

Na prawach rękopisu

Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego
Politechniki Wrocławskiej

**Zmodyfikowany
funkcjonał Hu–Washizu
w analizie plastycznej MES
dźwigarów powierzchniowych**

**Raport serii PRE nr 4/2016
Praca doktorska**

Jakub Lewandowski

Słowa kluczowe:
funkcjonał Hu–Washizu,
MES,
plastyczność,
wzmocnienie,
dźwigary powierzchniowe

Promotor: dr hab. inż. Kazimierz Myślecki, prof. nadzw. PWr

Wrocław, wrzesień 2016

Autor:

mgr inż. Jakub Lewandowski

.....

Politechnika Wrocławska
Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego
Zakład Wytrzymałości Materiałów
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
tel. 71 320 48 52
e-mail: jakub.lewandowski@pwr.edu.pl

Raport został złożony w Redakcji Wydawnictw Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej we wrześniu 2016. roku.

Lista odbiorców:	Recenzenci	2 egz.
	Promotor	1 egz.
	Autor	1 egz.
	CWiINT PWr	1 egz.
	Archiwum W-2	2 egz.
	Razem	<hr/> 7 egz.

Składam serdeczne podziękowania

*Panu Profesorowi Kazimierzowi Myślekiemu
za zaangażowanie, wysiłek, poświęcony czas i pomysły,
bez których praca ta miałaby o wiele mniejszą wartość,*

*a także wszystkim osobom, które wspierały mnie radą
i cennymi uwagami podczas powstawania tej rozprawy,
w szczególności pracownikom
Zakładu Wytrzymałości Materiałów.*

Spis treści

Wykaz podstawowych oznaczeń	6
Wstęp.....	7
1. Przegląd wybranych zagadnień i cel pracy	9
1.1. Wprowadzenie.....	9
1.2. Teoria plastyczności.....	9
1.2.1. Warunki plastyczności	9
1.2.2. Modele materiałowe.....	13
1.2.3. Wzmocnienie.....	13
1.2.4. Plastyczne płynięcie	15
1.3. Algorytmy MES rozwiązywania zagadnień plastyczności	16
1.4. Funkcjonały a teoria plastyczności	18
1.5. Określenie celu i zakresu pracy.....	19
2. Funkcjonał w formie ciągłej i równania różniczkowe	20
2.1. Wprowadzenie.....	20
2.2. Oryginalny funkcyjonał Hu–Washizu w teorii sprężystości.....	20
2.3. Przyrostowa forma funkcyjonału	21
2.4. Modyfikacja funkcyjonału do zagadnień plastyczności.....	22
2.5. Założenia i zakres stosowalności	23
3. Funkcjonał w formie dyskretnej i równania MES	24
3.1. Wprowadzenie.....	24
3.2. Funkcjonał oraz równanie MES.....	24
3.3. Równanie w przypadku plastyczności ze wzmocnieniem.....	26
4. Algorytm MES.....	27
4.1. Wprowadzenie.....	27
4.2. Opis algorytmu.....	27
4.3. Rozwiązanie układu równań MES i optymalizacja.....	29
4.4. Porównanie z dotychczas stosowanymi algorytmami	32
5. Funkcje plastyczności	33
5.1. Wprowadzenie.....	33
5.2. Idealna plastyczność.....	33
5.3. Ogólny model wzmocnienia.....	33
5.4. Plastyczność ze wzmocnieniem kinematycznym.....	34
5.5. Plastyczność ze wzmocnieniem izotropowym	35

5.5.1. Modyfikacja algorytmu MES.....	37
6. Przykłady zastosowań funkcjonału, weryfikacja rozwiązań.....	39
6.1. Wprowadzenie.....	39
6.2. Tarcze.....	39
6.2.1. Definicja elementu skończonego	39
6.2.2. Równanie MES przy różnych warunkach plastyczności.....	41
6.2.3. Czworosienny element skończony	43
6.2.4. Przykłady obliczeniowe	45
6.2.4.1. Informacje ogólne dotyczące przykładów	45
6.2.4.2. Tarcza w jednoosiowym stanie naprężenia, idealna plastyczność	45
6.2.4.3. Tarcza w jednoosiowym stanie naprężenia, wzmocnienie kinematyczne.....	47
6.2.4.4. Tarcza w jednoosiowym stanie naprężenia, wzmocnienie izotropowe.....	48
6.2.4.5. Przykład zastosowania algorytmu po optymalizacji	49
6.2.4.6. Tarcza wspornikowa, wzmocnienie kinematyczne	50
6.2.4.7. Tarcza wspornikowa, wzmocnienie izotropowe	51
6.2.4.8. Tarcza Cooke'a	52
6.3. Płyty	53
6.3.1. Funkcjonał dla płyty warstwowej	53
6.3.2. Definicja elementu skończonego	58
6.3.3. Równanie MES	60
6.3.4. Przykłady obliczeniowe	61
6.3.4.1. Informacje ogólne.....	61
6.3.4.2. Ugięcie swobodnie podpartej płyty w stanie sprężystym.....	61
6.3.4.3. Płyta wspornikowa	62
6.3.4.4. Rozkład stref plastycznych w płycie swobodnie podpartej.....	63
6.3.5. Równanie MES belki jako szczególnego przypadku płyty	64
6.3.6. Przykłady obliczeniowe	67
6.3.6.1. Informacje ogólne.....	67
6.3.6.2. Porównanie stref plastycznych z rozwiązaniem tarczowym	67
6.3.6.3. Porównanie naprężeń resztkowych z rozwiązaniem ścisłym	68
6.3.6.4. Porównanie lokalizacji przegubów plastycznych z rozwiązaniem ścisłym	70
7. Podsumowanie i wnioski.....	71
Literatura.....	72
Streszczenie.....	74
Summary.....	75

Wykaz podstawowych oznaczeń

Poniższa lista zawiera najważniejsze oznaczenia pojawiające się w pracy. Oznaczenia wielkości tensorowych odpowiadają oznaczeniom wielkości wektorowych i macierzowych, dlatego jako rzadziej używane nie są wyszczególnione poniżej.

Wielkości skalarne

h	grubość warstwy (płyty lub belki)
l	długość
A	pole powierzchni
D	szywność płytowa
E	moduł Younga
G	moduł Kirchhoffa (odkształcenia postaciowego)
H	całkowita grubość (płyty lub belki)
V	objętość
α	współczynnik wzmocnienia (kinematycznego lub izotropowego)
λ	mnożnik Lagrange'a, parametr określający przyrost odkształceń plastycznych
σ_y	granica plastyczności
ν	współczynnik Poissona
Π	zmodyfikowany funkcjonal Hu–Washizu (forma ciągła lub dyskretna)
Φ	funkcja plastyczności

Wielkości wektorowe i macierzowe

\mathbf{b}	wektor prawej strony równania MES
\mathbf{f}	wektor obciążeń węzłowych
\mathbf{q}	wektor przemieszczeń węzłowych
\mathbf{u}	wektor przemieszczeń
\mathbf{x}	wektor niewiadomych równania MES
\mathbf{B}	macierz wyznaczana na podstawie macierzy geometrycznej $\overline{\mathbf{B}}$
\mathbf{C}	macierz stałych sprężystości
\mathbf{I}	macierz identyfikacyjna
\mathbf{K}_S	macierz sieczna równania MES
\mathbf{K}_T	macierz styczna równania MES
\mathbf{L}	macierz operatorów różniczkowych
\mathbf{N}	macierz funkcji kształtu
$\boldsymbol{\varepsilon}$	wektor odkształceń sprężystych
$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$	wektor odkształceń plastycznych
$\boldsymbol{\sigma}$	wektor naprężeń
$\boldsymbol{\Psi}$	macierz formy kwadratowej w funkcjach plastyczności Φ

Wstęp

Teoria plastyczności jest gałęzią fizyki, która ma niewątpliwie szerokie zastosowanie w praktycznych problemach inżynierskich, m.in. dotyczących konstrukcji budowlanych. Rozwiązania analityczne istnieją tylko w nielicznych przypadkach prostych zagadnień, dlatego powszechnie wykorzystuje się metodę elementów skończonych (MES) do symulacji zachowania konstrukcji w stanie plastycznym. W literaturze można znaleźć wiele opisów algorytmów MES, pozwalających na zbudowanie programów odwzorowujących pracę materiału w przypadku dowolnego modelu plastyczności.

Brakuje jednak pozycji, która problem tworzenia algorytmu traktowałaby w sposób ogólny – tzn. pokazywałaby jak dla dowolnego modelu plastyczności można dojść do równań MES, a następnie je rozwiązać. Nie chodzi tutaj o zbiorcze zestawienie algorytmów, a raczej o uniwersalny aparat matematyczny, który dzięki bezpośredniemu sformułowaniu problemu mógłby także pozwolić na tworzenie prostszych i wydajniejszych od dotychczas stosowanych algorytmów MES dotyczących zagadnień plastyczności. Jest to główną motywacją powstania tej pracy.

W klasycznym podejściu MES każde równanie MES powstaje w oparciu o dyskretną formę pewnego funkcjonału. I tak na przykład w obszarze teorii sprężystości znane są funkcjonały Lagrange’a, Hellinger’a-Reissner’a oraz Hu-Washizu [29]. Z warunku stacjonarności tych funkcjonałów (w formie ciągłej) wynikają różniczkowe równania teorii sprężystości. Zatem być może istnieje funkcjonal prowadzący do równań teorii plastyczności?

Okazuje się, że funkcjonal Hu-Washizu po pewnych modyfikacjach może stać się takim narzędziem w zadowalającym zakresie. Przedstawiony w pracy funkcjonal ma zastosowanie do teorii plastyczności przy założeniu liniowych związków geometrycznych oraz stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia. Możliwe jest zadanie dowolnego warunku plastyczności, w tym uwzględnienie wzmocnienia materiału podczas płynięcia.

W kolejnych rozdziałach stopniowo, przechodząc od ogółu do szczegółu, przedstawione są treści niezbędne do sformułowania, zastosowania oraz wykazania poprawności i przydatności funkcjonału.

Rozdział 1. zawiera opis podstawowych zagadnień teorii plastyczności, algorytmów MES rozwiązujących te zagadnienia i stosowanych w MES funkcjonałów, prowadząc w ten sposób do określenia celu i zakresu pracy.

Rozdział 2 nie tylko przedstawia zmodyfikowany funkcjonał Hu–Washizu, ale i pokazuje tok rozumowania, który prowadzi do jego sformułowania. Wyszczególnione są założenia i ograniczenia dotyczące stosowalności tego funkcjonału.

Rozdziały 3 i 4 pozwalają prześledzić, w jaki sposób dla dowolnych elementów skończonych i dowolnego warunku plastyczności, bazując na zmodyfikowanym funkcjonał Hu–Washizu, wyprowadzić równanie MES oraz jak skonstruować algorytm MES, pozwalający na rozwiązanie tego równania.

W rozdziale 5. odnaleźć można wyprowadzenie funkcji plastyczności dla kryterium Hubera–Misesa–Hencky’ego w przypadkach: idealnej plastyczności, plastyczności ze wzmocnieniem kinematycznym, jak również ze wzmocnieniem izotropowym. Funkcje te stanowią niezbędny element równania MES i są stosowane w późniejszych przykładach.

Rozdział 6. poświęcony jest przedstawieniu przykładów numerycznych w odniesieniu do dwu grup elementów skończonych – tarczowych i płytowych. Pokazane są szczegółowe równania MES wynikające z definicji elementów skończonych i zastosowanych funkcji plastyczności oraz liczne przykłady numeryczne, których rezultaty są porównywane z rozwiązaniami ścisłymi, rozwiązaniami uzyskanymi za pomocą powszechnie dostępnego oprogramowania MES, a także pochodzącymi z publikacji.

Rozdział 7. stanowi podsumowanie rozprawy.

1. Przegląd wybranych zagadnień i cel pracy

1.1. Wprowadzenie

W rozdziale 1. znajduje się przegląd literatury, mającej związek z tematyką rozprawy. Omówione są zagadnienia teorii plastyczności, jak również stosowane algorytmy MES, wykorzystywane do numerycznego rozwiązywania tych zagadnień. Rozdziału 1. nie należy traktować jako całościowego przeglądu wymienionych zagadnień. Jest on przede wszystkim wprowadzeniem treści, będących następnie tematem dyskusji oraz przedmiotem pracy doktorskiej. Na końcu rozdziału poruszona jest tematyka funkcjonałów w plastyczności oraz w MES, po czym przedstawione jest sformułowanie celu, motywacji oraz zakresu pracy.

1.2. Teoria plastyczności

1.2.1. Warunki plastyczności

Podstawowym założeniem każdego modelu materiału uwzględniającego uplastycznienie jest warunek plastyczności

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad (1.1)$$

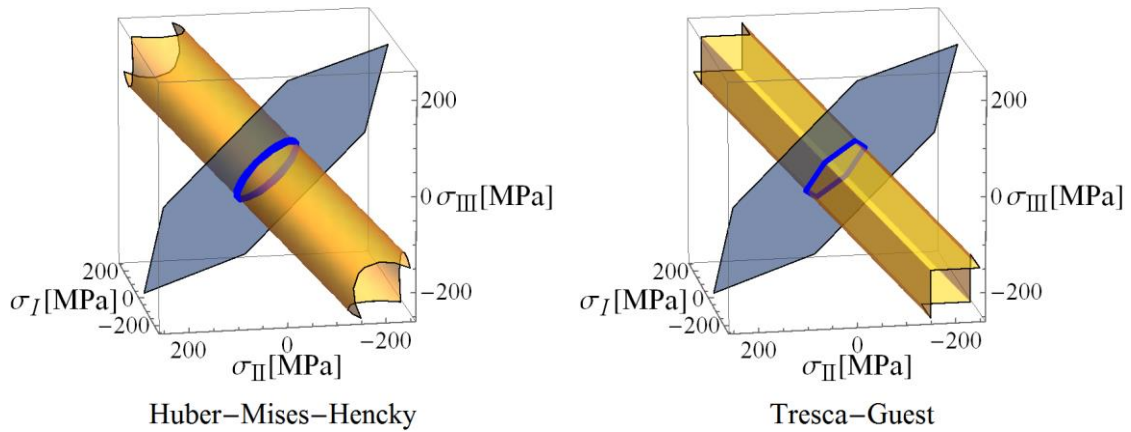
gdzie

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}]^T \quad (1.2)$$

jest wektorem naprężeń w notacji Voighta, zaś funkcja Φ nazywana jest funkcją plastyczności.

Równanie (1.1) definiuje pewną powierzchnię w przestrzeni naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$, wewnątrz której przyjmuje się sprężysty stan materiału, natomiast w każdym punkcie na tej powierzchni materiał podlega równaniom teorii plastyczności.

Istnieje duża liczba warunków plastyczności. Poniżej przedstawiono dwa najpopularniejsze z nich, które dotyczą materiałów izotropowych i pozwalają się zdefiniować w prosty sposób w przestrzeni naprężeń głównych ($\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$). Rys. 1.1 przedstawia fragmenty powierzchni plastyczności Hubera–Misesa–Hencky’ego (HMH) oraz Tresca–Guesta (TG) przecięte tzw. płaszczyzną dewiatorową, opisaną równaniem $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0$.



Rys. 1.1. Powierzchnie Hubera-Misesa-Hencky'ego oraz Tresci-Guesta w przestrzeni naprężeń głównych

Warunek HMH definiuje się następująco

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 - 2\sigma_y^2 = 0, \quad (1.3)$$

natomiast warunek TG ma postać

$$\max(|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_I - \sigma_{III}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|) - \sigma_y = 0. \quad (1.4)$$

Wielkość σ_y jest umowną granicą plastyczności wyznaczaną w różny sposób (por. [33]) dla każdego z warunków, zgodnie z założeniami modelu materiału. Do wyznaczenia przykładowych powierzchni pokazanych na rys. 1.1 przyjęto $\sigma_y = 100$ MPa. Ze względu na zastosowanie w kolejnych rozdziałach, funkcję plastyczności dla warunku HMH (1.3) przedstawia się także w przypadku dowolnego wektora naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2) - 2\sigma_y^2, \quad (1.5)$$

co jest równoważne w zapisie macierzowym

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma} - 2\sigma_y^2, \quad (1.6)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

W przypadku materiałów anizotropowych (np. kompozytowych) często wykorzystywany jest warunek plastyczności Tsai–Wu (TW) [11, 19]

$$\bar{\mathbf{F}}_v^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \bar{\mathbf{F}}_m \boldsymbol{\sigma} - 1 = 0, \quad (1.8)$$

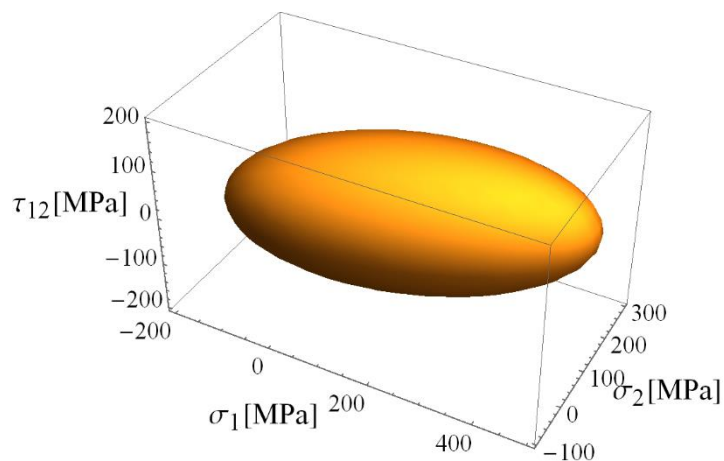
gdzie macierze $\bar{\mathbf{F}}_v$ oraz $\bar{\mathbf{F}}_m$ zależą od wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie materiału w trzech kierunkach oraz od wytrzymałości na ścinanie w trzech płaszczyznach. W celu uproszczenia przedstawiono funkcję plastyczności TW dla przypadku płaskiego stanu naprężenia (tutaj $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}]^T$)

$$\mathbf{F}_v^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F}_m \boldsymbol{\sigma} - 1 = 0, \quad (1.9)$$

gdzie

$$\mathbf{F}_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{1t}R_{1c}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{R_{1t}R_{1c}R_{2t}R_{2c}}} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{R_{1t}R_{1c}R_{2t}R_{2c}}} & \frac{1}{R_{2t}R_{2c}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_s^2} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{1t}} - \frac{1}{R_{1c}} \\ \frac{1}{R_{2t}} - \frac{1}{R_{2c}} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

R_{1t} , R_{2t} , R_{1c} , R_{2c} są odpowiednio wytrzymałościami na rozciąganie i ściskanie w obu kierunkach, a R_s jest wytrzymałością materiału na ścinanie. Przykładową powierzchnię plastyczności ($R_{1t} = 250$ MPa, $R_{2t} = 200$ MPa, $R_{1c} = 150$ MPa, $R_{2c} = 50$ MPa, $R_s = 100$ MPa) przedstawia rys. 1.2.



Rys. 1.2. Powierzchnia plastyczności Tsai–Wu w przypadku płaskiego stanu naprężenia

Szczególnym przypadkiem warunku TW (przy założeniu jednakowych granic na ściskanie i rozciąganie w każdym kierunku) i jednocześnie uogólnieniem warunku HHM jest kwadratowe kryterium plastyczności Hilla [12]

$$\bar{F}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \bar{G}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \bar{H}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2(\bar{L}\tau_{13}^2 + \bar{M}\tau_{23}^2 + \bar{N}\tau_{12}^2) - 1 = 0, \quad (1.11)$$

gdzie \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} , \bar{L} , \bar{M} , \bar{N} zależą od wytrzymałości materiału na rozciąganie (ściskanie) w odpowiednich kierunkach (R_1 , R_2 , R_3), a także od wytrzymałości na ścinanie w odpowiednich płaszczyznach (R_{12} , R_{23} , R_{13})

$$\begin{cases} \bar{F} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} - \frac{1}{R_1^2} \right] \\ \bar{G} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right] \\ \bar{H} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_3^2} \right] \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \bar{L} = \frac{1}{2R_{23}^2} \\ \bar{M} = \frac{1}{2R_{13}^2} \\ \bar{N} = \frac{1}{2R_{12}^2} \end{cases}. \quad (1.12)$$

Stosując oznaczenia (1.12) warunek (1.11) można przedstawić w formie macierzowej

$$\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F}_H \boldsymbol{\sigma} - 1 = 0, \quad (1.13)$$

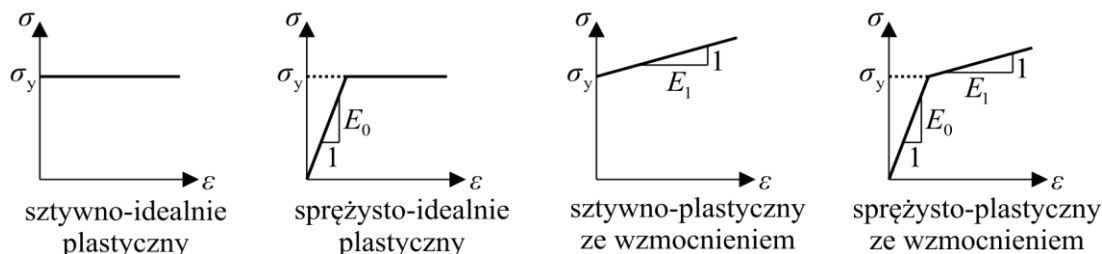
gdzie

$$\mathbf{F}_H = \begin{bmatrix} 2(\bar{G} + \bar{H}) & -2\bar{H} & -2\bar{G} & 0 & 0 & 0 \\ -2\bar{H} & 2(\bar{F} + \bar{H}) & -2\bar{F} & 0 & 0 & 0 \\ -2\bar{G} & -2\bar{F} & 2(\bar{F} + \bar{G}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\bar{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\bar{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\bar{N} \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Istnieje wiele innych warunków plastyczności, których nie omówiono w tym rozdziale. Ich duża liczba wynika z faktu różnorodnego zachowania się materiałów w stanie plastycznym. Na uwagę zasługuje fakt, że część z funkcji plastyczności nie jest różniczkowalna, co widać na przykładzie powierzchni TG (rys. 1.1). Różniczkowanie jest konieczne ze względu na wprowadzenie prawa plastycznego płynięcia (p. rozdział 1.2.4). W algorytmie MES problem ten może być rozwiązany przez „wygładzenie” pierwotnej funkcji plastyczności w miejscach nieróżniczkowalności funkcją przejściową bądź poprzez różniczkowanie numeryczne.

1.2.2. Modele materiałowe

Kolejnym elementem koniecznym do zdefiniowania modelu materiału jest określenie, czy ma on zdolność do odkształceń sprężystych oraz czy występuje wzmocnienie materiału. Klasyczne modele materiałów plastycznych przedstawia w sposób schematyczny rys. 1.3.



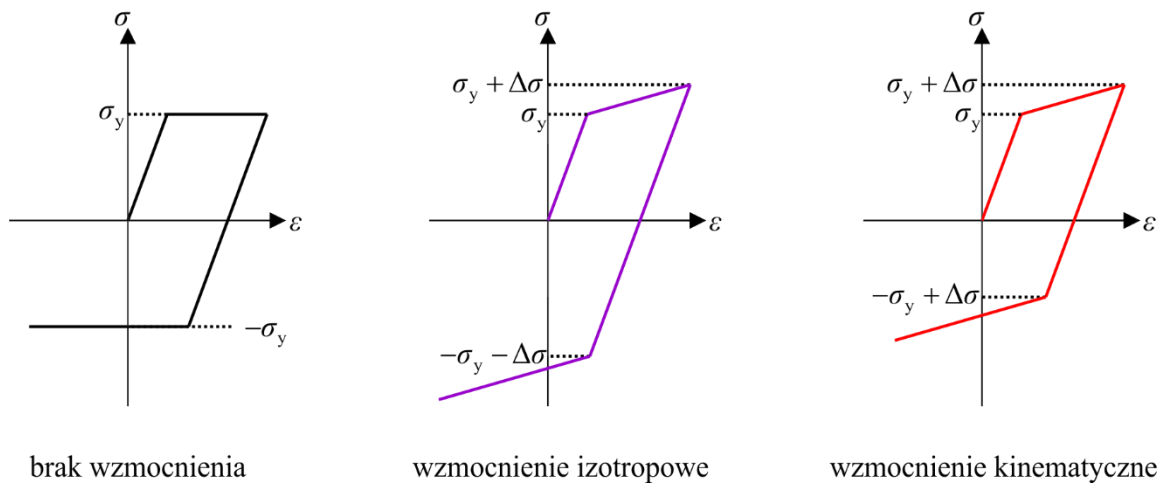
Rys. 1.3. Modele materiałów plastycznych

Rys. 1.3 wyróżnia 4 przypadki jednowymiarowego przykładu rozciągania pręta, zobrazowane wykresem zależności naprężenie – odkształcenie. W przypadku materiału o właściwościach sprężystych (modele o nazwie z przedrostkiem „sprężysto,„) naprężenie rośnie proporcjonalnie do odkształcenia w stałym stosunku E_0 (moduł Younga). Gdy naprężenie osiąga granicę plastyczności σ_y , uplastyczniony materiał albo płynie – jego odkształcenia rosną bez zmiany naprężenia (modele o nazwie z sufiksem „idealnie plastyczny”), albo ulega wzmocnieniu (modele o nazwie z sufiksem „plastyczny ze wzmocnieniem”) – wtedy przyrost naprężeń do odkształceń w stanie plastycznym wynosi E_1 .

1.2.3. Wzmocnienie

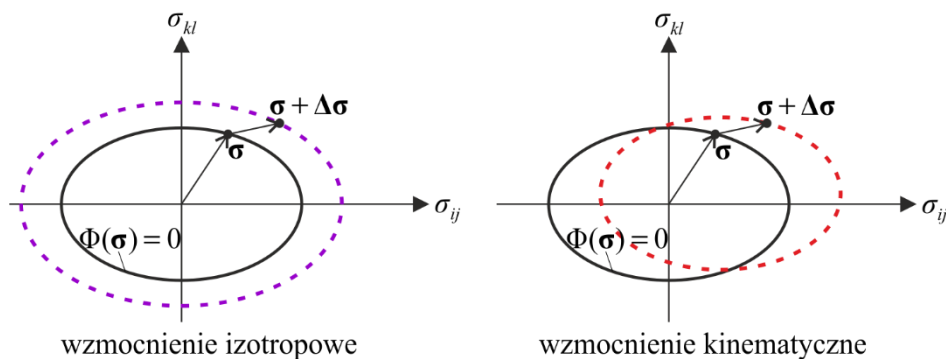
Po uplastycznieniu materiału na skutek odciążenia i zmiany kierunku obciążenia może dojść do kolejnego uplastycznienia, jednak w ogólności przy innej wartości bezwzględnej granicy plastyczności. W zależności od rodzaju wzmocnienia mogą wystąpić 3 ogólnie przyjmowane scenariusze (rys. 1.4).

W przypadku braku wzmocnienia, wartość bezwzględna granicy plastyczności pozostaje bez zmian. Podczas wzmocnienia izotropowego następuje jednakowy wzrost granicy plastyczności na rozciąganie i ściskanie. Wzmocnienie kinematyczne charakteryzuje zmniejszenie granicy plastyczności na ściskanie podczas zwiększenia granicy plastyczności na rozciąganie (i odwrotnie). Popularnym przykładem obserwowanego doświadczalnie wzmocnienia kinematycznego jest tzw. efekt Bauschingera [9] występujący wśród niektórych metali i stopów.



Rys. 1.4. Rodzaje wzmocnienia na przykładzie jednoosiowego stanu naprężenia

W ogólności wzmocnienie opisywane jest w dowolnym stanie naprężenia. Zwiększanie obciążenia po przekroczeniu granicy plastyczności przez naprężenia może prowadzić do zmiany powierzchni plastyczności. W przypadku idealnej plastyczności, powierzchnia ta nie ulega zmianie w trakcie plastycznego płynięcia. W przeciwnym razie, występuje wzmocnienie materiałowe (rys. 1.5).



Rys. 1.5. Schemat wzmocnienia izotropowego i kinematycznego

Każde ze wzmocnień polega na transformacji powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń w trakcie plastycznego płynięcia. W przypadku wzmocnienia izotropowego, powierzchnia plastyczności ulega przeskalowaniu w tejże przestrzeni, zaś w przypadku wzmocnienia kinematycznego – translacji.

W ogólności wzmocnienie może być kombinacją kinematycznego oraz izotropowego, przy czym stosunek przyrostu naprężeń do odkształceń w trakcie plastycznego płynięcia może być także dowolnie definiowany.

1.2.4. Plastyczne płynięcie

Oprócz zdefiniowania powierzchni plastyczności konieczne jest opisanie zależności między odkształceniem a naprężeniem podczas plastycznego płynięcia. Podstawowe teorie opisuje przejrzystość Mase [18]. W poniższym opisie zmieniono oznaczenia zawarte w jego pracy oraz w pracach [24, 25, 26, 33], w taki sposób, aby były one spójne w obrębie rozprawy doktorskiej.

Dwie pierwsze teorie: Levy'ego-Miesesa (LV) oraz Prandtla-Reussa (PR) wyrażają się równaniami, w których występują przyrosty odkształceń – stąd nazywane są teoriami przyrostowymi. Teoria LM wiąże całkowity przyrost odkształcenia ($d\varepsilon_{ij}^{\text{tot}}$) z dewiatorem naprężenia (s_{ij})

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{tot}} = \lambda s_{ij}. \quad (1.15)$$

Równanie (1.15) reprezentuje prawo płynięcia dla sztywno-idealnie plastycznego modelu materiału. Współczynnik λ jest zwykle przedstawiany w formie przyrostowej ($d\lambda$). Jest on wielkością zmienną w trakcie procesu plastycznego płynięcia. W tej pracy będzie używany symbol λ dla uproszczenia zapisu.

Teoria PR zakłada sprężysto-idealnie plastyczny model materiału, tzn. przyrost odkształcenia jest sumą sprężystej ($d\varepsilon_{ij}$) i plastycznej ($d\bar{\varepsilon}_{ij}$) części

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{tot}} = d\varepsilon_{ij} + d\bar{\varepsilon}_{ij} \quad (1.16)$$

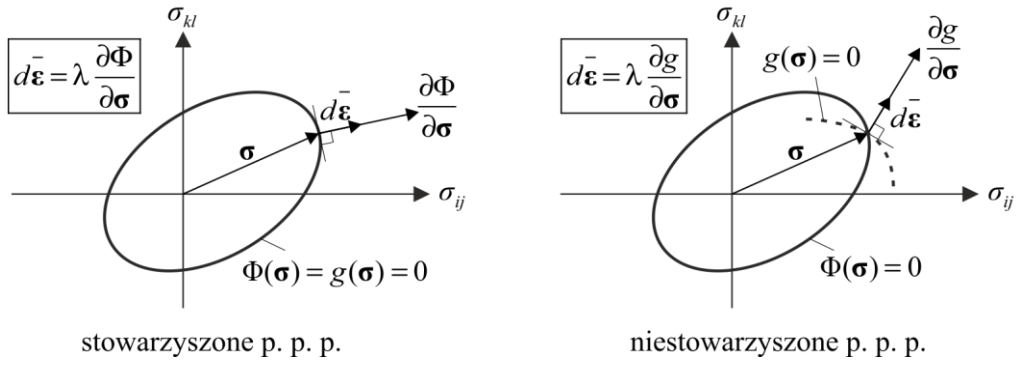
a równanie prawa płynięcia dotyczy tylko części plastycznej przyrostu odkształcenia

$$d\bar{\varepsilon}_{ij} = \lambda s_{ij}. \quad (1.17)$$

W ogólności prawo płynięcia dla teorii przyrostowych można opisać równaniem

$$d\bar{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.18)$$

gdzie $g(\sigma_{ij})$ jest tzw. funkcją potencjału plastycznego. W szczególnym przypadku, kiedy funkcja ta jest jednocześnie warunkiem plastyczności, tzn. $g(\sigma_{ij}) = \Phi(\sigma_{ij})$, równanie (1.18) jest tzw. stowarzyszonym prawem plastycznego płynięcia. Gdy $g(\sigma_{ij}) \neq \Phi(\sigma_{ij})$, mamy do czynienia z niestowarzyszonym prawem plastycznego płynięcia. Jako że λ jest skalarem, to właśnie funkcja potencjału plastycznego determinuje kierunek przyrostu odkształceń plastycznych, co obrazuje rys. 1.6.



Rys. 1.6. Stowarzyszone oraz niestowarzyszone prawo plastycznego płynięcia [16]

W przeciwieństwie do opisanych teorii przyrostowych (LV oraz PR), teoria małych odkształceń sprężysto – plastycznych Hencky’ego–Iliuszyna (HI) wiąże naprężenie z całkowitym odkształceniem $(\varepsilon_{ij}^{\text{tot}})$

$$\begin{cases} e_{ij}^{\text{tot}} = \left(\frac{3}{2} \frac{\bar{\varepsilon}_{\text{eq}}}{\sigma_{\text{eq}}} + \frac{1}{2} G \right) s_{ij} \\ \varepsilon_{ii}^{\text{tot}} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{ii} \end{cases}, \quad (1.19)$$

gdzie e_{ij}^{tot} jest dewiatorem całkowitego odkształcenia, natomiast zastępcze wartości naprężenia σ_{eq} oraz całkowitego odkształcenia plastycznego $\bar{\varepsilon}_{\text{eq}}$ wyznacza się ze wzorów

$$\begin{cases} \sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \\ \bar{\varepsilon}_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} \end{cases}, \quad (1.20)$$

zaś prawo płynięcia opisane jest równaniem

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\varepsilon}_{\text{eq}}}{\sigma_{\text{eq}}} s_{ij}. \quad (1.21)$$

1.3. Algorytmy MES rozwiązywania zagadnień plastyczności

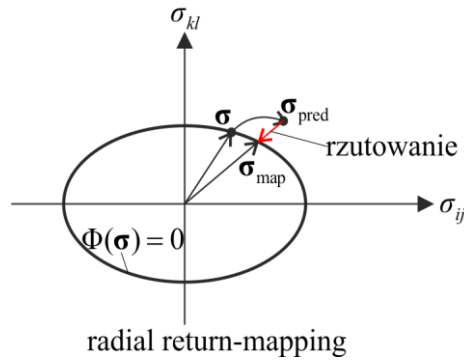
Metoda elementów skończonych służy rozwiązywaniu układów równań różniczkowych. W przypadku teorii plastyczności są to równania: równowagi, prawa Hooke’a, związków geometrycznych (opisujących relację przemieszczeń do odkształceń), prawa plastycznego płynięcia oraz warunku plastyczności. Celem tego podrozdziału jest poglądowe i opisowe przedstawienie ogólnego działania algorytmów MES rozwiązujących zagadnienia teorii plastyczności – stąd brak wzorów.

Na podstawie szerokiego przeglądu literatury na temat algorytmów MES rozwiązujących zagadnienia plastyczności, a w szczególności pozycji [1, 2, 3, 15, 16, 21, 27, 32], można stwierdzić, że do rozwiązywania zagadnień plastycznych najczęściej wykorzystywane są przyrostowe algorytmy MES o następującym schemacie działania w ramach pojedynczego kroku przyrostowego:

- {1} Wczytanie przyrostu obciążenia.
- {2} Wykonanie obliczeń (wyznaczenie naprężeń, odkształceń, przemieszczeń) przy założeniu stanu sprężystego we wszystkich elementach skończonych.
Rozwiązanie to spełnia równania: równowagi, prawa Hooke'a, związków geometrycznych.
- {3} Sprawdzenie w których elementach skończonych naprężenia znajdują się na zewnątrz powierzchni plastyczności.
- {4} Dla tych elementów przeprowadzany jest tzw. return-mapping, czyli wyznaczenie naprężeń leżących na powierzchni plastyczności w pobliżu naprężeń wyznaczonych w etapie {2}.
Rozwiązanie to spełnia równania: prawa plastycznego płynięcia, warunku plastyczności.
Przestają być spełnione równania z etapu {2}.
- {5} Przejście do kolejnego kroku pętli przyrostowej → etap {1}.

Na podstawie przedstawionego schematu widać, że stosowane algorytmy nie są w stanie spełnić jednocześnie równań teorii sprężystości oraz równania prawa plastycznego płynięcia i warunku plastyczności – rozwiązania z etapu {2} oraz {4} nie są spójne. Oczywiście błąd rozwiązania w każdym kroku przyrostowym może być kontrolowany. Jego wielkość zależy od tego, jak duży przyrost obciążenia w danym kroku jest przyjęty. Sposobem zmniejszenia tego błędu jest zatem zmniejszenie przyrostów obciążenia, a więc zwiększenie liczby kroków, co prowadzi do wydłużenia czasu obliczeń. Z drugiej strony zbyt mała liczba kroków przyrostowych ma dwa negatywne skutki – duży błąd rozwiązania oraz możliwą utratę zbieżności algorytmu z powodu oddalenia się od ścisłego rozwiązania.

Tym co wyróżnia algorytmy MES rozwiązujące zagadnienia plastyczności od algorytmów MES dla innych zagadnień jest return-mapping (rys. 1.7). Problem return-mappingu można zdefiniować jako poszukiwanie punktu w przestrzeni naprężeń, który należy do powierzchni plastyczności ($\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{\text{map}}) = 0$), w pobliżu jakiegoś początkowo zadanego punktu, leżącego na zewnątrz tej powierzchni ($\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{\text{pred}}) > 0$). Istnieją różne sposoby return-mappingu, prowadzące do różnych, aczkolwiek zbliżonych, rozwiązań. Jednym z najpopularniejszych jest tzw. radial return-mapping, zobrazowany na rys. 1.7.



Rys. 1.7. Radial return-mapping w przypadku idealnej plastyczności

Radial return-mapping polega na rzutowaniu punktu na powierzchnię plastyczności w taki sposób, że punkty σ_{map} , σ_{pred} leżą na prostej przechodzącej przez punkt $\sigma = 0$. Naprężenia σ_{pred} spełniały równania teorii sprężystości (etap {2}). W wyniku rzutowania naprężenie σ_{map} spełnia równania prawa plastycznego płynięcia oraz warunku plastyczności (etap {4}), jednak przestaje spełniać równania teorii sprężystości. Należy dodać, że procedury stosowanych algorytmów return-mappingu są dość rozbudowane i czasochłonne, co wynika z konieczności rozwiązania złożonych równań metodami całkowania numerycznego.

Podsumowując, słabymi punktami dotychczas stosowanych algorytmów MES rozwiązujących zagadnienia teorii plastyczności są: możliwość utraty zbieżności i stabilności algorytmu MES, brak możliwości spełnienia wszystkich równań teorii plastyczności oraz skomplikowane procedury return-mappingu.

1.4. Funkcjonały a teoria plastyczności

W klasycznym podejściu MES, równania MES uzyskuje się za pomocą funkcjonału charakterystycznego dla danego zagadnienia fizycznego. W przypadku teorii sprężystości powszechnie znane są funkcyjonały Lagrange’a, Hellingera–Reissnera, Reissnera (opisane m.in. w [22]) oraz Hu-Washizu [29]. Jednak nie ma funkcjonału, z którego stacjonarności wynikałyby różniczkowe równania teorii plastyczności.

Do rozwiązywania zagadnień teorii plastyczności wykorzystuje się wymienione powyżej funkcyjonały oraz ich zmodyfikowane wersje. Modyfikacje te jednak nie prowadzą do równań teorii plastyczności. I tak, przykładowo, autorzy publikacji [6, 7, 30] zmienili funkcjonał Hu–Washizu jedynie w celu poprawienia efektywności obliczeń i dokładności wyników uzyskanych przez algorytm MES.

Mimo że w przypadku [6] i [30] analizy dotyczyły zagadnień teorii plastyczności, to same algorytmy bazowały na podejściu opisanym w poprzednim rozdziale.

W literaturze można odnaleźć także próby skonstruowania funkcjonału dla zagadnień teorii plastyczności. Przedstawiony w pracy [27] funkcjonał dla teorii plastyczności jest formalizmem, prowadzącym zarówno do równań teorii sprężystości, jak i równań opisujących return-mapping, więc de-facto zmusza do wykorzystania procedur opisanych w poprzednim rozdziale.

Na podstawie powyższych informacji widać zatem, że wśród funkcjonałów brak jest takiego, który prowadziłby do równań teorii plastyczności. Z drugiej strony natomiast wiadomo, że możliwe jest skonstruowanie funkcjonału dla dowolnego nieliniowego zagadnienia [28].

1.5. Określenie celu i zakresu pracy

Biorąc pod uwagę słabe strony dotychczasowych algorytmów MES przedstawione w punkcie 1.3 oraz brak funkcjonału, prowadzącego do równań teorii plastyczności (por. 1.4), w naturalny sposób wpływa cel rozprawy doktorskiej: **skonstruowanie funkcjonału pozwalającego na wyprowadzenie równania MES dotyczącego teorii plastyczności.**

Dzięki takiemu funkcjonałowi możliwe byłoby przedstawienie spójnego, uniwersalnego i czytelnego podejścia dla teorii plastyczności w ujęciu MES. Uproszczeniu uległyby procedury algorytmu MES w stosunku do dotychczas stosowanego podejścia (por. 1.3), wskutek czego można by spodziewać się zmniejszenia złożoności obliczeniowej, a także lepszej stabilności i zbieżności algorytmu.

Ogólny zakres pracy stanowią: skonstruowanie własnego funkcjonału, wyprowadzenie równania MES, do jakiego prowadzi ten funkcjonał, opracowanie algorytmu MES rozwiązywania tego równania oraz oprogramowanie algorytmu i wykonanie przykładów obliczeniowych (także weryfikacyjnych) obrazujących efektywność zastosowanego podejścia.

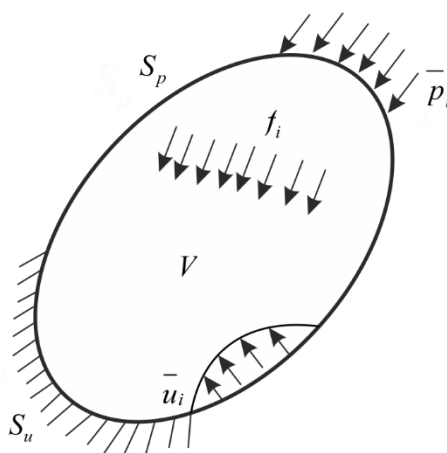
2. Funkcjonał w formie ciągłej i równania różniczkowe

2.1. Wprowadzenie

Rozdział 2. zawiera opis etapów, które doprowadziły do powstania ostatecznego funkcyjonału. Przedstawiony jest oryginalny funkcyjonał Hu–Washizu oraz jego kolejne modyfikacje. Nakreślony jest tok rozumowania, który skłonił do ich wprowadzenia. W każdym z etapów pokazane jest, do jakich równań różniczkowych prowadzi warunek stacjonarności funkcyjonału. Opisane są także założenia oraz zakres stosowalności sformułowanego funkcyjonału.

2.2. Oryginalny funkcyjonał Hu–Washizu w teorii sprężystości

Idea wykorzystania funkcyjonału Hu–Washizu bierze się stąd, że jego niezależnymi polami są: naprężenia, odkształcenia oraz przemieszczenia. Dzięki temu, równania różniczkowe, do których prowadzi stacjonarność tego funkcyjonału, zawierają funkcje odkształceń i naprężeń, bez których nie sposób opisać teorii plastyczności.



Rys. 2.1. Schemat dowolnego ciała o narzuconych przemieszczeniach i zadanym obciążeniu

Oryginalny funkcyjonał Hu–Washizu [29], opisujący stan dowolnego ciała (rys. 2.1), w zapisie tensorowym ma postać

$$\begin{aligned} \Pi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i) = & \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV - \int_V \sigma_{ij} \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] dV - \int_V f_i u_i dV \\ & - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) dS - \int_{S_p} \bar{p}_i u_i dS \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i$ to odpowiednio poszukiwane pola naprężeń, odkształceń sprężystych i przemieszczeń, f_i wektor sił objętościowych, V objętość ciała, C_{ijkl} tensor stałych sprężystości, \bar{p}_i wektor obciążeń zadanych na brzegu S_p , zaś \bar{u}_i wektor przemieszczeń zadanych na brzegu S_u , do którego normalny jest wektor n_j .

Opierając się o prawa rachunku wariacyjnego [10] z warunku stacjonarności tego funkcjonału wyznacza się równania teorii sprężystości

$$\delta\Pi = 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \\ u_i = \bar{u}_i \quad \text{na } S_u \\ \sigma_{ij}n_j = \bar{p}_i \quad \text{na } S_p \end{cases} \quad (2.2)$$

gdzie (2.2)₁ to równanie równowagi, (2.2)₂ prawo Hooke'a, (2.2)₃ liniowe równanie związków geometrycznych, a (2.2)₄ oraz (2.2)₅ to odpowiednio warunki brzegowe przemieszczeniowe i obciążeniowe.

2.3. Przyrostowa forma funkcjonału

Ze względu na nieliniowy charakter teorii plastyczności oraz przyrostowe równania w klasycznym sformułowaniu prawa płynięcia (1.18), uzasadnione jest wprowadzenie przyrostowej formy funkcjonału (2.1)

$$\Pi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i) = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^n) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^n) dV - \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^n) \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \right] dV - \int_V \Delta f_i u_i dV, \quad (2.3)$$

gdzie indeks „n” dotyczy wielkości z poprzedniego kroku przyrostowego, zaś jego brak – aktualnych wielkości. $\Delta f_i = f_i - f_i^n$ oznacza przyrost wektora sił objętościowych.

Na tym etapie zostały pominięte składniki związane z warunkami brzegowymi, ponieważ w MES są one spełniane poprzez modyfikację głównej macierzy równania. Zatem składniki te nie są potrzebne w dalszych rozważaniach.

Stacjonarność funkcjonału (2.3) prowadzi do przyrostowych równań teorii sprężystości

$$\delta\Pi = 0 \rightarrow \begin{cases} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^n)_{,j} + \Delta f_i = 0 \\ (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^n) = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^n) \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{cases} \quad (2.4)$$

W szczególnym przypadku, gdy $\sigma_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^n = f_i^n = 0$, funkcjonał (2.3) jest tożsamy z (2.1).

2.4. Modyfikacja funkcjonału do zagadnień plastyczności

Warunek plastyczności można rozumieć jako dodatkowe ograniczenie narzucone na pole naprężeń w stosunku do naprężeń wynikających z układu równań teorii sprężystości. Naturalne wydaje się więc skorzystanie z metody mnożników Lagrange'a [10] w celu zmodyfikowania funkcjonału. Wprowadzając do (2.3) dodatkowy składnik z mnożnikiem Lagrange'a λ i funkcją plastyczności Φ , a także uwzględniając odkształcenia plastyczne $\bar{\varepsilon}_{ij}$, powstałe wskutek wcześniejszego obciążenia, otrzymuje się ostateczną postać poszukiwanego funkcjonału

$$\begin{aligned} \Pi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i, \lambda) = & \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^n) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^n) dV - \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^n) \left[\varepsilon_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] dV \\ & - \int_V \Delta f_i u_i dV - \int_V \lambda \Phi(\sigma_{ij}) dV \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie λ jest traktowane jako parametr funkcjonału. Stacjonarność funkcjonału (2.5) prowadzi do równań teorii plastyczności:

$$\delta\Pi = 0 \rightarrow \begin{cases} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^n)_{,j} + \Delta f_i = 0 \\ (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^n) = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^n) \\ \varepsilon_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij} + \lambda \frac{\partial \Phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \Phi(\sigma_{ij}) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Przyrostowe równanie równowagi (2.6)₁ oraz prawo Hooke'a (2.6)₂ mają nadal tę samą postać jak w (2.4). (2.6)₄ jest warunkiem plastyczności. Równanie związków geometrycznych (2.6)₃ zawiera teraz składnik, który można utożsamić z przyrostem odkształceń plastycznych w aktualnym kroku przyrostowym

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial \Phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.7)$$

co odpowiada stowarzyszonemu prawu plastycznego płynięcia (por. rozdział 1.2.4). Całkowite odkształcenie plastyczne wyraża się więc wzorem

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij}^{-n} + \lambda \frac{\partial \Phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \bar{\varepsilon}_{ij}^{-n} + \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}. \quad (2.8)$$

Równanie (2.6)₃ łączy w sobie zatem zarówno związki między przemieszczeniem a odkształceniem, jak i stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia.

2.5. Założenia i zakres stosowalności

Patrząc na układ równań (2.6), można powiedzieć na jakich założeniach opiera się funkcjonal (2.5) oraz jaki zakres problemów plastycznych opisuje. Po pierwsze obowiązują liniowe związki geometryczne, a także przyjmuje się, że całkowite odkształcenia są superpozycją odkształceń sprężystych i plastycznych. Po drugie funkcja plastyczności musi być funkcją różniczkowalną, aby można było wyznaczyć aktualne odkształcenie plastyczne zgodnie ze wzorem (2.8). Niemniej jednak, w przypadku, gdyby funkcja Φ była nieróżniczkowalna w pewnych miejscach, można ją przybliżyć w tych obszarach funkcją różniczkowalną, bądź w algorytmie MES posłużyć się różniczkowaniem numerycznym. Funkcja Φ , jak będzie to widoczne w kolejnych rozdziałach, może uwzględniać także wzmocnienie materiału. Trzecim ograniczeniem funkcjonala (2.5) jest fakt, że opisuje on zagadnienia plastyczne przy założeniu stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia. Jest ono jednak najczęściej wykorzystywanym związkiem między odkształceniami plastycznymi a naprężeniami.

Podsumowując, można stwierdzić, że mimo wymienionych ograniczeń, zmodyfikowany funkcjonal Hu-Washizu (2.5) jest prostym i uniwersalnym narzędziem, służącym do wyprowadzania równań teorii plastyczności przy założeniu liniowych związków geometrycznych i stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia.

3. Funkcjonał w formie dyskretnej i równania MES

3.1. Wprowadzenie

W tym rozdziale przedstawiony jest tok postępowania, prowadzący do uzyskania funkcyjonału w ujęciu MES oraz równania MES. Z uwagi na przyjęte założenia dot. elementów skończonych, ten i kolejne rozdziały należy traktować już jako szczególne przypadki zastosowania zmodyfikowanego funkcyjonału Hu-Washizu (2.5).

3.2. Funkcjonał oraz równanie MES

Funkcjonał w formie ciągłej (2.5) stanowi punkt wyjścia do uzyskania funkcyjonału w formie dyskretnej. W niniejszej pracy, w celu uproszczenia rozważań, zawęża się zakres do elementów skończonych o liniowych funkcjach kształtu dla przemieszczeń (w ogólności funkcyjonał (2.5) obowiązuje dla dowolnego elementu skończonego). Konsekwentnie, naprężenia oraz odkształcenia w obrębie elementu skończonego są stałe.

Przyjmując, że znana jest macierz geometryczna elementu $\bar{\mathbf{B}}$, po uwzględnieniu powyższych założeń funkcyjonał (2.5) dla pojedynczego elementu skończonego po scałkowaniu przyjmuje postać dyskretną

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}, \lambda) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^n)^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^n) V - (\Delta \mathbf{f})^T \mathbf{q} - (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^n)^T (\boldsymbol{\varepsilon} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n - \mathbf{B} \mathbf{q}) V - \lambda \Phi V, \quad (3.1)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}$ to wektor naprężeń w elemencie, $\boldsymbol{\varepsilon}$ i $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n$ to odpowiednio wektory odkształceń sprężystych i plastycznych, \mathbf{q} to wektor przemieszczeń węzłowych, $\Delta \mathbf{f}$ to przyrost wektora obciążeń węzłowych, λ to skalar określający przyrost odkształceń plastycznych, \mathbf{C} to macierz stałych sprężystości, zaś macierz \mathbf{B} uzyskuje się z równania

$$\mathbf{B} = \frac{1}{V} \int_V \bar{\mathbf{B}} dV. \quad (3.2)$$

Wyróżniony kolorem niebieskim składnik $\lambda \Phi V$ odróżnia funkcyjonał zagadnienia teorii plastyczności od funkcyjonału zagadnienia teorii sprężystości (por. rozdział 2.4).

Równanie MES w odniesieniu do pojedynczego elementu skończonego wynika ze stacjonarności funkcjonału (3.1)

$$\delta\Pi = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{q}} = 0: \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}V - (\Delta\mathbf{f} + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}^nV) = 0 \\ \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = 0: \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}V - \boldsymbol{\sigma}V - (\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^n - \boldsymbol{\sigma}^n)V = 0 \\ \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = 0: \mathbf{B}\mathbf{q} - \boldsymbol{\varepsilon}V + \mathbf{K}_S^{\sigma\sigma}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K}_S^{\sigma\lambda}\lambda - \boldsymbol{\varepsilon}^nV = 0 \\ \frac{\partial\Pi}{\partial\lambda} = 0: \mathbf{K}_S^{\lambda\sigma}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K}_S^{\lambda\lambda}\lambda - b^\lambda = 0 \end{cases}, \quad (3.3)$$

co wygodniej jest przedstawić w formie równania macierzowego

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{B}^TV & 0 \\ 0 & \mathbf{C}V & -\mathbf{I}V & 0 \\ \mathbf{B}V & -\mathbf{I}V & \mathbf{K}_S^{\sigma\sigma} & \mathbf{K}_S^{\sigma\lambda} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_S^{\lambda\sigma} & \mathbf{K}_S^{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{f} + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}^nV \\ (\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^n - \boldsymbol{\sigma}^n)V \\ \boldsymbol{\varepsilon}^nV \\ b^\lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{K}_S\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.4)$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą identycznościową. Elementy macierzy oznaczone kolorem niebieskim zależą od przyjętej funkcji plastyczności, stąd brak ich jawnej postaci. Zgodnie z równaniem (3.4), w dalszej części pracy poprzez \mathbf{K}_S będzie rozumiana macierz równania MES, w ogólności zależna od poszukiwanego wektora rozwiązania $\mathbf{x} = [\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \lambda]^T$, zaś poprzez $\mathbf{b} = [\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_\varepsilon, \mathbf{b}_\sigma, b_\lambda]^T$ oznaczany będzie wektor stałych równania przyrostowego MES. Należy zaznaczyć, że macierz \mathbf{K}_S nie zależy od całego wektora rozwiązania \mathbf{x} , a tylko od $\boldsymbol{\sigma}$ oraz λ , co wynika z faktu, że macierze $\mathbf{K}_S^{\sigma\sigma}$, $\mathbf{K}_S^{\sigma\lambda}$, $\mathbf{K}_S^{\lambda\sigma}$, $\mathbf{K}_S^{\lambda\lambda}$ powstają w wyniku różniczkowania składnika $\lambda\Phi(\boldsymbol{\sigma})V$ w funkcjonałe (3.1).

Ponieważ naprężenia w elemencie skończonym są stałe, stąd jednoznacznie można stwierdzić czy jego zachowanie ma być opisywane równaniami teorii sprężystości czy plastyczności. W przypadku sprężystego obciążania lub odciążania elementu skończonego, niebieskie elementy równania (3.4) są zerowe, tzn. $\mathbf{K}_S^{\sigma\sigma} = \mathbf{K}_S^{\sigma\lambda} = \mathbf{K}_S^{\lambda\sigma} = \mathbf{K}_S^{\lambda\lambda} = b^\lambda = 0$.

Rozmiar równania (3.4) jest zależny od definicji elementu skończonego. Oprócz przyjętego założenia o liniowych funkcjach kształtu, obowiązuje ono dla dowolnego elementu skończonego, a także dowolnej funkcji plastyczności (w tym ze wzmocnieniem).

Jakkolwiek dla uproszczenia zapisu wyznaczono funkcjonał i równanie MES dla pojedynczego elementu skończonego, to oczywiste jest, że ostatecznie należy wyznaczyć funkcjonał, będący sumą

funkcjonałów typu (3.1) po wszystkich elementach. Analogicznie pełne równanie MES uzyskuje się po agregacji równań typu (3.4) po wszystkich elementach, co stanowi standardową procedurę algorytmów MES [31].

3.3. Równanie w przypadku plastyczności ze wzmocnieniem

Równanie macierzowe (3.4) zawiera tyle samo pojedynczych równań, ile niewiadomych. Jednak, jak będzie to pokazane szczegółowo w dalszych rozdziałach, w przypadku gdy funkcja plastyczności zależy od aktualnych odkształceń plastycznych $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (ma to miejsce przy wzmocnieniu plastycznym materiału), elementy $\mathbf{K}_S^{\sigma\sigma}$, $\mathbf{K}_S^{\sigma\lambda}$, $\mathbf{K}_S^{\lambda\sigma}$, $\mathbf{K}_S^{\lambda\lambda}$, b^λ również od nich zależą. Należy zatem wyeliminować $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Wykorzystując równanie (2.8) zapisane macierzowo

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n + \lambda \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.5)$$

można wyznaczyć $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ i podstawić w wyrażeniach na $\mathbf{K}_S^{\sigma\sigma}$, $\mathbf{K}_S^{\sigma\lambda}$, $\mathbf{K}_S^{\lambda\sigma}$, $\mathbf{K}_S^{\lambda\lambda}$, b^λ , w ten sposób uzyskując ostateczne równanie MES.

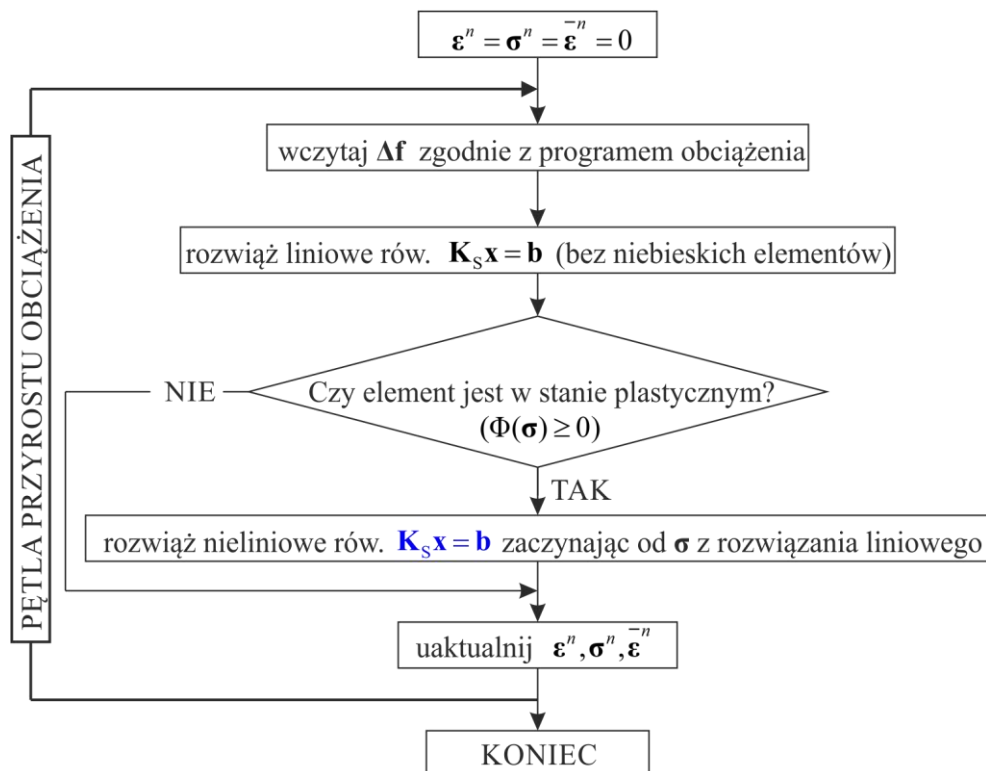
4. Algorytm MES

4.1. Wprowadzenie

Rozdział 4. zawiera opis przyrostowego algorytmu MES, który w szczególności rozwiązuje równanie MES wyprowadzone w rozdziale 3.3. Algorytm zaimplementowano w środowisku Wolfram Mathematica 10. Tak jak poprzednio (por. 3.3), w celu uproszczonego przedstawienia toku rozumowania, rozważany jest pojedynczy element skończony, choć rzeczywisty algorytm służy rozwiązaniu pełnego zagregowanego układu równań MES. Pokazany jest także sposób na zmniejszenie złożoności obliczeniowej algorytmu.

4.2. Opis algorytmu

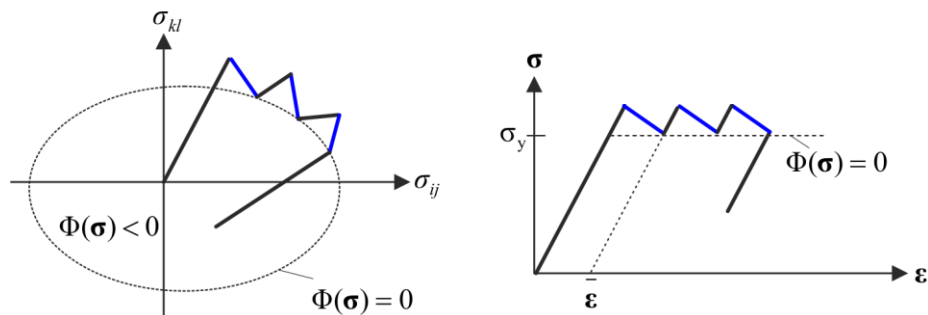
Działanie algorytmu MES schematycznie przedstawia rys. 4.1. W pojedynczym elemencie skończonym jako startowe przyjmowane są zerowe wartości odkształceń sprężystych ϵ^n , naprężeń σ^n oraz odkształceń plastycznych $\bar{\epsilon}^n$. Następnie, co typowe w algorytmie przyrostowym, wykonywana jest główna pętla (pętla przyrostu obciążenia, rys. 4.1), na początku której wczytywany jest przyrost obciążenia Δf , zadany zgodnie z założonym programem obciążenia.



Rys. 4.1. Schemat algorytmu MES

Niezależnie od tego czy element jest w stanie plastycznym, czy sprężystym, rozwiązywany jest liniowy układ równań teorii sprężystości $\mathbf{K}_s \mathbf{x} = \mathbf{b}$ (3.4) (bez elementów oznaczonych niebieską czcionką). Ten etap jest powszechnie wykorzystywany w algorytmach MES do rozwiązywania zagadnień plastycznych (por. 1.3).

Następnie algorytm sprawdza, czy wyznaczone naprężenie nie wykracza poza powierzchnię plastyczności. W pracy przyjmuje się konwencję, że funkcja plastyczności jest zdefiniowana tak, że jej wnętrze spełnia nierówność $\Phi < 0$. Jeśli więc $\Phi \geq 0$, oznacza to że element jest w stanie plastycznym, co w niniejszej pracy rozumiane jest jako podleganie opisowi teorii plastyczności (sam fakt niezerowych odkształceń plastycznych $\bar{\epsilon}^n$ nie oznacza plastycznego płynięcia).



Rys. 4.2. Schemat powrotu na powierzchnię plastyczności

W przypadku stanu plastycznego, konieczny jest więc powrót na powierzchnię plastyczności (rys. 4.2). Jest on realizowany poprzez rozwiązanie nieliniowego układu równań teorii plastyczności $\mathbf{K}_s \mathbf{x} = \mathbf{b}$ (3.4) (z elementami oznaczonymi niebieską czcionką) poprzez wykorzystanie metody Newtona–Raphsona (NR) [32], w której wartościami początkowymi poszukiwania rozwiązania są zerowy parametr λ oraz naprężenia σ obliczone jako rozwiązanie równania liniowego. Na końcu pętli przyrostowej uaktualniane są wartości odkształceń sprężystych oraz naprężeń wyznaczone z rozwiązania otrzymanego metodą NR, a także odkształcenia plastyczne wyznaczone przy pomocy wzoru (3.5), by stać się w kolejnej pętli wyjściowymi wartościami odpowiednio ϵ^n , σ^n , $\bar{\epsilon}^n$.

Przedstawiony opis jest ideowym zobrazowaniem działania algorytmu dla pojedynczego elementu skończonego. Jak wspomniano w 4.1, równania MES są rozwiązywane po wykonaniu agregacji po wszystkich elementach skończonych.

4.3. Rozwiązanie układu równań MES i optymalizacja

Zarówno w przypadku liniowego, jak i nieliniowego równania, przemieszczeniowe warunki brzegowe (w pracy rozważa się tylko jednorodne warunki przemieszczeniowe) są zadawane numerycznie poprzez modyfikację macierzy \mathbf{K}_S w taki sposób, że na jej przekątnej wstawiane są tzw. duże liczby (DL) w miejscach odpowiadających zerowym wartościom przemieszczeń w wektorze przemieszczeń węzłowych \mathbf{q} , co jest zabiegiem powszechnie stosowanym w MES [31]. Tak zmodyfikowaną macierz można zapisać następująco

$$\bar{\mathbf{K}}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S^{qq} & 0 & \mathbf{B}^T V & 0 \\ 0 & \mathbf{C} V & -\mathbf{I} V & 0 \\ \mathbf{B} V & -\mathbf{I} V & \mathbf{K}_S^{\sigma\sigma} & \mathbf{K}_S^{\sigma\lambda} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_S^{\lambda\sigma} & \mathbf{K}_S^{\lambda\lambda} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

gdzie poprzez \mathbf{K}_S^{qq} rozumie się macierz z wpisanymi na przekątnej w odpowiednich miejscach dużymi liczbami.

W przypadku rozwiązania liniowego $\mathbf{K}_S^{\sigma\sigma} = \mathbf{K}_S^{\sigma\lambda} = \mathbf{K}_S^{\lambda\sigma} = \mathbf{K}_S^{\lambda\lambda} = b^\lambda = 0$. W analogiczny sposób, aby zapewnić odwracalność macierzy $\bar{\mathbf{K}}_S$, wprowadza się modyfikację $\mathbf{K}_S^{\lambda\lambda} = DL$. Po agregacji po wszystkich elementach skończonych, rozwiązanie liniowe otrzymuje się wtedy bezpośrednio z równania

$$\mathbf{x} = [\bar{\mathbf{K}}_S]^{-1} \mathbf{b}. \quad (4.2)$$

Dla rozwiązania nieliniowego równanie metody NR ma postać

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - [\bar{\mathbf{K}}_T(\mathbf{x}_i)]^{-1} (\mathbf{K}_S(\mathbf{x}_i)\mathbf{x}_i - \mathbf{b}), \quad (4.3)$$

gdzie \mathbf{x}_{i+1} oznacza wektor rozwiązania w kolejnej iteracji metody, zaś \mathbf{x}_i – w poprzedniej. \mathbf{K}_T to macierz styczna wyznaczana ze wzoru

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial(\mathbf{K}_S \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{B}^T V & 0 \\ 0 & \mathbf{C} V & -\mathbf{I} V & 0 \\ \mathbf{B} V & -\mathbf{I} V & \mathbf{K}_T^{\sigma\sigma} & \mathbf{K}_T^{\sigma\lambda} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_T^{\lambda\sigma} & \mathbf{K}_T^{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{K}_T^{q\sigma} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_T^{\varepsilon\varepsilon} & \mathbf{K}_T^{\varepsilon\sigma} & 0 \\ \mathbf{K}_T^{\sigma q} & \mathbf{K}_T^{\sigma\varepsilon} & \mathbf{K}_T^{\sigma\sigma} & \mathbf{K}_T^{\sigma\lambda} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_T^{\lambda\sigma} & \mathbf{K}_T^{\lambda\lambda} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

natomiast $\overline{\mathbf{K}}_T$ to macierz \mathbf{K}_T zmodyfikowana w sposób analogiczny do wcześniejszej modyfikacji macierzy \mathbf{K}_S (zawiera duże liczby uwzględniające podparcie oraz przypadek, gdy element nie jest w stanie plastycznym).

Złożoność operacji odwracania macierzy w równaniu (4.3) w każdej iteracji metody NR ma decydujący wpływ na czas obliczeń algorytmu. Zauważenie zerowych podmacierzy macierzy \mathbf{K}_S i \mathbf{K}_T nasuwa pomysł wykorzystania eliminacji blokowej dla równania metody NR (4.3), które można zapisać następująco

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{x}_i)\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{p}_i, \quad (4.5)$$

gdzie

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{b} + [\mathbf{K}_T(\mathbf{x}_i) - \mathbf{K}_S(\mathbf{x}_i)]\mathbf{x}_i \quad (4.6)$$

to wektor znanych wielkości z i-tej iteracji. Rozbijając (4.5) na osobne równania i pomijając indeksy wskazujące numer iteracji otrzymuje się układ równań

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T^{q\sigma}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p}_q \\ \mathbf{K}_T^{\varepsilon\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{K}_T^{\varepsilon\sigma}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p}_\varepsilon \\ \mathbf{K}_T^{\sigma q}\mathbf{q} + \mathbf{K}_T^{\sigma\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{K}_T^{\sigma\sigma}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K}_T^{\sigma\lambda}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p}_\sigma \\ \mathbf{K}_T^{\lambda\sigma}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K}_T^{\lambda\lambda}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p}_\lambda \end{cases} \quad (4.7)$$

Wyznaczając z (4.7)₂

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{K}_T^{\varepsilon\varepsilon}]^{-1}(\mathbf{p}_\varepsilon - \mathbf{K}_T^{\varepsilon\sigma}\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.8)$$

i wstawiając (4.8) do (4.7)₃, otrzymuje się

$$\mathbf{K}_T^{\sigma q}\mathbf{q} + \mathbf{K}_T^{\sigma\varepsilon}[\mathbf{K}_T^{\varepsilon\varepsilon}]^{-1}\mathbf{p}_\varepsilon + (\mathbf{K}_T^{\sigma\sigma} - \mathbf{K}_T^{\sigma\varepsilon}[\mathbf{K}_T^{\varepsilon\varepsilon}]^{-1}\mathbf{K}_T^{\varepsilon\sigma})\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K}_T^{\sigma\lambda}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p}_\sigma, \quad (4.9)$$

skąd

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{M}_\sigma]^{-1}(\mathbf{p}_\sigma - \mathbf{K}_T^{\sigma q}\mathbf{q} - \mathbf{K}_T^{\sigma\varepsilon}[\mathbf{K}_T^{\varepsilon\varepsilon}]^{-1}\mathbf{p}_\varepsilon - \mathbf{K}_T^{\sigma\lambda}\boldsymbol{\lambda}), \quad (4.10)$$

gdzie

$$\mathbf{M}_\sigma = (\mathbf{K}_T^{\sigma\sigma} - \mathbf{K}_T^{\sigma\varepsilon}[\mathbf{K}_T^{\varepsilon\varepsilon}]^{-1}\mathbf{K}_T^{\varepsilon\sigma}). \quad (4.11)$$

Wstawiając (4.10) do (4.7)₄, otrzymuje się

$$\mathbf{K}_T^{\lambda\sigma} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \left(\mathbf{p}_\sigma - \mathbf{K}_T^{\sigma q} \mathbf{q} - \mathbf{K}_T^{\sigma \varepsilon} [\mathbf{K}_T^{\varepsilon \varepsilon}]^{-1} \mathbf{p}_\varepsilon \right) + \left(\mathbf{K}_T^{\lambda\lambda} - \mathbf{K}_T^{\lambda\sigma} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \mathbf{K}_T^{\sigma\lambda} \right) \lambda = \mathbf{p}_\lambda. \quad (4.12)$$

Wprowadza się oznaczenie

$$\mathbf{M}_\lambda = \left(\mathbf{K}_T^{\lambda\sigma} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \mathbf{K}_T^{\sigma\lambda} - \mathbf{K}_T^{\lambda\lambda} \right), \quad (4.13)$$

przy czym w przypadku, gdy element nie jest plastyczny, $\mathbf{K}_T^{\lambda\lambda} = \text{DL}$, co zapewnia odwracalność macierzy \mathbf{M}_λ . Z (4.12) wyznacza się λ

$$\lambda = [\mathbf{M}_\lambda]^{-1} \left[\mathbf{K}_T^{\lambda\sigma} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \left(\mathbf{p}_\sigma - \mathbf{K}_T^{\sigma q} \mathbf{q} - \mathbf{K}_T^{\sigma \varepsilon} [\mathbf{K}_T^{\varepsilon \varepsilon}]^{-1} \mathbf{p}_\varepsilon \right) - \mathbf{p}_\lambda \right], \quad (4.14)$$

które po podstawieniu do (4.10) daje

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \left(\mathbf{p}_\sigma - \mathbf{K}_T^{\sigma q} \mathbf{q} - \mathbf{K}_T^{\sigma \varepsilon} [\mathbf{K}_T^{\varepsilon \varepsilon}]^{-1} \mathbf{p}_\varepsilon \right. \\ & \left. - \mathbf{K}_T^{\sigma\lambda} [\mathbf{M}_\lambda]^{-1} \left[\mathbf{K}_T^{\lambda\sigma} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \left(\mathbf{p}_\sigma - \mathbf{K}_T^{\sigma q} \mathbf{q} - \mathbf{K}_T^{\sigma \varepsilon} [\mathbf{K}_T^{\varepsilon \varepsilon}]^{-1} \mathbf{p}_\varepsilon \right) - \mathbf{p}_\lambda \right] \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Proces eliminacji niewiadomych kończy się na wstawieniu $\boldsymbol{\sigma}$ (4.15) do (4.7)₁, co prowadzi do

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{K}_T^{\sigma q} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \mathbf{K}_T^{\sigma\lambda} \lambda [\mathbf{M}_\lambda]^{-1} \mathbf{K}_T^{\lambda\sigma} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \mathbf{K}_T^{\sigma q} - \mathbf{K}_T^{\sigma q} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \mathbf{K}_T^{\sigma q} \right) \mathbf{q} = \mathbf{p}_q - \\ & - \mathbf{K}_T^{\sigma q} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \left(\mathbf{p}_\sigma - \mathbf{K}_T^{\sigma \varepsilon} [\mathbf{K}_T^{\varepsilon \varepsilon}]^{-1} \mathbf{p}_\varepsilon - \mathbf{K}_T^{\sigma\lambda} [\mathbf{M}_\lambda]^{-1} \left[\mathbf{K}_T^{\lambda\sigma} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \left(\mathbf{p}_\sigma - \mathbf{K}_T^{\sigma \varepsilon} [\mathbf{K}_T^{\varepsilon \varepsilon}]^{-1} \mathbf{p}_\varepsilon \right) - \mathbf{p}_\lambda \right] \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

Wprowadza się oznaczenie

$$\mathbf{M}_q = \mathbf{K}_T^{\sigma q} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \mathbf{K}_T^{\sigma\lambda} \lambda [\mathbf{M}_\lambda]^{-1} \mathbf{K}_T^{\lambda\sigma} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \mathbf{K}_T^{\sigma q} - \mathbf{K}_T^{\sigma q} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \mathbf{K}_T^{\sigma q}, \quad (4.17)$$

przy czym macierz \mathbf{M}_q o wymiarze $\dim \mathbf{q} \cdot \dim \mathbf{q}$ zawiera duże liczby (DL) w miejscach odpowiadających zerowym przemieszczeniom, co zapewnia jej odwracalność. Równanie (4.16) prowadzi do rozwiązania

$$\begin{aligned} \mathbf{q} = & [\mathbf{M}_q]^{-1} \left[\mathbf{b}_q - \mathbf{K}_T^{\sigma q} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \right. \\ & \left. \times \left(\mathbf{p}_\sigma - \mathbf{K}_T^{\sigma \varepsilon} [\mathbf{K}_T^{\varepsilon \varepsilon}]^{-1} \mathbf{p}_\varepsilon - \mathbf{K}_T^{\sigma\lambda} [\mathbf{M}_\lambda]^{-1} \left[\mathbf{K}_T^{\lambda\sigma} [\mathbf{M}_\sigma]^{-1} \left(\mathbf{p}_\sigma - \mathbf{K}_T^{\sigma \varepsilon} [\mathbf{K}_T^{\varepsilon \varepsilon}]^{-1} \mathbf{p}_\varepsilon \right) - \mathbf{p}_\lambda \right] \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Następnie bezpośrednio z (4.14) wyznacza się λ , po czym z (4.10) wyznacza się $\boldsymbol{\sigma}$ i ostatecznie z równania (4.8) otrzymuje się $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Ze względu na to, że nie można odgórnie przyjąć brzegowych warunków przemieszczeniowych oraz założyć, że element jest w stanie plastycznym lub nie, odwracanie macierzy \mathbf{M}_l oraz \mathbf{M}_q można przeprowadzić dopiero w obrębie przyrostowego kroku algorytmu MES. Skutkuje to faktem, że obliczenia dla konkretnego zadania z wykorzystaniem omówionej optymalizacji trwają krócej niż te przeprowadzone poprzez standardowe odwrócenie całej macierzy $\overline{\mathbf{K}}_T$ dopiero wtedy, gdy liczba elementów skończonych jest dostatecznie duża. Porównanie czasów obliczeń dla przykładowego zadania zostanie przedstawione w p. 6.2.4.5.

4.4. Porównanie z dotychczas stosowanymi algorytmami

Tym, co wyróżnia opisany w punkcie 4.2 algorytm MES i stanowi jego przewagę nad dotychczas stosowanymi algorytmami jest fakt, że powrót na powierzchnię plastyczności dokonuje się poprzez rozwiązanie pełnego układu równań teorii plastyczności. Nie istnieje więc problem niespełnienia równań teorii sprężystości wskutek wykonania return-mappingu (problem ten został szerzej omówiony w p. 1.3). Prowadzi to do zbieżności i stabilności algorytmu przyrostowego MES przedstawionego w niniejszej pracy, niezależnie od dobranej liczby kroków przyrostowych.

Ponadto, ponieważ jedyny błąd rozwiązania w danym kroku przyrostowym pochodzi wyłącznie z niedokładności metody Newtona–Raphsona, algorytm MES nie musi zmniejszać przyrostów obciążenia w celu uzyskania dokładniejszego wyniku. Natomiast w powszechnie stosowanych algorytmach jest to jedyna forma kontrolowania błędu wynikającego z return-mappingu, co determinuje konieczność wprowadzenia dodatkowych procedur, w oczywisty sposób wydłużających czas obliczeń algorytmu.

Dodatkowo, dzięki zastosowaniu funkcjonału (3.1), zadaniem algorytmu MES jest rozwiązanie jednego układu równań MES (3.4), dzięki czemu przedstawione podejście jest spójne i czytelne oraz wydaje się mniej zawile w porównaniu z procedurami opisywanymi w literaturze omówionej w punkcie 1.3.

5. Funkcje plastyczności

5.1. Wprowadzenie

Niniejszy rozdział przedstawia równania warunków plastyczności wykorzystanych w późniejszych przykładach (rozdział 6). Są to warunki Hubera–Misesa–Hencky’ego (HMH) w trzech przypadkach: idealnej plastyczności, plastyczności ze wzmocnieniem kinematycznym oraz izotropowym.

Na końcu rozdziału pokazana jest prosta modyfikacja algorytmu MES, która pozwala efektywnie przeprowadzać obliczenia dla przypadku warunku HMH ze wzmocnieniem izotropowym, wykorzystując rozwiązanie dla warunku HMH ze wzmocnieniem kinematycznym.

Na uwagę zasługuje fakt, że wiele warunków plastyczności, w tym TW (1.9), HMH (1.6) i Hilla (1.13) opisuje forma kwadratowa wektora naprężeń. Co za tym idzie, różniczkowanie funkcji plastyczności odpowiadających tym warunkom, konieczne ze względu na wyprowadzenie równania MES (3.4), nie przysparza kłopotów. Przykłady numeryczne związane z warunkiem TW zostały przedstawione w [20] i nie są omawiane w obrębie rozprawy.

5.2. Idealna plastyczność

W celu spójności opisu wszystkich rozpatrywanych warunków plastyczności w obrębie rozdziału 5., wzór funkcji plastyczności HMH w przypadku idealnej plastyczności (1.6) zostaje ponownie przytoczony poniżej

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma} - 2\sigma_y^2. \quad (5.1)$$

5.3. Ogólny model wzmocnienia

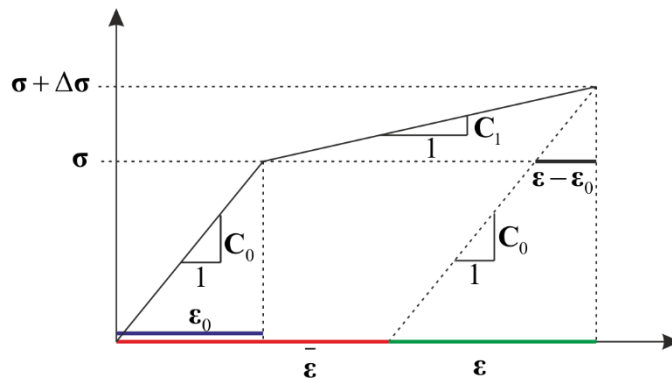
Ogólnie, wzmocnienie materiału może być rozumiane jako proces, podczas którego zmieniają się zarówno odkształcenia sprężyste, jak i plastyczne, co przedstawia schemat na rys. 5.1. Rozpatrywany jest liniowy model wzmocnienia. Po osiągnięciu maksymalnych odkształceń sprężystych $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ przez materiał, przyrost naprężeń jest proporcjonalny do przyrostu odkształceń zgodnie z pewną macierzą proporcjonalności \mathbf{C}_1 . Jednocześnie przyrost naprężeń jest proporcjonalny do macierzy stałych sprężystości \mathbf{C}_0 . Z obserwacji tych faktów wynika układ równań

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_0 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\ \Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_1 (\boldsymbol{\varepsilon} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \end{cases}, \quad (5.2)$$

prowadzący do związku między przyrostem naprężeń $\Delta\sigma$ a całkowitym odkształceniem plastycznym $\bar{\varepsilon}$

$$\Delta\sigma = [\mathbf{I} - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1}]^{-1} \mathbf{C}_1 \bar{\varepsilon}. \quad (5.3)$$

Równanie (5.3) obowiązuje także wtedy, gdy σ odnosi się do stanu innego niż początkowa plastyczność, który to został zobrazowany na rys. 5.1 w celu prostego przedstawienia problemu.



Rys. 5.1. Ogólny schemat wzmocnienia

Jako szczególny przypadek omawianego modelu wzmocnienia można rozważać taki, w którym sztywność materiału w trakcie plastycznego płynięcia jest proporcjonalna do początkowej, zgodnie ze współczynnikiem proporcjonalności α , co można zapisać następująco

$$\mathbf{C}_1 = \alpha \mathbf{C}_0, \quad (5.4)$$

gdzie $0 < \alpha < 1$. Wtedy wzór (5.3) przyjmuje postać

$$\Delta\sigma = \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{C}_0 \bar{\varepsilon}. \quad (5.5)$$

5.4. Plastyczność ze wzmocnieniem kinematycznym

W nawiązaniu do wcześniejszego opisu (por. p. 1.2.3), wzmocnienie kinematyczne polega na przemieszczeniu powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń, co w przypadku warunku HMH można wyrazić wzorem

$$\Phi(\sigma - \Delta\sigma) = \frac{1}{2} (\sigma - \Delta\sigma)^T \Psi (\sigma - \Delta\sigma) - 2\sigma_y^2. \quad (5.6)$$

Przy założeniu modelu wzmocnienia opisanego równaniem (5.5), funkcja ta ma postać

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2\sigma_y^2. \quad (5.7)$$

Jest to funkcja plastyczności dla warunku HMH ze wzmocnieniem kinematycznym, która będzie wykorzystywana w późniejszych przykładach.

Zgodnie z rozważaniami w punkcie 3.3, na potrzeby sformułowania równania MES, za pomocą równania (3.5) po kilku przekształceniach wyznacza się

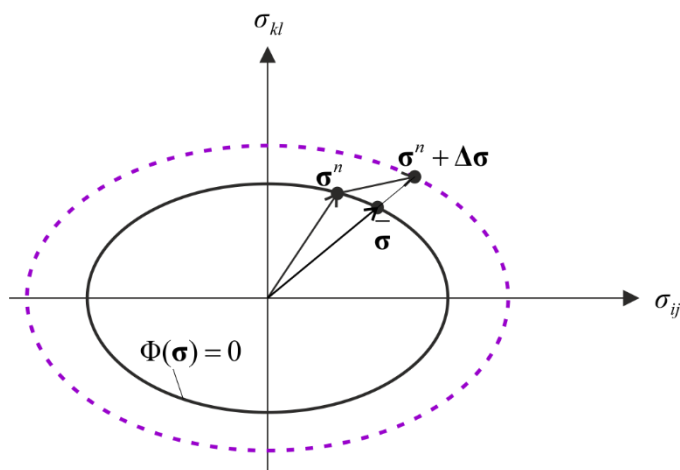
$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\mathbf{I} + \lambda \boldsymbol{\Psi} \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{C} \right)^{-1} \lambda \boldsymbol{\Psi} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right) + \boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \quad (5.8)$$

i podstawia do (5.7), ostatecznie otrzymując

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\sigma}) = & \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C} \left[\left(\mathbf{I} + \lambda \boldsymbol{\Psi} \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{C} \right)^{-1} \lambda \boldsymbol{\Psi} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right) + \boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \left[\left(\mathbf{I} + \lambda \boldsymbol{\Psi} \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{C} \right)^{-1} \lambda \boldsymbol{\Psi} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right) + \boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right]^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C} \cdot \\ & \cdot \left[\left(\mathbf{I} + \lambda \boldsymbol{\Psi} \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{C} \right)^{-1} \lambda \boldsymbol{\Psi} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right) + \boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right] - 2\sigma_y^2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.5. Plastyczność ze wzmocnieniem izotropowym

W celu wyprowadzenia wzoru na funkcję plastyczności dla warunku HMH przy wzmocnieniu izotropowym warto wprowadzić dodatkowe oznaczenia w stosunku do rys. 1.5, które zawiera schemat na rys. 5.2.



Rys. 5.2. Schemat wzmocnienia izotropowego

Nawiązując do opisu z p. 1.2.3, izotropowe wzmocnienie polega na „pęcznieniu” powierzchni plastyczności, co dla warunku HMH przedstawia wzór

$$\Phi\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\kappa}\right) = \frac{1}{2\kappa^2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma} - 2\sigma_y^2, \quad (5.10)$$

gdzie κ jest współczynnikiem skalowania („pęcznienia”) powierzchni ($\kappa > 0$) i zależy nie tylko od zmiany naprężenia $\Delta\boldsymbol{\sigma}$, ale także od jego pierwotnej konfiguracji $\boldsymbol{\sigma}^n$, co widać na rys. 5.2. Ze schematu wprost wynika, że

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^n + \Delta\boldsymbol{\sigma}}{\kappa}. \quad (5.11)$$

Należy zauważyć, że $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ spełnia pierwotne równanie powierzchni plastyczności

$$\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \boldsymbol{\Psi} \bar{\boldsymbol{\sigma}} - 2\sigma_y^2 = 0, \quad (5.12)$$

co po podstawieniu $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ (5.11) prowadzi do

$$\frac{1}{2\kappa^2} [\boldsymbol{\sigma}^n + \Delta\boldsymbol{\sigma}]^T \boldsymbol{\Psi} [\boldsymbol{\sigma}^n + \Delta\boldsymbol{\sigma}] - 2\sigma_y^2 = 0, \quad (5.13)$$

skąd wyznacza się

$$\kappa^2 = \frac{1}{4\sigma_y^2} [\boldsymbol{\sigma}^n + \Delta\boldsymbol{\sigma}]^T \boldsymbol{\Psi} [\boldsymbol{\sigma}^n + \Delta\boldsymbol{\sigma}], \quad (5.14)$$

co po podstawieniu do wzoru (5.10) ostatecznie daje funkcję plastyczności dla warunku HMH ze wzmocnieniem izotropowym

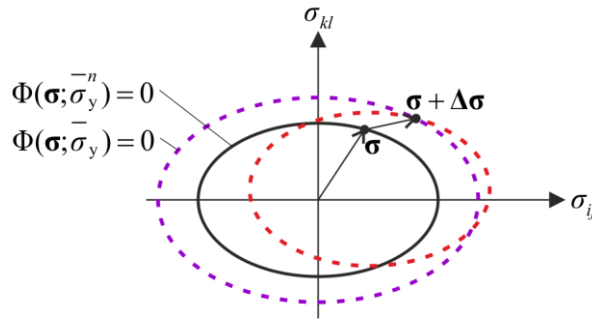
$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma}}{[\boldsymbol{\sigma}^n + \Delta\boldsymbol{\sigma}]^T \boldsymbol{\Psi} [\boldsymbol{\sigma}^n + \Delta\boldsymbol{\sigma}]} - 1 \right) 2\sigma_y^2. \quad (5.15)$$

Dla modelu wzmocnienia opisanego równaniem (5.5), funkcja ta ma postać

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma}}{\left[\boldsymbol{\sigma}^n + \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{C}_0 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right]^T \boldsymbol{\Psi} \left[\boldsymbol{\sigma}^n + \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{C}_0 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right]} - 1 \right) 2\sigma_y^2. \quad (5.16)$$

5.5.1. Modyfikacja algorytmu MES

Ze względu na skomplikowaną postać funkcji plastyczności (5.16), wyznaczenie $\bar{\epsilon}$ za pomocą (3.5) jest utrudnione. Okazuje się jednak, że można wykorzystać gotowe rozwiązanie dla wzmocnienia kinematycznego w celu uzyskania rozwiązania dla wzmocnienia izotropowego. Procedura postępowania bazuje na modyfikacji algorytmu MES w obrębie kroku pętli przyrostowej. Jej ideę obrazuje schemat na rys. 5.3.



Rys. 5.3. Wzmocnienie izotropowe – uaktualnienie powierzchni plastyczności po każdym kroku przyrostowym

Można zauważyć, że na początku kroku przyrostowego równanie powierzchni plastyczności ma postać

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma} - 2 \left(\bar{\sigma}_y^{-n} \right)^2 = 0, \quad (5.17)$$

zaś na jego końcu

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma} - 2 \left(\bar{\sigma}_y \right)^2 = 0, \quad (5.18)$$

gdzie $\bar{\sigma}_y^{-n}$ oraz $\bar{\sigma}_y$ są to uaktualnione granice plastyczności odpowiednio na początku i końcu kroku przyrostowego. Równania (5.17) i (5.18) są przypadkami szczególnymi wynikającymi z ogólnej funkcji plastyczności dla warunku HMH ze wzmocnieniem izotropowym (5.10).

Jak widać na rys. 5.3, ewolucję powierzchni plastyczności w przypadku wzmocnienia izotropowego (kolor fioletowy) w obrębie kroku przyrostowego przybliża ewolucja powierzchni plastyczności w przypadku wzmocnienia kinematycznego (kolor czerwony) względem powierzchni na początku kroku przyrostowego (kolor czarny). Tę przybliżoną ewolucję można wyrazić poprzez podstawienie do funkcji plastyczności dla wzmocnienia kinematycznego (5.7) uaktualnionej granicy plastyczności $\sigma_y := \bar{\sigma}_y^{-n}$

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2 \left(\bar{\sigma}_y \right)^2 \quad (5.19)$$

oraz poprzez podstawienie do (3.5) $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n := 0$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (5.20)$$

Zmiana równań (5.19) oraz (5.20) w danym kroku przyrostowym algorytmu MES sprowadza się do takiej modyfikacji równania MES (3.4) wyprowadzonego dla wzmocnienia kinematycznego, że $\sigma_y := \bar{\sigma}_y^n$ oraz $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n := 0$. Z tak skonstruowanego równania wyznaczone naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ pozwalają obliczyć nową granicę plastyczności na podstawie (5.18)

$$\bar{\sigma}_y = \frac{1}{2} \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma}}, \quad (5.21)$$

która w kolejnym kroku przyrostowym jest traktowana jako wyjściowa $\bar{\sigma}_y^n$.

Jak widać zatem, mając gotowy algorytm MES rozwiązania zadania dla warunku plastyczności HMH ze wzmocnieniem kinematycznym, dokonując prostych dwu podstawień, można otrzymać algorytm rozwiązania tego zadania dla warunku HMH ze wzmocnieniem izotropowym, w ten sposób likwidując potrzebę wyprowadzania równania MES dla funkcji plastyczności o skomplikowanej postaci (5.16).

6. Przykłady zastosowań funkcjonału, weryfikacja rozwiązań

6.1. Wprowadzenie

Rozdział 6. zawiera przykłady zastosowania zmodyfikowanego funkcjonału Hu–Washizu z wykorzystaniem różnych elementów skończonych oraz przedstawionych w rozdziale 5. funkcji plastyczności. Przykłady te mają na celu pokazanie efektywności przedstawionego podejścia poprzez porównanie wyników algorytmu MES z wynikami uzyskanymi analitycznie oraz z wynikami otrzymanymi w programie Abaqus 6.13 bądź pochodzącymi z innych publikacji. Rozdział 6. jest podzielony na dwie zasadnicze części – dotyczące tarczowych oraz płytowych elementów skończonych.

W części dotyczącej elementów tarczowych są omówione także elementy czworościenne ze względu na identyczną postać równania MES. Ponieważ ich aplikacja prowadzi do najbardziej rozbudowanego równania MES (spośród przedstawionych w tej pracy), a co za tym idzie najdłużej działającego i najbardziej pochłaniającego pamięć algorytmu, praca nie zawiera przykładów numerycznych bazujących na elementach czworościennych.

Cześć dotycząca elementów płytowych opisuje wyprowadzenie równań dla warstwowego elementu płytowego. Niezbędna jest modyfikacja funkcjonału (3.1) w celu uwzględnienia faktu, że poszczególne warstwy mogą niezależnie ulec uplastycznieniu, a niekoniecznie cały przekrój elementu. Jako szczególny przypadek elementów płytowych są rozważane także elementy belkowe, dla których przedstawia się bardziej złożone przykłady numeryczne.

Wszystkie omawiane elementy skończone obowiązują podane w rozdziale 3.2 założenia o liniowych funkcjach kształtu dla przemieszczeń oraz stałych dla naprężeń i odkształceń. Zgodnie z konwencją przyjętą w całej rozprawie, zarówno funkcjonał, jak i równania MES dotyczą pojedynczego elementu skończonego w celu uproszczenia zapisu.

6.2. Tarcze

6.2.1. Definicja elementu skończonego

Wprowadza się trójkątny element skończony jak na rys. 6.1. Dla wektora przemieszczeń

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T \quad (6.1)$$

przyjmuje się liniową aproksymację za pomocą współrzędnych powierzchniowych L_I , L_{II} , L_{III} (szczegółowy opis w [31])

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (6.2)$$

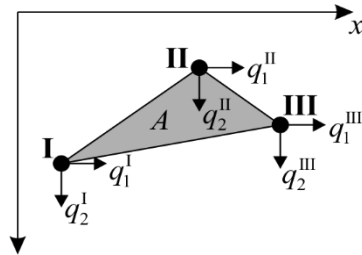
gdzie

$$\mathbf{q} = [q_1^I, q_2^I, q_1^{II}, q_2^{II}, q_1^{III}, q_2^{III}]^T \quad (6.3)$$

jest wektorem przemieszczeń węzłowych, zaś

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} L_I & 0 & L_{II} & 0 & L_{III} & 0 \\ 0 & L_I & 0 & L_{II} & 0 & L_{III} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

jest macierzą funkcji kształtu.



Rys. 6.1. Tarczowy element skończony

Płaski stan naprężenia występujący w tarczach charakteryzują następujące wektory odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ i naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}]^T \\ \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}]^T \end{cases}, \quad (6.5)$$

które są stałe w elemencie skończonym, konsekwentnie ze względu na (6.2).

Przyjmując do dalszych przykładów materiał izotropowy, macierz stałych sprężystości ma postać

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

w której E jest modułem Younga materiału, zaś ν współczynnikiem Poissona.

Macierz geometryczna $\bar{\mathbf{B}}$ dla przyjętej aproksymacji przemieszczeń za pomocą współrzędnych powierzchniowych oraz liniowych związków geometrycznych została przedstawiona w [31]. Ponieważ jest ona niezależna od współrzędnych (x_1, x_2) , zgodnie z równaniem (3.2) zachodzi

$$\mathbf{B} = \frac{1}{V} \int_V \bar{\mathbf{B}} dV = \frac{1}{Ah} \int_A \bar{\mathbf{B}} h dA = \bar{\mathbf{B}}. \quad (6.7)$$

W przypadku tarczowego elementu skończonego

$$V = Ah, \quad (6.8)$$

gdzie A jest polem elementu skończonego, zaś h – grubością tarczy.

W ten sposób przedstawiono wszystkie wielkości potrzebne do sformułowania równania MES (3.4), oprócz elementów równania wynikających z przyjęcia konkretnego warunku plastyczności.

6.2.2. Równanie MES przy różnych warunkach plastyczności

Zakładając, że materiał zachowuje się w sposób opisany wybraną funkcją plastyczności z rozdziału 5, można zdefiniować wszystkie elementy równania MES (3.4) dotyczącego tarczowego elementu skończonego. Należy wybrać jedną z funkcji plastyczności opisującą warunek HMM: w przypadku idealnej plastyczności (5.1), wzmocnienia kinematycznego (5.9) lub wzmocnienia izotropowego (5.16).

Macierz Ψ (1.7) we wzorach warunków plastyczności (5.1), (5.9) i (5.16), przy założeniu płaskiego stanu naprężenia, przyjmuje formę

$$\Psi = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

W przypadku idealnej plastyczności i wzmocnienia kinematycznego, macierze $\mathbf{K}_S^{\sigma\sigma}$, $\mathbf{K}_S^{\sigma\lambda}$, $\mathbf{K}_S^{\lambda\sigma}$, $\mathbf{K}_S^{\lambda\lambda}$, b^λ oraz macierz \mathbf{K}_T wyznacza się analitycznie zgodnie z tokiem postępowania przedstawionym w rozdziałach 3 i 4. Natomiast przykłady dotyczące wzmocnienia izotropowego rozwiązywane są za pomocą rozwiązania dla wzmocnienia kinematycznego poprzez modyfikację algorytmu MES, co zostało opisane w 5.5.1.

W przypadku warunku HMM z idealną plastycznością (5.1) otrzymuje się

$$\begin{cases} \mathbf{K}_S^{\sigma\lambda} = -\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\sigma}V \\ \mathbf{K}_S^{\lambda\sigma} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\psi}V \\ \mathbf{K}_S^{\sigma\sigma} = \mathbf{K}_S^{\lambda\lambda} = 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

oraz

$$b^\lambda = -2\sigma_y^2 V. \quad (6.11)$$

Elementy macierzy \mathbf{K}_T dane są wzorami

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T^{\sigma\sigma} = -\lambda\boldsymbol{\psi}V \\ \mathbf{K}_T^{\sigma\lambda} = -\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\sigma}V \\ \mathbf{K}_T^{\lambda\sigma} = -\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\psi}V \\ \mathbf{K}_T^{\lambda\lambda} = 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

Zastosowanie warunku HMM ze wzmocnieniem kinematycznym (5.9) prowadzi do bardziej skomplikowanych wzorów

$$\begin{cases} \mathbf{K}_S^{\sigma\sigma} = 0 \\ \mathbf{K}_S^{\sigma\lambda} = -\left[\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\boldsymbol{\psi}\mathbf{C}\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} + \left(\mathbf{I} + \lambda\boldsymbol{\psi}\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C} \right)^{-1} \lambda\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right) \right] \right] V \\ \mathbf{K}_S^{\lambda\sigma} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\psi}V + \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} + \left(\mathbf{I} + \lambda\boldsymbol{\psi}\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C} \right)^{-1} \lambda\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right) \right]^T \mathbf{C}\boldsymbol{\psi}V \\ \mathbf{K}_S^{\lambda\lambda} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \frac{1}{\lambda} \left[\left(\mathbf{I} + \lambda\boldsymbol{\psi}\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C} \right)^{-1} \lambda\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right) \right]^T \mathbf{C}\boldsymbol{\psi}\mathbf{C} \\ \quad \cdot \left[\left(\mathbf{I} + \lambda\boldsymbol{\psi}\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C} \right)^{-1} \lambda\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right) \right] V \\ \quad - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \frac{1}{\lambda} \left[\left(\mathbf{I} + \lambda\boldsymbol{\psi}\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C} \right)^{-1} \lambda\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right) \right]^T \mathbf{C}\boldsymbol{\psi}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} V \end{cases} \quad (6.13)$$

oraz

$$\mathbf{b}^\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \left[\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right]^T \mathbf{C}\boldsymbol{\psi}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} V - 2\sigma_y^2 V. \quad (6.14)$$

Elementy macierzy \mathbf{K}_T mają postacie

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_T^{\sigma\sigma} = \left[-\lambda\psi V + \lambda \frac{\alpha}{1-\alpha} \lambda\psi [\mathbf{A}^{-1}]^T \mathbf{C}\psi V \right]^T \\ \mathbf{K}_T^{\sigma\varepsilon} = -\psi\sigma V + \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\psi\mathbf{C}\bar{\varepsilon} + \lambda\psi\mathbf{C}\mathbf{P} \right] V \\ \mathbf{K}_T^{\lambda\sigma} = \left[-\psi\sigma V + \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\lambda\psi [\mathbf{A}^{-1}]^T \mathbf{C}\psi\sigma + \psi\mathbf{C}\bar{\varepsilon} \right] V - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \lambda\psi [\mathbf{A}^{-1}]^T \mathbf{C}\psi\mathbf{C}\bar{\varepsilon} V \right]^T \\ \mathbf{K}_T^{\lambda\varepsilon} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{P}^T \mathbf{C}\psi\sigma V - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \mathbf{P}^T \mathbf{C}\psi\mathbf{C}\bar{\varepsilon} V \end{array} \right. , \quad (6.15)$$

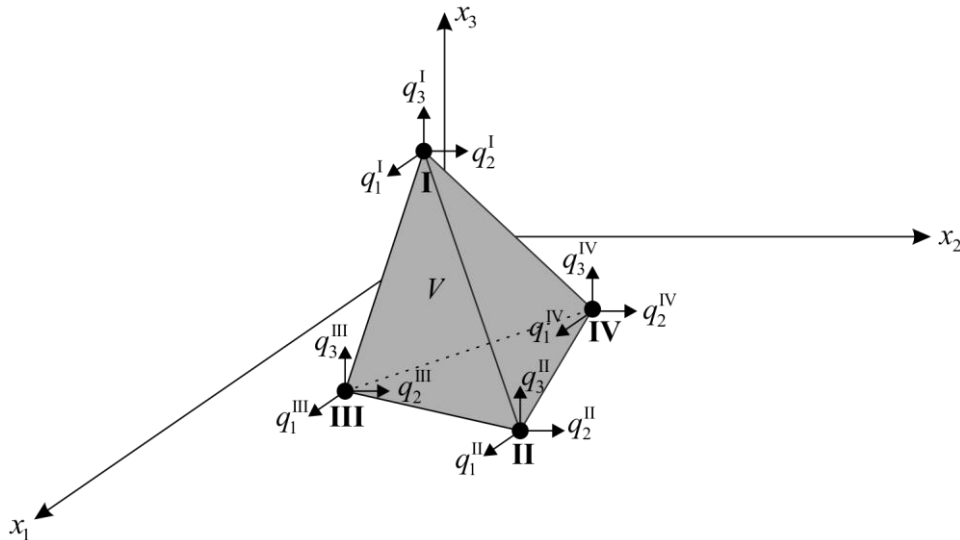
gdzie w celu zmniejszenia rozmiarów wzorów użyto pomocniczych oznaczeń

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \mathbf{I} + \lambda \frac{\alpha}{1-\alpha} \psi\mathbf{C} \\ \mathbf{P} = \left[-\mathbf{A}^{-1}\psi \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\lambda + \mathbf{A}^{-1} \right] \psi \left(\sigma - \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{C}\bar{\varepsilon} \right) \end{array} \right. \quad (6.16)$$

Aby uzyskać jawną postać (6.15), należy również wykonać podstawienie $\bar{\varepsilon}$ zgodnie ze wzorem (5.8).

Mając w ten sposób dane wszystkie elementy równania MES (3.4), a także wszystkie elementy macierzy \mathbf{K}_T dla metody NR (4.4), można rozwiązać przy pomocy algorytmu MES dowolne zadanie przy założeniu płaskiego stanu naprężenia oraz jednego z wymienionych warunków plastyczności.

6.2.3. Czworościenny element skończony



Rys. 6.2. Czworościenny element skończony

Czworościenny element skończony jest analogiczny do tarczowego (rys. 6.2). Charakteryzuje się tym samym opisem matematycznym, przy czym wektory przemieszczeń, przemieszczeń węzłowych, naprężeń i odkształceń mają inne rozmiary

$$\begin{cases} \mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T \\ \mathbf{q} = [q_1^I, q_2^I, q_3^I, q_1^{II}, q_2^{II}, q_3^{II}, q_1^{III}, q_2^{III}, q_3^{III}, q_1^{IV}, q_2^{IV}, q_3^{IV}]^T \\ \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}]^T \end{cases} \quad (6.17)$$

Macierz funkcji kształtu ma postać

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} L_I & 0 & L_{II} & 0 & L_{III} & 0 & L_{IV} & 0 \\ 0 & L_I & 0 & L_{II} & 0 & L_{III} & 0 & L_{IV} \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

gdzie $L_I, L_{II}, L_{III}, L_{IV}$ to współrzędne objętościowe (podobnie jak współrzędne powierzchniowe – szczegółowo omówione w [31]). Również macierz geometryczna $\bar{\mathbf{B}}$ wynikająca z przyjętej aproksymacji przemieszczeń za pomocą tych współrzędnych oraz liniowych związków geometrycznych została przedstawiona w [31]. W przypadku takiej definicji $\bar{\mathbf{B}}$ zachodzi

$$\mathbf{B} = \frac{1}{V} \int_V \bar{\mathbf{B}} dV = \bar{\mathbf{B}}, \quad (6.19)$$

gdzie V jest objętością czworościanu. Rozmiar macierzy stałych sprężystości musi odpowiadać rozmiarowi wektora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$, stąd przy założeniu izotropii materiału

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

W przypadku przyjęcia warunku HMH z idealną plastycznością bądź warunku HMH ze wzmocnieniem kinematycznym mają zastosowanie wzory (6.10)–(6.16), przy czym macierz $\boldsymbol{\Psi}$ dla przestrzennego stanu naprężenia ma postać jak w (1.7) i zostaje ponownie przytoczona dla spójności opisu w obrębie niniejszego rozdziału

$$\Psi = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

6.2.4. Przykłady obliczeniowe

6.2.4.1. Informacje ogólne dotyczące przykładów

Bazując na równaniach przedstawionych w p. 6.2.1 oraz 6.2.2, dotyczących tarczowego elementu skończonego, można wykonać obliczenia za pomocą algorytmu MES. Zadaniem przykładów numerycznych jest sprawdzenie efektywności i weryfikacja zarówno algorytmu, jak i ostatecznie bazy równań MES – funkcjonału (3.1).

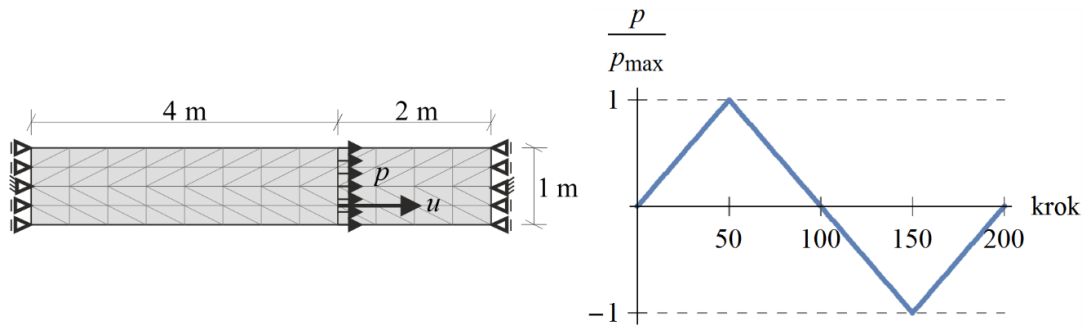
Część z przykładów posiada odpowiadające im rozwiązania ściśle. W pozostałych przypadkach przeprowadza się porównanie z rozwiązaniami pochodzącymi z programu Abaqus 6.13, a także w jednym zadaniu – z wynikami pochodzącymi z innej publikacji. Wykazuje się także efektywność optymalizacji omówionej w p. 4.3.

Wartości obciążeń oraz geometria tarcz nie dotyczą rzeczywistych konstrukcji, choć dla precyzji opisu podaje się jednostki wymiarów, obciążeń i naprężeń. We wszystkich przykładach zakłada się jednostkową grubość tarczy (1 m). Liczbę iteracji metody NR przyjmuje się taką, by zapewniała zbieżność rozwiązania (zwykle 3 iteracje są wystarczające). Liczba kroków przyrostowych wynika z potrzeby odzwierciedlenia zadanego w przykładach programu obciążenia i nie ma tak istotnego wpływu na rozwiązanie jak liczba iteracji metody NR czy liczba elementów skończonych. Ze względu na dużą liczbę przykładów przedstawia się tylko reprezentacyjne wyniki, a w przypadku weryfikacji stwierdza się zgodność wyników z prostym rozwiązaniem analitycznym bez wprowadzania szczegółowych wzorów.

6.2.4.2. Tarcza w jednoosiowym stanie naprężenia, idealna plastyczność

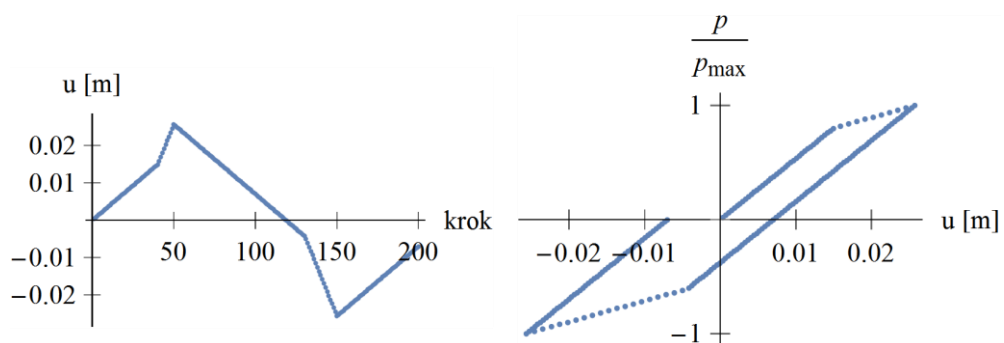
Jako pierwszy przykład rozpatrywana jest tarcza w jednoosiowym stanie naprężenia. Obciążenie przyłożone jest w dwóch trzecich jej rozpiętości (rys. 6.3). Pozwala to na wprowadzenie w stan plastyczny tylko części tarczy po prawej stronie obciążenia przy odpowiedniej jego wartości maksymalnej p_{\max} i granicy plastyczności σ_y . Program obciążenia (rys. 6.3) jest tak dobrany, by po

uplastycznieniu (ze względu na ściskanie) obciążenie zmniejszyło się i zmieniło kierunek, po czym ponownie uplastycniło (ze względu na rozciąganie) tę samą część tarczy i zmalowało do zera. Do obliczeń przyjęto następujące dane: $E = 20 \text{ MPa}$, $\nu = 0$, $\sigma_y = 150 \text{ kPa}$ (warunek HMH, idealna plastyczność), $p_{\max} = 280 \text{ kPa}$, 96 elementów skończonych, 200 kroków przyrostowych, 3 iteracje metody NR.



Rys. 6.3. Schemat tarczy i program obciążenia

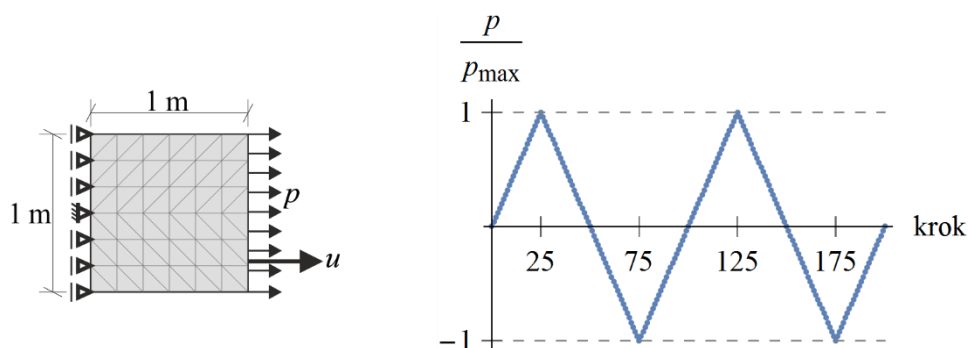
Wyniki obliczeń algorytmu MES przedstawia wykres zależności przemieszczenia u od aktualnego kroku przyrostowego oraz wykres zależności obciążenie – przemieszczenie (rys. 6.4). Rozwiązanie analityczne równowaznego jednowymiarowego przypadku prętowego pokrywa się z wynikami algorytmu MES (ze względu na trywialność, rozwiązanie to nie jest przedstawione). Dane zostały dobrane w taki sposób, że tylko część tarczy ulega plastycznemu płynięciu, co zapewnia istnienie rozwiązania w przypadku idealnej plastyczności. Zmiany kąta nachylenia wykresów (rys. 6.4) odpowiadają zmianom zachowania prawej części tarczy – z odpowiedzi sprężystej na plastyczne płynięcie.



Rys. 6.4. Historia przemieszczenia i zależność obciążenie – przemieszczenie

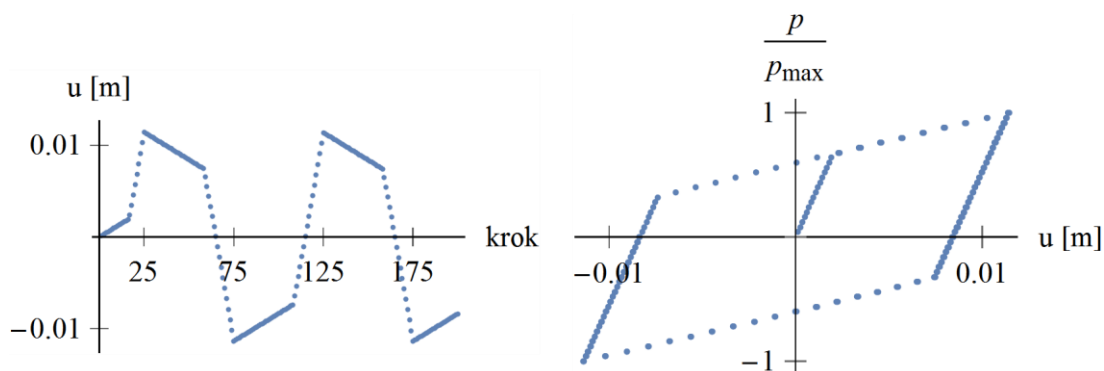
6.2.4.3. Tarcza w jednoosiowym stanie naprężenia, wzmocnienie kinematyczne

Kolejny przykład dotyczy również tarczy w jednoosiowym stanie naprężenia przy założeniu warunku plastyczności HMH ze wzmocnieniem kinematycznym. Założenie to pozwala na jednostronne podparcie tarczy (rys. 6.5), ponieważ w przypadku wzmocnienia kinematycznego (współczynnik wzmocnienia $\alpha > 0$) możliwe jest rozwiązanie zadania, nawet gdy uplastycznieniu ulega cała konstrukcja. Program obciążenia (rys. 6.5) obejmuje dwa identyczne cykle o przebiegu takim jak w poprzednio opisywanym przykładzie (rys. 6.3). Przyjęto następujące dane do obliczeń: $E = 20$ MPa, $\nu = 0,2$, $\sigma_y = 40$ kPa, $\alpha = 0,1$, $p_{\max} = 60$ kPa, 72 elementy skończone, 200 kroków przyrostowych, 3 iteracje metody NR.



Rys. 6.5. Schemat tarczy i program obciążenia

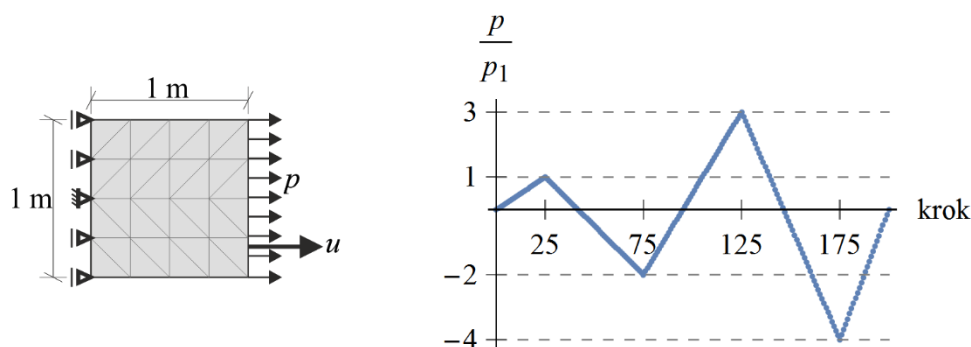
Wyniki obliczeń algorytmu MES przedstawia rys. 6.6, obrazujący zmiany przemieszczenia swobodnej krawędzi tarczy. Rozwiązanie analityczne równoważnego przypadku prętowego pokrywa się z rozwiązaniem MES. Na wykresie obciążenie – przemieszczenie oba cykle obciążenia nakładają się na siebie. Na tym wykresie nachylenie linii w fazie plastycznego płynięcia (wyniki w postaci oddalonych punktów) jest 10 razy mniejsze w stosunku do początkowego nachylenia (faza sprężystej pracy konstrukcji), co jest zgodne z założonym współczynnikiem wzmocnienia $\alpha = 0,1$.



Rys. 6.6. Historia przemieszczenia i zależność obciążenie – przemieszczenie

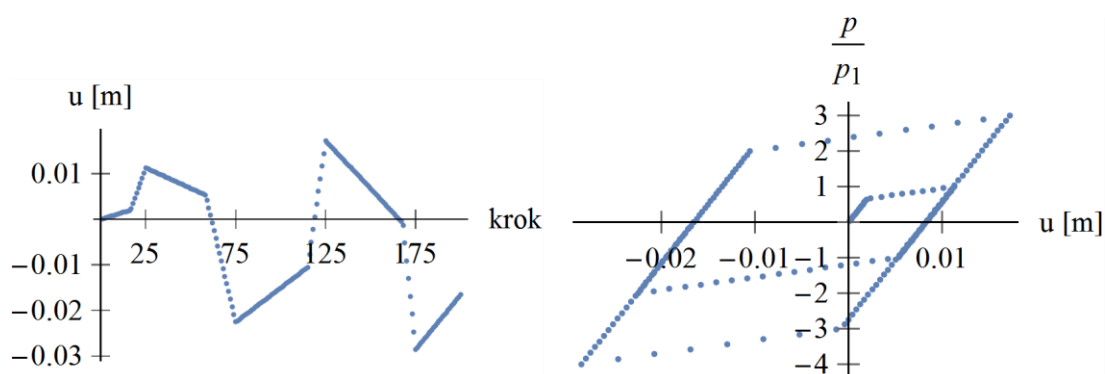
6.2.4.4. Tarcza w jednoosiowym stanie naprężenia, wzmocnienie izotropowe

W przypadku wzmocnienia izotropowego przeprowadzana jest weryfikacja algorytmu na przykładzie tarczy o identycznej geometrii jak w p. 6.2.4.3. Aby zaobserwować efekt tego wzmocnienia, przyjęto odpowiedni program obciążenia (rys. 6.7). W celu kilkukrotnego uplastycznienia tarczy, wartość bezwzględna obciążenia każdorazowo rośnie po zmianie kierunku obciążania (najwyższa wartość w krokach 25, 75, 125 i 175). Do obliczeń przyjęto następujące dane: $E = 20 \text{ MPa}$, $\nu = 0,2$, $\sigma_y = 40 \text{ kPa}$, $\alpha = 0,1$, $p_{\max} = 60 \text{ kPa}$, 36 elementów skończonych, 200 kroków przyrostowych, 5 iteracji metody NR.



Rys. 6.7. Schemat tarczy i program obciążenia

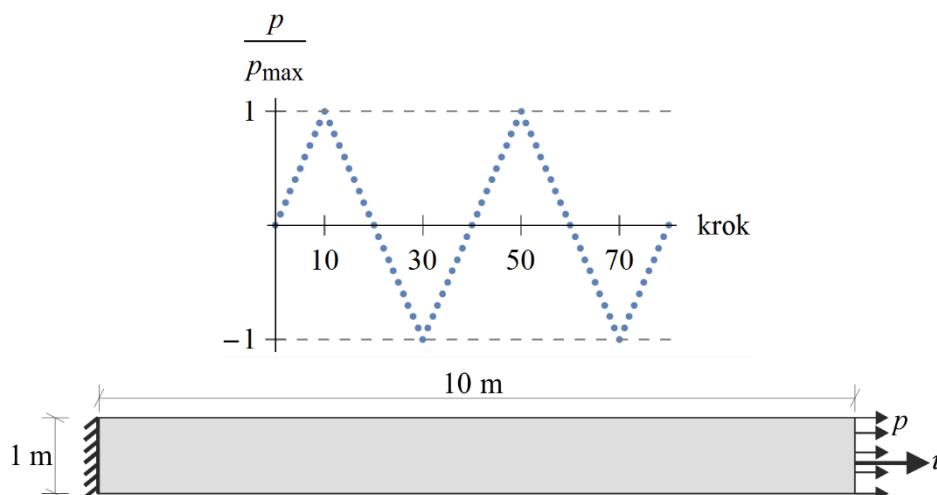
Wyniki obliczeń algorytmu MES przedstawia rys. 6.8. Także w tym przykładzie rozwiązanie analityczne równowaznego zadania prętowego pokrywa się z wynikami MES. Na wykresie zależności obciążenie – przemieszczenie (rys. 6.8) można zaobserwować wyraźne przesunięcie wartości obciążenia powodujące uplastycznienie, co jest wywołane izotropowym wzmocnieniem materiału.



Rys. 6.8. Historia przemieszczenia i zależność obciążenie – przemieszczenie

6.2.4.5. Przykład zastosowania algorytmu po optymalizacji

W punkcie 4.3 przedstawiono sposób optymalizacji algorytmu MES poprzez blokową eliminację macierzowego równania MES. Niniejszy przykład obrazuje efekt optymalizacji.

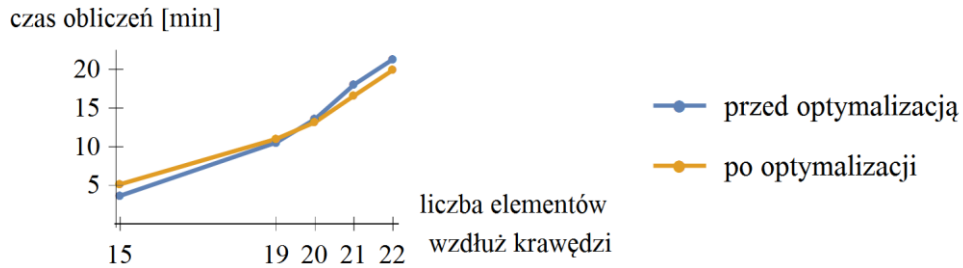


Rys. 6.9. Schemat tarczy i program obciążenia

Kryterium, pozwalającym ocenić efektywność optymalizacji jest czas obliczeń wykonywanych za pomocą algorytmu przed i po zastosowaniu optymalizacji na tym samym komputerze, dla tego samego zadania (rys. 6.9) o następujących danych wejściowych: $E = 20 \text{ Pa}$, $\nu = 0$, $\sigma_y = 40 \text{ Pa}$, $\alpha = 0,1$ (warunek HMM ze wzmocnieniem kinematycznym), $p_{\max} = 56 \text{ Pa}$, 80 kroków przyrostowych, 3 iteracje metody NR. Wartości danych są dobrane przypadkowo. Istotne jest jedynie, aby zachodziło $p_{\max} > \sigma_y$, co zapewnia uplastycznienie tarczy i wykorzystanie zoptymalizowanego algorytmu.

Przyjmuje się podział na taką samą liczbę elementów skończonych wzdłuż krótszego (1 m) i dłuższego (10 m) boku tarczy, co prowadzi do powstania prostokątnej siatki MES (każdy prostokąt zawiera dwa trójkątne elementy skończone). W ogólności taki podział prowadzi do powstania „wydłużonych” trójkątnych elementów, co jednak w odniesieniu do rozważanego zadania nie wpływa negatywnie na uzyskiwane wyniki, ponieważ zbliżone jest ono do przypadku prostego rozciągania. Czasy obliczeń przy różnej liczbie elementów skończonych przedstawia rys. 6.10. Na podstawie wykresu można zauważyć, że dopiero przy pewnej granicznej liczbie elementów skończonych (ok. $20 \cdot 20 \cdot 2 = 800$) optymalizacja algorytmu przynosi żądany efekt – skrócenie czasu obliczeń w stosunku do algorytmu bez jej wykorzystania. Z powodów opisanych w p. 4.3 fakt ten nie jest zaskakujący. Należy także dodać, że w celu zaobserwowania pełnego efektu optymalizacji należałoby, nie wchodząc w aspekty programistyczne, sam kod programu przeformułować w taki sposób, by nie był

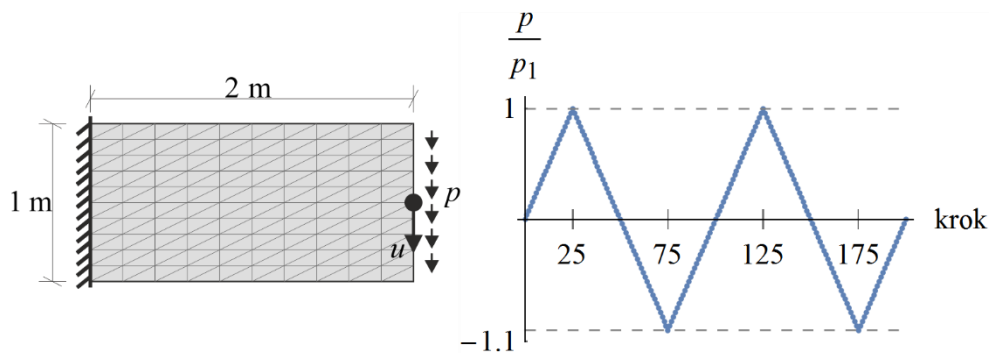
tylko adaptacją kodu sprzed optymalizacji (jak to zostało zrobione), ale by był adekwatny do nowego rozwiązania. Nie jest to jednak konieczne, gdyż przedstawione porównanie wystarczająco uzasadnia sens zastosowania optymalizacji.



Rys. 6.10. Czas obliczeń algorytmu przed i po optymalizacji dla różnej liczby elementów skończonych

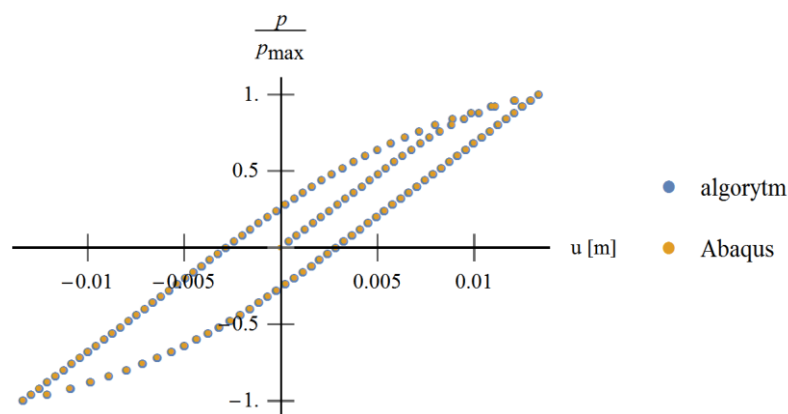
6.2.4.6. Tarcza wspornikowa, wzmocnienie kinematyczne

Kolejnym, bardziej złożonym przykładem jest tarcza wspornikowa o geometrii i programie obciążenia przyjętych jak na rys. 6.11. Badane jest ugięcie swobodnej krawędzi tarczy przy założeniu warunku HMM ze wzmocnieniem kinematycznym. Dane wejściowe algorytmu MES wynoszą: $E = 20$ MPa, $\nu = 0,2$, $\sigma_y = 40$ kPa, $\alpha = 0,1$, $p_{\max} = 6$ kPa, 200 elementów skończonych, 200 kroków przyrostowych, 3 iteracje metody NR.



Rys. 6.11. Schemat tarczy i program obciążenia

Rozwiązanie porównano z wynikami uzyskanymi w programie Abaqus, w którym wprowadzono tarczę o tej samej geometrii, siatce MES i parametrach wytrzymałościowych. Zadano ten sam program obciążenia, liczbę kroków przyrostowych i model plastyczności. Wyniki porównano na płaszczyźnie obciążenie – przemieszczenie (rys. 6.12).

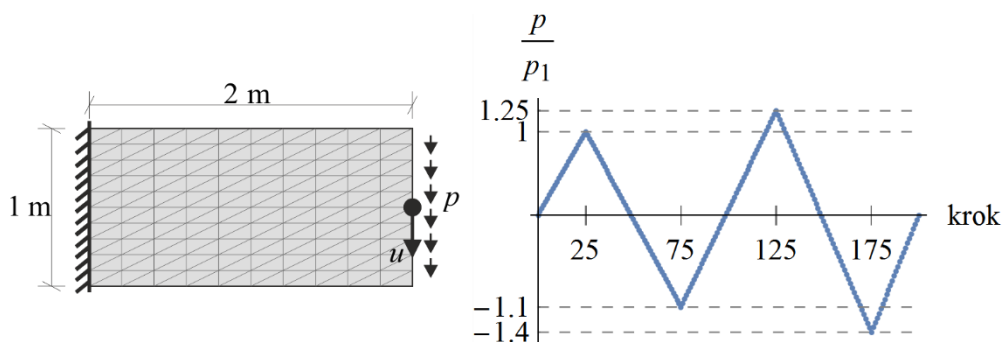


Rys. 6.12. Zależność obciążenie – przemieszczenie

Rezultaty pokrywają się, pomimo zastosowania dwu cykli obciążania – odciążania. Należy zaznaczyć, że w celu oceny dokładności rozwiązania potrzebne byłoby zagęszczenie siatki MES. Niemniej jednak celem było porównanie wyników algorytmu MES z uzyskanymi z programu Abaqus. Ich zgodność jest wystarczającą przesłanką przemawiającą za poprawnością algorytmu.

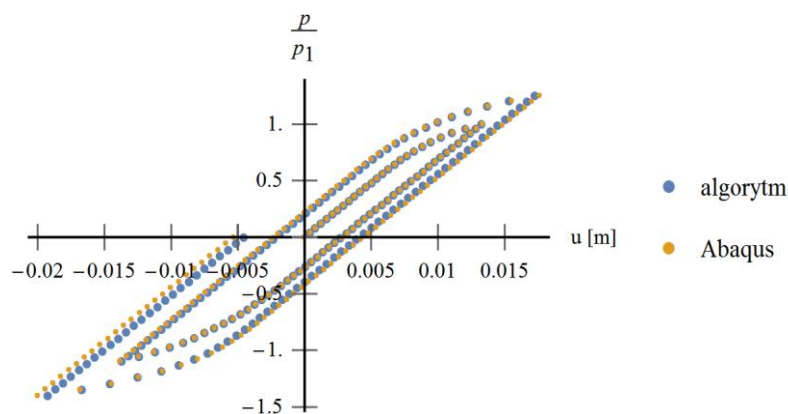
6.2.4.7. Tarcza wspornikowa, wzmocnienie izotropowe

Dla porównania rozpatruje się odpowiedź tej samej tarczy przy założeniu warunku HMH ze wzmocnieniem izotropowym. Przyjęto program obciążenia pokazany na rys. 6.13 i następujące dane wejściowe algorytmu MES: $E = 20 \text{ MPa}$, $\nu = 0,2$, $\sigma_y = 40 \text{ kPa}$, $\alpha = 0,1$, $p_{\max} = 6 \text{ kPa}$, 200 elementów skończonych, 200 kroków przyrostowych, 3 iteracje metody NR.



Rys. 6.13. Schemat tarczy i program obciążenia

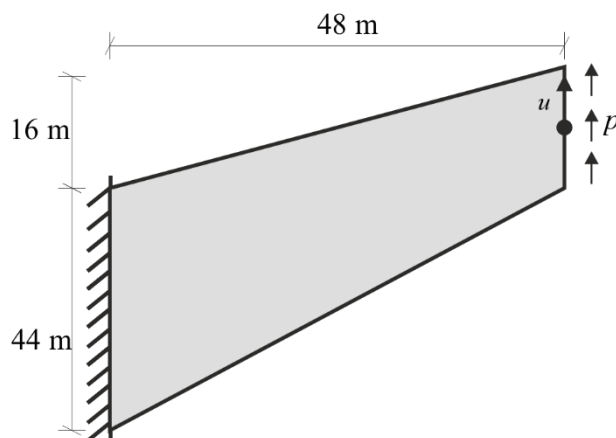
Porównanie wyników obrazuje wykres na rys. 6.14. Można zauważyć, że wyniki algorytmu MES oraz zaimportowane z programu Abaqus są niemal identyczne i pomimo dość skomplikowanego programu obciążenia, wykresy dla obu cykli obciążania – odciążania są usytuowane blisko siebie.



Rys. 6.14. Zależność obciążenie – przemieszczenie

6.2.4.8. Tarcza Cooke'a

Ostatnim przykładem jest powszechnie stosowana do testów numerycznych tarcza Cooke'a [8], widoczna na rys. 6.15. W tym przypadku celem jest porównanie stref plastycznych, rozkładów naprężeń oraz ugięć uzyskanych zarówno przez własny algorytm MES, jak i przez program Abaqus oraz podanych w pracy [6], skąd zaczerpnięte są szczegółowe dane do przykładu.



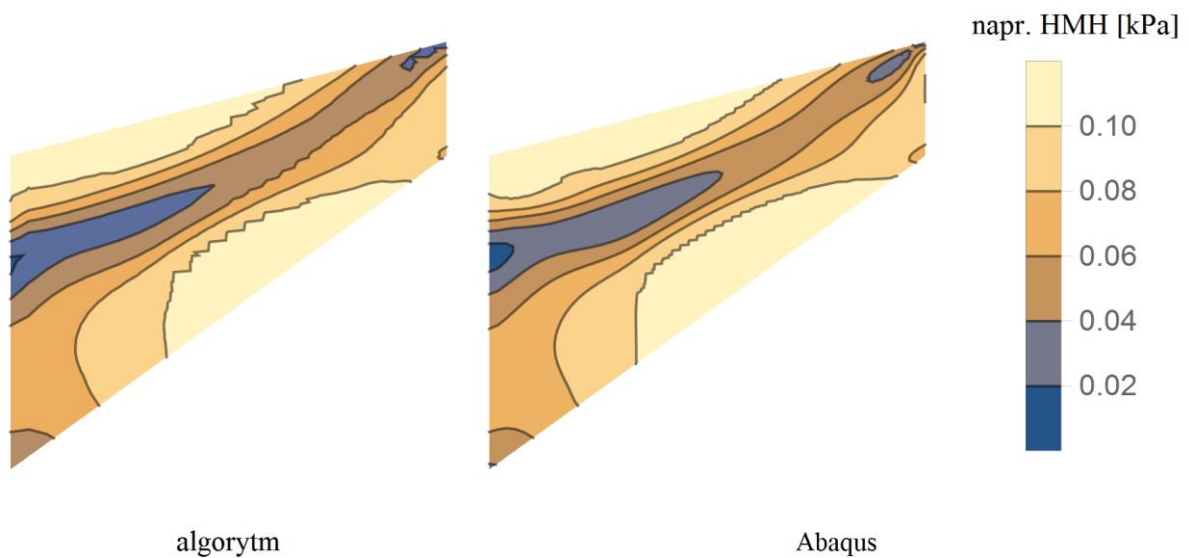
Rys. 6.15. Schemat tarczy Cooke'a

Przyjęto prosty program obciążenia, gdzie p wzrasta od 0 do 0,0375 kPa. Pozostałe dane wejściowe algorytmu MES wynoszą: $E = 1$ kPa, $\nu = 0,33$, $\sigma_y = 0,1$ kPa, $\alpha = 0,01$, 1152 elementów skończonych, 50 kroków przyrostowych, 3 iteracje metody NR. Warto dodać, że wpływ wzmocnienia jest niezauważalny, ponieważ $\alpha=0,01$, a ponadto rodzaj wzmocnienia (kinematyczne lub izotropowe) jest nieistotny ze względu na fakt, że tarcza doznaje tylko zwiększenia obciążenia.

Podane liczby kroków i elementów skończonych dotyczą tylko algorytmu własnego. Przyjęta siatka MES jest regularna, a liczba kroków przyrostowych i liczba elementów są ograniczone z powodu długiego czasu obliczeń, jednak, co zostanie wykazane, wystarczające na uzyskanie rezultatów

zbliżonych do dokładnych. Zarówno w programie Abaqus, jak i w pracy [6], liczby kroków przyrostowych i elementów skończonych są dobrane tak, by otrzymać pełną zbieżność rozwiązania.

Wartość przemieszczenia u odczytana z wykresu ([6], rys. 4) wynosi nieco ponad 20 m, a wartość uzyskana w programie Abaqus to 20,14 m. Algorytm własny podaje przemieszczenie $u=19,48$ m, co wydaje się dobrym wynikiem, biorąc pod uwagę przyjęte ograniczenia. Również rozkład naprężeń zredukowanych HMM (rys. 6.16) jest bardzo podobny do uzyskanego w programie Abaqus. W szczególności strefy plastyczne oznaczone najjaśniejszym kolorem mają niemal identyczne kształty.

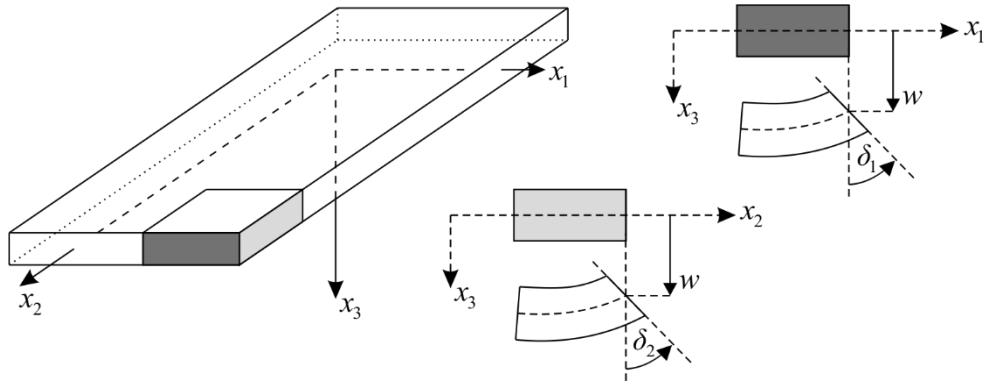


Rys. 6.16. Porównanie naprężeń zredukowanych HMM

6.3. Płyty

6.3.1. Funkcjonał dla płyty warstwowej

Punkt 6.3 opisuje zastosowanie zmodyfikowanego funkcjonału Hu–Washizu (2.5) w odniesieniu do płytowych elementów skończonych, dla których nie są stosowane gotowe równania, jak było w przypadku tarcz. Dlatego konieczne jest ich wyprowadzenie. Wygodnie jest posłużyć się funkcjonałem w formie ciągłej, co zostanie uzasadnione.



Rys. 6.17. Przemieszczenia uogólnione w płycie

Bazując na równaniach płyt grubych Reissnera–Mindlina [14, 23], funkcjonal (2.5) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\sigma}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \mathbf{u}_p, \lambda_p) = & \frac{1}{2} \int_A (\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\varepsilon}_p^n)^T \mathbf{C}_p (\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\varepsilon}_p^n) dA - \int_A (\boldsymbol{\sigma}_p - \boldsymbol{\sigma}_p^n)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_p^n - \mathbf{L} \mathbf{u}_p) dA \\ & - \int_A (\Delta \mathbf{f}_p^T \mathbf{u}_p) dA - \int_A \lambda_p \Phi(\boldsymbol{\sigma}_p) dA \end{aligned} \quad (6.22)$$

gdzie A to pole powierzchni płyty, zaś $\boldsymbol{\sigma}_p$, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$, \mathbf{u}_p , \mathbf{f} to wektory odpowiednio uogólnionych sił wewnętrznych, odkształceń, przemieszczeń i obciążeń odniesionych do powierzchni środkowej płyty (zgodnie z rys. 6.17)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_p = [M_{11}, M_{22}, M_{12}, Q_1, Q_2]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p = [\kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}, \gamma_1, \gamma_2]^T \\ \mathbf{u}_p = [\delta_1, \delta_2, w]^T \\ \mathbf{f}_p = [m_1, m_2, q]^T \end{cases} \quad (6.23)$$

W (6.23) M_{11} , M_{22} , M_{12} , Q_1 , Q_2 to momenty zginające i siły tnące przypadające na jednostkę powierzchni płyty, m_1 , m_2 to intensywności obciążenia momentowego w dwu kierunkach, zaś q to intensywność obciążenia pionowego. Uogólnione odkształcenia są powiązane z uogólnionymi przemieszczeniami równaniem

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{L} \mathbf{u}_p, \quad (6.24)$$

gdzie

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

Macierz uogólnionych stałych sprężystości ma postać

$$\mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}GH^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6}GH & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6}GH \end{bmatrix}, \quad (6.26)$$

gdzie H jest grubością płyty, D sztywnością płytową

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (6.27)$$

zaś G modułem Kirchoffa, przy założeniu materiału izotropowego, zależnym od modułu Younga E i współczynnika Poissona ν

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (6.28)$$

Przyjmując oznaczenie wyróżniające oś pionową

$$z = x_3, \quad (6.29)$$

z założonego w teorii płyt parabolicznego rozkładu naprężeń τ_{13} , τ_{23} (lepiej oddającego rzeczywistość niż stały wynikający z równań Reissnera–Mindlina) oraz liniowego rozkładu naprężeń σ_1 , σ_2 , τ_{12} można wprowadzić następujące związki pomiędzy momentami zginającymi i siłami tnącymi a naprężeniami

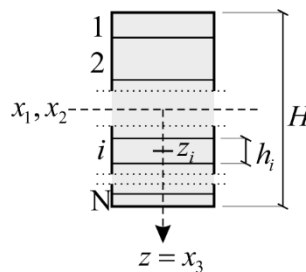
$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \int_H \tau_{13}(z) f(z) dz \\ Q_2 = \int_H \tau_{23}(z) f(z) dz \\ M_{11} = \int_H \sigma_1(z) g(z) dz, \\ M_{22} = \int_H \sigma_2(z) g(z) dz \\ M_{12} = \int_H \tau_{12}(z) g(z) dz \end{array} \right. \quad (6.30)$$

gdzie

$$\left\{ \begin{array}{l} f(z) = \frac{5}{4} \left(1 - 4 \frac{z^2}{H^2} \right) \\ g(z) = z \end{array} \right. \quad (6.31)$$

W funkcjale (6.22) dA oznacza różniczkowo mały fragment powierzchni płyty. Zatem warunek plastyczności należałoby też zdefiniować w odniesieniu do tej powierzchni, bez uwzględnienia różnego wyężenia materiału w obrębie przekroju płyty. Co więcej, jeden parametr λ_p definiowałby wtedy przyrost wszystkich odkształceń uogólnionych. Te dwie obserwacje prowadzą do wniosku, że funkcjonal jest daleki od fizycznego opisu uplastycznienia płyty, ponieważ zakłada jednoczesne uplastycznienie całego jej przekroju.

Rozwiązaniem tego problemu może być modyfikacja funkcjonału w taki sposób, aby uwzględniał różnice w stanie naprężenia i odkształcenia w poszczególnych „warstwach” płyty. Aby dokonać tej modyfikacji należy w pierwszym kroku podzielić przekrój płyty na N warstw (rys. 6.18).



Rys. 6.18. Przekrój płyty podzielony na warstwy

Celem podziału jest osobne rozpatrywanie naprężeń, odkształceń i parametrów λ_p w poszczególnych warstwach. Zakładając stałe naprężenia w każdej i -tej warstwie można zapisać

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_H \tau_{13}(z) f(z) dz \approx \sum_{i=1}^N \tau_{13;i} f_i h_i \\ \int_H \tau_{23}(z) f(z) dz \approx \sum_{i=1}^N \tau_{23;i} f_i h_i \\ \int_H \sigma_1(z) g(z) dz \approx \sum_{i=1}^N \sigma_{1;i} g_i h_i \\ \int_H \sigma_2(z) g(z) dz \approx \sum_{i=1}^N \sigma_{2;i} g_i h_i \\ \int_H \tau_{12}(z) g(z) dz \approx \sum_{i=1}^N \tau_{12;i} g_i h_i \end{array} \right. , \quad (6.32)$$

gdzie h_i jest grubością warstwy oraz

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i = f(z_i) = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{4z_i^2}{H^2} \right) \\ g_i = g(z_i) = z_i \end{array} \right. . \quad (6.33)$$

Przybliżone związki (6.32) stają się dokładnymi po przejściu granicznym $N \rightarrow \infty$.

Wprowadzając oznaczenia wektora naprężeń i odkształceń w i -tej warstwie

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_i = [\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}]_i^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}]_i^T \end{array} \right. , \quad (6.34)$$

można zapisać tożsamości

$$\left\{ \begin{array}{l} (\boldsymbol{\varepsilon}_P - \boldsymbol{\varepsilon}_P^n)^T \mathbf{C}_P (\boldsymbol{\varepsilon}_P - \boldsymbol{\varepsilon}_P^n) = \sum_{i=1}^N [(\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n)^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n) h_i] \\ (\boldsymbol{\sigma}_P - \boldsymbol{\sigma}_P^n)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_P + \boldsymbol{\varepsilon}_P^n - \mathbf{L} \mathbf{u}_P) = \sum_{i=1}^N [(\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_i^n)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i^n - \mathbf{M}_i \mathbf{L} \mathbf{u}) h_i] \end{array} \right. , \quad (6.35)$$

gdzie macierz \mathbf{M}_i wynika wprost ze związków (6.32)

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} g_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_i \end{bmatrix} , \quad (6.36)$$

a \mathbf{C} jest macierzą stałych sprężystości, taką samą dla każdej warstwy

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

Modyfikując ostatni składnik funkcjonału (6.22) poprzez wprowadzenie parametrów λ_i oraz funkcji plastyczności $\Phi_i(\boldsymbol{\sigma}_i)$ osobnych dla poszczególnych warstw, a także podstawiając zależności (6.35), funkcjonał (6.22) przybiera postać

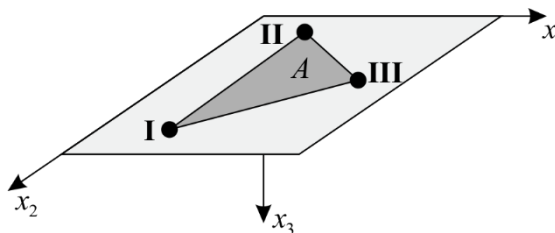
$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathbf{u}_p, \lambda_i) &= \frac{1}{2} \int_A \sum_{i=1}^N \left[(\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n)^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n) h_i \right] dA \\ &\quad - \int_A \sum_{i=1}^N \left[(\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_i^n)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{-n} - \mathbf{M}_i \mathbf{L} \mathbf{u}_p) h_i \right] dA. \\ &\quad - \int_A (\Delta \mathbf{f}_p^T \mathbf{u}_p) dA - \int_A \sum_{i=1}^N [\lambda_i \Phi_i(\boldsymbol{\sigma}_i) h_i] dA \end{aligned} \quad (6.38)$$

Wielkościami, które nie dotyczą pojedynczej warstwy płyty, a odnoszą się do jej płaszczyzny środkowej, są wektor przemieszczeń uogólnionych \mathbf{u}_p i wektor intensywności obciążeń \mathbf{f}_p . Oznaczając symbolicznie poprzez $\mathbf{f}_{p,i}$ część wektora obciążeń zewnętrznych przypadającego na i -tą warstwę, składnik funkcjonału (6.38) w odniesieniu do tej warstwy ma postać

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int_A (\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n)^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n) h_i dA - \int_A (\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_i^n)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{-n} - \mathbf{M}_i \mathbf{L} \mathbf{u}_p) h_i dA \\ &\quad - \int_A (\Delta \mathbf{f}_{p,i}^T \mathbf{u}_p) dA - \int_A \lambda_i \Phi_i(\boldsymbol{\sigma}_i) h_i dA \end{aligned} \quad (6.39)$$

Wzór (6.39) jest analogiczny do funkcjonału (2.5), co potwierdza poprawność funkcjonału (6.38) w sensie zastosowania do zagadnień teorii plastyczności.

6.3.2. Definicja elementu skończonego



Rys. 6.19. Płytowy element skończony

Wprowadza się trójkątny płytowy element skończony o parametrach węzłowych

$$\mathbf{q} = [\delta_1^I, \delta_2^I, w^I, \delta_1^{II}, \delta_2^{II}, w^{II}, \delta_1^{III}, \delta_2^{III}, w^{III}]^T. \quad (6.40)$$

Przyjmuje się liniową aproksymację wektora przemieszczeń \mathbf{u}_p (6.23)₃ za pomocą współrzędnych powierzchniowych L_I, L_{II}, L_{III} [31]

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (6.41)$$

gdzie

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} L_I & 0 & 0 & L_{II} & 0 & 0 & L_{III} & 0 & 0 \\ 0 & L_I & 0 & 0 & L_{II} & 0 & 0 & L_{III} & 0 \\ 0 & 0 & L_I & 0 & 0 & L_{II} & 0 & 0 & L_{III} \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

Naprężenia i odkształcenia (6.34) są stałe w każdej i -tej warstwie w obrębie elementu skończonego.

Po dyskretyzacji i scałkowaniu funkcjonal (6.38) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathbf{q}, \lambda_i) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n)^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n) V_i] - \sum_{i=1}^N [(\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_i^n)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{-n} - \mathbf{B}\mathbf{q}) V_i] \\ & - \Delta \mathbf{f}^T \mathbf{q} - \sum_{i=1}^N [\lambda_i \Phi_i(\boldsymbol{\sigma}_i) V_i] \end{aligned}, \quad (6.43)$$

gdzie \mathbf{f} jest wektorem obciążeń węzłowych oraz

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \int_A \mathbf{M}_i \mathbf{L} N dA \\ V_i = A h_i \end{cases}. \quad (6.44)$$

Warunek plastyczności w ogólności może być inny w każdej warstwie, co może mieć zastosowanie w modelowaniu rzeczywistej płyty warstwowej. W przykładach obliczeniowych dotyczących płyt rozważane będzie tylko kryterium HMM w przypadku idealnej plastyczności, co w odniesieniu do i -tej warstwy można zapisać

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_i^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma}_i - 2(\sigma_{y,i})^2, \quad (6.45)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}. \quad (6.46)$$

Oznaczając poprzez \mathbf{S} , \mathbf{E} , $\boldsymbol{\Lambda}$ wektory zawierające odpowiednio naprężenia, odkształcenia i parametry λ ze wszystkich warstw w elemencie skończonym

$$\begin{cases} \mathbf{S} = [\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \dots, \boldsymbol{\sigma}_N]^T \\ \mathbf{E} = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N]^T \\ \boldsymbol{\Lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]^T \end{cases} \quad (6.47)$$

można (6.43) przedstawić jako funkcjonal zależny od tych wektorów

$$\Pi(\mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\Lambda}), \quad (6.48)$$

jednak niemożliwe jest jego wyrażenie za pomocą zapisu macierzowego, stąd forma (6.43) jest wyjściową do sformułowania równania MES.

6.3.3. Równanie MES

Równanie MES, podobnie jak to było w przypadku elementów tarczowych, jest wyprowadzone dla jednego elementu skończonego w celu uproszczenia rozważań. Przyjmuje się dodatkowe założenie upraszczające, że grubość h wszystkich N warstw jest taka sama, stąd (6.44)₂ przybiera postać

$$V = Ah. \quad (6.49)$$

Wtedy minimalizacja funkcjonału (6.43) prowadzi do równania

$$\sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{B}_i^T V & 0 \\ 0 & \mathbf{C}V & -\mathbf{I}V & 0 \\ \mathbf{B}_i V & -\mathbf{I}V & 0 & -\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\sigma}_i V \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_i^T \boldsymbol{\Psi}V & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i \\ \boldsymbol{\sigma}_i \\ \lambda_i \end{Bmatrix} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\sigma}_i^n V \\ \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_i^n V - \boldsymbol{\sigma}_i^n V \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i^n V \\ -2(\sigma_{y,i})^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.50)$$

które można zapisać w sposób macierzowy następująco

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{B}_{el}^T V & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{el} V & -\mathbf{I} V & 0 \\ \mathbf{B} V & -\mathbf{I} V & 0 & \mathbf{K}_S^{SA} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_S^{AS} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{S} \\ \mathbf{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{f} + \mathbf{B}_{el}^T \mathbf{S}^n V \\ \mathbf{C}_{el} \mathbf{E}^n V - \mathbf{S}^n V \\ \bar{\mathbf{E}}^n V \\ \mathbf{b}^\Lambda \end{pmatrix}, \quad (6.51)$$

gdzie $\mathbf{b}_i^\Lambda = -2(\sigma_{y,i})^2$, zaś macierze \mathbf{B}_{el} , \mathbf{C}_{el} , \mathbf{K}_S^{SA} , \mathbf{K}_S^{AS} powstają w wyniku agregacji odpowiednich elementów macierzy z równania (6.50) względem warstw.

Równanie MES (6.51) ma strukturę taką jak (3.4), co pozwala zastosować przedstawiony w rozdziale 4. algorytm MES do rozwiązywania zadań teorii plastyczności dotyczących warstwowych elementów płytowych.

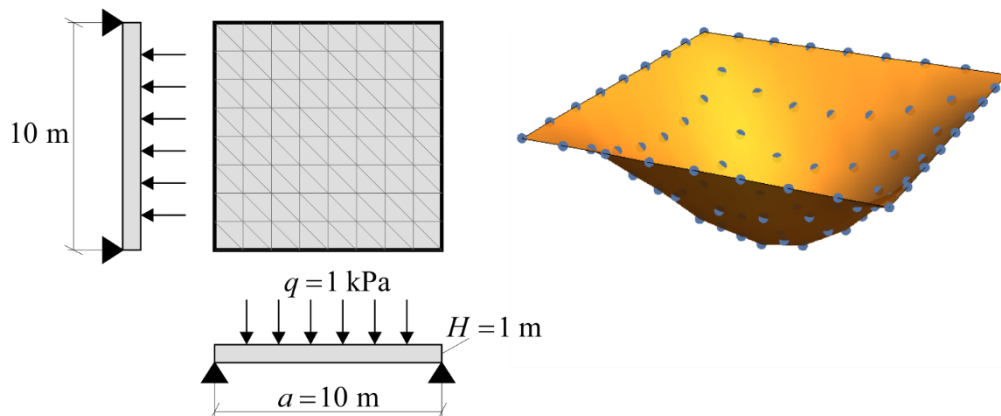
6.3.4. Przykłady obliczeniowe

6.3.4.1. Informacje ogólne

Bazując na równaniach zaprezentowanych w punktach 6.3.2 i 6.3.3 przeprowadza się analizy numeryczne w celu wykazania poprawności i efektywności algorytmu MES, równań, jak i samego zmodyfikowanego funkcjonału Hu–Washizu, będącego głównym przedmiotem tej pracy.

Liczba przykładów jest niewielka, a same przykłady charakteryzują się słabą dyskretyzacją (niewielka liczba elementów skończonych i warstw) ze względu na czas obliczeń. Z tego powodu w p. 6.3.5 rozważana będzie belka jako szczególny przypadek płyty, co umożliwi wykonanie dokładniejszych analiz numerycznych. W przedstawianych przykładach zakłada się tę samą granicę plastyczności dla wszystkich warstw przekroju płyty.

6.3.4.2. Ugięcie swobodnie podpartej płyty w stanie sprężystym



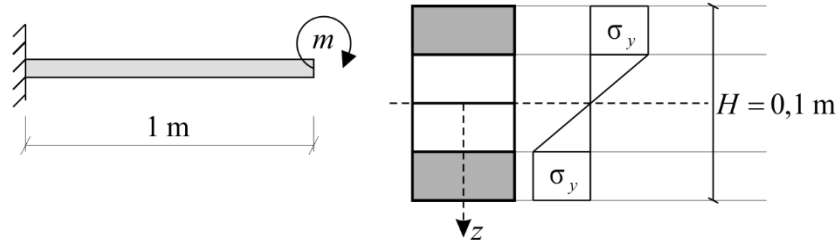
Rys. 6.20. Schemat płyty i postać przemieszczona z zaznaczonymi węzłami siatki MES

Przedmiotem pierwszej analizy jest płyta kwadratowa w stanie sprężystym, o parametrach materiałowych $E = 20 \text{ MPa}$, $\nu = 0,2$. Celem przykładu jest porównanie ugięcia w środku płyty policzonego przez algorytm z ugięciem wyznaczonym analitycznie. Ugięcie wynikające z zastosowania teorii płyt cienkich (płytę na rys. 6.20 można za taką uznać) i uzyskane za pomocą rozwiązania analitycznego (wykorzystano metodę Levy’ego [4]) ma wartość

$$w_{\text{Levy}} = 0,00406 \frac{qa^4}{D} = 0,0234 \text{ m} . \quad (6.52)$$

Przyjęto następujące dane wejściowe algorytmu MES: 1 krok przyrostowy, liczba warstw płyty: $N=6$, 128 elementów skończonych. Deformację płyty wygenerowaną przez algorytm przedstawia rys. 6.20. Ugięcie środka płyty wynosi $w_{\text{MES}} = 0,0228 \text{ m}$, co daje różnicę mniejszą niż 3% w stosunku do rozwiązania ścisłego (6.52). Wynik ten świadczy o poprawności modelu warstwowego w zakresie sprężystym, mimo zastosowania niewielkiej liczby warstw i elementów skończonych.

6.3.4.3. Płyta wspornikowa

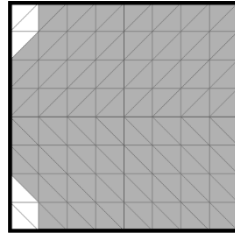


Rys. 6.21. Schemat płyty obciążonej momentem rozłożonym i rozkład naprężeń w przekroju

Przykład kwadratowej płyty wspornikowej obciążonej momentem rozłożonym w jednej płaszczyźnie pozwala dokonać weryfikacji poprzez porównanie z rozwiązaniem ścisłym. Jeżeli płytę potraktować jak belkę, można wyznaczyć analitycznie wartość momentu rozłożonego powodującego uplastycznienie zewnętrznych części przekroju, tak by pola uplastycznionej i nieuplastycznionej strefy były równe (rys. 6.21) w każdym miejscu płyty

$$m = \frac{11}{48} H^2 \sigma_y . \quad (6.53)$$

Przyjęto następujące dane wejściowe algorytmu MES: $E = 10 \text{ GPa}$, $\nu = 0,2$, $\sigma_y = 2,5 \text{ kPa}$, 128 elementów skończonych, $N=4$, 30 kroków przyrostowych, 3 iteracje metody NR, program obciążenia: moment rosnący liniowo od 0 do $1,1m$. Rezultaty obliczeń przedstawia rozkład stref plastycznych w płycie.

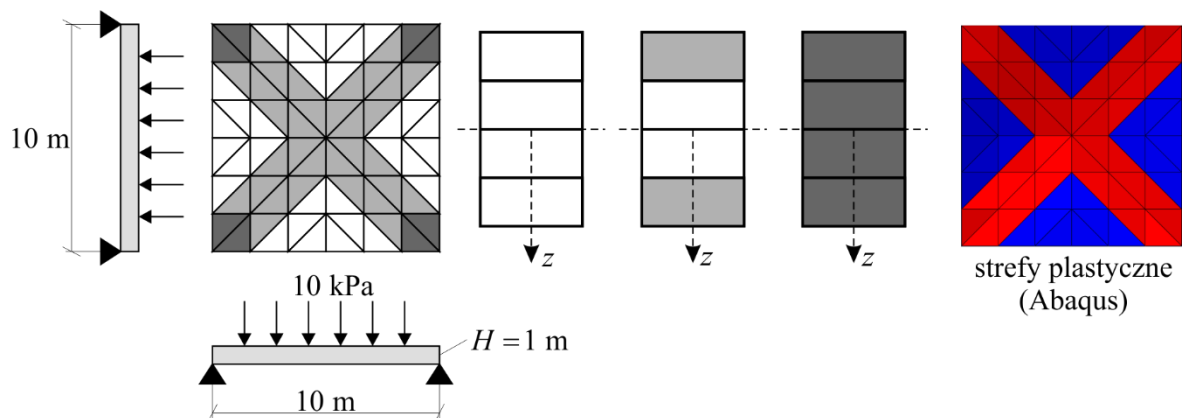


Rys. 6.22. Obszary o uplastycznionych warstwach zewnętrznych (kolor szary) i nieuplastycznione (kolor biały)

Uplastycznienie zewnętrznych warstw w prawie całym obszarze płyty (rys. 6.22) występuje dopiero przy maksymalnej wartości obciążenia momentowego $1,1m$. Jest to jednak niewielka różnica biorąc pod uwagę małą liczbę warstw przyjętą do analizy. Obecność nieuplastycznionych obszarów płyty należy tłumaczyć faktem, że rozwiązanie płyty i belki nie są całkowicie równoważne z powodu lokalnych efektów warunków brzegowych. Przedstawiony przykład wydaje się potwierdzać poprawność modelu płyt warstwowych.

6.3.4.4. Rozkład stref plastycznych w płycie swobodnie podpartej

Celem ostatniego przykładu jest jakościowe porównanie rozkładu stref plastycznych uzyskanych za pomocą algorytmu MES i wyznaczonych przez program Abaqus. Ze względu na odmienne definicje elementów skończonych, ich niewielką liczbę oraz inną liczbę warstw (w przypadku programu Abaqus bardziej należałoby mówić o liczbie punktów całkowania) rezultaty liczbowe nie stanowią przedmiotu porównań. Geometrię płyty przedstawia rys. 6.23.



Rys. 6.23. Schemat płyty wraz ze strefami plastycznymi wyznaczonymi przez własny algorytm MES oraz program Abaqus

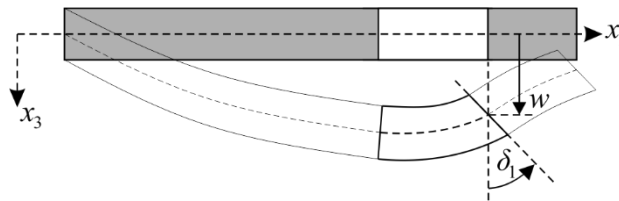
Przyjęto następujące dane wejściowe algorytmu MES: $E = 10 \text{ GPa}$, $\nu = 0,2$, $\sigma_y = 2,1 \text{ kPa}$, 72 elementy skończone, $N = 4$, 30 kroków przyrostowych, 3 iteracje metody NR, program obciążenia:

obciążenie równomiernie rozłożone rosnące liniowo od 0 do 10 kPa. Na rys. 6.23 białym kolorem oznaczono elementy nieuplastycznione, stan pozostałych odpowiada rysunkom przekrojów.

W wyniku analizy numerycznej o identycznych parametrach, geometrii i siatce elementów skończonych, przeprowadzonej w programie Abaqus przy zastosowaniu powłokowych elementów S3, uzyskano taki sam rozkład stref plastycznych – obszary, w których przynajmniej część przekroju uległa uplastycznieniu pokrywają się w obu rozwiązaniach.

6.3.5. Równanie MES belki jako szczególnego przypadku płyty

W celu dokładniejszej weryfikacji rozwiązania zastosowanego dla płyt, rozważa się belkę jako szczególny przypadek płyty. Równanie MES wynikające z wykorzystania elementów belkowych ma znacznie mniejsze rozmiary, co pozwala na przeprowadzenie dokładniejszych testów numerycznych. Z punktu widzenia teorii sprężystości przedmiotem analiz jest belka Timoshenki. W niniejszym punkcie przedstawia się ją jako postać przyjmują wzory wyprowadzone dla płyt, po przyjęciu upraszczających założeń charakterystycznych dla belek. Oznaczenia są analogiczne do tych z punktów 6.3.1 i 6.3.2.



Rys. 6.24. Przemieszczenia uogólnione w belce

Przemieszczenia uogólnione w belce Timoshenki przedstawia rys. 6.24. Funkcjonał w formie ciągłej w przypadku belki przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\sigma}_B, \boldsymbol{\varepsilon}_B, \mathbf{u}_B, \lambda_B) = & \frac{1}{2} \int_l (\boldsymbol{\varepsilon}_B - \boldsymbol{\varepsilon}_B^n)^T \mathbf{C}_B (\boldsymbol{\varepsilon}_B - \boldsymbol{\varepsilon}_B^n) b dl - \int_l (\boldsymbol{\sigma}_B - \boldsymbol{\sigma}_B^n)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_B + \boldsymbol{\varepsilon}_B^n - \mathbf{L} \mathbf{u}_B) b dl \\ & - \int_l (\Delta \mathbf{f}_B^T \mathbf{u}_B) b dl - \int_l \lambda_B \Phi(\boldsymbol{\sigma}_B) b dl \end{aligned} \quad , \quad (6.54)$$

gdzie l jest długością belki, zaś b jej wymiarem w kierunku prostopadłym do płaszczyzny (x_1, x_3) . W wyniku założenia zerowych naprężeń i odkształceń w tym kierunku, rozmiary odpowiednich wektorów ulegają zmniejszeniu

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_B = [M_{11}, Q_1]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_B = [\kappa_{11}, \gamma_1]^T \\ \mathbf{u}_B = [\delta_1, w]^T \\ \mathbf{f}_B = [m_1, q]^T \end{cases} \quad (6.55)$$

Zmianie ulega także macierz operatorowa

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 1 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \quad (6.56)$$

oraz macierz uogólnionych stałych sprężystości

$$\mathbf{C}_B = \begin{bmatrix} \frac{EH^3}{12} & 0 \\ 0 & \frac{5}{6}GH \end{bmatrix}. \quad (6.57)$$

Uwzględniając podział na poszczególne warstwy zmniejszeniu ulegają także wektory naprężenia i odkształcenia

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_i = [\sigma_1, \tau_{13}]_i^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i = [\varepsilon_1, \gamma_{13}]_i^T \end{cases}, \quad (6.58)$$

jak również macierz stałych sprężystości

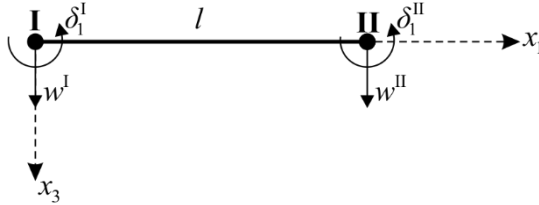
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}. \quad (6.59)$$

Funkcjonał (6.38) po „rozbiciu” na osobne warstwy nie zmienia swojej postaci

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathbf{u}_B, \lambda_i) &= \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^N \left[(\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n)^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n) h_i \right] b dl \\ &\quad - \int \sum_{i=1}^N \left[(\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_i^n)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{-n} - \mathbf{M}_i \mathbf{L} \mathbf{u}_B) h_i \right] b dl, \\ &\quad - \int (\Delta \mathbf{f}_B^T \mathbf{u}_B) b dl - \int \sum_{i=1}^N [\lambda_i \Phi_i(\boldsymbol{\sigma}_i) h_i] b dl \end{aligned} \quad (6.60)$$

gdzie

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} g_i & 0 \\ 0 & f_i \end{bmatrix}. \quad (6.61)$$



Rys. 6.25. Belkowy element skończony w lokalnym układzie współrzędnych

Wprowadza się belkowy element skończony. Element ten charakteryzują 4 przemieszczenia węzłowe (rys. 6.25)

$$\mathbf{q} = [\delta_1^I, w^I, \delta_1^{II}, w^{II}]^T. \quad (6.62)$$

Przyjmuje się liniową aproksymację przemieszczeń

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{Nq}, \quad (6.63)$$

gdzie

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{l-x_1}{l} & 0 & \frac{x_1}{l} & 0 \\ 0 & \frac{l-x_1}{l} & 0 & \frac{x_1}{l} \end{bmatrix}. \quad (6.64)$$

Funkcjonał uzyskany po dyskretyzacji i scałkowaniu nie zmienia formy w stosunku do (6.43)

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathbf{q}, \lambda_i) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n)^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n) V_i] - \sum_{i=1}^N [(\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_i^n)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{-n} - \mathbf{Bq}) V_i] \\ & - \Delta \mathbf{f}^T \mathbf{q} - \sum_{i=1}^N [\lambda_i \Phi_i(\boldsymbol{\sigma}_i) V_i] \end{aligned}, \quad (6.65)$$

gdzie w przypadku belki

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \int_l \mathbf{M}_i \mathbf{L} \mathbf{N} b dl \\ V_i = b l h_i \end{cases} \quad (6.66)$$

Warunek HMH jest opisany równaniem (6.45), w którym

$$\Psi = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}. \quad (6.67)$$

Obowiązujące pozostają oznaczenia (6.47), (6.48) co prowadzi do równania MES postaci (6.51).

Przedstawione wyprowadzenia wzorów pokazują, że warstwowy element belkowy można potraktować jako szczególny przypadek warstwowego elementu płytowego, co zapewnia zmniejszenie rozmiaru zadania i daje możliwość przeprowadzenia dokładniejszych analiz numerycznych niż w przypadku elementów płytowych.

6.3.6. Przykłady obliczeniowe

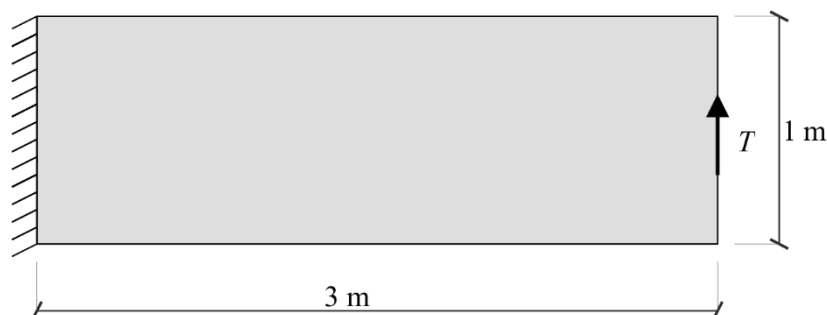
6.3.6.1. Informacje ogólne

Celem przedstawienia testów numerycznych z zastosowaniem elementów belkowych jest w ogólności weryfikacja modelu warstwowego, a więc także pośrednia weryfikacja modelu płyt warstwowych, z którego to, jak pokazano, wywodzi się model belkowy.

We wszystkich przykładach zakłada się jednostkową szerokość belki ($b = 1 \text{ m}$) i jednakowy warunek plastyczności we wszystkich warstwach. Rysunki pokazujące uplastycznione warstwy w każdym z przykładów mogą sprawiać wrażenie, jakby dotyczyły tarczy – należy jednak pamiętać, że przytaczane rozwiązania dotyczą jednowymiarowych elementów skończonych belkowych.

6.3.6.2. Porównanie stref plastycznych z rozwiązaniem tarczowym

Zadaniem pierwszego przykładu jest porównanie stref plastycznych w tarczy i belce warstwowej dla przypadku wspornika o schemacie jak na rys. 6.26.

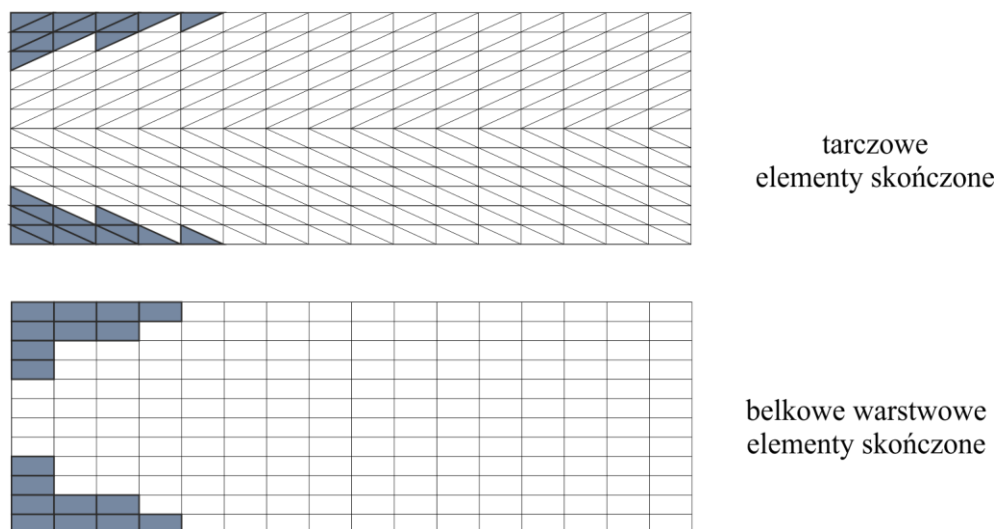


Rys. 6.26. Schemat belki wspornikowej

W tym celu przeprowadza się 2 rodzaje analizy MES – z wykorzystaniem algorytmu dla elementów tarczowych oraz algorytmu dla elementów belkowych warstwowych. W obu przypadkach zakłada się następujące dane materiałowe: $E = 20 \text{ MPa}$, $\nu = 0,2$, $\sigma_y = 40 \text{ kPa}$, a także siłę $T = 3,3 \text{ kN}$.

Przyjęto następujące dane wejściowe algorytmu MES z elementami tarczowymi: 384 elementy skończone, 25 kroków przyrostowych, 3 iteracje metody NR, program obciążenia: obciążenie styczne na prawej krawędzi tarczy o całkowitej wartości rosnącej od 0 do T . W przypadku algorytmu z elementami belkowymi założono: 16 elementów skończonych, $N = 12$, 50 kroków przyrostowych, 5 iteracji metody NR, program obciążenia: siła na końcu belki liniowo rosnąca od 0 do T .

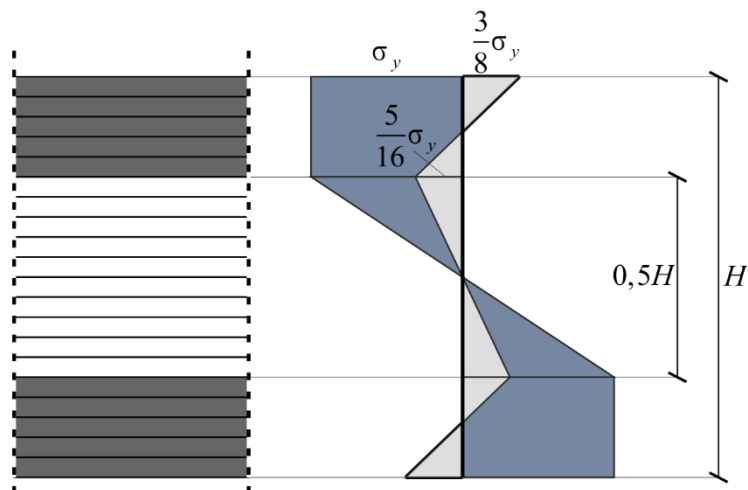
Porównanie stref plastycznych otrzymane za pomocą obu algorytmów przedstawia rys. 6.27. Można zaobserwować porównywalny rozkład stref plastycznych w obu przypadkach. Zakładając poprawność algorytmu stosującego elementy tarczowe, dla których testy numeryczne przedstawiono w 6.2.4, można wnioskować o poprawności algorytmu bazującego na elementach belkowych.



Rys. 6.27. Porównanie stref plastycznych

6.3.6.3. Porównanie naprężeń resztkowych z rozwiązaniem ścisłym

Kolejny przykład ma charakter weryfikacyjny. Dotyczy problemu wyznaczania naprężeń resztkowych w przekroju belki, który na skutek działania momentu zginającego zostaje częściowo uplastyczniony, a następnie wartość momentu spada do zera. Wzory analityczne służące do wyznaczenia rozkładu naprężeń resztkowych można znaleźć w [5, 13]. Docelowy rozkład naprężeń resztkowych przedstawia rys. 6.28.



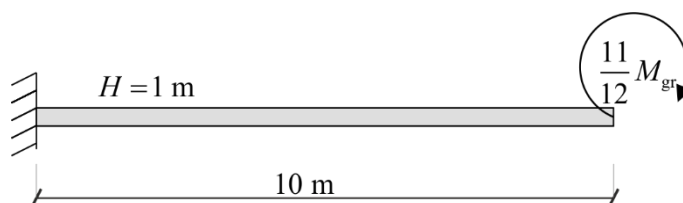
Rys. 6.28. Rozkład naprężeń resztkowych i warstwy uplastycznione w modelu MES

Rozkład ten jest wywołany momentem zginającym o wartości

$$\frac{11}{12} M_{gr}, \quad (6.68)$$

gdzie M_{gr} jest momentem granicznym belki

$$M_{gr} = \frac{bH^2}{4} \sigma_y. \quad (6.69)$$



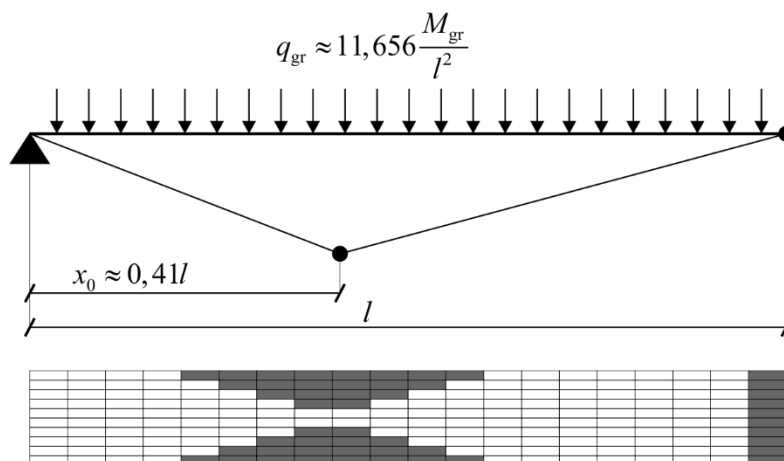
Rys. 6.29. Schemat belki obciążonej momentem zginającym

Aby wywołać w belce moment zginający do analizy numerycznej przyjmuje się schemat przedstawiony na rys. 6.29. W algorytmie MES przyjęto następujące dane wejściowe: $E = 20$ MPa, $\nu = 0,2$, $\sigma_y = 45$ kPa, 10 elementów skończonych, $N = 20$, 100 kroków przyrostowych, 5 iteracji metody NR, program obciążenia: liniowo rosnący moment w krokach 1–50, liniowo malejący moment w krokach 51–100.

Rozkład naprężeń wygenerowany przez algorytm MES jest jednakowy we wszystkich elementach skończonych i dokładnie taki jak na rys. 6.28. Różnice w wartościach nie przekraczają 1%. Świadczy to o poprawności zarówno algorytmu, jak i samej definicji elementów skończonych.

6.3.6.4. Porównanie lokalizacji przegubów plastycznych z rozwiązaniem ścisłym

Ostatni przykład jest również weryfikacją opierającą się na rozwiązaniu ścisłym. Przedmiotem analizy jest belka podparta w sposób przegubowo-sztywny, w której pod wpływem obciążenia równomiernym obciążeniem granicznym powstają dwa przeguby plastyczne.



Rys. 6.30. Rozwiązanie ścisłe i wyniki analizy MES (strefy plastyczne)

Rozwiązanie ścisłe [4], wykorzystujące teorię nośności granicznej, w zestawieniu z wynikami analizy MES przedstawia rys. 6.30. Celem analizy jest wyznaczenie lokalizacji powstania przegubów plastycznych przy obciążeniu zbliżonym do granicznego. Obciążenie maksymalne w analizie MES przyjmuje się jako $0,999q_{gr}$, ponieważ zastosowanie całkowitej wartości q_{gr} skutkowałoby powstaniem mechanizmu i utratą stabilności algorytmu MES (co jest nieuchronne przy założeniu idealnej plastyczności).

Do analizy MES przyjęto następujące dane: $l = 10$ m, $H = 1$ m, $E = 20$ MPa, $\nu = 0,2$, $\sigma_y = 45$ kPa, 20 elementów skończonych, $N = 10$, 50 kroków przyrostowych, 5 iteracji metody NR, program obciążenia: obciążenie równomiernie rozłożone rosnące liniowo od 0 do $0,999q_{gr}$.

Strefy plastyczne wygenerowane przez algorytm MES widoczne są na rys. 6.30. Lokalizacje przegubów plastycznych pokrywają się z lokalizacjami znanymi z rozwiązania ścisłego. Widoczny jest stan, w którym niewielki przyrost obciążenia wywołałby powstanie pełnego przegubu w przęśle belki i tym samym doprowadził do zaistnienia mechanizmu przewidzianego przez teorię nośności granicznej.

7. Podsumowanie i wnioski

W pracy przedstawiono zmodyfikowany funkcjonal Hu–Washizu, pozwalający na wyprowadzenie równań MES stosowanych do zagadnień teorii plastyczności. Jest to pierwszy tego typu funkcjonal i stanowi oryginalny wkład naukowy w dziedzinie metody elementów skończonych. Pokazano metodę wyprowadzania równań MES dla zadanego elementu skończonego i warunku plastyczności, jak również algorytm, pozwalający na praktyczne zastosowanie funkcjonału. Przedstawiono rozwiązania szeregu przykładów (w tym weryfikacyjnych) z zastosowaniem różnych elementów skończonych (tarczowych, płytowych, belkowych) oraz różnych warunków plastyczności (kryterium HMH w przypadkach idealnej plastyczności, wzmocnienia kinematycznego i wzmocnienia izotropowego). Przykłady te świadczą o poprawności podejścia i efektywności algorytmu. Ponadto dokonano optymalizacji algorytmu poprzez zmniejszenie rozmiaru równania MES, co zostało ilustrowane stosowną analizą porównawczą.

Warto przypomnieć główne zalety zastosowanego podejścia. Niewątpliwie najważniejszą z nich jest uniwersalność funkcjonału, ponieważ może on służyć wyprowadzeniu równań teorii plastyczności dla dowolnego elementu skończonego oraz dowolnego warunku plastyczności przy spełnieniu omówionych w pracy ograniczeń. Przedstawione podejście jest czytelne i stosunkowo proste, ponieważ nie wymaga dodatkowych zabiegów algorytmicznych w celu spełnienia wszystkich równań teorii plastyczności – równanie MES bezpośrednio wynika z założonego elementu skończonego i warunku plastyczności. Ponadto opracowany na bazie funkcjonału algorytm MES jest zbieżny i stabilny niezależnie od liczby kroków przyrostowych. Dzięki temu, że równanie MES zawiera wszystkie równania teorii plastyczności, return-mapping nie generuje błędów rozwiązania, co czynią dotychczas stosowane inne algorytmy – błąd musi być w nich niwelowany poprzez dodatkowe operacje wydłużające czas obliczeń.

Niniejsza rozprawa nie stanowi jednak hermetycznego rozwiązania, które nie mogłoby zostać ulepszone lub rozszerzone. W pierwszej kolejności warto byłoby pomyśleć nad modyfikacją funkcjonału, pozwalającą na uwzględnienie dużych przemieszczeń, jak również niestowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia. Poza kwestiami teoretycznymi, ciekawym doświadczeniem mogłoby być oprogramowanie algorytmu MES w języku niższego poziomu niż Mathematica (np. C++, Delphi, Java) i porównanie czasu obliczeń z czasami uzyskiwanymi w komercyjnym oprogramowaniu.

Literatura

- 1 Belytschko T., Liu W. K., Moran B., Elkhodary K., *Nonlinear finite elements for continua and structures 2nd ed.*, John Wiley & Sons, Chichester 2014.
- 2 Borst R., Crisfield M. A., Remmers J. J. C., Verhoosel C. V., *Non-linear finite element analysis of solids and structures 2nd ed.*, John Wiley & Sons, Chichester 2012.
- 3 Bhatti M. A., *Advanced topics in finite element analysis of structures : with Mathematica and MATLAB computations*, John Wiley & Sons, Hoboken 2006.
- 4 Brunarski L., Kwieciński M., *Wstęp do teorii sprężystości i plastyczności wyd. piąte*, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1976.
- 5 Brzoska Z., *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa 1983.
- 6 Cao Y. P., Hu N., Fukunaga H., Lu J., Yao Z. H., *Finite Elements in Analysis and Design*, 2003, 39, pp. 1155-1171, *A highly accurate brick element based on a three-field variational principle for elasto-plastic analysis.*
- 7 Cao Y. P., Hu N., Lu J., Fukunaga H., Yao Z. H., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53, pp. 2529-2548, *A 3D brick element based on Hu–Washizu variational principle for mesh distortion.*
- 8 Cook R., *Journal of the Structural Division ASCE*, 1974, 100, pp. 1851-1861, *Improved two-dimensional finite element.*
- 9 Garstecki A., Dębiński J., *Wytrzymałość materiałów*, witryna edukacyjna Almamater www.ikb.poznan.pl/almamater/, 2004/2005.
- 10 Gelfand I. M., Fomin S. V., *Calculus of Variations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs 1963.
- 11 German J., *Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych*, Politechnika Krakowska, Kraków 2001.
- 12 Hill R. A., *Proceedings of The Royal Society*, 1948, 193, pp. 281-297, *A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals.*
- 13 Jastrzębski P., Mutermilch J., Orłowski W., *Wytrzymałość materiałów cz. 2 wyd. 2 zmienione i poprawione*, Arkady, Warszawa 1986.
- 14 Kączkowski Z., *Płyty : Obliczenia statyczne wyd. III zmienione*, Arkady, Warszawa 2000.
- 15 Kojić M., Bathe K. J., *Inelastic Analysis of Solids and Structures*, Springer, Berlin 2010.
- 16 Konderla P., *Konspekt wykładu : Metoda elementów skończonych : Teoria i zastosowania*, 2007.
- 17 Lewandowski J., Myślecki K., *Modified Hu-Washizu principle as a general basis for FEM plasticity equations*, w: *Advances in Mechanics: Theoretical, Computational and Interdisciplinary Issues*, CRC Press/Balkema, London 2016, pp. 345-348.
- 18 Mase G. E., *Schaum's outline of theory and problems of continuum mechanics*, McGraw-Hill, New York 1970.
- 19 Muc A., *Mechanika kompozytów włóknistych*, Księgarnia Akademicka, Kraków 2003.

- 20 Myślecki K., Lewandowski J., *Kompozyty : konstrukcje warstwowe : VII sympozjon, [Wrocław - Pawłowice, 15-18 października 2014] : referaty*, 2014, pp. 49-50, *Plastyczna analiza MES panelu trójwarstwowego z zastosowaniem funkcjonału Hu-Washizu*.
- 21 Owen D. R. J., Hinton E., *Finite elements in plasticity : theory and practice*, Pineridge Press, Swansea 1980.
- 22 Reddy J. N., *Energy principles and variational methods in applied mechanics 2nd ed.*, John Wiley & Sons, Hoboken 2002.
- 23 Reddy J.N., *Theory and analysis of elastic plates and shells 2nd edition*, CRC Press, New York 2006.
- 24 Rymarz C., *Mechanika ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa 1993.
- 25 Sawczuk A., *Wprowadzenie do mechaniki konstrukcji plastycznych*, PWN, Warszawa 1982.
- 26 Skrzypek J., *Plastyczność i pełzanie : teoria, zastosowania, zadania*, PWN, Warszawa 1986.
- 27 Simo J. C., Hughes T. J. R., *Computational Inelasticity*, Springer, New York 1998.
- 28 Tonti E., *International Journal of Engineering Science*, 1984, 11/12, pp. 1343-1371, *Variational formulation for every nonlinear problem*.
- 29 Washizu K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity 2nd ed.*, Pergamon Press, Oxford 1975.
- 30 Weissman S. L., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39, pp. 2337-2361, *High-accuracy low-order three-dimensional brick elements*.
- 31 Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The Finite Element Method Vol. 1: The Basis 5th ed.*, Butterworth-Heinemann, Oxford 2000.
- 32 Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The Finite Element Method Vol. 2: Solid Mechanics 5th ed.*, Butterworth-Heinemann, Oxford 2000.
- 33 Życzkowski M., *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa 1973.

Streszczenie

W pracy przedstawiono autorski zmodyfikowany funkcjonal Hu–Washizu, będący uniwersalną bazą służącą do wyprowadzania równania MES dotyczącego zagadnienia teorii plastyczności. Jest to pierwszy funkcjonal, który umożliwia sformułowanie równania MES zawierającego wszystkie równania teorii plastyczności. Pozwala to na czytelne i prostsze, w stosunku do dotychczas istniejących rozwiązań, konstruowanie algorytmu MES. Przedstawiona została procedura wyprowadzenia równań MES dla dowolnych elementów skończonych i warunków plastyczności. W celu egzemplifikacji, funkcjonal zastosowano do wyprowadzenia rozmaitych równań MES, obejmujących tarczowe, płytowe, objętościowe i belkowe elementy skończone, jak również różne warunki plastyczności (przypadki: idealnej plastyczności, wzmocnienia kinematycznego oraz izotropowego). Przedstawiono także własny algorytm MES, pozwalający na efektywne przeprowadzanie analiz numerycznych. Algorytm okazał się zbieżny i stabilny niezależnie od liczby iteracji przyrostowych. Nie wykazuje on błędu wynikającego z return-mappingu w przeciwieństwie do wszystkich dotychczas stosowanych algorytmów MES stosowanych do rozwiązywania zagadnień teorii plastyczności, co jest skutkiem wykorzystania omawianego w pracy funkcjonału. Liczne przykłady numeryczne potwierdziły poprawność i skuteczność podejścia.

Summary

This thesis presents a modified Hu–Washizu variational principle which is a general basis for FEM plasticity equation. This is the first functional which offers to derive FEM equation containing all plasticity theory equations. It allows to build FEM algorithms in a clear and simpler way in comparison to other existing solutions. The procedure for deriving FEM equations for any finite element and any yield criterion is described. For exemplification, the functional was applied to derive various FEM equations including different finite elements (plane-stress, plate, tetrahedral, beam) and different yield criteria (ideal plasticity, kinematic and isotropic hardening). An original FEM algorithm was described. It showed stability and convergence irrespectively of incremental iterations number. It produces no return-mapping error which is unusual among FEM algorithms for plasticity and this is the result of the application of the described functional. Many numerical tests confirmed that the proposed approach is valid and effective.