

Kamila Galin

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

KIEDY PARAMETRY MODELU GARCH WYMAGAJĄ PONOWNEJ ESTYMACJI?

1. Wstęp

Popularność modelu GARCH(p,q) wynika z faktu, że model ten dobrze dopasowuje się do finansowych szeregów czasowych przy małej liczbie parametrów. Jednak raz dobrane parametry modelu mogą z czasem okazać się nieodpowiednie, dlatego ważne jest, aby wykryć moment, w którym parametry wymagają ponownej estymacji.

Celem artykułu jest zaprezentowanie oraz poddanie pewnym testom metody, która pozwala stwierdzić, kiedy należy ponownie wyznaczyć wartości parametrów modelu.

Praca obejmuje krótką analizę wpływu zaburzeń stacjonarności na estymację parametrów modelu GARCH(1,1), opis metody wykrywania zmiany parametrów oraz wyniki zastosowania tej metody. Obliczenia i wykresy zostały wykonane w środowisku Matlab.

W pierwszej części pokazane zostanie (podobnie jak w [Polzehl, Spokoiny 2004]), że zmiana wartości jednego parametru modelu GARCH(1,1) wpływa na zawyżanie estymowanej sumy $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$, powodując pozorny efekt IGARCH (opisany np. w [Galin 2007; Starica, Herzel, Nord 2006]).

W kolejnej części referatu przedstawiona zostanie metoda wykrywania zmiany wartości parametrów modelu GARCH (której dokładny opis znajduje się w [Berkes i in. 2004]). Następnie metoda ta poddana będzie testom na wygenerowanych szeregach czasowych, tak aby sprawdzić, z jakim opóźnieniem wykrywane są zmiany, oraz jak często występują fałszywe informacje o wystąpieniu zmiany.

Na koniec opisana metoda zostanie zastosowana do wykrycia zmiany w szeregu dziennych stóp zwrotu indeksu WIG.

2. Wpływ zaburzeń stacjonarności na estymację parametrów modelu

Model GARCH(p,q) ze względu na dość dobre odwzorowanie pewnych własności finansowych szeregów czasowych jest często stosowany do opisu szeregów stóp zwrotu

akcji czy indeksów giełdowych. Podobnie jak ARCH(p, q) pozwala na modelowanie szeregów ze zmienną w czasie warunkową wariancją, przy czym dość dobrze dopasowuje się do danych empirycznych dla małych wartości p i q . Wiele badań pokazuje, że większość szeregów stóp zwrotu indeksów i akcji można dobrze opisać za pomocą modelu GARCH(1,1) (np. na GPW w Warszawie [Fiszeder 2001]).

Szereg czasowy $(X_t)_{t \in N}$ w modelu GARCH(1,1) można przedstawić za pomocą pary równań:

$$X_t = \sigma_t Z_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad t \in N,$$

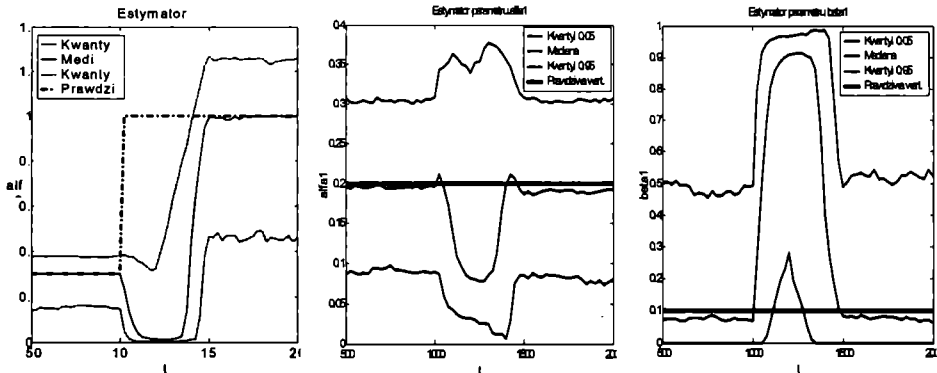
gdzie $(Z_t)_{t \in N}$ jest szeregiem niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie, spełniającym warunki: $EZ_t = 0$ i $EZ_t^2 = 1$ dla $t \in N$, $\alpha_0 > 0, \alpha_1, \beta_1 \geq 0$ [Bollerslev, Engle 1993].

Jeżeli $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, to $(X_t)_{t \in N}$ jest szeregiem stacjonarnym w szerszym sensie. Szczególnym przypadkiem modelu GARCH(1,1), w którym $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, jest model IGARCH(1,1) (*integrated GARCH*). Szereg taki ma nieskończoną bezwarunkową wariancję, a szokowe wartości warunkowej wariancji mają wpływ na wszystkie przyszłe wartości wyrazów szeregu.

Popularność modelu IGARCH wynika z faktu, że wiele badań finansowych szeregów czasowych wskazuje na bliską jedności sumę estymowanych wartości $\hat{\alpha}_1$ i $\hat{\beta}_1$ [Breidt, Crato, Lima 1996]. Okazuje się jednak, że suma $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$ jest czasem sztucznie zawyżana z powodu zaburzeń stacjonarności szeregu [Mikosch, Starica 2000; Starica, Herzel, Nord 2006].

Aby pokazać, jak brak stacjonarności może wpływać na estymację parametrów modelu GARCH(1,1), poddany zostanie analizie sztucznie wygenerowany szereg o warunkowym rozkładzie normalnym. Szereg ma 2000 wyrazów, parametry modelu mają następujące wartości: $\alpha_1 = 0,2$, $\beta_1 = 0,1$. Dla pierwszych 1000 wyrazów $\alpha_0 = 0,3$, następnie wartość ta zmienia się i dla kolejnych 1000 wyrazów $\alpha_0 = 1$. Parametr α_0 został wybrany tak, by bezwarunkowa wariancja różniła się znacznie w dwóch częściach szeregu, gdyż wiele badań (np. [Galini 2007; Starica, Herzel, Nord 2006]) wskazuje, że zmiana bezwarunkowej wariancji wpływa na zaburzenie estymowanej sumy $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$. Z tak wygenerowanego szeregu estymowane były parametry modelu GARCH(1,1): za każdym razem brano pod uwagę 500 wyrazów szeregu, parametry wyznaczone były co 25 wyrazów, zastosowano metodę największej wiarygodności. Cała procedura została powtórzona 1000 razy.

Rysunek 1 przedstawia prawdziwe wartości parametrów: α_0 , α_1 , β_1 oraz uzyskane na podstawie 1000 symulacji: medianę, kwantyle rzędu 0,05 i 0,95. Po lewej stronie przedstawione są wyniki estymacji parametru α_0 . Gdy t przekracza 1000, gwałtownie zmienia się wartość α_0 i rośnie bezwarunkowa wariancja. To zaburzenie stacjonarności bardzo szybko znajduje odzwierciedlenie w estymowanej warto-



Rys. 1. Prawdziwe wartości parametrów (gruba linia przerywana) oraz wyniki estymacji tych parametrów: mediana (linia ciągła) oraz kwantyle rzędu 0,05 i 0,95 (cienka linia przerywana).

Wykresy dotyczą parametrów: α_0 (po lewej), α_1 (na środku), β_1 (po prawej).

Źródło: opracowanie własne.

ści $\hat{\alpha}_0$, która zaczyna spadać pomimo wzrostu prawdziwej wartości tego parametru. Jednocześnie estymatory pozostałych dwóch parametrów zaczynają zmieniać swoje wartości, mimo iż w omawianym przykładzie parametry te są stałe. Maleje $\hat{\alpha}_1$, natomiast $\hat{\beta}_1$ rośnie tak znacznie, że suma $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$ zbliża się do jedności i występuje pozorny efekt IGARCH.

2. Wykrywanie momentu zmiany parametrów modelu

Różne podejścia do analizy zaburzeń stacjonarności szeregów czasowych oraz wykrywania zmiany parametrów modelu GARCH zostały przedstawione m.in. w: [Mikosch, Starica 2000; Berkes i in. 2004; Polzehl, Spokoiny 2004].

Jedną z metod pozwalających na wykrywanie momentu zmiany wartości parametrów modelu jest zaproponowana w [Mikosch, Starica 2000] metoda oparta na analizie funkcji wiarygodności.

Jeżeli y_1, y_2, \dots, y_m są kolejnymi obserwacjami, θ jest pionowym wektorem parametrów, przez $l_i(\theta)$ oznaczona jest warunkowa gęstość odpowiadająca obserwacji y_i , natomiast $l_i'(\theta)$ jest pionowym wektorem pochodnych cząstkowych l_i względem parametrów modelu, to macierz \hat{D}_m definiuje się następująco:

$$\hat{D}_m = \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i \leq m} \hat{l}'_i(\hat{\theta}_m)^T \hat{l}'_i(\hat{\theta}_m).$$

Za pomocą powyższej macierzy określa się statystykę $C(k)$ służącą do testowania stałości parametrów modelu:

$$C(k) = \left(1 + \frac{k}{m}\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{m}} \left| \sum_{m < i \leq m+k} l'_i(\hat{\theta}_m) \hat{D}_m^{-1/2} \right|, \quad 1 \leq k < \infty,$$

gdzie $|\cdot|$ oznacza normę maksimum.

Schemat metody jest następujący: na podstawie próby y_1, y_2, \dots, y_m estymowane są parametry modelu, które wykorzystywane są później do wyznaczania wartości statystyki $C(k)$. Jeśli wartość $C(k)$ przekracza pewną graniczną wartość, to sygnał, że y_{m+k} , opisywany jest przez model z innymi parametrami niż wyrazy y_1, y_2, \dots, y_m .

Przy testowaniu stałości parametrów modelu ważne jest, aby wszelkie zmiany wartości parametrów zostały wykryte (i to jak najszybciej po wystąpieniu zmiany). Istotne jest także, aby fałszywy alarm występował możliwie rzadko, to znaczy, by stosowana metoda prawie nigdy nie wskazywała na zmianę parametrów, podczas gdy w rzeczywistości zmiana nie występuje. W przedstawionej metodzie testowania stałości parametrów przy dostatecznie dużej wartości m wartość graniczną dla statystyki $C(k)$ można określić tak, by prawdopodobieństwo fałszywego alarmu miało z góry ustalony niski poziom. Z kolei wszelkie zmiany parametrów zostają wykryte (choć nie zawsze natychmiast).

Niech k_m oznacza moment przekroczenia przez $C(k)$ po raz pierwszy granicznej wartości. Przy pewnych słabych założeniach [Berkes i in. 2004, s. 10] i ustalonym prawdopodobieństwie fałszywego alarmu α można wskazać taką wartość graniczną dla statystyki $C(k)$, że w przypadku niezmiennych parametrów: $\lim_{m \rightarrow \infty} P(k_m < \infty) = \alpha$. Natomiast w przypadku, gdy zmiana parametrów występuje, (przy założeniach opisanych w [Berkes i in. 2004, s. 12]) $\lim_{m \rightarrow \infty} P(k_m < \infty) = 1$, czyli zmiana parametrów zostanie na pewno w którymś momencie wykryta.

Dla przyjętego prawdopodobieństwa błędu $\alpha = 0,10$ wartość graniczna to 2,382, natomiast gdy $\alpha = 0,05$, o zmianie parametrów świadczy przekroczenie przez $C(k)$ progu 2,632 [Berkes i in. 2004, s. 13].

Przedstawiona metoda zostanie zastosowana do wygenerowanych szeregów czasowych z modelu GARCH(1,1) z innowacjami o rozkładzie normalnym. Rozważane będą trzy modele z różnymi parametrami:

Model I: $\alpha_0 = 0,1$, $\alpha_1 = 0,5$, $\beta_1 = 0,3$.

Model II: $\alpha_0 = 1,0$, $\alpha_1 = 0,4$, $\beta_1 = 0,3$.

Model III: $\alpha_0 = 0,8$, $\alpha_1 = 0,2$, $\beta_1 = 0,1$.

Za każdym razem parametry modelu będą wyznaczone na podstawie 1000 początkowych wyrazów ($m = 1000$) lub 500 początkowych wyrazów ($m = 500$) i na tej podstawie obliczana będzie wartość statystyki $C(k)$ dla kolejnych wyrazów szeregu.

Aby zbadać, jak w przypadku skończonej wartości parametru m oraz określonego horyzontu czasowego kształtuje się wartość prawdopodobieństwa fałszywego alarmu, wygenerowany zostanie 1000 razy szereg z modelu GARCH(1,1) z parametrami z modelu I. Na podstawie 1000 lub 500 początkowych wyrazów wyznaczone zostaną parametry modelu, następnie analizowana będzie liczba fałszywych wskazań zmiany parametrów dla 1000 kolejnych wyrazów szeregu, czyli tych o numerze $(m + k)$, $k = 1, \dots, 1000$.

Wyznaczone prawdopodobieństwa fałszywego alarmu, który pojawia się przed momentem $k = 1, 100, 200, \dots, 1000$, przedstawia tab. 1. Badania zostały przeprowadzone dla dwóch wartości parametru α : 0,10 i 0,05.

Tabela 1. Prawdopodobieństwo błędnego wskazania zmiany parametrów przed momentem k

Wyszczególnienie	$\alpha \backslash k$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
	Model I, $m = 500$	0,10	0,012	0,027	0,045	0,057	0,071	0,087	0,099	0,112	0,120
	0,05	0,010	0,019	0,028	0,038	0,051	0,063	0,071	0,080	0,092	0,096
Model I, $m = 1000$	0,10	0,002	0,003	0,004	0,009	0,014	0,017	0,020	0,024	0,028	0,033
	0,05	0,001	0,001	0,003	0,008	0,009	0,014	0,016	0,023	0,029	0,031

Źródło: opracowanie własne.

Widać, że gdy $m = 1000$, prawdopodobieństwo pojawienia się fałszywego alarmu podczas analizy kolejnego tysiąca wyrazów jest zdecydowanie mniejsze od wartości α . W przypadku modelu I teoretyczne prawdopodobieństwo α zostałyby osiągnięte dla k zdecydowanie większego niż 1000. Jednak rozważając ten sam model i wartość $m = 500$, uzyskuje się o wiele większe prawdopodobieństwa fałszywego alarmu. Gdy $\alpha = 0,10$, teoretyczna wartość prawdopodobieństwa zostaje prawie osiągnięta dla $k = 700$. Natomiast gdy $\alpha = 0,05$, częstość występowania fałszywych alarmów jest większa niż teoretyczna już dla $k = 500$. Zatem w tym przypadku bezpieczniej jest uwzględnić w analizie horyzont nieprzekraczający 500 wyrazów.

Aby przekonać się, z jakim opóźnieniem wykrywane są zmiany parametrów, przebadane zostaną wygenerowane szeregi czasowe, w których parametry modelu GARCH(1,1) zmieniają się w momencie $k = 50$ lub 500. Przyjęto, że $m = 1000$ oraz $m = 500$.

Rozważane będą następujące połączenia szeregów: model I–model II, model I–model III, model II–model III. Parametry przedstawionych wcześniej modeli zostały dobrane tak, że przy zmianie modelu I na model II parametr β_1 pozostaje stały, α_1 nieznacznie się zmienia, natomiast za sprawą dużej zmiany α_0 rośnie gwałtownie bezwarunkowa wariancja. Gdy model I przechodzi w model III, żaden z parametrów nie pozostaje stały, natomiast bezwarunkowa wariancja zmienia się łagodniej niż w poprzednim przypadku. W ostatniej rozważanej sytuacji wartość α_0 nieznacznie maleje, a pozostałe parametry zmieniają się podobnie jak w przypadku kombinacji model I–model III.

Tabela 2 przedstawia informacje dotyczące momentu wykrycia zmiany parametrów modelu dla dwóch wartości parametru α . Wyniki te uzyskano, przeprowadzając test 1000 razy. Wartość w nawiasie to liczba fałszywych wskazań przed momentem zmiany parametrów, $E\hat{k}$ to średni moment wykrycia zmiany. Natomiast $q_{0,90}$ jest kwantylem rzędu 0,9 momentu wykrycia zmiany. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem 0,9 zmiana parametrów jest wykrywana nie później niż w momencie $q_{0,90}$.

Tabela 2. Wartości średnie oraz kwantyle rzędu 0,9 momentu wykrycia zmiany parametrów. Wartości w nawiasach oznaczają liczbę wskazań przed momentem zmiany parametrów

		$m = 1000$		$m = 500$	
α		$k = 50$	$k = 500$	$k = 50$	$k = 500$
I ↓ II	0,1 0	$E\hat{k} = 104, (0)$ $q_{0,90} = 136$	$E\hat{k} = 568, (14)$ $q_{0,90} = 623$	$E\hat{k} = 93, (7)$ $q_{0,90} = 125$	$E\hat{k} = 549, (80)$ $q_{0,90} = 633$
	0,0 5	$E\hat{k} = 111, (1)$ $q_{0,90} = 150$	$E\hat{k} = 579, (8)$ $q_{0,90} = 636$	$E\hat{k} = 96, (6)$ $q_{0,90} = 129$	$E\hat{k} = 566, (40)$ $q_{0,90} = 643$
I ↓ III	0,1 0	$E\hat{k} = 159, (1)$ $q_{0,90} = 224$	$E\hat{k} = 644, (13)$ $q_{0,90} = 746$	$E\hat{k} = 134, (5)$ $q_{0,90} = 197$	$E\hat{k} = 624, (60)$ $q_{0,90} = 765$
	0,0 5	$E\hat{k} = 171, (0)$ $q_{0,90} = 246$	$E\hat{k} = 661, (8)$ $q_{0,90} = 763$	$E\hat{k} = 142, (7)$ $q_{0,90} = 212$	$E\hat{k} = 644, (51)$ $q_{0,90} = 791$
II ↓ III	0,1 0	$E\hat{k} = 369, (0)$ $q_{0,90} = 499$	$E\hat{k} = 956, (8)$ $q_{0,90} = 1196$	$E\hat{k} = 339, (3)$ $q_{0,90} = 524$	$E\hat{k} = 969, (77)$ $q_{0,90} = 1403$
	0,0 5	$E\hat{k} = 404, (2)$ $q_{0,90} = 551$	$E\hat{k} = 1025, (4)$ $q_{0,90} = 1196$	$E\hat{k} = 388, (5)$ $q_{0,90} = 590$	$E\hat{k} = 1064, (65)$ $q_{0,90} = 1573$

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki zawarte w tab. 2 pokazują, że gdy $m = 1000$ i $k = 50$, fałszywe alarmy prawie nie występują, natomiast częstotliwość takich nieprawidłowych wskazań została nieznacznie przekroczona jedynie w dwóch przypadkach (w obu tych sytuacjach $m = 500$, $k = 500$, $\alpha = 0,05$). Gdy $\alpha = 0,10$ moment zmiany jest wykrywany wcześniej niż w przypadku $\alpha = 0,05$. Rozważając dwie wartości parametru m , widać, że mniejsze opóźnienia w wykrywaniu zmian parametrów modelu występują, gdy $m = 500$, ale wówczas częściej pojawiają się fałszywe alarmy, które z kolei w pewnym niewielkim stopniu zaniżają wartość średniego momentu wykrycia zmiany.

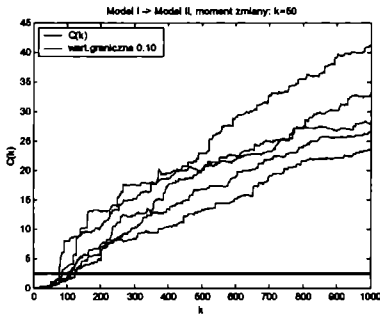
Spśród trzech analizowanych kombinacji parametrów modelu GARCH(1,1) najszybciej wykrywane są zmiany w przypadku, gdy parametry modelu I zastępowane są parametrami modelu II. Występuje tu mała zmiana wartości α_1 i β_1 oraz znaczny wzrost α_0 . Bezwarunkowa wariancja zmienia się z wartości 0,5 na ok. 3,3, rośnie zatem przeszło sześciokrotnie. Mniejsza zmiana bezwarunkowej wa-

wariancji ma miejsce w przypadku zmiany parametrów z modelu I na model III. Wariancja rośnie w przybliżeniu dwukrotnie. Zmiana parametrów jest wykrywana z większym opóźnieniem niż w omawianym wyżej przypadku. Najpóźniej zmiany wykrywane są w przypadku, gdy model II przechodzi w model III. Bezwarunkowa wariancja zmienia się bardziej niż w poprzednim przypadku (trzykrotnie maleje), natomiast występuje tu niewielka zmiana parametru α_0 z wartości 1 na 0,8.

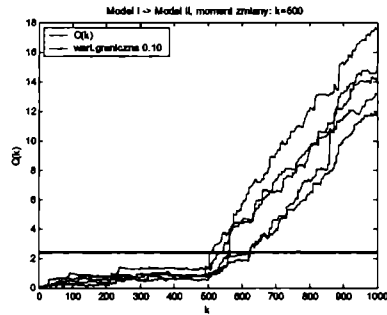
Wyniki w tab. 2 pokazują, że zmiany nie są wykrywane natychmiast po ich wystąpieniu. Średnie opóźnienia w wykrywaniu zmian kształtują się w granicach od 43 do 354 w przypadku $m = 50$, a gdy $m = 500$, średnie opóźnienia osiągają wartości 49-564.

Przykładowe wartości statystyki $C(k)$ dla wygenerowanych szeregów, w których parametry ulegają zmianie, przedstawia rys. 2, natomiast na rys. 3 zaprezentowano cztery histogramy przedstawiające momenty wykrycia zmiany parametrów. Wykresy w pierwszych kolumnach rys. 2 i 3 odnoszą się do sytuacji, gdy $m = 1000$, $k = 50$, początkowe wyrazy szeregu pochodzą z modelu I, natomiast wyrazy po zmianie parametrów opisuje model II (rys. na górze) oraz model III (rys. na dole). Widać, że w tym drugim przypadku zmiany wykrywane są później.

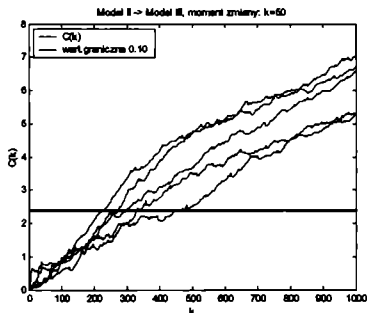
model I -> model II, $m = 1000$, $k = 50$



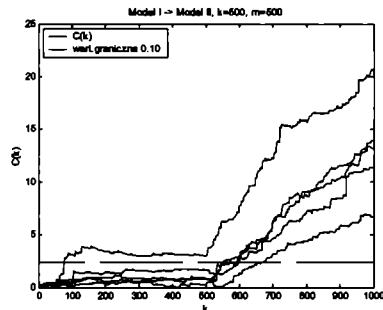
model I -> model II, $m = 1000$, $k = 500$



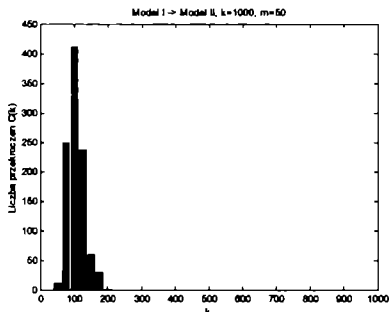
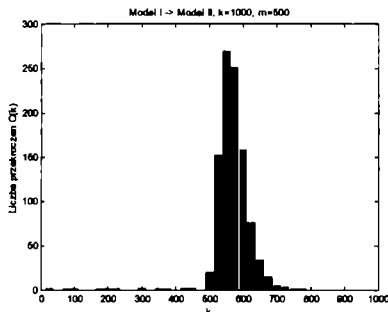
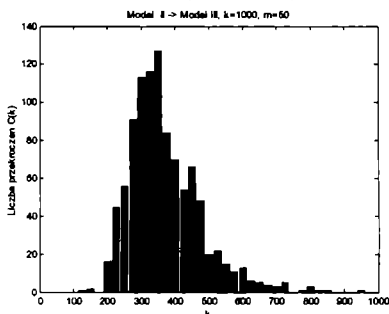
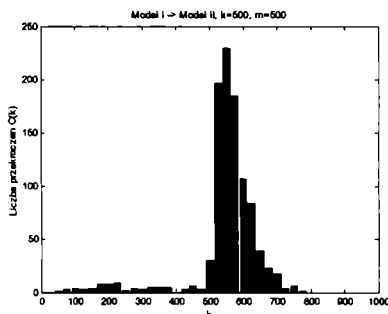
model II -> model III, $m = 1000$, $k = 50$



model I -> model II, $m = 500$, $k = 500$



Rys. 2. Przykładowe realizacje statystyki $C(k)$
Źródło: opracowanie własne.

model I -> model II, $m = 1000, k = 50$ model I -> model II, $m = 1000, k = 500$ model II -> model III, $m = 1000, k = 50$ model I -> model II, $m = 500, k = 500$ 

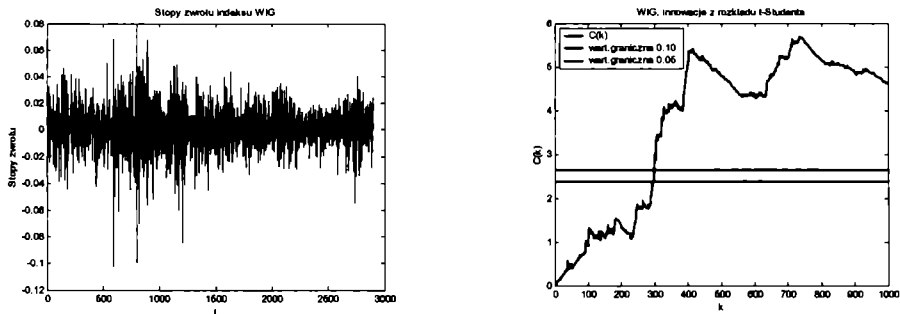
Rys. 3. Histogramy opisujące moment wykrycia zmiany parametrów
Źródło: opracowanie własne.

Analizując wykresy po prawej przedstawione na rys. 2 i 3 (model I–model II, $k = 500$), można zauważyć, że gdy $m = 1000$ (rys. na górze) liczba fałszywych alarmów jest mniejsza niż w przypadku $m = 500$ (rys. na dole).

3. Wykrywanie zmian w stopach zwrotu indeksu giełdowego

Przedstawiona w pracy metoda została zastosowana, aby wykryć pierwszy moment zmiany parametrów szeregu czasowego opisującego dzienne logarytmiczne stopy zwrotu indeksu WIG pochodzące z okresu 16.06.1995-16.01.2007 (rys. 4 po lewej). Wyniki wcześniejszej analizy zaburzeń stacjonarności [Galin 2007] wskazują na fakt, iż zmiany w modelu opisującym stopy zwrotu indeksu WIG występują częściej niż co 1000 dni. W związku z tym do wyznaczenia początkowych parametrów modelu przyjęto dość krótki fragment o długości 500 wyrazów ($m = 500$), w obrębie którego (według wyników uzyskanych w [Galin 2007] parametry modelu można uznać za stałe. Rozważany był model

GARCH(1,1) z innowacjami pochodzącymi z rozkładu t-Studenta. Wartości statystyki $C(k)$ przedstawione są na rys. 4 po prawej.



Rys. 4. Dienne stopy zwrotu indeksu WIG (po lewej) oraz wartości statystyki $C(k)$ dla tego indeksu (po prawej)
Źródło: opracowanie własne.

Pierwsza zmiana parametrów została zidentyfikowana w momencie $t = 796$ przy założeniu, że $\alpha = 0,10$ oraz w momencie $t = 797$ przy założeniu, że $\alpha = 0,05$ (rys. 4 po prawej). Początkowe wartości parametrów modelu to: $\nu = 10,5$, $\alpha_0 = 1,12 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_1 = 0,22$, $\beta_1 = 0,25$. Jak widać, suma $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$ jest zdecydowanie mniejsza od jedności, zatem model ten nie przypomina modelu IGARCH. Jak pokazano wcześniej, zmiana wartości parametrów modelu może wpływać na sztuczne zawyżanie estymowanej wartości $\hat{\beta}_1$. Zastosowana metoda wskazuje na wystąpienie zmiany parametrów przed osiemsetnym wyrazem szeregu, a wartość $\hat{\beta}_1$ estymowana na podstawie pierwszych 800 wyrazów szeregu wynosi 0,63, czyli jest przeszło dwukrotnie większa niż wartość początkowa. Estymowana wartość $\hat{\beta}_1$ może być w tym przypadku sztucznie zawyżona z powodu zaburzeń stacjonarności.

4. Podsumowanie

Pierwszy empiryczny przykład zaprezentowany w artykule pokazał, że zmiana choćby jednego parametru modelu GARCH(1,1) może spowodować znaczne zaburzenia w wynikach estymacji parametrów modelu, a dokładnie zawyżanie estymowanej sumy $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$.

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda została poddana kilku testom. Na ich podstawie można stwierdzić, że metoda w różnych przypadkach wykrywa zmiany z różnym opóźnieniem. Metoda sprawdziła się najgorzej, gdy wszystkie parametry zmieniały nieznacznie swe wartości. Natomiast zmiany były wykrywane najszybciej

kiej w przypadku, gdy α_0 gwałtownie rosło i znacznie zwiększała się bezwarunkowa wariancja.

Na koniec przeanalizowany został szereg stóp zwrotu indeksu WIG. Przy zastosowaniu opisanej metody wyznaczony był moment pierwszej zmiany parametrów w tym szeregu. Zaobserwowany został również znaczny wzrost estymowanej sumy $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$, który prawdopodobnie jest tylko pozornym wzrostem spowodowanym zaburzeniem stacjonarności w szeregu.

Literatura

- Berkes I., Gombay E., Horvath L., Kokoszka P., *Sequential Change-Point Detection in GARCH(p,q) Models*, „Econometric Theory” 2004, nr 20, s. 1140-1167.
- Bolerslev T., Engle R.F., *ARCH Models*, 1993, Praca Naukowa nr 93-49, <http://ideas.repec.org/p/cdl/ucsdec/93-49.html>.
- Breidt F.J., Crato N., Lima P., *On the Detection and Estimation of Long Memory in Stochastic Volatility*, „Journal of Econometrics” 1996, nr 83, s. 325-348.
- Fiszeder P., *Jednorównaniowe modele GARCH – analiza procesów zachodzących na GPW w Warszawie. Dynamiczne modele ekonometryczne*, Toruń 2001.
- Galin K., *Analiza efektu IGARCH oraz efektu długozasięgowych zależności w szeregu stóp zwrotu indeksu WIG*, [w:] W. Ronka-Chmielowiec, K. Jajuga (red.), *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, AE, Wrocław 2007.
- Mikosch T., Starica C., *Change of Structure in Financial Time Series, Long Range Dependence and the GARCH Model*, 2000, <http://cls.dk/caf/wp/wp-58.pdf>.
- Polzehl J., Spokoiny V., *Varying Coefficient GARCH Versus Local Constant Volatility Modeling. Comparison of the Predictive Power*, maszynopis nr 977, Berlin 2004.
- Starica C., Herzel S., Nord T., *The Impact of the IGARCH Effect on Longer-Horizon Volatility Forecasting*, 2006, www.unipg.it/herzel.

WHEN GARCH PARAMETERS NEED TO BE REESTIMATED?

Summary

In the first part of the article, it is shown that a change in one GARCH parameter may lead to false parameters estimation results. A method of detecting GARCH parameters changepoint is presented in the next part of the paper. The method is tested on artificially generated time series and is applied to detect the first parameters changepoint in the rates of return of the WIG index.