

DIDACTICS OF MATHEMATICS

8(12)



The Publishing House
of Wrocław University of Economics
Wrocław 2011

Referee
Henryk Zawadzki
(University of Economics in Katowice)

Copy-editing
Dorota Pitulec

Proof-reading
Barbara Łopusiewicz

Typesetting
Elżbieta Szlachcic

Cover design
Robert Mazurczyk

Front cover painting: W. Tank, Sower
(private collection)

This publication is available at: www.journal.ue.wroc.pl and www.ibuk.pl.
Abstracts of published papers are available in the international database
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities
<http://cejsh.icm.edu.pl>

Information on submitting and reviewing paper is available
on the Publishing House's website www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

© Copyright Wrocław University of Economics
Wrocław 2011

ISSN 1733-7941

The original version: printed
Printing: Printing House TOTEM
Print run: 200 copies

TABLE OF CONTENTS

PIOTR DNIESTRZAŃSKI <i>Studia ekonomiczno-matematyczne – analiza wybranych aspektów oferty edukacyjnej</i> [<i>Economic and mathematical studies – analysis of selected aspects of educational offer</i>]	5
ALBERT GARDOŃ <i>Rozkład statystyki T-Studenta przy danej wariancji z próby o rozkładzie normalnym</i> [The distribution of the T-Student's statistic given the variance from a normal sample]	17
ANNA GÓRSKA, DOROTA KOZIOL-KACZOREK <i>Matematyka, matematyka finansowa i inżynieria finansowa realizowane na kierunkach ekonomicznych w świetle obowiązujących standardów nauczania</i> [Mathematics, financial mathematics and financial engineering carried out on the field of economics in light of the existing standards teaching]	31
ALEKSANDER JAKIMOWICZ <i>Dynamika nieliniowa w badaniach ekonomicznych</i> [Nonlinear dynamics in economic research]	39
TADEUSZ JANASZAK <i>Złota elipsa i złota hiperbola</i> [Golden ellipse and golden hyperbola].....	55
MAREK KOŚNY, PIOTR PETERNEK <i>Wielkość próby a istotność wnioskowania statystycznego</i> [Sample size and significance of statistical inference]	71
ARKADIUSZ MACIUK <i>Wpływ standardów kształcenia na poziom nauczania matematyki w wyższych szkołach ekonomicznych</i> [The influence of education standards on the level of mathematics teaching in economic universities]	81
ADRIANNA MASTALERZ-KODZIS, EWA POŚPIECH <i>Wybrane zagadnienia w nauczaniu ekonomii matematycznej</i> [Selected problems in teaching of mathematical economics]	91
MONIKA MIŚKIEWICZ <i>Wpływ nowego programu nauczania matematyki w szkołach średnich na wyniki nauczania matematyki na uczelniach ekonomicznych</i> [The impact of new mathematics curriculum in secondary schools on learning outcomes of mathematics at the universities of economic]	101
MARIA PARLIŃSKA, ROBERT PIETRZYKOWSKI <i>Statystyka i ekonometria realizowane na kierunkach ekonomicznych w świetle obowiązujących standardów nauczania</i> [Statistics and econometrics at the economical studies in the frame of standards of education]	113
AGNIESZKA PRZYBYLSKA-MAZUR <i>O formalnym opisie zjawisk ekonomicznych</i> [About formal description of economic phenomena] ..	119
PAWEŁ SIARKA <i>Rozwój metod ilościowych w bankowości</i> [Development of quantitative methods in banking] .	127
KATARZYNA ZEUG-ŻEBRO <i>W jakim stopniu seria podręczników „Elementy matematyki dla studentów ekonomii i zarządzania” wspomaga proces uczenia się matematyki wśród studentów pierwszego roku?</i> [To what extent a series of textbooks “Elements of mathematics for students of economics and management” supports the process of learning mathematics by first-year students?]	135

O FORMALNYM OPISIE ZJAWISK EKONOMICZNYCH

Agnieszka Przybylska-Mazur

Abstract: The formal description of economic phenomena requires the application of mathematical notions and mathematical techniques. When making formal description of economic phenomena we have to formulate all accepted assumptions in an open way. This prevents us from all errors and misunderstandings that can be created while formulating conclusions, results and forecasts. In this paper we present the advantages resulting from the application of formal description of economic phenomena. We also discuss approaches to the mathematical model link and we present some observations about the teaching of mathematics on economic studies.

Keywords: mathematical modelling, *symbolic notation*, mathematical economics, econometrics, teaching of mathematics.

1. Wstęp

Do formalnego zapisu zjawisk ekonomicznych niezbędne jest zastosowanie metod matematycznych. Modelowanie matematyczne ma wiele zalet. Pozwala na użycie języka symbolicznego, bardziej zwięzłego i precyzyjnego. Przy modelowaniu matematycznym zjawisk ekonomicznych jest wymagane sprecyzowanie wszystkich przyjętych założeń, co zapobiega wszelkim nieporozumieniom i błędom, jakie mogłyby powstać przy formułowaniu wniosków, wyników i prognoz. Ponadto, dowody poprawności formułowanych twierdzeń ekonomii przeprowadza się, korzystając z licznych twierdzeń matematycznych.

W artykule zostały zaprezentowane korzyści płynące z modelowania matematycznego zjawisk ekonomicznych. Zostały również omówione różne aspekty zastosowania matematyki do analizy ekonomicznej oraz przedstawiono pewne uwagi dotyczące nauczania matematyki na studiach ekonomicznych.

Agnieszka Przybylska-Mazur

Department of Statistical and Mathematical Methods in Economics, University of Economics in Katowice, ul. 1 Maja 50, 40-287 Katowice, Poland.

E-mail: przybylska-mazur@ue.katowice.pl

2. Matematyka i ekonomia

Jednym z aspektów analizy ekonomicznej jest zastosowanie aparatu matematycznego w ekonomii, czyli wykorzystanie symboli matematycznych do modelowego zapisu zagadnień ekonomicznych, a następnie wykorzystanie twierdzeń matematycznych w celu analizy i rozwiązania danych problemów ekonomicznych. Wykorzystując symbole matematyczne, możemy zwięźle i precyzyjnie sformułować analizowane zjawiska ekonomiczne. Przedmiotem analizy mogą być:

- teoria mikroekonomiczna,
- teoria makroekonomiczna,
- bankowość,
- rachunkowość,
- ubezpieczenia,
- finanse publiczne,
- finanse przedsiębiorstw,
- ekonomia miejska,
- problemy ochrony zdrowia i inne.

Przeprowadzona analiza teoretyczna ma na celu wyprowadzenie zbioru wniosków lub twierdzeń z danego zbioru założeń lub postulatów w toku procesu wnioskowania. Przy modelowaniu matematycznym różnego rodzaju zjawisk, w tym również zjawisk ekonomicznych, założenia, a następnie wyciągane wnioski są wyrażone za pomocą symboli matematycznych, równań, wzorów, liczb, a nie w postaci słów i zdań. Wówczas proces wnioskowania nie ogranicza się do zwykłej logiki rozumowania, istnieje możliwość korzystania z licznych twierdzeń matematycznych.

Stosując zapis symboliczny zagadnień ekonomicznych, wygodniej jest przeprowadzać rozumowanie dedukcyjne. Zapis formalny wymaga od analityków wyraźnego sformułowania na każdym etapie rozumowania przyjmowanych założeń. Stosując zapis formalny, analitycy, aby sformułować tezę, muszą najpierw sprawdzić, czy w danym rozpatrywanym przez nich przypadku spełnione są założenia.

Możemy czasami usłyszeć, że teza twierdzenia teoretycznego nie sprawdza się w praktyce. Ale należy zadać sobie wówczas pytanie, czy w rozpatrywanym problemie są spełnione określone założenia wykorzystywanego twierdzenia. Jednak trzeba pamiętać, że na rynku występują różne podmioty gospodarcze, natomiast warunki, w jakich one działają, ulegają zmianie, dlatego nie można przyjąć jednego układu założeń i nie ma modeli ekonomicznych, które mają wartość uniwersalną. Na przykład inaczej nale-

ży rozpatrywać zadanie maksymalizacji zysku przedsiębiorstwa działającego w warunkach doskonałej konkurencji w długim okresie, inaczej przedsiębiorstwa działającego w warunkach doskonałej konkurencji w krótkim okresie, a jeszcze inaczej przedsiębiorstwa, które działa w warunkach monopolu.

Stosując zapis modelowy zagadnień ekonomicznych, wyodrębnia się tylko najbardziej istotne czynniki i powiązania pozwalające na analizę istoty danego zagadnienia. Zapisany przy użyciu języka matematycznego, uproszczony poprzez wybranie najbardziej istotnych czynników i zależności schemat analityczny nazywamy modelem matematycznym rozważanego zjawiska ekonomicznego. Stanowi on szkicową i przybliżoną reprezentację rzeczywistego problemu. Skonstruowany model składa się z układu równań opisujących strukturę analizowanego zjawiska ekonomicznego. Równania prezentują zależności między wybranymi zmiennymi i nadają formalną postać przyjętym założeniom ekonomicznym.

Przed wykorzystaniem teorii matematycznej do rozwiązania problemów ekonomicznych należy się zastanowić nad możliwością zastosowania danej teorii matematycznej w analizowanym problemie ekonomicznym. Należy również mieć na uwadze, czy zastosowanie teorii matematycznej nie upraszcza zbyt mocno rozpatrywanego problemu ekonomicznego, czyniąc go mało ciekawym. Należy pamiętać o tym, aby przyjmowane założenia i formułowane wnioski miały przejrzystą interpretację ekonomiczną.

Do modelowania matematycznego zagadnień ekonomicznych wykorzystujemy następujące typy równań:

- równanie definicyjne – ustanawia tożsamość dwóch wyrażeń, które mają ten sam sens, np. zysk Z jest różnicą między przychodem R i kosztami C , co zapisujemy $Z = R - C$ lub $Z \equiv R - C$;

- równanie behawioralne – określa reakcję zmiennej na przyrosty innych zmiennych, może być używane do opisu ogólnych instytucjonalnych uwarunkowań modelu obejmujących aspekty technologiczne, np. funkcja produkcji, oraz prawne, np. struktura podatków, a także zachowanie ludzi, np. funkcja konsumpcji, lub inne wielkości, np. funkcja kosztów. Zapisanie równania behawioralnego jest poprzedzone przyjęciem określonych założeń dotyczących sposobu zachowania rozważanej zmiennej;

- warunki równowagi – występują tylko w modelach równowagi, np. w modelu rynku bez zapasów warunkiem równowagi jest warunek $D=S$, gdzie: D – popyt, S – podaż.

Przy formalnym zapisie zjawisk ekonomicznych można również wprowadzić dodatkową szczególną zmienną, jaką jest czas. Ze względu na tę szczególną zmienną modele można podzielić na:

- modele dynamiczne – prezentują cechy ewolucyjne badanego zjawiska, kształtowanie się zjawiska ekonomicznego w czasie;
- modele statyczne – opisują strukturalne związki między zmiennymi ekonomicznymi bez uwzględnienia czasu, czyli w statyce.

Należy jednak podkreślić, że w ekonomii nie ma zjawisk i procesów przebiegających poza czasem. Modele, które nie uwzględniają w sposób formalny zmiennej czasowej, opisują kształtowanie się zjawisk ekonomicznych w stosunkowo krótkim czasie. Natomiast modele dynamiczne opisują zjawiska, których ujawnienie wymaga dłuższego czasu.

Za A.C. Chiangiem można wymienić następujące zalety podejścia matematycznego do zagadnień ekonomicznych (Chiang, 1994):

- formalny język jest bardziej zwięzły i precyzyjny,
- możliwe jest korzystanie z twierdzeń matematycznych,
- zastosowanie języka matematycznego chroni przed nieporozumieniami i błędami, ponieważ aby stosować twierdzenia matematyczne, należy sformułować w sposób jawny wszystkie przyjęte założenia,
- dzięki zapisowi formalnemu jest możliwe badanie ogólnego przypadku n -wymiarowego.

Przy modelowaniu matematycznym zagadnień ekonomicznych pojawia się dualizm metodologiczny, który został omówiony w następnym punkcie.

3. Dualizm metodologiczny

Występują różne podejścia do modelowania matematycznego zjawisk ekonomicznych. Jednym z nich jest ekonomia matematyczna, która wykorzystuje język matematyczny do opisu zjawisk i procesów ekonomicznych. W pracy z zakresu ekonomii matematycznej – „Handbook of Mathematical Economics” – ekonomię matematyczną określa się jako dyscypliną naukową obejmującą różne zastosowania technik i pojęć matematycznych w ekonomii, a szczególnie w teorii ekonomii.

Ekonomia matematyczna, budując system aksjomatyczny, przyjmuje, w miarę możliwości, założenia zgodne z obserwacją procesów zachodzących w rzeczywistości w gospodarce. Model ekonomiczny to zbiór założeń, które w sposób przybliżony opisują zachowanie się gospodarki lub sektora gospodarki.

Drugim podejściem do modelowania matematycznego zjawisk ekonomicznych jest ekonometria. Ekonometria stosuje metody statystyczne i matematyczne do analizy danych ekonomicznych, do budowy, estymacji i weryfikacji modeli ekonometrycznych, w celu nadania teoriom ekonomicznym kontekstu empirycznego.

Modele ekonometryczne składają się ze:

1) zbioru równań opisujących zachowanie; te równania wynikają z modelu ekonomicznego i zawierają zmienne objaśniające badane zjawisko ekonomiczne oraz składnik losowy reprezentujący „zakłócenia”,

2) specyfikacji rozkładu prawdopodobieństwa składnika losowego oraz rozkładu błędów pomiaru,

3) deklaracji, czy obserwowane zmienne zawierają błędy obserwacji, pomiaru.

Modele ekonometryczne po estymacji i weryfikacji mogą być wykorzystane do prognozowania, analiz symulacyjnych, opracowywania scenariuszy i do związłego opisu zależności między zmienną objaśnianą i zmiennymi objaśniającymi.

Badania empiryczne i analizy teoretyczne w ekonomii są często komplementarne i wzajemnie się uzupełniają, ponieważ teorie ekonomii, zanim zostaną zastosowane w praktyce, powinny być zweryfikowane na podstawie danych empirycznych, natomiast do przeprowadzenia badań statystycznych są potrzebne matematyczne modele teorii ekonomicznych.

Zatem ekonomia matematyczna nie może istnieć bez ekonometrii, a ekonometria nie może się właściwie rozwijać bez ekonomii matematycznej. Dalszy rozwój teorii ekonomii nie jest możliwy bez zasadniczego postępu w ekonomii matematycznej.

Należy nadmienić, że dobrym testem na prawdziwość teorii ekonomicznej jest jej zdolność do wyznaczania takich prognoz, które są bardziej trafne od prognoz sformułowanych na podstawie innych teorii. Ponieważ do formalnego zapisu zjawisk ekonomicznych niezbędna jest znajomość metod matematycznych, zatem istotnym zagadnieniem jest właściwe nauczanie matematyki na wszystkich szczeblach edukacji. W poniższym punkcie zaprezentowano ogólne uwagi dotyczące dydaktyki matematyki oraz sformułowano pewne wnioski dotyczące nauczania matematyki na studiach ekonomicznych.

4. Nauczanie matematyki na studiach ekonomicznych

Za profesorem ekonomii K.G. Binmore'em (Ostoja-Ostaszewski, 1996) można stwierdzić, że matematyka to „zestaw narzędzi, których osoba wykształcona może używać do nadania sensu światu, w którym żyje”. Powinno się zabiegać „o to, żeby znaleźć najprostszy z możliwych model, który uchwyci pewien szczególny aspekt jakiegoś procesu ekonomicznego. (...) Modelowanie matematyczne jest czymś, co każdy powinien robić, gdy chce nadać sens jakiemuś problemowi. (...). Takie podejście do rozwiązywania problemów w ekonomii jest jednak niemożliwe w stosunku do studentów, u których procesy myślowe zastygają na samą wzmiankę o matematyce”.

Aby było możliwe stosowanie technik i pojęć matematycznych w ekonomii, niezbędne jest przed modelowaniem matematycznym zagadnień ekonomicznych nabycie przez studentów umiejętności matematycznych. Najlepszą metodą biegłego posługiwania się narzędziami matematycznymi jest rozwiązywanie odpowiednio dobranych zestawów zadań z matematyki. Ten cel należy osiągnąć na przedmiocie matematyka.

Przedmioty takie jak matematyka, statystyka opisowa, ekonometria, mikroekonomia oraz podstawy makroekonomii należą do grupy treści podstawowych studiów ekonomicznych I stopnia. Najlepsze rezultaty dydaktyczne w nauczaniu matematyki i przedmiotów pokrewnych daje łączenie różnych metod nauczania:

- a) metod podających, tj. wykładu, wyjaśnienia, opowiadania – metody te bazują na zapamiętywaniu;
- b) metod poszukujących, tj. dyskusji i pogadanki, których podstawą jest odkrywanie;
- c) metod eksponujących, prezentujących sens przyswajania pojęć i technik matematycznych;
- d) metod praktycznych – ćwiczeń, na których studenci powinni nabyć umiejętność stosowania zdobytej wiedzy do rozwiązywania zadań praktycznych i teoretycznych.

Po opanowaniu treści zrealizowanych na wymienionych powyżej przedmiotach należących do grupy treści podstawowych studiów ekonomicznych I stopnia studenci nie będą mieli problemu ze zrozumieniem treści kształcenia przedmiotów takich jak wnioskowanie statystyczne, ekonometria, prognozowanie procesów ekonomicznych, ekonomia matematyczna i ekonomia menadżerska, realizowanych na II stopniu studiów.

Studia II stopnia mogą podjąć osoby, które posiadają tytuł magistra, licencjata, inżyniera lub równorzędny. Istnieje jednak problem związany

z elastycznością, rozumianą jako znaczna swoboda w podejmowaniu decyzji o wyborze kierunku studiów II stopnia przez absolwentów studiów I stopnia, dotycząca również studentów zamierzających podejmować studia II stopnia na kierunkach ekonomicznych. Problem wiąże się z umożliwieniem podjęcia studiów II stopnia na kierunkach ekonomicznych absolwentom studiów I stopnia, którzy nie mają odpowiedniego przygotowania do pogłębiania i rozszerzania wiedzy, jaką powinni zdobyć na ekonomicznych studiach I stopnia.

Można przeczytać o różnych propozycjach rozwiązania tego problemu. Niektórzy proponują postulat dotyczący pokrewności kierunków studiów I i II stopnia. K. Leja w swoim artykule (zob. (Leja 2005)) zadaje pytania: „Czy nie lepiej byłoby określić wykaz kierunków studiów na poziomie zawodowym, które uprawniają do starania się o przyjęcie na kierunek na poziomie magisterskim? A może problem uda się rozwikłać, ustalając kryteria egzaminacyjne dla kandydatów na magisterskie studia uzupełniające na danym kierunku?”

5. Zakończenie

W pierwszej części artykułu omówiono formalny zapis zjawisk ekonomicznych stosujący pojęcia i techniki matematyczne w ekonomii. Następnie zwrócono uwagę na różne podejścia do modelowania matematycznego zjawisk ekonomicznych, przedstawiono pojęcia modelu ekonomicznego i modelu ekonometrycznego. Zwrócono uwagę na wzajemne uzupełnianie się ekonomii matematycznej i ekonometrii.

Na koniec przedstawiono uwagi i zasygnalizowano pewne problemy związane z nauczaniem matematyki i przedmiotów pokrewnych będących narzędziem umożliwiającym modelowanie matematyczne zjawisk ekonomicznych na studiach ekonomicznych.

Literatura

- Chiang A.C. (1994). *Podstawy ekonomii matematycznej*. PWE. Warszawa.
- Hildenbrand W., Sonnenschein H. (1991). *Handbook of Mathematical Economics*. Elsevier.
- Leja K. (2005). *Elastyczność studiów dwustopniowych na przykładzie Wydziału Zarządzania Ekonomii Politechniki Gdańskiej*. W: J. Dietl, Z. Sapijaszka (red.). *Dylematy studiów dwustopniowych*. Fundacja Edukacyjna Przedsiębiorczości. Łódź.
- Maddala G.S. (2006). *Ekonometria*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.

- Ostoja-Ostaszewski A. (1996). *Matematyka w ekonomii. Modele, metody*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.
- Panek E. (2000). *Ekonomia matematyczna*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu. Poznań.
- Przybylska A., Romowicz A. (2000). *Matematyka aktuarialna w nauczaniu przedmiotów ilościowych*. Dydaktyka Matematyki nr 1. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu. Wrocław.