

# **DIDACTICS OF MATHEMATICS**

**7(11)**



The Publishing House  
of the Wrocław University of Economics  
Wrocław 2010

Editors  
*Janusz Łyko*  
*Antoni Smoluk*

Referee  
*Marian Matłoka*  
(Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu)

Proof reading  
*Agnieszka Flasińska*

Setting  
*Elżbieta Szlachcic*

Cover design  
*Robert Mazurczyk*

Front cover painting: W. Tank, *Sower*  
(private collection)

© Copyright by the Wrocław University of Economics  
Wrocław 2010

**PL ISSN 1733-7941**

Print run: 200 copies

## TABLE OF CONTENTS

<b>MAREK BIERNACKI</b> <i>Applications of the integral in economics. A few simple examples for first-year students [Zastosowania całki w ekonomii].....</i>	<b>5</b>
<b>PIOTR CHRZAN, EWA DZIWOK</b> <i>Matematyka jako fundament nowoczesnych finansów. Analiza problemu na podstawie doświadczeń związanych z uruchomieniem specjalności Master Program Quantitative Asset and Risk Management (ARIMA) [Mathematics as a foundation of modern finance] .....</i>	<b>15</b>
<b>BEATA FAŁDA, JÓZEF ZAJĄC</b> <i>Algebraiczne aspekty procesów ekonomicznych [Algebraical aspects of economics processes].....</i>	<b>23</b>
<b>HELENA GASPARS-WIELOCH</b> <i>How to teach quantitative subjects at universities of economics in a comprehensible and pleasant way? [Jak uczyć ilościowych przedmiotów na uczelniach ekonomicznych w zrozumiały i przyjemny sposób?] .....</i>	<b>33</b>
<b>DONATA KOPAŃSKA-BRÓDKA</b> <i>Wspomaganie dydaktyki matematyki narzędziami informatyki [Information technology supporting mathematical education].....</i>	<b>49</b>
<b>PATRYCJA KOWALCZYK, WANDA RONKA-CHMIELOWIEC</b> <i>Metody matematyczne w dydaktyce ubezpieczeń na studiach ekonomicznych [Mathematical methods in the didactics of insurance on economic studies].....</i>	<b>59</b>
<b>LUDOMIR LAUDAŃSKI</b> <i>The art of conjecturing (Ars Conjectandi). On the historical origin of normal distribution [Rodowód rozkładu normalnego].....</i>	<b>67</b>
<b>JANUSZ ŁYKO, ANDRZEJ MISZTAŁ</b> <i>Wpływ zmiany liczby godzin zajęć na wyniki egzaminu z matematyki na kierunkach ekonomicznych [The impact of changes in the number of hours of classes on exam results in mathematics at the economic faculties].....</i>	<b>81</b>
<b>KRZYSZTOF MAŁAGA</b> <i>Matematyka na usługach mikroekonomii [Mathematics on microeconomics services] .....</i>	<b>93</b>
<b>WOJCIECH RYBICKI</b> <i>Kilka powodów, dla których opowiadamy studentom ekonomii o macierzach [Some reasons for which we tell students of economics about matrices] .....</i>	<b>109</b>
<b>ANDRZEJ WILKOWSKI</b> <i>On changing money and the birthday paradox [O rozmiennianiu pieniędzy i paradoksie urodzin] .....</i>	<b>127</b>
<b>HENRYK ZAWADZKI</b> <i>Mathematica® na usługach ekonomii [Mathematica® at economics service] .....</i>	<b>135</b>

**MATEMATYKA JAKO FUNDAMENT  
NOWOCZESNYCH FINANSÓW**  
**ANALIZA PROBLEMU NA PODSTAWIE DOŚWIADCZEŃ  
ZWIĄZANYCH Z URUCHOMIENIEM SPECJALNOŚCI  
MASTER PROGRAM QUANTITATIVE ASSET  
AND RISK MANAGEMENT (ARIMA)**

**Piotr Chrzan**, Ewa Dziwok

**Abstract.** The aim of the article is to stress the important role of quantitative methods in finance development. An analysis of the Nobel Price winners' curricula shows that mathematics has played the crucial role in their education at universities of applied sciences. The analysis is also based on our experience connected with a specialization Master Program Quantitative Asset and Risk Management (ARIMA) which was implemented in Finance and Accounting courses at the University of Economics, Katowice.

**Keywords:** didactics of mathematics, quantitative methods.

Rozwój rynków finansowych, a także finansów jako nauki przebiegał w ostatnim stuleciu w sposób niezwykle szybki. Decydującą rolę w tym procesie odegrali matematycy, a w szczególności ta grupa, która potrafiła swoją teoretyczną wiedzę zastosować w realiach otaczającego ją świata pieniądza. Namacalnym dowodem ich działalności są nowe instrumenty finansowe, a także strategie, których stosowanie umożliwiło poprawę jakości inwestowania i zarządzania. Współczesny analityk nie może obejść się bez znajomości rachunku prawdopodobieństwa, a wykształcenie matematyczne stanowi niejednokrotnie warunek umożliwiający otrzymanie lepszej posady<sup>1</sup>.

---

**Ewa Dziwok**

Department of Applied Mathematics, University of Economics in Katowice, ul. Gen. K. Pułaskiego 25, 40-276 Katowice, Poland.

e-mail: ewa.dziwok@ue.katowice.pl

<sup>1</sup> Według opublikowanego w „The Wall Street Journal” (z 26 stycznia 2009 r.) rankingu 200 najlepiej płatnych zawodów w USA, pierwsze trzy miejsca zajmują zawody związane z matematyką: 1) matematyk, 2) aktuariusz, 3) statystyk (za czasopismem „Świat Matematyki”, www.swiatmatematyki.pl (z dnia 20.08.2010).

Na tym tle polskie realia wydają się mało optymistyczne. Systematyczne zawężanie minimum programowego matematyki na poziomie szkolnictwa podstawowego i gimnazjalnego (obowiązkowego dla wszystkich uczniów) sprawia, iż według wyników programu PISA<sup>2</sup> polskie piętnastolatki – na tle innych krajów znacznie lepiej wypadają z przedmiotów humanistycznych, osiągając wyniki z przedmiotów ścisłych na poziomie poniżej średniej.

Świadomość, iż w dobie globalizmu i powszechnego poszukiwania pracy nie tylko na rodzimym rynku, brak odpowiedniej jakości wykształcenia stawia polskich absolwentów już na starcie na gorszej pozycji w stosunku do ich kolegów, którzy ukończyli szkoły kładące większy nacisk na edukację matematyczną, powinna przyczynić się do zmian w całym systemie kształcenia nauk ścisłych.

Celem niniejszego artykułu jest wykazanie, iż największym motorem rozwoju finansów były i są nadal badania oparte na wiedzy matematycznej, przez co jej nauczanie powinno stanowić rdzeń dydaktyki współczesnych finansów.

Coraz powszechniejsze przekonanie studentów o konieczności stałego pogłębiania wiedzy matematycznej powinno skłaniać uczelnie wyższe do poszerzania oferty przedmiotów z zakresu matematyki stosowanej na poziomie uniwersyteckim.

Analiza problemu poparta została doświadczeniami związanymi z uruchamianiem specjalności Master Program Quantitative Asset and Risk Management (ARIMA) na kierunku finanse i rachunkowość na Uniwersytecie Ekonomicznym w Katowicach.

Przez wiele lat matematyka i ekonomia (finanse) traktowane były jako całkowicie odrębne dyscypliny nauki i aż do powstania szkoły lozańskiej nie było prób kwantyfikowania świata finansów. Milowym krokiem stało się opublikowanie przez L. Walrasa równania marginalnego (1874), wyrażającego zależności ekonomiczne językiem matematyki (Focardi, Fabozzi 2004, str. 76).

Kilka lat później L. Bachelier (1900) w swojej pracy doktorskiej wykazał losowość cen na rynku akcyjnym, kładąc w ten sposób podwaliny dla zastosowań matematyki na rynkach finansowych. Pomimo iż językiem matematyki opisał dodatkowo ruch Browna, a także wyliczył ceny niektórych opcji, nowatorski charakter pracy nie znalazł wówczas wielu zwolenników.

---

<sup>2</sup> Według programu PISA (The Program for International Student Assessment) wiedza matematyczna polskiego piętnastolatka (dane za rok 2006) mieści się pomiędzy 16 a 21 miejscem wśród 30 krajów OECD i 22 a 27 (na 57 badanych krajów). Źródło: [www.pisa.oecd.org](http://www.pisa.oecd.org).

Zarówno Knight, jak i Keynes odrzucali rozumowanie matematyczne, co – biorąc pod uwagę ich rolę w teorii ekonomii – stawiało tych, którzy próbowali stosować narzędzia ilościowe, na wyalienowanej pozycji. Dopiero prace Von Neumanna i Morgensterna obejmujące zastosowania teorii gier stanowiły pierwsze próby ilościowej analizy zagadnień z pogranicza ekonomii i psychologii. Podkreślali oni jednocześnie, iż: „Aby poznać prawa rządzące fizyką, należało zmierzyć te zjawiska [ciepło i światło]. Z czasem zwykły człowiek zaczął wykorzystywać wyniki tych pomiarów – bezpośrednio lub pośrednio – w życiu codziennym. To samo może się zdarzyć w przyszłości z ekonomią. Kiedy tylko z pomocą teorii, która pozwala nam mierzyć, zdobywamy pełniejszą wiedzę o ludzkim zachowaniu, życie jednostek ulega radykalnej zmianie. Dlatego też badanie tych zagadnień nie jest zbyt ciekawym kaprysem” (Bernstein 1997, str. 213).

Klasyczne zastosowanie metod ilościowych w ekonomii znaleźć można u Markowitza (1952) uważanego współcześnie za prekursora metod zarządzania ryzykiem finansowym. Poprzez wprowadzenie definicji ryzyka portfela rozumianego jako odchylenie standardowe stóp zwrotu elementów wchodzących w jego skład oraz korelacji pomiędzy nimi, przyczynił się on do rozwoju teorii portfela i powstania modelu Sharpe’a CAPM (*Capital Asset Pricing Theory*).

Kolejne prace jedynie potwierdzały znaczenie wiedzy matematycznej w opisie zjawisk gospodarczych. Podstawą większości modeli stał się rozkład normalny, i to pomimo tego, że cykle artykułów Mandelbrota (lata 60. XX w.) pokazały, że nie jest on skutecznym narzędziem w opisywaniu rzeczywistości rynków finansowych, głównie ze względu na znacznie częstsze występowanie zdarzeń ekstremalnych, niż by to wynikało z teoretycznego rozkładu normalnego stosowanego w modelach CAPM (Sharpe, Lintner), modelu wyceny opcji (Black, Scholes, Merton) oraz modelu *Value at Risk* (VaR).

Chociaż milowe kroki w naukach finansowych oparte zostały na języku matematyki, większość ich autorów nie była (poza Bechelierem) matematykami *sensu stricto*. Posiadali oni jednak niezbędną wiedzę z zakresu narzędzi matematycznych pozwalającą na przeprowadzenie logicznego dowodu matematycznego.

Analizując biografie laureatów Nagrody Nobla przyznawanej przez Centralny Bank Szwecji (Rijksbank) z zakresu nauk ekonomicznych, widzimy, że spora grupa podkreśla rolę, jaką w ich życiu odegrali nauczyciele matematyki bądź przedmiotów jej pokrewnych.

J.R. Hicks (Nagroda Nobla w 1972 r.) stwierdził, iż swą wiedzę matematyczną zawdzięcza przede wszystkim wysokiej jakości nauczania na etapie przeduniwersyteckim: „W czasach studenckich, a głównie w okresie pierwszego roku na studiach w Oksfordzie, byłem specjalistą z zakresu matematyki. Zawdzięczam to wiedzy, jaką zdobyłem w czasach szkolnych, a w szczególności studiom w Clifton College (1917-1922), którym tak wiele zawdzięczam”<sup>3</sup>.

Ogromna większość laureatów podkreśla, iż dane im było spotkać nauczycieli nie tylko wymagających, ale przede wszystkim charyzmatycznych, co w przypadku poznawania niełatwych przecież przedmiotów ścisłych było dla słuchaczy niezwykle inspirujące. R.E. Lucas jr (Nagroda Nobla w 1996 r.) podkreślił: „Moje ukierunkowanie się w stronę rachunku prawdopodobieństwa oraz statystyki wynikało z zainteresowania ekonometrią zainspirowanego kursami prowadzonymi przez Zviego Grilichesa i Gregga Lewisa. Także Donald Bear, nowy adiunkt ze Stanford, prowadził niezwykle wartościowy kurs ekonomii matematycznej, poszerzający wiedzę ekonomiczną studentom preferującym dotąd przedmioty techniczne”.

C.W.J. Granger (Nagroda Nobla w 2003 r.) podkreślił: „Tak się zdarzyło, że największą siłą West Bridgeford Grammar School była jakość nauczycieli matematyki. Mr. Bradshaw i Mr. Midgley byli nie tylko świetnie wykształceni, ale posiadali niezwykle entuzjizm w nauczaniu przedmiotu, który to entuzjizm potrafili przenieść wraz z wiedzą na studentów”.

Natomiast R.C. Merton (Nagroda Nobla w 1997 r.) zwracał uwagę na same warunki odbywania studiów ilościowych: „było to wspaniałe miejsce na pogłębianie wiedzy matematycznej oraz znajdowanie jej zastosowań. Miałem możliwość i wybrałem kilka kursów matematyki wyższej, zarówno czystej, jak i stosowanej”.

Jakie zatem wnioski powinny wynikać dla nauczania zastosowań matematyki (przedmiotów ścisłych) w Polsce? Po pierwsze, należy zauważyć, że nauczanie to nie powinno mieć swego początku na uniwersytecie, ale znacznie wcześniej. Pozytywnym sygnałem jest wprowadzenie matury z matematyki czy też aktywne propagowanie wiedzy matematycznej przez miasto Wrocław, czynnie wspierające edukację matematyczną wśród dzieci i młodzieży.

---

<sup>3</sup> Wszystkie cytaty dotyczące biografii laureatów Nagrody Nobla pochodzą z oficjalnej strony (tłumaczenie autorów artykułu): [www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/economics/](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/).

Analiza biografii laureatów pokazuje także, iż nie należy bagatelizować roli dydaktyki matematyki na poziomie uniwersyteckim, gdzie istnieje stała konieczność doskonalenia warsztatu dydaktycznego, poprawiającego jakość prezentowanej wiedzy. Nie sprzyja temu niewielka liczba godzin, jaka przeznaczona jest na przedmioty ściśle na kierunkach ekonomicznych.

Zgodnie ze standardami kształcenia przedstawionymi w Załączniku nr 32 Rozporządzenia Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego (2007), na studiach drugiego stopnia kierunku finanse i rachunkowość, obowiązującym jest zapewnienie nauczania w dwóch grupach kształcenia z określonym zakresem punktowym ECTS. W pierwszej grupie – treści podstawowych – zawarte zostały trzy przedmioty o zadanej minimalnej liczbie godzin oraz punktach ECTS dla każdej z wymienionych pozycji. Druga grupa – treści kierunkowych – pozwala na większą dowolność w zakresie podziału godzin – narzucone zostały jedynie łączne sumy godzin oraz punktów. Funkcjonowanie tak skonstruowanego kanonu przy jednoczesnej dużej swobodzie w jego uzupełnianiu pozwala na budowanie specjalności o wyrazistym profilu, istotnie różniących się od siebie.

Pomimo tego, że zgodnie z wymaganiami dotyczącymi kwalifikacji absolwent kierunku finanse i rachunkowość powinien posiadać umiejętności analizy danych, w zadanym kanonie treści podstawowych i kierunkowych brak jest przedmiotu dotyczącego metod ilościowych, który umiejętności te kształtuje. W rezultacie tak skonstruowanej siatki absolwentem studiów drugiego stopnia kierunku finanse i rachunkowość może stać się osoba posiadająca jedynie podstawową wiedzę z zakresu przedmiotów ścisłych, będących jeszcze wynikiem studiów pierwszego stopnia. Te z kolei, okrojone z godzin przeznaczonych na statystykę czy ekonometrię, nie zapewniają wysokiego standardu kształcenia w przedmiotach ilościowych.

W takich warunkach i przy tej podstawie naukowej, budowanie jakiegokolwiek specjalności z zakresu metod ilościowych jest bardzo trudne. Dodatkowo, przy silnie okrojonych podstawach z przedmiotów ilościowych na pierwszym stopniu studiów (matematyka 30, statystyka 30, ekonometria 30) nastąpiła duża dywersyfikacja uczelni pod kątem oferowanych treści z tego zakresu. W niektórych szkołach wyższych przedmioty ściśle oferowane są jedynie w minimalnym, narzuconym wymiarze, inne zaś szkoły, wykazując odmienne podejście, zwiększają liczbę godzin. W rezultacie na rynku absolwentów studiów pierwszego stopnia, w przypadku tego samego kierunku, można mieć do czynienia z osobami o istotnie różnej wiedzy z zakresu przedmiotów ścisłych, której niestety nie daje się łatwo zniwelować. Czas



czterech semestrów musi wówczas wystarczyć zarówno na bieżące przyswajanie materiału, jak i na uzupełnienie braków – o ile takowe są<sup>4</sup>.

Konieczność uatrakcyjniania oferty edukacyjnej, a także możliwość pozyskania nowych partnerów sprawiają, iż coraz popularniejsze stają się studia dające prawo do dyplomu kilku uczelni, tzw. *joint degree*. Coraz większa w krajach rozwiniętych świadomość istoty ryzyka na rynkach finansowych wzmaga znaczenie przedmiotów ilościowych, będących źródłem narzędzi do jego modelowania. W efekcie coraz bardziej pożądane stają się programy łączące wiedzę z zakresu finansów i metod ilościowych. Przykładem może być Master Program Quantitative Asset and Risk Management (ARIMA) – specjalność utworzona przez University of Applied Sciences bfi Vienna, Austria (jako koordynatora i pomysłodawcy) we współpracy z The New Anglo-American University, Prague, Czechy oraz Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach. Program ruszył w semestrze zimowym 2009/2010 w Austrii, natomiast w roku akademickim 2010/2011 w Czechach i Polsce.

Warunkiem koniecznym otrzymania dyplomu polskiej uczelni jest zawarcie w programie studiów określonych przez Rozporządzenie Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego treści programowych. I tu powstaje istotny problem – o ile zasada treści podstawowych i kierunkowych sprawdza się jako szkielet budowy specjalizacji na rodzimym rynku (w obrębie jednej uczelni), w przypadku próby zaimplementowania programów zagranicznych wymogi stawiane przez polskiego ustawodawcę stają się istotnym utrudnieniem dla zagranicznego partnera<sup>5</sup>.

Konieczność spełnienia wymogów partnerów umowy nasuwa dodatkowo pytanie o zmianę samego systemu kształcenia. Jak się okazuje, standardem staje się wykładanie przedmiotów w blokach (krótkie przedmioty po 2-3 punkty ECTS, wykładane przykładowo przez tydzień), co z punktu widzenia przedmiotów ilościowych jest niezwykle korzystne i pozwala po zakończeniu jednego modułu efektywnie wykorzystać poznaną wiedzę na kolejnych etapach studiów. Komasacja godzin zwiększa mobilność kadry, a także efektywność samego uczenia (mniejsza liczba przedmiotów w danym okresie, możliwość logicznego układu przedmiotów bez ryzyka dublowania treści).

---

<sup>4</sup> Przedmiot *metody ilościowe w finansach i rachunkowości* dodany do treści kierunkowych na Uniwersytecie Ekonomicznym w Katowicach próbuje uzupełniać zaistniałą lukę.

<sup>5</sup> Warunkiem otrzymania dyplomu jest uzyskanie minimum 30 punktów ECTS na uczelniach partnerskich (jako semestr wymiany proponowany jest semestr III, co wymusza jednolitość siatek we wszystkich uczelniach partycypujących).

Negocjacje dotyczące utworzenia specjalności Quantitative Asset and Risk Management (ARIMA) uwypukliły znaczenie dobrych podstaw z przedmiotów ścisłych, będących warunkiem koniecznym rozpoczęcia tego typu studiów, gdyż program wykładany w ciągu czterech semestrów jest realizowany na poziomie zaawansowanym. Opinia profesorów, przyczyniająca się do otrzymanej w Austrii akredytacji, zawiera dodatkowo zalecenie dotyczące konieczności uzupełniania wiedzy studentów o przedmioty ścisłe w formie kursów przygotowawczych bądź zajęć uzupełniających.

Pomimo tego, że historia finansów sięga wielu stuleci, prawdziwym motorem jej rozwoju stało się zastosowanie matematyki i przedmiotów pokrewnych. O tym, iż naukowcy stosujący metody ilościowe stworzyli podstawy współczesnych finansów, świadczy rzesza laureatów Nagrody Nobla z zakresu ekonomii.

Analiza roli matematyki w nauczaniu współczesnych finansów nasuwa następujące wnioski.

Istnieje konieczność zwiększenia godzin przedmiotów ścisłych na kierunku finanse i rachunkowość na studiach pierwszego stopnia – w celu poprawy jakości nauczania tego typu przedmiotów z jednej strony, a także ujednoczenia wiedzy ścisłej samych absolwentów z drugiej. Byłoby dobrze, aby na studiach drugiego stopnia istniał w kanonie treści (podstawowych bądź kierunkowych) przedmiot obejmujący metody ilościowe. Programy studiów powinny być w miarę możliwości kompatybilne z ich odpowiednikami w Unii Europejskiej; umożliwi to naturalne zwiększenie liczby studiów joint degree.

### Literatura

- Bernstein P.L. (1997). *Przeciw Bogom. Niezwykłe dzieje ryzyka*. WIG Press. Warszawa.
- Focardi S.M., Fabozzi F.J. (2004). *The Mathematics of Financial Modeling and Investment Management*. John Wiley & Sons. Hoboken, NJ.
- Markowitz H.S. (1952). *Portfolio Selection*. „Journal of Finance”, March. Str. 77-91.
- Rozporządzenie Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 12 lipca 2007 roku w sprawie standardów kształcenia dla poszczególnych kierunków oraz poziomów kształcenia, a także trybu tworzenia i warunków, jakie musi spełniać uczelnia, by prowadzić studia międzykierunkowe oraz makrokierunki, DzU 2007 nr 164, poz. 1166.

[www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/economics/](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/).

[www.pisa.oecd.org](http://www.pisa.oecd.org).

[www.swiatmatematyki.pl](http://www.swiatmatematyki.pl) (z dnia 20.08.2010).