





57 III

# Technische Studienhefte

Herausgegeben

von

Baurat Carl Schmid,

Professor an der K. Baugewerkschule in Stuttgart.

---

Heft 2.

# Statik und Festigkeitslehre.

---

## Lehrheft

nebst

120 ausgerechneten Beispielen  
und einer Aufgabensammlung für Festigkeitslehre

elementar bearbeitet für den Gebrauch

an der Schule und in der Praxis

von

Baurat Carl Schmid,

Professor an der K. Baugewerkschule in Stuttgart.

---

Mit 5 Tafeln und 330 Abbildungen im Text.

---

Fünfte, umgearbeitete und erweiterte Auflage.

—❖❖❖—  
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA  
KATEDRA KONSTRUKCJI  
BUDOWLANYCH

**BI-1**

**BIBLIOTEKA I KANCELARIA INFORMACJI**

Institute Techniczne i Biblioteki  
Politechniki Wrocławskiej  
ul. Dąbrowskiego 17 Prusa 53/55  
50-317 WROCLAW

**POLITECHNIKA WROCLAWSKA**  
WYDZIAŁ ARCHITEKTURY  
KATEDRA KONSTRUKCJI  
BUDOWLANYCH

**ARCHIWUM**

nr. 57 III

**E. Schmid,**  
**Statik und Festigkeitslehre.**

---



## Vorwort zur ersten Auflage.

---

Zur Vermeidung des zeitraubenden Diktierens habe ich für den Unterricht an der Kgl. Baugewerkschule Stuttgart mein Lehrheft für Statik und Festigkeitslehre autographieren lassen.

Die Abdrücke desselben sind infolge der stark angewachsenen Frequenz der Schule früher vergriffen worden, als ich vermutete, und namentlich früher, als es mir möglich gewesen ist, eine, für die Veröffentlichung bestimmte umfassendere Bearbeitung des Gegenstandes fertig zu stellen.

Um nun vielfach ausgesprochenen Wünschen entgegenzukommen, habe ich mich entschlossen, zunächst das Heft ohne besondere Umarbeitung, aber mit Erweiterungen und namentlich auch mit Beispielen versehen, dem Druck zu übergeben.

Stuttgart, 23. Mai 1891.

C. Schmid.

---

## Vorwort zur zweiten Auflage.

---

In die zweite Auflage dieses Lehrheftes habe ich Angaben aus den neuen Bestimmungen für die Berechnung und Konstruktion eiserner Straßenbrücken, wie solche unter meiner Mitwirkung von der K. Württ. Ministerialabteilung für den Straßen- und Wasserbau festgestellt wurden, aufgenommen.

Außerdem sind verschiedene Abschnitte umgearbeitet, andere ergänzt, sowie noch mehr Bahnenbeispiele eingeschaltet worden.

Oberkürkheim, 19. Februar 1897.

C. Schmid.

---

## Vorwort zur dritten Auflage.

---

Um die Anwendung der Statik und Festigkeitslehre auf Beispiele der Baupraxis noch deutlicher zu zeigen, habe ich in die dritte Auflage eine Anzahl derjenigen statischen Berechnungen aufgenommen, welche für Bauausführungen von mir gefertigt worden sind.

Insbesondere wurde die Berechnung freistehender Schornsteine eingehend behandelt. Im Übrigen sind an verschiedenen Stellen Erweiterungen des Textes erfolgt, namentlich sind auch die Angaben über die Festigkeit der Baustoffe und über die Be-

lastungen der Bauten ausgedehnt worden, wobei neben den Vorschriften der Berliner Baupolizei auch diejenigen der Bauabteilung des K. preussischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten Berücksichtigung gefunden haben.

Im Anhang ist eine Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre beigelegt.

Oberfürkheim, 23 Mai 1901.

C. Schmid.

---

## Vorwort zur fünften Auflage.

Die neue Auflage dieses Lehrbuches erscheint in wesentlich erweiterter Gestalt. Von den früheren Auflagen wurde die Einteilung der Kapitel und Paragraphen beibehalten, weil in meinen sonstigen „Technischen Studienheften“ mehrfach auf den Inhalt dieses Buches Bezug genommen wurde.

Die Gründe zur Umarbeitung und Erweiterung liegen teils in den Änderungen der Prüfungsvorschriften für Bauwerkmeister in Württemberg, teils in den Änderungen des Lehrprogrammes der K. Baugewerkschule Stuttgart.

Mit Rücksicht auf den Eisenbetonbau waren die Berechnungen der Schub- und Scherkräfte in den Rahmen des Lehrbuches einzufügen und die Berechnungen der Kragbalken zu erweitern.

Der angehängten Aufgabensammlung ist ein zweiter Lehrgang beigegeben. Ein besonderes Heft mit ausgerechneten Beispielen aus der Statik und Festigkeitslehre ist in Arbeit.

Oberfürkheim, 21. Februar 1908.

C. Schmid.

---

Alle Rechte vorbehalten.

---



# Inhaltsverzeichnis.

## Statik und Festigkeitslehre.

	Seite		Seite
Einleitung . . . . .	1	§ 21. Schwerpunktsbestimmungen . . . . .	20
I. Kapitel.		A. Von Linien . . . . .	21
<b>Die Kräfte, deren Zusammensetzung, Zerlegung und Gleichgewicht.</b>		B. Von ebenen Flächen . . . . .	21
§ 1. Bestimmungsgrößen einer Kraft . . . . .	1	C. Von Körpern . . . . .	22
§ 2. Darstellung der Kräfte . . . . .	1	Anwendungen . . . . .	23
§ 3. Erklärung der Zusammensetzung, Zerlegung und des Gleichgewichts der Kräfte . . . . .	2	II. Kapitel.	
A. Kräfte in einer Ebene.		<b>Festigkeitslehre.</b>	
§ 4. Kräfte die in einer Geraden wirken, zeichnerische und rechnerische Behandlung . . . . .	2	§ 1. Einfluß der äußeren Kräfte auf einen Körper. Elastizität. Festigkeit. Beanspruchung . . . . .	25
§ 5. Zeichnerische Zusammensetzung zweier beliebiger Kräfte (Kräfteparallelogramm) . . . . .	4	§ 2. Das Elastizitätsgesetz . . . . .	30
§ 6. Zeichnerische Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten . . . . .	4	§ 3. Widerstand und Reibung . . . . .	31
§ 7. Berechnung der Resultante zweier Kräfte . . . . .	5	§ 4. Zahlenwerte über Elastizität, Festigkeit, zulässige Beanspruchung der wichtigsten Materialien . . . . .	33
§ 8. Berechnung der Komponenten aus der Resultante . . . . .	6	§ 5. Eigengewichte und Belastung der Konstruktionen . . . . .	47
§ 9. Gleichgewicht von drei Kräften . . . . .	6	§ 6. Biegung gerader Stäbe . . . . .	57
§ 10. Zusammensetzung von Kräften, welche an einem Punkt angreifen (Kräftepolygon) . . . . .	7	A. Normalkräfte . . . . .	57
§ 11. Zusammensetzung beliebiger Kräfte (Seilpolygon) . . . . .	7	B. Scher- und Schubkräfte . . . . .	58
§ 12. Zerlegung einer Kraft in mehrere Komponenten . . . . .	9	C. Berechnung der Normalspannungen . . . . .	59
§ 13. Allgemeine graphische Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	10	D. Berechnung der wagrechten Schubspannungen . . . . .	61
§ 14. Das Kräftepaar . . . . .	10	E. Berechnung der lotrechten Schubspannungen . . . . .	62
§ 15. Statisches Moment . . . . .	11	F. Abgekürzte Berechnung des Größtwertes der Schubspannungen . . . . .	63
§ 16. Analytische Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	13	§ 7. Trägheitsmoment u. Widerstandsmoment . . . . .	64
B. Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen.		§ 8. Zweckmäßige Trägerprofile . . . . .	69
§ 17. Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte . . . . .	14	Tabellen deutscher Normalprofile . . . . .	70
§ 18. Zerlegung einer Kraft in zwei parallele Komponenten . . . . .	16	§ 9. Die Unterstützung und Belastung von Trägern . . . . .	79
§ 19. Zusammensetzung und Zerlegung mehrerer paralleler Kräfte . . . . .	18	§ 10. Bestimmung des Biegemoms oder Angriffsmomentes . . . . .	80
§ 20. Berechnung beliebig gerichteter Komponenten einer Kraft . . . . .	20	A. Einfache freiaufliegende Balken (rechnerisch) . . . . .	80
		B. Einfache freiaufliegende Balken (zeichnerisch) . . . . .	82
		C. Freiaufliegender Balken mit zwei Kräftstücken (zeichnerisch) . . . . .	87

	Seite
D. Freiaufliegender Balken mit zwei gleich langen Kragstücken (rechnerisch) . . .	87
F. Freiaufliegender Balken mit einem Kragstück . . . . .	90
G. Eingespannter Träger mit einem freitragenden Ende (rechnerisch) . . . . .	91
H. Eingespannter Träger mit einem freitragenden Ende (zeichnerisch) . . . . .	93
J. Formelnzusammenstellung . . . . .	94
§ 11. Biegungsvorgänge und Durchbiegung . . . . .	96
A. Auflagerkräfte und Auflagerbeanspruchung . . . . .	96
B. Einspannung . . . . .	97
C. Durchbiegung . . . . .	100
§ 12. Träger, welche auf mehr als zwei Stützen ruhen . . . . .	101
§ 13. Vernickungsfestigkeit . . . . .	103
§ 14. Torsionsfestigkeit . . . . .	108
§ 15. Zusammengekehrte Festigkeit . . . . .	110

### III. Kapitel.

#### Fachwerke, insbesondere Eisenkonstruktionen.

§ 1. Allgemeines über Fachwerke . . . . .	113
§ 2. Gang der Fachwerksberechnungen . . . . .	115
§ 3. Berechnung der Lasten . . . . .	116
§ 4. Berechnung der Auflagerwiderstände . . . . .	117
§ 5. Ermittlung der Kräfte in den Fachwerksstäben . . . . .	120
§ 6. Berechnung der Querschnittsabmessungen . . . . .	122
§ 7. Fachwerk-Dachbinder . . . . .	123
§ 8. Die Satteldächer . . . . .	124
§ 9. Sägedächer . . . . .	127
§ 10. Bordächer . . . . .	130
§ 11. Fachwerkträger mit gleich großen Feldern . . . . .	131
§ 12. Trägerfachwerke mit ungleichen Feldern . . . . .	136
§ 13. Räumliche Fachwerke . . . . .	139

### IV. Kapitel.

#### Verstrebungen und Holzkonstruktionen.

§ 1. Die Gestalt der Verstrebungen . . . . .	140
§ 2. Berechnungsweise der Verstrebungen . . . . .	141
§ 3. Einfache Holzkonstruktionen . . . . .	143
§ 4. Gegliederte Holzkonstruktionen . . . . .	144

### V. Kapitel.

#### Eisen- und Holzverbindungen.

##### A. Nieten und Schrauben.

Einleitung . . . . .	146
----------------------	-----

	Seite
§ 1. Bolzenstärke . . . . .	148
§ 2. Anzahl der Schrauben oder Nieten . . . . .	148
§ 3. Abstand der Nieten oder Schrauben . . . . .	149
§ 4. Die Stellung der Nieten und Schrauben . . . . .	149
§ 5. Nietentabelle . . . . .	150

##### B. Holzverbindungen.

§ 6. Die Schubfestigkeit der Holzverbindungen . . . . .	151
§ 7. Verbübelte Balken . . . . .	152

### VI. Kapitel.

#### Steinkonstruktionen.

##### A. Berechnung von Mauern.

§ 1. Allgemeines über die Standfestigkeit der Mauern (Stüßlinie) . . . . .	153
§ 2. Beanspruchung infolge einseitiger Belastung . . . . .	155
§ 3. Freistehende Mauern und Schornsteine . . . . .	159
§ 4. Bassin-, Stütz- und Futtermauern . . . . .	165
§ 5. Erddruck und Wasserdruck . . . . .	165
§ 6. Profile der Bassin-, Stütz- u. Futtermauern . . . . .	170
§ 7. Bassinmauern . . . . .	171
§ 8. Stützmauern . . . . .	173
§ 9. Futtermauern . . . . .	174
§ 10. Ufermauern . . . . .	174

##### B. Berechnung von Gewölben.

###### I. Tonnengewölbe.

§ 11. Beliebige Tonnengewölbe durch eine Einzellast belastet . . . . .	175
§ 12. Beliebige Tonnengewölbe mit beliebigen Kräften belastet . . . . .	175
§ 13. Gewölbe und Belastung symmetrisch zur vertikalen Scheitelachse . . . . .	177
§ 14. Über die Drucklinie in Gewölben . . . . .	178

###### II. Kreuzgewölbe.

§ 15. Kreuzgewölbe mit Lagerfugen parallel zu den Rappenachsen . . . . .	181
§ 16. Kreuzgewölbe mit schwalbenschwanzförmigem Verband . . . . .	182

###### III. Kuppelgewölbe.

§ 17. Die Druckverhältnisse in Kuppelgewölben . . . . .	182
---	-----

##### C. Berechnung der Pfeiler und Widerlager.

§ 18. Die Belastungen der Pfeiler u. Widerlager . . . . .	183
---	-----

Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre . . . . .	185
---	-----

# Statik und Festigkeitslehre.

## Einleitung.

Die Mechanik ist die Lehre von der Wirkung der Kräfte. In der Unterabteilung Dynamik werden die Bewegungen betrachtet, welche durch die Kräfte bewirkt werden. In der Statik handelt es sich um das Gleichgewicht der Kräfte.

Die Festigkeitslehre befaßt sich mit den Abmessungen, welche den Konstruktionsgliedern gegeben werden müssen.

## Kapitel I.

### Die Kräfte, deren Zusammensetzung, Zerlegung und Gleichgewicht.

#### I. § 1. Bestimmungsgrößen einer Kraft.

Eine Kraft ist vollständig bekannt, wenn deren Lage, Richtung und Größe gegeben sind (s. Bild 1 Taf. I). Die Wirkung einer Kraft auf einen Körper kann man sich stets ersetzt denken durch ein Gewicht. Bei schief oder wagrecht gerichteten Kräften denke man sich das Gewicht an einem über eine Rolle gehenden Seil wirkend, dann ist leicht einzusehen, daß auch jede schiefe Richtung einer Kraft mit Gewichten erzielt werden kann, d. h., daß man jede Kraft durch eine Schwerkraft ersetzt denken kann (s. Bild 2—6 Taf. I).

Man kann somit auch die Kräfte mit derselben Maßeinheit wie die Gewichte messen. Diese Einheit ist das Kilogramm, d. h. das Gewicht eines Liters (= 1 cdm) Wasser. Ein vielfaches dieses Gewichtes, nämlich die Tonne (1 t = 1000 kg) wird als Maß für sehr große Kräfte angewendet. Es kann also z. B. heißen: Kraft  $P = 5800$  kg oder = 5,8 t.

Außerdem werden 100 kg als 1 dz, d. h. als ein Doppelzentner bezeichnet.

Aus der obigen Erklärung, daß jede Kraft durch ein Gewicht ersetzt werden kann, geht hervor, daß, insoweit nur die Kräfte unter sich und nicht deren Einfluß auf Körper betrachtet werden, eine Kraft innerhalb ihrer Richtungslinie beliebig verschoben werden darf.

#### I. § 2. Darstellung der Kräfte.

Bei der Darstellung der Kräfte in der Mechanik dient eine Gerade zur Bestimmung der Lage, ein Pfeil an dieser Geraden gibt die Richtung der Kraft an, und die Abgrenzung einer Strecke auf dieser Geraden von der Pfeilspitze rückwärts gehend, bezeichnet die Größe der Kraft.

Zur Bemessung dieser Kraftstrecken ist ein Kräftemaßstab zu wählen. Dieser kann nicht ein Verhältnismaßstab sein, sondern man hat einen Vergleichungsmaßstab zu nehmen.

Er kann z. B. lauten:

$$1 \text{ cm} = 200 \text{ kg} \text{ oder umgekehrt } 100 \text{ kg} = 5 \text{ mm} \text{ (s. Bild 7 Taf. I).}$$

Der Kräftemaßstab ist vollständig unabhängig von dem geometrischen Maßstab der Zeichnung, weil die Größe der auftretenden Kräfte ganz unabhängig ist von der zeichnerischen Darstellung des Bauteiles.

Beispiel 1. Eine Kraft  $P = 7200$  kg ist im Kräftemaßstab  $1 \text{ cm} = 400$  kg darzustellen, wie groß ist die Kraftstrecke zu machen?

$$\text{Aufl. } \frac{7200}{400} = 18 \text{ cm.}$$

Beispiel 2. In einem Kräfteplan, welcher im Kräftemaßstab  $1 \text{ cm} = 500$  kg aufgezeichnet ist, mißt eine Kraftstrecke  $5,6$  cm. Wie groß ist diese Kraft?

$$\text{Aufl. } 5,6 \cdot 500 = 2800 \text{ kg} = 2,8 \text{ t} = 28 \text{ dz.}$$

## I. § 3. Erklärung.

### A. Zusammensetzung der Kräfte.

Kräfte zusammensetzen heißt: Eine solche Kraft auffinden, deren Wirkung die gleiche ist, wie die Wirkungen der einzelnen gegebenen Kräfte zusammengenommen.

Diese Kraft heißt Resultante, Resultierende, Mittelkraft u. s. f., die Kräfte, aus welchen sie sich ergeben hat, heißen Komponenten oder Seitenkräfte, es ergibt sich also der Satz:

Die Resultierende bewirkt statisch dasselbe, wie das System der Einzelkräfte.

Dieser Satz gilt nur für die Statik, d. h. für die Gleichgewichtsverhältnisse. Bei der Bemessung der Festigkeitsverhältnisse kann kein Gebrauch von demselben gemacht werden.

### B. Zerlegung der Kräfte.

Eine Kraft zerlegen heißt, solche Kräfte finden, deren Wirkungen zusammen gleich der Wirkung der gegebenen Kraft sind.

Die Zerlegung kann in zwei oder mehrere Seitenkräfte erfolgen.

### C. Gleichgewicht.

Geben sich die Wirkungen der einzelnen Kräfte eines gegebenen Kraftsystems insgesamt auf, so befindet sich das Kraftsystem im Gleichgewicht.

Die Resultierende ist in diesem Fall gleich Null.

Geben sich die Wirkungen der einzelnen Kräfte eines gegebenen Kraftsystems nicht auf, sondern ergeben sie eine Resultierende, so läßt sich eine Kraft denken, welche die Wirkung dieser Resultierenden aufhebt. Man nennt diese Kraft Gegenresultante. Die Gegenresultante eines Kraftsystems hält das System im Gleichgewicht. Ist ein System von Kräften im Gleichgewicht, so läßt sich jede einzelne Kraft als Gegenresultante aller übrigen ansehen.

## A. Kräfte in einer Ebene.

### I. § 4. Kräfte in einer Geraden.

#### A. Zusammensetzung.

Wirken in einer Geraden mehrere Kräfte in gleicher Richtung, so ist deren Resultierende gleich der Summe der einzelnen Kräfte, (vgl. Bild 10 und 11 Taf. I).

Diese Summe kann man, wenn die Kräfte aufgezeichnet sind, durch Addition der Kraftstrecken  $P$  mittels des Zirkels bilden oder kann man rechnerisch vorgehen, indem man die Zahl der kg, welche jede einzelne Kraft mißt, addiert.

Beispiel 3. Die Resultierende der in einer Geraden wirkenden Kräfte  $P_1 = 20$  kg;  $P_2 = 30$  kg;  $P_3 = 50$  kg;  $P_4 = 45$  kg;  $P_5 = 15$  kg ist zu bestimmen.

Zeichnerische Lösung durch Addition der Kraftstrecken mit dem Zirkel, s. Bild 9 Taf. II.

Rechnerische Lösung  $R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots = 20 + 30 + 50 + 45 + 15 = + 160$  kg.

Haben die Kräfte verschiedene Richtungen, so heiße man eine derselben positiv, die andere negativ (s. Bild 8 Taf. I).

Die Resultierende erhält man auf denselben Wegen wie vorig. Es ist nämlich die Resultierende von Kräften, welche zwar in einer Geraden wirken, aber verschiedene Richtung haben,  $= \Sigma P$ , d. h. gleich der Differenz aus der Summe der positiven und aus der Summe der negativen Kräfte. Die Resultierende wirkt in der Richtung der größeren Kraftsumme.

(Das hiemit eingeführte und erklärte Zeichen  $\Sigma P$  ist zu lesen: Algebraische Summe aller  $P$ ).

Beispiel 4. Gegeben sind die in einer Geraden wirkenden Kräfte  $P_1 = - 70$  kg;  $P_2 = + 85$  kg;  $P_3 = + 110$  kg;  $P_4 = - 50$  kg;  $P_5 = + 40$  kg;  $P_6 = - 80$  kg;  $P_7 = + 30$  kg. Deren Resultierende ist zu bestimmen. (Vgl. Bild 13 Taf. I).

1. Aufl. durch Zeichnung: Man addiert mittels des Zirkels sämtliche positive Kräfte, sodann addiert man in gleicher Weise sämtliche negative Kräfte und zieht alsdann die beiden auf diese Weise gefundenen Kraftstrecken voneinander ab. Die Differenz stellt die Resultierende nach Größe und Richtung dar.

2. Aufl. durch Rechnung: Es wird

$$\begin{array}{r}
 R = \Sigma P = - 70 + 85 \text{ kg} \\
 \quad \quad \quad + 110 \\
 \quad \quad \quad - 50 \\
 \quad \quad \quad + 40 \\
 \quad \quad \quad - 80 \\
 \quad \quad \quad + 30 \\
 \hline
 - 200 + 265 \\
 R = + 65 \text{ kg.}
 \end{array}$$

### B. Zerlegung.

Die Zerlegung einer gegebenen Kraft in Komponenten ist eine unbestimmte Aufgabe, insolange für die Komponenten nicht weitere Bedingungen gestellt sind.

Beispiel 5. Soll die Kraft  $R = 65$  kg in zwei Komponente zerlegt werden, so können diese heißen  $P_1 = 1$  kg,  $P_2 = 64$  kg oder  $P_1 = 15$  kg,  $P_2 = 50$  kg oder  $P_1 = - 126$  kg,  $P_2 = + 191$  kg u. s. f. (vgl. Bild 14—17 Taf. I).

### C. Gleichgewicht.

Kräfte, welche in ein und derselben Geraden wirken, können nur im Gleichgewicht sein, wenn Kräfte von verschiedener Richtung vorhanden sind. Zwei Kräfte in einer Geraden sind

daher im Gleichgewicht, wenn sie unter sich gleich groß sind und einander entgegengesetzt wirken (s. Bild 18 und 19 Taf. I).

Die Resultierende und Gegenresultierende eines Kräftesystems müssen somit unter sich gleiche, in einer Geraden einander entgegenwirkende Kräfte sein.

Mehrere Kräfte in einer Geraden sind im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe dieser Kräfte gleich Null ist, d. h. wenn  $\Sigma P = 0$ ; dies ist der Fall, wenn die Summe der nach einer Seite hin wirkenden Kräfte gleich der Summe der nach der andern Seite hin wirkenden ist, wie z. B. in Bild 20 Taf. I.

### I. § 5. Zeichnerische Zusammensetzung zweier beliebiger Kräfte in einer Ebene. (Kräfteparallelogramm.)

#### Satz 1.

Die Resultate  $R$  zweier Kräfte  $G$  und  $P$  in einer Ebene wird nach Lage, Größe und Richtung dargestellt durch die von dem Schnittpunkt der Richtungslinien beider Kräfte ausgehende Diagonale des Parallelogramms aus  $G$  und  $P$ . Dieses Parallelogramm heißt das Kräfteparallelogramm (Bild 21—24 Taf. I, Bild 42 u. 43 Taf. IV).

Hieraus ergibt sich folgende Zeichnungs-Regel für die vorliegende Aufgabe:

1. Bestimme den Schnittpunkt der Richtungslinien beider Kräfte;
2. Verschiebe beide Kraftstrecken, bis sie beide von diesem Schnittpunkt ausgehen (oder beide auf ihn hintreffen);
3. Zeichne für diese neue Lage der Kraftstrecken das Parallelogramm aus denselben, dann stellt
4. die von jenem Schnittpunkt ausgehende Diagonale die Resultierende der gegebenen Kräfte dar.

Die Resultierende  $R$  kann sowohl größer (Bild 21 Taf. I) als auch kleiner (Bild 22 Taf. I) als die einzelnen Komponenten sein.

Zur Bestimmung von  $R$  aus  $G$  und  $P$  ist nicht erforderlich, das ganze Parallelogramm  $ABCD$  aufzuzeichnen, es genügt schon das  $\triangle ABC$ , weil  $BC = P$  ist. Man nennt dieses Dreieck das Kräfte-dreieck (Bild 25 Taf. I).

Schneiden sich die Richtungslinien  $G$  und  $P$  nicht auf dem Zeichnungsblatt, oder sind die Richtungen  $G$  und  $P$  parallel, so ist die Zusammensetzung nach I § 11 mittels Kräfte- und Seilpolygones vorzunehmen.

### I. § 6. Zeichnerische Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten, welche weder unter sich, noch mit der Kraft parallel sind.

Die Bilder 21—24 zeigen, daß es möglich ist, ein und dieselbe Kraft  $R$  in verschiedene Komponenten zu zerlegen. Es ist daher nötig, weitere Bedingungen für die Komponenten zu stellen, wenn man die Aufgabe zu einer bestimmten machen will. Diese Bedingungen können sehr verschiedene sein. Es seien im folgenden einige Hauptfälle behandelt:

#### I. Fall.

Von den Komponenten seien die Richtungen gegeben.

Aufl. Man zieht durch den Anfangs- und Endpunkt von R Parallelen mit den gegebenen Komponentenrichtungen und zwar in Bild 22 so, daß das Kräfteparallelogramm erhalten wird, oder aber, wie in Bild 25 so, daß das Kräfte Dreieck sich ergibt.

Bei Anwendung des Kräfte Dreiecks erhält man nur die Größe und Richtung der Komponenten, nicht auch deren Lage. Denn das Kräfte Dreieck ist nur eine Hilfsfigur, die an jeder beliebigen Stelle auf gezeichnet werden kann. (Vgl. auch Bild 10, 11, 12 u. 15 Taf. III).

## II. Fall.

Es sei von einer Komponenten Lage und Richtung gegeben, von der andern nur die Richtung.

Aufl. Man verlängert in Bild 26 Taf. I die Richtungslinie der gegebenen Kraft R, bis sie die, der Lage nach gegebene Richtungslinie von P trifft, verschiebt nun R, bis es von O ausgeht und zeichnet alsdann das Kräfteparallelogramm unter Verwendung der angegebenen Richtung von G.

## III. Fall.

Eine der Komponenten, P, sei nach Richtung und Größe gegeben. Man will die Richtung und Größe der zweiten Komponente G wissen.

Aufl. Es ist P an die gegebene Kraft R anzulegen und das Kräfteparallelogramm zu zeichnen (s. Bild 21—24 Taf. I). Aus diesem ergibt sich die Komponente G.

## IV. Fall.

Es sollen die Horizontal- und Vertikalkomponenten H und V einer gegebenen Kraft R gefunden werden.

Aufl. Ziehe durch den Anfangspunkt und Endpunkt der gegebenen Kraft vertikale und horizontale Linien, so ergibt sich das Kräfteparallelogramm, welches H und V enthält (s. Bild 27a Taf. I).

Zus. I. Die Zerlegung einer Kraft in eine Komponente, welche parallel zur Kraftrichtung geht und in eine schief zur Kraft verlaufende Komponente, ist nicht möglich. Die erstere Komponente wird gleich der Kraft selbst, die letztere ist gleich Null. Vgl. übrigens I. § 14.

## I. § 7. Berechnung der Resultierenden zweier beliebiger Kräfte in einer Ebene.

Man geht davon aus, daß die Resultante gleich der Diagonale des Kräfteparallelogramms ist und berechnet nun diese auf trigonometrischem Wege nach Anleitung von Bild 28 Taf. I. Dabei ergibt sich

$$1) \operatorname{tg} \alpha = \frac{G \cdot \sin \gamma}{P + G \cdot \cos \gamma}$$

und

$$2) \beta = \gamma - \alpha$$

oder aber

$$2b) \operatorname{tg} \beta = \frac{P \cdot \sin \gamma}{G + P \cdot \cos \gamma} \quad (\text{s. Bild 29})$$

also

$$3) R = G \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{P + G \cdot \cos \gamma}{\cos \alpha}$$

$$4) R = \sqrt{P^2 + G^2 + 2P \cdot G \cdot \cos \gamma}.$$

In der Regel wird der Baugewerkschüler jedoch sicherer und rascher auf zeichnerischem Wege die Aufgabe lösen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die Richtungen der gegebenen Kräfte einen schiefen Winkel einschließen.

Einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn die Resultierende zweier aufeinander senkrecht stehender Kräfte zu bestimmen sind. Man erhält für diesen Fall aus Bild 27 b Taf. I:

$$\operatorname{tg} \alpha = G/P, \text{ also } R = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{P}{\cos \alpha}$$

und aus Bild 27 a Taf. I

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H}, \text{ also } R = \frac{V}{\sin \alpha} = \frac{H}{\cos \alpha}.$$

Ohne Anwendung von Trigonometrie erhält man vermittelst des pythagoräischen Lehrsatzes die Größe der Resultierenden

$$R = \sqrt{P^2 + G^2} = \sqrt{V^2 + H^2}$$

deren Richtung und Lage bleibt dabei aber unbestimmt.

### I. § 8. Berechnung der Komponenten aus der Resultante.

Die trigonometrische Berechnung geschieht nach Anleitung von Bild 29 Taf. I und ergibt allgemein

$$1) P = \frac{R \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad 2) G = \frac{R \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Stehen die Richtungen der Komponenten senkrecht aufeinander, d. h. wird  $\alpha + \beta = 90$ , so ist  $\sin(\alpha + \beta) = 1$  und man erhält nach Bild 27 a u. b Taf. I.

Man erhält aus dem rechtwinkligen Dreieck Bild 7 a u. 7 b Taf. I.

$$H \text{ oder } P = R \cdot \sin \beta = R \cdot \cos \alpha$$

$$V \text{ oder } G = R \cdot \sin \alpha = R \cdot \cos \beta,$$

wobei H und V zu setzen sind, wenn es sich um Horizontal- und Vertikalkomponenten handelt.

Anm. 1. Die in I. § 7 und 8 gegebenen Auflösungen sind nichts anderes als die trigonometrischen Berechnungen der Konstruktionen in I. § 5 und I. § 6. Eine allgemeinere, auch bei mehreren Kräften zweckmäßige Lösung ist diejenige mittels Sätzen aus der Mechanik, nämlich mittels den Gleichgewichtsbedingungen (s. I. § 16 und I. § 20).

### I. § 9. Gleichgewicht von drei Kräften in einer Ebene.

Sollen drei Kräfte im Gleichgewicht unter einander sein, so muß zunächst das aus ihnen gebildete Kräfte-dreieck schließen, wie sich aus dem Satz über Resultierende und Gegenresultierende in I. § 4 C ohne weiteres ergibt.

Denken wir uns ferner in Bild 31 Taf. I ein System von 3 Kräften  $P_1 P_2 P_3$ , welche dieser Bedingung entsprechen, und werden 2 dieser Kräfte z. B.  $P_1$  und  $P_2$  zu ihrer Resultierenden R zusammengesetzt, so ist  $R = u. \parallel P_3$ . Es muß nun R mit  $P_3$  im Gleichgewicht sein, dies ist aber nur möglich, wenn  $P_3$  und R in einer Geraden wirken.

Es genügt also nicht, daß  $P_3$  und R gleich groß und parallel sind, sondern es müssen auch ihre Richtungslinien zusammenfallen;  $P_3$  muß daher durch den Schnitt von  $P_1$  und  $P_2$  gehen. Als zeichnerisches Merkmal des Gleichgewichtes dreier Kräfte ergibt sich somit der Satz:

Drei Kräfte in einer Ebene sind im Gleichgewicht, wenn sich aus ihnen ein schließendes Kräfte-dreieck bilden läßt, und wenn sich überdies die Richtungslinien aller 3 Kräfte in einem Punkt schneiden. (Vgl. Bild 10 a u. b Taf. III und Bild 49 Taf. V.)



## I. § 10. Zeichnerische Zusammensetzung mehrerer Kräfte in einer Ebene, welche an einem Punkt angreifen.

Gehen die Kräfte nicht unmittelbar von dem Punkt  $O$  aus (s. Bild 34 Taf. I), sondern schneiden sich nur ihre Richtungslinien sämtlich in  $O$ , so verschiebt man alle Kräfte, bis sie von  $O$  ausgehen, und setzt nun in Bild 35 zunächst mittels des Kräfteparallelogramms  $OP_1C_1P_2$  die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  zu einer Resultierenden  $R_1$  zusammen. Nun wird weiter  $R_1$  und  $P_3$  mittels des Parallelogramms  $OC_1C_2P_3$  zusammengesetzt zur Resultierenden  $R_2$ ; diese ersetzt also  $P_3$  und  $R_1$ , d. h.  $P_3$  und  $P_2$  samt  $P_1$ . Ferner gibt  $R_2$  mit  $P_4$  mittels Prlg.  $OC_2C_3P_4$  die Resultierende  $R_3$ , welche nun schon die Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  ersetzt. Diese Resultierende wird schließlich mit der Kraft  $P_5$  zusammengesetzt zu  $R$  und es vertritt jetzt  $R$  alle 5 Kräfte  $P$ .

Die Seiten des Polygons  $OP_1C_1C_2C_3C_4$  in Bild 35 Taf. I sind der Reihe nach gleich den Kraftstrecken  $P_1P_2P_3\dots$ ; man kann also die Resultante  $R = OC_4$  erhalten aus der Hilfsfigur 36 Taf. I, in welcher ein solches Polygon, Kräftepolygon genannt, konstruiert ist.

Man erhält daher den Satz:

Die Resultante eines Systems von Kräften wird nach Größe und Richtung angegeben durch die Verbindungslinie des Anfangspunktes und des Endpunktes des aus den einzelnen Kraftstrecken gebildeten Kräftepolygons. Man nennt diese Verbindungslinie die Schlußlinie des Kräftepolygons. Die Lage der Resultierenden wird bei Kräften, welche an einem Punkt angreifen, erhalten, wenn man durch diesen Punkt eine Parallele mit der Schlußlinie zieht.

In dem Kräftepolygon dürfen zwar die Kraftstrecken in beliebiger Reihenfolge auf einander folgen, sie müssen aber immer in gleichem Richtungssinne hinter einander gereiht werden. Die Verbindungslinie des Endpunktes und Anfangspunktes gibt die Gegenresultierende des Kraftsystems.

Das Kräftedreieck ist nichts anderes, als eine einfache Form des Kräftepolygons samt seiner Schlußlinie.

Das Kräftepolygon kann sich auch überschneiden (s. Bild 38 Taf. I). Ein solches Kräftepolygon ist zwar richtig und zu gebrauchen, es führt aber leicht zu Verwirrungen. Dieses Überschneiden läßt sich durch zweckmäßige Numerierung vermeiden.

In Bild 37 ist scheinbar in richtiger Reihenfolge numeriert, aber Bild 38 Taf. I gibt eine unklare Darstellung und zeigt, daß eine andere Numerierung zu wählen gewesen wäre. Auf diese richtigere Numerierung kommt man, wenn die Kräfte zuerst innerhalb ihrer Richtungslinie soweit verschoben gedacht werden, bis keine Kraft bei ihrer weiteren Verschiebung die Richtungslinie einer andern Kraft mehr schneiden kann, und wenn erst in dieser neuen Lage der Kraftstrecken die Numerierung gemacht wird (Bild 34 Taf. I, die Schlußlinie bleibt in allen Fällen gleich).

## I. § 11. Zeichnerische Zusammensetzung beliebiger Kräfte in einer Ebene.

Die gegebenen Kräfte sind in Bild 41 Taf. I mit  $P_1P_2P_3P_4$  bezeichnet. Zerlegt man  $P_1$  nach zwei beliebigen Richtungen  $FG$  und  $GH$ , so kann dazu das Kräftedreieck  $ABO$  in Bild 40 Taf. I dienen;  $OA = S_1$  und  $BO = S_2$  sind die Seitenkräfte von  $P_1$  nach  $FG$  und  $GH$ . Zerlegt man  $P_2$  nach der Richtung  $HG$  und einer Richtung  $S_3$ , welche so gewählt

wird, daß das zur Zerlegung dienende Kräfte-dreieck seine Spitze, wenn es in Bild 40 an das vorige Dreieck angereicht wird, ebenfalls in O hat, so sind  $OB = S_2$  und  $CO = S_3$  die Komponenten von  $P_2$ . Bei der Zerlegung von  $P_3$  nach der gleichen Regel ergeben sich die Komponenten  $OC = S_3$  und  $DO = S_4$  und endlich erhält man aus  $P_4$  die Seitenkräfte  $OD = S_4$  und  $EO = S_n$ . In Bild 40 ist  $ABCDE$  das Kräftepolygon für die Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$ .

In dem Linienzug  $S_1 S_2 S_3 S_4 S_n$  in Bild 41, welcher den Namen Seilpolygon trägt, wirken in jeder Seilpolygonseite die aus Bild 40 gefundenen Seitenkräfte.

Man erhält also in Bild 41 als Ersatz für System P das System S. Die Kräfte  $S_2$  und  $S_3$  in GH,  $S_3$  und  $S_4$  in der nächsten Seilpolygonseite u. s. w. heben sich auf, so daß als Gesamtwirkung nur noch  $S_1$  und  $S_n$  übrig bleiben.

Die Resultante von  $S_1$  und  $S_n$  ist aber R, wie sich aus Dreieck AEO in Bild 40 ergibt, und die Lage dieser Resultante ist dadurch bestimmt, daß R durch den Schnitt von S und  $S_n$  gehen muß.

Es vertritt in Bild 41 R zunächst  $S_1$  und  $S_n$  und damit das ganze System S und also auch das von diesem vertretene System P, d. h. R ist die Resultante des Systems P.

Man kommt daher zu folgender Zusammenfassung der Auflösung:

Die Richtung und Größe der Resultierenden wird mittels eines Kräftepolygons bestimmt, wie in I. § 10. Zur Bestimmung der Lage der Resultierenden wird ein Seilpolygon verwendet.

Man zeichne nach Anleitung von I. § 10 aus dem gegebenen Kräftesystem des Bildes 39 Taf. I ein Kräftepolygon in Bild 40, ziehe von einem beliebigen Punkt O als Pol Strahlen S nach den Ecken des Kräftepolygons und mit diesen Polstrahlen in Bild 39 Parallellinien je bis zu den Angriffslinien der zugehörigen Kräfte P, so daß immer eine Parallellinie durch den Schnittpunkt der vorhergehenden Parallelen mit der zu ihr gehörigen Kraft geht, also  $FG \parallel AO$  und nun durch G die Linie  $GH \parallel BO$ ; alsdann erhält man das Seilpolygon  $S_1 S_2 S_3 \dots$  bis  $S_n$ . Verlängert man dessen erste Seite  $S_1$  und dessen letzte  $S_n$ , so gibt der Schnitt einen Punkt der Resultierenden R des ganzen Kraftsystems, und es wird die Resultierende selbst eingezeichnet, indem man durch diesen Punkt mit der Schlußlinie des Kräftepolygons eine Parallele zieht und deren Länge gleich der Länge der Schlußlinie macht.

Zur Anwendung des Seilpolygons sind in zeichnerischer Hinsicht folgende Bemerkungen zu machen. Für die Bestimmung der Resultanten ist es ohne Einfluß, welche Lage der Pol O im Kräftepolygon hat (s. Bild 43 Taf. I). Man wähle jedoch zur Vereinfachung der Zeichnung den Pol womöglich so, daß die Polstrahlen in steter Aufeinanderfolge gezogen werden können; ferner im Interesse der Genauigkeit so, daß die Kräfte von den zugehörigen Polstrahlen möglichst senkrecht getroffen werden (s. Bild 43).

Das Seilpolygon kann ein verschränktes sein, ebenso wie das Kräftepolygon, selbst wenn die Numerierung der Kräfte eine nach I. § 10 geordnete ist. Vermeiden läßt sich in letzterem Fall die Verschränkung dadurch, daß die erste Seilpolygonseite möglichst entfernt von dem ungefähren Schnittpunkt der Krafttrichtungslinien gewählt wird (s. Bild 42 Taf. I).

Bei verworrenen Verhältnissen findet man sich leicht zurecht, wenn man festhält, daß der Polstrahl zwischen jene zwei Kräfte trifft, zwischen welche die zu dem Polstrahl parallele Seil-

polygonseite fallen muß; so fällt z. B. in Bild 40 und 43 Polstrahl  $OB$  zwischen Kraft  $P_1$  und  $P_2$ , es muß also auch die zu ihm parallele Seilpolygonseite  $GH$  in Bild 39, 41 und 42 bzw.  $G_1H_1$  in Bild 42 zwischen die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  zu liegen kommen.

Das Seilpolygon dient auch zur Zusammenfügung paralleler Kräfte oder von zwei Kräften, deren Schnittpunkt außerhalb des Zeichnungsblattes liegt (s. Bild 44—48).

Sind mehrere parallele Kräfte zusammenzusetzen, so bleibt das Verfahren ganz dasselbe. Das Kräftepolygon wird zu einer Geraden, die Resultierende ist den gegebenen Kräften parallel und ist in dem besonderen Fall, daß diese alle gleichgerichtet sind, gleich der Summe der Kräfte (s. Bild 50 Taf. II).

Wirken die Kräfte nach verschiedenen Richtungen, so ist  $R = \Sigma P$ , d. h. gleich der Differenz aus der Summe der Kräfte nach der einen Richtung und der Summe der Kräfte nach der andern Richtung, und wirkt im Richtungsinne der größeren Summe (s. Bild 51 u. 52). Für parallele Kräfte erhält man ein Seilpolygon ohne Überschneidungen, wenn die Kräfte in der Reihenfolge, in welcher man sie von einer Seite kommend trifft, im Kräftepolygon zusammengesetzt werden.

In dem Obigen ist gezeigt, daß die äußersten Seilspannungen  $S_1$  und  $S_n$  die Wirkung des Systems der Kräfte  $P$  darstellen, dies ist leicht einzusehen, wenn man sich tatsächlich ein Seil an Stelle des Seilpolygons denkt und nun auf dieses die Kräfte  $P$  wirken läßt. Dieses Seil ist an seinen Endpunkten mit den Kräften  $S_1$  und  $S_n$  festzuhalten.

Die Gestalt des Seilpolygons hängt von der Wahl des Poles  $O$  ab. Ist z. B. in Bild 50 b der Pol  $O$  links des Kräftepolygons gelegen, anstatt in Bild 50 a rechts, so erhält man in Bild 49 b ein Polygon, welches eigentlich ein Stangenpolygon ist, sein Name bleibt jedoch Seilpolygon. Das Resultat wird durch die eine oder andere Gestalt des Seilpolygons nicht beeinflusst.

## I. § 12. Zerlegung einer Kraft in mehrere Komponenten in einer Ebene.

Aus § 10 und 11 geht hervor, daß die Aufgabe eine unbestimmte ist. Es haben z. B. alle in Bild 53 Taf. II gezeichneten Kräftepolygone, welche sehr verschiedenen Kräftesystemen angehören, dieselbe Kraft  $R$  zur Resultierenden, es können also auch sehr verschiedene Kräfte  $P$  die Komponenten von  $R$  sein. Sehr viele Bedingungen müßten bestehen, um die Aufgabe zu einer bestimmten zu machen.

Die Aufgabe ist für die Praxis bedeutungslos und wird daher hier nicht weiter behandelt.

Die Zerlegung in drei der Lage und Richtung nach bekannte Komponenten kommt häufiger vor. Die Lösung ist nur dann eine bestimmte, wenn sich die drei Komponenten in drei verschiedenen Punkten schneiden, von denen keiner auf der zu zerlegenden Kraft  $R$  liegt.

Aufl. Zerlege zunächst  $R$  nach den Richtungen  $P_1$  und  $r$ , s. Bild 54 Taf. II (wobei  $r$  die Verbindungslinie des Schnittpunktes der einen Komponentenrichtung und  $R$  mit dem Schnittpunkt der beiden anderen Komponentenrichtungen ist), und nun zerlege die so erhaltene Kraft  $r$  nach den Richtungen  $P_2$  und  $P_3$ , so sind die drei Komponenten  $P_1, P_2, P_3$  gefunden.

In I. § 11 ist gezeigt, wie das Seilpolygon schon bei Zusammenfügung zweier Kräfte nötig werden kann. In gleicher Weise kommt dasselbe auch bei Zerlegung einer Kraft nach zwei Komponenten zur Verwendung und es sei der besondere Fall:

## Zerlegung einer Kraft in zwei zu ihrer Richtung parallele Komponenten

hier durchgeführt:

Aufl. Die Bilder 44—46, welche in § 11 besprochen wurden, sind hier rückwärts zu zeichnen. Gegeben ist  $R$ , sowie die Lage und Richtung  $P_1$  und  $P_2$ .

Man zieht von einem beliebigen Punkt auf  $R$  zwei beliebige Strahlen  $S_1, S_2$ , welche die gegebenen Richtungen von  $P_1$  und  $P_2$  schneiden, und verbindet die Schnittpunkte mittels einer Linie  $S_3$ ; alsdann bilden  $S_1 S_2 S_3$  das Seilpolygon. In Bild 44 b bezw. 46 trägt man nun  $R$  an und zieht durch dessen Endpunkte Parallelen mit  $S_1$  und  $S_2$ , wodurch Pol  $O$  erhalten wird. Eine Parallele mit  $S_3$  durch Pol  $O$  teilt auf  $R$ , bezw. dessen Verlängerung, die gesuchten Strecken  $P_1$  und  $P_2$  ab, deren Unterscheidung mit Hilfe von I. § 11 leicht möglich ist.

Rechnerische Behandlung dieser Aufgabe siehe I. § 18.

### I. § 13. Allgemeine graphische Gleichgewichtsbedingungen.

Ein ebenes Kräftesystem ist im Gleichgewicht, wenn sowohl das Kräftepolygon, als auch das Seilpolygon schließt.

Beweis. Gleichgewicht ist bei einem Kräftesystem vorhanden, wenn dessen Gesamtwirkung gleich Null ist. Schließt das Kräftepolygon, d. h. fallen dessen Anfangs- und Endpunkte zusammen, so ist die Resultierende  $R = 0$ , womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

Schließt nur das Kräftepolygon, so erhält man zwar keine einzelne Kraft als Resultierende, fallen aber die beiden äußersten Seilpolygonseiten  $S_1$  und  $S_n$  nicht in eine und dieselbe Gerade, so erhält man zwei parallele, entgegengesetzt gerichtete Kräfte, welche nach I. § 11 die Wirkungsweise des ganzen Systems  $S$ , also auch des Kräftesystems  $P$ , vertreten. Beide Kräfte sind gleich, weil beide durch den Polstrahl  $OA = S_1 = S_n = OS$  angegeben sind (s. Bild 55 und 56 Taf. II). Man hat somit zwei parallele, gleich große, entgegengesetzt wirkende Kräfte, ein sogenanntes Kräftepaar übrig, welches sich, wie der nächste Paragraph zeigt, nicht durch eine einzelne Kraft ersetzen läßt. Fallen dagegen beide äußersten Seilpolygonseiten in ein und dieselbe Gerade, d. h. schließt das Seilpolygon, so heben sich diese beiden gleich großen entgegengesetzt gerichteten Kräfte auf. In diesem Falle ist das gegebene Kräftesystem im Gleichgewicht.

Bezüglich der Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene kann man nun ganz allgemein sagen: Jedes ebene Kräftesystem läßt sich durch eine Kraft und ein Kräftepaar ersetzen.

Es kann dabei vorkommen, daß eine der ersetzenden Größen, also entweder die Kraft oder das Kräftepaar gleich Null ist.

### I. § 14. Das Kräftepaar.

Zwei parallele gleich große entgegengesetzt gerichtete Kräfte nennt man ein Kräftepaar. Dasselbe läßt sich nicht durch eine einzelne Kraft im Gleichgewicht halten; es hat also keine resultierende Kraft.

Ein Kräftepaar kann nur durch ein Kraftmoment im Gleichgewicht gehalten werden.

Den Abstand beider Kräfte eines Kräftepaars nennt man den Arm des Kräftepaars.

Es gibt rechtsdrehende positive Kräftepaare (Bild 57), sie drehen im Sinne des Uhrzeigers, sowie entgegengesetzt, also linksdrehende negative Kräftepaare (s. Bild 58 Taf. II).

Man kann ein Kräftepaar in seiner Ebene beliebig verschieben, ohne daß sich dessen Wirkungsweise ändert.

Beweis. Jede Verschiebung ist erreichbar durch eine Drehung des Kräftepaars und eine Parallelverschiebung. Es ist also nur zu beweisen, daß diese Bewegungen zulässig sind.

Fügt man zu dem in Bild 59 und 60 gegebenen Kräftepaar irgendwo zwei unter sich gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $P$  hinzu, welche in Bild 59 gleichgerichtete, oder wie in Bild 60 gedrehte Stellung gegenüber den gegebenen Kräften haben, so wird die Wirkungsweise des Kräftepaars weder in Bild 59 noch in Bild 60 geändert, weil diese hinzugefügten Kräfte sich im Gleichgewicht halten.

Ebenso wenig wird die Wirkung unseres Systems geändert durch zwei weitere solche Kräfte, welche parallel zu den zuerst hinzugefügten gehen und den Abstand  $a$  von denselben haben, so daß man jetzt 6 Kräfte  $P$  hat, ohne daß eine Änderung der ursprünglichen Wirkungsweise eingetreten wäre. Nun liefern aber je die doppelt und die dreifach durchstrichenen Kräfte  $P$  Resultanten, welche sich aufheben; es bleibt also nur ein dem ursprünglichen Kräftepaar gleiches Kräftepaar in neuer Lage übrig. Die Lageveränderung hat somit die Wirkungsweise nicht geändert.

Im Beispiel 91 bilden die zwei Kräfte  $H_a = H_b = 8333$  kg ein Kräftepaar mit dem Arm 3,60 cm. Man hätte in der Drehungsmomentengleichung zu Bild 3 ohne weiteres den Wert  $8333 \cdot 3,6$  anstatt  $8333 \cdot 560 - 8333 \cdot 2,00$  einsetzen können.

### I. § 15. Statistisches Moment.

Das statische Moment einer Kraft  $P$  in Bezug auf einen festen Punkt  $O$  ist das Produkt aus der Kraftgröße und dem Abstand des Punktes von der Angriffslinie der Kraft  $M = P \cdot a$ . Wird der Abstand in m und die Kraft in kg gemessen, so ist das Moment ausgedrückt in Meterkilogramm (mkg). Ist die Kraft bestrebt, im Sinne des Uhrzeigers um den Punkt zu drehen (Bild 61 Taf. II) so bezeichnet man das Moment als ein positives.

Man kann Kraftmomente zu einem resultierenden Moment zusammensetzen; die sich ergebende Wirkung ist ein Moment, das man als die Differenz aus der Summe der positiven und der Summe der negativen Momente erhält, d. h.

#### Satz 1.

Das resultierende Moment ist gleich der algebraischen Summe der Einzelmomente  $M_r = \Sigma M$ .

Beispiel 6. Es sei in Bild 79 Taf. II  $p_1 = 17$  cm und  $P_1 = 20$  kg;  $p_2 = 14$  cm und  $P_2 = 15$  kg;  $p_3 = 10$  cm und  $P_3 = 32$  kg;  $p_4 = 6$  cm und  $P_4 = 14$  kg;  $p_5 = 2,5$  cm und  $P_5 = 30$  kg. Wie groß ist das resultierende Moment?

Auflösung.	$M_1 = -20 \cdot 17 =$	$-340$	cmkg
	$M_2 = -15 \cdot 14 =$	$-210$	cmkg
	$M_3 = +32 \cdot 10 = +320$	$+320$	cmkg
	$M_4 = -14 \cdot 6 =$	$-84$	cmkg
	$M_5 = -30 \cdot 2,5 =$	$-75$	cmkg

---


$$\Sigma M = +320 \quad -709 \text{ cmkg} = -389 \text{ cmkg.}$$

Bei den Wirkungen von Kraftmomenten kommen auch Gleichgewichtszustände vor:

Satz 2.

Gleich große, entgegengesetzt wirkende Momente halten sich im Gleichgewicht.

Veranschaulichung: Hat man z. B. eine Seiltrommel vom Halbmesser  $r$  und eine Kurbel von der Länge  $a$ , und geht über die Trommel ein Seil, an welchem die Last  $Q$  hängt, so ist das in Bild 62 Taf. II negativ wirkende Moment der Last  $-Q \cdot r$ . Das Moment des Kurbeldruckes ist dagegen positiv und zwar  $+P \cdot a$ . Ist  $P \cdot a = Q \cdot r$ , so steht die Last still. Wenn  $P \cdot a > Q \cdot r$  ist, d. h. wenn das Moment des Kurbeldruckes größer ist, als das Moment der Last, so wird die Last aufgezogen. Man hat um so mehr auf die Kurbel zu drücken, je kürzer  $a$  ist, und um so weniger, je länger die Kurbel ist, wenn das Moment  $P \cdot a$  gleichbleiben soll. Ferner wird die Last  $Q$  ein um so kleineres Moment geben, je kleiner der Trommelhalbmesser  $r$  ist.

Im vorstehenden ist anstatt eines Drehpunktes eine Drehachse genommen worden. In solchen Fällen hat man sich eine zur Drehachse senkrechte Ebene durch die Kraft gelegt zu denken und den Schnitt der Drehachse mit dieser Ebene als Drehpunkt anzusehen.

Wo eine solche Ebene nicht möglich ist, muß zuerst eine Zerlegung der Kraft in Komponenten stattfinden.

Satz 3.

Das statische Moment der Resultierenden eines Systems von Kräften in Bezug auf einen beliebigen festen Punkt ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte in Bezug auf denselben Punkt.

Beweis. Es genügt, diesen Satz für zwei Einzelkräfte zu beweisen. Nach Bild 63 hat man:

$$\triangle O C p \sim B C P, \text{ somit } P : O C = B C : p, \text{ also } P \cdot p = O C \cdot B C$$

$$\triangle O C g \sim A C G, \quad " \quad G : O C = A C : g, \quad " \quad G \cdot g = O C \cdot A C$$

$$\triangle O C r \sim D C R, \quad " \quad R : O C = D C : r, \quad " \quad R \cdot r = O C \cdot D C$$

$$\underline{R \cdot r = O C (C A + A D) = O C (C A + G D_1) = O C (C A + C B)}$$

$$\text{d. h. } R \cdot r = P \cdot p + G \cdot g.$$

Bei Kräften, welche nicht gleichdrehende Momente geben in Bezug auf den Punkt  $O$ , ergibt sich — anstatt  $+$ . Im übrigen bleibt der Beweis derselbe.

Die in I. § 1 ausgesprochene Zulässigkeit der Verschiebung einer Kraft in ihrer Richtungslinie gilt auch in Bezug auf das Moment, d. h. soll das Moment einer Kraft in Bezug auf einen festen Punkt aus den Komponenten dieser berechnet werden, so ist es gleichgültig, an welcher Stelle der Angriffslinie die Kraft in ihre Komponenten zerlegt wird.

Wird zur Bestimmung des Momentes die Kraft selbst verwendet, so ist ohne weiteres einleuchtend, daß ihre Lage innerhalb ihrer Angriffslinie ohne Einfluß bleibt, indem weder  $P$  noch  $r$  (s. Bild 64 Taf. II) sich ändert, wenn die Kraft innerhalb ihrer Richtungslinie verschoben wird.  $M = P \cdot r$  behält dabei stets denselben Wert.

Wird aber die Momentenberechnung mittels der Komponenten gemacht, so ist ein Beweis nötig, welcher unter Annahme der Verwendung der Horizontal- und Vertikalcomponenten im folgenden geliefert ist.

Beweis. Es soll sein

$$+ P \cdot r \left\{ \begin{array}{l} = - V \cdot a_0 + H \cdot b_0 \\ = + V \cdot a + H \cdot b \text{ (bewiesen in Satz 3)} \\ = + V \cdot a_1 + H \cdot b_1 \text{ ( " " " 3)} \\ = + V \cdot a_2 - H \cdot b_2 \text{ (s. Bild 64).} \end{array} \right.$$

In Bild 64 ist:  $\triangle ABC \sim ADE$ , also  $AB:BC = AD:DE$  oder  $H:V = (a_1 - a) : (b - b_1)$ , somit  $H(b - b_1) = V(a_1 - a)$ , also  $H \cdot b + V \cdot a = H \cdot b_1 + V \cdot a_1$ .

Ebenso wird aus  $\triangle ABC \sim AFG$ ,  $AB:BC = AF:FG$ ,  $H:V = (a_2 - a_1) : (b_2 + b_1)$  oder  $H(b_2 + b_1) = V(a_2 - a_1)$ , also  $H \cdot b_1 + V \cdot a_1 = V \cdot a_2 - H \cdot b_2$ .

#### Satz 4.

Das statische Moment eines Kräftepaars in Bezug auf jeden beliebigen Punkt in seiner Ebene ist gleich dem Produkt aus der Größe einer der zwei gleichen Kräfte  $P$  und dem Arm  $a$  des Paares,  $M = P \cdot a$  (s. Bild 57 u. 58).

Beweis. Fülle von dem beliebig gewählten Punkt  $O$  in Bild 65 ein Lot auf die Kräfte  $P$ , so wird  $AB$  stets gleich dem Arm  $a$  und man hat nach Satz 1:

$$M = P(a + OA) - P \cdot OA = P \cdot a.$$

Beispiel 7. Das Kräftepaar in Bild 57 Taf. II hat  $P = 250$  kg und  $a = 6$  cm. Welchen Arm muß ein gleichstarkes Kräftepaar erhalten, dessen Kräfte 300 kg groß sind?

Aufl. Es muß sein  $300 \cdot x = 250 \cdot 6$ , somit  $x = \frac{250 \cdot 6}{300} = 5$  cm.

## I. § 16. Analytische Gleichgewichtsbedingungen.

#### Satz 1.

Ein ebenes Kräftesystem ist im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe der Komponenten aller Kräfte nach zwei ganz beliebigen, aber unter sich verschiedenen Richtungen je gleich Null ist, und wenn ferner gleichzeitig die algebraische Summe der Momente aller Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null ist.

Bezeichnet man die Komponenten der einen Richtung mit  $H$ , die der andern mit  $V$ , so ergibt sich folgende abgekürzte Regel.

Bedingung des Gleichgewichts ist:

$$1) \sum H = 0, \quad 2) \sum V = 0, \quad 3) \sum M = 0,$$

wobei jedoch die Richtungen  $H$  und  $V$  weder notwendig senkrecht aufeinander stehen müssen, noch die Horizontal- und Vertikalrichtung vorzustellen haben.

Die Entwicklung dieser Bedingungen kann aus den früher abgeleiteten zeichnerischen Merkmalen erfolgen:

Die Bestimmung, daß das Kräftepolygon schließen soll, ergibt die ersten zwei Bedingungen  $\sum H = 0$  und  $\sum V = 0$ ; denn die Projektion eines geschlossenen Polygons auf irgend eine Richtung gibt Null. Sodann bedingt die Forderung, daß das Seilpolygon schließe den Ausschluß eines resultierenden Kräftepaars. Die Wirkungsweise eines solchen ist aber ein statisches Moment. In dem obigen Satz, bzw. in der Gleichung  $\sum M = 0$  ist daher gefordert, daß die Summe aller Momente gleich Null sei, d. h. daß sich kein resultierendes Moment ergeben darf.

Mittels dieser drei Gleichungen werden die meisten Aufgaben in der Statik gelöst; dieselben bilden den Kern aller Berechnungen.

Beispiele bei Kap. IV. und Kap. VI. § 7, sowie in dem folgenden Paragraphen.

## B. Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen.

### I. § 17. Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte.

Die graphische Behandlung ist schon in I. § 11 gezeigt.

Im folgenden seien mittels der Gleichungen

$$1) \sum H = 0, \quad 2) \sum V = 0, \quad 3) \sum M = 0,$$

die Aufgaben gelöst.

Gegeben: Zwei gleichgerichtete parallele Kräfte (s. Bild 66 Taf. II).

Gesucht: Die Resultante derselben.

Aufl. Zu bestimmen sind hier drei Größen; nämlich die Lage, Größe und Richtung von R. Zur Verfügung stehen die drei Gleichungen, die Aufgabe ist daher eine bestimmte.

Die Kräfte mögen eine beliebige Richtung haben, wir bezeichnen diese Richtung als „V“-Richtung und eine zu derselben schiefe als „H“-Richtung; dann ergibt A und B nur „V“-Komponenten, keine „H“-Komponenten, weil V zu A und B, d. h. also zur Kraftrichtung parallel ist.

Ist R die Resultante von A und B, so muß deren Gegenresultante GR mit A und B ein Gleichgewichtssystem bilden.

GR ist nach Lage, Richtung und Größe unbekannt. Wir nehmen diese drei Bestimmungsgrößen ganz beliebig an und zerlegen hierauf GR in seine V-Komponente  $V_r$  und in seine H-Komponente  $H_r$ ; alsdann muß auch A, B,  $V_r$  und  $H_r$  ein Gleichgewichtssystem sein. Es muß also sein  $\sum H = 0 = H_r$ , also  $H_r = 0$ .

Damit ist schon gezeigt, daß GR keine H-Komponente haben kann, sondern daß es A und B sein muß (vgl. Bild 67).

Die zweite Gleichgewichtsbedingung  $\sum V = 0 = A + B + GR$  gibt  $GR = -(A + B)$  und zeigt, daß der Richtungssinn von GR ebenfalls unrichtig war. Die beiden Gleichungen  $\sum H = 0$  und  $\sum V = 0$  haben GR nach Richtung und Größe genau bestimmt, so daß die Annahmen von Bild 66 nach Bild 68 Taf. II richtig zu stellen sind, und es wird nun die dritte Gleichung  $\sum M = 0$  über die Lage von GR zu entscheiden haben:  $\sum M = 0$  gibt für den ganz beliebigen Drehpunkt O die Gleichung  $\sum M = 0 = GR \cdot r - B \cdot b - A \cdot a$  und hieraus  $GR \cdot r = B \cdot b + A \cdot a$ . Nun hat man aber oben gefunden  $GR = A + B$ , also wird auch  $(A + B)r = A \cdot a + B \cdot b$ , oder  $A \cdot r + B \cdot r = A \cdot a + B \cdot b$ .

In dieser Gleichung sind die Werte A und B links mit dem kleineren Wert r und rechts mit den größeren Werten a und b multipliziert, woraus sich schon ergibt, daß unsere Annahme bezüglich der Lage von GR auf Unmöglichkeiten führt. Das Gleiche zeigt sich, wenn man die Gleichung in folgende Form bringt:

$$A \cdot r - A \cdot a = B \cdot b - B \cdot r \quad \text{oder} \quad A(r - a) = B(b - r).$$

Aus dem Bild 68 Taf. II ist zu ersehen, daß  $(r - a)$  negativ und  $(b - r)$  positiv wird, es müßte also die negative linke Seite der Gleichung gleich der positiven rechten werden, womit die Unrichtigkeit des Bildes 68 abermals nachgewiesen ist.

Nimmt man nun an, GR habe die in Bild 69 bezeichnete Lage, so wird

$$\sum M = 0 = GR \cdot r - A \cdot a - B \cdot b \quad \text{oder} \quad GR \cdot r = A \cdot a + B \cdot b.$$



Nun ist aber  $GR = A + B$ , also  $(A + B)r = A \cdot a + B \cdot b$  und  $A \cdot r + B \cdot r = A \cdot a + B \cdot b$ , was abermals unmöglich ist, weil  $r$  sowohl größer als  $a$ , also auch größer als  $b$  ist. Es liegt also  $GR$  weder rechts noch links von  $A$  und  $B$ , und muß somit zwischen  $A$  und  $B$  liegen. Es wird nun in Bild 70  $\Sigma M = 0 = GR \cdot r - A \cdot a - B \cdot b$  oder  $GR \cdot r = A \cdot a + B \cdot b$ , aber  $GR = A + B$ , also  $A \cdot a + B \cdot b = A \cdot r + B \cdot r$  oder  $A \cdot a - A \cdot r = B \cdot r - B \cdot b$ , d. h.  $A(a - r) = B(r - b)$ .

Es ist aber  $a - r = x$  und  $r - b = l - x$ , also  $A \cdot x = B(l - x)$ , d. h.  $x : (l - x) = B : A$ , oder da allgemeiner  $m : n = x : (l - x)$  gesetzt werden kann, so ist auch  $m : n = B : A$  und man erhält den Satz 1:

Die Resultante zweier paralleler gleichgerichteter Kräfte ist gleichgerichtet mit diesen Kräften und gleich der Summe derselben. Sie liegt zwischen beiden Kräften und teilt jede Verbindungslinie zwischen ihnen im umgekehrten Verhältnis der Kräfte.

Die Gleichgewichtsbedingungen haben trotz den denkbar unrichtigsten Annahmen die Verhältnisse richtig gestellt und noch obigen Satz ergeben, welcher sich auch aus den geometrischen Verhältnissen der Figuren zu I. § 11 hätte ableiten lassen, hier aber aus Grundsätzen der Mechanik hergeleitet wurde.

Die Herleitung des gefundenen Satzes wird weit einfacher, wenn von Anfang an richtigere Annahmen gemacht werden, wie in Bild 71 Taf. II geschehen ist.

Es wird dann  $\Sigma V = 0 = A + B - GR$ ,  $GR = A + B$ .

Verwendet man für die Momentengleichung einen auf  $GR$  liegenden Drehpunkt, so wird  $\Sigma M = 0 = -A \cdot x + B(l - x) + GR \cdot 0$ , also  $Ax = B(l - x)$ , hieraus  $x : (l - x) = B : A$ .

Auf ganz gleiche Weise erhält man Satz 2:

Die Resultante von zwei entgegengesetzt gerichteten, parallelen, verschieden großen Kräfte ist gleich der Differenz der Kräfte und liegt außerhalb derselben und zwar auf der Seite der größeren Kraft, sie ist mit dieser gleichgerichtet und teilt jede Verbindungslinie zwischen den Kräften im umgekehrten Verhältnis derselben.

Also (in Bild 72)  $R = B - A$  und  $LN : MN = B : A$ .

Die Richtigkeit ergibt sich folgendermaßen:

- 1)  $\Sigma H = 0$  zeigt, daß  $R \parallel A$  und  $B$  sein muß.
- 2)  $\Sigma V = 0$  gibt  $B - A + GR = 0$ , also  $-GR = B - A$ , d. h.  $R = B - A$ .
- 3)  $\Sigma M = 0$  gibt, wenn zur Vereinfachung der Drehpunkt auf  $R$  gelegt wird:  
 $\Sigma M = 0 = A \cdot a - B \cdot b - GR \cdot 0$  oder  $A \cdot a = B \cdot b$ ,  
 hieraus  $a : b = B : A$ , also auch  $LN : MN = B : A$ .

Für Bild 73 würde  $R = A - B$ .

Beispiel 8 (zu Satz 1). In Bild 70 sei gegeben  $A = 1600$  kg,  $B = 700$  kg und  $m + n = 1,15$  m. Wie groß ist die Resultierende aus den Kräften  $A$  und  $B$  und in welche Teile zerlegt sie die 1,15 m lange Verbindungslinie?

Aufl. Die Resultierende  $R = A + B = 1600 + 700 = 2300$  kg ist parallel und gleichgerichtet mit den gegebenen Kräften und liegt zwischen denselben. Ihre Lage bestimmt sich folgendermaßen: aus  $m : n = B : A$  wird  $(m + n) : n = (B + A) : A$  also  $1,15 : n = 2300 : 1600$  und hieraus  $n = \frac{1,15 \cdot 1600}{2300} = 0,80$  m ferner ebenso  $m : (n + m) = B : (A + B)$

d. h.  $m : 1,15 = 700 : 2300$  und hieraus  $m = \frac{1,15 \cdot 700}{2300} = 0,35$  m. Probe  $m + n = 0,80 + 0,35 = 1,15$  m.

Beispiel 9 (zu Satz 2). In Bild 72 sei  $LM = 65$  cm, Kraft  $A = 550$  kg und  $B = 950$  kg. Wie groß ist die Resultierende beider Kräfte und welche Lage hat dieselbe?

Aufl. Die Resultierende  $R = 950 - 550 = 400$  kg ist mit der Kraft  $B$  gleichgerichtet und parallel, sie liegt außerhalb beider Kräfte und zwar auf der Seite von  $B$ . Ihre Lage bestimmt sich aus  $LN : MN = B : A$ . Nach der Proportionenlehre ist  $(LN - MN) : MN = (B - A) : A$  d. h.  $65 : MN = 400 : 550$ , somit  $MN = \frac{65 \cdot 550}{400} = 89,4$  cm, ferner ebenso  $LN : (LN - MN) = B : (B - A)$  oder  $LN : 65 = 950 : 400$  also  $LN = \frac{65 \cdot 950}{400} = 154,4$  cm. Probe  $LN - MN = 154,4 - 89,4 = 65,0$  cm =  $LM$ .

## I. § 18. Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen.

### Zerlegung einer Kraft in zwei parallele Komponenten.

Das in I. § 12 graphisch durchgeführte Verfahren ist im folgenden mittels der Gleichungen

$$1) \sum H = 0 \quad 2) \sum V = 0 \quad 3) \sum M = 0$$

behandelt.

Gegeben: Eine Kraft  $R$ , sowie zwei zu ihr parallele Richtungen.

Gesucht: Die Komponenten  $A$  und  $B$  von  $R$  nach diesen Richtungen (s. Bild 74 u. 75 Taf. II).

Wir bezeichnen auch wieder die Richtung von  $R$  als „ $V$ “-Richtung, eine zu ihre schiefe als „ $H$ “-Richtung.

$H$ -Komponenten treten keine auf. Es bleiben also übrig die zwei Gleichungen

$$\sum V = 0 \text{ und } \sum M = 0.$$

Wir nehmen zunächst an:

#### I. Fall.

$R$  liege zwischen  $A$  und  $B$ , dann müssen  $A$  und  $B$  gleichgerichtet mit  $R$  sein. Die Gegenkräfte  $A_1$  und  $B_1$  von  $A$  und  $B$  halten mit  $R$  das Gleichgewicht, also muß in Bild 76 Taf. II sein

$$1) \sum V = 0 = R - A_1 - B_1.$$

$\sum M = 0$  gibt für Drehpunkt  $O$  . . . 2)  $\sum M = 0 = A_1 \cdot a - R \cdot r + B_1 \cdot b$ .

Diese Gleichungen enthalten je zwei Unbekannte  $A_1$  und  $B_1$ . Zwei Gleichungen sind aber vorhanden, die Lösung ist also möglich, doch vereinfacht sich dieselbe bei folgendem Verfahren:

Man wendet die Momentengleichung an und legt den Drehpunkt auf die Richtung  $B_1$ ; dann wird nach Bild 77  $\sum M = 0 = A_1 l - R(l - x)$ , hieraus 1)  $A_1 = R \frac{l - x}{l}$ .

Nun wendet man diese Gleichung nochmals an für einen auf der Richtung von  $A_1$  liegenden Drehpunkt, dann wird  $\sum M = 0 = -B_1 \cdot l + R \cdot x$  und hieraus 2)  $B_1 = R \frac{x}{l}$ , schließlich wendet man zur Probe an  $\sum V = 0 = R - A_1 - B_1$ , also  $R = A_1 + B_1$ , (wenn man die Werte von  $A_1$  und  $B_1$  einsetzt, so wird auch  $R = R \frac{l - x}{l} + R \frac{x}{l} = R$  die Probe stimmt somit.)

Die Kraft  $R$  liefert die beiden Komponenten  $A = R \frac{l - x}{l}$  und  $B = R \frac{x}{l}$ , also

$$A : B = \left[ R \frac{l - x}{l} \right] : \left[ R \frac{x}{l} \right] \text{ d. h. } A : B = (l - x) : x.$$

Hieraus erhält man den Satz 1:

Die Komponenten von R nach zwei zu R parallelen Richtungen, zwischen welchen R liegt, sind gleichgerichtet mit R; sie verhalten sich umgekehrt wie ihre Abstände von R und ihre Summe ist gleich R.

## II. Fall.

Ebenso erhält man Satz 2:

Die Komponenten von R nach zwei zu R parallelen Richtungen, außerhalb deren R liegt, sind verschieden gerichtet. Die näher liegende Komponente hat die Richtung von R und ist die größere; die entfernter liegende wirkt entgegengesetzt wie R. Beide Komponenten verhalten sich umgekehrt, wie ihre Abstände von R und ihre Differenz ist gleich R.

Beweis. In Bild 78 halten R und die Gegenkräfte  $A_1$  und  $B_1$  sich das Gleichgewicht also ist  $\sum V = 0 = A_1 - B_1 + R$  und hieraus 1)  $B_1 - A_1 = R = B - A$ , ferner wird für einen auf R gelegenen Drehpunkt  $\sum M = 0 = R \cdot o + B_1 \cdot b - A_1 \cdot a$ , oder  $B_1 \cdot b = A_1 \cdot a$ , hieraus 2)  $B_1 : A_1 = a : b = B : A$ .

Für einen Drehpunkt auf A wird  $R \cdot a = B(a - b)$ , also 3a)  $B = R \frac{a}{a - b}$ .

Für einen Drehpunkt auf B wird  $R \cdot b = A(a - b)$ , d. h. 3b)  $A = R \frac{b}{a - b}$ .

Zur Probe kann man wieder die oben gefundene Gleichung 1), wonach  $B - A = R$  ist, anwenden, d. h.

$$R \frac{b}{a - b} - R \frac{b}{a - b} = R \frac{a - b}{a - b} = R.$$

Das im Satz 1 und 2 ausgesprochene Gesetz heißt das Hebelgesetz.

Die Berechnungen in diesem Paragraphen haben sich gegenüber dem vorigen Paragraphen vereinfacht, weil von Anfang an schon richtige Annahmen gemacht wurden. Wäre dies nicht der Fall gewesen, so hätten die Gleichungen die Richtigstellung wieder selbst besorgt.

Beispiel 10 (zu Satz 1). In Bild 77 Taf. II sei gegeben  $R = 1800$  kg, sowie  $x = 37$  cm und  $l - x = 53$  cm. Die Komponenten von R nach den zu R parallelen Richtungen A und B sind zu bestimmen.

Auflösung. Die Komponenten sind gleichgerichtet mit der gegebenen Kraft R und finden sich folgendermaßen:  $A : B = 53 : 37$ , somit nach Proportionenlehre  $A : (A + B) = 53 : (53 + 37)$ .

Die Summe der Komponenten  $A + B$  ist aber gleich R, also wird  $A : 1800 = 53 : 90$

$$A = \frac{1800 \cdot 53}{90} = 1060 \text{ kg,}$$

ferner ebenso  $(A + B) : B = (53 + 37) : 37$  oder  $1800 : B = 90 : 37$ ,

hieraus  $B = \frac{1800 \cdot 37}{90} = 740 \text{ kg.}$

Probe  $A + B = 1060 + 740 = 1800 = R.$

Beispiel 11 (zu Satz 2). In Bild 78 Taf. II sei gegeben  $R = 810$  kg, sowie  $a = 20$  cm und  $b = 5$  cm. Die Komponenten von R nach den zu R parallelen Richtungen A und B sind zu bestimmen.

Auflösung. Die Komponenten A und B sind verschieden gerichtet. Die Komponente B muß die Richtung von R erhalten und ist die größere. Die Komponente A wirkt entgegengesetzt der Richtung von R und ist die kleinere.

Die Größe der Komponenten findet sich aus der Proportion  $B : A = 20 : 5$  und nach der Proportionslehre  $(B - A) : A = (20 - 5) : 5$ .

Da nun die Differenz der Komponente  $B - A = R$  ist, so wird  $810 : A = 15 : 5$

$$A = \frac{810 \cdot 5}{15} = 270 \text{ kg,}$$

ferner ebenso  $(B - A) : B = (20 - 5) : 20$  oder  $810 : B = 15 : 20$ .

$$B = \frac{810 \cdot 20}{15} = 1080 \text{ kg.}$$

Probe  $B - A = 1080 - 270 = 810 = R$ .

Sind, wie in den zwei letzten Beispielen, die senkrechten Abstände der Kraftstrichtungen bekannt, so erhält man die Gleichungen zur Bestimmung der Größe der Komponenten rascher durch Ansetzung einer Momentengleichung. Wählt man z. B. in der letzten Aufgabe als Drehpunkt einen Punkt auf B, so wird unmittelbar erhalten

$$A \cdot (20 - 5) = 810 \cdot 5, \text{ also } A = \frac{810 \cdot 5}{15} = 270 \text{ kg u. f. w.}$$

## I. § 19. Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen.

### Zusammensetzung und Zerlegung mehrerer paralleler Kräfte.

#### 1. Analytisch, d. h. durch Rechnung.

##### I. Fall.

Gegeben: Die parallelen Kräfte P. Gesucht: Deren Resultante.

Aufl. Die Richtung der P heiße wieder „V“-Richtung, eine zur ihr schiefe Richtung sei die „H“-Richtung (s. Bild 79 Taf. II).

Die Gegenresultante GR des Systems habe die „H“-Komponente „H<sub>r</sub>“ und die „V“-Komponente „V<sub>r</sub>“; alsdann ist

1)  $\Sigma H = 0 = H_r$ , d. h. es existiert keine H-Komponente, GR muß also parallel P sein.

2)  $\Sigma V = 0 = P_1 + P_2 - P_3 + P_4 + P_5 + V_r$  oder

$$V_r = P_3 - (P_1 + P_2 + P_4 + P_5) = \Sigma P.$$

In unserem Fall ergibt sich V<sub>r</sub> negativ; die in Bild 79 Taf. II getroffene Annahme ist daher unrichtig, es muß V<sub>r</sub> nach oben wirken.

GR ist jetzt nach Größe und Richtung bestimmt, nur seine Lage ist noch nicht bekannt, zu deren Bestimmung dient wieder die Momentengleichung:

Man nehme einen beliebigen Drehpunkt O an, dann ist

$$\begin{aligned} \Sigma M &= 0 = -P_1 \cdot p_1 - P_2 p_2 + P_3 p_3 - P_4 p_4 - P_5 p_5 + V_r \cdot v \\ v &= \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2 - P_3 p_3 + P_4 p_4 + P_5 p_5}{V_r} = \frac{\Sigma P \cdot p}{\Sigma P} \end{aligned}$$

und damit ist auch die Lage von V<sub>r</sub> bestimmt und unsere Aufgabe gelöst.

Die Gleichungen haben alle unrichtigen Annahmen richtig gestellt.

Beispiel 12. In Bild 79 Taf. II seien die Zahlenwerte dieselben wie bei dem Beispiel 6 zu I. § 15 Satz 1.

Die Resultierende der Kräfte ist zu bestimmen.

Auflösung. Die Größe der Resultierenden ergibt sich aus

$$P_1 + P_2 - P_3 + P_4 + P_5 = 20 + 15 - 32 + 14 + 30 = + 47 \text{ kg.}$$

Die Resultierende hat die Richtung der positiv gerichteten Kräfte. Sie ist parallel den gegebenen Kräften und ihre Lage bestimmt sich aus

$$v = \frac{\Sigma P \cdot p}{47} = \frac{-389}{47} = -8,3 \text{ cm.}$$

Das negative Vorzeichen gibt an, daß  $v$  vom Drehpunkt nach links anzutragen ist, weil das Moment der Resultierenden negativ werden muß.

Als weitere Beispiele siehe die Anwendungen auf Schwerpunktsbestimmungen in I. § 21.

## II. Fall.

Gegeben: Die parallelen Kräfte  $P$ . Gesucht: Deren Komponenten nach den Richtungen  $A$  und  $B$ , welche zu  $P$  parallel sind.

Die Auflösung wird wieder am einfachsten durch zweimalige Anwendung der Gleichung  $\Sigma M = 0$  und Verlegung des Drehpunktes einmal auf  $A$ , das anderemal auf  $B$  (s. Bild 80 Taf. II). Drehpunkt auf  $B$  gibt

$$\Sigma M = 0 = A \cdot l - P_1(1 - x_1) - P_2(1 - x_2) + P_3(1 - x_3) - P_4(1 - x_4)$$

also

$$1) A = \frac{P_1(1 - x_1) + P_2(1 - x_2) - P_3(1 - x_3) + P_4(1 - x_4)}{1} = \frac{\Sigma P(1 - x)}{1}.$$

Ebenso wird mit Drehpunkt auf  $A$

$$\Sigma M = 0 = -B \cdot l + P_1 x_1 + P_2 x_2 - P_3 x_3 + P_4 x_4$$

$$2) B = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 - P_3 x_3 + P_4 x_4}{1} = \frac{\Sigma P \cdot x}{1}.$$

Zur Probe verwende man  $\Sigma V = 0 = P_1 + P_2 - P_3 + P_4 - A - B$ ,  
oder  $A + B = P_1 + P_2 - P_3 + P_4 = \Sigma P$ .

Aus Gleichung 1) und 2) sieht man, daß  $A$  und  $B$  die Summe der Wirkungen der einzelnen Kräfte  $P$  nach den Richtungen  $A$  und  $B$  sind; denn man könnte an Stelle der soeben gefundenen Gleichung 1) schreiben

$$(1a) A = \frac{P_1(1 - x_1)}{1} + \frac{P_2(1 - x_2)}{1} - \frac{P_3(1 - x_3)}{1} + \frac{P_4(1 - x_4)}{1}.$$

Auf der rechten Seite stehen aber die einzelnen Komponenten der Kräfte  $P$  nach der Richtung  $A$ ; ebenso liefert Gleichung 2)

$$(2a) B = \frac{P_1 x_1}{1} + \frac{P_2 x_2}{1} - \frac{P_3 x_3}{1} + \frac{P_4 x_4}{1}$$

woraus die Richtigkeit des Gesagten ersichtlich ist. (Beispiele siehe bei II. § 10.)

## 2. Graphisch, d. h. durch Zeichnung.

Alle Kräfte seien der Einfachheit halber gleichgerichtet. Der erste der vorstehenden Fälle ist schon in I. § 11 gelöst, wobei sich in Bild 50 die Größe und Richtung der Resultierenden ergab; in Bild 49 ist der Schnitt  $C$  der beiden äußersten Seiten  $S_1$  und  $S_n$  des Seilpolygons ein Punkt der Lage der Resultierenden.

Im zweiten Fall sind die Komponenten von  $R$  nach  $A$  und  $B$  zu finden. Diese Aufgabe ist in I. § 12 gelöst. Als den daselbst genannten beliebigen Punkt auf  $R$  wählen wir  $C$ , so daß  $S_1$  und  $S_n$  die beliebigen Strahlen werden können, welche die Richtung  $A$  und  $B$  schneiden. Es ist alsdann nur mit der Schlußlinie  $DE$  (Bild 81) des Seilpolygons eine Parallele in Bild 82 durch  $O$  zu ziehen, wodurch  $R = \Sigma P$  in die Komponenten  $A$  und  $B$  geteilt wird.

Die Komponente A liegt zwischen Seite ED und  $S_1$  in Bild 81, sie wird deshalb auch in Bild 82 durch die Parallelen zu diesen Seiten eingeschlossen, ebenso die Komponente B durch die Parallelen zu DE und  $S_n$ .

### I. § 20. Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen.

#### Berechnung beliebig gerichteter Komponenten einer Kraft.

Die Aufgabe ist in I. § 8 dadurch gelöst, daß auf das Kräfteparallelogramm trigonometrische Formeln angewendet wurden.

Im Sinne der Mechanik geschieht die Lösung mittels der Gleichung  $\Sigma M = 0$ , weil die Komponenten G und P mit der Gegenresultierenden ein Gleichgewichtssystem bilden (s. Bild 83 Taf. II).

Zur Vereinfachung der Rechnung legt man zuerst den Drehpunkt auf die Richtung der Komponente P, alsdann werden die Hebelarme  $r = a \cdot \sin \alpha$  und  $g = a \cdot \sin (\alpha + \beta)$  und es wird nun  $\Sigma M = 0 = G \cdot a \sin (\alpha + \beta) + P \cdot 0 - GR \cdot a \cdot \sin \alpha$

$$G = \frac{GR \cdot a \cdot \sin \alpha}{a \cdot \sin (\alpha + \beta)} = \frac{R \cdot \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Ebenso erhält man mit G als Drehpunkt  $P = \frac{R \cdot \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$ , also dieselben Resultate, wie in I. § 8.

Diese Berechnungsweise ist in der Praxis üblicher, als diejenige in I. § 8. Man vereinfacht sich die Berechnung meistens noch dadurch, daß die Hebelarme r und g nicht trigonometrisch bestimmt, sondern unmittelbar aus der Figur abgemessen werden, was in der Regel mit genügender Genauigkeit geschehen kann. Zur Verwendung kommt dann folgende Form obiger Gleichungen

$$\Sigma M = 0 = G \cdot g + P \cdot 0 - GR \cdot r \quad \text{oder} \quad G = \frac{R \cdot r}{g} \quad \text{2c.}$$

### I. § 21. Schwerpunktsbestimmungen.

In der Physik ist gezeigt worden, daß man sich das Gewicht eines Gegenstandes (Linie, Fläche oder Körper) in dessen „Schwerpunkt“ (Massenmittelpunkt) vereinigt denken kann. Die Bestimmung eines Schwerpunktes kommt somit auf die Bestimmung der Resultierenden der Gewichte der einzelnen Teile des Gegenstandes hinaus, welche zeichnerisch nach I. § 11 oder rechnerisch nach I. § 19 Fall 1 geschehen kann.

Man geht bei der Berechnung davon aus, daß die Summe der statischen Momente der Gewichte der einzelnen Teile gleich dem statischen Moment des Gewichtes des ganzen Gegenstandes in Bezug auf dieselbe Drehachse ist. Ist der gesuchte Abstand des Schwerpunktes von der angenommenen Drehachse oder dem angenommenen Drehpunkt  $x_0$  und bezeichnet man mit  $g_1 g_2 g_3 \dots$  die einzelnen Gewichte, mit  $x_1 x_2 x_3 \dots$  deren Kraftarme in Bezug auf die Drehstelle, so hat man  $G = g_1 + g_2 + g_3 + \dots = \Sigma g$ , ferner  $G \cdot x_0 = g_1 \cdot x_1 + g_2 \cdot x_2 + g_3 \cdot x_3 + \dots = \Sigma g x$ , also  $x_0 = \frac{\Sigma g x}{G} = \frac{\Sigma g x}{\Sigma g}$ .

Hieraus ergibt sich, daß die Summe der statischen Momente der Gewichte der einzelnen Teile in Bezug auf den Schwerpunkt gleich Null sein muß.

Hat ein ebenedes Gebilde eine Symmetralachse, d. h. eine Linie, welche ihn in zwei vollkommen gleiche Hälften teilt, so muß der Schwerpunkt auf dieser Linie liegen; es genügt alsdann für die, die einzelnen Teile angreifenden Kräfte nur eine Richtung anzunehmen, welche jedoch diese Achse schneiden muß. Der Schnittpunkt der Resultierenden dieser Kräfte mit der Symmetralachse ist der Schwerpunkt.

Ist keine Symmetralachse vorhanden, so muß je die Resultierende für zwei verschiedene Krafrichtungen bestimmt werden; der Schnittpunkt beider Resultierenden ist der Schwerpunkt.

Zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Körpers sind drei Schwererebenen zu ermitteln, deren Schnittpunkt der Schwerpunkt ist. Hat der Körper eine Symmetralebene, so liegt der Schwerpunkt jedenfalls in dieser, die Berechnung hat sich alsdann, ähnlich wie bei ebenen Gebilden, auf zwei Richtungen zu beschränken.

Nach dem vorstehenden hat man sich im einen wie im andern Fall den Gegenstand in Teile zerlegt zu denken, deren Schwerpunkte bekannt sind. In diesen Schwerpunkten greifen Kräfte an, welche gleich dem Gewicht dieser Teile sind.

Diese Gewichte sind den Größen der einzelnen Teile proportional, wenn alle Teile das gleiche spezifische Gewicht haben; man kann daher in diesem Fall die Größen jener Teile selbst als angreifende Kräfte behandeln. Handelt es sich nur um Flächen oder Linien, so treten an Stelle der Gewichte  $g$  die Flächenteile  $f$  oder die Linienstücke  $l$ .

Im folgenden sind die Lagen der Schwerpunkte verschiedener Linien, Flächen und Körper angegeben:

#### A) Linien.

1. Der Schwerpunkt einer geraden Strecke liegt in deren Mitte.
2. Der Schwerpunkt  $S$  eines Kreisbogens von der Länge  $b$ , der Sehne  $s$  und dem Halbmesser  $r$  ist vom Kreismittelpunkt  $O$  entfernt um  $OS = \frac{r \cdot s}{b}$ .
3. Der Schwerpunkt eines Halbkreisumfangs berechnet sich nach Nr. 2 folgendermaßen:  
 $s = 2r$ ,  $b = \pi r$ , also  $OS = \frac{r \cdot s}{b} = \frac{r \cdot 2r}{\pi r} = \frac{2r}{\pi} = 0,637r$  oder annähernd  
 $OS = \frac{2}{3}r$ .

#### B) Ebene Flächen.

4. Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche liegt auf dem Schnittpunkt der seitenhalbierenden Ecktransversalen. Dieser Punkt teilt von den Transversalen ein Drittel ihrer Länge ab.
5. Der Schwerpunkt einer Parallelogrammfläche liegt auf dem Diagonalenschnitt.
6. Der Schwerpunkt einer Paralleltrapezfläche liegt auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der parallelen Seiten  $a$  und  $b$  und findet sich, indem man  $a$  nach einer Seite um  $b$ , sowie  $b$  nach der entgegengesetzten Seite um  $a$  verlängert und die so gefundenen Punkte durch eine gerade Linie verbindet. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit obengenannter Verbindungslinie ist der Schwerpunkt. Ist  $h$  der Abstand zwischen  $a$  und  $b$ , so liegt der Schwerpunkt

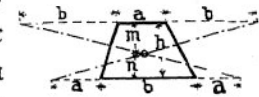


Bild 1.

von  $a$  entfernt um  $m = \frac{a + 2b}{a + b} \cdot \frac{h}{3}$  und von  $b$  entfernt um  $n = \frac{2a + b}{a + b} \cdot \frac{h}{3}$ .

7. Der Schwerpunkt S eines Kreisabschnittes mit dem Bogen  $b$ , der Sehne  $s$  und dem Halbmesser  $r$  ist vom Kreismittelpunkt  $O$  entfernt um  $OS = \frac{2}{3} \frac{r \cdot s}{b}$ .

8. Der Schwerpunkt einer Halbkreisfläche berechnet sich nach Nr. 7 folgendermaßen:

$$s = 2r \text{ und } b = \pi r, \text{ also } OS = \frac{2}{3} \frac{r \cdot s}{b} = \frac{2}{3} \frac{r \cdot 2r}{\pi r} = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} = 0,425r$$

oder annähernd  $OS = \frac{2}{3} r$ .

9. Der Schwerpunkt einer Viertelskreisfläche berechnet sich nach Nr. 7 folgendermaßen:

$$s = r\sqrt{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{\pi r}{2},$$

also  $OS = \frac{2}{3} \frac{r \cdot s}{b} = \frac{2}{3} \frac{r \cdot r\sqrt{2}}{\frac{\pi r}{2}} = \frac{4}{3} \frac{r\sqrt{2}}{\pi}$ .

10. Der Schwerpunkt einer Sechstelskreisfläche berechnet sich nach Nr. 7 folgendermaßen:

$$s = r \text{ und } b = \frac{\pi r}{3} \quad OS = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot s}{b} = \frac{2}{3} \frac{r \cdot r}{\frac{\pi r}{3}} = \frac{2r}{\pi}.$$

11. Der Schwerpunkt S eines Parabelsegments von der Sehne  $2y$  und der Pfeilhöhe  $x$  liegt auf der Parabelachse vom Scheitel entfernt um  $\frac{2}{3}x$ .

12. Der Schwerpunkt S eines halben Parabelsegments hat (Bezeichnung wie in 11.) die Abszisse  $\frac{2}{3}x$ , die Ordinate  $\frac{2}{3}y$ .

### C. Körper.

13. Der Schwerpunkt für ein Prisma mit parallelen Endflächen liegt in der Mitte der Verbindungslinie der Endflächenschwerpunkte.

14. Der Schwerpunkt einer Pyramide oder eines Kegels liegt im unteren Viertel der Verbindungslinie zwischen dem Schwerpunkt der Grundfläche und der Spitze.

15. Der Schwerpunkt eines Kugelabschnittes von der Höhe  $h$  und dem Kugelhalbmesser  $r$  ist vom Kugelmittelpunkt entfernt um  $OS = \frac{3}{4} \frac{(2r-h)^2}{3r-h}$ .

16. Der Schwerpunkt eines Kugelsektors von der Höhe  $h$  und dem Kugelhalbmesser  $r$  ist vom Kugelmittelpunkt entfernt um  $OS = \frac{3}{8} (2r-h)$ .

17. Der Schwerpunkt einer Halbkugel berechnet sich nach Nr. 15 folgendermaßen:  $h = r$ ,

$$\text{somit} \quad OS = \frac{3}{4} \frac{(2r-r)^2}{3r-r} = \frac{3}{8} r,$$

$$\text{ferner ebenso nach Nr. 16 } OS = \frac{3}{8} (2r-r) = \frac{3}{8} r.$$

Anm. Beliebige krummflächig begrenzte Körper teile man durch parallele Ebenen in so dünne Scheiben, daß man die einzelnen Teile als Prismen behandeln kann. Beliebige ebenflächig begrenzte Körper teile man in dreiseitige Pyramiden, deren Schwerpunkt nach Nr. 14 bekannt ist.



In manchen Fällen kann man auch die Guldinische Regel zur Bestimmung von Schwerpunkten verwenden.

### Anwendungen.

Beispiel 13. Bestimmung des Schwerpunktes für einen Kreisring-Abschnitt.

Eine Pilasterfäule, deren Querschnitt nach dem unteren Bild gestaltet ist, mußte belastet werden. Zu diesem Zweck war der Schwerpunkt der Querschnittsfläche zu bestimmen (vgl. II. § 15 u. VI. § 2).

Aufl. Zunächst ist für den Kreisring im Mittelpunkt C die Differenz  $F - f_1$  der großen Kreisfläche  $F$  und der kleinen Kreisfläche  $f_1$  als positive Kraft anzubringen. Aus dem Kreisring denkt man sich sodann den Kreisabschnitt  $ABCD = f_2$  weggenommen, d. h. es wird dessen Flächengröße  $f_2$  in seinem Schwerpunkt als negative Kraft angebracht. Damit ist aber zu viel weggenommen und zwar erstens das Dreieck  $BCD = f_3$ , denn dessen in dem Kreisring liegende Teile sollen nicht abgezogen werden, und der in der inneren Kreisfläche liegende Dreiecksteil umschließt eine Fläche, welche in der Größe  $f_4$  enthalten ist und also schon abgezogen wurde; es muß daher die Dreiecksfläche  $f_3$  wieder hinzugefügt, d. h. es muß  $f_3$  in dem Dreiecksschwerpunkt als positive Kraft angebracht werden, und aus demselben Grunde muß im Schwerpunkt des Kreisabschnittes  $EFG$  dessen Flächengröße  $f_4$  als positive Kraft angebracht werden.

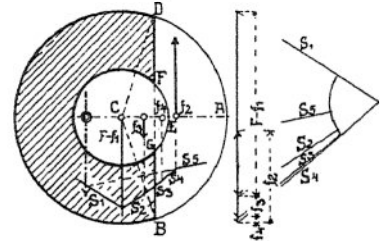


Bild 2.

Der Kreisringabschnitt wird also angesehen als  $(F - f_1) - f_2 + f_3 + f_4$ . Die genannten vier Kräfte werden nach I. § 11 mittels Kräfte- und Seilpolygons, vgl. nebenstehendes Bild oder nach I. § 19 Fall I rechnerisch zu einer Resultierenden zusammengesetzt (— · — · — in dem Bild), deren Schnitt mit der Symmetralachse des Kreisstückes den gesuchten Schwerpunkt gibt.

Ist im betrachteten Beispiel  $R = 35$  cm,  $r = 16$  cm und im Kreisabschnitt  $EFG$  die Pfeilhöhe 5 cm groß, so mißt nach dem Bild  $BAD = 87,0$ ,  $BD = 66,5$  und  $FG = 23,0$  cm, also wird  $F = \pi 3,5^2 = 38,47$  qdm,  $f_1 = \pi \cdot 1,6^2 = 8,04$  qdm,  $f_2 = \frac{1}{2} \cdot R \cdot BAD = \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 8,7 = 15,22$  qdm,  $f_3 = \frac{1}{2} BD (r - 0,5) = \frac{1}{2} \cdot 6,65 \cdot 1,1 = 3,66$  qdm und, den flachen Kreisabschnitt  $EFG$  als Parabelabschnitt berechnet,  $f_4 = \frac{2}{3}$  Sehne mal Pfeilhöhe  $= \frac{2}{3} 2,3 \cdot 0,5 = 0,77$  qdm, somit  $R = 38,47 - 8,04 - 15,22 + 3,66 + 0,77$  qdm  $= 19,64$  qdm.

Schreibt man die Drehungsmomenten-Gleichung für den Punkt C an, so wird der gesuchte Abstand  $x_0$  des Schwerpunktes von C gefunden aus

$$\begin{aligned} R \cdot x_0 &= f_3 \cdot a_3 + f_4 \cdot a_4 - f_2 \cdot a_2 = 3,66 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,1 + 0,77 \cdot (1,1 + 0,2) - 15,22 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3,5 \cdot 6,65}{8,7} \\ &= 3,66 \cdot 0,73 + 0,77 \cdot 1,3 - 15,22 \cdot 1,78 = 23,42, \text{ also } x_0 = -\frac{23,42}{19,64} = -1,19. \end{aligned}$$

Das Minuszeichen gibt an, daß der Schwerpunkt in vorstehendem Bild links von C liegt, da die nach rechts liegenden Abstände  $a$  der Schwerpunkte der Teilflächen in obige Rechnung positiv eingesetzt worden sind.

Die Wahl des Drehpunktes für die Momentengleichung ist „beliebig“; dadurch daß man Punkt C wählte, ist eine Multiplikation erspart worden, da die Kraft  $F - f_1 = 30,43$  qdm durch diesen Drehpunkt geht.

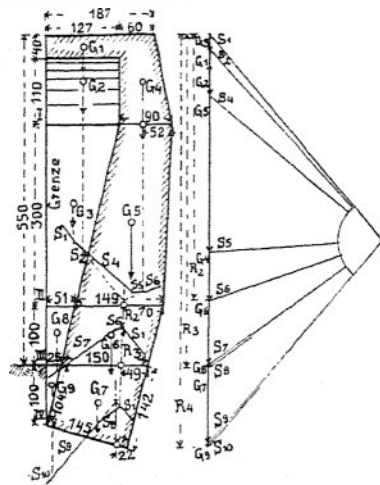
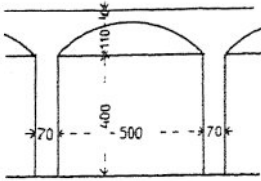


Bild 3.

Über dem Bogen	$g_1 = 0,4 \cdot 1,27 \cdot 5,7 \cdot 2,2$	$= 6,37$ t
Bogenzwickel	$g_2 = (5,7 \cdot 1,1 - \frac{2}{3} \cdot 5,0 \cdot 1,1) \cdot 1,27 \cdot 2,2$	$= 7,26$ t
Oberer Pfeilerteil	$g_3 = 3,00 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1,27 + 0,51) \cdot 0,7 \cdot 2,2$	$= 4,11$ t
Oberer Mauerteil	$g_4 = 1,50 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0,6 + 0,9) \cdot 5,7 \cdot 2,2$	$= 14,10$ t
Mittlerer Mauerteil	$g_5 = 3,00 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1,49 + 0,90) \cdot 5,7 \cdot 2,2$	$= 45,00$ t
Mittlerer Mauerteil	$g_6 = 1,00 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1,49 + 1,50) \cdot 5,7 \cdot 2,2$	$= 18,78$ t
Unterer Mauerteil	$g_7 = 1,45 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1,04 + 1,42) \cdot 5,7 \cdot 2,2$	$= 22,40$ t
Mittlerer Pfeilerteil	$g_8 = 1,00 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0,51 + 0,25) \cdot 0,7 \cdot 2,2$	$= 0,59$ t
Unterer Pfeilerteil	$g_9 = 1,00 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 0,7 \cdot 2,2$	$= 0,19$ t
		$118,80$ t.

#### a) Zeichnerische Lösung.

Auf Fuge II lasten  $g_1$  bis  $g_5$ . Diese Kräfte sind nach I. § 11 geordnet im Kräftepolygon zusammengesetzt worden, das zugehörige Seilpolygon gibt nach I. § 11 die Lage der Resultierenden  $R_2$ , welche die Fuge II in 70 cm Abstand von der hinteren Kante schneidet.

Auf Fuge III lasten  $R_2$ ,  $g_6$ ,  $g_8$ , für welche in gleicher Weise die Resultierende  $R_3$  bestimmt wird, welche die Fuge III in 49 cm Abstand von der hinteren Kante schneidet.

Auf der Fundamentsohle IV ruhen  $R_3$ ,  $g_7$ ,  $g_9$ , deren Resultierende  $R_4$  hat noch 22 cm Abstand von der hinteren Kante.

#### b) Rechnerische Lösung.

Die Resultierenden können auch nach I. § 19 Fall I rechnerisch bestimmt werden.

$$\begin{aligned} R_2 &= g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 & 76,84 \text{ t} \\ R_3 &= R_2 + g_6 + g_8 & 96,21 \text{ t} \\ R_4 &= R_3 + g_7 + g_9 & 118,80 \text{ t.} \end{aligned}$$

#### Beispiel 14. Bestimmung der Schwerpunktsvertikalen für eine gegliederte Stützmauer.

In VI. § 8 ist gesagt, daß die Profile hinterstüttener Mauern so beschaffen sein müssen, daß sie auch ohne Erdhinterfüllung standfähig sind; dies ist der Fall, wenn ihre Schwerpunktsvertikale die Fugen noch in genügendem Abstand von deren hinteren Kante trifft.

Eine diesbezügliche Untersuchung möge für obige Mauer, welcher zur Wiedergewinnung des durch den vorderen Anlauf verloren gehenden Platzes Bogenstellungen vorgelegt sind, durchgeführt werden.

Gewichtsberechnungen. Betongewicht nach II. § 5 Tab. I 2,2 t/cbm. — Berechnung des Bogenzwickels dadurch vereinfacht, daß anstatt des Stichbogens ein Parabelbogen angenommen wird, dessen Segmentfläche  $= \frac{2}{3}$  Pfeilhöhe mal Sehne ist.

Den „beliebigen“ Drehpunkt für die zur Ermittlung der Lage der Resultierenden dienenden Drehungsmomenten-Gleichung wählt man so, daß die Rechnung möglichst vereinfacht wird, also im vorliegenden Fall z. B. in der Vorderflucht der Bogenstellungen und nicht auf den hinteren Kanten der Fugen II, III und IV, obschon der Abstand von diesen gesucht ist. Die Rechnungsvereinfachung für die gewählte Lage der Drehpunkte besteht darin, daß die Arme der einzelnen Kräfte sich nicht bei jeder Fuge ändern.

Es wird für Fuge II, wenn mit  $x_0''$  der Abstand der Resultierenden von der vorderen Mauerflucht bezeichnet wird und die Kraftarme aus der Figur abgemessen, nicht berechnet werden:

$$R_2 \cdot x_0'' = (g_1 + g_2) \cdot 63 + g_3 \cdot 47 + g_4 \cdot 165 + g_5 \cdot 147$$

$$\text{also } x_0'' = \frac{1}{76,84} (859 + 193 + 2327 + 6615) = \frac{9994}{76,84} = 130 \text{ cm,}$$

somit Abstand des Stützpunktes von der hinteren Fugenkante

$$200 - x_0'' = 200 - 130 = 70 \text{ cm.}$$

Ebenso für Fuge III

$$R_3 \cdot x_0''' = (g_1 + g_2) \cdot 63 + g_3 \cdot 47 + g_4 \cdot 165 + g_5 \cdot 147 + g_6 \cdot 19 + g_7 \cdot 112 \text{ oder}$$

$$R_3 \cdot x_0''' = R_2 \cdot 130 + g_6 \cdot 19 + g_7 \cdot 112$$

$$\text{also } x_0''' = \frac{1}{96,21} (859 + 193 + 2327 + 6615 + 11 + 2103) = \frac{12108}{96,21} = 126 \text{ cm,}$$

somit Abstand des Stützpunktes von der hinteren Fugenkante

$$175 - x_0''' = 175 - 126 = 49 \text{ cm.}$$

Für Fuge IV:

$$R_4 \cdot x_0'''' = (g_1 + g_2) \cdot 63 + g_3 \cdot 47 + g_4 \cdot 165 + g_5 \cdot 147 + g_6 \cdot 19 + g_7 \cdot 112 + g_8 \cdot 9 + g_9 \cdot 90$$

$$\text{oder } R_4 \cdot x_0'''' = R_3 \cdot 126 + g_8 \cdot 9 + g_9 \cdot 90$$

$$\text{also } x_0'''' = \frac{1}{118,80} (859 + 193 + 2327 + 6615 + 11 + 2103 + 2 + 2016) = \frac{14126}{118,80} = 119 \text{ cm,}$$

somit Abstand des Stützpunktes von der hinteren Fugenkante

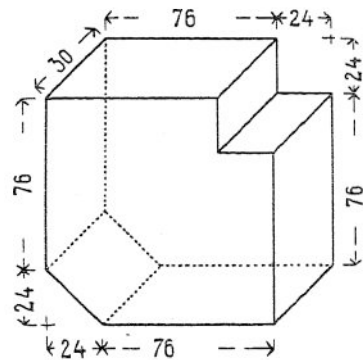
$$141 - x_0'''' = 141 - 119 = 22 \text{ cm horizontal.}$$

Ob diese Abstände genügend sind, ist in VI. § 8 untersucht.

Beispiel 15. An einer 30 cm dicken Steinplatte, deren Lagerflächen quadratisch waren und 1,00 m in der Quadratseite maßen, ist die eine Eckkante auf 24 cm Breite und 24 cm Länge rechtwinklig ausgefröpft und die gegenüberliegende Kante nach demselben Maße abgeschragt worden.

Die Lage des Schwerpunktes dieses Steines ist auf Millimeter genau anzugeben.

Aufl. Die Lagerflächen messen  $100 \cdot 100 - 24 \cdot 24 - 24 \cdot 12 = 10000 - 576 - 288 = 9136$  qcm. Der Flächen-schwerpunkt liegt in jedem Lager  $x_0 = (10000 \cdot 50 - 576 \cdot 88 - 288 \cdot 8) : 9136 = 48,9$  cm über der horizontalen Unterkante und ebenso weit rechts von der linken Seitenkante der obigen Abbildung. Der Schwerpunkt des prismatischen Körpers liegt in der Mitte der Verbindungslinie der zwei Lagerflächenschwerpunkte.



## Kapitel II. Festigkeitslehre.

### II. § 1. Einfluß der äußeren Kräfte auf einen Körper. Elastizität. Festigkeit. Beanspruchung.

#### A. Stellung der Kraft.

Die Stellung der Kraft wird im folgenden in Beziehung zur Achse eines Stabes gebracht, wobei vorausgesetzt wird, daß diese Achse eine Gerade sei und daß auf ihr die Schwerpunkte sämtlicher Stabquerschnittsflächen liegen. Der Stab muß nicht prismatisch sein, d. h. seine Querschnittsflächen können an verschiedenen Stellen auch verschiedene Größe und Gestalt haben.

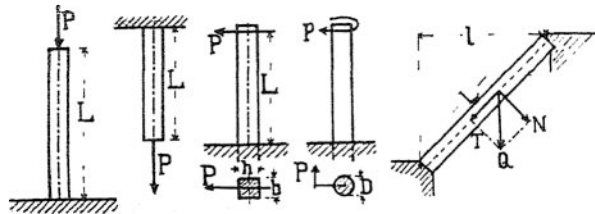


Bild 1. Bild 2. Bild 3. Bild 4. Bild 5.

1. Eine in der Achse eines Stabes wirkende Kraft  $P$  erzeugt einen Zug oder einen Druck in dem Stabe. Druck entsteht, wenn  $P$  gegen die Befestigungsstelle des Stabes, Zug, wenn es von dieser weg gerichtet ist, Bild 1 und 2. Hat der Stabquerschnitt  $F$  qcm, so wird auf 1 qcm ein Zug oder Druck von  $s = \frac{P}{F}$  kg sich ergeben. Man nennt  $s$  die „Beanspruchung“ des Stabmaterials. Unter Beanspruchung versteht man also diejenige Kraftgröße, welche auf 1 qcm der Querschnittsfläche kommt.

2. Eine Kraft, welche senkrecht auf die Achse des Stabes wirkt und diese Achse schneidet, vgl. Bild 3, verursacht eine Biegung des Stabes, deren Berechnung in II. § 6 zu finden ist.

3. Eine Kraft, welche zwar senkrecht zur Stabachse steht, aber diese selbst nicht trifft, also windschief zu ihr ist, erzeugt eine Verdrehung oder Torsion des Stabes, wenn sie in fester Verbindung mit ihm steht, Bild 4.

Kräfte, welche eine andere Stellung zur Stabachse haben, lassen sich stets in Komponenten zerlegen, welche für sich nur die obengenannten Wirkungen hervorbringen, so verursacht z. B. in Bild 5 die Komponente  $T$  Druck- und die Komponente  $N$  Biegebeanspruchung des schief liegenden Stabes.

Diese Wirkungen haben sämtliche eine gewisse Formänderung des Stabes zur Folge.

1. Bei Zug verlängern sich die Fasern.
2. Bei Druck verkürzen sich die Fasern.
3. Bei Biegung werden sie gekrümmt und teils verkürzt, teils verlängert.
4. Bei Torsion nehmen die Fasern spiralförmige Gestalt an.

## B. Größe der Kraft.

Sind Formänderungen, wie oben genannte, nicht zu weit getrieben worden, so verschwinden sie wieder nach Beseitigung der angreifenden Kraft infolge der Elastizität des Körpers. Sind die Kraftwirkungen so stark, daß bleibende Formänderungen eintreten, so ist die Elastizitätsgrenze überschritten worden. Der Körper hat dabei nur eine andere Gestalt angenommen, er ist aber vermöge seiner Festigkeit ein zusammenhängendes Ganzes geblieben. Sind schließlich die Kraftwirkungen so starke, daß der Körper in Teile getrennt wird, so ist die Bruchfestigkeit des Stabmaterials überschritten worden. Bei einer veränderlichen, d. h. ab- und zunehmenden Belastung tritt der Bruch früher ein, als bei gleichbleibender, stoßfreier, ruhender Belastung. In der Regel wird die Bruchfestigkeit für letzteren Fall angegeben.

## C. Beanspruchung und Sicherheitsgrad.

Aus vorstehendem ergibt sich, daß es nicht bloß darauf ankommt, ob die angreifenden oder äußeren Kräfte gemäß Kapitel I unter sich im Gleichgewicht sind, sondern es ist von ebenso großer Wichtigkeit, daß die widerstehenden oder inneren Kräfte nur in solchem Maße beansprucht werden, als dies das Baumaterial erträgt. Da nun Baukonstruktionsteile nicht bloß nicht brechen, sondern auch ihre ursprüngliche Gestalt behalten sollen, so darf man dieselben keinesfalls so sehr anstrengen, daß die Elastizitätsgrenze erreicht wird. Nun lassen sich aber die angreifenden Kräfte nie ganz genau bestimmen, auch ist gewissen Zufälligkeiten in der Belastung, in der Beschaffenheit der Materialien, beim Bau und Betrieb, in der Unterhaltung der Konstruktionen u. s. w. Rechnung zu tragen. Man geht daher mit der zulässigen Beanspruchung der Materialien, d. h. mit derjenigen Kraftgröße, die auf 1 qcm der Querschnittsfläche kommen darf, auch nicht nahe bis zur Elastizitätsgrenze, sondern bleibt stets weit unter derselben, d. h. man gibt der Konstruktion einen Sicherheitsgrad und zwar nennt man diejenige Zahl den „Sicherheitskoeffizienten“, welche angibt, wievielmal kleiner die Beanspruchung des Materials ist, als dessen Bruchfestigkeit. Würde also z. B. ein Stab bei 50 000 kg Belastung brechen und wird derselbe nur mit 5000 kg belastet, so ist der Sicherheitskoeffizient  $\frac{50\,000}{5\,000} = 10$ , d. h.: diese Konstruktion hat 10fache Sicherheit gegen Bruch.

Man gibt die Elastizitätsgrenze, die Bruchfestigkeit, sowie die zulässige Beanspruchung in kg/qcm Stabquerschnitt an. Da der Atmosphärendruck nahezu 1 kg/qcm beträgt, bemißt man häufig die Elastizitätsgrenze, die Bruchfestigkeit und die Beanspruchung auch danach. Es bedeutet somit dasselbe, ob es heißt, die Beanspruchung beträgt 6 kg/qcm oder 6 Atmosphären = 6 at.

Beispiel 16. Ein freistehender 6 m hoher Pfeiler habe quadratischen Querschnitt mit je 1,20 m Seitenlänge. Welche Beanspruchung erleidet die Fundamentfuge durch das Eigengewicht?

Aufl. Mauergewicht  $Q = 12 \cdot 12 \cdot 60 \cdot 2,2 = 19\,000$  kg, wobei 2,2 das spezifische Gewicht des Mauerwerks ist, Fugenfläche  $F = 120 \cdot 120 = 14\,400$  qcm, also Druck auf 1 qcm Fundamentfugenfläche, d. h. Beanspruchung  $s = \frac{Q}{F} = \frac{19\,000}{14\,400} = 1,3$  kg/qcm.

Beispiel 17. Das in voriger Aufgabe genannte Gemäuer habe nach der Tabelle am Schluß von II. § 4 eine zulässige Beanspruchung von 6 kg/qcm. Welcher Druck P darf daher noch auf den Pfeiler wirken, d. h. welche Nutzlast darf auf ihn kommen?

Aufl. Wenn 1 qcm mit  $s = 6$  kg belastet werden darf, so dürfen auf die ganze Fugenfläche F kommen  $F \cdot s = 14\,400 \cdot 6 = 86\,400$  kg.

Das Pfeilergewicht Q beträgt 19 000 kg, somit darf noch eine Last  $P = 86\,400 - Q = 86\,400 - 19\,000 = 67\,400$  kg auf den Pfeiler kommen.

Beispiel 18. Der in voriger Aufgabe berechnete Druck  $P = 67\,400$  kg soll mittels eines Auflagerquaders auf den Pfeiler übertragen werden. Welche Fugenfläche muß diesem Quader mindestens gegeben werden?

Aufl. Die notwendige Größe der Fugenfläche des Auflagerquaders ist bedingt durch die zulässige Beanspruchung des unter dem Quader liegenden Mauerwerkes. Diese ist aber  $s = 6$  kg/qcm, somit werden nötig  $F = \frac{P}{s} = \frac{67\,400}{6} = 11\,233$  qcm Fugenfläche.

Beispiel 19. Der in Aufgabe 17 berechnete Druck  $P = 67\,400$  kg soll mittels einer gußeisernen Platte auf den Auflagerquader gleichmäßig verteilt werden. Welche Lagerfläche muß diese Platte erhalten, wenn der Quader aus gewöhnlichem Sandstein besteht?

Aufl. Die notwendige Plattengröße hängt ab von der Festigkeit des Quadermaterials. Hat man nun einen Sandstein IV. Qualität (vgl. Tabelle bei II. § 4. A.), so ist dessen Druckfestigkeit 200 kg/qcm; da mindestens 10fache Sicherheit gegen Bruch bei Steinen vorhanden sein soll, so wird die zulässige Beanspruchung  $s = \frac{200}{10} = 20$  kg/qcm und es muß die Platte mindestens  $F = \frac{P}{s} = \frac{67\,400}{20} = 3\,370$  qcm Lagerfläche erhalten.

Bestände dagegen der Quader aus Granit, welcher nach Tabelle am Schluß von II. § 4 mit  $s = 45$  kg/qcm beansprucht werden darf, so würde eine Lagerfläche  $F = \frac{P}{s} = \frac{67\,400}{45} = 1\,500$  qcm genügen.

Beispiel 20. Ein 17 m hoher Aussichtsturm hat 3,2 m äußeren Durchmesser und im Innern vgl. 2 m lichte Weite. Der Turm trägt eine Plattform von 20 qm Bodenfläche. Welche Beanspruchung erleidet die Fundamentfuge, wenn die Turmplattform bei windstillem Wetter mit Menschen dicht besetzt ist?

Aufl. Die kreisringförmige Fundamentfuge mißt  $F = \pi(R^2 - r^2) = 3,14(160^2 - 100^2) = 49\,000$  qcm; auf dieselbe kommen folgende Lasten, wenn  $\gamma = 2,4$  das spezifische Gewicht des Mauerwerks ist.

$$\text{Turmgewicht } g_1 = \pi(R^2 - r^2) \cdot h \cdot \gamma = \pi(1,6^2 - 1,0^2) 17,0 \cdot 2,4 = 200 \text{ t}$$

Die Plattform  $g_2$  wäge (nach Tab. III. bei II. § 5) 400 kg pro qm,

$$\text{dann wird } g_2 = 20 \text{ qm zu } 400 \text{ kg} = 8 \text{ t}$$

Das Gewicht  $g_3$  des Menschengedränges kann in diesem Fall nach II.

$$\text{§ 5 angenommen werden zu } 200 \text{ kg/qm, also } g_3 = 20 \text{ qm zu } 200 \text{ kg} = 4 \text{ t}$$

Endlich kommt noch das Gewicht  $g_4$  der Treppe dazu. Nimmt man

eine steinerne Wendeltreppe mit 17 cm Steigung, 1,2 m Stufenlänge und verglichen 30 cm Stufenbreite an, so wiegt eine Stufe

$$1,7 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 2,4 = \text{rund } 150 \text{ kg, somit } \frac{1700}{17} = 100 \text{ Stufen zu } 150 \text{ kg} = 15 \text{ t}$$

$$\text{Gesamtlast} = 227 \text{ t.}$$

Die Beanspruchung der Fundamentfuge ist daher  $s = \frac{P}{F} = \frac{227\,000}{49\,000} = 4,6 \text{ kg/qcm}$ .

Beispiel 21. Auf einen Pfeiler stützen sich folgende Gebäudeteile:

- a) 38 cm starke Umfassungswand, abzüglich der Fensteröffnungen . . . 35 qm
- b)  $\frac{1}{2}$  Stein starke Fachwerkwände, abzüglich der Türöffnungen . . . 57 "
- c) Fußböden, gewöhnliche . . . . . 73 "
- d) Einfaches Ziegeldach, Grundrißfläche . . . . . 60 "

Der Pfeiler soll aus gewöhnlichem Backsteingemäuer  $2\frac{1}{2}$  Stein stark hergestellt werden, welche Breite muß er haben?

Aufl. Die Einheitsgewichte sind den Tabellen II., III. und IV. bei II. § 5 zu entnehmen.

Man erhält folgende Gewichte:

Umfassungswand	$g_a = 35 \cdot 670$	. . . . .	23 500 kg
Fachwerkwand	$g_b = 57 \cdot 220$	. . . . .	12 500 "
Fußböden samt Nutzlast	$g_c = 73(300 + 200)$	. . . . .	36 500 "
Ziegeldach	$g_d = 60 \cdot 250$	. . . . .	15 000 "
Gesamtbelastung . . .			87 500 kg.

Nach der Tabelle am Schluß von II. § 4 ist die zulässige Beanspruchung des genannten Pfeilergemäuers  $7 \text{ kg/qcm}$ , der Pfeiler muß also an seinem oberen Ende eine Fugenfläche von mindestens  $\frac{87\,500}{7} = 12\,500 \text{ qcm}$  erhalten. Die Pfeilerstärke ist  $2\frac{1}{2}$  Stein =  $64 \text{ cm}$  und

es wird daher eine Pfeilerbreite von mindestens  $\frac{12\,500}{64} = 200 \text{ cm}$  nötig.

Beispiel 22. Ein Holzpfeiler von  $20/20 \text{ cm}$  Querschnitt erhält  $12\,000 \text{ kg}$  Belastung, welche Beanspruchung erleidet das Holz?

Aufl. Das Eigengewicht des Pfeilers ist zu geringfügig, als daß es in Betracht zu ziehen wäre. Die Beanspruchung ergibt sich daher aus  $s = \frac{P}{F} = \frac{12\,000}{20 \cdot 20} = 30 \text{ kg/qcm}$ .

Beispiel 23. Welchen Durchmesser muß ein runder Pfeiler erhalten, der  $12\,000 \text{ kg}$  Belastung bekommt und mit höchstens  $40 \text{ kg/qcm}$  beansprucht werden soll?

Aufl. Nötige Querschnittsfläche  $F = \frac{P}{s} = \frac{12\,000}{40} = 300 \text{ qcm}$ , also  $\frac{\pi d^2}{4} = 300$ , hieraus  $d = 19,6 \text{ cm} = \text{rund } 20 \text{ cm}$ .

Beispiel 24. Der Pfeiler in voriger Aufgabe wird ersetzt durch eine runde gußeiserne Säule von  $D = 15 \text{ cm}$  äußerem Durchmesser und  $\frac{D}{10} = 1,5 \text{ cm}$  Wandstärke. Welche Beanspruchung erleidet das Gußeisen?

Aufl. Querschnittsfläche  $F = \pi \left( \frac{D^2 - d^2}{4} \right) = \pi \left( \frac{15^2 - 1,5^2}{4} \right) = 63,6 \text{ qcm}$ , somit Beanspruchung  $s = \frac{P}{F} = \frac{12\,000}{63,6} = 190 \text{ kg/qcm}$ .

Beispiel 25. Die Zugstangen eines Dachstuhles erleiden je  $5000 \text{ kg}$  Zug; welcher Durchmesser ist den Stangen zu geben, wenn sie mit nicht mehr als  $700 \text{ kg/qcm}$  beansprucht werden sollen?

Aufl.  $F = \frac{P}{s} = \frac{5000}{700} = 7,14 \text{ qcm}$ . Rundeisen mit  $30 \text{ mm}$  Durchmesser haben  $F = 7,07 \text{ qcm}$  und sind daher passend.

Bemerk. Weitere Beispiele s. II. § 13 und III. § 6.

## II. § 2. Das Elastizitätsgesetz.

Die Verlängerungen oder Verkürzungen, welche ein Stab unter Einwirkung einer, in seiner Achse tätigen Kraft erleidet, sind zunächst abhängig vom Material, aus welchem der Stab besteht. Um für die verschiedenen Materialien Zahlenwerte zu erhalten, hat man sog. „Elastizitäts-Koeffizienten  $\frac{1}{E}$ “ eingeführt, den Nenner  $E$  heißt man Elastizitätsmodul.

Erklärung. Der Elastizitäts-Koeffizient  $\frac{1}{E}$  gibt denjenigen Bruchteil der Stablänge an, um welchen sich ein Stab vom Querschnitt 1 qcm bei 1 kg Belastung verlängert.

$\frac{1}{E}$  ist stets ein sehr kleiner Wert, z. B. für Schmiedeeisen  $\frac{1}{2\,000\,000}$ , d. h. also, wenn ein Eisenstab, der 1 qcm Querschnitt hat, mit 1 kg auf Zug belastet wird, so dehnt er sich infolgedessen um  $\frac{1}{2\,000\,000}$  seiner ursprünglichen Länge  $L$ . Es tritt also eine Verlängerung  $l$  ein, welche  $l = L \cdot \frac{1}{E} = \frac{L}{E}$  ist. Wird der Stab mit  $P$  kg belastet, so wird die Verlängerung  $P$  mal größer, also  $l = \frac{P \cdot L}{E}$ . Hat der Stab nicht bloß 1 qcm sondern  $F$  qcm Querschnitt, so verteilt sich die Last auf  $F$  qcm, sie ist also pro qcm gleich  $P/F$  und die Verlängerung wird somit  $F$  mal kleiner, also 1)  $l = \frac{P \cdot L}{E \cdot F}$ , oder in Worten: Die elastische Längenänderung  $l$  eines prismatischen Stabes ist um so größer, je größer die Stablänge  $L$  ist und je größer die angreifende Kraft  $P$  ist; dagegen um so kleiner, je größer der Stabquerschnitt  $F$  und je größer der Elastizitätsmodul  $E$  ist, und zwar stehen die Längenänderungen in einfacher Proportion mit den gegebenen Größen.

Diesen Satz nennt man das Elastizitätsgesetz.

Will man die Bedeutung von  $E$  ermitteln, so ist zu bedenken, daß nach obigem die Stabverlängerung bei 1 qcm Querschnitt und 1 kg Last gleich  $L/E$  ist.

Bei  $E$  kg wäre also die Stabverlängerung:  $\frac{L}{E} \cdot E = L$ , d. h. der Elastizitätsmodul  $E$  gibt eine solche Zahl von kg an, welche imstande wären, einen Stab vom Querschnitt 1 qcm um seine eigene Länge zu verlängern.  $E$  ist stets eine sehr große Zahl, z. B. bei Eisen 2 000 000 kg/qcm.

Tatsächlich kommt diese Belastung nicht vor, weil die aus Baumaterialien gefertigten Stäbe abreißen, ehe sie sich so sehr verlängern lassen. Der Elastizitätsmodul ist also nur ein Zahlenwert, der zur Kennzeichnung des Materials dient, wogegen sein reziproker Wert nach obiger Erklärung eine tatsächlich vorkommende Größe ist.

Die relative Längenänderung  $r$  nennt man die Längenänderung, welche ein Stab von der Länge 1 m erleidet. Bei  $L$  m Länge ist nun z. B. bei Zug die Zunahme  $l$ ; also für 1 m  $r = \frac{l}{L}$ , und man erhält aus Gleichung 1)  $r = \frac{l}{L} = \frac{P}{F} \cdot \frac{1}{E}$ .

Nach II. § 1 ist aber  $\frac{P}{F} = s$ , d. h. gleich der Beanspruchung des Stabes, somit 2)  $r = s \cdot \frac{1}{E} = \frac{s}{E}$  oder  $rE = s$ , d. h.: Man erhält die Beanspruchung  $s$ , welche ein Stab erleidet, wenn man die relative Längenänderung  $r$  mit dem Elastizitätsmodul  $E$  multipliziert.



Dieser Satz läßt sich bei Belastungsproben bestehender Konstruktionen verwerten.

Das Elastizitätsgesetz gilt nur innerhalb der Elastizitätsgrenze, aber nicht mehr bei stärkeren Beanspruchungen, weil bei diesen die Proportionalität zwischen Belastung und Längenänderung aufhört.

Bei manchen Materialien ist diese Proportionalität überhaupt nicht vorhanden, so gilt z. B. für Beton die Formel  $r \cdot E = s^m$ , wobei allerdings der Potenzexponent klein ist, nämlich  $m = 1,1$  bis  $1,2$ , so daß man in der Regel für praktische Zwecke von der einfacheren Formel  $r \cdot E = s$  ausgeht.

Das im vorstehenden für Zug Entwickelte gilt auch für Druck. Das Elastizitätsmodul für Druck kann bei den meisten Materialien gleich dem Elastizitätsmodul für Zug genommen werden; diese Annahme kommt der Wirklichkeit beim Schmiedeeisen näher als bei Gußeisen und bei Holz. Zahlenwerte siehe II. § 4.

Beispiel 26. Ein 2,5 m langer Stab aus Stahl hat einen Querschnitt  $F = 12$  qcm. Welche Verlängerung wird infolge eines Zuges von 10 000 kg auftreten.

Aufl. Nach der Tabelle bei II. § 4 E. ist der Elastizitätsmodul für Stahl  $E = 2150\,000$  kg/qcm, also wird  $l = \frac{L \cdot P}{E \cdot F} = \frac{250 \cdot 10\,000}{2\,150\,000 \cdot 12} = 0,0969$  cm = 1 mm.

Beispiel 27. Auf einem schmiedeeisernen Stab sind vor der Belastung zwei Punkte in genau 3,50 m Abstand bezeichnet. Während der Belastung des Stabes haben die Punkte einen Abstand von 3,002 m. Wie groß ist die Beanspruchung des Stabes?

Aufl. Die relative Längenänderung ist  $r = \frac{0,2}{350}$  cm, also die Beanspruchung  $s = r \cdot E = \frac{0,2}{350} \cdot 2\,000\,000 = 1140$  kg/qcm Zug.

Beispiel 28. Welche Beanspruchung und Zusammendrückung erleidet ein 3,00 m hoher Pfosten, wenn er mit 10 000 kg belastet wird und

- a) aus Flußeisen besteht und 20 qcm Querschnitt hat
- oder b) aus Gußeisen " " 50 " " "
- oder c) aus Stampfbeton besteht und 800 qcm Querschnitt hat.

Aufl. Der Elastizitätsmodul ist nach den Angaben bei II. § 4 für Flußeisen 2150 000, für Gußeisen 1000 000 und für Stampfbeton kann man 143 000 annehmen. Es ergibt sich daher

zu a)	Beanspruchung $\frac{10\,000}{20} = 500$ kg/qcm	und Zusammendrückung	$\frac{300 \cdot 10\,000}{2\,150\,000 \cdot 20} = 0,07$ cm,
zu b)	" $\frac{10\,000}{50} = 200$ kg/qcm	" "	$\frac{300 \cdot 10\,000}{1\,000\,000 \cdot 50} = 0,06$ cm,
zu c)	" $\frac{10\,000}{800} = 12,5$ kg/qcm	" "	$\frac{300 \cdot 10\,000}{143\,000 \cdot 800} = 0,026$ cm.

## II. § 3. Widerstand und Reibung. \*)

Wird ein Körper mit einer Kraft  $P$  auf eine Unterlage gepreßt, so wird in der Unterlage senkrecht zur Berührungsebene ein Widerstand  $W_n$  nachgerufen, welcher gleich der Normalkomponente  $N$  der Kraft  $P$  ist und es entwickelt sich in der Berührungsfläche ein Reibungswiderstand  $W_t$ , welcher gleich der Tangentialkomponente  $T$  der Kraft  $P$  ist. Ist die Unter-

\*) Dieser Paragraph gehört nicht zur Festigkeitslehre, er möge trotzdem wie in den früheren Auflagen seinen Platz hier behalten.

lage nicht fest genug, um den Widerstand  $W_n$  zu leisten, so wird der Körper in die Unterlage eingepreßt, und ist die Oberfläche der Berührungsstelle nicht rauhf genug, um einen Reibungswiderstand  $W_t$  entstehen zu lassen, so wird der Körper verschoben. Es ist nun

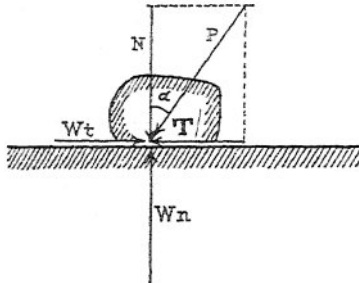


Bild 1.

I)  $N = W_n = P \cdot \cos \alpha$  und II)  $T = W_t = P \cdot \sin \alpha$  oder weil ferner aus I

$$P = \frac{N}{\cos \alpha}, \text{ so wird III) } W_t = \frac{N}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = N \cdot \tan \alpha.$$

Gleichung II und III zeigen, daß der Reibungswiderstand  $W_t$  je nach der Neigung von P in verschiedenen Größen nachgerufen wird. Er wird z. B. gar nicht in Anspruch genommen, wenn P mit N zusammenfällt, also senkrecht zur Berührungsfläche wirkt.

Man nennt den größten Wert des  $\angle \alpha$ , bei welchem gerade noch Gleichgewicht herrschen kann, den „Reibungswinkel“ der beiden Materialien, aus welchen der Körper und die Unterlage bestehen. Man heißt ferner  $f = \tan \alpha$  den „Reibungskoeffizienten“, so daß man die Gleichung III durch folgenden Satz ausdrücken kann.

Der größte Reibungswiderstand ist gleich dem Normaldruck, multipliziert mit dem Reibungskoeffizienten  $W_t = N \cdot f$ .

Der Reibungswiderstand der Ruhe ist größer als der Reibungswiderstand der Bewegung.

Als Reibungskoeffizienten  $f$  und Reibungswinkel  $\alpha$  der Ruhe werden bei kleiner Druckbeanspruchung in den Reibungsflächen (etwa 1 kg/qcm) folgende Werte angegeben:

	$f$	$\alpha$
Bausteinmauerwerk aufeinander . . . . .	0,50 bis 0,75	26° bis 37°
Mauerwerk auf Beton . . . . .	0,75	37°
Mauerwerk auf gewachsenem Boden:		
trocken und hart . . . . .	0,65	33°
mittel . . . . .	0,45	24°
naß und leutig . . . . .	0,30	16°
Metall auf Metall . . . . .	0,15 bis 0,20	8° bis 11°.

Danach wäre beispielsweise bei Mauern mit geneigter Fugenfläche durchschnittlich 30° Fugenneigung als Grenzwert anzusehen, bei welchen das Abgleiten des oberen vom unteren Mauernteil zu befürchten stünde.

Bei Mauerwerk, das auf festem, trockenem Baugrund steht, dürfte die Neigung des Fundamentdruckes nicht um mehr als 30° von der Normalen zur Fundamentsohlenfläche abweichen, weil sonst Verschiebungen des Gemäuers eintreten könnten.

In der Praxis bleibt man von diesen Grenzwerten entsprechend weit entfernt, um noch einen nach Lage der Verhältnisse notwendig erscheinenden Sicherheitsgrad gegen Verschieben zu erhalten.

Bei Bewegung eines Körpers auf horizontaler Bahn hat man nicht dessen Gewicht  $G$ , sondern nur den Reibungswiderstand  $W_t = G \cdot f$  zu überwinden.

Bei geneigter Bahn kommt bei Bewegung aufwärts noch die Tangentialkomponente von  $G$  dazu, während diese bei der Bewegung abwärts selbst mithilft, den Reibungswiderstand zu überwinden.

## II. § 4. Bahnenwerte über Elastizität, Festigkeit, zulässige Beanspruchung der wichtigsten Materialien.

### Einleitung.

Die im folgenden angegebenen Zahlenwerte sind nur als Mittelwerte aufzufassen, und es ist nötig, bei Konstruktionen, bei welchen die Festigkeit des Materials in außergewöhnlicher Weise in Anspruch genommen wird, zuerst durch Proben die genaueren Zahlenwerte zu ermitteln.

### A. Steine.

Meist wird erprobt die Druckfestigkeit, und man kann nach Hauschinger im Mittel annehmen, daß die Zugfestigkeit gleich  $\frac{1}{2}$  der Druckfestigkeit, die Biegezugfestigkeit gleich  $\frac{1}{3}$  und die Schubfestigkeit gleich  $\frac{1}{8}$  der Druckfestigkeit sei. Das Elastizitätsgesetz II. § 3 ist in Gültigkeit.

Elastizitätskoeffizient  $\frac{1}{E} = 7000$  bis  $700\,000$  kg pro qcm; in hohem Maße von der Höhe der Beanspruchung abhängig.

Die zulässige Beanspruchung der Steine ist meist  $\frac{1}{10}$  bis  $\frac{1}{15}$  der Druckfestigkeit, so daß also mindestens 10fache Sicherheit geboten wird.

Über die Festigkeit einzelner Steine siehe folgende Tabellen I, II und III, zu welchen zu bemerken ist, daß die Bruchfestigkeit eines Steines erheblich höher ist, wenn die Belastung des Steines nur einen mittleren Teil der Oberfläche des Steines trifft und nicht auf die ganze Oberfläche wirkt.

### Klassifikation der Steine durch den Verband deutscher Architekten und Ingenieur-Vereine.

#### Minimal-Druckfestigkeits-Koeffizienten.

Natürliche Steine	Min.-Druck in kg/qcm	Künstliche Steine	Min.-Druck in kg/qcm
1. Granit, Diorit, Grünstein, Syenit, Syenit-Granit, Glimmerschiefer etc.		1. Gebrannte Steine aus Ton.	
I. Qualität . . . . .	1600	a) Klinker I. Qualität . . . . .	200
II. " . . . . .	1200	II. " . . . . .	160
III. " . . . . .	1000	b) Ziegel . . . . .	120
IV. " . . . . .	800		
2. Kalkstein, Marmor, Dolomite, Muschelkalk, Nummulitenkalk etc.		2. Ungebrannte Steine und Mörtelmaterial.	
I. Qualität . . . . .	1000	a) Formsteine . . . . .	120
II. " . . . . .	800	b) Zemente:	
III. " . . . . .	600	α) Portland-Zement (langsam bind.)	
NB. Grauwacke, Molasse, Sandstein und Findlinge von Buntstein bis zu	1500	I. Qualität . . . . .	150
		II. " . . . . .	110
		III. " . . . . .	75
3. Sandsteine:		β) Portland-Zement (schnell bind.)	
I. Qualität . . . . .	800	I. Qualität . . . . .	90
II. " . . . . .	600	II. " . . . . .	75
III. " . . . . .	400	III. " . . . . .	50
IV. " . . . . .	200	γ) Roman-Zemente	
4. Konglomerate und Tuffe		I. Qualität . . . . .	10
I. Qualität . . . . .	400	II. " . . . . .	5
II. " . . . . .	250		
III. " . . . . .	150		

## Biegungs- und Schubfestigkeit von Steinen nach Bach.

Material	Biegungsfestigkeit	Schubfestigkeit
Granit . . . . .	50—250 kg/qcm	40—160 kg/qcm
Kalkstein . . . . .	50—150 "	30—120 "
Sandstein . . . . .	25—150 "	15—80 "
Ziegelstein . . . . .	40—70 "	—

## Festigkeit von Steinen.

Für den Ausbau des Münsters in Ulm.

Probestück und Material	Spezifisches Gewicht	Druckfestigkeit in kg/qcm.		Bemerkungen
		Grenzzahlen	Mittel	
Jurakalk . . . . .	1.72—2.44	131—701	367	Erprobt am Polytechnikum zu München. Druck stets $\perp$ zum Lager. Die parallel und eben gehobelten Druckflächen lagen direkt an gusseisernen Druckplatten. Probewürfel stets 10 cm Seitenlänge, wenn nichts anderes angegeben ist.
Harter Süßwasserkalk . . . . .	2.10—2.18	283—428	374	
Weicher " . . . . .	1.95—2.10	194—348	288	
Dolomit . . . . .	2.56	667	—	
Tuffstein . . . . .	1.63—1.78	86—145	112	
Backstein 7 cm Würfel oder 7/12/27 cm . . . . .	—	95—283	178	
Donzdorfer Sandstein . . . . .	1.94—2.15	281—611	424	
Rorschacher " . . . . .	2.27—2.57	276—830	524	
Grobkörniger " . . . . .	2.00	214—218	216	
" Keupersandstein . . . . .	2.16	320	—	
" " . . . . .	2.17—2.21	461—557	518	Markung Aich (Graner & Läßple). " Schleidorf (Graner & Läßple). Dettenhausen (Wern & Roth). Sog. Hollstein von der Markung Schleidorf (Schaal sen.). Mittelstadt (Thumm & Schneider).
" " . . . . .	2.21—2.22	464—471	466	
" " . . . . .	2.18—2.22	464—515	496	
" " . . . . .	—	318—374	346	
Weisser " . . . . .	2.19—2.22	369—430	400	
Backsteinmauerkörper 18/18/21 bis 24/29/29 cm . . . . .	—	55—75	63	

## (II. § 4.) B. Mörtel und Beton.

Für Zementmörtel ist im allgemeinen die Schubfestigkeit  $\frac{1}{7}$  der Druckfestigkeit. Die Zugfestigkeit ist ca.  $\frac{1}{10}$ — $\frac{1}{20}$  der Druckfestigkeit. Für Mörtel aus langsam bindendem Portland-Zement und Normalsand im Mischungsverhältnis 1:3 wird in den „Normen für die Prüfung und Lieferung von Portland-Zement“ nach 28-tägiger Erhärtungsdauer mindestens 16 kg/qcm Zugfestigkeit verlangt. Man rechnet bei den gewöhnlichen Mörtelarten nicht auf die Zugfestigkeit, da der Mörtel bei gewöhnlicher Herstellung solche Zuverlässigkeit nicht besitzt.

Außerdem ist bei Beton der leicht eintretenden Unregelmäßigkeit in der Beschaffenheit durch Wahl eines genügend großen Sicherheitskoeffizienten Rechnung zu tragen. Die zulässige

Beanspruchung des Betons geht bis zu  $\frac{1}{6}$  seiner Druckfestigkeit; sie soll aber in gewöhnlichen Stampfbetonmauern 10 kg/qcm nicht wesentlich überschreiten.

Bei der stets wachsenden Bedeutung, welche die Verwendung des Betons im Bauwesen annimmt, erscheint es geboten, die Festigkeitsverhältnisse dieses Baumaterials eingehender zu schildern.

Aus beistehender Tabelle ist zu ersehen, wie groß die Schwankungen in der Bruchfestigkeit sein können, selbst wenn es sich um Probewürfel aus ein und derselben Fabrik handelt und welchen Einfluß die Größe der Probewürfel hat. Würfel mit 7 cm Seitenlänge ergeben durchschnittlich höhere Druckfestigkeiten als solche mit 10 cm Seitenlänge.

Dimensionen und Material der Probekörper aus Blaubeurer Zement von E. Schwenk-Ulm	Bezeichnung	Spezif. Gewicht	Druckfestigkeit kg pro $\square$ cm	Bemerkungen
a) Würfel mit 10 cm Kantenlänge				Erprobt auf der Techn. Hochschule München.
1. Zement und feiner Kalksteinkies	I a	2,02	273	Gleichmässig zerdrückt.
	II a	2,06	267	
	Mittel	2,04	270	
2. Zement und Normalsand . . .	III a	2,04	215	" "
	IV a	2,11	265	
	V a	2,10	280	
	Mittel	2,08	253	
3. Zement und grober Sand . . .	VI a	2,14	245	" "
	VII a	2,12	276	
	VIII a	2,11	270	
	Mittel	2,12	264	
b) Würfel mit ca. 7 cm Kantenlänge				
1. Zement und feiner Kalksteinkies	I b	2,10	340	Gleichmässig zerdrückt. Etwas ungleichmässiger Bruch.
	II b	2,21	376	
	Mittel	2,15	358	
2. Zement und Normalsand . . .	III b	2,15	362	Gleichmässiger Bruch. " "
	IV b	2,12	282	
	V b	2,17	358	
	Mittel	2,15	334	
3. Zement und grober Sand . . .	VI b	2,12	320	Gleichmässiger Bruch. Etwas ungleichmässiger Bruch. Ziemlich gleichmässig zerdrückt.
	VII b	2,15	277	
	VIII	2,21	355	
	Mittel	2,16	317	

Neuerdings wird die Härte des Betons nach der sogenannten Würfel Festigkeit beurteilt, welche an Würfeln mit 30 cm Kantenlänge, die nach bestimmten Regeln hergestellt werden, zu ermitteln ist. Näheres hierüber s. „Technisches Studienheft für Eisenbeton“.

Durch Frost nimmt die Festigkeit des Betons etwas ab, wie die folgenden an der Technischen Hochschule in Karlsruhe für das Zementwerk von G. Schwenk in Ulm a/D. ermittelten Zahlenwerte zeigen.

Bezeichnung der Steingattung	Zustand bei der Druckprobe	Querschnitt qcm	Bruchbelastung		Spez. Gewicht	Bemerkungen	
			im Ganzen kg	Druckfestigkeit kg/qcm			
Zementsteine aus Zement und grobem Kies. Mischung.	Vor dem Frost	51.26	13 480	263	2.40	Abnahme der Festigkeit durch die Frostprobe auf <b>82</b> %.	
		52.12	14 890	285	2.39		
		Mittelwert		274	2.395		
	nach der Frostprobe	51.91	11 540	222	2.39		Die Steine können sonach als frostbeständig bezeichnet werden.
		51.26	11 690	228	2.40		
		Mittelwert		225	2.395		
	Vor dem Frost	100.70	18 170	180	2.33	Abnahme der Festigkeit durch die Frostprobe auf <b>95</b> %.	
		100.80	19 830	197	2.28		
		Mittelwert		188	2.303		
	nach der Frostprobe	100.70	22 170	220	2.33		Die Steine können sonach als frostbeständig bezeichnet werden.
		102.62	14 180	188	2.27		
		Mittelwert		179	2.30		

Von besonderem Wert sind die Ergebnisse von Druckproben an Stücken, die nicht zum Zweck der Probe hergestellt, sondern aus Quadern auf dem Werkplatz entnommen wurden. Vier Probekörper dieser Art, die aus einem für die Schule in Stuttgart-Diheim bestimmten Quader herausgearbeitet wurden, ließ Schwenz-Ulm an der Technischen Hochschule in Stuttgart erproben, dabei ergab sich:

Bezeichnung	Gewicht kg	Abmessungen			Volumen a, b, h ccm	Spezif. Gewicht	Querschnitt a, b qcm	Bruchbelastung	
		Seite a cm	Seite b cm	Höhe h cm				beobachtet kg	kg/qcm
1	15,10	19,15	19,20	19,12	7080	2,15	367,7	74 000	201
2	16,90	19,70	19,60	19,48	7521	2,25	386,1	104 200	270
3	18,20	20,20	20,00	20,00	8080	2,25	404,0	115 000	285
4	16,20	19,40	19,35	19,44	7298	2,22	375,4	87 000	231
Durchschnitt									247 kg/qcm.

Die Probekörper wurden vor dem Zerdrücken durch Hobeln mit je zwei parallelen Druckflächen versehen. Das Mischungsverhältnis war 1 : 6.

Die Schwankungen in der Festigkeit des Zementmörtels hängen auch von der Menge des Wasserzusatzes und von dem Alter ab.

Ein Bild davon mag folgende, dem Werk „Der Portlandzement“ 1905 S. 109 entnommene Tabelle geben, auf welcher die mit demselben Zement bei verschiedenen Wasserzusätzen und verschiedenem Alter der Proben unter Benützung von gewöhnlichem Mauer sand enthaltenen Werte der Zug- und Druckfestigkeit angegeben sind. Der dabei benützte Zement gab bei der Prüfung mit „Normalsand“ nach 28 Tagen 22 kg Zugfestigkeit und 237 kg Druckfestigkeit.

Erhärtungsdauer	10% Wasser (ziemlich trocken)			12% Wasser (ziemlich feucht)			15% Wasser (nass)		
	Zug	Druck	Druck dividiert durch Zug	Zug	Druck	Druck dividiert durch Zug	Zug	Druck	Druck dividiert durch Zug
7 Tage	20	202	10,1	14	107	7,8	10	55	5,4
28 "	26	285	10,9	23	160	7,0	18	100	5,5
90 "	29	355	12,4	26	207	8,0	20	150	6,5
180 "	32	380	11,8	27	225	8,4	23	170	7,5

Der Einfluß des Mischungsverhältnisses ergibt sich aus nachstehenden Tabellen.

Mischungs-Verhältnis			Verbrauch für 1 Kubikmeter				Gewicht des Mörtels oder Betons pro cbm	Druckfestig- keit nach 28 Tagen pro qcm
Raumteile			Cement kg	Sand cbm	Kies cbm	Wasser Liter		
Cement	Sand	Kies						
1	1	—	975	0,65	—	292	2242	340
1	2	—	650	0,86	—	227	2176	229
1	3	—	487	0,97	—	190	2140	172
1	4	—	390	1,04	—	175	2125	142
1	1	4	340	0,23	0,90	173	2479	274
1	1	5	291	0,19	0,97	151	2480	254
1	1	6	255	0,17	1,02	137	2483	236
1	2	7	204	0,27	0,95	132	2458	234
1	2	8	185	0,25	0,99	124	2457	189
1	2	9	170	0,23	1,02	122	2461	147
1	3	10	145	0,29	0,97	116	2445	139
1	3	11	136	0,27	1,00	121	2456	129
1	3	12	127	0,25	1,02	115	2461	91

Diese Mischungen sind etwas sandarm, bei gewöhnlichen Mischungen enthält der Kies ungefähr  $\frac{1}{3}$  Sand und es wird der Zementverbrauch nach dem Werk „Der Portlandzement“ 1905 S. 260 bei

1 : 4 355 kg/cbm 1 : 6 250 kg/cbm 1 : 8 190 kg/cbm 1 : 10 151 kg Zement auf 1 cbm  
1 : 5 295 kg/cbm 1 : 7 220 kg/cbm 1 : 9 169 kg/cbm auf 1 cbm fertigen Beton.

Die Qualität des Zementes beeinflusst mindestens die zur Erhärtung nötige Zeitdauer, das zeigen die folgenden Zahlen:

Alter der Proben in Tagen	Portland-Cement	Roman-Cement	Laut Zeugnis der K. Fortifikation Ulm als durchschnittliches Ergebnis einer 10 jährigen Lieferung von 39 000 Zentner Portland-Cement und 170 000 Zentner Roman-Cement. Von der Stuttgarter Cementfabrik Blaubeuren.
	1 cbm locker 1500 kg	1 cbm locker 1050 kg	
	Mörtel 1 : 3	Mörtel 1 : 3	
	Zugfestigkeit in kg pro qcm		
7	18,0	5,9	
28	23,0	10,4	
90	26,7	14,6	
150	28,2	19,1	
360	29,4	26,7	
720	30,9	27,2	

Aus den Resultaten der folgenden Tabelle geht hervor, daß die Genauigkeit der Prüfung des Zementes auf seine Normenfestigkeit noch viel zu wünschen übrig läßt.

## Versuchs-Resultate verschiedener Prüfungs-Stationen von Portland-Cement der Stuttgarter Cementfabrik Blaubeuren.

Der zu prüfende Portland-Cement wurde verschiedenen Stellen des Cementlagers der Fabrik Ehingen entnommen, und damit Gleichmässigkeit der Qualität gesichert war, in einer Mischtrömmel innig gemischt. Von diesem gemischten Cement wurden nun an die Prüfungsstationen je ein Quantum von 90 kg gesandt. Der Silikatgehalt des ausgeglühten Cementes betrug 32 %.

Prüfungs-Station	Gewicht		Sieb-rückstand	Bindezeit		Temperatur-erhöhung	Zugfestigkeit		Druckfestigkeit		Bemerkungen						
	specif.	Volumen lose eingetritelt		in % bei 900   5000 Maschen	Beginn Stunden		Ende Stunden	in 7 Tagen	in 28 Tagen	in 7 Tagen		in 28 Tagen					
Berlin . . . . .	3.093	1.329	2.121	0,0	20,0	2 1/2	6 1/2	2,0	2.274	18,3	2.274	21,9	2.214	182,3	2.214	239,6	Bindezeitbestimm. mit 24 1/2 % Wasser bei 14° Temperatur des Wassers und 17° der Luft.
Stuttgart . . . . .	—	—	—	0	—	2,0	9,30	2,4	—	20,9	—	23,7	2,23	247,0	2,30	290,0	Bindezeitbestimm. mit 26,7 % Wasser bei 15,5° von Luft, Cement und Wasser.
München . . . . .	—	—	—	0,2	29,1	2St. 40	10	—	—	18,9	—	21,6	2,20	166,5	2,214	211,5	Bindezeitbestimm. mit 26 % Wasser bei 14° Lufttemp.
Zürich . . . . .	3.13	1.45	1.95	0,0	24,3	7	16	1,5	2.29	24,2	2.31	27,7	2,28	224,6	2,33	271,8	Bindezeitbestimm. mit 26 % Wasser. Temperatur von Wasser, Cement und Luft 15,8°. Sandfestigkeitskör- per 9 3/4 % Wasser.
Blaubeuren . . . . .	—	—	—	0,0	24,0	4 1/2	9	2,0	—	21,8	—	22,4	—	—	2,235	198,5	Bindezeitbestimm. mit 28 % Wasser. Temperatur, Luft, Zement und Wasser 16°.
Ehingen . . . . .	—	—	—	0,3	25,0	6 1/2	10 1/2	2,5	—	22,2	—	24,3	—	—	2,225	192,0	Bindezeitbestimm. mit 28 % Wasser. Temperatur des Cement und Wassers 16,5°, der Luft 19°.
Allmendungen . . . . .	—	—	—	0,0	20,0	—	9	—	—	17,8	—	23,3	—	—	—	—	Bindezeitbestimm. mit 27 % Wasser bei 17° Temperatur des Cement, Luft u. Wassers

Stuttgarter Cementfabrik



Auf der Material-Prüfungsanstalt der Technischen Hochschule zu Stuttgart wurden von Baudirektor v. Bach Betonkörper, die in der Stuttgarter Zementfabrik in Ehingen hergestellt worden sind, auf ihre Elastizität und auf ihre Druckfestigkeit geprüft. Einige der Druckfestigkeitsergebnisse mögen hier angeführt werden, die den Einfluß der Form und Oberflächenbeschaffenheit der Betonsteinchen zeigen.

Alter der Probekörper	Mischungsverhältnis in Raumteilen			Druckfestigkeit kg per qcm	Bemerkung
	Cement	Sand	Kies		
3 Monate	1	3	6	123	Die Probekörper hatten eine Cylinderform von 25 cm Durchmesser und 25 cm Höhe.
3 "	1	3 $\frac{1}{2}$	7	114,9	
3 "	1	4	8	96,3	
3 "	1	5	10	87,6	

Alter der Probekörper	Mischungsverhältnis in Raumteilen			Druckfestigkeit kg per qcm	Bemerkung
	Cement	Sand	Steinschlag		
3 Monate	1	3	6	216,0	Die Probekörper hatten eine Cylinderform von 25 cm Durchmesser und 25 cm Höhe.
3 "	1	3 $\frac{1}{2}$	7	185,8	
3 "	1	4	8	163,9	
3 "	1	5	10	128,9	

Aus dieser Untersuchung geht hervor, daß die zur Verwendung kommenden Zusatzmaterialien einen großen Einfluß auf die Festigkeit des Betons ausüben und daß Steinschlag aus hartem Material bedeutend höhere Festigkeiten ergibt, als der runde, abgeschliffene Kies. Diesbezügliche Untersuchungsergebnisse sind ferner in dem Werk „Der Portlandzement“ 1905 S. 120 mitgeteilt:

Mischung (Massteile)			Druckfestigkeit kg/qcm			
Zement	Sand	Steinschlag	4 Wochen	13 Wochen	1 Jahr	2 Jahr
1	1	—	258	307	516	584
1	1	2 Porphyr	300	360	425	583
1	1	2 geschlagene Rheinkiesel	280	352	426	659
1	2	—	182	255	415	501
1	2	3 Porphyr	268	306	408	524
1	2	3 geschlagene Rheinkiesel	250	295	451	525
1	2	3 Kalkstein	252	305	417	490
1	2	3 Sandstein	221	260	410	506
1	2	3 Granit	240	272	428	553
1	3	—	168	236	340	441
1	3	4,5 Porphyr	225	266	356	460
1	3	4,5 geschlagene Rheinkiesel	205	237	327	496
1	3	4,5 Kalkstein	215	257	317	466
1	3	4,5 Sandstein	176	208	267	424

Aber auch die Art und Weise der Verarbeitung des Betons hat einen großen Einfluß auf seine Festigkeit. Beton, der mit Maschinen hergestellt worden ist, hat stets eine höhere Festigkeit, als von Hand angemachter Beton.

Der Beton, welcher zum Bau der Donaubrücke zu Munderkingen verwendet worden ist — diese von Präsident v. Leibbrand ausgeführte Brücke hat einen Bogen von 50 m sichtbarer Spannweite, mit nur 5 m Pfeilhöhe, in welchem Druckspannungen von 38 kg pro qcm vorkommen — wurde in einem Mischungsverhältnis von 1 Zement  $2\frac{1}{2}$  Sand 5 Furaschotter mittels einer Kugelmischtrommel hergestellt und damit eine Festigkeit erzielt von:

202 kg/qcm in 7 Tagen,	332 kg/qcm in 5 Monaten
254 " " 28 "	509 " " $2\frac{1}{2}$ Jahren.

Diese Festigkeiten übersteigen fast alle, von Zementbeton bis jetzt in die Öffentlichkeit gelangten und sind solche hauptsächlich auch der vorzüglichen Verarbeitung des Betons mit der Mischtrommel zuzuschreiben.

#### (II. § 4.) C. Mauerwerk.

Im allgemeinen ist die Druckfestigkeit des Gemäuers etwa halb so groß, als die Druckfestigkeit der verwendeten Steine, doch ist dieser Wert sehr abhängig von der Bearbeitung der Steine und insbesondere von der Beschaffenheit des Mörtels.

Die Druckfestigkeit von Kalkstein- und Sandsteingemäuer beträgt etwa 150 kg/qcm. Die zulässige Beanspruchung derselben wird durchschnittlich zu 8—10 kg/qcm, ausnahmsweise bei guter Beschaffenheit des Mörtels und vollständiger Fugenfüllung zu 15 kg/qcm angenommen; während Quadermauerwerk je nach der Druckfestigkeit des Steinmaterials mit 20—25 kg/qcm und darüber beansprucht wird. Voraussetzung für die Zulassung solcher Beanspruchung ist eine erschöpfend genaue statische Berechnung und sorgfältige, den Annahmen der Berechnung genau entsprechende Bauausführung.

#### (II. § 4.) D. Holz.

Die Festigkeit des Holzes hängt sehr wesentlich von der Fällzeit ab, wie unter anderem aus folgenden Versuchsergebnissen zu ersehen ist: von vier sonst ganz gleichen Kiefern, wurde je eine Ende Dezember, Ende Januar, Ende Februar, Ende März gefällt. Die Biegefestigkeiten verhielten sich wie 100 : 88 : 80 : 62. Auch die Dauerhaftigkeit war verschieden: das Dezemberholz war nach 16 Jahren, welche es in die Erde eingegraben, überstanden hatte, noch gesund, während alle übrigen nach 3 bis 4 Jahren mürbe geworden waren.

Auch der Feuchtigkeitsgehalt beeinflusst die Festigkeit des Holzes wesentlich. Mit dem Austrocknen des Holzes wächst namentlich dessen Druckfestigkeit wesentlich. Die Zugfestigkeit ist ferner beim Kernholz bedeutend geringer als beim Splintholz, wie aus nachstehenden von Bauschinger gewonnenen Prüfungsergebnissen für Nadelholz sich zeigt. (Siehe S. 41.)

Gute amerikanische Holzbrücken werden so konstruiert, daß die Beanspruchung trotz des vortrefflichen Holzes nicht über 55—60 kg/qcm steigt; gedrückte Konstruktionsteile werden mit Rücksicht auf die Zerknickungsgefahr noch weniger beansprucht. Bei Hochbauten wird die zulässige Beanspruchung des gewöhnlichen tannenen Bauholzes auf Biegung bei dauernden Bauten höchstens zu 60—80 kg/qcm, bei vorübergehenden Bauten (Gerüsten etc.) höchstens zu 80 bis 100 kg/qcm angenommen. Der Sicherheitsgrad ist alsdann bei ersteren nur 7 bis 5, bei letzteren nur 5 bis 4. Die zulässige Beanspruchung sollte aber bei geschützter Lage  $\frac{1}{10}$  der

Bruchfestigkeit, bei den Witterungseinflüssen ausgesetzten Konstruktionsteilen  $\frac{1}{15}$ — $\frac{1}{20}$  derselben betragen, wenn Erzitterungen fern gehalten bleiben wollen.

Holzsorte		Elastizitätsmodul	Elastizitätsgrenze	Bruchfestigkeit	Holzsorte		Elastizitätsmodul	Elastizitätsgrenze	Bruchfestigkeit
Kiefer		auf Zug beansprucht			Fichte		auf Zug beansprucht		
	Kernholz.	54 000	—	230		Kernholz.	61 000	—	310
	Splintholz	127 000	—	1050		Splintholz	123 000	—	970
spez. Gew. 0,46	Mittel. . .	—	—	790	spez. Gew. 0,48	Mittel. . .	—	—	750
spez. Gew. 0,52		auf Druck beansprucht			spez. Gew. 0,47		auf Druck beansprucht		
	Kernholz.	84 000	138	229		Kernholz.	89 000	133	209
	Splintholz	108 000	173	287		Splintholz	109 000	170	253
spez. Gew. 0,55	Mittel. . .	—	—	280	spez. Gew. 0,53	Mittel. . .	—	—	246
		auf Biegung beansprucht					auf Biegung beansprucht		
	Mittel. . .	108 000	201	472		Mittel. . .	111 000	228	419
—		auf Schub beansprucht			—		auf Schub beansprucht		
	Mittel. . .	—	—	43		Mittel. . .	—	—	41
				Faser					Faser

Für Laubholz fand Tetmajer folgende Werte:

Holzsorte		Elastizitätsmodul	Elastizitätsgrenze	Mittlere Bruchfestigkeit
Eiche	Zug . . . .	108 000	476	964
	Druck . . . .	103 000	148	343
	Biegung . . . .	100 000	217	600
	Schub . . . .	—	—	75
Buche	Zug . . . .	180 000	581	1340
	Druck . . . .	169 000	102	320
	Biegung . . . .	128 000	240	670
	Schub . . . .	—	—	85

#### (II. § 4.) E. Eisen, Stahl und Bronze.

Bei der Beanspruchung der Metalle ist insbesondere davon auszugehen, daß die zulässige Beanspruchung ein und desselben Materiales für verschiedene Verhältnisse eine sehr verschiedene sein kann. Sie hängt hauptsächlich davon ab, ob die Belastung eine gleichbleibende und ruhende oder eine wechselnde und bewegte ist.

Für die Berechnung des nötigen nutzbaren Querschnittes  $F$  ist demnach die Bestimmung der ruhenden Belastung und der bei den Grenzbelastungen eintretenden Kräfte  $S_{\min}$  und  $S_{\max}$  erforderlich, und es geschieht hienach die Bemessung der zulässigen Beanspruchung nach folgender Tabelle, zu welcher zu bemerken ist, daß betrifft

a) ruhende Belastung;

b) Belastung beliebig oft abwechselnd, derart, daß die Spannungen von Null bis zum

größten Wert stetig wachsen und dann wieder auf Null zurücksinken (z. B. wiederholte Dehnung, Biegung, Drehung nach einer Seite hin);

c) Belastung beliebig oft wechselnd derart, daß die Spannungen vom größten Druck abnehmend durch Null hindurch gehen und bis zum größten Zug anwachsen, wobei der größte Zug und der größte Druck annähernd gleich sind (wiederholte Biegung und Drehung nach entgegengesetzter Richtung hin). Für zwischenliegende Beanspruchungen sind Zwischenwerte zu nehmen. Sind Konstruktionen gegen lebendige Kräfte widerstandsfähig zu machen, so ist besondere Rechnung anzustellen, der Beanspruchung durch Stöße wird durch Vermehrung der Belastungsannahme nach Seite 51 schätzungsweise Rechnung getragen. Des weiteren ist noch zu bemerken, daß bei vorzüglichem Schmiedeeisen bis zu  $\frac{1}{3}$  mehr zulässig ist, wobei aber zu bedenken ist, daß nach II. § 2 dementsprechend größere elastische Formänderungen eintreten. Man kann sogar in mannigfachen Fällen von der Größe der elastischen Formänderung, welche für einen bestimmten Konstruktionsteil etwa zulässig sein mag, ausgehen und danach rückwärts schließend die zulässige Beanspruchung berechnen.

Auch vorzügliches Gußeisen in Formen sachgemäß hergestellt, so daß die Gußspannungen gering ausfallen und die Dichtigkeit eine vollkommene ist, läßt bis zu  $\frac{1}{3}$  größere Werte zu.

Für die zulässige Bieugungsbeanspruchung des Gußeisens kommt übrigens sowohl die Form des Stabquerschnittes, als auch der Umstand in Frage, ob die Gußhaut noch vorhanden oder beseitigt ist (vgl. Bach, Masch.-Elem.). Ist die spröde Gußhaut noch vorhanden, so vermindert sich die zulässige Beanspruchung.

An Stelle der Zahlenwerte in Tabelle S. 43 werden häufig die nachstehend angegebenen Formeln zur Bestimmung der zulässigen Beanspruchung verwendet.

Zulässige Beanspruchung des Schweißeisens	$700 \left( 1 \pm \frac{1}{2} \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right)$	höchstens aber 900 kg
des Flußeisens	$800 \left( 1 \pm \frac{1}{2} \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right)$	„ „ 1000 kg
des Flußstahles	$900 \pm 650 \frac{S_{\min}}{S_{\max}}$	„ „ 1200 kg.

Dabei bedeuten  $S_{\min}$  und  $S_{\max}$  die unteren und oberen Grenzwerte der in jedem einzelnen Konstruktionsteil auftretenden Kräfte. Die + Zeichen sind zu nehmen, wenn diese Kräfte gleichwertig, also z. B. beide Zug sind, die — Zeichen dagegen, wenn diese Kräfte ungleichwertig sind, also die eine Zug, die andere Druck ist.

Die für Flußstahl gegebene Formel gilt für einen Flußstahl von 4900—5600 kg/qcm Bruchfestigkeit; über die verschiedenen Arten von Flußstahl s. Bach a. a. O.

Diese Formeln sind z. B. für die Berechnung württembergischer Staatsstraßenbrücken vorgeschrieben.

Die Überschreitung der Elastizitätsgrenze bis zu einem gewissen Grade schadet dem Material nicht, seine Festigkeit erhöht sich dadurch, allerdings auch seine Sprödigkeit; ein Beispiel hiefür ist der gezogene Draht, derselbe muß während der Herstellung wiederholt zur Beseitigung der Sprödigkeit ausgeglüht werden. Dessen Bruchfestigkeit wird aber bei Eisendraht 7000 kg/qcm, bei Stahldraht 13 000 kg/qcm, so daß z. B. bei Eisendraht 1200 kg/qcm noch ruhig als Beanspruchung genommen werden können.

Zu Drahtseilen verarbeiteter Draht wird jedoch nur noch auf 200 kg/qcm bei Eisen und 400 kg/qcm bei Gußstahl beansprucht, weil die Drähte infolge ihrer Verdrehung starke seit-



liche Pressungen aufeinander ausüben. Man hat bei den angegebenen Beanspruchungen noch zehnfache Sicherheit gegen Bruch, während sonst bei Eisen und Stahl nur 3—5fache Sicherheit gefordert wird. — Ist es bei Bronzeteilen möglich und zulässig, durch mechanische Behandlung die Elastizitätsgrenze höher zu legen, so darf die Belastung etwa um die Hälfte höher genommen werden als in den Tabellen.

Gewöhnliches Gußblei in 10—15 mm dicken Platten, fließt bei mehr als 100 kg/qcm Beanspruchung seitlich aus, Bleiwürfel schon bei 50 kg/qcm.

#### (II. § 4.) F. Hanfseile.

Die Bruchfestigkeit ist für „laufende“ Seile 800—900 kg/qcm, für „stehende“ Seile 1200 bis 1300 kg/qcm.

Bei Flaschenzügen zc. werden die Seile meist nur mit 100 kg/qcm Querschnitt belastet, so daß 8—9fache Sicherheit vorhanden ist.

#### (II. § 4.) G. Verschiedene Materialien.

Bei den sonstigen Materialien verursacht die Verschiedenartigkeit der Herstellung und der Bearbeitung große Verschiedenheit der Angaben der Festigkeit. Prüfung in jedem einzelnen wichtigen Fall ratsam. Literatur: „Bach, Elastizität und Festigkeit“, „Bach, Maschinenelemente“, ferner die Arbeiten von Hausjinger, Tetmajer u. a., sowie des „Ingenieurs Taschenbuch Hütte“.

Die Biegefestigkeit des geblasenen Glases sei 125 kg/qcm; für Rohglas von  $d = 0,5$  bis 1,5 cm Dicke ist die Bruchfestigkeit  $\frac{1}{3} [200 + (1,5 - d)^2 \cdot 160]$  kg/qcm.

#### (II. § 4.) H. Baugrund.

Durchschnittswerte der zulässigen Beanspruchung auf Druck: fester Sand 1,5—1,8 kg/qcm; gewöhnlich fester Baugrund 2,5—3,5 kg/qcm; Felsen 6—10 kg/qcm.

Glasen gibt in dem Werke über „Fundationen“ folgende Zahlenwerte an: Felsarten, Druckfestigkeit Basalt 1200—1800, Basaltlava 400—700, Granit 360—1000, Grauwacke 600 bis 800, Kalkstein 200—250, Porphyr 300—500, Sandstein 150—550, Trachyt 60—200; Tuffstein 50—60 kg/qcm. Hieron sei höchstens  $\frac{1}{10}$  als zulässige Beanspruchung zu wählen.

Nach „Wochenschrift d. österr. Ing. u. Arch.-Verein 1889“ sagt die auch vom Wiener Stadtbauamt amtlich benützte „Norm für die Berechnung der Belastung und Beanspruchung von Baumaterialien und Baukonstruktionen“: Zulässige Belastung des Baugrundes:

1. Lehm und Mergel, sehr feucht, dünner Sand von mindestens 1 m Mächtigkeit, jedoch gegen Ausweichen geschützt, bis 1,5 kg/qcm;
2. bei sandigem Schotter, fest, von geringerer Mächtigkeit oder wechselnder geneigter Lagerung, dann Lehm und Mergel, trocken, jedoch stehend oder teilweise stehend und gegen Ausweichen geschützt, bis 2,5 kg/qcm;
3. bei festgelagertem, grobkörnigem Schotter, dann sog. Plattenschotter in großer Mächtigkeit, ferner liegender Lehm und Mergel, trocken, bis 3,5 kg/qcm;
4. bei lockerem, wasserhaltigem Boden und Fundierung mit Pfählen, bis 2 kg/qcm;
5. wie 4., aber Pfähle und Beton von 60 cm Dicke, bis 3,0 kg/qcm.

Bei einzeln stehenden Pfeilern sind bei Anwendung dieser Werte die Fundamente (mindestens nahezu) quadratisch anzulegen.

Diese Norm geht sehr vorsichtig zu Werke, wie dies bei Gründungen stets ratsam ist.

Berliner Sandboden wird mit 4,5 kg/qcm belastet; wo geringe Setzung ungefährlich sind, kommen selbst 5,1—6,6 kg/qcm Beanspruchung vor.

Für festgelagerten Sand und Kielesschichten, Lehm und Tonboden sind 4—5 kg/qcm, wenn Ausweichen unmöglich ist, unbedenklich. Eine Zunahme mit Tieferlage der Fundamente ist bei der zulässigen Beanspruchung gerechtfertigt, weil tiefe Fundamente schädlichen Einflüssen mehr entrückt sind und seitliches Ausweichen, Senkung zc. weniger leicht vorkommen können, auch die Durchfeuchtung gleichmäßig bleibt.

Anhang. Bei der großen Wichtigkeit der Annahmen für die zulässige Beanspruchung ist zum Teil von Behörden, so z. B. von der Berliner Baupolizei vom 21. Febr. 1887 und der Bauabteilung des preussischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten vom 16. Mai 1890 eine diesbezügliche Tabelle aufgestellt worden, welche bei Prüfung von Baugesuchen zur Anwendung kommt. Diese Aufstellungen sind nachstehend zusammengefaßt.

Material	kg/qcm			Material	Druck kg/qcm
	Zug	Druck	Schub		
Schweiss- und Flusseisen	750—1000	750—1000	600—750	Basalt . . . . .	75
Gewölbtes Eisenblech . . . . .	500	500	—	Basaltlava . . . . .	40
Eisendraht . . . . .	1200	—	—	Granit . . . . .	45
Gusseisen . . . . .	250	500	200	Sandstein, je nach Härte . . . . .	15—30
Zinkblech . . . . .	200	200	150 Biegung	gewöhnlich . . . . .	20
Eschenholz . . . . .	100—120	66	—	Muschelkalk-Quader . . . . .	25
Eiche und Buche . . . . .	100	80	20	Kalksteingemäuer in Kalkmörtel . . . . .	5
Dieselben für zeitweilige Bauten . . . . .	120	90	20	Backsteingemäuer:	
Kiefernholz . . . . .	100	60	10	gewöhnliches in Kalkmörtel . . . . .	7
Dasselbe für zeitweilige Bauten . . . . .	120	70	15	" in Zementmörtel . . . . .	11—12
Tannenholz . . . . .	60	50	—	Klinker in Zementmörtel . . . . .	12—14—20
Beton . . . . .	—	5—10	—	Mauerwerk ausporigen Steinen . . . . .	3—6
Bei bester Ausführung . . . . .	1			Marmor . . . . .	24
Fundamentbeton 0,75 m stark . . . . .	—	5	—	Kunstsandstein . . . . .	45
				Stein aus Zement, Sand, Schlacken . . . . .	12
				Glas . . . . .	25
				Rammpfähle je nach Bodenart . . . . .	20—40
				Guter Baugrund . . . . .	2,5
				Bester Baugrund . . . . .	5,0

Bei gemauerten Decken aus Backsteinen und Zementmörtel darf in Berlin die Beanspruchung 15% der nachgewiesenen Steinfestigkeit, d. h. in der Regel bis zu 20 kg/qcm, höchstens bis zu 35 kg/qcm betragen.

Auch in anderen Städten bestehen ähnliche Vorschriften, so gelten z. B. in Nürnberg folgende Werte (s. Tabelle S. 46):

Größere Beanspruchungen werden ab und zu für größere zusammengesetzte Eisenkonstruktionen, sogen. Verbundkonstruktionen, zugelassen. Um auch diesbezüglich ein Beispiel zu geben, seien die für solche Konstruktionen in Nürnberg zugelassenen Werte mitgeteilt, obschon mir die 1000 oder 1200 kg/qcm übersteigenden Beanspruchungen zu hoch vorkommen. Die Nürnberger Baupolizei stellt übrigens selbst bei Benennung dieser hohen zulässigen Beanspruchungen folgende Erklärung voran:

## Zulässige Beanspruchungen von Baustoffen.

Baustoffe	Zulässige Beanspruchung in kg/qcm			
	auf Druck	auf Biegung	auf Zug	auf Abschürung
Walzeisen für ruhende Last bei gewöhnlichen Baukonstruktionen	1000	1000	1000	800
„ für bewegliche Last . . . . .	750	750	750	600
Gusseisen . . . . .	500		250	200
Weiches Holz für Dauerbauten . . . . .	60	75	100	10
„ „ „ zeitweilige Bauten . . . . .	75	100	120	15
Eichenholz für Dauerbauten . . . . .	80	90	100	20
Granit . . . . .	60			
Guter Sandstein aus der Umgegend von Nürnberg . . . . .	7—12			
Harte Sandsteine: Wendelsteiner Quarzit . . . . .	20—40			
Buntsandstein . . . . .	25			
Uttenreuther . . . . .	15			
Jurakalkstein . . . . .	25			
Muschelkalkstein . . . . .	25			
Beton . . . . . $\frac{1}{10}$ der nachgewiesenen Bruchfestigkeit				
Mauerwerk aus gut gebrannten Backsteinen oder Hochofenschlackensteinen in Kalkmörtel . . . . .	7			
desgl. in Portlandzementmörtel . . . . .	12			
Bestes Klinkermauerwerk in Portlandzementmörtel . . . . .	14—18			
Portlandzementmörtel . . . . .	18		3	
Guter Baugrund bei Sandboden . . . . .	2,5			
bei Felsen entsprechend mehr.				

Bei eisernen Verbundkonstruktionen können unter der Voraussetzung, daß nur Qualitätseisen (Flußeisen) zur Verwendung gelangt, welches den Normalbedingungen für die Lieferung von Eisenkonstruktionen für Brücken- und Hochbau, aufgestellt vom Verbands deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine, dem Verein deutscher Ingenieure und dem Verein deutscher Eisenhüttenleute (Verlag von Otto Meißner in Hamburg 1900) entspricht, höhere Beanspruchungen des Eisens zugelassen werden.

Unter solchen Verbundkonstruktionen sind diejenigen aus mehreren Gliedern zusammengesetzten Eisenkonstruktionen zu verstehen, bei denen eine eingehende Untersuchung hinsichtlich der ungünstigsten Belastungsweisen und genaue Berechnung und Aufzeichnung der Einzelteile stattfindet, insbesondere die Knotenpunktanschlüsse sorgfältig, dem heutigen Stand der Wissenschaft entsprechend durchgebildet werden.

Für die Erfüllung obiger Bedingungen hat die ausführende Firma ausdrücklich die volle Verantwortung in einer schriftlichen Erklärung zu übernehmen, deren Wortlaut vorgedruckt von der Baupolizeibehörde zu beziehen ist.

## Zulässige Beanspruchungen von Flußeisen bei Verbundkonstruktionen für 1 qcm.

A) für ruhende Last auf Zug und Druck:

1. für Belastung aus Eigengewicht,  
oder Eigengewicht und ruhender Nutzlast,
- "      "      mit      "      "      und Schnee
- "      "      "      "      "      "      Wind . . . . . 1200 kg



- |  |         |
|--|---------|
| 2. für Belastung aus Eigengewicht mit ruhender Nutzlast und Schnee und Wind zusammen . . . . . | 1600 kg |
| 3. für nur durch Wind beanspruchte Teile . . . . .   | 1600 kg |

B) für bewegte Last auf Zug und Druck:

- |  |         |
|--|---------|
| 1. für unmittelbar, d. h. nicht erst durch ein zwischenliegendes Tragglied vermittelte Belastung durch bewegte Lasten ohne besondere Stoßwirkung (Belastung durch Krane oder Fahrzeuge) . . . . .<br>(bei gleichzeitiger Wirkung von zwei oder mehreren Kranen auf derselben Laufbahn ist eine Beanspruchung bis zu 1000 kg zulässig.) | 800 kg  |
| 2. für mittelbare, also durch Vermittlung eines zwischenliegenden Traggliedes erfolgende Belastung durch bewegte Lasten, ohne besondere Stoßwirkung . . . . .  | 1200 kg |

C) für ungünstigste Gesamtbelastung auf Zug und Druck:

Für Teile, deren höchste Belastung durch Zusammenwirken besonders vieler Belastungszustände erreicht wird, ist je nach dem Grade der Wahrscheinlichkeit dieses Zusammentreffens eine Beanspruchung von . 1200—1600 kg zulässig.

Die Beanspruchung auf Absicherung darf in allen Fällen 1000 kg auf 1 qcm nicht überschreiten.

Gegen Ausknicken von Druckstäben muß mindestens immer noch fünffache Sicherheit (nach den Eulerschen Formeln berechnet) vorhanden sein.

Bei Verbundkonstruktionen kann unter Umständen auch die zulässige Beanspruchung anderer Baustoffe höher gewählt werden und zwar in demselben Verhältnisse, wie für Walzeisen. Doch bleibt die Genehmigung dazu für jeden besonderen Fall dem freien Ermessen der Baupolizei vorbehalten.

## II. § 5. Eigengewichte und Belastungen der Konstruktionen.

Das Eigengewicht eines einfachen Konstruktionsteils berechnet sich aus dessen Kubikinhalt, welcher mit dem Gewicht der Kubikeinheit zu multiplizieren ist. Das spezifische Gewicht eines Körpers gibt an, wie viel kg 1 Liter = 1 cdm oder, was dasselbe ist, wie viel Tonnen ein cbm des Materiales wiegt (1 cbm = 1000 l; 1 t = 1000 kg). Ist z. B. das spez. Gewicht des Schmiedeeisens zu 7,8 angegeben, so heißt das: 1 cdm Eisen wiegt 7,8 kg oder 1 cbm Eisen wiegt 7,8 t = 7800 kg. Solche Angaben sind meist den Logarithmentafeln angehängt, ferner in Tabelle I Seite 48 zu finden. Diese Tabelle ist im wesentlichen nach den Vorschriften der Berliner Baupolizei vom 21. Februar 1887 und des fgl. preussischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten vom 16. Mai 1890 zusammengestellt.

Das Eigengewicht zusammengesetzter Konstruktionsteile kann zwar aus dem Gewicht der einzelnen Teile berechnet werden, für die gebräuchlichsten Konstruktionen ist dies jedoch schon geschehen, so daß sofort gesagt werden kann, wie viel kg z. B. 1 qm Blechbedachung zc. wiegt.

Auch die beweglichen Belastungen der Baukonstruktionen wurden nach dem Gewicht der einzelnen Teile berechnet, so daß man hier ebenfalls schon Werte besitzt, welche angeben, wie viel kg durch eine solche Belastung auf gewissen Platz, z. B. 1 qm, kommen. Menschen-

Tabelle I.  
Eigengewichte der Baustoffe.

Baustoff	kg/cbm	
Eis . . . . .	910	
Gewöhnliche Erde und Lehm	trocken . . . . .	1460
	feucht . . . . .	1600
	frisch durchnässt	1800
Tonerde	trocken . . . . .	1550
	durchnässt . . . . .	1950
Kies oder Sand . . . . .	1800	
Torf . . . . .	550	
Steinschotter . . . . .	1620	
Steinkohlen . . . . .	1280	
Roggenschüttung . . . . .	650	
Backsteinmauerwerk	aus vollen Steinen	1600
	„ porösen „	1300
	„ Lochsteinen .	1100
Sandsteinmauerwerk	frisch . . . . .	22—2400
	trocken . . . . .	2050
Kalksteinmauerwerk	frisch . . . . .	2500
	trocken . . . . .	2450
Basalt . . . . .	3200	
Granit . . . . .	2700	
Beton . . . . .	18—2200	
Marmor . . . . .	2700	
Asphalt . . . . .	1500	
Tannenholz . . . . .	600	
Buchenholz . . . . .	750	
Eichenholz . . . . .	800	
Kiefernholz . . . . .	650	
Pitchpine Holz . . . . .	550	
Rheinische Schwemmsteine . . . . .	850	
Backstein . . . . .	2100	
Sandstein . . . . .	2350	
Gebrannter Kalk . . . . .	1000	
Zement, aufgeschüttet . . . . .	1200	
Trockener Bauschutt . . . . .	1350	
Trockener Mörtel . . . . .	17—1800	

Gewichte geschichteter Körper.

Eichenholz in Scheiten . . . . .	420
Buchenholz „ „ . . . . .	400
Weisstannenholz „ „ . . . . .	340
Fichtenholz „ „ . . . . .	320
Formsand, aufgeschüttet . . . . .	1200
„ „ . . . . .	1650
Gas-Koks . . . . .	300—350
Zechen-Koks . . . . .	380—450
Holzkohlen . . . . .	150—200
Steinsalz, gemahlen . . . . .	1000
Siedesalz . . . . .	750—800
Chilialpeter . . . . .	1000
Feine Blende . . . . .	2400

Tabelle II.  
Gewichte der Dächer.

1. Tragende Konstruktion	kg/qm geneigter Dachfläche
In Eisen ausgeführt . . . . .	15—20
In Holz . . . . .	25—30
2. Dachdeckungen	
Holzzementdach . . . . .	200
Doppeltes oder Kronenziegeldach . . . . .	100—130
Einfaches Ziegeldach . . . . .	85—100
Asphaltdach mit Lehmunterlage . . . . .	70—80
Schieferdach mit Holzschalung . . . . .	65—75
Glas auf Winkeleisen . . . . .	50
Schiefer „ „ . . . . .	46—50
Wellblech „ „ . . . . .	25
Teerpappe „ „ . . . . .	22
Zinkblechdach auf Schalung . . . . .	40
Pappdach inkl. Holzsparren . . . . .	30
Gusseiserne Platten auf Winkeleisen . . . . .	75
Blech auf Winkeleisen . . . . .	20—25
3. Gesamtes Eigengewicht samt Schnee und Wind, nach den Normen der Berliner Baupolizei	
	kg/qm Grundriss- fläche
Je nach der Dachneigung:	
bei Teerpappe, Metall oder Glasdeckung	flach steil 125—150
„ Schieferdeckung . . . . .	200—240
„ Ziegeldeckung . . . . .	250—300
„ Holzzementdeckung . . . . .	350
„ steilen Mansardendächern . . . . .	400

Mittelwert für Gedächtnis . . . . . 250

Gewichte von Mahlprodukten.

a) Rohprodukte	kg/cbm	b) Zwischenprodukte	kg/cbm
Weizen . . . . .	700—800	Vom Weizen:	lose fest
Roggen . . . . .	680—790	Weizenschrot . . . . .	470—550
Gerste . . . . .	610—700	Grober Gries . . . . .	350—450
Hafer . . . . .	430—540	Feiner Gries . . . . .	550—650
Erbsen, Bohnen,		Feine Schalen . . . . .	250—350
		Linsen . . . . .	850
Hirse . . . . .	850	Vom Roggen:	
		Roggenschrot . . . . .	560—600
		Gries . . . . .	500—550
c) Endprodukte			
Vom Weizen:	kg/cbm	Vom Roggen:	kg/cbm
Mehl . . . . .	410—800	Mehl . . . . .	500—570
Feine Kleie . . . . .	320—600	Feine Kleie . . . . .	375—440
Grobe Kleie . . . . .	150—400	Grobe Kleie . . . . .	290—350

Tabelle III.  
Gewicht von Bedachungen

nach den Vorschriften der Bauabteilung des K. preussischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten.

Art der Bedachung	kg/qm Dachfläche
Einfaches Biberschwanzdach . . . . .	90
Biberschwanz-Doppeldach . . . . .	120
Kronendach . . . . .	130
Pfannendach . . . . .	90
Desgl. auf Schalung 2,5 cm stark und darüber Lattung . . . . .	110
Deutsches Schieferdach auf Schalung 2,0 cm stark . . . . .	85
Falzziegeldach . . . . .	110
Zinkdach auf Schalung 2,5 cm stark . . . . .	40
Teerpappdach auf Schalung 2,5 cm stark . . . . .	35
Wellblechdach auf Winkleisen (Wellblech 150 . 40 . 1,5 mm, $\perp$ Pfetten, 2 m freitragend bei 2 m Abstand) . . . . .	25
Holzementdach einschl. Schalung 3,5 cm stark und Sparren 13 . 18 cm stark	180
Glasdach auf Sprosseneisen einschl. dieser, Glas 4 mm stark (Sprossen- abstand 0,45 m) . . . . .	20
Desgl. Glas 5 mm stark (Sprossenabstand 0,50 m) . . . . .	25
Desgl. Glas 6 mm stark (Sprossenabstand 0 55 m) . . . . .	30

Tabelle IV.

Nutzbelastungen der Zwischendecken

nach den Vorschriften der Bauabteilung des K. preussischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten.

Art der Nutzlast	kg/qm	Mittleres Gewicht zu lagernder Stoffe	kg/cbm
Nutzlast für Wohn- und kleine Dienst- gebäude ausschliesslich etwaiger be- sonderer Belastung durch Akten usw.	250	Heu und Stroh . . . . .	100
		Gras und Klee . . . . .	350
Nutzlast für grössere Geschäftsgebäude	400	Mist und Guano . . . . .	750—950
		Rüben . . . . .	570—650
Nutzlast für Versammlungssäle . . . .	400	Erbsen, Bohnen, Linsen . . . . .	850
		Torf . . . . .	600
Nutzlast für Decken unter Durchfahrten oder befahrbaren Höfen, wenn nicht grössere Einzellasten (z. B. Rad- drücke) zu berücksichtigen sind . . .	800	Braunkohlen . . . . .	650
		Steinkohlen . . . . .	900
		Schlacken und Koks-Asche . . . . .	600
		Aktengerüste, Bücherschränke u. dergl.	500
Nutzlast für Treppen . . . . .	400	Rüb- und Leinsaat . . . . .	650
		Kartoffeln . . . . .	700
		Zucker . . . . .	750
In Säcken geschichtet ist hiervon das $\frac{4}{5}$ fache zu rechnen.			

Zu II. § 5.

Tabelle V.

## Eigengewichte von Decken.

1. Für Wohnhäuser und Fabriken mit leichten Maschinen.				2. Für Fabriken mit schweren Maschinen, Speicher, öffentliche Lokale u. s. w.			
Art der Konstruktion	Eigenlast	Nutzlast	Gesamtlast	Art der Konstruktion	Eigenlast	Nutzlast	Gesamtlast
	kg/qm				kg/qm		
Gewölbte Decke 1/4 St. st. incl. Hintermauerung, zwischen eisernen Trägern für 1—1,5 m Spannweite incl. Putz- und Fussbodengewicht . . . . .	300	200	500	Holzbalkendecke mit halbem Windelboden für Tanzlokale, Heu- und Fruchtböden . . . . .	350	350	700
dto. 1/2 St. st. sonst wie vorig . . . . .	400	200	600	Holzbalkenlage mit Bohlenbelag in Salzspeichern, wenn 3 Tonnenreihen übereinander liegen . . . . .	200	600	800
dto. 1/2 St. st. für 2—3 m Spannweite . . . . .	500	200	700	dto. mit Bohlenbelag in Kaufmannspeichern . . . . .	350	750-1500	—
dto. 1/2 St. st. aus porösen Steinen, sonst wie vorig . . . . .	130	200	330	Gewölbte Decke 1/2 St. st. zwischen eisernen Trägern für 1—1,5 m Spannweite in Fabriken oder Lagerräumen . . . . .	450	500	950
Decke aus Wellblech, Buckelplatten oder Belag-Eisen mit Beton zwischen Trägern im Beton 13 cm dick . . . . .	250	200	450	dto. 1 St. st. für 2—3 m Spannweite, sonst wie vorig . . . . .	650	500	1 150
Decken nach franz. System aus Eisen mit Füllung aus Gyps erfordern an Eisengewicht 15 bis 30 kg. Gypsgewicht 220 kg, Holzgewicht 25 kg . . . . .	270	200	470	Decke aus Wellblech, Buckelplatten oder Belag I-Eisen mit Beton 20 cm dick, sonst wie vorig . . . . .	350	500	850
Holzbalkendecke mit einfachem Fussboden . . . . .	80	200	280	Fussboden unter Durchfahrten oder Hofräumen, auf welchen Fuhrwerke verkehren . . . . .	4-600	800	12-1400
dto. mit doppeltem Fussboden oder mit einfachem Fussboden und Deckenputz . . . . .	100	200	300	Balkenlage in Kornspeichern . . . . .	—	—	850
dto. mit halbem Windelboden, Fussboden mit Deckenputz . . . . .	300	200	500	„ „ Wollspeichern . . . . .	—	—	750
dto. mit ganzem Windelboden, sonst wie vorig . . . . .	400	200	600	Ausstellungsräume, mindestens . . . . .	—	—	1 000
Dachbalkenlage in Wohnhäusern . . . . .	—	—	735	Gewölbte Treppen . . . . .	500	500	1 000
				Gewölbte Decke ohne Fussbodенlage . . . . .	—	—	700
				Topfgewölbe; Töpfe 10—20 cm hoch	100-200	—	—

Tabelle VI.

## Eigengewichte der Wände.

Art der Konstruktion	Gewicht in kg/qm Ansichtsfläche	Für Wände aus anderen Materialien erhält man die Belastungen, wenn man die vorigen Zahlen für Backsteinmauern mit nachfolgenden Coefficienten multipliziert:	
Fachwand 1/2 St. st. in Schwemmsteinen (auch Hohlziegeln, porösen Steinen), ausgemauert, von beiden Seiten verputzt . . . . .	130	Mauer aus Hohlziegeln oder porösen Steinen . . . . .	0,6
dto. 1/2 St. st. in Backsteinen, sonst wie vorig . . . . .	220	„ „ dichtem Kalkstein, Granit etc. . . . .	1,5—1,6
dto. 1 St. st. in Schwemmsteinen, von beiden Seiten verputzt . . . . .	280	„ „ Sandsteinen . . . . .	1,3—1,4
dto. 1 St. st. in Backsteinen, sonst wie vorig . . . . .	460	„ „ Tuffsteinen . . . . .	0,9—1,0
dto. 1 1/2 St. st. „ „ „ „ „ . . . . .	670	„ „ gepressten Schlackensteinen . . . . .	1,0
dto. 2 St. st. „ „ „ „ „ . . . . .	880		
dto. 2 1/2 St. st. „ „ „ „ „ . . . . .	1 100		
dto. 3 St. st. „ „ „ „ „ . . . . .	1 300		

Tabelle VII.

1 Ladung von 10000 kg (200 Ztr.) enthält cbm:			
Brauneisenstein . . . . .	3,0—3,5	Koks, Zechen- . . . . .	18,9—26,3
Braunkohlen, lufttrocken u. in Stücken	12,8—15,4	Lehm, frisch gegraben . . . . .	6,0
Buchenholz in Scheiten . . . . .	25,0	Mörtel (Kalk und Sand) . . . . .	5,6—5,9
Eichenholz „ „ . . . . .	23,8	Nadelholz in Scheiten . . . . .	30,3
Fichtenholz „ „ . . . . .	31,3	Presskohlen (Brikette) . . . . .	9,0—10,0
Flussskies, trocken . . . . .	3,7—4,3	Rüben . . . . .	15,4—17,5
„ nass . . . . .	3,5—4,0	Schlacken und Koksasche . . . . .	16,7
Flusssand, feucht . . . . .	5,7	Schwefelkies . . . . .	3,0
Formsand, aufgeschüttet . . . . .	8,3	Schwemmsteine (rheinische) . . . . .	11,8
„ eingestampft . . . . .	6,1	Spateisenstein . . . . .	3,0—3,3
Holzkohlen von weichem Holze . . . . .	66,7	Steinsalz, gemahlen . . . . .	9,8
„ „ hartem „ . . . . .	45,5	Teer, Steinkohlen- . . . . .	8,3
Kalk, gebrannt, unabgelöscht . . . . .	4,0—5,5	Thon, trocken . . . . .	5,6
Kalk- und Bruchsteine . . . . .	5,0	„ nass . . . . .	5,0
Kartoffeln . . . . .	13,7—15,4	Torf, lufttrocken . . . . .	24,4—30,8
Kohlen, Zwickauer . . . . .	13,3—13,9	„ feucht . . . . .	15,4—18,2
„ oberschlesische . . . . .	13,2—14,3	Trass, gemahlen . . . . .	10,5
„ niederschlesische . . . . .	11,9—14,1	Weisstannenholz in Scheiten . . . . .	29,4
„ Saar- . . . . .	12,8—14,3	Ziegelsteine, gewöhnliche . . . . .	6,7—7,3
„ Ruhr- . . . . .	11,8—13,7	„ Klinker . . . . .	5,6—6,3
Koks, Gas- . . . . .	21,3—30,3		

Nach des Ingenieurs Taschenbuch der  
„Hütte“ in Berlin.

gedränge verursacht z. B. eine Belastung von 300—500 kg/qm, es tritt jedoch diese Belastung meist nur in öffentlichen Lokalen, Sälen u. s. f. ein. Eigentlich dichtes Menschengedränge, wie es bei Volksaufmärschen, vor den Theatereingängen u. s. w. vorkommt, kann bis zu 860 kg/qm Belastung verursachen. Für Säle in Privathäusern genügt die Annahme von 250 kg/qm. In gewöhnlichen Wohnräumen können schon 150 kg/qm als Belastungsannahme genügen, meist nimmt man nicht unter 200 kg/qm.

Es ist ein wesentlicher Unterschied zwischen ruhenden und bewegten Nutzlasten zu machen. Bei mäßig erschütterten Bauteilen, z. B. bei Decken von Wohngebäuden, Geschäftsräumen, Warenhäusern genügt es die wirklich vorhandene Nutzlast in die Rechnung einzuführen. Bei Bauteilen die stärkeren Erschütterungen oder stark wechselnder Belastung ausgesetzt sind, wie z. B. bei Decken in Versammlungsräumen, Tanzsälen, Fabriken, Lagerhäusern ist die Nutzlast um ihre Hälfte vermehrt in der Rechnung zu berücksichtigen. Bei Belastungen mit starken Stößen, wie z. B. bei Kellerdecken, unter Durchfahrten und Höfen ist der doppelte Wert der wirklichen Nutzlast in der Rechnung anzunehmen.

Ferner sind besonders große Einzellasten wohl zu berücksichtigen und deren Gewichte zu erheben. z. B. wiegen Kassenschränke 20—40 Ztr. und mehr, und bedecken nur 0,5 bis 0,8 qm Bodenfläche.

Angabe für besondere Fälle enthalten Tabelle II bis XII.

Diese Einheitsgewichte sind nur annähernd richtig, woraus sich ergibt, daß bei statischen Berechnungen, welche sich auf solche Gewichtsanahmen stützen, stets sinngemäße Zahlenabrundungen vorgenommen werden sollen.

Zu Tabelle II ist noch zu bemerken, daß für mittlere Dachneigungen eine lotrechte Gesamtbelastung durch Schnee und Wind von 100—125 kg/qcm Grundrißfläche angenommen werden kann. Eine andere Feststellung der Gewichte der Dächer ist in den Vorschriften der Bauabteilung des preußischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten vom 16. Mai 1890 enthalten, welche von den Werten in Tabelle II wenig abweicht, aber die Art des Daches näher angibt, weshalb sie in Tabelle III wiedergegeben werden mag.

In diesen Gewichten sind die Sparren, Latten und Mörtel zc. inbegriffen; soweit nicht besondere Angaben gemacht sind, ist vorausgesetzt: Sparrenabstand 1 m, Sparrenstärke 13/16 cm, Lattendicke 4/6 cm. Man kann bei eisernen Dächern für den Quadratmeter Grundfläche das Gesamteisengewicht zu 35—45 kg annehmen, wovon 20—30 kg auf die Dachbinder entfallen.

Für die Zwischendecken sind von den genannten Berliner Behörden sowohl für die Eigengewichte als für die Nutzlasten Gewichtangaben gemacht worden; Tabelle IV enthält letztere. Für erstere sind die Angaben des Ministeriums weggelassen, weil Tabelle V, welche aus verschiedenen Quellen zusammengestellt ist, diesbezüglich Anhaltspunkte gibt und im übrigen für jede einzelne Konstruktion in wichtigeren Fällen Gewichtsberechnungen doch nicht zu entbehren sind. Die in Tabelle V für die Nutzlasten angegebenen Gewichte sind als die untersten Werte anzusehen.

Häufig ist für statische Berechnungen die Kenntnis des Meßgehaltes von Eisenbahnwagenladungen erforderlich; es ist deshalb Tabelle VII eingeschaltet worden.

In Nürnberg gelten bei der baupolizeilichen Prüfung von Bauplänen nachstehende Werte:

Tabelle VIII.  
Eigengewichte. (Nürnberg.)

Lfd. Nr.	Benennung	für 1 cbm kg	Lfd. Nr.	Benennung	für 1 cbm kg
1	Erde, Lehm, Sand, trocken . . .	1600	13	Beton je nach Mischungsverhältnis und Bestandteilen . . . . .	2000—2500
2	„ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ nass ) und desgleichen Kies . . . . .	1800	14	Bimsbeton . . . . .	1400
3	Mauerwerk, trocken, aus Back- steinen, Hochofenschlackenstein- en, Behringersdorfer Kunst- sandsteinen in Kalk- und Zement- mörtel . . . . .	1600	15	Schlackenbeton . . . . .	1400—1700
4	Mauerwerk, trocken, aus rhein- ischen Schwemmsteinen . . . . .	900	16	Nadelholz . . . . .	650
5	Desgl. aus porigen oder Lochsteinen	1100—1300	17	Eichenholz . . . . .	800
6	Mauerwerk aus Sandsteinen der Nürnberger Umgebung . . . . .	2000	18	Gusseisen . . . . .	7200
7	Mauerwerk aus harten Sandsteinen, z. B. Quarzit, Mainsandstein . . . . .	2100—2700	19	Schmiedeeisen . . . . .	7800
8	Mauerwerk aus Klinkern . . . . .	1800	20	Glas . . . . .	2600
9	Pfeiler aus Granit oder Marmor . . . . .	2700	21	Schiefer . . . . .	2700
10	Mauerwerk aus Muschel- oder Jurakalk . . . . .	2600	22	Gips, gegossen . . . . .	970
11	Verputz aus Kalkmörtel . . . . .	1600	23	Heu und Stroh, ungepresst . . . . .	100
12	„ „ Portlandzementmörtel (Verputz ist mit 1 1/2 cm Stärke beim Mauerwerk für jede ver- putzte Seite zuzurechnen.)	2000	24	Weizen . . . . .	760
			25	Roggen und Gerste . . . . .	680
			26	Hafer . . . . .	430
			27	Darmmalz . . . . .	555
			28	Hopfen, lose geschüttet . . . . .	40
				„ gepresst, ohne Verpackung	425
				„ „ mit „	590
			29	Braunkohlen . . . . .	650
			30	Steinkohlen . . . . .	900
			31	Koks . . . . .	450
			32	Eis . . . . .	910

Tabelle IX.  
Eigengewichte von Wänden. (Nürnberg.)

Benennung der Wände	f. 1 qm kg	Benennung der Wände	f. 1 qm kg
$\frac{1}{2}$ Stein (0,12 m) starke Backsteinwand ohne Verputz . . . . .	192	$1\frac{1}{2}$ Stein (0,38 m) beiderseits verputzt . . .	656
desgl. einseitig mit Kalkmörtel verputzt . . . . .	216	2 Stein (0,51 m) starke Backsteinwand ohne Verputz . . . . .	816
„ beiderseits „ „ „ . . . . .	240	„ einseitig verputzt . . . . .	840
Schwemmsteinwand 0,10 m stark Für . . . . .	140	„ beiderseits „ „ . . . . .	864
„ 0,12 m „ Verputz . . . . .	156	Monierwand 5 cm stark . . . . .	100
Fachwerkwände 0,12 m „ sind für . . . . .		„ 7 „ „ . . . . .	140
ausgemauert ohne Verputz: jede . . . . .		„ 10 „ „ . . . . .	200
a) Holzfachwerk mit Backsteinen . Seite . . . . .	170	Rabitzwand 5 „ . . . . .	80
„ mit Schwemmsteinen . 24 kg . . . . .	102	„ 7 „ „ . . . . .	110
b) Eisenfachwerk mit Backsteinen zuge- . . . . .	220	„ 10 „ „ . . . . .	160
„ mit Schwemmsteinen ) schlagen . . . . .	130	Gipsdielenwand 5 cm stark . . . . .	50
1 Stein (0,25 m) starke Backsteinwand ohne Verputz . . . . .	400	„ 7 „ „ . . . . .	70
„ einseitig verputzt . . . . .	425	„ 10 „ „ . . . . .	90
„ beiderseits „ . . . . .	450	„ durchlocht 5 „ „ . . . . .	40
$1\frac{1}{2}$ Stein (0,38 m) starke Backsteinwand ohne Verputz . . . . .	608	„ „ 7 „ „ . . . . .	60
„ einseitig verputzt . . . . .	632	„ „ 10 „ „ . . . . .	80
		Bimssandzementdielen / 5 cm stark . . . . .	55
		Romanzementgipsdielen / 7 „ „ . . . . .	80

Tabelle X.  
Eigengewichte und Belastungen von Decken. (Nürnberg.)

Bauteile	Eigen- gewicht für 1 qm kg	Nutzlast für 1 qm kg	Gesamt- belastung für 1 qm kg
Kappengewölbe $\frac{1}{2}$ Stein (0,12 m) stark, 1,50 m mittl. Spannweite mit Hintermauerung, ohne Fussboden, ohne Verputz . . . . .	275		
„ 1 Stein (0,25 m) stark, wie vor . . . . .	500		
„ $\frac{1}{2}$ Stein (0,12 m) stark, 1,50 m mittl. Spannweite mit Hintermauerung, mit Holzfussboden und 0,15 m hoher Sandschüttung im Scheitel . . . . .	500		
„ 1 Stein (0,25 m) stark desgl. . . . .	725		
„ 1 Stein (0,25 m) stark, ohne Auffüllung, aber mit Klinker- pflaster unter Durchfahrten und befahrenen Höfen . . . . .	700	650	1350
„ $\frac{1}{2}$ Stein (0,12 m) stark aus Schwemmsteinen mit Hinter- mauerung, ohne Auffüllung . . . . .	160		
Massivdecken ohne Deckenputz, Auffüllung und Fussboden:			
Albrechtsdecke . . . . .	200		
Ankerdübeldecke ohne Eiseneinlage 0,15 m stark . . . . .	135		
„ „ „ 0,10 m „ . . . . .	90		
Bavaria-Hohlsteindecke . . . . .	210		
„ „ 0,15 m „ . . . . .	190		
„ „ 0,11 m „ . . . . .	170		
Dressel-Decke . . . . .	120		
Katzsche Blechträgerdecke . . . . .	85		
„ „ 0,10 m „ . . . . .	70		

Tabelle X. (Fortsetzung.)

Bauteile	Eigen- gewicht für 1 qm kg	Nutzlast für 1 qm kg	Gesamt- belastung für 1 qm kg
Massivdecken ohne Deckenputz, Auffüllung und Fussboden:			
Sekuradecke 0,225 m stark . . . . .	220		
" 0,17 m " . . . . .	179		
" 0,13 m " . . . . .	142		
Schaede-Decke 0,12 m " . . . . .	175		
Wolfsche Decke 0,15 m " . . . . .	230		
Kleinsche Decke je nach Material . . . . .	90—192		
Balkenlage mit Fussbodendielung . . . . .	60		
" " " und Holzdecke, ohne Fehlboden . .	75		
" " " in kleineren Wohngebäuden, mit Fehlboden, 8 cm hoher Sandauffüllung, Stuckdecke und gewöhnl. Holzfussboden .	230	170	400
" " " in grösseren Wohngebäuden wie vor, jedoch Eichenparkett- boden . . . . .	250	170	420

Anmerkung: Die Eigengewichte von abweichenden Konstruktionen, insbesondere in bestehenden Gebäuden, sind von Fall zu Fall zu ermitteln.

Tabelle XI.  
Gewichte von Dächern. (Nürnberg.)

Art des Daches	Eigen- gewicht für 1 qm geneig- ter Dach- fläche kg	Gesamtbelastung von Dächern (Eigengewicht, Schneelast und Winddruck) in kg für den qm Horizontalprojektion für die Dachneigung von						
		60°	45° $\frac{1}{2}$ Dach	33°41' $\frac{1}{3}$ Dach	26°34' $\frac{1}{4}$ Dach	18°26' $\frac{1}{6}$ Dach	14°3' $\frac{1}{8}$ Dach	11°18' $\frac{1}{10}$ Dach
Einfaches Ziegeldach mit Sparren und Lattung	100	340	285	240	217	195	—	—
Doppeltes " " " " "	120	380	315	264	240	216	—	—
Falzziegeldach " " " "	60	260	230	190	170	150	—	—
Einfach. Schieferdach " " " Schalung	55	250	222	186	166	147	—	—
Doppeltes " " " " "	75	290	250	210	189	168	—	—
Blechdach " " " " "	40	220	200	168	150	130	122	117
Pappdach " " " " "	30	200	187	156	138	120	112	107
Glasdach mit Winkeleisen ohne weitere Kon- struktion . . . . .	30	200	187	156	138	120	112	107
Holzzementdach mit Sparren, Schalung und Kieslage . . . . .	200	—	—	—	—	—	—	276

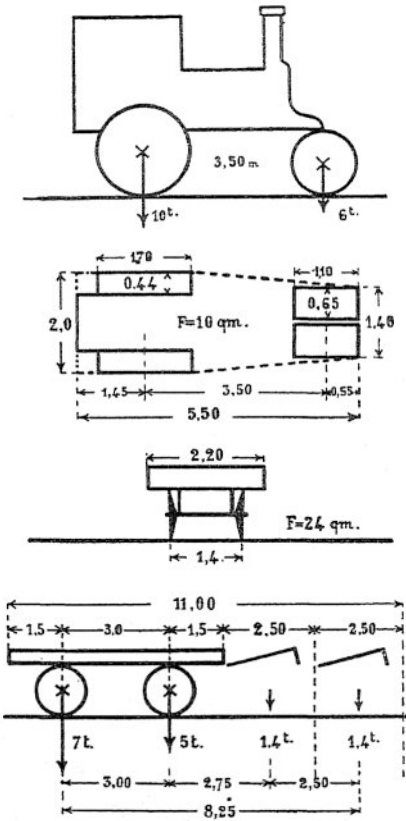
Tabelle XII.  
Nutzlasten. (Nürnberg.)

Art der Nutzlast	für 1 qm kg	Art der Nutzlast	für 1 qm kg
Nutzlast für Wohnräume . . . . .	170	Hopfenlager: Hopfen gepresst inkl. Be- hälter . . . . .	590
Nutzlast für Fabrik-, Werkstatt- u. Lager- räume je nach Zweck zum Nachweis.		Nutzlast für Tanzsäle, Versammlungs- räume . . . . .	300
Hopfenlager: Hopfen geschüttet auf 1 m Höhe . . . . .	40	Menschengedränge . . . . .	400
" " " in Säcken . . . . .	170		



Das Eigengewicht von Eisen, Holz- und Steinbrücken wird aus dem kubischen Inhalt der einzelnen Teile derselben berechnet; das Eigengewicht von eisernen Brücken hängt außer von der Größe der Brücke, namentlich auch von der Fahrbahnkonstruktion ab. Für verschiedene Konstruktionen sind Formeln aufgestellt, welche eine vorläufige annähernde Ermittlung des Gewichtes aus der Stützweite und der Fahrbahnbreite ermöglichen.

Leichte, von der kgl. württ. Straßenbauverwaltung in neuerer Zeit ausgeführte Straßenbrücken mit Stützweiten bis zu 35 m, Zoresisenbelag und durchschnittlich 20 cm starker Chausfrierung haben für einen Quadratmeter Brückenfläche ein Eisengewicht  $p = (6,31 + 100) \text{ kg}$  ergeben, worin 1 die lichte Weite der Brücke in Meter bezeichnet.



Lage der Brücke	Spannweite in m	Belastung durch			
		Menschengedränge		1 Dampfstrassenwalze t	1 Lastwagen t
		Fahrbahn kg/qm	Gehweg kg/qm		
1	2	3	4	5	6
a) Im Zuge von Strassen, welche regelmässig mit der Dampfstrassenwalze bearbeitet werden:					
1. Innerhalb oder in der Nähe verkehrsreicher Städte . . . . .	bis 20	500	500	16	—
2. Desgleichen . . . . .	über 20	400	500	16	—
3. Entfernt von verkehrsreichen Städten . . . . .	bis 20	400	400	16	—
4. Desgleichen . . . . .	über 20	300 bis 360	360	16	—
b) Im Zuge von Strassen, welche mit der Dampfstrassenwalze nicht bearbeitet werden:					
5. Wie a) 3. . . . .	bis 20	400	400	—	12
6. Wie a) 4. . . . .	über 20	300 bis 360	360	—	12

Für Chausfrierungen ist als spezifisches Gewicht  $\gamma = 2,25$  anzunehmen, so daß zu dem Eisengewicht beim Vorhandensein einer 20 cm dicken Chausfrierung noch  $1,0 \cdot 1,0 \cdot 0,2 \cdot 2250 = 450 \text{ kg/qm}$  Brückenfläche hinzukommen.

Ergibt die auf Grund der Zeichnung gefertigte Gewichtsberechnung, bei welcher das Gewicht jedes einzelnen Konstruktionsteiles ermittelt wird, eine Abweichung von mehr als 10% dieser vorläufigen annähernden Gewichtsbestimmung, so ist die statische Berechnung nochmals durchzuführen. Als Einheitsgewichte sind für die Gewichtsberechnung für Schweißeisen 7800 kg, für Flußeisen und Stahl 7850 kg und für Gußeisen 7250 kg/cbm anzunehmen.

Der statischen Berechnung eiserner Straßenbrücken sind in Württemberg obige Belastungsannahmen gemäß Amtsblatt d. K. W. Ministeriums des Innern vom 16. April 1894

Nr. 8 zugrunde zu legen, wozu bemerkt wird, daß die Maßangaben in den Figuren vom Verfasser ergänzt worden sind.

Wenn einzelne Straßenstrecken von Dampfstraßenwalzen mit mehr als 16 t Gewicht bearbeitet werden, so ist deren Gewicht in der Rechnung zu berücksichtigen.

Der Kleinstwert für Menschengedränge mit 300 kg/qm darf nur für solche Brücken benützt werden, welche sich im Zuge von Straßen mit mehr als 7% Steigung befinden.

Die Gruppierung der Verkehrslasten ist so anzunehmen, daß für jeden Konstruktionsteil die höchsten Beanspruchungen erzeugt werden; es soll indes neben der Belastung durch Menschengedränge nur die Belastung durch eine Dampfstraßenwalze oder einen Lastwagen in Rechnung gezogen werden.

Für die Berechnung der Geländerkonstruktion ist ein an der oberen Begrenzung wirkender horizontaler und vertikaler Druck von je 150 kg für den laufenden Meter Geländer in Rechnung zu nehmen.

Die Füllungssteile müssen gegen Darauftreten zc. genügend widerstandsfähig ausgebildet werden.

Zu den beweglichen Lasten zählt auch der Winddruck, welcher 120—200 kg/qm, der zur Windrichtung senkrecht stehenden Fläche beträgt. Man nimmt manchmal an, daß der Wind unter 10 Grad gegen die Horizontale geneigt sei.

Die erwähnten Bestimmungen für die Berechnung von Straßenbrücken schreiben diesbezüglich folgendes vor:

Für die Berechnung der Windverstreungen und der Standfähigkeit der Brücke ist ein Winddruck von 200 kg/qm, als Angriffsfläche die vom Wind in erster Linie getroffene Ansichtsfläche des vorderen Trägers und sonstiger Konstruktionsteile, sowie die Hälfte der vom Wind in zweiter Linie getroffenen Flächen der hinteren Träger und weiterer Konstruktionsteile, in Rechnung zu nehmen.

Die Windrichtung ist senkrecht zur Ansichtsfläche der Brücke anzunehmen, die Höhenlage der Resultierenden des Winddrucks annähernd der Gestalt der Angriffsfläche anzupassen.

Die Berechnung der Windverstreungen ist unter der Annahme unbelasteter Brücke durchzuführen; bei der Berechnung der Standfähigkeit ist dagegen die Untersuchung auch auf den belasteten Zustand der Brücke auszudehnen und ist hierzu eine Besetzung in der Höhe von 1,60 m durch Menschengedränge und ein Winddruck von 50 kg/qm anzunehmen. Die Sicherheit gegen Umkippen soll mindestens  $1\frac{1}{4}$  fach sein.

Bei offenen Hallendächern ist auch ein von innen nach außen wirkender Winddruck von 60 kg/qm Dachfläche, senkrecht zu dieser stehend, zu berücksichtigen. Unter besonders ungünstigen Verhältnissen (an Meeresküsten zc.) kann der Winddruck bis 300 kg/qm und darüber steigen.

Die bei Berechnung von Schornsteinen gebräuchlichen Annahmen siehe VI. § 3.

Ferner gehört hieher die Schneelast, welche je nach der Örtlichkeit 70—400 kg/qm wagrechte Fläche resp. Horizontalprojektion der geneigten Fläche beträgt. Bei sehr steilen Dächern kann darauf Rücksicht genommen werden, daß größere Schneemassen sich nicht ansammeln können, da der Schnee abrutscht. Von 40° Dachneigung ab, ist etwa die halbe

Schneelast, von  $50-60^\circ$  Dachneigung ab keine Schneelast anzunehmen. Bei allen Dächern ist die Möglichkeit einseitiger Schneebelastung zu bedenken.

Das spezifische Gewicht des frischen Schnees wird gewöhnlich zu  $\frac{1}{8} = 0,125$  angegeben, demnach würden  $70 \text{ kg/qm}$  Schneedruck schon einer Schneetiefe von  $56 \text{ cm}$  entsprechen. Das Gewicht des frischen Schnees schwankt aber von  $0,08$  bis  $0,19$  und steigt, wenn der Schnee wässrig wird, auf  $0,2$  bis  $0,8$ . Als mittleres Gewicht des aufgetauten und wiedergefrorenen Schnees kann man  $600 \text{ kg cbm}$  annehmen.

## II. § 6. Biegung gerader Stäbe.

### A. Normalkräfte.

Wird ein ursprünglich gerader Stab unter den in Abschnitt C angegebenen Voraussetzungen gebogen, so treten Längenänderungen in dessen Fasern auf. Auf einer Stabseite verlängern sich die Fasern, sie werden also gezogen, so in Bild 1 unten und in Bild 2 oben; auf der andern Seite, d. h. auf der oberen Seite in Bild 1 und auf der unteren Seite in Bild 2, verkürzen sich die Fasern, sie werden an diesen Stellen gedrückt.

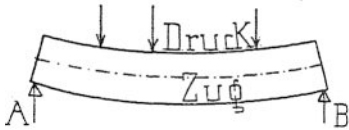


Bild 1.

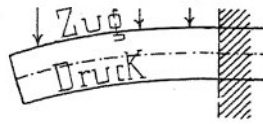


Bild 2.

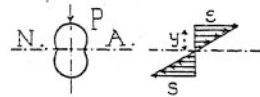


Bild 3.

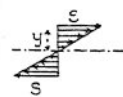


Bild 4.

Zwischen beiden Seiten befindet sich eine Faserschicht, welche nur ihre Form, nicht aber ihre Länge ändert. Die Fasern dieser Schicht werden somit weder gezogen noch gedrückt; deren Spannung ist also gleich Null. Diese Schicht ist in Bild 1 u. 2 — . . . — eingezeichnet.

Die Schnittlinie dieser Neutral-Faserschicht mit irgend einer Querschnittsebene nennt man die Neutralachse oder die Nullachse dieser Querschnittsfläche, NA in Bild 3.

Die in den Fasern wirksamen Zug- und Druckkräfte stehen normal, d. h. senkrecht zur Querschnittsebene; sie haben den Namen Normalkräfte erhalten.

Unter der Bezeichnung Navier'sche Annahme versteht man die Voraussetzung, daß die Formänderungen infolge der Wirkung der Normalkräfte bei der Biegung derartige seien, daß ein im unbelasteten Stab ebener Querschnitt auch nach erfolgter Biegung noch eine Ebene bilde. Diese Voraussetzung trifft, wie Versuche ergeben haben, innerhalb der bei Bauausführungen zulässigen Materialbeanspruchungen nahezu vollständig zu, so daß sie für die Zwecke der Festigkeitsberechnung von Baukonstruktionen ganz allgemeine Annahme gefunden hat.

Was die Größe der Normalkräfte betrifft, so ist bei deren Bestimmung davon auszugehen, daß in einer Faserschicht eine um so größere Beanspruchung herrscht, je größer die elastische Längenänderung dieser Faserschicht infolge der Biegung ist. Die elastischen Längenänderungen müssen aber, wenn, wie oben gesagt, ein Querschnitt unter der Wirkung der Normalkräfte eben bleiben soll, um so größer sein, je größer der Abstand  $y$  einer Faserschicht von der Nullachse ist (s. Bild 4). Es müssen daher die Normalbeanspruchungen der Fasern proportional dem Abstand der Fasern von der Nullachse wachsen und in den entferntesten Fasern ihre Höchstwerte erreichen. Anstatt von der Navier'schen Annahme zu sprechen, sagt man daher auch, es werde das Proportionalitäts-Gesetz für die Zunahme der Normal-

kräfte angenommen. Bild 4 zeigt, wie der Übergang der Normalbeanspruchungen von dem Höchstwert für Zug in den Höchstwert für Druck verläuft und läßt deutlich erkennen, daß die Normalbeanspruchungen der Fasern zunächst der Neutralfaserschichte klein sind, und daß die in derselben liegenden Fasern gar nicht beansprucht sind.

Es ist somit bei jeder Biegebungsbeanspruchung eines Stabes unvermeidlich, daß die verschiedenen Teile, aus welchen der Stab in seinem Querschnitt gebildet wird, verschieden beansprucht werden, d. h. daß die Ausnützung der Festigkeit des Materiales nicht überall vollständig erfolgen kann.

### B. Scher- und Schubkräfte.

Um das Auftreten der Scherkräfte zu veranschaulichen, kann auf den in Bild 1 angedeuteten Vorgang hingewiesen werden.

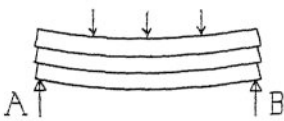


Bild 3.

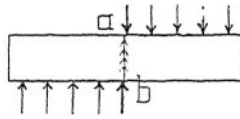


Bild 2.

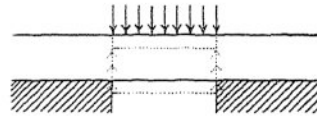


Bild 1.

Eine Platte liegt auf einer Unterlage, welche eine kleine Höhlung besitzt. Über dieser Höhlung wird ein Stempel auf die Platte mit solcher Kraft gedrückt, daß er aus der Platte ein der Größe der Höhlung in der Unterlage entsprechendes Stück in die letztere hineindrückt. Der Stempel hat dabei u. a. die Scherfestigkeit des Platten-Materiales, d. h. die in senkrecht aufwärts gerichteter Stellung widerstehenden, die Lotrechten, Scherkräfte entlang der entstandenen Lochwandungen überwunden.

Ein anderes Beispiel, welches aus dem Vorgang beim Abscheren entnommen sein möge, ist in Bild 2 dargestellt.

Die beiden Scherbacken üben, abgesehen von der Schrägstellung der Schneiden derselben, auf einen Stab Kräfte aus, welche direkt entgegengesetzt gerichtet sind. Die Wirkung dieser Kräfte ist eine Trennung der Stabteile, sobald die im Stabquerschnitt a b widerstehenden lotrechten Kräfte, d. h. die Scherfestigkeit des Materiales überwunden sein werden.

In gebogenen Balken treten neben diesen Lotrechten Scherkräften wagrechte und Lotrechte Schubkräfte auch in Querschnitten auf, in welchen keine äußere konzentrierte Kraft auf den Trägern wirkt. Diesen Kräften hat die Schubfestigkeit des Materiales zu widerstehen. Diese hat zu verhindern, daß die einzelnen Faserschichten oder Stabschichten sich nach Bild 3 infolge der durch die Biegung verursachten Formänderung übereinander schieben. Der gebogene Stab muß die in Bild 1 Abschnitt A angegebene Gestalt annehmen. Dies setzt voraus, daß die oberen Fasern sich verkürzen. Ist in den in Bild 3 angedeuteten Fugen keine Schubfestigkeit vorhanden, so wird diese Faser-Verkürzung nicht in gleichem Maße eintreten, sondern die Schichten werden sie übereinander schieben, ohne ihre Länge zu ändern.

Die wagrechten Schubkräfte wirken somit in den Berührungsf lächen der einzelnen Stabschichten und zwar gleichlaufend mit den Fasern des Stabes.

Man beachte, daß die Lotrechten Scherkräfte unmittelbar der Wirkung der angreifenden Kräfte zu widerstehen haben, während die wagrechten Schubkräfte erst durch die Ungleichheiten der inneren Normalkräfte nachgerufen werden, wie in Abschnitt D näher gezeigt werden wird.

Außer den betrachteten lotrechten Scherkräften und wagrechten Schubkräften treten auch in anderen Richtungen Schubkräfte auf, z. B. solche, welche den Querschnitt eines gebogenen Stabes zusammenziehen u. a. m. Von diesen Schubkräften ist im folgenden nicht die Rede, da sie für den vorliegenden Zweck nur von untergeordneter Bedeutung sind. Wichtig sind aber die im Abschnitt E berechneten lotrechten Schubspannungen, die mit den wagrechten Schubspannungen zusammen paarweise auftreten.

### C. Berechnung der Normalspannungen.

Entsprechend dem gewöhnlichen Vorkommen bei Baukonstruktionen und um die nachfolgenden Berechnungen zu vereinfachen, werden folgende Voraussetzungen gemacht:

1. Die Achse des Stabes sei gerade, d. h. die Schwerpunkte seiner sämtlichen Querschnittsflächen sollen auf einer geraden Linie, der Stabachse liegen. Die Querschnittsflächen müssen aber durchaus nicht überall gleich sein, der Stab muß nicht notwendig prismatische Gestalt haben.
2. Alle äußeren Kräfte, also die Belastungen und die Widerstände, sollen lotrecht stehen und in einer lotrechten Ebene, Kräfteebene genannt, gelegen sein.

Diese Ebene muß somit die Stützpunkte des Stabes enthalten und in dieser Ebene wird die Biegung der ursprünglich geraden Stabachse erfolgen, sie wird deshalb auch Biegungsebene genannt.

3. Die Kraft- oder Biegungsebene sei Symmetralebene des Stabes, sie teile also jeden Querschnitt in zwei gleich gestaltete und gleich gelegene Hälften (Bild 3 Abschnitt A).

Denkt man sich einen solchen belasteten Stab geschnitten, so sind an dem abgeschnittenen Stabteil zweierlei Kraftwirkungen zu unterscheiden.

Es wirkt auf denselben eine resultierende Vertikalkraft, welche sich als Differenz zwischen dem Auflagerdruck  $A$  und den auf dem Stabteil lastenden Kräften  $P$  ergibt, es ist also nach Bild 3 Abschnitt D  $V = A - P_1 - P_2 - P_3$

Hieraus zeigt sich, daß  $V$  entlang der Strecke zwischen zwei Lasten seine Größe nicht ändert.

Außer dieser resultierenden Vertikalkraft wirkt auf die Schnittstelle ein Kraftmoment infolge der Lasten und der Widerstände. Dieses erhält man, wenn die Kräfte mit ihren Abständen von der Schnittstelle multipliziert und die so erhaltenen Produkte unter Beachtung ihres Vorzeichens, das entsprechend dem Drehungssinn teils positiv (Drehung im Uhrzeigersinn), teils negativ ist, zusammengefaßt werden, d. h. nach Bild 3 Abschnitt D

$$M = A \cdot a - P_1 a_1 - P_2 a_2 - P_3 a_3$$

Dieses resultierende Kraftmoment  $M$  wird Biegemoment genannt; es hat im allgemeinen für jede Querschnittsstelle einen anderen Zahlenwert. —

Der Wirkung der äußeren oder angreifenden Kräfte haben die inneren Kräfte in dem Stabquerschnitt vor der Durchschneidung das Gleichgewicht gehalten, d. h. Gleichgewicht bestand zwischen dem Auflagerwiderstand und den Lasten, welche an dem abgeschnittenen Träger teil angreifen einerseits und den inneren oder widerstehenden Kräften, d. h. den Normalkräften, welche an der Schnittstelle in den Fasern austraten, sowie den lotrechten Schubkräften, welche in der Querschnittsebene wirksam waren, andererseits.

Man wendet nun auf die bezeichneten im Gleichgewicht stehenden Kräfte die drei Gleichgewichtsbedingungen an: 1)  $\Sigma V = 0$ , 2)  $\Sigma H = 0$ , 3)  $\Sigma M = 0$ .

Die erste Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma V = 0$  gibt, wenn mit  $T$  der innere Widerstand, den die Lotrechten Schubkräfte der resultierenden Vertikalskraft  $V$  entgegenstellen, bezeichnet wird  $0 = A - P_1 - P_2 - P_3 - T$  oder  $T = A - P_1 - P_2 - P_3$ , also nach vorigem  $T = V$ , d. h. die innere Schubkraft im Querschnitt ist gleich der Resultierenden  $V$  der äußeren Kräfte bis zur Querschnittsstelle; bezüglich der Verteilung der Schubkraft über die Querschnittsfläche siehe den nächsten Abschnitt.

Ehe die zweite Gleichgewichtsbedingung angewendet werden kann, sind die Normalkräfte zu benennen. Dieselben seien im Abstand  $y$  von der Nullachse für einen Quadrat zentimeter Fläche  $s$  oder mit anderen Worten: Die Beanspruchung der Fasern im Abstand  $y$  von der Nullachse auf Zug oder Druck sei  $s$  kg/qcm.

Auf jedes Flächenteilchen  $f$  wirkt somit eine Normalkraft, welche, nach Bild 5,  $s \cdot f$  ist. Da außer diesen Normalkräften keine wagrechten Kräfte vorhanden sind, so ergibt die zweite Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma H = 0 = \Sigma s \cdot f$ . An dieser Gleichung läßt sich folgende Umformung vornehmen:

$$0 = \Sigma \frac{s \cdot f \cdot y}{y} = \frac{s}{y} \Sigma f y.$$

Der Wert  $\frac{s}{y}$  konnte vor das Summenzeichen, welches gewissermaßen eine Klammer vertritt, gesetzt werden, weil nach dem vorigen Abschnitt  $\frac{s}{y}$  für alle Stellen eines Querschnittes denselben Wert hat. Vgl. Bild 4 Abschnitt A.

$\frac{s}{y}$  ist aber nicht Null, somit muß  $0 = \Sigma f y$  sein.  $f \cdot y$  ist aber nichts anderes als das statische Moment eines Flächenteilchens in Bezug auf die Nullachse. Die Summe dieser statischen Flächenmomente kann jedoch nur in Bezug auf eine Schwerachse Null sein, wie in Kap. I § 21 schon festgestellt wurde, somit findet sich als Ergebnis der Anwendung der zweiten Gleichgewichtsbedingung:

Die Nullachse muß durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen.

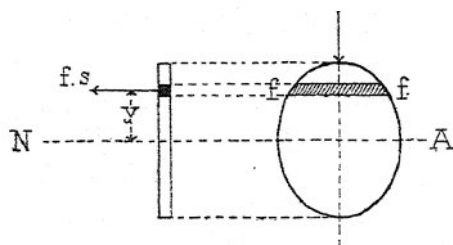


Bild 5.

Für die Anwendung der dritten Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma M = 0$  nehme man die Nullachse als Drehachse an. Die in der Querschnittsebene auftretenden Schubkräfte fallen aus der Gleichung weg, weil sie diese Achse schneiden und daher keinen Kraftarm haben; also muß Gleichgewicht zwischen den äußeren Kräften, welche in Bezug auf die Schnittstelle nach Bild 3 Abschnitt D das Moment

$$M = A \cdot a - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 - P_3 \cdot a_3$$

liefern und den Normalkräften bestehen, d. h.:

Die Summe der Momente der inneren Normalkräfte muß dem Moment der äußeren Kräfte, dem Bieungs- oder Angriffsmoment, das Gleichgewicht halten.

Die Normalkraft am Flächenteil  $f$  ist  $f \cdot s$ , sie hat den Abstand  $y$  von der Nullachse und liefert daher ein Moment  $f \cdot s \cdot y$ , also muß sein  $M = \Sigma f \cdot s \cdot y$  oder wieder  $M = \Sigma f \cdot s \cdot y \cdot \frac{y}{y} = \frac{s}{y} \Sigma f \cdot y^2$ .

Bezeichnet man den lediglich von der Gestaltung des Querschnittes abhängigen Summenwert  $\Sigma f \cdot y^2$  mit  $J$ , so ist  $M = \frac{S}{y} \cdot J$

oder 
$$\text{I. } s = \frac{yM}{J}.$$

Aus dieser Formel läßt sich die Normalbeanspruchung oder, wie fernerhin stets gesagt sein möge, die Biegungsbeanspruchung für jede Stelle im Querschnitt rechnen. Die größten Beanspruchungen treten in denjenigen Fasern ein, für welche  $y$  seinen größten Wert hat, also in der obersten und in der untersten Faser. Wird dieser größte Wert mit  $y_{\max}$  bezeichnet, so

ergibt sich  $s = \frac{y_{\max} M}{J} = \frac{M}{J/y_{\max}}$  oder mit  $W = \frac{J}{y_{\max}}$

$$\text{II. } s = \frac{M}{W}$$

als Beanspruchung der äußersten, am stärksten gezogenen oder gedrückten Fasern.

Man nennt  $J = \Sigma f y^2$  das Trägheitsmoment und  $W = \frac{J}{y_{\max}}$  das Widerstandsmoment der Querschnittsfläche in Bezug auf diejenige Schwerpunktsachse  $NA$ , welche senkrecht zur Biegungsebene steht (vgl. Bild 3 Abschnitt A).

Da der Abstand der untersten Faser von der Nullachse ein anderer sein kann als derjenige der obersten Faser, so wird man auch zwei Werte  $W_o$  und  $W_u$  des Widerstandsmomentes für alle Querschnitte erhalten, welche nicht symmetrisch zur Nullachse sind.

$$W_o = \frac{J}{y'} \quad \text{und} \quad W_u = \frac{J}{y''}.$$

Dementsprechend müssen sich beim Vorhandensein solcher Querschnitte auch zwei verschiedene Werte für die größte Zug- und die größte Druckbeanspruchung ergeben, nämlich

$$s_o = \frac{M}{W_o} \quad \text{und} \quad s_u = \frac{M}{W_u}.$$

Bezüglich der Berechnung der Trägheitsmomente und Widerstandsmomente siehe den nächsten Paragraphen.

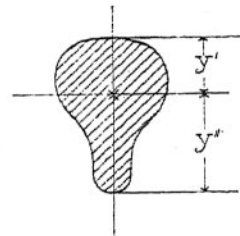


Bild 6.

#### D. Berechnung der wagrechten Schubspannungen.

Hier ist zunächst folgende rein statische Betrachtung voranzustellen:

Wirken auf den Balken  $AB$  die Lasten  $P$ , so werden dadurch in den Stützpunkten die Auflagerwiderstände  $A$  und  $B$  wachgerufen.

Es sei, entsprechend der Bezeichnung im vorigen Abschnitt, mit  $V_x = A - P_1 - P_2$  die resultierende Vertikalkraft der auf den Balkenteil von der Länge  $x$  wirkenden äußeren Kräfte bezeichnet; ferner sollen die von den äußeren Kräften verursachten Biegemomente, welche im Abstand  $x$  und im Abstand  $x_1$  von  $A$  auftreten, mit  $M$  und mit  $M'$  bezeichnet sein, dann ist nach Bild 1  $M' - M = V_x \cdot CD = V_x (x' - x)$ .

Dies ist ohne weiteres einzusehen, wenn auf die Strecke  $CD$  des Balkens keine äußere Kraft wirkt; aber auch in letzterem Fall bleibt diese Beziehung richtig, wie z. B. in Bach, Elastizität und Festigkeit, IV, § 39 bewiesen ist. —

Außerdem ist daran zu erinnern, daß man das Produkt eines Flächenteilchens von der

Größe  $f$  und seines Abstandes  $y$  von der Nullachse das statische Flächenmoment nennt (Bild 5, Abschnitt C); es wird daher das statische Flächenmoment  $M_r$  des in nebenst. Bild 2

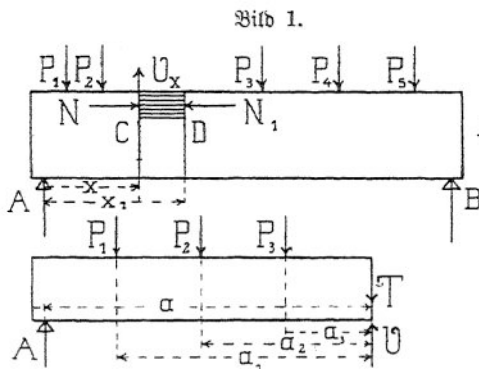


Bild 1.

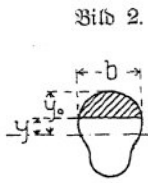


Bild 2.

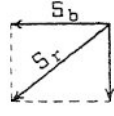


Bild 4.

schraffierten Querschnittsteiles in Bezug auf die Nullachse  $M_r = \sum f y$  sein, wenn diese Summe vom Abstand  $y$  bis  $y_0$  genommen wird. —

Da die Biegungsbeanspruchung nach vorigem Abschnitt  $s = \frac{y M}{J}$  ist, so kommt auf einen Flächenteil des Querschnittes im Abstand  $x$  von A die Normalkraft  $f \cdot s = f \cdot y \cdot \frac{M}{J}$ .

Die Normalkraft  $N$  auf den schraffierten Querschnittsteil ist die Summe der Größen  $f \cdot s$ , sie wird daher  $N = \frac{M}{J} \cdot \sum f \cdot y$  und ebenso die Normalkraft  $N'$  auf den gleichen Teil des Querschnittes im Abstand  $x_1$  von A  $N' = \frac{M'}{J} \cdot \sum f \cdot y$ .

Die zur Herstellung des Gleichgewichtes an dem horizontal schraffierten Balkenteil, auf welchen die verschieden großen Normalkräfte  $N_1$  und  $N$  wirken, erforderliche Schubkraft  $T$  muß daher in der Richtung der Stabachse wirken und die Größe  $T = N' - N = (M' - M) \frac{\sum f y}{J}$  haben.

Setzt man in diese Gleichung die oben entwickelten Werte  $V_x (x' - x) = M' - M$  und  $M_r = \sum f y$  ein, so wird  $T = V_x (x' - x) \frac{M_r}{J}$ .

Die Schubkraft  $T$  wirkt aber in der Fläche  $CD = b (x' - x)$ .

Die Beanspruchung dieser Fläche auf Schub wird daher unter der Voraussetzung gleichmäßiger Verteilung der Spannung:

$$t = \frac{T}{b (x' - x)} = \frac{V_x (x' - x) M_r / J}{b (x' - x)}, \text{ d. h. allgemein } t = \frac{V M_r}{J \cdot b}.$$

Die wagrechten Schubbeanspruchungen sind somit dort am größten, wo die resultierende Vertikalkraft ihren Größtwert erreicht, das ist beim freiausliegenden Balken über den Stützpunkten der Fall. Der Wechsel in der Größe von  $M_r$  und  $b$  bestimmt sodann die Änderung der Größe der wagrechten Schubspannungen je nach ihrer Lage; in der Regel sind dieselben in der Neutralfaserachse am größten. Vgl. Abschnitt F.

### E. Berechnung der lotrechten Schubspannungen.

In Bild 3 werde die Vorderansicht eines kleinen Stückchens des im vorigen Abschnitt

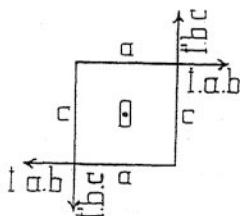


Bild 3.

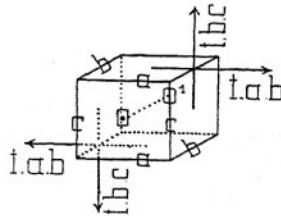


Bild 4.

betrachteten Balkenteiles dargestellt, eines Stückchens, dessen Länge  $a$ , dessen Tiefe  $b$  und dessen Höhe  $c$  so klein seien, daß die wagrechten Schubbeanspruchungen  $t$  in der Unterfläche  $a \cdot b$  und in der Deckfläche  $a \cdot b$  als gleich groß angenommen werden können; die Schubkräfte in diesen Flächen sind also je  $t \cdot a \cdot b$ .



In den Seitenflächen  $b \cdot c$  links und rechts wirken lotrechte Schubspannungen  $t'$ , welche zwar auch nicht unter sich gleich groß sein werden, deren Unterschied aber gleichfalls als verschwindend klein vernachlässigt werden kann, so daß für beide Schubkräfte der Wert  $t' \cdot b \cdot c$  erhalten wird.

Unter der Voraussetzung, daß weitere Kräfte auf dieses kleine Körperteilchen nicht einwirken oder dessen Schwerpunktsachse  $OO_1$  schneiden, ergibt die Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma M = 0$  in Bezug auf  $OO_1$

$$0 = (t \cdot a \cdot b) \cdot \frac{c}{2} - (t' \cdot b \cdot c) \cdot \frac{a}{2} + (t \cdot a \cdot b) \cdot \frac{c}{2} - (t' \cdot b \cdot c) \cdot \frac{a}{2}$$

oder

$$0 = 2 t \cdot a \cdot b \cdot \frac{c}{2} - 2 t' \cdot b \cdot c \cdot \frac{a}{2} = (t - t') a \cdot b \cdot c.$$

$a \cdot b \cdot c$  ist nicht gleich Null, also muß  $t - t' = 0$  sein, d. es ist  $t = t'$ . In dieser Weise leitet „Bach“ den Satz ab:

Die lotrechte und die wagrechte Schubbeanspruchung ist an jeder Stelle eines belasteten Balkens gleich groß, ihr Wert ist  $t = \frac{V M_r}{b \cdot J}$ .

## F. Abgekürzte Berechnung des Größtwertes der Schubspannungen.

Abstand der Mittelpunkte von Zug und Druck.

Die aus der Formel  $s = \frac{y M}{J}$  sich ergebenden Biegebungsbeanspruchungen sind nach Abschnitt A teils Zugkräfte, teils Druckkräfte, welche sich nach beistehendem Bild 2 über den Querschnitt verteilen, also teils über, teils unter der Nullachse liegen.

Die Resultierende aus den Zugkräften und die Resultierende aus den Druckkräften müssen gleich groß sein, da außer diesen Normalkräften keine wagrechten Kräfte vorhanden sind, wie schon in Abschnitt C erwähnt worden ist.

Ihren Abstand  $h$  nennt man den Abstand der Mittelpunkte von Zug und Druck.

Man erhält sowohl für die Zug- als auch für die Druckkräfte die Resultierende  $N$ , wenn man die Summen der Normalkräfte bildet, welche an den Flächenteilen, die einesteils über und andernteils unter der Nullachse liegen, wirksam sind, d. h. wenn man die Summierung das einmal über den gezogenen und das anderemal über den gedrückten Querschnittsteil erstreckt

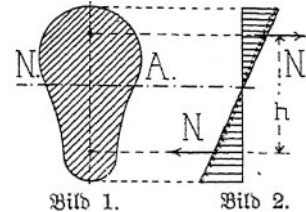
$$N = \Sigma f \cdot s$$

Setzt man in dieser Gleichung den obigen Wert für  $s$  ein, so wird

$$N = \Sigma f \cdot \frac{y M}{J} = \frac{M}{J} \cdot \Sigma f y$$

Nach Abschnitt D ist aber  $\Sigma f y = M_r$ , d. h. gleich dem statischen Flächenmoment des gezogenen oder des gedrückten Querschnittsteiles in Bezug auf die Nullachse. Beide Querschnittsteile geben jedoch dasselbe Flächenmoment, weil die Nullachse durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche geht, also ergibt sich  $N = \frac{M}{J} \cdot M_r$ .

Nach Abschnitt C muß das Moment der inneren Normalkräfte dem Biegemoment das Gleichgewicht halten, es ist daher  $N \cdot h = M$ , also wird der Abstand der Mittelpunkte von Zug und Druck  $h = \frac{M}{N} = \frac{M}{\frac{M}{J} \cdot M_r}$  d. h.  $= \frac{J}{M_r}$  oder mit Worten:



Die Entfernung der Mittelpunkte von Zug und Druck wird erhalten, wenn man das Trägheitsmoment der ganzen Querschnittsfläche dividiert durch das statische Flächenmoment des gezogenen oder des gedrückten Querschnittsteiles, wobei alle Momente auf die Nullachse zu beziehen sind.

Größtwert der Schubbeanspruchung.

Die Schubbeanspruchungen  $t = \frac{V M_r}{b \cdot J}$  erreichen ihren größten Betrag in einem Querschnitt dort, wo der Zähler dieses Bruches seinen größten Wert erreicht, sofern  $b$  dort nicht gar zu klein ist. Das größte statische Flächenmoment  $M_r$  wird aber erhalten, wenn dessen Betrag für den ganzen oberhalb oder den ganzen unterhalb der Nullachse vorhandenen Teil der Querschnittsfläche berechnet wird. Die größte Schubbeanspruchung tritt daher in der Regel in der Nullachse auf.

Setzt man in obige Gleichung für  $J/M_r$  den Wert  $h$  ein, so wird

$$t = \frac{V \cdot M_r}{b \cdot J} = \frac{V}{b \cdot h}.$$

Diese Formel bringt nur dann eine Vereinfachung der Berechnungen, wenn für  $h$  ein schätzungsweise Näherungswert, welcher z. B. bei  $\perp$  Trägern ungefähr gleich der Steghöhe ist, angenommen werden kann.

Anm. Bei den gewöhnlich vorkommenden Konstruktionen genügt die Berechnung der inneren Normalkräfte, weil die Abmessungen der Trägerprofile dabei schon solche werden, daß auch den Schubkräften widerstanden werden kann.

## II. § 7. Trägheitsmoment und Widerstandsmoment.

### A. Trägheitsmoment.

Erklärung. Unter dem Trägheitsmoment einer Fläche in Beziehung auf eine beliebige Achse versteht man nach dem vorigen § die Summe der Produkte aus allen Flächenelementen  $f$  und dem Quadrat ihrer Abstände  $y$  von der gegebenen Achse, also  $J = \sum f \cdot y^2$ . Die Anwendung dieser Gleichung auf gegebene Querschnitte erfordert höhere Mathematik. Es genügt, wenn wir hier aus deren Resultaten die in Tabelle S. 68 enthaltenen Werte für einfache Querschnitte übernehmen. Für die Berechnung der Trägheitsmomente zusammengesetzter Querschnitte dient folgendes:

#### Satz 1.

Das Trägheitsmoment der Summe oder Differenz von Flächen in Bezug auf irgend eine Achse ist gleich der Summe oder Differenz der Trägheitsmomente der einzelnen Flächen in Bezug auf dieselbe Achse.

Die Anwendung dieses Satzes führte z. B. zu den Formeln in Linie 2, 3, 5 und 7 der Tabelle auf S. 68. Die Querschnitte in Linie 3 können als die Summe von Flächen, welche eine und dieselbe Schwerpunktsachse haben, und die Profile in Linie 2, 5 und 7 als Differenz solcher Flächen angesehen werden.

Will man das Trägheitsmoment des in Linie 3 jener Tabelle angegebenen  $\perp$  Profiles in Bezug auf die zum Steg senkrechte Schwerpunktsachse bestimmen, so liegen die Schwerpunkte der zwei das Profil bildenden Rechtecke nicht mehr auf dieser Schwerpunktsachse des ganzen Profiles.

Soll in Bezug auf letztere das Trägheitsmoment des Profiles unter Benützung von Satz 1 berechnet werden, so kann dies erst geschehen, nachdem die Trägheitsmomente der einzelnen Teile auf diese Achse, welche nicht durch den Schwerpunkt jedes einzelnen Teiles geht, unter Benützung des folgenden Satzes, bezogen worden sind. Diesem ist voranzustellen, daß man das Trägheitsmoment einer Fläche in Bezug auf eine durch den Flächenschwerpunkt gehende Achse mit  $J$  und in Bezug auf eine andere Achse mit  $J'$  bezeichnet.

### Satz 2.

Das Trägheitsmoment  $J'$  einer Fläche  $F$ , in Beziehung auf eine nicht durch ihren Schwerpunkt gehende Achse ist gleich dem Trägheitsmoment  $J$  in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende parallele Achse, vermehrt um das Produkt aus der Fläche  $F$  und dem Quadrat der Entfernung  $e$  beider Achsen. Das heißt  $J' = J + F \cdot e^2$ .

Beweis:  $J' = \sum f (y + e)^2 = \sum f (y^2 + 2ye + e^2)$   
 $= \sum f y^2 + 2e \sum f y + e^2 \sum f$ , aber nach dem vorigen Paragraphen  $\sum f y = 0$ , also  $J' = \sum f y^2 + e^2 \sum f$ , d. h.

$$J' = J + F \cdot e^2.$$

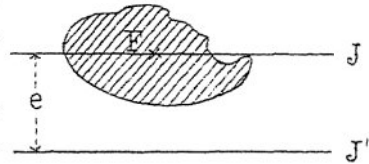


Bild 1.

Satz 1 und Satz 2 gelten nur für Trägheitsmomente und durchaus nicht für Widerstandsmomente.

Beispiel 29. Das Trägheitsmoment des  $\perp$  NP 9/9/1 soll in Bezug auf die zum Steg senkrechte Schwerpunktsachse XX berechnet werden, welche nach der Tabelle auf S. 72 von der Oberkante 6,38 cm entfernt ist, vgl. Bild 1. Hätte man diese Tabelle nicht, so wäre der Schwerpunktsabstand von der Stegoberrkante zu ermitteln aus  $\frac{8,0 \cdot 1,0 \cdot 4,0 + 9,0 \cdot 1,0 \cdot 8,5}{8,0 \cdot 1,0 + 9,0 \cdot 1,0} = 6,38$  cm.

Auflösung. Man ersetzt das Profil durch das Stegrechteck 8/1 cm, dessen Schwerpunkt von der Oberkante 4,00 cm, also von der Achse XX um  $e = 6,38 - 4,00 = 2,38$  cm entfernt ist, und durch das Flanschenrechteck 9/1 cm, dessen Schwerpunkt von jener Oberkante 8,50 cm, also von XX den Abstand  $8,50 - 6,38 = 2,12$  hat und erhält alsdann Trägheitsmoment des Steges auf seine eigene Schwerpunktsachse  $J = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 \cdot 8^3}{12}$ .

Das Trägheitsmoment des Steges auf die Achse XX ist also

$$J' = \frac{bh^3}{12} + F \cdot e^2 = \frac{1 \cdot 8^3}{12} + 8 \cdot 1 \cdot 2,38^2 = 87,98 \text{ cm}^4.$$

Trägheitsmoment des Flansches auf seine eigene Schwerpunktsachse  $J = \frac{bh^3}{12} = \frac{9 \cdot 1^3}{12}$  und in Bezug auf die Achse XX des ganzen Profiles

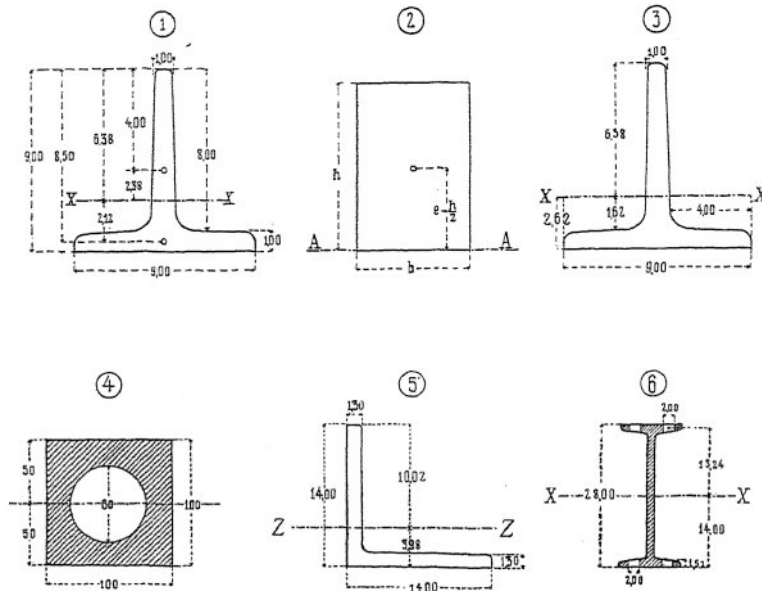
$$J' = \frac{bh^3}{12} + F \cdot e^2 = \frac{9 \cdot 1^3}{12} + 9 \cdot 1 \cdot 2,12^2 = 41,20 \text{ cm}^4.$$

Die obigen Werte  $J$  sind auf verschiedene Achsen bezogen, sie dürfen somit nicht nach Satz 1 addiert werden, dagegen darf man die Werte  $J'$  addieren, weil beide sich auf die gleiche Achse XX beziehen, also erhält man als Trägheitsmoment des ganzen Profiles  $J = 87,98 + 41,20 = 129,18 \text{ cm}^4$  gegenüber  $129 \text{ cm}^4$  in der Tabelle auf S. 72. Der geringfügige Unterschied beider Resultate rührt davon her, daß in unserer Berechnung Steg und Flansch durch Rechtecke ersetzt worden sind.

Beispiel 30. Wie groß ist das Trägheitsmoment  $J'$  eines Rechteckes von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  in Bezug auf eine Achse, welche mit der Seite  $b$  zusammenfällt? Bild 2.

Auflösung. Nach der Tabelle auf S. 68 ist das Trägheitsmoment des Rechteckes in Bezug auf die zur gegebenen Achse parallele Schwerpunktsachse  $J = \frac{bh^3}{12}$ , ferner ist  $F = b \cdot h$  und endlich der Abstand  $e$  der beiden Achsen  $e = \frac{h}{2}$ , also wird

$$J' = J + F \cdot e^2 = \frac{bh^3}{12} + bh \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3}.$$



Beispiel 31. Unter Benützung des soeben gefundenen Resultates soll die in Beispiel 29 gestellte Aufgabe gelöst werden. Vgl. Bild 3.

Auflösung. Das  $\perp$  Profil wird zu dem Zweck als Zusammensetzung folgender Rechtecke angesehen. Oberhalb der Achse  $XX$  ein Rechteck von  $w = 6,38$  cm Höhe und  $d = 1,00$  cm Breite, unterhalb  $XX$  ein Rechteck von der Breite  $b = 9,00$  cm und der Höhe  $h - w = 9,00 - 6,38 = 2,62$  cm, von welchem zu beiden Seiten des Stegs Abzüge zu machen sind, deren Breite  $\frac{b-d}{2} = \frac{9,0-1,0}{2} = 4,00$  cm und deren Höhe  $2,62 - d = 1,62$  cm ist.

Mittels der Formel  $J = \frac{bh^3}{3}$  kann man die Trägheitsmomente dieser Rechtecke, welche alle mit einer Seite an der Schwerpunktsachse  $XX$  des Profiles anliegen, unmittelbar in Bezug auf diese Achse angeben, also auch Satz 1 ohne weiteres anwenden, so daß für das Trägheitsmoment des ganzen Profiles

$$J = \frac{1 \cdot 6,38^3}{3} + \frac{9 \cdot 2,62^3}{3} - 2 \cdot \frac{4,00 \cdot 1,62^3}{3} = 129,2 \text{ cm}^4 \text{ sich ergeben.}$$

Beispiel 32. Der Querschnitt eines gemauerten Schornsteins bestehe aus einem Quadrat von 100 cm Seitenlänge, in dessen Mitte eine Kreisfläche von 60 cm Durchmesser ausgespart ist. Wie groß ist das Trägheitsmoment dieses Querschnitts in Bezug auf die zu einer Seite parallele Schwerpunktsachse? Bild 4.

Auflösung. Für das volle Quadrat erhält man:

$$J = \frac{b h^3}{12} = \frac{100 \cdot 100^3}{12} = 8\,330\,000 \text{ cm}^4.$$

$$\text{Für die Kreisfläche gehen ab } J = \frac{D^4}{20} = \frac{60^4}{20} = 648\,000 \text{ cm}^4$$

somit bleiben als Wert für das gesuchte Trägheitsmoment  $7\,682\,000 \text{ cm}^4$ .

Beispiel 33. Wie groß ist das Widerstandsmoment des Querschnittes in voriger Aufgabe in Bezug auf dieselbe Achse?

$$\text{Auflösung. } W = \frac{J}{y_{\max}} = \frac{7\,682\,000}{50} = 153\,640 \text{ cm}^3.$$

Beispiel 34. Wie groß sind die Widerstandsmomente des Winkelseisenprofils NP 14/14 1,3, in Bezug auf die zu einem Schenkel parallele Schwerpunktsachse ZZ? s. Bild 5.

Auflösung. Nach Tabelle S. 73 ist das Trägheitsmoment in Bezug auf ZZ  $J = 647,5 \text{ cm}^4$  und der Abstand der obersten Faser  $v = 10,02$ , der Abstand der untersten Faser  $b - v = 14,00 - 10,02 = 3,98$ , also wird das Widerstandsmoment in Bezug auf die oberste Faser  $W_o = \frac{J}{v} = \frac{647,5}{10,02} = 64,62 \text{ cm}^3$  und in Bezug auf die unterste Faser

$$W = \frac{J}{b - v} = \frac{647,5}{3,98} = 162,69 \text{ cm}^3.$$

Hat man Tabellen mit den Schwerpunktsabständen nicht zur Hand, so berechnet sich der Abstand des Schwerpunktes von der Oberkante des senkrechten Winkelschenkels zu

$$\frac{14 \cdot 1,3 \cdot 7 + 12,7 \cdot 1,3 \cdot 13,35}{14 \cdot 1,3 + 12,7 \cdot 1,3} = 10,02 \text{ cm.}$$

Beispiel 35. Um wieviel wird das Widerstandsmoment und damit die Tragfähigkeit des I NP 28 vermindert, wenn in einem Querschnitt desselben je 2 Nietlöcher mit 2 cm Durchmesser in die Flanschen gebohrt werden. Bild 6.

Auflösung. Es ist von dem Trägheitsmoment auszugehen. Im Trägerquerschnitt erscheinen die Löcher als Rechtecke von 2,0 cm Breite und einer Höhe, welche gleich der Flanschendicke, also nach S. 70  $t = 15,2 \text{ mm} = 1,52 \text{ cm}$  ist. Der Abstand des Schwerpunktes jedes solchen Rechteckens von der Achse XX beträgt:

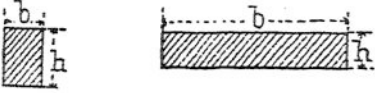
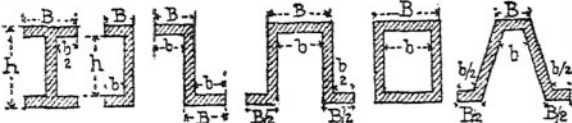
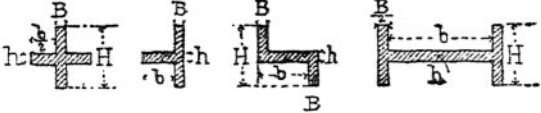
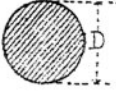
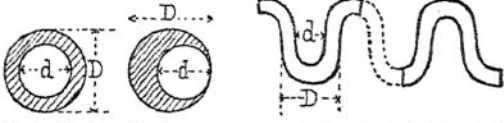

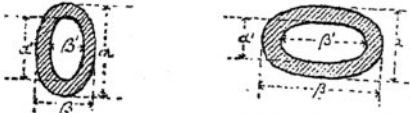
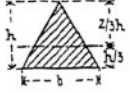
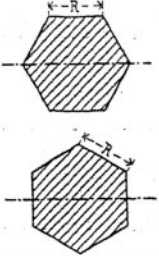

$$\frac{h}{2} - \frac{t}{2} = \frac{28}{2} - \frac{1,52}{2} = 13,24 \text{ cm.}$$

Der Beitrag dieser weggenommenen Querschnittsflächenteile zum Trägheitsmoment war je

$$J' = J + F \cdot e^2 = \frac{b h^3}{12} + F e^2 = \frac{2,0 \cdot 1,52^3}{12} + 2,0 \cdot 1,52 \cdot 13,24^2 = 0,59 + 532,91 = 533,5 \text{ cm}^4.$$

Von dem auf S. 70 angegebenen Wert für das Trägheitsmoment des vollen Querschnittes bleibt somit nach Satz 1 noch  $J = 7658 - 4 \cdot 533,5 = 5524 \text{ cm}^4$  übrig.

Das Widerstandsmoment des verschwächten Querschnittes ist somit nur  $W = \frac{J}{h/2} = \frac{5524}{14} = 395 \text{ cm}^3$  gegenüber  $W = 547 \text{ cm}^3$  für den unverschwächten Querschnitt. Die Verminderung beträgt daher  $\frac{547 - 395}{547} = 28\%$  des ursprünglichen Wertes des Widerstandsmomentes.

Querschnitts-Form	Trägheitsmoment $J$ auf die horizontale Schwerpunktsachse bezogen	Widerstandsmoment $\frac{J}{e}$
	$\frac{1}{12} b h^3$	$\frac{1}{6} b h^2$
	$\frac{1}{12} (B H^3 - b h^3)$	$\frac{1}{6} \left( \frac{B H^3 - b h^3}{H} \right)$
	$\frac{1}{12} (B H^3 + b h^3)$	$\frac{1}{6} \left( \frac{B H^3 + b h^3}{H} \right)$
	$\frac{\pi \cdot D^4}{64} = \text{circa } \frac{D^4}{20}$	$\frac{\pi D^3}{32} = \text{circa } \frac{D^3}{10}$
	$\frac{D^4 - d^4}{20}$	$\frac{1}{10} \frac{D^4 - d^4}{D}$
	$\frac{\pi \alpha^3 \beta}{64} = \frac{\alpha^3 \beta}{20}$	$\frac{\alpha^2 \beta}{10}$
	$\frac{\pi}{64} [\alpha^3 \beta - \alpha'^3 \beta'] = \frac{1}{20} \square$	$\frac{1}{10} \frac{\alpha^3 \beta - \alpha'^3 \beta'}{\alpha}$
	$\frac{1}{36} b h^3$	$W_o = \frac{J}{\frac{2}{3} h} = \frac{b h^2}{24}$ $W_u = \frac{J}{h/3} = \frac{b h^2}{12}$
	$\frac{5 \sqrt{3}}{16} R^4 = 0,5413 R^4$	$\frac{5}{8} R^3$  $0,5413 R^3$
	$\frac{1 + 2 \sqrt{2}}{6} R^4 = 0,6381 R^4$	$0,6906 R^3$

Beispiel 36. Wie groß ist das Trägheitsmoment  $J'$  einer Dreiecksfläche in Bezug auf eine mit der Seite  $b$  zusammenfallenden Achse.

Nach Tabelle S. 68 ist das Trägheitsmoment der Dreiecksfläche in Bezug auf die zur Seite  $b$  parallele Schwerpunktsachse.  $J = \frac{1}{36} b h^3$ , der Abstand dieser Achse von  $b$  ist  $b = h/3$ , also wird

$$J' = J + F e^2 = \frac{1}{36} b h^3 + \frac{b h}{2} \cdot \frac{h^2}{9} = \frac{b h^3}{12}.$$

## II. § 8. Zweckmäßige Trägerprofile.

### Näherungsformeln zur Bestimmung von $J$ und $W$ .

Die Spannung einer Faser wird um so größer, je entfernter diese Faser von der Neutralfaserachse ist. Da nun die Spannung der Fasern einen zulässigen Grenzwert nicht überschreiten darf, so zeigt sich, daß nur die Tragfähigkeit derjenigen Faserschichten ganz ausgenützt werden kann, welche am entferntesten von der Neutralachse liegen. Alle dazwischen liegenden Fasern erleiden nur eine Beanspruchung, welche kleiner ist als die zulässige, sie sind also nicht gut ausgenützt. Man hat daher aus Materialien, welche sich ihre Form beliebig geben lassen, Träger mit solchen Querschnitten hergestellt, bei welchen möglichst viele Fasern sich dort befinden, wo sie am besten ausgenützt werden, d. h. also möglichst entfernt von der Neutralachse; man bildete auf diese Art sogenannte Flanschen, zu deren Verbindung nur ein Steg dient. Tabellen solcher Profile sind beigeheftet. Der Steg selbst trägt nun zwar mit, allein nur in untergeordneter Weise, da sein Trägheitsmoment im Verhältnis zum Trägheitsmoment der Flanschen in Bezug auf die Neutralachse unbedeutend ist.

### Abgekürzte Berechnung von $J$ und $W$ .

Aus der in der Erklärung zu II. § 7 gegebenen Gleichung  $J = \sum f y^2$  zeigt sich, daß der Beitrag, welchen ein Flächenelement zur Größe von  $J$  liefert, mit dem Quadrat seines Abstandes  $y$  von der Neutralachse wächst, also sehr rasch zunimmt, wenn dieser Abstand größer wird. Dies führt zu folgender näherungsweise Berechnung von  $J$  und  $W$  für Querschnitte, deren Flanschen oder Gurtungen großen Abstand voneinander haben. Man denkt sich den ganzen Flansch  $f = B \cdot t$  als ein Flächenelement, dessen Abstand von der Neutralachse gleich  $\frac{h}{2}$  ist. Dann trägt zum Trägheitsmoment bei: der obere

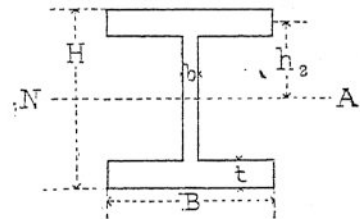


Bild 1.

Flansch  $f \left(\frac{h}{2}\right)^2$ , der untere Flansch  $f \left(\frac{h}{2}\right)^2$  und der Steg  $b \cdot \frac{h^3}{12}$ , das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes wird  $J = 2f \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{b h^3}{12} = \frac{f h^2}{2} + \frac{b h^3}{12}$  oder bei Vernachlässigung des Steges  $J = \frac{f h^2}{2}$ . Das Widerstandsmoment des ganzen Querschnittes wird

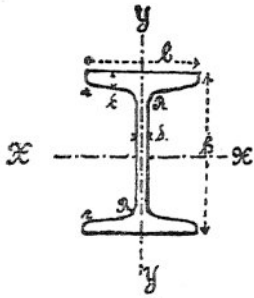
$$W = \frac{J}{\frac{h}{2}} = \frac{f \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{b h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = f h + \frac{b h^2}{6} \text{ und bei Vernachlässigung des Steges } W = f \cdot h.$$

(Fortsetzung Seite 78 nach den Tabellen.)

Deutsche Normalprofile

für

**I Eisen.**



Bis  $h = 250\text{mm}$  ist  $b = 0,4h + 10\text{mm}$ ;  $d = 0,03h + 1,5\text{mm}$ .

Für  $h > 250\text{mm}$  ist  $b = 0,3h + 35\text{mm}$ ;  $d = 0,036h$ .

Neigung der inneren Flanschflächen  $14\%$ ;  $R = d$ ,  $r = 0,6d$ .

Profil Nr.	Dimensionen in Millimeter				Quer- schnitt $F$ qcm	Gewicht $G$ per laufenden Meter kg	Momente bezogen auf			
	$h$	$b$	$d$	$t$			die YY-Bieg.-Ebene, also XX-Neutralachse		die XX-Bieg.-Ebene, also YY-Neutralachse	
							$J_x$ cm <sup>4</sup>	$W_x$ cm <sup>3</sup>	$J_y$ cm <sup>4</sup>	$W_y$ cm <sup>3</sup>
8	80	42	3,9	5,9	7,61	6,0	73,4	19,6	7,35	3,5
9	90	46	4,2	6,3	9,05	7,1	118	26,2	10,4	4,5
10	100	50	4,5	6,8	10,69	8,3	172	34,4	14,3	5,7
11	110	54	4,8	7,2	12,36	9,6	241	43,8	18,9	7,0
12	120	58	5,1	7,7	14,27	11,1	331	55,1	25,2	8,7
13	130	62	5,4	8,1	16,19	12,6	441	67,8	32,2	10,4
14	140	66	5,7	8,6	18,35	14,3	579	82,7	41,3	12,5
15	150	70	6,0	9,0	20,5	16,0	743	99,0	51,8	14,8
16	160	74	6,3	9,5	22,9	17,9	945	118	64,4	17,4
17	170	78	6,6	9,9	25,4	19,8	1 177	139	78,8	20,2
18	180	82	6,9	10,4	28,0	21,9	1 460	162	95,9	23,4
19	190	86	7,2	10,8	30,7	24,0	1 779	187	115,2	26,8
20	200	90	7,5	11,3	33,7	26,2	2 162	216	138	30,7
21	210	94	7,8	11,7	36,6	28,5	2 587	246	163	34,6
22	220	98	8,1	12,2	39,8	31,0	3 090	281	192	39,2
23	230	102	8,4	12,6	42,9	33,5	3 642	317	224	43,9
24	240	106	8,7	13,1	46,4	36,2	4 288	357	261	49,3
26	260	113	9,4	14,1	53,7	41,9	5 798	446	341	60,3
28	280	119	10,1	15,2	61,4	47,9	7 658	547	429	72,1
30	300	125	10,8	16,2	69,4	54,1	9 888	659	530	84,8
32	320	131	11,5	17,3	78,2	61,0	12 622	789	652	99,5
34	340	137	12,2	18,3	87,2	68,0	15 827	931	789	115
36	360	143	13,0	19,5	97,5	76,1	19 766	1 098	956	134
38	380	149	13,7	20,5	107,5	83,9	24 208	1 274	1 138	153
40	400	155	14,4	21,6	118,3	92,3	29 446	1 472	1 349	174
42 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	425	163	15,3	23,0	133,0	103,7	37 266	1 754	1 672	205
45	450	170	16,2	24,3	147,7	115,2	46 204	2 054	2 004	236
47 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	475	178	17,1	25,6	163,6	127,6	56 912	2 396	2 424	272
50	500	185	18,0	27,0	180,2	140,5	69 245	2 770	2 871	310



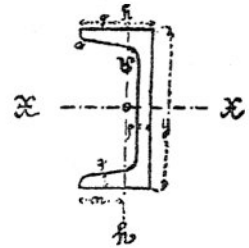
Deutsche Normalprofile

für

┌ Eisen.

$$b = 0,25 h + 25 \text{ mm}; R = t; r = \frac{t}{2};$$

Neigung der inneren Flanschflächen 8‰.

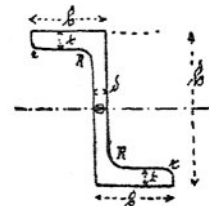


Profil Nr.	Dimensionen in Millimeter				Querschnitt <i>F</i> qcm	Gewicht <i>G</i> per laufenden Meter kg	Schwer- punkts- abstand <i>w</i> cm	Momente bezogen auf			
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>				die YY-Bieg.-Ebene also XX-Neutralachse		die XX-Bieg.-Ebene also YY-Neutralachse	
								<i>J<sub>z</sub></i> cm <sup>4</sup>	<i>W<sub>z</sub></i> cm <sup>3</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> cm <sup>4</sup>	<i>W<sub>y</sub></i> cm <sup>3</sup>
3	30	33	5	7	5,42	4,2	1,86	6,5	4,3	5,2	2,8
4	40	35	5	7	6,20	4,8	2,04	14,2	7,1	7,3	3,6
5	50	38	5	7	7,12	5,6	2,32	26,7	10,7	10,0	4,3
6 1/2	65	42	5,5	7,5	9,05	7,1	2,66	58,2	17,9	15,7	5,9
8	80	45	6	8	11,04	8,6	2,93	107	26,7	21,7	7,4
10	100	50	6	8,5	13,50	10,5	3,31	207	41,4	33,1	10,0
12	120	55	7	9	17,04	13,3	3,76	368	61,3	49,2	13,1
14	140	60	7	10	20,40	15,9	4,09	609	87,0	71,2	17,4
16	160	65	7,5	10,5	24,10	18,8	4,49	932	117	97,4	21,7
18	180	70	8	11,0	28,00	21,9	4,90	1364	152	130	26,6
20	200	75	8,5	11,5	32,30	25,2	5,30	1927	193	171	32,2
22	220	80	9	12,5	37,60	29,3	5,66	2712	247	226	39,9
26	260	90	10	14,0	48,40	37,8	6,42	4857	374	365	56,9
30	300	100	10	16,0	58,80	45,9	7,05	8064	538	564	80,0

└ Eisen.

$$b = 0,25 h + 30 \text{ mm}; d = 0,035 h + 3 \text{ mm};$$

$$t = 0,05 h + 3 \text{ mm}; R = t; r = \frac{t}{2}.$$

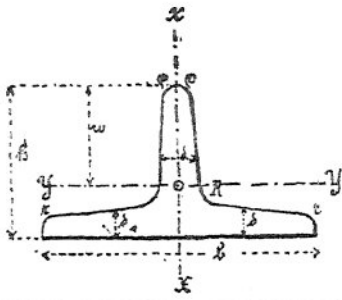


Profil Nr.	Dimensionen in Millimeter				Querschnitt <i>F</i> qcm	Gewicht <i>G</i> per laufenden Meter kg	Trägheits- moment <i>J</i> cm <sup>4</sup>	Widerstands- moment <i>W</i> cm <sup>3</sup>
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>				
3	30	38	4	4,5	4,26	3,3	6,0	4,0
4	40	40	4,5	5	5,35	4,2	13,4	6,7
5	50	43	5,0	5,5	6,68	5,2	26,0	10,4
6	60	45	5	6	7,80	6,1	44,1	14,7
8	80	50	6	7	10,96	8,6	108,0	27,0
10	100	55	6,5	8	14,26	11,1	219,0	43,8
12	120	60	7	9	17,94	14,0	395,4	65,9
14	140	65	8	10	22,60	17,6	665,7	95,1
16	160	70	8,5	11	27,13	21,2	1042,4	130,3

## Deutsche Normalprofile

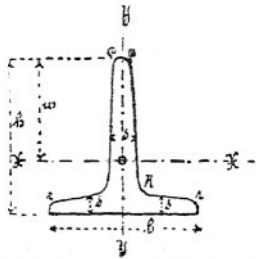
für

### Breitfüßige T Eisen. $h = \frac{b}{2}$ .



$d = 0,15 h + 1 \text{ mm}; R = d; r = \frac{R}{2}; e = \frac{R}{4};$   
 Neigung im Fuß 2%,  
 auf jeder Seite des Stegs 4%.

Profil Nr.	Dimensionen in Millimeter			Quer- schnitt <i>F</i> qcm	Gewicht <i>G</i> per laufenden Meter kg	Schwer- punkts- abstand <i>w</i> cm	Momente bezogen auf			
	die YY-Bieg.-Ebene, also XX-Neutralachse		die XX-Bieg.-Ebene, also YY-Neutralachse							
	<i>J<sub>x</sub></i> cm <sup>4</sup>	<i>W<sub>x</sub></i> cm <sup>3</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> cm <sup>4</sup>				<i>W<sub>y</sub></i> cm <sup>3</sup>			
6/3	60	30	5,5	4,64	3,6	2,30	9,98	3,33	2,91	1,26
7/3½	70	35	6	5,94	4,6	2,69	17,3	4,94	5,12	1,90
8/4	80	40	7	7,91	6,2	3,07	30,1	7,52	8,87	2,89
9/4½	90	45	8	10,16	7,9	3,45	49,0	10,9	14,40	4,18
10/5	100	50	8,5	12,02	9,4	3,84	71,3	14,3	21,20	5,51
12/6	120	60	10	17,0	13,3	4,62	145	24,2	43,20	9,35
14/7	140	70	11,5	22,8	17,8	5,39	265	37,8	79,10	14,7
16/8	160	80	13	29,5	23,0	6,17	446	55,8	134,0	21,7
18/9	180	90	14,5	37,0	28,9	6,95	709	78,8	213,0	30,5
20/10	200	100	16	45,4	35,4	7,72	1073	107,0	323,0	41,8



### Hochstegige T Eisen.

$h = b.$

$d = 0,1 h + 1 \text{ mm}; R = d; r = \frac{R}{2}; e = \frac{R}{4};$   
 Neigung im Fuß 2%,  
 auf jeder Seite des Stegs 2%.

Profil Nr.	Dimensionen in Millimeter			Quer- schnitt <i>F</i> qcm	Gewicht <i>G</i> per laufenden Meter kg	Schwer- punkts- abstand <i>w</i> cm	Momente bezogen auf			
	die YY-Bieg.-Ebene, also XX-Neutralachse		die XX-Bieg.-Ebene, also YY-Neutralachse							
	<i>J<sub>x</sub></i> cm <sup>4</sup>	<i>W<sub>x</sub></i> cm <sup>3</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> cm <sup>4</sup>				<i>W<sub>y</sub></i> cm <sup>3</sup>			
2/2	20	20	3	1,11	0,9	1,39	0,403	0,29	0,204	0,20
2½/2½	25	25	3,5	1,63	1,3	1,75	0,931	0,53	0,463	0,37
3/3	30	30	4	2,24	1,7	2,10	1,86	0,88	0,914	0,61
3½/3½	35	35	4,5	2,95	2,3	2,46	3,34	1,36	1,63	0,93
4/4	40	40	5	3,75	2,9	2,82	5,56	1,97	2,70	1,35
4½/4½	45	45	5,5	4,65	3,6	3,17	8,74	2,76	4,23	1,88
5/5	50	50	6	5,64	4,4	3,53	13,1	3,71	6,33	2,54
6/6	60	60	7	7,91	6,2	4,24	26,4	6,23	12,80	4,25
7/7	70	70	8	10,60	8,2	4,96	48,4	9,76	23,10	6,62
8/8	80	80	9	13,60	10,6	5,67	81,5	14,40	38,80	9,70
9/9	90	90	10	17,00	13,3	6,38	129	20,30	61,40	13,60
10/10	100	100	11	20,80	16,2	7,10	195	27,50	92,70	18,50
12/12	120	120	13	29,50	23,0	8,52	389	45,60	189	31,50
14/14	140	140	15	39,80	31,0	9,95	734	73,70	347	49,50

Deutsche Normalprofile

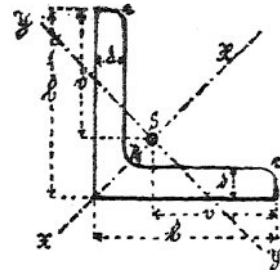
für

Gleichschenklige Winkeleisen.

$$d_{min} = 0,1 b \text{ für } b \cong 100 \text{ mm,}$$

$$d_{min} = \frac{1}{11} b \text{ für } b \cong 100 \text{ mm,}$$

$$R = \frac{d_{min} + d_{max}}{2}; r = \frac{1}{2} R.$$

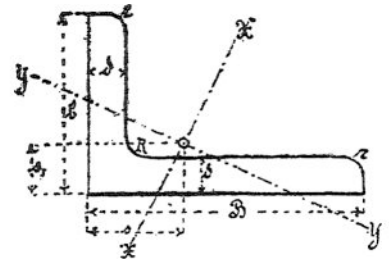


Profil Nr.	Dimensionen in Millimeter		Quer- schnitt F qcm	Gewicht G per laufenden Meter kg	Schwer- punkts- abstand v cm	Momente bezogen auf				Js für die, ein- nem Schenkel parallel ge- hende Schwer- punktachse z...z cm <sup>4</sup>
	b	d				die YY-Bieg.-Ebene, also XX-Neutralachse		die XX-Bieg.-Ebene, also YY-Neutralachse		
						J <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	
1 1/2	15	3	0,81	0,63	1,02	0,252	0,228	0,066	0,096	0,16
		4	1,04	0,81	0,98	0,309	0,291	0,081	0,109	0,19
2	20	3	1,11	0,87	1,39	0,640	0,455	0,169	0,194	0,40
		4	1,44	1,12	1,35	0,792	0,563	0,309	0,226	0,50
2 1/2	25	3	1,41	1,10	1,76	1,30	0,735	0,342	0,329	0,82
		4	1,84	1,44	1,73	1,64	0,926	0,432	0,397	1,03
3	30	4	2,24	1,75	2,10	2,33	1,38	0,77	0,608	1,85
		6	3,24	2,53	2,02	4,01	1,89	1,05	0,755	2,53
3 1/2	35	4	2,64	2,06	2,48	4,80	1,94	1,26	0,876	3,03
		6	3,84	3,00	2,40	6,62	2,68	1,74	1,12	4,18
4	40	4	3,04	2,37	2,85	7,33	2,59	1,98	1,18	4,62
		6	4,44	3,46	2,77	10,20	3,60	2,68	1,54	6,40
		8	5,76	4,49	2,70	12,70	4,48	3,34	1,82	8,00
4 1/2	45	5	4,25	3,32	3,19	12,80	4,03	3,37	1,82	8,05
		7	5,81	4,53	3,11	16,90	5,31	4,45	2,27	10,65
		9	7,29	5,69	3,04	20,40	6,41	5,38	2,60	12,85
5	50	5	4,75	3,70	3,56	17,80	5,03	4,68	2,30	11,20
		7	6,51	5,10	3,49	23,50	6,64	6,18	2,89	14,85
		9	8,19	6,40	3,41	28,60	8,08	7,53	3,35	18,05
5 1/2	55	6	6,24	4,90	3,91	23,20	7,26	7,43	3,29	17,75
		8	8,16	6,40	3,83	35,70	9,18	9,38	3,99	22,50
		10	10,00	7,80	3,76	42,60	11,00	11,20	4,56	26,80
6	60	6	6,84	5,30	4,28	37,00	8,72	9,74	4,02	23,85
		8	8,96	7,00	4,21	47,20	11,10	12,40	4,90	29,70
		10	11,00	8,60	4,14	56,30	13,30	14,80	5,64	35,45
6 1/2	65	7	8,61	6,70	4,62	54,40	11,80	14,30	5,38	34,25
		9	10,90	8,50	4,55	67,00	14,80	17,60	6,38	42,15
		11	13,10	10,20	4,48	78,50	17,10	20,70	7,24	44,95
7	70	7	9,31	7,30	4,99	68,5	13,90	18,00	6,82	43,20
		9	11,80	9,20	4,92	84,8	17,20	22,30	7,58	53,50
		11	14,20	11,10	4,85	99,8	20,20	26,30	8,65	63,00
7 1/2	75	8	11,40	8,90	5,33	95,0	18,0	25,00	8,16	60,0
		10	14,00	10,90	5,26	115,0	21,7	30,30	9,60	72,5
		12	16,60	12,90	5,19	133,0	25,1	35,00	10,70	84,0
8	80	8	12,20	9,50	5,71	117,0	20,6	30,80	9,48	74,0
		10	15,00	11,70	5,63	141,0	24,9	37,10	11,10	89,0
		12	17,80	13,90	5,56	162,0	28,6	42,70	12,40	109,0
9	90	9	15,40	12,00	6,42	187	29,4	49,20	13,50	118,0
		11	18,60	14,50	6,35	222	34,9	58,40	15,60	140,0
		13	21,70	16,90	6,28	254	39,9	66,80	17,40	160,5
10	100	10	19,00	14,80	7,13	285	40,2	75,00	18,50	180,0
		12	22,60	17,60	7,06	333	47,1	87,70	21,20	210,0
		14	26,00	20,30	6,99	378	53,4	99,50	23,50	238,5
11	110	10	21,00	16,40	7,88	385	49,4	101	22,90	243,0
		12	25,00	19,50	7,81	450	57,7	118	26,20	284,0
		14	28,90	22,50	7,74	513	65,9	135	29,30	324,0
12	120	11	25,20	19,70	8,59	549	64,8	144	29,80	346,5
		13	29,50	23,00	8,52	634	74,9	167	33,80	400,5
		15	33,80	26,30	8,45	715	84,4	188	37,50	451,5
13	130	12	29,80	23,20	9,31	763	83,1	201	38,60	482,0
		14	34,40	26,90	9,24	867	94,4	229	43,00	548,0
		16	39,00	30,50	9,17	970	106,0	256	47,30	613,0
14	140	13	34,70	27,10	10,02	1025	104	270	47,90	647,5
		15	39,80	31,00	9,95	1160	117	305	53,20	732,5
		17	44,70	34,90	9,88	1290	130	339	58,00	814,5
15	150	14	40,00	31,20	10,70	1360	128	358	59,30	859,0
		16	45,40	35,40	10,70	1525	144	401	65,30	963,0
		18	50,80	39,60	10,60	1685	159	443	71,10	1064,0
16	160	15	45,30	35,70	11,50	1780	156	463	71,80	1111,5
		17	51,50	40,20	11,40	1970	174	518	79,00	1244,0
		19	57,20	44,60	11,30	2160	191	569	85,50	1364,5

Deutsche Normalprofile  
für  
Ungleichschenklige Winkeleisen.

$$\frac{B}{b} = 1\frac{1}{2}$$

$$d_{\min} = \frac{b + B}{20}; R = \frac{d_{\min} + d_{\max}}{2}; r = \frac{R}{2}$$

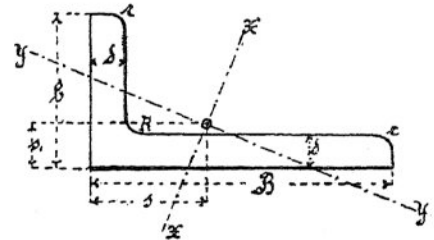


Profil  Nr.	Dimensionen in Millimeter			Quer- schnitt <i>F</i>  qcm	Ge- wicht <i>G</i> per laufen- den Meter  kg	Schwer- punkts- abstände		Momente bezogen auf die				<i>J<sub>z</sub></i> für die Schwer- punktsachse, welche parallel dem	
	<i>b</i>	<i>B</i>	<i>d</i>			<i>s</i>	<i>s<sub>1</sub></i>	YY-Bieg.-Ebene also XX-Neutralachse		XX-Bieg.-Ebene also YY-Neutralachse		langen Schenkel	kurzen Schenkel
								<i>J<sub>x</sub></i>	<i>W<sub>x</sub></i>	<i>J<sub>y</sub></i>	<i>W<sub>y</sub></i>		
2/3	20	30	3	1,41	1,10	1,01	0,51	1,44	0,718	0,292	0,263	0,454	1,271
			4	1,84	1,44	1,05	0,55	1,79	0,896	0,392	0,377	0,569	1,614
3/4 1/2	30	45	4	2,84	2,22	1,50	0,75	6,63	2,18	1,29	0,795	2,092	5,82
			5	3,50	2,73	1,54	0,79	7,91	2,61	1,64	0,990	2,497	7,04
4/6	40	60	5	4,75	3,71	1,99	0,99	19,90	4,85	3,79	1,88	6,261	17,36
			7	6,51	5,08	2,06	1,06	26,00	6,40	5,39	2,56	8,23	23,16
5/7 1/2	50	75	7	8,26	6,4	2,51	1,26	53,2	10,40	10,5	3,97	16,79	46,90
			9	10,44	8,1	2,58	1,33	64,9	12,70	13,6	5,21	20,55	58,00
6 1/2 / 10	65	100	9	14,04	11,0	3,37	1,62	160	23,70	30,1	8,5	47,92	143
			11	16,94	13,2	3,44	1,69	188	28,00	36,9	10,5	56,30	169
8/12	80	120	10	19,00	14,8	3,97	1,97	318	38,80	61,1	14,6	100,10	278
			12	22,56	17,6	4,05	2,05	368	45,50	73,8	17,6	116,60	326
10/15	100	150	12	28,56	22,3	4,95	2,45	749	73,70	143,6	27,2	237,10	655
			14	33,04	25,8	5,02	2,52	851	83,90	167,4	31,5	269,30	730

Ungleichschenklige Winkeleisen.

$$\frac{B}{b} = 2.$$

$$d_{\min} = \frac{b + B}{20}; R = \frac{d_{\min} + d_{\max}}{2}; r = \frac{R}{2}$$

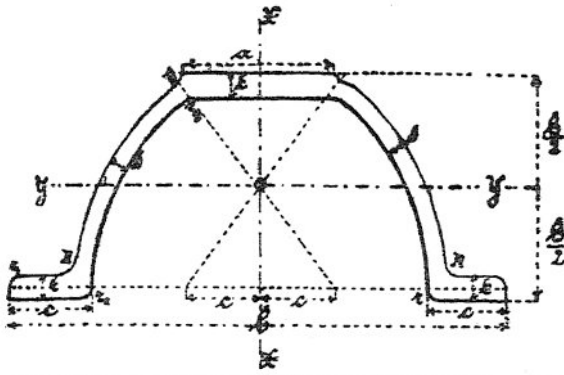


Profil  Nr.	Dimensionen in Millimeter			Quer- schnitt <i>F</i>  qcm	Ge- wicht <i>G</i> per laufen- den Meter  kg	Schwer- punkts- abstände		Momente bezogen auf die				<i>J<sub>z</sub></i> für die Schwer- punktsachse, welche parallel dem	
	<i>b</i>	<i>B</i>	<i>d</i>			<i>s</i>	<i>s<sub>1</sub></i>	YY-Bieg.-Ebene also XX-Neutralachse		XX-Bieg.-Ebene also YY-Neutralachse		langen Schenkel	kurzen Schenkel
								<i>J<sub>x</sub></i>	<i>W<sub>x</sub></i>	<i>J<sub>y</sub></i>	<i>W<sub>y</sub></i>		
2/4	20	40	3	1,71	1,33	1,45	0,45	2,99	1,17	0,331	0,279	0,489	2,83
			4	2,24	1,75	1,49	0,49	3,79	1,50	0,445	0,378	0,614	3,62
3/6	30	60	5	4,25	3,32	2,20	0,69	16,50	4,25	1,89	1,08	2,70	15,68
			7	5,81	4,53	2,27	0,77	21,70	5,63	2,66	1,50	3,50	20,80
4/8	40	80	6	6,84	5,34	2,90	0,90	47,70	9,22	5,36	2,23	7,84	45,30
			8	8,96	7,00	2,97	0,97	60,60	11,8	7,16	3,02	9,85	58,00
5/10	50	100	8	11,36	8,90	3,64	1,14	123	19,1	13,9	4,73	20,20	117,00
			10	14,00	10,90	3,71	1,21	148	23,2	17,4	5,88	24,00	141,50
6 1/2 / 13	65	130	10	18,50	14,4	4,72	1,47	340	40,5	38,0	9,79	55,80	322,90
			12	21,96	17,1	4,79	1,54	396	47,2	45,9	12,00	64,50	377,70
8/16	80	160	12	27,36	21,3	5,79	1,79	764	73,9	85,9	17,90	125,40	724,00
			14	31,64	24,7	5,87	1,87	870	84,6	99,6	20,80	141,60	828,00
10/20	100	200	14	40,04	31,2	7,20	2,20	1757	135,5	196,0	32,70	289,40	1664,0
			16	45,44	35,4	7,27	2,28	1970	153,3	223,0	37,50	322,70	1872,6

Deutsche Normalprofile

für

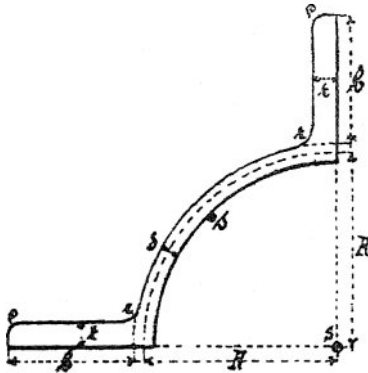
Belag-Eisen (Zores-Eisen).



$$R = t = r_3; r_1 = d;$$

$$r_2 = d - 0,5 \text{ mm}; r_4 = 0,6 d + 1,3 \text{ mm}.$$

Profil Nr.	Dimensionen in Millimeter						Quer- schnitt <i>F</i> qcm	Gewicht <i>G</i> per laufenden Meter kg	Momente bezogen auf			
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>t</i>			die YY-Bieg.-Ebene, also XX-Neutralachse		die XX-Bieg.-Ebene, also YY-Neutralachse	
									<i>J<sub>x</sub></i> cm <sup>4</sup>	<i>W<sub>x</sub></i> cm <sup>3</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> cm <sup>4</sup>	<i>W<sub>y</sub></i> cm <sup>3</sup>
5	50	120	33	21	3	5	6,8	5,3	84	14,0	24,0	9,6
6	60	140	38	24	3,5	6	9,5	7,3	161	23,0	47,7	15,9
7 <sup>1/2</sup>	75	170	45,5	28,5	4	7	13,4	10,3	353	40,4	106	28,3
9	90	200	53	33	4,5	8	17,9	13,8	647	64,7	206	45,8
11	110	240	63	39	5	9	24,2	18,6	1 272	106,0	419	76,2



Quadrant-Eisen.

$$b = 0,2 R + 25 \text{ mm};$$

$$r = 0,12 R; e = 0,06 R;$$

*S* = Schwerpunkt der vollen Röhre.

Profil Nr.	Dimensionen in Millimeter				Quer- schnitt <i>F</i> qcm	Gewicht <i>G</i> per laufenden Meter kg	Trägheits- moment <i>J</i> für jede Schwerachse cm <sup>4</sup>	V o l l e R ö h r e	
	<i>R</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>				Widerstandsmoment	
								Größtes für ZZ-Neutralachse <i>W<sub>x</sub></i> cm <sup>3</sup>	Kleinste für die XX-Neutralachse <i>W<sub>y</sub></i> cm <sup>3</sup>
5	50	35	4	6	29,8	23,4	573	90	66
5	50	35	8	8	48,0	37,5	901	135	101
7 <sup>1/2</sup>	75	40	6	8	51,9	42,9	2 046	235	173
7 <sup>1/2</sup>	75	40	10	10	80,2	62,8	2 957	329	246
10	100	45	8	10	88,1	68,9	5 434	499	365
10	100	45	12	12	120,4	94,0	7 395	660	490
12 <sup>1/2</sup>	125	50	10	12	129,3	101,0	11 970	907	665
12 <sup>1/2</sup>	125	50	14	14	168,8	131,6	15 591	1 155	857
15	150	55	12	14	173,9	139,6	23 206	1 497	1 100
15	150	55	18	17	248,6	194,0	32 283	2 080	1 509

### Breitflanshige Trägereisen. (B-Profile.)

Die Normalprofile mit I-Querschnitt haben verhältnismäßig schmale Flanschen, welche außerdem auf der Innenfläche 14% Neigung besitzen.

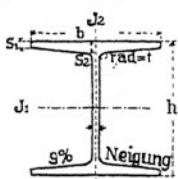
Diese für viele Verwendungszwecke zwar ungünstige Profilform wurde gewählt, um die I-Träger unbeschädigt und in möglichst überall gleich festem Zustand aus den Taffoneisenwalzen, in welche das Profil eingeschnitten ist, zu erhalten.

Für den Bautechniker haben diese Formen manchmal Nachteile, insbesondere, wenn an den Flanschen Konstruktionsteile durch Nietung befestigt werden sollen; aber auch dann, wenn bei beschränkter Konstruktionshöhe ein möglichst tragfähiger Balken nötig wird oder ein I-Träger als Pfosten u. dergl. der Knickungsgefahr zu widerstehen hat.

Dieser Umstand hat zur Folge, daß die Bestrebungen der Walztechniker darauf gerichtet waren, Träger mit breiten Flanschen herzustellen. Dies ist dadurch gelungen, daß man das Profil nicht durch Kaliberwalzen gebildet hat, sondern durch drei Paar voneinander unabhängig arbeitenden Walzen, welche die drei Dimensionen der Träger, die Steghöhe, die Stegdicke, sowie die Flanschenbreite und -Dicke bestimmen.

Die neuen Profile, Grey-Profile nach ihrem Konstrukteur genannt, und abgekürzt um ihrer Breite willen mit B-Profil bezeichnet, schließen sich in ihren Höhenabstufungen den Normalprofilen an.

Die Flanschen sind von 10 cm bis 30 cm Höhe ebenso breit als der Träger hoch ist, von da bleibt die Flanschenbreite 30 cm, es steigert sich nur noch die Höhe. Die Flanschenstärken gehen bis zu 3,75 cm bei den zwei besonders hohen Profilen.



Für die Neigung der inneren Flanschenflächen wurden 9% gewählt, also erheblich weniger als bei den Normalprofilen.

Der Ausrundungshalbmesser des Überganges vom Steg in die Flanschen ist gleich der Flanschenstärke; an den Flanschenkanten sind Abrundungen nicht vorhanden, da das neue Walzverfahren solche nicht erfordert.

Es ist noch zu bemerken, daß die B-Profile wegen ihrer breiten Flanschen einfacher zu verlegen sind, sie kanten nicht so leicht um, Verbindungsstücke sind meistens entbehrlich, ebenso Bolzen bei nebeneinander stehenden Trägern u. s. w.

Hauptsächlich aber sind die neuen B-Profile für Säulen, Pfosten und andere in der Stabachse belastete Konstruktionsteile geeignet und dabei den NP-Profilen insofern sehr überlegen, als ihr Trägheitsmoment, bezogen auf die Stegachse, nicht so viel kleiner ist als in Bezug auf die zum Steg senkrechte Achse wie bei den NP-Profilen. Ausknickungen stehen daher bei den B-Profilen weniger zu befürchten als bei den NP-Profilen. Außerdem sind für diese Verwendung die bequemeren Anschlußflächen bei Verbindungen, Überlappungen u. s. w. sehr schätzenswerte Vorzüge. Vernietete Säulen werden bei der Wahl der B-Profile seltener nötig werden.

Breitflanschige I-(Grey-)Profile der Deutsch-Luxemburgischen Bergwerks- und Hütten-Aktiengesellschaft, Abteilung Differdingen (Luxemburg).

Nr.	Höhe h	Flansch- breite b	Flanschstärken		Steg- stärke t	Quer- schnitt qcm	Ge- wicht kg/m	Trägheitsmomente		Widerstandsmomente	
			s <sub>1</sub> Millimeter	s <sub>2</sub>				J <sub>1</sub> cm <sup>4</sup>	J <sub>2</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>1</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>2</sub> cm <sup>3</sup>
18 B	180	180	9,0	16,72	8,5	59,9	47,0	3 512	1 073	390	119
20 B	200	200	9,5	18,12	8,5	70,4	55,4	5 171	1 568	517	157
22 B	220	220	10,0	19,5	9,0	82,6	64,8	7 379	2 216	671	201
24 B	240	240	10,5	20,85	10,0	96,8	76,0	10 260	3 043	855	254
25 B	250	250	10,9	21,7	10,5	105,1	82,5	12 066	3 575	965	286
26 B	260	260	11,7	22,9	11,0	115,6	90,7	14 352	4 261	1 104	328
27 B	270	270	11,95	23,6	11,25	123,2	96,7	16 529	4 920	1 224	365
28 B	280	280	12,35	24,4	11,5	131,8	103,4	19 052	5 671	1 361	405
29 B	290	290	12,7	25,2	12,0	141,1	110,8	21 866	6 417	1 508	443
30 B	300	300	13,25	26,25	12,5	152,1	119,4	25 201	7 494	1 680	500
32 B	320	300	14,1	27,0	13,0	160,7	126,2	30 119	8 867	1 882	524
34 B	340	300	14,6	27,5	13,4	167,4	131,4	35 241	8 097	2 073	540
36 B	360	300	16,15	29,0	14,2	181,5	142,5	42 479	8 793	2 360	586
38 B	380	300	17,0	29,8	14,8	191,2	150,1	49 496	9 175	2 605	612
40 B	400	300	18,2	31,0	15,5	203,6	159,8	57 834	9 721	2 892	648
42 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> B	425	300	19,0	31,75	16,0	213,9	167,9	68 249	10 078	3 212	672
45 B	450	300	20,3	33,0	17,0	229,3	180,0	80 887	10 668	3 595	711
47 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> B	475	300	21,35	34,0	17,6	242,0	190,0	94 811	11 142	3 992	743
50 B	500	300	22,6	35,2	19,4	261,8	205,5	111 283	11 718	4 451	781
55 B	550	300	24,5	37,0	20,6	288,0	226,1	145 957	12 582	5 308	839
60 B	600	300	24,77	37,2	20,8	300,6	236,0	179 303	12 672	5 977	845
65 B	650	300	25,0	37,5	21,1	314,5	246,9	217 402	12 814	6 690	854
70 B	700	300	25,0	37,5	21,1	325,2	255,3	258 106	12 818	7 374	854
75 B	750	300	25,0	37,5	21,1	335,7	263,5	302 560	12 823	8 068	855

Es sind auch schon Normalprofile für Bauhölzer in Vorschlag gebracht worden, um Bauhölzer in bestimmten Abmessungen zur Marktware machen zu können. Dieser vom Innungsverband Deutscher Baugewerkmeister gemachte Vorschlag ist jedoch noch nicht allgemein durchgedrungen, da befürchtet wird, es könnten auf diese Weise alte abgelegene Bauhölzer in den Handel kommen. Die nachstehende Tabelle enthält den Vorschlag:

Normalprofile für Bauhölzer.

Höhe in cm	Abmes- sungen in cm	Quer- schnitts- fläche in qcm	Inhalt cmb/lfd. m	Widerstandsmoment in cm <sup>3</sup> bezogen auf die Schwerpunkts- achse parallel zu der		Höhe in cm	Abmes- sungen in cm	Quer- schnitts- fläche in qm	Inhalt cmb/lfd. m	Widerstandsmoment in cm <sup>3</sup> bezogen auf die Schwerpunkts- achse parallel zu der	
				schmalen Seite	breiten Seite					schmalen Seite	breiten Seite
8	8 <sup>1</sup> / <sub>8</sub>	64	0.0064	85	85	20	18 <sup>1</sup> / <sub>20</sub> 20 <sup>1</sup> / <sub>20</sub>	360 400	0.0360 0.0400	1200 1333	1080 1333
10	8 <sup>1</sup> / <sub>10</sub> 10 <sup>1</sup> / <sub>10</sub>	80 100	0.0080 0.0100	133 167	107 167	22	16 <sup>1</sup> / <sub>22</sub> 18 <sup>1</sup> / <sub>22</sub> 20 <sup>1</sup> / <sub>22</sub>	352 396 440	0.0352 0.0396 0.0440	1291 1452 1613	939 1188 1467
12	10 <sup>1</sup> / <sub>12</sub> 12 <sup>1</sup> / <sub>12</sub>	120 144	0.0120 0.0144	240 288	200 288	24	18 <sup>1</sup> / <sub>24</sub> 20 <sup>1</sup> / <sub>24</sub> 24 <sup>1</sup> / <sub>24</sub>	432 480 576	0.0432 0.0480 0.0576	1728 1920 2304	1296 1600 2304
14	12 <sup>1</sup> / <sub>14</sub> 14 <sup>1</sup> / <sub>14</sub>	140 168 196	0.0140 0.0168 0.0196	327 392 457	233 336 457	26	20 <sup>1</sup> / <sub>26</sub> 24 <sup>1</sup> / <sub>26</sub> 26 <sup>1</sup> / <sub>26</sub>	520 624 676	0.0520 0.0624 0.0676	2253 2704 2929	1733 2496 2929
16	12 <sup>1</sup> / <sub>16</sub> 14 <sup>1</sup> / <sub>16</sub> 16 <sup>1</sup> / <sub>16</sub>	192 224 256	0.0192 0.0224 0.0256	512 597 683	384 523 683	28	22 <sup>1</sup> / <sub>28</sub> 26 <sup>1</sup> / <sub>28</sub> 28 <sup>1</sup> / <sub>28</sub>	616 728 784	0.0616 0.0728 0.0784	2875 3397 3659	2259 3155 3659
18	14 <sup>1</sup> / <sub>18</sub> 16 <sup>1</sup> / <sub>18</sub> 18 <sup>1</sup> / <sub>18</sub>	252 288 324	0.0252 0.0288 0.0324	756 864 972	588 768 972	30	24 <sup>1</sup> / <sub>30</sub> 28 <sup>1</sup> / <sub>30</sub>	720 840	0.0720 0.0840	3600 4200	2880 3920

Fortsetzung zu S. 60.

Ermittlung des nötigen Gurtungsquerschnittes.

Hat man für ein bestimmtes Widerstandsmoment  $W$  und eine gegebene, oder angenommene Steghöhe  $h$  und Stegdicke  $b$  den Gurtungsquerschnitt  $f$  eines I-förmigen Trägers zu berechnen,

so ergibt sich aus  $fh + \frac{bh^2}{6} = W$ ,  $fh = W - \frac{bh^2}{6}$  oder  $f = \frac{W - \frac{bh^2}{6}}{h}$ , also  $f = \frac{W}{h} - \frac{bh}{6}$ .

Bei den „Blechträgern“ besteht der Steg aus einer Blechrippe von 6–10 mm Stärke. Das Trägheitsmoment und Widerstandsmoment dieser Träger kann nach obiger Näherungsformel berechnet werden, wobei unter  $f$  der Gurtungsquerschnitt abzüglich der Nietlochverschwächungen verstanden ist. Für  $h$  ist streng genommen der Abstand der Gurtungsschwerpunkte einzusetzen; da es sich bei Anwendung dieser Formel aber nur um Näherungswerte handelt, kann für  $h$  auch die Höhe der Blechrippe gesetzt werden.

Bei den „Gitterträgern“ ist an Stelle des Steges nur ein Gitterwerk gesetzt, welches die Gurtungen verbindet. Der Steg bleibt weg, also hat man zur Bestimmung der nötigen Gurtungsfläche von Gitterträgern die Näherungsformel  $f = \frac{W}{h}$ .

Diese Näherungsformeln geben für praktische Zwecke genügende Genauigkeit.

Beispiel 37. Ein Blechträger habe eine 80 cm hohe und 1 cm dicke Stehrippe, seine Gurtungen bestehen aus je 2 Winkeln Nr. 7 mit 9 mm Eisenstärke, sowie je 2 Gurtungsplatten von 20 cm Breite und 1 cm Dicke. Wie groß ist das Trägheitsmoment und das Widerstandsmoment des Trägerquerschnittes in Bezug auf die zu den Gurtungen parallele Schwerpunkts-Achse?

Auflösung mittels der Näherungsformeln. Berechnung des Gurtungsquerschnittes.

2 Platten 20/1 . . . . .	40 qcm
2 [7/7/0,9 zu 11,8 qcm . . . . .	23,6 qcm
zusammen . . . . .	63,6 qcm.

Davon gehen ab für Verschwächung durch die 2 cm weiten Nietlöcher  $2 [(1 + 1 + 0,9) \cdot 2] = 11,6$  qcm  
 somit bleibt nutzbar  $f = 52$  qcm.

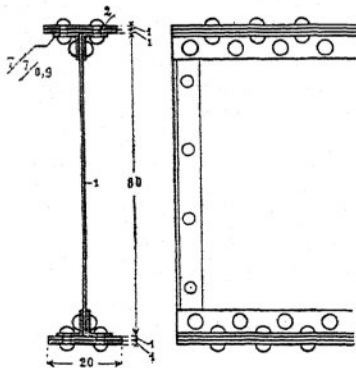


Bild 2.

Das Trägheitsmoment wird  $J = \frac{fh^2}{2} + \frac{bh^3}{12} = \frac{52 \cdot 80^2}{2} + \frac{1 \cdot 80^3}{12} = 209\,070 \text{ cm}^4$ ,

und hieraus  $W = \frac{J}{40} = \frac{209\,070}{40} = 5227 \text{ cm}^3$ .

Das Widerstandsmoment  $W$  läßt sich aber auch unmittelbar berechnen aus der Formel:

$W = fh + \frac{bh^2}{6} = 52 \cdot 80 + \frac{1 \cdot 80^2}{6} = 5227 \text{ cm}^3$ .

Beispiel 38. Ein Gitterträger habe dieselbe Höhe und dieselbe Gurtung wie der Blechträger in voriger Aufgabe. Wie groß werden das Trägheitsmoment und das Widerstandsmoment für den Gitterträger?

Auflösung.  $J = \frac{fh^2}{2} = \frac{52 \cdot 80^2}{2} = 166\,400 \text{ cm}^4$ , hieraus  $W = \frac{J}{\frac{h}{2}} = \frac{166\,400}{40}$

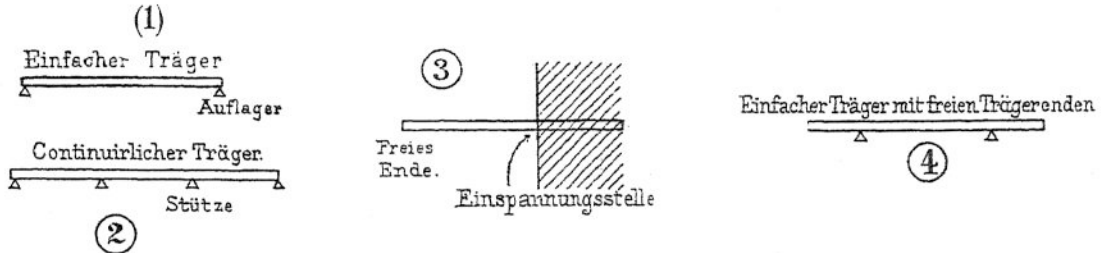
$= 4160 \text{ cm}^3$ , oder unmittelbar hergeleitet  $W = f \cdot h = 52 \cdot 80 = 4160 \text{ cm}^3$ .



## II. § 9. Die Unterstüzung und Belastung der Träger.

Man unterscheidet die Träger nach ihrer Unterstüzung und Belastung.

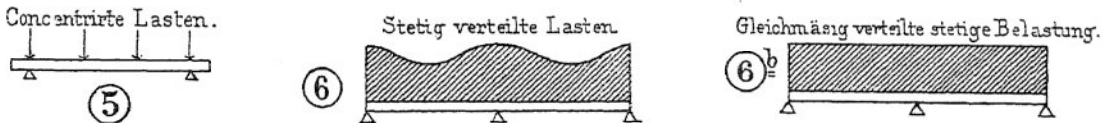
1. Unterstüzung. Die Art der Unterstüzung, sowie die Anzahl der Stühpunkte ist wesentlich. Man nennt einen Träger, welcher auf zwei Auflagern frei aufliegt, einfachen Träger (Bild 1).



Einen Träger, welcher an mehreren Stellen unterstüzt ist, heißt man kontinuierlichen oder durchlaufenden Träger (Bild 2).

Liegt ein Träger frei auf den Stützen, so heißen dieselben Auflagern; ist er auf größere Länge auf der Stütze fest gehalten, so hat man eine Einspannungsstelle (Bild 3).

Ist ein Ende eines Trägers gar nicht unterstüzt, so heißt dasselbe ein freies Trägerende (s. Bild 3 und 4).



2. Belastung. Es ist zu unterscheiden die Belastungsart, welche bezeichnet, wie die Lasten wirken, ob konzentriert (Bild 5) oder stetig verteilt (Bild 6), sodann der jeweilige Belastungsfall, welcher angibt, wo die Lasten wirken, nachdem die letzteren an und für sich nach ihrer Art schon bezeichnet sind. Der Belastungsfall ist insbesondere von Wichtigkeit, wenn die Lasten keine ruhenden (z. B. Eigengewicht etc.) sondern bewegliche sind (Fahrzeuge etc.).

3. Angriffsmoment. Die Größe des Angriffsmoments  $M$  ist abhängig von der Zahl und Größe der äußeren Kräfte, ferner von deren Verteilung über die Träger, sowie von der Länge und Unterstüzungsweise des letzteren.

Zur Bestimmung des Moments muß man den Träger an der in Berechnung zu ziehenden Stelle geschnitten denken und den links- oder rechtsseitigen abgeschnittenen Trägerteil zur Berechnung benutzen. Die Zahlengröße für das Angriffsmoment ergibt sich aus beiden Trägerteilen gleich, nur ist das Vorzeichen der beiden gleichen Zahlen verschieden. Man berechnet in der Regel den linksseitigen Trägerteil.

Die an dem Träger wirkenden äußeren Kräfte sind 1) die Lasten und 2) die Auflagerwiderstände, welche diesen Lasten das Gleichgewicht halten müssen.

4. Momentenlinie. Denkt man sich an jeder Stelle des Trägers den Zahlenwert des Angriffsmomentes als Ordinate senkrecht zur Trägerachse aufgetragen, so gibt die Verbindungsline der Ordinaten-Endpunkte die Momentenlinie. Ueber Träger auf verschieden hohen Stützen siehe „Technisches Studienheft“ Nr. 7, Kapitel 9 „Statische Verhältnisse der Treppenanlagen“.

## II. § 10. Bestimmung des Biegungs- oder Angriffsmomentes.

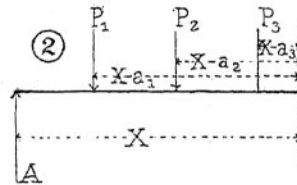
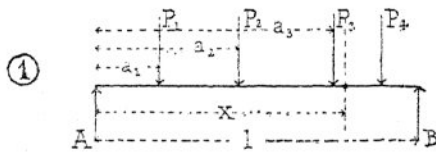
### A. Einfache freiaufliegende Balken. (Rechnerische Behandlung.)

#### 1. Balken mit mehreren Einzellasten.

Zur Einführung in die Berechnungen möge ein einfacher freiauflegender Träger AB, dessen Stützweite  $l$  ist, und auf dem konzentrierte Lasten  $P_1, P_2, \dots$  wirken, rechnerisch bearbeitet werden, d. h. es wird das Biegungs- oder Angriffsmoment  $M_x$  an einer Stelle im beliebigen Abstand  $x$  vom linksseitigen Auflager dieses Trägers gesucht.

Aufsl. In erster Linie müssen die Auflagerwiderstände bestimmt werden. Um den Widerstand in A zu ermitteln, wählt man einen Drehpunkt auf B und erhält alsdann folgende Drehungsmomenten-Gleichung  $A \cdot l = P_1(l - a_1) + P_2(l - a_2) + P_3(l - a_3) + \dots = \Sigma P(l - a)$  (s. Bild 1) und hieraus  $A = \frac{1}{l} \Sigma P(l - a)$ , ebenso ergibt eine Drehungsmomenten-Gleichung für einen auf A gelegenen Drehpunkt  $B = \frac{1}{l} \Sigma P a$ . (Vgl. I. § 19, Fall II.)

Ist nun für den Querschnitt im Abstand  $x$  von A das Angriffsmoment  $M_x$  zu bestimmen, dann ist der Träger an dieser Stelle geschnitten zu denken, der linksseitige Trägerteil zu betrachten und in Bezug auf die Schnittstelle als Drehpunkt, die Biegungs-Momentengleichung anzuschreiben (s. Bild 2).



$$M_x = + Ax - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) - P_3(x - a_3) = + Ax - \Sigma P(x - a).$$

Beispiel 39. Es sei in Bild 1  $a_1 = 1,4$  und  $P_1 = 2400$  kg,  $a_2 = 3,5$  und  $P_2 = 5000$  kg,  $a_3 = 5,5$  und  $P_3 = 4000$  kg,  $a_4 = 6,7$  und  $P_4 = 3000$  kg, und die Stützweite  $l = 8,0$  m. Der Träger ist aus 2 I Eisen zu konstruieren.

Aufsl. Zuerst müssen die Auflagerwiderstände bestimmt werden. Um den Auflagerwiderstand in A zu bestimmen, wähle man einen Drehpunkt auf B und schreibe eine Momentengleichung an, dieselbe wird

$$\begin{aligned} A \cdot 8 &= 3000 \cdot (8,0 - 6,7) + 4000 \cdot (8,0 - 5,5) + 5000 \cdot (8,0 - 3,5) + 2400 \cdot (8,0 - 1,4) \\ &= 3000 \cdot 1,3 + 4000 \cdot 2,5 + 5000 \cdot 4,5 + 2400 \cdot 6,6 \quad \text{somit} \\ A &= \frac{3000 \cdot 1,3 + 4000 \cdot 2,5 + 5000 \cdot 4,5 + 2400 \cdot 6,6}{8} = 6530 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Um den Auflagerwiderstand in B zu bestimmen, wähle man einen Drehpunkt auf A, dann wird ebenso erhalten  $B = \frac{2400 \cdot 1,4 + 5000 \cdot 3,5 + 4000 \cdot 5,5 + 3000 \cdot 6,7}{8} = 7870$  kg.

Probe:  $A + B = 6530 + 7870 = 14400$  kg  $= 2400 + 5000 + 4000 + 3000$  kg.

Nachdem nunmehr die Auflagerwiderstände bekannt sind, kann die Berechnung der Biegemomente erfolgen:

Für den Querschnitt unter der Last  $P_1$  wird

$$M_1 = 6530 \cdot 1,40 \dots \dots \dots = 914200 \text{ cmkg}$$

Für den Querschnitt unter der Last  $P_2$  wird

$$M_2 = 6530 \cdot 3,50 - 2400 \cdot 210 \dots \dots \dots = 1781500 \text{ cmkg}$$

Für den Querschnitt unter der Last  $P_3$  wird

$$M_3 = 6530.550 - 2400.410 - 5000.200 = 1\,607\,500 \text{ cmkg}$$

Für den Querschnitt unter der Last  $P_4$  wird

$$M_4 = -[-7870.130] \dots = 1\,023\,100 \text{ cmkg.}$$

(Die Bestimmung von  $M_4$  ist am rechtsseitigen abgeschnittenen Trägerteil erfolgt.

Das größte Biegemoment tritt somit unter der Last  $P_2$  ein, sein Wert ist

$$M_2 = 1\,781\,500 \text{ cmkg.}$$

Die zulässige Beanspruchung des Flußeisens ist nach früherem zu  $s = 800 \text{ kg/qcm}$  anzunehmen, also ist nach der Grundformel für die Biegeberechnung ein Trägerquerschnitt nötig, dessen Widerstandsmoment  $W = \frac{M}{s} = \frac{1\,781\,500}{800} = 2227 \text{ cm}^3$  ist.

Nach den Tabellen bei II. § 8 hat ein Normalprofil I Nr. 36 ein Widerstandsmoment  $W = 1098 \text{ cm}^3$ , verwendet man zwei solcher Träger, so wird deren größte Beanspruchung  $s = \frac{1\,781\,500}{2 \cdot 1098} = 812 \text{ kg/qcm}$ .

Die Beanspruchung in den übrigen Querschnitten ist kleiner, nämlich unter der Last  $P_1$

$$s = \frac{M_1}{2 \cdot 1098} = \frac{914\,200}{2 \cdot 1098} = 420 \text{ kg/qcm.}$$

Unter der Last  $P_3$   $s = \frac{M_3}{2 \cdot 1098} = \frac{1\,607\,500}{2 \cdot 1098} = 730 \text{ kg/qcm.}$

Unter der Last  $P_4$   $s = \frac{M_4}{2 \cdot 1098} = \frac{1\,023\,100}{2 \cdot 1098} = 470 \text{ kg/qcm.}$

### 2. Träger mit einer konzentrierten Last.

Die Auflagerwiderstände ergeben sich folgendermaßen:

$$A \cdot l = P(1-a), \text{ hieraus } A = \frac{1-a}{l} \cdot P, \text{ ferner } B \cdot l = P \cdot a, \text{ also } B = \frac{a}{l} \cdot P.$$

Das größte Angriffsmoment tritt bei  $a$  auf und ist daher  $M_a = A \cdot a = \left(\frac{1-a}{l} \cdot P\right) \cdot a$ .

Von dieser Stelle an nimmt das Moment nach beiden Seiten hin stetig ab, so daß die Momentenlinie sich nach Bild 3 gestaltet.

Wirkt  $P$  in der Trägermitte, so wird

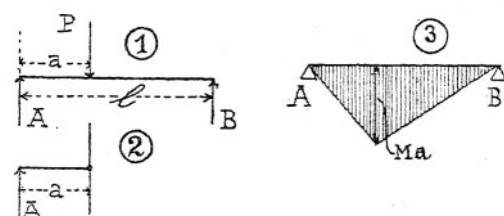
$$A = B = \frac{P}{2} \text{ und es ist } a = 1/2, \text{ also } M = A \cdot a = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{2}, \text{ d. h. } M = \frac{Pl}{4}.$$

Beispiel 40. Ein Holzbalken von  $\frac{20}{15} \text{ cm}$  Querschnitt liegt auf 4,5 m voneinander entfernten Stützen auf. Darf auf denselben 0,9 m vom linksseitigen Auflager entfernt eine Last von 1200 kg wirken?

Aufl. Linksseitiger Auflagerwiderstand  $A = \frac{4,5 - 0,9}{4,5} \cdot 1200 = 960 \text{ kg}$ , somit Biegemoment unter der Last  $M = 960 \cdot 0,9 = 86\,400 \text{ cmkg}$ .

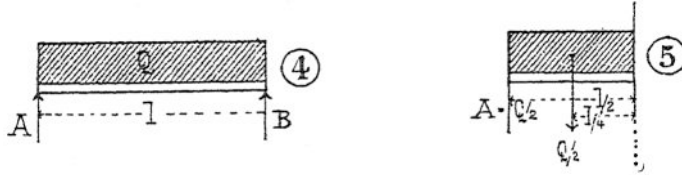
Das Widerstandsmoment des Balkenquerschnitts ist nach II. § 7, Tabelle,  $W = \frac{bh^2}{6} = \frac{15 \cdot 20^2}{6} = 1000 \text{ cm}^3$ , somit wird die Beanspruchung nach der Grundformel für die Biegefestigkeit  $s = \frac{M}{W} = \frac{86\,400}{1000} = 86,4 \text{ kg}$ .

Nach den Tabellen bei II. § 4 erreicht diese Beanspruchung den äußersten Wert der Zulässigkeit.



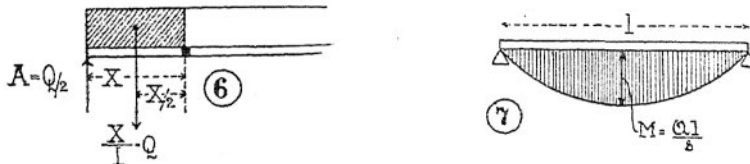
3. Eine Last  $Q$  sei über den Träger gleichmäßig verteilt.

Die Auflagerwiderstände  $A = \frac{Q}{2}$  und  $B = \frac{Q}{2}$ .



Das größte Moment ist in diesem Falle in der Trägermitte.

Auf eine Trägerhälfte (s. Bild 5) wirken der Auflagerwiderstand und die halbe Last  $Q$ . Letztere kann für Zwecke der Berechnung des Momentes in der Mitte der Trägerhälfte konzentriert gedacht werden, also wird in der Trägermitte  $M = \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Q \cdot l}{8}$ .



Das Moment an einer beliebigen Stelle  $x$  erhält man aus Bild 6

$$M = \frac{Q}{2} \cdot x - \left( \frac{x}{l} \cdot Q \right) \cdot \frac{x}{2} = \frac{Q}{2} \cdot \left( x - \frac{x^2}{l} \right)$$

oder wenn die Belastung pro Längeneinheit  $q$  heißt, also

$$q = \frac{Q}{l} \text{ ist, so wird } M = \frac{q \cdot l}{2} x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q}{2} x (l - x).$$

Untersucht man für diesen Fall die Momentenlinie, so zeigt sich, daß sie eine Parabel ist (s. Bild 7).

Beispiel 41. Welche gleichförmig verteilte Belastung  $Q$  darf auf den im Beispiel 37 zu II. § 8 berechneten Blechträger kommen, wenn derselbe 8,0 m Stützweite erhält?

Aufl. Der Trägerquerschnitt hat ein Widerstandsmoment  $W = 5\,227 \text{ cm}^3$ , er vermag daher bei einer Beanspruchung von  $s = 750 \text{ kg/qcm}$ , ein Biegemoment auszuhalten von  $M = W \cdot s = 5\,227 \cdot 750 = 3\,920\,250 \text{ cmkg}$ . Bei gleichförmiger Belastung ist aber in der Trägermitte  $M = \frac{Ql}{8}$ , also wird  $3\,920\,250 = \frac{Q \cdot 800}{8}$ , woraus  $Q = 39\,203 \text{ kg}$ .

In diesem Wert ist das Trägereigengewicht inbegriffen.

### B. Einfache freiaufliegende Balken (zeichnerische Behandlung).

Die zeichnerische Bestimmung der Auflagerdrücke und der Biegemomente geschieht folgendermaßen:

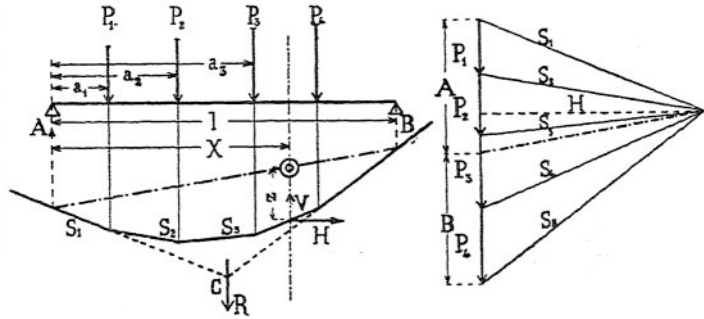
Nach I. § 19, dient ein Kräfte- und Seilpolygon zur Bestimmung der Auflagerdrücke.

Man ziehe für dieses Seilpolygon die Schlußlinie, d. h. die Verbindungslinie der Schnittpunkte der äußersten Seilpolygoneiten mit den Auflagervertikalen. Die Auflagerwiderstände  $A$  und  $B$  werden von einem zur Schlußlinie parallelen Polstrahl auf dem Kräftepolygon abgeteilt. Die Richtigkeit dieser Konstruktion ergibt sich ohne weiteres, wenn man zunächst die Kräfte  $P$  zu einer Resultierenden  $R$  mittels des Seilpolygons zusammensetzt und nachher diese Resultierende nach I. § 12 wieder in die Komponenten  $A$  und  $B$  zerlegt denkt.

Zur Bestimmung des Biegemomentes heißt man die Ordinaten des Seilpolygones in Bezug auf die Schlußlinie  $z$ , und bezeichnet mit  $H$  die Polabstand, d. h. den senkrechten Abstand des Poles vom Kräftepolygon, dann ist an jeder beliebigen Stelle das Biegemoment  $M = H \cdot z$ .

$H$  ist mit dem Kräftemaßstab zu messen und in „kg“ auszudrücken. Die Ordinate  $z$  ist an derjenigen Stelle zu messen, für welche das Angriffsmoment gerechnet werden soll, sie ist mit dem geometrischen Maßstab zu messen und in „cm“ auszudrücken.

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens läßt sich in der Weise führen, daß man sich einen Schnitt an jeder Stelle, für welche das Biegemoment am Träger bestimmt werden soll, geführt denkt und die Spannung der vom Schnitt getroffenen Seilpolygonseite in eine Vertikal- und in eine Horizontalkomponente zerlegt.



Die letztere ist gleich der Polabstand. Führt man den Schnitt z. B. zwischen  $P_3$  und  $P_4$ , so wirken am abgeschnittenen Seilpolygonteil die Kräfte  $S_1 P_1 P_2 P_3 S_4$ , welche ein Gleichgewichtssystem bilden. Die Kraft  $S_1$  in der ersten Seilpolygonseite zerlegt sich aber in die Komponente  $A$  und in eine Komponente nach der Schlußlinie, die Kraft  $S_4$  in der geschnittenen Seilpolygonseite zerlegt sich in eine Horizontalkomponente  $H$  (Polabstand) und in eine Vertikalkomponente  $V$ . Es muß somit in Bezug auf jeden Punkt in der Kräfteebene, also z. B. in Bezug auf den Schnittpunkt der Vertikalen bei  $x$  mit der Schlußlinie die Momentensumme gleich Null sein; also hat man, wenn anstatt  $S_1$  und  $S_4$ , deren Komponenten  $A$  und  $H$ , welche nicht durch den Drehpunkt gehen (die beiden andern Komponenten haben den Kraftarm Null) eingesetzt werden:

$$A \cdot x - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) - P_3(x - a_3) - H \cdot z = 0 \quad \text{oder} \quad H \cdot z = Ax - \sum P(x - a).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung gibt aber nach II. § 10 A das Biegemoment  $M_x$  an, also ist  $M_x = H \cdot z$ .

Die Lage des Poles  $O$  ist auch hier ganz ohne Einfluß auf das Resultat. Rückt man  $O$  weiter weg vom Kräftepolygon, so wird zwar  $H$  größer; allein das Seilpolygon wird flacher, also  $z$  kleiner und umgekehrt. Man kann die Rechnung etwas vereinfachen, wenn man  $O$  so annimmt, daß  $H = 100$  oder  $1000$  z. B. kg ist.

Man hat in dem Seilpolygon gewissermaßen eine Momentenlinie deren Grundlinie die Schlußlinie des Seilpolygones ist. Man erkennt hieraus sofort die Stelle, an welcher das Moment am größten wird, dies ist dort der Fall, wo  $z$  am größten ist; d. h. dort, wo die Richtung der Seilpolygonseiten von der Neigung nach einer Seite gegen die Schlußlinie in die Neigung nach der anderen Seite übergeht. An dieser Stelle wird die Summe der an einem Trägerteil wirkenden Kräfte gleich oder größer als der an demselben Trägerteil auftretende Auflagerdruck, wie die Vergleichung des Kräftepolygons mit dem Seilpolygon unmittelbar zeigt.

(Fortsetzung S. 86.)

Anwendungen der zeichnerischen Behandlung.

(Erläuterung f. S. 85.)

Bild 1.

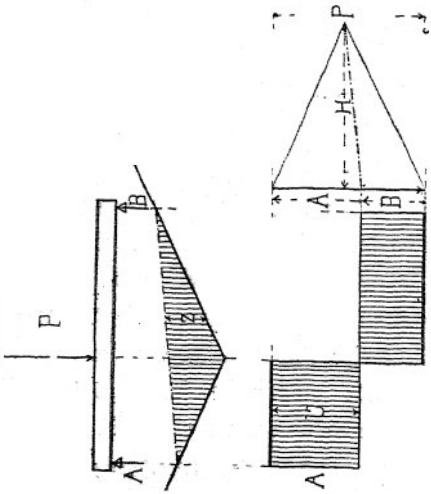


Bild 3.

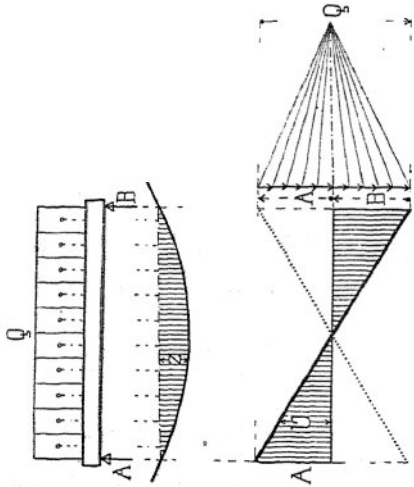


Bild 5.

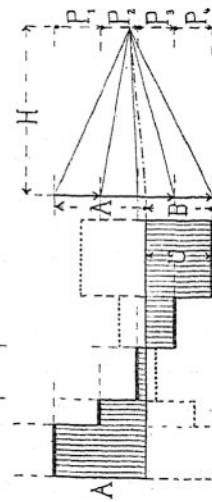
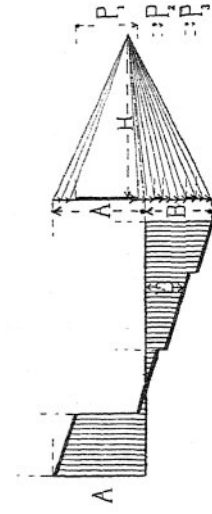
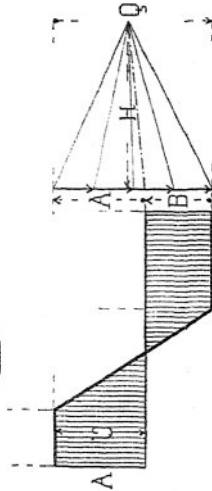
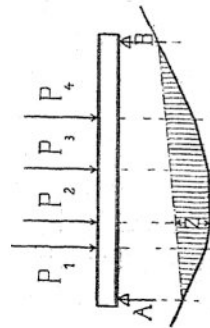
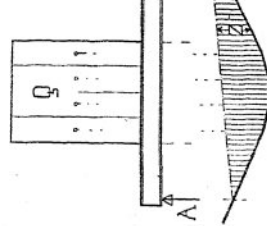
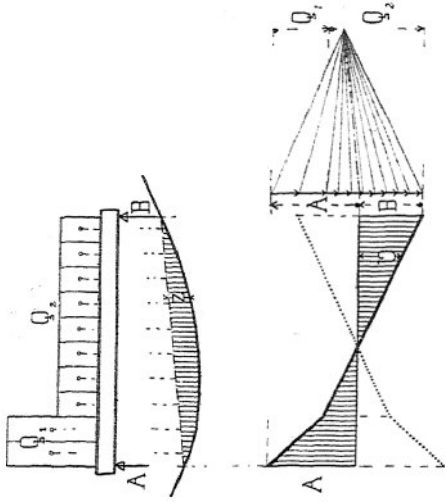


Bild 2.

Bild 4.

Bild 6.

### Erläuterungen zu den Anwendungen der zeichnerischen Behandlung auf S. 84.

Auf vorstehender Tafel ist die zeichnerische Bestimmung der Biegemomente für verschiedene Belastungen durchgeführt und es sind in den Abbildungen zugleich die resultierenden Vertikalkräfte dargestellt. Die schraffierten Flächen zwischen Seilpolygon und Schlußlinie sollen veranschaulichen, wie das Seilpolygon den Verlauf der Änderung der Momente entlang des Balkens angibt. Die Schraffuren in den Bestimmungsfiguren für die resultierenden Vertikalkräfte  $V$  sollen die Änderung der Kräfte  $V$  längs des Balkens deutlich hervorheben, die Bestimmung von  $V$  erfolgte durchweg für den linksseitigen Trägerteil;  $V$  am rechtsseitigen Trägerteil ist gleich groß, es hat aber entgegengesetztes Vorzeichen. (Punktierte Linien.)

Im einzelnen ist noch zu bemerken, daß man stetige Lasten in einzelne Teile zerlegt und die Größe dieser Teile in deren Schwerpunkten wirkend annimmt; ferner zu:

Bild 1 betrifft Belastung mit einer Einzellast. Der oben besprochene Verlauf der Biegemomente geht aus der Figur gleichfalls hervor.

Die resultierende Vertikalkraft bleibt zwischen Auflager und Kraft je unverändert, eben weil auf dieser Strecke keine Last auftritt.

Bild 2 betrifft Belastung mit mehreren Einzellasten. Das Biegemoment ändert sich von Lastangriffsstelle zu Lastangriffsstelle gleichmäßig.

Die resultierenden Vertikalkräfte bleiben zwischen zwei Kräften gleich und ändern sich unter jeder Kraft sprungweise.

Bild 3. Gleichförmige und stetige Belastung über der ganzen Stützweite. Das Seilpolygon wird zur Seilkurve, welche parabolisch verläuft.

Die resultierenden Vertikalkräfte ändern sich gleichmäßig und stetig; an Stelle der bisherigen staffelförmigen Gestalt der Bestimmungsfigur tritt eine Figur mit einer von dem Wert über einem Auflager zu dem gleich großen negativen Wert für das andere Auflager führenden geraden Linie.

Bild 4. Balken nur teilweise stetig und gleichförmig belastet. Die Momentenlinie ist nur unter der Last gebogen, unter den unbelasteten Trägerteilen verläuft sie gerade.

Die resultierende Vertikalkraft  $V$  bleibt je entlang der unbelasteten Trägerteile unverändert, der unter der Last sich vollziehende Wechsel verläuft geradlinig.

Bild 5. Der ganze Balken mit zwei verschieden großen, stetigen und gleichförmigen Lasten bedeckt.

Die Momentenlinie setzt sich aus zwei sich berührenden Kurvenzweigen zusammen.

Die Linie der „ $V$ “ hat unter den Wechselstellen der Belastung einen Bruch und ist im übrigen gerade.

Bild 6. Auf dem Balken ruhen Einzelkräfte und eine gleichförmig verteilte stetige Belastung.

Die Momentenlinie setzt sich aus Kurvenzweigen zusammen, die sich nicht berühren, sondern unter den Lastangriffsstellen Eckpunkte bilden.

Die Linie der resultierenden Vertikalkräfte zeigt eine Abstufung mit geneigten Staffeln.

Das Entstehen dieser Form ist leicht zu erkennen, wenn man sich die „ $V$ “-Linie von Bild 2 und 3 übereinander gezeichnet und die Ordinaten  $V$  aus beiden Linien addiert denkt.

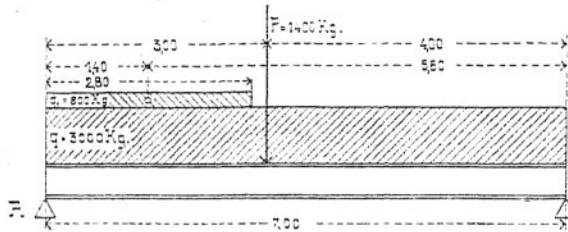
Fortsetzung von S. 83.

Man erhält somit folgenden Satz:

Ein größter oder ein kleinster Wert des Angriffsmomentes tritt dort ein, wo die resultierende Vertikalkraft Null wird oder ihr Vorzeichen ändert.

Beispiel 42. Auf einem Unterzug ruhen 35 qm Fußboden, ferner steht auf demselben auf 2,8 m Länge eine 3,64 m hohe Riegelwand und in 3,0 m Abstand vom linken Stützpunkt verursacht eine Säule 1400 kg Druck. Der Unterzug ist zu berechnen.

Aufl. Der Fußboden wiegt nach II § 5 Tabelle V samt Nutzlast 600 kg/qm, also belastet er den lfd. m Unterzug mit



$$q = \frac{35}{7} \cdot 600 = 3000 \text{ kg.}$$

Die Riegelwand wiegt nach II § 5 Tab. VI 220 kg/qm, also pro lfd. m Unterzug  $q_1 = 3,64 \cdot 220 = 800 \text{ kg.}$

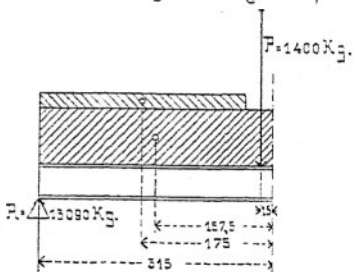
Diese Lasten verursachen bei A einen Auflagerdruck, welcher sich nach I § 19 II. Fall, Gleichung 1 a folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot 7,0 \cdot q = \frac{1}{2} \cdot 7,0 \cdot 3000 = 10500 \text{ kg} \\ &+ \frac{5,6}{7,0} \cdot 2,8 \cdot q_1 = \frac{5,6}{7,0} \cdot 2,8 \cdot 800 = 1790 \text{ kg} \\ &+ \frac{4,0}{7,0} \cdot P = \frac{4,0}{7,0} \cdot 1400 = 800 \text{ kg} \\ \hline A &= 13090 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Das größte Biegemoment tritt nun nach Obigem in jenem Querschnitt auf, bis zu welchem die Summe der auf dem linksseitigen Trägerteil ruhenden Lasten gleich dem Betrag von 13090 kg wird. Untersucht man diesbezüglich den Querschnitt unter P, so ergibt sich als Belastung des Trägerteiles zwischen A und P

$$\begin{aligned} 2,8 \cdot q_1 &= 2,8 \cdot 800 = 2240 \text{ kg} \\ + 3,0 \cdot q &= 3,0 \cdot 3000 = 9000 \text{ kg} \\ + P &= 1400 = 1400 \text{ kg} \\ \hline &\text{d. h. zus. } 12640 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Die Größe des Auflagerdruckes wird also hier von der Lastensumme noch nicht erreicht, es ist daher nicht unter P das größte Biegemoment vorhanden, sondern 3,15 m rechts von der Stütze A. Hier ist nämlich die Lastensumme



$$\begin{aligned} 2,8 \cdot q_1 &= 2,8 \cdot 800 = 2240 \text{ kg} \\ + 3,15 \cdot q &= 3,15 \cdot 3000 = 9450 \text{ kg} \\ + P &= 1400 = 1400 \text{ kg} \\ \hline &= 13090 \text{ kg} \end{aligned}$$

d. h. gleich dem Auflagerdruck an diesem Trägerteil. Die Größe dieses Biegemomentes ergibt sich aus der Schnittfigur zu  $M = 13090 \cdot 3,15 - (2,8 \cdot 800) \cdot 1,75$

$$- (3,15 \cdot 3000) \cdot 1,57,5 + 1400 \cdot 1,5 = 2221975 \text{ cm/kg.}$$

Besteht der Unterzug aus Flußeisen, so darf dessen Beanspruchung nach Seite 46 höchstens 1000 kg/qcm betragen, es wird daher ein Trägerprofil nötig, dessen Widerstandsmoment mindestens

$$W = \frac{M}{s} = \frac{2221975}{1000} = 2222 \text{ cm}^3 \text{ ist.}$$

I NP 47<sup>1/2</sup> hat  $W = 2396 \text{ cm}^3$  (vgl. S. 70) und ist daher passend.



### C. Frei aufliegender Balken mit zwei Kragstücken (zeichnerisch).

Die Berechnung der Auflagerdrücke und Biegemomente für einen frei aufliegenden Balken mit beiderseitigen Kragstücken geschieht bei beliebiger Belastung am einfachsten auf zeichnerischem Wege. Erklärung für die Schlußlinie des Seilpolygons nach S. 82 beachten!

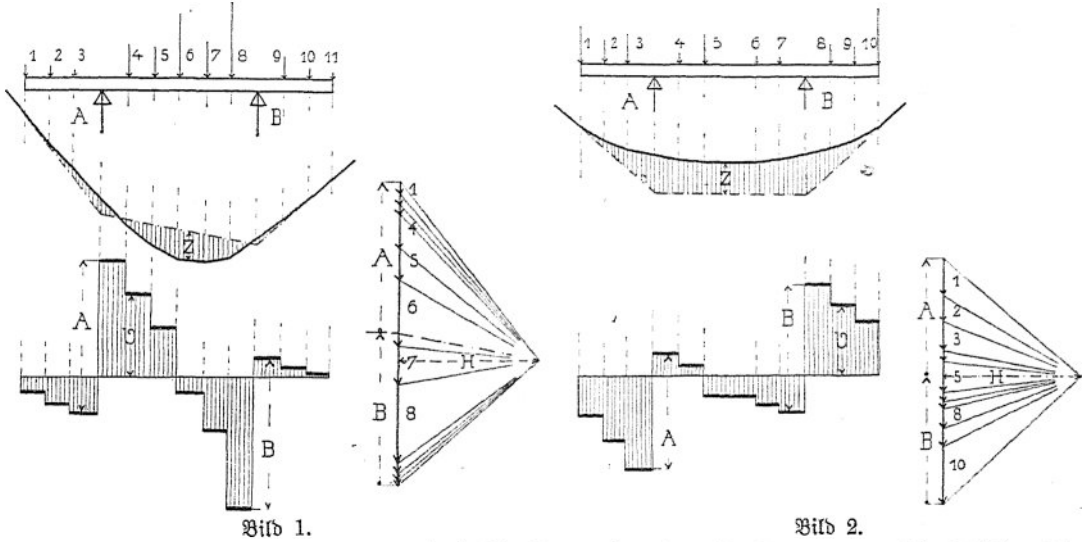


Bild 1.

Bild 2.

In Bild 1 ist angenommen, daß die Kragenden des Balkens nur mäßig belastet seien, so daß teils positive, teils negative Biegemomente am Balken auftreten. In Bild 2 sind für die Belastungen der Kragenden so große Werte angenommen, daß der ganze Balken nach oben gebogen wird weil nur negative Angriffsmomente auftreten. In Bild 3 ist diejenige Stellung der Auflager unter einem gleichförmig und stetig belasteten Balken bestimmt, bei welcher die Biegemomente in Balkenmitte und über beiden Auflagern ziffermäßig gleich groß werden. (Vgl. Aufg. 46 und unten Abschnitt D.)

Die Darstellung der resultierenden Vertikalkräfte bedarf, nachdem dieselbe auf Seite 84 und 85 eingehend besprochen wurde, keiner weiteren Erläuterung mehr.

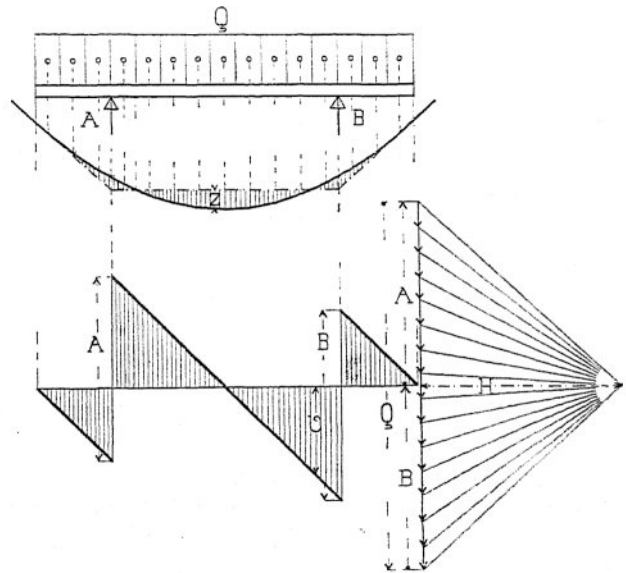


Bild 3.

### D. Frei aufliegender Balken mit zwei gleich langen Kragstücken (rechnerisch).

Für den besonderen Fall, daß die beiden Kragstücke gleiche Länge haben und der Balken mit  $q$  kg/lfd. m gleichmäßig und stetig belastet sei, möge auch die rechnerische Ermittlung hier kurz erörtert werden.

Die Auflagerdrücke werden  $A = B = \frac{q \cdot l}{2}$ .

Das Biegemoment über einem Auflager ist  $M = -(q \cdot c) \frac{c}{2} = -\frac{qc^2}{2}$ .

An beliebiger Stelle  $x$  zwischen den Stützpunkten wird  $M = A(x - c) - qx \cdot \frac{x}{2}$

Bild 1.

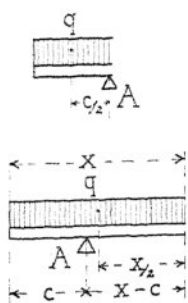


Bild 3.

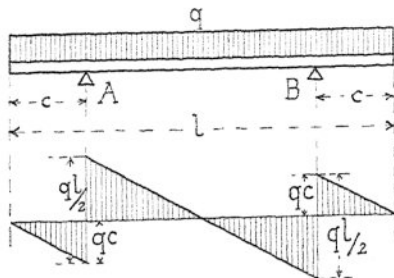


Bild 2.

$$= \frac{ql}{2} \left( \frac{1}{2} - c \right) - \frac{q}{2} \frac{l^2}{4} = \frac{ql^2}{8} - \frac{qlc}{2}, \text{ oder mit } Q = ql \text{ wird } M = \frac{Ql}{8} - Q \cdot \frac{c}{2}.$$

Bild 4.

In dieser Formel zeigt das abzuziehende Glied  $\frac{qlc}{2} = Q \frac{c}{2}$  den bedeutenden Einfluß, welchen die belasteten Kragstücke auf die Verminderung des Biegemomentes haben, ohne welche das Moment, (also bei Stellung der Stützen unter die Trägerenden) den Betrag  $\frac{ql^2}{8} = \frac{Ql}{8}$  erreichen würde.

Für Balken, welche überall denselben Querschnitt haben, wird diejenige Stützenstellung die vorteilhafteste sein, bei welcher die Biegemomente über den Stützen und in Trägermitte gleich groß werden, bei welcher also  $\frac{qc^2}{2} = \frac{ql^2}{8} - \frac{qlc}{2}$  oder nach Division mit  $\frac{q}{2}$   $c^2 + lc - \frac{l^2}{4} = 0$  ist. Dieser günstige Fall wird eintreten, wenn  $c = -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4}}$   $= -\frac{l}{2} \pm \frac{l}{2} \sqrt{2}$ .

Das Minuszeichen führt zu einem unbrauchbaren Wert. Die Ausfrragung müßte somit die Länge  $c = \frac{l}{2}(\sqrt{2} - 1) = \text{rund } 0,207 l$ , d. h. etwa ein Fünftel der Balkenlänge erhalten. Die drei gleich großen Biegemomente erreichen alsdann nur noch den Wert  $M = \frac{qc^2}{2} = \frac{q}{2} \cdot 0,207^2 l^2 = 0,0214 ql^2 = \frac{ql^2}{47}$  oder  $= \frac{Ql}{47}$ , d. h. der Balken hat bei dieser Unterstühtungsweise eine nahezu sechsmal so große Tragkraft als bei Stellung der Stützen unter seinen Enden. Dieser Vergleich ist für viele praktische Fälle nicht maßgebend; wichtiger erscheint häufig der Vergleich mit demjenigen Biegemoment, das sich für die Balkenstrecke AB ergibt, wenn Kragstücke nicht an derselben vorhanden sind.

Die Größe des Biegemomentes für letzteren Fall ergibt sich folgendermaßen, wenn von der seitherigen Bedeutung von  $l$  und  $Q$  ausgegangen wird, Stützweite  $AB = l - 2 \cdot 0,207 l = 0,586 l$ , also Belastung  $Q$  auf  $AB$   $0,586 l \cdot q = Q_1$  und daher Biegemoment  $M = \frac{Q_1 \cdot 0,586 l}{8} = \frac{0,586^2 l^2 q}{8} = 0,043 ql^2 = 0,043 Ql$ .

$= A(x - c) - \frac{qx^2}{2}$ , eine weitere algebraische Ausarbeitung dieser Gleichung ist zwecklos, da man für die Fälle der Balkenberechnung die Zahlenwerte unmittelbar einsetzen kann.

Für den Querschnitt in der Balkenmitte wird  $x = \frac{l}{2}$ , also

$$M = +A \left( \frac{l}{2} - c \right) - \frac{q}{2} \frac{l^2}{4}$$

Dasselbe ist also doppelt so groß als das Biegemoment, welches beim Vorhandensein der belasteten Kragstücke von  $0,207 l$ , also rund  $\frac{AB}{3}$  Ausfrangungsweite sich ergibt.

Man erzielt somit durch die Ausdehnung der Belastung auf die beiderseitigen Kragstücke, welche die Stützpunkte um ungefähr ein Drittel der Stützweite überragen, eine Verdoppelung der Tragkraft des Balkens.

Da sich in der Regel die Belastung der Balken aus Eigengewicht und Nutzlast zusammensetzt, so ist zu untersuchen, bei welchem Verhältnis zwischen diesen beiden Belastungsteilen die Gefahr des Umkippen bei ausschließlicher Besetzung eines Kragstückes mit Nutzlast eintreten würde.

Das Eigengewicht sei für die Längeneinheit des Balkens =  $p$  kg, die Nutzlast =  $p_1$  kg, alsdann wird die Belastung des linken Kragstückes  $1$  ( $p + p_1$ ) und die Belastung des übrigen Balkenteiles  $4 \cdot p$ . Der Auflagedruck in  $B$  würde also aufgehoben, d. h. die Gefahr des Kippens um  $A$  würde eintreten, sobald

$$\left[1 \cdot (p + p_1)\right] \cdot \frac{1}{2} > [4 p] \cdot 2, \text{ d. h. sobald } p_1 > 15 p \text{ wird.}$$

Dieser Fall wird praktisch kaum jemals eintreten; bei Balkenlagen steigt die Nutzlast selbst in Lagerhäusern

nicht über das Fünffache des Bodeneigengewichtes, in der Regel überschreitet sie kaum das Doppelte des Eigengewichtes der Decke, so daß also bei Balkenlagen für gewöhnlich drei- bis siebenfache Sicherheit gegen Umkippen im Falle der Anwendung derartiger Kragstücke vorhanden ist.

Für den freiausliegenden Balken mit Kragstücken, dessen Querschnitt nur für Vollbelastung bemessen worden ist, ergibt sich eine gefährliche Belastung dann, wenn auf den Kragenden nur das Eigengewicht der Konstruktion und keine Nutzlast ruht. Man tritt dieser Gefahr nicht in der Weise entgegen, daß der Balken auch für diesen Belastungsfall berechnet und sein Querschnitt dementsprechend stärker gemacht wird, insoweit die Möglichkeit besteht, die Verminderung des Biegemomentes über den Stützpunkten, welche die Vermehrung des Biegemomentes in der Mitte der Öffnung zuläßt, auf anderem Wege fern zu halten.

Die auf einem Kragstück ruhende, gleichförmig und stetig verteilte Nutzlast hätte die Größe  $c \cdot p'$  und würde über der benachbarten Stütze das Biegemoment  $c p' \cdot \frac{c}{2}$  hervorrufen. Ein ebenso großes Biegemoment läßt sich aber auch durch eine am Balkenende wirkende Einzellast  $P$  erzeugen, die sich ergibt aus  $P \cdot c = c p' \cdot \frac{c}{2}$  oder  $P = \frac{p' c}{2}$ , d. h. deren Größe ist gleich der Hälfte der auf ein Kragende entfallenden Nutzlast. Wenn nun möglich ist, die Enden des Kragbalkens mit anderen Konstruktionsteilen so in Verbindung zu bringen, daß diese Enden sich, für den Fall des Eintretens von Vollbelastung nur in der Balkenmittelloffnung, nicht heben können, ohne mindestens eine Last  $P$  von der angegebenen Größe mit in die Höhe zu nehmen, so darf sich die Berechnung des Balkens auf die Voraussetzung seiner Vollbelastung auf die ganze Länge  $l$  beschränken. Die Gegengewichte  $P$  werden in der Regel schon dadurch mit dem Balken in Verbindung gebracht, daß dessen Enden mit Rücksicht auf den Längsverband und dergleichen konstruktive Erfordernisse an anderen Bauteilen anzuschließen sind.

Bild 5.

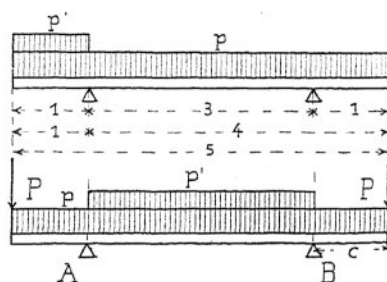


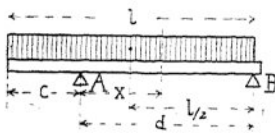
Bild 6.

Bei Herstellung dieser Anschlüsse ist aber stets im Auge zu behalten, daß denselben keine so große Biegungsfestigkeit gegeben werden darf, daß die äußeren Balkenteile ihre Eigenschaft als freitragende Kragbalken verlieren. Es kann daher nötig werden, solche Anschlußlaschen oder dergleichen Verbindungsglieder mit erweiterten Schraubenlöchern oder gar erst nach Aufbringen der Belastungen anzuschließen. Die Schrauben oder sonstigen Verbindungsteile dürfen ferner nicht so fest angezogen werden, daß der Zusammenhang am Balkenende durch Reibungskräfte wieder hergestellt wird, so daß das Ende der Kragbalken tatsächlich doch nicht freitragend wäre.

Schließlich ist noch darauf aufmerksam zu machen, daß bei den freiaufliegenden Balken mit Kragenden das größte Biegemoment und die größte resultierende Vertikalkraft über den Auflagern auf ein und denselben Querschnitt wirksam werden, welcher also sowohl auf Biegung als auch auf Abscherung zu berechnen ist.

### F. Freiaufliegender Balken mit einem Kragstück.

Die Belastung betrage  $q$  kg/lfd m, die ganze Balkenlänge sei  $l$ , die Länge des Kragstückes  $c$  und somit der Abstand zwischen den Stützen  $d = l - c$ .



S. 11.

$$\text{Msdann werden die Auflagerdrücke } A = \frac{ql \cdot l/2}{d} \\ = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{d} \quad (1) \quad \text{und} \quad B = \frac{ql \left( d - \frac{l}{2} \right)}{d} = \frac{ql}{2d} (2d - l)$$

$$\text{oder weil } l - d = c \text{ ist, so wird } B = \frac{ql}{2} \frac{d - c}{d} \quad (2)$$

Eine algebraische Umformung des Ausdruckes für  $B$  ist entbehrlich, da für praktische Zwecke stets Maßzahlen an Stelle der Buchstabenausdrücke treten werden.

$$\text{Das Biegemoment über der Stütze A ist } M = -qc \cdot \frac{c}{2} = -\frac{qc^2}{2} \quad (3)$$

Daselbe biegt die Stufe nach oben.

$$\text{Das Biegemoment in einem Querschnitt zwischen A und B im beliebigen Abstand } x \\ \text{von A wird } M_x = A \cdot x - q(c + x) \frac{c + x}{2} = \frac{ql^2}{2d} \cdot x - \frac{q}{2}(c + x)^2 \quad (4)$$

Dieses Biegemoment erreicht seinen größten Wert nicht in der Mitte von  $AB$ , sondern an einer andern Stelle, welche von der Mitte gegen  $B$  hin gelegen ist und sich von der Mitte um so mehr entfernt, je größer die Länge  $c$  des Kragstückes im Verhältnis zur gesamten Balkenlänge  $l$  ist.

Der Ort des größten positiven Biegemomentes zwischen  $A$  und  $B$  ist um

$$x = \frac{d}{2} + \frac{c^2}{2d} \quad (5) \quad \text{von A entfernt, was hier nicht näher nachgewiesen werden kann.}$$

$$\text{Dieses Biegemoment wird daher } M_m = \frac{ql^2}{2d} \left( \frac{d}{2} + \frac{c^2}{2d} \right) - \frac{q}{2} \left( c + \frac{d}{2} + \frac{c^2}{2d} \right)^2 \\ = \frac{ql^2}{2d} \cdot \frac{c^2 + d^2}{2d} - \frac{q}{2} \left( c + \frac{c^2 + d^2}{2d} \right)^2 = \frac{ql^2 (c^2 + d^2)}{4d^2} - \frac{q(c + d)^2}{2 \cdot 4d^2}.$$

$$\text{Setzt man ein } c + d = l, \text{ so wird } M_m = \frac{ql^2}{8d^2} (2c^2 + 2d^2 - c^2 - d^2 - 2cd) \\ M_m = \frac{ql^2}{8} \left( \frac{d - c}{d} \right)^2 \quad (6) \quad \text{oder weil } d = l - c \quad M_m = \frac{ql^2}{8} \left( \frac{1 - 2c}{d} \right)^2 \quad (7)$$

Hat man  $B = \frac{ql}{2} \frac{d-c}{d}$  schon ausgerechnet, so kann  $B^2 = \frac{q^2 l^2}{4} \left( \frac{d-c}{d} \right)^2$  in Gleichung (6) eingesetzt werden und man erhält  $M_{\min} = \frac{q^2 l^2}{2 \cdot q \cdot 4 d^2} (d-c)^2 = \frac{B^2}{2q}$  (8)

Nun ist auch leicht diejenige Länge  $d$  des Balkenstückes zwischen den Stützen, bzw. die Länge  $c$  des Kragstückes zu bestimmen, bei welcher das negative Biegemoment über der Kragstütze gleich dem größten positiven Biegemoment zwischen beiden Stützen wird. Man hat nur die Werte aus Gleichung (3) und (6) einander gleich zu setzen, d. h.

$$\frac{q c^2}{2} = \frac{q l^2}{8 d^2} (d-c)^2 \quad \text{oder} \quad l^2 (d-c)^2 = 4 c^2 d^2, \quad \text{also} \quad l(d-c) = \pm 2 c d,$$

aber  $l = d + c$ , somit  $(d+c)(d-c) = \pm 2 c d$ , oder  $d^2 - c^2 = \pm 2 c d$  (9), also für das  $+$ -Zeichen  $c^2 + 2 c d + d^2 = 2 d^2$ , daher  $(c+d)^2 = 2 d^2$ , aber  $c+d = l$ , also  $d = \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0,707 l$  (10), somit  $c = 0,293 l$ .

Es ergibt sich daher abgerundet  $d = 0,7 l$  und  $c = 0,3 l$ .

Für diese Werte wird nach Gleichung (5)  $x = 0,35 l + \frac{0,09 l^2}{1,4 l} = 0,4 l$  und das Biegemoment an dieser Stelle

$$M = \frac{q l^2}{8} \left( \frac{1 - 2 \cdot 0,293 l}{0,707 l} \right)^2 = \frac{q l^2}{8} \cdot 0,343, \quad \text{also etwa} \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{q l^2}{8} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{Q l}{8}$$

d. h.: Bei einem frei aufliegenden Balken mit einem Kragstück werden das größte negative Biegemoment über der Kragstütze und das größte positive Biegemoment zwischen den Stützen gleich groß, wenn die Kraglänge drei Zehntel der ganzen Balkenlänge ist. Das größte Biegemoment zwischen den Stützen tritt in demjenigen Querschnitt auf, welcher von der Kragstütze um vier Zehntel der ganzen Balkenlänge entfernt ist, und ist nur etwa ein Drittel des Biegemomentes, das sich ergeben würde, wenn beide Stützen unter den Balkenenden stünden. Man ersieht aus vorstehendem, daß die rechnerische Behandlung schon sehr umständlich wird, der weniger Geübte wird besser daran tun einen solchen Balken zeichnerisch zu bearbeiten.

Die zeichnerische Ermittlung der Biegemomente und der resultierenden Vertikalkräfte an frei aufliegenden Balken mit einem Kragstück geschieht in ähnlicher Weise wie beim Vorhandensein zweier Kragstücke, vgl. Bild 10—12 im nächsten Abschnitt.

In diesem Bild ist nur eine Last am freitragenden Ende angenommen, um deutlich zu machen, wie Belastungen auf dem freitragenden Balkenteil auf die Biegemomente und die resultierenden Vertikalkräfte, sowie den Auflagerdruck  $B$  wirken. Sind mehrere Lasten auf dem Träger vorhanden, so ändert sich die zeichnerische Bestimmung der Biegemomente nur insofern, als das Seilpolygon nicht nur zwei, sondern mehrere Seiten hat.

### G. Eingespannter Träger mit einem freitragenden Ende (rechnerisch).

1. Eine Last  $P$  befindet sich am freien Ende eines eingespannten Trägers.

An irgend einer Stelle  $x$  ist, wenn der linksseitige abgeschnittene Trägerteil betrachtet wird,  $M_x = P \cdot x$  (s. Bild 8b).

Das größte Biegemoment  $M$  wird also erhalten an der Einspannungsstelle  $M = P l$  (s. Bild 8).

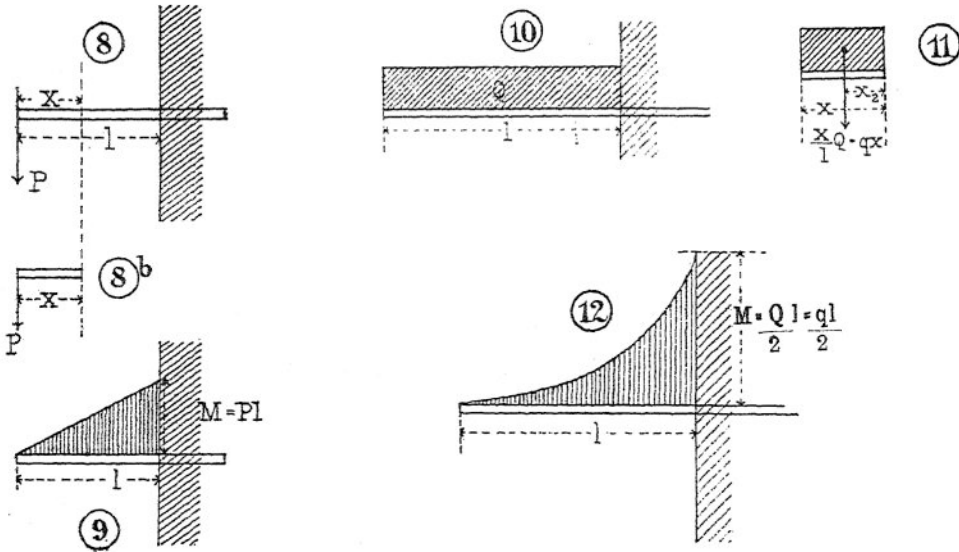
Da die Momente proportional mit  $x$  wachsen, so wird die Momentenlinie gerade (f. Bild 9).

Beispiel 43. Welche Last  $P$  darf am freien Ende eines eingespannten Trägers, der aus  $\square$  Eisen Nr. 16 besteht, angehängt werden, wenn derselbe 1,2 m über die Einspannungsstelle hervorragt?

Aufl. Nach den Tabellen bei II. § 8 hat ein  $\square$  Eisen Nr. 16  $W = 117 \text{ cm}^3$ .

Die zulässige Beanspruchung des Eisens sei zu  $s = 800 \text{ kg/qcm}$  angenommen, dann ist der Träger imstande, ein Biegemoment auszuhalten von  $M = W \cdot s = 2 \cdot 117 \cdot 800 = 187\,200 \text{ cmkg}$ .

Es ist aber  $M = P \cdot l$  oder  $187\,200 = P \cdot 120$ , somit  $P = \frac{187\,200}{120} = 1560 \text{ kg}$ .



2. Gleichmäßig verteilte Last  $Q$  auf einem eingespannten Träger mit freiem Ende.

In einem beliebig gewählten Querschnitt  $x$  hat man:

$$M_x = \left( \frac{x}{l} \cdot Q \right) \cdot \frac{x}{2} = \frac{Qx^2}{2l} \quad (\text{f. Bild 11}).$$

Für die Einspannungsstelle erreicht  $x$  seinen größten Wert  $x = l$ , daselbst hat man also das größte Biegemoment, nämlich

$$M = \frac{Q \cdot l^2}{2l} = \frac{Ql}{2}$$

oder mit Verwendung der Belastung  $q$  pro lfd. Meter also mit  $q = \frac{Q}{l}$ ,

wird  $M_x = qx \cdot \frac{x}{2} = q \frac{x^2}{2}$   $M = ql \cdot \frac{l}{2} = q \cdot \frac{l^2}{2}$ .

Beispiel 44. Auf einen eingespannten, 1,4 m freitragenden Berandaträger kommen 3,5 qm Bodenfläche, welches  $\square$  Eisen ist für den Träger zu wählen?

Aufl. Die Bodenkonstruktion samt Nutzlast wiegt nach Tabelle V bei II. § 5  $[250 + 200] = 450 \text{ kg/qm}$ .

Die gleichförmig verteilte Gesamtlast ist somit  $Q = 3,5 \cdot 450 = 1575 \text{ kg}$  und somit das größte Biegemoment an der Einspannungsstelle  $M = \frac{1575 \cdot 140}{2} = 110\,250 \text{ kg}$ .

Der Trägerquerschnitt muß also ein Widerstandsmoment erhalten von

$$W = \frac{M}{s} = \frac{110\,250}{800} = 138 \text{ cm}^3.$$

Nach Tabelle bei II. § 8 hat  $\text{I}$  Nr. 17 ein Widerstandsmoment  $W = 139 \text{ cm}^3$  und ist somit passend.

### H. Eingespannter Träger mit einem freitragenden Ende (zeichnerisch).

Die zeichnerische Bestimmung ist in folgenden Abbildungen angegeben, zu welchen zu bemerken ist: Die Träger können wie die Kragstücke von freiliegenden Balken, deren Stützen nicht an ihren Enden liegen, berechnet werden. Nach dem in den vorhergehenden Abschnitten Gezeigten liegen somit für die eingespannten freitragenden Balken die Ordinaten  $z$  zwischen dem Seilpolygon und der Rückwärtsverlängerung der ersten Seilpolygoneite.

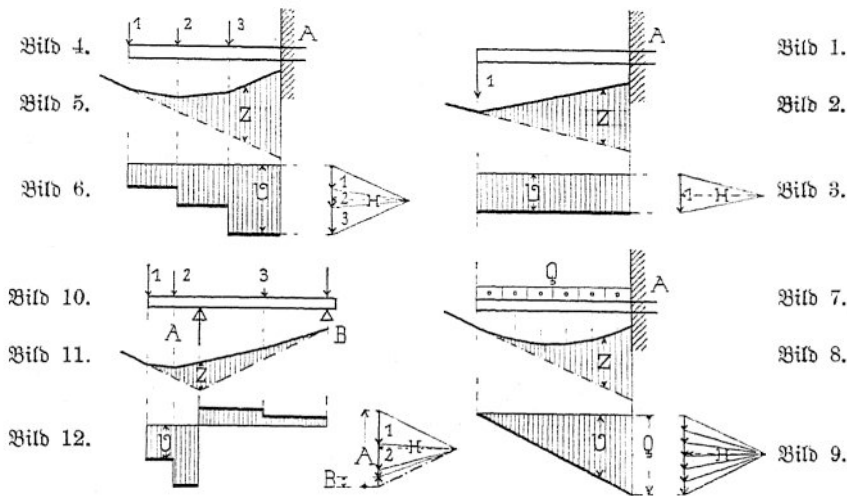


Bild 1—3. Einzellast  $P$  am freien Trägerende. Momentenfläche eingeschlossen zwischen der zweiten Seilpolygoneite und der Rückwärtsverlängerung der ersten Seilpolygoneite.

Resultierende Vertikalskraft auf die ganze Trägerlänge  $V = P$ .

Bild 4—6. Mehrere Einzellasten auf dem Träger. Momentenfläche eingeschlossen zwischen dem Seilpolygon und der Rückwärtsverlängerung der ersten Seilpolygoneite.

Die resultierenden Vertikalkräfte bleiben von Last zu Last gleich und ändern sich unter jeder Last sprungweise.

Bild 7—9. Gleichförmige und stetige Belastung  $Q$  auf dem ganzen Träger. Momentenfläche eingeschlossen zwischen der Seilkurve und der Rückwärtsverlängerung der ersten Seilpolygoneite.

Die resultierenden Vertikalkräfte sind am freien Trägerende gleich Null und wachsen gleichmäßig bis zur Einspannungsstelle, woselbst sie gleich  $Q$  werden.

Bild 10—12 zeigt die Wirkung großer Belastung auf dem freien Ende eines zwischen den Stützen unbelasteten Balkens. Der Auflagerdruck in  $B$  wird negativ, d. h. es ist in  $B$  eine Verankerung nötig.

## J. Formelzusammenstellung für verschiedene Belastungs- und Unterstützungsweisen von Balken.

Aus den Formeln in nebenstehender Tabelle möge eine kurze Vergleichung des Einflusses der Belastung und der Unterstüzung eines Balkens auf dessen Tragfähigkeit abgeleitet werden.

Zu dem Zweck sei angenommen, daß in sämtlichen nachstehend erörterten Fällen die Länge  $l$  des Balkens gleich groß sei und es werde untersucht, welche Belastungen das gleiche Biegemoment in den Fällen 1, 2, 4, 6, 7, 8 und 10 hervorrufen wie die Last  $P = 1$  kg im Fall 3, vgl. Aufg. 39 der angehängten Aufgabensammlung. Die Berechnung gibt ohne Berücksichtigung des Vorzeichens für

Fall 3.  $M = P \cdot l = 1 \cdot 1$  cmkg, als Moment für  $P = 1$  kg.

Fall 1. Last in der Mitte der Stützweite

$$M = \frac{Pl}{4} = 1 \cdot 1 \text{ cmkg, also darf werden } P = 4 \text{ kg}$$

Fall 2.  $M = \frac{Ql}{8} = 1 \cdot 1$  cmkg, " " "  $Q = 8$  kg

Fall 4.  $M = \frac{Ql}{2} = 1 \cdot 1$  cmkg, " " "  $Q = 2$  kg

Fall 6. Nach Abschnitt C Seite 88 wird für die günstigste Stützenstellung\*)

$$M = \frac{Ql}{47} = 1 \cdot 1 \text{ cmkg, also darf werden } Q = 47 \text{ kg}$$

Fall 7.  $M = \frac{Ql}{8} = 1 \cdot 1$  cmkg, " " "  $Q = 8$  kg

Fall 8.  $M = \frac{Ql}{12} = 1 \cdot 1$  cmkg, " " "  $Q = 12$  kg

und bei unvollständiger Einspannung

$$M = \frac{Ql}{16} = 1 \cdot 1 \text{ cmkg, " " " } Q = 16 \text{ kg}$$

Fall 10.  $M = \frac{Pl}{8} = 1 \cdot 1$  cmkg, " " "  $P = 8$  kg

Fall 11. Günstigste Stützenstellung nach Abschnitt F Seite 91

$$M = \frac{1}{3} \frac{Ql}{8} = 1 \cdot 1 \text{ cmkg, also darf werden } Q = 24 \text{ kg.}$$

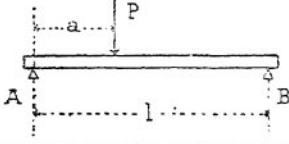
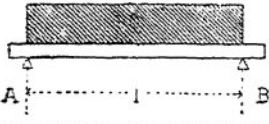
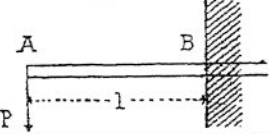
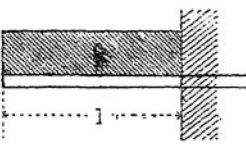
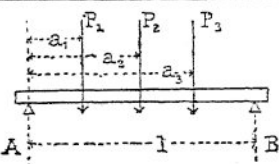
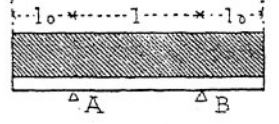
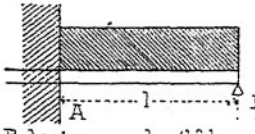
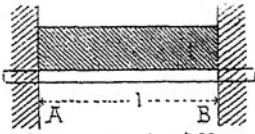
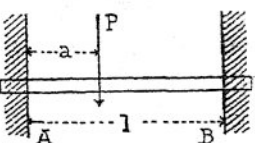
Die Vergleichung dieser Ergebnisse zeigt, von welcher Wichtigkeit es ist, beim Konstruieren auf Einspannung der Trägerenden einerseits und auf gleichmäßige Verteilung der Lasten andererseits bedacht zu sein, sowie Konstruktionen, welche diese beiden Rücksichtnahmen erleichtern, zu bevorzugen.

Schließlich sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß wenn man mehrere Einzellasten hat, welche annähernd gleich groß und annähernd über den Träger gleich verteilt sind, für viele Fälle der Praxis die Summe  $Q$  dieser Einzellasten als eine gleichmäßig verteilte stetige Belastung behandelt werden darf.

\*) Die in Reihe 6 der Tabelle auf Seite 95 angegebenen Werte für  $+M$  und für  $e$  beziehen sich auf  $l_0 < 0,207(1 + l_0)$ .



Unter  $e$  ist der Abstand des Ortes des grössten Biegemomentes vom linksseitigen Auflager verstanden.

Nr.	Unterstützung und Belastung.	Auflagerdruck		Biegemomente				Ort des grössten Biegemomentes.
		bei A.	bei B.	bei $x=0$ also bei A.	bei $x=l$ also bei B.	In beliebiger Entfernung $x$ von A.	Grösstes Biegemoment bei $x=e$ .	
1.		$P \frac{l-a}{l}$	$P \cdot \frac{a}{l}$	0	0	$x < a$ $M = P \frac{l-a}{l} x$ $x > a$ $M = P \frac{a}{l} (l-x)$	$P \frac{a(l-a)}{l}$	$e = a$
2.		$\frac{Q}{2}$	$\frac{Q}{2}$	0	0	$M = \frac{Q}{2} \left( x - \frac{x^2}{l} \right)$	$M = \frac{Ql}{8}$	$e = l/2$
3.		—	P	0	$-P \cdot l$	$-P \cdot x$	$-P \cdot l$	$e = l$
4.		—	Q	0	$-\frac{Ql}{2}$	$-\frac{Q \cdot x^2}{2l}$	$-\frac{Q \cdot l}{2}$	$e = l$
5.		$\frac{1}{l} \sum P(l-a)$	$\frac{1}{l} \sum P \cdot a$	0	0	$A \cdot x$ $-\sum P(x-a)$	$A \cdot e$ $-\sum P \cdot (l-a)$	s. II. § 11
6.	 Belastung $q$ kg/lfd. m also Gesamtlast $Q = q \cdot l$ kg	$q \left( l_0 + \frac{l}{2} \right)$	$q \left( l_0 + \frac{l}{2} \right)$	$-\frac{q}{2} \cdot l_0^2$ $= -\frac{Q l_0}{2}$	$-\frac{q}{2} \cdot l_0^2$ $= -\frac{Q l_0}{2}$	$\frac{1}{2} q \cdot$ $(x l - x^2 - l_0^2)$	Grösstes positives Moment $\frac{1}{8} q \cdot$ $(l^2 - 4 l_0^2)$	$e = l/2$
7.	 Belastung $q$ kg/lfd. m also Gesamtlast $Q = q \cdot l$ kg	$\frac{5}{8} q l = \frac{5}{8} Q$	$\frac{3}{8} q l = \frac{3}{8} Q$	$-\frac{1}{8} q l^2$ $= -\frac{Q l}{8}$	0	$\frac{1}{8} q \cdot$ $(5 l x - 4 x^2 - l^2)$	Grösstes positives Moment $\frac{9}{128} q l^2$ $= \frac{9}{128} Q \cdot l$	$e = \frac{5}{8} l$
8.	 Belastung $q$ kg/lfd. m. also Gesamtlast $Q = q \cdot l$ kg	$\frac{q l}{2} = \frac{Q}{2}$	$\frac{q l}{2} = \frac{Q}{2}$	$-\frac{q l^2}{12}$ $= -\frac{Q l}{12}$	$-\frac{q l^2}{2}$ $= -\frac{Q l}{12}$	$\frac{q x}{2} (l-x)$ $-\frac{q l^2}{12}$	Grösstes positives Moment $\frac{q l^2}{24} = \frac{Q l}{24}$	$e = l/2$
9.		Mit $l-a = b$ wird $P \frac{(3a+b)b^2}{l^3}$	$P \frac{(a+3b)a^2}{l^3}$	$-\frac{1}{l^2} P \cdot a$ $\cdot (l-a)^2$	$-\frac{1}{l^2} P \cdot a^2$ $\cdot (l-a)$	$x < a$ $M_x = M_a + Ax$ $x > a$ $M_x = M_a + Ax$ $-P(x-a)$	$\frac{1}{l^2} P a^2 (l-a)$	$e = a$
10.	Wie vorig, aber $P$ in der Mitte, also $a = l/2$	$\frac{P}{2}$	$\frac{P}{2}$	$-\frac{Pl}{8}$	$-\frac{Pl}{8}$	Wie vorig	$+\frac{Pl}{8}$	$e = \frac{l}{2}$

## II. § 11. Biegungsvorgänge und Durchbiegung.

### A. Auflagerkräfte und Auflagerbeanspruchung.

Ein frei aufliegender Balken habe die Stützweite  $l$ , d. h. die Mitten A und B der Auflagerflächen seien um  $l$  voneinander entfernt. Wird dieser Balken mit den Kräften  $P_1 P_2 P_3 \dots$  belastet, so entstehen die Auflagerdrücke A und B und außerdem biegt sich der Balken.

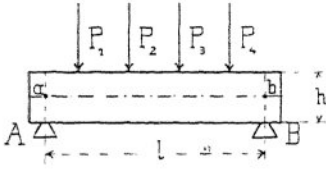


Bild 1.



Bild 2.

Die Strecke ab der Balkenachse, welche nach II § 6 ihre Länge nicht verändert, nimmt bogenförmige Gestalt an. Die beiden Punkte a und b nähern sich einander. Diese Annäherung ist nur dadurch ermöglicht, daß die oberhalb liegenden Fasern infolge des Druckes, den sie erleiden, sich verkürzen und die unterhalb ab gelegenen Fasern sich unter der in ihnen eintretenden Zugwirkung verlängern. Bei dieser Formänderung müssen sich bei den praktisch vorkommenden kleinen Einbiegungen die Berührungspunkte des Balkens mit seinen Auflagerflächen nach außen verschieben, wie Bild 2 erkennen läßt. Dieser Bewegung stellt sich ein Reibungswiderstand  $W$  entgegen, dessen Größe abhängig ist von der Größe des Auflagerdruckes  $A$  (oder  $B$ ) und des Reibungskoeffizienten  $f$ , welcher für die betreffenden Träger- und Stützenmaterialien gültig ist; es ist also an der linksseitigen Stütze  $W_a = A \cdot f$ .

Es wird sich daher dem in Abschnitt C § 6 angegebenen Kraftmoment, das nach II. § 10 A den Wert  $A \cdot a - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 - P_3 \cdot a_3 = A \cdot a - \Sigma P \cdot a$  hat, wenn die Abstände von dem betrachteten Querschnitt mit  $a_1 a_2 a_3 \dots$  bezeichnet werden, ein negativ drehendes Kraftmoment  $W_a \cdot \frac{h}{2} = A \cdot f \cdot \frac{h}{2}$  entgegenstellen, so daß als Biegemoment nur der Wert

$$M = A \cdot a - \Sigma P \cdot a - A \cdot f \cdot \frac{h}{2} = A \left( a - f \cdot \frac{h}{2} \right) - \Sigma P \cdot a \text{ übrig bleibt.}$$

Dieser Betrag wird umso kleiner sein, je kleiner der Klammerausdruck wird, d. h. je größer der Reibungskoeffizient  $f$  ist und je beträchtlicher die Trägerhöhe  $h$  ist.

Hat man eingespannte Stabenden, so wirken Reibungswiderstände an der unteren und oberen Fläche des Stabes; diese Reibungswiderstände sind verschieden groß, der untere ist größer als der obere. Sie erzeugen ein negatives

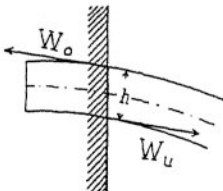


Bild 3.

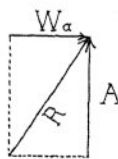


Bild 4.

Kraftmoment  $-\left(W_o \cdot \frac{h}{2} + W_u \cdot \frac{h}{2}\right)$ ; dasselbe verursacht somit eine Vermehrung des Biegemomentes, welches für die Einspannungsstelle auch negativ ist; man muß daher zu dem Biegemoment den Betrag

$$W_o \cdot \frac{h}{2} + W_u \cdot \frac{h}{2} \text{ hinzuzählen.}$$

Die Beanspruchung der Auflagerfläche kann bei freier Auflage eines Balkens nur dann eine gleichmäßige sein, wenn dafür Sorge getragen wird, daß der Auflagerdruck stets in dem Schwerpunkt der Auflagerfläche angreift und daß er senkrecht auf diese wirkt. Erstere Forderung läßt sich leichter erfüllen als letztere. Eine Wölbung der Oberfläche der Auflager-

platten, wofern solche vorhanden sind, reicht hin, um den Angriffspunkt des Auflagerdruckes mit genügender Genauigkeit an der gewünschten Stelle zu erhalten. Bei größeren Trägern hilft man sich mit sogenannten Ripplagern, d. h. Lager, welche einen Stahlbolzen haben, durch dessen Achse der Auflagerdruck stets gehen muß. Auch Kugellager werden häufig angewendet.

Anders verhält es sich mit dem Einfluß des Reibungswiderstandes. Dessen Überwindung wird eine Schiefstellung des Auflagerdruckes verursachen. Ist in vorstehendem Bild 4 A der senkrechte Auflagerwiderstand und  $W_a$  der Reibungswiderstand, so zeigt die Zusammensetzung dieser beiden Kräfte mittelst des Kräfteparallelogrammes, daß der resultierende Widerstand  $R$ , den die Stütze zu leisten hat, schief gerichtet ist, es muß daher auch der auf sie ausgeübte Druck dieselbe schiefe Neigung haben. Ist die Gestaltung der Stütze derart, daß schiefe Drücke von ihr fern gehalten werden müssen, so darf das Gleiten des Balkens auf seiner Auflagerfläche nicht eintreten. Um dasselbe zu verhindern, muß ein Rollenlager zwischen den Balken und dessen Widerlager eingeschaltet werden. Dieses Rollenlager soll im Gegensatz zum Gleitlager horizontal gerichtete Kraftwirkungen von dem Auflager fernhalten. Dazu wäre es aber nur dann geeignet, wenn der Bewegung der Rollen gar kein Widerstand entgegengetreten würde. Dies ist aber nie der Fall, es erfüllen daher alle Rollenlager ihren Zweck nur insofern, als es sich um eine Erleichterung der Bewegung handelt; sie erfüllen ihn nicht ganz insofern, als horizontale Kräfte sich ihrer Bewegung entgegenstellen.

In eine nähere diesbezügliche Untersuchung ist jedoch hier nicht einzutreten, da Rollenlager nur dann angewendet werden, wenn so große Trägerlängen vorkommen, daß die Längenänderungen infolge der Temperaturschwankungen in Betracht zu ziehen sind und wenn gleichzeitig diese Träger so frei gelagert sind, daß sie erheblichen Temperaturänderungen überhaupt unterworfen bleiben. Dies ist z. B. bei Dachstühlen und namentlich bei Brücken mit großen Spannweiten der Fall, während bei den eingehüllten, meist weniger weiten Balkenlagern in der Regel von den Wirkungen der sehr mäßigen Temperaturänderungen abgesehen werden kann.

### B. Einspannung.

Sind die Trägerenden eingespannt, so ist an eine gleichmäßige Beanspruchung in der Einspannungsstelle nicht mehr zu denken; die Auflagerflächen stehen hier unter der Wirkung einseitiger Belastung, sie sind auf zusammengesetzte Festigkeit beansprucht, insofern sowohl ein Auflagerdruck als auch ein Biegemoment auf sie wirksam ist.

Die dabei auftretenden Spannungsverteilungen sind in Kapitel II § 15 und Kapitel VI § 2, eingehend erörtert.

Aus den Verschiedenheiten der Beanspruchungen in einer Einspannungsstelle ergibt sich, daß die Achse eines eingespannten Stabes, auch entlang der Einspannung nicht wagrecht bleiben kann. Die eintretende Abweichung von der Wagrechten wird um so größer sein, je verschiedener die Zusammenpressungen in der Einspannung sind, sie wird dagegen geringer bleiben, wenn die Verschiedenheiten kleiner bleiben. Die Verschiedenheiten bleiben klein, wenn das Einspannungsmoment sehr klein ist, also z. B. bei geringer Stützweite, leichter Belastung etc., oder wenn die gleichförmig verteilte Druckbeanspruchung in der Mauer überwiegend groß ist. Der Betrag der gleichförmig verteilten Beanspruchung steigt aber mit zunehmender Mauerbelastung oberhalb der Einspannungsstelle. Man kommt daher zu dem Satz:

Die Einspannung wird um so vollkommener, je schwerer die Aufmauerung auf der Einspannungsstelle lastet.

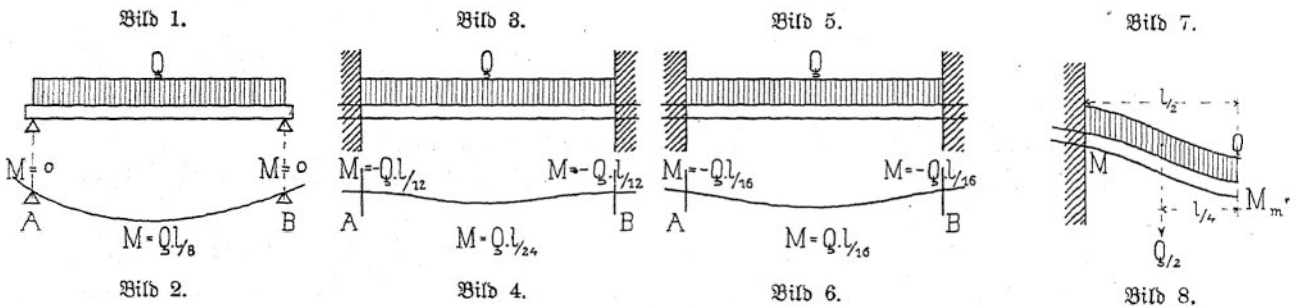
Dieser Satz findet eine weitere Begründung auch noch darin, daß die am eingespannten Stabteile nach Abschnitt A auftretenden Reibungswiderstände um so größer werden können, je schwerer die Aufmauerung belastet wird. Das von diesen Reibungswiderständen verursachte Biegemoment vermehrt aber die Größe des an der Einspannungsstelle auftretenden Biegemomentes. Es macht die Einspannung somit vollkommener.

Ist der Balken nur auf eine geringe Länge  $a$  eingemauert, so erhöht sich zwar die reine Druckbeanspruchung  $s_d$ , aber in noch stärkerem Maße erhöht sich die Biegebeanspruchung  $s_b$  der Einspannungsflächen. Es steigert sich somit bei Verminderung der Einspannungslänge  $a$  die Ungleichheit der Spannungen in der Einspannungsstelle, d. h. die Einspannung wird um so unvollkommener, je kürzer der eingespannte Balkenteil ist.

Aus dem Zusammenhalten dieser beiden Sätze ergibt sich, daß im allgemeinen die Balkenenden auf um so größere Länge einzumauern sind, je geringer die Belastung der Einspannungsstelle ist, wenn die Einspannwirkung unter sonst gleichen Umständen denselben Grad der Vollständigkeit erreichen soll. Ferner zeigt sich, daß eine gewisse Herstellungsweise der Einspannung bei schwächer belasteten oder kürzeren Trägern einen vollständigeren Grad der Einspannung herbeizuführen vermag, als bei stärker belasteten oder längeren Trägern, es sind dies diejenigen Herstellungsweisen, welche der Bewegung des eingespannten Balkenendes den größeren Widerstand entgegenstellen, seien es nun die Reibungswiderstände, von welchen die Rede war, seien es die Widerstände gegen die ungleichen elastischen Zusammenpressungen.

Um rechnerisch zu untersuchen, welche Wirkung der Grad der Einspannung auf die Größe der Biegemomente hat, kann man von den beiden Grenzfällen ausgehen.

Der erste Grenzfall ist vorhanden, wenn die Einspannung ganz versagt, d. h. wenn der Balken frei aufliegt. Alsdann ist nach Kap. II § 10 das Biegemoment über den Auflagern Null und in der Balkenmitte  $M = \frac{Ql}{8}$  bei gleichförmig und stetig über die Balkenlänge  $l$  verteilter Belastung  $Q$  (Bild 1 und 2).



Der zweite Grenzfall wäre erreicht, wenn die Einspannung durchaus unnachgiebig, d. h. starr gedacht werden könnte, dann würden in der Mitte der Stützweite das positive den Balken nach unten biegende Moment  $M = \frac{Ql}{24}$  und an beiden Einspannungsstellen die negativen den Balken nach oben biegenden Biegemomente  $M = -\frac{Ql}{12}$  auftreten (Bild 3 und 4).

Bei dem unvollständig eingespannten Balken tritt an den Einspannungsstellen ein negatives Biegemoment  $M$  auf, dessen Wert zwischen 0 und  $-\frac{Ql}{12}$  gelegen sein muß. Das gleichzeitig in der Mitte der Stützweite auftretende positive Biegemoment  $M_m$  muß zwischen

dem Wert  $\frac{Ql}{8}$  und  $\frac{Ql}{24}$  liegen. An dem in der Mitte abgetheilten Trägerteil (Bild 7) ist nun, wenn man sich den Auflagerwiderstand  $\frac{Q}{2}$  an der Einspannungsstelle angebracht denkt

$$M_m = -M + \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} = -M + \frac{Ql}{8}.$$

Wenn der unvollständig eingespannte Balken in seiner Mitte und an den Einspannungsstellen das gleiche Biegemoment erleidet, ist  $M_m = M$ , also ergibt sich aus der vorhergehenden Gleichung  $2M = \frac{Ql}{8}$  und schließlich  $M_m = M = \frac{Ql}{16}$  wird. In diesem Fall hat somit das größte an dem Balken auftretende Biegemoment sich von  $\frac{Ql}{12}$  auf  $\frac{Ql}{16}$  vermindert, die Tragfähigkeit des Balkens ist dadurch im Verhältnis  $\frac{1}{16} : \frac{1}{12} = 3:4$  gestiegen. Als Ergebnis der Untersuchung des Wirkungsgrades der Einspannung hat sich also gefunden, daß eine unvollständige Einspannung für den Balken zweckmäßiger sein kann, als eine vollständige.

Ob und wann der vorige für den Balken günstigste Fall eintritt, ist schwer zu sagen. Man müßte, um diese Frage theoretisch zu beantworten, die zur Biegung des Balkens und zu den Zusammenpressungen in den Einspannungsstellen notwendige mechanische Arbeit berechnen und untersuchen, für welchen Fall die Summe dieser Deformationsarbeiten einen kleinsten Wert erreicht.

Will man ohne diese Berechnungen in allen Fällen unvollständiger Einspannung der Balkenenden für die Größe des Biegemomentes  $M = \frac{Ql}{16}$  annehmen, so hätte man zu gewärtigen, daß, wenn die dieser Annahme entsprechende Neigung der Stabachse in den Einspannungen nicht auftreten sollte, tatsächlich bei Belastung des Balkens eine Überanstrengung an den Einspannungsstellen eintreten kann, welche dann die Stabachse um so viel biegt, daß die vorausgesetzten Neigungen der elastischen Linie an der fraglichen Stelle vorhanden sind. Aber auch mit dieser Annahme ist noch keine Bestimmtheit geschaffen, wie sich leicht einsehen läßt, wenn man an den Wechsel in den Belastungen denkt.

Die Annahme  $M = \frac{Ql}{16}$  für die Größe des Biegemomentes eines unvollständig eingespannten Balkens bleibt somit eine mehr oder weniger willkürliche Voraussetzung, welche für die gewöhnlich vorkommenden praktischen Berechnungen von Balkenlagen nicht ohne weiteres zulässig erscheint. Dagegen kann als Ergebnis dieser Untersuchungen das angesehen werden, daß es für eingespannte Balken im allgemeinen unbedenklich ist, mit an den Einspannungsstellen auftretenden Biegemomenten  $M = \frac{Ql}{12}$  zu rechnen, da leichte Nachgiebigkeiten in der Einspannung nicht biegungsvermehrend wirken.

Erst wenn die Einspannung so unvollständig ist, daß an den Einspannungsstellen nur noch ein Biegemoment  $M$ , das kleiner als  $\frac{Ql}{16}$  ist, eintreten könnte, würde das Biegemoment  $M_m$  in der Mitte der Stützweite größer werden.

Ist in der Mitte  $M_m = \frac{Ql}{12}$  geworden, so muß nach obiger Gleichung das Biegemoment an der Einspannungsstelle auf  $M = \frac{Ql}{8} - M_m = \frac{Ql}{8} - \frac{Ql}{12} = \frac{Ql}{24}$  gesunken

sein. Für diesen Fall haben sich die Größen der Biegemomente gegenüber den Biegemomenten bei starrer Einspannung vertauscht. Wird die Einspannung noch lockerer, d. h. sinkt das Biegemoment an der Einspannungsstelle unter  $\frac{Ql}{24}$  herab, so steigt das Biegemoment in der Mitte und für  $M = 0$  wird endlich  $M_m = \frac{Ql}{8}$ , der Balken ist gar nicht mehr eingespannt, nur noch frei aufliegend.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, daß eine mäßige Nachgiebigkeit in der Einspannung die Tragfähigkeit des Balkens gegenüber starrer Einspannung zunächst erhöht, daß aber zu große Nachgiebigkeit an diesen Stellen die Vorteile der Einspannung mehr oder weniger aufhebt.

### C. Durchbiegung.

Wird ein Balken, welcher in unbelastetem Zustande eine gerade Achse hat, belastet, so krümmt sich die Balkenachse. Die neue Gestalt, welche dieselbe annimmt, heißt man die elastische Linie, und das Maß, um welches die elastische Linie an irgend einer Stelle des Balkens von der ursprünglichen geraden Stabachse abweicht, heißt die Durchbiegung des Balkens an jener Stelle.

Unter der Einsenkung oder dem Biegunbspfeil  $\mathcal{E}$  ist die größte Durchbiegung, d. h. die größte Abweichung, welche die elastische Linie in einem bestimmten Unterstützungs- und Belastungsfall eines Balkens annehmen kann, verstanden.

Im nachstehenden seien ohne weitere Herleitung die Formeln für die Biegunbspfeile für Balken bei verschiedenen Unterstützungs- und Belastungsweisen ohne Berücksichtigung der in Abschnitt A und B besprochenen Einflüsse angegeben. Dabei bedeute  $l$  cm die Stützweite des Balkens;  $M$  cmkg das größte Biegemoment, welches derselbe entweder infolge einer gleichförmig und stetig verteilten Belastung durch  $Q$  kg oder durch eine Einzellast von  $P$  kg erleide.  $E$  sei der Elastizitätsmodul des Balkenmaterials (2000000 kg/qcm für Schmiedeeisen und 2150000 kg/qcm für Flußeisen); mit  $J$  cm<sup>4</sup> werde das Trägheitsmoment und mit  $W$  cm<sup>3</sup> das Widerstandsmoment des symmetrischen  $h$  cm hohen Balkenquerschnittes bezeichnet. Die Biegebbeanspruchung der äußersten Fasern des Balkens ist  $s$  kg/qcm.

1. Frei aufliegender Balken gleichförmig und stetig mit  $Q$  kg belastet.

In der Mitte der Stützweite ist der Biegunbspfeil

$$\mathcal{E} = \frac{5l^3}{384} \cdot \frac{Q}{EJ} \quad \text{oder umgeformt} \quad = \frac{Ql}{8} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{l^2}{12EJ}$$

Es ist nun  $\frac{Ql}{8} = M$ , d. h. gleich dem Biegemoment und es werde der von der Belastung unabhängige konstante Wert  $\frac{l^2}{12EJ} = C$  gesetzt, dann erhält man

$$\mathcal{E} = \frac{5}{4} M \cdot C.$$

2. Frei aufliegender Balken in der Mitte der Stützweite mit  $P$  kg belastet.

In der Mitte der Stützweite ist der Biegunbspfeil

$$\mathcal{E} = \frac{l^3}{48} \cdot \frac{P}{EJ} = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l^2}{12EJ} \quad \text{aber} \quad M = \frac{Pl}{4} \quad \text{und} \quad C = \frac{l^2}{12EJ}$$

also

$$\mathcal{E} = M \cdot C.$$

3. Beiderseits eingespannter Balken mit  $Q$  kg stetig und gleichförmig belastet. In der Mitte der Stützweite ist der Biegunspfeil

$$\mathcal{E} = \frac{l^3}{384} \cdot \frac{Q}{EJ} = \frac{Ql}{12} \cdot \frac{l^2}{12EJ} \cdot \frac{3}{8}$$

Nun ist aber  $M = \frac{Ql}{12}$  das an dem Balken überhaupt (bei starrer Einspannung) auftretende Maximalmoment und wie seither  $C = \frac{l^2}{12EJ}$

also 
$$\mathcal{E} = \frac{3}{8} M \cdot C.$$

4. Beiderseits eingespannter Balken mit  $P$  kg in der Mitte belastet.

In der Mitte der Stützweite ist der Biegunspfeil

$$\mathcal{E} = \frac{l^3}{192} \cdot \frac{P}{EJ} = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{l^2}{12EJ} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{aber } M = \frac{Pl}{8} \quad \text{und } C = \frac{l^2}{12EJ}$$

also 
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} M \cdot C.$$

5. Balken einerseits eingespannt, andererseits frei aufliegend und mit  $Q$  kg stetig und gleichförmig belastet.

In 0,42 l cm Entfernung vom freien Auflager tritt die größte Einsenkung auf, sie ist

$$\mathcal{E} = \frac{l^3}{185} \cdot \frac{Q}{EJ} = \frac{Ql}{8} \cdot \frac{l^2}{12EJ} \cdot 0,52 \quad \text{aber } M = \frac{Ql}{8} \quad \text{und } C = \frac{l^2}{12EJ}$$

also 
$$\mathcal{E} = 0,52 M \cdot C.$$

6. Balken einerseits eingespannt, andererseits freitragend, mit  $Q$  kg gleichförmig und stetig belastet.

Das freie Ende senkt sich ein um

$$\mathcal{E} = \frac{l^3}{8} \cdot \frac{Q}{EJ} = \frac{Ql}{2} \cdot \frac{l^2}{12EJ} \cdot 3 \quad \text{aber } M = \frac{Ql}{2} \quad \text{und } C = \frac{l^2}{12EJ}$$

also 
$$\mathcal{E} = 3 M \cdot C.$$

7. Balken einerseits eingespannt, andererseits freitragend und am freien Ende mit  $P$  kg belastet.

Das freie Ende senkt sich ein um

$$\mathcal{E} = \frac{l^3}{3} \cdot \frac{P}{EJ} = Pl \cdot \frac{l^2}{12EJ} \cdot 4 \quad \text{aber } M = Pl \quad \text{und } C = \frac{l^2}{12EJ}$$

also 
$$\mathcal{E} = 4 M \cdot C.$$

In der umgeformten einheitlichen Gestalt geben die Formeln für den Biegunspfeil einen deutlicheren Überblick über die Größenverhältnisse der zu erwartenden Biegunspfeile.

## II. § 12. Träger, welche auf mehr als zwei Stützen ruhen.

Ein Träger, der ein zusammenhängendes Ganzes bildet und auf mehr als zwei Stützen ruht, heißt ein kontinuierlicher oder durchlaufender Träger.

Bei diesem Träger verteilen sich die über einer Öffnung vorhandenen Lasten nicht einfach nach dem Hebelgesetz auf die an dieser Öffnung liegenden Stützpunkte, sondern es treten verwickeltere Verhältnisse ein, deren Verfolgung nicht hieher gehört.

Es möge die Ausführung folgender zwei Fälle genügen:

1. Ein Träger mit zwei gleich großen Öffnungen von der Stützweite  $l$  und gleichförmig verteilter Vollbelastung  $Q$  in jedem Feld.

Bei gleicher Stützhöhe verhalten sich die Auflagerdrücke in A, B, C wie 3:10:3. Ruht also über jeder Öffnung die Last  $Q$ , so wird:

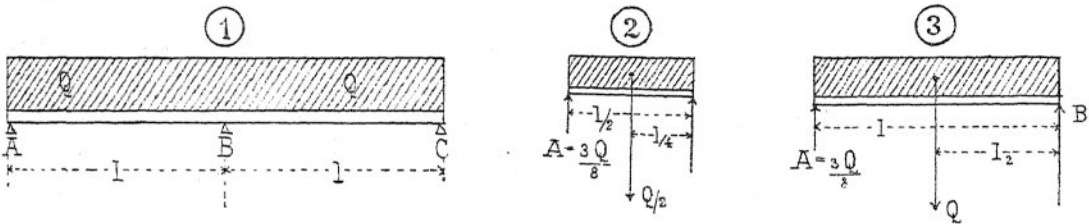
$$A = \frac{3}{16} \cdot 2Q = \frac{3Q}{8}, \quad B = \frac{10}{16} \cdot 2Q = \frac{10Q}{8}, \quad C = \frac{3}{16} \cdot 2Q = \frac{3Q}{8}$$

und man erhält nun die Angriffsmomente in gleicher Weise wie seither, z. B. bei  $x = \frac{1}{2}$  wird nach Bild 2:  $M = A \cdot \frac{1}{2} - \frac{Q}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} Q \cdot \frac{1}{2} - \frac{Ql}{8} = \frac{Ql}{16}$

ferner wird bei  $x = l$  nach Bild 3:

$$M = A \cdot l - Q \cdot \frac{1}{2} \pm B \cdot 0 = \frac{3}{8} Ql - \frac{Ql}{2} = -\frac{Ql}{8}$$

Über der Mittelstütze tritt also ein ebenso großes, aber negatives Moment, wie bei II. § 10 A, Fall 3, in der Trägermitte auf.



2. Läuft ein Träger über drei gleich weite Öffnungen mit gleich hoch liegenden Stützpunkten ununterbrochen durch, so sind bei gleichmäßiger Vollbelastung  $Q$  auf jeder Öffnung die Auflagerdrücke für die Endstützen

$$A = D = \frac{4}{10} Q, \quad \text{für die Mittelstützen } B = C = \frac{11}{10} Q,$$

also zusammen  $A + B + C + D = \frac{4}{10} Q + \frac{11}{10} Q + \frac{11}{10} Q + \frac{4}{10} Q = 3Q$ .

Das Biegemoment erreicht seinen größten Wert über den Mittelstützen; derselbe ist

$$M = -\frac{Ql}{10}$$

Beispiel 45. Auf einem Unterzug von 12 m Länge ruhen 70 qm Fußbodenfläche. Der Unterzug ist an seinen Enden in den Umfassungswänden gelagert und in der Mitte durch eine gußeiserne Säule gestützt. Welche Drücke kommen auf die Stützpunkte und welches I Eisen ist für den Unterzug zu wählen?

Aufl. Das Gewicht des Fußbodens ist nach Tabelle V bei II. § 5 (400 + 200) = 600 kg/qm, somit kommt auf je eine Öffnung die Last  $Q = \frac{70}{2} \cdot 600 = 21\,000$  kg, und daher auf jede Endstütze  $\frac{3}{8} Q = \frac{3}{8} \cdot 21\,000 = \text{rund } 7900$  kg, dagegen auf die Mittelstütze  $\frac{10Q}{8} = 26\,250$  kg.

Das größte Biegemoment tritt über der Mittelstütze auf, sein Wert ist

$$M = -\frac{Ql}{8} = -\frac{21\,000 \cdot 600}{8} \text{ cmkg.}$$

Der Trägerquerschnitt muß daher ein Widerstandsmoment haben von

$$W = \frac{M}{s} = \frac{21\,000 \cdot 600}{8 \cdot 750} = 2100 \text{ cm}^3.$$

Man hat demnach zu verwenden I Nr. 45 oder 2 I Nr. 36 zc. (s. Tabelle bei II. § 8).



## II. § 13. Bernickungs-Festigkeit.

Wird ein Stab auf Druck beansprucht, so hat er das Bestreben, auszuknicken. Die Gründe für diese Erscheinung liegen darin, daß die Stabachse tatsächlich nie genau gerade ist, daß ferner die Kraft auch nicht mathematisch genau in der Stabachse wirkt und endlich daß das Stabmaterial nicht an allen Stellen genau dieselbe Beschaffenheit hat. Es zeigt Probebelastungen auf Materialprüfungsanstalten, daß ein Stab mit quadratischem Querschnitt, welcher nur das 3—5fache der Dicke zur Länge hat, schon nicht mehr durch Zerdrücken zerstört werden kann, sondern vorher zerknickt. Da es sich jedoch bei Baukonstruktionsteilen nicht um Bruchbelastungen handelt, so kann die untere Grenze, von der ab die Bernickungsberechnung nötig wird, höher gelegt werden; beispielsweise ist für Eisenbetonstützen festgesetzt, daß Bernickungsberechnung erst dann erfolgen soll, wenn die Höhe der Stütze das 18fache der kleinsten Querschnittsabmessung beträgt. Ganz allgemein gesagt, ist es aber von größter Wichtigkeit, die Berechnung schlanker, gedrückter Stäbe mit Rücksicht auf die Bernickung durchzuführen. Es muß bei solchen Stäben die zulässige Beanspruchung  $s_z$  kleiner sein, als die sonst übliche Beanspruchung, da auch die Bruchbelastung kleiner wird, während doch der Sicherheitsgrad derselbe bleiben soll.

Für die soeben genannten Eisenbetonstützen ist z. B. die zulässige Druckbeanspruchung des Betons auf  $\frac{1}{10}$  seiner Druckfestigkeit herabgesetzt worden, während der Beton in Eisenbetonkonstruktion auf Biegung mit  $\frac{1}{6}$  seiner Druckfestigkeit beansprucht werden darf.

Zur Berechnung der Bernickungsfestigkeit sind schon verschiedene Formeln aufgestellt worden. Die gebräuchlichsten in der Praxis sind diejenige von Euler und diejenige von Schwarz-Rankine. Die Eulersche Formel gibt die Größe der Knickbelastung an, d. h. diejenige Kraftgröße, bei welcher das Ausknicken eintreten würde.

Unter Annahme eines Sicherheitsgrades  $n$  wird alsdann aus dieser Knickbelastung der Wert der möglichen Belastung abgeleitet. Außerdem ist aber stets noch nachzuprüfen, ob nicht die zulässige Beanspruchung beim Aufbringen dieser theoretisch möglichen Belastung überschritten wird. Man hat somit in der Regel eine Doppelrechnung anzustellen.

Diese bleibt bei der Anwendung der Schwarz-Rankineschen Formel vermieden, weil in ihr die zulässige Beanspruchung selbst schon vorkommt.

### Die Eulersche Formel.

Die Knickbelastung  $P$  ist 
$$P = \pi^2 \frac{E \cdot J}{l^2}.$$

In dieser Formel bedeutet  $E$  den Elastizitätsmodul des Materiales (s. Tabellen II. § 4),  $J$  das kleinste Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in Bezug auf diejenige Schwerpunktsachse, zu welcher die Bernickungsrichtung senkrecht stehen würde und  $l$  denjenigen rechnermäßigen Wert der Stablänge, der sich je nach der Befestigung der Stabenden unter Benützung bestehender Abbildungen aus der tatsächlichen Stützenlänge  $L$  ergibt. Für die gewöhnlich vorkommenden Befestigungen wird  $l = L$  angenommen.

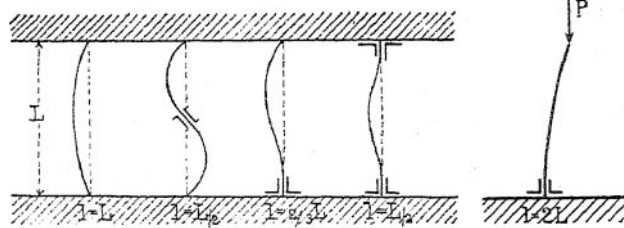


Bild 1.

Bild 2.

Als Sicherheitsgrad  $n$  gegen Zerknickung werden in der Regel mindestens folgende Werte gefordert, bei

Guß Eisen	$n = 8$ ,	Flußstahl	$n = 4$
Schweiß Eisen	$n = 5$ ,	Kiefernholz	$n = 10$
Fluß Eisen	$n = 5$	(Basisches Martineisen, siehe unten).	

Die zulässige Belastung auf Zerknicken ist daher  $P_1 = \frac{P}{n}$ , wobei jedoch die Beanspruchung  $s_k = \frac{P_1}{F}$  die zulässige Grenze für Druckbeanspruchung  $s_d$  nicht überschreiten darf.

Als zulässige Druckbeanspruchungen gelten für

Guß Eisen	$s_d = 500$ kg/qcm	Flußstahl	$s_d = 1250$ kg/qcm
Schweiß Eisen	$s_d = 750$ "	Kiefernholz	$s_d = 60$ "
Fluß Eisen	$s_d = 875$ "	(Basisches Martineisen mit 3700—4400 kg/qcm Druckfestigkeit.)	

Die Länge  $l$ , von welcher an die Berechnung auf Zerknickung nötig wird, ist danach in jedem Fall wieder eine andere. Sie wird erreicht, wenn  $P_1 = F \cdot s_d$  wird.

Der auf Knickung berechnete Querschnitt  $F$  muß nur an der gefährlichen Stelle vorhanden sein; an den Enden genügt der Querschnitt  $f = \frac{P_1}{s_d}$ , wo  $s_d$  die für gewöhnlich zulässige oben angegebene Druckbeanspruchung des Materials ist.

Die Überführung von  $F$  in  $f$  ist nicht an strenge Regeln gebunden, sie kann nach einer Geraden oder schlanken Kurve geschehen.

Die Euler'sche Formel wird am häufigsten angewendet, dabei wird für  $\pi^2$  in der Regel 10 eingesetzt. Weitere Vereinfachungen lassen sich erreichen, wenn man die Zahlenwerte für  $E$  einsetzt. Man sucht dann meistens das für den gefährlichen Querschnitt erforderliche kleinste Trägheitsmoment  $J$ . Dieses ist  $J = \frac{P_1 l^2}{\pi^2 \cdot E}$  es wird also für Gußeisensäulen  $J = \frac{P_1 l^2}{10 \cdot 1000000}$  oder bei  $n = 8$  facher Sicherheit, wenn  $J = \frac{P_1 \cdot l^2 \cdot 8}{10 \cdot 1000000} = \frac{P_1 \cdot 1000 \cdot l \cdot 100^2 \cdot 8}{10 \cdot 1000000} = 8 P_1 l^2$ . Aus dieser Formel erhält man  $J$  in cm, wenn  $P_1$  in Tonnen und  $l$  in Metern eingesetzt werden.

Für Walzeisen ergibt sich in gleicher Weise mit  $E = 2000000$  bis  $2150000$  und  $n = 5$   $J = 2,5 P_1 l^2$ . Vielfach wird jedoch mit  $J = 3 P_1 l^2$  gerechnet. Für Holz erhält man mit  $E = 120000$  und  $n = 10$   $J_1 = 83 P_1 l^2$ . Vielfach wird aber mit  $J = 100 P_1 l^2$  gerechnet, entsprechend  $E = 100000$  kg/qcm.

In der Regel wirkt ein Teil der Lasten nicht genau zentrisch auf Säulen, sondern wird seitlich in dieselben eingeführt. Für diesen Fall ist — z. B. nach Berliner Vorschrift — der Sicherheitsgrad bei Gußeisen zu  $n = 12$  und bei Holz auf  $n = 15$  zu bemessen und man erhält alsdann für gußeiserne Säulen die abgekürzte Formel  $J = 12 P_1 l^2$  und für Holzstützen  $J = 125 P_1 l^2$ . Dabei darf aber der Querschnitt nur mit 330 kg/qcm Gußeisen oder 40 kg/qcm Holz beansprucht werden. Bei größerem und bekanntem Betrag der Exzentrizität ist die Säule auf zusammengesetzte Festigkeit nach II. § 15 zu berechnen.

Beispiel 46. Eine eiserne Säule besteht aus  $\text{J} \text{C} \text{NP} 20$ , deren Stege 20 cm Zwischenraum einschließen, sie ist 4,50 m hoch und mit  $P_1 = 40000$  kg zentral belastet. Wie vielfache Sicherheit gegen Zerknickung ist vorhanden?

Aufl. Die Knickbelastung wäre  $P = \frac{\pi^2 \cdot 2150000 \cdot (2 \cdot 1927)}{450^2} = 410000$  kg. Es ist somit  $\frac{P}{P_1} = \frac{410000}{40000} = 10$  fache Sicherheit gegen Zerknickung vorhanden, während 5 fache

genügen würde. Die Beanspruchung des Säulenquerschnittes auf Druck ist  $\frac{40\,000}{2 \cdot 32,7} = 620 \text{ kg/qcm}$  sie bleibt also auch unter dem zulässigen Wert von  $875 \text{ kg/qcm}$ .

Wäre der Querschnitt nicht durch den Abstand zwischen den Stegen so stark gespreizt, daß zweifellos für die zu den Stegen senkrechte Achse das kleinste Trägheitsmoment vorhanden sein muß, so hätte man zuerst das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes zu ermitteln und dieses in die Rechnung einzusetzen.

Beispiel 47. Eine schmiedeeiserne Säule aus  $\text{J}[\text{C}] \text{ NP 18}$  ist  $3,60 \text{ m}$  hoch, welche zentrale Belastung darf sie erhalten? Querschnittspreizung wie vorig. Nach Maßgabe der Bernknickungsformel dürfte  $P_1 = \frac{P}{5} = \frac{\pi^2 \cdot 2\,150\,000 \cdot (2 \cdot 1364)}{360^2} = 90\,000 \text{ kg}$  werden. Wegen Einhaltung der größten zulässigen Druckbeanspruchung darf die Belastung aber nur  $P_1 = F \cdot s = 2 \cdot 28 \cdot 875 = 49\,000 \text{ kg}$  werden.

Beispiel 48. Eine nicht genau zentrisch belastete  $4 \text{ m}$  hohe gußeiserne Säule hat  $50\,000 \text{ kg}$  zu tragen. Welche Abmessungen sind dem freisringförmigen Querschnitt zu geben.

Aufl. Das erforderliche Trägheitsmoment ist  $J = 12 P_1 l^2 = 12 \cdot 50 \cdot 4^2 = 9600 \text{ cm}^4$ . Die Säule hat  $25 \text{ cm}$  äußern Durchmesser und  $2 \text{ cm}$  Wandstärke, das Trägheitsmoment des Querschnittes ist daher  $\frac{D^4 - d^4}{20} = \frac{25^4 - 21^4}{20} = 9800 \text{ cm}^4$ . Das Trägheitsmoment des Querschnittes würde danach hinreichend groß sein. Die Querschnittsfläche mißt  $\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 144,59 \text{ cm}^2$ . Die Druckbeanspruchung würde somit  $\frac{50\,000}{144,5} = 345 \text{ kg/qcm}$ , während sie in diesem Fall  $330 \text{ kg/qcm}$  nicht überschreiten soll. Der Säulendurchmesser ist daher um ein wenig zu vergrößern.

Beispiel 49. Ein Holzpfeiler ist  $3 \text{ m}$  hoch und annähernd zentral mit  $16\,000 \text{ kg}$  belastet, er hat  $20/20 \text{ cm}$  nutzbaren Querschnitt. Es ist zu untersuchen, ob der Pfeiler mit Rücksicht auf die Bernknickung stark genug bemessen ist.

Aufl. Erforderlich wäre ein Trägheitsmoment des Querschnittes  $J = 125 \cdot 16 \cdot 3^2 = 18\,000 \text{ cm}^4$ . Das vorhandene Trägheitsmoment ist  $J = \frac{20^4}{12} = 13\,300 \text{ cm}^4$ , es genügt also nicht und dem, zwar nur mit  $\frac{16\,000}{20 \cdot 20} = 40 \text{ kg/qcm}$  beanspruchten Pfeiler ist ein stärkerer Querschnitt zu geben. Wählt man  $22 \cdot 22 \text{ cm}$  Querschnitt, so wird  $J = \frac{22^4}{12} = 19\,500 \text{ cm}^4$ , der neue Querschnitt ist also genügend groß, er wird nur mit  $\frac{16\,000}{22 \cdot 22} = 33 \text{ kg/qcm}$  beansprucht.

#### Die Schwarz-Rankine'sche Formel.

Sie rührt in ihrer Grundform von Navier her und gibt als zulässige Belastung  $P_1$  eines an beiden Enden frei aufstehenden Stabes, der mit  $s_k$  auf Bernknickung beansprucht ist, und den Querschnitt  $F$  hat.

$$P_1 = \frac{F \cdot s_k}{1 + m l^2 \frac{F}{J}}$$

wobei für ebene Endquerschnitte

bei Gußeisen  $m = 0,00016$  weicher Stahl  $m = 0,00004$   
 Schweiß Eisen  $m = 0,00008$  harter Stahl  $m = 0,00006$   
 Holz  $m = 0,00015$  zu setzen ist.

$J$  ist wieder das kleinste Trägheitsmoment des Stabquerschnittes.

Ist die Beanspruchung eines gegebenen oder angenommenen Säulenquerschnittes bei bekannter Last zu berechnen, so ergibt sich aus obiger Gleichung als Knickungsbeanspruchung  $s_k$

$$\frac{P}{F} = s_d = \frac{s_k}{1 + m l^2 \frac{F}{J}} \quad \text{oder} \quad s_k = s_d \left( 1 + m \frac{l^2 F}{J} \right) = s_d \cdot k.$$

$s_k$  soll die in der vorigen Tabelle aufgeführten Werte nicht überschreiten.

Beispiel 50. Die in Beispiel 46 benannte Säule ist zu berechnen.

$P = 40\,000$  kg,  $L = 4,50$  m ] ] NP 20.

Wie vorig  $J = 2.1927 = 3854$  cm und  $F = 2.32,3 = 64,6$  qcm, also

$$s_d = \frac{40\,000}{64,6} = 620 \text{ kg/qcm}, \quad k = 1 + m l^2 \frac{F}{J} = 1 + 0,00008 \cdot \frac{64,6 \cdot 450^2}{3854} = 1,27,$$

$$s_k = s_d \cdot k = 620 \cdot 1,27 = 790 \text{ kg/qcm}.$$

Der für Flußeisen zulässige Wert wird somit nicht überschritten.

Beispiel 51. Eine 3,60 m hohe Säule besteht aus ] ] NP 22. Darf dieselbe mit  $P = 50\,000$  kg zentrisch belastet werden?

Bei  $L = 360$  und ] ] NP 22 wird  $J = 2.2712 = 5424$  cm<sup>4</sup>,  $F = 2.37,6 - 10,2 = 65$  qcm nutzbar,  $s_d = \frac{50\,000}{65} = 770$  kg/qcm,  $k = 1 + m l^2 \frac{F}{J} = 1 + 0,00008 \frac{360^2 \cdot 65}{5424} = 1,12$ ,  $s_k = s_d \cdot k = 770 \cdot 1,12 = 865$  kg/qcm.

Die Säule erleidet danach keine zu hohe Beanspruchung.

Beispiel 52. Geg.: Säulenbelastung 32 300 kg, Säulenlänge 5,50 m, Exzentrische Last 1500 kg, an Kraftarm 0,33 m, gemessen von Stabachse bis Krafttrichtungslinie, Querschnitt ] ] NP 20. Die auftretende Beanspruchung ist zu beurteilen.

$J = 2.1927$	. . . . .	= 3854 cm <sup>4</sup> ,
$F = ] ]$	NP 20 . . . . .	64,6 qcm,
	davon gehen für Nietlöcher ab . . .	9,6 qcm,
	somit bleiben nutzbar . . . . .	<u>55,0 qcm,</u>

die Druckbeanspruchung ist daher  $s_d = \frac{32\,300}{55} = 587$  kg/qcm ohne Berücksichtigung der Wirkung der Knickungsgefahr, zu deren Berücksichtigung ergibt sich

$$k = 1 + m l^2 \frac{F}{J} = 1 + 0,00008 \cdot \frac{64,6 \cdot 550^2}{3854} = 1,4,$$

also wird die tatsächliche Beanspruchung  $587 \cdot 1,4 = 822$  kg/qcm.

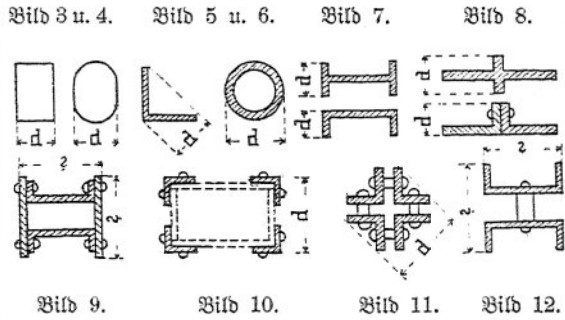
Zu derselben kommen von der exzentrischen Last noch Druck- und Biegungsspannungen im Höchstwert von  $s_e = \frac{1500}{64,6} + \frac{1500 \cdot 33 \cdot 10}{3854} = 23 + 130 = 153$  kg/qcm.

Die resultierende Beanspruchung wird daher  $822 + 153 = 975$  kg/qcm, während für Flußeisen nur 875 kg/qcm zulässig sind.

Annäherungsberechnung: Die Annahme der zulässigen Beanspruchung hängt hauptsächlich vom Verhältnis der Stablänge zur geringsten Querschnittsdicke ab. Für einfache volle Querschnitte sind in der nachstehenden Tabelle die auf Grund der Eulerschen Formel ermittelten Beziehungen wiedergegeben. Man kann die Zahlen der Tabelle als Näherungswerte

auch für andere Querschnitte benützen und daher aus der Tabelle die zulässigen Beanspruchungen auf Verknicung bei bestimmtem Verhältnis  $l/d$  entnehmen.

Bei Benützung dieser Tabellen ist bei unbekanntem Querschnitt das Verhältnis  $l/d$  zunächst anzunehmen; die Fläche des Stabquerschnitts ergibt sich dann durch Division mit der aus der Tabelle entnommenen Beanspruchung in die Kraft. Wird zu dieser Fläche das Profil konstruiert, so ist schließlich zu untersuchen, ob das tatsächlich vorhandene Verhältnis  $l/d$  dem angenommenen Verhältnis gleich ist.



Die Länge  $l$  ist, wie schon bemerkt, je nach der Befestigung der Stabenden verschieden; sie ist den Bildern S. 103 zu entnehmen. Für die Bemessung von  $d$  geben obige Abbildungen Anleitung.

Verhältnis der Stablänge zur Stabdicke $l/d$	Material						
	Flusseisen	Schmiedeeisen		Gusseisen		Holz	
	Zulässige Beanspruchung	Bruch-Belastung	Zulässige Beanspruchung	Bruch-Belastung	Zulässige Beanspruchung	Bruch-Belastung	Zulässige Beanspruchung
	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm
1	875	3500	700	7000	650	500	65
10	850	3400	680	4500	420	360	47
15	700	2800	560	3300	310	300	39
20	620	2500	500	2650	240	250	32
25	570	2300	460	1980	180	210	27
36	480	1900	380	1320	120	140	18
48	350	1400	280	—	—	70	9
60	250	1000	200	—	—	35	5
100	100	400	80	—	—	—	—

Beispiel 53. Der Holzpfosten in Beispiel 22 bei II. § 1 hat eine Höhe von 4,20 m. Es ist zu untersuchen, ob dessen Beanspruchung den mit Rücksicht auf die Verknicung zulässigen Wert nicht überschreitet.

Aufl. Im vorliegenden Fall sei  $l = L = 420$  cm, ferner ist  $d = 20$  cm, also  $\frac{l}{d} = \frac{420}{20} = 21$ .

Nach obiger Tabelle darf nun sein: für  $\frac{l}{d} = 20$  die zulässige Beanspruchung  $s = 32$  kg/qcm, für  $\frac{l}{d} = 25$  die zulässige Beanspruchung  $s = 27$  kg/qcm. Nimmt also  $\frac{l}{d}$  um 5 Teile zu, so nimmt die zulässige Beanspruchung um 5 kg/qcm, somit für 1 Teil um 1 kg/qcm ab. Es ist daher für das Verhältnis  $\frac{l}{d} = 21$  die zulässige Beanspruchung  $32 - 1 = 31$  kg/qcm, die tatsächliche Beanspruchung berechnete sich zu  $s = 30$  kg/qcm, sie bleibt also noch unter dem zulässigen Wert.

Beispiel 54. Welche Höhe darf der Pfosten in Beispiel 23 bei II. § 1 mit Rücksicht auf die Verknicung erhalten?

Aufl. Es darf werden: für  $s = 39 \text{ kg/qcm}$  das Verhältnis  $\frac{1}{d} = 15$ , für  $s = 47 \text{ kg/qcm}$  das Verhältnis  $\frac{1}{d} = 10$ , für eine Zunahme der Beanspruchung um  $8 \text{ kg/qcm}$  muß somit  $\frac{1}{d}$  um 5 Teile abnehmen; also bei  $1 \text{ kg/qcm}$  Zunahme  $\frac{5}{8}$  Teile Abnahme; daher ist für die Beanspruchung  $40 \text{ kg/qcm}$  ein Verhältnis  $\frac{1}{d} = 15 - \frac{5}{8} = 14\frac{3}{8} = \text{rund } 14$  zulässig. Die Pfostenhöhe ist  $20 \text{ cm}$ , somit darf die Pfostenhöhe  $20 \cdot 14 = 2,80 \text{ m}$  werden.

Beispiel 55. Welchen Sicherheitsgrad hat die in Beispiel 24 bei II. § 1 berechnete gußeiserne Säule gegen Zerfrückung?

Aufl. Soeben wurde berechnet, daß der Holzpfeiler  $2,80 \text{ m}$  hoch sei. Dieselbe Höhe habe die Säule auch; deren Verhältniszahl  $\frac{1}{d}$  wird daher  $\frac{1}{d} = \frac{280}{15} = 18,7$ . Für  $\frac{1}{d} = 20$  ist die Bruchbelastung  $2650 \text{ kg/qcm}$ ,  $\frac{1}{d} = 15$  ist die Bruchbelastung  $3300 \text{ kg/qcm}$ . Nimmt  $\frac{1}{d}$  um 5 Teile ab, so ergeben sich  $650 \text{ kg/qcm}$  Zunahme bei der Bruchbelastung, somit bei Abnahme um  $20 - 18,7 = 1,3$  Teile eine Zunahme von  $\frac{650 \cdot 1,3}{5} = 170 \text{ kg/qcm}$ . Die Bruchbelastung für  $\frac{1}{d} = 18,7$  wird daher  $2650 + 170 = 2820 \text{ kg/qcm}$ . Die tatsächliche Beanspruchung ist aber  $190 \text{ kg/qcm}$ , somit wird, nach II. § 1 C., der Sicherheitsgrad gegen Bruch  $\frac{2820}{190} = 14,8$ , d. h. rund 15fache Sicherheit, während in der obigen Tabelle 10 bis 11fache Sicherheit beim Gußeisen schon als genügend betrachtet ist.

Beispiel 56. Eine gußeiserne Säule ist  $4,80 \text{ m}$  hoch. Ihr kreisringförmiger gefährlicher Querschnitt mißt  $20 \text{ cm}$  im Durchmesser und hat  $20 \text{ mm}$  Eisenstärke. Wie groß darf die zentrale Säulenbelastung werden?

$$\text{Aufl. } J = \frac{D^4 - d^4}{20} = 4725 \text{ cm}^4; \quad F = \pi \frac{D^2 - d^2}{4} = 113 \text{ qcm.}$$

$$\text{Nach Euler darf werden } P_1 = \frac{P}{8} = \pi^2 \cdot \frac{1\,000\,000 \cdot 4725}{8 \cdot 480^3} = 25\,600 \text{ kg.}$$

$$\text{Nach Schwarz-Kanfline } P = \frac{F \cdot s_k}{1 + m l^2 \frac{F}{J}} = \frac{113 \cdot 500}{1 + 0,00016 \cdot 480^2 \frac{113}{4725}} = 30\,000 \text{ kg.}$$

Nach obiger Tabelle  $l = 480$ ,  $d = 20$ ,  $\frac{1}{d} = 24$ , hierfür  $s = 192 \text{ kg/qcm}$ , also  $P = F \cdot s = 113 \cdot 192 = 21\,700 \text{ kg}$ .

Bei andern Beispielen ändert sich der Wechsel in der Größe des zulässigen Druckes, je nachdem man nach der einen oder andern Weise rechnet.

## II. § 14. Torsionsfestigkeit.

Wirkt eine Kraft  $P$  am Hebelarm  $r$  verdrehend auf einen Stab, so ist im Falle des Gleichgewichts der Widerstand eines Querschnittes gegen Abdrehen, d. h. die Summe der Momente aller inneren Kräfte in der Querschnittsebene in Bezug auf die Drehachse gleich dem angreifenden Torsionsmoment  $M_t$ . Die Drehachse fällt mit der Stabachse zusammen, sie geht also durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche, welcher in diesem Fall Torsionsmittelpunkt genannt wird.

Die inneren Kräfte zählen zu den Schubspannungen, weil sie in der Querschnittsebene auftreten.

Ist die Beanspruchung eines Flächenelementes von der Größe  $f$  an irgend einer Stelle gleich  $t_x$  kg/qcm, so greift an dem Flächenelement eine Kraft gleich  $f \cdot t_x$  an, und der gesamte Widerstand der inneren Kräfte der Fläche ist  $\Sigma f \cdot t_x \cdot x$ , wenn  $x$  der Abstand eines Flächenelementes vom Torsionsmittelpunkt ist. Die Größe des Torsionsmomentes ist aber  $P \cdot r$ , also muß  $M_t = P \cdot r = \Sigma f \cdot t_x \cdot x$  sein.

Ist  $t$  die Beanspruchung in der äußersten Faser, welche von der Torsionsachse den Abstand  $e$  hat, so hat man die Proportion  $t_x : t = x : e$  oder  $t_x = \frac{t}{e} \cdot x$ . Setzt man diesen Wert oben ein, so wird  $M_t = \Sigma f \cdot \frac{t}{e} \cdot x \cdot x = \frac{t}{e} \Sigma f \cdot x^2 = \frac{t}{e} \cdot J_p$ .

Der Wert  $J_p = \Sigma f x^2$  ist das Trägheitsmoment in Bezug auf den Torsionsmittelpunkt und heißt das polare Trägheitsmoment des Querschnitts.  $\frac{J_p}{e} = W_p$  heißt das polare Widerstandsmoment und man hat die der Biegleichung ähnliche Grundformel  $M_t = W_p \cdot t$ .

Bestimmung des polaren Trägheitsmomentes aus den axialen Trägheitsmomenten eines Querschnitts:

Haben die Flächenelemente von einer Schwerpunktsachse II II die Abstände  $y$ , so ist das axiale Trägheitsmoment in Bezug auf II II nach II. § 6  $J_1 = \Sigma f y^2$ . Werden die Abstände der Flächenelemente von einer anderen Schwerpunktsachse II II mit  $z$  bezeichnet, so ist das axiale Trägheitsmoment in Bezug auf II II  $J_2 = \Sigma f z^2$ , also wird  $J_1 + J_2 = \Sigma f y^2 + \Sigma f z^2 = \Sigma f (y^2 + z^2)$ . Sind die beiden Achsen senkrecht zu einander, so erhält man nach dem pythagoräischen Lehrsatz  $y^2 + z^2 = x^2$ , also wird  $\Sigma f (y^2 + z^2) = \Sigma f x^2$ , das heißt  $J_1 + J_2 = J_p$ , somit ergibt sich der Satz:

Das polare Trägheitsmoment eines Querschnittes  $J_p$  ist gleich der Summe zweier axialen Trägheitsmomente desselben Querschnitts, bezogen auf zwei zu einander senkrechte Schwerpunktsachsen.

Daraus ergibt sich folgende Tabelle:

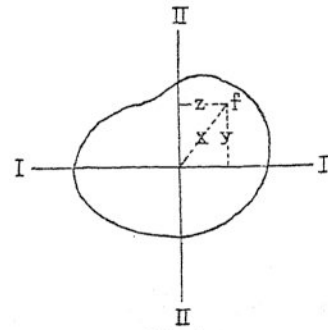


Bild 1.

Querschnitt.	Axiales $J$ .	Polares $J_p$ .	Polares $W_p$ .
	$\frac{\pi \cdot D^4}{64} = \text{circa } \frac{D^4}{20}$	$\frac{\pi \cdot D^4}{32} = \text{circa } \frac{D^4}{10}$	$\frac{\pi D^3}{16} = \text{circa } \frac{D^3}{5}$
	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{D^4 - d^4}{20}$	$\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{D^4 - d^4}{10}$	$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{16 \cdot D} = \frac{D^4 - d^4}{D \cdot 5}$
	$\frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{b^4}{12}$	$\frac{b^4}{6}$	$\frac{b^3}{3 \sqrt{2}}$

Der obige Satz ist für Rechtecke, welche wenig von der Quadratform abweichen, noch anwendbar, man erhält dann, wenn  $b$  und  $h$  die Seiten,  $d$  die Diagonale des Rechteckes bezeichnen:  $J_p = \frac{1}{12} b h (b^2 + h^2) = \frac{b h d^2}{12}$  und  $W_p = \frac{1}{6} b h \sqrt{b^2 + h^2} = \frac{b h d}{6}$ .

Ist das Rechteck aber mehr länglich gestaltet, so wird die Querschnittsfläche bei der Torsion windschief und man erhält alsdann mittels höherer Mathematik

$$J_p = \frac{b^3 h^3}{3(b^2 + h^2)} = \frac{b^3 h^3}{3 d^2} \quad \text{und} \quad W_p = \frac{b^2 h^2}{3 \sqrt{b^2 + h^2}} = \frac{b^2 h^2}{3 d}$$

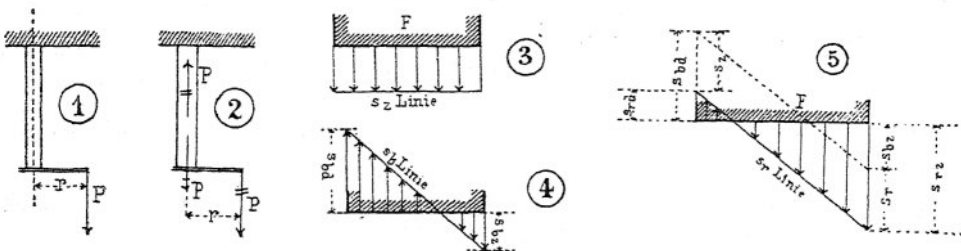
Die Stärke langer Wellen oder rasch laufender leichter Wellen ist mit Rücksicht auf den zulässigen Verdrehungswinkel zu bestimmen. Vorstehende Theorie stützt sich auf die Annahme, daß jeder Querschnitt bei der Verdrehung eben bleibe. Davon abweichende Berechnungsweisen siehe „Bach, Maschinenelemente“.

## II. § 15. Zusammengesetzte Festigkeit.

Es ist schon in II. § 1 gezeigt, wie es vorkommen kann, daß ein Stab auf mehrere Arten in Anspruch genommen wird. Sind die dabei auftretenden inneren Kräfte lauter Normalspannungen, d. h. stehen sie alle senkrecht zur Querschnittsebene, so addieren sie sich einfach. Sind dagegen diese inneren Kräfte teils senkrecht zur Querschnittsebene, teils in dieser gelegen, so ist die Resultierende derselben auf andere Weise zu suchen. Die praktisch am häufigsten vorkommenden Fälle sind:

### 1. Zug und Biegung.

Ist  $F$  die Querschnittsfläche eines Stabes und wirkt an diesem Stabe eine Kraft  $P$ , welche zwar parallel mit der Stabachse geht, aber von dieser den Abstand  $r$  hat, so erhält man den in nebigen Bild 1 dargestellten exzentrischen Zug. Die Kraft  $P$  ist bei dieser Stellung nicht bloß bestrebt, den Stab von seiner Befestigung wegzuziehen woraus sich die Beanspruchung  $s_z = \frac{P}{F}$  ergibt (dargestellt in Bild 3), sondern es biegt auch  $P$  am Hebelarm  $r$  den Stab. Die Größe des Biegemomentes ist  $M = P \cdot r$ .



Infolge dieser Biegung, welche gleich der Wirkung des in Bild 2 auftretenden Kräftepaars ist, erleidet der Querschnitt  $F$  eine Beanspruchung, welche erhalten wird aus der Formel:

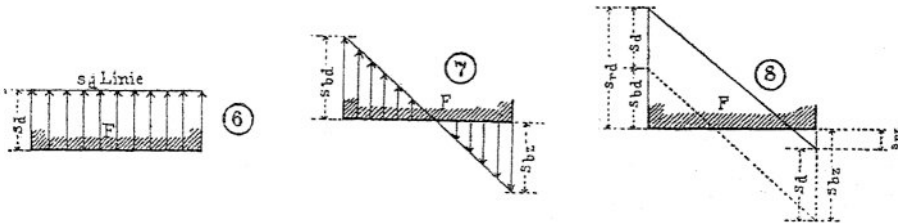
$s_b = \frac{M}{W}$  (dargestellt in Bild 4) und zwar wird, wenn man zwischen der Zugbeanspruchung infolge der Biegung  $s_{bz}$  und der Druckbeanspruchung infolge der Biegung  $s_{bd}$  unterscheidet  $s_{bz} = \frac{M}{W_z}$  und  $s_{bd} = \frac{M}{W_d}$ , wobei  $W_z$  das Widerstandsmoment in Bezug auf die am meisten gezogene und  $W_d$  das Widerstandsmoment in Bezug auf die am meisten gedrückte



Faser ist. Die resultierende Beanspruchung auf Zug  $s_{rz}$  erhält man durch Addition, der so gefundenen Werte also  $s_{rz} = s_{bz} + s_z = \frac{M}{W_z} + \frac{P}{F}$ . Die resultierende Beanspruchung auf Druck  $s_{rd}$  ergibt sich durch Subtraktion, also  $s_{rd} = s_{bd} - s_z = \frac{M}{W_d} - \frac{P}{F}$  (s. Bild 5).

## 2. Druck und Biegung.

Man erhält ganz in der gleichen Weise wie bei 1.:  $s_d = \frac{P}{F}$  (dargestellt in Bild 6),  $s_{bz} = \frac{M}{W_z}$  (dargestellt in Bild 7),  $s_{bd} = \frac{M}{W_d}$  (dargestellt in Bild 7), also  $s_r = s_b + s_d$ , d. h.  $s_{rz} = \frac{M}{W_z} + \frac{P}{F}$  (dargestellt in Bild 8), ebenso  $s_{rd} = \frac{M}{W_d} - \frac{P}{F}$  (dargestellt in Bild 8).



Zusatz. Über die graphische Darstellung der zusammengesetzten Beanspruchung bei exzentrischem Zug oder Druck, Bild 3, 4, 5 und 6, 7, 8 und über die Verschiebung der Neutralachse s. auch VI. § 2.

## 3. Verdrehung und Biegung.

Die infolge der Verdrehung auftretenden inneren Kräfte stehen nicht senkrecht zur Querschnittsebene, sondern liegen in derselben. Da die größten dieser Kräfte am Umfang des Querschnitts auftreten, so nennt man sie Tangentialspannungen. Infolge der Biegung treten innere Kräfte auf, welche nach II. § 6 Normalspannungen sind, d. h. senkrecht zur Querschnittsebene stehen. Man erhält nun die resultierende Beanspruchung mittels folgender Formel:  $s_r = \frac{3}{8} s_b + \frac{5}{8} \sqrt{s_b^2 + 4s_t^2}$  oder genauer  $s_r = 0,35 s_b + 0,65 \sqrt{s_b^2 + 4s_t^2}$ , wobei  $s_b$  die Beanspruchung infolge der Biegung,  $s_t$  die Beanspruchung infolge der Verdrehung ist. Hat man das Biegemoment und Torsionsmoment gerechnet, so kann die Rechnung auch in der Weise weiter geführt werden, daß man, statt die einzelnen Beanspruchungen auszurechnen, ein sogenanntes ideelles Biegemoment  $M_i$  ermittelt, welches dieselbe Wirkung in Bezug auf die Beanspruchung hervorbringt, wie das tatsächliche Biegemoment  $M_b$  und das Torsionsmoment  $M_t$  zusammen.

$$\text{Es ist (nach Grasshof): } M_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_t^2} = 0,35 M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + M_t^2}.$$

Die Beanspruchung ergibt sich alsdann wie früher  $s_r = \frac{y M_i}{J} = \frac{M_i}{W}$ .

Als Annäherung verwendet man in der Praxis auch folgende aus dem pythagoräischen Lehrsatz abgeleitete Formel  $s_r = \sqrt{s_b^2 + s_t^2}$ . Diese, sowie die vorhergehende Formel für  $M_i$  beziehungsweise  $s_r$  setzen Materialien voraus, welche nach allen Seiten gleichartig sind, wie dies z. B. beim Stahl der Fall ist. Hat man andere Materialien, so ist das Torsionsmoment

noch mit einem Zahlenwert  $\alpha_0$ , dem sogenannten Anstrengungsverhältnis zu multiplizieren, so daß  $M_i = 0,35 \cdot M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 M_t^2)}$  wird.

$\alpha_0$  ist nahezu gleich Eins; dessen Werte siehe „Bach, Elastizität und Festigkeit“.

Die Normalspannungen können auch durch eine in der Achse des Stabes wirkende Kraft hervorgerufen sein, d. h. es können anstatt  $s_b$  auch die Beanspruchungen  $s_z$  und  $s_d$  in die Formeln eingesetzt werden, ohne daß sich an denselben etwas ändert, sie gelten somit auch für „Druck und Torsion“, sowie für „Zug und Torsion“.

#### 4. Normal- und Schubspannungen.

Ist die Normalbeanspruchung oder Normalspannung  $s_b$  und die Schubbeanspruchung oder Schubspannung  $t$ , so ergeben diese zwei zueinander senkrecht stehende Hauptspannungen

$$s_m = \frac{1}{2} s_b \pm \frac{1}{2} \sqrt{s_b^2 + 4 t^2}.$$

Von diesen Hauptspannungen bringt jede in ihrer Richtung eine axiale, in der Richtung der andern, auf ihr senkrecht stehenden Hauptspannung eine Querverlängerung hervor. Beide Hauptspannungen lassen sich ersetzen durch sogenannte „ideelle Hauptspannungen“  $s_r$ , von denen jede in ihrer Richtung allein die Gestaltsveränderung bewirkt, welche die Hauptspannungen zusammen bewirken würden, diese stellen also die größten Anstrengungen der betreffenden Stelle dar. Sie sind

$$s_r = 0,35 s_b \pm 0,65 \sqrt{s_b^2 + 4 (\alpha_0 t)^2}.$$

#### 5. Biegung in zwei Richtungen.

Sind die Normalspannungen  $s_1$  und  $s_2$  parallel, so wird  $s_r = s_1 \pm s_2$ ; stehen deren Richtungen senkrecht zueinander, so kann  $s_r = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$  gesetzt werden.

## Kapitel III.

# Fachwerke, insbesondere Eisenkonstruktionen.

### III. § 1. Allgemeines über Fachwerke.

Wird ein massiver Balken auf Biegung beansprucht, so sind dessen einzelne Teile ungleich angestrengt. Einerseits ist die Beanspruchung der Materialteile in ein und demselben Querschnitt nicht gleich groß, — die der Neutralachse näheren Fasern werden fast gar nicht ausgenützt, — andererseits ist die Anstrengung der verschiedenen Querschnitte nicht gleich; es kann z. B. bei einem prismatischen, auf 2 Stützen liegenden Balken der Querschnitt in der Mitte dem Bruche nahe sein, während in der Nähe der Auflager nur eine geringe Beanspruchung stattfindet. Man sucht diese Übelstände durch die Gestaltung der Träger zu vermeiden und gibt z. B. den Eisenträgern I Querschnitte und an der Stelle der größeren Biegemomente größere Gurtungen oder größere Höhe; trotzdem sind, namentlich bei großen Trägern, Materialverschwendungen nicht zu umgehen.

Um diese zu vermeiden, konstruiert man solche Träger nicht voll, sondern durchbrochen und beschränkt sich dabei nicht bloß auf Ausparungen an den weniger beanspruchten Stellen, sondern man ist bestrebt, alle Biegungsspannungen aus dem Träger überhaupt ferne zu halten.

Dies läßt sich erreichen, wenn man den Träger als Fachwerk konstruiert, d. h. wenn man denselben aus Stäben zusammensetzt, welche ausschließlich nur auf Zug oder nur auf Druck beansprucht sind (s. Taf. III).

Damit letzteres aber tatsächlich der Fall wäre, müßte der Fachwerkträger folgenden Bedingungen entsprechen:

1. Die Zusammenführung verschiedener Stäbe in einem Eckpunkt des Fachwerks — Knotenpunkt genannt — muß so erfolgen, daß die Schwerpunktsachsen aller Stäbe sich in einem Punkte treffen, und so konstruiert sein, daß alle Stäbe sich um ihn frei drehen können.

2. Die Übertragung der Lasten auf den Fachwerkträger darf nur in Knotenpunkten erfolgen.

Sind diese zwei Bedingungen erfüllt, so kann die auf einen Stab wirkende Kraft nur in dessen Achse liegen; denn wäre dies nicht der Fall, so würde der Stab sich um den Knotenpunkt drehen, bis er in die Kraftrichtung käme, um seinen Gleichgewichtszustand zu erreichen.

Damit das Fachwerk einen unbeweglichen steifen Träger gibt, und damit andererseits die Kräfte, die in den einzelnen Stäben auftreten, sich bestimmen lassen, ist noch eine weitere Bedingung nötig, nämlich:

3. Es dürfen in einem Fachwerk nicht weniger und nicht mehr Stäbe vorhanden sein, als für unverstehliche Festlegung der Knotenpunkte nötig sind.

Zu Bedingung 1. ist zu bemerken, daß nur scharnierartige, also mit einem einzigen Gelenkbolzen konstruierte Knotenpunkte (s. Bild 1 Taf. III) dieser Anforderung genügen könnten.

Allein selbst diese genügen ihr nicht ganz, da auch bei ihnen die freie Beweglichkeit der Stäbe, welche gegen den Bolzen gedrückt sind, durch die Reibung auf dem Bolzen beeinträchtigt ist.

Ganz aufgehoben ist die freie Beweglichkeit der Stäbe bei den genieteten Knotenpunkten (s. Bild 2 Taf. III).

In beiden Fällen treten also in der Nähe des Knotenpunktes noch weniger oder mehr bedeutende Biegungsspannungen in den Stäben auf, sobald das Fachwerk infolge der Belastung elastische Formänderungen erleidet. Die Berechnung dieser Nebenspannungen ist sehr schwierig und zeitraubend. Man kann dieselbe unterlassen, wenn die Stabquerschnitte so bemessen werden, daß die Beanspruchungen, welche sich aus den Hauptspannungen ergeben, die in II. § 4 gegebenen zulässigen Werte nicht ganz erreichen oder jedenfalls nicht überschreiten. Dagegen ist es durchaus unzulässig, die Zusammenführung der Stäbe so zu bewerkstelligen, wie in Bild 2 Taf. III gezeichnet ist, die Stäbe müssen so gestellt werden, daß ihre Schwerpunktsachsen sich in einem Punkt schneiden.

Die Bedingung 2. wird in der Praxis auch nicht immer erfüllt. Bei den Konstruktionen in Bild 3 und 4 Taf. III wirken z. B. die Belastungen der Brücke bezw. des Daches auch zwischen den Knotenpunkten auf das Fachwerk ein. Die belasteten Stäbe müssen vermöge ihrer Biegefestigkeit die Lasten erst auf die Knotenpunkte übertragen; sie sind also in doppelter Weise beansprucht: auf Biegung und als Fachwerkstäbe auf Druck. Den Stäben ist in diesem Fall ein solcher Querschnitt zu geben, daß die Summen beider Beanspruchungen den zulässigen Wert nicht überschreiten. Bei größeren Konstruktionen zieht man vor, der Bedingung 2. durch Einschaltung von sogenannten Längsträgern und Querträgern Genüge zu leisten, welche die Übertragung der Lasten auf die Knotenpunkte zu besorgen haben (s. Bild 5 Taf. III). Die Bedingung 2. läßt sich übrigens bezüglich des Eigengewichtes der Konstruktion nie ganz erfüllen. Jeder Stab muß sein Eigengewicht auf die zwei Knotenpunkte, zwischen welchen er liegt, übertragen.

Die Bedingung 3. ist erfüllt, wenn in einem Fachwerk mit  $n$  Knotenpunkten die Anzahl der Stäbe beträgt:  $2n - 3$ . Aus Bild 6 Taf. III geht nämlich hervor, daß zur Festlegung der 3 ersten Knotenpunkte 3 Stäbe nötig sind, zu jedem anderen der noch übrigen  $(n - 3)$  Knotenpunkte aber je nur noch 2, also im ganzen  $3 + 2(n - 3) = 2n - 3$  Stäbe.

Man nennt solche Fachwerke einfache, oder statisch bestimmbare. Viele der übrigen Fachwerke, welche die Bedingung 3. nicht erfüllen, lassen sich auch noch berechnen, aber nicht einfach, sondern nur mit Hilfe der Elastizitätslehre, oder durch Zerlegung in einfache Fachwerke (mehrfache und zusammengesetzte Fachwerke).

Beispiel. Das Fachwerk in Bild 13 Taf. III hat  $n = 20$  Knotenpunkte und soll nach obiger Bedingung  $2 \cdot 20 - 3 = 37$  Stäbe haben, was auch tatsächlich der Fall ist. Das Fachwerk ist daher ein einfaches und statisch bestimmbares.

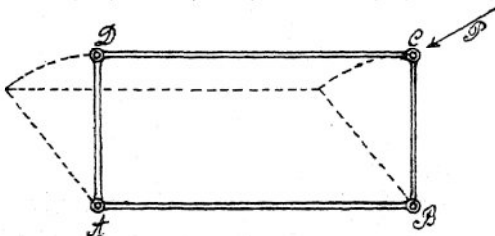


Bild 1.

Aus der Bedingung 3. ergibt sich, daß ein einfaches Fachwerk aus lauter Dreiecken zusammengesetzt sein muß, denn das Dreieck allein ist ein unverrückbares, geradliniges Gebilde.

Ist das Viereck ABCD aus Stäben gebildet, welche in den Eckpunkten scharnierartig verbunden sind, so behält das Viereck, wenn es in A und B

aufruht, seine Gestalt nur so lange bei, als Kräfte parallel AD und BC auf dasselbe einwirken. Sobald jedoch eine Kraft P schief wirkt, ist das Viereck bestrebt, in die gestrichelte Lage überzugehen. Dabei würde die Diagonale AC verkürzt, während BD länger werden würde. Wäre nun die Diagonale AC durch einen Stab gebildet, so würde derselbe die Verschiebung verhindern und Druck erleiden; würde dagegen ein Stab BD eingelegt, so würde dieser die Verschiebung verhindern, so lange er den entstehenden Zug auszuhalten vermag.

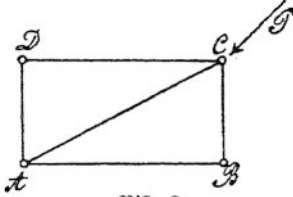


Bild 2.

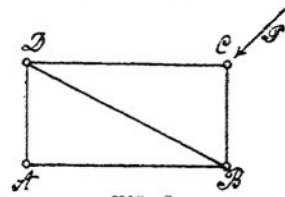


Bild 3.

In beiden Fällen ist das Viereck ABCD in zwei Dreiecke zerlegt.

Ist Diagonale DB eingelegt und ist eine Kraft Q bestrebt, das Viereck nach rechts zu verschieben, so erleidet BD einen Druck. Ist die Diagonale nur auf Zug konstruiert (Flacheisen, Rundstahl etc.), so vermag sie diesem Druck nicht zu widerstehen, sie tritt außer Wirksam-

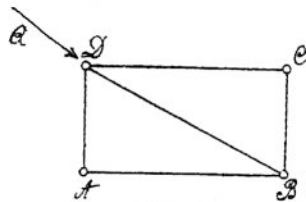


Bild 4.

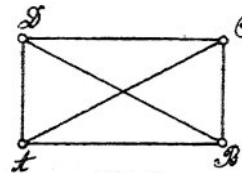


Bild 5.

keit und es erleidet die Diagonale AC Zug. Wird auch längs AC ein Zugband eingelegt, so ist die Unverschieblichkeit des Bildes für Kraftwirkungen nach beiden Richtungen gesichert. Ein solches Diagonalenpaar nennt man Gegendiagonalen. Es ist stets nur eine derselben in Wirksamkeit und auch für die oben gegebene Formel  $2n - 3$  nur eine derselben zu zählen. Mit der Anordnung von Gegendiagonalen bezweckt man die Ersparung von druckfähigen Diagonalen, welche um der Zerknickung willen starke Querschnitte erhalten müssten.

Das Viereck ABCD kann auch unverschieblich sein ohne Diagonalen, wenn nämlich die Knotenpunkte nicht beweglich, sondern fest sind. In diesem Falle treten aber bei den Knotenpunkten starke Biegungsspannungen auf; um diese zu vermeiden, werden daher die Diagonalen im allgemeinen nicht weggelassen.

### III. § 2. Gang der Fachwerks-Berechnungen.

Die Berechnung der Fachwerke besteht aus 4 Teilen, welche in folgender Reihenfolge vorzunehmen sind:

1. Berechnung der Lasten, welche auf die Konstruktion einwirken (s. III. § 3).
2. Berechnung der infolge dieser Lasten nachgerufenen Auflagerwiderstände (s. III. § 4).
3. Berechnung der Stabkräfte, d. h. derjenigen inneren Spannungen, welche in jedem Fachwerkstab infolge der aus 1. und 2. sich ergebenden äußeren Kräfte auftreten (s. III. § 5).
4. Berechnung der Querschnittsabmessungen der Fachwerkstäbe entsprechend den Resultaten aus 3. (s. III. § 6).

### III. § 3. Berechnung der Lasten.

Die Einheitsgewichte, welche diesen Berechnungen zugrunde zu legen sind, wurden schon in II. § 5 angegeben; es handelt sich also hier nur noch darum, die Größe der belastenden Flächen *z.* zu finden.

Es werden je diejenigen Flächenteile zusammengefaßt, welche sich auf einen Knotenpunkt des Fachwerks stützen. Ist also z. B. in Bild 7 Taf. III der Abstand zweier Dachbinder  $xy = l$  und ist die benachbarte „Bundweite“  $yz = l'$ , hat ferner im Gebinde *y* Bild 8 Taf. III der Knotenpunkt II die Abstände  $II I = b$  und  $II IV = b'$  von den benachbarten Knotenpunkten I und IV, so stützt sich auf den Knotenpunkt II die Dachfläche  $ABCD = \left(\frac{b}{2} + \frac{b'}{2}\right) \left(\frac{l}{2} + \frac{l'}{2}\right)$ , wie aus den Bildern unmittelbar hervorgeht. Ist  $b = b'$  und  $l = l'$ , so vereinfacht sich die Rechnung, indem sich ergibt  $ABCD = b \cdot l$ .

Diese Vereinfachung tritt jedoch häufig nicht ein, und es ist dann mittels der angegebenen allgemeinen Formel weiter zu rechnen.

Ein solcher Fall ist z. B. in Fig. 9 Taf. III im Grundriß dargestellt.

Hier sind die drei Binder U, V, W ganz verschieden belastet: Es lastet auf dem Knotenpunkt U, die Fläche BACD, auf V, die Fläche CDFE, auf W, die Fläche EFHKJG.

Die Verschiedenheit der Belastung erstreckt sich aber nicht bloß auf die einzelnen Binder, sondern sie tritt auch an den gleichliegenden Knotenpunkten eines und desselben Binders auf; so ist z. B. Knotenpunkt I des Gratgebindes W weit mehr belastet, als der entsprechende Knotenpunkt im Kehlgebinde  $W_1$ , wie Bild 9 Taf. III zeigt. Auf die gleiche Weise berechnen sich auch die Belastungsflächen von Zelt- oder Turmdächern (vgl. Bild 9b Taf. III).

Die Länge *l* und Breite *b* der Belastungsflächen sind im Grundriß zu messen, wenn das Einheitsgewicht pro 1 qm Grundriß, d. h. Horizontalprojektion gegeben ist. Ist dagegen das Einheitsgewicht pro 1 qm Dachfläche angegeben, so ist nur die Länge *l* im Grundriß, dagegen die Breite *b* in der Ansicht des zur Trauflinie senkrecht stehenden Binders abzumessen.

Bei Berechnung der oben genannten Fläche EFHKJG darf also *b* nicht in der Ansicht des Binders WW gemessen werden, sondern ist am Binder VV oder UU zu entnehmen, weil der Flächeninhalt eines Trapezes gemessen ist durch die halbe Summe der parallelen Seiten und dem senkrechten Abstand dieser Seiten. Die Berechnung erfolgt am besten tabellarisch, sobald nicht mehr  $b = b'$  und  $l = l'$  ist. Die Nutzlast ruht in der Regel nicht auf allen Knoten-

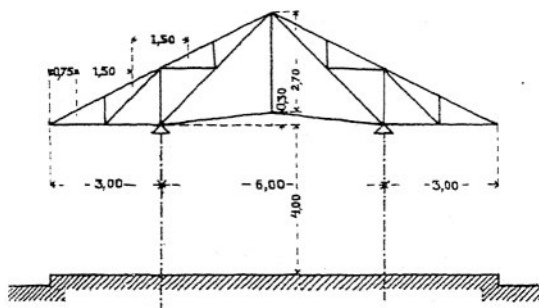


Bild 1.

punkten eines Fachwerkes, dagegen verteilt sich das Eigengewicht des Fachwerkes tatsächlich über alle Knotenpunkte. Es ist jedoch gebräuchlich, diesen Umstand außer acht zu lassen und das gesamte Eigengewicht in der Regel nur auf diejenigen Knotenpunkte gleichmäßig zu verteilen, welche die Nutzlast aufnehmen. Diese Abweichung von den tatsächlichen Verhältnissen ist ohne praktische Bedeutung.

Beispiel 57. Das nachstehend skizzierte Schuppendach hat 10 m Bundweite und nach Tabelle II bei II. § 5 ein Gesamtgewicht von 150 kg/qm Grundrißfläche. Dessen Knotenpunktbelastungen sind zu berechnen.

Aufl. Auf die beiden Endpunkte kommen  $0,75 \cdot 10 = 7,5$  qm Grundrißfläche zu 150 kg, somit  $7,5 \cdot 150 = 1125$  kg. Auf die Zwischenknotenpunkte kommen je  $1,5 \cdot 10 = 15$  qm Grundrißfläche zu 150 kg, somit  $15 \cdot 150 = 2250$  kg.

### III. § 4. Berechnung der Auflagerwiderstände.

Man hat zwei Arten von Fachwerken zu unterscheiden. Die eine Art hat einfache Tragbalken zu ersetzen; es sind dies die Trägerfachwerke. Die anderen Fachwerke haben Gewölbe zu ersetzen und heißen Bogenfachwerke. Hier kommen nur die Trägerfachwerke zur Besprechung; dieselben geben bei vertikaler Belastung vertikale Auflagerwiderstände und ruhen nur auf dem Auflager auf, während sich die Bogenfachwerke auch bei ausschließlich vertikaler Belastung gegen die Widerlager stemmen.

Bei der Berechnung der Auflagerdrücke der Trägerfachwerke ist davon auszugehen, daß man ein System von Kräften hat, nämlich die nach dem vorhergehenden Paragraphen berechneten Knotenpunktbelastungen, und daß man die Komponenten der Resultante dieses Systems nach zwei gegebenen Richtungen, nämlich den Vertikallinien durch die Auflagerpunkte bestimmen soll. Diese Komponenten sind die Auflagerdrücke; die Auflagerwiderstände sind ihnen gleich und direkt entgegengesetzt. Die Bestimmung der Auflagerdrücke erfolgt graphisch oder durch Rechnung nach I. § 18 und 19.

Sind einzelne oder alle angreifenden Kräfte nicht vertikal, sondern geneigt (Winddruck), so ist deren Resultante auch geneigt und die Auflagerdrücke können nicht mehr vertikal sein, ihre Richtung ist unbekannt. Man hat somit die Aufgabe, die Resultierende der angreifenden Kräfte nach zwei unbekanntem Richtungen in Komponenten zu zerlegen. Diese Aufgabe ist nach I. § 6 eine unbestimmte, und es ist daher durch die Konstruktion der Auflager dafür zu sorgen, daß die Aufgabe eine statisch bestimmte wird. Dies geschieht durch die Anordnung eines Rollenauflagers. Das Rollenlager kann im Ruhezustand nur vertikalen Druck aufnehmen, denn bei jeder anderen Richtung des Drucks müßte sich dasselbe bewegen.

Beim Vorhandensein eines Rollenlagers ist die Angriffslinie AD (s. Bild 10 Taf. III) einer Komponente bekannt und es läßt sich die Angriffslinie der zweiten Komponente leicht finden, da diese Komponente sowohl durch den anderen Auflagerpunkt, als auch nach I. § 6 und I. § 9 durch den Schnittpunkt D der Resultante R mit der Vertikalen des beweglichen Auflagerpunktes gehen muß. Ein Kräfteparallelogramm liefert schließlich die Größe und Richtung der Auflagerdrücke A und B.

Bild 10b Taf. III zeigt die Bestimmung der Auflagerdrücke für den Fall, daß die Neigung der Kraftresultante die entgegengesetzte ist. Der Vergleich beider Figuren läßt erkennen, wie das einernal das Auflager B einem Druck nach außen, das anderemal einem Druck nach innen Widerstand zu leisten hat.

In vielen Fällen wird der Schnittpunkt D außerhalb des Zeichnungsblattes fallen, dann sind die Auflagerdrücke in anderer Weise zu bestimmen (s. Bild 10c und 10d Taf. III). Man zerlegt die Resultante R in ihre Vertikal- und Horizontalkomponente V und H. Das Auflager A kann nur Vertikaldrücke aufnehmen, die Komponente H muß also ganz vom Auflager B aufgenommen werden, während die Komponente V sich nach dem Hebelgesetz in die beiden Drücke  $V_a$  und  $V_b$  zerlegt. Es ist einleuchtend, daß R vor der Zerlegung in H und V, an die Verbindungslinie AB anzulegen ist, denn nur in dieser Linie kann die Komponente H wirken.

Rollenlager werden bei großen Trägern ohnedies notwendig, um die, durch Temperaturveränderungen bedingte Längenänderung des Trägers, unbeschadet der Auflager, möglich zu machen. Bezüglich des Maßes dieser Längenänderungen infolge des Temperaturwechsels sei hier eingeschaltet, daß dasselbe nach einer Vorschrift im Amtsblatt des k. württ. Ministeriums des Innern vom 16. April 1894 § 24 Abs. 7 bei Straßenbrücken zu  $\frac{1}{1000}$  der Stützweite bzw. der Trägerlänge angenommen werden kann.

Bei Dachstützen können die Temperaturschwankungen noch größere werden, es empfiehlt sich, die Längenänderungen hier zu  $\frac{1}{700}$  anzunehmen.

Streng genommen ist das Auflager unter den Rollen nicht ganz frei von horizontalen Kräften, weil der Reibungswiderstand der Rollen auf ihrer Unterlagsplatte zu überwinden ist, ehe die Rollenbewegung eintreten kann. Von der Komponente H geht also ein Teil, welcher gleich diesem Reibungswiderstand ist, auf das Rollenauflager über. Dieser Umstand ist nur bei sehr großen Dächern oder dann zu berücksichtigen, wenn die Auflager etwa nur aus Säulen zc. bestehen, also gegen Einwirkung horizontaler Kräfte sehr empfindlich sind.

Bewegliche Rollenauflager werden bei kleinen Spannweiten nicht ausgeführt, und es sind alsdann beide Auflager so zu konstruieren, daß sie der Horizontal Komponente H zu widerstehen vermögen.

Das Auflager eines Fachwerkes muß nicht notwendigerweise eine vertikale Stütze sein; der Auflagerpunkt kann durch Konstruktionen nach Bild 11 und 12 Taf. III und in anderer Weise gestaltet sein. Der Auflagerdruck berechnet sich hier in gleicher Weise, wie seither. Der Widerstand des schwebenden Auflagers ist nicht eine einzelne Kraft, die gleich und direkt entgegengesetzt dem Auflagerdruck ist, sondern er besteht aus Kräften, welche in den Stäben der Unterstützungskonstruktion tätig sind und sich wie in Bild 11 und 12 durch ein Kräfteparallelogramm leicht bestimmen lassen.

Wie bei einfachen Balkenträgern freie Enden vorkommen, so ist dies auch bei den Fachwerksträgern der Fall; es zeigen die Bilder 13 und 14 Taf. III und S. 116 solche Konstruktionen.

Bei freitragenden Dächern nach Bild 14 konstruiert man am besten die Befestigung bei B für Annahme eines horizontalen Zuges, so daß alle vertikalen Drücke auf dem Stützpunkt A lasten. Dabei sollte der Stab AB nie weggelassen werden, da das Mauerwerk nicht gut geeignet ist, seine Stelle zu vertreten.

Die Größe der auf die Befestigungen bei A und B in Bild 14 einwirkenden Kräfte läßt sich leicht mittels der Gleichgewichtsbedingungen bestimmen. Nimmt man A als Drehpunkt, so wird

$$\sum M = 0 = H_b \cdot h - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 - \dots \quad \text{oder}$$

$$H_b \cdot h = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + \dots \quad \text{also} \quad H_b = \frac{\sum P \cdot p}{h}.$$

Die Kraft  $H_a$  muß entgegengesetzte Richtung haben und gleich groß sein, denn nur dann ist  $\sum H = 0 = H_b - H_a$ , also  $H_b = H_a$  und schließlich muß sein:  $\sum V = 0 = P_1 + P_2 + \dots - V_a$ , somit  $V_a = \sum V$ . Die Kräfte  $H_a$  und  $V_a$  geben als Resultante den gegen A gerichteten schiefen Druck an.

Beispiel 58. Die Binder eines freitragenden Daches sind nach Bild 14 Taf. III gestaltet und haben 5 m Abstand voneinander. Das Dach trägt teils Wellblech, teils Glas-



bedachung. Die Ausladung des Daches mißt 4 m, seine Höhe 3 m, wie groß sind die Kräfte an den Befestigungspunkten des Daches.

Aufl. Die Belastung des Daches kann nach II. § 5 Taf. II zu 150 kg/qcm Grundfläche angenommen werden. Der auf einem Dachbinder ruhende Dachteil bedeckt  $5 \cdot 4 = 20$  qcm Grundrißfläche, der Dachbinder ist danach mit  $20 \cdot 150 = 3000$  kg belastet. Diese Belastung ist zu Zwecken der Bestimmung der Stabkräfte in die Knotenpunktlasten zu zerlegen, für den vorliegenden Zweck ist dies nicht nötig.

In Bezug auf A als Drehpunkt wird  $p = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$  m, also erhält man

$$H_a = H_b = \frac{3000 \cdot 2}{3} = 2000 \text{ kg.}$$

Ferner ist  $V = 3000$  kg.

In anderen Fällen sieht man von der Ausführung freier Fachwerkenden ab und hängt das Ende C (Bild 15 Taf. III) mittels der Zugstange CD auf und hat dann wieder einen Träger, der auf 2 Stützen A und C ruht. Die Auflagerdrücke  $V_a$  und  $V_c$  bestimmen sich für diesen Fall, wie im Anfang dieses Paragraphen gezeigt worden ist. Der dabei auf C entfallende Auflagerdruck  $V_c$  wird durch die Stangen CD und CA aufgenommen und auf das Gemäuer übertragen. Es kommt dabei die Komponente  $H_c$  auf den Punkt A, die Komponente S auf den Punkt D. Auf A wirkt somit der aus  $V_a$  und  $H_c$  sich ergebende schiefe Druck A. Den auf D wirkenden schiefen Zug S kann man sich daselbst in die Komponenten  $H_d$  und  $V_d$  zerlegt denken und es zeigt sich dabei, daß  $V_d = V_c$  werden muß.

$\Sigma H = 0$  zeigt, daß  $\Sigma H = 0 = H_c - H_d$ , d. h. wieder  $H_c = H_d$ .

Die Größe von  $H_d$  läßt sich auch unmittelbar rechnerisch aus einer Momentengleichung für Drehpunkt A erhalten:  $\Sigma M = 0 = H_d \cdot h_1 - \Sigma P \cdot p$ , also  $H_d = \frac{\Sigma P \cdot p}{h_1}$ .

Anstatt dieser Berechnung kann man auch die Kraft in der Zugstange unmittelbar bestimmen. In der Zugstange ist eine Kraft S tätig, welche verhindert, daß sich das Dach um A dreht. Die Momentengleichung um A lautet, wenn mit s der Kraftarm von S in Bezug auf A bezeichnet wird  $\Sigma M = 0 = S \cdot s - \Sigma P \cdot p$ , also  $S = \frac{\Sigma P \cdot p}{s}$ .

Nachdem S auf diese Weise ermittelt worden ist, lassen sich aus S die Komponenten H und V zeichnerisch oder rechnerisch ableiten.

Es gibt Fachwerke, deren Auflager mit Zugstangen unter sich verbunden sind, vgl. Bild 20 Taf. III.

Die Kraft Z in einer Zugstange, welche die Auflager eines Satteldaches verbindet, Bild 20 Taf. III, verhindert, daß die beiden Fachwerkhälften sich, um den Firstpunkt drehend, voneinander entfernen. Ist Q die Belastung der linksseitigen Dachhälfte und A der Auflagerwiderstand links, ferner l die Stützweite und h die Firsthöhe des Daches, so lautet die Momentengleichung in Bezug auf den Firstpunkt

$$\Sigma M = 0 = A \cdot \frac{1}{2} - Q \cdot \frac{1}{4} - Z \cdot h, \text{ hieraus } Z = \frac{1}{h} \left( A \cdot \frac{1}{2} - Q \cdot \frac{1}{4} \right).$$

Ist der Dachstuhl nicht symmetrisch, so ändern sich die Kraftarme von A und Q.

Ein Vergleich von Bild 20 mit Bild 10 Taf. III zeigt, daß beim Vorhandensein von Rollenlager in der Zugstange auch Druck auftreten kann.

### III. § 5. Ermittlung der Kräfte in den Fachwerkstäben.

Diese Kräfte können bestimmt werden, sobald man die äußeren Kräfte, d. h. die Lasten nach III. § 3 und die Auflagerdrücke nach III. § 4 berechnet hat. Die Bestimmung kann zeichnerisch oder rechnerisch geschehen.

#### A. Zeichnerische Bestimmung.

Gleichgewicht soll im ganzen Fachwerk, also auch an jedem einzelnen Knotenpunkt desselben vorhanden sein, somit müssen die auf jeden Knotenpunkt einwirkenden Kräfte je unter sich im Gleichgewicht sein und daher ein schließendes Kräftepolygon geben.

Bei der Aufzeichnung desselben ist wohl zu beachten, daß die Berechnung sich damit befaßt, wie die Stäbe auf die Knotenpunkte einwirken. Somit ist Zug im Stab Bild 1, dagegen Druck im Stab Bild 2 vorhanden; denn die Pfeile deuten an, wie der Stab auf den Knotenpunkt wirkt, und nicht was dem Stab geschieht.



Der Gang der Bestimmung der inneren Kräfte ist folgender: Man beginnt bei einem Knotenpunkt, auf welchen außer den bekannten äußeren Kräften nur noch zwei innere Stabkräfte einwirken (meist ist dies ein Auflagerpunkt oder ein freies Ende des Fachwerks), mit Aufzeichnung des oben genannten Kräftepolygons, also wird z. B. bei Bild 16 Taf. III begonnen mit Knotenpunkt I. Hier müssen die Last  $P_1$  der Auflagerwiderstand  $A$ , und die unbekanntenen Stabkräfte  $S_1$  und  $S_2$  im Gleichgewicht sein. Aus  $A$  und  $P_1$  läßt sich das Polygon  $abc$  bilden und wenn dasselbe mit Parallellinien zu Stab 1 und 2 geschlossen wird, so geben die Längen der dadurch erhaltenen Polygonseiten die Größe der Kraft  $S_1$  bezw.  $S_2$  an, wofern sie mit demselben Kräftemaßstab gemessen werden, nach welchem die Kräfte  $A$  und  $P_1$  aufgetragen sind. Die Richtung dieser Kräfte erhält man, indem an die genannten Polygonseiten die Pfeile gezeichnet werden, welche durch das ganze Polygon in gleichem Sinne aufeinander folgen müssen. Die so gefundenen Krafrichtungen werden sofort in das Fachwerksbild eingetragen und dabei auch sogleich die Wirkung des Stabes auf den Knotenpunkt an seinem andern Ende angegeben.

Geht man jetzt zu Knotenpunkt II weiter, so treten hier auf: Die 2 bekannten Kräfte  $S_1$ ,  $P_2$  und die 3 unbekanntenen Kräfte  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$ . Es ist nicht mehr möglich, das aus  $S_1$  und  $P_2$  gebildete Polygon in bestimmter Weise mit Parallelen zu den Richtungslinien der 3 unbekanntenen Kräfte zu schließen; deshalb muß zuvor noch eine der unbekanntenen Kräfte bestimmt werden. Dazu eignet sich Knotenpunkt III, an welchem sich nur 2 unbekanntene Kräfte  $S_3$  und  $S_6$  befinden, da  $S_2$  bei Knotenpunkt I bestimmt wurde. Man zeichnet  $S_2$  seitlich auf und zieht durch dessen Anfangs- und Endpunkt Parallelen mit den Stäben 3 und 6 und erhält so die Kräfte  $S_3$  und  $S_6$  und auch die Richtung dieser Kräfte durch Einzeichnung der Pfeile. Die Pfeile werden wieder sofort in das Fachwerksbild übertragen und nun wird erst Knotenpunkt II bearbeitet. Aus  $P_2$ ,  $S_1$ ,  $S_3$  läßt sich jetzt hier das Polygon  $efgh$  konstruieren, welches mit Parallellinien zu 4 und 5 geschlossen wird etc. Sodann wird ebenso Knotenpunkt IV erledigt. Geht man weiter zu V, so treten nur noch 2 Unbekannte  $S_9$ ,  $S_{10}$  auf u. s. w.

Am letzten Knotenpunkte VII ergibt sich eine Probe, weil die bei Knotenpunkt V und VI gefundenen Kräfte  $S_{10}$  und  $S_{11}$  mit den äußeren Kräften  $P_7$  und  $B$  im Gleichgewicht stehen,

also ein von selbst schließendes Kräftepolygon liefern müssen. (Kleine Abweichungen infolge unvermeidlicher Ungenauigkeit der Zeichnung sind sehr häufig und können übersehen werden.) Schließlich kann man, jedoch nur um eine geordnete Zeichnung zu erhalten, die Kräftepolygone zu einem Kräfteplan zusammenstellen, notwendig ist diese Aneinanderreihung nicht.

Bei symmetrisch gestalteten Fachwerken genügt es, für den Fall ihrer symmetrischen Belastung nur eine Fachwerkshälfte zu berechnen, weil die Stäbe der anderen Hälfte in gleicher Weise angestrengt sind, wie die entsprechenden Stäbe der ersten Hälfte. Die Probe der Berechnung ergibt sich hier schon in der Mitte des Fachwerks.

Ist in einem Fachwerk ein belasteter Knotenpunkt vorhanden, welcher von zwei Stäben gebildet wird, wie z. B. bei Fachwerken, welche ein freitragendes Ende haben, s. Bild 13 und 14 Taf. III, so kann die Berechnung ohne weiteres an diesem Knotenpunkt begonnen werden. Auch bei Dachbindern von Satteldächern, welche nach Gestalt und Belastung symmetrisch sind, kann man so vorgehen, wofern deren Firstpunkt in zwei gleiche Teile mit je zwei Stäben zerlegt werden kann (s. Bild 17 Taf. III). Man beginnt die Berechnung alsdann in diesem halbierten Firstpunkt.

Zu bemerken ist jedoch, daß gewöhnlich bei diesem Gang der Berechnung ungenaue Resultate erhalten werden, weil man von der kleinen Knotenpunktbelastung ausgehend, den größeren Auflagerdruck konstruiert. Berechnet man z. B. bei einem Fachwerk nach Bild 14 Taf. III die Kräfte an den Befestigungspunkten in der Weise, daß man von dem kleinen Kräftedreieck, welches sich an  $P_1$  anschließt, ausgehend allmählich zu Knotenpunkt A und B mit der Konstruktion der Kräftepolygone weiter schreitet, so werden die Kräfte  $V_a$ ,  $H_a$ ,  $G_b$  ungenau erhalten, weil sich kleine Ungenauigkeiten in der Zeichnung bei diesem Verfahren vergrößern.

### B. Rechnerisch.

Die rechnerische Bestimmung erfolgt mittels der sogenannten Momenten-Methode, auch Ritter'sches Schnittverfahren genannt. Dabei wird das Fachwerk in zwei Teile zerlegt durch einen Schnitt, welcher in der Regel nur 3 Stäbe treffen soll. An dem abgeschnittenen Trägerteil ist Gleichgewicht vorhanden, wenn die durch den Schnitt aufgehobenen 3 Kräfte  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$  angebracht gedacht werden (s. Bild 18 und 19 Taf. III).

Um die Kräfte in irgend einem dieser Stäbe zu bestimmen, verwendet man eine Momentengleichung und nimmt als Drehpunkt für dieselbe den Schnittpunkt der 2 anderen Stäbe oder deren Verlängerung, so daß die in diesen Stäben herrschenden Kräfte mit dem Hebelarm Null auftreten, d. h. mit anderen Worten, damit in der einen Momentengleichung auch nur eine Unbekannte auftritt; diese Unbekannte ist alsdann leicht bestimmbar.

Für den in Bild 18 Taf. III gezeichneten Schnitt ergeben sich sonach folgende Drehpunkte:

Zur Bestimmung von  $S_a$  der Schnittpunkt von  $S_b$  und  $S_c$  also Punkt III,

" " "  $S_b$  " " "  $S_a$  "  $S_c$  " " I,

" " "  $S_c$  " " "  $S_a$  "  $S_b$  " " IV,

oder bei Bild 19 Taf. III:

Zur Bestimmung von  $S_a$  der Schnittpunkt von  $S_b$  und  $S_c$  also Punkt II,

" " "  $S_b$  " " "  $S_a$  "  $S_c$  " " 0,

" " "  $S_c$  " " "  $S_a$  "  $S_b$  " " IV.

Man sieht hieraus, daß jede Kraft unabhängig von den anderen Kräften bestimmt werden

kann, daß also etwaige Irrtümer sich nicht durch die ganze Rechnung fortpflanzen. Es ist dies ein Vorzug der Momentenmethode, welcher sie namentlich auch dazu geeignet macht, etwa zweifelhafte Resultate der graphischen Rechnung zu prüfen. Es ist vollkommen genügend, die Hebelarme aus dem im Maßstab 1:100 oder 1:50 aufgezeichneten Fachwerk abzumessen. Ergibt sich für die gesuchte Kraft ein negatives Resultat, so ist dadurch gesagt, daß der angenommene Richtungssinn der Kraft unrichtig war. Sind die geschnittenen Stäbe parallel, so dient zur Bestimmung der Kraft in dem dritten Stab anstatt der Momentengleichung  $\Sigma M = 0$  die Gleichung  $\Sigma V = 0$ .

Werden durch einen Schnitt a b nur 2 Stäbe getroffen, so kann der Drehpunkt zur Bestimmung der Kraft in einem Stab an beliebiger Stelle auf dem andern Stab oder dessen Verlängerung gewählt werden (s. Bild 18 und 19 Taf. III). Mittels des Schnittes c d können die Kräfte  $S_1$  und  $S_2$  erst nach Bestimmung der Kraft in der Zugstange ermittelt werden.

Es ist nicht bei allen Fachwerken möglich, jeden Stab so durchzuschneiden, daß außer ihm nur noch 2 andere Stäbe durchschnitten werden. Trotzdem führt die Momentenmethode auch hier zu einem Resultat, wenn nur der Schnitt so gelegt werden kann, daß die übrigen nichtdurchschnittenen Stäbe sich in einem Punkte treffen (vgl. Bild 21 Taf. III) oder nur noch solche Stäbe getroffen werden, deren Spannungen schon bekannt sind.

Für den Anfänger ist es ratsam, den zu jedem Schnitt gehörigen abgeschnittenen Träger- teil besonders aufzuzeichnen.

Man kann die Ermittlung der Stabkräfte, die aus dem Eigengewicht des Daches, aus dem Winddruck von rechts oder von links, aus einseitiger oder Vollbelastung mit Schnee sich ergeben, einzeln vornehmen und deren Werte in einer Tabelle zusammenstellen, in welcher dann zur Stabkraft infolge des Eigengewichtes diejenigen anderen Stabkräfte addiert werden, welche die größte Gesamtwirkung ergeben.

### III. § 6. Berechnung der Querschnittsabmessungen.

Man bestimmt zunächst die zulässige Beanspruchung  $s$  des zur Herstellung des Fachwerkes in Aussicht genommenen Materials und berücksichtigt bei dieser Bestimmung schon die Zerknickung, indem man für die zulässige Beanspruchung auf Druck vorläufig eine solche Annahme macht, welche der Tabelle in II. § 13 ungefähr entspricht. Die Größe der theoretisch nötigen Querschnittsfläche ist, wenn  $S$  die in dem Stab wirkende Kraft bedeutet,  $F = \frac{S}{s}$ , man wählt alsdann unter den im Handel vorkommenden Querschnittsprofilen solche aus, welche dem berechneten Werte  $F$  entsprechen.

Was die Form dieser Querschnitte betrifft, so ist daran zu erinnern, daß Stäbe, welche auf Druck beansprucht sind, gespreizte Querschnitte haben müssen ( $\perp$   $\perp$   $\perp$   $\perp$  zc. Eisen), während für Zugstäbe auch Flacheisen, Rundeisen u. dergl. passend sind. Kommen Stäbe vor, welche auch auf Biegung beansprucht sind, so sind Querschnitte zu wählen, welche gegen Biegung vorteilhaft Widerstand zu leisten vermögen, z. B.  $\square$   $\square$  zc. Die Summe der Druckspannungen und der Biegungsspannungen darf in einem solchen Stabe die zulässige Beanspruchung nicht überschreiten (s. II. § 15). Bei der Auswahl aller Querschnitte ist die Querschnittsfläche schon so reichlich zu bemessen, daß die nach Abzug der Nietlochverschwächung (s. Kapitel V.) verbleibende nutzbare Querschnittsfläche mindestens noch so groß ist, als die zuerst berechnete

theoretisch nötige Querschnittsfläche  $F$ . Schließlich bestimmt man die tatsächlich auftretenden Beanspruchungen, indem man mit der nutzbaren Querschnittsfläche in die Kraft dividiert. Zeigt sich, daß eine der so gefundenen Beanspruchungen von der zulässigen Beanspruchung sich zu weit entfernt, so ist für diesen Stab ein anderer Querschnitt zu wählen. Diese Querschnittsbestimmungen geschehen am zweckmäßigsten in Tabellen von folgender Einrichtung.

Beispiel 59.

Stab Nr.	Kraft (Zug +, Druck -) kg	Nötiger Querschnitt $F = S/s$ qcm	Gewählter Querschnitt:					Bemerkungen
			Profil	Fläche qcm	Niet- schwächung qcm (s. Kap. V.)	Nutzbar qcm	Thatsächliche Inanspruch- nahme kg/qcm	
1	- 16 000	$\frac{16000}{400} = 40$	$\square\square$ Nr. 14	$2 \cdot 20,4 = 40,8$	$2 \cdot 1,5 \cdot 0,7 = 2,1$	$40,8 - 2,1 = 38,7$	$\frac{16000}{38,7} = 414$	Prüfung nach II. § 3.
2	+ 4 200	$\frac{4200}{700} = 6$	$\text{I}$ 9/0,8	$9 \cdot 0,8 = 7,2$	$1,5 \cdot 0,8 = 1,2$	$7,2 - 1,2 = 6,0$	$\frac{4200}{6,0} = 700$	
3	+ 9 000	$\frac{9000}{700} = 12,9$	$\bullet$ $d = 4$ cm	$\frac{\pi d^2}{4} = 12,5$	Befestigungs- Öse.	12,5	$\frac{9000}{12,5} = 720$	$d$ ist Kern- durchmesser des Schrau- bengewindes.

In der Regel müssen die Fachwerkstäbe exzentrisch an den Knotenplatten befestigt werden, z. B. ein Winkelisen nur mit einem Schenkel, ein  $\square$  Eisen nur mit dem Steg u. s. f.

Man hätte in solchen Fällen die Berechnung der Beanspruchung nach II. § 15 durchzuführen, wobei der Abstand der Schwerpunktsachse des Fachwerkstabes von den theoretischen Stabrichtungslinien die Größe der Exzentrizität angibt. Da diese Berechnung schwierig und zeitraubend ist, begnügt man sich häufig bei kleineren Fachwerken damit, daß man die Querschnitte so groß wählt, daß die ohne Berücksichtigung der Nebenspannungen infolge der exzentrischen Befestigung berechnete Beanspruchung  $s = \frac{S}{F}$  um ca. 100—150 kg/qcm unter dem zulässigen Werte bleibt.

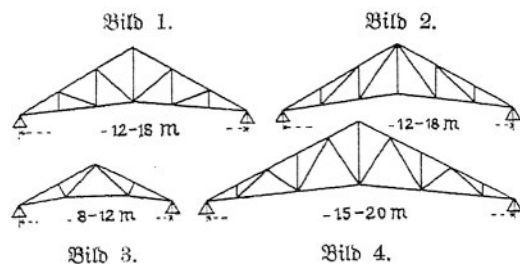
### III. § 7. Fachwerk-Dachbinder.

Die Dachbinder haben je nach der Dachform verschiedene Gestaltung. Die Satteldächer haben meist symmetrische Binder, welche auf ihren Stützen frei aufliegen und senkrechten Druck auf sie ausüben. Die Sägedachbinder sind unsymmetrisch gestaltet, sie üben gleichfalls ausschließlich lotrechten Druck auf ihre Auflager aus. Die Vordachbinder sind unsymmetrisch gestaltet; insolange ihre Traufseite von Säulen getragen wird, üben diese Dächer senkrechten Druck auf ihre Stützpunkte aus; an den Befestigungsstellen freitragender Vordächer wirken dagegen außer den senkrechten Drücken auch noch wagrechte Kräfte. Zusammenstellungen der Dachformen kommen vor, so ist z. B. an Schuppen häufig über dem Schuppen ein Satteldach und entlang beider Traufseiten sind Vordächer angebracht. In Bild Seite 116 geht die Dachfläche vom Satteldach auf das Vordach weiter. Manchmal steigt diese auf dem Vordach wieder nach außen an, so daß das Wasser von dem Vordach gegen die Traufseite des Sattel-

daches fließt. Solche Anordnungen dienen zur Vermehrung der lichten Höhe unter den Vordächern und kommen daher meist an den Güterschuppen der Bahnhofe vor.

### III. § 8. Die Satteldächer.

Diese Dächer haben Binder, die nach den verschiedensten Anordnungen gestaltet sind und dementsprechend auch schon mit verschiedenen Namen belegt worden sind (s. Taf. III und nachstehende Abbildungen, sowie die auf S. 125 gegebenen Abbildungen.) Je nach der Spannweite der Dächer sind weniger oder mehr Unterstützungspunkte der die obere, gedruckte Gurtung bildenden Hauptsparren notwendig, und dementsprechend sind die Füllungssteile, welche teils gezogen teils gedrückt sind, in kleinerer oder größerer Zahl anzuordnen. Die unteren gezogenen Gurtungen erhalten meist eine kleine Sprengung, etwa  $\frac{1}{10}$  der Stützweite, um das Aussehen des Herabhängens, das bei wagr rechter Anordnung täuschend eintreten würde, zu vermeiden. Häufig sprengt man aber auch die untere Gurtung höher, um größere freie Höhe des überdeckten Raumes zu gewinnen. (s. Bild 1 und 4 der S. 125.)



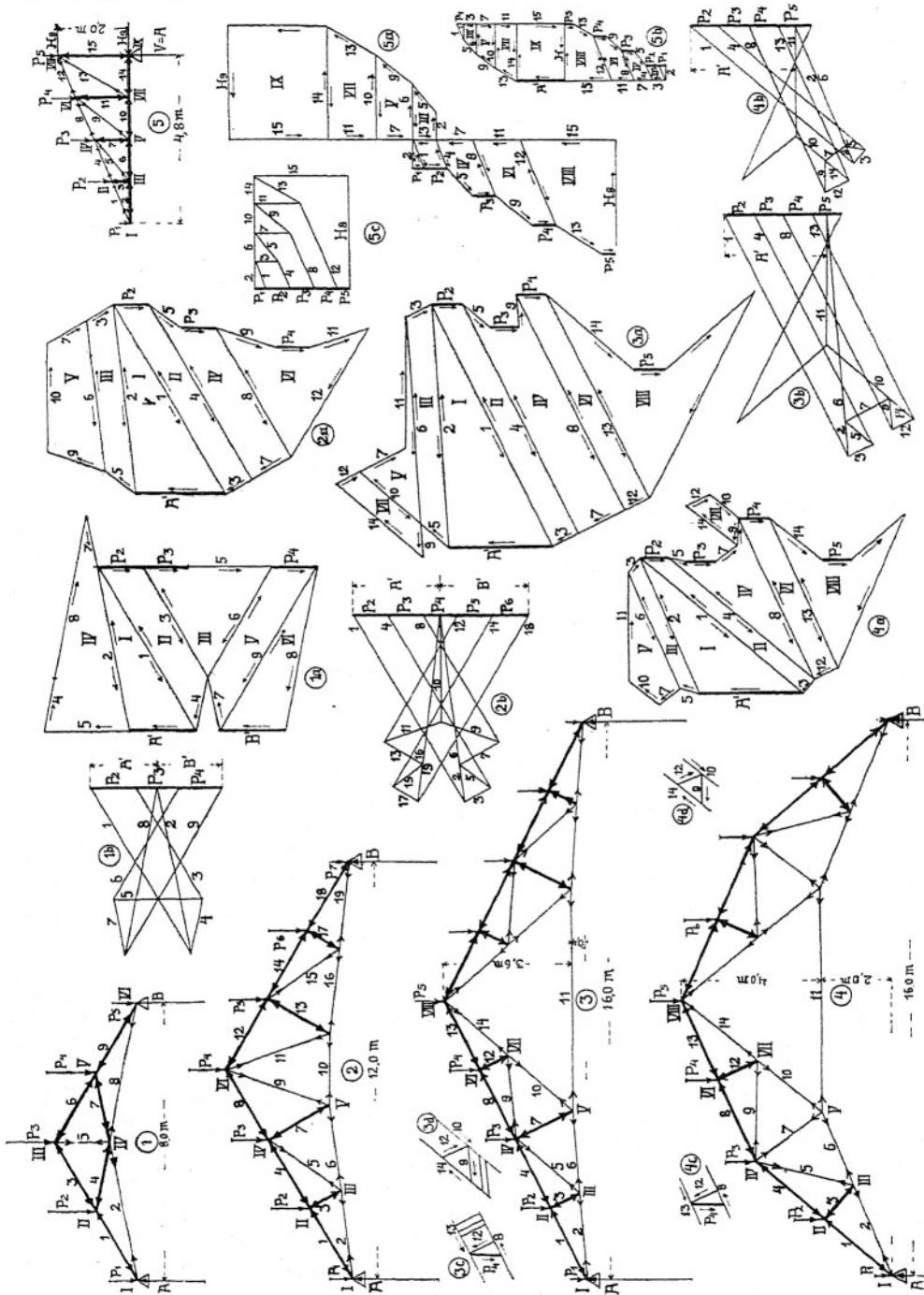
Beispiel 60. Für den in Bild 1 S. 125 gezeichneten Dachbinder soll der Kräfteplan aufgezeichnet werden. Bundweite 5,0 cm, Gesamtbelastung auf 1 qm Grundrißfläche 250 kg.

Aufl. Man bestimmt die Knotenpunktlasten und die Auflagerwiderstände.  $P_1 = P_5 = 5,0 \cdot 1,0 \cdot 250 = 1250$  kg;  $P_2 = P_3 = P_4 = 5,0 \cdot 2,0 \cdot 250 = 2500$  kg. Probe  $2 \cdot 1250 + 3 \cdot 2500 = 8,0 \cdot 5,0 \cdot 250 = 10\,000$  kg. Auflagerdruck  $A = B = 5000$  kg; hieraus  $A' = B' = 5000 - 1250 = 3750$  kg. Sodann beginnt man mit der Aufzeichnung des Kräfteplanes für Knotenpunkt I. Auf diesem wirkt der Auflagerwiderstand A, von welchem sofort  $P_1$  wieder abzuziehen ist, also  $A_1 = A - P_1$  und die Stabkräfte  $S_1$  und  $S_2$ , s. Bild 1a; an Knotenpunkt II sind jetzt nur noch die Stabkräfte  $S_3$  und  $S_4$  unbekannt, man kann daher auch für diesen Punkt den Kräfteplan aufzeichnen. Die Fortsetzung der Aufzeichnung kann nun bei Punkt III geschehen, da an ihm nur 2 Kräfte unbekannt sind.

Wird wie in Bild 1a mit Knotenpunkt IV weiter gemacht, so ergibt sich hier die Probe  $S_2 = S_8$  und  $S_4 = S_7$ . Da der Dachbinder und dessen Belastung symmetrisch sind, so kann die Berechnung nunmehr als vollendet angesehen werden. Wollte man für die Knotenpunkte V und VI die Kräftepläne auch noch aufzeichnen so würde sich, wie Bild 1a zeigt, dieselben Gestaltungen ergeben wie für Punkt II und I. Es ist deshalb zwecklos die Aufzeichnung für alle Punkte durchzuführen.

In Bild 1a sind die Kräftepläne der einzelnen Knotenpunkte aneinander gereiht, wodurch zwar größerer Raum beansprucht, aber klare Übersichtlichkeit gewonnen wird. Ist der Raum sehr beschränkt, so kann man die einzelnen Vielecke nach Bild 1b übereinander legen, wobei Überschneidungen zu noch weiterer Raumerparnis führen. Man suche z. B. in Bild 1a den Kräfteplan für Knotenpunkt III mit der Kraft  $P_3 S_3 S_6$  und  $S_5$  und sodann für IV mit den Kräften  $S_2 S_4 S_5 S_7 S_8$  auf. Bei diesen zusammengeschobenen Plänen ist es schwierig, die Pfeile nach der in § 5 A angegebenen Regel stets sofort in die Pläne einzuzeichnen. Es ist daher

in Bild 1b und in den folgenden zusammengesetzten Plänen von der Einzeichnung der Krafttrichtungspeile ganz abgesehen worden.



Beispiel 61. Die Kraft in den Stäben des Satteldaches Bild 2 Seite 125 sind zu ermitteln. Belastung 250 kg/qm Grundrißfläche, Bundweite 6 m.

Aufl. Man erhält die Knotenpunktlasten  $P_1 = P_7 = 6,0 \cdot 1,0 \cdot 250 = 1500$  kg und

$P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 6,0 \cdot 2,0 \cdot 250 = 3000$  kg. Probe  $2 \cdot 1500 + 5 \cdot 3000 = 18000$  kg  $= 12,0 \cdot 6,0 \cdot 250$ . Auflagerdruck  $A = B = 9000$  kg;  $A' = B' = 9000 - 1500 = 7500$  kg. Nach Bestimmung der Knotenpunktlasten und Auflagerwiderstände wird mit dem Kräfteplan für Knotenpunkt I begonnen und in der Reihenfolge der Numerierung mit der Aufzeichnung bis zum Firstpunkt VI weiter gemacht, an welchem sich die Probe  $S_9 = S_{11}$  und  $S_8 = S_{12}$  ergibt, s. Bild 2a, in welchem zu beachten ist, wie sich die Kräftepläne für die oberen Gurtungspunkte unten, diejenigen für die unteren Gurtungspunkte oben an den Kräfteplan für den Auflagerpunkt anreihen. Dies hat zwar an und für sich keinerlei Bedeutung, das Aneinanderreihen der Kraftpläne, das insbesondere den Anfängern manchmal schwierig ist, wird aber erleichtert, wenn dieser Umstand beachtet bleibt.

Der zusammen- und übereinandergeschobene Plan ist in Bild 2b aufgezeichnet. Auch für diese Bestimmungsweise entwirrt sich das Linienbild einigermaßen, wenn man sich darüber klar wird, daß von der Vertikalen der Kräfte  $P$ , die Gurtungskräfte  $S_1 S_4 S_8 S_{12} S_{14} S_{18}$  und vom Mittelpunkt dieser Vertikalen, welcher die zwei Teile der Auflagerwiderstände  $A' = A - P_1$  und  $B' = B - P_7$  auf derselben abtrennt, die Parallelen zu den unteren Gurtungsstäben gezogen werden müssen. Es hätte auch für diesen Kräfteplan genügt, ihn nur vom Traufpunkt bis zum Firstpunkt aufzuzeichnen.

Man beachte, wie z. B. hier Knotenpunkt III sich zusammenschiebt. Er besteht aus der Strecke  $S_2$ , von der sich  $S_6$  subtrahiert und über der Differenz ist das  $\triangle$  aus  $S_3$  und  $S_5$  gezeichnet. Man sieht daraus deutlich, daß  $S_3$  und  $S_5$  die Komponenten sind, aus welchen sich die Kraftgröße ergab, um welche  $S_2$  größer ist als  $S_6$ . Würde Stab 3 und 5 weggelassen, so wäre Kraft  $S_2 = S_6$ . Vgl. auch Bild 2a S. 125, in welchem  $S_2$  und  $S_6$  mit Maßstrichen versehen werden konnten.

Beispiel 62. Die Kräfte für den in Bild 3 gezeichneten verstärkten Polonceau-Dachstuhl sind zeichnerisch zu bestimmen. Belastung 280 kg/qm Grundrißfläche, Bundweite 4,5 m.

Aufl.  $P_1 = P_9 = 4,5 \cdot 1,0 \cdot 280 = 1260$  kg;  $P_2$  bis  $P_8$  je  $4,5 \cdot 2,0 \cdot 280 = 2520$  kg. Probe  $2 \cdot 1260 + 7 \cdot 2520 = 20160$  kg  $= 16 \cdot 4,5 \cdot 280$ . Auflagerdruck  $A = B = 10080$  kg, hieraus  $A' = B' = 10080 - 1260 = 8820$  kg. Nach Berechnung der Knotenpunktlasten und Auflagerwiderstände beginnt man bei Punkt I und kann sodann Punkt II und III berechnen. Bei Punkt IV sind aber noch drei Kräfte unbekannt. Zur Beseitigung dieses Hindernisses sind zweierlei Wege möglich. Entweder bestimmt man mittels eines Schnittes durch den First und einer Momentengleichung um den Firstpunkt die Kraft  $S_{11}$ , so wie in III § 4 für Zugstangen gezeigt wurde, alsdann läßt sich der Kräfteplan für Punkt V und hernach der für Punkt IV usw. aufzeichnen. Der andere Weg geht von dem Kräfteplan für Knotenpunkt VI aus, welcher in Bild 3c angedeutet ist; in diesem müssen  $S_8$  und  $S_{13}$  parallel gehen, man wird also, obschon keine dieser zwei Kräfte bekannt ist, die Größe und Richtung von  $S_{12}$  durch jede Parallele zum Stab 12 zwischen den Kräften  $S_8$  und  $S_{12}$  richtig angegeben erhalten. Nun geht man an Knotenpunkt VII, zeichnet in Bild 3d die soeben gefundene Kraftstrecke  $S_{12}$  auf und zieht durch deren Endpunkte Parallele mit  $S_{10}$  und  $S_{14}$ ; zwischen denselben ergibt sich dann die Kraft  $S_9$  mittels einer Parallelen zu Stab 9. Nunmehr sind am Punkt IV nur noch 2 Unbekannte vorhanden, es kann daher dieser und die weiteren Punkte V, VI, VII, VIII berechnet werden.

Der zusammengesetzte Kräfteplan ist in Bild 3b für die linksseitige Dachhälfte auf-



gezeichnet,  $S_{11}$  muß zuerst, wie oben beschrieben, berechnet werden. Man erhält  $S_{11} \cdot 3,6 = 8820 \cdot 8 - 2520(6 + 4 + 2)$ , hieraus  $S_{11} = 11\,200$  kg.

Die beschriebene Schwierigkeit tritt stets auf, wenn in ein Grundsystem Hilfsysteme eingelegt werden. Das Grundsystem ist der in Bild 3, Seite 124 gezeichnete einfache Polonceaudachstuhl. Die bei größerer Spannweite desselben zur Unterstützung der oberen Gurtung nötigen Hilfsysteme bestehen aus den Stäben 3 und 5 bzw. 12 und 9. Die Stäbe 3 und 12 stützen die obere Gurtung in den Zwischenpunkten II und VI nochmals und damit diese Stützen an ihren Fußpunkten auf die dortigen Stäbe zwischen Punkt I und V bzw. V und VIII keinen Druck ausüben können, sind diese Fußpunkte mit den Bändern 5 und 9 an Knotenpunkte IV aufgehängt.

Beispiel 63. Der auf Bild 4, Seite 125 gezeichnete Mansarden-Dachbinder soll berechnet werden.

Aufl. Bei den Mansardendächern ist zu beachten, daß die unteren steileren Teile durch das Gewicht der Dachdeckung und durch den Winddruck bedeutend höher belastet sind als die oberen flacheren Teile. Die Mehrbelastung richtet sich nach dem Maß der Steilheit. Der Gang der Aufzeichnung der Kräftepläne ist derselbe wie beim vorigen Beispiel. Die Stäbe 3 und 5 bzw. 9 und 12 bilden auch wieder Hilfsysteme. In den Hilfskonstruktionen Bild 4c, 4d sind diesmal nur noch die einfachen Parallelen zu Stab 9 und 12 gezogen und nicht mehrere wie in Bild 3c und 3d zur Erklärung geschehen ist. Im Kräfteplan Bild 4a ist das Kräftepolygon für den Knotenpunkt VII an  $S_9$  rechts seitlich angefügt, in Bild 3a war es an  $S_{10}$  links oben angefügt. Der Unterschied hat keinerlei weitere Bedeutung, als daß er zeigen soll, wie man die Aneinanderreihung beliebig machen kann. Für Anfänger empfiehlt es sich so wie in III § 5 A gezeigt, für jeden Knotenpunkt des Kräftepolygon ganz gesondert aufzuzeichnen und auf die Aneinanderreihung zunächst ganz zu verzichten. Man beachte, daß Stab 7 in diesem Dachstuhl gezogen ist, im vorigen hat er Druck zu erleiden.

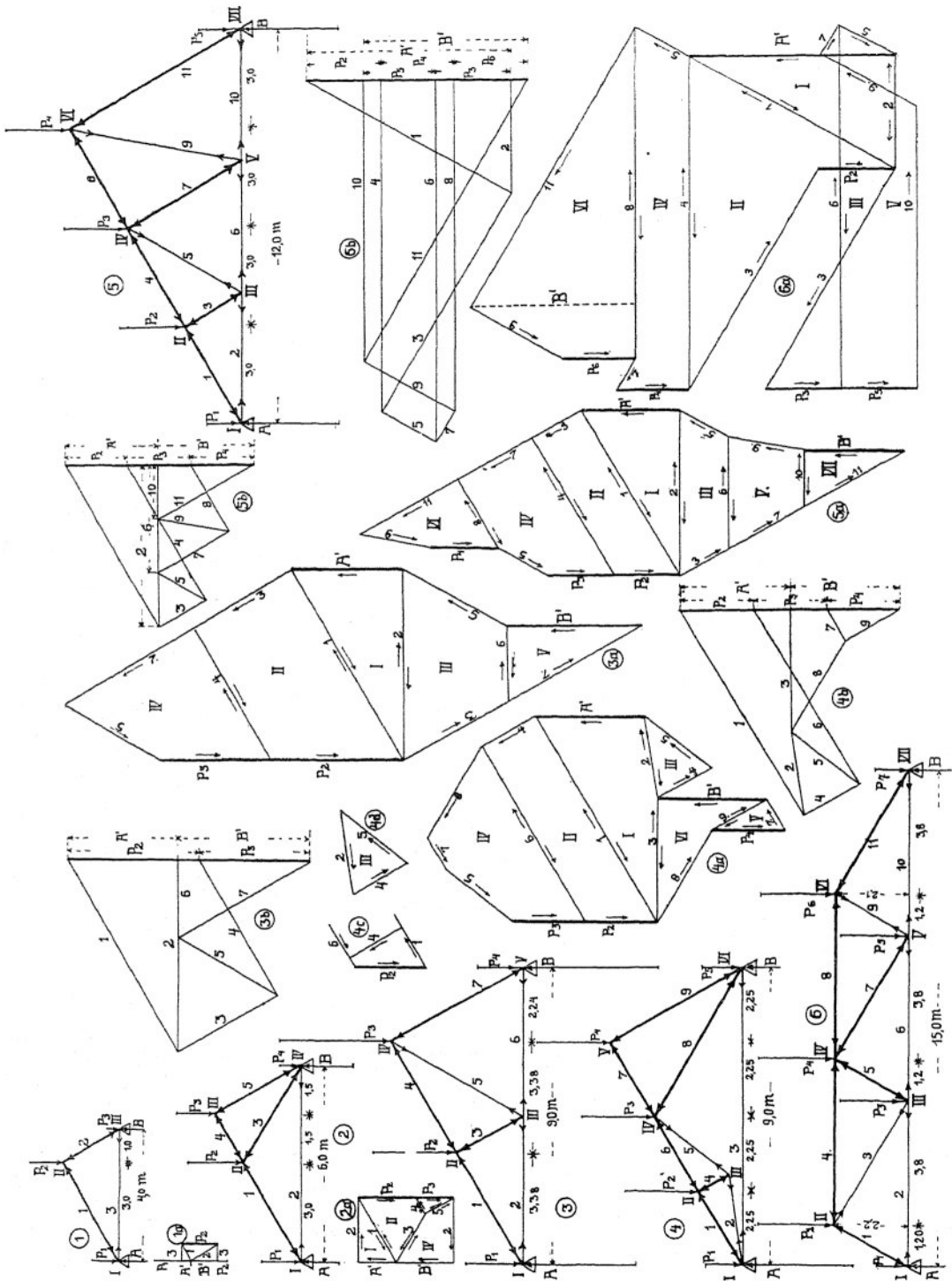
Der zusammengeschobene Kräfteplan ist in Bild 4b für die linke Dachhälfte aufgezeichnet worden, zu welchem Zweck  $S_{11}$  auch wieder zuerst mittels Schnitt durch den First und Momentengleichung um den Firstpunkt berechnet wurde.

Für Bild 1 beträgt der Kräftemaßstab  $1 \text{ cm} = 4000 \text{ kg}$ , bei Bild 2, 3 und 4 ist er  $1 \text{ cm} = 6000 \text{ kg}$ , wonach sich der Einfluß der Stützweite und Bundweite, des Bindersystemes und der Belastung auf die Größe der Stabkräfte beurteilen läßt.

### III. § 9. Sägedächer.

Bei den Sägedächern (s. Abbildungen S. 128) ist eine Dachseite, die flachere, die etwa unter  $30^\circ$  gegen die Wagrechte geneigt ist, eingedeckt, die steilere, etwa  $60^\circ$  gegen die Wagrechte geneigte, wird verglast. Für Spannweiten bis zu 4 m eignet sich die Anordnung nach Bild 1. Bei 6 m Weite ist die flache Strebe noch an einer dritten Stelle zu stützen, es kann ein Gebinde nach Bild 2 Anwendung finden. Bei 9 m Stützweite kommen eine oder zwei Stützpunkte für die flache Strebe in Frage; je nachdem wird das Gebinde aus Bild 3 oder 4 verwendet. Bei 12 m Stützweite wird die Glaswand, wie Bild 5 zeigt, schon sehr hoch und der Lichteinfall ist von den an der entgegengesetzten Wand stehenden Werkbänken u. s. w. schon sehr entfernt. Werden größere Stützweiten notwendig, so ordnet man besser drei oder

mehr kleine Sägedächer nebeneinander an. Um aus ihrem Stabwerk ein freitragendes Fachwerk zu bilden, das an den Zwischentraufen keiner Unterstüzung bedarf, kann man oberhalb



der Dachflächen frei in der Luft eine obere Gurtung, in Bild 6, Stab 4 und 8, anordnen, für welche einige Zentimeter Fall genügen, um das Stehenbleiben des Wassers zu verhindern.

Die Dachflächen liegen in den Ebenen der Füllungsglieder des Fachwerkes und zwar werden 3, 7 und 11 eingedeckt; 1, 5 und 9 werden verglast. Die untere Gurtung, Stab 2, 6 und 10 liegen im überdeckten Raum.

Beispiel 64. Das in Bild 1 S. 128 gezeichnete Sägedach hat 4,50 m Bundweite, wie groß sind die Kräfte in den Stäben des Dachbinders bei einer Gesamtbelastung von 120 kg/qm Grundrißfläche?

Aufl. Zuerst sind die Knotenpunktlasten zu bestimmen.  $P_1 = 4,50 \cdot 1,50 \cdot 120 = 810$  kg,  $P_2 = 4,50 \cdot 2,00 \cdot 120 = 1080$  kg,  $P_3 = 4,50 \cdot 0,50 \cdot 120 = 270$  kg. Probe  $810 + 1080 + 270 = 4,50 \cdot 4,00 \cdot 120$  kg = 2160 kg. Die Auflagerdrücke werden  $A = B = 1080$  kg, auf die Traufpunkte wirken  $A' = A - 810 = 270$  kg und  $B' = B - 270 = 810$  kg. Die Kräftepläne sind in Bild 1a aufgezeichnet und bedürfen keiner Erläuterung. Die Probe ergibt sich bei Knotenpunkt III.  $B' P_3 S_2$  und  $S_3$  müssen ein schließendes Polygon ergeben.

Beispiel 65. Das Sägedach, dessen Binder in Bild 2 S. 128 gegeben ist, hat 5,00 m Bundweite und erleidet auf 1 qm Grundrißfläche 150 kg Gesamtbelastung. Die Kräfte in dessen Stäben sind zu berechnen.

Aufl. Die Knotenpunktbelastungen werden  $P_1 = 5,0 \cdot 1,5 \cdot 150 = 1125$  kg,  $P_2 = 5,0 \cdot 2,25 \cdot 150 = 1688$  kg,  $P_3 = 5,0 \cdot 1,5 \cdot 150 = 1125$  kg,  $P_4 = 5,0 \cdot 0,75 \cdot 150 = 562$  kg. Probe  $1125 + 1688 + 1125 + 562 = 5,0 \cdot 6,0 \cdot 150 = 4500$  kg. Auflagerdrücke  $A = B = 2250$  kg, hieraus  $A' = A - 1125 = 1125$  kg und  $B' = B - 562 = 1688$  kg. Die Kräftepläne sind in Bild 2a aneinandergereiht. Am Kräfteplan Knotenpunkt III dient die Richtung von  $S_5$  zur Probe, bei Knotenpunkt IV ergibt sich die doppelte Probe, daß  $B_1$  den berechneten Wert haben und Lotrecht sein muß.

Beispiel 66. Das Sägedach, dessen Dachbinder in Bild 3 S. 128 dargestellt ist, erleidet auf 1 qm Grundrißfläche eine Gesamtbelastung von 200 kg. Die Bundweite mißt 6,00 m. Die Kräftepläne für die Stabkräfte des Binders sind aufzuzeichnen.

Aufl. Die Knotenpunktbelastungen werden  $P_1 = 6,0 \cdot 1,69 \cdot 200 = 2030$  kg,  $P_2 = 6,0 \cdot 3,38 \cdot 200 = 4060$  kg,  $P_3 = 6,0 \cdot 2,81 \cdot 200 = 3370$  kg,  $P_4 = 6,0 \cdot 1,12 \cdot 200 = 1340$  kg. Probe  $2030 + 4060 + 3370 + 1340 = 9,0 \cdot 6,0 \cdot 200 = 10800$  kg. Auflagerdruck  $A = B = 5400$  kg, hieraus  $A' = A - 2030 = 3370$  kg und  $B' = B - 1340 = 4060$  kg. Bei der Aufzeichnung der Kräftepläne in Bild 3a ist mit dem Knotenpunkt I begonnen worden; die Richtung von  $S_7$  gibt bei Knotenpunkt IV die erste Probe und bei Knotenpunkt V ergibt sich wieder die doppelte Probe, daß  $B_1$  Lotrecht sein und den berechneten Wert haben muß. In Bild 3b sind die zusammengeschobenen Kräftepläne dargestellt; auch für diese Dachformen ermangeln sie der Übersichtlichkeit.

Beispiel 67. Der vorige Dachstuhl soll nur 4,8 Bundweite und zwei Zwischenstützpunkte des Hauptsparrens erhalten und sodann berechnet werden.

Aufl. Man legt, vgl. Bild 4, das aus den Stäben 2, 4 und 5 gebildete Hilfsystem, eine sogenannte Armierung des Sparrens ein. Die Knotenpunktlasten werden  $P_1 = P_5 = 4,8 \cdot 1,125 \cdot 200 = 1080$  kg,  $P_2 = P_3 = P_4 = 4,8 \cdot 2,25 \cdot 200 = 2160$  kg, Probe  $2 \cdot 1080 + 3 \cdot 2160 = 9 \cdot 4,8 \cdot 200 = 8640$  kg. Auflagerdrücke  $A = B = 4320$ ; hieraus  $A' = B' = 4320 - 1080 = 3240$  kg. Mit der Aufzeichnung der Kräftepläne kann an den Auflagern nicht begonnen werden, weil hier drei unbekannte Stabkräfte vorhanden sind. Man beginnt mit Knotenpunkt II und erhält aus der Hilfsfigur 4c die Stabkraft  $S_4$ , nunmehr läßt

sich Knotenpunkt III berechnen, siehe Hilfsfigur 4d oder III in Hauptfigur 4a. Hieranß kann der Kräfteplan für Knotenpunkt I gezeichnet werden.

Die Einschaltung des Hilfs-systemes bedingte wieder, wie bei den Satteldächern Bild 3 und 4 S. 125, die vorhergehende Berechnung der Stabkräfte desselben in Hilfsfiguren.

In Bild 4b ist der zusammengeschoebene Kräfteplan aufgezeichnet, der Aufzeichnung ging die Berechnung der Zugkraft  $S_3$  voran. Schnitt durch Knotenpunkt IV und die Momentengleichung für einen Drehpunkt auf demselben.

Beispiel 68. Das in Bild 5 S. 128 dargestellte Sägedach hat 6,50 m Bundweite und auf 1 qm Grundrißfläche 200 kg Belastung. Es ist zu berechnen.

Aufl.  $P_1 = P_5 = 6,5 \cdot 1,5 \cdot 200 = 1950$  kg,  $P_2 = P_3 = P_4 = 6,5 \cdot 3,0 \cdot 200 = 3900$  kg. Probe  $2 \cdot 1950 + 3 \cdot 3900 = 12 \cdot 6,5 \cdot 200 = 15\,600$  kg;  $A = B = 7800$  kg;  $A' = B' = 7800 - 1950 = 5850$  kg. Die Kräftepläne s. Bild 5a und 5b.

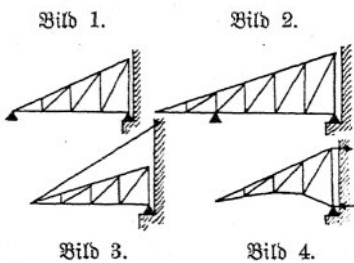
Beispiel 69. Die in Bild 6 dargestellten Binder eines Sägedaches haben 8 m Bundweite. Die Gesamtbelastung beträgt 220 kg auf 1 qm Grundrißfläche. Die Stabkräfte sind zu bestimmen.

Aufl. Knotenpunktlasten  $P_1 = 8,0 \cdot 0,6 \cdot 220 = 1056$  kg,  $P_7 = 8,0 \cdot 1,9 \cdot 220 = 3344$  kg,  $P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 8,0 \cdot 2,5 \cdot 220 = 4400$  kg. Probe  $1056 + 5 \cdot 4400 + 3344 = 15 \cdot 8 \cdot 220 = 26\,400$  kg. Auflagerdrücke  $A = B = 13\,200$  kg;  $A' = A - 1056 = 12\,144$  kg;  $B' = B - 3344 = 9856$  kg. Die Aufzeichnung der Kräftepläne ist in Bild 6a und 6b erfolgt. Für die Kräftepolygone zu Knotenpunkt III und V wurden in Bild 6a verschränkte Formen gewählt, weil der Raum auf dem Papier dazu zwang. Der Kräfteplan für Knotenpunkt VII ist weggelassen. Die Probe kann daraus entnommen werden, daß in Plan VI das gestrichelte Lot gleich  $B_1$  werden und auf 8 eine Strecke abtrennen muß die gleich  $S_{10}$  ist.

Für Bild 1—4 der Sägedächer sind die Kräftepläne im Kräftemaßstab 1 cm = 2000 kg, für Bild 5 und 6 ist in 1 cm = 4000 kg aufgezeichnet. Ein Vergleich zeigt den großen Einfluß der Steigerung der Stützweite, der Bundweite und der Belastung auf die Stabkräfte.

### III. § 10. Vordächer.

Bei den Vordachbindern liegt die Dachfläche in der Regel auf der oberen Gurtung, s. Taf. III und Bild 1 Kap. IV, sowie nachstehende Abbildungen. Die untere Gurtung ist geradlinig oder gesprengt, letzteres um unter dem Dache größere lichte Höhe und andererseits doch an den Befestigungspunkten unter dem First eine genügend große Trägerhöhe zu erhalten. Diese ist nötig wegen des Wasserablaufes vom Dach, und bei freitragenden Vordächern auch zweckmäßig, um keine gar zu großen Horizontalkräfte an den Befestigungspunkten zur Wirkung kommen zu lassen.



Vordächer können freitragend sein, s. Bild 4, oder kann deren Trauflinie aufgehängt werden, Bild 3, oder kann unter der Trauflinie eine Säulenreihe stehen, Bild 1, oder kann die Säulenreihe gegen einwärts vom Trauf angeordnet werden, Bild 2. Meistens ist dabei nicht jeder Dachbinder einzeln mit einer Säule unterstützt, sondern es wird auf die Säulen ein gitterförmiger oder selbst als Fachwerk ausgebildeter Unterzug gestellt, auf welchem die einzelnen Dachgebinde aufrufen.

Beispiel 70. Ein 4,8 m weit ausladendes Vordach hat Binder nach Bild 5 S. 125. Die Bundweite mißt 3,5 m. Die Belastung ist 165 kg/qm Grundrißfläche. Die Kräftepläne für die Stabkräfte sind aufzuzeichnen.

Aufl.  $P_1 = P_5 = 3,5 \cdot 0,6 \cdot 165 = 346$  kg,  $P_2 = P_3 = P_4 = 3,5 \cdot 1,2 \cdot 165 = 693$  kg. Probe  $2 \cdot 346 + 3 \cdot 693 = 3,5 \cdot 4,8 \cdot 165 = 2772$  kg = V; ferner wird für den Drehpunkt IX  $H_8 \cdot 2,0 = 346 \cdot 4,8 + 693 (3,6 + 2,4 + 1,2)$ , hieraus  $H_8 = 3326$  kg, da die Summe der Horizontalkomponenten gleich Null sein muß, so muß auch  $H_9 = H_8 = 3326$  kg sein.

Man könnte die rechnerische Bestimmung der Kräfte an den Befestigungspunkten auch unterlassen und am Knotenpunkt I mit der Aufzeichnung der Kräftepläne beginnen, s. Bild 5a. Zum Schluß würde sich dann am Knotenpunkt VIII und IX die Kraftstrecke für V und H ergeben. Diese Bestimmung hat aber den Nachteil, daß man von dem kleinen Wert  $P_1$  ausgehend die großen Werte V und H bestimmt, wobei sich die unvermeidlichen Genauigkeitsfehler sehr steigern können.

Der bessere Weg ist in Bild 5b eingeschlagen; begonnen wurde hier am Knotenpunkt IX und von hier aus gegen die Spitze bei I, also von den größeren Kräften ausgehend, auf die kleineren zu gearbeitet.

In Bild 5a sind die Kräftepläne wieder zusammengeschieben, das Bild gibt kein so undeutliches Liniengewirr, wie es bei den seither berechneten Dachstützen der Fall war.

Der Maßstab ist in Bild 5b des Raummangels halber nur die Hälfte von demjenigen in Bild 5a und 5c.

### III. § 11. Fachwerkträger mit gleich großen Feldern.

Die Fachwerkträger als Brückenbalken, also für bewegliche Belastung konstruiert, sind hier nicht zu erörtern. Fachwerkträger kommen aber auch bei Hochbauten vor, und zwar entweder als parallelgurtige Fachwerkbalken oder als sogenannte armierte, d. h. verstärkte Balken. Der Erörterung der beiden Konstruktionen ist voranzustellen, daß in den Gurtungen von Fachwerkträgern die größten Kräfte bei Vollbelastung eintreten, während in den Füllungssteilen die stärkste Spannung bei einseitiger Belastung nachgerufen wird. Die Unterschiede der Spannungen, welche in den Füllungsmitgliedern bei Vollbelastung oder bei einseitiger Belastung auftreten, werden um so größer, je bedeutender die Nutzlast gegenüber dem Konstruktionsgewicht ist.

Ist dagegen die Nutzlast gegenüber dem Eigengewicht der Bauteile klein, so werden auch diese Unterschiede kleiner. Für solche Fälle kann die Berechnung der Stabkräfte des Fachwerkträgers für Vollbelastung als ausreichend betrachtet werden, dies um so eher, als durch die Fußbodenkonstruktion meistens schon eine ziemlich weitgehende Verteilung von einseitigen Belastungen und von Einzellasten erzielt wird. Können diese Annahmen jedoch nicht gemacht werden, so ist die Berechnung des Fachwerkträgers entsprechend den tatsächlichen Belastungen durchzuführen.

Bei Fachwerkträgern werden in sämtlichen Feldern Diagonalen eingelegt und es sind bei gerader Felderanzahl in den beiden Mittelfeldern Gegendiagonalen mit Rücksicht auf etwaige belangreichere einseitige Belastungen nötig; bei ungerader Felderanzahl wird es meist genügen, nur im Mittelfeld Gegendiagonalen einzulegen.

Um einen Vergleich zwischen den genannten zwei Systemen zu ermöglichen und um zu zeigen, wie die Bestimmung der Stabkräfte erfolgen kann, sind im nachstehenden die Kräfte-

pläne für verschiedene Anordnungen der Diagonalstäbe bzw. der Armierungsbänder unter der Annahme von Vollbelastung aufgezeichnet worden.

Dabei ist die Belastungsannahme gemacht worden, daß nur Knotenpunktlasten auf den Träger wirken.

Was die Belastungsgröße selbst betrifft, so ist davon ausgegangen worden, daß die Belastung für den laufenden Meter Träger überall gleichmäßig sein und überall denselben Wert  $q$  kg haben soll. Die Gesamtbelastung eines  $L$  Meter langen Trägers ist alsdann  $Q = L \cdot q$  und die Belastung eines Trägerfeldes von der Länge  $l$  m wird  $P = l \cdot q$ . Die Auflagerdrücke werden  $A = B = \frac{1}{2} Q = \frac{1}{2} L \cdot q$ .

Aus den Kräfteplänen ergeben sich die Stabkräfte teils als Zug-, teils als Druckkräfte. Da die Kräftepläne wie immer, so auch für diese Träger von dem Gleichgewichtszustand der Knotenpunkte ausgehen, so geben die Kräftepfeile in den Figuren an, welche Wirkung jeder Stab auf seinen Endknotenpunkt ausübt; Stäbe, deren Pfeile gegen diese Knotenpunkte hin gerichtet sind, müssen daher gedrückte Stäbe und andere, deren Kräftepfeile von den Knotenpunkten weg wirken, müssen gezogen sein. In den Trägerfiguren ist zur leichtern Gewinnung eines Überblickes jeder gedrückte Stab mit breiterer Linie ausgezogen als ein gezogener Stab. Die durch die Knotenpunktlasten  $P$  hervorgerufenen, in den Kräfteplänen ermittelten Stabkräfte sind mit  $S_1 S_2 S_3 \dots$  bezeichnet. Bei der Regelmäßigkeit der geometrischen Gestaltung der Fachwerke ist es möglich die Stabkräfte  $S$  in einfacher Beziehung zu den Belastungen zu bringen, meist genügt dazu eine einfache Proportion und der pythagoräische Lehrsatz.

Träger mit gleichen Feldern. Abbildung f. Seite 133.

In Bild 1—6 sind Armierungen von Balken dargestellt. In Bild 7—9 sind parallelgurtige Träger gezeichnet. Zu diesen können auch Bild 1 und 2 gezählt werden, wenn man sich die ergänzenden Stäbe an den Endfeldern eingezeichnet denkt.

Wegen der Symmetrie der Trägergestalt und der Trägerbelastung genügt die Aufzeichnung der Kräftepläne je für die Knotenpunkte an einer Trägerhälfte.

Beispiel 71. Bild 1.  $L = 2$  m,  $Q = L \cdot q = 2$  q, somit Auflagerdrücke  $A = B = \frac{Q}{2} = 1,0$  q.

Nach dem Kräfteplan  $S_4 = S_1 = 0,25 Q = 0,50$  q,  $S_5 = S_2 = 0,35 Q = 0,70$  q,  $S_3 = 0,50 Q = 1,00$  q.

Beispiel 72. Bild 2.  $L = 3$  m,  $Q = L \cdot q = 3$  q, somit Auflagerdrücke  $A = B = \frac{Q}{2} = 1,50$  q.

Nach dem Kräfteplan

$$S_7 = S_1 = 0,33 Q = 1,00 \text{ q}$$

$$S_4 = 0,33 Q = 1,00 \text{ q}$$

$$S_8 = S_2 = 0,47 Q = 1,41 \text{ q}$$

$$S_5 = 0,33 Q = 1,00 \text{ q}$$

$$S_6 = S_3 = 0,33 Q = 1,00 \text{ q}$$

Beispiel 73. Bild 3.  $L = 4$  m,  $Q = L \cdot q = 4$  q, somit Auflagerdrücke  $A = B = \frac{Q}{2} = 2,00$  q.

Nach dem Kräfteplan

$$S_{12} = S_1 = 0,75 Q = 3,00 \text{ q}$$

$$S_9 = S_5 = 0,28 Q = 1,12 \text{ q}$$

$$S_{13} = S_2 = 0,84 Q = 3,36 \text{ q}$$

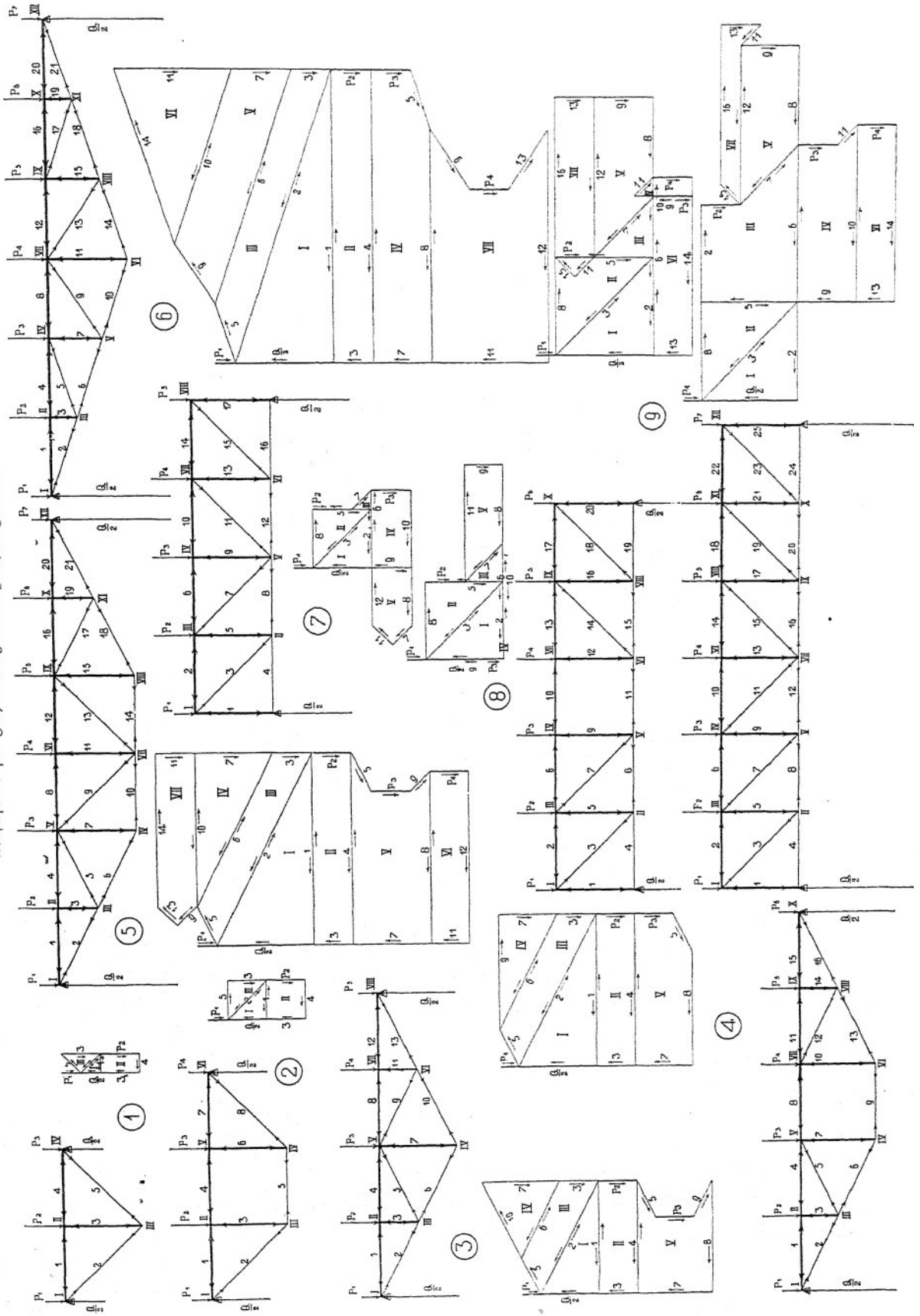
$$S_{10} = S_6 = 0,56 Q = 2,24 \text{ q}$$

$$S_{11} = S_3 = 0,25 Q = 1,00 \text{ q}$$

$$S_7 = 0,50 Q = 2,00 \text{ q}$$

$$S_8 = S_4 = 0,75 Q = 3,00 \text{ q}$$

Kräftepläne für Dachwerträger mit gleichen Feldern.



Beispiel 74. Bild 4.  $L = 5 \text{ m}$ ,  $Q = L \cdot q = 5 \text{ q}$ , somit Auflagerdrücke  $A = B = \frac{Q}{2} = 2,50 \text{ q}$ .

Nach dem Kräfteplan

$$\begin{array}{ll} S_{15} = S_1 = 0,80 \text{ Q} = 4,00 \text{ q} & S_{13} = S_6 = 0,67 \text{ Q} = 3,35 \text{ q} \\ S_{16} = S_2 = 0,89 \text{ Q} = 4,45 \text{ q} & S_{10} = S_7 = 0,30 \text{ Q} = 1,50 \text{ q} \\ S_{14} = S_3 = 0,20 \text{ Q} = 1,00 \text{ q} & S_8 = 0,60 \text{ Q} = 3,00 \text{ q} \\ S_{11} = S_4 = 0,80 \text{ Q} = 4,00 \text{ q} & S_9 = 0,60 \text{ Q} = 3,00 \text{ q} \\ S_{12} = S_5 = 0,22 \text{ Q} = 1,10 \text{ q} & \end{array}$$

Für Träger mit sechs Feldern sind zwei verschiedene Anordnungen gezeichnet. In Bild 5 ist das Armierungsband unter der Trägermitte auf zwei Feldlängen gleichlaufend mit der Wandpfette geführt, in Bild 6 geht das Armierungsband von den Auflagerpunkten unmittelbar an den untern Endpunkt des in der Trägermitte stehenden lotrechten Füllungsriegels. Für beide Fälle ist  $L = 6 \text{ m}$ ,  $Q = L \cdot q = 6 \text{ q}$ , somit Auflagerdrücke  $A = B = \frac{Q}{2} = 3,00 \text{ q}$ .

Beispiel 75. Für Bild 5 wird nach dem Kräfteplan

$$\begin{array}{ll} S_{20} = S_1 = 0,83 \text{ Q} = 5,00 \text{ q} & S_{15} = S_7 = 0,33 \text{ Q} = 2,00 \text{ q} \\ S_{21} = S_2 = 0,93 \text{ Q} = 5,58 \text{ q} & S_{12} = S_8 = 0,76 \text{ Q} = 4,56 \text{ q} \\ S_{19} = S_3 = 0,17 \text{ Q} = 1,00 \text{ q} & S_{13} = S_9 = 0,13 \text{ Q} = 0,78 \text{ q} \\ S_{16} = S_4 = 0,83 \text{ Q} = 5,00 \text{ q} & S_{14} = S_{10} = 0,67 \text{ Q} = 4,02 \text{ q} \\ S_{17} = S_5 = 0,18 \text{ Q} = 1,00 \text{ q} & S_{11} = 0,17 \text{ Q} = 1,00 \text{ q} \\ S_{18} = S_6 = 0,75 \text{ Q} = 4,50 \text{ q} & \end{array}$$

Beispiel 76. Für Bild 6 wird dagegen nach dem Kräfteplan

$$\begin{array}{ll} S_{20} = S_1 = 1,24 \text{ Q} = 7,44 \text{ q} & S_{15} = S_7 = 0,25 \text{ Q} = 1,50 \text{ q} \\ S_{21} = S_2 = 1,30 \text{ Q} = 7,80 \text{ q} & S_{12} = S_8 = 1,00 \text{ Q} = 6,00 \text{ q} \\ S_{19} = S_3 = 0,17 \text{ Q} = 1,00 \text{ q} & S_{13} = S_9 = 0,30 \text{ Q} = 1,80 \text{ q} \\ S_{16} = S_4 = 1,24 \text{ Q} = 7,44 \text{ q} & S_{14} = S_{10} = 0,78 \text{ Q} = 4,68 \text{ q} \\ S_{17} = S_5 = 0,26 \text{ Q} = 1,56 \text{ q} & S_{11} = 0,50 \text{ Q} = 3,00 \text{ q} \\ S_{18} = S_6 = 1,04 \text{ Q} = 6,24 \text{ q} & \end{array}$$

Der Vergleich der Lösung nach Bild 6 mit der Lösung nach Bild 5 zeigt verhältnismäßig große Verschiedenheiten in den Stabkräften. Der Träger nach Bild 5 hat in seinem mittleren Teile, in welchem die Biegemomente am größten sind, auf eine gewisse Länge eine mit der geradlinigen oberen Gurtung parallel laufende untere Gurtung, während bei dem Träger nach Bild 6 die Trägerhöhe von der Trägermitte aus sofort gegen die Auflager hin abnimmt. Die Biegemomente nehmen aber von der Mitte gegen die Auflager hin nicht ebenso rasch ab und daher kommt es, daß entsprechend der in Bild 6 rasch ermäßigten Trägerhöhe eine Steigerung der Kraft in dem unteren Zugband eintritt. Sind somit nicht zwingende Nebenumstände vorhanden, welche die Anwendung des Trägers nach Bild 6 erheischen, so wird man besser daran tun, nach Bild 5 zu konstruieren. Man erreicht alsdann neben einer Ermäßigung der für die Diagonalstäbe nötigen Querschnittsfläche insbesondere auch eine Vereinfachung der Befestigung der Stäbe, besonders am Auflagerpunkt, was bei dem daselbst meist vorhandenen spitzen Winkel von besonderem Wert ist.



Im vorstehenden sind Träger mit lauter gleich großen Feldweiten, jede  $l = 1$  m lang gezeichnet und sämtliche Träger sind 1 m hoch. Sind in irgend einem Fall der Anwendung derartiger Träger die Verhältnisse so gelegen, daß sich eine Konstruktionshöhe von 1 m für den Träger nicht mehr erübrigen läßt, so können trotzdem die angegebenen Resultate Verwendung finden, nur ist dann bei der Berechnung von  $q$ ,  $Q$  und  $P$  auch nicht der Meter, sondern die kleinere Feldweite bzw. Trägerhöhe als Längeneinheit zu behandeln.

Steht dagegen nur geringe Trägerhöhe zur Verfügung und kann die Feldweite nicht gleich der Trägerhöhe gemacht werden, so müssen die Kräftepläne neu aufgezeichnet werden. Eine Vergrößerung der Stabkräfte wird sich als die Folge der Verminderung der Trägerhöhe einstellen.

Parallelgurtige Träger. Auf S. 133 sind in Bild 7—9 auch parallelgurtige Träger gezeichnet und die für sie maßgebenden Kräftepläne konstruiert. Zwei- und dreifeldrige Träger konnten dabei außer Betracht gelassen werden, weil deren Diagonalen dieselbe Stellung erhalten wie in Bild 1 und 2.

Bild 7 gibt einen vierfeldrigen Träger, bei diesem wie bei dem fünf- und sechsfeldrigen Träger in Bild 8 und 9 sind in der unteren Gurtung in den Endfeldern bei lotrechter Belastung keine Kräfte wirksam.  $S_4$  ist daher stets Null, ebenso die Kraft in dem entgegengesetzten Endstück. Dieser Umstand berechtigte dazu soeben auszusprechen, daß für zwei- und dreifeldrige parallelgurtige Träger Bild 1 und 2 auch gültig sind. Dazu kommt noch, daß die Kraft in den Endvertikalen, d. h. in den lotrechten Stäben, die über den Stützpunkten stehen, lediglich gleich dem Auflagerdruck ist, daß also die Kräfteverhältnisse in keiner Weise sich ändern, ob der Stützpunkt am Ende der unteren oder am Ende der oberen Gurtung angenommen werden mag.

Bei der Feststellung der Stabkräfte für die parallelgurtigen Träger sei von dem sechsfeldrigen Träger in Bild 9 ausgegangen. Der Kräfteplan für denselben ist doppelt aufgezeichnet, zunächst rechts unten in gleicher Weise wie für die seither betrachteten Trägersysteme, so daß das Kräftepolygon für jeden Knotenpunkt als abgeschlossenes, selbständiges Bild sichtbar bleibt. In dem Bild darüber ist der Kräfteplan so zusammengeschoben gezeichnet, wie dies häufig bei beschränkten Raumverhältnissen geschieht, um noch einen genügend großen Kräftemaßstab für die Aufzeichnung wählen zu können. Die doppelte Aufzeichnung ist gewählt worden, um auch dem weniger Gewandten das Verständnis des zusammengeschobenen Kräfteplanes zu erleichtern. Die Kräftepläne für die Träger Bild 7 und 8 sind nur in zusammengeschobener Weise gezeichnet worden.

Beispiel 77. Bild 9.  $L = 6$  m,  $Q = L \cdot q = 6$  q, somit Auflagerdrücke  $A = B = \frac{Q}{2} = 3$  q.

Nach dem Kräfteplan

$S_{25} = S_1 = 0,50$	$Q = 3,00$	$q$	$S_{20} = S_8 = 0,42$	$Q = 2,52$	$q$
$S_{22} = S_2 = 0,42$	$Q = 2,52$	$q$	$S_{17} = S_9 = 0,25$	$Q = 1,50$	$q$
$S_{23} = S_3 = 0,59$	$Q = 3,54$	$q$	$S_{14} = S_{10} = 0,75$	$Q = 4,50$	$q$
$S_{24} = S_4$	—	—	$S_{15} = S_{11} = 0,12$	$Q = 0,72$	$q$
$S_{21} = S_5 = 0,42$	$Q = 2,52$	$q$	$S_{16} = S_{12} = 0,67$	$Q = 4,02$	$q$
$S_{18} = S_6 = 0,67$	$Q = 4,02$	$q$	$S_{13} = 0,17$	$Q = 1,00$	$q$
$S_{19} = S_7 = 0,35$	$Q = 2,10$	$q$			

Beispiel 78. Bild 8.  $L = 5 \text{ m}$ ,  $Q = L \cdot q = 5 \text{ q}$ , somit Auflagerdrücke  $A = B = \frac{Q}{2} = 2,5 \text{ q}$ .

Nach dem Kräfteplan

$S_{20} = S_1 = 0,50 \text{ Q} = 2,50 \text{ q}$	$S_{14} = S_7 = 0,28 \text{ Q} = 1,20 \text{ q}$
$S_{17} = S_2 = 0,40 \text{ Q} = 2,00 \text{ q}$	$S_{15} = S_8 = 0,40 \text{ Q} = 2,00 \text{ q}$
$S_{18} = S_3 = 0,57 \text{ Q} = 3,85 \text{ q}$	$S_{12} = S_9 = 0,20 \text{ Q} = 1,00 \text{ q}$
$S_{19} = S_4 \quad \text{---} \quad \text{---}$	$S_{10} = 0,60 \text{ Q} = 3,00 \text{ q}$
$S_{16} = S_5 = 0,40 \text{ Q} = 2,00 \text{ q}$	$S_{11} = 0,60 \text{ Q} = 3,00 \text{ q}$
$S_{13} = S_6 = 0,60 \text{ Q} = 3,00 \text{ q}$	

Beispiel 79. Bild 7.  $L = 4 \text{ m}$ ,  $Q = L \cdot q = 4 \text{ q}$ , somit Auflagerdrücke  $A = B = \frac{Q}{2} = 2,0 \text{ q}$ .

Nach dem Kräfteplan

$S_{17} = S_1 = 0,50 \text{ Q} = 2,00 \text{ q}$	$S_{10} = S_6 = 0,50 \text{ Q} = 2,00 \text{ q}$
$S_{14} = S_2 = 0,38 \text{ Q} = 1,52 \text{ q}$	$S_{11} = S_7 = 0,28 \text{ Q} = 1,12 \text{ q}$
$S_{15} = S_3 = 0,53 \text{ Q} = 2,12 \text{ q}$	$S_{12} = S_8 = 0,38 \text{ Q} = 1,52 \text{ q}$
$S_{16} = S_4 \quad \text{---} \quad \text{---}$	$S_9 = 0,25 \text{ Q} = 1,00 \text{ q}$
$S_{13} = S_5 = 0,38 \text{ Q} = 1,52 \text{ q}$	

Die Vergleichen dieser Zahlenergebnisse und namentlich der aufgezeichneten Kräftepläne geben ein anschauliches Bild für den Wechsel der Stabkräfte je nach Trägerstützweite und je nach Trägersystem. Zu den Kräfteplänen ist noch ausdrücklich zu bemerken, daß sie sämtliche, auch diejenigen auf S. 137 in dem gleichen Kräftemaßstabe und für die gleiche Einheitsbelastung von  $q \text{ kg/lfd. m}$  aufgezeichnet worden sind. Diese Kräftepläne können also unmittelbar zur Vergleichung benützt werden. Ist z. B. die Kraftstrecke  $S_5$  in einem Plan nur halb so groß wie in einem andern, so ist auch die tatsächliche Kraftgröße  $S_5$  im ersten Fall nur die Hälfte der im zweiten Fall auftretenden Stabkraft. Die Vergleichung der Stabkräfte fällt sehr zu Gunsten der parallelgurtigen Träger aus. Bei denselben treten unter sonst gleichen Verhältnissen fast durchweg sehr wesentlich kleinere Kräfte auf, als bei den armierten Trägern.

### III. § 12. Trägerfachwerke mit ungleichen Feldern.

(Abbildung s. S. 137.)

Es kann vorkommen, daß kleinere Endfelder nötig werden. Dies sei hier angenommen, um zu zeigen, wie für unsymmetrische Träger die Aufzeichnung der Kräftepläne sich über alle Knotenpunkte erstrecken muß. Aus diesen Kräfteplänen ergeben sich folgende Stabkräfte:

Bild 1 und 2.  $L = 3,50 \text{ m}$ ,  $Q = L \cdot q = 3,5 \text{ q}$ , somit Auflagerdrücke  $A = B = \frac{Q}{2} = 1,75 \text{ q}$ .

Nach dem Kräfteplan:

Beispiel 80. Für Armierung, Bild 1.		Beispiel 81. Für parallelgurtige Träger, Bild 2.	
$S_1 = 0,64 \text{ Q} = 2,24 \text{ q}$	$S_7 = 0,50 \text{ Q} = 1,75 \text{ q}$	$S_1 = 0,50 \text{ Q} = 1,75 \text{ q}$	$S_9 = 0,29 \text{ Q} = 1,01 \text{ q}$
$S_2 = 0,78 \text{ Q} = 2,73 \text{ q}$	$S_8 = 0,68 \text{ Q} = 2,38 \text{ q}$	$S_2 = 0,21 \text{ Q} = 0,73 \text{ q}$	$S_{10} = 0,43 \text{ Q} = 1,51 \text{ q}$
$S_3 = 0,21 \text{ Q} = 0,73 \text{ q}$	$S_9 = 0,30 \text{ Q} = 1,05 \text{ q}$	$S_3 = 0,49 \text{ Q} = 1,71 \text{ q}$	$S_{11} = 0,11 \text{ Q} = 0,38 \text{ q}$
$S_4 = 0,64 \text{ Q} = 2,24 \text{ q}$	$S_{10} = 0,47 \text{ Q} = 1,64 \text{ q}$	$S_4 \quad \text{---} \quad \text{---}$	$S_{12} = 0,36 \text{ Q} = 1,26 \text{ q}$
$S_5 = 0,23 \text{ Q} = 0,91 \text{ q}$	$S_{11} = 0,29 \text{ Q} = 1,01 \text{ q}$	$S_5 = 0,43 \text{ Q} = 1,51 \text{ q}$	$S_{13} = 0,36 \text{ Q} = 1,26 \text{ q}$
$S_6 = 0,52 \text{ Q} = 1,82 \text{ q}$	$S_{12} = 0,68 \text{ Q} = 2,38 \text{ q}$	$S_6 = 0,43 \text{ Q} = 1,51 \text{ q}$	$S_{14} = 0,36 \text{ Q} = 1,26 \text{ q}$
	$S_{13} = 0,80 \text{ Q} = 2,80 \text{ q}$	$S_7 = 0,31 \text{ Q} = 1,08 \text{ q}$	$S_{15} = 0,50 \text{ Q} = 1,75 \text{ q}$
		$S_8 = 0,21 \text{ Q} = 0,73 \text{ q}$	$S_{16} \quad \text{---} \quad \text{---}$
			$S_{17} = 0,50 \text{ Q} = 1,75 \text{ q}$

Stoffpläne für Dachwerke mit ungleichen Feldern.

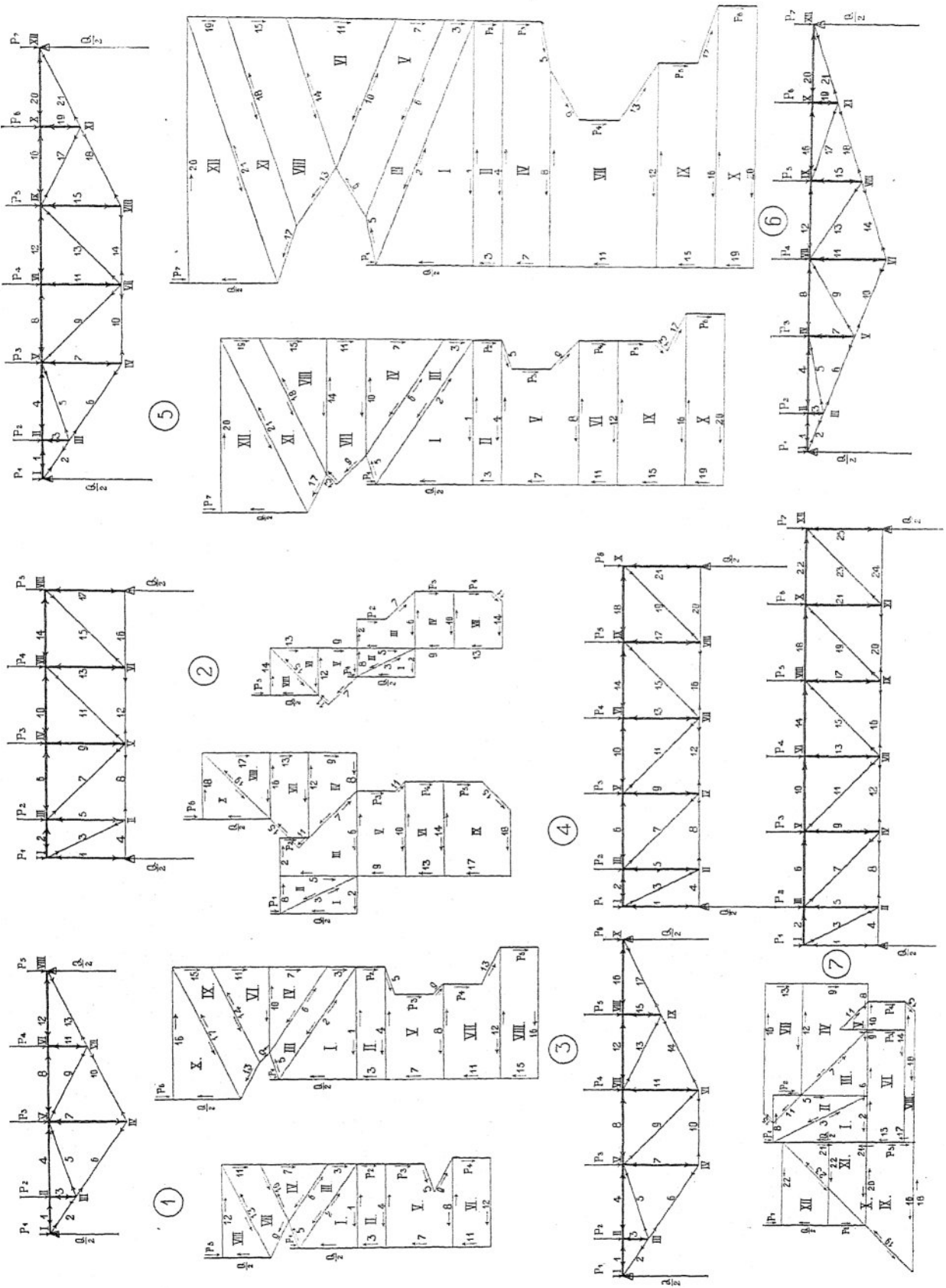


Bild 3 und 4.  $L = 4,5 \text{ m}$ ,  $Q = L \cdot q = 4,5 \text{ q}$ , somit Auflagerbrücke  $A = B = \frac{Q}{2} = 2,25 \text{ q}$ .

Nach dem Kräfteplan:

Beispiel 82. Für Armierung, Bild 3.		Beispiel 83. Für parallelgurtige Träger, Bild 4.	
$S_1 = 0,67 Q = 3,01 \text{ q}$	$S_9 = 0,08 Q = 0,36 \text{ q}$	$S_1 = 0,50 Q = 2,25 \text{ q}$	$S_{11} = 0,08 Q = 0,36 \text{ q}$
$S_2 = 0,81 Q = 3,64 \text{ q}$	$S_{10} = 0,50 Q = 2,25 \text{ q}$	$S_2 = 0,22 Q = 0,99 \text{ q}$	$S_{12} = 0,50 Q = 2,25 \text{ q}$
$S_3 = 0,17 Q = 0,76 \text{ q}$	$S_{11} = 0,33 Q = 1,48 \text{ q}$	$S_3 = 0,50 Q = 2,25 \text{ q}$	$S_{13} = 0,22 Q = 0,99 \text{ q}$
$S_4 = 0,67 Q = 3,01 \text{ q}$	$S_{12} = 0,78 Q = 3,51 \text{ q}$	$S_4 \quad - \quad -$	$S_{14} = 0,55 Q = 2,47 \text{ q}$
$S_5 = 0,18 Q = 0,81 \text{ q}$	$S_{13} = 0,25 Q = 1,12 \text{ q}$	$S_5 = 0,44 Q = 1,98 \text{ q}$	$S_{15} = 0,23 Q = 1,03 \text{ q}$
$S_6 = 0,60 Q = 2,70 \text{ q}$	$S_{14} = 0,62 Q = 2,79 \text{ q}$	$S_6 = 0,50 Q = 2,25 \text{ q}$	$S_{16} = 0,39 Q = 1,75 \text{ q}$
$S_7 = 0,33 Q = 1,48 \text{ q}$	$S_{15} = 0,22 Q = 0,99 \text{ q}$	$S_7 = 0,40 Q = 1,70 \text{ q}$	$S_{17} = 0,39 Q = 1,75 \text{ q}$
$S_8 = 0,56 Q = 2,52 \text{ q}$	$S_{16} = 0,78 Q = 3,51 \text{ q}$	$S_8 = 0,22 Q = 0,99 \text{ q}$	$S_{18} = 0,39 Q = 1,75 \text{ q}$
	$S_{17} = 0,87 Q = 3,91 \text{ q}$	$S_9 = 0,28 Q = 1,26 \text{ q}$	$S_{19} = 0,55 Q = 2,47 \text{ q}$
		$S_{10} = 0,55 Q = 2,47 \text{ q}$	$S_{20} \quad - \quad -$
			$S_{21} = 0,50 Q = 2,25 \text{ q}$

Bild 5, 6 und 7.  $L = 5,5 \text{ m}$ ,  $Q = L \cdot q = 5,5 \text{ q}$ , somit Auflagerbrücke  $A = B = \frac{Q}{2} = 2,75 \text{ q}$ .

Nach dem Kräfteplan:

Beispiel 84.	Beispiel 85.	Beispiel 86.
Für Armierung, nach Bild 5.	Für Armierung, Bild 6.	Für einen parallelgurtigen Träger, Bild 7.
$S_1 = 0,68 Q = 3,74 \text{ q}$	$S_1 = 1,14 Q = 6,27 \text{ q}$	$S_1 = 0,50 Q = 2,75 \text{ q}$
$S_2 = 0,82 Q = 4,51 \text{ q}$	$S_2 = 1,25 Q = 6,87 \text{ q}$	$S_2 = 0,23 Q = 1,26 \text{ q}$
$S_3 = 0,14 Q = 0,77 \text{ q}$	$S_3 = 0,14 Q = 0,77 \text{ q}$	$S_3 = 0,51 Q = 2,80 \text{ q}$
$S_4 = 0,68 Q = 3,74 \text{ q}$	$S_4 = 1,14 Q = 6,27 \text{ q}$	$S_4 \quad - \quad -$
$S_5 = 0,15 Q = 0,82 \text{ q}$	$S_5 = 0,24 Q = 1,32 \text{ q}$	$S_5 = 0,45 Q = 2,47 \text{ q}$
$S_6 = 0,65 Q = 3,57 \text{ q}$	$S_6 = 0,98 Q = 5,39 \text{ q}$	$S_6 = 0,55 Q = 3,02 \text{ q}$
$S_7 = 0,36 Q = 1,98 \text{ q}$	$S_7 = 0,24 Q = 1,32 \text{ q}$	$S_7 = 0,45 Q = 2,47 \text{ q}$
$S_8 = 0,68 Q = 3,74 \text{ q}$	$S_8 = 0,91 Q = 5,00 \text{ q}$	$S_8 = 0,23 Q = 1,26 \text{ q}$
Beispiel 87.	Beispiel 88.	Beispiel 89.
Für Armierung nach Bild 5.	Für Armierung, Bild 6.	Für einen parallelgurtigen Träger, Bild 7.
$S_9 = 0,19 Q = 1,04 \text{ q}$	$S_9 = 0,24 Q = 1,32 \text{ q}$	$S_9 = 0,32 Q = 1,76 \text{ q}$
$S_{10} = 0,54 Q = 2,97 \text{ q}$	$S_{10} = 0,74 Q = 4,07 \text{ q}$	$S_{10} = 0,68 Q = 3,74 \text{ q}$
$S_{11} = 0,19 Q = 1,04 \text{ q}$	$S_{11} = 0,50 Q = 2,75 \text{ q}$	$S_{11} = 0,18 Q = 0,99 \text{ q}$
$S_{12} = 0,68 Q = 3,74 \text{ q}$	$S_{12} = 0,95 Q = 5,22 \text{ q}$	$S_{12} = 0,55 Q = 3,02 \text{ q}$
$S_{13} = 0,07 Q = 0,38 \text{ q}$	$S_{13} = 0,33 Q = 1,81 \text{ q}$	$S_{13} = 0,18 Q = 0,99 \text{ q}$
$S_{14} = 0,64 Q = 3,52 \text{ q}$	$S_{14} = 0,74 Q = 4,07 \text{ q}$	$S_{14} = 0,68 Q = 3,74 \text{ q}$
$S_{15} = 0,32 Q = 1,76 \text{ q}$	$S_{15} = 0,27 Q = 1,48 \text{ q}$	$S_{15} = 0,06 Q = 0,33 \text{ q}$
$S_{16} = 0,82 Q = 4,51 \text{ q}$	$S_{16} = 1,22 Q = 6,71 \text{ q}$	$S_{16} = 0,64 Q = 3,52 \text{ q}$
$S_{17} = 0,19 Q = 1,04 \text{ q}$	$S_{17} = 0,27 Q = 1,48 \text{ q}$	$S_{17} = 0,23 Q = 1,26 \text{ q}$

Fortsetz. von Beispiel 87.

$$S_{18} = 0,74 \text{ Q} = 4,07 \text{ q}$$

$$S_{19} = 0,18 \text{ Q} = 0,99 \text{ q}$$

$$S_{20} = 0,82 \text{ Q} = 4,51 \text{ q}$$

$$S_{21} = 0,90 \text{ Q} = 4,95 \text{ q}$$

Fortsetz. von Beispiel 88.

$$S_{18} = 1,00 \text{ Q} = 5,50 \text{ q}$$

$$S_{19} = 0,18 \text{ Q} = 0,99 \text{ q}$$

$$S_{20} = 1,22 \text{ Q} = 6,71 \text{ q}$$

$$S_{21} = 1,29 \text{ Q} = 7,09 \text{ q}$$

Fortsetz. von Beispiel 89.

$$S_{18} = 0,64 \text{ Q} = 3,52 \text{ q}$$

$$S_{19} = 0,32 \text{ Q} = 1,76 \text{ q}$$

$$S_{20} = 0,41 \text{ Q} = 2,25 \text{ q}$$

$$S_{21} = 0,41 \text{ Q} = 2,25 \text{ q}$$

$$S_{22} = 0,41 \text{ Q} = 2,25 \text{ q}$$

$$S_{23} = 0,58 \text{ Q} = 3,19 \text{ q}$$

$$S_{24} = \text{---} \text{---}$$

$$S_{25} = 0,50 \text{ Q} = 2,75 \text{ q}$$

Auch bei diesen Trägern zeigt sich wieder, daß die Stabkräfte in den parallelgurtigen Trägern wesentlich kleiner sind, als in den armierten Trägern.

Weil die Trägerfachwerke nicht symmetrisch sind, war, wie oben schon bemerkt, die Aufzeichnung der Kräftepläne über sämtliche Trägerknotenpunkte auszudehnen und dementsprechend sind auch die Verhältniszahlen zwischen S und Q für alle Stäbe anzugeben gewesen.

### III. § 13. Räumliche Fachwerke.

Von den räumlichen Fachwerken kommen für den vorliegenden Zweck die Konstruktionen für Kuppeldächer, Zeltdächer und eiserne Türme in Betracht. Im wesentlichen sind zwei Anordnungen zu unterscheiden. Bei der ersten Anordnung werden Halbbinder, die in den Innenraum hineinragen, an der Spitze der Kuppel oder des Zeltdaches zusammengefaßt; diese Halbbinder sind für sich ebene Gebilde und werden ebenso berechnet wie die Binder von Satteldächern.

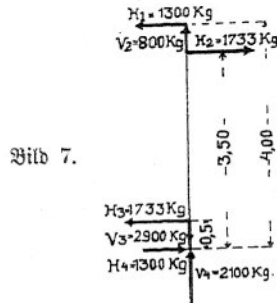
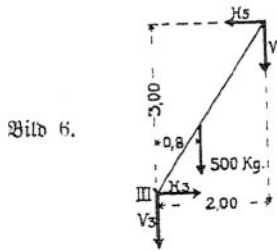
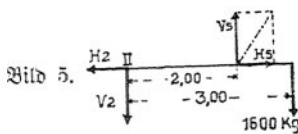
Für die zweite Anordnung ist wesentlich, daß der Innenraum der Konstruktion frei bleibt, die Glieder des Fachwerks sind Sparren, Spannringe und Diagonalen. Die Sparren sind bei Kuppeldächern vieleckig, sie werden durch Spannringe, die wagrecht verlaufen und aus geschlossenen Vielecken bestehen, zusammengehalten. Diese Spannringe liegen in der Höhe der Eckpunkte der den Sparren bildenden gebrochenen Linie und zerlegen die Kuppel in einzelne Zonen. Zwei benachbarte Sparrenstücke und die Stäbe der zugehörigen Spannringe in einer Zone bilden ein Trapez, dessen Unverschieblichkeit bei einseitiger Belastung durch ein eingelegtes Diagonalenkreuz gesichert wird. Die Sparren werden bei kleinen Kuppeln aus einfachen Stäben, bei größeren Kuppeln aus Gitterstäben gebildet. Häufig ist auf dem obersten Spannring eine Laterne aufgesetzt, welche dem Lichteinfall dient und die Herstellung des schwierigen Zusammenschlusses der einzelnen Sparren in einem Punkt entbehrlich macht.

Bei Zeltdächern sind die Sparren gerade, so daß sich eine Pyramide bildet, bei eisernen Türmen werden aus den Sparren die Eckpfosten, zwischen welchen die Treppe eingelegt ist; auf dem obersten Spannring ruht die Plattform.

Bei der statischen Berechnung geht man davon aus, daß jeder Ring nur durch das Gewicht der auf ihm liegenden Zone belastet ist und daß er dieses Gewicht auf die unterhalb liegenden Sparrenteile überträgt. Die Knotenpunktlasten werden zunächst in Komponenten nach den Richtungen der an den Knotenpunkt anschließenden Sparrenstäbe und in eine Horizontalkraft zerlegt. Diese Komponenten geben die Stabkräfte an. Die Horizontalkräfte sind nach den Richtungen der Stäbe des anschließenden Ringes ebenfalls in Komponenten zu zerlegen, welche die Ringspannungen liefern.







und nunmehr ergibt sich aus obigem Wert  $V_5 - V_2 = 1600 \text{ kg}$ ,  $2400 - V_2 = 1600 \text{ kg}$ , somit  $V_2 = 800 \text{ kg}$ .

$H_2$  und  $H_5$  können vorläufig noch nicht bestimmt werden.

Wird die Strebe frei gemacht, so läßt sich aus Bild 6 ablesen:

1)  $\sum V = 0 = V_5 + 500 + V_3 = 2400 + 500 + V_3$ ,  
hieraus  $V_3 = -2900 \text{ kg}$ .

Das negative Vorzeichen zeigt an, daß die Kraft  $V_3$  in Bild 6 die falsche Richtung hat.

2)  $\sum H = 0 = H_3 - H_5$ , hieraus  $H_3 = H_5$

und endlich, für den Drehpunkt III

3)  $\sum M = 0 = V_5 \cdot 2,0 + 500 \cdot 0,8 - H_5 \cdot 3,0$   
 $= 2400 \cdot 2,0 + 500 \cdot 0,8 - H_5 \cdot 3,0$ ,

hieraus jetzt erst  $H_5 = \frac{2400 \cdot 2,0 + 500 \cdot 0,8}{3,0} = 1733 \text{ kg}$

und also auch  $H_2 = H_3 = H_5 = 1733 \text{ kg}$ .

Es sind jetzt sämtliche Kräfte bestimmt und man hat nur noch die Drehsäule frei zu machen, um eine Probe zu erhalten, welche daraus hervorgeht, daß sämtliche Kräfte an ihr bekannt sind und ein Gleichgewichtssystem bilden, also die 3 Gleichungen

$$\sum V = 0 \quad \sum H = 0 \quad \sum M = 0 \text{ erfüllen müssen.}$$

Es ergibt sich aus Bild 7:

1.  $\sum V = 0 = -V_2 + V_3 - V_4 = -800 + 2900 - 2100 = 0$ ;

2.  $\sum H = 0 = -H_1 + H_2 - H_3 + H_4 = -1300 + 1733 - 1733 + 1300 = 0$

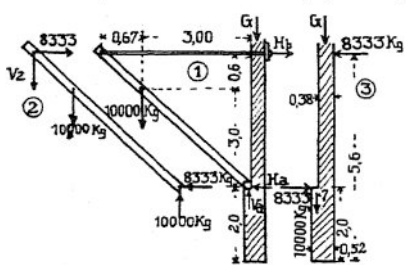
und endlich, für Drehpunkt IV (unteres Säulenende)

3.  $\sum M = 0 = -H_1 \cdot 4 + H_2 \cdot 3,5 - H_3 \cdot 0,5 = -1300 \cdot 4 + 1733 \cdot 3,5 - 1733 \cdot 0,5 = 0$ .

Die Probe stimmt somit. Die Ermittlung der Stabquerschnitte erfolgt nach Kap. II.

Beispiel 91. Der unten gezeichnete Ausleger soll berechnet und die Standfestigkeit der Wand, an der er angebracht ist, untersucht werden.

Aufl. Denkt man sich die ganze Konstruktion frei gemacht, so ergibt sich aus Bild 1



$\sum H = 0 = H_a - H_b$ , also  $H_a = H_b$ ; ferner  $\sum V = 0$

$= 10\,000 - V_a$ , hieraus  $V_a = 10\,000 \text{ kg}$ ; endlich

$$\sum M = 0 = H_b \cdot 3,6 - 10\,000 \cdot 3,0, \text{ also } H_b = \frac{10\,000 \cdot 3}{3,6}$$

$= 8333 \text{ kg}$ .

Macht man die Strebe frei, Bild 2, so ist  $\sum V = 0$

$= 10\,000 + V_2 - 10\,000$ , also  $V_2 = 0$ , d. h. es ist an

der Befestigung der Zugstange keine Vertikalkraft tätig.

Macht man die Mauer frei, so ergibt sich in Bezug auf die Vorderkante aus Bild 3

$$M = 2,0 \cdot 0,52 \cdot 1600 \cdot 0,26 + 3,6 \cdot 0,38 \cdot 1600 \cdot (0,14 + 0,19) - 8333 \cdot 5,6 + 8333 \cdot 2,0 + 10\,000 \cdot 0,07$$

$$= 433 \quad + 722 \quad - 46\,665 \quad + 16\,666 \quad + 700 = -28\,144 \text{ cmkg.}$$

Die Wand würde somit nach vorne umkippen, wofern nicht eine Belastung  $G$  ein widerstehendes

Moment gibt, groß genug, um dieses Kippmoment aufzuheben und soweit zu überwiegen, daß

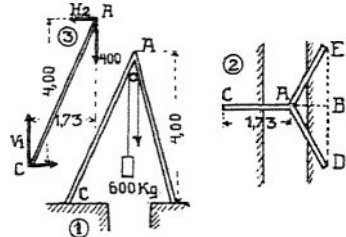
der genügende Sicherheitsgrad erzielt wird; oder eine Verankerung an andern Gebäudeteilen der



Wand den nötigen Halt verleiht, was nur dann der Fall sein wird, wenn diese Gebäudeteile ohne Schaden zu nehmen mit großen Horizontalkräften beansprucht werden dürfen.

Beispiel 92. Die gezeichnete räumliche Verstrebung besteht aus 10 cm dicken Stangen, an der Rolle werden 600 kg aufgehoben. Wie groß wird infolgedessen die Beanspruchung der Stangen werden.

Aufl. Die feste Rolle hat zur Folge, daß auf dem Knotenpunkt A mindestens die Gesamtkraft  $600 + 600 = 1200$  kg wirkt. Macht man den Stab AC frei, so erhält man unter der Voraussetzung, daß sich die Belastung auf alle drei Stangen gleichmäßig verteilt, aus Bild 3  $V_1 = 400$  kg und für den Drehpunkt C wird  $H_2 \cdot 4,0 = 400 \cdot 1,73$ , hieraus  $H_2 = 173$  kg. Die Kraft S in der Stange wird daher  $S = \sqrt{400^2 + 173^2} = 435$  kg; somit die Beanspruchung der Stange  $s = \frac{435}{\pi \cdot 5^2} = 5,6$  kg/qcm.



Beispiel 93. Bilden die vorigen Stangen eine unregelmäßige Pyramide, so ist die Last von 1200 kg zunächst mittels des Kräfteparallelogrammes im  $\triangle BAC$  in die Komponente  $S = AC$  und  $R = AB$  zu zerlegen, sodann ist  $R$  in der richtigen Gestaltung des  $\triangle EAD$  nach  $AE$  in die Komponente  $S_2$  und nach  $AD$  in die Komponente  $S_3$  zu zerlegen.  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  sind alsdann die in den Stangen auftretende Kraftwirkungen. Die Lösung wird zeichnerisch einfacher als rechnerisch.

Beispiel 94. Die in Bild 2 S. 140 dargestellte Verstrebung soll für  $P = 1000$  kg berechnet werden.

Aufl. Auf Knotenpunkt VI wirkt der Druck  $P_1 = \frac{P(2,20 + 1,00)}{2,20} = 1450$  kg. Nun kann man, wie im vorigen Kapitel gezeigt, die Kräftepläne vom Knotenpunkt VI ausgehend aufzeichnen. In den Kräfteplänen für die Knotenpunkte II und III zeigt sich, daß horizontale Kräfte  $H$  nötig sind, um sie zu schließen. Der Vertikalstab wird von diesen auf Biegung beansprucht. Zur Probe kann man auch noch die gleich großen Horizontalkräfte an den Befestigungspunkten rechnen; aus  $P \cdot (2,20 + 1,00) = H \cdot 3,00$  wird  $H = \frac{1000 \cdot 3,20}{3,00} = 1060$  kg. An Punkt IV wirkt ein Auflagerwiderstand  $V = P = 1000$  kg.

#### IV. § 3. Einfache Holzkonstruktionen.

Unter einfachen Holzkonstruktionen seien solche verstanden, in welchen die Stäbe unmittelbar, ohne Zwischenglieder, wie Pfosten, Schwellen und dergl. aufeinanderwirken. Diese Bestimmung schließt nicht aus, daß an den Knotenpunkten eiserne Schuhe angebracht sind, um die Holzverbindungen zu vereinfachen oder zu verstärken. Derartige einfache Holzkonstruktionen sind hauptsächlich die Hängewerke, die Sprengwerke und die Häng- und Sprengwerke.

Bei deren Berechnung sei von gleichförmig verteilter Vollbelastung ausgegangen. Bei der Verteilung der Lasten ist je nach Lage des Falles auf die in II. § 12 angegebenen größeren Drücke auf die Mittelstützen Rücksicht zu nehmen. Sind die Lastverteilungen bestimmt und die Auflagerdrücke berechnet, so reicht in der Regel das Kräfteparallelogramm hin, um die Stabkräfte zu ermitteln.

Beispiel 95. Ein Sparrendach sei mit der Gesamtlast  $Q = P_1 + P_2 + P_3$  belastet, wie groß sind die Kräfte in den einzelnen Hölzern.

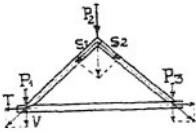


Bild 1.

Aufl. Die Knotenpunktslast  $P_2$  am First zerlegt sich in die Kräfte  $S_1$  und  $S_2$ , die sich aus einem Kräfteparallelogramm ergeben und bei symmetrischer Gestaltung gleich groß sind. Am Traufpunkt zerlegt sich  $S$  in  $T$  und  $V$ . Die Kraft  $T$  beansprucht den Hauptbalken auf Zug — in der Regel wird er auch noch durch unmittelbar aufgelegte Lasten auf Biegung beansprucht sein. — Die Seitenkraft  $V$  addiert sich zu der Trauf-

punktsbelastung  $P_1$  und liefert mit derselben zusammen den Auflagerdruck, den der Dachstuhl auf die Umfassungswand ausübt.

Beispiel 96. Ein Hängewerk diene als Träger eines Fußgängersteiges und sei mit  $Q$  kg belastet. Wie groß sind die Kräfte in dessen Hölzern.

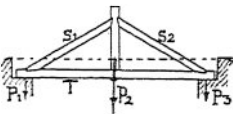


Bild 2.

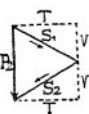


Bild 3.

Aufl. Nach II. § 12 entfallen auf die Stützpunkte je  $P_1 = P_3 = \frac{3Q}{16}$ , auf die Hängesäule  $P_2 = \frac{10}{16} Q$ .

Diese Kraft zerlegt sich in die Strebenkräfte  $S_1$  und  $S_2$  zu deren Bestimmung das Kräfteparallelogramm oder das Kräfte-

dreieck dienen kann. Die Strebenkräfte geben an den Fußpunkten der Streben die Seitenkräfte  $T$  und  $V$ , letztere addieren sich mit  $P_1$  bzw.  $P_3$  und liefern die Auflagerdrücke  $P_1 + V = P_3 + V$ . Der Hauptbalken erleidet unter der Hängesäule sein größtes Biegemoment. Vgl. II. § 12, Fall 1.

Beispiel 97. Eine „über dem Hohlen“ stehende Kiegelwand enthält nebengezeichnetes Spreng- und Hängewerk. Wie groß sind die Kräfte in demselben, wenn auf die Hängesäule  $P_1$  und  $P_2$  und auf die Eckpunkte des Sprengwerks  $Q_1$  und  $Q_2$  wirken.

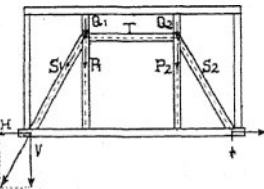


Bild 4.

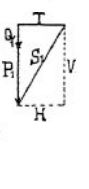


Bild 5.

Aufl. Die Last  $Q_1 + P_1$  zerlegt sich in die Strebenkraft  $S_1$  und in die Kraft  $T$  im Spannriegel. Beide Kräfte können mittels des Kräfteparallelogrammes oder mittels des Kräfte-dreieckes bestimmt werden. Das gleiche gilt für die Last  $Q_2$  und  $P_2$ . Die Strebenkräfte zerlegen sich am Strebenfußpunkt in die Seitenkräfte  $H$  und  $V$ . Aus dem Kräfteplan ist zu ersehen, daß  $V = Q_1 + P_1$  und  $H = T$  wird.

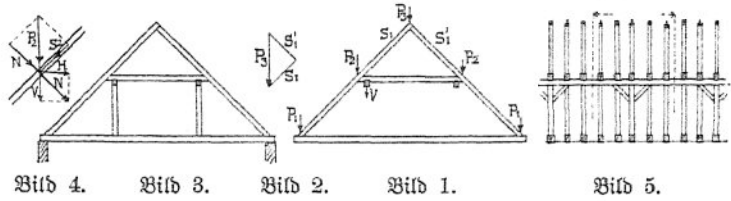
#### IV. § 4. Gegliederte Holzkonstruktionen.

Bei den gegliederten Holzkonstruktionen werden die Kräfte aus den im oberen Teil liegenden Stäben nicht unmittelbar auf die unten befindlichen Hölzer übertragen, sondern es sind Zwischenglieder eingeschaltet, welche die Übertragung vermitteln und meist dazu dienen, den Unterbau nicht unter jeder Reihe von oberen Hölzern, sondern nur in bestimmten Zwischenräumen herzustellen. Dieser Zwischenraum heißt bei Dächern Bundweite, der vollständige Ausbau liefert die Hauptgebinde, zwischen welchen sich die Leergebinde befinden. Bei Gerüsten und Brücken bilden die Joche die Unterstützung, deren Abstand wird Jochweite genannt.

Die Berechnung geht von den Leergebinden aus, man bestimmt deren Drücke auf die Zwischenglieder, meist Pfetten genannt und untersucht sodann die Wirkung der Pfettendrücke auf dem Dachstuhl oder das Joch.

Beispiel 98. Die Kräfte in den Hölzern eines doppelten stehenden Kehlbalke-  
dachstuhles sind zu ermitteln.

Aufl. Bei der Berechnung des Leergebindes, Bild 1, geht man vom Firstpunkt aus,  
Bild 2. Beim Knotenpunkt  
an der Stuhlpfette, Bild 3,  
denkt man sich die Knotenpunkts-  
last in eine Komponente  $S_2$  nach  
dem Sparren und in eine Kom-  
ponente  $N$  senkrecht zu dem-



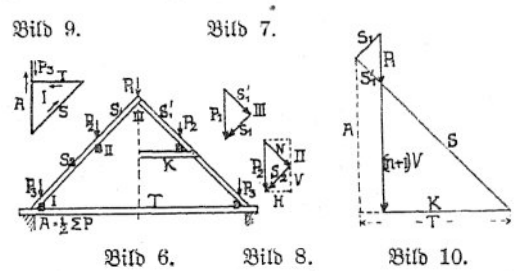
selben zerlegt, Bild 4. Sodann zerlegt man  $N$  in Vertikal- und Horizontalkräfte  $V$  und  $H$ . Die Horizontalkraft gibt den axialen Druck im Kehlbalken, zu welchem noch die Wirkungen der Biegung des Kehlbalkens durch die Belastung des Kehlgebälles kommen.

Der vertikale Druck  $V$  stellt die Belastung der Stuhlpfette durch das Leergebinde dar. Im unteren Sparrenteil wirken  $S_1 + S_2$ .

Das Hauptgebinde erleidet beim Vorhandensein von vier Leergebinden auf jedem Stuhl-  
pfosten den Druck  $5V$ . Mit diesen Kräften wird der Bundbalken auf Biegung beansprucht.

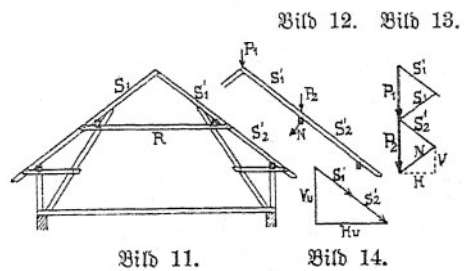
Beispiel 99. Die Kräfte in den Stäben des stehenden Pfettendachstuhles sind zu ermitteln.

Aufl. Die Berechnung geht denselben Weg wie im vorigen Beispiel. Die Komponente  $H$   
beansprucht aber die Pfette auch noch im horizontalen Sinne auf Biegung, weil keine Kehlbalken  
vorhanden sind. Die beistehenden Kräftepläne geben die Kraftwirkungen an. Im unteren  
Sparrenteil wirken, als Folge von  $P_1$  die Kraft  $S_1$   
und als Folge von  $P_2$  die Kraft  $S_2$ , also zu-  
sammen  $S_1 + S_2 = S$ . Die Vertikalkomponente  
dieser resultierenden Kraft gibt am Traufpunkt  
jedes einzelnen Sparrens mit  $P_3$  zusammen-  
genommen den Auflagerdruck, s. Bild 9. Auf  
den unteren Sparrenteil des Hauptbinders  
wirken von den Lasten  $P_2$  die Vertikalkompo-  
nenten  $(n + 1)V$ , wenn die Anzahl der Leergebinde  $n$  ist; ferner vom Firstpunkt des Haupt-  
gebindes noch  $\frac{1}{2}P_1$ . Unter der Einwirkung dieser Lasten tritt der in beistehender Kräftefigur,  
Bild 10, ermittelte Sparrendruck  $S + S_1$  und der Druck  $T$  im Hauptbalken auf. Letzterer er-  
leidet überdies noch Biegung.



Beispiel 100. Liegender Pfettendachstuhl mit Kniestock und 5 Leergebinden auf  
jedem Bund.

Aufl. Die Leergebinde werden berechnet, wie beim stehenden Pfettendachstuhl. Der  
Druck auf die Dachpfette wird beim Vorhandensein  
von 5 Leergebinden zwischen zwei Hauptgebinden  $6V$ .  
Aus diesem Druck ergibt sich die Kraft  $R$  im Spann-  
riegel  $R$ . Im unteren Sparrenteil wirken  $S_1' + S_2'$ ,  
welche die Komponenten  $V_n$  und  $H_n$  geben.  $V_n$  bean-  
sprucht die Kniestockpfetten auf Biegung,  $H_n$  geht durch  
die Kniestockzange auf die Strebe über und beansprucht  
diese auf zusammengesetzte Festigkeit.



## Kapitel V

# Eisen- und Holzverbindungen.

### Einleitung.

Der Berechnung der Nietverbindungen wird eine kurze Erörterung der Vernietungen im allgemeinen, die streng genommen in den Vortrag über Eisenkonstruktionen gehören würde, vorangestellt, um zunächst das Verständnis der Schüler für diesen ihnen meist noch fremden Gegenstand zu wecken.

Bei Zusammensetzungen von Eisenkonstruktionen aus einzelnen Teilen werden Vernietungen nötig. Der Festigkeit der Vernietungen ist die allergrößte Aufmerksamkeit zu schenken, die Herstellung der Nietung mit tunlichster Sorgfalt zu bewerkstelligen. Die Herstellung geschieht in der Weise, daß der mit dem Sezkopf schon versehene Niet in heller Rotglut in die Nietlöcher gesteckt und sodann mit einem Eisenstock, der eine dem Nietkopf entsprechende Höhlung besitzt, unterstellt wird. Hierauf findet die Stauchung des die Konstruktionsteile verbindenden Nietchaftes und schließlich die Formung desselben mittels eines Schellhammers statt, d. h. es wird der Schließkopf geschlagen. Der fertige Niet soll in der Kopfmitte noch schwach kirschrot glühend sein. Durch die schließliche Erkaltung des Nietes findet eine starke Zusammenpressung der vernieteten Teile statt.

### A. Niet- und Schraubenverbindungen von Eisenteilen.

Sowohl durch diese Zusammenziehung der Bolzen beim Erkalten der geschlagenen Niete und durch das Anziehen eingesehter Schrauben entsteht in den Berührungsflächen der verbundenen Eisenteile eine Zusammenpressung, welche zur Folge hat, daß sich dem Abgleiten dieser Flächen voneinander ein Reibungswiderstand entgegenstellt. Da dieser Widerstand jedoch gerade im Augenblick der Gefahr versagen wird, weil dem Bruch Gestaltsveränderungen vorangehen, rechnet man auf diese Reibung nicht, sondern bemißt die Vernietung so, daß deren Scherfestigkeit den Zusammenhang der vernieteten Teile gewährleistet.

Die Festigkeit der Vernietungen hängt außer von den Abmessungen der Nietung auch von dem Material der Niete, von deren Verarbeitung und von der Herstellung der Nietlöcher ab.

Das Material für Niete soll neben hoher Festigkeit ein reichliches Maß von Zähigkeit und Dehnbarkeit erhalten. Die letztere Eigenschaft hat dem Nieteneisen die uneigentliche Bezeichnung der Weichheit verschafft. Für Niete aus Schmiedeeisen werden in der Regel 3800 kg/qcm, für solche aus Flußeisen 4200 kg/qcm Zugfestigkeit gefordert.

Bei der Verarbeitung der Niete ist zwischen kalter und warmer Nietung zu unterscheiden. Bei dem schon oben erwähnten Anwärmen der Niete ist eine zu lange Dauer der hellen Rotglut oder gar Übergang in die Weißglut zu vermeiden, weil sich sonst die Molekularbeschaffenheit des Eisens ändert. Diese Gefahr und die Gefahr des „Anbrennens“ der Niete

beim Anwärmen steigert sich bei der Verwendung dünner Nieten, so daß man Nieten mit Schaftdurchmessern bis zu 10 mm besser kalt verarbeitet. Das Anstauchen der Schließköpfe an kalten Nieten eilt nicht so sehr, wie bei der warmen Nietung, es kann und muß mit Schonung erfolgen, wobei namentlich auf allmähliches, nicht zu gewaltames Stauchen zu achten ist, damit keine Rißbildungen und sonstige Zerstörungen der Nieten eintreten. Von der Herstellung kugelförmiger Form des Schließkopfes wird bei kalter Nietung besser abgesehen. Es genügt, wenn eine regelmäßige Aufstauchung, die frei von Zerreißungen sein soll, erzielt worden ist.

Die Herstellung der Nietlöcher kann durch Bohren oder durch Stanzen erfolgen. Das Stanzen oder Lochen ist eine gewalttätige Handlung, bei der es nicht ohne Schädigung der Nietlochwand oder der Nietlochleibung abgeht. Der hierdurch entstehende Festigkeitsverlust erreicht verschiedene Werte. Er ist bei kalt gewalztem oder gehämmertem Material größer als bei den warm gewalzten Eisen. Ein kleinerer Festigkeitsverlust wird durch das Lochen bei Schweiß Eisen, ein größerer bei Flußeisen verursacht. Das Lochen hat bei großer Eisendicke schädlichere Folgen als bei geringen Eisenstärken. Der Verlust an Festigkeit durch das Lochen beträgt etwa 20—30% der ursprünglichen Festigkeit.

Die Anordnungen der Vernietungen müssen daher so gewählt werden, daß die Nietlochleibungen, welche durch das Stanzen einen Verlust an Festigkeit erlitten haben, so mäßig beansprucht werden, daß der für die gesamte Konstruktion vorgeschriebene Sicherheitsgrad gegen Bruch auch bei den Nietlochleibungen gegen Aufquetschen vorhanden ist. Aus diesem Grunde pflegt man bei Zulassung von Stanzen die Beanspruchung der Nietlochwand bei Schweiß Eisen auf 1400 kg/qcm und bei Flußeisen auf 1600 kg/qcm zu beschränken, obschon die Stauchgrenze oder der Stauchbeginn bei beiden Materialien viel höher liegt, nämlich auf etwa 2300 kg/qcm bei Schmiedeeisen und 2600 kg/qcm bei Flußeisen.

Mit der Feststellung der angeführten zulässigen Beanspruchungen auf Stauchung von 1400 und 1600 kg/qcm hat man also beim Schmiedeeisen für das Vorkommen von  $\frac{2300 - 1400}{2300} = 0,39$ , d. h. 39%, bei Flußeisen von  $\frac{2600 - 1600}{2600} = 0,385$ , d. h. wieder 39% Verlust an Festigkeit Vorsorge getroffen; so hohe Verluste sind aber in der Regel nicht vorhanden.

Schließlich möge noch darauf hingewiesen werden, daß die Festigkeit einer Nietung wesentlich beeinträchtigt wird, wenn die Nietlöcher nicht genau aufeinander stimmen.

Die Prüfung der Nietung ist stets und ganz besonders bei kalt geschlagenen Nieten erforderlich. Die Nieten müssen mit ihren Köpfen so dicht auf den vernieteten Eisenteilen sitzen, daß nicht die geringste Bewegung wahrnehmbar ist. Man prüft diese Bedingung dadurch, daß man die empfindliche Fingerspitze auf den einen Nietkopf legt und mit einem kleinen Hammer einen mäßigen Schlag auf den andern Nietkopf in der Richtung der Nietenachse führt. Ist der Niet nicht festgeschlagen, so fühlt man den Schlag an der aufgelegten Fingerspitze als mehr oder weniger starke Erzitterung. Bei tadellos geschlagenen Nieten ist keinerlei Erzitterung zu fühlen.

Bei der Berechnung der Vernietungen sind zu bestimmen: die Bolzenstärke, die Anzahl der Bolzen, deren Abstand und Gruppierung.

## V. § 1. Bolzenstärke.

Es sind zwei Hauptkonstruktionen zu unterscheiden:

1. Sämtliche Stäbe, welche an einem Knotenpunkte zusammenkommen, sind durch einen einzigen Bolzen verbunden (s. Bild 1 Taf. III). Der Durchmesser  $D$  des Bolzens ist dann so zu wählen, daß der Bolzenquerschnitt der größten, der von den Stäben ausgeübten Kraft auf Abscherung zu widerstehen vermag. Bei längeren Bolzen ist die Beanspruchung auf Biegung wohl zu beachten; um ihretwillen sind gewöhnlich stärkere Bolzenquerschnitte nötig, als um der Abscherungsspannung willen. Die Biegezugfestigkeit der Bolzen kommt nicht nur bei den Holzverbindungen, sondern auch bei Verbindung von Eisenteilen in Betracht, sobald der Bolzen eine größere Länge erhalten muß.

2. Die einzelnen eisernen Stäbe werden an einer Knotenplatte durch eine Anzahl Schrauben oder Nieten befestigt (s. Bild 2 Taf. III). Die für jeden Stab nötige Anzahl Bolzen ist so zu wählen, daß die Summe der Bolzenquerschnitte imstande ist, die im Stab tätige Kraft auf die Knotenplatte zu übertragen. Dabei wird ein Bolzendurchmesser  $d$  angenommen, welcher in der Regel das Maß von 12 mm nicht unter- und von 25 mm nicht überschreiten soll. Ist  $\delta$  die Eisenstärke der zu vernietenden Stäbe  $\alpha$ ., so ist der Bolzendurchmesser

$$d = 2 \delta$$

zu nehmen, weil dann die Lochwand nicht überanstrengt wird, auch wenn die Festigkeit des Nietbolzens voll ausgenützt wird.

## V. § 2. Anzahl der Schrauben oder Nieten.

Als Regel ist festzustellen, daß — mit Rücksicht auf die Gefahren beim Erwärmen und Schlagen der Nieten — ein Stab niemals mit weniger als zwei Nieten zu befestigen ist, im übrigen bestimmt sich die Anzahl der Schrauben oder Nieten aus der Scherfestigkeit derselben. Die Scherfestigkeit des Nietenstahls ist im allgemeinen  $\frac{4}{5}$  der Zugfestigkeit des Eisens überhaupt, so daß also die zulässige Beanspruchung auf Abscherung mindestens

$$s_1 = s \cdot \frac{4}{5} = 600 \cdot \frac{4}{5} = 480 \text{ kg/qcm} \text{ beträgt.}$$

In der Regel werden  $\frac{4}{5} \cdot 700 = 560 \text{ kg/qcm}$  und unter Voraussetzung ganz sorgfältiger Herstellung der Nietung bis zu  $700 \text{ kg/qcm}$  Scherbeanspruchung zugelassen.

Ist der Bolzendurchmesser  $d$  bestimmt, so läßt sich berechnen, welche Kraft ein Bolzenquerschnitt zu übertragen vermag (vgl. Tabelle in § 5) und man erhält schließlich durch Division mit dieser Kraft in die Kraft, die in dem zu befestigenden Stab wirkt, die Anzahl der nötigen Bolzenquerschnitte.

Bei Berechnung der Niet- oder Schraubenbolzenanzahl selbst ist zu unterscheiden zwischen einschnittigen Bolzen und zweischnittigen Bolzen. Bei den einschnittigen Bolzen (s. Bild 2 S. 149) kommt der Bolzenquerschnitt nur einmal zur Wirkung, es sind also ebensoviele Bolzen nötig, als Bolzenquerschnitte berechnet werden. Bei den doppelschnittigen Bolzen (s. Bild 3 S. 149) wirken zwei Bolzenquerschnitte, es genügen daher halb so viel Bolzen als Querschnitte berechnet worden sind.

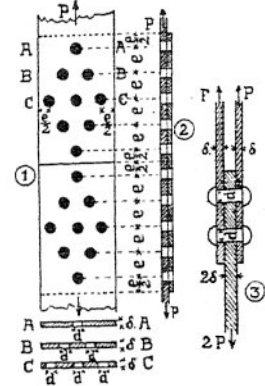
Aus V. § 1 geht hervor, daß die Anschluß- oder Knotenplatten für doppelschnittige Vernietung oder Verschraubung die Eisenstärke  $2\delta$  erhalten müssen (s. Bild 3).

Beispiel 101. Ein Bolzen von 1,5 cm Durchmesser hat einen Querschnitt

$$f = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1,5^2}{4} = 1,7 \text{ qcm,}$$

er vermag somit eine Kraft von  $P = 1,7 \cdot 480 = 800 \text{ kg}$  zu übertragen.

Ist also z. B. die Stabkraft 8400 kg, d. h. ist ein Stab, in welchem 8400 kg Zug wirken, zu befestigen, so werden  $\frac{8400}{800} = 11$  Bolzenquerschnitte von 1,5 cm Durchmesser nötig. Sind die Bolzen einschneittig, so müssen 11 Bolzen zur Anwendung kommen. Sind die Bolzen doppelschnittig, so genügen  $\frac{11}{2} = 6$  Bolzen.



### V. § 3. Abstand der Niete oder Schrauben.

Der Abstand der Niete oder Schrauben unter sich und von den Stab- oder Blechrändern ist so reichlich zu bemessen, daß weder ein Ausschlagen, noch ein Abreißen zu schwacher Stellen, noch eine Überanstrengung des Eisens zwischen zwei Bolzenlöchern eintreten kann.

Diesen Übelständen wird dadurch vorgebeugt, daß man den Abstand des Lochmittelpunktes vom Eisenrand mindestens gleich  $3\delta$ , d. h. gleich der 3fachen Eisenstärke, und den Abstand der Lochmittelpunkte unter sich mindestens gleich  $6\delta$ , d. h. gleich der 6fachen Eisenstärke macht (s. Bild 1), wobei vorausgesetzt ist, daß der Bolzendurchmesser nach V. § 1 gewählt ist, nämlich  $d = 2\delta$ .

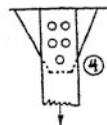
### V. § 4. Die Stellung der Niete und Schrauben.

Die Stellung der Niete oder Schrauben ist hauptsächlich mit Rücksicht auf kleinstmögliche Verschwächung des Querschnittes der zu verbindenden Stäbe anzuordnen.

Diese Gruppierung ergibt sich für Laschenvernietungen aus folgender Betrachtung: Im Querschnitt AA, Bild 1, besteht Verschwächung durch ein einziges Bolzenloch; es sind also von dem ursprünglichen Querschnitt des Stabes so viele qcm abzuziehen, als das Rechteck  $d\delta$  enthält (s. Bild 1 unten). Im Querschnitt BB sind (nach Bild 1) zwei Löcher also  $2d \cdot \delta$  qcm abzuziehen; trotzdem ist der tatsächlich noch nutzbare Querschnitt des Stabes in BB nicht stärker beansprucht als in AA, weil in dem (allerdings mehr verschwächten) Querschnitt BB nur noch ein Teil der Kraft zur Wirkung kommt, nämlich im Falle der Abbildung 1 nur noch  $\frac{2}{9}P$ , da  $\frac{1}{9}P$  durch den Bolzen in AA schon auf die Stoßplatte übertragen wurde. Im Querschnitt CC (Bild 1) kommen nur noch  $\frac{1}{9}P$  zur Wirkung, so daß derselbe, obwohl drei Löcher in ihm sitzen, nicht mehr beansprucht ist, als Querschnitt AA oder BB. Man sieht aus dieser Betrachtung, daß tatsächlich bei der in Bild 1 gewählten Gruppierung nur ein Bolzenloch bei Berechnung der Verschwächung in Abzug zu bringen ist. Hätte man dagegen die 9 Bolzen so gestellt, daß je drei, wie im Querschnitt CC, Bild 1, beisammen gewesen wären, so würde ein weit größerer Stabquerschnitt notwendig geworden sein, weil hier drei Bolzenlöcher die Verschwächung schon im ersten Querschnitt bewirkt hätten.

Es ist somit immer ein Bolzenloch voranzustellen und von dem ausgehend die Anzahl der Löcher in einem Querschnitt allmählich zu vermehren.

Bei Knotenplattennietungen, Bild 4, sind die Verhältnisse insofern andere, als es in der Regel nicht nötig ist, mit nur einem Niet am Stabende abzuschließen, denn einerseits



ist der im Stab hier noch wirksame Kraftteil sehr klein, die stärkere Verschwächung des Stabquerschnittes bleibt daher unschädlich und andererseits ist der Querschnitt der Knotenplatte meist so groß, daß die Verschwächung durch mehr als ein Nietloch ebenfalls unschädlich bleibt. Für die Befestigung der Knotenplatte an einem durchlaufenden Stab (Gurtung, Sparren zc.) ist der Berechnung der nötigen Nietzahl die Resultierende aus den Kräften in den anzuschließenden Stäben, wenn diese Kräfte immer gleichzeitig wirken, zu Grunde zu legen. Sind mehr Stäbe auf einer beliebigen Knotenplatte befestigt, so ist die Vernietung nicht nur so zu bemessen, daß sie jeder einzelnen Stabkraft entspricht, sondern auch, daß die ungünstigste Resultierende, die sich aus der Zusammensetzung zweier Stabkräfte bilden läßt, die Vernietung der Knotenplatte an den andern Stäben nicht überanstrengt.

Beispiel 102. Die Flacheisen in Bild 1 haben 18 cm Breite und 1 cm Eisenstärke. Der Durchmesser der Nieten beträgt  $d = 2\delta = 2$  cm, Lochweite 2,1 cm. Welcher Zug  $P$  darf in den Flacheisen wirksam sein?

Aufl. Der Querschnitt des Flacheisens ist  $18 \cdot 1 = 18$  qcm. Als Nietverschwächung tritt bei der gewählten Nietengruppierung nur ein Nietloch auf und es ist daher abzugiehen  $d \cdot \delta = 2,1 \cdot 1 = 2,1$  qcm, so daß nutzbar bleiben  $18 - 2,1 = 15,9$  qcm. Die zulässige Beanspruchung des Flußeisens ist  $s = 800$  kg/qcm, somit darf werden  $P = 15,9 \cdot 800 = 12\,700$  kg.

Beispiel 103. Es ist zu untersuchen, ob die Vernietung des Stoßes der Flacheisen in Bild 1 für den im Beispiel 102 berechneten Zug  $P = 12\,700$  kg stark genug ist.

Aufl. Der Nietdurchmesser ist  $d = 2$  cm, somit dürfen auf einen Nietquerschnitt nach V. § 2 mindestens  $f \cdot s_1 = \pi \cdot 1^2 \cdot 480 = 1500$  kg kommen. Vorhanden sind 9 einschnittige Nieten, dieselben vermögen daher  $9 \cdot 1500 = 13\,500$  kg zu übertragen. Die Vernietung ist also genügend stark.

Bemerkung. Die Stoßplatte muß 18 cm breit und 1 cm dick sein.

### V. § 5. Nietentabelle.

Gebräuchliche Nietdurchmesser sind in nachstehender Tabelle angegeben. Das Nietloch wird in der Regel um 1 mm weiter gebohrt, um das Einstecken des glühenden Nieten zu erleichtern.

In der Tabelle sind die Kräfte berechnet, welche auf einen Nietbolzen auf Abscherung wirken dürfen, sowohl für die gewöhnliche Annahme der zulässigen Beanspruchung auf Abscherung von  $s = 480$ — $560$  kg/qcm, als auch für den zulässigen Höchstwert dieser Beanspruchung  $s = 700$  kg/qcm.

Nietbolzen- Durchmesser in cm	Nietbolzen- Querschnittsfläche in qcm	Ein Nietquerschnitt überträgt bei einer Beanspruchung auf Abscherung von		
		$s = 480$ kg/qcm	$s = 560$ kg/qcm	$s = 700$ kg/qcm
$d$	$f$	eine Kraft $P$ von		
		kg	kg	kg
0,95	0,71	340	396	497
1,1	0,95	457	532	665
1,3	1,33	637	743	931
1,6	2,01	965	1126	1407
1,9	2,84	1361	1588	1988
2,2	3,80	1824	2129	2660
2,5	4,91	2356	2749	3437



## V. § 6. Die Schubfestigkeit der Holzverbindungen.

Bei der Berechnung der Festigkeit der Holzverbindungen spielen die Schubfestigkeit des Holzes und die Sicherheit gegen Zerquetschung senkrecht zur Faserrichtung, sowie endlich die Gefahr des Aufspaltens des Holzes die hauptsächlichste Rolle. Beispielsweise entsteht bei der Aufhängung des Hauptbalkens an die Hängesäule in Bild 2 S. 144, wenn zu dünne Schrauben verwendet werden, die Gefahr des Aufspaltens oder Ausschlizens des unteren Endes der Hängesäule. Der Schraubenbolzendurchmesser ist daher nicht nur nach der Festigkeit des Eisens, sondern auch so zu bemessen, daß das Holz nicht unter den stark konzentrierten Drücken zu dünner Bolzen aufschlizt. Man trifft aus diesem Grunde selten Bolzen von weniger als 16 mm Durchmesser, häufiger haben die Bolzen 20—25 mm Durchmesser.

Bei genügend dicken Schrauben widersteht das untere Ende mit der Schubfestigkeit der beiden seitlich an den Schraubenbogen herabgehenden vertikalen Flächen. Könnten diese nicht widerstehen so würde das im rechtsseitigen Teil nebiger Abbildung schraffierte Holzstück herausgeschoben. Das Maß der widerstehenden Flächen wird erhalten, wenn man die Dicke  $b$  der Hängesäule in der Richtung der Schraubenbolzen gemessen mit dem Abstand  $e$  der obersten Schraube vom unteren Ende der Hängesäule multipliziert. Die widerstehende Flächengröße ist daher  $2 \cdot b \cdot e$ . Wirken in der Hängesäule  $S$  kg Zug, so ist die Schubbeans-

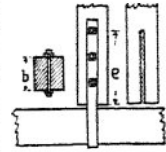


Bild 1.

pruchung  $\frac{S}{2be}$  und dieser Wert soll die zulässige Schubbeanspruchung, welche nicht sehr groß ist, nicht überschreiten. Nach II. § 4 beträgt die Schubfestigkeit beim Nadelholz etwa 40 bis 45 kg/qcm, bei Hartholz etwa 75—85 kg/qcm; begnügt man sich mit 4 fachem Sicherheitsgrad, was selbst für ganz ruhende Belastung sehr wenig ist, so sind die zulässigen Schubbeanspruchungen des Nadelholzes 10—11 kg/qcm, des Hartholzes 18—21 kg/qcm; bei 7 fachem Sicherheitsgrad, welcher schon den gewöhnlichen vorkommenden Erschütterungen hinlänglich Rechnung trägt, erhält man 6 kg/qcm bei Nadelholz und 10—12 kg/qcm bei Hartholz.

Die Schubfestigkeit des Holzes sichert den Bestand der Verbindungen auch bei Anwendung von Zapfen, Verfazungen und dgl., so z. B. an den Sparrenfüßen in Bild 1 S. 144 oder an den oberen Enden der Hängesäule Bild 2 S. 144. Das vor dem Zapfen stehende Holzprisma bis zum Holzende muß so lang sein, daß es von der Horizontalkomponente der Strebenkraft nicht mittels des Zapfens hinausgeschoben werden kann. Die auf Schub widerstehenden Flächen messen nach Bild 2 bei der Zapfenverbindung  $l(2d + t)$  und nach Bild 3 bei der Verfazung l. b. Wirkt in der Verbindung Druck, so tritt, für dieses Prisma entlastend, ein bedeutender

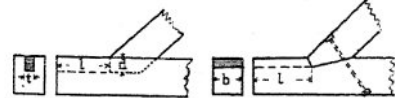


Bild 2.

Bild 3.

Reibungswiderstand in der Berührungsfläche zwischen dem Hirnholz der Strebe oder des Sparrens und der Langholzfläche des Balkens oder der Schwelle infolge der Vertikalkomponente des Strebendruckes ein. Ist das Auftreten des Druckes nicht immer gesichert, oder will man den Reibungswiderstand vermehren, so preßt man das Streben- oder Sparrenende mit Schrauben, Bügeln und dgl. noch stärker auf dem Balken oder die Schwelle fest, wie z. B. in vorstehender Abbildung 3 für eine Verfazung angegeben ist. In ähnlicher Weise vermehrt man den Reibungswiderstand zwischen den Flächen von Anplattungen mittels Schrauben, die durch die Anplattung gesteckt und fest angezogen werden.

Ganz allgemein ist hier festzustellen, daß manche Holzverbindungen, die ihren Zweck seit Jahrzehnten zu erfüllen vermochten, ohne die Mitwirkung der Reibungswiderstände sich längst gelöst hätte. Es ist deshalb Sache des Konstrukteurs stets die dauernde Erhaltung dieses Hilfs widerstandes zu sichern.

Die Gefahr des Zerquetschens des Holzes tritt ein, wenn Pfosten oder Streben auf Balken oder Schwellen aufstehen und zu starke Druckbeanspruchungen senkrecht zur Faserrichtung verursachen. Der Zahlenwert für die zulässige Quetschbeanspruchung ist etwa 15 kg/qcm. Man sucht den Widerstand gegen Quetschen durch eiserne Bänder, welche die Fasern zusammenhalten und am seitlichen Ausweichen hindern sollen, zu erhöhen. Genügt dieses Mittel nicht oder kann man dasselbe nicht anwenden, so wählt man eichene Schwellen, weil das Eichenholz dem Zerquetschen größeren Widerstand entgegenstellt, oder legt man Sohlstücke aus Eisen oder Eichenholz auf die Balken oder Schwellen und stellt die Pfosten erst auf diese druckverteilenden Zwischenlagen.

### V. § 7. Verdübelte Balken.

Zwei aufeinander gelegte Balken von gleichem Querschnitt würden — abgesehen von der Wirkung der Reibung in der Berührungsfläche — gegen Biegung nur denselben Widerstand leisten, wie zwei nebeneinander gelegte Balken. Will man die beim Aufeinanderlegen von Balken geschaffene größere Balkenhöhe nutzbar machen, so ist dafür zu sorgen, daß die in der Berührungsfläche auftretenden Schubkräfte übertragen werden können, daß, mit andern Worten gesagt, sich nicht der eine Balken biegen kann, ohne den andern in Mitleidenschaft zu ziehen. Die Übertragung der in der Berührungsfläche auftretenden Schubkräfte geschieht nun nicht etwa durch Verleimung, sondern durch Einsetzen von Dübeln und durch Zusammenhalten der Balken mittels vertikaler Schrauben. Nach Herstellung dieser Verbindung bildet bei freier Auflagerung des verdübelten Balkens auf zwei Stützen der Querschnitt des oberen Balkens die Druckzone, der Querschnitt des unteren Balkens die Zugzone des Verbundquerschnittes. Die Anzahl, die Abmessungen und die Entfernungen der Dübel sind so zu bemessen, daß die Verdübelung die Schubkräfte ohne Überanstrengung des Holzes zu übertragen vermag. Diesbezügliche theoretische Entwicklungen würden hier zu weit führen, es genüge daher bezüglich der praktischen Anordnungen der Verdübelungen auf das „Technische Studienheft“ Nr. 3, S. 33 und 34 zu verweisen und bezüglich der Berechnung des Widerstandsmomentes des Verbundquerschnittes anzuführen, daß man annäherungsweise als wirksame Höhe des verdübelten Balkens nur die tatsächliche Höhe vermindert um die Dübelstärke in die Rechnung einführt; von dem Breitenmaß ist die Schraubenlochweite abzuziehen. Aus dem resultierenden Wert  $b$  und  $h$  ergibt sich dann wie seither  $W = \frac{1}{6} b h^2$ .

Bei einer anderen annäherungsweise Berechnung werden die Widerstandsmomente  $W_e$  der einzelnen Balkenquerschnitte und das Widerstandsmoment  $W_g$  des als ein Ganzes gedachten verdübelten Balkens berechnet. Man nimmt sodann als nutzbares Widerstandsmoment  $W_b$  des Verbundquerschnittes

$$W_b = \frac{1}{2} (2 W_e + W_g) \text{ an.}$$

## Kapitel VI. Steinkonstruktionen.

### A. Berechnung von Mauern. (§ 1—10.)

#### VI. § 1. Allgemeines über die Standfestigkeit der Mauern (Stüßlinie).

Auf eine Mauer können außer ihrem Eigengewicht beliebig gerichtete Kräfte einwirken, so daß das, durch den Schwerpunkt der Mauer gehende, vertikal abwärts wirkende Gewicht nicht die einzige Kraft ist, welche die Mauer angreift (s. Bild 1 Taf. IV). Die Standfähigkeit einer Mauer schreiben wir im folgenden nur dem Gewicht der Mauersteine und der Reibung derselben aufeinander zu. Zugfestigkeit des Mörtels wird bei der Berechnung nicht vorausgesetzt. Dementsprechend kann man die Wirkung sämtlicher inneren Kräfte in einer Mauerfuge ersetzt denken durch eine Kraft. Ein Kräftepaar ist undenkbar, da alle inneren Kräfte gleich gerichtet sind, weil nach obigem nur Druckkräfte in Rechnung genommen werden. Würde man in der Rechnung auf die Zugfestigkeit des Mörtels Rücksicht nehmen, so müßten die Grundsätze der Biegungslehre bei den folgenden Entwicklungen berücksichtigt werden. Es unterbleibt dies aber, weil die Zugfestigkeit der Mörtelfuge, wie soeben bemerkt, in der Regel nicht zuverlässig genug erscheint.

Berechnet man für eine Fuge die Resultierende aus den Kräften, welche oberhalb dieser Fuge wirken, einschließlich des Eigengewichtes des Mauerteils, der auf dieser Fuge ruht, so muß diese Resultierende mit den inneren Kräften in der Fuge die 3 Gleichgewichtsbedingungen:  $\Sigma M = 0$ ,  $\Sigma H = 0$ ,  $\Sigma V = 0$  erfüllen, d. h. man erhält folgende Bedingungen für die Standfähigkeit eines Mauerteiles:

- $\Sigma M = 0$  gibt 1. die Resultierende muß die Standfuge innerhalb des Mauerprofils treffen;  
 $\Sigma H = 0$  gibt 2. die Resultierende darf nicht um mehr als den Reibungswinkel von Mauerwerk auf Mauerwerk von der Senkrechten zur Fuge abweichen;  
 $\Sigma V = 0$  gibt 3. die Resultierende darf nicht so groß und so gelegen sein, daß die zulässige Beanspruchung des Mauerwerks überschritten wird.

Ist Bedingung 1. nicht erfüllt, so könnten nur Zugspannungen in der Mauerfuge das Umfallen des auf dieser Fuge stehenden Mauerteils verhindern, wie Bild 2 Taf. IV zeigt. Auf Zugspannungen im Mauerwerk soll aber nicht gerechnet werden. Etwa nötige Abhilfe ist zu erreichen durch Vermehrung des Mauerweights und der vertikalen Belastungen, oder Verminderung der horizontalen Kräfte (meist H-Komponenten schiefer Drücke) oder Fugenverbreiterung, letzteres namentlich beim Fundament.

Ist Bedingung 2. nicht erfüllt, so tritt eine Verschiebung der Mauerteile übereinander ein. Denkt man sich die Resultierende R in eine Normalkomponente N und eine Komponente P parallel zur Fuge, wie in Bild 3 Taf. IV zerlegt, so muß die Parallelkomponente P durch

den Reibungswiderstand  $W$  in der Fuge (und die Festigkeit des Mörtels) aufgehoben werden. Insofern nun  $\alpha$  kleiner als der Reibungswinkel ist, kann die Parallelkomponeute ganz außer acht bleiben.

Der Reibungswinkel wird allgemein zu  $30^\circ$  angenommen; sein oberster Grenzwert mag bei  $45^\circ$  liegen.

Künstliche Hilfsmittel: Dollen, Zapfen etc., Zementmörtel.

Bedingung 3. beschränkt nicht nur die Größe der Resultierenden, sondern sie schließt auch die Forderung ein, daß der Angriffspunkt der Resultierenden dem Profilumfang nirgends zu nahe kommt. Inwiefern auch eine nicht übermäßig große Resultierende zu große Beanspruchungen erzeugen kann, wenn ihr Angriffspunkt  $A$  dem Profilumfang zu nahe liegt, ist aus II. § 15 und VI. § 2 zu ersehen.

Hilfsmittel: Gestaltung des Mauerprofils nach Maßgabe der Kraftwirkungen.

### Stützlinie.

Die Beanspruchungen in einer Mauer sind nicht überall gleich. Es kann z. B. für einzelne Fugen die Neigung der Resultierenden der angreifenden Kräfte besonders groß, also hauptsächlich das Verschieben der Mauerteile zu befürchten sein; während in anderen Fugen etwa die Größe der Normalkomponente  $N$  und namentlich die Lage des Angriffspunktes  $A$  der Resultierenden, d. h. auch der Kraft  $N$  maßgebend ist. In den praktisch vorkommenden Fällen ist meistens letzteres entscheidend für die Standfähigkeit einer Mauer. Man bestimmt daher für verschiedene aufeinander folgende Fugen den Angriffspunkt  $A$  der Resultierenden der äußeren Kräfte, den sogenannten Stützpunkt. Um die Lage der Stützpunkte in verschiedenen aufeinander folgenden Fugen deutlicher hervorzuheben, pflegt man die Punkte  $A_1 A_2 A_3$  durch eine fortlaufende Linie, die Stützlinie, zu verbinden. Diese Linie hat also mit der Richtung des Druckes in den Mauern keinerlei weitere Beziehung als aus obigem hervorgeht, insbesondere pflanzt sich der Druck durchaus nicht entlang derselben fort. Die Lage der Stützpunkte gibt den Charakter der Standfähigkeit der betreffenden Mauern an, namentlich zeigt dieselbe sofort, wo sich die sogenannten „gefährlichen Fugen“ oder „Bruchfugen“ befinden; diese sind dort, wo sich die Stützlinie einer der Begrenzungslinien des Mauerprofils am meisten nähert.

### Auffindung der Stützlinie bei Mauern.

1. Zeichnerisch. Um die Angriffspunkte  $A$  der jeweiligen Resultante der äußeren Kräfte zu bestimmen, verwendet man ein Kräftepolygon. In Bild 4a und 5 Taf. IV ist folgendermaßen verfahren:

$P_1$  und  $P_2$  aus Bild 4a sind in Bild 5 zunächst zu der Resultierenden  $R' = AC$  zusammengesetzt; zu derselben kommt noch das Mauergeriicht  $Q_1$  des obersten Mauerteiles, und man erhält nun die Resultierende  $AC_1$ . Durch den Schnittpunkt der Resultierenden von  $P_1$  und  $P_2$ , mit der Krafttrichtung von  $Q_1$  wird mit  $AC_1$  eine Parallele gezogen, bis die erste Fuge in  $A_1$  getroffen wird. Da in Bild 4a)  $P_1$ ,  $P_2$  und  $Q_1$  sich zufällig in einem Punkt  $O$  schneiden, so ist durch denselben  $OA_1 \parallel AC_1$  zu ziehen.

Für Fuge II ist  $P_1 P_2'$  und  $(Q_1 + Q_2)$  zu einer Resultierenden  $AC_2$  in Bild 5 zusammenzusetzen. Mit dieser ist eine Parallele  $OA_2$  durch  $O$  (nicht  $A_1$ ) zu ziehen, wodurch  $A_2$  erhalten wird. In gleicher Weise erhält man durch eine Parallele  $OA_3$  mit  $AC_3$  den Angriffspunkt

$A_3$  in Fuge III und schließlich gibt eine Parallele mit der Resultierenden  $AC_4$  von  $P_1, P_2$  und  $(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)$ , welche durch  $O$  gezogen wird, den Punkt  $A_4$ .

Zwischen Fuge IV und V kommt außer dem Eigengewicht  $Q_5$  des Mauerteiles noch die Kraft  $P_3$  hinzu.

Es wirkt also auf Fuge V die Resultierende  $R_2 = AC_4$  der oberhalb Fuge IV gelegenen Kräfte und des Eigengewichtes; ferner die Kraft  $P_3$  und das Eigengewicht  $Q_5$ . Diese 3 Kräfte schneiden sich im allgemeinen nicht in einem Punkt. Man setze daher zunächst  $R_2$  und  $P_3$  zu einer Resultierenden  $AD$  in Bild 5 zusammen, ziehe mit  $AD$  durch den Schnitt  $E$  von  $OA_4$  und  $P_3$  in Bild 4 eine Parallele, bis die Richtungslinie von  $Q_5$  getroffen wird in  $O_1$ , durch  $O_1$  zieht man nun mit  $AC_5$  eine Parallele (nötigenfalls wie in Bild 4a rückwärts) und erhält  $A_5$ . Im weiteren wird man mit  $AC_6, AC_7$  zc. je eine Parallele durch  $O_1$  ziehen u. s. f., wie oben bei  $O$  geschehen ist.

Die Verbindungslinie  $A_1 A_2 A_3 \dots A_5$  gibt die Stützlinie der Mauer. Fuge IV und VII sind „gefährliche Fugen“ und die Beanspruchungen derselben sind nach VI. § 2 zu berechnen. Dasselbe ist wegen des Fundaments in Fuge VIII nötig.

Eine andere Art der Konstruktion der Stützlinie s. bei VI. § 7.

2. Rechnerisch. Zur Verwendung kommen die drei Gleichgewichtsbedingungen:

$$\Sigma H = 0 \qquad \Sigma V = 0 \qquad \Sigma M = 0.$$

Hieraus sieht man schon, daß zur Berechnung zunächst die Gegenresultante der angreifenden Kräfte ins Auge gefaßt wird. Ihre Komponenten seien  $H$  und  $V$  (s. Bild 4 b). Die Horizontal- und Vertikalkomponenten  $P_h$  und  $P_v$  der angreifenden Kräfte seien zeichnerisch oder rechnerisch bestimmt worden.

Alsdann gestaltet sich z. B. die Berechnung für VI folgendermaßen:

$$\Sigma H = 0 = P_h'' - P_h''' + H_6, \text{ hieraus } H_6 = P_h''' - P_h'',$$

$$\text{ferner } \Sigma V = 0 = P_1 + P_v'' + Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + P_v''' + Q_5 + Q_6 - V_6,$$

$$\text{also } V_6 = P_1 + P_v'' + Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + P_v''' + Q_5 + Q_6.$$

Zur Auffindung des Angriffspunktes  $A_6$  dient die Momentengleichung mit Drehpunkt  $B_6$ .

$$\Sigma M = 0 = -P_1 d - [Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4] \cdot d - [Q_5 + Q_6] \cdot e - P_v''(d-g) - P_h'' \cdot h'' - P_v''' \cdot f + P_h''' \cdot h''' + V_6 \cdot x - H_6 \cdot 0,$$

$$\text{hieraus } x = \frac{P_1 d + [Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4] d + [Q_5 + Q_6] e + P_v''(d-g) + P_h'' \cdot h'' + P_v''' \cdot f - P_h''' \cdot h'''}{V_6}$$

Man hätte zur Momentengleichung auch die Kräfte  $P''$  und  $P'''$  selbst, mit ihren aus der Figur abzumessenden Hebelarmen  $p_2$  und  $p_3$  verwenden können, da jedoch die  $H$ - und  $V$ -Komponenten schon bekannt sind, werden meist diese verwendet, weil deren Hebelarme in Zeichnungen für die Praxis meist eingeschrieben sind, somit sie unmittelbar die Abmessungen der Mauer angeben. Aus VI. § 2 geht hervor, daß die Berechnung der Resultanten selbst nicht nötig wird. Der Wert ist übrigens zeichnerisch oder rechnerisch leicht zu finden. In derselben Weise kann die Berechnung für alle übrigen Fugen durchgeführt werden.

## VI. § 2. Beanspruchung infolge einseitiger Belastung.

Jrgend ein Stab aus beliebigem Material sei mit einer Kraft  $N$ , welche um  $e$  seitlich von der Stabachse angreift, aber parallel der letzteren geht, belastet (s. Bild 6 Taf. IV oder Bild 1 und 2 in II. § 15). Man denke sich in der Stabachse 2 gleiche und entgegengesetzt

gerichtete Kräfte  $N$  angebracht, dann hat sich in dem Kräftesystem nichts geändert, da die hinzugefügten Kräfte unter sich im Gleichgewicht sind. Die in der Figur durch einen Querschnitt bezeichneten Kräfte  $N$  geben aber ein Kräftepaar, dessen Moment  $M = N \cdot e$  ist. Die noch übrige in der Stabachse wirkende Kraft  $N$  erzeugt eine Beanspruchung von  $s_1 = \frac{N}{F}$ , welche an jeder Stelle der Querschnittsfläche  $F$  dieselbe Größe hat und sich daher nach Bild 7 Taf. IV darstellt.

Das Kräftepaar biegt den Stab und erzeugt eine Beanspruchung  $s_2 = \frac{yM}{J} = \frac{yN \cdot e}{J}$ .  $s_2$  stellt sich nach Bild 8 dar.

In jeder Fuge wirken nun tatsächlich beide Beanspruchungen gleichzeitig, so daß sich Bild 9a und 9b als Darstellung für die Beanspruchung ergeben, in welchen  $s_1$  und  $s_2$  aus Bild 7 und 8 zusammengenommen sind (s. Beispiele am Schluß des Paragraphen).

Sobald man nun die Linie der Beanspruchung in Bild 9b hat, sind die Beanspruchungen der Fuge bekannt, weil sie einfach die Ordinaten dieser Linie sind, welche in dem für die Darstellung angenommenen Maßstab zu messen sind. Diese Linie ist eine Gerade, es ist daher nur nötig, zwei Punkte derselben aufzufinden.

In Bild 9a ist über dem Schwerpunkt der Fuge  $s = s_1 + s_2 = s_1 + 0 = s_1$ .

Man fand aber  $s_1 = \frac{N}{F}$ , somit ist ein Punkt der Linie der Beanspruchung gefunden.

Ein zweiter Punkt ist die Stelle, wo infolge der zusammengesetzten Beanspruchung die Spannung = 0 ist, d. h. dort wo  $s_1 = s_2$  ist oder  $\frac{N}{F} = y \frac{N \cdot e}{J}$ , d. h.  $\frac{1}{F} = \frac{y e}{J}$  und hieraus schließlich  $y = \frac{J}{F} \cdot \frac{1}{e}$ . Mit diesem zweiten Punkt der „s“-Linie ist diese selbst bestimmt.

Insolange dieser zweite Punkt noch auf die Fuge fällt, treten, wie Bild 9 zeigt, Zugspannungen auf. Verläßt derselbe die Fuge, so ist, wie Bild 10 zeigt, nur Druck in der Fuge vorhanden. Die für  $y$  entwickelte Formel ist allgemein, ohne Rücksicht auf die Gestalt der Querschnittsfläche, gültig; kann also z. B. zur Berechnung rechteckiger, runder ringförmiger u. s. w. Körper verwendet werden (Bild 11a—11d). Das Trägheitsmoment  $J$  und ebenso das auf der nächsten Seite erwähnte Widerstandsmoment sind dabei stets für diejenige Schwerpunktsachse zu berechnen, welche zur Verbindungslinie des Angriffspunktes der Kraft  $N$  mit dem Schwerpunkt der Querschnittsfläche senkrecht steht (vgl. Bild 11a).

Besonderer Fall: Querschnitt rechteckig.

Man betrachtet einen Mauerteil von der Länge  $l$ , welcher nach Bild 12 und 13 belastet ist.

Zeichnerische Ermittlung der Beanspruchung.

Zur Konstruktion der „s“-Linie hat man nach dem Vorhergehenden in der Fugenmitte  $D$  in Bild 14 Taf. IV  $DG = s_1 = \frac{N}{F} = \frac{N}{b \cdot l}$  aufzutragen.

Im Abstand  $y = \frac{J}{F} \cdot \frac{1}{e}$  von der Fugenmitte wird, wie oben gefunden  $s = 0$ .

Es ist nun  $J = \frac{1b^3}{12}$  und  $ye = \frac{J}{F}$ , also  $ye = \frac{1/12 b^3}{b \cdot l}$ , d. h.  $ye = \frac{b^2}{12}$ . Aus dieser Gleichung läßt sich  $y$  berechnen, oder folgendermaßen konstruieren:

Teile in Bild 14  $AB = b$  in 3 gleiche Teile, errichte über beliebigen  $\frac{2}{3}$  einen Halbkreis. Alsdann ist im rechtwinkligen  $\triangle CEB$   $DE^2 = CD \cdot DB = \frac{b}{6} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2}{12}$ . Ver-

bindet man den Angriffspunkt L der Kraft N mit E und macht  $\angle LEK = 90^\circ$ , so ist im rechtwinkligen Dreieck LEK  $KD \cdot DL = DE^2$ , d. h.  $KD \cdot e = \frac{b^2}{12}$ ; oben fand sich  $y \cdot e = \frac{b^2}{12}$ , also muß sein  $KD = y$ . Die gerade Verbindungslinie von K mit G gibt die „s“-Linie.

Rechnerische Bestimmung der Fugenbeanspruchung.

Die rechnerische Bestimmung der Fugenbeanspruchungen, von welchen man fast stets nur die Kantenpressungen  $s_{\max}$  und  $s_{\min}$  wissen will, gestaltet sich einfacher, als die zeichnerische Bestimmung.

Entlang der dem Angriffspunkt benachbarten Kante tritt die Beanspruchung  $s_{\max} = s_1 + s_2$ , entlang der entgegengesetzten Kante  $s_{\min} = s_1 - s_2$  ein. Es ist aber die reine Druckbeanspruchung  $s_1 = \frac{N}{F} = \frac{N}{b \cdot l}$  und die Biegebbeanspruchung  $s_2 = \frac{M}{W} = \frac{N \cdot e}{1b^2/6}$ , also wird

$$s_m = \frac{N}{b \cdot l} \pm \frac{N \cdot e}{1b^2/6} = \frac{N}{b \cdot l} \left( 1 \pm \frac{6e}{b} \right).$$

Sollen keine Zugspannungen im Mauerwerk eintreten, so darf  $s_2$  nicht größer werden als  $s_1$ . Die zulässige Grenzlage für den Stützpunkt ergibt sich daher aus  $s_1 = s_2$ , d. h.  $\frac{N}{b \cdot l} = \frac{6N \cdot e}{1b^2}$ , hieraus  $e = b/6$  oder mit Worten: Insolange der Stützpunkt innerhalb des mittleren Drittels der rechteckigen Fugenbreite bleibt, erleidet das Mauerwerk nur Druckbeanspruchungen.

Liegt der Stützpunkt auf dem Drittelpunkt, so wird  $s_2 = \frac{N \cdot b/6}{1b^2/6} = \frac{N}{1 \cdot b} = s_1$  und man erhält  $s_m = s_1 \pm s_2$ , d. h. in der dem Stützpunkt benachbarten Kante wird die Druckbeanspruchung  $s_m = 2s_1 = 2 \frac{N}{b \cdot l}$ , d. h. doppelt so groß, wie für den Fall, daß die Resultierende im Schwerpunkt der Fugenfläche angreifen würde. Entlang der entgegengesetzten Kante wird  $s_m = s_1 - s_2 = 0$ , d. h. diese Stelle ist spannungslos.

Greift die Resultierende außerhalb des mittleren Fugendrittels an, so würden zwar theoretisch Zugspannungen in dem Gemäuer auftreten, allein es wird auf diese nicht gerechnet und man denkt sich die Fuge dort, wo die Zugspannungen auftreten sollten, klastend. Man erachtet die Mauer dann trotzdem für standfähig, wenn der Fugenteil 3a (Bild 17) im Stande ist, ohne Überanstrengung die Last N zu tragen. Für diesen Fugenteil liegt der Stützpunkt wie beim vorigen Fall auf dem Drittelpunkt, also wird  $s_m = \frac{2N}{3 \cdot a \cdot l}$  die Beanspruchung entlang der dem Stützpunkt benachbarten Mauerkante. Dieser Wert darf die zulässige Beanspruchung des Mauerwerkes nicht überschreiten.

Beispiel 104. In Bild 12 und 13 Tafel IV sei die Fugenbreite, d. h. die Mauerdicke  $b = 90$  cm, die Fugenlänge  $l = 100$  cm, die Kraft  $N = 54\,000$  kg und der Abstand des Kraftangriffspunktes von dem Fugenflächen-schwerpunkt  $e = 10$  cm. Wie groß ist die Beanspruchung des Mauerwerkes?

Aufl. Die in Bild 7 dargestellte Beanspruchung  $s_1$  auf Druck wird

$$s_1 = \frac{N}{F} = \frac{54\,000}{90 \cdot 100} = 6 \text{ kg/qcm.}$$

Zur Berechnung der Beanspruchung  $s_2$  auf Biegung hat man  $M = N \cdot e = 54\,000 \cdot 10 = 540\,000$  cmkg.

Das Widerstandsmoment der Fugenfläche wird  $W = \frac{1b^2}{6} = \frac{100 \cdot 90^2}{6} = 135\,000 \text{ cm}^3$ .

Die Biegungsbeanspruchung des Mauerwerks ist daher  $s_2 = \frac{M}{W} = \frac{540\,000}{135\,000} = 4 \text{ kg/qcm}$ .

Diese Beanspruchung stellt sich nach Bild 8 dar, und man erhält somit nach Bild 10 Taf. IV die Beanspruchung entlang der dem Stützpunkt benachbarten Mauerkante (rechts in unserem Beispiel)  $s_1 + s_2 = 6 + 4 = 10 \text{ kg/qcm}$  und entlang der entgegengesetzten Kante (links)  $s_1 - s_2 = 6 - 4 = 2 \text{ kg/qcm}$ .

Unmittelbar kann man diese Resultate erhalten aus

$$s_m = \frac{N}{b \cdot l} \left( 1 \pm \frac{6e}{b} \right) = \frac{54\,000}{90 \cdot 100} \left( 1 \pm \frac{6 \cdot 10}{90} \right) = 10 \text{ kg/qcm und } 2 \text{ kg/qcm.}$$

Beispiel 105. Der Durchmesser einer Säule sei  $D = 60 \text{ cm}$ . Eine Kraft  $N = 30\,000 \text{ kg}$  wirke senkrecht auf die Fugenfläche in einem Abstand  $e = 7,5 \text{ cm}$  vom Querschnittspunkt. Wie groß sind die Beanspruchungen der Säule?

Aufl. Es ist  $s_1 = \frac{N}{F} = \frac{30\,000}{\pi \cdot 30^2} = 10,6 \text{ kg/qcm}$  reine Druckbeanspruchung vorhanden; ferner ist  $M = 30\,000 \cdot 7,5 = 225\,000 \text{ cmkg}$  und  $W = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{\pi \cdot 60^3}{32} = 21\,200 \text{ cm}^3$ , also wird die Biegungsbeanspruchung  $s^2 = \frac{M}{W} = \frac{225\,000}{21\,200} = 10,6 \text{ kg/qcm}$ .

Die größte Beanspruchung an dem der Kraft zunächst liegenden Punkt des Fugenumfanges wird daher  $s_1 + s_2 = 10,6 + 10,6 = 21,2 \text{ kg/qcm}$ .

Die kleinste Beanspruchung tritt auf an dem von der Kraft entferntest gelegenen Punkt des Fugenumfanges. Sie wird  $s_1 - s_2 = 10,6 - 10,6 = 0 \text{ kg/qcm}$ . Die Darstellung der Fugenbeanspruchung s. Bild 16 Taf. IV.

Der Abstand  $e = 7,5 \text{ cm}$  ist  $1/8$  des Durchmessers. So lange  $e < D/8$  bleibt, sind nur Druckbeanspruchungen in der Fuge vorhanden. Wird  $e > D/8$ , so treten auch Zugbeanspruchungen in der kreisförmigen Fuge auf (s. Bild 9).

Beispiel 106. Im Beispiel 104 sei  $e = 15 \text{ cm}$  geworden. Wie groß sind die Kantenpressungen?

Aufl.  $s_m = \frac{N}{b \cdot l} \left( 1 \pm \frac{6e}{b} \right) = \frac{54\,000}{90 \cdot 100} \left( 1 \pm \frac{6 \cdot 15}{90} \right) = 12 \text{ kg/qcm und } 0 \text{ kg/qcm}$ . Dieses Resultat kann man unmittelbar erhalten, wenn von Anfang an beachtet wird, daß  $e = 15 \text{ cm} = \frac{90}{6} = \frac{b}{6}$  ist. Für diesen Fall wurde festgestellt  $s_m = 2 \cdot s_1 = 2 \cdot \frac{54\,000}{90 \cdot 100} = 12 \text{ kg/qcm}$  und auf der entgegengesetzten Seite  $s_m = 0$ .

Beispiel 107. Der in Beispiel 104 genannte Abstand sei  $e = 20 \text{ cm}$  geworden. Welche größte Beanspruchung tritt infolgedessen in der Fugenfläche auf?

Aufl. Der Angriffspunkt der Kraft hat das mittlere Drittel der rechteckigen Fugenfläche verlassen und befindet sich in einem Abstand  $a = \frac{90}{2} - e = \frac{90}{2} - 20 = 25 \text{ cm}$  von der Fugenkante, also wird entlang der dem Stützpunkt benachbarten Kante die Beanspruchung  $s_m = \frac{2 \cdot N}{3 \cdot a \cdot l} = \frac{2 \cdot 54\,000}{3 \cdot 25 \cdot 100} = 14,4 \text{ kg/qcm}$  eintreten.

Beispiel 108. Die Balkenlage der Empore einer Kirche ruht auf eingemauerten  $30 \text{ cm}$  breiten Konsolen. Wie groß ist die Beanspruchung des Mauerwerks bei  $P = 3400 \text{ kg}$  Druck auf die Konsole. Abbildung S. 159.



Aufl. Reine Druckspannung  $s_1 = \frac{3400}{30 \cdot 50} = 2,3 \text{ kg/qcm}$ ; Exzentrizität des Stützpunktes  $e = 10 + 25 = 35 \text{ cm}$ , also Bieugungsmoment  $M = 3400 \cdot 35$ , Widerstandsmoment der Lagerfuge  $W = \frac{b h^2}{6} = \frac{30 \cdot 50^2}{6}$ , also Bieugungsbeanspruchung

$$s_2 = M : W = (3400 \cdot 35) : \left( \frac{30 \cdot 50^2}{6} \right) = 9,5 \text{ kg/qcm.}$$

Die größte Beanspruchung des Gemäuers an der Vorderkante der Wand ist somit unter der Konsole  $s_2 + s_1 = 2,3 + 9,5 = 11,8 \text{ kg/qcm}$ , während über der Konsole an deren Hinterkante das Gemäuer eine nach oben gerichtete Beanspruchung von  $s_2 - s_1 = 9,5 - 2,3 = 7,2 \text{ kg/qcm}$  erleidet.

Auch diese Resultate lassen sich unmittelbar erhalten aus der Formel

$$s_m = \frac{3400}{30 \cdot 50} \left( 1 \pm \frac{6 \cdot 35}{50} \right) = +11,8 \text{ bzw. } -7,2 \text{ kg/qcm.}$$

Die hier berechneten Beanspruchungen kommen zu den in dem Gemäuer infolge der Gesamtkonstruktion noch auftretenden Beanspruchungen hinzu. Wenn nun der betreffende Wandteil 1,20 m breit ist und oberhalb der Lagerfuge, auf welcher die Konsolen liegen, 8000 kg Belastung vorhanden sind, so ist die Mauer im allgemeinen schon mit  $8000 : (120 \cdot 60) = 1,1 \text{ kg/qcm}$  beansprucht. Die resultierende Druckbeanspruchung im Mauerhaupt unter der Konsole ist daher  $11,8 + 1,1 = 12,9 \text{ kg/qcm}$  und entlang der hinteren oberen Kante des Konsolsteines wirkt auf das Gemäuer nach oben eine Druckbeanspruchung von  $7,2 - 1,1 = 6,1 \text{ kg/qcm}$ .

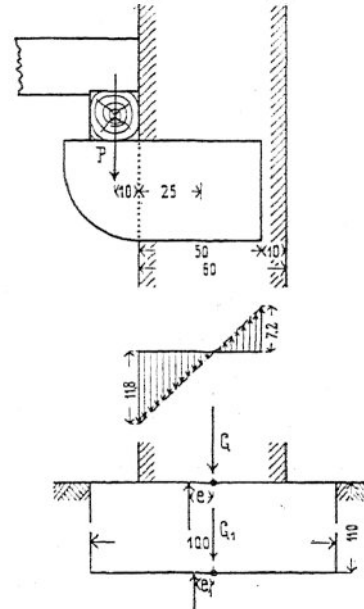


Bild 1.

## VI. § 3. Freistehende Mauern und Schornsteine.

Unter freistehenden sind zweihäuptige Mauern verstanden, welche weder eine Wasser- noch eine Erdmasse oder dergl. zu stützen haben; deren beide Seiten also sichtbar bleiben.

### A. Unbelastete Mauern.

Sind solche Mauern unbelastet, wirkt also auf jede Fuge F nur das Gewicht G des auf ihr ruhenden Mauerteils, so ist die Fugenbeanspruchung bei zentraler Laststellung  $s = \frac{G}{F}$ .

Häufig erreicht dieser Wert von s die zulässige Beanspruchung bei weitem nicht, trotzdem ist in vielen Fällen mit Rücksicht auf die Ausführung, in Bezug auf Mauerverband, Bearbeitung der Steine zc. nicht angängig, die Mauern schwächer zu machen. Auch statische Gründe sprechen dagegen, zu geringe Mauerstärken anzuordnen, indem Zufälligkeiten in der Belastung und in der Ausführung der Mauern von großem Einfluß sein können. Es gilt diese Bemerkung nicht nur für unbelastete Mauern, sondern für alle Steinkonstruktionen, bei welchen eine Hauptregel ist, daß man sich von bewährten Vorbildern nicht gar zu weit entfernt.

Mittels der oben gegebenen Formel kann man diejenige Höhe  $h$  einer rechteckigen Mauer von der Länge  $l$  und der Dicke  $b$  bestimmen, bei welcher die Fundamentfuge gerade noch das Mauergewicht  $G$  zu tragen vermag:

Beispiel 108. Ist z. B. nach II. § 5 das Gewicht von 1 cbm Backsteingemäuer 1600 kg und dessen zulässige Beanspruchung bei gewöhnlicher Ausführung  $s = 7$  kg/qcm, oder wenn alles in Meter und Kilogramm ausgedrückt wird  $s = 7 \cdot 100 \cdot 100 = 70\,000$  kg/qm, so darf die Belastung der untersten Fugenfläche  $b \cdot l \cdot 70\,000$  kg werden. Die zulässige Mauerhöhe ergibt sich daher aus der Gleichung  $G = b \cdot l \cdot 70\,000$ ; es ist aber  $G = b \cdot l \cdot h \cdot 1600$ , also  $b \cdot l \cdot h \cdot 1600 = b \cdot l \cdot 70\,000$ , hieraus  $h = \frac{b \cdot l \cdot 70\,000}{b \cdot l \cdot 1600} = \text{rund } 44 \text{ m.}$

Man nennt diesen Wert  $h$  die zulässige Belastungshöhe des Mauerwerks. Würde die Mauer höher geführt, so müßte eine Überanstrengung des Materials in der Fundamentfuge eintreten.

Wird das Backsteingemäuer in Zementmörtel ausgeführt, so ist  $s = 11$  kg/qcm bzw.  $s = 11 \cdot 100 \cdot 100 = 110\,000$  kg/qm und es wird zulässig  $h = \frac{b \cdot l \cdot 110\,000}{b \cdot l \cdot 1600} = \text{rund } 69 \text{ m.}$

Die „zulässige Belastungshöhe“ dieses Gemäuers ist also weit höher, als diejenige des zuvorgenannten; man ersieht hieraus, daß die Belastungshöhe in ähnlicher Weise, wie der Wert für die zulässige Beanspruchung zur Beurteilung eines Mauerwerks dienen kann. Im übrigen hat die Angabe der Belastungshöhe keinen praktischen Wert, da freistehende, unbelastete, prismatische und massive Mauern von dieser Höhe nicht vorkommen.

Erfahrungsgemäße Mauerstärken. Praktisch brauchbar sind Formeln, welche aus den Ruinen der altrömischen Stadt Adrienne\*) abgeleitet wurden und ergaben, daß frei stehende Mauern, welche dauernd halten sollen, bei Backsteingemäuer eine Mauerstärke von  $b = \frac{h}{12}$  bis  $\frac{h}{8}$  erhalten müssen, je nachdem ihre Standfähigkeit kleiner oder größer gewünscht wird. Dieser Wert  $b$  ist zu multiplizieren bei Hausteingemäuer mit 0,8; bei Verwendung von lagerhaften Bruchsteinen mit 1,25 und bei Findlingen mit 1,9. Dabei ist jedoch festzuhalten, daß als geringste Mauerstärke bei Backsteingemäuer  $\frac{1}{2}$  Stein, bei Gemäuer aus lagerhaften Bruchsteinen 40 cm, bei Gemäuer aus Findlingen 60 cm anzunehmen ist.

### B. Belastete Mauern.

In der Regel sind die Mauern nicht unbelastet, sondern sie haben einer Belastung, und wäre es auch nur durch den Wind, zu widerstehen. Die Bestimmung der Mauerstärke geschieht bei belasteten Mauern meist indirekt, indem man zunächst eine Annahme, entsprechend anderweitigen praktischen Erfahrungen macht und nun für das angenommene Mauerprofil die Beanspruchung berechnet, sodann Verstärkungen oder Verschwächungen des Profils vornimmt, je nachdem sich die Beanspruchung zu groß oder zu klein ergab und nunmehr für das neu-gewählte Profil die Beanspruchung abermals berechnet u. s. f. Bei den belasteten Mauern ist, selbst wenn ihr Profil durchaus nur ein Rechteck bildet, nicht bloß die Fundamentfuge zu berechnen, sondern es sind Fugen in verschiedener Höhe und namentlich dort zu berechnen, wo neue Kräfte auf den Mauerkörper einwirken, oder wo Mauerablässe vorhanden sind.

\*) Vgl. Wittmann, Statik der Hochbaukonstruktionen.

Bei der nach VI. § 1 vorzunehmenden Berechnung sind die daselbst angegebenen 3 Bedingungen zu untersuchen. Bei der Fundamentsohle ist daran zu denken, daß hier nicht die Festigkeit des Gemäuers, sondern diejenige des Untergrundes maßgebend ist. Sichere, namentlich breite Foundation sehr wichtig!

Beispiel 109. Der 1,20 m breite Wandteil, welcher die in Beispiel 108 zu VI. § 2 berechnete Konsole enthält, ist von dem Dachstuhl zentral belastet. Diese Belastung samt dem Mauergeriacht beträgt, bis zur Fundamentfuge herab berechnet, 10 000 kg. Ist dieser Wandteil standfähig und wie groß ist die Beanspruchung des Gemäuers in der Fundamentfuge und des Baugrundes in der Fundamentsohle?

Aufl. Die Fundamentfuge hat einen Widerstand von  $3400 + 10\,000 = 13\,400$  kg zu leisten.

Die Lage des Angriffspunktes dieses Widerstandes erhält man aus  $\Sigma M = 0$  am einfachsten, wenn die Momentengleichung auf die Fugenmitte bezogen wird, dann ist:

$$0 = G \cdot 0 + 13\,400 \cdot e - 3400(30 + 10), \quad \text{also} \quad e = \frac{3400 \cdot 40}{13\,400} = 10 \text{ cm.}$$

Der Stützpunkt liegt somit genau auf dem Drittel der Fugenbreite, die Beanspruchung wird daher nach VI. § 2 durch die exzentrische Belastung gerade verdoppelt, sie beträgt an der Innenkante der Wand

$$s = 2 \cdot \frac{13\,400}{60 \cdot 120} = 3,7 \text{ kg/qcm.}$$

Auf der Fundamentsohle ruhen der Konsolendruck  $P$ , das Mauergeriacht und die Dachlast  $G$  und das Geriacht  $G_1$  des Fundamentes, welches ringsum 20 cm über die Wand vorspringt, und nach Tabelle I bei II. § 5 2200 kg/cbm wiegt. Die Gesamtlast ist daher

$$P + G + G_1 = 3400 + 10\,000 + 1,0 \cdot 1,6 \cdot 1,1 \cdot 2200 = 3400 + 10\,000 + 3870 = 17\,270 \text{ kg.}$$

Die Lage des Stützpunktes ergibt sich wie oben aus  $e_1 = \frac{3400 \cdot 40}{17\,270} = 8$  cm.

Die Beanspruchung des Baugrundes entlang der inneren Kante der Fundamentsohle wird daher nach VI. § 2

$$s_{\text{max.}} = \frac{17\,270}{100 \cdot 160} \left[ 1 + \frac{6 \cdot 8}{100} \right] = 1,08 \cdot 1,48 = 1,6 \text{ kg/qcm}$$

und entlang der äußeren Kante

$$s_{\text{min.}} = \frac{17\,270}{100 \cdot 160} \left[ 1 - \frac{6 \cdot 8}{100} \right] = 1,08 \cdot 0,52 = 0,6 \text{ kg/qcm.}$$

Anstatt die Kräfte  $P$  und  $G$  und sodann wieder  $P$ ,  $G$  und  $G_1$  auf rechnerischem Wege zusammenzusetzen, hätte die Zusammensetzung auch nach I. § 11 zeichnerisch erfolgen können.

Sind Mauern auf große Längen in gleichbleibender Weise beansprucht, so berechnet man dieselben unter Zugrundelegung eines Mauerstückes von 1 m Länge, wodurch sich eine kleine Vereinfachung der Berechnung ergibt.

### C. Schornsteine.

Bei der beträchtlichen Höhe, welche freistehende Schornsteine haben — kleinere erhalten bis zu 25 m, mittlere bis zu 45 m und außergewöhnlich hohe mehr als 75 m Höhe — ist eine sorgfältige Untersuchung der Standfestigkeit von besonderer Wichtigkeit; insbesondere sind die Beanspruchungen des Gemäuers und des Baugrundes zu ermitteln und die Abmessungen des Schornsteines so zu wählen, daß diese Beanspruchungen innerhalb der nach II. § 4 zulässigen Grenzen bleiben, und daß außerdem die Beanspruchungen des Baugrundes unter entgegengesetzten Ranten keine zu verschiedenen werden, weil sonst ungleiche Zusammendrückungen des Untergrundes und dadurch seitliche Neigungen des Schornsteines eintreten könnten.

Bei Windstille sind die Beanspruchungen der fast ausnahmslos zur geraden Mittelachse symmetrisch aufgebauten Schornsteine  $s = \frac{SG}{F}$ .

Bei der Gewichtsberechnung kann davon ausgegangen werden, daß es für statische Zwecke nicht erforderlich ist, den körperlichen Inhalt des Gemäuers nach den mathematisch genauen Formeln für einen abgestumpften Hohlkegel oder eine Hohlpyramide zu bestimmen, sondern daß eine Näherungsberechnung genügt. Diese Näherungsberechnung wird am richtigsten durchgeführt, wenn man die Stockhöhe multipliziert mit dem arithmetischen Mittel aus der oberen und unteren Fugenfläche. Die Einheitsgewichte des Gemäuers sind nach II. § 5 anzunehmen. Für Schornsteingemäuer aus scharf gebrannten gelochten Ringsteinen wird im besonderen ein Gewicht von 1500—1900 kg/cbm, für ungelochte Ringsteine von 1700 bis 2000 kg/cbm angegeben. In Anbetracht der gründlichen Austrocknung des Schornsteingemäuers ist es ratsam, keine zu hohen Gewichtsanahmen zu machen, da sich sonst bei der Bauausführung diese Annahme mit dem tatsächlichen Gewicht nicht erreichen läßt und dadurch die Standfestigkeit des Schornsteines wieder vermindert wird.

Bei Winddruck ist der Schornstein auf Umkippen bzw. auf Biegung beansprucht.

Es würde hier zu weit führen, den Winddruck im allgemeinen zu besprechen; bezüglich der gebräuchlichen Annahmen für Schornsteinberechnungen ist das Folgende anzuführen.

Als Winddruck gegen eine zur Windrichtung senkrechte ebene Fläche sollen 150 kg/qm angenommen werden. Für Schornsteine in besonders ungünstiger Lage, wie in Küstengebieten oder auf freier Berglage, sowie für Schornsteine von mehr als 75 m Höhe kann es geboten sein bis zu 200 kg/qm zu gehen. Etwaiger Einfluß der Saugwirkung auf der Leeseite d. h. auf der Windrückseite ist in dem Wert von 150 kg enthalten. Der durch benachbarte oder umschließende Gebäude gewährte Schutz des Schornsteines gegen Winddruck soll unberücksichtigt bleiben. Als Angriffspunkt des gegen eine Schornsteinsäule ausgeübten Winddruckes ist der Schwerpunkt des Vertikalschnittes dieser Säule anzusehen. Auf Schornsteine, die nicht quadratischen Querschnitt haben, sind die verminderten Drücke zu 0,67, 0,70 und 0,75 bei kreisförmigem, achteckigem, sechseckigem Schaft anzunehmen, wobei für beide letzteren Formen in der Diagonale zu messen ist. Bei diesen Winddrücken sollen die zulässigen Druckbeanspruchungen des Mauerwerkes nicht überschritten werden und eine Berücksichtigung etwaiger Zugfestigkeit des Gemäuers nicht erfolgen. —

Diese Feststellungen stützen sich auf die Beschlüsse einer Kommission des Zentralverbandes der preußischen Dampfkessel-Überwachungsvereine und des Vereins deutscher Ingenieure. Häufig wird für Mauerwerk aus verlängertem Zementmörtel auf der Windseite eine Zugspannung von 1,5 kg/qcm zugelassen (so z. B. in Nürnberg), wofür die Druckbeanspruchung auf der entgegengesetzten Seite 9 kg/qcm nicht überschreitet. Bei dieser Annahme kann man sich die etwas umständlichere Berechnung ersparen, bei welcher nur die Druckzone des Schornsteinquerschnittes in Betracht gezogen wird. Was den Gang der Berechnung betrifft, so wird die Stützlinie aus den nach vorstehendem bestimmten Winddrücken auf die einzelnen Stockwerke eines Schornsteines und den Gewichten dieser Stockwerke entweder zeichnerisch oder rechnerisch nach Anleitung von VI. § 1 bestimmt. Für die zeichnerische Bestimmung empfiehlt es sich, eine der Breite nach etwa dreifach verzerrt aufgezeichnete Figur zu verwenden, um schärfere Schnitte der Konstruktionslinien zu erhalten. Für solche verzerrte Figuren ist alsdann der

Maßstab der Horizontalkräfte ebenfalls dreifach zu vergrößern gegenüber dem Maßstab der Vertikalkräfte. Die Maßstäbe können also beispielsweise lauten:

Geometrischer Maßstab:

für die Höhen 1 : 150

„ „ Breiten 1 : 50

Kräftemaßstab:

für die Vertikalkräfte 1 cm = 6000 kg

„ „ Horizontalkräfte 1 cm = 2000 kg.

Die Beanspruchungen des Gemäuers werden nach II. § 15 berechnet. Die Größe des Biegemomentes kann aus den Winddrücken unmittelbar hergeleitet oder als Produkt der Vertikalkomponente und der Exzentrizität der Resultierenden für jede Fuge bestimmt werden. Diese Vertikalkomponente ist bei horizontalem Winddruck gleich der Summe der auf den betreffenden Fugen lastenden Gewichte. Die Bestimmung der Widerstandsmomente der Fugenfläche geschieht nach II. § 7. Die Größe der auftretenden Druckbeanspruchungen darf keinesfalls die in II. § 4 angegebenen Werte überschreiten. Bei kleineren Schornsteinen ist es ratsam mit der Beanspruchung nicht bis zu den zulässigen Grenzwerten zu gehen, da diese Bauwerke schädlichen Zufälligkeiten weniger zu widerstehen vermögen als größere Schornsteine.

Die Lage des Stützpunktes, welche sich bei der zeichnerischen Bestimmung ergeben hat, läßt sich leicht mittels der auf den Fugenschwerpunkt bezogenen Gleichgewichtsbedingung  $\sum M = 0 = \sum wH - e \sum G$  prüfen, aus welcher  $e = \frac{\sum wH}{\sum G}$  erhalten wird.

Dabei bedeutet  $w$  den Winddruck auf ein Stockwerk,  $H$  die Höhe der Resultierenden dieses Winddruckes über der betreffenden Fuge,  $G$  das Gewicht eines Stockwerkes,  $e$  den Abstand des Stützpunktes vom Fugenschwerpunkt.

Der Sicherheitsgrad gegen Umkippen ist gleichfalls aus einer Momentengleichung zu bestimmen, welche in Bezug auf die Kante, um welche das Kippen droht, anzusetzen ist. Der Sicherheitsgrad ist diejenige Zahl, welche angibt, wie viel mal größer das Moment  $D/2 \cdot \sum G$  des Eigengewichtes des auf der Fuge lastenden Schornsteinteiles ist, als das Moment  $\sum wH$  der über der Fuge angreifenden Winddrücke; der Sicherheitsgrad wird daher angegeben durch den Bruch  $\frac{D/2 \cdot \sum G}{\sum wH}$ .

Über die Größe des erforderlichen Sicherheitsgrades gegen Umkippen bei Winddruck sind bestimmte Vorschriften nicht gegeben. Bei gut konstruierten Schornsteinen ist er in den gefährlichen Fugen meistens nahezu gleich 2.

Man könnte hier vielleicht anführen, daß in dem Amtsblatt des k. württ. Ministeriums des Innern vom 16. April 1894 § 3 Abs. 4 für Straßenbrücken mindestens  $1\frac{1}{4}$  fache Sicherheit gegen Umkippen verlangt wird, dagegen müßte aber eingewendet werden, daß für die schlant gebauten Schornsteine, welche frei in die Luft ragen, unbedingt ein höherer Sicherheitsgrad erforderlich ist; der erwähnte Sicherheitsgrad 2 sollte nicht wesentlich unterschritten werden. Die Berechnungen werden am besten in Tabellen vorgenommen, für welche vom Verfasser das Schema auf S. 164 angelegt worden ist. Das in den Tabellen gegebene Zahlenbeispiel Nr. 110 bezieht sich auf einen in sehr geschützter Lage stehenden Schornstein, für welchen nur 125 kg/qm Winddruck in Rechnung genommen wurden.

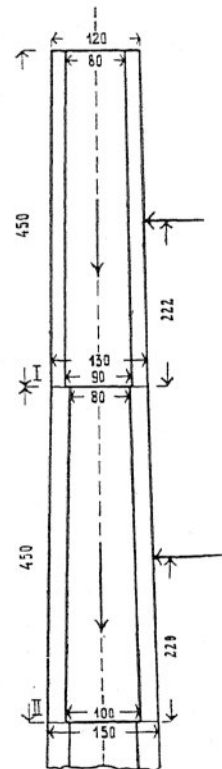


Bild 1.

Zu Beispiel 110.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Gewichtsberechnung für jedes Stockwerk										
Stockwerk	Breiten- Abmessungen	Fugen- flächen	Mittlerer Quer- schnitt $F = \frac{1}{2}(F_o + F_u)$	Höhe $h$	Körperlicher Inhalt $J = F \cdot h$	Gewicht $G = J \cdot \gamma$	Achsenschnittfläche $\frac{1}{2}(D_o + D_u) \cdot h$	Winddruck 125 kg/qm	Entfernung des Stützpunktes	Sicherheits- grad gegen Umkippen
I.	$m$	$qm$	$qm$	$m$	$cbm$	$kg$	$qm$	$kg$	$e = \frac{\sum w H}{\sum G}$	$\frac{D \cdot \sum G}{2 \cdot \sum w \cdot H}$
	$D_o = 1,20$ $d_o = 0,80$ $D_u = 1,30$ $d_u = 0,90$	$1,13 - 0,50 = 0,63$ $1,33 - 0,64 = 0,69$	$\frac{1}{2}(0,63 + 0,69) = 0,66$	$4,50$	$0,66 \cdot 4,5 = 2,97$	$2,97 \cdot 1600 = 4750$	$\frac{1}{2}(1,2 + 1,3) \cdot 4,50 = 5,63$	$0,67 \cdot 125 = 83,75$	$\frac{432350}{11230} = 38$	$\frac{150 \cdot 11230}{2 \cdot 432350} = 1,95$
II.	$D_o = 1,30$ $d_o = 0,80$ $D_u = 1,50$ $d_u = 1,00$	$1,33 - 0,50 = 0,83$ $1,77 - 0,79 = 0,98$	$\frac{1}{2}(0,83 + 0,98) = 0,90$	$4,50$	$0,90 \cdot 4,5 = 4,05$	$4,05 \cdot 1600 = 6480$	$\frac{1}{2}(1,30 + 1,50) \cdot 4,50 = 6,30$	$0,67 \cdot 125 = 83,75$	$\frac{432350}{11230} = 38$	$\frac{150 \cdot 11230}{2 \cdot 432350} = 1,95$

Berechnung der Beanspruchung des Gemäuers

12	13	14	15	16	17	18
Grösse der Beanspruchungen in kg/qcm						
Last auf einer Fuge $\sum G$	Winddruckmoment $\sum w H$	Winddruckmoment $W$ der Fugenfläche	zusammen auf der			
			durch Eigengew.	durch Wind	Windseite	Windrückseite
$kg$	$cmkg$	$cm^3$	$s_d = \frac{\sum G}{F_u}$	$s_w = \frac{\sum w H}{W}$	$s_r = s_d - s_w$	$s_r = s_d + s_w$
4750	$471 \cdot 222 = 104500$	$130^4 - 90^4 = 169230$ $10 \cdot 130$	$\frac{4750}{6900} = 0,69$	$\frac{104500}{169230} = 0,62$	$0,69 - 0,62 = 0,07$	$0,69 + 0,62 = 1,31$
$4750 + 6480 = 11230$	$471(222 + 450) + 528 \cdot 220 = 432350$	$150^4 - 100^4 = 270833$ $10 \cdot 150$	$\frac{11230}{9800} = 1,15$	$\frac{432350}{270833} = 1,60$	$1,15 - 1,60 = -0,45$	$1,15 + 1,60 = 2,75$

## VI. § 4. Bassin-, Stütz- und Futtermauern.

### Allgemeines.

Die Bassinmauern haben einen Wasserdruck, die Stützmauern den Druck der Erdhinterfüllung und die Futtermauern den Druck des gewachsenen Erdreichs auszuhalten.

Es kommt übrigens häufig vor, daß eine Mauer verschiedene Drücke auszuhalten hat, z. B. eine Bassinmauer einerseits Wasserdruck, andererseits Erddruck; vielleicht noch das Gewicht eines auf ihr stehenden Gebäudeteiles, oder einen Gewölbeschub u. s. f.

Um die äußeren Kräfte kennen zu lernen, welche auf Bassin-, Stütz- und Futtermauern wirken, ist in erster Linie die Berechnung des Erddruckes und des Wasserdruckes nötig.

## VI. § 5. Erddruck und Wasserdruck.

### A. Erddruck.

Die Erdteilchen bewegen sich nicht ohne Reibung übereinander, wie dies bei den Wasserteilchen der Fall ist, infolgedessen sind bei der Erde Böschungsanlagen möglich, während die Oberfläche des ruhenden Wassers stets horizontal ist. Die steilste Böschungsanlage, bei welcher die Erde noch ohne künstliche Befestigungsmittel dauernd hält, heißt natürliche Böschung, sie entspricht dem Reibungswinkel des Erdmaterials und stellt sich bei aufgeschütteter Erde bald von selbst her, während bei den Böschungsanlagen im „gewachsenen Boden“ der Zusammenhang der Erdmasse, die Kohäsion in Betracht kommt und zunächst steilere Anlage ermöglicht. Da jedoch durch die Abwitterung die Kohäsion vielfach aufgehoben wird und dementsprechend nur die Reibung der Erdteilchen aufeinander in Wirksamkeit bleibt, so kann sich schließlich auch in Einschnitten die natürliche Böschung herstellen. Daraus geht hervor, daß alle Erdmassen, welche sich oberhalb der natürlichen Böschung befinden, einer Stützung bedürfen, sobald ihre Kohäsion nicht ganz unzweifelhaft eine dauernde ist.

Diese Stütze, welche das Abrutschen der Erde verhindert, hat dem Erddruck zu widerstehen, um dessen Bestimmung es sich hier handelt. Die Berechnung geht davon aus, daß die Oberfläche der gestützten Erdmasse eben sei, oder durch eine Ebene, welche als Oberfläche behandelt wird, ausgeglichen werde. Die Berechnung erfolgt in der Regel für einen laufenden Meter Wandfläche. Ist die tatsächliche Länge der Wand  $a^m$ , so ist der gefundene Wert des Druckes mit „ $a$ “ zu multiplizieren, wenn man den Druck auf die ganze Wand will, vorausgesetzt, daß allerorts die Verhältnisse dieselben sind.

Weicht die Wand  $AB$ , welche eine Erdmasse stützte, aus, so rutscht dasjenige Prisma  $ABX$  der Erdmasse ab, welches den größten Erddruck auf die Wand ausgeübt hatte; denn würde ein anderes Prisma existieren, welches stärker drücken könnte, so müßte dieses Prisma den Einsturz der Mauer bewirkt haben und derselben nachrutschen (s. Bild 18 Taf. IV). Das Prisma  $ABX$  nennt man das Druckprisma. Dasselbe lehnt sich einerseits gegen die Wand und ruht andererseits auf der Fläche  $AX$  auf. Es wird auch gehalten durch die Reibung längs  $AX$ . In gewissen Fällen kann man sogar auf die Reibung an der Wandfläche  $AB$  rechnen.

### Zeichnerische Ermittlung des Erddruckes.

Untersuchungen des Gleichgewichtszustandes dieses Prismas zeigen, daß das Druckprisma auf folgende Weise konstruiert werden kann:

Lege von A aus eine Linie AC unter den natürlichen Reibungswinkel  $\varphi$  der Erdmasse an ( $\operatorname{tg} \varphi = 1:1\frac{1}{2}$ ), sodann an AB unter demselben  $\neq \varphi$  auf die der Erde entgegengesetzte Seite die Linie AD und bestimme einen Punkt X, so daß  $DX^2 = DB \cdot DC^*$ ), dann ist ABX das Druckprisma.

Zieht man  $XF \perp AC$  und  $XG \parallel DA$ , so ist der Erddruck E pro 1 laufenden Meter Wandfläche

$$E = \frac{1}{2} \gamma XF \cdot XG,$$

wo  $\gamma$  das spezifische Gewicht der Erde ist, welches im Mittel 1,6 bis 1,8 beträgt.

Man erhält E in Tonnen, wenn XF und XG in Meter gemessen werden. Die Herleitung dieser Formel kann hier übergangen werden.

Der Erddruck wirkt senkrecht zur gedrückten Fläche und verteilt sich über die Mauerfläche so, daß sich eine gerade Linie ergibt, wenn an jeder Stelle der auf diese Stelle wirkende Druck aufgetragen wird (s. Bild 19 Taf. IV). Es kann also E bildlich durch das  $\triangle ABK$  dargestellt werden.

Zur Aufzeichnung dieses Dreiecks ist zunächst gegeben  $AB = 1$  und es hängt die Berechnung von AK vom Maßstab ab, welcher zugrunde gelegt wird. Will man z. B. durch je 1 qcm Papierfläche des Dreiecks n kg darstellen, hat man somit den Maßstab 1 qcm = „n“ kg gewählt, (der beim geometrischen Maßstab 1:50 meistens übersichtliche Gestaltung gibt, wenn 1 qcm = 400 kg gewählt wird), so muß sein.

$$\frac{E \cdot 1000}{n} = \triangle ABK = \frac{AK \cdot 1}{2}, \text{ also } AK = \frac{E \cdot 1000}{n \cdot 1/2}$$

Papiermaß, es sind alsdann zur Aufzeichnung des  $\triangle ABK$  alle Maße unmittelbar in „cm“ zu nehmen ohne Berücksichtigung des geometrischen Maßstabes der Figur. Die Resultierende E geht durch den Schwerpunkt dieses Dreiecks und greift somit im unteren Drittel der Wand AB an.

Bei Erdmassen, welche stets trocken bleiben, kann man annehmen, daß zwischen der Erde und der Mauerfläche AB ein Reibungswiderstand W auftritt. Dieser lenkt den Erddruck von der Senkrechten zu AB ab und zwar um den Reibungswinkel  $\varphi^1$  beider Materialien;  $\varphi^1$  ist  $< \varphi$ , höchstens  $= \varphi$  zu nehmen. Man nehme  $\varphi^1 = \frac{1}{3}$  bis  $\frac{1}{2} \varphi$  an.

Will man auf diesen Umstand, welcher zu geringerer Mauerstärke führt, Rücksicht nehmen, so hat man nur, wie in Bild 20 Taf. IV  $\neq BAD = (\varphi^1 + \varphi)$  zu machen. Im übrigen bleibt die Bestimmung des Erddruckes ganz dieselbe wie oben beschrieben.

Will man nicht die Resultante des Erddruckes, sondern eine Darstellung des Druckes selbst, so erhält man statt Bild 19 nunmehr Bild 21 Taf. IV, in welcher die Dreieckshöhe  $AH = \frac{E \cdot 1000}{n \cdot 1/2}$  gemacht werden muß, weil das Dreieck BAK kein rechtwinkliges mehr ist.

Die Darstellung des Erddruckes nach Bild 19 und 21 ist namentlich geeignet zur Bestimmung des Druckes auf einen Wandflächenteil AA<sup>1</sup> Bild 22 Taf. IV. Derselbe wird an-

\*) DX wird am einfachsten mittels des Rechenschiebers ermittelt, oder graphisch durch irgend eine der Konstruktionen zur Auffindung der mittleren Proportionalen zwischen zwei gezeichneten Größen DB und DC, wie z. B. in Bild 18 gesehen ist.

Fällt Punkt D außerhalb des Zeichnungsblattes, so denke man sich mit DA eine Parallele durch B gezogen, deren Schnitt mit der Linie AC heiße L, dann kann Punkt G aus  $AG^2 = AL \cdot AC$  und aus diesem Punkt durch die Parallele GX der Punkt X bestimmt werden, wie sich aus der Betrachtung der ähnlichen Dreiecke mit der Spitze C leicht beweisen läßt.



gegeben durch das Trapez  $AA^1K^1K$ , und die Resultierende desselben geht durch den Schwerpunkt des Trapezes. Hat die Mauer eine gebrochene oder gekrümmte Rückfläche, so muß der Erddruck auf Wandteile bestimmt werden, wobei die Figur so zu behandeln ist, als ob jeder solche Teil für sich bis zur Erdoberfläche reichen würde (s. Bild 23 und 24 Taf. IV).

Ist die Erdoberfläche nicht eben abgeglichen (Bild 25a und b Taf. IV), so ziehe man eine Ausgleichungslinie so, daß  $AB^1X = ABEHX$  ist, und verfähre nun mit Punkt  $B^1$  wie oben für  $B$  angegeben, bestimme also  $DX^2 = DB^1 \cdot DC$ . Es stellt alsdann  $AB^1X = ABEHX$  den Querschnitt des Druckprismas dar, und der Erddruck ist wieder

$$E = \frac{1}{2} \gamma XF \cdot XG.$$

Ist die Erdoberfläche hinter der Mauer um den  $\varphi$  geneigt, so liegt Punkt  $C$  unendlich weit entfernt, d. h.  $BC$  und  $AC$  werden zu Parallelen.  $XF$  und  $XG$  erhalten für jede Lage von  $H$  dieselbe Länge.

Hat man eine belastete Erdmasse, so ist nur die Belastung in eine Belastung durch Erde umzurechnen und dann die Druckberechnung ebenso, wie für eine unebene Erdoberfläche durchzuführen.

Für Hinterfüllungsmaterialien, welche auf eine zu stützende Wand einen Erddruck oder einen ähnlichen, und wie jener zu berechnenden Druck ausüben, werden gewöhnlich folgende Zahlenangaben gemacht:

Auffüllung aus	Gewicht kg/cbm	Natürlicher Böschungswinkel $C$ .	$\text{tg}^2(45 - \varphi/2)$
		Grad	
Trockenem Lehm Boden . . . . .	1500	40—46	0,217—0,163
Nassem „ . . . . .	1900	20—25	0,490—0,406
Trockener Tonerde . . . . .	1600	40—50	0,217—0,132
Nasser „ . . . . .	2000	20—25	0,490—0,406
Nasser Dammerde . . . . .	1700	30—37	0,333—0,249
Feuchtem Sand . . . . .	1800	24	0,423
Trockenem „ . . . . .	1500	32	0,309
Nassem Kies . . . . .	1900	25	0,406
Grobem trockenem Kies . . . . .	1600	36	0,262
Nassem Steinschotter . . . . .	1600	35—40	0,271—0,217
Trockenes Kalkpulver . . . . .	500	50	0,132
Gaskohlen (aufgepackt) . . . . .	900	45—50	0,172—0,132
Hirse . . . . .	850	23	0,440
Getreide . . . . .	s. Tab. II Seite 48	30	0,333

#### Rechnerische Ermittlung des Erddruckes.

Der Erddruck läßt sich auch rein rechnerisch bestimmen. Die bezügliche Formel lautet für lotrechte Stellung der Wand  $AB = h$  und wagrechte Geländefläche  $BC$ , wenn keine Reibung zwischen Erde und Mauer in Betracht gezogen wird, bei unbelasteter Geländefläche

$$E = \frac{1}{2} \gamma h^2 \text{tg}^2 \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Ist die Erdauffüllung hinter den Mauern mit  $p$  kg/qm belastet, so kommt noch der

Betrag  $E_1 = p \cdot h \cdot \operatorname{tg}^2 \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right)$  als Einfluß der Belastung dazu. Die Resultierende von E greift im unteren Drittel von AB, diejenige von  $E_1$  in der Mitte von AB an.

Die Zahlenwerte für  $\operatorname{tg}^2 \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right)$  sind in obiger Tabelle enthalten.

Beispiel 111. Wie groß wird der Druck einer wagrechten abgeglichenen Hinterfüllung mit Erde auf den lfd/m einer h m hohen lotrechten Wand?

Aufl.  $\operatorname{tg} \varphi = 1:1\frac{1}{2}$ , also  $\varphi$  etwa  $34^\circ$ , daher

$$E = \frac{1}{2} \gamma \cdot h^2 \cdot 0,285 = \gamma h^2 \cdot 0,142 = \text{etwa } \frac{1}{2} \gamma h^2.$$

Ist die Mauer beispielsweise 4 m hoch und wiegt das Erdmaterial 1700 kg/cbm, so ergibt sich der Erddruck auf 1 lfd/m Mauer zu  $E = \frac{1}{2} \cdot 1700 \cdot 4^2 = 3900$  kg.

Die Resultierende dieses Druckes greift in  $\frac{4,00}{3} = 1,33$  m über der Mauersohle an und ist wagrecht gerichtet.

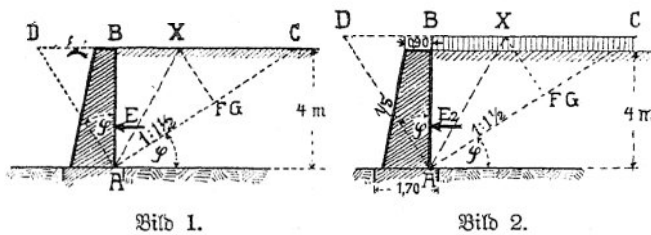
Beispiel 112. Wie groß wird die Druckvermehrung auf den lfd/m an der vorigen Wand, wenn die Hinterfüllung mit p kg/qm Oberfläche belastet wird

$$E_1 = p \cdot h \cdot 0,285 = \frac{1}{3,5} p \cdot h.$$

Ist z. B.  $p = 700$  kg/qm, so erhält man  $E_1 = \frac{1}{3,5} \cdot 700 \cdot 4 = 800$  kg.

Die Resultierende dieses Druckes greift in halber Höhe der Wand AB also 2,00 m über der Mauersohle an. Die Lage der Resultierenden  $E_2$  aus E und  $E_1$  ergibt sich aus einer Drehungsmomentengleichung für die Mauersohle als Drehachse. Die Resultierende liegt über der Sohle um  $E_2 = \frac{3,9 \cdot 1,33 + 0,8 \cdot 2,0}{3,9 + 0,8} = 1,45$  m.

Beispiel 113. Der Erddruck E in Aufg. 111 ist zeichnerisch zu ermitteln.



Aufl. In bestehender Abbildung 1 ist zunächst die natürliche Böschung AC gezogen,  $\angle BAD = \varphi$  gemacht und alsdann X so bestimmt worden, daß  $DX^2 = DB \cdot DC$  ist. Die Linien  $XF \perp AC$  und  $XG \parallel DA$  fallen zusammen, sie messen 2,14 m, also wird  $E = \frac{1}{2} \cdot 1700 \cdot 2,14 \cdot 2,14 = 3890$  kg.

Beispiel 114. Der Erddruck der belasteten Hinterfüllung soll zeichnerisch bestimmt werden. Bild 2.

Die Belastung von 700 kg/qm, wird durch eine  $\frac{700}{1700} = 0,41$  m hohe Erdschicht ersetzt gedacht und nun für die neue Erdoberfläche konstruiert wie vorig. Es wird  $XF = 2,36$  m, also der Erddruck  $E_2 = \frac{1}{2} \cdot 1700 \cdot 2,36 \cdot 2,36 = 4730$  kg; seine Resultierende greift in  $\frac{1}{3} (4,00 + 0,41) = 1,47$  m über der Sohle an.

Man sieht, daß die rechnerisch und zeichnerisch ermittelten Resultate genügend genau übereinstimmen.

Beispiel 115. Eine auf der Erdseite lotrechte 6,30 m hohe Mauer ist mit Erde hinterfüllt. Es ist der Erddruck auf den lfd/m Wand und auf je 1 m hohe Wandteile zu berechnen.

Aufl.  $E = \frac{1}{2} 1700 \cdot 6,3^2 = 9640$  kg. Dieser Erddruck verteilt sich nach einer Dreiecksfläche auf die Wand, also muß der Druck AK auf den 1 cm hohen Streifen entlang der Sohle so groß sein, daß  $\frac{AK \cdot 630}{2} = 9640$  wird. Hieraus ergibt sich  $AK = 30,6$  kg. Die Mittellinien in der 1,0 m hohen Trapezteile und des oberen Dreieckes von 1,30 m Höhe ergeben sich aus Proportionen z. B.  $m : AK = 580 : 630$ , also  $m = AK \cdot \frac{580}{630}$ . Für die durch die Flächenteile dargestellten Erddruckteile ergeben sich daher m. 100 kg. Die Ausrechnung wird folgende:

$$E_1 = 30,6 \cdot \frac{580}{630} = 28,2 \cdot 100 = 2820 \text{ kg}$$

$$E_2 = 30,6 \cdot \frac{480}{630} = 23,4 \cdot 100 = 2340 \text{ kg}$$

$$E_3 = 30,6 \cdot \frac{380}{630} = 18,4 \cdot 100 = 1840 \text{ kg}$$

$$E_4 = 30,6 \cdot \frac{280}{630} = 13,6 \cdot 100 = 1360 \text{ kg}$$

$$E_5 = 30,6 \cdot \frac{180}{630} = 8,8 \cdot 100 = 880 \text{ kg}$$

$$E_6 = 30,6 \cdot \frac{65}{630} = 3,1 \cdot 130 = 400 \text{ kg}$$

zusammen  $E = 9640$  kg. ✓

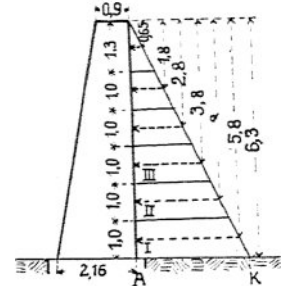


Bild 3.

Anstatt dieser mit dem Rechenschieber rasch zu erledigenden Proportionalrechnung, kann man auch, wie oben angegeben, das  $\triangle ABK$  in einem bestimmten Flächenmaßstab aufzeichnen, einteilen und die Flächenteile abmessen und berechnen. Die Resultierenden der Erddruckteile greifen in den Schwerpunkten der entsprechenden Flächenteile an und stehen senkrecht zur Wandfläche.

Wären die Erddruckteile auf gleich hohe Schichten, etwa auf 7 Schichten von je 0,90 m Höhe zu bestimmen gewesen, so hätte sich eine Vereinfachung daraus ergeben, daß von den 7 Flächenteilen des  $\triangle ABK$  jedes tieferliegende um das Doppelte des oberen  $\triangle$  förmigen Teiles größer ist, als der über ihm liegende Teil, diese Teile verhalten sich also wie 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11 : 13. Der obere  $\triangle$  förmige Teil ist aber der 49. Teil des ganzen  $\triangle ABK$ , man erhält daher

$$E_7 = 9640 : 49 = 197 \text{ kg}; \quad E_6 = 591 \text{ kg}; \quad E_5 = 985 \text{ kg}; \quad E_4 = 1380 \text{ kg};$$

$$E_3 = 1770 \text{ kg}; \quad E_2 = 2160 \text{ kg}; \quad E_1 = 2560 \text{ kg}; \quad \Sigma = 9640 \text{ kg}.$$

Beispiel 116. Die Stützmauer in den Beispielen Nr. 113 und Nr. 114 habe 90 cm Kronenbreite und  $\frac{1}{5}$  Anlauf im Haupte. Es ist zu untersuchen ob dieselbe dem Erddruck zu widerstehen vermag und welche Beanspruchung das Fundamentgemäuer erleiden würde.

Aufl. Sohlenbreite  $0,90 + \frac{1}{5} \cdot 4,00 = 0,90 + 0,80 = 1,70$  m. Auf Umkippen um die Vorderkante wirkt das Erddruckmoment  $4,7 \cdot 1,45 = 6,8$  mt. Das widerstehende Moment wird am einfachsten erhalten, wenn man sich das Mauerprofil in das rückseitige Rechteck mit  $0,9 \cdot 4,00 = 3,6$  qm und das vorne liegende  $\triangle$  mit  $\frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 4,0 = 1,6$  qm Fläche zerlegt denkt. Die diesen Teilen entsprechenden Mauer Gewichte sind bei von 2,0 t/cbm Einheitsgewicht  $3,6 \cdot 2 = 7,2$  t und  $1,6 \cdot 2 = 3,2$  t, sie geben das widerstehende Moment  $7,2 \cdot (0,8 + 0,45) + 3,2 \cdot 0,53 = 10,7$  mt. Der Sicherheitsgrad gegen Umkippen wäre daher nur noch  $\frac{10,7}{6,8} = 1,6$  fach; dies ist für eine so niedere Mauer zu wenig. Vgl. VI. § 8.

Zur Ermittlung der Fugenbeanspruchung bestimmt man, wie in VI. § 4C. gezeigt, die Exzentrizität des Stützpunktes. Es wird  $e = \frac{6,8}{7,2 + 3,2} = 65$  cm. Der Stützpunkt liegt also außerhalb des mittleren Drittels der Fugenbreite und zwar von der Vorderkante nur noch  $85 - 65 = 20$  cm entfernt. Die Normalkomponente der Resultierenden ist  $7,2 + 3,2 = 10,4$  t. Entlang dieser Kante wird daher die Beanspruchung  $2 \cdot \frac{10\,400}{3 \cdot 20 \cdot 100} = 3,5$  kg/qcm.

Beispiel 117. Der in Beispiel 115 berechnete Erddruck von 9640 kg wirkt auf eine Mauer, die ebenfalls 90 cm Kronenbreite und  $\frac{1}{5}$  vorderen Anlauf hat. Deren Standfestigkeit ist zu untersuchen.

Aufl. Sohlenbreite  $90 + \frac{1}{5} \cdot 6,30 = 90 + 126 = 216$  cm, Kippmoment  $9,64 \cdot 2,10 = 20,2$  mt in Bezug auf die Vorderkante. Widerstehendes Moment  $0,9 \cdot 6,3 \cdot 2,0 \cdot (0,45 + 1,26) + 1,26 \cdot 6,3 \cdot \frac{1}{5} \cdot 2,0 \cdot \frac{2}{5} \cdot 1,26 = 26,06$ , Sicherheitsgrad gegen Umkippen  $26,06 : 20,2 = 1,3$  fach, Exzentrizität des Stützpunktes  $20,2 : (11,34 + 7,94) = 105$  cm, also Entfernung von der Vorderkante nur noch 3 cm. Die Mauer ist somit nicht mehr hinreichend standfähig. Für dieselbe wäre ein hinterschnittenes Profil (VI. § 8) zu wählen.

### B. Wasserdruck.

Der Gesamtdruck, welchen eine Wassermasse auf eine ebene Wandfläche ausübt, steht immer senkrecht zur Wandfläche und ist gleich dem Gewicht einer Wassersäule, deren Querschnitt gleich der gedrückten Fläche und deren Höhe gleich der vertikal zu messenden Höhe des

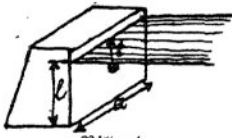


Bild 4.

Wasserspiegels über dem Schwerpunkt dieser Fläche ist. Wendet man diesen Satz auf eine Mauerfläche von a Meter Länge an, so ist  $W = a \cdot l \cdot t$  und zwar in Tonnen, wenn alle Maße in Metern ausgedrückt sind. Ist also beispielsweise die Mauerlänge  $a = 5$  m und die Wassertiefe  $l = 4$  m, so mißt die gedrückte rechteckige Wandfläche  $5 \cdot 4 = 20$  qm. Die Höhe des Wasserspiegels über dem Schwerpunkt dieser Fläche ist  $t = \frac{1}{2} = 2$  m, also hat der Wasserdruck die Größe  $a \cdot l \cdot t = 5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$  Tonnen.

Dieser Wasserdruck läßt sich auch durch ein Dreieck darstellen, wie der Erddruck in Bild 19 Taf. IV und man sieht aus demselben, daß die senkrecht zur Wandfläche stehende Resultierende desselben gleichfalls im unteren Drittel der Mauer angreift. Der Druck auf einen Teil der Mauerfläche wird ebenso wie beim Erddruck, vgl. Bild 22 und Beispiel 118, gefunden, wofern dieser Teil auch a Meter Länge hat; auch wird für gebrochene und gekrümmte Mauerflächen der Druck in ähnlicher Weise wie beim Erddruck bestimmt (s. Bild 24 Taf. IV).

### VI. § 6. Profile der Bassin-, Stütz- und Futtermauern.

Bei den in VI. § 3 angeführten Mauern ist die Grundform des Profiles das Rechteck.

Den verschiedenen Arten der Beanspruchung der oben genannten Mauern entsprechen dagegen in jedem einzelnen Fall besondere Profilformen. Diese Profilformen zeigen entweder ebene, gebrochene und gekrümmte oder abgetreppte Rückflächen. Für ebene und gekrümmte Rückflächen gibt VI. § 5 die Bestimmung des Wasserdruckes und des Erddruckes an. Für abgetreppte Rückflächen wird die Abtreppe, wenn sie nur in dem oberen Teile der Mauer vorhanden ist, vernachlässigt (s. Bild 26 Taf. IV); verbreitet sie sich aber auf die ganze Rück-

fläche, so kann eine Ausgleichungslinie als Rückseite angesehen werden (Bild 27 Taf. IV), wofern nicht die einzelnen Mauerteile für sich berechnet werden wollen.

Bei Berechnung der Fundamentsohlenpressung wird selten der Erddruck  $E'$  und  $E''$  auf das Fundament selbst (Bild 28 Taf. IV) berücksichtigt. Dies müßte für  $E'$  nur geschehen, wenn der Wert von  $E'$  den Wert von  $E''$  bedeutend überwiegt, z. B. infolge einer Belastung über dem Terrain auf der Rückseite der Mauer, welche bei weichem Untergrund von Einfluß ist. Es muß alsdann der Erddruck für die Mauerhöhe  $H$ , nicht bloß für  $h$  berechnet werden. Der Wert von  $E''$ , welcher begünstigend für die Standfähigkeit der Mauer wirkt, wird stets vernachlässigt; derselbe ist im Verhältnis zum Erddruck auf die gesamte Höhe  $h$  event.  $H$  unbedeutend.

Die Entwässerung der Erde hinter Stütz- und Futtermauern hat auf die Größe der Reibungswinkel  $\varphi$  und  $\varphi^1$ , sowie auf das spezifische Gewicht  $\gamma$  des Erdmaterials großen Einfluß, sie ist also für den Bestand der Mauern von wesentlicher Bedeutung und beim Auftreten von Wasser nie wegzulassen.

Kommt ein Profil von bewährter Form zur Verwendung, so daß es sich nur noch um die Bestimmung der Mauerstärke handelt, so genügt es meistens, die Resultierende auf die Fundamentfuge zu bestimmen; von der Konstruktion der Stützlinie kann alsdann abgesehen werden (vgl. Bild 42, 43 und 44 Taf. IV).

## VI. § 7. Bassinmauern.

Hierher gehören freistehende Mauern, welche einseitigen Wasserdruck auszuhalten haben, sowie Mauern, welche einerseits Erddruck, andererseits Wasserdruck auszuhalten haben. Die Profile dieser Mauern sind meist trapezförmig. Die dem Wasser zugekehrte Seite ist schwach geneigt, damit der Wasserdruck, welcher stets senkrecht zur benetzten Wand wirkt, ein kleineres Drehungsmoment und eine kleinere Horizontalkomponente verursacht. Letzteres ist von Wert für die Richtung der Kraftresultanten für eine beliebige Fuge, da diese Richtung höchstens um den Reibungswinkel von der Fugennormalen abweichen darf. Die dem Wasser entgegengesetzte Seite der Mauer erhält meist einen stärkeren Anlauf, um zu erzielen, daß die Stützlinie das mittlere Drittel der Mauerfuge nie verläßt, weil Zugspannungen im Mauerwerk bei Bassinmauern leicht nachteilig werden könnten, da sich infolge derselben Risse im Mauerwerk bilden würden, durch die das Wasser einzudringen vermöchte. Zu bemerken ist, daß beide Anläufe mit der Wassertiefe zunehmen müssen (s. Bild 35a Taf. IV und vgl. Beispiel 118).

Bei der Bestimmung des Angriffspunktes und der Größe der Kraftresultanten aus Eigengewicht und Wasserdruck für eine beliebige Fuge, welche nach VI. § 1 entweder graphisch oder analytisch, d. h. zeichnerisch oder rechnerisch geschehen kann, d. h. kurz gesagt, bei Auffindung der Stützlinie sind zwei verschiedene Wege möglich.

1. Besondere Bestimmung des Eigengewichtes  $Q$  und des Wasserdruckes  $W$  für jeden einzelnen Mauerteil zwischen je zwei in Betracht gezogenen Lagerfugen und Verwendung der so gefundenen Resultante, bezw. deren Normal- und Horizontalkomponente zur Berechnung des zunächst darunter liegenden Mauerteils. Bei der graphischen Bestimmung stelle man dabei den Wasserdruck durch ein Dreieck dar.

Die Trapeze  $B_1 C_1 C_2 B_2$ ,  $B_2 C_2 C_3 B_3$  Bild 29 Taf. IV stellen die Größe des Wasser-

druckes auf die Wandflächenteile  $B_1 B_2$  und  $B_2 B_3$  dar; der Druck selbst geht je durch den Schwerpunkt des Trapezes.

Zunächst werden nun bei diesem Verfahren  $Q_1$  und  $W_1$  in Bild 30 Taf. IV zu  $R_1$  zusammengesetzt und dadurch der Angriffspunkt  $A_1$  in Bild 29 gefunden, indem durch den Schnittpunkt von  $Q_1$  und  $W_1$  eine Parallele mit  $R_1$  gezogen wird. Durch den Schnitt von  $R_1$  mit  $Q_2$  wird eine Parallele zur Resultierenden  $R_2$  aus  $R_1$  und  $Q_2$  gezogen und durch den Schnitt von  $R_2$  und  $W_2$  eine Parallele zur Resultierenden aus  $R_2$  und  $W_2$ , diese Parallele gibt  $A_2$  u. s. f.

Bei diesem Verfahren wird zwar die Rechnung vereinfacht, aber die Fehlerfortpflanzung ermöglicht.

2.  $Q$  und  $W$  werden bei jeder Fuge für den gesamten oberhalb dieser Fuge befindlichen Mauerteil bestimmt, jede Fugenbeanspruchung also unabhängig für sich gerechnet. Die Dreiecke  $AB_1 C_1$ ,  $AB_2 C_2$  . . . . . stellen je die Größe des Wasserdruckes auf die Wandfläche von A bis B dar. Der Druck selbst geht je durch den Schwerpunkt dieser Dreiecke, greift somit stets im unteren Drittel der benetzten, in Betracht gezogenen Wandfläche an.

Um  $A_1$  in Bild 31 Taf. IV zu finden, setzt man in Bild 32  $Q_1$  und  $W_1$ , d. h. die Kräfte, welche auf dem über Fuge I liegenden Mauerteil wirken, zu  $R_1$  zusammen und zieht in Bild 31 durch den Schnittpunkt von  $Q_1$  und  $W_1$  eine Parallele zu  $R_1$ .

Um  $A_2$  zu finden, ziehe man mit der Resultierenden  $R_2$  aus  $Q_{1+2}$  und  $W_{1+2}$  durch den Schnitt der Kräfte  $Q_{1+2}$  und  $W_{1+2}$  eine Parallele.  $Q_{1+2}$  und  $W_{1+2}$  sind die Kräfte, welche auf den ganzen oberhalb der Fuge II liegenden Mauerteil wirken u. s. f.

In Bild 33 ist der Kräfteplan des Bildes 32 in horizontalem Sinne zusammengeschieben, in Bild 34 in vertikalem Sinne. Bei Raummangel können solche Zusammenschiebungen zweckmäßig sein.

Die Mauern sind für ein ganz gefülltes und für ein ganz leeres Bassin zu berechnen. Scheidemauern sind für einseitige Bassinfüllung zu berechnen, erhalten aber bei gleicher Wassertiefe zu beiden Seiten ein symmetrisches Profil (s. Beispiel 118).

Für die erste Annahme der Mauerstärke können folgende Annäherungsangaben verwendet werden:

Freistehende Bassinmauern erhalten eine mittlere Stärke, welche etwa  $\frac{1}{3}$  bis  $\frac{1}{2}$  der Höhe beträgt (vgl. Bild 35b Taf. IV).

Für hinterfüllte Bassinmauern genügt eine Stärke von etwa  $\frac{1}{4}$  bis  $\frac{1}{3}$  Höhe (vgl. Bild 36 Taf. IV).

Beispiel 118. Gegeben ist das Profil einer Scheidemauer in einem Bassin (Stuttgart Wasserversorgung). Gefragt ist nach der Beanspruchung des Mauerwerks in dieser Mauer (s. Bild 35b Taf. IV).

Aufl. Die Berechnung gestaltet sich folgendermaßen: Nach VI. § 5 B ist der Wasserdruck auf 1 m Mauerlänge  $W = 1,0 \cdot 3,31 \cdot \frac{330}{2} = 5,45$  t. Dessen H- und V-Komponente kann man aus der Ähnlichkeit der entstandenen rechtwinkligen Dreiecke ableiten:

$$W : W_h = 331 : 330$$

$$W : W_v = 331 : 30$$

$$W_h = \frac{W \cdot 330}{331} = 5,43 \text{ t}$$

$$W_v = W \frac{30}{331} = 0,5 \text{ t.}$$

Das Mauerwerk ist  $Q = \frac{1,15 + 1,75}{2} \cdot 3,30 \cdot 2,2 = 10,53$  t schwer.

Die Komponenten der Gegenresultierenden seien nun  $V$  und  $H$ ; dann muß sein

$$1. \Sigma H = 0 = H - W_h, \text{ also } H = W_h = 5,43 \text{ t,}$$

$$2. \Sigma V = 0 = Q + W_v - V; \text{ also } V = Q + W_v = 11,03 \text{ t;}$$

und für den Drehpunkt A

$$3. \Sigma M = 0 = -Q \cdot \frac{1,75}{2} - W_v \cdot \left(1,75 - \frac{0,30}{3}\right) + W_h \cdot \frac{3,30}{3} + Vx - H \cdot 0.$$

$$x = \frac{Q \cdot \frac{1,75}{2} + W_v \cdot 1,65 - W_h \cdot 1,10}{V} = \frac{4,07}{11,03} = 0,37 \text{ m.}$$

Bedingung 1. in VI. § 1 ist also erfüllt, Bedingung 2. gleichfalls; denn  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{V} = \frac{5,43}{11,03} = 0,49$  und hiernach  $\alpha = 26^\circ$ . Der zulässige Neigungswinkel ist also nicht überschritten. Bei stärkerem Anlauf der Mauern wäre  $H = W_h$  noch kleiner geworden, also hätte auch der Winkel abgenommen. — Für Bedingung 3. kommt der Wert von  $W_h$  auch in Betracht; denn je größer in der Gleichung für  $x$  der Wert  $W_h$  ist, desto kleiner wird  $x$ , desto mehr rückt die Resultante dem Profilmumfang zu.

Die Beanspruchung berechnet sich nach VI. § 2.

### VI. § 8. Stützmauern.

Die Profile haben sehr mannigfaltige Formen. Bei vollkommen rechteckigem Profil mit vertikalen Wänden ist das Material am wenigsten ausgenützt, die Vorrückung des Schwerpunktes gegen die Vorderkante ist für die Standfestigkeit nachteilig.

Je mehr man die Profile unter Beibehaltung der Fundamentbreite und Mauerhöhe der Dreieckform nähert, umso mehr nimmt die Größe der Normalkomponente der Kraftresultante ab, also die Abweichung letzterer von der Fugennormalen zu.

Bedingung 2. des VI. § 1 tritt in den Vordergrund, namentlich wenn keine weitere vertikale Belastung der Mauer vorhanden ist. Dies führt zu Mauern, welche geneigte Lagerfugen haben, deren Profile sind teils rechteckig, teils trapezförmig (vgl. Bild 37 IV). Dagegen rückt der Mauerfchwerpunkt bei annähernd dreieckigem Profil weiter rückwärts. Die Berechnung der Stützlinie kann wie in VI. § 7 auf zweierlei Arten geschehen. Die Größe der Beanspruchungen ist häufig nicht allein maßgebend für die Standfähigkeit der Stützmauern, dieselben sollen auch mindestens 2—4fache Sicherheit gegen Umkippen besitzen, bei großen Mauern begnügt man sich noch mit Sicherheitsgraden von 1,5 bis 2.

Der Verlauf der Stützlinie deutet die zu wählende Gestalt des Mauerprofils an; zeigt, wo das Mauerwerk nutzlos ist und an welcher Stelle dasselbe zur Wirkung kommt. Auf diese Weise ist man zu den hinter schnittenen Profilen gekommen (Bild 38). Diese Profile sollen so beschaffen sein, daß sie auch ohne Erdhinterfüllung standfähig sind. Die Vertikale des Schwerpunktes der ganzen Profilsfläche muß also bis zur Fundamentfuge innerhalb des Profiles bleiben und soll nirgends den Wandflächen zu nahe kommen, damit keine übermäßigen Kantenpressungen eintreten.

Beispiel 119. Für die Seite 24 berechnete, noch nicht hinterfüllte Mauer ist der Fundamentdruck  $R_4 = \Sigma G = 118\,800 \text{ kg}$ , ferner ist der Abstand des Angriffspunktes desselben von der hintern Kante  $a = 22 \text{ cm}$ , also wird nach VI. § 2 Anm. 2 die Beanspruchung des Baugrundes unter dieser Kante  $s_m = 2 \cdot \frac{118\,800}{3 \cdot 22 \cdot 570} = 6,3 \text{ kg/qcm}$ .

Dies ist ein Druck, welcher für den, höchstens nur kurze Zeit vorhandenen Ausnahmezustand des Freistehens der Mauer bei einem guten Baugrund noch zulässig erscheint.

Streng genommen hätte aus dem zur Fundamentsohle nicht senkrecht stehenden Fundamentdruck nur die zu der Sohle senkrecht stehende Komponente  $N$ , welche kleiner ist als  $R_4$ , berücksichtigt und anstatt des horizontalen Maßes  $a$  der größere in der Fugenneigung zu messende Abstand des Angriffspunktes der Resultierenden  $R_4$  von der hinteren Kante in die Rechnung eingesetzt werden sollen. Die Abweichungen der richtigen Werte von dem zur Rechnungsvereinfachung angenommenen Wert ist aber so geringfügig, daß sich die Beanspruchung des Baugrundes rechnermäßig nur von 6,3 auf 6,2 kg/qcm ändern würde. Diese Änderung ist aber für praktische Zwecke ohne Bedeutung, die gewählte Rechnungsvereinfachung ist somit zulässig; sie ist auch gebräuchlich.

Für die erste Annahme kann dem Mauerprofil eine mittlere Breite gegeben werden, die bei druckreicher Hinterfüllung etwa  $\frac{h}{3}$ , bei weniger starkem Drucke der Hinterfüllung  $\frac{h}{4}$  mißt.

### VI. § 9. Futtermauern.

Die Kohäsion des Einschnittmaterials ist bei der in VI. § 5 A erörterten Bestimmung des Erddruckes nicht in Rechnung gezogen; bei Futtermauern kommt sie zur Geltung.

Die Futtermauern werden entweder bis zur Terrainoberfläche geführt (s. Bild 39 Taf. IV) oder wird über der Mauerkrone eine Böschung (s. Bild 40 Taf. IV) hergestellt.

Die Mauern können wegen Herstellung der Grabarbeit an der Rückseite keine Abfälle haben, noch eine Neigung besitzen, bei welcher die zu stützenden Erdmassen überhangend abgegraben werden müßten. Die Mauerprofile haben häufig in gleicher Richtung gegen die Erdmasse hin geneigte Wandflächen, welche sogar gekrümmt sein können, auch lehnen sich vielfach die Mauern gegen die feste Erde und wären ohne deren Gegendruck nicht standfähig (s. Bild 39 Taf. IV). Hinterschnittene Profile kommen namentlich auch bei Futtermauern zur Anwendung.

### VI. § 10. Ufermauern etc.

Diese Mauern sind, abgesehen von der Last der auf ihnen allenfalls ruhenden Gebäude etc., vom Wasserdruck und Erddruck in Anspruch genommen. Die Profile sind meist trapezförmig und haben Anläufe nach beiden Seiten aus demselben Grunde, wie die Bassinmauern in VI. § 7, wenn sie sich nicht gegen vorhandenes festes Ufer lehnen, Bild 41 Taf. IV.

Die in VI. § 7 angegebenen Berechnungsarten sind für drei Fälle durchzuführen, nämlich:

1. Für die unbelastete Mauer mit Erddruck bei Niederwasser. ( $NW = 0$  am ungünstigsten.) Bild 42 Taf. IV.
2. Für Wasserdruck durch Hochwasser ohne Erdhinterfüllung. Bild 43 Taf. IV.
3. Für die belastete Mauer mit Erdhinterfüllung bei Hochwasser. Bild 44 Taf. IV.

Der Reibungswinkel  $\varphi'$  in VI. § 5 ist dabei meist gleich Null zu setzen, da die Erdhinterfüllung mehr oder weniger naß und schlüpfrig ist. Es wird stets verlangt, daß in keinem Fall auf der Wasserseite der Mauer Zugspannungen auftreten, während zulässig sein kann, daß bei  $NW$  auf der Erdseite mäßige Zugspannungen ( $1-1\frac{1}{2}$  kg/qcm) sich einstellen.



## B. Berechnung von Gewölben. (§ 11—17.)

### I. Tonnengewölbe. (§ 11—14.)

#### VI. § 11. Beliebiges Tonnengewölbe durch eine Einzellast belastet.

Es sei zunächst vom Eigengewicht des Gewölbes abgesehen. Die auf das Gewölbe wirkende Kraft  $P'$  (s. Bild 45 Taf. IV) verursacht in den Kämpferfugen A und B schiefgerichtete Kämpferdrücke  $K'_a$  und  $K'_b$ ; die diesen Drücken gleich großen und ihnen entgegengesetzt wirkenden Kämpferwiderstände müssen der angreifenden Kraft  $P'$  Gleichgewicht halten. Von den Kämpferwiderständen ist je die Lage, Größe und Richtung unbekannt. Man hat also  $2 \cdot 3 = 6$  Unbekannte und doch nur 3 Gleichgewichtsbedingungen, man ist also nicht imstande, die Kämpferdrücke ohne weiteres anzugeben.

Zur Feststellung der Lage und Richtung des Kämpferdrucks können nun 2 Punkte B und C (s. Bild 46 Taf. V) dienen, von welchen angenommen wird, oder vermöge ihrer Konstruktion angenommen werden muß, daß der Fugendruck  $S'_c$  und der Kämpferdruck  $K'_b$  durch sie gehen.

An dem rechtsseitigen Gewölbeteil (s. Bild 47 V) wirkt alsdann die durch C gehende Kraft  $S'_c$  und die durch B gehende Kraft  $K'_b$ . Da dies die einzigen Kräfte an dem im Gleichgewicht befindlichen Gewölbeteil sind, so müssen sie unter sich im Gleichgewicht sein und also in der Geraden BC wirken. Die Lage von  $K'_b$  ist nunmehr bestimmt, denn  $P'$ ,  $K'_a$  und  $K'_b$  müssen sich in einem Punkt schneiden, weil sie ein Gleichgewichtssystem bilden.  $K'_b$  und  $P'$  schneiden sich in O; sobald daher Punkt A, durch welchen der Kämpferdruck  $K'_a$  gehen muß, angenommen oder bekannt ist, ist auch die Lage und Richtung von  $K'_a$  bekannt (s. Bild 48) und es ist mittels des Kräfteparallelogramms schließlich leicht  $K'_a$  und  $K'_b$  zu bestimmen. Bild 49 V. Der Fugendruck  $S'_c$  muß gleich und entgegengesetzt dem Kämpferdruck  $K'_b$  sein, wie schon oben nachgewiesen wurde (s. Bild 47).

Durch die vorstehende Entwicklung kommt man nun zu der Schlussfolgerung, daß es nötig ist, im Gewölbe 3 Punkte anzunehmen oder herzustellen, durch welche die Drücke gehen müssen, um die Aufgabe der Berechnung des Gewölbes zu einer bestimmten zu machen.

Ist auch der rechtsseitige Gewölbeteil belastet (s. Bild 50), so denkt man sich jetzt zunächst den linksseitigen unbelastet und bestimmt den durch die rechtsseitige Last  $P''$  erzeugten Kämpferdruck  $K''_a$  und  $K''_b$  nach der gleichen Konstruktion, wie oben für  $P'$  bzw.  $K'_a$  und  $K'_b$  geschehen ist. Setzt man  $K'_a$  und  $K''_a$  zu  $K_a$ , sowie  $K'_b$  und  $K''_b$  zu  $K_b$  zusammen, so sind  $K_a$  und  $K_b$  die Kämpferdrücke infolge der Belastung durch  $P'$  und  $P''$ .

Der Fugendruck  $S'_c$  infolge der Belastung  $P'$  und  $P''$  ergibt sich als Resultierende aus  $K'_a$  und  $K'_b$ , weil  $K'_b$  den durch  $P'$  erzeugten Druck und  $K'_a$  den durch  $P''$  erzeugten Druck in der Fuge C angibt (vgl. Bild 47 und 50).

#### VI. § 12. Beliebiges Tonnengewölbe mit beliebigen Kräften belastet.

Man denke sich das Gewölbe, in welchem 3 Punkte A, C, B entsprechend der in § 11 angegebenen Bedingung festgestellt seien, in einzelne Teile zerlegt (s. Bild 51), welche je eine Gruppe von Gewölbesteinen umfassen und die auf jeden Teil wirkenden äußeren Kräfte mit dem Eigengewicht des Gewölbeteiles zu einer Zwischenresultierenden zusammengesetzt, deren

Größe sei  $p'_1, p'_2$  bezw.  $p''_1, p''_2, p''_3 \dots$  (f. Bild 52). Die Konstruktion dieser Resultierenden ist nicht wie in Bild 50 mittels Kräfteparallelogramms in der Gewölbefigur selbst, sondern seitlich im Kräfteplan Bild 53 mittels der Kräftedreiecke erfolgt. Nun betrachtet man zunächst wieder nur eine Gewölbhälfte, z. B. die linksseitige, und setzt sämtliche Zwischeneresultierende  $p'_1, p'_2 \dots$  zu einer Gesamteresultierenden  $P'$  zusammen.  $P'$  vertritt alle  $p'_1, p'_2 \dots$  und man kann jetzt genau nach dem vorhergehenden § 11 den Kämpferdruck  $K'_a$  bei A und den Fugendruck  $S'_c$  bei C, bezw.  $K'_b$  bei B ermitteln, welche erzeugt werden von  $P'$ , d. h. also von  $p'_1, p'_2 \dots$  zusammen, somit auch von den ursprünglich gegebenen Kräften einschließlich des Eigengewichtes u. s. w.

Anstatt dabei die in Bild 49 und 50 eingezeichneten Kräfteparallelogramme zu verwenden, kann man auch, wie in Bild 53 geschehen ist, das Kräftedreieck aus  $P$  und den Richtungen der Drücke in A und C und B verwenden. In ganz gleicher Weise läßt sich mit der anderen Gewölbhälfte verfahren und aus der Gesamteresultierenden  $P''$  auch für sie der Druck  $S''_c$  in Fuge C, bezw.  $K''_b$  in Fuge B ermitteln. Die Resultierende der in jeder Fuge auftretenden Drücke ergibt alsdann den gesamten auf diese Fuge wirkenden Druck, also bezw.  $K_a, S_c, K_b$ . Es handelt sich in der Regel nicht bloß um die Kräfte  $K_a, K_b$  und  $S_c$ , sondern man will sich von dem Druck in irgend einer beliebigen Fuge, d. h. von der Standfähigkeit des ganzen Gewölbes überzeugen. Dazu führt folgendes:

Zur Konstruktion der Gesamteresultierenden  $P'$  diene ein beliebiges Seilpolygon mit beliebigem Pol  $O'$ , Bild 53. Denkt man sich weiter ein Seilpolygon, dessen äußerste Seiten  $S_c$  und  $K_a$  sind, so ist der zu demselben gehörige Pol  $O$  zu finden durch Parallelen mit  $S_c$  und  $K_a$ , welche durch den Anfangs- und Endpunkt des Kräftepolygons Bild 53 gelegt werden, und es wird das Seilpolygon zu Pol  $O$  zwischen  $S_c$  und  $K_a$  verlaufen müssen, da es dieselbe Resultierende  $P'$  liefern muß. Die äußersten Seilspannungen dieses Seilpolygons sind aber nach der Lage, Größe und Richtung übereinstimmend mit dem Kämpferdruck  $K_a$  und dem Fugendruck  $S_c$ . Man kann sich daher das Gewölbe als eine Verwirklichung des neuen Seilpolygons, welches umgekehrt als Stangenpolygon zu denken ist, vorstellen, so daß also die Gewölbesteine an Stelle der mathematischen Linien des Seilpolygons treten und den in diesen Linien herrschenden Druck aufnehmen. Dieses Seilpolygon hat daher den Namen Drucklinie des Gewölbes erhalten. Der Druck wird für jede Fuge angegeben durch die Größe desjenigen von  $O$  in Bild 53 ausgehenden Polstrahles, welcher parallel zu der von jener Fuge getroffenen Seilpolygonseite ist. Dieser Polstrahl ist mit dem Kräftemaßstab, in welchem das Kräftepolygon aufgetragen wird, zu messen. Es ist also z. B. der Fugendruck in Fuge DD Bild 52 gleich  $S_a$  in Bild 53; ebenso in Bild 55 und 56.

Die Drucklinie muß den in VI. § 1 aufgestellten Bedingungen genügen, wenn das Gewölbe standfähig sein soll, und wir können der dritten Bedingung auf Grund von VI. § 2 die weitere Beschränkung hinzufügen, daß die Drucklinie stets im mittleren Drittel des Gewölbequerschnittes verlaufen muß.

Die Stützlinie des Gewölbes würde man durch Verbindung der aufeinanderfolgenden Schnittpunkte der Fugen mit der Drucklinie erhalten; die Einzeichnung dieser Stützlinie unterbleibt in der Regel, da dieselbe mit der Drucklinie sehr nahe zusammenfällt.

## VI. § 13. Gewölbe und Belastung symmetrisch zur vertikalen Scheitelachse.

Aus VI. § 11, sowie aus Bild 50—53 Taf. V, ist leicht zu ersehen, daß in diesem Fall  $K'_a = K''_a = K'_b = K''_b$ , also auch  $K_a = K_b = K$  werden muß, wenn der Punkt C in die Scheitelfuge gelegt wird. Der Scheiteldruck  $S_c$  muß ferner horizontal werden, weil er die Resultierende zweier gegen den Horizont gleich geneigter, gleich großer Kräfte  $K''_a$  und  $K'_b$  ist. Unter solchen Umständen genügt es, eine Gewölbehälfte der Berechnung zu unterziehen, und es sei hier gleich der besondere Fall betrachtet, welcher in der Praxis am häufigsten vorkommt:

### Gewölbe und Belastung symmetrisch zur vertikalen Scheitelachse, alle Lasten vertikal.

Man denke sich das Gewölbe samt Belastung in vertikale Streifen geteilt (gewöhnlich 1 m breit) und denke sich das Gewicht jedes Streifens in dessen Schwerpunktsvertikalen angreifend (s. Bild 54 Taf. V). Die Bestimmung dieses Gewichtes, sowie die fernere Berechnung vereinfacht sich bei großen Gewölben, wenn man in der Zeichnung die Belastung des Gewölbes durch Aufmauerung von gleichem spezifischem Gewicht, wie das Gewölbegemäuer, ersetzt. Dies geschieht folgendermaßen: Ist z. B. über dem Gewölbe, welches das spezifische Gewicht 2,2 habe, Ankengemäuer vom spezifischen Gewicht 1,8 vorhanden, so drückt dasselbe auf 1 qm seiner Unterlage, dort wo es H m hoch ist, mit  $1,0 \cdot 1,0 \cdot H \cdot 1,8 = p$  Tonnen. Es soll nun durch einen Mauerkörper ersetzt werden, dessen Höhe h und dessen spezifisches Gewicht 2,2 beträgt, also muß sein:  $1,0 \cdot 1,0 \cdot h \cdot 2,2 = p$ , somit  $1,0 \cdot 1,0 \cdot H \cdot 1,8 = 1,0 \cdot 1,0 \cdot h \cdot 2,2$  und hieraus  $H \cdot 1,8 = h \cdot 2,2$  oder  $H : h = 2,2 : 1,8$ , d. h. die Höhen verhalten sich umgekehrt, wie die spezifischen Gewichte beider Mauerarten; man erhält also  $h = \frac{1,8}{2,2} H$ .

Ruht auf dem Ankengemäuer Schlacke vom spezifischen Gewicht 1,2, so muß auch diese ersetzt werden durch Mauerwerk vom spezifischen Gewicht 2,2 und es ist daher deren Höhe  $H'$  zu reduzieren auf  $h'$ , ebenfalls im umgekehrten Verhältnis der spezifischen Gewichte, also wird an jeder Stelle  $h' = \frac{1,2}{2,2} H'$ .

Lastet noch eine Nutzlast z. B. 750 kg/qm über dem Gewölbe, so ist auch diese ersetzt zu denken durch eine Mauerfläche von solcher Höhe  $h_2$ , daß gleiche Belastung pro qm sich ergibt; also muß sein:  $1,0 \cdot 1,0 \cdot h_2 \cdot 2,2 = 0,75 \text{ t}$   $h_2 = \frac{0,75}{2,2} = 0,34 \text{ m}$ . Auf diese Weise erhält man die in Bild 54 angedeutete Belastungslinie „— . — . — . — . — . —“.

Bei kleineren Gewölben ist die Konstruktion dieser Belastungslinie in der Regel entbehrlich.

Nach diesen vorbereitenden Arbeiten, bei welchen die Lasten, sobald das Gewölbe auf seine ganze Länge gleichartig belastet ist, gewöhnlich für 1 m Gewölbelänge berechnet werden, kann die Lage der Resultierenden P aller Lasten samt Eigengewicht mittels des ersten Seilpolygons konstruiert werden (s. Bild 55 Taf. V). Der demselben zu Grunde liegende Pol O' (Bild 56 Taf. V) wird in passender Weise auf der Horizontalen durch den Anfangspunkt des Kräftepolygons genommen, da sich daraus später Vereinfachungen der Zeichnung ergeben. (Das Kräftepolygon selbst wird gerade, weil nur vertikale Lasten vorhanden sind.) Nachdem P gefunden ist, konstruiert man nach dem vorigen Paragraphen weiter, wobei sich insofern eine Vereinfachung ergibt, als von Anfang an bekannt ist, daß der Scheiteldruck  $S_c$  horizontal wirkt.

Der Pol  $O$  des zweiten Seilpolygons ergibt sich durch Parallelen mit  $S_c$  und  $K$ , welche durch Anfangs- und Endpunkt des Kräftepolygons gezogen werden, er liegt also, da  $S_c$  horizontal ist, auch auf der Horizontalen durch den Anfangspunkt des Kräftepolygons, und es ergibt sich hieraus die Möglichkeit, das zweite Seilpolygon, welches in das Gewölbe hineinfällt und durch die angenommenen Punkte  $A$  und  $C$  gehen muß, entweder direkt aufzuzeichnen oder vom ersten Polygon unmittelbar abzuleiten:

Man verlängert nämlich die Seiten des ersten Polygons, Bild 55, (und zwar sofort beim Aufzeichnen) bis zum Schnitt mit der horizontalen äußersten Polygonseite. Diese Schnitte sind auf den horizontalen Scheiteldruck  $S_c$  hinauf zu projizieren und nunmehr der dem Kämpferdruck  $A$  am nächsten liegende projizierte Schnittpunkt  $a$  mit  $A$  zu verbinden. Den Schnitt von  $Aa$  mit der nächstfolgenden Kraft  $p_5$  verbindet man alsdann mit dem nächstprojizierten Schnittpunkt, ferner den Schnitt dieser Verbindungslinie und  $p_4$  mit dem übernächsten  $\alpha$  und erhält dadurch das zweite Seilpolygon genauer, als wenn man dasselbe für sich allein konstruiert hätte.

Soll der Druck in einer beliebigen Fuge  $DD$  bestimmt werden, so zieht man, wie schon in VI. § 12 gezeigt, im Kräftepolygon durch Pol  $O$  eine Parallele mit derjenigen Seite des Seilpolygons, welche von  $DD$  getroffen wird. Die Länge dieses Polstrahles  $S_a$  gibt alsdann die Größe des Fugendrucks an; dessen Richtung ist im allgemeinen nicht senkrecht zur Fuge  $DD$ , weicht jedoch in praktischen Fällen so wenig von der Senkrechten ab, daß die Normalkomponente bei Berechnung der Beanspruchung gleich dem Fugendruck selbst gesetzt werden kann. Die Horizontalkomponente  $H$  des Kämpferdruckes  $K$ , sowie eines jeden Fugendrucks, wird gleich dem Scheiteldruck  $S_c$ . Man nennt diese Größe einfach den Gewölbeschub, da das Widerlager in horizontalem Sinne dieser Kraft Widerstand zu leisten hat, um nicht beiseite geschoben zu werden.

Im vorstehend behandelten besonderen Fall wählt man den Angriffspunkt des Scheiteldruckes entweder im oberen Drittel der Scheitelfuge, oder in der Fugenmitte und dementsprechend nimmt man beim Kämpferdruck das untere Drittel, oder die Fugenmitte der Kämpferfuge als Angriffspunkt. Erfüllt die Drucklinie die in VI. § 1 gegebenen und im vorigen § 12 erweiterten Bedingungen für eine dieser Annahmen, so kann man das Gewölbe als standfähig ansehen.

## VI. § 14. Über die Drucklinie in Gewölben.

Aus VI. § 11—13 geht hervor, daß für ein Gewölbe beliebig viele Drucklinien konstruiert werden können, je nachdem man die Punkte  $A$   $C$   $B$  verschieden wählt. Es ist daher notwendig, den Einfluß der Lage dieser Punkte zu kennen, um danach beurteilen zu können, welche Annahmen für diese Punkte in jedem einzelnen Berechnungsfall zu machen sind, falls diese Punkte nicht ein für allemal durch besondere Konstruktionen im Gewölbe festgestellt sind. Zu diesem Zweck nehmen wir der Einfachheit halber ein Gewölbe mit horizontalem Scheiteldruck an. Die Resultierende aller äußeren Kräfte einschließlich des Eigengewichtes sei  $P$  (s. Bild 57 Taf. V). Liegt Punkt  $C$  in der Scheitelfuge hoch, während Punkt  $A$  in der Kämpferfuge gegen die Gewölbeleibung gerückt ist, so ergibt sich eine steile Richtung des Kämpferdruckes  $K$  und infolgedessen aus dem Kräfteplan, Bild 58, sowohl ein kleiner Wert für  $K$ , als auch für  $H$ ; der Gewölbeschub erreicht seinen kleinsten Wert  $H_{\min}$ . Ist dagegen umgekehrt

C in der Scheitelfuge der Gewölbeleibung nahe und A in der Kämpferfuge beim Gewölberücken gelegen, so wird  $K_{\max}$  und  $H_{\max}$  erhalten; der Gewölbeschub erreicht seinen größten Wert. Man nennt dementsprechend die zuerst erhaltene Stützlinie die Minimal-Drucklinie, die im zweiten Falle sich ergebende die Maximal-Drucklinie.

Der steilere Verlauf der Minimal-Drucklinie weist darauf hin, daß zur Erzielung geringen Gewölbeschubes in erster Linie eine große Pfeilhöhe des Gewölbes, d. h. eine starke Sprengung desselben nötig wird.

Sind keine besonderen Konstruktionen zur Feststellung der Punkte A C B ausgeführt, so wird die tatsächlich eintretende Stützlinie bedingt hauptsächlich durch die Senkung und Hebung des Gewölbescheitels, durch das Ausweichen der Widerlager oder durch Zusammenrücken derselben infolge des Erddruckes u. dergl. Bei der Berechnung legt man die Punkte A C B nicht an den Umfang des Gewölbeprofils, sondern nur bis an die Grenze des mittleren Drittels der Fuge (s. Bild 59 Taf. V).

Häufig werden die Punkte A und B nicht in den Kämpferfugen, sondern in den Bruchfugen festgelegt, so namentlich bei Spitzbogen und Halbkreisgewölben, sowie bei Brückengewölben, welche sich bis auf die Fundamentsohle fortsetzen (s. Bild 70 und 71). In letzterem Fall kann es vorkommen, daß die Drucklinie im unteren Teil des Gewölbes das mittlere Drittel der Fugenbreite verläßt (s. Bild 60 Taf. V); dies bringt jedoch keinen Schaden, weil die große Fugenbreite daselbst nicht hauptsächlich zur Erzielung geringer Beanspruchung angeordnet ist, sondern um überhaupt nur den Verlauf der Drucklinie innerhalb des Profils zu ermöglichen.

Über die Konstruktion der einen oder andern Drucklinie siehe bei Berechnung der Pfeiler und Widerlager VI. § 18. In Bild 55 ist das innerhalb des Gewölbes verlaufende Seilpolygon von dem zur Bestimmung von P dienenden Seilpolygon abgeleitet. Diese Ableitung ist in jedem Fall möglich, wie die Bilder 72 und 73 zeigen.

Beispiel 120. Die eine Hälfte eines Lagerhauses wurde schon beim Bau unterkellert. Das rechtsseitige Widerlager des Kellergewölbes hätte nach dem Entwurf als Mittelpfeiler nach den punktierten Umrißlinien ausgeführt werden sollen, so daß die Unterkellerung der

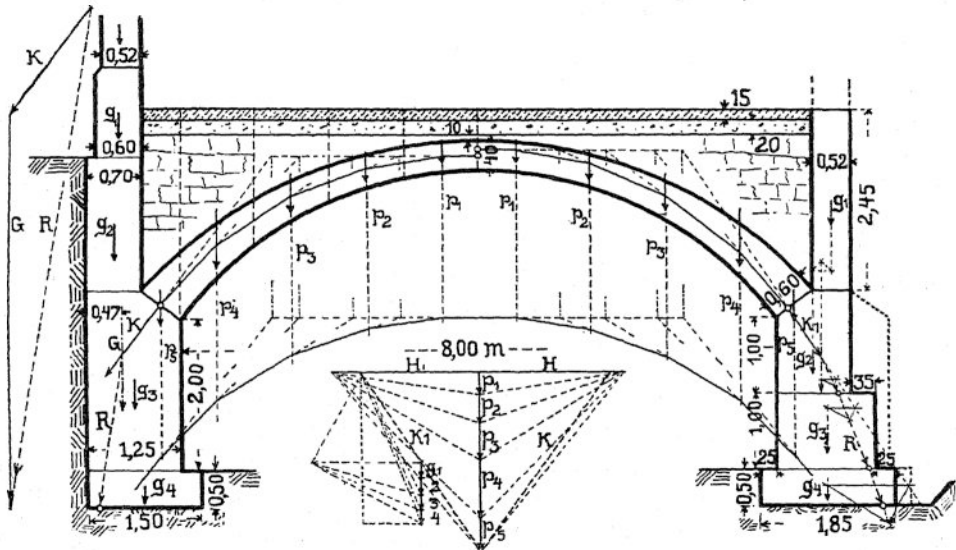


Bild 1.

andern Hälfte erleichtert worden wäre. Dies ist nicht geschehen, die Ausführung geschah mit Abtreppungen auf der Erdseite. Es ist nun zu untersuchen, ob die auf dem Kellerwiderlager stehende Zwischenwand trotzdem abgebrochen und das Widerlager freigelegt werden kann. Ferner ist zu untersuchen, wie groß die Belastung des linksseitigen Widerlagers sein müßte, wenn der Stützpunkt in der Fundamentsohle noch mindestens 10 cm von der Fundamentaufenkante entfernt bleiben soll. Die Nutzlast über dem Gewölbe übersteigt 150 kg/qm nicht, ihre Fernhaltung über die Dauer des Umbaues sollte womöglich nicht nötig werden.

Aufl. Man denkt sich jede Gewölbehälfte durch Vertikalebene vom Scheitel ausgehend in 1 m breite Streifen zerlegt, dann ergibt sich über der Kämpferfuge noch ein 0,50 m breiter Streifen. Zur Berechnung der Gewichte dieser Streifen kann man annehmen, daß das Gewölbegemäuer 2,2 t/cbm, das Anfüngemäuer 2,0 t/cbm, die Schlackenauffüllung 1,2 t/cbm und der Betonboden 2,0 t/cbm wäge. Die Berechnung erfolgt für 1 m Gewölbeleibungslänge. Man erhält

	Gewölbe	Anfen	Schlacken	Boden	Nutzlast	Gesamtlast tfd./m
P <sub>1</sub>	1,0 · 0,40 · 2200 = 880 kg	1,0 · 0,12 · 2000 = 240 kg	240 kg	300 kg	150 kg	1810 kg
P <sub>2</sub>	1,0 · 0,46 · 2200 = 1000 kg	1,0 · 0,27 · 2000 = 540 kg	240 kg	300 kg	150 kg	2230 kg
P <sub>3</sub>	1,0 · 0,54 · 2200 = 1200 kg	1,0 · 0,62 · 2000 = 1240 kg	240 kg	300 kg	150 kg	3130 kg
P <sub>4</sub>	1,0 · 0,75 · 2200 = 1650 kg	1,0 · 1,22 · 2000 = 2440 kg	240 kg	300 kg	150 kg	4780 kg
P <sub>5</sub>	0,5 · 0,45 · 2200 = 495 kg	0,5 · 1,85 · 2000 = 1850 kg	120 kg	150 kg	75 kg	2690 kg
						14 640 kg.

Diese Gewichtsteile werden als Kraftstrecken in einem Kräftepolygon aufgezeichnet, sodann beiderseits auf der Horizontalen durch den Anfangspunkt desselben beliebige Pole angenommen und nun die Hilfsseilpolygone unterhalb des Gewölbes gezeichnet. Die Schnittpunkte der Rückwärtsverlängerungen der Seilpolygonseiten mit den ersten wagrechten Seilpolygonseiten werden auf die Richtungslinie der Scheiteldrücke nach oben projiziert und hierauf, ausgehend von den Angriffspunkten im Kämpfer, die Drucklinien in das Gewölbe eingezeichnet. Für die linksseitige Gewölbehälfte sind die Angriffspunkte des Scheiteldruckes und des Kämpferdruckes in der Fugenmitte angenommen, für die rechtsseitige Gewölbehälfte wurde angenommen der Scheiteldruck greife im oberen Fugendrittel, die Resultierende des Kämpferdruckes im inneren Fugendrittel an.

Die Belastungen des rechtsseitigen betonierten Widerlagers sind nach Beseitigung des oberhalb des Lagerhausbodens befindlichen Teiles der Zwischenwand noch

$$g_1 = 1,00 \cdot 0,52 \cdot 2,45 \cdot 2200 = 2800 \text{ kg} \quad g_2 = 1,00 \cdot 1,00 \cdot 1,30 \cdot 2300 = 3000 \text{ kg}$$

$$g_3 = 1,00 \cdot 1,35 \cdot 1,00 \cdot 2300 = 3100 \text{ kg} \quad g_4 = 1,00 \cdot 1,85 \cdot 0,50 \cdot 2300 = 2130 \text{ kg.}$$

Diese Kräfte sind zeichnerisch mit dem Kämpferdruck zusammengesetzt worden. Um das Kräftepolygon und die Polstrahlen noch auf der Abbildung unterzubringen, wurde der Kräftemaßstab nur halb so groß gewählt, die Anreihung mußte dementsprechend in dem Mittelpunkt des Kämpferdruckes geschehen, s. linker Teil des Kräfteplanes. Der Stützpunkt in der Zwischenfuge liegt 17 cm, in der Fundamentfuge 11 cm und in der Fundamentsohle 18 cm von der Außenseite entfernt. Der Scheiteldruck wird 9700 kg, der Kämpferdruck 17 700 kg. Die Vertikaldrücke im Widerlager werden für die Zwischenfuge  $\Sigma p + g_1 + g_2 = 14 600 + 2800 + 3000 = 20 400 \text{ kg}$ , für die Fundamentfuge  $20 400 + g_3 = 23 500 \text{ kg}$  und für die Fundamentsohle  $23 500 + 2130 = 25 600 \text{ kg}$ . Anstatt diese Kräfte zu rechnen, hätte man sie auch aus

dem Kräfteplan abmessen können. Die Beanspruchungen entlang der den Stützpunkten benachbarten Mauerkanten werden: im Gewölbescheitel  $2 \cdot \frac{9700}{40 \cdot 100} = 4,9 \text{ kg/qcm}$ ; im Gewölbekämpfer  $2 \cdot \frac{17700}{60 \cdot 100} = 5,9 \text{ kg/qcm}$ , in der Zwischenfuge  $2 \cdot \frac{20400}{3 \cdot 17 \cdot 100} = 8,0 \text{ kg/qcm}$ ; in der Fundamentfuge  $2 \cdot \frac{23500}{3 \cdot 11 \cdot 100} = 14,3 \text{ kg/qcm}$  und für den Baugrund in der Fundamentsohle  $2 \cdot \frac{25600}{3 \cdot 18 \cdot 100} = 9,5 \text{ kg/qcm}$ .

Bei sehr festem Untergrund und genügender Erhärtung des Betons kann demnach die Freilegung des Widerlagers nach Abbruch der Zwischenwand gewagt werden. Die Freilegung sollte aber nur in kürzeren Stücken von etwa 2—3 m Länge, feinenfalls auf die ganze Ausdehnung erfolgen.

Die Belastungen links sind von unten nach oben berechnet

$$g_4 = 1,00 \cdot 1,50 \cdot 0,50 \cdot 2300 = 1700 \text{ kg} \quad g_3 = 1,00 \cdot 2,30 \cdot 1,25 \cdot 2300 = 6700 \text{ kg}$$

$$g_2 = 1,00 \cdot 0,75 \cdot 1,80 \cdot 2300 = 3100 \text{ kg} \quad g_1 = 1,00 \cdot 0,60 \cdot 1,20 \cdot 2300 = 1650 \text{ kg}$$

Der Abstand der Resultierenden dieser Gewichte von der Fundamentaufenkante wird

$$\frac{1700 \cdot 75 + 6700 \cdot 62,5 + 3100 \cdot 35 + 1650 \cdot 40}{1700 + 6700 + 3100 + 1650} = 55 \text{ cm}$$

Verbindet man den Schnittpunkt der Richtungslinie dieser Resultierenden oder besser einer um ein paar cm mehr links liegenden Vertikalen und des Kämpferdruckes mit der in der Aufgabe genannten Grenzlage des Stützpunktes und zieht mit dieser Verbindungslinie in dem links gezeichneten Kräfteplan eine Parallele, so ergibt diese die Größe  $G = 53 \text{ t}$ , welche die Gesamtbelastung haben müßte, damit die Resultierende für die Fundamentsohle durch den angenommenen Stützpunkt geht. Die Gebäudelast müßte somit auf den lfd. m  $53 - 13 = 40 \text{ t}$  betragen, sie würde das Backsteingemäuer in der Fuge über dem Sockel mit  $40000 : (52 \cdot 100) = 7,7 \text{ kg/qcm}$  beanspruchen. Die Resultierende der Gesamtbelastung verschiebt sich gegen die Erdwand, ihr Abstand wird  $\frac{1700 \cdot 75 + 6700 \cdot 62,5 + 3100 \cdot 35 + 1650 \cdot 40 + 40000 \cdot 44}{53150}$

$= 47 \text{ cm}$ . Ist der Unterschied dieses Maßes gegenüber dem nach obigem schätzungsweise angenommenen Abstand der Vertikalen so geringfügig, daß er in der Zeichnung nicht mehr zum Ausdruck kommt, so kann die Aufgabe als erledigt betrachtet werden, andernfalls führt eine Wiederholung der Konstruktion mit einer neuen Verbindungslinie sicher genügend genau zum Ziel. Die Beanspruchung des Baugrundes entlang der Fundamentaufenkante würde  $2 \cdot \frac{53000}{3 \cdot 10 \cdot 100} = 35 \text{ kg/qcm}$ .

Es ist in der Regel unwahrscheinlich, daß eine so große Gebäudelast vorhanden sein wird und es ist ebenso unwahrscheinlich, daß der Baugrund so hohe Beanspruchung erleidet; trotzdem ist die gezeichnete Konstruktion standfähig, wenn diese Last vorhanden wäre, weil der passive Gegendruck des gewachsenen Bodens wachgerufen wird und die Resultierende infolgedessen besser in der Mitte des Widerlagers verläuft.

## II. Kreuzgewölbe.

### VI. § 15. Kreuzgewölbe mit Lagerfugen parallel zu den Kappenachsen.

Die Kappen verspannen sich hier in senkrechter Richtung zu ihren Achsen und man denkt sich dieselben durch vertikale, senkrecht zu den Kappenachsen gestellten Ebenen  $AA_1$ ,  $BB_1$  zc. in

gleich breite Gewölbestreifen zerlegt (s. Bild 61 Taf. V). Diese Streifen sind für sich Tonnen-  
gewölbe. Ihre Widerlager sind die Gratbögen.

Es muß nun zunächst jeder Streifen für sich im Gleichgewicht sein. Man führt die  
Berechnung der Streifen für denjenigen Streifen mit größter Spannweite, d. h. für denjenigen  
an der Gewölbefirne, nach VI. § 13 durch. Hieraus ergibt sich nach der Berechnung des  
Streifens  $ABA_1B_1$ , dessen Kämpferdrücke in dem vorhergehenden Streifen als Fugendrücke  
schon aufgetreten sind.

Sodann müssen die Gratbögen imstande sein, die Drücke aufzunehmen, welche von diesen  
Streifen auf sie ausgeübt werden, um dieselben auf die Umfassungsmauern zu übertragen.

Pfeiler in diagonaler Stellung sind also aus statischen Gründen erforderlich, weil die  
über die Diagonalen verlaufenden Gratbögen sich gegen die Ecken stützen.

### VI. § 16. Kreuzgewölbe mit schwalbenschwanzförmigem Verband.

Die Gräte werden hier als selbständige Bögen ausgeführt und die Lagerfugen der einzelnen  
Kappenwölbhichten parallel den Gräten angeordnet (s. Bild 62 Taf. V).

Will man die Kappen durch Ebenen wieder in voneinander unabhängige Gewölbestreifen  
zerlegen, so müssen die Teilebenen  $AB, A_1B_1$  senkrecht zu den Gratbögen stehen. Man kann  
dieselben der Einfachheit halber durch Lotrechte Ebenen ersetzen, deren Spuren senkrecht auf der  
Horizontalprojektion der Gräte stehen. Die innerhalb des Vierecks  $MNOP$  gelegenen Ge-  
wölbestreifen der Kappenhälften stützen sich einerseits auf den Gratbogen und begegnen anderer-  
seits im Scheitel den entsprechenden Bögen der zweiten Kappenhälfte. Den außerhalb  $MNOP$   
gelegenen Gewölbestreifen, welche als halbe Spitzbögen auftreten, dienen teils Grat-, teils  
Stirnbogen als Widerlager.

Man erhält die Stützlinie sämtlicher genannter Gewölbestreifen und deren Widerlager-  
drücke, wenn man für den bis zur Scheitelfappe verlängert gedachten Gewölbebogen  $A_{n-1}$   
 $B_{n-1}, A_nB_n$  die Berechnung durchführt.

Dem Stirnbogen kommt daher bei diesem Kreuzgewölbe die Aufgabe eines Widerlagers  
zu, was beim vorhergehenden nicht der Fall war. Er hat also gegen Umfanten und Ver-  
schieben Widerstand zu leisten. Schließt sich an den Stirnbogen ein weiteres Kreuzgewölbe  
von gleicher Größe und Konstruktion an, so halten sich die Horizontalkomponenten der von  
beiden Seiten auf den Stirnbogen wirkenden Kräfte das Gleichgewicht.

Anm. 1. Näheres s. Wittmann, Statik der Hochbaukonstruktion.

Anm. 2. Bei den bis hieher betrachteten Gewölben waren die Gewölbesteine stets noch  
prismatisch und haben nur durch ihre Lagerfugen Drücke übertragen (vgl. VI. § 17).

### III. Kuppelgewölbe.

#### VI. § 17. Die Druckverhältnisse in Kuppelgewölben.

Das Kuppelgewölbe unterscheidet sich von den bisher behandelten Gewölbeformen statisch  
dadurch, daß es nicht in Elemente zerlegt werden kann, deren Standfähigkeit von dem  
Zusammenhang mit den angrenzenden Gewölbeteilen unabhängig ist.

Jeder durch Meridianebenen  $AA_1, BB_1$  begrenzte Gewölbeteil (s. Bild 63 und 64  
Taf. V) kann nur durch die gleichzeitigen Widerstände der angrenzenden Gewölbeteile im



Gleichgewicht gehalten werden, nicht aber für sich im Gleichgewicht sein; denn es ist entweder bei geschlossenen Kuppeln Bild 63 im Scheitel C die Fläche, nach welcher sich beide Gewölbe-  
teile A B C und  $A_1 B_1 C$  stützen sollten, gleich Null, also kann kein Gegendruck stattfinden; oder ist bei offenen Kuppeln (Bild 64 Taf. V) zwar eine Fläche DD vorhanden, aber keine gegen dieselbe drückende Kraft, da die andere Endfläche  $D^1 D^1$  von DD um den Durchmesser der Öffnung absteht.

Man hat daher den Gleichgewichtszustand jedes Steines oder einzelner Gruppen von Steinen in einem horizontalen Ringe zu betrachten. Jeder Stein wird auf seine Lagerfuge gepreßt, sucht auf derselben abzugleiten und übt deshalb in den Stoßfugen Drücke auf die benachbarten Steine desselben horizontal verlaufenden Gewölberinges aus, da ihn diese an seiner Bewegung hindern. Jeder Ring verspannt sich also selbst. Ein Lehrgerüste ist nicht notwendig.

Ruht bei einer offenen Kuppel noch eine Laterne auf dem obersten Ringe, so kommt in erster Linie die Widerstandsfähigkeit des Materiales, aus welchem der oberste Ring besteht, in Betracht, indem in dessen Stoß- und Lagerfugen hauptsächlich die Pressungen durch das Laternengewicht sich geltend machen (vgl. VI. § 16).

In Fortsetzung von VI. § 16 ist zu sagen, daß die Steine der Kuppelgewölbe pyramidal geformt sind und sowohl in ihren Lagerfugen, als auch in ihren Stoßfugen Drücke übertragen.

Die Art der Druckübertragung ist für beide Steinformen am deutlichsten zu erkennen, wenn man sich die Wirkung einer Kraft vorstellt, die auf den Gewölbesteин, gegen die Gewölbeleibung hin, wirkt.

## C. Berechnung der Pfeiler und Widerlager.

### VI. § 18. Die Belastungen der Pfeiler und Widerlager.

Es handelt sich bei Berechnung von Pfeilern und Widerlagern darum, die Annahme für die Drucklinie im Gewölbe so zu treffen, daß den denkbar ungünstigsten Umständen Rechnung getragen ist; doch geht man dabei in der Regel nur von solchen Drucklinien aus, welche im mittleren Drittel des Gewölbes verlaufen.

#### 1. Pfeiler.

Auf die Gewölbepfeiler, welche freistehend zwischen zwei Gewölben aufgeführt werden, wirkt außer dem Eigengewicht, von beiden Seiten her ein Gewölbedruck; bei sehr hohen Pfeilern kommt auch noch der Winddruck in Betracht, doch sei hier davon abgesehen. Nur ausnahmsweise werden die Pfeiler so stark konstruiert, daß sie den Druck des Gewölbes auf einer Seite noch auszuhalten vermögen, nachdem das Gewölbe auf der andern Seite weggenommen ist; dies kommt nur bei den Gruppenpfeilern langer Brücken vor.

Die beiden Gewölbedrücke können verschieden sein, selbst wenn die Gewölbe zu beiden Seiten gleich sind, da die Drucklinie sich, insbeson-  
dere infolge verschiedener Belastung der Gewölbe, verschieden gestalten kann.

Ist z. B. der in Bild 65 und 66 Taf. V gezeichnete Mittelpfeiler zu berechnen, so sind folgende zwei Hauptfälle zu untersuchen:

- a) Gewölbe links nach Bild 65 vollbelastet und Minimaldrucklinie konstruiert, Gewölbe rechts unbelastet und Maximaldrucklinie auftretend.
- b) Maximaldrucklinie im linksseitigen belasteten Gewölbe nach Bild 66 und Minimaldrucklinie im rechtsseitigen unbelasteten Gewölbe.

Das Pfeilergewicht und die zwei gleichzeitig wirkenden Kämpferbrücke sind zu einer Resultierenden zusammenzusetzen, deren Lage und Größe für die Standfähigkeit des Pfeilers entscheidend ist. Ist der Pfeiler hoch, so genügt die Bestimmung dieser Resultierenden nicht, sondern es ist durch den Pfeiler herab eine Drucklinie nach VI. § 1 zu konstruieren.

## 2. Widerlager.

Auf die Gewölbewiderlager, welche zwischen dem Gewölbe und dem anschließenden Gelände sich befinden, wirkt im allgemeinen, außer ihrem Eigengewicht, von einer Seite her ein Gewölbedruck, von der entgegengesetzten Seite her ein Erddruck. An Gewässern kann auch noch der Wasserdruck in Betracht zu ziehen sein. In den meisten Fällen sind die Widerlager so stark zu konstruieren, daß sie freistehend, also ohne den Gegendruck der Erdhinterfüllung, dem Gewölbedruck zu widerstehen vermögen.

Das Eintreten der Maximaldrucklinie ist in diesem Fall am ungünstigsten für das Widerlager, da dann die Resultierende aus Gewölbedruck und Eigengewicht am meisten von der Fugenmitte abweicht (s. Bild 67 Taf. V).

Ist das Widerlager hoch, so muß in demselben die Drucklinie konstruiert werden. Zeigt ein solches Widerlager Neigung, um den Punkt A nach außen zu kanten, so wirkt schließlich nur noch der kleinste Gewölbeschub, im Gewölbe tritt die Minimaldrucklinie ein (s. Bild 68).

Wollte dagegen das Widerlager um B infolge des Erddruckes nach innen umkanten, so wird schließlich im Gewölbe der größtmögliche Gegendruck nachgerufen; es bildet sich die Maximaldrucklinie (s. Bild 69). Die Berechnung hat nun für jene Annahme zu erfolgen, welche die wahrscheinlichste ist.

Die Drucklinie wird sich nur dann vom Gewölbe ins Widerlager stetig fortsetzen können, wenn die Schichtenneigung von der radialen Kämpferfuge zu den horizontalen Widerlagerfugen allmählich vor sich geht. Andernfalls findet im Kämpferquader des Widerlagers ein plötzlicher Übergang statt.

Aus dem Vorstehenden geht hervor, daß selbst die kleinsten Bewegungen in den Pfeilern oder Widerlagern von bedeutendem Einfluß auf den Verlauf der Drucklinie in einem Gewölbe sind. Je kühner daher die Abmessungen eines Gewölbes gewählt werden, desto größere Sorgfalt muß auf die sichere Fundation und auf die Festigkeit der Pfeiler und Widerlager verwendet werden. Diese müssen unverrückbar feststehen, wenn das Gewölbe Bestand haben soll.

## Anhang.

### Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre.

(Kapitel II und V.)

Die nachstehend zusammengestellten Aufgaben wurden von dem Verfasser seither als Beispiele in einem Semestralkurs über Festigkeitslehre mit durchschnittlich 15 bis 16 doppelstündigen Lektionen in Klasse III der K. Baugewerkschule in Stuttgart durchgearbeitet. Manchmal verblieben dabei noch 2 bis 3 Lektionen für Repetitionsaufgaben, welche früheren Staats- und Diplomprüfungen entnommen wurden.

Die Schüler des Kurses bringen nur physikalische Vorkenntnisse mit, sie erhalten aber im gleichen Semester auch Unterricht in Statik und zwar in 4 Wochenstunden.

Bei der Ausrechnung der Aufgaben darf der Rechenschieber verwendet werden.

**Aufgabe 1.** Ein freistehender 8 m hoher Mauerpfeiler von 1,20 m Breite und 1,00 m Mauerdicke steht auf 1,40 m tiefem Fundament. Der Fundamentvorsprung mißt nach allen Seiten 15 cm.

Wie groß ist die Beanspruchung in der Fundamentfuge und wie groß in der Fundamentsohle?

**Aufgabe 2.** Über dem Fundament des vorigen Pfeilers wird in diesem ein 20 cm weites und 20 cm hohes Loch, senkrecht zur Pfeilerbreite ausgebrochen, wie groß wird nachher die Beanspruchung in der Fundamentfuge sein?

**Aufgabe 3.** Wie groß darf die auf den Pfeiler der Aufgabe 1 kommende Nutzlast  $P$  sein, wenn die zulässige Beanspruchung des Baugrundes 3 kg/qcm ist?

**Aufgabe 4.** Der Druck  $P = 31\,000$  kg wird auf vorigen Pfeiler durch einen  $\perp$  Unterzug ausgeübt; unter diesem soll eine gußeiserne Auflagerplatte eingelegt werden. Welche Länge ist derselben zu geben, wenn deren Breite 25 cm mißt und der Auflagerquader aus mittelhartem Sandstein besteht?

**Aufgabe 5.** In einem Holzpfosten mit 20/20 cm Querschnitt ist ein 6 cm weites und 5 cm tiefes Zapfenloch vorhanden. Auf dem Pfosten ruhen 8000 kg. Wie groß ist die Druckbeanspruchung des Holzes.

**Aufgabe 6.** Darf der Druck von 30 qm doppelter Holzbalkendecke und 83 qm ein halb Stein starker Backsteinriegelwand auf eine 20 cm dicke gußeiserne Säule mit freisringförmigem Querschnitt und 25 mm Eisenstärke übertragen werden, wenn die Beanspruchung 200 kg/qcm nicht überschreiten darf?

**Aufgabe 7.** Ein Umbau erfordert die Abstützung eines Gebäudeteils, dessen Gewicht nach II. § 5 zu 32 000 kg berechnet worden ist. Es können 5 Sprieße aufgestellt werden. Welchen Durchmesser müssen diese mindestens haben, wenn ihre Beanspruchung 35 kg/qcm nicht überschreiten dürfen?

**Aufgabe 8.** Ein 2 m breiter und 60 cm dicker Mauerpfeiler, welcher mit 5 kg/qcm beansprucht ist, soll durch eine gußeiserne Säule ersetzt werden. Welche Querschnittsfläche muß

die Säule erhalten, wenn deren Beanspruchung 180 kg/qcm nicht überschreiten darf und wie viel Sprieße mit 14/17 cm Querschnitt sind vor Abbruch des Mauerpfiebers einzustellen, wenn deren Beanspruchung höchstens 30 kg/qcm sein darf?

Aufgabe 9. An einer schmiedeiserne Stange von 2 cm Durchmesser hängen 3000 kg, es fragt sich: a) Wie groß ist die Zugbeanspruchung der Stange? b) Welchen Durchmesser müßte die Stange haben, damit die zulässige Beanspruchung des Schmiede Eisens nicht überschritten wird? c) Wie groß darf die Last sein, wenn eine 3 cm dicke Stange verwendet werden soll?

Weitere Beispiele für Zug- und Druckfestigkeit ergeben sich bei den Querschnittsbestimmungen für die Stäbe eiserner Dachstühle, für welche die Bestimmung der Stabkräfte in der Statik erfolgt ist.

Aufgabe 10. Eine 4 cm dicke Rundstange, welche mit 750 kg/qcm beansprucht wird, ist an einem Ende zu einer Nöse ausgeschmiedet und hier mit einem 5 cm dicken Schraubenbolzen an einer Lasche befestigt. Welche Beanspruchungen erleidet die Nöse und wie groß ist die Scherbeanspruchung des Bolzens?

Hierzu wird eine Abbildung an die Tafel gezeichnet.

Aufgabe 11. Ein Flacheisen ist mittelst dreier Nieten von 1,6 cm Bolzendurchmesser an einer Knotenplatte befestigt. Wie groß darf mit Rücksicht auf diese Vernietung der Zug  $P$  an dem Flacheisen werden und welche Abmessungen desselben entsprechen der Festigkeit der Vernietung?

Aufgabe 12. 2 Flacheisen, welche 15 000 kg Zug zu übertragen haben, sind durch Nietung miteinander zu verbinden. Wieviel 25 mm dicke Nieten werden erforderlich und wie sind dieselben zu stellen?

Aufgabe 13. 7700 kg sind auf eine Lasche zu übertragen. Die Übertragung geschieht im einen Fall durch ein 150 mm breites und 8 mm dickes Flacheisen, im andern Fall durch 2 Stück 83 mm breite und 8 mm dicke Eisen. Die Vernietungen sind für beide Fälle zu berechnen, aufzuzeichnen und bezüglich ihrer Vor- und Nachteile zu vergleichen.

Aufgabe 14. Welche Höhe darf der in Aufgabe 5 berechnete Holzpfeiler mit Rücksicht auf die Verknicung erhalten?

Aufgabe 15. Welche Höhe darf die in Aufgabe 6 berechnete gußeiserne Säule mit Rücksicht auf die Verknicung erhalten?

Aufgabe 16. Ein runder 4,0 m hoher Holzpfeiler erleidet 15 000 kg Druck, welcher Durchmesser ist dem Querschnitt zu geben?

Für die in der Bemerkung bei Aufgabe 9 genannten Stäbe werden die Querschnitte mit Rücksicht auf die Verknicungsgefahr festgestellt.

Aufgabe 17. Ein Holzbalken mit 24/16 cm Querschnitt ist einerseits eingespannt und trägt an seinem anderen 80 cm über die Mauerflucht hervortretenden freien Ende eine Last  $P = 1200$  kg. Wo tritt die größte Beanspruchung auf und wie groß ist dieselbe?

Aufgabe 18. Ein Gerüstbalken ist einerseits eingespannt. An dem freitragenden Teil desselben wirken in 50 cm Abstand von der Einspannungsstelle 700 kg und am freien Ende d. h. in 1,20 m Entfernung von der Einspannungsstelle 1000 kg senkrecht zur Balkenachse. Welchen Durchmesser muß dieser Balken erhalten?

Aufgabe 19. Der vorige Balken hat am vorderen Ende nur noch 13 cm Durchmesser. Wie groß ist dessen Beanspruchung in demjenigen Querschnitt, welcher 70 cm Abstand vom freien Ende hat?

Aufgabe 20. Ein Holzbalken mit 20 cm hohem und 14 cm breitem Querschnitt ist

einerseits eingespannt, welche Last darf an dessen freiem Ende dauernd angebracht werden, wenn dasselbe 75 cm über die Einspannungsstelle hervorragt?

Aufgabe 21. Welche gleichförmig und stetig verteilte Belastung  $Q$  darf auf den vorigen Träger anstatt der Einzellast  $P$  kommen.

Aufgabe 22. Der 1,20 m breite Balkon an einem Wohngebäude trägt einen 15 cm dicken Betonboden und auf den äußersten Trägern sind Wandpfosten aufgestellt, welches  $\text{I NP}$  ist für die Balken zu wählen?

Zu dieser Aufgabe sind eine Skizze der Balkenlage und der Pfostenstellung, sowie die Größen der Pfostenbrücke zu geben.

Aufgabe 23. Welche Abmessungen wären dem rechteckigen Querschnitt von Holzbalken für die vorige Aufgabe zu geben?

Aufgabe 24. Ein 6,90 m langer Balken  $\text{I NP 12}$  liegt an seinen Enden auf zwei Stützen frei auf. In 2,10 m Abstand vom linksseitigen Auflager ruhen auf dem Balken 300 kg, in 5,90 m Abstand 600 kg. Wie groß ist die Beanspruchung des Balkens?

Aufgabe 25. Welches  $\text{I NP}$  ist für den vorigen Balken zu wählen, wenn die zulässige Beanspruchung des Flußeisens nicht überschritten werden soll und wie groß ist alsdann die Beanspruchung des Balkens in der Mitte der Stützweite?

Aufgabe 26. Welches  $\text{I NP}$  wird für einen 5,20 m langen schmiedeisernen Balken erforderlich, welcher an seinen Enden frei aufliegt und in 1,30 m Abstand vom linken Auflager mit  $P_1 = 700$  kg belastet ist?

Aufgabe 27. Welche Beanspruchung erleidet der in der vorigen Aufgabe berechnete Balken in den Querschnitten I, II und III, welche vom linken Auflager die Abstände 1,00, 2,10 und 3,40 m haben?

Aufgabe 28. Auf den Balken in Aufgabe 26 wirke in 3,50 m Abstand von der linken Stütze noch eine zweite Last  $P_2 = 500$  kg. Welches  $\text{NP}$  ist zu wählen, wenn der Querschnitt aus  $\text{II C}$  Eisen konstruiert werden soll?

Aufgabe 29. Ein Balken mit 8,0 m Stützweite soll aus  $\text{II C}$  Eisen hergestellt werden. Welches  $\text{NP}$  ist zu wählen, wenn auf den Balken folgende Lasten kommen?

$P_1 = 400$	in	$a_1 = 0,70$ m	$P_5 = 500$	—	$a_5 = 3,90$ m
$P_2 = 700$	—	$a_2 = 1,50$ m	$P_6 = 620$	—	$a_6 = 4,50$ m
$P_3 = 600$	—	$a_3 = 2,30$ m	$P_7 = 650$	—	$a_7 = 5,20$ m
$P_4 = 300$	—	$a_4 = 3,00$ m	$P_8 = 490$	—	$a_8 = 6,00$ m
$P_9 = 1000$	—	$a_9 = 7,00$ m	Abstand vom linksseitigen Auflager.		

Aufgabe 30. Welches Widerstandsmoment ist für den Querschnitt des vorigen Balkens erforderlich, wenn die Gesamtbelastung gleichmäßig und stetig über die ganze Stützweite verteilt wird?

Aufgabe 31. Der Querschnitt des vorigen Balkens soll nachstehende Profilformen erhalten:

1.  $\text{II C}$
2.  $\text{II C C}$
3.  $\text{II C II C}$
4.  $\text{II I C}$
5.  $\text{I}$

Welche  $\text{NP}$  sind zu wählen, wie groß ist das Balkengewicht und wie groß die Beanspruchung in jedem einzelnen Fall?

Aufgabe 32. Wie groß sind die Beanspruchungen der in voriger Aufgabe berechneten Balken infolge ihres Eigengewichts und wie groß infolge der Nutzlast samt dem Eigengewicht?

Aufgabe 33. Ein Balken I NP 20 hat 4,0 m Stützweite; mit welcher Last  $Q$  darf derselbe stetig und gleichförmig belastet werden?

Aufgabe 34. Ein Balken I NP 24 hat eine stetige gleichmäßige Belastung  $Q = 10\,000$  kg zu tragen. Welche Stützweite kann demselben gegeben werden?

Aufgabe 35. Ein Schulsaal hat 7,10 m lichte Weite. Seine Balkenlage soll für eiserne Balken, welche in 70 cm Abstand voneinander liegen, berechnet werden?

Aufgabe 36. Wie weit können die Balken in voriger Aufgabe auseinandergelegt werden, wenn Balken I NP 30 verwendet werden?

Aufgabe 37. Für den Saal in Aufgabe 35 sind Holzbalken mit  $31/24$  cm Querschnitt verwendet worden, welche Belastung darf auf 1 qm Bodenfläche dieser Balkenlage kommen?

Aufgabe 38. Ein Balken hat 4,00 m Stützweite und ist beiderseits eingespannt, welches I NP ist erforderlich, wenn er mit  $Q = 1200$  kg gleichförmig belastet wird?

Aufgabe 39. Wie groß dürfen die Belastungen der Träger S. 95 Nr. 1, 2, 4, 7, 8 und 10 werden, wenn  $l$  stets 2,0 m ist und das Biegemoment bei jedem der Fälle den gleichen Größtwert wie in Fall 3. bei  $P = 800$  kg erreichen soll.

Für Fall 1. ist  $a = \frac{1}{2}$  anzurechnen.

Aufgabe 40, 41 und 42. Die zur Auflösung von Aufgabe 26, 27, 28 und 29 nötigen Biegemomente sind zeichnerisch zu bestimmen.

Die Vergleichung der zeichnerisch und rechnerisch gefundenen Resultate gibt den Schülern Gelegenheit, die Genauigkeit der rechnerischen Bestimmung und deren Abhängigkeit von der Wahl der Maßstäbe beurteilen zu lernen.

Aufgabe 43. Ein 11,60 m langer Balken liegt auf zwei Stützen frei auf. Die linke Stütze ist 2,8 m, die rechte 2,9 m vom Balkenende entfernt. Der Balken trägt folgende Einzellasten:

$P_1 = 3000$ kg	in	$a_1 = 0,00$ m
$P_2 = 2000$ kg	in	$a_2 = 1,00$ m
$P_3 = 1500$ kg	in	$a_3 = 2,20$ m
$P_4 = 600$ kg	in	$a_4 = 3,30$ m
$P_5 = 800$ kg	in	$a_5 = 4,90$ m
$P_6 = 500$ kg	in	$a_6 = 6,90$ m
$P_7 = 400$ kg	in	$a_7 = 8,40$ m
$P_8 = 1700$ kg	in	$a_8 = 9,20$ m
$P_9 = 2500$ kg	in	$a_9 = 10,50$ m
$P_{10} = 3200$ kg	in	$a_{10} = 11,60$ m

Abstand vom linksseitigen Ende.

Die Biegemomente, welche an dem Balken auftreten, sind zeichnerisch zu bestimmen. Das größte derselben ist rechnerisch nachzuprüfen.

Die Zeichnung wird gewöhnlich im geometrischen Maßstab 1 : 100 und mit dem Kräftemaßstab 1 cm = 1000 kg ausgeführt.

Aufgabe 44. Dasselbe wie vorig für die Kräfte

$P_1 = 600$ kg	$P_6 = 3500$ kg
$P_2 = 400$ kg	$P_7 = 2400$ kg
$P_3 = 500$ kg	$P_8 = 700$ kg
$P_4 = 2000$ kg	$P_9 = 500$ kg
$P_5 = 3000$ kg	$P_{10} = 300$ kg.

Aufgabe 45. Zeichnerische Bestimmung der Biegemomente für einen 7,50 m langen Balken, dessen linkes Auflager 2,50 m, dessen rechtes Auflager 2,20 m vom Balkenende entfernt ist, welcher gleichförmig und stetig und zwar von links nach rechts

auf 2,00 m Länge mit  $Q_1 = 2000$  kg

daneben auf 3,00 " " "  $Q_2 = 1500$  kg

" " 2,50 " " "  $Q_3 = 3000$  kg belastet ist.

Geometrischer Maßstab 1:50; Kräftemaßstab 1 cm = 500 kg. Belastungsflächenmaßstab 1 qcm = 200 kg.

Aufgabe 46. Ein 10 m langer Balken ist mit  $q = 700$  kg/lfd. m belastet. Die beiden Auflager sind von den Enden soweit gegen die Mitte hereinzurücken, daß die Biegemomente über den Auflagern und in Balkenmitte gleich groß werden.

Geometrischer Maßstab 1:50; Kräftemaßstab 1 cm = 500 kg. Belastungsflächenmaßstab 1 qcm = 100 kg.

Aufgabe 47. Eine eiserne Treppe habe 10 Stufen mit 31 cm Auftritt. Die Wangen dieser Treppe bestehen aus 25 cm breiten Flacheisen, welche Dicke ist denselben zu geben, wenn die Treppenbreite 1,00 m ist und das Eigengewicht der Treppe für jede Stufe 20 kg beträgt?

Zur Näherungsberechnung aus den Grundrißmaßen.

Aufgabe 48. Ein Fußboden von 4,90 m Breite und 8,00 m Länge wird von Balken, welche der Länge nach liegen und in der Mitte durch einen Unterzug gestützt sind, getragen.

Welche Abmessungen sind den hölzernen Balken und dem eisernen Unterzug zu geben?

Durch verschiedene Angaben des Zweckes, denen der Fußboden zu dienen hat, lassen sich für die Auflösung mannigfaltige Zahlen gewinnen.

Aufgabe 49. Wie groß werden die Beanspruchungen in der Fundamentfuge und in der Fundamentsohle in Aufgabe 3, wenn der Angriffspunkt der Nutzlast  $P$  10 cm oder wenn er 40 cm seitlich von dem Schwerpunkt der Fugenfläche, aber auf der zur Mauerdicke senkrecht stehenden Flächenachse liegt?

Die Zusammensetzung paralleler Kräfte haben die Schüler inzwischen in der Statik gelernt.

Aufgabe 50. Auf eine Säule wirkt in 10 cm Abstand vom Mittelpunkt des runden Querschnittes eine Kraft  $P = 20\,000$  kg, welche parallel zur Säulenachse gerichtet ist. Welche Beanspruchung erzeugt diese Kraft, wenn der Querschnittsdurchmesser 80 cm beträgt?

Um nicht jedes Jahr dieselben Aufgaben behandeln zu müssen, werden abwechslungsweise die vorhergehende und die folgende Aufgabenreihe verwendet. In dieser sind auf Grund der seitherigen Erfahrungen Berechnungen von Balken mit Kragenden, von Treppenwangen, von Balken mit Mittelstützen weggelassen worden, um mehr Zeit zu Wiederholungen und etwa schließlich zur Ausarbeitung einer größeren zusammengesetzten Aufgabe zu gewinnen. Die übergangenen Aufgaben kommen in unserer Anstalt in der Baumechanik in Klasse V zur Erörterung.

Aufgabe 51. Eine  $1\frac{1}{2}$  Stein starke Backsteinwand ist 7 m hoch, sie steht auf einem 60 cm breiten und 1,20 m tiefen Betonfundament; wie groß ist die Beanspruchung in der Fundamentfuge und wie groß in der Fundamentsohle?

Aufgabe 52. In der vorigen Wand findet in halber Höhe eine 8 m weit gespannte Zwischendecke, deren Gesamtbelastung, d. h. Eigengewicht samt Nutzlast 800 kg/qm beträgt, Auflagerung und außerdem stützt sich auf die Wand ein Dach, das auf den lfd. m Wand 1500 kg Druck ausübt. Welche Beanspruchungen treten nun im Mauerwerk und auf dem Baugrund auf?

Aufgabe 53. Als Unterstützung eines eisernen  $\Gamma$  Unterzuges, der 40 000 kg Druck auf sein Auflager ausübt, soll ein gemauerter Pfeiler erstellt werden, welche Abmessungen sind dem 4,40 m hohen Pfeiler und dem 1,5 m tiefen Fundament zu geben, wenn das Mauerwerk mit 7 kg/qcm, und der Baugrund mit 2 kg/qcm belastet werden dürfen?

Aufgabe 54. Welche Druckfläche muß eine gußeiserne Unterlagsplatte und welche Lagerfläche ein Granitquader erhalten, die dazu dienen sollen den Auflagerdruck in voriger Aufgabe auf das Gemäuer gleichmäßig zu verteilen?

Aufgabe 55. Der in Aufgabe 53 genannte Pfeiler soll durch eine gußeiserne Säule, die mit höchstens 300 kg/qcm beansprucht wird, ersetzt werden, welche Abmessungen sind dem kreisringförmigen Säulenquerschnitt zu geben?

Aufgabe 56. Vor dem Abbruch des Pfeilers in voriger Aufgabe ist der Unterzug abzupriessen, es stehen Rundhölzer mit 23 cm Durchmesser zur Verfügung; wie viele sind einzustellen, wenn deren Beanspruchung 35 kg/qcm nicht überschreiten darf?

Aufgabe 57. In den auf Taf. III Bild 1 gezeichneten Rundstangen wirken von links nach rechts angegeben 16 000 kg, 9000 kg und 12 000 kg Zug, welche Durchmesser sind denselben zu geben, wenn sie aus Flußeisen hergestellt werden?

Aufgabe 58. Wie groß ist die Scherbeanspruchung, die der 50 mm dicke Gußstahlbolzen im vorigen Beispiel unter der am stärksten gezogenen Stange erleidet?

Aufgabe 59. Die wagrechten Stäbe in Bild 2 Taf. III sind mit 16 cm dicken Nieten auf der Knotenplatte befestigt, welche Kraft vermag diese Nietung zu übertragen, wenn die Nieten doppelschnittig sind, wie groß sollte die Eisenstärke der vernieteten Stäbe sein und welche Dicke muß die Knotenplatte erhalten?

Aufgabe 60. Der nach links unten gerichtete Stab in Bild 2 Taf. III ist  $\frac{60}{60}/8$  mm in welchem 8000 kg Zug herrschen. Welcher Durchmesser ist den doppelschnittigen Nieten zu geben und welche Scherbeanspruchung erleiden dieselben bei dem gewählten Durchmesser?

Aufgabe 61. Es ist zu untersuchen ob die in Aufgabe 55 genannte gußeiserne Säule der Zerknickung genügend widersteht.

Aufgabe 62. Welcher Lastteil dürfte auf einen der Sprietze in Aufgabe 56 mit Rücksicht auf die Zerknickungsgefahr kommen?

Aufgabe 63. Ein Gerüstholz ist einerseits eingespannt, sein freies Ende ragt 1,40 m über die Einspannungsstelle vor, welche Belastung darf auf das freie Ende des 21 cm hohen und 14 cm breiten Holzbalken kommen?

Aufgabe 64. In welchem Maße darf die vorige Last vergrößert werden, wenn die eine Hälfte derselben in der Mitte des freitragenden Balkenteiles aufgelegt werden kann?

Aufgabe 65. Wie groß dürfte eine gleichförmig und stetig verteilte Belastung des freitragenden Balkenteiles in Aufgabe 63 sein?

Aufgabe 66. Wie viel dürften die Belastungen in Aufgabe 63 und 65 betragen, wenn der Balken ein  $\Gamma$  NP 14 wäre?

Aufgabe 67. Ein Unterzug liegt auf zwei 4,80 m weit voneinander entfernten Stützen frei auf; in 2,0 m und 3,2 m Abstand vom linken Auflager stehen auf dem Unterzug Pfosten, der linke ist mit 6000 kg, der rechte mit 8000 kg belastet. Welches  $\Gamma$  NP ist dem Unterzug zu geben?



Aufgabe 68. Welche Beanspruchungen erleidet der in voriger Aufgabe berechnete Unterzug in der Mitte der Stützweite?

Aufgabe 69. Die Balken unter einem Fabriklokal haben 1,2 m Abstand voneinander, die betonierte Decke hat durchschnittlich 14 cm Dicke, die Nutzlast beträgt 600 kg/qm. Welches I NP ist für die 5,60 m weit gespannten Balken zu wählen?

Aufgabe 70. Welcher Querschnitt wäre Holzbalken zu geben, die an Stelle der eisernen Balken in voriger Aufgabe verwendet werden sollten?

Aufgabe 71. Welche Stützweite dürfte dem in Aufgabe 69 berechneten Balken gegeben werden, wenn die Nutzlast nur 400 kg/qm betragen würde?

Aufgabe 72. Auf einem eisernen Balken I NP 23 der 3,50 m Stützweite hat, ruhen 1500 kg/lfd. m Eigengewicht der Konstruktion. Auf 1,40 m Länge vom linksseitigen Auflager herein, sind 400 kg/lfd. m Nutzlast aufgebracht; in 1,50 m Abstand von dem linksseitigen Auflager ist eine Rolle befestigt, an der 175 kg aufgehoben werden. Welche größte Beanspruchung erleidet der Balken?

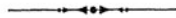
Aufgabe 73. Ein beiderseits eingespannter hölzerner Balken hat 5,20 m Spannweite und 18/22 cm Querschnitt, welche gleichförmig verteilte Belastung darf auf den Balken kommen?

Aufgabe 74. Wie groß darf die Belastung des vorigen Balkens werden, wenn er an dem einen Ende, wie groß, wenn er an beiden Enden frei aufliegt?

Aufgabe 75—81. Die in Aufgaben 63. 64. 65. 67. 68. 69. 72. vorkommende Biegemomente sollen zeichnerisch bestimmt werden.

Aufgabe 82. Wie groß würden die Mauerwerksbeanspruchungen werden, wenn die Resultierende des Druckes der Zwischendecke nur 12 cm Abstand von der Innenfläche der in Aufgabe 52 genannten Wand hätte und wenn die 14 cm breite Dachschwelle bündig mit der Innenflucht verlegt worden wäre?

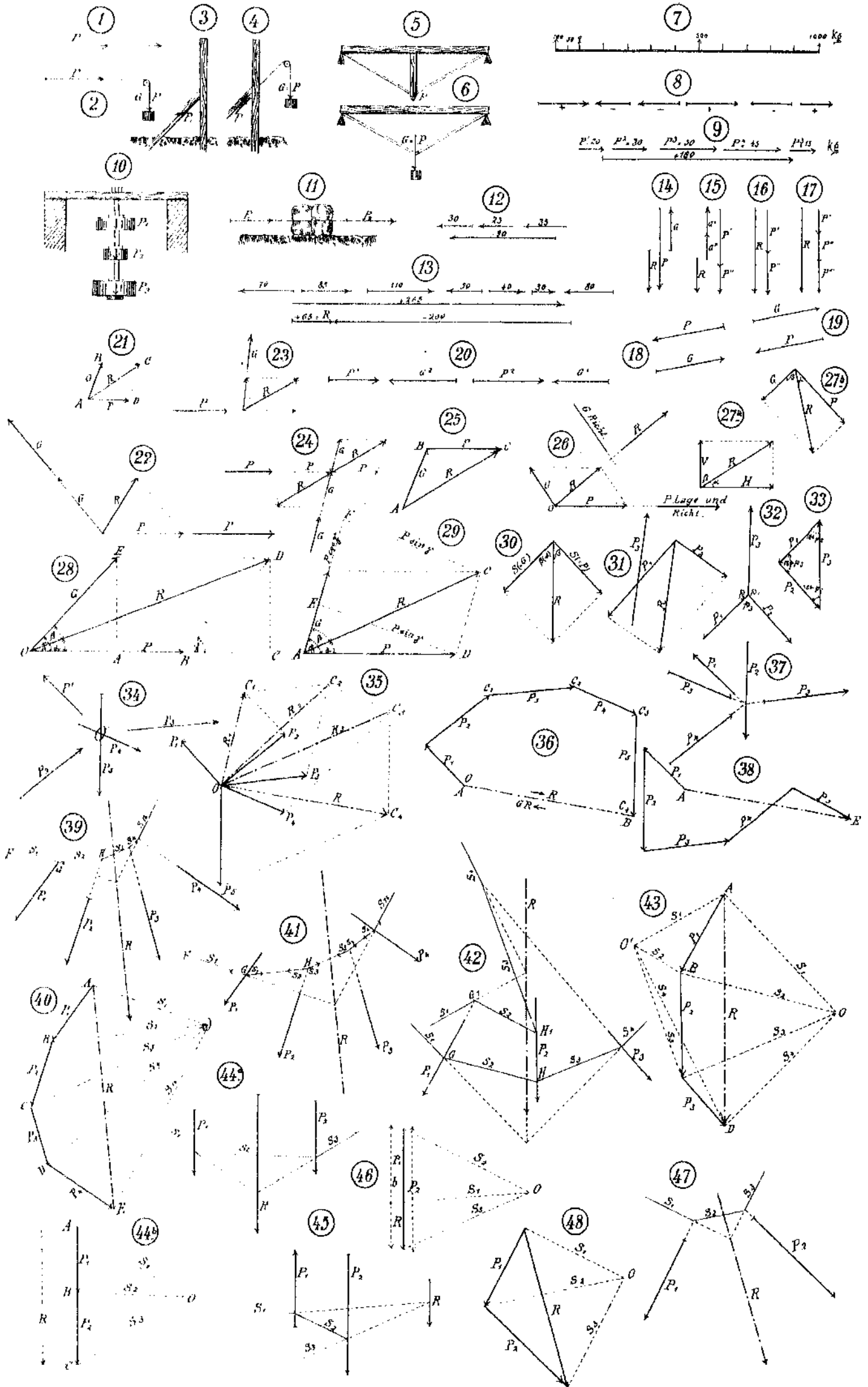
Aufgabe 83. Die 33 cm breiten Stufen einer Steintreppe haben 1,15 m freitragende Länge und sind 0,18 cm tief in die Treppenhauswände eingemauert. Die Stufen wiegen 120 kg/m, die Nutzlast beträgt 400 kg/qm, das Geländergewicht ist 20 kg für jede Stufe. Die nutzbare Austrittsfläche mißt 30 cm. Wie groß wird die Beanspruchung der Wand an der Einmauerungsstelle?



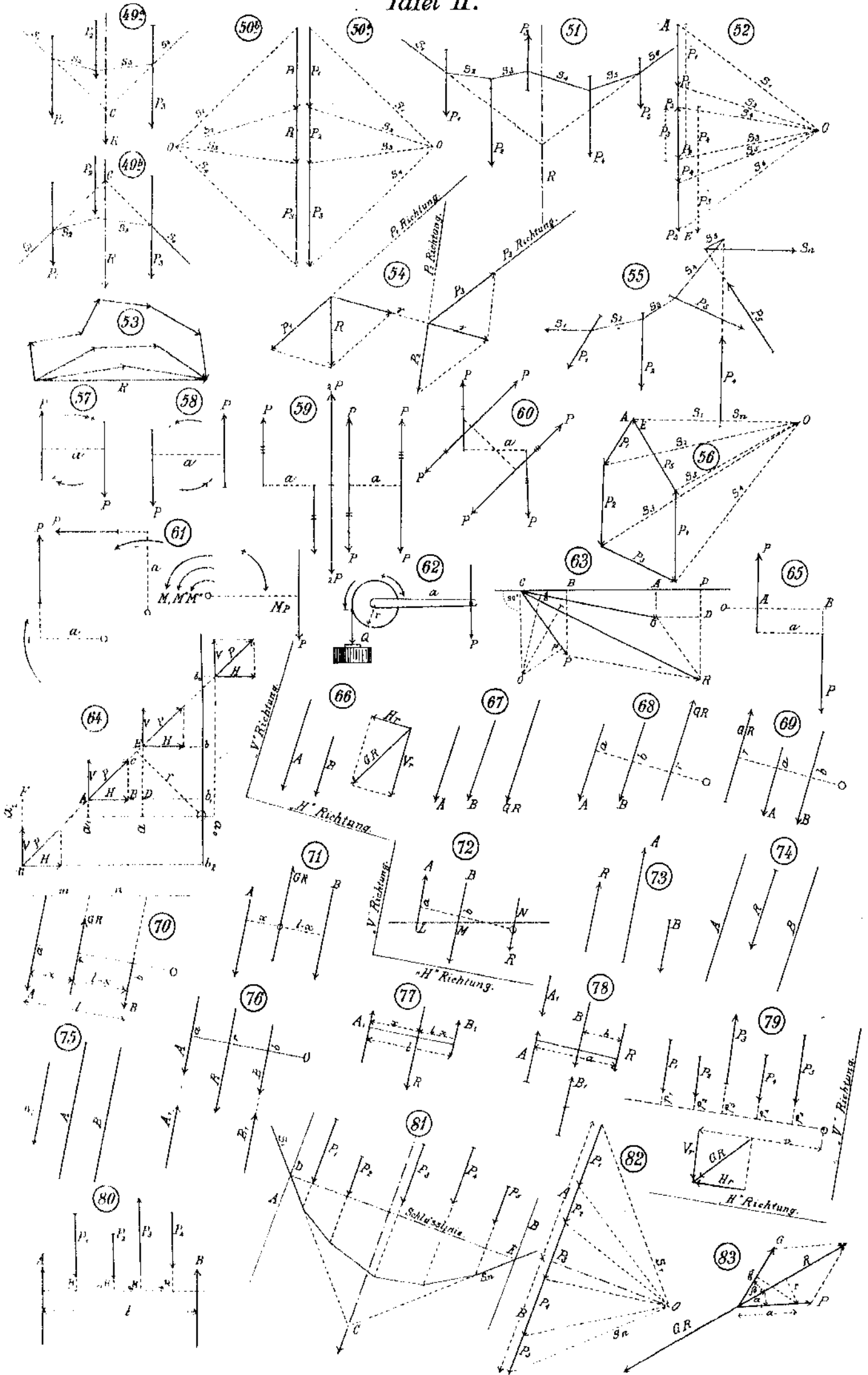




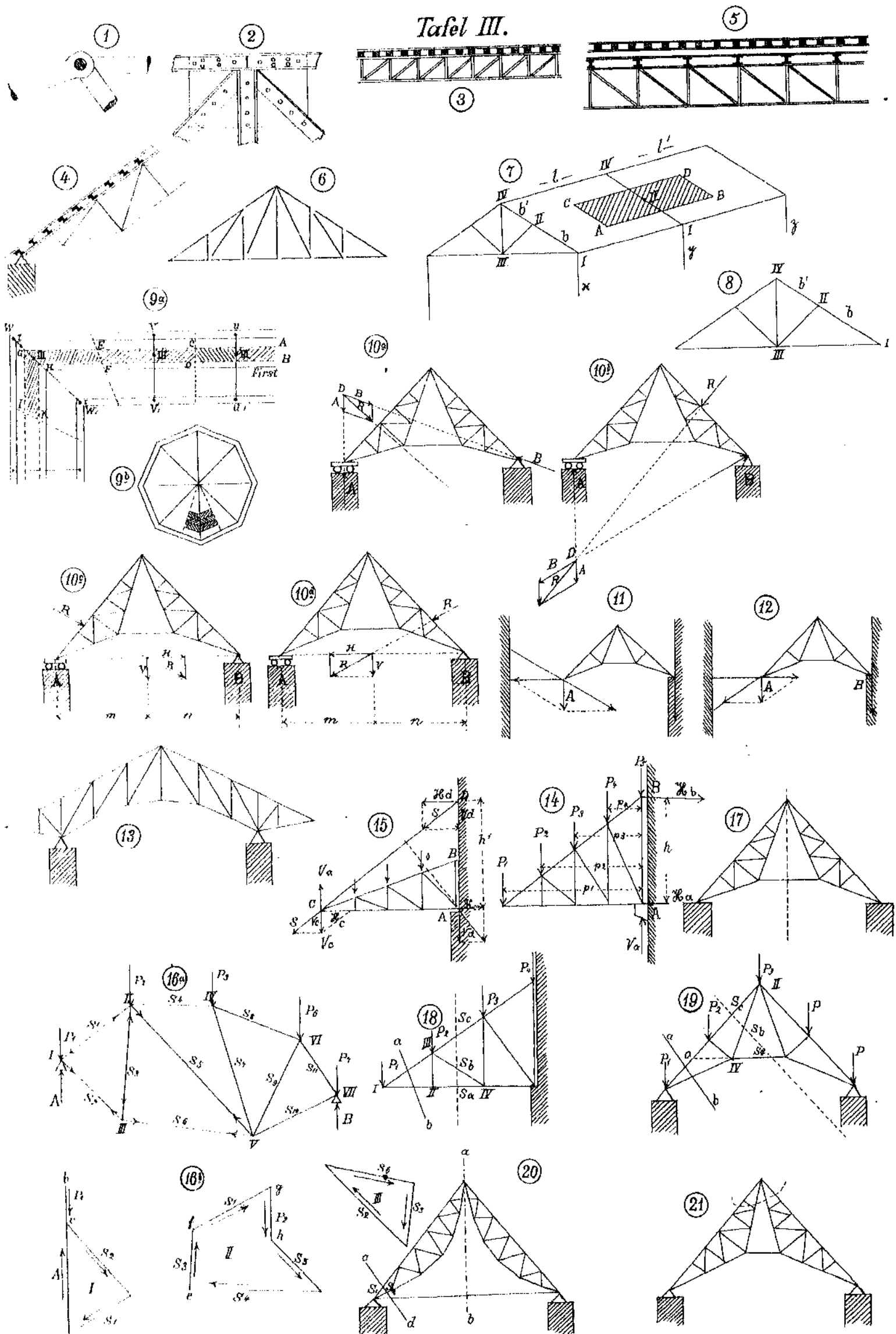
# Tafel I.



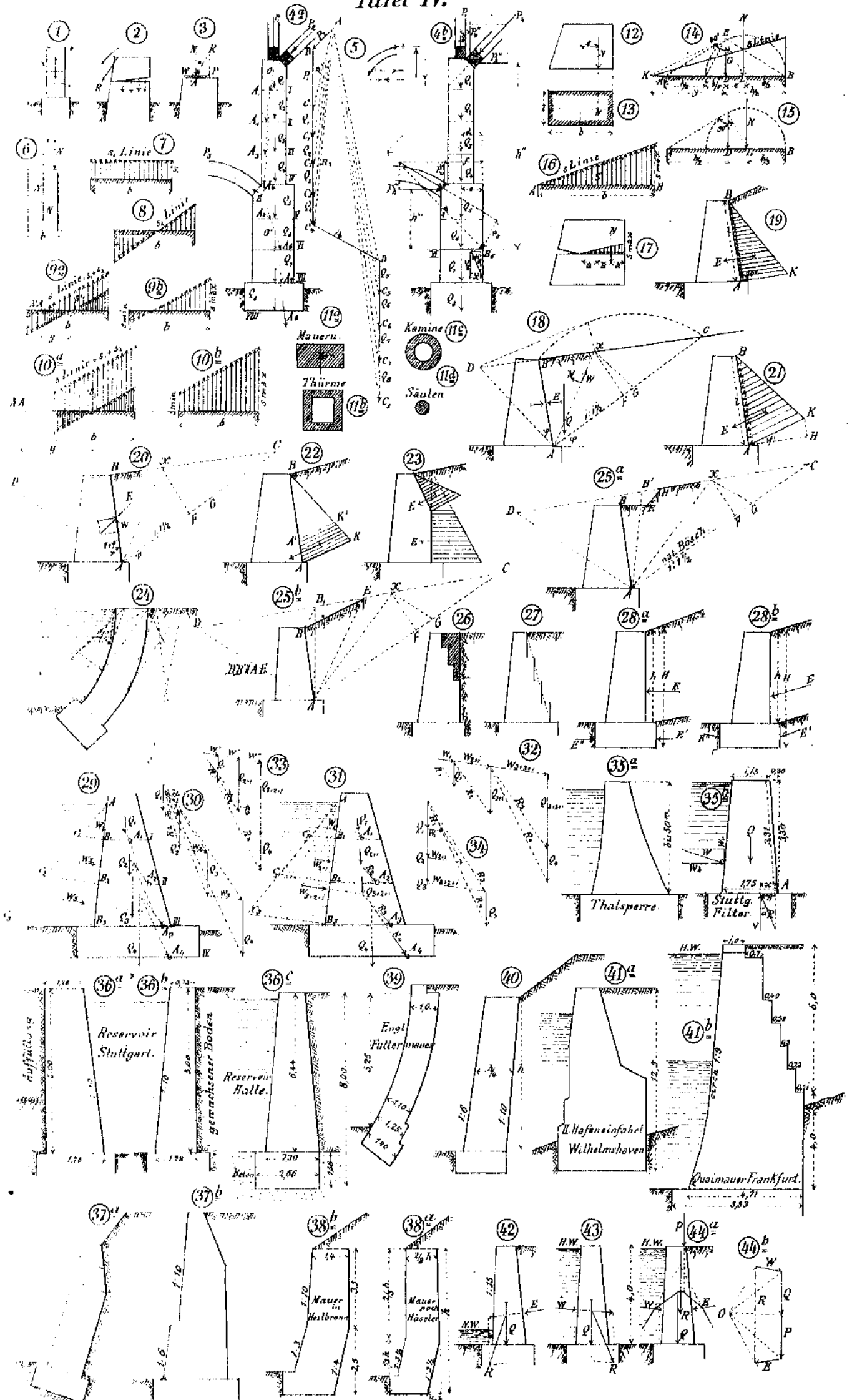
# Tafel II.



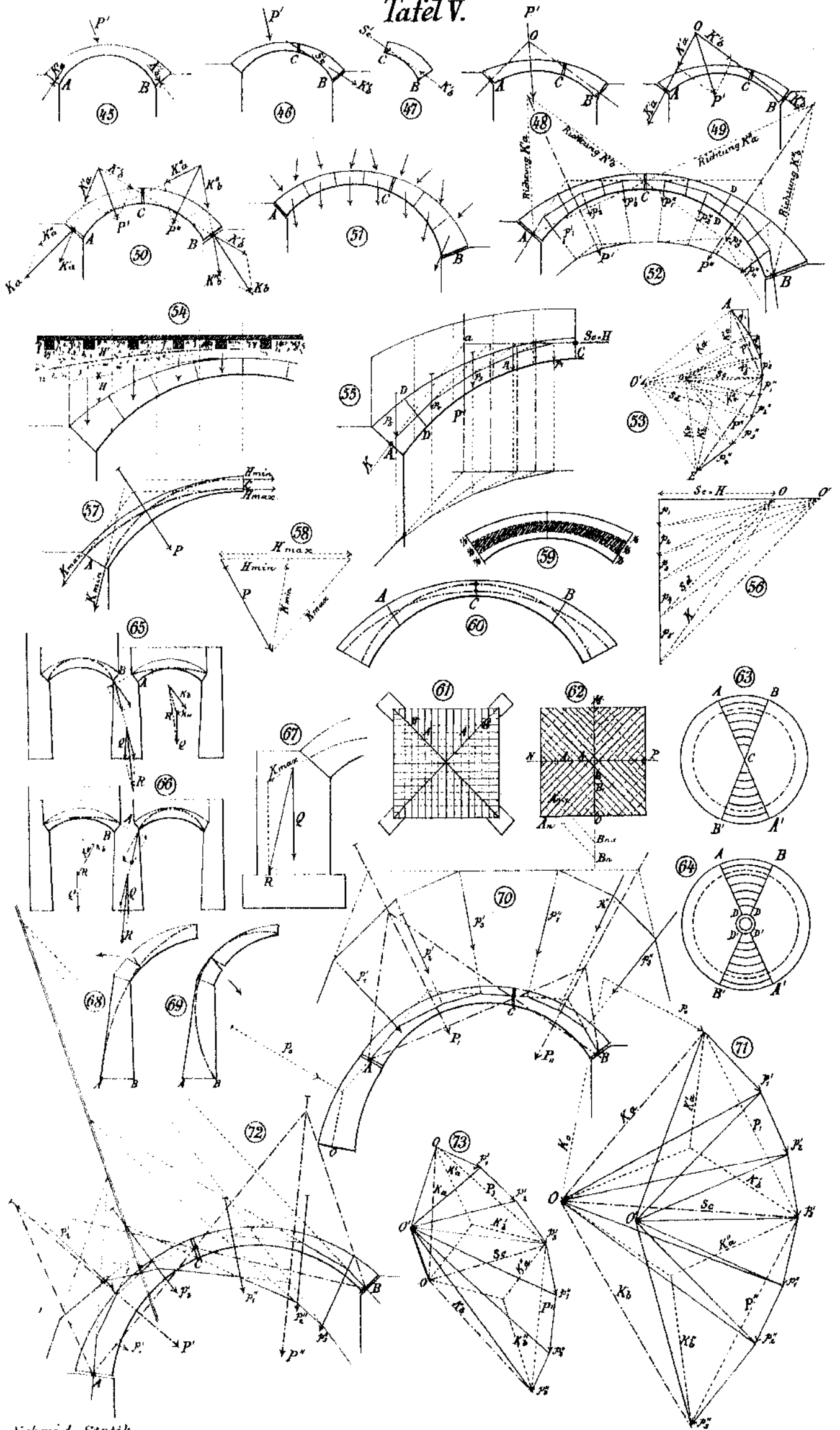
Tafel III.



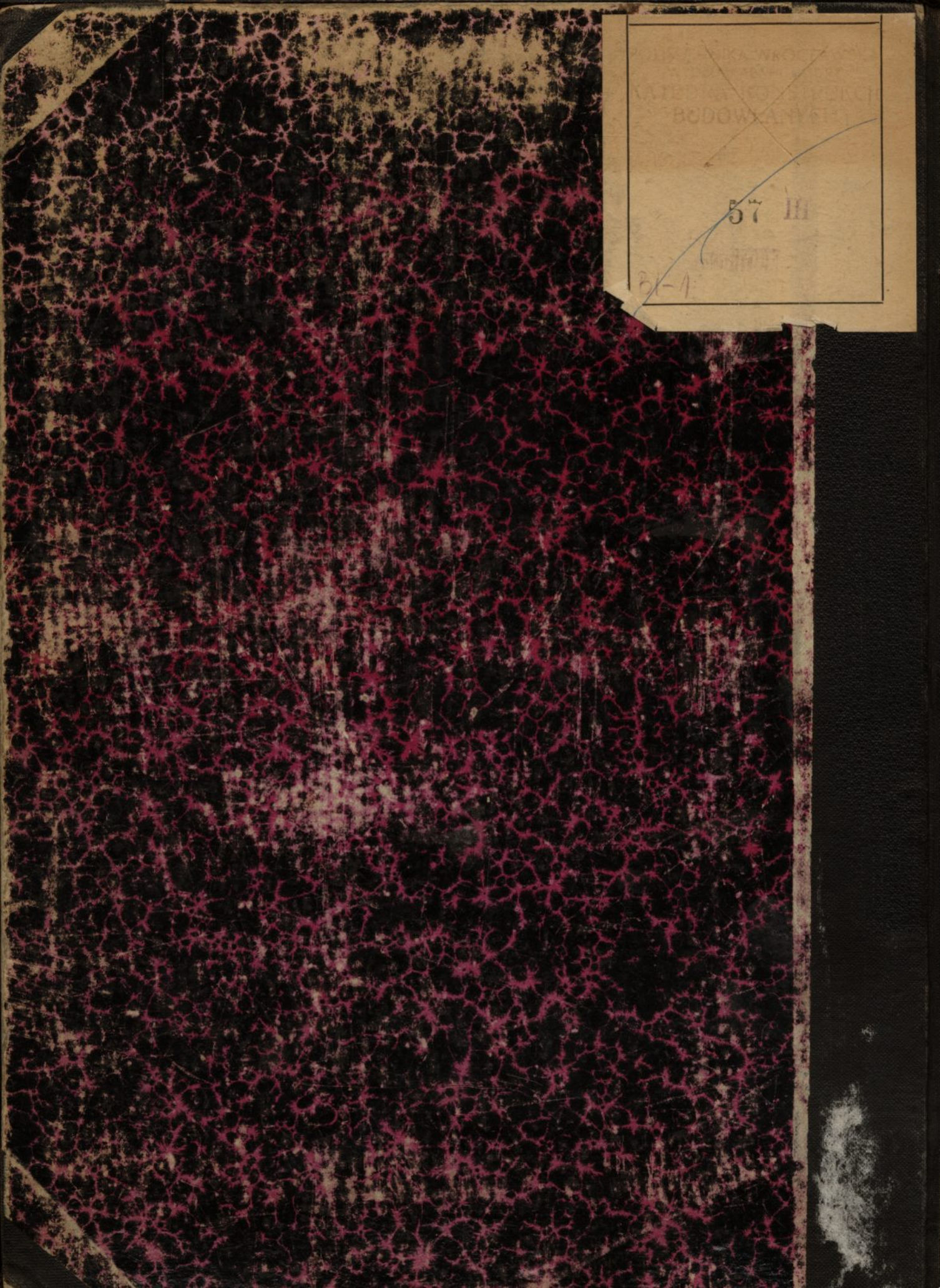
# Tafel IV.



# Tafel V.







~~...~~  
~~...~~  
~~...~~  
57 III  
~~...~~  
BX-1