

```

4,7 in 1      4      0.2      6
4,2 in 0.25  1      0.1428571 0.3333333
5,0 in 5      7      1      5
4,5 in 0.1666667 3      0.2      1
$camera
      8 Mpix zpp* 8 Mpix 13 Mpix 41 Mpix
8 Mpix zpp* 1      4      3      0.2
8 Mpix      0.25  1      0.25  0.1428571
13 Mpix     0.3333333 4      1      0.2
41 Mpix     5      7      5      1

```

Dysponowanie macierzą ocen preferencji umożliwiło znalezienie rankingu końcowego. Realizując, za pomocą funkcji `AHP.calculations()`, estymację wektora wag macierzy preferencji w postaci metody wektora własnego EV (*EigenVector method*), a następnie zestawiając, z użyciem funkcji `AHP.summary()`, otrzymane wektory z wektorem wag najwyższego kryterium w hierarchii, otrzymano ważności poszczególnych smartfonów:

```

> smart.calculations=AHP.calculations(smart.alternatives,smart.criteria,
smart.data,"EV",0.01)
> print(smart.calculations)
      Weight vector Priority vs. goal Priority criterion
Apple iPhone 6 system      0.55146009      0.7463337      0.411573265
BlackBerry Z10 system     0.04673494      0.7463337      0.034879865
Samsung Galaxy S5 system  0.25750276      0.7463337      0.192182995
Nokia Lumia 1020 system   0.14430220      0.7463337      0.107697600
Apple iPhone 6 screen     0.25352419      0.0804042      0.020384411
BlackBerry Z10 screen     0.05193032      0.0804042      0.004175416
Samsung Galaxy S5 screen  0.60268413      0.0804042      0.048458337
Nokia Lumia 1020 screen   0.09186136      0.0804042      0.007386040
Apple iPhone 6 camera     0.21113348      0.1732621      0.036581423
BlackBerry Z10 camera     0.05191874      0.1732621      0.008995549
Samsung Galaxy S5 camera  0.12170658      0.1732621      0.021087134
Nokia Lumia 1020 camera   0.61524120      0.1732621      0.106597964

> smart.summary=AHP.summary(smart.alternatives,smart.criteria,
smart.calculations)
> print(smart.summary)
      Priority system Priority screen Priority camera Priority goal
Apple iPhone 6      0.41157327      0.020384411      0.036581423      0.46853910
BlackBerry Z10     0.03487986      0.004175416      0.008995549      0.04805083
Samsung Galaxy S5  0.19218299      0.048458337      0.021087134      0.26172847
Nokia Lumia 1020   0.10769760      0.007386040      0.106597964      0.22168160
Total              0.74633373      0.080404204      0.173262071      1.00000000

```

Uzyskane wyniki wskazują, iż spośród wyróżnionych w badaniu smartfonów najbardziej preferowany jest Apple iPhone 6, następnie Samsung Galaxy S5, Nokia Lumia 1020, natomiast najmniej preferowanym smartfonem jest BlackBerry Z10. Spośród uwzględnionych kryteriów najistotniejszy jest system operacyjny, następnie aparat fotograficzny, natomiast najmniej ważny jest rozmiar ekranu. Jednocześnie najlepszym systemem operacyjnym jest iOS 8, najgorszym – BlackBerry 10 OS; najlepszy spośród porównywanych rozmiarów ekranu jest ekran 5-calowy, najgorszy – ekran o przekątnej 4,2 cala; najlepszy aparat fotograficzny charakteryzuje się matrycą o rozdzielczości 41 Mpix, najgorszy – o rozdzielczości 8 Mpix.

Warto zauważyć, iż w przypadku wykorzystanych danych ewentualna zmiana metody estymacji wektorów wag na metodę NRCS (*Normalization of Reciprocals of Column Sum method*) nie zmienia relacji preferencji ustalonych na podstawie metody wektora własnego EV:

```
> smart.calculations=AHP.calculations(smart.alternatives,smart.criteria,
smart.data,"NRCS")
> smart.summary=AHP.summary(smart.alternatives,smart.criteria,
smart.calculations)
> print(smart.summary)
```

	Priority system	Priority screen	Priority camera	Priority goal
Apple iPhone 6	0.47772097	0.017006885	0.017571148	0.51229900
BlackBerry Z10	0.04214481	0.007275167	0.007229795	0.05664977
Samsung Galaxy S5	0.17663632	0.070730795	0.012505592	0.25987271
Nokia Lumia 1020	0.08735469	0.008848177	0.074975654	0.17117852
Total	0.78385679	0.103861024	0.112282188	1.00000000

Wykorzystany w badaniu wektor wag najwyższego kryterium (*Priority vs. goal*) otrzymano w pakiecie AHPmethod, stosując w tym celu obok funkcji EV.method() funkcję pomocniczą MatrixUnlist():

```
> design.criteria=MatrixUnlist(smart.design$criteria)
> weight.vector=EV.method(design.criteria)
> print(weight.vector)
[1] 0.7463337 0.0804042 0.1732621
```

Oceny spójności macierzy dokonano, wykorzystując funkcje ConsistencyIndex() oraz ConsistencyRatio():

```
> consistency.index=ConsistencyIndex(MatrixUnlist(smart.design$criteria))
> consistency.ratio=ConsistencyRatio(MatrixUnlist(smart.design$criteria))
> paste(consistency.index, consistency.ratio)
[1] "0.360131947985722 0.686357819679287"
> consistency.index=ConsistencyIndex(MatrixUnlist(smart.design$system))
> consistency.ratio=ConsistencyRatio(MatrixUnlist(smart.design$system))
> paste(consistency.index, consistency.ratio)
[1] "0.140393476240769 0.159248498458223"
> consistency.index=ConsistencyIndex(MatrixUnlist(smart.design$ekran))
> consistency.ratio=ConsistencyRatio(MatrixUnlist(smart.design$ekran))
> paste(consistency.index, consistency.ratio)
[1] "0.248060010521849 0.281374785074693"
> consistency.index=ConsistencyIndex(MatrixUnlist(smart.design$aparatur))
> consistency.ratio=ConsistencyRatio(MatrixUnlist(smart.design$aparatur))
> paste(consistency.index, consistency.ratio)
[1] "0.151380662928746 0.171711278276708"
```

5. Podsumowanie

Zaprezentowany w artykule pakiet AHPmethod to implementacja metody *Analytic Hierarchy Process* w postaci modułu znanego i cenionego wśród statystyków i ekonometryków środowiska R. Zaletą pakietu, podobnie jak całego środowiska, jest możliwość użytkowania go na zasadzie bezpłatnej licencji. Oznacza to alternatywę względem oprogramowania komercyjnego.

Aktualnie pakiet AHPmethod realizuje wszystkie niezbędne obliczenia w zakresie wspomaganie podejmowania decyzji zgodnie z metodologią metody AHP. W przyszłości planowana jest rozbudowa pakietu o nowe funkcje, umożliwiające estymację wektora wag macierzy preferencji metodami: LLS (*Logarithm Least Squares*), WLS (*Weighted Least Squares*), GP (*Goal Programming*) i innymi. Rozwinięcie pakietu o nowe funkcje pozwala zakładać, iż możliwe będzie przeprowadzenie kompleksowej analizy problemu decyzyjnego z wykorzystaniem tylko i wyłącznie pakietu AHPmethod programu R.

Literatura

- Bartłomowicz T., 2015, *Pomiar preferencji konsumentów z wykorzystaniem metody Analytic Hierarchy Process*, Taksonomia, nr 27, Wrocław, s. 20-29.
- Bartłomowicz T., 2016, *AHPmethod R package*, <http://keii.ue.wroc.pl/AHPmethod/>.
- Chuang P.T., 2001, *Combining the Analytic Hierarchy Process and quality function development for a location decision from a requirement perspective*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, no. 18, s. 842-849.
- Domański C., 1997, *Wprowadzenie do analitycznego procesu hierarchicznego*, Taksonomia, nr 4, s. 217-226.
- Holder R.D., 1990, *Some comment on the Analytic Hierarchy Process*, Journal of the Operational Research Society, no. 41, s. 1073-1076.
- Meißner M., Decker R., 2009, *An Empirical Comparison of CBC and AHP for Measuring Consumer Preferences*, Proceedings of the International Symposium on the AHP, Pittsburgh.
- McCaffrey J., 2005, *Test Run: The Analytic Hierarchy Process*, MSDN Magazine.
- R Development Core Team, 2011, *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, <http://cran.r-project.org/>.
- Saaty T.L., 1977, *A scaling method for priorities in hierarchical structures*, Journal of Mathematical Psychology, no. 15, s. 234-281.
- Saaty T.L., 1980, *The Analytic Hierarchy Process: Planning. Priority Setting. Resource Allocation*, McGraw-Hill, New York International Book Company, New York.
- Saaty T.L., 1990, *How to make a decision: The Analytic Hierarchy Process*, European Journal of Operational Research, vol. 48.1.
- Saaty T.L., 2001, *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory*, RWS Publications, Pittsburgh.
- Saaty T.L., 2008, *Relative measurement and its generalization in decision making: Why pairwise comparisons are central in mathematics for the measurement of intangible factors*, The Analytic Hierarchy/Network Process, Review of the Royal Academy of Exact. Physical and Natural Sciences, Series A: Mathematics (RACSAM), no. 102 (2), s. 251-318.
- Saaty T.L., Alexander J.M., 1989, *Group Decision Making and The AHP*, [w:] Golden B.L., Wasil E.A., Harker P.T., *The Analytic Hierarchy Process, Applications and Studies*, Springer-Verlag, Wiesbaden.
- Trzaskalik T., 2014, *Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Przegląd metod i zastosowań*, Organizacja i Zarządzanie, nr 74, s. 239-263.
- Trzaskalik T. (red.), 2014, *Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Metody i zastosowania*, PWE, Warszawa.
- Vargas L.G., 1990, *An overview of the analytic hierarchy process and its applications*, European Journal of Operational Research, no. 48, s. 2-8.