

**Ewa Chodakowska, Marta Komuda**

Politechnika Białostocka

---

## ZGODNOŚĆ RANKINGÓW JEDNOSTEK SEKTORA EDUKACJI UZYSKANYCH ZA POMOCĄ METODY OBWIEDNI DANYCH

---

**Streszczenie:** W artykule zbadano zgodność rankingów uzyskanych za pomocą metody obwiedni danych (DEA). Na podstawie eksperymentu, którego podstawą było badanie uporządkowania białostockich gimnazjów, można powiedzieć, że trafna ocena względnej efektywności szkół metodą DEA zależy w dużym stopniu od poprawnego doboru zmiennych i właściwego wyboru modelu. Problem negatywnego wpływu złej specyfikacji modelu na indywidualne wartości efektywności poszczególnych jednostek jest bardziej istotny w przypadku pominięcia istotnej zmiennej niż uwzględnienia zmiennej nadmiarowej. Metoda DEA wykazała wysoką odporność na różną skalę wielkości czy wprowadzanie informacji skorelowanych.

### 1. Wstęp

Rankingi cieszą się dużym zainteresowaniem. Są odpowiedzią na potrzebę posiadania dającej się łatwo interpretować informacji na temat pozycji jednostki wśród innych. Powszechnej modzie na rankingi nie oparła się także oświata na poziomie podstawowym i średnim.

Obecnie w Polsce rankingi jednostek oświatowych konstruowane są zazwyczaj na podstawie arbitralnie wybranych wskaźników i przy dowolnie określonych ich wagach. Najczęściej zaś podstawą oceny danej szkoły jest tylko średnia wyników na egzaminach, jaką osiągnęli jej uczniowie. Zastosowanie metody obwiedni danych (*Data Envelopment Analysis* — DEA) jest alternatywnym sposobem wykorzystania wyników egzaminacyjnych pozwalającym ocenić wkład szkoły w końcowy rezultat. Niweluje też problem braku „cen rynkowych”, czyli wag uwzględnianych kryteriów.

W artykule dokonano analizy rankingów jednostek sektora edukacji uzyskanych za pomocą metody DEA. Na przykładzie białostockich gimnazjów publicznych dokonano wielokrotnego porządkowania szkół ze względu na wybrane kryteria uwzględniające różne potencjalne oczekiwania wybranych odbiorców rankingów. Zbadano stałość uzyskanych przez szkoły pozycji w zależności od zbioru badanych cech przy założeniu najbardziej korzystnego dla każdej szkoły doboru wag.

## 2. Metoda *Data Envelopment Analysis*

Na świecie metoda DEA przeżywa obecnie gwałtowny rozwój. Stała się popularnym i często stosowanym sposobem rozwiązywania problemów związanych z analizą efektywności w różnych obszarach gospodarki i administracji.

Metoda DEA wywodzi się z koncepcji efektywności M.J. Farrell'a [Farrell 1957, s. 253-281], który zaproponował, aby efektywność szacować jako miarę względną, określającą stosunek nakładów do wyników w odniesieniu do wartości maksymalnej osiągananej w danych warunkach technologicznych.

Podstawowy model metody DEA zorientowany na wejścia polega na rozwiązaniu dla każdego badanego obiektu jednostki decyzyjnej (*Decision Making Unit* — DMU) zadania programowania liniowego [Cooper, Seiford, Tone 2007, s. 43; Coelli, Rao, Battese 2002, s. 141; Cooper, Seiford, Zhu 2004, s. 13; Ramanathan 2003, s. 63]:

$$\min \theta, \quad (1)$$

przy ograniczeniach:

$$\theta x_{i0} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$y_{r0} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie:  $y_r$  — ilość produktu typu  $r$  wytworzona przez DMU $_j$  (wynik/wyjście),  
 $x_i$  — ilość zasobu rodzaju  $i$  zużywana przez DMU $_j$  (nakład/wejście),  
 $y_{r0}$  — ilość produktu typu  $r$  wytworzona przez DMU $_0$ ,  
 $x_{i0}$  — ilość zasobu rodzaju  $i$  zużywana przez DMU $_0$ ,  
 $r = 1, 2, \dots, s$  — liczba typów produktów wytwarzanych,  
 $i = 1, 2, \dots, m$  — liczba rodzajów zasobów zużywanych,  
 $\lambda_j$  — wektor współczynników,  
 $\theta$  — współczynnik efektywności przyjmujący wartości z przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$ ; 1 dla podmiotów w pełni efektywnych.

Ze względu na interpretację otrzymywanego współczynnika efektywności naturalne staje się rangowanie obiektów, w których obiekt o niższej wartości wskaźnika efektywności klasyfikowany jest na dalszym miejscu. W pracy skorzystano z modeli nadefektywności DEA (*super-efficiency* DEA) umożliwiających różnicowanie obiektów także w pełni efektywnych. Modele te są naturalnym uogólnieniem podstawowego modelu DEA. Bazują na rozwiązaniu zaproponowanym przez P. Andersena oraz N.C. Petersena [Andersen, Petersen 1993, s. 1261-1264] i polegają na wykluczeniu analizowanego obiektu przy optymalizacji wag. Konsekwencją jest brak ograniczenia efektywności od góry wartością 1. Idea ta, metodologicznie interesująca i jednocześnie bardzo prosta, jest w empirycznych badaniach nieczęsto wykorzystywana.

W przeprowadzonej analizie wykorzystano podstawowe modele nadefektywności radialnej zorientowane na wyjścia przy założeniu stałych efektów skali — CRS (*Constant Returns to Scale*) [Cooper, Seiford, Tone 2007, s. 318]:

$$\min 1/\eta, \quad (2)$$

przy ograniczeniach:

$$x_{i0} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$\eta y_{r0} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \quad (r = 1, \dots, s)$$

$$\lambda_j > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

gdzie:  $\eta$  – współczynnik efektywności,  
pozostałe oznaczenia jak w modelu (1).

### 3. Analiza

Ocena pracy szkoły powinna obejmować każdy obszar jej działania. Wysoka jakość pracy to zapewnienie właściwych warunków rozwoju dzieci i młodzieży, dobra atmosfera, odpowiednie programy dydaktyczne, przyjęte priorytety wychowawcze, dobre kontakty z rodzicami i środowiskiem lokalnym, właściwe zarządzanie. Z drugiej strony istotą dobrej szkoły jest efektywne uczenie. Jest to powód jej istnienia, a zatem powinno być też ostatecznym kryterium oceny jej działania. Wprowadzony w 2002 r. system egzaminów zewnętrznych dostarcza obiektywnych danych o osiągnięciach szkolnych. Dane te mogą być wykorzystywane do oceny efektywności nauczania. Jednak aby ocena ta była właściwa, należy uwzględnić fakt, że osiągnięcia szkolne ucznia nie zależą tylko od pracy szkoły. Wynik egzaminu jest uwarunkowany co najmniej trzema grupami czynników: indywidualnymi, społecznymi i szkolnymi. Czynniki indywidualne to zdolności i predyspozycje ucznia. Do społecznych można zaliczyć np. kapitał kulturowy i społeczny rodziny czy wpływ grupy rówieśniczej. Czynniki szkolne obejmują np. kwalifikacje i zaangażowanie nauczycieli, metody nauczania oraz warunki nauczania.

W pracy podjęto próbę zbadania zgodności rankingów efektywności nauczania uzyskanych za pomocą metody DEA. Przetestowano różne sposoby uwzględnienia wyników egzaminów. Sprawdzone, czy przejście na inny układ wielkości (np. zastąpienie wielkości oryginalnych wskaźnikami natężenia) znacznie zmienia wskaźniki efektywności. Prześledzono, jak bardzo przetasowuje klasyfikację wprowadzenie informacji dodatkowych opisujących wybrane czynniki szkolne i społeczne. Porównano też wyniki metody DEA z jednokryterialnymi rankingami.

Do osiągnięcia celów pracy wyodrębniony został obszar badawczy obejmujący wszystkie publiczne gimnazja powiatu grodzkiego Białostok. Wykorzystano mode-

le CRS<sup>1</sup> zorientowane na wyniki, gdyż posługiwano się względnymi wartościami i założono, że szkoły mają bardzo ograniczony wpływ na posiadane zasoby.

Określając wkład szkoły w osiągnięcia uczniów, wykorzystano m.in. koncepcję edukacyjnej wartości dodanej (EWD)<sup>2</sup>. Idea EWD polega na potraktowaniu wyników egzaminu na niższym szczeblu jako prognozy wyników na kolejnym szczeblu. Następnie rzeczywisty wynik ucznia odnosi się do wartości oczekiwanej. Średnia reszt dla danej szkoły jest wskaźnikiem efektywności nauczania w zakresie sprawdzanym przez egzamin. Ze względu na ograniczenia modeli DEA osiągnięte wyniki na egzaminie gimnazjalnym wyrażono jako procent zrealizowanej oczekiwanej EWD. Autorki, szacując EWD dla uczniów białostockich gimnazjów, wykorzystywały najlepiej dopasowany do danych model regresji wykładniczej:

$$y_i = 4,64 + \exp(2,66 + 0,04x_i), \quad (3)$$

gdzie:  $y_i$  – wynik egzaminu gimnazjalnego ucznia  $i$ ,  
 $x_i$  – wynik sprawdzianu na zakończenie szkoły podstawowej ucznia  $i$ .

Rankingi wykorzystujące EWD zestawiono z klasyfikacją na podstawie prostego „przyrostu wiedzy” w szkole gimnazjalnej definiowanego jako iloraz wyrażonego w procentach wyniku egzaminu gimnazjalnego i wyniku procentowego ze szkoły podstawowej.

W tabelach 1 i 2 zaprezentowano modele i zmienne uwzględnione w badaniach. Natomiast w tab. 3 przedstawiono korelacje wszystkich wykonanych rankingów.

**Tabela 1.** Zestawienie modeli i zmiennych użytych w badaniach

Jednokryterialne rankingi		
Ranking	Zmienne	Kryterium
R1	– średnia punktów z egzaminu gimnazjalnego	nabyta wiedza
R2	– średni „przyrost wiedzy” w %	
R3	– procent zrealizowanej EWD	
R4	– średni koszt kształcenia 1 ucznia	finanse publiczne

Źródło: opracowanie własne.

Rankingi R1-R4 to jednokryterialne rankingi szkół gimnazjalnych. Wysoka zgodność uporządkowania szkół na podstawie wyników egzaminu gimnazjalnego, EWD i przyrostu wiedzy jest pochodną znacznej korelacji tych mierników w rze-

<sup>1</sup> Modele VRS, szczególnie w przypadku nielicznego zbioru ocenianych jednostek, mogą wyłączać wielu „fałszywych liderów” tylko ze względu na brak jednostek działających w podobnej skali. Współczynniki rankingowe takich obiektów wykraczają znacznie poza efektywność pozostałych.

<sup>2</sup> Opracowanie edukacyjnej wartości dodanej na podstawie materiałów ze strony internetowej projektu „Badania dotyczące rozwoju metodologii szacowania wskaźnika edukacyjnej wartości dodanej”: <http://www.ewd.edu.pl/> (stan na dzień 31.08.2009 r.).

Tabela 2. Zestawienie modeli i zmiennych użytych w badaniach

Rankingi wykorzystujące DEA			
	Zmienne wejściowe	Zmienne wyjściowe	Kryterium
R5	– zmienna sztuczna*	– średni „przyrost wiedzy” w % – średnia punktów z egzaminu gimnazjalnego	nabyta wiedza
R6	– zmienna sztuczna	– średnia punktów z egzaminu gimnazjalnego – średni „przyrost wiedzy” w % – procent zrealizowanej EWD	
R7	– zmienna sztuczna – średnia punktów ze sprawdzianu po szkole podstawowej uczniów kontynuujących naukę w danym gimnazjum	– średnia punktów z egzaminu gimnazjalnego	
R8	– suma punktów ze sprawdzianu po szkole podstawowej uczniów kontynuujących naukę w danym gimnazjum – zmienna sztuczna	– suma punktów z egzaminu gimnazjalnego	
R9	– zmienna sztuczna	– procent zrealizowanej EWD – iloraz punktów uzyskanych we współzawodnictwie sportowym gimnazjów i liczby uczniów	nabyta wiedza oraz osiągnięcia sportowe
R10	– procent uczniów placówki uczestniczących w zajęciach pozalekcyjnych	– procent zrealizowanej EWD – iloraz punktów uzyskanych we współzawodnictwie sportowym gimnazjów i liczby uczniów	nabyta wiedza oraz osiągnięcia sportowe względem zaangażowania nauczycieli i uczniów
R11	– liczba uczniów niekorzystających z dożywiania na liczbę uczniów danego gimnazjum	– procent zrealizowanej EWD – iloraz punktów uzyskanych we współzawodnictwie sportowym gimnazjów i liczby uczniów	nabyta wiedza oraz osiągnięcia sportowe przy danej socjalno-ekonomicznej sytuacji uczniów
R12	– liczba uczniów niekorzystających z dożywiania na liczbę uczniów danego gimnazjum – procent uczniów placówki uczestniczących w zajęciach pozalekcyjnych	– procent zrealizowanej EWD – iloraz punktów uzyskanych we współzawodnictwie sportowym gimnazjów i liczby uczniów	nabyta wiedza oraz osiągnięcia sportowe względem zaangażowania nauczycieli i uczniów przy danej socjalno-ekonomicznej sytuacji uczniów
R13	– średni koszt kształcenia jednego ucznia	– procent zrealizowanej EWD – iloraz punktów uzyskanych we współzawodnictwie sportowym gimnazjów i liczby uczniów	nabyta wiedza oraz osiągnięcia sportowe względem nakładów finansowych
R14	– średni koszt kształcenia jednego ucznia – procent uczniów placówki uczestniczących w zajęciach pozalekcyjnych	– procent zrealizowanej EWD – iloraz punktów uzyskanych we współzawodnictwie sportowym gimnazjów i liczby uczniów	nabyta wiedza oraz osiągnięcia sportowe względem zaangażowania nauczycieli i uczniów oraz nakładów finansowych
R15	– liczba uczniów niekorzystających z dożywiania na liczbę uczniów danego gimnazjum – średni koszt kształcenia jednego ucznia – procent uczniów placówki uczestniczących w zajęciach pozalekcyjnych	– procent zrealizowanej EWD – iloraz punktów uzyskanych we współzawodnictwie sportowym gimnazjów i liczby uczniów	nabyta wiedza oraz osiągnięcia sportowe względem zaangażowania nauczycieli i uczniów przy danej socjalno-ekonomicznej sytuacji uczniów oraz nakładów finansowych

\* Zmienna sztuczna — wprowadzona ze względu na wymagania metody DEA, jednakowa dla każdej placówki.

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 3.** Współczynniki korelacji Pearsona rankingów

	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15
R1	0,71	0,70	-0,02	0,71	0,71	0,73	0,67	0,70	0,01	0,24	0,18	0,31	0,14	0,24
R2		0,98	0,17	1,00	0,98	0,98	0,70	0,98	0,24	0,69	0,53	0,51	0,31	0,63
R3			0,19	0,98	1,00	0,99	0,72	1,00	0,28	0,67	0,53	0,53	0,35	0,61
R4				0,17	0,18	0,20	0,25	0,18	-0,04	0,02	-0,08	0,64	0,25	0,20
R5					0,98	0,98	0,70	0,98	0,24	0,69	0,53	0,51	0,31	0,63
R6						0,99	0,72	0,99	0,29	0,66	0,51	0,49	0,32	0,60
R7							0,71	0,98	0,24	0,63	0,47	0,52	0,29	0,58
R8								0,71	-0,10	0,37	0,11	0,37	0,08	0,39
R9									0,29	0,69	0,55	0,55	0,36	0,63
R10										0,17	0,58	0,18	0,74	0,04
R11											0,77	0,47	0,29	0,93
R12												0,41	0,64	0,65
R13													0,58	0,60
R14														0,23

Szarym cieniowaniem tła komórki wyróżniono korelacje  $>0,6$ .

Źródło: opracowanie własne.

czywistości białostockich gimnazjów (tab. 4). Ranking R4 to klasyfikacja z perspektywy jednostek, na których spoczywa odpowiedzialność za finansowanie szkół, zakładająca, że w dobrej szkole kształcenie ucznia jest najtańsze, bez względu na wyniki. Brak korelacji pomiędzy nim a uporządkowaniami na podstawie osiągnięć egzaminacyjnych wskazuje, że nie istnieje proste przełożenie ponoszonych nakładów finansowych na wyniki egzaminów.

**Tabela 4.** Współczynnik korelacji Pearsona mierników osiągniętych wyników egzaminacyjnych

	Średni „przyrost wiedzy” w %	Procent zrealizowanej EWD
Średnia punktów z egzaminu gimnazjalnego	0,816	0,722
Średni „przyrost wiedzy” w %		0,982

Źródło: opracowanie własne.

W literaturze przedmiotu można znaleźć sugestie dotyczące ustalenia listy analizowanych wejść i wyjść modelu DEA przez usuwanie zmiennych, których wykluczenie powoduje najmniej zmian współczynnika efektywności [Wagner, Shimshak 2007, s. 57-67], usuwanie zmiennych silnie skorelowanych z pozosta-

wionymi [Jenkins, Anderson 2003, s. 51-61]. Rankingi R5-R9 to eksperyment re-wizyjny tych tez. Modele R5 i R6 obliczono w celu sprawdzenia wrażliwości DEA na wprowadzenie do modelu zmiennych niosących podobną informację. Modele R7 i R8 wykorzystują wartości oryginalne zamiast wskaźników wyników egzaminacyjnych. W klasyfikacji R9 pod uwagę, oprócz rezultatów centralnych egzaminów, wzięty jest też inny profil działalności szkoły – sport, stwarzając tym samym szansę szkołom sportowym na zajęcie wyższego miejsca w rankingach.

Rankingi, których podstawą jest wiedza egzaminacyjna, podają zbliżoną klasyfikację. Nie ma znaczenia, czy jest wykorzystywana edukacyjna wartość dodana, średnie/sumy punktów ze sprawdzianu kompetencji i z egzaminu gimnazjalnego, przyrost wiedzy. Metoda DEA wykazała wysoką odporność na różną skalę wielkości, wprowadzanie informacji skorelowanych. Co więcej, uwzględnienie osiągnięć sportowych także nie zmienia zasadniczo rankingu. Dlatego w pozostałych rankingach wykorzystano jedynie wskaźnik zrealizowanej EWD oraz osiągnięcia sportowe.

Rankingi R10-R15 są kwintesencją zastosowania metody DEA, gdyż szacują sprawność przekształcania zasobów w wyniki, uwzględniając niejednolite nakłady. Oprócz wyników egzaminu na niższym szczeblu w różnych kombinacjach brane są pod uwagę inne wybrane czynniki, które zdaniem decydentów oświaty także determinują osiągnięcia egzaminacyjne. Procent uczniów placówki uczestniczących w zajęciach pozalekcyjnych można traktować jako miarę zaangażowania nauczycieli oraz uczniów, z kolei liczba uczniów niekorzystających z dożywiania na liczbę uczniów danego gimnazjum może być jakąś wskazówką – opisem środowiska, w którym działa szkoła. W analizie uwzględniono też średni koszt kształcenia ucznia w latach 2002-2005. Po wprowadzeniu tych dodatkowych zmiennych po stronie nakładów uporządkowanie szkół prezentuje się zupełnie inaczej.

W modelu R15 wykorzystane są wszystkie dodatkowe informacje, co wydawać się może najlepszym rozwiązaniem. Jednakże szybkość konwergencji estymatorów DEA zależy od gładkości nieznannej krzywej efektywności oraz liczby rodzajów nakładów i efektów w odniesieniu do liczby obserwacji. Dlatego też dodawanie kolejnych zmiennych jest bezpieczne jedynie w przypadku, gdy liczba zmiennych jest relatywnie duża [Adler, Yazhemy 2006, s. 4].

Rankingi jako źródło informacji porównawczej mogą być uzupełnieniem działań jednostek samorządowych i rządowych oceniających pracę szkół. Metoda DEA, przypisując wagi maksymalizujące efektywność, eliminuje problem różnicowania wag. Umożliwiając zmierzenie efektów, a nie sytuacji wyjściowej, pozwala tym samym na bardziej precyzyjną ocenę pozycji i jakości pracy danej szkoły. Jednakże wyniki metody DEA, jak każdego rankingu, należy zawsze interpretować w kontekście zastosowanej metody i użytych zmiennych. Dobór zmiennych musi w sposób jasny odzwierciedlać cele rankingu i jego potencjalnych adresatów. Zmiana pozycji rankingowych w kolejnych klasyfikacjach jednostek ilustruje, że nie ma szkół mocnych pod każdym względem. Estymowana efektywność jest pochodną uwzględnionych wejść i wyjść.

## 4. Podsumowanie

Metoda DEA na dobre zakorzeniła się w praktyce analitycznej na świecie. Wykorzystywana jest przede wszystkim do ustalania efektywności obiektów gospodarczych i społecznych. Na podstawie analizy obwiedni danych można też określić korzyści skali, wzorce dla obiektów nieefektywnych, postać i strukturę technologii optymalnych. W artykule zbadano zgodność rankingów uzyskanych za pomocą metody DEA. Na podstawie eksperymentu, którego podstawą było badanie uporządkowania białostockich gimnazjów, można powiedzieć, że trafna ocena względnej efektywności metodą DEA zależy w dużym stopniu od poprawnego doboru zmiennych i właściwego wyboru modelu. Problem negatywnego wpływu złej specyfikacji modelu na indywidualne wartości efektywności poszczególnych jednostek okazał się bardziej znaczący w przypadku pominięcia istotnej zmiennej niż uwzględnienia zmiennej nadmiarowej czy nieistotnej. Metoda DEA pozwala na operowanie różnymi układami wielkości, gdyż zastąpienie wielkości oryginalnych wskaźnikami natężenia nie zmienia wskaźników efektywności. Wstępna analiza dostępnych zmiennych jest konieczna, aby uzyskać właściwe miary efektywności i aby prawidłowo sklasyfikować jednostki.

## Literatura

- Adler N., Yazhemsky E., *Improving discrimination in Data Envelopment Analysis: PCA – DEA versus Variable Reduction. Which method at what cost?*, „Working Paper of Hebrew University of Israel”, Israel 2006.
- Andersen P., Petersen N.C., *A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis*, „Management Science” 1993, vol. 39, nr 10.
- Coelli T., Rao D.S.P., Battese G.E., *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, Kluwer Academic Publisher, Boston 2002.
- Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K., *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software, Second Edition*, Springer, 2007.
- Cooper W.W., Seiford L.M., Zhu J. (red.), *Handbook on Data Envelopment Analysis*, Springer, Boston, 2004.
- Farrell M.J., *The measurement of productive efficiency*, „Journal of Royal Statistical Society” 1957 nr 120 (3).
- Jenkins L., Anderson M., *A multivariate statistical approach to reducing the number of variables in data envelopment analysis*, „European Journal of Operational Research” 2003 nr 147.
- Ramanathan R., *An introduction to Data Envelopment Analysis: a Tool for Performance Measurement*, Sage Publications, New Delhi 2003.
- Wagner J.M., Shimshak D.G., *Stepwise selection of variables in data envelopment analysis: Procedures and managerial perspectives*, „European Journal of Operational Research” 2007 nr 180.



## THE CONSTANCY OF EDUCATION SECTOR UNITS RANKINGS IN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS (DEA)

**Summary:** In this article, the constancy of rankings obtained from data envelopment analysis has been analyzed. On the basis of a case study of junior high schools in Białystok the authors have proved that the accurate evaluation of the efficiency largely depends on proper selection of variables. The problem of the negative impact of poor model specification on the final efficiency score is more significant in the case when the significant variable is omitted than when the redundant variable is left. The DEA method turned out to be high resistant to different scale size or correlation of variables.