

Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej



100100212736

B 172

mittel

317.

Der Hauptbücherei
der Kgl. Technischen Hochschule zu Breslau
geschenkt von
Kunigl. Techniska Högskolan,
Stockholm.

Archivum



KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN





STOCKHOLM 1918
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
172071

KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN

SKRIFTER

UTGIVNA MED ANLEDNING AV INFLYTTNINGEN I DE
ÅR 1917 FÄRDIGA NYBYGGNADERNA

HISTORIK OCH BESKRIVNING
RÖRANDE NYBYGGNADERNA

JÄMTE

AVHANDLINGAR OCH UPPSATSER
AV HÖGSKOLANS LÄRARE



44 Tafeln.

S T O C K H O L M

P. A. NORSTEDT & SÖNER I DISTRIBUTION

1919.317.

VEREINIGTE UNIVERSITÄT
BRUNNEN
HISTORIK OCH DE KRISTALL
VEREINIGTE UNIVERSITÄT



Inv. 18209.



350259L/A

INNEHÅLL

| | Sid. |
|--|------|
| Historik över tillkomsten av de under åren 1913—1917 uppförda nybyggnaderna för Kungl. tekniska högskolan av C. J. MAGNELL | 1 |
| Beskrivning över Kungl. tekniska högskolans nybyggnader av ERIK LALLERSTEDT | 61 |
| Beskrivningar över några av Kungl. tekniska högskolans nya laboratorier samt uppvärmnings- och ventilationssystemet i nybyggnaderna: | |
| Vattenbyggnadslaboratoriet av WOLMAR FELLENIUS | 99 |
| Förbränningsmotorlaboratoriet av E. HUBENDICK | 109 |
| Kyltekniska laboratoriet av E. HUBENDICK | 114 |
| Uppvärmnings- och ventilationssystemet av HUGO THEORELL | 121 |
| Teknisk vetenskap och ingenjörsutbildning av C. J. MAGNELL | 127 |
| Fackvetenskapliga avhandlingar och uppsatser: | |
| BARTHEL, CHR., Kulturer av jäsningsorganismer i steriliserad jord | 157 |
| BERGER, FRITZ W., Bestämning av normalspänningar för lutande måttband | 170 |
| DAVIDSSON, WILHELM, Trafikfördelning vid tvillinghissar | 180 |
| HENRIQUES, P., Den första svenska läroboken i perspektiv, en studie | 187 |
| HEUMAN, CARL, Elliptiska integraler i dynamiska problem | 201 |
| » » Bidrag till teorien för sfäriska pendeln | 221 |
| HOLMBERG, BROR, Alkalisk sönderdelning av halogensuccinamidsyror | 307 |
| KREÜGER, H., Undersökning rörande hållfasthet och elasticitet hos koppartråd och kopparlinor | 317 |
| LANGLET, FILIP, Om korrelativa system, med tillämpning på andragsgradsytor | 335 |
| LINDMARK, TORE, Några synpunkter vid beräkning av avtappningsturbiner | 346 |
| LUNDHOLM, O. E., Flygsäkerheten och »lufthålen» | 357 |
| MALMQUIST, J., Om singulära ställen till differentialekvationer av första ordningen | 370 |
| NORDSTRÖM, H. F., Randvärdesproblemet vid parabeln och hyperbeln inom potentialteorien | 392 |
| PLEIJEL, H., Allmänna egenskaper hos ett system parallella ledningar med variabla konstanter | 414 |
| » » En metod att beräkna egenskaperna hos sammansatta telefonledningar | 443 |
| ROSBORG, ANDERS, Några riktlinjer för anordnandet av ekonomiska ångpanneeldstäder | 464 |
| SCHLYTER, RAGNAR R:SON, Undersökningar å dammbyggnader | 480 |
| SELLERGREN, G., Torvfibern som spånadsämne | 488 |
| SONDÉN, KLAS, Några tekniska uppgifter med hygieniskt syfte, ett kapitel av »tillämpad hygien» | 501 |

F Ö R O R D

Frågan om den högre tekniska undervisningens ordnande och speciellt Tekniska högskolans omorganisation och i samband därmed stående hehov av personal, lokaler och utrustning har allt sedan sekelskiftet varit föremål för en hel del utredningar såväl av högskolans myndigheter som av särskilda kommitterade och sakkunniga. År 1911 ledde dessa arbeten till ett första positivt resultat, genom vilket frågan bragtes ett mycket stort steg närmare sin lösning. Genom statsmakternas beslut beviljades nämligen detta år dels ny stat för Tekniska högskolan, upptagande bl. a. ett stort antal nya professurer och speciallärarebefattningar, dels ock anslag till nya byggnader för laboratorier ävensom hör- och ritsalar för 3:e och 4:e årskurserna av högskolans samtliga fackavdelningar utom den kemiska. Dessa byggnader hava uppförts under åren 1913—1917 och kunde tagas i bruk vid början av höstterminen 1917, då desamma vid en enkel högtidlighet den 19 oktober av Hans Majestät konungen officiellt öppnades och invigdes för sitt ändamål.

När byggnadsföretaget fortskridit så pass långt, att man med tämlig sannolikhet kunde förutse tiden för dess fullbordande, väckte högskolans rektor, professor C. J. Magnell, inom lärarekollegiet förslag om utgivande av en publikation för att på ett varaktigt sätt hugfästa minnet av den för högskolan så betydelsefulla tidpunkt, då en del av dess avdelningar finge inflytta i nya lokaler, där moderna laboratorier öppnade möjligheter för tidsenlig undervisning och framgångsrik tekniskt-vetenskaplig forskning. Detta förslag omfattades med stort intresse av lärarekollegiet, som för att föra frågan vidare tillsatte en kommitté, bestående av professorerna Lundholm, Fellenius, Petré, Wahlman, Pleijel, Heuman och Kullgren. Efter en preliminär utredning av denna kommitté beslöt kollegiet på sitt sammanträde den 21 februari 1917 att uttala sig för önskvärdheten av att en sådan publikation komme till stånd samt att densamma borde innehålla dels historik över byggnadernas tillkomst, dels beskrivningar över byggnaderna och laboratorierna, dels slutligen fackvetenskapliga avhandlingar och uppsatser ävensom artiklar i frågor av mera allmänt tekniskt intresse, i den mån sådana ställdes till förfogande av högskolans lärare. För att bringa förslaget till utförande tillsattes en redaktionskommitté, bestående av undertecknade tre kollegiemedlemmar, av vilka undertecknad Heuman haft att närmast handlägga de löpande redaktionella göromålen.

En historisk skildring av Tekniska högskolans utveckling under äldre tidsskeden (1826—1877), författad av professor Pontus Henriques, förelåg vid denna tidpunkt redan färdig i manuskript och utkom strax före invigningshögtidligheten i oktober 1917 på P. A. Norstedt & söners förlag. Med detta arbete äger det föreliggande så till vida samband, som båda tillkommit närmast av samma anledning, och denna samhörighet har även erhållit ett yttre uttryck genom gemensam övertitel och gemensamt format.

Den ursprungliga avsikten var, att även föreliggande arbete skulle varit färdigt till invigningshögtidligheten, men detta visade sig omöjligt att realisera redan av det skäl, att byggnadsbeskrivningen med tillhörande fotografier icke kunde utföras, förrän byggnaden var fullt färdig. Sedermera ha en del omständigheter tillstött, varigenom utgivningen blivit ytterligare fördröjd, så att arbetet först nu, i slutet av vårterminen 1918, kunnat lämna pressen.

Det för publikationen ställda programmet har i huvudsak kunnat fullföljas, tyvärr dock med den inskränkning, att endast ett par av de nya laboratorierna här kunnat något så när fullständigt beskrivas. Anledningen härtill är dels att åtskilliga laboratorier på grund av den enorma prisstegringen på alla områden endast kunnat provisoriskt iordningställas, dels att vederbörande institutionsföreståndares tid varit så hårdt tagen i anspråk, att utarbetandet av en beskrivning icke kunnat medhinnas. Då sådana beskrivningar äro av den allra största betydelse för laboratoriernas utnyttjande, är det att hoppas, att ett tillfälle snart må erbjuda sig, då denna lucka kan kompletteras — exempelvis i samband med invigningen av den nya kemiska institutionen, som nu är under uppförande, sedan medel beviljats av 1916 års riksdag.

Då högskolan icke haft något anslag till här föreliggande arbetes utgivande, har man härför varit hänvisad helt och hållet till enskild offervillighet. Det visade sig snart, att företaget skulle komma att draga högst betydande kostnader, och man började nästan misströsta om möjligheten att föra detsamma till ett lyckligt slut. Tack vare den utomordentliga välvilja, som visats högskolan av minnesgoda och frikostiga f. d. elever, ha emellertid de nödiga medlen blivit ställda till redaktionskommitténs förfogande. Det är en kär plikt att här offentligen framföra högskolans och särskilt lärarekollegiets varmaste tack till givarna, bruksdisponent Kristoffer Huldt, direktörerna Axel Hultman, Bengt Ingeström och Hemming Johansson, ingenjör Ivar Kreuger och brukspatron Sven Spånberg, för den goda hjälp de härmed givit högskolan.

Till sist ber redaktionskommittén att få framföra sin tacksamhet till Kungl. boktryckeriet och Generalstabens litografiska anstalt för den osparda möda de nedlagt på arbetets typografiska utstyrelse samt till förlagsfirman P. A. Norstedt & söner, som genom att övertaga en del av upplagan för distribution i bokhandeln ävenledes underlättat arbetets utgivande.

Stockholm i maj 1918.

Erik Lallerstedt.

H. Pleijel.

Carl Heuman.

HISTORIK ÖVER TILLKOMSTEN AV DE UNDER
ÅREN 1913—1917 UPPFÖRDA NYBYGGNADERNA FÖR
KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN

AV

C. J. MAGNELL

HISTORIK ÖVER TILLKOMSTEN AV DE UNDER
ÅREN 1913—1917 UPPFÖRDA NYBYGGNADERNA
FÖR KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN

AV

C. F. MAGNELL.

Enligt Kungl. Maj:ts nådiga brev av den 12 maj 1876 förändrades dåvarande »Teknologiska institutet» till »Tekniska högskolan». I och med denna förändring av läroanstaltens namn infördes en del viktiga ändringar i fråga om inträdsvillkor och lärarebefattningar, varjämte högskolans stat, som förut belöpte sig till c:a 75 000 kr. årligen, höjdes till c:a 140 000 kronor.

Högskolans byggnader — belägna i kvarteret Paris vid Drottninggatan och bestående av en huvudbyggnad samt en mindre byggnad för bergsundervisningen (se fig. 1, *A* och *B*) — undergingo dock inga förändringar. Utrymmet i dessa byggnader var så rikligt för dåvarande förhållanden, att, förutom bostäder för vaktmästare, där kunde inrymmas boställsvåningar för såväl högskolans föreståndare som för föreståndarna för fackskolorna för bergsvetenskap och för kemisk teknologi.

Något behov av ökat utrymme gjorde sig icke heller under den närmaste tiden gällande. Åren närmast efter läroanstaltens omvandling till teknisk högskola inträdde nämligen en med den allmänna ekonomiska tillbakagången sammanhängande minskad tillströmning av inträdessökande till landets tekniska undervisningsanstalter. Vid Tekniska högskolan sjönk de inträdessökandes antal från 103 under år 1877 till 90 och 69 resp. under åren 1878 och 1879, och sedan höll sig antalet med små växlingar någor-

lunda konstant under tio års tid. I slutet av 1880-talet började emellertid tillströmningen av inträdessökande att betydligt tilltaga, så att 1888 voro de 96 och året därpå 129. Enligt Kungl. Maj:ts beslut var emellertid det

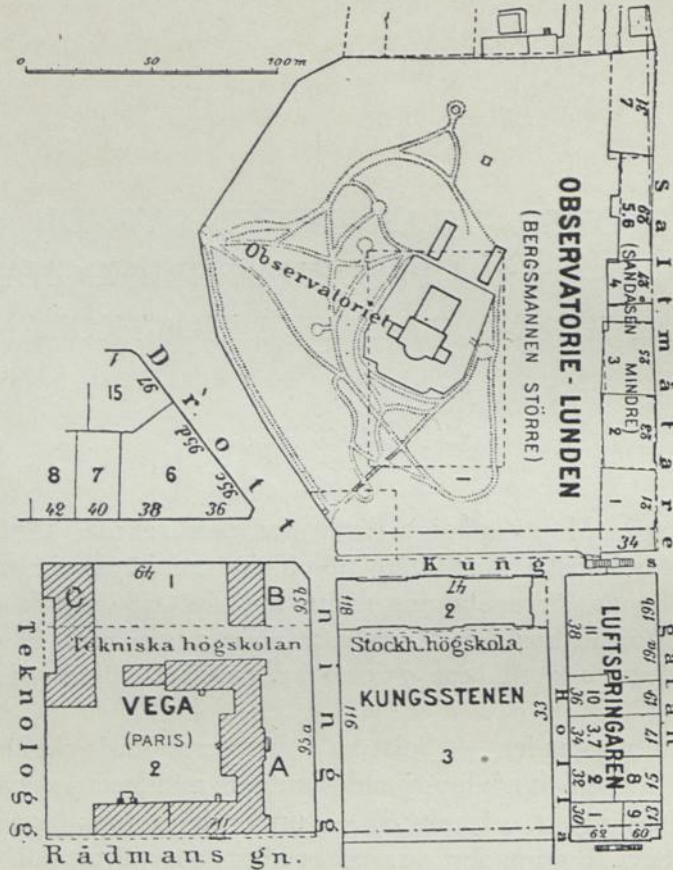


FIG. 1. TEKNISKA HÖGSKOLANS ÄLDRE TOMT MED DÄRÅ BEFINTLIGA BYGGNADER:
A HUVUDBYGGNADEN (UPPF. 1860—63), *B* BERGSSKOLAN (UPPF. 1867—69),
C KEMIKUM (UPPF. 1896—98).

antal, som med hänsyn till lokaler och lärarekrafter kunde mottagas, fastställt till högst 80.

Efter en utredning under åren 1890—91 bestämde Kungl. Maj:t, att från och med år 1892 antalet elever i 1:a årskursen skulle få vara högst 100, en bestämmelse, som ägt gällande kraft till och med år 1915, men från

vilken Kungl. Maj:t årligen alltsedan år 1899 på styrelsens framställning för varje gång medgivit undantag, så att antalet ökats till 125.

Att elevantalet i första årskursen på detta sätt kunnat ökas från det ursprungligen avsedda, 80, kom sig därav, dels att de nyssnämnda tre boställsvåningarna efter hand tagits i anspråk för undervisningens behov, dels att en nybyggnad tillkommit för högskolans kemiska, kemisk-tekniska och mineralogiska institutioner (se fig. 1, C). Denna byggnad, som beviljades år 1895, togs i användning höstterminen 1898.

Högskolans lärarekrafter utgjordes vid denna tidpunkt (1900) av 12 professorer, 10 lektorer, 17 extralärare, 2 docenter och 15 assistenter. Till jämförelse må meddelas, att högskolans stat för närvarande (1917) upptar 32 professurer och 31 speciallärarebefattningar, varjämte finnas 8 docenter och 41 assistenter.

Då det allt fortfarande visade sig, att högskolans lokaler voro otillräckliga, utarbetade högskolans dåvarande rektor, professor Dahlander, under år 1900 ett förslag till utvidgning, vilket åsyftade att vinna utrymme för 180 årligen nytillträdande elever.

Det Dahlanderska förslaget avsåg, att parallellkurser skulle inrättas inom vissa ämnen samt att det erforderliga lokalutrymmet skulle vinnas genom påbyggnad och förlängning ut till Teknologgatan av huvudbyggnadens södra flygel för en kostnad av i rundt tal 300 000 kronor. Detta förslag vann dock icke lärarekollegiets bifall, emedan lokalutvidgningen ansågs alltför otillräcklig, och under åren 1901 och 1902 utarbetades inom kollegiet ett motförslag med utgångspunkt från endast 150 elever i första årskursen och med nöjaktigt avhjälpande av trångboddheten. Enligt detta förslag skulle, utom den nyssnämnda flygelbyggnaden, även uppföras en byggnad mellan denna och den kemiska institutionens byggnad, så att såväl södra som västra delarna av tomten skulle bliva fullt bebyggda. Härjämte upptog förslaget även en mindre byggnad inne på gården. Byggnadskostnaden beräknades till 800 000 kr.

Då emellertid intet av dessa förslag ledde till någon åtgärd, uppdrog högskolans styrelse våren 1903 åt högskolans då nyblivne rektor, sedermera presidenten, professor And. Lindstedt, att efter samråd med fackskoleföreståndare och övriga huvudlärare, så fort ske kunde, uppgöra nytt förslag till frågans lösning, gående ut på en utvidgning av högskolan för mottagande av ett väsentligt större antal elever, än som dittills varit möjligt.

Detta förslag, som den 27 nov. samma år avlämnades till Kungl. Maj:t, utgick ifrån ett antal av 240 elever i första årskursen.

Kungl. Maj:t anbefalldes emellertid rektor att i samråd med de ovan nämnda lärarna företaga vissa jämkningar i detta förslag. Det sålunda reviderade förslaget avlämnades år 1904 till Kungl. Maj:t.

Förslaget i fråga upptog, förutom förut omnämnda nybyggnader utefter tomtens södra och västra gränser och byggnaden inne på gården, tillbyggnader på bergsskolans tomt utefter norra sidan samt en flygelbyggnad midt emot nuvarande kemikum. Härigenom skulle hela tomten således hava blivit bebyggd så godt som rundt om. Kostnaderna för dessa byggnader jämte inredning, vilka voro avsedda endast för att tillgodose de närmaste behoven, men icke kunde tävla med de storartade och dyrbara institutioner av motsvarande beskaffenhet, som finnas vid flera av utlandets tekniska högskolor, beräknades till 2 117 370 kr.

I november 1904 uppdrog statsrådet och chefen för K. Ecklesiastikdepartementet åt herrar landshövdingen A. G. J. Svedelius samt ingenjörerna J. E. Biesert och A. Decker att i egenskap av sakkunnige avgiva underdånigt yttrande »angående behovet av och sättet för utvidgning och omorganisation av Tekniska högskolan enligt av bemälda högskolas styrelse ingivet underdånigt förslag».

På framställning av dessa sakkunniga anmodade ecklesiastikministern C. S. von Friesen den 13 februari 1905 högskolans styrelse att efter lärarekollegiets hörande inkomma med yttrande, huruvida det framlagda förslaget kunde anses tillfredsställande fylla kravet på den högre tekniska utbildningen i vårt land med hänsyn till industriens dåvarande ståndpunkt, huruvida förslaget innebar nödiga utvecklingsmöjligheter såväl kvalitativt som kvantitativt i mån av framtida ökade anspråk, samt huruvida det hittills följda undervisningssystemet kunde anses vara fullt tillfredsställande eller borde underkastas några förändringar.

Vid besvarandet av dessa spörsmål yttrade högskolans myndigheter bland annat, »att styrelsen själv icke ansett sitt förslag motsvara alla fordringar, utan, såsom i rektors av styrelsen accepterade motivering framhålles, huvudsakligen avsett att avhjälpa de närmaste behoven, att på grund av teknikens snabba utveckling ytterligare behov av lärarekrafter för utvidgning av undervisningen framdeles efter hand komma att göra sig gällande, och att således vad som i det avgivna förslaget angivits såsom erforderligt naturligen endast kan tillgodose den närmaste framtidens krav, men icke göra anspråk på att i alla avseenden motsvara de behov, som i följd av den fortgående utvecklingen snart nog kunna komma att framträda» samt att »redan en flyktig blick på den uppgjorda byggnadsplanen visar, såsom jämväl lärare-

kollegiet i sin resolution av den 16 mars anført, att någon mera avsevärd utvecklingsmöjlighet på denna tomt efter nämnda plans genomförande icke förefinnes», utan »handlar det om tillgodoseendet av även en fjärmare framtids behov, torde det enda lämpliga vara: en ny högskola». Styrelsen hade dock varit betänksam i fråga om ett sådant förslag, som med avseende på kostnaderna kunde »verka avskräckande».

I likhet med kollegiet ansåg jämväl styrelsen, att vid högskolan borde beredas större möjlighet än dittills »för ernående av specialutbildning och utförande av vetenskapliga arbeten».

Sedan därefter landshövding Svedelius och ingenjör Biesert av sagt sig uppdraget rörande denna fråga, blev densamma vilande till år 1906.

Under tiden hade den emellertid livligt behandlats inom intresserade fackkretsar utom högskolan, och den åsikten hade alltmera gjort sig gällande, att en mera omfattande utredning krävdes beträffande landets högre tekniska undervisning.

Den 13 juli 1906 tillsatte Kungl. Maj:t en kommitté med uppdrag »att avgiva underdånigt utlåtande och förslag, huru den högre tekniska undervisningen i riket lämpligen bör ordnas». Denna kommitté utgjordes av landshövding G. Dyrssen, ordförande, samt ledamöterna överingenjören P. T. Berg, överingenjören A. Decker, majoren H. Lemke, högskolans rektor A. Lindstedt, disponenten A. Wahlberg och rektorn vid Chalmers tekniska läroanstalt A. Wijkander.

Denna kommitté gick synnerligen grundligt tillväga, varom dess innehållsrika betänkande och förslag av den 27 maj 1908 noggsamt vittnar. Häruti föreslås en genomgripande omorganisation av Tekniska högskolan, vars detaljer emellertid här icke skola vidröras i vidare mån, än som de hava direkt avseende på högskolans byggnadsfråga. Förslaget baserades på ett elevantal av 300 årligen inträdande och ett lärare-antal av 31 professorer och 27 speciallärare förutom det erforderliga antalet assistenter. Undervisningen skulle i åtskilliga ämnen givas en ökad specialisering, och framför allt skulle undervisningen inriktas på laborationer i mycket större utsträckning, än som förut kunnat ske.

I fråga om lokalerna kom denna kommitté till den icke oväntade slutsatsen, att det lämpligaste vore att uppföra helt nya byggnader för hela högskolan, samt förlägga dessa på något område utanför högskolans tomt vid Drottninggatan. Härigenom skulle bland annat vinnas, att den sistnämnda tomten bleve ledig för annat ändamål. Av särskilt tillkallade sakkunniga, stadsingenjören H. Ygberg och direktören i fastighetsbolaget Drott,

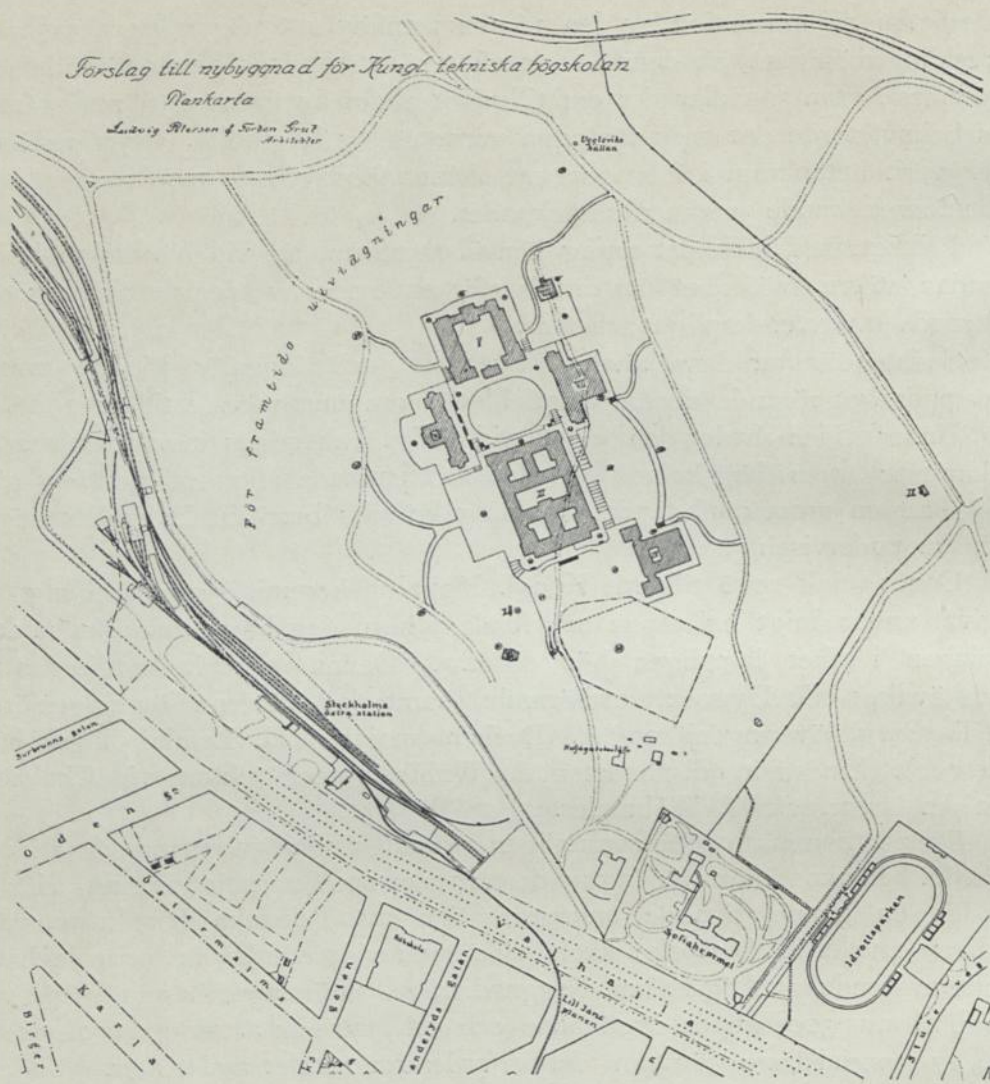


FIG. 2. KUNGL. KOMMITTENS NYBYGGNADSFÖRSLAG. PLANKARTA.

C. O. T. Örtenblad, värderades denna tomt, dels med byggnaderna till 2 200 000 kronor och dels, »oavsett därå befintliga byggnader», till 1 940 000 kronor. Tomten hade åren 1859 och 1867 blivit inköpt för sammanlagt 66 000 kronor. För byggnader och inventarier hade av riksdagen anvisats inalles 1 200 000 kr. En värdestegring av i rundt tal 1 000 000 kr. hade således ägt rum.

Kommittén framlade som nämnt den 27 maj 1908 sitt betänkande och bilade därvid ett av arkitekterna Ludvig Peterson och Torben Grut uppgjort byggnadsförslag (se fig. 2). Enligt detta förslag skulle förutom några mindre byggnader uppföras omkring en större gård fyra större byggnader nämligen huvudbyggnad, maskinlaboratorium, byggnad för kemi och byggnad för bergsvetenskap samt utanför den nämnda gården i närheten av huvudbyggnaden en byggnad för fysik och elektroteknik. Byggnaderna avsågos att förläggas ungefär på den plats, där de nya byggnaderna nu ligga, ehuru längre norr ut, så att avståndet från Valhallavägen upp till den närmaste byggnaden skulle hava blivit 370 meter. Kostnadssumman för dessa byggnader jämte utrustning, allt beräknat för 300 årligen nytillträdande elever, beräknades av kommittén till 9 312 398 kronor.

Frågan om realiserandet av kommitténs förslag tilldrog sig mer och mer uppmärksamheten inom fackkretsar och särskilt inom Svenska teknologföreningen togs densamma till behandling på årsmötet i mars 1909 med det resultat, att föreningen gjorde följande uttalande:

»Svenska teknologföreningen, samlad till årsmöte den 22 mars 1909, har efter hållen överläggning med acklamation beslutat såsom sin åsikt uttala, att en utvidgning av Kungl. tekniska högskolan är oavvisligen nödvändig för att tillgodose behovet av ökad ingenjörutbildning i vårt land, och att högskolans nybyggnadsfråga bör lösas i huvudsaklig överensstämmelse med det förslag, vilket den för frågans beredande den 13 juli 1906 tillsatta Kungl. kommittén framlagt.»

Sedan underdånigt yttrande över kommitténs förslag avgivits av högskolans styrelse, framlade Kungl. Maj:t nådig proposition om högskolans omorganisation och nybyggnader för densamma inför 1909 års riksdag. Riksdagen, till vilken den nådiga propositionen avlämnades så sent som den 26 mars, fann icke tid att pröva detta vidlyftiga ärende, varför propositionen endast i fråga om högskolans stat vann riksdagens bifall.

På grund av det statsfinansiella läget och de högst avsevärda kostnader, som skulle vara förknippade med frågans lösning i den av kommittén angivna riktningen, ansåg sig dåvarande statsrådet och chefen för K. Ecklesiastikdepartementet, P. E. Lindström, ej böra göra någon framställning i ärendet till 1910 års riksdag.

Då det emellertid syntes statsrådet, som om kommitténs förslag i vissa avseenden borde undergå ytterligare granskning från sakkunnigt håll, gjordes underdånig hemställan om tillkallandet av högst tre sakkunniga för att inom

departementet biträda vid fortsatt beredande av frågan om den högre tekniska undervisningens ordnande.

Sedan Kungl. Maj:t bifallit denna framställning, tillkallades den 16 sept. 1910 i och för frågans beredande professorerna vid högskolan E. Lallerstedt och C. J. Magnell samt föreståndaren för Chalmers tekniska läroanstalt professorn E. A. Wijkander.

Den utredning, som av dessa sakkunniga den 12 dec. 1910 överlämnades till statsrådet och chefen för K. Ecklesiastikdepartementet innehöll med avseende på högskolans byggnadsfråga huvudsakligen följande:

En av de viktigaste frågorna vid bedömandet av det lämpligaste sättet för Tekniska högskolans utvidgning gäller det antal elever, som bör läggas till grund för förslaget uppgörande. Institutionens storlek och kostnaden för utvidgningen äro givetvis beroende härpå. Kostnaden står dock ingalunda i direkt proportion till elevantalet. Vad byggnaderna beträffar, är storleken av de flesta laboratorielokalerna och samlingssalarna nästan oberoende därav, och en del andra lokaler, såsom hörsalar, tentamensrum m. m. d., minskas visserligen med minskat elevantal, men ej i direkt proportion.

Det som först och främst bör vara avgörande för bedömandet av det elevantal, för vilket högskolan bör avses, är naturligtvis det antal högskolebildade ingenjörer, som landet behöver, men tyvärr är det mycket svårt, för att ej säga omöjligt, att bestämma detta antal. Tillströmningen av inträdessökande måste dock anses vara ett uttryck för detta landets behov av sådana ingenjörer. Det stora antalet inträdessökande visar otvetydigt, att ingenjörbanan är eftersökt, vilket måste hava sin grund däruti, att erfarenheten visat, att de som genomgått högskolan i regel lyckats skaffa sig en god utkomst. Man kan vara övertygad om, att vederbörande i varje särskilt fall gör en så noggrann undersökning som möjligt angående utkomsten på den tekniska banan, innan beslutet fattas om inträdes sökande vid högskolan.

Ser man frågan från de utgående unga ingenjörernas synpunkt, är det tydligt, att ett väsentligt ökat elevantal, åtminstone till en början, kommer att i viss mån öka svårigheterna för de utexaminerade att erhålla förmånliga platser, men ser man frågan från en vidsträcktare synpunkt, är det tydligt, att om ett större antal ingenjörer utbildas, härigenom tävlan dem emellan kommer att uppstå, så att endast de som äro bättre ägnade för ingenjörskallet kvarbliva på den egentliga ingenjörbanan, vilket uppenbarligen måste bliva till teknikens och därmed till landets fromma. Genom denna tävlan

mellan de utexaminerade ingenjörerna skulle de kunniga och initiativrika krafter, som landet väl behöver för att tekniken skall komma till sin rätt och för att landets alla naturliga resurser skola utnyttjas för vinstgivande industriella arbeten, bättre tillvaratagas, än vad förhållandet är nu, då utgallringen sker före inträdet till högskolan, innan den verkliga förmågan och dugligheten ännu varit i tillfälle att visa sig. Konkurrensen gör, att nya vägar sökas och finnas, varigenom även industrien utvecklas. Den som på grund av konkurrensen tvingas att överge den egentliga ingenjörsbanan, har likväl icke kastat bort sin studietid, ty numera finnes snart sagt inom alla områden av handel och näring användning för tekniska kunskaper.

Att monopolisera ingenjörsyrket åt ett fåtal är visserligen för dessa individer vinstgivande, men det allmänna kan aldrig annat än lida skada av sådan monopolisering.

En synpunkt, som även bör beaktas, är den, att i landet finnes ett avsevärdt antal familjer, vilkas söner under alla omständigheter komma att förvärva sig högre bildning, det må nu ske vid den ena eller andra högskolan. Frågan blir då, om det kan anses vara riktigt, att såsom hittills endast universitetsbildningen står obegränsat öppen för alla, eller om icke såväl denna som den tekniska högskolebildningen bör kunna förvärfvas av envar efter eget val och fallenhet. Ett sådant frigivande av den tekniska undervisningen måste tydligen verka därhän, att icke blott ett större antal personer komma in på för dem lämpliga levnadsbanor, utan även att ett stort antal av dessa personer förvärva kunskaper, som i det praktiska livet lämna flera möjligheter för användning öppna, än som lämnas genom kunskaper enbart förvärfvade vid universitet.

1906 års kommitté anför å sid. 61 en statistik över de inträdessökande vid Tekniska högskolan för åren 1878—1907. Motsvarande statistik för åren 1908—10 visar följande siffror:

| År | Kompetenta | Antagna | % |
|----------------|------------|---------|----|
| 1908 | 214 | 125 | 58 |
| 1909 | 254 | 122 | 45 |
| 1910 | 246 | 124 | 50 |

De senaste åren har antalet inträdessökande varit större än något föregående år.

För byggnadsfrågans fullständiga bedömande var det likväl behöfligt att tillse, huru kostnaderna för de erforderliga byggnadernas uppförande

skulle ställa sig, därest planläggningen gjordes för olika antaganden beträffande antalet årligen tillträdande elever, och för bedömandet härav att undersöka behovet av lokaler vid en fullt tidsenlig högskola, dels för det nuvarande antalet elever, nämligen 125 årligen tillträdande, och dels för ett antal av 200. Härvid har i tillämpliga delar användts den utredning, som 1906 års kommitté lämnat efter att hava på ort och ställe studerat utländska högskolor och samarbetat med sakkunniga inom landet.

Enligt kommitténs förslag till en nyuppförd högskola å norra Djurgården är denna uppdelad i en *huvudbyggnad*, innehållande föreläsnings- och ritsalar, kansli, bibliotek m. m., en byggnad för *fysik och elektroteknik*, en byggnad upptagande *maskinlaboratorium*, en byggnad för *kemi*, samt en för *bergsvetenskap*. Dessutom finnas en del smärre byggnader, vilkas storlek dock obetydligt inverkar på det hela, varför de ej här äro medtagna. Vid denna utredning sammanställas siffrorna i samma grupper, som i kommitténs förslag, utan att det därför må anses nödvändigt, att uppdelningen blir den, som ovan anförts.

Vad då först huvudbyggnaden beträffar, upptager densamma enligt kommitterades förslag med 300 årligen tillträdande elever en nyttig golvarea av ungefär 21 000 kvm.

Vid reduktion med hänsyn till respektive 125 och 200 årligen tillträdande elever iakttages, att endast ritsalarna minskas i nästan samma proportion som elevantalet. Övriga rum minskas i annan proportion. Varje hörsal skall visserligen beräknas för ett elevantal något så när direkt proportionellt mot antalet tillträdande, d. v. s. mot talen 125, 200 och 300, men det är att märka, att golvytan per elev kan räknas mindre i en hörsal för ett stort antal elever än i en hörsal för ett litet antal, enligt en utredning, som även är utförd av kommittén. Så till exempel kan en hörsal för 200 elever och däröver beräknas med en golvyta av 0,7 å 0,8 kvm per elev, under det att en hörsal för 100 elever bör beräknas med en golvyta av 1,0 å 1,2 kvm, samt en hörsal för 40 å 50 elever med en yta av 1,3 å 1,5 kvm per elev. Ett liknande förhållande gäller även tentamensrummen. Vad beträffar samlings- och lärarorum, äro dessa nästan oberoende av elevantalet. Samlingsrummens utrymme bestämmes av samlingarnas storlek och bliver mycket betydande i en tidsenlig teknisk högskola. Lärarorummens antal är beräknat med hänsyn till huvudlärarnas antal, vilket är oberoende av elevantalet. Detta gäller även kollegierummet samt till stor del kansli och bibliotek. Med iakttagande av det nu sagda erhållas för huvudbyggnaden de erforderliga golvareor, som följande tabell utvisar:

| | | | |
|---|--------|--------|--------|
| Antal årligen nytillträdande elever | 125 | 200 | 300 |
| Hörsalar kvm | 960 | 1 210 | 1 510 |
| Tentamensrum » | 350 | 400 | 460 |
| Ritsalar » | 2 480 | 3 500 | 5 280 |
| Rum för samlingar & lärarorum » | 4 160 | 4 160 | 4 160 |
| Bibliotek, kansli, kollegierum » | 1 480 | 1 500 | 1 680 |
| Aula » | 300 | 400 | 600 |
| Vaktmästarebostäder » | 200 | 260 | 390 |
| Korridorer och trappor » | 4 860 | 5 650 | 6 910 |
| Summa nyttig golvarea i kvm | 14 790 | 17 220 | 20 990 |

Efter någon avrundning erhåller man således:

| | | |
|---|--------|-----|
| för 125 nytillträdande elever | 14 800 | kvm |
| » 200 » » | 17 200 | » » |
| » 300 » » | 21 000 | » » |

sammanlagd erforderlig golvarea.

Vad övriga byggnader beträffar, blir minskningen proportionsvis mycket mindre, om elevantalet minskas, och gäller detta speciellt maskinlaboratoriet, vars storlek är nästan oberoende av elevantalet. Detta laboratorium måste i sin helhet beräknas med hänsyn till det utrymme de erforderliga maskinerna upptaga, och det är endast några små rit- och hörsalar, som undergå någon förändring. I byggnaderna för fysik och elektroteknik finnas större auditorier, som undergå ändring, men själva laboratorierna äro även här nästan oberoende av elevantalet. Detta gäller även om byggnaden för bergsvetenskap samt om byggnaden för kemi, dock med den inskränkning, att i denna byggnad finnas även en del laboratorierum, vilkas storlek beräknas efter elevantalet.

I nedanstående tabell sammanställas siffrorna för de olika byggnaderna:

| | | | |
|---|--------|--------|--------|
| Antal årligen nytillträdande elever | 125 | 200 | 300 |
| Huvudbyggnad kvm | 14 800 | 17 200 | 21 000 |
| Byggn. för fysik & elektrotekn. » | 4 370 | 4 740 | 5 000 |
| Maskinlaboratorium » | 4 400 | 4 440 | 4 510 |
| Byggn. för kemi » | 4 040 | 4 330 | 4 820 |
| Byggn. för bergsvetenskap » | 4 550 | 4 790 | 5 150 |
| Sammanlagd golvarea i kvm | 32 160 | 35 500 | 40 480 |

De byggnader, som för närvarande finnas uppförda på högskolans tomter vid Drottninggatan, upptaga sammanlagt en nyttig golvarea av 8 550 kvm. Tillbyggnadsförslaget av år 1904, som avsåg att i möjligaste mån utnyttja dessa tomter, upptog en sammanlagd nyttig golvarea av 10 150 kvm.

Bibl.
Pol. ract

Enligt detta förslag uppgick sålunda hela utrymmet, som skulle kunna erhållas på dessa tomter, inberäknat nuvarande byggnader, till 18 700 kvm. Jämföres denna siffra med den, som ovan beräknats för en fullt tidsenlig högskola för 125 årligen tillträdande elever, nämligen 32 160 kvm, synes att tomten även för detta antal elever, som dock av alla erkännes vara för litet, är alldeles otillräcklig.

Med tillhjälp av denna utredning angående behovet av lokaler för en högskola, beräknad för olika elevantal, kan man även beräkna de resp. kostnaderna. I 1906 års kommittés utlåtande finnas kostnadsberäkningar utförda för en högskola beräknad för 300 årligen tillträdande elever, och man kan därav genom direkt proportionering erhålla kostnaden motsvarande ett annat elevantal. Då man utgår från ett visst pris per kubikmeter av respektive byggnaders volym, samt då respektive lokaler skola i de olika förslagen hava samma våningshöjder, kan man nämligen med tillräcklig noggrannhet för detta ändamål antaga, att kostnaden för varje särskild byggnad står i direkt proportion till den nyttiga golvarean.

I nedanstående tabell äro kostnaderna för nybyggnader för en högskola, beräknad för dels 300 och dels 200 årligen nytillträdande elever, sammanförda. De förra kostnaderna äro de, som 1906 års kommitté anfört (se sidan 240 i betänkandet).

| Antal årligen nytilltr. elever | 300 | | 200 | | Kostnads- skillnad kronor |
|---|----------------------------|--------------------------------|----------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| | Nyttig golvarean kvm | Byggnads- kostnad kronor | Nyttig golvarean kvm | Byggnads- kostnad kronor | |
| Huvudbyggnad | 21 000 | 3 502 000 | 17 200 | 2 868 000 | 634 000 |
| Byggnad för fysik och elektroteknik | 5 000 | 743 000 | 4 740 | 704 000 | 39 000 |
| Maskinlaboratorium | 4 510 | 624 000 | 4 440 | 614 000 | 10 000 |
| Byggnad för kemi | 4 820 | 642 000 | 4 330 | 577 000 | 65 000 |
| » » bergsvetenskap | 5 150 | 727 000 | 4 790 | 676 000 | 51 000 |
| | 40 480 | 6 238 000 | 35 500 | 5 430 000 | 799 000 |

Nu anförda kostnadssummor avse endast själva byggnadsarbetet, men ej anordningar för vatten, uppvärmning, belysning samt inventarier och apparater. Av tabellen synes, att kostnadsskillnaden för själva byggnaderna belöper sig till c:a 800 000 kronor, varav c:a 630 000 kronor för huvudbyggnaden. När nu tillströmningen av kompetenta inträdessökande de senare åren och även vid föregående tillfällen varit större än 200, är det högst sannolikt, att om högskolan nybygges för endast 200 årligen nytillträdande elever, man inom en snar framtid skulle bliva nödsakad att ånyo företaga utvidgningar. Sådana utvidgningar skulle visserligen, om den nya

tomten ej bleve för knappt tilltagen, kunna låta sig göra för en del lokaler såsom ritsalar och dylika rum, varvid dock bör beaktas, att det i många fall icke längre bleve möjligt för *en* huvudlärare att sköta undervisningen vid övningarna, emedan man icke kunde påräkna, att lokalerna skulle kunna förläggas i för undervisningen lämpligt sammanhang. Härigenom skulle således de årliga kostnaderna bliva väsentligt högre, än om byggnaderna från början anordnats för det högre elevantalet. För hörsalar skulle det stöta på högst betydande svårigheter och föranleda mycket stora kostnader att förändra desamma, så att samma salar skulle kunna rymma 50 % flera åhörare. De sakkunniga måste därför som sin övertygelse framhålla såsom lämpligast, att högskolan från början, vad byggnaden beträffar, anordnas för 300 årligen nytillträdande elever.

Av det anförda kan man även finna, att det ur kostnadssynpunkt är särdeles olämpligt att uppdelas Tekniska högskolan på *tvenne lika utrustade läroanstalter* i olika delar av landet, en fråga, som varit under diskussion med anledning av ifrågasatta utvidgningar av Chalmerska institutet i Göteborg. Av utredningen framgår nämligen genom jämförelse med siffrorna för resp. 125 och 200 årligen nytillträdande elever, att för en högskola beräknad för 150 årligen nytillträdande elever skulle erfordras en sammanlagd nyttig golvarea av c:a 34 000 kvm, d. v. s. för *tvenne högskolor* med tillsammans 300 årligen nytillträdande elever c:a 68 000 kvm, under det att *en* högskola för sistnämnda antal erfordrar en golvarea av endast c:a 41 000 kvm. Själva byggnadskostnaderna skulle således bliva mer än 50 % större, om högskolan uppdelas i två. Härtill kommer, att den dyrbaraste utrustningen, nämligen den för samlingar och laboratorier och dylikt, är nästan densamma för det mindre som för det större antalet elever, varför således skulle fordras tvenne fullständiga dylika utrustningar. Vidare bliva de årliga kostnaderna för en högskola för 150 eller 300 mycket nära lika, då nämligen nästan samma lärarkrafter erfordras för båda, således skulle i detta avseende kostnaden nästan fördubblas. Det är då tydligt, att man icke bör tillgripa utvägen om uppdelning i tvenne högskolor, åtminstone ej förrän elevantalet blivit så stort, att undervisningen icke kan skötas utan uppdelning i parallellkurser.

De sakkunniga hava vidare undersökt, huru kostnaderna skulle ställa sig om man skulle utnyttja tomten vid Drottninggatan, så långt detta låter sig göra, medan en del av byggnaderna förläggas på annan plats. Då det torde vara självklart, att ju högre elevantal högskolan anordnas för, desto mindre skäl finnes, att med en del av byggnaderna kvarbliva på den

nuvarande tomten, hava de sakkunniga vid denna utredning utgått från endast 200 årligen nytillträdande elever, då detta elevantal torde vara det minsta som kunde ifrågasättas vid en nybyggnad för Tekniska högskolan. För detta elevantal erfordras, enligt vad ovanstående tabeller visa, lokaler med en total golvyta av 35 500 kvm, varav huvudbyggnaden upptager 17 200 och de övriga byggnaderna 18 300. Som ovan blivit nämnt, skulle man på den nuvarande tomten kunna erhålla c:a 18 700 kvm, och då det skulle vara betydligt billigare att ändra nu befintliga lokaler till rit- och hörsalar än till laboratorier, synes sålunda, att tomten, då endast kostnads-synpunkten tages i betraktande, bäst skulle utnyttjas genom ett bebyggande, avsett att motsvara den erforderliga huvudbyggnaden, som just inrymmer lokaler av det förstnämnda slaget. För övriga byggnader skulle plats skaffas på annat håll.

En annan fördelning skulle dock kunna tänkas, t. ex. att den nuvarande byggnaden för kemi bibehålles och utökas till erforderlig storlek, samt att en del av de lokaler, som nu äro avsedda att förläggas inom den föreslagna huvudbyggnaden, förlades å annan plats. Men då enligt kommitténs förslag kemibygnaden är av ungefär samma byggnadstyp som huvudbyggnaden, d. v. s. i 4 våningar, erhålles vid kostnadsberäkningen för själva byggnaderna samma resultat vid en sådan placering, som om hela huvudbyggnaden tänkes placerad å den nuvarande tomten.

Då huvudbyggnaden skulle erfordra en golvarea av 17 200 kvm och nuvarande lokaler upptaga endast c:a 8 500 kvm, skulle sålunda en tillbyggnad på nuvarande tomten motsvarande 8 700 kvm vara erforderlig. Med normalt tillägg för murverk, samt räknat med en medelhöjd på våningarna från golv till golv av 4,5 m, motsvarar detta en byggnadsvolym av 45 000 kubikmeter, vilket efter samma grund för kostnadsberäkningen, som kommittén användt, nämligen 26 kronor per kubikmeter, ger en kostnadssumma av 1 170 000 kr. Dessutom tillkomme en kostnad för ändringar och ombyggnad av nuvarande lokaler på omkring 300 000 kr.

Totala kostnaden för huvudbyggnaden skulle således i detta fall belöpa sig till 1 470 000 kronor, under det att en fullständig nybyggnad skulle kunna uppföras på annan plats för 2 870 000 kronor (se ovan) d. v. s. 1 400 000 kronor mera. Då högskolans nuvarande tomt är värderad till 1 940 000 kronor (se kommittéutlåtandet bil. litt. B), skulle det således för statsverket ställa sig ekonomiskt ogynnsammare att göra tillbyggnad på nuvarande tomten än att bygga helt nytt på annan plats, under förutsättning att icke någon nämnvärd kostnad för den nya tomten

ifrågakommer, vilket är förhållandet, om byggnaderna förläggas till den plats å norra Djurgården, som kommitterade föreslagit.

Än ogynnsammare skulle det naturligtvis ur ekonomisk synpunkt ställa sig att inköpa tomt för ny- eller tillbyggnad i högskolans närhet, där ungefär samma tomtpriser som för den nuvarande tomten böra beräknas.

Det kan likväl hava sitt intresse för det fullständiga bedömandet av saken att undersöka, hur stor tomt som skulle erfordras för de byggnader, som icke kunna rymmas å nuvarande tomten. Om man fortfarande gran-skar frågan under förutsättning av ett elevantal av 200 årligen tillträdande, ser man av tabellerna, att byggnaderna, utom huvudbyggnaden, erfordra en nyttig golvarea av 18 300 kvm. Den markyta, dessa skulle upptaga, beräknas genom proportionering med den markyta, som fordras för samma byggnader, då de, såsom enligt kommitténs förslag, äro beräknade för 300 årligen tillträdande elever. Nyttiga golvarean är i detta fall 19 480 kvm och markytan, oberäknat gårdar, 9 490 kvm. Mot en golvarea av 18 800 kvm svarar således en markyta av c:a 8 900 kvm. Även om tomten skulle bebyggas så tätt, att endast $\frac{1}{4}$ av densamma bleve gårdsutrymme, d. v. s. i överensstämmelse med byggnadsstadgans föreskrift rörande minsta gårdsutrymme för hörntomt, erfordrades sålunda c:a 12 000 kvm, d. v. s. en tomt av nära samma storlek som högskolans nuvarande. Med undantag av observatorietomten finnes icke någon så stor, i huvudsak obebyggd tomt i högskolans närhet. Observatorietomten äges av Stockholms stad, men genom avtal av år 1746 är en del av densamma upplåten till begagnande av Vetenskapsakademien för att därå uppföra ett observatorium samt återstoden år 1799 likaledes upplåten till Vetenskapsakademien att inhägnas och planteras, det hela med villkor att ej till annat ändamål användas. I den nuvarande av Kungl. Maj:t fastställda stadsplanen för Stockholm är tomten betecknad såsom park, vadan den sålunda numera ej kan till annat ändamål användas utan stadsfullmäktiges medgivande samt Kungl. Maj:ts bifall till ändring av stadsplanen. Men även om dessa ändringar i stadsplanen skulle kunna genomföras, är helt visst icke Vetenskapsakademien villig att avstå sin rätt till tomtens begagnande utan att som vederlag erhålla ett nytt tidsenligt observatorium på annat håll, vilket torde betingta betydande kostnader. Likaledes skulle helt säkert staden förbehålla sig lämpligt vederlag. Kostnaderna för själva tomten skulle således, om den stode att erhålla, bliva väsentliga. Men härtill kommer att på grund av de ovanligt stora höjdskillnaderna på tomten endast en mindre del av densamma, utgörande 10 à 12 000 kvm, gärna kan komma i fråga att be-

byggas och även denna del fordrar dyrbara avschaktnings- och terrasserings arbeten.

Ett annat mycket viktigt skäl, som bestämt talar mot användandet av denna tomt, är den stora tidsutdräkt, som skulle bli följden, ty även om Vetenskapsakademien och stadsfullmäktige skulle vara villiga att mot ersättning överlåta tomten, skulle denna överlåtelse med åtföljande ändring av stadsplanen taga en mycket lång tid.

Någon annan större fri tomt finnes icke i högskolans närhet, men då ett erbjudande blivit gjort att inköpa tomten n:o 11 i kvarteret Kungsbacken, hava de sakkunniga upptagit även denna fråga till behandling. Ifrågavarande tomt, som är begränsad av Drottninggatan, Rådmansgatan och Holländaregatan, upptar en yta av 3 400 kvm. Nuvarande ägaren av tomten har i samband med sitt anbud lämnat den uppgift, att denna tomt tillsammans med högskolans nuvarande skulle kunna bebyggas så, att en golvarea av 45 000 kvm erhöles, d. v. s. att tomterna skulle vara tillräckliga för hela högskolan, beräknad efter 300 årligen nytillträdande elever. De sakkunniga hava emellertid vid granskning av förslagsställarens siffror funnit, att han utgått från att vid bebyggandet av tomterna alla byggnaderna skulle utföras i 4 våningar jämte vindsvåning, vars hela yta medräknats. Stora delar av byggnaderna äro t. o. m. räknade med fem våningar jämte vindsvåning, således sex våningar. Men även med dessa antaganden erhålles ej tillräcklig golvarea utan att räkna med så stort djup på vissa delar av byggnaderna som ända till 27 m, vilket med hänsyn till ljusförhållandena blir omöjligt att kunna utnyttja. Ett dylikt bebyggnande är naturligtvis av flera skäl fullständigt omöjligt, så mycket mer som stora delar av laboratoriebyggnaderna icke kunna uppföras i fler än två våningar. På grund av det nu anförda instämna de sakkunniga till fullo med 1906 års kommitté i dess förslag att förlägga nybyggnaderna för Tekniska högskolan till norra Djurgården.

Då emellertid en del befogade anmärkningar framställts mot den tomt för den nya tekniska högskolan, som av kommittén föreslagits, har en ny undersökning rörande tomtfrågan företagits.

Sedan den tomt invid Sofiahemmet, som vid tidpunkten för kommitténs arbete var avsedd för ett föreslaget barnbördshus, blivit ledig på den grund att åt barnbördshuset beredts annan plats, har frågan rörande högskolans tomtplats kommit i ett betydligt gynnsammare läge. Härigenom har det nämligen blivit möjligt att flytta byggnaderna närmare intill Valhallavägen, varigenom dels de olägenheter, som blivit påpekade med hänsyn till de

stora avstånden till lämpliga bostäder, blivit väsentligt minskade, och dels erhållits möjlighet till en betydligt förbättrad entré-anordning från Valhallavägen samt en god arkitektonisk placering av byggnaderna. Den plats, byggnaderna skulle komma att upptaga, faller enligt detta förslag utanför det egentliga parkområdet vid Ugglevikskällan samt den vackra skogen närmast denna, och utgöres terrängen på det nu föreslagna området till större delen av skogsfri bergmark. Till detta parkområde leda tvenne huvudvägar, som delvis begränsa byggnadsplatsen, nämligen en östlig utefter Sofiahemmets tomt, Margaretavägen, samt en västlig, Riksmarskalksvägen.

Från Valhallavägen skulle leda en huvudentré upp mot huvudbyggnaden, som ligger på den högsta bergsplatån. På båda sidor om denna väg hava den elektro-fysiska institutionen och byggnaden för bergsvetenskap tänkts placerade. Bakom huvudbyggnaden hava de övriga byggnaderna sin plats. För att ekonomiskt bättre utnyttja terrängen samt för att erhålla bästa möjliga belysningsförhållanden hava de sakkunniga tänkt sig huvudbyggnaden mindre sammanträngd än enligt kommitténs förslag och försedd med tvenne flyglar.

Vid uppgörandet av denna plananordning hava användts de utredningar, vilka utförts av kommittén, och innehålla i det nya förslaget alla byggnader samma golvytor som motsvarande enligt kommitténs förslag, varigenom mycket nära samma kostnader betingas som enligt det föregående förslaget. Den enda kostnadsskillnad, som möjligen skulle uppstå, är å kostnaden för planerings- och schaktningsarbeten. Detta förslag visar likväl möjligheten av att utan ökning i dessa kostnader åstadkomma den föreslagna placeringen av byggnaderna, vilket förhållande blivit närmare utredt därigenom, att byggnaderna blivit utstakade på marken i det föreslagna läget. Det bifogade förslaget avsåg dock icke att vara en slutgiltig lösning av byggnadsfrågan, utan endast att visa möjligheten av att på ett lämpligt, praktiskt och tilltalande sätt lösa uppgiften, och borde hela plananordningen i samband med byggnadsfrågan, såsom här nedan närmare utvecklas, bliva föremål för tävlan, innan den slutligen fastställdes.

Då det belopp 9 312 398 eller — med avräkning för försäljningsvärdet av högskolans nuvarande tomter 1 940 000 kr. — 7 372 398 kr., vartill kommittén beräknat nybyggnaderna, även med någon reduktion på grund av ändrade konjunkturer, är betydande, har fråga uppstått, om icke utgiften för statsverket skulle kunna göras mindre kännbar genom att nybyggnaderna utfördes i skilda perioder, i den mån sådant lämpligen kunde ske utan alltför stora olägenheter för högskolan och dess utveckling.

Den första frågan, som då uppställer sig, är vilka lokaler, som i första rummet behöva byggas. Svaret är så påtagligt, att någon tvekan i detta avseende ej kan råda. Såsom 1906 års kommitté med styrka framhåller, äro studier å laboratorierna för vår tids tekniskt studerande av den allra största vikt, och just i avseende på dessa studier är det, som de kännbaraste bristerna visa sig uti den nuvarande tekniska högskolan. I främsta rummet gäller detta maskinlaboratoriet och laboratoriet för fysik och elektroteknik. Det förra saknas så godt som fullständigt, och det senare står i fråga om utstyrsel och lokalresurser mycket långt efter liknande anstalter överallt vid utlandets tidsenligare tekniska högskolor. De sakkunniga anse därför, att någon tvekan ej kan råda därom, att dessa båda laboratorier i första rummet borde uppföras på den nya tomten. För att dessa laboratorier skola komma till avsedd användning är dock nödvändigt att jämte dem anordna hör- och ritsalar m. m. för de elever, som hava sitt huvudsakliga arbete därstädes. M. a. o. undervisningslokaler för tredje och fjärde årskurserna av mekaniska, elektrotekniska och skeppsbyggerifacken borde i främsta rummet anordnas på den nya tomten. Anmärkas bör, att i Dresden, vars tekniska högskola är stadd i liknande utflyttning, som här föreslagits, ävenledes de mekaniska och elektrotekniska facken först erhållit sina lokaler på det nya området.

Då ett av de viktigare önskemålen vid Tekniska högskolans utvidgning är att kunna mottaga ett större antal inträdessökande än nu är fallet, borde den ifrågavarande utflyttningen av högskolan till annan tomt därför så ordnas, att så snart som möjligt antalet inträdessökande kunde i avsevärd mån ökas. Man borde därför tillse, huru stor plats inom högskolans gamla lokaler som kunde bliva ledig genom den ovannämnda utbrytningen av tredje och fjärde årskurserna av mekaniska, elektrotekniska och skeppsbyggerifacken (M_3 M_4 E_3 E_4 S_3 S_4)¹. Det visade sig, att på denna väg lokaler av endast 850 kvm:s areal blevo disponibla, vilket vore otillräckligt för upptagande av ett antal nya elever, som kunde i väsentligare mån tillfredsställa allmänhetens fordringar i detta hänseende. För att icke den första utflyttningen skulle bliva av alltför ofullkomlig art, blev det nödvändigt att utbryta ytterligare en fackavdelning, vars elever i de högre årskurserna för närvarande upptog så stor plats, att deras överflyttning till den nya tomten skulle i väsentlig mån öka möjligheten att upptaga nya elever inom de elevgrupper, som skulle vara kvar på den gamla tomten.

¹ Bokstäverna beteckna de särskilda fackskolorna enligt tabellen sid. 23, de bifogade

Givetvis erbjöd sig härvid närmast fackskolan för väg- och vattenbyggnadskonst, som i ganska väsentliga delar hade undervisning gemensam med mekaniska facket, och vars speciella laboratorium enligt kommitténs förslag var inrymt under samma tak som maskinlaboratoriet och lämpligen borde anslutas till detta. Med fackskolan för väg- och vattenbyggnadskonst sammanhänger den jämförelsevis fåtaliga fackskolan för arkitektur så nära, att de lämpligen borde följas åt, så mycket mer som undersökningen visade, att även den senares lokaler uti den gamla högskolan efter utflyttningen bleve erforderliga. Genom utbrytning av tredje och fjärde årskurserna av fackskolorna för väg- och vattenbyggnadskonst och för arkitektur bleve inom den gamla högskolebyggnaden disponibla lokaler med en golvarea av 300 kvm och således inalles enligt ovan framställt förslag en golvarea av 1 150 kvm. Härtill komme, att genom utflyttning till den nya tomten av en större del av biblioteket vinnes för den gamla tomten en golvarea av ytterligare 140 kvm.

De sakkunniga hava vidare utfört en utredning om, hur många nytillträdande elever som med begagnande av dessa ledigblivna lokaler skulle kunna av högskolan mottagas.

Det ökade antalet elever i första och andra årskurserna, som skulle kunna emottagas, bestämmes av möjligheten dels att anordna tillräckligt stora hörsalar och dels att erhålla tillräckligt utrymme för ritsalar med tillhörande rum för lärare och samlingar. Högskolan har för närvarande endast en hörsal, som rymmer 150 elever, nämligen i den nyare kemibyggnaden (hörsal R), men genom utrymmandet av de elektriska och mekaniska laboratorierna finnes möjlighet att anordna ännu tvenne hörsalar för 150 elever vardera. Dessutom kunna de nuvarande hörsalarna i vån. 2 tr. (F och B) genom gradinernas borttagande och klaffplatsers anordnande i gångarna samt anordnande av upphöjd plats för läraren förändras därhän, att de kunna rymma resp. 150 och 125 elever. Den största grupp inom första och andra avdelningarna, som enligt omorganisationsplanen är sammanförd till gemensamma föreläsningar, utgöres av M_1 S_1 E_1 och V_1 , och då denna grupp enligt det ovan angivna kan vara högst 150 elever, följer därav, att totala elevantalet i var och en av dessa avdelningar icke kan vara högre än 200 (se nedanstående tabell).

Det återstod vidare att undersöka, huruvida de disponibla lokalerna även bleve tillräckliga till ritsalar samt rum för lärare och samlingar för detta elevantal i första och andra årskurserna. Resultatet av denna undersökning framginge av utförda ritningar, enligt vilka alla ritsalar med till-

hörande lärarrum och rum för samlingar voro förlagda i den nuvarande huvudbyggnaden och visade sig för ändamålet tillfyllestgörande, dock med undantag därav, att någon plats för de av kommittén föreslagna för undervisningen i kemi i första årskursen så viktiga laboratorierna ej fanns. Likaså fanns ej något rum stort nog för kollegiets sammanträden eller lämplig plats för en del nu å vinden magasinerade högst värdefulla samlingar m. m.

Inom den byggnad, som nu upptages av den bergsvetenskapliga fackavdelningen, skulle, därest denna fackskola överflyttades till den nya tomten, lokal kunna beredas på ett lika lämpligt som billigt sätt uti dess gamla laboratorium för de ifrågavarande laborationerna. Även skulle där lämpligen kunna beredas plats för ett större kollegierum, lokal för ett mindre bokförråd, därest det huvudsakliga biblioteket flyttades till den nya tomten, samt för samlingar.

Då härtill kommer att de lokaler, som för närvarande äro upplåtna till den bergsvetenskapliga fackavdelningen, äro i hög grad otidsenliga, anse de sakkunniga, att även denna fackskolas tredje och fjärde årskurser böra flyttas till den nya platsen i sammanhang med de förut nämnda.

Man kan härvid icke undgå att påpeka, att i detta fall det endast vore inom kemiska facket, som flera än de två lägre årskurserna vore kvar på den gamla tomten, liksom ock att ett visst befintligt samband mellan det kemiska och det bergsvetenskapliga facket gör, att dessa icke borde skiljas åt, därest icke påtagliga förhållanden gjorde det önskligt. Å andra sidan anse dock de sakkunniga, att kraftiga skäl tala för bibehållandet tills vidare av den kemiska fackskolan på den gamla tomten, då därstädes finnes ett fullt tidsenligt, helt nyss uppfört kemiskt laboratorium. Sambandet mellan det kemiska och det bergsvetenskapliga facket, särskilt inom de årskurser, som ligga ovan den andra årskursen, är ej heller större än att olägenheten av dessa fackskolors skiljande på olika platser träder i bakgrunden för fördelarna av utvidgade lokalers bekommande.

För att få en föreställning om fördelningen mellan de olika fackavdelningarna av de årligen tillträdande eleverna, under förutsättning att totalantalet vore ungefär 200, skulle man kunna taga $\frac{2}{3}$ av det elevantal i respektive fackavdelningar kommittén beräknat, utgående från 300 årligen nytillträdande, men de sakkunniga hava med begagnande av de sista årens erfarenhet sett sig nödsakade att i någon mån jämkä på dessa siffror. Resultatet framgår av följande tabell:

| | Kommit- téns förslag | $\frac{2}{3}$ av före- gående | De sak- kunniges förslag | Nuvarande (1910) |
|---|-------------------------|----------------------------------|--------------------------------|---------------------|
| Mekaniska facket (M) | 90 | 60 | 50 | } 31 |
| Skeppsbyggerifacket (S) | 20 | 13 | 10 | |
| Elektrotekniska facket (E) | 60 | 40 | 40 | 26 |
| Väg- och vattenbyggnadsfacket (V) | 60 | 40 | 50 | 27 |
| Bergsvetenskapliga facket (B) | 30 | 20 | 20 | 17 |
| Kemiska facket (K) | 25 | 16 | 16 | 14 |
| Arkitekturfacket (A) | 20 | 13 | 15 | 10 |
| Summa årl. nytilträdande elever | 305 | 202 | 201 | 125 |

Under förutsättning av ungefär 200 elever i varje årskurs och av den i tabellen upptagna fördelningen mellan de olika fackavdelningarna, skulle sålunda efter utflyttningen av M_3 , M_4 , S_3 , S_4 , E_3 , E_4 , V_3 , V_4 , A_3 , A_4 , B_3 , B_4 , vilka upptaga inalles 370 elever eller 185 i vardera av tredje och fjärde årskurserna, återstå på den gamla tomten 436 elever, varav i de två lägsta årskurserna 404 och i den tredje och fjärde 32 i det kemiska facket. För en längre tid erbjuder en sådan anordning icke en tillfredsställande lösning. Speciellt bleve hörsalarna så strängt upptagna, att de ur hygienisk synpunkt skulle lämna alltför mycket övrigt att önska. Men för en kortare tid skulle det dock sålunda vara möjligt att årligen mottaga 200 nytilträdande elever.

På anförda skäl föreslås, att såsom en första byggnadsfas på den av kommittén föreslagna platsen å norra Djurgården invid Sofiahemmet, med den förändring som i annat sammanhang närmare angivits, uppföres ett laboratorium för fysik och elektroteknik, ett maskinlaboratorium, en byggnad för bergsvetenskap och så stor del av en blivande huvudbyggnad, som erfordras för hörsalar, ritsalar, lärare- och samlingsrum m. m. för tredje och fjärde årskurserna av fackavdelningarna M, S, E, V, A och B jämte nödiga byggnader för centraluppvärmning m. m.

Såsom här ovan framhållits, är storleken av laboratoriebyggnaderna ej synnerligen beroende av det elevantal, för vilket de äro avsedda, men omkostnaderna för deras ombyggnad, om ett ökat elevantal gör sådant erforderligt, äro jämförelsevis stora. De sakkunniga hava därför ej haft anledning att modifiera de tillämnade laboratoriebyggnaderna för övergångstiden, då endast 200 nytilträdande elever om året skulle mottagas, utan hava tänkt sig dem utförda i full överensstämmelse med kommitténs med hjälp

av sakkunniga uppgjorda förslag. I enlighet härmed har man tänkt sig byggnaden för fysik och elektroteknik uppförd så, att den skulle kunna inrymma även den fysiska institutionen, oaktat denna, som nästan uteslutande är avsedd för första och andra årskurserna, tillsvidare måste av denna orsak vara inrymd på den gamla tomten, då det ej kan vara lämpligt att mer än nödigt splittra lokalerna för undervisningen inom nämnda årskurser. Att åter från första utförandet utesluta den del av ifrågavarande laboratorium, som avser den egentliga fysiken, skulle förvanska denna byggnad på ett sätt, som gjorde dess fullständiga utbyggande icke obetydligt dyrare. Men även ur en annan synpunkt vore ett sådant särdelande mindre lämpligt. De sakkunniga föreslå nämligen, att de delar av nämnda byggnad, som i en framtid avses för den fysiska institutionen, men under övergångstiden äro obehövlige för detta ändamål, skulle användas för den elektrotekniska institutionens ritsalar, lärarrum m. m. d., vilka äro avsedda att förläggas till huvudbyggnaden, då den blir fullt utbyggd. Dessutom skulle uti bottenvåningen lämpligen under övergångstiden kunna inrymmas högskolans bibliotek, vilket även skulle förläggas till huvudbyggnaden och som borde utbrytas från den gamla tomten, dels därför att dess lokaler därstädes erfordras för att kunna emottaga det ökade antal elever, som är ett av utvidgningens närmaste mål, och dels därför att åtminstone den egentliga facklitteraturen bör vara tillgänglig på den plats, där högskolans högre årskurser, för vilka denna litteratur i första rummet är avsedd, i huvudsak uppehålla sig. Den för undervisning i fysik avsedda delen av det elektrotekniska laboratoriet får sålunda under övergångstiden användning, och ett utelämnande av densamma skulle påkalla utförandet av en avsevärdt större del av huvudbyggnaden än som av de sakkunniga föreslås.

Huvudbyggnaden är, såsom av ovan anförda undersökning framgår, till sin storlek betydligt mera än de övriga byggnaderna beroende på det antal elever, för vilket högskolan inrättas, och avseende måste därför fästas vid detta förhållande vid byggnadsplanernas uppgörande. De sakkunniga hava därför förelagt sig den uppgiften att undersöka, huruvida det låter sig förena, att den del av huvudbyggnaden, som vid första byggnadsfasen skulle uppföras, uppfördes så, att den vore fullt användbar, när högskolan fullständigt överflyttades till den nya tomten och då årligen skulle mottaga ett antal av 300 tillträdande elever, och att den samtidigt avpassades under övergångstiden för ett antal av 200 årligen tillträdande elever. Uppgiften, som skulle varit nästan olöslig, om icke laboratorierna varit avskilda i särstående byggnader, visade sig kunna lösas på ett jämförelsevis enkelt och

tilltalande sätt. Fördelen härav framträder icke minst däruti, att det definitiva fastställandet av det elevantal, för vilket högskolan bör inrättas, ej nu behöver ske, utan kan uppskjutas till dess det visat sig, vilket tillopp av elever som kommer att äga rum.

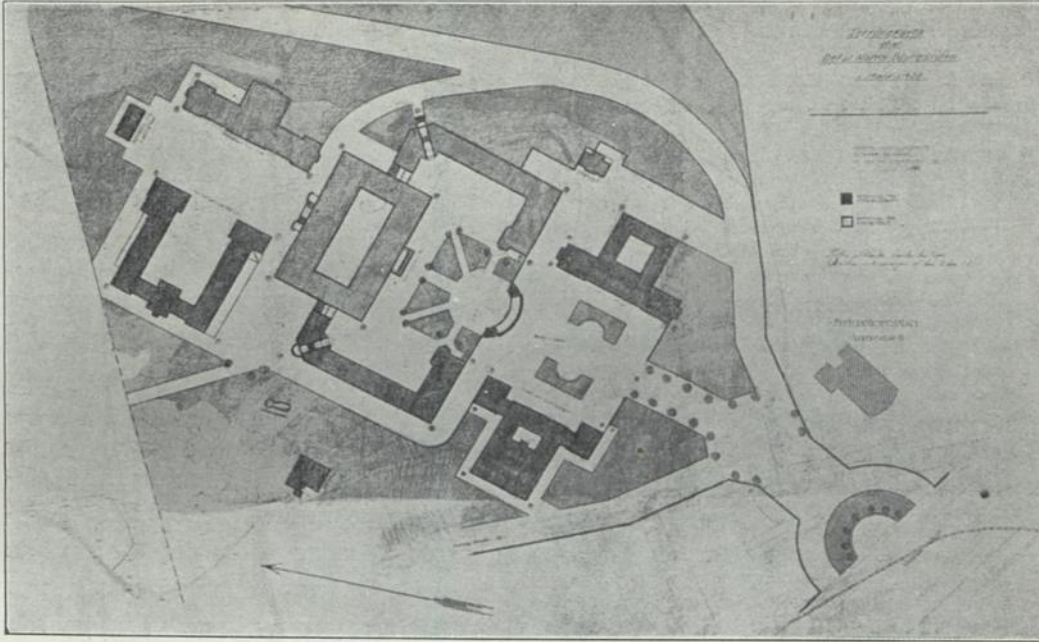


FIG. 3. SITUATIONSPLAN, BILAGD DE SAKKUNNIGAS UTREDNING.

Enligt det förslag, som i här bifogade situationsplan framlägges (se fig. 3), äro byggnaderna såsom ovan blivit anført flyttade betydligt närmare Valhallavägen och de inläggas i terrängen på ett såväl ur praktisk som estetisk synpunkt fördelaktigare sätt. Den i kommitténs förslag upptagna huvudbyggnaden upplöses nämligen uti ett huvudparti med tvenne flyglar. Häri genom vinnas åtskilliga fördelar, varibland särskilt bör framhållas den bättre belysningen av salarna och icke minst lättheten att utbygga vissa delar av byggnaden, utan att förgripa sig på hela komplexets framtida utseende, under det att omkostnaderna ej genom den nya anordningen hava ökats. De sakkunniga hava därför i det följande ansett sig kunna utgå från den nya situationsplanens huvuddrag, även om denna plan ej får betraktas som definitiv, utan bör under tävlan ytterligare studeras.

Ett studium av kommitténs förslag till huvudbyggnad och fördelningen därstädes av de olika lokalerna på de olika facken ävensom av dessas inbördes sammanhang visar, att den fullt färdiga huvudbyggnaden i sina huvuddrag borde anordnas så, att *huvudpartiet* upptog alla större hörsalar, gemensamma lokaler såsom bibliotek, kansli m. m. samt den huvudsakliga delen av de lokaler, som höra till första och andra årskursernas undervisning, samt de *tvenne flyglarna* upptog den ena de högre avdelningarna av de samhöriga fackskolorna M, S och E och den andra de övre avdelningarna av de samhöriga fackskolorna V och A. Uppgjorda skisser särskilt till de båda flyglarna hava visat, att en sådan anordning synnerligen väl låter utföra sig och låter ansluta sig till huvudpartiet på ett mycket lyckligt sätt.

Den närmaste uppgiften var därefter att tillse, huruvida i *en* sådan flygel skulle kunna under övergångstiden utan alltför stora ändringsarbeten inrymmas samtliga de lokaler, som erfordrades för de elevgrupper, som i det föregående föreslagits skola överflyttas till den nya tomten, varvid såsom önskvärdt framställde sig målet, att de fackskolor, som efter högskolans definitiva utbyggande på den nya tomten skulle förläggas till den ifrågasvarande flygeln, genast förlades till de lokaler i denna, som då skulle tillkomma dem, om ock under övergångstiden reducerade till storleken i betraktande av att antalet nytillträdande elever under denna tid ej skulle vara mera än 200, och att de övriga fackskolorna mera provisoriskt fingo övertaga de övriga lokalerna i flygeln under övergångstiden. Uppgjorda skisser visade, att detta lät sig göra, utan att större ändringsarbeten blevo erforderliga än uppförande och borttagande av mellanväggar på ett fåtal ställen. Särskilt visade detta sig med lätthet kunna utföras med den flygel, som enligt det definitiva förslaget var avsedd för väg- och vattenbyggnadsfacket samt arkitekturfacket. Genom att i denna flygel till en vindsvåning förlägga rum för samlingar och andra lokaler, i vilka takbelysning vore önskelig, kunde ock nämnvärda besparingar göras i jämförelse med kommitténs förslag, inom vilket på grund av huvudbyggnadens sammanträngda form svårighet mötte för en sådan anordning. Dessa besparingar visa sig mer än väl uppväga de ökade omkostnader, som förorsakas genom fasadernas större utsträckning.

De sakkunniga anse därför, att jämte de tre föreslagna laboratoriebyggnaderna borde uppföras den flygel, som i det färdiga förslaget avses för fackskolorna för väg- och vattenbyggnad samt arkitektur, och att i denna under övergångstiden skulle inrymmas även mekaniska och skeppsbyggeri-

fackskolorna, under det att under övergångstiden fackskolan för elektroteknik i huvudsak skulle få sina ritsalar m. m. i den framdeles för undervisning i fysik avsedda delen av det elektrotekniska laboratoriet, och att fackskolan för bergsvetenskap kunde reda sig med de lokaler, som redan enligt kommitténs förslag skulle inredas i det bergsvetenskapliga laboratoriet.

Förslagsritningar, som utarbetats av de sakkunniga på grundval av de av 1906 års kommitté uppgjorda projekten, hava visat möjligheten av en lösning i den angivna riktningen. Dessa ritningar hava även lagts till grund för en överslagsberäkning av kostnaderna men äro i övrigt, som ovan nämnts, icke att betrakta som definitiva. De sakkunniga anse nämligen, att för ernående av en ur praktisk, ekonomisk och konstnärlig synpunkt möjligast tillfredsställande lösning slutgiltiga ritningar lämpligast böra framkomma genom tävlan bland svenska arkitekter. Önskvärdheten av sådan tävlan har för övrigt redan framhållits av kungl. kommittén, av högskolans lärarekollegium och styrelse ävensom av överintendentensämbetet i underdånig skrivelse i frågan.

Den ifrågavarande tävlan anse de sakkunniga böra ordnas såsom allmän svensk arkitekturtävlan, men då vid sådan tävlan risk kan uppstå, att om-tävlan måste äga rum på grund därav att full säkerhet icke finnes att framstående arkitekter komma att delta, bör dessutom — då det i detta fall är av stor betydelse, att ingen onödig tidsutdräkt uppstår — några erkänt framstående arkitekter inbjudas delta mot särskild ersättning.

De sakkunniga påpeka även önskvärdheten därav, att för tids vinnande program för nu omhandlade tävlan måtte i så god tid utarbetas, att omedelbart efter det riksdagen eventuellt fattat beslut om sådan tävlan, densamma kan utlysas.

Även vilja de sakkunniga framhålla nödvändigheten av, att tävlan omfattar skisser för hela byggnadskomplexet till den omfattning 1906 års kungl. kommitté tänkt sig detsamma, dock även med hänsyn till de byggnadsperioder, som nu föreslagits. Skulle efter utförandet av första stadiets byggnader det visa sig, att övriga byggnader icke behöva utföras för så stort elevantal som 300, förefinnes naturligtvis intet hinder att i sådan riktning omarbета genom tävlingen inkomna skisser. Fullständiga huvud- och arbetsritningar behöva naturligen dock nu blott utarbetas till de byggnader, som ovan föreslagits till omedelbart utförande.

En sådan successiv utflyttning, som här föreslås, till en på avsevärdt avstånd belägen tomt, har veterligen förut icke ägt rum mer än vid en teknisk högskola, nämligen i Dresden. Avståndet mellan gamla och nya

tomten är i Dresden dock icke mera än något över hälften av det avstånd, som här ifrågasättes.

Helt säkert kan det icke undvikas, att från ren undervisningssynpunkt mer eller mindre befogade anmärkningar komma att framställas mot förläggandet av högskolans lokaler på skilda tomter, såsom t. ex. att för såväl lärare som elever besvär och tidsförlust måste uppstå till följd därav, att de centrala expeditionerna, kollegierum och dylika lokaler givetvis ej kunna förekomma mera än på ett ställe, eller att vid uppgörandet av tidtabell man blir bunden av hänsyn till det stora avståndet och den tid, som erfordras för dess tillryggaläggande o. s. v. Det synes dock vara klart, att för den som ser det viktigaste i denna fråga däruti, att man på billigaste sätt och på kortaste tid får Tekniska högskolan tidsenligt ordnad med avseende på laboratorier m. m. samt så utvidgad, att det nu så länge kända behovet av utrymme för flere studerande snarast tillfredställes, de nyssnämnda besvärigheterna under utflyttningstiden, om än så kännbara, måste hava en underordnad betydelse i jämförelse med de stora fördelar, som vinnas för landet. På grund av det nu anförda anse sig de sakkunniga böra föreslå, att, om medel ej skulle kunna erhållas till hela byggnadsföretagets omedelbara utförande, utbyggnad dock ofördröjligen bör ske i den ordning, som här ovan angivits.

Sedan sålunda utredning rörande behovet av lokaler för högskolan blivit verkställd, hava de sakkunniga även sökt åstadkomma en utredning angående kostnaderna för byggnadsförslagets genomförande. Oavsett huruvida medel nu kunna erhållas till hela byggnadsförslagets omedelbara utförande eller till endast ett första utbyggnadsstadium, anse de sakkunniga dock, att för att fortast möjligt må kunna åstadkommas dels en kvalitativ förbättring och dels en utvidgning av högskolan, den ordning i fråga om lokalernas färdigbyggande, som ovan blivit anförd, bör läggas till grund för beräkning av byggnadsanslagets fördelning på olika år. Byggnaderna tillhörande det andra byggnadsstadiet böra utföras, så snart det elevantal, för vilket högskolan bör byggas, blivit definitivt fastställt.

De kostnadssummor, till vilka 1906 års kommitté kommit, voro beräknade efter dåvarande, på grund av konjunkturen inom byggnadsfacket högt uppdrivna priser, och skulle med hänsyn till nuvarande lägre konjunkturen inom detta fack kostnaderna för själva byggnadsarbetet, planerings- och terrasseringsarbeten m. m. samt ritningar och arvoden kunna något reduceras. Å övriga kostnadssummor anse sig de sakkunniga däremot icke böra förutsätta någon minskning till följd av ändrade konjunkturen. Dels

med anledning härav och dels med anledning av den nu föreslagna uppdelningen av huvudbyggnaden hava de sakkunniga låtit verkställa ny kostnadsberäkning för byggnadsarbetet. Kostnaderna för byggnadsarbetet uppgå enligt denna nya beräkning till:

| | | |
|---|-----------|------------------|
| Huvudbyggnad | 3 067 156 | kronor |
| Byggn. för fysik och elektrotekn. | 652 045 | > |
| Maskinlaboratorium | 599 200 | > |
| Byggn. för kemi | 586 068 | > |
| > > bergsvetenskap | 667 070 | > |
| > > centraluppvärmn. | 51 360 | > |
| Observatorium | 2 500 | > |
| Paviljong för magnetometri | 8 192 | > |
| Intendentboställe | 28 776 | > |
| Byggnad för vaktmästare och maskinister ¹⁾ | 36 540 | > |
| | Summa | 5 698 907 kronor |

Kostnaden för den fullständigt utbyggda högskolan enligt bifogade ritningar skulle sålunda bliva:

| | | |
|--|-----------|------------------|
| Byggnadsarbetet | 5 698 907 | kronor |
| Gas, vatten, uppvärmning m. m. | 480 500 | > |
| Inventarier, inredning m. m. | 643 500 | > |
| Apparater och maskiner m. m. | 768 898 | > |
| | Summa | 7 591 805 kronor |
| Elektrisk belysning | 114 500 | > |
| Yttre ledningar | 55 000 | > |
| Byggnadsområdets planering m. m. | 380 875 | > |
| Ritningar, arbetsledning, kontrollantarvode, administrationskostnad m. m. 8 % av (5 698 907 + 380 875) kr. | 486 380 | > |
| | Summa | 8 628 560 kronor |

1906 års kommitté har beräknat hela kostnaden till 9 312 398 kronor, vadan sålunda en besparing, om byggnaderna uppfördes under nuvarande konjunkturer, av c:a 680 000 kronor skulle kunna påräknas.

För att erhålla totalkostnaderna för det första byggnadsstadiet hava kostnaderna för byggnadsarbetet för de byggnader, som under detta stadium skulle komma till utförande, upptagits i överensstämmelse med ovannämnda nya kostnadsberäkning. Vad övriga kostnader beträffar, hava de sakkunniga i vad rör uppvärmning och ventilation inhämtat utlåtande från specialist

¹⁾ Denna byggnad är av 1906 års kommitté inberäknad i maskinlaboratoriet.

samt i övrigt, med begagnande av kommitténs utredning, gjort de reduktioner, som föranledts därav att resp. anordningar endast delvis skulle komma till utförande i detta byggnadsstadium.

De sålunda erhållna kostnaderna finnas sammanförda i nedanstående tabell.

| Byggnad | Byggnads- arbetet | Gas, vatten, uppvärm- ning m. m. | Inventarier, inredning m. m. | Apparater och maski- ner m. m. | Summa kronor |
|---|------------------------|--|------------------------------------|--------------------------------------|-----------------|
| Flygel av huvudbyggnaden | 717 633 | 75 000 | 102 000 | — | 894 633 |
| Byggnad för fysik och elektroteknik | 652 045 | 66 000 | 66 000 | 97 345 | 881 890 |
| Maskinlaboratorium | 599 200 | 48 500 | 31 600 | 430 715 | 1 110 015 |
| Byggnad för bergsvetenskap | 667 070 | 72 000 | 106 000 | 88 137 | 933 207 |
| Byggnad för centraluppvärmning | 51 360 | 1 000 | — | 75 000 | 127 360 |
| Observatorium | 2 500 | — | — | 6 000 | 8 500 |
| Paviljong för magnetometri | 8 192 | — | — | — | 8 192 |
| | Summa kronor 2 698 000 | 263 000 | 305 600 | 697 197 | 3 063 797 |

Härtill komma följande poster:

| | |
|--|---------------|
| Elektrisk belysning | 67 000 kronor |
| Yttre ledningar | 40 000 » |
| Byggnadsområdets planering, kulvertar, vägar och planers ordnande m. m. | 290 000 » |
| Ritningar jämte tävlan, arbetsledning, kontrollantarvoden samt administrationskostnader för byggnads-, planerings och terrasseringsarbetena 8 % av (2 698 000 + 290 000) jämte tävlingskostnad | 275 203 » |

Således sammanlagt hela kostnaden 4 636 000 kronor

Av denna summa böra utgå:

| | |
|-------------------------|---------------|
| under år 1911 | 40 000 kronor |
| » » 1912 | 230 000 » |
| » » 1913 | 1 900 000 » |
| » » 1914 | 1 800 000 » |
| » » 1915 | 666 000 » |

4 636 000 kronor

Så långt de sakkunnigas utredning.

Sedan därefter högskolans styrelse och lärarekollegium avgivit infordrade utlåtanden, i vilka nyssnämnda utredning i fråga om lokaler och byggnadsplan i stort sett gillades, avlämnade K. M:t proposition i ämnet till 1911 års riksdag. Den nådiga propositionen avsåg, att högskolan borde till den omfattning, som av de tre sakkunniga föreslagits, utbyggas för ett antal av 200 årligen nytillträdande elever, utom uti vad som gällde laboratorier, vilka skulle avses för 300 elever per årskurs.

Riksdagen beslöt emellertid, att av huvudbyggnaden enligt det ursprungliga kommittéförslaget av år 1908 endast en så stor byggnad, som erfordras för årskurser om 150 elever, skulle komma till utförande vid anläggningens första utbyggande, samt att denna byggnad skulle så planeras, att den ej lade hinder i vägen för vare sig ett längre provisorium för nysnämnda elevantal eller en utvidgning motsvarande ett större sådant antal. Beträffande laboratoriebyggnaderna däremot beslöt riksdagen deras utbyggande redan från början för årskurser om 300 elever.

Det av riksdagen beviljade byggnadsanslaget utgjorde 4 619 000 kronor.

Därjämte medgav riksdagen, att ett för ändamålet erforderligt tomtområde av omkring 65 000 kvadratmeter, beläget å en nordväst om Sofiahemmet å norra Djurgårdens mark varande platå, som begränsas i väster av Riksmarskalksvägen, i öster av Margaretavägen och mot norr av Mellanvägen, fick tagas i anspråk under de närmare villkor Kungl. Maj:t hade att bestämma.

Sedan sålunda medel och tomt blivit beviljade, tillsatte Kungl. Maj:t i enlighet med de sakkunnigas förslag en nämnd av fem personer med uppdrag att anordna och bedöma en pristävlan mellan svenska arkitekter om ritningar till den nya högskolebyggnaden. Till ledamöter i nämnden förordnades överintendenten C. O. Möller, förste intendenten I. G. Clason, arkitekten Ragnar Östberg, v. generalkonsuln P. T. Berg och högskolans rektor, professor C. J. Magnell. På grund av hälsoskäl avsade sig emellertid generalkonsul Berg efter en kort tid uppdraget. I hans ställe förordnades överingenjören Axel Wahlberg.

Enligt Kungl. Maj:ts bestämmelser hade denna nämnd att utse och till tävlingen inbjuda tre svenska arkitekter och till dess förfogande ställdes 30 000 kr. till pris m. m.

Nämnden utsåg i enlighet härmed arkitekterna F. Boberg, E. Lallerstedt och L. I. Wahlman, vilka var och en tillförsäkrades ett särskilt arvode av 3 000 kr. för att de anonymt skulle delta i tävlingen i fråga.

Tävlingen skulle omfatta förslag icke blott till de av riksdagen och Kungl. Maj:t beslutade byggnaderna utan även till lokaler för hela högskolan enligt det ursprungliga kommittéförslaget med årskurser om 300 elever.

Ett fullständigt program för tävlingen i överensstämmelse med de av Kungl. Maj:t givna föreskrifterna hade på särskilt uppdrag utarbetats av förste intendenten I. G. Clason och blev av prisnämnden antaget. Uti detta program bestämdes bland annat:

att de erforderliga lokalerna skulle på sätt, som närmare angavs, inrymmas i flere olika fristående eller sammanbyggda byggnader, vilka borde förläggas inbördes på ett med hänsyn till deras skilda ändamål lämpligt sätt och så grupperas, att det hela bildade ett arkitektoniskt tilltalande komplex med huvudentré från sydväst;

att till författaren av det bästa och programmets fordringar uppfyllande förslaget skulle utdelas ett första pris av 9 000 kr. samt att av resterande för pris avsedda summa (12 000 kr.) skulle komma att utdelas pris om högst 6 000 och lägst 2 000 kr för därav förtjänta förslag;

att prisbelönt eller med särskilt arvode betalt förslag skulle bli statens egendom;

att tävlingsförslagen skulle vara avgivna senast den 1 februari 1912.

Till vinnande av större reda var programmet uppdelat i två delar på sådant sätt, att program I omfattade det projekterade byggnadsföretaget i dess helhet, program II däremot de vid det första utbyggnandet till utförande beslutade byggnaderna.

Vid tävlingstidens utgång hade inkommit 15 förslag, av vilka många åtföljdes av modeller.

Sedan prisnämnden fullbordat sitt arbete, tillkännagavs såsom resultat att första priset 9 000 kr. tillfallit professorn vid Tekniska högskolan, arkitekten E. Lallerstedt, för projektet »Nec spe, nec metu»,

andra priset 5 000 kr. arkitekten, numera specialläraren i arkitektonisk formlära vid Tekniska högskolan, G. F. Holmdahl för projektet »Lill-Jan», tredje priset 4 000 kr. professorn vid Tekniska högskolan, arkitekten L. I. Wahlman för projektet »Cumulus» och

fjärde priset 3 000 kr. arkitekten F. Boberg för projektet »Femuddig stjärna».

Ur prisnämndens utlåtande torde böra anföras följande:

Efter vid åtskilliga sammanträden företagen närmare granskning av de olika förslagen befunnos n:ris 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12 och 14 icke kunna ifrågakomma till erhållande av pris, dels på grund av olämplig placering av byggnaderna, särskilt med hänsyn till anläggningens utseende under provisoriet, dels på grund av mindre goda plananordningar, dels ock på grund av alltför stora svagheter i den arkitektoniska formgivningen.

Härefter hade nämnden låtit utföra jämförande kostnadsberäkningar av de sex återstående förslagen, n:ris 2, 7, 8, 11, 13 och 15, av vilka här återgivas slutsummorna.

Byggnadskostnader enligt program II (i kostnaderna ingå inredning och maskinell utrustning):

| | |
|---|-----------------|
| N:r 2 »Lill-Jan» | kr. 4 872 000:— |
| » 7 »Femuddig stjärna» | » 4 777 000:— |
| » 8 »K. T. H.» | » 4 141 000:— |
| » 11 »Nec spe, nec metu» | » 4 568 000:— |
| » 13 »Cumulus» | » 4 203 000:— |
| » 15 »Svecia antiqua et hodierna» | » 4 633 000:— |
| Anslagna medel | » 4 619 000:— |

Ehuru enligt dessa beräkningar sålunda tre av förslagen, n:ris 2, 7 och 15, synas draga större byggnadskostnader än de anslagna medlen medgiva, har nämnden dock icke kunnat anse dessa approximativa beräkningar slutgiltiga i så måtto, att nämnden därpå velat grunda ett uteslutande ur tävlingen av de tre sistnämnda förslagen, då det under gynnsamma förhållanden icke är uteslutet, att ett eventuellt utbudande på entreprenad skulle kunna visa, att även dessa förslag skulle kunna utföras för den av Kungl. Maj:t anvisade summan. Å andra sidan har nämnden ansett sig böra fästa mycket avseende vid slutsummornas relativa storlek, då givetvis en lägre summa måste innebära större garanti för att man, även under tillstötande ogynnsamma omständigheter, kan uppföra byggnaderna för de anslagna medlen.

Efter en ingående jämförande granskning av de sålunda kostnadsberäknade sex förslagen har nämnden slutligen vid sitt sammanträde den 30 april 1912 beslutat:

1:o) att utdela *första priset* 9 000 kronor åt författaren till förslaget n:o 11 med motto *Nec spe nec metu*.

Enligt nämndens mening är detta förslag synnerligen väl anpassat efter terrängens egendomligheter och byggnadstomtens form, med iakttagande av det i programmet uttalade önskemålet, att byggnaderna måtte förläggas så nära Valhallavägen som möjligt. Anläggningen är lagom koncentrerad omkring väl proportionerade och vackert anlagda gårdar. Större delen av den enligt program II till utförande avsedda anläggningen bildar ett arkitektoniskt avslutat helt närmast Valhallavägen; de projekterade framtida tillbyggnaderna förändra icke utseendet av denna komplex, sedd från Valhallavägen, och behöva icke störa varken undervisning eller trafiken inom området. Planerna äro i detalj synnerligen omsorgsfullt studerade och väl lämpade efter de olika institutionernas behov. Formgivningen är enkel och

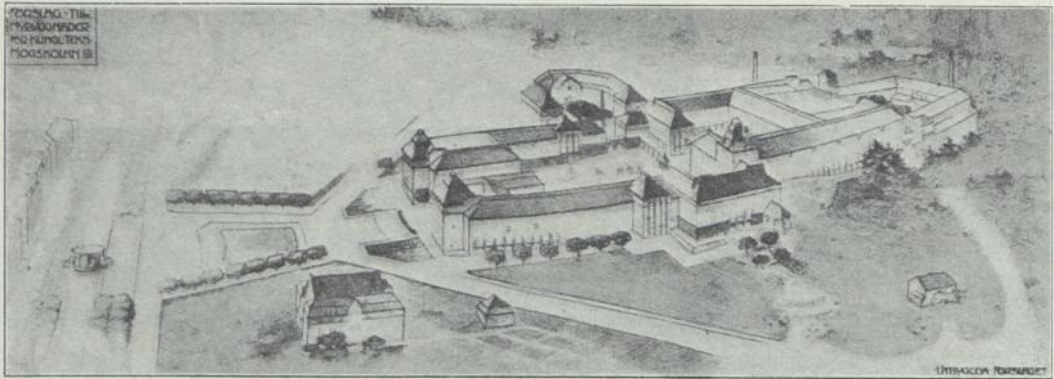


FIG. 4. FÖRSTA PRIS: FÅGELPERSPEKTIV. ARK. PROF. E. LALLERSTEDT.

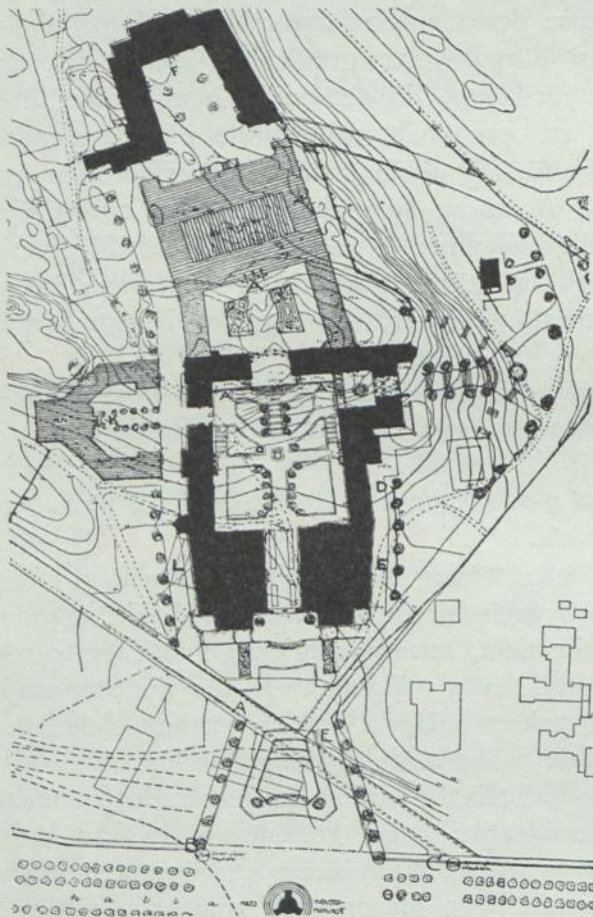


FIG. 5. FÖRSTA PRIS: SITUATIONSPLAN.

värdig och rik på fina konstnärliga moment. Kostnadsberäkningarna visa en summa något understigande anslaget.

2:o) att till författaren av förslaget n:o 2 med motto *Lill-Jan* utdela ett *andra pris* å 5 000 kronor.

Anläggningen är i detta förslag inpassad på tomten med en monumentalt storslagen hållning och bredd; entrén till huvudgården är förlagd så nära Valhallavägen som förhållandena medgivit. Huvuddelen av byggnaderna enligt program II, som omgiva den alltför spaciösa huvudgården, kan visserligen sägas bilda ett arkitektoniskt helt; sin fulla avslutning och storslagna verkan vinner dock denna anläggning icke förrän den projekterade tillbyggnaden av rit- och hörsalsbyggnaden enligt program I fullbordats. Planerna

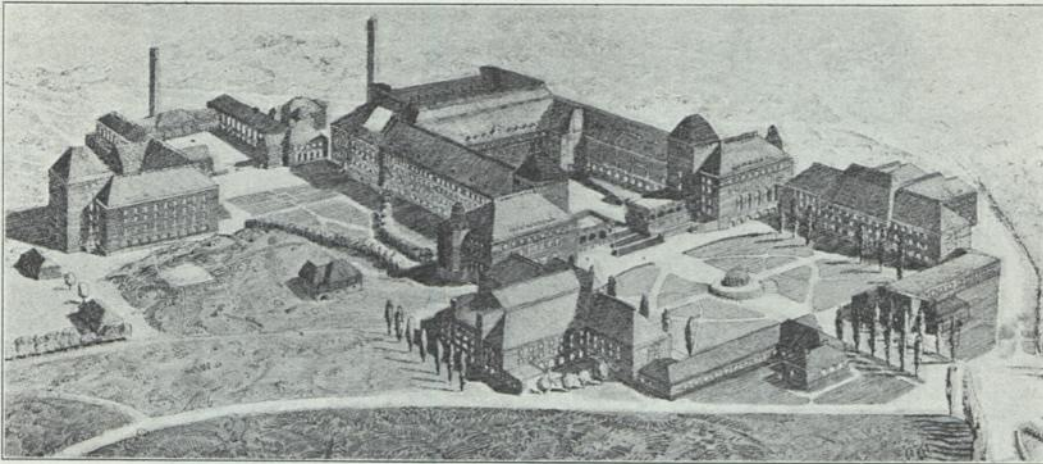


FIG. 6. ANDRA PRIS: FÅGELPERSPEKTIV. ARK. G. HOLMDAHL.

äro vackert och klart disponerade. Formgivningen har liksom anläggningen i sin helhet en god och enkel monumental hållning med en på vissa punkter imponerande allvarlig kraft. Den beräknade kostnads-summan överstiger anslags-summan med c:a $5\frac{1}{2}\%$.

3:o) att till författaren av förslaget n:o 13 med motto *Cumulus* utdela ett tredje pris å 4 000 kronor.

Anläggningen enligt program I är både ur konstnärlig och praktisk synpunkt vackert inlagd på området. Nämnden har särskilt fäst sin uppmärksamhet vid förläggningen av maskinlaboratoriet och värme-centralen, varigenom den vackra skogen bortom den södra av bergkullarna skonas och dessa institutioner komma att få ett

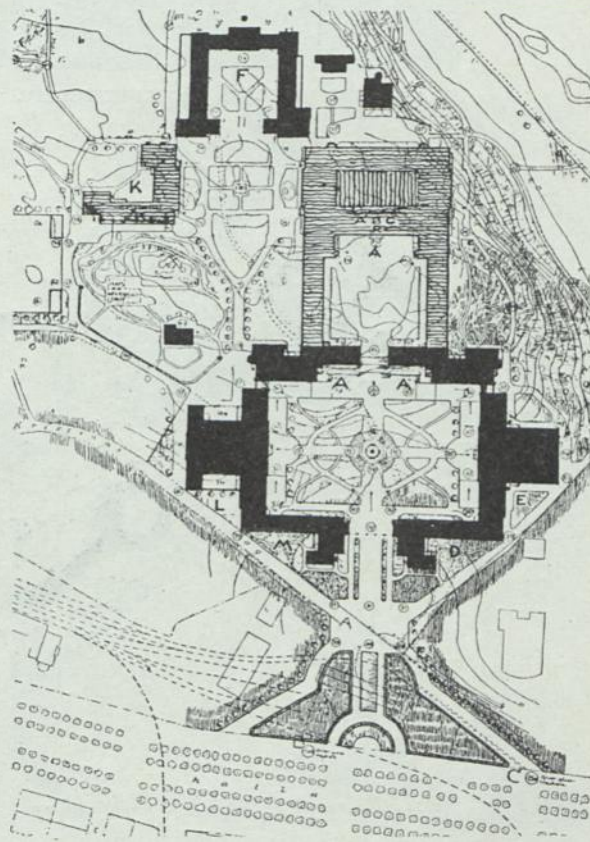


FIG. 7. ANDRA PRIS: SITUATIONSPLAN.

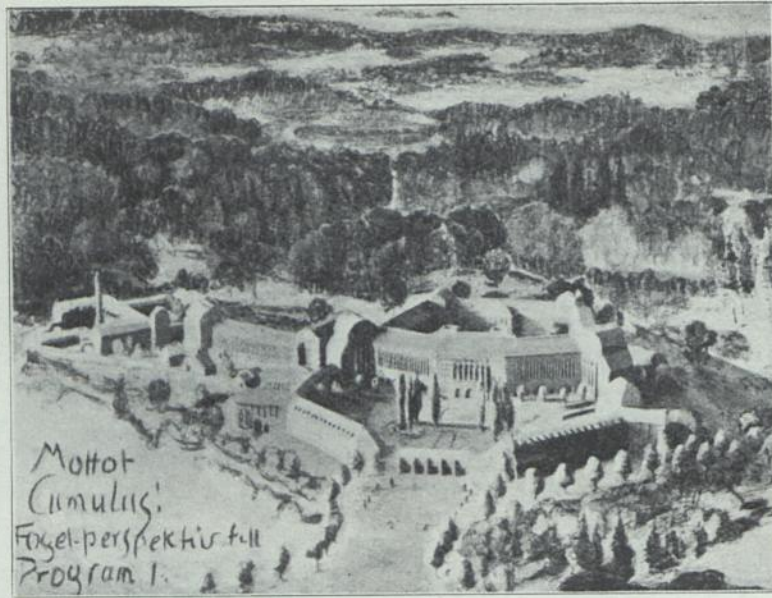


FIG. 8. TREDJE PRIS: FÅGELPERSPEKTIV. ARK. PROF. L. I. WAHLMAN.

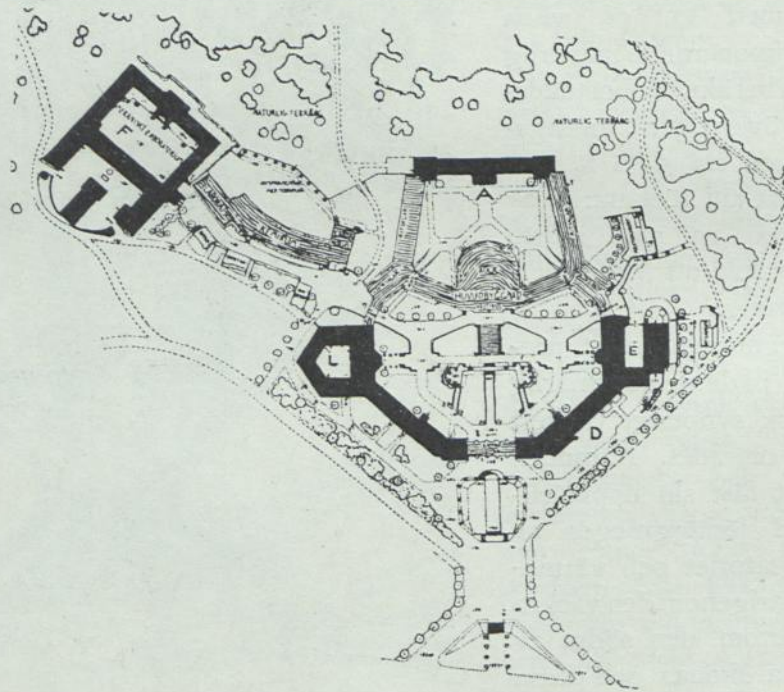


FIG. 9. TREDJE PRIS: SITUATIONSPLAN.

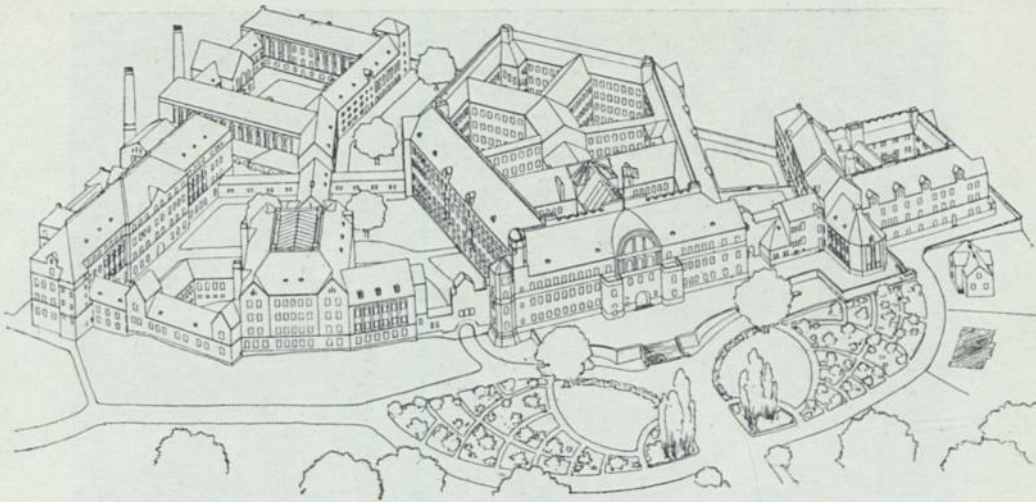


FIG. 10. FJÄRDE PRIS: FÅGELPERSPEKTIV. ARK. H. BOBERG.

i transporthänseende lämpligt läge. Emot förslaget torde kunna anföras, att huvudgården är alltför stor, och att de enligt program II till uppförande bestämda byggnaderna icke samlats till en arkitektonisk enhet. Planerna för de olika byggnaderna äro ändamålsenliga och rediga. Synnerligen beaktansvärdt är det sätt, varpå författaren löst svårigheten med de stora hörsalarna; dessa hava nämligen anordnats över varandra i särskilda flyglar vid sidan om korridorsystemet, på sådant sätt att salarna kunna erhålla lämplig höjd utan hänsyn till rumshöjden i byggnaden i övrigt. Även aulans planläggning och anslutning till huvudtrappor och gårdsplan är mycket vackert studerad.

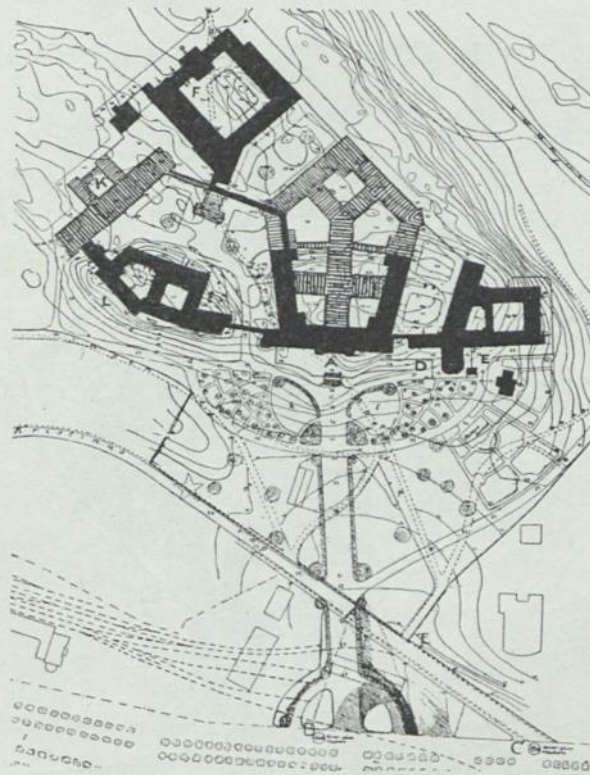


FIG. 11. FJÄRDE PRIS: SITUATIONSPLAN.

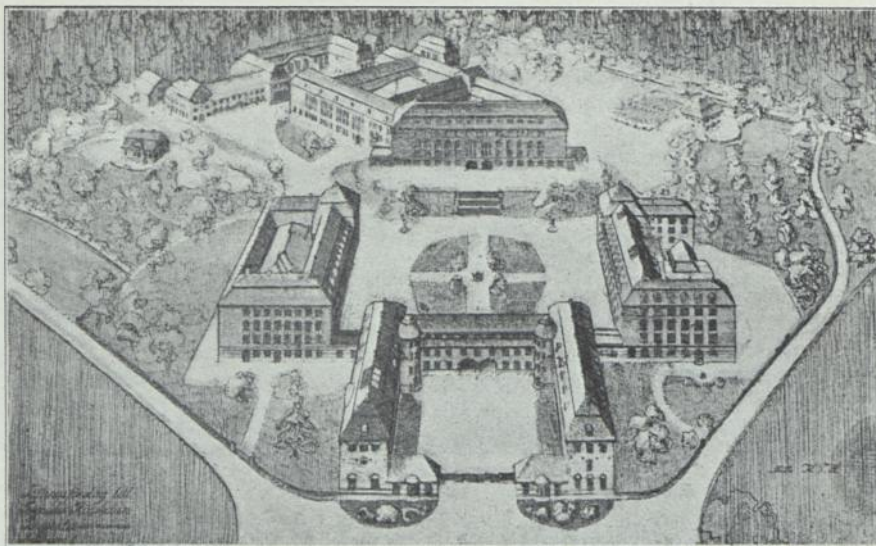


FIG. 12. FÖRSLAGET N:R 8: FÅGELPERSPEKTIV.

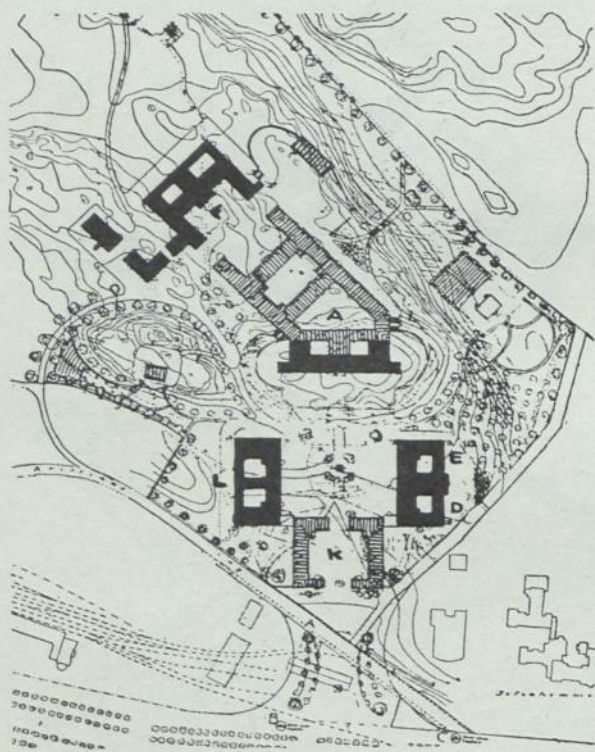


FIG. 13. FÖRSLAGET N:R 8: SITUATIONSPLAN.

Formgivningen är intressant och av konstnärligt värde. Kostnadssumman understiger anslaget med icke mindre än 9 %.

4:o) att till författaren av förslaget n:o 7 märkt med *en femuddig stjärna* utdela ett *fjärde pris* å 3 000 kronor.

Förslaget är byggt på den tanken, att uppställa tre av de nu till utförande bestämda institutionsbyggnaderna på *en* front vänd mot Valhallavägen; byggnaderna äro ställda på de båda bergkullarna i områdets fond. Härigenom vinnes redan från början en mycket ståtlig och imponerande fasadlänga, bakom vilken alla senare tillbyggnadsarbeten döljas, men å andra sidan lämnas mellan byggnaderna och Valhalla-

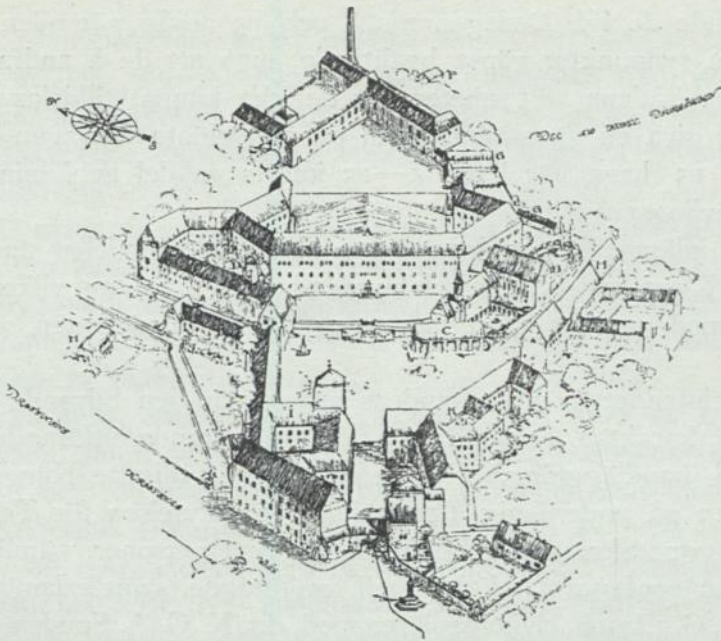


FIG. 14. FÖRSLAGET N:R 15: FÅGELPERSPEKTIV.

vägen ett betydande område oanvänt och dyrbart att hålla i vårdat skick. Förslaget anvisar icke blott sättet för de i program I ifrågasatta tillbyggnaderna utan ock för betydande utvidgningar därutöver av varje institutions byggnad. Lokaler, vilka äro för sina skilda ändamål väl fördelade och anordnade, äro distribuerade omkring ett alltför stort antal ointressanta gårdar. Formgivningen är vårdad och säker med en för här ifrågavarande ändamål lämpad enkel och värdig hållning. Den beräknade kostnadssumman överstiger anslaget med cirka $3\frac{1}{2}$ %.

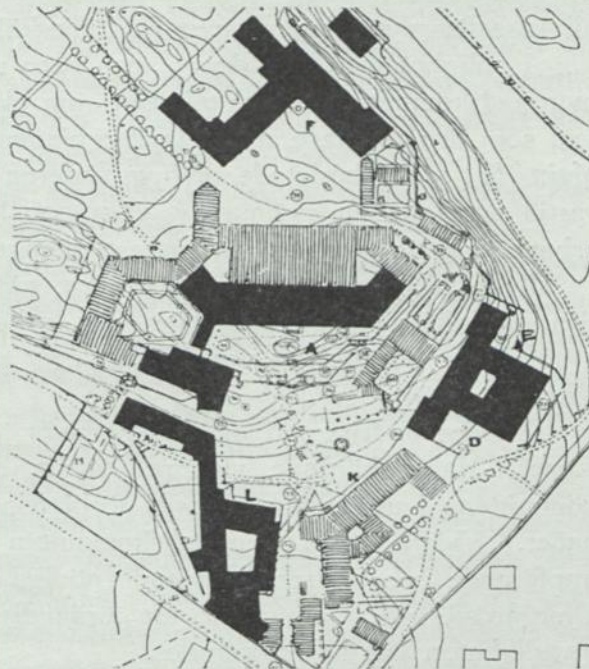


FIG. 15. FÖRSLAGET N:R 15: SITUATIONSPLAN.

Beträffande de två förslagen n:o 8 och 15 ansåg nämnden dem visserligen ur flera synpunkter värda beaktande, men att de å andra sidan voro behäftade med sådana olägenheter, att de icke kunnat tilldelas pris.

För att giva en föreställning om de prisbelönda förslagen samt förslagen 8 och 15 hava här i fig. 4—15 införts en del avbildningar från de inlämnade tävlingsprojekten.

Av de inlämnade projekten jämte tillhörande modeller anordnades en utställning i Klara gamla folkskolebyggnad vid Vasagatan, vilken utställning omfattades med mycket stort intresse såväl av allmänheten som av fackmännen.

Med avslutandet av prisnämndens arbete var den blivande byggnadens huvudsakliga karaktär bestämd och frågan rörande utförandet kunde nu upptagas till handläggning. För detta ändamål tillsatte Kungl. Maj:t den 1 mars 1912 på underdånig framställning av styrelsen för Tekniska högskolan en byggnadskommitté, bestående av fyra personer, nämligen rektorn vid högskolan professor C. J. Magnell, ordförande, samt ledamöterna: förste intendenten I. G. Clason, civilingenjören med. d:r. K. G. A. Sondén och distriktschefen i mellersta väg- och vattenbyggnadsdistriktet majoren F. Enblom. Till sekreterare antog byggnadskommittén advokaten S. Themptander och till kassaförvaltare kamreraren E. Lilliesköld.

I enlighet med den den 3 maj 1912 utfärdade nåd. instruktionen skulle byggnadskommittén »såväl tekniskt som ekonomiskt omhänderhava de arbeten, som äro förenade med planläggningen och utförandet av de av Kungl. Maj:t år 1911 beslutade nybyggnaderna m. m. för Tekniska högskolan, vartill anslagits en summa av 4 619 000 kronor, samt ombesörja att detta arbete raskt fortskrider och snarast möjligt fullbordas».

Byggnadskommittén skulle vidare träffa avtal med arkitekt om definitiva ritningars, kostnadsförslags och arbetsavtals uppgörande samt jämte yttrande av högskolans styrelse och eget utlåtande inlämna dessa till Kungl. Maj:t för prövning.

Mindre ändringar i byggnadsarbetet ägde byggnadskommittén att utan Kungl. Maj:ts hörande vidtaga, såvida dessa ändringar enligt byggnadskommitténs beprövande utgjorde förbättringar och ej medförde ökade kostnader. Vidare ägde byggnadskommittén att träffa de för byggnadernas uppförande och platsens ordnande nödiga överenskommelserna med Kungl. Djurgårdsförvaltningen samt att förhandla med andra statens eller stadens myndigheter, där så erfordrades.

Byggnadskommitténs första åtgärd blev att träda i förbindelse med

förste pristagaren professor E. Lallerstedt för att med honom träffa överenskommelse i frågan. Dessa underhandlingar slutfördes inom kort och resulterade däruti, att professor Lallerstedt antogs till arkitekt och arbetsledare för byggnadsföretaget och erhöll i uppdrag att utarbeta definitiva ritningar och kostnadsförslag.

Redan i slutet av september hade professor Lallerstedt hunnit fullborda preliminära huvudritningar jämte arbetsplaner och beskrivning, vilka handlingar av byggnadskommittén underställdes högskolans lärare för granskning under anhållan om, att eventuella anmärkningar mot ritningarna måtte göras före den 24 oktober 1912.

Sedan lärarnas anmärkningar inkommit och blivit av byggnadskommittén prövade samt samarbete ägt rum mellan professor Lallerstedt och resp. lärare i och för tillgodoseende av de önskemål, som blivit framställda, blevo de definitiva ritningarna den 14 dec. 1912 av professor Lallerstedt överlämnade till byggnadskommittén, som omedelbart överlämnade förslaget till högskolans styrelse för inhämtande av dess godkännande. Ärendet remitterades av styrelsen till lärarekollegiet, som den 18 december enhälligt beslutade att godkänna förslaget. Härefter tog högskolans styrelse ärendet under omprövning och avlät den 19 december till byggnadskommittén en till Kungl. Maj:t ställd skrivelse, varuti styrelsen godkände det Lallerstedtska förslaget. Detta blev jämväl godkänt av byggnadskommittén samt avlämnades till Kungl. Maj:t den 23 december 1912 jämte byggnadskommitténs underdåniga skrivelse med anhållan om fastställelse.

Kungl. Maj:t, som remitterade förslaget till överintendentsämbetet, fastställde detsamma genom nådigt brev av den 14 februari 1913.

Under den tid av nära ett år, som sålunda åtgått från byggnadskommitténs tillsättande och till ritningarnas fastställande, hade byggnadskommittén ägnat sig åt att träffa överenskommelse med Djurgårdsförvaltningen rörande det för byggnaderna anvisade området. Inom detta område voro belägna ett kronojägareboställe och en såg med virkesmagasin, vilka måste flyttas, innan grundschaktningsarbetena kunde verkställas.

Genom stort tillmötesgående och erkännansvärd förståelse för högskolans sak från intendenten C. A. Öhrströms sida, vilken å Djurgårdsförvaltningens vägnar ledde förhandlingarna med byggnadskommittén, fortskredo dessa förhandlingar raskt och utan svårighet. Redan den 22 oktober 1912 erhöll byggnadskommittén riksmarskalksämbe-
tets godkännande av den träffade överenskommelsen, varigenom högskolan tillförsäkrades ett område av, inklu-

sive vägar, 65 000 kvm samt därtill ett område av omkring 100 kvm, beläget 200 m från själva byggnadsplatsen och avsett för en särskild byggnad för magnetometri. Byggnadskommittén vände sig därefter i skrivelse den 20 dec. 1912 till styrelsen för Sofiahemmet med begäran om godkännande av ett för åstadkommande av lämpligare entré till högskolan uppgjort förslag till markutbyte. Detta förslag godkändes på vissa villkor av nämnda styrelse den 30 januari 1913.

Tomtfrågan var härmed klar och de egentliga byggnadsarbetena kunde taga sin början.

Såsom dagkontrollant under arbetsledaren professor Lallerstedt hade byggnadskommittén antagit byggnadsingenjören P. Th. Johannisson.

Den första åtgärden blev att flytta hovjägarebostället med tillhörande såg m. m. Såsom entreprenörer för detta arbete antog byggnadskommittén den 13 febr. 1913 byggmästarna A. Cronborg och K. J. Ekstrand. Detta arbete tog omedelbart sin början och fullbordades under sommarens lopp.

Onsdagen den 20 maj 1914 försiggick det högtidliga grundstensläggandet i närvaro av chefen för ecklesiastikdepartementet statsrådet K. G. Westman, högskolans styrelse, lärare och studentkår samt representanter för Stockholms övriga högskolor m. fl. särskilt inbjudna.

Denna grundsten, vilken är försedd med inskriptionen: »Grundstenen lagd 20 maj 1914», ligger såsom sockel under tomtpartiets mittpelare. Under grundstenen nedlades en hermetiskt tillsluten glascylinder, inlagd i asbest och omgiven av en igenlödd blykapsel samt innehållande handlingar rörande byggnadens tillkomst, högskolans organisation och historia, vyer av Stockholm m. m.

Statsrådet Westman höll ett tal, i vilket han yttrade i huvudsak följande:

»I enlighet med statsmakternas beslut lägges nu grundstenen till en ny byggnad för Tekniska högskolan, planlagd i storslagna mått, avsedd att utrustas med alla moderna hjälpmedel. Härmed öppnas möjligheter, större än någonsin tillföre i vårt land, att bedriva studier i de tekniska vetenskaperna och deras tillämpning och att däri förvärva insikter, fullt motsvarande den moderna tidens krav. Härmed stå vi inför den glädjande utsikten att erhålla en utbildningsanstalt, vars verksamhet skall sätta vårt folk i stånd att behålla och befästa en gynnsam ställning i den aldrig vilande ekonomiska tävlingskamp, som med spända krafter, i jagande fart fortgår folken emellan. Även i framtiden skall — det våga vi förutse — det svenska namnet knytas till hedrande insatser i den tekniska odlingens framsteg. Må det så ske! Må alla goda och värdefulla traditioner, som

utbildats i den nuvarande högskolan, flytta över inom de murar, som skola resa sig på denna, den nya byggnadens hörnsten! Må nya, friska andliga krafter vakna till liv i det nya hemmet! Med de varmaste välönskningar för Tekniska högskolans framtid stadfäster jag härmed läggandet av grundstenen till dess nya byggnad.»

Byggnadsarbetet har fortskridit utan några störande avbrott, om man undantager några veckor under våren år 1915, då stillestånd uppstod till följd därav, att den ene av de två huvudentreprenörerna skilde sig från arbetet och överlämnade detsamma åt sin kompanjon Nya asfaltaktiebolaget, att av denne ensam utföras.

Såsom experter och förslagsställare har byggnadskommittén anlitat: för värmelednings- och ventilationsanläggningarna civilingenjören H. Theorell och för elektriska ljus- och kraftanläggningarna civilingenjören J. Blomqvist.

De egentliga arbetenas utförande har varit anförtrott åt följande entreprenörer:

undersöknings- och utstakningsarbetena åt ingenjörsfirman Bennet & C:o, Stockholm;

schaktnings- och sprängningsarbetena åt Granit- och betonaktiebolaget, Stockholm;

grundläggningsarbetena m. m. åt aktiebolaget Skånska cementgjuteriet, Stockholm;

byggnadsstommarnas uppförande (huvudentreprenaden) åt byggnadsfirman E. R. Alfheim & C:o och Nya asfaltaktiebolaget, Stockholm;

granitarbetena åt ingenjörsfirman E. Hebbel, Stockholm och Granitaktiebolaget C. A. Kullgrens enka, Uddevalla;

anläggningarna av gas-, vatten- och avloppsledningar åt aktiebolaget Axel Sjögren & C:o, Stockholm;

värmeledningsanläggningen åt aktiebolaget Calor, Stockholm;

elektriska ljus- och kraftanläggningarna med armatur åt Luth & Roséns elektriska aktiebolag, Stockholm, och Allmänna svenska elektriska aktiebolaget, Västerås;

elektriska hissanläggningarna åt Luth & Roséns elektriska aktiebolag, Stockholm, och Graham Brothers, Stockholm;

traversinstallationen åt aktiebolaget Malcus Holmqvist, Halmstad;

målningsarbetena åt firman A. Bildmark & Son, Stockholm;

möbelsnickeriarbetena åt Kungl. fångvårdsstyrelsen, J. A. Lagerqvists

mek. snickerifabrik, Stockholm, snickaremästare Karl Kleiner, Stockholm, Carl Fredrikssons träförädlingsaktiebolag, Katrineholm, Tranås snickerifabrik, Tranås, samt Wester & Åströms snickerifabrik, Sundbyberg.

Fasadteglet har levererats av aktiebolaget Mälardalens tegelbruk, Stockholm, takteglet av aktiebolaget S:t Eriks lervarufabriker, Uppsala.

De huvudsakliga leveranserna och arbetena rörande laboratorieutrustningen ha utförts av följande entreprenörer:

för elektriska laboriet av Nya förenade elektriska aktiebolaget, Stockholm, och Elektriska aktiebolaget Siemens-Schuckert, Stockholm;

för maskinlaboriet av aktiebolaget ingenjersfirman Fritz Egnell, Stockholm, aktiebolaget Calverts economiser, Göteborg, aktiebolaget ingenjersfirman Titan, Stockholm, och Aktiebolaget de Lavals ångturbin, Stockholm.

I fråga om laboratoriernas utrustning hava de respektive lärarna stått till tjänst med förslag och sakkunniga utredningar utan annan ersättning, än som betingats av nödvändiga ritbiträdens avlönande. Såsom föredragande inför byggnadskommittén rörande leveranser för detta ändamål har tjänstgjort civilingenjören W. Davidsson.

Såväl till utrustning av de nya laboratorierna som till stipendier och andra särskilda ändamål har högskolan under byggnadstiden fått mottaga en stor mängd synnerligen värdefulla gåvor. För dessa har högskolans styrelse vederbörligen till en och var av givarne framfört sitt tack, men det torde icke vara annat än lämpligt att på denna plats införa en sammanställning av desamma. De utgöra ett glädjande vittnesbörd om, vilket intresse framför allt bland industriens män, som högskolan i sin nya gestalt redan väckt, ett intresse som vi hoppas skall alltmera tilltaga i den mån ökat gagn för industrien kommer att vinnas genom de nya möjligheter för framgångsrik verksamhet, som nu skapats för högskolan särskilt i och genom de nya laboratorierna.

De ifrågavarande gåvorna äro — intill den 31 december 1917 — följande:

Till Mekaniska avdelningen:

| | |
|---------------------------------|---|
| Av Munktells mekaniska verkstad | Ritningar å vattenrörpannor. |
| » Kungl. Vattenfallsstyrelsen | Ritningar å ångcentral i Västerås. |
| » Calvert & Co., Stockholm | Ritningar å ångledning m. m. till samma ångcentral. |
| » Ab. de Lavals ångturbin | Ritningar å ångturbiner. |

Till Samlingar tillhörande mekanisk teknologi:

Av Ab. Karlstads mekaniska verkstad, En modell av en mångcylinders pappersmaskin.
Kristinehamn

Till Ångtekniska laboratoriet:

Av Ab. Schäffer & Budenberg, Stockholm En manometer.
 » Allmänna svenska elektriska ab. (A. S. En $\frac{1}{2}$ -hkr. elektrisk motor med tillbehör.
E. A.), Västerås
 » Söderhamns nya verkstads ab., Söderhamn Armatyr till ångpanna.
 » Nordiska kullager ab., Göteborg Två transmissionsaxlar med tillhörande lageranordningar.
 » Svenska turbinfabriks ab. Ljungström, Skovelhjul med skovelringar.
Finspång
 » Jönköpings mekaniska verkstad, Jönköping En ångturbinmatarpump.

Till Hydrauliska laboratoriet:

Av Stora Kopparbergs bergslags ab., Falun En gammapump.
 » Ab. Karlstads mekaniska verkstad, En spiralturbin med regulator och tillbehör.
Kristinehamn
 » Ab. Svenska kullagerfabriken, Göteborg Kullager för samma turbin.
 » Allmänna svenska elektriska ab. (A. S. En likströmgenerator med tillbehör.
E. A.), Västerås

Till Förbränningsmotorlaboratoriet:

Av Maskinfirmen Oscar Svedlund, Katrineholm En bensinmotor om 20 hkr.
 » Morgårdshammars mekaniska verkstads ab., Morgårdshammar En 1 hkr. bensinmotor med generator och regleringsmotstånd.
En $2\frac{1}{2}$ hkr. Tellusmotor med magnetändning för bensindrift.
 » J. V. Svensons motorfabrik, Stockholm En 12 hkr. råoljemotor utrustad med lämpliga anordningar för provning.
 » Stora Kopparbergs bergslags ab., Falun En gamma-råoljemotor.
 » Ljusne-Woxna ab., Ljusne En 10 hkr. Ellwemotor.
 » Ab. Mack, Stockholm En Mackprecisionsmätare för motorbränsle.
 » Ab. E. Lundvik & C:o, Stockholm En 4-cyl. magnetapparat med tändstift.
En förgasare.
 » Ab. Ingeniörsfirma Fritz Egnell, Stockholm En komplett utrustning till en Mono-installation.
Ritningar.
 » Ab. Diesels motorer, Stockholm En 50 hkr. Dieselmotor. Ritningar.
 » Ab. Svenska kullagerfabriken, Göteborg Lager som demonstrationsobjekt.
 » Nordiska kullager ab., Göteborg D:o.

Till Laboratoriet för komprimerad luft:

Av Nya ab. Atlas, Stockholm En luftkompressor med luftbehållare.
 » Ab. Elektro-maskin, Stockholm En centrifugalfläkt med tillbehör.
 » Morgårdshammars mekaniska verkstads ab., Morgårdshammar Delar av en stötbormaskin.

Till Verktygsmaskinlaboratoriet:

- | | |
|--|---|
| Av Ab. Frank Hirsch's maskiner, Stockholm | Arbetsmaskiner till ett sammanlagt värde av 18 000 kronor. |
| » Nya ab. Atlas, Stockholm | Tre st. pneumatiska verktyg med mothåll. |
| » Askersunds mek. verkstads ab., Askersund | En smärgelslipmaskin med motor. |
| » E. V. Beronius mekaniska verkstads ab., Eskilstuna | En rikthvelmaskin. En hålmejsel-stämmaskin. En cirkelsåg. |
| » Ab. Lindéns hemmaskiner, Nässjö | En friktionskoppling. |
| » Ab. Svenska kullagerfabriken, Göteborg | Sex transmissionslager. |

Till Materialprovninglaboratoriet:

- | | |
|-------------------------------|---|
| Av Ab. Alpha, Stockholm | En kulprovningmaskin enl. Brinells metod, jämte tillhörande mätmikroskop. |
| » Fabriks ab. Osmund, Uppsala | Två mindre gasugnar för härdning och smidning med tillhörande blåsmaskin. |

Till Laboratoriet för hiss- och transportteknik:

- | | |
|--|--|
| Av Allmänna svenska elektriska ab. (A. S. E. A.), Västerås | Ett hissmaskineri med tillhörande apparater. Ritningar till elektriska hissar och lyftkranar. |
| » Sandvikens järnverks ab., Sandviken | En modell av Sandvikstransportören. |
| » Luth & Roséns elektriska ab., Stockholm | Ritningar till elektriska lyftkranar. |
| » Ab. Atlas-Diesel, Stockholm | Detaljer och ritningar till transportanordningar. |
| » Ab. Svenska kullagerfabriken, Göteborg | Modeller för demonstration vid undervisningen. |

Till Kyllaboratoriet:

- | | |
|--|--|
| Av Ludvigsbergs verkstads ab., Stockholm | Två kylanläggningar, kompletta med maskiner, apparater och instrument, den ena för ammoniak, den andra för kolsyredrift. |
| » Firman Christian Borner, Göteborg | Isolering av kylrum och rörledning. |
| » Larsen Ice Machine Company, Chicago | »Larsen unit for refrigeration», bestående av en 2 hkr motor, kompressor, generator och kondensor. |

Till Hygieniska och värmetekniska avdelningarna:

- | | |
|---|--|
| Av Götaverken, Göteborg, genom Bernström & C:o ab., Stockholm | En gjuten lågtrycksångpanna. En sats eldnings- och rensningsredskap. |
| » Ingeniör C. H. Lagerlöw, Stockholm | En kvicksilvermanometer. |
| » Åkermans gjuteri ab., Eslöv, genom Ab. Merkantila ingenjörbyrå, Stockholm | En motströmsapparat, »Topsy». |
| » Bremer & C:o, Stockholm | Ett 63 mm dubbelt säkerhetskärl. |
| » Ab. Gustafsbergs porslinsfabrik, genom Bernström & C:o, Stockholm | Ett genomskuret porslinstvättställ och en genomskuren porslins-W.C.-skål. |
| » Ab. Ahlsell & Ahrens, Stockholm | En samling rör, rördelar, golvbrunnar, vattenlås, porslins- och emaljgods. |
| » Ab. Rylander & Asplund, Stockholm | En dubbel diskåda av fireclay. |

Till Samlingar tillhörande skeppsbyggnad:

- Av Marinförvaltningen, Stockholm Ritningar till propellrar och protokoll över pansarbåten Sveriges provresa.
- » Ab. Finnboda varv, Stockholm Ritningar till ångfartyget »Holmia».
- » Kockums mekaniska verkstadsab., Malmö Ritningar.
- » Bergsunds mekaniska verkstads ab., Stockholm D:o.

Till Elektrotekniska laboratoriet:

- Av Luossavaara-Kirunavaara ab. Gamla maskiner.
- » Hälsingborgs mekaniska verkstad, Hälsingborg En 3 hkr. trefasmotor.
- » Ab. L. M. Ericsson & C:o, Stockholm Lokaltelefonanläggningar inom maskinlaboratoriet samt avdelningarna för elektroteknik och för bergsvetenskap med sammanlagt 67 st. apparater.
- » Ab. de Laval's ångturbin, Stockholm En trefasinduktionsmotor.
- » Allmänna svenska elektriska ab. (A. S. E. A.), Västerås En fullständig apparatutrustning för en högspänningsanläggning.
- » Elektriska ab. A. E. G., Stockholm En station för trådlös telegrafering.
- » Svenska accumulator ab. Jungner, Stockholm Tvenne accumulatorbatterier.
- » Elektriska ab. Siemens-Schuckert, Stockholm En automatisk telefonväxel med kontrollanordningar jämte tillbehör.
- » Ab. Luth & Roséns elektriska ab., Stockholm Ett motorgeneratoraggregat.
- » Graham Brothers, Stockholm Elektriska mätinstrument.
- » Max Sieverts fabriks ab., Sundbyberg 25 000 kr. till ett precisionslaboratorium.

Till Väg- och vattenbyggnadslaboratoriet:

- Av Nya ab. Stathmos, Nynäshamn En kranvåg med brygga för 1 000 kg belastning.
- » Ab. Zander & Ingeström och ab. de Laval's ångturbin, Stockholm En decimalvåg för 500 kg med vikter.
- » Ab. Järnvägsmateriel, Stockholm En taffelvåg för 10 kg med vikter.
- » Ab. Ahlsell & Ahrens, Stockholm En 250 mm elektromotor Z-pump med igångsättningsmotstånd och montage.
- » Ab. Svenska metallverken, Västerås Råls till huvudrännan (c:a 2 200 kg) med bultar och klämplattor.
- » Ab. Elektromaskin, Stockholm Rör och rördelar till en c:a 50 m lång 250 mm gjutjärnsledning jämte tvenne avstängningsluckor.
- » Ab. Rylander & Asplund, Stockholm En 100 mm partialvattenmätare.
- » Ab. Ankarsrums bruk, Ankarsrum Halva kostnaden för en 100 mm elektromotor-pump med igångsättningsmotstånd.
- » Centralgruppens emissionsab., Stockholm Rör och rördelar till c:a 15 m 100 mm gjutjärnsledning jämte tvenne avstängningsluckor samt div. galv. smidesjärnrör.
- » Gideå och Husums ab., Stockholm Två 500 mm avstängningsluckor med snabbstängningsanordning.
- » 1 000 kr.
- » 500 »

| | |
|---|---------|
| Av Ab. Förenade yllefabrikerna, Norrköping | 300 kr. |
| » Huskvarna vapenfabriks ab., Huskvarna | 500 » |
| » Elektrokemiska ab., Bengtsfors | 100 » |
| » Klosters ab., Långshyttan | 300 » |
| » J. H. Munktells pappersfabriks ab., Grycksbo | 300 » |
| » Stockholms superfosfat ab., Stockholm | 2 000 » |
| » Hofors ab., Hofors | 500 » |
| » Byggnads-ab. Contractor, Stockholm | 1 000 » |
| » Kungsfors spinneri ab., Skene | 300 » |
| » Sydsvenska kraft-ab., Malmö | 500 » |
| » Örebro elektriska ab., Örebro | 500 » |
| » Dejefors kraft- och fabriks ab., Dejeforsbruk | 500 » |
| » Forsbacka järnverks ab., Forsbacka | 500 » |
| » Eskilstuna järnmanufaktur ab., Eskilstuna | 300 » |
| » Ljusne-Woxna ab., Ljusne | 1 000 » |
| » Ab. Kreuger & Toll, Stockholm | 2 000 » |
| » Norbergs elektriska ab., Kärrgruvan | 300 » |
| » Kungsgården-Mariebergs ab., Stockholm | 300 » |
| » Västerdalälvens kraft ab., Grängesberg | 500 » |
| » Kraft-ab. Gullspång-Munkfors, Mariestad | 500 » |
| » Fagersta bruks ab., Fagersta | 500 » |
| » Yttersfors trävaru-ab., Stockholm | 500 » |
| » Viskans kraft-ab., Borås | 300 » |
| » Yngeredsfors kraft-ab., Mölndal | 500 » |
| » Korsnäs sågverks ab., Gävle | 300 » |
| » Rydboholms ab., Rydboholm | 300 » |
| » Lavéns kolimport-ab., Stockholm | 100 » |

Till Samlingar tillhörande väg- och brobyggnad:

| | |
|---|---|
| Av Ab. Skånska cementgjuteriet, Stockholm | En modell av Bergsbron i Norrköping. En modell av gatubroar i Mariestad med omgivande terräng. |
|---|---|

Till Samlingar tillhörande vattenbyggnad:

| | |
|---|---|
| Av Flottningschefen O. J. Näslund, Stavre | En samling flottningsmodeller. |
| » Ab. Svenska metallverken, Västerås | Åtta vattenmätare av olika dimensioner. |
| » Ab. A. J. Stål & C:o, Stockholm | Fem profiler av järnspånt, system »Rothe Erde». |

Till Gruvvetenskapliga museet:

| | |
|--|---|
| Av Nya ab. Atlas, Stockholm | Fyra bergbormaskiner. |
| » Grängesbergs gemensamma gruvförvaltning, Grängesberg | Borrsläggor och borrsatser, Water Leyners bormaskin, anrikningsprodukter. |
| » Dalkarlsbergs gruv-ab., Striberg | Water Leyners bormaskin. |
| » Norbergs gruv-ab., Kärrgruvan | Anrikningsprodukter. |
| » Vargöns ab., Vargön | D:o. |
| » Hellefors bruks ab., Sikfors | D:o. |
| » Guldsmedshytte ab., Guldsmedshyttan | D:o. |
| » Riddarhytte bruks ab., Riddarhyttan | D:o. |

| | |
|---|---|
| Av Ab. Kantorps malmfält, Kantorp | Anrikningsprodukter, en gruvstege. |
| › Dannemora gruvors intressenter, Dannemora | Tre gruvstegar, olika slag. |
| › Nitroglycerin-ab., Stockholm | En dynamitvärmare, div. knallhattar m. m. |
| › Högfors bruk, Silverhöjden | Borrslägga och borrsats, anrikningsprodukter. |
| › Svenska diamantbergborrnings-ab., Stockholm | En modell av diamantborrmaskin med tillbehör. |
| | En borrhärna av 300 mm diameter. |
| | En kollektion av borrhäronor m. m. |
| › Gruv-ab. Dalarne, Idkerberget | Anrikningsprodukter. |
| | Två tavlor över schakt och utfraktsanordningar vid Idkerbergs gruvfält. |
| | En tavla, visande sektion och plan av Våghalsgruvans anrikningsverk. |
| | Modell av samma anrikningsverk. |
| | Modell av Idkerbergs lave och sovringsverk. |
| › Stripa gruvebolag, Guldsmedshyttan | En tavla över anordningarna ovan och under jord vid Stripa gruvfält. |
| | En glasmodell av Stripa gruvor. |
| › Gruv-ab. Långban, Långbanshyttan | En kraftpilkarta, upprättad 1881. |
| › Gruvingenjör Björn Tiberg, Falun | En magnetisk karta, upprättad av E. Tiberg. |
| | En kraftpilkarta (den första som upprättats). |

Till Anrikningslaboratoriet:

| | |
|--|---|
| Av Ab. Ingeniörsbyrån Allians, Stockholm | En laboratoriemagnet. |
| | En våtseparator. |
| | En mindre gråbergsavskiljare. |
| › Ab. Svenska kullagerfabriken, Göteborg | Kullager för maskiner, apparater och för demonstration vid undervisningen samt för rullgardinsanordningar jämte modeller. |
| › Ab. Gröndals patenter, Stockholm | En laboratorieapparat till flotationsförsök. |
| | En magnetisk separator, typ Gröndal V. |
| › Ridderhytte bruks ab., Ridderhyttan | 2 000 kr. |
| › Ljusne-Woxna ab., Ljusne | 1 000 › |
| › Horndals järnverks ab., Horndal | 1 000 › |
| › Högfors bruk, Silverhöjden | 1 000 › |
| › Luleå järnverk, Luleå | 2 000 › |
| › Ulvshytte järnverks ab., Ulvshyttan | 500 › |
| › Hofors ab., Hofors | 500 › |
| › Klosters ab., Långshyttan | 2 000 › |
| › Ab. Stollbergs gruvor och anrikningsverk, Gräsberg | 25 › |
| › Håksbergs nya gruv-ab., Ludvika | 1 000 › |
| › Herrängs gruv ab., Stockholm | 5 000 › |
| › Ab. Sjärfors-Ställdalen, Bredsjö | 1 000 › |
| › Dannemora gruvors intressenter, Dannemora | 4 000 › |
| › Gruv-ab. Dalarne, Idkerberget | 2 500 › |
| › Stora Kopparbergs bergslags ab., Domnarvet | 5 000 › |
| › Hellefors bruks ab., Sikfors | 1 000 › |
| › Vargöns ab., Vargön | 1 000 › |
| › Surahammars bruks ab., Surahammar | 500 › |

| | |
|---|-----------|
| Av Ab. Emissionsinstitutet, Stockholm | 2 500 kr. |
| » Gruv-ab. Lomberget, Grängesberg | 1 000 » |
| » Björnbergs gruve-ab., Grängesberg | 1 000 » |
| » Västra Ormbergs gruve-ab., Grängesberg | 1 000 » |
| » Finans-ab., Stockholm | 5 000 » |
| » Fagersta bruks ab., Fagersta | 5 000 » |
| » Stora Långviks gruv-ab., Hedemora | 1 000 » |
| » Gruv-ab. Långban, Långbanshyttan | 500 » |
| » Stripa gruvebolag, Guldsmedshyttan | 1 000 » |
| » Svenska emissions ab., Stockholm | 5 000 » |
| » Ab. Kantorps malmfält, Kantorp | 5 000 » |
| » Tuolluvaara gruv-ab., Stockholm | 2 000 » |
| » Filipstads bergslags gemensamma förvaltning, Persberg | 2 000 » |
| » Stortägets gruve-ab., Fagersta | 500 » |
| » Trafik-ab. Grängesberg-Oxelösund, Stockholm | 5 000 » |
| » Centralgruppens emissions-ab., Stockholm | 5 000 » |
| » Stockholms superfosfatfabriks ab., Stockholm | 500 » |
| » Storgruve ab., Kärrgruvan | 500 » |
| » Kolningbergs gruv-ab., Kärrgruvan | 1 000 » |
| » Norbergs gruv-ab., Kärrgruvan | 2 000 » |
| » Ab. Kallmora silvergruva, Kärrgruvan | 500 » |
| » Gröndals gruve-ab., Kärrgruvan | 500 » |
| » Ställbergs gruve-ab., Kopparberg | 1 000 » |
| » Uddeholms ab., Uddeholm | 4 000 » |
| » Bergsingenjör J. Berglund | 500 » |

Till Metallurgiska laboratoriet:

| | |
|--|--|
| Av A. Hermansen, Växjö | En glödugn med generator och rekuperator. |
| | En vällugn » » » » |
| | En smältugn » » » » |
| » E. V. Beronius mekaniska verkstads ab., Eskilstuna | En fjäderhammare. |
| » Bultfabriks ab., Hallstahammar | En värmeugn för oljeeldning försedd med för-gasare. |
| » Ab. Axel Christiernsson, Stockholm | Sex gjuterimaskiner med formflaskor och formare-verktyg. |
| » Ab. Héroults elektriska stål, Kortfors | Kiseljärn. |
| » Ab. Arvika verken, Arvika | Spettho, gjutskopor. |
| » Björneborgs järnverks ab., Björneborg | Gjuttackjärn. |
| » Boxholms ab., Boxholm | Malm, lancashirestångjärn, spett, ugnsrakor m. m. |
| » Bångbro järnverks ab., Bångbro | Thomasmalm och Thomasstål. |
| » Carlsdahls ab., Karlsdal | Aducingstackjärn. |
| » Forsbacka järnverks ab., Forsbacka | Bessemerstål och tackjärn. |
| » Gimo-Österby bruks ab., Österby | Degelstål. |
| » Hammarby-Yxe ab., Nora | Martinstål. |
| » Herrängs gruv-ab., Stockholm | Exportjärn och slig. |
| » Hofors ab., Hofors | Bokhäll med slägga, kalksten. |
| » Hults bruk, Åby | Yxor. |

| | |
|--|---|
| Av Kockums järnverk, Kallinge | Härdningsho. |
| › Lesjöfors ab., Lesjöfors | Smidesredskap. |
| › Laxå bruks ab., Laxå | Lancashirestångjärn, Lancashireslagg. |
| › Gruv-ab. Långban, Långbanshyttan | Anrikad brunsten. |
| › Larsbo-Norns ab., Vikmanshyttan | Degelstål. |
| › Oxelösunds järnverks ab., Oxelösund | Gjuttackjärn. |
| › Stora Kopparbergs bergslags ab., Domnarvet | Apatit, Thomastackjärn, kiseljärn, kvartsmjöl. |
| › Brukspatron Ernst Stridsberg, Trollhättan | Diverse redskap. |
| › Söderfors bruk, Söderfors | Städ m. fl. smedjeutensilier, utslagsslägga, hyttlim. |
| › Uddeholms ab., Munkfors | Barends. |
| › Vedevågs bruk, Vedevåg | Skyfflar och andra ugnswerktyg. |
| › Åkers styckebruk, Åkers Styckebruk | Aduceringstackjärn. |

Till Metallografiska laboratoriet:

| | |
|-----------------------------|-----------|
| Av Ab. Separator, Stockholm | 1 000 kr. |
|-----------------------------|-----------|

Till Samlingar tillhörande järnets manufakturering:

| | |
|--|---|
| Av Ab. Zander & Ingeström, Stockholm | Ritningar till elektromotor Zetafläkt. |
| › A. Hermansen, Växjö | Ritningar till gasgeneratorer, väll-, glöd- och smidesugnar. |
| › Bultfabriks ab., Hallstahammar | Provkollektion av bultfabrikat och järnmanufaktur samt prov av elektrostålgjutgods. |
| › E. V. Beronius mekaniska verkstads ab., Eskilstuna | Ritning till fjäderhammare. |
| › Huskvarna vapenfabriks ab., Huskvarna | Fabrikationsserier av delar till maskiner m. m. |
| › Kockums järnverk ab., Kallinge | Gjutgodsdelar och emaljerade gjutgodskärl m. m. |
| › Kockums emaljverk, Ronneby | Ritningar till klippspikmaskineri. |
| › Kolsva järnverks ab., Kolsva | Fabrikationsserier av plåtkärl. |
| › Forsbacka bruks ab., Forsbacka | 3-tums spränggranat. |
| › Hults bruk, Åby | Fabrikationsserier av hackor. |
| › C. F. Petterssons mek. verkstad, Kristinehamn | Yxor. |
| › Älvkarleö bruk, Älvkarleö | Fabrikationsserier av yxor och hackor. |
| › Västerås järnmanufaktur, Västerås | Kollektion av fjädrar och hackor m. m. |
| › Ab. Stridsberg & Björk, Trollhättan | Föremål av aducerat gjutjärn. |
| › Blombacka ab., Lindfors | Kollektion av sågar och filar m. m. |
| › Gunnebo bruks nya ab., Gunneby | Fabrikationsserier av tråd, kablar m. m. |
| › Ab. Separator, Stockholm | Fabrikationsserier av tråd, kättingar m. m. |
| › Köpings mek. verkstads ab., Köping | Fabrikationsserie av gods till en handseparator. |
| › Surahammars bruks ab., Surahammar | Ritningar till ugnar, gjuterimaskiner m. m. |
| › Ab. Elektriska ugnar, Stockholm | Ritningar till ugnar, valsverk m. m. |
| › Arboga mek. verkstads ab., Arboga | Ritningar och planscher till ugnar m. m. |
| › Ab. Nydqvist & Holm, Trollhättan | Ritningar till smidesmaskin. |
| › Statens järnvägar, Stockholm | Ritningar till luftfjäderhammare. |
| › Ingenjör Edv. Berglöf, Stockholm | Ritningar till räls, spår, lokomotivhjul m. m. |
| › Kapten John Gjers, Arboga | Ritningar till ugnar. |
| › Ingenjör Wilhelm Jansson, Stockholm | Ritningar till varmgropar. |
| › Ingenjör Jakob Forsstedt, Västerås | Ritningar till valsverk. |
| | Ritningar till anordning för seghärdning. |

- | | |
|---|---|
| Av Ingenjör Ivar Rennerfelt, Djursholm | Ritningar till maskiner för hästskotillverkning. |
| › Ab. Svenska metallverken, Västerås | Fabrikationsserier av ammunitionshylsor. |
| › Grosshandlare D. Dietrichson, Stockholm | En Zetablåsmaskin med elektrisk drift jämte uppsättning och rörledning. |
| › Eskiistuna järnmanufaktur ab., Eskilstuna | Stor kollektion av knivar, saxar, gångjärn, smågjutgods och verktyg. |
| › Eskilstuna stålpressnings ab., Eskilstuna | Serieprov av plåtpressningar. |
| › Söderbloms gjuteri-ab., Eskilstuna | Två parallellskruvstycken. |
| › Ab. Skara gjuterier, Skara | Prover å pressgjutgods. |
| › Laxå bruk, Laxå | Dressinhjul jämte detalj. |

Till Mineralogiska avdelningen:

- | | |
|--|---|
| Av Bergsingenjör Gunnar Bergström, Svenska diamantbergborrnings ab., Stockholm | 200 kr. för underlättande av de geologiska excursionerna med bergshögskoleeleverna. |
| › Svenska diamantbergborrnings ab., Stockholm | Slipdiamanter till hårdprovningförsök. |
| › Statsgeologen Fil. Dr. Per Geijer | En större samling stuffprov från nordamerikanska malmfält. |
| › Stråssa gruvförvaltning, genom ingenjör K. Stenberg | Block av malm och bergarter från Stråssa och Ickorrbotten till museet. |
| › Grängesbergs gruvförvaltning | Ett block järnmalm-breccia till museet. |
| › Trafik-ab. Grängesberg-Oxelösund | 5 000 kr. för komplettering av den mineralogiska avdelningens utrustning. |
| › Jernkontoret | 5 000 kr. för samma ändamål. |
| › Bergsingenjör Harry von Eckermann | Bd 1—18 av Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie. |
| › Överingenjör Sigurd A. G:son Nauckhoff | Bd 19—36 av samma tidskrift. |

Till Arkitekturmuseet:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| Av Bildhuggare Christian Ericsson | Två gipsavgjutningar av skulpturdetaljer från katedralen i Reims. |
|-----------------------------------|---|

Till Byggnadstekniska samlingen:

- | | |
|---|-------------------|
| Av Ab. Skånska cementgjuteriet, Stockholm | Byggnadsmateriel. |
| › Ab. Kreuger & Toll, Stockholm | D:o. |
| › Sveriges tegelindustriförening, Stockholm | D:o. |
| › Höganäs-Billesholms ab., Höganäs | D:o. |
| › Ab. Karta & Oaxens kalkbruk, Stockholm | D:o. |
| › Svenska granitindustri ab., Stockholm | D:o. |
| › Gusta stenförädlingsverk, Brunflo | D:o. |
| › Svenska betongföreningen, Stockholm | 3 000 kr. |
| › Ab. Kreuger & Toll, Stockholm | 3 000 » |
| › Max Sieverts fabriks ab., Sundbyberg | 2 000 » |
| › Svenska cementförsäljnings ab. Malmö | 1 000 » |
| › Generalkonsul J. Sachs | 1 500 » |
| › Professor H. Kreüger | 1 500 » |

Till Reparationsverkstaden:

| | |
|-------------------------------------|---|
| Av Ab. B. A. Hjort & C:o, Stockholm | En gängskärningsskarv. En kipphyvel. En fjäderhammare. En mindre bormaskin. En större pelarbormaskin. En fläkt. En elektrisk bormaskin. Plansch av en fjäderhammare. |
| » Nordiska kullager ab., Göteborg | Tre transmissionsaxlar med tillhörande lageranordningar. |

Till utgivande av Professor P. Henriques' arbete »Skildringar ur Kungl. tekniska högskolans historia I»:

| | |
|---------------------------------------|-----------|
| Av Bankdirektör Jonas C:son Kjellberg | 4 000 kr. |
|---------------------------------------|-----------|

Till utgivande av föreliggande skrift:

Av fem studiekamrater vid Tekniska högskolan under åren 1890—93:

| | |
|---------------------------------|-----------|
| Direktör Axel Hultman | 3 000 kr. |
| Direktör Hemming Johansson | 3 000 » |
| Bruksdisponent Kristoffer Huldt | 3 000 » |
| Direktör Bengt Ingeström | 3 000 » |
| Brukspatron Sven Spånberg | 3 000 » |

Till konstnärlig utsmyckning av högskolans nya lokaler:

| | |
|---|---|
| Av Konstnären G. Pauli | Två kalkmålningar i avdelningen för väg- och vattenbyggnadskonst. |
| » Allmänna svenska elektriska ab. (A. S. E. A.), Västerås | 10 000 kr. för dekorerings av den stora elektrotekniska hörsalen. |

Vidare har sedan nybyggnaden påbörjades följande donationer för stipendieändamål gjorts till högskolan:

| | |
|---|-----------------|
| Av Byggmästare H. O. Rundqvist och hans maka Amalia Rundqvist | c:a 100 000 kr. |
| » Civilingenjör Carl Nyströmer | c:a 60 000 » |
| » Med. fil. kand. Fredrik Björn | c:a 100 000 » |
| » Bruksägare G. O. Örn | c:a 5 000 » |
| » Bankir John Håkansson och fru Johanna Håkansson | c:a 156 000 » |
| » Bruksdisponent Kristoffer Huldt | 20 000 kr. |
| » Fru Emma Göransson | 50 000 » |
| » Professor Wolmar Fellenius | 5 000 » |
| » Överdirektör V. Klemming | 50 000 » |

Vid början av höstterminen 1917 togos de nya lokalerna i bruk för undervisningen. En enkel invigningshögtidlighet ägde rum fredagen den 19 oktober och torde en redogörelse för denna här bära tillfogas såsom avslutning på föreliggande historik.

Då någon aula eller motsvarande större samlingsal icke finnes inom det nu utbyggda komplexet, hade man ursprungligen tänkt sig att låta invigningshögtidligheten försiggå å »Stora gården» för att bereda utrymme åt så många som möjligt av dem, som man skulle önskat se närvarande vid detta för högskolan så betydelsefulla tillfälle. Denna tanke hade emellertid måst övergivas inför risken av olämplig väderlek och man var därför ifråga om lokal hänvisad till den största förefintliga hörsalen, vilken är belägen 2 tr. upp inom elektrotekniska avdelningen och har bänkplatser för c:a 240 åhörare. Med hänsyn till det sålunda starkt begränsade utrymmet kunde endast ett relativt litet antal inbjudas till högtidligheten.

Närvarande voro D. D. M. M. konungen och drottningen, D. D. K. K. H. H. kronprinsen och kronprinsessan, hertigen och hertiginnan av Västergötland samt hertigen av Närke, representanter för regeringen, riksdagen, statsförvaltningen, vetenskapen, konsten och industrien, bland vilka senare åtskilliga av högskolans donatorer, vidare till byggnadsverkets utförande bidragande entreprenörer, konstnärer och teknici, samt högskolans byggnadskommitté, styrelse och lärare, varjämte salens bakgrund i mån av utrymme fylldes av högskolans studenter. Av utländska tekniska högskolor voro i följd av krigsoroligheterna endast Polyteknisk læreanstalt i Köpenhamn och Norges tekniske høiskole representerade, vardera genom sin rektor.

Högtidligheten tog sin början kl. 1.30 em. och öppnades vid de kungligas inträde med unisont avsjungande av kungssången. Därefter höll ordföranden i Tekniska högskolans styrelse, generallotsdirektör V. Linder, följande hälsningstal:

Eders Majestäter, Eders Kungliga Högheter! Mina damer och herrar!

Det första utbyggnadsstadiet av denna vårt lands största tekniska läroanstalt är fullbordat och byggnaderna stå redo att tagas i bruk för sitt ändamål.

På krönet av den bergås, där den nya anstalten reser sina tinnar och blickar ut över huvudstaden med dess vackra omgivningar, har kulturen redan tusenåriga anor. Där om vittnar bland annat ett vid schaktningen i omedelbar närhet av den plats, där högskolebyggnadens grundsten blivit nedlagd, tillvarataget stort fynd av silvermynt från dessa avlägsna tider.

Insikten om de tekniska vetenskapernas stora betydelse för ett rätt utnyttjande av vårt lands rika naturtillgångar och därmed för landets framtida utveckling särskilt i ekonomiskt hänseende har under de senare årtiondena allt djupare genomträngt

folkmedvetandet samt beredt jordmånen för denna vidtomfattande byggnadsfrågas lyckliga lösning.

Då högskolan nu står i begrepp att taga i besittning sitt nya storslagna hem för teknisk undervisning, känna sig dess styrelse, lärare och studenter besjälade av en varm tacksamhetens känsla mot statsmakterna och mot alla dem, som under en eller annan form bidragit till åstadkommandet av detta byggnadsverk.

Det är då i första rummet till Eders Majestät, som vår tacksamhet vänder sig. Eder framsynta omtanke om Sveriges väl har jämväl på detta område tagit sig uttryck ej mindre i det välvilliga upplåtandet av den härliga platsen än i befrämjandet av företaget i dess helhet. — Vi tacka också de män i konungens råd, som framlagt och stödt förslagen. — Vi uttala vidare vår tacksamhet till riksdagen, som frikostigt beviljat anslag till denna läroanstalt och därmed tillmötesgått den tekniska undervisningens växande anspråk. — Även hysa vi en varm erkänsla för den sympati och den förståelse, som i detta företag kommit högskolan till del från så många av industriens män och bland annat tagit sig ett vackert uttryck i talrika och dyrbara gåvor till komplettering av de nya laboratoriernas utrustning. Slutligen vilja vi rikta vår erkänslas tack till de män, som i kommittéutredningar och förslag lämnat bidrag till verkets planläggning, liksom till alla dem, höga som låga, vilka lagt hand vid utförandet av detsamma.

Vi inse till fullo, att det förtroende till de tekniska vetenskapernas framtid och betydelse för vårt land, vilket här tagit sig ett storartat och mångstämmigt uttryck, förpliktar högskolans män att hålla vetenskapens fana högt, och med Guds hjälp hoppas vi att högskolan nu och framgent må kunna svara mot den tillit, som blivit henne visad. — Vi uttala till sist den förhoppning, att de tekniska vetenskapernas idkare här under århundraden framåt måtte få ostört utöva en framgångsrik och välsignelsebringande verksamhet till båtnad och gagn för fosterlandet.

Med dessa ord anhåller jag att å högskolans vägnar få hälsa de närvarande välkomna till denna högtidlighet.

Studentsångarna sjöngo härpå »Stå stark, du ljusets riddarvakt», varefter undertecknad Magnell i egenskap av byggnadskommitténs ordförande lämnade en kortfattad redogörelse för byggnadernas tillkomst och ändamål, utgörande i huvudsak ett sammandrag av föregående historik. Slutet av detta anförande hade följande lydelse:

Byggnadsanslaget har icke överskridits. Detta förhållande är i första rummet att tillskriva arkitekten-arbetsledarens skicklighet, noggrannhet och omsorg om det hela samt vidare dagkontrollantens pliktrohet, ansvarskänsla och övriga för uppgiften värdefulla personliga egenskaper samt icke minst samtliga entreprenörers samvetsgranna och i många fall uppoffrande arbete.

I fråga om laboratorieutrustning och övriga installationer är anslaget ännu ej förbrukat, emedan åtskilligt ej ännu kunnat anskaffas. En följd av de högt uppdrivna priserna har emellertid blivit, att utrustningen nu ej kan göras så rikhaltig som man hoppats. Tack vare experters och kontrollanters samt leverantörernas plikttrogna arbete och skicklighet har dock det, som kunnat anskaffas och som måst inskränkas till det för undervisningen nödvändigaste, blivit av bästa beskaffenhet. En teknisk högskolas utrustning måste givetvis undergå en ständig omsättning och förnyelse i mån av de tekniska vetenskapernas framsteg. En sådan utrustning kan därför aldrig sägas vara färdig och avslutad. Dess fyllande av sitt ändamål beror således huvudsakligen av de årliga anslag, som kunna ställas till förfogande.

Under hela tiden hava de respektive lärarne stått till tjänst med förslag och sakkunniga utredningar.

Glädjande att meddela har högskolan varit och är allt fortfarande föremål för välvilligt intresse från industriens sida, yttrande sig genom gåvor av högt värde till laboratoriers och samlingars utrustning. Att här uppräknas alla dessa högskolans gynnare och deras gåvor skulle inkräkta allt för mycket på den korta tid, som nu står till förfogande. Under närmaste tiden kommer en förteckning häröver att utgivas från trycket. Jag kan dock icke underlåta att särskilt omnämna ett par gåvor, som överlämnats särskilt med anledning av denna dagens betydelse, nämligen av disponenten Kristoffer Huldt, Stockholm, 20 000 kronor samt av fru Emma Göransson, Sandviken, 50 000 kronor, båda avsedda till stipendier vid högskolans bergsvetenskapliga avdelning.

Även torde det vara på sin plats att vid detta tillfälle omnämna den kärkomna gåva, som högskolan fått mottaga av sin nu avgångne professor Pontus Henriques, nämligen hans verk »Skildringar ur Kungl. tekniska högskolans historia», av vilken första delen nu hunnit utgivas. Högskolan utbeder sig vid detta tillfälle få överlämna det första färdigställda exemplaret av detta verk till Hans Majestät konungen.

Till alla de personer, som genom sin skicklighet och sin pliktuppfyllelse bidragit att förverkliga arkitektens skapande tanke i detta byggnadsverk, ingen nämnd och ingen glömd, beder byggnadskommittén att här få uttala sin djupt kända tacksamhet.

De nya präktiga byggnaderna kunna nu tagas i bruk för sitt viktiga ändamål. Därmed har högskolan erhållit icke blott en avsevärd mängd nya lokaler, som fylla de högsta anspråk på ändamålsenlighet och trevnad, hon har även erhållit kraftiga medel att, såsom vi hoppas, draga till sig och vid sig fästa framstående tekniska forskare såsom lärare.

Tävlan med industrien om de framstående vetenskapsidkande ingenjörerna skulle helt säkert snart bliva alltför svår för högskolan, om hon icke kunde gentemot industriens allt mera växande löner erbjuda något, som på forskarenaturer utövar en större dragningskraft än guldet, nämligen förstklassiga laboratorier och lägenhet till vetenskaplig arbetstrevnad. Nu ha vi, tack vare framsynt frikostighet av konung och riksdag, det huvudsakliga av dessa medel, och därmed skall — det är vår förvisning — vår högskola allt mer och mer bliva det hem för tekniskt-vetenskaplig forskning, som hon bör vara, ett hem till vilket de tekniska vetenskapernas män, såväl inom som utom högskolan, känna sig dragna.

Den som vill vinna framgång, kan icke ställa sitt mål för högt. Högskolans mål måste allt framgent vara att till ett älskat fosterlands fromma föra fram den svenska ingenjörutbildningen i täten på den väg, som banas av den tekniska vetenskapens oavslutliga framsteg.

I den mån detta förverkligas, skola de statens medel, som förtroendefullt nedläggas i detta byggnadsföretag, väl fylla sitt ändamål.

Under förhoppning att så skall ske, utbeder sig den av Eders Majestät tillsatta byggnadskommittén att få till Eders Majestät överlämna den nu färdigställda delen av Tekniska högskolans nya hem samt anhåller i underdånighet, att Eders Majestät täcktes förklara dessa byggnader öppnade.

Efterkommande denna vädjan behagade Hans Majestät konungen yttra följande:

»För mig och drottningen och övriga medlemmar av min familj är det icke blott en kär plikt utan även en sann och uppriktig glädje att i dag tillsammans med eder fira denna högtid. Jag uttalar till högskolan min varma och hjärtliga lyckönskan över att denna nu kan taga i besittning detta nya storartade hem. Måtte detsamma bliva till gagn för den här nu och i

framtiden studerande svenska ungdomen, och måtte det för högskolan, dess styrelse och dess lärarepersonal bliva en sporre till nytt framgångsrikt och välsignelsebringande arbete i fosterlandets tjänst. Med dessa ord förklarar jag högskolans nya byggnad för sitt ändamål öppnad och invigd.»

Sedan studentsångarna härefter sjungit »Hör oss Svea», framfördes hälsningar och välgångsönskningar från en del institutioner och korporationer, nämligen från de svenska universiteten och övriga svenska högskolor genom rektor magnificus vid Uppsala universitet, professor Henrik Schück, från den Polytekniske læreanstalt i Köpenhamn genom dess rektor, professor H. I. Hannover, från Norges tekniske høiskole genom dess rektor, professor K. Heje, från Svenska teknologföreningen genom dess ordförande, civilingenjör C. Rossander, samt från Järnkontoret genom dess fullmäktiges ordförande, generalmajor G. Geijer. Från de nämnda högskolorna i Köpenhamn och Trondhjem överlämnades därvid elegant inbundna, textade adresser av följande lydelse:

Til Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm.

Paa dens Festdag 19:de Oktober 1917.

I omtrent lige lang Tid har den polytekniske Læreanstalt i Köbenhavn og den under Navn af »Teknologiska Institutet» oprettede kungliga tekniska Högskolan i Stockholm virket til Udbredelse af den højeste tekniske Undervisning i deres Lande, og i de mange Aar har der mellem Lærerne ved de to Højskoler bestaaet venskabelige og kollegiale Forhold.

Det har derfor i høj Grad glædet den polytekniske Læreanstalts Lærerraad at modtage en Anmodning om at lade sig repræsentere ved den store Fest, som den kgl. tekn. Højskole idag fejrer. Paa mange Omraader har Krigsaarene vist de nordiske Lande Nødvendigheden af at slutte sig sammen, og Lærerraadet har taget Indbydelsen som ett lykkeligt Tegn paa at Baandet mellem de to Højskoler fremtidig vil blive endnu stærkere knyttet end hidtil. Den polytekniske Læreanstalt, H. C. Ørsteds gamle Skole, har med Beundring set, hvorledes den kgl. tekn. Højskole trods de vanskelige Tider har rejst og fuldendt sin ny, skønne og moderne indrettede Bygning. Efter de for hele Verden betydningsfulde Arbejder indenfor Naturvidenskab og Teknik, som heden gangne svenske Mænd har præsteret og hvorum Navne som Linné, Chapman, Bergman, Scheele, von Platen, Berzelius, Ericsson, Ångström, Styffe, Nobel, de Laval og mange flere bære Vidne og i Erindring om de utmærkede Mænd, der har virket ved eller er uddannet ved den kgl. tekniske Højskole, har Nordens Teknikere Lov til att vente at de gode Traditioner vil følge med till Højskolens ny Hjem, saa at der fra det udgaar Mænd, som kan virke till Mennekehedens Gavn og til Nordens Ære. Der er derfor rig Anledning til her at frembære den polytekniske Læreanstalts hjerteligste Ønsker for dens Broderinstitut. Maatte alle gode Forhaabninger, som knytter sig till den ny Bygnings Fuldendelse, gaa i Opfyldelse, og det derpaa nedlagte Arbejde bære rige Frugter.

Den polytekniske Læreanstalt i Köbenhavn.

H. I. Hannover.

Norges Tekniske Høiskole hilser Kungliga Tekniska Högskolan i Stockholm.

Den höie Stilling, den svenske Nation indtar i Teknik och Arkitektur, skylder den i fremtrædende Grad Tekniska Högskolans Virksomhet.

Naar denne derfor idag flytter ind i sin nye, stolte og rike Bolig, reist av Nationen i Taknemmelighet og Hengivenhet, følges den ogsaa av den norske Søsteranstalt med Beundring og Høiagtelse.

Norges Tekniske Høiskole knytter hertil de varmeste Ønsker om Tekniska Högskolans fortsatte Trivsel og Fremgang til Lykke og Ære for Sveriges Land og Folk — till Hæder ogsaa for den Nordiske Kultur.

Trondhjem i Professorraadet, Oktober 1917.

HEJE

Rektor.

L. Fjerli.

Civilingenjör Rossander framförde Teknologföreningens hälsning med följande ord:

Eders Majestäter, Eders Kungliga Högheter! Mina damer och herrar!

Vid detta högtidliga tillfälle, som kan anses beteckna en epok i teknikens historia i vårt land, ber jag på Svenska teknologföreningens vägnar att få till Kungl. Tekniska högskolan framföra våra varma och uppriktiga lyckönskningar till det stolta, högskolan och dess stora uppgift i allo värdiga hem, som den nu går att taga i besittning. De starka band, med vilka föreningen är fästad vid högskolan, i vilken den har sin upprinnelse, gör det till en självklar sak, att föreningen varmt intresserar sig för allt, som rör högskolan och dess verksamhet, och att vi på denna märkesdag i hennes historia ej velat försumma att frambära vår hyllning och våra bästa välönskningar.

När vi, forna lärjungar vid Tekniska högskolan, se oss om i detta palats, helgat åt teknisk vetenskap och konst, fylles vårt sinne med stolthet och glädje. Vi känna oss stolta, ej blott över att det i vårt lilla land varit möjligt att åstadkomma ett dylikt imponerande byggnadsverk, utan än mer över det bevis på statsmakternas uppskattning av teknikens betydelse för vårt land, som vi tro oss finna i dess tillkomst. Och vi glädjas vid tanken på de kommande generationer av ungdomen, som i dessa präktiga lärosalar och dessa efter nutidens krav utrustade laboratorier, skola utbildas till ledare för den stora armé, med vilken vi hoppas att vårt lands industriella stormaktsställning i fredlig kamp skall erövrast.

Väl kunna åsikterna i mångt och mycket skifta om huru vårt lands framtid bäst och lyckligast bör gestaltas, men därom torde väl nästan alla vara ense, att det för oss är ett livsvillkor att så långt möjligt stärka och utveckla vår industri, så att den kan bestå ej blott under de svåra tider, som nu råda och de än svårare tider, som stunda under världskrigets fortgång, utan även under de tider, som komma att följa efter kriget, då förvisso konkurrensen de olika länderna emellan kommer att bli ytterligt hård. Den senare tidens erfarenhet har också ådagalagt, att intet land numera förmår bygga upp och bereda en verkligt livskraftig storindustri utan stödet av en högt utvecklad teknisk vetenskap. De tider äro länge sedan förbi, då det för industriens män blott gällde att besitta en viss praktisk blick och erfarenhet; nu kräves det ovillkorligen av envar, som vill föra industrien framåt, att han även skall i grund behärska den vetenskapliga delen av sitt fack. Det är på Tekniska högskolan som det i främsta rummet ankommer att i vårt land meddela den vetenskapliga utbildning, som sålunda erfordras, och på henne vilar därför en stor del av ansvaret för vårt lands industriella framtid.

Vi hoppas och tro alla, att Tekniska högskolan städse skall fullt motsvara de krav, som i alltjämt ökad grad komma att ställas på henne, så mycket mer som de yttre betingelserna för hennes verksamhet genom tillkomsten av detta byggnadsverk blivit så utomordentligt förbättrade, och vi tro oss ej kunna på ett bättre och värdigare sätt uttrycka våra känslor i denna stund än genom att uttala den önskan, att dessa salar städse måtte komma att befolkas med lärare, som äro sitt kall hängivna och stå på höjden av sin tids vetande, samt lärjungar, som äro besjälade av levande intresse att tillägna sig de vetenskapens skatter, som här komma att bjudas, och att mellan lärare och lärjungar städse måtte råda den harmoniska och förtroendefulla förståelse, som är nödvändig för uppnåendet av de höga ideal, efter vilka högskolan strävar.

Må alltså, det är vår varma önskan, lycka och välgång i såväl yttre som inre avseende städse följa Tekniska högskolan i dess verksamhet, att den alltjämt måtte lända henne själv och först och sist vårt fädernesland till ära och gagn.

Generalmajor Geijer yttrade å Järnkontorets vägnar följande:

Eders Majestäter, Eders Kungliga Högheter! Mina damer och herrar!

Ett halvt sekel har i år gått till ända sedan, i samband med Falu bergsskolas förflyttning till Stockholm och införlivande med Teknologiska institutet, bestämdes, att tvenne ledamöter av institutets styrelse skulle tillsättas av Järnkontoret, vilket lämnat erforderliga medel till inköp av tomt för bergsskolebyggnaden och alltsedan flyttningen till Stockholm bestrider kostnaderna för bergsskolans praktiska övningar.

Med Bergsskolans ingående som fackskola i Teknologiska institutet försiggick, skriver generaldirektör Richard Åkerman i Järnkontorets annalers festskrift innevarande år, »förvisso en dess sannskyldiga pånyttfödelse», och obestridligt är att den svenska bergshanteringens utveckling under senare tider, vilken utmärker sig för en synnerligen skicklig anpassning efter de säregna betingelser som Sverige äger för att vara ett järnproducerande land, i högst väsentlig grad påverkats av den ingenjörsutbildning, som inom Tekniska högskolans bergsskoleavdelning meddelats.

De lokaler, som Tekniska högskolan hittills haft till sitt förfogande, hava redan länge visat sig otillräckliga och i många hänseenden otidsenliga. I dag har emellertid av Hans Majestät konungen till högskolans disposition överlämnats denna palatsliknande byggnad, som med sin för framtida utvidgning sällsynt gynnsamma belägenhet, sin väl avvägda arkitektur samt sin rika tillgång på undervisningsmateriel utgör ett bestående minnesmärke för Sveriges statsmaktens förståelse för och omvårdnad om den tekniska högskoleundervisningen.

Till högskolans verksamhet i dess nya boning tillåter sig Järnkontoret härmed framföra sina värdsamma och hjärtliga välönskningar, med livlig förvissning om, att den undervisning, som här meddelas, och den tekniskt-vetenskapliga forskning, som här kommer att få sin hemvist, skall kraftigt bidra till utnyttjande av vårt lands rika naturtillgångar och därigenom även befrämja utvecklingen av den industri, som ligger Järnkontoret så varmt om hjärtat, nämligen den urgamla svenska bergshantingen.

Sedan högskolans rektor med några ord framfört högskolans tacksamhet för de mottagna lyckönskningarna, avslutades högtidligheten med unisont avsjungande av »Du gamla, du fria».

De kungliga och övriga inbjudna företogo därefter under ledning av arkitekten, professor Lallerstedt, en rond genom lokalerna. Under tiden hade studentkåren samlats på yttre gården. Vid de kungligas avresa av-sjöngs studentsången, varpå styrelsens ordförande utbragte ett leve för

konungen och drottningen, åtföljt av ett kraftigt, fyrfaldigt hurra från studenterna.

Påföljande dag gav högskolans studentkår festföreställning på Svenska teatern samt därefter middag på Strand hotell, i vilken deltog cirka 550 personer.

BESKRIVNING ÖVER
KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLANS NYBYGGNADER
AV
ERIK LALLERSTEDT

*I denna beskrivning meddelade uppgifter rörande på högskole-
tomten anträffade fornynd ha välvilligt lämnats av docenten
Bror Schnittger, hänvisningar rörande byggnadstomtens historia
av amanuensen N. Östman och uppgifter rörande den maski-
nella utrustningen av civilingenjör W. Davidsson. Fotografierna
äro tagna av hovfotografen J. Hertzberg och fotografen C. G.
Rosenberg.*

BESKRIVNING ÖVER KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLANS NYBYGGNADER

AV

ERIK LALLERSTEDT.

Högskolebyggnadernas tomt är belägen norr om Valhallavägen och begränsas i nordost av Sophiahemmets område, i nordväst av Rimbobanans mark samt är i övrigt omgiven av Kungl. Djurgårdens domäner.

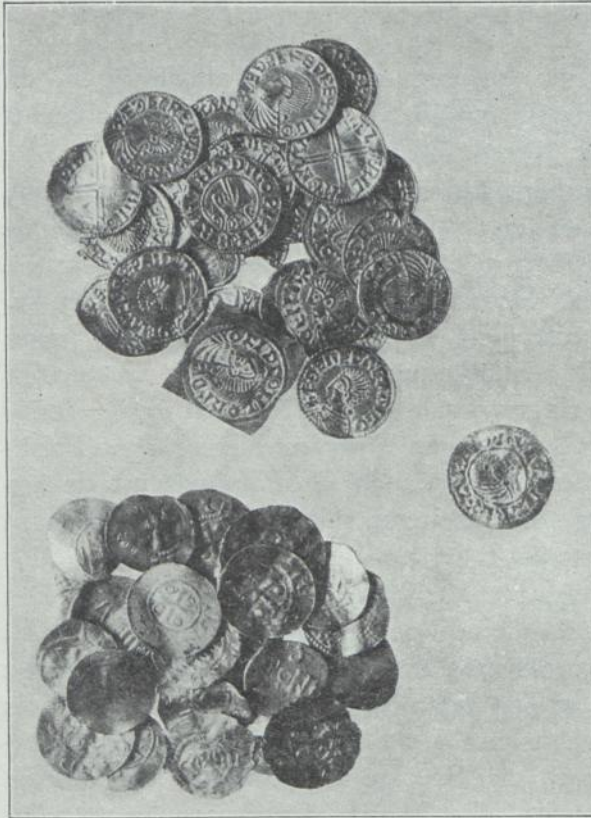
Blott några tiotal meter från den plats under observationstornets kupol, där nu högskolebyggnadernas grundsten är inmurad, fanns under pågående schaktningsarbeten i en rämna i berget ett fornynd, bestående av 47 st. silvermynt samt 9 bitar av sådana. Av mynten voro 1 svenskt, 23 tyska, 18 engelska, 2 irländska samt 3 falskmynt, kopierade efter engelska mynt. Det svenska myntet var från Olov Skötkonungs tid, de flesta tyska voro s. k. Adelheidsmynt, de engelska slagna av konung Etelred II (978—1060) och de irländska av den norskfödde konungen Sigtrygg Silkeskägg. Falskmynten äro väl och konstnärligt eftergjorda, och få vi hoppas att de äro slagna i närheten av högskolans tomt, och att således tekniken, konsten och industrien äga gammal hemortsrätt å denna.

Tidpunkten för myntens nedläggande kan ganska noga bestämmas. Det finnes nämligen tvenne tyska mynt, slagna av konung Henrik II (1002—1024); således kunna mynten icke nedlagts tidigare än år 1002. Då vidare bland de engelska mynten intet finnes från så sen tidpunkt som från Knut den stores regering (1016—1035), kan med hänsyn till det utomordentligt livliga handelsutbytet mellan det övriga Europa och Sverige vid denna tid med ganska stor visshet sägas, att nedläggandet icke kunnat ske senare än ett eller annat år efter 1016.

Det kan ju vara av intresse att söka värdesätta högskolefyndet. Ibrahim Ibn Jakúb berättar, att man 973 i Böhmen kunde för en penning

(troligen något mynt ungefär motsvarande nu omhandlade och således i vikt nära överensstämmande med en vanlig 25-öring) få så mycket brödsäd, som en man behövde för en månad, och för samma penning kunde man köpa 10 höns. Utgår man från denna värdering, skulle de 47 mynten representera ett avsevärdt belopp.

Att i detalj följa de öden högskoletomten genomgått, sedan å den samma den om sina hopsparade skatter försiktiga nordbon där sökt ett säkert, tydligen alltför säkert, gömställe, är ej lätt. Å en år 1690 »uti Kongl. Contôiret insinuerad» karta, omfattande den del av Djurgården, å vilken högskoletomten är belägen, finnes emellertid norr om »Djurgårdsgärdesgården» och strax söder om den plats, där högskolans huvudentré nu befinner sig, en liten byggnad med omgivande tomt markerad och angiven såsom skogvaktare Johan Perssons torp.



DE FUNNA MYNTEN.

Denne Johan Persson förenade antagligen med skogvaktare- och hovjägarbefattningarna även krögareyrket, och torde det med mycket stor sannolikhet kunna sägas, att det är efter honom tomten sedan uppkallats. Redan å kartor från 1733 och 1735 finnes nämligen tomten, som nu visas bebyggd av flera småhus, bildande en idyllisk kroggård, benämnd »Lill-Jans». Denna krog har tydligen under 1700-talet spelat en rätt stor roll för det Stockholm, som ej sökte allt för fridfulla ställen för sina nöjen.

I Carl Israel Hallmans Casper och Dorotea, en parodi på »Acis och Galathea», utgiven år 1775 och på sin tid mycket uppskattad, finnes Lill-Jans-krogen omnämnd i tredje akten, scenen I:

»Liksom en retad bandhund uppå Lilljans Krog,
I hwart et bittert glafs, bebådar bett och fasa,
Wi sedt en Dunderbom med sina pojkar rasa.»

Versen vittnar ju ej så väl om ställets vanor, men krogen låg ju avsidat vid utfartsväg från Norrmalm, och hunden var nog behövlig. En annan sak, som versen vittnar om, är att Milles' Cerberusar, som äro placerade ej långt från det ställe där krogen låg, äga tradition och hävd på platsen.

Kulmen av ära och glans når emellertid Liljans (namnet stavas nu med ett l) under Bellman, som flera gånger nämner stället, vars härskarinna var ingen mindre än Bergströmskan. I Fredmans epistel N:o 32 heter det:

»Och denna Liljans krog är hamnen, jag tror,
Och krögarmor
Hon är valfisken, bror!»

I den av Carlin 1861 utgivna Bellmansupplagan finnes förutom ett här reproducerat träsnitt, visande det dåtida Liljans, till denna vers följande not:

»Liljans, rätteligen Lill'-Jans: en ännu under detta namn befintlig lägenhet (fordom Träskporten) norr om Humlegården invid drottning Kristinas väg. Benämningen härleder sig från en skogvaktare eller hovjägare vid



LILLJANS.

namn Jan, liten till växten och en putslustig man, som på detta sitt boställe höll krogrörelse och hade strykande trafik. Innan Ladugårdslandet vardt bebyggt och vägen förbi Fredrikshof blev anlagd, var här utkörsport från Norrmalm, och ännu utgör Lill'-Jans ett av ingångsställena till stora Djurgården, varföre de promenerande även här måste erlägga inträdesavgift. År 1815 blevo de gamla byggnaderna dels nedrivna, dels omändrade. Teckningen, tagen från Djurgårdssidan, visar lägenheten, sådan den nu ser ut i sin egenskap av endast boställe. En stor del av därtill anslagna jorden, fordom 54 tunnland, är numera indragen . . . Den genom Movitz' pensel

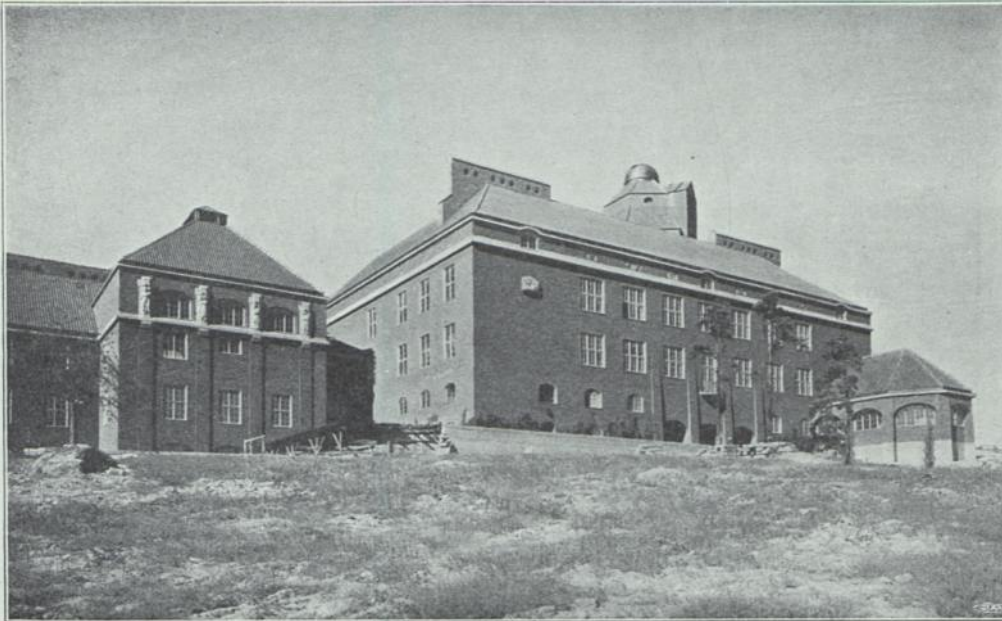
odödliggjorda Bergströmskan, fader Bergströms hustru, lærer ha varit värden till hjälp i varjehanda fall, dock mest i föreståndarskapet över krogen: det är därför hon av skalden benämnes 'Liljans madam' och 'Liljans mor'.»

Det poetiska skimmer, som genom Hallman och Bellman förlänats nuvarande högskoletomten under 1700-talet, fortvarar i någon mån även under 1800-talet, då Strindberg låter densamma bebos av personer, som knappast äro mindre celebra än Bergströmskan. Det var nämligen å Lilljans den odödliga konstnärskolonien i »Röda rummet» med sådana typer som Olle Montanus, Lundell m. fl. hade sitt hemvist.

Det må även erinras om, att över denna tomt gick utfartsvägen till den alldeles i närheten belägna, idylliska Ugglevikskällan, som ännu för några årtionden sedan spelade en så viktig roll för Stockholmslivet inom vissa kretsar. I övrigt var tomten, då högskolan övertog densamma, mest bekant för de folkmöten med eller utan polisuppträden, som där brukade försiggå, och de kala bergen närmast Drottning Kristinas väg fingo sin tvivelaktiga prydnad huvudsakligen av matsäckspapper och tombuteljer. Såsom skogvaktare- eller hovjägareboställe var tomten dock ännu använd och det första arbete, som å densamma utfördes, var just att bortflytta där beläget hovjägareboställe.

Byggnadstomtens form är oregelbunden, och äger densamma från norr till söder en långt större utsträckning än i motsatt väderstreck. Ungefärligen midt å tomtens i dess längdriktning räknat förefinnes en högt belägen bergsplatå, och längs nära nog hela tomtens östra gräns sluttar terrängen utefter en böjd linje brant mot öster. Det är denna bergsplatå samt denna böjda begränsning åt öster, som i mycket varit bestämmande för hela byggnadskomplexets placering och massutformning. Å bergsplatån ha nämligen de kring den förnämsta gården, Polhemsgården, belägna huvudbyggnaderna, inrymmande bland annat högtidshall, huvudtrappa och sessionssalar samt även omfattande anläggningens mest dominerande byggnadsparti, observatorietornet, blivit placerade, av vilka byggnader emellertid blott södra längan med observatorietornet nu är färdig. Utefter tomtens östra gränsslutning och gående i en svag båge efter denna har byggnadskomplexets östra fasad förlagts, och har härigenom, då önskemålet varit att erhålla kring en symmetriaxel ordnade byggnader och gårdar, även den böjda formen å västra fasadlängan samt gårdarnas delvis böjda fasader uppstått.

Från stadsplanesynpunkt är området kring högskolans byggnadstomt icke ursprungligen lämpat för en monumentalbyggnad. Omgivande byggnader äro sammanförda utan tanke på helhetsverkan. Tomten är med avseende på kringliggande gator så belägen, att de nya byggnaderna blott med svårighet kunnat fastbyggas i omgivningen, och slutligen är Rimbo-banan med sitt högskolebyggnadernas entréområde korsande spår och sin uppställningsplats för vagnar m. m. ett från arkitektonisk synpunkt allt



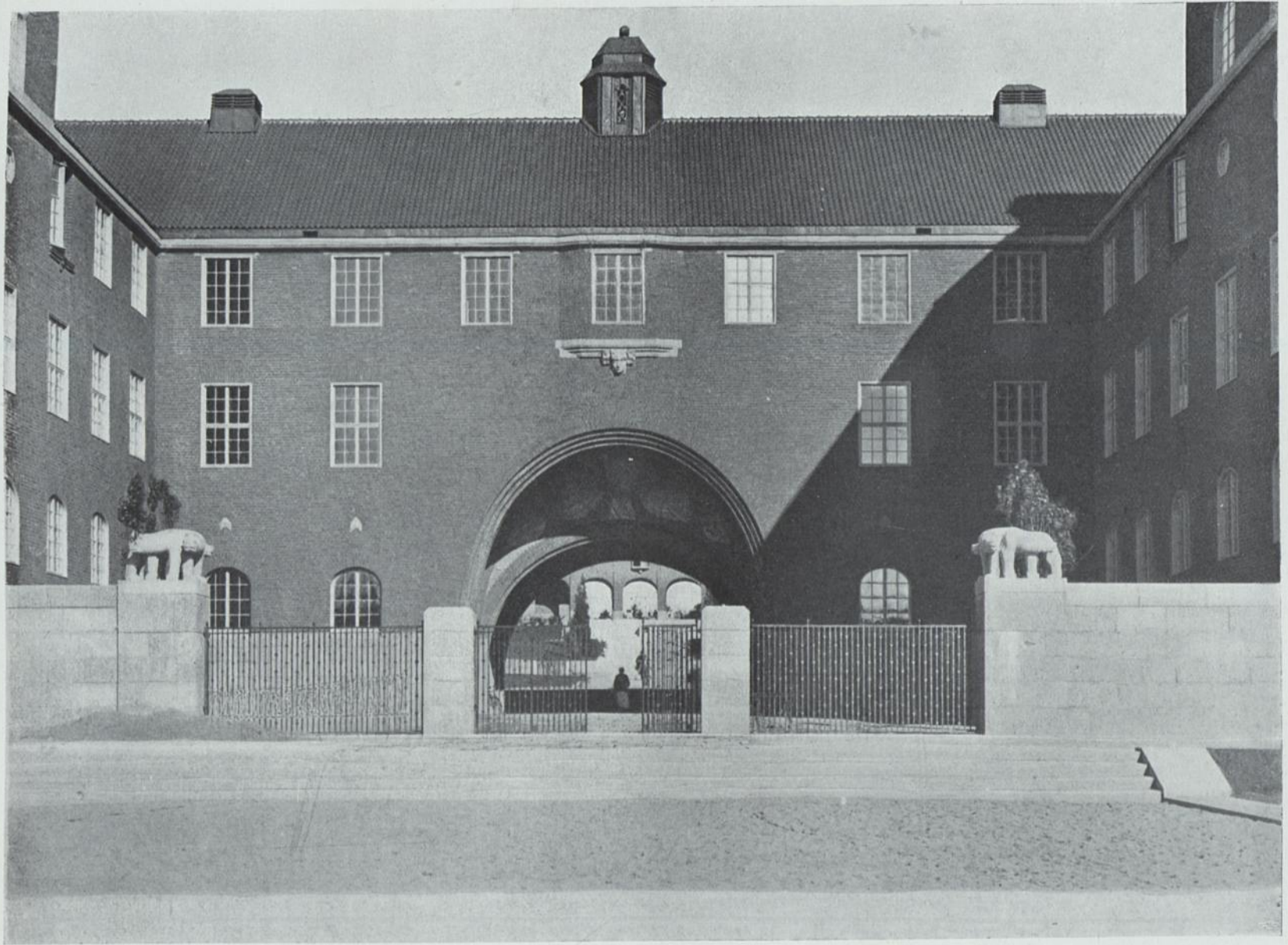
DEL AV ÖSTRA FASADEN.

utom vårdat grannskap. Dessa olägenheter uppvägas emellertid i mycket dels genom den omgivande Djurgårdens vackra parknatur, dels genom tomtens lyckliga höjdförhållanden med åt söder och Valhallavägen sluttande terräng. För att emellertid såvidt möjligt övervinna de ovan angivna olägenheterna har mellan Valhallavägen och de nya byggnaderna anordnats ett rymligt torg. Detta torg omgives i norr av högskolebyggnaderna, i öster och väster av träd, avsedda att framdeles bilda en bestämd begränsning, samt i söder av Valhallavägen. Här är avsikten att borttaga de två nordligaste trädraderna, så att i Valhallavägen bildas ett avbrott framför byggnaderna, och således dessa och det framför dem varande torget starkt



PARTI AV STORA GÅRDEN, NORDVÄSTRA HÖRNET.

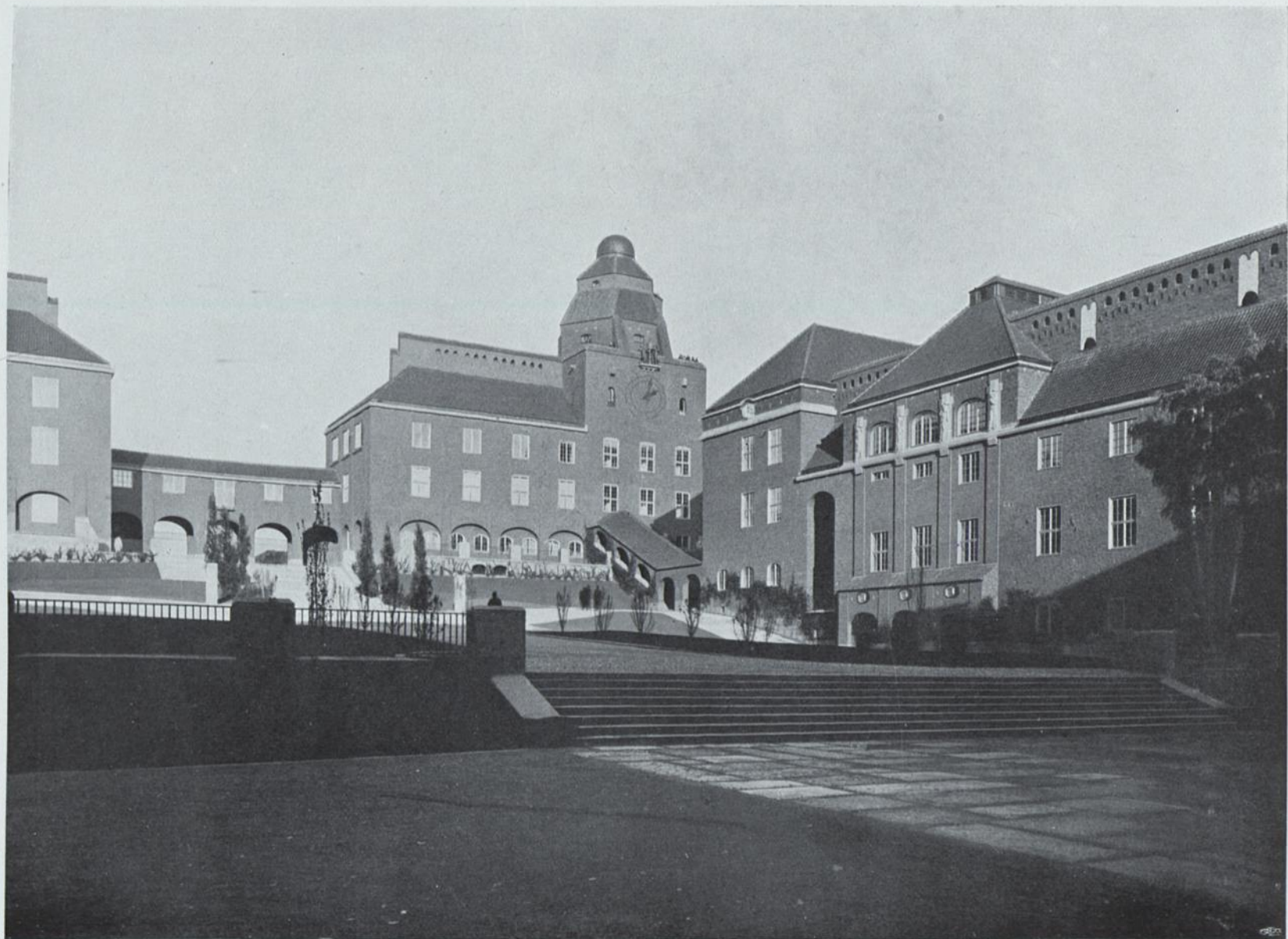
markeras i denna trafikled. Vidare har, för att erhålla områden, tacksamma att monumentalt ordna, högskolebyggnaderna grupperats kring huvudsakligen slutna, arkitektoniskt ordnade gårdar. Mellan dessa gårdar äro portiker anordnade och även mot Djurgårdens vackra grönska öppna sig sådana.



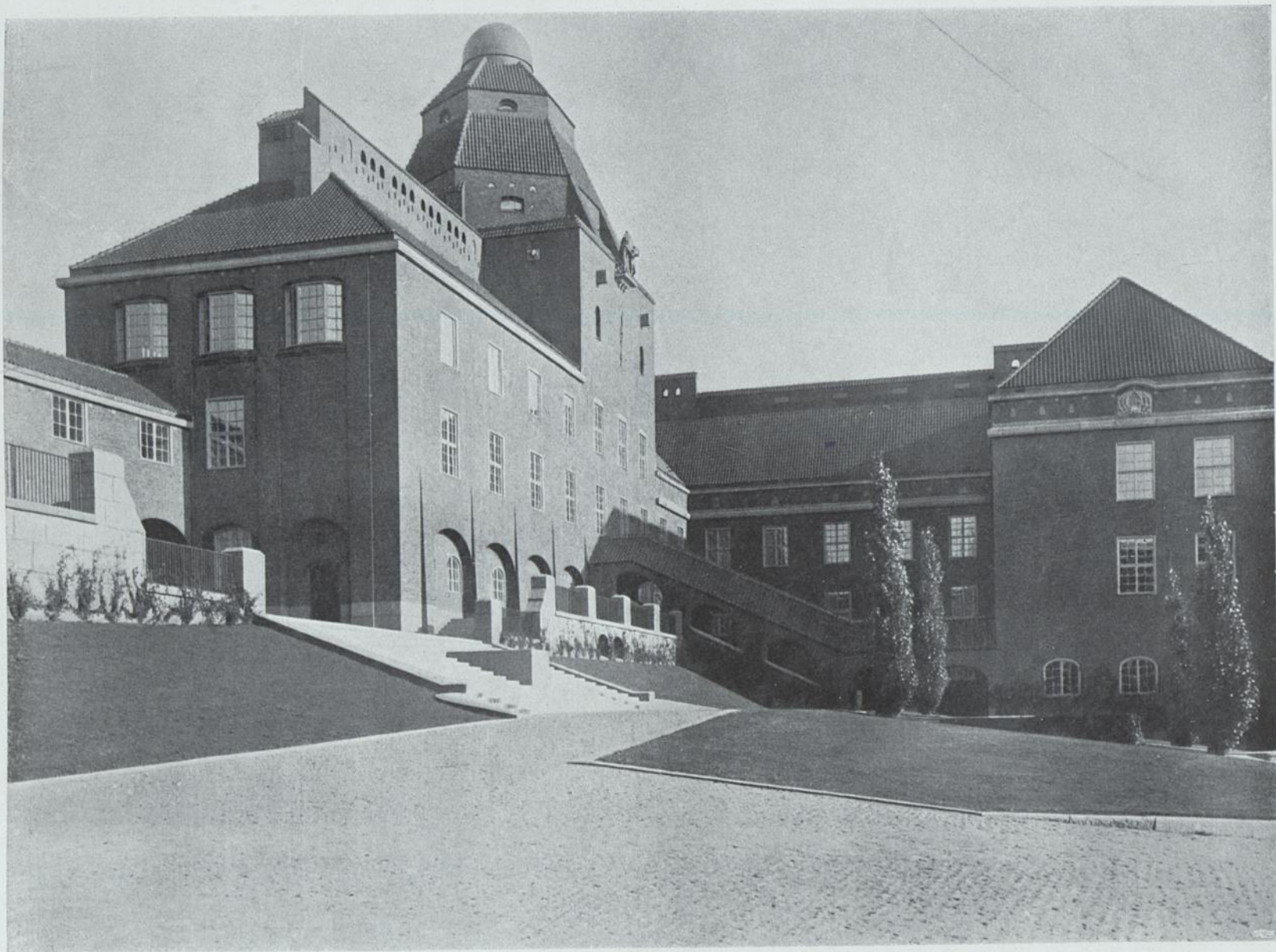
FÖRGÅRDEN MED HUVUDENTRÉN.



HUVUDENTRÉN.



PARTI AV STORA GÅRDEN, NORRA OCH ÖSTRA SIDORNA.



PARTI AV STORA GÅRDEN, NORDÖSTRA HÖRNET.



PARTI AV STORA GÅRDEN, ÖSTRA SIDAN.



LABORATORIEGÅRDEN.



OBSERVATORIETORNET OCH TESSINSKA GÅRDEN EFTER TECKNING AV HJALMAR MOLIN.

Gårdarna, invid vilka såväl byggnadernas huvudfasader som de olika institutionernas huvudingångar förlagts, hava benämnts Förgården, Stora gården, Tessinska gården, Laboratoriegården, Polhemsgården och Berzelii gård. De fyra förstnämnda av dessa gårdar äro redan kringbyggda, till byggnaderna vid Berzelii gård har riksdagen beviljat medel och en del arbeten rörande grunderna äro påbörjade, men av byggnaderna kring Polhemsgården är, som redan nämnts, blott södra fasadlängan färdig. Ej heller äro till återstående byggnader vid denna gård medel ännu beviljade. Polhemsgården är emellertid avsedd att bliva anläggningens centrum och kärnpunkt.

Vid ett framtida ytterligare utbyggande, utöver vad nu planerats, vore även önskvärdt, att i stor utsträckning samma byggnadssystem — d. v. s. gården som de olika institutionernas centrum — utnyttjades, varigenom förutom behaget av arkitektoniskt ordnade, med grönska bevuxna, från storstadens buller avskilda platser även torde vinnas, att ett utbyggande kan ske utan att avsevärdt störande inverka på i bruk tagna lokaler.

Ehuru högskolelokaler äro sammanförda till i huvudsak blott tvenne byggnadskroppar, torde de olika fackskolorna vara mer skilda åt, än vad i allmänhet är fallet vid liknande högskolor. Sålunda har varje fackskola — detta gäller särskilt de nu färdiga lokalerna för 3:e och 4:e årskurserna — sina skilda ingångar och sina från övriga fackskolor skilda korridorsystem och undervisningslokaler. Vid utländska skolor är det mycket vanligt, att rit- och hörsalar sammanföras invid gemensamma korridorer till stora allmänningar, en anordning som knappast torde vara ägnad att befördra trevnaden eller den för stärkandet av ambitionen så nyttiga tävlan rörande skick och god ordning mellan de olika fackskolorna.

Rörande planernas anordning, de olika avdelningarnas och institutionernas placering samt lokalerna inom dessa må följande anföras.

Avdelningen för elektroteknik är belägen i byggnaderna öster om Förgården och Stora gården. Inom dessa byggnaders norra del förefinnas emellertid några ännu ej inredda lokaler avsedda för fysiska institutionen, för vilken institutions flyttning medel av riksdagen ännu ej beviljats. Avdelningen för bergsvetenskap är belägen väster om Förgården och Stora gården, den mekaniska avdelningen norr om Stora gården i den del av norra byggnadslängan, som ligger väster om portiken mellan Stora gården och Polhemsgården. Avdelningen för väg- och vattenbyggnadskonst är belägen norr om Stora gården och Tessinska gården samt öster om nyss nämnda portik, avdelningen för arkitektur öster och söder om Tessinska gården.

Kring Laboratoriegården hava större laboratorier tillhörande olika avdelningar blivit förlagda.

Huvudkomplexets korridorer äro placerade kring gårdarna och följa naturligtvis den svaga böjning, som delvis givits byggnadslängorna. Då denna böjning är konvex mot fönstersidan inifrån sett och fönstersmygarna djupa, synes i allmänhet ljuskällan blott närmast åskådaren och dagern blir behaglig. Genom denna anordning och genom att korridorernas fönster vetta mot de på omväxling och grönska bjudande gårdarna, torde den trista skol- och sjukhusstämning, som så ofta förefinnes vid långa korridorsystem, hava undvikits.

Klädhängare förekomma i allmänhet icke i korridorerna, varje elev har sitt i muren delvis inbyggda klädskåp och hörsalarnas klädhängare äro anbringade i kapprum eller i begränsade delar av korridorerna. Nästan alla vestibuler, trappor, korridorer och kapprum äro välvda.

Avdelningen för elektroteknik har sin huvudingång belägen vid stora entrévalvet. De viktigaste lokalerna äro:

I bottenvåningen: Maskinhallen med huvudingång från stora vestibulen, men även genom spårbana stående i förbindelse med körvägen öster om högskolan. Från denna bana kunna maskinerna genom en 3-tons löpkran transporteras inom maskinhallen. I hallen är bland andra maskiner uppställt ett motor-generatoraggregat, vars motor erhåller ström från Stockholms elektricitetsverk. Detta aggregat är avsett att lämna elektrisk ström av olika art och spänning till föreläsningssalarna. Motorn är direkt kopplad till en 3-fas växelströmgenerator och en likströmgenerator. Igångsättning, reglering och avstannande av detta aggregat kan ske från vilken hörsal som helst inom elektrotekniska institutionen. Aggregatet användes även för laddning av ett accumulatorbatteri med 2×110 volts spänning, vilket är uppställt i källaren. Hallens norra del upptages av ett fundamentrost för provisorisk uppställning av maskiner. I det östra, lägre partiet av hallen äro mindre maskiner uppställda. Under hela maskinhallen äro utrymmen för ledningar, men hit kan även medelst löpkranen maskiner nedtagas. I övrigt inrymmas i bottenvåningen rum för laborationer med högspänningar och transformatorer med bassäng för provning av kablers isolation, rum för fotometri, sträckande sig genom två våningar, ritsalar med plats för 33 bord vardera, rum för samlingar, professors skrivrum och laboratorium, rum för assistenter, bibliotek m. m.

I våningen 1 tr. upp: Tvenne hörsalar rymmande respektive 63 och 64 platser, två prepareringsrum, rum för anläggningsteknik och för själv-

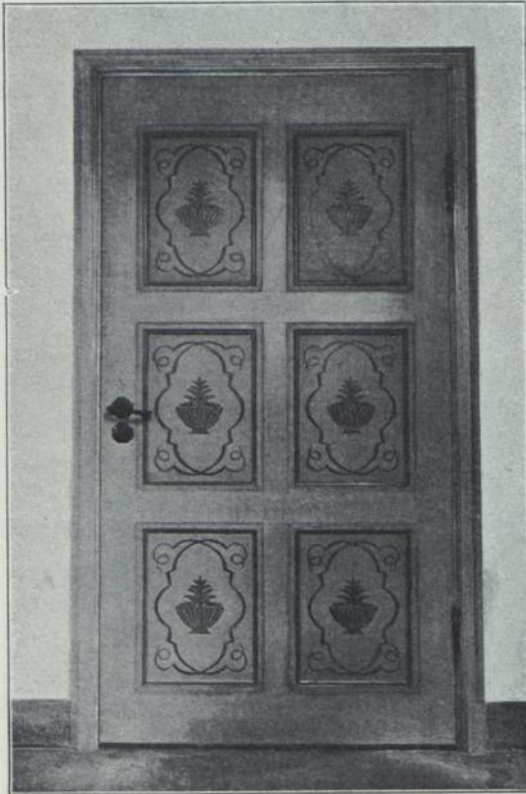


VESTIBULEN I ELEKTROTEKNISKA AVDELNINGEN.

ständiga arbeten, professors laboratorium och skrivrum, assistentrum samt rum för apparatutställning ävensom ett mindre kemiskt laboratorium med mörkrum m. fl. mindre lokaler. Samtliga hörsalar inom anläggningen äro så ordnade, att i och för förevisning av skioptikonbilder gardinerna,

som mörkgöra salen, manövreras från föreläsarens plats. Motorerna för dessa gardiner hava emellertid av ekonomiska skäl ännu blott kunnat anskaffas för en hörsal.

I våningen 2 tr. upp: En hörsal, rymmande 240 personer med prepareringsrum, allmänna laboratorier, rum för telegrafi och telefoni samt för samlingar ävensom professors skrivrum och laboratorium, assistentrum m. m.



DÖRR I ELEKTROTEKNISKA AVDELNINGEN.

Inom avdelningen förefinnes en varuhiss för 2 tons last stående i förbindelse med förut omnämnda spårbanan samt plats för en personhiss, vilken emellertid av kostnadsskäl ännu ej kunnat anskaffas.

Avdelningen för bergsvetenskap har sin huvudingång belägen i stora entrévalvet midt emot ingången till elektrotekniska avdelningen. De viktigaste lokalerna äro:

I soubasementvåningen: Anrikningslaboriet (gående genom 3 våningar), där anrikningsförsök med olika malmer komma att företagas i ganska stor skala, varjämte de olika maskinernas avverkningsförmåga och energiförbrukning kommer att undersökas. Rågodset för anrikning införes utifrån på en spårbana och upplägges antingen på upplagsplats

eller transporteras det direkt fram till en hiss för 1,5 tons last, i vilken det upphissas till de övre bottnarna i anrikningsverket, där det passerar krossarna och uppdelas på de olika apparaterna. I anrikningslaboriet förefinnes en större vattenbassäng, dit slamvattnet ledes och där slammet kan avsätta sig. Övriga lokalutrymmen i denna våning upptagas av snickareverkstad, uppkningsrum, förråd m. m.

I bottenvåningen: Lokal för övningar i gruvmätning, anordnad med ett antal över varandra belägna balkonger och samtidigt tjänande såsom ljusgård; mellan balkongerna komma att uppsättas gruvstegar av olika kon-



ELEKTROTEKNISKA MASKINHALLEN.



KORRIDOR I AVDELNINGEN FÖR BERGSVETENSKAP.



BERGSKEMISKA LABORATORIET.

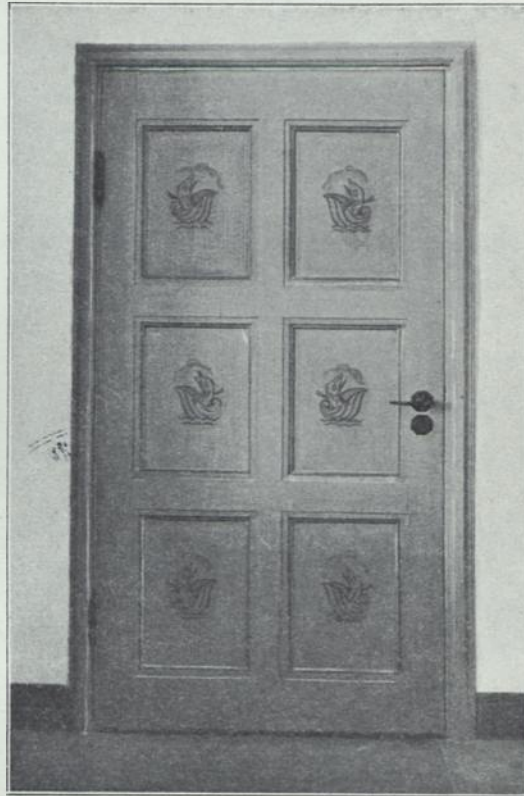
struktion. Laboratorier för våt-anrikningsförsök och för magnetometri, rit-salar, hörsal med prepareringsrum, rum för professor, speciallärare och assistent, bergsvetenskapliga och anrikningssamlingar m. m. Till anrikningslaboratoriet hör i denna våning ett omklädningsrum med klädska och ett duschrum.

I norra delen av denna plan förefinnas lokaler hörande till den metallurgiska avdelningen. Dessa omfatta en genom två våningar gående lokal för större ugnar. Här uppställs bl. a. en elektrisk ugn, system Rennerfelt, vari komma att beredas diverse ferrolegeringar; dessutom förefinnes här en smedja, förrådsrum m. m.

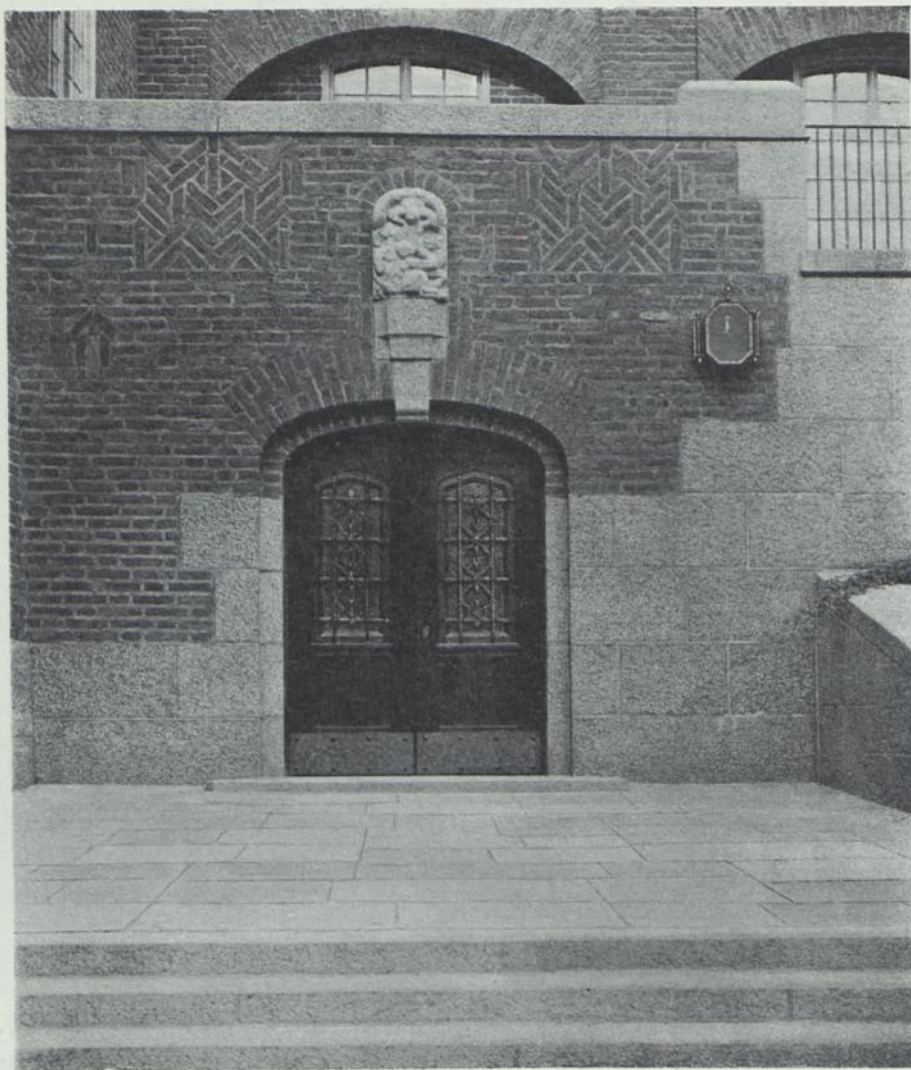
I våningen 1 tr. upp: Huvudlokalen här är det bergskemiska laboratoriet med 40 laborationsplatser och 15 kapell. Invid detta laboratorium förefinns vågrum, assistentrum, stinkrum med balkong, rum för gasanalys, förråd, laboratorietjänare och verkstad samt smältrum. I övrigt upptages våningen av rum för självständiga arbeten, elektrolys, syror och bibliotek samt professors skrivrum och laboratorium.

I metallurgiska avdelningen förefinns i denna våning, förutom övre delen av rum för större ugnar, rum för mindre ugnar, som kommer att innehålla diverse små elektriska ugnar för glödning, härdning, anlöpning och aducering samt dessutom diverse muffelugnar, stålprovningsapparater m. m., förråd för pyrometrar och lärarorum.

I våningen 2 tr. upp: Laboratorium för metallografi och mikroskopi, ett kemiskt laboratorium med 4 platser och 3 kapell jämte vågrum för undersökningar i samband med de metallografiska arbetena, rum för slipning, där två slipmaskiner komma att uppställas för beredning av



DÖRR I VÄG- OCH VATTENBYGGNADSAVDELNINGEN.



INGÅNG TILL MEKANISKA AVDELNINGEN.

prover, samt hörsal, rymmande 40 personer, prepareringsrum, större sal för metallurgiska samlingar, professors skrivrum och laboratorium samt rum för speciallärare, assistenter m. m.

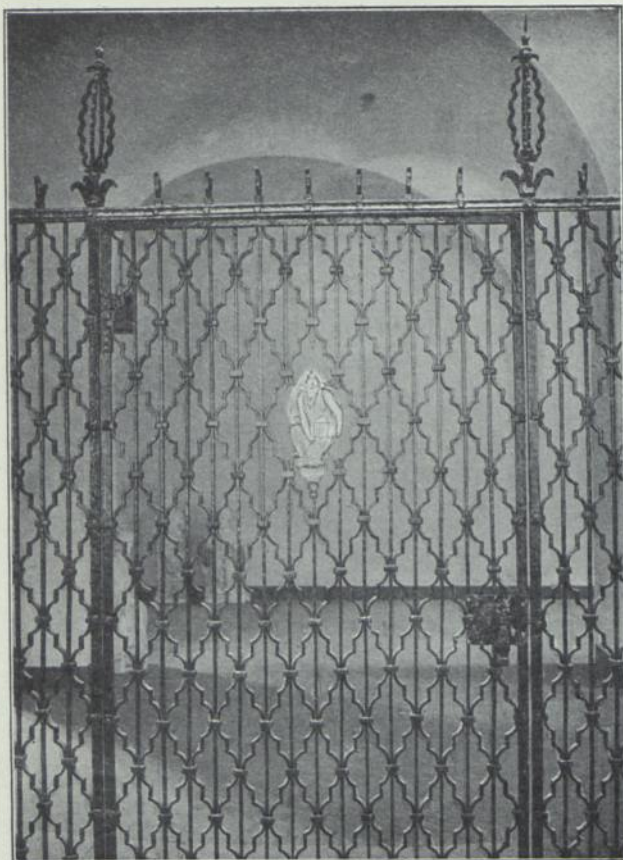
I nu omhandlade våning förefinnes även den mineralogiska institutionen, som omfattar följande lokaler: Rum för övningar i petrografi och mineralogi, en sal för mineralogiska och malmgeologiska samlingar med ett mindre

rum för slip- och sågmaskiner, professorsrum med tillhörande rum för precisionsarbeten och noggrannare undersökningar, assistentrum samt slutligen en hörsal rymmande 90 platser.

Inom bergsskolan finnes förutom redan omnämnd malmhiss ett hisschakt avsett för en personhiss, vilken emellertid av ekonomiska skäl ännu ej kunnat anskaffas, i likhet med vad fallet var med den inom den elektrotekniska institutionen.

Avdelningarna för maskinbyggnad och skeppsbyggeri hava i anledning av det intima sambandet mellan avdelningarna erhållit en gemensam ingång, som förlagts i stora gårdens nordvästra hörn. I denna avdelnings bottenvåning förefinnas förutom vestibuler och trappor endast lokaler för samlingar i mekanisk teknologi. Våningen 1 tr. upp innehåller tvenne ritsalar, rymmande 30 platser vardera, rum för samlingar, avseende ångmaskinlära, vattenmotorer och förbränningsmotorer, samt professorsrum. Våningen 2 tr. upp inrymmer tvenne hörsalar med respektive 81 och 40 platser, rum för samlingar och lärare samt tentamensrum m. m. Våningen 3 tr. upp inrymmer avdelningen för skeppsbyggeri, omfattande tvenne ritsalar med 12 platser vardera, rum för samlingar och professorsrum, m. m. Vinden över sistnämnda våning upptages helt av utrymmen för mallar.

Avdelningen för väg- och vattenbyggnadskonst har sin huvudingång förlagd i fonden av den övertäckta trappa, som är belägen mellan Stora gården och Tessinska gården. Dessutom äger denna avdelning en mindre ingång från den blivande Polhemsgården samt avdelningens geodetiska institution en ingång från Tessinska gården. Avdelningens bottenvåning upptages helt av den geodetiska institutionen, omfattande en 26 m lång provningssal, delvis belyst från tvenne håll och med fri utsikt samt försedd med cirka 1 m höga plintar för uppställning av instrument. Intill salen är ett rum för karteringsinstrument ävensom ett professorsrum och förråd belägna. Våningen 1 tr. upp upptages av tvenne föreläsningssalar, rymmande respektive 45 och 60 platser, rum för samlingar i vattenbyggnadskonst och byggnadsstatik m. m. Våningen 2 tr. upp innehåller tvenne ritsalar, rymmande 36 platser vardera, rum för samlingar i väg- och brobyggnadslära samt järnbyggnadslära, tentamensrum, tvenne professorsrum samt en provisorisk rektorsexpedition. I våningen 3 tr. upp i nu beskrivna byggnadsparti äro lokaler för institutionen för hygien belägna. Dessa omfatta följande utrymmen: Rum för bakteriologiska arbeten, kemiskt laboratorium, rum för optiska och fotografiska arbeten, lärarorum m. m. samt tvenne lokaler avsedda för installationsobjekt i anslutning till undervisningen i hygien.



GALLERGRIND I ARKITEKTURAVDELNINGENS VESTIBUL.

Här kommer bland annat att uppställas en modellanläggning för rörinstallation i en byggnad, modellanläggning av ozoniseringsverk och en vattenreningsanläggning m. m.

I observatorietornet, beläget över nu beskrivna del av byggnaden, finnes ett observatorium för geodetiska och astronomiska bestämmingar. Detta observatorium, som naturligen äger vridbar kupol, är beläget på en höjd av 73.60 m över sluss-tröskeln. En elektrisk hiss för från bottenvåningen nästan ända upp till den nedanför observatoriet belägna tornterrassen. Från observatoriet och från tornterrassen äger man en sällsynt vacker och omfattande utsikt över Stockholm och dess omgivning. I samband med

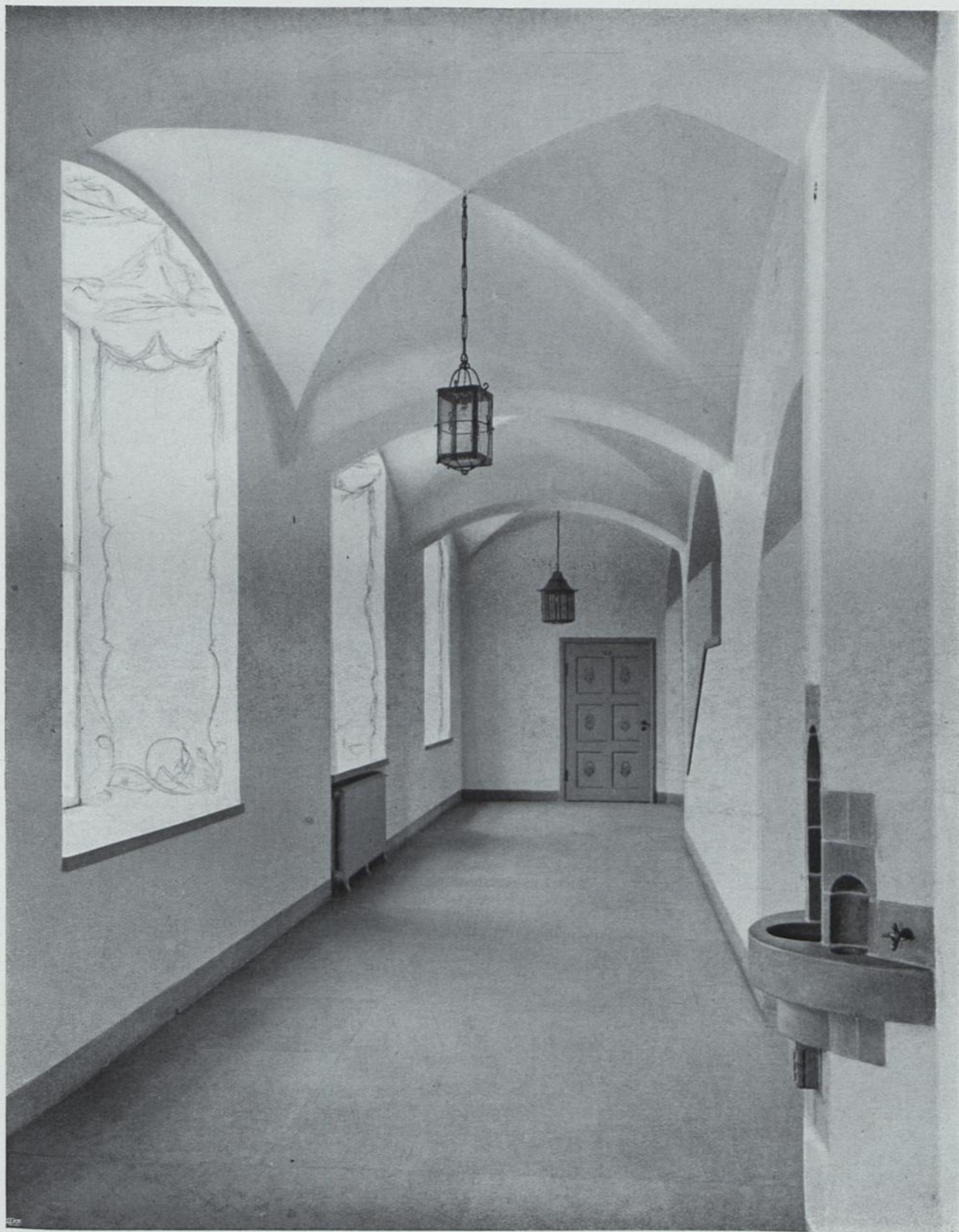
observatoriet finnes även ett meridianrum huvudsakligen för tidsbestämningar.

Inom huvudkomplexet återstå nu blott *arkitekturavdelningens* lokaler. Ingången till dessa är från portiken, som skiljer Tessinska gården från Stora gården. Soubasementvåningen inrymmer blott ett mindre laboratorium för arkitektur och byggnadsteknik. Här komma att företagas undersökningar rörande avnötning av exempelvis golvmaterial, vattenprovning av bruk och betong, finmätningar å krympning och svällning hos olika byggnadsmaterial samt andra provningar rörande väggbeklädningar och golv, mellanväggsmaterial, färger m. m.

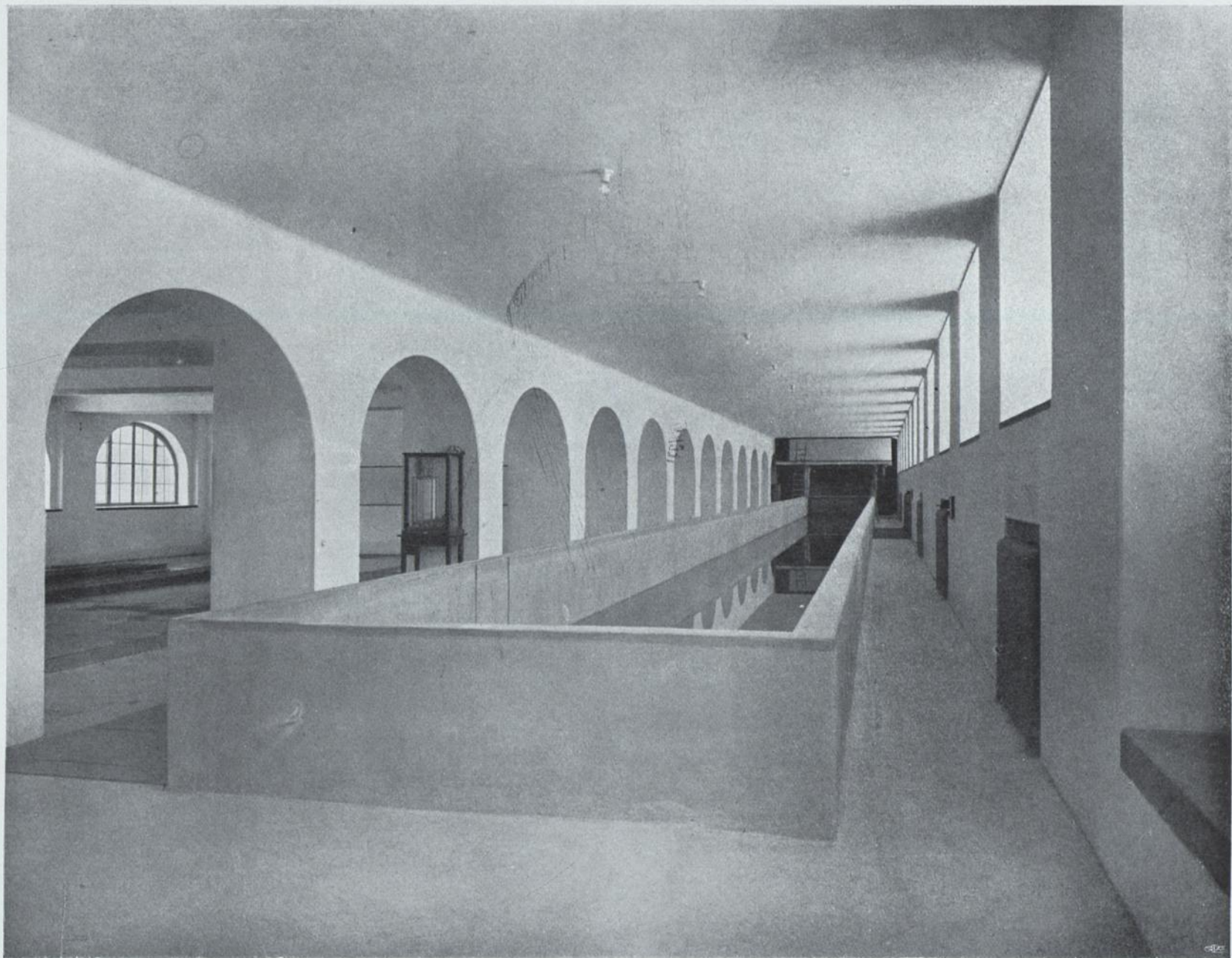
I bottenvåningen förefinnes förutom vestibulen endast ett arkitekturmuseum, avsett för arkitekturfragment och gipsavgjutningar av arkitekturdetal-



TRAPPA I VÄG- OCH VATTENBYGGNADSAVDELNINGEN.



KORRIDOR I VÄG- OCH VATTENBYGGNADSAVDELNINGEN.



VÄG- OCH VATTENBYGGNADSLABORATORIETS FÖRSÖKSRÄNNA.



KORRIDOR I ARKITEKTURAVDELNINGEN.

jer. Detta museum är skilt från vestibulen endast genom smidda gallergrindar.

I våningen i tr. upp äro ritsalar för 3:dje och 4:de årskurserna, vardera rymmande 18 platser, rum för samlingar, hörsal med 45 platser, bibliotek, spännrum, tvenne professorsrum och ett lärarorum m. m.

belägna. Inom våningen 2 tr. upp förefinnes endast modelleringssal med tillhörande rum för samlingar.

Vända vi oss nu till *maskinlaboratoriet*, finna vi att denna byggnad i huvudsak blott består av tvenne våningar, ehuru under en mindre del av bottenvåningen anordnats en soubasementvåning, varjämte några vindsutrymmen förekomma.

I byggnadens sydöstra del äro lokaler för materialprovning förlagda. I soubasementvåningen förefinnas delvis under en här belägen terrass utrymmen avsedda för undersökningar rörande konstruktioner av betong och järn, naturligen i relativt liten skala, rörande naturliga och konstgjorda stenarters hållfasthet m. m. I en 3 meters fördjupning i golvet är ett frysrum för provning av konstruktioners och materials förhållande i kyla anordnat. I bottenvåningen är en stor sal, avsedd för undersökningar rörande huvudsakligen metallers hållfasthet, belägen. Här komma att uppställas en drag- och tryckprovningssmaskin å 46 ton, en dragprovningssmaskin för tråd, en pendelhammare, en kulprovningssmaskin samt dessutom diverse mätinstrument och ugnar för värmebehandling m. m. I nära samband med ovan omnämnda sal förefinnes även ett rum för uppställning av hejare, en smedja, en reparationsverkstad samt ett lärarorum. Inom våningen 1 tr. upp är en sal avsedd för mindre cementprov samt ett lärarorum belägna, vilka även tillhöra nu beskrivna avdelning.

I maskinlaboratoriets vatten- och soubasementvåning intill materialprovningssavdelningen men naturligen helt avskilt och med särskild ingång är hydrauliska laboratoriet beläget. Detta omfattar i soubasementvåningen samlingsbassäng för vatten och en mätbassäng samt i bottenvåningen vattenränna, i vilken vattnet från turbinerna skall kunna mätas enligt skärmmetoden. Från mätrännan kan vattnet ledas ned i ovan nämnda mätbassäng eller ock direkt ned i samlingsbassängen. I denna våning uppställas även en cirkulationspump ävensom pumpar för undersökningar.

I våningen 1 tr. upp över det hydrauliska laboratoriet är laboratoriet för vattenmotorer och pumpar beläget. Här uppställas till en början bl. a. en spiralturbin å cirka 50 hkr med regulator samt en mindre francisturbin med bassänger och en peltonturbin.

För transport inom nu beskrivet laboratorium ävensom mellan detta och hydrauliska laboratoriet förefinnes en 3-tons löpkran. I samband med laboratoriet är uppförd en tornbyggnad avsedd dels för uppställning av öppna turbiner dels för prov med stor sughöjd. Högst upp i tornet är

uppställd en utjämningsbassäng. Inom tornet förefinnes även en löpkran, med vilken transporter genom tornets alla våningar kunna besörjas. Intill laboratoriet för vattenmotorer och pumpar finnes även en sal för kompressorer och ventilatorer samt ett lärarorum.

Laboratoriet för förbränningsmotorer omfattar en större sal försedd med en 3-tons löpkran i våningen 1 tr. upp, samt därunder i bottenvåningen ett utrymme av samma storlek som salen. I sistnämnda våning äro anordningar vidtagna för inmontering av en bromsdynamometer för automobiler. I våningen 1 trappa upp uppställas en komplett suggasmotoranläggning, en avancemotor, en dieselmotor m. m. I båda våningarna finnas fundamentrost för provisorisk uppställning av maskiner. Till laboratoriet hör även tvenne lärarorum samt en större sal för samlingar (salen och ett lärarorum äro belägna 2 tr. upp).

Laboratoriet för ångpannor omfattar ett genom tvenne våningar gående ångpannerum med takbelysning, i vilket komma att uppställas bl. a. en 50 m² tubångpanna, en vattenrörspanna samt en större ångpanna ävensom en lågtryckspanna placerad på våg. Från pannornas huvudröckkanal ledas rökgaserna in i en economiser. Till ångpannerummet hör rum för gasanalys, maskinistrum samt tvätt- och duschrum ävensom rymliga förvaringsrum för olika slag av bränsle. Under ångpannorna äro slaggrum belägna, varifrån slaggen bekvämt kan avhämtas.

I laboratoriet för ångmaskiner, beläget 1 tr. upp, installeras en mindre ångturbin, en multipelångturbin samt en mindre ångmaskin. Laboratoriosalen är försedd med travers och finnes i densamma såväl som i undervarande lokaler, avsedda för ledningar m. m., fundamentrost för provisorisk uppställning av maskiner. Till laboratoriet hör ett lärare- och ett assistentrum. Öster om sist beskrivna laboratorium är en lokal avsedd för undersökningar rörande maskinelement och transmissioner belägen och intill denna sistnämnda en lokal för provning av verktygsmaskiner.

I bottenvåningen av maskinlaboratoriet inrymmes en vattenränna, avsedd huvudsakligen för väg- och vattenbyggarnas laborationer, men även tillsvidare upplåten till skeppsbyggarna. Denna ränna av cirka 55 m längd äger vid sin västra ända en högreservoir. På rännans båda sidoväggar skola utläggas räls för en vagn, som kan löpa över hela rännan, och å vilken vagn 2—3 personer kunna taga plats. Vagnen skall drivas elektriskt och kunna framföras med olika hastighet. I rummet intill ovannämnda ränna komma att utföras s. k. flodbyggnadsförsök.

I maskinlaboratoriets nordöstra hörn är ett väg- och brobyggnadslaboratorium beläget. Här komma att företagas undersökningar rörande teorier för bankbyggnader och därmed i samband stående jordtrycksförhållanden, rörande landfästens och pelares stabilitet samt rörande grundförstärkningar m. m. Till detta laboratorium höra två lärarorum samt ett stort förrådsrum m. m.

Inom maskinlaboratoriet finnes även ett kyllaboratorium med fullständig kylanläggning. En hörsal, rymmande 138 platser, samt en ritsal äro ävenledes belägna inom denna byggnad.

Delvis förlagda inom en särskild betjäningsbostad, delvis belägna inom anläggningens huvudkomplex, dock alltid utan direkt förbindelse med högskolans lokaler, förefinnas bostäder för verkmästare, maskinister, laboratorietjänare och vaktmästare.

Åt platsen framför byggnaderna är det som redan påpekats avsikten att söka så mycket som möjligt giva karaktär av torg. Detta torgs huvudprydnad kommer att bliva Milles' industrimonument, nu avsett att placeras å en åttkantig plan helt nära högskolebyggnadernas båda fasader. Denna plats är medelst stenplintar helt avstängd från körtrafik samt skall framdeles beläggas med kalkstenshällar med släppytorna upp och med gräs mellan de stora fogarna, samma anordning som för övrigt förekommer å Tessinska gården m. fl. ställen inom högskoleområdet. Invid åttkantens södra sidor äro trenne granitbänkar anbringade. På ömse sidor om denna åttkant samt en söder därom belägen plantering leda breda körvägar dels till högskolebyggnadernas huvudentré, dels till nuvarande drottning Kristinas väg, som i en framtid är avsedd bliva huvudtrafikled ända fram till vetenskapsstaden vid Frescati, dels slutligen till skogsparken bakom högskolebyggnaderna. Från åttkantens främsta sida leder en bred väg och trappa fram till byggnadernas huvudentré.

Förgården och entrévalvet äro delvis belagda med granithällar, erhållna vid sprängning å högskoleområdet och så inlagda, att de olikfärgade släpp- och barkytorna vänts uppåt. Mellan dessa hällar är gräs. För övrigt är å förgården endast tvenne popplar planterade.

Stora gården stiger ganska brant uppåt mot huvudbyggnaden och Polhemsgården. Å gårdens övre del är denna stigning så avsevärd, att terrassanläggningar, trappor och s. k. ryttarstigar med omväxlande steg och lutande mark måst anläggas. Gården prydes av en fontän, vilkens skulpturala utsmyckning emellertid av ekonomiska skäl ännu ej kunnat an-



VESTIBULEN I ARKITEKTURAVDELNINGEN.

skaffas, ej heller har den skulptur, avsedd att glorifiera Polhem, som skall anbringas i trappan upp mot Polhems-gården, av samma skäl kunnat anskaffas. Gårdens gångar äro belagda med kluven rullsten i midten, s. k. borgmästarestenar, och däromkring med liten rullsten d. v. s. vanlig sättsten. Mellan gångar och gräsmattor är skoning av granit anbringad.

Gården omgivande byggnader och terrasser skola delvis beväxas med grönska, östra och västra huslängorna till en vånings höjd med vildvin, som även skall nästan helt täcka portik och trappa, som skilja Stora gården från Tessinska gården. Norra terrassen är bevuxen med klängrosor,

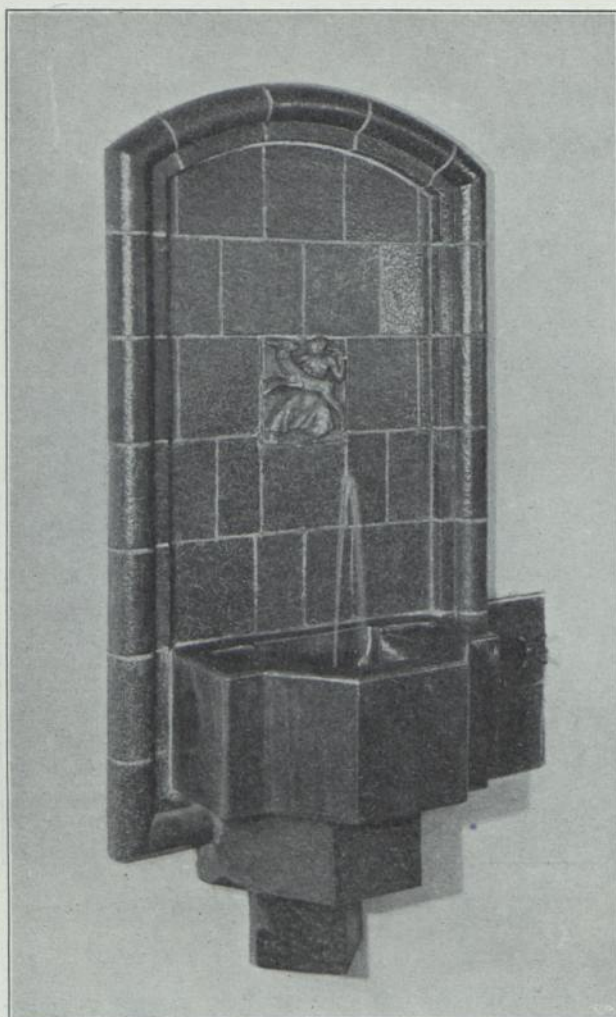
de exederformade bänkarna invid stora midtgången med en liten självklängande vildvinsart. Mellan samma bänkar äro 6 stycken popplar planterade och kring midtgångens södra del hagtorn, framdeles avsedd att tuktas i pyramidform. Vid ingångarna å östra och västra fasadlängorna äro pyramidalmar planterade, även dessa avsedda att tuktas i regelbunden form. En del av planteringarna å denna gård återstå ännu.

Tessinska gården är belagd med kalkstenshällar lagda på förut nämnt sätt. Midt på gården är en redan nu rätt stor kastanje planterad och å gårdens norra sida skall kaprifolium klänga kring där befintliga trenne granitreliefer. Genom trenne arkader å gårdens östra sida synes Djurgårdens vackra grönska.

Laboratoriegården, vilken genom tvenne arkader står i förbindelse med Stora gården, skall användas för en del friluftsarbeten och prydes



DRICKSFONTÄN I ARKITEKTURAVDELNINGEN.



DRICKSFONTÄN I AVDELNINGEN FÖR BERGSVETENSKAP.

endast av tvenne lindar samt är grusbelagd. Polhemsgården skall prydas rikare och hela planen beläggas med kalkstenshällar och däremellan ornament av buxbom anordnas. Å Berzelii gård förefinnes redan en hel del stora björkar och granar. Dessa skola i största möjliga utsträckning skonas. Gården är delvis lämnad öppen mot sydost, så att solen får fritt tillträde och Djurgårdens härutomordentligt vackra skogsbestånd blir synligt.

Vid de olika byggnadernas placering i terrängen och bestämmandet av desammans höjdlägen å denna terräng har största möjliga hänsyn tagits till att sprängnings- och schaktningsarbetena så vidt möjligt kommit att svara mot utfyllningsarbetena, så att minsta möjliga transportkostnader såmedelst uppkommit.

Grunderna äro i allmänhet neddragna till berget, men ligga dock å några ställen på den hårda pinnmon. I huvudsak äro grunderna utförda av betong och blott i ringa utsträckning, där lämplig sprängsten funnits i omedelbart grannskap, av granit.

Samtliga yttermurar hava, i tjocklek varierande mellan 2 och 3 sten, utförts av tegel med den i mellersta Sverige vanliga storleken. Innerväggar äro av vanligt murtegel eller av kokscementtegel. Vid hörsalar, där fullständig ljudisolering varit av nöden, hava emellertid kokscementväggarna



CERBERUSGRUPP AV MILLES.

gjorts dubbla. Fasadteglet är av storleken $72 \times 150 \times 300$ mm. Genom den något lägre höjden å fasadteglet än å murteglet har bruksfogen i fasaden kunnat givas en storlek av 20 mm. För att slippa kostnaderna för särskild fogstrykning och för bruk med mörk sand ävensom för syretvättning hava samtliga fogar innan de torkat avfärgats med caput mortuum. Den önskade fogfärgen har härigenom för en ringa penning kunnat erhållas. I samtliga vindfång har även murats med fasadtegel, men har här den vanliga syretvättningen användts.

Taklisterna äro i stor utsträckning av granit och täckta med koppar. För att erhålla säkerhet mot vattnets inträngande i murverket, även om läcka skulle uppstå i kopparn, hava under granitlistens fogar inlagts granitstenar med rännor, s. k. skvallerstenar. Dessutom är under granitlisten isolering med asfalt anbringad.



RELIEFDETAILJ AV MILLES.

Takstolarna äro i allmänhet av trä enligt den vanliga svenska typen. Stolarna över de höga, södra byggnadspartierna äro emellertid av järn med träåsar och stolarna över de större laboratoriesalarna av betong, även dessa med åsar av trä. Å trätakstolarna ligga 31 mm bräder på förvandring, häröver två lag läkt. Taktäckningen utgöres av vanligt, oglaserat, enkupigt, dubbelfalsat tegel, vilket dock för att erhålla en något djupare färg är rätt hårdbränt. Nedre tegelskiften samt vart tredje tegel äro spikade med galvaniserad spik, i övrigt ligger teglet blott å läkten. Nockarna äro även täckta med tegel. Teglet är från S:t Eriks lervarufabriker i Uppsala.

Bjälklagen äro till större delen av håltegel och armerad betong, oftast så ordnade, att de försänkta huvudbalkarna ligga regelbundet å murstöden och därigenom utan olägenhet kunnat göras synliga. Såsom golv i ritsalar, hörsalar, lärarorum m. fl. utrymmen är användt ek i utfallande längder, och är eken endast betsad och oljad, ej bonad. Eken är spikad i underslag och häremellan är såsom isolering kalkgrusfyllning. Här bör observeras, att vid utbyte av ursprungligen avsedda linoleummattor, liggande å avriven betongplatta med undervarande kalkgrusisolering, mot sådana ekgolv en

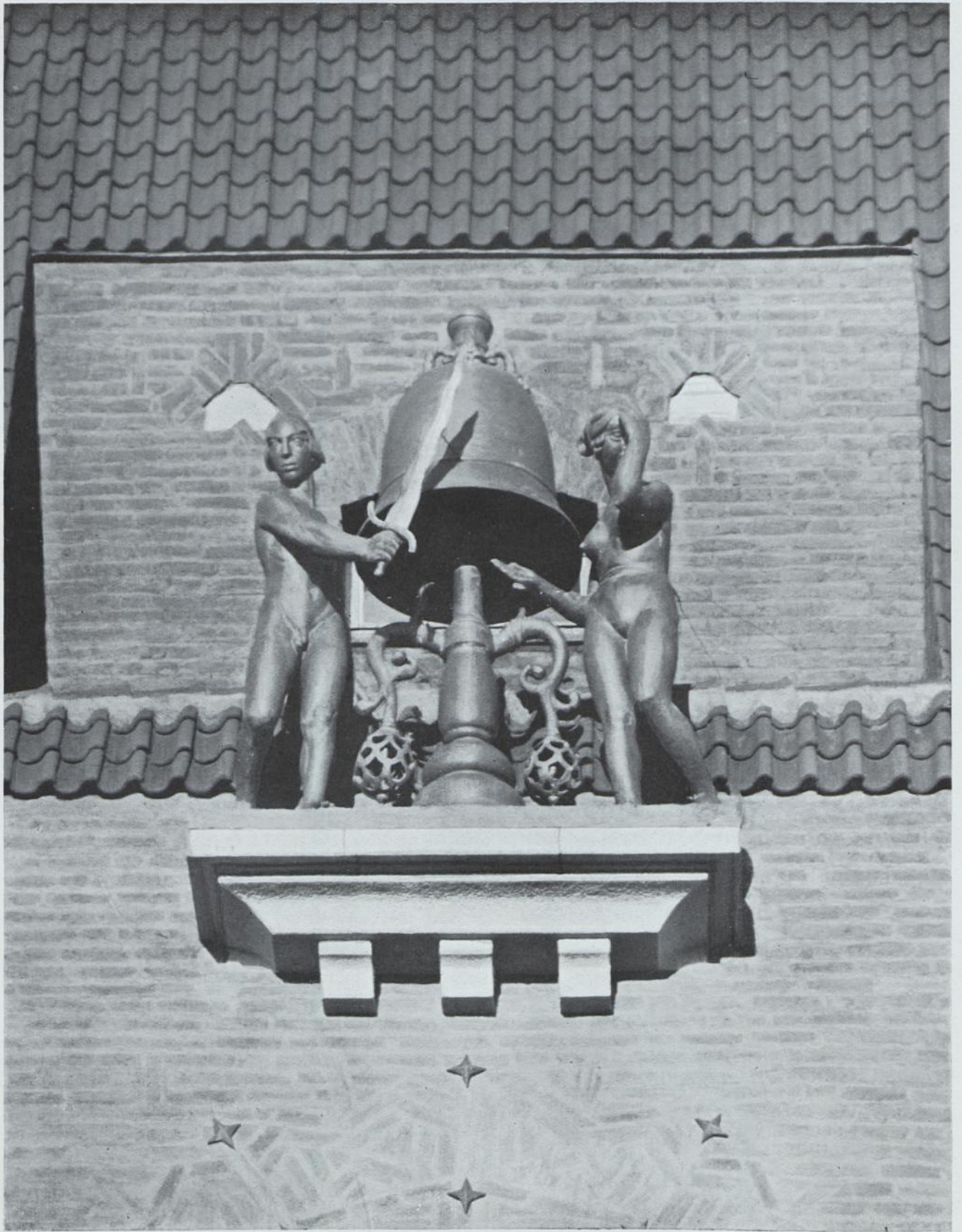
minskning i kostnad för hela anläggningen av cirka 7 000 kronor uppstod. Således erhöles det monumentala materialet ek för mindre kostnad än de omonumentala och kostnader för underhåll krävande linoleummattorna. Golven i samtliga vestibuler och korridorer äro av kalkstensplattor, i varierande storlekar från Jämtland. Samtliga vestibuler, korridorer och trappor äro övervälvda, där kryssvalv användts i tegel, vid enklare valvformer



HUVUDENTRÉN MED RELIEF AV MILLES.



RELIEFDETALJ AV MILLES.



KLOCKA Å OBSERVATORIETORNET AV IVAR JOHNSON.



FIGUR Å TESSINSKA GÅRDEN AV IVAR JOHNSSON.

i betong. Dessa valv hava av ekonomiska skäl icke gjorts ljud-dämpande utan ligger kalkstenen direkt å valven. Golven i större laboratorier hava gjorts av viktoriaplattor eller klinker, golven i kemiska laboratorier av ek eller Höganäsklinker i asfalt. Av sistnämnda material hava även samtliga golv i toiletter utförts. I smedjor och hejarrum äro golven av träkubb, indränkt med karbolineum.

Innerväggarna äro i allmänhet putsade, i vestibulerna och korridorerna med grövre puts, i övrigt med vanlig puts. Nedre väggpartierna i större laboratorier äro emellertid klädda med glaserat tegel och nedre delen av väggarna i ångpannehallen med Höganästegel.

Allt byggnadssnickeri är av ekonomiska skäl inskränkt till ett minimum och blott förutom till dörrar och fönster användt i socklar, en del nödvändiga lister samt hörnskoningar. Även dessa sistnämnda hava emellertid i möjligaste grad inskränkts genom att hörnen rundats eller avfasats. För att undvika skarpa hörn hava även murstöd i allmänhet utförts åttkantiga.

Vid målningsarbetets utförande har även av ekonomiska skäl oljemålning i största möjliga mån uteslutits och har nästan all målning å kalkputs utförts med Hälsingborgs kalk, som för att ej avfärga påstrukits trenne tunna lag, d. v. s. första strykningen har skett med nästan rent i vatten huvudsakligen blott för att uppblöta putsen. Väggarna i rit- och hörsalar hava utöver nämnda behandling stötts i mot väggen avvikande färg och professorsrummen på gammalt manér stänkts i tvenne färger.

Fönster och dörrar äro oljemålade, men nästan allt annat snickeri för besparing av olja betsat. Ingen spackling förutom rörande mål-



RELIEF AV IVAR JOHNSSON.



RELIEF AV IVAR JOHNSSON.

ningen i toiletterna förekommer. Samtliga dörrar äro emellertid, för att ej ojämnheter i träet eller genomlysande träskola verka störande, på gammalt sätt behandlade med flammig yta eller marmorerade, ävenså äro en del listprofiler behandlade med tummen.

Vid komponerandet av såväl byggnadernas fasader som interiörer har en av huvudutgångspunkterna varit, att i en allvarlig och karg arkitektur, huvudsakligen verkande genom sin massutformning och genom ett så vidt möjligt rytmiskt förhållande mellan muröppningar och mur, giva plats för en ytterst spartansk, rent konstnärlig utsmyckning, där konstverket just genom den neutrala, stränga omgivningen skall lysa som ett smycke. Många av dessa, just genom enkelheten så nödvändiga konstverk sak-

nas emellertid ännu. Samma princip att koncentrera de rikare detaljerna å några få punkter har för övrigt även tillämpats vid olika detaljer såsom smidesarbeten m. m.

Det torde vara otvivelaktigt, att den unge ingenjören, vars andliga spis ju icke i ringa grad utgöres av betong, kuggghjul och H₂S, och vilkens praktiska läggning lätt leder till en viss ringaktning eller oförstående för rent konstnärliga ting, kanske mer än annan studerande ungdom är för ernående av en harmonisk utveckling i behov av att komma i nära kontakt med de ideella värden, som representeras av målning och skulptur, och sålunda kanske lära sig förstå att vid sidan av betong och kuggghjul finnes en värld, som ej låter sig mäta varken med passare eller mätsticka.

Det är i icke ringa grad nu nämnda förhållande, som föranledt författaren söka bereda så mycket plats, som de knappa medlen medgivit, för våra konstnärer utom och inom högskolans murar.

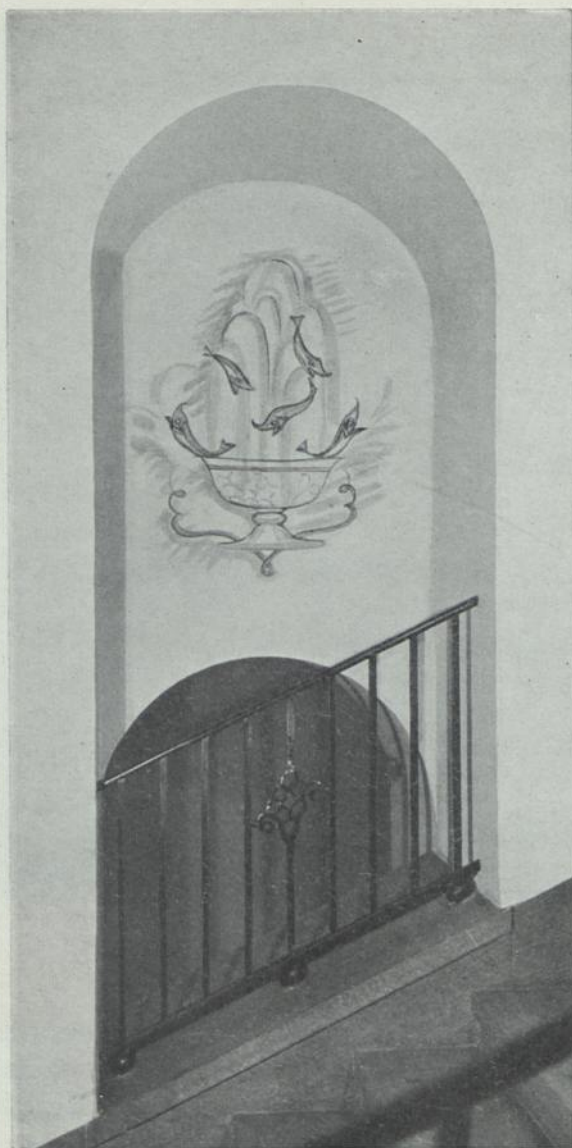
Utöver de rent konstnärliga detaljerna hava fasadytorna endast upplivats med en svagt framträdande mönstermurning samt några ljusare, slammade ytor. Interiörerna hava förutom den figurala målningen och skulpturen och en helt enkel dekorerings av dörrar och några fönstersmygar blott pryddts med handsmidda barriärer och lyktor samt dricksfontäner i bränt och glaserat lergods, dessa sistnämnda var och en prydd med, eller framdeles avsedd att prydas med, en figural framställning.

Vid huvudentrén å muren mellan torget framför högskolebyggnaderna och förgården har Carl Milles utfört tvenne, ingången vaktande cerberusgrupper. Cerberus, Hades' väktare, var väl egentligen blott en, men tror jag Milles, som i sitt arbete älskar att vara ostörd, är orolig att en så vaksam ras skall dö ut och därför sökt i möjligaste mån trygga dess fortbestånd. Milles önskade även ursprungligen i samband med grupperna en inskription, häntydande på djurens uppgift av att vara väktare av arbetsfriden inom högskolan.

Den stora reliefen i bränt glaserat lergods över huvudentrén, mellan de båda över entrén slagna valven, är även av Milles. Reliefen framställer människans strid med elementen och består av fem olika grupper, i midten människan, å ömse sidor om henne stormen, elden, havet och jordskalvet. Bakom dessa bilder, som äro i grönblå glasyr, är ytan murad med vanligt fasadtegel, men i denna yta framställes med mörkare, hårdbränt te-



RELIEF AV IVAR JOHANSSON.



KALKMÅLNING AV EINAR FOTSETH.

gel samt små glaserade bitar i samma färg som reliefen himlavalvet, bestrött med stjärnor och planeter, och tecknar sig även svagt ett världsalltet fyllande vidunder.

Nedanföör denna relief äro överingångarna till avdelningarna för bergsvetenskap och elektroteknik även reliefer av bränt, glaserat lergods av Milles.

Milles' av industrimonumentskommittén beställda fontän framför högskolan har redan omnämmts. Således kommer framdeles invid högskolan och i samband med entrén att koncentreras många av Milles', mest framstående arbeten. Högskolan kan glädja sig åt att i samband med dess nybyggnad kommer att uppstå en verklig Millesplats.

Å stora gården har Milles å östra fasaden å den del, som bebos av arkitekterna, utfört en relief i granit, som framställer arbetare, som upphissa en byggnadsdel, samt över ingången till avdelningen för mekanik och skeppsbyggeri en liten relief ävenledes i granit. Milles uppger, att reliefen framställer ett mekaniskt fenomen, som han har stor re-

spekt för, nämligen jämvikten. Över ryggen av en åsna är lagd en bräda. Å var sin ända av brädan ha tvenne vetenskapsmän tagit plats, en mekanist — landodjur — och en skeppsbyggare — sjöodjur. Åsnan, säger Milles, representerar allmänheten. På reliefen vänder sig åsnan mot vetenskapsmännen och skrattar. Milles har ytterligare utfört tvenne mindre



KALKMÅLNING AV GEORG PAULI.



TAKFÄLTSMÅLNINGAR PÅ TRÄ AV OLLE HJORTZBERG.

reliefer å östra ytterfasaden.

De 8 allegoriska figurerna å huvudfasaden, symboliserande högskolans fackskolor, äro av Ivar Johnsson. De 8 figurerna framställa frånväster till öster räknat arkitekturen, skeppsbyggeriet, kemien, väg- och vattenbyggnadskonsten, bergsvetenskapen, elektrotekniken och mekaniken samt de matematiska vetenskaperna.

Som konstverk kanske vackrast, men som allegori kanske svårast att förstå är kemien. Denna framställes av en kvinna, till hälften bortvänd, till hälften dold av draperier. Ivar Johnsson säger, att han velat framställa det hemlighetsfulla, det fördolda. Kanske emellertid herrar kemister ej äro nöjda med, att konstnären velat påstå, att deras vetenskap för dem äger något hemlighetsfullt eller fördolt.

Ivar Johnsson har förutom ovannämnda figurer utfört en hel del betydande konstverk för högskolans räkning. Av honom äro Tessinarne med midtfigur å den efter dem benämnda gården ävensom de 4 figurerna å stora gårdens östra länga, placerade utanför den fysiska hörsalen och framställande elektriciteten, ljuset, ljudet och värmen. På observatorietornet är av Johnsson klockan med omgivande figurer, som framställa solen, en manlig figur, och månen, en kvinnlig figur. Solen slår tiden med sitt gyllene svärd, men månen har intet annat att göra, än att blygt hålla upp sin hand till skydd mot solens strålar. På sidan om denna grupp skall Johns-



KALKMÅLNING AV HILDING LINNQVIST.



KARTONG TILL KALKMÅLNING, UNDER
UTFÖRANDE I ELEKTROTEKNISKA HÖR-
SALEN, AV AXEL TÖRNEMAN.

son utföra tvenne granitskulpturer, framställande stjärnbilder.

Invändigt har Johnsson utfört en mängd reliefer i glaserat lergods; sålunda är den elektrotekniska avdelningen endast dekorerad med i blått hållna reliefer, allegoriskt framställande elektriciteten m. m., samtliga utförda av honom. I avdelningen för skeppsbyggnadskonst har han utfört en Venus, seglande i snäcka, i arkitekturavdelningen en brunn m. fl. reliefer. I snart sagt varje avdelning inom högskolan finnas arbeten, bärande vittne om Ivar Johnssons flit och stora konstnärsskap. Ivar Johnsson har inom högskolan haft ateljé och offrat två år av sin bästa skaparkraft för skolans prydande.

I avdelningen för väg- och vattenbyggnadskonst finnas tvenne, dekorativt och luftigt hållna målningar av konstnären Georg Pauli, föreställande den ena Iduna, den andra Sankt Göran, stridande mot okunnighetens drake.

I fälten ovan hanbjälkarna i portiken och trappan, som skilja Stora gården från Tessinska gården, har Olle Hjortzberg målat 18 stycken framställningar, hänvisande på arkitekternas och väg- och vattenbyggarnas verksamhetsfält, murare, stenhuggare och rallare i arbete, samt över ingången till arkitekturskolan en Minerva och över ingången till väg- och vattenbyggnadsskolan en flodgud.

Einar Forseth har dekorerat korridorer och en del fönstersmygar i avdelningarna för elektroteknik, maskin- och skeppsbyggnadskonst, väg- och vattenbyggnadskonst samt arkitektur och har dessutom utfört några större figurframställningar i mekanisternas trappa. Forseth målar i ungdomligt överdåd, helst utan kartong direkt å mur eller trä; något litet bidragande till hans överdåd är väl måhända även vetenskapen om, att han erhåller all övermålning gratis.

Hilding Linnqvist har dekorerat Bergsskolans nedre vestibul och korridorerna däromkring med allegoriska figurer eller bilder från bergsmännens verksamhetsfält. Genom sin enligt allmän gängse uppfattning självsvåldiga formgivning äro nog dessa målningar ägnade att irritera, men även genom sin älskvärda naivitet, rika fantasi och vackra färg ägnade att bereda glädje.

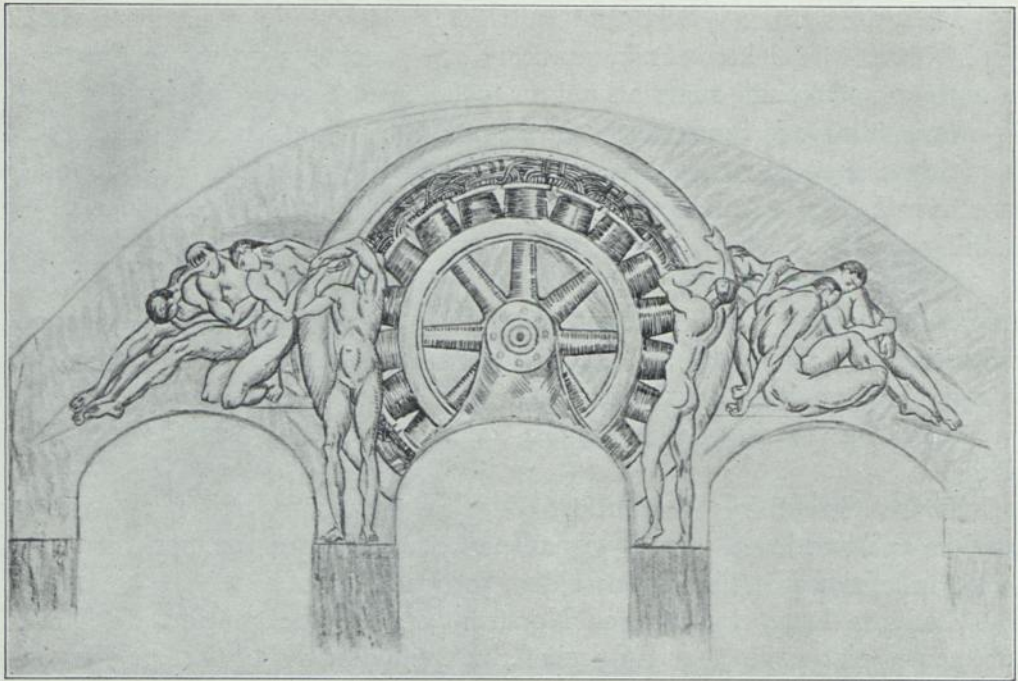
Thore Strindberg har utfört de fyra figurerna i relief å östra ytterfasaden, placerade å det byggnadsparti, som markerar hörsalen i fysik. Dessa reliefer framställa luften, elden, jorden och vattnet.

Slutligen hava skulptörerna Norström och Elmberg utfört de å dricksfontänerna placerade små figurrelieferna med delvis djupsinniga allegoriska motiv, men även med mer lättförståeliga ämnen, såsom får och åsnor, som dricka m. m.

Det brända och glaserade lergodset till samtliga arbeten av sådant material är utfört delvis vid Höganäs, delvis av S:t Eriks lervarufabriker i Uppsala.

Genom älskvärd frikostighet av Allmänna svenska elektriska aktiebolaget i Västerås har medel erhållits till dekorerings av den elektrotekniska avdelningens största hörsal. Denna dekorerings har uppdragits åt Axel Törneman, och föreligga redan förslag till densamma. Blott salens tak kommer att bemålas och hållas i helt ljusa färger. Konstnären framställer allegoriskt de elektriska strömmarna, de positiva och negativa, genom manliga och kvinnliga väsen, svävande i motsatta riktningar.

Byggnadsarbetena hava i allmänhet utförts på entreprenad. Emellertid har under senaste byggnadstiden även en del arbeten utförts med eget folk. Systemet med huvudentreprenad har tillämpats, men till denna har huvudsakligen blott själva byggnadsstommen hänförs, medan grunden, natursten, fasadtegel, målning och en massa andra mindre arbeten hava utbjudits för sig. Entreprenörernas antal rörande byggnadsarbeten och möbler har varit omkring 40 stycken.



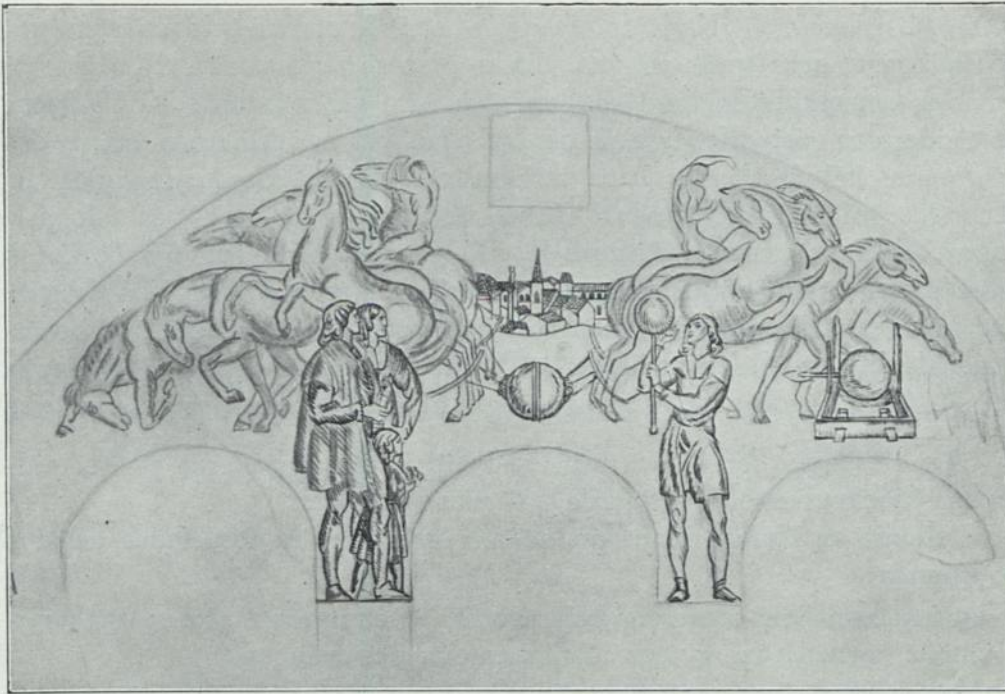
KARTONG TILL KALKMÅLNING, AVSEDD FÖR ELEKTROTEKNISKA MASKINHALLEN, AV AXEL TÖRNEMAN.

Under senaste delen av byggnadstiden ha en del arbeten utförts med eget folk, då det i anledning av de våldsamt stigande priserna såväl å material som arbete visat sig svårt för entreprenörerna att ingiva fasta anbud med rimliga priser. Rörande en del arbeten torde även kostnaden hava nedbringats genom att arbetet utförts utan mellanhänder.

Arbetena å byggnadsplatsen påbörjades med förflyttningen av å tomten befintlig hovjägmästarebostad i februari 1913. Sprängning och schaktning påbörjades i juni 1913 och grundläggningen i april 1914. Tegelmurningen påbörjades i juni 1914 å huvudkomplexet, men å maskinlaboratoriet först i juli 1915. Huvudbyggnaden var under tak i september 1915 och maskinlaboratoriet i december 1915. Arbetena å samtliga byggnader ävensom å möbler voro vid höstterminens början i september 1917 i huvudsak fullbordade, och kunde då byggnaderna för sitt ändamål tagas i besittning.

Konstruktör för samtliga bjälkoch taklag har varit professor H. Kreüger. Han har även vid olika tillfällen ställt sin stora erfarenhet till förfogande i fråga om grund- och murkonstruktioner m. m.

Dagkontrollant har under hela byggnadstiden varit ingenjör P. Th.



KARTONG TILL KALKMÅLNING, AVSEDD FÖR ELEKTROTEKNISKA MASKINHALLEN, AV AXEL TÖRNEMAN.

Johannisson. Genom arbetets omfattning, genom mängden av entreprenader och ej minst genom de arbeten som utförts med direkt anställt folk, har hans arbete varit synnerligen krävande. Han har emellertid alltid varit situationen vuxen och väl fyllt sitt värv.

Dessutom må omnämnas följande, hos olika entreprenörer anställda personer, som under längre tid haft verksamhet vid byggnadsföretaget.

Huvudentreprenörens, Nya Asfaltaktiebolaget, driftingenjör har varit A. Kleitz, som utan allt för mycket gnissel fyllt det svåra uppdraget att i dessa bistra tider vara mellanhand mellan arbetsledningen och entreprenören. Såsom huvudentreprenörens verkställare hava fungerat ingenjör G. Hooman och P. E. Pettersson. Förman för murarelagen har varit den från murningen å Stadion och Rådhuset välkände A. Vallin. Vallin gjorde sin entré på byggnadsplatsen redan vid läggandet av grundstenen, då han med stor konstfärdighet som murare och aktör slog de tre hammarslagen; han var då den ende, som kunde föra en murarehammare, och är en av de få, som ännu kan slå ett konstrikt valv. Förman för timmermännen har varit K. Franzén, för snickarna A. Nordin och H. Lindberg; huvudentreprenörens förrådsför-

valtare har varit J. Karlsson. Granit- och Betonaktiebolaget, som utfört schaktningen och sprängningen, hade såsom verkmästare K. Bergqvist. Skånska Cementgjuteriet utförde grunden med verkmästarna K. Olofsson, J. A. Andersson och K. J. Erikson. E. Hebbel har levererat större delen av graniten till fasaderna; hans verkmästare var J. Karlsson. Ingenjör Hugo Theorell, som konstruerat såväl värmeledningen som vatten- och avloppsledning, hade såsom verkmästare E. H. Pierong. Axel Sjögren & C:o har utfört vatten- och avloppsledningarna; verkmästare har varit K. Wickström. Aktiebolaget Calor utförde värmeledningen med K. J. Lindqvist som förman. Aktiebolaget Luth & Rosén har utfört huvuddelen av de elektriska ledningarna med A. Fredriksson som driftsingenjör och K. Andersson som verkmästare.

Av riksdagen beviljade medel till högskolebyggnaderna jämte möbler och maskinell utrustning utgjorde 4 619 000 kronor.

Enligt av Kungl. Maj:t godkänt kostnadsförslag fördelades dessa medel sålunda:

| | |
|--|-----------------------|
| Byggnadskostnader, planering och tomtens övertagande | kr. 3 053 703:— |
| Ritningar, arbetsledning och administration för ovan angivna arbeten » | 256 000:— |
| Gas, vatten, uppvärmning jämte ritningar och kontroll . . . » | 349 000:— |
| Elektrisk belysning jämte ritningar och kontroll » | 70 500:— |
| Inventarier, inredning m. m. » | 277 600:— |
| Apparater och maskinell utrustning » | 612 197:— |
| | <hr/> |
| | Summa kr. 4 619 000:— |

De verkliga kostnaderna för de arbeten, som i det närmaste redan avslutats, bliva — med möjlighet dock för smärre avvikelser — följande:

| | |
|---|-----------------------|
| Byggnadskostnader, planering och tomtens övertagande | kr. 3 008 600:— |
| Ritningar, arbetsledning och administration för ovan angivna arbeten » | 265 700:— |
| Gas, vatten, uppvärmning jämte ritningar och kontroll . . . » | 384 500:— |
| Elektrisk belysning jämte ritningar och kontroll » | 78 800:— |
| Inventarier, inredning m. m. » | 281 100:— |
| Återstår för apparater och maskiner, rörande vilka arbetena ännu ej avslutats » | 600 300:— |
| | <hr/> |
| | Summa kr. 4 619 000:— |

Här bör emellertid observeras att en del arbeten rörande omgivningarnas ordnande och den rent konstnärliga utsmyckningen, såsom gjutningen i brons

av figurerna å observatorietornet, figuren till stora gårdens fontän m. m. av brist på penningar ej kunnat fullbordas samt att de återstående medlen till apparater och maskiner under nuvarande förhållande äro otillräckliga.

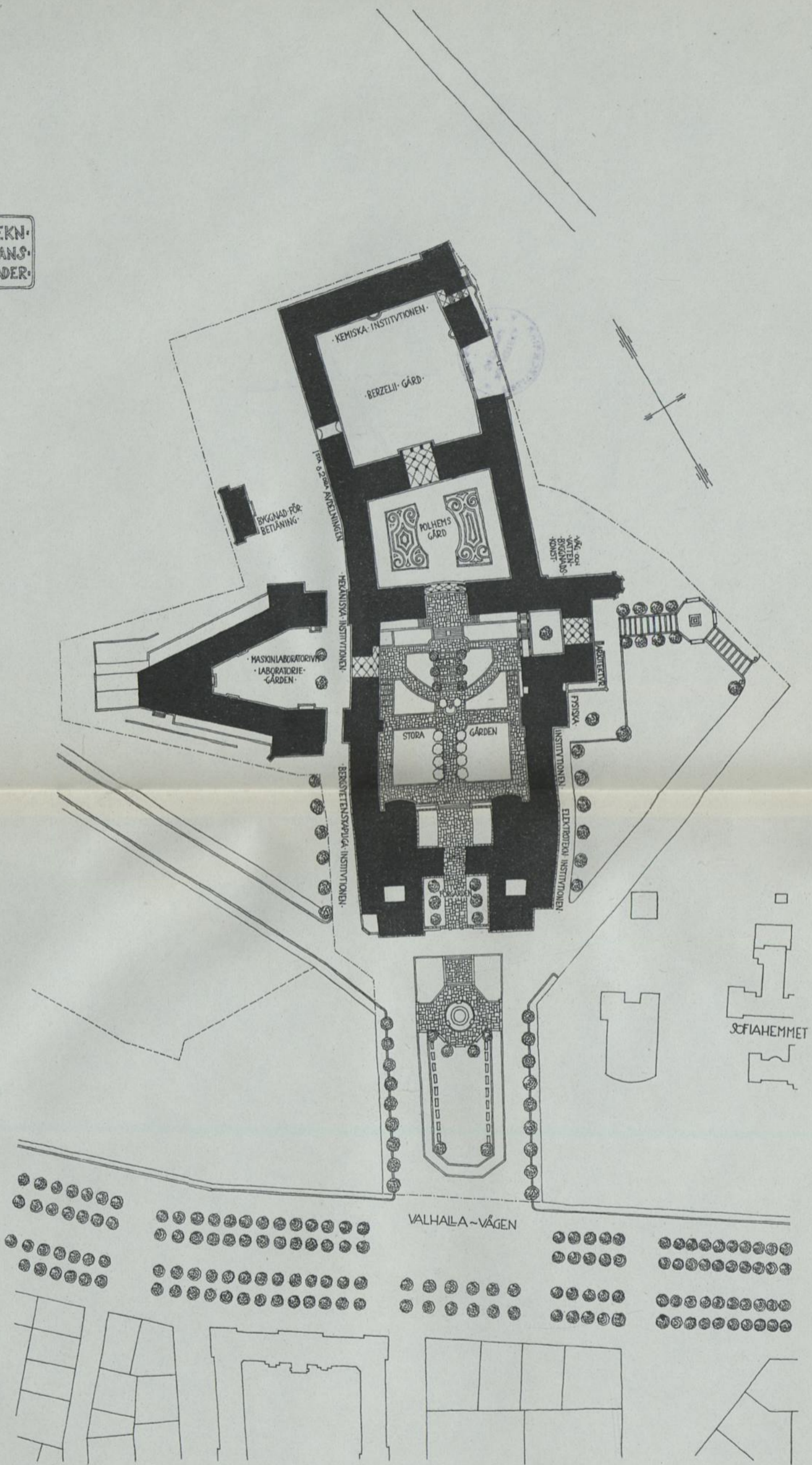
På arkitektkontoret sysselsatta med ritningar för högskolebyggnaderna hava varit anställda följande personer:

Under hela byggnadstiden arkitekt Carl Åkerblad, under de tre första åren arkitekten Karl Samuelson samt under större eller mindre del av byggnadstiden arkitekterna Evert Milles, Hugo Jahnke, Ture Ryberg och Martin Westerberg. De fyra förstnämnda av dessa hava huvudsakligen varit sysselsatta med byggnadsritningar, de två sistnämnda med ritningar till smide, armatur och möbler. Till alla står författaren i stor tacksamhetsskuld.

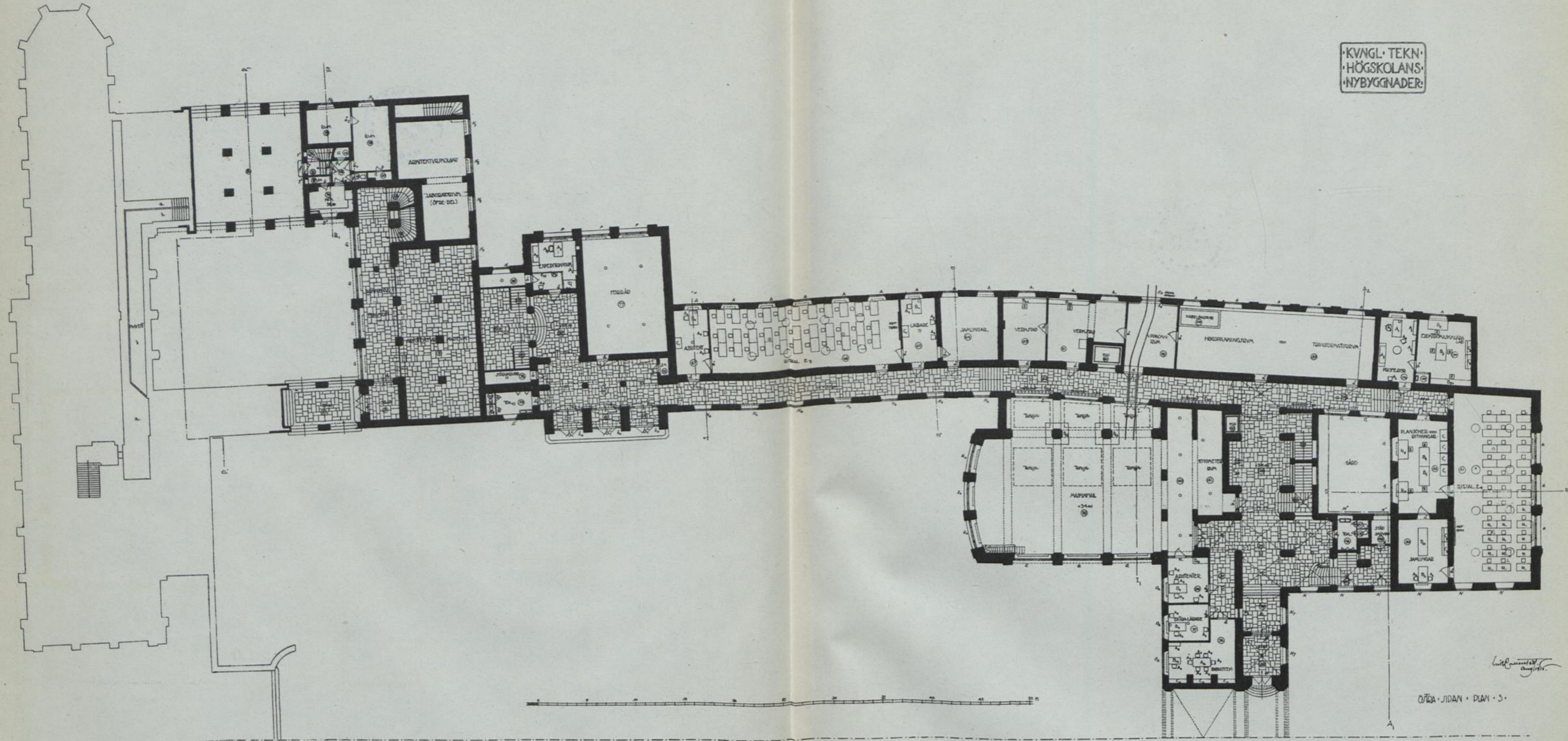
Förteckning över planscher.

- Pl. 1. Situationsplan för den fullständiga utbyggnaden.
- » 2—5. Planer av huvudbyggnadens östra del.
 - » 6—9. Planer av huvudbyggnadens västra del.
 - » 10—11. Planer av maskinlaboratoriet.
 - » 12. Fasaden mot Valhallavägen.
 - » 13. Fasad vid stora gårdens norra sida.
 - » 14. Fasad vid stora gårdens östra sida.
 - » 15. Fasad vid stora gårdens västra sida.
 - » 16. Fasader till maskinlaboratoriet.
 - » 17. Plan av hela utbyggnaden enligt ursprungliga tävlingsförslaget.
 - » 18. Östra yttre fasaden enligt ursprungliga tävlingsförslaget.

KVINGL. TEKN.
HÖGSKOLANS
NYBYGGNADER.

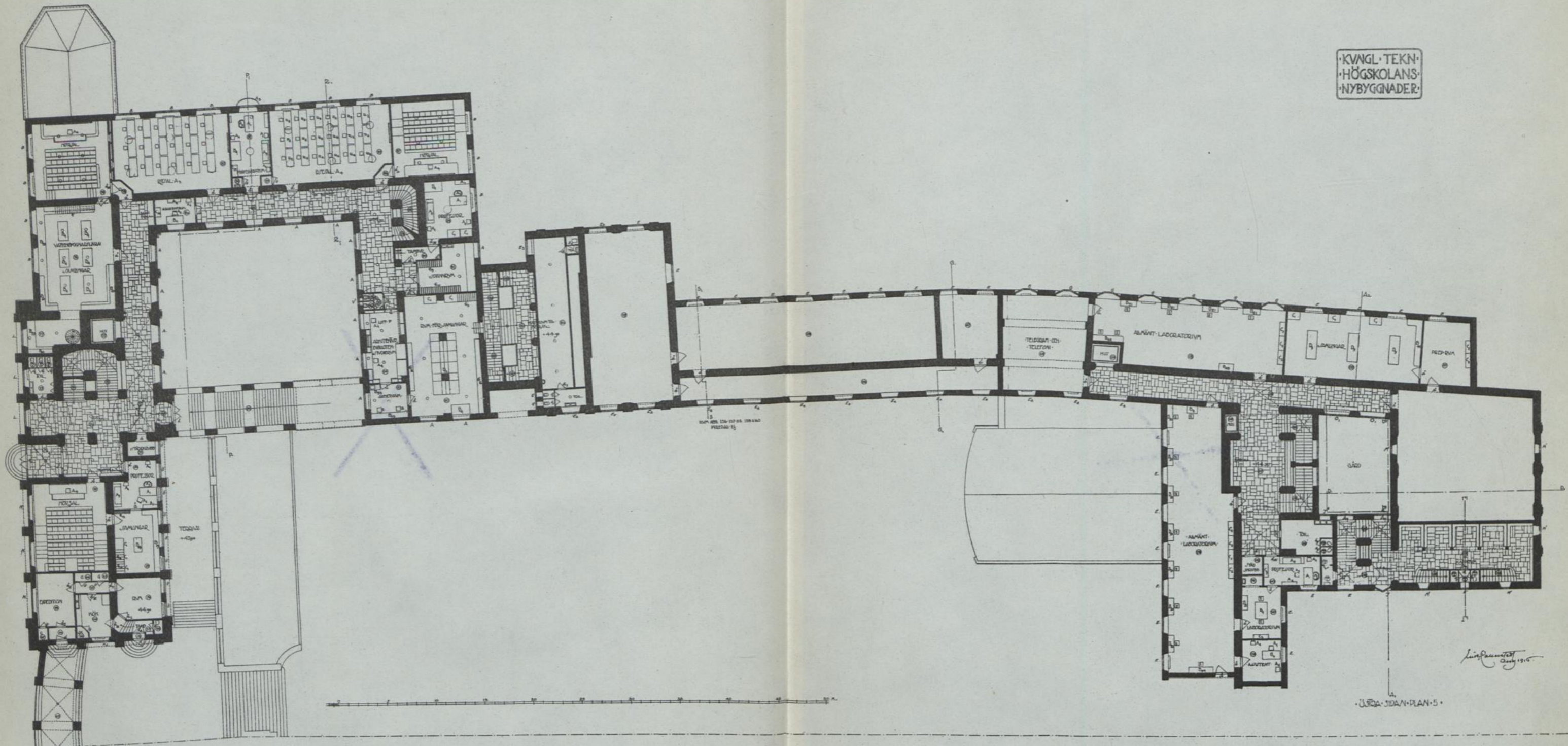


10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 150 200 250 300 METER



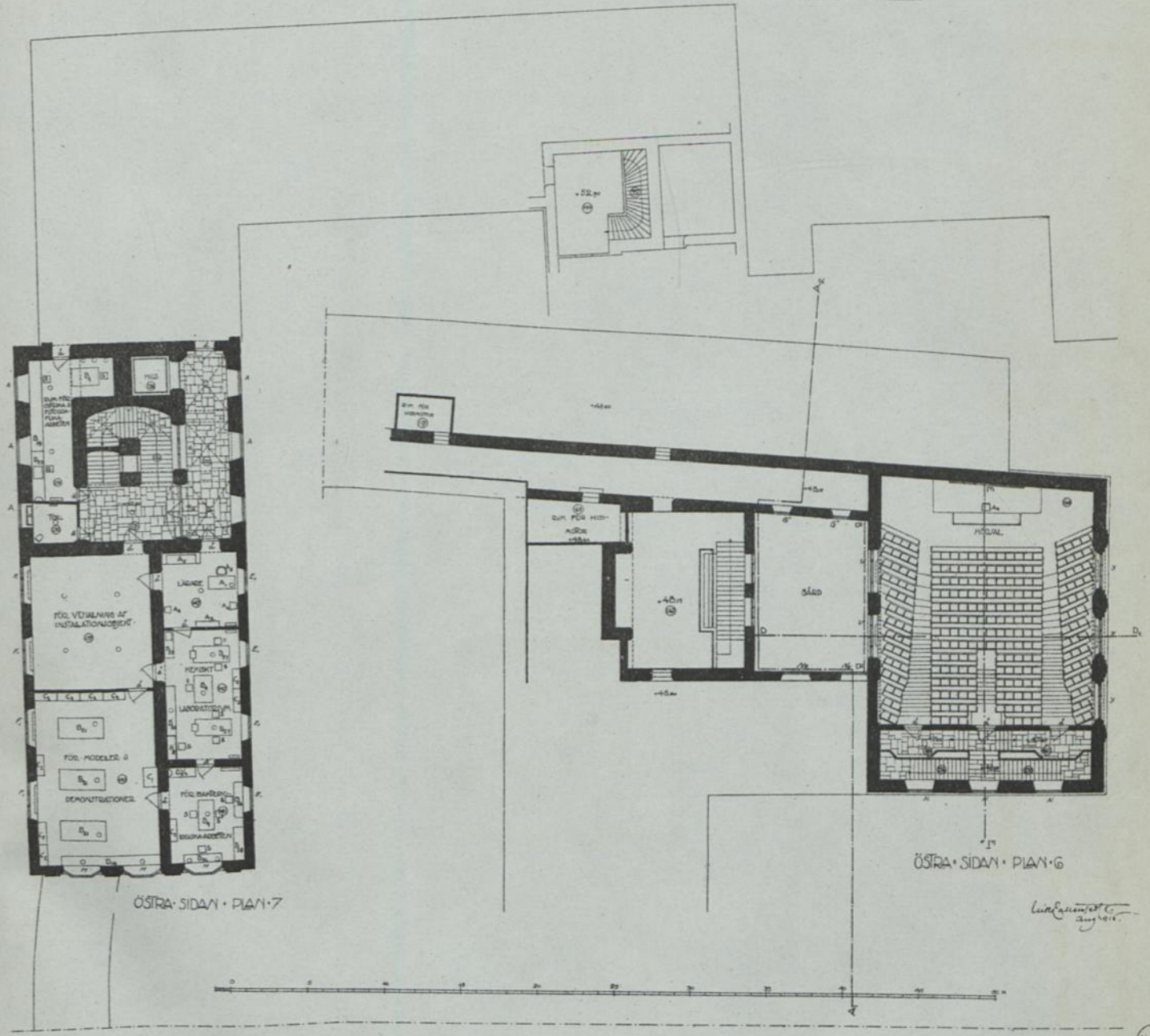
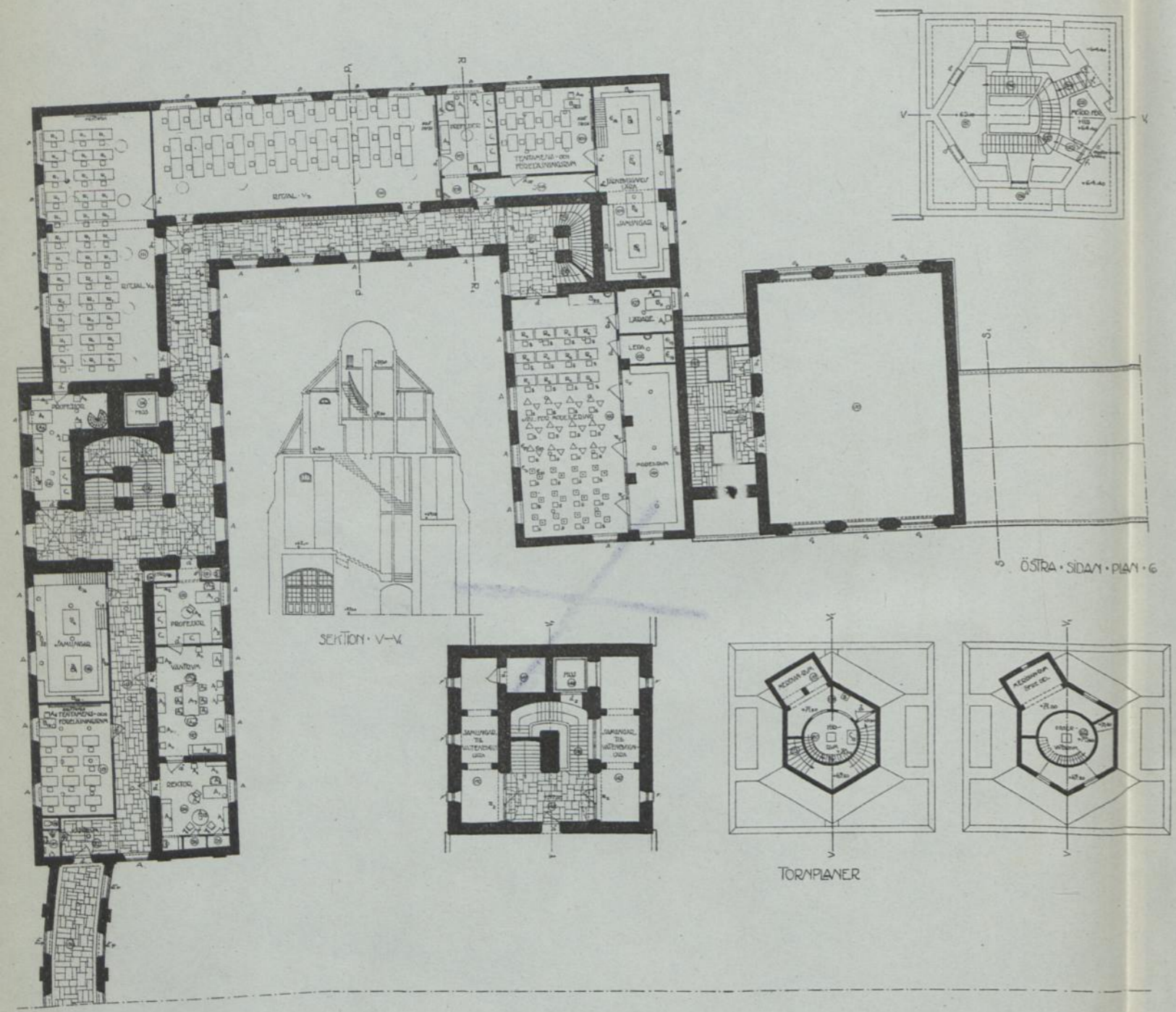
ÖRSTA SIDAN • PLAN • 3 •

KVINGL. TEKN.
HÖGSKOLANS
NYBYGGNADER.



• ÖFRÅ SJÄN PLAN 5 •

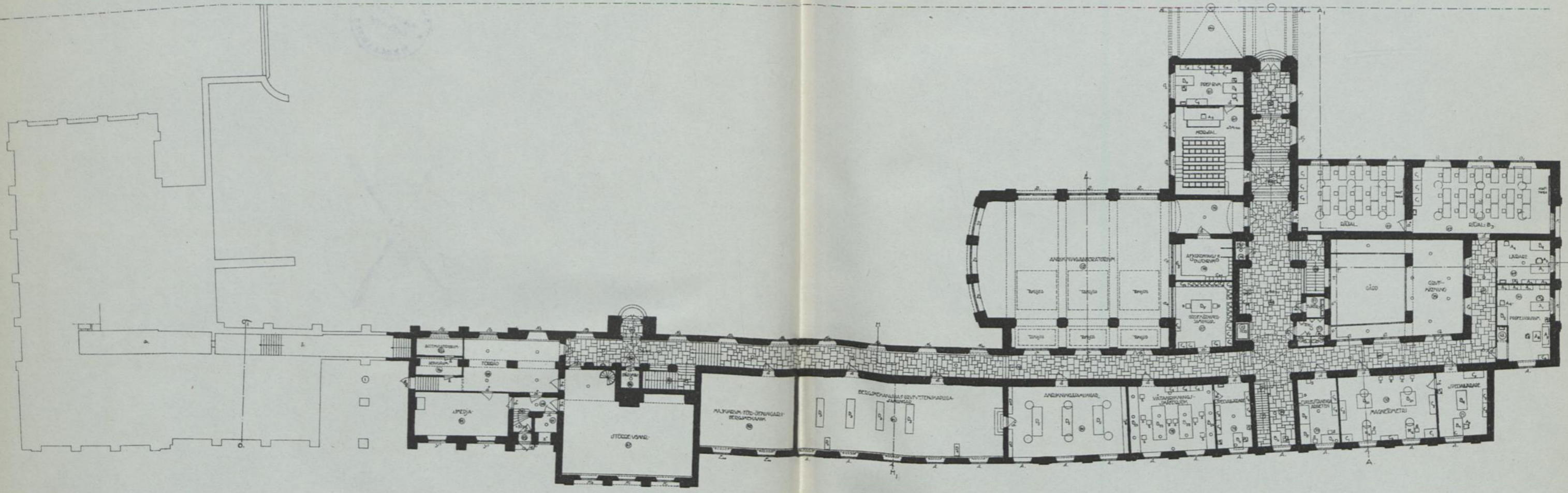
KVINGL. TEKN.
HÖGSKOLANS
NYBYGGNADER.



Lindqvist
1911

MHA

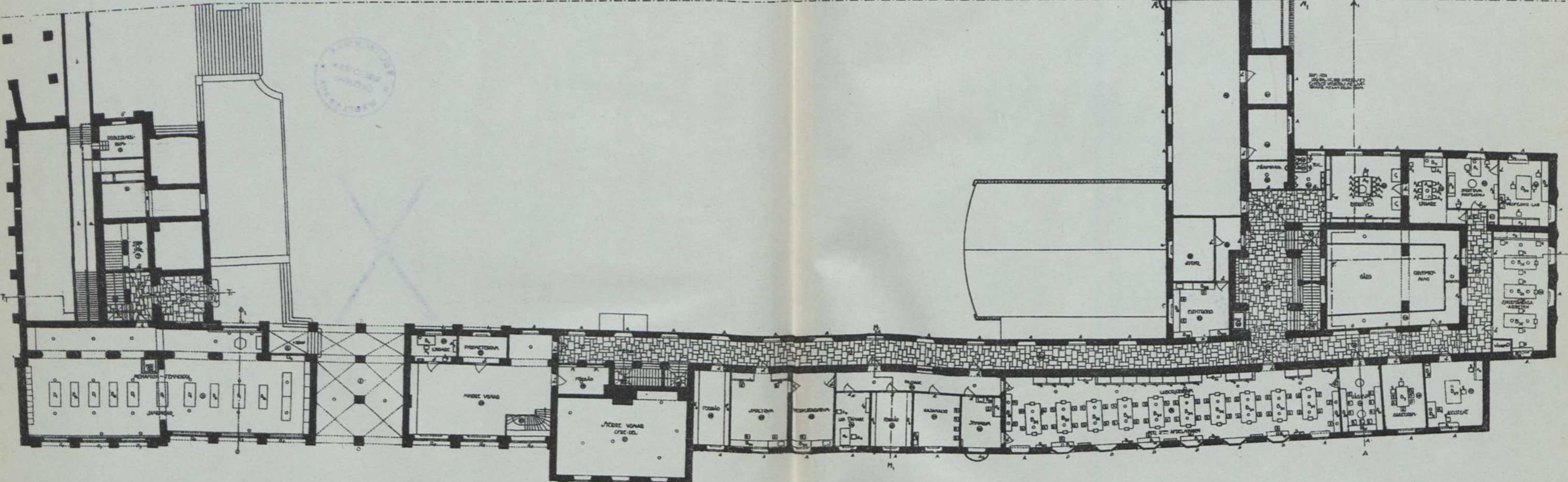
KVINGL. TEKN.
HÖGSKOLANS
NYBYGGNADER.



Handwritten signature

VÄSTRA SJÖAN PLAN 3

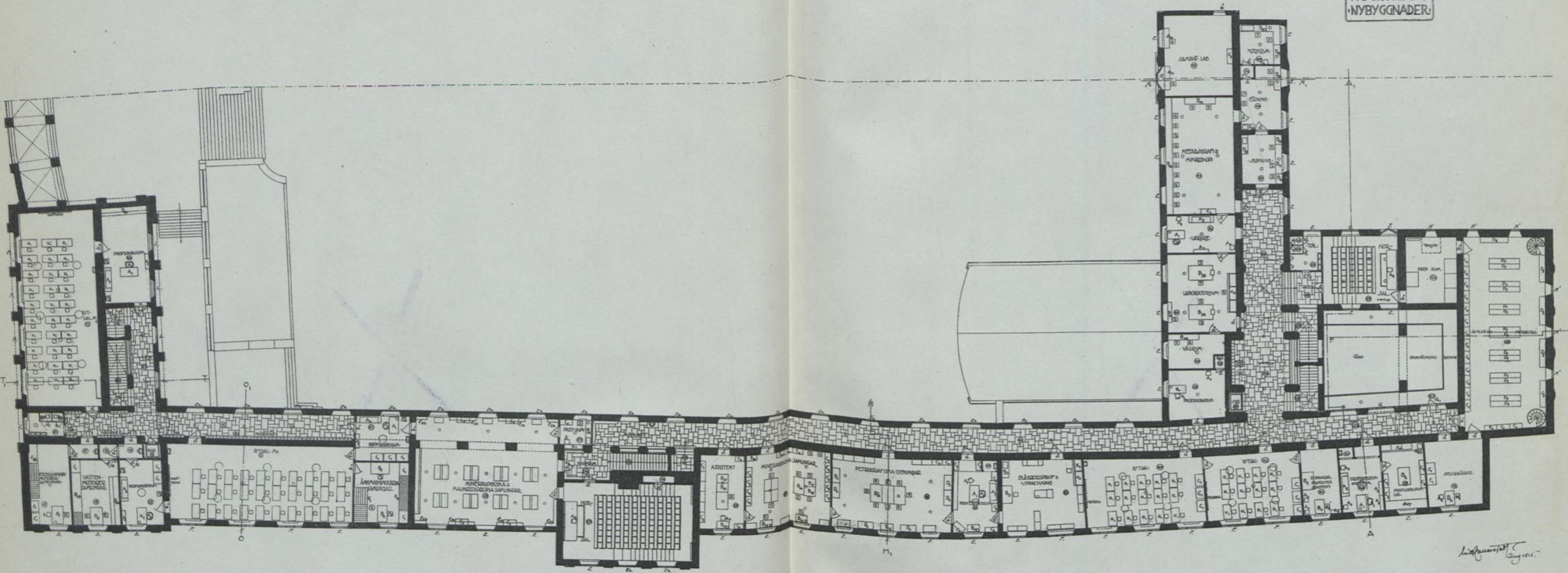
KVINGL. TEKN.
HÖGSKOLANS
NYBYGGNADER.



Handwritten signature

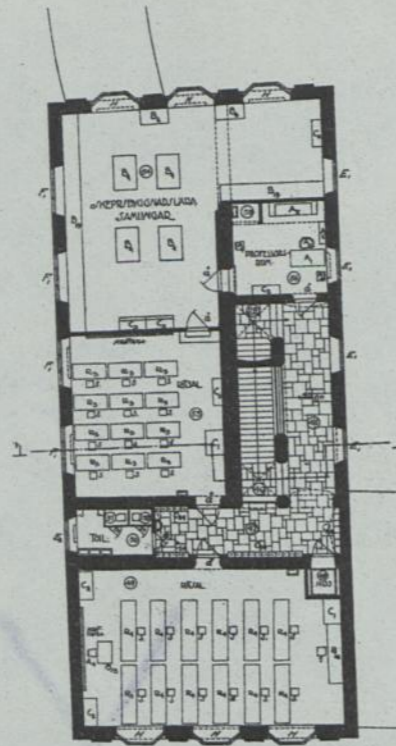
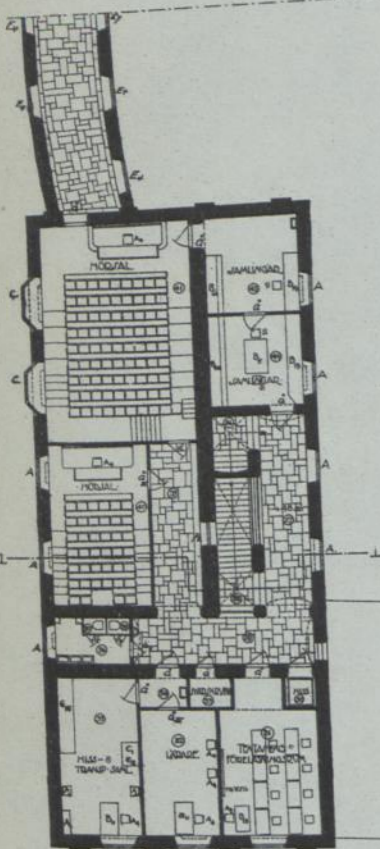
VÅRRE · JIDAN · PLAN · 4 ·

KVINGL. TEKN.
HÖGSKOLANS
NYBYGGNADER.

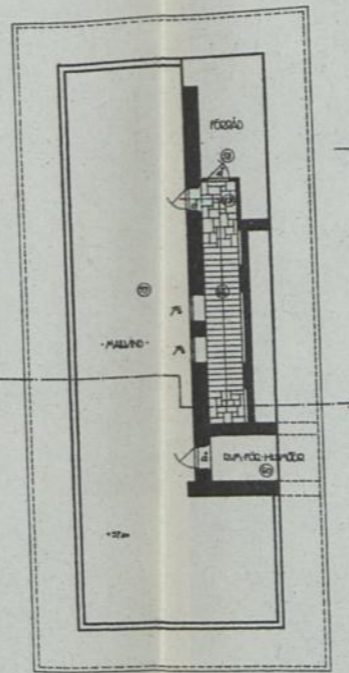


Lindqvist August

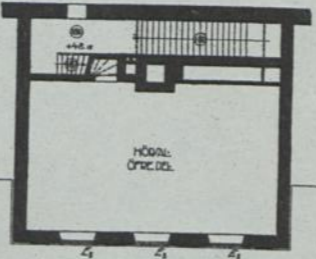
VÅRDA · JORDAN · PLAN · 5



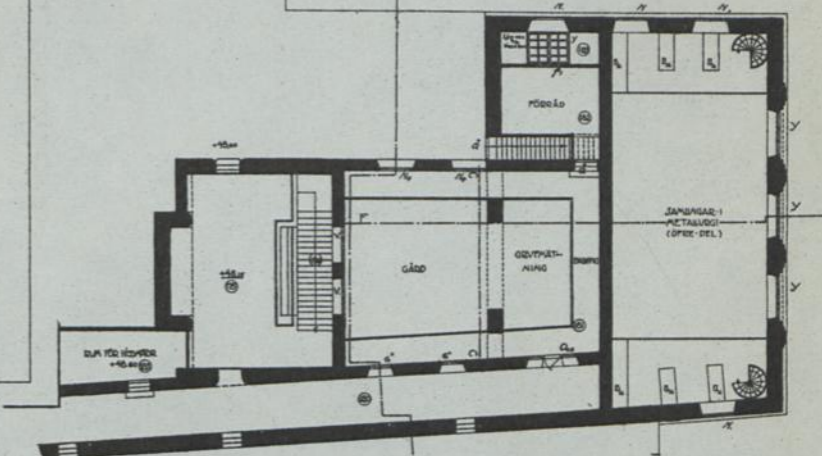
VÄSTRA SIDAN PLAN 7



VÄSTRA SIDAN PLAN B

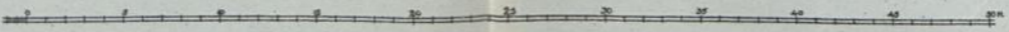


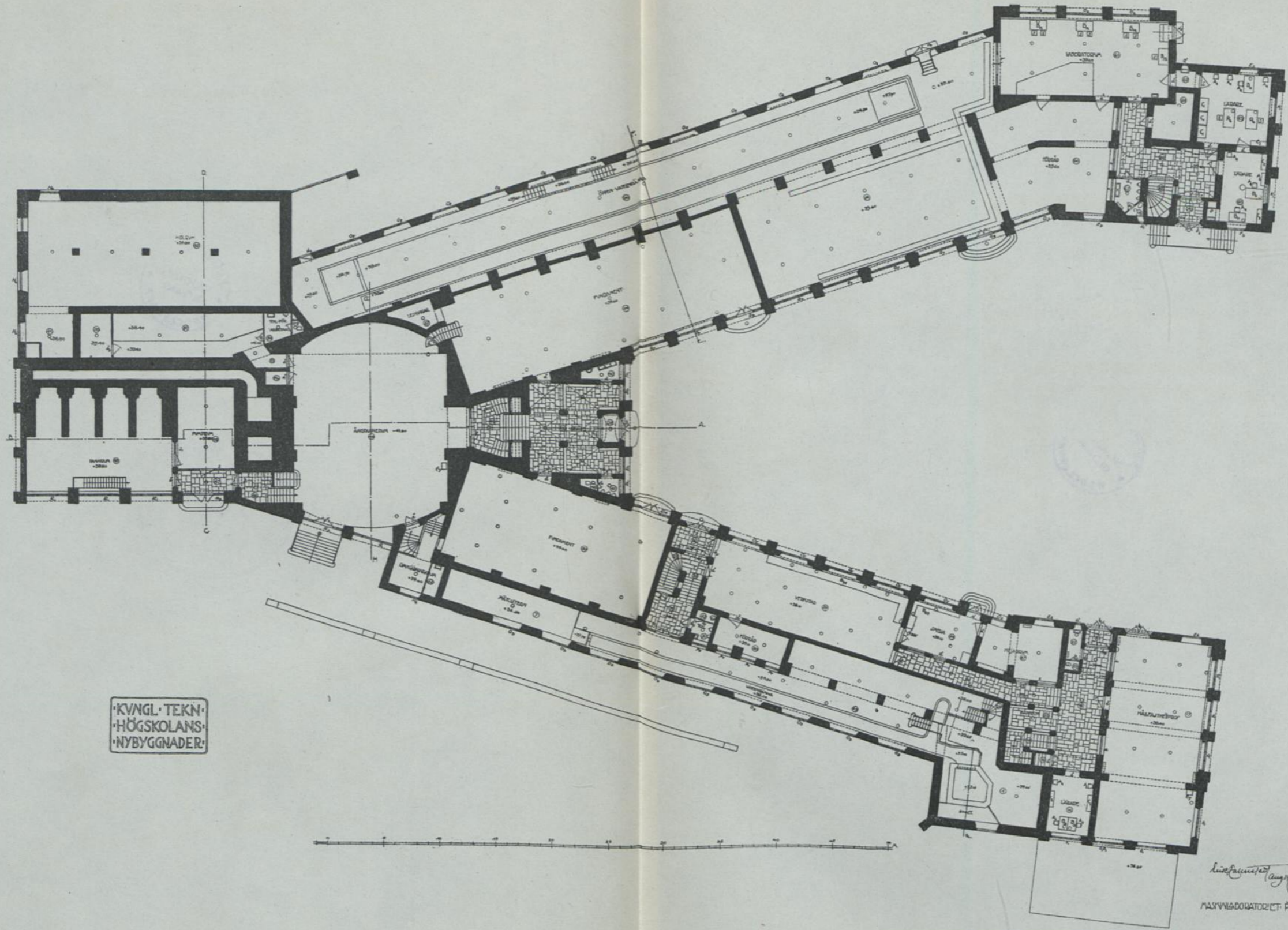
HÖRSAL
ÖSTRE ÖST.



VÄSTRA SIDAN PLAN 6

Linfors
Aug 1916.

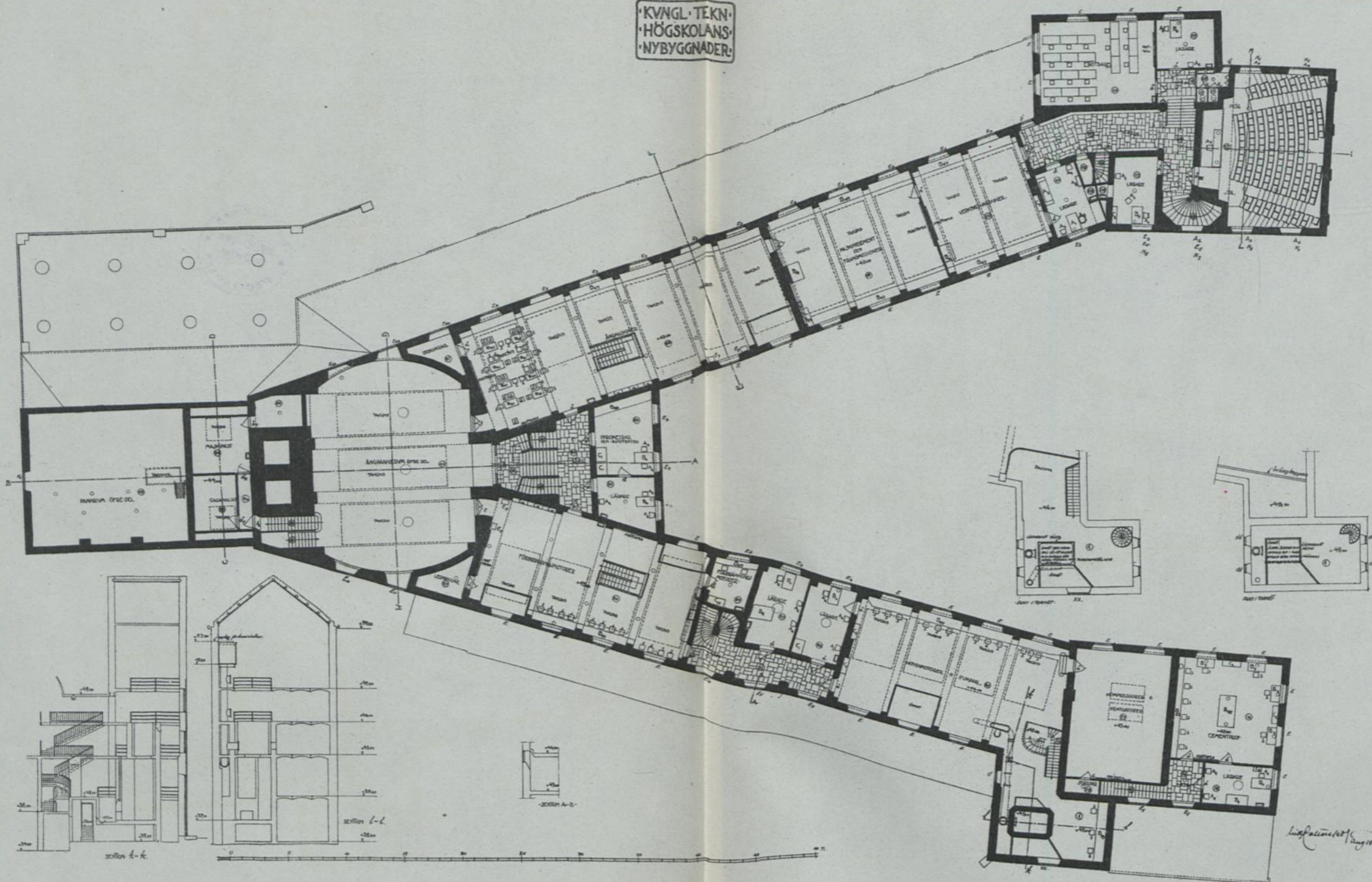




KVINGL. TEKN.
HÖGSKOLANS
NYBYGGNADER.

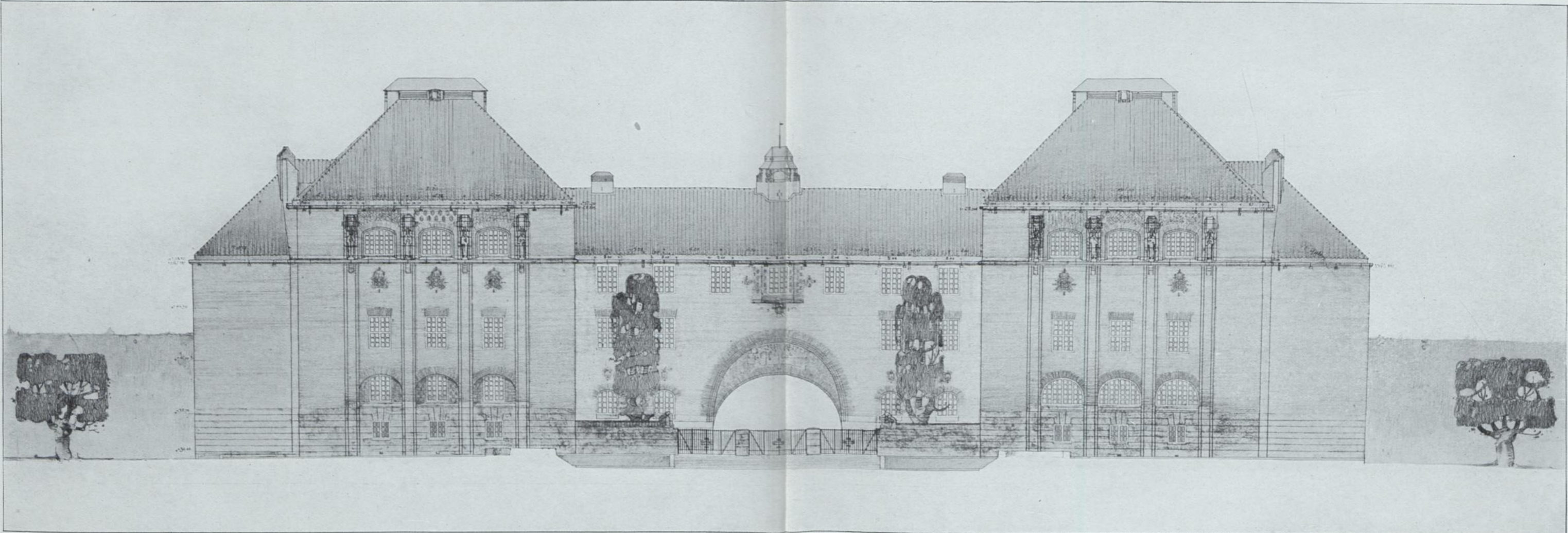
Antoni
1925
MÅTTAVELANDNINGEN: PLAN 2

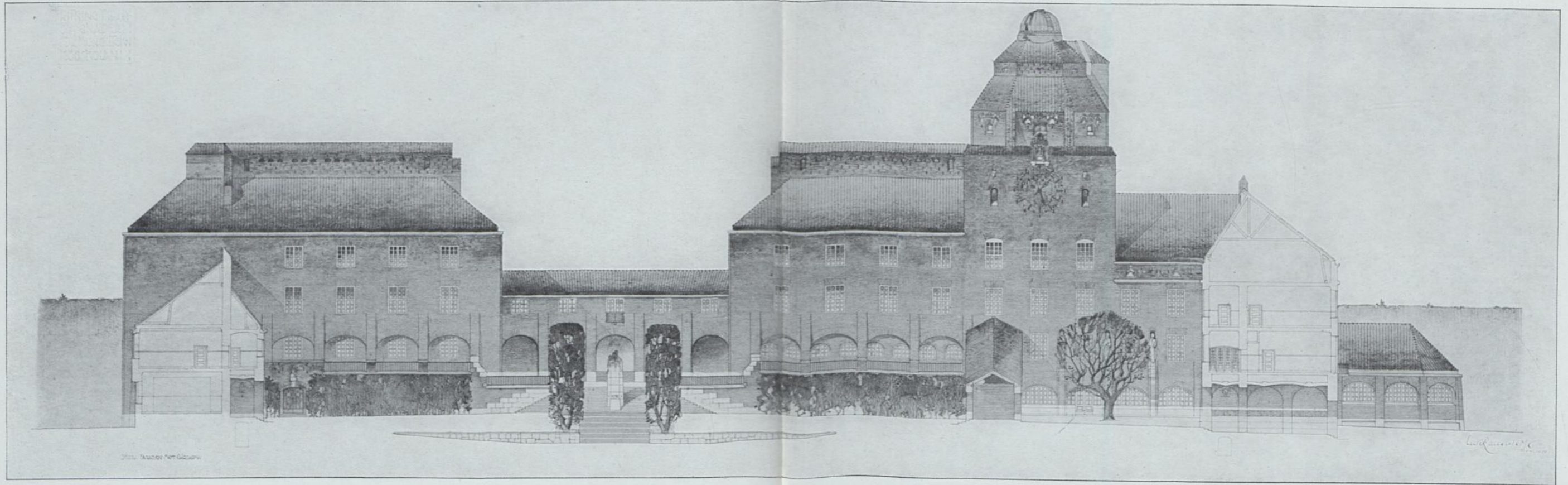
KVINGL. TEKN.
HÖGSKOLANS
NYBYGGNADER.



MASJINLABORATORIET PLAN 3

1926

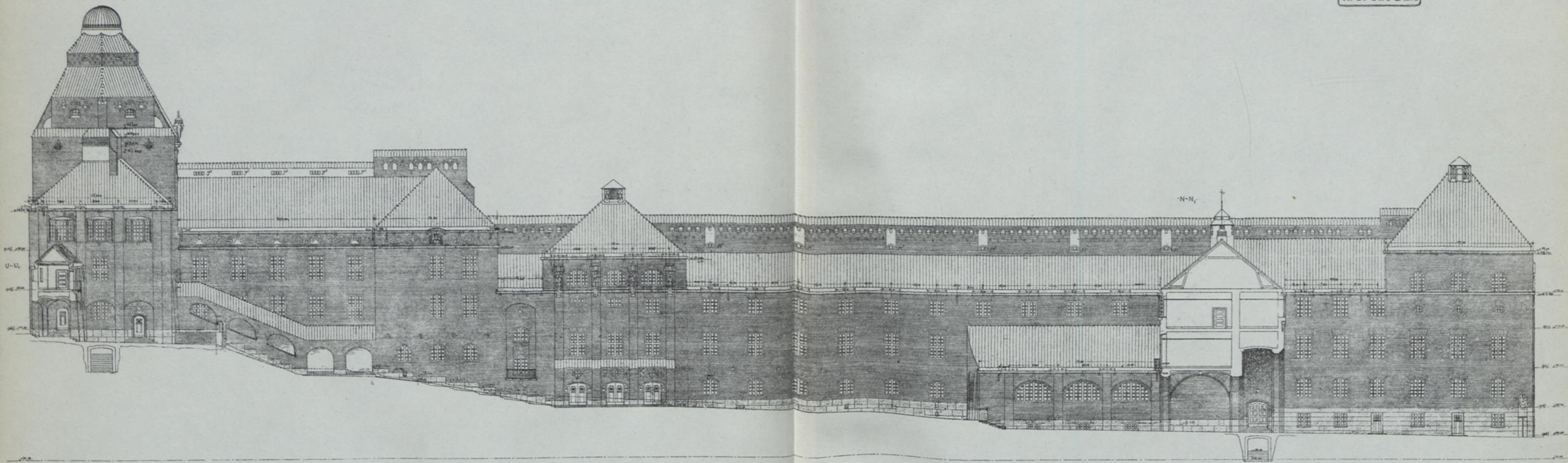




1851. Thomas H. Gibson

Wm. Russell & Co.

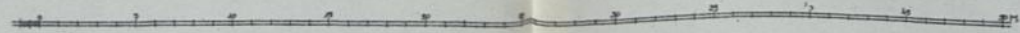
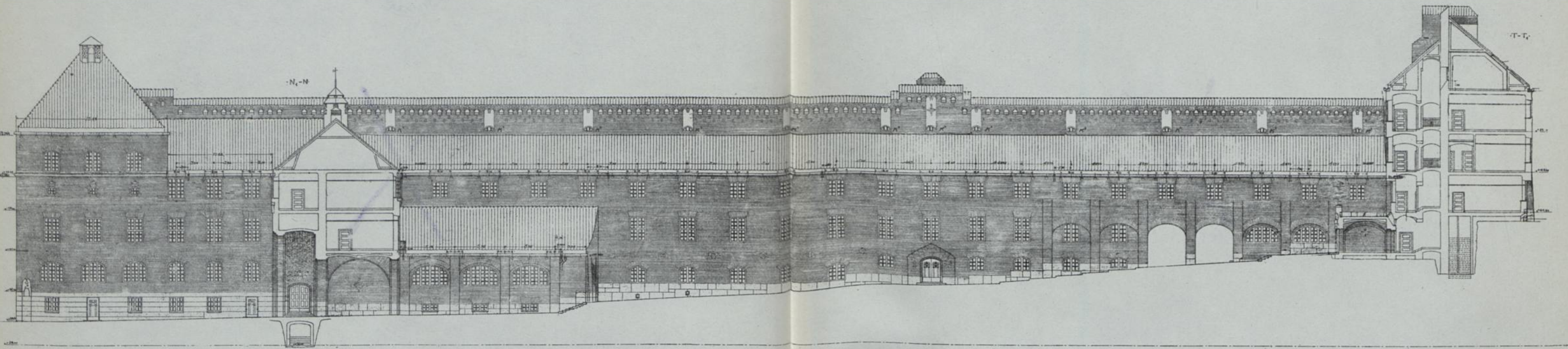
KVAVGL. TEKN.
HÖGSKOLANS
NYBYGGNADER.



Lindqvist
1887

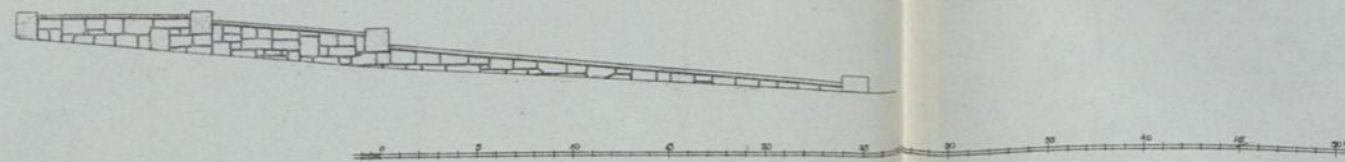
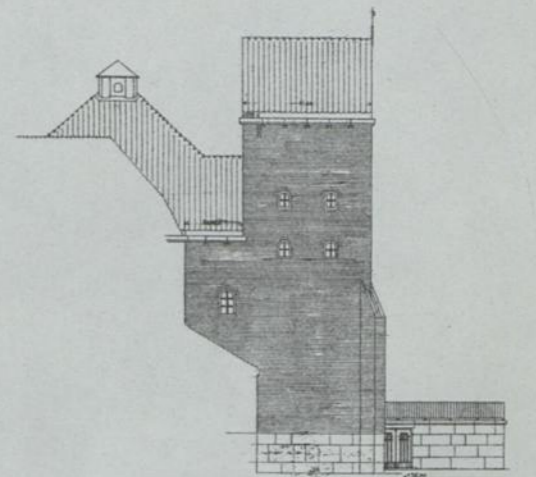
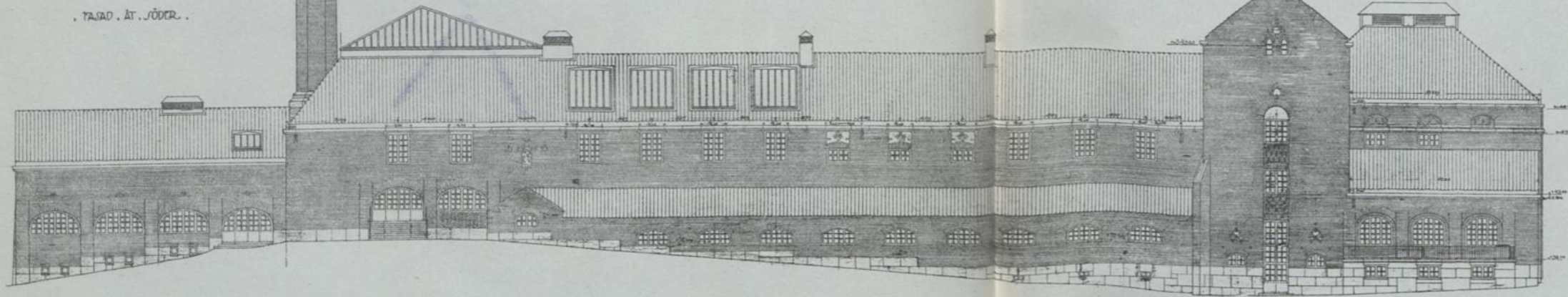
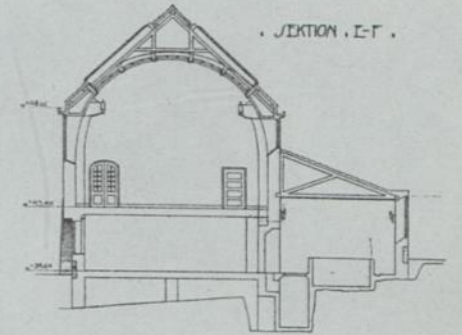
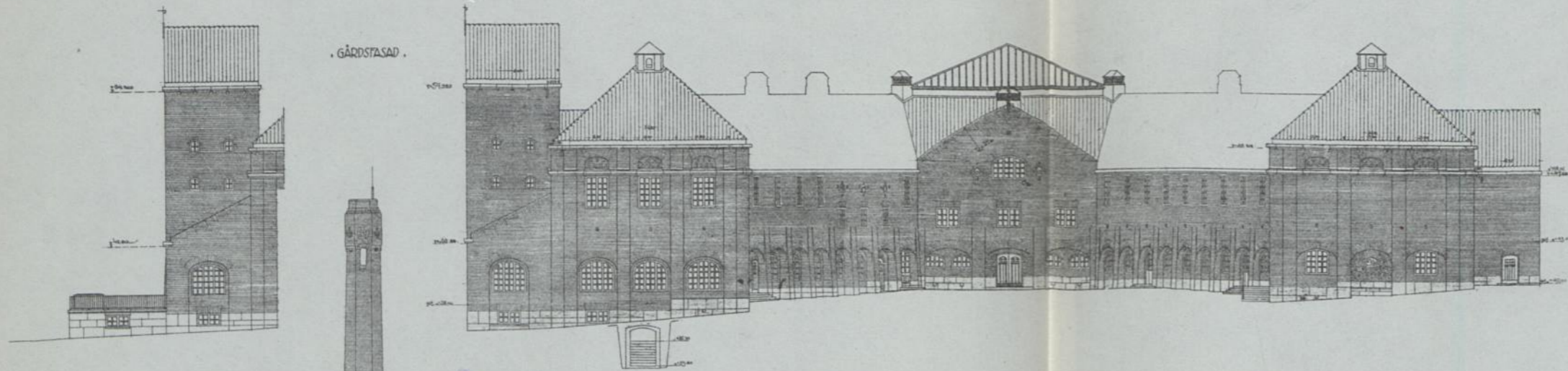
•GADDITVAD•

KVINGL. TEKN.
HÖGSKOLANS
BYGGNADER.



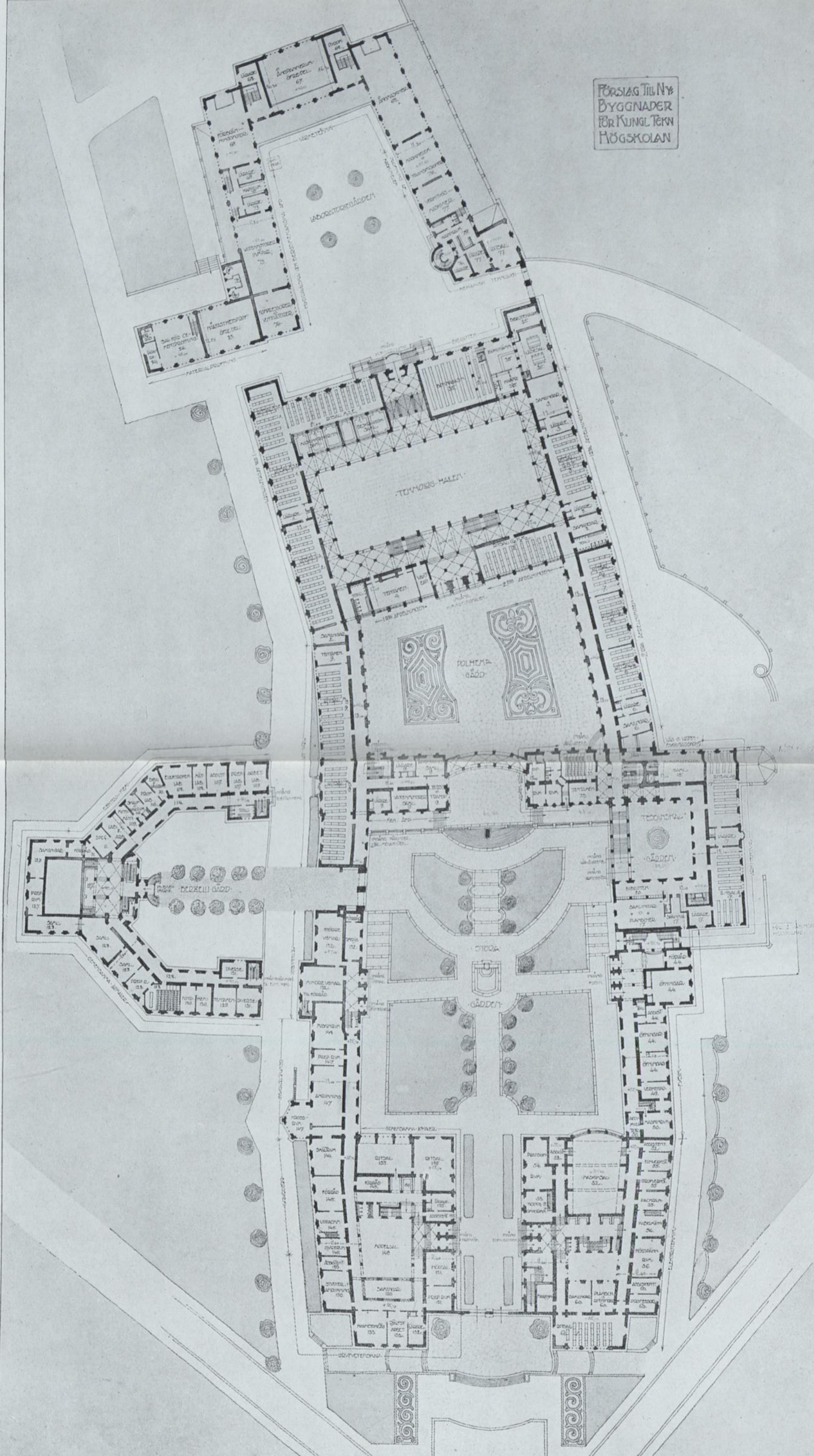
A. J. Palmström
GEN. STAB. LIT. ANST.

KVAVL · TEKN ·
HÖGSKOLANS ·
NYBYGGNADER

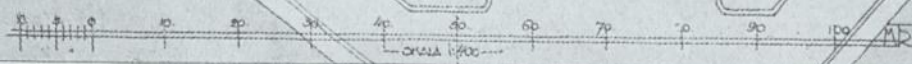


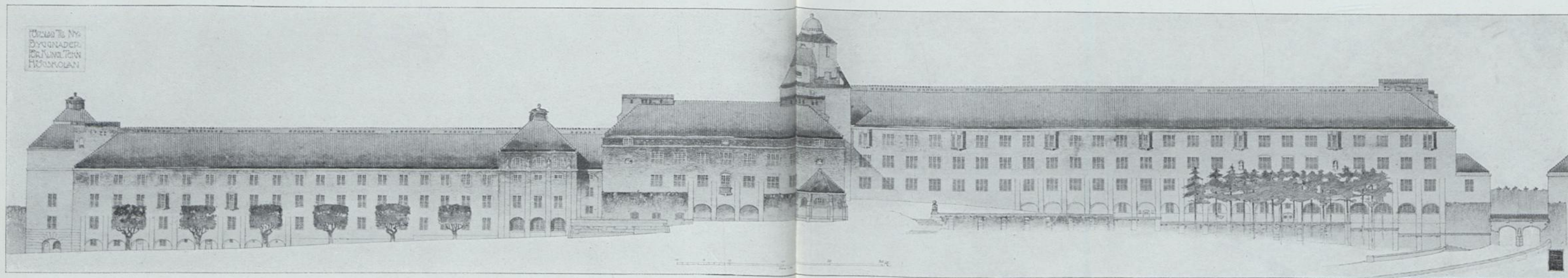
Sinfors
1895
MASKINLABORATORIET

FÖRSLAG TILL NYA
BYGGNADER
FÖR KUNGL. TEKN.
HÖGSKOLAN

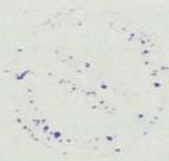


BOTENMÄNING





BESKRIVNING ÖVER NÅGRA AV KUNGL. TEKNISKA HÖG-
SKOLANS NYA LABORATORIER SAMT UPPVÄRMNINGS-
OCH VENTILATIONSSYSTEMET I NYBYGGNADERNA



VATTENBYGGNADSLABORATORIET VID KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN

AV

WOLMAR FELLENIUS.

Vattenbyggnadslaboratoriet vid nya tekniska högskolan vid Valhallavägen utgör en del av väg- och vattenbyggnadslaboratoriet, vilket är inrymt i och upptager större delen av bottenvåningen av den norra flygeln av den s. k. maskinlaboratoriebyggnaden. Väg- och vattenbyggnadslaboratoriet innehåller, utom de egentliga laboratorierummen, ett lärarorum, ett ritrum och ett förrådsrum med plats för en mindre instrumentverkstad o. d. De egentliga laboratorierummen äro tre, nämligen ett 15,1 m långt och 6,8 m bredt rum för järn- samt väg- och brobyggnadslaborationer, och tvenne rum, endast åtskilda genom en öppen pelarrad, för vattenbyggnadslaborationer.

Det är dessa båda sistnämnda rum, som bilda det egentliga vattenbyggnadslaboratoriet och som här, jämte däri befintliga och närmast tillämnade anordningar m. m., skola bliva föremål för beskrivning.

Det ena av dessa rum, det s. k. *rännrummet*, är 66,6 m långt och (utom nischer) 6,0 m bredt, det andra, det s. k. *sidorummet*, är 22,3 m långt och 9,1 m bredt. Se närmare pl. 1.

Rännrummet upptages till större delen av den 55,6 m långa, 3,0 m breda och 1,5 m djupa *huvudrännan* (A), som är utförd av armerad betong. På södra sidan om huvudrännan och utmed dennas hela längd är anordnad en 1,5 m bred *återgångsränna* (B), vars botten i allmänhet ligger c:a 3 m under rännrummets golv (se särskilt snitt c—c å pl. 2). Åt väster utmynnar återgångsrännan i en 6 m lång och i medeltal 2,5 m bred *pumpkammare* (C). Över västra ändan av huvudrännan är anordnad en *högreservoar* (D) av armerad betong, vilande på 4 betongpelare (pl. 2).

Huvudrännans botten ligger i allmänhet 0,6 m under rännrummets golv. Vid ändarna är rännbotten ytterligare försänkt: i västra ändan 0,25 m, för att lämna bättre plats för en eventuell framtida särskild utloppskammare för högreservoaren, och i östra ändan 1,0 m, huvudsakligen för att lämna rum för sanduppsamlingsanordningar o. d. Huvudrännans kanter ligger i allmänhet 0,9 m över rännrummets golv; vid västra ändan äro de uppdragna intill 0,76 m högre för att hindra översvämning vid häftigt utflöde från högreservoaren. Cirka 2,2 m från ändan av rännan är här anbringad en tvärvägg av armerad betong med avrundat och noga horisongerat krön. Detta krön ligger i jämnhöjd med huvudrännans normala kanthöjd. Genom denna, i viss mån provisoriska tvärvägg bildas en fast utloppskammare för högreservoaren, och tilloppet till huvudrännan kommer att ske över denna tvärvägg. Denna kommer att vid varje vattenstånd i rännan verka såsom överfallsdamm, varigenom sålunda den överrinnande vattenmängden blir oberoende av vattenståndet i rännan.

Ungefär midt på huvudrännans norra sidovägg är anordnat ett glasparti, bestående av 4 delar med vardera $1,3 \times 1,1$ m dageröppning och åtskilda med smala betongpelare (pl. 3). Midt för detta glasparti är golvet försänkt 1,2 m under golvhöjden i rännrummet och äro trappor till denna försänkning anordnade (pl. 1).

I huvudrännans sidoväggar och botten äro ett flertal falsar av U-järn N. P. 5 ingjutna. Av dessa avses de, som ligga närmast tilloppet, för insättande av silar eller dylikt för vattnets lugnande och för åstadkommande av jämnare strömningsfördelning. De övriga skola utgöra stöd för dammar o. d., som för vissa undersökningar komma att inbyggas i rännan.

I huvudrännans botten äro ingjutna 19 st. 50 mm:s järnrör, som äro utdragna till återgångsrännan. Dessa rör, som tillsvidare äro igenprop-pade, kunna framdeles fortsättas till önskad plats inom laboratoriet i och för observationer av vattenståndet på olika ställen i rännan.

Från försänkningen vid huvudrännans östra ända är *utloppet till återgångsrännan* anordnat (E). Detta består av en 600 mm:s ledning, som i återgångsrännan grenar sig i tvenne grenar, vardera försedd med en avstängningslucka (pl. 1 och 4)

I närheten av östra ändan av återgångsrännan är dennas botten å en längd av c:a 8,8 m förhöjd c:a 1,4 m över bottenhöjden i övrigt, och under denna förhöjning är den västra grenen av det nyssnämnda utloppet framdragen. Den östra grenen mynnar fritt i återgångsrännans östligaste del, där botten icke är förhöjd. Då luckan å den västra grenen av ut-

loppet är öppen och den östra grenen är stängd, rinner sålunda det från huvudrännan kommande vattnet under denna förhöjning; då tvärtom den västra grenen är stängd och den östra är öppen, rinner vattnet över förhöjningen och får då passera en vid förhöjningens västra ända insatt *mätningssdam* (F). Denna mätningssdam har triangulärt utskov för möjliggörande av noggrann mätning även av mindre framströmningsmängder. För vattnets lugnande, innan det framkommer till mätningssdammen, kunna silar nedsättas i vid förhöjningens östra ända anordnade falsar.

Vid sidan om förhöjningen finnas tvenne nischer eller brunnar för uppställande av vattenståndsmätningssinstrument o. d. Vid den västra av dessa är en registrerande vattenståndsmätare med elektriskt driven tidsdrumma uppställd. Denna mätare är anordnad för en höjdomsättning av dels 1:1, dels 1:5, och tidstrumman, som har en höjd av 500 mm och en omkrets av 742 mm, vrides, allt efter olika inställning, ett varv på resp. 4 min., 1 tim. eller 24 tim. Utom ritstiftet för vattenståndet äro tre ritstift med elektrisk överföring anordnade (t. ex. för sekundmarkering, för varvregistrering från instrument för vattenhastighetsmätning etc.).

Vid sidan om mätningssdammen finnes en nedgång, varigenom bl. a. erhålles tillfälle till observation från sidan av den från mätningssdammen kommande vattenstrålen.

I återgångsrännans fortsättning till pumpkammaren finnas tre falsar för sättnar o. d., t. ex. för uppmätning av vattenmängder vid bestämmande av mätningssdammens avbördningskurva.

Över återgångsrännan är anordnat golv av lösa plankor i vinkeljärnsfalsar, varigenom möjliggöres att var som helst frilägga rännan för utförande av där förekommande arbeten, observationer m. m.

I rännrummets södra vägg finnas 6 st. 0,8 m djupa rymliga nischer, vilka lämna skyddad plats för uppställning av diverse instrument o. d. I var och en av dessa nischer finnas tveñne »brunnar» med öppning till återgångsrännans övre del (snitt d—d å pl. 3). Till dessa brunnar kunna, bl. a. från de förutnämnda rören i huvudrännans botten och under golvet över återgångsrännan, dragas rörledningar för vattenståndsobservationer. I dessa brunnar kunna även uppställas med huvudrännan kommunicerande kärl, i vilka flottörer till registrerande vattenståndssvisare kunna anbringas.

Vid återgångsrännans västra ända är en vanlig registrerande vattenståndssvisare med urverksdriven tidstrumma uppställd. Denna avses huvudsakligen för registrering av arbetet i laboratoriet och av den tid, som pumparna äro i verksamhet etc.

Pumpkammaren och angränsande del av återgångsrännan äro överäckta med golv av armerad betong. På detta golv äro tvenne större och en mindre pump för vattenuppföring till högreservoaren uppställda. Pumpkammarens botten är vid pumparnas sugrör försänkt 0,5 m under bottenhöjden i återgångsrännan. Vid södra kanten av pumpkammaren finnes en ytterligare försänkning — den lägsta punkten inom laboratoriet — med 150 mm:s avlopp med avstängningslucka för tömning av hela systemet.

Pumparna äro direktdrivna elektromotorpumpar; de båda större 400 mm och 250 mm med en normal kapacitet av 400, resp. 125, lit/sek, den mindre 100 mm med en normal kapacitet av 20 lit/sek. Instrumenteringen för pumpmotorerna är uppställd vid sydvästra hörnet av rännrummet. Här finnes även instrumentering för ledningarna till de flyttbara mindre pumpmotorer, eller andra motorer, som eventuellt komma att anskaffas, och för vilka tvenne kontakter m. m. äro anbringade å rännrummets norra vägg.

Högreservoarens anordning och konstruktion framgår närmare av pl. 5. Själva reservoaren har invändigt måtten $4,60 \times 3,05$ m samt en vattenhöjd av 0,98 m; den rymmer sålunda c:a 13,7 m³. I densamma äro anordnade 7 st. bräddavloppsrännor av gjutjärn, vilka utmytna i en utefter hela reservoarens tvärsida gående 0,45 m bred samlingskanal, som vid ena ändan har ett 250 mm:s avlopp direkt till pumpkammaren. Högreservoaren är på östra, södra och västra sidorna försedd med en 0,6 à 0,8 m bred, av konsoler uppburen plattform, liksom reservoaren i övrigt av armerad betong.

Bräddavloppsrännorna äro försedda med justerbara kantlister av galvaniserat järn. Dessa kantlister äro noga inställda i samma höjd. Den sammanlagda bräddavloppslängden är c:a 42 m. Härigenom kan vattenståndet i högreservoaren även vid något varierande pumpmängd hållas praktiskt taget konstant.

Ledningarna från pumparna inmytna i högreservoarens västra sida med ett 400 mm:s munstycke i midten och 125 mm:s munstycke på vardera sidan. Inloppsöppningarna äro skilda från högreservoaren i övrigt genom en vinkelböjd silskärm av galvaniserad plåt och vinkeljärn, utförd i fem delar. Denna avses för lugnande av det inströmmande vattnet, den midtersta av dess delar, vilken står midt för 400 mm:s inloppet har mindre hål (15 mm) än de båda närstående delarna (20 mm). De båda yttersta silskärmsdelarna hava 25 mm:s hål. Genom igensättande, t. ex. med träpluggar, av en del hål i silskärmen kan dennas lugnande verkan regleras.

I högreservoarens botten finnas fyra utloppsmunstycken, alla med 250

mm:s diameter. Tre av dessa sitta över den i huvudrännan genom den förutnämnda tvärväggen bildade utloppskammaren för högreservoaren och fortsätts med korta lodräta 250 mm:s rörledningar, vilka trumpetformigt mynna något över botten i utloppskammaren. Överst å var och en av dessa tre utloppsledningar finnes en avstängningslucka av s. k. snabbstängningstyp. Spindlarna å dessa, vilka manövreras med hävstångsanordningar, äro fast förbundna med avstängningsskivorna, varigenom dödgång undvikes och luckornas öppningar noga kunna avläsas å därför anordnade skalor. Med dessa luckor regleras den till huvudrännan framrinnande vattenmängden. Vid försöks utförande pumpas alltid något mera (t. ex. 25 lit/sek) än denna vattenmängd, det överskjutande avbördas över bräddavloppen i högreservoaren. Även om pumpmängden skulle variera med 25 lit/sek, förorsakar detta en förändring av vattenståndet i högreservoaren av högst c:a 5 mm, och då nivåskillnaden mellan detta vattenstånd och vattenståndet i utloppskammaren håller sig emellan 2,65 och 2,45 m, kommer en dylik variation i pumpmängd att förorsaka en förändring av högst

$$100 \left(\sqrt{\frac{2,455}{2,450}} - 1 \right) = 100 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2450} - 1 \right) = 0,1 \%$$

i den till huvudrännan framrinnande vattenmängden.

Det fjärde utloppsmunstycket å högreservoaren fortsättes med en 250 mm:s rörledning, som går ned under golvet över återgångsrännan och sedan följer denna åt öster till sidorummet, där den böjer av åt söder och utmynnar upp genom golvet vid midten av sidorummets västra vägg (pl. 1). Här anordnas en utloppskammare med överfall, varigenom en konstant vattenmängd kan tillföras för i sidorummet anordnade försök.

Försök med strömmande vatten kan sålunda samtidigt utföras såväl i huvudrännan som i sidorummet utan störning sinsemellan, blott vederbörlig försiktighet iakttages vid pumparnas startande och vid större förändringar av de använda vattenmängderna.

På huvudrännans långsidor anbringas räls för en löpvagn. Denna skall erhålla en spårvidd av 3,2 m och utföras för elektrisk drift med en 14 hkr. elektromotor på vagnen samt med motorgenerator och regleringsanordningar uppställda vid ytterväggen vid rännrummets östra ända. Tillledningen av den elektriska strömmen till vagnen sker med 5 blanka kontaktledningar, förlagda vid taket vid rännrummets inre långvägg, och strömmen överföres till själva vagnen medelst 5 st. å en från vagnen utgående arm fästade strömavtagare. Regleringen av löpvagnens hastighet, vilken

på 10 m startlängd skall kunna uppdrivas till c:a 4 m/sek, sker sålunda genom en vid regleringsanordningen stationerad förare. Den eller de, som medfölja vagnen, kunna sålunda under rörelsen odelat ägna sig åt vederbörliga observationer. Rälisen å huvudrännan utdrages c:a 3 m öster om rännans östra ända och här uppställs löpvagnen, då den ej användes; den inkräktar sålunda ej då på utrymmet i rännan.

Under västra delen av *sidorummet* finnes en *lågreservoar* (G) med en rymd av c:a 100 m³. Denna är genom en betongvägg avskild från återgångsrännan, men står i förbindelse med denna förmedelst en i denna vägg anordnad öppning med 0,8 m diameter, vilken kan stängas med en skjutlucka (pl. 1 och 3).

Vattentillförseln från vattenledningen till laboratoriet sker direkt till denna reservoar genom en 100 mm:s rörledning med mätare. Härifrån utsläppes vattnet till återgångsrännan och går härifrån till pumparna och vidare till högreservoaren. Då förut i laboratoriet använt vatten skall magasineras i lågreservoaren (t. ex. för vattenbesparing vid tömning av återgångsrännan och pumpkammaren), öppnas en 150 mm:s avstängningslucka å en sidogren å den förutnämnda ledningen från högreservoaren till sidorummet, varvid vattnet direkt utrinne i lågreservoaren. Till förhindrande av överfyllning av lågreservoaren är densamma försedd med bräddavlopp, som utmynnar i återgångsrännan.

Utmed sidorummets norra, östra och södra sidor äro anordnade 0,5 m breda och c:a 0,8 m djupa golvrännor (pl. 1 och 3), vilka täckas med i vinkeljärnsfalsar vilande tvärgående plankstumpar. Utmed rännrummets östra sida är även en dylik golvränna anordnad. Dessa golvrännor stå i förbindelse med varandra och hava tvenne utlopp till återgångsrännan, nämligen ett utlopp öster (uppströms) om mätningssdammen och ett utlopp väster (nedströms) om denna (pl. 1). Dessa utlopp kunna avstängas genom i falsar anbringade sättar.

För försök, som skola utföras i sidorummet, är avsikten att där för varje förekommande fall anordna rännor o. d. efter varje olika undersöknings behov. Dessa rännor kunna antingen utföras direkt på sidorummets golv, varvid t. ex. flodbäddar, hamnar eller dylikt modelleras i vederbörlig skala, eller ock anordnas särskilda rännor av trä eller järn, vilande på bockar eller dylikt. Eventuellt kommer att anskaffas en järnränna, bestående av c:a 10 st. sektorformade delar med höjd 0,2 m, bredd 1,5 m och längd i ena kanten 1,35 m och i andra kanten 1,75 m, sålunda längd i midten = 1,5 m. Dessa delar förses med flänsar och hopsättas med skruvar. Då de-

larna därvid vändas växelvis åt motsatt håll, bildas en rak ränna, men genom att vända två eller flera delar efter varandra åt samma håll kunna krökningar efter behov och tillnärmelsevis efter t. ex. det vattendrag, som skall avbildas, åstadkommas. Även torde rännor med glasväggar komma att inrättas.

Vattentillförseln till dessa försök i sidorummet sker genom den förutnämnda 250 mm:s ledningen från högreservoaren, och vattnet utsläppes efter passerandet av försöksanordningen var som helst i de förutnämnda golvrännorna. Skall då mätning av den framrinnande vattenmängden ske, utsläppes vattnet från golvrännorna uppströms om mätningsdammen, i annat fall nedströms om denna.

Mätning av vatten från huvudrännan och från sidorummet kan sålunda ej ske samtidigt, men då mätning i regel ej behöver ske under hela den tid ett försök pågår, och då det i regel är tillräckligt att även vid ett under längre tid pågående försök endast då och då verkställa mätning av vattenmängden, är det tillräckligt att kunna växelvis använda mätningsdammen för tvenne på de båda ställena samtidigt pågående försök. Av det förut beträffande utloppet från huvudrännan meddelade framgår att möjlighet härför förefinnes.

På grund av försenade leveranser, men huvudsakligen på grund av brist på anslag av erforderliga medel, är laboratoriet ej ännu så utrustat, som vore önskligt. Vid projekterandet av byggnadsinredningen till det samma har jag emellertid haft som mål att bevara så många möjligheter som möjligt att kunna utföra försök av olika slag och lagt huvudvikten på att i detta hänseende få anordningen så tillfredsställande som möjligt. Härigenom har själva byggnadsinredningen kommit att sluka avsevärdt mera än det ursprungligen till utrustningen avsedda anslaget. Vad som sedan erhållits till utrustning, har erhållits från andra tillgängliga medel, och avsevärda delar av utrustningen hava tillkommit genom välvilligt mecenatskap.

Sålunda har den ena av de större pumparna (250 mm) skänkts av hrr Zander & Ingeström tillsammans med A.-B. de Laval's ångturbin, rören och avstängningsluckorna till 250 mm:s ledningen från högreservoaren till sidorummet och lågreservoaren av A.-B. Ahlsell & Ahrens, rälsen å huvudrännan med tillhörande bultar och klämplattor av A.-B. Järnvägsmateriel, vattenmätaren å tilloppsörledningen av A.-B. Svenska metallverken, omkring hälften av kostnaden för den mindre pumpen (100 mm) av A.-B. Elektro-

maskin, rören till denna pump jämte ett par 100 mm:s avstängningsluckor och en del andra 100 mm:s rör m. m. av A.-B. Rylander och Asplund, samt tvenne 250 mm snabbstängningsventiler av A.-B. Ankarsrums bruk.

Därjämte har jag efter hänvändelse till intresserade firmor, industrier m. fl. erhållit kontanta bidrag till laboratoriets utrustning, för vilka redogöres i annat sammanhang. Därigenom har möjliggjorts, att löpvagnen med tillbehör redan kunnat beställas, vilket eljes icke varit möjligt. Ännu inflyta dylika bidrag då och då, och det vore att hoppas, att laboratoriet därigenom rätt snart skall bliva väl utrustat samt i stånd att fullt fylla sin uppgift och försvara en plats vid sidan av motsvarande utländska anläggningar.

Det återstår att tillägga några ord beträffande laboratoriets användning och något om arten av de olika försök, som i första hand kunna komma till utförande i detsamma.

I *huvudrännan* kunna i *stillastående vatten* utföras försök med vattenhastighetsmätningssinstrument av olika slag (flyglar etc.), nämligen dels bestämning för praktiskt bruk av konstanter för dylika (hydrometrisk provningsanstalt), dels undersökningar av inverkan bl. a. av olika skovelformer och av flyglarnas snedställning i förhållande till strömriktningen. Vidare kunna motstånden vid kroppars framförande i vatten, resp. rinnande vattens stöt mot i vattnet nedsänkta föremål, undersökas. Därjämte kan huvudrännan med stillastående vatten användas för skeppsbyggnadslaborationer och propellerförsök i mindre skala.

I *huvudrännan* med *rinnande vatten* kunna utföras dels undersökningar beträffande strömningshastighetens variation inom olika formade sektioner och beträffande inverkan å strömningen i vattendrag genom byggnader av olika slag (t. ex. brofästen och pelare), dels försök för bestämmande av avbördningsförmågan hos dammar och luckor av olika slag. Särskilt torde härvid avbördningsförmågan hos grunddammar och inverkan å densamma av nedre vattenytans variation bliva föremål för studier. Huvudrännan avses sålunda huvudsakligen för *hydrodynamiska undersökningar*, men eventuellt kunna även i densamma inbyggas modeller av vattendrag o. d., varigenom densamma även kan komma till användning för *vattenbyggnadsförsök*. Den kan även användas för studier av vågrörelser.

Sidorummet avses — såsom av det föregående framgår — huvudsakligen för *vattenbyggnadsförsök*, såsom t. ex. undersökningar beträffande flodregleringsarbetens inverknings på strömningen och erosionen och be-

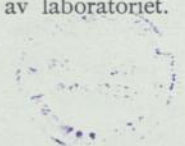
träffande åtgärder för förebyggande av kustströmmars skadliga inverkningar, men kan givetvis även komma till användning för åtskilliga slag av kombinerade vattenbyggnads- och hydrodynamiska försök, t. ex. undersökningar beträffande fyllning och tömning av slussar. Vidare torde i sidorummet komma att uppsättas apparater och anordningar för undersökningar av vattenmätare o. d., för filtreringsförsök etc.

Å ledningen emellan högreservoaren och sidorummet kunna utföras undersökningar beträffande tryckförlust i slutna ledningar, och andra anordningar för dylika försök kunna även lätt åstadkommas.

I samband med laboratoriet kommer även att inrättas ett mindre *geotekniskt laboratorium* för undersökningar av jordprov, särskilt leror o. d., jordtrycksförsök etc.

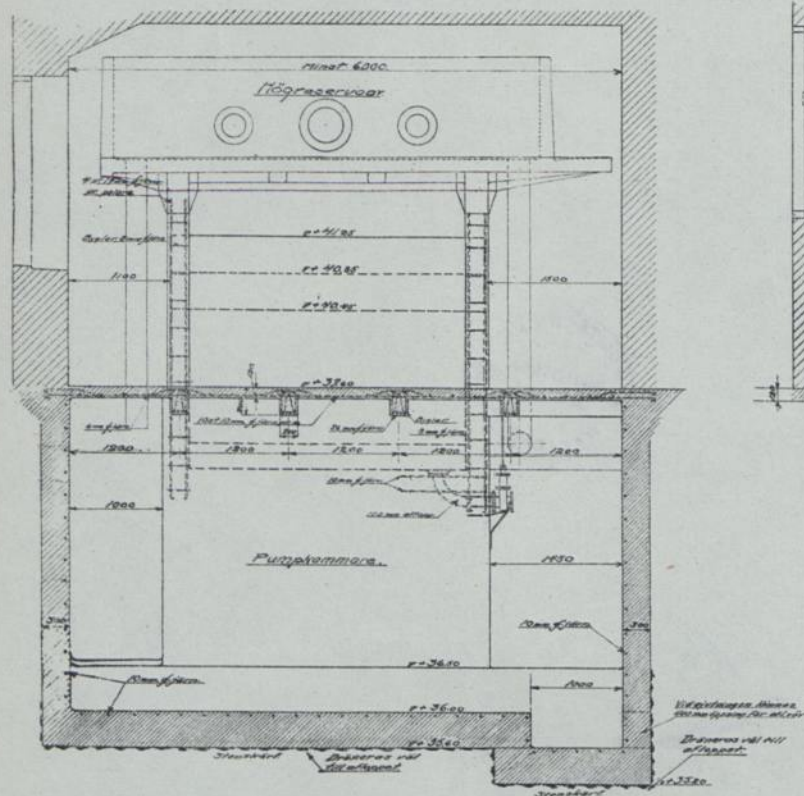
Stockholm i december 1917.

Förteckning över planscherna.

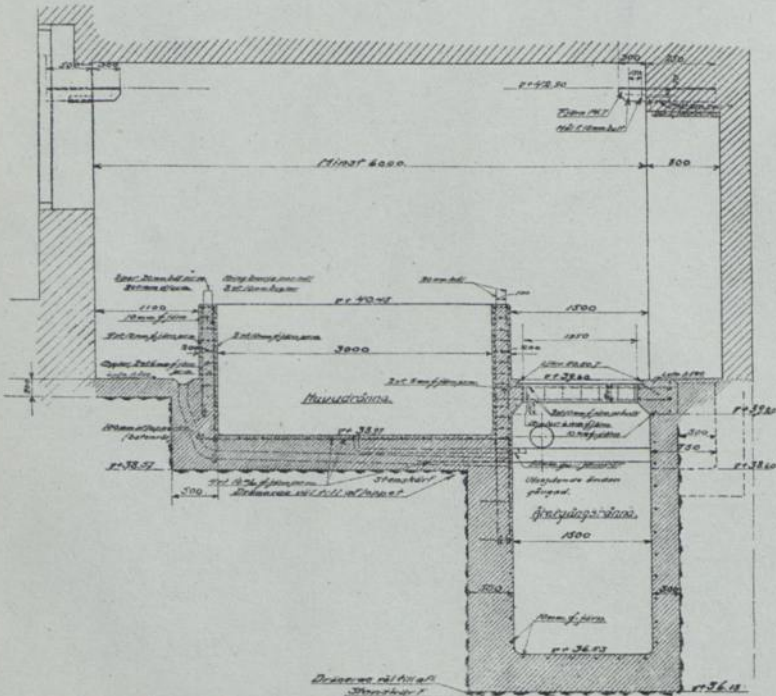
- Pl. 1. Plan och längdsektioner av laboratoriet.
» 1—4. Tvärsektioner m. m.
» 5. Högreservoar.
- 

BYGGNADJÄNREDNING FÖR VATTENBYGGNADSLABORATORIET VID KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLANS NYBYGGNAD.

Snitt a-a

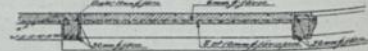
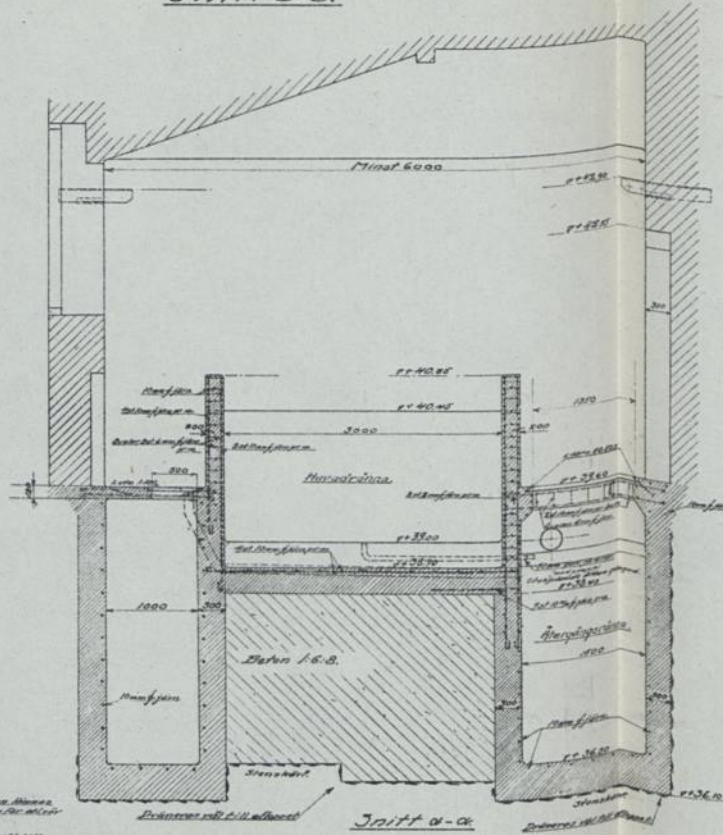


Snitt g-g

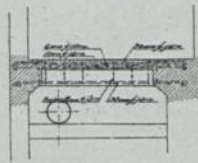


DETALJER.

Snitt b-b



Snitt β-β

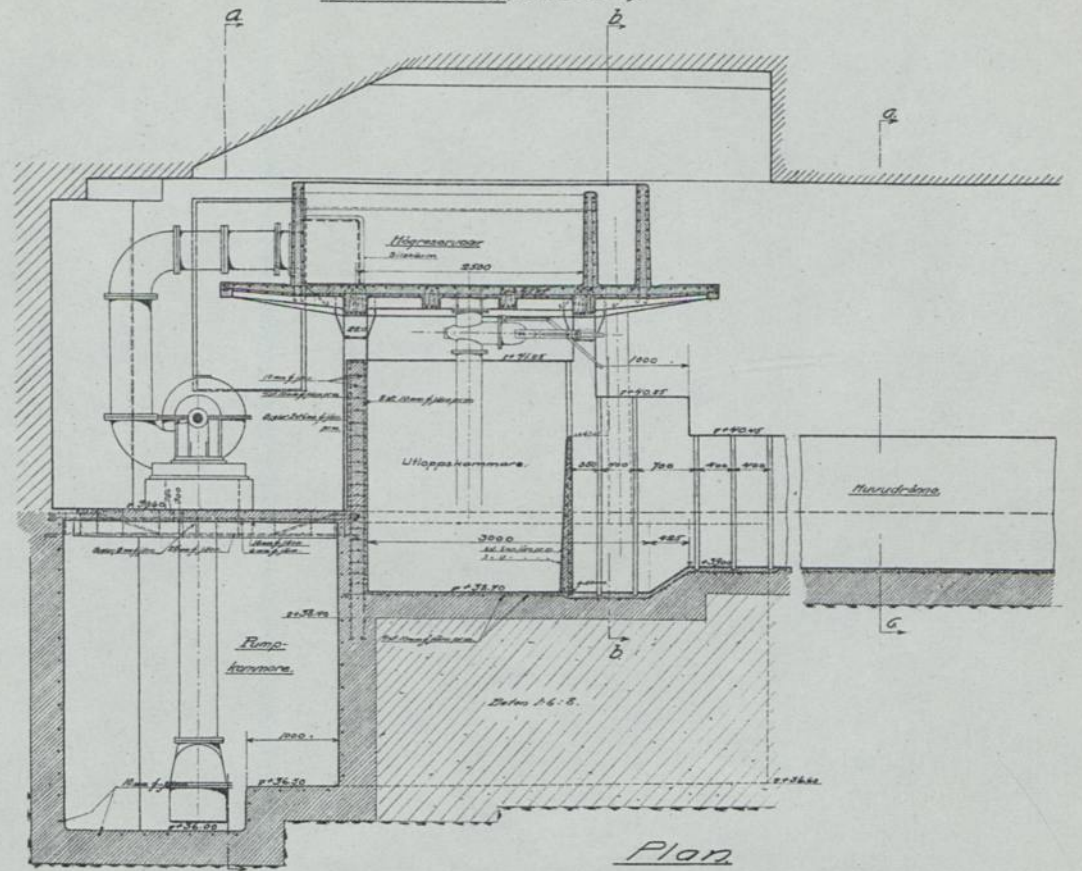


Deton i rännor, reservoarer golv och bjälklag 1:25.3
 För utförande af rännor, reservoarer mm gälla:
 1. att rännorna äro direkt på eller med lästa
 bottenfickor minst 100 mm,
 raggfickor med tjocklek 300 mm, minsta ragg
 tjocklek 100 mm.
 2. att bjälklaget äro direkt på eller med lästa
 bottenfickor 400 mm,
 raggfickor 300-350 mm, alltså ragg
 tj. 3 angifva.
 3. att golvets sluttning äro med lästa förhållanden
 säkerhet med, och utlösa manövrer med
 passande och rege. botten och ragg
 i ändring 1:5.8.

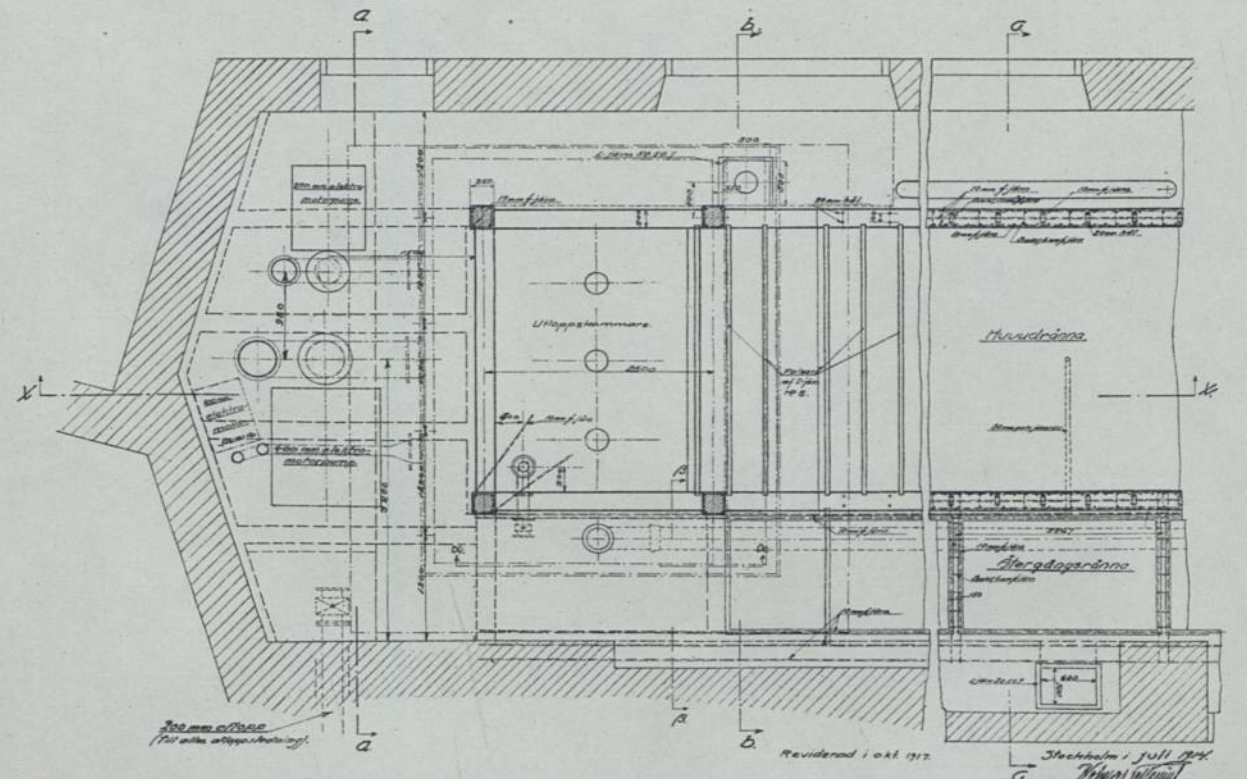
Skala

Håll 4 vägg, botten och angifva
 rege. facklar med 1 cm. cersip
 medräknad.

Snitt X-X (västra delen)

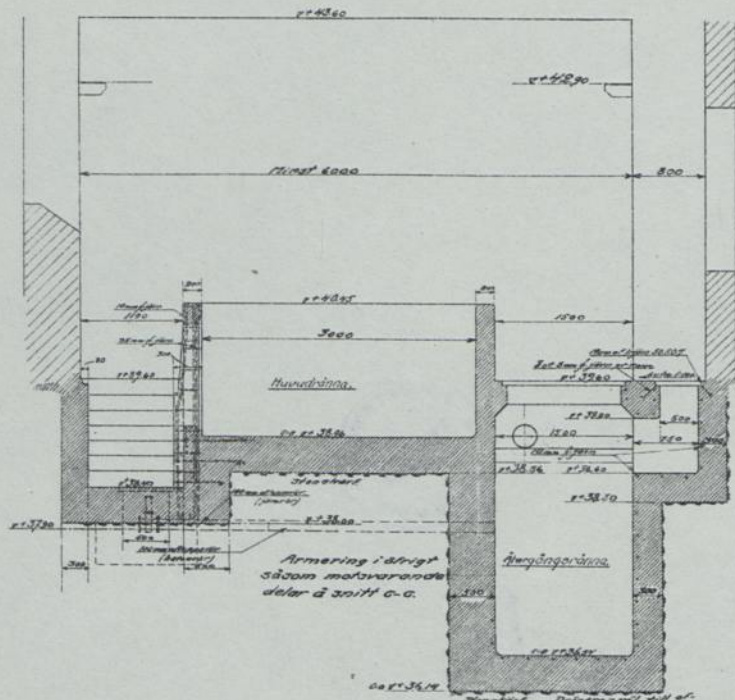


Plan

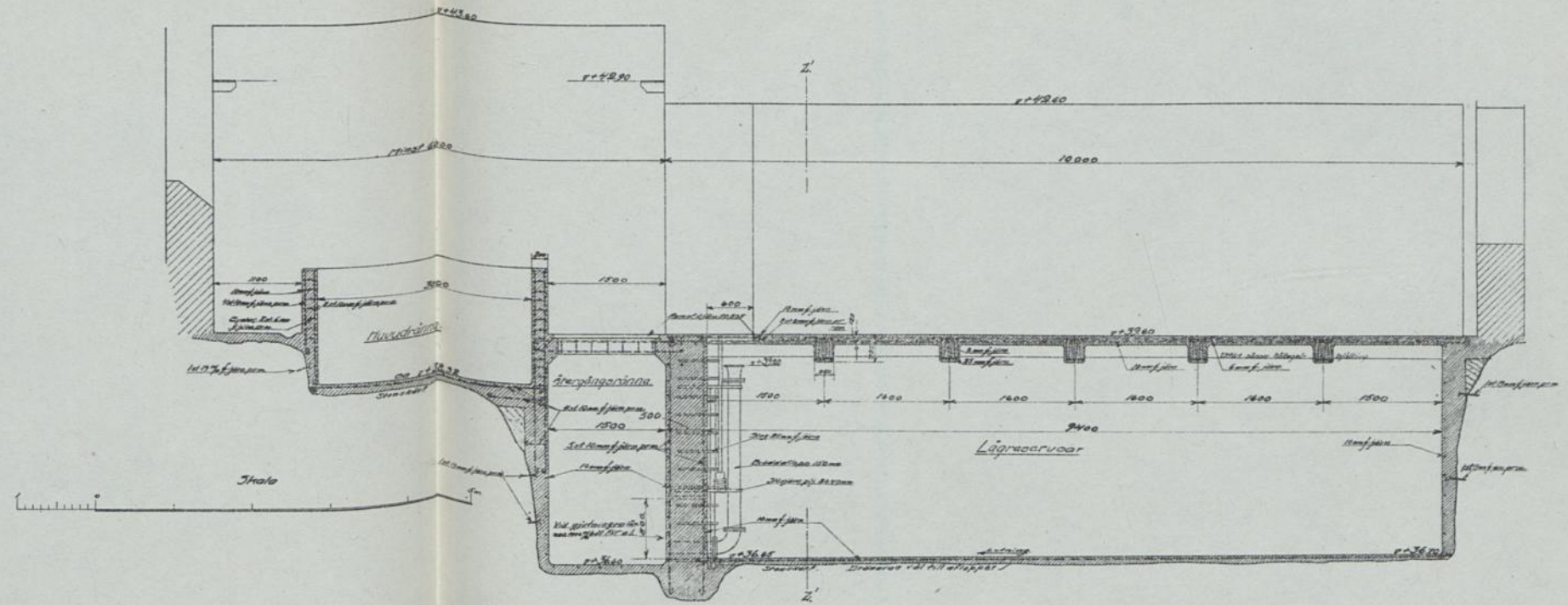


BYGGNADSJÄNREDDNING FÖR VATTENBYGGNADSLABORATORIET VID KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLANS NYBYGGNAD.

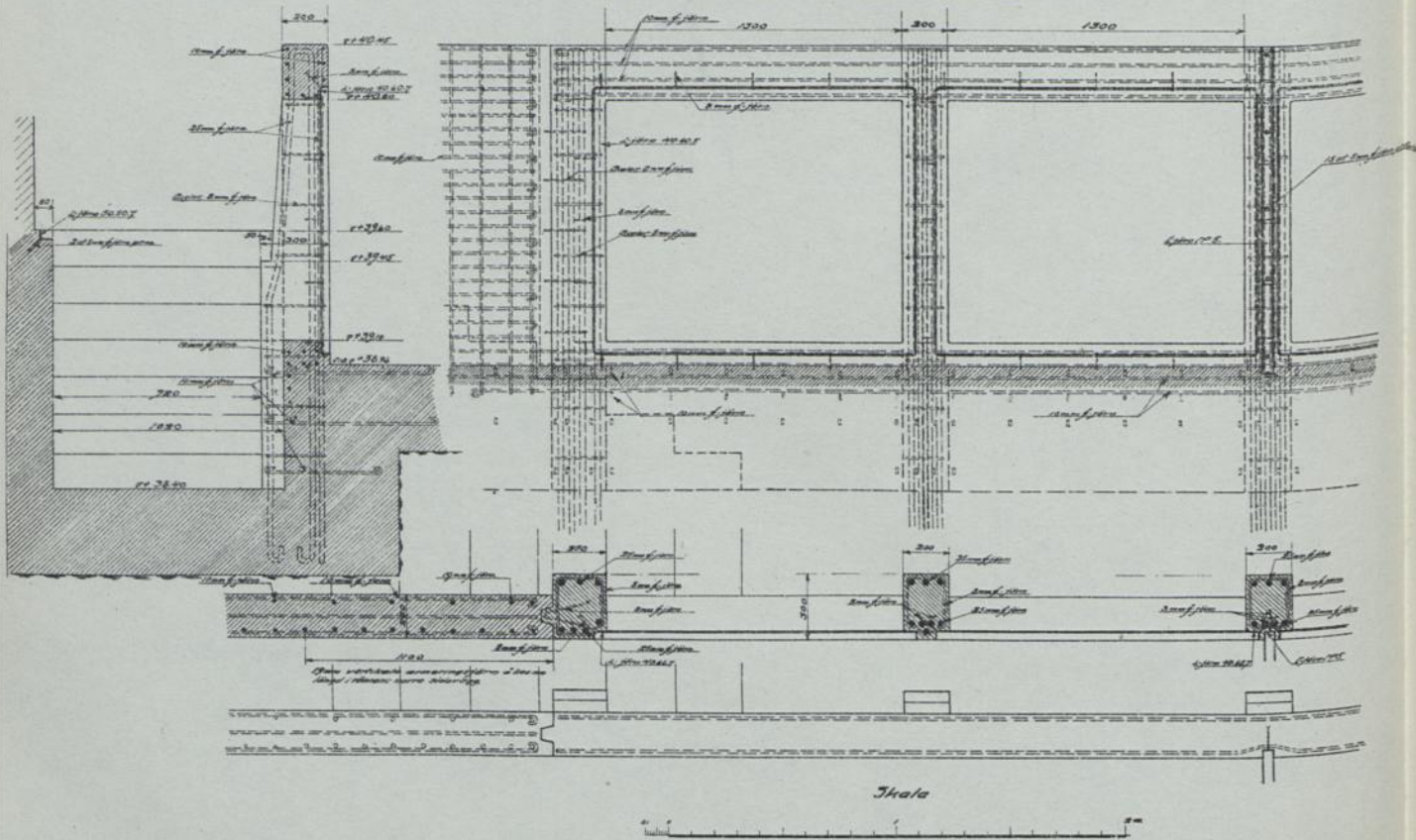
Snitt d-d



DETALJER.

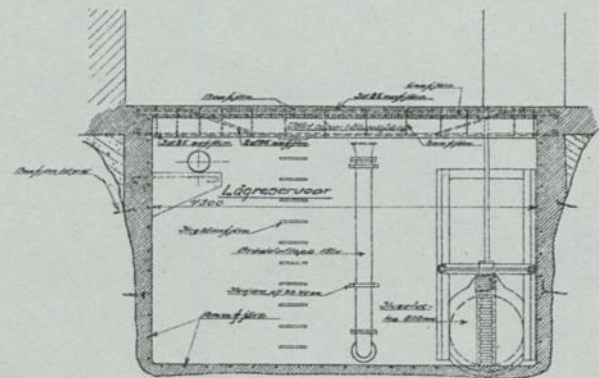


Detalj af glaspartiet vid snitt d-d



Snitte-e

Snitt z-z



Detalj i rännor, reservoarar, golv och björntag 1.24.3.

- För gjutning af rännor, reservoarar mm gälla.
1. Vid gjutningen ska ströket på eller mot botten vara jämnt och ska ströket på eller mot botten vara jämnt och ska ströket på eller mot botten vara jämnt.
 2. Vid gjutningen ska ströket på eller mot botten vara jämnt och ska ströket på eller mot botten vara jämnt.
 3. Vid gjutningen ska ströket på eller mot botten vara jämnt och ska ströket på eller mot botten vara jämnt.

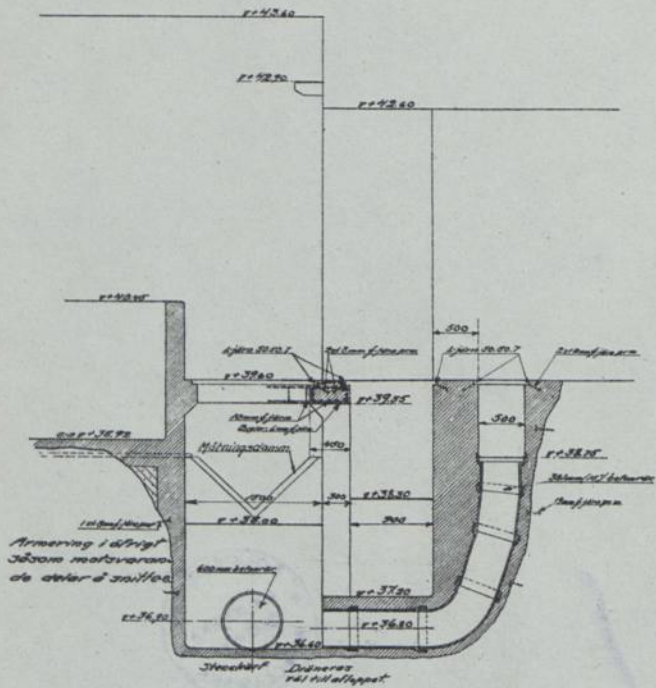
Mått på väggar, bottnar mm angifvas i respektive detaljer med 1 cm avrundning med räkna.

Reviderad i okt 1917.

Stockholm, juli 1917.
W. S. Sjöström

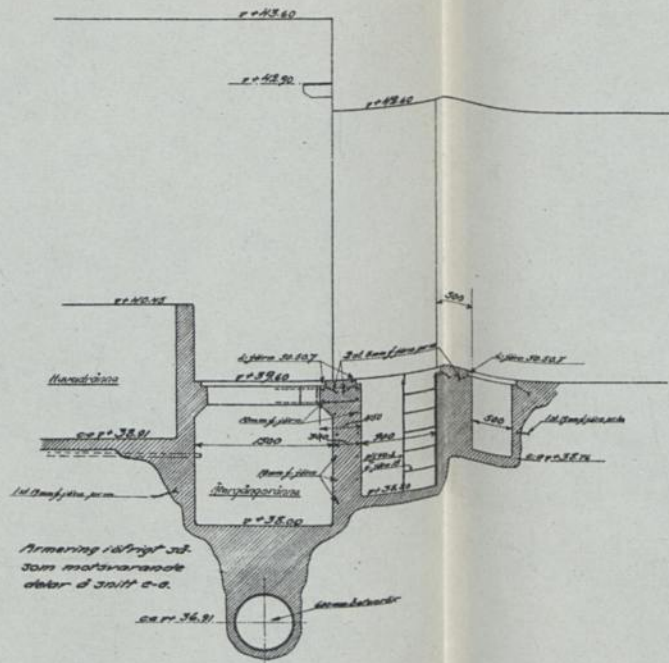
BYGGNADSRÄDDNING FÖR VATTENBYGGNADSLABORATORIET VID KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN I NYBYGGNAD

Snitt f-f

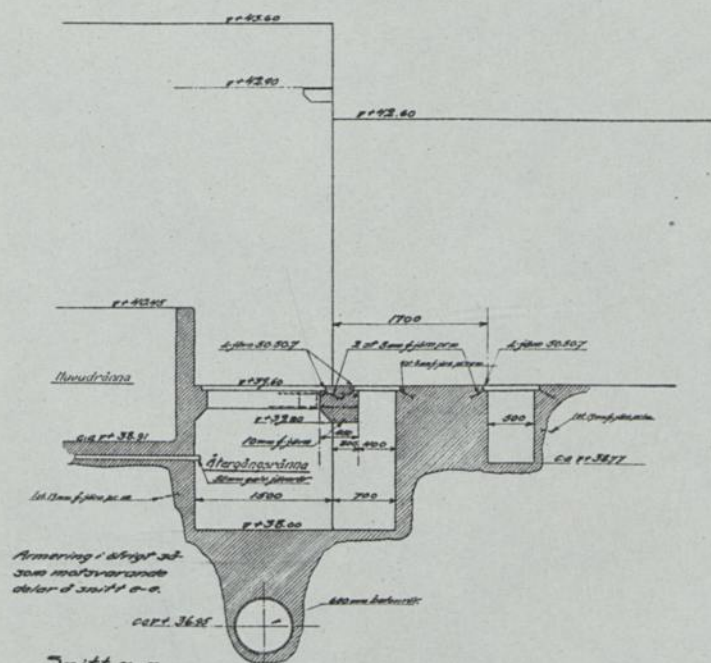


DETALJER

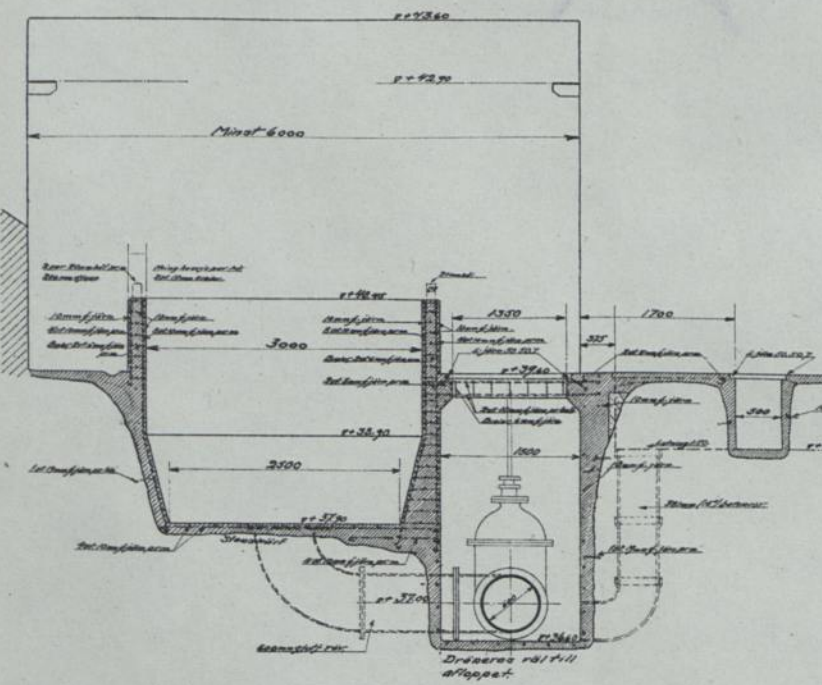
Snitt g-g



Snitt h-h

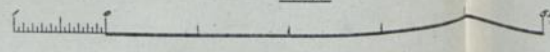


Snitt l-l

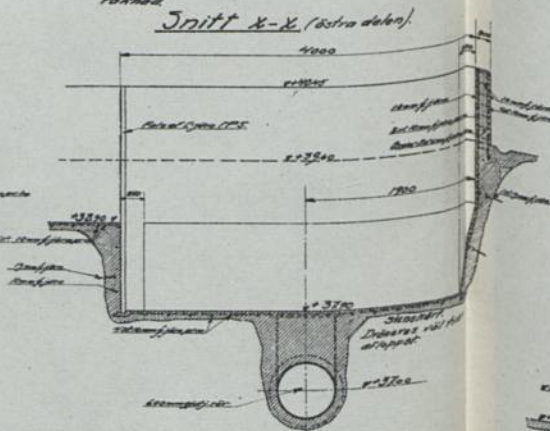


Detaljer i rännor, reservoarer, gull och hällning 1:25
 För gullning av rännor, reservoarer m.m. gäller
 1. att gullningen sker direkt på eller med hjälp av
 betongfuchter med 100 mm
 fuchter och 300 mm breda ripp
 fuchter 150 mm
 2. att gullningen sker direkt på eller med hjälp av
 betongfuchter 100 mm
 rippfuchter 300-500 mm, och vidare rippfuchter
 100-150 mm
 3. att gullningen sker direkt på eller med hjälp av
 betongfuchter 100 mm
 rippfuchter 300-500 mm, och vidare rippfuchter
 100-150 mm, och vidare rippfuchter 100-150 mm
 rippfuchter och ripp fuchter och rippfuchter
 i hällning 1:6

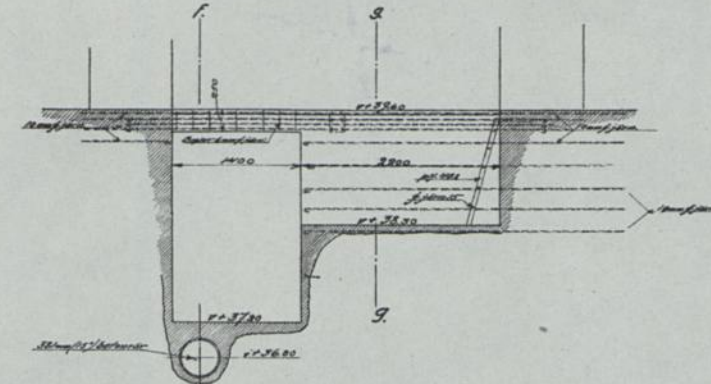
Skala



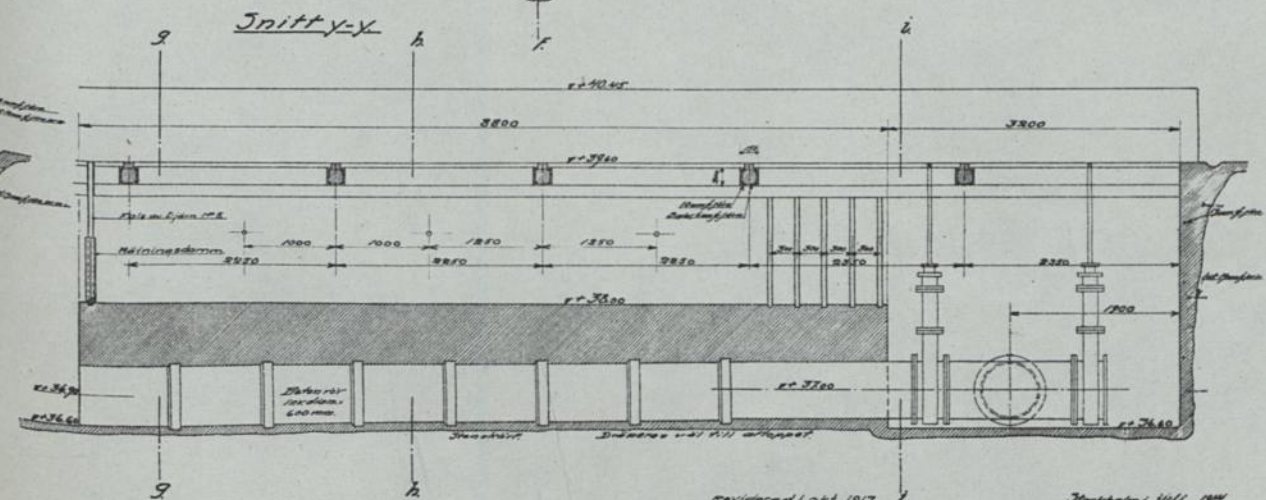
Snitt x-x (östra delen)



Snitt z-z



Snitt y-y

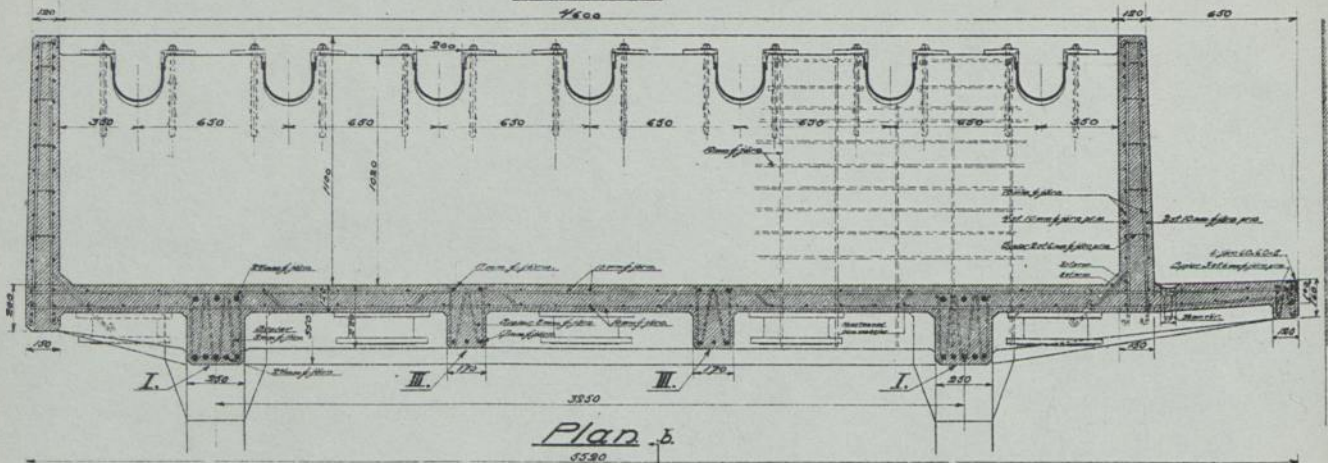


reviderad i okt 1917

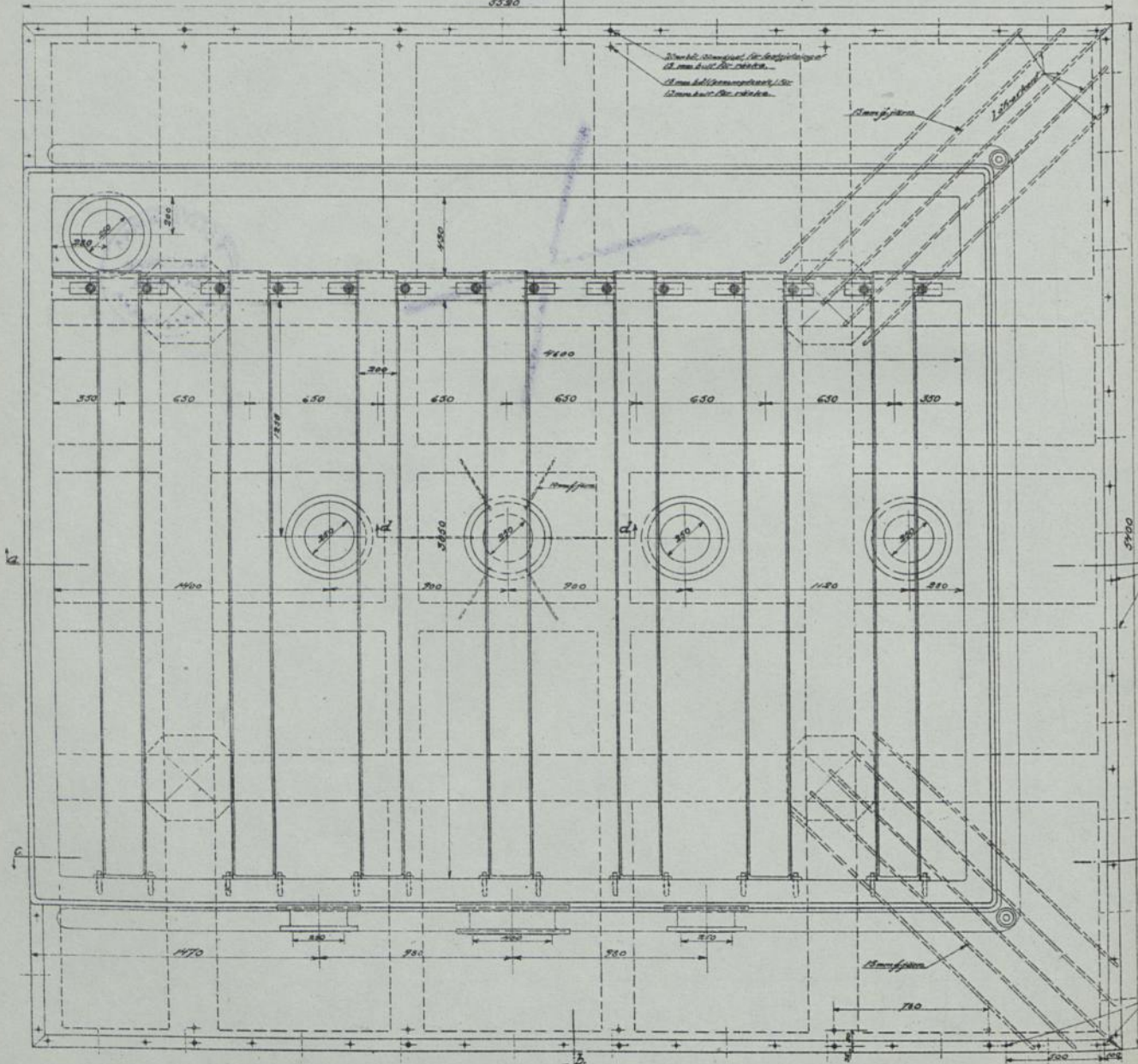
Stenbom juli 1917
 H. Stenbom

VATTENBYGGNADSLABORATORIET VID KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLANS NYBYGGNAD
HÖGRESERVOAR AF ARMERAD BETON.

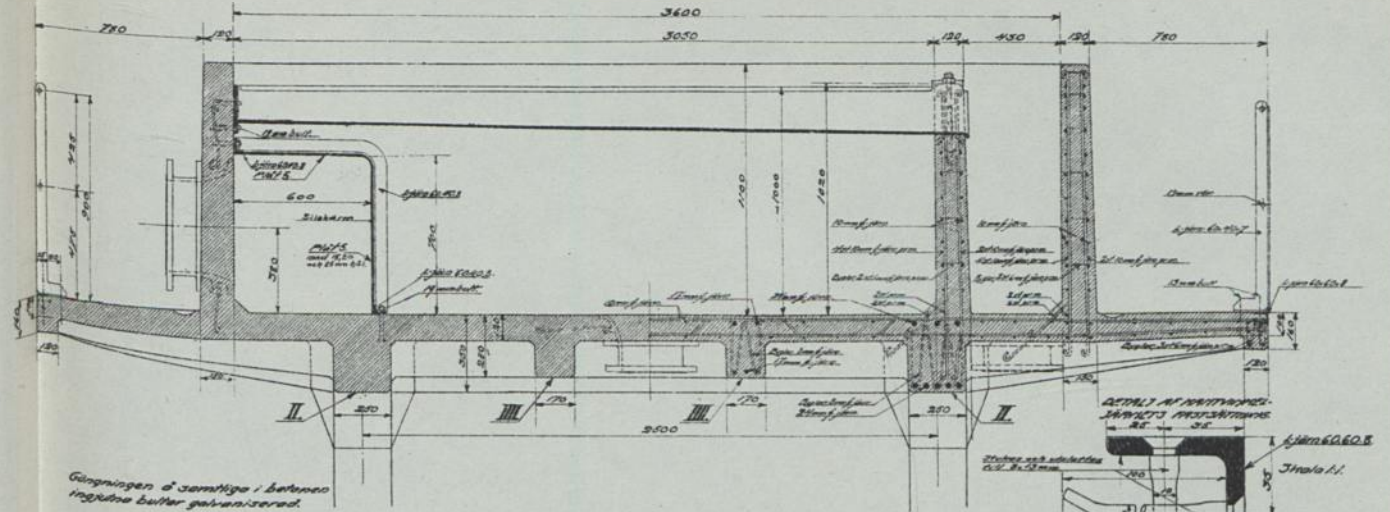
Snitt a-a



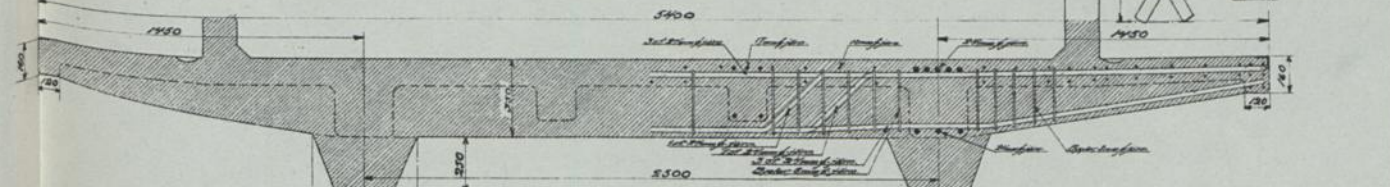
Plan b



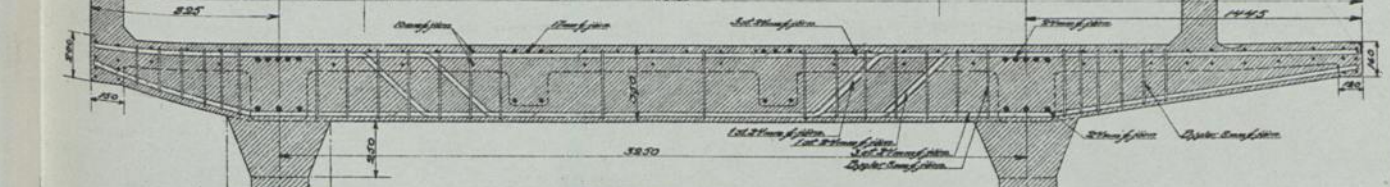
Snitt b-b



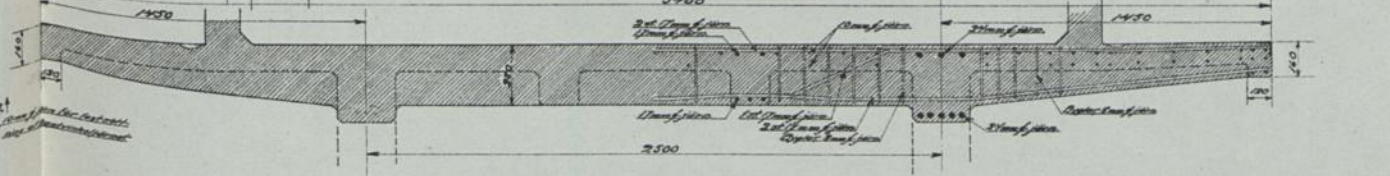
Balk I (Huvudbalk)



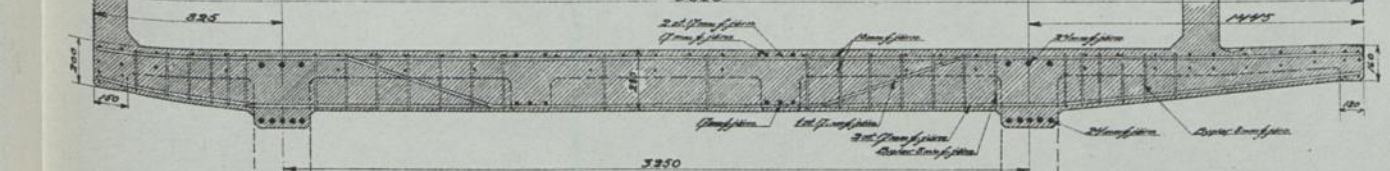
Balk II (Huvudbalk)



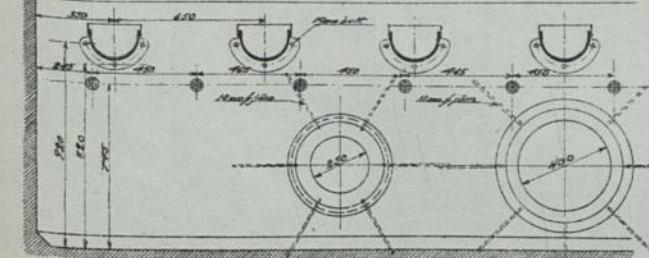
Balk III (Mellanbalk)



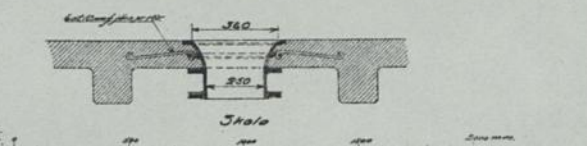
Balk III (Mellanbalk)



Snitt c-c



Snitt d-d



Reviderad 1 Okt 1917

Stockholm, dec. 1914
Thomsen & Svanberg

FÖRBRÄNNINGSMOTORLABORATORIET VID KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN

AV

E. HUBENDICK.

Det i samband med Kungl. tekniska högskolans nybyggnad inrättade förbränningsmotorlaboratoriet består, då detta skrives, blott av en tom lokal, men har jag dock godtt hopp om, att då dessa rader föreligga i tryck, laboratoriet skall vara utrustat med en ganska komplett samling maskiner, apparater och instrument. Det skulle ju då möjligen kunna anses lämpligare att vänta med en beskrivning av detta laboratorium, till dess detsamma är färdigt. Till dem som möjligen hava en sådan åsikt vill jag anföra, att det ej är meningen, att detta laboratorium någonsin skall bliva färdigt. För att ett laboratorium, som skall tjäna teknisk undervisning, skall fylla sitt ändamål, måste detsamma omformas efter skilda tiders utvecklingsgång och tekniska mål, det måste så att säga vara plastiskt.

Den kortfattade beskrivning jag här vill giva avser därför ej att visa, huru laboratoriet skall komma att te sig, då det är färdigt, utan har till uppgift att giva en föreställning om de mål, som med laboratoriets hjälp böra kunna nås, samt de medel vilka därför finnas att tillgå, då anstalten första gången tages i bruk.

Innan jag övergår härtill, är det en plikt för mig att framhålla, att laboratoriet i huvudsak planerats av civilingenjör t. f. professor A. Rosborg på ett utomordentligt sätt, och att för mig endast återstått att lägga sista hand vid ett, vid mitt tillträde till professuren i läran om förbränningsmotorer, redan i allt väsentligt färdigplanerat arbete.

Ett maskinlaboratoriums första uppgift är att för den studerande giva en levande bild av verkligheten. För detta kräves att laboratoriet, förutom

med äldre maskiner, visande utvecklingen på området, samt för specialundersökningar särskilt konstruerade maskiner, är utrustat med aktuella maskiner, vilka i möjligaste mån giva en helhetsbild av den speciella gren av tekniken, som laboratoriet representerar. I detta avseende är förbränningsmotorlaboratoriet synnerligen lyckligt lottat, tack vare den förståelse och offervillighet förbränningsmotorindustriens representanter visat genom rikliga gåvor till laboratoriet.

Den äldsta maskinen laboratoriet äger är en av Ottos gamla slidmotorer, alltså av den typ som låg till grund för de första, av Otto uppfunna fyrtaktmotorerna. Denna gamla trotjänare har under ett par decennier drivit belysningen å de äldre lokalerna vid Drottninggatan, samtidigt som den där fått tjäna laboratorieändamål, och sålunda i dubbel måtto bidragit till den tekniska upplysningen. I och med överflyttningen kommer densamma att befrias från båda dessa tjänster och få en fristad i de nya lokalerna såsom museiföremål. Tyvärr äger högskolan ej något exemplar av denna maskins föregångare, den av Otto uppfunna atmosfäriska maskinen med fri kolv.

De egentliga laboratoriemaskinerna börja med en äldre horisontal Körtings lysgasmotor, direkt kopplad till en likströmsdynamo. Denna har i de äldre lokalerna även under en lång tid tjänat belysningen därstädes, ävensom användts för laboratorieändamål. Densamma kommer i sinom tid att överflyttas till de nya lokalerna, där den fortfarande får tjäna laboratorieändamål och alltjämt kan vara en rätt värdig representant för en s. k. gasdynamo. Då lysgasmotorerna, sedan större samhällen allmänt anlagt elektricitetsverk, förlorat sin största betydelse, representeras påtagligen även denna art av förbränningsmotorer lämpligast av en äldre maskin, sålunda även denna till form och användning halvvägs utgörande ett museiföremål, visande övergången såväl konstruktivt som bränsletekniskt från de äldsta till de moderna formerna.

Nästa maskin i ordningen är en modern vertikal gasmotor med suggasverk och reningsapparat, för det nya laboratoriet inköpt från A.B. Ingenjörfirman Fritz Egnell, tillverkad vid Skövde mek. verkstads a.b. och konstruerad av författaren. Maskinen är på 30 hästkrafter, sålunda av ganska betydande storlek för ett laboratorium. För dess bromsning är anskaffad en s. k. Froudes vattendynamometer, en modern apparat som fått allt större användning inom industrien i stället för de allt annat än ofarliga bandbromsarna. Gasgeneratorn är konstruerad för antracit och koks. Det är emellertid att hoppas, att anordningar skola kunna göras, så att även andra bränslen såsom stenkol, torv och ved skola kunna förgasas och användas för motorns drift.

Såsom en vidare bild av förbränningsmotorteknikens nuvarande ståndpunkt finnes en 10 hkr's dieselmotor, för en del år sedan inköpt från A.B. Diesels motorer och konstruerad av bolagets nuvarande överingenjör J. Hesselman. Denna maskin har redan i de gamla lokalerna användts för laboratorieändamål.

Av samma bolag har såsom gåva överlämnats en 25 hkr's tvåcylindrig, modern dieselmotor av Z-typ, en för laboratoriet synnerligen värdefull maskin, även den konstruerad av överingenjör Hesselman.

Såsom representanter för den i vårt land alltjämt i snabb utveckling varande industrien för tillverkning av tvåtaktråoljemotorer har laboratoriet tillgång till ej mindre än tre maskiner, visande olika utvecklingssträvanden, nämligen en avancemotor, skänkt av tillverkaren A.B. J. V. Svenssons motorfabrik, konstruerad av firmans förutvarande överingenjör E. Nydal, en gammamotor, skänkt av tillverkaren Vagn- och maskinfabriks a.b. i Falun, konstruerad av ingenjör M. Matti, samt en ellwemotor, även den skänkt av tillverkaren Ljusne-Woxne a.b. och konstruerad av ingenjör H. Leissner.

Vidare har laboratoriet tillgång till tre stycken bensinmotorer, nämligen en 90 hkr's 4-cylindrig båtmotor, skänkt av tillverkaren, vilken av blygsamhetsskäl ej önskar sitt namn offentliggjort, en 2,5 hkr's encylindrig båtmotor, skänkt av Morgårdshammars mek. verkstads a.b. och konstruerad av författaren, samt slutligen en helt liten luftkyld experimentmaskin om 1,5 hkr med direkt kopplad dynamo, även den skänkt av Morgårdshammars mek. verkstads a.b. och konstruerad av författaren.

För att göra denna bild av förbränningsmotortekniken fullständig felas framför allt en automobil och dynamometer för en sådan, varför förvärvandet av en sådan är ett mycket eftersträvat mål. Med tanke på denna möjlighet har även i laboratoriets bottenvåning ordnats plats för en automobildynamometer.

Självklart torde vara att alla de anförda maskinerna ej äro uppställda för godt för provning. Endast fyra äro på sådant sätt monterade. För att kunna laborera med de övriga eller eventuellt andra maskiner äro i laboratoriet anordnade två extra provbäddar samt en elektrisk dynamometer, avsedd särskilt för hastigt gående maskiner. De ej för godt uppställda maskinerna kunna alltså allt efter behov uppställas för laborationsövningar eller specialundersökningar eller på annat sätt såsom demonstrationsföremål tjäna undervisningen.

Ett värmemotorlaboratoriums andra uppgift är att genom direkta mätningar och därför anordnade maskiner åskådliggöra sambandet mellan värme

och arbete, klargöra i vilken grad värmets i de ifrågavarande maskinerna kan omvandlas i arbete, påvisa vart förlusterna taga vägen samt huru stora dessa förluster äro var för sig. Ett lämpligt anordnande av dylika laborationsövningar påvisar tydligen för den studerande, dels till vilken fulländning tekniken på området för närvarande hunnit, dels i vad mån förbättringar ännu äro möjliga, sålunda givande initiativ till nya uppslag, forskningar och försök, dels slutligen genom vilka fel förluster uppstå och genom vilka medel de övervinnas. Att i detta sammanhang ingå på de anordningar och hjälpmedel, med vilka sådana mätningar kunna utföras, skulle föra alltför långt.

Denna maskintekniska del fyller emellertid ej alla uppgifter ett förbränningsmotorlaboratorium har att fylla. Särskilt för vårt på bränslen av bättre kvalitet så vanlottade land har laboratoriet en utomordentligt viktig uppgift att fylla i bränsletekniskt avseende. Ehuru förbränningsmotorn från att vara hänvisad till lysgas utvecklats till att kunna drivas med generatorgas och masugns gas, från bensen övergått till råolja och sprit, är den dock alltjämt ganska nogräknad med de bränslen som bjudas, i motsats mot ångmaskinen, vilken nöjer sig med vilka bränslen som helst. I gengäld omvandlar förbränningsmotorn en större del av bränslets värme i arbete än vad ångmaskinen förmår. Målet måste dock vara att så kunna dana förbränningsmaskinerna och behandla bränslena, att även sämre bränslen kunna med fördel användas, ett problem som ej ännu är i sin helhet tekniskt löst. Den bränsletekniska delen, alltid styvmoderligt behandlad i facklitteraturen på förbränningsmotorområdet, är enligt mitt förmenande den viktigaste, den där utvecklingen för närvarande har mest att vinna. Den är emellertid vida svåråtkomligare än den maskintekniska och som nämnts mindre bearbetad.

Jag kommer därmed in på laboratoriets sista uppgift, nämligen att tjäna forskningen på området. Problemen, såväl de av mera teoretisk natur som de för den praktiska tekniken viktiga, äro inom förbränningsmotorområdet synnerligen rikliga. Möjligheter till forskningsarbeten komma även att givas genom de examensarbeten de studerande hava att utföra, till vilka det är att hoppas att riklig tid skall komma att anslås. Att hoppas är även, att den sedan länge diskuterade tekniska doktorsinstitutionen snart skall bli verklighet och därigenom giva anledning till ytterligare forskningsarbeten med större uppgifter, än som kunna bli föremål för examensarbeten. Man må betänka, vilken ofantlig praktiskt-ekonomisk betydelse sådana tekniska doktorsarbeten skulle kunna erhålla, exempelvis om de på här ifrågavarande område inriktades på utforskandet av torvens, de bituminösa skiffrarnas, sulfidlutarnas m. m. egenskaper i bränsletekniskt avseende, spe-

ciellt med hänsyn till deras användbarhet såsom bränslen för förbränningsmotorer. Slutligen vill jag hoppas, att på laboratoriet skall uppstå ett livligt samarbete med industrien och tekniken, att laboratoriets resurser skola utnyttjas för lösandet av sådana problem, som fabrikernas provrum ej lämpa sig för, och att de i praktiken verkande ingenjörerna skola förskaffa sig tillfälle att utföra forskningsarbeten på laboratoriet. Härigenom kommer laboratoriet att i dubbel måtto bliva landet till nytta och det ej mindre viktiga målet nås, att de, vilka verka såsom lärare i ämnet vid Tekn. högskolan, ej förtorkas utan förbliva i intim kontakt med det levande livet. Att ett intensivt forskningsarbete kräver betydande materiella medel ligger i sakens natur. Jag är förvissad om, att statsmakterna hava klar blick härför och att erforderliga medel komma att anvisas, så länge laboratorierna komma att fylla de ovan skisserade uppgifterna.

Stockholm i juni 1917.

KYLTEKNISKA LABORATORIET VID KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN

AV

E. HUBENDICK.

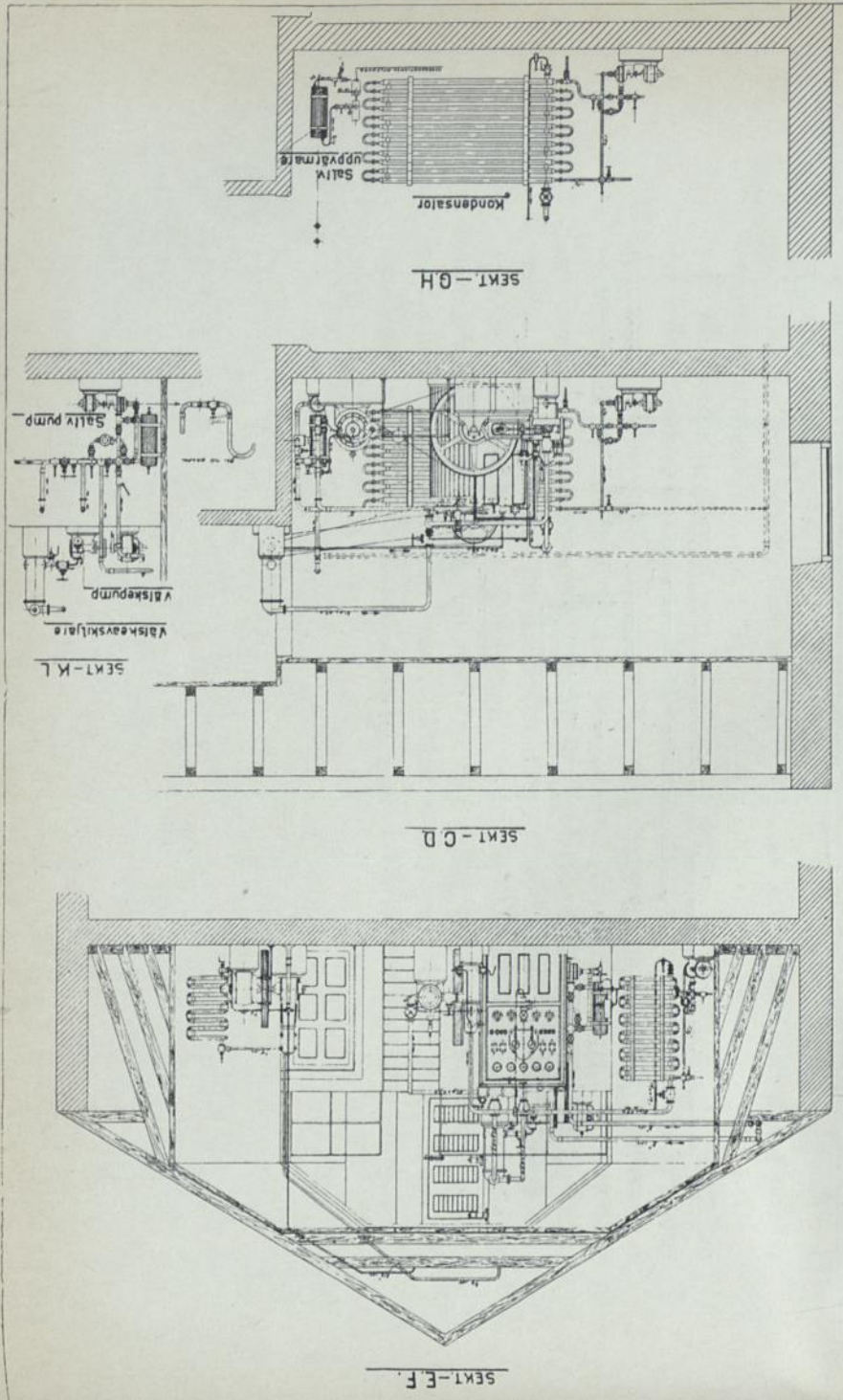
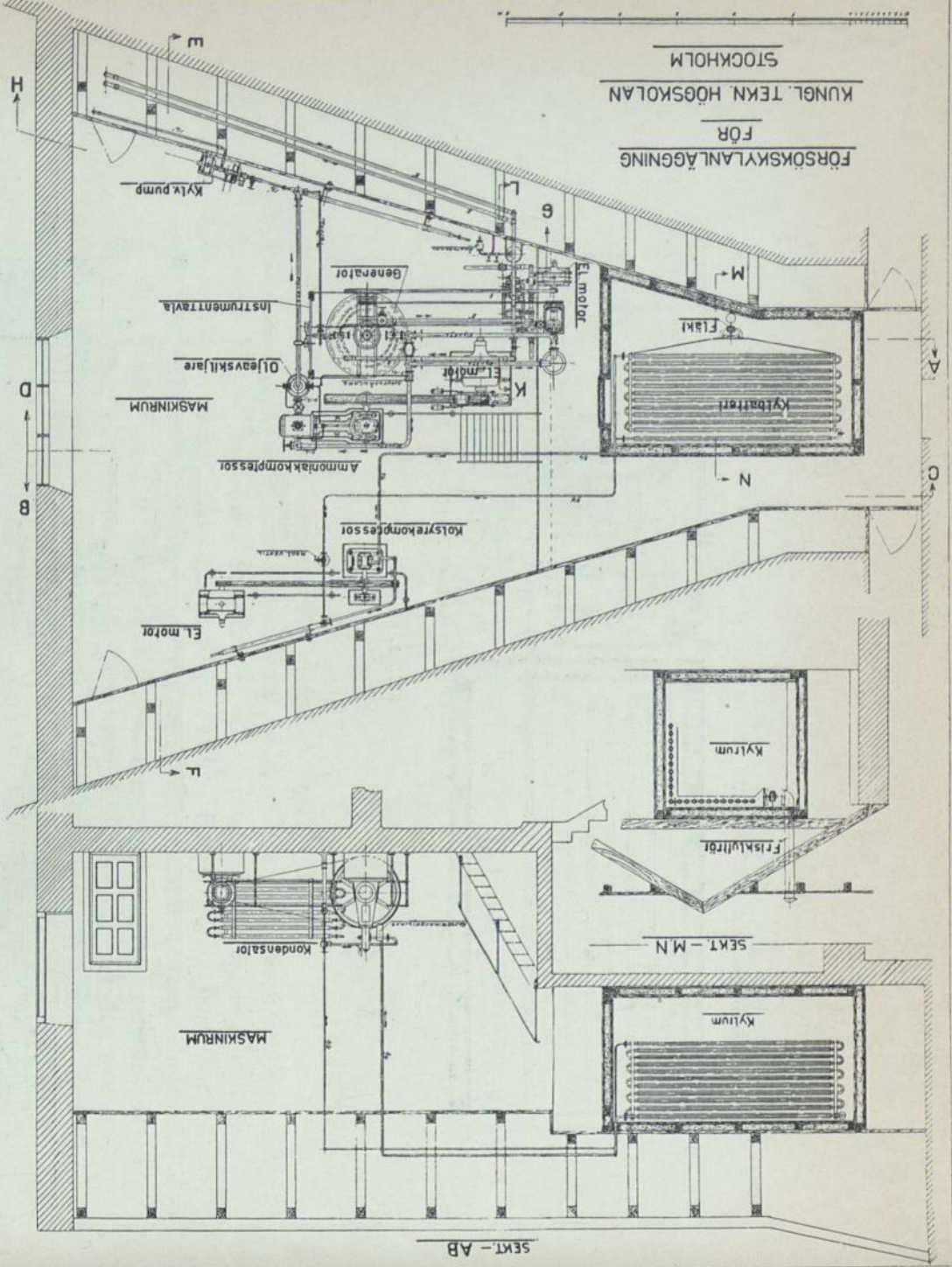
Av Ludvigsbergs mekaniska verkstads aktiebolag har till Tekniska högskolans nya laboratorier överlämnats en storartad gåva, bestående av ett komplett kyl-laboratorium, omfattande en ammoniakkyllanläggning och en kolsyrekyllanläggning. Av grosshandlare Chr. Berner i Göteborg har till denna anläggning skänkts isolering för kylrum, apparater och rörledningar.

Med denna gåva införes vid Tekniska högskolan undervisningsmöjligheter i ett förut vid högskolan mig veterligen aldrig behandlat, men numera för vårt land synnerligen viktigt ämne. I första rummet kommer denna gåva naturligtvis mekaniska fackskolan till gagn, men även andra fackskolor, såsom kemiska, väg- och vattenbyggnads-, med flera, torde komma att draga nytta av detta kyltekniska laboratorium.

Det må tillåtas mig giva en kort beskrivning över, huru det kyltekniska laboratoriet planerats.

Det samma består, som redan nämnts, av en kolsyreanläggning och en ammoniakanläggning.

Kolsyreanläggningen om 5 000 v. e. pr tim., schemat fig. 1, består av en kompressionskyllanläggnings enklaste element, nämligen kompressor, kondensator, reglerventil och generator, den senare i form av ett rörbatteri i ett kylrum. Kylningen sker alltså i detta fall genom direkt avdunstning och expansion av kolsyra i kamflänsrörspiraler i det isolerade kylrummet, därvid upptagande det för avdunstningen erforderliga värmeförbrukningen från detta kylrum och de i detsamma förefintliga föremålen. De undersökningar, som på denna anläggning kunna utföras, äro tills vidare inskränkta till kompressorn, kylrummets värmeförluster samt kondensatorprov. Huru anläggningen i detalj är avsedd att anordnas, framgår av installationsritningen fig. 3.



Ammoniakanläggningen om 20 000 v. e. pr tim., schemat fig. 2, även bestående av kompressor, kondensator, reglerventil och generator, är anordnad för indirekt kylning medelst saltvatten i ett särskilt cirkulationssystem samt dessutom utrustad så, att å anläggningen en mångfald mätningar kunna utföras. Följande schemat är anläggningens anordning denna:

Ammoniakkompressorn suger gasen från generatoren genom sugledningen och komprimerar densamma genom tryckledningen till kondensatorn. Denna

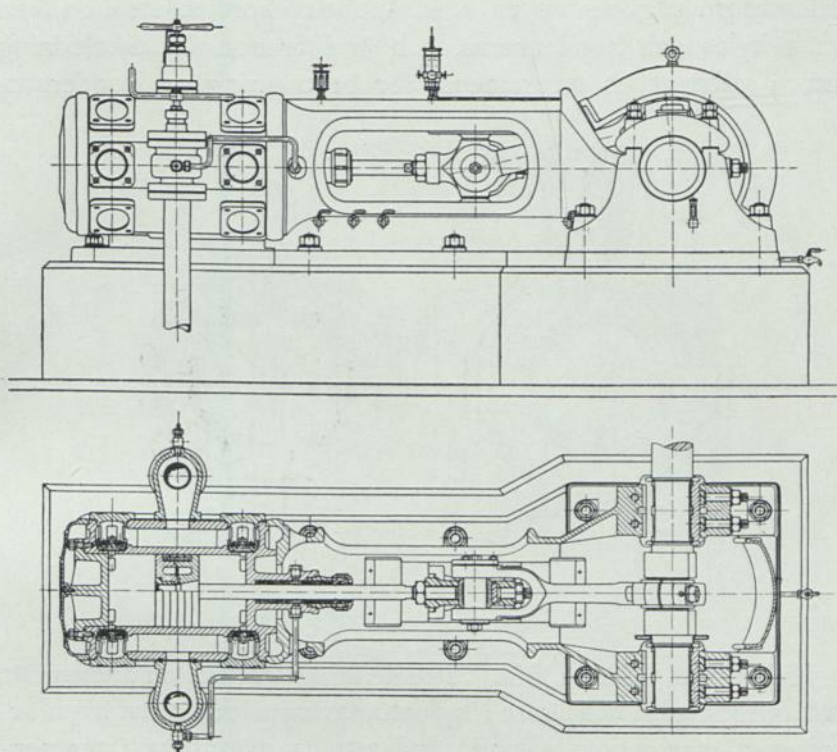


FIG. 4.

kompressor är dubbelverkande och dess konstruktion framgår närmare av fig. 4 och 5. Självfallet är densamma utrustad med indiceringsanordningar etc. På grund av kompressorns relativt låga varvantal har det av ekonomiska skäl varit nödvändigt driva densamma med rem från elektromotorn. För att man det oaktat må kunna bestämma den kompressor tillförda energien, är kompressoraxeln förlängd så, att på densamma kan anbringas en bromsskiva, varigenom elektromotorn, med vevstaken fränkopplad, kan bromsas under samma förhållande, som då kompressorn drevs av densamma,

och sålunda den till kompressorvevstaken tillförda energien direkt med tämlig noggrannhet uppmätas.

Sedan ammoniakgasen lämnat kompressorn, passerar densamma först en oljeavskiljare, i vilken den av ammoniakens medryckta smörjoljan avskiljes och automatiskt återföres till kompressorn, fig. 6. Från oljeavskiljaren går ammoniakgasen genom en rörledning till kondensatorn, i vilken ledning finnas anbragta apparater för avläsning av gasens tryck och temperatur.

Kondensatorn utgöres av en s. k. dubbelrörkondensator, i vilken ammoniakgasen avkyles och kondenseras, och är i ammoniakvätskeledningen efter kondensatorn anbragt en termometer för bestämning av kondensatets tem-

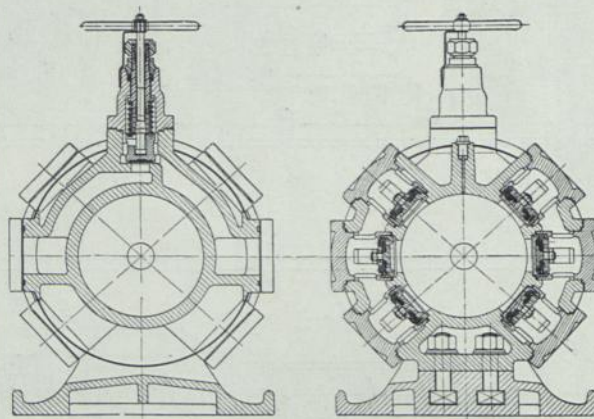


FIG. 5.

peratur. Kylvattnet tillföres från vattenledning genom en vattenmätare med förkopplad termometer, varjämte i kylvattenavloppsledningen även är anbragt en termometer, varigenom sålunda kylvattnets mängd och temperatur kan bestämmas.

Förmedelst en i kylvattenledningen inkopplad pump kan även reglering av kylvattnets temperatur erhållas.

Från kondensatorn ledes ammoniakvätskan till regleringsventilen, med vilken den vätskemängd regleras, som för erhållande av nödig värmebindning pr. tidsenhet måste avdunstas, och från denna ledes vätskan vidare till för-gasaren eller »köldgeneratorn».

Denna består av ett isolerat kärl för saltvatten, i vilket tvenne rörspiral-er äro nedsänkta. Genom dessa rörspiraler passerar ammoniak under det låga tryck, som på grund av kompressorns arbete förefinnes i sugled-

ningen, därvid tagande det för avdunstningen erforderliga värmets från saltvattenlösningen och därigenom avkylande densamma.

Den sålunda avdunstade ammoniakgasens tryck och temperatur bestämmas, varefter gasen återkommer till kompressorn och insuges genom dess sugventiler.

I sugledningen mellan generator och kompressor är en vätskeavskiljare med förbiledning inkopplad. Här avskiljas de av ammoniakgaserna meka-

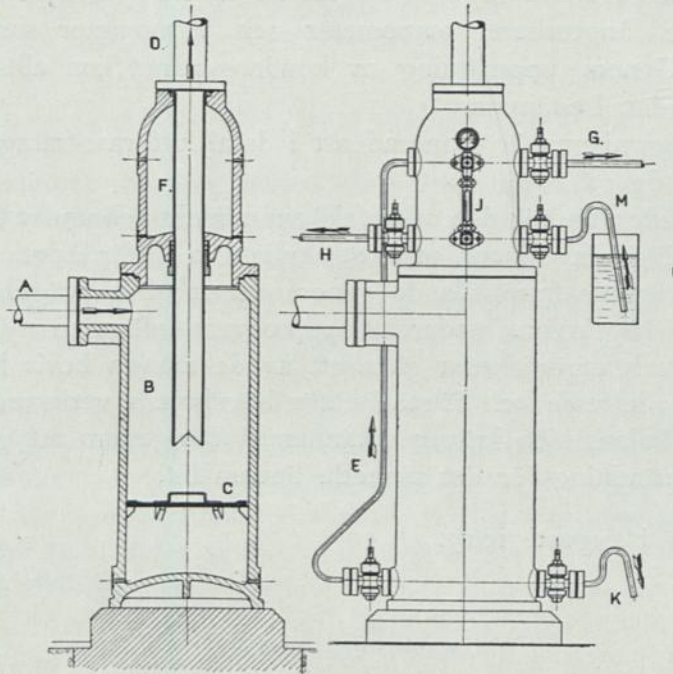


FIG. 6.

niskt medförda vätskepartiklarna, varigenom den till kompressorn passerande gasen blir praktiskt taget torr. En mindre pump återför den avskilda ammoniakvätskan till generatorn. Drift med »överhettad gång» kan följaktligen även användas.

Det i generatorn kylta saltvattnet kan nu användas för avkylningsändamål, och avses även att i framtiden ledas till en kylgrop för andra laboratorieändamål. Tillsvidare får detsamma endast tjäna för uppmätning av kyleffekten. Då sålunda någon värmebindning eller »kylning» för nyttiga ändamål ej finnes, måste på »konstlad väg» det värme tillföras, som annars för det nyttiga ändamålet av saltlösningen upptages.

Detta sker därigenom, att en ångrörslinga föres genom saltvattenlösningen på lämpligt sätt. Anordningarna härför äro följande:

Från generatorns undre del ledes det kalla saltvattnet genom en med vattenmätare och termometer försedd rörledning till en pump och från denna genom en »saltvattenuppvärmare». Från denna föres det genom en med termometer försedd rörledning åter till generatorns övre del för kylning. Även här kunna alltså kvantiteter och temperaturer bestämmas. I saltvattenuppvärmaren är anbragt en ångrörslinga med i tilloppsledningen insatt vattenavskiljare, ångtorkare, manometer och termometer samt i avloppet termometer. Genom uppmätning av kondensvattnet kan alltså den tillförda värmemängden bestämmas.

Huru anläggningen är planerad att i detalj utföras, framgår av anläggningsritningen fig. 3.

Att här redogöra för den mångfald experiment och undersökningar, som med denna anläggning kunna utföras, skulle föra alltför långt. Det må vara nog ännu en gång framhålla de genom denna gåva åvägabragta möjligheterna, att i högskolans undervisningsprogram införa en ny, modern och viktig teknik, och utgör denna gåva ett av de många bevis högskolan fått på industriens intresse och förståelse för högskolans verksamhet, ett bevis som från högskolans sida kräver erkännande, därigenom att gåvan omedelbart finner användning för det avsedda ändamålet.

Stockholm i augusti 1917.

UPPVÄRMNINGS- OCH VENTILATIONSSYSTEMET I KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLANS NYBYGGNADER

AV

HUGO THEORELL.

Uppvärmningen av byggnaden såväl som uppvärmning av all ventilationsluft sker medelst varmt vatten, vars cirkulation mellan den centrala värmekällan och värmekropparna åstadkommes medels kontinuerligt arbetande rotationspumpar, således ett s. k. pumpvarmvattensystem.

Sämtliga lokaler värmas medelst direkta varmvattenvärmekroppar bestående av s. k. radiatorer av vanlig typ. Endast i ett par rum i magnetometriska avdelningen äro värmekroppar såväl som rörledningar av koppar.

Erforderlig ventilationsluft tillföres alla undervisningslokaler med tillhörande korridorer medelst s. k. pressluftssystem, med undantag för maskinlaboratoriet, där endast hörsal och ritsal erhålla friskluftstillförel på detta sätt. Alla övriga lokaler tillföras luft dels genom direkta ventiler i ytterväggarna och dels genom fönstren.

Värmecentralen.

För inrymmande av värmecentralen med pannor, värmare, pumpar, ventillådor, cisterner, apparater och ledningar, finnas i nordvästligaste delen av maskinlaboratoriet ett större pannrum, och mellan detta och de båda stora skorstenarna (en för värmecentralen och en för laboratoriet) ett rum för pumpar, fördelningslådor och instrumenttavlor. Under detta s. k. »regleringsrum» ligger ett lika stort rum för vattenvärmare, kondenssamlare, matarpumpar m. m., det s. k. »cisternrummet». Under pannrummet finnes källare, dels för fläkt med plåttrummor till pannornas eldningsapparater och dels slaggrum. Under en terrass utanför pannhuset finnes ett större kolförrådsrum.

All för uppvärmning och ventilation erforderlig värme alstras uti 3 st. tubpannor av plåt med murad eldstad under pannorna, en panntyp, som i

detta fall ansetts vara den bästa, på samma gång som den är den enklaste och billigaste. Då någon kombination mellan värmecentralen och laboratoriets pannor icke får förekomma, och drivkraft fordras endast för cirkulationspumparna, hava två av pannorna ordnats för direkt värmning av vattnet och äro sålunda fyllda med vatten, som står under det tryck, som bestämmes av högsta vattenytan i expansionskärlet, plus en del av pumptrycket, uppgående till inalles högst 3 atm. Pannorna äro sålunda utsatta för relativt lågt tryck.

Den tredje pannan är en ångpanna, som är avsedd att lämna drivkraft för en av värmeledningens två cirkulationspumpar. Den andra drives av direktkopplad elektrisk motor.

Avloppsången från cirkulations- och matarpumpar kan för värmeledningen tillgodogöras uti två st. ångvattenvärmare. Dessa äro så dimensionerade och kopplade, att de även kunna taga emot avloppsången från laboratoriets experimentmaskiner och tillgodogöra denna för värmeledningen. Då, för att detta skall vara möjligt, vattenvärmarne (kondensorer) måste tagas rätt stora och de sålunda även kunna mottaga ånga från en större ångpanna, har den tredje pannan för värmeledningen, ångpannan, gjorts av samma yttre storlek och form som de tre vattenpannorna. Ångpannan användes alltid för drivande av rotationspumpen och får i övrigt lämna så mycket ånga till värmande av värmeledningens vattnet, som med god bränsleekonomi är förenligt. Vid ringa värmebehov, vår och höst, kan ångpannan ensam vara tillräcklig. När densamma för rengöring kan behöva avsläckas, användes elektromotorpump eller eventuellt ånga från någon av laboratoriets pannor. Även avloppsången från laboratoriets kondenserande ångmaskiner kan för värmeledningen tillgodogöras på det sätt, att det från värmeledningen återkommande vattnet, vars temperatur under dagen, då ventilationssystemet användes, håller sig vid 40 eller högst 50 grader, ledes genom kondensorn.

Vardera vattenpannans eldyta är 100 kvm och ångpannans 80 kvm. Då den största värmemängd, som pannorna har att lämna, uppgår till c:a 2 500 000 kalorier, äro alltid de båda vattenpannorna och ångpannan tillräckliga att lämna all erforderlig värme. Skulle någon av dem under högsta värmebehov vara i olag, kan laboratoriets pannor påräknas som reserv. Pannorna äro ursprungligen utrustade med eldningsapparater för »under-matning» av bränslet medelst skruv, men hava under nu rådande bränsleförhållanden provisoriskt ändrats för eldning med props.

Varmvattensystemet.

Från ventillådorna i regleringsrummet utgå tre par huvudledningar, vilka leda vattnet till och från olika delar av byggnaden. Dessa huvudledningar förgrena sig icke direkt till servisledningar för de olika värmekropparna, utan fortsätta utan avgreningar till fem fördelningspunkter eller centra, varifrån sedan ett flertal fördelningsledningar utgå till olika partier av byggnaden. Rörssystemet är sålunda delat i huvudledningar mellan värmecentralen och fördelningspunkterna samt lokala rörnät från dessa punkter till värmekropparna.

Av de fem fördelningspunkterna är en belägen nära stora värmecentralen och fördelar ledningarna i två grupper, en till vardera av laboratoriets båda hälfter. De övriga fyra äro belägna uti s. k. regleringskammare, därav en i vardera av avdelningarna för bergsvetenskap, elektroteknik, maskinbyggnad samt väg- och vattenbyggnadskonst och arkitektur. I dessa fyra regleringskammare äro förlagda ventillådor för tillopps- och återgångsvatten, motorer för ventilationssystemet för samma avdelningar, sekundärpumpar för vattencirkulationen samt termometrar och manometrar för de olika rörgrupperna och framdeles distanstermometrar för de viktigare lokaler, som höra till denna del av byggnaden. Invid regleringsrummen finnas apparater för ventilationsluftens uppvärmning samt fläktar för luftens frampressande.

Den huvudsakliga regleringen av uppvärmning och ventilation har sålunda förlagts till dessa fem regleringskammare eller »understationer».

Det cirkulerande varmvattnet skall icke blott uppvärma rummen, utan även värma ventilationsluften under dagen. För att samma vattenmängd skall passera pumpar och huvudledningar, antingen ventilationssystemet arbetar eller ej, är så anordnat, att uppvärmning av ventilationsluften fördelats på ett förvärmnings- och ett eftervärmningsbatteri. Genom det förra passerar vattnet på vägen ifrån de lokala rörnäten till värmecentralen och genom det senare på vägen från centralen till de lokala näten. Vid pådragning av ventilationssystemet höjes temperaturen av vattnet från stora värmecentralen så mycket som eftervärmning av luften erfordrar och återledes till centralen med så mycket lägre temperatur, som förvärmningen avkylt vattnet. Vattenmängderna och temperaturförhållandena i de lokala näten äro sålunda oförändrade, antingen ventilationen arbetar eller ej, och pumparnas arbete är även detsamma. Att temperaturen i tilloppsledningen från centralen är högre är ingen olägenhet, och att den i återledningen är lägre

är en direkt fördel, då vattnets förmåga att kondensera avloppsångan, särskilt vakuumbånga, därigenom ökas.

En av de största fördelarna vid uppvärmning med varmt vatten är möjligheten av s. k. centralreglering genom bestämmande av vattentemperaturen i förhållande till väderleksförhållandena. På grund av ifrågavarande byggnadskomplex storlek, lokalernas olika ändamål och belägenhet i olika väderstreck m. m., uppstår svårighet att hålla en för alla delar och lokaler lämplig temperatur på vattnet. Regleringen underlättas betydligt, om temperaturen hos det från fördelningspunkterna till olika grupper, inalles 13 st., utgående varmvattnet kan bestämmas efter resp. grupperns behov. Detta låter sig lätt göra på det sätt, att det i varje ledningsgrupp utgående varmvattnet efter behov kan uppblandas med en del avkylt vatten från återgångsledningen. Detta förutsätter visserligen en mindre cirkulationspump i vardera av de fyra regleringskammarna, men då endast en mindre del av vattnet behöver pumpas och pumptrycket är litet, erfordras endast ca 0,25 hkr per pump. Dessa behöva ej heller vara i kontinuerlig verksamhet. Denna anordning medger sålunda att vattentemperaturen i huvudledningarna kan, därest för luftuppvärmningen eller av annan anledning så skulle vara önskligt, hållas betydligt högre än de lokala näten fordrar, men dessa likväl var för sig erhålla den vattentemperatur, som önskas.

Från ventillådorna i regleringsrummen utgå sålunda flera ledningsgrupper, som var för sig utgöra ett avstängbart system, med därtill hörande rörstammar och värmekroppar. De horisontala ledningarna äro framdragna i de stora rörkulvertarna, i utsparade kanaler under bottenvåningens golv eller på en del ställen över detta. De vertikala stammarna äro förlagda i utsparade rörslitsar, upp genom våningarna på vanligt sätt.

Ventilation.

Tillförsel av frisk luft till lokalerna sker för maskinlaboratoriet till största delen genom ventiler i ytterväggarna och genom fönsterventiler. Endast för en föreläsningssal med bredvidliggande ritsal är en varmkammare anordnad, där luft uppvärms och medelst fläkt inpressas i rummen. I stora byggnadskomplexen tillföras de flesta lokalerna frisk luft från centrala pressluftsystem. Endast för en del mindre rum och sådana, där ingen starkare ventilation erfordras, tillføres luften direkt utifrån genom ventiler och fönster.

Ventilationen av den stora byggnaden är fördelad på fyra olika »press-

luftsystem», vart och ett omfattande samma delar som förut angivits för de fyra varmvattensystemen. Avdelningarna för bergsvetenskap, elektroteknik, maskinbyggnad samt väg- och vattenbyggnadskonst och arkitektur hava sålunda var för sig oberoende ventilationssystem. Alla äro belägna i nedersta våningen och anordnade på samma sätt med den skillnad likväl, att för de båda förstnämnda systemen, som erhålla sin lufttillförsel från byggnadens ytterfasader, anordnats större kalluftskammare för installerande av filter för luftens rening, därest så skulle erfordras. Detta har däremot för de båda andra systemen, som hava sina luftintag från gården, mot en gräsbevuxen »slänt», ansetts överflödigt.

Anordningarna för systemen äro följande:

Från friskluftintagen ledes luften först genom ett förvärmningsbatteri, där lufttemperaturen höjes så mycket detta batteri, vilket genomströmmas av återgångsvatten, kan åstadkomma, och sedan, efter att hava passerat filterkammaren, där sådan finnes, genom ett eftervärmningsbatteri, vilket genomströmmas av tilloppsvattnet, och där lufttemperaturen höjes till nära eller något över rumstemperaturen. Sedermera pressas luften genom en kraftig ventilator, driven av direktkopplad motor uti murade och gångbara huvudkanaler, framdragna under bottenvåningen, jämsides med gångarna för huvudrörledningarna. Kanalerna äro rymliga, väl putsade och oljemålade, och sålunda lätta att hålla rena. Från dessa huvudkanaler gå vertikala, i väggarna murade kanaler, rakt upp till lokalerna, i vilka den uppvärmda friska luften utströmmar genom med galler och delvis även ventiler försedda utströmningsöppningar nära taket. För en del lokaler, därifrån under alla förhållanden återströmning av luften måste förhindras, äro dessa ventiler balanserade och självstängande (s. k. backventiler), så att de öppna vid lufttryck nedifrån men stänga när detta lufttryck upphör.

Värmebatterierna för luftens uppvärmning bestå av s. k. Junkers lamellkaloriferer.

Ventilatorerna utgöras av centrifugalfläktar med fritt löpande hjul, med tätt sittande korta, »efterböjda» skovlar, typ »Meidinger». De drivas av direktkopplade elektromotorer, placerade i förstnämnda regleringskammare, dit fläktaxeln sålunda är indragen.

I förstnämnda fyra st. regleringskammare äro såväl ventillådor för reglering av vattenströmmen i de olika grupperna som pådragningsventiler för varmluftsbatterierna placerade. Vidare äro dit förlagda de små sekundärpumparna för de lokala varmvattensystemen med reglering, motorerna för fläktarna med reglering, manometrar och termometrar för mätande av tem-

peraturen hos vattnet samt distanstermometrar för mätande av temperaturen i viktigare till systemet hörande lokaler.

Från dessa fyra regleringsrum kan sålunda uppvärmning och ventilation i hela den stora byggnadskomplexen i allt väsentligt skötas. I sista hand sker reglering av värme och luftväxling i lokalerna själva, dock är det ett önskemål, att denna lokala reglering bliver så litet som möjligt behövlig.

TEKNISK VETENSKAP OCH INGENJÖRSUTBILDNING

AV

C. J. MAGNELL

TEKNISK VETENSKAP OCH INGENJÖRSUTBILDNING

AV

C. F. MAGNELL.

*Nam et ipsa scientia
potestas est.*

De tekniska vetenskaperna hava framträdt jämförelsevis sent och kunna knappast anses ännu hava vunnit fullt burskap inom vetenskapernas uråldriga och ärevördiga skrå. Om de där blivit mottagna med en viss reservation, så är detta icke i och för sig ägnat att väcka förvåning. Detsamma vederfors också på sin tid de äldsta empiriska vetenskaperna vid deras första framträdande och är ju vad novisen inom ett slutet sällskap i regel får röna från de mera underkunnigas sida. Den starkt materiella läggningen hos de tekniska vetenskaperna har väl även därvid spelat en viss roll, då det ju länge var en ganska vanlig uppfattning, att en vetenskap stode högre i samma mån den saknade beröring med materiella ting.

Den huvudsakliga anledningen till, att de tekniska vetenskaperna ej ens ännu kunna sägas hava vunnit fullt och allmänt erkännande såsom vetenskaper, torde emellertid vara den, att man på många håll icke tillräckligt skiljer på utövandet av *teknik* och *tekniskt-vetenskapligt arbete*.

Detta är detsamma som att förblanda t. ex. fotografens arbete med dens arbete, som utarbetat fotograferingsmetoden; den förre utövar teknik, den senare tekniskt-vetenskaplig verksamhet. Den som konstruerar t. ex. en motor av viss känd typ, utövar teknik, men den som utarbetar typen med syfte att uppnå vissa, ej förut nådda resultat, utövar teknisk vetenskap. Så gör ock den, som utarbetar planen för t. ex. ett byggnadsföretag för uppnående av vissa lokala och förut ej uppnådda ekonomiska eller tekniska mål eller som utarbetar typer för vissa led i ett dylikt företag, medan den, som utför byggnadsföretaget med användande av nämnda typer

enligt beprövade metoder, endast utövar teknik, vare sig han arbetar som konstruktör eller arbetsledare.

På samma sätt är det t. ex. inom det medicinska facket. Ej räknas en praktiserande läkare, han må vara än så skicklig, såsom vetenskapsman, så länge hans verksamhet inskränker sig till användande av läkemedel eller kirurgiska instrument enligt kända föreskrifter. Vetenskapligt arbete utövar han endast i den mån han klarlägger outredda frågor inom sitt fack eller utarbetar nya metoder, detta oavsett om han publicerar sina rön eller behåller dem för sig själv.

I sistnämnda avseende är att märka, att den tekniske vetenskapsidkaren i viss mån intar en särställning därigenom, att hans vetenskapliga arbeten kunna direkt påvisas i maskintyper, byggnadsverk eller tillverkningsmetoder, under det att vetenskapsidkare inom andra fack, för att dokumentera sig såsom sådana, i regel äro hänvisade till att genom skrifter bekantgöra resultaten av sina forskningar. Denna omständighet medför emellertid för den tekniskt-vetenskapligt arbetande den olägenheten, att just den vetenskapliga karaktären av hans arbeten mången gång förbises, enär man alltför ofta föreställer sig, att vetenskapligt arbete ovillkorligen måste vara förknippat med vetenskapligt skriftställereri. Medan andra vetenskapsidkare göra sig bemärkta genom flitigt utgivande av skrifter, få de som ägnat sig åt tekniskt-vetenskapliga uppgifters lösande ofta ej tillfälle att utgiva beskrivningar över sina för alla synbara arbeten, och då endast fackmännen kunna bedöma, om dessa äro av självständigt utarbetad typ eller icke, kommer sålunda deras upphovsmäns vetenskapliga verksamhet ej till sin rätt inför den stora allmänheten. De försvinna i den stora massan av »ingenjörer», som syssla med konstruktioner och arbeten i industriens tjänst.

Återgå vi till förhållandet mellan teknik och teknisk vetenskap, kunna vi precisera begreppen på följande sätt.

Teknik är förfaringssätt eller metod att för människans mångskiftande behov tillgodogöra naturens rikedomar av energi och råmaterial. Sådan metod må vara grundad på än så djupgående teorier, själva utövandet och tillämpandet av densamma är dock icke något vetenskapligt arbete.

Tekniskt-vetenskaplig är den verksamhet, som är inriktad på utfinnandet av dylika förfaringssätt eller metoder och därvid söker nå detta mål på den systematiska forskningens och slutledningens väg med utgångspunkt från vetenskapligt klarlagda förhållanden.

Ordet »teknik» användes även för att beteckna sammanfattningen av sådana förfaringssätt eller metoder, vare sig i allmänhet eller inom något

visst avgränsat område av större eller mindre omfattning (elektroteknik, byggnadsteknik o. s. v.)

Den anförda definitionen av »teknik» är uppenbarligen mycket vid; så bliva exempelvis även landtbrukare och handverkare utövare av teknik i denna bemärkelse. Deras verksamhet är ju heller icke principiellt skiljaktig från de tekniska yrkesmännens i egentlig mening, men den teknik de utöva kan i mycket stor utsträckning betecknas som en frukt av mera primitiva rön och vilar — åtminstone än så länge — endast till ringare del på vetenskaplig grund. Häri ligger en bestämd olikhet mot den egentliga tekniken, »ingenjörstekniken», vars resultat framträda i form av byggnadsverk, samfärdsmedel, kraftanläggningar, motorer, arbetsmaskiner, industrialster o. m. d. I enlighet med vanligt språkbruk användes ordet »teknik» i det följande i denna inskränkta betydelse, och i överensstämmelse härmed betrakta vi endast sådan tekniskt-vetenskaplig verksamhet, som resulterar i teknik i denna trängre mening.

Till ett visst vetenskapsområde räknas ju icke blott den vetenskapliga verksamheten själv utan även hela den skatt av samlade och ordnade erfarenheter, som därigenom frambringats. Inom det tekniska vetenskapsområdet intages denna plats av *teknologien*, varmed sålunda förstås det systematiska vetande, som utgör sammanfattningen av alla genom tiderna utforskade tekniska förfaringssätt och metoder.

Ännu för några mansåldrar tillbaka hade teknologien i det hela en mycket elementär och övervägande »praktisk» karaktär, och det var därför föga underligt, att den icke kunde ställas särdeles högt som vetenskap. Det är emellertid att märka, att många av de s. k. praktiska rön, som på den tiden bildade teknologiens huvudstomme, i själva verket blivit gjorda på fullt vetenskaplig väg, ehuru av personer, som — under den länge rådande söndringen mellan teoriens och praktikens män — satte sin heder uti att gälla som »rena praktici». I samma mån denna söndring försvunnit och givit rum åt en allt intensivare växelverkan mellan teori och praktik, har den tekniska forskningen vuxit fram till allt större målmedvetenhet och givit allt rikare resultat. Den moderna teknologien kan därför sägas till väsentlig del vila på solid vetenskaplig grund och utgöra frukten av tekniskt-vetenskaplig forskning.

Utgångspunkten för tekniskt-vetenskaplig verksamhet kan i olika fall ligga inom fysiken, kemien eller eventuellt någon annan gren av den empiriska vetenskapen, och en större eller mindre del av den väg, som under forskningen följes, kan även falla inom samma vetenskapsgren. Att

inom en sådan uppdraga gränsen mellan teknisk och icke-teknisk vetenskap torde i själva verket knappast vara möjligt. Så länge forskningen bedrivs utan medvetet tekniskt mål, alltså uteslutande för klarläggande av hypotesers giltighet, är den icke-teknisk, även om mången gång de resultat, som framkomma under dylik forskning, kunna få den allra mest genomgripande tekniska och ekonomiska betydelse. Huruvida vetenskaplig verksamhet skall betraktas som teknisk eller icke, blir således ytterst beroende av, om den utövas *i syfte* att utforska någon metod för åstadkommande av teknisk effekt eller icke.

Den som med framgång skall kunna ägna sig åt tekniskt-vetenskaplig verksamhet, måste först och främst äga sådan läggning och förmåga, som överhuvud taget äro nödvändiga för bedrivande av vetenskaplig verksamhet, och måste vidare genom en omsorgsfull utbildning hava i erforderlig grad utvecklat denna förmåga samt inhämtat grundliga och tillräckligt omfattande kunskaper. Han måste sålunda ha förskaffat sig god övning i vetenskapliga uppgifters behandling i allmänhet och särskilt i observationers anställande, systematiska ordnande och kritiska bearbetning. Han måste ha förvärvat sig gedigna kunskaper inom den eller de vetenskapsgrenar, som äro grundläggande för det tekniska fack, åt vilket han vill ägna sitt arbete. Han måste slutligen ha ingående studerat detta fack, så att han har en klar överblick över teknikens ståndpunkt inom detsamma samt grundlig kännedom om de problem, som stå på dagordningen, och om de försök till lösning av dessa, som förut blivit gjorda.

Härmed äro vi inne på frågan om *ingenjörutbildningen* och denna skall nu upptagas till närmare behandling.

Benämningen »ingenjör» användes som kollektiv både för utövare av teknik och av tekniskt-vetenskaplig verksamhet — i förbigående nämnt ett förhållande, som säkerligen till stor del föranledt den förut omnämnda förblandningen av dessa begrepp. Många s. k. ingenjörer utöva teknik utan tillfredsställande utbildning härför, men dessa inkräktare på området skola här lämnas utom räkningen. Endast den gör skäl för namnet ingenjör, som genom teoretiska studier och praktisk verksamhet förvärvat sig sådana insikter i ett tekniskt yrke, att han behärskar de därinom använda metoderna såväl i princip som i tillämpning och som tillika äger sådant mått av allmänbildning, att han förmår bedöma sin verksamhet även ur kulturella och sociala synpunkter. Inom denna ram finnes plats både för en mera elementär och för en mera vetenskaplig utbildning — bådadera hava sina särskilda viktiga uppgifter att fylla.

Givetvis vore det önskvärdt, att ingenjören, även i det enklaste yrket, erhållit en så grundlig utbildning som möjligt, för att kunna föra yrket framåt. Intet yrke av ifrågavarande art torde nämligen vara så enkelt, att icke dess metod genom tekniskt-vetenskapligt arbete kan förbättras och förökade värden sålunda utvinnas. Emellertid kan ingen utbildning, den må vara än så grundlig, bibringa vad som erfordras för att med framgång bedriva tekniskt-vetenskaplig verksamhet, därest icke de naturliga förutsättningarna härför finnas. För personer, som sakna läggning och håg för vetenskaplig verksamhet, är det i allmänhet mycket fördelaktigare att tidigt komma ut i yrkesutövning med ett visserligen mindre, men väl avvägt kunskapsförråd, än att förnöta flera år med vetenskapliga studier, som de icke kunna göra fruktbärande. Det mindre kunskapsförrådet kan, om det är väl avpassat, i förening med den omständigheten, att dess innehavare tidigt kommer ut i praktiken, medan han ännu har lätt för att underordna sig och taga lärdomar, ofta vara tillräckligt för att göra honom till en mycket duglig yrkesutövare och ingenjör. Mången gång kan en sådan person även bliva en framstående uppfinnare inom sitt fack, ty det har visat sig, att uppfinnarebegåvningen ingalunda nödvändigt står direkt samman med läggningen för vetenskaplig verksamhet. Där båda äro förenade och därjämte vetenskaplig skolning samt teknisk praktik tillkommit, finnas naturligtvis de största förutsättningar för verkligt betydande uppfinningar framträdande. Men dessa förutsättningar äro mycket sällan för handen och ett stort antal viktiga tekniska uppfinningar hava faktiskt blivit gjorda av personer utan grundligare vetenskaplig utbildning men med den ingående kännedom om tekniken, som gör behovet av en förbättring verkligt kännbart och gör det möjligt att allsidigt bedöma en sådans verkan.

Av det anförda framgår, att det bör och måste finnas en kategori av tekniska utbildningsanstalter, som äro så anordnade, att deras alumner vid jämförelsevis unga år, t. ex. i 18- à 20-årsåldern, kunna utgå i yrkena och därvid vara utrustade med sådana kunskaper, att de äro i stånd att sätta sig in i den rationella tillämpningen av i praktiken använda metoder.

Utom dessa bör det då finnas en högre kategori av tekniska läroanstalter, vilka åt sina alumner meddela en grundlig vetenskaplig utbildning, som — om de äga nödig vetenskaplig begåvning — sätter dem i stånd att föra respektive yrken framåt. De som söka sin utbildning vid dessa, de blivande *ingenjörerna* i egentlig mening, måste därvid nödvändigtvis i och för sina studier förbruka en väsentligt längre tid än de förra och sålunda väsentligt senare inträda i yrkesutövning. Det är en synnerligen

viktig sak att rätt avväga längden av denna studietid, och därvid måste man taga hänsyn till, att de verkliga förhållandena i fråga om »ingenjörsmännens» fördelning på de olika slagen av läroanstalter högst avsevärdt avvika från dem, som i detta hänseende skulle kunna betraktas som ideala.

Tydligt är, att man endast i högst få fall kan hos en yngling i femtonårsåldern avgöra, om han mera lämpar sig för den ena eller andra utbildningen, speciellt om han äger sådan begåvning, att han med framgång skulle kunna ägna sig åt tekniskt-vetenskaplig verksamhet, därest han finge utbildning för detta ändamål.

Det måste därför alltemellanåt inträffa, att en eller annan begagnar sig av den lägre utbildningen, som i själva verket äger god, ja kanske framstående vetenskaplig begåvning. Hos en dylik person framträder väl då i regel efter någon tids yrkesutövning en sådan håg för forskning inom facket, att han antingen genom självstudier eller på annat sätt söker förskaffa sig den härför behöfliga vetenskapliga utbildningen. Den ifrågasvarande eventualiteten innebär sålunda ingen större olägenhet men väl en anledning att i möjligaste mån underlätta tillträdet för sådana bildnings-sökande till de högre tekniska läroanstalterna.

Mycket oftare inträffar naturligtvis det motsatta fallet, att sistnämnda läroanstalter frekventeras av personer, som sakna håg och läggning för vetenskaplig verksamhet. I själva verket torde detta vara förhållandet med det övervägande flertalet av dem, som giva sig in på den vetenskapliga ingenjörspanan, ehuru dessa, vad kunskaperna beträffar, nog kunna anses representera eliten av realläroverkens abiturienter. De som sålunda genomgå den vetenskapliga utbildningen utan att äga tillräckliga förutsättningar för att fullt tillgodogöra sig densamma, komma efter slutad studietid att bilda en kategori av ingenjörer, som kan få ganska svårt att stå sig i konkurrensen med dem, som nöjt sig med en mera elementär utbildning men i stället kommit tidigare ut i praktiken. I en del fall och inom vissa yrken kunna de förra måhända få ett försteg framför de senare på grund av sina mer omfattande kunskaper, men i andra fall kunna de i stället komma att ligga efter dessa och anledningen härtill är givetvis, att de icke använt den bästa lärotiden för det ändamål, som för dem varit lämpligast. För att icke bereda en mycket stor del av de utgående ingenjörerna alltför stora svårigheter i konkurrensen, är det därför absolut nödvändigt, att även de högre tekniska läroanstalterna inriktas på att släppa sina alumner ut i respektive yrken vid så unga år, som över huvud är förenligt med den lämnade utbildningens ändamål.

Det får icke glömmas, att mången, som ej har vetenskaplig läggning, i stället är i besittning av sådana personliga egenskaper, som göra honom lämplig till chef och organisatör och som sålunda i förening med tekniska insikter under gynnsamma omständigheter skulle kunna skapa en framstående arbetsledare eller industrichef. För en så kvalificerad person kan den tekniskt-vetenskapliga utbildningen vara av mycket stor betydelse, enär den framtvingar självverksamhet och sålunda är ägnad att utveckla såväl omdömet som karaktären, särskilt självtilliten och beslutsamheten. Icke minst för sådana personer är det emellertid av synnerlig vikt att tidigast möjligt komma ut i den tekniska praktiken.

De anstalter, där tekniskt-vetenskaplig utbildning meddelas, alltså de *tekniska högskolorna*, böra följaktligen vara så organiserade, att den för själva ingenjörutbildningen obligatoriska undervisningen icke tar längre tid i anspråk, än som är absolut nödvändigt, och synes man i detta hänseende kunna fordra, att de blivande ingenjörerna i regel böra ha hunnit avsluta sina högskolestudier vid en ålder av cirka 24 år. Därjämte bör vid högskolan tillfälle givas till ytterligare utbildning för dem, som hava fallenhet och håg att ägna sig åt tekniskt-vetenskaplig verksamhet.

I det följande behandlas nu närmare frågan om lämpligaste anordnandet av undervisningen vid en teknisk högskola, till en början med avseende på ingenjörutbildningen.

Det första spörsmål, som därvid möter, är bestämmandet av de kvalifikationer, som den inträdande bör äga för att högskolans undervisning skall kunna å ena sidan göras fullt fruktbarande och å andra sidan inhämtas på så kort tid som möjligt.

Härför erfordras givetvis, att högskolans undervisningsprogram ej belastas med läroämnen, som inhämtas vid skolor i allmänhet, även om dessa ämnen äro av största vikt för den blivande ingenjören. Fordringarna för inträdet böra därför i stort sett ställas efter studentexamen på reallinien. Utom åt elementarläroverkens abiturienter bör även lämnas tillträde för sådana, som genomgått lägre teknisk läroanstalt eller handelsläroverk och därefter känna sig hågade för tekniskt-vetenskapliga studier och särskilt bör inträde i högskolan ej göras omöjligt för den, som någon längre tid ägnat sig åt praktisk sysselsättning och därvid visat sig äga särskilt framstående anlag för ingenjörsvärdet. Alla dessa måste emellertid vid inträdet hava så grundliga insikter i de för den tekniskt-vetenskapliga utbildningen grundläggande läroämnena, att det ej för dem uppstår någon svårighet att följa undervisningen eller att för deras skull någon sänkning av undervisnings-

nivån behöver företagas. Vidare måste de äga tillräcklig språkkunskap för att kunna begagna den viktigaste utländska tekniska litteraturen ävensom ett nöjaktigt mått av allmänbildning.

Huruvida viss tids praktik bör fordras av den inträdande är en fråga, varom olika meningar yppat sig. Der deutsche Ausschuss für technisches Schulwesen (tillsatt av 25 av Tysklands förnämsta tekniska föreningar, däribland Verband höherer techn. Lehranstalten in Deutschland) yttrar härom år 1914:

»Die praktische Arbeitszeit der Studierenden in den Werkstätten und auf den Baustellen soll einen Einblick in die Arbeits- und Arbeiterverhältnisse im praktischen Betriebe gewähren, daneben aber auch eine Grundlage für das Fachstudium schaffen durch erfahrungsgemässe Erkenntnis der Eigenschaften der Materialien, der Bearbeitungs- und Herstellungsverfahren sowie des Zusammenhanges zwischen Entwurf und Herstellung. Daneben soll die praktische Tätigkeit durch eigene Anschauung mit technischen Elementen einigermaßen vertraut machen.

Ausserdem soll sie den Praktikanten Gelegenheit geben, durch unmittelbaren Verkehr die Arbeiter kennen und ihre Denkweise verstehen zu lernen. Indem sie hierdurch zur Überbrückung der sozialen Kluft zwischen zwei aufeinander angewiesenen Ständen beiträgt, übt sie gleichzeitig einen günstigen Einfluss auf die Charakterbildung der Praktikanten aus.»

Då undervisningen bör, även i de grundläggande vetenskaperna, inriktas på teknikens problem, vore det givetvis av värde, att den studerande redan från början hade någon erfarenhet från teknikens fält. Emellertid skulle en kategorisk fordran på sådan erfarenhet komma att onödigtvis förhåla tiden för den inträdande, som av en eller annan anledning icke varit i tillfälle att under sin skoltid förskaffa sig någon praktik. Att beakta är också, att sådan erfarenhet, inhämtad vid allt för unga år och innan man hunnit intressera sig för visst fack, är av mindre värde, samt att densammas behövlighet för studiet av de grundläggande vetenskaperna är långt mindre än för de fortsatta studierna, då man kommer in på de tekniska tillämpningsämnen. Dessa senare bliva till stor del nästan obegripliga och i synnerhet ointressanta för den, som icke genom egen erfarenhet i någon mån kommit till insikt om, vad fulländningen av en metod kan betyda för det tekniska resultatet. Det torde därför vara det rätta att fordra en viss tids praktisk erfarenhet, företrädesvis inom facket, åtminstone för inträde i den årskurs, där de tekniska tillämpningsämnen i större omfattning taga sin början.

Då det i allmänhet är omöjligt att avgöra, om den inträdande äger håg och anlag företrädesvis för den tekniskt-vetenskapliga verksamheten eller för verksamhet såsom arbetsledande och organiserande ingenjör, något som personen i fråga ej ens själv vet, synes det lämpligast att lägga utbildningen så, att den i möjligaste mån passar för båda dessa slag av verksamhet. Denna gemensamma utbildning bör avslutas med ingenjörsexamen. Under den härför använda studietiden bör den studerande komma till insikt om, varåt hans håg och förmåga ligga, och därefter bör han inrikta sin vidare utbildning.

Att studierna för ingenjörsexamen från början inriktas på vetenskaplig verksamhet har uppenbarligen det goda med sig, dels att därigenom alla möjligheter utnyttjas (detta icke minst för individerna själva) till att upptäcka de verkliga begåvningarna för sådan verksamhet och dels att för dem, som icke komma att ägna sig åt den vetenskapliga banan, dock alla impulser till självständig verksamhet och självkritik, som givas, komma att verka uteslutande godt såväl för kunskapsförrådets smältande som för omdömet och karaktärens mognande.

Lika tydligt, som det således är, att vid en teknisk högskola undervisningen från början till slut för alla de studerande bör vara till sin karaktär vetenskaplig, lika tydligt är det, att ingenjörsutbildningen för olika yrken kräver ganska olika sammansatta läroplaner. Huru långt denna specialisering skall drivas, är en mycket viktig fråga. Man måste noga betänka, att endast ett fåtal av de studerande från början har någon utpräglad håg för något visst område av ingenjörverksamhet, och det är ej heller säkert, att det blir möjligt för den unge mannen, att efter avlagd ingenjörsexamen erhålla sysselsättning just inom det område, som han tilläventyrs tänkt sig. Dessa omständigheter mana, att särskilt i ett litet land ej driva specialiseringen för långt.

Såsom utgångspunkt för specialiseringen och uppdelningen av läroämnen kan väljas antingen de olika grundläggande vetenskapsgrenarna eller mer eller mindre olikartade verksamhetsgrenar, i vilka ingenjörverksamheten lämpligen kan tänkas uppdelad.

De tekniska vetenskaperna enligt den definition, som ovan givits, hava i stort sett sin grund i de exakta vetenskaperna eller närmare bestämt uti matematiken såsom allmän grund och vidare uti de kemiska och fysiska vetenskapsgrenarna. Häruti kan man således se en anledning att företaga en tudelning av ingenjörsutbildningen allt efter som den grundas på kemien eller fysiken. Med avseende på ingenjörverksamheten kan också

göras en tudelning nämligen uti den verksamhet, som huvudsakligen riktar sig på framställandet av material och preparat, och den, som riktar sig på konstruktiv verksamhet. Dessa nu nämnda tudelningar hava emellertid ett naturligt sammanhang sålunda, att i stort sett den verksamhet, som riktar sig på framställandet av material och preparat, vilar på kemien och dess närmast besläktade vetenskapsgrenar samt att den, som inriktar sig på konstruktioner, till huvudsaklig del vilar på fysiken.

Normerna för en tudelning av ingenjörutbildningen äro härmed givna. Den vidare uppdelningen bliver ej beroende så mycket av olika grundvetenskapliga grenar, utan har fastmera sin grund uti de yrken, uti vilka ingenjörverksamheten kommit att uppdelas, en uppdelning, som i och med teknikens utveckling har stark tendens att allt vidare fortgå.

En fråga av största betydelse för ingenjörutbildningen är vidare den, om vid en teknisk högskola läroplanerna skola vara så anordnade, att endast vissa obligatoriska examina förutsättas kunna avläggas eller om den studerande skall äga att helt och hållet själv sammansätta sin läroplan såsom han anser det för sig lämpligast. Det ovannämnda tyska undervisningsutskottet säger rörande denna fråga:

»Der Hochschulunterricht muss auf Erziehung selbständig denkender und arbeitender Persönlichkeiten gerichtet sein. Deswegen ist die Freiheit des Studiums aufrechtzuerhalten. Ein Schematisieren durch starres Festlegen des Lehrganges in den einzelnen Fächern für alle Hörer und ein zu weit gehender Ausbau der Prüfungen sind zu vermeiden.»

I betraktande av den ständigt ökade mängden av kombinationer av teknisk verksamhet och därav följande krav på nya ingenjörstyper kunde det synas, som om det fullt fria ämnesvalet slutligen borde bliva den enda riktiga utvägen. Denna anordning har emellertid några nackdelar, dock icke oöverbanneliga. En är de betydligt ökade kostnaderna för icke blott lärarekrafter utan även för lokaler; en annan är, att det blir synnerligen svårt för den oerfarne att välja sina ämnen på lämpligt sätt. Detta senare torde dock kunna avhjälpas genom studiehandböcker, innehållande råd i nämnda avseende. En tredje svårighet kan tänkas uppstå därigenom, att sådana statsinstitutioner, vid vilka ingenjörsexamen erfordras för vinnande av anställning, skulle kunna stipulera specialexamina sammansatta efter varje institutions särskilda krav, vilket skulle i allt för hög grad inskränka den utexaminerades möjligheter att vinna statsanställning. Denna svårighet är utan tvivel den allvarsammaste för det fullt fria valet av läro-

planer och skulle säkerligen förr eller senare leda till, att vissa examens-typer för statsanställning åter komme att införas.

Vid den internationella kongressen för högre teknisk undervisning, som hölls i Brüssel 1910, meddelade professorn i maskinkonstruktion vid universitetet i Liège, att, ehuru studierna vid nämnda universitetet voro fullt fria, var det likväl mycket sällsynt, att någon icke följde de officiella programmen för erhållande av diplom.

Med hänsyn till dessa förhållanden torde man böra fortgå på den väg, som redan i allmänhet är beträdd, med obligatoriska läroplaner för ett i möjligaste mån begränsat antal olika examenstyper, men med så stor frihet som möjligt för de studerande att få utbyta ämnen. Möjligheten för sådant utbyte måste dock vara begränsad huvudsakligen till sekundära tillämpningsämnen, ty de grundläggande vetenskapsgrenarna för en viss examen böra givetvis, likasom de för samma examen i första rummet bestämmande tillämpningsämnena, förbliva orubbade, om examen i fråga över huvud taget skall anses såsom obligatorisk. Med hänsyn härtill torde det vara nödvändigt, att i en examensstadga angives vilka ämnen, som för en viss examen äro oeftergivliga. Dessas antal bör emellertid vara det minsta möjliga. Dessutom torde det vara lämpligt att för examen angiva ett visst antal av andra ämnen vilka, ehuru uppräknade såsom tillhörande viss examen, dock kunna få utbytas.

Vad undervisningens beskaffenhet beträffar, torde det vara oeftergivetligt, att densamma från början till slut är inriktad på att utveckla den studerandes iakttagelseförmåga, självverksamhet och omdöme, med ett ord att undervisningen måste vara icke blott vetenskapligt grundad utan även helt vetenskapligt inriktad. Endast en sådan undervisning, vid vilken den studerande oupphörligt ställes inför val och tvingas att taga ståndpunkt, förmår att utveckla sådana karaktärsegenskaper, som erfordras hos såväl vetenskapsmannen som, icke minst, hos den blivande chefen.

Uti matematiken och den teoretiska mekaniken vinnes detta genom talrika, lämpligt valda uppgifters lösande, i kemien och fysiken genom laborationer på så tidigt stadium som möjligt, allt dock med minsta möjliga upprepande av förut inhämtade elementarkurser. Undervisningen i de sistnämnda vetenskapsgrenarna bör ej så mycket avse att lämna notiser om alla möjliga reaktioner och fenomen, utan mera att giva ett begrepp om dessa vetenskapers allmänna ståndpunkt och strävan, ty härigenom vinner den studerande den överblick och mognad, som äro nödvändiga att äga för att med framgång kunna vid behov idka självständiga studier även inom

de grundläggande vetenskaperna, varigenom det kan bliva honom möjligt att på djupet intränga i ett eller annat tekniskt-vetenskapligt problem.

I fråga om övriga grundläggande ämnen förtjänar framhållas, att ritövningarna, såväl i samband med undervisningen i beskrivande geometri som i s. k. krokirritning, kunna — rätt anordnade — vara i hög grad ägnade att utveckla iakttagelseförmåga, noggrannhet och självkritik, allt egenskaper, oundgängliga för framgångsrik ingenjörsvksamhet.

I tillämpningsämnen bör undervisningen meddelas genom föreläsningar, anslutande sig till tid efter annan av trycket utgivet program, vilket bildar kursens stomme. Om litteraturen i ämnet icke har några lämpliga verk, vilka kunna anvisas till hemstudier, är det utan tvivel mycket lämpligt, att läraren utarbetar kompendier, som kunna tjäna för sådant ändamål. Inga kompendier, om än så förträffliga, kunna emellertid ersätta lärarens föredrag, i vilka han på ett mera personligt och levande sätt kan utveckla sitt ämne och därvid särskilt beröra det aktuella inom facket. Historiska framställningar kunna vara av stort intresse men kunna i allmänhet ej medhinnas i vidare mån, än som är nödvändigt för att visa utvecklingstendensen. Föreläsningarna böra huvudsakligen inriktas på att framställa det principiella och de olika vägar, man sökt tillämpa för att nå vissa mål, samt kritik av dessa vägar. Hela framställningen bör ske under sådan form, att de studerande känna sig som deltagare i denna kritik och såmedelst eggas till självständigt tänkande. Läraren bör icke söka att å priori ställa sig på auktoritetens höga piedestal, utan fastmera vädja till auditoriets omdöme, under det han uttalar sin mening, vilken han givetvis alltid bör framlägga, där han har någon bestämd sådan. I den mån denna mening är sakrik och logisk, blir läraren en auktoritet för sitt auditorium. Ämnet får icke framställas såsom trosartiklar, utan bör tydligt markeras, att det är stadt i ständig utveckling under en alltjämt fortgående forskning.

Av betydande vikt är emellertid att giva de studerande en exposé över vad som i den närvarande stunden är utforskat och vad som står på dagordningen. Skulle man endast väcka intresse och forskningsbegär, men icke visa utvecklingens nuvarande ståndpunkt, skulle de ungas forskningslust och initiativ kunna komma att kastas bort på saker, som redan äro utforskade eller prövade och befunna odugliga. Härigenom skulle man icke göra de unga ingenjörerna ej heller tekniken några tjänster.

Vid en lärokurs avslutning bör således den studerande hava fått kännedom om, vilka resultat, som äro uppnådda inom facket, och huru man veten-

skapligt kommit till dessa samt vad som för närvarande eftersträvas och varför detta eftersträvas.

Av synnerlig vikt är, att de särskilda föreläsningarna bilda ett helt och att de olika lärarnas föreläsningkurser komplettera varandra i avsikt att lämna en bred översikt över hela fackets nuvarande ståndpunkt och utvecklingsmål. Detta kan endast vinnas genom intresserat samarbete mellan lärarne.

I allmänhet böra lärokurserna inom tillämpningsämnena åtföljas av övningskurser, vid vilka den studerande skall få tillfälle att pröva sina krafter på uppgifters självständiga lösande. Dessa övningar kunna uppenbarligen anordnas så, att de i allra högsta grad tjäna utvecklingen av den studerandes anlag för självständig verksamhet. Detta vinnes i första rummet genom att giva uppgifterna lämpliga mål, som från början utesluter varje schablonmässighet. Konstruktionsuppgifternas lösning bör därför i allmänhet ske genom skisser, visserligen i skala, men utan tidsödande ritarbete. Endast i så stor utsträckning, som det kan anses oundgängligen behövt, böra dessa ritningar utföras såsom i praktiken förekommande arbetsritningar. Det är givetvis nog, att den studerande får den övning, som ger honom kännedom om rådande praxis härutinnan samt de önskemål, som därmed äro förknippade. Då inom många grenar av tekniken den unge ingenjören till att börja med ofta måste försörja sig genom ritarbete, kan det emellertid vara en fördel för honom själv, om han har någon träning i sådant arbete, då han lämnar högskolan. Om han därför för tids vinnande för dylik träning önskar utföra en större del av sina ritningar i sådan fullständigare form, som motsvarar praxis, må detta ej förmenas honom, men då högskolans uppgift icke kan vara att utveckla handafärdighet, bör noga tillses, att ett dylikt omsorgsfullare ritarbete icke får inverka på betyget i resp. konstruktionsämnen. Skulle nämligen den studerande få den föreställningen, att hans konstruktioner bedömdes efter graden av skönrättning, skulle lätt det schablonmässiga i stället för det självständiga arbetet få överhanden.

Den studerande, som genom föreläsningarna i ämnet bör vara påverkad till initiativ, bör under övningarna särskilt uppmuntras att söka göra sina egna spekulationer gällande och därvid mötas med intresse och förståelsefull kritik från lärarens sida. Genom studieresor under lärarens ledning skola den studerandes vyer ytterligare vidgas och hans omdöme stadgas.

För att fullt kunna göra sig till godo en sådan undervisning, är det av stor betydelse, att den studerande under ferierna fortsätter att samla er-

farenhet från tekniken. Det är helt säkert just på detta stadium av utveckling, som ett sådant praktiserande medför det bästa resultatet.

Under inhämtandet av den nu beskrivna undervisningen bör den studerande undergå prov och tentamina, vilka skola hava till ändamål i första rummet att ådagalägga, att han rätt uppfattat de ledande principerna samt att han kan tillämpa dessa principer på konkreta fall, sådana som möta ingenjören i praktiken. Det kunskapsbetyg, som tilldelas den studerande, bör därför i främsta rummet avse hans mogenhet och förmåga av självständigt omdöme vid användandet av de inhämtade kunskaperna. Det är således icke nog, att han inhämtat dessa kunskaper efter den litteratur, som anvisats honom till hemstudium; han måste också hava genom föreläsningarnas åhörande och övningarna bibringats träning uti självständigt omdöme. Härav följer, att den studerande måste ordentligt bevista föreläsningar och övningar för att erhålla sådan träning. Härvidlag bör det knappast kunna bliva tal om tvång, om nämligen föreläsningar och övningar äro sådana, att de intressera den studerande och om han från början inser, att han svårigen på annan väg kan tillägna sig den allmänna syn på ämnet, som sätter honom i stånd att rätt tillämpa de av läraren framställda principerna.

Tentamina få således ej inriktas på någon slags memoreringsuppväring. Den bästa formen för tentamen är enligt min mening den skriftliga. Härvid bör tentanden få medföra vilka anteckningar och böcker han önskar och frågorna böra väljas bland sådana, som yppa sig i praktiken och böra besvaras såsom vore det fråga om att avgiva ett motiverat utlåtande, avsett för en fackkunnig myndighet. Svaret bör således visa, huru tentanden efter grundligt övervägande skulle vilja behandla saken, om han hade ansvaret för dess bästa möjliga utförande. Genom den erfarenhet, som jag under min läraretid samlat rörande tentanders förmåga i detta avseende, har jag fäst mig vid, hur ringa förmågan i allmänhet är i början, huru segt den från tidigare år invanda skolproblem-synpunkten hänger i, d. v. s. huru rådlös tentanden egentligen är, då han icke har alla premisser fixa och påtagligen givna och de »obekanta» i sådan form, att de kunna betecknas med x och y . En fråga, i vilken han själv måste klarlägga premisserna och själv avgöra vad, som bör sökas, förefaller honom vid hans första försök nästan »omöjlig». Men detta tillstånd går snart över, så att efter ett års kurs kan samma tentand visa prov på ganska moget omdöme. En stor roll spelar det härvidlag, om den studerande varit ute i praktisk verksamhet. Härmed prövas i vilken grad det undervisningssystem, som

tillämpas — naturligtvis, där det levande intresset finnes — är ägnat att väcka självverksamheten och utveckla omdömet.

Ej förr än den studerande, även om han ägde aldrig så stora minneskunskaper, har förvärvat sådan mogenhet i omdömet, bör han erhålla sitt ingenjörsexamen. Återigen, om han förvärvat sig detta omdöme, spelar det mindre roll, om han skulle hava förbigått en eller annan detalj. Handböcker och facklitteratur har han ju tillgång till allt framgent, och med de allmänna kunskaper och det mogna omdöme han förvärvat kan han lätt sätta sig in uti ett och annat, som han förbigått vid kursens inhämtande.

För att man må kunna fullt konstatera, om den studerande besitter den förmåga av självständig verksamhet, det omdöme och den självkritik, som bör utmärka en vetenskapligt utbildad ingenjör, är det tydligen av stor vikt, att han underkastas ett prov i detta hänseende, ett examensarbete, för vilket nödig tid bör beredas honom efter kursernas avslutande. Visserligen är avsikten med detta arbete huvudsakligen ett prov, men, rätt anordnat, bör detsamma också giva ett slutligt och högst värdefullt tillskott uti utvecklingen av just de egenskaper, som det avser att pröva. Detta vinnes givetvis till stor del därigenom, att läraren följer arbetet och lämnar de råd och i synnerhet den kritik, som erfordras. Om sådant sker pedagogiskt riktigt, behöver ej därigenom något hinder läggas i vägen för utvecklingen av den studerandes självständiga verksamhet; tvärtom, ty genom lärarens kritik införas många svårigheter, vilka eljest icke skulle ha uppmärksammas, och det är just sökandet efter utvägar till svårigheters övervinnande, som framtingar och utvecklar förmågan av självständig verksamhet.

En uppfattning, att detta examensarbete skulle vara det enda arbete, som under studietiden erbjuder den studerande tillfälle att utveckla självständig verksamhet, är påtagligen oriktig. Såsom ovan påpekats, bör hela undervisningen från början till slut vara inriktad på detta mål och alldeles särskilt bör detta vara fallet med tillämpningsämnenas laborations- och konstruktionsövningar. Skillnaden mellan dessa föregående kursarbeten och examensarbetet är endast den, att det senare utföres sedan den studerande under de förra inhämtat de kunskaper inom facket, som göra det för honom möjligt att med nödig överblick över ämnet fullgöra ett självständigt arbete och inse detsammans betydelse såsom ett led i utvecklingen inom facket. För att den för examensarbete anslagna tiden må bliva använd på bästa sätt, är det dock icke lämpligt, att — i synnerhet om någon rikligare tid kan tillmätas — allt för strängt uppfatta detsamma uteslutande som

ett prov, utan fastmera som ett vetenskapligt arbete med sitt särskilda mål, under vilket läraren har tillfälle att skaffa sig en bestämd uppfattning om den studerandes förmåga och omdöme. Av det nu anförda torde framgå, att examensarbetet under inga omständigheter bör få inkräkta på den tid, som är nödvändig för respektive kurser, vilka det icke kan ersätta. Tiden, som anslås till detta arbetes utförande, bör emellertid om möjligt vara fri från kursarbeten, så att den studerande därunder må kunna ostörd ägna sig åt sin uppgift.

Såsom förut påpekats, är det av ofantlig vikt, att den högskoleutbildade ingenjören kommer ut i sitt yrke vid så unga år som möjligt. Detta är i första hand viktigt för den, som skall utbildas till arbetsledare och chef. Det kan därför ej nog framhållas, huru viktigt det är att med omsorg välja de läroämnena, som skola upptaga utbildningstiden. Från denna synpunkt torde man därför först och främst böra betrakta frågan om ekonomiska och sociala läroämnens upptagande på utbildningsprogrammet. Dessa ämnen äro givetvis av en mycket stor vikt för den, som kommer att bekläda en chefspost inom industrien. Då nu i allmänhet ingen på förhand vet sitt öde, så följer därav, att alla böra få göra bekantskap med de ifrågavarande ämnena.

Till undvikande av missförstånd måste bestämt framhållas, att här är fråga om fristående ekonomiska specialämnena och således icke om undervisning i den ekonomiens betydelse, som så att säga tillhör teknikens väsen och måste ingå såsom ett ledande motiv i all tekniskt-vetenskaplig undervisning.

Med de ekonomiska faktorernas betydelse i sistnämnda avseende måste således varje ingenjör vara på det intimaste förtrogen, men ett allt för vidtomfattande studium av de specialekonomiska och sociala ämnena torde däremot icke vara lämpligt; icke blott därför, att dessa ämnen ej utgöra något vetenskapligt underlag för tekniken, utan även därför, att endast ett mindretal, nämligen företrädesvis de blivande industricheferna o. d., komma att behöva dessa kunskaper, samt slutligen därför, att många totalt sakna håg för dylika studier. Klart är emellertid, att alla böra få göra bekantskap med de viktigaste grunderna för de ekonomiska och de sociala vetenskaperna, framställda med hänsyn till ingenjörens blivande verksamhet. De som därvid fatta intresse för ett fortsatt, mera ingående studium av denna art, böra företaga detta på egen hand eller vid någon handelsläroanstalt. I den obligatoriska undervisningen vid en teknisk högskola bör således ingå jämnt så mycket av ifrågavarande ämnen, som behöves för att intressera den stude-

rande och göra honom kapabel att, då omständigheterna därtill föranleda, antingen fortsätta studiet på egen hand eller välja någon lämplig specialkurs vid en handelshögskola.

Såsom ett viktigt led i den unge ingenjörens utbildning böra även ingå lämpliga kroppsövningar. Dessvärre är det nog så, att den, som är verkligt intresserad av sina studier, lätt kommer att försumma sin kroppsliga utveckling. Det är därför nödvändigt, att vid högskolan hållas föredrag om kroppsvård och lämnas tillfälle till gymnastik. Lokal för sådant ändamål bör därför finnas inom högskolan. Ledningen av gymnastiken och idrotten torde emellertid lämpligast omhändertagas av någon sammanslutning inom de studerandes krets.

När den unge mannen lämnar en högre teknisk utbildningsanstalt efter att hava inhämtat en sådan utbildning, som nu blivit skisserad, är han emellertid ingalunda den fullfärdige ingenjören, åt vilken kan anförtros mera ansvarsfulla uppgifter, utan då först börjar under trycket av det verkliga ansvaret, vilket så småningom bör påläggas honom, hans måhända allvarligaste utvecklingsstadium på ingenjörsbanan. Det är under dessa första år i allt ansvarsfullare uppgifter, som karaktär och kunskaper mogna tillsammans och göra honom till den ingenjör, som han kan bli. Ofantligt mycket beror härvid på, under vilken ledning den unge mannen från början kommer och särskilt huru mycket hans ledare själv förstår sin sak och intresserar sig för hans utveckling. Detta senare isynnerhet därigenom, att ledaren låter honom successivt få allt större ansvar och delaktighet av de allmänna, särskilt de ekonomiska synpunkter, som reglera det företag, vid vilket han är anställd. Det besvär, som ledaren härför underkastar sig, får han vanligen rikligen lönat genom större intresse hos den unge ingenjören, vilken snart känner sig mera som deltagare i företaget än som löntagare. När detta stadium uppnåtts, torde man få anse att ingenjörsutbildningen i egentlig mening är avslutad. Därefter vidtager utvecklingen av specialisten eller arbetsledaren och, om lyckan är god, chefen.

En ytterligare vetenskaplig utbildning fordras dock för den, som vill bli tekniskt-vetenskaplig expert inom något visst område. I denna utbildning bör ingå ett vetenskapligt forskningsarbete av större omfattning, än som kan medhinnas uti det ovan omnämnda examensarbetet.

Rörande detta forskningsarbete torde först böra avgöras, på vilket stadium av utbildning detsamma bör företagas.

Det synes då vara tydligt, att först den tekniskt-vetenskapliga delen av den vanliga ingenjörsutbildningen, inclusive examensarbetet, bör vara full-

bordad. Troligt är väl, att oftast just detta examensarbete kommer att giva den studerande full visshet om, åt vilket håll hans håg ligger, och i många fall blir början till det mera omfattande forskningsarbete, som bör fullborda utbildningen. Är det då lämpligt, att detta arbete omedelbart vidtager? Utan tvivel förekomma fall, då detta kan vara lämpligt, nämligen om den studerande har mycket solida kunskaper i de grundläggande vetenskaperna samt god tekniskt-vetenskaplig utbildning och därtill äger nödig kännedom om de tekniska och industriella förhållandena ifråga om den specialitet, inom vilken han ärnar förlägga sitt forskningsarbete. I allmänhet torde emellertid den sistnämnda förutsättningen ej vara till finnandes vid examensarbetets fullbordande, varför det i allmänhet erfordras någon tids praktik, innan det forskningsarbete utföres, som skall avsluta en högre tekniskt-vetenskaplig utbildning.

I anslutning till det nu anförda synes det mig givet, att en sådan högre utbildning, som erfordras för dem, som skola särskilt föra den tekniska vetenskapen inom olika områden framåt, såsom lärare vid tekniska läroanstalter m. fl., bör meddelas vid de tekniska högskolorna åt ingenjörer, som i praktiken hava inhämtat nödig kännedom inom visst fack.

Huruvida denna utbildning bör avslutas med en examen eller grad, är därmed ej givet. Att inrätta en sådan examen endast för att åstadkomma en titel bör ju ej komma i fråga, isynnerhet som den i de tyska staterna lancerade »doktoringeniör»-titeln ej vunnit någon synnerlig popularitet inom svenska ingenjörskretsar. Jag ingår icke här på denna titelfråga. Frågan är för mig uteslutande den, om någon praktisk nytta skulle vinnas med en dylik examen. Utan tvekan kan man säga, att inom många grenar av tekniken en högre tekniskt-vetenskaplig kompetens är och alltmera blir behöfvlig och eftersökt. Då sådan kompetens erfordras för någon befattning, är det av största vikt för den, som skall besätta platsen ifråga, att kunna bedöma de sökandes kompetens. Detta skulle visserligen kunna ske genom en ingående granskning av de sökandes meriter, men om dessa, såsom här är ifråga, bestå av vetenskapliga undersökningar, lärer det i allmänhet saknas nödiga förutsättningar härför hos dem, som skola avgöra saken. Härvid skulle således, åtminstone i de fall, då den sökande icke hunnit göra sig ett namn, avgörandet — vad den vetenskapliga kompetensen beträffar — kunna ske enklare genom examensbetyg.

Av det nu anförda torde framgå, att en dylik högre tekniskt-vetenskaplig examen är och ännu mera blir av behovet påkallad, i den mån tekniken kommer att allt vidare utveckla sig på vetenskapliga grunder.

Vilka fordringar böra då uppställas i en dylik examen?

Att börja med torde det vara givet, att särskilt solida kunskaper måste kunna presteras i de grundläggande vetenskaperna såsom matematik och de fysiska eller kemiska vetenskapsgrenarna. Vidare torde böra erfordras avgångsexamen från den tekniska högskola, vid vilken den högre examen skall avläggas, eller från annan teknisk högskola med motsvarande examensfordringar. Slutligen måste fordras, att examinanden med stöd av egna forskningar utfört någon mera omfattande tekniskt-vetenskaplig undersökning inom något område av tekniken, inom vilket han ådagalägger sig äga fördjupade och mera omfattande kunskaper.

De prov, som examinanden måste underkastas för att godkännas, böra givetvis vara av sådan beskaffenhet, att visshet därigenom erhålles om, att han verkligen besitter nu nämnda kvalifikationer. Det kan därför icke vara nog, att han förete vissa betyg och intyg samt inlämnar en avhandling, utan denna avhandling måste även offentligen försvaras vid den högskola, som skall meddela examen ifråga. Detta försvar torde böra föregås av en mera detaljerad redogörelse inför vederbörande examinator rörande undersökningen ifråga samt rörande examinandens kännedom om det område av tekniken, inom vilken undersökningen blivit utförd. Härav samt av de intyg, som kunna företes rörande verksamhet inom området i fråga, torde kunna givas full visshet om, huruvida examinanden besitter den fördjupade och mera omfattande kunskap, som erfordras, och om han självständigt utfört den undersökning, vilken han åberopar. Om examinanden ej avlagt ingenjörsexamen vid den högskola, där han vill taga sin högre examen, torde det bliva nödvändigt att fordra, att hans undersökning för denna sistnämnda examen verkställas under viss tid vid denna högskolas institutioner under examinatorns kontroll.

Skulle examinanden ej kunna genom betyg styrka, att han äger tillräckligt solida kunskaper i de grundläggande vetenskaperna, bör det vara honom tillåtet att avlägga prov även i dessa ämnen.

En fråga, om vilken meningarna torde vara delade, är den, om det i den ifrågavarande examen bör fordras, att examinanden skall hava dokumenterat sig både såsom en fullt duglig ingenjör inom facket och såsom tekniskt-vetenskaplig forskare, eller om endast det senare kan vara tillräckligt.

Såsom redan i det föregående blivit påpekat, lärer tekniskt-vetenskaplig forskning ej kunna med framgång bedrivas av den, som ej äger ingående kännedom om jämväl praktiken inom det ifrågavarande facket. Emeller-

tid är det ju icke nödvändigt, att han varit arbetsledare, men väl att han kommit in uti de praktiskt-ekonomiska synpunkter, som måste tillämpas inom facket ifråga. En sådan kännedom lär han knappast kunna förskaffa sig annat än såsom praktiserande ingenjör. Härav följer, att i regel endast den, som efter avlagd ingenjörsexamen någon tid allvarligt sysslat inom praktiken inom ett visst fack, kan avlägga den högre tekniskt-vetenskapliga examen, som här är fråga om, och som då naturligtvis bör avse just det ifrågavarande facket.

En på sådant sätt utbildad ingenjör borde kunna med största framgång ägna sig åt forskningar inom sitt fack och främja dess utveckling, alltså just fylla de förhoppningar, som kunna ställas på den högsta tekniskt-vetenskapliga utbildning, vilken kan givas vid en teknisk högskola, och en högre tekniskt-vetenskaplig examen, avlagd under sådana garantier, som nu skisserats, torde icke råka i fara att nedsjunka till en mer eller mindre tvivelaktig lärdomsdekoration.

Vid den internationella kongressen för högre teknisk undervisning i Brüssel 1910 yttrade ombudet för Association des Ingénieurs sortis de l'Ecole polytechnique de Bruxelles M^r EM. GREINER följande:

»Les uns considèrent l'ingénieur comme un docteur en sciences, dont la fonction est de chercher à résoudre, par les méthodes mathématiques et scientifiques, les problèmes de la pratique. Il est l'intermédiaire entre la science et l'industrie.

Les autres le considèrent comme un praticien appelé à diriger de grandes industries et à leur faire donner leur maximum de bénéfices par l'application bien entendue de connaissances théoriques et pratiques. C'est l'intermédiaire désigné entre le travail et le capital.

Pour les deux cas le programme des études à suivre paraît devoir être différent.»

»L'ingénieur praticien nous semble être celui, dont il y a lieu de s'occuper principalement, car il forme la majorité de nos collègues. La chose est si vraie que dans bien des pays ce sont les seuls que l'on cherche à former. Il faudra donner à cet ingénieur une instruction qui lui permette de connaître d'une façon approfondie les forces naturelles et les lois qui les régissent, les matériaux et les produits que la nature met à sa disposition et la façon de les employer, de les traiter et de les combiner pour arriver aux résultats qu'il cherche à obtenir. Les mathématiques seront le moyen qui lui permettra de traduire ses conceptions et d'arriver à les combiner pour en tirer de la façon la plus précise et la plus certaine des conclusions pratiques.

Les connaissances du »docteur-ingénieur», au contraire, devront être presque exclusivement théoriques, les conclusions de ses recherches devant être l'expression de solutions purement scientifiques de problèmes que lui aura soumis l'ingénieur praticien et que celui-ci aura comme mission de réaliser industriellement, si faire se peut.»

Såsom härav framgår skulle dessa »doktor-ingenjörer» bliva ett slags kammarfilosof, som skulle erhålla sina impulser från de i praktiken arbetande ingenjörerna och som ej heller skulle få syssla med sina vetenskapliga resultat utnyttjande inom tekniken och industrien. De tekniskt-vetenskapliga problemen skulle sålunda behandlas dels rent teoretiskt av en person och dels praktiskt-industriellt av en annan. Hela detta resonemang vilar tydligen på en outvecklad kännedom om begreppet teknisk vetenskap.

Genom underhållandet av en sådan dualism lär man icke kunna påräkna sådan utveckling av den vetenskapliga tekniken och den därpå grundade industrien, som om såväl den högsta tekniskt-vetenskapliga utbildningen som den tekniskt-industriella rutinen förenas hos samma person. Det är endast så utrustade personer, som hava full förutsättning för att målmedvetet genom industrien ställa den tekniska vetenskapens frukter till kulturens förfogande.

Av särskilt intresse är att se vilken plats inom kulturutvecklingen, som Greiner ger de två olika kategorierna av ingenjörer. Den vetenskapsidkande ingenjören betecknar han såsom förmedlare mellan *vetenskapen* och *industrien*, den arbetsledande såsom förmedlare mellan *arbetet* och *kapitalet*.

Denna placering torde emellertid påkalla en särskild betraktelse, vilken ej må tagas såsom något underkännade av Greiners mening, utan endast såsom en utveckling av denna.

Den tekniskt-vetenskapligt arbetande ingenjörens verksamhet faller helt inom vetenskapen. Hans rön komma kulturen till godo genom industrien, som givetvis icke är sitt eget mål utan endast det system, varigenom arbete och kapital i förening bringa hans rön till kulturens tjänst. Industrien är förmedlaren mellan vetenskapen och kulturen. Den förra är källan, den senare är målet; industrien är den stora brusande floden, i vilken materien (kapitalet) och kraften (arbetskraften) förvandlas till för kulturen nyttig energi eller understundom bortslösas i virvlande skum, ja till och med i för kulturen till synes skadliga svallvågor.

Den andra kategoriens ingenjörer åter, de som endast tillämpa den

tekniska vetenskapens rön eller som uteslutande leda och organisera växelverkan mellan arbete och kapital, verka därmed helt inom industrien. Dessa äro således, såsom Greiner framhåller, mellanhänder mellan arbetet och kapitalet.

Ehuru man ej kan säga, att industrien är den tekniska vetenskapens mål utan fastmera dess medel för tillgodoseendet av kulturens blomstring och utveckling, så får man dock ej anse detta såsom industriens enda funktion. Industrien, denna växelverkan mellan arbetet och kapitalet, har nämligen en inneboende tendens att, även utan tillskott av vetenskapliga impulser, förstöra sig själv därigenom, att kapitalet och arbetskraften under och genom sin växelverkan allt fort ökas. Denna ökning av hela det industriella livet och dess medel uppställer åter nya krav på vetenskapen, den tekniska icke minst, för att leda ökningen uti för kulturutvecklingen önskvärda banor.

Industrien såsom sådan torde kunna sägas ej vara i direkt behov av den tekniska vetenskapens impulser, ty densamma skulle måhända kunna blomstra och utvecklas kvantitativt utan några nya tekniskt-vetenskapliga rön, ja, för många industriegren och särskilt för mångt ålderdomligt industriellt företag skulle det vara till stor vinst, om det finge »vara i fred för nya påhitt». Den tekniska vetenskapens rön äro således icke alltid välkomna för industrien såsom privatekonomisk faktor betraktad. På det hela taget driver emellertid den tekniska vetenskapen industrien framåt, icke blott kvalitativt, utan även kvantitativt, ty helt säkert skapas genom vetenskapens rön ett vida större antal nya behov och möjligheter för industri än som genom dessa rön försvinna.

Av detta förhållande mellan vetenskapen och industrien torde det framgå, att, om kulturutvecklingen skall bliva på bästa sätt tillgodosedd, den tekniskt-vetenskapliga ingenjörutbildningen huvudsakligen måste anpassas efter vetenskapens väsen, ståndpunkt och fordringar. Industriens tillfälliga ståndpunkt är visserligen ekonomiskt sett av stor betydelse, men kommer dock i betraktande i andra hand för den, som utbildar sig till tekniskt-vetenskaplig ingenjör. För sådana ingenjörer åter, vilka, såsom Greiner framhåller, äro förmedlare mellan arbetet och kapitalet, bör utbildningen tydligen mera anpassas efter industriens tillfälliga ståndpunkt. Dessa ingenjörers utbildning tillhör dock icke egentligen de tekniska högskolorna, vilka alltid måste arbeta på att giva sina alumner i första rummet en tekniskt-vetenskaplig utbildning. Sedan beror det på individen, huruvida han kommer att utveckla sig såsom teknisk vetenskapsidkare eller

såsom industriman eller, vilket är det allra önskvärdaste, kommer att göra sin vetenskapliga förmåga gällande genom forskning under eget arbete inom industrien eller de tekniska företagen. Endast den tekniske vetenskapsman, som grundligt känner arbetets och kapitalets växelverkan, villkor och möjligheter, kan med bästa resultat använda sig av dessa mäktiga hjälpmedel för att överföra vetenskapens frukter till kulturen. Den ingående kunskapen om dessa förhållanden kan dock ej vinnas i en läroanstalt, utan måste inhämtas, rörande varje specialitet särskilt, genom målmedveten och ansvarig verksamhet inom resp. fack. Med andra ord, för ingenjören såsom teknisk vetenskapsman är det i allmänhet icke nog att göra sina rön å ett laboratorium, huru värdefullt för forskningen ett sådant än må vara; hans laboratorieobjekt bör vara de tekniska företagen och anläggningarna.

Ju flera vetenskapligt utbildade ingenjörer, som på sådant sätt och med intresse kasta sig in på de tekniska problemen, desto mera skola landets alla naturrikedomar bliva tillvaratagna för kulturens ändamål och desto konkurrenskraftigare skola också vår industri och våra näringar blomstra och därigenom skall landet bliva både kapital- och folkrikare samt dess oberoende allt mera betryggas.

Man torde även kunna hoppas, att de tekniska läroanstalterna skola kunna erhålla sina lärarekrafter från denna kategori av ingenjörer. Att detta är ett livsvillkor för den tekniska undervisningen och därmed för teknikens, industriens och kulturens utveckling på det sätt, som nu skildrats, är ju uppenbart. Alldeles särskilt kommer detta att bliva av vikt i de tider, som nu stunda, då helt visst folken mera än hittills nödgas att anlita sina egna naturtillgångar för tryggheten av sin existens. Den tekniska högskoleundervisningen måste finna medel att draga till sig t. o. m. de i tekniskt-vetenskapligt hänseende allra förnämsta av dessa ingenjörer. Härför synes emellertid konkurrensen med industrien utgöra ett hinder. I denna svårighet torde man dock ej behöva se en allt för stor fara, dels därför att de allra högsta lönerna inom industrien utbetalas i regel till dem, som visat sig vara merkantila genier, och dessa äro icke i regel de i vetenskapligt hänseende rikast utrustade personerna, dels därför att en framstående tekniskt-vetenskaplig ingenjör, även om han blir lärare vid en teknisk högskola, i regel kan påräkna avsevärda inkomster av privata uppdrag. Detta senare är en synnerligen lycklig omständighet, ty dels blir det därigenom möjligt för högskolorna att erhålla framstående lärare och dels komma dessa lärare att allt fortfarande stå i intim

kontakt med den praktiska tekniken, något som är nödvändigt, om läraren skall kunna icke blott hålla sig uppe på högsta nivå i sitt fack och meddela en däremot svarande undervisning utan allt fortfarande stå såsom föregångsman i facket.

Det tyska undervisningsutskottet säger rörande lärarerekryteringen: »Zu Professoren der technischen Wissenschaften sollen in erster Linie Männer berufen werden, die längere Zeit in der Praxis erfolgreich tätig waren und neben dem theoretischen und praktischen Wissen, das eine Voraussetzung ihrer Lehraufgabe ist, den pädagogischen Erfordernissen Teilnahme und Verständnis entgegenbringen. Der Einfluss, den eine hervorragende Persönlichkeit auf die Studierenden ausübt, kann in seiner weittragenden Wirkung nicht hoch genug geschätzt werden. Daher ist danach zu streben, als Hochschullehrer solche Männer zu gewinnen, die neben den fachlichen Fähigkeiten über hohe Persönlichkeitswerte verfügen. Es ist notwendig, dass sie auch während ihrer Lehrtätigkeit mit der Praxis und deren technischen und wirtschaftlichen Fragen ständig in angemessener Fühlung bleiben.»

»Zu Professoren der mathematisch-naturwissenschaftlichen, wirtschaftswissenschaftlichen und sozialen Fächer sollen Männer berufen werden, die diese Fächer beherrschend, nach Massgabe ihrer Veranlagung und Entwicklung in ihrem Lehrgange die erforderliche Wahrung des Zusammenhanges dieser Wissenschaften mit den Ansprüchen der Technik gewährleisten.»

Rörande assistenternas kompetens säges av samma utskott: »Bei grosser Hörerzahl muss für eine ausreichende Unterstützung des Professors durch Lehrkräfte gesorgt werden, die über hinreichende Erfahrungen in der Praxis verfügen und ein Alter besitzen, das eine gewisse Reife verbürgt.»

Vid den förut omnämnda kongressen i Brüssel år 1910 uttalade ordföranden i den Belgiska ingenjörsföreningen under allmän anslutning följande rörande lärarna:

»Il ne peut évidemment être question d'enseigner la pratique, ce serait un non-sens; la pratique ne s'acquiert que petit à petit. Mais on devrait initier davantage les élèves au côté pratique des choses par des exercices et des travaux suivant un programme bien compris. A ce point de vue, les cours techniques devraient être confiés, dans la mesure du possible, à des ingénieurs pratiquant eux-mêmes les matières qu'ils enseignent, aptes à faire saisir le côté pratique, se tenant au courant du perfectionnement et des nouveautés.»

Denna senare mening tordé numera gillas av alla, som trängt något djupare in uti den tekniska undervisningens väsen. För att lärarna skola få tillfälle att jämsides med sin undervisning hålla sig »au courant» med såväl den tekniska vetenskapen som tekniken, måste givetvis tid beredas dem därtill. Vill man således förvärva förstklassiga lärarekrafter för den tekniska undervisningen, får man icke i allt för hög grad belasta dem med undervisningstimmar och i alla händelser måste det tillses, att deras tjänstgöringstider indelas så lämpligt som möjligt, samt att förstklassiga laboratorier jämte tillräckliga anslag för dessas begagnande ställas till förfogande. Vidare måste åt dessa lärare lämnas största möjliga frihet och myndighet att ordna undervisningen på det sätt, som synes dem lämpligast. Härigenom kunna säkerligen även med måttliga löneförmåner de mest framstående tekniskt-vetenskapliga krafter lockas att övergiva industriens feta sysslor för att ägna sig åt att föra den tekniska vetenskapen framåt både genom egna rön och genom en krets av högt utbildade lärjungar. Lyckligtvis tager ofta hos vetenskapsidkaren intresset för problemen överhand över det allmänt mänskliga intresset för guld.

En teknisk högskola bör vara ett hem för den tekniskt-vetenskapliga forskningen, dit alla, som ägna sig åt sådan forskning, känna sig dragna och med vilket de känna behov av att meddela sig och uti vilket de äro välkomna för utförandet av sina undersökningar. Forskare, som i sådant syfte gästa högskolan, kunna också höja hennes anseende och bidra till fullföljandet av hennes mål genom att hålla föreläsningsserier inom sina specialiteter. Till sådana föreläsningars hållande böra även särskilt inbjudas framstående uppfinnare och forskare på teknikens område, varifrån de än kunna tagas. Högskolan blir på detta sätt ett centrum för de tekniska vetenskaperna i deras högsta utveckling — på en gång en ackumulator och en generator för dessa vetenskaper — och fyller då väl sitt ändamål.

Må särskilt *vår* tekniska högskola allt mer och mer närma sig detta mål och därigenom bliva allt bättre i stånd att giva sina studenter den gedigna rustning, av vilken de äro i behov, då de — i enlighet med sitt standars stolta devis — draga ut

»till fredlig bragd»

på ingenjörsvetenskapens och teknikens många obrutna fält!

FACKVETENSKAPLIGA
AVHANDLINGAR OCH UPPSATSER

KULTURER AV JÄSNINGSORGANISMER I STERILISERAD JORD

AV

CHR. BARTHEL.

De i det följande beskrivna undersökningarna ha till ändamål att tjäna såsom inledning till ett mera omfattande arbete rörande de omsättningar, särskilt i avseende på de kvävehaltiga organiska ämnena, som kunna åstadkommas i jorden av saccharomyceter och vissa fungi imperfecti. Dyliga undersökningar äro i stort antal redan utförda beträffande bakterier och mögelsvampar, men mig veterligt ej beträffande de ovannämnda slagen av mikroorganismer. Innan man skrider till själva omsättningsförsöken måste man ju emellertid vara något så när orienterad rörande de ifrågavarande svamparnas förhållande vid odling i jord, och det är resultaten av dessa orienterande undersökningar, som härmed framläggas.

Det är som bekant den berömde danske forskaren EMIL CHR. HANSEN, som vi huvudsakligen ha att tacka för vår nuvarande kännedom om de jäsningsorganismer, som benämnas saccharomyceter och fungi imperfecti. Genom 30-åriga, med utomordentlig omsorg och stort skarpsinne bedrivna forskningar har Hansen icke blott i stora drag utan även på ett ganska detaljerat sätt lyckats så att säga kartlägga denna särskilt för jäsningsindustrien så utomordentligt viktiga del av mikrobiologien.

Hansen har emellertid ej nöjt sig med att utforska dessa jäsningsorganismers allmänna morfologi och biologi, utan han har även sökt att följa deras kretslopp ute i naturen och även härvidlag äro hans undersökningar av banbrytande betydelse.

Att här mera ingående redogöra för dessa Hansens forskningar skulle föra oss alldeles för långt. Ifrågavarande undersökningar finnas publicerade

i olika tidskrifter och i meddelanden från Carlsberglaboratoriet åren 1881, 1890, 1903 och 1905 och dessa, liksom de övriga av Hansens viktigare mikrobiologiska arbeten, ha efter hans död samlats och utgivits av hans mångårige medarbetare A. KLÖCKER i ett band under titeln »Gesammelte theoretische Abhandlungen über Gärungsorganismen von EMIL CHR. HANSEN» (Jena 1911).

De viktigaste av Hansens resultat rörande jäsningsorganismernas förekomst och kretslopp i naturen må dock här anföras. Hansen arbetade först med *Pseudosaccharomyces apiculatus*, en till fungi imperfecti hörande jästsvamp, som synnerligen väl lämpar sig för här ifrågavarande undersökningar, då den är lätt att igenkänna i blandningar med andra mikroorganismer på grund av sin litenhet och sin karakteristiska citronform. Sedermera utsträckte han dock sina forskningar även till äkta saccharomyceter, ehuru ju dessa givetvis äro betydligt svårare att i naturen igenkänna, då deras cellform dels ej erbjuder några tydligare avvikelser de olika arterna emellan, dels även mycket liknar vissa växtformer av högre mikroskopiska svampar, såsom *Mucor*, *Dematium*, m. fl.

Genom sina första, grundläggande undersökningar kom Hansen till den uppfattningen, att *Pseudosacch. apiculatus* visserligen övervintrar i jorden, men att dess utveckling huvudsakligen äger rum på skadade, mogna söta bär och frukter, i vars saft svampen finner en ypperlig jordmån för sin tillväxt. Därför påträffas också denna svamp i jorden huvudsakligen under eller i närheten av bärbuskar och fruktträd, dit den kommer med nedfallna frukter eller genom dessas avspolning med regnvattnet.

Medan apiculatusjästen huvudsakligen är bunden till jorden i eller i närheten av fruktträdgårdar, vingårdar o. d., så lyckades Hansen finna äkta saccharomyceter även långt borta ifrån dessa naturliga »ståndorter». Detta förklarar Hansen bero på de äkta saccharomyceternas förmåga att bilda ascosporer, vilka ju äro mera resistent gentemot uttorkning och andra yttre åverknningar än de vegetativa cellerna, och vilka sålunda kunna hålla sig vid liv lång tid på ställen, där icke sporbildande jästsvampar snart dö ut. Hansen har även lyckats att direkt påvisa sporbildning hos saccharomyceter i jordytan.

Vid sina senare undersökningar kom Hansen mer och mer till den uppfattningen, att jorden icke blott såsom han förut trott var en naturlig övervintringsort för jästsvamparna, medan dessas egentliga utveckling ägde rum på bär och frukter, utan att jorden även var en naturlig utvecklingsplats för dessa organismer, där dessa leva och förökas i den allehanda

organiska ämnen innehållande markvätskan. Hansen säger nämligen år 1905: »Bei diesen Untersuchungen stellte es sich klar heraus, dass der Erdboden nicht nur einen Aufenthaltsort, sondern zumeist auch noch Brutstätten bildet, wo eine mehr oder minder deutliche Vermehrung vor sich geht».

Dock ansåg Hansen jorden såsom utvecklingsmedium för jästsvamparna blott vara av mera underordnad betydelse, jämförd med frukter och bär. Detta kan möjligen även hava sin riktighet, när det gäller de speciellt alkoholbildande mikroorganismerna, men det finnes även en hel del andra, till saccharomyceterna och till fungi imperfecti hörande svampar, som icke äro speciella jäsningsorganismer och för vilka jorden, eller rättare sagt markvätskan, tyckes vara det naturliga livselementet. Jorden är otvivelaktigt alla saprofytiska och många parasitiska mikroorganismers ursprungliga och naturliga uppehållsort. Ehuru man sedan länge vet, att det är de i jorden levande mikroorganismerna, som genom sin sönderdelning av därtädes befintliga växt- och djurrester göra särskilt kvävet i dessa åter tillgängligt för de levande växterna, och att alltså dessa mikroorganismer måste finna för dem synnerligen lämpliga närings- och utvecklingsförhållanden i jorden, så har man ej förrän på senare år kommit på den tanken att använda sig av jord såsom verkligt näringssubstrat vid odling av mikroorganismer. Såvidt jag vet är det botanikern J. SIMON i Dresden, som först använt steriliserad jord i detta syfte, nämligen för odling av baljväxtbakterier, *Bacterium radicum*. Han fann nämligen att vanlig trädgårdsjord, väl kalkad, utgör ett utmärkt substrat för dessa bakterier, som däri utveckla sig synnerligen väl, och de kulturer av baljväxtbakterier, som Simon framställt för praktiska behov, nämligen för ympning av baljväxter, hava visat sig äga synnerligen hög livskraft och stor hållbarhet. Även de kulturer av baljväxtbakterier, som utsändas av den bakteriologiska avdelningen vid Centralanstalten för jordbruksförsök, utgöras av dylika jordkulturer enligt Simons metod.

Jag har emellertid under de senaste åren utfört en hel del undersökningar rörande åtskilliga bakteriers och andra mikroorganismers förhållande vid kultivering i vanlig, naturlig jord och därvid funnit att steriliserad, näringsrik jord (trädgårdsjord) utgör ett utmärkt substrat vid odling av en hel del olika mikroorganismer.

Bland dessa undersökningar vill jag här något närmare redogöra för dem, som jag utfört med några saccharomyceter och fungi imperfecti. De till dessa försök använda renkulturerna ha till största delen sedan c:a 25 år tillbaka befunnit sig i en samling på Tekniska högskolans zymotekniska

laboratorium, där de årligen omplanterats i steriliserad, humlad vört. De vid mina försök använda mikroorganismerna voro följande: *Saccharomyces cerevisiae*, *Sacch. ellipsoideus*, *Pseudosacch. apiculatus*, *Torula* (HANSEN), *Monilia candida* samt *Oidium lactis*, alltså tvenne äkta saccharomyceter och fyra fungi imperfecti.

Samtliga dessa mikroorganismer äro ännu i dag vid full livskraft och med fullt bibehållna såväl morfologiska som fysiologiska artkaraktärer. Sporbildningsförmågan har visserligen hos de äkta saccharomyceterna något avtagit, vilket ju alltid blir förhållandet med gamla, i samlingar förvarade renkulturer, men den är dock fortfarande förhanden och fullt typisk.

Den jord, som i allmänhet kom till användning vid mina försök, var vanlig, god trädgårdsjord av neutral reaktion utan några som helst tillsatser, blott siktad för att avlägsna småsten, större växtrester o. d. Fuktighetshalten, som ju är av synnerligen stor betydelse för mikroorganismernas utveckling, bestämdes i varje särskilt fall och höll sig eller bringades genom vattentillsats att hålla sig vid 14—17 %. Den färdigberedda jorden fylldes på Freudenreichkolvar, rymmande 50 cm³, till något mer än halva kolvens höjd, vartill åtgick c:a 35 g jord. Kolvarna med jorden steriliserades sedermera i autoklav under 1¹/₂ à 2 timmar vid 120°. Den långvariga sterilisationen är nödvändig för att döda de i jorden talrikt förekommande, synnerligen värmeresistenta sporer av bakterier tillhörande *mesentericus*-gruppen (hö- och potatisbakterier).

Av friska och kraftiga, 24 timmar gamla kulturer i vört av de ovan nämnda arterna togs 0.1—0.2 cm³ av bottensatsen medelst sterila pipetter och överfördes i de sterila jordkolvarna, varefter jorden i dessa omskakades, för att cellerna skulle så mycket som möjligt fördelas i jordmassan. Genom att stöta kolven upprepade gånger med botten mot bordet tillpackades därefter jorden ånyo, för att förekomma alltför hastig intorkning. Jordkolvarna fingo sedan stå vid vanlig rumstemperatur.

Tid efter annan uttogos medelst en liten flamberad platinaskyffel, rymmande c:a 0.07 g jord, prov ur jordkolvarna. Dessa prov utströddes över vörtgelatin, som fått stelna i snedt liggande ställning i provrör. Efter 3 à 4 dagar vid rumstemperatur undersöktes sedan dessa snedrörskulturer på förekomsten av kolonier. Likaså gjordes tid efter annan direkt mikroskopisk undersökning av jordkulturerna i kolvarna, varvid följande, av mig tillämpade förfaringssätt kom till användning.

Med den förut nämnda platinaskyffeln uttogos ur jordkolven ett prov, som på ett objektglas medelst en liten platinaspattel noga utrördes i 5—7

droppar sterilt vatten. Sedan preparatet fått intorka, vilket skedde under lindrig uppvärmning, fixerades det på vanligt sätt i lågan och efter avsvälning bortspolades med en kraftig, men fin vattenstråle alla sandkorn från preparatet. Detta torkades nu och färgades enligt GRAM samt mikroskoperades därefter med användande av oljeimmersion. Då alla de vid våra försök använda mikroorganismerna äro färgbara enligt Gram, äro de ganska lätta att upptäcka i på detta sätt framställda preparat. Man får ju då en direkt bild av hur de se ut under sitt liv i jorden.

En gång i månaden ympades från de olika jordkulturerna i nya kolvar med steril jord. Även härvid användes den förut omnämnda lilla platina-skyffeln. Den överförda ympmängden jord utgjorde sålunda alltid c:a 0,07 g. De ympade kolvarna omskakades kraftigt och fingo, liksom de förra, stå vid rumstemperatur. Från dessa nya jordkulturer uttogos sedermera prov till ympning på vörtgelatin och till direkt mikroskopisk undersökning, alldeles som förut beskrivits. Vi komma i det följande att benämna dessa successiva kulturer i steril jord »kultur I», »kultur II» o. s. v.; 6 sådana överympningar äro utförda. Innan jag ingår på skildringen av de olika undersökta arternas förhållande i dessa jordkulturer, vill jag emellertid nämna, att kulturförsök även blivit utförda i jord med betydligt lägre vattenhalt än den förut nämnda, liksom även några successiva överympningar företagits i en jord av helt annan karaktär än den eljest använda trädgårdsjorden, nämligen en i hög kultur varande, till reaktionen kraftigt sur lågmossejord med mycket stor fuktighetshalt (c:a 60 %). Denna jord består så godt som uteslutande av multnade växtbeståndsdelar och innehåller sålunda en stor mängd organiska ämnen.

Jag övergår nu till beskrivningen av de olika jäsningsorganismernas förhållande i dessa olika jordkulturer.

Sacch. cerevisiæ.

1. Trädgårdsjord.

Kultur I. Ympad ¹⁷/₁. Mikroskopisk undersökning företogs ²⁴/₁, ²/₂, ²/₃, ⁵/₄ och ²⁹/₅. Härvid funnos alltid fullt typiska celler, fastän tämligen sällsynt. Även knoppningsförband funnos. Vid den sista undersökningen, den ²⁹/₅, voro cellerna mycket talrikare än förut. Den ²/₅ gjordes även ett försök att påvisa eventuellt bildade sporer, genom färgning med karbolfoxin under uppvärmning och avfärgning i utspädd saltsyra. Enstaka avfärgade, typiska jästceller iakttogos, men inga sporer. Ympning på snedvörtgelatin ²⁹/₅. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel.

Kultur II. Ympad $1/2$. Mikroskopering $5/2, 9/2, 19/2, 22/2, 18/4$. Även i denna kultur voro cellerna tämligen sällsynta, ehuru fullt typiska, stora och vackra, ofta i knopningsförband.

Från denna kultur gjordes även en ympning på snedvörtgelatin, varvid efter 3 dagar vid rumstemperatur erhöles rätt talrika kolonier. Även dessa kolonier kontrollerades mikroskopiskt, liksom alltid sedermera, när dylika gelatinkulturer anlades.

Den $2/5$ företogs sporfärgning, med negativt resultat.

Kultur III. Ympad $23/2$. Den $26/2$ ympades på snedvörtgelatin. Efter 3 dagar framkommo blott ett par kolonier, men sedermera ett sextiotal. Mikroskopering företogs $7/3, 22/3, 25/4$, alltid med samma resultat som förut.

Kultur IV. Ympad $22/3$. Den $27/3$ ympades på snedvörtgelatin. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $2/4$ och $12/4$. Härvid funnos sparsamt med typiska celler och enstaka knopningsförband. Sporfärgning $9/5$ med negativt resultat.

Kultur V. Ympad $23/4$. Den $26/4$ ympades på snedvörtgelatin. Efter 4 dagar 10 kolonier; efter 8 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $3/5$. Ganska talrika, typiska celler; även små förband. Sporfärgning $9/5$ med som vanligt negativt resultat, fastän icke så få avfärgade jästceller kunde iakttagas.

Kultur VI. Ympad $12/5$. Den $18/5$ ympades på snedvörtgelatin. Efter 4 dagar 20—30 kolonier. Mikroskopering $23/5$, varvid man som vanligt fann enstaka typiska celler samt ett och annat litet knopningsförband.

2. Mossjord.

Kultur I. Ympad $17/1$. Mikroskopering $31/1$. Rätt talrika, typiska celler, ofta knoppande.

Kultur II. Ympad $6/2$. Mikroskopering $13/2$ och $23/2$. Sällsynta celler men dock även små knopningsförband.

Kultur III. Ympad $26/2$. Mikroskopering $9/3$. Talrika typiska celler, många knopningsförband. Sporfärgning $9/5$. Ganska talrika tydliga, ehuru nästan helt avfärgade, typiska celler. På några få ställen i preparatet funnos även enstaka, fullt typiska och kraftigt färgade sporer, liggande 2 och 2 i avfärgade celler (se planschen, fig. 3).

Sacch. ellipsoideus.

1. Trädgårdsjord.

Kultur I. Ympad $17/1$. Mikroskopering $24/1, 2/2, 2/3, 5/4$ och $29/5$. I allmänhet voro typiska celler ganska sällsynta. Knoppande celler kunde även iakttagas. Ympning på snedvörtgelatin $29/5$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel.

Kultur II. Ympad $1/2$. Ympning på snedvörtgelatin $9/2$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering av jordkulturen $5/2, 9/2, 19/2, 18/4$. Vid den första undersökningen funnos inga celler, men sedan förekommo de ganska talrikt.

Kultur III. Ympad $23/2$. Ympning på snedvörtgelatin $26/2$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $1/3, 22/3, 25/4$. Typiska celler förekommo ganska talrikt; även knoppande funnos.

Kultur IV. Ympad $22/3$. Ympning på snedvörtgelatin $27/3$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $2/4$ och $12/4$. Typiska celler voro ganska sällsynta.

Kultur V. Ympad $23/4$. Ympning på snedvörtgelatin $26/4$. Efter 4 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $3/5$. Talrika typiska celler; även enstaka knoppande.

Kultur VI. Ympad $^{12}/_5$. Ympning på snedvörtgelatin $^{18}/_5$. Efter 4 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^{23}/_5$. Typiska celler talrika.

2. Mossjord.

Kultur I. Ympad $^{17}/_1$. Mikroskopering $^{22}/_1$ och $^{31}/_1$. Typiska celler förekommo sparsamt. Enstaka knoppande funnos även.

Kultur II. Ympad $^6/_2$. Mikroskopering $^{13}/_2$ och $^{23}/_2$. Typiska celler sparsamt förekommande.

Kultur III. Ympad $^{26}/_2$. Mikroskopering $^9/_3$. Typiska celler sällsynta. Sporfärgning $^9/_5$. Avfärgade celler förekommo sällsynt, men inga sporer.

Pseudosacch. apiculatus.

1. Trädgårdsjord.

Kultur I. Ympad $^{17}/_1$. Mikroskopering $^{24}/_1$, $^2/_2$, $^2/_3$, $^5/_4$ och $^{29}/_5$. I allmänhet voro typiska, citronformade celler mycket sällsynta, medan ellipsoidiska celler voro något vanligare. Ympning på snedvörtgelatin $^{29}/_5$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel.

Kultur II. Ympad $^1/_2$. Ympning på snedvörtgelatin $^9/_2$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^5/_2$, $^9/_2$, $^{19}/_2$ och $^{18}/_4$. Den $^5/_2$ syntes inga celler, men sedan förekommo de i sällsynta fall enstaka, men däremot här och var i stora anhopningar och med typiska cellformer.

Kultur III. Ympad $^{23}/_2$. Ympning på snedvörtgelatin $^{26}/_2$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^1/_3$, $^{22}/_3$, $^{25}/_4$. Typiska celler voro sällsynta, men den $^1/_3$ funnos dock även här och där stora anhopningar.

Kultur IV. Ympad $^{22}/_3$. Ympning på snedvörtgelatin $^{27}/_3$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^2/_4$ och $^{12}/_4$. Citronformade celler voro rätt sällsynta, men ellipsoidiska ganska vanliga.

Kultur V. Ympad $^{23}/_4$. Ympning på snedvörtgelatin $^{26}/_4$. Efter 4 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^3/_5$. Citronformade celler mycket sällsynta, men ellipsoidiska ganska talrika.

Kultur VI. Ympad $^{12}/_5$. Ympning på snedvörtgelatin $^{18}/_5$. Efter 4 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^{23}/_5$. Typiska celler ej sällsynta.

2. Mossjord.

Kultur I. Ympad $^{17}/_1$. Mikroskopering $^{22}/_1$ och $^{31}/_1$. Citronformade celler sällsynta, men dessa ofta knoppande.

Kultur II. Ympad $^6/_2$. Mikroskopering $^{13}/_2$ och $^{23}/_2$. Typiska, citronformade celler i enstaka exemplar sällsynta, men däremot funnos här och var väldiga anhopningar.

Kultur III. Ympad $^{26}/_2$. Mikroskopering $^9/_3$. I vissa delar av preparatet mycket talrika, typiska celler; delvis i väldiga anhopningar.

Förklaring till planschen.

Samtliga preparat utom n:r 3 äro färgade enligt GRAM. Förstoring 1 000 : 1.

1. *Sacch. cerevisiæ*; kultur i steril trädgårdsjord. 1:sta passagen, 7 dagar.
2. *Sacch. cerevisiæ*; kultur i steril trädgårdsjord. 5:te passagen, 10 dagar.
3. *Sacch. cerevisiæ*; sporer; kultur i steril mossjord. 3:dje passagen, 41 dagar. Sporfärgning. Intill sporerne ligga avfärgade jästceller.
4. *Sacch. ellipsoideus*; kultur i steril trädgårdsjord. 1:sta passagen, 15 dagar. Till höger en knoppande cell.
5. *Pseudosacch. apiculatus*; kultur i steril mossjord. 1:sta passagen, 7 dagar.
6. *Sacch. ellipsoideus*; kultur i steril trädgårdsjord. 5:te passagen, 10 dagar. Knoppande cell.
7. *Oidium lactis*; kultur i steril trädgårdsjord. 1:sta passagen, 4 mån. 10 dagar. Mycelbildning.
8. *Torula*; kultur i steril trädgårdsjord. 1:sta passagen, 7 dagar. Knoppande celler.
9. *Torula*; kultur i steril trädgårdsjord. 5:te passagen, 10 dagar. Anhopning av celler.
10. *Monilia candida*; kultur i steril trädgårdsjord. 5:te passagen, 10 dagar. Jästliknande celler.

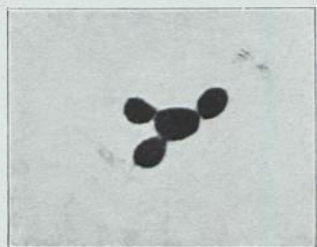


Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.



Fig. 4.



Fig. 5.

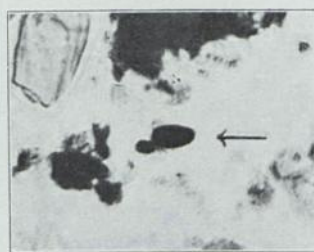


Fig. 6.



Fig. 7.



Fig. 8.

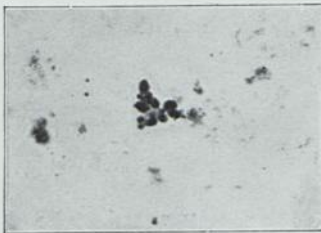


Fig. 9.



Fig. 10.

Torula.

1. Trädgårdsjord.

Kultur I. Ympad $^{17}/_1$. Mikroskopering $^{24}/_1$, $^{2}/_2$, $^{2}/_3$, $^{5}/_4$ och $^{29}/_5$. Vid samtliga undersökningar funnos talrika typiska celler, ofta i större eller mindre anhopningar och ofta knoppande. Ympning på snedvörtgelatin $^{29}/_5$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel.

Kultur II. Ympad $^1/_2$. Ympning på snedvörtgelatin $^9/_2$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^{5}/_2$, $^9/_2$, $^{19}/_2$ och $^{18}/_4$. Med undantag av den första undersökningen den $^5/_2$, då inga celler kunde upptäckas, funnos alltid typiska celler, ofta i anhopningar och ofta i knoppning.

Kultur III. Ympad $^{23}/_2$. Ympning på snedvörtgelatin $^{26}/_2$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^1/_3$, $^{22}/_3$ och $^{25}/_4$. Resultatet blev här alldeles detsamma som vid kultur II.

Kultur IV. Ympad $^{22}/_3$. Ympning på snedvörtgelatin $^{27}/_3$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^2/_4$ och $^{12}/_4$. Typiska celler voro första gången sällsynta, andra gången däremot tämligen talrika.

Kultur V. Ympad $^{23}/_4$. Ympning på snedvörtgelatin $^{26}/_4$. Efter 4 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^3/_5$. Typiska celler förekommo talrikt, även i anhopningar. Enstaka celler i knoppning.

Kultur VI. Ympad $^{12}/_5$. Efter 4 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^{23}/_5$. Samma resultat som vid kultur V.

2. Mossjord.

Kultur I. Ympad $^{17}/_1$. Mikroskopering $^{22}/_1$ och $^{31}/_1$. Talrika typiska celler, ofta i knoppning.

Kultur II. Ympad $^6/_2$. Mikroskopering $^{13}/_2$ och $^{23}/_2$. Talrika celler, ofta knoppande och liggande i stora anhopningar.

Kultur III. Ympad $^{26}/_2$. Mikroskopering $^9/_3$. Samma resultat som vid kultur II.

Monilia candida.

1. Trädgårdsjord.

Kultur I. Ympad $^{17}/_2$. Mikroskopering $^{24}/_1$, $^2/_2$, $^2/_3$, $^5/_4$ och $^{29}/_5$. Vid samtliga undersökningar funnos talrika, jästliknande celler, ofta i knoppning och ej sällan liggande i stora anhopningar. Kortare mycel eller mycelartat förlängda celler påträffades ofta. Ympning på snedvörtgelatin $^{29}/_5$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel.

Kultur II. Ympad $^1/_2$. Ympning på snedvörtgelatin $^9/_2$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^5/_2$, $^9/_2$, $^{19}/_2$ och $^{18}/_4$. Med undantag av den $^5/_2$ funnos alltid ganska talrika, jästliknande celler, även i anhopningar, men intet mycel.

Kultur III. Ympad $^{23}/_2$. Ympning på snedvörtgelatin $^{26}/_2$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^1/_3$, $^{22}/_3$ och $^{25}/_4$. Samma resultat som vid kultur II.

Kultur IV. Ympad $^{22}/_3$. Ympning på snedvörtgelatin $^{27}/_3$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^{2}/_4$ och $^{12}/_4$. Enstaka celler, dock funnos även anhopningar. Enstaka mycelfragment.

Kultur V. Ympad $^{23}/_4$. Ympning på snedvörtgelatin $^{26}/_4$. Efter 4 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^{3}/_5$. Talrika jästliknande celler.

Kultur VI. Ympad $^{11}/_5$. Ympning på snedvörtgelatin $^{18}/_5$. Efter 4 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^{23}/_5$. Talrika jästliknande celler.

2. Mossjord.

Kultur I. Ympad $^{17}/_1$. Mikroskopering $^{22}/_1$ och $^{31}/_1$. Vid första undersökningen enstaka, vid den senare talrika jästliknande celler, varibland några knoppande. Enstaka mycelfragment.

Kultur II. Ympad $^6/_2$. Mikroskopering $^{13}/_2$, $^{23}/_2$ och $^{25}/_4$. Samma resultat som vid kultur I.

Kultur III. Ympad $^{26}/_2$. Mikroskopering $^9/_3$. Mycket talrika celler; även knoppande.

Oidium lactis.

1. Trädgårdsjord.

Kultur I. Ympad $^{17}/_1$. Mikroskopering $^{24}/_1$, $^2/_2$, $^2/_3$, $^5/_4$ och $^{29}/_5$. Typiska oidier förekommo ganska talrikt. Enstaka mycelfragment. Den $^{29}/_5$ fanns ett från ett par oidier utvuxet, ganska förgreñat mycelium (se planschen, fig. 7). Ympning på snedvörtgelatin $^{29}/_5$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel.

Kultur II. Ympad $^1/_2$. Ympning på snedvörtgelatin $^9/_2$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^5/_2$, $^9/_2$, $^{19}/_2$ och $^{18}/_4$. Den $^5/_2$ fanns ingenting, men vid de följande undersökningarna syntes ganska talrika, typiska oidier, samt ett och annat mycelfragment.

Kultur III. Ympad $^{23}/_2$. Ympning på snedvörtgelatin $^{26}/_2$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^1/_3$ och $^{22}/_3$. Vid första undersökningen talrika, vid den senare sällsynta oidier. Enstaka mycelfragment.

Kultur IV. Ympad $^{22}/_3$. Ympning på snedvörtgelatin $^{27}/_3$. Efter 3 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^2/_4$ och $^{12}/_4$. Enstaka oidier och mycelfragment.

Kultur V. Ympad $^{23}/_4$. Ympning på snedvörtgelatin $^{26}/_4$. Efter 4 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^3/_5$. Talrika, typiska oidier. Enstaka mycelfragment.

Kultur VI. Ympad $^{12}/_5$. Ympning på snedvörtgelatin $^{18}/_5$. Efter 4 dagar växt från varje jordpartikel. Mikroskopering $^{23}/_5$. Samma resultat som vid försök V.

2. Mossjord.

Kultur I. Ympad $^{17}/_1$. Mikroskopering $^{22}/_1$ och $^{31}/_1$. Tämligen talrika, typiska oidier och enstaka mycelfragment.

Kultur II. Ympad $^6/_2$. Mikroskopering $^{13}/_2$ och $^{23}/_2$. Tämligen enstaka oidier, men talrika sporer av en *Penicillium*; kulturen var alltså infekterad.

Kultur III. Ympad $^{26}/_2$. Mikroskopering $^9/_3$. Rätt talrika oidier, men även denna kultur var naturligtvis infekterad liksom kultur II, från vilken den ju härstammar.

Som redan är nämnt utfördes även försök i jord med mycket låg fuktighetsgrad, nämligen vid resp. 7 och 2,5 % vatten. Detta skedde för att se, vid vilken ungefärlig lägsta fuktighetshalt som förökning i jorden fortfarande kunde äga rum. Från kultur I ympades sålunda av samtliga arter i jordkolvar med de ovannämnda fuktighetsgraderna. Vid den lägsta fuktighetsgraden, eller 2,5 % vatten, var jorden naturligtvis till det yttre fullkomligt »snustorr».

I jordkulturerna med 7 % vatten gingo de flesta kulturerna ganska bra till. Vid ympning på snedvörtgelatin från 8 dagar gamla jordkulturer erhöles efter 3 dagar växt från varje jordpartikel av *Sacch. ellipsoideus*, *Monilia candida* och *Oidium lactis*, medan *Pseudosacch. apiculatus* gav talrika kolonier, *Torula* tämligen fåtaliga och *Sacch. cerevisiæ* fåtaliga kolonier. Den mikroskopiska undersökningen, som utfördes å jordkulturerna efter 8 resp. 21 dagar, visade talrika, typiska celler av *Torula*, *Monilia candida* och *Oidium lactis* (även mycel), sällsynta av *Sacch. ellipsoideus*, ytterst sällsynta av *Sacch. cerevisiæ* och inga av *Pseudosacch. apiculatus*.

Jordkulturerna med 2,5 % vatten gävo efter 8 dagar ingen enda koloni på snedvörtgelatin av *Pseudosacch. apiculatus* och *Torula*. Vid förnyad ympning på snedvörtgelatin efter 19 dagar erhöles fortfarande ingen växt. *Sacch. cerevisiæ* och *Sacch. ellipsoideus* gävo vid den första ympningen på snedvörtgelatin några få kolonier, men vid den andra inga alls, medan *Monilia candida* och *Oidium lactis* vid såväl den första, som den andra ympningen på snedvörtgelatin gävo samma antal kolonier, nämligen för *Monilia* ett 20-tal och för *Oidium* ett 10-tal. Den mikroskopiska undersökningen gav negativt resultat för samtliga arter.

Kasta vi nu en blick på de erhållna resultaten, så finna vi ju först och främst att alla de vid försöken använda mikroorganismerna mycket väl kunna trivas och utveckla sig i steriliserad trädgårdsjord. Den vid försöken i allmänhet rådande jordfuktigheten, 14—17 % har, oaktat den ju i och för sig är ganska låg, dock medgivit att den i varje jordkolv befintliga jordmängden om 30—35 g redan efter tre dagar efter ympningen med ca 0,07 g jord från en föregående kultur befunnits helt genomväxt med mikroorganismen i fråga, så att varje jordkorn i den nya kulturen givit upphov till vegetation på vörtgelatin. Jorden innehåller sålunda fullt tillräckligt med näringsämnen för att tillåta en hastig utveckling av saccharomyceter och fungi imperfecti, n. b. vid den av mig använda försökstemperaturen, d. v. s. rumstemperatur. Vid lägre temperatur försiggår dessa svampars utveckling i motsvarande grad långsammare. Att jorden innehåller en hel

del organiska ämnen, som av de mikroskopiska svamparna kunna tillgodogöras, är i och för sig ej överraskande, sedan det visat sig att de förut med ett visst mystiskt skimmer omgivna »humusämnen» innehålla bl. a. så allmänt kända och för mikroorganismerna åtminstone delvis assimilerbara föreningar som diverse aminosyror (leucin, lysin, arginin), vidare xantin, hypoxantin, fytosterin, mannit, rhamnos, bärnstenssyra, oxalsyra etc.

Det är ju sannolikt, ja säkert, att en på organiska ämnen mindre rik jord än den humusrika trädgårdsjord, resp. mossjord, som jag använt vid mina försök, skall erbjuda ett sämre näringssubstrat för mikroorganismerna. I detta sammanhang bör det även påpekas att den steriliserade jorden utgör ett gynnsammare näringssubstrat än den osteriliserade, vilket gör att utvecklingen försiggår fortare och bättre i den förra än i den senare.

Någon som helst avmattning i de här undersökta mikroorganismernas växtkraft vare sig genom deras förblivande under flera månader i en och samma jordkultur eller genom deras successiva överförande i ny, steriliserad jord har ej kunnat iakttagas. Särskilda kontrollundersökningar gävo även till resultat, att de alkoholjäsande svamparnas jäsningsförmåga efter flera månaders jordkultur var oförändrad. Likaså visade sig sporbildningsförmågan hos de äkta saccharomyceterna vara oförändrad. Vid jordkulturernas uttorkning är det ju sannolikt att mikroorganismerna så småningom dö ut, men denna uttorkning försiggår i de av mig använda Freudenreichkolvarna mycket långsamt. Sålunda befanns vid undersökning efter tre månader vattenhalten i kulturkolvarna hava sjunkit med blott något över 1 %.

Även i jord med så låg vattenhalt som 7 % gå ännu de flesta av de av mig undersökta arterna ganska bra till, dock märkes tydligt att växten ej på långt när är lika kraftig som i jord med 14—17 % vatten. Vid en vattenhalt av 2,5 % äger däremot, såsom ju är att vänta, ingen utveckling rum och de vid ympningen överförda cellerna dö i de flesta fall snart.

De mikroskopiska undersökningarna, utförda enligt min metod, ha visat att de olika jäsningsorganismernas karakteristiska cellform ej undergår någon som helst förändring vid utvecklingen i jorden. Cellernas utseende, storlek, knoppning etc. är här fullkomligt densamma som i t. ex. vörtkulturer. Även sporbildning har vid ett tillfälle kunnat påvisas, nämligen i mossjord.

Att av den mikroskopiska undersökningen draga några bestämda slutsatser rörande de olika mikroorganismernas talrikhet i de olika jordkulturerna låter sig emellertid ej göra och detta är ju för övrigt lätt att inse, ty vid framställningen av de mikroskopiska preparaten spolas ju alla större jord-

partiklar bort, och det är givetvis på och inuti dessa jordpartiklar och små anhopningar av jordpartiklar, som de flesta cellerna befinna sig. Det antal celler, som vid den lilla jordkvantitetens utröring med vatten på objektglaset lossna och sedermera kvarbliva fastsittande på objektglaset efter fixeringen och spolningen, kan ju vara högst variabelt. Den mikroskopiska undersökningen är sålunda uteslutande av rent kvalitativt värde. Genom ympning från jordkulturen på vörtgelatin får man ju emellertid ett rätt godt begrepp om hur mikroorganismerna utvecklats i jorden.

Försöken ha alltså givit vid handen, att vanlig, steriliserad trädgårdsjord utgör ett fullt användbart näringssubstrat för såväl saccharomyceter som fungi imperfecti (åtminstone vad angår de av mig undersökta arterna). Dessa mikroorganismer utveckla i jorden fullkomligt samma växtformer som i andra näringssubstrat, t. ex. vört. Deras storlek, sporbildning och jäsningsförmåga undergå ej heller någon förändring vid deras renodling i jord.

Först vid så låg vattenhalt i jorden som under 10 % börjar deras växt att så småningom hämmas.

Experimentalfältet i maj 1917.

BESTÄMNING AV NORMALSPÄNNINGAR FÖR LUTANDE MÅTTBAND

AV

FRITZ W. BERGER.

Det av JÄDERIN funna uttrycket för normalspänningen hos ett horisontellt hängande band¹

$$T = \sqrt[3]{\frac{L^2 \omega^3}{24\sigma}}$$

kan genom en enkel generalisering fås att gälla för lutningsvinklar mellan 0° och 90° .

De av Jäderin använda beteckningarna äro:

L = bandets normallängd eller avståndet mellan dess ändpunkter, då det utan spänning utsträcker på ett horisontellt underlag;

ω = vikten av en längdenhet av bandet;

s = töjningskoefficienten = töjningen per längdenhet för kraften 1;

$s\omega = \sigma$ = töjningen per längdenhet av vikten 1 för kraften 1;

$\omega L = V$ = bandets totala vikt;

k = kedjelinjens parameter;

l = kurvängden, räknad från vertex;

T = spänningen i punkten x, y .

Vi sätta vidare:

y_0 = ordinatan för den kurvpunkt O , som befinner sig vertikalt under midtpunkten N av kordan (L) eller sammanbindningslinjen mellan bandets ändpunkter 1 och 2 (se fig.):

¹ Se *Översikt av K. V. A:s förh. 1879, N:o 9*: »En metod för geodetisk basmätning med stålband.»

och således töjningen

$$\begin{aligned} dc &= y \cdot \omega \cdot s \cdot dl \\ dc &= \sigma \cdot y \cdot dl \\ l &= \sqrt{y^2 - k^2} && [\text{ekv. (4)}] \\ dl &= \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - k^2}}, \end{aligned}$$

alltså

$$\begin{aligned} dc &= \frac{\sigma y^2}{\sqrt{y^2 - k^2}} dy \\ c &= \sigma \int \frac{y^2}{\sqrt{y^2 - k^2}} dy \\ c &= \sigma \left[\frac{y\sqrt{y^2 - k^2}}{2} + \frac{k^2}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - k^2}} \right]. \end{aligned}$$

Men

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - k^2}} = \operatorname{arcosh} \frac{y}{k} + C$$

och

$$\operatorname{arcosh} \frac{y}{k} = \frac{x}{k}, \quad [\text{ekv. (2 a)}]$$

varav

$$c = \sigma \left[\frac{y\sqrt{y^2 - k^2}}{2} + \frac{kx}{2} + C \right]$$

$$c = \frac{\sigma}{2} \left[y\sqrt{y^2 - k^2} + k \int x \right]_{y_2}^{y_1}$$

(6)

$$c = \frac{\sigma}{2} (y_1 l_1 - y_2 l_2 + k \cdot (L) \cdot \cos \alpha).$$

Vid normalspänning är $(L) = L$;

vidare är

$$y_1 = y_0 + p_0 + \frac{L}{2} \sin \alpha$$

$$y_2 = y_0 + p_0 - \frac{L}{2} \sin \alpha$$

$$k = y_0 \cos \alpha$$

$$l_1 - l_2 \text{ appr.} = L$$

$$l_1 + l_2 = 2l_m = 2(l_0 + p_0 \sin \alpha);$$

men

$$l_0 = y_0 \sin \alpha,$$

varav

$$l_1 + l_2 = 2(y_0 + p_0) \sin \alpha.$$

Vi insätta i ekv. (6) och erhålla

$$(7) \quad c = \frac{\sigma L}{2} \left[2y_0 + p_0 (1 + \sin^2 \alpha) \right].$$

Vi söka ytterligare förenkla ekv. (7) genom att uttrycka p_0 såsom en funktion av y_0 . Enär ett normalspant band obetydligt avviker från den rätliniga formen, kunna vi utan att begå något avsevärt fel antaga, att vikten av ett element av bandet är proportionell emot samma elements projektion på x -axeln, d. v. s. vi betrakta bandkurvan såsom en parabel.

Enligt fig. är då:

$$\begin{aligned} NS &= 2p_0 \\ 2p_0 : \frac{L}{2} &= \sin(\tau_1 - \alpha) : \sin(90^\circ - \tau_1) \\ T_1 \cdot L \cdot \sin(\tau_1 - \alpha) &= V \cdot \frac{L}{2} \cos \alpha \\ y_1 \cos \tau_1 &= k && [\text{ekv. (3)}] \\ k &= y_0 \cos \alpha. && [\text{ » } (3 \text{ a})] \end{aligned}$$

Således

$$(8) \quad p_0 = \frac{L^2}{8y_0}.$$

Ekv. (8) giver ändliga och approximativt riktiga värden å p_0 för lutningsvinklar mellan 0° och $89^\circ 50'$.

Av ekv. (7) och (8) bilda vi

$$(9) \quad c = \frac{\sigma L}{2} \left[2y_0 + \frac{L^2(1 + \sin^2 \alpha)}{8y_0} \right].$$

Förkortningen mellan bandets ändpunkter på grund av nedböjningen eller differensen c_1 mellan kurvlängden b (bågen 1, 0, 2) och kordan (L) är för en flack båge

$$c_1 = \frac{8 h^2}{3(L)},$$

eller om såsom förut (L) = L

$$c_1 = \frac{8 h^2}{3 L},$$

varvid höjden i segmentet i detta fall är

$$h = p_0 \cos \alpha.$$

Alltså är

$$(10) \quad c_1 = \frac{8 \rho_0^2 \cos^2 \alpha}{3 L}$$

$$(10 a) \quad c_1 = \frac{L^3 \cos^2 \alpha}{24 y_0^2}.$$

Villkoret för att avståndet mellan bandets ändpunkter skall vara lika med normallängden är således, med hänsyn till att c och c_1 verka åt motsatta håll,

$$c + c_1 = 0$$

eller

$$\frac{\sigma L}{2} \left[2y_0 + \frac{L^2(1 + \sin^2 \alpha)}{8y_0} \right] = \frac{L^3 \cos^2 \alpha}{24 y_0^2},$$

varav

$$y_0^3 + \frac{L^2(1 + \sin^2 \alpha)}{16} y_0 - \frac{L^2 \cos^2 \alpha}{24 \sigma} = 0.$$

Den sistnämnda ekv. har formen

$$y_0^3 + t y_0 + q = 0.$$

Enligt Cardanus är då

$$y_0 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}t\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}t\right)^3}}.$$

Här är

$$-\frac{1}{2}q = + \frac{L^2 \cos^2 \alpha}{48 \sigma}$$

$$\frac{1}{3}t = + \frac{L^2(1 + \sin^2 \alpha)}{48}$$

$$\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}t\right)^3 = \left(\frac{L^2 \cos^2 \alpha}{48 \sigma}\right)^2 \left[1 - \frac{L^2(1 + \sin^2 \alpha)^3 \sigma^2}{48 \cos^4 \alpha}\right].$$

För $\alpha = 89^\circ$, $L = 30$ meter och $\alpha = 0.000004$ är

$$\frac{L^2(1 + \sin^2 \alpha)^3 \sigma^2}{48 \cos^4 \alpha} = 0.00015 \sim 0$$

Alltså

$$(11) \quad y_0 = \sqrt[3]{\frac{L^2 \cos^2 \alpha}{24 \sigma}}$$

(Samma värde å y_0 erhålles, om ekv. (9) gives formen $c = \sigma \cdot L \cdot y_0$.)

För $\alpha = 0^\circ$ blir om ekv. (11) multipliceras med ω

$$T_0 = \sqrt[3]{\frac{L^2 \omega^3}{24 \sigma}}$$

Vi räkna med ett numeriskt exempel och antaga

$$L = 30 \text{ meter}$$

$$\sigma = 0.000\,0004$$

$$\alpha = 60^\circ,$$

varav erhålles

$$y_0 = 286^{\text{m}}.1786 \quad [\text{ekv. (11)}]$$

$$k = 143.0893 \quad [\text{ » } (3 \text{ a})]$$

$$p_0 = 0.393\,111 \quad [\text{ » } (8)]$$

$$y_N = y_0 + p_0 \\ = 286^{\text{m}}.571\,711$$

$$\pm \frac{L}{2} \sin \alpha = \pm 12.990\,381$$

$$y_1 = 299.562\,092$$

$$y_2 = 273.581\,330$$

Vi undersöka, i vad mån de erhållna värdena å y_1 och y_2 äro användbara och tänka oss fördenskull bandets spänning så avpassad, att $y_1 = 299^{\text{m}}.562\,092$ och $y_2 = 273^{\text{m}}.581\,330$. Vi antaga dessutom, att p_0 och y_0 äro behäftade med så små fel, att bestämningen av töjningen c enligt ekv. (7) eller (9) icke blir märkbart felaktig, alltså

$$c = \frac{\sigma L}{2} [2y_0 + p_0(1 + \sin^2 \alpha)] \quad [\text{ekv. (7)}]$$

$$c = 0^{\text{m}}.003\,438\,271,$$

varav kurvlängden

$$b = 30^{\text{m}}.003\,438\,271.$$

Enligt ekv. (4) och (3)

$$y_1 \sin \tau_1 - y_2 \sin \tau_2 = b$$

och

$$y_1 \cos \tau_1 = y_2 \cos \tau_2$$

är

$$\sin \tau_1 = \frac{y_1^2 - y_2^2 + b^2}{2by_1}$$

och

$$\sin \tau_2 = \frac{y_1^2 - y_2^2 - b^2}{2by_2}.$$

Vi erhålla:

$$\sin \tau_1 = 0.8784\ 5447$$

$$\cos \tau_1 = 0.4778\ 2606$$

$$k = y_1 \cdot \cos \tau_1 = 143^m \cdot 138\ 573.$$

Enligt ekv. (2):

$$x = k \cdot L_n \left(\frac{y}{k} + \sqrt{\left(\frac{y}{k} \right)^2 - 1} \right)$$

$$x_1 = 195^m \cdot 9506\ 7457$$

$$x_2 = 180 \cdot 5006\ 6363$$

$$\Delta x = x_1 - x_2 = 15 \cdot 0000\ 1094$$

Kordan blir

$$(L) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$(L) = 30^m \cdot 000\ 005$$

$$d(L) = -0^m \cdot 000\ 005.$$

Mätningsskorrektionen på grund av felaktigt bestämd spänning uppgår således till

$$dL = +0.005\ \text{mm.}$$

$$d\alpha = +0'' \cdot 668.$$

Således

$$(\alpha) = 60^\circ 0' 0'' \cdot 668$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 188^m \cdot 450\ 669.$$

Medelst ekv. (1) beräknas härur

$$(y_0) = 286^m \cdot 178\ 779$$

$$y_0 = 286 \cdot 178\ 600 \quad [\text{enl. föreg. beräkning ur ekv. (11)}]$$

$$\text{diff.} = 0 \cdot 000\ 179$$

$$(y_0) = 286^m \cdot 178\ 779$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = y_N = 286 \cdot 571\ 711$$

$$(\rho_0) = 0 \cdot 392\ 932$$

$$\rho_0 = 0 \cdot 393\ 111 \quad \text{enl. ekv. (8)}$$

$$\text{diff.} = 0 \cdot 000\ 179$$

Av undersökningen framgår att det enligt ekv. (11) beräknade värdet å y_0 är för stort.

$$\begin{aligned}(L) &= L + c - c_1 \\ d(L) &= dc - dc_1 \\ c \text{ appr.} &= \sigma \cdot y_0 \cdot L \\ dc &= \sigma \cdot L dy_0 \\ c_1 &= \frac{L^3 \cos^2 \alpha}{24y_0^2} \\ dc_1 &= -2\sigma \cdot L dy_0.\end{aligned}$$

Således

$$\begin{aligned}d(L) &= 3 \sigma \cdot L \cdot dy_0 \\ dy_0 &= \frac{d(L)}{3\sigma \cdot L}\end{aligned}$$

För

$$d(L) = -0.000005$$

är

$$\begin{aligned}dy_0 &= -\frac{0.000005}{3 \cdot 0.0000004 \cdot 30} \\ dy_0 &= -0^{\text{m}}.139.\end{aligned}$$

Då avläsning i bandets båda ändpunkter i allmänhet icke kan ske med större noggrannhet än $\pm 0^{\text{m}}.00005$, är det således icke nödvändigt att bestämma y_0 närmare än på 1.5 meter när. Ekv. (11) giver på grund därav tillfredsställande värden.

Ligga bandets ändpunkter lika högt ($\alpha = 0^\circ$), så äro spänningarna T_1 och T_2 lika stora och benämnas *normalspänning*. Generellt torde det vara lämpligt, att med normalspänning avse medeltalet av spänningarna i bandets båda ändpunkter. Normalspänningen är då enligt ekv. (5) lika med produkten av bandets vikt per längdenhet och ordinatan för kordans mittpunkt.

$$T_N = \omega \cdot y_N = \omega \cdot (y_0 + p_0).$$

Av normalspänningen erhållas spänningarna i bandets övre och nedre ändpunkter genom att resp. öka eller minska densamma med $\frac{V}{2} \sin \alpha$:

$$T_1 = T_N + \frac{V}{2} \sin \alpha$$

$$T_2 = T_N - \frac{V}{2} \sin \alpha.$$

Användes vid mätningen en *konstant spänning*¹ i bandets ena ända (övre eller nedre), så tillkommer förutom korrektionen på grund av dilatation även en mätningskorrektion c_2 , positiv eller negativ allteftersom den valda spänningen är större eller mindre än vid normalspänning:

$$c_2 = c - c_1.$$

Vi beräkna

$$y_1 = \frac{T_1}{\omega}$$

$$y_N = \frac{T_1}{\omega} - \frac{L}{2} \sin \alpha$$

$$c = \frac{\sigma L}{2} [2y_0 + p_0(1 + \sin^2 \alpha)]$$

$$c_1 = \frac{8 p_0^2 \cos^2 \alpha}{3 (L)} = \frac{8 p_0^2 \cos^2 \alpha}{3 L + c_2}$$

$$c_1 \text{ appr.} = \frac{8 p_0^2 \cos^2 \alpha}{3 L}.$$

$$\text{Således appr. } (c_2) = \frac{\sigma L}{2} [2y_0 + p_0(1 + \sin^2 \alpha)] - \frac{8 p_0^2 \cos^2 \alpha}{3 L}.$$

Genom kordans förändring från L vid normalspänning till $L + dL = L + c_2$ förändras c_1 till $c_1 + dc_1$

$$\begin{aligned} dc_1 &= -\frac{8 p_0^2 \cos^2 \alpha}{3 L^2} \cdot dL \\ &= -\frac{8 p_0^2 \cos^2 \alpha}{3 L^2} \cdot (c_2) \\ &= -\frac{1}{3} \sigma L p_0 \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Vi erhålla

$$c_2 = \frac{\sigma L}{2} [2y_0 + p_0(1 + \sin^2 \alpha)] - \left[\frac{8 p_0^2 \cos^2 \alpha}{3 L} - \frac{1}{3} \sigma L p_0 \cos^2 \alpha \right]$$

$$c_2 = \sigma L \left[y_0 + p_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{3} \right) \right] - \frac{8 p_0^2 \cos^2 \alpha}{3 L}.$$

¹ Se *Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut national de France*, Tome 32, N^o 7: »Méthode pour la mensuration des bases géodésiques au moyen des fils métalliques, par M. Jäderin.»

Genom att införa $p_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{3}\right)$ appr. = p_0

och $p_0 = \frac{L^2}{8y_0}$ appr. = $\frac{L^2}{8y_N}$

erhålles

$$(12) \quad c_2 = \sigma L y_N - \frac{L^3 \cos^2 \alpha}{24 y_N^2}$$

Vi välja för numerisk räkning

$$T_1 = 10 \text{ kg}, \quad \omega = 0.02 \text{ kg}, \quad \sigma = 0.0000004, \quad L = 25 \text{ m}$$

och $L \sin \alpha = 20 \text{ m}$. ($\alpha = 53^\circ 7' 48''$)

$$\sin \alpha = 0.8, \quad \sin^2 \alpha = 0.64$$

$$\cos^2 \alpha = 0.36$$

$$y_1 = \frac{T_1}{\omega} = 500 \text{ m}$$

$$y_N = 490 \text{ m}$$

$$c_2 = 0.0000004 \cdot 25 \cdot 490 - \frac{25^3 \cdot 0.36}{24 \cdot 490^2}$$

$$= + 0^{\text{m}}.003881$$

$$= + 3^{\text{mm}}.881$$

Det exakta värdet å c_2 , beräknat med tillhjälp av ekv. (2), är

$$c_2 = + 3^{\text{mm}}.923$$

Enligt Jäderins fundamentalformel, som är avsedd att gälla endast för $\alpha < 10^\circ$ blir

$$c_2 = + 3^{\text{mm}}.877.$$

För $\alpha < 10^\circ$ är överensstämmelsen mellan sistnämnda formel och ekv. (12) att betrakta såsom fullständig.

Väljes $L \sin \alpha = 3 \text{ m}$, så är under för övrigt samma förutsättningar som härovan

$$\text{enligt Jäderin} \quad c_2 = + 2^{\text{mm}}.40480$$

$$\text{» ekv. (12)} \quad c_2 = + 2 \quad .40287$$

$$\text{diff.} = \quad 0^{\text{mm}}.00193.$$

TRAFIKFÖRDELNING VID TVILLINGHISSAR

AV

WILHELM DAVIDSSON.

Inom byggnader med livlig trafik mellan de olika våningarna är det vanligt, att hissar för förmedling av trafiken läggas intill varandra i grupper om två och två. Dylika hissar, som lämpligen torde kunna kallas tvillinghissar, manövreras i regel av konduktörer och drivas oberoende av varandra med var sitt maskineri samt gå mestadels med en hastighet av omkring 1,0, i vissa fall upp till 1,5 m/sek.

De trafikbehov, som tvillinghissar fylla, kunna, utom i mera speciella fall, hänföras till tvenne klasser: antingen gäller det att förmedla trafiken mellan bottenvåningen och ovanför varande våningar, såsom anges i fig. 1, eller skola hissarna förmedla trafiken alla våningarna sinsemellan enligt fig. 2. Det förstnämnda fallet förekommer exempelvis i byggnader, vars våningar utgöras av kontorslokaler för skilda affärsföretag; det sistnämnda inträffar i större varuhus, där kunderna göra sina uppköp i de olika våningarna.

Vid hissar i allmänhet och särskilt vid tvillinghissar kan beträffande anordnandet av trafiken uppställas som önskemål, dels att trafikant på möjligast korta tid, inberäknat väntetiden på hissen, bliver förflyttad från en våning till en annan, dels att hissorg ej behöver stanna vid en våning, utan att därstädes finnes trafikant, som vill i den riktning som hissen för tillfället går.

Den anordning vid tvillinghissar, genom vilken trafikanterna kunna tillkännagiva, att hiss önskas till en våning, består i regel däri, att vid varje stannplan finnas uppsatta tvänne tryckknappar, en för vardera hissen, genom vilka signal kan avgivas till konduktörerna i hissorgarna. Trafikant har

således att, innan han trycker på någon av knapparna, tänka efter vilken-dera hissen som är lämpligast för hans trafikändamål.

För att påvisa, att denna anordning lämnar övrigt att önska, må förhållandena vid fallet enligt fig. 2 närmare skärskådas.

Vi antaga, att användningen av hissarna är så pass livlig, att de gå i jämn trafik från lägsta till högsta stannplanet och åter. Det gäller då för trafikant, som från ett visst stannplan vill komma exempelvis högre upp

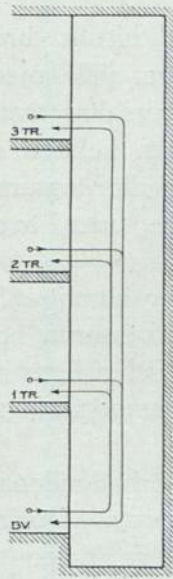


FIG. 1.

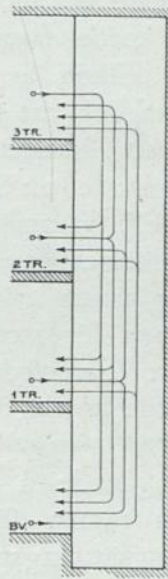


FIG. 2.

i huset, att giva signal till den av hissarna, som på uppgående först kommer att passera stannplanet. I ändamål att trafikant må kunna bedöma, vilken hiss han bör kalla, plägar det uppsättas visareapparater vid stannplanen, å vilka man kan se, var hisskorgarna befinna sig i hisschakten. Det fordras emellertid ej så liten vana för att hastigt kunna orientera sig å visareapparaterna, och svårigheten att göra detta är större, i samma grad som hissarnas hastighet är stor. Det händer därför mycket ofta, att, innan man hunnit tänka efter i vilken våning man är och beslutat sig för att kalla en av hissarna, den hiss, som man kallar, redan passerat stannplanet i den riktning, vari man vill bliva förflyttad. Då den signalerade hissen sedan stannar vid våningen, sker detta i onödan, när den då är på nedresa

och således ej passar. Såsom en ytterligare svårighet tillkommer, att man ej alltid kan se å visareapparaterna, om hiss är på upp- eller nedresa. Befinner sig nämligen hisskorgen i vila vid ett stannplan för in- eller utstigning av passagerare, markera visareapparaterna visserligen, att hisskorgen är vid stannplanet ifråga, men ej huruvida densamma är på upp- eller nedgående.

Vid fall enligt fig. 1 ställer sig saken något gynnsammare, enär där trafiken går i bestämda riktningar, men även här uppstå lätt missförhållanden av liknande art som de ovan berörda.

Av det sagda torde framgå, att det hittills brukliga systemet, att trafikant kan kalla vilken av hissarna han vill, medför två väsentliga olägenheter, nämligen dels att tidsförlust förorsakas trafikant, som ej lyckas kalla rätt hiss, dels att hissarna ofta i onödan behöva stanna.

Onödigt avstannande av hisskorgen medför naturligtvis tidsförlust för i densamma eventuellt varande passagerare, men även andra väsentliga olägenheter uppstå därigenom.

För varje gång hissen igångsättes åtgår nämligen, som bekant, en ej obetydlig energimängd för accelerering av massorna hos hisskorg, motvikt och roterande delar. Ävenledes åtgår en del arbete i pådragsmotstånden samt för övertvinnande av de ökade friktionsmotstånden vid övergång från vila till rörelse.

Ett närmare ingående å de berörda förhållandena vid hissens igångsättning faller utom ramen för denna uppsats. Dock må, för att påvisa vilket inflytande igångsättningsperioderna utöva å den totala energiförbrukningen, påpekas, att strömåtgången under igångsättningen i vanliga fall plägar uppgå till c:a 200 % av den normala, och att om hissens hastighet är stor, t. ex. 1,5 m/sek, och densamma endast skall gå från en våning till en annan närbelägen, således blott tillryggalägga c:a 4 m, hissen knappast kommer i fortfarighetstillståndet, förrän den åter skall avbromsas.

Härtill kommer, att vid såväl igångsättning som avstannande de flesta och viktigaste delarna vid hissen äro utsatta för sin största påfrestning. Vissa delar äro t. o. m. huvudsakligen enbart under dessa perioder utsatta för slitage, t. ex. pådragsapparaten, bromsanordningen m. m.

I det följande må först beskrivas en anordning, avseende trafikfördelning vid tvenne hissar, som äro uppsatta inom Sveriges Privata Centralbanks byggnad vid Gustaf Adolfstorg i Stockholm och fylla trafikbehov enligt fig. 1.

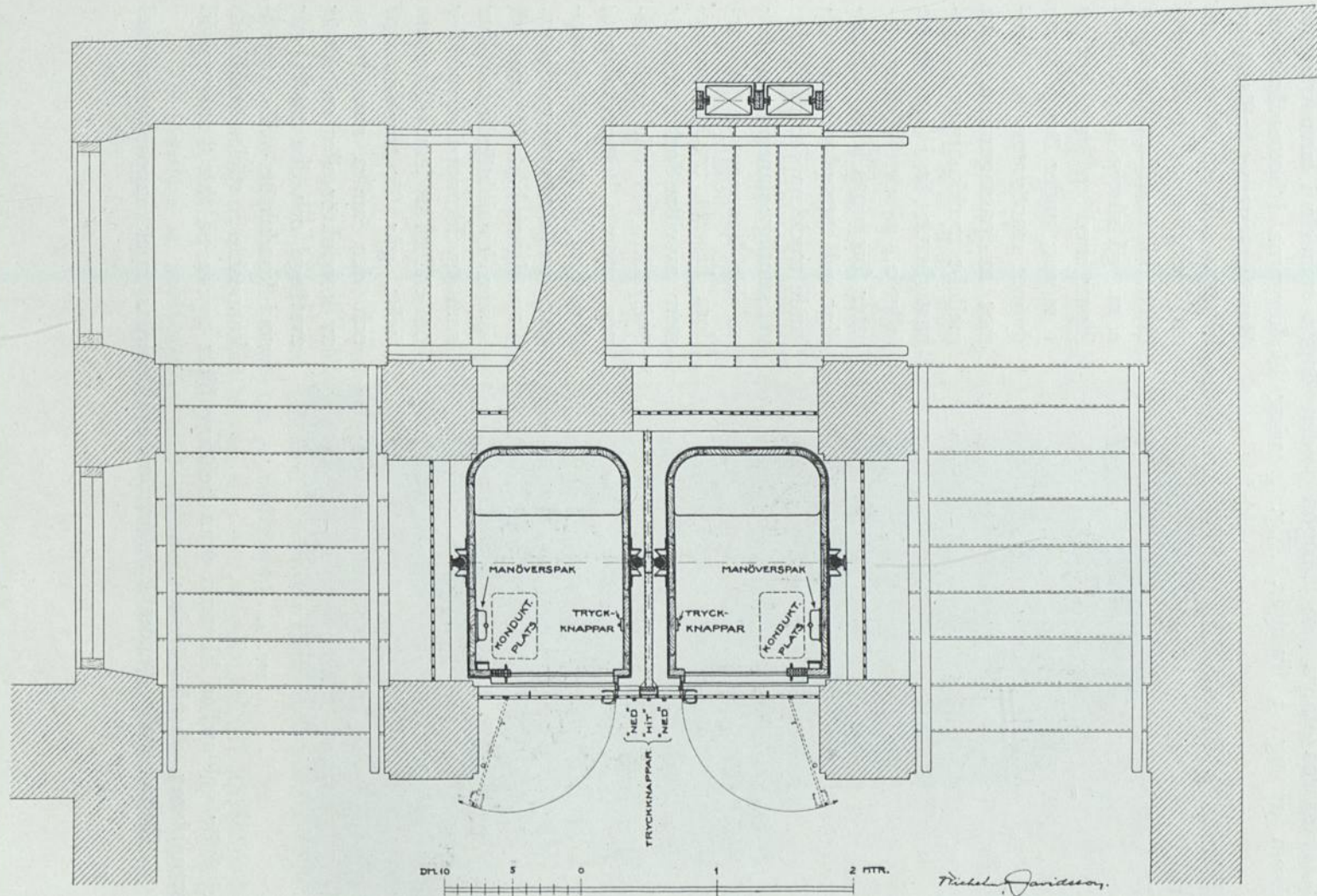


FIG. 3.

Hissarna ifråga äro belägna i den öppna spindeln i huvudtrappan, såsom av fig. 3 framgår. Fig. 4 visar hisskorgarna i bottenvåningen.

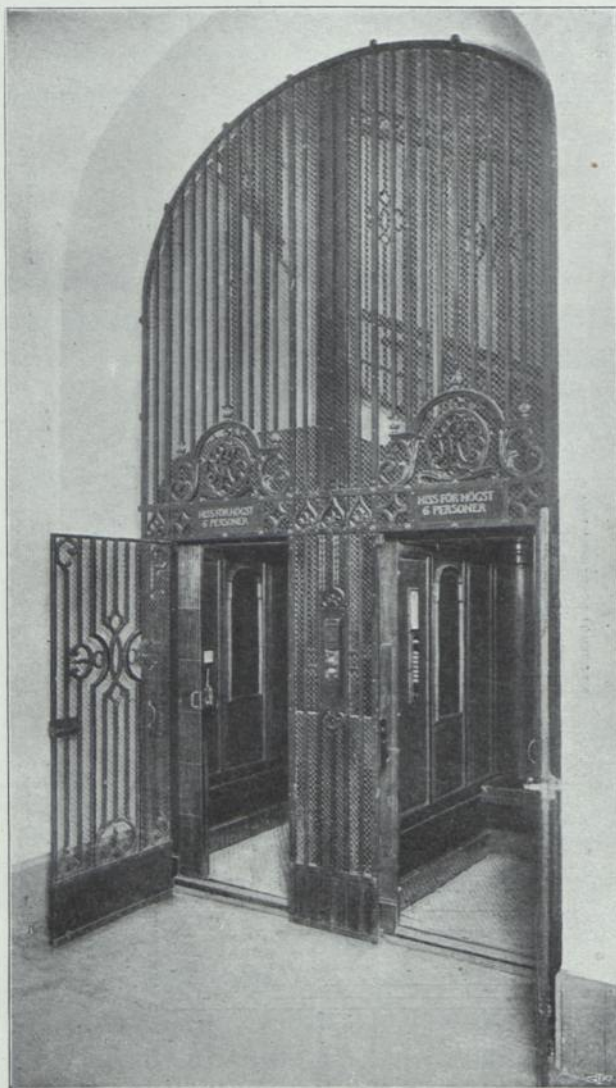


FIG. 4.

Manöversystemet är för bägge hissarna s. k. kombinerat, så att hissarna under kontorstiden, kl. 8,30 f. m. till kl. 6 e. m., gå såsom konduktörshissar med en hastighet av 1 m/sek; under övrig tid av dygnet manövreras de däremot av passagerarna själva medelst tryckknappar. Hiss-hastigheten är i det senare fallet 0,4 m/sek. Visareapparater förefinnas icke. Utvändigt vid stannplanen äro följande tryckknappar uppsatta: vid samtliga stannplanen tvenne »hit»-knappar, en för vardera hissens tryckknappssystem, av vilka dock endera är övertäckt; vid alla stannplanen, utom i bottenvåningen, dessutom tvenne »ned»-knappar, en för vardera hissens. Vare sig nu båda hissarna gå såsom konduktörshissar eller som tryckknappshissar eller om endera av dem, vilken som helst, går för tryckknappar och den andra manövreras av konduktör eller endera är avstängd och den andra går som konduktör- eller tryckknappshiss, ställes trafikant

ej inför val mellan hissarna utan behöver blott trycka på »hit»-knappen vid stannplanet, då hiss önskas.

Detta ernås genom kombination av hissarnas tryckknappssystem med

signalsystemet på sätt, som närmare torde framgå av nedanstående uppställning.

Schema för manövrering av hissar med kombinerat manöversystem och avsedda för trafikbehov enligt fig. 1.

| Båda hisarna gå som konduktörshissar. | Båda hisarna gå som tryckknappshissar. | En hiss går som konduktörs-, en som tryckknappshiss. | En hiss avstängd, den andra går som konduktörs- eller tryckknappshiss. |
|--|---|---|--|
| 1. | 2. | 3. | 4. |
| Vid tryckning å en hitknapp avgives signal till <i>båda</i> hisskorgarna och resp. nummerbricka nedfaller i båda korgarna. Våningarna äro fördelade mellan hisarna. Tagger en konduktör en passagerare, som den andra borde ha tagit, avgiver han överenskommen signal till den andra konduktören. Hisskorg behöver därför ej i onödan stanna. | Hitknapparna vid alla våningarna motsvara den ena av hisarna, som sålunda kan kallas till resp. våning. Den andra hissen kan blott tagas vid nedersta stannplanet, vilket är till fördel för upptrafiken, som i första hand bör tillgodoses. Vid varje av de övre stannplanen finnes en »ned»-knapp för vardera hissen. I båda hisskorgarna finnas tryckknappar motsvarande samtliga stannplan. | Vid tryckning å hitknapp avgives signal till konduktörshissen. Den andra hissen, tryckknappshissen, kan blott tagas vid nedersta stannplanet. | Vid tryckning å hitknappen avgives signal i korgen, om hissen går som konduktörshiss; går den däremot som tryckknappshiss, igångsättes densamma på för dylika hissar vanligt sätt. |

Såsom ovan nämnes, finnas vid alla stannplanen tvenne »hit»-knappar, av vilka en är övertäckt. Ändamålet härmed är, dels att hissarnas funktion enligt kolumnerna 2 och 3 med vissa tidsmellanrum skall kunna omkastas dememellan för att åstadkomma lika fördelat slitage å båda hisarna, dels att i händelse av fel å den ena hissen den andra skall kunna betjäna samtliga stannplan.

Systemet har varit i användning vid hisarna ifråga allt sedan de i slutet av år 1914 togos i bruk och har fungerat på avsett vis.

Hissarna äro utförda av Allmänna Svenska Elektriska Aktiebolaget. Program för desamma är utarbetat av författaren.

Fördelning av trafiken vid hissar, som äro avsedda att fylla trafikbehov enligt fig. 2, kan ernås på följande sätt.

Vid vardera av stannplanen, med undantag av det högsta och lägsta, uppsättas tvenne tryckknappar över varandra och midt emellan hisarna;

den ena märkt »upptrafik», avsedd för trafikanter som vilja upp, den andra märkt »nedtrafik», avsedd för dem som vilja ned. Vid högsta och lägsta stannplanet uppsättes endast en tryckknapp, märkt »hiss».

I vardera av hisskorgarna uppsättes en signaltablå, vilken har en signallampa för var och en av nämnda tryckknappar. Kopplingen utföres på så sätt, att vid tryckning å en knapp tändes motsvarande signallampa i *båda* hisskorgarnas tablåer. Bägge konduktörerna se därigenom, att vid stannplanet ifråga finnes trafikant, som vill upp eller ned, och behöver sålunda endast den konduktör stanna vid planet, som på upp- resp. nedgående först passerar detsamma. I vardera hisskorgen uppsättes dessutom en tryckknappstablå, å vilken finnes en tryckknapp för varje signallampa å signaltablåerna. Genom att trycka på en knapp å en av tryckknappstablåerna släckes motsvarande lampa i båda hisskorgarna. Sedan en av konduktörerna tagit passagerare från ett visst stannplan för exempelvis upptrafik och tryckt å motsvarande knapp å tryckknappstablån, ser sålunda den andre konduktören, på grund av att motsvarande lampa släckes, att trafikanten tagits av den andra hissen.

Genom detta system ernås således, att trafikant ej behöver välja mellan hissarna, utan blott har, allt eftersom han vill upp eller ned, att trycka å en bestämd knapp, varefter den hiss stannar vid vilplanet, som på upp- resp. nedgående först passerar detsamma.

Om anordningen sålunda är fördelaktig vid normalt fungerande av bägge hissarna, är densamma i ännu högre grad värdefull, om en av hissarna blir defekt och den andra därför ensam har att tillgodose trafikbehövet. Härvid är det av stor betydelse, att hisskorgen ej behöver stanna annat än för trafikant, som vill i den riktning, som hissen för tillfället går.

Systemet kräver ett ganska stort antal ledningar. Kostnaden för detsamma uppväges dock därav, att visareapparater ej behöva anordnas. Detsamma är patenterat av författaren.

DEN FÖRSTA SVENSKA LÄROBOKEN I PERSPEKTIV

EN STUDIE AV

P. HENRIQUES.

Då jag för några år sedan besökte herr artisten John Ekströms bibliotek, som i avseende på rikhaltigheten av värdefulla och sällsynta arbeten rörande teckning och därmed sammanhängande ämnen är enastående i vårt land, överlämnade herr E. till mig en liten ålderdomlig volym, vars titelblad är i förminskning ($\frac{2}{3}$) återgivet i fig. 1 å här följande sida. Jag övertygade mig snart om, att jag här lyckats överkomma *den äldsta svenska perspektivläran*. Det i och genom denna egenskap värdefulla tryckalstrets titelblad prydes, såsom bilden visar, av en liten perspektiviskt utförd gravyr av J. Gillberg, föreställande små putti, som syssla med praktisk geometri på ett rutat golv; pelare och tempel synas i bakgrunden¹.

Författaren till denna »Inledning till perspektiven», conductören BERONIUS, föddes d. 6 nov. 1729, blev amanuens vid Observatorium 1758 och bibliotekarie vid kronprinsens enskilda bibliotek 1762. Förutom föreliggande bok har han från trycket utgivit »Förteckning på svenska Calendarier för varje år ifrån 1600 till och med 1770». Någon praktisk-perspektivisk verksamhet torde han icke hava utövat. Han dog såsom titulär lagman i Stockholm d. 14 april 1797.

¹ På bokpärmens insida står präntat med sirlig skrivstil: »En present af Hr Håf Målarren J. G. Brusell, Garde de Tableaux vid Konungens af Sverige Museum till Artisten Johan Söderlund dess Wänn. 1818». Brusell, som förut, under åren 1781—1808 varit dekorationsmålare vid Kgl. teatern och där, förnämligast under Després ledning, utfört en mängd stora arbeten, hade säkerligen under denna sin verksamhet haft anledning att studera och praktiskt tillämpa reglerna i den lilla perspektiviska läroboken.

Låtom oss kasta en hastig överblick på Beronii viktigaste utländska föregångare.

Redan uti den skrift om »Optikens Elementer», som av några tillskrives Euklides, av andra Theon av Alexandria, skulle man kunna spåra ett första

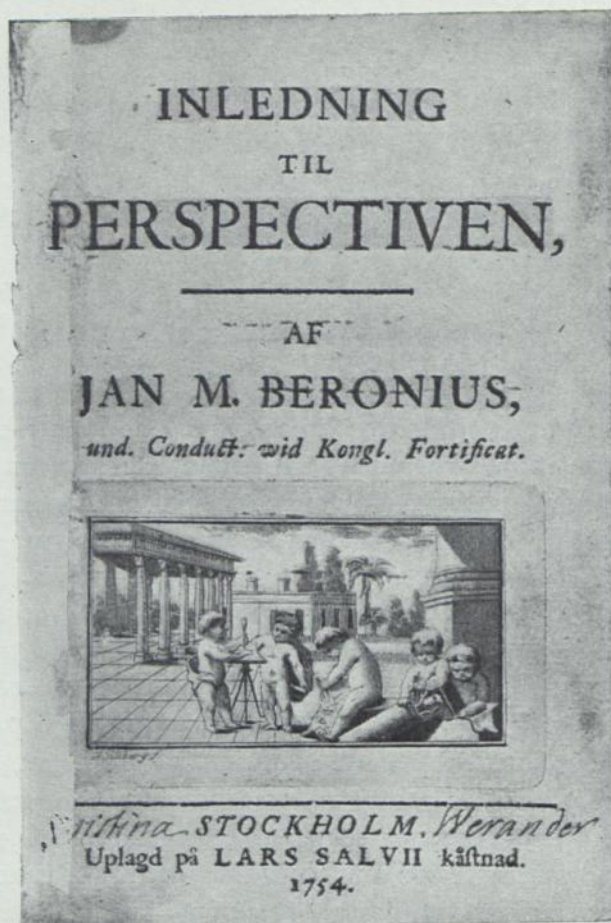


FIG. I.

frö till en lärobok i den perspektiviska vetenskapen. Bland teoremen i denna »optik» läses:

Teorem I: Intet av de sedda tingen ses på en gång i dess helhet.

Teor. II: Av lika storheter, som befinna sig på avstånd, ses de, som ligga närmare, mera tydligt.

Teor. III: Om ett synligt föremål förflyttas till ett visst avstånd, förblir det icke längre synligt.

Teor. IV: Av lika storheter, som befinna sig på samma räta linje, förefalla de längre bort belägna att vara mindre.

Teor. VI: Parallella linjer sedda på avstånd tyckas icke ligga lika långt från varandra.

Teor. VIII: Lika storheter, som befinna sig på olika avstånd, uppfattas i överensstämmelse med avståndet.

Teor. X: Av föremål, som befinna sig på ett plan lägre än ögat, tyckas de längre bort belägna ligga högre.

Teor. XI: Av föremål, som befinna sig på ett plan högre än ögat, tyckas de längre bort belägna ligga lägre.

Teor. XII: Av föremål, som äga utsträckning i längdriktningen framåt, tyckas de som ligga på höger sida (om ögat) förskjutna åt vänster, de som ligga på vänster sida förskjutna åt höger.

Teor. XXII: Om en cirkel ligger i ett plan, som innehåller ögat, skall cirkelperiferien te sig såsom en rät linje.

Teor. XXIII. Om ett klot betraktas blott med ena ögat skall alltid mindre än halva klotet bliva synligt och det synliga tyckas begränsat av en cirkel.

Dylika satser kunna ju mycket väl bilda ett lämpligt underlag för en perspektivisk lärobyggnad.

Men längre än till underlaget synes man hos grekerna icke hava kommit. Antagligt är också att de försvunna skrifter över perspektivet, som enligt Vitruvius¹ författades av Agatarchos (samtidig med Äschylos), Demokritos och Anaxagoras, vilka alla levde före Euklides, innehöllo liknande satser som de anförda, möjligen med tillämpning i enklaste form på teaterns frontala dekorationer. (Ty egendomligt nog är teaterns perspektiv — den tekniskt svåraste grenen av perspektivet — också den äldsta).

Först uti Leone Battista Albertis traktat »Della pittura», år 1435, erhöi perspektivets teori en fastare form genom definitionen av perspektivbilden såsom synstrålepyramidens avskärning medelst ett vertikalt plan, genom grundplanets kvadratiske inrutning, införandet av människans längd såsom horisonthöjd, den noggranna perspektiviska höjdbestämningen på olika ställen av tavlan m. m.² Men vad man menar med en verklig *lärobok i perspektivet* framträder 60 år senare uti den av Piero degli Franceschi

¹ De architectura; 7:de boken, kap. X.

² Se: L. B. Albertis målartaktat av P. HENRIQUES, Teknisk Tidskrift 1898.

författade »De Prospectiva Pingendi», ett arbete, som hänryckte samtida perspektiviker och målare och som ännu i dag är ägnat att väcka forskarens beundran. Piero använde den s. k. diagonalmetoden (för vilken jag på annat ställe närmare redogjort¹) och kunde medelst denna, visserligen på ett besvärligt sätt, lösa även invecklade praktisk-måleriska uppgifter. Där-
emot hade han ännu icke nått till insikt om *distanspunkternas* betydelse. Ett tiotal år efter Piero visade den med orätt tämligen förbisedde Jean Pellerin, kallad Viator, huru distanspunkterna, »puncta tertia», kunna begagnas, även för uppritandet av vissa specialfall av *snedt perspektiv*. Albrecht Dürer utvidgade perspektivets område år 1525, bl. a. genom sin skuggkonstruktion, visserligen endast för centralbelysning², och genom uppfinnandet av åtskilliga mekaniska hjälpmedel till underlättandet av det perspektiviska arbetet. Guido Ubaldi (1600) bestämde gränspunkterna för vågräta linjer i godtycklig vinkel mot bildplanet, utvecklade skuggläran samt gav regler för teaterns perspektiv. Genom den store Gérard Desargues (1593—1662) (vars fanatiska lärjunge, A. Bosse, uppoffrade t. o. m. sin levnadsställning för utbredandet av mästarens läror³) underkastades de perspektiviska konstruktionerna en strängare geometrisk behandling. Slutligen gav Brook Taylor år 1715 en utvidgning av Ubaldis regler genom att använda gränspunktsförfarandet, icke blott för vågräta linjer utan för linjer av vad riktning som helst. Brook Taylor använder även gränslinjer för plan lutande mot tavlan och löser därmed sådana allmänna fundamentala uppgifter som: att konstruera ett plan vinkelrätt mot en given linje o. d. Han utvidgar f. ö. den centralprojektiviska behandlingen av avbildningsproblemet genom att utgå från ett bildplan i godtycklig lutning mot grundplanet.

Jämte dessa nydanares arbete utkommo under 1600-talet och första hälften av 1700-talet en mängd, i vad beträffar illustrationsmaterialet delvis ypperliga läroböcker och traktater, bland vilka åtskilliga utövat en påtaglig och direkt inverkan på vår författare, såsom J. Du Breuil: *La perspective pratique*, Paris 1642, J. F. Nicéron: *Perspective curieuse*, Paris 1663, varest bl. a. för första gången förekommer användning av förkortad distans, något som dock icke vunnit efterföljd hos Beronius, och B. Lamy: *Traité de perspective*, Paris 1701. Samtliga dessa författare citeras på olika ställen i

¹ Albrecht Dürers perspektivlära, Stockholm 1910, s. 54 o. f.

² I min bok om Dürer har jag uttalat, att Viators arbete var Dürer fullkomligt obekant. Jag är numera icke fullt så säker i denna mening, ty om än Viators namn aldrig omtalas av Dürer, så kan ju icke förnekas, att den i Mariacykeln förekommande bilden »Die Darstellung im Tempel» har i perspektiviskt hänseende en förbluffande likhet med en plansch i Viators bok.

³ Se: *Darstellende Geometrie von CHR. WIENER*, Bd 1, sid. 18.

Beronii bok, än såsom förebilder, än i polemiskt syfte. Framför de nu nämnda står en perspektiviker, om vilken jag dock ej vågar bestämt påstå, att han varit Beronius bekant, nämligen Johann Jacob Schübler uti sin år 1719 utgivna *Perspectiva Pes Pictura*. Schübler behandlar icke blott skuggperspektivet korrekt och grundligt utan även bilder på runda ytor. Det på de stora folioplanscherna i kopparstick nedlagda arbetet i Schüblers verk är så utomordentligt, att det väcker nästan lika mycken förvåning som beundran. En hög rang bland 1600-talets perspektiviker intager jesuiten Andrea Pozzo. Första upplagan av dennes stora verk »*Perspectiva pictorum et architectorum*» utkom på latinska språket år 1693; samtidigt utgavs en översättning på italienska och några år senare en till tyskan. Pozzos arbete innehåller icke mindre än 226 kopparstick i stor folio, vilka i avseende på utförandets noggrannhet och säkerhet äro förträffliga. Ehuru Pozzo icke, i likhet med de tre först anförda författarna, uttryckligen omnämnes av Beronius, är det dock sannolikt att han känt denne på sin tid högt berömde perspektiviker¹.

Den författare, som under 1700-talet haft den största betydelsen för utvecklingen av den perspektiviska vetenskapen, var den tyske matematikern J. H. Lambert, men hans epokgörande »*Freye Perspektive*» offentliggjordes först 1759 och har således ej kunnat utöva något inflytande på den svenske författaren, vars bok utkom fem år tidigare.

I enlighet med tidens sed är Beronii arbete dedicerat till en socialt framstående person, vilken denna gång, troligen på grund av den betydelse för Sveriges bildande konst, som författaren tillmätt sin bok, är ingen mindre än dåvarande kronprinsen Gustaf, sedermera konung Gustaf III. »Då Eders Kongl. Höghet» — heter det i författarens dedikation till den åttaårige prinsen — »hvilar sig ifrån de angelägnare Studier, torde det blifva Eders Kongl. Höghet nöjsamt at underrätta sig om de Reglor, hvarefter alle synlige ting afbildas i våra ögon, och huru alle Perspectiv-ritningar derefter göras. Et så högt efterdöme skulle, til Perspectivens vinning och framsteg, ofelbart upmuntra många af Rikets Ungdom, at beflita sig om dess lärande, och at efter Konstens Mathematiska grund, som här gifves vid handen, ej allenast anlägga ritningar, utan ock fatta anledning til et rätt omdöme och til artiga påfund i Byggnings Konsten».

»Denna lilla bok har jag understådt mig i sådant upsåt, at samman-skrifva och för Eders Kongl. Höghet nedlägga».

¹ Pozzo utövade även en vidsträckt praktisk perspektivisk verksamhet såsom dekorationsmålare både i Italien och Österrike.

teorem, bevis, corollarier och scholier de fundamentala reglerna för avbildandet av punkter, linjer och plana figurer i grundplanet. Utgångsatsen för bestämmandet av perspektivbilden till en punkt i grundplanet uttalas av förf. på följande sätt: »En punkts perspektivs högd på taflan, är till ögats högd, som sielfva punktens distans, är till samma distans tillika med ögats distans». Om nämligen i fig. 2 (kop. efter figuren i Beronii bok) B är originalpunkten, D dess perspektivbild och O ögat, så är $DF:OG = BF:(BF + FG)$.

Med tillhjälp av denna analytisk-geometriska sats konstrueras nu perspektivbilden (P) av en punkt P , som ligger i grundplanet på ett avstånd n från taflan så som fig. 3 visar. Från B , som är spårpunkten av den nedlagda pendikeln n från P till grundlinjen, drages en linje till »ögats punkt» O och en cirkelbåge slås med medelpunkten B och radien n till C . På horisontlinjen genom O avsättes ögondistansen från O till D , vilken senare punkt sammanbindes med C . Då är avskärningen (P) perspektivbilden av P . Detta bevisar förf. med tillhjälp av ovanstående sats, ty uti fig. 3 är: $(P)E:EF = BC:(BC + OD)$.

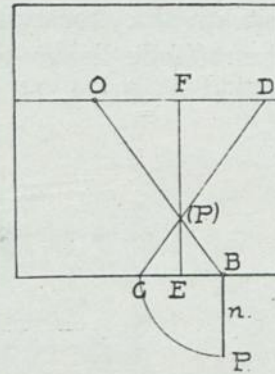


FIG. 3.

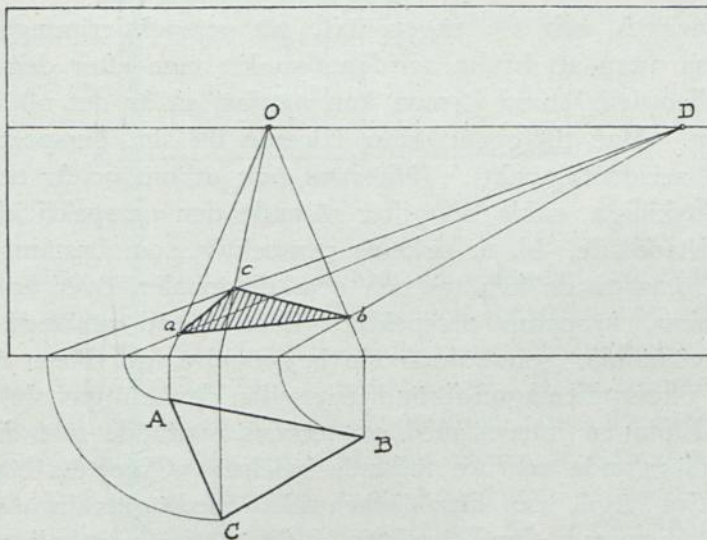


FIG. 4.

Författarens anvisning för uppritandet af perspektivbilden till en kropp lyder: »Jag tager ichnographiperspektiven af kroppens bas, sedan perspektiver af kroppens perpendiculera högder och flyttar dem på sina punkter i ichnographiperspektiven, samt sammanfogar de punkter, som äro ändar till en och samma linea, så har jag kroppens schenographi». Regeln tillämpas på per-

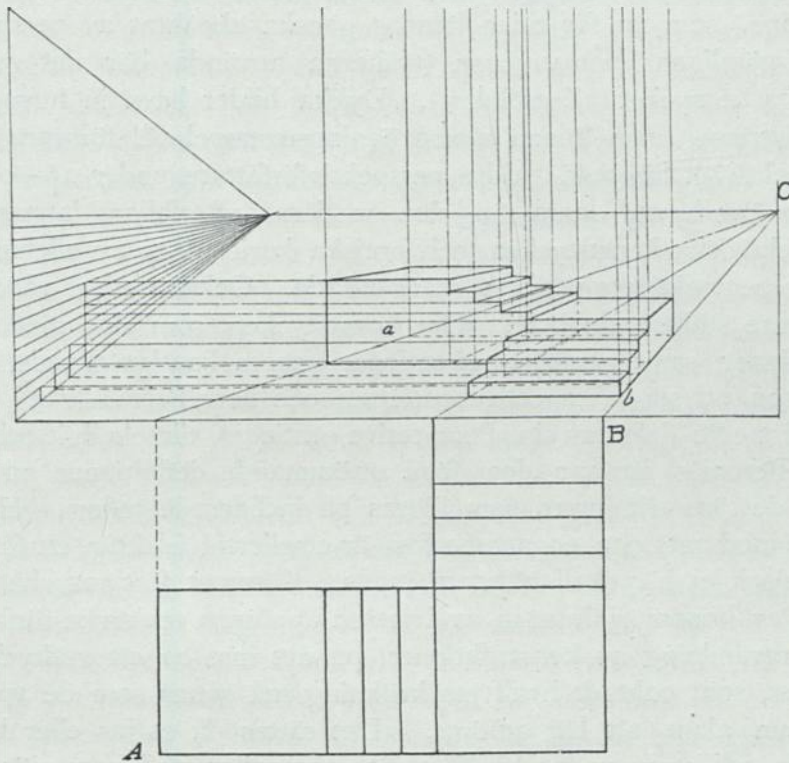


FIG. 6.

spektivbilderna av en kub, en pyramid, en kolonnad, ett rum täckt av ett tunnvalv, en trappa samt öppna dörrar och fönster. Ett exempel på tillvägagåendet visar fig. 6, framställande perspektivbilden av en fritrappa. Förklaringen i texten lyder helt knapphändigt: »Utaf trappornes grundritning AB , tages Perspektiven ab och deruppå sättes Perspektivet af hvar och et trappstegs högd ifrån grundplanen, såsom af ritningen kan sees».

Slutligen genomgås kort sättet att konstruera perspektiviska tak- och plafondbilder, vilket belyses medelst takbilden av en byggnad med pelare. Författaren giver rörande sådana bilder följande goda och ingalunda över-

flödiga råd: »Då Perspectives af byggnader skola ritas i tak, så böra de så ritas at de må synas stödja sig på rummets väggar eller på något annat. Ty, efter Perspectivritningar äro bättre, alt som de likna det naturliga, så bör äfven sielfva invention uti ritningarne vara naturlig, hvaremot dock ofta blifvit felat».

En jämförelsevis betydlig del av den lilla bokens 72 oktavsidor ägnas åt ett ämne, som nu för tiden lämnas ganska obeaktat av perspektiviska författare, nämligen *anamorfoser* (tyskarna använda här det goda, men ööversättliga uttrycket »Zerrbilder»). Dylika bilder hava ju huvudsakligen kuriositetsintresse, men kunna såsom övningsexempel väl försvara sin plats i en perspektivisk lärobok. Äldre perspektivförfattare under 16- och 1700-talen voro överhuvud mera än sina moderna efterföljare intresserade av quasiperspektiviska konststycken och optiska kuriositeter av allehanda slag, tillhörande perspektivets yttersta gränsområde. Också skriver vår författare på ett senare ställe i sin bok: »Om konststycken, som skie medelst speglars reflectioner, samt medelst refractioner genom kantigt slipade glas, har herr Niceron uti sin »Perspective curieuse» och herr Breuill (skall vara Du Breuil), uti tredie delen av sin »Perspective pratique», tilträckeligit och nöjsamt skrifvit». Beronius lämnar den föga uttömmande definitionen på anamorfoser att de äro »ritningar, som göras på inclinerade taflor». Hans konstruktionsmetod »att rita en anamorfos» är emellertid felaktig, ett förhållande på vilket dock ej här skall närmare ingås. Däremot förtjänar hans, visserligen icke av honom själv utan av Niceron uppfunna praktiska förfaringssätt att, utan användning av konstruktioner, på det inre av ett godtyckligt valv »rita figurer, som oaktadt hvalfvets krökning må synas som de vore ritade på en jämn plan» att här anföras. »Det sättes då et jus eller lampa uti ögats ställe och strax under hvalfvet sättes et galler *abck*, som gör skuggan *stq*¹. Då är klart at denna skugga synes ifrån ögats ställe *L* såsom gallret *abck*, så at om skuggan utmärkes och på hennes fyrkanter ritas figurer på samma sätt, som de gå öfver gallrets parallelogrammer, så skola de ifrån ögats ställe *L* synas som de voro ritade på en plan».

Ett för vår tids uppfattning ganska egendomligt förhållande är att Beronius använder sin lärobok även för att polemisera med andra författare. Han riktar sig särskilt mot några påståenden i den av B. Lamy utgivna »*Traité de perspective*», där det bl. a. heter att det axiomat »ofta är falskt», som utsäger »at alt som synes under lika vinklar synes lika stort». Mot detta underliga påstående och åtskilligt annat i Lamys bok riktar B. en

¹ Den härtill hörande figuren uteslutes såsom varande obehöfvig.

visserligen fullt berättigad, men i en lärobok för nybörjare tämligen olämplig kritik. Anledningen till polemiken är egentligen frågan om, huru en på ett högt ställe anbragt staty skall i sina olika delar utföras för att nedifrån synas proportionerlig. Alltså samma fråga som, om än under en annan form, intresserade Albrecht Dürer i hans år 1525 utgivna »Underweysung der Messung». Beronius liksom Lamy löser uppgiften rent praktiskt medelst ett galler, vars vågräta stänger »kunna flyttjas fram och tillbaka uti parallella situationer från hvarandra. Detta galler ställes perpendiculert på det ställe som statuén skall stå, och flyttas då desse karmar til dess at de nedan ifrån ögats ställe synes vara lika långt ifrån hvarandra. Sedan göres statuén efter den proportion, som karmarnas distans hafva sinsemellan». Emellertid gör författaren i ett scholion till den ifrågavarande paragrafen några anmärkningar, som i själva verket visa en så riktig inblick i perspektivets väsen, att den borde hava ledt honom till en bättre utgångsdefinition än den ovan anförda. Han säger nämligen: »Hvad eljest på detta sättet en statués proportion och ställning angår, så är det besynnerligt at dervid hafves så litet afseende på vårt omdöme; ty såsom vi döma at en hop parallela linier äro parallela, fast än vi se dem vid en ända gå ihop till en punkt, på samma sätt böra vi äfven döma en statuë vara proportionerlig fast vi se honom oproportionerlig ifrån en stor högd. Ändamålet med en människiostatuë är at den skall synas som om der stog en menniskia, men en menniskia skulle synas oformelig ifrån en stor högd, derföre borde äfven statuén synas oformelig från samma högd. Vid andra tilfällen åter hafves mycket afseende på vårt omdöme, såsom vid en Theaters bygnad, då fonden af Theatern göres mindre än sielfva yppningen till Theatern, på det at fonden må dömas vara längre borta än han är, för det at han synes så liten». Allt detta är klart tänkt och riktigt uttryckt.

Sedan anamorfosen på och inuti en pyramid och en kon beskrivits, giver förf. en kort anvisning för konstruktionen av spegelbilder i vatten, som är teoretiskt riktig, men vars värde för den praktiske perspektivikern minskas genom felaktigheter hos de figurer, i vilka regeln praktiskt tillämpas. Då förf. således skall bestämma spegelbilden av en på stranden stående byggnad, tänker han sig huset ställt omedelbart på vattenytan, utan att taga hänsyn till strandens höjning över vattnet m. m. d., en felaktighet, som för övrigt ej är ovanlig även i senare perspektiviska arbeten.

Bokens sista sidor ägnas åt »skuggans projection». Först behandlas skuggbestämning »då ett jus eller lampa brinner», varvid skuggorna riktigt konstrueras för en pyramid, en reguljär tetraeder och en i luften upphängd

kropp. Mindre lycklig är behandlingen av det för målaren viktigare problemet »at rita skuggan af en kropp, som är i solskienet». Författaren synes här alldeles bortkommen och lämnar en anvisning lika oredig som den tillhöriga figuren är oriktig (se fig. 7). »Om jag skal rita skuggan til cuben *A*, så fäller jag ifrån solens ställe (?) *S* en perpendicular linea *SP* til grundplanen (?) och drager igenom cubens basvinklar parallela linier *TG*, *PH*, *RK*.

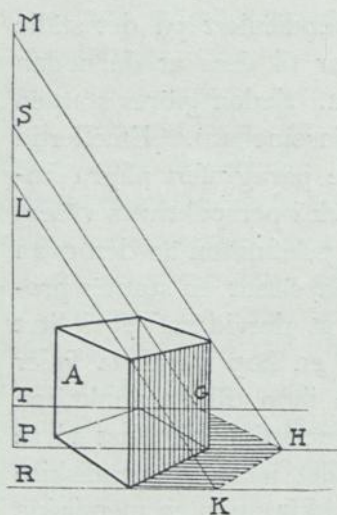


FIG. 7.

Sedan drages ifrån solens ställe igenom cubens öfversta anklar parallela linier, *MH*, *SG*, *LK*, som uti *G*, *H*, *K* utvisa figuren af cubens skugga, som skulle göras». Beronius har här uppenbarligen kritiklöst kopierat Du Breuil, som i avseende på den perspektiviska skuggläran gjort grova bockar. Tydligen är — visserligen aldrig förklaringen — men konstruktionen användbar i det enda fall att »solens ställe» ligger i tavlans plan och således naturligtvis icke, såsom på figuren, är synligt. Här har tydligen icke blott författaren utan även hans censor Klingensstierna blundat ganska grundligt. Författaren har också försiktigtvis i ett scholion förklarat sig hålla före »at det är rätt så nödigt at gifva noga aktning på dageliga förfarenheter deruti, som at följa de generela reglorne, för at rita skuggan naturligt».

Den lilla boken slutar med några anmärkningar rörande synvinkelns och distansens lämpliga storlek. Frågan om distansens mått har varit föremål för mycket skiljaktiga meningar och regler hos både perspektivets teoretiker och dess praktiker. Granskar man Raffaels arbeten finner man i hans förnämsta målningar en distans lika med 1 till $1\frac{1}{4}$ gång tavlans största dimension. Piero d. Franceschi angiver såsom minsta tillåtna distans höjden i den liksidiga triangel, vars sida är tavlans största dimension; detta motsvarar en största synvinkel av 60° . I Leonardos målarbok, Codex vaticanus 1270, heter det: »Ritar du efter naturen, så ställ dig från det föremål du tecknar på ett afstånd, som är tre gånger så långt som föremålet är stort». Och på ett senare ställe: »Den som tecknar efter verkligheten skall ställa sig så att den afbildade figurens öga är i jämnhöjd med tecknarens öga». Under antagande att horisonten tänkes ligga i tavlans midt, får man ur dessa två anvisningar en distans = $1\frac{1}{2}$ gånger tavlans höjd. Samma regel giva andra renässansperspektiviker såsom Peruzzi och Vignola, varemot

Andrea Pozzo i sin *Perspectiva pictorum et architectorum* använder en distans, som endast är lika med tavlans halva bredd, motsvarande en största synvinkel av ej mindre än 90° . Även Albrecht Dürer, som i sin »Underweysung» icke särskilt uppehåller sig vid denna fråga, använder ofta i sina teckningar en påfallande liten distans och en därmed sammanhängande stor synvinkel. Sålunda är distansen i ett av hans ryktbaraste kopparstick, »Hieronymus in der Zelle» (1514), mindre än tavlans halva höjd. I en av »Mariacykelns» teckningar »Die Darstellung im Tempel», vars perspektiv för övrigt är av bedårande verkan, har distansen tagits nära lika med bildens största dimension. Den numera bland perspektiviker kanske allmännast antagna regeln är, att distansen icke bör understiga längden av tavlans diagonal, vilket för en kvadratisk tavla med huvudpunkten i midten motsvarar en synvinkel av 53° .

Jag vill i detta sammanhang påpeka ett i perspektiviskt hänseende påfallande drag hos vår tids nyaste målningskonst — jag tänker därvid naturligtvis endast på den konst, som har naturavbildning till föremål — nämligen den konflikt, som oftast råder mellan *teckning* och *färgbehandling*. Teckningen motsvarar en mycket kort distans under det färgbehandlingen fordrar, för att komma till sin rätt, en lång distans. Därav uppstår en disharmoni, som icke kan övervinnas och som för ett i den äldre »perspektiviska» konsten invariant och skolat öga förstör verkan av ett från andra synpunkter måhända intresseväckande konstverk. Jag behöver väl knappast tillägga, att denna konflikt mellan teckning och färg varken är avsedd eller medveten, då perspektiviska studier och ändamål vanligen ligga helt och hållet utanför de moderna konstnärernas intressesfär. »Det perspektiviska är en övervunnen ståndpunkt» — så låter den nyaste parollen inom den s. k. målarkonsten.

Vår författare följer, i likhet med de 16- och 1700-talets författare, som synas hava varit hans förebilder, Andrea Pozzo. Han angiver nämligen 90° såsom synvinkelns maximum. »Derföre, om taflans vidd anses som en hypotenus, så är klart at quadraten af taflans vidd aldrig bör vara större än quadraterne ihop af de ögats strålar, som innefatta taflans vidd». Likaså bestämmer han, i överensstämmelse härmed, ögonhöjden över grundplanet så »at ögats högd aldrig bör vara större än ögats distans eller som är detsamma, at det intet bör ritas mer på en sida om ögats punkt, än som innehålles af halfva den vinkelen, som är den största under hvilken ögat kan se».

Med denna regel slutar den lilla, trots sin korthet, innehållsrika boken. Bortsett från de anmärkta felen är densamma en rätt förtjänstfull exponent av perspektivkonstens ståndpunkt i medlet av 1700-talet, innan ännu J. H. Lambert infört en ny, på samma gång friare och mera vetenskaplig behandling av ämnet.

ELLIPTISKA INTEGRALER I DYNAMISKA PROBLEM

AV

CARL HEUMAN.

Många viktiga rörelseproblem leda till *elliptiska integraler*. Teorien för dessa är till väsentlig del utbildad av LEGENDRE i hans klassiska arbete *Traité des fonctions elliptiques* (3 bd, Paris 1825—28). Detta verk innehåller jämväl en omfattande samling tabeller, vilka alltjämt utgöra det viktigaste hjälpmedlet för numerisk räkning i förekommande fall. Emellertid kan man vid en del dynamiska undersökningar av större praktisk betydelse göra arbetet åtskilligt bekvämare genom särskilda tabeller, som äro mera direkt avpassade för ändamålet. I det följande meddelas några sådana, vilka äro beräknade ur Legendres tabellverk speciellt med hänsyn till praktiska tillämpningar av *pendel-* och *gyroskopteorien*. De tabulerade funktionernas betydelse och samband med de Legendreska framgår av nedanstående redogörelse.

Vi utgå från de av Legendre införda s. k. *normalintegralerna* av första, andra och tredje slagen, vilka vi skriva

$$(1) \quad F(a, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad E(a, \varphi) = \int_0^{\varphi} \Delta\varphi d\varphi, \quad \Pi(p, a, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{1 - p \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

där

$$(2) \quad \Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

samt

$$(3) \quad k = \sin a.$$

De båda första integralerna äro beroende av *amplitudvinkeln* φ och *modylvinkeln* α eller *modylen* k^2 , den sista därjämte av *parametern* p .

Det är bekvämt att även införa särskilda beteckningar för modylvinkelns komplement

$$(4) \quad \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

och den »komplementära modylen»

$$(5) \quad k'^2 = 1 - k^2,$$

där

$$(6) \quad k' = \sin \alpha' = \cos \alpha.$$

Av den med denna modyl bildade rotfunktionen

$$(7) \quad \Delta' \varphi = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}$$

erhållas de »komplementära integralerna»

$$(8) \quad F(\alpha', \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta' \varphi}, \quad E(\alpha', \varphi) = \int_0^{\varphi} \Delta' \varphi d\varphi, \quad \Pi(p, \alpha', \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{1 - p \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta' \varphi}.$$

Vinklarna φ och α antagas i det följande ligga i intervallet 0 till $\frac{\pi}{2}$; är $\varphi = \frac{\pi}{2}$ kallas integralerna *fullständiga*. För de fullständiga integralerna av första och andra slagen skriva vi kortare $F(\alpha)$ och $E(\alpha)$ i st. f. $F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ och $E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$. Legendre har för dessa härleddt serieruttrycken¹

$$(9) \quad F(\alpha) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right\},$$

$$(10) \quad E(\alpha) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{k^6}{5} - \dots \right\},$$

vilka erhållas omedelbart, om integranderna utvecklas enligt binomialteoremet i potensserier av $k^2 \sin^2 \varphi$ och dessa integreras term för term.

Legendres tabeller omfatta elliptiska integraler av första och andra slagen, såväl fullständiga som icke fullständiga. Huvudtabellerna äro tab. 1

¹ Traité, bd 1, sid. 65 o. f.

(Traité, bd 2, sid. 222—243), som ger ${}^{10}\log F(\alpha)$ och ${}^{10}\log E(\alpha)$ med 12 à 14 decimaler för var tiondels grad av α , och tab. 9 (ibidem, sid. 292—363), som ger $F(\alpha, \varphi)$ och $E(\alpha, \varphi)$ med 9 à 10 decimaler för alla heltalsgrader av α och φ . Mindre utdrag av dessa tabeller finnas i ett flertal lätt tillgängliga nyare arbeten,¹ medan Legendres verk numera är ganska svåråtkomligt.

Elliptiska integraler av första slaget uppträda inom *pendelteorien* redan i fråga om den enklaste rörelseformen, svängningar i ett vertikallplan. För en pendel av längden l , som utför sådana svängningar, kan nämligen tiden t , räknad från passagen av jämviktsläget till ett godtyckligt läge, uttryckas i formen

$$(11) \quad t = F(\alpha, \varphi) \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

varvid modylvinkeln α är lika med halva utslagsvinkeln, medan amplitudvinkeln φ är förbunden med den av pendelsnöret under samma tid genomlupna vinkeln θ medelst relationen

$$\sin \alpha \sin \varphi = \sin \frac{\theta}{2}.$$

Modylvinkeln α kan även enkelt uttryckas med pendelkulans hastighet v_0 i lägsta punkten eller motsvarande hastighetshöjd h_0 , i det

$$\sin^2 \alpha = \frac{v_0^2}{4gl} = \frac{h_0}{2l}.$$

Vid en svängningsrörelse är alltid $v_0 < \sqrt{4gl}$ eller $h_0 < 2l$.

Ur praktisk synpunkt är bestämningen av tiden till ett godtyckligt läge givetvis av föga vikt. Av betydelse är däremot *svängningstiden*. Denna uttryckes med en fullständig integral, i det tiden för en enkel svängning blir

$$(12) \quad T = 2F(\alpha) \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

¹ LÉVY, Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques (Paris 1898); FRICKE, Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik (Leipzig 1900); JAHNKE & EMDE, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven (Leipzig 1909); KIEPERT, Grundriss der Integralrechnung, m. fl.

På liknande sätt är det i allmänhet i dynamiska problem, i vilka elliptiska integraler uppträda, tillräckligt att beräkna vissa fullständiga integraler, då man inskränker sig till bestämning av rörelsens i praktiskt hänseende viktigaste element.

Vi giva uttrycket (12) en annan form, i det vi skriva

$$(13) \quad T = K(\alpha) \cdot \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Genom jämförelse med (12) samt enligt (9) och (3) erhålles då

$$(14) \quad K(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot F(\alpha) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \alpha + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \alpha + \dots$$

Serieformen visar, att $K(\alpha)$ för små α är helt litet större än 1, och detta tal har då i uttrycket (13) karaktären av en korrektionsfaktor, med vilken man har att multiplicera det vanliga approximativa uttrycket $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ för att erhålla det exakta värdet.

Det är denna funktion $K(\alpha)$, som är tabulerad i den första av de här införda tabellerna, varvid observeras att argumentet i tabellen icke är α utan 2α , alltså direkt lika med utslagsvinkeln vid pendeln. Talvärdena ha beräknats ur Legendres tab. 1 med kontrollering ur tab. 9 för heltalsgrader av α (jämngrader av argumentet 2α).

Man ser av tabellen, att den approximativa formeln $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ är synnerligen noggrann för små vinklar, i det felet vid en utslagsvinkel av exempelvis 10° utgör endast 0,191 % och först vid cirka $22,8^\circ$ uppgår till 1 %. Vid 30 graders utslagsvinkel stiger felet till 1,741 %, vid 60° till 7,318 % o. s. v.

Är pendelnöret ersatt med en viktlös stång, kunna även rörelser med utslagsvinklar större än 90° realiseras. Därvid blir ökningen av svängningstiden mera betydande, i det värdet $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ vid 120 graders utslagsvinkel måste ökas med över 37 %, vid 160° ungefär fördubblas o. s. v. Närmar sig utslagsvinkeln till 180° , motsvarande gränsfallet $v_0 = \sqrt{4gl}$ eller $h_0 = 2l$, går $K(\alpha)$ och därmed T mot oändligheten.

Är $v_0 > \sqrt{4gl}$ eller $h_0 > 2l$ svänger pendeln rundt. Tiden för ett omlopp blir

$$T = \sin \alpha R(\alpha) \cdot \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

varvid modylvinkeln α i detta fall bestämmes av ekvationen

$$\sin^2 \alpha = \frac{4gl}{v_0^2} = \frac{2l}{h_0}.$$

Mellan pendelkulans största hastighet $v_{\max} = v_0$ (i banans lägsta punkt), medelhastighet $v_{\text{med}} = 2\pi l : T$ och minsta hastighet v_{\min} (i banans högsta punkt) råda relationerna

$$v_{\max} = R(\alpha) \cdot v_{\text{med}}, \quad v_{\min} = \cos \alpha \cdot v_{\max} = \cos \alpha R(\alpha) \cdot v_{\text{med}}$$

och variationen i hastighet motsvarar således en *olikformighetsgrad* δ av storleken

$$\delta = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{v_{\text{med}}} = (1 - \cos \alpha) \cdot R(\alpha).$$

Dessa formler kunna tillämpas i fråga om ett svänghjul med vågrät axel för att bestämma den av en eventuellt befintlig tyngdpunktsexcentricitet framkallade olikformigheten i rotationshastigheten; man har därvid att ersätta l med reducerade pendellängden.

En pendel kan emellertid utföra allmännare rörelser, som icke äro innehållna i ett vertikallplan. Den kallas då en *sfärisk pendel*. För angivande av pendelsnörets läge i ett godtyckligt ögonblick under rörelsen behövas två vinklar, vartill lämpligen väljas dels vinkeln θ mellan pendelsnöret och den nedåtriktade vertikalen, dels den vinkel ψ , som det genom pendelsnöret och vertikalen gående planet bildar med ett fast plan genom samma vertikal. Den förra vinkeln kalla vi *höjdvinkeln*, den senare *azimutvinkeln*. Under rörelsen varierar höjdvinkeln mellan två konstanta gränsvärden θ_1 och θ_2 , medan azimutvinkeln ständigt växer. Ett specialfall inträder, om gränsvärdena θ_1 och θ_2 sammanfalla, så att θ under rörelsen förblir konstant; pendelkulan beskriver då en vågrät cirkel, vilket sker med konstant hastighet (»koniska pendeln»).

I det allmänna fallet beskriver pendelkulan en dubbelkrökt sfärisk kurva, belägen inom den zon, som begränsas av de mot $\theta = \theta_1$ och $\theta = \theta_2$ svarande vågräta cirklarna. Bankurvan tangerar ömsevis den ena, ömsevis den andra av dessa vändcirklar. Tangeringspunkterna utgöra *absider* (toppunkter) i banan och uppdelas denna i kongruenta delbågar. Mellan

två absider växer således azimutvinkeln med ett konstant belopp, vilket vi kalla *absidvinkeln* och beteckna med Ψ . De särskilda delbågarna mellan två successiva absider beskrivas på lika tider. Den tid, som åtgår för två sådana bågar, under vilken alltså pendelkulan flyttar sig från en absid till nästa på samma höjd belägna absid, kan lämpligen kallas *svängningstiden* T .

För närmare precisering skola vi antaga, att man betraktar pendelkulans rörelse från en mot gränsvärdet $\theta = \theta_1$ svarande absid till den närmast följande, i vilken då θ har värdet θ_2 . Vidare antaga vi, att såväl tiden t som azimutvinkeln ψ räknas från den förra absiden som utgångspunkt och sålunda hava värdena noll i denna. Mot den senare absiden svara följaktligen enligt nyss angivna beteckningar värdena $t = \frac{1}{2} T$ och $\psi = \Psi$.

Tiden t till ett godtyckligt mellanläge kan då liksom vid den enkla svängningsrörelsen uttryckas med en elliptisk integral av första slaget i formen

$$(15) \quad t = F(\alpha, \varphi) \cdot \sqrt{\frac{l'}{g}},$$

där l' är en viss, av pendellängden l och gränsvinklarna θ_1, θ_2 bestämd längd. Modylvinkeln α är jämväl bestämd av dessa gränsvinklar, medan amplitudvinkeln φ är förbunden med höjdvinkeln θ medelst en goniometrisk relation av sådan beskaffenhet, att φ växer från 0 till $\frac{\pi}{2}$, då θ varierar från θ_1 till θ_2 . Svängningstiden blir följaktligen uttryckt genom en fullständig integral av första slaget

$$(16) \quad T = 2F(\alpha) \cdot \sqrt{\frac{l'}{g}},$$

vilket uttryck liksom vid (12) kan utbytas mot

$$(17) \quad T = K(\alpha) \cdot \pi \sqrt{\frac{l'}{g}}$$

och sålunda beräknas med hjälp av tabellen över $K(\alpha)$.

Den mot samma läge svarande azimutvinkeln ψ kan även uttryckas med elliptiska integraler, bildade med samma modyl- och amplitudvinklar som i (15). Därvid inkomma emellertid integraler av *tredje* slaget. Man

kan genomföra härledningen på olika sätt och därigenom komma till uttryck av olika former, såsom

$$(18) \quad \psi = B_1 \Pi(p_1, \alpha, \varphi) + B_2 \Pi(p_2, \alpha, \varphi)$$

eller

$$(19) \quad \psi = AF(\alpha, \varphi) + B \Pi(p, \alpha, \varphi) + U(\varphi),$$

där $U(\varphi)$ betecknar en viss elementär funktion (en arcusfunktion) av φ . I det förra uttrycket ingå sålunda två elliptiska integraler av tredje slaget med olika parametrar, i det senare en av första och en av tredje slaget.¹ Parametrarna och koefficienterna äro enkla funktioner av gränsvinklarna θ_1, θ_2 .

För $\varphi = \frac{\pi}{2}$ giva dessa formler absidvinkeln Ψ , som sålunda blir uttryckt medelst fullständiga integraler. Exempelvis erhålles av (19), som är den för numerisk räkning bekvämaste formen,

$$\Psi = AF(\alpha) + B \Pi\left(p, \alpha, \frac{\pi}{2}\right) + U\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

¹ De olika härledningarna visas i § 7 och § 10 av följande uppsats. Naturligtvis kan uttrycket (18) även på analytisk väg transformeras till formen (19). Mellan koefficienterna B_1, B_2 , parametrarna p_1, p_2 och modulen k^2 i uttrycket (18) består relationen

$$\frac{(p_1 - k^2)(p_1 - 1)}{p_1 B_1^2} = \frac{(p_2 - k^2)(p_2 - 1)}{p_2 B_2^2},$$

och så snart denna villkorsekvation är uppfylld, kan ett uttryck av formen (18) alltid transformeras till formen (19). Detta är ett specialfall av en generellare sats, som jag på annan plats skall visa och som kan uttryckas på följande sätt. Betraktas integraler av formen

$$\int_0^{\varphi} \frac{\lambda - \mu \sin^2 \varphi}{1 - p \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{A\varphi},$$

vari som specialfall innefattas de Legendreska normalformerna, och kallas konstanten

$$R = \frac{p(p - k^2)(p - 1)}{(\lambda p - \mu)^2}$$

integralens *karaktistika*, så gäller att en summa av ett godtyckligt antal sådana integraler med olika koefficienter λ, μ, p men med samma amplitud φ , modyl k^2 och karakteristika R alltid kan uttryckas som en summa av en enda sådan integral och en elementär funktion av φ . I det här föreliggande fallet är integralernas gemensamma karakteristika $R = -1$.

eller, om vi införa $F(\alpha) = \frac{\pi}{2} R(\alpha)$ och beteckna konstanten $U\left(\frac{\pi}{2}\right)$ med $C \cdot \frac{\pi}{2}$, slutligen

$$(20) \quad \Psi = \left\{ AR(\alpha) + \frac{2}{\pi} BII\left(\phi, \alpha, \frac{\pi}{2}\right) + C \right\} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Vad här sagts om sfäriska pendeln gäller med oväsentliga modifikationer vid ett generellare rörelseproblem, som spelar en viktig roll inom *gyroskopteorin* och därför är av stor praktisk betydelse. Vi åsyfta rörelsen hos en fast kropp, som har en fix punkt och i övrigt endast påverkas av tyngdkraften, i det speciella fall (det s. k. Euler-Lagrangeska) då kroppen äger rotationssymmetri med avseende på den axel OT , som förenar den fixa punkten eller upphängningspunkten O med kroppens tyngdpunkt T . En sådan anordning kallas i den tyska facklitteraturen¹ »ein schwerer symmetrischer Kreisel»; i det följande användes benämningen *pendelgyroskop* i samma betydelse.

Pendelgyroskopets rörelse kan inledas på sådant sätt, att kroppen försättes i rotation kring axeln OT , varefter denna från en godtycklig lutning släppes med eller utan begynnelsehastighet. Axeln kommer då att röra sig i stort sett på liknande sätt² som pendelnöret vid den sfäriska pendeln, vilken ju också kan betraktas som ett specialfall av pendelgyroskopet, karakteriserat därav att hela massan är koncentrerad i en enda punkt. Man kunde möjligen vänta sig, att en så stark specialisering av massfördelningen skulle motsvaras av en avsevärd förenkling i formlernas byggnad, men så är icke förhållandet. Uttrycken för tiden t och azimutvinkeln ψ äro icke mera komplicerade för pendelgyroskopet än för sfäriska pendeln utan hava i båda fallen samma form.

¹ Av denna är särskilt att nämna den stora, av KLEIN och SOMMERFELD författade monografien *Über die Theorie des Kreisels* (966 sidor, Leipzig 1897—1910).

² Höjdvinkeln θ varierar nämligen som vid sfäriska pendeln mellan två konstanta gränsvärden θ_1 och θ_2 , vilka i specialfall kunna sammanfalla, då axeln beskriver en rotationskon med konstant vinkelhastighet (»reguljär precession», motsvarande koniska pendeln). I det allmänna fallet beskriver en godtycklig punkt på axeln OT en dubbelkrökt sfärisk kurva på den zon, som begränsas av de mot $\theta = \theta_1$ och $\theta = \theta_2$ svarande vågräta cirkellarna. På dessa vändcirkelar ligga bankurvans absider, av vilka den uppdelas i kongruenta delbågar, som beskrivas på lika tider. Absiderna utgöra emellertid icke alltid tangeringspunkter mellan bankurvan och motsvarande vändcirkel utan kunna i speciella fall på den övre vändcirkeln bilda spetsar med mot cirkeln vinkelräta spetstangenter. Vidare kan det förekomma, att azimutvinkeln under rörelsen från en absid till den nästa först varierar åt det ena och sedan åt det andra hållet, varigenom bankurvorna erhålla öglor. En annan olikhet är, att absidvinkeln vid pendelgyroskopet kan erhålla vilket värde som helst, medan den vid sfäriska pendeln alltid ligger mellan $\frac{\pi}{2}$ och π .

De för sfäriska pendeln uppställda uttrycken (15)—(20) äga således giltighet även för pendelgyroskopet.¹

Vill man nu ur formlerna (18) eller (19) bestämma den mot ett godtyckligt φ -värde svarande azimutvinkeln ψ , så stöter man på svårigheten att beräkna elliptiska integraler av tredje slaget. För dessa, som bero av tre argument, finnas inga tabeller, och deras numeriska beräkning är även med användande av moderna metoder mycket besvärlig och tidskrävande.²

Nöjer man sig med bestämning av absidvinkeln, vilket i allmänhet för praktiska behov är tillräckligt, så inskränkes svårigheten till beräkning av fullständiga integraler. Härför har Legendre³ angivit en effektiv metod, i det han visat att varje fullständig integral av tredje slaget låter uttrycka sig medelst elliptiska integraler av första och andra slagen. I detta uttryck, som utfaller olika inom olika intervall för parametern p , ingå i allmänhet fyra integraler av första och andra slagen, av vilka två äro fullständiga och två icke fullständiga. Då var och en av dessa måste bestämmas ur motsvarande tabeller genom interpolering — i senare fallen utsträckt över två argument — blir det arbete, som erfordras för att direkt enligt denna metod beräkna absidvinkeln ur formeln (20), i alla händelser tämligen betydande, ehuru endast ungefär hälften så stort som om vi i stället utgått från det i (18) angivna uttrycket för azimutvinkeln.

Då nu emellertid absidvinkeln är en storhet, som på ett väsentligt sätt karakteriserar pendelgyroskopets rörelse i olika fall, är det av vikt att ytterligare förenkla dess beräkning så långt ske kan. Det är för detta ändamål, som de här meddelade tabellerna över den med $\mathbb{I}(\alpha, \beta)$ betecknade funktionen blivit beräknade, i det denna i själva verket är en fullständig elliptisk integral av tredje slaget, ehuru i något modifierad form. Det numeriska värdet $\left| \frac{2}{\pi} B \right|$ av den i uttrycket (20) uppträdande koefficienten för $\mathbb{II}\left(p, \alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ har nämligen även inlagts i integralen, vilket möjliggjorts därigenom, att koefficienten B låter uttrycka sig som funktion av parametern p och modylvinkeln α . Den tabulerade funktionen ger således direkt det numeriska värdet av den ifrågakvarande termen i uttrycket (20), varigenom det vid

¹ Den rörande uttrycken (18) och (19) gjorda anmärkningen gäller även i fråga om pendelgyroskopet.

² Se exempelvis SÖDERBLOM, Öfningsexempel för räkning med elliptiska integraler och functioner (Upsala 1885; beräkning dels medelst LANDENS substitution, dels medelst WEIERSTRASS' σ - och \wp -funktioner) samt anförda arbete av KLEIN och SOMMERFELD (beräkning med hjälp av ϑ -serier).

³ *Traité*, bd 1, sid. 132 o. f.

Tabell över I (α, β)för $\beta = 0^\circ - 45^\circ$.

| $\alpha =$ | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° | 50° | 55° | 60° | 65° | 70° | 75° | 80° | 85° | 90° |
|--------------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\beta = 0^\circ$ | 0,0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 1 | 0175 | 0174 | 0173 | 0172 | 0169 | 0166 | 0163 | 0159 | 0155 | 0150 | 0145 | 0140 | 0135 | 0129 | 0124 | 0120 | 0116 | 0113 | 0111 |
| 2 | 0349 | 0348 | 0346 | 0343 | 0339 | 0333 | 0326 | 0318 | 0310 | 0300 | 0290 | 0280 | 0269 | 0259 | 0249 | 0239 | 0231 | 0225 | 0222 |
| 3 | 0523 | 0522 | 0519 | 0514 | 0508 | 0499 | 0489 | 0477 | 0464 | 0450 | 0435 | 0419 | 0404 | 0388 | 0373 | 0359 | 0347 | 0338 | 0333 |
| 4 | 0698 | 0696 | 0692 | 0686 | 0677 | 0665 | 0652 | 0636 | 0619 | 0600 | 0580 | 0559 | 0538 | 0517 | 0497 | 0478 | 0462 | 0450 | 0444 |
| 5 | 0,0872 | 0870 | 0865 | 0857 | 0845 | 0831 | 0814 | 0795 | 0773 | 0750 | 0725 | 0699 | 0672 | 0646 | 0621 | 0598 | 0578 | 0563 | 0556 |
| 6 | 1045 | 1043 | 1037 | 1028 | 1014 | 0997 | 0977 | 0953 | 0927 | 0899 | 0869 | 0838 | 0806 | 0775 | 0745 | 0717 | 0693 | 0675 | 0667 |
| 7 | 1219 | 1216 | 1209 | 1198 | 1182 | 1162 | 1139 | 1111 | 1081 | 1048 | 1013 | 0977 | 0940 | 0904 | 0869 | 0837 | 0809 | 0788 | 0778 |
| 8 | 1392 | 1389 | 1381 | 1368 | 1350 | 1327 | 1300 | 1269 | 1235 | 1197 | 1157 | 1116 | 1074 | 1033 | 0993 | 0956 | 0924 | 0900 | 0889 |
| 9 | 1564 | 1561 | 1552 | 1538 | 1518 | 1492 | 1462 | 1427 | 1388 | 1346 | 1301 | 1255 | 1208 | 1161 | 1117 | 1075 | 1039 | 1012 | 1000 |
| 10 | 0,1736 | 1733 | 1723 | 1707 | 1685 | 1656 | 1622 | 1584 | 1541 | 1494 | 1445 | 1393 | 1341 | 1290 | 1240 | 1194 | 1155 | 1125 | 1111 |
| 11 | 1908 | 1904 | 1894 | 1876 | 1851 | 1820 | 1783 | 1740 | 1693 | 1642 | 1588 | 1531 | 1474 | 1418 | 1364 | 1313 | 1270 | 1237 | 1222 |
| 12 | 2079 | 2075 | 2063 | 2044 | 2017 | 1983 | 1943 | 1896 | 1845 | 1789 | 1730 | 1669 | 1607 | 1546 | 1487 | 1432 | 1385 | 1350 | 1333 |
| 13 | 2250 | 2245 | 2232 | 2211 | 2182 | 2146 | 2102 | 2052 | 1997 | 1936 | 1873 | 1807 | 1740 | 1674 | 1610 | 1551 | 1500 | 1462 | 1444 |
| 14 | 2419 | 2415 | 2401 | 2378 | 2347 | 2308 | 2261 | 2207 | 2147 | 2083 | 2015 | 1954 | 1872 | 1801 | 1733 | 1670 | 1616 | 1574 | 1556 |
| 15 | 0,2588 | 2583 | 2569 | 2544 | 2511 | 2469 | 2419 | 2361 | 2298 | 2229 | 2156 | 2080 | 2004 | 1928 | 1855 | 1788 | 1731 | 1687 | 1667 |
| 16 | 2756 | 2751 | 2735 | 2710 | 2674 | 2629 | 2576 | 2515 | 2447 | 2374 | 2297 | 2216 | 2135 | 2055 | 1978 | 1907 | 1845 | 1799 | 1778 |
| 17 | 2924 | 2918 | 2902 | 2874 | 2836 | 2789 | 2733 | 2668 | 2596 | 2519 | 2437 | 2352 | 2266 | 2181 | 2100 | 2025 | 1960 | 1911 | 1889 |
| 18 | 3090 | 3084 | 3067 | 3038 | 2998 | 2948 | 2888 | 2820 | 2745 | 2663 | 2577 | 2487 | 2397 | 2308 | 2222 | 2143 | 2075 | 2024 | 2000 |
| 19 | 3256 | 3249 | 3231 | 3201 | 3159 | 3106 | 3043 | 2971 | 2892 | 2806 | 2716 | 2622 | 2527 | 2434 | 2344 | 2261 | 2190 | 2136 | 2111 |
| 20 | 0,3420 | 3414 | 3394 | 3362 | 3318 | 3263 | 3197 | 3122 | 3039 | 2949 | 2854 | 2756 | 2657 | 2559 | 2465 | 2379 | 2304 | 2248 | 2222 |
| 21 | 3584 | 3577 | 3557 | 3523 | 3477 | 3419 | 3350 | 3272 | 3185 | 3091 | 2992 | 2889 | 2786 | 2684 | 2586 | 2496 | 2419 | 2360 | 2333 |
| 22 | 3746 | 3739 | 3718 | 3683 | 3635 | 3574 | 3502 | 3420 | 3330 | 3232 | 3129 | 3022 | 2915 | 2809 | 2707 | 2614 | 2533 | 2472 | 2444 |
| 23 | 3907 | 3900 | 3878 | 3841 | 3791 | 3728 | 3653 | 3568 | 3474 | 3372 | 3265 | 3154 | 3043 | 2933 | 2828 | 2731 | 2648 | 2585 | 2556 |
| 24 | 4067 | 4060 | 4037 | 3999 | 3946 | 3881 | 3803 | 3715 | 3617 | 3511 | 3400 | 3286 | 3170 | 3057 | 2948 | 2848 | 2762 | 2697 | 2667 |
| 25 | 0,4226 | 4218 | 4194 | 4155 | 4101 | 4033 | 3952 | 3860 | 3759 | 3650 | 3535 | 3417 | 3298 | 3180 | 3068 | 2965 | 2876 | 2809 | 2778 |
| 26 | 4384 | 4375 | 4351 | 4310 | 4253 | 4183 | 4100 | 4005 | 3900 | 3787 | 3669 | 3547 | 3424 | 3303 | 3187 | 3081 | 2990 | 2921 | 2889 |
| 27 | 4540 | 4531 | 4506 | 4463 | 4405 | 4332 | 4246 | 4148 | 4040 | 3924 | 3802 | 3676 | 3560 | 3425 | 3306 | 3197 | 3103 | 3033 | 3000 |
| 28 | 4695 | 4686 | 4659 | 4615 | 4555 | 4480 | 4391 | 4290 | 4179 | 4059 | 3934 | 3805 | 3675 | 3547 | 3425 | 3313 | 3217 | 3145 | 3111 |
| 29 | 4848 | 4839 | 4811 | 4766 | 4704 | 4627 | 4535 | 4431 | 4317 | 4194 | 4065 | 3933 | 3799 | 3669 | 3544 | 3429 | 3331 | 3256 | 3222 |
| 30 | 0,5000 | 4990 | 4962 | 4916 | 4852 | 4772 | 4678 | 4571 | 4453 | 4327 | 4195 | 4060 | 3923 | 3789 | 3662 | 3545 | 3444 | 3368 | 3333 |
| 31 | 5150 | 5141 | 5111 | 5064 | 4998 | 4916 | 4819 | 4709 | 4589 | 4460 | 4324 | 4186 | 4046 | 3910 | 3779 | 3660 | 3557 | 3480 | 3444 |
| 32 | 5299 | 5289 | 5259 | 5210 | 5142 | 5058 | 4959 | 4846 | 4723 | 4591 | 4453 | 4311 | 4169 | 4030 | 3897 | 3775 | 3671 | 3592 | 3556 |
| 33 | 5446 | 5436 | 5405 | 5355 | 5285 | 5199 | 5097 | 4982 | 4856 | 4721 | 4580 | 4435 | 4291 | 4149 | 4014 | 3890 | 3784 | 3704 | 3667 |
| 34 | 5592 | 5581 | 5550 | 5498 | 5427 | 5338 | 5234 | 5116 | 4988 | 4850 | 4706 | 4559 | 4412 | 4267 | 4130 | 4004 | 3896 | 3815 | 3778 |
| 35 | 0,5736 | 5725 | 5692 | 5639 | 5567 | 5476 | 5370 | 5249 | 5118 | 4978 | 4831 | 4682 | 4532 | 4385 | 4246 | 4119 | 4009 | 3927 | 3889 |
| 36 | 5878 | 5867 | 5833 | 5779 | 5705 | 5612 | 5503 | 5381 | 5247 | 5104 | 4955 | 4803 | 4651 | 4503 | 4362 | 4233 | 4122 | 4038 | 4000 |
| 37 | 6018 | 6007 | 5973 | 5917 | 5841 | 5746 | 5636 | 5511 | 5374 | 5229 | 5078 | 4924 | 4770 | 4620 | 4477 | 4346 | 4234 | 4150 | 4111 |
| 38 | 6157 | 6145 | 6110 | 6053 | 5976 | 5879 | 5766 | 5639 | 5501 | 5353 | 5200 | 5044 | 4888 | 4736 | 4592 | 4460 | 4346 | 4261 | 4222 |
| 39 | 6293 | 6281 | 6246 | 6188 | 6108 | 6010 | 5895 | 5766 | 5625 | 5476 | 5321 | 5163 | 5005 | 4852 | 4706 | 4573 | 4459 | 4373 | 4333 |
| 40 | 0,6428 | 6416 | 6379 | 6320 | 6239 | 6139 | 6022 | 5891 | 5749 | 5597 | 5440 | 5281 | 5122 | 4967 | 4820 | 4685 | 4571 | 4484 | 4444 |
| 41 | 6561 | 6548 | 6511 | 6451 | 6368 | 6267 | 6148 | 6015 | 5870 | 5717 | 5559 | 5398 | 5237 | 5081 | 4933 | 4798 | 4682 | 4596 | 4556 |
| 42 | 6691 | 6679 | 6641 | 6579 | 6496 | 6392 | 6272 | 6137 | 5991 | 5836 | 5676 | 5514 | 5352 | 5195 | 5046 | 4910 | 4794 | 4707 | 4667 |
| 43 | 6820 | 6807 | 6769 | 6706 | 6621 | 6516 | 6394 | 6257 | 6109 | 5953 | 5792 | 5628 | 5466 | 5308 | 5158 | 5022 | 4906 | 4818 | 4778 |
| 44 | 6947 | 6933 | 6894 | 6831 | 6744 | 6638 | 6514 | 6376 | 6227 | 6069 | 5907 | 5742 | 5579 | 5420 | 5270 | 5134 | 5017 | 4929 | 4889 |
| $\beta = 45^\circ$ | 0,7071 | 7058 | 7018 | 6953 | 6865 | 6757 | 6632 | 6493 | 6342 | 6184 | 6020 | 5855 | 5691 | 5532 | 5382 | 5245 | 5128 | 5040 | 5000 |
| $\alpha =$ | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° | 50° | 55° | 60° | 65° | 70° | 75° | 80° | 85° | 90° |

Tabell över II (α, β)för $\beta = 45^\circ - 90^\circ$.

| $\alpha =$ | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° | 50° | 55° | 60° | 65° | 70° | 75° | 80° | 85° | 90° |
|--------------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\beta = 45^\circ$ | 0,7071 | 7058 | 7018 | 6953 | 6865 | 6757 | 6632 | 6493 | 6342 | 6184 | 6020 | 5855 | 5691 | 5532 | 5382 | 5245 | 5128 | 5040 | 5000 |
| 46 | 7193 | 7180 | 7139 | 7073 | 6985 | 6875 | 6749 | 6608 | 6456 | 6237 | 6133 | 5967 | 5803 | 5643 | 5493 | 5356 | 5239 | 5151 | 5111 |
| 47 | 7314 | 7300 | 7259 | 7192 | 7102 | 6991 | 6863 | 6721 | 6569 | 6409 | 6244 | 6078 | 5913 | 5754 | 5603 | 5467 | 5350 | 5262 | 5222 |
| 48 | 7431 | 7417 | 7376 | 7308 | 7217 | 7105 | 6976 | 6833 | 6680 | 6519 | 6354 | 6187 | 6023 | 5864 | 5714 | 5577 | 5461 | 5373 | 5333 |
| 49 | 7547 | 7533 | 7490 | 7422 | 7329 | 7217 | 7087 | 6943 | 6789 | 6628 | 6462 | 6296 | 6132 | 5973 | 5823 | 5687 | 5571 | 5484 | 5444 |
| 50 | 0,7660 | 7646 | 7603 | 7533 | 7440 | 7326 | 7195 | 7051 | 6896 | 6735 | 6570 | 6404 | 6240 | 6082 | 5932 | 5797 | 5682 | 5595 | 5556 |
| 51 | 7771 | 7757 | 7713 | 7643 | 7549 | 7434 | 7302 | 7157 | 7002 | 6841 | 6676 | 6510 | 6347 | 6189 | 6041 | 5907 | 5792 | 5706 | 5667 |
| 52 | 7880 | 7865 | 7821 | 7750 | 7655 | 7539 | 7407 | 7261 | 7107 | 6945 | 6781 | 6616 | 6453 | 6297 | 6149 | 6016 | 5902 | 5817 | 5778 |
| 53 | 7986 | 7971 | 7927 | 7855 | 7759 | 7642 | 7510 | 7364 | 7209 | 7048 | 6884 | 6720 | 6559 | 6403 | 6257 | 6125 | 6012 | 5928 | 5889 |
| 54 | 8090 | 8075 | 8030 | 7957 | 7867 | 7743 | 7610 | 7465 | 7310 | 7150 | 6987 | 6824 | 6664 | 6509 | 6365 | 6234 | 6122 | 6038 | 6000 |
| 55 | 0,8192 | 8176 | 8130 | 8057 | 7960 | 7842 | 7709 | 7563 | 7409 | 7250 | 7088 | 6926 | 6767 | 6615 | 6472 | 6342 | 6232 | 6149 | 6111 |
| 56 | 8290 | 8275 | 8229 | 8155 | 8057 | 7939 | 7805 | 7660 | 7507 | 7348 | 7188 | 7028 | 6870 | 6720 | 6578 | 6450 | 6341 | 6260 | 6222 |
| 57 | 8387 | 8371 | 8324 | 8250 | 8151 | 8033 | 7900 | 7755 | 7603 | 7446 | 7286 | 7128 | 6973 | 6824 | 6684 | 6558 | 6451 | 6370 | 6333 |
| 58 | 8480 | 8464 | 8417 | 8342 | 8243 | 8125 | 7992 | 7848 | 7697 | 7541 | 7384 | 7227 | 7074 | 6927 | 6790 | 6665 | 6560 | 6481 | 6444 |
| 59 | 8572 | 8555 | 8508 | 8432 | 8333 | 8215 | 8083 | 7940 | 7790 | 7635 | 7480 | 7326 | 7175 | 7030 | 6895 | 6773 | 6669 | 6591 | 6556 |
| 60 | 0,8660 | 8644 | 8596 | 8520 | 8421 | 8303 | 8171 | 8029 | 7881 | 7728 | 7575 | 7423 | 7275 | 7132 | 7000 | 6880 | 6778 | 6702 | 6667 |
| 61 | 8746 | 8730 | 8681 | 8605 | 8506 | 8388 | 8257 | 8117 | 7970 | 7820 | 7669 | 7519 | 7374 | 7234 | 7104 | 6986 | 6887 | 6812 | 6778 |
| 62 | 8829 | 8813 | 8764 | 8688 | 8588 | 8471 | 8341 | 8202 | 8057 | 7910 | 7761 | 7615 | 7472 | 7335 | 7208 | 7093 | 6995 | 6922 | 6889 |
| 63 | 8910 | 8893 | 8844 | 8768 | 8668 | 8552 | 8423 | 8286 | 8143 | 7998 | 7853 | 7709 | 7569 | 7436 | 7311 | 7199 | 7104 | 7033 | 7000 |
| 64 | 8988 | 8971 | 8922 | 8845 | 8746 | 8631 | 8503 | 8368 | 8228 | 8086 | 7943 | 7803 | 7666 | 7536 | 7415 | 7305 | 7212 | 7143 | 7111 |
| 65 | 0,9063 | 9046 | 8997 | 8920 | 8821 | 8707 | 8581 | 8448 | 8311 | 8172 | 8032 | 7895 | 7762 | 7636 | 7517 | 7411 | 7321 | 7253 | 7222 |
| 66 | 9135 | 9118 | 9069 | 8992 | 8894 | 8781 | 8657 | 8527 | 8392 | 8256 | 8121 | 7987 | 7858 | 7735 | 7620 | 7516 | 7429 | 7363 | 7333 |
| 67 | 9205 | 9188 | 9138 | 9061 | 8964 | 8852 | 8731 | 8603 | 8472 | 8340 | 8208 | 8078 | 7953 | 7833 | 7722 | 7622 | 7537 | 7473 | 7444 |
| 68 | 9272 | 9254 | 9205 | 9128 | 9032 | 8922 | 8803 | 8678 | 8550 | 8422 | 8294 | 8168 | 8047 | 7931 | 7823 | 7727 | 7645 | 7584 | 7556 |
| 69 | 9336 | 9318 | 9268 | 9192 | 9097 | 8989 | 8873 | 8751 | 8627 | 8502 | 8379 | 8257 | 8140 | 8028 | 7925 | 7832 | 7753 | 7694 | 7667 |
| 70 | 0,9397 | 9379 | 9329 | 9254 | 9160 | 9054 | 8941 | 8823 | 8703 | 8582 | 8463 | 8346 | 8233 | 8126 | 8026 | 7936 | 7860 | 7804 | 7778 |
| 71 | 9455 | 9437 | 9388 | 9313 | 9221 | 9117 | 9007 | 8893 | 8777 | 8661 | 8546 | 8433 | 8325 | 8222 | 8127 | 8041 | 7968 | 7914 | 7889 |
| 72 | 9511 | 9493 | 9443 | 9369 | 9279 | 9178 | 9071 | 8961 | 8850 | 8738 | 8628 | 8520 | 8417 | 8318 | 8227 | 8145 | 8076 | 8024 | 8000 |
| 73 | 9563 | 9545 | 9496 | 9423 | 9335 | 9237 | 9134 | 9028 | 8921 | 8814 | 8709 | 8607 | 8508 | 8414 | 8327 | 8249 | 8183 | 8134 | 8111 |
| 74 | 9613 | 9595 | 9545 | 9474 | 9388 | 9294 | 9195 | 9094 | 8991 | 8890 | 8790 | 8692 | 8598 | 8509 | 8427 | 8353 | 8290 | 8244 | 8222 |
| 75 | 0,9659 | 9641 | 9592 | 9522 | 9439 | 9349 | 9254 | 9158 | 9061 | 8964 | 8869 | 8777 | 8688 | 8604 | 8527 | 8457 | 8398 | 8354 | 8333 |
| 76 | 9703 | 9685 | 9637 | 9568 | 9488 | 9402 | 9312 | 9220 | 9129 | 9038 | 8948 | 8862 | 8778 | 8699 | 8626 | 8560 | 8505 | 8463 | 8444 |
| 77 | 9744 | 9726 | 9678 | 9612 | 9535 | 9453 | 9368 | 9282 | 9195 | 9110 | 9027 | 8945 | 8867 | 8793 | 8725 | 8664 | 8612 | 8573 | 8556 |
| 78 | 9781 | 9764 | 9717 | 9653 | 9580 | 9502 | 9422 | 9342 | 9261 | 9182 | 9104 | 9029 | 8956 | 8887 | 8824 | 8767 | 8719 | 8683 | 8667 |
| 79 | 9816 | 9798 | 9753 | 9691 | 9623 | 9550 | 9476 | 9401 | 9326 | 9253 | 9181 | 9111 | 9044 | 8981 | 8923 | 8870 | 8826 | 8793 | 8778 |
| 80 | 0,9848 | 9830 | 9786 | 9728 | 9663 | 9596 | 9528 | 9459 | 9390 | 9323 | 9257 | 9194 | 9132 | 9075 | 9021 | 8973 | 8933 | 8903 | 8889 |
| 81 | 9877 | 9859 | 9817 | 9762 | 9703 | 9641 | 9578 | 9516 | 9454 | 9393 | 9333 | 9275 | 9220 | 9168 | 9120 | 9076 | 9040 | 9012 | 9000 |
| 82 | 9903 | 9885 | 9845 | 9794 | 9740 | 9684 | 9628 | 9572 | 9516 | 9462 | 9408 | 9357 | 9307 | 9261 | 9218 | 9179 | 9147 | 9122 | 9111 |
| 83 | 9925 | 9909 | 9870 | 9825 | 9776 | 9726 | 9677 | 9627 | 9578 | 9530 | 9483 | 9438 | 9395 | 9354 | 9316 | 9282 | 9253 | 9232 | 9222 |
| 84 | 9945 | 9929 | 9894 | 9853 | 9811 | 9768 | 9725 | 9682 | 9640 | 9598 | 9558 | 9519 | 9482 | 9446 | 9414 | 9385 | 9360 | 9342 | 9333 |
| 85 | 0,9962 | 9946 | 9915 | 9880 | 9844 | 9808 | 9772 | 9736 | 9700 | 9666 | 9632 | 9599 | 9568 | 9539 | 9512 | 9487 | 9467 | 9451 | 9444 |
| 86 | 9976 | 9961 | 9935 | 9906 | 9877 | 9847 | 9818 | 9789 | 9761 | 9733 | 9706 | 9680 | 9655 | 9631 | 9609 | 9590 | 9573 | 9561 | 9556 |
| 87 | 9986 | 9973 | 9952 | 9930 | 9908 | 9886 | 9864 | 9842 | 9821 | 9800 | 9780 | 9760 | 9741 | 9724 | 9707 | 9692 | 9680 | 9671 | 9667 |
| 88 | 9994 | 9984 | 9969 | 9954 | 9939 | 9924 | 9910 | 9895 | 9881 | 9867 | 9853 | 9840 | 9828 | 9816 | 9805 | 9795 | 9787 | 9781 | 9778 |
| 89 | 9998 | 9992 | 9985 | 9977 | 9970 | 9962 | 9955 | 9948 | 9940 | 9933 | 9927 | 9920 | 9914 | 9908 | 9902 | 9898 | 9893 | 9890 | 9889 |
| $\beta = 90^\circ$ | 1,0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| $\alpha =$ | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° | 50° | 55° | 60° | 65° | 70° | 75° | 80° | 85° | 90° |

praktiska tillämpningar av formeln erforderliga räknearbetet inskränkes till det minsta möjliga.

Vi skola nu närmare redogöra för den tabulerade funktionens definition och de formler, medelst vilka den beräknats.

De elliptiska integralerna av tredje slaget kunna i allmänhet indelas i två klasser, den *hyperboliska* och den *cirkulära*, allteftersom det av modulen k^2 och parametern p beroende uttrycket

$$\tau(p) = p(p - k^2)(p - 1)$$

har ett positivt eller negativt värde. Är $\tau(p) = 0$, alltså $p = 0$, k^2 eller 1 , kan integralen $\Pi(p, \alpha, \varphi)$ uttryckas med integraler av första och andra slaget jämte elementära funktioner, i det såsom lätt verifieras

$$(21) \quad \begin{cases} \Pi(0, \alpha, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(\alpha, \varphi) \\ \Pi(k^2, \alpha, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi} = \frac{1}{k^2} \left\{ E(\alpha, \varphi) - k^2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta\varphi} \right\} \\ \Pi(1, \alpha, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(\alpha, \varphi) + \frac{1}{k^2} \{ \operatorname{tg} \varphi \Delta\varphi - E(\alpha, \varphi) \}. \end{cases}$$

De i uttrycken (18) och (19) uppträdande elliptiska integralerna av tredje slaget tillhöra alla den cirkulära klassen [$\tau(p) < 0$] och överhuvudtaget synes denna klass vid dynamiska tillämpningar förekomma ojämförligt oftare än den hyperboliska. Parametern är då antingen negativ eller belägen mellan k^2 och 1 . Är p_n ett negativt parametervärde, så ligger

$$(22) \quad p = \frac{p_n - k^2}{p_n - 1}$$

mellan k^2 och 1 , och man har såsom lätt verifieras¹

$$(23) \quad \begin{aligned} & \sqrt{\frac{(1 - p_n)(p_n - k^2)}{p_n}} \Pi(p_n, \alpha, \varphi) = \\ & = \sqrt{\frac{(1 - p)(p - k^2)}{p}} \Pi(p, \alpha, \varphi) + \frac{k^2}{\sqrt{-pp_n}} F(\alpha, \varphi) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-pp_n} \sin \varphi \cos \varphi}{\Delta\varphi}. \end{aligned}$$

¹ Jfr LEGENDRE, Traité, bd 1, sid. 72.

En integral, vars parameter faller inom intervallet $-\infty$ till 0, kan sålunda uttryckas med en integral med parameter inom intervallet k^2 till 1 eller omvänt. Man kan därför inskränka sig till att betrakta det ena av dessa intervall, för vårt ändamål lämpligast det sistnämnda.

Vi antaga således, att för parametern p gäller

$$k^2 \leq p \leq 1,$$

och införa då i dess ställe en *parametervinkel* β , i det vi sätta

$$p = \frac{k^2}{\Delta'^2 \beta},$$

där i enlighet med (7)

$$(24) \quad \Delta' \beta = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \beta}.$$

Parametervinkeln β antages liksom modylvinkeln α ligga mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$; då den genomlöper detta intervall, varierar p från k^2 till 1.

Det visar sig nu, att integralen $\Pi(p, \alpha, \varphi)$ i en mångfald relationer uppträder i förbindelse med samma konstanta faktor som i ekvation (23) och speciellt är detta förhållandet i de i (18) och (19) angivna uttrycken för azimutvinkeln vid sfäriska pendeln och pendelgyroskopet. Man kan därför vinna en icke oväsentlig förenkling genom att utbyta den Legendreska integralen mot en i överensstämmelse härmed modifierad »normalintegral». Vi införa denna med beteckningen

$$(25) \quad A(\alpha, \beta, \varphi) = \sqrt{\frac{(1-p)(p-k^2)}{p}} \Pi(p, \alpha, \varphi).$$

I det

$$(26) \quad p = \frac{k^2}{\Delta'^2 \beta}, \quad p - k^2 = \frac{k^2 k'^2 \sin^2 \beta}{\Delta'^2 \beta}, \quad 1 - p = \frac{k'^2 \cos^2 \beta}{\Delta'^2 \beta},$$

$$(27) \quad 1 - p \sin^2 \varphi = \frac{k'^2 \cos^2 \beta + k^2 \cos^2 \varphi}{\Delta'^2 \beta}$$

erhålles efter insättning

$$(28) \quad A(\alpha, \beta, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{k'^2 \sin \beta \cos \beta \Delta' \beta}{k'^2 \cos^2 \beta + k^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta' \beta}.$$

Denna normalform lämpar sig särdeles väl för den analytiska behandlingen av ett flertal viktiga rörelseproblem och bland dem de som i det föregående avhandlats.

Speciellt ha vi som ovan nämnts anledning att betrakta den motsvarande fullständiga integralen, för vilken vi i analogi med föregående införa beteckningen

$$(29) \quad \mathcal{A}(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k'^2 \sin \beta \cos \beta \Delta' \beta}{k'^2 \cos^2 \beta + k^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}.$$

Vi hava därmed i det närmaste kommit fram till den tabulerade funktionen $\mathcal{I}(\alpha, \beta)$, i det denna står i samma förhållande till $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ som den förut införda funktionen $\mathcal{K}(\alpha)$ till $F(\alpha)$, nämligen

$$(30) \quad \mathcal{I}(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} \mathcal{A}(\alpha, \beta).$$

Denna oväsentliga modifikation medför en liten förenkling vid den praktiska användningen av tabellen, men vid teoretiska utvecklingar är det lämpligare att behålla den genom (29) definierade funktionen $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$.

Denna skall nu såsom en fullständig integral av tredje slaget enligt Legendres ovan omnämnda sats kunna uttryckas medelst integraler av första och andra slagen. Ifrågavarande sats är i sin ordning en omedelbar följd av den s. k. »satsen om utbyte av amplitud och parameter» vid icke fullständiga integraler av tredje slaget, vilken för vår genom (28) definierade integral $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \varphi)$ blir uttryckt genom en relation av jämförelsevis mycket enkel form, som kan härledas på följande sätt.

Vi beteckna för ändamålet täljaren i integrandens första bråkfaktor med

$$(31) \quad M = k'^2 \sin \beta \cos \beta \Delta' \beta$$

och nämnaren med

$$(32) \quad N = k'^2 \cos^2 \beta + k^2 \cos^2 \varphi = \Delta^2 \varphi + \Delta'^2 \beta - 1.$$

Man verifierar då lätt identiteten

$$\Delta' \beta \left(N \frac{\partial M}{\partial \beta} - M \frac{\partial N}{\partial \beta} \right) = N^2 k'^2 \cos^2 \beta + k^2 k'^2 (\cos^2 \beta \sin^2 \varphi \Delta^2 \varphi - \cos^2 \varphi \sin^2 \beta \Delta'^2 \beta),$$

vilken efter division med N^2 kan skrivas i formen

$$\Delta \varphi \Delta' \beta \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \beta} \mathcal{A}(\alpha, \beta, \varphi) = k'^2 \cos^2 \beta + \frac{k^2 k'^2}{N^2} (\cos^2 \beta \sin^2 \varphi \Delta^2 \varphi - \cos^2 \varphi \sin^2 \beta \Delta'^2 \beta).$$

Om i denna relation φ och β samt k och k' utbytas mot varandra, får man på vänster sida i stället för $A(\alpha, \beta, \varphi)$ integralen

$$(33) \quad A(\alpha', \varphi, \beta) = \int_0^\beta \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi \Delta \varphi}{k^2 \cos^2 \varphi + k'^2 \cos^2 \beta} \frac{d\beta}{\Delta \beta}.$$

På höger sida blir den första termen $k^2 \cos^2 \varphi$, medan den andra endast byter tecken, och vid addering erhålles alltså

$$\Delta \varphi \Delta' \beta \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \beta} \{A(\alpha, \beta, \varphi) + A(\alpha', \varphi, \beta)\} = k'^2 \cos^2 \beta + k^2 \cos^2 \varphi = N,$$

varav följer

$$(34) \quad A(\alpha, \beta, \varphi) + A(\alpha', \varphi, \beta) = \int_0^\varphi \int_0^\beta \frac{N}{\Delta \varphi \Delta' \beta} d\varphi d\beta.$$

Genom denna relation uttryckes den omnämnda utbytessatsen. Skrivs integranden i formen

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta' \beta} + \frac{\Delta' \beta}{\Delta \varphi} - \frac{1}{\Delta \varphi \Delta' \beta},$$

så kunna de tecknade integrationerna omedelbart utföras enligt definitions-ekvationerna (1) och (8), varvid man erhåller högra membrum uttryckt medelst funktionerna $F(\alpha, \varphi)$, $E(\alpha, \varphi)$, $F(\alpha', \beta)$ och $E(\alpha', \beta)$.

Antages nu $\varphi = \frac{\pi}{2}$ men $\beta < \frac{\pi}{2}$, så blir enligt (33) $A(\alpha', \varphi, \beta) = 0$, och man erhåller av (34)

$$(35) \quad A(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\beta \frac{\Delta^2 \varphi + \Delta'^2 \beta - 1}{\Delta \varphi \Delta' \beta} d\varphi d\beta$$

eller efter integrationernas utförande

$$(36) \quad A(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cdot E(\alpha', \beta) - \{F(\alpha) - E(\alpha)\} \cdot F(\alpha', \beta).$$

För $\beta = \frac{\pi}{2}$ blir definitionsuttrycket (29) fullständigt obestämt och vi kunna då låta värdet av funktionen $A(\alpha, \beta)$ fastställas genom ekv. (35) eller (36), som sålunda erhåller allmän giltighet.

Genom ekv. (36) är sålunda funktionen $A(\alpha, \beta)$ i enlighet med Legendres förutnämnda sats uttryckt med elliptiska integraler av första och andra slagen. Funktionens talvärden kunna då omedelbart beräknas för heltalsgrader av modylvinkeln α och parametervinkeln β , då värdena på de i högra membrum ingående funktionerna erhållas ur Legendres tab. 9.

För närmare kännedom om funktionen skola vi bilda uttrycken för dess partiella derivator med avseende på α och β , så mycket mer som dessa uttryck stundom äro behöfliga vid teoretiska undersökningar inom här avsedda tillämpningsområde. Vi beräkna då först ur (1) med användande av den andra ekvationen i (21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha, \varphi) &= \int_0^{\varphi} \frac{k k' \sin^2 \varphi}{\Delta^3 \varphi} d\varphi = -\frac{k'}{k} \int_0^{\varphi} \left(\frac{1}{\Delta \varphi} - \frac{1}{\Delta^3 \varphi} \right) d\varphi = \\ &= -\frac{k'}{k} \{F(\alpha, \varphi) - \Pi(k^2, \alpha, \varphi)\} = \\ &= \frac{1}{k k'} \left\{ E(\alpha, \varphi) - k'^2 F(\alpha, \varphi) - \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\Delta \varphi} \right\} \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} E(\alpha, \varphi) &= -\int_0^{\varphi} \frac{k k' \sin^2 \varphi}{\Delta \varphi} d\varphi = -\frac{k'}{k} \int_0^{\varphi} \left(\frac{1}{\Delta \varphi} - \Delta \varphi \right) d\varphi = \\ &= -\frac{k'}{k} \{F(\alpha, \varphi) - E(\alpha, \varphi)\}. \end{aligned}$$

Härav följer, då $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha', \beta) &= -\frac{1}{k k'} \left\{ E(\alpha', \beta) - k^2 F(\alpha, \beta) - \frac{k'^2 \sin \beta \cos \beta}{\Delta' \beta} \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} E(\alpha', \beta) &= \frac{k}{k'} \{F(\alpha', \beta) - E(\alpha', \beta)\} \end{aligned}$$

ävensom

$$(37) \quad \frac{d}{d\alpha} F(\alpha) = \frac{1}{k k'} \{E(\alpha) - k'^2 F(\alpha)\}, \quad \frac{d}{d\alpha} E(\alpha) = -\frac{k'}{k} \{F(\alpha) - E(\alpha)\}.$$

Om ekv. (36) deriveras partiellt med avseende på α och föregående uttryck insätts, erhålles då efter några reduktioner

$$(38) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} A(\alpha, \beta) = -\frac{k' \sin \beta \cos \beta}{k \Delta' \beta} \{F(\alpha) - E(\alpha)\}.$$

Den partiella derivatan med avseende på β erhålles direkt ur (35) eller (36) och blir

$$(39) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} A(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{A^2 \varphi + A'^2 \beta - 1}{A \varphi A' \beta} d\varphi = \frac{1}{A' \beta} \{E(\alpha) - k'^2 \sin^2 \beta F(\alpha)\}.$$

Man kan nu lätt diskutera, huru funktionen varierar med de särskilda variablerna. Derivatan med avseende på α kan skrivas i formen

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} A(\alpha, \beta) = -kk' \frac{\sin \beta \cos \beta}{A' \beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{A \varphi} d\varphi$$

och är således ≤ 0 , då α och β ligga i intervallet 0 till $\frac{\pi}{2}$. För derivatan med avseende på β gäller

$$\frac{\partial}{\partial \beta} A(\alpha, \beta) \geq \frac{1}{A' \beta} \{E(\alpha) - k'^2 F(\alpha)\} = \frac{k^2}{A' \beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi}{A \varphi} d\varphi$$

och denna är således ≥ 0 . För $\alpha = 0$ och $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erhålles av (35)

$$(40) \quad A(0, \beta) = \frac{\pi}{2} \sin \beta, \quad A\left(\frac{\pi}{2}, \beta\right) = \beta.$$

För $\beta = 0$ och $\beta = \frac{\pi}{2}$ måste $A(\alpha, \beta)$ enligt (38) vara konstant och av (40) följer då

$$(41) \quad A(\alpha, 0) = 0, \quad A\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Den sista ekvationen är identisk med den s. k. Legendreska relationen:¹

$$(42) \quad F(\alpha)E(\alpha') + E(\alpha)F(\alpha') - F(\alpha)F(\alpha') = \frac{\pi}{2}.$$

Såsom resultat härav framgår alltså följande. Är β konstant, medan α växer från 0 till $\frac{\pi}{2}$, avtar $A(\alpha, \beta)$ från $\frac{\pi}{2} \sin \beta$ till β ; är åter α konstant, medan β växer från 0 till $\frac{\pi}{2}$, så växer även $A(\alpha, \beta)$ från 0 till $\frac{\pi}{2}$. Dessa tal utgöra således undre och övre gränsen för funktionens värden.

¹ Traité, bd 1, sid. 61.

(33) För den tabulerade funktionen $\mathcal{I}(\alpha, \beta)$, som är förbunden med $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ medelst relationen (30), bliva då de motsvarande egenskaperna följande. Är β konstant, medan α växer från 0 till $\frac{\pi}{2}$, avtar $\mathcal{I}(\alpha, \beta)$ från $\sin \beta$ till $\frac{2}{\pi}\beta$, i det

$$(43) \quad \mathcal{I}(0, \beta) = \sin \beta, \quad \mathcal{I}\left(\frac{\pi}{2}, \beta\right) = \beta : \frac{\pi}.$$

Är åter α konstant, medan β växer från 0 till $\frac{\pi}{2}$, växer $\mathcal{I}(\alpha, \beta)$ från 0 till 1, i det

$$(44) \quad \mathcal{I}(\alpha, 0) = 0, \quad \mathcal{I}\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Funktionens värden ligga alltså generellt mellan 0 och 1.

I tabellerna äro funktionens värden angivna med fyra decimaler, varvid i huvudtabellen (sid. 212 och 213) argumentintervallen äro för modylvinkeln α fem grader och för parametervinkeln β en grad. Vid tillämpningar förekommer oftast området $\alpha = 0^\circ - 45^\circ$, $\beta = 70^\circ - 90^\circ$, och för detta har därför för bekvämlighets skull tillagts särskilda tabeller (sid. 210 och 211) med 1° -intervall för båda vinklarna. Tabellvärdena ha beräknats enligt formlerna (36) och (30) ur Legendres tab. 9.

Vi hava därmed redogjort såväl för de dynamiska problem, vilka närmast föranledt tabellernas tillkomst, som för de tabulerade funktionernas definitioner och viktigaste egenskaper samt det sätt varpå de beräknats. I följande uppsats skola vi närmare ingå på tillämpningarna på åtminstone ett av de här berörda problemen.

¹ Vid räkningen har jag haft värdefull hjälp av docenten, civilingenjör H. F. NORDSTRÖM ävensom civilingenjörerna M. BÄCKSTRÖM och A. ANZELIUS, till vilka jag därför stå i tacksamhetsskuld. I samband med räkningen ha upptäckts en del tryckfel i Legendres tab. 9, av vilka följande särskilt äro av betydelse, då de gälla siffror tillhörande de sex första decimalerna i resp. tal och då de givit anledning till felaktigheter även i tabellutdragen i ovan angivna arbeten av LÉVY, FRICKE samt JAHNKE och EMDE:

| | | | |
|---------------|-------------------------|---------------------|------------------|
| Sid. 298 | $E(8^\circ)$ | bör vara 1,56316... | icke 1,56296... |
| » 311 | $F(23^\circ)$ | » » 1,636517... | » » 1,636317... |
| » 322 | $E(35^\circ, 45^\circ)$ | » » 0,76128... | » » 0,76188... |
| » 326 och 330 | $E(45^\circ, 73^\circ)$ | » » 1,1378543... | » » 1,1378583... |
| » 361 | $F(90^\circ, 31^\circ)$ | » » 0,56956... | » » 0,55956... |

Därjämte finnas i ögonen fallande tryckfel å sid. 296 $E(10^\circ, 5^\circ)$ och 297 $F(7^\circ, 5^\circ)$.

BIDRAG TILL TEORIEN FÖR SFÄRISKA PENDELN

AV

CARL HEUMAN.

Föreliggande uppsats utgör liksom den föregående ett led i en bearbetning av *pendel-* och *gyroskopteorien*, som jag företagit mig i avsikt att söka bringa denna teori till en för praktiska tillämpningar möjligast bekväm form. Jag har därvid dels sökt förenkla de analytiska och numeriska metoderna för bestämning av de viktigare rörelseelementen, dels utarbetat en del grafiska metoder för samma ändamål, och det är närmast tillämpningen av dessa metoder på teorien för sfäriska pendeln och några därmed besläktade rörelseproblem, som utgör föremålet för föreliggande framställning. I samband därmed ha även en del sakligt nya resultat blivit härledda, såsom närmare framgår av följande, inledningsvis förutskickade redogörelse för det väsentliga innehållet.

I den första avdelningen av uppsatsen (§ 1—6) studeras en partikels rörelse på en allmän rotationsyta med vertikalt ställd axel under inverkan endast av tyngdkraften och normaltrycket från ytan. Detta rörelseproblem, som utgör en nära till hands liggande generalisering av problemet om sfäriska pendelns rörelse, har bragts till analytisk lösning genom arbeten av EULER, LAGRANGE och JACOBI¹ och har sedan gjorts till föremål för en hel del undersökningar av ett flertal författare.² Då det här ånyo upptages till behandling, sker detta i främsta rummet för att visa en ny geometrisk representation, som på ett enkelt sätt åskådliggör rörelsens karakteristiska förlopp, och även kan läggas till grund för en grafisk bestämning av bankurvan.

¹ EULER, *Mechanica*, 1736, tom. 2, cap. 4. LAGRANGE, *Mécanique analytique*, 1788, tome 2, sect. 8, chap. 2. JACOBI, *Journ. f. Math.* 24, 1842, pag. 5 o. f.

² Se *Encyclopädie der mathem. Wissenschaften*, Bd 4, Teilbd 1, pag. 504, not 191.

Sedan de för ändamålet behövliga analytiska ekvationerna blivit sammanställda i § 1, härledes i § 2 det »rörelsedigram», som realiserar denna representation och som sedan alltså kommer till användning i den följande framställningen. Detta diagram består i huvudsak av en kurva, »hjälpkurvan», och en rät linje, »indexlinjen», av vilka den förra erhålles genom en enkel punkttransformation av rotationsytans meridiankurva, medan den senare bestämmes av begynnelsestillståndet. Indexlinjens läge i förhållande till hjälpkurvan visar omedelbart rörelsens karaktär, dess skärningspunkter med denna kurva bestämma vändcirkelarna, då sådana finnas; vidare kan man av diagrammet direkt eller genom enkla konstruktioner erhålla hastighetens komponenter och bankurvans tangent ävensom normaltrycket vid ett godtyckligt läge av partikeln.

Med hjälp av rörelsedigrammet diskuteras i § 3 de olika rörelsetyperna och i samband därmed införes ett enkelt beteckningssätt för dessa. Den viktigaste typen är rörelse på en zon mellan två fasta vändcirkelr, här kortligen kallad »zonrörelse», samt vid sidan därav rörelse på parallellcirkel. Vid zonrörelse uppdelas bankurvan av de på vändcirkelrarna belägna topppunkterna eller »absiderna» i kongruenta delbågar, och meridianplanen genom två successiva absider bilda således en konstant vinkel, här kallad »absidvinkeln». Denna vinkel är naturligtvis ett av de viktigaste av de element, som hänföra sig till bankurvans form, och en stor del av uppsatsen är även ägnad åt undersökningar rörande denna storhet.

I § 4 härledas en del kriterier för närmare bestämning av hjälpkurvans form, vilken är avgörande för de rörelsetyper, som kunna förekomma på en viss yta.

I § 5 behandlas rörelse på parallellcirkel, vilken i diagrammet motsvarar det fall, då indexlinjen tangerar hjälpkurvan, och det visas att denna rörelse är stabil eller labil, allteftersom hjälpkurvan i ifrågavarande punkt ligger över eller under sin tangent. I förra fallet uppkommer vid en liten störning en zonrörelse mellan två vändcirkelr, som falla allt närmare varandra ju mindre störningen är, och därvid närmar sig absidvinkeln ett bestämt gränsvärde, för vilket ett generellt uttryck härledes.

I § 6 utföres en del detaljundersökningar beträffande zonrörelse, varvid till en början betraktas de element, som äro bestämda, då de båda vändcirkelrarna äro givna till storlek och läge, utan att rotationsytan i övrigt behöver vara känd. Bland dessa element ingå även lutningsvinklarna mellan meridiankurvans tangentplan och bankurvans oskulerande plan i dess på vändcirkelrarna belägna absider, vilket leder till enkla konstruktioner av krök-

ningsradierna i motsvarande punkter av bankurvans horisontalprojektion. På ett exempel visas användbarheten av dessa konstruktioner för en praktiskt nöjaktig bestämning av bankurvan, under förutsättning att absidvinkeln är känd.

I den senare avdelningen av uppsatsen, § 7—12, studeras sfäriska pendeln, alltså det specialfall, då rotationsytan, på vilken partikeln rör sig, utgöres av en sfär; i ett par till paragraferna 7 och 8 fogade tillägg betraktas även rörelse på andra rotationsytor av andra graden.

Absidvinkeln vid sfäriska pendeln kan, såsom omnämndes i föregående uppsats, uttryckas med fullständiga elliptiska integraler av tredje slaget, och detta uttryck kan omformas så, att det endast innehåller de å sid. 210—13 tabulerade funktionerna, varigenom alltså erhålles en bekväm metod för numerisk beräkning av ifrågavarande storhet. Härledningen härav utföres i § 7 och i tillägget till samma paragraf visas, att detsamma gäller i samtliga övriga elliptiskt integrabla fall av zonrörelse på rotationsytor av andra graden. Genom givna vändcirklar gå — allt efter omständigheterna — tre, fyra eller fem andragsytor, för vilka absidvinkeln på detta sätt kan numeriskt bestämmas, oberäknat ett gränsfall, i vilket denna vinkel blir oändligt stor.

I § 8 avhandlas de av PUISEUX¹ och HALPHEN² funna satserna, att absidvinkeln vid sfäriska pendeln är $> \frac{\pi}{2}$, men $< \pi$. För den senare satsen lämnas här ett nytt bevis, vilket grundar sig på ett synnerligen enkelt, geometriskt-mekaniskt resonemang.³ Detta kan — såsom visas i det till paragrafen fogade tillägget — även tillämpas på andra rotationsytor av andra graden och leder till, att man för vissa grupper av dessa kan avgöra, om absidvinkeln är $>$ eller $< \pi$. Även visas att Puisseux' sats är giltig i samtliga elliptiskt integrabla fall av zonrörelse på andragsytor, ävensom för vissa generellare grupper av ytor.

I § 9 undersökes, under vilka förhållanden normaltrycket vid zonrörelse

¹ Journ. de mathém. 1842.

² Traité des fonctions elliptiques, tome 2 (1888).

³ Halphens eget bevis grundar sig på satsen ur de elliptiska funktionernas teori; en del senare av SAINT-GERMAIN publicerade bevis (Bulletin des sciences mathém. 1896, 1898, 1901) stödjade sig på Cauchys teorem om integration rundt konturer i det komplexa planet. Ett mera elementärt bevis, där ett integraluttryck för absidvinkeln värderas med användande endast av reella funktioner, har givits av DE SPARRE (Bulletin de la société mathém. de France, 1910, LECORNU, Cours de mécanique, tome 1, 1914, pag. 358).

på sfären kan bliva noll och alltså bankurvans horisontalprojektion erhålla inflexionspunkter. Med hjälp av rörelsedigrammet visas lätt, att detta inträffar endast om den nedre vändcirkelns radie r_1 är mindre än en tredjedel av sfärens radie och tillika den övre vändcirkeln är belägen mellan två av r_1 bestämda gränser.

Problemet om sfäriska pendelns rörelse kan inordnas som specialfall även under en annan problemgrupp än den ovannämnda, i det nämligen sfäriska pendeln kan betraktas som ett pendelgyroskop¹, ehuru med starkt specialiserad massfördelning. Då man nu vet vilken stor roll begreppet rörelsemängdsmoment spelar inom den moderna gyroskopteorien, ligger det nära till hands att även för sfäriska pendeln göra en motsvarande undersökning. Detta är utfört i § 10 och leder till ett par anmärkningsvärda resultat. Genom att beräkna vridningen av den sträcka, som representerar rörelsemängdens moment med avseende på upphängningspunkten, kommer man nämligen till ett väsentligt enklare uttryck för absidvinkeln än det förut i § 7 på direkt väg härledda. Vidare finner man att det meridianplan, som innehåller nämnda sträcka, vrider sig med konstant vinkelhastighet i det fall, då övre vändcirkeln faller i sfärens ekvatorcirkel, och kommer därigenom på ett naturligt sätt till de förenklingar, som inträda i detta av GREENHILL² anmärkta specialfall.

Även för denna undersökning visar sig det införda rörelsedigrammet värdefullt, i det man av detsamma omedelbart erhåller representationer av rörelsemängdsmomentets storlek och komponenter vid ett godtyckligt läge av partikeln (pendelkulan) och sålunda lättare kan överse, huru dessa variera under rörelsen.

Det i § 10 härledda uttrycket för absidvinkeln omformas vidare i § 11 genom införande av de i föregående uppsats tabulerade funktionerna och härigenom erhålles en slutlig, för praktiskt bruk särdeles bekväm metod för numerisk beräkning av denna vinkel. Med användande härav har det varit möjligt att beräkna absidvinkeln i ett så stort antal fall, att dess beroende av vändcirkelns lägen kunnat fullständigt överses och sammanställas i grafisk form.

Denna sammanställning har i sin ordning givit uppslag till en undersökning, som utföres i § 12 och utmynnar i följande resultat. Tänker

¹ Se föregående uppsats, sid. 208.

² Jfr APPELL, *Traité de mécanique*, tome 1 (3^e éd. 1909, p. 518: Théorème de M. Greenhill).

man sig de båda vändcirkelarna vid en zonrörelse på sfären rycka allt närmare varandra och slutligen sammanfalla, men på sådant sätt att cirkelarnas inre — och således även deras yttre — likställighetspunkt förblir oförändrad, så kommer därvid absidvinkeln att ständigt avtaga. Det gränsvärde, till vilket den vid denna sammanryckning närmar sig, utgör således även en undre gräns för dess värde vid vändcirkelarnas ursprungliga läge. Skillnaden mellan det ursprungliga värdet och nämnda gränsvärde är i praktiskt realiserbara fall synnerligen liten, merendels mindre än en tusendel av gränsvärdet, och ifrågavarande undre gräns, som är synnerligen lätt att beräkna, kan därför även användas som ett för praktiska ändamål tillräckligt noggrant, approximativt värde av absidvinkeln. Man kommer för övrigt genom samma betraktelse till ett anmärkningsvärdt serieuttryck för nämnda vinkel, i vilket det omtalade gränsvärdet bildar den första termen, och man kan således lätt driva noggrannheten längre genom att medtaga ytterligare en eller ett par termer i denna serie. — Med denna undersökning avslutas uppsatsen.

Teorien för sfäriska pendeln utgör en integrerande del av teorien för pendelgyroskopet, icke endast därför att pendeln kan tänkas uppkommen av gyroskopet genom specialisering av massfördelningen utan även därför att ett verkligt pendelgyroskops axel under särskilda utgångsförhållanden kan komma att röra sig alldeles som en sfärisk pendel. De metoder, som här begagnats för studium av sfäriska pendeln, kunna efter enkla modifikationer även användas för en analog undersökning av det allmänna pendelgyroskopets rörelse, vartill jag hoppas vid ett annat tillfälle få återkomma. Även för vissa undersökningar inom regulator-teorien kunna en del av dessa metoder med fördel användas.

De till uppsatsen hörande figurerna ha beräknats och utförts av civilingenjör A. ANZELIUS, med undantag av den grafiska sammanställningen i fig. 25, som konstruerats av civilingenjör M. BÄCKSTRÖM; till båda står författaren i stor tacksamhetsskuld.

I. Rörelse på allmän rotationsyta.

§ 1. Grundekvationer.

Uppgiften är att undersöka en partikels rörelse på en fast glatt rotationsyta med vertikalt ställd axel, då de verkande krafterna utgöres endast av tyngdkraften och normaltrycket från ytan.

Vi omnämna först de rent geometriska element, som komma till användning vid den följande behandlingen av rörelseproblemet.

Rotationsytans axel antages vald till koordinataxel Oz , varvid z -koordinaten räknas från en godtycklig punkt O på axeln *positiv nedåt*. Radien r i den mot ett visst z -värde svarande parallellcirkeln är given genom ytans ekvation, som antages vara

$$(1) \quad r^2 = \varrho(z).$$

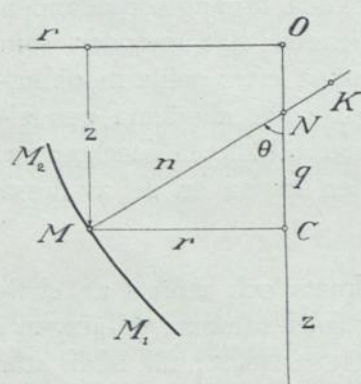


FIG. 1.

Med $\varrho'(z)$ och $\varrho''(z)$ beteckna vi resp. första och andra derivatorna av funktionen $\varrho(z)$ med avseende på z .

Ett godtyckligt plan genom axeln Oz skär ytan i meridiankurvan M_1MM_2 , av vilken M må vara en godtycklig punkt med koordinaterna $CM = r$ och $OC = z$ (fig. 1). Meridiankurvans normal i M antages skära axeln Oz i punkten N . Beteckna vi med n längden av normalen MN , med q subnormalen NC , räknad positiv då N ligger ovanför C , och med θ den vinkel, som riktningen NM bildar med positiva axelriktningen Oz , så är

$$(2) \quad r = n \sin \theta, \quad q = n \cos \theta,$$

ävensom

$$(3) \quad q = -r \frac{dr}{dz} = -\frac{1}{2} \varrho'(z)$$

och

$$(4) \quad n^2 = q^2 + r^2 = \frac{1}{4} \varrho'^2(z) + \varrho(z) = \nu(z).$$

Vi betrakta även meridiankurvans krökning och antaga K vara krökningens centrum motsvarande kurvpunkten M . Krökningens radie MK uttrycka vi i formen $MK = \frac{1}{\kappa} \cdot MN = \frac{1}{\kappa} \cdot n$, där κ är ett positivt eller negativt tal, allteftersom MK har riktningen MN eller den motsatta. För detta tal $\kappa = MN : MK$, som i det följande kallas meridiankurvans *krökningkoefficient* i ifrågavarande punkt, härledas lätt uttrycken

$$(5) \quad \kappa = -\frac{r^3}{n^2} \cdot \frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{q^2 + r^2}{n^2} \frac{dq}{dz} = \cos^2 \theta + \frac{dq}{dz} \sin^2 \theta = \frac{\varrho'^2(z) - 2\varrho(z)\varrho''(z)}{\varrho'^2(z) + 4\varrho(z)}$$

Vi antaga nu, att den ifrågavarande partikeln vid tiden t befinner sig i en punkt P på parallellcirkeln (r, z) . Läget av punkten P kan närmare angivas genom vinkeln ψ , då (r, ψ) äro de polära koordinaterna för punktens projektion på det genom O gående vågräta planet, hänfört till ett polärt koordinatsystem med O som pol och en godtycklig fix vågrät linje genom O som axel. Denna vinkel ψ , som även är vinkeln mellan det genom P gående meridianplanet och ett visst fixt meridianplan, kalla vi i det följande *azimutvinkeln*.

Partikelns hastighet v kan uppdelas i tre rätvinkliga komponenter

$$(6) \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\psi = r \frac{d\psi}{dt},$$

av vilka v_z är vertikal, v_r radiell och v_ψ riktad utefter tangenten till den genom P gående parallellcirkeln. Dessa komponenter räknas då positiva i riktningarna av växande z, r, ψ resp.

Genom sammansättning av v_z och v_r erhålles hastighetens komponent v_m utefter tangenten till den genom P gående meridiankurvan, varvid $v_z = \pm v_m \sin \theta$, $v_r = \mp v_m \cos \theta$, beroende på i vilken riktning v_m räknas positiv. I varje fall gäller alltså

$$(7) \quad v_z^2 = v_m^2 \sin^2 \theta, \quad v_r^2 = v_m^2 \cos^2 \theta.$$

Hastigheten v blir därmed uppdelad endast i två rätvinkliga komponenter v_m , v_p , så att

$$(8) \quad v^2 = v_m^2 + v_p^2.$$

Då partikeln rör sig under inverkan endast av tyngdkraften och normaltrycket från ytan, ger levande kraftens sats relationen

$$(9) \quad v^2 = 2g(z - z_*),$$

där z_* är en av begynnelsestillståndet beroende konstant. Det vågräta planet $z = z_*$ kalla vi *nollnivåplanet*. Kommer partikeln under rörelsen upp i detta plan, blir dess hastighet noll; högre än planet kan partikeln icke komma.

Enär båda de verkande krafterna ha momentet noll med avseende på axeln Oz , gäller för rörelsens horisontalprojektion ytlagen

$$(10) \quad r^2 \frac{d\psi}{dt} = \mathcal{C},$$

där \mathcal{C} åter är en av begynnelsestillståndet beroende konstant, *ytkonstanten*. Denna kan vara noll, i vilket fall azimutvinkeln förblir konstant, så att rörelsen försiggår i ett meridianplan. Denna händelse skola vi emellertid här lämna utom räkningen och förutsätta sålunda ytkonstanten $\mathcal{C} \neq 0$. Vi kunna då utan inskränkning antaga denna konstant positiv, då detta alltid kan åstadkommas genom lämpligt val av den riktning, i vilken vinkeln ψ räknas positiv. Till följd av dessa överenskommelser framgår då av (10), att azimutvinkeln ψ under hela rörelsen är *växande*.

Enligt (6) kan ytlagen även uttryckas i formen

$$(11) \quad rv_p = \mathcal{C}$$

och härav följer enligt (8) och (9)

$$r^2 v_m^2 = r^2 (v^2 - v_p^2) = 2gr^2(z - z_*) - \mathcal{C}^2,$$

vilket vi skriva

$$(12) \quad r^2 v_m^2 = 2gf(z),$$

i det vi sätta

$$(13) \quad f(z) = r^2(z - z_*) - \frac{\mathcal{C}^2}{2g} = (z - z_*)\varrho(z) - \frac{\mathcal{C}^2}{2g}.$$

Ekvationerna (11) och (12) bestämma komponenterna v_p och v_m , varvid man för den förra erhåller ett värde, för den senare åter två, endast till tecknet skilda värden, för vilkas realitet emellertid fordras, att $f(z) \geq 0$. Dessa värden äro endast beroende av z och r och äro således lika i alla punkter på samma parallellcirkel. Om bankurvan skär en följd av parallellcirkelar i mer än en punkt, måste därför de motsvarande bågarna antingen vara kongruenta eller symmetriskt kongruenta och måste genomlöpas på lika tider.

För beräkning av tiden och bankurvans element kan man lämpligen införa z som oberoende variabel. Enligt (2), (7) och (12) är

$$n^2 v_z^2 = r^2 v_m^2 = 2g f(z),$$

alltså

$$(14) \quad \left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{n^2}{2g f(z)}$$

och därav enligt (10)

$$(15) \quad \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 = \frac{g^2}{2g} \cdot \frac{n^2}{r^4 f(z)}.$$

Ersätts r^2 och n^2 med uttrycken (1) och (4), så bliva högra membra av (14) och (15) funktioner enbart av z . Beräkningen av den tid, som åtgår för förflyttning från en höjd till en annan, och av den motsvarande ökningen i azimutvinkeln är sålunda återförd till kvadratur.

Betecknar N det på partikeln verkande normaltrycket från ytan, räknat positivt i riktningen från ytpunkten mot normalens skärningspunkt med axeln, så gäller såsom lätt visas¹ relationen

$$(16) \quad n N = m (\kappa v_m^2 + v_p^2 + qg),$$

där m är partikelns massa. Här kunna q , n , κ , v_p^2 och v_m^2 enligt (3), (4), (5), (11) och (12) uttryckas som funktioner av z , varmed alltså även normaltrycket blir bestämt som funktion av samma variabel.

Partikeln kan vara ensidigt bunden vid ytan, så att denna endast kan utöva tryck i den ena av normalens båda riktningar; partikeln kommer då i allmänhet att lämna ytan, när N blir noll. I det följande skola vi emellertid förutsätta, att partikeln är fullständigt bunden vid ytan, så att den

¹ Enklast genom användande av den rörelseekvation, som erhålles vid projektion på ytnormalen, jämte tillämpning av Meuniers och Eulers krökningsatser.

under inga omständigheter kan lämna densamma, vare sig normaltrycket erhåller den ena eller andra riktningen.

§ 2. Rörelsedigram.

För att erhålla en *geometrisk representation* av rörelsen införa vi nu de mot hastigheten v och dess komponenter v_m , v_p svarande *hastighets-höjderna*, i det vi sätta

$$(17) \quad \frac{v^2}{2g} = h, \quad \frac{v_m^2}{2g} = h_m, \quad \frac{v_p^2}{2g} = h_p.$$

Enligt ekvationerna (9), (8), (12) och (11) gäller då

$$(18) \quad h = z - z_* = h_m + h_p,$$

$$(19) \quad r^2 h_m = f(z), \quad r^2 h_p = \frac{\mathcal{C}^2}{2g}.$$

De båda ekvationerna (18) ersätta vi med

$$(20) \quad h_m = z - z', \quad h_p = z' - z_*,$$

där då z' blir en hjälpvariabel, som enligt den andra av ekvationerna (19) varierar med r på sådant sätt, att

$$z' - z_* = \frac{\mathcal{C}^2}{2g} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Införa vi ytterligare en hjälpvariabel r' , förbunden med r medelst relationen

$$(21) \quad r^2 r' = L^3,$$

där L är en godtyckligt vald konstant längd, och sätta vi

$$(22) \quad \frac{\mathcal{C}^2}{2g L^3} = \operatorname{tg} \delta,$$

så erhålles

$$(23) \quad z' - z_* = \operatorname{tg} \delta \cdot r'.$$

Därvid är sambandet mellan r' och z enligt (1) och (21)

$$(24) \quad r' = \frac{L^3}{\rho(z)}.$$

Dessa ekvationer kunna nu lätt framställas i ett grafiskt diagram, fig. 2. Konstruktionsplanet antages (liksom i fig. 1) vara ett godtyckligt plan genom axeln Oz . I detta upprita vi till en början den givna rotationsytans meridian M_1MM_2 . Sedan vi därefter genom O dragit den vågräta axeln Or' och valt en lämplig konstruktionslängd L , upprita vi den kurva H_1HH_2 , som bestämmes av ekv. (24), då (r', z) äro koordinaterna för den löpande punkten H . Denna kurva kallas i det följande *hjälpkurvan*. Dess mot en viss ordinata $z = OC$ svarande abskissa $r' = CH$ kan bekvämast erhållas genom en enkel konstruktion eller beräkning enligt ekv. (21) ur meridiankurvans motsvarande radie $r = CM$. Även tangenten H kan enkelt konstrueras, då meridiankurvans tangent i den motsvarande punkten M är känd. Beteckna vi nämligen med q' hjälpkurvans subnormal på axeln Oz , med positivt eller negativt tecken i enlighet med vad som angivits för meridiankurvan i § 1, så följer av (3) och (21)

$$q' = -r' \frac{dr'}{dz} = r' \cdot 2 \frac{L^3}{r^3} \frac{dr}{dz} = 2 \frac{r'^2}{r} \frac{dr}{dz} = -2 \frac{r'^2}{r^2} q,$$

alltså

$$(25) \quad \frac{r'^2}{q'} = -\frac{1}{2} \frac{r^2}{q}.$$

Denna ekvation uttrycker, att hjälpkurvans *subtangent* på axeln Oz är hälften så stor som meridiankurvans subtangent i den motsvarande punkten samt riktad åt motsatt håll. I övrigt märkes, att om den ena kurvan närmar sig till axeln Oz , så avlägsnar sig den andra alltmer därifrån; går den ena kurvan in till en ändlig punkt A på nämnda axel, så måste den motsvarande branschen av den andra kurvan löpa ut mot oändligheten med en genom A gående vågrät asymptot. Till en närmare granskning av sambandet mellan de båda kurvornas former skola vi återkomma i § 4.

Sedan hjälpkurvan sålunda konstruerats, fullbordas diagrammet genom inläggande av två räta linjer, vilkas lägen bestämmas genom de båda av begynnelsestillståndet beroende konstanterna z_* och \mathcal{C} . Den ena av dessa är den vågräta linjen C_*V , som utgör nollnivåplanet spår i konstruktionsplanet och sålunda är bestämd av konstanten z_* . Denna linje kallas i det

följande kortligen *nollnivån*. Den andra är linjen C_*J , som motsvarar ekv. (23), då (r', z') äro koordinaterna för den löpande punkten J . Denna linje kallas i det följande *indexlinjen*. Den går genom den punkt C_* $(0, z_*)$, där nollnivån skär axeln Oz , och dess lutningsvinkel δ mot Or' bestämmas av ekv. (22). Denna vinkel är således beroende av konstruktionslängden L och ytkonstanten \mathcal{C} ; den blir noll samtidigt med \mathcal{C} och växer mot $\frac{\pi}{2}$, om \mathcal{C} ökas mot ∞ . Då vi uteslutit fallet $\mathcal{C} = 0$, är således

$$0 < \delta < \frac{\pi}{2}.$$

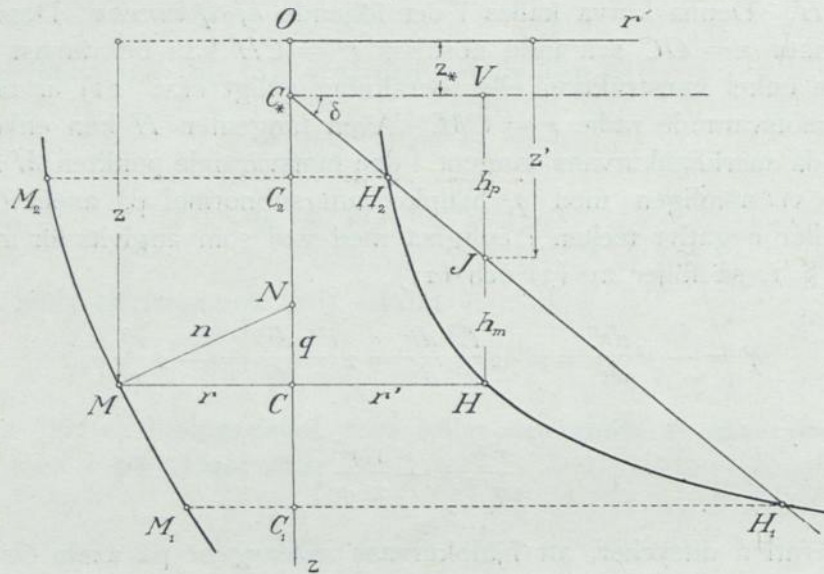


FIG. 2.

Vi antaga nu, att partikeln i ett visst ögonblick befinner sig i en punkt P på parallellcirkeln (r, z) , i figuren representerad genom centrum C och radien $r = CM$. På samma vågräta linje ligger då den mot meridianpunkten M svarande punkten $H (r', z)$ på hjälpkurvan. En genom H lagd vertikal skär indexlinjen i $J (r', z')$ och nollnivån i $V (r', z_*)$. Då är $HJ = z - z'$ och $JV = z' - z_*$, alltså enligt (20) $h_m = HJ$ och $h_p = JV$ med summan $h = h_m + h_p = HV$. Dessa hastighetshöjder bliva sålunda på ett enkelt sätt bestämda av det konstruerade diagrammet.

Därmed är alltså partikelns rörelsetillstånd i ifrågavarande ögonblick såtillvida fastställt, att partikeln har hastigheten $v = \sqrt{2gh}$ med komponenterna

$v_m = \sqrt{2gh_m}$ och $v_p = \sqrt{2gh_p}$, riktade utefter tangenterna till resp. den meridian och den parallellcirkel, som gå genom punkten P . Den förra komponenten kan emellertid vara riktad åt det ena eller andra hållet på meridian-tangenten, motsvarande upp- eller nedstigande rörelse, varemot riktningen av v_p är entydigt bestämd, då azimutvinkeln ψ enligt föregående är ständigt växande.

Partikelns rörelseriktning bildar med parallellcirkelns tangent, dragen i riktning av växande ψ , en vinkel i , för vilken gäller

$$(26) \quad \operatorname{tg} i = \sqrt{\frac{h_m}{h_p}}.$$

Projicieras bankurvan och parallellcirkeln på ett horisontalplan erhålles för vinkeln i' mellan projektionskurvornas tangenter relationen $\operatorname{tg} i' = \operatorname{tg} i \cos \theta$. Båda dessa vinklar i och i' kunna alltså lätt bestämmas av diagrammet,¹ vilket således leder till en enkel konstruktion av tangenten för bankurvans horisontalprojektion. Därmed är utgångspunkten given för bankurvans bestämning medelst *grafisk integration*, varpå vi emellertid här icke vidare ingå.

Även det på partikeln verkande normaltrycket N från ytan kan genom enkla konstruktioner bestämmas av diagrammet, i det av ekv. (16) och (17) erhålles

$$(27) \quad N : mg = (2xh_m + 2h_p + q) : n.$$

Vi hava i det föregående vid diagrammets konstruktion antagit konstanterna z_* och \mathcal{C} vara givna och visat huru nollnivån och indexlinjens lägen bestämmas av dessa. Utgår man i stället direkt från ett givet begynnelsestillstånd, alltså partikelns läge och hastighet i ett visst ögonblick, så inses lätt huru man har att förfara för att inlägga ifrågavarande linjer. Befinner sig exempelvis partikeln i en punkt på parallellcirkeln CM (fig. 2) och har där vissa givna hastighetskomponenter $v_m = \sqrt{2gh_m}$, $v_p = \sqrt{2gh_p}$, så kan man från den motsvarande punkten H på hjälpkurvan avsätta på vertikalen uppåt längderna $HJ = h_m$, $JV = h_p$ och erhåller därigenom en punkt J på indexlinjen och en punkt V på nollnivån. Den senare utgöres

¹ Uppslås på linjen HV som diameter en halvcirkelbåge, vilken skäres av en genom J dragen vågrät linje i en punkt D , så är vinkeln $DVJ = i$. Om man sedan från J parallellt med ytnormalen MN drar en linje JE , som skär nollnivån i E , samt därefter avsätter längden $JF = JE$ utefter vertikalen, så blir vinkeln $DFJ = i'$.

då av den vågräta linjen genom V och i dess skärningspunkt C_* med axeln Oz erhålles en andra punkt på indexlinjen, som sålunda även blir bestämd.

§ 3. Olika rörelsetyper.

Vi skola nu använda det beskrivna diagrammet för att diskutera rörelsens förlopp i några typiska fall.

Man kan erhålla en allmän föreställning om partikelns rörelse på rotationsytan, om man tänker sig meridianpunkten M röra sig på meridiankurvan med hastigheten $v_m = \sqrt{2gh_m}$ och samtidigt punkten P röra sig på den genom M gående parallellcirkeln med hastigheten $v_p = \sqrt{2gh_p}$. Den senare rörelsen kan icke erbjuda några väsentliga skiljaktigheter från fall till fall, då den alltid regleras av samma enkla lag för hastigheten (ytlagen). Meridianpunktens rörelse kan däremot utfalla väsentligt olika i olika fall och bestämmer så godt som helt och hållet karaktären av partikelns rörelse. Diskussionen kan således till väsentlig del inriktas på den plankinematiska uppgiften att undersöka *meridianpunktens rörelse* och denna uppgift har genom det införda diagrammet blivit reducerad till frågan: huru rör sig punkten M på meridiankurvan, då dess hastighetshöjd h_m i varje ögonblick angives genom den motsvarande hjälpunktens H djup under indexlinjen?

Vid besvarandet av denna fråga är framför allt att märka, att den nyssnämnda punkten H på hjälpkurvan alltid måste befinna sig *under* indexlinjen eller eventuellt *på* densamma, men aldrig kan komma ovanför denna linje, alldenstund hastighetshöjden h_m då skulle bliva negativ och hastigheten v_m alltså imaginär.

Betrakta vi exempelvis diagrammet i fig. 2, så se vi att punkten H icke kan lämna den båge H_1H_2 , som faller emellan kurvans skärningspunkter H_1, H_2 med indexlinjen, när hjälpkurvan på andra sidan om dessa punkter fortsätter ovanför indexlinjen. Meridianpunkten M kan följaktligen endast röra sig på den motsvarande bågen M_1M_2 av meridiankurvan. Vi skola nu söka närmare bestämma karaktären av denna rörelse.

Vi tänka oss, att meridianpunkten M till en början befinner sig i en mellan M_1 och M_2 belägen punkt M_0 samt är stadd i rörelse i riktning mot M_1 . Den kan då icke stanna eller vända, förrän den framkommit till M_1 , enär hastigheten v_m icke dessförinnan blir noll. Den närmaste frågan är att avgöra, om den framkommer till M_1 på en ändlig tid eller icke. Denna fråga

kan lätt återföras till den analoga undersökningen vid ett mycket bekant rörelseproblem, nämligen då en punkt rör sig på en i ett vertikallplan innehållen kurva på sådant sätt, att hastighetshöjden i varje ögonblick är lika med punktens djup under en i samma plan innehållen vågrät linje, och resultatet blir i överensstämmelse härmed följande. Punkten framkommer till M_1 på en *ändlig* tid, om den mot M_1 svarande punkten H_1 på hjälpkurvan utgör en *enkel* skärningspunkt mellan denna kurva och indexlinjen, så att kurvans tangent i H_1 icke sammanfaller med denna linje. Däremot blir tiden i regel *oändlig*, om hjälpkurvan tangerar indexlinjen i nämnda punkt.¹

Under förutsättning att, som i fig. 2, hjälpkurvans tangent i H_1 icke sammanfaller med indexlinjen, rör sig alltså meridianpunkten M från M_0 till M_1 på en viss ändlig tid t_{01} . Vid framkomsten till M_1 blir dess hastighet $v_m = 0$ och det vore därför tänkbart, att den stannade i denna punkt; en enkel undersökning, som utföres nedan, visar emellertid, att denna möjlighet under samma förutsättning är utesluten. Då meridianpunkten, enligt vad ovan sagts, icke heller kan överskrida M_1 , måste den följaktligen vända i denna punkt och sålunda röra sig tillbaka mot M_0 . Därvid passerar den samma punkter av bågen med samma hastigheter som förut, ehuru åt motsatt håll, och måste sålunda efter tiden $2t_{01}$ (från början räknat) åter befinna sig i M_0 , nu stadd i rörelse mot M_2 . Gäller nu även för den mot M_2 svarande punkten H_2 på hjälpkurvan samma förutsättning som för H_1 , så måste meridianpunkten på samma sätt röra sig från M_0 till M_2 på en viss ändlig tid t_{02} , varefter den åter vänder och går mot M_1 , o. s. v. Meridianpunkten utför sålunda en *periodisk svängningsrörelse* på bågen M_1M_2 med vändpunkter i denna båges ändpunkter M_1 , M_2 och med perioden $T = 2(t_{01} + t_{02})$.

Partikelns rörelse på ytan måste då försiggå på sådant sätt, att den kretsar rundt den mot meridianbågen M_1M_2 svarande zonen, varvid bankurvan närmar sig till och tangerar ömsevis den ena, ömsevis den andra av de genom M_1 och M_2 gående parallellcirkelarna. Att bankurvan verkligen tangerar nämnda cirklar framgår därav, att i ifrågavarande punkter $h_m = 0$ men $h_p \neq 0$, alltså enligt ekv. (26) vinkeln $i = 0$. Dessa tangeringspunkter uppdelar bankurvan i kongruenta, resp. symmetriskt kongruenta delbågar, vilka beskrivas på samma tid $\frac{1}{2} T$.

¹ Ett undantagsfall kan inträffa, om hjälpkurvan i tangeringspunkten har krökningsradien *noll*, då den ifrågavarande tiden kan bli ändlig.

En rörelse av denna typ kalla vi i det följande en *zonrörelse*, de båda parallellcirklar, som begränsa zonen, kalla vi *vändcirkklarna*, de på dessa belägna banpunkterna, som utgöra topppunkter i banan, kalla vi ban-kurvans *absider*. Mellan två successiva absider växer azimutvinkeln ψ med ett konstant belopp, som vi kalla *absidvinkeln*¹ och beteckna med Ψ . Under tiden T , som utgör perioden i meridianpunktens rörelse, växer så-lunda azimutvinkeln med 2Ψ . Denna tid T kan lämpligen kallas *sväng-ningstiden* eller »kvasiperioden» i partikelns rörelse; endast i det undantags-fall, då absidvinkeln är kommensurabel med π , blir partikelns rörelse verk-ligen periodisk, varvid perioden blir en viss multipel av T .

De båda vändcirkklarna bliva bestämda av indexlinjens skärningspunkter H_1, H_2 med hjälpkurvan, i det de gå genom de mot dessa svarande punkterna M_1, M_2 av meridiankurvan. För att en verklig zonrörelse skall vara för handen, måste punkterna H_1 och H_2 emellertid enligt ovanstående vara *enkla* skärningspunkter mellan indexlinjen och hjälpkurvan, så att denna kurvas tangent icke i någondera punkten sammanfaller med index-linjen.

Om hjälpkurvan i stället tangerar indexlinjen i någon av dessa punkter, exempelvis H_1 , får rörelsen en helt annan karaktär. Meridianpunkten kan då, om den befinner sig i rörelse mot M_1 , aldrig nå fram till denna punkt,² utan kommer att asymptotiskt närma sig densamma; dess rörelse blir alltså *aperiodisk*. Partikeln kommer att oändligt många gånger kretsa rundt den motsvarande ytzonen i en bana, som obegränsat närmar sig till den genom M_1 gående parallellcirkeln, som sålunda får karaktären av en *asymptotisk gränscirkel*. Partikelns rörelse kan betraktas som en degenererad zonrörelse med oändligt stor absidvinkel och »svängningstid».

Ett annat gränsfall av zonrörelse är *rörelse på parallellcirkel*. Denna erhålles av zonrörelsen, om man tänker sig de båda vändcirkklarna rycka allt närmare varandra och slutligen sammanfalla, så att zonen samman-krymper till en enda parallellcirkel, gående genom en viss meridianpunkt M . Samtidigt rycka de mot vändcirkklarna svarande båda skärningspunkterna H_1, H_2 mellan hjälpkurvan och indexlinjen allt närmare varandra för att

¹ Då radien r på bågen M_1M_2 har ett minsta värde $r_{\min} > 0$, är enligt ekv. (10) $d\psi < \frac{C}{r_{\min}^2} dt$ och således absidvinkeln $\Psi < \frac{C}{r_{\min}^2} \cdot \frac{T}{2}$, alltså nödvändigtvis ändlig.

² Vi bortse här och i det följande från det i noten å föregående sida omnämnda, ytterst speciella undantagsfallet.

slutligen sammanfalla, och indexlinjens gränsläge blir sålunda hjälpkurvens tangent i den mot M svarande punkten H (fig. 3).

Detta bekräftas även genom direkt räkning. Då partikeln rör sig på en parallellcirkel, är meridianpunkten M i vila och dess hastighet v_m sålunda ständigt noll. Partikelns hastighet är konstant, i det man av (8) och

(11) får $v = v_p = \frac{c}{r}$. Vidare gälla ekvationerna $N \cos \theta = mg$, $N \sin \theta = \frac{mv^2}{r}$, av vilka erhållas $\frac{v^2}{gr} = \operatorname{tg} \theta = \frac{r}{q}$ och alltså hastighetshöjden $h =$

$= h_p = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2} \frac{r^2}{q} = -\frac{r'^2}{q'}$, det sista enligt ekv. (25). De båda hastighets-

höjderna h_m , h_p bliva alltså $h_m = 0$, $h_p = -\frac{r'^2}{q'}$ = hjälpkurvens subtangent på z -axeln,¹ och man ser, att den i sista stycket av § 2 angivna konstruktionen av indexlinjen just leder till att denna linje är hjälpkurvens tangent i H . Detta måste således alltid vara fallet, då rörelse på parallellcirkel äger rum eller m. a. o. då meridianpunkten är i vila.

I det förut diskuterade diagrammet, fig. 2, är det sålunda omöjligt, att meridianpunkten M efter framkomsten till M_1 skulle kunna stanna i denna punkt, då hjälpkurvens tangent i H_1 icke sammanfaller med indexlinjen.

Utom de nu nämnda kunna en hel del andra rörelsetyper förekomma. En klassificering av hela mångfalden av tänkbara rörelsetyper skulle sammanfalla med en klassificering av de olika tänkbara möjligheterna i fråga om hjälpkurvens form och läge i förhållande till indexlinjen. Utan att genomföra en sådan skola vi här genom ett enkelt resonemang skaffa oss en översikt över åtminstone de mera reguljära av dessa möjligheter.

Såsom framgår av föregående har man i varje särskilt fall endast att göra med en viss del av hjälpkurvan, exempelvis i diagrammet fig. 2 med bågen H_1HH_2 . Denna del, som vi vilja kalla den *aktuella* delen av hjälpkurvan, kan endast ligga inom ett bestämt område av vårt konstruktions-

¹ För att uttrycken för h_p skola vara rimliga, måste meridiankurvens subnormal q vara positiv och följaktligen hjälpkurvens subnormal q' negativ.

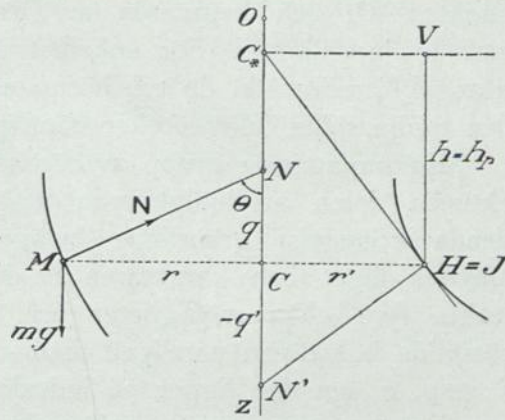


FIG. 3.

plan, nämligen inom den vinkel (av storleken $\frac{\pi}{2} - \theta$), som har sin spets i punkten C_* och begränsas av den nedåtriktade z -axeln och den nedåt-lutande indexlinjen. För enkelhets skull betrakta vi detta område som en triangel, i vilken då de två hörnpunkterna falla oändligt långt bort, så att den tredje sidan faller utefter oändlighetslinjen.

En omfattande grupp av rörelsetyper karakteriseras nu därav, att den aktuella delen av hjälpkurvan utgör en kurvbåge, som förbinder två på denna »triangelns» gränslinjer belägna punkter. Därvid erhållas olika fall alltefter läget och karaktären av dessa kurvbågens »ändpunkter». Vi betrakta fyra olika möjligheter och beteckna dessa för korthets skull med särskilda bokstäver, nämligen med a om punkten ligger på axeln Oz , med i , resp. u , om den ligger på indexlinjen och utgör en enkel skärningspunkt, resp. en tangeringspunkt mellan denna linje och hjälpkurvan, samt med w om den ligger på oändlighetslinjen. Genom kombination av två av dessa bokstäver, t. ex. $[wi]$, $[ia]$, $[ii]$ etc., kunna vi då karakterisera kurvbågens båda ändpunkter, varvid vi överenskomma, att den första bokstaven hänför sig till den lägre liggande ändpunkten, om dessa befinna sig på olika höjd.¹ I det kurvbågens läge karakteriserar partikelns rörelse, kunna vi sålunda tala om rörelser av typerna $[wi]$, $[ia]$, $[ii]$ etc.

Så framställer exempelvis diagrammet i fig. 4 en rörelse av typen $[wi]$, i det den aktuella delen av hjälpkurvan förenar en punkt på oändlighetslinjen (den oändligt avlägsna punkten på axeln Oz) med en punkt H_2 , som är belägen på indexlinjen och utgör en enkel skärningspunkt mellan denna linje och hjälpkurvan. Den betraktade ytan är en rotationsparaboloid med öppningen nedåt, och partikelns rörelse försiggår på den del av ytan, som ligger nedanför parallellcirkeln C_2M_2 . Denna cirkel bildar en vändcirkel, på vilken banan eventuellt kan ha en absid.

Diagrammet i fig. 5 framställer i stället en rörelse av typen $[ia]$, i det den aktuella delen av hjälpkurvan utgöres av bågen H_1O , vars lägre ändpunkt H_1 är en enkel skärningspunkt mellan indexlinjen och hjälpkurvan, medan den högre ändpunkten O är belägen på axeln Oz . Meridiankurvan är en bransch av en liksidig hyperbel med axeln Oz som ena asymptot; vid rotation kring denna alstrar den andra asymptoten ett vågrätt asymptotplan genom O . Partikelns rörelse försiggår på den del av ytan, som är

¹ Skulle någon av kurvbågens ändpunkter falla i en av »triangelns» hörnpunkter, är det lämpligt att betrakta punkten C_* såsom tillhörande axeln Oz och de båda andra såsom tillhörande oändlighetslinjen.

belägen mellan detta asymptotplan och parallellcirkeln C_1M_1 . Denna cirkel bildar en vändcirkel, på vilken bankurvan eventuellt kan ha en absid.

I båda dessa exempel består det möjliga området för partikels rörelse sålunda av en zon, som är oändligt utsträckt åt det ena hållet. Detsamma är även förhållandet vid rörelsetyperna $[wu]$, $[az]$, $[au]$ och $[ua]$, vilka kunna erhållas ur de föregående genom enkla modifikation. Zonen kan även vara oändligt utsträckt åt båda hållen, motsvarande rörelsetyperna $[wv]$, $[va]$ eller $[aa]$.

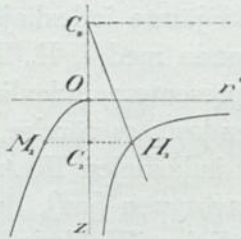


FIG. 4.

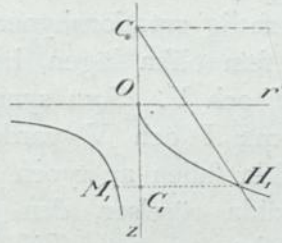


FIG. 5.

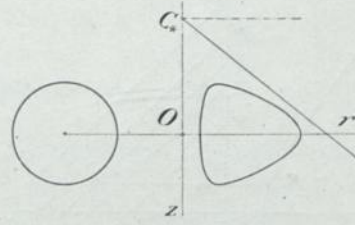


FIG. 6.

Återgå vi till den förut betraktade (egentliga) zonerörelsen, så utgör denna enligt den härmed införda beteckningen en rörelse av typen $[ii]$, i det den aktuella delen av hjälpkurvan — bågen H_1HH_2 i fig. 2 — förklarar två punkter H_1 , H_2 , vilka utgöra enkla skärningspunkter mellan hjälpkurvan och indexlinjen. Zonerörelsen kan degenerera i rörelser av typen $[iu]$, $[ui]$ eller $[uu]$, allteftersom den övre, den nedre eller båda vändcirkelarna övergå i asymptotiska gränscirklar. Det gränfall, då de båda vändcirkelarna sammanfalla i en — alltså rörelse på parallellcirkel — beteckna vi i anslutning härtill med $[u]$, i det den aktuella delen av hjälpkurvan i detta fall sammankrymper till en enda punkt, som utgör en tangeringspunkt mellan indexlinjen och hjälpkurvan.

Vi omnämna även det fall, då den aktuella delen av hjälpkurvan bildar en slutna kurva, som faller helt och hållet inom den förutnämnda »triangeln» utan att hava någon punkt gemensam med dess gränslinjer. Ett exempel visas av diagrammet i fig. 6, där den betraktade rotationsytan är en torus. Meridianpunkten kretsar rundt meridiankurvan med en periodisk rörelse och partikels bana slingrar sig skruvformigt rundt om ytan. Denna rörelsetyp beteckna vi med $[o]$.

Härmed äro naturligtvis ingalunda alla möjligheter uttömda, men det anförda får vara tillräckligt, då det är av föga intresse att ingå på mera singuljära specialfall.

På en given speciell rotationsyta kan naturligtvis i allmänhet endast ett fåtal av dessa olika rörelsetyper förekomma. För att studera dessa behöver man endast låta indexlinjen intaga olika lägen i förhållande till den fasta, av den givna ytans meridian bestämda hjälpkurvan. En och samma indexlinje kan därvid — om den skär hjälpkurvan i flera punkter eller denna består av flera skilda branscher — representera två eller flera skilda rörelser, som försiggå på helt olika delar av ytan.

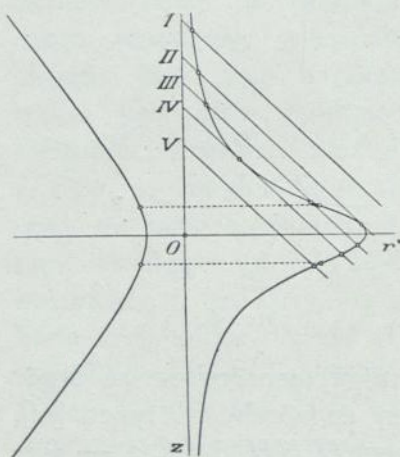


FIG. 7.

Så framställer exempelvis diagrammet i fig. 7 meridianen och hjälpkurvan för en enmantlig rotationshyperboloid jämte indexlinjer i fem olika lägen, betecknade med I, II, III, IV och V. Som synes representera indexlinjerna I och V vardera endast *en* rörelse, i båda fallen av typen $[wi]$, indexlinjen III *två* skilda rörelser, den ena av typen $[wi]$, den andra av typen $[ii]$, indexlinjen IV likaledes *två* skilda rörelser, den ena av typen $[wi]$, den andra av typen $[u]$, samt slutligen indexlinjen II *tre* olika rörelser av typerna $[wu]$, $[u]$ och $[ui]$. Allt som allt kunna på ytan förekomma rörelser av fem olika typer: $[wi]$, $[wu]$, $[ii]$, $[ui]$ och $[u]$.

För att erhålla de *analytiska* kriterierna för de lägeförhållanden i diagrammet, som lagts till grund för föregående diskussion, ha vi att gå tillbaka till de ekvationer, som bildade utgångspunkten vid diagrammets konstruktion. Enligt ekv. (19) och (20) gäller för höjdskillnaden $HJ = z - z'$ mellan hjälpkurvans och indexlinjens på samma vertikal belägna punkter uttrycket

$$z - z' = \frac{1}{r^2} \cdot f(z),$$

där z är koordinaten för den på hjälpkurvan belägna punkten H och z' för den motsvarande punkten J på indexlinjen. Analytiskt bliva sålunda z -koordinaterna för indexlinjens skärningspunkter med hjälpkurvan bestämda såsom rötter till ekvationen $f(z) = 0$, varvid en enkel skärningspunkt svarar mot en enkel rot, en tangeringspunkt mot en dubbel eller flerfaldig rot. Speciellt utgör alltså z -koordinaten för en eventuellt förekommande vändcirkel en enkel, för en asymptotisk gränscirkel en dubbel eller flerfaldig rot

till denna ekvation. Om z -värdet för någon parallellcirkel på rotationsytan gör $f(z) > 0$, så visar ekvationen, att den motsvarande punkten på hjälpkurvan ligger *under* indexlinjen, är åter $f(z) < 0$, ligger nämnda punkt *ovanför* indexlinjen. Den för diagrammet gällande lagen, att den aktuella delen av hjälpkurvan måste befinna sig *under* indexlinjen, eventuellt med sina ändpunkter *på* denna, är således den geometriska formen för det förut i samband med ekv. (12) omnämnda realitetsvillkoret, att $f(z)$ måste vara ≥ 0 för alla vid rörelsen förekommande z -värden.

§ 4. Närmare studium av hjälpkurvan.

Av den i föregående paragraf utförda diskussionen framgår, att en närmare kännedom om hjälpkurvans form är av vikt för de frågor, som diagrammet avser att belysa. Vi skola därför här i en del avseenden komplettera vad som förut (i § 2) sagts om sambandet mellan hjälpkurvans form och meridiankurvans.

Vi betrakta två motsvariga punkter, $M(r, z)$ på meridiankurvan och $H(r', z)$ på hjälpkurvan, om vilka vi förutsätta, att ingendera är oändligt avlägsen, varav då även följer, att ingendera ligger på axeln Oz . I § 2 har visats, att de båda kurvornas subtangenter på axeln Oz stå i det samband med varandra, att hjälpkurvans är hälften så stor som meridiankurvans, och härav framgår, att hjälpkurvans tangent blir vågrät eller lodrät samtidigt med meridiankurvans. Då vi i det följande använda oss av meridiankurvans normal n och subnormal q , måste vi ytterligare förutsätta, att dessa storheter äro ändliga, och utesluta alltså det fall, då kurvorna i de motsvarande punkterna M och H hava vågräta tangenter.

Enligt härledningen till ekv. (25) gäller

$$(28) \quad \frac{dr'}{dz} = 2 \frac{r'}{r^2} q.$$

Om man deriverar denna likhet och i resultatet insätter samma uttryck för $\frac{dr'}{dz}$ samt $\frac{dr}{dz} = -\frac{q}{r}$, erhålles

$$(29) \quad \frac{d^2 r'}{dz^2} = 2 \frac{r'}{r^4} \left(4q^2 + r^2 \frac{dq}{dz} \right).$$

På grund av (5) och (2) är emellertid

$$(30) \quad 4q^2 + r^2 \frac{dq}{dz} = n^2 \kappa + 3q^2 = n^2(\kappa + 3 \cos^2 \theta),$$

och alltså fås

$$(31) \quad \frac{d^2 r'}{dz^2} = 2n^2 \frac{r'}{r^4} (\kappa + 3 \cos^2 \theta).$$

Av denna relation framgår, att hjälpkurvan i punkten H är konvex eller konkav mot axeln Oz , allteftersom uttrycket $\kappa + 3 \cos^2 \theta$ i motsvarande punkt M av meridiankurvan har ett positivt eller negativt värde, samt att H i allmänhet är en inflexionspunkt, om nämnda uttryck är noll.

Är meridiankurvan i punkten M *konkav* mot axeln Oz , så är krökningskoefficienten $\kappa > 0$, alltså även $\kappa + 3 \cos^2 \theta > 0$, och hjälpkurvan måste följaktligen i motsvarande punkt H vara *konvex* mot Oz . Detsamma gäller även, om M är en inflexionspunkt ($\kappa = 0$) med varken vågrät eller lodrät inflexionstangent. Är däremot meridiankurvan i M *konvex* mot Oz , så är krökningskoefficienten $\kappa < 0$ och uttrycket $\kappa + 3 \cos^2 \theta$ kan då bli positivt, negativt eller noll, varföre hjälpkurvan kan vara *konvex* eller *konkav* eller eventuellt ha en inflexionspunkt i H .

Såsom exempel på tillämpningen härav skola vi undersöka hjälpkurvans form vid en *torus*, då meridiankurvan alltså är en cirkel, vars radié må vara a och vars medelpunkt vi antaga ligga på avståndet $c > a$ från axeln Oz . Den del av hjälpkurvan, som svarar mot den yttre hälften av cirkelperiferien, är då enligt det nyss sagda alltid konvex mot Oz , men för den andra hälften måste man närmare undersöka tecknet av uttrycket $\kappa + 3 \cos^2 \theta$. Nu är enligt fig. 8

$$\kappa = MN : MK = - \left(\frac{c}{\sin \theta} - a \right) : a = - \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{c}{a} - \sin \theta \right)$$

och alltså

$$\kappa + 3 \cos^2 \theta = - \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{c}{a} - 4 \sin \theta + 3 \sin^3 \theta \right).$$

Om θ växer från 0 till $\frac{\pi}{2}$, så varierar det inom parenteserna stående uttrycket på det sätt, att det till en början avtar från $\frac{c}{a}$ till $\frac{c}{a} - \frac{16}{9}$ för att sedan åter växa upp till $\frac{c}{a} - 1$. Om $\frac{c}{a} > \frac{16}{9}$, är följaktligen $\kappa + 3 \cos^2 \theta < 0$ inom hela intervallet $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ och den motsvarande delen av hjälpkurvan

är då överallt konkav mot axeln Oz (fig. 8). Är åter $\frac{16}{9} > \frac{c}{a} > 1$, så blir uttrycket noll för två mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$ liggande θ -värden, θ_1 och θ_2 , och uttrycket $x + 3 \cos^2 \theta$ antar då positiva värden inom intervallet $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Den ifrågavarande delen av hjälpkurvan har då två inflexionspunkter¹ och är emellan dessa konvex mot axeln Oz (fig. 9).

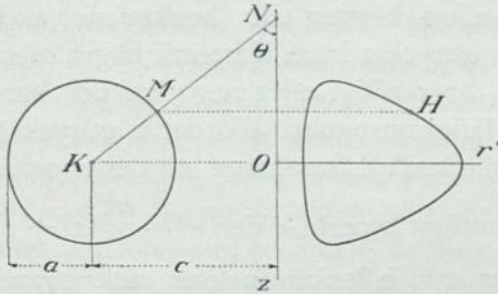


FIG. 8.

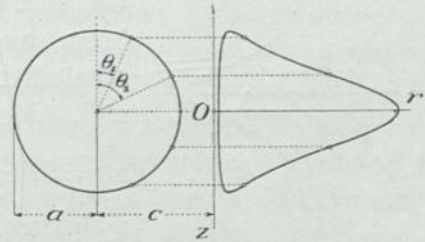


FIG. 9.

För en torus, vid vilken $c > \frac{16}{9}a$, bildar alltså hjälpkurvan en konvex kontur, som faller helt och hållet på ena sidan om var och en av sina tangenter och som av varje sekant skäres i endast två (reella) punkter. På ytan kunna då förekomma följande rörelsetyper: skruvformigt kretsande rörelse [o], zonrörelse [iz], rörelse på parallellcirkel [u] samt rörelse av typen [uu], där de båda asymptotiska gränscirklarna bildas av en och samma parallellcirkel. Vid zonrörelse måste, såsom lätt inses, alltid något parti av ytans yttre och nedre del tillhöra den zon, inom vilken partikeln rör sig.

För en torus, vid vilken $a < c < \frac{16}{9}a$, har däremot hjälpkurvan en sådan form, att den kan skäras av indexlinjen i fyra punkter, av vilka två eller tre eventuellt kunna sammanrycka till en tangeringspunkt eller ock två och två parvis sammanrycka till två tangeringspunkter. Här tillkomma därför rörelser av typerna [ui] och [iu] samt [uu] med skilda gränscirklar;

¹ De mot inflexionspunkterna svarande θ -värdena (θ_1 och θ_2) kunna beräknas ur relationen

$$\sin \theta = \frac{4}{3} \cos \left(\frac{\pi}{3} \pm \frac{1}{3} \arccos \frac{9c}{16a} \right).$$

vidare kunna zonrörelser förekomma, vid vilka rörelsen helt och hållet försiggår på ytans inre och övre del.

En annan i en del fall bekvämare form för derivatan $\frac{d^2 r'}{dz^2}$ är följande

$$(32) \quad \frac{d^2 r'}{dz^2} = \frac{r'}{r^4} \{2\varrho'^2(z) - \varrho(z)\varrho''(z)\},$$

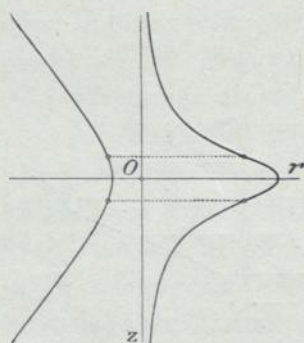


FIG. 10.

vilken omedelbart erhålles av ekv. (29), (1) och (3). Hjälpkurvan är alltså konvex eller konkav mot axeln Oz , allteftersom uttrycket inom klamret i högra medlem av (32) är positivt eller negativt, och har i allmänhet en inflexionspunkt, då detta uttryck är noll. Med användande härav finner man exempelvis, att vid den enmantliga hyperboloiden $r^2 = \frac{a^2}{b^2}(z^2 + b^2)$ hjälpkurvan har två inflexionspunkter, motsvarande punkterna $r = \frac{2}{\sqrt{3}}a$, $z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}b$ på meridiankurvan (fig. 10), och att den mellan dessa är konkav, men eljest konvex mot axeln Oz , i överensstämmelse med fig. 7.

Vid uppritning av hjälpkurvan kan det även vara av värde att känna dess krökningsradie åtminstone i en eller annan speciell punkt. Uttrycka vi denna krökningsradie medelst längden n' av hjälpkurvans normal och en krökningskoefficient κ' i formen $\frac{1}{\kappa'} \cdot n'$ på analogt sätt som för meridiankurvan i § 1, så blir enligt (5) och (31)

$$(33) \quad \kappa' = -\frac{r'^3}{n'^2} \cdot \frac{d^2 r'}{dz^2} = -2 \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \left(\frac{r'}{r}\right)^4 (\kappa + 3 \cos^2 \theta).$$

Härav kan κ' och därmed den sökta krökningsradien bestämmas under samma förutsättningar som förut, d. v. s. att ingendera av de motsvariga punkterna är oändligt avlägsen, samt att kurvorna i dessa punkter icke hava vågräta tangenter. Betraktas speciellt två motsvariga punkter med lodräta tangenter, så är $\theta = \frac{\pi}{2}$, $n = r$, $n' = r'$ och man får $\kappa' = -2 \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \kappa$ samt

$\frac{n'}{\kappa'} : \frac{n}{\kappa} = -\frac{1}{2} \frac{r}{r'}$, varav framgår att förhållandet mellan längderna av hjälp-

kurvans och meridiankurvans krökningsradier i detta fall är $= \frac{1}{2} \frac{r}{r'}$. För det uteslutna fallet, då det är fråga om motsvariga punkter med *vågräta* tangenter, finner man genom en enkel direkt räkning, att det nyssnämnda förhållandet i stället antar värdet $4 \left(\frac{r'}{r} \right)^2$.

I det föregående har antagits, att hjälpkurvans punkter bestämts av meridiankurvans genom beräkning eller konstruktion enligt relationen (21) $r' = L^3 : r^2$. Om emellertid meridiankurvan är given genom ytans ekvation (1) $r^2 = \varrho(z)$, kan man även direkt konstruera hjälpkurvan ur dess ekvation (24) $r' = L^3 : \varrho(z)$ och kan därvid eventuellt erhålla branscher, som icke svara mot någon reell del av meridiankurvan. Sådana branscher kalla vi i det följande *supplementära* till skillnad från hjälpkurvans *egentliga* del, som punkt för punkt motsvarar den givna meridiankurvan. Tydligen erhåller man en supplementär bransch, så snart funktionen $\varrho(z)$ inom något intervall för variabeln z antar reella men *negativa* värden; abskissan r' blir då negativ, medan den för hjälpkurvans egentliga del är positiv.¹

Så är exempelvis vid sfären $r^2 = l^2 - z^2$ meridiankurvan reell endast inom intervallet $l \geq z \geq -l$, men däremot hjälpkurvan, som är en kurva av tredje graden $r'(l^2 - z^2) = L^3$, reell för alla z -värden. Den fullständiga hjälpkurvan består då av en egentlig bransch med positiva abskissor inom intervallet $l \geq z \geq -l$ och två supplementära branscher med negativa abskissor inom intervallen $z > l$ och $z < -l$ (se fig. 15).

Även sådana supplementära branscher av hjälpkurvan kunna spela en viss roll vid rörelseproblemets behandling. Är det nämligen fråga om att genom kvadratur beräkna tiden t eller azimutvinkeln ψ ur ekv. (14), resp. (15), kan det vara av vikt att känna beskaffenheten och läget av samtliga rötterna till ekvationen $f(z) = 0$. De reella rötterna till denna ekvation representeras nu, såsom framgår av det sista stycket i § 3, av z -koordinaterna för indexlinjens skärningspunkter med hjälpkurvan, men för att på detta sätt erhålla *samtliga reella* rötter måste man givetvis medtaga jämväl denna kurvas supplementära branscher, vilka kunna skäras av index-

¹ Vid de i figurerna återgivna diagrammen har axeln Or' alljämt antagits positiv åt höger, varvid alltså hjälpkurvans olika branscher fördela sig så, att de egentliga falla åt höger, de supplementära — då sådana förekomma — till vänster om axeln Oz . De senare äro för tydligare åtskillnad uppritade med prickade linjer, medan hjälpkurvans egentliga del ävensom meridiankurvan äro fulldragna. I det meridiankurvan överallt uppritats endast till vänster om axeln Oz , erhålla de särskilda kurvdelarna var sitt område, och deras betydelse framgår direkt av deras läge och uppritning.

linjens förlängning på andra sidan om axeln Oz . Av den fullständiga hjälpkurvans form kan man då i allmänhet omedelbart se, huru det förhåller sig med realiteten hos rötterna till ekvationen $f(z) = 0$ ävensom angiva gränser för de reella rötterna. Så visar en blick på hjälpkurvan för sfären $r^2 = l^2 - z^2$ (fig. 15), att ekvationen $f(z) = 0$, som i detta fall är av tredje graden, vid varje reell rörelse har tre reella rötter, vilka — om de i avtagande följd betecknas med z_1, z_2 och z_3 — uppfylla villkoren¹ $l > z_1 > 0, z_1 \geq z_2 > -z_1$ och $-l > z_3$.

Vi anmärka slutligen, att man genom olika val av konstruktionslängden L har möjlighet att giva hjälpkurvan en mera utbredd eller mera sammandragen form, alltefter som det i varje särskilt fall kan vara lämpligt. De olika hjälpkurvor, som erhållas vid olika val av L , äro inbördes affina med avseende på axeln Oz och omvänt är tydligt, att en och samma hjälpkurva svarar mot oändligt många inbördes affina meridiankurvor. Så är exempelvis kurvan i fig. 15 hjälpkurva icke endast för sfären utan även för samtliga rotationsellipsoider med samma axeltoppar.

§ 5. Rörelse på parallellcirkel.

Med användande av de i föregående paragraf gjorda utvecklingarna skola vi nu något närmare studera rörelsen av typen $[u]$ eller *rörelse på parallellcirkel*, i det vi speciellt uppehålla oss vid frågan om denna rörelses *stabilitet*.

I § 3 har omnämnts, att en sådan rörelse erhålles som ett gränsfall av zonerörelse, då man tänker sig de båda vändcirkelnarna rycka allt närmare varandra och slutligen sammanfalla. Samtidigt rycka de mot vändcirkelnarna svarande båda skärningspunkterna H_1, H_2 mellan hjälpkurvan och indexlinjen allt närmare varandra för att slutligen sammanfalla i en viss punkt H och indexlinjens gränsläge blir hjälpkurvans tangent i denna punkt. Då vid zonerörelse den aktuella delen av hjälpkurvan utgöres av en under indexlinjen belägen båge $H_1 H_2$, medan hjälpkurvan på ömse sidor om denna båges ändpunkter fortsätter *ovanför* indexlinjen, måste i gränsläget hjälpkurvan höja sig över indexlinjen på ömse sidor om tangeringspunkten H . Genom en sådan gränsövergång kan man således endast komma till rörelse på en parallellcirkel, som är så belägen, att hjälpkurvan i omgivningen av den motsvarande punkten H ligger *över* sin tangent i samma punkt.

¹ Härvid har då i enlighet med gjorda överenskommelser antagits, att ytkonstanten \mathcal{C} är $\neq 0$, så att indexlinjens lutningsvinkel $\delta > 0$.

Emellertid visar den direkta räkningen, som även utförts i § 3, att rörelseekvationerna vid rörelse på parallellcirkel äro satisfierade, så snart indexlinjen utgör en tangent till hjälpkurvan i den mot parallellcirkeln svarande punkten, oavsett på vilken sida om tangenten kurvan faller. Sålunda kan exempelvis vid det i fig. 7 framställda diagrammet för en enmantlig rotationshyperboloid såväl indexlinjen II som indexlinjen IV representera en rörelse av typen $[u]$, i vartdera fallet på den parallellcirkel, som svarar mot linjens tangeringspunkt med hjälpkurvan. Men medan den av IV representerade rörelsen $[u]$ kan tänkas erhållen som gränsfall av en zonrörelse, är detta tydligen icke förhållandet med den rörelse av denna typ, som representeras av indexlinjen II.

Rörelse på parallellcirkel kan alltså vara av två olika slag, allteftersom hjälpkurvan i den mot parallellcirkeln svarande punkten H ligger över eller under sin tangent. Skiljaktigheten mellan dessa olika fall visar sig framför allt i den väsentligt olika inverkan, som en liten *störning* av rörelsen har på bankurvans form. Detta kan lätt undersökas med hjälp av rörelsedagrammet.

Om en rörelse i allmänhet undergår en mindre störning, varigenom partikelns hastighet plötsligt men helt litet ändras, så motsvaras detta av en liten ändring i indexlinjens läge. Är det speciellt fråga om rörelse på parallellcirkel, då således indexlinjen utgöres av hjälpkurvans tangent i den mot parallellcirkeln svarande punkten H , så kan denna ändring i indexlinjens läge bestå antingen i en liten vridning kring H eller i en liten parallellförskjutning *uppåt* eller i en kombination av båda. Det första inträffar nämligen, om partikelns hastighet utefter parallellcirkeln ökas eller minskas utan riktningsändring, det andra om en hastighetskomponent utefter meridianen införes utan att hastigheten utefter parallellcirkeln ändras, det sista om båda förändringarna äro kombinerade.

Ligger nu hjälpkurvan i H *över* tangenten, så kommer tydligen en sådan förflyttning av indexlinjen att ha till följd, att tangeringspunkten H upplöser sig i två enkla skärningspunkter H_1 , H_2 , belägna helt nära varandra på ömse tidor om H eller eventuellt den ena sammanfallande med denna, varvid den lilla bågen $H_1 H_2$ faller under indexlinjen. Denna båge blir då den aktuella delen av hjälpkurvan och partikeln kommer således att röra sig på en trång zon, som omfattar eller ligger intill den ursprungliga parallellcirkeln.

Ligger åter hjälpkurvan i H *under* tangenten, inträda helt andra förhållanden. Sker endast en förändring i hastighetens storlek utan riktnings-

ändring, så att indexlinjen vrider sig kring H , så upplöser sig även nu tangeringspunkten i två enkla skärningspunkter H_1, H_2 — av vilka den ena sammanfaller med H — men bågen $H_1 H_2$ faller därvid *över* indexlinjen. Man erhåller då den aktuella delen av hjälpkurvan genom att från H följa den gren av kurvan, som ligger under indexlinjen, tills man eventuellt stöter på någon ny skärningspunkt med indexlinjen eller kommer till axeln Oz eller ut i oändligheten. Införes åter en hastighetskomponent utefter meridianen utan att hastigheten utefter parallellcirkeln ändras, så att indexlinjen parallellförskjutes uppåt, så bortfalla skärningspunkterna i omgivningen av H , och den aktuella delen av hjälpkurvan kommer då att breda ut sig från H åt båda hållen. Äro de nämnda förändringarna kombinerade, så kommer den aktuella delen av hjälpkurvan ävenledes att på liknande sätt breda ut sig antingen huvudsakligen åt det ena eller åt båda hållen och i allmänhet kommer sålunda partikelns nya bana att väsentligt avvika från den ursprungliga bancirkeln.

Då partikeln beskriver en parallellcirkel och hjälpkurvan i den motsvarande punkten H ligger *över* sin tangent, kommer således en *liten* störning att framkalla en ävenledes *liten* avvikelse från den ursprungliga banformen, men ligger hjälpkurvan *under* tangenten kan även den minsta störning framkalla en mycket *stor* avvikelse. I förra fallet är således rörelsen i denna mening *stabil*, i senare fallet *labil*.

För att rörelse på en viss parallellcirkel över huvud skall kunna äga rum, måste den motsvarande punkten H ha ett sådant läge på hjälpkurvan, att kurvans tangent i denna punkt kan vara en indexlinje, d. v. s. tangentens lutningsvinkel δ mot positiva axelriktningen Or' måste uppfylla villkoren $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. Detta är fallet, om hjälpkurvas subnormal q' i ifrågasvarande punkt har ett ändligt och från noll skilt negativt värde. Överfört till meridiankurvan blir villkoret, att denna kurvas subnormal q i den på parallellcirkeln liggande punkten M har ett ändligt och från noll skilt *positivt* värde. Meridiankurvas normal i M får således varken vara lodrät eller vågrät och måste träffa axeln Oz i en punkt, som ligger ovanför parallellcirkeln. På en sfär kan en sådan rörelse sålunda endast förekomma på den nedre halvsfären, på en enmantlig rotationshyperboloid endast ovanför strupcirkeln, på en torus endast på ytans yttre och nedre eller på dess inre och övre del, o. s. v.

För att en sådan rörelse skall vara *stabil*, fordras nu därjämte, enligt vad nyss visats, att hjälpkurvan i den mot parallellcirkeln svarande punkten

H ligger över sin tangent. För en sfär är följaktligen — som en blick på diagrammet fig. 15 visar — rörelsen alltid stabil på varje parallellcirkel, där den över huvud kan förekomma. För en enmantlig rotationshyperboloid

$r^2 = \frac{a^2}{b^2}(z^2 + b^2)$ (fig. 10) är rörelsen stabil endast om parallellcirkelns höjd

över strupcirkeln är $> \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot b$. För en torus (fig. 8 och 9) är rörelsen stabil

på ytans yttre och nedre del, men i allmänhet labil på dess inre och övre del; dock kan på denna även förekomma ett område, inom vilket rörelsen är stabil, nämligen om alstringscirkelns avstånd till rotationsaxeln är mindre

än $\frac{16}{9}$ av cirkelns radie.

För att överföra stabilitetsvillkoret till meridiankurvan observera vi, att då indexlinjen alltid bildar spetsig vinkel mot positiva axelriktningen Or' , hjälpkurvan i tangeringspunkten H faller över eller under denna linje, allteftersom kurvan är konvex eller konkav mot axeln Oz . Man kan således omedelbart använda sig av de i föregående paragraf härledda kriterierna härför, exempelvis av tecknet på uttrycket $x + 3 \cos^2 \theta$.

De fullständiga villkoren för att rörelse på en viss parallellcirkel över huvud skall vara möjlig och därjämte vara stabil, kunna således uttryckas så, att för den på parallellcirkeln liggande punkten M av meridiankurvan de båda storheterna q och $x + 3 \cos^2 \theta$ måste vara ändliga och > 0 .

Av föregående framgår, att *stabil* rörelse på parallellcirkel alltid kan betraktas som ett gränsfall av zönrörelse, uppkommet genom att de båda vändcirkelarna rycka allt närmare varandra och slutligen sammanfalla. Vid denna sammanryckning tenderar *absidvinkeln* Ψ mot ett bestämt gränsvärde, som vi nu skola beräkna.

Vi utgå alltså från en zönrörelse och antaga M_1, M_2 med koordinaterna z_1, z_2 resp. vara de punkter på meridiankurvan, som motsvara de båda vändcirkelarna, varvid M_1 antages svara mot den nedre vändcirkeln, så att $z_1 > z_2$. Dessa punkter tänkas sedan närma sig varandra och slutligen sammanfalla i en på meridianbågen $M_1 M_2$ belägen punkt M , för vilken nyssnämnda villkor äro uppfyllda. Då meridiankurvas tangent i M alltså icke är vågrät, kunna vi alltid antaga M_1 och M_2 från början så nära intill M , att kurvtangenten icke är vågrät i någon punkt på bågen $M_1 M_2$ och att z -koordinaten för en punkt, som genomlöper bågen, varierar *monoton*, alltså ständigt växer, om punkten löper i riktningen från M_2 till M_1 . Absidvinkeln Ψ kan då enligt ekv. (15) uttryckas genom integralen

$$\Psi = \sqrt{\frac{\mathcal{C}^2}{2g}} \int_{z_2}^{z_1} \frac{n}{r^2 \sqrt{f(z)}} dz,$$

där $n = \sqrt{\nu(z)}$ och $r^2 = \varrho(z)$ äro givna funktioner av z . Då enligt det sista stycket i § 3 $z = z_1$ och $z = z_2$ äro enkla rötter till ekvationen $f(z) = 0$ och funktionen $f(z)$ är positiv inom intervallet $z_1 > z > z_2$, måste man ha

$$f(z) = (z_1 - z)(z - z_2) \cdot \varphi(z),$$

där $\varphi(z) > 0$ för $z_1 \geq z \geq z_2$. Insättes detta i föregående integral, kan man skriva uttrycket för absidvinkeln i formen

$$\Psi = \int_{z_2}^{z_1} \frac{\Phi(z)}{\sqrt{(z_1 - z)(z - z_2)}} dz,$$

där

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{\mathcal{C}^2}{2g}} \cdot \frac{n}{r^2 \sqrt{\varphi(z)}}.$$

Om funktionen $\Phi(z)$ inom hela integrationsintervallet hade ett konstant värde Φ , skulle man av det sista uttrycket för Ψ genom integrationens utförande erhålla $\Psi = \pi \cdot \Phi$. I verkligheten är $\Phi(z)$ variabel men inom allt trängre gränser, ju närmare punkterna M_1 och M_2 ligga intill varandra. När de sammanfalla i punkten M , erhåller $\Phi(z)$ ett bestämt värde Φ och gränsvärdet för Ψ blir då $\pi \cdot \Phi$.

För att beräkna Φ beteckna vi för ett ögonblick z -koordinaten för punkten M med z_M . När z_1 och z_2 bliva $= z_M$, övergår ovanstående uttryck för funktionen $f(z)$ till $f(z) = -(z - z_M)^2 \cdot \varphi(z)$, varvid funktionen $\varphi(z)$ enligt ekv. (13) blir bestämd av identiteten

$$(z - z_*) \cdot \varrho(z) - \frac{\mathcal{C}^2}{2g} = -(z - z_M)^2 \cdot \varphi(z).$$

Ur denna bilda vi två nya identiteter genom att två gånger derivera med avseende på z och insätta sedan i dessa likheter $z = z_M$, då vi få

$$\begin{aligned} (z_M - z_*) \cdot \varrho(z_M) - \frac{\mathcal{C}^2}{2g} &= 0, & (z_M - z_*) \cdot \varrho'(z_M) + \varrho(z_M) &= 0, \\ (z_M - z_*) \cdot \varrho''(z_M) + 2\varrho'(z_M) &= -2\varphi(z_M). \end{aligned}$$

Om vi åter utelämnar indextecknet m , gäller alltså för punkten M enligt ekv. (1) och (3)

$$(z - z_*) r^2 - \frac{\mathcal{C}^2}{2g} = 0, \quad 2q(z - z_*) - r^2 = 0,$$

$$(z - z_*) \frac{dq}{dz} + 2q = \varphi(z),$$

varav följer $z - z_* = \frac{1}{2} \frac{r^2}{q}$ och

$$\frac{\mathcal{C}^2}{2g} = \frac{1}{2} \frac{r^4}{q}, \quad \varphi(z) = \frac{1}{2q} \left(4q^2 + r^2 \frac{dq}{dz} \right).$$

Om dessa uttryck insätts i ovanstående uttryck för $\Phi(z)$, erhålles $\Phi = n : \sqrt{4q^2 + r^2 \frac{dq}{dz}}$ eller enligt ekv. (30) $\Phi = 1 : \sqrt{x + 3 \cos^2 \theta}$, och följaktligen blir det sökta gränsvärdet för absidvinkeln

$$(34) \quad \Psi = \frac{\pi}{\sqrt{x + 3 \cos^2 \theta}}.$$

Under rotmärket uppträder alltså här samma uttryck, som enligt föregående måste vara > 0 för att rörelsen skall vara stabil.

Även ifråga om rörelse på parallellcirkel kan man alltså, i det fall då rörelsen är *stabil*, tala om en bestämd absidvinkel Ψ , ehuru banan icke har några distinkta absider. Betydelsen därav blir då den, att vid en liten störning av rörelsen uppkommer en zorrörelse, vars absidvinkel närmar sig till värdet Ψ , i samma mån som störningen är liten.

Den i § 3 för zorrörelse definierade »svängningstiden» T närmar sig ävenledes med avtagande zorbredd till ett bestämt gränsvärde. Detta blir, som lätt verifieras, $= 2\Psi \cdot \sqrt{\frac{q}{g}}$, i överensstämmelse därmed att partikelns hastighet i bancirkeln enligt § 3 är $= r \sqrt{\frac{g}{q}}$ och dess vinkelhastighet alltså $= \sqrt{\frac{g}{q}}$. Man har därvid att erinra sig att T enligt definitionen anger den tid, under vilken azimutvinkeln växer med dubbla absidvinkeln. Tiden för ett omlopp blir i stället $= 2\pi \sqrt{\frac{q}{g}}$, alltså lika med tiden för en fullständig

svängning av en enkel pendel, vars längd är lika med längden av meridiankurvas subnormal g (Euler¹).

§ 6. Zonrörelse.

Vi skola här utföra en del detaljundersökningar, som hänföra sig till den i överskriften nämnda, viktigaste rörelsetypen.

Vi antaga därvid till en början, att de båda vändcirkeln äro givna till storlek och läge, utan att rotationsytan i övrigt behöver vara känd. Givna äro således radierna r_1 och r_2 i dessa cirklar samt avståndet mellan dem, vilket vi beteckna med $2c$. I det index 1 som förut hänför sig till den nedre, index 2 till den övre cirkeln, är då

$$(35) \quad z_1 - z_2 = 2c.$$

I rörelsedigrammet (fig. 2) känner man nu punkterna M_1, M_2 på meridiankurvan och — sedan konstruktionslängden L valts — alltså även punkterna H_1, H_2 på hjälpkurvan med abskissorna $r_1' = \frac{L^3}{r_1^2}$, $r_2' = \frac{L^3}{r_2^2}$ resp. Då dessa punkter även ligga på indexlinjen, måste på grund av denna linjes lutning gälla att $r_1' > r_2'$, varav följer $r_1 < r_2$. Den *nedre* vändcirkeln måste således alltid ha *mindre* radie än den *övre*.

För indexlinjens lutningsvinkel δ med axeln Or' erhålles

$$(36) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{z_1 - z_2}{r_1' - r_2'} = \frac{2c}{\frac{L^3}{r_1^2} - \frac{L^3}{r_2^2}} = \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{2c}{L^3}$$

och alltså blir enligt ekv. (22)

$$(37) \quad \frac{\mathcal{C}^2}{2g} = \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot 2c.$$

Enär vidare $z_1 - z_* = r_1' \operatorname{tg} \delta$ och $z_2 - z_* = r_2' \operatorname{tg} \delta$, erhålles

$$(38) \quad z_1 - z_* = \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot 2c, \quad z_2 - z_* = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot 2c.$$

Ytkonstanten \mathcal{C} och nollnivåplanets höjder över vändcirkeln äro därmed uttryckta med de givna storheterna.

För att konstruktivt bestämma nollnivåplanets läge kan man använda rörelsedigrammet (indexlinjen) eller ock direkt utgå från någon av ekv. (38). En enkel konstruktion är följande.

¹ *Mechanica*, tom. 2, § 890.

I fig. 11 antagas de båda vändcirkelarna på vanligt sätt representerade genom sina på axeln Oz liggande centra C_1, C_2 och radierna $C_1M_1 = r_1, C_2M_2 = r_2$, därvid enligt vad nyss nämnts $r_1 < r_2$. Vi göra $C_1M'_1 = C_1M_1$ och draga linjerna $M_2M'_1, M_2M_1$, vilka må skära axeln i punkterna C_λ, C_μ resp. Punkten C_λ är då den *inre*, punkten C_μ den *yttre likställighetspunkten* till de två vändcirkelarna. Vi uppsöka vidare midtpunkten C_c på sträckan $C_\lambda C_\mu$, vilken punkt vi kalla *centralpunkten*. Då gäller, som strax skall visas, att nollnivåplanets höjd över den ena vändcirkeln är lika med den andra vändcirkeln höjd över centralpunkten. Man kan alltså erhålla den punkt C_* , där nollnivån skär axeln genom att avsetta uppåt från C_2 stycket $C_2 C_* = C_1 C_c$.

Beteckna vi nämligen z -koordinaterna för punkterna C_λ, C_μ, C_c med z_λ, z_μ, z_c resp., så att

$$(39) \quad z_c = \frac{z_\lambda + z_\mu}{2},$$

och beteckna vi vidare vinklarna $C_2 C_\lambda M_2, C_2 C_\mu M_2$ med λ, μ resp., så är

$$(40) \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{r_2 + r_1}{2c}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{r_2 - r_1}{2c}$$

samt

$$z_\lambda - z_2 = r_2 \operatorname{ctg} \lambda, \quad z_\mu - z_2 = r_2 \operatorname{ctg} \mu$$

och ur dessa senare ekvationer erhålles då genom addition och halvering

$$z_c - z_2 = \frac{r_2}{2} (\operatorname{ctg} \lambda + \operatorname{ctg} \mu) = \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot 2c = z_1 - z_*,$$

varav påståendets riktighet följer.

Vi skriva den sista relationen i den mer symmetriska formen

$$(41) \quad z_c + z_* = z_1 + z_2.$$

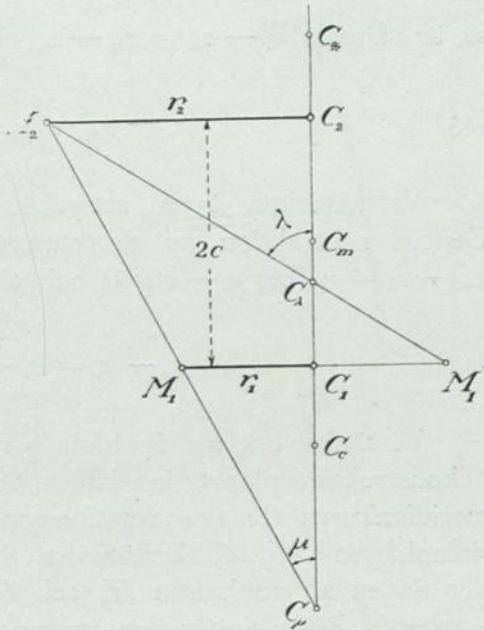


FIG. 11.

Införa vi jämväl midtpunkten C_m av sträckan $C_1 C_2$ och beteckna dess z -koordinat med z_m , så att

$$(42) \quad z_m = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

så är sålunda $z_c - z_m = z_m - z_*$ och enligt (38) erhålles då

$$(43) \quad z_c - z_m = z_m - z_* = \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot c.$$

Vi anteckna även uttrycket för de lika avstånden $C_\lambda C_c = C_c C_\mu$. Genom subtraktion av de närmast efter (40) stående likheterna erhålles $z_\mu - z_\lambda = r_2 (\text{ctg } \mu - \text{ctg } \lambda)$ och alltså blir enligt (40) ifrågavarande uttryck

$$(44) \quad z_\mu - z_c = z_c - z_\lambda = \frac{r_1 r_2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot 2c.$$

Vi tänka oss nu de båda givna punkterna M_1, M_2 förenade med en i konstruktionsplanet innehållen kurvbåge $M_1 M_2$, vilken vi antaga vara meridiankurva för den rotationsyta, på vilken rörelsen försiggår. Av meridianbågen $M_1 M_2$ bestämes den aktuella delen av hjälpkurvan och blir då en av punkterna H_1 och H_2 begränsad båge. Denna båge måste emellertid ligga *under* den genom H_1 och H_2 gående indexlinjen och därav framgår att meridianbågen $M_1 M_2$ icke kan väljas alldeles godtyckligt. Dess gränsläge bestämes tydligen av den meridiankurva, vars motsvarande hjälpkurva just skulle bli den räta linjen $H_1 H_2$ med ekvationen $r' = (z - z_*) \text{ctg } \delta$. Den häremot svarande meridiankurvan har då ekvationen $r^2 = L^2 : (z - z_*) \text{ctg } \delta$ eller enligt (22) och (37)

$$r^2 = \frac{C^2}{2g(z - z_*)} = \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{2c}{z - z_*}.$$

Den så bestämda kurvan skola vi kalla *gränskurvan*. Dess form framgår av fig. 12. Den har två rätvinkliga asymptoter, nämligen den lodräta axeln $Oz = C_* C_1$ och den vågräta nollnivån genom C_* , och är konvex mot dem båda.

För att en viss meridianbåge $M_1 M_2$ skall motsvara en reell zonrörelse med de givna cirklarna som vändcirklar, fordras då att bågen helt och hållet faller på den konkava sidan av gränskurvan och icke går in till denna annat än i ändpunkterna M_1, M_2 . Den får icke heller tangera gränskurvan

i någon av dessa ändpunkter, enär eljest hjälpkurvan tangerar indexlinjen i motsvarande punkt och den motsvarande cirkeln således icke blir en vändcirkel utan en asymptotisk gränscirkel.

En enkel konstruktion av tangenten till gränskurvan erhålles omedelbart av det i § 2 omnämnda sambandet mellan meridiankurvas och hjälpkurvas subtangenter på axeln Oz , då vi beakta att hjälpkurvan i ifrågavarande fall är en rät linje genom C_* . Hjälpkurvas subtangent är således lika med punktens djup under nollnivån och gränskurvans subtangent blir följaktligen lika med dubbla detta djup men riktad åt motsatt håll. Speciellt erhålles sålunda gränskurvans tangent M_2G_2 i punkten M_2 genom att avsätta sträckan $C_2G_2 = 2C_*C_2$ och analogt tangenten M_1G_1 i M_1 . Beteckna vi dessa tangenters lutningsvinklar med γ_1, γ_2 resp. enligt figuren, är alltså

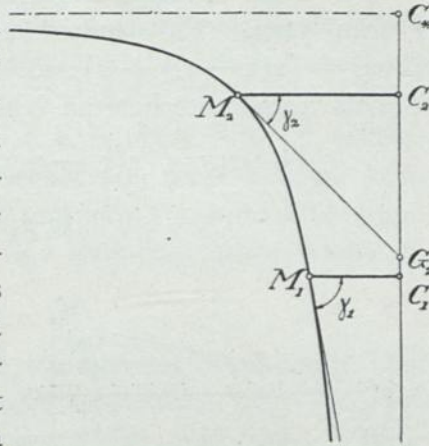


FIG. 12.

$$(45) \quad \operatorname{tg} \gamma_1 = 2 \frac{z_1 - z_*}{r_1}, \quad \operatorname{tg} \gamma_2 = 2 \frac{z_2 - z_*}{r_2}.$$

Man kan även lätt konstruera gränskurvans krökningsradie i en godtycklig punkt, då man beaktar att enligt utvecklingarna i § 4, ekv. (31) eller (33), uttrycket $x + 3 \cos^2 \theta$ måste vara noll i alla punkter på ifrågavarande kurva.¹

I fig. 13 hava vi nu antagit, att de givna punkterna M_1, M_2 äro förbundna med en meridianbåge M_1M_2 , som uppfyller det angivna villkoret, i det denna båge (den grovt utdragna) ligger på den konkava sidan om gränskurvan (den fint dragna bågen). Vi skola visa, huru man genom

¹ O. STAUDE har i en uppsats i Acta mathematica, tome II, använt denna »gränskurva» för bestämning av vändcirkelarna och diskussion av rörelsen. Härigenom realiseres således även en geometrisk representation av rörelsen, och det är tydligt att denna står i ett enkelt samband med den här beskrivna. Man kan i själva verket betrakta den ena som en transformation av den andra, i det punkttransformationen $r' = L^3 : r^2$ örför meridiankurvan i hjälpkurvan och gränskurvan i indexlinjen. Genom denna öfvergång vinnas emellertid väsentliga fördelar, huvudsakligen sammanhängande därmed, att lägeförhållandena mellan en kurva och en rät linje äro lättare att öfverse än mellan två kurvor. Vidare märkes, att man vid studiet av olika rörelser på samma rotationsyta endast har att inlägga en serie räta linjer i st. f. en serie kurvor, ävensom att man genom införande jämväl av hjälpkurvas supplementära branscher erhåller en representation av samtliga reella rötter till ekvationen $f(x) = 0$.

enkla konstruktioner kan bestämma bankurvans oskulerande plan och krökningsradie i dess på vändcirkeln belägna absider.

För detta ändamål begagna vi oss av uttrycket (27) för normaltrycket N från ytan. På vändcirkeln är $h_m = 0$ och $h_p = h = z - z_*$, alltså $N : mg = [2(z - z_*) + q] : n$. Speciellt blir då på nedre vändcirkeln, om de motsvarande storheterna betecknas med index 1, enligt ekv. (45) och (2)

$$\begin{aligned} N_1 : mg &= [2(z_1 - z_*) + q_1] : n_1 = (r_1 \operatorname{tg} \gamma_1 + q_1) : n_1 = \\ &= \sin \theta_1 \operatorname{tg} \gamma_1 + \cos \theta_1 = \frac{\cos(\gamma_1 - \theta_1)}{\cos \gamma_1}. \end{aligned}$$

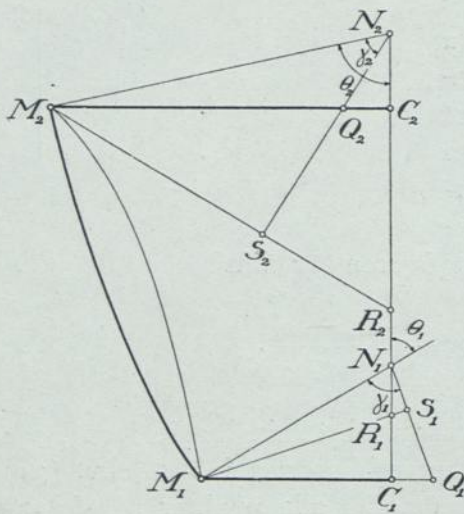


FIG. 13.

Vi konstruera nu en triangel $M_1N_1Q_1$, i vilken M_1N_1 är meridiankurvens normal i M_1 , medan sidan M_1Q_1 är vågrät och vinkeln $M_1N_1Q_1 = \gamma_1$, och draga i denna triangel den mot sidan N_1Q_1 vinkelräta höjdlinjen M_1S_1 , vilken må skära den vertikala höjdlinjen N_1C_1 i R_1 . Då blir $N_1 : mg = \cos(\gamma_1 - \theta_1) : \cos \gamma_1 = \sin M_1R_1N_1 : \sin N_1M_1R_1 = M_1N_1 : N_1R_1$. Därav framgår att $M_1N_1R_1$ är en »krafttriangel», i vilken sidorna M_1N_1 och N_1R_1 äro likriktade med och proportionella mot de verkande krafterna N_1 och mg , och i vilken den tredje sidan M_1R_1 följaktligen anger riktningen och — i samma skala — storleken av dessa krafter resultant.

Tänka vi oss nu, att M_1 är en punkt på bankurvan, alltså en av dess absider, så står bankurvans tangent i denna punkt vinkelrät mot konstruktionsplanet, och bankurvans oskulerande plan, som innehåller tangenten och kraftresultanten, står följaktligen även vinkelrätt mot konstruktionsplanet och skär detta utefter linjen M_1R_1 . Denna linje blir således även tangent i M_1 till bankurvans projektion på konstruktionsplanet.

Sedan oskulerande planets läge sålunda bestämts, erhålles enligt Meuniers teorem bankurvans mot M_1 svarande krökningscentrum genom att projicera N_1 på nämnda plan; detta krökningscentrum ligger alltså i S_1 . Betrakta vi vidare bankurvans projektion på ett vågrätt plan, vilket vi för enkelhets skull tänka oss lagt genom M_1 , så följer av kända satser rörande krökningsradiens förändring vid projicering, att Q_1 blir projektionskurvens

krökningscentrum i M_1 , som naturligtvis även bildar en absid (toppunkt) på projektiionskurvan. Denna kurvas krökningsradie i M_1 får alltså värdet $n_1 \sin \gamma_1 : \cos (\gamma_1 - \theta_1)$.

Liknande konstruktioner och satser gälla för bankurvans på den övre vändcirkeln belägna absider. Är M_2 en sådan, och är M_2N_2 meridiankurvas normal i M_2 , så avsätta vi mot denna vinkeln $M_2N_2S_2 = \gamma_2$ och draga linjen M_2R_2 vinkelrät mot N_2S_2 . Denna linje M_2R_2 blir då oskulerande planets spår och tillika tangent för bankurvans projektiion på konstruktionsplanet. Vidare blir S_2 bankurvans mot M_2 svarande krökningscentrum och $M_2Q_2 = n_2 \sin \gamma_2 : \cos (\gamma_2 - \theta_2)$ krökningsradien i kurvans horisontalprojektiion.

Vi anmärka, att lutningsvinkeln mellan bankurvans oskulerande plan och ytans tangentplan i absiderna på den nedre vändcirkeln har värdet γ_1 , på den övre värdet γ_2 ; dessa lutningsvinklar äro alltså oberoende av meridiankurvas form och bestämda enbart av de båda vändcirkelnas storlek och avstånd. I samma mån meridiankurvas tangent i M_1 eller M_2 närmar sig till gränskurvans tangent i samma punkt, kommer bankurvans oskulerande plan att närma sig till vågrätt läge.

I praktiskt förekommande fall, exempelvis vid zonrörelse på sfären i närheten av jämviktsläget, kan man ofta erhålla en tillräckligt noggrann grafisk bestämning av bankurvan med användande enbart av de nyss angivna konstruktionerna, under förutsättning att absidvinkeln är känd. Såsom exempel är i fig. 14 behandlat det fall, då en partikel utför zonrörelse på en sfär med radien l mellan två vändcirklar, som äro belägna på avstånden $0,8 l$ och $0,6 l$ under sfärens centrum. Absidvinkeln antager då, såsom vi sedan skola beräkna, värdet $\Psi = 113,2^\circ$. För att erhålla horisontal- och vertikalprojektiionerna av två successiva delbågar av bankurvan avsätta vi först denna vinkel Ψ i horisontalprojektiionen två gånger efter vartannat, varigenom tre successiva absider bliva bestämda. Därvid är antaget, att den i vertikalplanet belägna meridianpunkten M_2 utgör den första absiden. Därefter konstruera vi i vertikalprojektiionen som i fig. 11 de båda vändcirkelnas inre och yttre likställighetspunkter C_λ och C_μ , utsätta midtpunkten mellan dem, centralpunkten C_c , och bestämma nollnivåplanets spårpunkt C_* genom att avsätta stycket $C_1C_* = C_2C_c$. Sedan erhålles i M_1 vinkeln $C_1M_1G_1 = \gamma_1$ (i figuren markerad med *en* båge) genom att förena M_1 med en punkt G_1 (ej utsatt i figuren), belägen på axeln på

avståndet $C_1G_1 = 2C_1C_*$ under C_1 , och på samma sätt i M_2 vinkeln $C_2M_2G_2 = \gamma_2$ (markerad med två bågar) genom att förena M_2 med en punkt G_2 på avståndet $C_2G_2 = 2C_2C_*$ under C_2 . Avsätts sedan i O samma vinklar $M_1OQ_1 = \gamma_1$, $M_2OQ_2 = \gamma_2$, så bliva M_1Q_1 och M_2Q_2 längderna av krökningsradierna i motsvarande absider i bankurvans horisontalprojektion. Uppslås dessa krökningscirklar, så falla de, såsom framgår

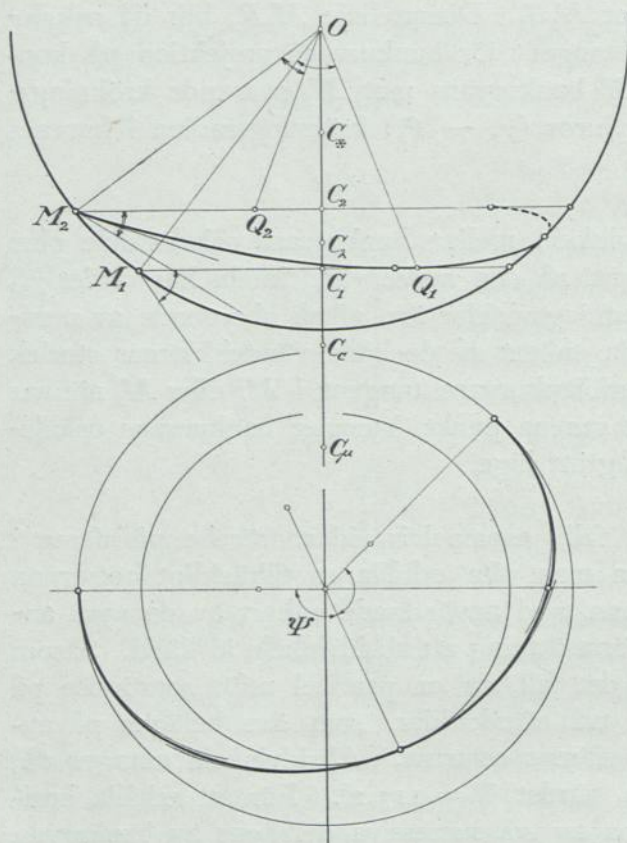


FIG. 14.

av figuren, synnerligen nära intill varandra, och horisontalprojektion av bankurvan blir genom dem praktiskt taget bestämd. Efter inläggande av denna projektkurva kan man sedan konstruera vertikalprojektion enligt beskrivande geometriens vanliga metoder; projektkurvans tangent i M_2 erhålles genom att avsätta vinkeln γ_2 mot meridiankurvans tangent eller genom att draga en linje vinkelrät mot OQ_2 .

För att kunna utföra dessa konstruktioner måste man emellertid känna *absidvinkeln* Ψ och överhuvudtaget kan denna betecknas såsom det viktigaste av de element, som hänföra sig till bankurvans form. Vi skola i det följande ingående syssel-

sätta oss med denna vinkels beräkning¹ i speciella fall och förutskicka här endast ett par allmänna anmärkningar.

¹ Är meridiankurvan endast *grafiskt* given, måste man naturligtvis tillgripa en grafisk bestämning av vinkeln Ψ och en sådan skulle även vara av betydelse i andra fall, då den analytiska beräkningen blir allt för komplicerad. En sådan grafisk bestämning av Ψ skulle kunna utföras antingen i samband med och som resultat av den å sid. 233 omnämnda bestämningen av bankurvan genom grafisk integration eller ock direkt genom planimetrering,

Utgår man som förut från de båda vändcirklarna såsom givna och tänker sig punkterna M_1, M_2 (fig. 11) förenade med olika meridianbågar, så blir enligt föregående absidvinkeln Ψ alltid ändlig för varje sådan båge, som faller på den konkava sidan av gränskurvan och icke har någon annan punkt än ändpunkterna M_1, M_2 gemensam med denna samt icke heller tangerar denna kurva i M_1 eller M_2 . Absidvinkeln varierar i övrigt med meridianbågens läge och närmar sig till ∞ , då meridianbågen närmar sig till gränskurvan. Att denna vinkel icke heller har något absolut minimum utan kan antaga huru små värden som helst, framgår av det i ekv. (34) funna gränsvärdet, som tydligen kan bliva huru litet som helst, om krökningskoefficienten α blir stor.

Om punkterna M_1, M_2 förenas med två olika meridianbågar m_i, m_y , vilka motsvara varandra punkt för punkt på sådant sätt, att i motsvarande punkter (utom ändpunkterna) kurvan m_y alltid har större abskissa r än kurvan m_i , så kommer väl i regel absidvinkeln Ψ att utfalla *mindre* för den *yttre* meridianbågen m_y än för den *inre* m_i , alldenstund nämnaren i högra membrum av (16) starkt växer med r , men även det motsatta förhållandet är tänkbart, då faktorn n^2 i samma uttrycks täljare eventuellt kan växa ännu kraftigare. Uppgiften att bestämma meridianbågen så att den motsvarande absidvinkeln erhåller ett extremt värde, kan naturligtvis på vanligt sätt behandlas enligt variationskalkylens metoder,¹ men frågan om den sålunda erhållna extremalkurvans betydelse måste här lämnas öppen.

varvid man exempelvis kan utgå från den lätt visade relationen $d\psi = -\frac{dr}{r \operatorname{tg} i'} = \frac{1}{2} \frac{dr'}{r' \operatorname{tg} i'}$, där i' är den efter ekv. (26) nämnda vinkeln mellan bankurvans och parallellcirkelns tangenter i horisontalprojektion. Emellertid ligger det i sakens natur, att en sådan grafisk bestämning måste bli tämligen osäker och den numeriska beräkningen är därför att föredraga, när den kan utföras.

¹ Man erhåller därvid en differentialekvation av andra ordningen, åt vilken lätt kan givas en geometrisk tolkning. Den uttrycker nämligen, att varje integralkurva, som går genom en godtyckligt vald punkt P (på den konkava sidan om gränskurvan), har sitt mot P svarande krökningscentrum på en viss av punkten P entydigt bestämd linje p . Denna linje skär vertikalen genom P i en punkt Q , så belägen, att mittpunkten G av sträckan PQ ligger på gränskurvan, och den skär vidare gränskurvans tangent i G i en punkt Q_1 , vars abskissa är $\frac{3}{4}$ av abskissan för punkten Q . Genom dessa punkter Q, Q_1 blir sålunda linjen p bestämd. När punkten P rycker in mot M_1 eller M_2 , blir tydligen linjen p gränskurvans tangent i samma punkt. Härav följer att extremalkurvan i ändpunkterna M_1, M_2 skär gränskurvan under rät vinkel, och vid zonrörelse på den motsvarande ytan komma därför bankurvans oskulerande plan i absiderna att bliva vertikala.

II. Sfäriska pendeln.

§ 7. Svängningstiden och absidvinkeln.

Vi skola nu speciellt antaga, att den rotationsyta, på vilken rörelsen försiggår, är en *sfär*. Detta är på enklaste sätt realiserat vid *sfäriska pendeln*. Normaltrycket från ytan ersättes därvid av spänningen i snöret, men som denna endast kan vara en dragspänning, blir pendelkulan endast ensidigt bunden vid den sfäriska ytan. För att upprätthålla den i slutet av § 1 gjorda förutsättningen skola vi därför här en gång för alla överenskomma, att vi tänka oss pendelsnöret ersatt med en viktlös stång i alla de fall, då normaltrycket under något skede av rörelsen blir riktat utåt, vilken möjlighet närmare undersökes i § 9.

Om upphängningspunkten O tages till origo, och l betecknar pendelsnörets längd, blir den sfäriska ytans ekvation

$$(46) \quad r^2 = l^2 - z^2.$$

Av de i § 1 omnämnda geometriska elementen blir subnormalen $q = z$, normalen $n = l$ och krökningskoefficienten $\kappa = 1$. Vinkeln θ blir vinkeln mellan pendelsnöret och den nedåtriktade vertikalen genom O , och man får

$$(47) \quad z = l \cos \theta, \quad r = l \sin \theta.$$

Pendelsnörets läge i ett godtyckligt ögonblick under rörelsen kan, såsom omnämndes i föregående uppsats (sid. 205), angivas genom två vinklar, *höjdvinkeln* θ och *azimutvinkeln* ψ . I stället för den förra skola vi emellertid här fortfarande använda oss av partikelns (pendelkulans) z -koordinat, då detta ställer sig något bekvämare för räkningen; övergången till höjdvinkeln kan, när så önskas, lätt ske enligt (47).

Hjälpkurvan blir en kurva av tredje graden

$$r^3 = \frac{L^3}{l^2 - z^2}$$

med dels axeln Oz , dels de båda vågräta linjerna $z = \pm l$ som asymptoter. Kurvan består, som redan omnämnts i § 4, av en egentlig bransch, belägen emellan de två vågräta asymptoterna, samt två supplementära branscher över och under dessa enligt fig. 15.

Är ett godtyckligt begynnelsestillstånd givet, så kan man på sätt som visats i sista stycket av § 2 omedelbart bestämma indexlinjens läge och vi kunna därför i stället antaga detta såsom känt. Indexlinjen måste antingen skära hjälpkurvans egentliga bransch i *två* punkter eller tangera densamma i *en* punkt, och de enda möjliga rörelsetyperna äro således zonerörelse och rörelse på parallellcirkel. Vi

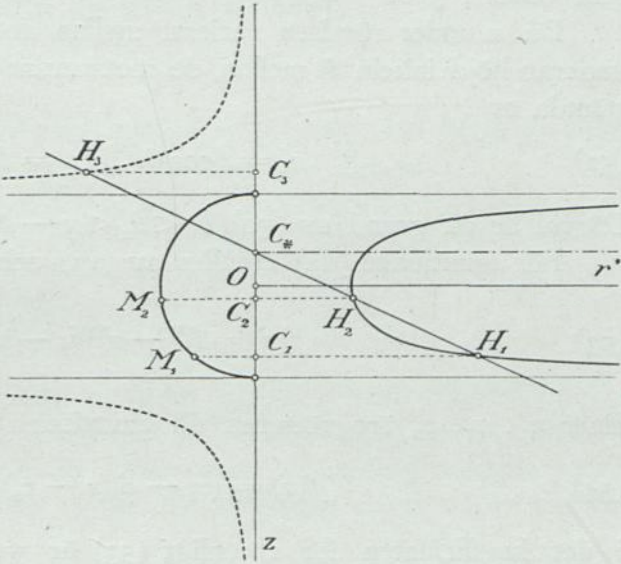


FIG. 15.

bortse här från den senare, som är generellt behandlad i § 5, och hålla oss således till *zonerörelse*. Indexlinjen skär då hjälpkurvans egentliga bransch i två skilda punkter H_1, H_2 och måste dessutom skära kurvan i en tredje reell punkt H_3 , vilken på grund av indexlinjens lutning nödvändigt måste ligga på den övre av de båda supplementära branscherna. Äro

$$(48) \quad l > z_1 > z_3 > -l > z_2,$$

samt vidare

$$(49) \quad z_1 > 0, \quad z_1 + z_2 > 0,$$

såsom omedelbart framgår av indexlinjens lutning och hjälpkurvans symmetriska form. Man har följaktligen $z_1 > \pm z_2$ och

$$(50) \quad z_1^2 > z_2^2.$$

Skärningspunkterna H_1, H_2 bestämma de båda vändcirkelarna, vilka i diagrammet som vanligt representeras genom sina centra C_1, C_2 och radier

$C_1 M_1, C_2 M_2$. I det följande skola vi utgå från z -koordinaterna z_1, z_2 för dessa vändcirklar såsom givna och söka uttrycka övriga storheter med dem. Till en början har man för beräkning av radierna $r_1 = C_1 M_1, r_2 = C_2 M_2$ uttrycken

$$(51) \quad r_1^2 = l^2 - z_1^2, \quad r_2^2 = l^2 - z_2^2.$$

På grund av (50) blir alltid $r_1 < r_2$ i överensstämmelse med vad som generellt visats i § 6.

Då z under rörelsen varierar mellan de båda gränsvärdena z_1 och z_2 , varierar höjdvinkeln θ mellan de motsvarande gränsvärdena θ_1 och θ_2 , bestämda av

$$(52) \quad z_1 = l \cos \theta_1, \quad z_2 = l \cos \theta_2.$$

Därvid är på grund av (50) $\theta_1 < \theta_2 < \pi - \theta_1$.

För funktionen $f(z)$ erhålles av (13) och (46) uttrycket

$$(53) \quad f(z) = (l^2 - z^2)(z - z_*) - \frac{\mathcal{C}^2}{2g}.$$

Enär z_1, z_2, z_3 äro rötterna till ekvationen $f(z) = 0$, måste man även ha

$$(54) \quad f(z) = (z_1 - z)(z - z_2)(z - z_3),$$

i det koefficienten för z^3 enligt (53) är $= -1$. Då även övriga koefficienter i dessa båda uttryck måste vara lika, gälla de tre relationerna

$$(55) \quad z_1 + z_2 + z_3 = z_*,$$

$$(56) \quad z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = -l^2$$

och

$$z_1 z_2 z_3 = -z_* l^2 - \frac{\mathcal{C}^2}{2g},$$

medelst vilka z_3, z_* och \mathcal{C} kunna beräknas som funktioner av z_1 och z_2 . För z_* och \mathcal{C} får man därvid uttryck, som äro identiska med de generella (38) och (37), då man beaktar att vid sfären $r_2^2 - r_1^2 = z_1^2 - z_2^2 = 2l(z_1 + z_2)$. Speciellt erhålles sålunda i enlighet med (37)

$$(57) \quad \frac{\mathcal{C}^2}{2g} = \frac{r_1^2 r_2^2}{z_1 + z_2}.$$

För beräkning av z -koordinaten för den tredje skärningspunkten H_3 mellan indexlinjen och hjälpkurvan ger ekv. (56) formeln

$$(58) \quad z_3 = -\frac{l^2 + z_1 z_2}{z_1 + z_2}.$$

Om man utgår från hjälpcirklarna såsom givna, kan man även lätt konstruktivt bestämma den punkt C_3 , som utgör projektionen av H_3 på axeln Oz . Av ekv. (41) och (55) följer nämligen relationen

$$(59) \quad z_c + z_3 = 0,$$

vilken visar, att punkten C_3 och centralpunkten C_c (fig. 11) ligga på ömse sidor om sfärens medelpunkt O på lika avstånd från denna.

Enär ytans normal är konstant, $n = l$, erhållas av (14), (15), (46) och (57)

$$(60) \quad \left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{l^2}{2g f(z)}, \quad \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 = \frac{r_1^2 r_2^2}{z_1 + z_2} \cdot \frac{l^2}{(l^2 - z^2)^2 \cdot f(z)}.$$

Vår närmaste uppgift är att av dessa uttryck genom integration beräkna t och ψ . Då $f(z)$ är ett polynom i z av tredje graden, bliva de uppträdande integralerna *elliptiska*. Vid deras behandling anknyta vi till föregående uppsats, vars formler vi här till åtskillnad citera under beteckningen $EI(1)$, $EI(2)$ etc.

För att överföra de ifrågakvarande integralerna till Legendres normalformer använda vi substitutionen

$$(61) \quad z = z_1 - (z_1 - z_2) \sin^2 \varphi,$$

där hjälpvinkeln φ då blir de elliptiska integralernas *amplitudvinkel*. Då φ varierar från 0 till $\frac{\pi}{2}$, avtar z från z_1 till z_2 . I anslutning därtill betrakta vi den *uppstigande* rörelsen, i det vi utgå från en på den *nedre* vändcirkeln liggande absid och räkna såväl tiden t som azimuthvinkeln ψ från denna. Mot $\varphi = 0$ svara då $t = 0$ och $\psi = 0$; när φ växer, växa även t och ψ ; för $\varphi = \frac{\pi}{2}$ blir $t =$ halva svängningstiden $\frac{1}{2} T$ och $\psi =$ absidvinkeln Ψ .

Genom substitutionen (61) antaga de tre linjära faktorerna i $f(z)$ formen

$$z_1 - z = (z_1 - z_2) \sin^2 \varphi, \quad z - z_2 = (z_1 - z_2) \cos^2 \varphi, \quad z - z_3 = (z_1 - z_3) \Delta^2 \varphi,$$

och man får

$$(62) \quad \frac{dz^2}{f(z)} = \frac{4}{z_1 - z_3} \cdot \frac{d\varphi^2}{\Delta^2 \varphi}.$$

Därvid är $\Delta\varphi$ den i EI (2) definierade rotfunktionen, bildad med modylen $k^2 = (z_1 - z_2) : (z_1 - z_3)$, vilken enligt (48) ligger mellan 0 och 1. För den motsvarande *modylvinkeln* α gäller då enligt EI (3) och (5):

$$(63) \quad \sin^2 \alpha = k^2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}, \quad \cos^2 \alpha = k'^2 = \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}.$$

Denna vinkel kan tydligen lätt konstrueras i diagrammet, exempelvis genom en på C_1C_3 som diameter uppslagen halvcirkelbåge, vilken skäres av en vågrät linje genom C_2 i en punkt A , då vinkeln $C_1AC_2 = \alpha$.

Om uttrycket (62) införes i den första av ekvationerna (60), erhålla vi då efter rotutdragning, enär t växer med φ ,

$$(64) \quad dt = \sqrt{\frac{2l^2}{g(z_1 - z_3)}} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Sättes alltså

$$(65) \quad \frac{2l^2}{z_1 - z_3} = l',$$

få vi genom integration av (64) det i EI (15) angivna uttrycket

$$(66) \quad t = F(\alpha, \varphi) \cdot \sqrt{\frac{l'}{g}},$$

i det $\varphi = 0$ skall svara mot $t = 0$. Härav fås vidare som i EI (16) och (17) för svängningstiden uttrycken

$$(67) \quad T = 2F(\alpha) \cdot \sqrt{\frac{l'}{g}} = R(\alpha) \cdot \pi \sqrt{\frac{l'}{g}}.$$

Är exempelvis $z_1 = 0,8 l$, $z_2 = 0,6 l$, så blir enligt (58) $z_3 = -\frac{37}{35} l$,

alltså $z_1 : z_2 : z_3 : l = 28 : 21 : -37 : 35$ och enligt (65) $l' = \frac{14}{13} l$. Vidare

blir enligt (63) $\sin^2 \alpha = \frac{7}{65}$, varav $\alpha = 19,16^\circ$, $2\alpha = 38,32^\circ$ och ur tabellen sid. 210 $K(\alpha) = 1,0287$. Alltså erhålles för svängningstiden

$$T: \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 1,0287 \cdot \sqrt{\frac{14}{13}} = 1,0675.$$

För att på liknande sätt beräkna ψ ur den andra ekvationen i (60) ha vi jämväl att uttrycka den i nämnaren förekommande faktorn $l^2 - z^2$ med hjälpvinkeln φ . Vi skriva för detta ändamål

$$\frac{2l}{l^2 - z^2} = \frac{1}{l+z} + \frac{1}{l-z} = \frac{1}{(l+z_1)(1-p_1 \sin^2 \varphi)} + \frac{1}{(l-z_1)(1-p_2 \sin^2 \varphi)},$$

där

$$(68) \quad p_1 = \frac{z_1 - z_2}{l + z_1}, \quad p_2 = -\frac{z_1 - z_2}{l - z_1}.$$

Genom införande härav och av uttrycket (62) erhålles då efter rotutdragning

$$d\psi = \left\{ \frac{B_1}{1-p_1 \sin^2 \varphi} + \frac{B_2}{1-p_2 \sin^2 \varphi} \right\} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

och vid integration alltså i överensstämmelse med EI (18)

$$(69) \quad \psi = B_1 \Pi(p_1, \alpha, \varphi) + B_2 \Pi(p_2, \alpha, \varphi),$$

i det $\varphi = 0$ skall svara mot $\psi = 0$. Därvid är

$$(70) \quad B_1(l+z_1) = B_2(l-z_1) = \frac{r_1 r_2}{\sqrt{(z_1+z_2)(z_1-z_2)}},$$

där man har att taga den positiva kvadratrotten, enär ψ växer med φ .

Av (68) och (63) verifieras lätt på grund av (48), att parametern p_1 ligger inom intervallet k^2 till 1, medan parametern p_2 är negativ. Båda de i uttrycket (69) ingående elliptiska integralerna av tredje slaget tillhöra således den *cirkulära* klassen (sid. 214) och kunna följaktligen uttryckas med den i föregående uppsats införda modifierade normalformen $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \varphi)$. Detta är här så mycket bekvämare, som koefficienterna B_1 och B_2 just hava värdena

$$(71) \quad B_1 = \sqrt{\frac{(1-p_1)(p_1-k^2)}{p_1}}, \quad B_2 = \sqrt{\frac{(1-p_2)(p_2-k^2)}{p_2}},$$

såsom lätt verifieras av (63), (68) och (70). För den första integralen, vars parameter p_1 uppfyller villkoren $k^2 < p_1 < 1$, får man därvid direkt av (71) och *EI* (25)

$$B_1 \Pi(p_1, \alpha, \varphi) = A(\alpha, \beta_1, \varphi).$$

För den andra integralen med negativ parameter måste man däremot enligt *EI* (22) införa en ny parameter

$$p_0 = \frac{p_2 - k^2}{p_2 - 1} = \frac{(z_1 - z_2)(l - z_3)}{(z_1 - z_3)(l - z_2)} = \frac{l - z_3}{l - z_2} \cdot k^2$$

och får sedan enligt (71) samt *EI* (23) och (25)

$$B_2 \Pi(p_2, \alpha, \varphi) = A(\alpha, \beta_0, \varphi) + A_0 F(\alpha, \varphi) + \arctg \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{A_0 A \varphi},$$

där

$$(72) \quad A_0 = \frac{k^2}{\sqrt{-p_0 p_2}} = \sqrt{\frac{(l - z_1)(l - z_2)}{(l - z_3)(z_1 - z_3)}}.$$

Parametervinklarna β_0 och β_1 skola därvid bestämmas enligt *EI* (26), alltså exempelvis ur ekvationerna

$$(73) \quad \sin^2 \beta_0 = \frac{p_0 - k^2}{k'^2 p_0} = \frac{z_1 - z_3}{l - z_3}, \quad \sin^2 \beta_1 = \frac{p_1 - k^2}{k'^2 p_1} = \frac{l - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Införas dessa uttryck i (69) och sättes sedan $\varphi = \frac{\pi}{2}$, erhålles absidvinkeln uttryckt i formen

$$\Psi = A_0 F(\alpha) + A(\alpha, \beta_0) + A(\alpha, \beta_1)$$

eller med införande av de i föregående uppsats tabulerade funktionerna enligt *EI* (14) och (30) slutligen

$$(74) \quad \Psi = \{A_0 K(\alpha) + \mathbb{I}(\alpha, \beta_0) + \mathbb{I}(\alpha, \beta_1)\} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Vid givna värden på z_1 och z_2 kan man således ur detta uttryck numeriskt beräkna absidvinkeln med hjälp av tabellerna sid. 210—13. Är exempelvis som nyss $z_1 = 0,8 l$, $z_2 = 0,6 l$, alltså $z_1 : z_2 : z_3 : l = 28 : 21 : : -37 : 35$, $\alpha = 19,16^\circ$ och $K(\alpha) = 1,0287$, så blir enligt (72) $A_0 = \frac{7}{6\sqrt{65}} =$

För rotationsparaboloiden är

$$\rho(z) = \pm 4az, \quad \nu(z) = 4a(a \pm z), \quad f(z) = \pm 4az(z - z_*) - \frac{c^2}{2g},$$

alltså N i allmänhet = 3 och integralerna *elliptiska*. Hjälpkurvan är en liksidig hyperbel $r' = \pm L^3 : 4az$. På den nedåt öppna ytan $r^2 = 4az$ kan endast rörelsetypen [wi] förekomma (se fig. 4), på den uppåt öppna $r^2 = -4az$ däremot zornrörelse enligt fig. 17. För denna rörelse finner man genom analoga räkningar som vid sfären¹ formlerna

$$\sin^2 \alpha = \frac{z_1 - z_2}{a - z_2}, \quad \sin^2 \beta = \frac{a}{a - z_1}, \quad T = 2 \sqrt{\frac{2}{g} (a - z_2)} \cdot E(\alpha),$$

$$\Psi = \left\{ \sqrt{\frac{z_1 z_2}{a(a - z_2)}} K(\alpha) + \mathbb{I}(\alpha, \beta) \right\} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Gå vi nu till de centriska rotationsytorna, så blir

$$\rho(z) = \varepsilon(z^2 - K), \quad \nu(z) = \varepsilon\{(\varepsilon + 1)z^2 - K\}, \quad f(z) = \varepsilon(z^2 - K)(z - z_*) - \frac{c^2}{2g}.$$

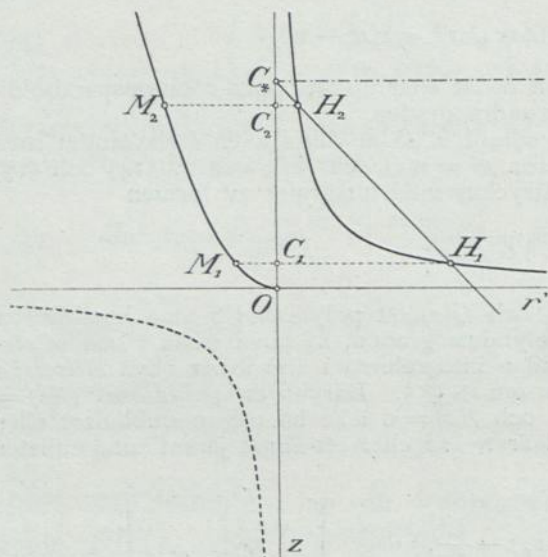


FIG. 17.

I allmänhet är alltså $N = 5$ och integralerna hyperelliptiska. För $\varepsilon = -1$ sjunker emellertid gradtalet av $\nu(z)$ med två enheter, så att N blir = 3 och integralerna elliptiska; detta är det förut behandlade fallet, då ytan är en *sfär*. Reduktion av talet N inträder vidare i följande fall:

a) om $\nu(z) = 0$ har en dubbelrot, vilket inträffar om $K = 0$, således för rotationskonen;

b) om $f(z) = 0$ har en dubbelrot, vilket inträffar om indexlinjen tangerar hjälpkurvan;

c) om $\nu(z) = 0$ och $f(z) = 0$ ha någon gemensam rot. Denna rot måste på grund av ekvationernas form vara reell, varav följer villkoret $(\varepsilon + 1)K > 0$, som endast är uppfyllt vid den förlängda rotationsellipsoiden ($0 > \varepsilon > -1$, $K > 0$) och vid den tvåmantliga rotationshyperboloiden ($\varepsilon > 0$, $K > 0$). Man ser lätt, att $\nu(z)$ därvid blir noll för de z -värden, som motsvara de tillhörande meridiankurvornas *styr*linjer, och den

ifrågavarande händelsen inträffar således, om indexlinjen skär hjälpkurvan i någon av de punkter, där den skäres av dessa styr

linjer. Hjälpkurvan är en kurva av tredje graden $r' = L^3 : \varepsilon(z^2 - K)$ med axeln Oz som asymptot. Om $K > 0$ finnas därjämte två vågräta asymptoter motsvarande

¹ Med hänsyn till tecknet för z i de i integralerna förekommande linjära faktorerna är det i detta och de båda följande fallen lämpligt att i stället för (61) använda substitutionen $z = z_2 + (z_1 - z_2) \sin^2 \varphi$ och i överensstämmelse därmed betrakta den *nedstigande* rörelsen.

meridiankurvans båda toppar; för $\kappa = 0$ (konen) sammanfalla dessa till en och för $\kappa < 0$ (enmantliga hyperboloiden) bliva de imaginära.

För *rotationsellipsoiden* har hjälpkurvan (enligt sista stycket i § 4) samma form som för en sfär (fig. 15) och de möjliga rörelsetyperna bliva således desamma som för denna. Vid zonerörelse på en *förlängd* rotationsellipsoid kan det elliptiskt integrabla fallet c) inträffa, nämligen om den tredje skärningspunkten H_3 mellan indexlinjen och hjälpkurvan faller på meridiankurvans övre styrlinje. Skrivs ytans ekvation i formen $r^2 = (1 - e^2)(a^2 - z^2)$, måste man då ha $z_3 = -\frac{a}{e}$, vilket ger sambandet

$$e(z_1 z_2 + a^2) = a(z_1 + z_2)$$

mellan väncirklarnas koordinater. De inre och yttre likställighetspunkterna C_λ , C_μ erhålla koordinaterna

$$z_\lambda = \frac{a}{e}(1 - \sqrt{1 - e^2}), \quad z_\mu = \frac{a}{e}(1 + \sqrt{1 - e^2}).$$

Dessa punkter äro således fixa och kunna lätt konstrueras ur ett samhörigt värdepar, exempelvis $z_1 = ea$, $z_2 = 0$. Midtpunkten mellan likställighetspunkterna eller centralpunkten C_c får koordinaten $z_c = \frac{a}{e}$ och ligger således på meridiankurvans nedre styrlinje [jfr ekv. (59)]. Uträkningen av svängningstiden och absidvinkeln ger¹

$$\sin^2 \alpha = \frac{e(z_1 - z_2)}{a - ez_2}, \quad \sin^2 \beta = \frac{(1 - e)a}{a - ez_1}, \quad T = 2 \sqrt{\frac{2}{g} e(a - ez_2)} \cdot E(\alpha),$$

$$\Psi = \left\{ e \frac{\sqrt{a^2 - z_2^2}}{a - ez_2} \cdot \mathbf{R}(\alpha) + 2\mathbf{I}(\alpha, \beta) \right\} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

För den *tvåmantliga rotationshyperboloiden* består hjälpkurvan i stället av två egentliga branscher över och under de vågräta asymptoterna och en egentlig bransch mellan dessa och kan erhållas genom att spegla hjälpkurvan i fig. 15 i axeln Oz . På den nedre mantelytan förekommer endast rörelsetypen $[wi]$, varvid flera serier elliptiskt integrabla fall finnas såväl enligt b) som enligt c). På den övre mantelytan åter äro de möjliga typerna rörelse på parallellcirkel och zonerörelse, men av den senare finnes intet elliptiskt integrabelt fall.

För den *enmantliga rotationshyperboloiden* är hjälpkurvan visad i fig. 7, § 3, och i samband därmed angävos de möjliga rörelsetyperna. Den av indexlinjen IV representerade rörelsen $[wi]$ och de av II representerade rörelserna $[wu]$ och $[ui]$ äro tydligen elliptiskt integrabla enligt b), men någon (egentlig) zonerörelse med denna egenskap finnes icke.

För *rotationskonen* slutligen har hjälpkurvan den i fig. 18 visade formen. Integralerna bliva i allmänhet elliptiska enligt a). Skrivs ytans ekvation i formen $r^2 = \operatorname{tg}^2 \mu \cdot z^2$, erhåller man för zonerörelse på den övre mantelytan formlerna

¹ För absidvinkeln erhålles först liksom vid sfären ett uttryck av formen (69), där parametern p_1 ligger mellan k^2 och 1, medan parametern p_2 är negativ, och där vidare koefficienterna B_1 och B_2 äro förbundna med parametrarna medelst relationerna (71). När man sedan liksom vid sfären övergår från p_2 till en ny parameter $p_0 = (p_2 - k^2) : (p_2 - 1)$, finner man $p_0 = p_1$ och i slutresultatet uppträder därför endast *en* funktion $\mathbf{I}(\alpha, \beta)$.

$$z_3 = -\frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}, \quad \sin^2 \beta = \frac{z_3}{z_3 - z_1},$$

$$T = \frac{2}{\cos \mu} \sqrt{\frac{2}{g} (z_3 - z_2)} \left\{ E(\alpha) - \frac{z_3}{z_3 - z_2} F(\alpha) \right\}, \quad \Psi = \frac{2}{\sin \mu} \mathbb{I}(\alpha, \beta) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

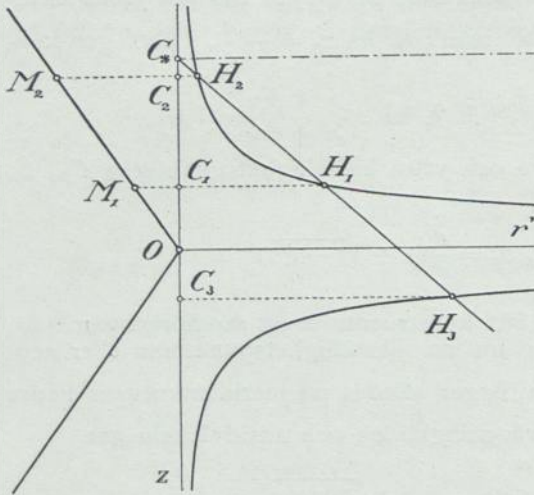


FIG. 18.

Av denna undersökning framgår, att i samtliga elliptiskt integrabla fall av zonrörelse på rotationsytor av andra graden absidvinkeln Ψ kan enkelt uttryckas medelst de i föregående uppsats tabulerade funktionerna $K(\alpha)$ och $\mathbb{I}(\alpha, \beta)$. I de tre senaste här behandlade fallen innehålla dessa uttryck endast *en* funktion $\mathbb{I}(\alpha, \beta)$, medan i uttrycket (74) för sfären *två* sådana funktioner ingå, men vi skola i § 11 visa att man även för sfären kan erhålla ett uttryck av förstnämnda, för numerisk beräkning bekvämare form.

Utgår man som i § 6 från två till storlek och läge givna *vändcirklar* ($r_1, r_2, z_1 - z_2 = 2c$, varvid $r_1 < r_2$), så kan genom dessa läggas ett enkelt oändligt antal rotationsytor av andra graden, och för vissa individer i detta ytknippe kan då absidvinkeln i den motsvarande zonrörelsen beräknas enligt ovan angivna formler. Dessa ytor äro: sfären, paraboloiden, konen med topp i C_μ (fig. 11) samt den eller de ellipsoider, för vilka meridiankurvans ena styrlinje går genom centralpunkten C_c . I sistnämnda fallet skall alltså meridiankurvan vara en ellips, som har sin storaxel utefter axeln Oz och går genom punkterna M_1, M_2 , samt har den vågräta linjen genom C_c till sin ena styrlinje. Är F den motsvarande brännpunkten och e ellipsens excentritet, måste man då ha $M_1F = e(z_c - z_1)$, $M_2F = e(z_c - z_2)$, alltså $M_1F : M_2F = (z_c - z_1) : (z_c - z_2)$. Förhållandet $M_1F : M_2F$ är således känt och orten för F blir då en viss cirkel, varav följer att det finnes två, en eller ingen sådan ellipsoid, allteftersom denna cirkel skär, tangerar eller icke räkar axeln Oz .

Analytiskt kan ytknippets ekvation, som lätt visas, skrivas i formen

$$(75) \quad r^2 = \varepsilon(z - z_1)(z - z_2) - 2q_m(z - z_c),$$

där

$$q_m = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4c}$$

och ε en variabel parameter. För $\varepsilon = 0$ erhålles härav paraboloiden, vars topp faller i C_c , för varje ε -värde $\neq 0$ åter en centrisk yta med medelpunkten fallande i punkten $z = z_m + \frac{1}{\varepsilon} q_m$. Vi anmärka i förbigående, att de samhöriga yttopparna bilda en involution på axeln Oz med C_λ och C_μ som dubbelpunkter och att midtpunkten C_c mellan dessa således är centrum i denna involution, vilket är anledningen till att vi benämnt denna punkt »centralpunkten».

Låter man i (75) ε genomlöpa alla reella talvärden från $-\infty$ ända till

$$\varepsilon_{\max} = 4 \left(\frac{q_m}{r_2} \right)^2,$$

så erhållas alla de rotationsytor av andra graden, på vilka de givna cirklarna kunna vara vändcirkel vid en zonerörelse. För $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ kommer nämligen meridianbågen M_1M_2 att tangera den i § 6 omnämnda gränskurvan i den nedre punkten M_1 och för $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$ faller den till större eller mindre del på denna kurvas konvexa sida. Då ε genomlöper den nämnda talföljden från $-\infty$ till ε_{\max} , erhåller man i ordning först avplattade ellipsoider, så för $\varepsilon = -1$ sfären, vidare förlängda ellipsoider, så för $\varepsilon = 0$ paraboloiden, därefter tvåamantliga hyperboloider (med cirklarna på övre mantelytan), så för $\varepsilon = \operatorname{tg}^2 \mu$ (ekv. 40) konen med topp i C_μ samt därefter enmantliga hyperboloider, ända tills zonerörelsen för $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ övergår i en rörelse av typen $[u]$, motsvarande indexlinjen II i fig. 7, då alltså absidvinkeln blir oändligt stor.

För att bestämma de ovannämnda ellipsoiderna behöva vi endast av (75) bilda $\nu(\varepsilon) = r^2 + q^2$, där $q = q_m - \varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_m)$, och sedan uttrycka att $\nu(\varepsilon_c) = 0$. Detta ger som sig bör en andragradsekvation i ε , och man finner att denna har två reella rötter, om uttrycket

$$\eta = 1 - \frac{(r_2^2 + r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)^2}{4c^2 r_1^2 r_2^2}$$

är > 0 . De båda rötterna äro

$$\varepsilon = - (1 \pm \sqrt{\eta})^2 \cdot \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 + r_1^2)^2},$$

och det verifieras lätt, att de alltid ligga mellan -1 och 0 , om realitetsvillkoret är uppfyllt.

Är exempelvis $r_1 : r_2 : 2c = 1 : 2 : 4$, så är detta villkor uppfyllt och rötterna bliva -1 om vi nöja oss med tre decimaler — den ena $= -0,382$, den andra $= -0,033$. Vidare är i detta fall $\operatorname{tg}^2 \mu = 0,063$ och $\varepsilon_{\max} = 0,141$. För dessa ε -värden, jämte -1 och 0 , kan då absidvinkeln beräknas enligt ovan angivna formler. Avrundas de sålunda funna Ψ -värdena till hela grader, erhåller man följande sammanställning:

| | | | | | |
|--------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|
| $\varepsilon = -1$ | $-0,382$ | $-0,033$ | 0 | $0,063$ | $0,141$ |
| $\Psi = 155^\circ$ | 199° | 315° | 342° | 424° | ∞ . |

Är åter exempelvis $r_1 : r_2 : 2c = 3 : 4 : 1$, så är villkoret icke uppfyllt, och beräkningsmöjligheten på angivet sätt inskränker sig till fyra individer; motsvarande sammanställning blir

| | | | |
|--------------------|-------------|-------------|------------|
| $\varepsilon = -1$ | 0 | 1 | $3,063$ |
| $\Psi = 113^\circ$ | 126° | 147° | ∞ . |

I anslutning härtill kan man fråga sig, om Ψ generellt växer med ε , vilken fråga vi emellertid här måste lämna öppen. Vi anmärka endast, att detta alltid är förhållandet, om de båda givna cirklarna falla oändligt nära varandra, så att kordan M_1M_2 övergår till ett linjeelement. Som $\frac{dq}{d\varepsilon} = -\varepsilon$, får nämligen krökningskoefficienten κ enligt (5) värdet $\kappa = \cos^2 \theta - \varepsilon \sin^2 \theta$ och det i ekv. (34) angivna gränsvärdet för absidvinkeln blir då

$$\Psi = \frac{\pi}{\sqrt{4 \cos^2 \theta - \varepsilon \sin^2 \theta}},$$

alltså växande med ε . För sfären är $\varepsilon = -1$ och man ser, att det angivna Ψ -värdet alltid faller mellan gränserna $\frac{\pi}{2}$ och π . Detta är, som i nästa paragraf skall visas, alltid förhållandet vid sfären, även om vändcirklarna äro åtskilda.

§ 8. Gränser för absidvinkeln.

För en sfärisk pendel är absidvinkeln Ψ alltid $> \frac{\pi}{2}$, men $< \pi$. Den förra satsen är funnen av Poiseux, den senare av Halphen.¹ Vi skola här bevisa dessa satser, den förra genom diskussion av integraluttrycket för ifrågakvarande vinkel,² den senare åter genom en direkt geometriskmekanisk betraktelse, i det vi jämföra en sfärisk pendels rörelse med en annan sfärisk rörelse av enklare natur.

För att till en början härleda Poiseux' sats återgå vi till det i (69) angivna uttrycket för azimutvinkeln ψ och bestämma först ett par gränser, mellan vilka denna vinkel ligger, då amplitudvinkeln φ har ett godtyckligt värde, varav vi sedan för $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhålla gränser för absidvinkeln.

För detta ändamål införa vi två variabla hjälpvinklar φ_1, φ_2 , förbundna med amplitudvinkeln φ medelst relationerna

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \sqrt{1 - p_1} \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \sqrt{1 - p_2} \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

och alltså växande med denna från 0 till $\frac{\pi}{2}$. Därvid äro p_1 och p_2 de i (68) angivna parametrarna, vilka båda äro < 1 ($k^2 < p_1 < 1, p_2 < 0$).

Av den första relationen följer

$$\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - p_1}} = \frac{d\varphi}{1 - p_1 \sin^2 \varphi}.$$

Genom dividering med $\Delta\varphi$ och integrering från 0 till φ skulle man av högra memrum erhålla $\Pi(p_1, \alpha, \varphi)$ enligt definitionsekvationen EI (1). Då nu rotfunktionen $\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ varierar mellan 1 och $\sqrt{1 - k^2} = \cos \alpha$, får man

$$\frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - p_1}} \geq \frac{1}{1 - p_1 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \geq \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - p_1}},$$

¹ Se noterna sid. 223.

² Jfr Appell, *Traité de mécanique*, tome 1 (3: éd. 1909, p. 515).

alltså genom integrering

$$\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\varphi_1}{\sqrt{1-p_1}} \geq \Pi(p_1, \alpha, \varphi) \geq \frac{\varphi_1}{\sqrt{1-p_1}}$$

och enligt (71)

$$\frac{1}{\cos \alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_1 - k^2}{p_1}} \cdot \varphi_1 \geq B_1 \Pi(p_1, \alpha, \varphi) \geq \sqrt{\frac{p_1 - k^2}{p_1}} \cdot \varphi_1.$$

På samma sätt härledas de analoga olikheterna, i vilka index 1 är utbytt mot index 2. Genom addition erhålles då enligt (69)

$$\frac{1}{\cos \alpha} \tilde{\psi} \geq \psi \geq \tilde{\psi},$$

där vi använt beteckningen

$$\tilde{\psi} = \sqrt{\frac{p_1 - k^2}{p_1}} \varphi_1 + \sqrt{\frac{p_2 - k^2}{p_2}} \varphi_2.$$

Är modylvinkeln α liten, vilket enligt (63) inträffar, då vändcirklarna falla nära intill varandra, så kan härav fås en användbar uppskattning av värdet av azimutvinkeln ψ vid ett godtyckligt värde på φ .

Låta vi nu φ växa till $\frac{\pi}{2}$, erhålles speciellt för absidvinkeln Ψ

$$(76) \quad \frac{1}{\cos \alpha} \tilde{\Psi} \geq \Psi \geq \tilde{\Psi},$$

där

$$(77) \quad \tilde{\Psi} = \left\{ \sqrt{\frac{p_1 - k^2}{p_1}} + \sqrt{\frac{p_2 - k^2}{p_2}} \right\} \cdot \frac{\pi}{2}$$

eller med införande av värdena på p_1 , p_2 och k^2 enligt (68) och (63)

$$(78) \quad \tilde{\Psi} = \left\{ \sqrt{\frac{-l - z_1}{z_1 - z_3}} + \sqrt{\frac{l - z_3}{z_1 - z_3}} \right\} \cdot \pi.$$

Är exempelvis $z_1 = 0,8 l$, $z_2 = 0,6 l$, så blir $z_1 : z_2 : z_3 : l = 28 : 21 : -37 : 35$, $\cos^2 \alpha = \frac{58}{65}$, $\tilde{\Psi} = \sqrt{\frac{98}{65}} \cdot \frac{\pi}{2} = 110,49^\circ$, och man får $116,95^\circ > \Psi > 110,49^\circ$.

Det verkliga värdet är, som förut funnits, $\Psi = 113,21^\circ$.

Är åter $z_1 = 0,8 l$, $z_2 = -0,6 l$, så blir $z_1 : z_2 : z_3 : l = 4 : -3 : -13 : 5$, $\cos^2 \alpha = \frac{10}{17}$, $\tilde{\Psi} = \sqrt{\frac{50}{17}} \cdot \frac{\pi}{2} = 154,35^\circ$, och man får $201,25^\circ > \Psi > 154,35^\circ$.

Genom beräkning ur (74) finnes $\Psi = 172,58^\circ$.

Såsom synes falla de sålunda bestämda gränserna tämligen långt isär, om vändcirkelarna ligga på stort avstånd från varandra, medan de för närbelägna vändcirkelarna bli väsentligt trängre. Går man till limes och låter vändcirkelarna sammanfalla, så blir $\alpha = 0$ och $\Psi = \tilde{\Psi}$; därvid blir enligt (58) $z_3 = -(l^2 + z_1^2) : 2z_1$, och vid insättning härav återfår man det i (34) beräknade gränsvärdet, specialiserat för sfären ($\kappa = 1$, $\cos \theta = z_1 : l$).

Av (76) och (77) följer nu omedelbart Puiseux' sats, att $\Psi > \frac{\pi}{2}$. Då parametern p_2 enligt föregående är negativ, är nämligen den sista termen inom parentes i (77) större än 1, alltså $\tilde{\Psi} > \frac{\pi}{2}$. Detsamma framgår även omedelbart av formen (78), i det $l > z_1$.

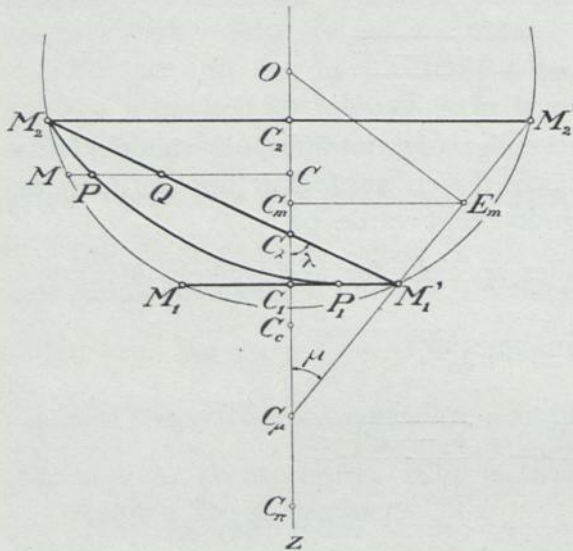


FIG. 19.

vilka zonrörelsen tänkes försiggå. Punkten M_2 antages vara en absid i banan och vi betrakta pendelkulans rörelse från denna punkt utefter bågen M_2PP_1 , tills den når den nedre vändcirkeln i absiden P_1 . Vidare tänka vi oss ett plan lagt genom punkterna M_2M_1 vinkelrätt mot konstruktionsplanet, varigenom på den sfäriska ytan utskäres en cirkel, som tangerar den övre vändcirkeln i M_2 och den nedre i M_1 . På denna cirkel, som i figuren representeras genom sin diameter M_2M_1 , tänka vi oss en punkt Q röra sig på sådant sätt, att den utgår från M_2 samtidigt med pendelkulan och sedan alltså

Däremot kan man *icke* härav få fram Halphens sats, att $\Psi < \pi$, enär $\Psi : \cos \alpha$ kan bli $> \pi$, som det andra exemplet här ovan visar. Över huvud taget är det tämligen besvärligt att genom diskussion av integraluttryck för Ψ komma till ett bevis för denna sats.¹ Vi skola emellertid genom en annan metod, som grundar sig på ett särdeles enkelt resonemang, övertyga oss om satsens riktighet.

I ett vertikalt konstruktionsplan, lagt genom axeln Oz , må M_1M_1' , M_2M_2' (fig. 19) representera de båda vändcirkelarna, mellan

¹ Jfr noten 3 sid. 223.

befinner sig på samma höjd som denna, alltså även framkommer till M'_1 i samma ögonblick som pendelkulan kommer till P_1 . Vi antaga därvid, att punkten Q liksom pendelkulan rör sig åt det håll, åt vilket azimutvinkeln växer, och beteckna denna vinkel för punkten Q med ψ' , medan ψ som förut är pendelkulans azimutvinkel. Såväl tiden t som vinklarna ψ och ψ' räkna vi från punkten M_2 , så att $\psi = \psi' = 0$ för $t = 0$. Tydligt blir Halphens sats bevisad, om vi kunna visa att under hela rörelsen $\frac{d\psi'}{dt} > \frac{d\psi}{dt}$;

därför följer nämligen att för $t > 0$ ständigt $\psi' > \psi$ och då vid tiden $t = \frac{1}{2} T$ vinkeln ψ' blir $= \pi$, medan vinkeln ψ blir $=$ absidvinkeln Φ , erhålles följeligen $\pi > \Phi$.

Beteckna vi i enlighet med § 1 pendelkulans hastighet med v och hastighetens komponenter utefter meridianen och parallellcirkeln med v_m , v_p resp. samt motsvarande storheter för punkten Q med v' , v'_m , v'_p resp., så är tydligt $v_m = v'_m$, eftersom de båda punkterna alltså befinner sig på samma höjd. Vidare är $v_p = r \frac{d\psi}{dt}$ och $v'_p = r \frac{d\psi'}{dt}$, enär båda punkterna befinner sig på samma parallellcirkel. Då $v^2 = v_m^2 + v_p^2$ och $v'^2 = v'_m^2 + v'_p^2$, är följaktligen $v'^2 - v^2 = r^2 \left\{ \left(\frac{d\psi'}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right\}$ och Halphens sats blir sålunda bevisad, om vi kunna visa att $v' > v$, d. v. s. att punkten Q ständigt har större hastighet än pendelkulan P , eller att den motsvarande hastighetshöjden $h' = \frac{v'^2}{2g}$ ständigt är större än hastighetshöjden $h = \frac{v^2}{2g}$.

För detta ändamål beteckna vi med ds' det bågelement, som punkten Q beskriver under tidsintervallet dt , då båda punkternas z -koordinater samtidigt växa från z till $z + dz$. För att erhålla ett uttryck på ds' begagna vi oss av, att i en cirkel förhållandet mellan ett bågelement och dess projektion på en diameter är lika med förhållandet mellan cirkelns radie och bågelementets avstånd från samma diameter. Använda vi vinkelbeteckningarna λ , μ enligt figuren, alltså på samma sätt som förut i § 6 (fig. 11), så se vi att vinkeln $M_2 M'_2 M'_1 = 90^\circ - \mu$, således den på kordan $M_2 M'_1$ stående centrivinkeln $= 180^\circ - 2\mu$, varav följer att den ifrågavarande cirkelns radie är $= l \cos \mu$. Vidare har bågelementet projektionen $dz : \cos \lambda$ på diametern $M_2 M'_1$, medan dess avstånd från samma diameter är $= \sqrt{M'_1 Q \cdot Q M_2} = \sqrt{(z_1 - z)(z - z_2)} : \cos \lambda$. Härav erhålles

$$ds' = \frac{l \cos \mu}{\sqrt{(z_1 - z)(z - z_2)}} \cdot dz,$$

och alltså enligt (60) och (54)

$$v' = \frac{ds'}{dt} = \frac{l \cos \mu}{\sqrt{(z_1 - z)(z - z_2)}} \cdot \frac{\sqrt{2gf(z)}}{l} = \cos \mu \sqrt{2g(z - z_3)}$$

samt

$$h' = \frac{v'^2}{2g} = \cos^2 \mu (z - z_3).$$

Vidare är enligt (18) och (55)

$$h = \frac{v^2}{2g} = z - z_* = z - (z_1 + z_2 + z_3),$$

följaktligen

$$h' - h = z_1 + z_2 + \sin^2 \mu (z_3 - z).$$

Beteckna vi som i § 6 med z_μ koordinaten för vändcirklarnas yttre likställighetspunkt C_μ och med z_m koordinaten för mittpunkten C_m mellan vändcirklarnas plan, så är enligt figuren $z_m = OC_m = OE_m \sin \mu = OC_\mu \sin^2 \mu = z_\mu \sin^2 \mu$, och då $z_1 + z_2 = 2z_m$, blir alltså

$$h' - h = \sin^2 \mu (2z_\mu + z_3 - z)$$

eller slutligen

$$(79) \quad h' - h = \sin^2 \mu (z_n - z),$$

då vi satt $2z_\mu + z_3 = z_n$. Med beaktande av ekv. (59) erhålla vi även

$$(80) \quad z_n - z_\mu = z_\mu - z_c.$$

Utpricka vi på axeln Oz nedanför C_μ en punkt C_n så belägen, att C_μ utgör mittpunkten mellan denna punkt och centralpunkten C_c , så har alltså punkten C_n koordinaten z_n .

Härav framgår nu omedelbart att h' ständigt är $> h$, enär pendelkulan under rörelsen aldrig kommer lägre än i nivå med C_1 , vadan alltså z ständigt är $< z_n$. Därmed är således Halphens sats bevisad.

Grundtanken i detta bevis kan även användas för en liknande undersökning i fråga om zönrörelse på en godtycklig rotationsyta av andra graden. Vi utgå därvid som förut från givna vändcirklar ($r_1, r_2, z_1 - z_2 = 2c$, varvid $r_1 < r_2$) och tänka oss genom dem lagd en andragsyta med ekvationen (75), där ε har ett godtyckligt värde mellan $-\infty$ och ε_{\max} . På denna yta kan då en partikel P utföra zönrörelse med de givna cirkelarna som vändcirklar. Vi jämföra denna rörelse med rörelsen

hos en punkt Q , vars bankurva utgöres av ytans skärningskurva med ett plan, inlagt på samma sätt som förut vid sfären (fig. 19), och som på denna bana (en ellips) rör sig så, att den ständigt befinner sig på samma höjd som P . Genom samma resonemang som förut inses då, att absidvinkeln Ψ i den zonerörelse, som utföres av partikeln P , blir $< \pi$, om hastighetshöjden h' för punkten Q ständigt är större än hastighetshöjden h för P , varemot $\Psi > \pi$ om h' ständigt är $< h$. För diskussion härav erhåller man i stället för (79) uttrycket

$$(79^{\text{bis}}) \quad h' - h = (\text{tg}^2 \lambda - \varepsilon) \text{tg}^2 \mu \cdot \frac{c^2}{n^2} (z_\pi - z),$$

där z_π är en viss konstant, för vars bestämmande man i stället för (80) får relationen

$$(80^{\text{bis}}) \quad z_\pi - z_\mu = (z_\mu - z_c) \left\{ 1 - \frac{1 + \varepsilon}{\text{tg}^2 \lambda - \varepsilon} \cdot \frac{\text{tg}^2 \lambda - \text{tg}^2 \mu}{\text{tg}^2 \mu} \right\}.$$

I högra membrum av (79^{bis}) ingår i nämnaren den variabla faktorn $n^2 = \nu(z)$, men denna är för de ifrågakommande z -värdena ($z_1 \geq z \geq z_2$) ständigt positiv. Då vidare $\varepsilon_{\text{max}} = \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 \text{tg}^2 \lambda < \text{tg}^2 \lambda$, ser man, att $h' - h$ alltid har samma tecken som

faktorn $z_\pi - z$. Uttrycker man då på axeln Oz den punkt C_π , som har koordinaten z_π , så blir alltid absidvinkeln $\Psi < \pi$, om C_π ligger lägre än C_1 , men däremot $\Psi > \pi$, om C_π ligger högre än C_2 . Fallr C_π mellan C_1 och C_2 , kan man icke på denna väg avgöra, om Ψ är $<$ eller $> \pi$.

För $\varepsilon = -\infty$ faller C_π på avståndet $\frac{\text{tg}^2 \lambda}{\text{tg}^2 \mu} (z_\mu - z_c)$ under C_μ och stiger sedan alltjämt med växande ε . När ε nått värdet -1 (sfären), har C_π nått till den punkt, som ligger på avståndet $z_\mu - z_c$ under C_μ i enlighet med fig. 19. Därav framgår, att absidvinkeln Ψ alltid måste vara $< \pi$ vid zonerörelse på en avplattad rotationsellipsoid. När ε ytterligare växer, kommer punkten C_π att för ett visst värde $\varepsilon = \varepsilon_1$ falla i C_1 och därefter för ett visst större värde $\varepsilon = \varepsilon_2$ i C_2 . För bestämning av ε_1 och ε_2 erhålles av (80^{bis}) samt ekv. (40) o. f.

$$\frac{1 + \varepsilon_1}{\text{tg}^2 \lambda - \varepsilon_1} \cdot \frac{\text{tg}^2 \lambda - \text{tg}^2 \mu}{\text{tg}^2 \mu} = 1 + \frac{z_\mu - z_1}{z_\mu - z_c} = 2 + \frac{r_1}{r_2},$$

$$\frac{1 + \varepsilon_2}{\text{tg}^2 \lambda - \varepsilon_2} \cdot \frac{\text{tg}^2 \lambda - \text{tg}^2 \mu}{\text{tg}^2 \mu} = 1 + \frac{z_\mu - z_2}{z_\mu - z_c} = 2 + \frac{r_2}{r_1}.$$

Man vet då, att $\Psi < \pi$ för alla de ytor, vid vilka $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, och att $\Psi > \pi$ för de, vid vilka $\varepsilon \geq \varepsilon_2$, varemot för mellanliggande ε -värden undersökningen icke ger någon upplysning om, huruvida Ψ är $<$ eller $> \pi$. Eventuellt kan det inträffa att $\varepsilon_2 > \varepsilon_{\text{max}}$, då den motsvarande gruppen av ytor bortfaller.

Är exempelvis $r_1 : r_2 : 2c = 1 : 2 : 4$, så finner man att Ψ alltid är $< \pi$, om $\varepsilon < -0,628$, men $\Psi > \pi$, om $\varepsilon > -0,479$; är åter $r_1 : r_2 : 2c = 3 : 4 : 1$, finner man $\Psi < \pi$, om $\varepsilon < 1,709$, men $\Psi > \pi$, om $\varepsilon > 2,247$. Båda resultaten äro i överensstämmelse med de å sid. 271 sammanställda talvärdena.

Även beträffande Puiseux' sats kan man lätt nog finna liknande diskussionsmetoder, men därvid synes det vara svårare att komma till någon enkel form. Vi skola här i stället på annan väg härleda ett par resultat, som avse giltigheten av denna sats för andra rotationsytor än sfären.

Vi utgå därvid från uttrycket (15), vilket vi — med införande av hjälpkurvans abskissa r' som oberoende variabel — transformera på följande sätt. Enligt ekv. (15), (19), (21) och (22) är

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{n^2}{r^4 f(z)} = L^3 \operatorname{tg} \delta \cdot \frac{n^2}{r^6 h_m} = \operatorname{tg} \delta \cdot \frac{r' n^2}{r^4 h_m},$$

medan enligt ekv. (28) och (2)

$$\left(\frac{dz}{dr'}\right)^2 = \frac{r^4}{4r'^2 q^2} = \frac{r^4}{4r'^2 n^2 \cos^2 \theta}.$$

Alltså blir

$$(81) \quad \left(\frac{d\psi}{dr'}\right)^2 = \frac{1}{4 \cos^2 \theta} \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta}{r' h_m},$$

där enligt ekv. (20) och (23)

$$h_m = \varepsilon - \varepsilon_* - \operatorname{tg} \delta \cdot r'.$$

Vi antaga nu som förut de båda vändcirkelarna givna till storlek och läge ($r_1, r_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 2c$, varvid $r_1 < r_2$) och betrakta olika genom dem lagda rotationsytor, vardera bestämd genom sin meridianbåge $M_1 M_2$. Denna båge tänkes därvid i varje fall ligga på den konkava sidan av den i § 6 omnämnda gränskurvan och icke hava någon annan punkt än ändpunkterna M_1, M_2 gemensam med denna, vilket enligt § 6 utgör villkoren för att en partikel skall kunna på motsvarande yta utföra en zonerörelse med de givna cirkelarna som vändcirkular. I stället för meridianbågen $M_1 M_2$ kunna vi även för ytans bestämning använda den motsvarande bågen $H_1 H_2$ av hjälpkurvan, vars ändpunkter H_1, H_2 ha abscissorerna $r'_1 = L^3 : r_1^2, r'_2 = L^3 : r_2^2$ resp. Denna båge måste då ligga helt och hållet under indexlinjen och endast i ändpunkterna höja sig upp till denna.

Med hjälp av uttrycket (81) skola vi nu först visa, att Puiseux' sats gäller för den rotationsparaboloid, som går genom de givna cirkelarna. Ekvationen för denna erhålles av (75), om vi sätta $\varepsilon = 0$, och kan således skrivas

$$\varepsilon = \varepsilon_c - \frac{r^2}{2q_m} = \varepsilon_c - \frac{2cr^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Såsom uttryck för h_m få vi då enligt ekv. (43) och (36)

$$h_m = \varepsilon_c - \varepsilon_* - \frac{2cr^2}{r_2^2 - r_1^2} - \operatorname{tg} \delta \cdot r' = \operatorname{tg} \delta \left\{ \frac{L^3}{r_1^2 r_2^2} (r_2^2 + r_1^2 - r^2) - r' \right\}$$

eller slutligen

$$(82) \quad h_m = \frac{\operatorname{tg} \delta}{r'} (r'_1 - r') (r' - r'_2).$$

Genom insättning härav i (81) erhålles då

$$\left(\frac{d\psi}{dr'}\right)^2 = \frac{1}{4 \cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{(r'_1 - r') (r' - r'_2)}.$$

Vid den nedstigande rörelsen är r' monotont växande från r'_2 till r'_1 och samtidigt θ monotont avtagande från θ_2 till θ_1 och man får således

$$\Psi = \int_{r'_2}^{r'_1} \frac{1}{2 \cos \theta} \cdot \frac{dr'}{\sqrt{(r'_1 - r')(r' - r'_2)}} > \frac{\pi}{2 \cos \theta_1} > \frac{\pi}{2},$$

varmed satsen är bevisad för rotationsparaboloiden.

Är nu $\Psi > \frac{\pi}{2}$, när h_m är *lika med* det i (82) angivna värdet, så måste detta enligt (81) så mycket mera vara förhållandet, om h_m ständigt är *mindre* än detta värde för varje mellan r'_1 och r'_2 liggande värde på r' , alltså om den aktuella bågen H_1H_2 av hjälpkurvan faller emellan den för rotationsparaboloiden gällande bågen (hyperbelbågen H_1H_2 i fig. 17) och indexlinjen; dock måste därvid för bevisets giltighet alltså förutsättas, att r' vid den nedstigande rörelsen är monotont växande från r'_2 till r'_1 .

Övergå vi till meridiankurvan, kunna vi tydligen uttala det funna resultatet så, att Puiseux' sats är uppfylld för varje genom de givna vändcirkelarna gående rotationsyta, vars meridianbåge M_1M_2 ligger mellan parabeln (rotationsparaboloidens meridiankurva) och gränskurvan samt tillika har egenskapen, att radien r varierar monotont mellan gränsvärdena r_1 och r_2 .

Bland dessa ytor ingår också den genom de givna cirkelarna gående rotationskonen, för vilken således även alltid gäller att $\Psi > \frac{\pi}{2}$. Däremot ingår ej den i tillägget till föregående paragraf betraktade speciella rotationsellipsoiden, ej heller sfären, enär meridianbågarna för dessa ytor falla utanför parabelbågen. Även för sfären gäller emellertid, som vi förut sett, att $\Psi > \frac{\pi}{2}$ och på alldeles samma sätt som vid sfären kan man visa, att detsamma är förhållandet vid den ifrågavarande ellipsoiden.¹ Puiseux' sats gäller således i samtliga elliptiskt integrabla fall av zonerörelse på rotationsytor av andra graden.²

§ 9. Normaltrycket.

Det på partikeln verkande *normaltrycket* från den yta, på vilken rörelsen äger rum, kan i allmänhet beräknas av ekv. (27) och erhålles därvid med positivt tecken, om det är riktat från ytpunkten mot normalens skärningspunkt med axeln Oz , i motsatt fall med negativt. Om normaltrycket i någon punkt av banan erhåller värdet noll, så blir i denna punkt tyngdkraften den enda på partikeln verkande kraften, och kraftresultanten erhåller alltså här vertikal riktning. Bankurvans oskulerande plan, som bestämmes av bantangenten och kraftresultanten, blir således även vertikalt, och i bankurvans horisontalprojektion blir då den motsvarande punkten i allmänhet en inflexionspunkt. Även för den konstruktiva bestämningen av bankurvan

¹ Jfr noten sid. 269.

² Det förefaller ytterst sannolikt, att Puiseux' sats generellare är giltig för varje rotationsyta, vars meridianbåge M_1M_2 ligger emellan cirkeln (den genom samma vändcirkel gående sfärens meridiankurva) och gränskurvan, men beviset härför måste vi bliva skyldiga.

är det alltså av vikt att känna, huruvida normaltrycket under rörelsen byter tecken, och vi skola därför här undersöka, under vilka förhållanden denna eventualitet inträffar vid sfäriska pendeln.

För sfären har man att i ekv. (27) insätta $x = 1$, $q = z$, $n = l$ och då vidare enligt (18) $h_m + h_p = h = z - z_*$, erhåller man

$$(83) \quad N : mg = (3z - 2z_*) : l,$$

såsom även lätt kan direkt härledas. Normaltrycket blir alltså proportionellt mot partikelns (pendelkulans) djup under det vågräta planet $z = \frac{2}{3} z_*$, vilket vi här för korthetens skull skola kalla *nolltrycksplanet*. Kommer partikeln under rörelsen upp i detta plan, blir normaltrycket noll; kommer den ovanför planet, blir normaltrycket negativt, alltså utåtriktat.

Frågan är således, om partikeln någonsin under rörelsen kan komma upp i eller ovanför nolltrycksplanet $z = \frac{2}{3} z_*$. Då detta plan alltid är beläget mellan sfärens centrum och nollnivåplanet $z = z_*$, är denna möjlighet utesluten, om nollnivåplanet ligger under centrum ($z_* > 0$); däremot kan den inträffa, om nollnivåplanet är beläget ovanför centrum.

För att se huru därmed förhåller sig, skola vi antaga, att pendelkulan från början befinner sig i en på den nedre halvsfären belägen punkt M_0 (fig. 20) med koordinaterna $OC_0 = z_0$, $C_0M_0 = r_0$ och där erhåller en vågrät begynnelsehastighet v_0 , motsvarande hastighetshöjden $h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$. Parallellcirkeln C_0M_0 blir då en av vändcirkeln i den inträdande zonrörelsen, och indexlinjen går således genom den mot M_0 svarande punkten H_0 på hjälpkurvan. Enär meridiankurvas tangent i M_0 skär axeln Oz på avståndet $\frac{r_0^2}{z_0}$ under C_0 , måste hjälpkurvas tangent i H_0 skära samma axel på höjden $\frac{1}{2} \frac{r_0^2}{z_0}$ ovanför C_0 , och parallellcirkeln C_0M_0 blir följaktligen den nedre eller den övre vändcirkeln i zonrörelsen allteftersom h_0 är $>$ eller $<$ $\frac{1}{2} \frac{r_0^2}{z_0}$. Är $h_0 = \frac{1}{2} \frac{r_0^2}{z_0}$, kommer partikeln att förbliva på parallellcirkeln C_0M_0 och röra sig på denna med konstant hastighet $v_0 = r_0 \sqrt{\frac{g}{z_0}}$, i överensstämmelse med förut för rörelse på parallellcirkel funna värden, i det z_0 tillika är meridiankurvas subnormal i M_0 .

Vi skola nu antaga att $h_0 > \frac{1}{2} \frac{r_0^2}{z_0}$, så att pendelkulan kommer att höja sig över parallellcirkeln C_0M_0 , som sålunda blir den nedre vändcirkeln i zonströrelsen. Avsätta vi från C_0 uppåt stycket $C_0B = h_0$, så blir B nollnivåplanets skärningspunkt med z -axeln ($B = C_*$), och indexlinjen blir då den räta linjen H_0B , som kommer att skära hjälpkurvan i en andra, mellan H_0 och B belägen punkt H' . Denna punkt H' anger höjden av den övre vändcirkeln. Tages vidare på axeln Oz en punkt E så belägen, att $OE = \frac{2}{3} OB$, så blir E nolltrycksplanets skärningspunkt^t med nämnda axel,

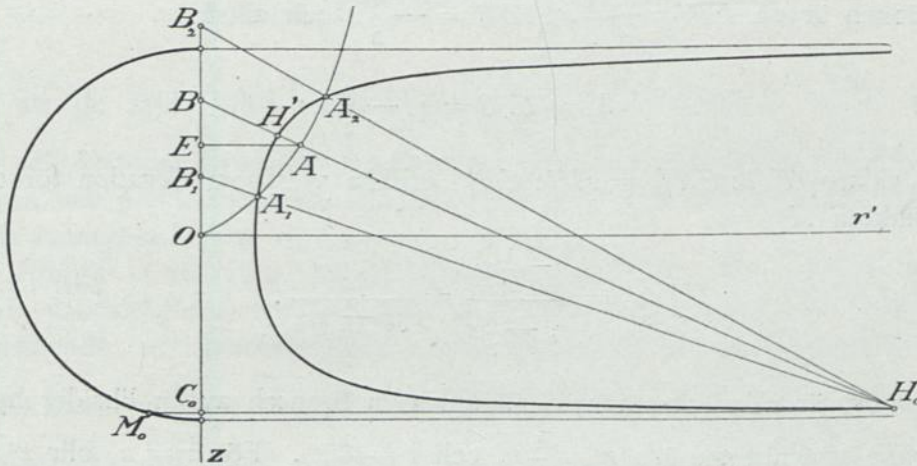


FIG. 20.

och frågan huruvida normaltrycket kommer att byta tecken eller icke under rörelsen, blir således beroende på om punkten E ligger lägre eller högre än punkten H' . Lägga vi genom E en vågrät linje EA , som skär indexlinjen i punkten A , så kommer i figuren punkten A att falla mellan H_0 och H' och i detta fall kommer normaltrycket alltså att byta tecken, i det det blir utåtriktat under den del av rörelsen, som äger rum mellan nivåerna av EA och H' . Vid en annan lutning av indexlinjen kan det emellertid som lätt ses inträffa, att punkten A i stället faller utanför hjälpkurvan, alltså högre än H' , och i så fall förblir normaltrycket under hela rörelsen positivt (inåtriktat).

Draga vi olika indexlinjer genom H_0 och på var och en av dem bestämma en punkt A genom samma enkla konstruktion ($OE = \frac{2}{3} OB$), så

blir orten för A som lätt visas en bransch av en liksidig hyperbel och denna kommer att skära den ifrågavarande branschen av hjälpkurvan i två punkter A_1, A_2 , motsvarande de båda lägena H_0B_1, H_0B_2 av indexlinjen. Man ser då att pendelkulan under rörelsen kommer ovanför nolltrycksplanet, om hastighetshöjden h_0 har ett värde mellan de båda gränserna $h_{01} = C_0B_1$ och $h_{02} = C_0B_2$, varvid alltså normaltrycket kommer att byta tecken under rörelsen; är åter antingen $h_0 < h_{01}$ eller $h_0 > h_{02}$, så inträffar icke detta, och normaltrycket förblir då under hela rörelsen positivt.

För att beräkna dessa gränsvärden h_{01}, h_{02} , sätta vi $C_0H_0 = r'_0$ och beteckna koordinaterna för A med $z = -OE$ och $r' = EA$. Enligt konstruktionen är då $EB = -\frac{1}{2}z$, $OB = -\frac{3}{2}z$ och alltså

$$(84) \quad h_0 = C_0B = z_0 - \frac{3}{2}z.$$

Enär vidare $EA : C_0H_0 = EB : C_0B$, erhålla vi såsom ekvation för orten för punkten A

$$\frac{r'}{r'_0} = \frac{-\frac{1}{2}z}{z_0 - \frac{3}{2}z} = \frac{z}{3z - 2z_0}.$$

Denna ort är således som nyss nämndes en bransch av en liksidig hyperbel; dess asymptoter äro $r' = \frac{1}{3}r'_0$ och $z = \frac{2}{3}z_0$. För $z = z_0$ blir $r' = r'_0$ och hyperbelns andra bransch går således genom punkten H_0 .

Vi erhålla nu skärningspunkterna A_1, A_2 mellan denna ort och hjälpkurvan genom att enligt den senares ekvation insätta $r' = L^3 : (l^2 - z^2)$. Enär $r'_0 = L^3 : (l^2 - z_0^2)$, får man då för bestämning av skärningspunkternas z -koordinater ekvationen

$$\frac{l^2 - z^2}{l^2 - z_0^2} = \frac{3z - 2z_0}{z},$$

alltså en tredjegrads ekvation i z . En av denna ekvations rötter är emellertid som sig bör $z = z_0$, motsvarande skärningspunkten H_0 , och vi behöva således endast fränskilja denna rot för att få de båda sökta. Subtraheras i från båda membra i föregående ekvation, erhålla vi

$$\frac{z_0^2 - z^2}{l^2 - z_0^2} = \frac{2(z - z_0)}{z},$$

och alltså efter bortförkortning av faktorn $z - z_0$ ekvationen

$$(85) \quad z^2 + z_0 z = -2(l^2 - z_0^2).$$

De båda z -koordinaterna för skärningspunkterna A_1, A_2 bliva alltså

$$z = -\frac{1}{2}z_0 \pm \frac{3}{2}\sqrt{z_0^2 - \frac{8}{9}l^2}$$

och enligt (84) finna vi således de sökta gränsvärdena

$$\left. \begin{array}{l} h_{01} \\ h_{02} \end{array} \right\} = \frac{7}{4}z_0 \mp \frac{9}{4}\sqrt{z_0^2 - \frac{8}{9}l^2}.$$

För att de skola bliva reella fordras att $z_0^2 > \frac{8}{9}l^2$, alltså $z_0 > \frac{\sqrt{8}}{3}l$; i motsatt fall kommer hyperbelbranschen att ligga helt och hållet utanför hjälpkurvan och pendelkulan kan då icke komma ovanför nolltrycksplanet, vilket värde hastighetshöjden h_0 än har.

Återgå vi till våra vanliga beteckningar, så att z -koordinaten för den nedre vändcirkeln betecknas med z_1 , för den övre med z_2 , så framgår av ovanstående, att normaltrycket under hela rörelsen förblir positivt (inåtriktat) om $z_1 < \frac{\sqrt{8}}{3}l$. Ligger åter z_1 mellan detta värde och l , så kommer normaltrycket att under rörelsen byta tecken, om z_2 ligger *emellan* de båda gränsvärden, som kunna beräknas av ekvationen

$$(85^{\text{bis}}) \quad z_2^2 + z_1 z_2 = -2(l^2 - z_1^2);$$

är detta icke förhållandet, så förblir normaltrycket även i detta fall under hela rörelsen positivt.

Ekv. (85^{bis}) uttrycker det samband, som måste bestå mellan z_1 och z_2 för att normaltrycket skall bliva noll på den övre vändcirkeln, alltså för att denna cirkel skall ligga i nolltrycksplanet. Man bör alltså erhålla samma relation, om man i ekv. (55) sätter $z_* = \frac{3}{2}z_2$ samt inför uttrycket (58) för z_3 , vilket även som kontroll lätt kan verifieras.

Vilja vi i stället uttrycka villkoren med användande av de båda vändcirkelnas radier r_1, r_2 , så motsvaras $z_1 = \frac{\sqrt{8}}{3}l$ av $r_1 = \frac{1}{3}l$, och som resul-

tat finna vi alltså, att normaltrycket under rörelsen byter tecken, endast om den nedre vändcirkels radie r_1 är mindre än en tredjedel av sfärens radie l och om tillika den övre vändcirkels radie r_2 ligger mellan två av r_1 bestämda gränser, vilka kunna beräknas av ekv. (51) och (85^{bis}).

§ 10. Rörelsemängdsmomentet. Specialfallet $s_2 = 0$.

O må vara upphängningspunkten, P pendelkulan vid en sfärisk pendel. Samtidigt med P tänka vi oss en punkt G röra sig på sådant sätt, att sträckan¹ $OG = \mathbf{u}$ i varje ögonblick representerar momentet med avseende på O av rörelsemängden $m\mathbf{v}$ hos pendelkulan P . Ett närmare studium av rörelsen hos punkten G leder till en del anmärkningsvärda resultat och skall därför här utföras, ävenledes i anslutning till det införda rörelsedigrammet.

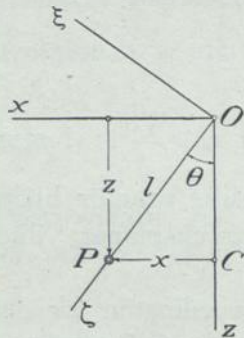


FIG. 21.

Vi använda oss därvid av två rätvinkliga axelsystem $Oxyz$, $O\xi\eta\zeta$ med gemensamt origo i O . Axlarna Ox , Oz , $O\xi$, $O\zeta$ antagas innehålla i pendelplanet (vertikalplanet genom OP) och valda på sätt fig. 21 anger; de återstående axlarna Oy , $O\eta$ sammanfalla då med varandra och med pendelplanets normal i O . Koordinaterna för P i dessa system äro

$$x = l \sin \theta, \quad y = 0, \quad z = l \cos \theta; \quad \xi = \eta = 0, \quad \zeta = l.$$

Under rörelsen vrider sig pendelplanet kring vertikalen Oz och bildar således med ett fast plan genom Oz en variabel vinkel, azimutvinkeln ψ . Vi antaga axelriktningarna så valda, att vridningen i riktning från Ox till Oy motsvarar växande ψ . Då jämväl höjdvinkeln θ varierar under rörelsen, erhåller partikelns hastighet \mathbf{v} följande projektioner på axlarna i systemet $O\xi\eta\zeta$

$$v_\xi = l \frac{d\theta}{dt}, \quad v_\eta = x \frac{d\psi}{dt}, \quad v_\zeta = 0.$$

Vi anmärka, att v_ξ och v_η även äro hastighetens komponenter utefter tangenterna till meridian- och parallellcirkeln genom P och sålunda äro iden-

¹ Vi begagna i denna paragraf på övligt sätt feta typer (\mathbf{u} , \mathbf{v}) för att beteckna sträckor eller vektorer, de motsvarande magra kursiva (U , v) för att beteckna dessa sträckors storlek.

tiska med v_m , resp. v_p i § 1 o. f., i det x är samma längd, som i det föregående betecknats med r .

Projektionerna av sträckan \mathbf{u} på samma axlar uttryckas genom determinanterna i matrisen

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ mv_{\xi} & mv_{\eta} & mv_{\zeta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & l \\ ml \frac{d\theta}{dt} & mx \frac{d\psi}{dt} & 0 \end{vmatrix}$$

och bliva således

$$U_{\xi} = -mlx \frac{d\psi}{dt}, \quad U_{\eta} = ml^2 \frac{d\theta}{dt}, \quad U_{\zeta} = 0.$$

Enligt övergångsformlerna

$$U_x = U_{\xi} \cos \theta + U_{\zeta} \sin \theta, \quad U_y = U_{\eta}, \quad U_z = -U_{\xi} \sin \theta + U_{\zeta} \cos \theta$$

erhållas därav samma sträckas projektioner på axlarna i systemet $Oxyz$

$$(86) \quad U_x = -mxz \frac{d\psi}{dt}, \quad U_y = ml^2 \frac{d\theta}{dt}, \quad U_z = mx^2 \frac{d\psi}{dt}.$$

Dessa äro således även koordinaterna för punkten G i axelsystemet $Oxyz$.

De verkande krafternas moment med avseende på axlarna Ox , Oy , Oz äro

$$(87) \quad M_x = 0, \quad M_y = -mgx, \quad M_z = 0.$$

Betecknar \mathfrak{M} den sträcka, som har dessa projektioner, så är således \mathfrak{M} av storleken mgx och riktad utefter negativa y -axeln.

Sträckan \mathfrak{M} utgör nu enligt en fundamental sats den geometriska derivatan av sträckan \mathbf{u} , alltså

$$(88) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Av denna vektorrelation bestämmes fullständigt rörelsen hos den ifrågasvarande punkten G .

För att av denna relation härleda ett uttryck för storleken U av sträckan \mathbf{u} multiplicera vi båda membra skalärt med \mathbf{u} , vilket ger

$$\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{u} \cdot \mathfrak{M} = U_x M_x + U_y M_y + U_z M_z = -gm^2 l^2 x \frac{d\theta}{dt}.$$

Då $x \frac{d\theta}{dt} = l \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{dz}{dt}$, fås efter integrering $\mathbf{u}^2 = U^2 = 2gm^2l^2z + \text{konst.}$ Denna relation är även en omedelbar följd av levande kraftens sats, alldenstund i ifrågavarande fall $U = l \cdot mv$. Med samma beteckning för integrationskonstanten som i ekv. (9) erhålles då

$$U^2 = 2gm^2l^2(z - z_*).$$

Enligt relationen (88) anger sträckan \mathfrak{M} till storlek och riktning hastigheten hos ändpunkten G av sträckan $OG = \mathbf{u}$. Punkten G har alltså ständigt vågrät hastighet och dess bana måste följaktligen vara innehållen i ett vågrätt plan. Härav framgår, att projektionen U_z måste vara konstant. Detta är, som synes av uttrycket för U_z , endast en annan form för ytlagen, i det man genom att sätta

$$(89) \quad U_z = m\mathcal{C}$$

återfår ekv. (10).

För att vinna anknytning till rörelsedigrammet skola vi emellertid uttrycka U_z i en annan form, i det vi i analogi med uttrycket för U skriva

$$U_z^2 = 2gm^2l^2(z_\beta - z_*).$$

Här betecknar då z_β en viss konstant, för vilken man genom jämförelse med uttrycket (89) erhåller värdet

$$(90) \quad z_\beta = z_* + \frac{\mathcal{C}^2}{2gl^2}.$$

Då vidare enligt (86), (17) och (20)

$$U_y^2 = m^2l^2v_z^2 = m^2l^2v_m^2 = 2gm^2l^2h_m = 2gm^2l^2(z - z')$$

och då $U^2 = U_x^2 + U_y^2 + U_z^2$, gälla tydligen likheterna

$$(91) \quad \frac{U_y^2}{z - z'} = \frac{U_x^2}{z' - z_\beta} = \frac{U_z^2}{z_\beta - z_*} = \frac{U^2}{z - z_*} = 2gm^2l^2.$$

De i bråkens täljare stående kvadraterna på rörelsemängdsmomentet och dess projektioner äro således proportionella mot de i nämnaren stående längderna, vilka lätt kunna framställas i rörelsedigrammet. För detta ändamål behöva vi endast komplettera detsamma genom inläggande av den våg-

räta linjen $z = z_\beta$, i det följande kortligen kallad β -linjen. För dess konstruktion märkes att enligt (90), (22) och (21)

$$z_\beta = z_* + \frac{L^3}{l^2} \operatorname{tg} \delta = z_* + r_0' \operatorname{tg} \delta,$$

där r_0' är abskissan för hjälpkurvans på axeln Or' belägna vertex B' (fig. 22 och 23). Om man alltså drar den vertikala linje, som tangerar hjälpkurvan i B' , och bestämmer dess skärningspunkt B_* med indexlinjen, så har punkten B_* koordinaten z_β , och en vågrät linje genom B_* bildar således den sökta β -linjen. I fig. 22—24 äro visade tre olika fall, motsvarande olika lägen av den övre vändcirkeln, nämligen då denna faller under, över eller i jämnhöjd med upphängningspunkten. Den sistnämnda händel-

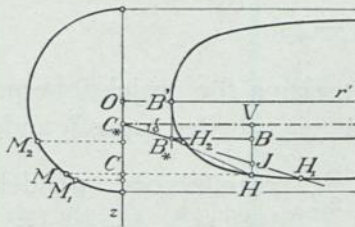


FIG. 22.

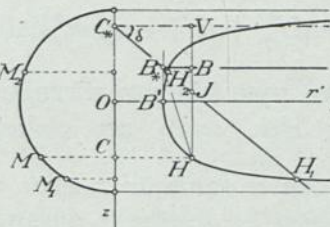


FIG. 23.

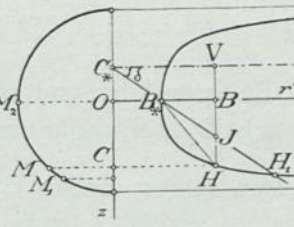


FIG. 24.

sen motsvarar fig. 24, där således punkterna H_2 och B_* sammanfalla i hjälpkurvans vertex B' .

Sedan β -linjen sålunda inlagts, har man, för att få en framställning av rörelsemängdsmomentet då pendelkulan befinner sig på en viss parallellcirkel CM , endast att på vanligt sätt från den motsvarande punkten H på hjälpkurvan draga vertikalen HV , som skär indexlinjen, β -linjen och nollnivån i resp. J , B och V . Längderna HJ , JB , BV och HV äro då proportionella mot U_y^2 , U_x^2 , U_z^2 och U^2 resp.

Projektionerna av sträckan \mathbf{u} på axlarna i systemet $Oxyz$ bliva alltså till sin storlek på enkelt sätt representerade av rörelsedigrammet. För bestämning av deras tecken återgå vi till ekv. (86). För enkelhetens skull skola vi i det följande hålla oss till ett bestämt rörelseskede, i det vi betrakta den *uppstigande* rörelsen, varjämte vi som förut antaga, att ytkonstanten \mathcal{C} är positiv. Båda vinklarna θ och ψ äro då växande och då radien $x = r$ alltid är positiv, framgår av uttrycken (86), att projektionerna U_y och U_z äro positiva, men att projectionen U_x har motsatt tecken mot z , alltså är negativ, när pendelkulan befinner sig på den nedre halvsfären, men blir positiv, om den kommer upp på den övre.

Då ändpunkten G av sträckan \mathbf{II} , som förut nämnts, rör sig i ett vågrätt plan, kunna vi för fortsättningen hålla oss till detta. Beteckna vi med O' skärningspunkten mellan ifrågavarande plan och axeln Oz , så kan läget av punkten G angivas genom längden U' av radius vektor $O'G$ och den vinkel χ , som denna vektor bildar med pendelplanet. Närmare bestämt skola vi med χ förstå den mellan 0 och 2π fallande vinkel, som axelriktningen Ox måste vridas i positiv led (från Ox till Oy) kring Oz för att bli likriktad med radius vektor $O'G$. Man har då

$$(92) \quad U_x = U' \cos \chi, \quad U_y = U' \sin \chi$$

samt enligt (91)

$$(93) \quad U'^2 = U_x^2 + U_y^2 = 2gm^2l^2 (z - z_\beta).$$

På grund av vad som nyss nämnts rörande tecknen för projektionerna U_x och U_y , framgår av ekv. (92), att vinkeln χ vid den uppstigande rörelsen ligger mellan 0 och π samt är $>$ eller $< \frac{\pi}{2}$, allteftersom pendelkulan befinner sig nedanför eller ovanför upphängningspunkten. Då enligt (91), (92) och (93)

$$\cos^2 \chi = U_x^2 : U'^2 = (z' - z_\beta) : (z - z_\beta) = JB : HB$$

kan vinkeln lätt konstrueras av diagrammet.¹ Med stöd av denna relation kunna vi även lätt se, huru ifrågavarande vinkel varierar, då pendelkulan stiger från sitt lägsta till sitt högsta läge och alltså den motsvarande punkten H på hjälpkurvan genomlöper bågen H_1H_2 från H_1 till H_2 . Draga vi nämligen linjen B_*H och beteckna vi för ett ögonblick vinkeln BB_*H med δ_H , så är $JB : HB = \operatorname{tg} \delta : \operatorname{tg} \delta_H$, alltså

$$\cos^2 \chi = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \delta_H},$$

och i detta uttryck varierar endast nämnaren med läget av den löpande punkten H , medan täljaren är konstant. Betrakta vi då först fig. 22, så se vi att, när H rör sig från H_1 till H_2 , vinkeln δ_H först växer från δ till ett visst maximivärde, svarande mot det läge, då vinkeln B_*H blir tangent

¹ Uppslås på linjen HB som diameter en halvcirkelbåge, vilken skäres av en genom J dragen vågrät linje i en punkt T , så är vid den uppstigande rörelsen χ lika med vinkeln TBV eller TBJ , allteftersom H befinner sig nedanför eller ovanför vertex B' .

till hjälpkurvan, varefter δ_H åter avtar till δ . Följaktligen måste vinkeln χ , som i detta fall alltså är $> \frac{\pi}{2}$, avtaga från värdet $\chi_1 = \pi$ till ett visst minimivärde $\chi_{\min} > \frac{\pi}{2}$ för att därefter åter växa till $\chi_2 = \pi$. Genom ett liknande resonemang finner man, att vid det i fig. 23 framställda fallet vinkeln χ alltså avtar från $\chi_1 = \pi$ till $\chi_2 = 0$, i det den passerar värdet $\frac{\pi}{2}$, då punkten H passerar vertex B' , samt att vid fallet i fig. 24 χ avtar från $\chi_1 = \pi$ till $\chi_2 = \frac{\pi}{2}$. Betecknas de tre fallen i nu nämnd ordning med I, II, III, erhållas alltså som gränsvärden för vinkeln χ

$$\begin{aligned} \text{I } z_2 > 0: & \quad \chi_1 = \pi, \quad \chi_2 = \pi, \\ \text{II } z_2 < 0: & \quad \chi_1 = \pi, \quad \chi_2 = 0, \\ \text{III } z_2 = 0: & \quad \chi_1 = \pi, \quad \chi_2 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

För att få ett generellt uttryck beteckna vi med $\text{sign } z_2$ talet $+1$, -1 eller 0 , allteftersom koordinaten z_2 är positiv, negativ eller noll, och kunna då skriva

$$(94) \quad \chi_1 = \pi, \quad \chi_2 = (1 + \text{sign } z_2) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

För analytisk beräkning av vinkeln χ kan man använda sig av att enligt (86) och (89) $U_x = -\frac{z}{x} U_z = -\frac{z}{x} \cdot m \mathcal{C}$ och $U_y = -\frac{ml^2}{x} \cdot \frac{dz}{dt}$ och alltså enligt (92) och (14)

$$(95) \quad \text{tg}^2 \chi = \frac{2gl^2}{\mathcal{C}^2} \cdot \frac{f(z)}{z^2}.$$

Genom denna relation blir vinkeln χ således uttryckt som funktion av z , men för entydig bestämning måste man beakta vad som förut nämnts rörande den kvadrant, inom vilken vinkeln ligger.

Med vinkeln χ är läget av radius vektor $O'G$ i förhållande till pendelplanet fastställt. Det absoluta läget i rummet bestämmes däremot av vinkelsumman $\psi + \chi$, som anger vinkeln mellan radius vektor $O'G$ och det fixa plan, ifrån vilket azimutvinkeln räknas. För denna vinkels derivata med avseende på tiden kunna vi erhålla ett enkelt uttryck, om vi be-

gagna oss av, att vid plan rörelse ythastigheten hos en punkt G med avseende på en fix punkt O' i planet är lika med halva momentet med avseende på O' av hastigheten hos punkten G . I detta fall är den ifrågasvarande ythastigheten $= \frac{1}{2} U'^2 \frac{d}{dt} (\psi + \chi)$ och hastigheten $= \mathfrak{M}$, och vi få alltså

$$U'^2 \frac{d}{dt} (\psi + \chi) = \begin{vmatrix} U_x & U_y \\ M_x & M_y \end{vmatrix}.$$

Högra membrum är enligt (86) och (87) lika med $gm^2zx^2 \frac{d\psi}{dt} = gm^2z \mathfrak{C}$ och efter insättning av uttrycket (93) erhålles då

$$(96) \quad \frac{d}{dt} (\psi + \chi) = \frac{\mathfrak{C}}{2l^2} \cdot \frac{z}{z - z_\beta}.$$

Denna relation visar till en början, att vridningen hos sträckan $O'G$ (eller hos meridianplanet genom OG) följer en särdeles enkel lag i det speciella fall, då $z_\beta = 0$. Detta fall är identiskt med det ovan med III betecknade fallet $z_2 = 0$ (fig. 24), i det punkten B_* kan ligga i hjälpkurvans vertex B' , endast om jämväl H_2 ligger i denna punkt, alltså om den övre vändcirkeln faller i jämnhöjd med upphängningspunkten. I denna händelse blir högra membrum av ekv. (96) konstant och det meridianplan, som innehåller sträckan \mathfrak{u} , vrider sig alltså med *konstant vinkelhastighet* kring axeln Oz . Antages som förut, att såväl tiden t som azimutvinkeln ψ räknas från pendelkulans lägsta läge, då vinkeln χ har värdet $\chi_1 = \pi$, erhålles genom integrering

$$\psi + \chi = \pi + \frac{\mathfrak{C}}{2l^2} \cdot t.$$

Genom införande av hjälpvinkeln φ och modylvinkeln α enligt § 7 kommer man då till följande uttryck

$$(97) \quad \begin{cases} z_2 = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{z_1}{l}, \quad l' = l \sin 2\alpha, \quad z = z_1 \cos^2 \varphi, \\ U' = ml\sqrt{2gz_1} \cos \varphi, \quad \chi = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \varphi \Delta \varphi}{\sqrt{\cos 2\alpha}}, \\ t = F(\alpha, \varphi) \cdot \sqrt{\frac{l'}{g}}, \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \varphi \Delta \varphi}{\sqrt{\cos 2\alpha}} + \sqrt{\cos 2\alpha} \cdot F(\alpha, \varphi), \\ T = \mathfrak{K}(\alpha) \cdot \pi \sqrt{\frac{l'}{g}}, \quad \Psi = \{1 + \sqrt{\cos 2\alpha} \mathfrak{K}(\alpha)\} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

I detta fall kunna således azimut- och absidvinklarna undantagsvis uttryckas med elliptiska integraler av endast *första* slaget.¹

I det allmänna fallet erhålles genom integrering av ekv. (96) relationen²

$$\psi + \chi = \pi + \frac{c}{2l^2} \int_0^t \frac{z}{z - z_\beta} dt.$$

För utförande av integrationen skriva vi integranden i formen $1 + z_\beta : (z - z_\beta)$ och införa sedan hjälpvinkeln φ enligt ekv. (61) och (64). Vi erhålla då

$$(98) \quad \psi + \chi = \pi + A F(\alpha, \varphi) + B \Pi(p, \alpha, \varphi),$$

där koefficienterna A , B och parametern p ha värdena

$$(99) \quad A = \frac{c}{\sqrt{2gl^2(z_1 - z_3)}}, \quad B = \frac{z_\beta}{z_1 - z_\beta} \cdot A, \quad p = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_\beta},$$

medan modylvinkeln α som förut är bestämd genom ekv. (63).

Det av ekv. (98) framgående uttrycket för azimutvinkeln är väsentligt bekvämare för numerisk räkning än det förut i § 7 härledda, enär det samma innehåller endast *en* elliptisk integral av tredje slaget, i st. f. två sådana i det i (69) angivna uttrycket.³ Därjämte ingår då en elliptisk integral av första slaget samt den variabla vinkeln χ , som enligt föregående kan uttryckas som en elementär funktion (en arcusfunktion) av z eller φ .

För att erhålla absidvinkeln Ψ ha vi att i ekv. (98) sätta $\varphi = \frac{\pi}{2}$, då de ingående elliptiska integralerna alltså bliva *fullständiga*. Därvid blir $\psi = \Psi$ och $\chi = \chi_2 = (1 + \text{sign } z_2) \cdot \frac{\pi}{2}$ enligt ekv. (94).

¹ Att i fallet $z_2 = 0$ inträder en väsentlig förenkling är angivet av GREENHILL, se sid. 224, not 2.

² Vi anmärka som en omedelbar följd av denna likhet, att i fallet II azimutvinkeln vid passagen från den nedre till den övre halvsfären nödvändigt måste vara $> \frac{\pi}{2}$, alldenstund χ i detta ögonblick enligt föregående har värdet $\frac{\pi}{2}$ och integralen är > 0 .

³ Rörande möjligheten att på analytisk väg transformera ett uttryck av den ena formen till den andra hänvisas till noten å sid. 207 i föregående uppsats.

§ 11. Numerisk beräkning av absidvinkeln.

Vi skola nu närmare studera det uttryck för absidvinkeln, till vilket man på nyss angivet sätt kommer, och visa att man genom införande av de i föregående uppsats tabulerade funktionerna kan bringa detsamma till en för praktisk räkning synnerligen bekväm form.

Av ekv. (99) och (63) erhålles

$$1 - p = \frac{z_2 - z_\beta}{z_1 - z_\beta}, \quad p - k^2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \cdot \frac{z_\beta - z_3}{z_1 - z_\beta}.$$

Att båda dessa uttryck äro ≥ 0 , framgår omedelbart av den ovan angivna konstruktionen av β -linjen. Då nämligen punkten B_* alltid ligger lägre än C_* men aldrig lägre än H_2 , har man $z_1 \geq z_2 \geq z_\beta > z_* > z_3$, där likheten $z_2 = z_\beta$ inträder endast om $z_2 = 0$.

Parametern p för integralen $II(p, \alpha, \varphi)$ i (98) faller således inom intervallet k^2 till 1 och vi kunna då omedelbart övergå till den i föregående uppsats införda modifierade normalformen $A(\alpha, \beta, \varphi)$, varvid parametervinkeln β bestämmes av ekvationen

$$(100) \quad \sin^2 \beta = \frac{p - k^2}{k'^2 p} = \frac{z_\beta - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Man ser att denna vinkel blir fastställd genom läget av punkterna B_* , H_2 och H_3 i rörelsedigrammet (fig. 22—24 och fig. 15) och på enkelt sätt kan konstrueras av dessa.

För transformering av koefficienten B i ekv. (99) observera vi, att man genom insättning i ekv. (53) av det i ekv. (90) angivna uttrycket för z_β erhåller

$$f(z_\beta) = -\frac{c^2}{2g} \cdot \frac{z_\beta^2}{l^2},$$

vadan alltså enligt (54) gäller

$$\frac{c^2}{2g} \cdot \frac{z_\beta^2}{l^2} = (z_1 - z_\beta)(z_2 - z_\beta)(z_\beta - z_3).$$

På grund därav blir

$$B^2 = \frac{(z_2 - z_\beta)(z_\beta - z_3)}{(z_1 - z_3)(z_1 - z_\beta)} = \frac{(1 - p)(p - k^2)}{p}.$$

Då vidare B har samma tecken som z_β , och z_β enligt konstruktionen av β -linjen har samma tecken som z_2 , erhålles

$$B = \text{sign } z_2 \cdot \sqrt{\frac{(1-p)(p-k_2)}{p}},$$

och alltså blir enligt definitionsekvationen EI (25)

$$B \Pi(p, \alpha, \varphi) = \text{sign } z_2 \cdot A(\alpha, \beta, \varphi).$$

Om man insätter detta uttryck i ekv. (98) och sedan övergår till absidvinkeln på sätt angivits i det sista stycket av föregående paragraf, erhåller man

$$\Psi = (1 - \text{sign } z_2) \cdot \frac{\pi}{2} + A F(\alpha) + \text{sign } z_2 \cdot A(\alpha, \beta)$$

eller vid specialisering för de tre fallen

$$(101) \quad \begin{cases} \text{I } z_2 > 0: & \Psi = A F(\alpha) + A(\alpha, \beta) \\ \text{II } z_2 < 0: & \Psi = \pi + A F(\alpha) - A(\alpha, \beta) \\ \text{III } z_2 = 0: & \Psi = \frac{\pi}{2} + A F(\alpha). \end{cases}$$

Den sista formeln kan för övrigt erhållas som gränsfall ur vilken som helst av de båda föregående, alldenstund för $z_2 = z_\beta = 0$ parametervinkeln β enligt (100) antar värdet $\frac{\pi}{2}$, varvid enligt EI (41) funktionen $A(\alpha, \beta)$ även blir $= \frac{\pi}{2}$. Den tredje formeln kan således utelämnas och i stället de båda föregående giltighet utsträckas till $z_2 \geq 0$, resp. $z_2 \leq 0$.

I uttrycken (101) kunna vi nu direkt införa de i föregående uppsats tabulerade funktionerna $K(\alpha)$ och $\Pi(\alpha, \beta)$ enligt EI (14) och (30). Dessförinnan skola vi emellertid ombilda de ekvationer, som tjäna till bestämning av vinkeln β och koefficienten A .

För att erhålla bekvämare uttryck för beräkning av parametervinkeln β observera vi att enligt (53) och (90)

$$f(0) = -l^2 z_* - \frac{c^2}{2g} = -l^2 z_\beta,$$

medan enligt (54) $f(0) = z_1 z_2 z_3$. Följaktligen är $l^2 z_\beta = -z_1 z_2 z_3$ och således enligt (56)

$$l^2 z_\beta = z_2 (l^2 + z_1 z_2 + z_2 z_3) = z_3 (l^2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)$$

eller

$$l^2 (z_\beta - z_2) = z_2^2 (z_1 + z_3), \quad l^2 (z_\beta - z_3) = z_3^2 (z_1 + z_2).$$

De av ekv. (100) framgående uttrycken

$$\sin^2 \beta = \frac{z_\beta - z_3}{z_2 - z_3}, \quad \cos^2 \beta = \frac{z_2 - z_\beta}{z_2 - z_3}$$

kunna således ersättas med

$$(102) \quad \sin^2 \beta = \frac{z_3^2}{l^2} \cdot \frac{z_1 + z_2}{z_2 - z_3}, \quad \cos^2 \beta = -\frac{z_2^2}{l^2} \cdot \frac{z_1 + z_3}{z_2 - z_3}.$$

För koefficienten A erhålles enligt (99) och (57)

$$(103) \quad A^2 = \frac{r_1^2 r_2^2}{l^2 (z_1 + z_2)(z_1 - z_3)}.$$

I dessa uttryck liksom i uttrycket (63) för $k^2 = \sin^2 \alpha$ kan man slutligen insätta värdet på z_3 enligt ekv. (58), då man således erhåller α , β och A uttryckta som funktioner enbart av z_1 och z_2 .

För att beräkna absidvinkeln Ψ , då koordinaterna z_1 och z_2 för vändcirkelarna äro givna, erhåller man då följande *slutformler*, vid vilkas begagnande man har att erinra sig, att z_1 hänför sig till den nedre och z_2 till den övre vändcirkeln, så att $z_1^2 \geq z_2^2$, samt vidare att vinklarna α och β

ligga i intervallet 0 till $\frac{\pi}{2}$.

$$(104) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \alpha = \frac{z_1^2 - z_2^2}{l^2 + z_1^2 + 2z_1 z_2}, \quad \sin^2 \beta = \frac{(l^2 + z_1 z_2)^2}{l^2 (l^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2)} \\ A = \sqrt{\frac{(l^2 - z_1^2)(l^2 - z_2^2)}{l^2 (l^2 + z_1^2 + 2z_1 z_2)}} \\ \text{I } z_2 \geq 0: \quad \Psi = \{A R(\alpha) + J(\alpha, \beta)\} \cdot \frac{\pi}{2} \\ \text{II } z_2 \leq 0: \quad \Psi = \{2 + A R(\alpha) - J(\alpha, \beta)\} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

Vi tillämpa först dessa formler på specialfallet $z_2 = 0$, varvid vi böra återfå det i (97) angivna uttrycket för absidvinkeln. Vid insättning av nämnda värde på z_2 erhålles $\sin^2 \alpha = z_1^2 : (l^2 + z_1^2)$, alltså $\cos^2 \alpha = l^2 : (l^2 + z_1^2)$ och $\operatorname{tg} \alpha = z_1 : l$; vidare $A = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ samt $\sin \beta = 1$, varav $\beta = \frac{\pi}{2}$ och $\mathbb{I}(\alpha, \beta) = 1$, således ur vilkendera som helst av formlerna I eller II

$$(105) \quad \Psi = \{1 + \sqrt{\cos 2\alpha} \cdot \mathbb{K}(\alpha)\} \cdot \frac{\pi}{2}$$

i överensstämmelse med (97).

Huru absidvinkeln i detta fall varierar med den nedre vändcirkelns läge framgår av följande härur (med användande av tabellen över $\mathbb{K}(\alpha)$ sid. 210) beräknade talvärden:

| | | | | | | | | | | | |
|-----------|---|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $z_2 = 0$ | $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \\ l \end{array} \right.$ | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | |
| | | $\alpha^\circ =$ | 41,99 | 38,66 | 34,99 | 30,96 | 26,57 | 21,80 | 16,70 | 11,31 | 5,71 |
| | | $\Psi^\circ =$ | 123,64 | 137,54 | 148,03 | 156,57 | 163,66 | 169,45 | 174,01 | 177,32 | 179,33 |

Genom passning kan man även av uttrycket (105) bestämma det värde på α , som svarar mot ett antaget värde på Ψ (mellan $\frac{\pi}{2}$ och π), och sedan beräkna $\frac{z_1}{l} = \operatorname{tg} \alpha$. Exempelvis erhållas på detta sätt följande talvärden:

| | | | | | | | | | |
|-----------|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $z_2 = 0$ | $\left\{ \begin{array}{l} \Psi^\circ = \\ \alpha^\circ = \\ \frac{z_1}{l} = \end{array} \right.$ | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 |
| | | 44,75 | 43,97 | 42,63 | 40,65 | 37,90 | 34,16 | 28,99 | 21,27 |
| | | 0,9911 | 0,9646 | 0,9204 | 0,8586 | 0,7785 | 0,6786 | 0,5540 | 0,3893 |

Vi betrakta därefter specialfallet $z_1 = z_2 > 0$, vilken motsvarar rörelse på parallellcirkel, alltså *koniska pendeln*. Som banan är en vågrät cirkel finnas inga absider, men betraktas rörelsen som ett gränsfall av zonrörelse med närbelägna vändcirkel, närmar sig absidvinkeln, såsom visats i § 5, till ett bestämt gränsvärde, vilket erhålles av ekv. (34), om man sätter krökningskoefficienten $\kappa = 1$ och $\cos \theta = z_1 : l$. Detta gränsvärde erhålles även av (104), i det man för $z_1 = z_2$ får $\alpha = 0$, således $\mathbb{K}(\alpha) = 1$, $\mathbb{I}(\alpha, \beta) = \sin \beta$ och enligt I $\Psi = (A + \sin \beta) \cdot \frac{\pi}{2}$, där

$$A = \frac{l^2 - z_1^2}{l\sqrt{l^2 + 3z_1^2}}, \quad \sin \beta = \frac{l^2 + z_1^2}{l\sqrt{l^2 + 3z_1^2}},$$

alltså slutligen

$$(106) \quad \Psi = \frac{l}{\sqrt{l^2 + 3z_1^2}} \cdot \pi.$$

Härav erhållas följande talvärden:

$$z_1 = z_2 \begin{cases} \frac{z_1}{l} = & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ \Psi^\circ = & 97,19 & 105,34 & 114,53 & 124,81 & 136,07 & 147,96 & 159,72 & 170,08 & 177,36 \end{cases}$$

Ävenså kan man omvänt för antagna värden på Ψ beräkna $\frac{z_1}{l} = \sqrt{\frac{1}{3}(\pi^2 : \Psi^2 - 1)}$ och erhåller sålunda exempelvis:

$$z_1 = z_2 \begin{cases} \Psi^\circ = & 100 & 110 & 120 & 130 & 140 & 150 & 160 & 170 \\ \frac{z_1}{l} = & 0,8641 & 0,7478 & 0,6455 & 0,5529 & 0,4666 & 0,3830 & 0,2976 & 0,2009 \end{cases}$$

Vi skola vidare undersöka, vad formlerna (104) ge i ett par gränfall, som vi förut för enkelhets skull uteslutit från våra betraktelser, nämligen då ytkonstanten \mathcal{C} är noll eller oändlig, alltså indexlinjen vågrät eller lodrät. Det förra motsvarar, som redan nämnts i § 1, rörelse i ett vertikallplan, varvid alltså pendeln fungerar som *vertikalpendel*. I detta fall är $z_1 = l$, vilket insatt i (104) ger $A = 0$ och $\sin \beta = 1$, alltså $\beta = \frac{\pi}{2}$ och

$\mathcal{I}(\alpha, \beta) = 1$, varav såväl enligt I som II följer $\Psi = \frac{\pi}{2}$. Detta resultat

får då tolkas så, att absidvinkeln tenderar mot gränsen $\frac{\pi}{2}$ i samma mån som den nedre vändcirkeln närmar sig till sfärens lägsta punkt.

Det andra gränfallet $\mathcal{C} = \infty$ inträder enligt ekv. (57), om $z_2 = -z_1$. Detta bekräftas ju även av rörelsedigrammet, i det de båda punkterna H_1, H_2 (fig. 15) då falla symmetriskt med avseende på axeln Or' , så att indexlinjen blir lodrät. Punkten C_* och nollnivån bliva då oändligt avlägsna och pendelkulans hastighet således oändligt stor. Detta fall kan

alltså icke fysiskt realiseras, men man kan — åtminstone teoretiskt — komma detsamma huru nära som helst genom att bibringa pendelkulan en tillräckligt stor (lämpligt riktad) begynnelsehastighet. Om hastigheten är mycket stor, blir även normaltrycket — representerat av spänningen i stängen eller snöret — mycket stort och tyngdkraftens inflytande på rörelsen relativt litet. Kan detta inflytande helt och hållet försummas, så att rörelsen sker under inverkan endast av normaltrycket, så blir banan en geodetisk linje på sfären, alltså en *storcirkel*, vilken beskrives med konstant vinkelhastighet. Man kan tillnärmelsevis realisera en sådan rörelse med en lätt pendelkula, fäst i ett kort snöre som man håller i handen, i det man genom lämpliga rörelser av denna kan få pendelkulan att virvla rundt i en bana, som approximativt är cirkulär och innehållen i ett lutande plan genom snörets fasthållna ändpunkt. I anslutning därtill skola vi använda benämningen *virvelpendel* för att beteckna detta gränsfall. Banans högsta och lägsta punkter ligga i ändpunkterna av en fix lutande diameter i sfären och absidvinkeln har följaktligen gränsvärdet π . Detta erhålles även av (104), i det $z_2 = -z_1$ ger $\alpha = 0$, alltså $K(\alpha) = 1$, $\mathbb{I}(\alpha, \beta) = \sin \beta$ och enligt II $\Psi = (2 + A - \sin \beta) \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$, i det $A = \sin \beta = \sqrt{l^2 - z_1^2} : l$.

I de fyra sålunda betraktade speciella fallen är alltså antingen $\alpha = 0$ eller $\beta = \frac{\pi}{2}$, varvid funktionen $\mathbb{I}(\alpha, \beta)$ antager de i EI (43) och (44) angivna speciella värdena $\sin \beta$, resp. 1. I det allmänna fallet får man vid den numeriska beräkningen av absidvinkeln enligt (104) bestämma $\mathbb{I}(\alpha, \beta)$ genom interpolering i tabellerna sid. 212—13 (eller sid. 210—11, om $\alpha \leq 45^\circ$ och $\beta \geq 70^\circ$). På detta sätt ha de i tabellen å nästa sida sammanställda talvärdena blivit beräknade, motsvarande alla kombinationer, vid vilka $\frac{z_1}{l}$ och $\frac{z_2}{l}$ uttryckas som hela tiondelar, med uteslutande av de som tillhöra något av ovannämnda specialfall.

De sålunda beräknade talvärdena kunna läggas till grund för en grafisk framställning av, huru absidvinkeln varierar med vändcirkelnas lägen. Vi använda oss därvid av den vanliga metoden för grafisk representation av en funktion av två variabler, i det vi tolka $\frac{z_1}{l}$ och $\frac{z_2}{l}$ såsom rätvinkliga koordinater för ett plans punkter och i detta plan inlägga kurvor $\Psi = \text{konstant}$ för en följd lämpligt valda konstantvärden. Enär vid rörelse på sfären gäller att $0 \leq z_1 \leq l$ och $z_2^2 \leq z_1^2$, komma de punkter, som svara

| $\frac{z_1}{l}$ | $\pm \frac{z_2}{l}$ | $z_2 > 0$ | | | $z_2 < 0$ | | | $\frac{z_1}{l}$ | $\pm \frac{z_2}{l}$ | $z_2 > 0$ | | | $z_2 < 0$ | | |
|-----------------|---------------------|----------------|---------------|--------------|----------------|---------------|--------------|-----------------|---------------------|----------------|---------------|--------------|----------------|---------------|--------------|
| | | α° | β° | Ψ° | α° | β° | Ψ° | | | α° | β° | Ψ° | α° | β° | Ψ° |
| 0,9 | 0,8 | 13,22 | 78,54 | 100,50 | 42,67 | 38,76 | 175,22 | 0,7 | 0,3 | 27,23 | 79,96 | 133,08 | 37,70 | 74,83 | 164,56 |
| > | 0,7 | 18,84 | 79,40 | 103,32 | 49,71 | 50,49 | 166,74 | > | 0,2 | 30,28 | 82,86 | 137,87 | 37,58 | 80,57 | 158,97 |
| > | 0,6 | 23,24 | 80,36 | 105,97 | 51,73 | 60,38 | 157,99 | > | 0,1 | 32,86 | 86,18 | 142,85 | 36,60 | 85,61 | 153,42 |
| > | 0,5 | 27,04 | 81,45 | 108,57 | 51,67 | 68,38 | 150,02 | 0,6 | 0,5 | 13,70 | 72,90 | 130,11 | 22,36 | 60,26 | 178,87 |
| > | 0,4 | 30,46 | 82,69 | 111,23 | 50,55 | 74,76 | 143,10 | > | 0,4 | 19,25 | 75,53 | 135,35 | 28,47 | 67,17 | 175,93 |
| > | 0,3 | 33,61 | 84,12 | 113,99 | 48,85 | 79,84 | 137,14 | > | 0,3 | 23,34 | 78,50 | 140,59 | 31,31 | 73,69 | 171,85 |
| > | 0,2 | 36,56 | 85,77 | 116,94 | 46,78 | 83,93 | 132,02 | > | 0,2 | 26,57 | 81,87 | 145,87 | 32,31 | 79,70 | 167,07 |
| > | 0,1 | 39,35 | 87,71 | 120,13 | 44,47 | 87,26 | 127,56 | > | 0,1 | 29,10 | 85,68 | 151,21 | 32,09 | 85,14 | 161,91 |
| 0,8 | 0,7 | 13,48 | 74,93 | 109,40 | 32,49 | 46,33 | 177,67 | 0,5 | 0,4 | 13,51 | 73,90 | 141,80 | 18,99 | 66,59 | 179,07 |
| > | 0,6 | 19,16 | 76,33 | 113,21 | 39,92 | 55,30 | 172,58 | > | 0,3 | 18,74 | 77,27 | 147,45 | 24,23 | 73,00 | 176,57 |
| > | 0,5 | 23,57 | 77,91 | 116,93 | 42,95 | 63,43 | 166,42 | > | 0,2 | 22,37 | 81,05 | 153,00 | 26,57 | 79,11 | 172,96 |
| > | 0,4 | 27,31 | 79,70 | 120,69 | 43,85 | 70,56 | 160,02 | > | 0,1 | 24,94 | 85,28 | 158,43 | 27,18 | 84,79 | 168,56 |
| > | 0,3 | 30,62 | 81,74 | 124,55 | 43,52 | 76,68 | 153,79 | 0,4 | 0,3 | 12,92 | 76,21 | 153,81 | 16,01 | 72,65 | 179,20 |
| > | 0,2 | 33,59 | 84,09 | 128,61 | 42,39 | 81,87 | 147,95 | > | 0,2 | 17,55 | 80,37 | 159,41 | 20,27 | 78,73 | 176,96 |
| > | 0,1 | 36,27 | 86,82 | 132,91 | 40,73 | 86,27 | 142,53 | > | 0,1 | 20,35 | 84,96 | 164,66 | 21,88 | 84,55 | 173,63 |
| 0,7 | 0,6 | 13,66 | 73,21 | 119,25 | 26,57 | 53,54 | 178,48 | 0,3 | 0,2 | 11,73 | 79,80 | 165,11 | 13,12 | 78,53 | 179,28 |
| > | 0,5 | 19,33 | 75,18 | 123,84 | 33,45 | 61,22 | 174,81 | > | 0,1 | 15,29 | 84,71 | 169,93 | 16,18 | 84,38 | 177,19 |
| > | 0,4 | 23,65 | 77,42 | 128,42 | 36,56 | 68,36 | 169,97 | 0,2 | 0,1 | 9,59 | 84,51 | 174,19 | 9,97 | 84,29 | 179,31 |

mot möjliga kombinationer av $\frac{z_1}{l}$ och $\frac{z_2}{l}$, att ligga inom eller på gränsen av den likbenta triangel, vars sidor falla utefter linjerna $z_1 = l$, $z_1 = z_2$ och $z_1 = -z_2$. I fig. 25 visas ett sådant diagram, där tio stycken dylika kurvor äro uppritade, motsvarande $\Psi = 90^\circ, 100^\circ, 110^\circ$ etc. till 180° . Därvid är $\frac{z_1}{l}$ avsatt som koordinat på en lodrät axel, som räknas positiv nedåt, $\frac{z_2}{l}$ på en vågrät, som räknas positiv åt höger; koordinataxlarnas skärningspunkt ligger i triangelns övre topp.

De ovan betraktade specialfallen motsvaras, som omedelbart inses, av var sin rät linje i detta diagram. Triangelns högra gränslinje med ekvationen $z_1 = z_2$ svarar mot *koniska pendeln*, baslinjen med ekvationen $z_1 = l$ mot *vertikalpendeln* och den vänstra gränslinjen med ekvationen $z_1 = -z_2$ mot *virvelpendeln*. Triangelns tre gränslinjer svara alltså mot de tre fall,

då pendelkulans bankkurva övergår i en *plan* kurva. Det återstående specialfallet, $z_2 = 0$, motsvaras av triangelns höjdlinje.

Diagramtriangelns baslinje och vänstra gränslinje utgöra tillika individer i kurvsystemet $\Psi = \text{konstant}$, i det att absidvinkeln, som ovan nämnts, vid vertikalpendeln, resp. virvelpendeln, uppnår sina yttersta gränsvärden $\frac{\pi}{2}$, resp. π . För inläggning av de övriga, egentliga kurvorna har man till en början de

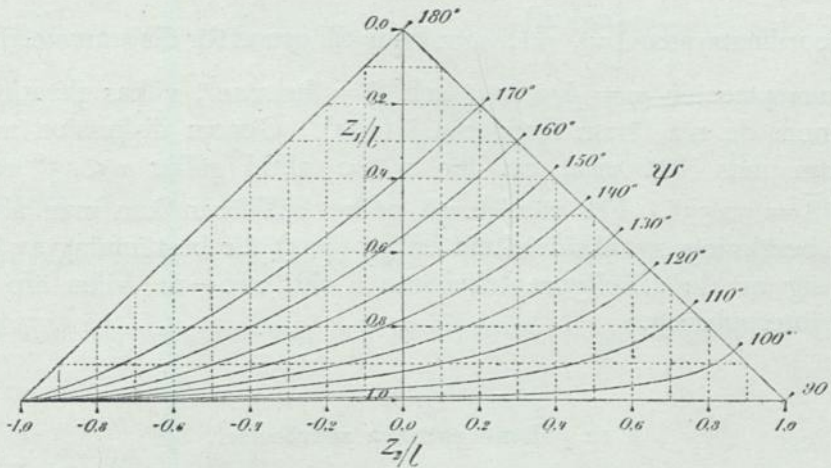


FIG. 25.

under ekvationerna (105) och (106) för $\Psi = 100^\circ, 110^\circ$ etc. beräknade värdena på $\frac{z_1}{l}$, vilka bestämma de ifrågavarande kurvornas skärningspunkter med höjdlinjen och den högra gränslinjen resp. Vidare märkes, att samtliga kurvor gå in till triangelns vänstra hörnpunkt, i det såväl vinklarna α och β , som koefficienten A i ekv. (104) bliva fullständigt obestämda för $z_1 = -z_2 = l$. För att erhålla flera punkter på kurvorna har förfarits så, att genom (grafisk) interpolering mellan de i föregående tabell sammanställda Ψ -värdena bestämts, vilka värden på $\frac{z_2}{l}$ (resp. $\frac{z_1}{l}$), som svara mot de av kurvorna representerade Ψ -värdena och de i tabellen upptagna värdena på $\frac{z_1}{l}$ (resp. $\frac{z_2}{l}$). Därigenom ha kurvornas skärningspunkter med de i figuren inlagda prickade räta linjerna kunnat med för ändamålet tillräcklig noggrannhet bestämmas.

Vid givna värden på $\frac{z_1}{l}$ och $\frac{z_2}{l}$ kan man ur detta diagram omedelbart avläsa, resp. proportionera sig till ett approximativt värde på absidvinkeln Ψ , varvid felet i de flesta fall icke torde behöva överstiga 1 à 2°.

I den ovan införda tabellen över Ψ angivas även värdena på modylvinkeln α och parametervinkeln β . Man ser att för rörelser, som helt och hållet förlöpa på nedre halvsfären ($z_2 > 0$), vinkeln α i allmänhet har små, vinkeln β däremot stora värden. För närmare studium härav kan man i samma koordinatsystem $\left(\frac{z_1}{l}, \frac{z_2}{l}\right)$, som lagts till grund för diagrammet i fig. 25, upprita kurvsystemen $\alpha = \text{konstant}$ och $\beta = \text{konstant}$, vilkas ekvationer äro givna genom de två första formlerna i (104). Genom diskussion av dessa kurvor kan man lätt visa, att för $z_2 > 0$ alltid gäller $\alpha < 45^\circ$ och $\beta \geq \geq \arctg \sqrt{8} = 70,53^\circ$. För rörelse på nedre halvsfären kan man alltså vid numerisk beräkning av absidvinkeln enligt (104) för bestämning av $\mathbb{I}(\alpha, \beta)$ använda sig av de utförligare tabellerna å sid. 210—11, vilka äro bekvämare för interpolering.¹

§ 12. Homocentriska zonrörelser.

Zonrörelser, som försiggå på samma sfär och hava samma centralpunkt, skola vi kalla *homocentriska*. Ett närmare studium av sambandet mellan sådana rörelser leder, som vi nu till sist skola visa, bl. a. till en enkel och i praktiskt realiserbara fall synnerligen noggrann metod för approximativ beräkning av absidvinkeln.

Centralpunkten C_c är enligt definitionen i § 6 midtpunkten mellan de båda vändcirklarnas inre och yttre likställighetspunkter C_λ , C_μ (fig. 26). Den står även i en enkel relation till den punkt C_3 , som utgör projektionen på axeln Oz av indexlinjens tredje skärningspunkt H_3 med hjälpkurvan (fig. 15), i det punkterna C_c och C_3 enligt ekv. (59) ligga symmetriskt med avseende på sfärens medelpunkt O . Tänker man sig en serie av indexlinjer lagda genom en på hjälpkurvas övre supplementära bransch godtyckligt vald punkt H_3 , så motsvara de alltså en serie homocentriska zonrörelser, varvid centralpunkten erhålles genom spegling av C_3 i O .

¹ Dessa och därmed analoga förhållanden vid det generellare pendelgyroskopet motivera det å sid. 220 gjorda uttalandet, att området ($\alpha = 0^\circ - 45^\circ$, $\beta = 70^\circ - 90^\circ$) är det vid tillämpningar oftast förekommande.

Enligt ekv. (58) och (59) har centralpunktens z -koordinat värdet

$$(107) \quad z_c = \frac{l^2 + z_1 z_2}{z_1 + z_2}.$$

Beteckna vi med f de lika avstånden $C_\mu C_c = C_c C_\lambda$, så att

$$(108) \quad z_\mu - z_c = z_c - z_\lambda = f,$$

så framgår av ekv. (44), där $2c = z_1 - z_2$ och för sfären $r_2^2 - r_1^2 = z_1^2 - z_2^2$, att

$$(109) \quad f = \frac{r_1 r_2}{z_1 + z_2}.$$

Nu erhålles av ekv. (107)

$$(z_c + l)(z_1 + z_2) = (l + z_1)(l + z_2), \quad (z_c - l)(z_1 + z_2) = (l - z_1)(l - z_2)$$

och genom hopmultiplicering och kvadrattutdragning finna vi då

$$(110) \quad f = \sqrt{z_c^2 - l^2},$$

d. v. s. f är lika med längden av en tangent, dragen från centralpunkten C_c till sfärens meridiancirkel. En på sträckan $C_\lambda C_\mu$ som diameter uppritad cirkel skär alltså meridiancirkeln under rät vinkel.¹

Med centralpunkten C_c äro följaktligen även vändcirkelnas inre och yttre likställighetspunkter C_λ , C_μ fastställda och kunna enkelt konstrueras genom att från C_c draga en tangent till meridiancirkeln och sedan avsätta längden av denna tangent uppåt och nedåt från C_c . Man erhåller sedan läget av vändcirkelnas för samtliga de zonrörelser, som hava C_c till centralpunkt, genom att låta kordan $M_1 M_2$ vrida sig kring punkten C_λ eller ock sekanten $M_1 M_2$ kring C_μ . Därvid märkes särskilt det gränsläge, då kordan genom C_λ är vågrät och sekanten från C_μ övergår i en tangent $C_\mu M_\lambda$; häremot svarar då en rörelse på den av $C_\lambda M_\lambda$ repre-

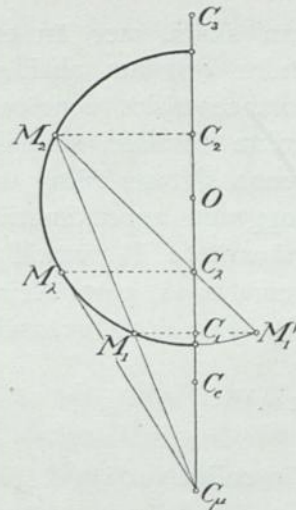


FIG. 26.

¹ Detta är även en omedelbar följd av den å sid. 270 omnämnda involutionen.

senterade parallellcirkeln. Man erhåller alla med denna rörelse homocentriska zönrörelser genom att låta kordan genom C_λ vrida sig från vågrätt till lodrätt läge eller ock sekanten genom C_μ från gränsläget $C_\mu M_\lambda$ till lodrätt läge; därvid växer avståndet mellan vändcirkeln från 0 till $2l$.

Om vi som vid diagrammet i fig. 25 representera de båda vändcirkelnas lägen genom en punkt med de rätvinkliga koordinaterna $\frac{z_1}{l}$ och $\frac{z_2}{l}$, så framgår av ekv. (107), att orten för de punkter, som svara mot homocentriska zönrörelser, utgöres av en liksidig hyperbel, som går genom punkterna $z_1 = -z_2 = \pm l$ och har sina asymptoter parallella med koordinataxlarna, medan brännpunktsaxeln faller utefter linjen $z_1 = z_2$, som sålunda skäres under rät vinkel. För olika värden på konstanten $\frac{z_c}{l}$ erhålles ett knippe sådana hyperblar. Naturligtvis är det endast de inom diagramtriangeln i fig. 25 fallande bågar av dessa, som därvid ha någon betydelse, och dessa bågar komma tydligen att till form och läge nära överensstämma med de i fig. 25 inlagda kurvorna $\Psi = \text{konstant}$. Därav bör då bli en följd, att en kurva $\frac{z_c}{l} = \text{konstant}$ åtminstone inom den högra delen av diagramtriangeln icke kan skära mer än ett relativt fåtal av kurvorna $\Psi = \text{konstant}$, eller med andra ord att absidvinkeln icke kan variera särdeles mycket för en serie homocentriska zönrörelser, åtminstone om man inskränker sig till att betrakta rörelser, som helt och hållet försiggå på den nedre halvsfären. Är denna slutsats riktig, så bör man för en sådan rörelse erhålla ett tämligen noggrant approximativt uttryck för absidvinkeln genom att beräkna det gränsvärde Ψ_λ , vartill denna vinkel närmar sig, då vändcirkeln rycka tillsammans i parallellcirkeln $C_\lambda M_\lambda$ i nivå med den inre likställighetspunkten C_λ . För detta gränsvärde erhålles enligt ekv. (106) uttrycket

$$(111) \quad \Psi_\lambda = \frac{l}{\sqrt{l^2 + 3z_\lambda^2}} \cdot \pi,$$

där enligt (108)

$$(112) \quad z_\lambda = z_c - f,$$

varvid z_c och f kunna beräknas av vändcirkelnas koordinater z_1 och z_2 enligt (107) och (110).

Att man på denna väg verkligen erhåller en god approximation kan lätt verifieras genom några speciella, numeriska exempel. Är exempelvis

$$z_1 = 0,8 l, z_2 = 0,6 l, \text{ så blir } z_c = \frac{37}{35} l, f = \frac{12}{35} l, z_\lambda = \frac{5}{7} l \text{ och } \Psi_\lambda = \frac{7}{\sqrt{31}} \cdot$$

$\cdot 90^\circ = 113,15^\circ$, vilket mycket nära överensstämmer med det förut¹ funna värdet av absidvinkeln, $\Psi = 113,21^\circ$. I detta fall uppgår således skillnaden $\Psi - \Psi_\lambda$ endast till 0,053 % av Ψ_λ .

Vi sammanställa även följande två serier av homocentriska zonerörelser, där det först angivna värdet av Ψ är det ur ekv. (111) beräknade gränsvärdet Ψ_λ , motsvarande $z_1 = z_2 = z_\lambda$, medan de övriga äro tagna ur tabellerna sid. 295 och 298:

$$\frac{z_c}{l} = 1,4 \begin{cases} \frac{z_1}{l} = 0,4202 & 0,6 & 0,8 \\ \frac{z_2}{l} = 0,4202 & 0,2 & -0,2 \\ \Psi^\circ = 145,83 & 145,87 & 147,95 \end{cases} \quad \frac{z_c}{l} = 2 \begin{cases} \frac{z_1}{l} = 0,2679 & 0,5 & 0,8 \\ \frac{z_2}{l} = 0,2679 & 0 & -0,5 \\ \Psi^\circ = 163,27 & 163,66 & 166,42 \end{cases}$$

Dessa talvärden göra sannolikt, att Ψ i allmänhet växer med avståndet mellan vändcirkklarna, ehuru till en början ytterst långsamt. Vi skola nu generellt visa, att så är förhållandet.

Vi betrakta alltså en serie homocentriska zonerörelser, bestämd genom centralpunktens en gång för alla givna, fixa z -koordinat z_c . Vändcirkklarnas lägen och absidvinkeln Ψ komma då att bli beroende endast av en variabel. Härtill välja vi den genom ekv. (63) definierade modylvinkeln α , vilken — som lätt kan visas — växer, då avståndet mellan vändcirkklarna ökas. Tänka vi oss nämligen som förut en sekant vrida sig kring punkten C_μ från gränsläget $C_\mu M_\lambda$ till lodrätt läge, så se vi att i uttrycket

$$(113) \quad \cos^2 \alpha = \frac{z_c + z_2}{z_c + z_1}$$

täljaren därvid alltjämt minskas från begynnelsevärdet $z_c + z_\lambda$ till slutvärdet $z_c - l$, medan nämnaren ökas från $z_c + z_\lambda$ till $z_c + l$, varav följer att vinkeln α växer från noll till $\arccos \sqrt{(z_c - l) : (z_c + l)}$. Om vi således uttrycka Ψ som function av konstanten z_c och den variabla modylvinkeln α , och sedan visa, att derivatan $\frac{d\Psi}{d\alpha}$ ständigt är positiv, så är därmed bevisat, att absidvinkeln Ψ för en serie homocentriska zonerörelser alltid växer med avståndet mellan vändcirkklarna.

¹ Sid. 267 och tabellen sid. 298.

För detta ändamål uttrycka vi först vändcirklarnas koordinater z_1 och z_2 som funktioner av z_c och α , vilket kan ske genom att beräkna z_1 och z_2 ur ekvationerna (107) och (113). Vi erhålla då

$$z_1 = \frac{z_c - w}{\cos^2 \alpha}, \quad z_2 = z_c \cos^2 \alpha - w,$$

där w betecknar den positiva kvadratroten ur

$$w^2 = f^2 \cos^2 \alpha + z_c^2 \sin^4 \alpha.$$

För absidvinkeln använda vi oss av det i föregående paragraf härledda uttrycket, i vilket utom modylvinkeln α även ingår parametervinkeln β och därjämte koefficienten A . Den sista kan skrivas i formen

$$A = \frac{f}{z_c} \cos \alpha \sin \beta$$

och efter insättning härav kommer då uttrycket icke att innehålla några andra variabla storheter än α och β . Därvid är β en funktion av α , bestämd exempelvis enligt (102) genom ekvationen

$$\sin^2 \beta = \frac{z_c^2}{l^2} \cdot \frac{z_1 + z_2}{z_c + z_2},$$

där z_1 och z_2 hava ovan angivna värden. Insätts dessa, finner man efter derivering och hyfsning

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{z_c^2}{z_2 w} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Utgå vi nu från det i (101) angivna, för $z_2 > 0$ gällande uttrycket

$$\Psi = AF(\alpha) + A(\alpha, \beta),$$

så blir

$$\frac{d\Psi}{d\alpha} = \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} + \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \cdot F(\alpha) + A \cdot \frac{d}{d\alpha} F(\alpha) + \frac{\partial}{\partial \alpha} A(\alpha, \beta) + \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} A(\alpha, \beta),$$

varvid derivatorna för $F(\alpha)$ och $A(\alpha, \beta)$ kunna erhållas ur EI (37)–(39), där $k = \sin \alpha$, $k' = \cos \alpha$. Genom insättning av dessa och ovanstående uttryck får man då

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\alpha} = & \frac{f}{z_c} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \left\{ E(\alpha) - F(\alpha) + \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta \cdot \frac{z_c^2}{z_2 w} \cdot F(\alpha) \right\} + \\ & + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{\sin \beta \cos \beta}{\Delta \beta} \left\{ E(\alpha) - F(\alpha) + \frac{z_c^2}{z_2 w} \left[\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sin^2 \beta} E(\alpha) - \sin^2 \alpha F(\alpha) \right] \right\}, \end{aligned}$$

där $\Delta \beta$ är definierad genom EI (24).

Utgå vi i stället från formeln (101) II, som gäller för $z_2 < 0$, så erhålles minustecken framför den senare termen, i övrigt blir uttrycket oförändrat.

Då parameterinkeln β alltid ligger mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$, gäller för densamma enligt (102) och EI (24)

$$\sin \beta = \frac{z_c}{l} \sqrt{\frac{z_1 + z_2}{z_c + z_2}}, \quad \cos \beta = \pm \frac{z_2}{l} \sqrt{\frac{z_c - z_1}{z_c + z_2}}, \quad \Delta \beta = \frac{z_1}{l} \sqrt{\frac{z_c - z_2}{z_c + z_1}},$$

där man i uttrycket för $\cos \beta$ har att taga plus- eller minustecken, alltefter-
som z_2 är $>$ eller < 0 . Genom införande av dessa värden erhålles därför
i båda fallen ett och samma uttryck för $\frac{d\Psi}{d\alpha}$, vilket sålunda blir generellt
giltigt. Efter reducering och hyfsning kan detta uttryck bringas till formen

$$(114) \quad \frac{d\Psi}{d\alpha} = Q \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot H(\alpha),$$

där

$$Q = \frac{fl}{w(z_c + z_2)} \cdot \sqrt{\frac{z_c + z_1}{z_1 + z_2}}$$

och

$$H(\alpha) = (1 + \cos^2 \alpha)E(\alpha) - 2 \cos^2 \alpha F(\alpha).$$

För att diskutera tecknet av derivatan $\frac{d\Psi}{d\alpha}$ måste vi således först un-
dersöka funktionen $H(\alpha)$. Denna funktion är noll för $\alpha = 0$, enär $E(0) =$
 $= F(0) = \frac{\pi}{2}$, och har, som man lätt finner enligt EI (37), derivatan

$$3 \sin \alpha \cos \alpha \{F(\alpha) - E(\alpha)\} = 3 \sin^3 \alpha \cos \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta \varphi} d\varphi,$$

vilken är positiv för $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. När α varierar från 0 till $\frac{\pi}{2}$, är således
funktionen $H(\alpha)$ ständigt växande, och då dess begynnelsevärde är noll,
måste den följaktligen vara positiv inom hela intervallet $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Härav framgår nu, att även derivatan $\frac{d\Psi}{d\alpha}$ är > 0 för alla förekom-
mande α -värden > 0 . För att se huru den förhåller sig för $\alpha = 0$ utveckla

vi funktionen $H(\alpha)$ i en potensserie av $k^2 = \sin^2 \alpha$, i det vi insätta de i EI (9) och (10) angivna serietuttrycken för $F(\alpha)$ och $E(\alpha)$. Därvid erhålles

$$H(\alpha) = \frac{3\pi}{16} k^4 \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{15}{128} k^4 + \dots \right)$$

Då koefficienten Q förblir ändlig för $\alpha = 0$, ser man av (114), att $\alpha = 0$ är ett trefaldigt nollställe för derivatan $\frac{d^2\mathcal{P}}{d\alpha}$.

Därmed är således bevisat, att absidvinkeln \mathcal{P} alltjämt ökas med avståndet mellan vändcirklarna och av derivatans förhållande för $\alpha = 0$ framgår jämväl, att denna ökning till en början måste ske ytterst långsamt.

Vi kunna för övrigt ur (114) härleda ett serietuttryck för \mathcal{P} , i vilket den sistnämnda egenskapen tydligt framträder. Koefficienten Q antar, som man lätt finner, för $\alpha = 0$ värdet $\frac{1}{\pi} \cdot \mathcal{P}_\lambda$ och kan för små α -värden utvecklas i en potensserie av $k^2 = \sin^2 \alpha$, nämligen

$$Q = \frac{1}{\pi} \cdot \mathcal{P}_\lambda \cdot \left(1 + \frac{5}{4} k^2 + Q_2 k^4 + \dots \right),$$

där Q_2 och de följande koefficienterna äro funktioner av z_c . Enligt (114) blir då

$$\frac{d^2\mathcal{P}}{dk} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{d^2\mathcal{P}}{d\alpha} = \frac{1}{k} \cdot Q \cdot H(\alpha) = \mathcal{P}_\lambda \cdot \left(\frac{3}{16} k^3 + \frac{9}{32} k^5 + 8C_4 k^7 + \dots \right),$$

och härav erhålles genom integrering, enär $k = 0$ motsvarar $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\lambda$,

$$(115) \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}_\lambda \cdot \left(1 + \frac{3}{64} k^4 + \frac{3}{64} k^6 + C_4 k^8 + \dots \right),$$

där C_4 och de följande koefficienterna äro funktioner av z_c . Detta är det åsyftade serietuttrycket, vars giltighetsområde emellertid behöver närmare undersökas. Det gäller dock alltid för tillräckligt små värden på $k = \sin \alpha$ och visar att i sådana fall gränsvärdet \mathcal{P}_λ måste giva ett synnerligen noggrant approximativt värde på absidvinkeln, såsom ju även bekräftats av ovan anförda numeriska exempel.

ALKALISK SÖNDERDELNING AV HALOGENSUCCIN- AMIDSYROR

AV

BROR HOLMBERG.

Vid behandling av *l*-asparagin med kvävoxid och brom¹ eller med salpetersyrighet och bromväte² uppkommer *l*- β -bromsuccinamidsyra. Genom fortsatt inverkan av kvävoxid och brom överföres denna syra till *l*-brombärnstensyra,¹ vilken i sin ordning med ammoniak ger *d*- β -malamidsyra.³ Med hänsyn till de talrika fall av konfigurationsväxlingar, som av P. WALDEN m. fl. konstaterats vid överförande av optiskt aktiva amino-, oxi- och halogenbärnstensyror i varandra, skulle det vara av intresse, att från aktiv bromsuccinamidsyra kunna komma tillbaka till asparagin igen, liksom också att få nämnda syra förtvålad till malamidsyra. Ett försök av A. PIUTTI⁴ att genom behandling av *l*-bromsuccinamidsyran med alkoholisk ammoniak erhålla motsvarande aminosyra lyckades dock ej, utan endast fumaramidsyra⁵ erhöles. Några försök att utbyta bromen mot hydroxyl ha däremot ej förut gjorts, varför jag nu anställt några sådana, i det jag utsatt *l*-bromsuccinamidsyran för inverkan av överskott av kali i utspädd vattenlösning. Såsom nedan visas erhöles dock även härvidlag endast fumaramidsyra som reaktionsprodukt, och ett liknande försök med jodsuccinamidsyra avlopp på samma sätt. Ej heller behandling av jodsuccinamidsyran med ammoniakalisk silver-

¹ P. WALDEN, Ber. 28, 2770 (1895).

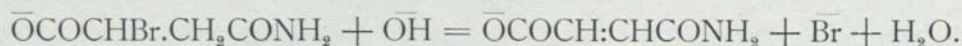
² S. KALLENBERG, Ber. 50, 90 (1917).

³ P. WALDEN och O. LUTZ, Ber. 30, 2795 (1897) — O. LUTZ, Ber. 35, 2460 (1902).

⁴ Gazz. chim. ital. 27, (1) 144 (1897) — Ber. 29, 2069 (1896).

⁵ Först framställd av P. GRIESS, Ber. 12, 2118 (1879) ur asparagin med kali och metyljodid samt närmare karakteriserad av A. MICHAEL och J. F. WING, Am. chem. Journ. 6, 419 (1884—85).

oxidlösning ledde till annan reaktion än haloidväteavspjälkning, varför det synes omöjligt att med β -halogensuccinamidsyrorna genomföra någon hydrolys till oxisyra, utan den enda reaktion, som äger rum, är bildning av omättad syra enligt formeln



Om alltså inverkan av alkali på β -halogensuccinamidsyror ej erbjuder något större stereokemiskt intresse, så är dock reaktionen i fråga från en annan synpunkt värd en viss uppmärksamhet. Som av formeln ovan synes, intar nämligen den utträdande halogenatomen α -ställning till den fria karboxylen, och det skulle därför vara av vikt att få de kinetiska förhållandena vid omsättningen klarlagda, ty bland de exempel på »katjonkatalys»,¹ som hittills studerats, finnas visserligen flera fall av bildning av omättade syror, men i de halogensubstituerade syror, som därvid undersökts, har den utträdande halogenatomen antingen suttit endast i β -ställning till karboxylen, eller ock ha tvåbasiska syror förelegat, i vilka halogenen haft α -ställning till en och β -ställning till en annan karboxylgrupp. Visserligen ha också en del fall av alkaliers inverkan på α -halogensubstituerade syror studerats, men därvid ha oxisyror erhållits som slutprodukter, under det ej förut något lämpligt exempel på bildning av omättad syra vid alkalisk sönderdelning av en α -halogensubstituerad syra varit bekant. Jag har därför även kinetiskt följt inverkan av baser på β -brom- och jodsuccinamidsyrorna, och sedan det visat sig, att omsättningen följer det bimolekulära schemat, har jag även undersökt, i vad mån katjonkatalys därvidlag gör sig märkbar.

Preparativa försök.

l-Bromsuccinamidsyra och kali. 10 g *l*-bromsuccinamidsyra, framställd enligt KALLENBERG (l. c.) och ej omkristalliserad, löstes i 97,5 ccm 1,03-n kali, varpå lösningen fick stå vid vanlig temperatur i två dygn. Den var då fullt neutral gentemot lackmus, varför den surgjordes med 50 ccm 2,13-n svavelsyra, då 4,0 g fumaramidsyra utföll som grovkristalliniskt vitt pulver. Efter omkristallisering ur vatten smältpunkt 217°—218°.

0,1906 g syra förbrukade till neutralisering 15,15 ccm 0,1090-n baryt.

¹ En sammanfattning av arbetena över katjonkatalys har jag meddelat i Teknisk Tidsskrift, avdelning för kemi och bergsvetenskap, 1917, sid. 1.

Ekv.v. ber. 115,1 — funn. 115,4.

Moderluten från fumaramidsyra fälldes med 40 ccm 1,3-n AgNO_3 och sedan silverbromiden avsugits, upphettades filtratet fyra timmar på vattenbad. Sedan ett spår därvid ytterligare utfälld silverbromid frånfiltrerats, neutraliserades med 70 ccm 1,03-n kali, varpå ånyo fälldes med 10 ccm silvernitratlösning. Därvid erhållen vit, finkornig fällning digererades med vatten och 25 ccm 1-n HCl i värme. Sedan därvid bildat klor silver avfiltrerats, indunstades lösningen till torrhet. Återstoden löstes i vatten på nytt och indunstades igen, varefter den erhållna vita, grovkristalliniska massan behandlades med aceton, då den tämligen lätt löstes. Sedan acetonen frivilligt avdunstat, återstod en vit, obetydligt klibbig, kristallinisk massa, som löstes i minsta möjliga mängd varmt vatten. Vid avsvälning erhöles en liten kvantitet färglösa små kristaller, vilka identifierades som fumarsyra.

0,0969 g syra förbrukade till neutralisation 14,80 ccm 0,1090-n baryt.

Ekv.v. ber. 58,0 — funn. 60,0.

Av moderluten från fumarsyra förbrukade 2,00 ccm 5,80 ccm 0,1090-n baryt, motsvarande 0,0423 g äppelsyra.¹ 10,00 ccm lösning = 0,2115 g äppelsyra försattes med $\frac{1}{2}$ mol = 4,73 ccm $\frac{1}{6}$ -molar ammoniummolybdatlösning och vatten till 20,00 ccm, varefter lösningen visade $\alpha_D = +2,83^\circ$; $[\alpha]_D = +268^\circ$. — En liten mängd övervägande vänster-äppelsyra har alltså även bildats, men denna behöver ej ha uppkommit genom hydrolys av *l*-bromsuccinamidsyra, utan den kan även eller uteslutande ha bildats av *l*-brombärnstensyra, som antingen förorenat utgångsmaterialet eller ock så småningom bildats ur en del av *l*-bromsuccinamidsyra genom amidgruppens förtvålning. Ur *l*-brombärnstensyra har så *d*-laktonäppelsyra bildats, och denna har till slut genom förtvålning i sur lösning övergått till *l*-äppelsyra. Att denna uppfattning är riktig framgår av följande försök, i vilket något överskott av kali användts. Detta har haft till följd, att *d*-laktonäppelsyra förtvålats i alkalisk lösning, varvid en svagt högervidande (med molybdat vänstervridande) äppelsyra bildats.

10 g *l*-bromsuccinamidsyra löstes i 110 ccm 1,03-n kali, varpå lösningen fick stå vid vanlig temperatur i tre dygn, varefter den alltjämt svagt alkaliska lösningen surgjordes med 55 ccm 2,13-n svavelsyra. Därvid utföll 4,6 g fumaramidsyra, och sedan denna avsugits, fälldes moderluten med 47 ccm

¹ Är något för högt, enär något fumarsyra stannat i lösning. Den beräknade specifika vridningsförmågan är följaktligen något för låg.

1,115-n AgNO_3 . Efter frånfiltrering av bromsilvret upphettades filtratet på vattenbad 5 timmar, utan att ytterligare fällning uppkom. Efter avsvälning gjordes lösningen neutral med kali, då ett spår silveroxid utföll, varefter ur filtratet efter denna på samma sätt som ovan genom ny fällning med silvernitrat o. s. v. en liten kvantitet äppelsyra erhöles, vilken med ammoniummolybdat och vatten som förut visade $[\alpha]_D = -50^\circ$.

Jodsuccinamidsyra och kali. 11,6 g jodsuccinamidsyra¹ löstes tillsammans med två ekvivalenter = 6 g kali i 100 ccm vatten. Följande dag surgjordes med svavelsyra, då 5,0 g fumaramidsyra utföll. Efter omkristallisering ur vatten smältpunkt $217^\circ - 218^\circ$.

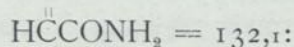
0,1504 g syra förbrukade till neutralisering 12,03 ccm 0,1090-n baryt.

Ekv.v. ber. 115,1 — funn. 114,7.

Jodsuccinamidsyra och ammoniakalisk silveroxidlösning. Ur 44,0 ccm 1,14-n AgNO_3 fälldes silveroxiden med kali. Efter avsugning och tvättning med vatten löstes densamma i 50 ccm konc. kaustik ammoniak, varpå 12,5 g finpulvriserad jodsuccinamidsyra under loppet av några minuter tillsattes. Under lindrig värmeutveckling började genast vit, kornig fällning uppkomma. Denna avsögs följande dag och tvättades med vatten, då den blev gul, varpå filtratet jämte tvättvatten indunstades i vakuum över svavelsyra. Då ammoniakken och ungefär hälften av vattnet bortgått, avskildes glasklara, ytrika, 3—5 mm stora kristaller. Sedan 1,5 g kristaller tagits undan för analyser, löstes resten av desamma genom tillsats av något vatten, varefter lösningen surgjordes med svavelsyra, då 4,3 g vit, grovkristallinisk substans utföll. Efter omkristallisering ur vatten identifierades denna genom smältpunkt (219°), ekvivalentvikt (115,3) och kvävebestämning (ber. 12,20 — funn. 12,12 % N) såsom fumaramidsyra. — De direkt ur reaktionslösningen isolerade kristallerna visade sig vara samma syras ammoniumsalt.

0,1789 g lufttorrt salt gav vid destillation med kali ammoniak motsvarande 26,35 ccm 0,1020-n HCl.

För H_4NOCOCH



Beräknat: Funnet:

N 21,26 21,09 %.

¹ Framställd ur *l*-bromsuccinamidsyra och jodnatrium i acetonlösning enligt KALLENBERG, l. c.

Kinetiska försök.

Till dessa försök använd *l*-bromsuccinamidsyra var renad genom lösning i sodalösning och därefter utfällning med saltsyra samt till slut omkristallisering ur absolut alkohol.

0,2078 g syra förbrukade till neutralisering 9,70 ccm 0,1090-n baryt.

Ekv.v. ber. 196,0 — funn. 196,5.

Jodsuccinamidsyran renades genom en omkristallisering ur vatten.

0,3544 g syra förbrukade till neutralisering 13,45 ccm 0,1090-n baryt.

Ekv.v. ber. 242,9 — funn. 241,8.

Mätningarna utfördes på så sätt, att vederbörande syra neutraliserades med c:a 0,1-n natron eller baryt, och sedan den så erhållna saltlösningen förvärmats i termostat till $+25^{\circ},0$, nedpipetterades 10,00 ccm av densamma i en bägarkolv, som förut utblåsts med kolsyrefri luft och därpå beskickats med natron eller baryt jämte utkokt vatten i beräknade mängder, för att lämplig koncentration på de reagerande ämnena skulle erhållas. Också alkalilösningen var förvärmad till försökstemperaturen 25° , och som pipetten hade en utloppstid av 10 sekunder, påbörjades nedsläppandet av saltlösningen 5 sekunder före den som noll annoterade tiden. Efter passande tid stoppades därpå omsättningen genom tillsats av något överskjutande 0,1-n saltsyra, varpå titrerades tillbaka med 0,1-n baryt. Den kortaste tid, som härvid kunde komma i fråga för erhållande av säkra siffror, var fem minuter, vilken tid, som tabellerna nedan visa, dock i allmänhet varit för lång, för att bestämningar omfattande första hälften av omsättningen skulle kunna göras, men som de undersökta syrorna endast ganska långsamt lösa sig även i alkalier, har ej någon bättre metodik stått till buds.

I tabellerna betyda:

a saltets eller basens utgångskoncentration i gekv./liter;

t tiden i minuter;

x mängden vid tiden *t* förbrukad mängd bas i gekv./liter;

[*Nä*] och [*bä*] totalkoncentrationen elektrolyter innehållande vederbörande metall i gekv./liter;

C den bimolekulära hastighetskonstanten, alltså

$$C = \frac{1}{t} \cdot \frac{x}{a(a-x)}.$$

Mätningar med l-bromsuccinamidsyra.

Med natron:

Tabell 1.

| t | a = 0,0125. | | [Nä] = 0,0250. | C |
|----|-------------|---------|----------------|-------------|
| | x | a-x | | |
| 6 | 0,00357 | 0,00893 | | 5,33 |
| 15 | 0,00629 | 0,00621 | | 5,40 |
| 30 | 0,00826 | 0,00424 | | 5,20 |
| 60 | 0,00996 | 0,00254 | | 5,23 |
| | | | | <u>5,23</u> |
| | | | | C = 5,29 |

Tabell 2.

| t | a = 0,0250. | | [Nä] = 0,0500. | C |
|----|-------------|---------|----------------|-------------|
| | x | a-x | | |
| 5 | 0,0105 | 0,0145 | | 5,79 |
| 10 | 0,0147 | 0,0103 | | 5,71 |
| 20 | 0,0184 | 0,00660 | | 5,58 |
| 40 | 0,0213 | 0,00372 | | 5,73 |
| | | | | <u>5,73</u> |
| | | | | C = 5,70 |

Tabell 3.

| t | a = 0,0500. | | [Nä] = 0,1000. | C |
|----|-------------|---------|----------------|-------------|
| | x | a-x | | |
| 5 | 0,02995 | 0,02005 | | 5,98 |
| 10 | 0,03725 | 0,01275 | | 5,84 |
| 20 | 0,04275 | 0,00725 | | 5,90 |
| 40 | 0,0460 | 0,00400 | | 5,75 |
| | | | | <u>5,75</u> |
| | | | | C = 5,87 |

Sambandet mellan hastighetskonstant och natriumkoncentration kan representeras av formeln $C = 6,85 [Nä]^{1/15}$, såsom tabell 4 visar.

Tabell 4.

| N:o | [Nä] | C ber. | C funn. |
|-----|--------|--------|---------|
| 1 | 0,0250 | 5,36 | 5,29 |
| 2 | 0,0500 | 5,61 | 5,70 |
| 3 | 0,1000 | 5,88 | 5,87 |

Med baryt:

Tabell 5.

| t | a = 0,0125. | | [bä] = 0,0250. | C |
|----|-------------|---------|----------------|-------------|
| | x | a-x | | |
| 6 | 0,00420 | 0,00830 | | 6,75 |
| 15 | 0,00701 | 0,00549 | | 6,81 |
| 30 | 0,00900 | 0,00350 | | 6,86 |
| 60 | 0,01045 | 0,00205 | | 6,80 |
| | | | | <u>6,80</u> |
| | | | | C = 6,81 |

Tabell 6.

| t | a = 0,0250. | x | [bä] = 0,0500. | a-x | C |
|----|-------------|---------|----------------|---------|-------------|
| 5 | | 0,0120 | | 0,0130 | 7,39 |
| 10 | | 0,0163 | | 0,00870 | 7,49 |
| 20 | | 0,01975 | | 0,00525 | 7,52 |
| 40 | | 0,0220 | | 0,00297 | 7,41 |
| | | | | | <u>7,41</u> |
| | | | | | C = 7,45 |

Tabell 7.

| t | a = 0,0500. | x | [bä] = 0,1000. | a-x | C |
|----|-------------|---------|----------------|---------|-------------|
| 5 | | 0,0333 | | 0,0167 | 7,97 |
| 10 | | 0,0398 | | 0,0102 | 7,80 |
| 22 | | 0,04475 | | 0,00525 | 7,75 |
| 40 | | 0,04705 | | 0,00295 | 7,97 |
| | | | | | <u>7,97</u> |
| | | | | | C = 7,87 |

Sambandet mellan hastighetskonstant och bariumkoncentration kan återges av formeln $C = 9,94 [bä]^{1/10}$, såsom tabell 8 visar.

Tabell 8.

| N:o | [bä] | C ber. | C funn. |
|-----|--------|--------|---------|
| 5 | 0,0250 | 6,87 | 6,81 |
| 6 | 0,0500 | 7,37 | 7,45 |
| 7 | 0,1000 | 7,90 | 7,87 |

Mätningar med jodsuccinamidsyra.

Med natron:

Tabell 9.

| t | a = 0,0125. | x | [Nä] = 0,0250. | a-x | C |
|----|-------------|---------|----------------|---------|-------------|
| 5 | | 0,00392 | | 0,00858 | 7,31 |
| 11 | | 0,00624 | | 0,00626 | 7,25 |
| 17 | | 0,00766 | | 0,00484 | 7,53 |
| 25 | | 0,00867 | | 0,00383 | 7,26 |
| | | | | | <u>7,26</u> |
| | | | | | C = 7,34 |

Tabell 10.

| t | a = 0,0250. | x | [Nä] = 0,0500. | a-x | C |
|----|-------------|---------|----------------|---------|-------------|
| 5 | | 0,01205 | | 0,01295 | 7,44 |
| 11 | | 0,01695 | | 0,00805 | 7,66 |
| 17 | | 0,01907 | | 0,00593 | 7,57 |
| 23 | | 0,02035 | | 0,00465 | 7,61 |
| | | | | | <u>7,61</u> |
| | | | | | C = 7,57 |

Tabell 11.

| t | a = 0,0500. | | [Na] = 0,1000. | C |
|----|-------------|---------|----------------|-------------|
| | x | a-x | | |
| 5 | 0,0331 | 0,0169 | | 7,83 |
| 11 | 0,0406 | 0,0094 | | 7,85 |
| 17 | 0,04345 | 0,00655 | | 7,80 |
| 23 | 0,04485 | 0,00515 | | 7,57 |
| | | | | <u>7,57</u> |
| | | | | C = 7,76 |

Sambandet mellan hastighetskonstant och natriumkoncentration kan här representeras av formeln $C = 8,78 [Na]^{1/20}$, såsom framgår av tabell 12.

Tabell 12.

| N:o | [Na] | C ber. | C funn. |
|-----|--------|--------|---------|
| 9 | 0,0250 | 7,30 | 7,34 |
| 10 | 0,0500 | 7,56 | 7,57 |
| 11 | 0,1000 | 7,82 | 7,76 |

Med baryt:

Tabell 13.

| t | a = 0,0125. | | [bä] = 0,0250. | C |
|----|-------------|----------|----------------|-------------|
| | x | a-x | | |
| 5 | 0,004625 | 0,007875 | | 9,40 |
| 11 | 0,007075 | 0,005425 | | 9,48 |
| 18 | 0,00841 | 0,00409 | | 9,14 |
| 30 | 0,00971 | 0,00279 | | 9,28 |
| | | | | <u>9,28</u> |
| | | | | C = 9,33 |

Tabell 14.

| t | a = 0,0250. | | [bä] = 0,0500. | C |
|----|-------------|---------|----------------|-------------|
| | x | a-x | | |
| 5 | 0,0138 | 0,0112 | | 9,86 |
| 11 | 0,0183 | 0,00668 | | 9,96 |
| 17 | 0,0202 | 0,00480 | | 9,90 |
| 24 | 0,02135 | 0,00365 | | 9,75 |
| | | | | <u>9,75</u> |
| | | | | C = 9,87 |

Tabell 15.

| t | a = 0,0500. | | [bä] = 0,1000. | C |
|----|-------------|---------|----------------|-------------|
| | x | a-x | | |
| 5 | 0,0362 | 0,0138 | | 10,5 |
| 10 | 0,0421 | 0,00790 | | 10,7 |
| 15 | 0,04415 | 0,00585 | | 10,1 |
| 20 | 0,04545 | 0,00455 | | 10,0 |
| | | | | <u>10,0</u> |
| | | | | C = 10,3 |

Sambandet mellan hastighetskonstant och bariumkoncentration kan här återges av formeln $C = 12,0 [\text{b}\ddot{a}]^{1/15}$, såsom tabell 16 visar.

Tabell 16.

| N:o | [b \ddot{a}] | C ber. | C funn. |
|--------------|-----------------|--------|---------|
| 13 | 0,0250 | 9,38 | 9,33 |
| 14 | 0,0500 | 9,83 | 9,87 |
| 15 | 0,1000 | 10,3 | 10,3 |

Den kinetiska undersökningen har alltså visat, att inverkan av en stark bas såsom natron eller baryt på β -brom- eller jodsuccinamidsyrat salt är bimolekulär, men att reaktionshastigheten något litet är beroende av närvarande metalljoners koncentration och natur. För bromsuccinamidsyran erhöles

$$C = 6,85 [\text{N}\ddot{a}]^{1/15} = 9,94 [\text{b}\ddot{a}]^{1/20}$$

och för jodsuccinamidsyran

$$C = 8,78 [\text{N}\ddot{a}]^{1/20} = 12,0 [\text{b}\ddot{a}]^{1/15}$$

Vid vanliga koncentrationer sönderdelas alltså under för övrigt lika betingelser jodsuccinamidsyran något hastigare än bromsuccinamidsyran, och vad metalljonernas inverkan beträffar, så påskyndar här som i andra fall den tvåvärda bariumjonen omsättningen starkare än den envärda natriumjonen. Den katjonkatalytiska effekten intar här över huvud en mellanställning mellan förhållandena vid alkalisk sönderdelning av α , β -dibrompropionsyra och α , β -dibromsmörsyra till omättade syror å ena sidan och bromättiksyrans hydrolys av alkalier till glykolsyra å den andra, ty för α , β -dibrompropionsyran gäller

$$C = 12,14 [\text{N}\ddot{a}]^{1/8} = 16,68 [\text{b}\ddot{a}]^{1/8}$$

och för α , β -dibromsmörsyran

$$C = 0,206 [\text{N}\ddot{a}]^{1/8} = 0,302 [\text{b}\ddot{a}]^{1/8},$$

under det vid bromättiksyran något nämnvärdt inflytande av koncentrationsändringar på hastighetskonstanten ej förefinnes, vilket dock ej hindrar, att hastighetskoefficienten vid inverkan av natron på natriumsaltet förhåller sig till densamma vid inverkan av baryt på bariumsaltet som 0,0026: 0,0042.

För den tvåbasiska brombärnstensyrans alkaliska sönderdelning till fumarsyra gäller däremot

$$C = 0,095 [\text{N}\ddot{a}]^{1/3} = 0,197 [\text{b}\ddot{a}]^{1/3},$$

alltså på alla sätt betydligt mer utpräglad katjonkatalys, och som reaktionshastigheten över huvud är mycket större vid sönderdelning av bromsuccinamidsyran än vid motsvarande omsättning med brombärnstenssyran, så synes det rimligt tyda förhållandena så, att katjonkatalysen vid den senare syran huvudsakligen beror på, att den envärda jonen $\overline{\text{OCOCHBrCH}_2\text{COOM}}$ (analog med $\overline{\text{OCOCHBrCH}_2\text{CONH}_2}$) av alkalier särskilt hastigt påverkas, under det skillnaden i reaktionshastighet vid molekylslag sådana som $\overline{\text{OCOCHBrCH}_2\text{CONH}_2}$ och $\text{MOCOCHBrCH}_2\text{CONH}_2$ är mindre betydlig.

Stockholm, Tekniska högskolan, maj 1917.

UNDERSÖKNING RÖRANDE HÅLLFASTHET OCH ELASTICITET HOS KOPPARTRÅD OCH KOPPARLINOR

AV

H. KREÜGER.

De i det följande relaterade undersökningsserierna avse uteslutande koppars mekaniska egenskaper med hänsyn till dess användning för elektriska kraftledningar.

Vid utförandet av elektriska kraftlinjebyggnader är det naturligtvis liksom vid andra byggnader av största vikt att ekonomisera i största möjliga mån, och man har genom normer för beräkningar av desamma sökt balansera kostnaderna mot säkerhetsgraderna för ernående av bästa möjliga resultat.

Spörsmålet i sin helhet är synnerligen vidlyftigt, i det att utredningar måste verkställas beträffande en mängd omständigheter, såsom temperatur- och vindförhållanden, isbarks- och rimfrostbildning, sammanslagningsrisker vid olika upphängningssätt för ledningarna, komplicerade hållfasthetsberäkningar för stolpar, järnets och koppars egenskaper, förankringskraft hos i marken nedgrävda betongfundament, således undersökningar av ett stort antal medverkande faktorer.

Svenska teknologföreningens avdelning för elektroteknik utgav 1912 »Grunder för hållfasthetsberäkningar för elektriska kraftledningar» och hava desamma, ehuru summariska, visat sig tämligen väl fylla sitt ändamål.

År 1915 beslöt emellertid Kungl. vattenfallsstyrelsen att låta verkställa en mera ingående undersökning av samtliga till ämnet hörande frågor ävensom utarbetandet av nya normer för beräkningar. Detta arbete uppdrogs åt en kommitté, bestående av professor P. Gullander, överingenjör

Sten Velandér samt förf., och har sedan sept. 1915 ett omfattande undersökningsarbete av denna kommitté blivit verkställt.

Här avses emellertid endast avhandlande av de genom sagda kommittés försorg utförda undersökningarna å koppartråd och kopparlinor.

Då genom världskrigets inverkan priserna å järn och koppar blivit i väsentlig grad höjda, är det naturligt, att man ur besparingssynpunkt velat till det yttersta utnyttja dessa materialiers hållfasthet, och det framgår då tydligt, att om man kunde tillåta en kraftigare uppspänning av kopparlinorna än vad förut varit fallet, skulle deras nedhängning minskas. Härigenom skulle ett nedflyttande av deras upphängningspunkter låta sig göra, eller med andra ord, höjden av de bärande järnstolparna skulle kunna minskas. Förutom en direkt längdminskning av kopparlinorna skulle således kunna vinnas en avsevärd besparing genom billigare stolpkonstruktion, i det att en lägre stolpe erhåller mindre dimensioner än en högre och således även betingar en lägre kostnad. Dessbättre hava de utförda undersökningarna också kommit till det resultat, att man utan risk kan uppspanna kopparlinor till en högre påkänning vid deras uppläggning å linjerna, än vad man förut vågat.

Det visar sig nämligen, att ett överskridande av elasticitetsgränsen icke innebär en försämring av materialet eller ökad fara för brott, även om dylika extrema påkänningar flera gånger upprepas. Försöken visa, att man i stället erhåller ett material med förbättrade hållfasthetsegenskaper, speciellt en avsevärd höjd proportionalitetsgräns. Det är härvid att märka, att frekvensen för belastningsväxlingarna vid dessa prov icke varit så stor, att frågan kan hänföras till utmattningsfenomen. De extra-ordinära spänningar, varom det å linjerna i verkligheten är fråga, förekomma endast ett fåtal gånger under kraftledningens livstid. Man har förut ej velat sätta tillåten påkänning högre än 12 kg/mm^2 vid *de i normerna angivna belastningarna*, emedan man visste, att i abnorma fall betydligt högre påkänningar kunde uppstå, och man hade därvid den uppfattningen, att även i sådana abnorma fall elasticitetsgränsen ej gärna borde överskridas. För att säkra sig här emot sattes tillåten ansträngning endast till 12 kg/mm^2 för i normerna antagna belastningsfall, varvid gjordes den tysta förutsättningen, att eventuellt inträffande ännu ogynnsammare belastningar åtminstone icke skulle driva påkänningen utöver elasticitetsgränsen.

Nu är det ju så, att »säkerhetsgrad» är ett mycket tänjbart begrepp, så att man exempelvis vid osäkerhet i belastningsantaganden måste tillgripa större säkerhetsgrader, än då man är mera säker på premisserna. I den av

Kungl. vattenfallsstyrelsen tillsatta kommittén har det varit en strävan att genom noggranna undersökningar ävensom bearbetning av driftsstatistik söka komma verkligheten så nära som möjligt med hänsyn till yttre belastningar och på grund därav minska säkerhetsgraderna för de olika materialerna.

Den nyss omnämnda egenskapen hos koppar, att vid elasticitetsgränsens överskridande bilda så att säga ett nytt material med andra och bättre egenskaper, vilket nedan skall påvisas, medför förutom i det föregående nämnda fördelar vid nybyggnader av kraftledningar även den fördelen, att man å redan utförda linjer kan våga sig på en högre uppspanning av vissa linor (vanligtvis lämpligen de högre liggande) för att därigenom minska sammanslagingsrisken, en risk som på flera utförda linjer ej är tillbörligt beaktad. Vidare kan en lina, som genom överbelastning genom isbark, rimfrost e. d. erhållit permanenta förlängningar, utan risk åter uppspännas till sitt ursprungliga läge.

Vid försökens utförande hava användts dels kopparlinor med kärna av mjuk koppar, dels koppartråd.

För att konstatera eventuella ändringar i egenskaper hos en lina eller tråd, som *under längre tid varit utsatt för belastningar till höga värden ovan elasticitetsgränsen*, upphängdes linor och trådar i södra koppartornet i Stockholms under uppförande varande stadshus, vilken plats ställdes till förfogande och var för provningarna mycket lämplig.

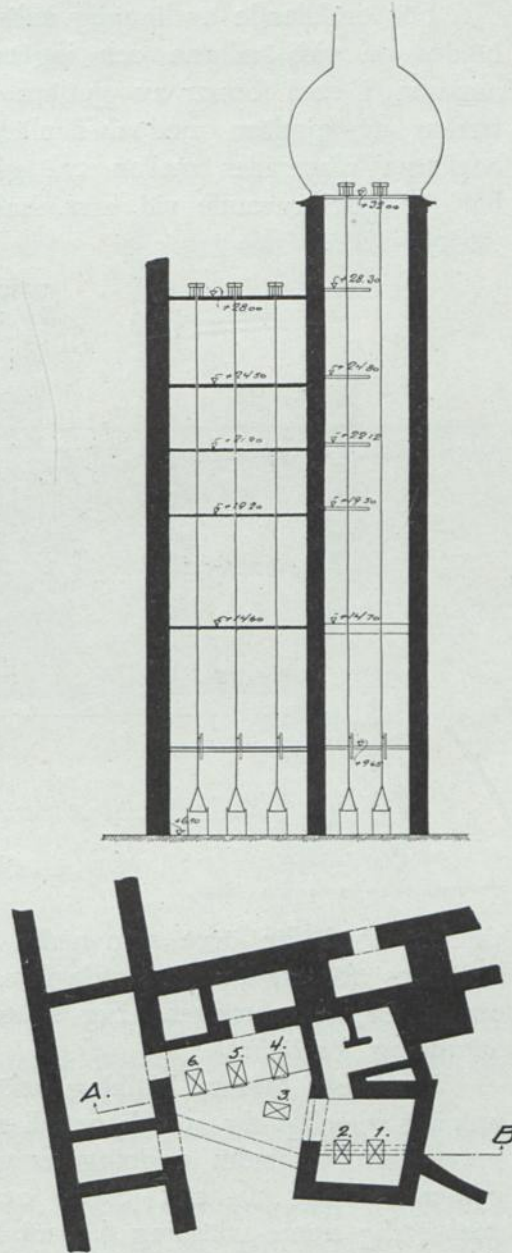


FIG. I. PLAN OCH SEKTION AV DET VID FÖRSÖKEN ANVÄNDA TORNET.

Upphångningsanordningarna i stort sett framgå av fig. 1, utvisande en sektion genom tornet samt plan.

För erhållande av lämplig infästning av linorna uppsplitsades och omböjdes de vid ändarna och ingötos i en legering av 88 % bly och 12 % antimon i små formar av gjutjärn. De fastklämdes därefter mellan klämbackar av gjutjärn med mellanlägg av nyssnämnda blylegering. Klämbackarna placerades mellan två gjutjärnsplattor, försedda med öron och hål för fastskruvande vid 2 st. små U-balkar. Samma infästningssätt an-

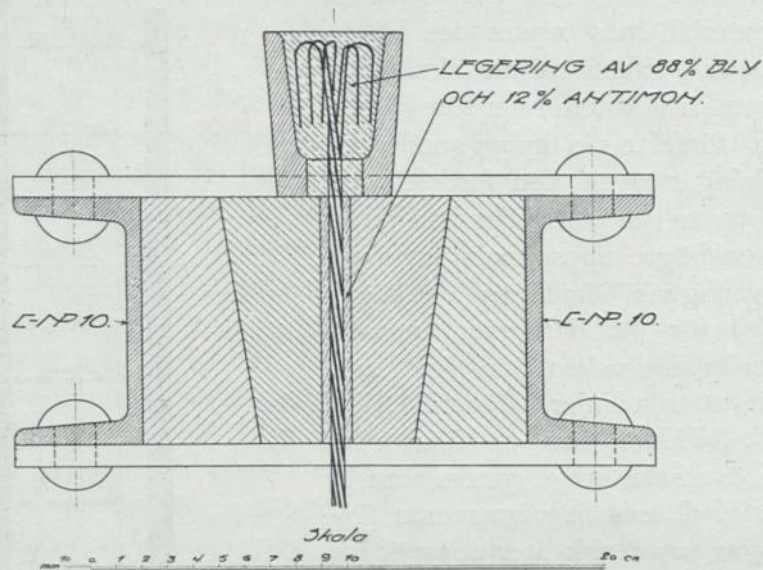


FIG. 2.

vändes såväl för övre som nedre ändarna av linorna. Denna anordning användes för att linorna skulle få säker infästning utan möjlighet till brytningar eller excentricitet. Fig 2 utvisar en ritning över denna infästningsanordning för linor.

I tornets översta bjälklag utfördes för varje lina en upphångningsanordning *a* enligt fig. 3 och nedtill anbragtes en vågskål *c*. För att under provningen förhindra vridning av vågskålen uppsattes kring densamma en gejderanordning av trä. Strax ovan vågskålen befann sig en fast skala med rörlig nonie-avläsning *b*, varå linans förlängningar avlästes vid belastning av vågskålen. För avläsning å denna millimetergraderade skala påskruvades å linan en hylsa, som mellan tvenne horisontala, halvcirkelför-

made skivor förde en väl avpassad kula, fästad å en axel vid nonien. Till belastning användes gjutjärnsstänger. I tornets mellanbjälklag voro små hål urtagna för linorna, så att de hängde fullt fritt.

För trådar voro utförda samma anordningar som för linor.

Fig 4, 5 och 6 äro fotografier över de i fig. 3 utvisade punkterna a, b och c.

För eliminerande av längdförändringar, uppkomna genom temperaturvariationer voro å 5 olika höjder i tornet termometrar uppsatta, inalles 10 st.

Tre olika huvudprov utfördes och varje prov dubbelt, för erhållande av kontroll. Sålunda voro samtidigt 3 st. dubbelprov under utförande.

För samtliga prov företogs först en förberedande sträckning av linorna, resp. trådarna på så sätt, att belastningen långsamt stegrades med cirka 2 kg/mm² åt gången intill 16 kg/mm². Härvid stegrades belastningen, först sedan, längförändringen under c:a 1 timmes tid blev så liten, att ökning (utan belastningsstegring) praktiskt taget ej kunde konstateras.

Då 16 kg/mm² uppnåts, fick denna belastning åverka linor och trådar så länge, att längdförändring icke kunde konstateras under 6 timmar. Därefter avlastades proven till en begynnelselast av c:a 60 kg, utgörande vågskålens vikt.

Efter denna förberedande sträckning, avsedd att utjämna eventuella ojämnheter, ansågos linorna och trådarna färdiga för påbörjande av den egentliga provningen.

Som ovan nämnts, utgjordes provningen av 3 serier (nedan benämnda I, II och III) med dubbla prov inom varje serie.

Provsérie I avsåg att utröna den lägsta belastning, för vilken linan brister, därest belastningen får verka under lång tid och med långsam ökning.

Provsérie II avsåg utförandet av hastig belastningsstegring till 34 kg/mm² samt därefter långvarig belastning av ungefär denna intensitet, mot-

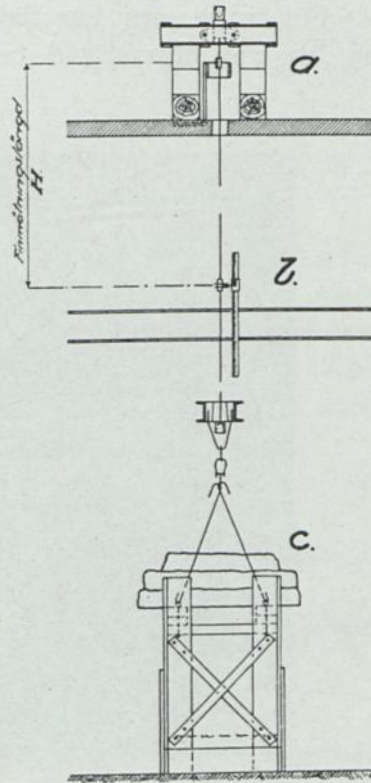


FIG. 3.

svarande i verkligheten exempelvis en hastigt uppkommande rimfrosts- eller isbarksbildning, som därefter länge får sitta kvar.

För provserierna I och II användes 7-trådig lina med mjuk kärntråd.

Provserie III utgjorde med hänsyn till belastningssättet en kombination av I och II, varvid användes koppartråd med $9,85 \text{ mm}^2$ sektionsarea.

För varje prov har förts protokoll enligt två stycken, å sid. 326 och 327 angivna formulär A och B, som torde vara tillräckligt tydliga, så att

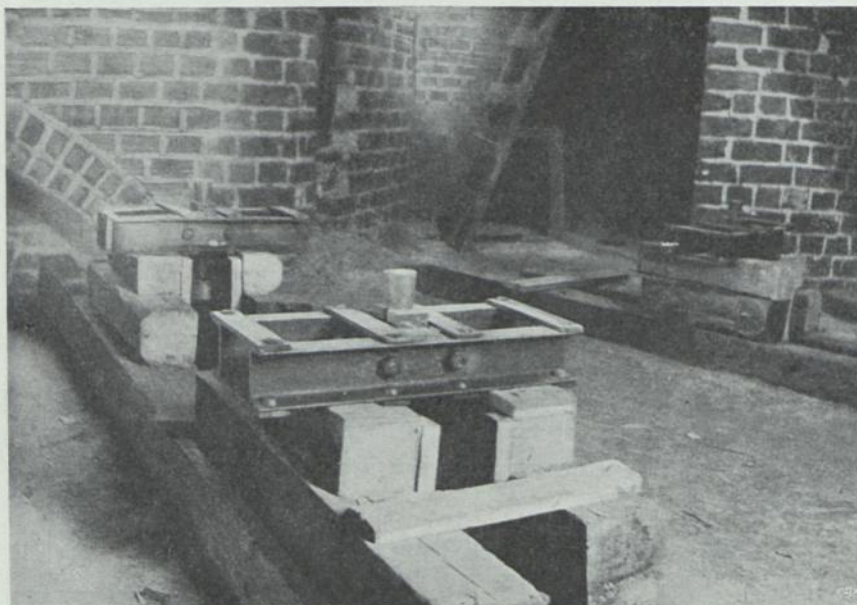


FIG. 4.

särskild förklaring ej är nödvändig. Det ena formuläret gäller uteslutande temperaturavläsningar, det andra gäller belastningar och längdändringar m. m.

Av samtliga på detta sätt förda preliminära protokoll har gjorts följande sammanfattning.

Långtidsprov.

Försöken påbörjades den $11/7$ 1916 med den ovan omtalade förberedande sträckningen, som avslutades den $18/7$, varefter den egentliga provningen vidtog den $19/7$.

a. Provning av 7-trådig 23,76 mm² kopparlina med mjuk kärntråd.

| | Linans finmät- ningslängd mm | Antal avlastningar | Linan brast den | Brottlast ¹ | |
|----------------------|---------------------------------------|-----------------------|-----------------------------------|------------------------|----------------------|
| | | | | i kg | i kg/mm ² |
| <i>Provsérie I.</i> | | | | | |
| Lina n:r 1 | 22 250.3 | 4 | ²⁶ / ₈ 1916 | 747.0 | 31.4 |
| » » 2 | 22 276.7 | 6 | ²⁹ / ₁₁ » | 851.7 | 35.8 |
| <i>Provsérie II.</i> | | | | | |
| Lina n:r 5 | 18 246.8 | 4 | ⁵ / ₁₂ » | 897.6 | 37.8 |
| » » 6 | 18 256.8 | 4 | ⁵ / ₁₂ » | 917.0 | 38.6 |

Vid linan n:o 1 brusto de 6 yttre trådarna omedelbart nedanför övre infästningen. Anledningen till, att denna lina visar en så avsevärdt mindre brotthållfasthet än n:o 2, är med all sannolikhet den, att linan vid monteringen fick en tvärkrök å det ställe, där brottet sedan ägde rum. Kärntråden tøjde sig cirka 1,35 m, d. v. s. så mycket, att vågskålen nådde marken, och därefter hängde linan kvar å denna tråd.

Vid linan n:o 2 brusto de 6 yttre trådarna c:a 1 dm under övre skalan; linan hängde kvar å kärntråden.

Vid linan n:o 5 brusto samtliga trådar omedelbart ovanför nedre infästningen.

Vid linan n:o 6 brusto de yttre trådarna 11 cm ovan nedre infästningen; linan hängde kvar på kärntråden, som hade töjts 99 cm.

b. Provning av 9,85 mm² koppartråd.

| | Trådens finmät- ningslängd mm | Antal avlastningar | Tråden brast den | Brottlast | |
|-----------------------|--|-----------------------|------------------------------------|-----------|----------------------|
| | | | | i kg | i kg/mm ² |
| <i>Provsérie III.</i> | | | | | |
| Lina n:r 3 | 18 043.6 | 9 | ²¹ / ₁₂ 1916 | 387.6 | 39.3 |
| » » 4 | 18 045.4 | 8 | ¹⁹ / ₁₂ » | 357.1 | 36.2 |

Båda trådarna n:ris 3 och 4 brusto omedelbart ovanför nedre infästningen.

* * *

¹ Vid beräkningen av brotllasten i kg/mm² har spänningen antagits lika fördelad å alla trådarna.

Sedan långtidsproven avslutats, avtogos provstycken av linor och trådar såväl upp- och nedtill som vid midten av de brustna delarna, varefter de provades på Tekniska högskolans materialprovningsanstalt. De erhållna resultaten äro angivna å sid. 332.

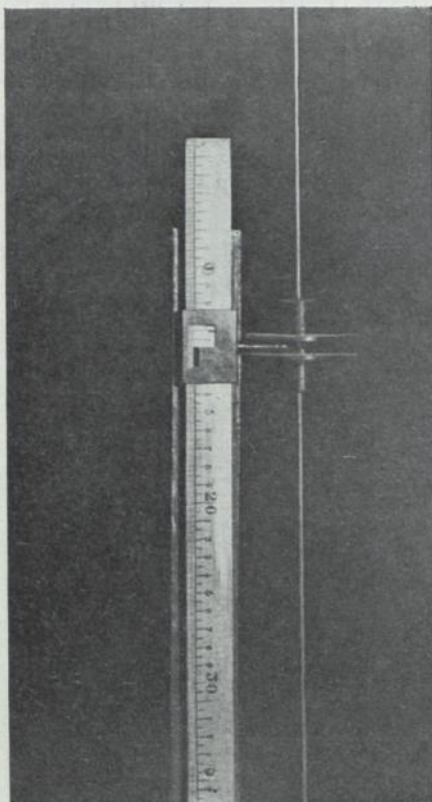


FIG. 5.

Det närmare förloppet av töjningarnas växling ävensom tidsintervallerna för av- och pålastningar vid långtidsproven framgå av bifogade planscher 1—3.

Tre axlar hava användts för den grafiska framställningen.

Utefter vertikal, uppåtriktad axel avsättes nämligen belastningen i kg/mm^2 . Utefter horisontal axel avsättes töjningen i % av mätlängden med vederbörlig korrektion för temperatur, varvid värmeutvidgningskoefficienten

antagits till $0,0000195$ för lina och $0,0000190$ för tråd enligt undersökning, verkställd å Tekniska högskolans materialprovninganstalt.

Utefter vertikal, nedåtriktad axel avsättes tiden, så att man således för varje belastning kan se, under vilken tid den verkat.

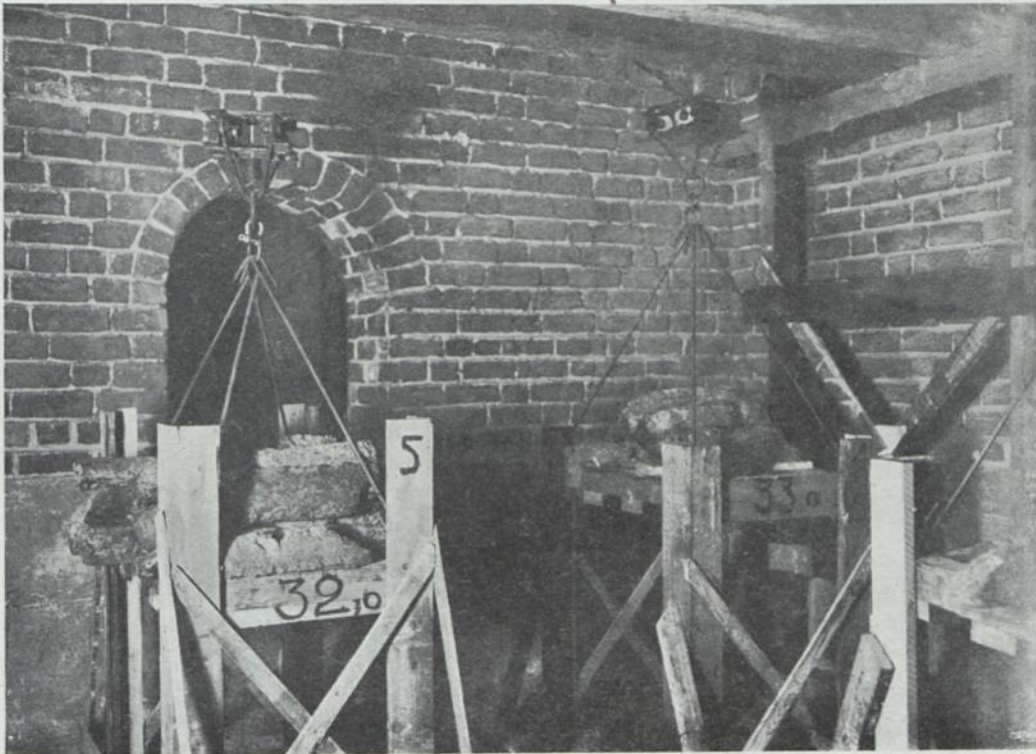


FIG. 6.

Av plansch 1 framgår resultatet av långtidsprovningen enligt provserie I. Den heldragna linjen utvisar relationen mellan spänning och töjning under provet såsom medeltal av två prov, vilka sinsemellan knappast visade någon avvikelse. Av denna linje framgår, att flera av- och pålastningar äro gjorda med vissa tidsmellanrum, och det visar sig att materialet på intet sätt försämras utan tvärtom förbättras, i det att proportionalitetsgränsen så småningom höjes.

Temperaturavläsningar vid provning av kopparlina.

Juli månad 1916.

$$\text{Medeltemperaturen } t_m = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n}{n}$$

| Datum | Klockan | | Avläsningar å termometer n:r | | | | | | | | | | Medeltemp. för term. n:r | |
|-------|---------|----------|------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|--------------------------|------------|
| | tim. | min. | 1 °C | 2 °C | 3 °C | 4 °C | 5 °C | 6 °C | 7 °C | 8 °C | 9 °C | 10 °C | 1-5 °C | 6-10 °C |
| 11 | 2 | 10 e. m. | 16.3 | 16.2 | 16.0 | 16.0 | 15.4 | 16.8 | 16.8 | 16.0 | 15.9 | 15.3 | 16.0 | 16.2 |
| > | 3 | 30 > | 16.4 | 16.3 | 16.0 | 16.0 | 15.0 | 16.6 | 16.8 | 16.2 | 16.0 | 15.0 | 15.9 | 16.1 |
| > | 4 | 15 > | 16.7 | 16.3 | 16.2 | 16.0 | 15.9 | 16.7 | 16.8 | 16.4 | 16.1 | 15.6 | 16.3 | 16.3 |
| 12 | 9 | 30 f. m. | 15.9 | 15.9 | 15.8 | 15.5 | 15.7 | 15.9 | 16.2 | 15.6 | 15.5 | 15.3 | 15.8 | 15.7 |
| > | 10 | 00 > | 16.2 | 16.1 | 16.0 | 15.9 | 15.9 | 16.2 | 16.2 | 15.8 | 15.9 | 16.0 | 16.0 | 16.0 |
| > | 11 | 30 > | 17.0 | 16.9 | 16.6 | 16.2 | 16.2 | 16.5 | 16.4 | 16.2 | 16.3 | 16.0 | 16.6 | 16.3 |
| > | 12 | 15 e. m. | 17.2 | 16.9 | 16.6 | 16.3 | 16.6 | 16.5 | 16.3 | 16.4 | 16.3 | 16.1 | 16.7 | 16.3 |
| > | 1 | 50 > | 18.0 | 17.8 | 17.4 | 16.9 | 17.0 | 17.0 | 17.0 | 17.1 | 17.2 | 16.7 | 17.4 | 17.0 |
| > | 3 | 50 > | 17.7 | 17.7 | 17.4 | 16.9 | 16.9 | 17.0 | 16.8 | 16.9 | 16.8 | 16.6 | 17.3 | 16.8 |
| > | 7 | 00 > | 17.6 | 17.5 | 17.3 | 17.2 | 17.0 | 17.0 | 16.9 | 17.0 | 17.0 | 17.0 | 17.3 | 17.0 |
| 13 | 9 | 00 f. m. | 15.5 | 15.5 | 15.3 | 15.3 | 15.3 | 15.4 | 15.9 | 15.3 | 15.4 | 15.2 | 15.4 | 15.4 |
| > | 10 | 15 > | 15.9 | 15.9 | 15.6 | 15.6 | 15.6 | 15.9 | 16.0 | 15.6 | 15.7 | 15.4 | 15.7 | 15.7 |
| > | 1 | 45 e. m. | 17.5 | 17.4 | 17.1 | 17.0 | 16.9 | 16.5 | 16.4 | 16.8 | 17.0 | 16.3 | 17.1 | 16.6 |
| > | 4 | 30 > | 17.8 | 17.8 | 17.2 | 17.0 | 17.0 | 16.9 | 16.8 | 16.9 | 16.9 | 16.6 | 17.3 | 16.8 |
| 14 | 9 | 00 f. m. | 15.2 | 15.2 | 14.6 | 14.8 | 14.6 | 14.6 | 15.2 | 15.0 | 14.8 | 14.1 | 14.8 | 14.7 |
| > | 2 | 00 e. m. | 16.2 | 16.0 | 15.6 | 15.6 | 15.6 | 15.6 | 15.8 | 15.7 | 15.7 | 15.3 | 15.8 | 15.6 |
| 15 | 9 | 00 f. m. | 15.9 | 15.7 | 15.6 | 15.6 | 15.6 | 15.5 | 15.7 | 15.6 | 15.7 | 15.4 | 15.7 | 15.6 |
| 17 | 9 | 00 > | 14.9 | 14.9 | 14.5 | 14.4 | 14.2 | 14.6 | 14.8 | 14.5 | 14.5 | 14.1 | 14.6 | 14.5 |
| 18 | 9 | 00 > | 15.2 | 15.1 | 15.0 | 14.8 | 14.8 | 14.9 | 15.0 | 14.8 | 14.8 | 14.6 | 15.0 | 14.8 |
| > | 11 | 00 > | 15.5 | 15.3 | 15.4 | 15.2 | 15.2 | 15.2 | 15.2 | 15.2 | 15.3 | 15.0 | 15.3 | 15.2 |
| > | 12 | 00 > | 15.5 | 15.5 | 15.5 | 15.4 | 15.0 | 15.4 | 15.5 | 15.3 | 15.3 | 15.2 | 15.4 | 15.3 |
| > | 3 | 00 e. m. | 15.5 | 15.2 | 15.2 | 15.0 | 15.0 | 15.2 | 15.2 | 15.2 | 15.2 | 14.9 | 15.2 | 15.1 |
| 19 | 9 | 00 f. m. | 15.3 | 15.1 | 15.0 | 14.7 | 14.5 | 15.0 | 15.0 | 14.8 | 14.7 | 14.6 | 14.9 | 14.8 |
| > | 10 | 30 > | 16.4 | 16.1 | 15.8 | 15.2 | 15.3 | 15.6 | 15.5 | 15.3 | 15.3 | 15.1 | 15.7 | 15.4 |
| > | 1 | 30 e. m. | 17.1 | 17.0 | 16.2 | 15.9 | 15.8 | 16.2 | 16.0 | 15.7 | 15.7 | 15.5 | 16.4 | 15.8 |
| > | 3 | 30 > | 17.1 | 16.8 | 16.4 | 15.9 | 15.9 | 16.3 | 16.1 | 16.0 | 15.8 | 15.4 | 16.4 | 15.9 |
| > | 4 | 30 > | 16.7 | 16.2 | 16.3 | 16.1 | 15.9 | 16.3 | 16.1 | 16.0 | 15.9 | 15.6 | 16.2 | 16.0 |
| 20 | 9 | 00 f. m. | 17.2 | 16.9 | 17.2 | 16.4 | 16.0 | 17.3 | 17.2 | 16.7 | 16.7 | 16.1 | 16.7 | 16.8 |
| > | 1 | 45 e. m. | 22.2 | 21.0 | 20.2 | 19.2 | 18.6 | 20.4 | 19.5 | 19.4 | 19.1 | 18.4 | 20.2 | 19.4 |
| > | 4 | 00 > | 22.0 | 21.2 | 20.1 | 19.0 | 18.9 | 21.0 | 20.2 | 19.4 | 19.3 | 20.0 | 20.2 | 20.0 |
| > | 5 | 15 > | 21.2 | 20.2 | 20.2 | 19.0 | 19.0 | 20.9 | 20.1 | 19.6 | 19.3 | 18.8 | 19.9 | 19.7 |

Termometrarna n:r 1—5 voro upphängda i provrummet för linorna n:r 1 och 2.

Termometrarna n:r 6—10 voro upphängda i provrummet för trådarna n:r 3 och 4 samt linorna n:r 5 och 6.

Formulär B.

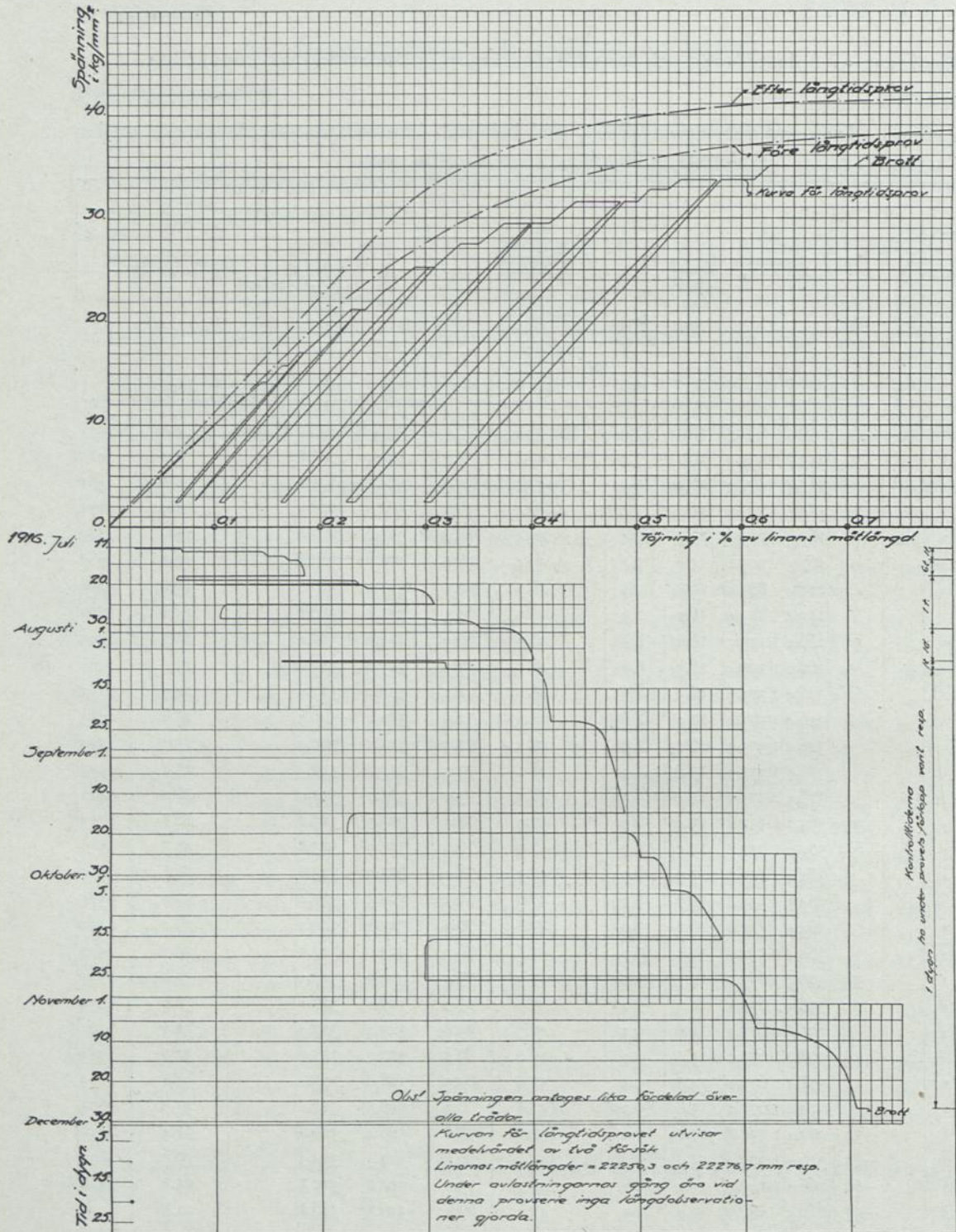
Avläsningar av belastningar och längdförändringar vid provning av kopparlina.

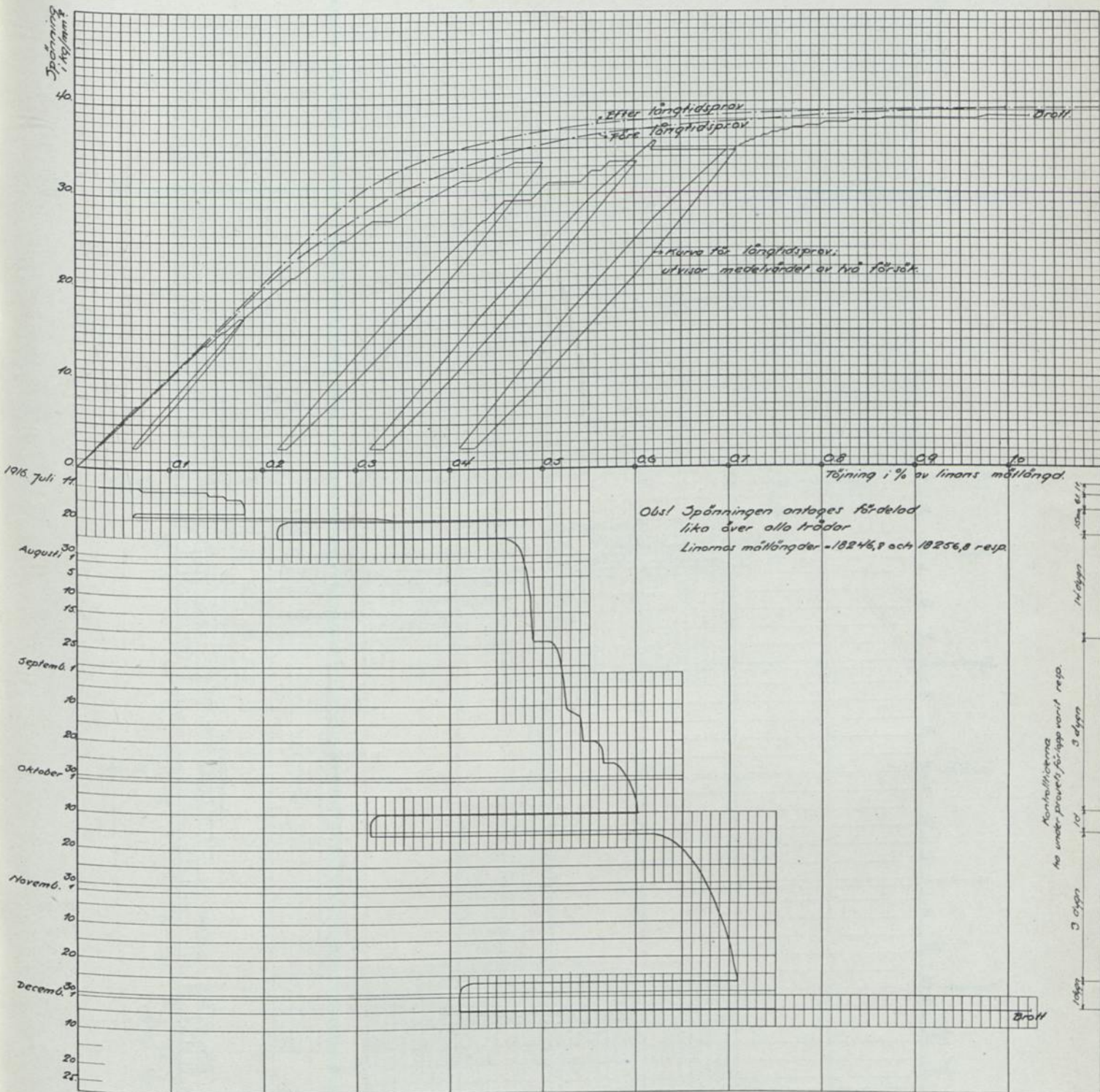
Juli månad 1916.

Provapparat nr 6.

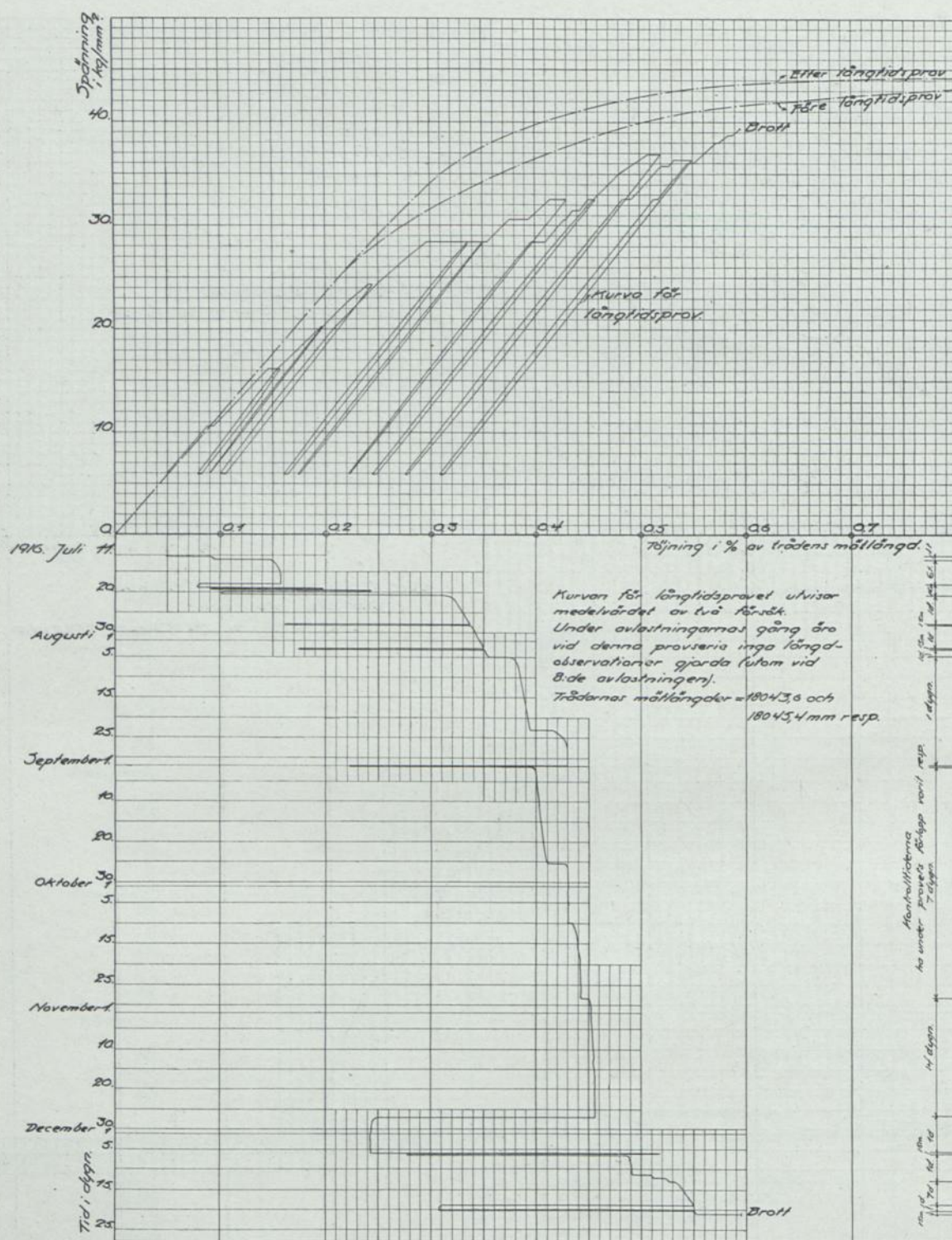
Area 23,76 mm². Temperaturutvidgningskoeff. vid belastad lina = 0,0000195. Avståndet mellan skalornas nollpunkter $H = 18\,256,8$ mm.

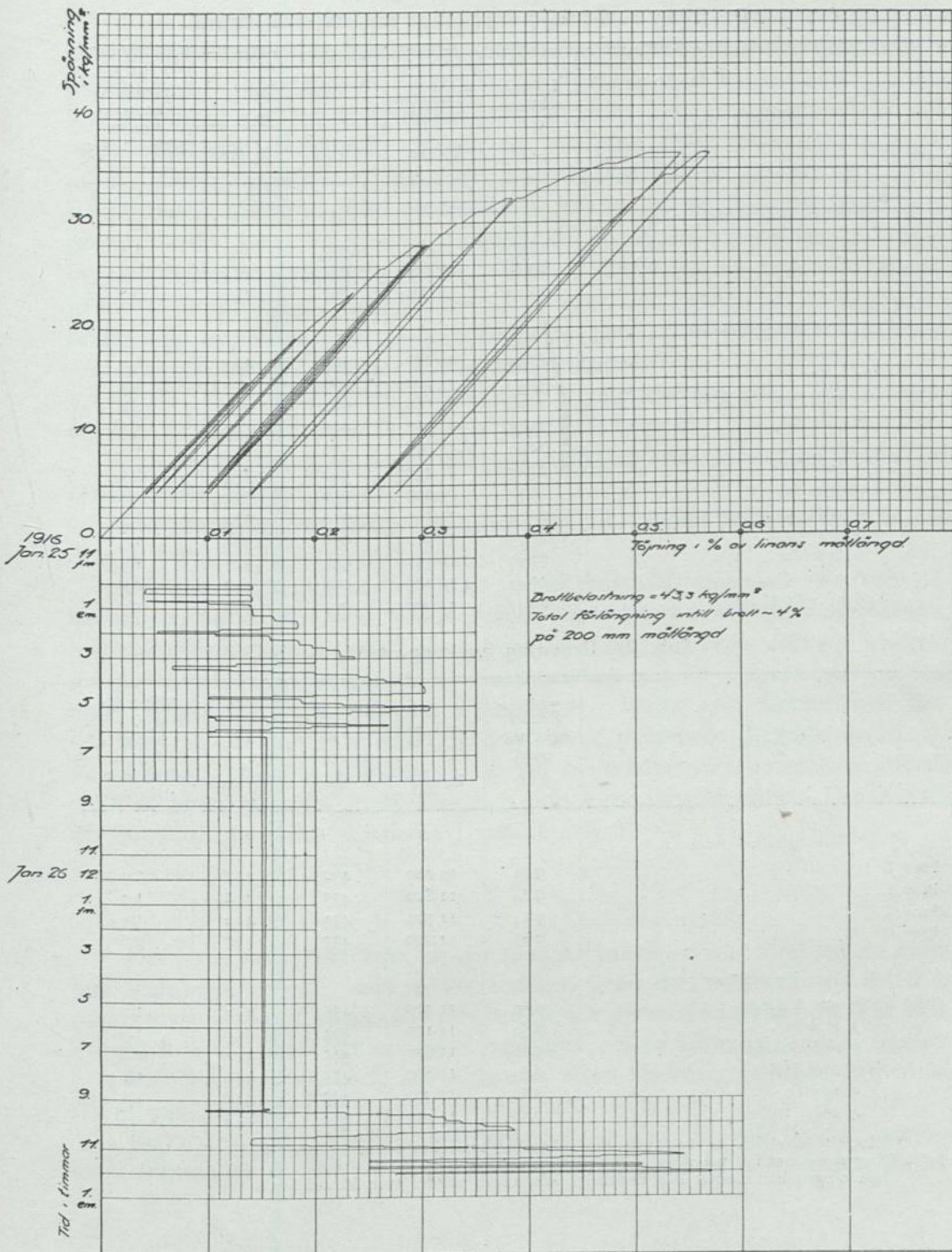
| Datum | Klockan | | Belastning | | | | Medeltemperatur t_m °C | Längder och längdförändringar | | | | | | | |
|-------|---------|--------------------------------|--------------|------------------|----------------------------|---|-----------------------------|-------------------------------|---|--|---|--|------------------------|------|--------|
| | | | Skålen kg | Lastökning kg | Summa | | | Avläsning å | | | | Förlängning | | | |
| | kg | σ kg/cm ² | | | övre skalan f_1 mm | övre visarens avstånd från nedre skalans nollpunkt $a_1 = H - f_1$ mm | | nedre skalan a_2 mm | längd vid $+15^\circ\text{C}$ L_{15} mm | längd vid $+15^\circ\text{C}$ L_N mm | nettolängd vid $+15^\circ\text{C}$ L_N mm | $\lambda = \frac{L_{15} - L_N}{L_N} \times 10^2$ mm | $\epsilon \times 10^2$ | | |
| | tim. | min. | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 2 | 45 e.m. | 56.5 | | 56.5 | 237.8 | 16.2 | 7.0 | 18 249.8 | 50.2 | 18 300.0 | 18 299.6 | 18 295.0 | 4.6 | 0.0251 |
| » | 2 | 55 » | | 57.3 | 113.8 | 479.0 | 16.2 | 7.0 | 49.8 | 54.4 | 304.2 | 303.8 | | 8.8 | 481 |
| » | 3 | 45 » | | | 113.8 | 479.0 | 16.1 | 7.0 | 49.8 | 54.4 | 304.2 | 303.8 | | 8.8 | 481 |
| » | 4 | 10 » | | 53.7 | 167.5 | 705.0 | 16.2 | 7.4 | 49.4 | 58.3 | 307.7 | 307.3 | | 12.3 | 672 |
| » | 4 | 55 » | | | 167.5 | 705.0 | 16.3 | 7.4 | 49.4 | 58.6 | 308.0 | 307.6 | | 12.6 | 689 |
| 12 | 9 | 20 f.m. | | | 167.5 | 705.0 | 15.7 | 7.4 | 49.4 | 58.6 | 308.0 | 307.8 | | 12.8 | 700 |
| » | 9 | 45 » | | 43.0 | 210.5 | 885.9 | 15.8 | 7.9 | 48.9 | 62.2 | 311.1 | 310.8 | | 15.8 | 864 |
| » | 10 | 40 » | | | 210.5 | 885.9 | 16.1 | 7.9 | 48.9 | 62.2 | 311.1 | 310.8 | | 15.8 | 864 |
| » | 11 | 15 » | | 55.5 | 266.0 | 1 119.5 | 16.2 | 8.1 | 48.7 | 66.9 | 315.6 | 315.2 | | 20.2 | 1104 |
| » | 12 | 05 e.m. | | | 266.0 | 1 195.5 | 16.3 | 8.1 | 48.7 | 66.9 | 315.6 | 315.2 | | 20.2 | 1104 |
| » | 12 | 05 » | | 60.3 | 326.3 | 1 373.3 | 16.3 | 8.6 | 48.2 | 72.1 | 320.3 | 319.9 | | 24.9 | 1361 |
| » | 1 | 50 » | | | 326.3 | 1 373.3 | 17.0 | 8.6 | 48.2 | 72.8 | 321.0 | 320.3 | | 25.3 | 1383 |
| » | 3 | 50 » | | | 326.3 | 1 373.3 | 16.8 | 8.6 | 48.2 | 72.9 | 321.1 | 320.5 | | 25.5 | 1394 |
| » | 7 | 00 » | | | 326.3 | 1 373.3 | 17.0 | 8.7 | 48.1 | 73.1 | 321.2 | 320.5 | | 25.5 | 1394 |
| 13 | 9 | 00 f.m. | | | 326.3 | 1 373.3 | 15.4 | 8.7 | 48.1 | 73.0 | 321.1 | 321.0 | | 26.0 | 1421 |
| » | 9 | 05 » | | 37.9 | 364.2 | 1 532.8 | 15.4 | 8.9 | 47.9 | 76.0 | 323.9 | 323.8 | | 28.8 | 1574 |
| » | 9 | 45 » | | | 364.2 | 1 532.8 | 15.4 | 8.9 | 47.9 | 76.0 | 323.9 | 323.8 | | 28.8 | 1574 |
| » | 10 | 15 » | | | 364.2 | 1 532.8 | 15.7 | 8.9 | 47.9 | 76.1 | 324.0 | 323.8 | | 28.8 | 1574 |
| » | 1 | 45 e.m. | | | 364.2 | 1 532.8 | 16.6 | 9.0 | 47.8 | 76.7 | 324.5 | 324.0 | | 29.0 | 1585 |
| » | 4 | 30 » | | | 364.2 | 1 532.8 | 16.8 | 9.0 | 47.8 | 76.9 | 324.7 | 324.1 | | 29.1 | 1591 |
| 14 | 9 | 00 f.m. | | | 364.2 | 1 532.8 | 14.7 | 9.0 | 47.8 | 76.2 | 324.0 | 324.1 | | 29.1 | 1591 |
| » | 9 | 10 » | | 34.3 | 398.5 | 1 677.2 | 14.7 | 9.1 | 47.7 | 79.2 | 326.9 | 327.0 | | 32.0 | 1749 |
| » | 10 | 00 » | | | 398.5 | 1 677.2 | 14.8 | 9.1 | 47.7 | 79.3 | 327.0 | 327.1 | | 32.1 | 1755 |
| » | 2 | 00 e.m. | | | 398.5 | 1 677.2 | 15.6 | 9.1 | 47.7 | 79.8 | 327.5 | 327.3 | | 32.3 | 1765 |
| 15 | 9 | 00 f.m. | | | 398.5 | 1 677.2 | 15.6 | 9.2 | 47.6 | 80.2 | 327.8 | 327.6 | | 32.6 | 1782 |
| 18 | 9 | 00 » | | | 398.5 | 1 677.2 | 14.8 | 9.2 | 47.6 | 80.4 | 328.0 | 328.1 | | 33.1 | 1809 |
| » | 10 | 10 » | | | 398.5 | 1 677.2 | 15.0 | 9.2 | 47.6 | 80.4 | 328.0 | 328.0 | | 33.0 | 1804 |
| » | » | » | | -34.3 | 364.2 | 1 532.8 | 15.0 | 9.2 | 47.6 | 78.8 | 326.4 | 326.4 | | 31.4 | 1716 |
| » | » | » | | -37.9 | 326.3 | 1 373.3 | 15.0 | 9.1 | 47.7 | 76.6 | 324.3 | 324.3 | | 29.3 | 1602 |
| » | » | » | | -60.3 | 266.0 | 1 119.5 | 15.0 | 9.1 | 47.7 | 73.1 | 320.8 | 320.8 | | 25.8 | 1410 |
| » | » | » | | -55.5 | 210.5 | 885.9 | 15.0 | 9.1 | 47.7 | 69.1 | 316.8 | 316.8 | | 21.8 | 1192 |





PL. 2. SPÄNNINGS-TÖJNINGSTIDS-DIAGRAM FÖR 7-TRÄDIG 23,76 MM² KOPPARLINA MED MJUK KÄRNTRÄD,
UTSATT FÖR LÅNGTIDSPROV ENLIGT PROVSERIE II.





PL. 4. SPÄNNINGS-TÖJNINGSTIDS-DIAGRAM FÖR 6-TRÄDIG $69,79 \text{ mm}^2$ KOPPARLINA MED HAMPKÄRNA, PROVAD Å TEKNISKA HÖGSKOLANS MATERIALPROVNINGSANSTALT, DEN 25—26 JAN. 1916.

Tab. 1. Provning av 7-trådig kopparlina med mjuk kärntråd.

| Prov litt. | Effektiv sektionsarea mm ² | Elasticitetsmodul ¹ kg/mm ² | Brottgräns ² | | Total förlängning vid kontraktionens början i % av hela mätl. |
|------------------------------|--|--|-------------------------|--------------------|---|
| | | | kg | kg/mm ² | |
| a) före långtidsproven. | | | | | |
| Prov A | 23.77 | 10 900 | 930 | 39.1 | 1.3 |
| Prov B | 23.84 | 9 800 | 975 | 40.9 | 0.9 |
| Prov C | 23.72 | 9 900 | 925 | 39.0 | 0.7 |
| b) efter långtidsproven. | | | | | |
| Lina nr 1 övre del | 23.40 | 10 800 | 970 | 41.5 | 1.4 |
| » » 1 midt | 23.40 | 11 200 | 970 | 41.5 | 1.9 |
| » » 1 nedre del | 23.40 | 10 700 | 940 | 40.2 | 2.2 |
| » » 2 övre del | 22.07 | 11 700 | 950 | 43.0 | 1.6 |
| » » 2 midt | 22.07 | 11 900 | 950 | 43.0 | 1.2 |
| » » 2 nedre del | 22.07 | 11 200 | 940 | 42.6 | 1.5 |
| » » 5 övre del | 23.74 | 9 200 | 930 | 39.2 | 1.7 |
| » » 5 midt | 23.74 | 10 500 | 930 | 39.2 | 2.4 |
| » » 5 nedre del | 23.74 | 10 300 | 930 | 39.2 | 1.5 |
| » » 6 övre del | 23.42 | 10 500 | 930 | 39.7 | 1.4 |
| » » 6 midt | 23.42 | 10 200 | 940 | 40.1 | 2.2 |
| » » 6 nedre del | 23.42 | 10 900 | 950 | 40.6 | 1.7 |

Tab. 2. Provning av koppartråd.

| Prov litt. | Effektiv sektionsarea mm ² | Elasticitetsmodul ¹ kg/mm ² | Brottgräns ² | | Total förlängning vid kontraktionens början i % av hela mätl. |
|--------------------------------|--|--|-------------------------|--------------------|---|
| | | | kg | kg/mm ² | |
| a) före långtidsproven. | | | | | |
| Prov D | 9.82 | 12 200 | 430 | 43.8 | 0.7 |
| Prov E | 9.84 | 11 800 | 435 | 44.2 | 1.2 |
| Prov F | 9.84 | 11 700 | 434 | 44.1 | 1.5 |
| Prov G | 9.93 | 11 000 | 435 | 43.7 | 1.6 |
| b) efter långtidsproven. | | | | | |
| Tråd nr 3 övre änden | 9.80 | 11 200 | 435 | 44.4 | 1.7 |
| » » 3 midten | 9.80 | 11 100 | 434 | 44.3 | 1.3 |
| » » 3 nedre änden | 9.80 | 11 000 | 442 | 45.1 | 2.0 |
| » » 4 övre änden | 9.80 | 11 800 | 433 | 44.2 | 1.4 |
| » » 4 midten | 9.80 | 11 900 | 437 | 44.6 | 1.6 |
| » » 4 nedre änden | 9.80 | 11 300 | 432 | 44.1 | 1.7 |

¹ Elasticitetsmodulen är beräknad för belastningsintervallet 0—20 kg/mm², inom vilket intervall avvikelser från proportionalitet var ringa.

² Spänningen har antagits lika fördelad å alla trådar, således även kärntråden.

Före långtidsprovets påbörjande undersöktes spänningstöjningsdiagrammet direkt i dragprovningssmaskin med korta tidsintervaller för belastningsökningarna. Samma prov verkställdes sedermera med brottstycken av den för långtidsprovet använda linan, varvid prov uttogos såväl upptill och nedtill som vid linans midt. Resultaten av dessa båda provningar framgår av de streckprickade kurvorna å pl. 1 och synes härvid, att den för större belastningar under lång tid utsatta linan har en högre liggande såväl proportionalitets- som brottgräns. Beträffande brottgränsens höjning må dock inga förhastade slutsatser dragas, varemot höjningen av proportionalitetsgränsen är påtaglig. Det torde vara tillräckligt fastslå, att brottgränsen åtminstone ej sänkes genom de kraftiga åverkningarna å linorna. *Materialet har således förbättrats under långtidsprovningen.*

Pl. 2 visar fullkomligt motsvarande uppgifter som pl. 1, men utgör resultat av de i provserie II utförda undersökningarna.

Även här framgår med önskvärd tydlighet den förbättring materialet ernått under långtidsprovet.

Pl. 3 utvisar resultatet av provserie III, varvid samma slutsats kan dragas beträffande koppartrådar.

För undersökning av en linas förhållande vid upprepade av- och pålastningar under *kortare* tidsintervaller utfördes vid Tekniska högskolans materialprovningssanstalt med 69,79 mm² lina ett prov, vars förlopp framgår av pl. 4. Tiden var här som synes endast c:a 1 dygn, men gjordes under denna tid 11 st. på- och avlastningar. Detta prov företer med hänsyn till resultatet en stor likhet med de förut relaterade långtidsproven.

Då de enskilda siffrorna i de vid materialprovningssanstalten utförda serierna med material dels före och dels efter långtidsproven kunna vara av intresse, uppställas desamma i tab. 1 och 2.

* * *

Det hade varit önskvärdt, att den mjuka kärntråden icke förefunnits i samtliga linproven, emedan man ej vet i vilken grad den medverkar, och det är naturligtvis ej riktigt att såsom i det föregående gjorts medräkna hela dess area. Proven komma därför att upprepas med linor, vilkas kärna utgöras av hampa.

Emellertid måste dock provningarna anses såsom synnerligen värdefulla, då ju den *relativa* bedömningsgrunden alltid kvarstår.

Beträffande de *absoluta* värdena, så är det ju fullt tydligt, att om man frånräknar en del av den mjuka kärntråden, så höjas siffrorna för så-

väl proportionalitets- som brottgräns ytterligare. Om därför de hittills vunna resultaten läggas till grund för normer för tillåtna påkänningar, så är man på säkra sidan.

Vid konstruktioner av ifrågavarande slag, nämligen kraftledningar, kunna naturligtvis säkerhetsgraderna sättas betydligt lägre, än då det gäller husbyggnads- eller brokonstruktioner. Säkerheten gäller nämligen här ej så mycket liv och lem som fastmer skydd mot driftsavbrott, och vidare äro ju permanenta deformationer vid en hängande lina ej av samma betydelse, som då det gäller en stång i ett fackverkssystem e. d.

På grund av ovanstående utredning, där det tydligt visar sig att materialet ej försämras av upprepade påkänningar ända upp till över 32 kg/mm², kan man sätta tillåten påkänning (innebärande minst 2-faldig säkerhet mot brott) å kopparlinor till 15 å 17 kg/mm² vid tämligen normala belastningsfall och vid extrema fall, som blott ett fåtal gånger under en linjes livstid kunna förekomma, kan påkänningen utan risk få uppgå till högst 32 kg/mm². Härvid bör iakttagas, som ju redan i det föregående påpekats, att det ej är fråga om sådan frekvens å påkänningar, att proven kunna hänföras till utmattningsprov.

Den innersta orsaken till den i det föregående omtalade kvalitetsförbättringen hos kopparn torde bero på en molekylär omvandling av materialet genom det slags kallbearbetning, som uppstår genom en töjning av detsamma. En fortsatt undersökning härav är säkerligen av intresse, men innefattas ej inom ramen för denna uppsats.

Undersökningsserier i likhet med den nu här framställda, men tillämpade på andra metaller, exempelvis järn, torde möjligen vara givande.

Som slutsats kan uttalas, att de egenskaper hos kopparn, som framgå av ifrågavarande försök, innebära ett medel att utföra billigare kraftlinjebyggnader, huvudsakligen därigenom, att järnstolparnas höjder kunna minskas. Vidare kunna äldre linjer förbättras genom uppspanning av vissa linor.

OM KORRELATIVA SYSTEM, MED TILLÄMPNING PÅ ANDRAGRADSYTOR

AV

FILIP LANGLET.

Den behandling, som i allmänhet kommer korrelativa förhållanden till del, är i jämförelse med den som gives kollineationen, synnerligen knapphändig. Medan man i snart sagt varje arbete om projektivisk geometri finner ett stort utrymme ägnat åt den senare, avfärdas den förra vanligen med några antydningar. Blott ett speciellt fall av korrelation, den polära reciprociteten, erhåller stundom i någon högre grad en ingående behandling. Det måste ju även medgivas, att kollineationen lättare och mera omedelbart giver fruktbarande resultat. Likväl bör det vara av stort intresse att underkasta även den allmänna korrelationen en undersökning, särskilt som den giver en intressant lösning på ett viktigt problem.

Korrelationen i planet kännetecknas, såsom bekant, därav, att tvenne system av punkter och linjer äro på sådant sätt varandra tillordnade, att en punkt i det ena systemet alltid motsvarar en rät linje i det andra och en rät linje genom punkten i det förra systemet en punkt på linjen i det senare, och omvänt. Denna relation medför, såsom ofta visats, att en punktrad i det ena systemet motsvarar ett med densamma projektivt strålnippe i det andra systemet, och tvärtom.

Ett korrelativt förhållande i allmänhet, alltså utan förut givna betingelser, bestämmes genom fyra punkter i det ena systemet och fyra, mot var sin av dessa punkter svarande, räta linjer i det andra. Eller på annat sätt uttryckt, en korrelation bestämmes genom två i det ena systemet godtyckligt valda punktrader och två i det andra systemet likaledes godtyckligt valda, mot var sin av dessa punktrader projektiviska strålnippen, dock så, att

punktradernas gemensamma punkt (skärningspunkt) motsvarar strålknippenas gemensamma stråle. Härmed är för varje punkt och rät linje i planet, betraktad såsom tillhörande det ena systemet, den motsvarande räta linjen och punkten bestämda. För varje punkt i planet finnas alltså två motsvarande räta linjer, den ena i det ena systemet, den andra i det andra, och för varje rät linje två motsvarande punkter.

Enklast bestå det ena systemets båda valda — eller givna — punktrader av vardera tre punkter, av vilka två, en i vardera raden, sammanfalla med radernas skärningspunkt, och det andra systemets strålknippen av vardera tre strålar, av vilka tvenne, en i vardera knippet, sammanfalla till

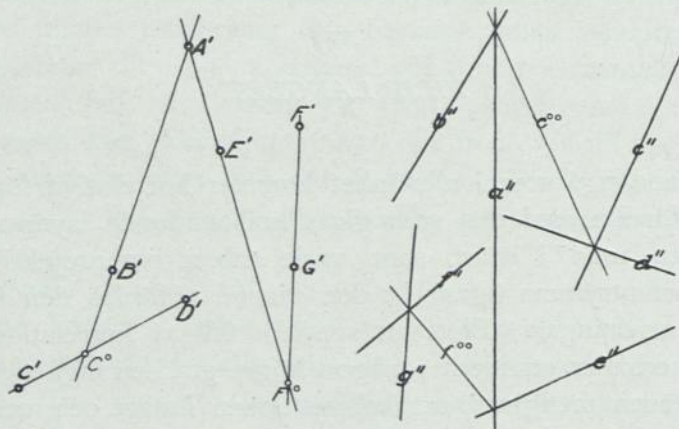


FIG. 1.

en. Således, fig. 1, gives det förra systemet genom punktraderna A' , B' , C' och A' , E' , F' , det senare genom strålknippena a'' , b'' , c'' och a'' , e'' , f'' , alltså i ena systemet fem punkter och i det andra fem räta linjer. (Den femte punkten A' och den femte linjen a'' äro, såsom framgår av fig., givna genom de fyra andra.) Punkterna äro härvid icke fullt godtyckliga, emedan två par punkter måste ligga i räta linjer med den femte punkten. Detta villkor kan emellertid bortelimineras, om ett par av punkterna, t. ex. C' och E' , ersätts med skärningspunkterna mellan $A'—B'$ och en annan linje, $C'—D'$, resp. mellan $A'—E'$ och en linje $F'—G'$. Det första systemet kommer nu att bestå av sju fullt godtyckliga punkter, A' , B' , C' , D' , E' , F' , G' . I det andra systemet träffas två par linjer i punkter på den femte linjen, men detta villkor borttages genom att ersätta två strålar, c'' och f'' , genom skärningspunkterna mellan dessa strålar och ett par andra linjer, c''

och d'' , resp. f'' och g'' . Detta senare system består således nu av sju linjer, a'' , b'' , c'' , d'' , e'' , f'' , g'' , vilka dock icke alla äro godtyckliga, eftersom korrelationen är bestämd redan genom fyra av dem. (Fig. är ej exakt.) Dessa fyra linjer motsvara åtta punkter. Om nu varje linje bestämmes endast genom *en* punkt, så återstå för de andra tre linjernas bestämmande fyra punkter. Som linjerna alltid måste uppfylla det villkoret, att deras skärningspunkter, motsvara deras motsvarande punkters sammanbindningslinjer, kunna av dessa fyra punkter endast tre väljas godtyckligt. Detta andra system kan alltså, i stället för av fyra linjer, bestämmas genom sju punkter, genom vilka dessa sju linjer måste gå, således av sju fullt godtyckliga punkter, genom vilka de linjer skola gå, som motsvara det första systemets sju punkter, d. v. s. korrelationen är fullt bestämd genom sju par punkter så, att för varje punktpar den linje, som motsvarar den ena punkten, går genom den andra. Sålunda belägna punkter och linjer skola i det följande, i överensstämmelse med benämningarna i liknande fall, betecknas såsom *konjugerade punkter* och *konjugerade linjer*.

På liknande sätt kan korrelationen erhållas bestämd genom sju par *konjugerade linjer*, så att å varje linje i ett par ligger den motsvarande punkten till den andra linjen — alla linjerna godtyckliga.

Till varje punkt A' i det ena systemet är naturligtvis varje punkt på den motsvarande linjen a'' konjugerad, och till varje punkt A'' i det andra systemet varje punkt å den motsvarande linjen a' i det förra. Men å linjen a' är endast punkten A' konjugerad till punkterna på linjen a'' , och på linjen a'' endast punkten A'' konjugerad till punkterna å linjen a' . Det kan således på två konjugerade linjer a' och a'' finnas högst två *par* konjugerade punkter, A' och någon punkt på a'' , A'' och någon punkt på a' . Likaså finnas i andra fallet genom två konjugerade punkter blott två *par* konjugerade linjer.

En korrelation må alltså vara given genom två system av vardera sju punkter, $A', B', C', D', E', F', G'$ och $A'', B'', C'', D'', E'', F'', G''$, fig. 2, varav A' och A'' , B' och B'' , o. s. v. äro konjugerade. Det gäller nu att finna de motsvarande linjerna till dessa punkter och sedan att till en i ettdera systemet godtyckligt vald punkt eller linje finna den motsvarande linjen eller punkten i det andra.

Då jag icke påträffat denna konstruktion i något mig bekant arbete, torde den, om även antagligen icke alldeles okänd, icke vara allmänt bekant, varför det synes berättigat giva en kort framställning av densamma.

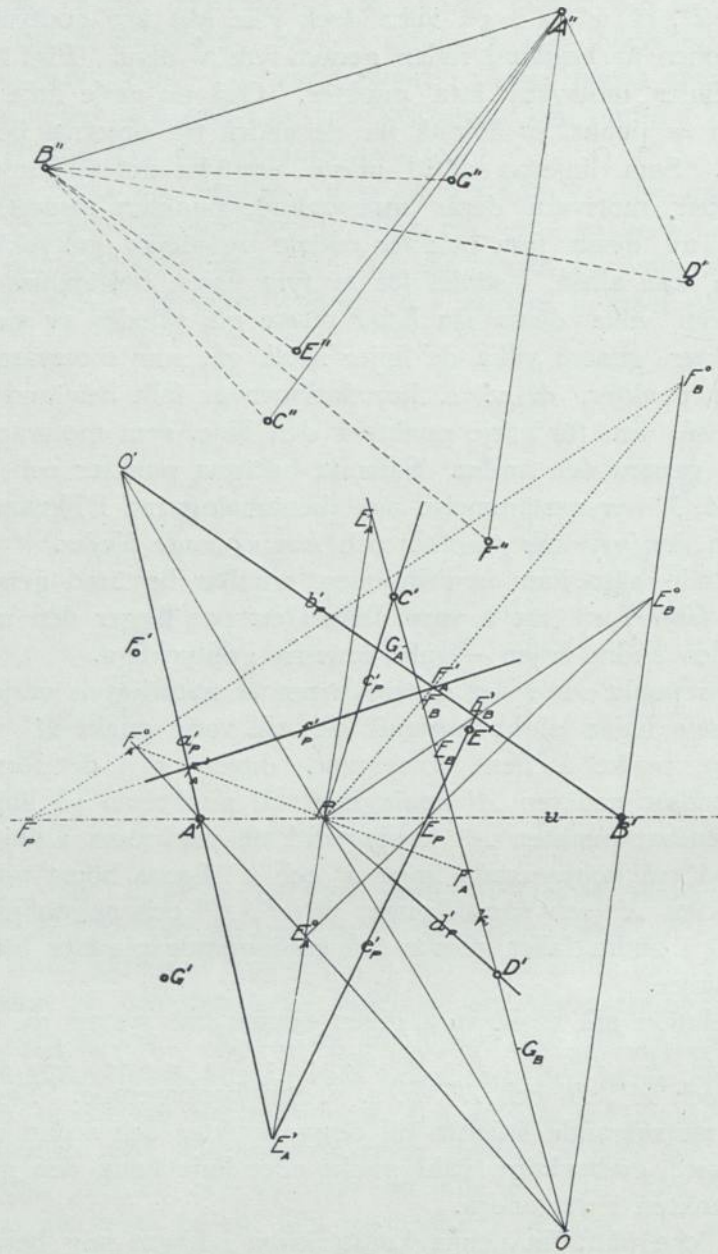


FIG. 2.

Två av punkterna i det ena systemet, t. ex. A'' och B'' , fig. 2, väljas till medelpunkter för två strålknippen, $A''(B'', C'', D'', E'', F'', G'')$ och $B''(A'', C'', D'', E'', F'', G'')$, vilkas strålar gå genom systemets sex övriga punkter. I det andra systemet utväljas två andra punkter, t. ex. C' och D' och sammanbindas med en rät linje k , som göres till bärare av två med de nyssnämnda strålknippena projektiviska punktrader $B_A, C_A, D_A, E_A, F_A, G_A$ och $A_B, C_B, D_B, E_B, F_B, G_B$, så anordnade och belägna, att punkterna B_A och A_B sammanfalla sinsemellan till en punkt O , punkterna C_A och C_B infalla i C' och punkterna D_A och D_B i D' , enligt allmänt bekanta förfaringsätt. De båda punktraderna äro naturligtvis i allmänhet icke sinsemellan projektiviska.

Sammanbindas nu punkterna A' och B' med punkten O ($= B_A$ eller A_B) och C' och D' med en godtycklig punkt P i planet, så bestämma dessa fyra linjer ett till de givna punkterna i det andra systemet korrelativt system, som uppfyller det givna villkoret, om avseende ej fästes vid punkterna E', F' och G' . Detta sakförhållande ändras icke — men väl det korrelativa förhållandet i sig självt — om punkten P väljes var som helst i planet, ej heller om punkten O för varje punkt P förskjutes godtyckligt utefter linjen $P-O$. För detta fall — fyra konjugerade punktpar givna — finnas således trefaldt oändligt många korrelationer.

För att medtaga ännu ett punktpar, t. ex. E', E'' , väljes punkten P enklast å linjen $A'-B'$, som må betecknas med u . Skärningspunkterna $(P-E_A) \times (A'-O) = E_A^o$ och $(P-E_B) \times (B'-O) = E_B^o$ uppsökas och sammanbindas, varvid sammanbindningslinjen $E_A^o-E_B^o$ skär $A'-B'$ i en punkt E_P , vilken såsom lätt inses, är densamma, var än punkten O är belägen på $O-P$. Detsamma är förhållandet med de på liknande sätt lätt funna punkterna F_P och G_P . Sammanbindes nu $E'-E_P$ och skäres med $P-E_A$ i E'_A och med $P-E_B$ i E'_B , så sammanträffa $A'-E'_A$ och $B'-E'_B$ i en punkt O' på $P-O$, och de fem linjerna $A'-O', B'-O', C'-P, D'-P$ och $E'-E_P$, eller, som de lämpligare betecknas, $a'_P, b'_P, c'_P, d'_P, e'_P$ äro korrelativa motsvarigheter till de fem punkterna A'', B'', C'', D'', E'' . Som P kan väljas godtyckligt i planet men för varje punkt P blott en enda punkt O' finnes, för vilken E_P går genom E' , inses, att för fem givna konjugerade punktpar existera tvåfaldt oändligt många korrelativa förhållanden.

Nu kan ytterligare punkten F' medtagas. På samma sätt som linjen e'_P — genom att skära a'_P och b'_P med $P-F_A$ och $P-F_B$ i F'_A och F'_B och sammanbinda $F'_A-F'_B$ — finnes linjen f'_P , som icke går genom F' . Vidare sökes för en annan punkt Q å u eller $A'-B'$, fig. 3, linjen f'_Q , som träffar f'_P i

T, \dots), och på den senare finnes en punkt W , som motsvarar strålen $G_w - G'$ eller g'_w . Utföres för denna punkt samma konstruktion, som förut för P, Q, U, V , så erhållas linjerna $a'_w, b'_w, c'_w, d'_w, e'_w, f'_w$ jämte den nyss erhållna g'_w , eller som vi nu enklare benämna dem, $a', b', c', d', e', f', g'$, såsom de korrelativa motsvarigheterna till de givna sju punkterna $A'', B'', C'', D'', E'', F'', G''$. Som det endast finnes en enda linje w i planet och på denna blott en punkt W , så finnes för sju par givna konjugerade punktpar blott ett enda korrelativt förhållande.

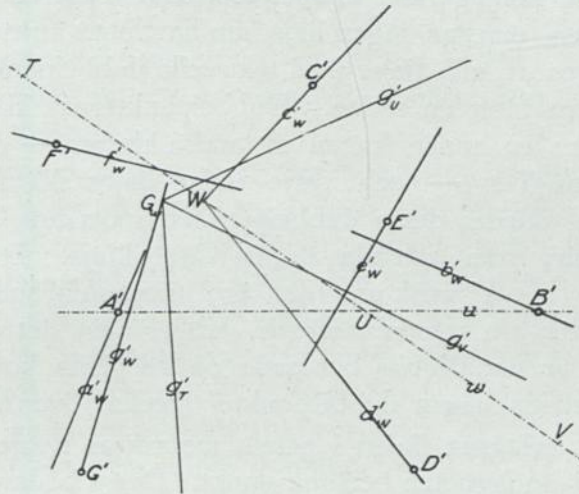


FIG. 4.

Det erbjuder nu inga som helst svårigheter att på vanligt sätt — på grund av att en punktrad motsvaras av ett mot densamma projektivt strålnippe — finna de mot punkterna $A', B', C', D', E', F', G'$ svarande linjerna $a'', b'', c'', d'', e'', f'', g''$, ej heller att till en godtyckligt vald punkt H' eller H'' i det ena eller det andra systemet finna den motsvarande linjen h'' eller h' , eller till en godtycklig linje i' eller i'' den motsvarande punkten I'' eller I' .

Korrelationen är således fullt bestämd genom givna sju par konjugerade punkter och även möjlig att framställa.

Mot punkterna på en linje a' svara linjer, som gå genom linjens motsvarande punkt A'' . Bland dessa linjer kan det finnas en eller två, som gå genom sin motsvarande punkt. Eller mot dessa linjer, $a''_1, a''_2, a''_3, \dots$ svara punkterna A'_1, A'_2, A'_3, \dots . Samma linjer avskära på a' en annan

punktrad, projektivisk till den förra, $A_1^\circ, A_2^\circ, A_3^\circ, \dots$, och dessa båda punktrader kunna hava en eller två motsvarande punkter gemensamma eller sammanfallande. En sådan dubbelpunkt A'_n eller A''_n är tydligen konjugerad till sig själv, eller består av två sammanfallande konjugerade punkter. De båda dessa punkter motsvarande linjerna sammanfalla i allmänhet icke, dock finnas på varje linje ett par (reella eller imaginära) punkter, för vilka de motsvarande linjerna sammanfalla med linjen själv. I det fall att punkterna äro reella, utgör linjen en dubbelinje eller ett par sammanfallande konjugerade linjer. De konjugerade dubbelpunkterna bilda en kurva, vilken är av andra ordningen, emedan ingen linje kan hava mer än två dubbelpunkter. Denna kurva skäres av alla linjer med två reella dubbelpunkter och tangeras av dem, som hava blott en sådan. Dubbelpunkternas korrelativt motsvarande linjer tangera en annan kurva, av andra klassen — den förra kurvans korrelativa motsvarighet — och varje sådan linjes skärningspunkter med den förra kurvan, således deras dubbelpunkter, motsvara, en i vardera systemet, linjen själv, som sålunda är en dubbelinje. De båda kurvorna tangera varandra i två punkter, vilka äro sammanfallande dubbelpunkter och vilkas tangenter äro sammanfallande dubbelinjer, det enda par sådana, som finnas. Det är naturligtvis beroende på de givna konjugerade punktparens lägen, huruvida några dubbelpunkter (reella) över huvud finnas.

Den oändligt avlägsna linjen i planet motsvaras i vardera systemet av en, vanligen inom ändligheten belägen punkt. Dessa båda punkter sammanfalla i allmänhet icke, såvida ej en polär reciprocitet föreligger.

Är korrelationen given genom sju par konjugerade linjer, finnas de motsvarande punkterna genom en konstruktion, som korrelativt fullt motsvarar den anförda. Man har blott att överallt ersätta punkt med linje, punktrad med strålknippe, och tvärtom. För övrigt är varje detalj fullt (korrelativt) motsvarande, och det erhållna resultatet till alla delar identiskt med det förra.

Båda konstruktionerna låta sig lätt och direkt överföras på kollineationen i rummet.

Förestående sätt att åstadkomma korrelativa förhållanden äro naturligtvis icke lämpliga, när det endast gäller en korrelation v. s. h., alltså utan förefintliga betingelser. I alla sådana fall åvägabringas korrelationen vida enklare genom antagandet av fyra punkter och fyra motsvarande räta linjer, eller genom två punktrader och två motsvarande med dessa projektiva strålknippen. Men stundom finnas villkor, som tvinga till användandet av

de här visade konstruktionerna, och ett par sådana fall skola här i korthet omnämnas.

Dessa fall hänföra sig till sådana, där de korrelationen bestämmande storheterna hava särskilda lägen, således t. ex. att de givna konjugerade punktparen bestämma linjer, som alla sju gå genom en och samma punkt i planet, eller att de givna linjeparens inbördes skärningspunkter alla sju ligga på en rät linje. Sålunda belägna konjugerade punktpar skola i det följande benämnas *korresponderande* punkter. Likaså benämnas konjugerade linjer som råkas på en bestämd rät linje korresponderande linjer. Det torde utan vidare vara tydligt, att på ett par konjugerade linjer kan ligga endast *ett par* korresponderande punkter, som genom linjerna äro fullt bestämda, och likaså, att genom ett par konjugerade punkter kan gå allenast *ett par* korresponderande linjer.

En andragsyta uppkommer, såsom bekant, punktvis såsom skärning mellan två korrelativa strålbuntar, och då den är given genom nio godtyckligt valda punkter, giver den först angivna konstruktionen omedelbart möjlighet att utkonstruera dessa strålbuntar och därmed ytterligare punkter å ytan. Då andragsytan även uppkommer såsom omhöljningsyta till ett planknippe av andra ordningen, ger den andra anförda konstruktionen möjlighet att erhålla detta planknippe, då ytan är given genom nio tangerande plan.

En yta av andra ordningen (graden), som nedan betecknas med F^2 , må alltså vara given genom nio punkter, A, B, C, D, E, F, G, S_1 och S_2 . Två av dessa, t. ex. S_1 och S_2 , väljas till projektionscentra, och från dessa projicieras de övriga på ett godtyckligt valt projektionsplan. Sålunda erhållas två system av punkter: $A', B', C', D', E', F', G'$ (projektioner från S_1) och $A'', B'', C'', D'', E'', F'', G''$ (projektioner från S_2), vilka parvis, A' och A'' , B' och B'' , ligga på räta linjer, som alla gå genom en punkt S , nämligen skärningspunkten mellan projektionsplanet och linjen S_1-S_2 , och sålunda utgöra korresponderande punktpar. Sökas nu, enligt den angivna konstruktionen, de korrelativt motsvariga linjerna a'', b'', \dots, g'' och a', b', \dots, g' till dessa punkter, så bliva strålbuntarna $S_1(A', B', \dots, G')$ och $S_2(a'', b'', \dots, g'')$ korrelativa och alstra i sina skärningspunkter den givna F^2 . Då det nu icke möter några svårigheter att till en godtycklig punkt H' finna den motsvarande linjen h'' och därmed den korresponderande punkten H'' , så erhålles en ytterligare punkt på ytan i skärningspunkten mellan strålen S_1-H' och planet S_2-h'' , eller enklare mellan strålarna S_1-H' och S_2-H'' . Varje nytt par korresponderande punkter i planet bestämma, eller representera, en ny punkt på ytan.

Punkten S , uppfattad såsom S' eller S'' , motsvarar två linjer s'' och s' , en i vardera systemet. Dessa linjer bestämma med var sitt projektionscentrum de båda plan genom dessa, som där tangera ytan.

Det tangerande planet i en annan punkt, t. ex. A , bestämmas även utan svårighet. Planeten S_1-a' och S_2-a'' skära varandra i en linje a , som träffar F^2 i A , men också endast i A och som således är en tangent till ytan. Ty skulle den träffa ytan i ännu en punkt A_1 , så skulle dennas projektioner A'_1 och A''_1 utgöra ännu ett par korresponderande punkter på linjerna a' och a'' , vilket ju är omöjligt. Ännu en tangent erhålles på följande sätt. I planet S_1S_2A äro kända de tre punkterna S_1 , S_2 , A av planets skärning med F^2 samt tangenterna till detta kägelsnitt i två av punkterna, S_1 och S_2 , varefter den tredje tangenten, i A , lätt erhålles. Konstruktionen, vars korrelativa motsvarighet är användbar för omhöljningsytan, utföres sålunda: skärningspunkten mellan $S-A'-A''$ och s'' sammanbindes med S_2 medelst en linje, som skär S_1-A' (S_1-A) i en punkt X_1 , skärningspunkten mellan $S-A'-A''$ och s' sammanbindes med S_1 medelst en linje, som skär S_2-A'' (S_2-A) i en punkt X_2 . På linjen X_1-X_2 träffas även S_1-S_2 och tangenten i A . Genom dessa två tangenter är tangentplanet i A bestämt.

Skärningspunkterna mellan F^2 och en given rät linje l bestämmas sålunda. Linjen projicieras från de båda centra till sina projektioner l' och l'' . På den ena av dessa, t. ex. l' , uppsöker man de båda punkter, L'_1 och L'_2 , vilkas korresponderande punkter, L''_1 och L''_2 ligga på den andra linjen l'' , d. v. s. dubbelpunkterna till de båda projektiviska punktrader, som på den förra bildas dels av de strålar, som motsvara punkterna å l' och dels av de linjer, som förbinda S med dessa punkter. De så funna paren korresponderande punkter bestämma skärningspunkterna L_1 och L_2 .

Den kurva, som bildas av sammanfallande konjugerade — korresponderande — punkter, är naturligtvis intet annat än ytans F^2 skärning med projektionsplanet.

I det först angivna fall, att de konjugerade punkterna icke äro korresponderande och alltså valda fullt godtyckligt, bestämma de med ännu ett par utom planet valda godtyckliga punkter S_1 och S_2 en F^2 , som går genom den av sammanfallande konjugerade punkter bildade kurvan, vilken således är gemensam för alla på detta sätt bestämda F^2 .

På ett alldeles (korrelativt) motsvarande sätt löses uppgiften för en genom nio tangentplan given F^2 . Tvenne av dessa bringas till skärning med de övriga och man erhåller således i vardera sju skärningslinjer. Sedan

antingen nedfällas det ena planet på det andra, eller alla linjerna projicieras från en godtycklig punkt på ett genom de båda skärande tangeringsplanens skärningslinje gående projektionsplan. På detta sätt erhållas två system räta linjer, som parvis träffas på en rät linje och vilka såsom konjugerade, eller rättare, korresponderande linjer bestämma ett korrelationsförhållande, vilket, på sätt som ovan antydts, utkonstrueras, d. v. s. de motsvarande punkterna till linjerna uppsökas. Till en godtycklig linje i det ena systemet kan då lätt finnas den motsvarande punkten i det andra och därmed även den korresponderande linjen. Den första linjen och dess motsvarande punkt, eller de båda korresponderande linjerna, bestämma ett nytt tangerande plan till F^2 .

Mot skärningslinjen t mellan de båda skärande tangentplanen svara två punkter, T' och T'' , en i vardera systemet, nämligen de båda planens tangeringspunkter, resp. dessas projektioner.

Uppsökas till två korresponderande linjer a' och a'' deras motsvarande punkter A'' och A' , så går dessas förbindelselinje $A'-A''$ genom tangeringspunkten A till det plan, som bestämmas av de båda linjerna. Läggas genom a' och T' och genom a'' och T'' plan, som skära varandra i en linje x , så går även planet genom t och x genom A , och denna punkt bestämmas av linjen $A'-A''$ och planet $t-x$.

Utförandet av konstruktionen i konstruktionsplanet är enkel och till alla delar (korrelativt) motsvarande bestämningen av ett tangentplan i föregående problem.

Genom en given linje läggs tangerande plan sålunda. Uppsök linjens spår — resp. dessas projektioner — L' och L'' på de skärande tangentplanen. Sök därefter de två linjer, l'_1 och l'_2 , genom L' , vilkas korresponderande linjer, l''_1 och l''_2 , gå genom L'' — konstruktionen är till alla delar korrelativt analog med den, som anförts för sökande av en linjes skärningspunkter med F^2 . Dessa linjepar bestämma de båda tangerande planen.

Härmed äro således fullständigt lösta uppgifterna beträffande andragsgradsytor, som äro givna genom endast punkter eller endast tangerande plan. För sådana ytor, givna genom dels punkter, dels tangerande plan, bliva konstruktionerna alltför invecklade för att vara av större intresse.

NÅGRA SYNPUNKTER VID BERÄKNING AV AVTAPPNINGSTURBINER

AV

TÖRE LINDMARK.

En avtappningsturbin är en kombination av tvenne ångturbiner, nämligen av en mottrycksturbin och en kondenseringsturbin, sammanbyggda till ett ångturbinaggregat med gemensam reglering och vanligen kopplade till gemensam elektrisk generator. Denna ångturbinotyp har erhållit en vidsträckt användning överallt, där mottrycksånga användes för värmeändamål, samtidigt med att kraftbehov föreligger, och särskilt vid sådana anläggningar, i vilka värme- och kraftkurvorna ej täcka varandra, utan där kraftkurvan som regel ligger högre än värmekurvan. Med kraftkurva avses i detta sammanhang den ångförbrukningskurva, som under driftförhållandena i fråga erfordras för att lämna den nödiga kraften. Med värmekurva åter avses den ångmängd, som förbrukas för värmebehovet.

Vid sådana anläggningar, där kraftkurva och värmekurva täcka varandra eller där värmekurvan ligger högre än kraftkurvan, löser mottrycksturbinen (eller mottrycksångmaskinen) kraft- och värmeproblemet. Mottrycksturbinen utvecklar nämligen i sådant fall med den ångmängd, som värmebehovet kräver, en mer än tillräckligt stor effekt, och regleras därför ångmängden i detta fall av turbinens belastning, under det att den del av värmeånga, som ej erfordras för kraftalstring, kopplas förbi ångturbinen.

Ligger åter kraftkurvan högre än värmekurvan, räcker ej den genom mottrycksturbinen strömmande värmeångmängden till kraftbehovet i fråga, utan måste tillskottskraft lämnas. Detta kan ske genom att koppla mottrycksmaskinen parallellt exempelvis med en vattenturbin eller med en annan ångmotor och då vanligen med en ångturbin arbetande med kondensation. Mottrycksturbinens effekt bestäms i detta fall uteslutande av värmeång-

mängden. Det resterande kraftbehovet lämnas då av den med mottrycks-turbinen parallellkopplade motorn, t. ex. av en kondenseringsturbin.

Alldeles samma resultat som genom parallellkörning av mottrycks-turbin och kondenseringsturbin erhålles med avtappningsturbinen. Denna består ångtekniskt sett av två delar, högtrycksdelen och lågtrycksdelen. I högtrycksdelen expanderar ångan från admissionstrycket till avtappnings-trycket och i lågtrycksdelen från avtappningstrycket till kondensortrycket. Genom turbinen går, om man så vill, tvenne ångströmmar, den ena ex-panderande genom högtrycksdelen från admissionstrycket till avtappnings-trycket och utströmmande genom avtappningsledningen till värmebehovet, den andra expanderande genom hela turbinen, d. v. s. först parallellt med den första delen genom högtrycksdelen och sedan ensam genom lågtrycks-delen. Den första ångströmmen motsvarar värmeångan genom mottrycks-turbinen, den andra ångströmmen motsvarar kraftångan genom konden-seringsturbinen.

Nu gives det många fall, då värmeånga önskas av olika tryck. Så t. ex. inom sulfitindustrien, i vilken erfordras värmeånga av dels 5—6 kilo-grams övertryck, dels 1—2 kilograms övertryck. I sådana anläggningar kan det visa sig förenligt med stor ekonomisk fördel att använda avtapp-ningsturbiner med två avtappningstryck. Detta slag av avtappningsturbiner höra till de mera komplicerade ångturbintyperna, särskilt i regleringshän-seende. I det följande kommer jag emellertid endast att diskutera avtapp-ningsturbiner med ett avtappningstryck. Detta hindrar ej, att de synpunkter jag ämnar beröra kunna tillämpas även på avtappningsturbiner med flera avtappningstryck.

Avtappningsturbinen skall fylla två olika villkor. Dels skall den lämna den för värmebehovet nödiga ångmängden i varje ögonblick till riktig mängd och av relativt konstant tryck. Dels skall den lämna den erfor-derliga effekten för minsta möjliga kostnad. Det första villkoret är en ren regleringsfråga och fylles på så sätt, att ångtrycket i avtappningsledningen kommanderar avtappningsmängden. Sjunker avtappningstrycket, pådrages ökad avtappningsmängd och tvärtom. Härigenom erhåller alltid avtapp-ningsledningen erforderlig ångmängd, och genom att hålla avtappnings-tryckets variationer inom snäva gränser erhålles även relativt konstant av-tappningstryck. Det andra villkoret är ur ekonomisk synpunkt synnerligen viktigt och uppbygges avtappningsturbinens konstruktion i väsentlig grad på detta villkors fyllande.

I det förut omnämnda fallet med mottrycksturbin, då värmebehovet

överstiger kraftbehovet, har nyssnämnda ekonomiska ångsynpunkt tillsynes en ganska ringa betydelse. Erfordras nämligen så stor ångmängd till värmebehovet, att även en ren mottrycksturbin med användande av denna ångmängd utvecklar större effekt än som motsvarar kraftbehovet i anläggningen, då har tydligen ångturbinens termodynamiska verkningsgrad ett mera underordnat intresse och man kan, utan att på något sätt minska anläggningens ekonomi, konstruera mottrycksturbinen med så pass reducerad verkningsgrad, att dess ångförbrukning vid ifrågavarande kraftbehov blir exakt lika med värmeångmängden. Härigenom skulle rent av anläggningens ekonomi ökas, emedan ångturbinen då skulle kunna konstrueras enklare och billigare, än om den bygges för hög termodynamisk verkningsgrad, och på grund härav kräva mindre ränta och amorteringskostnader. Det kan ej förnekas att många fall givas, vid vilka ovannämnda synpunkt bör gälla, men å andra sidan är det visst, att kraftbehovet i all industri stegras med varje år, varför ovan omnämnda fall blir allt mer sällsynt. Man torde därför göra klokt uti att, även om en sådan anläggning i dag planeras, man tager hänsyn till den sannolika kraftökningen och på grund härav konstruerar mottrycksturbinen med god termodynamisk verkningsgrad. Ja, det kan ofta vara riktigare att redan från början i stället för mottrycksturbin installera en avtappningsturbin för att möta kommande kraftbehov.

Vid en avtappningsturbin möter man emellertid alltid ovannämnda ekonomiska villkor och ställes man då inför frågan: hur skall avtappningsturbinen konstrueras för att lämna det högsta ekonomiska resultatet? Svaret gives bäst genom att studera ovannämnda tvenne ångströmmars arbete. Den första ångströmmen, som expanderar från admissionsångstrycket till avtappningstrycket, kan till sitt värmeinnehåll vid avtappningen ej förändras. Detta värmeinnehåll är nämligen uteslutande bestämt av värmebehovet och således en given storhet, som ej debiteras kraftkontot på annat sätt, än att skillnaden i värmeinnehåll vid admissionstrycket och vid avtappningstrycket åtgår till kraftgenerering och således belastar kraftkontot.

Den andra ångströmmen däremot belastar helt och hållet kraftkontot. Det gäller således att nedbringa denna ångström, d. v. s. ångmängden till kondensorn, så mycket som möjligt. Detta sker på två vägar. Den ena vägen är att låta denna senare ångström expandera så ekonomiskt som möjligt, så att för en viss effekt minsta möjliga ångmängd förbrukas. Detta åstadkommes genom att använda högt admissionstryck, hög överhettning, högt vakuum och genom att utbilda särskilt ångturbinens låg-

trycksdel så, att den lämnar en hög termodynamisk verkningsgrad. Den andra och den ofta riktigaste vägen att reducera ovannämnda ångförbrukning är att så mycket som möjligt reducera själva det kraftbehov, som denna ångmängd skall tillfredsställa. Den totala effekten lämnas nämligen dels av avtappningsångan, dels av kondenseringsångan. Man minskar kondenseringsångans anpart genom att höja avtappningsångans, och sker detta genom att använda högt admissionstryck och hög överhettning samt genom att konstruera ångturbinens högtrycksdel för en så hög termodynamisk verkningsgrad som möjligt. Dessutom bör man söka reducera avtappningsstrycket till att så mycket som möjligt närma sig det lägsta värde, som betingas av den önskade ångtemperaturen.

Vi erhålla således som en självfallen slutsats, att ju bättre avtappningsångan utnyttjas, desto mera effekt utvecklar densamma, och desto mindre effekt behöver tillskjutas av kondenseringsångan. Å andra sidan, ju mera oekonomiskt avtappningsångan arbetar, desto mera tillskottskraft måste lämnas av kondenseringsångan.

På grund av ovanstående diskussion åligger det således konstruktören att söka konstruera avtappningsturbinen så, att båda ovannämnda ångströmmar med högsta möjliga verkningsgrad utnyttja respektive värmefall. Detta visar sig emellertid ej alltid så lätt att utföra. För att bedöma den saken måste vi se till, hur en avtappningsturbin är konstruerad.

Vi skola då först erinra därom, att vanliga kondenseringsmaskiner, vare sig av aktions- eller reaktionstyp (härvid bortses från den radiella reaktionsturbinen), numera i allmänhet konstrueras så, att ångan först arbetar i ett (eller möjligen tvenne) aktionshjul med två hastighetsserier och sedan antingen i ett antal aktionshjul med en skovelrad eller i ett antal aktionshjul med två hastighetsserier eller i aktionstrumma eller slutligen i reaktionstrumma, allt efter turbintypen. Avsikten med det första aktionshjulet med två hastighetsserier är att härigenom redan i det första tryckfallet nedbringa arbetstrycket till ett lågt värde, vanligen 1—3 kilogram absolut. Samtidigt med trycket sjunker ångtemperaturen och möjliggöres genom denna anordning att utan drifrisk arbeta med högt admissionstryck och hög överhettning. Turbinhjulet med två hastighetsserier arbetar visserligen med en verkningsgrad, som snarare understiger än överstiger 0,60, men utjämnas denna nackdel genom minskade läckförluster och härigenom förbättrad verkningsgrad å den senare delen av turbinen.

Oftast konstrueras avtappningsturbinen på alldeles samma sätt som kondenseringsmaskinen. Man använder det första (eller de två första) tur-

binhjulet med tvenne hastighetsserier som högtrycksdel och den övriga delen av turbinen som lågtrycksdel. Vid avtappning blir emellertid resultatet ett helt annat och sämre än vid en kondenseringsturbin av samma konstruktion. Vid avtappning arbetar nämligen den större delen av ångmängden i högtrycksdelen med den relativt lägre verkningsgraden och den mindre delen av ångmängden i lågtrycksdelen med den relativt högre verkningsgraden. Resultatet blir då naturligtvis, att den lägre verkningsgraden gör sig alltmer gällande för turbinen i sin helhet i samma mån som avtappningsångmängden ökas i förhållande till kondenseringsångmängden.

Följande exempel förtydligar det ovan sagda. Antag en 3 000 eff. hästkrafters avtappningsturbin för följande ångförhållanden:

Admissionstryck = 18,0 kg/cm² abs.

Ångtemperatur å admissionsångan = 350° C.

Avtappningstryck = 3,0 kg/cm² abs.

Mottryck i avlopp till kondensor = 0,05 kg/cm² abs.

Vi antaga den termodynamiska verkningsgraden för tryckfallet 18,0/3,0 kg/cm² abs. till 0,60 och verkningsgraden för tryckfallet 3,0/0,05 kg/cm² abs. till 0,72. Värmefallet från 18,0 kg/cm² abs. och 350° C till 3,0 kg/cm² abs. är enligt Molliardiagrammet 97,5 värmeenheter. Härav tillgodogöres 60 % eller 58,5 v. e. På grund av dessa data kan avtappningsångans temperatur beräknas till 214° C. I det senare tryckfallet är värmefallet från 3,0 kg/cm² abs. och 214° C till 0,05 kg/cm² abs. 154 värmeenheter. Härav tillvaratages i effektivt arbete enligt förut gjort antagande 72 % eller 110,9 v. e. Således tillvaratages i hela ångturbinen sammanlagt 58,5 + 110,9 = 169,4 värmeenheter. Värmefallet för adiabatisk expansion från 18,0 kg/cm² abs. och 350° C till 0,05 kg/cm² abs. är 239 värmeenheter. Ångturbinens termodynamiska verkningsgrad vid ren kondensering är således

$$\eta = \frac{169,4}{239} = 0,709.$$

Vid avtappning blir emellertid förhållandet helt olika. Vi antaga då exempelvis 4 olika grader av avtappning.

1:0) Ingen avtappning.

2:0) Avtappningsmängd = 10 000 kg per timme.

3:0) » » » » »

4:0) » » » » »

1:0) Detta fall är redan diskuterat. Ångturbinen är en ren kondenseringsturbin och verkningsgraden enligt ovannämnda beräkning är = 0,709.

2:o) Vid 10 000 kilograms avtappning erhålles följande, varvid ångmängden genom lågtrycksdelen betecknas med \dot{A} .

$$\text{Eff. hkr i högtrycksdelen} = \frac{\dot{A} + 10\,000}{632} \cdot 58,5$$

$$\text{Eff. hkr i lågtrycksdelen} = \frac{\dot{A}}{632} \cdot 110,9$$

Således erhålles

$$\frac{\dot{A} + 10\,000}{632} \cdot 58,5 + \frac{\dot{A}}{632} \cdot 110,9 = 3\,000,$$

varav

$$\dot{A} = 7\,750 \text{ kg.}$$

Härav följer att 17 750 kilogram ånga arbeta i högtrycksdelen med 60 % verkningsgrad och endast 7 750 kilogram i lågtrycksdelen med 72 % verkningsgrad. Avtappningsångan utvecklar $\frac{10\,000}{632} \cdot 58,5 = 925$ eff. hkr.

och kondenseringsångan $\frac{7\,750}{632} \cdot 169,4 = 2\,075$ eff. hkr. Medelverkningsgraden blir då

$$\eta_m = \frac{925 \cdot 0,60 + 2\,075 \cdot 0,709}{3\,000} = 0,675.$$

3:o) Vid 20 000 kilograms avtappning erhålles

$$\frac{\dot{A} + 20\,000}{632} \cdot 58,5 + \frac{\dot{A}}{632} \cdot 110,9 = 3\,000,$$

varav

$$\dot{A} = 4\,280 \text{ kg.}$$

I detta fall arbeta 24 280 kilogram ånga i högtrycksdelen med 60 % verkningsgrad och 4 280 kilogram i lågtrycksdelen med 72 % verkningsgrad. Avtappningsångan utvecklar 1 850 eff. hkr. och kondenseringsångan 1 150 eff. hkr. Medelverkningsgraden blir

$$\eta_m = \frac{1\,850 \cdot 0,60 + 1\,150 \cdot 0,709}{3\,000} = 0,642.$$

4:o) Slutligen vid 32 400 kilograms avtappning erhålles

$$\frac{\dot{A} + 32\,400}{632} \cdot 58,5 + \frac{\dot{A}}{632} \cdot 110,9 = 3\,000,$$

varav

$$\dot{A} = 0.$$

I detta fall avtappas all ånga och utvecklar således ångturbinens högtrycksdel tillräcklig effekt för att fylla kraftbehovet. Avtappningsturbinen, som i fallet 1:0) arbetade som en ren kondenseringsturbin arbetar nu som en ren mottrycksturbin, och utvecklar turbinens lågtrycksdel intet arbete. Ångans verkningsgrad är i detta fall = 0,60.

I verkligheten förekommer ej fallet 4:0) på så sätt, som angivits här-
ovan, emedan alltid en viss mindre ångmängd måste strömma genom lågtrycksdelen för att avkyla densamma. Likaså är det naturligtvis svårt att konstruera en lågtrycksdel, som ger 72 % verkningsgrad även vid relativt små ångmängder. För åskådlighetens skull är emellertid vid ovannämnda sammanställning ej hänsyn tagen härtill.

Ovannämnda jämförelse visar, att det blir mer och mer ofördelaktigt, ju större ångmängd, som avtappas, och således ju mera ångturbinen avlägsnar sig från den rena kondenseringsturbinen och alltmer närmar sig den rena mottrycksturbinen.

Frigör man sig åter från den rena kondenseringstypen kan man konstruera avtappningsturbinen på följande sätt. Högtrycksdelen utbildas så, att dess termodynamiska verkningsgrad blir möjligast hög. Detta kan vid aktionsturbiner ej ske på annat sätt än genom att använda ett antal enkelhjul med ej alltför stor periferihastighet. Det måste beaktas, att med denna konstruktion blir ångtrycket i turbinhuset avsevärdt högre, emedan admissionstrycket ej nedsättes i ett eller två tryckfall, utan i flera. Därför måste åtgärder vidtagas för att erhålla minsta läckning och även för att förhindra kastningar på grund av den höga temperaturen. Båda dessa fordringar kunna fyllas, om man delar avtappningsturbinen i tvenne självständiga turbinhus, ett högtryckshus och ett lågtryckshus, vartdera huset med sina lager och de båda turbinhusen sammankopplade efter varandra. Genom en dylik uppdelning av avtappningsturbinen möta inga svårigheter att utbildade högtrycksdelen med en termodynamisk verkningsgrad 0,70 och däröver. Lågtrycksdelen är i sina väsentliga delar oförändrad och kan således arbeta med samma verkningsgrad som förut. För att emellertid minska anläggningskostnaden kan man ofta utan avsevärd effektminskning offra något på lågtrycksdelens verkningsgrad, varigenom lågtrycksdelen kan utföras med färre turbinhjul och därför lättare och billigare.

Vi återgå till föregående exempel och antaga, att turbinen nu konstrueras enligt ovanstående med två turbinhus, och att högtrycksdelens termodynamiska verkningsgrad är 0,72 samt lågtrycksdelens fortfarande densamma som förut eller likaledes 0,72. Vi erhålla då i nyttigt värmefall

i högtrycksdelen $0,72 \times 97,5 = 70,2$ värmeenheter. Avtappningsångans temperatur sjunker på grund av ovannämnda högre verkningsgrad från 214°C till 189°C . Lågtrycksdelens adiabatiska värmefall minskas på grund av denna temperatursänkning till $144,5$ värmeenheter, varav tillgodogöras 72% eller $104,0$ v. e. Antagas samma avtappningsmängder för fallen 1—3 som förut så erhålles följande.

1:0) Ingen avtappning. Avtappningsturbinen arbetar som ren kondenseringsturbin. Det sammanlagt tillgodogjorda värmefallet är $= 70,2 + 104,0 = 174,2$ v. e. Den termodynamiska verkningsgraden för hela turbinen är således $= \frac{174,2}{239} = 0,729$. Verkningsgradens höjning genom att

konstruera ångturbinen med två turbinhus är således ej stor och bekräftar det riktiga att vid kondenseringsturbiner använda hastighetsserier för första turbinhulet. Den väsentliga fördyring, som medföljer turbinens uppdelning i två turbinhus, är därför vid kondenseringsturbiner ej berättigad.

2:0) Vid $10\,000$ kilograms avtappning erhålles en ångmängd \dot{A} genom lågtrycksdelen enligt följande ekvation:

$$\frac{\dot{A} + 10\,000}{632} \cdot 70,2 + \frac{\dot{A}}{632} \cdot 104,0 = 3\,000,$$

som ger

$$\dot{A} = 6\,850 \text{ kg.}$$

Gentemot *ett* turbinhus är besparingen således 900 kilogram ånga per timme. Medelverkningsgraden blir

$$\eta_m = 0,725$$

gentemot $0,675$ i förra fallet.

3:0) Vid $20\,000$ kilograms avtappning erhålles på motsvarande sätt

$$\dot{A} = 2\,820 \text{ kg}$$

således en besparing av $1\,460$ kg per timme gentemot *ett* turbinhus. Medelverkningsgraden blir

$$\eta_m = 0,724$$

gentemot $0,642$ i förra fallet.

Vad slutligen beträffar det sista fallet med maximiavtappning så erhålles detta vid en avtappningsmängd $= \frac{3\,000 \cdot 632}{70,2} = 27\,000$ kilogram, och är turbinens verkningsgrad då $= 0,72$ gentemot $0,60$ i föregående fall.

Ovannämnda jämförelse visar, vilken högst avsevärd överlägsenhet i ångekonomi den senare konstruktionen erbjuder vid större avtappningar.

För att nedbringa kostnaden kan det visa sig lämpligt att konstruera lågtrycksdelen särskilt billig genom att reducera antalet turbinhjul. Vi antaga exempelvis, att detta förbilligande göres så pass kraftigt, att lågtrycksdelens verkningsgrad nedgår från 0,72 till 0,60. Denna sänkning motsvarar en minskning i summan av periferihastigheternas kvadrater till ungefär hälften. Högtrycksdelen antages fortfarande byggd som särskild turbin och med en verkningsgrad = 0,72.

1:0) Som ren kondenseringsturbin blir tydligen denna turbin ofördelaktig. Den totala verkningsgraden sjunker nämligen till 0,657.

2:0) Vid 10 000 kilograms avtappning erhålles ångmängden \dot{A} genom lågtrycksdelen av ekvationen

$$\frac{\dot{A} + 10\,000}{632} \cdot 70,2 + \frac{\dot{A}}{632} \cdot 0,60 \cdot 144,5 = 3\,000,$$

som ger

$$\dot{A} = 7\,620 \text{ kg.}$$

Medelverkningsgraden blir 0,682.

3:0) Vid 20 000 kilograms avtappning erhålles på motsvarande sätt

$$\dot{A} = 3\,130 \text{ kg,}$$

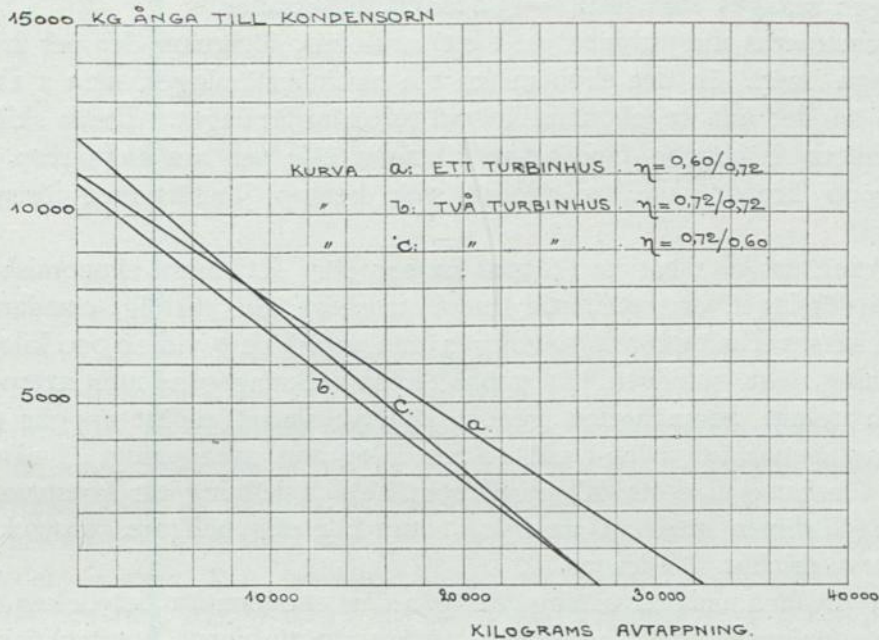
$$\eta_m = 0,705.$$

4:0) Vid maximiavtappning slutligen erhålles samma värden som i nästföregående exempel, d. v. s. en avtappningsmängd = 27 000 kilogram och en turbinverkningsgrad = 0,72.

Ovannämnda tre jämförelser äro sammanställda i vidstående kurvor. Vi se av dessa, hurusom de två senare konstruktionerna visa sig väsentligt fördelaktigare, så snart en större mängd ånga avtappas.

Avtappningsturbiner böra konstrueras med ovannämnda synpunkter till utgångspunkt. Är det fråga om en avtappningsturbin, som skall arbeta med relativt stor avtappning året om, såsom fallet vanligen är i t. ex. en sulfittfabrik, ett pappersbruk och dyl., då bör enligt det föregående avtappningsturbinen konstrueras med två skilda turbinhus för att ett högt ekonomiskt resultat skall kunna erhållas. I praktiken har mycket syndats häremot, ity att avtappningsturbiner alltför ofta konstruerats som vanliga kondenseringsturbiner, och försvarar vederbörande konstruktör ofta nog konstruktionen därmed, att eftersom avtappningsången i alla händelser skall tillgodogöras i värme, så är det ej så viktigt med dess ekonomiska utbyte.

Skall åter avtappningsturbinen mera intermittent arbeta med avtappning, under det att den långa tider har att arbeta som ren kondenserings-turbin, eller är avtappningsmängden relativt liten, då är den ovan skisserade typen med två turbinhus ej den riktiga, utan bör den vanliga typen föredragas.



Vi skola med två exempel belysa, vilka betydande värden, som genom en felaktig konstruktion lätt nog kunna förlösas.

Exempel 1. 3 000 eff. hästkrafters avtappningsturbin.

Avtappningsmängd = 20 000 kg per tim. under hela året.

Drifttid per år = 7 200 timmar.

Ångtryck och ångtemperatur enligt föregående beräkning.

Skillnaden i ångförbrukningen per timme mellan de tre förut behandlade fallen är 1 460 kilogram per timme mellan två turbinhus av ekonomisk typ och ett turbinhus och 1 150 kilogram per timme mellan två turbinhus, varav lågtryckshuset är av oekonomisk typ, och ett turbinhus. Per år göra dessa skillnader resp. 10 512 och 8 280 ton ånga, och representera dessa skillnader under antagande av det måttliga priset av 3,50 kronor per ton ånga resp. 36 800 och 29 000 kronor per år. Således ganska betydande summor.

Exempel 2. Fortfarande antages ovannämnda 3 000 eff. hkr ångturbin, men förutsättes nu, att ångturbinen arbetar med endast 10 000 kilograms avtappning och detta endast under 6 månader under året (t. ex. för uppvärmning); återstående 6 månader antages ångturbinen arbeta som ren kondenseringssturbin. Drifttiden per år antages = 3 000 timmar. Belastningen antages som förut = 3 000 eff. hästkrafter.

Konstrueras ångturbinen med ett turbinhus, förbrukar den per år 1 820 ton ånga mera än det ekonomiska två-turbinhusförslaget, men 1 110 ton mindre än det mindre ekonomiska två-turbinhusförslaget. Dessa skillnader representera i pengar med ovan antagna pris per ton ånga resp. 6 370 och 3 900 kronor, således relativt små belopp jämfört med föregående exempel.

Ovannämnda vinst av 6 370 kronor för det mest ekonomiska två-turbinhusförslaget är emellertid mera teoretisk än verklig, emedan högtryckshusets verkningsgrad visserligen kan uppnå 72 % vid 10 000 kilograms avtappning, men svårigen kan uppnå denna verkningsgrad utan avtappning, då den totala ångmängden genom högtryckshuset endast uppgår till c:a 63 % av samma ångmängd vid 10 000 kilograms avtappning. I alla händelser förefinnes i detta fall ingen som helst anledning att konstruera avtappningsturbinen med två turbinhus, utan bör den billigare konstruktionen med ett turbinhus föredragas.

Av ovannämnda utredning framgår den ekonomiska betydelsen av att för avtappningsturbiner noggrant avväga ångturbinens konstruktion efter de driftförhållanden, som i varje särskilt fall gälla. Det visar sig därför även nödvändigt för ångturbinfirmorna att föra tvenne parallelltyper avtappningsturbiner, den ena typen med två turbinhus och avpassad för övervägande avtappningsdrift och den andra typen med ett turbinhus och avpassad för övervägande kondenseringsdrift.

FLYGSÄKERHETEN OCH »LUFTHÅLEN».

AV

O. E. LUNDHOLM.

Inledning.

Under det nu pågående världskriget har flygmaskintekniken gjort stortartade framsteg, och den svärm av flygmaskiner, som dagligen och stundligen kretsar över de ändlösa stridsfronterna, utgör det mest slående bevis för att aeroplanet, som förut ansågs vara ett jämförelsevis osäkert fortskaffningsmedel, numera kan betraktas såsom ett ganska säkert sådant. Man skulle till och med kunna påstå, att så länge flygmaskinen rör sig på stor höjd över jordytan, den är mindre utsatt för faror än något annat fortkomstmedel.

Flygmaskin mot ångare.

Jämför man exempelvis en ångare ute på världshavet med en flygmaskin i lufthavet, så äro båda visserligen utsatta för samma stormar, men ångaren rör sig därvid oftast framåt i annan riktning än vinden, så att denna får tillfälle att angripa ångaren med sin fulla kraft, och om detta sker från sidan, kan den åstadkomma förskjutning av lasten och slagsida eller till och med kantring, under det att flygmaskinen antingen driver med vinden eller också går emot densamma med en relativfart, som aldrig kan bliva större än den hastighet, som den med egen maskin kan uppnå vid vindstilla. Är denna hastighet t. ex. 150 km i timmen eller 41,67 meter i sekunden, d. v. s. lika med luftens hastighet vid full orkan, så är flygma-

skinen naturligtvis beräknad att med säkerhet tåla ett häremot svarande vindtryck framifrån, och blåser vinden från sidan så driver maskinen med vinden och sidovindtrycket å densamma blir obetydligt.

Ångfartyget har emellertid att även motstå de långt farligare anfallen från brottsjöarna, vilkas kraft är oberäknelig, och vilka hårdt fresta fartyget men i ännu högre grad de framdrivande organen och styrinrättningen — båda vitala delar, av vilkas motståndskraft och ostörda funktionerande fartygets öde är beroende. Under vintern vid navigering i is är faran för dessa delar ännu större. Härtill kommer dimman, som för ångaren medför faran att sätta på grund samt att stöta samman med andra fartyg eller med isberg, vilket gör att den därvid måste gå med sakta fart och största försiktighet, under det att flygmaskinen höjer sig över dimman och molnen och färdas fram med full fart i klar luft och således utan att behöva befara vare sig ishinder eller sammanstötningar.

Amerikanaren Sperry's geniala användning av gyroskopet för rodrens självmanövrering på sådant sätt, att jämvikten vid flykt i bärande luft bibehålles både i längd- och tvärriktning, har gjort att flygaren t. o. m. i starkt blåsväder kan överlämna maskinen åt sig själv, sedan han en gång inställt rodren antingen för rak horisontalflykt, eller för plan flygning i cirkel, eller för rak stigning eller sänkning, och endast behöver själv handhava dem vid manöver. Detta gör att han vid flykt på större höjd utan fruktan kan ägna hela sin uppmärksamhet åt vad som försiggår i atmosfären eller på jordytan, i st. f. att såsom förr vid oroligt väder behöva anstränga både själs- och kroppskrafter för att hålla maskinen i jämvikt.

Av alla de faror, som hota en ångare på öppna sjön, har flygmaskinen vid hög flykt blott att frukta en enda, nämligen fel å de framdrivande organen, särskilt motorn, eller med ett ord »motorstopp», som kan bli ödesdiger, om ingen användbar landningsplats finnes så nära, att den medelst glidflykt kan nås. Har flygmaskinen emellertid två motorer, vardera tillräcklig att hålla densamma uppe, är denna fara utesluten, då möjlighet därigenom vinnes att utan tvångslandning åter få den stannade motorn i gång, eller att i lugn och ro uppsöka lämplig landningsplats och där efter landning avhjälpa ett eventuellt svårare fel å motorn.

Är en flygmaskin med endast *en* motor försedd med pontoner för nedslag på en vattenyta, vilket vid jämförelse med en ångbåt på långfärd över vatten bör förutsättas, är faran av motorstopp betydligt mindre.

Landningen.

För en ångare finnes över huvud ingen möjlighet att angöra land på andra platser än där mer eller mindre dyrbara hamnar äro att tillgå, och för att ångaren vid mörker eller dimma skall kunna färdas tryggt längs en kust eller finna sig tillrätta, då den närmar sig land, eller inlöpa i en hamn, hava en mängd anordningar måst vidtagas, såsom byggandet av fyrar, utläggandet av fyrskepp, lys- och klockbojar m. m., utprickandet av grund, farleder och inseglingrännor samt de senares uppmuddring och underhåll m. m., varjämte särskilda ämbetsverk, lotsverk, äro inrättade för att underlätta sjöfarten och minska faran för ångaren, då den närmar sig land eller svårnavigabelt farvatten. För denna är, tack vare allt detta, landningen i allmänhet lätt och, utom vid svåra isförhållanden, ej förbunden med nämnvärd fara.

För flygmaskinen däremot är ingenting åtgjort för att underlätta dess landning, vilket måste tagas i betraktande vid jämförelsen mellan de båda fortskaffningsmedlens driftsäkerhet. Att landningen ännu så länge är farligare för en flygmaskin än för en ångbåt beror således ej på någon underlägsenhet hos den förra utan därpå, att denna till landningsplats får nöja sig med vad naturen själv skapat eller människan för andra ändamål gjort i ordning, således i lyckligaste fall ett fält, någorlunda plant och fritt från större stenar, gropar och diken, i vanliga fall en åker eller äng och i mindre gynnsamma fall en skog eller ett moras. Vid mörker och dimma har den ingenting till vägledning, i motsats till ångaren, som har både fyrar och ljudsignaler till disposition, men det är givet, att om flygmaskinen skall kunna fullt utnyttjas i trafikens tjänst, måste i alla länder ett tillräckligt antal på lämpligt sätt utrustade flygstationer med landningsfält iordningställas, vilka mot en viss avgift, motsvarande hamnpenningar för fartyg, finge av flygare begagnas. Först när detta är gjort, kommer jämförelsen mellan driftsäkerheten hos en flygmaskin och en ångare att bliva väl avvägd och övertygande.

Flygstationer.

I Sverige skulle längs kusten på högst 100 kilometers avstånd från varandra samt inåt landet i närheten av järnvägs- och ångbåtsstationer i

allt bortåt ett 70-tal flygstationer kunna anordnas för en jämförelsevis ringa kostnad. Det fria landningsfältet vid en sådan station borde vara så stort som möjligt och ej gärna under 500 meter i fyrkant eller diameter för att tillåta en ingalunda avlägsen framtids större person- och postflygmaskiner att där starta och landa vid vilken vindriktning som helst och dessutom giva plats för flera flygmaskiner samtidigt. Inga berg böra finnas i flygfältets närhet, på det att start och landning skola kunna försiggå utan störande inflytande av de vindar med större eller mindre vertikal hastighetskomponent, som ofta uppstå i närheten av höjder och som kunna vara farliga för en flygmaskin vid start- och landningstillfällena. Däremot är det förmånligt att förlägga flygfältet invid sjö, flod eller kust, emedan flygstationen då blir tillgänglig såväl för marinflygmaskiner med pontoner (flygbåtar) som för landflygmaskiner med hjul och för framtidens trafikflygmaskiner, som givetvis komma att vara försedda med båda slagen underrede för att kunna gå ned efter behag på vatten eller land.

Vid flygstationen böra finnas ett antal fasta skjul för flygmaskiner, bostad för föreståndare eller vakt, magasin för bränn- och smörjoljor, materialier och reservdelar m. m., reparationsverkstad med utrustning samt signalstation. Från denna bör vid dimma givas ljudsignaler, olika för varje flygstation, så att en flygare kan orientera sig efter ljudet. Vid mörker eller dimma böra ljussignaler visas, även dessa olika för varje station, för att liksom fyrarna längs våra kuster giva en sig närmande flygare besked om var han befinner sig. Medelst ljussignaler om natten och genom uppifrån på långt håll synliga vita märken om dagen bör den å fältet rådande vindens riktning vara markerad.

Bleve sådana flygstationer iordningställda, skulle landningen såväl vid dagsljus som vid mörker eller dimma bliva ungefär lika ofarlig för flygmaskinen som för ångaren.

Lufthål.

I ett avseende är emellertid flygmaskinen med hänsyn till säkerheten underlägsen ångaren, nämligen däri, att den särskilt i närheten av jordytan är utsatt för vindar, som röra sig antingen vertikalt eller på annat sätt, varigenom de åstadkomma s. k. lufthål, d. v. s. partier i luften, som tyckas sakna bärande luft, och där en flygmaskin varken kan hålla sig uppe eller styras.

Vertikala luftströmmar.

Om man en lugn solskensdag befinner sig ute på ett fält, kan man iakttaga hur luften liksom tyckes vibrera, och gör man sig närmare reda för detta fenomen skall man finna, att den beror på vågrörelser, som uppstå därigenom, att två luftströmmar med olika riktning eller hastighet stryka utefter varandra, ungefär på samma sätt som när vinden går fram över en vattenyta. Kunde man se luftströmmarna — om de t. ex. vore olika färgade — skulle man ännu tydligare kunna fastställa såväl vindströmmarnas riktning som att vibrationen eller vågbildningen uppkom i beröringsytorna mellan luftströmmarna. Man skulle vidare finna att över de ställen, där marken var bar eller gräset vissnat, med andra ord där marken var starkt uppvärmd av solstrålarna, luften rörde sig med ganska stor hastighet uppåt, under det att över andra fläckar belägna i skuggan eller bevuxna med saftigt gräs eller på annat sätt skyddade för solstrålarnas direkta inverkan, luftströmmen var riktad nedåt. Vore terrängen kuperad, skulle man kunna iakttaga, att över de mot solen vända sluttningarna luften rörde sig i huvudsak uppåt, under det att över de från solen vända sluttningarna den rörde sig nedåt.

Anledningen härtill är tydligen, att de starkast upphettade fläckarna på marken uppvärma det över dem liggande luftpartiet, varvid detta utvidgar sig och blir lättare samt stiger uppåt genom den omgivande luften med en hastighet, som kan uppgå till 3 meter i sekunden eller mer. Den varma luften rör sig uppåt utan att nämnvärdt blanda sig med den omgivande, alldeles såsom den från en skorsten uppstigande rökpelaren, som vid lugnt väder kan uppnå en ansevärd höjd och ej sprider sig, förrän den når upp till luftlager, där vind råder.

Den uppstigande varma luften ersättes genom kallare luft, som strömmar till från de mindre starkt upphettade fläckarna å marken och som i sin tur uppvärms och stiger uppåt. Den från de kallare fläckarna på detta sätt bortsugna luften ersättes genom luft, som kommer uppifrån och sålunda bildar en nedåtriktad ström över dessa.

Över de skuggor, som stillastående eller långsamt framglidande strömoln kasta på marken, uppkomma även av nyssnämnda anledning nedåtriktade luftströmmar. När himmelen däremot är jämmulen eller helt be täckt av moln, när dimma råder, och när solen är under horisonten, före-

komma inga vertikala luftströmmar, varför vid lugnväder dagningen före soluppgången och skymningen efter solnedgången samt under dagen mulen väderlek äro mest lämpliga för flygningars företagande, särskilt övningsflygningar för nybörjare.

Över en vattenyta förekomma vid lugnväder och solsken inga eller endast mycket svaga vertikala luftströmmar, varför en sådan utgör en synnerligen förmånlig start- och landningsplats för flygbåtar.

Det är ovannämnda vertikala luftströmmar, som vid lugn och solig väderlek åstadkomma lufthålen och just de farligaste av dessa, emedan de förekomma på fält och under omständigheter, som tyckas särskilt inbjuda till landning och som hos en mindre erfaren flygare ej väcker minsta tanke på fara, varför han vanligen blir tagen genom överrumpling och ej kommer till besinning, förrän han och hans maskin redan ligga på marken i mer eller mindre skadat skick.

Flygmaskinen i olika slag av lufthål.

Vi vilja nu se hur en flygmaskin förhåller sig, då den råkar in i en vertikal luftström och tänka oss då först en uppstigande sådan. Två fall kunna därvid inträffa. Antingen rusar flygmaskinen rakt in i luftströmmen eller också kommer den endast med den ena sidan in i densamma. I förra fallet träffas först maskinens främre del underifrån av luftströmmen, vilket gör att den något stegrar sig, d. v. s. infallsvinkeln ökas, och maskinen stiger både på grund härav och emedan den uppåtriktade luftströmmen tager densamma med sig. Genom den ökade infallsvinkeln minskas emellertid farten och därmed också uppdriften, och flygaren måste medelst höjdrodret tvinga ned fören, för att åter genom glidflykt med arbetande motor få upp hastigheten och bärkraften. Då den vertikala luftströmmen sällan har någon större genomskärning, händer det lätt, att maskinen under denna nedpressning av fören, som vanligen drives längre än behövt, åter dyker in i stillastående luft eller en nedåtgående luftström, varvid dess stjärt, som sist lämnar den uppåtgående luftströmmen, av denna höjes, så att maskinen får en ännu mera stupande ställning och kan, om marken är nära, störta ned med fören först. Om maskinen befinner sig på tillräcklig höjd över marken, och om föraren ej förlorar besinningen, är faran emellertid ej stor, och en omkastning av höjdrodret bringar maskinen i de flesta fall åter på rät köl.

Kommer flygmaskinen endast med den ena, exempelvis högra vingen in i den uppåtgående luftströmmen, kränger maskinen över åt vänster, men samtidigt börjar den glida åt samma håll d. v. s. ut ur luftströmmen, och flygaren kan genom att ändra kursen åt vänster hastigare komma ut ur densamma och genom samtidig manöver med skevningsrodren bringa maskinen i jämvikt sidvägen. Även i detta fall är faran ej stor för en påpasslig och lugn flygare.

Farligare äro de nedåtriktade luftströmmarna, de egentliga lufthålen. Kommer en flygmaskin rakt in i en sådan luftström, så träffar denna vingarna på översidan och upphäver den luftförtunning, som där brukar råda och på vilken uppdriften huvudsakligen är beroende, och maskinen störtar ned ungefär såsom en i horisontell riktning utkastad sten, således beskrivande en nära parabolisk bana. Då den emellertid fortfarande behåller eller till och med ökar sin hastighet i horisontell led, och då, såsom förut framhållits, lufthålen vanligen hava ringa utsträckning, passerar den snart den nedåtriktade luftströmmen, och träffar efter ett fall på kanske hundratal meter åter bärande luft, i vilken föraren genom lämplig manövrering med rodren kan återställa den eventuellt förlorade jämvikten både i längd- och tvärriktning, förutsatt att maskinen ej innan dess träffat marken och krossats. Det är att märka, att i detta fall maskinens främre del först träffas och nedtryckes av den nedåtriktade luftströmmen, varigenom den från början blir inställd för glidflykt och fallhastigheten blir större.

Träffar den uppifrån kommande luftströmmen först flygmaskinens ena vinge, t. ex. den högra, kränger maskinen över åt höger och glider under tyngdens inverkan utför åt höger, således längre in i luftströmmen, och om den ej på grund av farten snart åter kommer ut ur densamma, är det fara åfärde, emedan manöverförmågan, så länge maskinen helt eller delvis befinner sig i lufthålet, är mer eller mindre nedsatt. Ett större eller mindre fall blir alltid följd, men finnes plats härför, utan att marken nås, bör en kallblodig flygare utan större svårighet kunna återföra maskinen i horisontellt läge, då han åter kommer in i bärande luft.

Kommer en flygare under brant glidflykt (vol piqué) in i en nedåt riktad luftström, så är faran överhängande, ty så länge maskinen befinner sig under dess inflytande, lyder den ej rodren, och flygaren har ingen möjlighet att bringa densamma tillbaka till horisontalflykt, förrän det sannolikt är för sent. Detsamma blir förhållandet, om flygaren påträffar ett sådant lufthål omedelbart efter starten eller under förberedelse till landning, då han befinner sig på ringa höjd över marken, ty ehuru en nedåtgående luftström

givetvis måste ändra riktning och bliva horisontell då den träffar jordytan, får flygaren ej därför tillfälle att hålla maskinen flytande och därigenom hindra ett våldsamt nedslag, ty när maskinen kommer in i den horisontella luftströmmen, som sprider sig åt alla håll från lufthålets centrum räknat, får den tydligen alltid medvind och kan därför ej hålla sig uppe.

Luftströmmar vid ett väl ordnat landningsfält.

Om landningsfälten vid flygstationerna grusades till hela sin utsträckning, bleve underhållskostnaden för dem obetydlig, och man finge åtminstone *dessa* start- och landningsplatser så godt som fria från lufthål. Vid solsken och vindstilla blir nämligen ett grusat fält jämnt uppvärmt, och en tämligen konstant luftström stiger upp från detsamma, varjämte lufttillströmmar från alla sidor, vilket är fördelaktigt för starten, emedan en flygare, som lämnar flygfältet i vilken riktning det vara må, har nytta både av den stigande luftströmmen och av den motvind, som den tillströmmande luften åstadkommer i ytterpartierna av och strax utanför flygfältet, och således lättare och snabbare kan komma upp och bliva fri från de farligheter, som lura i närheten av jordytan, däri inberäknad den svaga, snedt nedåt riktade motvind, som råder rundtom på kort avstånd från flygfältet. Vid landning däremot får flygaren, om han på ringa höjd närmar sig fältet, först svag, snedt nedåt riktad medvind, som blir starkare och mera horisontell ju närmare han kommer detta och slutligen, då han passerar gränsen, har riktning snedt uppåt. Den snedt nedåt riktade medvinden kan lätt tvinga till för tidig landning, d. v. s. landning utanför fältet, varför det är säkrare att fortsätta på större höjd tills man kommer midt över flygfältet och därifrån genom glidflykt i spiral sänka sig och landa nära midten av detsamma, där uppström råder. Brant glidflykt och omedelbar landning kan också, om man har en starkt byggd maskin, utan fara företagas under ovan givna gynnsamma förutsättningar, och detta sätt är utan tvivel vackert och för en djärv flygare mera tilltalande, men under mindre förmånliga förhållanden, d. v. s. då man ej har ett sådant idealfält att gå ned på, bör man — vilket torde framgå av vad förut anförts — ej fortsätta en brant glidflykt tills man kommer för nära marken utan hellre övergå till mera plan glidflykt (vol plané), som ger tillfälle till bättre översikt över terrängen och till utseende av lämpligaste landningsplats.

Luftströmmar i alptrakter.

Till lufthål vid vindstilla skulle man kanske också kunna hänföra de i alptrakter förekommande luftströmmar, som uppkomma då vid varm väderlek den kalla från snöfälten kommande luften flyter ned genom dalgångarna med ofta orkanlik hastighet, under det att luften högre upp är stilla. Vill en flygare gå ned i en dal och råkar in i en sådan luftström, är faran stor, i synnerhet om han ej varit nog förtänksam att ställa flykten uppför dalen, innan han börjar sin glidflykt för landning. Har han iakttagit detta försiktighetsmått, så möter han vinden — låt vara med en häftig stöt som kanske kan förstöra maskinen — och om han då är situationen vuxen och maskinen oskadad, kan han hålla sig uppe eller till och med åter höja sig upp i stillastående luftlager eller företaga en farlig landning. Kommer han in i riktning med strömmen, går maskinen förlustig både bärkraft och styrförmåga och torde jämte sin förare vara räddningslöst förlorad. Lyckligtvis kunna sådana alpvindar iakttagas uppifrån både genom syn och hörsel, varför de äro lätta att undvika.

Horisontella luftströmmar.

Vid lugnt, vackert väder kan man ofta iakttaga, att molnen på olika höjder röra sig åt olika håll, varvid man dock bör ihågkomma, att om två moln på olika höjd röra sig åt samma håll med samma hastighet, detta för en åskådare på marken ter sig så, som om det undre molnet ginge fortare än det övre, eller till och med som om det övre rörde sig åt motsatt håll mot dess verkliga rörelse. Att molnen röra sig åt olika håll beror tydligen därpå att de befinna sig i luftlager, som hava olika rörelseriktning, och att horisontella luftlager kunna glida fram över varandra utan nämnvärd sammanblandning i beröringsytorna, har man utom direkta uppmätningar åtskilliga bevis för. Då t. ex. en ballongförare känner vinden blåsa, där han sitter i gondolen till en frigående ballong, bevisar det, att ballongen och gondolen röra sig i luftströmmar med olika riktning eller hastighet, ty ballongen och således också gondolen följer den luftström, i vilken den förre befinner sig, varför den senare skär och således träffas av den luftström, i vilken den rör sig, om denna har en annan rörelse än den övre luftströmmen. Vidare anses cirrus — eller fjädermolnen — uppkomma däri genom, att exempelvis en varm, fuktig luftström passerar över en kall, tor-

rare, varvid i beröringsytan mellan båda dels större vågor, dels krusningar å dessa uppstå, vilka under vissa temperatur- och fuktighetsförhållanden kunna bliva synliga, i det att det övre lagrets fuktighet genom beröringen i vågdalarna med det kallare luftlagret kondenseras och ger dessa den mjölkvita färgen, under det att vågkammarna beröras av den varmare luftströmmen, så att ingen kondensation i dem förekommer, varför de bliva genomskinliga och från vår synpunkt få atmosfärens blåa färg. Även krusningen på de större vågornas yta kan man iakttaga såsom blått insprängt i vågdalarnas vita och vitt i kammarnas blåa färg.

Tänka vi oss nu två luftlager för enkelhetens skull röra sig i rakt motsatta riktningar, samt att en flygmaskin, gående rakt emot den övre luftströmmen, genom glidflykt skulle sänka sig till en lägre nivå, så inkommer den, sedan den passerat gränsen mellan båda luftlagren, i det undre luftlagret, som rör sig huvudsakligen i samma riktning och — låtom oss antaga det — även med samma hastighet som flygmaskinen. Luften förlorar därvid sin bärande förmåga, emedan relativhastigheten i horisontell led mellan maskinen och luften är nära noll, och maskinen faller genom luftlagret nästan som en snedt nedåt kastad sten utan att kunna styras eller bringas i jämvikt, om denna skulle hava rubbats i fallet. Maskinen har med andra ord råkat i ett lufthål och kommer ej ur detta, förrän den träffar på ett annat luftlager med en för flygmaskinen lämpligare hastighet och riktning, där flygaren åter kan bliva herre över densamma. Genom att sätta motorn i gång, så fort han märker att han börjar falla, kan flygaren också få maskinen i viss mån manöverfärdig.

Förutsättningen att maskinen skulle inkomma i en luftström med samma riktning och hastighet som dess egen, torde väl sällan eller aldrig föreligga, men råkar maskinen under glidflykt in i en luftström med mindre hastighet men samma riktning, sänker den sig i alla fall och kan knappast återtaga horisontalflykt förr än den påträffar ett nytt luftlager med ingen eller en annan rörelse, eller också, om motorn sättes igång, det lyckas flygaren att göra en vändning och därigenom befria sig från medvinden. I allmänhet torde det undre luftlagret, i vilket flygmaskinen vid sin glidflykt dyker ned, hava en rörelse, vars riktning avviker från maskinens, varvid dennas jämvikt störes, så att flygaren måste ingripa.

Då liknande regelbundna horisontella luftströmmar vanligen förekomma på större höjd över jordytan, äro de i allmänhet ej farliga för en erfaren flygare. Vid omslag i väderleken, särskilt vid övergång från vackert till fult väder, uppträda de emellertid på mindre höjd och äro då farligare,

varför vid flygning, då omslag kan väntas, större försiktighet bör iakttagas och glidflykt helst undvikas.

Även vågorna mellan två luftlager kunna åstadkomma rullning och rubbning i jämvikten med ty åtföljande mindre fall, men någon vidare oro kunna de ej vålla en van flygare.

Lufthål vid blåsväder.

Redan vid svaga vindar äro de förut avhandlade på grund av markens olika uppvärmning uppkommande vertikala luftströmmarna utan betydelse, dels emedan vinden avkyler de av solstrålarna uppvärmda fläckarna på marken, och dels emedan den ger en mera horisontell riktning åt de starkt försvagade vertikala strömningar, som ändå kunna uppstå genom solens inverkan. Vid svag vind och någorlunda jämn terräng behöver man således aldrig befara att påträffa lufthål.

Då en luftström rör sig framåt över ojämn mark, uppkomma en mängd virvlar på läsidan av de föremål, som stå i vägen för densamma, och om dessa hava någon betydligare utsträckning, såsom byggnader, kullar, berg och skogsdungar m. m., kunna strömningar uppstå, som böra uppmärksammas och undvikas av flygare, enär en oregelbundenhet av nästan vad slag som helst i den luftström, i vilken flygmaskinen rör sig, är förenad med en frivillig eller ofrivillig sänkning av denna, vilken, när den såsom här är fallet sker nära marken, kan bliva farlig nog. Ju högre man kommer upp över jordytan desto stadigare, d. v. s. mera oberoende av hindren å marken, blir vinden och desto större plats har flygaren under sig att återvinna fart och jämvikt vid en eventuell rubbning av dessa, varför låg flykt aldrig bör förekomma annat än vid orienteringsflygning eller sökande efter lämplig landningsplats.

Stryker vinden tvärsöver en ås eller bergskam, uppkommer på läsidan av denna en luftförtunning, som suger ned luften, så att en virvel där bildas, vars axel är horisontell och parallell med åsen. Dess övre del rör sig i vindriktningen och dess undre del närmare marken i motsatt riktning. I den delen av virveln, som är längst från åsen, rör sig luften nedåt — där är med andra ord ett lufthål av farligaste slag — och om en flygmaskin kommer in i en sådan virvel, har den inte stor utsikt att undgå ett nedstörtande. På vindsidan av åsen rör luftströmmen sig uppåt mot åsens kam, varför flygning längs åsen och landning mot vinden på denna sida

kan ske utan fara, förutsatt att slutningen är jämn. Är den ojämn, kunna virvlar naturligtvis även där uppkomma och göra landningen farlig. På läsidan bör landningen aldrig företagas, och skall man flyga över en höjd eller ett berglandskap, bör man hålla sig på stor höjd och såvidt möjligt undvika landning eller låg flykt för att ej råka in i där befintliga lufthål.

Även virvlar med mera vertikal axel förekomma såsom exempelvis vid brant uppstigande bergtoppar, kring vilka vinden sveper, men dessa förekomma mera sällan och äro alltid lätta att undvika, varför de ej gärna kunna bliva farliga för en ansvarskännande flygare.

Vid flykt över skog har man även skäl att flyga högt. Då vinden blåser över en skog, hindras den undre delen av luftströmmen, som berör trädtopparna, i sin rörelse av dessa, och virvelrörelser uppstå, som inverka störande på luftströmmen och minska luftens bärkraft, så att skogen liksom suger ned en flygmaskin, som rör sig på ringa höjd över densamma. Där skogen börjar och slutar, kan man även vid olika vindar vänta att finna lufthål liknande dem, som uppstå på läsidan av bergskammar.

En ytterligare anledning finnes att flyga högt över vidsträckta skogar. Skulle motorstopp inträffa eller flygaren av annat skäl bliva tvungen att plötsligt landa, har han, om han befinner sig på stor höjd, en vidsträcktare överblick över trakten och kan genom glidflykt uppnå en mera avlägsen men måhända lämpligare landningsplats, än om han hade skogen tätt under sig och därigenom vore berövad varje val. Att hamna i trädtopparna med en ballong är ingalunda det värsta som kan hända en ballongförare, men att gå ned i storskog med en flygmaskin är i de flesta fall liktydigt med åtminstone flygmaskinens men ofta även besättningens förolyckande.

Vid oväder kunna naturligtvis virvlar och luftströmmar förekomma, mot vilka en flygare står nästan maktlös, men under världskriget har det visat sig möjligt för flygare att giva sig upp och klara sig i alla väder utom givetvis dimma, som ju gör flygning för krigsändamål värdelös.

Slutord.

Det är ett väl känt förhållande, att varje trafikmedel har sina svaga punkter. Så är vid järnvägsstationerna, särskilt de större, med sina många växlar, möjligheten av felväxling alltid för handen och därmed också faran för sammanstötningar såväl inne på stationerna som ute på linjen, under det att — av annat skäl än felväxling — faran ute på linjen är jämförel-

sevis liten. För en ångare börjar i stort sett faran, först när den närmar sig land, under det att den ute på fritt vatten kan röra sig med största säkerhet, såvida den ej råkar in bland isberg eller i drivis, då faran tydligen kan bliva stor nog.

För flygmaskinen är faran ytterst liten vid flykt på stor höjd, och den kan knappast sägas börja, förrän maskinen närmar sig jordytan, d. v. s. vid landning. Om landningsfält finnas på lämpliga avstånd, kan vid klar sikt landningen ske direkt från större höjd utan fara, och vid dimma eller disig väderlek kan orienteringsflygning på mindre höjd vanligen ske utan fara, emedan därvid i allmänhet varken vind eller lufthål pläga förekomma.

Under sådana förhållanden kan den tanken, att flygmaskinen, när den en gång kommer att tagas i anspråk för den allmänna trafiken, blir ett lika säkert fortkomstmedel som våra nu allmänt använda, ingalunda anses alltför djärv.

OM SINGULÄRA STÄLLEN TILL DIFFERENTIALEKVATIONER AV FÖRSTA ORDNINGEN

AV

J. MALMQUIST.

1. Ett av de viktigaste problem, då det gäller att studera de analytiska funktioner, som satisfiera en given differentialekvation, är att undersöka dessa funktioners singulära ställen. Jag skall här inskränka mig till att studera en differentialekvation av första ordningen av formen

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

där P, Q först antagas vara hela rationella funktioner av x, y .

PAINLEVÉ har visat, att, utom ett ändligt antal fixa ställen, kan en godtycklig integral endast ha algebraiska singulariteter, d. v. s. singulariteter av samma natur som singulariteterna till algebraiska funktioner. Dessa singulariteter äro rörliga, i det att på sin höjd ett visst ändligt antal integraler kan ha en sådan singularitet i en given punkt. De nyssnämnda fixa ställena kunna däremot vara singulära ställen till samtliga integraler, och de äro av betydligt mera komplicerad natur än de rörliga singulariteterna. Det är undersökningen av dessa fixa singulariteter, som jag i denna uppsats skall syssla med.

De kunna indelas i två grupper. Ena gruppen innehåller sådana ställen ξ , att ekvationerna $P(\xi, y) = 0, Q(\xi, y) = 0$ ha en gemensam rot och att $Q(\xi, y)$ ej är identiskt noll, andra gruppen innehåller sådana ställen ξ , att $Q(\xi, y)$ är identiskt noll. Om en integral har ett ställe ξ av den första gruppen till icke algebraisk singularitet, måste den för $x = \xi$ bli lika med en gemensam rot η till ekvationerna $P(\xi, y) = 0, Q(\xi, y) = 0$ eller ock

lika med ∞ , vilket senare fall återföres till det förra genom substitutionen $y = \frac{1}{z}$. Om stället ξ hör till den andra gruppen, kunna integraler bli obestämda, då x närmar sig ξ . I detta fall är det emellertid naturligt att först söka att studera integralgrenar, som närma sig bestämda värden, då $x \rightarrow \xi$. Om η är ett sådant ändligt gränsvärde, måste $P(\xi, \eta) = 0$. I varje fall kommer man således till problemet att studera en integralgren under förutsättning att den, då $x \rightarrow \xi$, närmar sig ett värde η sådant att $P(\xi, \eta) = 0$, $Q(\xi, \eta) = 0$. Man kan antaga att $\xi = \eta = 0$.

Det nyss nämnda problemet har varit föremål för en stor mängd arbeten. Man har först inriktat sig på att studera det fall, då punkten $(0, 0)$ är en enkel skärningspunkt mellan kurvorna $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$. Detta fall har studerats av BRIOT och BOUQUET, POINCARÉ, PICARD, BENDIXSON, HORN, LINDELÖF, DULAC.¹ Det allmänna fallet, då punkten $(0, 0)$ är skärningspunkt av godtycklig ordning, har studerats av BRIOT och BOUQUET, AUTONNE, HORN samt särskilt DULAC.² Dessa undersökningar hänföra sig till det allmänna fallet att P, Q äro konvergerande potensserier av x, y .

På sista tiden har BOUTROUX³ anställt undersökningar över de fixa singulariteterna från en mycket allännare synpunkt. Han inskränker sig ej till att studera enskilda integralgrenar, som för $x = 0$ förhålla sig på något särskilt enkelt sätt, utan han vill göra klart, hur en integral förhåller sig, då x rör sig på godtyckligt sätt i en viss omgivning av $x = 0$.

¹ BRIOT o. BOUQUET, Journal de l'École Polytechnique, XXI, 1856.

POINCARÉ, Journal de l'École Polytechnique, XXVIII, 1878; Thèse, 1879.

PICARD, Traité d'Analyse, t. III, p. 17, p. 30.

BENDIXSON, Öfversigt af Kungl. Vetenskapsakademiens förhandlingar, 1894, 1895.

HORN, Crelles journal, 116, 117.

LINDELÖF, Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, 22.

DULAC, Thèse, 1903.

² BRIOT o. BOUQUET; loc. cit.

AUTONNE, Journal de l'École Polytechnique, 1897.

HORN, Crelles journal, 93, 119.

DULAC, Thèse, 1903; Annales de l'Université de Grenoble, XVII (1905); Bulletin des Sciences Math., 2:e série, t. XXXII (1908); Journal de Math., 6:e série, t. 2, vol. 61 (1906); Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XXVII (1909); Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 3:e série, t. I (1909), t. II (1910); Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 39.

³ Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, Gauthier-Villars, 1908; Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XXIX (1910); Journal de Mathématiques, 6:e série, t. VI (1910).

Jag skall i denna uppsats dels komplettera undersökningarna av enskilda grenar, dels visa, hur det av Boutroux behandlade problemet kan fullt allmänt lösas.

2. Undersökningen kan genomföras för det allmänna fallet, att P , Q äro konvergerande potensserier av x , y , som försvinna för $x = y = 0$. Vi skriva

$$P = \sum A_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \quad Q = \sum A'_{\mu'\nu'} x^{\mu'} y^{\nu'},$$

och vi erinra först om en undersökning av BRIOT och BOUQUET. Dessa författare föresatte sig att studera en integralgren y , som för $x = 0$ förhåller sig som ett uttryck cx^α , d. v. s. som kan skrivas $y = (c + \varepsilon)x^\alpha$, varvid

$\varepsilon \rightarrow 0$ då x går mot noll på ett lämpligt sätt.

I analogi med det av PUISEUX vid studiet av singulara ställen till algebraiska funktioner använda förfaringssättet utprickas i ett plan punkter, vilkas koordinater äro $\nu, \mu + 1$ eller $\nu' + 1, \mu'$, alltså en punkt för varje term i serierna P, Q . Sedan konstrueras en konvex polygon, vilkens spetsar utgöras av sådana punkter och som uppfyller villkoret att inga sådana punkter ligga under polygonen. (Fig. 1.)

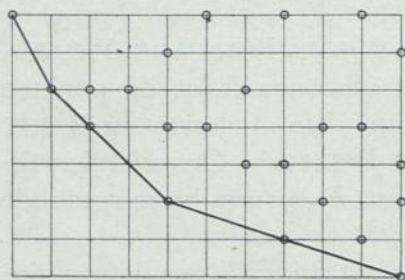


FIG. 1.

Om $-\alpha$ är vinkelkoefficienten för en sida i polygonen ej parallell med någon av koordinataxlarna, om c är rot till ekvationen

$$(2) \quad \alpha z \sum A'_{\mu'\nu'} z^{\nu'} = \sum A_{\mu\nu} z^\nu,$$

där summationerna äro utsträckta över de punkter, som ligga på ifrågasvarande sida i polygonen, och om man sätter $\alpha = \frac{m}{n}$ samt

$$(3) \quad x = \xi^n, \quad y = \xi^m(c + \eta),$$

får man, under förutsättning att ekvationen (2) ej reducerar sig till en identitet, mellan ξ och η en differentialekvation av samma form som den givna. Om η är en integralgren till den transformerade ekvationen så beskaffad att $\eta \rightarrow 0$ då $\xi \rightarrow 0$, ge ekvationerna (3) en integralgren till ekvationen (1), vilken förhåller sig som cx^α .

Om ekvationen (2) reducerar sig till en identitet, kan det inträffa, att det ej finns något värde c så beskaffad, att ekvationerna (3) ge en differentialekvation av samma form som den givna. Men de möjliga värdena

av c måste satisfiera ekvationen $\Sigma A'_{\mu\nu} z^\nu = 0$, som i föreliggande fall ej reducerar sig till en identitet.

Man kan även tänka sig, att ekvationen (2) är orimlig. Då finns naturligtvis ej något värde av c .

Ett annat undantagsfall är, att den Briot-Bouquetska polygonen reducerar sig till tvenne med koordinataxlarna parallella linjer. I detta fall finns intet värde av α .

Om man bortser från de undantagsfall, då en substitution (3) ej existerar, får man ett ändligt antal transformerade differentialekvationer. På var och en av dessa kan man utföra samma resonemang, och på detta sätt kan man fortsätta och erhålla en följd av differentialekvationer, som alla ha samma form som den givna.

Det är lämpligt att ordna dessa ekvationer i en tablå \mathfrak{T} på så sätt, att en godtycklig ekvation E närmast efterföljes av de ekvationer E_1, \dots, E_λ , som svara mot den sida i den till E hörande Briot-Bouquetska polygonen, som ger det minsta värdet av α :

$$\frac{E}{E_1, \dots, E_\lambda}$$

Det är uppenbart, att de ekvationer, som svara mot övriga sidor i polygonen, komma att uppträda längre ned i tablån \mathfrak{T} .

Man kan visa, att denna tablå innehåller ett ändligt antal ekvationer, om man kommer överens att ej göra någon substitution (3), då man träffar på en ekvation, som hör till någon av de tre första av följande typer:

- I $x \frac{dy}{dx} = ay + \dots$
- II $x^{k+1} \frac{dy}{dx} = ay + \dots$
- III $x \frac{dy}{dx} = ay^p + \dots \quad p > 1$
- IV $\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{P}(x, y)}{y^p + \dots}$
- V $x \frac{dy}{dx} = \frac{ay^p + \dots}{y^q + \dots}$
- VI $x^{k+1} \frac{dy}{dx} = ay^p + \dots \quad p > 1$
- VII $x^{k+1} \frac{dy}{dx} = \frac{ay^p + \dots}{y^q + \dots}$

där de ej utskrivna termerna innehålla x eller högre digniteter av y , och a är en från noll skild konstant.

3. Vi skola nu först visa hur man, för var och en av ekvationerna i tablån \mathfrak{D} , kan definiera vissa principalintegraler, som äro av särskilt enkel beskaffenhet. Därefter skola vi definiera vissa övergångsintegraler, genom vilka man måste passera för att komma från en principalintegral hörande till en ekvation i tablån \mathfrak{D} till en principalintegral svarande mot en ekvation, som närmast efterföljer eller närmast föregår den förra.

För att definiera principalintegraler gå vi igenom ekvationer av typerna I, II, ... VII och definiera integraler, som alla ha den egenskapen, att $|y|$ ligger under en viss gräns.

För en ekvation av typen I visade Briot och Bouquet (loc. cit.), att det finns en konvergerande potensserie av x , som satisfierar densamma, i alla fall, utom möjligen då a är ett positivt helt tal. Om man bortser från det sistnämnda fallet samt det fall, då a är ett reellt negativt tal, finns, enligt vad Poincaré och Picard (loc. cit.) visat, en potensserie

$$(4) \quad y = hx + Cx^a + \dots$$

som fortskrider efter potenser av x , Cx^a , som har ett konvergensområde och som satisfierar differentialekvationen för varje värde av C .

I det fall, att a är ett positivt helt tal, finns, enligt undersökningar av Bendixson, Lindelöf, Horn, Dulac (se not 1), en potensserie

$$(5) \quad y = hx + (C + b \log x) x^a + \dots$$

som fortskrider efter potenser av x , $(C + b \log x) x^a$, som har ett konvergensområde, och som satisfierar differentialekvationen för varje värde av C . Konstanten b är en hel rationell funktion av ett ändligt antal av de i differentialekvationen ingående koefficienterna. Om $b = 0$ får serien (5) formen (4).

Vi välja serierna (4), (5) som definition av principalintegralerna i de nu betraktade fallen.

Det är tydligt att C kan bestämmas, så att dessa serier framställa integralen svarande mot begynnelsevärden x_0, y_0 , vilkas absoluta belopp äro mindre än vissa tal r, r' .

Man kan låta x röra sig, så att dessa serier uppfylla olikheten $|y| \leq r'$. Det område, som x skall beskriva, begränsas av cirkeln $|x| = r$ och av en viss kurva $|y| = r'$. Man inser lätt, att denna kurva ligger, för en serie (4), mellan tvenne spiraler $|Cx^a| = r_1, |Cx^a| = r_2$ och, för en serie

(5), mellan tvenne spiraler $|(C + b \log x)x^a| = r_1$, $|(C + b \log x)x^a| = r_2$. Men det är att märka, att om i serien (4) a är ett reellt positivt tal och $|C|$ är tillräckligt liten, kan det inträffa att $|y| < r'$ gäller för alla x för vilka $|x| \leq r$, och då existerar ej kurvan $|y| = r'$.

Om man inför $u = \log x$ som oberoende variabel, få existensområdena för principalintegralerna för serien (4) den i fig. 2 och för serien (5) den i fig. 3 visade formen.

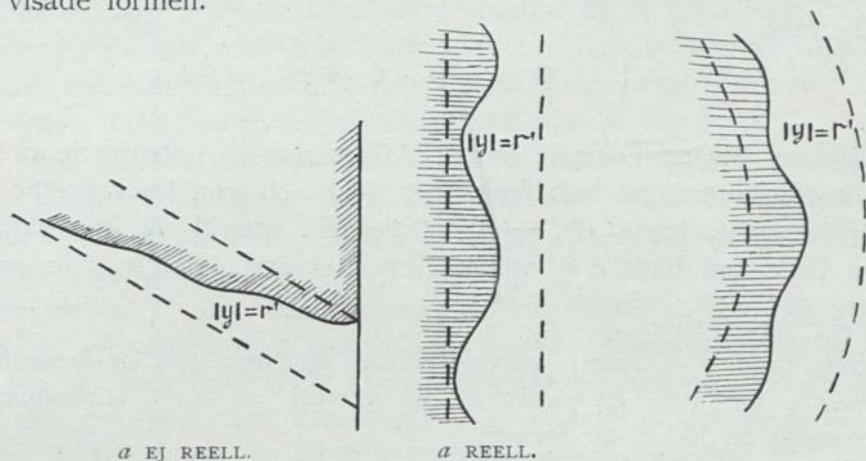


FIG. 2.

FIG. 3.

4. Vi studera det fall att a är ett reellt negativt tal. En serie av formen (4) existerar formellt, då a är irrationell, men ett exempel av Dulac visar, att det kan inträffa att serien ej har något konvergensområde. Då a är rationellt tal, existerar serien (4) formellt, endast om en viss oändlig följd av villkor äro uppfyllda. Om dessa villkor äro satisfierade, har serien ett konvergensområde, såsom Bendixson och Dulac (se not 1) visat.

Om serien (4) existerar och har ett konvergensområde, begagna vi den som definition av principalintegraler. En sådan integral existerar inom ett område begränsat av en cirkel $|x| = r$ och en innanför densamma belägen kurva $|y| = r'$, som förlöper mellan tvenne cirklar $|Cx^a| = r_1$, $|Cx^a| = r_2$.

Antag nu att en serie (4) ej existerar. Den Briot-Bouquetska potensserien existerar dock alltid. Om denna betecknas med $\mathfrak{P}(x)$ och man sätter $y = \mathfrak{P}(x) + z$, kan man lätt visa, att integralen svarande mot begynnelsevärden x_0, z_0 , vilkas absoluta belopp äro mindre än vissa tal r, r' , är regulär inom ett område begränsat av cirkeln $|x| = r$ och en viss kurva $|z| = r'$. En sådan gren benämnes i detta fall principalintegral. För att

studera existensområdets form kan man studera kurvan $|z| = r'$. Sätter man $z = z_0 e^{it}$, erhålles denna kurva, om t beskriver den reella axeln. För z som funktion av x har man en differentialekvation av formen

$$x \frac{dz}{dx} = z(a + \mathfrak{F}(x, z)), \quad \mathfrak{F}(0, 0) = 0.$$

Om man här sätter $x = x_0 v$, $z = z_0 e^{it}$ och betraktar t som oberoende variabel, får man

$$\frac{dv}{dt} = v \left(\frac{i}{a} + \mathfrak{F}_1(x_0 v, z_0 e^{it}) \right), \quad \mathfrak{F}_1(0, 0) = 0.$$

Enligt en sats av Poincaré kan v skrivas som en potensserie av x_0, z_0 , vilkens koefficienter äro hela funktioner av t och som konvergerar likformigt för $|x_0| \leq r, |z_0| \leq r', -R < t < +R$, varvid R kan väljas hur stor som helst, om blott r, r' väljas tillräckligt små. För $x_0 = z_0 = 0$ reducerar sig serien till $e^{\frac{it}{a}}$.

Sätter man $t = 2m\pi$, varvid m är ett helt tal så beskaffat att $R > |2m\pi|$, får man en punkt x_m på kurvan $|z| = r'$, förbunden med x_0, z_0 genom en likhet av formen

$$(6) \quad x_m = e^{\frac{2m\pi i}{a}} x_0 + x_0^2 \mathfrak{F}_m(x_0, z_0).$$

Om $|x_m| < r$, kan man i högra membrum ersätta x_0 med x_m och får då en ny punkt x_{2m} på kurvan $|z| = r'$, och på detta sätt kan man fortsätta så länge som $|x_m|, |x_{2m}|, \dots$ äro $\leq r$.

I det fall att a är ett rationellt tal $-\frac{m}{n}$ och $\mathfrak{F}_m(x_0, z_0)$ ej är noll,

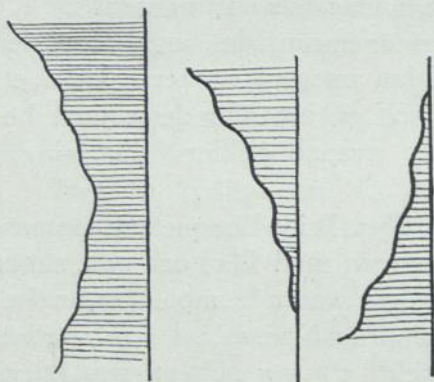


FIG. 4.

kan man visa, att den ena av serierna $|x_m|, |x_{2m}|, \dots, |x_{-m}|, |x_{-2m}|, \dots$ bildar en ständigt avtagande följd av tal, som närma sig 0, och att detsamma i allmänhet gäller även för den andra serien från och med ett visst av talen. Kurvan $|z| = r'$ får i huvudsak samma form som kurvan $|y| = r'$ hade för serien (5). För vissa integraler kan kurvan $|z| = r'$ skära cirkeln $|x| = r$. Inför man $u = \log x$, får existensområdet för en principalintegral den i fig. 4 visade formen.

Vidare kan man visa, att $\mathfrak{Y}_m(x_0, z_0) \equiv 0$ är det nödvändiga och tillräckliga villkoret, för att serien (4) skall existera. I det fall, som vi nu studera, är således serien $\mathfrak{Y}_m(x_0, z_0)$ ej identiskt noll. Man kan visa, att den kan skrivas under formen $x_0^u z_0^v (c_0 + \dots)$, $c_0 \neq 0$, och att således $\mathfrak{Y}_m(x_0, z_0) \neq 0$ för alla från noll skilda värden av x_0, z_0 , vilkas absoluta belopp äro tillräckligt små. För motsvarande principalintegraler gäller således, att deras existensområden alltid sträcka sig in till $x = 0$.

För det fall att a är irrationellt tal, har jag ej lyckats genomföra motsvarande undersökning rörande existensområdets form; det är ännu en öppen fråga, huruvida existensområdet kan sträcka sig in till $x = 0$.

I varje fall, då existensområdet för en principalintegral sträcker sig in till $x = 0$, gäller slutligen, såsom man lätt kan visa, att integralen i fråga går mot 0, då x går mot 0 längs en sådan väg, att u avlägsnar sig oändligt långt från kurvan $|z| = r'$.

Frågan att i det fall, då serien (4) ej existerar, finna en serie, som framställer principalintegralerna i hela deras existensområden, är ännu ej löst. De av Bendixson och Dulac härledda serierna ge endast delar av principalintegralerna, det kan inträffa, att man måste använda en oändlig följd av sådana serier för att framställa en principalintegral helt och hållet.

5. Vi övergå till att studera en ekvation av typen II. Det finns alltid en potensserie

$$(7) \quad c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

som formellt satisfierar differentialekvationen. Den har i allmänhet ej något konvergensområde, men den har dock stor betydelse vid studiet av integralernas natur. Den ger asymptotisk framställning av integralerna, i det att för en godtycklig integral y gäller, att om man sätter

$$y = c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1} + (c_n + y_n) x^n,$$

går y_n mot 0, då $x \rightarrow 0$ i en sådan riktning att $e^{-ax^{-k}} \rightarrow 0$. För en Riccatis ekvation, d. v. s. en ekvation av formen

$$x^k \frac{dy}{dx} = \mathfrak{Y}_0(x) y^2 + \mathfrak{Y}_1(x) y + \mathfrak{Y}_2(x),$$

följer detta av Poincarés undersökningar över de irregulära integralerna till linjära differentialekvationer. För den allmänna ekvationen II har den uttalade satsen bevisats av Horn (Crelle, 119). Denne författare har även visat, att det finns en och endast en integral, som framställes asymptotiskt genom serien (7), då $x \rightarrow 0$ i en sådan riktning att $e^{-ax^{-k}} \rightarrow \infty$.

Genom en obetydlig modifikation av Horns metod kan man erhålla ett bättre resultat. Om man betecknar med $T_1, T_3, \dots, T_{2k-1}$ de vinklar i vilka $e^{-ax^{-k}} \rightarrow 0$ och med T_2, \dots, T_{2k} de mellanliggande vinklarna i vilka $e^{-ax^{-k}} \rightarrow \infty$, kan man visa att den asymptotiska utvecklingen gäller likformigt inom en vinkel, som ligger helt inom T_{2v-2} , d. v. s. att om y är en given integral och man väljer ett godtyckligt litet tal ε och ett godtyckligt stort tal n samt definierar y_n såsom nyss gjordes, så kan man bestämma ett tal r , så att olikheten $|y_n| < \varepsilon$ gäller för alla x , för vilka $|x| < r$ och som tillhöra nämnda vinkel. Vidare kan man visa, att för den integral som går mot 0 i vinkeln T_{2v} gäller den asymptotiska utvecklingen likformigt i en vinkel, som ligger helt inom den vinkel $T_{2v-1} + T_{2v} + T_{2v+1}$, som utgör sammanfattningen av $T_{2v-1}, T_{2v}, T_{2v+1}$.

För det fall att serien (7) har ett konvergensområde har Horn härlett en serieutveckling innehållande en arbiträr konstant. Motsvarande serieutveckling existerar även i det allmänna fallet. Om man med $\varphi_0^{(v)}(x)$ betecknar den integral, som går mot 0 då $x \rightarrow 0$ i vinkeln T_{2v} , kan serieutvecklingen skrivas

$$(8) \quad y = \varphi_0^{(v)}(x) + \varphi_{1i}^{(v)}(x) Cx^\beta e^{\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)} + \varphi_{2i}^{(v)}(x) \left[Cx^\beta e^{\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)} \right]^2 + \dots \quad (i = 1, 2)$$

varvid koefficienterna $\varphi_{\mu i}^{(v)}(x)$ successivt bestämmas genom linjära differentialekvationer, som lösas så att integrationen går in till $x = 0$ i vinkeln T_{2v-1} för $i = 1$ och i vinkeln T_{2v+1} för $i = 2$, $g\left(\frac{1}{x}\right)$ är en hel rationell funktion av $\frac{1}{x}$ av gradtalet k börjande med termen $-\frac{a}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^k$, samt β är en konstant. Funktionerna $\varphi_{\mu i}^{(v)}(x)$ äro regulära, om $|x|$ är mindre än ett visst tal, som endast beror av koefficienterna i differentialekvationen, och om x tillhör en vinkel, som ligger innanför vinkeln $T_{2v-1} + T_{2v}$ för $i = 1$ och innanför $T_{2v} + T_{2v+1}$ för $i = 2$. Serien är likformigt konvergent om $|x|, \left| Cx^\beta e^{\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)} \right|$ äro mindre än vissa tal och x tillhör en vinkel inom $T_{2v-1} + T_{2v}$ ($i = 1$) eller $T_{2v} + T_{2v+1}$ ($i = 2$). Konvergensområdet begränsas således av två radier, en cirkel $|x| = r$ och en kurva $\left| Cx^\beta e^{\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)} \right| = r_1$, eller endast av vissa av dessa linjer (se fig. 5). Kurvan $\left| Cx^\beta e^{\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)} \right| = r_1$ kan ersättas med en kurva $|y| = r'$, ty man inser lätt att en sådan kurva är belägen mellan tvenne kurvor

$$\left| Cx^\beta e^{\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)} \right| = r_1, \quad \left| Cx^\beta e^{\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)} \right| = r_2.$$

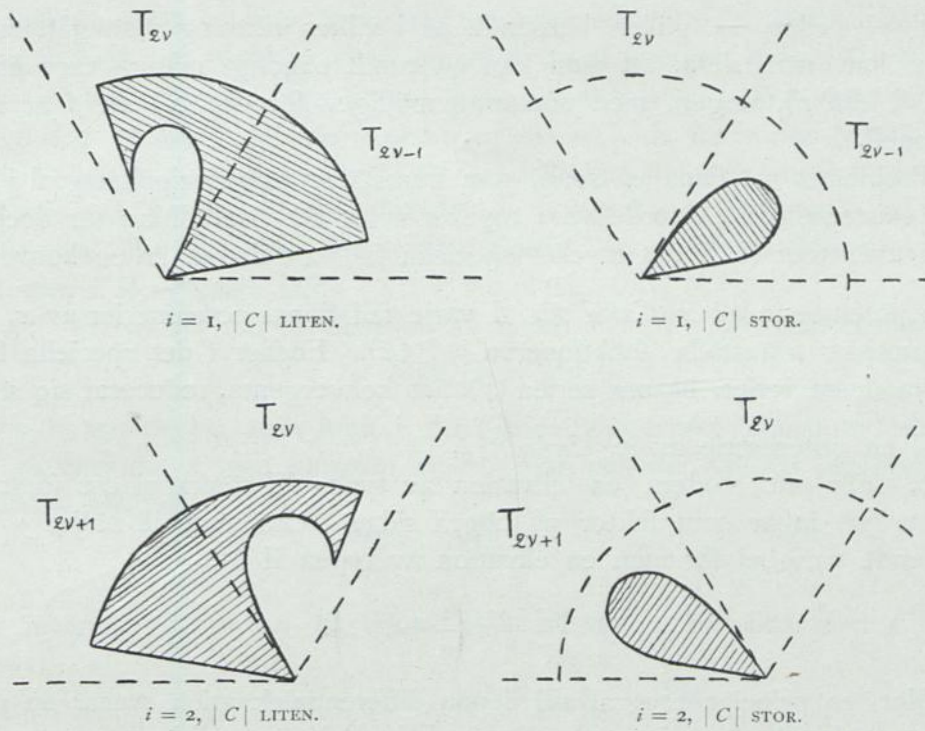


FIG. 5.

En serie (8) kan man fortsätta över radierna genom serier av samma form för andra värden av ν eller i . På detta sätt kan man successivt definiera en integral, som framställes genom en följd av serier (8), och vilkens existensområde begränsas antingen av en enda kurva $|y| = r'$ eller av cirkeln $|x| = r$ och ett ändligt eller oändligt antal kurvor $|y| = r'$. En sådan gren benämna vi principalintegral.

Det kan vara av intresse att undersöka, när man kan gå rundt oändligt många varv kring $x = 0$ utan att träffa på en kurva $|y| = r'$, som skär cirkeln $|x| = r$. I det allmänna fallet, då serien (7) ej har något konvergensområde, ha vi ej någon metod att utföra en sådan undersökning. Om serien (7) har ett konvergensområde, äro integralerna $\varphi_0^{(\nu)}(x)$ lika med denna serie, och då kan man gå rundt åtminstone ett varv i vardera riktningen, om i utgångsserien $|C|$ är tillräckligt liten. Det värde C_1 av konstanten, som skall användas efter en sådan promenad, sammanhänger med det ursprungliga värdet genom en likhet av formen

$$C_1 = e^{\pm 2\pi i \beta} C + C^2 \psi(C),$$

varvid + eller - gäller beroende på i vilken riktning man gått rundt. Härav kan man sluta, att man kan gå rundt oändligt många varv åtminstone i ena riktningen, med undantag möjligen för det fall att β är reell, irrationell.

Problemet att finna en serie, som framställer en principalintegral i hela dess existensområde, torde vara mycket svårt att lösa. Man får dock en sådan av serien (8) i det mycket speciella fall, att denna är en konvergerande potensserie av x , $Cx^\beta e^{\xi(\frac{1}{x})}$. I varje fall finnas potensserier av x , som asymptotiskt framställa funktionerna $\varphi_{\mu i}^{(\nu)}(x)$. Endast i det speciella fallet att alla dessa serier, liksom serien (7), äro konvergenta, reducerar sig serien (8) till en potensserie av x , $Cx^\beta e^{\xi(\frac{1}{x})}$.

6. För att studera en ekvation av typen III tänka vi oss först det fall att y^β ingår som faktor på högra sidan. Om man då väljer y som oberoende variabel får man en ekvation av typen II

$$(9) \quad y^\beta \frac{dx}{dy} = x \left(\frac{1}{a} + \dots \right).$$

Mot en principalintegral till denna differentialekvation svarar en principalintegral till den givna ekvationen III. Existensområdet för en principalintegral till ekvationen III begränsas således antingen av en cirkel $|x| = r$ eller av en kurva $|y| = r$ och cirkeln $|x| = r$ ett ändligt eller oändligt antal gånger, för varje gång genomlupen oändligt många gånger åtminstone i ena riktningen. I u -planet ($x = e^u$) har kurvan $|y| = r'$ den i fig. 6 visade formen och existensområdet är en Riemannsk yta utanför denna kurva och begränsad av kurvan $|y| = r'$ samt av räta linjer $|x| = r$ i varje blad.

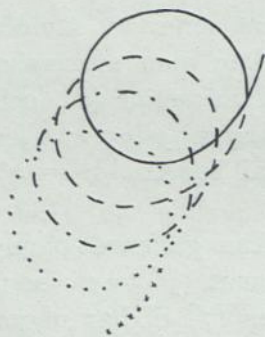


FIG. 6.

Om $|x|$, $|y|$ äro tillräckligt små och $x \neq 0$, är $\frac{dx}{dy} \neq 0$, alltså har y som funktion av x ingen förgreningspunkt utom $x = 0$.

I det allmänna fallet, då y^β ej ingår som faktor på högra sidan av ekvationen III, välja vi som oberoende variabel y och som beroende variabel den genom likheten $x = y^\beta v$ definierade variabeln v . Mellan v och y består en differentialekvation av typen II, som satisfieras av $v = 0$. Mot en principalintegral till denna ekvation svarar en integral till ekvationen

III, vilkens existensområde begränsas av en kurva $|v| = r''$ eller av en kurva $|y| = r'$ och ett ändligt eller oändligt antal kurvor $|v| = r''$. Kurvan $|y| = r'$ har samma form som i förra fallet och en kurva $|v| = r''$ har i huvudsak samma form som kurvan $|y| = r'$ hade för serien (5). Genom de principer, som vi skola använda för definition av övergångsintegralerna, kan man sedan fortsätta nyss definierade integral över kurvorna $|v| = r''$, så att man får en principalintegral definierad inom ett område av samma form som i föregående fall.

7. Vi övergå till en ekvation av typen IV. Vi göra substitutionen

$$(10) \quad y = \eta^m, \quad x = \eta^n v,$$

där m, n äro de tal, som ingå i den Briot-Bouquetska substitutionen (3), och vi studera η som funktion av v . Man erhåller lätt en differentialekvation av formen

$$(11) \quad \frac{d\eta}{dv} = \eta \mathfrak{P}(v, \eta).$$

Den integral till denna ekvation, som för $v = 0$ blir lika med $C^{\frac{1}{m}}$, kan skrivas

$$\eta = C^{\frac{1}{m}} \mathfrak{P}^{(1)}\left(v, C^{\frac{1}{m}}\right), \quad \mathfrak{P}^{(1)}\left(0, C^{\frac{1}{m}}\right) = 1,$$

och man erhåller således

$$(12) \quad \begin{cases} x = C^{\frac{n}{m}} v \mathfrak{P}_1\left(v, C^{\frac{1}{m}}\right) \\ y = C \mathfrak{P}_2\left(v, C^{\frac{1}{m}}\right) \end{cases}$$

varvid $\mathfrak{P}_1\left(0, C^{\frac{1}{m}}\right), \mathfrak{P}_2\left(0, C^{\frac{1}{m}}\right)$ äro lika med 1. Härav följer vidare

$$(13) \quad y = C \mathfrak{P}_3\left(x C^{-\frac{n}{m}}, C^{\frac{1}{m}}\right), \quad \mathfrak{P}_3\left(0, C^{\frac{1}{m}}\right) = 1.$$

Man kan bestämma C , så att ekvationerna (12) eller ekvationen (13) ge den integral till ekvationen IV, som svarar mot begynnelsevärden x_0, y_0 , vilkas absoluta belopp äro tillräckligt små och uppfylla villkoret att $|x_0| |y_0|^{-\frac{n}{m}}$ är tillräckligt liten. Denna integral är en principalintegral.

8. För en ekvation av typen V göra vi även en substitution av formen (10), så snart talen m, n existera, och vi erhålla då en differentialekvation som kan skrivas

$$\eta \frac{dv}{d\eta} = -nv + m\eta^m v \frac{\eta^{mq} + \dots}{a\eta^{mp} + \dots}.$$

Om nu först $p = q + 1$ kan denna ekvation skrivas

$$(14) \quad \eta \frac{dv}{d\eta} = v \left(-n + \frac{m}{a} + \mathfrak{F}(v, \eta) \right), \quad \mathfrak{F}(0, 0) = 0.$$

Den är av typen I. Om $-n + \frac{m}{a}$ ej är reell, negativ eller noll, satisfieras denna ekvation av en serie av formen

$$v = C' \eta^{-n + \frac{m}{a}} \mathfrak{F}_1 \left(C' \eta^{-n + \frac{m}{a}}, \eta \right), \quad \mathfrak{F}_1(0, 0) = 1.$$

Om man återgår till x och y genom ekvationerna (10), följer härav lätt existensen av en serie av formen

$$(15) \quad y = Cx^a \mathfrak{F}^{(1)} \left(x(Cx^a)^{-\frac{n}{m}}, (Cx^a)^{\frac{1}{m}} \right), \quad \mathfrak{F}^{(1)}(0, 0) = 1,$$

som satisfierar ekvationen V. Mellan C och C' består relationen $C = C'^{-a}$. Denna serie definierar principalintegralerna. Existensområdet för en principalintegral begränsas av en kurva $|y| = r'$ och en kurva $|v| = r''$. Om

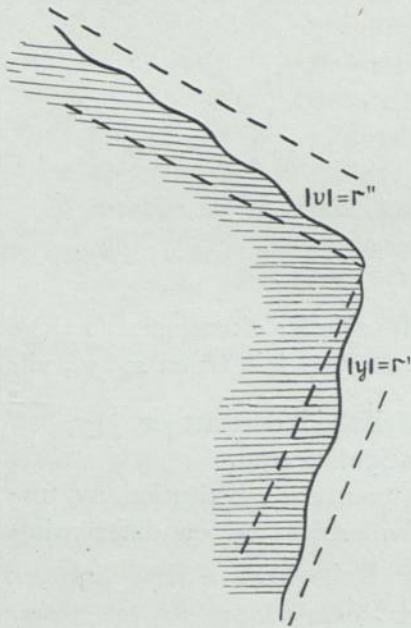


FIG. 7.

man inför $u = \log x$ som oberoende variabel, får området den form som fig. 7 anger.

En serie av formen (15) har först härleddes av Horn (Crelle, 93) under vissa inskränkande antaganden och sedan av Dulac (Bull. Soc. Math. de Fr., 39) utan några sådana antaganden.

I det fall att $-n + \frac{m}{a}$ är reell, negativ existerar ej alltid en serie av formen (15); men mot en principalintegral till ekvationen (14) svarar alltid en principalintegral till ekvationen V. Som

$$\eta \frac{dx}{d\eta} = x \left(\frac{m}{a} + \mathfrak{F}(v, \eta) \right) \neq 0,$$

om $|v|$, $|\eta|$ äro tillräckligt små och $x \neq 0$, är y regulär funktion av x . Existensområdet för en principalintegral begränsas

av en kurva $|y| = r'$ och en kurva $|v| = r''$. Av dessa kurvor ligger den första eller den andra närmast origo allt eftersom $a < 0$ eller $a > \frac{m}{n}$.

I det fall att a är rationellt tal och en serie (15) ej existerar, sträcker sig existensområdet alltid in till $x = 0$.

Antag sedan att $a = \frac{m}{n}$ och att η ingår som faktor på högra sidan av ekvationen (14). Serien (15), som existerar i detta fall, definierar principalintegraler. Existensområdet för en sådan gren begränsas av en sluten kurva $|y| = r'$.

Detta är det enda fall, då ekvationen (2) reducerar sig till en identitet.

Vi betrakta i detta fall även grenar av en annan typ. Om man gör substitutionen $x = \xi^n$, $y = \xi^m z$, får man en differentialekvation, som kan skrivas

$$(16) \quad \xi \frac{dz}{d\xi} = \frac{\sum_{r=0}^p \mathfrak{P}_r(\xi, y) z^r}{\psi(z) + \sum_{r=0}^q \mathfrak{P}_r^{(1)}(\xi, y) z^r},$$

där $\psi(z)$ är en hel rationell funktion av z av gradtalet q . Vidare är $\mathfrak{P}_r(0, 0) = 0$, $\mathfrak{P}_r^{(1)}(0, 0) = 0$; inför man $y = \xi^m z$, kan man således dividera bort ξ .

I serien (15) måste $|C|$ ligga över en viss gräns, och $|z| = |x^{-a}y|$ blir alltså större än ett visst tal R . Vi väljer nu ett begynnelsevärde z_0 , som uppfyller $|z_0| < R$, och vi antaga vidare, att z_0 ligger utanför vissa omgivningar av rötterna till ekvationen $\psi(z) = 0$. Integralen till ekvationen (16) svarande mot begynnelsevärdet z_0 för $\xi = 0$ är då regulär inom en viss fix omgivning av $\xi = 0$.

Om man, sedan man i ekvationen (16) infört $y = \xi^m z$ och dividerat bort ξ , sätter $\xi = 0$ i täljaren av högra membrum, får man en hel rationell funktion $\psi_1(z)$, som även kan vara identiskt noll. Antag att den icke är identiskt noll, och att z_0 ligger i närheten av en sådan rot till ekvationen $\psi(z) = 0$, som ej satisfierar $\psi_1(z) = 0$. Integralen till ekvationen (16) svarande mot begynnelsevärdet z_0 för $\xi = 0$, är då algebroidisk i en viss fix omgivning av $\xi = 0$.

De nu definierade grenarna räknas även bland principalintegralerna. Då deras existensområden utgöras av fixa omgivningar kring $x = 0$, kunna de ej permuteras med andra grenar i närheten av $x = 0$, utan de bilda en fristående grupp av integraler.

Vi anmärka även, att, om den i nr 2 definierade tablån \mathfrak{I} innehåller en ekvation av nu behandlade typ uppfyllande villkoret att ekvationerna $\psi(z) = 0$, $\psi_1(z) = 0$ ej ha någon gemensam rot, efterföljes denna ekvation ej av några nya ekvationer i tablån \mathfrak{I} .

9. Vi behandla därefter det fall att $a = \frac{m}{n}$ och att η ej ingår som faktor i högra membrum av ekvationen (14). Denna ekvation är då av typen III. Mot en principalintegral till densamma svarar en principalintegral till ekvationen V. Som $\eta \frac{dx}{d\eta} = x[n + \mathfrak{P}(v, \eta)] \neq 0$, om $|v|$, $|\eta|$ äro tillräckligt små och $x \neq 0$, blir y regulär funktion av x . Existensområdet begränsas antingen av en kurva $|y| = r'$ eller av en kurva $|v| = r''$ och ett ändligt eller oändligt antal kurvor $|y| = r'$. Kurvan $|v| = r''$ har samma form som kurvan $|y| = r'$ för ekvationen III och kurvan $|y| = r'$ har samma form som för serien (5).

I detta fall kan det inträffa, att ekvationen (2) reducerar sig till en orimlighet.

Till liknande resultat kommer man om $p > q + 1$ i ekvationen V. Antag först att högra membrum genom substitutionen (10) får formen

$$\eta^{m(p-q)} [a + \mathfrak{P}(v, \eta)], \quad \mathfrak{P}(0, 0) = 0.$$

Väljer man η som oberoende variabel, får man då en ekvation av typen II

$$(17) \quad \eta^{k+1} \frac{dv}{d\eta} = v [m + \mathfrak{P}_1(v, \eta)], \quad k = m(p - q - 1), \quad \mathfrak{P}_1(0, 0) = 0,$$

vilken definierar principalintegralerna. Som

$$\eta^{k+1} \frac{dx}{d\eta} = x [m + \eta^{m(p-q)} + \mathfrak{P}_1(v, \eta)] \neq 0,$$

om $|v|$, $|\eta|$ äro tillräckligt små och $x \neq 0$, blir y regulär funktion av x . Existensområdet begränsas av en kurva $|v| = r''$ eller av en kurva $|y| = r'$ och ett ändligt eller oändligt antal kurvor $|v| = r''$. Kurvan $|y| = r'$ har samma form som för ekvationen III, och kurvan $|v| = r''$ har samma form som kurvan $|y| = r'$ för serien (5).

Om det nu behandlade fallet ej inträffar, kan man alltid, genom att studera de Puiseuxska polygonerna svarande mot täljare och nämnare i

högra membrum, finna ett tal $\frac{m'}{n}$ så att högra membrum får formen

$$\eta_1^{m'(\rho-q)} [a + \mathfrak{F}(v_1, \eta_1)], \quad \mathfrak{F}(0, 0) = 0$$

efter substitutionen $y = \eta_1^{m'}$, $x = \eta_1^{n'} v_1$, och man kan då, såsom i förra fallet, definiera en gren existerande inom ett område, som begränsas av en kurva $|v_1| = r_1''$ eller av en kurva $|y| = r'$ och ett ändligt eller oändligt antal kurvor $|v_1| = r_1''$. Genom den metod, som vi skola använda för att definiera övergångsgrenar, kan man sedan fortsätta en sådan gren över kurvorna $|v_1| = r_1''$ så att man, liksom i förra fallet, får en gren regulär inom ett område, som begränsas av en kurva $|v| = r''$ eller av en kurva $|y| = r'$ och ett ändligt eller oändligt antal kurvor $|v| = r''$.

10. Vi studera en ekvation av typen V, då $p < q + 1$. I ett fall inträffar det, att den Briot-Bouquetska polygonen reducerar sig till två med koordinataxlarna parallella linjer, nämligen då $p = 1$ och y ingår som faktor i högra membrum. Om man i detta fall väljer y som oberoende variabel, får man en ekvation av typen III

$$(18) \quad y \frac{dx}{dy} = x \left(\frac{1}{a} y^q + \dots \right),$$

vilken kan läggas till grund för definition av principalintegraler. Genom den metod, som vi skola använda för att definiera övergångsintegraler, kan man visa att, om man betraktar y som funktion av x , får man en funktion, som har oändligt många algebraiska förgreningspunkter. Existensområdet begränsas av en kurva $|y| = r'$ eller av en cirkel $|x| = r$ och ett ändligt eller oändligt antal kurvor $|y| = r'$. Kurvorna $|y| = r'$ ha väsentligen samma form som för ekvationen III.

Om den Briot-Bouquetska polygonen har en sida, som ej är parallell med någon av koordinataxlarna, kan man göra substitutionen (10). Man erhåller härigenom en ekvation av typen I

$$(19) \quad \eta \frac{dv}{d\eta} = -n\eta + \eta^{nk - (\rho-1)m} v^{k+1} \left(\frac{1}{a} + \dots \right),$$

som lägges till grund för definition av principalintegraler. Betraktar man x som oberoende variabel, får man funktioner, som i allmänhet ha oändligt många förgreningspunkter. Existensområdet för en sådan gren begränsas av en kurva $|y| = r'$ och en kurva $|v| = r''$. Dessa kurvor äro slutna, om ekvationen (19) satisfieras av en konvergerande serie av for-

men (4). Om en sådan serie ej existerar, sträcka sig nämnda kurvor in till $x = 0$; de ha samma form som kurvorna $|y| = r'$ för ekvationen III. Kurvan $|v| = r''$ är belägen innanför kurvan $|y| = r'$. Inför man $u = \log x$ som oberoende variabel, får man kurvor, som ha en oändlig följd av vindlingar; varje vindling går i närheten av en viss cirkel. För kurvan $|y| = r'$ kan man välja en cirkel med fix radie, men för kurvan $|v| = r''$ får man låta cirkelns radie närma sig noll, då man närmar sig till $x = 0$.

11. För ekvationer av typerna VI, VII erhåller man liknande resultat.

För en ekvation av typen VI kan man alltid göra en substitution av formen (10). Man erhåller härigenom en ekvation av typen I

$$(20) \quad \eta \frac{dv}{d\eta} = -nv + \eta^{nk - (\beta - 1)m} v^{k+1} \left(\frac{1}{a} + \dots \right),$$

som lägges till grund för definition av principalintegraler. Man inser lätt att $\frac{dx}{d\eta} \neq 0$ om $|v|$, $|\eta|$ äro tillräckligt små, alltså blir y regulär funktion av x . Existensområdet begränsas av en kurva $|y| = r'$ och en kurva $|v| = r''$. Dessa kurvor äro slutna, om ekvationen (20) satisfieras av en konvergerande serie av formen (4). I annat fall gå de in till $x = 0$. Om man inför x^{-k} som oberoende variabel, ha dessa kurvor samma form som kurvorna $|y| = r'$ hade för ekvationen III, då $\log x$ valdes som oberoende variabel. För kurvan $|y| = r'$ gäller, att dimensionerna av dess vindlingar ligga mellan ändliga, från noll skilda gränser, för kurvan $|v| = r''$, som ligger utanför den förra, gå de mot ∞ .

För en ekvation av typen VII kan den Briot-Bouquetska polygonen reducera sig till två med koordinataxlarna parallella räta linjer. Detta inträffar, om $\beta = 1$ och y är faktor i högra membrum. Om man i detta fall väljer y som oberoende variabel, får man en ekvation av typen III

$$(21) \quad y \frac{dx}{dy} = x^{k+1} \left(\frac{1}{a} y^q + \dots \right),$$

som lägges till grund för definition av principalintegraler. Dessa ha oändligt många förgreningspunkter. Kurvorna $|y| = r'$, som höra till existensområdets begränsning, ha samma form som kurvorna $|y| = r'$ för ekvationen III, om man väljer x^{-k} som oberoende variabel.

Om det nu betraktade fallet ej inträffar, kan man göra substitutionen (10). Man får därigenom en ekvation av typen I

$$(22) \quad \eta \frac{dv}{d\eta} = -nv + \eta^{nk - (\beta - 1)m + 1} v^{k+1} \mathfrak{F}(v, \eta), \quad nk - (\beta - 1)m > 0,$$

som lägges till grund för definition av principalintegraler. Existensområdet för en sådan gren begränsas av en kurva $|y| = r'$ och en kurva $|v| = r''$. Om ekvationen (22) satisfieras av en serie av formen (4), äro dessa kurvor slutna. I annat fall gå de in till $x = 0$. Detta senare inträffar alltid om $p = q + 1$. Om man i fallet $p = q + 1$ inför $\frac{1}{x}$ som oberoende variabel, gå kurvorna ifråga mot ∞ i riktningarna $\frac{\alpha + v\pi}{k}$ ($v=0, 1, \dots, 2k-1$), då α är argumentet för $\frac{z}{a}$. Om man, då $p \neq q + 1$, inför x^{-k} som oberoende variabel, ha kurvorna samma form som kurvorna $|y| = r'$ för ekvationen III, kurvan $|v| = r''$ ligger innanför eller utanför kurvan $|y| = r'$ allt eftersom $p > q + 1$ eller $p < q + 1$. För kurvan $|v| = r''$ gäller att vindlingarnas dimensioner gå mot 0 i förra fallet och mot ∞ i senare fallet, för kurvan $|y| = r'$ ligga dimensionerna i bägge fallen mellan ändliga, från noll skilda gränser. I allmänhet har en principalintegral oändligt många förgreningspunkter.

12. Vi övergå nu till definition av övergångsintegraler. Vi utgå från en ekvation, som tillhör tablån \mathfrak{D} och som i denna tablå efterföljes av andra ekvationer. Denna ekvation tillhör någon av typerna IV, V, VI, VII. Vi göra substitutionen $x = \xi^n$, $y = \xi^m z$, och vi erhålla därigenom en ekvation, som kan skrivas under formen

$$(23) \quad \xi^{k+1} \frac{dz}{d\xi} = \frac{\varphi(z) + \sum_{v=0}^{p''} \mathfrak{P}_v(\xi, y) z^v}{\psi(z) + \sum_{v=0}^{q''} \mathfrak{P}_v^{(1)}(\xi, y) z^v}, \quad k \geq 0$$

eller under formen

$$(23^1) \quad \xi^{k+1} \frac{dz}{d\xi} = \varphi(z) + \sum_{v=0}^{p''} \mathfrak{P}_v(\xi, y) z^v, \quad k \geq 0$$

beroende på om den ursprungliga ekvationen tillhör någon av typerna IV, V, VII eller om den tillhör typen VI. Här äro $\varphi(z)$, $\psi(z)$ hela rationella funktioner av z av gradtalen p'' , q'' , $q'' \leq q'$, samt \mathfrak{P}_v , $\mathfrak{P}_v^{(1)}$ potensserier som försvinna för $\xi = y = 0$. Ekvationen (23¹) kan sägas utgöra ett specialfall av ekvationen (23), vi tänka oss därför, att vi ha att göra med en ekvation av formen (23).

Antag först att $k = 0$. Sätter man $\xi = \xi_0 \cdot \xi_1$, där ξ_0 är en parameter och ξ_1 ny variabel, och väljer man z som oberoende variabel, får man en ekvation, som kan skrivas

$$(24) \quad \frac{d\xi_1}{dz} = \xi_1 \frac{\psi(z) + \sum_{v=0}^{q'} \mathfrak{P}_v^{(1)}(\xi_0 \xi_1, \xi_0^m \xi_1^m z) z^v}{\varphi(z) + \sum_{v=0}^{f'} \mathfrak{P}_v(\xi_0 \xi_1, \xi_0^m \xi_1^m z) z^v}.$$

Om $|\xi_0|$ är tillräckligt liten, kan den integral till denna ekvation, som för $z = z_0$ blir lika med 1, enligt en sats av Poincaré, skrivas

$$(25) \quad \xi_1 = \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v(z, z_0) \xi_0^{v-1},$$

varvid

$$\varphi_1(z, z_0) = e^{\int_{z_0}^z \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} dz}$$

och de följande funktionerna $\varphi_v(z, z_0)$ successivt erhållas genom lösning av linjära differentialekvationer. Serien (25) konvergerar likformigt, om $|\xi_0|$ är mindre än ett visst tal r och om z_0, z tillhöra ett område Z beläget innanför en given cirkel $|z| = R$, inom vilken rötterna c till ekvationen $\varphi(z) = 0$ äro belägna, samt begränsat av denna cirkel, av vissa fixa cirklar $|z - c| = r'$ omgivande rötterna c samt av coupurer, som dragas mellan dessa cirklar, så att Z blir ett enkelt sammanhängande område på en Riemannsk yta med ett ändligt antal blad. Talet r är beroende av talen R, r' och av antalet blad i denna Riemannska yta.

Koefficienterna $\varphi_v(z, z_0)$ ha inga andra singularära ställen än rötterna c och $z = \infty$. Alltså är ξ_1 och således även ξ regulär funktion av z , om z tillhör området Z .

Antag nu att z rör sig på alla möjliga sätt innanför cirkeln $|z| = R$ och utanför cirkelarna $|z - c| = r'$, så att man ständigt har $|\xi| < r$. Då är ξ alltjämt regulär funktion av z , som kan framställas genom en följd av serier

$$\xi = \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v(z, z_0) \xi_0^{v-1}$$

för olika system av värden z_0, ξ_0 . Omvänt blir z funktion av ξ definierad inom ett visst område Ξ beläget innanför cirkeln $|\xi| = r$. Denna funktion benämna vi *övergångsintegral*.

En sådan funktion har i allmänhet oändligt många algebraiska förgreningspunkter svarande mot värden i närheten av sådana rötter till ekvationen $\psi(z) = 0$, som ej äro rötter till $\varphi(z) = 0$. För övrigt är z regulär funktion av ξ .

Existensområdet Ξ för en övergångsintegral begränsas av ett i allmänhet oändligt antal kurvor $|z| = R$, $|z - c| = r'$. Om man överskrider en kurva $|z| = R$, träffar man på en principalintegral till den differentialekvation i tablån \mathfrak{A} , som man utgått från. Om man överskrider en kurva $|z - c| = r'$, träffar man på en principalintegral till den ekvation i tablån \mathfrak{A} , som erhålles av nyssnämnda ekvation genom substitutionen $x = \xi^n$, $y = \xi^m (c + \eta)$.

För att studera formen av området Ξ och speciellt fördelningen av kurvorna $|z| = R$, $|z - c| = r'$ kan man utgå från en punkt z_0 v. s. h., som uppfyller villkoren $|z_0| < R$, $|z_0 - c| > r'$, och ett motsvarande värde ξ_0 av ξ , som uppfyller villkoret $|\xi_0| < r$, och sedan låta z beskriva slutna vägar kring rötterna c till $\varphi(z) = 0$. En sådan väg kan anses som sammanfattning av ett antal enkla slutna vägar, av vilka var och en uppfyller villkoret att endast omsluta en enda rot c . Om man beskriver en sådan enkel väg, får man vid återkomsten ett värde ξ_1 av ξ , som erhålles av en ekvation av formen

$$(26) \quad \xi_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_{\nu}(z_0, z_0) \xi_0^{\nu},$$

där integrationsvägarna utgöras av ifrågavarande enkla väg. Man får ett ändligt antal substitutioner av denna form svarande mot de olika rötterna c . Dessa substitutioner böra sammansättas på alla möjliga olika sätt i enlighet med det villkoret, att de erhållna värdena av ξ äro absolut taget $< r$. Beteckna med $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ dessa värden av ξ . Vi välja nu för Z ett område, som är beläget i ett enda blad. Mot ett sådant område i z -planet svarar genom likheten $\xi = \sum \varphi_{\nu}(z, z_0) \xi_0^{\nu}$ ett visst område $\Xi(z_0, \xi_0)$ i ξ -planet. Området Ξ är sammanfattningen av samtliga områden $\Xi(z_0, \xi_{\nu})$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$).

Det är dock att märka, att vissa områden $\Xi(z_0, \xi_{\nu})$ kunna svara mot en del av området Z , i det att de värden av ξ , som skulle svara mot återstående delen av Z , måste ligga utanför cirkeln $|\xi| = r$.

Om man inför $u = \log \frac{\xi}{\xi_0}$ som oberoende variabel, motsvaras området $\Xi(z_0, \xi_0)$ av ett visst område i u -planet, som närmar sig ett fullt bestämt område då $\xi_0 \rightarrow 0$, nämligen det område som integralen $\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} dz$ beskriver, då z beskriver området Z .

På liknande sätt kan man studera det fall att $k > 0$ i ekvationen (23). Om man gör substitutionen $\xi^{-k} = \xi_0^{-k} + \zeta$ och sedan begagnar Poincarés sats, inser man lätt, att man för ξ får en serie av formen

$$(27) \quad \xi = \xi_0 + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \varphi_{\nu}(z, z_0) \xi_0^{\nu}$$

där

$$\varphi_{k+1}(z, z_0) = \int_{z_0}^z \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} dz$$

och de följande funktionerna φ_{ν} erhållas genom successiva integrationer. För övrigt kan undersökningen genomföras liksom då $k = 0$.

13. Det är av det föregående tydligt, att om x rör sig på ett godtyckligt sätt i en bestämd tillräckligt liten omgivning av $x = 0$, kan en godtycklig integral till en differentialekvation (1) successivt fortsättas genom principalintegraler svarande mot ekvationer i tablån \mathfrak{T} och genom övergångsintegraler. Om differentialekvationen har formen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{P}(x, y)}{\mathfrak{P}_1(x, y)}$$

och om man ingenting vet om fortsättningen av serierna $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1$, är dock att märka, att x måste röra sig, så att $|y|$ ständigt ligger under en viss gräns.

Det kan även vara av intresse att särskilt framhålla det fall, då differentialekvationen har formen

$$(28) \quad x^k \frac{dy}{dx} = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)}$$

där $k \geq 1$ och P, Q äro hela rationella funktioner av y , vilkas koefficienter äro potensserier av x . Stället $x = 0$ är således en fix singularitet tillhörande den andra av de i nr 1 införda grupperna. Genom denna ekvation kan man, liksom genom ekvationen (23), definiera övergångsintegraler svarande mot värdena av y utanför vissa omgivningar kring rötterna c till ekvationen $P(y, 0) = 0$ samt innanför en stor cirkel $|y| = R$ i det fall, att gradtalen p, q av P, Q med avseende på y uppfylla villkoret $p < q + 2$. Om man utgår från en sådan övergångsintegral och överskrider t. ex. en kurva $|y - c| = r'$, träffar man på en principalintegral till ekvationen

$$x^k \frac{dz}{dx} = \frac{P(c + z, x)}{Q(c + z, x)}$$

På varje sådan ekvation kan man sedan tillämpa den föregående teorien.

Härav kan man sluta, att en integral till en ekvation (28) i allmänhet antager varje värde oändligt många gånger i närheten av $x = 0$, med undantag blott av sådana värden b , att $P(b, x)$ är identiskt noll.

RANDVÄRDESPROBLEMET VID PARABELN OCH HYPERBELN INOM POTENTIALTEORIEN

AV

H. F. NORDSTRÖM.

J. PLEMELJ har i sina »Potentialtheoretische Untersuchungen»¹ givit en lösning för randvärdesproblemet vid ellipsen. Vi skola här ställa oss uppgiften att lösa motsvarande problem vid parabeln och hyperbeln. För enkelhets skull förutsätta vi Plemeljs ovan angivna arbete som bekant och skola vi i möjligaste mån använda samma beteckningar som i detta.

I. Uppgiftens formulering.

1. En plan kurva — öppen eller sluten — må vara hänförd till rätvinkliga axelkorset Oxy (fig. 1). Vi inskränka oss till att förutsätta att kurvan består av en enda gren, som i varje punkt har *en* bestämd tan-

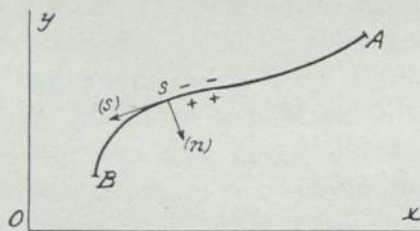


FIG. 1.

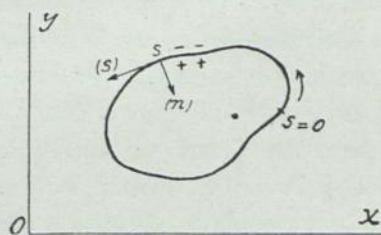


FIG. 2.

¹ JOSEF PLEMELJ: Potentialtheoretische Untersuchungen (utgör Bd 40 av »Preisschriften gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig»), B. G. Teubner, Leipzig 1911.

gent. En punkt på kurvan karakteriseras genom båglängden, som vi beteckna med s eller σ .

Vid en öppen kurva räkna vi båglängden från ena ändpunkten — godtyckligt vilken. Vid en sluten kurva räkna vi båglängden från en godtycklig punkt samt växande, då man går rundt kurvan motsols (fig. 2).

Normalens riktning i en punkt på kurvan fastställa vi genom att överenskomma, att riktningarna (s) [anger växande s] och (n) skola vara orienterade inbördes som x - och y -axlarna. Med *positiv* sida av kurvan förstå vi den sida, åt vilken normalen är riktad; den motsatta kalla vi den *negativa*. Vid en sluten kurva är således innersidan den positiva enligt denna överenskommelse, om x - och y -axlarna äro så orienterade som i fig. 2.

2. Till kurvan må en *dubbelbeläggning* vara tillordnad. Tätheten i punkten σ må vara $\nu(\sigma)$. I punkten $p(x, y)$ är då potentialen av dubbelbeläggningsen

$$(1 a) \quad W(p) = \int_A^B \nu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \sigma} \operatorname{arctg} \frac{y - y_\sigma}{x - x_\sigma} d\sigma.$$

Vid sluten kurva sammanfaller B med A ; integrationen skall då utsträckas över kurvan en gång.

Av formen på $W(p)$ synes att man i stället för båglängden kan använda en annan variabel, som är en entydigt omvändbar funktion av båglängden.

Vår uppgift är nu att söka en sådan dubbelbeläggning, att dess potential i varje punkt s av kurvan satisfierar relationen

$$(2 a) \quad \frac{1 + \lambda}{2\lambda} W(s^+) - \frac{1 - \lambda}{2\lambda} W(s^-) = \psi(s), \text{ eller}$$

$$(2 b) \quad [W(s^+) - W(s^-)] + \lambda[W(s^+) + W(s^-)] = 2\lambda\psi(s),$$

där $W(s^+)$ och $W(s^-)$ beteckna randvärdena av potentialen på positiva resp. negativa sidan, $\psi(s)$ är en given randfunktion samt λ en parameter.

Nu gäller — för öppen som sluten kurva —

$$\begin{cases} W(s^+) - W(s^-) = 2\pi \cdot \frac{\lambda}{\pi} \nu(s), \\ W(s^+) + W(s^-) = 2 \int_A^B \frac{\lambda}{\pi} \nu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \sigma} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma} d\sigma, \end{cases}$$

där, för erhållande av enkelhet i den slutliga integralekvationen, tätheten i punkten s betecknats med $\frac{\lambda}{\pi} \nu(s)$. Insättas dessa uttryck i (2 b) erhålles

$$\nu(s) + \lambda \int_A^B \nu(\sigma) \cdot \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma} d\sigma = \psi(s).$$

Om vi införa beteckningen

$$(3) \quad h(\sigma, s) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma},$$

erhålles slutligen

$$(4) \quad \nu(s) + \lambda \int_A^B \nu(\sigma) h(\sigma, s) d\sigma = \psi(s).$$

För en *sluten* kurva gäller generellt, att alla karakteristiska värden till denna integralekvation äro reella, samt att $\lambda = -1$ är ett sådant värde och tillika det numeriskt minsta. Detta kan emellertid ej tillämpas på en *öppen* kurva.¹

Genom lösning av integralekvationen (4) erhålles tätheten $\frac{\lambda}{\pi} \nu(s)$. Därefter bestämmes $W(p)$ ur formeln

$$(1 b) \quad W(p) = \lambda \int_A^B \nu(\sigma) h(\sigma, p) d\sigma,$$

$$\text{där} \quad h(\sigma, p) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \operatorname{arctg} \frac{y - y_\sigma}{x - x_\sigma}.$$

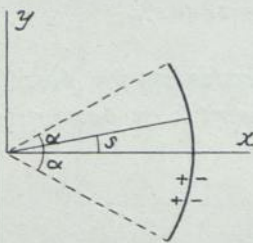


FIG. 3.

¹ Låt oss t. ex. betrakta en cirkelbåge med öppningsvinkeln 2α ; positiva sidan är vald som i fig. 3. Som variabel använda vi polära vinkeln. Då blir

$$\operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma} = \frac{s + \sigma}{2} + \frac{\pi}{2}, \text{ varav } h(\sigma, s) = \frac{1}{2\pi}.$$

Då kärnan $h(\sigma, s)$ är konstant, erhåller man utan svårighet

$$\nu(s) = \psi(s) - \frac{\lambda}{2\alpha \left(\lambda + \frac{\pi}{\alpha} \right)} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \psi(\sigma) d\sigma.$$

Det enda karakteristiska värdet är sålunda $-\frac{\pi}{\alpha}$. För en sluten cirkel, d. v. s. $\alpha = \pi$, erhålles, som sig bör, det karakteristiska värdet -1 .

3. Till kurvan må istället en *enkelbeläggning* vara tillordnad, varvid tätheten i punkten σ må vara $\tau(\sigma)$. I punkten $p(x, y)$ är då potentialen

$$(5 a) \quad V(p) = \int_A^B \tau(\sigma) \log \frac{1}{r_{p\sigma}} d\sigma,$$

där
$$r_{p\sigma} = \sqrt{(x - x_\sigma)^2 + (y - y_\sigma)^2}.$$

Uppgiften är i detta fall att söka en sådan enkelbeläggning, att dess potential i varje punkt s av kurvan satisfierar relationen

$$(6) \quad \frac{1 + \lambda}{2\lambda} \cdot \frac{\partial V(s^-)}{\partial n} - \frac{1 - \lambda}{2\lambda} \cdot \frac{\partial V(s^+)}{\partial n} = \psi(s),$$

där $\frac{\partial V(s^+)}{\partial n}$ och $\frac{\partial V(s^-)}{\partial n}$ beteckna de i riktning av positiva normalen tagna derivatorna av $V(p)$ på positiva resp. negativa sidan av punkten s .

På analogt sätt som i föregående fall finner man att uppgiften är ekvivalent med problemet att lösa integralekvationen

$$(7) \quad \tau(s) + \lambda \int_A^B \tau(\sigma) h(s, \sigma) d\sigma = \psi(s),$$

där $\frac{\lambda}{\pi} \tau(s)$ betecknar tätheten i punkten s samt

$$h(s, \sigma) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}.$$

Här kan man, som i förra fallet, i stället för båglängden använda en annan variabel, som är en entydigt omvändbar funktion av båglängden.

Tydligen utgör (7) den *associerade* integralekvationen till (4). I de speciella fall vi skola behandla gäller $h(\sigma, s) = h(s, \sigma)$, d. v. s. integralekvationerna (4) och (7) äro identiska.

Genom lösning av integralekvationen (7) erhålles tätheten $\frac{\lambda}{\pi} \tau(s)$.

Därefter erhålles $V(p)$ ur formeln

$$(5 b) \quad V(p) = \frac{\lambda}{\pi} \int_A^B \tau(\sigma) \log \frac{1}{r_{p\sigma}} d\sigma.$$

Här observera vi att $d\sigma$ betyder *bågelementet*.

4. Vad ovan anförts gäller till att börja med för kurvor med utsträckning inom ändligt område. Det finnes emellertid inga formella hinder att utsträcka tillämpligheten även till kurvor med oändlig utsträckning. De eventuella komplikationer, som äro en följd av denna utvidgning, komma då att uppträda vid lösandet av hithörande integralekvation.

II. Metoden med successiva approximationer använd på vissa integralekvationer.

1. En integralekvation av formen

$$(8) \quad \varphi(t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta, t) \varphi(\theta) d\theta = \psi(t)$$

må vara given; φ är den obekanta funktionen, f och ψ äro kända funktioner. Om kärnan f antaga vi, att den är ändlig och kontinuerlig för alla värden å θ och t .

Vi bilda serien

$$(9) \quad R(\lambda; \theta, t) = f_1(\theta, t) - \lambda f_2(\theta, t) + \lambda^2 f_3(\theta, t) - \dots + (-1)^n \lambda^n f_{n+1}(\theta, t) + \dots,$$

där $f_2(\theta, t)$, $f_3(\theta, t)$, ... äro de repeterade kärnorna till $f_1(\theta, t) = f(\theta, t)$ med avseende på intervallet $-\infty$ till $+\infty$. Dessa definieras genom rekursionsformeln

$$(10) \quad f_{n+1}(\theta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\theta, r) f_1(r, t) dr.$$

Naturligtvis förutsätta vi här, att dessa $f_n(\theta, t)$ verkligen existera.

Vi antaga nu, att serien $R(\lambda; \theta, t)$ för det betraktade λ -värdet är absolut och likformigt konvergent för alla θ och t . Under dessa förutsättningar satisfierar $R(\lambda; \theta, t)$ funktionalekvationen

$$(11) \quad R(\lambda; \theta, t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, r) f(r, t) dr = f(\theta, t),$$

som man lätt verifierar.

Med användande av (11) finner man på vanligt sätt, att

$$(12) \quad \varphi(t) = \psi(t) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, t) \varphi(\theta) d\theta$$

är en lösning till (8), under förutsättning att integrationsordningen i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(r, t) dr \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, r) \psi(\theta) d\theta$$

kan omvändas, d. v. s. att följande likhet gäller

$$(13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(r, t) dr \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, r) \psi(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\theta) d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, r) f(r, t) dr.$$

2. Tillräckliga villkor för riktigheten av (13) äro

$$1:o) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta, t) d\theta \text{ absolut konvergent för alla } t,$$

$$2:o) \quad \int_a^{+\infty} R(\lambda; \theta, t) \psi(\theta) d\theta \text{ och } \int_{\beta}^{+\infty} R(\lambda; -\theta, t) \psi(-\theta) d\theta$$

konvergenta för $a = 0$ resp. $\beta = 0$ och för alla t vid det betraktade λ -värdet samt på sådant sätt, att integralernas värden sjunka under givna godtyckliga gränser, så snart a resp. β ligga över tillräckligt stora — av t oberoende — värden.

I ett visst fall antaga vi 1:o) vara uppfyllt. Om vi då pålägga $\psi(\theta)$ den inskränkningen, att 2:o) skall vara uppfyllt, så är tydligen en funktion $\varphi(t)$ av formen (12) en lösning till integralekvationen (8).

3. Har man på något sätt bildat en analytisk fortsättning $\bar{R}(\lambda; \theta, t)$ till serien $R(\lambda; \theta, t)$, så satisfierar $\bar{R}(\lambda; \theta, t)$ funktionalekvationen (11) inom hela sitt konvergensområde. Integralekvationen har en lösning av formen

$$\varphi(t) = \psi(t) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{R}(\lambda; \theta, t) \psi(\theta) d\theta,$$

så snart villkor motsvarande 1:o) och 2:o) i föregående paragraf äro uppfyllda.

4. I detta sammanhang må påpekas, att en integralekvation med båda gränserna oändliga alltid kan genom lämpliga substitutioner överföras till en integralekvation med ändliga gränser. I gynnsammaste fall kunna de Fredholmska metoderna tillämpas på denna nya integralekvation. Vid de speciella integralekvationer vi skola behandla är detta emellertid ej fallet.

III. Tillämpning på parabeln.

1. Bestämning av kärnan till integralekvationen (4).

En parabel må vara given i formen

$$y^2 = px.$$

I stället för båglängden införa vi y -koordinaterna för punkterna s och σ och beteckna

$$y_\sigma = y_1 \text{ och } y_s = y_2.$$

Kärnan erhålles då enligt ekv. (3):

$$\begin{aligned} \bar{h}(y_1, y_2) &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y_1} \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y_1} \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{p} - \frac{y_1^2}{p}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y_1} \operatorname{arctg} \frac{p}{y_1 + y_2} = -\frac{p}{\pi} \cdot \frac{1}{(y_1 + y_2)^2 + p^2}. \end{aligned}$$

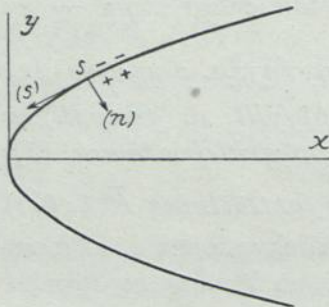


FIG. 4.

Som synes är kärnan ändlig för alla värden å y_1 och y_2 . Vidare är den symmetrisk i y_1 och y_2 . Integralekvationerna (4) och (7) bliva således i detta fall identiska.

På grund av vår överenskommelse å sid. 393 blir, om vi välja »innersidan» till positiv sida, integrationsriktningen den i fig. 4 angivna.¹ Gränserna bliva $+\infty$ till $-\infty$ och integralekvationen får formen

$$\nu(y_2) - \lambda \int_{+\infty}^{-\infty} \nu(y_1) \cdot \frac{p}{\pi} \cdot \frac{1}{(y_1 + y_2)^2 + p^2} dy_1 = \psi(y_2)$$

eller

$$(14) \quad \nu(y_2) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(y_1) \cdot \frac{p}{\pi} \cdot \frac{1}{(y_1 + y_2)^2 + p^2} dy_1 = \psi(y_2),$$

¹ Parabeln kan ju anses som en sluten kurva. Vårt val står ej i strid med överenskommelsen beträffande slutna kurvor å sid. 393.

vilken är den integralekvation vi skola lösa. Om gränserna tagas $-\infty$ till $+\infty$ blir således kärnan

$$(15) \quad h(y_1, y_2) = \frac{\rho}{\pi} \cdot \frac{1}{(y_1 + y_2)^2 + \rho^2}.$$

Då $h(y_1, y_2)$ alltid är positiv och vidare

$$\frac{\rho}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_1}{(y_1 + y_2)^2 + \rho^2} = 1$$

är villkoret 1:0) i II, 2 uppfyllt.

Om man på ekv. (14) formellt använder Fredholms metod, finner man, att koefficienterna i såväl $D(\lambda; y_1, y_2)$ som $D(\lambda)$ bliva oändliga.

2. Hjälppformel. Bestämning av de repeterade kärnorna.

Vid bestämning av de repeterade kärnorna hava vi användning för formeln

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{[(x+a)^2 + \frac{n^2}{4}\rho^2][(x+b)^2 + \rho^2]} = \frac{(n+2)\pi}{n\rho[(a-b)^2 + \frac{(n+2)^2}{4}\rho^2]},$$

vars riktighet man utan svårighet verifierar.

Vi hava enligt (10)

$$\begin{aligned} h_2(y_1, y_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(y_1, r)h(r, y_2) dr = \\ &= \frac{\rho^2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dr}{[(r+y_1)^2 + \rho^2][(r+y_2)^2 + \rho^2]}. \end{aligned}$$

På denna integral kan tydligen vår hjälppformel användas. Här är $a = y_1$, $b = y_2$, $\frac{n^2}{4} = 1$ d. v. s. $n = 2$. Vi få sålunda

$$h_2(y_1, y_2) = \frac{\rho^2}{\pi^2} \cdot \frac{4\pi}{2\rho[(y_1 - y_2)^2 + \frac{16}{4}\rho^2]} = \frac{\rho}{\pi} \cdot \frac{2}{(y_1 - y_2)^2 + 4\rho^2}.$$

Generellt erhålles

$$\begin{cases} h_{2m}(y_1, y_2) = \frac{\rho}{\pi} \cdot \frac{2m}{(y_1 - y_2)^2 + (2m)^2 \rho^2}, \\ h_{2m+1}(y_1, y_2) = \frac{\rho}{\pi} \cdot \frac{2m+1}{(y_1 + y_2)^2 + (2m+1)^2 \rho^2}. \end{cases}$$

3. Serien $R(\lambda; y_1, y_2)$.

Vi bilda enligt (9) serien

$$R(\lambda; y_1, y_2) = h_1(y_1, y_2) - \lambda h_2(y_1, y_2) + \lambda^2 h_3(y_1, y_2) - \dots$$

Här blir således

$$(16) \quad R(\lambda; y_1, y_2) = \frac{\rho}{\pi} \left[\frac{1}{(y_1 + y_2)^2 + \rho^2} - \frac{2\lambda}{(y_1 - y_2)^2 + 4\rho^2} + \dots - \frac{2m\lambda^{2m-1}}{(y_1 - y_2)^2 + (2m)^2 \rho^2} + \frac{(2m+1)\lambda^{2m}}{(y_1 + y_2)^2 + (2m+1)^2 \rho^2} - \dots \right].$$

För $|\lambda| < 1$ gäller:

$$\begin{aligned} |R(\lambda; y_1, y_2)| &\leq \frac{\rho}{\pi} \left[\frac{1}{(y_1 + y_2)^2 + \rho^2} + \frac{2|\lambda|}{(y_1 - y_2)^2 + 4\rho^2} + \frac{3|\lambda|^2}{(y_1 + y_2)^2 + 9\rho^2} + \dots \right] \\ &\leq \frac{\rho}{\pi} \left[\frac{1}{\rho^2} + \frac{|\lambda|}{2\rho^2} + \frac{|\lambda|^2}{3\rho^2} + \dots \right] = \frac{1}{\rho\pi} \left[1 + \frac{|\lambda|}{2} + \frac{|\lambda|^2}{3} + \dots \right] \\ &\leq \frac{1}{\rho\pi} [1 + |\lambda| + |\lambda|^2 + \dots] = \frac{1}{\rho\pi [1 - |\lambda|]}. \end{aligned}$$

Serien är således absolut och likformigt konvergent för alla värden på y_1 och y_2 då $|\lambda| < 1$. Funktionalekvationen (11) är således satisfierad för $|\lambda| < 1$.

På konvergenscirkeln $|\lambda| = 1$ är serien konvergent för $\lambda = +1$ och divergent för $\lambda = -1$.

4. Hjälpformel. Serien $R(\lambda; y_1, y_2)$ överförd till en definit integral.

Vid överförandet av serien $R(\lambda; y_1, y_2)$ till en definit integral använda vi den kända formeln

$$\frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} e^{-b\xi} \cos a\xi d\xi,$$

där b är positiv och ξ en reell variabel.

För $|\lambda| < 1$ var serien (16) absolut konvergent. Vi kunna då skriva den i formen

$$(16^1) \quad R(\lambda; y_1, y_2) = \\ = \frac{p}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)\lambda^{2m}}{(y_1+y_2)^2 + (2m+1)^2 p^2} - \frac{p}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m\lambda^{2m-1}}{(y_1-y_2)^2 + (2m)^2 p^2}.$$

Med användande av ovanstående hjälppformel kunna vi nu skriva

$$\frac{(2m+1)\lambda^{2m}}{(y_1+y_2)^2 + (2m+1)^2 p^2} = \frac{(2m+1)\lambda^{2m}}{(2m+1)p} \int_0^{\infty} e^{-(2m+1)p\xi} \cos(y_1+y_2)\xi d\xi = \\ = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} (\lambda e^{-p\xi})^{2m} e^{-p\xi} \cos(y_1+y_2)\xi d\xi.$$

Sålunda

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)\lambda^{2m}}{(y_1+y_2)^2 + (2m+1)^2 p^2} = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-p\xi} \cos(y_1+y_2)\xi \left[\sum_{m=0}^{\infty} (\lambda e^{-p\xi})^{2m} \right] d\xi = \\ = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \frac{e^{-p\xi} \cos(y_1+y_2)\xi}{1 - \lambda^2 e^{-2p\xi}} d\xi.$$

På samma sätt erhålles

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m\lambda^{2m-1}}{(y_1-y_2)^2 + (2m)^2 p^2} = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \frac{e^{-p\xi} \cos(y_1-y_2)\xi}{1 - \lambda^2 e^{-2p\xi}} \lambda e^{-p\xi} d\xi.$$

Vi erhålla sålunda

$$R(\lambda; y_1, y_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-p\xi}}{1 - \lambda^2 e^{-2p\xi}} [\cos(y_1+y_2)\xi - \lambda e^{-p\xi} \cos(y_1-y_2)\xi] d\xi$$

eller, efter enkla reduktioner, slutligen

$$(17) \quad R(\lambda; y_1, y_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho \xi} \left[\frac{\cos y_1 \xi \cos y_2 \xi}{1 + \lambda e^{-\rho \xi}} - \frac{\sin y_1 \xi \sin y_2 \xi}{1 - \lambda e^{-\rho \xi}} \right] d\xi.$$

Detta gäller för $|\lambda| < 1$. Vi skola nu undersöka, om integralen existerar för större område av λ . Vi undersöka således konvergensen av integralen

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\rho \xi} \left[\frac{\cos y_1 \xi \cos y_2 \xi}{1 + \lambda e^{-\rho \xi}} - \frac{\sin y_1 \xi \sin y_2 \xi}{1 - \lambda e^{-\rho \xi}} \right] d\xi.$$

Antag $\lambda = \mu + i\nu$, där $\nu = 0$. Omedelbart inses för detta fall att

$$\left| \frac{\cos y_1 \xi \cos y_2 \xi}{1 + \lambda e^{-\rho \xi}} - \frac{\sin y_1 \xi \sin y_2 \xi}{1 - \lambda e^{-\rho \xi}} \right|$$

är begränsad inom integrationsintervallet. Då vidare $e^{-\rho \xi}$ ständigt är positiv och monotont avtagande från 1 till 0, då ξ går från 0 till ∞ , samt

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho \xi} d\xi = \frac{1}{\rho},$$

är integralen I begränsad för alla värden å y_1 och y_2 . Vi kunna således inskränka vår undersökning till reella λ -värden.

$\alpha)$ $|\lambda| < 1$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\cos y_1 \xi \cos y_2 \xi}{1 + \lambda e^{-\rho \xi}} - \frac{\sin y_1 \xi \sin y_2 \xi}{1 - \lambda e^{-\rho \xi}} \right| &\leq \frac{1}{1 + \lambda e^{-\rho \xi}} + \frac{1}{1 - \lambda e^{-\rho \xi}} = \\ &= \frac{2}{1 - \lambda^2 e^{-2\rho \xi}} \leq \frac{2}{1 - \lambda^2}. \end{aligned}$$

Således

$$|I| \leq \frac{2}{1 - \lambda^2} \cdot \frac{1}{\rho}.$$

$\beta)$ $\lambda = +1$.

Då $\frac{\sin y_1 \xi \sin y_2 \xi}{1 - e^{-\rho \xi}}$ är $= 0$ för $\xi = 0$ samt för övrigt ändlig, inses att I är konvergent.

γ) $\lambda = -1$.

Vi behöva här endast undersöka

$$I_1 = \int_0^a \frac{\cos y_1 \xi \cos y_2 \xi}{e^{\rho \xi} - 1} d\xi, \text{ där } a \text{ är positiv.}$$

Sätt $e^{\rho \xi} = x$. Då blir, om vi införa $e^{\rho a} = b$:

$$I_1 = \int_1^b \frac{1}{x-1} \psi(x) dx, \text{ där } \psi(x) = \frac{\cos\left(\frac{y_1}{\rho} \log x\right) \cos\left(\frac{y_2}{\rho} \log x\right)}{\rho x}.$$

Vi observera att $\psi'(x)$ är ändlig inom intervallet 1 till b . Nu gäller att

$$\psi(x) = \psi(1) + (x-1)\psi'(\eta) = \frac{1}{\rho} + (x-1)\psi'(\eta), \text{ där } x \geq \eta \geq 1.$$

Då

$$\int_1^b \frac{dx}{\rho(x-1)} = \infty,$$

följer därav att I är *divergent*.

δ) $|\lambda| > 1$.

Om vi först antaga λ positiv, behöva vi endast undersöka

$$I_2 = \int_0^a \frac{\sin y_1 \xi \sin y_2 \xi}{e^{\rho \xi} - \lambda} d\xi,$$

där a är vald så att $e^{\rho a} > \lambda$.

Sätt $e^{\rho \xi} = x$. Då blir, om vi införa $e^{\rho a} = b$ ($b > \lambda$):

$$I_2 = \int_1^b \frac{1}{x-\lambda} \Phi(x) dx, \text{ där } \Phi(x) = \frac{\sin\left(\frac{y_1}{\rho} \log x\right) \sin\left(\frac{y_2}{\rho} \log x\right)}{\rho x}.$$

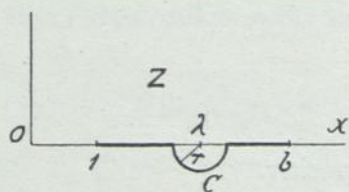


FIG. 5.

Om vi först antaga att λ har ett värde, som ligger något över den reella axeln, så förändras ej integralens värde, om integrationen sker längs den i fig. 5 angivna vägen. Därefter låta vi λ närma sig den reella axeln.

Vi få således

$$I_2 = \int_1^{\lambda-r} \frac{\Phi(x)dx}{x-\lambda} + \int_C \frac{\Phi(z)dz}{z-\lambda} + \int_{\lambda+r}^b \frac{\Phi(x)dx}{x-\lambda}.$$

Om vi införa $z = \lambda + re^{i\theta}$ blir

$$\int_C \frac{\Phi(z)dz}{z-\lambda} = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\Phi(\lambda + re^{i\theta}) r i e^{i\theta}}{r e^{i\theta}} d\theta = i \int_{\pi}^{2\pi} \Phi(\lambda + re^{i\theta}) d\theta.$$

Då r går mot 0, erhålles

$$\int_C = i\pi\Phi(\lambda).$$

Om vi i stället låta λ närma sig reella axeln från andra sidan, erhålles

$$\int_C = -i\pi\Phi(\lambda).$$

I de övriga integralerna sätta vi

$$\Phi(x) = \Phi(\lambda) + (x-\lambda)\Phi'(\eta), \quad \text{där } b \geq \eta \geq 1.$$

Då

$$\begin{aligned} \int_1^{\lambda-r} \frac{\Phi(\lambda)dx}{x-\lambda} + \int_{\lambda+r}^b \frac{\Phi(\lambda)dx}{x-\lambda} &= \Phi(\lambda) \left[\int_1^{\lambda-r} \log(\lambda-x) + \int_{\lambda+r}^b \log(x-\lambda) \right] = \\ &= \log \frac{b-\lambda}{\lambda-1} \cdot \Phi(\lambda), \end{aligned}$$

inses att I är konvergent. I är tydligen ej entydig.

Till liknande resultat kommer man, om man från början utgår ifrån att λ är negativ.

Som man lätt finner, kan integralen (17) utvecklas i potensserie efter $(\lambda - \lambda_0)$, så snart λ_0 ej ligger på den i fig. 6 markerade delen av reella axeln. Då för $|\lambda| < 1$ integralen (17) är identisk med serien (16), så följer härav, att integralen utgör en analytisk fortsättning av serien inom det angivna området av λ , d. v. s. hela planet utom reella axeln utanför $+1$ och -1 . Frågan om betydelsen av integralen, då λ ligger på denna del av reella axeln, lämna vi för tillfället öppen.

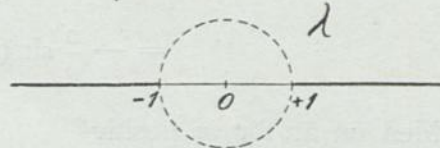


FIG. 6.

5. Lösning till den homogena integralekvationen.

Den mot ekv. (14) svarande *homogena* integralekvationen har formen

$$\nu(y_2) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(y_1) \cdot \frac{p}{\pi} \cdot \frac{1}{(y_1 + y_2)^2 + p^2} dy_1 = 0.$$

Utän att generellt ingå på frågan om lösningar till denna integralekvation konstatera vi, att för λ reell och vidare $|\lambda| \geq 1$ har den en lösning av formen:

$$\begin{aligned} 1) \quad \lambda \geq 1 & \quad \nu(\lambda; y_2) = C \sin \xi_0 y_2, & \text{där } \xi_0 = \frac{1}{p} \log \lambda, \\ 2) \quad \lambda \leq -1 & \quad \nu(\lambda; y_2) = C \cos \xi_0 y_2, & \text{där } \xi_0 = \frac{1}{p} \log (-\lambda). \end{aligned}$$

Vi verifiera detta för det fall att $\lambda \geq 1$. Om vi införa $y_1 + y_2 = z$, erhålles

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi_0 y_1) dy_1}{(y_1 + y_2)^2 + p^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[\xi_0(z - y_2)]}{z^2 + p^2} dz = \\ &= \cos(\xi_0 y_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi_0 z)}{z^2 + p^2} dz - \sin(\xi_0 y_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\xi_0 z)}{z^2 + p^2} dz = \\ &= -2 \sin(\xi_0 y_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\xi_0 z)}{z^2 + p^2} dz = \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{p} \sin(\xi_0 y_2) \int_0^{\infty} \frac{\cos(p \xi_0 u)}{u^2 + 1} du.$$

Men nu är för m positiv

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$$

och vidare är enligt definitionen $e^{-\rho \xi_0} = \frac{1}{\lambda}$. Sålunda

$$\lambda \frac{p}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi_0 y_1) dy_1}{(y_1 + y_2)^2 + p^2} = -\lambda \frac{p}{\pi} \cdot \frac{2}{p} \sin(\xi_0 y_2) \cdot \frac{\pi}{2} e^{-\rho \xi_0} = -\sin(\xi_0 y_2),$$

varav följer påståendets riktighet. På samma sätt då $\lambda \leq -1$.

IV. Annan metod för lösning av vissa integralekvationer.

En integralekvation av formen

$$(8^1) \quad \varphi(t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta + t) \varphi(\theta) d\theta = \psi(t)$$

må vara given.

I kap. II har visats, att om det existerar en funktion $R(\lambda; \theta, t)$, som satisfierar

$$(11^1) \quad R(\lambda; \theta, t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, r) f(r + t) dr = f(\theta + t),$$

så är

$$\varphi(t) = \psi(t) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, t) \varphi(\theta) d\theta$$

en lösning till (8¹), under förutsättning att de i II, 2 angivna villkoren äro uppfyllda.

För att finna en lösning till (11¹) tillgripa vi här följande metod.

Vi multiplicera (11¹) med $e^{i\xi t} dt$ och integrera från $-\infty$ till $+\infty$:

$$(18) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, t) e^{i\xi t} dt + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, r) f(r + t) dr =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta + t) e^{i\xi t} dt.$$

Om vi antaga, att vi kunna kasta om integrationsordningen i den andra termen i högra membrum, får denna term utseendet

$$\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, r) dr \int_{-\infty}^{+\infty} f(r + t) e^{i\xi t} dt.$$

Sätt i den inre integralen $r + t = u$; därav $t = u - r$ och $dt = du$. Då erhålles

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, r) dr \int_{-\infty}^{+\infty} f(r + t) e^{i\xi t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, r) dr \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\xi(u-r)} du = \\ &= \psi(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, r) e^{-i\xi r} dr, \end{aligned}$$

där

$$(19) \quad \psi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\xi u} du.$$

I enlighet härmed kunna vi skriva högra membrum i ekv. (18):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta + t) e^{i\xi t} dt = e^{-i\xi\theta} \psi(\xi).$$

Ekv. (18) kan nu skrivas i formen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, t) e^{i\xi t} dt + \lambda \psi(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, t) e^{-i\xi t} dt = e^{-i\xi\theta} \psi(\xi).$$

Ersätter man från början ξ med $-\xi$ erhålles

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, t) e^{-i\xi t} dt + \lambda \psi(-\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, t) e^{i\xi t} dt = e^{i\xi\theta} \psi(-\xi).$$

Dessa båda ekv. kunna betraktas som ett linjärt ekvationssystem med de båda integralerna som obekanta. På grund härav erhålles

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda; \theta, t) e^{i\xi t} dt = \frac{[e^{-i\xi\theta} - \lambda e^{i\xi\theta} \psi(-\xi)] \psi(\xi)}{1 - \lambda^2 \psi(\xi) \psi(-\xi)}.$$

Genom användning av Fourier's integralteorem få vi nu

$$\begin{aligned} R(\lambda; \theta, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi t} \frac{[e^{-i\xi\theta} - \lambda e^{i\xi\theta} \psi(-\xi)] \psi(\xi)}{1 - \lambda^2 \psi(\xi) \psi(-\xi)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \frac{e^{-i(\theta+t)\xi} - \lambda e^{i(\theta-t)\xi} \psi(-\xi)}{1 - \lambda^2 \psi(\xi) \psi(-\xi)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \frac{\cos(\theta+t)\xi - \lambda \psi(-\xi) \cos(\theta-t)\xi - i \sin(\theta+t)\xi - i \lambda \psi(-\xi) \sin(\theta-t)\xi}{1 - \lambda^2 \psi(\xi) \psi(-\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Vi skola nu speciellt antaga

$$\psi(\xi) = \psi(-\xi).$$

I detta fall giva sinustermerna intet bidrag till integralen, då $\sin \alpha = -\sin(-\alpha)$. Då vidare $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ kunna vi skriva

$$R(\lambda; \theta, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\xi) \frac{\cos(\theta+t)\xi - \lambda \psi(\xi) \cos(\theta-t)\xi}{1 - [\lambda \psi(\xi)]^2} d\xi,$$

eller, efter enkla reduktionen, slutligen

$$(20) \quad R(\lambda; \theta, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\xi) \left[\frac{\cos \theta \xi \sin t \xi}{1 + \lambda \psi(\xi)} - \frac{\sin \theta \xi \sin t \xi}{1 - \lambda \psi(\xi)} \right] d\xi.$$

V. Tillämpning på hyperbeln och parabeln.

A. Hyperbeln.

Vi betrakta i det följande endast hyperbelns ena bransch.

1. Bestämning av kärnan till integralekvationen (4).

En hyperbel må uttryckas i formen

$$\begin{cases} x = F \cos \alpha \cosh \sigma, \\ y = F \sin \alpha \sinh \sigma, \end{cases}$$

där F är brännpunktens avstånd från origo och α är halva öppningsvinkeln mellan asymptoterna.

Enligt ekv. (3) blir nu, då vi i stället för båglängden införa *hyperbelarean* σ ,

$$\begin{aligned} \bar{h}(\sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \operatorname{arctg} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha (\sinh \sigma_1 - \sinh \sigma_2)}{\cos \alpha (\cosh \sigma_1 - \cosh \sigma_2)} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctgh} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right), \end{aligned}$$

eller efter elementära räkningar

$$\bar{h}(\sigma_1, \sigma_2) = -\frac{\sin 2\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{e^{(\sigma_1 + \sigma_2)} + e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)} - 2 \cos 2\alpha}.$$

Om vi införa $\beta = \pi - 2\alpha$, blir

$$\bar{h}(\sigma_1, \sigma_2) = -\frac{\sin \beta}{\pi} \cdot \frac{1}{e^{(\sigma_1 + \sigma_2)} + e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)} + 2 \cos \beta}.$$

Som synes är kärnan ändlig för alla värden å σ_1 och σ_2 . Vidare är den symmetrisk i σ_1 och σ_2 . Integralekvationerna (4) och (7) bliva således i detta fall identiska.

Om vi välja »innersidan» av kurvan till positiv sida, blir integrationsriktningen den i fig. 7 angivna. Gränserna bliva $+\infty$ till $-\infty$ och integralekvationen får formen

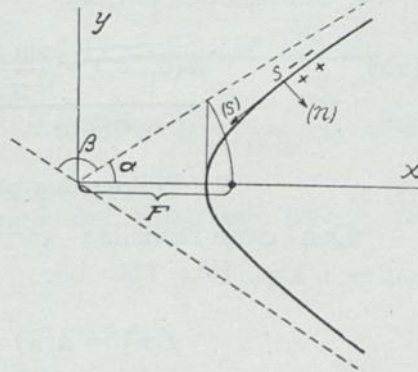


FIG. 7.

$$\nu(\sigma_2) - \lambda \int_{+\infty}^{-\infty} \nu(\sigma_1) \cdot \frac{\sin \beta}{\pi} \cdot \frac{1}{e^{(\sigma_1 + \sigma_2)} + e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)} + 2 \cos \beta} d\sigma_1 = \psi(\sigma_2)$$

eller

$$(21) \quad \nu(\sigma_2) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(\sigma_1) \cdot \frac{\sin \beta}{\pi} \cdot \frac{1}{e^{(\sigma_1 + \sigma_2)} + e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)} + 2 \cos \beta} d\sigma_1 = \psi(\sigma_2),$$

vilken är den integralekvation vi skola lösa. Om gränserna tagas $-\infty$ till $+\infty$, blir således kärnan

$$(22) \quad h(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\sin \beta}{\pi} \cdot \frac{1}{e^{(\sigma_1 + \sigma_2)} + e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)} + 2 \cos \beta}.$$

2. Tillämpning på hyperbeln av metoden i kap. IV.

Den ovan erhållna kärnan (22) är tydligen av den form, som förut-sattes i kap. IV. Här blir

$$f(u) = h(u) = \frac{\sin \beta}{\pi} \cdot \frac{1}{e^u + e^{-u} + 2 \cos \beta},$$

där vi observera att $h(u) = h(-u)$.

Sålunda erhålles enl. (19)

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \frac{\sin \beta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi u}}{e^u + e^{-u} + 2 \cos \beta} du = \\ &= \frac{\sin \beta}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \xi u}{e^u + e^{-u} + 2 \cos \beta} du + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi u}{e^u + e^{-u} + 2 \cos \beta} du \right] = \\ &= \frac{2 \sin \beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi u}{e^u + e^{-u} + 2 \cos \beta} du. \end{aligned}$$

Nu är

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos qx}{e^x + e^{-x} + 2 \cos p} dx = \frac{\pi}{2 \sin p} \cdot \frac{e^{pq} - e^{-pq}}{e^{pq} - e^{-pq}} \quad {}^1) \text{ (där } p \leq \pi).$$

¹⁾ Jfr D. BIERENS DE HAAN, Tables d'Intégrales Définies (Verh. d. Kon. Akad. v. Wetensch., IV Deel, Amsterdam 1858), sid. 381. Integralen har behandlats av POISSON samt av SCHELLBACH (Crelles Journal, Bd. 48, sid. 232).

Sålunda blir

$$\psi(\xi) = \frac{e^{\beta\xi} - e^{-\beta\xi}}{e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi}}.$$

Då tydligen

$$\psi(\xi) = \psi(-\xi),$$

erhålles slutligen enl. (20)

$$R(\lambda; \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{\beta\xi} - e^{-\beta\xi}}{e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi}} \left[\frac{\cos \sigma_1 \xi \cos \sigma_2 \xi}{1 + \lambda \frac{e^{\beta\xi} - e^{-\beta\xi}}{e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi}}} - \frac{\sin \sigma_1 \xi \sin \sigma_2 \xi}{1 - \lambda \frac{e^{\beta\xi} - e^{-\beta\xi}}{e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi}}} \right] d\xi.$$

För studiet av denna integral konstatera vi, att funktionen $\frac{e^{\beta\xi} - e^{-\beta\xi}}{e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi}}$ alltid är positiv inom integrationsintervallet samt monotont avtagande från $\frac{\beta}{\pi}$ till 0, då ξ går från 0 till $+\infty$. (β alltid $< \pi$).

Då

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\rho x} - e^{-\rho x}}{e^{qx} - e^{-qx}} dx = \frac{\pi}{2q} \operatorname{tg} \frac{\rho\pi}{2q} \quad (1) \quad (\text{där } q > \rho),$$

gäller vidare

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\beta\xi} - e^{-\beta\xi}}{e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi}} d\xi = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

Genom ett liknande förfarande som å sid. 402 och följande finner man, att för $\lambda = \mu + i\nu$ (där $\nu \neq 0$) $R(\lambda; \sigma_1, \sigma_2)$ är konvergent,

- | | |
|--|--------------------------------|
| » » $ \lambda < \frac{\pi}{\beta}$ | » » » , |
| » » $\lambda = +\frac{\pi}{\beta}$ | » » » , |
| » » $\lambda = -\frac{\pi}{\beta}$ | » » divergent, |
| » » $\lambda > \frac{\pi}{\beta}$ och $\lambda < -\frac{\pi}{\beta}$ | » » konvergent men ej entydig. |

¹⁾ Jfr BIERENS DE HAAN, loc. cit. sid. 78.

Den homogena integralekvationen

$$\nu(\sigma_2) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(\sigma_1) \cdot \frac{\sin \beta}{\pi} \cdot \frac{1}{e^{(\sigma_1 + \sigma_2)} + e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)} + 2 \cos \beta} d\sigma_1 = 0$$

har för λ reell och vidare $|\lambda| \geq \frac{\pi}{\beta}$ en lösning av formen:

$$\begin{aligned} 1) \lambda \geq \frac{\pi}{\beta} \quad \nu(\lambda; \sigma_2) &= C \sin \xi_0 \sigma_2, \text{ där } \xi_0 \text{ reella roten till } \frac{e^{\pi \xi_0} - e^{-\pi \xi_0}}{e^{\beta \xi_0} - e^{-\beta \xi_0}} = \lambda, \\ 2) \lambda \leq -\frac{\pi}{\beta} \quad \nu(\lambda; \sigma_2) &= C \cos \xi_0 \sigma_2, \quad \gg \quad \xi_0 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \text{d:o} = -\lambda. \end{aligned}$$

B. Parabeln.

Enligt ekv. (15) har kärnan formen

$$h(y_1, y_2) = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{1}{(y_1 + y_2)^2 + p^2}.$$

Denna kärna är tydligen av den form, som förutsattes i kap. IV. Här blir

$$f(u) = h(u) = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{1}{u^2 + p^2}.$$

Enligt (19) blir då

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \frac{p}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi u}}{u^2 + p^2} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i p \xi v}}{\left(\frac{u}{p}\right)^2 + 1} \frac{du}{p} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i p \xi v}}{v^2 + 1} dv = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos p \xi v + i \sin p \xi v)}{v^2 + 1} dv = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos p \xi v}{v^2 + 1} dv. \end{aligned}$$

Men nu är

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-m} & \text{då } m \text{ är positiv,} \\ \frac{\pi}{2} e^m & \gg m \gg \text{ negativ.} \end{cases}$$

Sålunda erhålles

$$\psi(\xi) = \begin{cases} e^{-\lambda\xi} & \text{då } \xi \text{ är positiv,} \\ e^{\lambda\xi} & \text{» } \xi \text{ » negativ.} \end{cases}$$

Då tydligen

$$\psi(\xi) = \psi(-\xi),$$

erhålles slutligen enligt (20)

$$R(\lambda; y_1, y_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda\xi} \left[\frac{\cos y_1 \xi \cos y_2 \xi}{1 + \lambda e^{-\lambda\xi}} - \frac{\sin y_1 \xi \sin y_2 \xi}{1 - \lambda e^{-\lambda\xi}} \right] d\xi.$$

Denna resolventkärna är identisk med den vi förut på annat sätt funnit [ekv. (17)].

ALLMÄNNA EGENSKAPER HOS ETT SYSTEM PARALLELLA LEDNINGAR MED VARIABLA KONSTANTER

AV

H. PLEIȚEL.

För en homogen enkelledning har man vid stationär sinusström följande relationer mellan spänningar och strömmar vid ledningens ändpunkter:

$$(1) \quad \begin{cases} v_1 = A \cdot v_2 + B \cdot i_2 \\ i_1 = C \cdot v_2 + A \cdot i_2 \end{cases}$$

där v_1 och i_1 äro vektorer för resp. spänning och ström vid ledningens ena ända samt v_2 och i_2 samma storheter vid den andra ändan av ledningen. Strömstyrkan räkna vi då positiv i riktning från den med 1 betecknade ändan mot den andra.

Konstanterna A , B och C äro dock icke oberoende av varandra utan äro som bekant sammanbundna av relationen:

$$(2) \quad A^2 - BC = 1$$

Samma ekvationssystem (1) och (2) gälla även för en homogen dubbelledning, vars branscher äro fullkomligt lika; v_1 och v_2 betyda då vektorerna för spänningsdifferensen mellan branscherna och i_1 och i_2 vektorerna för strömmarna i den ena branschen.

I ekvationssystem (1) hava vi på grund av relationen (2) endast tvenne oberoende konstanter. Man kan därför lämpligare skriva ekvationssystemet under formen:

$$(3) \quad \begin{cases} v_1 = I \cdot i_1 - A \cdot i_2 \\ v_2 = A \cdot i_1 - I \cdot i_2 \end{cases}$$

Koefficienten A har här naturligtvis en helt annan betydelse än i ekvationssystem (1).

Ekvationssystem (1) gäller för en homogen ledning. För en ledning som är sammansatt av olika homogena ledningar måste man erhålla ännu en oberoende konstant, när den sammansatta ledningen icke är symmetrisk med avseende på sin mittpunkt. Ty ekvationssystem (3) ändras icke, om vi byta ledningarnas båda ändpunkter och låta alla strömmar byta tecken, vilket måste vara fallet vid en osymmetrisk ledning. Ekvationssystem (3) gäller sålunda för en ledning, som förhåller sig lika från båda ändpunkterna.

För en sammansatt ledning har Breisig¹ funnit att följande relationer gälla:

$$(4) \quad \begin{cases} v_1 = A \cdot v_2 + B \cdot i_2 \\ i_1 = C \cdot v_2 + D \cdot i_2 \end{cases}$$

med sambandet:

$$(5) \quad AD - BC = 1$$

mellan koefficienterna.

Här äro endast tre av koefficienterna oberoende av varandra. För att endast få med av varandra oberoende koefficienter i likhetssystemet skriver man detsamma lämpligen på formen:²

$$(6) \quad \begin{cases} v_1 = I_1 \cdot i_1 - A \cdot i_2 \\ v_2 = A \cdot i_1 - I_2 \cdot i_2 \end{cases}$$

I_1 och I_2 äro isolationsimpedanserna uppmätta från ledningens båda ändar.

Beteckna vi motsvarande kortslutningsimpedanser med R_1 och R_2 , finner man lätt, att man har sambandet:

$$(7) \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{I_1}{I_2}$$

En annan egenskap hos den sammansatta ledningen har Franke³ påvisat. Han har nämligen funnit, att den så kallade reciprocitetslagen är gällande för ledningens båda ändar. En elektromotorisk kraft anbragt vid ena ändan av ledningen åstadkommer en ström vid den andra ändan, som är lika med den som skulle erhållas vid den första ändan, om elektromotoriska kraften vore placerad vid den andra.

De relationer och egenskaper, som ovan framhållits, hänföra sig till stationära sinusströmmar. Men de gälla naturligtvis även för stationär lik-

¹ F. BREISIG: Theoretische Telegraphie, sid. 295, 1910.

² H. PLEIJEL: Högspänd växelströms inverkan på närliggande telegraf- och telefonledningar, Stockholm 1906.

³ A. FRANKE: E. T. Z., 1891, sid. 461.

ström. Man har endast att i alla ekvationer införa $\omega = 0$, där ω är vinkel-frekvensen för sinusströmmen för att få fram de ekvationer, som gälla i detta fall. Beteckningarna v och i betyda då de verkliga spänningarna och strömmarna i stället för vektorer.

Man kan utsträcka relationerna även till det icke stationära tillståndet, i det att man ersätter $j\omega$ i vektorsekvationerna med operatoren p , som då har betydelsen av en differentiator med avseende på tiden. Även i detta fall betyda v och i de verkliga strömmarna och spänningarna.

Vill man icke stödja sig på operator-kalkyl, kan man utgå ifrån, att relationerna gälla för sinusformade strömmar. Och det variabla tillståndet kan alltid tänkas sammansatt av en summa sinussvängningar, enär en godtycklig funktion alltid kan framställas såsom en summa sinusfunktioner antingen i form av en Fouriers integral eller vid periodiska funktioner av en Fouriers serie.

Det ligger nu nära till hands att antaga, att de allmänna relationer, som äga rum vid en ledning, vilken på ett godtyckligt sätt är sammansatt av homogena ledningar, även skola gälla för en fullkomligt inhomogen ledning, en ledning alltså, hos vilken alla konstanterna variera längs ledningen. Vi skola också i det följande se, att så är förhållandet. Såsom en dylik fullkomligt inhomogen ledning kan man åtminstone i en första approximation anse återledningen genom skenorna vid elektrisk järnväg på grund av den utefter ledningen variabla läckningen. (Approximationen hänför sig till den omständigheten att motstånd och induktans hos skenledningen även bero på strömstyrkan.)

En annan utvidgning av relationerna för en enkelledning erhålles vid ett system parallella ledningar. Såsom ovan blivit nämnt, kan en symmetrisk dubbelledning alltid behandlas såsom en enkelledning. Är däremot dubbelledningen osymmetrisk i ett eller annat avseende, måste en allmännare teori användas. Vid telefonledningar bero uppkommande störningar ofta på bristande symmetri. På annat ställe har en undersökning blivit utförd angående de störningar, som uppkomma på grund av speciella fel, men som även osymmetri ger upphov till störningar torde det vara lämpligt att även mer generellt behandla ledningssystem bestående av tvenne olika ledningar.

På samma sätt kan en fullt balanserad symmetrisk trefasledning behandlas såsom en enkelledning. Men är belastningen i de tre faserna olika, hjälper det ej att trefasledningen är symmetrisk, utan man måste räkna åtminstone med två ledningar.

Vidare ha vi i de vanliga telefonkablarna exempel på ledningssystem bestående av parallella ledningar. Visserligen söker man ordna så, att de olika ledningarna i kabeln bliva oberoende av varandra, men i regel kan detta icke fullt uppfyllas, utan man får överhörning mellan ledningarna. Även vid kablar för telegrafändamål har man att taga hänsyn till induktionen mellan de olika ledningarna, vilken induktion kan bliva så stark, att den är ett allvarsamt hinder för telegraferingen.

Vi ställa oss nu uppgiften att bestämma de relationer, som bestå mellan spänningar och strömmar vid ändpunkterna av ett system parallella ledningar. För att få fullt generella resultat antaga vi dessutom, att ledningarnas konstanter — motstånd, induktans, kapacitet och läckningskoefficient — äro funktioner av avståndet x från ledningarnas ena ändpunkt. Dessa funktioner kunna vi utan att göra någon inskränkning antaga vara kontinuerliga samt hava derivator upp till ordningen $2s$, om s är antalet ledningar. Ledningarnas längd beteckna vi med l och räkna strömstyrkorna positiva från $x = 0$ mot $x = l$. Ledningarna antagas vara enkelledningar parallella med marken, vars potential väljes till nollpotential.

Till en början beteckna vi ledningarna med n:r 1, 2, 3 . . . s . Strömstyrka, spänning och laddning per km hos den n^{te} ledningen låta vi vara resp. i_n , v_n och q_n . På samma sätt beteckna vi motstånd, induktans, kapacitet och läckningskoefficient, allt per km hos den n^{te} ledningen, med r_n , l_n , c_n och a_n . Ömsesidiga induktionskoefficienten per km mellan ledningarna m och n låta vi vara m_{mn} , läckningskoefficienten mellan dem a_{mn} och kapacitetskoefficienten c_{mn} .

För att få fullt generella formler gällande för variabla ström- och spänningstillstånd skola vi begagna oss av Heavisides operatoralkyl, dock endast i det avseendet, att vi betrakta en derivation med avseende på tiden såsom en operator p , vilken vi under våra räkningar betrakta såsom en konstant. Däremot skola vi icke i det följande ingå på utförandet av operatorräkningen, enär detta ställer sig olika i olika specialfall, utan hänvisa till en uppsats i Teknisk tidskrift år 1914 sid. 50 för behandling av sådana speciella problem.

De erhållna formlerna gälla emellertid direkt för stationär likström, om man överallt sätter $p = 0$ och för stationär sinusström, om man ersätter p med $j\omega$, där ω är sinusströmmens vinkelfrekvens. I sista fallet blir dock v och i icke spänning och ström utan deras komplexa vektorer.

För den n^{te} ledningen ha vi nu följande ekvationer:

$$(8) \quad -\frac{dv_n}{dx} = (r_n + pl_n) i_n + pm_{n1} i_1 + pm_{n2} i_2 + \dots$$

$$(9) \quad -\frac{di_n}{dx} = p \cdot q_n + a_n v_n + a_{n1} (v_n - v_1) + \dots$$

$$(10) \quad q_n = c_{n1} v_1 + c_{n2} v_2 + \dots$$

Den första av dessa likheter anger enligt Ohmska lagen spänningsfallet per längdenhet; den andra erhålles ur kontinuitetsekvationen för elektrisk laddning, och den sista anger sambandet mellan laddningar och spänningar i överensstämmelse med Maxwells bekanta relationer för elektrostatiska fält.

Alla koefficienter äro funktioner av x . Dessutom ha vi relationerna

$$m_{nn} = m_{nn}; \quad a_{mn} = a_{nm}.$$

Införes q_n ur ekv. (10) i (9), erhållas tvenne ekvationer, som kunna sättas under formen:

$$(11) \quad -\frac{dv_n}{dx} = a_{n1} i_1 + a_{n2} i_2 + \dots$$

$$(12) \quad -\frac{di_n}{dx} = \beta_{n1} v_1 + \beta_{n2} v_2 + \dots$$

Genom att låta n genomlöpa alla heltals värden från $n = 1$ till $n = s$ få vi sålunda inalles $2s$ linjära homogena differentialekvationer av första ordningen.

Mellan koefficienterna ha vi relationerna.

$$(13) \quad \begin{cases} a_{mn} = a_{nm} \\ \beta_{mn} = \beta_{nm} \end{cases}$$

Derivera vi ekvationerna (11) och (12) $2s - 1$ gånger, erhålles i allt $(2s)^2$ linjära och homogena ekvationer mellan alla v och i samt deras derivator upp till ordningen $2s$. Betrakta vi dessa med undantag av i_n och dess derivator såsom obekanta, få vi $(2s + 1)(2s - 1) = (2s)^2 - 1$ obekanta mellan $(2s)^2$ ekvationer av första graden. Elimineras dessa obekanta få vi såsom resultat en homogen och linjär differentialekvation av ordningen $2s$ för strömstyrkan i_n . En dylik ekvation har som bekant $2s$ av varandra oberoende integraler, och allmänna lösningen till ekvationen erhålles genom att multiplicera dessa integraler med arbiträra konstanter och bilda deras summa.

Mellan $(2s)^2 - 1$ av ekvationerna kunna vi eliminera $(2s)^2 - 2$ av de

obekanta; välja vi att eliminera samma obekanta som ovan med undantag av t. ex. i_m , få vi, att i_m blir uttryckt homogent och linjärt i i_n och alla i_n 's derivator. På så sätt kunna vi uttrycka alla strömstyrkor och spänningar såsom linjära och homogena uti en viss av strömstyrkorna t. ex. i_n och dess derivator upp till den $2s$ 'te.

Mot varje integral till i_n få vi sålunda motsvarande integraler till de övriga strömmarna och till spänningarna. Vi få sålunda tillsammans $2s$ stycken system integraler till våra ursprungliga $2s$ differentialekvationer. I allmänhet erbjuder det naturligtvis mycket stora svårigheter att erhålla dessa integraler, och endast i mycket få specialfall kan man få dem under form av kända funktioner. Det enklaste fallet inträffar, då alla α_{mn} och β_{mn} äro konstanter. Ledningarna äro i detta fall samtliga homogena. Differentialekvationen för i_n har då alla sina koefficienter konstanta, och integralerna bliva av formen $e^{\gamma x}$, där γ är rot till en ekvation av graden $2s$. I detta fall inträder dessutom den förenklingen, att endast jämna derivator förekomma i differentialekvationen för i_n . Derivera vi nämligen (12) och insätta på höger sida derivatorna för v ur de ekvationer, som svara mot (11), få vi inalles s ekvationer endast innehållande strömstyrkorna och så beskaffade, att vi på vänster sida hava enbart andra derivatan av en av strömmarna och på höger sida ett linjärt och homogent uttryck i alla strömmarna.

Den ekvation, som bestämmer värdena på γ , blir då en ekvation av s 'te graden i γ^2 .

Vi återgå nu till det allmänna fallet. Vi utvälja tvenne system integraler, det ena med integralerna $h_n(x)$ för strömstyrkorna och $f_n(x)$ för spänningarna och det andra med integralerna $k_n(x)$ för strömmarna och $g_n(x)$ för spänningarna.

Ur ekvation (11) få vi då:

$$-\frac{df_n}{dx} = \alpha_{n1} h_1 + \alpha_{n2} h_2 + \dots$$

och

$$-\frac{dg_n}{dx} = \alpha_{n1} k_1 + \alpha_{n2} k_2 + \dots$$

Den första av dessa likheter multiplicera vi med k_n och den andra med h_n samt subtrahera. Man erhåller då:

$$-\left[k_n \frac{df_n}{dx} - h_n \frac{dg_n}{dx} \right] = \alpha_{n1} [h_1 k_n - h_n k_1] + \alpha_{n2} [h_2 k_n - k_2 h_n] + \dots$$

Summera vi alla dylika ekvationer, vilka erhållas genom att låta n antaga alla heltalsvärden från 1 till s , blir högra membrum lika med noll. Ty en koefficient a_{nm} förekommer här två och endast två gånger, den ena gången multiplicerad med $h_m k_n - k_m h_n$ och den andra gången med $h_n k_m - h_m k_n$; vi hava nämligen $a_{nm} = a_{mn}$. Koefficienten för a_{nm} , när n och m äro olika blir alltså noll. Koefficienten för a_{nn} är identiskt noll. Vi få därför relationen:

$$\sum_{n=1}^s \left[k_n \frac{df_n}{dx} - h_n \frac{dg_n}{dx} \right] = 0.$$

Tillämpa vi samma resonemang på ekvation (12), få vi:

$$\sum_{n=1}^s \left[f_n \frac{dk_n}{dx} - g_n \frac{dh_n}{dx} \right] = 0.$$

Adderas dessa båda likheter, få vi slutligen:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \sum_{n=1}^s [k_n f_n - h_n g_n] \right\} = 0$$

eller

$$(14) \quad \sum_{n=1}^s [k_n f_n - h_n g_n] = C,$$

där C är oberoende av x .

Vi återgå nu till den allmänna lösningen för i_n . Denna lösning innehöll $2s$ stycken arbiträra konstanter. I stället för dessa kunna vi införa strömstyrkorna vid ledningarnas båda ändpunkter. För tillfället införa vi beteckningarna i_{n0} och i_{nl} för strömstyrkan i_n , när vi sätta x resp. lika med noll och lika med l .

Vi hava s stycken strömstyrkor, vilka äro linjära och homogena i de $2s$ arbiträra konstanterna. Sätta vi därför in $x = 0$ och $x = l$ i de likheter, som bestämma strömstyrkorna, få vi $2s$ likheter mellan de $2s$ arbiträra konstanterna. Dessa konstanter bliva sålunda linjära och homogena i strömstyrkorna vid ledningarnas ändpunkter. Införas de ur konstantbestämningen erhållna värdena på konstanterna, få vi slutligen alla strömmar och alla spänningar linjära och homogena i strömmarna vid ändpunkterna med koefficienter, som äro funktioner av x och ρ . Dessa strömstyrkor vid ändpunkterna kunna väljas godtyckligt.

I stället för strömstyrkorna vid båda ändpunkterna kan man naturligtvis välja spänningarna och strömmarna vid en av ledningarnas ändpunkter.

På grund av vad ovan blivit sagt kunna vi nu skriva:

$$(15) \quad \begin{cases} i_n = h_{n1} \cdot i_{10} + k_{n1} \cdot i_{1l} + h_{n2} \cdot i_{20} + k_{n2} \cdot i_{2l} + \dots \\ v_n = f_{n1} \cdot i_{10} + g_{n1} \cdot i_{1l} + f_{n2} \cdot i_{20} + g_{n2} \cdot i_{2l} + \dots \end{cases}$$

Koefficienterna för i_{10} bilda nu ett lösningssystem, likaså koefficienterna för i_{20} etc.

Vi kunna därför tillämpa relation (14) på tvenne dylika lösningssystem och få då följande olika typer:

$$(16) \quad \sum_{n=1}^s [h_{n1} g_{n1} - k_{n1} f_{n1}] = C$$

$$(17) \quad \sum_{n=1}^s [h_{n1} f_{n2} - h_{n2} f_{n1}] = C$$

$$(18) \quad \sum_{n=1}^s [h_{n1} g_{n2} - k_{n2} f_{n1}] = C$$

$$(19) \quad \sum_{n=1}^s [k_{n1} g_{n2} - k_{n2} g_{n1}] = C$$

Av den första av ekvationerna i (15) få vi, enär för $x = 0$ i_n måste övergå i i_{n0} :

$$h_{nn}(0) = 1 \quad h_{nm}(0) = 0 \quad k_{nm}(0) = 0 \quad k_{nn}(0) = 0$$

På samma grund måste för $x = l$:

$$h_{nn}(l) = 0 \quad h_{nm}(l) = 0 \quad k_{nm}(l) = 0 \quad k_{nn}(l) = 1.$$

Sätta vi i (16) $x = 0$ få vi:

$$g_{11}(0) = C$$

och om vi sätta $x = l$:

$$-f_{11}(l) = C$$

alltså måste vi hava:

$$g_{11}(0) = -f_{11}(l)$$

eller allmännare:

$$(20) \quad g_{nn}(0) = -f_{nn}(l)$$

Införa vi $x = 0$ i (17), erhålles:

$$f_{12}(0) - f_{21}(0) = C$$

och för $x = l$:

$$0 = C$$

alltså måste vidare:

$$f_{12}(0) = f_{21}(0)$$

eller allmänt:

$$(21) \quad f_{nm}(0) = f_{mn}(0)$$

Insätts $x = 0$ och $x = l$ i (18), få vi följande tvenne relationer:

$$\begin{aligned} g_{12}(0) &= C \\ -f_{21}(l) &= C \end{aligned}$$

alltså

$$g_{12}(0) = -f_{21}(l)$$

eller allmänt:

$$(22) \quad g_{nm}(0) = -f_{mn}(l)$$

Insätta vi slutligen $x = 0$ och $x = l$ i (19), få vi:

$$\begin{cases} 0 = C \\ g_{12}(l) - g_{21}(l) = C \end{cases}$$

eller

$$g_{12}(l) = g_{21}(l)$$

eller allmänt:

$$(23) \quad g_{nm}(l) = g_{mn}(l)$$

Föras de erhållna relationerna ihop, få vi följande samband mellan konstanterna:

$$(24) \quad \begin{cases} g_{nm}(0) = -f_{mn}(l) \\ g_{nm}(0) = -f_{mn}(l) \\ f_{nm}(0) = f_{mn}(0) \\ g_{nm}(l) = g_{mn}(l) \end{cases}$$

Införa vi nu $x = 0$ och $x = l$ i andra ekvationen i (15) och begagna oss av relationerna (24), få vi slutligen:

$$(25) \quad \begin{cases} v_{no} = f_{n1}(0) \cdot i_{10} - f_{1n}(l) \cdot i_{1l} + f_{n2}(0) \cdot i_{20} - f_{2n}(l) \cdot i_{2l} + \dots \\ v_{nl} = f_{n1}(l) \cdot i_{10} + g_{n1}(l) \cdot i_{1l} + f_{n2}(l) \cdot i_{20} + g_{n2}(l) \cdot i_{2l} + \dots \end{cases}$$

För att tydligare se den lag, som koefficienterna följa, skriva vi upp ekvationerna för $n = 1$ och $n = 2$:

$$(26) \quad \begin{cases} v_{10} = f_{11}(0) \cdot i_{10} - f_{11}(l) \cdot i_{1l} + f_{12}(0) \cdot i_{20} - f_{21}(l) \cdot i_{2l} + \dots \\ v_{1l} = f_{11}(l) \cdot i_{10} + g_{11}(l) \cdot i_{1l} + f_{12}(l) \cdot i_{20} + g_{12}(l) \cdot i_{2l} + \dots \\ v_{20} = f_{21}(0) \cdot i_{10} - f_{12}(l) \cdot i_{1l} + f_{22}(0) \cdot i_{20} - f_{22}(l) \cdot i_{2l} + \dots \\ v_{2l} = f_{21}(l) \cdot i_{10} + g_{21}(l) \cdot i_{1l} + f_{22}(l) \cdot i_{20} + g_{22}(l) \cdot i_{2l} + \dots \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{cases}$$

På grund av relationerna (24) framgår, att koefficienterna på höger sida i (26) ha den egenskapen, att den determinant de bilda blir symmetrisk, om blott tecknet ändras i alla horisontalrader med jämnt ordningsnummer uppifrån räknat.

Vidare framgår av uttryck (26), att vi med endast en ledning få en relation av samma form som (6).

Ekvationssystem (6) är således även gällande för en ledning, hos vilken konstanterna variera utefter ledningens längd.

Vi hava visserligen antagit, att motstånd, induktans etc. voro kontinuerliga funktioner av x med derivator av viss ordning. Skulle emellertid diskontinuiteter äga rum i en viss punkt, gäller ekvationssystemet (6) för de delar av ledningen, som ligga på var sin sida om punkten. Genom att eliminera ström och spänning i diskontinuitetspunkten mellan de fyra likheterna för delarna få vi fram, såsom man lätt inser, två nya ekvationer av samma utseende som (6), sammanbindande spänningar och strömmar vid ändpunkterna av det sammansatta stycket. På samma sätt får man vid flere diskontinuitetspunkter.

Ekvationssystem (6) är således giltigt för en godtycklig inhomogen ledning.

Som (7) är en direkt följsats av (6), måste relation (7) även vara gällande för en på ett godtyckligt sätt inhomogen ledning.

Vi återgå nu till det generella ekvationssystemet och införa nya beteckningar för att få större symmetri. Spänning och ström vid $x = 0$ hos den första ledningen beteckna vi med v_1 och i_1 samt i punkten $x = l$ med v_2 och i_2 .

För den andra ledningen låta vi v_3 och i_3 vara spänning och ström vid $x = 0$ samt v_4 och i_4 motsvarande storheter vid $x = l$, etc.

Det generella ekvationssystemet får då formen:

$$(27) \quad \begin{cases} v_1 = b_{11}i_1 + b_{12}i_2 + b_{13}i_3 + b_{14}i_4 \\ -v_2 = b_{21}i_1 + b_{22}i_2 + b_{23}i_3 + b_{24}i_4 \\ v_3 = b_{31}i_1 + b_{32}i_2 + b_{33}i_3 + b_{34}i_4 \\ -v_4 = b_{41}i_1 + b_{42}i_2 + b_{43}i_3 + b_{44}i_4 \end{cases}$$

Här är $b_{mn} = b_{nm}$.

Determinanten på höger sida är således symmetrisk, och i ett system av s stycken ledningar få vi $\frac{1}{2}(2s)^2 + s = s(2s+1)$ oberoende konstanter.

Koefficienternas egenskaper.

Såsom förut blivit nämnt möter beräkningen av konstanterna i detta ekvationssystem i regel stora svårigheter.

Däremot framgår det omedelbart av (27), vilken fysisk betydelse de olika konstanterna hava, och huru man bör gå tillväga för att bestämma dem genom mätning.

Isoleras alla ledningarna vid båda ändar utom första ledningens ändpunkt $x = 0$, erhålles:

$$v_1 = b_{11}i_1.$$

b_{11} är sålunda tomgångs- eller isolationsmotståndet hos första ledningen. På samma sätt få vi, att allmänt b_{nn} är isolationsmotståndet hos den n^{te} ledningen. Vid udda n är uppmätningen gjord från $x = 0$, vid jämna n från $x = l$.

Med samma anordning få vi:

$$\begin{aligned} -v_2 &= b_{21} \cdot i_1 \\ v_3 &= b_{31} \cdot i_1 \\ -v_4 &= b_{41} \cdot i_1 \end{aligned}$$

Koefficienterna b_{21} , b_{31} etc. erhållas sålunda genom att mäta spänningen vid de isolerade ändarna. Vid sinusformade strömmar och spänningar är det naturligtvis icke tillräckligt att mäta amplituden hos dessa konstanter utan även deras fasvinklar.

Egenskaper hos en av systemets ledningar.

Sätta vi $i_3 = i_4 = 0$ och $v_2 = 0$, få vi ur den andra ekvationen:

$$0 = b_{21}i_1 + l_{22}i_2$$

Isoleras man därför alla ledningar utom den första, och jordförbindes denna ledning vid $x = l$, ger förhållandet mellan utgående och framkommande ström $-\frac{b_{22}}{b_{21}}$; är b_{21} bekant, få vi då b_{22} . På samma sätt erhålles b_{44} ,

b_{66} etc.

Isoleras alla ledningar utom den första, och jordförbindes denna vid $x = l$, får man ekvationssystemet:

$$\begin{cases} v_1 = b_{11}i_1 + b_{12}i_2 \\ 0 = b_{21}i_1 + b_{22}i_2 \end{cases}$$

Eliminera vi här i_2 , erhålles:

$$v_1 = i_1 \cdot \left[b_{11} - \frac{b_{12}^2}{b_{22}} \right]$$

Kortslutningsmotståndet hos första ledningen, när alla de övriga äro isolerade, blir alltså:

$$R_1 = b_{11} - \frac{b_{12}^2}{b_{22}}$$

Å andra sidan hade vi isolationsmotståndet under samma förhållanden:

$$I_1 = b_{11}$$

Hade uppmätningen skett från första ledningens andra ändpunkt hade vi under samma förhållanden fått

$$\begin{aligned} R_2 &= - \left(b_{22} - \frac{b_{21}^2}{b_{11}} \right) \\ I_2 &= - b_{22} \end{aligned}$$

Genom multiplikation få vi

$$I_1 R_2 = I_2 R_1$$

eller

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Vi se alltså, att relation (7) gäller för en av ledningarna i ett parallellt ledningssystem, när alla övriga ledningar äro isolerade. Såsom vi senare skola se, är dock denna lag av betydligt större giltighet.

Först skola vi emellertid undersöka, om vårt ekvationssystem (27) förlorar sin allmängiltighet, när tvenne ledningar hopföras till en dubbelledning. Vi välja ledningarna 1 och 2. I stället för spänningen till jord vid ändpunkterna införa vi spänningsskillnaden mellan ledningarna. Vi beteckna $v_1 - v_3$ med V_1 och $v_2 - v_4$ med V_2 . Vidare ha vi

$$\begin{aligned} i_3 &= -i_1 \\ \text{och } i_2 &= -i_4 \end{aligned}$$

Kalla vi koefficienterna i det nya ekvationssystemet d_{nm} , och begränsa vi oss till totalt 3 enkelledningar, få vi ur ekvationssystem (27):

$$(28) \quad \begin{cases} V_1 = d_{11}i_1 + d_{12}i_2 + d_{15}i_5 + d_{16}i_6 \\ -V_2 = d_{21}i_1 + d_{22}i_2 + d_{25}i_5 + d_{26}i_6 \\ v_6 = d_{51}i_1 + d_{52}i_2 + d_{55}i_5 + d_{56}i_6 \\ -v_6 = d_{61}i_1 + d_{62}i_2 + d_{65}i_5 + d_{66}i_6 \end{cases}$$

Här äro:

$$\begin{aligned} d_{11} &= b_{11} - 2b_{13} + b_{33} \\ d_{12} &= b_{12} - b_{14} - b_{32} + b_{34} = d_{21} \\ d_{22} &= b_{22} - 2b_{24} + b_{44} \\ d_{15} &= b_{15} - b_{35} = d_{51} \\ d_{16} &= b_{16} - b_{36} = d_{61} \\ d_{25} &= b_{25} - b_{45} = d_{52} \\ d_{26} &= b_{26} - b_{46} = d_{62} \\ d_{56} &= b_{56} = d_{65} \\ d_{55} &= b_{55} \\ d_{66} &= b_{66} \end{aligned}$$

Determinanten av koefficienterna på höger sida i ekvationssystemet (28) är alltså symmetrisk, och ekvationssystemet (27) har sålunda icke ändrad karaktär därigenom, att två av ledningarna slagits ihop till en dubbelledning. Vi hade visserligen dels endast tillämpat beräkningen på tre ledningar och dels endast bildat en dubbelledning. Klart framgår emellertid av det sätt, på vilket de nya koefficienterna bildats, att giltigheten fortfar, även om man har ett godtyckligt antal ledningar och hopför ett godtyckligt antal av dem två och två till dubbelledningar.

Såsom ett korollarium av denna sats följer, att *ekvationssystem (6) är giltigt även för en dubbelledning bildad av tvenne inhomogena enkelledningar, vilka sins emellan hava olika konstanter.*

Denna egenskap är desto mer anmärkningsvärd, som strömförloppet på en dylik dubbelledning blir ett helt annat än på en enkelledning. Om ledningarna äro homogena men med olika konstanter, få vi för en ensam enkelledning *en* dämpningsexponent och *en* vågkonstant. Vid den sammansatta dubbelledningen återigen få vi tvenne dämpningsexponenter och tvenne vågkonstanter, och strömförloppet på en av ledningarna blir likaledes sammansatt av tvenne vågsystem av olika dämpningsexponent och vågkonstanter. För att bestämma integralerna för strömstyrkan i en av ledarna få vi nämligen, såsom vi förut funnit, en linjär homogen differentialekvation av fjärde ordningen med konstanta koefficienter, i vilken endast derivator av jämn ordning förekomma, varför man har att lösa en ekvation av andra

graden. Vid stationär sinusström äro emellertid koefficienterna i differential-ekvationen komplexa tal, enär vi infört $p = j\omega$. Rötterna till andragrads-ekvationen kunna då ej vara med varandra konjugerade komplexa tal. Man erhåller därför fyra lösningar av formen $e^{\gamma_1 x}$, $e^{-\gamma_1 x}$, $e^{\gamma_2 x}$, $e^{-\gamma_2 x}$, där γ_1 och γ_2 äro rötterna till andragradsekvationen. Dessa lösningar representera två olika dämpade svängningssystem.

Förhållandet blir liknande det, som inträder vid tvenne med varandra kopplade svängningskretsar.

Äro de båda ledningarna, som bilda dubbelledningen, identiskt lika, få vi däremot som bekant samma förhållande, som vid en enkelledning.

Om vi i det allmänna fallet istället för att förena tvenne ledningar vid båda ändarna till en dubbelledning hade förenat dem vid endast den ena ändan, hade vi haft att sätta strömstyrkorna i de båda ledningarna lika men med ombytt tecken vid denna ända, samt införa spänningsskillnaden mellan ledningarna vid samma ända såsom obekant i stället för spänningarna. Man får sålunda en ekvation mindre i (27), men fortfarande blir determinanten för koefficienterna på högra sidan symmetrisk.

Förut hava vi funnit, att relation (7) äger rum för en av de parallella ledningarna, när alla de övriga äro isolerade vid ändpunkterna. Satsen äger dock betydligt större allmängiltighet. Såsom en utvidgning kunna vi tänka oss de övriga ledningarna förenade med varandra eller med jord genom motstånd, induktanser eller kapaciteter eller kombinationer av dylika anordningar.

Är en ledning, t. ex. den andra i ordningen, förenad med jord genom en impedans vid $x = 0$, kan man införa

$$v_3 = -z_3 i_3,$$

där z_3 är motståndsoperatoren för anordningen, som förenar ledningen med jord. För ändan $x = l$ skulle vi få ett uttryck av formen:

$$v_4 = z_4 i_4.$$

Äro tvenne ledningar vid en ändpunkt förenade medelst en impedans, få vi motsvarande relation mellan spänningsskillnaden och strömmen vid denna ändpunkt.

Införa vi dylika uttryck för spänningarna i (27), samt flytta över alla strömstyrkor till högra sidan, ändras där endast koefficienterna av typen b_{mn} , vilkas storlek äro av ingen betydelse för determinantens egenskap att vara symmetrisk.

Välja vi såsom den ledning, för vilken relation (7) skall undersökas, den första ledningen, erhålles ett likhetssystem av formen:

$$(29) \quad \begin{cases} v_1 = b_{11}i_1 + b_{12}i_2 + b_{13}i_3 + b_{14}i_4 + \dots \\ -v_2 = b_{21}i_1 + b_{22}i_2 + b_{23}i_3 + b_{24}i_4 + \dots \\ 0 = b_{31}i_1 + b_{32}i_2 + b_{33}i_3 + b_{34}i_4 + \dots \\ 0 = b_{41}i_1 + b_{42}i_2 + b_{43}i_3 + b_{44}i_4 + \dots \end{cases}$$

Här äro alla koefficienter identiska med motsvarande koefficienter i (27) med undantag av b_{33} , b_{44} , b_{55} . etc. Determinanten på höger sida är därför fortfarande symmetrisk.

Vi beteckna denna determinant med D och den underdeterminant, som erhålles, när man stryker bort den n^{te} horisontal- och den m^{te} vertikalraden med D_{nm} .

Lösa vi i_1 och i_2 ur ekvationssystem (29) erhålles:

$$(30) \quad \begin{cases} D \cdot i_1 = v_1 D_{11} + v_2 D_{21} \\ D i_2 = -v_1 D_{12} - v_2 D_{22} \end{cases}$$

Här är på grund av symmetrien:

$$D_{21} = D_{12}.$$

Är första ledningen jordad vid $x = l$, ha vi $v_2 = 0$ och erhålla:

$$v_1 = \frac{D}{D_{11}} \cdot i_1,$$

och sålunda ledningens kortslutningsmotstånd R_1 uppmätt från ändan 1:

$$(31) \quad R_1 = \frac{D}{D_{11}}.$$

På samma sätt få vi kortslutningsimpedansen R_2 från ändan $x = l$:

$$(32) \quad R_2 = \frac{D}{D_{22}}.$$

Isolationsmotståndet I_1 från ändan $x = 0$ erhålles, om vi i ekvationssystem (30) sätta $i_2 = 0$ och eliminera v_2 :

$$\begin{cases} D \cdot i_1 = v_1 D_{11} + v_2 D_{21} \\ 0 = -v_1 D_{12} - v_2 D_{22} \end{cases}$$

Vi erhålla genom eliminationen:

$$(33) \quad I_1 = \frac{v_1}{i_1} = \frac{D \cdot D_{22}}{D_{11} D_{22} - D_{12}^2}$$

På samma sätt få vi isolationsmotståndet I_2 :

$$(34) \quad I_2 = -\frac{v_2}{i_2} = \frac{D D_{11}}{D_{11} D_{22} - D_{12}^2}$$

Av de erhållna uttrycken på kortslutnings- och isolationsmotstånd få vi relationen

$$(7) \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Relation (7) är alltså giltig för en av ledningarna, då de andra äro på godtyckligt sätt förenade med varandra eller jord eller isolerade.

Vi hava fört beviset med den första ledningen såsom enkelledning, men samma bevis gäller utan någon förändring, om ledningen är en dubbelledning.

Vid likriktad ström äro I och R isolations- och kortslutningsmotstånden hos ledningen. Vid sinusformade strömmar övergå de till att vara motsvarande komplexa impedanser för ledningen.

Äro strömmarna godtyckligt variabla utgör (7) en relation mellan operatorer.

På grund av relation (7) behöver man endast bestämma tre av de i denna relation ingående storheter för att alla skola vara kända.

I förbigående må nämnas, att de ekvationer, som bestämma förhållandena mellan spänningar och strömmar vid ledningens ändpunkter, äro fullständigt kända, när tre av de i (7) ingående storheterna äro bekanta. Vi få nämligen ur (31) (32), (33) och (34) $\frac{D}{D_{11}}$, $\frac{D}{D_{22}}$ och $\frac{D}{D_{12}}$, varigenom ekvationssystemet (30) är fullt bestämt; omformas detta, få vi en relation av formen (6).

För en av ledningarna i ledningsknippet gäller sålunda relation (6), när de övriga ledningarna äro förenade med varandra och med jord på godtyckligt sätt med impedanser. För olika anordningar vid ledningarnas ändpunkter få vi naturligtvis olika ekvationssystem (6). I det föregående förutsattes, att vi icke hade elektromotoriska krafter i de övriga ledningarna. Äro sådana förhanden, få vi inducerade strömmar i vår ledning, men, då alla ekvationer äro linjära, kan man beräkna de strömmar och spänningar, som dessa elektromotoriska krafter var och en för sig åstadkomma, och den totala strömmen erhålles sedan genom superposition.

Reciprocitetslagar.

Relationerna:

$$b_{mn} = b_{nm}$$

i ekvationssystem (27) innebär, att en viss reciprocitet äger rum mellan ledningarnas ändpunkter.

Tänka vi oss alla ledningsändar, utom den som vi betecknat med index n , isolerade, och införa vi vid den n^{te} ledningsändan en strömstyrka i , ger oss ekvationssystemet (27), att spänningen vid den m^{te} ändan blir:

$$\pm v_m = b_{mn} \cdot i$$

Låta vi den n^{te} och m^{te} ledningsändan byta roll, få vi spänningen v_n lika med:

$$\pm v_n = b_{nm} \cdot i$$

På grund av ovan givna relation måste alltså spänningarna v_m och v_n vara lika. Vi få samma tecken, när m och n ligga vid samma ändpunkt av ledningsknippet; ligga de däremot vid motsatta ändpunkten, få vi motsatta tecken. Detta beror därpå, att vi i senare fallet ha vid t. ex. m strömstyrkans positiva riktning inåt ledningsknippet, då den däremot vid n är riktad från detsamma.

Om vi i (27) lösa strömstyrkorna såsom funktioner av spänningarna och införa minustecken framför de strömstyrkor, som hava jämn index, få vi, att koefficienterna för spänningarna bilda en symmetrisk determinant. Med samma resonemang som ovan finner man då, att, om alla ledningar äro jordade vid ändpunkterna, åstadkommer en elektromotorisk kraft E , placerad vid ändpunkten m , samma ström vid ändpunkten n , som elektromotoriska kraften E , anbragt vid n , skulle åstadkomma vid ändpunkten m .

Vi övergå nu till att undersöka, huruvida den mer allmänna Maxwellska reciprocitetslagen gäller för ledningsknippet, när ledningarna äro förenade med linjära ledare vid ändpunkterna.

Såsom förut blivit nämnt, gäller reciprocitetslagen för en enkelledning eller en homogen dubbelledning. Denna lag är en direkt följd av ett ekvationssystem av formen (6). Reciprocitetslagen måste därför på grund av (30) gälla för en av våra ledningar, när de övriga äro förbundna med varandra och med jord medelst motstånd, induktanser och kapaciteter.

Reciprocitetslagen gäller emellertid även för ledningssystemet i sin helhet.

För enkelhetens skull utvälja vi tvenne bestämda ledningsändar t. ex. $x = 0$ för första ledningen och ändan $x = l$ för den andra. Vidare antaga vi, att ledningarna äro förenade med varandra eller med jord medelst impedanser, vilka kunna utgöras av motstånd, induktionsspolar eller kondensatorer. Vi beteckna motståndoperatorerna för impedanserna vid ledningarnas ändpunkter med z_1, z_2 etc., där indices äro desamma som för strömstyrkorna vid dessa ändpunkter.

Är en elektromotorisk kraft E inlänkad vid $x = 0$ å den första ledningen, få vi följande ekvationssystem för att bestämma strömstyrkorna vid ledningarnas ändpunkter:

$$\begin{cases} E - z_1 i_1 = b_{11} i_1 + b_{12} i_2 + b_{13} i_3 + b_{14} i_4 + \dots \\ z_2 i_2 = b_{21} i_1 + b_{22} i_2 + b_{23} i_3 + b_{24} i_4 + \dots \\ - z_3 i_3 = b_{31} i_1 + b_{32} i_2 + b_{33} i_3 + b_{34} i_4 + \dots \\ z_4 i_4 = b_{41} i_1 + b_{42} i_2 + b_{43} i_3 + b_{44} i_4 + \dots \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{cases}$$

Flyttas alla termer innehållande strömstyrkor över på höger sida erhålles ett ekvationssystem för dessa strömstyrkor, hos vilket determinanten för koefficienterna är symmetrisk. Strömstyrkan i vid andra ledningens bortre ända bestämmes av likheten:

$$D \cdot i_4 = - D_{14} \cdot E$$

eller

$$i_4 = - \frac{D_{14}}{D} \cdot E$$

Om i stället den elektromotoriska kraften E varit anbragt vid den andra ledningens bortre ända, skulle vi fått den strömstyrka i_1 , som vid första ledningens ändpunkt $x = 0$ åstadkommes av denna emk enligt formeln:

$$i_1 = - \frac{D_{41}}{D} \cdot E$$

Men på grund av determinantens symmetri är:

$$D_{14} = D_{41}$$

Strömstyrkorna bliva således lika, och reciprocitetslagen gäller för ett system parallella ledningar.

Såsom framgår av beviset ovan är reciprocitetslagens giltighet beroende därpå, att determinanten, som bildas av strömstyrkornas koefficienter, är symmetrisk. Men detta äger även rum, om vi hava sådana förbindningar mellan de parallella ledningarnas ändpunkter, att spänningarna $v_1, -v_2, v_3,$

äro linjära och homogena i strömstyrkorna med koefficienter, som bilda en symmetrisk determinant. Utan att anföra något bevis härför må nämnas, att detta äger rum, när ledningarnas ändpunkter äro förenade med varandra medelst ett eller flere nät av linjära ledare. *Reprocityslagen äger sålunda giltighet för ett parallellt system av ledningar med fördelad induktans, kapacitet och avledning, vilka variera godtyckligt utefter ledningarna, när dessa ledningars ändpunkter äro förenade med ett eller flere nät av linjära ledare.*

Vi få fullständigt identiska operatorlikheter för strömmarna. *De reciproka strömmarna variera därför enligt samma lag, vilken funktion av tiden den elektromotoriska kraften än följer.*

Vi hava i det föregående funnit, att ett ekvationssystem av samma utseende som (7) gäller för en inhomogen dubbelledning, vare sig vi hava andra parallella ledningar eller ej.

Det ligger därför nära till hands att antaga, att generella ekvationssystemet för ett visst antal ledningar i ett knippe är av formen (26), då övriga ledningar i knippet äro förbundna med varandra eller med jord genom impedanser anordnade av motstånd, induktanser eller kapaciteter.

För enkelhetens skull välja vi ut 3 stycken av ledningarna i ledningsknippet och låta dessa vara den första, den andra och den tredje ledningen.

Införas de villkor, som övriga ledningar äro underkastade, och flyttas alla termer med strömstyrkor över till höger sida, få vi för s ledningar $2s$ ekvationer, hos vilka de 6 första vänstra membrum äro resp. lika med v_1 , $-v_2$, v_3 , $-v_4$, v_5 och $-v_6$, samt övriga ekvationer med vänstra sidan lika med noll. Determinanten för koefficienterna för strömstyrkorna är såsom vi förut sett symmetrisk, enär de införda betingelserna endast beröra koefficienter av typen b_{mn} .

Lösa vi ekvationssystemet med avseende på de sex första strömstyrkorna, få vi med samma beteckningar, som vi förut användt, ett ekvationssystem av utseendet:

$$\left\{ \begin{array}{l} D \cdot i_1 = D_{11} \cdot v_1 + D_{21} \cdot v_2 + D_{31} \cdot v_3 + D_{41} \cdot v_4 + \dots \\ -D \cdot i_2 = D_{12} \cdot v_1 + D_{22} \cdot v_2 + D_{32} \cdot v_3 + D_{42} \cdot v_4 + \dots \\ D \cdot i_3 = D_{13} \cdot v_1 + D_{23} \cdot v_2 + D_{33} \cdot v_3 + D_{43} \cdot v_4 + \dots \\ -D \cdot i_4 = D_{14} \cdot v_1 + D_{24} \cdot v_2 + D_{34} \cdot v_3 + D_{44} \cdot v_4 + \dots \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right.$$

På högra sidan av likhetstecknet ha vi nu endast 6 termer och determinanten för koefficienterna till spänningarna är symmetrisk.

Lösa vi spänningarna ur detta ekvationssystem, få vi på samma sätt som nyss $v_1, -v_2, v_3$ etc. uttryckta linjärt och homogent i de sex första strömstyrkorna och determinanten för strömstyrkorna blir symmetrisk.

Vi hade här valt tre ledningar, men bevisets gång visar, att samma förhållande gäller för ett godtyckligt antal ledningar.

Vidare ha vi antagit, att övriga ledningar i ledningsknippet voro genom impedanser förenade med varandra eller med jord. Men på samma sätt som i föregående satser gäller beviset även för det fall, att de övriga ledningarna äro på ett godtyckligt sätt förenade med varandra medelst ett eller flera nät av ledare innehållande motstånd, induktanser och kapaciteter.

Ekvationssystem (26) med symmetrisk determinant är sålunda normal-system för ett antal ledningar ingående i ett knippe parallella ledningar, när övriga i knippet ingående ledningar äro förenade med varandra med ett eller flera nät av linjära ledare innehållande motstånd, induktanser och kapaciteter.

Närvaron av en jordlina eller andra parallella ledningar inverkar således icke på *formen* av de ekvationer, som sammanbinda spänningar och strömmar vid en trefasledningens ändpunkter.

För en trefasledning få vi sålunda i allmännaste fallet ett ekvationssystem av samma typ som (27) innehållande 6 ekvationer mellan de 6 spänningarna och de 6 strömstyrkorna vid ledningarnas ändpunkter. Antalet av varandra oberoende koefficienter i detta ekvationssystem blir 21.

Symmetriska ledningar.

Detta antal koefficienter kan betydligt minskas i speciella fall. Äro ledningarna alla symmetriska med avseende på ledningssträckans mittpunkt, måste ekvationssystem (27) förbli identiskt, om vi byta ut spänningar och strömstyrkor vid $x=0$ mot dem vid $x=l$ och vice versa samt ändra tecken på alla strömstyrkor. Verkställa vi ett dylikt utbyte, övergår (27) i följande ekvationssystem:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = b_{22}i_1 + b_{21}i_2 + b_{24}i_3 + b_{23}i_4 + \dots \\ -v_2 = b_{12}i_1 + b_{11}i_2 + b_{14}i_3 + b_{13}i_4 + \dots \\ v_3 = b_{42}i_1 + b_{41}i_2 + b_{44}i_3 + b_{43}i_4 + \dots \\ -v_4 = b_{32}i_1 + b_{31}i_2 + b_{34}i_3 + b_{33}i_4 + \dots \end{array} \right.$$

Som detta ekvationssystem skall vara identiskt med (27), få vi följande relationer mellan koefficienterna i de två första raderna:

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_{22} \\ b_{13} &= b_{24} \\ b_{14} &= b_{23} \\ &— — — \end{aligned}$$

Vid ett symmetriskt ledningsknippe bliva alltså koefficienterna för de strömmar, som tillhöra samma ledning, korsvis lika i de två ekvationer, vilka innehålla till samma ledning hörande spänningar.

Äro ledningarnas antal s , få vi därför i allt $2s + 2s - 2 + 2s - 4 + \dots + 2 = s(s + 1)$ oberoende koefficienter. För en trefasledning, som är symmetrisk med avseende på sin mittpunkt, få vi alltså 12 oberoende konstanter.

Om tvenne ledningar i knippet äro lika, minskas antalet oberoende koefficienter med $2s - 2$ och om tre ledningar äro lika med $2s - 2 + 2s - 4 = 4s - 6$, etc.

Vid symmetriska ledningar (med avseende på ledningssträckans mittpunkt) kunna ekvationerna sättas på en för minnet enklare form, i det att man inför spänningsfallet, spänningens medelvärde, strömstyrkans avtagande och dess medelvärde på de olika ledningarna.

Vi införa beteckningarna:

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= v_1' \\ v_1 + v_2 &= v_1'' \\ &— — — \\ i_1 - i_2 &= i_1' \\ i_1 + i_2 &= i_1'' \\ &— — — \end{aligned}$$

Genom att subtrahera och addera de till samma ledning hörande båda ekvationer får man tvenne ekvationssystem av formen:

$$(35) \quad \begin{cases} v_1' = R_1 i_1'' + M_{12} i_2'' + M_{13} i_3'' + \dots \\ v_2' = M_{21} i_1'' + R_2 i_2'' + M_{23} i_3'' + \dots \\ v_3' = M_{31} i_1'' + M_{32} i_2'' + R_3 i_3'' + \dots \\ \text{— — — — — — — — —} \end{cases}$$

$$(36) \quad \begin{cases} v_1'' = I_1 i_1' + H_{12} i_2' + H_{13} i_3' \dots \\ v_2'' = H_{21} i_1' + I_2 i_2' + H_{23} i_3' \dots \\ v_3'' = H_{31} i_1' + H_{32} i_2' + I_3 i_3' \dots \\ \text{— — — — — — — — —} \end{cases}$$

De i dessa ekvationssystem ingående koefficienter äro uttryckta i koefficienterna b_{mn} i (27):

$$(37) \quad \begin{cases} R_n = b_{2n-1, 2n-1} + b_{2n, 2n-1} \\ I_n = b_{2n-1, 2n-1} - b_{2n, 2n-1} \\ M_{mn} = b_{2m-1, 2n-1} + b_{2m, 2n-1} \\ H_{mn} = b_{2m-1, 2n-1} - b_{2m, 2n-1} \end{cases}$$

På grund av symmetrien är nu:

$$b_{2m, 2n-1} = b_{2m-1, 2n}$$

följaktligen:

$$\begin{aligned} M_{mn} &= M_{nm} \\ H_{mn} &= H_{nm}. \end{aligned}$$

Kennellys T-teorem för ett ledningsknippe.

Av (35) och (36) framgår, att hos ett med avseende på ledningssträckans mittpunkt symmetriskt ledningsknippe är spänningsfallet utefter en ledning en linjär homogen funktion av medelvärdet av strömstyrkorna vid en lednings båda ändpunkter; och medelvärdet av spänningarna vid en lednings ändpunkter är en linjär funktion av differenserna mellan strömmarna vid ledningarnas båda ändpunkter.

Av (35) och (36) framgår vidare, att man kan tillämpa Kennellys T-teorem på ett knippe parallella ledningar, vilka äro symmetriska med avseende på ledningssträckans mittpunkt.

Vid beräkning av strömmar och spänningar vid ändan av och utanför ett med avseende på ledningens mittpunkt symmetriskt ledningsknippe kan man ersätta ledningarna med T-anordningar, hos vilka motstående delar inducera på varandra. Impedansen hos halva linjesträckan av den n^{te} ledningen är R_n , och impedansen hos avledningen $\frac{1}{2}(I_n - R_n)$; ömsesidiga induktionskoefficienten mellan tvenne motstående halva linjesträckor av den m^{te} och den n^{te} ledningen är $\frac{1}{\phi}M_{mn}$ och ömsesidiga induktionskoefficienten mellan avledningarna:

$$\frac{1}{2\phi}[H_{mn} - M_{mn}].$$

Vid stationär sinusström har man att som vanligt insätta $p = j\omega$ i formlerna.

Värdena av de olika storheterna för T-anordningarna angivna ovan kunna beräknas ur de för hela ledningarna uppmätta konstanterna enligt (37).

Emellertid kan man lätt få fram den fysiska betydelsen av R_n , I_n , M_{mn} och H_{mn} .

Tänka vi oss alla ledningar utom den n^{te} isolerade vid ändpunkterna, och hava vi å denna ledning ordnat så, att strömmarna vid ändpunkterna äro lika, få vi ur (36), att v_n'' måste vara noll, eller med ord uttryckt, spänningarna vid den n^{te} ledningens ändpunkter äro lika men av motsatt tecken. På grund av symmetriförhållanden måste då spänningen vid ledningarnas midtpunkter vara noll. Det elektriska tillståndet ändras då icke, om alla ledningarnas midtpunkter jordas; härigenom bliva emellertid de båda hälfterna av ledningsknippet elektriskt oberoende av varandra och förhållandet mellan spänningen vid ena ändan och den därstädes utgående strömmens styrka ger oss impedansen för halva ledningen. Vi hava

$$v_n' = 2 \times \text{spänningen vid ledningens ena ändpunkt}$$

$$i_n'' = 2 \times \text{strömstyrkan vid ledningens ena ändpunkt.}$$

Enär alla andra ledningar antagits vara isolerade, erhålles ur (35) att:

R_n är impedansen för halva den n^{te} ledningen, när alla övriga ledningar äro isolerade vid ändarna och jordade vid midtpunkten.

Under samma förhållanden få vi för den isolerade m^{te} ledningen:

$$v_m'' = M_{mn} i_n''$$

M_{mn} är sålunda förhållandet mellan spänningen vid ena ändan av den m^{te} ledningen och utgående strömstyrkan på den n^{te} , när alla ledningarna äro jordade vid sina midtpunkter och alla utom den n^{te} hava sina ändpunkter isolerade.

Om vi i stället tänka oss den n^{te} ledningen så förenad med elektromotoriska krafter och induktanser vid ändarna, att strömstyrkorna där bliva lika men av motsatt tecken, framgår det av ekvationssystemet (35), att v_n'' är lika med noll, eller med ord uttryckt, att spänningarna vid ändpunkterna bliva lika och av samma tecken. På grund av symmetriförhållandena måste då strömstyrkan vid ledningens midtpunkt vara noll, varför man utan att ändra de elektriska förhållandena kan tänka sig ledningen bruten vid midten.

Av ekvationssystem (37) framgår då, att I_n är isolationsimpedansen för halva den n^{te} ledningen, när alla övriga ledningar äro isolerade vid ändpunkterna och jordade vid midtpunkten.

På samma sätt få vi, att H_{nm} multiplicerad med den utgående strömmen å den n^{te} ledningen, när denna lednings midtpunkt är isolerad, ger oss spänningen vid den m^{te} ledningens ändpunkt, när alla ledningar utom den n^{te} hava sina ändpunkter isolerade och midtpunkterna jordade.

Reduktion av ett ledningssystem.

I ekvationssystem (27) äro spänningarna vid ledningarnas ändpunkter uttryckta i strömstyrkorna. Detta ekvationssystem betecknades såsom normalsystem, på den grund att detsamma endast innehåller av varandra oberoende koefficienter, vilkas antal sålunda är det minsta möjliga. Ett annat ekvationssystem, som har samma egenskap, är det, som erhålles, om vi uttrycka strömstyrkorna i spänningarna.

I en del tillämpningar äro dessa ekvationssystem dock icke de mest lämpliga beroende därpå, att det sällan inträffar, att man i ett problem har såsom bekanta antingen samtliga spänningar eller samtliga strömstyrkor vid ledningarnas ändpunkter.

I regel har man därför i stället uttryckt spänningar och strömstyrkor vid ena ändpunkten av ledningarna t. ex. vid $x = 0$ i spänningar och strömstyrkor vid den andra ändpunkten. Så hava Breisig och Roessler gjort vid enkelledning, dubbelledning och symmetrisk trefasledning.

För att ett dylikt ekvationssystem skall vara direkt tillämpligt, fordras emellertid, att man vid ledningsknippets ena ända t. ex. motorändan icke blott känner belastningar och belastningsförhållanden i varje ledning för sig utan även belastningsströmmarnas fasförskjutningar i förhållande till varandra, och dessa i sin ordning äro beroende på ledningarnas egenskaper, så fort man har vare sig olikhet i ledningarna eller olikhet i belastningsförhållandena å ledningarna.

För att komma ifrån dylika svårigheter kan man verkställa en förenkling av problemet, i det att man ersätter ledningarna med impedanser, vilka då i det allmänna fallet verka inducerande på varandra, och ersätter spänningarna vid generatorsidan med andra spänningar, vilka bestämmas av de ursprungliga ur ledningens egenskaper och som alltså äro helt oberoende av belastningsförhållandena.

Har man i det så erhållna enklare problemet med beräkning eller genom grafisk konstruktion bestämt spänningar och strömmar vid motorändan, blir det en enkel sak att beräkna spänningar och strömmar vid generatorändan ur de erhållna reduktionsformlerna.

Fördelen av att vid problem med stationärt strömstillstånd verkställa reduktionen till motorsidan ligger däri, att man i de flesta fall känner elektromotoriska krafterna vid generatorändan såväl i avseende på deras inbördes storlek som i avseende på deras fasförskjutning sins emellan.

För att fixera tänka vi oss en trefasledning med generatorn vid $x=0$ stjärnkopplad samt nollpunkten jordförbunden genom en impedans. Fas-spänningarna eller rättare sagt elektromotoriska krafterna i de tre faserna beteckna vi med E_1 , E_3 och E_5 , samt motsvarande impedanser hos generatorns tre faser med z_1 , z_3 och z_5 . Impedansen hos ledningen mellan nollan och jord låta vi vara z .

Spänningarna vid generatorändan erhållas då ur formlerna:

$$\begin{aligned}v_1 &= E_1 - z_1 i_1 - z(i_1 + i_3 + i_5) \\v_3 &= E_3 - z_3 i_3 - z(i_1 + i_3 + i_5) \\v_5 &= E_5 - z_5 i_5 - z(i_1 + i_3 + i_5).\end{aligned}$$

Införa vi dessa uttryck på spänningarna i de motsvarande ekvationerna i system (27) samt föra över strömstyrketermerna på högra sidan, få vi ett nytt ekvationssystem, i vilket v_1 , v_3 och v_5 blivit ersatta med E_1 , E_3 och E_5 resp. och i vilket koefficienterna b hava ändrats. Dock må i förbigående framhållas, att den determinant, som bildas av koefficienterna i det nya ekvationssystemet, fortfarande är symmetrisk. Koefficienterna äro kända, när ledningarnas egenskaper och impedanserna å generatorsidan äro kända.

Ur det så erhållna ekvationssystemet tänka vi oss nu strömstyrkorna i_2 , i_4 och i_6 lösta, varvid i_1 , i_3 och i_5 bortelimineras.

Vi få då i_2 , i_4 och i_6 uttryckta såsom linjära och homogena funktioner av E_1 , E_3 och E_5 samt v_2 , v_4 och v_6 .

Detta nya ekvationssystem, som endast innehåller 3 ekvationer, tänka vi oss löst med avseende på v_2 , v_4 och v_6 , vilka då i sin ordning erhållas såsom linjära och homogena funktioner av i_2 , i_4 och i_6 samt E_1 , E_3 och E_5 .

Vi få på så sätt ett ekvationssystem av formen:

$$(38) \quad \begin{cases} v_2 = A_{22}i_2 + A_{24}i_4 + A_{26}i_6 + B_{21} \cdot E_1 + B_{23} \cdot E_3 + B_{25} \cdot E_5 \\ v_4 = A_{42}i_2 + A_{44}i_4 + A_{46}i_6 + B_{41} \cdot E_1 + B_{43} \cdot E_3 + B_{45} \cdot E_5 \\ v_6 = A_{62}i_2 + A_{64}i_4 + A_{66}i_6 + B_{61} \cdot E_1 + B_{63} \cdot E_3 + B_{65} \cdot E_5 \end{cases}$$

En närmare undersökning av de räkneoperationer som utförts, visar, att vi hava:

$$A_{mn} = A_{nm},$$

varför antalet olika koefficienter i detta ekvationssystem blir för s ledningar:

$$s^2 + \frac{s^2 - s}{2} + s = \frac{s}{2}(3s + 1).$$

Om vi på samma sätt uttrycka strömstyrkorna i_1 , i_3 och i_5 , få vi ett system av formen:

$$(39) \quad \begin{cases} i_1 = B_{12}i_2 + B_{14}i_4 + B_{16}i_6 + D_{11} \cdot E_1 + D_{13} \cdot E_3 + D_{15} \cdot E_5 \\ i_3 = B_{32}i_2 + B_{34}i_4 + B_{36}i_6 + D_{31} \cdot E_1 + D_{33} \cdot E_3 + D_{35} \cdot E_5 \\ i_5 = B_{52}i_2 + B_{54}i_4 + B_{56}i_6 + D_{51} \cdot E_1 + D_{53} \cdot E_3 + D_{55} \cdot E_5 \end{cases}$$

På samma sätt som förut få vi här:

$$D_{mn} = D_{nm}.$$

I de båda ekvationssystemen få vi alltså tillsammans $s(3s + 1)$ koefficienter; men vi hava förut sett, att ett fullständigt ekvationssystem endast har $s(2s + 1)$ av varandra oberoende koefficienter. Det måste därför finnas s^2 stycken relationer mellan koefficienterna i våra båda ekvationssystem.

Dessa relationer erhållas ur reciprocitetslagen. För att fixera tänka vi oss att $E_5 = E_3 = 0$ och att den första ledningen är jordad vid $x = l$, under det att de båda övriga äro isolerade vid denna ända. Vi ha då att i ekvationssystemen sätta in $v_2 = E_3 = E_5 = i_4 = i_6 = 0$.

Ur den första ekvationen i det första ekvationssystemet få vi då:

$$i_2 = -\frac{B_{21}}{A_{22}} \cdot E_1.$$

Detta är alltså den ström, som elektromotoriska kraften E_1 placerad vid $x = 0$ åstadkommer vid ändan $x = l$ å samma ledning. Enligt reciprocitetslagen skall nu denna ström vara lika med den, som erhålles vid $x = 0$, om vi i stället placera elektromotoriska kraften vid $x = l$.

I detta fall ha vi följande värden att införa i våra ekvationer:

$$\begin{aligned} v_2 &= -E_1 \\ E_1 = E_2 = E_3 = i_4 = i_6 &= 0. \end{aligned}$$

De första ekvationerna i de båda systemen ge oss då:

$$\begin{cases} -E_1 = A_{22}i_2 \\ i_1 = B_{12}i_2 \end{cases}$$

Härav erhålles

$$i_1 = -\frac{B_{12}}{A_{22}} \cdot E_1.$$

Som enligt reciprocitetslagen i_1 och i_2 nu måste vara lika, få vi relationen

$$B_{21} = B_{12}.$$

Hade vi i stället haft den första och den tredje ledningen isolerade vid $x = l$, men den andra jordad, lämnar samma resonemang som ovan:

$$B_{41} = B_{14}.$$

Generellt få vi sålunda:

$$B_{nm} = B_{mn},$$

vilket ger oss de s^2 relationerna.

För att få något mer överskådliga formler kunna vi införa beteckningarna

$$(40) \quad \begin{cases} E_2' = B_{21} \cdot E_1 + B_{23} \cdot E_3 + B_{25} \cdot E_5 \\ E_4' = B_{41} \cdot E_1 + B_{43} \cdot E_3 + B_{45} \cdot E_5 \\ E_6' = B_{61} \cdot E_1 + B_{63} \cdot E_3 + B_{65} \cdot E_5. \end{cases}$$

Ekvationssystem (38) får då formen:

$$\begin{cases} v_2 = A_{22}i_2 + A_{24}i_4 + A_{26}i_6 + E_2' \\ v_4 = A_{42}i_2 + A_{44}i_4 + A_{46}i_6 + E_4' \\ v_6 = A_{62}i_2 + A_{64}i_4 + A_{66}i_6 + E_6'. \end{cases}$$

Men detta är det ekvationssystem, som skulle erhållas, om vi hade de tre ledningarna jämte anordningarna å generatorsidan ersatta med tre stjärnkopplade impedanser, som verka inducerande på varandra, och med nollpunkten direkt utan motstånd förenad med jord. I stället för generators tre elektromotoriska krafter ha vi tre reducerade emk en i varje impedans.

Av likheten ovan framgår, att koefficienterna A_{22} , A_{44} och A_{66} äro ledningssystemets impedanser uppmätta från motorsidan å de tre ledningarna. Vid mätning å en av ledningarna skola de båda övriga stå för avbrott å motorsidan. De övriga koefficienterna erhållas vid samma mätning genom att vid motorändan å de isolerade ledningarna inkoppla en voltmeter mellan ledning och jord.

Ur ekvationssystemet finner man vidare, att E_2' , E_4' och E_6' erhållas

därigenom, att man å motorsidan uppmäter spänningarna till jord, när alla ledningarna äro isolerade. Vill man speciellt ha någon av koefficienterna B_{mn} , har man endast att vid denna mätning bortkoppla två av elektromotoriska krafterna å generatorsidan, under det att likväl det gamla ledningssammanhanget bibehålles.

Reciprociteten för koefficienterna B_{mn} erhöles ur reciprocitetslagen, utan att vi gjorde något särskilt antagande om det sätt, på vilket ledningarna voro förbundna med varandra och jord på generatorsidan. Relationen $B_{mn} = B_{nm}$ gäller därför för godtyckliga anordningar vid generatorsidan. Beviset utföres identiskt på samma sätt, om vi haft mer än 3 ledningar.

Att relationen:

$$A_{mn} = A_{nm}$$

även har denna allmänna karaktär framgår lätt därigenom, att man oberoende av anordningarna vid generatorändan kan medelst reciprocitetslagen visa, att denna relation äger rum.

Till den ändan antaga vi, att $E_1 = E_3 = E_5 = 0$. Den tredje ledningen låta vi vara isolerad, och den första och andra jordade vid ändan $x = l$. Enligt reciprocitetssatsen skall nu en elektromotorisk kraft E inlänkad vid $x = l$ å första ledningen åstadkomma en ström i_4 , som är lika med den ström i_2 , som skulle erhållas, om elektromotoriska kraften varit placerad vid $x = l$ å den andra ledningen.

För bestämmande av i_4 , då elektromotoriska kraften är placerad å den första ledningen, få vi ekvationssystemet:

$$\begin{cases} E = A_{22}i_2 + A_{24}i_4 \\ 0 = A_{42}i_2 + A_{44}i_4 \end{cases}$$

varav:

$$i_4 = \frac{A_{42}}{A_{24}A_{42} - A_{22}A_{44}} \cdot E.$$

En beräkning av i_2 under förutsättning att E placeras å den andra ledningen ger:

$$i_2 = \frac{A_{24}}{A_{24}A_{42} - A_{22}A_{44}} \cdot E.$$

En jämförelse mellan dessa båda likheter visar, att vi ha relationen:

$$A_{24} = A_{42}.$$

På samma sätt få vi:

$$A_{26} = A_{62}$$

$$A_{46} = A_{64},$$

varför vi allmänt hava:

$$A_{mn} = A_{nm}.$$

Vi kunna nu uttala följande generella sats:

Vid beräkning av ström och spänning å motorsidan i ett n -fas-system, hos vilket ledningarna å generatorsidan äro på ett godtyckligt sätt förenade med varandra medelst impedanser, kan man ersätta hela ledningssystemet till motorsidan med en stjärnkopplad generator med n stycken faser, vars nollpunkt är direkt förbunden med jord, och hos vilken fasledningarna verka inducerande på varandra.

Impedanserna hos faserna erhållas genom mätning av impedanserna från motorsidan hos ledningarna en och en, då de övriga äro isolerade å denna sida, och de ömsesidiga induktionskoefficienterna genom att under nyssnämnda mätning uppmäta spänningarna vid de isolerade ändarna.

Elektromotoriska krafterna i faserna äro lika med de resp. spänningar, som vid tomgång erhållas å motorsidan.

Problemet angående kraftöverföring medelst ett n -fssystem är således reducerat till en direkt hopkoppling av generator och motoranordningar.

Har man bestämt strömmarna vid motorsidan, erhållas strömmarna vid generatoränden ur ekvationssystem (39). Koefficienterna D_{11} , D_{33} och D_{55} äro tydligen ledningsanordningens tomgångsadmittanser, och koefficienterna D_{13} , D_{15} och D_{35} erhållas genom att under uppmätning av admittans å en ledning samtidigt mäta generatorströmmarna å de andra ledningarna.

Vad ovan blivit sagt gäller, vilken form i avseende på tiden än elektromotoriska krafterna hava, och huru ledningskonstanterna än variera utefter ledningen. Vid homogena ledningar kan en förutberäkning av koefficienterna i ekvationssystemen ovan alltid ske med mer eller mindre besvär, men torde det vara lämpligare att redogöra för dessa beräkningar i annat sammanhang.

EN METOD ATT BERÄKNA EGENSKAPERNA HOS SAMMANSATTA TELEFONLEDNINGAR

AV

H. PLEIȚEL.

En interurbanledning är ofta sammansatt av ledningar av olika beskaffenhet och bildar sålunda en inhomogen ledning, som dessutom vanligen är osymmetrisk med avseende på sin midtpunkt. En och samma interurbanledning skall nu förbindas dels med olika abonnent- och landsledningar och dels med andra interurbanledningar. En beräkning av telefoneringsmöjligheten hos ledningskretsar, i vilka en viss interurbanledning ingår, kan därför återkomma då och då, varför en beräkning en gång för alla av interurbanledningens egenskaper innebär en arbetsbesparing.

För att känna en inhomogen ledning fullständigt fordras tre av varandra oberoende element; och såsom sådana är det lämpligast att välja ledningens båda karakteristiker och den komplexa dämpningsexponenten.

De vanligen använda telefonapparaterna lämna vid tal en växelströms-elektromotorisk kraft av omkring 1 volt. För att bedöma en viss total ledningskrets godhet i avseende på talöverföringen kan man därför välja förhållandet mellan elektromotoriska kraften på avsändningsändan och strömstyrkan på mottagningsändan. Detta förhållande, som har karaktären av ett motstånd, har såsom ett mått på ledningskretsens godhet för telefonöverföringen den fördelen, att man erhåller samma värde, vilken ända av ledningen, som tages till avsändningsända. Dessutom kan man lätt genom experiment på laboratoriet undersöka talöverföringens godhet hos ledningen genom att sluta ett par apparater genom det motstånd, som erhållits vid beräkningen. Vi kalla i det följande detta motstånd för ledningens *ekvivalenta motstånd*.

Under förutsättning att kommersiell telefoning är möjlig, när tvenne vanliga telefonapparater äro anslutna till en luftledning av koppar av sådan

längd att dämpningen är 3,5, få vi att kommersiell telefonering svarar mot ett ekvivalent ledningsmotstånd av 20 000 ohm. Dämpningen 4,8 svarar mot omkring 75 000 ohm.

De problem vid beräkning av sammansatta telefonledningar, som äro av största intresse för oss, äro därför följande två:

1. *Att ur delledningarnas egenskaper beräkna karakteristikerna och den komplexa dämpningsexponenten hos en sammansatt ledning.*
2. *Att för en viss bestämd ledningskrets beräkna ledningens ekvivalenta motstånd d. v. s. förhållandet mellan elektromotoriska kraften vid ledningens ena ända och den av densamma åstadkomna strömstyrkan vid andra ändan.*

I samband med det sista problemet må nämnas, att om man för en viss ledningskrets beräknat det ekvivalenta motståndet, erhålles ekvivalenta motståndet hos samma ledning sedan en ny ledningssträcka inkopplats i densamma genom att på sätt som framställts i en föregående uppsats¹ beräkna det tal x_0 , som anger den proportion, i vilken framkommande strömmen sänkes av den nya ledningssträckan och dividera förut erhållna ekvivalenta motstånd med detta värde. x och dess amplitud x_0 erhålles ur formeln:

$$x = \frac{e^{-\gamma l}}{m + n - ne^{-2\gamma l}},$$

där

$$m = \frac{H\sqrt{\frac{Z'}{Z}} + H'\sqrt{\frac{Z}{Z'}}}{H + H'}$$

$$n = \frac{(H - Z)(H' - Z')}{2\sqrt{ZZ'}(H + H')}.$$

Här betyda H och H' impedanserna för de båda ledningssträckor, mellan vilka den nya ledningen är inlänkad uppmätta från inkopplingsställena. Z och Z' äro de motsvarande karakteristikerna och γl den komplexa dämpningen för den inskjutna ledningen. Betydelsen av dessa sist-

¹ L'influence d'une ligne uniforme ou non uniforme intercalée dans une ligne interurbaine. Mémoires technico-scientifiques publiés par le bureau d'études de la direction générale des télégraphes de Suède. 1914.

nämnda tre storheter framgår av det följande. Särskilt enkel blir en dylik beräkning, när inkopplingen sker vid ena ändan av förutvarande ledningen, enär i detta fall den nyinkopplade ledningen är kortsluten vid ena ändan och sålunda ett av värdena H och H' i formeln blir noll. Vi återkomma senare till dylika beräkningar.

Innan vi ingå på den speciella metod, som vi nedan skola använda för att lösa ovan angivna problem, skola vi i korthet anföra den metod, som hittills kommit till användning i litteraturen.

Om V och \mathcal{F} äro spänning och ström vid en lednings ena ända ($x = 0$) och V' och \mathcal{F}' motsvarande kvantiteter vid den andra ändan ($x = l$) har professor F. BREISIG visat att man hos en godtyckligt sammanfatt ledning får följande relationer:

$$(1) \quad \begin{cases} V = A_1 \cdot V' + B \cdot \mathcal{F}' \\ \mathcal{F} = A_2 \cdot \mathcal{F}' + C \cdot V' \end{cases}$$

Ledningen kan under alla förhållanden formellt betraktas såsom en homogen ledning med viss komplex dämpningsexponent γ och en godtycklig längd l , om man inför två stycken karakteristiker Z och Z' . Betecknas kortslutningsimpedanserna hos ledningen från båda ändarna med R och R' samt isolationsimpedanserna med I och I' får man följande relationer för bestämning av γl , Z och Z' :

$$(2) \quad \begin{cases} R = Z \cdot \operatorname{tgh} \gamma l \\ R' = Z' \cdot \operatorname{tgh} \gamma l \\ I = Z \cdot \operatorname{ctgh} \gamma l \\ I' = Z' \cdot \operatorname{ctgh} \gamma l \end{cases}$$

Av dessa relationer får man:

$$(3) \quad \frac{R}{I} = \frac{R'}{I'} = \operatorname{tgh}^2 \gamma l.$$

$$(4) \quad \begin{cases} Z = \sqrt{RI} \\ Z' = \sqrt{R'I'} \end{cases}$$

Såsom framgår av dessa likheter behöver man endast känna tre av de fyra storheterna R , I , R' och I' för att bestämma ledningens karakteristiker och dämpning.

Är ledningen symmetrisk med avseende på sin mittpunkt bliva $R = R'$ och $I = I'$. I detta fall få vi även $Z = Z'$.

Införas Z , Z' och γl får man, att koefficienterna i (1) erhålla följande värden:

$$(5) \quad \begin{cases} A_1 = \sqrt{\frac{Z}{Z'}} \cdot \cosh \gamma l \\ A_2 = \sqrt{\frac{Z'}{Z}} \cdot \cosh \gamma l \\ B = \sqrt{ZZ'} \cdot \sinh \gamma l \\ C = \frac{1}{\sqrt{ZZ'}} \cdot \sinh \gamma l \end{cases}$$

Av dessa relationer framgår att:

$$A_1 A_2 - BC = 1,$$

varför endast tre av konstanterna äro oberoende av varandra.

Breisig har infört beteckningen *dämpningsfaktor* för $\cosh \gamma l$. För långa ledningar övergår dämpningsfaktorn i $\frac{e^{\gamma l}}{2}$, och för korta ledningar blir dämpningsfaktorn 1.

Dämpningsfaktorn F erhålles ur ovan angivna Breisigska konstanter enligt relationen:

$$(6) \quad F = \sqrt{A_1 A_2}.$$

Är dämpningsfaktorn bekant, kan man utan svårighet bestämma γl .

Karakteristikerna får man genom multiplikation och division av likheterna:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{A_1}{A_2} = \frac{Z}{Z'} \\ BC = ZZ' \end{cases}$$

För att bestämma förhållandet mellan elektromotoriska kraften på av-sändningsändan och strömstyrkan vid mottagningsändan sätter Breisig denna strömstyrka lika med 1, samt beräknar spänningen V' vid mottagningsändan av ledningen ur impedansen hos mottagningsapparaten. Vi erhålla härigenom V' och I' för den ledning, som ligger närmast mottagnings-

ändan. Med kännedom om denna lednings egenskaper erhålles ur ekvationssystem (1) spänning och ström vid delledningens andra ända. Denna spänning och ström utgöra V' och \mathcal{Y}' för den näst sista delledningen och ur de Breisigska ekvationerna för denna delledning erhålles V och \mathcal{Y} vid andra delledningens början. Genom en fortsatt beräkning, utförd på detta sätt, får man slutligen spänning och ström vid den sammansatta ledningens början. Med kännedom om avsändningsapparatens impedans erhålles slutligen den elektromotoriska kraft vid avsändningsändan, som är erforderlig för att åstadkomma enhetens ström vid mottagningsändan. På grund av proportionaliteter mellan elektromotorisk kraft och ström ger den erhållna elektromotoriska kraften just det sökta förhållandet.

Det första problemet löses på i princip samma sätt. Genom att eliminera spänning och ström i de punkter, där tvenne delledningar stöta ihop, mellan de Breisigska ekvationerna för de båda ledningarna erhållas tvenne ekvationer, som bestämma spänning och ström vid ena ändan av den sålunda sammansatta ledningen såsom linjära funktioner av spänning och ström vid andra ändan. Ur denna ekvation erhållas koefficienterna A_1 , A_2 , B och C för den av två delledningar sammansatta ledningen uttryckta i motsvarande storheter för de båda delledningarna. Med de så erhållna formlerna räknar man först ut konstanterna för den ledning, som bildas av de två sista delledningarna; därefter med samma formler konstanterna för den ledning, som bildas av de tre sista etc., tills man slutligen erhåller konstanterna för den totala sammansatta ledningen. Karakteristiker och komplexa dämpningsexponenten erhållas sedan ur ekvationssystem (6) och (7).

Ovan angivna metoder äro emellertid onödigt besvärliga, då man har att räkna med 4 konstanter i varje ekvationssystem, ehuru endast 3 av dem äro behöfliga för att bestämma en inhomogen ledning. Vidare har man vanligen på förhand karakteristiken och dämpningsexponenten men ej de Breisigska konstanterna uträknade för homogena ledningar, varför en i och för sig onödig omräkning måste verkställas för varje ingående ledning.

Vi skola nedan angiva metoder för beräkningar, i vilka nyss nämnda olägenheter icke förekomma.

För att beräkna en sammansatt lednings karakteristiker och komplexa dämpningsexponent är det tillräckligt såsom vi förut sett, se (3) och (4), att känna 3 av R , R' , I och I' , där R och R' äro kortslutningsimpedanserna samt I och I' isolationsimpedanserna hos ledningen uppmätta från ledningens båda ändpunkter.

De båda karakteristikerna erhållas ur likheterna:

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{RI} \\ Z' &= \sqrt{R'I'} \end{aligned}$$

och dämpningsexponenten ur likheten:

$$\operatorname{tgh} \gamma l = \sqrt{\frac{R}{I}}.$$

Den sista likheten är emellertid icke lämplig för beräkning av dämpningsexponenten, då ledningen har en större längd, emedan i detta fall R och I bliva nästan lika.

För längre ledningar är det därför bättre att beräkna γl icke ur $\operatorname{tgh} \gamma l$, som blir nära 1, utan ur $\cosh \gamma l$. Såsom förut nämnts har Breisig för $\cosh \gamma l$ infört benämningen dämpningsfaktor, och införa vi i det följande för densamma beteckningen F .

Hos en homogen ledning ger dämpningsfaktorn förhållandet mellan utgående och framkommande ström, då ledningen är kortsluten.

Detta framgår av ekvationssystem (1); ty insättes i denna ekvation $V' = 0$ erhålles:

$$\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}'} = A_2 = \cosh \gamma l.$$

Dämpningsfaktorn hos en homogen ledning ger även förhållandet mellan spänningen vid ledningens begynnelseända och dess slutända, då den sistnämnda är isolerad.

Detta erhålles ur samma ekvationssystem (1), om vi sätta $\mathcal{F}' = 0$. Vi få då:

$$\frac{V}{V'} = A_2 = \cosh \gamma l.$$

Hos en homogen ledning sammanfaller dämpningsfaktor med den Breisigska koefficienten $A = A_1 = A_2$.

Hos en inhomogen ledning gälla icke ovan angivna satser för dämpningsfaktorn. Förhållandet mellan utgående och framkommande ström vid kortslutning blir nämligen här olika från olika sidor av ledningen. Vi beteckna i det följande förhållandet mellan framkommande och utgående ström vid kortslutning med f , när ström utsändes vid den ända, där spänningen

är V , och med f' , när ström utsändes vid den ända, där spänningen är V' .

Av ekvationssystem (1) och (2) framgår, att f och f' erhållas ur formelerna:

$$(8) \quad \begin{cases} f = \sqrt{\frac{Z}{Z'}} \cdot \frac{1}{\cosh \gamma l} \\ f' = \sqrt{\frac{Z'}{Z}} \cdot \frac{1}{\cosh \gamma l} \end{cases}$$

f är således inversa värdet till A_2 , och f' till A_1 . f och f' kalla vi ledningens reduktionsfaktorer, emedan, såsom vi senare skola se, de äro de faktorer, med vilka elektromotoriska kraften vid ledningens ena ända skall multipliceras för att erhålla den elektromotoriska kraft, som placerad vid mottagningsändan skulle åstadkomma samma framkommande ström.

Ur formlerna för f och f' framgår, att vi hava:

$$(9) \quad F = \frac{1}{\sqrt{ff'}}.$$

Av ekvationssystem (1) och (8) framgår vidare, att f' är lika med förhållandet $\frac{V'}{V}$, när ledningen är isolerad vid V' ; och på samma sätt är f lika med förhållandet $\frac{V}{V'}$, när ledningen är isolerad vid ändan V .

För att bestämma en sammansatt lednings karakteristiker och komplexa dämpningsexponent behöfdes 3 stycken bestämningselement, och vi välja såsom sådana f , R och R' , där R och R' äro ledningens kortslutningsimpedanser från båda ändarna.

Vi hava nämligen:

$$\frac{f}{f'} = \frac{Z}{Z'} = \frac{R}{R'}$$

eller

$$(10) \quad f = f' \cdot \frac{R}{R'}.$$

Alltså:

$$(10) \quad F = \frac{1}{f'} \cdot \sqrt{\frac{R'}{R}} = \cosh \gamma l$$

Ur denna relation erhålles γl .

Ur likheterna:

$$R = Z \cdot \operatorname{tgh} \gamma l$$

$$R' = Z' \cdot \operatorname{tgh} \gamma l$$

erhållas sedan Z och Z' .

Vi övergå nu till att angiva en metod för successiv beräkning av f' , R och R' .

Reduktion av en sammansatt ledning.

För enkelhetens skull tänka vi oss den sammansatta ledningen $ABCD$ vara sammansatt av tre ledningar AB , BC och CD , för vilka karakteristiker och dämpningsexponenter äro bekanta. De tre ledningarna kunna för öfrigt vara homogena eller ej. Vidare antaga vi, att en elektromotorisk kraft E är inlänkad vid A . I ledningarna AB och CD ingå även de resp. apparater, genom vilka ledningen $ABCD$ är sluten vid ändpunkterna.

Vid en beräkning av spänningar och strömstyrkor å ledningarna BC och CD kan man ersätta ledningen AB och dess elektromotoriska kraft med en impedans H_1 och en reducerad elektromotorisk kraft E_1 , vilken kan tänkas placerad i punkten B .

Impedansen H_1 är den impedans, som erhålles vid uppmätning av AB från B . Elektromotoriska kraften E_1 är lika med den spänning, som skulle erhållas å AB vid B , om ledningen AB vore isolerad i denna punkt.

För ledningen AB ha vi nämligen ett ekvationssystem av formen:

$$\begin{cases} V = I \cdot \mathcal{Z} - A \cdot \mathcal{Z}' \\ V' = A \cdot \mathcal{Z} - I' \cdot \mathcal{Z}' \end{cases}$$

vilket ekvationssystem erhålles genom omformning av de Breisigska ekvationerna. I och I' ha de värden som angives av formel (2). A är icke den koefficient som förekommer i de Breisigska ekvationerna utan har värdet:

$$(11) \quad A = \frac{\sqrt{ZZ'}}{\sinh \gamma l}$$

Elimineras \mathcal{Z} mellan dessa ekvationer få vi:

$$V' = \frac{A}{I} \cdot V - \left(I' - \frac{A^2}{I} \cdot \mathcal{Z}' \right)$$

eller

$$V' = f_1' \cdot V - R' \cdot \mathcal{Z}'.$$

Är ledningen sluten vid A genom elektromotoriska kraften E få vi, enär då $V = E$:

$$V' = f_1' \cdot E - R' \cdot \mathcal{I}' = E_1 - R' \cdot \mathcal{I}'.$$

Detta är just sambandet mellan spänning och ström i punkten B , när AB är ersatt med en impedans lika med R' och en elektromotorisk kraft lika med E_1 . R' är ledningens kortslutningsimpedans uppmätt från B .

Att E_1 är lika med spänningen i B , när AB är isolerad i denna punkt, framgår direkt, om vi i ovanstående likhet insätta $\mathcal{I}' = 0$.

Vidare hava vi funnit relationen:

$$E_1 = f_1' \cdot E.$$

Som E_1 är den elektromotoriska kraft, som placerad i punkten B åstadkommer samma ström och spänning å BCD som elektromotoriska kraften E placerad vid ändan A , framgår det, att f_1' är reduktionsfaktorn för elektromotoriska kraften, när denna flyttas från punkten A till punkten B .

Reduktionsfaktorn vid en förflyttning av en elektromotorisk kraft från ändan B till ändan A i och för beräkning av strömmen i A blir på samma sätt f_1 .

Är f_1' känd erhålles f_1 ur relationen:

$$(12) \quad \frac{f_1}{f_1'} = \frac{Z}{Z'} = \frac{R}{R'}.$$

Vi hava ovan nämnt, att elektromotoriska kraften E_1 kunde tänkas anbragt i punkten B ; men om samtidigt ledningen AB ersattes med kortslutningsimpedansen, som vi nu beteckna med H_1 , är det naturligtvis likgiltigt för beräkning av strömmar och spänningar å BCD , var E_1 placeras på denna impedans. Vi kunna därför tänka oss E_1 anbragt vid impedansens ändpunkt längst bort från punkten B .

Betraktas nu ledningen BC sluten genom den impedans H_1 vid B_1 som ersatte AB , såsom en inhomogen ledning, vars reduktionsfaktorer vi beteckna med f_2 och f_2' , kan man för beräkning av strömmar och spänningar å CD ersätta ledningen ABC med en impedans H_2 lika med den, som skulle erhållas vid mätning av ABC från C , eller som vid beräkning skulle erhållas för ledningen CB sluten vid B genom impedansen H_1 . Man har då att flytta elektromotoriska kraften E_1 från punkten B till

punkten C vederbörligen reducerad. Betecknas den nya elektromotoriska kraften med E_2 , ha vi då relationen:

$$E_2 = f_2' \cdot E_1$$

eller

$$E_2 = f_2' \cdot f_1' \cdot E.$$

Förflyttningen från punkten A till punkten C av elektromotoriska kraften svarar alltså mot en reduktionsfaktor lika med $f_1' \cdot f_2'$.

På samma sätt kan man för beräkning av strömstyrkan i punkten D ersätta hela ledningen med en impedans H_3 , som är lika med ledningens totala impedans uppmätt från D eller impedansen av ledningen DC slutet vid C med impedansen H_2 , samt en elektromotorisk kraft E_3 lika med:

$$E_3 = f_3' \cdot f_2' \cdot f_1' \cdot E$$

där f_3' är reduktionsfaktorn för ledningen DC slutet genom H_2 vid C .

Reduktionsfaktorn för totala sammansatta ledningen f' erhålles sålunda genom successiv beräkning ur formeln:

$$f' = f_3' \cdot f_2' \cdot f_1'$$

H_3 är lika med kortslutningsimpedansen R' för den sammansatta ledningen $ABCD$.

För att bestämma R utgå vi från, att ledningen CD är kortsluten vid D , samt beräkna dess kortslutningsimpedans H_1' från C . Därefter beräknas impedansen H_2' för ledningen BC från B , när den vid C är slutet genom H_1' . Slutligen beräknas impedansen för ledningen AB från A , när denna ledning är vid B slutet genom impedansen H_2' . Den impedans, som då erhålles, är den sammansatta ledningens kortslutningsimpedans R från A .

Det återstår nu att angiva formler för den successiva beräkningen av f' , R' och R .

Vi utgå då ifrån, att vi känna impedansen H_1 för AB uppmätt från B , samt den till B reducerade elektromotoriska kraften E_1 . Vi antaga vidare, att vi å ledningen BC hava spänningen V i B och V' i C samt strömstyrkan \mathcal{I} i B och \mathcal{I}' i C . För ledningen BC gäller då ekvations-systemet:

$$\begin{cases} V = I \cdot \mathcal{I} - A \cdot \mathcal{I}' \\ V' = A \cdot \mathcal{I} - I' \cdot \mathcal{I}' \end{cases}$$

Vidare ha vi:

$$V = E_1 - H_1 \cdot \mathcal{F}.$$

Mellan ovanstående 3 ekvationer elimineras V och \mathcal{F} . Vi få:

$$V' = \frac{A}{I + H_1} \cdot E_1 - \left(I' - \frac{A^2}{I + H_1} \right) \cdot \mathcal{F}'$$

eller, om vi införa:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_2 = \frac{A}{I + H_1} \cdot E_1 = f_2' \cdot E_1 \\ H_2 = I' - \frac{A^2}{I + H_1} \end{array} \right\},$$

$$V' = E_2 - H_2 \cdot \mathcal{F}'.$$

Av denna likhet framgår, att vi vid beräkning av strömmar och spänningar på ledningen CD kunna ersätta ledningen ABC med en impedans H_2 och en elektromotorisk kraft E_2 , beräknade ur ovan angivna formler.

Vi omforma nu uttrycket för H_2 , i det att vi i stället för $I' - A^2$ införa RI' . Vi erhålla:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2' = \frac{A}{I + H_1} \\ H_2 = (R + H_1) \cdot \frac{I'}{I + H_1} \end{array} \right\}.$$

Insätts här för R , I , I' och A värdena ur formelsystem (2) och formel (11), får man efter någon reduktion:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2' = \frac{2\sqrt{ZZ'} \cdot e^{-\gamma l}}{Z + H_1 + (Z - H_1) \cdot e^{-2\gamma l}} \\ H_2 = Z' \cdot \frac{Z + H_1 - (Z - H_1) \cdot e^{-2\gamma l}}{Z + H_1 + (Z - H_1) \cdot e^{-2\gamma l}} \end{array} \right\}.$$

I överensstämmelse med förut av mig använda beteckningar för reflexionskonstanterna vid en vågs övergång från en ledning till en annan införa vi i ovanstående formler:

$$\frac{Z - H_1}{Z + H_1} = \varepsilon$$

$$\frac{2Z}{Z + H_1} = \eta.$$

Formlerna kunna då skrivas:

$$(13) \quad \begin{cases} f_2' = \sqrt{\frac{Z'}{Z}} \cdot \eta \cdot \frac{e^{-\gamma l}}{1 + \varepsilon \cdot e^{-2\gamma l}} \\ H_2 = Z' \cdot \frac{1 - \varepsilon \cdot e^{-2\gamma l}}{1 + \varepsilon \cdot e^{-2\gamma l}} \end{cases}$$

Är ledningen BC så lång, att vi kunna försumma $\varepsilon \cdot e^{-2\gamma l}$ i förhållande till 1 övergå våra formler till följande:

$$(14) \quad \begin{cases} f_2' = \sqrt{\frac{Z'}{Z}} \cdot \eta \cdot e^{-\gamma l} \\ H_2 = Z' \end{cases}$$

vilka äro de formler, som gälla för en över BC fortskridande våg. Tillläggsfaktorerna i de fullständiga formlerna härröra från de successiva reflexionerna vid ledningen BC :s båda ändar.

För att överallt få liknande beräkningsmetoder sätta vi ε och η under formen:

$$(15) \quad \begin{cases} \varepsilon = \frac{1 - \frac{H_1}{Z}}{1 + \frac{H_1}{Z}} \\ \eta = \frac{2}{1 + \frac{H_1}{Z}} \end{cases}$$

Om vi frånse direkta multiplikationer och divisioner, ha vi endast att utföra räkneoperationer av formen $1 + n_0 \cdot e^{j\psi}$. Amplituden för ett dylikt uttryck är $\sqrt{1 + n_0^2 + 2n_0 \cos \psi}$, och fasvinkeln erhålles ur formeln:

$$\operatorname{tg} u = \frac{n_0 \sin \psi}{1 + n_0 \cos \psi}$$

Alla beräkningar bliva därför förhållandevis enkla att utföra.

För att närmare belysa räknemetoden skola vi tillämpa den på ett exempel.

Vi antaga då till en början, att den sammansatta ledningen består av tvenne homogena ledningar AB och BC , av vilka AB är en 400 km lång

4,5 mm kopparledning och BC en 300 km lång pupiniserad 3 mm kopparledning.

Konstanterna för de båda ledningarna antagas vara:

| | <i>Ledn. AB.</i> | <i>Ledn. BC.</i> |
|---------------------|-----------------------------------|----------------------|
| β | $1,74 \cdot 10^{-3}$ | $2,75 \cdot 10^{-3}$ |
| λ | 354 km. | 116 km. |
| Z | 654 ($-4^{\circ} 20'$) Ω | 2080 ($-40'$) |
| l | 400 km. | 300 km. |

Härav erhålles:

| | | |
|----------------------------|--|--|
| $2\beta l$ | 1,412 | 1,650 |
| $2\alpha l$ | $93^{\circ} 26' + 2 \cdot 360^{\circ}$ | $242^{\circ} + 2 \cdot 360^{\circ}$ |
| $e^{-2\gamma l}$ | 0,241 ($-93^{\circ} 26'$) | 0,192 (-242°) = 0,192 (118 $^{\circ}$) |

Kortslutningsimpedansen för AB erhålles ur formeln:

$$H_1 = Z \cdot \frac{1 - e^{-2\gamma l}}{1 + e^{-2\gamma l}} = Z \cdot \frac{1 - n_0 \cdot e^{j\psi}}{1 + n_0 \cdot e^{j\psi}}$$

och f_1' ur formeln:

$$f_1' = \frac{e^{-\gamma l}}{1 + e^{-2\gamma l}} = \frac{e^{-\gamma l}}{1 + n_0 e^{j\psi}} = \frac{\sqrt{n_0} \cdot e^{j\frac{\psi}{2}}}{1 + n_0 e^{j\psi}}$$

Här är:

$$\begin{aligned} n_0 &= 0,241 \\ \psi &= -93^{\circ} 26'. \end{aligned}$$

En uträkning lämnar:

$$\begin{aligned} 1 + n_0^2 &= 1,058 \\ 2n_0 \cos \psi &= -0,029 \\ 1 + n_0^2 + 2n_0 \cos \psi &= 1,029 \\ 1 + n_0^2 - 2n_0 \cos \psi &= 1,087 \\ n_0 \sin \psi &= 0,241 \\ 1 + n_0 \cos \psi &= 0,986 \\ 1 - n_0 \sin \psi &= 1,014 \\ \frac{n_0 \sin \psi}{1 + n_0 \cos \psi} &= -0,247 \\ \frac{n_0 \sin \psi}{1 - n_0 \cos \psi} &= 0,237 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 - n_0 \cdot e^{j\psi} &= 1,043 \quad (13^\circ 20') \\
 1 + n_0 \cdot e^{j\psi} &= 1,015 \quad (-13^\circ 52') \\
 H_1 &= 674 \quad (22^\circ 52') \\
 f_1' &= 0,433 \quad (-32^\circ 56').
 \end{aligned}$$

För beräkning av ε och η ha vi:

$$n_0 \cdot e^{j\psi} = \frac{H_1}{Z} = 0,324 \quad (23^\circ 32')$$

$$\varepsilon = \frac{1 - n_0 \cdot e^{j\psi}}{1 + n_0 \cdot e^{j\psi}}$$

$$\eta = \frac{2}{1 + n_0 e^{j\psi}}$$

Med samma beräkningsgrund som ovan erhålles:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= 0,600 \quad (-16^\circ 9') \\
 \eta &= 1,755 \quad (-5^\circ 43').
 \end{aligned}$$

För beräkning av H_2 och f_2' ha vi sedan:

$$\begin{aligned}
 n_0 &= 0,1152 \\
 \psi &= 101^\circ 51' \\
 Z &= 2\,080 \quad (-40').
 \end{aligned}$$

Samma beräkningsmetod som ovan lämnar:

$$\begin{aligned}
 H_2 &= 2\,185 \quad (-13^\circ 34') \\
 f_2' &= 0,678 \quad (46^\circ 40').
 \end{aligned}$$

H_2 är kortslutningsimpedansen för den sammansatta ledningen från C , alltså lika med R' .

Ledningens hela reduktionsfaktor f' blir nu:

$$f' = f_2' \cdot f_1' = 0,379 \quad (13^\circ 44').$$

För att känna ledningen fullständigt måste vi nu även beräkna kortslutningsmotståndet R från ändan A .

Kortslutningsmotståndet H_1' för BC kortsluten vid C erhålles ur formeln:

$$H_1' = Z \cdot \frac{1 - n_0 e^{j\psi}}{1 + n_0 e^{j\psi}},$$

där

$$n_0 = 0,192$$

$$\psi = 118^\circ$$

$$Z = 2080 (-40').$$

Vi använda här vid beräkningen följande metod för beräkning av $\frac{1 - n_0 e^{j\psi}}{1 + n_0 e^{j\psi}}$. Amplituden för detta uttryck är:

$$\sqrt{\frac{1 + n_0^2 - 2n_0 \cos \psi}{1 + n_0^2 + 2n_0 \cos \psi}}.$$

Införes här beteckningen:

$$\delta = \frac{2n_0}{1 + n_0^2} \cdot \cos \psi$$

blir amplituden lika med:

$$\sqrt{\frac{1 - \delta}{1 + \delta}}.$$

Fasvinkeln u för $\frac{1 - n_0 e^{j\psi}}{1 + n_0 e^{j\psi}}$ är:

$$u = \operatorname{arctg} \frac{n_0 \sin \psi}{1 - n_0 \cos \psi} - \operatorname{arctg} \frac{n_0 \sin \psi}{1 + n_0 \cos \psi}.$$

Härav erhålles:

$$\operatorname{tg} u = - \frac{\frac{-n_0 \sin \psi}{1 + n_0 \cos \psi} + \frac{n_0 \sin \psi}{1 - n_0 \cos \psi}}{1 - \frac{n_0^2 \sin^2 \psi}{1 - n_0^2 \cos^2 \psi}}$$

eller efter reducering:

$$\operatorname{tg} u = - \frac{2n_0}{1 - n_0^2} \sin \psi.$$

Då n_0 och ψ äro givna, får man sålunda vinkeln u och δ och härav amplituden och fasvinkeln för det sökta uttrycket.

I vårt exempel skulle vi sålunda få:

$$\begin{aligned}
 2n_0 \cos \psi &= -0,1804 & -2n_0 \sin \psi &= -0,340 \\
 1 + n_0^2 &= 1,037 & 1 - n_0^2 &= 0,963 \\
 \delta &= -0,175 & \operatorname{tg} u &= -0,354 \\
 \sqrt{\frac{1-\delta}{1+\delta}} &= 1,193 & u &= -19^\circ 30' \\
 H_1' &= 2480 \quad (-20^\circ 10').
 \end{aligned}$$

På samma sätt beräknas ε :

$$\begin{aligned}
 n_0 &= 3,79 \\
 \psi &= -15^\circ 50' \\
 2n_0 \cos \psi &= 7,29 & -2n_0 \sin \psi &= -2,07 \\
 1 + n_0^2 &= 15,35 & 1 - n_0^2 &= -13,35 \\
 \delta &= 0,475 & \operatorname{tg} u &= 0,155 \\
 \sqrt{\frac{1-\delta}{1+\delta}} &= 0,596 & u &= 180^\circ + 8^\circ 48' \\
 \varepsilon &= 0,596 \quad (188^\circ 48').
 \end{aligned}$$

Slutligen ha vi att på samma sätt beräkna H_1' eller R .

En uträkning lämnar:

$$R = 671 \quad (-20^\circ 40').$$

Vi hava alltså fått följande värden för den sammansatta ledningen:

$$\begin{aligned}
 R &= 671 \quad (-20^\circ 40') \\
 R' &= 2185 \quad (-13^\circ 34') \\
 f' &= 0,379 \quad (13^\circ 44').
 \end{aligned}$$

Ur formel (10) få vi då:

$$\cosh \gamma l = 4,77 \quad (-10^\circ 11').$$

Införa vi här för tillfället:

$$\begin{aligned}
 y &= e^{i l} \\
 m &= 4,77 \quad (-10^\circ 11')
 \end{aligned}$$

få vi ekvationen:

$$y + \frac{1}{y} = 2m,$$

varur erhålles

$$y = m \pm \sqrt{m^2 - 1}.$$

Övre tecknet ger y , emedan amplituden för y måste vara större än 1; undre tecknet ger $\frac{1}{y}$. En uträkning lämnar:

$$e^{i\alpha} = y = 9,46 (-10^\circ 25'),$$

varav vi få:

$$\beta l = 2,25.$$

$$\alpha l = -10^\circ 25' + k \cdot 360^\circ.$$

Z erhålles ur likheten:

$$Z = R \cdot \operatorname{ctgh} \gamma l = R \cdot \frac{1 + e^{-2\gamma l}}{1 - e^{-2\gamma l}}.$$

Man får:

$$Z = 685 (-21^\circ 7')$$

$$Z' = 2230 (-28^\circ 13').$$

Summan av de båda ledningarnas dämpningar blir 1,53; på grund av reflexionen mellan ledningarna har således dämpningen ökats med 0,72.

Vi övergå nu till att taga i betraktande den sammansatta ledningens ekvivalenta motstånd. Är ledningen kortsluten vid C och en elektromotorisk kraft E direkt ansluten vid A , blir den till C framkommande strömmen \mathcal{J} :

$$\mathcal{J} = \frac{f \cdot E}{R'}.$$

Ledningens ekvivalenta motstånd, då den är kortsluten, blir alltså $\frac{R'}{f}$. Med de värden vi funnit i ovan uträknade exempel, skulle vi alltså få ett ekvivalent motstånd lika med 5760 ohm.

Om ledningen varit förenad med en telefonapparat vid C , vars impedans vi beteckna med H_3 , skulle den framkommande strömmen bliv:

$$\mathcal{J}' = \frac{f}{R' + H_3} \cdot E.$$

Ledningskretsens ekvivalenta motstånd skulle i detta fall bliv:

$$\frac{R' + H_3}{f}.$$

Antaga vi telefonapparaten vara en bordsapparat, kunna vi vid $\omega = 5\ 000$ sätta:

$$H_3 = 700 (45^\circ).$$

Vi erhålla då det ekvivalenta motståndet lika med:

$$\frac{2\ 185 (-13^\circ 34') + 700 (45^\circ)}{0.379} = 6\ 920 \text{ ohm.}$$

En telefonapparat förbunden med den sammansatta ledningen vid A inverkar högst obetydligt på R' , emedan $e^{-2\gamma l}$ har ett så litet värde. För samma orsaks skull kunna vi förenkla formeln för f' . Beteckna vi impedansen hos denna telefonapparat med H_0 och införa

$$\eta = \frac{2Z}{Z + H_0},$$

där Z är den sammansatta ledningens karakteristik från A , samt beteckna vi det nya värdet på f' med f'_0 , få vi enligt (13)

$$f'_0 = \eta \cdot f'.$$

Antaga vi H_0 hava samma värde som H_3 , erhålles:

$$\eta = 1,18 (-33^\circ 27')$$

och

$$f'_0 = 0,446 (-19^\circ 43').$$

Vi välja slutligen följande exempel på beräkning av en sammansatt ledningskrets:

En interurbanledning består av 400 km 4,5 mm kopparledning och 300 km pupiniserad 3 mm kopparledning. Den förra ledningen är förbunden med en abonnentledning bestående av 5 km 0,7 mm lokalkabel och den senare med en abonnentledning bestående av 30 km 3 mm järnledning. Beräkna totala ledningskretsens ekvivalenta motstånd.

Vi antaga för interurbanledningarna samma konstanter som i ovan behandlade exempel. Vi känna alltså det ekvivalenta motståndet för interurbanledningen direkt förenad med de båda abonnentapparaterna. Det ekvivalenta motståndet för denna krets var 5 880 ohm. Vidare känna vi den sammansatta interurbanledningens båda karakteristiker samt abonnentapparatens impedans.

På grund av interurbanledningens stora dämpning, $e^{-\alpha \gamma l}$ har en amplitud av storleksordningen 0,01, kunna vi antaga impedansen för interurbanledningen med vid andra ändan förenad abonnentledning vara lika med interurbanledningens motsvarande karakteristik.

Vi kunna då direkt beräkna den sänkning i framkommande ström, som var och en av de båda abonnentledningarna åstadkommer, då de inskjutas mellan abonnentapparat och interurbanledning.

Vi sysselsätta oss först med lokalkabeln.

I formeln å sid. 444 ha vi att införa följande värden:

$$\begin{aligned} H &= 700 (45^\circ) \\ H' &= 685 (-21^\circ 7') \\ Z &= 670 (-43^\circ 40') \\ \beta &= 93,5 \cdot 10^{-3} \\ \lambda &= 65 \text{ km.} \end{aligned}$$

Vi få då:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha \gamma l} &= 0,393 (-55^\circ 24') \\ n &= 0,163 (180^\circ - 40^\circ 11') \\ m + n &= 0,876 + j \cdot 0,105 \\ ne^{-\alpha \gamma l} &= 0,064 (84^\circ 25') \\ m + n - ne^{-\alpha \gamma l} &= 0,875 + j \cdot 0,041 = 0,876 (3^\circ 41') \\ e^{-\gamma l} &= 0,627 (-27^\circ 42') \\ x &= 0,716 (-31^\circ 23') \end{aligned}$$

På grund av lokalkabeln kommer således framkommande strömmen att minskas i proportionen 0,716 och det ekvivalenta motståndet alltså att ökas i omvänd proportion. Det ekvivalenta motståndet blir alltså $\frac{2880}{0,716} = 8220$ ohm.

För beräkningen av järnledningens inverkan ha vi följande konstanter:

$$\begin{aligned} H &= 700 (45^\circ) \\ H' &= 2230 (-28^\circ 13') \\ Z &= 1610 (-20^\circ 40') \\ \beta &= 15,00 \cdot 10^{-3} \\ \lambda &= 163 \text{ km.} \end{aligned}$$

I detta fall få vi:

$$\begin{aligned} e^{-2\gamma l} &= 0,407 (-132^\circ 30') \\ n &= 0,084 (180^\circ - 17^\circ) \\ n \cdot e^{-2\gamma l} &= 0,0342 (30^\circ 30') = \\ m + n &= 0,920 + j \cdot 0,025 \\ m + n - n \cdot e^{-\gamma l} &= 0,890 (31') \\ e^{-\gamma l} &= 0,637 (-66^\circ 15') \\ x &= 0,716 (-66^\circ 46'). \end{aligned}$$

Järnledningen sänker således framkommande strömmen i proportionen 0,716. Totala ledningskretsen får ett ekvivalent motstånd lika med $\frac{8220}{0,716} = 11475$ ohm.

Såväl inkopplingen av kabeln som järnledningen minska dämpningen på grund av reflexion, enär såsom vi sett $m + n - n \cdot e^{-2\gamma l}$ i båda fallen får en amplitud, som är mindre än 1. Totala ledningsdämpningen är $0,468 + 0,696 + 0,825 + 0,450 = 2,44$. Strömstyrkan kommer därför på grund av denna dämpning att minskas till 0,087 av utgående strömmen. Försumma vi reflexionerna, och antaga vi impedansen för utgående ström till 1000 ohm, skulle vi för 1 volts elektromotorisk kraft få en framkommande ström av 0,087 mA. Detta motsvarar ett ekvivalent motstånd av 11490 ohm. En jämförelse av detta motstånd med det förut erhållna visar, att inkopplingen av kabeln och järnledningen mellan abonentapparat och interurbanledning praktiskt taget åstadkommer, att reflexionsförlusterna försvinna.

Ovan beräknade exempel är typiskt för de beräkningar, man har att verkställa på ledningskretsar. Genom att man en gång för alla beräknar interurbanledningen kan sedan med stor lätthet en ledningskrets, vilken som helst beräknas, i vilken interurbanledningen ingår, under förutsättning att dämpningen hos interurbanledningen är stor (större än 1). Man behöver icke ens beräkna Z och Z' för interurbanledningen, utan man kan direkt begagna R och R' såsom impedanser för denna ledning slutet vid sin bortre ända genom andra ledningar. Likaledes behöver man ej beräkna γl för interurbanledningen utan endast f' . Ur dessa tre konstanter får man sedan, såsom vi ovan sett, det ekvivalenta motståndet för interurbanledningen slutet genom telefonapparater vid ändpunkterna.

Det ekvivalenta motståndet med ändapparaterna inberäknade ger ett bättre uttryck på ledningens godhet för talöverföringen än dämpningen, enär man dels får med reflexionerna vid ändapparaten, vilket icke är fallet då man räknar med ledningens dämpning, och dels erhåller tal, som giva ett riktigare begrepp om storleken av effekten på mottagningsapparaten. Dessutom kan man genom direkt inkoppling av ett motstånd mellan tvenne apparater, så att kretsens impedans blir lika med det ekvivalenta motståndet, få ett begrepp om styrkan av det framkommande talet på en längre ledning.

I många fall är det lämpligare att uppmäta interurbanledningens konstanter. R och R' erhållas direkt genom att mäta impedansen från båda ändarna med en växelströmsbrygga. f' uppmätes hos en längre ledning med tillhjälp av tvenne termogalvanometrar eller motsvarande apparater för uppmätning av svaga växelströmmar (baretter, termoelement, detektorer). Det ena instrumentet användes såsom voltmeter på avsändningssidan och det andra såsom amperemeter på mottagningsidan. Spänningen vid avsändningsändan bör hållas omkring 1 volt, vilket lätt kan ske genom en lämplig spänningsdelare, varigenom även vinnes, att ledningen blir nära kortsluten vid avsändningsändan, varför man kan räkna att ledningsimpedansen från mottagningsidan blir vid mätningen praktiskt taget lika med R' . Är motståndet hos den såsom amperemeter använda apparaten H , ger förhållandet mellan spänningen och framkommande strömmen $\frac{R' + H}{f}$. Som R' och H äro kända, erhålles genom en enkel räkning f' och $\frac{R'}{f}$.

NÅGRA RIKTLINJER FÖR ANORDNANDET AV EKONOMISKA ÅNGPANNNEELDSTÄDER

AV

ANDERS ROSBORG.

Frågan om ekonomiserandet med bränsle har visserligen under åtskilliga årtionden varit tämligen beaktad, och på många sätt har man sökt medel att i största möjliga grad nyttiggöra det värme, som kan alstras vid förbränning av de bränslen, till vilkas användning man varit hänvisad. Man har emellertid varit åtskilligt bortskämd med stor frihet beträffande val av bränsle, och detta har säkerligen ej gynnat bränsleteknikens utveckling till det omfång, som i dessa tider skulle varit till gagn. Så länge exempelvis de bästa engelska stenkol med ett tämligen konstant bränslevärde av 7 000—7 500 v.e. pr kg kunde erhållas i svensk hamn till ett pris av 12 à 15 kr. pr ton, må man ej undra på att det ej lönade sig att konstruera och bygga eldstäder för ett så skrymmande bränsle som exempelvis bränn-torv, som redan vid mossen representerade en kostnad av 8 à 12 kr. pr ton, oberoende av dess fuktighetshalt, och då dessutom torvens bränslevärde var på grund av fuktighetshalten så beroende av väderleken, att detsamma det ena året kunde uppgå till möjligen 3 800 v.e. pr kg men ett annat år stanna vid kanske endast 2 200 v.e. Förhållandena hava emellertid blivit helt annorlunda och detta på ett för oss mycket allvarsamt sätt. De goda engelska stenkolen äro kanske snart för oss ett minne blott och vi få hålla till godo med tyska och belgiska stenkol, som vi förr ratade såsom nästan omöjliga, men nu måste taga emot, delvis med tacksamhet om vi kunna erhålla dem, men under alla omständigheter få vi betala dem dyrt: 80 à 90 kr. pr ton, ja i skrivande stund ända till 200 kr. pr ton.

På grund härav och även på grund av den ökade arbetskostnaden har även torvpriset stigit i avsevärd grad, ehuru dock ej mer än att det säkerligen lönar sig att på allvar taga upp frågan om anordnandet av lämpliga eldstäder för detta liksom för andra s. k. mindervärdiga bränslen. Då denna fråga således blivit i hög grad aktuell, kan det ju vara lämpligt att något närmare taga reda på hurdana eldstäder f. n. användas och dessas förtjänster och olägenheter samt på grund därav möjligen söka att klargöra för sig de väsentligaste arbetsvillkoren eller betingelserna för eldningen av de resp. bränsleslagen.

Den vanliga rosteldningen.

Den urgamla och även f. n. mest använda eldstadstypen, åtminstone vid mindre ångpanneeldstäder, är den vanliga rosteldningen, varvid bränslet inkastas eller inmatas på en planrost, eller eventuellt trapprost, och all den för förbränningen erforderliga luftmängden insläppes genom askugnsluckorna, får passera genom rosten och bränslelagret för att därstädes angripa det glödande bränslet och i lyckligaste fall förbränna detta till kolsyra och vattenånga. För att detta skall lyckas fullständigt måste emellertid på grund av svårigheten för luften att tillräckligt intimt åtkomma allt kol och kolväte i fyren ett avsevärdt luftöverskott tillsläppas, ofta nog uppgående till lika mycket som den för förbränningen teoretiskt erforderliga luftmängden. Följden härav blir givetvis den, att den överskjutande ej använda syremängden, och den stora mängd kväve, som åtföljer syret, uppvärmas och avgå med förbränningsgaserna, därvid medtagande en rätt avsevärd värmemängd, som ej kommer ångpannan till godo. Det ligger sålunda vikt uppå att i möjligaste mån minska detta luftöverskott, naturligtvis med bibehållande av den fullständiga förbränningen. Skulle denna ej bli fullständig, d. v. s. skulle en del av kolet förbrinna endast till koloxid, utvecklas en avsevärdt mindre värmemängd och resten bortgår såsom en potentiell värmeenergi med rökgaserna, varvid förlusten lätt kan bli ännu större än genom det större eller mindre luftöverskottet.

Luftöverskottet kan ej direkt uppmätas utan beräknas ur förbränningsgasernas sammansättning, som medelst de moderna gasanalysapparaterna utan svårighet kan bestämmas.

Värmeförlusterna genom avloppsgaserna.

För att erhålla ett begrepp om den värmeförlust, som uppstår genom avloppsgaserna på grund av dessas olika kolsyrehalt och temperatur, må här utföras en kort beräkning av ifrågavarande förluster.

Vi antaga att bränslet innehåller:

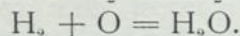
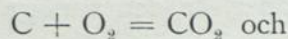
C % kol,

H % s. k. disponibelt väte,

W % kemiskt och hygroskopiskt bundet vatten,

samt bortse från kvävet och de små mängder brännbart svavel, vars inverkan vad beträffar värmeutvecklingen är minimal.

Taga vi nu endast ovannämnda ämnen i betraktande, så äga vid fullständig förbränning följande reaktioner rum



Av 1 kg bränsle erhålles således $\frac{C}{100} \cdot \frac{1}{12}$ molekylarvolym CO₂ och $\frac{9H + W}{100 \cdot 18}$ mol.vol. H₂O-ånga.

Är nu rökgasernas halt av kolsyra = K vol % så utgöra de pr kg bränsle avgående vattenfria gaserna

$$\frac{C}{K \cdot 12} \text{ mol.vol.},$$

vilket erhålles av ekvationen $X \cdot \frac{K}{100} = \frac{C}{100} \cdot \frac{1}{12}$.

Rökgaserna pr 1 kg bränsle få alltså följande sammansättning

$$CO_2 = \frac{C}{100} \cdot \frac{1}{12} \text{ mol.vol.}$$

$$O_2 + N_2 = \frac{C}{K \cdot 12} - \frac{C}{100} \cdot \frac{1}{12} = \frac{C}{12} \cdot \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{100} \right) \text{ mol.vol.}$$

$$H_2O\text{-ånga} = \frac{9H + W}{100 \cdot 18} \text{ mol.vol.}$$

Molekylvärmet för dessa gaser är

$$\begin{aligned} \text{för } \text{CO}_2 &= 9,27 \\ \text{» } \text{O}_2 + \text{N}_2 &= 6,96 \\ \text{» } \text{H}_2\text{O} &= 8,14 \end{aligned}$$

Det pr 1 kg av bränslet bortgående värmets blir således

$$V_{\text{kal.}} = (T - t) \left[\frac{C}{1200} \cdot 9,27 + \frac{C}{12} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{100} \right) 6,96 + \frac{9H + W}{100 \cdot 18} 8,14 \right]$$

där T och t beteckna rökgasernas och den yttre luftens temperatur respektive.

Omräkna vi denna förlust i % av bränslets värmevärde W_{eff} kalorier, så få vi

$$V_{\text{förlust}} \% = \frac{100}{W_{\text{eff}}} (T - t) \left[\frac{C}{12} \left\{ \frac{9,27}{100} + 6,96 \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{100} \right) \right\} + \frac{9H + W}{1800} 8,14 \right]$$

vilket ger

$$V_{\text{förlust}} \% = \frac{100}{W_{\text{eff}}} (T - t) \left[\frac{C}{12} \left(0,0231 + \frac{6,96}{K} \right) + 0,00452 (9H + W) \right]$$

Nedanstående grafiska tabeller, fig. 1 och 2, äro uppgjorda på grund av följande genomsnittsvärden för

| | Engelska stenkol | Smålandstorf |
|----------------------|------------------|--------------|
| värmevärde | $W_1 = 7400$ | 3800 |
| kolhalt | $C = 80 \%$ | 46 % |
| vätehalt | $H = 5 \%$ | 5 % |
| fuktighet | $W = 4 \%$ | 30 % |

och under förutsättning av en yttre lufttemperatur $t = 20^\circ$.

Dessa värden giva åt förlustformeln följande utseende

$$\text{för stenkol} \quad V = (T - 20) \cdot \left(0,005 + \frac{0,627}{K} \right) \%$$

$$\text{för torf} \quad V = (T - 20) \cdot \left(0,011 + \frac{0,702}{K} \right) \%$$

Av diagrammen framgår, att exempelvis för stenkol vid en ej ovanlig kolsyrehalt av 8 %, motsvarande ett luftöverskott av c:a 150 %, och vid 200° avgångstemperatur rökgasvärmeförlusten blir 15 %, under det att vid en möjlig, ehuru sällan förekommande kolsyrehalt av 16 %, motsvarande ett luftöverskott av c:a 30 %, samt vid samma skorstenstemperatur förlusten

inskränker sig till 7,8 %. Man har således mycket att vinna genom att till det lägsta möjliga reducera luftöverskottet, d. v. s. öka kolsyrehalten hos rökgaserna, och eldningsteknikernas strävanden hava även gått i denna riktning. För att kunna anordna eldning så, att minsta möjliga luftöverskott erhålles, måste eldningen kontrolleras genom iakttagande eller uppmätande av bränslegasernas kolsyrehalt, för vilket ändamål särskilda registrerande kolsyremätapparater konstruerats.

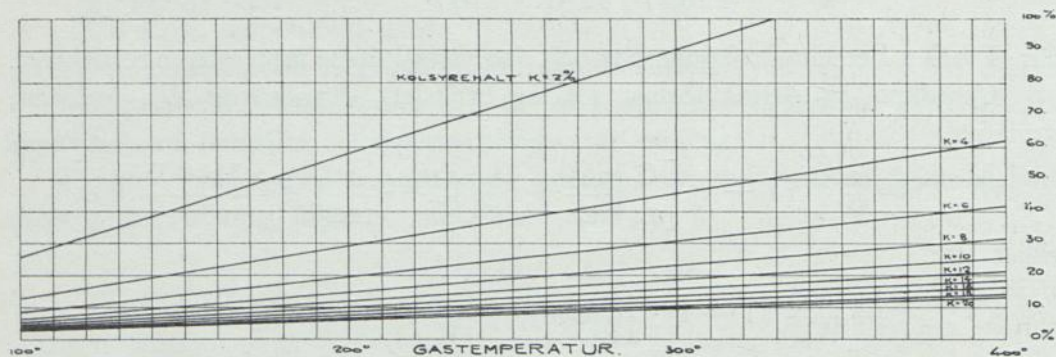


FIG. 1. TABELL ÖVER VÄRMEFÖRLUSTERNA I RÖKGASERNA VID ELDNING MED STENKOL.

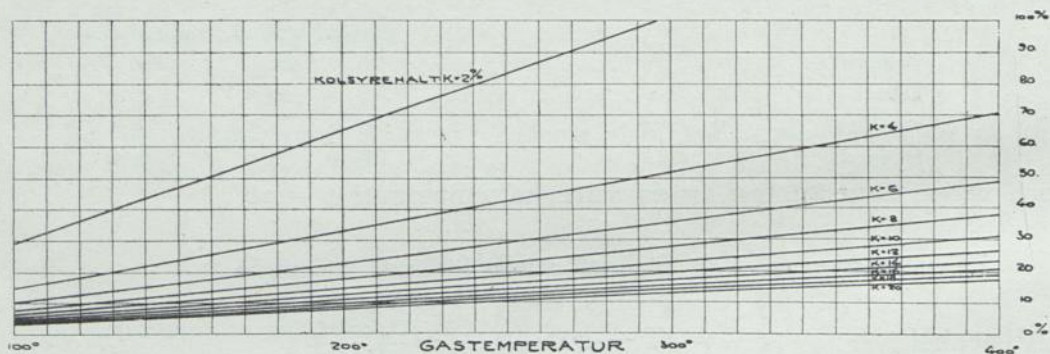


FIG. 2. TABELL ÖVER VÄRMEFÖRLUSTERNA I RÖKGASERNA VID ELDNING MED TORV.

Kolsyrekontrollapparater.

Den hos oss mest kända kolsyrekontrollapparaten »Mono», system Rodhe, har utvecklats till att kontrollera ej blott kolsyrehalten, utan även koloxidhalten, varigenom man kan på ett tämligen snabbt sätt erhålla kännedom om, huru långt man vågar minska luftöverskottet för att ej samtidigt för-

bränningen skall bli ofullständig, d. v. s. koloxidbildning skall uppstå. Det har nu visat sig, att vid det ovan angivna eldningssättet, då all förbränningsluft skall tränga genom rosten och bränslemassan, på grund av svårigheten för luften att intimt blanda sig med och åtkomma allt kolet, ett rätt stort luftöverskott är nödvändigt för att tillförsäkra sig en fullständig förbränning. Den norm, efter vilken dylik eldning brukar bedömas, anger fördenskull vanligen 11—13 % kolsyra i rökgaserna såsom eftersträfvansvärdt, och en högre kolsyrehalt, som ju skulle vid fullständig förbränning öka eldningens verkningsgrad, värdesättes sämre eller lägre, då därvid ofta nog risk förefinnes, att förbränningen ej blir fullständig. På grund av möjligheten att erhålla ovan angivna kolsyrehalt och därmed förbundna måttliga luftöverskott har det s. k. *Monosystemet* för åstadkommande av största möjliga eldnings-effekt och i samband därmed stående eldareffekt utarbetats för att därigenom dels spara bränsle och dels premiera eldaren för de goda resultat han lyckats ernå. Detta sinnrika system, som vid många eldningsanläggningar effektivt bidrager till avsevärda förbättringar i bränsleekonomien, förtjänar utan tvivel sitt särskilda kapitel, ehuru därmed i föreliggande redogörelse måste anstå av naturliga skäl.

Generatoreldning.

För att kunna ytterligare reducera luftöverskottet, d. v. s. öka kolsyrehalten utan risk för ofullständig förbränning, erfordras nu andra åtgärder, och hava dessa huvudsakligen bestått i att anordna eldningen såsom gaseldning. Då ju luften jämförelsevis lättare kan blanda sig med gasen än med kolet i det fasta glödande bränslet, är det tydligt, att vid gaseldning en fullständig förbränning kan erhållas med mindre luftöverskott. På grund av att således i första hand genom ofullständig förbränning en brännbar gas, vanligen koloxid och kolväte, genereras och i andra hand denna gas genom lufttillledning fullständigt förbrännes, brukar denna eldningsprocedur kallas *generatoreldning* med tillsatsluft, och har denna (rätt anordnad) visat sig äga avsevärda företräden framför den vanliga rosteldningen, särskilt med mindervärdiga bränslen, på följande grunder:

1) Genom den lättare (intimare) blandningen mellan luft och gas kan luftöverskottet minskas utan risk att förbränningen blir ofullständig.

2) Då genom den i gasgeneratoren förekommande lägre temperaturen askbeståndsdelarna ej så lätt smälta eller sintra till slag, uppstår ej å

rosten så mycket slagg — dylik är ju alltid hindrande för luftgenomgången och förbränningen. Slaggbildningen minskas även genom att inleda en mindre mängd ånga under rosten, varvid ångan genom sin sönderdelning och förbränning på nytt så att säga förflyttar värmeutvecklingen från rosten till fyrens övre del.

3) På grund av den reducerade mängden tillsatsluft och den mer intima blandningen blir förbränningstemperaturen högre och de i generatoren bildade kolvätena förbrinna fullständigt, varigenom rök och gnistor undvikas och någon beläggning å pannplåten av utkondenserade kolväten ej förekommer, vilken beläggning av sot och beck ofta nog i ej ringa mån minskar pannplåtens, d. v. s. eldytans effektivitet.

Den vanliga spånugnen.

Den s. k. generatoren eller förugnen brukar nu vanligen anordnas ej såsom ett fristående gasverk, utan i närmaste samband med ångpannan på sådant sätt, att de genom ofullständig förbränning i generatoren alstrade gaserna omedelbart förbrännas genom tillsättning eller påblåsning av tillsats- eller sekundärluften, och de glödande förbränningsgaserna få därefter betryka eldytan på vanligt sätt. Det har därvid visat sig ändamålsenligt att, för att tillförsäkra sig en möjligast fullständig förbränning av kolvätena, låta gaserna, innan de träffa den kalla pannplåten, passera en s. k. förbränningskammare, omgiven av glödande tegelmassor. Hava nämligen kolvätena ej hunnit förbrinna, förrän de träffa pannplåten, blir deras fullständiga förbränning vansklig och rök resp. sot kan uppstå.

En dylik ugn av rätt vanlig konstruktion för sågspånsbränsle och träavfall visas å fig. 3 i kombination med en vattenrörsångpanna av Söderhamns mek. verkstads tillverkning. Rosten är en vanlig planrost och spånen, som matas ned genom en öppning i ugnstaket, bildar på rosten en bränselek, genom vilken primärluften får passera. Den för den fullständiga förbränningen erforderliga sekundärluften inkommer genom öppningar i valvet mellan ugnen och pannan, efter att först ha förvärmats vid dess passage ovanför det heta ugnsvälv, samtidigt skyddande detta mot alltför hög upphettning. Regleringen av sekundärluften sker dels genom reglerings-spjäll å ugnens framsida, dels tillsammans med primärluften medelst huvudspjället mellan pannan och skorstenskanalen. I allmänhet blir vid inmatning av spånen genom ugnstaket spånhögen på rosten för tjock och tät, så att

föga eller intet luft kan tränga genom bränslet annat än vid ugnens fyra hörn, varest spånkonen givetvis blir tunnare. Såsom en följd härav brukar ofta eldningen få försiggå med öppen taklucka för att insläppa luft. Detta eldningssätt är olämpligt, emedan det i regel giver ett stort luftöverskott med jämförelsevis ringa eldningsintensitet. Vid mera luckert bränsle, såsom blandning av sågspån med hack- eller hyvelspån eller torv, arbetar ugnen bättre, i det att inmatningsluckan kan hållas stängd och eldningsintensiteten kan ökas.

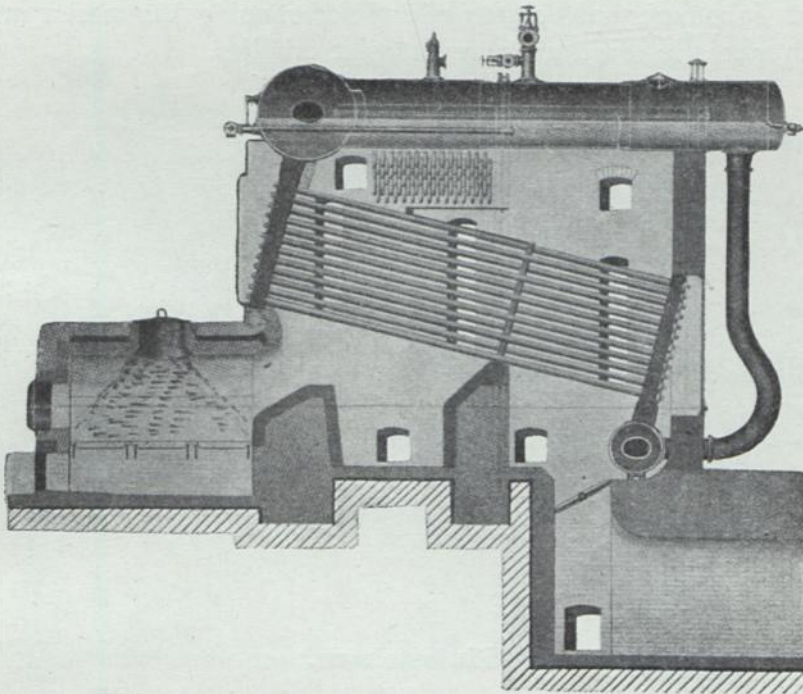


FIG. 3. VATTENRÖRSPANNA MED SPÅNELDSTAD.

Gartner-eldstaden.

Fig. 4 visar en generatoreldstad av tyskt ursprung, system Gartner, som från början är avsedd att förbränna brunkol, men som har visat sig ändamålsenlig även för andra slag av bränsle såsom torv, spånblandningar m. m. Den har införts på några ställen i vårt land och efter en hel del undersökningsresultat att döma synes den arbeta tillfredsställande.

Bränslet inmatas i de båda rännorna A utmed ugnens båda sidor, nedfaller på rosten utmed ugnens hela längd och förbrinner därstädes under ofullständigt lufttillträde. Sekundärluften inkommer genom en å vardera ugnssidan anbragt serie blästertättor utmynnande från de båda blästerlådorna B. Rummet under ugnstaket bildar en förträfflig förbränningskammare, och gaserna inkomma under ångpannan fullständigt förbrända, åtminstone då ugnen forceras, d. v. s. drives med sin största intensitet. Genom de blästerlådorna omslutande långsgående valven skiljes det nyinmatade bränslet från det på rosten liggande, vilket åstadkommer, att friskt bränsle ej omedelbart inkommer på rosten eller i förbränningskammaren utan en så småningom skeende förgasning av bränslet erhålles.

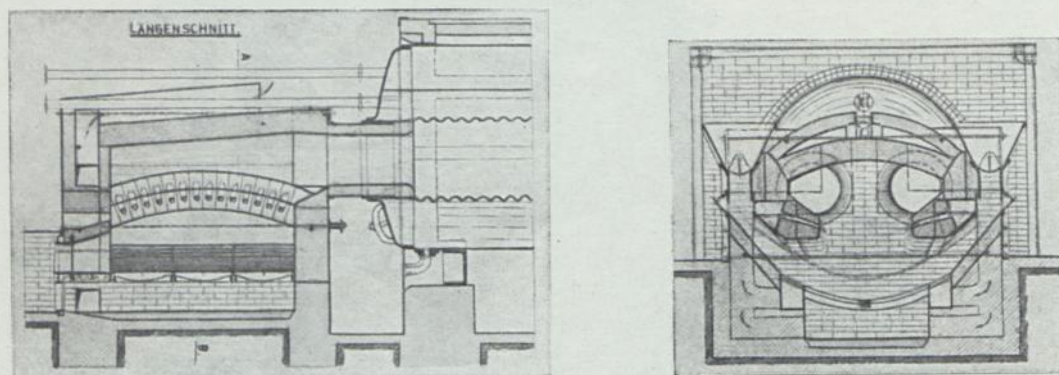


FIG. 4. GARTNER-ELDSTAD TILL ELDRÖRSPANNA.

Plutostokern.

En ångpanneeldstad, som på senare tid blivit mycket uppmärksammas, är den s. k. Plutostokern, även denna av tysk konstruktion. Denna eldningsapparat har införts i Sverige av Skandinaviska aktiebolaget för eldningssteknik, Malmö, och installerats vid Höganäsbolagets stenkolsverk. På grund av de synnerligen goda förbränningsresultat, som där erhållits, har ångpanneanläggningen vid statens ångkraftverk i Västerås försetts med dylika eldningsapparater för eldning med torv. Anordningen förtjänar fördens skull en närmare beskrivning, och hänvisas därvid även till fig. 5.

Eldstadsanordningen består i huvudsak av inmatningsapparat, rost, blästerapparat och ugnsinmurning. Rostanordningen är utförd såsom trapp-

rost och består av en mängd bredvid varandra liggande trågformiga roststänger, c:a 150 mm breda och av 2 till 3 m längd, dimensionerna givetvis beroende av rostytans erforderliga storlek. Roststängerna, som luta jämförelsevis ringa (c:a 30°), åstadkomma bränslets nedmatning genom att stängerna erhålla en fram- och återgående rörelse mot varandra, sålunda att, då de jämna roststängerna skjutas fram, de udda dragas tillbaka.

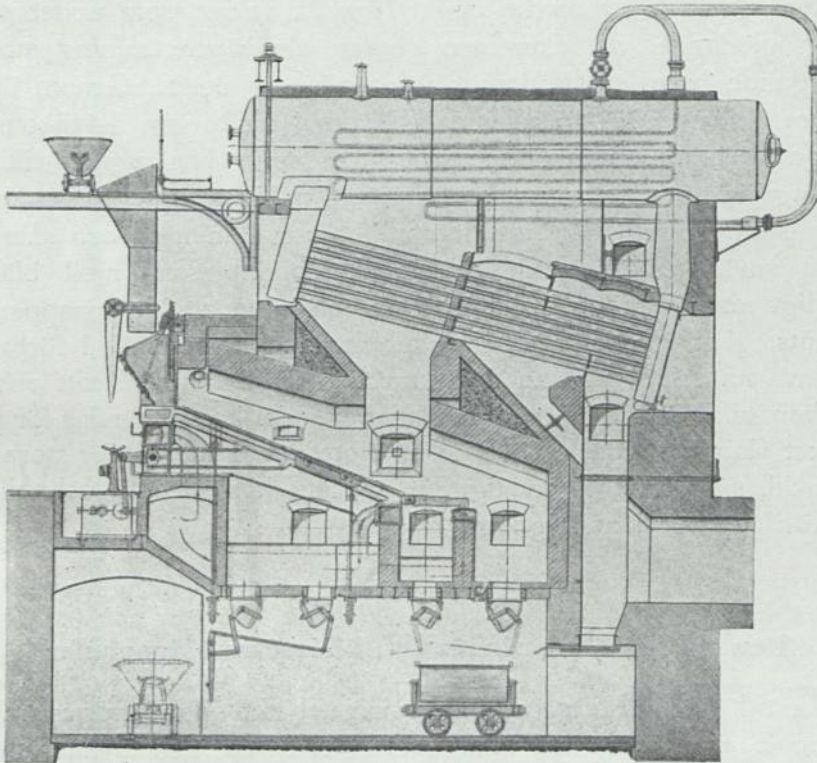


FIG. 5. VATTENRÖRÅNGPANNA MED PLUTOSTOKER.

Denna rörelse är mycket liten, c:a 50 mm, och sker mycket sakta, 20—100 rörelser i timmen, beroende av den önskade forceringen av förbränningen. Rörelsen åstadkommes genom en oscillerande horisontal axel, som drives med skruvutväxling och vevrörelse från en mindre elektromotor. Roststängerna vila och glida på tvenne tvärgående ihåliga genombrutna rostbalkar, och förbränningsluften inledes från fläkten genom dessa rostbalkar till rostlådorna och från dessa mellan rostplattorna till bränslet. Från

rostlådorna matas askan och slaggen vidare till en i roststängernas rörelse deltagande slaggrost, från vilken slaggen matas ned till en tömningsbar slaggficka. Askan nedfaller genom slaggrosten i en särskild askficka. Övre delen av rostens trappsteg äro igensatta, d. v. s. lämna ej någon luftgenomgång, varvid vinnes, att bränslet under sin vandring utför trappstegen genom värmestrålningen från det ovanför liggande tegelvalvet kraftigt uppvärms, innan det kommer i beröring med förbränningsluften. Det från rostens fot och ett stycke uppåt byggda valvet, som under eldningen håller sig glödande, åstadkommer genom sin värmestrålning mot det på rosten liggande bränslet en kraftig förgasning av detta. Genom öppningar i det övre valvet inkommer extra förbränningsluft, som åstadkommer den fullständiga förbränningen vid gasernas avgång från ugnen till pannan. Förbränningsprocessen vid denna eldstad är tydligen s. k. generatoreldning med tillsatsluft, varvid för att kunna forcera eldningen och således ångbildningen såväl primär- som sekundärluften inpressas med blästerfläkt. De utförligt anordnade proveldningarna med denna eldningsapparat hava, som nämnts, givit mycket goda resultat med en kolsyrehalt i förbränningsgaserna av c:a 16 %, utvisande ett mycket ringa luftöverskott och således mycket ekonomisk förbränning. Anordningen, som kan användas för praktiskt taget vilket slag av bränsle som helst, blott det ej är i alltför stora stycken, är emellertid, som framgår av figuren, mycket komplicerad och blir sannolikt avsevärd dyrbar i anläggning.

Den vanligen anordnade lufttillförselns olägenheter.

Emellertid har författaren under sina arbeten inom ifrågavarande område kommit mer och mer till övertygelse om den synnerligen stora betydelsen av en rationellt genomförd lufttillförsel och att i de allra flesta fall lufttillförseln ej alls är så anordnad, som den borde eller kunde vara. Vid ångpanneeldstäder i allmänhet och däri inbegripet även sådana med både primär- och sekundärluft sker nämligen regleringen av tillförseln av all den luft, som förbrukas, vanligen medelst ångpannans huvudspjäll, som är anbragt i den till skorstenen ledande kanalen, varjämte regleringen av sekundärluftens tillförsel sker genom luckor, spjäll eller dylikt, vanligen anbragta på ugnens framsida. Detta regleringssätt och särskilt regleringen med tillhjälp av huvudspjället medför emellertid den olägenheten, att den jämförelsevis ringa dragstyrka, som kan uppnås medelst en skorsten och

som uppgår till 8—20 mm vattenpelare, i huvudsak förbrukas vid de resp. spjällen, särskilt när pannan skall arbeta med något mindre kapacitet än dess maximala. I följd härav möter sekundärluften förbränningsgaserna under ett mycket ringa tryckfall och således med en mycket ringa hastighet, varav åter blir en följd, att luften i huvudsak stryker utmed förbränningskammarens väggar och ej kommer att effektivt blandas med gaserna. Förbränningen blir således ej fullständig med mindre luftöverskottet göres relativt stort, vilket föranleder dålig bränsleekonomi. Vid eldning med sågspån, torv eller annat tjärbildande bränsle förbrinna de i ugnen bildade kolvätena ofullständigt, på grund varav tjär- och becksämnen utkondenseras på den relativt kalla eldytan, varigenom dennas effektivitet försämras. Särskilt typiska exempel härpå bjuda ångpanneanläggningarna vid åtskilliga sågverk, vilkas economisers blivit satta ur drift på grund av att rören belagts med så mycket beck, att sotskraporna ej kunnat tjänstgöra.

Författarens förslag till eldningsanordning.

Om däremot mängden av sekundärluften regleras ej genom ändring av dragstyrkan utan, med fullt öppet huvudspjäll, endast genom ändring av storleken av den öppning, genom vilken sekundärluften strömmar till förbränningsgaserna, och på sådant sätt, att denna öppnings minsta area alltid befinner sig möjligast nära det ställe, varest sekundärluften träffar förbränningsgaserna, erhåller tydligen sekundärluften, om såväl kanalen till skorstenen som kanalen för sekundärluften äro fullt öppna, sin möjligast största hastighet, orsakad av hela skorstensdraget, varför densamma blandas med gaserna på möjligast kraftigt sätt. Sekundärluften bör med andra ord insläppas genom reglerbara formor, placerade så nära som möjligt intill förbränningskammaren, varigenom den kraftigaste blandning erhålles mellan de resp. gaserna. Det är dock ej nog, att sekundärluften regleras på ett rationellt sätt, utan även primärluften genom bränsleskiktet bör regleras alltefter förbränningens intensitet, och det har i allmänhet ålegat eldaren att utföra dessa regleringsmanipulationer efter instruktion eller bästa förstånd, så att förbränningen måtte bli så god som möjligt. Man kan dock förstå, vilken svårighet det skall möta för en eldare, som dels ej är tillräckligt skolad, dels har en mängd andra passningar, att, även om han har en registrerande kolsyremätare såsom rättesnöre, avpassa de båda luftregleringarna fullt riktigt. Faktiskt är det omöjligt att på detta sätt erhålla

det bästa eldningsutbytet, och detta framgår även av det s. k. Mono-systemets norm för kolsyrehalten, i det att vid eldning efter detta system såsom kontroll en jämförelsevis låg kolsyrehalt, 11—13 %, angives såsom den normala. Det önskemålet kvarstår emellertid att vid varje eldning erhålla den största möjliga kolsyrehalten och ändock fullständig förbränning. Då detta av ovannämnda skäl ej rimligtvis kan begäras och erhållas genom eldarens skicklighet, synes det förf. såsom det enda riktiga att anordna ett mekaniskt samband mellan regleringsanordningarna för primärluft och

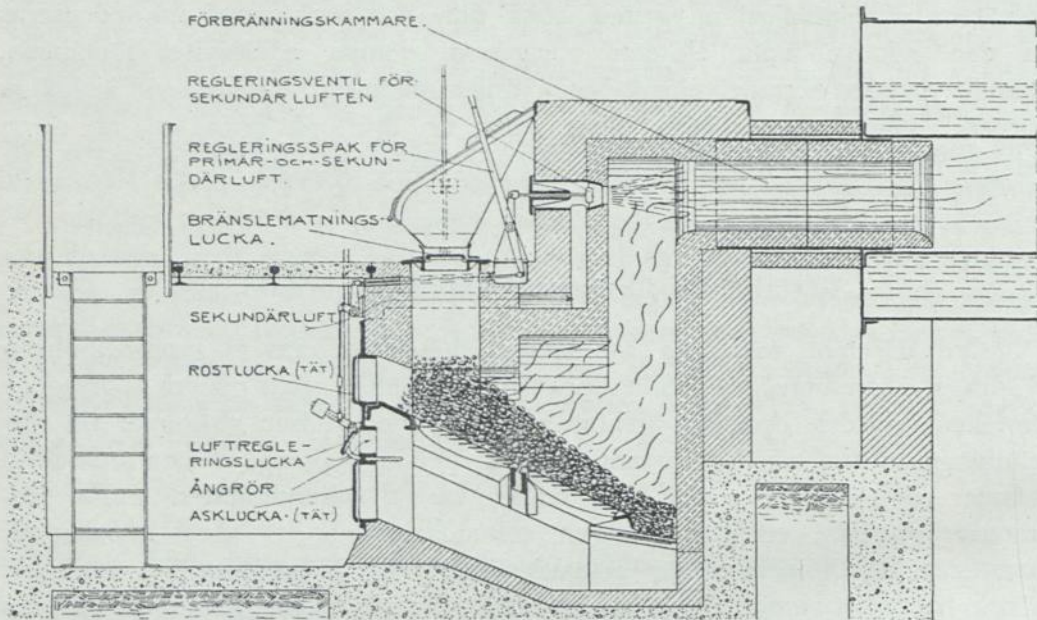


FIG. 6. ELNSTAD VID ELDRÖRSPANNA ENL. FÖRF:NS FÖRSLAG.

sekundärluft, vilket samband vid eldstadens konstruktion och iordningsställande så inregleras, givetvis med ledning av en serie rationellt utförda proveldningar, att sedermera såväl primär- som sekundärluften av eldaren regleras medelst ett enda handgrepp såsom exempelvis genom inställning av en spak i olika lägen, och eldaren har i detta avseende endast att inställa spaken i det läge, som motsvarar pannans olika forcering, och har intet direkt inflytande på luftregleringens »kvalitet». Denna förbindelse mellan de resp. luftregleringarna kan givetvis givas ena eller andra formen. Fig. 6 och 7 visa utseendet av denna anordning vid tvenne eldstäder, som utförts

enligt förf:ns förslag till eldstadsanordning. Fig. 6 visar sålunda eldningsanordningen för en eldrörsångpanna vid Bergsunds mek. verkstad. Av naturliga skäl har eldstaden fått formen av en förugn med trapprost, sekundärluften inblåses (insuges) genom de båda reglerbara formorna vid förbränningsgasernas ingång till de tegelskodda eldrören, och dragluckorna för primärluften äro genom länkstänger och hävarmar förbundna med spaken till sekundärluftformorna. Bränslet, i detta fall tyska kol och briketter,

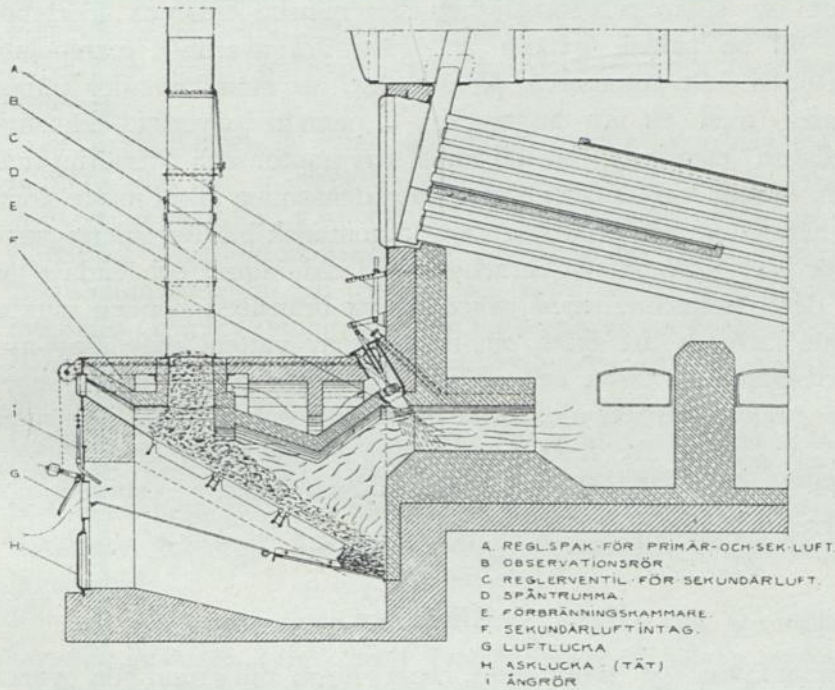


FIG. 7. SPÅNELDSTAD VID VATTENRÖRSÅNGPANNA.

stjälpes i den ovan ugnstaket befintliga tratten och nedsläppes, när så behöves, genom undanskjutande av den i trattens botten löpande bränslesliden, som därefter omedelbart igenskjutes för att hindra falsk luft att inkomma.

Å fig. 7, visande ett förslag till en eldstadsanordning för sågspån vid Vrena ångsåg, utgöres sambandet mellan primär- och sekundärluftregleringarna av en ställina, löpande i ett i ugnstaket inlagt rör. Regleringsanordningarnas inbördes samband framgår utan vidare av bilden. Förbind-

ningarna mellan resp. regleringsorganen äro givetvis anordnade så, att en omjustering av desamma kan ske när som helst, exempelvis på grund av ändring av bränslets beskaffenhet eller av annan orsak.

Det är uppenbart, att man på ovan angivet sätt blir i stånd att, i mindre grad än eljest beroende av eldarens skicklighet och påpasslighet, erhålla lämpligaste lufttillförsel och bästa bränsleekonomi. Har man med godt resultat kommit till detta till synes enkla och av eldaren mindre beroende eldningssätt, ligger önskemålet nära till hands att göra sig ytterligare oberoende av eldarens påpasslighet eller minska eldarens arbetsbörda, om man så vill se saken, genom att göra ifrågavarande manipulation med luftregleringen fullt automatisk på det sätt, att man förbinder luftregleringsmekanismen med en av ångtrycket i pannan påverkad känslig statisk dragregulator, eventuellt försedd med servomotor och återföringsmekanism. Även om, såsom vid de flesta automater, densamma alltid måste kontrolleras, erhålles härigenom en praktiskt taget automatisk blästerregleringsanordning, som utför det s. k. intelligensarbetet vid eldningen, och endast lämnar åt eldaren det åtminstone med avseende på bränsleekonomien mindre makt-påliggande arbetet att sköta om matning av vatten, påfyllning av bränsle samt borttagande av aska och slagg. På grund av att dessa anordningar, som äro under utarbetande, ännu ej blivit i detalj färdigkonstruerade, ser sig förf. ur stånd att med någon bild åskådliggöra detta förslag, vilket dock med de framsteg, som regulatortekniken gjort, ej erbjuder några som helst större svårigheter att realisera.

Riktlinjer.

Sammanfattas de synpunkter, som ligga till grund för ovan angivna förslag till förbättrade eldningsanordningar, erhållas följande huvudsakliga riktlinjer för erhållande av ekonomisk eldning.

- 1) Eldstaden anordnas såsom s. k. generatoreldning med tillförsel av såväl primärluft genom bränsleskiktet som sekundärluft för erhållande av fullständig förbränning.
- 2) Mängden av sekundärluft regleras ej genom reglering av draget utan, med bibehållande av största drag, genom reglering av sekundärluftformornas genomgångsarea, varigenom alltid den kraftigaste blandning erhålles mellan luften och bränslegaserna. Härigenom kan den erforderliga mängden sekundärluft inskränkas till ett minimum, utan att förbränningens fullständighet riskeras.

- 3) Proportionen mellan mängderna av primär- och sekundärluft fixeras genom mekanisk förbindning av de resp. regleringsorganen, och sambandet mellan de båda olika organen bestämmas genom systematiskt utförda eldningsprov, varigenom under eldningens gång detta finkänsliga och för eldningens ekonomi viktiga samband göres helt eller delvis oberoende av eldarens omdöme och påpasslighet. Då även vid svagare drivning eldningen på detta sätt kan försiggå med ringa luftöverskott erhålles alltid en rök- och sotfri förbränning, varigenom pannans eldyta i minsta möjliga grad belägges och eldytans effektivitet således ständigt blir den största möjliga till fördel för såväl pannans verkningsgrad som för dess forceringsförmåga.
- 4) Manövreringen av de resp. regleringsorganen anordnas vid anläggningar med en mångfald pannor med hjälp av en statisk av ångtrycket påverkad regulator att ske automatiskt, varigenom skötseln förenklas och eldaren medhinner att passa ett större antal pannor.
- 5) Bränsleinmatningen till rosten anordnas helst kontinuerlig samt möjligast direkt genom stuprör med stängbara beskickningsluckor eller, där så av lokala förhållanden bjudes, genom särskilda matningsapparater.
- 6) Rostens anordning (såsom trapprost eller planrost) rättas efter bränslets beskaffenhet, och dess lutning göres så stark, att, såvida den ej i likhet med vid Plutostokern är självmatande, den möjliggör bränslets lämpliga fördelning och askans och slaggens lätta avlägsnande.
- 7) För att för varje olika slags bränsle erhålla den för luftpassagen genom bränslet lämpligaste fyrtojckleken anordnas antingen ett reglerbart »bränslespjäll» (se Plutostokern) eller ock bygges, där bränslets natur är på förhand känt, en fast skärm i form av ett eldfast valv, se fig. 6 och 7.
- 8) För att vid lätt sintrande bränslen förebygga olämplig slaggbildning inledes under rosten något ånga, varigenom rosten avkyles och askans sintring förekommes eller minskas.

Det är förf:n:s övertygelse, att med iakttagande av dessa anvisningar vid ångpanneeldstäders anordnande en ej oväsentlig ekonomisk förbättring kan erhållas vid tillgodogörandet av våra f. n. så dyrbara och svåråtkomliga bränslen.

UNDERSÖKNINGAR A DAMMBYGGNADER

AV

RAGNAR R:SON SCHLYTER.

Vid varje byggnadsföretag bör man icke blott genom noggranna materialprovningar förvissa sig om, att man använder fullgoda och för ändamålet användbara materialier. Man bör även efter byggnadsverkets fullbordan genom provbelastningar övertyga sig om, att konstruktionen erhållit önskad styrka och att t. ex. vid brobyggnader nedböjningarna ej överskrida tillåtna värden. Vid nämnda arbeten, brobyggnader, äro dessa materialprovningar, vari jag även innefattar provbelastningar, så vanliga och allmänt kända, att de ej tarva närmare beskrivning. Däremot tror jag icke, att de materialprovningar, som i Tyskland utföras vid dammbyggnader, nu närmast de s. k. »Talsperren», äro så bekanta, att icke en beskrivning därav här vore på sin plats. Detta så mycket mera som förf. fått tillfälle att samla och sammanställa en hel del av det observationsmaterial, som finnes.

Vad nu först de egentliga byggnadsmaterialen och deras provning beträffar, så måste jag i detta sammanhang förbigå desamma, för att närmare ingå på provbelastningarna vid dammbyggnader.

Vid de ifrågavarande daldammarna är i allmänhet anläggningens huvuduppgift att bilda ett reservförråd av vatten att tillgå vid inträdande torka i den nedanför dammen belägna floddalen. En följd härav är, att vattenståndet ovanför dammbyggnaden varierar högst avsevärdt. Detsamma uppnår minst en gång om året sitt minimum och maximum, vilket också kan inträffa ända till fyra gånger om året, kanske mera. Detta motsvarar alltså den rörliga lasten vid en brobyggnad, blott med den stora skillnaden, att vid brobyggnaden belastningen kan anbringas och borttagas under loppet av några sekunder, under det att belastningsökningen resp. minskningen vid dammbyggnaden erfordrar timmar, ja t. o. m. veckor.

Om nu en dammbyggnad skall provbelastas, är det tydligt, att detta kan ske genom att stänga alla bottenutskov eller andra avtappningsanordningar. Vattnet stiger, till dess att reservoaren är full, och vattnet strömmar över bräddavloppen. Belastningen har nått sitt maximum, och dess storlek är bekant med kännedom om dammens dimensioner och vattendjupet.

Nedböjningen, för att fortsätta liknelsen med brobyggnaden, d. v. s. i detta fall dammkroppens, murens, formförändring i horisontell led, uppmättes på så sätt, att från tvenne fasta punkter *A* och *D*, fig. 1, en på var sin sida om dammkroppen på fast berg, observeras medelst teodolit och spegelapparater en eller flera på dammkroppen fixerade punkter *B* och *C*. Genom att vid olika vattenstånd regelbundet göra avläsningar av murens elasticitet, luftens och vattnets temperatur och helst även temperaturen i murverket erhåller man ett intressant material att bearbeta. Men det är icke detta, som är avsikten med denna uppsats.

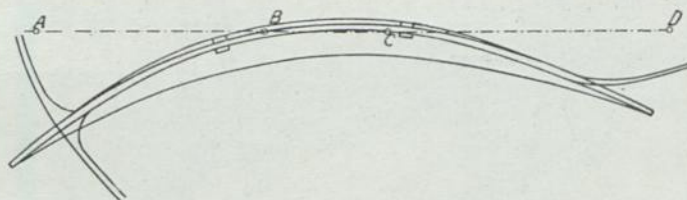


FIG. 1. UPPMÄTNING AV FORMFÖRÄNDRINGEN VID MÖHNEDALDAMMEN.

Dammbyggnaden utsättes icke blott för ett horisontellt verkande vattentryck, utan även för ett vertikalt uppåt verkande *upptryck*, även kallat undertryck eller uppdrift (»sous-pressure», »Unterdruck», »Auftrieb»). Vid provbelastningen, första fyllningen av vattenreservoaren, borde även denna kraft vara känd, och de av den möjligen åstadkomna formförändringarna uppmätas, men svårigheten härvidlag är, att kraftens storlek omöjligt på förhand kan beräknas. Provningsen måste i stället inrikta sig på att försöka bestämma kraftens storlek. Jag skulle vilja jämföra denna kraft och dess verkan med vindens inverkan på brobyggnaden. Båda krafterna böra medtagas, om man skall få en riktig föreställning om spänningsfördelningen inom respektive kroppar.

Meningarna om upptryckets storlek hava varit mycket skiljaktiga, och först på senare åren har man fått någon klar uppfattning om detsamma genom det studiematerial, som samlats. En del av detta har förf. erhållit att bearbeta, och de nyaste erfarenheterna på detta område äro av förf.

sammanställda i fig. 2, 3 och 4 på grundval av företagna dagliga observationer.

De tyska daldammarnas upphovsman var som bekant professor INTZE i Aachen. På hans förslag (år 1904) insattes i Österdaldammen i Westfalen i två tvärsnitt av dammkroppen vertikala rör, upptrycksrör, som ställdes på bestämda inbördes avstånd, direkt på berggrunden. I höjd med de genom dammkroppen gående tunnlarna, innehållande rören från botten-

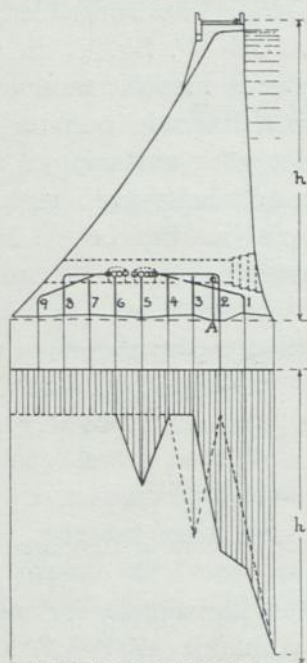


FIG. 2. MÖHNEDALDAMMEN.

Uppttrycket uppmätt:
 — i vänstra tunneln.
 - - - i högra tunneln.

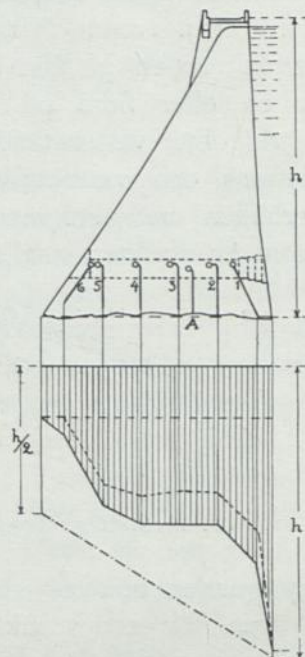


FIG. 3. LISTERDALDAMMEN.

Uppttrycket uppmätt:
 — år 1912.
 - - - år 1913.

utskoven, omböjdes upptrycksrören och inleddes i resp. tunnlarna, där de försågos med manometrar. Trycken i dessa angiva då upptryckets storlek i meter över rörets mynning. (Se fig. 6, som samtidigt visar det karakteristiska utseendet av murverket i de preussiska daldammarna.) I »Zeitschrift für Bauwesen», årg. 1913, sid. 102 o. f., redogör Regierungsbaumeister R. SCHÄFER i en uppsats »Unterdruck bei Staumauern» för de resultat, till vilka man kommit genom iakttagelser på dessa manometrar i Österdaldammen.

År 1907 i februari stängdes bottenutskoven och i maj s. å. strömmade vattnet över skiborden. Under denna tid liksom allt fortfarande iaktogs i manometrarna upptryckets storlek. Sedermera har detta år från år minskats, vilket ju tyder på att sprickorna i undergrunden så småningom igenlammas. Undergrunden består av fast gråvacka, omväxlande med mer eller mindre dålig skiffer, varigenom upptrycket bör kunna bli relativt stort. Det oaktat har upptrycket på långt när ej uppnått det gränsvärde, som Schäfer med anledning av de gjorda undersökningarna ansett böra ligga till grund vid beräkning av dammbyggnader. Detta gränsvärde är det samma som av Regierungsbaumeister LINK användts vid beräkningen av Listerdaldammen, varom mera nedan.

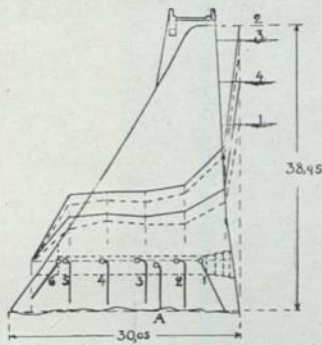


FIG. 4. LISTERDALDAMMEN.
1-4 olika vattenstånd, se texten.



FIG. 5. BERGGRUNDEN UNDER MÖHNEDALDAMMEN.

I Schäfers omnämnda uppsats redogöres även för liknande undersökningar, gjorda vid Neyedaldammen, men äro dessa ej så överskådliga, då upptrycksrören ej placerats i samma tvärsnitt.

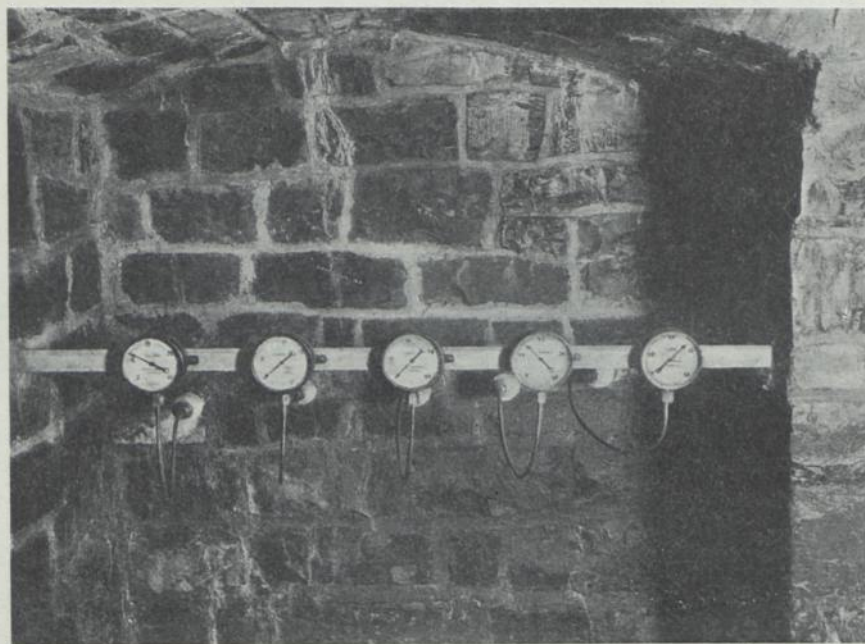
Liksom vid alla sedan 1905 byggda preussiska daldammar ha upptrycksrör med manometrar kommit till användning, även vid de senaste av *Ruhrtalesperrenverein* i Essen-Ruhr projekterade och byggda Möhne- och Listerdaldammarna.

*Möhnedaldammen*¹ har byggts på förslag av föreningens tekniske ledare, Regierungsbaumeister E. Link, som i ett arbete »Die Bestimmung der Querschnitte von Staumauern und Wehren aus dreieckigen Grundformen» (Berlin 1910) närmare redogjort för stabilitetsberäkningarna för dammbyggnader. Möhnedaldammen har beräknats för fullt verkande upptryck $h = 38,8$ m under hela dammen (fig. 2). Undergrunden består av sand-

¹ Av förf. beskriven i Teknisk tidskrift, V. o V. Okt. 1913, sid. 112.

sten och skiffer i enlighet med fig. 5, som även visar platsen för upptrycksrören.

Listerdaldammen, i det närmaste utförd på samma sätt som föregående och likaledes på Links förslag och under hans ledning, har däremot beräknats för ett upptryck, visserligen verkande under hela dammkroppen, men fördelat efter ett trapezium (fig. 3) med höjden $h =$ murens totala höjd $= 40,15$ m vid uppströmssidan och $\frac{h}{2}$ nedströms.



(Förf. FOTO.)

FIG. 6. MANOMETRARNAS N:O 1—5 I MÖHNEDALDAMMEN VISA ETT TRYCK AV (FR. V. T. H.) 12, 0, 0, 15 OCH 27 METER VATTEN.

Båda dammkropparna ha i huvudsak dränerats efter samma princip. Dubbla rader vertikala rör ha placerats omedelbart innanför hela vattensidan och utmynna samlingsrören i tunnarna för bottenutskoven. På grund av riklig förekomst av källor under *Listerdaldammen* har där även anbragts dylik dränering för vissa ytor av luftsidan. Dessutom ha båda dammkropparna försetts med en *grunddränering*, bestående av en enkel rad vertikala rör utefter hela dammkroppens längd (*A* i fig. 2—4).

Upptrycksrörens placering synes av figurerna.

I Listerdaldammen ha de placerats på 5 meters, i Möhnedaldammen på 3,35 meters inbördes avstånd. Av vikt är, att de ej placeras för nära varandra. I vardera dammen förekomma tvenne dylika tvärsektioner för undersökning av upptrycket (jfr fig. 5). Rören äro av smidesjärn med en inre diameter av 50 mm och hava omböjts i likhet med rören i Österdaldammen och försetts med manometrar.

Alltsedan bottenutskoven första gången stängdes, ha noggranna dagliga iakttagelser gjorts över avrinnande vattenmängderna från de olika dräneringsrören samt över upptrycken, avlästa å manometrarna.

Tabell utvisande upptryckets vid Listerdaldammen storlek vid högvattnen åren 1912—1916.

Bräddavloppens ordinata 319.45
Manometrarnas » c:a 287.50

| Högvatten | Vatten- stånd. | Upptryckets storlek i meter vatten i manometrarna | | | | |
|----------------------|-------------------|---|-------|-------|-------|-------|
| | | n:o 1 | n:o 2 | n:o 3 | n:o 4 | n:o 5 |
| Dec. 1912 | 319.72 | 20.2 | 14.5 | 14.5 | 14.5 | 12.1 |
| Jan. 1913 | 319.41 | 18.0 | 12.4 | 13.0 | 12.6 | 11.0 |
| Mars 1913 | 319.55 | 18.2 | 12.5 | 12.5 | 12.5 | 11.0 |
| Jan. 1914 | 319.55 | 16.8 | 10.0 | 10.2 | 10.9 | 9.5 |
| April 1914 | 319.55 | 16.0 | 10.0 | 10.5 | 10.8 | 9.4 |
| Juni 1914 | 319.33 | 16.0 | 9.8 | 10.0 | 10.6 | 9.0 |
| Jan. 1915 | 319.50 | 14.5 | 9.5 | 9.9 | 9.8 | 8.5 |
| April 1915 | 319.33 | 15.2 | 10.8 | 10.2 | 10.6 | 8.5 |
| Jan. 1916 | 319.56 | 15.4 | 10.2 | 10.0 | 9.4 | 8.2 |
| Febr. 1916 | 319.60 | 15.8 | 10.6 | 9.8 | 9.6 | 8.8 |
| April 1916 | 319.62 | 15.6 | 10.5 | 9.5 | 9.8 | 8.0 |

Av ovanstående tabell och av figurerna framgår, att upptrycket har en tydlig tendens att vilja minskas med åren.¹ Alltså liknande erfarenhet som vid Österdaldammen.

Största minskningen ägde rum redan efter första året.

Upptrycket vid Listerdaldammen synes ej nämnvärdt påverkas av grunddräneringen, under det att däremot grunddräneringen vid Möhnedaldammen

¹ Förf. önskar framhålla, att detta förhållande kanske också kan tänkas bero på någon sorts kristallbildning i rören, som därigenom stoppas.

visat sig synnerligen effektiv. Endast en manometer (n:r 5) nedströms från grunddräneringen visar något tryck, vilket var förhållandet även år 1916, då fotografien, fig. 6, tagits.

Vid ingendera dammen har det trapezformiga belastningsdiagrammet på långt när uppnåtts.

Att grunddräneringen vid Listerdaldammen haft så liten inverkan beror antagligen på den sämre undergrunden och på de i denna funna 61 källorna, som helt enkelt igenmurades. (Detta oaktat har upptrycket ej nått det i beräkningarna införda värdet.) Vid Möhnedaldammen är undergrunden jämförelsevis god, framförallt fri från källor.

Att avläsningarna å manometrarna vid de högsta vattenstånden, åskådliggjorda med diagrammen i figurerna 2 och 3, ej bero på några tillfälligheter, framgår med önskvärd tydlighet av fig. 4. Vid de i figuren markerade olika vattenstånden, (1) det lägsta den 11 november 1915, (2) det högsta den 21 februari 1916, (3) den 26 mars 1916 och (4) den 15 september 1916, ha de därmed samhöriga manometeravläsningarna uppdragits, klart visande upptryckets beroende av vattenståndet (jfr. föregående tabell).

Utom i det föregående nämnda rör utmynna i vardera av Listerdaldammens tunnlar fem st. horisontala rör av 5 meters längd, vilka sluta midt i murverket. Dessa rör äro likaledes försedda med manometrar, som skola tjäna till att iakttaga inre trycket i dammen.

Något tryck inuti murverket har emellertid icke kunnat konstateras.

På i det föregående beskrivet sätt har alltså Ruhrtalsperrenverein nedlagt avsevärda kostnader på undersökningarna av sina dammar. Det är därför kanske något förmätet att uttala önskvärdheten av, att anordningar bort vidtagas för att avläsa temperaturerna inuti murverket. Detta har under de senare åren utförts icke blott vid brobyggnader, t. ex. vid viadukten i Langwies, Schweiz,¹ utan i Amerika även vid ett flertal dammbyggnader. De äldsta temperaturmätningar av detta slag äro antagligen de, som verkstälts med i betongmassan inbäddade termometrar i *Boonton*-dammen. Termometrarna avläsas på elektrisk väg. Utförligare och med bättre metoder ha under åren 1913 och 1914 observationer av temperaturväxlingarna gjorts i *Arrowrock*-dammen,² uppförd av *United States Reclamation Service*, och i *Kensico*-dammen vid Vahalla, N. Y., uppförd av staten New-Yorks vattenverk. Vid Arrowrock-dammen fann man, att de

¹ HERMANN SCHÜRCH, Versuche beim Bau des Langwieser Talüberganges und deren Ergebnisse, Berlin, J. Springer 1916.

² Se meddelanden från »American Society of Civil Engineers», årg. 1915, n:r 4 och 6.

dagliga temperaturväxlingarna åtföljdes av motsvarande variationer inom betongkroppen, dock märktes dessa på 30 cm:s djup 12 timmar och på 60 cm:s djup först 18 timmar senare. Det är givet, att man bör känna detta förhållande för att kunna draga riktiga nyttan av de i samband med fig. 1 omnämnda observationerna av dammkroppens elasticitet.

TORVFIBERN SOM SPÅNADSÄMNE

AV

G. SELLERGREN.

Våra torvmossars tillgång på torvfiber.

Bland de monokotyledona växterna hava hel- och halvgräsen en särskild betydelse på grund av blad- och stängelfibrernas användning inom pappers- och textilindustrierna. Av pappersgräset (*Cyperus Papyrus*) tillverkade de gamla Egypterna sin tids papper, papyrus, och flera arter av sädesslagen lämna en värdefull fibermassa ur halmen. En hithörande kärrväxt, tuvdun eller ängsdun (*Eriophorum*), har en till garn och vävnader lämplig stjälfiber, under det att de vita bomullslika fröhåren hava en viss användning till stoppmaterial m. m. Växten är emellertid ej såsom sådan föremål för någon industriell exploatering, men har på senare tider låtit mycket tala om sig i samband med tillgodogörandet av våra *torvmossar*. Den ingår nämligen i mer eller mindre förmultnat tillstånd i desamma.

Alltefter ytvegetationen har man indelat de rena torvmossarna i följande klasser: 1) vitmossar, bildade huvudsakligen av *Sphagnum*-arter, 2) tuvdunsmossar, huvudsakligen av *Eriophorum*-arter, 3) tuvsävmossar, huvudsakligen av *Scirpus*-arter, 4) rismossar, 5) skogsmossar. Då vart och ett av dessa växtslag har sina karakteristiska egenskaper, vilka i viss grad förbliva även efter en längre tids förmultning i jorden, vill det synas, som om ett fullt rationellt tillgodogörande av våra torvmossar måste baseras på en undersökning av såväl de i torven ingående växternas eller växtlämningarnas tekniska egenskaper som graden av förmultning eller »mognad». De för industrien viktigaste torvmossarna torde vara de två förstnämnda slagén, som på grund därav att de i dem ingående växterna, vitmossa och

ett område, som sträcker sig från Ängelholm i söder till Arvika i norr, i väster följer kusten och norska gränsen och i öster går ända till Elmhult, Jönköping och Vänersborg, med de mera torvrika mossarna liggande längs kusten på ett c:a 50 km bredt bälte. I år gjorda undersökningar hava dock visat, att torvfiber i mäktiga lager även finnes så långt i norr som Degerfors socken i Västerbotten. Tuvdunsmossarna lämna i många fall, med sina oförmultnade växtdelar, en utmärkt råvara till torvströ och spinnfiber, och på grund av åtskilliga på sista tiden gjorda framgångsrika försök har man all anledning antaga, att denna ur tuvdunsmossarna erhållna torvfiber skall bliva av betydelse för vår textila slöjd, såväl industriell som inom hemmen, och detta ej blott i kristider som den nuvarande utan och kanske framförallt med tanken på en framtida, på inhemskt råmaterial grundad industrigren. Våra torvmossars tillgodogörande är dock ett mångsidigt problem, som berör många näringar. Enligt uttalande av Statens förste torvingenjör E. VALLGREN¹ synas de bränntorvfabriker hittills burit sig bäst, som hava kombinerat bränntorvberedning med annan närstående industri, såsom torvströindustri, sågverksrörelse, jordbruk m. m., till vilka sistnämnda industrigrenar kanske snart får räknas textilindustrin.

Enär en stor del av våra torvmossar upptages till odlingsbar mark på grund av stor halt av näringsrika växtämnen, får man naturligtvis tillse, att de bränsle- och jordbrukstekniska intressena ej komma i konflikt med varandra. Ett i detta hänseende rätt märkligt uttalande gjordes förra året av d:r E. HAGLUND,² som framhåller, att våra torvmarker under de senaste 25 åren hava tagits i bruk i kolossal utsträckning och att vi nu måste börja tänka på att få dessa naturtillgångar utnyttjade på *bästa* sätt. Hava de en gång förintats, kunna de icke ersättas. Han påpekar att den mark, som återstår efter avtorvningen, i de flesta fall är värdelös, utgörande sumpmarker eller öppna hålor, samt att, med den fart mossodlingen nu tagit i landet, vi snart icke kunna avvara någon värdefullare torv till bränsleberedning. »Härtill må endast användas sådan torv, som icke passar till något annat. Den mogna, näringsfattiga torven skall användas till bränsle och *endast sådan torv, som icke duger till något annat, brännas upp.*»

För att erhålla ett begrepp om mängden av den i en torvmosse befintliga, spinnbara fibern gjordes av d:r Haglund³ en undersökning vid en större torvströmosse (Storemosse, Hädinge) i Värnamotrakten. På 3 olika ställen

¹ Vid Arosmässan i Västerås 1914.

² Sv. mosskulturföreningens årsskrift 1917.

³ Sv. mosskulturföreningens årsskrift 1911, sid 88.

gjordes utgrävningar, varvid erhöles resp. 68,7, 69,5 och 61,5 ton lufttorrt tuvdunfiber pr hektar till resp. 1, 1,8 och 1 m:s djup. Om 1 m³ lufttorrt torv väger 80 kg, kan man alltså beräkna att erhålla minst 8 % ren, vacker tuvdunfiber ur torven eller 64 ton fiber pr hektar. Emellertid har det visat sig, att tuvdunets fördelning i mossarna är mycket växlande och lär på många platser uppgå ända till 50 %, och även om man antager medelsiffran till 15 %, är man säkerligen på den säkra sidan. Uti en nyligen utgiven skrift: »Några ord om s. k. torvfibers användande inom textilindustrin»,¹ säger d:r HJ. von FEILITZEN, att det rationellaste sättet för tillvaratagandet av råvaran väl torde vara att taga fibern som biprodukt vid torvströfabrikerna och torvpulverfabrikerna, då man tämligen lätt torde kunna frånsortera den och sedan i pressat skick i balar transportera råfiber till någon rensningsanstalt. Eller också kunde man, där ett lager tuvdunstorv påträffades under avverkningen av en bränntorvmosse, kasta denna torv åt sidan och, sedan den torkat, låta styckena passera en lämplig kross och sikt för frånskiljande av fibermassorna, då resten antingen direkt kan användas till bränsle eller tillsammans med annan råtorv bearbetas i torvkranen till vanlig stycketorv.

Även i Tyskland har man naturligtvis i dessa den allmänna fiberbristens tider på allvar börjat syssla med torvfiberproblemets lösning. Prof. W. MAGNUS i Berlin, som ser mycket nyktert på denna sak, anser, att »det vore förhastat att knyta alltför stora förhoppningar vid vinnande av textilfiberer som ersättningsmedel ur de tyska mossarna. Men i varje fall borde det löna sig att söka närmare utreda förekomsten därav och möjligheten att tillgodogöra dem. Har industrien blott gjort sig bekant med fibrernas egenskaper, så behöver man knappast betvivla, att denna tyska råvara även efter krigets slut må kunna finna användning.» För min egen del icke blott delar jag denna åsikt vad vårt land beträffar, utan går till och med så långt, att jag, med kännedom om de här vunna resultaten, ingalunda betvivlar, att vi i den renade torvfibern verkligen hava ett fullt användbart och för industrien lämpligt textilämne.

2. Torvfibern ur morfologisk och teknisk synpunkt.

Tuvdun, ängsdun (fig. 2), är en till halvgräsen hörande kärrväxt, som bildar täta och fasta tuvor med långa, från roten utgående bladslidor och långa, trekantiga blad. Dessa bladslidor göra ett stort motstånd mot

¹ Meddelande vid Tekn. förens i Jönköping sammanträde den 23 nov. 1916.

förmultning och framträda i torven som sega, bastliknande massor, vilka dels äro mer strödda i *Sphagnum*- (vitmoss-) torv, dels bilda tunnare eller tjockare skikt däri, som till större delen bestå av just sådana rester, så att man till och med talar om ren tuvdund- eller fibertorv. Denna sega torv utgör ett visst hinder både vid torvströ- och bränntorvberedningen, då skärande redskap ha svårt att bita därpå, och fibrerna ofta linda sig om



FIG. 2. TUVDUN (ERIPHORUM VAGINATUM).

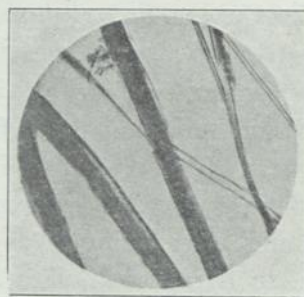


FIG. 3. BASTTÅGOR AV TUVDUN (TORVFIBER), 40-FALDIG FÖRSTÖRING.

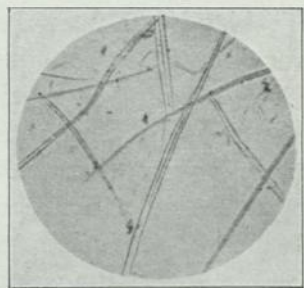


FIG. 4. BASTCELLER AV TUVDUN, 100-FALDIG FÖRSTÖRING.

maskinaxeln i torvberedningsmaskinen samt kunna förorsaka stopp, såvida maskinen ej är försedd med särskilt skarpt klippande knivanordningar.¹

Dessa bastknippen kunna genom lämpliga medel isoleras eller sönderdelas till grövre eller finare tågor, vilka likasom lintågor äro sammansatta av en mängd enkla celler. Fig. 3 visar basttågor och fig. 4 isolerade celler av tuvdund.² De förra hava i sitt råa tillstånd en mycket växlande

¹ Enligt dr. VON FEILITZEN.

² Dessa 2 mikrofotografier äro tagna av ing. E. NYSTRÖM efter preparat av kand. H. OSVALD vid Sv. mosskulturföreningens laboratorium i Jönköping.

längd, 20—60 mm, och tjocklek, 0,015—0,2 mm. De senare äro mycket korta, med en största längd av c:a 1 mm, samt mycket smala, 0,005—0,01 mm, med midtkanalen (lumen) upptagande omkr. $\frac{1}{3}$ av bredden (a, fig. 5) och båda ändarna långsamt avsmalnande mot spetsen. Den sammansatta basttågans eller fiberns styrka uppgår i medeltal till 9 à 10 kg pr mm² av tvärsnittet, vilken styrka ungefär motsvarar den hos jute och ull och är betydligt mindre än bomullens (c:a 30 kg pr mm²) eller linets (c:a 40 kg pr mm²). Torvfibers hygroskopiska egenskaper hava vid Mosskultur-föreningens kem. laboratorium i Jönköping undersökts¹ och befunnits vara tämligen lika andra vegetabiliska textilfibers. Den på kemisk väg renade

torvfibern visade sålunda en viktökning av 6,86 % efter 24 timmars utsättning för fuktighetsmättad luft. Motsvarande siffror blevo för lin 4,45 %, för jute 6,46 %, för bomull 5,92 % och för »rivet stickylle» 7,91 %. I fråga om vattenabsorptionsförmågan visade sig torvfiber, såsom ju var att vänta, ungefär likställd med ull men något bättre än andra vegetabiliska fibrer. Efter genomdränkning i vatten under 24 timmar blev viktökningen hos den kemiskt renade torvfibern 730 % och hos riven halvyllelump 980 %, rivet stickylle 410 %, lin 540 %, jute 390 % och bomull 270 %.

Försök av denna art äro dock mycket vanskliga att utföra med fullt tillförlitliga resultat. Vid liknande provningar, gjorda av förf., blev viktökningen exempelvis hos stickade jägervaror 260 %, Lahman 220 %, flanell 180 %, parkum (fast bomullsvävnad) 160 % och slutligen linneväv 130 %. Olikheten i resultat bero tvivelsutan därpå, att försöken utförts under olika beskaffenhet hos försöksmaterialet. För övrigt är att märka att i fråga om ett textilämnes, speciellt en vävnads hygroskopiska egenskaper och särskilt desamma betydelse för hygien, en viktig synpunkt är vävnadens eller fiberämnets *avgivande* av fuktighet vid torkning. Vid av mig gjorda försök i detta hänseende, med en temperatur hos luften av 37° samt en rel. fuktighetshalt hos densamma av i början 75 % och sedan 30 % (således vid de förhållanden, som i allmänhet äga rum, då vävnaderna användas till kläder, speciellt

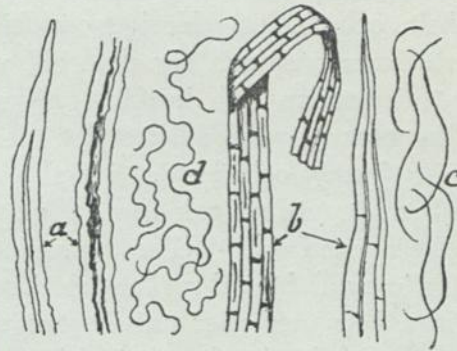


FIG. 5.

- a bastcell av tuvdun,
- b fröhår av tuvdun (»ängsdun», »ängsull»),
- c rå torvfiber av tuvdun,
- d kemiskt renad torvfiber av tuvdun.

¹ Av ingenjör I. LUGNER.

underkläder) erhöles som resultat, att linne blev fullt torrt på 8 timmar och de övriga ovannämnda vävnaderna efter 10—12 timmar samt att stickade vävnader torka långsammare än varp- och inslagsvävnader. Ylle kan upptaga mera vatten än bomull och lin, innan plagget kännes vått, och även i detta tillstånd blir den stickade yllevävnaden mycket lufthaltig och ej så värmeledande som bomull och lin, varjämte avdunstningstiden är nära dubbelt så lång, då kroppen alltså avkyles mindre hastigt.

Torvfibern synes genom den nedan beskrivna kemiska behandlingen undergå en egendomlig förändring, som blir ännu märkbarare efter färgning. Fibermassan blir *mjuk* och ullig samt förvillande lik schoddy. Den råa torvfiberns sämsta egenskaper, sprödhet och styvhet, försvinna sålunda nästan helt och hållet. Härigenom blir den renade fibern spinnbarare och låter väl sammanspinna sig med ull, vartill kommer, att den ej sönderbrytes eller söndersmulas vid kraftig gnuggning, såsom lätt blir fallet med rå fiber. En annan egendomlighet inträder genom den kemiska behandlingen: fibern blir *krusig* och får det i fig. 5, d visade utseendet, under det att den råa fibern är nästan rak (fig. 5, c). Såsom i det följande skall visas, behandlas fibern med kali- eller natronlut, och antagligt är, att den enkla cellen (cellulosan) härvid sväller och därefter vid torkningen undergår en krympning, som blir mer eller mindre oregelbunden och alltså medför inre spänningar med åtföljande formförändringar (krökningar) — detta i analogi med vad som sker vid s. k. mercerisering av bomull, varvid dock den skillnad äger rum, att bomullsfibern sträcket under torkningen och alltså blir fullt rak. En annan anledning till den krusiga formen hos torvfibern skulle kunna tänkas. Fibern är nämligen sammansatt av ett större eller mindre antal enkla celler av mycket ringa längd, varigenom dess grovlek blir olika på olika ställen, med svagare och starkare partier.¹ Anledningen må emellertid vara vilken som helst. Resultatet är fördelaktigt ur vävnadsteknisk synpunkt, då torvfibern härigenom blir »ullig» och mjuk samt till och med låter filta sig till valkade eller klädesartade vävnader.

Ännu en annan ny egenskap framträder efter den kemiska behandlingen, nämligen *glans*. Anledningen till densamma torde kunna sökas i två av varandra fullt oberoende förhållanden, dels lutens inflytande på cellens yta likasom vid merceriseringen och dels en behandling av fibermassan med ett oljeartadt ämne, huvudsakligen för att fibrerna skola bliva smidiga, med liten ytfriktion och alltså lättare kunna uthärda behandlingen i kardstolarna.

¹ Under mikroskopet synas fibrer ofta hava växlande bredd, men detta beror i många fall därpå, att bandformiga fibrer äro vridna, varvid desamma å vridningsställena synas smalare.

Sådan behandling med olja undergår som bekant även ull av samma anledning.

Tuvdunsgräset lämnar även, som bekant, en bomullsartad fröhårsfiber, från vilken växten fått sitt namn (turdun, ängsull, *Wollgras*). Försöken att använda detta dun till spinning av garn hava ej ledt till praktiskt resultat på grund av fibrernas ringa styrka och stora sprödhet. På vissa trakter hopsamlar man dock dunet, huvudsakligen från *Eriophorum angustifolium* och *latifolium*, och använder detsamma såsom stoppningsmaterial, till dynor, täcken m. m. Fibrerna, som ej giva träreaktion, sitta som perigonhår vid fruktens bas. De utgöras av flera (5 à 6), intill varandra liggande rader av jämbreda, tunnväggiga celler, såsom visas i fig. 5, b. Formen blir sålunda bandartad, längd 20—40 mm, bredd 0,03—0,17 mm.

3. Torvfiberns beredning för textila ändamål.

Redan på 1880-talet gjordes försök att använda torvfiber till garn och vävnader såsom ett slags surrogat för lin eller bomull, och man trodde sig i tuvdunsväxtens delvis genomgångna förmultning finna en ersättning för den besvärliga men nödvändiga rötningen hos andra bastfibrer. En mängd patent uttogos och fabriker startades i flera länder. På 1890-talet tillverkades sålunda torvfibervävnader av *Bérand* vid Maastricht i Holland, av *Société française des Tourbes Pasteurisantes* i Frankrike, av *Deutsche Torfwollwerke* i Oldenburg, av *Geige* i Düsseldorf, av *Zschörner* i Österrike m. fl. Även i vårt land gjordes försök vid Sahlströmska fabriken i Jönköping,¹ varvid som råmaterial användes den fränsiktade tuvdunsfiber, vilken såsom biprodukt erhållits vid tillverkning av torvpulver. En del kostymtyger vävdes med bomullsgarn i varp och blandning av torvfiber och ull i inslag. Försöken ledde dock ej till några praktiska resultat, dels enär man hade svårt att få råvara i tillräcklig mängd, och dels i följd av den rätt omständliga prepareringen. Härtill kan säkerligen läggas det skälet, att i följd av fiberns råa tillstånd den i ullen inspunna mängden torvfiber måste hållas inom rätt trånga gränser. Av ett visst intresse är, att redan på landtbruksmötet i Göteborg 1891 visades på Mosskulturforeningens utställning prov av ur torv färdigpreparerad *Eriophorum*-fiber, ull och garn därav samt till och med strumpor stickade av tuvdunsfiber och ull, samtliga prov tillverkade i Jönköping.²

¹ Genom disp. H. EKELUND, känd för sitt omfattande arbete för tillgodogörandet av våra torvmossar.

² Enligt HJ. VON FEILITZEN.

Första gången man hörde talas om torvfiberns användning i något större omfattning var på jubileumutställningen i Wien 1898. Firman A. Zschörner & C:o hade utställning i en särskild paviljong för »torvindustri», avsedd att visa torvens användning till bränsle, papper och vävnader, och man fick se flera prover å de sistnämnda i form av för praktiska behov synnerligen användbara fabrikat. Man fäste då stora förhoppningar vid torvfiberns användning till vävnader, men arbetet härmed upphörde efter någon tid helt och hållet i Österrike, antagligen på grund av svårigheten att konkurrera med andra närbesläktade råmaterial, såsom jute, kokosbast, m. m., samt de vanliga svårigheterna i samband med tillgodogörandet av råtorven till bränsle på ett ekonomiskt sätt. Detta problem är ju ännu långt ifrån tillfredsställande löst, varken hos oss eller i utlandet. Emellertid hava förhållandena inom textilindustrien med hänsyn till råmaterialen mycket förändrats sedan 1898, även fränsett de abnorma, nuvarande prisen i följd av kriget. Å nämnda utställning företeddes prover å mattor av olika slag, antingen med såväl varp som inslag uteslutande av grovt fibergarn och mycket påminnande om mattor av kokosbast, eller med varp av bomull eller lin och inslag av fibergarn. Såväl gångmattor till trappor, korridorer, kontorslokaler m. m. som avpassade, släta eller skurna (sammetsartade), tillverkades. Andra produkter utgjordes av sadeltäcken, hästtäcken, förhydningsmattor, spiltbeklädnader, avrivningslappar m. m., de förstnämnda med varp av lingarn och inslag av enbart torvfiber (vikt 22 gr pr meter). Vävnaden var fast och tät samt något ruggad på båda sidor, så att varptrådarna doldes. Torvfibern lär hava vissa hygieniska och antiseptiska egenskaper¹ som göra den lämplig för kirurgiska ändamål. Den är ett antiferment, d. v. s. den blir under en lång tid oförändrad och bibehåller sina egenskaper även i beröring med sådana ämnen, som åstadkomma hastig förskämning. På denna grund hade man även här utställt s. k. antiseptisk vadd av renad fiber. Jag vill i detta sammanhang erinra om en del från utlandet på 1890-talet hit importerade kostymtyger och trikåvaror,² som enligt uppgift av fabrikanten skulle hålla 25 % torvfiber, men i verkligheten höllo blott 5 %.

Den råa, blott på mekanisk väg behandlade torvfibern är visserligen användbar till vissa grövre vävnader, såsom mattor m. m., men dess sprödhet, styvhet och ojämna grovlek giva de av sådan fiber tillverkade vävnaderna

¹ Mitteilungen der chirurgischen Gesellschaft 1887.

² Av förf. omtalade i en artikel: »Garn och vävnader av torvfibrer», i Tekn. tidskr. 27 aug. 1898.

ett mindre tilltalande utseende och en ringa varaktighet. Svårigheten ligger alltså i erhållandet av en ej alltför dyrbar kemisk behandlingsmetod, genom vilken humusämnen bortscaffas och en sönderspjälkning till finare tågor lätt kan åstadkommas. Enligt Griges metod inträder hos fibern ett slags jäsnings, i det att densamma först utlakas med alkalier (2—4 %:ig lösning) under ett par timmar, varvid fibern renas samt jord och humussyra avlägsnas, varefter den behandlas i svagt syrebad för borttagande av äggvitämnen och stärkelse ($\frac{1}{2}$ —1 % svavelsyra vid 50—60° C) samt sköljes med rent vatten (30—40° C), försatt med ett jäsningsmedel. Efter 4—5 dagar omsätter sig den i socker förvandlade stärkelsen i alkohol och kolsyra, varigenom fibrerna bliva mjuka och spinnbara. Denna metod synes dock ej haft någon framgång. Möjligen blev den alltför dyr.

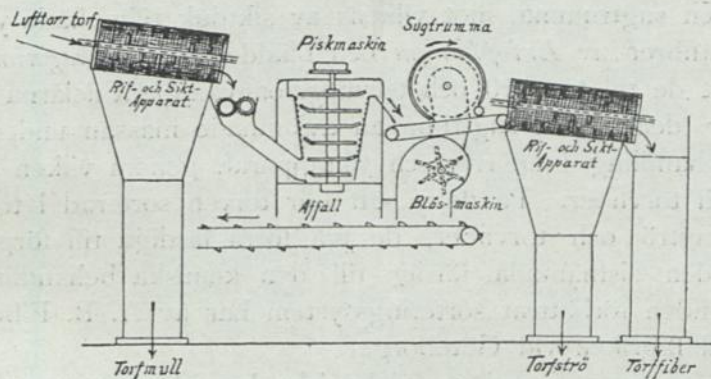


FIG. 6. ANORDNING (SCHEMATISK) FÖR UTVINNING AV TORVFIBER UR LUFTTORKAD TORV.

Ett som det vill synas betydelsefullt steg i denna riktning synes hava blivit gjort genom en av ingenjör E. FEGRÆUS nyligen gjord och med framgång utexperimenterad uppfinning, i huvudsak bestående däruti, att den mekaniskt behandlade, fränsorterade fibern först indränkes i ett svagt alkaliskt bad, vilket vid fabrikation i stort kan erhållas av sköljvattnet, och sedan behandlas i ett 10—15 %:igt alkaliskt bad av vanlig temperatur under c:a 30 min., varigenom humussyrorna neutraliseras, därefter sköljes i rent vatten, centrifugeras, impregneras med olein eller annan lämplig olja för att fibrerna må bliva smidiga och glatta samt slutligen torkas. Denna metod blir jämförelsevis billig, då luten användes kall och då alkalit kan återvinnas genom lutens indunstning likasom vid trämasseindustrien.

För fiberns avskiljande från den övriga, till torvströ avsedda massan har av ing. Fegræus föreslagits den metod, som schematiskt åskådliggöres i fig. 6, och som består uti användningen av en serie maskiner, i allmänhet av de vid textilfabrikerna använda typerna, och i vilka en sortering av de olika beståndsdelarna äger rum. Sedan den på fältet lufttorkade torven inkörts till torvströfabriken, passerar den först en riv- och siktapparat i form av en något lutande taggtrumma (»volf»), som sönderdelar massan och genom den av järntråd tillverkade sorteracylindern frånskiljer de mindre partiklarna i form av *torvmull*. Det övriga materialet inmatas därpå i en piskmaskin av den inom bomullsindustrien använda typen (»Crightons opener»), bestående av en med slagarmar försedd, i en konisk trumma roterande, vertikal axel. Här sönderslås fiberklumparna, det mindre avfallet sorteras bort och fibrer jämte torvströ utfaller på en ändlös matarduk och föres under en sugtrumma, mot vilkens av siktduk tillverkade yta de lättare ämnena, bastfibrer av *Eriophorum* och bladdelar av *Sphagnum*, fastsugas, under det att de till torvströ och torvfiber oanvändbara delarna frånsorteras. Slutligen får denna från sugtrumman avlämnade massan undergå ännu en mekanisk behandling i en riv- och siktapparat, genom vilken den sorteras i torvströ och torvfiber. På detta sätt blir torven sorterad i tre produkter, torvmull, torvströ och torvfiber, de två förra färdiga till förpackning och försäljning, den sistnämnda färdig till den kemiska behandlingen. Ett i vissa hänseenden förbättrat sorteringssystem har av A. B. Fiberull nyligen approvats vid fabriken vid Göteborg.

Genom den ovan beskrivna, mekaniska bearbetningen av torven vinnas två viktiga mål: en för textilindustrien värdefull fiber utvinnes och det erhållna torvströet blir av väsentligt bättre kvalitet. Anledningen till det senare resultatet är att finna dels däruti att de hårda, i vanligt torvströ befintliga fiberklumparna blott med svårighet absorbera fuktighet och dels enär i allmänhet växtdelar av *Eriophorum*-arter hava väsentligt mindre absorptionsförmåga än växtdelar av *Sphagnum*-arter. Enligt C. VON FELTZEN¹ uppsög torvströ av *Eriophorum vaginatum* 7,3 gånger sin vikt vatten, men torvströ av *Sphagnum fuceum* 13,7 och av *Sph. intermedium* 14,2 gånger massans ursprungliga lufttorra vikt. — Kostnaden för denna mekaniska behandling uppgives av uppfinnaren vara jämförelsevis obetydlig.

Det var naturligtvis av stort intresse att få utrönt, huru den kemiskt renade fibern som jag haft tillfälle att undersöka och som i det föregående beskrivits, förhöll sig vid spinning, varför ing. Fegræus lät anställa en

¹ Sv. Mosskulturforeningens tidskr. 1891. Bilaga t. häft. 4.

del spinning- och vävningsprov vid Hedefors fabriker. Härvid spunnos 3 olika arter fibergarn, nämligen

- Prov 1: 50 % torvfiber och 50 % schoddy.
 » 2: 30 % » » 30 % » samt 40 % bomullslump.
 » 3: 66 % » » 34 % svenskull.

Enligt spinnmästaren försiggick spinningen på ett tillfredsställande sätt, ehuru de s. k. »rotfibrerna» inverkade menligt, vadan genom deras avlägsnande fibern skulle få större värde.¹ Av dessa garner vävdes åtskilliga tyger, vilka jag ävenledes undersökt, såsom halvyllecheviot med varp av kamgarn (alpacka) eller bomullsgarn och väft av blandfibergarn, vidare en del kostymtyger och sporttyger, även valkade. Det visade sig, att torvfibern låter lätt valka sig tillsammans med ull, och även färgningsprovet utföll gynnsamt. Den i dessa vävnader ingående torvfibermängden uppgick till c:a 25 à 40 % och avfallet vid spinningen till c:a 4 %. Mot deras utseende, styrka och användbarhet finnes ingen rimlig anmärkning att göra. Av stort intresse blir att se, huruvida vävnader, som helt och hållet eller till större del äro tillverkade av torvfiber, kunna på ett tillfredsställande sätt framställas av den på detta sätt preparerade fibern. Visserligen kan man på grund av de gjorda försöken med säkerhet antaga, att densamma inom kort² kommer att få användning såsom fyllnadsmaterial upp till 30 à 50 % i vissa slag av halvyllevävnader, men det vill synas, som om den skulle kunna få ännu större användning inom andra vävnadsbranscher, speciellt inom tillverkningen av mattor, filter, hästtäckan o. d. Vid Kasthalls fabriker har man nyligen med godt resultat framställt mattväft av 75 % fiberull och 25 % juteaffall. Uppfinnaren uppgiver, att tuvdunsfibrerna, även efter undergången kemisk behandling komma att ställa sig betydligt billigare än andra textilämnen, och han hyser på grund härav ett fast hopp därom, att desamma, även efter krigets slut, då normala förhållanden inträdt, skola kunna bestå i konkurrensen — ett hopp, som, av allt att döma, ej skall bringas på skam. Att metoden redan vunnit uppmärksamhet i utlandet framgår av de förfrågningar rörande densamma, som hit inkommit från torvintresserade kretsar därstädes. Industriens hunger efter råmaterial är kanske lika aktuell under krigstider som den mänskliga organismens efter födoämnen. Det kan därför ej väcka vår förvåning att man i Tyskland

¹ Rötterna av Eriophorum hava dock inga hållbara bastfibrer, utan bestå av andra cellvävnader.

² Det förut omnämnda A. B. Fiberull har nyligen bildats för tillverkning af mjuk torvfiber enligt Fegreus' uppfinning.

dels beslagtagit all tuvdunsfiber och dels på sista tiden på allvar gripit sig an med torvfiberproblemet.

Professor W. MAGNUS i Berlin har nyligen i en uppsats («Torffasergewinnung») sökt giva en vägledning i frågan åt industrien. Av hans i det föregående (sid. 491) citerade uttalande framgår, att han ej knyter några större förhoppningar vid utvinnande av textilfiber ur de tyska mossarna, men på samma gång anser, att man bör utreda förekomsten därav och möjligheten att tillgodogöra dem. Det vill synas, som om vi inom detta område redan vunnit ett visst försprång framför Tyskland och det gäller att bibehålla detta. För närvarande finnes i Tyskland blott en fabrik för bearbetning av torvfiber, nämligen *Filzwerk Geschwister Zimmermann* i Eupen, som tillverkar vadd för förpackningsändamål för frukt, kött m. m.¹

Då man med all säkerhet kan antaga, att bristen på råmaterial inom textilindustrien under många år framåt kommer att göra sig mycket kännbar icke blott i vårt land utan även i utlandet, blir det för oss en livssak att i möjligaste grad utnyttja våra inhemska textilämnen. Även om vi genom det nu energiskt igångsatta arbetet för att göra oss oberoende av utlandet inom linneindustrien skulle lyckas vinna detta mål, och även om man småningom skulle kunna öka ullproduktionen inom landet, särskilt genom att på föreslaget sätt lägga an på en ökad fåravel med de engelska raserna Cheviot, Shropshire samt Oxforddown, komma vi dock alltid att få stor användning för varje annat, användbart, inhemskt råmaterial. Och då av det ovan anförda det nu torde kunna anses vara ett bevisat faktum, att tuvdunsfibern i våra torvmossar lämnar ett värdefullt textilämne såväl enbart som i blandning med annan fiber, särskilt ull, synes det vara ett ingalunda oviktigt statsintresse, att vid tillgodogörandet av landets vidsträckta torvmossar till bränsle eller torvströ vederbörlig hänsyn tages därtill, att den i torven befintliga tuvdunsfibern får sin rätta användning, samt att de enskilda företag, som redan börjat bedrivas i detta syfte, måtte, om och när så erfordras, erhålla ett åtminstone i början säkerligen välbehöfligt stöd och uppmuntran från statens sida.

¹ Denna fabrikation lär dock nu vara nedlagd.

NÅGRA TEKNISKA UPPGIFTER MED HYGIENISKT SYFTE

ETT KAPITEL AV »TILLÄMPAD HYGIEN»

AV

KLAS SONDÉN.

Det ord i svenska språket, som närmast motsvarar ordet »hygien», är »hälsovård», och dennas mål är att befordra ett godt hälsotillstånd hos enskilda och hos folket i dess helhet eller — något närmare preciserat — att genom utfinnande av orsakerna till ohälsa samt utbredande av kunskap härom samt om medlen däremot motarbeta sådan. Gränsen mellan hälsovård och sjukvård kan dock understundom vara svår att uppdraga.

Hygienisk kunskap är möjlig endast genom noggrant studium av olika inflytelser på vår organism. Utan kännedom om denna organism är det tydligen omöjligt att med erforderlig grundlighet och kritik lära känna rubbningarna i dess funktioner eller anledningarna till dessa rubbningar. En föreställning att man utan dylik kännedom skulle kunna framkonstruera hälsoregler leda — och hava i alla tider ledt — till de vidunderligaste uppfattningar om orsaker och verkningar på hithörande områden — ej sällan till den rena vidskepelsen.¹ »Voltakors» och »Herculexbälten» hava annonserats ännu under senare åren. Historier om »hälsocigarrer» och därmed sammanhängande allra grövsta okunnighet kunde vi läsa i pressen mars 1917. En egendomlig monomani, som tagit sig uttryck i skräck för värmeledning och järnkaminer, har föranlett många och långa uppsatser under alla senaste tiden o. s. v. Den grundläggande delen av hygienien är och

¹ Jfr TROELS LUND: Sundhedsbegreber i Norden i det 16:de Aarhundrede; PEHR JOHNSON: Huru allmogen i Göinge botade sina sjukdomar i äldre tider (Läsn. f. folket 1917 h. 1).

måste vara en medicinsk vetenskap, som av sina utövare alltså förutsätter läkareutbildning.

Några exempel på denna grundläggande del av hygienens må anföras. Genom denna vetenskap har det blivit visat, att orsaken till nervfebers spridande genom vatten ligger uti förtärande av vissa i vattnet befintliga bakterier; eller att vatten, innehållande andra bakterier, kan orsaka kolera; att infekterade insekter kunna uppträda som smittobärare för vissa sjukdomar; att smuts och orenlighet är ägnad att befördra ohälsa; att överansträngning, dålig näring, brist på sömn o. s. v. kunna åstadkomma svaghetstillstånd hos individen.

Sedan dessa och andra liknande rön vunnit den grad av sannolikhet, som plägar fordras för att medicinska satser skola accepteras såsom hypoteser, teorier eller rent av sanningar, blir nästa stora fråga: huru skola desamma kunna omsättas i praktiken?

Det lär väl icke falla någon in att anse tillfyllestgörande att till mänskligheten uttala förmaningar: låt bli att förtära nervfeberbaciller eller kolera-baciller, låt bli att utsätta Eder för infekterade mygg, flugor eller ohyra, eller i allmänhet: låt bli att leva under förhållanden, som vetenskapen angiva som osunda! Man måste — om något resultat skall vinnas — anvisa praktiska metoder, som möjliggöra undvikande av de skadligheter, vilka den vetenskapliga hygienens omhandlar. Men härvid kommer man in på alla möjliga mänskliga områden och förhållanden: allmänna och enskilda. Det är härvid icke med nödvändighet behöfligt att den, som skall anvisa medlen mot det onda, satt sig in i själva de forskningsmetoder, som bibragt mänskligheten den uppfattning, som betecknas såsom »vetenskapens nuvarande ståndpunkt». Man kan t. o. m. gå ännu längre och påstå, att endast ett ringa fåtal av dem, vilka på antydtt sätt skola förhjälpa människorna till ett praktiskt genomförande av hygienens principer, behöva vara i stånd att mera ingående följa den vetenskapligt hygieniska medicinska forskningen. Detta gäller icke blott dem, som företrädesvis benämnas »praktikens män» — d. v. s. teknici — utan även en hel del medicinskt bildade.

En läkare bör, även om han ej själv sysselsatt sig i avsevärdare grad med hygieniska frågor, visserligen äga större förutsättningar än någon annan att kritiskt bedöma ett framlagt forskningsresultat, men måste dock ofta liksom den icke medicinskt bildade åtnöja sig med att godtaga andras framlagda, på fullgoda bevis grundade forskningsresultat samt basera sitt görande och låtande därpå.

F. ö. torde inom de flesta vetenskapsgrenar och icke minst de medicinska i allmänhet förhållandet vara likartat, så snart det gäller praktiska tillämpningar.

Vi måste alltså erkänna det berättigade uti en kunskapsgren, som kan benämnas »tillämpad hygien», och som består i kunskapen om de *principer*, vilka böra komma till användning för att tillgodose den »grundläggande» hygienens krav.

Ordet »principer» torde dock kräva någon närmare förklaring. Liksom den tillämpade hygien å ena sidan gränsar till en medicinsk vetenskap, gränsar den å andra sidan till diverse andra kunskapsgrenar samt praktiska tillämpningar därav. Ett exempel härpå kan hämtas från avloppsvattens hygieniska betydelse och behandling. Den grundläggande hygien visar, att avloppsvatten kan giva anledning till hälsofara, om det ej oskadliggöres. Den visar ock varuti denna hälsofara består samt giver därmed ock antydningar, i vilken riktning den tillämpade hygien bör arbeta. Denna åter tillkommer det att utarbeta program för de praktiska metoder, vilka kunna och böra komma att tillämpas för målets vinnande — i föreliggande fall metoder att oskadliggöra avloppsvattnet på det i varje enskilt fall lämpligaste sättet (lämpligt avledande; sterilisering; mekanisk, kemisk eller biologisk rening o. s. v.). Men till den tillämpade hygien hör icke kännedom om lämpligaste betongblandning i härvid använda cisterner, ej heller beräkning av hållfasthet hos murverk eller andra konstruktiva delar, m. m. av rent teknisk art.

Återgå vi till några andra förut anförda exempel, kunna ovannämnda principer gälla undersökningar av förhållanden, som gynna utvecklingen av vissa bakterier i dricksvatten; metoder att *rena* vatten från sådana bakterier; metoder att utrota skadliga insekter; lämpligt sätt att ordna renhållningsväsende; lämplig arbetsordning — med hänsyn till fördelning av arbete och vila, o. s. v. o. s. v.

Benämningarna »samhällshygien», »byggnadshygien», »bostadshygien», »fabrikshygien», »transportmedlens hygien», »livsmedlens hygien», »kroppens enskilda hygien» o. s. v. visa bl. annat, i huru många olika riktningar den »tillämpade hygien» rör sig.

Man kan i sanning påstå, att intet område av mänsklig verksamhet finnes, som ej på något sätt kan beröras härav.

Men — invänder någon — om så är förhållandet, skulle ju den tillämpade hygien förutsätta specialisering på varje område — något som påtagligen vore en uppgift, omöjlig att fylla.

Saken hjälpes emellertid — här liksom annorstädes — därigenom att vår och en begränsar sig till ett visst område, där han kan intränga djupare.

Vi skola här nedan hålla oss inom ramen för den hygien, som väsentligen gäller samhällen, dock naturligtvis utan att härvid kunna gå i detalj — något som skulle kräva utarbetande av stora böcker.

Vilken del av hygienens man än tager i betraktande, kan dock ej undvikas att vissa andra synpunkter än de hygieniska stundom vilja skymma bort dessa, i det att såväl tekniska som ekonomiska hänsyn kunna spela en otillbörlig roll. Sistnämnda synpunkter *kunna* nämligen vara både tillbörliga och otillbörliga: tillbörliga, om de avse att med bästa och prisbilligaste medel nå det hygieniska målet; otillbörliga, om detta sistnämnda mål åsidosättes. Ett par exempel torde vara belysande.

För att av ett sjö- eller flodvatten bereda ett fullgodt dricksvatten för ett samhälle erfordras i regeln en rening av råvattnet. Det ligger härvid i sakens natur att man bör välja den reningsmetod, som är tekniskt bäst och ekonomiskt billigast. Skulle åter samhället i fråga åsidosätta hela reningsprocessen — emedan den medför arbete och kostnad — så är detta ett oberättigat uppoffrande av hygienens fordringar.

Överdrifter i *båda* riktningarna kunna f. ö. naturligtvis förekomma. En dylik överdrift ligger exempelvis i det i hygienens namn stundom framställda kravet på snart sagt obegränsad vattentillgång inom boningshusen, medan en rationell hygien ej motsätter sig en viss av ekonomien betingad begränsning av konsumtionen — t. ex. genom en lämplig användning av vattenmätare.

I nu berörda avseenden skulle man kunna tala om vissa »skötesynder», vilka hos den ena eller andra gruppen av personer träda i förgrunden. De som mera uteslutande syssla med hygieniska frågor kunna — om de ej utöva erforderlig självkritik — hemfalla till för stor stränghet under åsidosättande av ekonomiens berättigade fordringar. De åter t. ex., vilka såsom entreprenörer hava att utföra arbeten, vid vilka de hygieniska kraven äro ägnade att höja kostnaderna (t. ex. rörledningsarbeten), hava i regeln en av konkurrenshänsyn dikterad benägenhet att nedpressa kostnaderna, därvid ej sällan de hygieniska fordringarna komma i viss mån till korta. Egendomligt nog finner man stundom även hos »konsulterande» en liknande tendens.

Mindre underligt är, att försök göras till nedpressning av hygienens fordringar i sådana fall, då den, som skall betala de utförda anordningarna, är en annan än den, som åtnjuter fördelarna därav — då t. ex. en fabrik

eller ett samhälle, som utsläpper avloppsvatten i ett vattendrag, nödgas påkosta rening av avloppsvattnet för att icke vålla skada för de nedanför vid vattendraget boende.

Den tillämpade hygienien ställer alltså stora fordringar i avseende på objektivitet, i det att den icke sällan förutsätter, att det egna personliga eller det egna samhällets ekonomiska intressen i viss mån underordnas andras hygieniska intressen. Rättvisligen kan och bör dock härvid krävas, att fullgoda skäl framläggas för de hygieniska åtgärderna.

Vid noggrann granskning av skäl, vilka utgivas såsom fullgoda, inträffar emellertid icke sällan, att kraven befinnas oberättigade, m. a. o. att under hygienens täckmantel framställas ersättningsanspråk för skador, vilka äro överdrivna, obevisliga — eller stundom rent av orimliga.

Vi återkomma senare till exempel härpå och erinra för tillfället endast därom, att i detta fall en noggrann utredning kan medföra inbesparing av stora belopp.

Understundom kan en dylik utredning medföra väsentliga besparingar av penningar på grund av ett annat, mindre tillfredsställande skäl: att olägenheterna befinnas vara av den art, att — praktiskt sett — *inga* medel finnas till deras avhjälpande, i vilket fall det tydligen är lönlöst att nedlägga några kostnader. Exempel härpå erbjuda sådana fabriker, där effluvierna icke kunna oskadliggöras utan driftens nedläggande, men där man icke kan eller bör genomföra sistnämnda åtgärd.

Svårast vid bedömandet äro här — liksom alltid — gränsfallen, då olägenheterna visserligen icke helt kunna avhjälpas, men där likväl avsevärda förbättringar kunna göras. Det gäller därvid för den, vilken skall föreslå — och ännu mer för den, som skall föreskriva — förbättringar, att vara nog mycket hygieniker för att rätt bedöma åtgärdernas effektivitet i hygieniskt avseende, men även nog mycket tekniker för att inse vad som är utförbart, och med vilka tekniska och ekonomiska faktorer man har att räkna.

Tyvärre äro nu antydda gränsfall ingalunda sällsynta.

Vid de exempel, som nedan skola anföras i ändamål att närmare belysa sambandet mellan hygien och teknik, vore lämpligt ordna exemplen efter något slags system.

Svårigheten är blott att finna någon användbar indelningsgrund. Vi hava ovan antydt, att vissa spörsmål väsentligen angå samhället såsom sådant, andra åter väsentligen den enskilde. Emellertid sammanhänga dessa här och där så nära med varandra, att det är nästan omöjligt uppdraga en bestämd gräns; och denna gräns utplånas i våra dagar mer och mer.

Institutioner sådana som bostadsinspektionen, fosterbarnsinspektionen, livsmedelsnämnden o. s. v. ådagalägga, hurusom den enskildes välbefinnande numera anses såsom en samhällsangelägenhet i många fall, då man förr lät var och en »sköta sig själv». Att oskadliggörande av smittor (förebyggande av epidemier, epidemisjukvård) är ett samhällskrav har länge varit erkänt, ehuru väl ingen lär neka att här ock den *enskildes* intresse på det allra närmaste beröres.

Emellertid träda samhällets intressen i vissa fall mera i förgrunden. Detta är exempelvis förhållandet beträffande anläggande av städer eller stadsliknande samhällen, samhälles förseende med godt vatten, avledning av förbrukat vatten (event. dettas rening) samt annan renhållning, ordnande av begravningsplatser, likbränning o. s. v., vidare anstalter för försäljning och kontroll av livsmedel och slutligen (i samband med epidemisjukvården) vaccination, desinfektion (avlusning), m. m. Med de *samhällshygieniska* frågorna hava de *fabrikshygieniska* det gemensamt, att de vanligen beröra samtidigt ett större antal individer. Däremot äro fabrikshygienens metoder i många fall närmare sammanvävda med den *personliga* hygienens, nämligen därigenom att den i hög grad förutsätter individens särskilda uppmärksamhet och aktgivande på föreskrifter och regler. Den mera ingående fabrikshygienen måste f. ö. specialiseras i nästan lika många avdelningar som det finnes industrier — om än för många av dessa kunna angivas gemensamma principområden.

En grupp av hygieniska frågor pläga sammanföras under benämningen *byggnadshygien*, omfattande byggnaders uppförande och beboelighet, uppvärmning och ventilation, belysning, m. m. Emellertid mötas på detta område såväl allmänna (sociala) som mera privathygieniska synpunkter, och dessutom kompliceras hithörande frågor (liksom frågor rörande stadsplaner o. d.) även genom estetiska krav — varom mera nedan. Mera personliga förhållanden beröras av näringsmedlens hygien, klädedräktens hygien eller, kort uttryckt, kroppens vård och skötsel. Det är dock redan antydtt att man numera kräver av samhället, att detta skall i viss mån ikläda sig ansvar för att individen *kan* erhålla sina berättigade fordringar på mat, dryck och kläder eller t. o. m. bad och gymnastik m. m. uppfyllda.

Ehuru i sista hand en fråga vilken rör huvudsakligen individen, anses ju i våra dagar individens nykterhet vara en angelägenhet, som påkallar samhällets ingripande — ej minst med hänsyn till »*rashygienen*».

Sistnämnda ord angiver ock en gren av modern hygienisk verksamhet, där kanske de mest diskreta, individuella förhållanden i samhällets (mänsk-

lighetens, nationens) namn göras till föremål för hygieniska forskningar och strävanden.

* * *

Om man efter dessa allmänna reflexioner skulle övergå till några konkreta fall, må exempelvis nämnas stadsplaneväsendets hygien. Naturligtvis kan här endast ifrågakomma att erinra om några synpunkter. En regel, som väl håller på att »slå igenom», är den, att boningshusen böra — där så kan ske — ligga på höjder och sluttningar, parker och planteringar däremot på lägre belägna platser. Att emellertid andra åsikter varit rådande vid uppgörande av mången stadsplan är lätt att visa. Sålunda erinras om de inom huvudstaden belägna Tegnérslunden, Vanadislunden, Kronobergs-parken, Årstalunden, Tantolunden samt i motsättning härtill bostadskvarteren nedanför (söder om) Vanadislunden, vidare alla i vatten utfyllda byggnadstomter o. s. v.

I de nyligen med Stockholm inkorporerade områdena finnas stadsdelar (f. d. »villastäder»), vilka så att säga ligga och simma på vattnet eller i flytlara. Bebyggandet räknar ändock ej ens flere decennier.

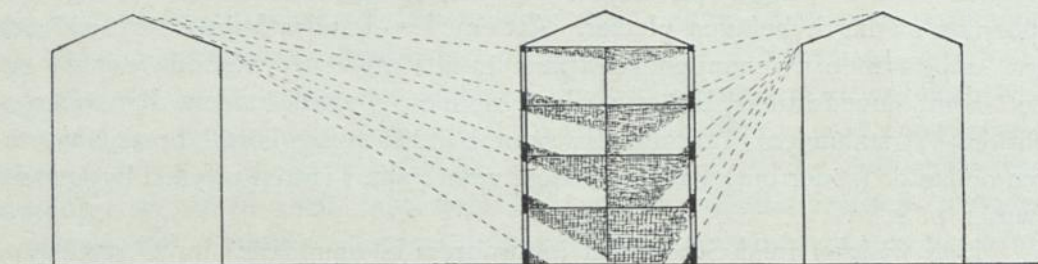
Inom andra städer och orter möta oss liknande förhållanden. Mången har säkerligen sett vykort föreställande roddturer på gatorna i Uppsala, i Falun, i Rättvik, i Bollnäs o. s. v. De sankade delarna i åtskilliga städer — jag tänker särskilt på *en* större landsortsstad — hava vållat många och stora bekymmer för de kommunala myndigheterna och bebyggarna, medan staden rundt omkring kunnat erbjuda de härligaste sluttningar. Man skulle kunna anföra otaliga exempel på sådana förhållanden — urgamla och alldeles färska — där bristande hänsyn till höjdläge, inclusive bristande tanke på dräneringsmöjlighet, skapat svårigheter, vilka — om de insetts från början — icke behövt förekomma. I dessa fall skulle ett större förutseende hava medfört snart sagt oöverskådliga besparingar i avseende på kostnaderna för såväl själva husbyggandet som ock för en dränering, som till sist ändock ej kan få utbli. Det sades *förutseende*. Det har i dessa och liknande fall varit bristen härpå, som gjort största skadan. Det har ej sällan varit spekulation i tomtvärden, som fått utgöra samhällsbildningens enda riktlinjer. *Après nous le déluge!* synes i många fall hava varit den ledande principen vid bildningen av månget av vår tids småsamhällen.

Förutom nu antydda ekonomiska synpunkter tillkommer vid planläggning såväl av mindre som större samhällen ännu ett komplicerande moment

i den rådande smaken, vilken stundom vill göra sig gällande *framför* alla andra hänsyn.

Ett exempel härpå må anföras.

Onekligen finnes åtskilligt tilltalande uti de gamla städernas pittoreska partier — med trånga gator och gränder. Men det är dock ett misstag att med förglömmande av grändernas brist på sol, dagsljus och frisk luft skapa något, som estetiskt motsvarar »Gamla Stockholm» eller »Gamla Visby» — för att nu endast taga exempel inom vårt eget land. Kanske stödes (omedvetet eller medvetet) en dylik smakriktning något även därav, att

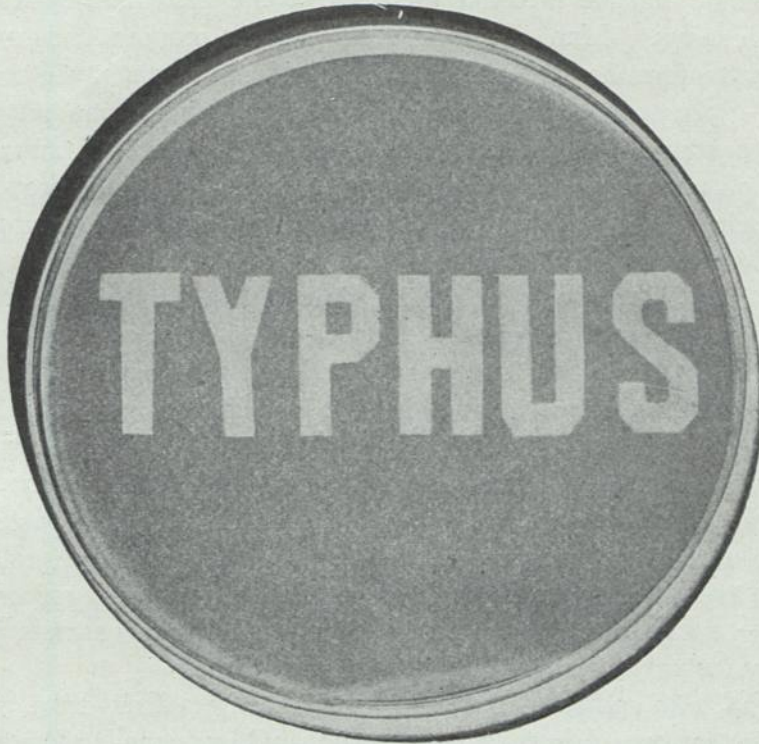


SKIZZ, UTVISANDE DAGERBELYSNINGEN VID OLIKA GATUBREDD.

tomtvärderna bli högre, ju trängre byggnaderna placeras. Det finnes nämligen alltid en tendens att övervärdera marken i dylika hopgyttringar av människobostäder. Men hygieniskt är det förkastligt. Man behöver blott kasta en blick på »hyreslistan» (nämligen under tider, då tillgång på bostäder och val av sådana möjliggör en hyreslista) för att finna, huru eftersökta bostäder äro »åt solsida». Och den som något följt tomtförsäljningen inom ett villasamhälle, där någorlunda valfrihet i avseende på tomter varit rådande, skall även snart finna olikheten mellan säljbarheten av söder- och norrsluttningarna. Människans sunda uppfattning av behovet av ljus och luft är här tydlig nog. Och vill man söka stöd i teorien, är även detta lätt att finna. Se vidstående reproduktion av Bucheners »bakterieskrift»,¹ där å ett fullympat substrat ordet »typhus» är bildat genom att bakteriekolonier kommit till utveckling i skuggan av papper, men icke i solskenet. Och liksom tyfoïdbacillerna trivas bäst i skuggan, så gäller det ock alla andra bakterier, vidare mögelsvampar m. fl. fiender till vårt välbefinnande.

¹ Arch. für Hygiene, Jubelband, dem Herren — M. VON PETTENKOFER gewidmet, 1893, sid. 193.

Den smak, som vill arbeta fram stadsdelar med smala gator, måste alltså ur hygienisk synpunkt betecknas såsom *dålig*, om ock husens estetiska ensemble må bliva än så vacker.



»BAKTERIESKRIFT».

Vid skapandet av dessa nya samhällen, vilka i våra dagar vuxit likt svampar ur jorden, finnas även andra hygieniska synpunkter än de ovan nämnda, vilka ofta nog kommit till korta. En dylik är exempelvis anskaffandet av dugligt konsumtionsvatten. Man besluter kanske *först* att »dela upp» egendomen A, B eller C i tomter, m. a. o. att å en viss plats lägga ett samhälle. Först *sedan* tillser man, om där finnes att tillgå vatten till husbehov. Samma fel begås f. ö. ofta nog även vid sådana anläggningar, som pläga inrubriceras under benämningen »allmänna anstalter», såsom sanatorier, uppfostringsanstalter o. s. v.

Vid samhällsanläggandet litar man härvid på, att brunnar inom tomterna skola giva nog vatten och nog godt vatten. Men man glömmer, att inom ett tätt bebyggt samhälle flertalet brunnar snart bliva av dålig beskaffen-

het — till följd av samband med läckande avloppsledningar eller annan infektion av marken. Man glömmer ock, att om man från början enade sig om vattenledning, skulle man för de penningmedel, som sparats in å brunnsgrävning, kanske komma ett godt stycke på väg för att erhålla en god vattenledning. Man glömmer slutligen, att marken endast i ett fåtal fall är så vattenförande, att flertalet brunnar hålla vatten även under torrår (ex. 1914—15!); och utsinar den egna brunnen, får man gå till granne eller grannes granne att hämta vatten, därvid dock även de mest anspråkslösa krav på vattnets tillräcklighet torde sättas på hårda prov. Brunnsgrävande och vattenhämtning ur brunnar kan ofta sägas vara ett utslag för »fattigdomens slöseri». Såsom exempel på förhållanden av nu antydd art erinras om tillståndet i en del av Brännkyrka församling vid tiden för dess inkorporering med Stockholm. Huru många dricksvattenbrunnar som verkligen funnos där är ej lätt att säga, eftersom många, som voro sinade vid undersökningstillfället, ej medräknades; men av c:a 650, som undersöktes vid ett stadens laboratorium, voro ett stort antal mycket dåliga. I några fall voro »vattenepidemier» anledning till undersökningarna.

Rörande planläggningens betydelse i avseende på avloppsledningarna och kostnaderna för desamma är redan en antydning gjord; tilläggas bör endast, att även avloppens *skötsel* kan väsentligt fördyras genom olämplig stadsplan — i det att därigenom kan nödvändiggöras vattnets pumpning, rening m. m., som möjligen skulle kunnat undvikas.

I de fall, där spillvattnets rening är behöflig, vållar detta ofta betydliga svårigheter och kostnader. År för år bliva emellertid dessa frågor aktuella, och i mån W. C. arbeta sig fram, ställas kraven på resp. samhällen allt oeftergivligare i berörda avseenden. För städer och andra samhällen, som äro belägna vid smärre vattendrag, kan det anses såsom blott en tidsfråga, när de bliva *ålagda* av vederbörande myndigheter att låta rena sitt avloppsvatten före dettas utsläppande.

Från ovan anförda samhällshygieniska synpunkter till de rent byggnadshygieniska är steget kort. Även här beröras på det närmaste det allmännas och individens intressen.

Det är byggnadernas anordning och exteriörer, som giva samhället dess väsentliga prägel, men dessutom deras interiörer, som betinga bostädernas hälsosamhet, trevnad eller otrevnad. Ur dessa synpunkter äro ock resp. byggnadsordningar av största betydelse för de samhällen de gälla.

Men liksom vid stadsplanefrågor göra sig också här estetiska krav gällande — stundom med allt skäl, stundom oberättigat. Det lär väl ej

kunna bestridas, att en byggmästare *kan* uppföra hus utan någon som helst kunskap vare sig rörande hygienens eller estetikens fordringar, var-
emot han måste förstå åtminstone så mycket av *konstruktion*, att han får
huset att förbli stående.

Häruti ligger en naturlig förklaring till uppkomsten av myckenheter
både osunda och fula hus. En sak är emellertid den *tekniska utförbar-*
heten av dylika hus och en annan deras *existensberättigande*.

Då det — för den som äger kunskap och förmåga härtill — är lika
lätt och ofta lika billigt att åt en byggnad giva vacker form, som det för
en klåpare är att göra den ful, vilja vi med skäl fränkänna klåparearbete
något berättigande.

Varför skulle vi giva större erkännande åt klåparearbete i hygieniskt
avseende? Visserligen *synes* detta ej i lika grad som fuskverk i estetiskt
avseende, men det *kännes* så mycket mer.

I några fall kunna orsakerna till uppkomsten av dylikt arbete konstateras
vara ren okunnighet. Exempelvis erinras om en på gamla — på sin tid lätt
förklarliga — byggmästarefördomar baserad bestämmelse i diverse byggnads-
ordningar: att nyuppförda hus ej få putsas i samband med uppförandet. De
lagstiftande hava nämligen trott mera på den föreställningen, att uttorkningen
då försiggår långsammare, än på direkta försök, vilka visat att ett hus, som
omedelbart efter uppförandet avputsas (med vanligt kalkbruk), torkar i viss
mening fortare, så att det vid tiden för inflyttning innehåller *mindre* fukt, än
om putsen — med allt däruti inneslutet vatten — senare tillförts. Olikheten
blir ännu större mellan ett hus, där man utvändigt beklädt murarna med
fasadsten (något som icke är förbjudet), och ett annat som putsats.

Orsakerna till hygienens eftersättande äro emellertid stundom ock andra:
särskilt en viss oförmåga att kombinera tekniska och estetiska fordringar
så, att det invecklade problemet får en lycklig lösning.

Exempelvis erinras om svårigheterna att i den moderna byggnaden in-
konstruera rörlningar och ej sällan även värmeapparater så, att härav
erhålles en fullgod samverkan mellan teknik och estetik. Åtskilliga arki-
tekter torde ännu helst se, att de kunna i vägg- och golvrännor, bakom
galler och skärmar o. s. v., *dölja* dessa anordningar; och den anses ej
sällan hava lyckats bäst, som hittat på den bästa »förklädnad och skyddande
likhet» i avseende på dessa ting. Särskilt synes materialet gjutjärn vara
svårhanterligt i arkitektoniskt avseende.

[I förbigående må göras en fråga: varför man i fall, då utseende-
frågorna men ej kostnadsfrågan äro avgörande, icke använder brons? En

radiator av brons skulle otvivelaktigt verka ganska »förfämlig». Och i hygieniskt avseende vore en sådan så till vida överlägsen de enklare av målat järn, som densamma onödiggjorde en vid uppvärmning mer eller mindre illaluktande målning eller lackering, som eljes är behövlig.]

Man skulle ju även i avseende på hithörande ting kunna införa *sanning i konstruktionen* liksom man sökt göra detta genom att utrota blindfönster, smaklösa stenimitationer i puts m. m.

Men må vi fortsätta granskningen av ett modernt hus. Jämför man ett sådant med ett äldre, måste onekligen väsentliga förbättringar annoteras just på hygienens område.

Vatten och avlopp saknas allt mera sällan; bad-, dusch- och toaletterum inredas även i enklare bostäder; W. C. ersätta allt mera de illaluktande garderobsklosetterna samt de ej mindre illaluktande avträdeslängorna å gårdarna; gaseldning ersätter osande fotogenkök, elektrisk belysning osande fotogenlampor, värmeledning osande och dammande kaminer, o. s. v.

Och tager man i betraktande byggnader för allmänna ändamål: skolor, samlings-salar, sjukhus o. s. v., finner man de hygieniska fordringarna högt uppdrivna, stundom t. o. m. högre än som kanske vore alldeles nödvändigt, särskilt om den hygieniska nyttan väges mot skadan av kvantitativa inskränkningar på grund av en ogynnsam ekonomi. Man kan exempelvis icke alltid undertrycka den tanken, att det vore möjligt och gagneligt att skapa sjukhus, där anläggningskostnaden per patient varit mindre, och där på grund härav *flere personer* kunnat få vård, låt vara att vissa hygieniska raffinemang varit borta. Man finner onekligen på detta område stundom utslag av de överdrifter, varom förut något talats. Å andra sidan kan ju ej nekas, att den satsen här ligger nära till hands, att endast det bästa är godt nog.

Finnes alltså mångt och mycket, som visar hän på stora framsteg inom hygieniska områden, så finnes emellertid nog även tillräckligt mycket gammal surdeg, som kan giva anledning att framhålla ett alldeles motsatt förhållande.

Inom bostadshuset anträffas ännu mångt hygieniskt oting, särskilt i de stora städerna.

S. k. jungfrukamrar utgöras ännu här och där av skrubbar, vilka alldeles icke kunna benämnas människovärdiga bostäder. Mångenstädes inhyses kokspis och diskskåp i en garderob — mer eller mindre illa ventilerad: en centralhård för matos och lukt av köksavfall. I en alldeles modern våning, färdig till inflyttning 1917, befanns tjänarinnans sängplats utgöras av ett i

väggen inbyggt, fällbart »sängskåp», i vilket naturligtvis ingen ventilation fanns. Den varma, med köksos impregnerade bädden stänges in snart sagt hermetiskt, och det är lätt att tänka sig effekten av en liten invandring av väggohyra i en dylik propageringsanstalt.

Slaskbänkens skåp är en luktcentral, som doftar å långt håll; ett galler i dörrspegeln vore kanske nog att skapa ett bättre förhållande.

Och granskar man impipans galler i köket, är detta ej sällan halvt igengrott av flottigt damm, som skulle till största delen gått ut genom skorstenen, om gallret varit borta.

I en hel del hus äro tvättstugorna halvmörka ohyggliga källarlokal, där vatten rinner av väggarna, och där vid lokalens begagnande för sitt ändamål luften är ogenomskinlig av imma; kanske ledes det förbrukade tvättvattnet till en grop i golvet, därifrån det måste ösas upp, om ej översvämning skall följa. Ösandet sker nog vanligen först sedan golvet delvis täckts av vatten! Ej sällan träffar man en tvättstuga, vilken kan vara god och bra för den som använder den, men vilkens rökskorsten utmynnar omedelbart under boningshusets fönster.

Och huru ter sig den plats, där avfallsämnen (soporna) från egendomen samlas? Naturligtvis finnas i avseende härpå även väl ordnade förhållanden, men även synnerligen dåliga, t. o. m. i Sveriges större städer, varifrån ock skulle kunna anföras drastiska exempel.

Bland samhällshygieniska områden, där man kan anteckna både synnerligen stora framsteg och stor efterblivenhet, må nämnas renhållningsväsendet med alla dess underavdelningar. Vare sig man emellertid tager i betraktande det ena eller andra av dessa områden, kan sägas, att resultatet av arbetet hörer till de mest påtagliga och populärbegripliga, detta må nu gälla latrinrenhållning eller soprenhållning, gårds- eller gaturenhållning. Avlägsnande av orenlighet (med åtföljande minskning av infektionstillfällen samt rätt- och flugplågan) är ju delvis en av hygienens äldsta och angelägnaste uppgifter. Men t. o. m. här kan icke helt undvikas, att hygienens krav å ena sidan samt teknikens och ekonomiens å den andra stundom komma i konflikt med varandra. Man kan såsom en tämligen allmängiltig regel säga, att hygienien fordrar ett *omedelbart avlägsnande* från bostäderna och deras närhet av all slags orenlighet och särskilt animaliska avfallsämnen. Däremot förutsätter ett ekonomiskt-tekniskt tillgodogörande av avfallsämnen vanligen dessas *uppsamlande* ävensom deras *förvaring* mellan vissa bortskaffningsperioder. Från dessa principiella skiljaktigheter kunna de flesta av nyss antydda konfliktämnen härledas. Detta är exempelvis händel-

sen i avseende på alternativet »W. C. eller torrklosetter». De hygieniska synpunkterna gå i riktning att motarbeta fäkalämnenas uppsamlade, förvaring och hantering. Hygienikern anser dessa ämnens uppoffrande såsom ett i regeln skäligt pris för fördelarna att snabbt och säkert bliva dem kvitt.¹ De åter, vilka sätta de ekonomiskt-tekniska synpunkterna främst, anse sagda pris för högt.

Liknande betraktelsesätt göra sig ock gällande i fråga om å ena sidan sopornas samlande och sortering och å den andra deras bränning utan all föregående hantering. Å en del orter tillämpas den förra, å andra (och däribland dem, som hava soprenhållning ordnad på modernaste sätt) den senare metoden.

I viss mening är ock stridsfrågan om köksavfallets tillgodogörande till svinföda eller endast till gödseländamål av likartad beskaffenhet. Även härvid avse nämligen de tyngst vägande betänkligheterna köksavfallets föränderlighet vid förvaring, varigenom svårigheter uppstå för användningen till svinföda — därest icke såsom å verkliga landsbygden användningen kan ske omedelbart efter uppsamlandet.

I förbigående må emellertid erinras, hurusom avvägandet av nytta och skada dock i detta, liksom i en hel del andra fall, kan ställa sig olika under normala förhållanden och under det tillstånd av allmän brist, som råder nu under världskriget.

En uppgift, som står renhållningen nära, är oskadliggörandet av skämda animaliska födoämnen, självdöda djur o. d. Där en ordnad »destruktion» ej är införd, varigenom nyssnämnda ämnen ej blott steriliseras utan ock underkastas en genomgripande förändring (och förvandling till nyttiga produkter), plägar man söka förhindra en otillåten användning av dessa varor till människoföda genom övergjutning med fotogen eller dyl., samt vidare åstadkomma deras oskadliggörande genom nedgrävning. Erfarenheten har emellertid visat, att ingendera delen är fullt betryggande: kadaver hava uppgrävts och fotogenet bortkokats, varefter produkten fått ingå i korv. Vid »destruktionsanstalten» behandlas åter alltsammans med ånga av högt tryck och d:o temperatur. Härvid tillgodogöres en stor del fett för sig, varefter huvudmassan av övrig substans torkas (inuti apparaten) för att slutligen desintegreras till ett pulver, som är rikt på fett, fosfater och albuminämnen, och som äger stort värde till hönsföda m. m. I detta fall sammanfalla de hygieniska och ekonomiska intressena med varandra.

¹ Naturligtvis där så ske kan utan olägenhet med avseende på vattendraget.

Närbesläktade med renhållningsfrågor äro även rengöringsfrågor, särskilt desinfektion och vad därtill hörer. I striden mot smitta intar desinfektionen en viktig post. Härvid gäller det emellertid att lösa mångt svårlöst tekniskt problem, och särskilt att för detta slags arbete finna medel, vilka döda de smittoförande organismerna utan att medföra fara för människor eller större skadegörelse å varor. Åsidosätter man dessa synpunkter, är desinfektion i allmänhet en enkel sak. Exempelvis erinras, hurusom man medelst gasformigt cyanväte kan åstadkomma det allra effektivaste utrotande av ohyra. Men finnas människor i något rum, som (medvetet eller omedvetet) står i gaskommunikation med den desinfekterade lokalen, så utrotar man lätteligen även dessa människor, ett öde som f. ö. även skulle drabba desinfektören själv, om han ett ögonblick för länge glömde sig kvar i lokalen, sedan han igångsatt desinfektionen. Och aktar man icke på värdet av de *föremål*, som böra desinficeras, så är uppbränning en absolut ofelbar metod att oskadliggöra alla smittoämnen. Emellertid har man börjat att alltmer taga hänsyn till nu antydda synpunkter. Sålunda har sublimatet (som dock vid det användningssätt, som ifrågakommer, är vida ofarligare än gasformigt cyanväte) väsentligen utträngts av andra, mindre riskabla desinfektionsmedel såväl för personligt bruk som vid desinfektion av rum. Ångdesinfektion, vilken tydligen är långt mindre radikal än uppbränning, men som i längden rätt mycket skadar kläder, om dessa ofta utsättes för sådan, ersättes allt oftare av formalindesinfektion; och vid detta förfaringssätt räknar man alltmer med besparing av desinfektionsmedlet, varför nya apparater alltjämt konstrueras. Men ännu återstår på detta och hithörande områden mycket för en tekniker att göra. Uppfinnandet av nya desinfektionsmedel — lämpade för olika ändamål — är ock ett tema, som lämnar kemisten och ingenjören stort verksamhetsområde. Det erinras exempelvis om den moderna användningen av elektrolyt-klor (klorgas och hypokloriter) för sterilisering av vatten, avfallsämnen m. m.

Men vi måste gå vidare till andra grenar av den tillämpade hygien.

Bland angelägenheter, vilka onekligen äga största betydelse för ett samhälles renhållning — om de än icke pläga anses tillhöra den organisation, som innefattas under begreppet »renhållningsväsende» — erinras slutligen om de redan i det föregående något berörda ledningarna för spillvatten.

Uppenbart är, att samhället vill bestämma över gatuledningarna, deras anläggning och skötsel. Emellertid hava hygienens intressen nödvändiggjort samhällets ingripande även i avseende på ledningarna inom tomter och hus. Innan man från det allmännas sida tog hand om denna sak,

visade det sig nämligen omöjligt att erhålla ledningar, vilka voro ens någorlunda betryggande mot läckor och tillstopning (med åtföljande spillvattenöversvämningar), varigenom tydligen stora skador vållades alla, som berördes därav: såväl dem som bo i huset som ofta nog grannar. Inom alla kulturländer finnas därför i föreliggande avseenden utarbetade bestämmelser, vanligen av kommunalförordnings natur. Och vad särskilt Sverige beträffar arbetas f. n. på att sammanföra och revidera dessa spridda kommunalförordningar till »normalstadgar», vilka skulle kunna möjliggöra någorlunda enhetliga föreskrifter över hela riket. En dylik enhetlighet skulle bl. a. kunna förhindra, att den ena orten — med mindre stränga bestämmelser — finge tjäna till »avstjälningsplats» för materiel, som kasserats i en annan ort, där bestämmelserna äro strängare.

Att inom här tillgängligt utrymme antyda alla de grenar av kommunal verksamhet, där teknik och hygien måste samverka, skulle föra för långt. Blott några ord må tilläggas rörande en särskilt i denna tid mycket aktuell avdelning av sådant arbete: det som gäller tillförsel, handel och kontroll av livsmedel. För att inse, vilken betydelse transport och förvaring äger i avseende på livsmedlen, behöver man blott taga kännedom om de myckenheter, vilka på grund av brister i omberörda avseenden skadas eller förfaras. Särskild uppmärksamhet kräver förvaringen, varför ock i de kommunen tillhöriga saluhallarna finnas noggrant genomtänkta och utförda anordningar för detta syfte: kylrum och andra förvaringslokaler med tillhörande specialanordningar.

I ett modernt, kommunalt eller enskilt, slakthus finner man ock en mångfald anordningar, vilka förutsätta beaktande av såväl veterinära som tekniska, hygieniska och merkantila synpunkter. Ingenera kan uteslutas, om ej det hela skall anses förfelat. Bortses från en del av livsmedelskontrollen, som faller inom sistnämnda inrättnings verksamhet eller är därmed besläktad (köttbesiktning), förutsätter den övriga livsmedelskontrollen samarbete mellan flere sakkunnighetsgrupper: kemister, botanister (mikroskopiker), veterinärer, läkare m. fl.

I de flesta kulturländer bedrivs livsmedelskontroll i stor utsträckning och finnas för sagda ändamål inrättade betydande undersökningslaboratorier. Hos oss kan väl ännu ej mer än en första början till dylika speciallaboratorier sägas finnas; men det arbetas dock f. n. ivrigt på detta område och många tecken tyda därpå, att tiden för dylika laboratoriers inrättande snart är mogen — liksom ock tiden för utbildande av personer att sköta dylika laboratorier.

* * *

Det återstår att tillse, huru man skall finna en lösning på de *personfrågor*, som sammanhånga med ovanstående *verksamhetsfrågor*. Utan att kunniga och lämpliga personer finnas, vilka taga sakerna om hand, kommer man icke långt.

Härvid kan man icke undgå att komma in på kapitlen om organisationen av kommunala verk liksom ock om ordnandet av den tekniska undervisning, som lämpligen kan erfordras för att förbereda till befattningar inom nu ifrågavarande verksamhetsfält.

Att hithörande kommunala organ måste bliva väsentligt olika i stora samhällen och i mindre säger sig självt. I en storstad *kan* det finnas en särskild förvaltning och särskild personal, vilken erhåller full sysselsättning för en specialuppgift: för vattenledningsverk, för kloakverk, för renhållningsverk, för slakthus m. m., varförutom den hygieniska lokalmyndigheten därstädes (hälsovårdsnämnden) kan bestå sig med en mångfald organ: för epidemisjukvård, för allmän hälsovård, för bostadsinspektion, för fosterbarnsinspektion, för livsmedelskontroll, för rörinspektion etc.

I mån ett samhälle är mindre, kommer vart och ett av ovannämnda verksamhetsområden att även krympa tillsammans, så att det icke längre kan betinga en särskild styrelse. Flere eller färre arbetsfält sammanslås därvid under *en* förvaltning, och tjänstemännen kunna då ock nödgas att, för att erhålla full sysselsättning, taga befattning med ganska olikartade uppgifter. Det kan t. o. m. hända, att man inom de mindre samhällena behöver gå så långt, att en enda person (ofta benämnd »stadsingenjören») nödgas hålla på med alla möjliga tekniska frågor: vattenledning, kloaker, vattenreningsverk, badanstalter (ofta vid sidan av byggnadsarbeten, tomtmätningar, kanske även gasverk, m. m.). Huru hygienien härvid blir i dessa ting tillgodosedd, beror då mycket på stadsingenjörens personliga uppfattning och samarbetet med den hygieniska lokalmyndigheten.

I vad mån det kan tänkas att en ändring och förbättring av nu anförda förhållanden skulle kunna ske genom en sammanslutning mellan flere mindre orter om gemensamma specialister, torde vara förtjänt av en utredning. Vi måste dock för ögonblicket åtnöja oss med att taga sakerna i betraktande sådana de *nu* förhålla sig.

Och vare sig det härvid gäller mera detaljerad eller mera mångsidig verksamhet av nu antydd art, är tydligen en viss utbildning hos arbetsledarna önskvärd eller nödvändig.

Granskar man emellerid med tanke härpå kompetensen hos dessa arbetsledare, kommer man snart till insikt därav, att det — med undantag

för vissa särskilda fall — icke är möjligt för *någon* slags läroanstalt att fullt tillgodose dessa intressen, utan måste den egentliga fackutbildningen — här liksom ofta inom industrien — ske inom det verk (eller liknande verk), där vederbörande tagit anställning. Man finner därför ej sällan bland tjänstemannapersonalen inom ett och samma verk allahanda »fackskolor» representerade. Tager man i något närmare ögonsikte det sätt, varpå den ene eller andre fyller sitt värv, torde nog befinnas, att detta sätt tager rätt mycket intryck av kunskapsriktningen, vilken åstadkommer, att vissa till tjänsten hörande arbeten givetvis bli bättre utförda än andra, samt att å *en* ort vissa arbeten men å *en annan* ort andra bliva företrädesvis tillgodosedda. Skarpast framträder detta i fråga om de mångsysslande stadsingenjörerna. Är hos en sådan tjänsteman huvudintresset koncentrerat exempelvis på väg- och brobyggnader, så är ju mindre underligt, om han kan ha svårt att tillägna sig erforderlig uppfattning om colititerns betydelse i avseende på vattenledningsvattnet.

Med nödvändigheten att rekrytera arbetskrafterna på nu antydt sätt, eller m. a. ord lägga personalutbildningens huvudvikt på gradpasserandet inom verket, följer en viss fara för dettas utveckling i slentrianmässig riktning. Och ehuru lyckligtvis erfarenheten visar, att de bättre krafterna vanligen veta att genom självstudier och resor hålla sig au jour med teknikens framsteg ävensom med vad som göres å andra orter och i andra länder, torde åtskilliga olägenheter ej kunna undvikas av detta »system». Bl. a. blir det behövliga teoretiska underlaget mera svårförvärvat, om det skall ske under trycket av trägna, löpande arbeten. Och vad särskilt angår de hygieniska delarna av hithörande arbetsområden, så visa de sig ej sällan få stå tillbaka, emedan den *uppfattning* saknas, som betingas av en viss utbildning å detta område. Svårigheterna för sådan utbildning ligga väsentligen i utfinnande av lämplig undervisningsplan. Den omständigheten, att hygienens något ingriper på många områden, har medfört att densamma ej sällan ansetts som »bisak» till alla fack. Men att med framgång undervisa i ett läroämne, vilket betraktas såsom »bisak», torde vara en av pedagogikens mera svårlösta uppgifter. Först genom omläggning av nyssnämnda uppfattning torde utsikter finnas att nå ett resultat. Emellertid tillkommer härvid ännu andra besvärande omständigheter, nämligen hygienens mera abstrakta och ej alltid lika påtagliga mål: människans hälsa. Uttryckt på annat sätt kan ju sägas, att, medan tekniken har den positiva uppgiften att skapa konkreta värden, så är hygienens uppgift till ej ringa del negativ: att undanröja vad som kan skada. Och eftersom detta ofta måste ske på bekostnad av

teknikerns handlingsfrihet, är ju ej att undra över, om han här är mera benägen skåda ett nödvändigt ondt — ett »black om foten» — än en nytighet. Hygienundervisning måste därför först och främst inrätta sig för att bibringa vederbörande en uppfattning om hygienens *nödvändighet*; och ju konkretare denna uppfattning kan göras, desto säkrare kommer man till målet.

Nu lärer väl ingen bestrida, att det inom en naturvetenskaplig kunskapsgrän av denna art endast finnes *en* väg att nå konkreta resultat, nämligen experimentets. Experiment måste utföras att bestyrka de uttalade satserna; och då det här är fråga om »tillämpad» hygien, gäller det att genom experiment bestyrka de tillämpningar av den »grundläggande» hygien, vilka förekomma. Men i en högskola bör experimentet ock hava ett annat mål, nämligen att utfinna och utprova nya medel och metoder. Detta är ett i allo värdigt mål för en självständig teknisk verksamhet.

Icke alla slags experiment äro likväl härvid lämpliga eller ens möjliga; dock finnas vissa stora områden, där så är händelsen. Rening av dricksvatten eller rening av avloppsvatten äro exempel på sådana områden, och här kunna försöken varieras snart sagt i oändlighet. Framgångsrika försök kunna ock här vara av stort praktiskt värde, i det att man alltid kan förvänta något resultat. Man bör därför ock här kunna påräkna ungefär samma intresse som vid andra tekniska uppgifter. — Vattenundersökningar giva ock i stor utsträckning anledning till planläggande och utförande av undersökningar av sjöar och vattendrag å ort och ställe, ett verksamhetsområde, som säkert har stor framtid för sig, varförutom det på grund av sin natur plägar vara i hög grad intresseväckande. — Undersökningar över vissa hygieniska moment hos moderna konstruktioner, tillhörande uppvärmnings- och ventilationstekniken, (såsom Junkerselement och andra värmekroppar, fläktar, termostater m. m.) falla även inom området.

Å desinfektionsområdet kunna många och viktiga försök göras. Och inom byggnadshygien vänta talrika problem på sin lösning, t. ex. rörande nya byggnadsmaterialiers och konstruktioners hygieniska egenskaper.

Till hygien hör ock prövning och justering av instrumenter och redskap, som företrädesvis användas i hygienens tjänst: anemometrar, hygrometrar o. s. v.

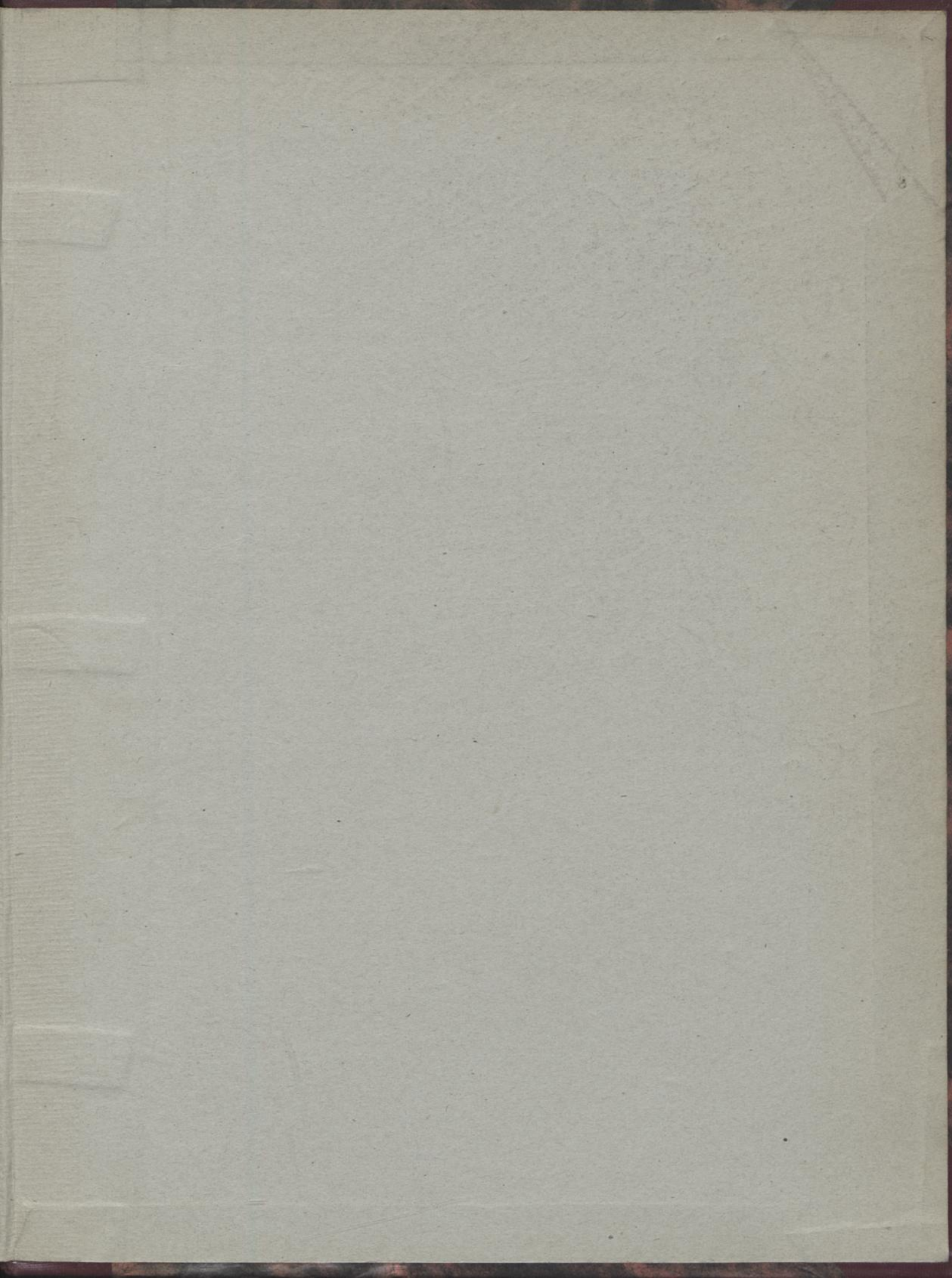
Hit kan ock räknas en hel del studier över våra födoämnen och dryckesvaror, dessas näringsvärde m. m.

Det torde vara överflödigt att närmare ingå på alla de områden, för vilka tekniska, hygieniska laboratorier kunna och böra vara till gagn.

Dylika områden bliva för varje år flere och flere, t. o. m. om man såsom här ovan begränsat sig till sådana grenar av hygienens, som mera berör samhällsförhållanden; än mera då, om man även medtager den tillämpade hygienens övriga grenar.

Då nu Tekniska högskolan för första gången öppnar laboratorier för direkt hygieniska arbeten, lider intet tvivel, att dessa kunna bliva en viktig hävstång till höjande av studiet av den gren av »tillämpad hygien», som kan benämnas den »tekniska hygien».







BIBLIOTEKA GŁÓWNA

350259L/1