

PRACE NAUKOWE  
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 312

RESEARCH PAPERS  
of Wrocław University of Economics No. 312

# Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

Redaktor naukowy  
**Joanna Dębicka**



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
Wrocław 2013

Redaktor Wydawnictwa: Dorota Pitulec

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Beata Mazur

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:

[www.ibuk.pl](http://www.ibuk.pl), [www.ebscohost.com](http://www.ebscohost.com),

The Central and Eastern European Online Library [www.ceeol.com](http://www.ceeol.com),

a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon

[http://kangur.uek.krakow.pl/bazy\\_ae/bazekon/nowy/index.php](http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php)

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa

[www.wydawnictwo.ue.wroc.pl](http://www.wydawnictwo.ue.wroc.pl)

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu  
Wrocław 2013

**ISSN 1899-3192**

**ISBN 978-83-7695-315-1**

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

## Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	7
<b>Wojciech Bijak</b> , Ubezpieczenia na życie jako niejednorodne łańcuchy Markowa.....	9
<b>Joanna Dębicka</b> , Wpływ zmian parametrów tablic trwania życia w krajach Unii Europejskiej na wielkości aktuarialne .....	29
<b>Kamil Gala</b> , Analiza ubezpieczeń dla wielu osób z wykorzystaniem funkcji copula.....	50
<b>Stanisław Heilpern</b> , Złożony proces Poissona z zależnymi okresami między szkodami i wielkościami szkód .....	67
<b>Magdalena Homa</b> , Rozkład wypłaty w ubezpieczeniu na życie z funduszem kapitałowym a ryzyko finansowe .....	78
<b>Helena Jasiulewicz</b> , Uogólnienie klasycznego procesu nadwyżki finansowej w czasie dyskretnym.....	88
<b>Agnieszka Marciniuk</b> , Długowieczność i instrumenty finansowe związane z długowiecznością .....	100
<b>Daniel Sobiecki</b> , Dwustopniowe modelowanie składki za ubezpieczenie komunikacyjne OC .....	116

## Summaries

<b>Wojciech Bijak</b> , Non-homogenous Markov chain models for life insurance..	28
<b>Joanna Dębicka</b> , Varying parameters of life tables in the European Union: influence on actuarial amounts .....	47
<b>Kamil Gala</b> , Analysis of multiple life insurance using copulas.....	66
<b>Stanisław Heilpern</b> , Compound Poisson process with dependent interclaim times and claim amounts .....	77
<b>Magdalena Homa</b> , Distribution of the payments in the unit-linked life insurance and financial risk .....	87
<b>Helena Jasiulewicz</b> , Generalization of a classical process of a financial surplus process in discrete time .....	99
<b>Agnieszka Marciniuk</b> , Longevity and financial instrument related to longevity .....	115
<b>Daniel Sobiecki</b> , Two-stage premium modelling in MTPL .....	134

**Joanna Dębicka**

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

---

## WPLYW ZMIAN PARAMETRÓW TABLIC TRWANIA ŻYCIA W KRAJACH UNII EUROPEJSKIEJ NA WIELKOŚCI AKTUARIALNE

---

**Streszczenie:** Kalkulacja składek i rezerw prospektywnych potrzebnych na każdy moment trwania ubezpieczenia dokonywana jest w chwili zawierania umowy ubezpieczenia, przy uwzględnieniu aktualnych w tym roku tablic trwania życia. Jednak w czasie trwania ubezpieczenia tablice te ulegają zmianie i wyliczone w momencie zawarcia umowy ubezpieczenia wielkości aktuarialne także się zmieniają, a ubezpieczyciel nie ma możliwości aktualizacji składek. Celem artykułu jest analiza wpływu zmian parametrów w tablicach trwania życia w latach 1999-2009 na składki i rezerwy ubezpieczeniowe w przypadku terminowych ubezpieczeń na życie wykupionych w krajach Unii Europejskiej. Do szczegółowej analizy wielkości aktuarialnych wybrane zostały kraje UE, w których przeciętne dalsze trwanie życia najbardziej i najmniej się zmieniło w poszczególnych grupach wiekowych. Równocześnie zbadany został wpływ zmian polskich tablic trwania życia na wielkości aktuarialne.

**Słowa kluczowe:** zmodyfikowany model wielostanowy, tablice trwania życia, składka netto, rezerwa prospektywna netto, terminowe ubezpieczenie na życie.

### 1. Wstęp

Z punktu widzenia ubezpieczyciela składka netto, wyznaczana zgodnie z zasadą równoważności, bilansuje na początku umowy ubezpieczenia aktuarialną wartość wszystkich wydatków (świadczeń) i wpływów (składek). Jednak w czasie trwania umowy ubezpieczenia składki i świadczenia się nie równoważą. Najczęściej średni strumień składek jest większy od strumienia świadczeń na początku umowy, a potem sytuacja się zmienia tak, aby w całym okresie średni bilans został zachowany. Dlatego system finansowy ubezpieczeń przewiduje tworzenie rezerw techniczno-ubezpieczeniowych, które są funduszem powstałym z nadwyżki składek netto nad sumą roszczeń w danym roku. Fundusz ten jest przeznaczony na pokrycie bieżących i przyszłych zobowiązań, jakie mogą wyniknąć z zawartych umów ubezpieczenia. Bez dokonywania bilansu między strumieniami składek i świadczeń w czasie trwania umowy ubezpieczenia ubezpieczyciel nie mógłby ustalić, czy właściwie wyzna-

czył składkę ubezpieczeniową w stosunku do przyjętego ryzyka (określonego sumą świadczeń), a zatem czy jest wypłacalny.

W przypadku ubezpieczeń na życie kalkulacja składek ubezpieczeniowych i rezerw potrzebnych na każdy moment trwania umowy ubezpieczenia dokonywana jest w chwili zawierania umowy ubezpieczenia, przy uwzględnieniu aktualnych w tym roku tablic trwania życia (w skrócie TTŻ). Jednak w czasie trwania ubezpieczenia tablice te ulegają zmianie i wyliczone w momencie zawarcia umowy ubezpieczenia składki i rezerwy także się zmieniają (por. [Dębicka 2011], gdzie analizie poddany został także wpływ zmian parametrów w polskich TTŻ na wielkości aktuarialne). Zgodnie z warunkami ogólnymi ubezpieczenia wysokości świadczeń i składek ustalonych w momencie zawierania ubezpieczenia nie mogą być modyfikowane, a zatem ubezpieczyciel nie ma możliwości aktualizacji składek. Jedynym odstępstwem od tej reguły są systemy indeksacji zabezpieczające przed skutkami inflacji, w oparciu o które składka i/lub świadczenie rosną. Zmiana wymienionych wielkości aktuarialnych nie zależy od TTŻ, a jedynie od wysokości stopy procentowej i zysków, jakie zdołał osiągnąć ubezpieczyciel w ciągu roku (inwestując części oszczędnościowe składek wpłaconych przez ubezpieczonego).

Celem artykułu jest analiza wpływu zmian parametrów w tablicach trwania życia na składki i rezerwy ubezpieczeń na życie sprzedawanych w krajach Unii Europejskiej, w szczególności zbadanie, jak duże są różnice między wielkościami aktuarialnymi określonymi dla populacji krajów UE. W tym celu do szczegółowych badań wielkości aktuarialnych wybrane zostały te kraje UE, w których oczekiwane dalsze trwanie życia najbardziej i najmniej się zmieniło w poszczególnych grupach wiekowych.

Ze względu na różnorodność i złożoność produktów ubezpieczeniowych niezbędne stało się określenie nie tylko typu ubezpieczenia, ale także długości okresu ubezpieczenia oraz wieku osób ubezpieczonych. Z jednej strony wybrany okres ubezpieczenia nie mógł być zbyt długi, gdyż wobec stałej tendencji wydłużania się przeciętnego dalszego trwania życia wpływ zmian tablic trwania życia na wielkości aktuarialne byłby oczywisty. Z drugiej strony wybór zbyt krótkiego okresu ubezpieczenia mógłby spowodować, że zmiany wielkości aktuarialnych byłyby znikome. Ponadto ubezpieczenia na życie są produktami długoterminowymi. Dlatego do analizy został wybrany dziesięcioletni okres ubezpieczenia.

Dane dotyczące analizy pochodzą głównie z [Human Mortality Database] oraz [Eurostat] i dotyczą lat 1999-2009.

Warunkiem przystąpienia do ubezpieczenia jest ukończenie 18. roku życia oraz nie-przekroczenie górnej granicy wieku, która w niektórych firmach ubezpieczeniowych wynosi 60 lat. Ponadto dynamika zmian tablic trwania życia zależy także od wieku osoby oraz płci. Dlatego analiza przeprowadzona została dla osób w wieku 20, 40, 60 lat, osobno dla kobiet i mężczyzn.

Najprostszym przykładem ubezpieczeń na życie jest terminowe ubezpieczenie na wypadek śmierci. Tego typu ubezpieczenie jest sprzedawane przez firmy ubezpie-

czeniu w każdym z krajów UE. Dlatego ten rodzaj ubezpieczenia na życie został wybrany do analizy (por. [Błaszczyszyn, Rolski 2004; Bowers i in. 1986; Gerber 1990; Ostasiewicz 2003; Ostasiewicz (red.) 2000; Stroński 1996]).

Analiza została dokonana w oparciu o rozbudowany model wielostanowy [Dębicka 2012] umożliwiający wykorzystanie do obliczeń numerycznych macierzowej reprezentacji wzorów na składki netto i rezerwy prospektywne. Ponadto do określania wielkości aktuarialnych przy uwzględnieniu zmieniających się tablic trwania życia wykorzystana została metodologia zaproponowana w [Dębicka 2011].

Artykuł, oprócz wprowadzenia stanowiącego punkt 1, zawiera trzy punkty. W punkcie 2 omówiony został wybór krajów UE do analizy wielkości aktuarialnych. Wybór został dokonany na podstawie wielkości zmian przeciętnego dalszego trwania życia w roku 2009 w porównaniu z rokiem 1999. Charakterystyka terminowego ubezpieczenia na życie oraz reprezentacja macierzowa wzorów na składki i rezerwy ubezpieczeniowe zostały przedstawione w punkcie 3. Ostatni punkt zawiera wyniki badań i ich podsumowanie.

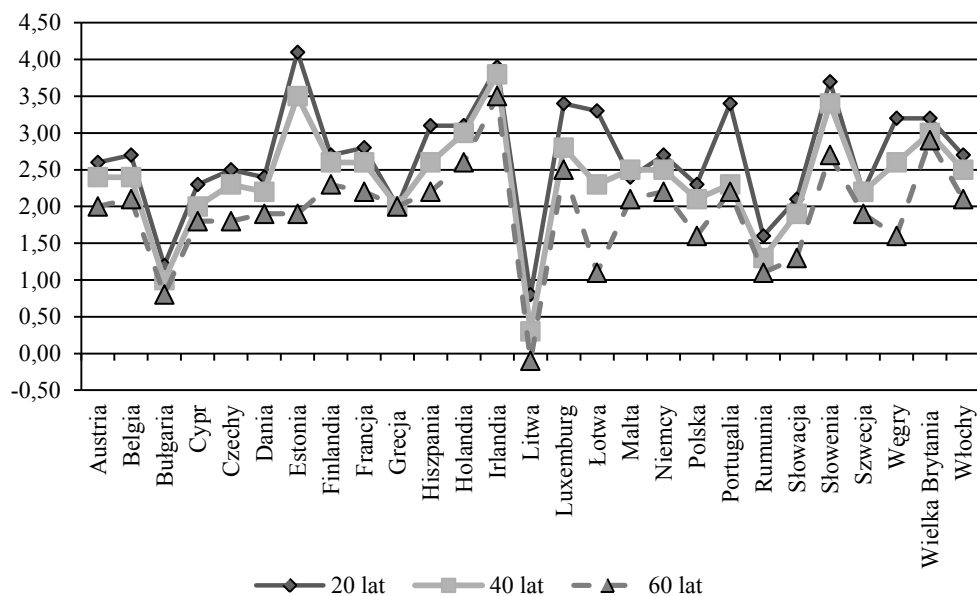
## 2. Zmiany oczekiwanego czasu trwania życia w krajach UE

Niech  $e_x^r$  oznacza przeciętne dalsze trwanie życia osoby w wieku  $x$  określone na podstawie tablic trwania życia z roku  $r$ .

Wybór krajów Unii Europejskiej, które mogłyby wskazać zakres zmian wielkości aktuarialnych determinowanych przez zmieniające się tablice trwania życia, dokonany został na podstawie zmian przeciętnego dalszego trwania życia w roku 2009 w porównaniu z rokiem 1999. Dane dotyczące  $e_x^r$  dla poszczególnych państw pochodzą ze strony internetowej [Eurostat] i zostały zamieszczone na końcu artykułu w Załączniku 1 (dla mężczyzn) i Załączniku 2 (dla kobiet).

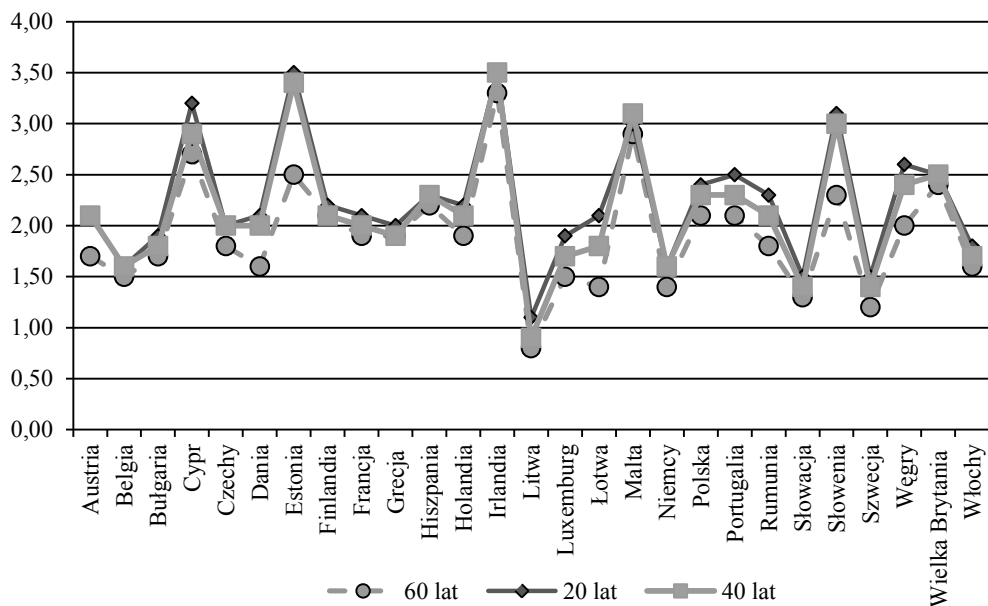
Rysunki 1 i 2 ilustrują różnicę między przeciętnym przyszłym trwaniem życia w roku 2009 i roku 1999 ( $e_x^{2009} - e_x^{1999}$ ) dla osób w wieku 20, 40 i 60 lat ( $x = 20, 40, 60$ ). Od razu można zauważyć, że zakres zmian dla kobiet jest mniejszy niż zakres zmian dla mężczyzn. Tę obserwację potwierdzają statystyki zawarte w tab. 1.

Niezależnie od wieku zakres zmienności badanej różnicy w przypadku mężczyzn jest większy niż kobiet, co potwierdzają wartości standardowych współczynników zmienności. Ponadto dla każdego analizowanego wieku zakres zmienności dla kobiet zawiera się w zakresie zmienności dla mężczyzn. Ich wartość wskazuje na rozbieżność różnic w przeciętnym dalszym trwaniu życia mieszkańców krajów UE na poziomie średnim. Zauważmy, że nie istnieją obserwacje odstające, gdyż dla każdego z analizowanych szeregów wartości najmniejsze (min) i największe (max) mieszczą się w wyznaczonym dla swojego szeregu przedziale trzysigmowym. Z analizy zmienności wszystkich sześciu szeregów wynika, że określenie zakresu wpływu zmian demograficznych na wielkości aktuarialne można ograniczyć jedynie do badań dotyczących mężczyzn.



Rys. 1. Różnica między przeciętnym przyszłym trwaniem życia mężczyzn w roku 2009 i 1999

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Różnica między przeciętnym przyszłym trwaniem życia kobiet w roku 2009 i 1999

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 1.** Statystyki dotyczące różnic między przeciętnym przyszłym trwaniem życia w roku 2009 i 1999 w krajach UE

Płeć	Mężczyźni			Kobiety		
	20	40	60	20	40	60
Wartość najmniejsza (min)	0,8	0,3	-0,1	1,1	0,9	0,8
Wartość największa (max)	4,1	3,8	3,5	3,5	3,5	3,3
Średnia arytmetyczna	2,68	2,37	1,94	2,24	2,14	1,91
Odchylenie standardowe	0,75	0,71	0,69	0,59	0,61	0,54
Standardowy współczynnik zmienności (%)	28,06	29,86	35,44	26,49	28,25	28,03
Dolna granica typowego obszaru zmienności	1,93	1,67	1,25	1,65	1,54	1,38
Górna granica typowego obszaru zmienności	3,43	3,08	2,62	2,84	2,75	2,45
Dolna granica przedziału trzysigmowego	0,42	0,25	-0,12	0,46	0,33	0,30
Górna granica przedziału trzysigmowego	4,94	4,50	4,00	4,03	3,96	3,52

Źródło: opracowanie własne.

Okazuje się, że najmniejsze zmiany przeciętnego dalszego trwania życia mężczyzn (niezależnie od wieku) zostały zarejestrowane na Litwie, przy czym dla 20- i 40-latków nastąpił niewielki wzrost przeciętnego dalszego trwania życia (odpowiednio o 0,8 i 0,2 roku), a dla 60-latków obserwowany jest spadek o 0,1 roku.

Największe zmiany w przeciętnym dalszym trwaniu życia mężczyzn obserwujemy w Estonii (dla 20-latków) oraz w Irlandii (dla 40- i 60-latków). Ze względu na dużą migrację ludności Estonii w badanym okresie tablice trwania życia dla Estonii nie odzwierciedlają wiernie sytuacji demograficznej tego kraju. Ponadto Irlandia zajmuje drugie miejsce (po Estonii) spośród krajów UE ze względu na wydłużenie się przeciętnego dalszego trwania życia 20-latków (o 3,9 roku). Dlatego do dalszej analizy wybrana została Irlandia.

Polska okazała się krajem, w którym wzrost przeciętnego dalszego trwania życia mężczyzn w latach 1999-2009 był typowy zarówno dla 20-latków (o 2,3 roku), 40-latków (o 2,1 roku), jak i 60-latków (o 1,6 roku).

W punkcie 4 analizie zostały poddane składki i rezerwy dla ubezpieczeń na życie, których struktura probabilistyczna została wyznaczona na podstawie tablic trwania życia mężczyzn [Human Mortality Database] dla Litwy, Polski i Irlandii.

### 3. Terminowe ubezpieczenie na wypadek śmierci

#### 3.1. Charakterystyka terminowego ubezpieczenia na życie

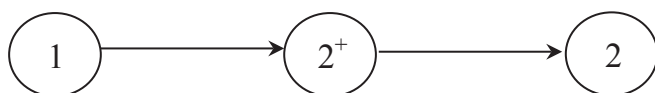
Jednym z rodzajów ubezpieczeń na życie jest terminowe ubezpieczenie na wypadek śmierci (terminowe ubezpieczenie na życie). Warunki tego typu ubezpieczenia gwarantują wypłatę jednorazowego świadczenia w wysokości  $c(t)$ , gdy ubezpieczony umrze przed końcem okresu ubezpieczenia  $n$  (por. [Błaszczyszyn, Rolski 2004; Bo-



wers i in. 1986; Dębicka 2012; Gerber 1990; Ostasiewicz 2003; Ostasiewicz (red.) 2000; Stroński 1996]).

W teorii ubezpieczeń wielostanowych każdemu przypadkowi życiowemu, którego dotyczy umowa ubezpieczenia (np. śmierć ubezpieczonego), odpowiada stan, w jakim znalazł się ubezpieczony. Zbiór wszystkich  $N$  możliwych stanów nazywa się przestrzenią stanów i oznacza się przez  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ . Ponadto para  $(i, j)$ , gdzie  $i \neq j$  oraz  $i, j \in S$ , oznacza bezpośrednie przejście ze stanu  $i$  do stanu  $j$ , natomiast  $T$  jest zbiorem wszystkich możliwych bezpośrednich przejść między stanami. Para  $(S, T)$ , opisująca wszystkie możliwe zdarzenia zachodzące w życiu ubezpieczonego w okresie objętym umową ubezpieczenia, nazywana jest *modelem wielostanowym*. Model wielostanowy dla terminowego ubezpieczenia na życie jest postaci  $(S, T) = (\{1, 2\}, \{(1, 2)\})$ , gdzie stan 1 oznacza, że ubezpieczony żyje, a stan 2 oznacza, że ubezpieczony nie żyje. Ponieważ w wyniku realizacji tego rodzaju ubezpieczenia powstają przepływy pieniężne związane ze zmianą stanu (tj. świadczenie płatne z tytułu śmierci ubezpieczonego), to skorzystanie z notacji macierzowej w celu wyznaczenia składek i rezerw ubezpieczeniowych wymaga wprowadzenia rozbudowanego modelu wielostanowego  $(S^*, T^*)$  (por. [Dębicka 2012]). Rozbudowany model wielostanowy dla terminowego ubezpieczenia na życie jest postaci  $(S^*, T^*) = (\{1, 2^+, 2\}, \{(1, 2); (2^+, 2)\})$ , gdzie stan 1 oznacza, że ubezpieczony żyje, stan  $2^+$  oznacza, że ubezpieczony zmarł, a stan 2 oznacza, że ubezpieczony nie żyje co najmniej 1 rok.

Ilustracją graficzną rozbudowanego modelu wielostanowego dla ubezpieczeń na życie, w których warunki ogólne przewidują jednorazową wypłatę z tytułu śmierci ubezpieczonego, jest rys. 3.



**Rys. 3.** Schemat rozbudowanego modelu wielostanowego  $(S^*, T^*) = (\{1, 2^+, 2\}, \{(1, 2); (2^+, 2)\})$

Źródło: opracowanie własne.

Dla danej umowy ubezpieczenia, reprezentowanej przez model wielostanowy  $(S^*, T^*)$ , funkcja  $X^*(t) = j$  oznacza, że w chwili  $t$  (będącej czasem, jaki upłynął od rozpoczęcia umowy ubezpieczenia) ubezpieczonego dotyczy przypadek życiowy, któremu został przypisany stan  $j$  ( $j \in S^*$ ). Zakłada się, że  $\{X^*(t): t = 0, 1, 2, \dots\}$  jest procesem stochastycznym przyjmującym wartości ze skończonej przestrzeni stanów  $S^*$ .  $\{X^*(t)\}$  jest procesem dyskretnym, gdyż analiza dotyczyć będzie ubezpieczeń, w których okres ubezpieczenia został podzielony na rozłączne odcinki czasu, tj. lata. W praktyce aktuarialnej do opisu struktury probabilistycznej modelu wielostanowego wykorzystywane są procesy Markowa. W szczególności zakładając będziemy, że

$\{X^*(t)\}$  jest niejednorodnym w czasie łańcuchem Markowa. Ponadto stan określony numerem 1 oznacza stan początkowy, tzn.  $X^*(0) = 1$ .

W wyniku realizacji umowy ubezpieczenia powstają określone płatności dokonywane przez ubezpieczonego (składki) i ubezpieczyciela (świadczenia). W czasie trwania ubezpieczenia płatności te tworzą przepływy pieniężne między ubezpieczycielem a ubezpieczonym. Z finansowego punktu widzenia każdy przepływ pieniężny jest wpłatą powiększającą określony fundusz lub wypłatą pomniejszającą wielkość danego funduszu. Na przykład dla funduszu  ${}_tL$  określającego stratę ubezpieczyciela w chwili  $t$  wpłatami (o dodatnich wartościach) są świadczenia, a wypłatami (o ujemnych wartościach) są składki.

Niech  $cf_j^*(t) = cf_{X^*(t)=j}(t)$  oznacza przepływ pieniężny (*cash flow*) realizowany w momencie  $t$  ( $t = 0, 1, 2, \dots, n$ ), jeżeli proces  $\{X^*(t)\}$  jest w tym momencie w stanie  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). Wtedy dla funduszu strat ubezpieczyciela przepływy pieniężne wynikające z realizacji umowy terminowego ubezpieczenia na życie określone są następująco:

$$cf_j^*(t) = \begin{cases} -p & \text{dla } j=1 \text{ oraz } 0 \leq t \leq n, \\ c(t) & \text{dla } j=2^+ \text{ oraz } 1 \leq t \leq n, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases} \quad (1)$$

gdzie  $p$  jest składką roczną płaconą z góry przez cały okres ubezpieczenia.

### 3.2. Macierzowa reprezentacja wielkości aktuarialnych

Wprowadzone zostaną oznaczenia niezbędne do przedstawienia składek i rezerw w formie macierzowej. Niech

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})^T \in \mathbf{R}^{N^*}, \\ \mathbf{J}_j^* &= (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \underbrace{\mathbf{1}}_j, \dots, \mathbf{0})^T \in \mathbf{R}^{N^*}, \\ \mathbf{I}_{k+1} &= (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \underbrace{\mathbf{1}}_{k+1}, \dots, \mathbf{0})^T \in \mathbf{R}^{n+1}, \end{aligned}$$

gdzie  $N^*$  jest liczbą stanów przestrzeni stanów  $\mathcal{S}^*$ . Natomiast dla dowolnej macierzy  $\mathbf{A}$  macierz  $Diag(\mathbf{A})$  jest macierzą diagonalną, której elementami przekątnej są elementy przekątnej macierzy  $\mathbf{A}$ .

Dla dowolnej chwili  $t$  niech dany będzie wektor  $\mathbf{P}(t) = (P_1(t), P_2(t), \dots, P_{N^*}(t))^T$  prawdopodobieństw bycia procesu  $\{X^*(t)\}$  w określonym stanie, gdzie  $P_i(t) = P(X^*(t) = i)$ . Ponadto niech

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(0) \\ \mathbf{P}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(n) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(n+1) \times N^*}.$$

Przy założeniu, że proces  $\{X^*(t)\}$  jest niejednorodnym łańcuchem Markowa, mamy, że  $\mathbf{P}^T(t) = \mathbf{P}^T(0) \prod_{k=0}^{t-1} \mathbf{Q}^*(k)$ , gdzie  $\mathbf{P}(0) = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^{N^*}$  jest wektorem rozkładu początkowego, a  $\{\mathbf{Q}^*(k)\}_{k=0}^{n-1}$  jest ciągiem macierzy prawdopodobieństw przejść oraz  $q_{ij}^*(k) = P(X^*(t+1) = j | X^*(t) = i)$ . Dla terminowego ubezpieczenia na życie elementy ciągu macierzy  $\{\mathbf{Q}^*(k)\}_{k=0}^{n-1}$  określa się w oparciu o tablice trwania życia w następujący sposób:

$$\mathbf{Q}^*(k) = \begin{pmatrix} \frac{l_{x+k+1}}{l_{x+k}} & \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie  $l_{x+k}, d_{x+k}$  są odpowiednio liczbą osób dożywających i zmarłych w wieku  $x+k$ .

Ze stopą procentową związana jest macierz  $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_{t_1 t_2})_{t_1 t_2=0}^n$ , której elementy zawierają czynniki dyskontujące  $v(t_1, t_2)$  i akumulujące  $r(t_1, t_2)$ . Jeżeli stopa procentowa jest stała w trakcie całego okresu ubezpieczenia, to wtedy

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & v & v^2 & v^3 & \dots & v^n \\ v^{-1} & 1 & v & v^2 & \dots & v^{n-1} \\ v^{-2} & v^{-1} & 1 & v & \dots & v^{n-2} \\ v^{-3} & v^{-2} & v^{-1} & 1 & \dots & v^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^{-n} & v^{-(n-1)} & v^{-(n-2)} & v^{-(n-3)} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Przepływy pieniężne tworzą *macierz przepływów pieniężnych*  $\mathbf{C} = (\mathbf{cf}_j^*(t)) \in \mathbf{R}^{(n+1) \times N^*}$ . Każdy przepływ pieniężny jest sumą wpływów (*inflows*) reprezentujących wpłaty, które zasilają dany fundusz, oraz wydatków (*outgo*), które pomniejszają dany fundusz. Dlatego też  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{in} + \mathbf{C}_{out}$ , gdzie macierz  $\mathbf{C}_{in} = (\mathbf{cf}_j^{in}(t)) \in \mathbf{R}^{(n+1) \times N^*}$  zawiera jedynie wpływy do danego funduszu, natomiast

$\mathbf{C}_{out} = (\mathbf{c}f_j^{out}(\mathbf{t})) \in \mathbf{R}^{(n+1) \times N^*}$  zawiera jedynie wydatki pomniejszające dany fundusz. Macierze przepływów pieniężnych dla ubezpieczenia scharakteryzowanego w punkcie 3.1 są postaci:

$$\mathbf{C}_{in} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(1) & 0 \\ 0 & c(2) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c(n-1) & 0 \\ 0 & c(n) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{C}_{out} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ -p & 0 & 0 \\ -p & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Jednym ze sposobów obliczania wystarczalności posiadanych rezerw w stosunku do zaciągniętych zobowiązań jest metoda prospektywna, która polega na określeniu potrzebnej w momencie  $t$  (trwania umowy ubezpieczenia) kwoty, która łącznie z wpłaconymi w przyszłości składkami pozwoli na wypłatę przyszłych świadczeń. Niech  $V_j(t)$  oznacza rezerwę prospektywną netto w momencie  $t$  trwania umowy ubezpieczenia pod warunkiem, że proces  $\{X^*(t)\}$  jest w tym momencie w stanie  $j$ . Wtedy  $\mathbf{V}(t) = (V_1(t), V_2(t), \dots, V_{N^*}(t))^T$  jest *wektorem rezerw prospektywnych* w ustalonym momencie  $t$  dla wszystkich stanów przestrzeni stanów  $S^*$ .

Dla ubezpieczenia z modelem wielostanowym  $(S^*, T^*)$  stała składka netto  $p$  płacona przez cały okres ubezpieczenia obliczana jest według następującego wzoru (por. [Dębicka 2012])

$$p = \frac{\mathbf{S}^T \text{Diag}(\mathbf{C}_{in} \mathbf{D}^T) \mathbf{\Lambda} \mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_1^T \mathbf{\Lambda}^T [\mathbf{I} - \mathbf{I}_{n+1} \mathbf{I}_{n+1}^T] \mathbf{D} \mathbf{I}_1}. \quad (4)$$

Natomiast wektor rezerw prospektywnych w ustalonym momencie  $t$  trwania okresu ubezpieczenia jest następującej postaci (por. [Dębicka 2012])

$$\mathbf{V}(t) = (\mathbf{C}_{out}^T + \mathbf{C}_{in}^T - \mathbf{F}^T(\mathbf{t}, \mathbf{C}) \mathbf{\Lambda}) \mathbf{I}_{t+1}, \quad (5)$$

gdzie  $\mathbf{F}^T(\mathbf{t}, \mathbf{C}) = \sum_{k=t+1}^n \prod_{u=t}^{k-1} \mathbf{Q}^*(u) \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{k+1} \mathbf{I}_{k+1}^T$  jest macierzą prospektywnych średnich przepływów pieniężnych liczonych pod warunkiem, że w momencie  $t$  trwania umowy ubezpieczenia proces  $\{X^*(t)\}$  jest w określonym stanie.

Macierzowa reprezentacja wzorów na wielkości aktuarialne umożliwia wyznaczenie rocznej składki netto i rezerw prospektywnych netto w sposób znacznie ułatwiający obliczenia numeryczne prezentowane w punkcie 4.

### 3.3. Składki i rezerwy w zmieniającym się otoczeniu demograficznym

Niech  $s$  będzie rokiem przystąpienia do ubezpieczenia. Oznacza to, że składki i rezerwy prospektywne są liczone dla rozkładu procesu  $\{X^*(t)\}$  określonego w roku  $s$ . Wtedy  $\mathbf{v}$  macierz rezerw prospektywnych określonych w całym okresie ubezpieczenia jest postaci

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^T(0) \\ \mathbf{V}^T(1) \\ \vdots \\ \mathbf{V}^T(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^T(0, s) \\ \mathbf{V}^T(1, s) \\ \vdots \\ \mathbf{V}^T(n, s) \end{pmatrix} \in R^{(n+1) \times N^*}.$$

W szczególności dla terminowego ubezpieczenia na życie opisanego w punkcie 3.1 mamy, że

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ V_1(1) & 0 & 0 \\ V_1(2) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V_1(n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Zauważmy, że jedynie elementy pierwszej kolumny macierzy (6), stanowiące tzw. rezerwę składki netto, są niezerowe, dlatego tylko one będą przedmiotem analizy w punkcie 4.

Ponieważ rozkład procesu  $\{X^*(t)\}$  może zmieniać się w czasie, niech

$$\mathbf{P}_{zm} = (p(s), p(s+1), p(s+2), \dots, p(s+n-1), 0)^T,$$

gdzie  $p(s+t)$  ( $t = 0, 1, \dots, n$ ) oznacza stałą składkę netto płaconą przez cały okres ubezpieczenia określoną dla  $x$ -latka i  $n$ -letniego okresu ubezpieczenia, przy założeniu, że rozkład procesu  $\{X^*(t)\}$  jest określony na podstawie danych z roku  $s+t$ .

Ponadto niech

$$\mathbf{V}(t, s+t) = (V_1(t, s+t), V_2(t, s+t), \dots, V_{N^*}(t, s+t))^T$$

będzie wektorem rezerw prospektywnych w ustalonym momencie  $t$  trwania ubezpieczenia, liczonym przy założeniu, że rozkład procesu  $\{X^*(t)\}$  jest określony na podstawie danych z roku  $s+t$ . Wtedy  $\mathbf{V}_{zm}$  macierz rezerw prospektywnych określonych w całym okresie ubezpieczenia uwzględniająca zmiany w rozkładzie procesu  $\{X^*(t)\}$  jest postaci

$$\mathbf{V}_{zm} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^T(0, s) \\ \mathbf{V}^T(1, s+1) \\ \vdots \\ \mathbf{V}^T(n, s+n) \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że macierz  $\mathbf{V}_{zm}$  określona jest przy założeniu, że zmianie ulegają jedynie macierze  $\mathbf{Q}^*(t)$  niezbędne we wzorze (5) do wyznaczenia macierzy prospektywnych średnich przepływów pieniężnych  $\mathbf{F}^T(t, \mathbf{C})$ , a pozostałe macierze pozostają bez zmian, tzn.

$$\mathbf{V}(t, s+t) = (\mathbf{C}_{out}^T + \mathbf{C}_{in}^T + \mathbf{F}_{s+t}^T(t, \mathbf{C})\mathbf{\Lambda})\mathbf{I}_{t+1},$$

gdzie  $\mathbf{F}_{s+t}^T(t, \mathbf{C}) = \sum_{k=t+1}^n \prod_{u=t}^{k-1} \mathbf{Q}_{s+t}^*(u)\mathbf{C}^T\mathbf{I}_{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^T$ , a macierz  $\mathbf{Q}_{s+t}^*(u)$  określona jest na podstawie danych z roku  $s+t$  (co oznacza, że  $\mathbf{Q}_{s+0}^*(u) = \mathbf{Q}^*(u)$ ).

## 4. Opis przebiegu badań i otrzymane wyniki

### 4.1. Założenia i opis kolejnych etapów badań

Na potrzeby tego punktu dokonano obliczeń w celu zbadania zależności wysokości składek i rezerw od zmieniających się TTŻ. Ze względu na obszerny materiał w artykule zamieszczone zostały jedynie prezentacje graficzne uzyskanych wyników, które obrazują pewną tendencję.

Analizie poddano wielkości aktuarialne określone dla mężczyzn w wieku 20, 40 i 60 lat ( $x = 20, 40, 60$ ), którzy zawarli 10-letnie ( $n = 10$ ) terminowe ubezpieczenie na życie w roku 1999. Macierz przepływów pieniężnych (2) wyznaczona została przy założeniu, że świadczenie z tytułu śmierci jest równe 1 jednostce, tzn.  $c(1) = c(2) = \dots = c(n) = 1$ . Ponadto macierz  $\mathbf{\Lambda}$  określono dla stałej rocznej stopy procentowej równej 2%.

W pierwszym etapie badań, osobno dla każdego z analizowanych krajów i grup wiekowych w oparciu o TTŻ z lat 1999, określone zostały ciągi macierzy  $\{\mathbf{Q}^*(k)\}_{k=0}^{n-1}$ . Następnie ze wzoru (4) wyznaczone zostały roczne składki netto, co umożliwiło określenie elementów macierzy przepływów pieniężnych (3), a w konsekwencji wektora rezerw prospektywnych (zgodnie z formułą (5))

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ V_1(1, 1999) & 0 & 0 \\ V_1(2, 1999) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V_1(9, 1999) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

W drugim etapie badań, na podstawie TTŻ z lat 2000-2008, ponownie zostały określone ciągi macierzy prawdopodobieństw przejść  $\{\mathbf{Q}^*(k)\}_{k=0}^{n-1}$ . Następnie osobno dla Litwy, Polski i Irlandii oraz mężczyzn w wieku 20, 40, 60 lat wyznaczone zostały wektory

$$\mathbf{P}_{zm} = (p(1999), p(2000), p(2001), \dots, p(2008), 0)$$

oraz macierze

$$\mathbf{V}_{zm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ V_1(1,2000) & 0 & 0 \\ V_1(2,2001) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V_1(9,2008) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Przedmiotem dalszej analizy są wielkości nominalne składek i rezerw, jak również procentowe zmiany składek i rezerw ubezpieczeniowych obliczonych według zmieniających się TTŻ w stosunku do analogicznych wielkości obliczonych na podstawie TTŻ z roku 1999.

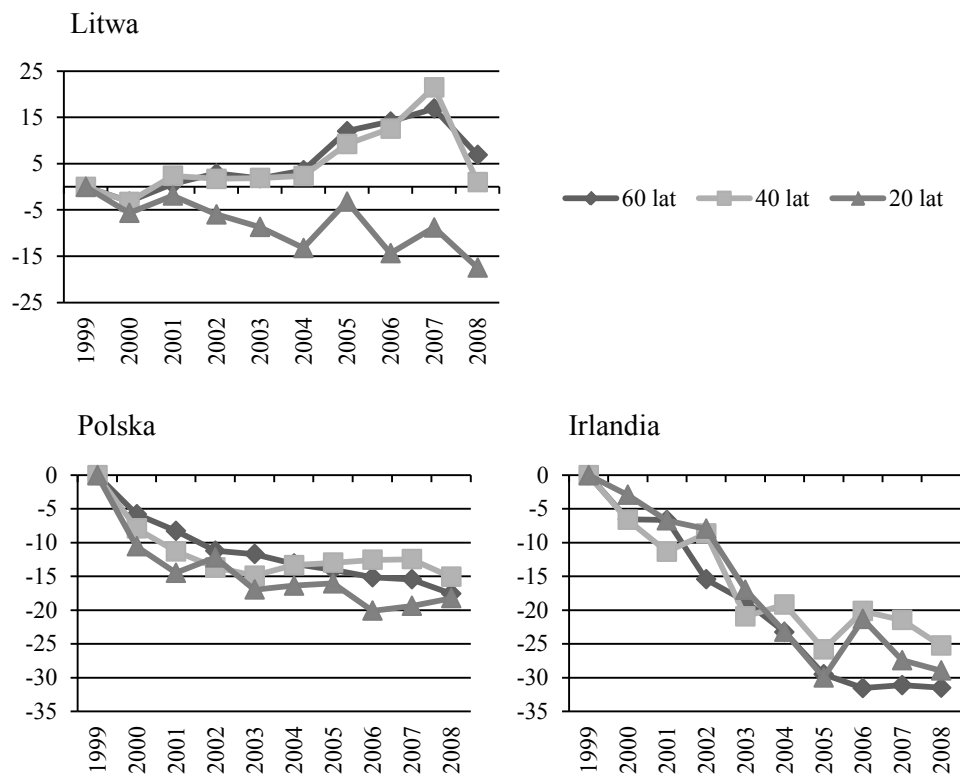
#### 4.2. Analiza rocznej składki netto

Zgodnie z założeniem, że terminowe ubezpieczenia na życie zostały zawarte w 1999 r., określone zostały roczne składki netto dla 10-letniego okresu ubezpieczenia. Następnie dla tego samego ubezpieczenia określony został wektor  $\mathbf{P}_{zm}$  zawierający roczne składki netto przy zastosowaniu bieżących TTŻ (tj. TTŻ z lat 2000-2008). Zmiany procentowe składek rocznych liczonych dla TTŻ z lat 2000-2008 w stosunku do składek rocznych liczonych dla TTŻ z 1999 r., czyli wielkości

$$\left( \frac{p(1999+t)}{p(1999)} - 1 \right) \times 100\%$$

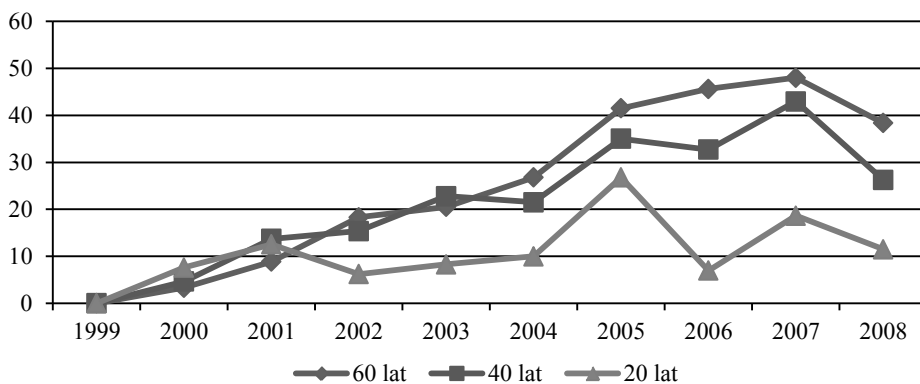
zostały zilustrowane na rys. 4.

Zauważmy, że niezależnie od wieku, w Polsce i Irlandii wysokości składek bieżących były niższe, przy czym zmniejszenie się składek rocznych było większe w Irlandii, gdzie maksymalnie składka bieżąca była niższa od składki liczonej w 1999 r. o 31,56% (Irlandia dla osoby w wieku 60 lat, TTŻ 2006). Jedynie na Litwie dla osób w wieku 40 i 60 lat zaobserwować można, że składka bieżąca jest większa od składki liczonej w 1999 r. maksymalnie o 21,5% (dla osoby w wieku 40 lat, TTŻ 2007). Wyższa składka jest spowodowana tym, że w ciągu badanych 10 lat przeciętne dalsze trwanie życia zmniejszyło się dla mężczyzn w wieku 60 lat o 0,1 roku, a dla mężczyzn w wieku 40 lat tylko nieznacznie wzrosło, bo o 0,3 roku.



**Rys. 4.** Zmiany procentowe składki rocznej dla bieżących TTŻ w stosunku do składki rocznej liczonej na bazie TTŻ z 1999 r.

Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 5.** Zakres procentowych zmian składki rocznej dla bieżących TTŻ w stosunku do składki rocznej liczonej na bazie TTŻ z 1999 r.

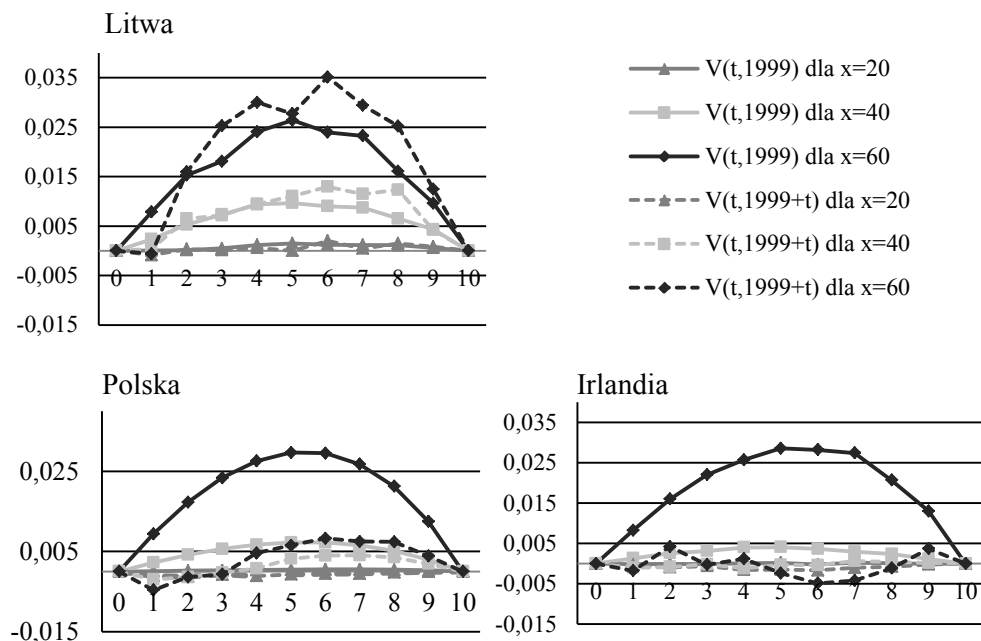
Źródło: opracowanie własne.



Na rys. 5 przedstawiony został zakres zmian składki rocznej liczonej dla bieżących TTŻ w stosunku do składki liczonej na podstawie TTŻ z 1999 roku. Dla danego wieku  $x$  ( $x = 20, 40, 60$ ) i każdego roku osobno wybrany został kraj o największej i najmniejszej zmianie procentowej składki bieżącej w stosunku do składki podstawowej (por. rys. 4), a następnie policzony został rozstęp, czyli różnica między tak określoną wartością największą i najmniejszą. Zauważmy, że w latach 2000-2001 największą rozpiętość składek bieżących w stosunku do składek z 1999 r. obserwujemy dla 20-latków, a najmniejszą dla 60-latków, przy czym różnice między rozpiętościami dla 20-, 40-, 60-latków są niewielkie, a ich wartość nie przekracza 15%. Natomiast w końcowych latach analizowanego okresu (lata 2004-2008) sytuacja się odwraca i największą rozpiętość składek bieżących w stosunku do składek z roku 1999 obserwujemy dla 60-latków, a najmniejszą dla 20-latków, przy czym różnice między rozpiętościami dla 20-, 40-, 60-latków są znacznie większe niż na początku analizowanego okresu, a ich wartość dochodzi do 48%.

### 4.3. Analiza rezerwy prospektywnej netto

Rysunek 6 jest ilustracją graficzną wysokości rezerw składki netto (czyli wektorów  $\mathbf{I}_1^T \cdot \mathbf{V}$  i  $\mathbf{I}_1^T \cdot \mathbf{V}_{zm}$ ) dla ubezpieczeń na życie ze składką roczną w Irlandii, Polsce i na Litwie. Zauważmy, że w Irlandii oraz w Polsce zazwyczaj wysokość rezerw tworzo-



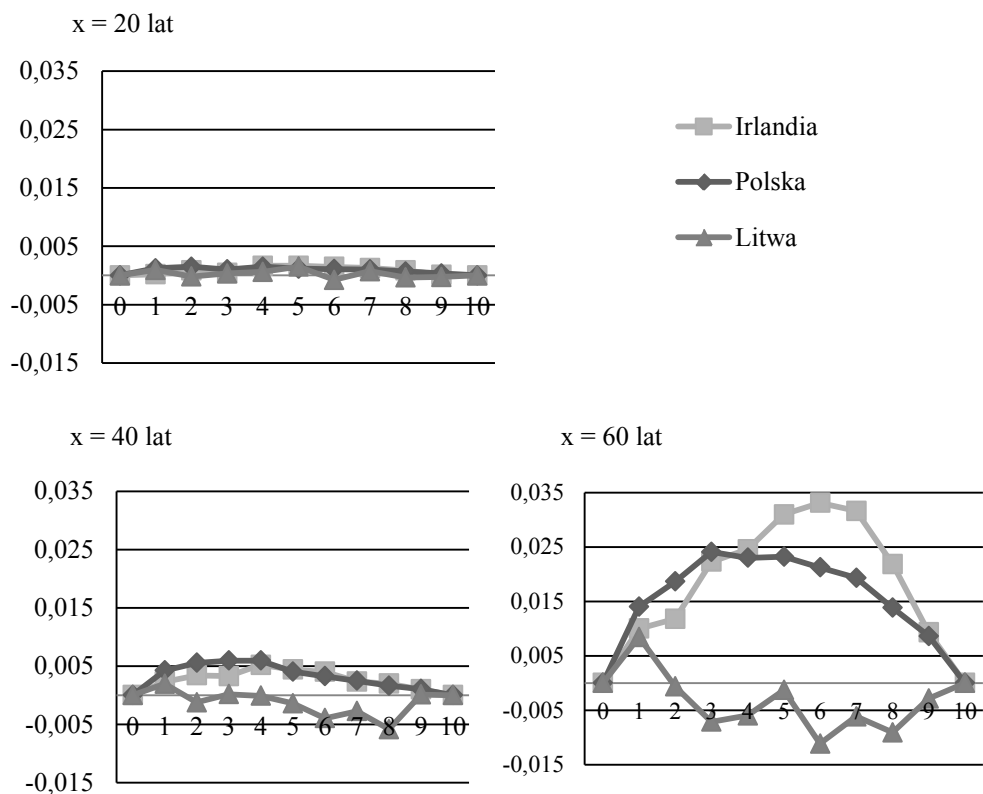
**Rys. 6.** Rezerwy prospektywne netto  $V_1(t, 1999)$  liczone dla TTŻ z 1999 r. oraz  $V_1(t, 1999 + t)$  liczone na podstawie bieżących TTŻ

Źródło: opracowanie własne.

nych na bazie TTŻ z 1999 r. jest większa niż dla rezerw tworzonych na podstawie TTŻ z lat 2000-2008, co świadczy o ich przeszacowaniu. Dzieje się tak dlatego, że przeciętne dalsze trwanie życia mieszkańców tych krajów wydłuża się, a więc maleje wartość aktuarialna przyszłych świadczeń przy jednoczesnym wzroście wartości aktuarialnej przyszłych składek. Na Litwie sytuacja jest odwrotna. Tworzone na podstawie TTŻ z 1999 r. rezerwy są za niskie, co jest bezpośrednio związane z obserwowanym na Litwie wzrostem śmiertelności osób starszych.

Najistotniejszy wpływ na różnicę między wektorami  $\mathbf{I}_1^T \cdot \mathbf{V}$  i  $\mathbf{I}_1^T \cdot \mathbf{V}_{zm}$  ma wiek ubezpieczonej osoby. Potwierdzeniem tego faktu jest rys. 7 będący ilustracją graficzną udziału różnicy między rezerwami składki netto liczonymi na bazie TTŻ z roku 1999 oraz zmieniających się co roku TTŻ w stosunku do rezerwy liczonej w momencie zawierania ubezpieczenia

$$\frac{V_1(t, 1999) - V_1(t, 1999 + t)}{V_1(t, 1999)} \text{ dla } t = 0, 1, 2, \dots, 10.$$



Rys. 7. Udział różnicy między rezerwami liczonymi dla TTŻ z 1999 i 2009 r. w stosunku do rezerwy liczonej dla TTŻ z 1999 r.

Źródło: obliczenia własne.

Zauważmy, że im osoba starsza, tym większa jest wartość bezwzględna różnicy między rezerwami. O ile dla 20-latków jest ona prawie niezauważalna, dla 60-latków osiąga wartość zbliżoną do wartości rezerw liczonych dla TTŻ z 1999 roku. Różnice te wynikają z faktu, że prawdopodobieństwa wypłaty świadczenia ubezpieczeniowego (prawdopodobieństwo śmierci) jest niższe dla osób młodszych, a więc zróżnicowanie wysokości rezerw jest dla nich mniejsze niż dla osób starszych. Ponadto dla osób w wieku 60 lat przyrost przeciętnego dalszego trwania życia w stosunku do jego wielkości

$$\frac{e_x^{2009} - e_x^{1999}}{e_x^{1999}}$$

jest o wiele bardziej istotny niż dla osób młodszych, co jest widoczne w tab. 2. Dla Irlandii i Polski obserwujemy istotny udział przyrostu przeciętnego dalszego trwania życia w stosunku do przeciętnego dalszego trwania życia z 1999 r., co znacznie wpływa na różnicę między rezerwą liczoną na bazie TTŻ 1999 i rezerwą liczoną na podstawie bieżących TTŻ. Fakt ten uwypuklił także omawianą różnicę w przypadku Litwy, co zwiększyło możliwe niedoszacowanie rezerw.

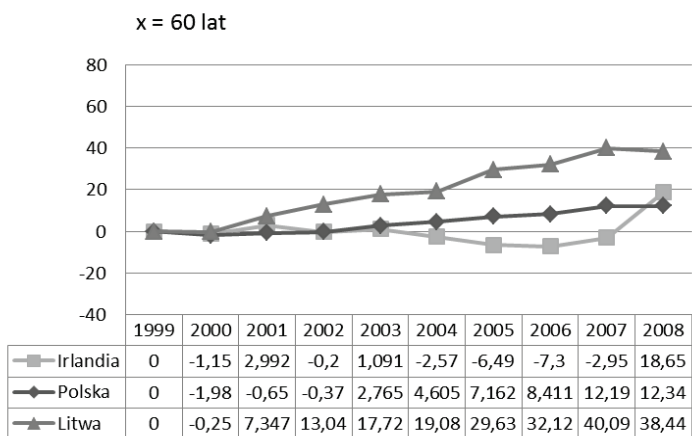
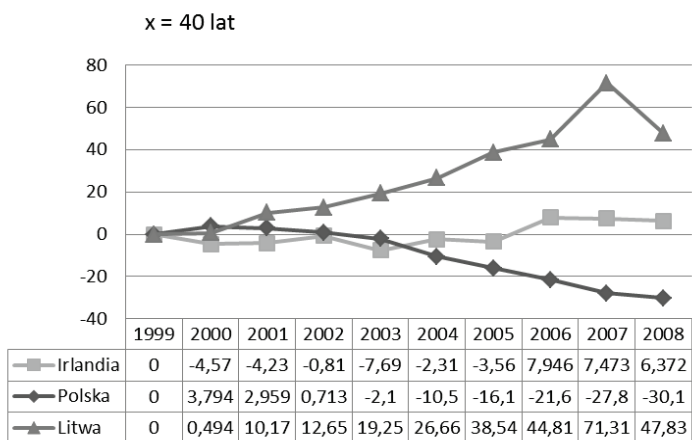
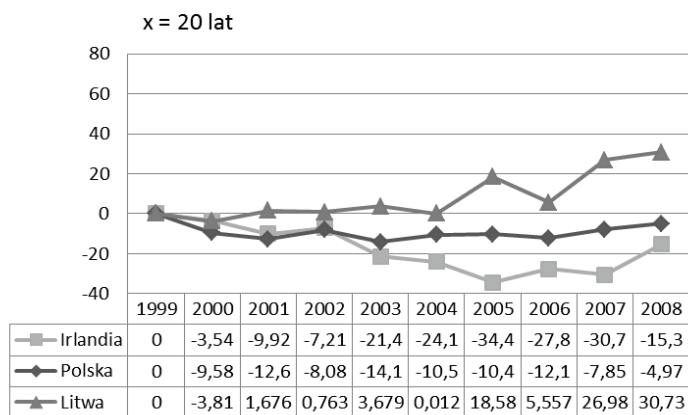
**Tabela 2.** Stosunek przyrostu przeciętnego dalszego trwania życia mężczyzn w latach 1999-2009 do przeciętnego dalszego trwania życia z 1999 r.

Wiek	20 lat	40 lat	60 lat
Litwa	1,68	0,99	-0,62
Polska	4,60	6,67	9,82
Irlandia	7,17	10,70	19,55

Źródło: opracowanie własne.

Wartość ujemna rezerwy jest sygnałem dla ubezpieczonego do rezygnacji z ubezpieczenia, gdyż wtedy spodziewane świadczenia są niższe niż wpłacone w przyszłości składki. Analizując rezerwy liczone dla bieżących tablic trwania życia, przykład takich sytuacji obserwujemy dla każdego wieku (rys. 6). W Irlandii i Polsce rezerwa dla bieżących TTŻ praktycznie w całym okresie ubezpieczenia jest ujemna dla osób w wieku 20 lat. Natomiast dla 40-latków obserwujemy ujemną rezerwę w Irlandii w pierwszym okresie trwania umów ubezpieczenia, tj. do roku 2005, a dla Polski od roku 2003 do końca okresu ubezpieczenia. Dla 60-letnich ubezpieczonych sytuacja w Polsce się zmienia i ujemną rezerwę obserwujemy do roku 2002, a w przypadku Irlandii dla 6 wybranych lat.

Gdy rezerwa jest ujemna w roku  $t$  trwania okresu ubezpieczenia, ubezpieczony mógłby zerwać umowę ubezpieczenia  $i$ , mając  $x + t$  lat, wykupić nowe ubezpieczenie na  $10-t$  lat (pozostałe jeszcze do końca okresu ubezpieczenia lata). Niech  $\check{p}(1999 + t)$  będzie roczną składką netto dla takiego ubezpieczenia określoną na postawie TTŻ z roku zakupu nowego ubezpieczenia. Rysunek 8 jest ilustracją gra-



**Rys. 8.** Przyrost składki nowego (10 – t)-letniego ubezpieczenia w stosunku do składki liczonej dla 10-letniego ubezpieczenia zawartego w 1999 r.

Źródło: opracowanie własne.

ficzną zmian procentowych składek netto nowego ubezpieczenia w stosunku do ubezpieczenia zakupionego w 1999 roku

$$\left( \frac{\check{p}(1999 + t)}{p(1999)} - 1 \right) \times 100\%.$$

Wartości dodatnie na rys. 8 świadczą o tym, że składka ubezpieczeniowa nowego ubezpieczenia byłaby wyższa niż starego o dany procent. Oznacza to, że ubezpieczonemu nie opłaca się zrywać ubezpieczenia, mimo że rezerwa  $V_1(t, 1999 + t)$  może być niższa niż rezerwa  $V_1(t, 1999)$  ubezpieczenia zawartego w 1999 roku. Przy zakładaniu nowego ubezpieczenia rezerwa w pierwszym roku jego trwania jest równa zero, a więc nie dość że składka nowego ubezpieczenia byłaby wyższa, to dodatkowo rezerwa byłaby niższa.

Wartości ujemne na rys. 8 świadczą o tym, że w danym roku składka nowo zawartego ubezpieczenia byłaby niższa o dany procent od składki określonej przy zawieraniu ubezpieczenia 10-letniego w 1999 roku. Jednocześnie wartości ujemne na rys. 8 pokrywają się dokładnie z wartościami ujemnymi rezerw liczonych dla bieżących tablic trwania życia dla 10-letniego ubezpieczenia na życie. Oba te fakty przemawiają za tym, że jeżeli ubezpieczony może być przyjęty do ubezpieczenia, to korzystne jest dla niego zerwanie ubezpieczenia zawartego w 1999 r. i wykupienie nowego, które gwarantuje niższą składkę oraz wyższą wartość rezerwy.

## 5. Podsumowanie

Przeprowadzona analiza wskazuje na to, że składki i rezerwy w krajach UE są dosyć zróżnicowane ze względu na warunki demograficzne. To zróżnicowanie wpływa w różny sposób na wielkości aktuarialne, a w konsekwencji na sytuację finansową ubezpieczyciela, szczególnie w przypadku długoterminowych umów ubezpieczenia. Oznacza to, że zmiany demograficzne mogą spowodować niedoszacowanie środków potrzebnych na wypłatę przyszłych świadczeń lub ich przeszacowanie.

Nowoczesne formy ubezpieczeń gwarantują ubezpieczonemu udział w podziale zysków firmy, bazując na zyskach, które przyniosły zainwestowane przez ubezpieczyciela części oszczędnościowe składek przez niego zapłaconych. Literatura aktuarialna poświęcona temu zagadnieniu analizuje problem w kontekście dynamiki stochastycznej stopy procentowej. Przedstawione wyniki analizy są impulsem do tego, że warto modelować strumienie przepływów pieniężnych wynikających z realizacji umowy ubezpieczenia, nie tylko ze względu na dynamikę zmian stopy procentowej, ale także ze względu na dynamikę zmian parametrów tablic trwania życia. Być może warto w trakcie trwania umowy ubezpieczenia rozważyć możliwość dopasowywania wysokości sumy ubezpieczenia także ze względu na wpływ zmian demograficznych na wysokość składek netto.

## Literatura

- Błaszczyszyn B., Rolski T., *Wykłady z matematyki ubezpieczeń na życie*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
- Bowers N.L., Gerber H.U., Hichmann J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Illinois, 1986.
- Dębicka J., *Rezerwy prospektywne w zmieniającym się otoczeniu demograficznym*, [w:] *Metody matematyczne, ekonometryczne i komputerowe w finansach i ubezpieczeniach 2009*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice 2011.
- Dębicka J., *Modelowanie strumieni finansowych w ubezpieczeniach wielostanowych*, Seria *Statystyka i Ryzyko*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław 2012.
- Eurostat, [www.epp.eurostat.ec.europa.eu](http://www.epp.eurostat.ec.europa.eu) (10.02. 2013).
- Gerber H.U., *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag, Zurich 1990.
- Human Mortality Database, University of California, Berkeley (USA), Max Planck Institute for Demographic Research (Germany), [www.mortality.org](http://www.mortality.org) or [www.humanmortality.de](http://www.humanmortality.de) (20.02.2013).
- Ostasiewicz S., *Składki w wybranych typach ubezpieczeń życiowych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2003.
- Ostasiewicz W. (red.), *Modele aktuarialne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2000.
- Stroiński E., *Ubezpieczenia na życie*, Wyższa Szkoła Ubezpieczeń i Bankowości, Warszawa 1996.

### VARYING PARAMETERS OF LIFE TABLES IN THE EUROPEAN UNION: INFLUENCE ON ACTUARIAL AMOUNTS

**Summary:** The calculation of reserves for each year of insurance period is made at the moment of policy issue and based on current life tables. During the insurance period life tables are changing. It means that premiums and prospective reserves are changing too, but according to a contract, an insurer cannot change insurance premiums and benefits. The aim of this paper is to analyze the influence of change of mortality in the European Union countries on premiums and prospective reserves in temporary life insurance contracts. The analysis is based on data between 1999 and 2009.

**Keywords:** modified multiple state model, life table, net premium, net prospective reserve, temporary insurance.

## Załącznik 1

### Przeciętne dalsze trwanie życia mężczyzn

Rok	1999			2009		
	20	40	60	20	40	60
Austria	55,6	36,6	19,4	58,2	39,0	21,4
Belgia	55,2	36,4	19,2	57,9	38,8	21,3
Bułgaria	50,2	31,5	16,0	51,4	32,5	16,8
Cypr	56,9	38,2	20,3	59,2	40,2	22,1
Czechy	52,2	33,3	16,9	54,7	35,6	18,7
Dania	54,9	35,9	18,7	57,3	38,1	20,6
Estonia	46,2	28,8	15,1	50,3	32,3	17,0
Finlandia	54,4	35,7	18,8	57,1	38,3	21,1
Francja	55,8	37,0	20,3	58,6	39,6	22,5
Grecja	56,4	37,5	20,0	58,4	39,5	22,0
Hiszpania	56,1	37,3	20,0	59,2	39,9	22,2
Holandia	56,1	36,8	19,0	59,2	39,8	21,6
Irlandia	54,4	35,5	17,9	58,3	39,3	21,4
Litwa	47,7	30,4	16,2	48,5	30,7	16,1
Luxemburg	55,2	36,5	19,0	58,6	39,3	21,5
Łotwa	45,9	28,8	15,0	49,2	31,1	16,1
Malta	56,1	36,9	18,8	58,5	39,4	20,9
Niemcy	55,6	36,5	19,3	58,3	39,0	21,5
Polska	50,0	31,5	16,3	52,3	33,6	17,9
Portugalia	53,7	35,7	18,7	57,1	38,0	20,9
Rumunia	49,5	31,0	16,0	51,1	32,3	17,1
Słowacja	50,1	31,4	15,9	52,2	33,3	17,2
Słowenia	52,6	33,8	17,4	56,3	37,2	20,1
Szwecja	57,7	38,4	20,5	59,9	40,6	22,4
Węgry	47,7	29,2	15,3	50,9	31,8	16,9
Wielka Brytania	55,8	36,8	19,2	59,0	39,8	22,1
Włochy	57,2	38,1	20,3	59,9	40,6	22,4

**Załącznik 2**

## Przeciętne dalsze trwanie życia kobiet

Rok	1999			2009		
	20	40	60	20	40	60
Austria	61,6	42,0	23,7	63,7	44,1	25,4
Belgia	61,6	42,1	23,9	63,2	43,7	25,4
Bułgaria	56,5	37,2	19,4	58,4	39,0	21,1
Cypr	60,7	41,4	22,6	63,9	44,3	25,3
Czechy	58,9	39,3	21,1	60,9	41,3	22,9
Dania	59,4	39,9	22,0	61,5	41,9	23,6
Estonia	57,2	38,0	20,8	60,7	41,4	23,3
Finlandia	61,7	42,2	23,8	63,9	44,3	25,9
Francja	63,3	43,9	25,6	65,4	45,9	27,5
Grecja	61,1	41,6	22,8	63,1	43,5	24,7
Hiszpania	63,0	43,4	24,7	65,3	45,7	26,9
Holandia	61,2	41,6	23,4	63,4	43,7	25,3
Irlandia	59,6	40,0	21,7	63,1	43,5	25,0
Litwa	58,2	39,1	21,6	59,3	40,0	22,4
Luxemburg	61,8	42,3	24,1	63,7	44,0	25,6
Łotwa	56,8	37,8	20,7	58,9	39,6	22,1
Malta	60,4	40,7	22,0	63,4	43,8	24,9
Niemcy	61,6	42,0	23,7	63,2	43,6	25,1
Polska	58,4	38,9	21,1	60,8	41,2	23,2
Portugalia	60,5	41,2	22,8	63,0	43,5	24,9
Rumunia	56,2	36,9	19,4	58,5	39,0	21,2
Słowacja	58,3	38,8	20,8	59,8	40,2	22,1
Słowenia	60,0	40,4	22,5	63,1	43,4	24,8
Szwecja	62,4	42,8	24,3	63,9	44,2	25,5
Węgry	56,4	37,1	20,1	59,0	39,5	22,1
Wielka Brytania	60,5	41,0	22,7	63,0	43,5	25,1
Włochy	63,2	43,6	24,9	65,0	45,3	26,5