MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO

ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS II. Mit 18 Tafeln

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

PRAEFATIO

QVemadmodum in Tomo primo motus liberos corporum a quibuscunque potentiis sollicitatorum exposui, ita in hoc Tomo altero motus non liberos pertractare constitui; quae differentia in motus explicatione tanti est momenti, vt ex ea merito totius operis diuisio sit facta. In motu enim libero via a corpore descripta cum ex motu iam insito, tum ex potentiis tam absolutis quam resistentia, quibus corpus afficitur, determinatur, quia praeter potentias et resistentiam nihil adesse ponitur, quod corporis motum determinet. Atque idcirco motus liberi haec est primaria proprietas, vt via a corpore descripta omnino non prematur; canalis scilicet secundum viam, quam corpus describere debet, exacte incuruatus, a corpore transeunte nullam omnino pressionem sustinebit, sed corpus per eum libere transibit. In motu autem non libero praeter potentias et resistentiam, quibus corpus sollicitatur, viam praescriptam esse ponimus, ita vt corpus sit coactum in hac via moueri. Haec ergo via praescripta ad instar canalis commode considerari potest, in quo corpus mouetur, neque ex eo erumpere potest. Cum igitur in istiusmodi motibus data sit via, in qua corpus moueri debet, inquirendum est, quantam corpus a quibuscunque potentiis et resistentia sollicitatum in singulis locis habiturum sit celeritatem, quippe qua cognita totus motus perfecte cognoscitur. Praeterea autem cum corpus, nisi in hoc canali esset inclusum, aliam lineam describeret, retinebit saltem in canali conatum in ea linea, in qua si liberum esset, moueretur, progrediendi, hocque conatu latera canalis premet, et nisi satis habeant firmitatis reipsa disrumpet. Hanc ob rem praeter celeritatem, quam corpus in singulis canalis locis habebit, determinari debet quoque pressio, quam in latera canalis exeret, eiusque pressionis directio, quo firmitas laterum canalis ad corpus retinendum requisita cognoscatur. Huiusmodi autem motus non liberi etiam sine canali aliis modis produci possunt, id quod obseruare licet in pendulis, atque in fundis, quibus corpus itidem in data linea moueri cogitur. Pendulis enim, prout Hugenius docuit, effici potest, vt corpus in quacunque curua praescripta moueri cogatur, quemadmodum in pendulis tum simpliciter suspensis, quibus corpus in linea circulari moueri cogitur apparet, tum iis, quae intra cycloides suspendi solent, quibus corpus in cycloide moueri cogitur; similique modo effici potest vt corpus in data quaque curua incedere cogatur. Haec igitur est prima species motus non liberi, qui fit super data linea. Praeter eam autem alia species motus non liberi attendi meretur, in qua non ipsa quidem via, sed tantum superficies praescribitur, in qua corpus moueri cogitur; minus igitur haec motuum non liberorum species est restricta quam prior, cum in hac corpori adhuc libertas sit relicta sibi viam in data superficie sitam eligendi.

gendi. Hanc ob rem haec motus non liberi species ita tractari debet, vt primo linea in data superficie determinetur, quam corpus a potentiis et resistentia sollicitatum describet, deinde vero vt celeritas corporis in singulis huius lineae punctis definiatur, tertio denique vt etiam pressio, quam corpus in superficiem exercet, inuestigetur. Huiusmodi autem motus non liberi pariter ac priores pendulis quoque commode repraesentari possunt; corpus enim pendulum oblique impulsum, vt eius directio non sit in plano verticali, lineas curuas varii generis describet, quae autem omnes sunt in superficie sphaerica, cuius centrum in ipso suspensionis puncto extat. Inquisitio ideo huius motus huc redit, vt in superficie sphaerica primo linea quam corpus proiectum describet, determinetur, deinde vero celeritas in singulis locis, et tertio pressio, quam in superficiem exeret. Simili modo etiam perspicitur, effici posse, vt corpus pendulum non ad superficiem sphaericam, sed ad aliam quamque restringatur, dum scilicet circa punctum suspensionis superficies euoluta disponatur. Haec igitur est altera motuum non liberorum species, quae in motu super data superficie determinando occupatur; atque in his duabus motuum non liberorum speciebus indagandis totus hic Tomus secundus absoluitur. Quo ergo ad hanc tractationem, quae scitu necessaria sunt, praeparentur, in capite primo fundamenta et principia exposui, ex quibus, quae ad cognitionem vtriusque speciei motuum non liberorum pertinent, deriuari queant. Demonstraui nimirum corpus a nullis potentiis sollicitatum tam super data linea, quam *ſuper ſuperficie motu aequabili moueri debere; in ſuperficie autem fore viam a corpore deſcriptam ipſam lineam breuiſſimam quae in ea ſuperficie duci poteſt. Deinde inueſtigaui leges generales, quas quaeque potentiae atque etiam reſiſtentia tum in accelerando vel retardando motum tum in preſſione generanda obſeruant. Ad haec etiam doctrina de vi centrifuga exponitur, quam corpora etiam a nullis potentiis ſollicitata exercent, quaeque ex motu curuilineo, quo corpus incedere cogitur, ortum habet. In capitibus deinde ſecundo et tertio motus corporum ſuper data linea tam in vacuo quam in medio reſiſtente fuſe contemplor et examino. Primo nimirum motum determino, quo corpus a quibuscunque potentiis ſollicitatum ſuper data linea ſiue recta ſiue curua mouetur, ſiue deſcendendo ſiue aſcendendo; atque ſi curua ita fuerit comparata vt tam ad deſcenſus quam aſcenſus producendos ſit idonea oſcillationes quoque definio, easque inter ſe ratione temporum comparo; atque in hoc negotio indolem et proprietates oſcillationum tam in circulo quam cycloide factarum definio. Deinceps problemata tracto inuerſa, quibus potiſſimum pro datis potentiis ſollicitantibus in curuas inquiro, ſuper quibus motus datam habeat proprietatem. Huc ſcilicet pertinent problemata de inueniendis curuis aequabilis deſcenſus vel receſſus a dato puncto, et huiusmodi plura, quae vel ab aliis iam ſunt tractata, vel ad quae ipſum inſtitutum perduxit. Inter haec prae ceteris eminent problemata de lineis brachyſtochronis et tautochronis, quorum vtrumque ad vlteriorem quam*

ad-

adhuc a quoquam est factum, perfectionis gradum euexi. Circa curuas enim brachystochronas errorem, qui a nonnullis tam in vacuo quam medio resistente erat commissus, correxi, et loco principii Hugeniani *in se quidem veri, sed insufficientis, aliud latissime patens substitui, quo demonstraui in quocunque medio et potentiarum sollicitantium hypothesi quacunque, eam perpetuo curuam esse brachystrochronam, super qua corpus ita moueatur, vt tota pressio duplo sit maior quam vis centrifuga. Simili modo nouam atque genuinam curuas tautochronas inueniendi methodum trado, (quae enim ante sunt inuentae tautochronae nulla omnino methodo sed potius diuinatione sunt erutae) cuius ope non solum cycloidem iam dudum sub tautochronae nomine celebrem inueni, sed praeter eam innumerabiles alias curuas quaesito satisfacientes elicui, inter quas adeo curuam algebraicam obseruaui; praeterea tam ex aliis agnatis quaestionibus in vacuo, quam ex integra huius negotii tractatione pro medio resistente, praestantiam et vtilitatem huius methodi abunde intelligere licebit. Ceterum vti haec methodus instar speciminis tam Analyseos quam Mechanicae promotae est censenda, ita quoque passim in difficiliorum quorundam problematum solutionibus non contemnenda Analyseos subsidia apparebunt, quibus etiam haec scientia non parum promota esse videatur.*

In quarto denique capite motum super data superficie persequor, quae doctrina, vti a nemine adhuc est tacta ita quoque tractatu est difficillima, propter naturam et proprietates

soli-

solidorum nondum satis perspectas neque ad calculum reuocatas. Antequam igitur de huius modi motu quicquam statui potuerat, methodum exponere necesse erat, qua proprietates superficierum et linearum in iis ductarum erui atque calculo subiici possent. Hoc itaque praestiti ope aequationum tres quantitates variabiles continentium, quibus iam ante tum in Comment. Tomo III. ad lineam breuissimam super quauis superficie determinandam, tum in huius Tractatus Tomo praecedente ad motus liberos non in eodem plano factos inuestigandos sum vsus. His denique praeparatis progredi licuit ad effectus potentiarum in corpora super superficiebus mota definiendos, ex quibus modum elicui tam viam a corpore descriptam quam reliqua motus symtomata inueniendi. Quum vero calculus, quamdiu in generalibus versamur, nimis fiat prolixus et tractatu difficilis; omissa resistentia omnia ad vacuum et grauitatem ordinariam reduxi, atque praecipue motum pendulorum oblique oscillantium sum perscrutatus, cuius motus anomalias et absidum progressiones diligenter determinaui. Haec igitur sunt, quae in isto tomo secundo sum complexus, quibus expeditis operam dabo, vt, quam primum licuerit motus corporum finitorum et primo quidem rigidorum, in ordinem reducam atque pari methodo exponam.

CAPUT PRIMUM.

DE MOTU NON LIBERO IN GENERE.

DEFINITIO I.

1.

Corpus non libere moueri dicitur, quando externa obstacula impediunt, quo minus iuxta eam directionem progrediatur, iuxta quam cum ratione motus insiti, tum ratione potentiarum sollicitantium moueri deberet.

Scholion I.

2. In motu puncti libero, quem Parte prima exposuimus spatium, in quo corpus mouebatur, ab omnibus obstaculis vacuum assumsimus, nunc vero spatium ita comparatum ponemus, vt corpori non liceat in quaque directione progredi, propter firmos parietes transitum non permittentes.

Corollarium 1.

3. Quando itaque corpus in motu suo obstaculum inuenit, ideoque eam directionem, secundum quam tendit, conseruare non potest; tum vel quiescere, vel in alia directione motum continuare debebit.

Corollarium 2.

4. In quanam autem directione corpus progrediatur post occursum obstaculi, ex circumstantiis tum motus tum positionis obstaculi iudicari debet.

Scholion 2.

5. Videtur haec doctrina ad motum corporum ex percussione pertinere, qua de re tamen hoc libro non agetur. Hoc vero libro alius generis obstacula assumimus, quae illam notitiam non requirunt. Sunt haec obstacula continua, quae motum puncti restringunt neque vllam reflexionem admittunt; cuiusmodi est tubus vel canalis siue rectus sive incurvatus, in quo corpusculum motum continuare debet. Hoc casu via penitus praescribitur, in qua corpus progredietur, neque propter tubi firmitatem inde egredi poterit. Quare cum hic loco corporis punctum consideremus, hac positione punctum in data linea moueri debebit, neque ex ea excedere poterit.

Scholion 3.

6. Duas autem hoc libro pertractabimus motus impediti seu restricti species, quarum primae mo-

modo mentionem fecimus, quaeque complectitur motus punctorum super data linea siue recta siue curua. Altera species minus restringit motus libertatem, superficiem enim tantum praescribit, in qua corpus perpetuo versari debeat. Atque has duas motus impediti species isto libro sumus expositurí.

Corollarium 3.

7. Quae igitur in prima specie sunt inquirenda, sunt corporis seu potius puncti celeritas in quouis lineae praescriptae loco, pressio in hanc lineam, et tempus, quo punctum datam viae portionem percurrit.

Corollarium 4.

8. Circa motus alterius speciei autem praeter haec inueniri debet ipsa linea, quam corpus super superficie data describit. Quarum rerum fontes hoc primo capite aperiemus.

Scholion 4.

9. Hoc vero capite primum inuestigabimus motus vtriusque speciei, si corpus a nullis potentiis sollicitetur; vbi ostendimus, qua celeritate id progredi debeat, et quanta vi vbique tam lineam datam, quam superficiem datam premat. Sed si superficies tantum data fuerit, praeterea viam determinabimus in qua corpus mouebitur a nullis potentiis sollicitatum. Deinde vero principia exponemus, ex quibus iudicari licebit, quae mutationes a potentiis sollicitantibus tam absolutis quam rela-

tiuis oriantur, quo in sequentibus capitibus singula distincte deducere queamus.

Scholion 5.

10. In his autem motibus tam super lineis quam superficiebus datis, animum ab omni frictione abstrahimus, neque vllam motus retardationem ponemus. Quamobrem lineae et superficies, super quibus puncta moueri ponuntur, laeuissimae concipi debent et omni asperitate destitutae, ne motus retardationi propter eam sit obnoxius. Motum rotatorium quoque omnino ex animo profligari oportet, cum ex eo mutationes in motu oriantur, quae demum in sequentibus explicari possunt. Hanc ob rem punctum quasi rependo moueri concipiendum est, vt eius pars quaeque, si modo in puncto partes concipi possunt, eundem habeat motum.

Scholion 6.

11. Quae igitur in praecedente libro traditae sunt, et in hoc de motu punctorum tradentur, ad corpora finitae magnitudinis quoque accommodari possunt, si modo eorum motus sibi sit perpetuo parallelus, et omnes partes corporis aequali motu sint praeditae. Hoc vero ex sequentibus libris clarius apparebit, quibus casibus finitorum corporum motus a motu punctorum non discrepet. Quocirca in his libris ideo puncta tantum consideramus, quia ut partibus destituuntur, ita etiam in partibus diuersi motus inesse nequeunt.

PRO-

PROPOSITIO I.

Theorema.

12. *Corpus seu punctum, quod super linea data mouetur, et a nullis potentiis sollicitatur, perpetuo eandem celeritatem conseruabit: si modo illius lineae duo quaeque elementa contigua nusquam finitae magnitudinis angulum constituant.*

Demonstratio.

Quia corpus, dum in linea A M mouetur, a nulla potentia sollicitatur, neque frictioni vllus conceditur locus, motus corporis aliter variari nequit, nisi quatenus linea A M impedit, quo minus corpus libere moueri possit; ex quo, quae celeritatis immutatio oriri debeat, inuestigandum est. Sit celeritas, quam corpus in M habet $= c$, hac igitur celeritate corpus, si libere moueretur, in tangente $M\nu$ progrederetur, quod vero, quia corpus curvam A M deserere non potest, fieri nequit: sed corpus cogitur per Mm progredi. Hanc ob causam concipiatur motus corporis secundum $M\nu$, resolutus in motum per Mm et motum per Mn, existente $Mm\nu n$ parallelogrammo rectangulo. Perspicuum hic est motum per Mn, cuius directio est normalis in curuae elementum Mm, penitus absorberi, neque vllum effectum in celeritate immutanda habere posse. Corpus igitur altero motu progredietur in Mm, celeritate, quae est ad pristinam celeritatem vt Mm ad $M\nu$: quare celeritas, qua corpus elementum Mm describit, erit $= \frac{Mm.c}{M\nu}$. Quoniam vero, $M\nu m$ est triangulum ad m rectangulum ideoque $Mm < M\nu$, celeri- Tab. I. Fig. 1.

 tas

tas haec minor erit quam prior c, atque celeritatis decrementum erit $= \frac{(Mv - Mm)c}{Mv}$. Ad huius valorem inueniendum ſit M O radius oſculi curuae in $M = r$ et elementum $Mm = ds$; eritque, ob ang. $O =$ ang. mMv, $MO : Mm = Mm : mv$, ex quo prodit $mv = \frac{ds^2}{r}$, atque $Mv = \sqrt{(ds^2 + \frac{ds^4}{r^2})} = \frac{ds}{r}\sqrt{(r^2 + ds^2)} = ds + \frac{ds^2}{2r^2}$. Ex hoc iam obtinebitur decrementum celeritatis, dum corpus curuae elementum ds percurrit $= \frac{cds^2}{2r^2}$, cuius integrale dabit decrementum celeritatis, dum corpus finitam curuae A M portionem percurrit. At expreſſio $\frac{cds^2}{2rr}$ aequiualet differentiali ſecundi gradus; eius ergo integrale erit differentiale primi gradus. Quamobrem decrementum celeritatis poſtquam corpus quantumuis arcum curuae datae percurrit, erit infinite paruum, atque corpus motu uniformi feretur per totam curuam A M, ſi modo radius oſculi r nusquam fuerit infinite paruus. Q. E. D.

Corollarium 1.

13. In omni igitur curua, in qua radius oſculi nusquam eſt infinite paruus, corpus mouebitur vniformiter, ſiquidem a nullis potentiis ſollicitatur; neque frictionem patitur.

Corollarium 2.

14. Si radius oſculi eſt infinite paruus, tum $\frac{cds^2}{2r^2}$ vel eſt quantitas finita vel differentiale primi gradus.

Illo

Illo casu corpus finitum celeritatis gradum amittet, hoc vero tantum infinite paruum.

Corollarium 3.

15. Cum autem istius modi puncta in omnibus curuis sint rara et a se inuicem dissita, corpus tamen arcum inter duo talia puncta interceptum motu vniformi percurret.

Scholion I.

16. Casus, quibus corpus celeritatis finitum decrementum subito patitur, alii non esse possunt, nisi vbi curua habet cuspides. His enim in locis corpus directe reverti cogitur, et normaliter in punctum cuspidis impingit. Tunc igitur corpus non solum finitum celeritatis gradum amittet, sed omnino omnem motum amittere debebit; nisi forte corpus ponatur elasticum, quo casu eadem celeritate, qua incurrit, reflectetur, atque ita motum vniformem conseruabit. In cuspide enim duo elementa angulum infinite acutum constituunt.

Scholion 2.

17. Praeter cuspides vero alia dari possunt in curuis puncta, in quibus radius curvedinis est infinite paruus; quia vero duo quaeque elementa contigua fere in directum sunt posita, et angulus deinceps positus est infinite paruus fieri non potest, vt ex demonstratione apparet, vt corpus finitum celeritatis decrementum patiatur. Quamobrem cum istiusmodi puncta sint rara, corpus nihilominus motu aequabili mouebitur.

Co-

Corollarium 4.

18. Si igitur corpus motum fuerit elasticum, in quacunque curua semper motu aequabili feretur: at si non sit elasticum, cuspides tantum motum turbabunt, dum eum prorsus tollunt.

Scholion 3.

Tabula I. Fig. 2. 19. Vt haec clarius percipiantur, sint duo curuae elementa AB, BC, et anguli ABC quem constituunt, deinceps positus CBD infinite paruus, cuius sinus sit dz posito sinu toto $=1$. Quia corpus postquam elementum AB descripsit vi insita in BD progredi conatur celeritate priore, quae sit c; eius motus duplex concipiatur, alter in directione BC, alter in directione ad BC normali, qui in effectum duci non potest. Demisso igitur ex D in BC perpendiculo DC, corpus altero motu per BC mouebitur celeritate, quae est ad priorem vt BC ad BD, i. e. vt $\sqrt{(1-dz^2)}$ ad 1. Per BC idcirco habebit celeritatem $= c\sqrt{(1-dz^2)}$ seu $c-\frac{edz^2}{2}$; quare celeritatis decrementum erit $\frac{edz^2}{2}$, quod aequiualet differentiali secundi gradus. Ex quo intelligitur, quamdiu in quaque curua angulus CBD fuerit infinite paruus, corpus motu aequabili esse progressurum. At in omni curua angulus vel est infinite paruus, vel angulus ABC ipse, quod in cuspidibus accidit. Consequenter cuspides tantum motus vniformitatem perturbant, nisi corpus fuerit elasticum, quo casu nihilominus motus vniformitas conseruatur.

PRO-

PROPOSITIO 2.

Theorema.

20. *Dum corpus motu vniformi in curua AM mouetur, in singulis punctis M premet curuam normaliter vi, quae est ad corporis vim grauitatis, vt altitudo eius celeritati debita ad dimidium radium osculi.* Tabula I. Fig. 1.

Demonstratio.

Si corpus in curua AM libere moueri deberet motu aequabili; tum vbique vim adesse oporteret normalem corpus secundum MO trahentem tantam, quae se haberet ad corporis grauitatem, vt altitudo celeritati corporis debita ad dimidium radium osculi MO, vt ex demonstratis Libri praeced. apparet. Nisi enim talis vis adesset, corpus in linea recta progrederetur. Hoc autem casu canalis AM in quo corpus inclusum concipitur, impedit, quo minus corpus in recta progrediatur. Quamobrem corpus tanta vi canalem normaliter premet, secundum directionem Mn. Si enim talis vis normalis adesset, corpus in canali AM libere moueretur, neque illum premeret; hac vero vi absente, vt hic ponimus, necesse est vt corpus ipsum canalem tanta vi premat. Q. E. D.

Corollarium I.

21. Si igitur altitudo celeritati corporis debita ponatur v et radius osculi $MO = r$, atque grauitas corporis $= 1$, quam scilicet haberet, si in superficie terrae esset positum; erit vis, qua

corpus canalem in M secundum M n premet $= \frac{2v}{r}$.

Corollarium 2.

22 Si corpus maiore vel minore celeritate moueretur in curva AM, tum pressio in M maior vel minor esset in duplicata celeritatis ratione, quia altitudo v quadrato celeritatis est proportionalis.

Corollarium 3.

23. Directio huius pressionis est normalis in curuam, et directe contraria est positioni radii osculi MO. Quare radius osculi in alteram curuae partem productus dabit directionem huius pressionis.

Corollarium 4.

24. Si corpus in linea recta mouetur; haec pressio erit nulla, ob radium osculi infinitum. Hoc quoque ex ipsa motus natura perspicuum est. Corpus enim motum in recta vniformiter sponte progreditur, et hanc ob rem canalem rectum non premit.

Corollarium 5.

25. Si curua AM fuerit circulus, pressio vbique erit eadem. Eo vero maior erit quo minor est radius circuli. Existente enim celeritate eadem, pressio erit reciproce vt radius circuli.

Scholion 1.

26. Quo corpus in curua AM libere moueri pos-

poſſit vniformiter, neceſſe eſt vt ſecundum normalem MO trahatur vi $= \frac{2v}{r}$. Ex quo intelligi licet, corpus tanta vi in plagam oppoſitam niti, alioquin enim illa vi non eſſet opus ad corpus in curua conſervandum. Dum igitur corpus in canali AM moueri cogitur, neque eius niſus a vi normali tollitur, hunc niſum re ipſa in canalem exercebit. Quamobrem talis canalis tantam firmitatem habere debebit, vt hanc preſſionem ſuſtinere queat.

Corollarium 6.

27. Apparet igitur corpus motum ſine vllo celeritatis diſpendio effectum edere poſſe, qui ſcilicet conſiſtit in preſſione definita.

Corollarium 7.

28. Ex motu ergo ſolo preſſio oriri poteſt. Quamobrem uti ex preſſione ſeu a potentiis motus generatur, ita quoque ex motu preſſio oriri poteſt.

Scholion 2.

29. Intelligitur hinc, quod iam ſupra innuimus Libro primo, incertum eſſe, vtrum motus potentiis debeatur, an vero potentiae motui. Videmus enim in mundo vtrumque potentias nempe et motum exiſtere; vtrum igitur alterius ſit cauſa, quaeſtio eſt tum ex ratione tum ex obſervationibus decidenda. Rationi quidem minime conſentaneum videtur corporibus conatus inſitos tribuere, multo minus potentias per ſe exiſtentes ſtatuere. Praeterea vero is phaenomenorum cau-

ſas genuinas dediſſe cenſendus eſt, qui omnia a motu orta demonſtrauerit. Motum enim ſemel exiſtentem perpetuo conſeruari debere clare oſtendimus ſupra; hic vero, quemadmodum ex motu potentiae oriantur expoſuimus. Quemadmodum vero potentiae ſine motu vel exiſtere vel conſeruari queant, concipi non poteſt. Quamobrem concludimus omnes potentias, quae in mundo conſpiciuntur, a motu provenire; atque diligenti ſcrutatori incumbit inueſtigare ex quonam, quorumque corporum motu quaelibet potentia in mundo obſeruata ortum ſuum habeat.

Scholion 3.

30. Cum difficile intellectu ſit, quomodo talis effectus, preſſio ſcilicet continua, a corpore moto, ſine vllo celeritatis diſpendio, oriatur; operae pretium erit in huius rei cauſam inquirere. Vidimus in praecedente propoſitione motum corporis in curua linea non abſolute aequabilem eſſe, ſed celeritatem reuera decrementum pati, dum corpus per ſingula elementa curuae mouetur. Haec vero decrementa differentialibus ſecundi gradus aequiualent, vt etiam infinities repetita celeritatem corporis infinite parum tantum minuere queant. Huic igitur infinite paruo celeritatis decremento preſſionem adſcribi debere iudico; in hacque ſententia eo magis confirmor, quod, quo maius ſit hoc celeritatis decrementum, eo maior quoque exiſtat preſſio. Cum preſſio in M ſit $\frac{2v}{r}$, hacque vi totum elementum Mm, dum percurritur

 pre-

prematur, licebit huius pressionis effectum in $Mm = ds$ exponere per $\frac{2v\,ds}{r}$. Supra vero decrementum celeritatis, dum corpus elementum Mm percurrit, inuentum est $\frac{c\,ds^2}{2r^2}$ (12). Quod autem ibi erat c hic nobis est $\sqrt{v}$, ergo cum esset $-dc = \frac{c\,ds^2}{2r^2}$ erit $-\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{ds^2\sqrt{v}}{2r^2}$ seu $-dv = \frac{v\,ds^2}{r^2}$. Habebitur ergo $-4v\,dv = \frac{4v^2\,ds^2}{r^2}$ = quadrato pressionis quam sustinet elementum Mm.

Corollarium 8.

31. Quadratum pressionis ergo in Mm exercitae aequiualet decremento ipsius $2v^2$. Atque si hoc decrementum aequale fuerit ipsi ds^2, tum pressio aequalis est vi grauitatis, ex quo comparatio harum pressionum cognoscitur.

Corollarium 9.

32. His ergo concessis, istud infinities infinite paruum celeritatis decrementum sufficit ad pressionem finitam producendam. Quamdiu enim ipsius v^2 decrementum homogeneum est ipsi ds^2, pressio est finita, sin vero id decrementum infinities maius existeret quam ds^2, pressio quoque foret infinite magna.

DEFINITIO 2.

33. Pressio haec, quam corpus in linea curua motum exercet in hanc lineam, vocatur vis centrifuga; eo quod eius directio a centro circuli osculatoris O tendit.

Corollarium 1.

34. Vis centrifuga ergo eſt ad vim grauitatis, vt altitudo celeritati debita ad dimidium radium oſculi.

Corollarium 2.

35. Quando ergo corpus in linea curua moueri cogitur, hanc curuam vi centrifuga premit, etiamſi a nulla potentia ſollicitetur.

Scholion.

36. Quando vero corpus a potentiis quoque ſollicitatur, preſſio quoque in canalem ab his potentiis orietur, tumque canalis duplici ratione premetur, partim nempe a potentiis partim a vi centrifuga. Nunc igitur quid potentiae in corpus non libere motum valeant, inueſtigandum eſt.

PROPOSITIO 3.

Theorema.

Tabula I. Fig. 3. 37. *Si corpus, quod in canali AM mouetur, ſollicitetur in M a potentia MN, cuius directio normalis eſt in curuam AM, celeritas neque augebitur neque minuetur: ſed tota potentia in premendo canali conſumetur.*

Demonſtratio.

Ex priore libro manifeſtum eſt potentiam, cuius directio in directionem motus ſit normalis, celeritatem neque augere neque minuere. Quanquam hoc enim ibi de motu libero eſt demonſtratum, hic tamen eodem rigore locum habet, cum po-

potentia normalis corpus neque in consequentia neque in antecedentia trahat. In motu libero vero potentia normalis directionem corporis immutat, quem effectum hoc loco habere non potest. Hac igitur vi apprimetur corpus ad canalem, et consequenter tanta vi canalem premet in directione MN. Q. E. D.

Corollarium 1.

38. Directio igitur talis vis normalis vel incidit in directionem vis centrifugae vel ei directe est contraria. Illo casu auget vim centrifugam hoc casu minuit.

Corollarium 2.

39. Quia directio vis centrifugae in convexam curuae partem incidit, eius effectus augebitur, si normalis vis directio in eandem plagam incidit: at si normalis vis in concavam partem dirigitur minuetur effectus.

Corollarium 3.

40. Si vis normalis fuerit $= N$, et vis centrifuga vt ante $= \frac{2v}{r}$; premetur curua vel vi $\frac{2v}{r} + N$, si hae vires fuerint conspirantes, vel vi $\frac{2v}{r} - N$ si fuerint contrariae.

Corollarium 4.

41. Si vis normalis fuerit aequalis et contraria vi centrifugae, curua nullam pressionem sustinebit; seu corpus ex ea egredi non conabitur. Hoc ergo casu eandem curuam corpus libere describeret; id

id quod perspicuum quoque est ex vi normali, quae tum est $\frac{2v}{r}$: hac enim efficitur, vt corpus aequabiliter in quacunque curua libere moueatur.

PROPOSITIO 4.

Theorema.

Tabula I. Fig. 3. 42. *Si corpus quod in canali A M mouetur, in M sollicitetur a potentia, cuius directio sit secundum tangentem M T: huius effectus in hoc consistet, vt celeritatem corporis vel augeat, vel diminuat, eodem modo, quo in motu libero.*

Demonstratio.

Quia huius potentiae directio est ipsa canalis tangens M T, canalis effectum huius potentiae impedire non potest; neque etiam in canalem haec potentia vllum effectum exerere poterit. Quamobrem augebit haec potentia vel diminuet, celeritatem corporis, prout eius directio directioni corporis vel conspirans vel contraria fuerit, prorsus ac si corpus libere moueretur. Atque posita altitudine celeritati in M debita $= v$, elemento $Mm = ds$, et vi $MT = T$, erit $dv = T\,ds$, accelerante potentia T: at retardante ea, erit $dv = -T\,ds$. Q. E. D.

Corollarium 1.

43. In motu corporum igitur super lineis datis vis normalis pressionem tantum generat in eas, vis tangentialis vero celeritatem tantum afficit.

Corollarium 2.

44. Cum vis resistentiae effectum vis tangentialis

tialis retardantis praeſtet, eodem quoque modo aget in motum corporum ſuper datis lineis, ac in motum liberum. Si igitur praeter vim tangentialem accelerantem T affuerit reſiſtentia R, prodibit ex ambabus coniunctim $dv = T ds - R ds$.

PROPOSITIO 5.

Problema.

45. *Si corpus ſuper linea data A M moueatur in medio quocunque reſiſtente, et inſuper ſollicitetur a potentia abſoluta, cuius directio ſit MP; determinare effectum tam potentiae abſolutae, quam reſiſtentiae, nec non preſſionem, quam curua A M ſuſtinet.* Tabula I. Fig. 4.

Solutio.

Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, vis reſiſtentiae $=$ R, et vis abſoluta M P $=$ P: cuius directio ſit talis, vt ſumto elemento $Mm = ds$ ſit perpendiculum mn ex m in M P demiſſum $= dx$ et $Mn = dy = \surd(ds^2 - dx^2)$. Reſoluatur potentia P in has duas ſecundum MN normalem in curuam et M T tangentem trahentes, erit ob triangula MPT et Mmn ſimilia, vis normalis MN ſeu $PT = \frac{P dx}{ds}$, et vis tangentialis $MT = \frac{P dy}{ds}$ celeritatem augens. Quia vero vis reſiſtentiae celeritatem minuit, augebitur celeritas tantum ab exceſſu $\frac{P dy}{ds} - R$, hanc ob rem erit $dv = P dy - R ds$ (42). Normalis vis $\frac{P dx}{ds}$ vero efficit, vt curua in M tantundem prematur ſecundum directionem MN, ad convexam curuae partem ſitam. Quare cum vis centrifuga in eandem plagam vrgeat, quae eſt $=$

 $\frac{2v}{r}$

$\frac{2v}{r}$, designante r radium osculi in M; erit vis totalis, qua curua in M secundum MN premitur $= \frac{Pdx}{ds} + \frac{2v}{r}$. Vnde tum motus corporis super curua, tum curuae pressio in singulis punctis innotescit. Q. E. I.

Corollarium 1.

46. Ex his duabus formulis igitur accelerationem et pressionem exprimentibus omnia deduci possunt, quae ad motum super lineis datis pertinent.

Scholion 1.

47. Hic quidem vnicam potentiam absolutam posuimus; nihilominus tamen satis ex eo intelligitur, quomodo plurium potentiarum effectus sit determinandus. Scilicet quemadmodum in motu libero fecimus, ita etiam hic singulae potentiae in binas normalem nempe et tangentialem sunt resoluendae, ex quibus colligendis vna vis normalis vnaque tangentialis oritur: quarum effectus per propositiones 3. et 4. determinari poterunt.

Scholion 2.

48. Hactenus igitur fundamenta exposuimus, ex quibus in sequentibus motum corporum super lineis datis determinare licebit. Antequam autem pro motu super superficiebus datis similia principia tradamus, expedit vt paucis ostendamus, quo modo motus super linea data in effectum deduci possit. Namque ope canalis, in quo corpus contineatur, talis motus minime produci pote-

poterit, propter frictionem aliaque obstacula, quae tolli neutiquam possunt. Commodissime autem huiusmodi motus non liberi efficiuntur pendulorum ope, vti primum a Hugenio factum est; quamobrem hanc pendulorum ad institutum nostrum accommodationem sequenti propositione explicabimus.

PROPOSITIO 6.

Problema.

49. *Ope penduli efficere vt corpus in data linea moueatur.* Tab. I. Fig. 5.

Constructio.

Sit A M B curua proposita in qua corpus moueri debeat; huius curuae construatur euoluta AOC, laminaque secundum eius figuram incuruetur et firmetur. Tum filum huic laminae circumducatur, quod altero termino ad laminam sit affixum, altero vero termino in A annexum habeat corpus mouendum. Quando igitur corpus moueri incipit, perspicuum est id in curua AMB moueri debere, quia filum dum a lamina separatur hanc curuam euolutione describit. Q.E. Fac.

Corollarium 1.

50. Hac igitur ratione corpus in data curua progreditur, atque frictionibus non est obnoxium. Quare tali motu commodissime per experimenta effici poterunt, quae in theoria inueniuntur.

Corollarium 2.

51. Ex doctrina de euolutionibus intelligitur fili partem MO a lamina separatam, in curuam AMB esse normalem ipsumque eius radium osculi.

Corollarium 3.

Tabula I. Fig. 6. 52. Quo corpus in peripheria circuli AMB moueatur, lamina incuruata non est opus, sed filum altero termino C tantummodo in centro C peripheriae est figendum.

Corollarium 4.

Fig. 5. 53. Quia filum MO est radius osculi, vis centrifuga tota ad tendendum hoc filum impendetur. Quare hoc filum tum satis roboris habere, tum extensioni obnoxium non esse debet. Nisi enim eandem perpetuo longitudinem conseruet, curuam desideratam non describet.

Corollarium 5.

54. Accedente potentia absoluta, habebitur praeter vim centrifugam vis normalis, quae filum quoque tendet, si vi centrifugae fuerit conspirans. At si contraria fuerit minuet tensionem fili, imo etiam si maior fuerit, comprimet, quo casu euolutio nullius erit vsus. Nam cum filum debeat esse flexile, compressioni resistere non poterit, neque ideo impedire, quo minus corpus a curua AMB versus euolutam recedat.

Scholion I.

55. Praeter hanc difficultatem, ista curuarum per euolutiones generatio hoc quoque laborat

borat defectu, quod linea recta produci nequeat; ad eam enim generandam filum requireretur infinite longum. Simili modo haec euolutio ad curuas accommodari non poteſt, quae alicubi radium oſculi habent infinite magnum. Deinde etiam neque cuspide neque flexu contrario praeditae curuae hoc modo deſcribi poſſunt. Quamobrem ita praxis locum tantum habet in curuis vbique finitam curuaturam habentibus, ad quod addi debet, vt preſſio curuae totalis nusquam in curuae concauam partem dirigatur.

Scholion 2.

56. Hugenius, qui primus euolutionis doctrinam excoluit, ſtatim eam ad hunc ipſum vſum adhibuit; vti ex eius egregio opere de horologio oſcillatorio apparet. Cum enim inueniſſet oſcillationes ſuper cycloide omnes eſſe iſochronas, motum ſuper cycloide in horologia inferre volebat, quod per pendulum intra cycloides oſcillans effecit. Cum enim cycloidis euoluta ſit cyclois, hac ratione obtinuit, vt corpus filo annexum in cycloide moueretur.

Scholion 3.

57. In hoc autem pendulorum motu maxime notari conuenit, praeter corpus motum filum quoque moueri debere, id quod ad inſtitutum huius libri, in quo de motu puncti tantum agetur, minime pertinet. Praeterea motus corporis pendulo annexi non eſt ſibi parallelus, ſed circularis circa centrum ſcilicet circuli curuam oſculantis, qui motus pariter hoc loco non attingitur.

gitur. Hoc igitur libro motum puncti duntaxat super linea vel superficie data examini subiiciemus, mentemque tam a motu fili, quam a motu circulari abstrahemus. In sequentibus autem motum pendulorum, vbi et motus fili et motus circularis in computum ducetur, ad motum puncti tantum reducemus, ita vt haec, quae hoc libro tractabuntur, nihilominus in praxi vsum sint habitura. Quamobrem, vt iam monuimus, punctum motu sibi semper parallelo super curua seu superficie sine vlla frictione ferri est concipiendum.

PROPOSITIO 7.

Theorema.

Tabula II. Fig. 2.

58. *Si corpus a nullis potentiis sollicitatum moueatur in vacuo seu medio non resistente super superficie quacunque ABC: motu feretur vniformi animum ab omni frictione abstrahendo.*

Demonstratio.

Cum corpus super linea data motum impressum continuare queat, multo magis super superficie data moueri poterit, eo quod eius libertas minus est restricta. Sit igitur DM*m* linea, in qua corpus progreditur; haec erit vel recta vel curua. Si ista linea fuerit recta dubium non est, quin corpus motu aequabili sit progressurum. Sin autem fuerit curua, quae aequatione exprimi potest, duo quaeque eius elementa contigua vel proxime in directum erunt sita, vel

an-

angulum infinite acutum constituent, quod in cuspidibus accidit. Illo casu supra demonstratum est corpus nullum motus decrementum pati (12). In cuspidibus vero corpus quidem omnem motum amittet, nisi fuerit elasticum. Quamobrem si motus tantum fiat in curua vel parte curuae cuspidibus carente motus corporis erit aequabilis. Q. E. D.

Corollarium 1.

59. Patietur quidem corpus celeritatis decrementum, quoties directionem mutare cogitur, hoc vero differentiali secundi gradus aequiualet, ideoque, etiamsi integretur, decrementum tamen infinite paruum producit.

Corollarium 2.

60 Si scilicet corporis celeritas fuerit c et radius osculi $MO = r$, erit decrementum celeritatis, dum corpus elementum ds percurrit $= \frac{c\,ds^2}{2r^2}$ (12).

Scholion.

61. Demonstratio huius propositionis prorsus congruit cum demonstratione primae propositionis, neque aliud est discrimen, nisi quod corpus illo casu in data linea moueri cogatur, hoc vero casu super superficie data viae quaerendae habeat libertatem. Quamobrem omnes annotationes, quae circa primam propositionem sunt factae hic quoque valent. Videbimus ergo, quam-

quamnam viam, corpus in ſuperficie quacunque motum percurrere debeat.

PROPOSITIO 8.

Theorema.

Tabula II. Fig. 1. 62. *Via DMm, quam corpus ſuper ſuperficie quacunque ABC motum deſcribit, eſt linea breuiſſima, quae inter terminos D et M duci poteſt; ſi ſcilicet corpus in vacuo moueatur, et a nullis potentiis ſollicitetur.*

Demonſtratio.

Deſcripſerit corpus iam curuam DM; manifeſtum eſt corpus ex M in tangente M*n* eſſe progreſſurum, niſi in ſuperficie perſeuerare cogeretur. Quia igitur motus per M*n* fieri non poteſt, reſoluatur is in duos laterales, quorum alter in ipſa ſuperficie ſit diſpoſitus, alterius vero directio in ſuperficiem ſit perpedicularis, atque ideo penitus non in effectum deduci poſſit. Hanc ob rem ex *n* in ſuperficiem demittatur perpendiculum *nm*, erit recta M*m* elementum, in quo corpus ex M progredietur. Planum ergo *n*M*m*, in quo poſita ſunt et elementum *m*M, et id quod a corpore immediate ante eſt deſcriptum, erit normale in ſuperficiem. At linea breuiſſima in quauis ſuperficie ducta hanc habet proprietatem, vt planum, in quo poſita ſunt duo quaeque elementa contigua, ſit in ſuperficiem normale. Quamobrem linea DM*m*, quae a corpore deſcribitur, eſt linea breuiſſima in ſuperficie ABC. Q.E.D.

Co-

Corollarium 1.

63. Si ergo ex puncto A, in quo motus incipit, linea breuissima in superficie ABC secundum directionem motus ducatur, habebitur via, qua corpus motu vniformi mouebitur.

Corollarium 2.

64. Quia filum tensum in superficie lineam breuissimam designat, ostendet filum tensum simul viam, in qua corpus super ea superficie mouetur.

Corollarium 3.

65. Si igitur superficies proposita fuerit plana, corpus lineam rectam describet, quia haec in plano est linea breuissima. Atque in superficie sphaerica corpus in circulo maximo mouebitur.

Corollarium 4.

66. Quia planum, in quo posita sunt duo curuae D*Mm* elementa contigua, normale est in superficiem, radius osculi curuae vero in eodem plano sit positus et in curuam normalis; erit radius osculi curuae descriptae MO normalis in superficiem.

Scholion.

67. Quemadmodum in quauis superficie linea breuissima sit inuenienda a me primum ostensum est in Tomo III. Comment. Acad. Imp. Petrop. Cum autem ibi ex alio principio lineam breuissi-

mam determinauerim, atque haec materia elementis nondum sit inserta, sequenti propositione lineam hanc breuissimam seu eam, quae a corpore describitur, determinare constitui.

PROPOSITIO 9.
Problema

Tabula II. Fig. 2.

68. *In superficie quacunque determinare lineam, quam corpus a nullis potentiis sollicitatum, quod super ea mouetur, describit.*

Solutio.

Ad naturam superficiei propositae exprimendam sumatur pro arbitrio planum A P Q fixum in eoque recta AP pro axe. Tum ex quouis superficiei puncto M demittatur in hoc planum perpendiculum MQ, et ex Q in axem AP perpendicularis QP. Positis nunc $AP = x$, $PQ = y$, et $QM = z$, natura superficiei dabitur per aequationem inter has tres variabiles x, y et z et constantes. Sit huius aequationis differentialis $dz = Pdx + Qdy$, ex qua linea breuissima in hac superficie seu linea, quam corpus describit, determinari debet. Haec linea vero ex hoc determinatur, quod eius radius osculi in ipsam superficiei normalem incidat. Quamobrem primo normalem superficiei, et deinde cuiusque in ea ductae curuae radium osculi determinabimus; quo postmodum ex coincidentia harum linearum natura lineae quaesitae possit concludi.

Ad

Ad normalem in superficiem inueniendam secetur primo superficies plano MQB, existente BQ recta in plano APQ parallela axi AP, prodeatque ex hac sectione curua BM; cuius natura exprimetur hac aequatione $dz = Pdx$, quae ex locali pro superficie $dz = Pdx + Qdy$ oritur, posita y constante seu $dy = o$. Ducatur ad hanc curuam BM normalis ME rectae BQ productae in E occurrens, erit subnormalis $QE = \frac{zdz}{dx} = Pz$. Ducta nunc EN perpendiculari ad BE, quaevis recta MN a M ad NE ducta normalis erit in curuam BM. Simili modo superficies secetur plano PQM prodeatque sectio CM, cuius natura exprimetur aequatione inter z et y manente x constante, quae erit $dz = Qdy$. Sit MF normalis in hanc curuam erit subnormalis $QF = \frac{-zdz}{dy} = -Qz$, signo negatiuo vtor, quia subnormalem QF versus P cadere pono. Ducta nunc recta FN parallela axi AP, quaeuis recta ex M ad FN ducta normalis erit in curuam CM. Recta MN ergo, quae in punctum intersectionis N rectarum FN et EN cadit, perpendicularis in vtramque curuam BM et CM, et hanc ob rem perpendicularis erit in superficiem. Locus ergo normalis inuenitur sumendo $AH = x + Pz$, et $HN = -Qz - y$.

Ad determinandam vero radii osculi cuiusuis curuae in superficie data ductae positionem sint duo curuae elementa Mm et $m\mu$, quibus respondeant in plano APQ elementa Qq, $q\xi$, atque in axe AP assumto elementa Pp, $p\pi$, quae sint aequa- Tabula II. Fig. 3.

 lia.

lia. Erit ergo $Pp = p\pi = dx$; $pq = y + dy$; $p\varrho = y + 2dy + ddy$; $Qq = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; $q\varrho = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{dyddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$; $qm = z + dz$; $\varrho\mu = z + 2dz + ddz$; $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, et $m\mu = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + \frac{dyddy + dzddz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Producantur Qq et Mm vtrinque, quarum illa ipsi $\pi\varrho$ in r, haec vero ipsi rn normali in planum APQ in n occurrat; eritque ob $Pp = p\pi$, $qr = Qq$ et $mn = Mm$, atque $\pi r = y + 2dy$, ac $rn = z + 2dz$ Iam ad elementum Mm ducatur in plano Qm normalis mS occurrens ipsi Qq productae in S, erit $QS = \frac{(qm - QM)QM}{Qq} = \frac{zdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Ducta iam SR in plano APQ perpendiculari ad QS, omnes rectae ex m ad SR ductae normales erunt ad elementum Mm. In his igitur normalibus erit radius osculi curuae $Mm\mu$. Ea vero harum normalium congruet cum radio osculi, quae in eo sita erit plano, in quo posita sunt elementa Mm et $m\mu$. Quamobrem hoc planum determinari oportet. In hoc vero plano sunt elementa mn et $n\mu$, ambo itaque usque ad planum APQ producta dabunt intersectionem illius plani cum plano APQ. At nm vel mM occurrit plano APQ in T, vbi cum elemento Qq producto concurrit. Est igitur $QT = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dz}$. Ipsi $n\mu$ parallela MV in plano $mn\mu$ erit sita, haec vero MV in planum APQ incidet in V, dabiturque QV ex analogia hac $(rn - \rho\mu)$: $r\varrho$

$r\varrho = QM : QV$; erit itaque $QV = \frac{z\,ddy}{ddz}$. Hanc ob rem recta TV producta erit intersectio plani $nm\mu$ cum plano APQ; quare recta ME, quae in concursum rectarum SR & TV est ducta, erit simul normalis in Mm et posita in plano $nm\mu$; eritque propterea MR positio radii osculi curuae in M. Ex his punctum R hoc modo determinabitur; erit, ducta RX perpendiculari in AP productam, $AX = \frac{z\,dx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} + x$ atque $XR = \frac{z\,dx^2 ddy + z\,dz(dzddy - dyddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} - y$. Quo igitur normalis in superficiem MN in radii osculi curuae directionem incidat, debet esse $AH = AX$ et $XR = HN$; vnde erit $P(dx^2 + dy^2)ddz - Pdydzddy = dxdyddy + dxdzddz$ et $-Q(dx^2 + dy^2)ddz + Qdydzddy = dx^2ddy + dz^2ddy - dzdyddz$. Quae quidem aequationes inter se congruunt, fiet enim ex iis coniunctim $Pdx + Qdy = dz$, quae est ipsa aequatio naturam superficiei exponens. Harum igitur aequationum alterutra cum hac $dz = Pdx + Qdy$ coniuncta dabit curuam a corpore in proposita superficie percursam. Q.E.I. Tabula II. Fig. 2. & 3

Corollarium I.

96. Erit igitur pro linea in superficie proposita descripta $ddz : ddy = Pdydz + dxdy : Pdx^2 + Pdy^2 - dxdz$. At quia est $dz = Pdx + Qdy$ erit $ddz : ddy = Pdz + dx : Pdy - Qdx$, seu $Pdyddz - Qdxddz = Pdzddy + dxddy$.

Corollarium 2.

70. Si assumatur altera aequatio et vtrinque subtrahatur $Qdz^2 ddz - dy^2 ddy$ habebitur $-Q(dx^2 + dy^2 + dz^2)ddz + Qdydzddy + dy^2 ddy = (dx^2 + dy^2 + dz^2)ddy - Qdz^2 ddz - dzdyddz$. Vnde habetur $\frac{ddy + Qddz}{dy + Qdz} = \frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Quae est illa ipsa aequatio, quam pro linea breuissima in quacunque superficie dedi in Comm. Acad. Petr. Tom. III.

Scholion 1.

71. Vt in hoc casu quo corpus a nulla potentia sollicitatur, directio radii osculi cum normali in superficiem congruere debet, ita in aliis casibus, quando corpus sollicitatur a potentiis, hac
Tabula III. Fig. 1. lineae datum angulum constituere debent. Quamobrem ad hunc angulum generaliter inueniendum sit MN normalis in superficiem, et MR directio radii osculi; erit, vt iam vel posuimus vel inuenimus, $PQ = y$, $QM = z$; $PH = hN = Pz$; $Qh = -Qz$; $PX = Rx = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy}$, et $Qx = \frac{zdx^2 ddy + zdz(dzddy - dyddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy}$. Ducta NR ex N in MR demittatur perpendiculum NO, erit $MO = \frac{MR^2 + MN^2 - NR^2}{2MR} = \frac{MQ^2 + Rx.Nh + Qx.Qh}{MR}$ et $NO = \frac{\sqrt{(MR^2 MN^2 - (MQ^2 + Rx.Nh + Qx.Qh)^2)}}{MR} = \frac{\sqrt{(MQ^2}}{}$

$$\frac{\sqrt{(MQ^2(Qx - Qb)^2 + MQ^2(Rx - Nb^2) + (Rx.\,Qb - Qx.\,Nb)^2)}}{MR}.$$

Anguli vero RMN tangens eſt $= \frac{NO}{MO}$ poſito ſinu toto $= 1$. Subſtitutis autem ſupra aſſumtis ſymbolis et in ſubſidium vocata aequatione $dz = Pdx + Qdy$ prodibit tangens anguli NMR $= \frac{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(ddx - Qddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Hoc ergo angulo euaneſcente fit $ddz : ddy = Pdz + dx : Pdy - Qdx$ ut ſupra (69).

Scholion 2.

72. Ipſa vero radii oſculi longitudo MO inuenitur ex angul $nm\mu$ ope huius analogiae vt ſinus anguli $nm\mu$ ad ſinum totum ita Mm ad MO. Eſt vero $n\mu = \sqrt{(ddy^2 + ddz^2)}$ et $mn - m\mu = \frac{-dy\,ddy - dz\,ddz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$, ergo perpendiculum ex n in $m\mu$ productum $= \frac{\sqrt{(dx^2 ddy^2 + dz^2 ddy^2 + dx^2 ddz^2 + dy^2 ddz^2 - 2\,dy\,dz\,ddy\,ddz)}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Quare hoc perpendiculum eſt ad $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ ut $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ ad MO, vnde prodit radius oſculi MO $= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dy\,ddz - dz\,ddy)^2)}}$. Hoc autem radio oſculi opus erit in ſequente propoſitione, in qua preſſionem, quam corpus in ſuperficiem exercet, inueſtigabimus. Tabula II. Fig. 3.

Scho-

Scholion 3.

73. Ex hac generali radii osculi expressione orietur ea pro radio osculi lineae breuissimae, si conjungatur cum hac aequatione $ddz = \frac{ddy(Pdz + dx)}{Pdy - Qdx}$ et locali $dz = Pdx + Qdy$. Prodibit autem radius osculi $=$ $\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(Pdy - Qdx)}{dx\,ddy\,\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}} = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{ddz - Qddy} =$ $\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{dPdx + dQdy}$. Atque haec expressio dat radium osculi curuae in superficie proposita descriptae a corpore a nullis potentiis sollicitato.

PROPOSITIO 10.

Theorema.

Tabula II. Fig. 1. 74. *Pressio, quam corpus in superficie motum et a nullis potentiis sollicitatum in ipsam superficiem exercet, fit normaliter in eam versus eius conuexitatem, et se habet ad vim grauitatis, vt altitudo celeritati corporis debita, ad dimidium radii osculi curuae a corpore descriptae.*

Demonstratio.

Sit D M m curua in superficie ABC a corpore descripta; altitudo celeritati corporis debita $= v$; et radius osculi curuae $MO = r$. Quia corpus ex M, si libere moueri posset, progrederetur in elemento Mn; superficies vero efficit, vt per elementum Mm incedat, existente nm perpendiculo in superficiem; superficies a corpore

pore secundum directionem *nm* premetur, tanta vi, quanta opus est ad corpus ex directione M*n* in directionem M*m* pertrahendum. Hoc vero praestatur a vi $\frac{2v}{r}$ normaliter in superficiem seu secundum directionem radii osculi MO agente. Quamobrem pressio corporis in superficiem erit normalis, quippe agens secundum *mn* et aequalis $\frac{2v}{r}$, existente vi grauitatis corporis $= 1$. Q.E.D.

Corollarium 1.

75. Haec est igitur vis centrifuga, quam corpus in superficiem simili modo exercet, quo in lineam datam, in qua moueri cogitur.

Scholion 1.

76. Pressio in superficiem necessario debet esse normalis. Nam nisi esset normalis resolvi posset in duas, quarum altera esset normalis; altera in ipsa superficie posita. Harum vero normalis tantum ad premendam superficiem impenditur, dum altera ipsum corporis motum immutaret.

Corollarium 2.

77. Longitudinem radii osculi *r* lineae, quam corpus a nullis potentiis sollicitatum super proposita superficie describit, inuenimus (73). Ea igitur assumta erit vis centrifuga $= \frac{(2v(ddz - Qddx)}{dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}$ $= \frac{2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}$.

Scholion 2.

78. De hac vi centrifuga in ſuperficiem exercita eadem locum habent, quae ſupra de vi centrifuga in datam curuam ſunt annotata, vid. Prop. 2. cum annexis Coroll. et Schol. Linea enim breuiſſima, quam corpus ſuper ſuperficie percurrit, inſtar canalis conſiderari poteſt, in quo corpus moueatur; atque tum de motu in hoc canali omnia valent, quae ſupra de motu ſuper data linea, nullis agentibus potentiis, ſunt allata.

PROPOSITIO II.

Problema.

79. *Determinare effectum cuiusuis potentiae, quem exerit in corpus ſuper data ſuperficie motum tam in vacuo quam in medio reſiſtente.*

Solutio.

Quaecunque ſit directio potentiae ſollicitantis corpus, ea reſolvi poteſt in tres potentias laterales, quarum primae, quam vocabimus M, directio normalis in ſuperficiem: ſecundae, quam per N deſignabimus directio normalis tam in directionem motus corporis quam in directionem potentiae M, cuius igitur directio erit in plano tangente ſuperficiem, Tertiae potentiae T appellatae directio congruat cum directione motus, quae igitur erit vis tangentialis; priores vero erunt vires normales. Quia nunc harum trium virium directiones ſunt inter ſe normales, nullius effectus a reliquis perturbari

turbari poterit. Quare quem effectum quaeque producat, inueſtigabimus.

Prima potentia *M*, cuius directio in ſuperficiem eſt normalis, nullum habebit effectum in immutando corporis motu; ſed tota impendetur in preſſionem ſuperficiei. Augebit igitur vel diminuet preſſionem a vi centrifuga ortam, prout eius directio in plagam conuexae partis ſuperficiei incidit, vel in plagam partis concavae. Incidat ea in partem interiorem erit totalis preſſio in ſuperficiem verſus partes exteriores $= \frac{-2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}} - M$ (77). Preſſio enim a vi centrifuga orta minuetur hoc caſu potentia *M*.

Secunda potentia N, quia eius directio in ipſa ſuperficie eſt poſita, et normalis in directionem corporis, corporis directionem tantum immutabit celeritatem neque augendo neque minuendo. Haec vis igitur corpus a linea breuiſſima deducet, facietque vt non amplius in plano ad ſuperficiem normali moueatur: huius igitur plani, in quo corpus mouebitur, inclinationem ad planum lineae breuiſſimae normale in ſuperficiem inueſtigari oportet. Huius vero inclinationis angulo aequalis eſt angulus, quem radius oſculi lineae deſcriptae cum normali in curuam conſtituit; quemque ante generaliter determinavimus (71). Poſtquam corpus elementum *Mm* celeritate altitudini *v* debita deſcripſit progrederetur,

tur, nisi a vi N sollicitaretur per elementum in ν, ita vt Mm et $m\nu$ essent duo elementa lineae breuissimae, et posita in plano ad superficiem normali, erit directio vis N normalis in planum chartae, sit ea $\nu\mu$; corpus igitur hac vi a plano chartae sursum reducetur, si quidem ponamus hanc vim N sursum esse directam hac elementorum positione vt in figura repraesentatur. Efficiat ergo haec vis, vt corpus per elementum $m\mu$ moueatur, anguloque $\nu m\mu$ a directione $m\nu$ deflectat. Huic angulo respondet radius osculi $= \frac{m\nu^2}{\mu\nu}$. Quare cum vis N hunc angulum generet, celeritasque curuae debita sit altitudini v, erit ex effectu virium normalium $N = \frac{2v.\mu\nu}{m\nu^2}$ ideoque $\mu\nu = \frac{N.m\nu^2}{2v}$. Quo nunc inclinatio plani $Mm\mu$, in quo corpus actu mouebitur, ad planum $Mm\nu$, quod in superficiem est normale, inueniatur, demittatur ex ν in elementum Mm productum perpendiculum νn; erit μn quoque in mn perpendiculare, ideoque angulus $\mu n\nu$ erit angulus inclinationis plani μmM ad planum νmM; atque cum $\mu\nu$ sit normalis ad νn; huius anguli tangens erit $= \frac{\mu\nu}{n\nu} = \frac{N.m\nu^2}{2v.n\nu}$. At $n\nu$ determinatur ex inclinatione elementorum Mm et $m\nu$ seu radio osculi lineae breuissimae, cuius Mm et $m\nu$ sunt elementa. Sit hic radius osculi r; erit $\frac{m\nu^2}{n\nu} = r$, ideoque tangens anguli $\mu n\nu = \frac{Nr}{2v} = \frac{N.(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{2v(dPdx+dQdy)}$, substituto loco r

valore

valore inuento (73.). Huic vero angulo aequalis est angulus, quem radius osculi elementorum Mm, $m\mu$ a corpore actu descriptorum constituit cum radio osculi elementorum Mm, $m\nu$ seu cum normali in superficiem. Huius autem anguli tangentem supra invenimus (71). Quare facta aequatione habebimus $\frac{ddy(dx+Pdz)-ddz(Pdy-Qdx)}{(ddz-Qddy)\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}} = \frac{N(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{2v(dPdx+dQdy)}$, qua aequatione effectus potentiae N determinatur. Seu cum sit $ddz - Qddy = dPdx + dQdy$ habebitur ista aequatio $ddy(dx+Pdz) - ddz(Pdy - Qdx) = \frac{N(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{2v}$.

Tertia potentia T, quia in directione corporis est posita, celeritatem tantum vel auget vel diminuit. Ponamus eam esse accelerantem, exprimetur eius effectus hac aequatione $dv = T\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Atque si motus in medio fiat resistente resistentiaque sit $= R$, minuenda tantum est vis tangentialis T resistentia R. Quamobrem habebitur $dv = (T-R)\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

80. Ex duabus igitur aequationibus, quarum altera v altera dv determinat, vna conflatur v non amplius continens, quae cum locali pro superficie $dz = Pdx + Qdy$ coniuncta deter-

minat curuam, quam corpus ſuper propoſita ſuperficie deſcribit.

Scholion 1.

81. De potentia N bene eſt attendendum in quam plagam tendat, h. e. an ad dextram an ad ſiniſtram regionem corporis moti vergat? Pro hac enim differentia tangens anguli $\mu n \nu$ vel affirmatiua vel negatiua eſt accipienda. De hoc vero non erimus hic ſolliciti, ſed vlteriorem huius rei disquiſitionem in caput vltimum huius libri differemus.

Scholion 2.

82. Ad ſequens igitur caput ſecundum progredimur, in quo motum corporis ſuper data linea in vacuo examinabimus. Capite tertio vero motus ſuper data linea in medio reſiſtente inueſtigabimus. Quarto denique capite motum ſuper data ſuperficie tam in vacuo quam in medio reſiſtente ſcrutabimur.

CAPUT

CAPUT SECUNDUM.

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA IN VACUO.

PROPOSITIO 12.

Problema.

83.

Sollicitetur corpus, quod super curua AM mouetur, vbique a potentia MF cuius directio sit parallela axi AP; determinare celeritatem corporis in singulis punctis, atque tempus, quo curuae quaeuis portio describitur, nec non pressionem, quam curua in singulis punctis patitur. Tabula III. Fig. 3.

Solutio.

Descripserit corpus iam arcum AM, sitque eius celeritas in A debita altitudini b, atque celeritas in M debita altitudini v. Positis nunc AP $= x$; PM $= y$; et arcu AM $= s$; resoluatur potentia MF, que sit p in laterales normalem scilicet MN et tangentialem MT; erit $ds : dx =$ MF : MT et $ds : dy =$ MF : MN. Hinc igitur prodibit vis tangentialis MT $= \frac{pdx}{ds}$ et vis normalis $= \frac{pdy}{ds}$. Perspicuum hic est vim tangentialem celeritatem corporis minuere, erit ergo $dv = -pdx$ (42.) atque $v = C - \int pdx$. Sumto autem integrali $\int pdx$ ita, vt euanescat posito $x = o$, erit $v = b - \int pdx$; ex qua aequatione ne corporis celeritas in ſingulis punctis cognoſcitur. Ex eadem aequatione innoteſcit quoque tempus, quo arcus AM abſoluitur, poſito enim tempore t erit $t = \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int p dx)}}$. Vis normalis $MN = \frac{pdy}{ds}$ tota impenditur in curuae preſſionem ſecundum MN (39). augebit ergo preſſionem a vi centrifuga ortam, quia MN in oppoſitam radii oſculi MO plagam cadit. Quare cum poſito radio oſculi $NO = r$ vis centrifuga ſit $= \frac{2v}{r}$ (20). Erit totalis preſſio in curuam iuxta MN $= \frac{pdy}{ds} + \frac{2v}{r}$; Q. E. I.

Corollarium 1.

84. Celeritas in M igitur tanta eſt, quanta foret in P, ſi corpus eadem celeritate initiali Vb per AP eadem in ſingulis altitudinibus potentia p ſollicitatum aſcendiſſet.

Corollarium 2.

85. Celeritas igitur non pendet a natura curuae, ſed tantum ab altitudine, quam corpus percurrit. Si nimirum altitudinis elementum fuerit dx erit $dv = -pdx$ vel $dv = pdx$ prout corpus vel aſcendit vel deſcendit.

Corollarium 3.

86. Cum ſit $v = b - \int pdx$, ſi ſumatur abſciſſa x tanta uti AC, pro qua ſit $\int pdx = b$; erit corporis in illa altitudine B celeritas $= o$. Corpus igitur in B vsque aſcendit, ibique quieſcet, continuo vero ex B deſcendet per BMA.

Co-

Corollarium 4.

87. Si ascensus per AMB cum ascensu rectilineo per APC comparetur, erit tempus per elementum Mm ad tempus per Pp, vt Mm ad Pp i. e. vt ds ad dx.

Corollarium 5.

88. Quare si linea AMB fuerit recta, ob rationem Mm ad Pp constantem, erit tempus per AM ad tempus per AP in constanti ratione nempe ea, quam habet sinus totus ad cosinum anguli A, seu quam habet longitudo AB ad AC.

Corollarium 6.

89. Posito elemento Pp constante est radius osculi $r = \frac{-ds^3}{dx\,ddy}$, ideoque vis centrifuga $= -\frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3} = \frac{-2(b - \int p\,dx)\,dx\,ddy}{ds^3}$. Quare pressio totalis erit $= \frac{p\,ds^2\,dy - 2(b - \int p\,dx)\,dx\,ddy}{ds^3}$.

Scholion I.

90. Quemadmodum in hoc problemate ex datis curua et potentia sollicitante inuenta sunt, celeritas in singulis punctis, tempus per quemvis arcum, et pressio in singula curuae puncta: ita ex harum quinque rerum duabus quibusque datis, reliquae tres possunt inueniri. Ex quo decem nascentur problemata, quae omnia solutionem ex huius problematis solutione habebunt.

Scholion 2.

91. Similiter habebuntur decem huiusmodi quaestiones, si directiones potentiae sollicitantis non fuerint parallelae, sed vel conuergentes ad centrum virium, vel alio modo determinatas directiones habentes. At si etiam directio inter quaesita ponatur tunc ob sex res in computum ducendas, ex ternis quibusque, reliquae tres inuenientur; hincque viginti orientur problemata.

Scholion 3.

92. Orientur porro problemata indeterminata, vt si loco temporis per quamuis curuae portionem tantum integrum tempus per AMB daretur, tum enim infinitae solutiones locum haberent. Praeterea si plures descensus vel ascensus integri considerentur super eiusdem curuae variis partibus, eorumque ratio detur, numerus quaestionum multo magis augebitur. Ad hoc genus pertinet quaestio de inuenienda curua, super qua omnes descensus ad datum punctum fiant eodem tempore, quas tanquam difficillimas vltimo pertractabimus. Nunc autem primum curuam et potentiam sollicitantem tanquam datas accipiemus et problemata eo pertinentia soluemus. Deinceps vero ex aliis datis, quemadmodum reliqua sint inuenienda, monstrabimus.

PRO-

PROPOSITIO 13.

Problema.

93. Si potentia sollicitans fuerit vniformis et vbique deorsum tendat, determinare descensum corporis super data curua AM *in* A *ex quiete incipientem, atque pressionem, quam curua, in singulis punctis* M *sustinet.* Tabula III. Fig. 4.

Solutio.

Ducta verticali AP seu parallela directionibus potentiae MF, atque applicata rectangula MP, sit AP $= x$, PM $= y$, curua AM $= s$. Ponatur potentia MF $= g$, existente vi grauitatis $= 1$, et celeritas in M debita altitudini v. His positis erit vis normalis $= \frac{gdy}{ds}$ et vis tangentialis $= \frac{gdx}{ds}$ (83.). Quia hoc casu vis tangentialis accelerat, erit $dv = gdx$, et $v = gx$, ob celeritatem in A $= o$. Deinde quia radius osculi in MO directus est $= \frac{+ds^3}{dx\,ddy}$, posito dx constante, erit vis centrifuga $= \frac{+2v dx\,ddy}{ds^3}$, cuius directio est MN. Secundum eandem plagam vero premit vis normalis $\frac{gdy}{ds}$. Quare tota pressio, quam curua in M sustinet secundum MN est $= \frac{gdy}{ds} + \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^2} = \frac{gdy}{ds} + \frac{2gx\,dx\,ddy}{ds^3}$ ob $v = gx$. Tempus vero quo corpus arcum AM percurrit est $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

94. Celeritas igitur in M tantum ab altitudine AP, per quam descendit, pendet, atque tanta est, quantam idem corpus ex AP delapsum et ab eadem potentia g sollicitatum acquirit.

Corollarium 2.

95. In quacunque igitur curua corpus a potentia vniformi g sollicitatum ex quiete descendat, celeritates erunt radicibus quadratis ex altitudinibus percursis proportionales, est enim celeritas, vt $\sqrt{v}$ i. e. vt $\sqrt{gx}$.

Corollarium 3.

96. Tempus quo primum elementum Aa percurritur, est $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ euanescente x. Si igitur angulus PAa fuerit recto minor seu $s = nx$, erit tempus per Aa infinite paruum, ideoque tempus AM finitum, nisi curua vel ascendat inter A et M, supra A vel in infinitum progrediatur. At si angulus PAa fuerit rectus, erit ipso puncto A, $s^n = \alpha x$, existente n numero vnitate maiore, ideoque $\sqrt{gx} = s^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{g}{\alpha}}$, et $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{2 s^{\frac{2-n}{2}}}{2-n} \sqrt{\frac{\alpha}{g}}$. Quare si n fuerit binario minor, tempus per Aa erit infinite paruum, et tempus per AM finitum. At si $n = 2$ vel > 2 tempus per primum elementum Aa erit infinite magnum, seu corpus ex A nunquam egredietur.

Co-

Corollarium 4.

97. Quoties autem $n < 2$, toties radius osculi in A est infinite paruus. Quare in casu quo tangens curuae in A ad AP est normalis, corpus non descendet, nisi radius osculi in A fuerit infinite paruus.

Scholion 1.

98. Ex eo, quod primum elementum tempore infinite paruo percurritur, recte concluditur tempus per arcum AM esse finitum, cum enim corpus motu accelerato per AM descendat, multo celerius sequentia elementa describentur, et hancob rem tempus debebit esse finitum. Exemplis autem sequentibus omnia illustrabuntur.

Exemplum 1.

Tabula III. Fig. 5.

99. Sit linea AM recta vtcunque inclinata ad verticalem AP, atque cosinus ang. $A = n$, erit $x = ns$. Tempus ergo, quo corpus per AM descendit, erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{gns}} = \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{gn}} = \frac{2\sqrt{AM}}{\sqrt{gn}} = \frac{2\,AM}{\sqrt{g.AP}}$. Seu tempus per lineam vtcunque inclinatam est directe, vt radix ex ipsa linea et inverse, vt radix ex cosinu anguli inclinationis MAP. Vis centrifuga erit autem $= o$, quare linea AM tantum a vi normali premitur, quae est $= g\sqrt{(1-n^2}, = \frac{g.PM}{AM}$.

Corollarium 5.

100. Tempus ergo per AM est ad tempus per AK, vt $\sqrt{AM}$ ad $\sqrt{AK}$. At tempus per AM est ad tempus per AP vt AM ad AP. (88). Qua-

re si fuerit $AM : AP = \sqrt{AM} : \sqrt{AK}$, seu $AM : AP = AP : AK$, quod euenit si PK est in AM perpendicularis tum tempus descensus per AK aequale est tempori descensus per AP.

Corollarium 6.

101. Patet etiam tempus descensus per perpendiculum PK aequale esse tempori descensus per AP. Est enim cosinus anguli $APK = \frac{PK}{AP}$; Quare cum sit tempus per AP ad tempus per KP vt $\frac{\sqrt{AP}}{\sqrt{1}}$ ad $\sqrt{KP} : \sqrt{\frac{PK}{AP}}$, erit haec ratio aequalitatis.

Corollarium 7.

Tabula IV. Fig. 1. 102. Ex hoc perspicitur in circulo APPB omnes descensus per chordas AP ex puncto supremo A ductas, nec non omnes descensus per chordas ad punctum infimum B ductas aequalibus fieri temporibus; eo scilicet tempore, quo corpus per diametrum AB perpendiculariter delabitur.

Exemplum 2.

Tabula IV. Fig. 2. 103. Si curua AMB fuerit circulus, ac radius $BC = a$ et AP tangat circulum, erit $(a-y)^2 + x^2 = a^2$ seu $y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Habebitur ergo $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, et ob $v = gx$ et $r = a$ erit vis centrifuga $= \frac{2gx}{a}$; atque ob $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ tota pressio, quam circulus in M sustinet $= \frac{3gx}{a}$. Triplo igitur maior est tota pressio, quam sola vis normalis. Tempus deinde, quo arcus AM percurritur, est

$=$

$= \int \frac{a\,dx}{\sqrt{g(a^2x - x^3)}}$, cuius integratio neque a circuli nec hyperbolae quadratura pendet, sed ope rectificationis curuae elasticae construi potest. Tempus interim per quadrantem AB est $= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \times (1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} + \text{etc.})$.

Corollarium 8.

104. Cum corpus ad infimum punctum B peruenerit, ibi habebit celeritatem altitudini *ga* debitam. Hac igitur ascendet in altero quadrante BD pertingetque ad D, vbi eius celeritas euanescet, ideoque rursus descendet ad B tumque ad A per BA reascendet. Similis vero erit ascensus descensui per quadrantem, quia corpus siue ascendat siue descendat in iisdem punctis eandem habet celeritatem.

Scholion 2.

105. Alia exempla non afferimus, cum in sequentibus, vbi plures descensus ad punctum fixum super data linea considerabimus, plura simus allaturi. Nunc vero primum eas quaestiones evoluemus, quae pertinent ad motum super data linea, ex dato puncto fixo a quiete inceptum: cuius modi est problema sequens.

PROPOSITIO 14.

Problema

106. *Si fuerint infinitae curuae similes* AM, AM *etc. ex puncto fixo* A *initium sumentes; inuenire cur-* Tabula IV. Fig. 3.

curuam C M M, *ab illis curuis arcus* A M, A M etc. *abſcindentem*, *qui a deſcendente ſuper iis corpore aequalibus temporibus percurrantur*; *exiſtente vt ante potentia ſollicitante vniformi et vbique deorſum directa.*

Solutio.

Ex infinitis curuis datis ſumatur vna quaecunque A M, cuius parameter ſit a. Poſitoque AP $= x$, PM $= y$ et arcu AM $= s$, et exiſtente vt ante potentia ſollicitante $= g$; deſcendat corpus ſuper curua A M, erit celeritas in M debita altitudini gx. Tempus ergo deſcenſus ſuper A M erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Ab omnibus ergo curuis A M, A M etc. tanti arcus ſunt abſcindendi, vt pro iis ſit $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ quantitas conſtans. At $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ad alias curuas referetur, ſi praeter s et x etiam parameter a ponatur variabilis. Poſito igitur in $\int \frac{dx}{\sqrt{gx}}$ etiam a variabili, quantitas $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ponenda eſt $=$ conſtanti, nempe ei tempori quo omnes deſcenſus fieri debent. Sit hoc tempus $= k$ erit $k = \int \frac{dx}{\sqrt{gx}}$ in ſingulis curuis. Quare ſi $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ita differentietur vt etiam a variabile ponatur, hoc differentiale nihilo aequale eſt ponendum. Ad hoc differentiale inueniendum ſit $ds = pdx$, eritque p, quia omnes curuae ponuntur ſimiles, functio in qua a et x nullum dimenſionum numerum ſimul conſtituunt. Habebimus ergo $\int \frac{pdx}{\sqrt{gx}}$: hoc differentiatum poſito quoque a variabili dabit

$\frac{pdx}{\sqrt{gx}}$

$\frac{pdx}{\sqrt{gx}} + qda$, quod fieri debet $= o$. Quantitas q vero ſequenti modo inuenietur. Quia eſt $k = \int \frac{pdx}{\sqrt{gx}}$; in quantitate k, variabiles a et x dimenſionum numerum conſtituent $\frac{1}{2}$. Oſtendi autem alibi in Tom. IX. Comment. tum fore $\frac{px}{\sqrt{gx}} + qa = \frac{k}{2}$. Ex quo inuenitur $q = \frac{k}{2a} - \frac{p\sqrt{x}}{a\sqrt{g}}$. Habebitur ergo $\frac{pdx}{\sqrt{gx}} + qda = \frac{pdx}{\sqrt{gx}} + \frac{kda}{2a} - \frac{pda\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} = o$. Quae eſt aequatio pro curua quaeſita. At ſi aequatio inter coordinatas x et y pro curua CMM deſideretur, ex aequatione pro quaque curuarum AM, valor ipſius a in x et y inuentus ſubſtitui debet. Q. E. I.

Corollarium 1.

107. Aequatio etiam primo inuenta $\frac{pdx}{\sqrt{gx}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} - \frac{kda}{2a}$ ſufficit ad curuam CMM inueniendam. Nam pro quauis abſciſſa AP $= x$ ex ea inuenitur a parameter eius curuae AM, cuius punctum M reſpondens aſſumtae abſciſſae x eſt in curua quaeſita CMM.

Corollarium 2.

108. Cum autem haec aequatio ſit differentialis, ideoque ad plures curuas pro conſtante quae adiicitur, pertineat; notandum eſt in additione conſtantis, eam tantum ſolutioni eſſe conuenientem, quae pro data curua ſeu pro dato ipſius a valore det abſciſſam x tantum arcum AM abſcindentem, qui tempore k deſcenſu abſoluatur.

Corollarium 3.

109. Si tempus k aequale esse debeat tempori descensus per verticalem $AC = b$, erit $k = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$. Quo valore substituto habebitur aequatio $\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$. In cuius integratione id est faciendum, vt curua per punctum C transeat.

Scholion 1.

110. Erit autem semper recta verticalis AC species curuarum AM; quae oritur, si parameter a vel infinite magna vel infinite parua accipiatur. Quare commodissime tempus constans k per descensum per verticalem AC, quippe speciem curuarum AM, exprimitur. Atque in constructione aequationis inuentae $\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$ tanta constans est addenda, vt posito $x = b$, fiat a vel infinitum vel nihil, prout ille vel iste valor ipsius a recta AC respondeat.

Scholion 2.

111. Si $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ reipsa potest integrari, ne data quidem aequatione opus est, ad quam inueniendam opus fuit q determinare. Nam si integrale ipsius $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ iterum differentietur posito quoque a variabili reipsa obtinetur q; atque hoc differentiale tantum nihilo aequale esset ponendum. Commodissime vero his casibus problema soluetur, si integrale ipsius $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ statim ipsi k vel $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$ aequale ponatur, et loco a eius valor in x et y substituatur ex aequatione pro curuis datis. Atque hoc mo-

modo solutio in promtu est non solum pro curuis similibus, sed dissimilibus etiam, si modo tempora descensus per quantitates finitas exprimi possunt.

Exemplum I.

112. Si omnes hae curuae AM fuerint rectae diuersimode ad verticalem AC inclinatae, erit $y = nx$ et $s = x\sqrt{(1+n^2)}$ ubi n tanquam parameter est consideranda. Erit ergo $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \int\frac{dx\sqrt{(1+n^2)}}{\sqrt{gx}} = \frac{2\sqrt{x(1+n^2)}}{\sqrt{g}}$ quod aequale poni debet ipsi $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$. Erit itaque $x(1+n^2) = b$. Cum autem n sit quantitas variabilis, ponatur pro ea valor $\frac{y}{x}$ ex aequatione $y = nx$: quo facto prodibit pro curua CMM aequatio inter coordinatas orthogonales x et y ista $y^2 + x^2 = bx$, quae est pro circulo, cuius diameter est recta $AC = b$.

Scholion 3.

113. Hic casus est ille ipse casus ante pertractatus (102), ibi enim ostensum est corpus per omnes chordas in circulo ex puncto supremo eductas aequalibus temporibus descendere. Pertinet hic quidem casus non ad curuas similes; sed hoc exemplum attulimus ad casum Scholii 2. illustrandum, quia pro rectis hisce tempora descensus finitis quantitatibus exprimuntur. Sequentia exempla vero curuas similes, vti propositio postulat, complectentur.

Exemplum 2.

114. Sint curuae AM, AM omnes circuli tangentes verticalem AC in A. Ponatur radius cuiusque eorum $= a$, erit $y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)}$ atque $a = \frac{y^2 + x^2}{2y}$. Hi circuli vero omnes sunt curuae similes, quia a, y et x in aequatione eundem dimensionum numerum tenent, seu homogeneitatem complent sola. Radius igitur a tanquam parameter variabilis debet tractari. Habetur autem ex illa aequatione $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, quare erit $p = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, ideoque praescriptam habet proprietatem, vt a et x dimensionum numerus sit nullus. Hanc ob rem pro curua CMM haec habebitur aequatio $\frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 x - x^3)}} = \frac{da\sqrt{x}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$, seu haec $\frac{da\sqrt{b}}{a} = \frac{x\,da - a\,dx}{\sqrt{(a^2 x - x^3)}}$. Quae aequatio construi potest, posito enim $x = au$, prodit $\frac{da\sqrt{b}}{a\sqrt{a}} = \frac{-du}{\sqrt{(u - u^3)}}$ in qua indeterminatae sunt a se inuicem separatae. Quo autem aequatio inter coordinatas x et y pro curua CMM obtineatur, ponatur loco a valor $\frac{y^2 + x^2}{2y}$ et loco da eius differentiale $\frac{y^2 dy + 2yx\,dx - x^2 dy}{2y^2}$. Quibus substitutis sequens prodit aequatio differentialis $-x\,dy + y\,dx = \frac{(y^2 dy + 2yx\,dx - x^2 dy)\sqrt{bx}}{y^2 + x^2}$. Quae ita integrari debet ut posito $x = b$ fiat $y = 0$, quia curua per punctum C transire debet.

Corollarium 4.

115. Ex hac aequatione tangens curuae CMM n singulis punctis cognoscitur, et ex positione tangentis innotescit angulus AMM, quo

curua CMM quamlibet datarum interfecat. Erit fcilicet tangens anguli AMM $= \frac{y}{x - \sqrt{bx}}$. Hic ergo angulus eft rectus in C, ob $x = b$, feu curua CMM in C ad AC eft normalis.

Corollarium 5.

116. *Si b* vel maior vel minor accipiatur curua CMM alia quoque erit, hocque modo infinitae orientur curuae a circulis arcus ifochronos abfcindentes. Haeque curuae omnes inter fe erunt fimiles, ob parametrum b, quae in aequatione cum x et y homogeneitatem conftituit. Data ergo vna curua CMM innumerabiles aliae ex ea conftrui poffunt, abfciffis fcilicet et applicatis curuae CMM in eadem ratione augendis vel diminuendis, in qua AC feu b augetur vel diminuitur.

Exemplum 3.

117. Sint curuae AM, AM omnes cycloides cufpides in A habentes et tangentes verticalem AC in A. Pofita parametro cuiusque cycloidis AM feu dupla diametro circuli generatoris $= a$; erit ex natura cycloidis $s = a - \sqrt{(a^2 - 2ax)}$ atque $ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$; hincque $dy = \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$. Hoc ergo cafu eft $p = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$, functio ipfarum a et x nullius dimenfionis vt requiritur. Quare pro curua CMM reperitur ifta aequatio $\frac{adx}{\sqrt{(a^2x - 2ax^2)}}$ $= \frac{da\sqrt{x}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$ feu $\frac{xda - adx}{\sqrt{(a^2x - 2ax^2)}} = \frac{da\sqrt{b}}{a}$. Si aequa-

aequatio inter coordinatas orthogonales x et y desideretur, ex aequatione $y = \int \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$ seu huius differentiali posita quoque a variabili, valor ipsius a debet substitui. Haec vero aequatio differentiata posito a quoque variabili dat $ady - yda = \frac{adx\sqrt{2ax} - xda\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$ seu $\frac{ady - yda}{\sqrt{2a}} = \frac{axdx - x^2da}{\sqrt{(a^2x - 2ax^2)}}$. Quae abit in hanc $\frac{ady - yda}{a^2\sqrt{2}} = \frac{axdx - x^2da}{a^2\sqrt{(ax - 2x^2)}}$. Superior vero per $\frac{1}{4\sqrt{a}}$ multiplicata praebet hanc, $\frac{da\sqrt{b}}{4a\sqrt{a}} = \frac{axda - a^2dx}{4a^2\sqrt{(ax - 2x^2)}}$. Hae duae aequationes additae dant aequationem integrabilem, cuius integralis est $\frac{y}{a\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \frac{-\sqrt{(ax - 2x^2)}}{2a}$. Ex qua valor ipsius a erutus fit $\sqrt{a} = \frac{y\sqrt{2b} \pm \sqrt{(2y^2x - 2bx^2 + 2x^3)}}{b - x}$ et $\sqrt{(ax - 2x^2)} = \frac{yx\sqrt{2} \pm \sqrt{(2by^2x - 2b^2x^2 + 2bx^3)}}{b - x}$. Quibus valoribus in aequatione $\frac{(xdy - ydx)\sqrt{a} + xdx\sqrt{2b}}{\sqrt{(ax - 2x^2)}} = dy\sqrt{b}$, quae oritur ex duabus differentialibus eliminato da, substitutis prodibit $\frac{xdy - ydx - bdy}{\sqrt{b}} = \frac{dx\sqrt{(y^2 - bx + x^2)}}{\sqrt{x}}$ aequatio pro curua quaesita CMM.

Corollarium 6.

118. Ex hac aequatione inuenitur tangens anguli, quem curua CM cum applicata PM constituit nempe $\frac{dx}{dy} = \frac{-(b - x)\sqrt{x}}{y\sqrt{x} + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}$. Deinde etiam innotescit tangens anguli, quem cyclois AM cum

cum applicata P M conſtituit. Ex aequatione cycloidis erit nimirum $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}{\sqrt{2ax}} = \frac{\sqrt{(ax - 2x^2)}}{x\sqrt{2}}$. Eliminato vero a erit iſta tangens $= \frac{y\sqrt{x} + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}{(b-x)\sqrt{x}}$. Quare cum horum angulorum alter alterius ſit complementum, ſumto illius deinceps poſito, erit angulus, quem curua C M M cum qualibet datarum AM conſtituit, rectus. Conſequenter curua C M M eſt traiectoria orthogonalis omnium cycloidum datarum A M, A M &c.

Corollarium 7.

119. Sumto A C alius magnitudinis, aliae quoque curuae CMM prodibunt, et ſic infinitae traiectoriae orthogonales inueniuntur, quae omnes inter ſe ſunt ſimiles. Data ergo vna facile quotquot libuerit, conſtruere licebit.

Scholion 4.

120. Omnes hae curuae arcus abſcindentes iſochronos, quaecunque fuerint curuae ſecandae, ſemper conſtrui poſſunt, etiamſi id ex aequatione non appareat. Per quadraturas enim ex datis curuis arcus poſſunt abſcindi, qui dato tempore deſcenſu abſoluantur, hocque modo puncta quotlibet curuae quaeſitae inueniuntur. Si quidem curuae ſecandae ſunt algebraicae, aequatio pro curua ſecante ſemper ita eſt comparata, ut factis debitis ſubſtitutionibus indeterminatae a ſe inuicem poſſint ſeparari. At ſi curuae ſecandae differentiali

tiali aequatione exprimantur, aequatio differentialis pro curua ſecante rariſſime ſeparationem indeterminatarum admittit. Cauſa eſt, quod peculiari modo, quo in hoc cycloidum caſu uſus ſum, parameter a eliminari debeat; eaque ſubſtitutio ad ſeparationem non deducat.

Scholion 5.

121. Deinde obſeruandum eſt, omnes curuas arcus iſochronos abſcindentes, quarum numerus pro vario ipſius b valore eſt infinitus, inter ſe ſimiles eſſe, ſi quidem curuae ſecandae fuerint tales. Colligitur hoc ex generali aequatione $\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$ in qua cum p ſit functio ipſarum a et x nullius dimenſionis quantitates a, b et x homogeneitatem conſtituunt. At ex aequatione curuarum ſecundarum, quia in ea a, x et y vbique eundem dimenſionum numerum conficere ponuntur, valor ipſius a erit functio ipſarum x et y vnius dimenſionis. Quare eo ſubſtituto loco a habebitur aequatio pro curua ſecante, in qua b, x et y vbique eundem dimenſionum numerum conſtituunt. Conſequenter b variabili poſito oriuntur infinitae curuae ſimiles inter ſe reſpectu puncti A. Data ergo vnica, reliquae facile ex ſimilitudinis ratione deſcribuntur.

Scholion 6.

122. Materia haec de arcubus iſochronis abſcindendis iam praeterito ſeculo eſt pertractata in

in Act. Erud. Lipf. A. 1697. a Cel. Ioh. Bernullio, atque postmodum in Comment. Acad. Parif. a Cel. Saurino, qui vero alia methodo funt vfi. Ego vero eam adhibui methodum, quam in nostris Comment. pro A. 1734. tradidi, tanquam commodiffimam ad huiusmodi problemata foluenda. In his vero locis Viri Cel. curuas quoque fimiles tantum, vt ego, confiderauerunt, fine dubio, quia pro curuis diffimilibus folutio fit nimis difficilis et faepe etiam vires fuperat. Vocantur vero in locis citatis hae curuae fynchronae, quia arcus fimul percurfi abfcinduntur.

Scholion 7.

123. Ex mea differtatione Tomi IX. Comment. Acad. Petrop. apparet, has curuas fynchronas fimili modo poffe inveniri, fi curuae datae etiam non fuerint fimiles, fed eiusmodi tamen, vt pofito $ds = pdx$, in p quantitates a et x datum dimenfionum numerum conftituant; tum enim aeque facile valor literae q inuenitur. Vt fi numerus dimenfionum ipfarum a et x in p fuerit n, aequatio pro curua fecante reperietur haec $\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{(2n+1)\,da\,\sqrt{b}}{a}$. Quare fi fuerit $n = -\frac{1}{2}$, vt fi fuerit $p = \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{da}{a}$ ideoque $x = ma$, feu x in data ratione ad parametrum a eft capiendum: quo igitur cafu conftructio fynchronarum eft facillima. At fi p

non huiusmodi habuerit valorem, ex supra citata dissertatione mea intelligitur, quo modo in aequationem quaesitam sit inquirendum.

PROPOSITIO 15.

Problema.

Tabula IV. Fig. 4. 124. *Si fuerit, ut ante infinitae curuae similes* AM, AM *etc. et recta positione data* DE; *invenire eam curuam* AMN, *super qua corpus tempore breuissimo ex* A *ad rectam* DE *descensu peruenit.*

Solutio.

Descripta per Prop. praeced. quacunque curva CMM arcus AM isochronos abscindente, ducatur tangens GMH parallela datae rectae DE. Manifestum est super curua AM, quae ad punctum contactus M tendit, corpus tempore breuissimo ad rectam GMH esse venturum, quia quaeque alia puncta rectae GMH extra curuam CMM cadunt, ideoque longiore tempore opus est, quo corpus ad ea perveniat. Iam, quoniam omnes curuae a curuis AM, AM arcus isochronos abscindentes sunt inter se similes (121). concipiatur ex iis una quae rectam DE tangat, dico punctum contactus fore in N puncto, quo recta AM per prius punctum contactus M ducta rectae DE occurrit. Sequitur hoc tum ex natura similitudinis curuarum CMM respectu puncti A, tum etiam ex eo, quod arcus AMN similis sit arcui AM, atque rectae DE in eodem angulo occurrat, quo curua AM rectae GH. Quare re cum corpus per AM tempore breuiſſimo ad GH perueniat, neceſſe eſt, vt quoque tempore breuiſſimo ſuper curua AMN ad rectam DE perveniat. Q. E. I.

Corollarium 1.

125. Ex hoc perſpicitur, ſi recta DE fuerit horizontalis, corpus deſcenſu per verticalem AC ad eam citiſſime peruenire, ob tangentem curuae CMM in C horizontalem: id quod quidem per ſe perſpicuum eſt.

Corollarium 2.

126. Si ergo curuae AM, AM fuerint cycloides vt in exemplo 3. Propoſ. praec. poſuimus, corpus ſuper ea cycloide celerrime ad rectam DE peruenit, quae huic rectae in N ad angulos rectos occurrit; quia angulus, quem quaeque cyclois cum curua CM conſtituit, eſt rectus.

Corollarium 3.

127. Si igitur recta DE fuerit verticalis ſeu parallela ipſi AC, portio cycloidis AMM erit dimidia cyclois. Quare ſuper dimidia cycloide motus horizontalis eſt celerrimus.

Corollarium 4.

128. Si curuae AM, AM ſint rectae ex puncto A ad rectam poſitionem datam DE ductae, corpus ſuper ea AM citiſſime ad DE perveniet, quae eſt chorda circuli per A tranſeuntis et centrum in verticali AB habentis, atque rectam DE tangentis. (112.) Tabula IV. Fig. 5.

 Co-

Corollarium 5.

129. Si igitur angulus DCA fuerit n graduum erit angulus BAM $\frac{90+n}{2}$ graduum, et angulus AMC graduum $\frac{90-n}{2}$. Seu ducta horizontali AGH, anguloque DGH bisecto recta GF, erit quaesita linea AM parallela ipsi GF.

Corollarium 6.

130. Quare si linea DE fuerit verticalis corpus ad eam citissime perueniet descendendo super recta ad horizontem angulo semirecto inclinata. Corpus igitur super recta hoc modo inclinata motu horizontali celerrime progreditur.

Scholion.

Tabula IV. Fig. 4. 131. Simili modo quoque inueniri potest, super quanam infinitarum curuarum similium AM, AM corpus descensu citissime ad datam curuam perueniat. Nam si linea GMH fuerit curua quaecunque tangens curuam CMM in M, corpus super hac curua AM celerrime ad curuam GMH perueniet, si quidem tota curua GMH extra curuam CMM fuerit sita. Eodem etiam modo posset determinari, si curuae AM, AM non fuerint similes, super quanam corpus celerrime ad datam lineam GH perueniat. Ex infinitis enim curuis CMM arcus isochronos abscindentibus ea est quaerenda, quae datam GMH tangat, eritque ea curua AM, quae per punctum contactus transit ea, quae quaeritur. Sed cum in his casibus difficile plerumque sit curuas CMM inuenire, multoque

toque difficilius eam determinare, quae datam lineam tangat; quaestionem ad curuas similes tantum restrinximus.

PROPOSITIO 16.
Theorema.

132. *Tempora descensuum, quibus corpus curuas* AM *et* Am *similes similiterque ex puncto* A *positas percurrit, sunt in ratione subduplicata laterum homologorum.* Tabula IV. Fig. 6.

Demonstratio.

Quia curuae AM, Am sunt similes, erunt AM: Am; AP: Ap; et PM: pm in data ratione, nempe ea, quam latera homologa tenent; sit haec ratio laterum homologorum N: n. Quia celeritas in M est ad celeritatem in m, vt $\sqrt{AP}$ ad $\sqrt{Ap}$, erunt celeritates in M et m in ratione subduplicata laterum homologorum. Sumantur jam ex M et m elementa similia rationem scilicet N ad n tenentia, erunt tempora, quibus haec duo elementa homologa percurruntur in ratione composita ex directa elementorum, i. e. N ad n et reciproca celeritatum, i. e. $\sqrt{N}$: $\sqrt{n}$. Ex quo sequitur, tempora, quibus curuarum AM, Am elementa homologa percurruntur, esse in ratione subduplicata laterum homologorum. Quare cum haec ratio sit constans, tempora, quibus totae curuae AM et Am percurruntur, eandem hanc rationem tenebunt. Q. E. D.

Corollarium 1.

133. Tempora igitur, quibus arcus circulares similes similiterque positi descensu percurruntur, sunt in subduplicata ratione radiorum.

Corollarium 2.

134. Pendula igitur, quae arcus circulares similes describunt, oscillationes absoluent temporibus, quae rationem subduplicatam longitudinum pendulorum tenebunt.

Corollarium 3.

135. Eadem ratio temporum locum habet, si corpora pendula non circulos describant, sed alias curuas, dummodo eae fuerint inter se similes, similesque arcus absoluantur.

Scholion.

136. In his autem omnibus potentiam sollicitantem semper ponimus vniformem, deorsumque tendentem, etiamsi hanc conditionem omiserimus. Hanc enim hypothesin ante pertractare constituimus, quam ad alias sumus progressuri.

PROPOSITIO 17.

Problema

Tabula V. Fig. 1. 137. *Existente potentia sollicitante vniformi tendenteque deorsum, moueatur corpus super curua quacunque* AM *cum data celeritate initiali in A: deter-*

terminare motum corporis ſuper hac curua, et preſſionem, quam curua in ſingulis punctis ſuſtinet.

Solutio.

Poſita potentia ſollicitante g, et celeritate initiali in A debita altitudini b, praetereaque AP $= x$; PM $= y$; AM $= s$ et celeritate in M debita altitudini v. His poſitis erit $dv = gdx$, (93.) vnde fit $v = b + gx$. Porroque tempus per arcum AM erit $\int \frac{ds}{\sqrt{(b+gx)}}$. Deinde preſſio totalis, quam ſuſtinet curua ſecundum directionem normalis MN erit $= \frac{gdy}{ds} + \frac{2vdxddy}{ds^3}$ (93.) $= \frac{gdy}{ds} + \frac{2(b+gx)dxddy}{ds^3}$ exiſtente dx elemento conſtante. Hoc enim tantum differt haec ſolutio a ſolutione Prop. 13. quod ibi eſſet $v = gx$, hic vero ſit $v = b + gx$. Ex his igitur formulis tum motus tum preſſio cognoſcitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

138. Si linea AM fuerit recta, jam ex §. 88. intelligitur tempus per AM eſſe ad tempus deſcenſus per AP eadem celeritate $\sqrt{b}$ incepti, vt eſt AM ad AP. Preſſio vero ob euaneſcentem vim centrifugam erit $= \frac{gdy}{ds}$ ſeu conſtans.

Corollarium 2.

139. Patet etiam hoc caſu, quo motus non a quiete incipit, celeritatem ab altitudine tantum pendere. Quare quaecunque fuerit curua AM celeritas corporis in quouis puncto innoteſcit, etiam incognita curuae natura.

Exem-

Exemplum I.

140. Sit curua AM parabola verticem in A et axem verticalem AP habens; erit ergo posita eius parametro $=a$, $y^2=ax$; et $dy=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}$ et $ds=\frac{dx\sqrt{(a^2+4ax)}}{2\sqrt{ax}}$. Habebitur ergo tempus per AM $=\int\frac{dx\sqrt{(a+4x)}}{2\sqrt{x}(b+gx)}$. Deinde cum posito dx constante sit $ddy=\frac{-adx^2}{4x\sqrt{ax}}$, erit $\frac{dx\,ddy}{ds^3}=\frac{-2a}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}}$. Consequenter pressio totalis est $=\frac{ga}{\sqrt{(a^2+4ax)}}-\frac{4a(b+gx)}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}}$ $=\frac{ga^2-4ab}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}}$.

Corollarium 3.

141. Si igitur est $b=\frac{ga}{4}$, pressio curuae euanescit. Corpus ideo hoc casu libere in hac parabola moueri posset; qui est etiam ipse casus praecd. Libro pertractatus.

Corollarium 4.

142. Existente igitur $b=\frac{1}{4}ga$ erit tempus per arcum AM $=\int\frac{dx}{\sqrt{gx}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}}$. Hoc ergo tempus aequatur tempori descensus per abscissam AP a quiete incepti.

Corollarium 5.

143. Si $b>\frac{1}{4}ga$ pressio fit negatiua, tum igitur curua in plagam axi AP oppositam premitur. A si $b<\frac{1}{4}ga$ directio pressionis erit in MN. Quantitas vero pressionis in singulis curuae punctis erit reciproce vt radius osculi.

Exem-

Exemplum 2.

144. Si curua AM fuerit circulus; cuius radius $= a$, et centrum in verticali AP sit positum; erit $y^2 = 2ax - x^2$, vnde $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$ et $ds = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Erit ergo tempus, quo arcus AM percurritur $= \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)(b + gx)}}$. Atque cum sit $\frac{dxddy}{ds^2} = \frac{-1}{a}$, erit pressio, quam circulus in puncto M patitur $= g - \frac{gx}{a} - \frac{2(b + gx)}{a} = g - \frac{3gx}{a} - \frac{2b}{a}$.

Corollarium 6.

145. Tempus per logarithmos exprimi potest, si fuerit $b = o$; fit autem $= \infty$, seu corpus perpetuo in A manebit. Id quod per supra tradita (97.) patet. Nam, quia curua in A est normalis in AP, neque radius osculi infinite paruus, corpus descendere non potest.

Corollarium 7.

146. Si est $b = \frac{ga}{2}$, seu celeritas initialis, tanta, quantam corpus acquirit cadendo ex altitudine dimidii radii circuli; pressio totalis cum vi centrifuga erit conspirans atque $= \frac{3gx}{a}$, erit itaque altitudini percursae proportionalis.

DEFINITIO 3.

147. Motus oscillatorius est motus reciprocus, quo corpus alternatim accedit et recedit ab initio motus M. *Ita si corpus super curua* Tabula V. Fig. 2.

MAN *moueatur, primo descendet super* MA, *tum ascendet in* AN, *donec celeritatem amiserit; deinde ex* N *iterum descendet ascendetque in arcu* AM, *quo facto iterum descendet, hancque periodum continuabit: Atque talis motus oscillatorius vocatur.*

Corollarium 1.

148. Motus oscillatorius ergo consistit in alternis descensibus et ascensibus super linea curua; atque descensu motu accelerato mouetur, ascensu vero celeritatem acquisitam rursus perdit.

Corollarium 2.

149. Quilibet ergo descensus super eadem curuae parte fit, super qua praecedens ascensus contigit. Quare cum celeritas corporis ab altitudine tantum pendeat in vacuo, corpus in eodem curuae puncto siue in ascensu siue in descensu eandem habet celeritatem.

Corollarium 3.

150. Ex quo sequitur tempus descensus per MA, aequale esse tempori ascensus per AM; similique modo tempus ascensus per AN tempori descensus per NA.

Corollarium 4.

151. Corpus in arcu AN ascendens ad punctum N vsque perueniet, quod aeque altum est ac punctum M, ex quo erat delapsum. Sequitur hoc ex eo, quod celeritas per altitudinem tantum determinetur.

Corollarium 5.

152. Si curua AN similis et aequalis fuerit curuae AM, tum motus per AN aequalis erit motui per AM. Quare omnes ascensus et descensus aequalibus fient temporibus.

Corollarium 6.

153. Si curuae MA, AN fuerint dissimiles, tempus saltem per MAN aequale erit tempori per NAM, seu tempora accessionum et recessionum erunt inter se aequalia.

Corollarium 7.

154. Quia corpus semper ad eandem altitudinem pertinget, manifestum est hunc motum oscillatorium perpetuo durare debere.

Corollarium 8.

155. Curua ergo ad motum oscillatorium producendum apta est omnis curua, quae de puncto infimo A duos habet arcus ascendentes, vt MAN.

Scholion I.

156. Exposuimus hic proprietates motus oscillatorii, quales ex exposita hypothesi potentiae sollicitantis vniformis et perpetuo deorsum tendentis consequuntur. Eaedem vero quoque locum habent, si potentia vtcunque ab altitudine pendeat, vel etiam ad fixum punctum dirigatur; id quod in sequentibus plenius apparebit. In medio resistente vero res aliter se habet,

 nam

nam neque ascensus per datam curuam similis est descensui per eandem, neque in ascensu corpus ad aequalem altitudinem pertingit ei, ex qua descensu erat delapsum.

Scholion 2.

157. Vocari solet motus per MAN itus sequens vero motus per NAM reditus, consistit ergo motus oscillatorius ex alternis itibus et reditibus. Oscillatio vero ab aliis vocatur motus ex itu et reditu constans, ab aliis tam itus quam reditus oscillatio vocatur. Hic priori sensu oscillationis vocem accipiemus, ita vt vna oscillatio ex vno itu vnoque reditu constet. Itus vero atque reditus vterque vno ascensu vnoque descensu consistit, atque ideo integra oscillatio duos ascensus duosque descensus complectetur. Cum igitur tempus itus aequale sit reditus tempori, erit tempus vnius oscillationis duplo maius quam tempus vnius itus seu reditus.

Corollarium 9.

158. In hoc ergo capite, in quo de motu in vacuo agitur, si motum oscillatorium examinare velimus, vel ascensus vel descensus solos super duabus curuae partibus AM, AN considerare opus habebimus.

Scholion 3.

159. Nihil refert vtrum arcus AM et AN vnam curuam continuam constituant, an vero sint diuersae curuae, dummodo in A ita sint

con-

coniunctae, vt communem habeant tangentem: alias enim motus perturbaretur. Quare ad motum oscillatorium inquirendum tantum opus est, vt motus super curuis AM et AN seorsum definiamus. Sufficit enim hoc tum ad oscillationes determinandas, tum ad relationem inter maiores minoresque oscillationes inueniendam. Vocantur autem eae oscillationes maiores, quae maioribus arcubus absoluuntur, minores vero, quae minoribus.

Scholion 4.

160. Ex Prop. 6. §. 49. perspicitur, quomodo oscillationes ope pendulorum effici queant; scilicet ope euolutae curuaram AM et AN, circum quas filum circumducitur. Ab Hugenio etiam iste pendulorum vsus ad oscillationes accommodatur, vt vel ex eius instituto, quo eo motu ad horologia perficienda vtitur apparet. Eaedem vero difficultates, quas loco cit. commemorauimus, hic locum habent. Quamobrem motum puncti super datis lineis hic tantum inuestigabimus, mentemque ab omnibus pendulorum circumstantiis abducemus, quae nostrum institutum turbare possent.

PROPOSITIO 13.

Problema.

161. *Existente potentia sollicitante vniformi et deorsum directa, determinare tempus ascensus seu descensus per quemuis circuli arcum* EA *in puncto circuli infimo A terminatum.* Tabula V. Fig. 3.

Solutio.

Sit C circuli centrum, erit CA radius verticalis ſeu parallelus directioni potentiae g. Ponatur $AC = a$, et arcus AE altitudo $AG = b$, erit celeritas in infimo puncto A debita altitudini gb, quia corpus ex E deſcendens tantam habebit celeritatem, cum in A peruenerit. Atque tantam celeritatem corpus in A habere debet, vt ad E vsque aſcendere poſſit. Conſideretur quodvis arcus AE elementum Mm, et dicatur $AP = x$, erit PM $= \sqrt{(2ax - x^2)}$ et $Mm = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Celeritas vero in M erit debita altitudini $g.\,GP = gb - gx$. (93). Tempus igitur, quo elementum Mm ſiue aſcenſu ſiue deſcenſu percurritur, erit $= \frac{a\,dx}{\sqrt{g\,(b-x)(2ax-x^2)}}$. Quod quia integrari non poteſt per ſeries eius integrale exprimemus. Eſt autem poſito $2a = c$,

$$\frac{1}{\sqrt{(b-x)(2ax-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{bc}}\left(x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1.\,x^{\frac{1}{2}}(b+c)}{2bc} + \frac{x^{\frac{3}{2}}(3b^2+2bc+3c^2)}{8b^2b^2} + \frac{x^{\frac{5}{2}}(5b^3+3b^2c+3c^2+5c^3)}{16b^3c^3} + \text{etc.}\right).$$

Hoc ergo per $\frac{a\,dx}{\sqrt{g}}$ multiplicatum et integratum dat tempus, quo arcus A M abſoluitur $= \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{gb}}\left(1 + \frac{x(b+c)}{6bc} + \frac{x^2(3b^2+2bc+3c^2)}{40b^2c^2} + \frac{x^3(5b^3+3b^2c+3bc^2+5c^3)}{112b^3c^3} + \text{etc.}\right)$. Totum vero tempus per arcum EA prodibit, ſi fiat $x = b$, et ratio periſpheriae ad diametrum $= \pi : 1$. quo poſito habebitur, $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi b}{8c} + \frac{9\pi b^2}{128c^2} + \text{etc.}\right) = \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}\left(1 + \frac{b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \text{etc.}\right)$. Vbi coefficien-

tes

tes $1, \frac{1}{4}, \frac{9}{64}$ etc. sunt quadrata coefficientium 1, $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}$, qui prodeunt si $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem resoluitur. Ex hac igitur serie tempus vero proxime potest inueniri. Q. E. I.

Corollarium I.

162. Quo maior igitur arcus EA est, eo maius quoque erit tempus, quo is percurritur. Fit enim posito $b = 2a = c$, tempus infinitum; quia corpus descensu semicirculum nequaquam describere potest.

Corollarium 2.

163. *Si* igitur corpus oscillatorio motu mouetur in arcu circuli EAF, erit tempus vnius itus vel reditus duplo maius, quam tempus vnius ascensus vel descensus, quia tempus per ANF aequale est tempori per AMG. Quare vnius itus reditusve tempus, seu tempus dimidiae oscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}(1 + \frac{b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \text{etc.})$. Integra vero oscillatio tempore duplo maiore absoluetur.

Scholion I.

164. Series haec tempus exprimens statim hoc modo potest inueniri. Temporis elementum in hos factores resoluatur $\frac{adx}{\sqrt{g(bx-xx)}} \times \frac{1}{\sqrt{(2a-x)}}$ horumque posterior tantum in seriem commutetur scilicet hanc $\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1.x}{2.c\sqrt{c}} + \frac{1.3xx}{2.4c^2\sqrt{c}} +$ etc. posito $2a = c$ Quia autem post integrationem fit $x = b$ erit $\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \pi$;

$= \pi$; $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{1\pi b}{2}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{1.3.\pi b^2}{2.4}$; $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{1.3.5.\pi b^3}{2.4.6}$. etc. Ex quibus totum descensus tempus vt ante colligitur $= \frac{\pi \sqrt{2a}}{2\sqrt{g}} \left(1 + \frac{1b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \frac{225\,b^3}{2304c^3} + \text{etc.}\right)$.

Scholion 2.

165. Quo appareat a cuiusnam aequationis constructione summatio seriei $1 + \frac{1b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} +$ etc. pendeat, pono $\frac{b}{c} = \frac{tt}{1+tt}$ et summam seriei $= e^{\int \frac{q\,dt}{t}}$ denotante e numerum, cuius log. est $= 1$. His positis ex mea series summandi methodo in Comment. Acad. Petrop. Tom. VII. exposita inuenitur sequens aequatio $dq + \frac{q^2 dt}{t} = \frac{t\,dt}{(1+tt)^2}$. Ex qua aequatione, si construi posset, inueniretur, q in t, indeque ipsa summa per t seu per $\frac{b}{c}$. Quia autem aequatio constructionem non admittit in se spectata, apparet eam tamen construi posse, quia summa seriei per tempora in circulo ope quadraturarum assignari potest. Data enim summa seriei ex ea constructio aequationis inuentae sequitur.

Corollarium 3.

166. Si arcus AE, in quo descensus vel ascensus absoluitur, ponitur infinite paruus, tempus per eum tamen non fit infinite paruum. Euanescit enim in expressione temporis tantum b. eritque tempus descensus vel ascensus per arcum AE euanescentem $= \frac{\pi \sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Co-

Corollarium 4.

167. Iuncta altera circuli parte AF cum AE oscillationes per arcum EAF euanescentem fient infinite paruae, tempore tamen absoluentur finito. Scilicet tempus vnius itus vel reditus seu tempus vnius dimidiae oscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Corollarium 5.

168. Tempora igitur huiusmodi oscillationum infinite paruarum sunt in ratione subduplicata composita ex directa radiorum et reciproca potentiarum sollicitantium.

Corollarium 6.

169. Haec eadem valent, si potentia sollicitans non fuerit vniformis. Nam vtcunque variabilis ponatur, tamen, dum in corpus super arcu infinite paruo motum agit, constantem habebit valorem.

Corollarium 7.

170. Intelligitur, etiamsi curua EAF non fuerit circulus sed curua quaecunque, tum etiam quae hic allata sunt ad oscillationes infinite paruas super hac curua pertinere. Tum vero loco radii *a* radius osculi huius curuae in puncto infimo A est accipiendus.

Corollarium 8.

171. Huiusmodi oscillationes super arcu infinite paruo EAF efficiuntur ope penduli, cuius longitudo est radius AC. Tempora igitur oscil-

lationum infinite paruarum pendulorum sunt directe vt radix quadrata ex longitudine penduli et reciproce vt radix quadrata ex potentia sollicitante.

Corollarium 9.

172. Si curua ANF non fuerit aequalis curuae AME pro oscillationibus infinite paruis radium osculi in A tantum considerare sufficit. Sit is $= \alpha$ erit tempus ascensus per arcum AF infinite paruum $= \frac{\pi\sqrt{2\alpha}}{2\sqrt{g}}$ atque cum tempus descensus per arcum AME euanescentem sit $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$ erit tempus vnius itus seu dimidiae oscillationis super curua composita EAE $= \frac{\pi(\sqrt{a}+\sqrt{\alpha})}{\sqrt{2g}}$.

Corollarium 10.

173. Si oscillationes non fuerint infinite paruae super circulo BAD, tempora oscillationum maiora erunt, quo maiores sint oscillationum arcus. Atque si oscillationes tamen sint valde paruae, erit tempus talis oscillationis ad tempus oscillationis infinite paruae vt quadruplum diametri circuli sinu verso arcus percursi auctum ad quadruplum diametri ipsum.

Corollarium 11.

174. Altitudo ex qua corpus eodem tempore ab eadem potentia g sollicitatum descendit, quo fit descensus per arcum EMA infinite paruum est $= \frac{\pi^2 a}{8}$; seu est ad octauam radii partem vt quadratum peripheriae circuli ad quadratum dia-

diametri; quam proxime ergo haec altitudo erit $= \frac{5}{4} a$.

Corollarium 12.

175. Super chorda autem arcus EMA corpus descendit tempore eodem, quo per diametrum circuli (102). Quare tempus descensus super chorda infinite parua est ad tempus descensus super arcu respondente vt $\frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ ad $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$ i. e. vt diameter ad quartam peripheriae partem. Atque tempus descensus ex diametro seu dupla penduli longitudine est ad tempus vnius integrae oscillationis infinite paruae ex itu et reditu compositae vt diameter ad peripheriam.

Scholion 3.

176. Si duo arcus circulares AE et FA super quibus coniunctis oscillationes peraguntur non sunt aequales, ope penduli hae oscillationes confici possunt, si in centro K arcus AF clauus infigatur, vt filum CA, postquam arcum EA circa centrum C descripsit, in K retineatur et circa centrum K arcum AF describat. Tabula V. Fig. 4.

PROPOSITIO 19.

Problema.

177. *Data potentia sollicitante inuenire longitudinem penduli infinite paruas oscillationes conficientis, quod singulos itus reditusue vno minuto secundo absoluat.*

Solutio.

Existente a longitudine penduli quaesita et g potentia sollicitante, vnitate vim gravitatis denotante, est tempus vnius dimidiae oscillationis infinite paruae $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Haec vero expressio vt in minutis secundis habeatur, longitudo a in partibus millesimis pedis Rhenani est exprimenda, et formula $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ per 250 diuidenda, vt ex primo Libro apparet. Quamobrem habebitur tempus vnius dimidiae oscillationis $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{250\sqrt{g}}$ minut. sec. Quare, cum hoc tempus vnum minutum secundum esse debeat, erit $\pi\sqrt{2a} = 250\sqrt{g}$, atque $a = \frac{31250g}{\pi^2} = 3166\frac{1}{4}g$. part. mill. pedis Rhen. Haec ergo est longitudo penduli semioscillationes vno minuto secundo absoluentis: Q. E. I.

Corollarium 1.

178. Longitudines ergo pendulorum eodem tempore oscillationes peragentium, sed a diuersis potentiis sollicitatorum, sunt in ipsarum potentiarum ratione.

Corollarium 2.

179. Si potentia sollicitans g aequalis est vi grauitatis 1, qui casus in oscillationes in supersisuperficie terrae factas competit, erit penduli longitudo, quod itus reditusque singulos vno minuto secundo absoluit $= 3, 16625$ pedum Rhenan. seu trium pedum cum sexta pedis parte.

Scho-

Scholion. 1.

180. Apprime conuenit haec longitudo cum ea, quam Hugenius per experimenta invenit; ex quo apparet nos in praecedente libro numerum 15625. ſcrup. ped. Rhen. recte pro altitudine, ex qua corpus vi grauitatis ſollicitatum tempore vnius minuti ſecundi delabitur, aſſumſiſſe; ex hoc enim numero fluit numerus 250, per quem temporum expreſſiones diuidi debent, vt minuta ſecunda praebeant. Cum igitur Hugenius longitudinis 3, 166. ped. tertiam partem pro pede vniuerſali haberi velit, quippe cuius longitudo vbique terrarum per obſeruationes poteſt determinari: continebit hic pes vniuerſalis 1055 partes milleſimas pedis Rhenani.

Scholion 2.

181. Obſeruationibus vero hic pes vniuerſalis ſequenti modo commodiſſime determinatur. Sumatur pendulum longitudinis f, quod ad minimas oſcillationes faciendas impellatur, numerenturque eius dimidiae oſcillationes tempore vnius horae, earumque numerus ſit n, ita vt vna ſemioſcillatio abſoluatur tempore $\frac{3600}{n}$ min. ſecund. Sit iam longitudo penduli ſemioſcillationes minutis ſecundis abſoluentis z. Quare cum tempora oſcillationum diuerſorum pendulorum ab eadem potentia ſollicitatorum ſint in ſubduplicata ratione pendulorum (171.); erit $\frac{3600}{n} : 1 = \sqrt{f} : \sqrt{z}$ ideo-

que $z = \frac{n^2 f}{12960000}$ et consequenter pes vniuersalis $=$ $\frac{n^2 f}{38880000}$.

Corollarium 3.

182. Pendulum igitur quadruplo longius quam $3166\frac{1}{4}$ scrup. pedis Rhenani semioscillationes duobus minutis secundis absoluet; quia tempora oscillationum sunt in subduplicata ratione longitudinum pendulorum.

Corollarium 4.

183. Cum semidiameter telluris sit 20382230 ped. Rhen. si tantae longitudinis pendulum concipiatur, durabit eius vna semioscillatio 2536 min. secunda. Quare in horis 24 prope 17 oscillationes integras absoluet.

Corollarium 5.

185. Quia tempus dimidiae oscillationis est $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$, erit tempus integrae oscillationis $\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. At huic tempori aequale est tempus reuolutionis in peripheria circuli radii a a corpore motu libero peractae, quod ad centrum circuli vrgetur vi $=g$, vt ex praeced. Libro apparet. Hanc ob rem tempus vnius oscillationis integrae penduli semidiametro terrae aequalis aequatur tempori, quo corpus proiectum in superficie terrae vnam reuolutionem perageret. Ostendit vero quoque Hugenius corpus hoc modo motum tempore 24 horarum fere 17 reuolutiones esse absoluturum.

Co-

Corollarium 6.

186. Cum vis grauitatis ſit ad vim qua corpus in ſuperficie ſolis ad centrum ſolis vrgetur, vt 1000 ad 41; erit longitudo penduli, quod in ſuperficie ſolis ſemioſcillationes minuto ſecundo abſoluit $= 77, 226$ ped. Rhenan. Simili modo ob grauitatem in ſuperficie Iouis $= \frac{121}{82}$, tale pendulum longum erit $6, 448$ ped. Atque in ſuperficie Saturni ob grauitatem $= \frac{105}{82}$ talis penduli longitudo erit $4, 054$ ped.

PROPOSITIO 20.

Problema.

187. *Si fuerit curua* BAD, *ſuper qua fiunt oſcillationes, cyclois circulo diametri* AC *ſuper baſi horizontali* BD *deſcripta; determinare tempus oſcillationis per quemque arcum* EAF, *exiſtente potentia ſollicitante uniformi et deorſum tendente.* Tabula V. Fig. 5.

Solutio.

Sit radius oſculi in A nempe $AO = a$, qui eſt duplum diametri circuli generatoris AC, erit ergo $AC = \frac{1}{2}a$ et poſita abſciſſa $AP = x$, et arcu reſpondente $AM = s$, erit ex natura cycloidis $s^2 = 2ax$. Sit iam abſciſſa arcui EAE, qui motu oſcillatorio percurritur, reſpondens $AG = b$, erit celeritas in puncto infimo A debita altitudini gb, et celeritas in M debita altitudini $g(b - x)$. Quare cum ſit $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax}}$ erit tempus, quo arcus AM per-

percurritur $= \int \frac{dx\sqrt{2a}}{2\sqrt{g(bx-x^2)}} = \frac{\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$. Eſt vero ſi poſt integrationem ponatus $x = b$, quo tempus per totum arcum AE prodeat, $\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \pi$; ſeu peripheria circuli per diametrum diuiſa. Quare tempus vnius aſcenſus vel deſcenſus eſt $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$, et tempus vnius itus vel reditus per arcum EAF erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Atque tempus vnius integrae oſcillationis erit $= \frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

188. Quia in hanc temporis expreſſionem littera b, quae quantitatem arcus EAF determinat, non ingreditur, omnium oſcillationum tempora, quae ſuper eadem cycloide perficiuntur, ſunt inter ſe aequalia.

Corollarium 2.

189. Tempus ergo vnius cuiusque oſcillationis erit aequale tempori oſcillationis per arculum infinite paruum. At arculus infinite paruus congruit cum arculo circuli radio OA deſcripti. Quare tempus cuiusque oſcillationis ſuper cycloide BAD aequale erit tempori, quo pendulum longitudinis a oſcillationem minimam abſoluit. Id quod etiam ex praecedente Propoſ. elucet, tempus enim minimae oſcillationis penduli a eſt $= \frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ (167.), qua eadem formula tempus vnius oſcillationis integrae ſuper cycloide expreſſum inuenimus.

Co-

Corollarium 3.

190. Si igitur pendulum ita adaptetur, vt corpus oſcillans in cycloide moueatur; omnes eius oſcillationes ſiue fuerint magnae ſiue paruae aequalibus abſoluentur temporibus. Quare ſi AO fuerit $= 3166\frac{1}{4}g$ ſcrup. pedis Rhen. ſingulae ſemioſcillationes minuto ſecundo abſoluentur.

Corollarium 4.

191. Omnes igitur deſcenſus ſuper cycloide ad punctum infimum A ſunt aequitemporanei ſeu iſochroni; item omnes aſcenſus ex puncto infimo A donec celeritas fuerit abſumta. Tempus vero vnius aſcenſus vel deſcenſus eſt $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Scholion 1.

192. Propter hanc proprietatem cyclois tautochronae nomine appellari ſolet, quia omnes oſcillationes ſuper ea eodem tempore abſoluuntur. Hugenius primus hanc eximiam cycloidis proprietatem detexit, ſtatimque cogitauit de cycloide in locum circuli ſubſtituenda in oſcillationibus, id quod in horologiis effecit. Nunc tamen horologiorum artifices hunc oſcillandi modum rurſus deſeruerunt, quod eius vſum nimis exiguum comperuerint. Atque certe in vacuo quaelibet curua oſcillationes iſochronas producit, quia perpetuo eiusdem magnitudinis exiſtunt. In medio reſiſtente vero, quo oſcillationes decreſcunt, cy-

clois hanc proprietatem amittit, ideoque nullius eſt vtilitatis.

Scholion 2.

Tabula V. Fig. 2.

193. Intelligitur etiam, ſi duae cycloides AE et AF diſſimiles in punctis infimis iungantur, oſcillationes ſuper curua compoſita EAF aequalibus temporibus abſolui. Nam cum ſuper vtraque tempora aſcenſus vel deſcenſus ſint conſtantis quantitatis, etiam ſummae eorum nempe tempora ſemioſcillationum et integrarum oſcillationum inter ſe erunt aequalia. Sit duplum diametri circuli generantis cycloidem AF $= \alpha$ erit tempus vnius aſcenſus vel deſcenſus ſuper AF$=\frac{\pi\sqrt{2\alpha}}{2\sqrt{g}}$. Quare itus reditusve ſuper curva compoſita EAF abſoluetur tempore $=\frac{\pi(\sqrt{2a}+\sqrt{2\alpha})}{2\sqrt{g}}$, integra vero oſcillatio tempore $\frac{2\pi(\sqrt{a}+\sqrt{\alpha})}{\sqrt{g}}$.

Scholion 3.

194. Ordo requireret, vt antequam ad alias potentiae ſollicitantis directiones progrediamur, effectus potentiae, cuius directiones ſint adhuc parallelae, ſed variabiles euolueremus, motumque corporis a huiusmodi potentia ſollicitati ſuper data curua inueſtigaremus. Sed cum exempla motuum notatu dignum continentia nobis adhuc lateant, atque principia, quorum ope motus ſuper quaque curua cognoſcitur, iam ſint expoſita, pleniorem tractationem eo differemus, vbi curuas

ſumus

ſumus inueſtigaturi, ſuper quibus corpus a huiusmodi potentiis ſollicitatum, data lege incedat.

PROPOSITIO 21.

Problema

196. *Si corpus perpetuo vi quacunque ad centrum fixum* C *trahatur, atque ſuper data curua* AM *moueatur; determinare motum corporis ſuper hac linea, et preſſionem, quam curua in ſingulis punctis ſuſtinet.* Tabula V. Fig. 6.

Solutio.

Sit corporis celeritas initialis in A debita altitudini b, et puncti A a centro C diſtantia AC $= a$. Celeritas vero corporis in quocunque curuae loco M debita ſit altitudini v, et vis, qua corpus in M verſus C ſollicitatur ſit $=$ P, exiſtente vi grauitatis corporis moti $= 1$. Dicatur diſtantia MC, y, et arcus AM, s; erit elementum $Mm = ds$ et $Mn = -dy$. Centro C deſcribantur arcus circulares MP, mp; erit AP $= a-y$, Pp $=$ Mn $= -dy$. Iam ducta tangente MT in eamque perpendiculo CT, erit MC : MT $=$ Mm : Mn; et MC : CT $=$ Mm : mn, vnde erit MT $= \frac{-ydy}{ds}$ et CT $= \frac{y\surd(ds^2-dy^2)}{ds}$. Ex quibus, ſi vis centripeta in tangentialem ſecundum MT et normalem ſecundum MO reſolvatur, erit vis tangentialis $= -\frac{Pdy}{ds}$ et normalis $= \frac{P\surd(ds^2-dy^2)}{ds}$. Ex vi tangentiali ergo habebitur $dv = -Pdy$. Ponatur interuallum AP

 $= x$,

$=x$, quo corpus propius ad centrum accessit, erit $a-y=x$ et $dx=-dy$. Quare erit $dv=Pdx$, et si P a distantia MC pendeat, poterit $\int Pdx$ exhiberi. Ita igitur integrali $\int Pdx$ accepto, vt euanescat posito $x=0$, erit $v=b+\int Pdx$. Ex quo tempus per arcum AM erit $=\int\frac{ds}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$. Vis normalis $\frac{P\sqrt{(ds^2-dy^2)}}{ds}$ tota in pressione curuae secundum MO insumitur. Quo igitur haec commodius exponatur et cum vi centrifuga simul exhibeatur, pono perpendiculum $CT=p$, erit vis normalis $=\frac{Pp}{y}$. Deinde radius osculi MO erit $=\frac{ydy}{dp}$, ex quo habetur vis centrifuga $=\frac{2vdp}{ydy}=\frac{2dp(b+\int Pdx)}{ydy}$, cuius effectus effectui vis normalis est contrarius. Quamobrem curua in M versus MO premetur vi $=\frac{Ppdy-2bdp-2dp\int Pdx}{ydy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

196. Si igitur vis P a distantia y tantum pendeat, ita vt corpus in aequalibus a centro distantiis aequaliter vrgeatur, celeritas corporis a distantia quoque tantum pendebit, atque corpus super curua AM motum in aequalibus a centro distantiis aequales habebit celeritates.

Corollarium 2.

197. Atque in quouis puncto M celeritas tanta erit, quantam idem corpus acquireret, si eadem celeritate initiali $\sqrt{b}$ ex A per interual-

lum

lum AP descenderet, existente nimirum $CP = CM$.

Corollarium 3.

198. Etiamsi igitur ipsa curua AM sit incognita; tamen corporis super ea moti in quaque a centro C distantia celeritas potest assignari. Est nempe pro distantia y, $v = b + \int P dx$, existente $x = a - y$.

Corollarium 4.

199. Si curua AM fuerit talis, vt pressio, quam corpus in eam exercet, sit nulla, erit curua ea ipsa, quam corpus motum in A celeritate $\sqrt{b}$ inchoans libere describeret. Erit itaque pro motu libero $Ppdy = 2bdp + 2dp\int Pdx$. seu ob $dx = -dy$, habebitur $Ppdy + 2dp\int Pdy = 2bdp$. Cuius integralis est $p^2 \int Pdy = bp^2 - bh^2$ existente h perpendiculo ex C in tangentem in A demisso. Ex his aequationibus inuenitur $P = \frac{2bh^2 dp}{p^3 dy}$ uti praeced. Libro pro motu libero inuenimus.

Corollarium 5.

200. In motu igitur super quacunque curua AM, pressio, quam curua in M secundum MO sustinet, est $= \frac{-\text{diff.}\ p^2(b+\int Pdx)}{pydy} = \frac{\text{diff.}\ p^2(b+\int Pdx)}{pdx(a-x)} = \frac{\text{diff.}\ p^2 v}{pdx(a-x)}$.

Exemplum I.

201. Sit curua AM circulus centrum in C habens; erit motus corporis vniformis, propter

 ean-

eandem eius perpetuo a centro virium C distantiam. Quare erit $v = b$ et $\int P dx = 0$, atque tempus per AM $= \frac{s}{\sqrt{b}} = \frac{AM}{\sqrt{b}}$. Deinde cum sit $y = a$ erit et $p = a$ et $dp = dy$. Quamobrem pressio, quam curua secundum MO seu versus centrum C sustinet, prodibit $= P - \frac{2b}{a}$. Ex quo perspicitur, si fuerit $b = \frac{Pa}{2}$ corpus libere per hunc circulum motum iri.

Exemplum 2.

202. Sit vis centripeta P potestati cuicunque distantiarum y proportionalis seu $P = \frac{y^n}{f^n}$ et curua AM spiralis logarithmica circa centrum C, ita vt sit $p = my$, et $dp = m dy$, atque $ds = \frac{dy}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Erit ergo $v = b + \int \frac{y^n dx}{f^n} = \frac{a^{n+1} - y^{n+1} + (n+1) b f^n}{(n+1) f^n}$ atque tempus per arcum AM $= \frac{\sqrt{(n+1) f^n}}{\sqrt{(1-m^2)}}$ $\int \frac{dy}{\sqrt{(a^{n+1} - y^{n+1} + (n+1) b f^n)}}$. Pressio vero, quam curua secundum MO sustinet, erit $= \frac{m(n+3) y^n}{(n+1) f^n} - \frac{2mb}{y} - \frac{2 m a^{n+1}}{(n+1) f^n y}$.

Co-

Corollarium 6.

203. Corpus igitur cum in centrum C peruenerit, celeritatem habebit finitam, si $n+1$ est numerus affirmatiuus, altitudo enim isti celeritati debita est $\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}+b$. At si $n+1$ est numerus negatiuus vel etiam $=0$ celeritas corporis in C erit infinite magna.

Corollarium 7.

204. In ipso vero centro corpus vi infinita premetur directione a centro tendente, seu vis centrifuga praeualebit, si fuerit $n > -3$. At si $n < -3$, tunc vis normalis praeualebit, atque curua vi infinita versus centrum premetur.

PROPOSITIO 22.

Problema.

205. *Si corpus perpetuo vi centripeta ad centrum virium C trahatur, dataque sit curua EAF ad oscillandum idonea, determinare motum oscillatorium corporis super hac curua.* Tabula VI. Fig. 1.

Solutio.

Sit vis centripeta functioni cuicunque distantiarum a centro C proportionalis; erit celeritas corporis in aequalibus a centro C distantiis, vt M et N, eadem. In E vero et F celeritas corporis sit nulla, maxima vero erit in puncto cur-

curuae A centro C proximo, ducaturque recta CAO. Corpus ergo per arcum EAF oscillationes absoluet, ad quas definiendas motum corporis super vtraque curua AE et AF inuestigare sufficit. Sit celeritas corporis maxima, quam habet in A debita altitudini b, et celeritas in quocunque puncto M debita altitudini v. Ponatur distantia CM, cui aequalis sit CP, $=y$, et vis centripeta in $M=P$. Sit $CA=a$ et $AP=x$, atque $AG=k$, sumta $CG=CE$, erit $y=a+x$ et $CG=CE=a+k$. Posito arcu $AM=s$, erit tangens MC, quam perpendiculum ex C in eam demissum determinat $=\frac{ydy}{ds}$, ideoque vis tangentialis $=\frac{Pdy}{ds}$, quae motui corporis crescente y est contraria: vnde habebitur $dv=-Pdy=-Pdx$ et $v=b-\int Pdx$; integrali $\int Pdx$ ita accepto, vt euanescat posito $x=o$. Si igitur ponatur $v=o$, dabit ex aequatione $b=\int Pdx$ valor ipsius x erutus interuallum AG seu k. Tempus ergo, quo arcus AM percurritur, est $=\int\frac{ds}{\sqrt{(b-\int Pdx)}}$, ex quo tempus per totum arcum AE prodibit, si post integrationem ita institutam, vt integrale euanescat posito $x=k$, seu $\int Pdx=b$. Simili modo tempus per arcum AF inuenietur, quo igitur inuento summa horum temporum dabit tempus vnius semioscillationis. Q. E. I.

Corollarium I.

206. Si curua AF similis et aequalis fuerit curuae AE tempora per vtramque erunt aequalia,

lia, atque ideo tempus vnius semioscillationis aequabitur duplo tempori per AE.

Exemplum I.

207. Si arcus EAF fuerit infinite paruus, potentia sollicitans P ob distantiam a centro E inuariabilem, erit constans $= g$. Sit radius osculi curuae in A seu AO $= b$, erit AE arcus circuli hoc radio descriptus. At ex natura circuli erit CT $= \frac{a^2 + 2ab - y^2}{2b}$ et MT $= \frac{\sqrt{(4b^2y^2 - a^4 - 4a^3b - 4a^2b^2 + 2a^2y^2 + 4aby^2 - y^4)}}{2b}$. Sed ob $y = a + x$ et x respectu a et b infinite paruum erit MT $= \frac{\sqrt{2abx(a+b)}}{b}$ et $ds = \frac{bydy}{\sqrt{2abx(a+b)}} = \frac{b(a+x)dx}{\sqrt{2agx(a+k)}} = \frac{dx\sqrt{ab}}{\sqrt{2(a+b)x}}$. At cum sit $v = b - gx$, ideoque $b = gk$; habebimus $v = g(k - x)$ atque elementum temporis $= \frac{dx\sqrt{ab}}{\sqrt{2g(a+b)(kx - x^2)}}$. At $\int \frac{dx}{\sqrt{(kx - x^2)}}$ posito $x = k$ fit $= \pi$ peripheriae circuli existente diametro 1. Consequenter tempus per arcum AE infinite paruum est $= \frac{\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{2g(a+b)}} = \frac{\pi\sqrt{2ab}}{2\sqrt{g(a+b)}}$.

Corollarium 2.

208. Si centrum virium infinite distet, vt esset $a = \infty$ erit potentiae directio sibi parallela, ideoque vt supra erit tempus, quo arcus AE absoluitur $= \frac{\pi\sqrt{2b}}{2\sqrt{g}}$. At si arcus circuli EA sit linea recta, seu $b = \infty$, erit tempus per EA $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Corollarium 3.

209. Si ergo hic casus comparetur cum oscillationibus penduli a potentia g quoque sed directiones sibi parallelas habente sollicitati, erit penduli isochroni longitudo $= \frac{ab}{a+b}$. Tempus enim vnius descensus seu ascensus huius penduli est $= \frac{\pi\sqrt{2ab}}{2\sqrt{g(a+b)}}$ (166.).

Exemplum 2.

Tabula VI. Fig. 4.

210. Sit iam vis centripeta potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu $P = \frac{y^n}{f^n}$, et linea EF recta. Erit $AM = s = \sqrt{(y^2 - a^2)}$ et $x = y - a$. Erit autem porro $x = b - \int \frac{y^n dy}{f^n} = b + \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1) f^n}$; positoque $v = o$ fiet $y^{n+1} = a^{n+1} + (n+1) bf^n = (a+k)^{n+1}$. Vel dicta $CE = c$ erit $b = \frac{c^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1) f^n}$, et $v = \frac{c^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1) f^n}$ Consequenter ob $ds = \frac{ydy}{\sqrt{(y^2 - a^2)}}$ habebitur tempus per $AM = \int \frac{ydy\sqrt{(n+1) f^n}}{\sqrt{(y^2 - a^2)(c^{n+1} - y^{n+1})}}$. Quod integrale ita est accipiendum, vt fiat $= o$ posito $y = a$. Tumque facto $y = c$ habebitur tempus per lineam EA. Semioscillatio vero seu motus per EAF aequabitur duplo huius temporis.

Co-

Corollarium 4.

211. Ponatur vis centripeta distantiis proportionalis seu $n = 1$ erit tempus per AM $=$ $\int \frac{y\,dy\sqrt{2f}}{\sqrt{(y^2-a^2)(c^2-y^2)}}$ seu posito AE $= i$ ob $e^2 = a^2 + i^2$ et $y^2 = a^2 + s^2$ erit tempus per AM $= \int \frac{ds\sqrt{2f}}{\sqrt{(i^2-s^2)}}$, vnde tempus per AE erit $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{2}$. Omnes igitur oscillationes super hac recta absoluuntur eodem tempore, dimidia nimirum oscillatio tempore $\pi\sqrt{2f}$ conficietur.

Corollarium 5.

212. Si oscillatio est infinite parua, tempus vnius semioscillationis super recta erit quoque $\pi\sqrt{2f}$, at cum vis centripeta tum vt constans considerari possit, sit ea $= g$, erit $\frac{a}{f} = g$, ideoque tempus vnius semioscillationis $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ vt supra §. 208.

Corollarium 6.

213. Quia directiones grauitatis reuera convergunt ad centrum terrae, corpus in superficie telluris super recta perfecte horizontali oscillationes peragere posset, nisi resistentia et frictiones impedirent. Tempus autem vnius semioscillationis talis foret (ob $a =$ semid. terrae et $g = 1$) 2537. minut. secund. (183.)

PROPOSITIO 23.

Problema.

Tabula VI. Fig. 3.

214. *Si corpus sollicitetur a duabus quibuscunque potentiis, quarum alterius directio sit verticalis* MQ, *alterius horizontalis* MP: *definire motum corporis ab istis viribus sollicitati super data curua* AMB.

Solutio.

Sit celeritas in B nulla, in M debita altitudini v. Vis sollicitans secundum MQ sit $= P$, et ea secundum $MP = Q$. Ponatur $BR = t$, $RM = z$, arcus $BM = w$, quas litteras ad descensum corporis ex quiete ex B adhibebimus. At pro ascensu ex A quacunque cum celeritate initiali, qui motus ad oscillationes referetur, sit $AP = x = QM$; $PM = AQ = y$ et arcus $AM = s$, celeritas vero corporis in A debita sit altitudini b; erit ergo $t + x =$ const. item $z + y =$ const. et $w + z =$ const. vnde $dt + dx = o$ et $dw + dz = o$. Resolutis potentiis P et Q in normales et tangentiales, erit vis tangentialis ex P orta $= \frac{Pdt}{dw}$ et vis normalis ex P orta $= \frac{Pdz}{dw}$ trahens secundum MN. Deinde erit vis tangentialis ex Q orta $= \frac{Qdz}{dw}$ et normalis ex $Q = \frac{Qdt}{dw}$ quae illi normali est contraria. Vtraque vis tangentialis motum per BM accelerat, ideoque erit $dv = Pdt + Qdz$, et $v = \int Pdt + \int Qdz$ his integralibus ita ac-

acceptis, vt euanefcant factis t et $z = o$. Atque pro afcenfu ex A erit $v = b - \int Pdx - \int Qdy$, his integralibus ita fumtis, vt euanefcant pofitis x et $y = o$. Pofitis igitur in illa aequatione $v = \int Pdt + \int Qdz$, $t = BD$ et $z = AD$ fiet $v = b$. Quare tempus per BM erit $= \int \frac{dw}{\sqrt{(\int Pdt + \int Qdz)}}$ et tempus per AM $= \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int Pdx - \int Qdy)}}$. Sumto elemento dt vel dx conftante erit radius ofculi curuae in $M = \frac{dw^3}{dt\, ddz}$, atque vis centrifuga cuius directio fecundum MN eft $= \frac{2dt\, ddz(\int Pdt + \int Qdz)}{dw^3}$. Totalis ergo vis, qua curua in M fecundum MN premitur eft $= \frac{Pdz - Qdt}{dw} + \frac{2dt\, ddz(\int Pdt + \int Qdz)}{dw^3}$. Q.E.I.

Corollarium I.

215. Si P eft functio ipfius x vel t, quaecunque, et Q functio ipfius y vel z quaecunque, tam Pdx quam Qdy integrari poterunt; atque ideo celeritas v poterit exhiberi, et ope aequationis pro curua tempus quoque.

Corollarium 2.

216. Quia quaecunque et quotcunque potentiae follicitantes, fi modo earum directiones fint in eo plano, in quo eft curua AMB, in huiusmodi duas potentias poffunt refolui, haec propofitio latiffime patet et omnes cafus complectitur, quibus potentiarum directiones et curua funt in eodem plano.

Scholion.

217. Patet etiam haec propositio latius, si pauca adiiciantur, et comprehendit casus, quibus non omnes potentiarum directiones sunt in plano curuae. Tum enim hae potentiae in binas sunt resoluendae, quarum alterae sint in ipso curuae plano, alterae ad hoc planum normales. Illae igitur in plano curuae sitae eodem modo, quo in propositione vsi sumus, tractatae dabunt accelerationem corporis et pressionem secundum MN: alterae potentiae, quia normales sunt in curuam, in curua premenda tantum insumentur. Quare hinc duplex nascetur pressio, quam curua sustinet, altera secundum MN directa, altera ad planum curuae normalis. Harum igitur duarum pressionum, si media sumatur directio prodibit directio potentiae aequiualentis, in qua curua premitur. Quamobrem non est opus, vt huiusmodi casus euoluamus, sed paucis attingemus motum corporum super curua, quae ipsa non est in plano sita, vbi potentiam sollicitantem constantem et deorsum tendentem ponemus.

PROPOSITIO 24.

Problema.

Tabula VI. Fig. 4. 218. *Existente potentia sollicitante uniformi, eiusque directione recta deorsum tendente, determinare motum corporis super curua quacunque* A M *non in eodem plano constituta.*

So-

Solutio.

Sit curua AQ proiectio curuae AM in plano horizontali, demissisque ex punctis quibusque proximis M et m in hoc planum perpendiculis MQ et mq, ducantur ad axem pro lubitu assumtum AP normales QP et qp; ponanturque AP $= x$, PQ $= y$, et QM $= z$. Sit corporis celeritas in A debita altitudini b, celeritas in M debita altitudini v. Potentia vero sit $= g$, qua corpus in M secundum MQ sollicitatur. Ducta tangente MT, et in eam ex Q perpendiculari QT, resoluatur potentia g in tangentialem et normalem. Erit ob MQ: MT $= \sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)} : dz$ vis tangentialis $\frac{g\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Atque ob MQ: QT $= \sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)} : \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ vis normalis $= \frac{g\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Quia autem vis tangentialis motum retardat erit $dv = -g\,dz$ et $v = b - gz$, vnde tempus, quo arcus AM absoluetur, prodit $= \int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{(b-gz)}}$. Vis normalis vero efficiet, vt curua in M a corpore tanta vi prematur iuxta directionem ad Mm normalem et in plano QMmq sitam. Premitur vero curua praeterea a vi centrifuga secundum directionem positioni radii osculi oppositam vi $= \frac{2(b-gz)}{r}$, designante r radium osculi curuae in M. Inuenimus autem supra §. 71. positionem radii osculi, ex qua proinde directio vis centrifugae innotescit. Quantitas vero vis centrifugae dabitur ex radio osculi, qui §. 72. est inuentus; est nempe $r = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2+ddz^2)+(dy\,ddz-dz\,ddy)^2)}}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

219. Celeritas igitur corporis hoc quoque casu ab altitudine tantum pendet. Atque celeritas in M tanta est, quantam corpus per QM ascendens cum celeritate in Q altitudini b debita in M haberet.

Corollarium 2.

220. Non poterit ergo corpus ad maiorem altitudinem ascendere, quam ad $\frac{b}{g}$. Nam si est $b-gz=o$, corpus in ea altitudine omnem celeritatem amisit, iterumque descendet.

Corollarium 3.

221. Intelligitur etiam, si potentia non constans fuisset accepta, sed variabilis P; tum inuentam fuisse celeritatem in M debitam altitudini $b - \int P dz$.

Scholion 1.

Tabula VI. Fig. 5. 222. Si in plano verticali concipiatur curua AM ad axem horizontalem AQ relata; fueritque AQ = curuae AQ praec. Fig. et QM = QM praec. Fig. erit quoque curua AM aequalis curuae AM praec. Fig. Si iam corpus super curua AM ascendat celeritate initiali in A debita altitudini b, et ab eadem potentia g sollicitatum, habebit in M quoque celeritatem altitudini $b-gz$ debitam. Atque ideo tempus quoque ascensus per AM congruet cum tempore ascensus per AM in praeced. Fig. Hac igitur ratione motus corporis super curua non in eodem plano sita reduci potest ad motum super

curua

curua in eodem plano posita. Inter motus enim ipsos nullum erit discrimen; at pressiones, quas hae duae curuae sufferunt, erunt diuersae. Quamobrem hoc modo pressio vt libet poterit variari manente motu corporis super curua eodem.

Scholion 2.

223. Posuimus hactenus curuam, super qua corpus mouetur, et potentiam sollicitantem vna cum directione datas, ex iisque motum corporis et pressionem curuae deduximus. Nunc igitur cum haec sufficere possint, ad alias quaestiones progrediemur, in quibus alia pro datis accipiuntur, reliquaque sunt inuenienda. Et primo quidem data sit pressio in singulis curuae punctis et potentia sollicitans; ex quibus ipsa curua et motus super ea debeat inueniri. Deinde aliis factis combinationibus inter eas res, quae in computum veniunt, alias quaestiones formabimus.

PROPOSITIO 25.

Problema.

224. *Si corpus a quacunque vi perpetuo deorsum trahatur; inuenire curuam AM, quam corpus super ea descendens vbique aequaliter premit.* Tabula VII. Fig. 1.

Solutio.

Sit AM curua quaesita, dicatur super axe verticali abscissa AP $= x$, applicata PM $= y$ et curua AM $= s$. Sit porro vis corpus in M sollicitans $= P$; et altitudo debita celeritati in A $= b$;

 erit

erit altitudo debita celeritati in $M = b + \int P dx$, integrali $\int P dx$ ita sumto, vt euanescat facto $x = o$. His positis erit pressio, quam curua secundum normalem MN sustinet (83) $= \frac{P dy}{ds} + \frac{2(b + \int P dx) dx ddy}{ds^3}$, sumto elemento dx pro constante. Iam cum haec pressio debeat esse constans, ponatur ea $= k$, erit $k ds^3 = P ds^2 dy + 2b dx ddy + 2 dx ddy \int P dx$. At si ponatur ds constans, habebitur $k ds dx = P dx dy + 2b ddy + 2 ddy \int P dx$, cuius integralis est $\frac{2dy \sqrt{(b + \int P dx)}}{ds} = \int \frac{k dx}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$. Quae aequatio cum P per x detur, construi potest; quia y in eam non ingreditur sed tantum dy. Q. E. I.

Corollarium 1.

225. Exprimit $\int \frac{dx}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$ tempus, quo corpus ex A celeritate initiali eadem, qua per AM mouetur, per altitudinem AP delabitur, et $\sqrt{(b + \int P dx}$ dat celeritatem in eodem loco. Quare celeritas haec in P per tempus per AP diuisa, dat $\frac{k ds}{2dy}$, ex qua proprietate curua AM determinatur.

Corollarium 2.

226. Tempus autem per AP quantitate constante quacunque puta $\sqrt{c}$ potest augeri. Hacque quantitate constante angulus, quem curua in A cum AP constituit, determinatur. Erit scilicet sinus huius anguli $= \frac{k \sqrt{c}}{2 \sqrt{b}}$ posito sinu toto $= 1$. Quare $\sqrt{c}$ maior non potest accipi quam $\frac{2 \sqrt{b}}{k}$; ideoque

que si motus in A a quiete incipit c debet esse $= o$.

Exemplum.

227. Sit potentia vniformis seu $P = g$, erit $\int \frac{kdx}{\surd(b+gx)} = \frac{2k\surd(b+gx) - 2k\surd b + 2k\surd c}{g} = \frac{2dy\surd(b+gx)}{ds}$, vnde habetur $\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g} + \frac{k(\surd c - \surd b)}{g\surd(b+gx)}$ atque $gdy\surd(b+gx) = kds\surd(b+gx) + kds(\surd c - \surd b)$. Ex qua orietur sequens aequatio $dy = \frac{kdx(\surd(b+gx) + \surd c - \surd b)}{\surd(g^2(b+gx) - k^2(\surd(b+gx) + \surd c - \surd b)^2)}$. Sit $\surd(b+gx) = t$ et $-\surd c + \surd b = h$, erit $x = \frac{t^2 - b}{g}$ et $dx = \frac{2\,tdt}{g}$. His igitur substitutio habebitur $dy = \frac{2ktdt(t-h}{g\surd(g^2t^2 - k^2t^2 + 2k^2ht - k^2h^2)}$. Haec aequatio tribus casibus integrationem admittit, quorum primus est, si $k = o$, tum enim inuenitur curua, quam corpus in A proiectum libere describit. Alter est casus, quando $h = o$, seu $\surd b = \surd c$, tum enim habetur $\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g}$, seu linea satisfaciens erit recta inclinata. Si tertio $k = g$, seu si tota pressio aequatur vbique vi sollicitanti corpus g; erit $dy = \frac{2ttdt - 2htdt}{g\surd(2ht - h^2)}$, cuius integralis est $gy = \frac{(2tt - 2ht - 2h^2)}{5h}\surd(2ht - h^2) +$ const. Constans haec, quia posito $x = o$ seu $t = \surd b$, fit $y = o$, debet esse $= \frac{(2h^2 + 2h\surd b - 2b)}{5h}\surd(2h\surd b - h^2)$. Restituto ergo $\surd(b+gx)$ loco t et posito $\surd b - \surd c = h = \surd a$ habebitur $\frac{5gy\surd a}{2} = (b + gx - a - \surd a(b+gx))\surd(2\surd a(b+gx) - a) + (a - b + \surd ab)\surd(2\surd ab - a)$. Quae est aequatio pro curua quaesita, in qua a debet esse numerus

minor quam b. Si corpus ex quiete cadere debet, alia linea praeter rectam non satisfacit. Debet enim esse $c=o$, vt angulus ad A sit realis, et propterea habetur $y=\frac{kx}{\sqrt{(g^2-k^2)}}$.

Corollarium 3.

228. Aequatio algebraica inuenta, si ab irrationalitate liberetur, fit ordinis quinti. Si in ea ponatur $a=b$, quo casu curuae tangens in A est verticalis; prodibit $\frac{5gy\sqrt{a}}{2}=(gx-\sqrt{(a^2+gax)})\sqrt{(2\sqrt{(a^2+gax)}-a)}+a\sqrt{a}$.

Corollarium 4.

229. Si generaliter tangens in A debeat esse verticalis, erit $\sqrt{c}=o$, atque ideo prodibit ista aequatio $dy=\frac{kdx(\sqrt{(b+gx)}-\sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx)-k^2(\sqrt{(b+gx)}-\sqrt{b})^2)}}$. Si tangens in A ponatur horizontalis erit $k\sqrt{c}=g\sqrt{b}$ habebiturque haec aequatio $dy=\frac{dx(k\sqrt{(b+gx)}+(g-k)\sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx)x(k\sqrt{(b+gx)}+(g-k)\sqrt{b})^2)}}$

Scholion.

230. Vocatur haec curua linea aequabilis pressionis, eiusque solutio extat in Comment. Acad. Paris. quae cum hac nostra egregie conuenit. Ceterum ex solutione constat, si potentia non fuerit constans, sed vtcunque variabilis P, aequationem inuentam nihilominus integrationem admittere, si pressio in curuam ipsi P debeat esse proportionalis. Erit enim $k=m$P atque pro curua quaesita prodibit

dibit sequens aequatio $\frac{2dy\sqrt{(b+\int Pdx)}}{ds} = \int\frac{mPdx}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$, cuius integralis est $dy\sqrt{(b+\int Pdx)} = mds\sqrt{(b+\int Pdx)} + mds\sqrt{c}$. Haec aequatio, si fuerit $c=o$ erit pro linea recta ad horizontem inclinata. At per $\sqrt{c}$ definitur angulus, quem curua in A cum verticali constituit, eius enim sinus est $m+\frac{m\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$. Quare si sumatur $\sqrt{c} = -\sqrt{b}$ curua tanget in A verticalem. Praeterea haec curua hanc habet proprietatem, vt tempus, quo arcus AM percurritur proportionale sit $m.AM-PM$. Denique ex solutione huius propositionis fluit solutio sequentis, in qua ex data curua et pressione aequabili quaeritur quantitas potentiae deorsum tendentis.

PROPOSITIO 26.

Problema.

231. *Data curua* AM *et celeritate initiali in* A *debita altitudini* b, *inuenire quantitatem potentiae perpetuo deorsum tendentis, quae faciat, vt corpus super curua* AM *descendens curuam vbique aequaliter premat.* Tabula VII. Fig. I.

Solutio.

Sit potentia sollicitans quaesita $=P$, dictisque $AP=x$, $PM=y$, et $AM=s$, atque pressione, quam curua sustinet $=k$; habebitur ista aequatio $kds\,dx = Pdx\,dy + 2bddy + 2ddy\int Pdx$ (224) in qua ds est elementum constans. Ex hac igitur aequatione quantitatem P erui oportet. Aequatio autem

 per

per dy multiplicata et integrata dat $kds\int dx\,dy = dy^2\int Pdx + bdy^2$, ex qua prodit $\int Pdx + b = \frac{kds}{dy}\int dx\,dy$; quae differentiata dat $P = \frac{kds}{dy} - \frac{2\,kds\,ddy}{dx\,dy^2}\int dx\,dy$. At integrale $\int dx\,dy$ ita eſt ſumendum, vt poſito $x = o$ fiat $\frac{k\,ds}{dy^2}\int dx\,dy = b$. Quo autem haec integratio facilius ſuccedat, ponatur $dy = pdx$ erit $ds = dx\sqrt{(1+p^2)}$, et $\int dx\,dy = ds\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$, ideoque $\frac{k\,ds}{dy^2}\int dx\,dy = \frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ex qua aequatione prodibit $P = \frac{k\sqrt{(1+pp)}}{p} - \frac{2kdp}{p^3dx}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

232. Ex hac aequatione quoque ſtatim celeritas corporis in ſingulis punctis habetur; altitudo enim debita celeritati corporis in M eſt $b + \int Pdx = \frac{kds}{dy^2}\int dx\,dy = \frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Tempus vero, quo arcus AM abſoluitur, eſt $= \frac{1}{\sqrt{k}}\int pdx : \sqrt{\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+p^2)}}}$.

Corollarium 2.

233. Perſpicuum eſt ex aequatione inuenta, quantitatem potentiae P eo fore maiorem, quo maior ſit k, ceteris paribus; variabilis enim eius valor ductus eſt in preſſionem k.

Corollarium 3.

234. Etſi vero non videatur potentia P a celeritate initiali b pendere, quia in expreſſione b non

b non inest, tamen pendet P ab b ob integrale $\int\frac{pdx}{\surd(1+pp)}$, quod ita est accipiendum, vt posito $x=o$, fiat $\frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\surd(1+pp)}=b$. Variata ergo celeritate initiali alia prodit potentia sollicitans, tametsi curua proposita eadem maneat.

Exemplum I.

235. Sit curua AM parabola in A verticem et axem horizontalem habens; ita vt sit $ay=x^2$. Erit ergo $dy=\frac{2xdx}{a}$, hincque $p=\frac{2x}{a}$, et $\int\frac{pdx}{\surd(1+pp)}=\int\frac{2xdx}{\surd(a^2+4x^2)}=\frac{1}{2}\surd(a^2+4x^2)+C$. Quare erit $\frac{k(2+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\surd(1+pp)}=\frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{8x^2}+\frac{kC(a^2+4x^2)}{4x^2}$. Quae quantitas cum debeat esse $=b$, si fit $x=o$, erit $C=-\frac{a}{2}$, seu $\int\frac{pdx}{\surd(1+pp)}=\frac{\surd(a^2+4x^2)-a}{2}$. Ex quibus inuenietur $P=\frac{ka^3}{4x^3}-\frac{k(a^2-2x^2)\surd(a^2+4x^2)}{4x^3}$. In ipso ergo puncto A potentia P erit infinite parua, tam numerator enim, quam denominator euanescunt, fitque valor istius expressionis $=o$. Celeritas vero in A non potest esse arbitraria, etiam si constans C videatur ex b determinata. Nam C talem tantum habet valorem, qui expressionem $b+\int Pdx=\frac{kds}{dy^2}\int dxdy$ reddat finitae magnitudinis. Pendebit ergo b ab a eiusque valor inuenietur, si in expressione $\frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}}-ka(b^2+4x^2)}{8x^2}$, ponatur $x=o$. Tum autem prodibit $b=\frac{ka}{4}$. Hac ergo celeritate descensus

ſus incipere debet, vt preſſio vbique aequalis a potentia P inuenta oriatur.

Exemplum 2.

236. Sit curua AM circulus radii a tangens rectam AP in A, erit $y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)}$ et $p = \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ atque $\sqrt{(1+pp)} = \frac{a}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Fiet ergo $\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \int\frac{xdx}{a} = \frac{x^2}{2a}$, ad quod conſtantem addere non licet, quia $\frac{1+pp}{pp} = \frac{a^2}{x^2}$ fit infinitum euaneſcente x. Erit ergo $k\frac{(1+pp)}{pp}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{ka}{2} = b + \int Pdx$, quare celeritas corporis erit vniformis, ideoque potentia ſollicitans euaneſcit. Perſpicuum enim eſt corpus a nulla potentia ſollicitatum in peripheria circuli aequabiliter progredi, eiusque vim centrifugam eſſe vbique eiusdem magnitudinis.

Exemplum 3.

237. Sit curua AM cyclois baſin habens horizontalem et cuſpide tangens verticalem AP in A; ita vt ſit $dy = \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$. Habetur ergo $p = \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{a}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$. Quare erit $\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \int\frac{dx\sqrt{2ax}}{a} = \frac{2x\sqrt{2x}}{3\sqrt{a}} + C$ et $\frac{k(1+pp)}{pp} = \frac{ka}{2x}$. Sumta ergo conſtante C finitae magnitudinis fit $b = \infty$, quare fiat $C = o$, erit $b + \int Pdx = \frac{k\sqrt{2ax}}{3}$, et $b = o$. Prodibit igitur $P = \frac{k\sqrt{a}}{3\sqrt{2x}}$. Si itaque corpus ſuper cycloide AM ex A deſcendat ex quiete et ſollicitetur

citetur deorſum a potentia, quae reciproce eſt vt radix quadrata ex abſciſſa AP, corpus vbique curuam aequali vi premet.

Scholion.

238. Dantur igitur caſus, quibus celeritatem Vb non pro lubitu aſſumere licet, quemadmodum in his exemplis euenit. Quoties enim $\frac{1+pp}{pp}$ fit infinite magnum facto $x=o$, conſtans in integratione ipſius $\frac{pdx}{V(1+pp)}$ addenda plerumque hoc ipſo determinatur, quod celeritas initialis non debeat eſſe infinite magna. Semper autem, ſi curua in A tangit rectam AP, fit $\frac{1+pp}{pp}$ infinitum poſito $x=o$, id quod in cauſa etiam eſt, quod in exemplis allatis celeritas initialis non ſit arbitraria.

PROPOSITIO 27.

Problema.

239. *Si corpus a quacunque vi perpetuo deorſum trahatur; inuenire curuam* AM, *ſuper qua corpus ita mouetur, vt tota preſſio, quam curua ſuſtinet, datam habeat rationem ad preſſionem a vi normali ortam.* Tabula VII. Fig. 1.

Solutio.

Deſcendat corpus ex A celeritate debita altitudini b, et poſito AP $=x$, PM$=y$, AM$=s$, ſit potentia corpus in M ſollicitans $= \mathrm{P}$, erit altitudo debita celeritati, quam corpus in M habet, $= b + \int \mathrm{P} dx$. Tota vero preſſio quam curua in M ſecundum directionem normalis MN, ſuſtinet $= \frac{\mathrm{P}dy}{ds} + \frac{2ddy(b+\int \mathrm{P}dx)}{dxds}$ ſumto ds pro elemento conſtante. Iam habeat ſe haec preſſio ad vim normalem $\frac{\mathrm{P}dy}{ds}$ vt m ad 1; erit $(m-1)\mathrm{P}dxdy = 2ddy(b+\int \mathrm{P}dx)$; quae eſt aequatio pro curua quaeſita. Haec vero reducetur ponendo v loco $b+\int \mathrm{P}dx$, ad hanc formam $\frac{(m-1)dv}{v} = \frac{2ddy}{dy}$, quae integrata dat $2\, l\frac{dy}{ds} = (m-1)\, l\frac{v}{a}$, ſeu $v^{\frac{m-1}{2}} ds = a^{\frac{m-1}{2}} dy$. Ex qua habebitur $dy = \frac{v^{\frac{m-1}{2}} dx}{\sqrt{(a^{m-1} - v^{m-1})}}$

$$= \frac{dx(b+\int \mathrm{P}dx)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{(a^{m-1} - (b+\int \mathrm{P}dx)^{m-1})}},$$ quae eſt aequatio pro curua quaeſita. Q. E. I.

Corollarium I.

240. Celeritas corporis ibi eſt nulla, vbi $\frac{dy}{ds} = o$, ſeu vbi curuae tangens eſt verticalis, ſi quidem $\frac{m-1}{2}$ fuerit numerus poſitiuus, ſeu ſi m maior fuerit vnitate. In his igitur caſibus curuam in A tangere ponemus rectam AP, et celeritatem initialem ſeu $b = o$.

Co-

Corollarium 2.

241. Quare si $m > 1$, seu si pressio tota maior est, quam pressio a vi normali orta; curuam quaesitam dabit ista aequatio $dy = \frac{dx (\int Pdx)^{\frac{m-1}{2}}}{\surd (a^{m-1} - (\int Pdx)^{m-1})}$ in qua $\int Pdx$ ita debet accipi, vt euanescat posito $x = o$.

Corollarium 3.

242. Si $m = 1$, vis centrifuga euanescet, et propterea linea quaesita erit recta. Fit autem ex aequatione $ddy = o$, quae est proprietas lineae rectae.

Corollarium 4.

243. Si $m = o$ tum tota pressio euanescit, quare tum prodibit curua, quam corpus celeritate sua altitudini b debita proiectum libere describit. Pro hac igitur curua habebitur ista aequatio $dy = \frac{dx \surd a}{\surd (b - a + \int Pdx)}$.

Corollarium 5.

244. Si m est vnitate minor, tunc vis centrifuga erit contraria vi normali, et propterea curua AM erit concaua deorsum. Ponamus igitur in A curuam esse normalem ad AP, erit $b = a$. Posito igitur $b = a$, habebitur pro curua quaesita haec aequatio $dy = \frac{a^{\frac{1-m}{2}} dx}{\surd ((a + \int Pdx)^{1-m} - a^{1-m})}$.

Corollarium 6.

245. Pro motu libero igitur, quo casu est $m=0$, inuenietur curua a corpore descripta, si in A horizontaliter celeritate altitudini a debita proiiciatur, ex hac aequatione $dy=\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{\int P dx}}$.

Exemplum I.

246. Sit vis sollicitans vniformis seu $P=g$ erit $\int P dx=gx$. Casibus ergo quibus $m>1$, et corpus in A ex quiete descendit, aequatio pro curuis quaesitis, scripto gc loco a, erit haec dy

$$=\frac{x^{\frac{m-1}{2}}dx}{\sqrt{(c^{m-1}-x^{m-1})}}.$$ At si sit $m<1$, et corpus in A celeritate altitudini a debita proiiciatur horizontaliter, curua super qua corpus moueri debebit, scripto gc loco a, exponetur hac aequatione $$dy=\frac{c^{\frac{1-m}{2}}dx}{\sqrt{((c+x)^{1-m}-c^{1-m})}}.$$ Hae ergo curuae erunt algebraicae, si vel $\frac{3-m}{2m-2}$, vel $\frac{m}{1-m}$ fuerit numerus integer affirmatiuus. Hoc vero euenit si m fuerit terminus vel ex hac serie $3, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9}$ etc. vel ex hac serie $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ etcet.

Corollarium 7.

247. Si igitur tota pressio triplo debeat esse maior quam vis normalis, curua erit circulus tangens

gens rectam AP in A. Namque erit $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$ seu $y = c - \sqrt{(c^2-x^2)}$, aequatio ad circulum radii c.

Corollarium 8.

248. Sit tota pressio duplo maior quam vis normalis, seu vis centrifuga aequalis vi normali cum eaque conspirans; erit curua cyclois cuspide verticalem in A tangens. Aequatio enim erit $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(c-x)}}$.

Exemplum 2.

249. Quaecunque fuerit potentia sollicitans P, requirantur curuae eiusmodi, vt pressio tota quam curua sustinet, sit duplo maior quam vis normalis seu quam vis centrifuga, quae hoc casu illi aequalis erit. Fiat igitur $m = 2$, et pro curua quaesita haec habebitur aequatio $dy = \frac{dx\sqrt{\int Pdx}}{\sqrt{(a-\int Pdx)}}$ Seu dicto $\int Pdx = X$ erit $dy = dx\sqrt{\frac{X}{a-X}} = \frac{Xdx}{\sqrt{(aX-X^2)}}$ Hoc exemplum ideo attulimus, quod in sequentibus demonstrabitur curuas huius proprietatis esse simul lineas celerrimi descensus.

Corollarium 9.

250. Perspicitur ergo infinitas esse curuas quaestioni satisfacientes, propter quantitatem a arbitrariam. Atque infinitae hae curuae omnes tangent rectam AP in A.

Scholion. 1.

251. Ex ſolutione huius problematis apparet, quomodo problema inuerſum, quo curua et ratio inter totam preſſionem et vim normalem datur, at quantitas vis ſollicitantis deorſum tendentis quaeritur, ſolui debeat. Cum enim ſit $v^{\frac{m-1}{2}} ds = a^{\frac{m-1}{2}} dy$, ſeu poſito $dy = p dx$, $v^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{(1+pp)} = a^{\frac{m-1}{2}} p$ erit $v = \frac{ap^{\frac{2}{m-1}}}{(1+pp)^{\frac{1}{m-1}}} = b + \int P dx$; hincque differentiando $P dx = \frac{2ap^{\frac{3-m}{m-1}} dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}}}$. Conſequenter inuenitur $P = \frac{2ap^{\frac{3-m}{m-1}} dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}} dx}$. Vbi notandum, celeritatem initialem iam eſſe datam, nam formula $\frac{ap^{\frac{2}{m-1}}}{(1+pp)^{\frac{1}{m-1}}}$, ſi in ea ponatur $x = o$, dat b.

Scholion 2.

252. Simili modo ſi motus corporis ſeu celeritas eius in ſingulis locis detur, atque relatio preſſionis totius ad vim normalem, inuenietur ex celeritate ſtatim potentia ſollicitans. Vt ſit v altitudo debita celeritati in M, erit ob $b + \int P dx = v$;

$=v$; $P=\frac{dv}{dx}$; atque aequatio $v^{\frac{m-1}{2}} ds = a^{\frac{m-1}{2}} dy$ dabit naturam curuae requiſitae. Cum enim v ſit data, dari debet vel in x vel s et conſtantibus quantitatibus, ſcilicet quae ad curuae naturam exprimendam adhibentur. Ceterum eadem problemata in hypotheſi virium centripetarum vel plurium potentiarum ſollicitantium propoſita non habent plus difficultatis, etiamſi ad magis perplexas aequationes perueniatur. Atque cum ſimplicia exempla in medium proferre non liceat ad illuſtrandum, ea potius relinquo; hocque eo magis, quod in ſequentibus, vbi de brachyſtochronis agetur, eiusdem naturae curuae prodeant, quas ibi diligentius expoſiturus ſum. Nunc igitur ad ea progredior problemata, in quibus motus quaedam proprietas proponitur, ex qua coniuncta vel cum potentia ſollicitante curua quaeritur, vel cum curua ipſa, potentia ſollicitans. Problemata vero nimis facilia, vt quando vel ſcala celeritatum, vel ſcala temporum daretur, praetermitto, cum ex expreſſione celeritatis vel potentia ſollicitans, vel ipſa curua ſponte fluat, atque temporis expreſſio facillime ad celeritatem deducat. Hanc ob rem huiusmodi afferemus quaeſtiones, in quibus non ipſae celeritates vel tempora dantur, ſed relationes quaedam ab iis pendentes.

PRO-

PROPOSITIO 28.

Problema

Tabula VI. Fig. 3.

253. *Sollicitetur corpus a quacunque potentia deorsum tendente; inuenire curuam* AM *super qua corpus descendens motu aequabili deorsum feratur, seu aequabiliter a horizontali* AB *recedat.*

Solutio.

Positis AP $= x$, PM $= y$, AM $= s$, et potentia sollicitante $=$ P, sit celeritas corporis initialis in A debita altitudini b, erit celeritas in M debita altitudini $b + \int P dx$. Quare tempusculum, quo elementum M percurritur, est $\frac{ds}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$. Quia autem motus per AM respondere debet motui aequabili per AP, concipiatur corpus motum super AP celeritate constante debita altitudini b, debebit tempus per Pp aequari tempori per Mm, vnde habebitur $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$, seu $dy \sqrt{b} = dx \sqrt{\int P dx}$. Pono autem celeritatem initialem congruentem cum celeritate descensus, vt curua in A tangat verticalem AP, et corpus primo principio recta descendat. Nam quia propter motum acceleratum necesse est vt curua continuo magis ad horizontem inclinetur, eius initium commodissime sumetur in A, vbi curua est verticalis. Prodiitque ergo pro hac curua aequatio $dy \sqrt{b} = dx \sqrt{\int P dx}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

254. Haec ergo curua hanc habet proprietatem, vt quo maior ſit corporis celeritas, eo magis quoque curua in eo loco ad horizontem ſit inclinata.

Corollarium 2.

255. In loco ergo ſupremo, vbi celeritas corporis eſt minima, inclinatio curuae debet eſſe minima, ſeu tangens curuae in eo loco debet eſſe verticalis.

Corollarium 3.

256. Celeritas igitur initialis $\sqrt{b}$ non poteſt eſſe nulla, quia ei aequalis eſt celeritas reſpectiua, qua corpus deorſum progreditur, ſeu ab horizontali AB recedit.

Scholion 1.

257. Vocatur haec curua linea aequabilis deſcenſus, quia corpus ſuper ea deſcendens aequabili motu deorſum progreditur. Lineae huius inuentio extat in Act. Erud. Lipſ. A. 1690. pro hypotheſi grauitatis, ſeu potentiae ſollicitantis vniformis. Satisfacere autem huic quaeſtioni demonſtratur ibi parabola cubicalis Neiliana, quae eadem in exemplo ſequente prodibit.

Exemplum 1.

258. Sit potentia ſollicitans vniformis ſeu $P = g$, erit $\int P dx = gx$. Quare pro curua quaeſita habe-

habebitur ista aequatio $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gx}$, quae integrata praebet hanc, $3y\sqrt{b} = 2x\sqrt{gx}$, seu $\frac{9by^2}{4g} = x^3$, quae est pro parabola Neiliana cuspide in A verticalem AP tangente, cuius parameter est $\frac{9b}{4g}$. Pro quaque ergo alia celeritate initiali, alia est sumenda parabola.

Exemplum 2.

259. Sit potentia sollicitans P potestati cuicunque abscissarum data linea auctarum proportionalis vt $P = \frac{(a+x)^n}{f^n}$, erit $\int Pdx = \frac{(a+x)^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Quamobrem pro curua satisfaciente habebitur ista aequatio $dy\sqrt{(n+1)bf^n} = dx\sqrt{((a+x)^{n+1} - a^{n+1})}$. Si $a = o$, ita vt potentia sollicitans P sit potestati exponentis n distantiarum corporis a horizontali AB proportionalis, erit $dy\sqrt{(n+1)bf^n} = dx\sqrt{x^{n+1}}$, cuius integralis est $y\sqrt{(n+1)bf^n} = \frac{2x^{\frac{n+3}{2}}}{n+3}$, seu $\frac{(n+1)(n+3)^2}{4}bf^ny^2 = x^{n+3}$. At $n+1$ debet esse numerus affirmatiuus, alioquin $\int Pdx$ fieret infinitum, quia euanescere debet facto $x = o$. Fit ergo $n+3 > 2$; quare satisfaciunt parabolae verticibus in A verticalem AP tangentes. Vt si $n = 1$ seu $P = \frac{x}{f}$, satisfaciet parabola Appolloniana, cuius parameter est $2\sqrt{2bf}$.

Scholion 2.

260. Ex huius propositionis solutione perspicitur quomodo eius inuersa, qua data curua, quae

sit

ſit linea aequabilis deſcenſus, requiritur potentia ſollicitans. Cum enim ſit $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int Pdx}$, erit $\int Pdx = \frac{bdy^2}{dx^2}$. Ex qua oritur poſito dx conſtante, $P = \frac{2bdyddy}{dx^3}$. Perſpicitur ergo potentiam P a celeritate initiali $\sqrt{b}$ pendere. Curua vero data ita eſſe debet comparata, vt in A tangat verticalem AP. Si curuae radius oſculi in M dicatur r, erit $P = \frac{2bds^3dy}{rdx^4}$. Quare ſi ex. gr. curua AM fuerit circulus tangens AP in A, cuius radius $= a$, erit $r = a$; $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ et $ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Pro circulo ergo erit $P = \frac{2a^2bx}{(a^2-x^2)^2}$. Celeritas vero in M debita eſt altitudini $b + \int Pdx = \frac{a^2b}{a^2-x^2}$.

Corollarium 4.

261. Patet ceterum ex aequatione, quam inuenimus, $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$ tempus quo arcus AM deſcribitur, aequale eſſe tempori, quo corpus vniformiter celeritate altitudini b debita abſciſſam AP percurrit. In hoc ipſo ſcilicet natura lineae aequabilis deſcenſus nititur.

PROPOSITIO 29.

Problema.

262. *Trahente vniformi potentia vbique verticaliter deorſum, inuenire curuam* AM, *ſuper qua corpus aequabiliter verſus datam plagam* AP *progreditur.* Tabula VII. Fig. 3.

P 2 So-

Solutio.

Sit AM curua quaesita, et pro axe sumatur eius tangens AP, quae versus datam plagam dirigitur. Problema ergo requirit, vt corpus super AM motum a potentia vniformi g sollicitatum eodem tempore ad M perueniat, quo corpus motu aequabili nempe celeritate $\sqrt{b}$ latum abscissam respondentem AP percurrit, eritque celeritas initialis in A debita altitudini b. Dicantur $AP = x$, $PM = y$, et $AM = s$, ducaturque verticalis AQ, in Q secans horizontalem MQ. Celeritas igitur corporis in M tanta erit, quantam in Q cadendo per AQ cum sua celeritate $\sqrt{b}$ acquireret; quare celeritas corporis in M debita erit altitudini $b + gz$ dicta $AQ = z$. Per conditionem problematis vero debet esse $\int \frac{ds}{\sqrt{(b+gz)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{b}}$ seu $\frac{ds}{\sqrt{(b+gz)}} = \frac{dx}{\sqrt{b}}$, vnde oritur haec aequatio $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gz}$. At z in x et y dabitur ex angulo PAQ; sit sinus huius anguli $= m$, erit cosinus $= \sqrt{(1-m^2)}$ posito sinu toto $= 1$. Nunc erit $\sqrt{(1-m^2)} : m = AP(x) : PO$, ex quo erit $PO = \frac{mx}{\sqrt{(1-m^2)}}$, ideoque $MO = \frac{y\sqrt{(1-m^2)} - mx}{\sqrt{(1-m^2)}}$. At AO fiet $= \frac{x}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Deinde ob $1 : m = MO : OQ$, erit $OQ = \frac{my\sqrt{(1-m^2)} - m^2x}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Consequenter $AQ = z = my + x\sqrt{(1-m^2)}$, et hinc $dy = \frac{dz}{m} - \frac{dx\sqrt{(1-m^2)}}{m}$. Quo valore in aequatione inuenta substituto prodit $dz\sqrt{b} = dx\sqrt{b(1-m^2)} + mdx\sqrt{gz}$, quae transit in hanc $dx = \frac{dz\sqrt{b}}{m\sqrt{gz} + \sqrt{b(1-m^2)}}$.

Cu-

Cuius integralis inuenitur $x = \frac{2\sqrt{bz}}{m^2 g} - \frac{2b\sqrt{(1-mm)}}{m^2 g} l\frac{m\sqrt{gz}+\sqrt{b(1-m^2)}}{\sqrt{b(1-m^2)}}$. Quae aequatio, loco z valore $my + x\sqrt{(1-m^2)}$ substituto, dat naturam curuae quaesitae. Q. E. I.

Corollarium 1.

263. Curua ergo satisfaciens semper est linea transcendens, nempe a logarithmis pendens, nisi sit m vel o vel 1, i. e. nisi recta AP vel sit verticalis vel horizontalis.

Corollarium 2.

264 Si igitur $m = o$ problema cum praecedente conuenit, fit enim $z = x$, ideoque curua exprimetur hac aequatione $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gx}$, quae dat parabolam cubicalem vt supra.

Corollarium 3.

265. Si $m = 1$ fit linea AP horizontalis, et $z = y$. Habetur ergo $dx = \frac{dy\sqrt{b}}{\sqrt{gy}}$, seu $x = \frac{2\sqrt{by}}{\sqrt{g}}$, seu $x^2 = \frac{4by}{g}$. Haec ergo curua est ipsa proiectoria, quam corpus in A celeritate $\sqrt{b}$ horizontaliter proiectum libere describit. Haec enim curua, vt ex superiore libro intelligitur, hanc habet proprietatem, vt motus horizontalis sit aequabilis.

Corollarium 4.

266. Si x et y, et consequenter z est valde paruum, erit $l(1 + \frac{m\sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}}) = \frac{m\sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}} - \frac{mmgz}{2b(1-m^2)} + \frac{m^3 gz\sqrt{gz}}{3b(1-m^2)\sqrt{b(1-m^2)}}$, quam proxime. Initium ergo

go curuae AM exprimetur hac aequatione $x = \frac{z}{\sqrt{(1-m^2)}} - \frac{2mz\sqrt{gz}}{3(1-m^2)\sqrt{b}}$ seu ob $z = my + x\sqrt{(1-m^2)}$, ista $y = \frac{2(my + x\sqrt{(1-m^2)})\sqrt{g(my + x\sqrt{(1-mm)})}}{3\sqrt{b}(1-m^2)}$. Quae reducitur ad hanc $\frac{9b(1-m^2)y^2}{4g} = (my + x\sqrt{(1-m^2)})^3$.

Corollarium 5.

267. Si $m = 1$, seu si linea AP est horizontalis, et series logarithmo illi aequalis continuetur in infinitum, haecque series loco illius substituatur, termini omnes prae infinitesimo ∞ euanescent. Dabit autem infinitesimus $z = o$, seu $y = o$, id quod indicat hoc casu lineam rectam horizontalem quoque satisfacere. Id quod quidem per se est perspicuum, nam corpus super recta horizontali aequabiliter progredietur, ideoque motus eius horizontalis est aequabilis.

Scholion 1.

268. Mirabile igitur videtur, quod aequatio differentialis et integralis quoque, quae prodit si ponatur $m = 1$, parabolam tantum praebeat, et rectam horizontalem excludere videatur. Sed notandum est, lineam rectam horizontalem pro omnibus quoque plagis AP satisfacere cum motus in ea sit aequabilis, atque ideo versus omnes plagas aequabiliter progrediatur. Perspicuum autem est aequationem nostram generalem hanc rectam comprehendere non posse, quia rectam AP nusquam tangit, nisi in casu $m = 1$, quo cum ea congruit.

gruit. Atque haec ipsa ratio quoque est, cur pro casu etiam $m=1$ linea recta non directe inueniri queat.

Scholion 2.

269. Manifestum quoque est eadem opera problema latiori sensu acceptum solui potuisse, si scilicet potentia sollicitans non vniformis sed variabilis vtcunque esset posita. Namque substituto P loco g, et $\int Pdz$ loco gz in aequatione differentiali, prodisset haec aequatio $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int Pdz}$ pro curua quaesita. Habet vero z eundem valorem quem ante. Quare si P ab altitudine z et constantibus tantum pendeat, poterit $\int Pdz$ vel integrari vel per quadraturas exhiberi. Atque tum aequatio pro curua poterit constrùi, peruenietur enim ad hanc aequationem $dx = \frac{dz\sqrt{b}}{m\sqrt{\int Pdz + \sqrt{b}(1-m^2)}}$, in qua variabiles x et z sunt a se inuicem separatae. Nolui autem problema nimis lata significatione confusum efficere. Quando enim latior significatio neque plus difficultatis habet in se, neque ad peculiarem vsum accommodari potest, eo relicto particulare tantum problema pertractare constitui. Propter eandem rationem sequens problema isochronae paracentricae in hypothesi tantum potentiae vniformis et deorsum directae resoluo.

PRO-

PROPOSITIO 30.

Problema.

Tabula VII. Fig. 4. 270. *In hypothesi potentiae sollicitantis vniformis et deorsum tendentis inuenire curuam* AM *super qua corpus descendens aequabiliter a dato puncto* C *recedit.*

Solutio.

Sit AM curua quaesita, eius sumatur tangens CA, quae per datum punctum C transit, erit corporis in A celeritas minima. Quia enim haec celeritas tota ad recedendum a C impenditur, in aliis curuae elementis necesse est, vt celeritas sit maior, eo quod eius tantum pars ad recessum insumitur. Punctum A ergo erit supremum curuae quaesitae. Sit igitur celeritas corporis in A debita altitudini b, hacque celeritate concipiatur corpus per AP vniformiter moueri: debebit itaque hic motus cum descensu corporis super curua AM ita conuenire, vt ad quaeque puncta P et M aequaliter ab C distantia simul perueniatur. Posita celeritate in M debita altitudini v, ducatur $CP = CM = x$, et sit sinus ang. $PCM = t$, posito sinu toto $= 1$. Ducantur arcus circulares PM et pm centro C, erit $Mn = Pp = dx$, et ang. pCm sinus $= t + dt$. Quare erit sinus ang. $mCn = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{mn}{x}$. Erit igitur $mn = \frac{xdt}{\sqrt{(1-tt)}}$, atque $Mm = \sqrt{(dx^2 + \frac{x^2dt^2}{1-tt})}$. Cum ergo elementum Mm celeritate $\sqrt{v}$

co-

eodem tempore describi debeat, quo elementum Pp celeritate $\sqrt{b}$ erit $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \sqrt{(\frac{x^2}{v} + \frac{x^2 dt^2}{(1-tt)v})}$ seu $dx\sqrt{(1-tt)(v-b)} = x\,dt\sqrt{b}$. Requiritur ergo vt v determinetur. Ad hoc ducatur ex C verticalis CQ et horizontales AD, et MQ; postquam ergo corpus ex A ad M descendit, deorsum peruenit interuallo DQ. Quare posita potentia sollicitante $= g$ erit $v = b + g.\,DQ = b + g.\,CQ - g.\,CD$. Sit $AC = a$, sinus anguli $ACD = m$, erit eius cosinus $= \sqrt{(1-m^2)}$, vnde erit $CD = a\sqrt{(1-m^2)}$, et cosinus ang. $MCQ = mt + \sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}$. Quam ob rem erit $CQ = mtx + x\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}$. Ex quibus conficitur $v = b - ga\sqrt{(1-m^2)} + mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}$. Quo loco v valore substituto prodibit ista aequatio $dx\sqrt{(1-tt)(mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)} - ga\sqrt{(1-m^2)})} = x\,dt\sqrt{b}$, seu haec $\frac{dx}{x}\sqrt{(mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)} - ga\sqrt{(1-m^2)})} = \frac{dt\sqrt{b}}{\sqrt{(1-t^2)}}$. Quae aequatio exprimit naturam curuae quaesitae, et, si indeterminatae x et t a se inuicem separari possent, ipsa curua construi posset. Q. E. I.

Corollarium 1.

271. Perspicuum igitur est ex aequatione inuenta innumerabiles curuas quaesito satisfacere, ob tres quantitates angulum scilicet ACD, distantiam AC et celeritatem $\sqrt{b}$, qua corpus a fixo puncto C recedit, quae pro lubitu variari possunt.

Corollarium 2.

272. Atque harum trium quantitatum binis quibusque assumtis pro arbitrio tertia sola variabilis infinitas producet curuas quaesito satisfacientes. At quia aequatio haec generaliter construi non potest, omnes curuae satisfacientes exhiberi non possunt.

Corollarium 3.

273. Quod ad figuram curuarum harum attinet, intelligitur, eas omnes in A cuspidem habere debere, quia A est punctum supremum. Alter enim curuae ramus ex A ad alteram partem rectae AP descendere debet; Excepto casu quo CAP sit linea horizontalis, tum enim haec ratio cessat.

Corollarium 4.

274. Alter vero ramus ad alteram rectae CP partem positus aeque soluit problema ac iste AM. Inuenitur enim eadem ex aequatione, si modo t seu angulus PCM accipitur negatiuus.

Corollarium 5.

275. Ex sola autem aequationis inuentae inspectione perspicitur eam duobus casibus separationem indeterminatarum admittere, quorum alter est si $a=o$, alter si $m=1$. Illo scilicet casu euanescit distantia AC et punctum A in C incidit: hoc vero casu recta CP fit horizontalis.

Hos

Hos igitur ambos caſus in ſequentibus duobus exemplis euoluemus.

Exemplum I.

276. Incidat ergo punctum A in C ſeu corpus deſcenſum incipiat in ipſo puncto C; fiet $a = o$. Hoc ergo caſu aequatio pro curua quaeſita abibit in hanc $\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}} = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}}$, in qua indeterminatae a ſe inuicem ſunt ſeparatae. Conſtructio igitur curuae quaeſitae per quadraturas confici poterit; fiet enim $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}}$, quae integratio ita debet abſolui, vt facto $t = o$ fiat $x = o$. Namque generalis aequatio ita debet integrari vt poſito $t = 0$ fiat $x = a$. Hoc igitur caſu integrale $\int \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}}$ ita eſt accipiendum, vt facto $t = o$ ipſum euaneſcat. Ad conſtructionem huius integralis vero melius perſpiciendam, pono coſinum anguli MCQ ſeu $mt + \sqrt{(1-m^2)(1-tt)} = q$, quo facto fiet ſinus ang. MCm, ſeu $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dq}{\sqrt{(1-qq)}}$. Hisque ſubſtitutis habebitur iſta aequatio: $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{-dq}{\sqrt{(q-q^3)}}$, quod integrale ita eſt accipiendum, vt facto $q = \sqrt{(1-m^2)}$ fiat $x = o$.

Corollarium 6.

277. Si ipſi b diuerſi valores attribuantur, omnes curuae quae oriuntur erunt inter ſe ſimi-

 les,

les, manente enim angulo MCP, distantia CM proportionalis est accipienda ipsi b altitudini generanti celeritatem initialem

Corollarium 7.

278. Quicunque ergo fuerit angulus ACQ, constructio non immutatur, sed tantum constans adiicienda. Quare constructio inseruiens vni casui ad omnes casus potest accommodari.

Scholion 1.

279. Problema hoc de aequabili recessu a fixo puncto praeterito seculo jam erat propositum et solutum in Act. Lips. A. 1695. atque solutiones quae ibi extant conueniunt apprime cum casu huius exempli, vniuersalis enim solutio illo loco non est data. Quamobrem casus exempli sequentis nouas prorsus dare videtur curuas huic quaestioni satisfacientes. At quia sequens constructio cum hac conuenit, quanquam ipsae curuae sint prorsus differentes, tamen etiam sequens casus in iis, quae hac de re tradita sunt, contineri censendus est. Vocantur autem istiusmodi curuae isochronae paracentricae, quia motus super iis a centro fixo fit aequabilis.

Exemplum 2.

280. Sit linea CAP horizontalis, fiet $m=1$ atque in aequatione generali euanescet terminus $gaV(1-m^2)$. Hoc igitur casu aequatio fit vt ante

te ſeparabilis, transmutabitur enim generalis aequatio in hanc $\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}} = \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$, ſeu $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$ quod integrale ita eſt accipiendum, vt poſito $t=o$ fiat $x=a$. Quare $\int \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$ ita integrato, vt euaneſcat poſito $t=o$ erit $\frac{2\sqrt{gx}-2\sqrt{ga}}{\sqrt{b}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$. Quae conſtructio ergo cum praecedente conuenit.

Scholion 2.

281. An praeter hos duos caſus alii inueniri queant, qui ſeparationem indeterminatarum admittant, vehementer dubito. A nemine quidem, quantum ſcio, alius eſt erutus, quamobrem non neceſſe eſſe iudico, vt huic materiae diutius immorer.

PROPOSITIO 31.

Problema.

282. *Potentia ſollicitante exiſtente vniformi et deorſum tendente, inuenire curuam* AM, *ſuper qua corpus data cum celeritate initiali ita moueatur, vt aequalibus temporibus aequales angulos circa punctum fixum* C *abſoluat.* Tab. VIII. Fig. 1.

Solutio.

Sumatur initium curuae in loco quodam A in quo recta CA in ipſam curuam eſt normalis. Sitque celeritas in A debita altitudini b, et $AC=a$; erit celeritas angularis vt $\frac{\sqrt{b}}{a}$, cui quantitati celeritas angularis in singulis punctis M expressa debet esse aequalis. Sit celeritas in M debita altitudini v et $CM = x$, erit $mn = dx$. Fiat vt $Mm : Mn = \sqrt{v} : \frac{Mn\sqrt{v}}{Mm}$, quae quantitas per MC diuisa dat celeritatem angularem $= \frac{Mn \cdot \sqrt{v}}{Mm MC}$, quae cum aequalis esse debeat ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$ habebitur haec aequatio $Mn.\, a\sqrt{v} = Mm.\, MC.\, \sqrt{b} = Mm.\, x\sqrt{b}$. Sit jam ducta verticali DCQ, sinus ang. $ACD = m$, erit cosinus eius $= \sqrt{(1-m^2)}$ posito sinu toto $= 1$. Item sinus ang. MCD sit $= t$, erit cosinus $= \sqrt{(1-tt)}$. His igitur positis erit $CD = a\sqrt{(1-m^2)}$ et $CQ = -x\sqrt{(1-tt)}$, atque sinus ang. $MCm = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{Mn}{x}$, vnde fit $Mn = \frac{xdt}{\sqrt{(1-tt)}}$ et $Mm = \frac{\sqrt{(dx^2 - ttdx^2 + x^2dt^2)}}{\sqrt{(1-tt)}}$. At quia corpus ex altitudine DQ est delapsum, erit $v = b + g.\, DQ = b + ga\sqrt{(1-m^2)} - gx\sqrt{(1-tt)}$. Quibus valoribus in aequatione inuenta substitutis orietur haec aequatio, $bdx^2(1-tt) = a^2bdt^2 + ga^3dt^2\sqrt{(1-m^2)} - ga^2xdt^2\sqrt{(1-tt)} - bx^2dt^2$, seu $dx\sqrt{b} = \frac{dt\sqrt{(a^2b + ga^3\sqrt{(1-m^2)} - ga^2x\sqrt{(1-tt)} - bx^2)}}{\sqrt{(1-tt)}}$. Quae aequatio ita integrata vt posito $t = m$ fiat $x = a$, exprimit naturam curuae quaesitae. Q. E. I.

Corollarium 1.

283. Si loco sinuum angulorum ACD, MCD eorum cosinus introducantur, fiatque $\sqrt{(1-m^2)} = n$ et $\sqrt{(1-tt)} = q$; erit $dx\sqrt{b} = \frac{-dq\sqrt{(a^2b + gna^3 - ga^2qx - bx^2)}}{\sqrt{(1-q^2)}}$

seu

seu $\frac{-dq}{\surd(1-qq)} = \frac{dx\surd b.}{\surd(b(a^2-x^2)+ga^2(na-qx))}$, quae ita est integranda, vt posito $q=n$ fiat $x=a$.

Corollarium 2.

284. Vbi curua ad radium CM est normalis, ibi ob euanescens dx erit $b(a^2-x^2)=ga^2(qx-na)$. Quoties ergo est $q = \frac{a^2b+gna^3-bx^2}{ga^2x}$, erit curua in radium CM normalis. Quia autem q intra limimites $+1$ et -1 continetur; x non potest esse maior data quantitate; nam posito $x=\infty$ fieret $q=\infty$, quod esset absurdum.

Corollarium 3.

285. Si CM est normalis in curuam erit celeritas angularis $= \frac{\surd v}{MC} = \frac{\surd(b+gna-gqx)}{x}$, quae aequalis esse debet ipsi $\frac{\surd b}{a}$. Maxima ergo est illa celeritas angularis si $q=-1$. Ille autem motus angularis eo fit minor quo maior est x. Eo vero minor porro erit motus angularis, quo magis obliqua est curua ad radium MC. Quare curua non vltra datam distantiam infra C descendere poterit, quam distantiam dabit x ex hac aequatione $x\surd b = a\surd(b+gna+gx)$, nempe $x = \frac{ga^2}{2c} + a\surd(\frac{ga^2}{4b^2}+\frac{gna}{b}+1)$. Haec ergo est maxima curuae a puncto C distantia.

Corollarium 4.

286. Cum igitur curua non vltra datam distantiam a centro fixo C distare queat, curua haec

erit

erit in ſe rediens. Scilicet vel poſt vnam reuolutionem vel poſt duas vel poſt tres etc. vel etiam poſt infinitas reuolutiones in ſe redibit. Prout litterae a, b, n et g fuerint aſſumtae.

Exemplum I.

287. Si potentia ſollicitans euaneſcit fit $g=o$, et corpus aequabiliter promouebitur. Tum igitur pro curua deſcripta haec habebitur aequatio $\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$, cuius integralis per log. eſt $\sqrt{-1}\, l(\frac{x\sqrt{-1}-\sqrt{(a^2-x^2)}}{c}) = \sqrt{-1}\, l(t\sqrt{-1}-\sqrt{(1-tt)})$, ſeu $x\sqrt{-1}-\sqrt{(a^2-x^2)} = ct\sqrt{-1}-c\sqrt{(1-tt)}$. Quae reducta dat $(a^2-c^2)^2 = 4(a^2+c^2)ctx - 4c^2x^2 - 4a^2c^2t^2$. Incidat recta AC in verticalem CD hoc enim perinde eſt, ob euaneſcentem potentiam g, debebit ergo fieri $x=a$, poſito $t=o$, ex quo fit $a^2+c^2=o$, atque $a^4=a^2x^2+a^4t^2$ ſeu $x^2=a^2(1-tt)$. Quae aequatio eſt pro circulo diametri a per punctum fixum C transeunte. Quando enim motus in circulo eſt aequabilis, motus quoque reſpectu cuiusque puncti in peripheria erit aequabilis.

Scholion.

288. Perſpicuum autem eſt hoc caſu peripheriam circuli quoque ſatisfacere, cuius centrum eſt in puncto fixo C, quippe quae ſolutio eſt facillima et ſua ſponte ſe prodit. Quamobrem maxime mirandum eſt hunc caſum in ſolutione non contineri.

neri. Ratio vero huius similis prorsus est eius, quam supra §. 268. dedimus, vbi simile paradoxum obseruauimus. Ad circulum centrum in C habentem designandum prodire debuisset $x = a$, seu $dx = o$, quod vero quia x vt quantitas variabilis consideratur non fieri potuit, praesertim cum in eadem aequatione solutio alia sit contenta, in qua x est quantitas reuera variabilis. Ex prima vero aequatione posito $v = b$, quae est $Mn . a = Mm . x$ intelligi potest circulum satisfacere, nam si vbique est $x = a$ erit quoque $Mn = Mm$. Magnum autem arbitror subsidium ad construendas curuas huic problemati satisfacientes prodíturum, si tali methodo solutio inveniri posse, quae sponte pro casu motus aequabilis circulum centrum in C habentem esset datura. Cum enim casus simplicissimus ita sit inuolutus et abditus, vt elici vix queat, coniicere licet, alias saepe curuas simplices in generali quapiam solutione contineri, quae sint erutu difficillimae.

PROPOSITIO 32.

Problema.

289. *Si corpus attrahatur vi quacunque ad centrum virium C, inuenire curuam AM super qua corpus data cum celeritate descendens, motu aequabili versus C feratur.* Tab. VIII. Fig. 2.

Solutio.

Sit corporis in A celeritas minima debita altitudini b; erit recta CA tangens curuae in A, quia corpus in A directe ad C moueri debet. Sit AC$=a$, et CM$=x$; celeritas in M debita altitudini v, et vis centripeta in M$=$P, erit $v=b-\int Pdx$, quod integrale ita est accipiendum vt facto $x=a$, euanescat, fiatque $v=b$. Celeritas vero in M tanta esse debet, qua elementum Mm eodem tempusculo absoluatur, quo elementum Pp celeritate $\sqrt{b}$. Erit ergo $\sqrt{b}:\sqrt{v}=Pp:Mm=MT:MC$, vnde prodibit ista aequatio $b.MC^2=v.MT^2=b.MT^2-MT^2.\int Pdx$. Dicatur perpendiculum CT in tangentem $=p$, erit $bp^2=-(x^2-p^2)\int Pdx$, seu $p^2=\frac{-x^2\int Pdx}{b-\int Pdx}$. Vel si sinus ang. ACM ponatur $=t$ erit $\frac{mn}{MC}=\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$. Vnde sequens emergit aequatio: $\frac{dt\sqrt{b}}{\sqrt{(1-tt)}}=\frac{-dx}{x}\sqrt{-\int Pdx}$. Quarum vtraque, si quidem P per x datur, ad curuam construendam est apta. Q. E. I.

Corollarium I.

290. Si vis centripeta potestati cuicunque distantiarum fuerit proportionalis, nempe P$=\frac{x^n}{f^n}$, erit $\int Pdx=\frac{x^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Hoc substituto habebitur pro curua AM sequens aequatio $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}=\frac{-dx}{x}$

$\frac{-dx}{x}\sqrt{\frac{a^{n+1}-x^{n+1}}{(n+1)bf^n}}$. Quae aequatio ita debet integrari vt facto $t=o$ fiat $x=a$.

Corollarium 2.

291. Si $\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$ ita accipiatur, vt fiat $=o$ si $t=o$, prodibit ex illa aequatione integrata haec

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}=\frac{-2\sqrt{(a^{n+1}-x^{n+1})}}{(n+1)\frac{3}{2}\sqrt{bf^n}}+\frac{a^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)\frac{3}{2}\sqrt{bf^n}}$$
$$l\frac{a^{\frac{n+1}{2}}+\sqrt{(a^{n+1}-x^{n+1})}}{a^{\frac{n+1}{2}}-\sqrt{(a^{n+1}-x^{n+1})}}=BS,$$ si centro C radio BC$=1$ descriptus fuerit arcus circuli BSs. Ex quo patet curuam AM infinitos habere gyros antequam corpus in C perueniat. Nam posito $x=o$ fit BS$=\infty$.

Corollarium 3.

292. Pendet igitur constructio huius curuae partim a quadratura circuli, partim a logarithmis si $n+1$ est numerus affirmatiuus. At si $n+1$ est numerus negatiuus, is terminus qui per logarithmos erat datus, ad quadraturam circuli quoque reducitur.

Corollarium 4.

293. Curua haec punctum habebit flexus contrarii, vbi est $dp=o$. Ad hoc igitur inuenien-

niendum ſumatur aequatio $pp = \frac{-x^2 \int P dx}{b - \int P dx}$, ex qua differentiata poſitoque $dp = 0$ prodibit $bPx = 2(\int P dx)^2 - 2b \int P dx$.

Corollarium 5.

294. In caſu igitur quo $P = \frac{x^n}{f^n}$ punctum flexus contrarii ibi erit, vbi eſt $(n+1)^2 b f^n x^{n+1} = 2(a^{n+1} - x^{n+1})^2 + 2(n+1) b f^n (a^{n+1} - x^{n+1})$. Vnde haec oritur aequatio $\frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} = -\frac{(n+3)bf^n}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{((n+3)^2 b^2 f^{2n} + 8 a^{n+1} b f^n)}$. Quae in integrali ſubſtituta dabit angulum ACM in quo eſt punctum flexus contrarii.

Scholion. I.

295. Cum autem de natura huiusmodi curuarum difficile ſit in genere quicquam producere, ad caſus ſpeciales deſcendendum erit principales, id quod in ſequentibus exemplis efficere viſum eſt.

Exemplum I.

296. Sit vis centripeta ipſis diſtantiis proportionalis ſeu $P = \frac{x}{f}$ fiet $n = 1$. Poſito ergo arcu BS $= s$ curua quaeſita exprimetur iſta aequatione $s = -\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{2bf}} + \frac{a}{2\sqrt{2bf}} l \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{(a^2 - x^2)}}$. Ex qua

qua aequatione data quauis puncti M a C distantia reperitur angulus BCS, quo absoluto corpus in ea distantia existit. Inter distantiam MC, x vero et perpendiculum CT $= p$ aequatio haec erit $pp = \frac{a^2x^2 - x^4}{2bf + a^2 - x^2}$. Huius curuae punctum flexus contrarii erit vbi est $dp = 0$, hoc autem vbi est $x^4 = 2a^2x^2 + 4bfx^2 - a^4 - 2abf$, seu $xx = a^2 + 2bf - 2\sqrt{(a^2bf + b^2f^2)}$, quia x non maior esse potest quam a. Hinc fit $x = \sqrt{(a^2 + bf)} - \sqrt{bf}$, atque $\frac{pp}{xx} = \frac{\sqrt{(a^2+bf)} - \sqrt{bf}}{\sqrt{(a^2+bf)}}$. Anguli ergo, quem curua in puncto flexus contrarii constituit cum radio CM cosinus erit $= \frac{\sqrt{4bf}}{\sqrt{4(a^2+bf)}}$. Aequatio vero curuae in seriem conuersa erit; posito $\sqrt{(a^2 - x^2)} = y$, haec $s\sqrt{2bf} = \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^5}{5a^4} + \frac{y^7}{7a^6} + \frac{y^9}{9a^8} +$ etc. In ipso ergo curuae principio, vbi x non multo minor est quam a, seu y valde paruum erit $s\sqrt{2bf} = \frac{y^3}{3a^2}$. Deinde ex ipsa aequatione apparet facto $x = 0$ fore $s = \infty$, quare curua infinitis spiris ambit centrum C, eritque quando corpus centro iam proximum est $\frac{pp}{xx} = \frac{aa}{2bf + a^2}$. Ex quo sequitur proxime circa centrum C curuam abire in logarithmicam spiralem.

Exemplum 2.

297. Sit $n = -1$, seu $n + 1 = 0$, qui casus ex ipsa aequatione differentiali est eruendus. Fit enim ob $P = \frac{f}{x}$, $\int Pdx = fl\frac{x}{a}$, vnde habebitur ista

aequatio $ds = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x\sqrt{b}} \sqrt{fl\frac{a}{x}}$, cuius integralis est $s = \frac{2f(la-lx)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{bf}}$. Altera aequatio inter perpendiculum p et x, erit haec $pp = \frac{fxx\, l\frac{a}{x}}{b+fl\frac{a}{x}}$. Ex qua inuenitur punctum flexus contrarii in eo loco, in quo est $b = 2f(l\frac{a}{x})^2 + 2bl\frac{a}{x}$ seu $l\frac{a}{x} = \frac{-b+\sqrt{(bb+2bf)}}{2f}$. Hoc ergo habebitur sumendo $s = \frac{(-b+\sqrt{(bb+2bf)})^{\frac{3}{2}}}{3f\sqrt{2a}}$. Perspicitur porro si fiat $x=0$, fore $s=\infty$, seu curuam infinitis spiris centrum C circumdare, hoc vero casu erit $\frac{pp}{xx} = 1$, seu $p = x$. Vltimo ergo curua in circulum infinite paruum abit.

Exemplum 3.

298. Ponatur $n = -2$ vt vis centripeta sit quadratis distantiarum reciproce proportionalis, erit $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-fdx}{x}\sqrt{\frac{a-x}{abx}} = ds$. Ponatur $\frac{a-x}{x} = yy$, fiet $\frac{ds\sqrt{ab}}{2f} = \frac{yy\,dy}{1+yy} = dy - \frac{dy}{1+yy}$. Exprimit vero $\int\frac{dy}{1+yy}$ arcum, cuius tangens est y seu $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ sit hic arcus $=t$; erit $t + \frac{s\sqrt{ab}}{2f} = y = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$. Vbique ergo data distantia x capiendus est arcus s in $\frac{\sqrt{ab}}{2f}$ ductus aequalis differentiae inter tangentem $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ et arcum respondentem, posito radio $=1$. Si x ponatur $=0$, fiet $s=\infty$, ex quo sequitur curuam per infinitas spiras ad centrum C descendere.

Prae-

Praeterea ob $-\int P dx = \frac{ff(a-x)}{ax}$ erit $pp = \frac{ffxx(a-x)}{abx+ff(a-x)}$ Ex quo sequitur si x euanescat fore $\frac{pp}{xx} = 1$, seu curuam vltimo quoque in circulum infinite paruum abire. Si fuerit $ab = ff$, erit $pp = \frac{xx(a-x)}{a}$, et $t + \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$ Punctum flexus contrarii hoc ergo casu incidet in eum locum, vbi est $2ax = 3xx$, seu vel $x = o$ vel $x = \frac{2a}{3}$. Sin autem fuerit $ab = 4ff$, erit $t + s = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$; et punctum flexus contrarii habebitur capiendo $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Scholion 2.

299. Quo autem appareat, quomodo spirae infinitae sint comparatae, si vis centripeta fuerit potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu $P = \frac{x^n}{f^n}$; consideretur aequatio inter p et x, quae erit $\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)bf^n + a^{n+1} - x^{n+1}}$. Vbi duo distinguendi sunt casus alter quo $n+1$ est est numerus affirmatiuus alter quo est negatiuus. Si $n+1$ est numerus affirmatiuus facto $x = o$ fit $\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n + a^{n+1}}$. Hoc ergo casu curua AM circa centrum C abit in logarithmicam spiralem. At si $n+1$ est numerus negatiuus facto $x = o$ fit $\frac{pp}{xx} = 1$. His ergo in casibus curua in C abit in circulum infinite paruum. Fit his casibus corporis ad C accedentis celeritas infinite magna,

et

et hanc ob rem nisi curua in circulum abiret corpus celeritate infinite magna ad C accederet, quod esset contra conditionem problematis. Determinatis igitur curuis, super quibus corpus aequabiliter ad centrum virium accedit, inuestigabimus eas curuas, super quibus motu aequabili circa centrum virium circumfertur.

PROPOSITIO 33.

Problema

Tab. VIII. Fig. 3. 300. *Si corpus attrahatur perpetuo ad centrum virium C, determinare curuam AM, super qua corpus motu angulari circa centrum C aequabiliter mouetur.*

Solutio.

Sit A curuae punctum supremum, vbi curua normalis erit in radium AC; sitque celeritas corporis in A debita altitudini b et $AC=a$, erit motus angularis in $A=\frac{\sqrt{b}}{a}$, cui quantitati motus angularis in singulis punctis M debet esse aequalis. Ponatur $CM=x$, cui aequalis capiatur CP, et sit vis centripeta in $M=P$, erit celeritas in M debita altitudini $b-\int Pdx$, integrali $\int Pdx$ ita accepto vt euanescat posito $x=a$. Ducta tangente MT vocetur perpendiculum ex C in eam demissum $CT=p$, erit $x:p=Mm:mn$. Hanc ob rem celeritas per mn $=\frac{p\sqrt{(b-\int Pdx)}}{x}$, et celeritas angularis $=\frac{p\sqrt{(b-\int Pdx)}}{x^2}$, quae aequa-

aequalis esse debet ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$. Hinc prodit sequens aequatio $bx^4 = a^2bp^2 - a^2p^2\int Pdx$, seu $p = \frac{x^2\sqrt{b}}{a\sqrt{(b-\int Pdx)}}$. Centro C radio BC $= 1$ describatur arcus circuli BS, qui dicatur $= s$, erit $1 : ds = x : mn$, vnde erit $mn = xds$ et $Mm = \sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)}$. Cum nunc sit $x : p = \sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)} : xds$ fiet $p = \frac{xxds}{\sqrt{(dx^2+x^2ds^2)}}$. Quo valore in aequatione inuenta substituto habebitur $bdx^2 + bx^2ds^2 = a^2bds^2 - a^2ds^2 \int Pdx$, hincque $ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(a^2b - bx^2 - a^2\int Pdx)}}$. Ex qua aequatione curua quaesita poterit construi. Q.E.I.

Corollarium 1.

301. Quo minor fit x, eo maior fiet $b - \int Pdx$, quare quo minor fit x eo minor quoque fiet $\frac{p}{x}$, seu sinus anguli CMT. Est enim $\frac{p}{x} = \frac{x\sqrt{b}}{a\sqrt{(b-\int Pdx)}}$.

Corollarium 2.

302. Porro tam ex hypothesi quam hac aequatione x non potest fieri maior quam a, fieret enim $p > x$. Quamobrem radiorum CM nullus potest esse normalis in curuam, nisi qui est maximus nempe $=$ AC.

Scholion 1.

303. Per se quidem manifestum est in quacunque vis centripetae hypothesi circulum cen-

tro C descriptum satisfacere; corpus enim super circulo vniformiter moueri debebit. Etiamsi autem aequatio generalis circulum non comprehendere videatur, nihilo tamen minus in ea contentus esse debet; vt iam supra innuimus.

Scholion 2.

304. Perspicuum autem est nullam aliam curuam centrum C cingentem praeter circulum quaesito satisfacere posse. Nam in huiusmodi curuis fieri non potest, vt omnes rectae ex C eductae et in curuam normales sint inter se aequales. Quae igitur curuae praeter circulum problema soluunt, eae per ipsum centrum C transire debent, vt plus vno radio MC non sit in curuam normali. Cuiusmodi ergo sint hae curuae in sequente exemplo videamus.

Exemplum.

305. Sit vis centripeta distantiis a centro directe proportionalis seu $P = \frac{x}{f}$ erit $-\int P dx = \frac{a^2 - x^2}{2f}$. Quo substituto pro curua sequens prodit aequatio $ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b + \frac{a^2}{2f})(a^2 - x^2)}}$. Est vero $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ arcus, cuius sinus est $\frac{x}{a}$ existente toto sinu $= 1$. Notetur hic arcus per $A\frac{x}{a}$. Sit sinus arcus BS $= t$, erit $s = A.t$; vnde fiet $A.t = \sqrt{\frac{2bf}{a^2 + 2bf}}$.

(A.1−

$(A.1 - A\frac{x}{a})$. Seu arcus cuius cosinus est $\frac{x}{a}$ erit $= A.t\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}$. Vnde constructio curuae facilis fluit; eritque curua algebraica quoties $\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}$ est numerus rationalis. Sit $\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}} = m$ seu $2bf = \frac{a^2}{m^2-1}$, erit $\frac{mdt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, cuius integralis per logarithmos imaginarios est $ml(t\sqrt{-1} + \sqrt{(1-tt)}) = l(\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a})$ seu $(t\sqrt{-1} + \sqrt{(1-tt)})^m = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Demittatur ex M in AC perpendiculum MQ $= y$ et posito CQ $= u$, erit $1 : t = x : y$ atque $t = \frac{y}{x}$. Propterea prodibit $(\frac{y\sqrt{-1}+\sqrt{(x^2-y^2)}}{x})^m = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Vt sit $m = 2$ seu $bf = \frac{a^2}{6}$, habebitur ista aequatio $(\frac{y\sqrt{-1}+u}{x})^2 = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Quae reducta dat hanc $x^3 = au^2 - ay^2 = ax^2 - 2ay^2$, seu $y = x\sqrt{\frac{a-x}{2a}}$ et $u = x\sqrt{\frac{a+x}{2a}}$. At si inter coordinatas orthogonales u et y aequatio desideretur ea erit ordinis sexti haec $(y^2+u^2)^3 = a^2(u^2-y^2)^2$ In hac curua applicata erit maxima si $x = \frac{2b}{3}$, seu si sumatur CQ $= \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{5}{6}} = a\sqrt{\frac{10}{27}}$, tum enim erit QM $= \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{2}{27}}$. In aliis vero ipsius m valoribus maxima applicata erit vbi est $my\sqrt{(a^2-x^2)} = ux$.

PROPOSITIO 34.
Problema.

306. *Sit potentia sollicitans vniformis g, et vbique deorsum tendat, deturque curua AT, inue-* Tab. VIII. Fig. 4.

 nire

nire curuam AM, *ſuper qua corpus ita deſcendat, vt tempus per arcum quemcunque* AM *proportionale ſit radici quadratae ex applicata reſpondente* PT *curuae datae* AT.

Solutio.

Ponatur abſciſſa communis $AP = x$, curuae AT applicata $PT = t$, dabitur ergo, quia curua AT datur aequatio inter x et t, quae talis eſſe debebit, vt euaneſcente x fiat quoque $t = o$, quia motus initium in A ponitur, et tempora a puncto A computantur. Sit porro curuae quaeſitae AM applicata $PM = y$, et arcus $AM = s$. Debita ſit celeritas initialis in A altitudini b. Erit ergo celeritas in M debita altitudini $b + gx$, et tempus quo arcus AM abſoluitur $= \int \frac{dt}{\sqrt{(b+gx)}}$, quod aequale eſſe debet ipſi $\sqrt{t}$. Habebitur ergo haec aequatio $\int \frac{ds}{\sqrt{(b+gx)}} = \sqrt{t}$ ſeu $\frac{ds}{\sqrt{(b+gx)}} = \frac{ds}{2\sqrt{t}}$ Vnde $dt^2(b+gx) = 4tds^2 = 4tdx^2 + 4tdy^2$, atque $dy = \frac{\sqrt{(bdt^2 + gxds^2 - 4tdx^2)}}{2\sqrt{t}}$. Ex qua aequatione, cum t per x detur, curua quaeſita AM conſtrui poterit. Ita autem eſt conſtruenda, vt poſito $x = o$ fiat quoque $y = o$, quo curuae AM initium ſit in A. Q. E. I.

Corollarium I.

307. Quo igitur curua ſit realis, oportet, vt $bdt^2 + gxdt^2$ ſit maius quam $4tdx^2$ ſeu $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$>$

$> \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, siue integrando $\sqrt{t} > \frac{2\sqrt{(b+gx)}-2\sqrt{b}}{g}$. Si enim fuerit $\sqrt{t} = \frac{2\sqrt{(b+gx)}-2\sqrt{b}}{g}$, curua AM fit recta verticalis, super qua descensus fit celerrimus.

Corollarium 2.

308. Si igitur in curua AT alicubi fiat $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ aequale ipsi $\frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, ibi tangens curuae AM respondens erit verticalis. Atque si infra hunc locum sit $\frac{dt}{2\sqrt{t}} < \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, curua AM non eousque descendet, sed habebit punctum reuersionis in eo loco vbi tangens est verticalis.

Corollarium 3.

309. Si angulus quem curua AT in A cum verticali AP constituit fuerit acutus, cuius tangens $= m$, erit in initio A, $t = mx$, et $\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{mdx}{2\sqrt{mx}} > \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, vnde $m(b+gx)$ maius esse debet quam $4x$, id quod semper accidit si b non fuerit $= o$. Tum autem erit $dy = \frac{dx\sqrt{(bm^2+gm^2x-4mx)}}{2\sqrt{mx}}$. Posito igitur $x = o$, fiet $\frac{dy}{dx} = \infty$, seu his casibus curuae AM tangens in A erit horizontalis; nisi sit $b = o$. At si $b = o$, erit $dy = \frac{dx\sqrt{(gm-4)}}{2}$. Ne igitur curua AM fiat imaginaria, debet gm maius esse quam 4, atque tum curua AM cum AP in A angulum acutum constituet, cuius tangens erit $\frac{\sqrt{(gm-4)}}{2}$.

 Co-

Corollarium 4.

310. Sin vero angulus, quem curua AT in A cum verticali AP facit, sit rectus, fit $m = \infty$. Hoc ergo casu curuae AM tangens in A semper erit horizontalis, siue b sit $= o$ siue secus.

Corollarium 5.

311. Si celeritas in A est $= o$, et in principio A curua AT confundatur cum curua, cuius aequatio est $t = \alpha x^n$, existente n numero affirmatiuo, quo crescente x quoque t crescat, erit $dt = \alpha n x^{n-1} dx$ et $dy = \frac{dx \sqrt{(\alpha^2 g n^2 x^{2n-1} - 4 \alpha x^n}}{2 \sqrt{\alpha x^n}}$. Nunc ne dy fiat imaginarium facto $x = o$ debebit esse $n > 2n-1$, seu $n < 1$, quibus casibus scilicet curua AT in A est normalis ad AP. Tum vero erit in puncto A, $dy = \frac{n dx \sqrt{\alpha g}}{2 x^{\frac{1-n}{2}}}$ et $y = \frac{n x^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\alpha g}}{n+1}$, et radius osculi curuae AM in A $= \frac{n^2 \alpha g x^n}{2(n+1)}$. Ex quo sequitur curuae AM, cuius tangens in A est horizontalis, radium osculi in A debere esse infinite paruum, si corpus ex quiete super ea descendere posse debeat. Nisi enim radius osculi fuerit infinite paruus, corpus perpetuo in A quiescens permanebit.

Corollarium 6.

312. Si igitur corpus ex quiete descendere ponatur in A, quo curua AM fiat realis, debebit $\frac{dt}{2\surd t}$ maius esse quam $\frac{dx}{\surd gx}$ saltem in initio curuae AT. Quare si ponatur $\frac{d}{2\surd t}=\frac{dx}{\surd gx}+pdx$, vbi p est quantitas affirmatiua saltem nisi x ponatur nimis magnum, erit $\surd t=\frac{2\surd gx}{g}+\int pdx$, vbi $\int pdx$ ita accipi debet, vt euanescat facto $x=o$. Hoc autem valore loco $\frac{dt}{2\surd t}$ substituto prodibit $\frac{ds}{\surd gx}=\frac{dx}{\surd gx}+pdx$ seu $s=x+\int pdx\surd gx$, pro curua quaesita AM. Vel inter x et y haec habebitur aequatio $y=\int dx\surd(2p\surd gx+gppx)$. Notandum vero est p non talem esse posse quantitatem, ex qua $\int pdx$ praescripto modo acceptum fiat infinite magnum.

Corollarium 7.

313. Ex dictis intelligitur, quamdiu p valorem affirmatiuum retineat, tamdiu curuam AM descendere: si fit $p=o$, et deinceps negatiuum, curua AM in illo loco habebit cuspidem, et reuertetur sursum. Si $p=\infty$, manente tamen $\int pdx$ finito, curua AM ibi habebit tangentem horizontalem.

Corollarium 8.

314. Si b non ponatur $=o$, ex eadem curua AT innumerabiles inueniri poterunt curuae AM; prout enim celeritas initialis maior minorue accipiatur, alia prodit curua AM.

Scho-

Scholion.

315. Problematis huius maximus erit vſus in ſolutionibus ſequentium problematum indeterminatorum, in quibus omnes curuae requiruntur, ſuper quibus corpus eodem tempore vel ad datam rectam vel curuam lineam perueniat. Hanc ob rem indolem quantitatum t et p diligentius inueſtigauimus, quo iis in ſequentibus vti liceat.

PROPOSITIO 35.

Problema.

Tabula IX. Fig. I. 316. *Poſita potentia ſollicitante vniformi* g *et deorſum directa, inuenire omnes curuas* AMC, *ſuper quibus corpus in* A *ex quiete deſcenſum incipiens dato tempore ad rectam horizontalem* BC *perueniat.*

Solutio.

Ponatur AP$=x$, PM$=y$, et AB$=a$. In curua AND exprimat PN ſupra ſumtam quantitatem $\int p dx$, cuius curuae haec debet eſſe proprietas, vt in A cum axe AB concurrat, eiusque applicatae continuo vsque ad D ſaltem creſcant, quo ſcilicet pdx ſit affirmatiuum. Nunc ſumto $y=\int dx V(2pVgx+gppx)$ erit tempus per AMC$=\frac{2Vga}{g}+$ BD (312.). Quamobrem cum infinitae curuae huius indolis in locum curuae AND ſubſtitui queant, ex iis infinitae orientur curuae AMC, ſuper quibus omnibus

bus corpus eodem tempore ex A ad lineam horizontalem BC pertingit. Ad hoc ergo obtinendum pro $\int p\,dx$ talis quantitas accipi debet, quae euanescat posito $x = o$, et fiat $=$ BD posito $x = a$, retinente p vbique per AND affirmatiuum valorem. Q. E. I.

Corollarium 1.

317. Si facto $x = a$ fiat $p = o$, seu si curua AND in D perpendiculariter insistat horizontali CD, curua AMC quoque horizontali DC perpendiculariter insistet.

Corollarium 2.

318. Atque si posito $x = o$, fiat quoque $p = o$, tangens curuae AMC in A erit verticalis, idem vero quoque accidit, si $p\sqrt{x}$ fiat $= o$ posito $x = o$. At si $p\sqrt{x}$ fiat infinitum posito $x = o$, curua AMC in A habebit tangentem horizontalem.

Scholion 1.

319. Intelligitur ergo problema hoc maxime esse indeterminatum, cum infinitis modis infinitae curuae AMC possint inueniri. Quamobrem in sequentibus exemplis modum indicabimus quotcunque libuerit series infinitarum curuarum quaesito satisfacientium inueniendi.

Exemplum I.

320. Ponatur $PN = \int p\,dx = z$ et $BD = \sqrt{b}$, ita vt tempus descensus esse debeat $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$. Sumatur pro curua AND haec aequatio $z = \alpha x^2 + \beta x$, quae hanc iam habet proprietatem, vt $\int p\,dx$ seu z euanescat posito $x = o$. Nunc quia facto $x = a$ fieri debet $z = \sqrt{b}$, habebitur $\sqrt{b} = \alpha a^2 + \beta a$, hincque $\beta = \frac{\sqrt{b}}{a} - \alpha a$, ideoque $z = \alpha x^2 + \frac{x\sqrt{b}}{a} - \alpha ax$. Deinde quia p seu $\frac{dz}{dx}$ affirmatiuum semper habere debet valorem si $x < a$, debebit esse $2\alpha x + \frac{\sqrt{b}}{a} - \alpha a$ affirmatiuum. Quare oportet esse $\sqrt{b} > \alpha a^2$, ponatur ideo $\sqrt{b} = \alpha a^2 + \alpha af$ erit $\alpha = \frac{\sqrt{b}}{a^2 + af}$. Quo substituto habebitur $z = \frac{x^2\sqrt{b} + fx\sqrt{b}}{a^2 + af}$, quae aequatio substituendis loco f innumerabilibus valoribus affirmatiuis, infinitas dat curuas AND. Fiet autem $p = \frac{dz}{dx} = \frac{2x\sqrt{b} + f\sqrt{b}}{a^2 + af}$ et $p\sqrt{gx} = \frac{2x\sqrt{gbx} + f\sqrt{gbx}}{a^2 + af}$, ex qua patet omnes hinc orientes curuas AMC tangere rectam AB in A. Aequatio vero pro curuis AMC erit haec $y = \int \frac{dx}{a^2 + af} \sqrt{(2a(a+f)(2x+f)\sqrt{gbx} + gbx(2x+f)^2)}$. Quae infinitas continet curuas problemati satisfacientes, super quibus omnibus tempus descensus ad lineam horizontalem est $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$.

Corollarium 3.

321. Hae autem lineae omnes sunt rectificabiles. Nam cum sit $\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + p\,dx$, erit $s = x + \int p\,dx \sqrt{gx}$.

$\surd gx$. Est vero $\int p\,dx \surd gx = \frac{\frac{4}{3}x^2\surd gbx + \frac{2}{3}fx\surd gbx}{a^2 + af}$

Vnde tota curua AMC erit $= a + \frac{(\frac{4}{3}a + \frac{2}{3}f)\surd gab}{a+f}$

Corollarium 4.

322. Inter has igitur curuas AMC longissima prodit si $f = o$, erit enim tum AMC $= a + \frac{4}{3}\surd gab$. Et pro hac erit aequatio ista $y = \int \frac{2dx}{a^2} \surd(a^2 x \surd gbx + gbx)$. Breuissima vero habetur facto $f = \infty$, tum enim erit AMC $= a + \frac{2}{3}\surd gab$. Et aequatio pro hac curua erit $y = \int \frac{dx}{a} \surd(2a\surd gbx + gbx)$.

Scholion 2.

323. Omnes curuae AND sub aequatione $z = \frac{x^2\surd b + fx\surd b}{a^2 + af}$ contentae sunt parabolae, adeo vt per solas parabolas innumerabiles inuentae sint curuae problemati satisfacientes. Neque vero omnes parabolae in hac aequatione continentur, sed loco illius aequationis, si adhibeatur haec, $z^2 + z\surd f = \frac{x(b + \surd bf)}{a}$, quae etiam infinitas parabolas continet, iterum infinitae curuae AMC inuenientur, super quibus corpus dato tempore descensum absoluit. Ex quo intelligi potest quoties infinitae inueniri queant curuae AMC, si tantum sectiones conicae in locum curuae AND substituan-

ſtituantur. Sumta enim pro curua AND hac aequatione $z^2 + \alpha z = \beta x^2 + \gamma x + \gamma x + \delta xz$, quae omnes continet ſectiones conicas per punctum A transeuntes, fieri debet $b + \alpha \surd b = \beta a^2 + \gamma a + \delta a \surd b$, atque $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{2ba + \gamma + \delta \surd b}{\alpha + 2\surd b - \delta a}$ debent eſſe quantitates poſitivae, quod quam infinitis modis fieri poſſit, facile perſpicitur. Si deinde omnes curvae algebraicae conſiderentur, atque poſtmodum quoque curuae tranſcendentes ſimul, maxima copia curuarum ſimul deſcriptarum concipi poterit.

Exemplum 2.

324. Sumatur pro curua AND haec aequatio generalis $z = \frac{x^n \surd b}{a^n}$, denotante n numerum affirmatiuum quemcunque; euaneſcet z poſito $x = o$, fietque $z = \surd b$ poſito $x = o$ vt requiritur: praeterea vero quoque erit p ſeu $\frac{dz}{dx} = \frac{nx^{n-1}\surd b}{a^n}$ quantitas affirmatiua. Cum igitur ſit $p\surd gx = \frac{nx^{n-\frac{1}{2}}\surd gb}{a^n}$ erit $y = \int \frac{dx}{a^n} \surd(2na^n x^{n-\frac{1}{2}} \surd gb + n^2 gbx^{2n-1})$.

Quae aequatio infinitas curuas AMC complectitur, quae omnes erunt rectificabiles. Erit enim $AM = x + \frac{2nx^{n+\frac{1}{2}}\surd gb}{(2n+1)a^n}$, ideoque $AMC = a + \frac{2n\surd gab}{2n+1}$.

Co-

Corollarium 5.

325. Si fuerit $n = \frac{1}{2}$ erit $y = \int \frac{dx\sqrt{(gb + 4\sqrt{gab})}}{2\sqrt{a}}$ atque $y = \frac{x\sqrt{(gb+4\sqrt{gab})}}{2\sqrt{a}}$ et $AM = x(1 + \frac{\sqrt{gab}}{2a})$. Quare curua abit in lineam rectam inclinatam super qua descensus fit tempore $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$. Perspicitur ergo dari lineas breuiores recta hac inclinata, super quibus corpus dato tempore ex A ad horizontalem BC peruenit: facto enim $n < \frac{1}{2}$ linea AMC fit breuior.

Scholion 3.

326. Ceterum si detur vnica curua AND desideratam curuam AMC praebens, ex ea ipsa innumerabiles aliae poterunt inueniri. Data enim vnica aequatione inter z et x capiatur $PN = \frac{(ma-(m-1)x)z}{a}$, vnde pro diuerso ipsius m valore innumerabiles curuae orientur. Simili modo poni etiam potest $PN = \frac{(max^n - (m-1)x^{n+1})z}{a^{n+1}}$ fit enim $PN = z = \sqrt{b}$ si ponatur $x = a$. Atque generaliter si fuerit P functio quaecunque ipsarum x et z, A vero eadem functio quae prodit facto $x = a$ et $z = \sqrt{b}$, accipi poterit $PN = \frac{Pz}{A}$. Debebit autem P talis esse functio vt Pz euanescat facto $x = o$ et $z = o$, et diff. PN diuisum per dx debet esse quantitas affirmatiua, saltem quamdiu est $x < a$.

Scholion 4.

327. Simili modo problema generalissime soluetur, si designante P quamcunque functionem ipsius x euanescentem si est $x = o$, et A eam quantitatem in quam abit P si fit $x = a$, sumatur $z = \frac{P\sqrt{b}}{A}$ pro generalissima aequatione curuae AND. Sit deinde $dP = Qdx$, debebit Q esse quantitas affirmatiua, quamdiu x non superat a; erit $p = \frac{Q\sqrt{b}}{A}$ atque hinc $y = \int\frac{dx}{A}\sqrt{(2AQ\sqrt{gbx} + gbQQx)}$, quae est generalissima aequatio pro curuis AMC, quae omnes a corpore descendente proposito tempore absoluentur. Apparet hoc modo curuas transcendentes quoque in locum curuarum AND substitui posse, quibus casibus tempus, quo quaeuis curuae AMC portio absoluitur, agebraice non potest definiri. Si $Q\sqrt{gbx}$ ponatur $= R$, erit $y = \int\frac{dx}{A}\sqrt{(2AR + RR)}$. Sumto ergo loco R quacunque functione ipsius x, ad inueniendam A integrari debet $\frac{Rdx}{\sqrt{gbx}}$ ita vt euanescat posito $x = o$, deinde poni oportet $x = a$, et quod prouenit erit $= A$. Hic vero hoc tantum est monendum vt pro R sumatur quantitas affirmatiua, quamdiu x non excedit a, et caueri debet ne $\int\frac{Rdx}{\sqrt{gbx}}$ fiat infinitum si praescripto modo accipiatur.

PROPOSITIO 36.

Problema.

Tabula IX. Fig. 2. 328. *Posita potentia sollicitante vniformi g et vbique deorsum directa, inuenire omnes curuas* AMC *super*

super quibus corpus ex A dato tempore ad rectam BC ad horizontem vtcunque inclinatam descendat.

Solutio.

Exprimat curuae AND applicata BD tempus, quo corpus ex A ad rectam BC pertingit, et ducta per quodvis punctum M recta MQ parallela rectae datae BC secante verticalem AB in Q exprimat applicata QN tempus, quo corpus partem AM percurrit. Quare si infinitae curuae AND concipiantur, quae omnes in B eandem habeant applicatam BD, hae omnes generabunt curuas AMC super quibus corpus dato tempore ab A ad rectam BC peruenit. Curuae autem AND vt supra monitum concurrere debent in A cum verticali AB, et vsque ad D diuergere debent ab AB. Ponatur nunc tangens anguli ABC $= k$, sitque AP$=x$, PM$=y$, AQ$=u$, QN$=t$, et AP$=a$ erit PQ$=\frac{y}{k}$, ideoque $x+\frac{y}{k}=u$. Quia autem celeritas in M debita est altitudini gx erit tempus per AM $=\int\frac{\surd(dx^2+dy^2)}{\surd gx}$ quod aequale esse debet ipsi QN $=t$, erit adeo $dt=\frac{\surd(dx^2+dy^2)}{\surd gx}$ et $gxdt^2=dx^2+dy^2$. At ob curuam AND datam, dabitur t in u, et cum sit $u=x+\frac{y}{k}$ dabitur t per x et y quamobrem habebitur aequatio inter x et y pro curua quaesita AMC. Vel cum sit $y=ku-kx$, erit $gxdt^2=(k^2+1)\,dx^2-2k^2du\,dx+k^2du^2$, ex qua aequatione x per u inuenire licebit. Sit ad hoc $dt=pdu$, erit $gxp^2du^2=(k^2+1)\,dx^2-2k^2$

$dudx + k^2 du^2$, atque $dx = \frac{k^2 du \pm \sqrt{(g(k^2+1)p^2 x - k^2) du^2)}}{k^2+1}$ Curua igitur AND talis accipi debet vt vbique p maius sit quam $\frac{k}{\sqrt{gx(k^2+1)}}$. Aequatio illa autem ita debet integrari vt facto $u = o$ fiat $x = o$. Quo facto quoque eruetur aequatio inter x et y pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium 1.

329. Curua AMC tanget in A rectam AB si fit $dy = o$, posito $x = o$; tum vero debebit esse $du = dx$, atque $1 = \sqrt{(g(k^2+1)p^2 x - k^2)}$. Quare hoc eueniet si fit $ppx = \frac{1}{g}$ facto $x = o$. Quia autem hoc casu est y infinities minor quam x, erit in ipso initio $x = u$; ex quo sequitur curuam AMC in A tangere verticalem AB si fuerit $ppu = \frac{1}{g}$ posito $u = o$.

Corollarium 2.

330. Deinde curua AMC normalis erit in QM si fuerit $PQ = \frac{y}{k} = \frac{ydy}{dx}$ seu $dx = kdy$, $= k^2 du - k^2 dx$, siue $dx = \frac{k^2 du}{k^2+1}$. Hoc vero eueniet vbi erit $p^2 x = \frac{k}{g(k^2+1)}$.

Corollarium 3.

331. In ipso puncto A expressio ppx vel finitum valorem eumque maiorem quam $\frac{kk}{g(k^2+1)}$ habebit facto $x = o$; vel infinite magnum. In posteriore casu erit $dx = \pm \infty du$, et cum sit $dx = dx$ +

$+\frac{dy}{k}$, erit $dy = -kdx$. Quibus caſibus tangens curuae AMC in A parallela erit rectae BC.

Exemplum.

332. Sit curua AND parabola quaecunque, ita vt ſit $t = \frac{2\alpha\sqrt{u}}{\sqrt{gu}}$ erit $dt = \frac{\alpha du}{\sqrt{gu}}$, et $p = \frac{\alpha}{\sqrt{gu}}$, vnde habebitur iſta aequatio, $(k^2+1)dx - k^2du = \pm \frac{du\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)}}{\sqrt{u}}$. Huius aequationis integralis eſt $C = (\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)} + A\sqrt{u})^{\pi}(\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)} + B\sqrt{u})^{\varrho}$. Exiſtente $A = \frac{\alpha^2 + \sqrt{(\alpha^4 - 4(1-\alpha^2)k^2)}}{2}$ et $B = \frac{\alpha^2 - \sqrt{(\alpha^4(1-4(1-\alpha^2)k^2)}}{2}$ et $\pi = \frac{-2A}{A-B}$ atque $\varrho = \frac{2B}{A-B}$. Cum igitur ſit π numerus negatiuus, erit $C(\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)} + A\sqrt{u})^{-\pi} = (\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)} + B\sqrt{u})^{\varrho}$, vbi C denotat conſtantem, quae efficiat vt poſito $x = o$ fiat $u = o$. Manifeſtum autem eſt quaecunque fuerit conſtans, ſemper fieri $u = o$ poſito $x = o$, excepto caſu quo ϱ vel π euaneſcit. At π euaneſcere non poteſt, ϱ vero euaneſcit caſu quo $\alpha = 1$, hoc igitur caſu debet eſſe $C = \infty$, fietque $\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2)} + \alpha^2\sqrt{u} = o$, ſeu $u = x$ et $y = o$; quare ſatisfacit hoc caſu recta verticalis AB. Reliquis caſibus vero ob C arbitrariam quantitatem ex vnica curua AND innumerabiles curuae AMC inveniuntur. Vnicus porro caſus eſt ſeorſim tractandus, ſi $A = B$ ſeu $k^2 = \frac{\alpha^4}{4(1-\alpha^2)}$ tum enim erit $lu = C - 2l(r + \frac{\alpha}{2}^2) \pm \frac{\alpha^2}{r \pm \frac{\alpha}{2}^2}$ exiſtente $r =$

$\frac{\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}}{\sqrt{u}}$. Conſequenter pro hoc caſu habebitur haec aequatio $C = 2\,l(\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)} \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}) \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)} \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}}$, vbi C quoque determinatione non opus habet. Si eſt $\alpha > 1$ fit B et hinc quoque ρ numerus negatiuus, tum ergo debet eſſe $C = \infty$. Hoc ergo caſu erit vel $A\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}$ vel $B\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}$. Quae duae aequationes ſunt pro lineis rectis certo modo inclinatis et per A transeuntibus: haeque etiam generaliter ſatisfaciunt. Vt ſi fuerit $\alpha = 1$, erit $A = 1$ et $B = o$, hincque hae aequationes $u = x$ ſeu $y = o$ et $u = \frac{(k^2+1)x}{kk} = x + \frac{y}{k}$ ſeu $x = ky$, quae eſt linea recta perpendicularis in BC, haec enim a corpore eodem tempore percurritur, quo verticalis BC.

Corollarium 4.

332. Niſi igitur ſit $\alpha = 1$ vel $\alpha > 1$, innumerabiles lineae curuae inueniuntur problemati ſatisfacientes; quae ergo omnes minore tempore abſoluentur, quam perpendicularis AB.

Corollarium 5.

333. Cum ergo ex vnica curua AND infinitae oriri queant curuae AMC, facile intelligitur infinities plures curuas huic quaeſtioni ſatisfacere, quam praecedenti.

Corollarium 6.

334. Si $\alpha < 1$ effici poteſt determinanda conſtante C, vt curua quaeſita per datum punctum rectae BC transeat. Deinde aliis aſſumendis curuis AND ſimili modo infinitae curuae poterunt inueniri, ſuper quibus corpus non ſolum dato tempore ad rectam BC perueniat, ſed ad quodvis in ea punctum datum C.

Scholion I.

335. In hoc exemplo caſus quo $\alpha = 1$ bis occurrit, prima enim vice linea recta verticalis tantum ſatisfaciens eſt inuenta, altera vice praeter hanc rectam alia inclinata, vtroque tamen modo eadem aequatione generali ſumus vſi. Saepius autem iam huiusmodi caſus obtigerunt, in quibus aequationes differentiales continent in ſe aequationes integrales, quae nihilominus per integrationes non eruuntur. Vt in caſu $\alpha = 1$ haec habetur aequatio differentialis, $\frac{(k^2+1)dx - k^2du}{\sqrt{((k^2+1)x - k^2u)}} = \frac{\pm du}{\sqrt{u}}$ quae integrata dat $x = u$. Interim tamen perſpicuum eſt hanc aequationem $k^2 u = (k^2+1)x$ in illa quoque contineri, etiamſi per integrationem non prodeat. Et hanc ob rem poſterior aequatio integralis aeque ſatisfacit ac prior $x = u$. Hinc generaliter colligere licet aequationem differentialem $\frac{dt}{T} = V du$, in qua T eſt talis functio ipſius t, quae euaneſcat poſito $t = o$, et V functio quaecunque ipſius u, aeque comprehendere hanc integra-

tegralem $t=o$ ac hanc $\int\frac{dt}{T}=\int V\,du$, quae per integrationem elicitur. Plerumque quidem casus $t=o$, si t est simplex quantitas negligi potest, at si t est quantitas composita vt in nostro casu, perperam omittitur. Similem casum supra habuimus §. 300. in aequatione $ds=\frac{-dx\surd b}{\surd(a^2b-bx^2-a^2\int Pdx)}$ vbi obseruauimus aequationem $x=a$ in ea contineri, etiamsi integratio nequidem possit perfici. Nam posito $a-x=t$ erit $-dx=dt$ et $V(a^2b-bx^2-a^2\int Pdx)$ erit functio ipsius t, quae fit $=o$ si fit $t=o$ seu $x=a$; namque $\int Pdx$ ita accipi jubebatur, vt euanescat posito $x=a$. Posita ergo hac ipsius t functione $=T$ erit $ds=\frac{dt\surd b}{T}$, ex qua aequatione ergo tuto concludi licet, satisfacere aequationem $t=o$ seu $x=a$, ideoque problemati illi satisfacere circulum, vt ibi innuimus. (303.) Magis vniuersaliter vero in hac aequatione $V du=\frac{dt}{T}$, si T non euanescit posito $t=o$, comprehendetur ista aequatio $T=o$, ex qua erit $t=$ constanti quantitati, ideoque $dt=o$. Vnde intelligitur $T=o$ contineri in aequatione proposita $V du=\frac{dt}{T}$. Atque hinc si t fuerit quantitas composita v. g. ex u et x statim habetur aequatio integralis, per integrationem vix eruenda.

Scholion 2.

336. Casus hic superest, qui peculiarem resolutionem requirit, quando recta BC supra punctum

ctum A cum BA concurrit, et quando est parallela. Considerabimus autem sequente problemate tantum casum, quo fit BC parallela verticali AB et in data distantia posita; ex quo simili modo casum rectae BC vtcunque inclinatae deducere licebit.

PROPOSITIO 37.
Problema.

337. *Sollicitetnr corpus perpetuo deorsum vi uniformi* g; *inuenire curuas innumerabiles, super quibus corpus ex* A *motum a qniete incipiendo, dato tempore ad rectam verticalem* EC *perueniat.* Tab. IX. Fig. 3.

Solutio.

Sit AMC curua quaecunque quaesitarum, et pro axe sumatur recta verticalis AB, dicatur AP $= x$, PM $=$ AQ $= y$; erit celeritas in M debita altitudini gx, et tempus per AM $= \int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$. Sit porro AND curua, cuius quaevis applicata QN exprimat tempus per AM, et sit QN $= t$ functioni ipsius y, poterit ex curua AND data curua AMC inueniri. Quare si infinitae curuae AND concipiantur, quae omnes in E communem habeant applicatam DE, omnes producent curuas AMC super quibus corpus dato tempore per DE expresso ex A ad CE perueniet. Erit itaque $t = \int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ et posito $dt = pdy$ erit $gp^2xdy^2 = dx^2 +$

$+dy^2$, atque $dx = dy\sqrt{(gp^2x-1)}$. Quae ita integrata, vt posito $x=o$ fiat $y=o$, dabit curuas AMC quaesitas. Sit R functio quaecunque ipsius y et $\int R dy$ ita capiatur vt euanescat posito $y=o$. Tum fiat $\int R dy = A$ posito $y = AE = a$, et existente $DE = \sqrt{b}$ sumatur $t = \frac{\sqrt{b}\int R dy}{A}$, erit $p = \frac{R\sqrt{b}}{A}$ atque $dx = \frac{dy}{A}\sqrt{(gbR^2x - A^2)}$. Quae aequatio, quicquid pro R substituatur, dabit innumeras curuas quaesito satisfacientes. Q. E. I.

Corollarium 1.

338. Casus ergo habetur simplicissimus, si fuerit $R=1$, tum enim aequatio separabilis prodit. Erit vero $t = \frac{y\sqrt{b}}{a}$, ob $A=a$. Hanc ob rem fit $\frac{adx}{\sqrt{(gbx-a^2)}} = dy$, atque $\frac{2a}{gb}\sqrt{(gbx-a^2)} = y$. Qui autem nullius est vtilitatis, ob valorem ipsius y imaginarium.

Corollarium 2.

339. Quia autem $\sqrt{(gbR^2x-A^2)}$ non potest esse quantitas imaginaria, oportet sit $R^2x > \frac{A^2}{gb}$ etiamsi $x=o$. Quare R neque quantitas constans esse potest, neque functio ipsius y, quae euanescat facto $y=o$. Hanc ob rem R talis esse debet functio ipsius y, quae fiat $=\infty$, si ponatur $y=o$. Praeterea tamen eiusmodi esse debet, vt $\int R dy$ non fiat infinitum quod eueniret si esset $R=\frac{1}{y}$ vel $\frac{1}{y^2}$ etc.

Exem-

Exemplum.

340. Ponamus ergo esse $R = \frac{1}{\surd y}$, erit $\int R\,dy = 2\surd y$ et $A = 2\surd a$. Hinc habebitur ista aequatio $2dx\surd ay = dy\surd(gbx - 4ay)$. Quae aequatio quia est homogenea ponatur $x = qy$, erit $2qdy\surd a + 2ydq\surd a = dy\surd gbq - 4a)$ seu $\frac{dq}{\surd(gbq-4a) - 2q\surd a} = \frac{dy}{2y\surd a}$. Posito $\frac{gb}{4a} = n$ et $\surd(nq-1) = r$ erit $\frac{dy}{y} = \frac{-2rdr}{r^2 - nr + 1}$. Quae posterior formula a quadratura circuli pendebit, si $n < 2$. Hoc vero casu erit integrale $ly = lC + \frac{n-\surd(n^2-4)}{\surd(n^2-4)}\,l(2r - n + \surd(n^2-4))$ $\frac{-n-\surd(n^2-4)}{\surd(n^2-4)}\,l(2r-n-\surd(n^2-4))$. Quae ob $r = \frac{\surd(nx-y)}{\surd y}$ abit in hanc $C(2\surd(nx-y) - (n - \surd(n^2-4))\surd y)^{\frac{n-\surd(n^2-4)}{\surd(n^2-4)}} = (2\surd(nx-y) - (n + \surd(n^2-4))\surd y)^{\frac{n+\surd(n^2-4)}{\surd(n^2-4)}}$. Vbi pro C constantem quamcunque accipere licet, quia ipsa aequatio ita est comparata, vt posito $x = o$ fiat $y = o$. Per methodum autem supra traditam (335) ex aequatione differentiali statim habetur haec integralis $2q\surd a = \surd(gbq - 4a)$ seu $2x\surd a = \surd(gbxy - 4ayy)$ vnde oritur $\frac{y}{x} = \frac{gb \pm \surd(g^2b^2 - 64a^2)}{8a}$, quae dat duas lineas rectas, nisi sit $gb < 8a$, quo casu aequatio est imaginaria. In casu quo $n = 2$ erit $\frac{dy}{y} = \frac{-2rdr}{(r-1)^2}$ seu $ly = -2l(r-1) + \frac{2}{r-1}$, vnde fit $ly = -2l(\surd(2x-y) - \surd y) + 2l\surd y + \frac{2\surd y}{\surd(2x-y) - \surd y} + lC$, seu $l(\surd(2x-y) - \surd y) - lC = \frac{\surd y}{\surd(2x-y) - \surd y}$. Vbi etiam pro C quantitatem quamcunque accipere licet. Si $n < 2$, tum constructio curuae partim a logarith-

mis

mis partim a quadratura circuli pendet; fiunt enim ob $\sqrt{(n^2-4)}$ imaginarium logarithmi inuenti imaginarii. Hoc igitur casu expedit constructionem perficere prae expressione analytica.

PROPOSITIO 38.

Problema.

Tabula IX. Fig. 4. 341. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi* g, *dataque sit curua quaecunque* BSC *inuenire omnes curuas* AMC, *super quibus corpus descendendo ex* A *dato tempore ad curuam* BSC *perueniat.*

Solutio.

Sit curuarum quaesitarum quaecunque AMC, per cuius quodvis punctum M ducatur curva MQ similis curuae BSC respectu puncti fixi A. et exprimat curuae AN applicata NQ tempus per arcum AM: exponet ergo applicata BD tempus per totam curuam AMC. Quo facto poterit vicissim ex data curua AND curua AMC inueniri. Quare si infinitae curuae AND concipiantur, quae omnes in B habeant applicatam BD communem, eae generabunt infinitas curuas AMC, super quibus omnibus corpus ex A descendendo dato tempore per BD expresso ad curuam BSC perueniat. Sit nunc $AB = a$, $BD = \sqrt{b}$, et arcui QM abscindatur arcus similis BS ex curua data BSC, erit $AQ:AB = PM:RS = AP:AR = PQ:BR$. Ponatur porro AP

$AP = x$; $PM = y$; $AQ = u$; $QN = t$; $AR = r$; $RS = s$, dabitur ob curuam BSC datam aequatio inter r et s, atque ob curuam AND datam dabitur aequatio inter t et u. At ob ſimilitudinem erit $u : a = y : s = x : r$, vnde erit $y = \frac{us}{a}$, et $x = \frac{ur}{a}$. Celeritas deinde corporis in M debita eſt altitudini gx, ex qua tempus per AM erit $= \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ quod aequale poni debet ipſi t; vnde oritur iſta aequatio $gx\,dt^2 = dx^2 + dy^2$. Quia autem t per u datur ſit $dt = p\,du$, et p ſit functio ipſius u; atque ob $dx = \frac{u\,dr + r\,du}{a}$ et $dy = \frac{u\,ds + s\,du}{a}$, transibit illa aequatio in hanc: $garup^2 du^2 = (udr + rdu)^2 + (uds + sdu)^2$. At quia curua BSC datur, erit s functio ipſius r ſitque $ds = q\,dr$, exiſtente q functione ipſius r quacunque. His ſubſtitutis habebitur aequatio inter u et r iſta $garup^2 du^2 = (udr + rdu)^2 + (uqdr + sdu)^2$. Quae radice quadrata extracta dat $\frac{dr}{du} = \frac{-r - sq + \sqrt{(2rsq - s^2 - r^2q^2 + garup^2(1 + qq))}}{u(1 + qq)}$ Ex qua ſi aequatio inter r et u inueniatur, inde habebitur ſimul aequatio inter x et y pro curua quaeſita. Quod autem ad curuam AND attinet, ſit P functio quaecunque ipſius u, et $\int P\,du$ ita integratum vt euaneſcat facto $u = o$, et fiat $= A$ poſito $u = a$, tum ſumatur $t = \frac{\sqrt{b}\int P\,du}{A}$, pro aequatione curuae AND. Erit ergo $p = \frac{P\sqrt{b}}{A}$, vbi pro P functionem quamvis ipſius u ponere licet. Q.E.I.

Corollarium 1.

342. Si u ponatur $= o$, eo ipſo quoque x et y euaneſcunt, niſi forte fiat r vel s infinitum. Illo igitur caſu in integratione aequationis differentialis inuentae conſtantem quamcunque addere licet, quia non opus eſt vt r datum habeat valorem, ſi u ſit $= o$.

Corollarium 2.

343. Tum igitur ob conſtantem arbitrariam addendam ex vnica curua AND data innumerabiles inueniuntur curuae AMC quaeſito ſatisfacientes.

Corollarium 3.

344. Si curua BSC ita eſt comparata, vt nusquam neque r neque s fieri queat infinite magnum, ſemper vnica curua AND infinitas dabit curuas quaeſitas A M C. Quae non ſolum hanc habebunt proprietatem, vt corpora ſuper iis deſcendentia ſimul ad datam BSC perueniant; ſed quoque ſimul ad quam vis datae ſimilem curuam QM pertingent.

Corollarium 4.

345. Cum igitur in integratione aequationis inuentae conſtantem quamcunque addere liceat,

ceat, ea ita poterit aſſumi vt curua AMC ad datum punctum C curuae datae BSC dirigatur. Hocque modo infinitae curuae AMC poterunt inueniri, quae omnes in dato puncto C conueniant.

Scholion I.

346. Poſuimus curuas QM ſimiles curuae BSC vt curua ipſa in A erecta fiat infinite parua et omnia puncta curuae BSC in A conueniant, et x et y euaneſcant poſito $u=o$. Potuiſſemus autem eodem modo curuas QM vel cum BSC congruentes ponere, vel diſcrepantes lege quacunque. Vt ſit Q functio ipſius u quaecunque euaneſcens poſito $u=o$, abeatque ea in B, facto $u=a$, curua QM ita pendere poterit a curva BSC vt ſit $x=\frac{Qr}{B}$ et $y=\frac{Qs}{B}$: namque facto $u=a$, curua QM tranſibit in ipſam BSC, et in A curua in punctum tranſibit, niſi curua BSC in infinitum progrediatur. At etiam hoc caſu pro Q talis accipi poterit functio, vt etiamſi fiat $r=\infty$, tamen Qr et Qs fiat $=o$ ſi $u=o$. Poſito autem $dQ=Vdu$, habebitur aequatio generalis ſequens $Qdr(1+qq)+Vdu(r+sq)=du\surd(\frac{gb\,BP^2Qr(1+qq)}{A^2}-(Vs-Vrq)^2)$. Quae aequatio latiſſime patet, et ex vnica curua AND infinite infinitas curuas AMC ſuggeret, quin etiam infinitas ſuppeditabit, quae per datum punctum C tranſeunt.

Scholion 2.

347. Quantumuis generalis autem eſt haec aequatio, tamen curua QM eſt ſimilis curuae BSC, quia eſt $x : y = r : s$. Quare adhuc generalior ſolutio poterit exhiberi, in qua curuae QM vtcunque diſſimiles ponuntur curuae BSC eiusmodi tamen vt QM in BSC abeant facto $u = a$. Obtinebitur vero haec ſolutio, ſi R ſumatur functio quaecunque ipſius u euaneſcens facto $u = o$, abeatque R in D poſito $u = a$, ſitque $dR = W du$. Sumatur enim $x = \frac{Qr}{B}$ et $y = \frac{Rb}{D}$; abibit x in r et y in s ſi fiat $u = a$, atque euaneſcente u tam x quam y euaneſcent, quicquid ſit r. Hinc autem ſequens orietur aequatio generaliſſima: $dr(D^2Q^2 + B^2R^2q^2) + du(D^2QVr + B^2RWqs) = \pm du\sqrt{(\frac{gBD^2bP^2Qr(D^2Q^2+B^2R^2q^2)}{A^2} - B^2D^2(RVqr - QWs)^2)}$. In hac aequatione loco dr introduci poteſt ds ponendo $\frac{ds}{q}$ loco dr, vel etiam loco r poterit x introduci ponendo loco r eius valorem $\frac{Bx}{Q}$, et tum habebitur aequatio inter u et x. Notandum autem eſt quia Q euaneſcit facto $u = o$, P talem eſſe debere functionem ipſius u, vt P^2Q poſito $u = o$, vel fiat quantitas finita vel infinite magna, at tamen cauendum eſt ne $\int P du$ debito modo ſumtum fiat infinite magnum.

Corollarium 5.

348. Aequatio in ſolutione inuenta fit ſeparabilis, ſi fuerit $P = \frac{1}{\sqrt{u}}$; erit $A = 2\sqrt{a}$ et $p = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{au}}$.

Habe-

Habebitur enim $\frac{du}{u} = \frac{dr(1+qq)}{-r \cdot sq \pm \sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$ dantur enim s et q per r.

Corollarium 6.

349. Simili modo aequatio Schol. I. separationem admittet, si fuerit $P^2Q = V^2$ seu $P = \frac{V}{\sqrt{Q}}$ Habebitur enim $\frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gBbr(1+qq)}{AA}-(s-rq)^2)}} = \frac{Vdu}{Q} = \frac{dQ}{Q}$, in qua indeterminatae u et r sunt a se inuicem separatae.

Exemplum I.

350. Manente $P^2Q = V^2$ seu $\int Pdu = 2\sqrt{Q}$ ob $Vdu = dQ$, erit facto $u = a$; $A = 2\sqrt{B}$. Vnde fit $\frac{dQ}{Q} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$. Habebit ergo $\int Pdu$ requisitam proprietatem, vt euanescat facto $u = o$; euanescit enim Q. Sit nunc curua BSC circulus super diametro AB descriptus, erit $s = \sqrt{(ar-r^2)}$, et $q = \frac{a-2r}{2\sqrt{(ar-r^2)}}$ atque $1+qq = \frac{a^2}{4(ar-r^2)}$, his valoribus loco s et q substitutis prodibit ista aequatio $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{(-2\sqrt{ar-rr}) \pm r\sqrt{(gbr-4r^2)})\sqrt{(ar-r^2)}}$. Quae aequatio

tio non ſolum indeterminatas a ſe inuicem habet ſeparatas, ſed etiam generaliter per logarithmos integrari poteſt: poteſt enim in aequatione $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{-2ar + 2r^2 \pm r\sqrt{(gb - 4r)(a-r)}}$ membrum irrationale rationale effici. Prodibit autem integralis haec $lQ = \frac{4a}{4a - gb}\, l\, \frac{2\sqrt{(a-r)} \mp \sqrt{(gb - 4r)}}{\sqrt{r}} \pm \frac{\sqrt{gab}}{4a - gb}\, l\, \frac{\sqrt{a(gb - 4r)} + \sqrt{gb(a-r)}}{\sqrt{a(gb - 4r)} - \sqrt{gb(a-r)}} + lC$. Notari hic convenit caſum quo $gb = 4a$ ſeu $\sqrt{b} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, quo tempus per quamvis curuam AMC aequale ponitur tempori deſcenſus per rectam verticalem AB; tum enim erit $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{-2(ar - r^2) \pm 2(ar - r^2)}$. Si igitur ſignum $+$ valeat, erit $dr = o$, er $r =$ conſt. $= c$, vnde fit $s = \sqrt{(ac - c^2)}$ et $x : y = \sqrt{c} : \sqrt{(a - c)}$ ſeu $y\sqrt{c} = x\sqrt{(a - c)}$, quae aequatio omnes dat chordas in hoc ſemicirculo ex A ductas, quemadmodum jam demonſtravimus tempora per ſingulas chordas eſſe inter ſe aequalia. Valeat ſignum $-$ erit $\frac{4dQ}{Q} = \frac{-adr}{ar - rr}$, atque hinc $Q^{-4} = \frac{Cr}{a - r}$, ſe $\frac{r}{a - r} = \frac{C^4}{Q^4}$. Erit ergo $Q = C\sqrt{\sqrt{\frac{a - r}{r}}}$, atque ob $s = \sqrt{(ar - r^2)}$ habebitur $x = \frac{Cr}{B}\sqrt{\sqrt{\frac{a - r}{r}}}$ et $y = \frac{C}{B}\sqrt{\sqrt{r(a - r)^3}}$; eliminata ergo r prodibit iſta aequatio (poſito $\frac{C}{B} = m$) $y^2 + x^2 = ma\sqrt{xy}$. Hae ergo curuae hanc habent proprietatem, vt arcus earum a ſemicirculo abſciſſae abſoluantur deſcendendo eodem tempore, eo ſcilicet tempore, quo ſingulae ſemicirculi chordae percurruntur.

Corollarium 7.

351. Huius autem curuae cuius aequatio est $y^2 + x^2 = ma\sqrt{xy}$ figura est AMFA; habet nimirum diametrum AF cum verticali AP angulum semirectum constituentem et in A nodum. At vero omnes hae curuae sunt inter se similes, et omnes ad omnes circulos accommodari possunt. Tabula IX. Fig. 5.

Corollarium 8.

352. Si ergo in hac curua sumatur quodcunque punctum M et per hoc et A circulus transiens concipiatur centrum habens in verticali AP, corpus arcum AM eodem tempore percurret, quo diametrum circuli, seu quo chordam AM. Quare haec curua hanc habet proprietatem, vt quivis arcus AM a corpore ex A descendente absolvatur eodem tempore, quo subtensa AM.

Corollarium 9.

353. Hoc ergo casu quo $P^2Q = V^2$ perinde est sive sit $Q = u$ sive secus; eadem enim prodit aequatio inter x et y. Vti tam ex exemplo hoc quam ex aequatione intelligitur. Tabula IX. Fig. 4.

Exemplum 2.

354. Manente $P^2Q = V^2$, vt sit $\frac{dQ}{Q} =$

dr

$\frac{dr(1+qq)}{-r-sq\pm\sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$, sit curua BSC circulus centro A radio AB$=a$ descriptus, erit $s=\sqrt{(a^2-r^2)}$ et $q=\frac{-a}{\sqrt{(a^2-r^2)}}$ atque $1+qq=\frac{a^2}{a^2-r^2}$. Quibus substitutis prodibit sequens aequatio, $\frac{dQ}{Q}=\frac{+adr}{\sqrt{(\frac{gbr}{4}-a^2)(a^2-r^2)}}$ vbi gb maius esse debet quam $4a$, quia r non excedere potest a. Hinc statim ille radius innotescit, qui quaesito satisfacit, ponendo $\frac{gbr}{4}=a^2$ seu $r=\frac{4a^2}{gb}$, quo casu erit $s=\frac{a\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}}{gb}$. Vnde erit $x:y=4a:\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}$ et $\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}}{4}$ quae est tangens anguli illius radii, super quo corpus dato tempore $\sqrt{b}$ ad peripheriam peruenit, cum verticali AB. Curuae praeterea algebraicae non dantur, quia formula differentialis non effici potest rationalis.

Exemplum 3.

355. Sumta aequatione generalissima ex §. (347.) et ponatur linea BSC recta horizontalis fiet $r=a$ et $dr=0$. Hanc ob rem loco dr introducatur eius valor $\frac{ds}{q}$, vbi q erit infinite magnum. Deletis ergo terminis, qui prae q euanescunt, proueniet ista aequatio: $ABRds+ABWsdu=\pm Ddu\sqrt{(gBabP^2Q-A^2a^2V^2)}$. Quae aequatio ob $Wdu=dR$ et P, Q, et V data per u integrationem admittit. Erit nempe $\frac{ABRs}{D}=$

C$\pm$

$C \pm \int du \surd (gBabP^2Q - A^2a^2V^2)$. Ex qua aequatione ergo invenitur s. Deinde cum sit $y = \frac{Rs}{D}$, at y euanescere debeat facto $u = o$, debebit esse $C = o$, si quidem integrale $\int du \surd (gBabP^2Q - A^2a^2V^2)$ ita sumatur vt euanescat posito $u = o$. Tum ergo erit $x = \frac{Qs}{B}$ et $y = \frac{\pm 1}{AB} \int du \surd (gBabP^2Q - A^2a^2V^2)$. Quae est aequatio generalis pro omnibus curuis super quibus corpus ex A ad horizontalem datam descendit.

Exemplum 4.

356. Teneatur aequatio generalissima supra inventa (347), et ponatur linea BSC recta verticalis parallela ipsi AB et ad distantiam f ab ea posita erit $s = f$ et $q = o$. Quare habebitur ista aequatio $ADQdr + ADrdQ = \pm du \surd (gBD^2bP^2Qr - A^2B^2f^2W^2)$. Cum autem sit $Qr = Bx$ hoc substituto prodibit $ADdx = \pm du \surd (gD^2bP^2x - A^2f^2W^2)$, Tabula X. Fig. 1.
vnde invento x erit $y = \frac{fR}{D}$. At quia in illa aequatione indeterminatae x et u non sunt a se inuicem separatae, non multum ex ea deriuare licet.

Scholion 3.

357. Ex generali huius problematis solutione, quando vnica curua AND infinitas dat curuas AMC, colligere licet solutionem huius problematis, quo infinitae requiruntur curuae, super

quibus omnibus corpus ex A ad datum punctum peruenit. Quaelibet enim curua AND vnam dabit curuam per datum punctum curuae BSC transeuntem; hocque modo innumerabiles huiusmodi curuae obtinebuntur. Sed cum hoc modo solutio nimis esset difficilis et operosa, aliam genuinam magis afferre conuenit. Modus autem, quo vtemur ita est comparatus, vt vnam curuam jam nosse oporteat, ex qua innumerabiles deducere docebimus. Haec ergo curua quae nota esse debet, ex alterutra traditarum methodo eliciatur vt ex §. 350, vbi curua per quodvis punctum semicieculi transiens inveniri potest dato tempore describenda.

PROPOSITIO 39.
Problema.

Tabula X. Fig. 1. 358. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi vniformi* g, *dataque sit curua* AMC *super qua corpus ex* A *ad punctum datum* C *peruenit, inuenire omnes curuas* ANC *super quibus corpus eodem tempore ad punctum* C *ex* A *descendit.*

Solutio.

Sumta verticali AB pro axe omnium curuarum sit curuae datae AMC abscissa AP $= t$, applicata PM $= u$; sitque curua ANC vna quaesitarum: capiatur in ea arcus AN, qui eodem tempore absol-

absoluatur, quo arcus AM, jungantur puncta M et N recta MN, et construatur curua ALB talis, vt applicata PL aequalis sit rectae MN. Haec ergo curua ALB occurret axi AB in punctis A et B; nam incidente puncto M in A, punctum N quoque in A incidet, et posito M in C punctum N quoque erit in C, quia arcus AMC et ANC eodem tempore percurri ponuntur. Intelligitur autem ex curua ALB inveniri posse curvam ANC; quare si infinitae huiusmodi curuae ALB concipiantur, in A et B incidentes in AB, earum quaeque dabit curuam ANC, hocque modo innumerabiles prodibunt curuae ANC quaesito satisfacientes. Sit nunc $PL = r$, erit r functio quaedam ipsius $AP = t$; curuae autem ANC ponitur abscissa $AQ = x$, et $QN = y$. His positis erit $MN = \sqrt{((x-t)^2 + (u-y)^2)} = r$, ideoque $y = u \pm \sqrt{(r^2 - (x-t)^2)}$. Porro quia tempus per AM aequale ponitur tempori per AN, erit $\int \frac{\sqrt{(dx^2 + du^2)}}{\sqrt{gt}} = \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ seu $x\,dt^2 + x\,du^2 = t\,dx^2 + t\,dy^2$. Est autem $dy = du \pm \frac{(rdr - xdx + tdx + xdt - tdt)}{\sqrt{(r^2 - (x-t)^2)}}$. Sit $du = p\,dt$ et $dr = q\,dt$, erunt r, p, et q functiones ipsius t: ponatur porro breuitatis gratia $x - t = z$ seu $x = t + z$, erit $dy = p\,dt \pm \frac{qrdt \mp zdz}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}$, et $dy^2 + dx^2 = p^2 dt^2 + dt^2 + 2\,dtdz + dz^2 \pm \frac{2pqrdt^2 \mp 2pzdtdz}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} + \frac{q^2r^2dt^2 - 2qrzdtdz + z^2dz^2}{r^2 - z^2}$, Hinc obtinetur ista aequatio $\frac{tr^2dz^2}{r^2 - z^2} = \frac{2tqrzdtdz - tq^2r^2dt^2}{r^2 - z^2} \pm \frac{2pztdtdz \mp 2pqtrdt^2}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} - 2\,tdtdz + zdt^2 + zp^2\,dt^2$ ex qua

z ex t determinetur, habebitur aequatio inter x et y. Quo autem appareat cuiusmodi functio ipsius t loco r debeat accipi, vt r euanescat, tam posito $t = o$ quam $t = AB = a$, sit P functio quaecunque ipsius t euanescens posito $t = o$, et Q sit etiam talis functio euanescens posito $t = o$, abeat vero Q in A si fiat $t = a$; poterit ergo poni $r = P(A - Q)$. Hocque valore substituto quicquid loco P et Q substituatur, habebitur aequatio pro curuis quaesitis. Q. E. I.

Scholion I.

359. Ex hac quidem aequatione maxime intricata parum concludi potest ad propositum, etiamsi haec methodus genuina esse videatur. Saepe autem aequatio inuenta ad absurdum deducere debet, vt si curua data AMC fuerit linea breuissimi descensus, quo casu non dari potest alia curua, super qua descensus fiat eodem tempore. Ad nostrum ergo institutum conueniens videtur de lineis celerrimi descensus tractare, eaque problemata resoluere, in quibus inter omnes curuas vel eiusdem longitudinis vel aliam proprietatem communem habentes ea quaeritur, quae minimo tempore absoluatur. Atque etiam quemadmodum inter omnes lineas, super quibus descensus fit eodem tempore, ea sit inuenienda, quae data quapiam proprietate sit praedita. Etiamsi enim difficillimum sit omnes lineas idem descen-

descensus tempus habentes exhibere, tamen ex iis quaelibet potest inueniri ex proprietate, quam prae reliquis omnibus possidet. Requiritur autem ad hanc rem pertractandam methodus isoperimetricorum, quam vt passim expositam hic non explicabimus.

Scholion 2.

360. Huius autem problematis solutio per (348) sequenti modo habetur: erat ibi $\frac{du}{u} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$. Sit punctum C ad quod omnes curuae conuenire debent, ponaturque AE$=f$ et EC$=h$, si ergo fit $r=f$, fieri debet $s=h$. Ad hoc sit S functio quaecunque ipsius r, quae abeat in F posito $r=f$, quo facto ponatur $s=\frac{Sh}{F}$. Substituatur hic valor in superiore aequatione, eaque ita integretur vt posito $u=a$ fiat $r=f$. Deinde ex ea aequatione prodibit aequatio inter coordinatas curuae quaesitae AMC nempe AP$=x$ et PM$=y$, ex eo quod est $x=\frac{ur}{a}$ et $y=\frac{us}{a}$. Atque arbitrarius valor ipsius S dabit infinitas curuas AMC puncta A et C jungentes, et super quibus corpus descendens tempore dato $=\sqrt{b}$ perueniet ex A ad C. Sit autem $dS = Tdr$, erit $q = \frac{hT}{F}$, atque $\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2+h^2T^2)}{-F^2r-h^2ST \pm \sqrt{(\frac{gF^2br}{4}(F^2+h^2T^2)-(FhS-FhTr)^2)}}$ seu Tabula IX. Fig. 4.

$\frac{du}{u}=$

$$\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2 + b^2T^2)}{-F^4 r - b^2 ST \pm F\sqrt{\left(\frac{gbr}{u}(F^2 + b^2T^2) - (bS - bTr)^2\right)}}$$

Quae aequatio ita integretur, vt posito $u = a$ fiat $r = f$; quo facto ponatur $x = \frac{ur}{a}$ et $y = \frac{bSu}{Fa}$, atque habebitur aequatio inter x et y pro infinitis curuis AMC quaesito satisfacientibus.

PROPOSITIO 40.

Problema.

Tabula X. Fig. 2. 361. *Inuenire legem generalem, secundum quam curua disposita esse debet, ut corpus super ea descendens citissime perueniat ad quoduis curuae punctum.*

Solutio.

Sit AMC curua huiusmodi, super qua corpus ex A ad C tempore breuiore perueniat, quam super quavis alia curua per puncta A et C transeunte. Sumtis ergo in ea duobus quibusque M et μ, curua inter ea intercepta ita debet esse comparata, vt corpus in motu suo per AMC, arcum inter M et μ interceptum breuiore tempore absoluat quam quemuis alium, si esset interceptus. Sint nunc puncta M et μ proxima iuncta duobus elementis $Mm\mu$, et debebit tempus per $Mm\mu$ esse minimum; seu per regulas methodi maximorum et minimorum aequali tempori per elementa proxima $Mn\mu$. Ducantur ad

axem

axem AP applicatae MP, mp, $\mu\pi$, sumtisque elementis Pp, $p\pi$ inter se aequalibus, seu quoque $MG = mH$, et pm si opus est ad n producta, erit mn infinite paruum respectu elementorum Mm et $m\mu$. Debebit ergo esse $t.\,Mm + t.\,m\mu = t.\,Mn + t.\,n\mu$. Sit celeritas quam corpus in M habet, debita altitudini v, qua ergo tam elementum Mm, quam Mn percurret. Celeritas autem quam in m habebit debita sit altitudini $v + du$, et celeritas, quam in n habebit debita sit altitudini $v + du + ddw$; illa autem celeritate percurret elementum $m\mu$, hac vero elementum $n\mu$. Hinc ergo habebitur ista aequatio, $\frac{Mm}{\sqrt{v}} + \frac{m\mu}{\sqrt{(v+du)}} = \frac{Mn}{\sqrt{v}} + \frac{n\mu}{\sqrt{(v+du+ddw)}}$, est vero $\frac{1}{\sqrt{(v+du+ddw)}} = \frac{1}{\sqrt{(v+du)}} - \frac{ddw}{2(v+du)\sqrt{(v+du)}}$, vnde ductis centris M et μ arculis mg et nh, erit $\frac{ng}{\sqrt{v}} = \frac{mh}{\sqrt{(v+du)}} + \frac{n\mu.\,ddw}{2(v+du)\sqrt{(v+du)}}$. Porro quia est $\frac{1}{\sqrt{(v+du)}} = \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{du}{2v\sqrt{v}}$ et $\frac{1}{(v+du)\sqrt{(v+du)}} = \frac{1}{v\sqrt{v}} - \frac{3du}{2v^2\sqrt{v}}$. Quibus, neglectis negligendis, substitutis oritur $2v(mh - ng) = mh.\,du - n\mu.\,ddw = mh.\,du - Mm.\,ddw$. Est vero propter triangula similia nmg, mMG et nmh, μmH vt sequitur $ng : mn = mG : mM$, seu $ng = \frac{mG.\,mn}{Mm}$ et $mh : mn = \mu H : m\mu$, seu $mh = \frac{\mu H.\,mn}{m\mu}$. Quamobrem erit $2v\left(\frac{mH}{m\mu} - \frac{mG}{Mm}\right) = \frac{mG.\,du}{Mm} - \frac{Mm.\,ddw.}{mn} = 2v\,\text{diff.}\,\frac{mG}{Mm}$. Quae aequatio est homogenea et determinat naturam curuae AMC brachystochronae vocatae

catae, super qua corpus tempore breuissimo ex A ad C peruenit. Q. E. I.

Corollarium 1.

362. Si ergo dicatur $MG = mH = dx$, $mG = dy$, et $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$; erit $H\mu = dy + ddy$ et $m\mu = ds + dds$. His substitutis habebitur $2vd\frac{dy}{ds} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsddw}{mn}$. In qua si ex potentiis sollicitantibus determinentur v, du, et ddw, habebitur aequatio pro curua brachystochrona. At semper ddw ita inuoluet mn, vt mn ex calculo excedat.

Corollarium 2.

363. Sit radius osculi curuae $Mm\mu = r$ isque in plagam auersam ab axe AP directus erit $r = \frac{ds^3}{dxddy}$, at est $d.\frac{dy}{ds} = \frac{dsddy - dydds}{ds^2} = \frac{dx^2ddy}{ds^3}$. Quare erit $d.\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{r}$, hinc prodibit ista aequatio $\frac{2vdx}{r} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsddw}{mn}$. Ubi notandum est esse $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam, qua curua in M secundum normalem ad curuam premitur.

Corollarium 3.

364. Si ex potentiis sollicitantibus fluat $dv = Pdx + Qdy + Rds$; erit $du = Pdx + Qdy + Rds$ et $ddw = Q.mn + R.ng$, quia puncto m in n translato crescit dy particula mn et ds particula

la ng. Quia autem est $ng = \frac{dy.mn}{ds}$, erit $\frac{ddw}{mn} = -Q - \frac{Rdy}{ds}$, quibus substitutis habebitur ista aequatio $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$.

Scholion I.

365. Ex solutione intelligitur formulam inventam latissime patere, atque ad potentias sollicitantes quascunque extendi, etiam resistentia non excepta. Quaecunque enim fuerint potentiae sollicitantes, determinari potest tam du quam ddw, qui valores substituti dabunt aequationem pro brachystochrona quaesita. Attamen haec tantum locum habent, si potentiarum directiones sint in eodem plano: curua enim inuenta est in eodem plano sita. Nihilo tamen minus si potentiae non fuerint in eodem plano, curua brachystochrona in dato plano ope formulae huius poterit inueniri. In quolibet enim plano dato peculiaris erit curua brachystochrona quaecunque fuerint potentiae sollicitantes. Alia vero quaestio est, si quaeratur linea brachystochrona inter omnes omnino lineas data duo puncta jungentes, etiam non in vno plano sitas. Quoties vero potentiarum sollicitantium directiones in eodem plano sunt positae, dubium non est lineam brachystochronam in eodem positam esse plano. Nam si curuae non essent in eodem plano potentiae oblique agerent, et propterea corpus non tantum, quantum fieri potest, accelerarent. Ex hac

igitur ſolutione tam linea abſolute brachyſtochrona, ſi potentiarum ſollicitantium directiones ſunt in eodem plano, inuenitur, quam linea, quae in dato plano eſt brachyſtochrona, quaecunque fuerint potentiae ſollicitantes.

Scholion 2.

366. Quaeſtionem hanc de linea brachyſtochrona ſeu celerrimi deſcenſus primus produxit Cel. Ioh. Bernoulli, atque plures eius ſolutiones extant tam in Act. Lipſ. quam Transactionibus Angl. et Comm. Acad. Pariſ. et alibi vbi hoc problema tam in hypotheſi potentiae ſollicitantis deorſum directae, quam pro viribus centripetis ſolutum dederunt. Nemo autem problema fundamentale, quale hic dedimus, tam late patens praemiſit, vt ad potentias quascunque et reſiſtentiam etiam extendi poſſet. Sumſerunt enim omnes $ddw = o$, quod ſemper perperam fit, niſi directio potentiae ſit MG vel mH. Et hanc ob rem Cel. Hermannus ceſpitauit, dum tali propoſitione ad brachyſtochronas in medio reſiſtente inueniendas eſt vſus in Comm. Acad. Petrop. A. 1727; quasque correctas dedi in iisdem Comm. A. 1734. ex hoc ipſo problemate.

PROPOSITIO 41.

Problema.

Tabula X. Fig. 2. 367. *Si corpus perpetuo deorſum trahatur vi qua-*

quacunque; inuenire lineam brachystochronam AMC *super qua corpus citissime ex* A *ad* C *descendit.*

Solutio.

Posita AP$=x$; PM$=y$; et arcu AM$=s$, sit vis quae corpus in M deorsum vrget $=$P; erit $v=\int Pdx$ hoc integrali ita accepto vt euanescat posito $x=o$, si quidem corpus motum in A ex quiete inchoare ponitur: atque $dv=Pdx$. Erit ergo $du=Pdx=dv$ et $ddw=o$, quia dx inuariatum manet, eunte m in n. Quocirca habebitur ista aequatio $2v.\,d.\frac{dy}{ds}=\frac{dydv}{ds}$, cuius integralis est $l\frac{v}{a}=2\,l\frac{dy}{ds}$ seu $vds^2=ady^2$, hincque $dx^2\int Pdx$ $=aay^2-dy^2\int Pdx$. Quamobrem pro linea brachystochrona quaesita habebitur ista aequatio dy $=\frac{dx\sqrt{\int Pdx}}{\sqrt{(a-\int Pdx)}}$, in qua indeterminatae x et y sunt a se inuicem separatae. Curuae autem longitudo habetur ex hac aequatione $ds=\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-\int Pdx)}}$. Q.E.I.

Corollarium I.

368. In A igitur vbi celeritas corporis euanescit seu fit $\int Pdx=o$, erit $dy=o$ seu tangens curuae in A erit verticalis incidens in AP. At vbi fit $\int Pdx$ $=a$, ibi tangens curuae erit horizontalis.

Corollarium 2.

369. Quia $ddw=o$, et $du=Pdx$, erit $\frac{2v}{r}=\frac{Pdy}{ds}$. (363) Est vero $\frac{Pdy}{ds}$ vis normalis, qua cur-

va in M ſecundum normalem verſus axem AP ductam premitur. Conſequenter vis normalis eſt aequalis vi centriſugae et in eandem plagam tendens. Quocirca linea brachyſtochrona hanc habet proprietatem, vt tota preſſio, qua curua premitur, ſit duplo maior quamvis normalis ſola. In ſequentibus vero demonſtrabimus hanc proprietatem in omnibus lineis brachyſtochronis ſive in vacuo ſiue in medio reſiſtente locum habere.

Corollarium 3.

370. Propter arbitrariam a dantur infinitae curuae brachyſtochronae omnes in A initium habentes. Atque hac litera a effici poteſt, vt curva ex A per datum punctum C transeat, quae erit linea inter A et C, ſuper qua tempus eſt minimum.

Corollarium 4.

371. Quia curua AMC alicubi habet tangen-
Tabula X. Fig. 3. tem horizontalem, ſit ea BC et in C ſumatur alius axis verticalis CQ. Sit $CQ = X$, $QM = Y$ et $CM = S$, erit $dX = -dx$, $dY = -dy$ et $dS = -ds$; atque $\int P dx = a - \int P dX$ integrali $\int P dX$ ita accepto vt evaneſcat poſito $X = o$. Ad hunc ergo axem CQ ſi curua referatur, habebitur iſta aequatio $dY = \frac{dX\sqrt{(a - \int P dX)}}{\sqrt{\int P dX}}$ ſeu $dS = \frac{dX\sqrt{a}}{\sqrt{\int P dX}}$.

Corollarium 5.

372. Hae ergo omnes curuae ad vtramque partem axis CQ duos arcus habent ſimiles et aequa-

les.

les. Simili modo ad vtramque partem axis AB curua aequaliter eſt diſpoſita. Quamobrem huiusmodi curuae infinitas diametros habebunt inter ſe parallelas, et ad diſtantiam BC poſitas; niſi forte potentia ſollicitans ita accipiatur, vt ſupra A ſit negatiua, quo caſu curua CMA ſurſum tendere poterit et partem concavam deorſum convertere.

Exemplum I.

373. Sit potentia ſollicitans vniformis ſeu $P = g$, erit $\int P dx = gx$; vnde loco a poſito gb pro brachyſtochrona in hac potentiae ſollicitantis hypotheſi habebitur iſta aequatio $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}}$ ſeu $ds = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}}$. At ſi aequatio ad axem CQ referatur erit $dY = \frac{dX\sqrt{(b-X)}}{\sqrt{X}}$ et $dS = \frac{dX\sqrt{b}}{\sqrt{X}}$ cuius integralis eſt $S = 2\sqrt{bX}$. Ex qua aequatione patet curuam eſſe cycloidem ſuper baſi horizontali a circulo diametri b deſcriptam et deorſum conuerſam: quemadmodum hoc a Cel. Ioh. Bernoulli aliisque eximiis Geometris jam pridem eſt inuentum. Si itaque dentur duo quaecunque puncta A et M, linea ſuper qua corpus ex A citiſſime ad M deſcendit, inuenitur ſi deſcribatur cyclois cuſpidem in A, et baſem horizontalem habens, atque per punctum M tranſiens; id quod ex eo, quod omnes cycloides ſunt curuae ſimiles, ex vnica deſcripta cycloide facile efficitur. Tempus autem, quo corpus ex A ad M pertingit, quodque eſt minimum, erit $= \int \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{g(bx-x^2)}}$;

et curuae AM longitudo erit $=\int\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}}=2b-2\sqrt{b}$ $(b-x)$. Cum autem sit $PM=y=\int\frac{xdx}{\sqrt{(bx-xx)}}$; erit tempus per AM $=\frac{2y+2\sqrt{(bx-xx)}}{\sqrt{gb}}=$ arcui in circulo diametri b cuius sinus versus est $=x$ ducto in $\frac{2}{\sqrt{gb}}$.

Exemplum 2.

374. Si potentia sollicitans P fuerit vt potestas quaecunque abscissae CQ, nempe $P=\frac{X^n}{f^n}$ erit $\int PdX=\frac{X^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Consequenter curua brachystochrona AMC exprimetur hac aequatione $dY=\frac{dX\sqrt{(n+1)af^n-X^{n+1})}}{X^{\frac{n+1}{2}}}$ seu $dS=$ $\frac{dX\sqrt{(n+1)af^n}}{X^{\frac{n+1}{2}}}$, ita vt sit $S=\frac{2X^{\frac{1-n}{2}}}{1-n}\sqrt{(n+1)af^n}$. Quare si fuerit vel $n=1$ vel $n>1$ curua CM erit infinite magna, seu ipsa recta BC. Cuspis autem curuae A seu locus in quo motus incipit habetur sumendo $CQ=BA=\sqrt[n+1]{(n+1)af^n}$. Curuae prodibunt algebraicae si fuerit $n=\frac{1-2m}{1+2m}$ denotante m numerum integrum affirmatiuum quemcunque. His igitur casibus erit n numerus negatiuus, vnitate minor, ita tamen vt $n+1$ sit numerus affirmatiuus. Sit $m=1$, erit $n=-\frac{1}{3}$. Quare fiet dY $=\frac{dX}{X^{\frac{1}{3}}}$

$= \frac{dX}{X^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(\tfrac{2}{3} a f^{-\frac{1}{3}} - X^{\frac{2}{3}})}$, cuius integralis eſt $Y = \frac{2a\sqrt{2a}}{3\sqrt{3}f} - (\tfrac{2}{3} a f^{-\frac{1}{3}} - X^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}})$. Quae aequatio ab irrationalitate liberata fit ordinis ſexti. Simili modo aliae curuae algebraicae inuenientur, quae in certis hypotheſibus ſunt brachyſtochronae.

Scholion I.

375. Ex data problematis ſolutione ſequitur ſimul ſolutio problematis inuerſi, quo quaeritur potentia ſollicitans deorſum directa, talis vt data curua ſit brachyſtochrona. Debet autem haec curua in puncto infimo C habere tangentem horizontalem, et alicubi in A vbi eſt motus initium, tangentem verticalem. Vt ſi fuerit aequatio pro curua data haec $dY = R\,dX$, erit $R^2 \int P\,dX = a - \int P\,dX$ atque $\int P\,dX = \frac{a}{R^2+1}$. Vnde inuenitur $P = \frac{-2aR\,dR}{(R^2+1)^2 dX} = \frac{-2a\,dX\,dY\,ddY}{ds^4}$. Si ergo radius oſculi in M ponatur r, propter $r = \frac{ds^3}{-dX\,ddY}$ habebitur $P = \frac{2a\,dY}{r\,ds}$. Quare problema hac vnica ſoluetur analogia: vt radius oſculi curuae in M ad lineam datam; ita ſinus anguli, quem tangens curuae in M cum verticali facit, ad potentiam ſollicitantem, quae quaeritur. Altitudo vero debita celeritati, quam corpus in M habet, eſt $a - \int P\,dX = \frac{aR^2}{R^2+1} = \frac{a\,dY^2}{ds^2}$, ex quo ſequitur celeritatem corporis eſſe illi ipſi ſinui anguli, quem tangens curuae cum verti-

verticali conſtituit, proportionalem. Vt ſi ſit curva CMA circulus radio c deſcriptus; erit $r = c$ et $dY = \frac{cdX - XdX}{\sqrt{(2cX - XX)}}$ atque $dS = \frac{cdX}{\sqrt{(2cX - XX)}}$, ex quibus fit $P = \frac{2a(c - X)}{c^2} = \frac{2a.AP}{cc}$. Vis ergo corpus deorſum trahens proportionalis eſſe debet abſciſſae AP, cui etiam celeritas eſt proportionalis.

Scholion 2.

376. Inuenta linea brachyſtochrona pro hypotheſi potentiae ſollicitantis deorſum tendentis, ordo requireret, vt lineas brachyſtochronas in hypotheſi virium centripetarum determinaremus. At propoſitio fundamentalis (361.) ita eſt comparata, vt elementa curuae Mm et $m\mu$ ad axem AP et ordinatas orthogonales MP, mp referantur, quod ad caſum virium centripetarum non commode quadrat. Videtur quidem elementa MG et mH vt conuergentia ad centrum virium conſiderari poſſe; ſed hic ipſe error, qui ex hoc oritur, quod elementa MG et mH non eſſent parallela, vt propoſitio fundamentalis requirit, perperam negligitur. Perſpicuum hoc reddi poteſt determinando radio oſculi, qui ſi MG et mH fuerint inter ſe parallela eſt $= MG : d. \frac{mG}{Mm}$, quae autem expreſſio non locum habet, ſi MG et mH ad centrum virium convergunt. Quare antequam ad brachyſtochronas in hypotheſi virium centripetarum accedamus, ex propoſitione fundamentali

Tabula X. Fig. 2.

tali generalem deriuabimus proprietatem cuicunque potentiarum sollicitantium hypothesi accommodatam. Ex quibus perspicietur Cel. Hermannum in Phoronomia aliosque, qui brachystochronas pro viribus centripetis dederunt, esse deceptos, dum vsi sunt principio cum veritate non consentaneo, vt mox indicabitur.

PROPOSITIO 42.

Theorema.

377. *Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, ea linea erit brachystochrona, quam corpus super ea motum premit vi duplo maiore, quam est vel sola vis centrifuga, vel sola vis normalis.* Tabula X. Fig. 2.

Demonstratio.

Quaecunque et quotcunque fuerint potentiae sollicitantes, eae omnes in binas resolui possunt, quarum altera trahat secundum MG altera secundum MP. Sit illa secundum MG trahens $= P$ et quae secundum MP trahit $= Q$, et dicantur AP $= x$, PM$= y$, et AM$= s$; itemque altitudo celeritati in M debita $= v$. Erit ex his duabus viribus vis tangentialis $= \frac{Pdx - Qdy}{ds}$, et vis normalis $= \frac{Pdy + Qdx}{ds}$. Hanc ob rem erit $dv = Pdx - Qdy$. Cum hac expressione comparetur, quod supra (364.) est allatum, vbi posuimus $dv = Pdx +$

$Qdy + Rds$, erit Q negatiuum et $R = o$. Sequitur ergo exinde fore $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy + Qdx}{ds}$. At est $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga, qua curua in M premitur et $\frac{Pdy + Qdx}{ds}$ est vis normalis. Quare cum vis centrifuga sit aequalis vi normali, tota pressio, quam curua sustinet duplo maior est quam vel sola vis centrifuga, vel sola vis normalis. Q. E. I.

Scholion I.

378. In sequente capite demonstrabimus hanc eandem propositionem locum etiam habere in medio quocunque resistente; id quod quidem eadem opera hic demonstrare potuissemus: sed quia resistentiae sequens caput est destinatum, eo potius hoc theorema transferre visum est.

Corollarium I.

379. Ex hac igitur propositione facile erit in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi brachystochronas determinare. Hocque ipsum jam ex aliqua parte supra praestitimus, vbi curuas determinauimus, in quibus pressio totalis datam habeat rationem ad vim centrifugam.

Corollarium 2.

380. Cum sit $dv = Pdx - Qdy$, erit $v = \int Pdx - \int Qdy$ his integralibus ita accipiendis, vt euanescant

nescant factis x et $y=o$, si quidem motus in A ex quiete incipere debet.

Corollarium 3.

381. Si ergo hic pro v inuentus valor substituatur habebitur aequatio pro curua brachystochrona haec $\frac{2\int Pdx-2\int Qdy}{r}=\frac{Pdy+Qdx}{ds}$. Est vero $r=\frac{ds^3}{dxddy}$ (363.) sumto dx pro constante, quia in partem oppositam axi AP cadere r ponitur; vnde habetur haec aequatio: $\frac{2dxddy}{ds^2}(\int Pdx-\int Qdy)=Pdy+Qdx$.

Corollarium 4.

382. Quia haec aequatio est differentialis secundi gradus atque ideo duplicem integrationem requirit, altera integratione constans quaevis poterit adiici, altera effici debet, vt facto $x=o$ fiat quoque $y=o$. Infinitae ergo prodeunt curuae brachystochronae pro eadem potentiarum sollicitantium hypothesi. Atque constante arbitraria effici poterit, vt curua per datum punctum transeat.

Corollarium 5.

383. Tempus, quo corpus ex A ad M peruenit, est $=\int\frac{ds}{\sqrt{(\int Pdx-Qdy)}}=\int\sqrt{\frac{2dxddy}{Pdy+Qdx}}$, quae quidem expressio prius ex aequatione curuae est in-

 vesti-

vestiganda; minimum vero hoc tempus esse debet inter omnia alia tempora motuum per curvas omnes puncta A et M jungentes.

Scholion 2.

384. Quemadmodum porro in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi eae curuae libere describuntur, in quibus vis centrifuga aequalis est et contraria vi normali; ita eae curuae erunt brachystochronae, in quibus vis normalis quoque aequalis est vi centrifugae, sed in eandem plagam tendens. Atque quemadmodum illa proprietas communis est omnium curuarum libere descriptarum etiam in medio resistente, ita haec quoque proprietas ad omnes lineas brachystochronas in medio resistente extenditur.

PROPOSITIO 45.

Problema.

Tabula X. Fig. 4. 385. *Si corpus vi quacunque perpetuo trahatur ad centrum virium* C: *inuenire lineam brachystochronam* AM, *super qua corpus ex* A *citissime ad* M *pertingat.*

Solutio.

A puncto A, in quo motus initium ponitur, ad centrum virium C ducatur recta AC, item

MC

MC, et in tangentem MT ex C perpendiculum CT. Ponantur $AC = a$; $CM = y$; $CT = p$; vis centripeta in $M = P$ et celeritas in M debita altitudini v. His positis erit $dv = -Pdy$ et $v = -\int Pdy$ hoc integrali ita accepto vt euanescat posito $y = a$. Vis normalis autem erit $= \frac{Pp}{y}$; cui aequalis esse debet vis centrifuga et in eandem plagam tendens; tum enim proueniet curua brachystochrona, vt Prop. praec. demonstrauimus. Curua igitur debebit esse conuexa versus centrum C et radius osculi in partem auersam a centro C cadet. Quare cum haec expressio $\frac{ydy}{dp}$ exhibeat radium osculi, quatenus versus centrum cadit, erit vera radii osculi expressio in nostro casu $\frac{-ydy}{dp}$. Vis igitur centrifuga erit $= \frac{-2vdp}{ydy} = \frac{2dp\int Pdy}{ydy}$, cui aequalis poni debet vis normalis $\frac{Pp}{y}$; ex quo oritur haec aequatio $\frac{2dp}{p} = \frac{Pdy}{\int Pdy}$ cuius integralis est $\frac{pp}{b} = -\int Pdy$, seu $p = \sqrt{-b\int Pdy}$; quae est aequatio pro curua quaesita inter y et p. At si centro C ducatur arcus MP hicque dicatur $\frac{ys}{a}$, erit $nm = \frac{yds}{a}$ et $pp = \frac{y^4 ds^2}{a^2 dy^2 + y^2 ds^2}$. Hinc fiet $ds = \frac{-apdy}{y\sqrt{(y^2 - p^2)}}$, atque valore ipsius p ex superiore aequatione substituto habebitur $ds = \frac{-ady\sqrt{-b\int Pdy}}{y\sqrt{(y^2 + b\int Pdy)}}$, quae est aequatio inter y et arcum circuli s radio a descriptum, qui metitur angulum ACM, ex qua fluit constructio curuae quaesitae. Q. E. I.

Corollarium 1.

386. Quia altitudo celeritati debita est $v = -\int Pdy = \frac{pp}{b}$; celeritas corporis in quovis loco erit vt perpendiculum ex C in tangentem demissum: simili modo, quo in motu libero celeritas est huic perpendiculo reciproce proportionalis.

Corollarium 2.

387. Sit radius osculi in $M = r$, erit $\frac{2v}{r} = \frac{Pp}{y}$ ex conditione problematis. Hinc ergo habebitur $r = \frac{2yv}{Pp} = \frac{2py}{bP}$. Quia autem in initio curuae in A est $p = o$ seu AC tangens curuae, erit radius osculi quoque in $A = o$, nisi forte simul P vis centripeta in A euanescat.

Corollarium 3.

388. Maximam corpus habebit celeritatem in loco vbi $dp = o$, ibi autem ex aequatione pro curua fit $dy = o$. Quare in eo loco corpus celerrime mouetur vbi recta CM in curuam est normalis. Curua ergo vltra hoc punctum a centro C recedit.

Scholion 1.

389. Celeritas ergo corporis in singulis brachystochronae punctis non est proportionalis sinui anguli, quem tangens curuae cum directione vis centripetae constituit; huius enim anguli TMC

sinus

ſinus eſt $\frac{p}{y}$, celeritas vero ipſi p inuenta eſt proportionalis. Haec quidem proprietas locum habet, ſi centrum virium infinite diſtat et directiones vis ſollicitantis ſunt inter ſe parallelae, vt ex Prop. 41. intelligitur, vbi celeritas erat vt $\frac{dy}{ds}$ i. e. vt ſinus ang. quem elementum curuae cum directione potentiae ſollicitantis conſtituit. Hanc autem proprietatem Cel. Hermannus in Comm. Acad. Petrop. A. 1727. omnibus brachyſtochronis tam in vacuo, quam in medio reſiſtente communem eſſe eſt arbitratus. Atque hanc ob rem non ſolum eae lineae, quas in medio reſiſtente pro brachyſtochronis dedit, tales non ſunt, ſed etiam quas in vacuo pro viribus centripetis invenit. Hoc autem caſu inuenit hanc aequationem $\frac{-\int P dy}{b} = \frac{p^2}{y^2}$ a noſtra atque vera aequatione prorſus diſcrepantem.

Exemplum I.

890. Sit vis centripeta ipſis diſtantiis corporis a centro proportionalis, fiet $P = \frac{y}{f}$. Quare erit $\int P dy = \frac{y^2 - a^2}{2f}$ atque $v = \frac{a^2 - y^2}{2f} = \frac{p^2}{b}$. Quae eſt aequatio pro brachyſtochrona in hac vis centripetae hypotheſi, inter p et y. Altera vero aequatio inter arcum s radio a deſcriptum, qui eſt menſura anguli ACM, et y eſt haec $ds = \frac{-ady\sqrt{b(a^2 - y^2)}}{y\sqrt{(2fy^2 + by^2 - a^2 b)}}$. Huius curuae punctum infimum ſeu centro proximum habetur ponendo vel $dy = o$ vel

vel $p = y$, tum autem erit $y = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{(b+2f)}}$, haec ergo est minima curuae a centro C distantia. Radius osculi huius curuae in quovis puncto est $= \frac{2py}{bP} = \sqrt{\frac{2f(a^2-y^2)}{b}}$. In puncto ergo centro proximo radius osculi est maximus quippe $= \frac{2af}{\sqrt{b(b+2f)}}$. Ponatur tangens anguli ACM $= t$ posito sinu toto $= 1$, erit $\frac{ds}{a} = \frac{dt}{1+tt}$; ponatur porro $\frac{\sqrt{b(a^2-y^2)}}{\sqrt{(2fy^2+by^2-a^2b)}} = q$, habebitur ista aequatio $\frac{dt}{1+tt} = \frac{dq}{1+qq} - \frac{dq}{1+\frac{(b+2f)}{b}qq}$. Ex quo intelligitur curuam toties esse algebraicam quoties est $\frac{b}{b+2f}$ numerus quadratus. Longitudo curuae AM est porro generaliter $= \int \frac{-ydy}{\sqrt{(y^2+b\int Pdy)}}$; hoc ergo casu erit $AM = \int \frac{-ydy\sqrt{2f}}{\sqrt{(2fy^2+by^2-a^2b)}} = \frac{2af - \sqrt{2f(2fyy+byy-a^2b)}}{2f+b}$. Ex qua aequatione sequitur curuam brachystochronam AM esse hypocycloidem, quae generatur rotatione circuli cuius diameter est $= \frac{a\sqrt{(b+2f)} - a\sqrt{b}}{\sqrt{(b+2f)}}$ super concava parte peripheriae AE centro C radio AC descriptae. Cum igitur b pro lubitu accipere liceat, apparet omnes hypocycloides super peripheria AE natas esse brachystochronas.

Exemplum 2.

391. Sit vis centripeta reciproce proportionalis quadratis distantiarum, vt sit $P = \frac{f^2}{y^2}$, vnde erit $\int Pdy = \frac{-f^2}{y} + \frac{f^2}{a} = \frac{f^2(y-a)}{ay}$, atque $v = \frac{f^2(a-y)}{ay} = \frac{p^2}{b}$.

$\frac{p^2}{b}$, quae eſt aequatio pro brachyſtochrona in hac vis centripetae hypotheſi. Altera vero aequatio inter arcum s et y erit iſta $ds = \frac{-ady\sqrt{bf^2(a-y)}}{y\sqrt{(ay^3+bf^2y-abf^2)}}$. Huius ergo curuae punctum infimum poſito $dy = o$, determinabitur ope huius aequationis cubicae $ay^3 + bf^2y = abf^2$. Ceterum iſta aequatio inter s et y ſufficit ad curuam quaeſitam conſtruendam.

Scholion 2.

392. Ex his igitur, quae in hac et praecedentibus propoſitionibus allata ſunt, intelligitur quomodo in quacunque potentiarum ſollicitantium hypotheſi ea linea ſit inuenienda, ſuper qua corpus ex dato puncto ad datum punctum citiſſime perueniat. Nunc ergo etiam determinari oportet eam lineam, ſuper qua corpus a dato puncto citiſſime non ad datum punctum ſed ad datam lineam perueniat, quae ſane curua vna erit ex infinitis brachyſtochronis: at quaenam ea ſit in ſequente Propoſitione declarabimus.

PROPOSITIO 44.

Theorema.

393. *Corpus a dato puncto* A *ad quamuis lineam datam* BM *celerrime peruenit ſuper linea brachyſtochrona* AM, *quae datae lineae* BM *ad angulos rectos occurrit: hocque in quacunque potentiarum ſollicitantium hypotheſi.* Tabula X. Fig. 5.

Demonſtratio.

Sit AM ea linea, ſuper qua corpus ex A citiſſime ad lineam BM perueniat; perſpicuum eſt primo hanc lineam fore brachyſtochronam: nam ſi daretur linea, ſuper qua corpus citius ab A ad M perueniret, ea potius quaeſito ſatisfaceret. Praeterea haec linea AM ad angulos rectos in M curuae BM occurrit; niſi enim ad angulos rectos occurreret, ducta minima normali mn, ob $mn <$ mM corpus citius per Amn ad curuam BM perveniret, quam per AmM. Quare ne haec exceptio locum inuenire poſſit, neceſſe eſt, vt curua AM datae curuae normaliter inſiſtat. Conſequenter corpus ſuper ea infinitarum brachyſtochronarum ex A ad curuam BM ductarum citiſſime ad curuam BM peruenit, quae curuae BM ad angulos rectos occurrit. Q. E. I.

Corollarium I.

394 Si ergo infinitae curuae quaerantur, ſuper quibus corpus dato tempore ab A ad lineam BM perueniat; oportet vt datum tempus ſit maius quam tempus per brachyſtochronam AM: alias enim problema fieret impoſſibile.

Coollarium 2.

395. Si accidat vt plures curuae brachyſtochronae ſint normales in curuam BM, plura quo-

que

que prodibunt tempora minima vel maxima. Haec enim methodus tam minima quam maxima declarat.

Corollarium 3.

396. Quia tempus per curuam brachyſtochronam AM eſt minimum, intelligitur ex methodo maximorum et minimorum, ſi duae brachyſtochronae proximae concipiantur normaliter inſiſtentes curuae BM, tempora per eas eſſe inter ſe aequalia.

Corollarium 4.

397. Hinc porro perſpicitur, ſi curua BM fuerit eiusmodi, vt omnes brachyſtochronas ex puncto A ductas ſecet ad angulos rectos, tempora per omnes brachyſtochronas ad curuam BM vsque ductas fore inter ſe aequalia.

Corollarium 5.

398. Quamobrem curua quae ab omnibus curuis brachyſtochronis ex puncto A ductis arcus iſochronos, ſeu eodem tempore percurſos abſcindit, ea quoque omnes brachyſtochronas ad angulos rectos ſecabit, ſeu erit illarum traiectoria orthogonalis.

Corollarium 6.

399. Atque viciſſim quoque perſpicitur, ſi curua, quae ab infinitis curuis arcus iſochronos

abſcindit, fuerit earum traiectoria orthogonalis; eas infinitas curuas omnes eſſe brachyſtochronas.

Scholion.

400. Facile intelligitur hanc propoſitionem locum quoque habere in medio reſiſtente; ſimili enim modo apparet tempus per elementum *mn* normale in curuam BM minus eſſe quam tempus per elementum *m*M quod non eſt perpendiculare; in hoc autem totius demonſtrationis vis eſt ſita. Quare ſi, infinitis curuis ex puncto A eductis, lex potentiarum ſollicitantium et reſiſtentiae poterit inueniri, in qua eae curuae omnes ſint brachyſtochronae, ſimul harum curuarum traiectoria orthogonalis poterit exhiberi quaerendo tantum curuam ab iis curuis arcus iſochronos abſcindentem. Atque hanc ipſam traiectorias orthogonales inueniendi methodum jam adhibuit Cel. Ioh. Bernoulli, in Act. Lipſ. A. 1697.

PROPOSITIO 45.

Problema.

Tabula X. Fig. 6.

401. *Inter omnes curuas puncta* A *et* C *jungentes et aequaliter longas eam determinare* AMC *ſuper qua corpus celerrime ex* A *ad* C *perueniat, in hypotheſi potentiae ſollicitantis uniformis* g *et deorſum directae.*

So-

Solutio.

Ducta verticali AP et horizontali PM dicatur $AP=x$, $PM=y$ et $AM=s$; eritque tempus quo arcus AM absoluitur $=\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Iam per methodum isoperimetricorum, de qua peculiarem dedi dissertationem cum formulis generalibus, ex quibus quaeuis problemata facile resolui possunt, in Comment. Acad. Petr. A. 1733; duae quantitates considerandae sunt arcus $AM=s=\int ds$ et tempus per $AM=\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$, quarum altera alterius respectu debet esse minima vel maxima. Eodem enim redit siue inter omnes curuas aeque longas quaeratur ea, quae breuissimum habeat descensum, sive inter omnes, super quibus descensus fiunt eodem tempore ea, quae est breuissima. Per formulas autem meas dat $\int ds$, hanc quantitatem *diff.* $\frac{dy}{ds}$ et $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ dat *diff.* $\frac{dy}{ds\sqrt{gx}}$, quarum altera alterius multiplo cuicunque aequalis est ponenda. Habetur ergo integrando $\frac{dy}{ds}=\frac{dy\sqrt{a}}{ds\sqrt{x}}-m$, seu $dy(\sqrt{a}-\sqrt{x})=mds\sqrt{x}$. Sumendis vero quadratis erit $dy^2(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2=m^2xdx^2+m^2xdy^2$, vnde erit $dy=\frac{mdx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-2\sqrt{ax}+(1-m^2)x)}}$ et $ds=\frac{dx(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{\sqrt{(a-2\sqrt{ax}+(1-m^2)x)}}$. Ex quo curua quaesita determinabitur. Q. E. I.

Corollarium I.

402. In aequatione inuenta duae insunt quantitates a et m arbitrariae, quibus effici potest vt curua per datum punctum C transeat, et vt simul sit

datae longitudinis. Atque tum haec curua celerrime absoluetur inter omnes alias curuas eiusdem longitudinis per A et C transeuntes.

Corollarium 2.

403. Si ponantur a et m infinite magna prodibit cyclois, quae non solum inter omnes curuas eiusdem longitudinis, sed inter omnes omnino citissime absoluitur.

Corollarium 3.

404. Si ponatur $m=o$ prodit $dy=o$; seu recta verticalis. At si fiat $a=o$, oritur recta quaecunque per punctum A ducta. Est enim recta linea inter omnes lineas, quae eodem tempore absoluuntur minima seu breuissima.

Corollarium 4.

405. Si ponatur $m=1$, prodibit curua algebraica, erit enim $dy=\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}$, cuius integralis est $y=\frac{-(4a+4\sqrt{ax}+6x)\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{15\sqrt{a}}+\frac{4a}{15}$. Haec curua etiam est rectificabilis, namque erit $s=\frac{2a}{5}-\frac{(2a+2\sqrt{ax}-2x)}{5\sqrt{a}}\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}$. Quin etiam tempus per arcum AM algebraice poterit exprimi, erit enim $\int\frac{ds}{\sqrt{x}}=\frac{4\sqrt{a}}{3}-\frac{(4\sqrt{a}-2\sqrt{x})\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{5\sqrt{a}}$. Aequatio vero pro curua reducta fit ordinis quinti.

Co-

Corollarium 5.

406. Si in hac curua sumatur $x = \frac{a}{4}$, ibi tangens erit horizontalis, atque recta verticalis in eo curuae puncto erit diameter curuae. Illo autem loco sit $y = \frac{4a}{15}$, et longitudo curuae ad hoc punctum erit $= \frac{2a}{5}$. Atque tempus, quo hic arcus absoluitur est $= \frac{4\sqrt{a}}{3\sqrt{g}}$. Eodem ergo tempore corpus recta descendet per altitudinem $\frac{4}{9}a$.

Scholion.

407. Missis nunc hisce de celerrimo descensu progredimur ad eas curuas considerandas, super quibus plures descensus inter se comparati datam teneant relationem. Huc maxime pertinet quaestio de curuis tautochronis, super quibus vel omnes descensus ad punctum infimum curuae vsque fiunt eodem tempore, vel integrae oscillationes. Ad haec deinde aliae accedere possunt quaestiones cum difficiles, tum vim methodi, qua vtemur, illustrantes.

PROPOSITIO 46.

Problema.

408. *Inuenire legem generalem curuarum tautochronarum, super quibus omnes descensus ad punctum A, initio descensus vbicunque in curua* AM *accepto, absoluantur eodem tempore.* Tabula XI. Fig. 1.

Sc-

Solutio.

Sumta recta AP pro axe, dicatur curuae portio AM $=s$, sitque altitudo celeritati in A debita $=b$, et altitudo celeritati in M debita $=v$; erit tempus quo arcus AM absoluitur $=\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$, quod integrale ita est capiendum, vt euanescat posito $s=o$. Tum si in eo integrali ponatur $v=o$, habebitur tempus descensus a loco in quo celeritas erat nulla vsque ad punctum A, seu totum descensus tempus; id quod eadem quantitate expressum esse debet, quaecunque fuerit quantitas b. Haec igitur quantitas b neque in expressione temporis inesse debet, neque in expressione pro curva AM, quia haec eadem curua idem descensus tempus producere debet, vtcunque varietur b. Sit jam v quantitas composita ex litera z ad curuam pertinente, et a curua AM cum abscissa AP et applicata PM tantum pendente, neque b inuoluente; atque ex littera h quae ex b et quantitatibus constantibus sit composita. Sit autem v talis ipsarum h et z functio vt euanescat, posito $z=h$, atque vt fiat $=b$, si sit $z=\alpha h$, existente α numero quocunque. Ponatur porro $ds=pdz$ pro aequatione curuae quaesitae, debebit p talis esse quantitas, in qua non contineatur b vel h, quia hae litterae in aequationem curuae ingredi nequeunt Habebimus ergo pro expressione temporis per AM, $\int\frac{pdz}{\sqrt{v}}$ hoc integrali ita accepto vt euanescat posito $v=b$ seu $z=\alpha h$. Deinde hoc integrale si in eo po-

ponatur $z=b$ dabit tempus totius descensus, in quo b inesse non poterit. Hoc vero euenit si $\int\frac{pdz}{\sqrt{v}}$ fuerit functio ipsarum b et z nullius dimensionis, seu si $\frac{pz}{\sqrt{v}}$ fuerit functio nullius dimensionis. Sit v functio m dimensionum ipsarum b et z, debebit esse $p=Cz^{\frac{m-2}{2}}$, denotante C quantitatem constantem a b non pendentem. Quoties ergo pro v talis functio fuerit comperta, habebitur pro curua quaesita haec aequatio $ds=Cz^{\frac{m-2}{2}}dz$, seu $s=\frac{2Cz^{\frac{m}{2}}}{m}+$ const. si opus est, quo s euanescat, si in z euanescat vel x vel y. Q. E. I.

Corollarium 1.

409. Quo igitur haec methodus possit adhiberi, oportet vt v quantitatibus finitis sit expressum: atque vt ea expressio transmutari possit in functionem homogeneam ex b et z constantem.

Corollarium 2.

410. Hanc ob rem necesse est vt fiat $v=b$, si ponatur $z=\alpha b$; quo in quantitate constante adiecta etiam non reperiatur b. Sufficit igitur si viderimus fieri $v=b$, facto $z=\alpha b$ neque opus est, vt integratio absoluatur.

Corollarium 3.

411. Intelligitur etiam curuam in A habere debere tangentem normalem in directionem vis

ſollicitantis; niſi enim hoc fuerit, tempus per arcum deſcenſus infinite paruum, foret quoque infinite paruum.

Scholion.

412. Valet haec ſolutio non ſolum ſi, vti figura indicat, curua exponatur per coordinatas orthogonales; nihil enim intereſt quibusnam quantitatibus naturam curuae exponere velimus; dummodo in z non ingrediatur b. Poteſt autem z continere lineas et quantitates quascunque a curva pendentes. Hac igitur methodo in vacuo, in quacunque potentiarum ſollicitantium hypotheſi, lineae tautochronae poterunt inueniri, quia ſemper celeritas per quantitates finitas exprimi poteſt. At ſi, vt in mediis reſiſtentibus fieri ſolet, celeritas non poteſt exhiberi finitis quantitatibus; haec methodus vſum habere nequit; ſed alia deſideratur, quae ſuccedit, etiam ſi celeritas per aequationem differentialem tantum detur.

PROPOSITIO 47.

Problema.

Tabula XI. Fig. 1. 413. *Si corpus deorſum ſollicitetur vi quacunque; inuenire lineam tautochronam, ſuper qua omnes deſcenſus fiant eodem tempore.*

Solutio.

Poſito $AP = x$, $PM = y$; et $AM = s$, ſit celeritas in A debita altitudini b; et in M debita altitutitudini v. Sit porro vis ſollicitans in $M = P$, erit $v = b - \int P dx$ integrali $\int P dx$ ita accepto vt euaneſcat facto $x = o$. Iam ſi ponatur $b = h$ et $\int P dx = z$, erit v functio vnius dimenſionis ipſarum h et z, et euaneſcit facto $z = h$, fitque $v = b$ facto $z = o$. Erit igitur $m = 1$, ideoque habebitur pro curua quaeſita iſta aequatio $ds = \frac{C dz}{\sqrt{z}}$ et $s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a\int P dx}$. Si deſideretur aequatio inter x et y, erit ob $ds = \frac{aP dx}{\sqrt{a\int P dx}}$, $dy = \frac{dx\sqrt{(aP^2 - \int P dx)}}{\sqrt{\int P dx}}$ Q. E. I.

Corollarium 1.

414. Quia euaneſcit $\int P dx$ facto $x = o$; tangens curuae in A erit horizontalis, niſi in A euaneſcat P. Atque curua alicubi habebit tangentem verticalem, ibique plerumque cuſpidem, hoc euenit vbi erit $\int P dx = aP^2$. Ibi enim fit $dy = o$.

Corollarium 2.

415. Huius curuae in puncto infimo A radius oſculi eſt aequalis ſubnormali $= \frac{y dy}{dx} = \frac{s ds}{dx}$, quia in A s et y fiunt aequalia. Quare in A erit radius oſculi $= 2aP$, vbi P denotat potentiam ſollicitantem in puncto A.

Corollarium 3.

416. Ex radio oſculi in A et potentia ſollicitante in A inuenitur tempus aſcenſus vel de-

ſcenſus per infinite paruum arcum $= \frac{\pi\sqrt{4aP}}{2\sqrt{P}}$ (172) $= \pi\sqrt{a}$. Huicque tempori tempus cuiusque deſcenſus eſt aequale. In hypotheſi ergo grauitatis $= 1$, pendulum longitudinis $2a$ deſcenſus infinite paruos eodem tempore abſoluet.

Exemplum 1.

417. Sit potentia ſollicitans vbique conſtans nempe $P = g$, erit $\int Pdx = gx$ atque $s = 2\sqrt{gax}$, itemque $dy = \frac{dx\sqrt{(ga-x)}}{\sqrt{x}}$, vnde intelligitur curuam eſſe cycloidem deorſum convexam, prorſus cum linea brachyſtochrona in eadem potentiae hypotheſi congruentem. Quod autem omnes deſcenſus fiant eodem tempore ſuper cycloide jam ſupra demonſtrauimus (187).

Exemplum 2.

418. Sit potentia ſollicitans vt poteſtas quaecunque ipſius x, erit $P = \frac{x^n}{f^n}$ et $\int Pdx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)f^n}$ ſi quidem fuerit $n+1$ numerus affirmatiuus; ſin enim eſſet $n+1$ numerus negatiuus, fieret $\int Pdx = \infty$. Erit igitur $s = \frac{2x^{\frac{n+1}{2}}}{f^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\frac{a}{n+1}}$ atque $dy = \frac{dx\sqrt{((n+1)ax^{n-1} - f^n)}}{\sqrt{f^n}}$. Ex qua aequatione intelligitur curuam fore rectam vtcunque inclinatam ad ho-

horizontem, si fuerit $n=1$. At si $n>1$ curua in initio A fit imaginaria, quo vsque nimirum s^n incipit minus esse quam $(n+1)\, ax^{n-1}$.

Scholion 1.

419. Ex aequatione generali apparet rectam AP esse diametrum curuae. Quare cum in vacuo ascensus sint similes descensibus, semioscillationes omnes super curua MA ad alteram partem vsque producta erunt quoque isochronae, et consequenter etiam integrae oscillationes. Deinde cum ob arbitrariam a infinitae sint curuae tautochronae AM, duae quaeque in puncto A coniunctae, vt ibi habeant tangentem communem horizontalem, producent tam semioscillationes quam integras oscillationes isochronas; si scilicet pendulum ita accommodetur vt oscillando huiusmodi curuas absoluat.

Scholion 2.

420. Intelligitur etiam ex solutione eas curuas, quas inuenimus, esse solas, quae quaesito satisfaciunt. Nam loco p alia functio ipsius z substitui nequit, vt in integrali, si ponatur $v=o$, prorsus ex formula exeant b seu h. Id quod aliis methodis, quibus tautochronae sunt inuentae, non satis liquet.

Scholion 3.

421. Quia est $s=2\surd asPdx$, erit $P=\frac{sds}{2adx}$. Ex quo apparet, cuiusmodi esse debeat potentia

 sol-

ſollicitans, vt data curua ſit tautochrona. Scilicet potentia deorſum tendens debet eſſe proportionalis ipſi $\frac{sds}{dx}$ ex data curua deſumto. Quare niſi curua ſit rectificabilis, valor potentiae ſollicitantis non poteſt algebraice exhiberi.

PROPOSITIO 48.

Problema.

Tabula XI. Fig. 2.

422. *Si corpus perpetuo trahatur ad centrum virium C vi quacunque: inuenire lineam tautochronam BMA, ſuper qua corpus omnes deſcenſus ad punctum A usque eodem tempore abſoluat.*

Solutio.

Dicatur $CA = c$, $CM = y$, et vis centripeta in M corpus ſollicitans $= P$. Sit porro celeritas in debita altitudini b et ea in M altitudini v. Sumatur $\int Pdy$ ita vt euaneſcat poſito $y = c$, quo facto erit $v = b - \int Pdy$. Sumtis ergo b pro h et $\int Pdy$ pro z, erit functio ipſarum h et z, cui v aequatur, vnius dimenſionis, quare erit $m = 1$. Si nunc arcus AM dicatur $= s$, erit $s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a\int Pdy}$, atque hinc $ds = \frac{aPdy}{\sqrt{a\int Pdy}}$. Si nunc in M ducatur tangens in eamque ex centro C demittatur perpendiculum CT, quod dicatur p, erit $\frac{ydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = ds$. Quare habebitur $y^2\int Pdy = (y^2 - p^2)aP^2$ ſeu $p^2 = y^2 - \frac{y^2\int Pdy}{aP^2}$, aequatio pro curua quaeſita. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

423. In puncto A vbi $\int P dy$ euanescit, erit $p = y$, seu recta CA erit normalis in curuam, in eoque propterea celeritas corporis erit maxima, quia A est punctum curuae centro C proximum.

Corollarium 2.

424. Si ponatur $p = o$, habebitur punctum curuae B; in quo recta CB curuam tangit. In eoque puncto, quod erit supremum, curua cuspidem habebit. Inuenitur vero punctum B ex hac aequatione $aP^2 = \int P dy$; atque y non poterit esse maior, quam valor ex hac aequatione inuentus.

Corollarium 3.

425. Apparet etiam ex aequatione inuenta $s = 2 \sqrt{a \int P dy}$, quia signum radicale signum ambiguum inuoluit, curuam duos habere ramos AB et AD inter se similes et aequales; et hanc ob rem oscillationes, quae super curua BAD fiunt, esse inter se aequales.

Corollarium 4.

426. Radius osculi in puncto A est $= \frac{2acP}{c - 2aP}$. Et quia est $AC = c$, erit tempus, quo vnus descensus super curuae AB portione infinite parua absoluitur $= \pi \sqrt{a}$ (207.), huic igitur tempori omnes descensus erunt aequales. Hanc ob rem oscil-

latio-

lationes, quae fiunt ſuper curua BAD iſochronae erunt cum oſcillationibus penduli in grauitatis hypotheſi, cuius longitudo eſt $= 2a$.

Exemplum I.

427. Sit vis centripeta directe proportionalis diſtantiis a centro vt ſit $P = \frac{y}{f}$, erit $\int P dy = \frac{y^2 - c^2}{2f}$. Hinc ergo erit $AM = s = \sqrt{\frac{2a(y^2 - c^2)}{f}}$, atque $p^2 = yy - \frac{f(yy - cc)}{2a}$. Huius curuae radius oſculi in puncto M, qui eſt $\frac{ydy}{dp}$, inuenitur $= \frac{2a}{2a - f}\sqrt{((2a - f)y^2 + c^2)}$. Ex quo ſequitur ſi fuerit $2a > f$ curvam verſus centrum C fore conuexam vt exhibet figura. At ſi fuerit $2a = f$, curua euadet linea recta in A normalis ad rectam AC. Punctum autem B vbi CB tangit curuam inuenitur ex hac aequatione $(f - 2a)yy = ccf$, ex qua fit $BC = \frac{c\sqrt{f}}{\sqrt{(f - 2a)}}$. Quoties ergo accidit vt ſit $f > 2a$ ſeu curua convexa verſus C, habebit curua cuſpidem in B. Atque in his caſibus curua erit hypocyclois, quae generatur rotatione circuli, cuius diameter eſt $= \frac{c\sqrt{f} - c\sqrt{(f - 2a)}}{\sqrt{(f - 2a}}$, ſuper concaua parte circuli centro C radio $= \frac{c\sqrt{f}}{\sqrt{(f - 2a)}}$ deſcripti. Hoc ergo caſu curuae tautochronae conueniunt cum brachyſtochronis ſupra inuentis (390). At ſi $2a > f$ quo caſu curua eſt concaua verſus C, fit BC imaginaria et curua AM non amplius eſt hypocyclois. Tum autem erit $p^2 =$

(2a–

$\frac{(2a-f)yy+ccf}{2a}$, vnde p vbique praeter in A erit maior quam AC. Sit $c=o$, fiet $p=y\sqrt{\frac{2a-f}{2a}}$, quare hoc casu curuae tautochronae erunt omnes spirales logarithmicae circa centrum C descriptae. Corpus scilicet super spirali logarithmica perpetuo eodem tempore ad centrum C pertinget, vbicunque descensum inceperit. Hac igitur vis centripetae hypothesi tautochronae erunt, primo omnes hypocycloides, deinde omnes lineae rectae vtcunque ductae, tertio omnes spirales logarithmicae, et quarto infinitae curuae aliae hac aequatione contentae $p^2=\frac{(2a-f)y^2+ccf}{2a}$ siquidem fuerit $2a>f$ et c non $=o$. In hac autem vis centripetae hypothesi pro tautochronis tantum dederunt hypocycloides Neutonus in Princ. et Hermannus in Phoronomia et Comment. Acad. Petrop. A. 1727. quamvis hic aequationem aeque generalem ac nostram habuerit.

Exemplum 2.

428. Ponatur vis centripeta reciproce proportionalis quadratis distantiarum a centro, vt sit $P=\frac{ff}{yy}$, erit $\int P dy=\frac{-ff}{y}+\frac{ff}{c}=\frac{ff(y-c)}{cy}$. Curua igitur AM erit $=2\int\sqrt{\frac{a(y-c)}{cy}}$; atque $pp=\frac{acffyy+cy^5-y^6}{acf}$, vnde inuenitur radius osculi $\frac{ydy}{dp}=\frac{2acfy\sqrt{(acff+cy^3-y^4)}}{2acfy+5cy^3-6y^4}$. Vbi ergo p euanescit ibi etiam radius osculi fit $=o$. Ipsius BC valor autem reperietur ex hac aequatione $y^4=cy^3+acff$. Si igitur ponatur $BC=k$, erit a =

$=\frac{k^4-ck^2}{cff}$, id quod assumi potest, quia k est quantitas arbitraria. Ceterum apparet hanc curuam intra A et B habere posse punctum flexus contrarii, id quod euenit, si curua in A est concaua versus C, nempe si fuerit $2aff > c^3$.

Exemplum 3.

429. Sit vis centripeta vbique constans seu $P=1$, erit $\int P dy = y-c$. Quare si centro C radio CM ducatur arcus MP, erit $\int P dy = AP$, atque arcus $AM = 2\sqrt{a(y-c)} = 2\sqrt{a.AP}$. At erit porro $p^2 = y^2 - \frac{y^2(y-c)}{a} = \frac{(a+c)y^2-y^3}{a}$, vnde inuenitur $BC = a+c$, et curua $AM = 2a = 2(BC-AC)$. Radius osculi vero in puncto M erit $= \frac{2y\sqrt{(a+c-y)a}}{2a+2c-3y}$. In puncto ergo infimo A erit radius osculi $= \frac{2ac}{2a-c}$. Curua igitur in A erit concaua versus C si $2a > c$ at conuexa si $c > 2a$, atque radius osculi in A erit infinite magnus, si $2a=c$. Primo casu, quo curva in A est concaua versus C, curua habebit punctum flexus contrarii, vbi est $CM = \frac{2}{3}(a+c) = \frac{2}{3}BC$. Si est $c=o$, ita vt punctum A in centrum C cadat, fiet y chorda huius curuae, eritque $AM = 2\sqrt{ay}$, cuius curuae radius osculi in ipso centro C est infinite paruus, atque est $p = y\sqrt{\frac{a-y}{a}}$, curua autem ipsa per quadraturam circuli potest construi.

PRO-

PROPOSITIO 49.

Problema.

430. *Si corpus ſollicitetur a potentiis quibuscunque, inuenire curuam* AM, *ſuper qua omnes deſcenſus ad punctum* A *usque fiant aequalibus temporibus.* Tabula XI. Fig. 3.

Solutio.

Quaecunque fuerint potentiae ſollicitantes, eae omnes reduci poſſunt ad duas, quarum altera corpus perpetuo deorſum trahat ſecundum MQ, altera vero horizontaliter ſecundum MP. Sit vis, quae ſecundum MQ trahit $=P$, et vis quae ſecundum MP trahit $=Q$: dicantur $AP=x$, $PM=y$, $AM=s$, ſitque celeritas in puncto A debita altitudini b et celeritas in M debita altitudini v. His poſitis erit $v=b-\int Pdx-\int Qdy$. Quare ſi ponatur $b=b$ et $\int Pdx+\int Qdy=z$, erit v functio vnius dimenſionis ipſarum b et z, et propterea $m=1$ (408). Quamobrem habebitur pro curua quaeſita iſta aequatio $s=2\sqrt{az}=2\sqrt{a(\int Pdx+\int Qdy)}$, ſeu $ds=\frac{aPdx+aQdy}{\sqrt{a(\int Pdx+\int Qdy)}}$. At quia eſt $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ erit $\frac{dy}{dx}=\frac{aPQ\pm\sqrt{(\int Pdx+\int Qdy)(aP^2-\int Pdx-\int Qdy+aQ^2)}}{\int Pdx+\int Qdy-aQ^2}$. In ipſo ergo principio A, vbi eſt $\int Pdx+\int Qdy=o$, erit $Pdx+Qdy=o$, ſeu $dy:dx=-P:Q$. Atque vt ex praecedentibus intelligitur tempus cuiusque deſcenſus aequatur tempori, quo in hypotheſi grauitatis $=1$ pendulum longitudinis $2a$ descensum absoluit. Q. E. I.

Scholion.

431. Si habeatur curua, super qua omnes descensus fiunt eodem tempore, facile erit dare curuas super quibus oscillationes omnes eodem tempore peragantur. Nam quia in vacuo ascensus similes sunt descensibus, omnis curua, quae est tautochrona pro descensibus, talis quoque erit pro ascensibus. Quare duae curuae tautochronae coniunctae in puncto A dabunt curuam, super qua omnes oscillationes sunt isochronae. Attamen hac ratione alterum problema, quo curuae omnes oscillationes isochronas producentes requiruntur, non perfecte soluitur: dari enim possunt curuae infinitae huic quaestioni satisfacientes, quarum tamen partes non sint aptae ad descensus solos isochronos efficiendos. Problema autem hoc modo proponi potest: data curua quacunque inuenire aliam, quae cum ea coniuncta producat omnes oscillationes aequidiurnas. Nunc vero antequam ad haec progrediamur, aliud problema proferemus, in quo quaeritur curua datae curuae adiungenda, vt omnes descensus super hac curua composita absoluantur temporibus aequalibus. Quod problema vt maxime difficillimum mihi quondam erat propositum a Cl. Dan. Bernoulli. Attamen hac methodo, qua in investigatione tautochronarum vtor, etiam istud problema resolui potest.

PRO-

PROPOSITIO 50.
Problema.

432. *In hypothesi grauitatis uniformis deorsum tendentis, si detur curua ANB, inuenire curuam BMF ei adiungendam, ut omnes descensus super hac curua composita ad A usque absoluantur aequalibus temporibus, in quocunque curuae BMF puncto descensus incipiat.* Tabula XI. Fig. 4.

Solutio.

Si descensus incipiat in infimo curuae quaesitae puncto B, descensus fiet per datam curuam BNA tantum, eius ergo tempori, quod etiam dabitur, aequalia esse debent omnium descensuum tempora. Sit AD$=a$, AQ$=u$, AN$=t$; dabiturque aequatio inter u et t. Pro curua autem quaesita sit BP$=x$ et BM$=s$. Nunc in descensu quocunque sit celeritas in puncto B debita altitudini b, erit celeritas in M debita altitudini $b-x$; atque celeritas in N debita altitudini $a+b-u$. Tempus ergo descensus per curuam incognitam est $\int\frac{ds}{\sqrt{(b-x)}}$ ita integratum vt euanescat posito $x=o$, et post integrationem posito $x=b$. Tempus vero per curuam cognitam BNA erit $\int\frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}}$, ita integratum vt euanescat posito $u=o$, atque post integrationem posito $u=a$. Expressio ergo $\int\frac{ds}{\sqrt{(b-x)}}$ postquam factum est $x=b$, ita debet esse com-

comparata, vt ſi addatur ad expreſſionem temporis per BNA, ex aggregato penitus egrediatur littera b: tum enim totius tempus deſcenſus erit quantitas conſtans neque pendens a b ſeu a puncto curuae BMF, in quo deſcenſus incepit. Sit integrale $\int \frac{dt}{\sqrt{(a+a-u)}}$ poſtquam poſitum eſt $u = a$ aequale huic ſeriei $k + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \delta b^4 +$ etc. $+ \zeta \sqrt{b} + \eta b \sqrt{b} + \theta b^2 \sqrt{b} + 2 b^3 \sqrt{b} +$ etc. Quare ſi deſcenſus in puncto B incipiat, tempus totius deſcenſus erit $= k$, ob euaneſcentem b. Ipſi k ergo aequale eſſe debet tempus totius deſcenſus per curuam compoſitam, in quocunque curuae B M F puncto ponatur initium deſcenſus. Sit nunc curuae quaeſitae BMF natura ſequente ſerie expreſſa $ds = - A dx \sqrt{x} - B x dx \sqrt{x} - C x^2 dx \sqrt{x} - D x^3 dx \sqrt{x} -$ etc. $- F dx - G x dx - H x^2 dx - I x^3 dx -$ etc. Ponatur peripheriae ad diametrum ratio $\pi : 1$, quae reuera eſt $l - 1 : - \sqrt{-1}$, ita vt ſit $\pi = - \frac{l-1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\, l - 1$. Eſt vero poſt integrationem, poſito $x = b$, $\int \frac{A dx \sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1}{2} \pi A b$; $\int \frac{B x dx \sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot}{2 \cdot 4 \cdot} \pi B b^2$; $\int \frac{C x^2 dx \sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \pi C b^3$ etc. Atque $\int \frac{F dx}{\sqrt{(b-x)}} = 2 F \sqrt{b}$; $\int \frac{G x dx}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{2}{3} 2 G b \sqrt{b}$; $\int \frac{H x^2 dx}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} 2 H b^2 \sqrt{b}$; etc. Quo igitur horum terminorum cum illis terminis coniunctim tempus per BNA exprimentibus aggregatum aequetur ipſi k, termini homogenei b inuoluentes ſeſe tollere debent. Fiet igitur $\frac{1}{2} \pi A = \alpha$ ſeu $A = \frac{2}{1} \cdot \frac{\alpha}{\pi}$; ſimilique modo $B = \frac{2 \cdot 4 \cdot}{1 \cdot 3,} \frac{\beta}{\pi}$; $C = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 5} \frac{\gamma}{\pi}$ etc. Atque $F = \frac{\zeta}{2}$; $G = \frac{3}{2} \frac{\eta}{2}$;

H=

$H = \frac{3.5}{2.4} \cdot \frac{\theta}{2}$; $I = \frac{3.5.7}{2.4.6}, \frac{\iota}{2}$ etc. Quamobrem cum α, β, γ, δ, etc. ζ, η, θ, ι etc. ſint quantitates cognitae propter curuam ANB datam; habebitur pro curua quaeſita BMF iſta aequatio: $ds = \frac{-dx}{\pi}$ $(\frac{2}{1}\alpha\sqrt{x} + \frac{2.4}{1.3}\beta x\sqrt{x} + \frac{2.4.6}{1.3.5}\gamma x^2\sqrt{x} +$ etc.$) - \frac{dx}{2}$ $(\zeta + \frac{3}{2}\eta x + \frac{3.5}{2.4}\theta x^2 + \frac{3.5.7}{2.4.6}\iota x^3 +$ etc.), cuius integralis eſt $s = \frac{-2}{\pi}$ $(\frac{2}{3}\alpha x\sqrt{x} + \frac{2.4}{3.5}\beta x^2\sqrt{x} + \frac{2.4.6}{3.5.7}$ $\gamma x^3\sqrt{x} +$ etc.$) - \frac{1}{2}$ $(\zeta x + \frac{3}{4}\eta x^2 + \frac{3.5}{4.6}\theta x^3 +$ $\frac{3.5.7}{4.6.8}\iota x^4 +$ etc.). Cuius ſeriei hanc do conſtructionem: ſumatur $\int\frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int\frac{dt}{\sqrt{(a+d-u)}}$ ita vt euaneſcat poſito $u = o$, tum fiat $u = a$, et prodibit functio quaedam ipſius b. Ponatur $x(1-z)$ loco b et quod prodit ſit R. Tum integretur $\frac{Rdz}{\sqrt{z}}$ dum x vt conſtans conſideretur, ita vt euaneſcat poſito $z = o$. Deinde ponatur $z = 1$, et prodibit functio ipſius x quae erit $= \frac{\pi s}{\sqrt{x}}$. Hocque modo prodibit aeqatio pro curua quaeſita. Q. E. I.

Scholion I.

433. Conſtructio haec prorſus ſingularis ſed facilis tamen ſequitur ex ea methodo, qua vſus ſum in aequatione a C. Riccati quondam propoſita conſtruenda, atque hac potiſſimum gaudet praerogatiua, quod quaecunque fuerit curua data, quaeſita eius ope ſemper poſſit conſtrui, etiamſi aequatio ipſa, quae pro curua inuenitur minime ſaepe tractari poſſit. Dat praeterea ſtatim aequationem finitam eam, quae alias ex ſummatione ſerierum inueniretur.

Co-

Corollarium 1.

434. Si in aequatione pro curua BMF inuenta ponatur $x=o$, erit $ds=\frac{-\zeta dx}{2}$, vnde inclinatio curuae in B ad verticalem BP innotescit. Quo igitur appareat, quomodo hae duae curuae inuicem cohaereant, oportet quoque positionem tangentis curuae ANB in B determinare.

Corollarium 2.

435. Sit DQ$=p$ et BN$=q$, erit $dt=-dq$ et $a-u=p$. Vnde tempus per BNA erit $=\int\frac{dq}{\sqrt{(b+p)}}$ posito in hoc integrali $p=a$. Sit in ipso puncto B, $dq=Ldp$, erit generatim $dq=Ldp+Pdp$, existente P tali functione ipsius p, quae euanescat posito $p=o$. Videamus ergo euanescente p qualem terminum haec aequatio $\int\frac{dq}{\sqrt{(b+p)}}=\int\frac{Ldp}{\sqrt{(b+p)}}$ producat. Prodit autem posito $p=a$, $2L\sqrt{(b+a)}-2L\sqrt{b}$, vnde in serie initio assumta prodit terminus $-2L\sqrt{b}$, qui conuenit cum $\zeta\sqrt{b}$, erit ergo $L=-\frac{\zeta}{2}$ et $dq=\frac{-\zeta dp}{2}$. Ex quo intelligitur curuam datam et quaesitam in puncto coniunctionis B communem habere tangentem.

Scholion 2.

436. Dixi $2L\sqrt{(b+a)}-2L\sqrt{b}$ in serie dare hunc terminum $-2\zeta\sqrt{b}$; nam $\sqrt{(b+a)}$, dat terminos hos $\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}+$etc. cum aliis compara-

ranparandos. Hic autem ſolus terminus Ldp dat terminum huius formae $\zeta \surd b$. Quare ex eo tantum de inclinatione curuae in B concludere licet.

Scholion 3.

437. Conſtructio curuae quaeſitae quam dedi etiam hoc modo immutari poteſt, ſcribatur poſtquam in integrali $\int \frac{dt}{\surd(a-u)} - \int \frac{dt}{\surd(a+b-u)}$ poſitum eſt $u=a$, loco b hoc xz, et vocato eo, quod prodit R, integretur $\frac{Rdz}{\surd(1-z)}$, in quo x vt quantitas conſtans tractetur, ita vt euaneſcat poſito $z=0$. Tum ponatur $z=1$, atque id quod prouenit, aequetur ipſi $\frac{\pi s}{\surd x}$; hacque ratione plerumque commodius aequatio pro curua quaeſita obtinetur.

Exemplum I.

438. Sit curua data ANB cyclois ita vt ſit $t=2\surd cu$, ſeu $dt=\frac{cdu}{\surd cu}$; erit $\int \frac{dt}{\surd(a-u)} - \int \frac{dt}{\surd(a+b-u)} = \int \frac{du\surd c}{\surd(au-u^2)} - \int \frac{du\surd c}{\surd(au+bu-u^2)} = \surd -c\, l\frac{a-2u-2\surd(u^2-au)}{a} - \surd -c\, l\frac{a+b-2u-2\surd(u^2-au-bu)}{a+b}$. Ponatur $u=a$ et habebitur $\surd -c\, l -1 - \surd -c\, l\frac{b-a-2\surd ab}{a+b} = \pi\surd c - 2\surd -c\, l(\surd b - \surd -a) + \surd -c\, l(a+b) = \pi\surd c + \surd -c\, l\frac{\surd b+\surd -a}{\surd b-\surd -a}$. Ponatur xz loco b et habebitur $R = \pi\surd c + \surd -c\, l\frac{\surd xz+\surd -a}{\surd xz-\surd -a}$, quo multiplicato per $\frac{dz}{\surd(1-z)}$ habebitur $\frac{\pi dz\surd c}{\surd(1-z)} + \frac{dz\surd -c}{\surd(1-z)}\, l\frac{\surd xz+\surd -a}{\surd xz-\surd -a}$, cuius integrale eſt $= -2\pi\surd c(1-z) - 2\surd c(z-1)\, l\frac{\surd xz+\surd -a}{\surd xz-\surd -a} - \frac{2\surd -ac}{\surd x}\, l\frac{\surd(z-1)+\surd z}{\surd(z-1)-\surd z}$

$-\frac{2\surd -c(a+x)}{\surd x} l \frac{\surd -a(1-z)-\surd z(a+x)}{\surd -a(1-z)+\surd z(a+x)} + 2\pi\surd c - 2\surd c.\surd -1.$ $l-1$, qui duo vltimi termini sunt inter se aequales ob $\pi = \surd -1. l-1$. Ponatur nunc $z=1$ habebitur $\frac{-2\surd ac+2\surd c(a+x)}{\surd x}\pi$, quod aequale est ponendum ipsi $\frac{\pi s}{\surd x}$. Hinc prouenit ista aequatio $s = -2\surd ac + 2\surd c(a+x)$ seu $s+$ANB$=$ANBM$=2\surd c$(AD$+$BP). Ex quo patet curuam BME esse continuationem datae AND, ita vt coniunctae totam cycloidem constituant; id quod ex natura tautochronismi, cui cyclois satisfacere inuenta est, per se sequitur.

Exemplum 2.

439. Sit linea data ANB recta ad horizontem vtcunque inclinata erit $dt = ndu$, atque $\int\frac{ndu}{\surd(a-u)} - \int\frac{ndu}{\surd(a+b-u)} = 2n\surd a - 2n\surd(a-u) - 2n\surd(a+b) + 2n\surd(a+b-u)$. Ponatur $u=a$ atque $b=xz$, erit $R = 2n\surd a + 2n\surd xz - 2n\surd(a+xz)$. Quamobrem erit $\int\frac{Rdz}{\surd(1-z)} = 2n\int\frac{dz\surd a}{\surd(1-z)} + 2n\surd x\int\frac{dz\surd z}{\surd(1-z)} - 2n\int\frac{dz\surd(a+xz)}{\surd(1-z)} = 4n\surd a - 4n\surd a(1-z) + 2n\surd x\int\frac{zdz}{\surd(z-z^2)} - 2n\int\frac{adz+xzdz}{\surd(a-az+xz-xz^2)}$. Est vero $\int\frac{zdz}{\surd(z-zz)} = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{\surd(z-zz)} - \surd(z-zz) = \frac{1}{2}\pi$, postquam in integrali positum est $z=1$. At $\int\frac{adz+xzdz}{\surd(a-az+xz-xz^2)}$, si post integrationem ponatur $z=1$, dat $\surd a + \frac{a+x}{2\surd x}$ A. $\frac{2\surd ax}{a+x}$, denotante A. $\frac{2\surd ax}{a+x}$ arcum circuli radii $=1$, cuius sinus est $\frac{2\surd ax}{a+x}$. Quocirca erit $\frac{\pi b}{\surd x} = 4n\surd a + n\pi\surd x - 2n\surd a - \frac{n(a+x)}{\surd x}$ A. $\frac{2\surd ax}{a+x}$, hinc-

hincque $s = nx + \frac{2n\sqrt{ax}}{\pi} - \frac{n(a+x)}{\pi} A. \frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$. Huius aequationis differentialis est $ds = ndx - \frac{ndx}{\pi} A. \frac{2\sqrt{ax}}{a+x} = \frac{sdx + nadx}{a+x} - \frac{2ndx\sqrt{ax}}{\pi(a+x)}$. Curua haec autem non vltra datam altitudinem poterit ascendere vt in F vsque, vbi erit $ds = dx$. Posito igitur $ds = dx$, erit $\frac{n-1}{n} = \frac{1}{\pi} A. \frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$. Fiat ergo vt $n : n-1$ ita semiperipheria circuli cuius radius est 1, ad arcum eiusdem circuli, cuius cosinus sit m, erit $\frac{a-x}{a+x} = m$ atque $x = \frac{a(1-m)}{1+m}$. Vt si fuerit angulus DAB, $60°$, erit $n = 2$, et $m = 0$, ideoque BE $= a = $ AD. Ex quo sequitur, si angulus DAB fuerit maior quam 60. grad. fore $x > a$, at si ille angulus minor fuerit quam $60°$, fore $x < a$. Ceterum ex aequatione differentiali apparet, vt jam notauimus in puncto B fore $ds = ndx$, tum vero perpetuo fieri $ds < ndx$, vsque in F, vbi est $ds = dx$.

Corollarium 3.

440. Si linea recta BNA fuerit horizontalis erit $n = \infty$ et $a = 0$. Si autem fit $n\sqrt{a} = \sqrt{f}$, erit $ds = \frac{s\,dx}{x} - \frac{2dx\sqrt{fx}}{\pi x}$ ex aequatione differentiali inventa, cuius integrale est $\frac{s}{x} = \frac{-2}{\pi} \int \frac{dx\sqrt{f}}{x\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{f}}{\pi\sqrt{x}}$, ideoque $s = \frac{4}{\pi}\sqrt{fx}$. Curua ergo erit cyclois, cuius infimum elementum curuae datae locum tenet.

Corollarium 4.

441. Si aequatio differentialis $ds = n\,dx - \frac{ndx}{\pi}$ A. $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$ denuo differentietur posito dx constante, prodibit $dds = \frac{-nadx^2}{\pi(a+x)\sqrt{ax}}$. Ex qua aequatione sequitur curuae in B radium osculi fore infinite paruum.

Scholion 4.

442. Ex aequatione generali differentiali $ds = \frac{-dx}{\pi}(\frac{2}{1}\alpha\sqrt{x} + \frac{2.4}{1.3}\beta x\sqrt{x} + \text{etc.}) - \frac{dx}{2}(\zeta + \frac{3}{2}\eta x +$ etc. sequitur semper fore $dds = \infty$ posito $x = o$, nisi fuerit $\alpha = o$. Quoties igitur non fuerit $\alpha = o$ radius osculi curuae quaesitae in B erit $= o$. At si fuerit $\alpha = o$, tum radius osculi curuae BMF in puncto B inuenitur $= \frac{\zeta^2}{3\eta}\sqrt{(\frac{\zeta^2}{4} - 1)}$. Ex quo in quouis exemplo proposito statim radius osculi curuae in puncto B innotescit.

Exemplum 5.

443. Si curua data ANB hanc habuerit aequationem, vt sit $dt = Cu^n du$; erit tempus per NA $= \int \frac{Cu^n du}{\sqrt{(a+b-u)}}$. Ponatur $a+b = f$ et $f-u$ r^2, erit $u = f - r^2$ et $u^n = f^n - \frac{n}{1} f^{n-1} r^2 + \frac{n.n-1}{1.2} f^{n-2} r^4 - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} f^{n-3} r^6 +$ etc. Cum vero sit $\frac{du}{\sqrt{(a+b-u)}} = -2dr$; erit $\int \frac{Cu^n du}{\sqrt{(a+b-u)}} =$ Const. $- 2C(f^n r -$

$\frac{n}{1.3}$

$\frac{n}{1.3} f^{n-1} r^{8} + \frac{n.n-1}{1.2.5} f^{n-2} r^{8} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.7} f^{n-3} r^{7} +$ etc.). Quia autem haec quantitas euanescere debet facto $u = o$ seu $r = \sqrt{f}$; erit quantitas illa constans addenda $= 2\, C f^{n+\frac{1}{2}} (1 - \frac{n}{1.3} + \frac{n.n-1}{1.2.5} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.7} +$ etc.). Ponatur nunc $u = a$ seu $r = \sqrt{b}$, atque loco seriei $1 - \frac{n}{1.3} + \frac{n.n-1}{1.2.5} -$ etc. ponatur N, prodibit totum descensus per BNA tempus $= 2\, CN f^{n+\frac{1}{2}} - 2\, C (f^{n} \sqrt{b} - \frac{n}{1.3} f^{n-1}\, b\sqrt{b} + \frac{n.n-1}{1.2.5} f^{n-2}\, b^{2} \sqrt{b} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.7} f^{n-3}\, b^{3} \sqrt{b} +$ etc.). Restituatur $a + b$ loco f et orietur hoc tempus $= 2\, CN \left(a^{n+\frac{1}{2}} + \frac{(2n+1)}{2} a^{n-\frac{1}{2}} b + \frac{(2n+1)(2n-1)}{2.\ 4} a^{n-\frac{3}{2}} b^{2} + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2.\ 4.\ 6.} a^{n-\frac{5}{2}} b^{3} + \text{etc.}\right) - 2\, C \left(a^{n} \sqrt{b} + \frac{2\, n}{1.4} a^{n-1}\, b\sqrt{b} + \frac{2n(2n-2)}{1.3.5.} a^{n-2} b^{2} \sqrt{b} + \frac{2n(2n-2)(2n-4)}{1.\ 3.\ 5\ x} a^{n-3}\, b^{3} \sqrt{b} + \text{etc.}\right)$. Haec igitur series cum serie assumta hoc tempus exprimente comparata dat: $k = 2\, CN a^{n+\frac{1}{2}}$; $\alpha = \frac{2n+1}{2}\, 2\, CN a^{n-\frac{1}{2}}$; $\beta = \frac{(2n+1)(2n-1)}{2.\ 4}\, 2\, CN a^{n-\frac{2}{3}}$; $\gamma = \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2.\ 4.\ 6}\, 2\, CN\, a^{n-\frac{5}{2}}$ etc. $\zeta = -2\, C a^{n}$; $\eta = \frac{-2n}{1.\ 3}\, 2\, C a^{n-1}$; $\theta = \frac{-2n(2n-2)}{1.\ 3.\ 5}\, 2\, C a^{n-2}$ etc. Hinc oritur $ds = \frac{-2\, CN a^{n} dx}{\pi} \left(\frac{(2\, n+1)\sqrt{x}}{1.\ \sqrt{a}} + \frac{(2n+1)(2n-1) x\sqrt{x}}{1.\ 3.\ a\sqrt{a}} + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3) x^{2} \sqrt{x}}{1.\ 3.\ 5.\ a^{2} \sqrt{a}} + \text{etc.}\right) + C a^{n} dx \left(1 + \frac{n.\ x}{1.\ a} + \frac{n(n-1) x^{2}}{1.\ 2.\ a^{2}} + \frac{n(n-1)(n-2) x^{3}}{1.\ 2.\ 3,\ a^{3}} + \text{etc.}\right)$ Huius vero seriei posterioris summa est $C\, dx\, (a + x)^{n}$, huiusque integralis $\frac{C(a+x)^{n+1}}{n+1}$. Quare

post integrationem habebitur $s = \frac{C(a+x)^{n+1} - Ca^{n+1}}{n+1}$
$- \frac{4CNa^n\sqrt{x}}{\pi\sqrt{a}} \left(\frac{2n+1)}{3}x + \frac{(2n+1)(2n-1)x^2}{3 \cdot 5 \cdot a}\right.$
$+ \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^3}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a^2} +$ etc.). Quae est aequatio pro curua quaesita BMF, quae toties ex terminorum numero finito constat, quoties n fuerit terminus huius seriei $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, etc. Est vero $N = \int dp(1-pp)^n$ si post integrationem ponatur $p=1$. Hacque facta substitutione est $\int dp (1-pp)^{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3}\int dp(1-pp)^n$. Quare si fuerit $n = -\frac{1}{2}$, quia est $\int \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{\pi}{2}$, erit si $n = \frac{1}{2}$, $N = \frac{\pi}{4}$; si $n = \frac{3}{2}$ erit $N = \frac{3\pi}{4.4}$; si $n = \frac{5}{2}$ erit $N = \frac{3.5.\pi}{4.6.4}$; si $n = \frac{7}{2}$ erit $N = \frac{3.5.7.\pi}{4.6.8.4}$ etc. At quia si $n=0$ est $N=1$, erit si $n=1$, $N=\frac{2}{3}$; si $N=2$, erit $N=\frac{2.4}{3.5}$; si $n=3$; erit $N=\frac{2.4.6}{3.5.7}$ etc. Vt si curua fuerit cyclois erit $n=-\frac{1}{2}$, ideoque erit $s = 2C\sqrt{(a+x)} - 2C\sqrt{a}$ vt supra inuenimus. (438.).

Scholion 5.

444. Quando igitur est $dt = Cu^n du$, hic valor pro s inuenitur, atque ex ipsa methodi natura intelligitur: si dt aequetur aggregato aliquot huiusmodi terminorum, tum s aequalem fore aggregato serierum a singulis terminis productarum. Hac igitur ratione, si curua data fuerit

rit quaecunque, ſeries eſt quaerenda terminorum huius formae $C u^n du$, ipſi dt aequalis. Atque ex iis omnibus debitus ipſius s valor obtinebitur. Vt ſi fuerit natura lineae datae ANB haec $dt = \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{u}} + \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{c}}$; primus terminus dat $C = \sqrt{c}$ et $n = -\frac{1}{2}$; vnde fit $s = 2\sqrt{c(a+x)} - 2\sqrt{ac}$, alter terminus dat $C = \frac{1}{\sqrt{c}}$, et $n = \frac{1}{2}$ et $N = \frac{\pi}{4}$ vnde oritur $s = \frac{2(a+x)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{a} - 2x\sqrt{x}}{3\sqrt{c}}$. Curua quaeſita ergo ſequente aequatione exprimetur $s = \frac{2(a+3c+x)\sqrt{(a+x)} - 2(a+3c)\sqrt{a} - 2x\sqrt{x}}{3\sqrt{c}}$.

Exemplum 4.

445. Sit curua data circulus diametri c, erit $dt = \frac{\frac{1}{2}c\,du}{\sqrt{(cu - u^2)}} = \frac{1}{2}c\left(\frac{1}{\sqrt{cu}} + \frac{1.\sqrt{u}}{2.c\sqrt{c}} + \frac{1.3.u\sqrt{u}}{2.4.c^2\sqrt{c}} + \text{etc.}\right)$ Sumto nunc quolibet termino ſeorſim et inveniatur valor ipſius ds, habebitur colligendis omnibus

$$ds = \frac{c\,dx}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{c(a+x)}} + \frac{1\sqrt{(a+x)}}{2c\sqrt{c}} + \frac{1.3\,(a+x)^{\frac{3}{2}}}{2.4.c^2\sqrt{c}} \right.$$
$$\left. - \frac{1\sqrt{x}}{2c\sqrt{c}} - \frac{1.3.x\sqrt{x}}{2.4.c^2\sqrt{c}}\ \text{etc.} - \frac{3.1.3\,a\sqrt{x}}{2.2.4c^2\sqrt{c}}\right)$$

Ex quibus ſequens aequatio naſcitur

$$\frac{2ds}{c\,dx} = \frac{1}{\sqrt{(a+x)(c-a-x)}} - \left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}}\right) - \frac{a}{1.dx}\,d\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1.\sqrt{x}}{2c\sqrt{c}}\right) - \frac{a^2}{1.2.dx^2}\,dd\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1.\sqrt{x}}{2c\sqrt{c}} - \frac{1.3\,x\sqrt{x}}{2.4c^2\sqrt{c}}\right) - \frac{a^3}{1.2.3.dx^3}\,d^3\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1.\sqrt{x}}{2c\sqrt{c}} - \right.$$

x 3.

$\frac{1.3.x\sqrt{x}}{2.4c^2\sqrt{c}} - \frac{1.3.5.x^2\sqrt{x}}{2.4.6c^3\sqrt{c}}) -$ etc. Quae expreſſio in multas alias formas transmutari poteſt.

PROPOSITIO 51.

Problema.

Tabula XI. Fig. 5. 446. *In hypotheſi grauitatis vniformis deorſum tendentis ſi detur curua quaecunque* AM, *inuenire curuam* AN *eiusmodi, vt oſcillationes, quae peraguntur ſuper curua compoſita* MAN, *ſint omnes inter ſe iſochronae.*

Solutio.

Sit datae curuae AM abſciſſa AP$=u$; arcus reſpondens AM$=t$, dabitur ob curuam datam aequatio inter u et t. Deinde in curua quaeſita AN ponatur abſciſſa AQ$=x$ et arcus AN$=s$. Iam in oſcillatione quacunque ſit celeritas in puncto A debita altitudini b; eritque tempus per MAN$=\int\frac{dt}{\sqrt{(b-u)}} + \int\frac{ds}{\sqrt{(b-x)}}$. Atque ſi in hac expreſſione ponatur $u=b$ et $x=b$ prodibit tempus vnius ſemioſcillationis; quod cum debeat eſſe conſtans, ex formula id exprimente littera b prorſus euaneſcere debet. Ponatur $dt=\frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}} + P du$ et $ds=\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{x}} - Q dx$; eritque tempus vnius ſemioſcillationis $=\int\frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{(bu-u^2)}} + \int\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(bx-x^2)}} + \int\frac{P du}{\sqrt{(b-u)}} - \int\frac{Q dx}{\sqrt{(b-x)}}$ poſtquam poſitum eſt $u=b$ et $x=b$. Huius autem expreſ-

expressionis duo priores termini jam ita sunt comparati, vt b ex iis euanescat facto $u = b$ et $x = b$, dant nimirum $\pi \sqrt{f} + \pi \sqrt{b}$, denotante π peripheriam circuli diametri $= 1$. Quare si posteriores termini ita fuerint comparati, vt sese destruant, facto $u = b$ et $x = b$, habebitur id quod quaeritur; at P et Q tales necesse est sint quantitates, quae b non inuoluant, quia in aequationes curuarum ingrediuntur. At erit $\int \frac{P\,du}{\sqrt{(b-u)}} - \int \frac{Q\,dx}{\sqrt{(b-x)}} = 0$ facto $u = b$ et $x = b$, si Q talis fuerit functio ipsius x, qualis P est ipsius u. Seu cum nihil impediat, quo minus poni possit $x = u$, fiat $x = u$; oportebitque esse $Q = P$. Datur vero P ex aequatione curuae AM datae, quippe est $P = \frac{dt}{du} - \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{u}}$. Quo circa pro curua quaesita haec habebitur aequatio $ds = \frac{du\sqrt{b}}{\sqrt{u}} - dt + \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}}$, seu $s + t = 2\sqrt{bu} + 2\sqrt{fu}$; ex qua aequatione determinatur natura curuae quaesitae AN. Q. E. I.

Corollarium I.

447. Sumta igitur $AP = u = x$; cum sit $AM = t$ et $AN = s$, erit $NA + MA = t + s = 2(\sqrt{f} + \sqrt{b})\sqrt{AP}$, seu summa arcuum eidem abscissae respondentium proportionalis est radici quadratae ex abscissa AP. Tabula XI. Fig. 6.

Corollarium 2.

448. Curua igitur quaesita AND ita debet esse comparata, vt summa arcuum $AM + AN$ aequalis sit arcui cycloidis eidem abscissae AP respondentis. Ex qua proprietate sponte fluit, omnes oscillationes esse isochronas.

Corollarium 3.

449. Tempus ergo vnius oscillationis, aequatur tempori descensus super cycloide, cuius in infimo puncto radius osculi est $2(\sqrt{f} + \sqrt{h})^2$. Seu pendulum huius longitudinis producet semioscillationes minimas isochronas oscillationibus super curua MAN. Pendulum vero long. $\frac{1}{2}(\sqrt{f} + \sqrt{h})^2$, peraget totas oscillationes isochronas.

Corollarium 4.

450. Quia quantitatem h pro lubitu accipere licet, infinitae curuae AND satisfaciunt: atque etiam ea poterit determinari vt tempus oscillationis sit datae quantitatis. Vt si vna oscillatio isochrona esse debeat oscillationi penduli longitudinis $\frac{L}{4}$; erit $L = 2(\sqrt{f} + \sqrt{h})^2$, ideoque $\sqrt{h} = \sqrt{\frac{L}{2}} - \sqrt{f}$. Quare L maius esse debet quam $2f$.

Corollarium 5.

451. Si data curua AM fuerit cyclois seu $dt = \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{f}}$, altera curua AN erit quoque cyclois quo-

quaecunque, ſit enim $ds = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{x}}$. Atque ſuper duabus huiusmodi cycloidibus non ſolum integrae oſcillationes erunt iſochronae, ſed etiam ſinguli aſcenſus et deſcenſus ſuper qualibet cycloide abſoluentur eodem tempore.

Exemplum I.

452. Sit curua data AM recta vtcunque ad horizontem inclinata, vt ſit $dt = ndu$, prodibit pro curua quaeſita poſito $\sqrt{\frac{L}{2}}$ loco $\sqrt{f} + \sqrt{b}$ haec aequatio $ds = \frac{du\sqrt{L}}{\sqrt{2u}} - ndu = \frac{dx\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} - ndx$. Quare ſi vocetur PN $= y$, erit $dy = dx\sqrt{(\frac{L}{2x} - \frac{2n\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} + n^2 - 1)}$ vbi $\frac{L}{4}$, denotat longitudinem penduli iſochroni: ex qua aequatione curua quaeſita poterit conſtrui. Curua autem in D habebit punctum reuerſionis ibique tangentem verticalem, quod habebitur ſumendo AC $= \frac{L}{2(n+1)^2}$. Curuae vero in infimo loco A radius oſculi eſt $= L$. Hic praeterea notandum eſt ſi $n = 1$, quo caſu linea AM fit recta verticalis in AC incidens, fore curuam quaeſitam algebraicam; erit namque $dy = \frac{dx\sqrt{(L - 2\sqrt{2Lx})}}{\sqrt{2x}}$, cuius integralis eſt $y = \frac{L}{3} - \frac{(\sqrt{L} - 2\sqrt{2x})\sqrt{(L - 2\sqrt{Lx})}}{3}$ ſeu $9y^2 - 6Ly = -6L\sqrt{2Lx} + 24Lx - 16x\sqrt{2Lx}$, quae ab irrationalitate prorſus liberata fit quatuor dimenſionum. Huius curuae cuſpis D habebitur ſumendo AC $= \frac{1}{8}L$, quo caſu ſit CD $= \frac{L}{3}$.

Exemplum 2.

453. Sit curua data AM circulus radii a; erit $dt = \frac{adu}{\sqrt{(2au - u^2)}}$. Hinc posito $\sqrt{\frac{L}{2}}$ loco $\sqrt{f} + \sqrt{b}$ erit $ds = \frac{du\sqrt{L}}{\sqrt{2u}} - \frac{adu}{\sqrt{(2au - u^2)}} = \frac{dx\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} - \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Ex qua aequatione sequitur $dy = dx\sqrt{\left(\frac{L}{2x} - \frac{2a\sqrt{L}}{x\sqrt{(4a - 2x)}} + \frac{a^2}{2ax - xx} - 1\right)}$. Cuspis curuae AND erit vbi est $\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} = 1 + \frac{a}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$ seu $4x^4 + 2Lx^3 - 16ax^3 + L^2x^2 - 8aLx^2 + 24a^2x^2 - 4aL^2x + 12a^2Lx - 16a^3x + 4a^2L^2 - 8a^3L + 4a^4 = 0$. Ponatur $L = a$, fiet $x = 0$ et $4x^3 - 14ax^2 + 17a^2x - 8a^3 = 0$. At si $L = 2a$, erit $x^4 - 3ax^3 + 5a^2x^2 - 2a^3x - a^4 = 0$, vnde fit $x = a = AC$. Hocque casu longitudo penduli isochroni est $\frac{a}{2}$.

Scholion.

454. Si igitur efficiatur, vt pendulum in huiusmodi curua composita oscillationes peragat, eius oscillationes aeque erunt isochronae, ac si in cycloide moueretur. Atque hanc ob rem quaecunque curua ad tautochronismum adhiberi poterit. Restat in hoc negotio ista quaestio, quemadmodum curuam datam comparatam esse oporteat, vt inuenta cum data vnam curuam continuam constituat, id quod sequente propositione praestabimus.

PROPOSITIO 52.

Problema.

455. *In hypothesi grauitatis vniformis deorsum ten-*

tendentis inuenire curuam continuam MAN, *ſuper qua omnes ſemioſcillationes abſoluantur aequalibus temporibus.*

Solutio.

Sit igitur curua MAN curua continua, in eaque $AP = x$, et $AM = t$, et $AN = s$. Aſſumatur noua indeterminata z atque x et t ita dentur in z, vt poſita z affirmatiua prodeat curuae pars AM, at poſita z negatiua prodeat curuae pars AN. Quia nunc pro vtraque parte x eundem obtinet valorem, debebit x talis eſſe functio ipſius z, quae eadem maneat, ſiue z affirmatiue ſumatur ſiue negatiue; ſeu x debet eſſe functio par ipſius z. Deinde t eiusmodi eſſe debet functio ipſius z, vt prodeat s, ſi ponatur $-z$ loco z. At quia arcus s in alteram partem axis cadit, eius valor erit negatiuus reſpectu curuae AM: quare ſi in valore ipſius t ponatur $-z$ loco z, prodire debet $-s$. Sit nunc R functio impar ipſius z, et S eius functio par; et ponatur $t = R + S$, fiet $-s = -R + S$, ſeu $s = R - S$; vnde fit $t + s = 2R$. Sit longitudo penduli iſochroni $= a$, quia eſt $\sqrt{2a} = \sqrt{f} + \sqrt{h}$; debebit eſſe $t + s = 2\sqrt{2ax}$; hincque erit $R = \sqrt{2ax}$, et $x = \frac{R^2}{2a}$. Quia autem x debet eſſe functio par ipſius z; ex hac expreſſione id per ſe obtinetur; cum enim R ſit functio impar, eius quadratum erit functio par. Sit igitur $R = z$, erit $z = \sqrt{2ax}$, atque S debebit eſſe functio par ipſius $\sqrt{2ax}$ ſeu ipſius $\sqrt{x}$. Quo facto habebitur iſta aequatio $s = \sqrt{2ax} - S$ pro omnibus curuis continuis tautochronis. Sit $dS =$

 $\frac{T dx}{\sqrt{2ax}}$

$\frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$, erit T functio impar quaecunque ipsius $\sqrt{x}$. Quapropter fiet $ds = \frac{adx - Tdx}{\sqrt{2ax}}$, atque $dy = \frac{dx\sqrt{(a^2 - 2aT + T^2 - 2ax)}}{\sqrt{2ax}}$, posito PN$=y$. Ex qua aequatione infinitae curuae tautochronae continuae reperiuntur. Q. E. I.

Corollarium I.

456. Curua igitur hoc modo inuenta AN est tautochrona cum sui ipsius parte continua AM. Dantur vero per praecedens problema infinitae aliae curuae AM, quae cum AN coniunctae oscillationes isochronas producunt.

Corollarium 2.

457. Per praecedentem propositionem omnis curua AM, cuius haec est aequatio $t = \sqrt{2cx} + S$ seu $dt = \frac{cdx}{\sqrt{2cx}} + \frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$ oscillationes isochronas cum curua AN producit. At harum oscillationum longitudo penduli isochroni est $= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c})^2}{4}$.

Corollarium 3.

458. Inter has ergo infinitas curuas AM cum AN oscillationes isochronas producentes ea est continua cum AN in qua est $c = a$. Atque longitudo penduli isochroni fit $= a$, vt assumsimus.

Corollarium 4.

459. Si ponatur $c = o$; erit cum curua AN quoque tautochrona haec curua AM, cuius aequatio est $dt = \frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$ seu $t = S$. Hocque casu longitudo penduli est $\frac{a}{4}$. Quoties ergo est $T = \sqrt{2bx}$; to-

toties quoque linea recta cum AN tautochronismum producit, si ita fuerit inclinata vt anguli MAP secans sit $V\frac{b}{a}$ seu cosinus $= V\frac{a}{b}$.

Corollarium 5.

460. Quia curua AN in puncto A ad axem AP normalis esse debet, oportet vt T euanescat posito $x = o$. Idem etiam sequitur ex eo quod $a - T$ debeat esse quantitas affirmatiua saltem in initio A. Si enim T fieret infinitum posito $x = o$, id quod infinitis modis accidere potest, ita tamen vt S euanescat posito $x = o$, curua AN in alteram axis AP partem cadet, curuaque in A haberet cuspidem et corpus postquam super MA descendit per reflexionem super AN ascenderet, quod esset contra naturam oscillationum.

Corollarium 6.

461. Si igitur T euanescit posito $x = o$; radius osculi in A qui est $\frac{sds}{dx}$, ob $s = y$ in hoc loco, erit $= a$, ideoque oscillationes congruent cum oscillationibus minimis penduli longitudinis a vt assumsimus.

Corollarium 7.

462. Curuae portio AN habebit in D tangentem verticalem ibique cuspidem; quod punctum inuenitur ex hac aequatione $a - T = V\,2ax$, sumendo AC = valori ipsius x ex hac aequatione. Altera quoque pars AM habebit cuspidem si alicubi fuerit $a + T = V\,2ax$.

Co-

Corollarium 8.

463. Si fuerit $S = o$ et $T = o$, erit $s = \sqrt{2ax}$. Quare curua erit cyclois atque portio AN aequalis et similis curuae AM. Est ergo cyclois curua continua super qua omnes oscillationes absoluuntur eodem tempore.

Exemplum.

464. Sit $T = \sqrt{2bx}$, quo casu curua AN quoq; est tautochrona cum recta angulum AD constituente, cuius cosinus est $\sqrt{\frac{a}{b}}$; erit $ds = \frac{adx - dx\sqrt{2bx}}{\sqrt{2ax}}$, atque $s = \sqrt{2ax} - \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. Habebitur autem $dy = \frac{dx\sqrt{(a^2 - 2a\sqrt{2bx} + 2bx - 2ax)}}{\sqrt{2ax}}$. Quae aequatio etiam congruit cum ea, quam in prop. praec. pro curua inuenimus, quae cum recta tautochronam constituat (452), si modo scribatur L pro a et n pro $\sqrt{\frac{b}{a}}$. Quare si fuerit $b = a$, curua quoque algebraica inuenitur NAM, quae est tautochrona, cuius aequatio est $dy = dx \sqrt{\frac{a - 2\sqrt{ax}}{2x}}$, et integralis haec $3y = a - (\sqrt{a} - 2\sqrt{2x})\sqrt{(a - 2\sqrt{2ax})}$. Quae est ea ipsa curua, quae cum recta verticali tautochronam constituit, vt supra inuenimus (452). Longitudo vero penduli isochroni est $= a$, si corpus in hac curua oscilletur. At si moveatur super recta AC et parte curuae AN, longitudo penduli isochroni erit $\frac{1}{4}a$. Atque si D fuerit cuspis curuae, erit $AC = \frac{1}{8}a$, alter vero ramus AM in infinitum ascendit. Praeter hanc curuam tautochronam algebraicam aliae vix inueniri poterunt.

CAPUT

CAPUT TERTIUM.

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA IN MEDIO RESISTENTE.

PROPOSITIO 53.

Problema.

465.

Tabula XII. Fig. 1.

SI corpus sollicitetur deorsum a potentia vniformi g, in medio quocunque resistente; determinare motum corporis descendentis super data curua AM, *et pressionem, quam curua in singulis punctis sustinet.*

Solutio.

Ponatur in verticali AP abscissa $=x$, applicata PM$=y$ et arcus AM$=s$; sitque altitudo celeritati corporis in M debita $=v$ et resistentia in M $=$R. Manifestum jam est ex capite praecedente si nulla esset resistentia fore $dv=gdx$. Resistentia vero minuit hoc celeritatis incrementum, et aequipollet vi tangentiali $=$R; eiusque solius effectus in hoc consisteret, vt foret $dv=-\mathrm{R}ds$. Quamobrem si et potentia sollicitans g, et resistentia R ambae simul in corpus agunt, erit $dv=gdx-\mathrm{R}ds$, ex qua aequatione celeritas corporis in quouis puncto M est eruenda. Atque si corpus in A ex quiete descendat, integratio ita

 est

eſt inſtituenda, vt facto $x=o$ prodeat quoque $v=o$. Verum ſi data cum celeritate corpus in A deſcenſum inceperit, in integratione effici debet, vt poſito $x=o$, fiat v aequalis altitudini debitae illi celeritati initiali. Cum autem inuenta fuerit celeritas corporis, habebitur ſimul tempus, quo quiuis arcus AM abſoluitur ſumendo $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$. Quod ad preſſionem, quam curua in M ſuſtinet, ſpectat, curua in M duplici vi premitur, vi centrifuga ſcilicet, et vi normali. Ponamus curuam eſſe conuexam deorſum, et elementum dx conſtans, erit longitudo radii oſculi in contrariam partem normalis MN directi $=\frac{ds^3}{dxddy}$, vnde vis centrifuga erit $=\frac{2vdxddy}{ds^3}$, qua curua ſecundum directionem MN premitur. Secundum eandem vero directionem curua premetur a vi normali, quae eſt $=\frac{gdy}{ds}$; vis normalis enim a potentia abſoluta g tantum oritur, quia directio vis reſiſtentiae eſt in tangente ſita, ideoque nullam vim normalem generat. Conſequenter tota vis, qua curua in M ſecundum directionem normalis MN premitur eſt $=\frac{gdy}{ds}+\frac{2vdxddy}{ds^3}$. Q. E. I.

Corollarium I.

466. Expreſſio ergo vis curuam prementis congruit cum ea, quam in vacuo inuenimus. Neque tamen curua in medio reſiſtente eadem vi premitur qua in vacuo, ob celeritatem a qua vis

cen-

centrifuga pendet, quae a medio resistente variatur.

Corollarium 2.

467. In isto descensu corpus non vt in vacuo maximam habet celeritatem in puncto B, in quo tangens est horizontalis; sed posito $dv = o$, locus in quo corpus maximam habet celeritatem inuenitur ex hac aequatione $gdx = Rds$ seu $\frac{dx}{ds} = \frac{R}{g}$ in eo puncto, vbi sinus anguli, quem tangens curuae cum linea horizontali constituit, est ad sinum totum vt potentia absoluta g ad resistentiam in eo loco.

Corollarium 3.

468. Celeritas corporis igitur augetur vsque ad hoc punctum, in quo celeritas est maxima; vltra vero hoc punctum celeritas iterum decrescit, quia tum Rds excedit gdx, et hanc ob rem fit dv negatiuum.

Corollarium 4.

469. Si resistentia fuerit vt potestas quaecunque celeritatum, cuius exponens est $2m$, et si medium resistens fuerit vniforme, cuius exponens sit k; vbi k est altitudo celeritati debita, qua cum corpus mouetur, resistentiam patitur vi grauitati aequalem. Hoc ergo casu erit $R = \frac{v^m}{k^m}$

$\frac{v^m}{k^m}$, atque ista habebitur aequatio ad motum definiendum: $dv = g\,dx - \frac{v^m\,ds}{k^m}$.

Corollarium 5.

470. Si autem abscissae in axe BQ capiantur, fueritque $BQ = x$, $QM = y$, et $BM = s$, propter harum quantitatum differentialia negatiua respectu priorum, habebitur $dv = -g\,dx + R\,ds$. Quae aequatio ita est integranda, vt posito $x = 0$ fiat $v = b$, si quidem celeritas in B, quam corpus in hoc puncto obtinet, huic altitudini fuerit debita. At pressio secundum MN, quam curua sustinet, est $= \frac{g\,dy}{ds} - \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^2}$.

Corollarium 6.

471. Si medium fuerit vniforme cuius exponens sit k, resistentia vero functioni cuicunque ipsius v, quae sit V, proportionalis. Sumatur K talis functio ipsius k, qualis V est ipsius v, erit resistentia $R = \frac{V}{K}$; ideoque habebitur ista aequatio $dv = -g\,dx + \frac{V\,ds}{K}$, sumto axe BQ.

Scholion I.

472. Formulam hic duplicem incrementum celeritatis exhibentem dedi pro duobus axibus AP et BQ, quia in sequentibus mox hac mox illa vtemur.

vtemur. Scilicet quando descensus semper fit ex fixo puncto vt A, vtemur priore formula AP pro axe sumente. At si in eadem curua plures descensus ad punctum fixum vsque B sint considerandi, vt in motu oscillatorio vsu venit, posteriore formula vtemur, in qua BQ pro axe habetur.

Scholion 2.

473. Quia formula, ex qua motus corporis super data curua determinari debet, ita est comparata, vt indeterminatae paucis casibus a se inuicem separari queant, saepe ex ea nihil, quod ad motum spectat, concludi licet. Quamobrem eos tantum casus euoluere conuenit, quibus aequatio $dv = \pm g dx \mp \frac{Vds}{K}$ vel separari vel integrari potest. Hi autem casus omnino ad tres casus generales reducentur. Primus est, quando linea super qua corpus mouetur est recta, tum enim ob $ds = ndx$, aequatio transit in hanc $\frac{\pm Kdv}{gK - nV} = dx$, in qua indeterminatae sunt a se inuicem separatae. Secundus casus est, quando in V vnicam tantum obtinet dimensionem v, tum enim aequatio integrationem admittit. Tertius casus est, quando tam v quam aequatio pro curua ita est comparata, vt in aequatione v et x, vbique eundem dimensionrm numerum constituant; tum enim per regulam notam Bernoullianam indeterminatae a se inuicem possunt separari. Hoc autem euenit, si in Vds vnica fuerit dimensio ipsarum v et x. Praeter hos quidem casus essent duo alii, integrationem admittentes, sed qui huc non pertinent.

nent. Primus eſt ſi reſiſtentia euaneſcit, qui vero caſus in praecedente Capite iam ſufficienter eſt pertractatus. Alter caſus eſt, ſi potentia ſollicitans g euaneſcit; de quo autem non eſt opus vt agamus, quia motus ſuper quacunque linea congruit cum motu ſuper linea recta, de quo in praecedente libro iam ſatis eſt dictum. Praeterea quoque multis caſibus aequatio ſeparationem admittit, ſi fuerit $V = v^2$, quoties ſcilicet aequatio pro curua ita eſt comparata, vt aequatio ad caſum aequationis, quam quondam Com. Riccati propoſuit, poteſt reduci. Generaliter vero etiam poteſt in hoc caſu celeritas per ſeriem exhiberi, atque finita expreſſione definiri, quemadmodum ego generalem aequationis Riccatianae dedi conſtructionem. Quoties igitur natura rei requiret, praeter tres caſus expoſitos, ſubinde quoque hunc caſum, in quo reſiſtentia biquadrato celeritatis eſt proportionalis, euoluemus.

Scholion 3.

474. Quia haec de motu in medio reſiſtente tractatio per ſe eſt difficilis et intricata, non ad plures vis ſollicitantis hypotheſes, vt capite praecedente fecimus, eam accommodabimus; ſed nobis perpetuo potentia ſollicitans erit vniformis et deorſum directa; neque de viribus centripetis multum erimus ſolliciti. Atque cum potentia ſollicitans ponatur vniformis, medium reſiſtens quo-

quoque tale poni conueniet; fluidum enim quod resistentiam generat, ipsam corporis grauitatem minuit, et si id non esset vniforme, potentia absoluta non recte vniformis poneretur. Deinde etiam propter eandem rationem curuam in qua corpus mouetur, totam in eodem plano positam assumemus, quo multas difficultates nullam vtilitatem afferentes remoueamus.

PROPOSITIO 54.

Problema.

475. *Si corpus perpetuo sollicitetur deorsum a potentia vniformi* g, *in medio quocunque resistente; determinare motum corporis super data curua* AM *ascendentis et pressionem, quam curua in singulis punctis* M *patitur.* TabulaXII. Fig. 2.

Solutio.

In verticali AP posita abscissa $AP = x$; $PM = y$ et $AM = s$; sit altitudo celeritati in A debita $= b$; eique in M debita $= v$; atque resistentia in $M = R$. Erit igitur dum corpus ascendit tam potentia sollicitans g, quam resistentia R motui contraria. Hanc ob rem erit simili modo, quo in praecedente prop. $dv = -g\,dx - R\,ds$. Ex qua aequatione v ita debet determinari, vt facto $x = o$ fiat $v = b$. Deinde cum resistentia in pressionem, quam curua patitur, non ingrediatur, erit

erit vt supra pressio tota, quam curua in M secundum directionem normalis MN sustinet $= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^2}$ posito dx constante; vbi $\frac{gdy}{ds}$ denotat vim normalem, et $-\frac{2vdxddy}{ds^2}$ vim centrifugam, vtramque juxta MN directam. Q. E. I.

Corollarium 1.

476. In ascensu corporis ergo super quacunque curua celeritas corporis perpetuo imminuitur; atque punctum curuae D reperietur, in quo corporis ascendentis celeritas euanescit, si in aequatione $dv = -gdx - Rds$ post integrationem ponatur $v = 0$.

Corollarium 2.

477. Si corpus super curua DMA descenderet, haberetur ista aequatio $dv = -gdx + Rds$, (470) ex qua intelligitur ascensum non esse similem descensui, vt in vacuo. Sed si resistentia fieret negatiua seu accelerans, tum ascensus similis foret descensui. Quare descensus in medio resistente congruet cum ascensu in medio tantumdem accelerante et vicissim.

Corollarium 3.

478. Quoniam aequatio pro ascensu hoc tantum differt ab aequatione pro descensu, quod resistentia R valorem induat negatiuum; intelligitur iisdem casibus, quibus aequatio pro descensu

ſu ſeparari vel integrari poteſt, iisdem quoque aequationem pro aſcenſu ſimili modo tractari poſſe.

Corollarium 4.

479. Si fuerit $R = \frac{V}{K}$, erit pro aſcenſu ſuper curua AM haec aequatio $dv = -g dx - \frac{V ds}{K}$. At pro deſcenſu habetur $dv = -g dx + \frac{V ds}{K}$. Quare ſi illa aequatio poterit integrari ſimul quoque huius aequationis habebitur integrale ponendo tantum $-K$ loco K.

Scholion.

480. Secundum tres igitur caſus ſupra memoratos, quibus aequatio inuenta vel ſeparari vel integrari poteſt, tam deſcenſum quam aſcenſum pertractabimus, ſi ſcilicet detur curua ſuper qua motus fieri ponitur. Deinde autem ex datis potentia ſollicitante, reſiſtentia et preſſione curuam inueſtigabimus. Tertio ſi motus quaedam proprietas fuerit propoſita, curuam determinabimus, quae in data reſiſtentiae hypotheſi ſatisfaciat. Praeterea ſequentur alia problemata, in quibus harum quatuor rerum reſiſtentiae, motus, preſſiones et curuae duae dantur, reliquae duae requiruntur. Habebimus deinceps quoque problemata indeterminata, quibus omnes curuae requiruntur, ſuper quibus corpus deſcendens vel eandem celeritatem acquirit vel eas eodem tempore abſoluit.

Tum sequetur doctrina de lineis brachystochronis, atque tandem caput concludet de motu oscillatorio tractatio.

PROPOSITIO 55.

Problema.

Tabula XII. Fig. 3. 481. *In medio resistente vniformi quocunque et hypothesi grauitatis vniformis* g, *determinare motum corporis descendentis super linea recta* AMB *ad horizontem vtcunque inclinata.*

Solutio.

Posita $AP = x$ erit $AM = s = nx$; et quia medium resistens est vniforme, erit resistentia $R = \frac{V}{K}$. Posita ergo altitudine celeritati in M debita $= v$, erit $dv = g\,dx - \frac{nV\,dx}{K}$ (465.). Vnde fit $\frac{K\,dv}{gK - nV} = dx$, in qua aequatione indeterminatae sunt a se inuicem separatae: erit ergo $x = \int \frac{K\,dv}{gK - nV}$, in qua integratione efficiendum est vt posito $x = o$ fiat $v = o$, si quidem descensus in A ex quiete incipiat. Sin vero habeat celeritatem initialem haec per integrationem est introducenda. Tempus per spatium AM est $= \int \frac{n\,dx}{\sqrt{v}}$. Posito ergo loco dx eius valore in v, habebitur tempus per $AM = \int \frac{nK\,dv}{(gk - nV)\sqrt{v}}$ quod integrale ita est sumendum, vt posita $\sqrt{v} =$ celeritati initiali in A euanescat. Pressio vero quam linea in quouis puncto M sustinet, est

est constans nempe aequalis vi normali $= \frac{gdy}{ds} = \frac{g\sqrt{(n^2-1)}}{n}$, quia vis centrifuga euanescit ob $ddy = o$. Q. E. I.

Corollarium 1.

482. Celeritas corporis ergo tam diu acceleratur, quam diu est $gK > nV$. At si semel fuerit $gK = nV$ corpus neque accelerabitur neque retardabitur. Diminuetur vero corporis celeritas si in initio A fuerit $nV > gK$.

Corollarium 2.

483. Si ergo corpus in A descensum a quiete incipiat motus perpetuo crescet, ita tamen vt semper sit $gK > nV$, quippe quae est vltima celeritas, quam descensu per infinitum spatium demum acquirit.

Corollarium 3.

484. Quo maior ergo est angulus BAC, eo minor est vltima, quam corpus acquirere potest celeritas. Maximam vero celeritatem vltimam, qua aequabiliter progreditur, acquirit descensu super recta verticali AC.

Corollarium 4.

485. Si resistentia fuerit vt potestas indicis $2m$ celeritatum, erit $V = v^m$ et $K = k^m$, vnde

 ista

ista habebitur aequatio $x = \int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$, atque tempus per AM $= \int \frac{nk^m dv}{(gk^m - nv^m)\sqrt{v}}$

Exemplum I.

486. Resistat medium in simplici ratione celeritatum, erit $2m = 1$, atque $dv = gdx - \frac{ndx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Hinc fit $x = \int \frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}} = -\frac{2\sqrt{kv}}{n} + \frac{2gk}{n^2} l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}}$: vel per seriem $x = \frac{2v}{2g} + \frac{2nv\sqrt{v}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{2n^2v}{4g^3k} + \frac{2n^3v^2\sqrt{v}}{5g^4k\sqrt{k}} +$ etc. si quidem descensus in A ex quiete incipiat. Tempus autem per spatium AM erit $= \int \frac{ndv\sqrt{k}}{g\sqrt{kv} - nv} = 2\sqrt{k}\, l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}}$. Quare si tempus per AM ponatur $= t$, erit $nx + 2\sqrt{kv} = \frac{gt\sqrt{k}}{n}$. Atque in serie $t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2v}{2g^2\sqrt{k}} + \frac{2n^3v\sqrt{v}}{3g^3k} + \frac{2n^4v^2}{4g^4k\sqrt{k}}$ + etc. Si ergo corpus in descensu per AB acquisiuit celeritatem altitudini b debitam, ex hac reperitur altitudo AC $= \frac{-2\sqrt{bk}}{n} + \frac{2gk}{n^2} l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{b}}$.

Exemplum 2.

478. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m = 1$ et $x = \int \frac{kdv}{gk - nv} = \frac{k}{n} l \frac{gk}{gk - nv}$, si quidem corpus in A ex quiete ascensum inchoauerit. Quare si e sit numerus, cuius logarithmus est vnita, erit $e^{\frac{nx}{k}} = \frac{gk}{gk - nv}$; atque $v =$

gk

$\frac{gk(e^{\frac{nx}{k}}-1)}{ne^{\frac{nx}{k}}} = \frac{gk}{n}(1-e^{\frac{-nx}{k}})$. Hanc ob rem si corpus in B habuerit celeritatem altitudini b debitam, erit $AC = \frac{k}{n} l \frac{gk}{gk-nb}$. Atque si corpus per spatium infinitum descendat, habebit celeritatem altitudini $\frac{gk}{n}$ debitam. Tempus vero per spatium AM erit $= \int \frac{nkdv}{(gk-nv)\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{g}} l \frac{\sqrt{gk}+\sqrt{nv}}{\sqrt{gk}-\sqrt{nv}}$. Per series tam spatium x, quam tempus commode exprimitur; id quod generaliter pro quouis valore litterae m in sequente exemplo monstrabimus.

Exemplum 3.

488. Sit resistentia vt potestas exponentis $2m$ celeritatum, erit $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$; quae expressio in seriem conuersa dat $dx = \frac{dv}{g} + \frac{nv^m dv}{g^2 k^m} + \frac{n^3 v^{2m} dv}{g^3 k^{2m}} +$ etc. Ex qua inuenitur $x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} + \frac{n^2 v^{2m+1}}{(2m+1)g^3 k^{2m}} + \frac{n^3 v^{3m+1}}{(3m+1)g^4 k^{3m}} +$ etc. Atque si ponatur tempus per AM $= dt$, quia est $dt = \frac{ndx}{\sqrt{v}}$ erit $t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2 v^m \sqrt{v}}{(2m+1)g^2 k^m} + \frac{2n^3 v^{2m}\sqrt{v}}{(4m+1)g^3 k^{2m}} + \frac{2n^4 v^{3m}\sqrt{v}}{(6m+1)g^4 k^{3m}}$ + etc.

PROPOSITIO 56.

Problema.

Tabula XII. Fig. 4. 489. *Resistat medium in ratione quacunque multiplicata celeritatum; datumque sit punctum A, ex quo infinitae rectae AM sint eductae: determinare curuam CMD huiusmodi, vt corpus per quamlibet rectam AM descendens in puncto M eandem habeat celeritatem.*

Solutio.

Sit $2m$ exponens potestatis celeritatis, cui resistentia est proportionalis, dicaturque $AP = x$ et $AM = z$, et ponatur $z = nx$. Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, quae debet esse constans scilicet $= b$. Erit ergo $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ (485.) denotante, vt supra k exponentem resistentiae, et g potentiam sollicitantem deorsum tendentem. Ad naturam curuae CM ergo inueniendam oportet integrare aequationem $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ ita vt posito $v = o$ fiat quoque $x = o$; tum autem poni b loco v atque $\frac{z}{x}$ loco n, hocque modo obtinebitur aequatio inter x et z naturam curuae exponens. Per seriem autem supra aequationem propositam integrauimus (488), vnde posito b loco v habebimus $x = \frac{b}{g} +$

nb

$\frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}} +$ etc. Ponatur q^m loco n et multiplicetur vbique per q, quo facto habebimus $qx = \frac{bq}{g} + \frac{b^{m+1}q^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{b^{2m+1}q^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}} +$ etc. Sumantur differentialia et diuidatur per bdq habebitur $\frac{qdx+xdq}{bdq} = \frac{1}{g} + \frac{b^mq^m}{g^2k^m} + \frac{b^{2m}q^{2m}}{g^3k^{2m}} = \frac{k^m}{gk^m-b^mq^m}$, seu $qdx + xdq = \frac{bk^mdq}{gk^m-b^mq^m}$. At quia est $q^m = n$ et $n = \frac{z}{x}$ ponatur $\frac{z^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{m}}}$ loco q et prodibit $z^{\frac{m-1}{m}}x^{\frac{m-1}{m}}dz +$

$$(m-1)z^{\frac{1}{m}}x^{\frac{-1}{m}}dx = \frac{bk^mz^{\frac{1-m}{m}}x^{\frac{m-1}{m}}dz - bk^mz^{\frac{1}{m}}x^{\frac{-1}{m}}dx}{gk^mx-b^mz}$$

Quae multiplicata per $x^{\frac{1}{m}}z^{\frac{m-1}{m}}$ abit in hanc $xdz + (m-1)zdx = \frac{bk^mxdz - bk^mzdx}{gk^mx-b^mz}$. Constructio autem curuae facilius sequitur ex aequatione $qx = \int \frac{bk^mdq}{gk^m-b^mq^m}$. Supra autem habuimus seriem ipsi qx aequalem, ex qua patet si fuerit $q^m = \frac{gk^m}{b^m}$, tum $\frac{gx}{b}$ aequari seriei harmonicae

1+

$1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m+1}$ etc. ideoque esse x infinitum. Si igitur x est infinitum, erit $q^m = \frac{z}{x} = \frac{gk^m}{b^m}$, ex quo perspicitur rectam AE fore curuae asymtoton et cosinum ang. CAE fore $= \frac{b^m}{gk^m}$. Verticis autem curuae C a puncto A distantia AC aequalis erit huic seriei $\frac{b}{g} + \frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}} +$ etc. Debet autem esse necessario $b^m < gk^m$, alias enim vertex C a puncto A infinite distaret. Q. E. I.

Corollarium 1.

490. Si applicata PM vocetur y, erit $z = \surd(x^2+y^2)$ et $dz = \frac{xdx+ydy}{\surd(x^2+y^2)}$, quibus valoribus in aequatione inuenta substitutis habebitur $xydy + mx^2dx + (m-1)y^2dx = \frac{bk^my(xdy-ydx)}{gk^mx - b^m\surd(x^2+y^2)}$.

Corollarium 2.

491. Ponatur in hac aequatione $y = px$, transmutabitur ista aequatio in hanc $xpdp + mdx + mp^2dx = \frac{bk^mpdp}{gk^m - b^m\surd(1+pp)}$, quae aequatio per $(1+pp)^{\frac{1-2m}{2m}}$ mul-

multiplicata fit integrabilis, habebitur enim $m(1+pp)^{\frac{1}{2m}}x = \int \frac{bk^m p\,dp(1+pp)^{\frac{1-2m}{2m}}}{gk^m - b^m \sqrt{(1+pp)}}$, quae expressio per quadraturas effici potest.

Corollarium 3.

492. Si resistentia euanescat, corpusque in vacuo moueatur fit k infinitum; atque ex supra data serie inuenitur $qx = \frac{bq}{g}$ seu $x = \frac{b}{g}$, vnde cognoscitur lineam CM fieri rectam horizontalem.

Scholion 1.

493. Quia autem ex hac aequatione generali parum ad cognitionem curuae potest concludi, in exemplis specialibus hanc disquisitionem vlterius prosequemur. Talia autem assumemus exempla, in quibus formula $\frac{bk^m dq}{gk^m - b^m q^m}$ integrationem saltem per logarithmos admittit, quo ad expressiones finitas perueniamus, ex quibus facile erit curuae naturam perspicere.

Exemplum 1.

494. Sit igitur resistentia ipsis celeritatibus proportionalis, erit $m = \frac{1}{2}$. Ponatur $AC = a$; quia celeritas, quam corpus per AC cadendo acquirit, debita esse debet altitudini b erit $a = -$

$2\sqrt{bk} + 2gk\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}}$ (486.). Deinde vero erit $\sqrt{q} = \frac{z}{x}$ seu $q = \frac{z^2}{x^2}$, atque $qx = \int \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{bq}}$, quod integrale ita est accipiendum vt posito $z = x$ seu $q = 1$ fiat $x = a$ vel eius valori assignato. Erit ergo $qx = -2\sqrt{bkq} + 2gk\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{bq}}$, quae aequatio loco q substituto $\frac{z^2}{x^2}$ abit in hanc $z^2 = -2z\sqrt{bk} + 2gkx\, l\frac{gx\sqrt{k}}{gx\sqrt{k}-z\sqrt{b}}$ Si $q = 1$ fit $x = a = -2\sqrt{bk} + 2gk\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}}$. Fiat autem $q = 1 + dq$ habebitur $dx + xdq = -dq\sqrt{bk} + \frac{gkdq\sqrt{b}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}} = \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}}$. At quia $\frac{1}{\sqrt{q}}$ est cosinus anguli MAC erit $\sqrt{dq} =$ sinui huius anguli. Quamobrem incrementum ipsius x infinities minus est, quam incrementum anguli MAC, incidente MA in CA, ex quo sequitur tangentem curuae in C esse horizontalem; huiusque curuae tangens in infinito seu asymtota erit AE existente ang. EAC cosinu $\frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Ceterum haec curua ex altera verticalis AC parte arcum habebit similem et aequalem ipsi CMD.

Scholion 2.

495. Generaliter quidem etiam ostendi potest curuae tangentem in C esse debere horizontalem. Posita enim $n = 1$, in serie x exprimente habetur $AC = \frac{b}{g} + \frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} +$ etc. augeatur n elemento dn habebitur incrementum momentaneum ipsius $AC = \frac{b^{m+1}dn}{(m+1)g^2 k^m} +$

$\frac{2b^{2m+1}dn}{(m+1)g^3 k^{2m}}$ + etc. Est vero $\frac{1}{n}$ cosinus anguli MAC, ideoque sinus $= \frac{\surd(n^2-1)}{n} = \surd 2dn$ posito $1+dn$ loco n. Quamobrem incrementum ipsius AC infinities est minus quam incrementum anguli; atque ideo AC normalis erit in curuam DMC.

Exemplum 2.

496. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis erit $m=1$; positoque AC$=a$ erit $a = kl\frac{gk}{gk-b}$, atque $b = gk(1-e^{\frac{-a}{k}})$. Deinde vero est $q = n = \frac{z}{x}$, atque $qx = z = \int\frac{bkdq}{gk-bq} = kl\frac{gk}{gk-bq} = kl\frac{gkx}{gkx-bz}$. Habebitur ergo $e^{\frac{z}{k}} = \frac{gkx}{gkx-bz}$, vnde sequitur $x = \frac{e^{\frac{z}{k}}bz}{gk(e^{\frac{z}{k}}-1)} = \frac{e^{\frac{z}{k}}z(e^{\frac{a}{k}}-1)}{e^{\frac{a}{k}}(e^{\frac{z}{k}}-1)}$ posito loco b eius valore in a. Ad curuam autem construendam commodissime adhibetur haec aequatio $z = kl\frac{gk}{gk-bq}$, in qua z est AM et q est secans anguli MAC.

Scholion 3.

497. In solutione problematis ad inueniendam aequationem curuae CMD vsi fuimus seriei cuiusdam summatione; eandem vero aequationem

 sine

ſine ſeriebus ſequente modo elicere licet. Quia eſt $x = \int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$, haecque ipſa aequatio exprimit naturam curuae quaeſitae, ſi poſt integrationem ponatur $v = b$ et $\frac{z}{x}$ loco n. Quamobrem ſi $\int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ differentietur poſito non ſolum v ſed etiam n variabili, atque tum ponatur v conſtans $= b$ et $\frac{z}{x}$ loco n habebitur aequatio differentialis pro curua quaeſita. Ad hoc efficiendum pono $n = \frac{1}{p^m}$, quo prodeat $x = \int \frac{k^m p^m dv}{gk^m p^m - v^m}$. Ponamus breuitatis gratia $\frac{k^m p^m}{gk^m p^m - v^m} = P$, ſitque aequatio differentialis haec $dx = Pdv + Qdp$, ſi etiam p variabilis accipiatur. Quia autem P eſt functio nullius dimenſionis ipſarum v et p erit $x = Pv + Qp$, ideoque $Q = \frac{x}{p} - \frac{Pv}{p}$. Hoc igitur loco Q valore ſubſtituto prodibit $pdx = \frac{k^m p^{m+1} dv - k^m p^m v\, dp}{gk^m - nv^m} + x\,dp$. Reſtituatur $n^{\frac{-1}{m}}$ loco p, et orietur $mn\,dx + x\,dn = \frac{mk^m n\,dv + k^m v\,dn}{gk^m - nv^m}$, in qua aequatione n aeque variabilis eſt aſſumta ac v et x. Nunc ponatur $v = b$, $dv = 0$ et $n = \frac{z}{x}$ atque habebitur iſta aequatio: $x\,dz + (m-1)z\,dx =$

$\frac{bk^m(xdz-zdx)}{gk^m x - b^m z}$, quae cum aequatione supra inuenta congruit.

PROPOSITIO 57.
Problema.

498. *Si resistentia fuerit in quacunque multiplicata ratione celeritatum; inuenire curuam* A M C *huius proprietatis, vt corpus descendens super quauis subtensa* AM *dato tempore ex* A *ad* M *perueniat.* Tabula XII. Fig. 5.

Solutio.

Ducta verticali AC ponatur AP $= x$, AM $= z$; sitque $n = \frac{z}{x}$. Posita altitudine celeritati in M debita $= v$ et resistentia $= \frac{v^m}{k^m}$ sit tempus quo corpus per AM descendit $= t$, quod debet esse quantitas constans. Habebimus ergo ex praecedentibus $x = \int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ et $t = \int \frac{nk^m dv}{(gk^m - nv^m)\sqrt{v}}$ (385.). Quocirca ad naturam curuae AMC inueniendam, opus est vt vtraque aequatio, si fieri potest, re ipsa integretur, et valor ipsius v ex altera aequatione in altera substituatur, atque tum loco n scribatur $\frac{z}{x}$, quo facto habebitur aequatio inter

 x et z

x et z naturam curuae quaesitae exprimens. At si integrationes non commode perfici poterunt, vtraque aequatio est differentianda ponendo quoque n variabili; et postquam positum est $dt = o$, ex duabus aequationibus inuentis eliminari debet v, quo prodeat aequatio n et x tantum continens, quae ob $n = \frac{z}{x}$ exhibebit naturam curuae quaesitae. Ad hoc ponatur $n = \frac{1}{p^m}$, quo habeamus $x = \int \frac{k^m p^m dv}{gk^m p^m - v^m}$ et $t = \int \frac{k^m dv}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}}$. Quarum aequationum illius sumto quoque p variabili differentialis iam est inuenta $pdx - xdp = \frac{k^m p^{m+1} dv - k^m p^m v dp}{gk^m p^m - v^m}$ (497.). Ad alteram aequationem differentiandam pono $\frac{k^m}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}} = P$, sitque $dt = Pdv + Qdp$. Quia autem P est functio ipsarum v et p dimensionum $-m-\frac{1}{2}$ erit $(\frac{1}{2}-m)\, t = Pv = + Qp$, atque hinc $Q = \frac{(1-2m)t}{2p} - \frac{Pv}{p}$. Quo valore loco Q substituto prodibit $pdt = \frac{k^m(pdv - vdp)}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}} + \frac{(1-2m)tdp}{2}$. Sit nunc $t = 2\sqrt{c}$ atque $dt = o$, habebimus $(2m-1)\, dp\sqrt{c} = \frac{k^m(pdv - vdp)}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}}$. Eliminetur ex his duabus aequationibus dv et proueniet $pdx - xdp = (2m-1)$ p^m

$p^m dp\sqrt{cv}$ seu $\sqrt{v} = \frac{pdx - xdp}{(2m-1)p^m dp\sqrt{c}} = \frac{dr}{(2m-1)p^{m-2}dp\sqrt{c}}$ posito $x = rp$. Substituatur hic valor loco v in aequatione $(2m-1)dp\sqrt{c} = \frac{k^m(pdv - vdp)}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}}$ vel in hac $\frac{dr}{p^{m-2}} = \frac{k^m(pdv - vdp)}{gk^m p^m - v^m}$

Casu quidem quo $m = \frac{1}{2}$ seu resistentia celeritatibus proportionalis erit $pdv = vdp$ seu $v = \alpha p$ et $p = b = x = \frac{1}{n^2} = \frac{xx}{zz}$, vnde sequitur fore $zz = ax$; quamobrem in hac resistentiae hypothesi curua AMC est circulus omnino vt in vacuo. In aliis hypothesibus nisi re ipsa aequatio alterutra integretur eliminata v habebitur aequatio differentio-differentialis inter z et x naturam curuae exprimens. Q. E. I.

Corollarium I.

499. Si ponatur $v = up$, erit $pdv - vdp = ppdu$

Atque hinc erit $\sqrt{u} = \frac{dr}{(2m-1)p^{m-\frac{3}{2}}dp\sqrt{c}}$, qui valor substitutus in aequatione $dr = \frac{k^m du}{gk^m - u^m}$ dabit aequationem inter p et r, ex qua aequatio inter x et z formabitur.

Co-

Corollarium 2.

500. In medio ergo quod resistit in simplici celeritatum ratione apparet curuam AMC esse circulum. Atque ideo in hac resistentiae hypothesi tempora descensuum per singulas circuli chordas ex puncto A ductas sunt inter se aequalia.

Exemplum 1.

501. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis erit $m = 1$, atque $x = \frac{k}{n} l \frac{gk}{gk - nv}$ seu $v = \frac{gk}{n}(1 - e^{\frac{-nx}{k}})$. Praeterea vero erit $t = 2\sqrt{c} = \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{g}} l \frac{\sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}}$ seu $e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} = \frac{\sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}}$, vnde fit $v = \frac{gk(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} - 1)^2}{n(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} + 1)^2}$. Eliminata ergo v et $\frac{z}{x}$ posito loco n habebitur $\frac{e^{\frac{z}{k}} - 1}{e^{\frac{z}{k}}} = \frac{(e^{\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}}} - 1)^2}{(e^{\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}}} + 1)^2}$ seu $\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}} = l \frac{1 + \sqrt{(1 - e^{\frac{-z}{k}})}}{1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-z}{k}})}}$. In hac curua est $AC = k\, l \frac{(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + 1)^2}{4 e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}} = k\, l \frac{e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{\frac{-\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}}{2}$, si igitur ponatur

AC

$AC = a$, erit $2e^{\frac{a}{2k}} = e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{\frac{-\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}$: vnde erit $e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} = e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)}$, seu $\sqrt{\frac{gc}{k}} = l(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)})$. Erit igitur $\sqrt{x}\, l(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)}) = \sqrt{z}\, l(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{z}{k}} - 1)})$ aequatio pro curua AMC. Si resistentia fuerit valde parua, erit k quantitas vehementer magna, atque ideo $e^{\frac{z}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{z}{k}} - 1)} = 1 + \frac{z}{2k} + \sqrt{(\frac{z}{k} + \frac{z^2}{2k^2})} = 1 + \sqrt{\frac{z}{k}} + \frac{z}{2k} + \frac{z\sqrt{z}}{4k\sqrt{k}}$ huiusque logarithmus erit $= \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{k}} + \frac{z\sqrt{z}}{12k\sqrt{k}}$. Simili modo erit $l(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{e^{\frac{a}{k}} - 1})) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{k}} + \frac{a\sqrt{a}}{12k\sqrt{k}}$. Atque hanc ob rem habebitur pro curua AMC haec aequatio $\sqrt{ax} + \frac{a\sqrt{ax}}{12k} = z + \frac{z^2}{12k}$ seu $ax(1 + \frac{a}{6k} + \frac{a^2}{144k^2}) = z^2 + \frac{z^3}{6k} + \frac{z^4}{144k^2}$ Vnde perspicitur si resistentia prorsus euanescat seu k fiat infinite magnum fore $ax = z^2$ atque ideo curuam AMC circulum. At si medium rarissimum fuerit, erit $ax(a + 6k) = 6kz^2 + z^3$, et differentiando $adx(a + 6k) = 12kzdz + 3z^2 dz$. Si nunc fiat $zdz = xdx$ habebitur applicata PM maxima, seu locus vbi tangens curuae est verticalis, scilicet $a^2 + 6ak = 12kx + 3xz$ seu $x = \frac{a^2 + 6ak}{12k + 3z}$, vnde fit $\frac{(6ak + a^2)^2}{3} = 24k^2z^2 + 10kz^3 + z^4$, ex qua aequatione ipsius z valor quam proxime est $\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{(4\sqrt{2} - 5)a^2}{48k}$, atque $x = \frac{a}{2}$ —

 $(3\sqrt{2}$

$\frac{(3\sqrt{2}-4)a^2}{48k}$ et $PM = \frac{a}{2} + \frac{(2-\sqrt{2})a^2}{24k}$. Curua ergo latiſſima eſt ſupra medietatem, ibique latior eſt quam altitudo AC.

Corollarium 3.

502. Si igitur linea recta vel curua hanc curuam AMC in M tangat, ita vt tota extra ſpatium AMC ſit ſita, corpus ex A ad eam lineam citius perueniet deſcendendo ſuper chorda AM, quam ſuper quauis alia recta ex A ad eam lineam ducta.

Exemplum 2.

503. Sit m numerus affirmatiuus et reſiſtentia valde parua, erit k quantitas vehementer magna, atque hinc $\frac{k^m}{gk^m - nv^m} = \frac{1}{g} + \frac{nv^m}{g^2k^m}$. Quocirca erit $x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$ atque $t = 2\sqrt{c}$ $= \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2v^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2k^m}$; hincque prodit v $= gx - \frac{ng^mx^{m+1}}{(m+1)k^m}$, et $\sqrt{v} = \sqrt{gx} - \frac{ng^{m-\frac{1}{2}}x^{m+\frac{1}{2}}}{2(m+1)k^m}$ atque $v^{m+\frac{1}{2}} = g^{m+\frac{1}{2}}x^{m+\frac{1}{2}} - \frac{n(2m+1)g^{2m-\frac{1}{2}}x^{2m+\frac{1}{2}}}{2(m+1)k^m}$

His autem valoribus ſubſtitutis prodit iſta aequa-

tio $\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{x}} = n + \frac{n^2 g^{m-1} x^m}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{n^3 g^{2m-2} x^{2m}}{(2m+2)k^{2m}}$.
Quia vero est $n = \frac{z}{x}$, habebitur ista aequatio $\sqrt{g}$
$$cx = z + \frac{g^{m-1} x^{m-1} z^2}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{g^{2m-2} x^{2m-2} z^3}{(2m+2)k^{2m}}$$
seu $gcx = z^2 + \frac{g^{m-1} x^{m-1} z^3}{(m+1)(2m+1)k^m}$ si medium est rarissimum. Vnde patet si resistentia penitus euanescat fore $z^2 = gcx$ seu curuam AMC circulum diametri AC.

Scholion.

504. Si igitur cognita fuerit curua AMC, et detur linea quaecunque determinari poterit recta AM super qua corpus ex A celerrime ad datam lineam pertingat. Scilicet construenda est curua AMC, quae datam lineam tangat v. g. in M; eritque recta AM ea recta super qua corpus descendendo ex A citissime ad lineam datam perveniat. Atque simili modo in praecedente problemate si recta vel curua tangat curuam CMD Tabula XII. Fig. 4. in M, corpus ex A descendendo per AM vsque ad lineam tangentem curuam CMD maiorem acquiret celeritatem, quam descendendo super quavis alia recta ex A ad eam lineam ducta. Ex his igitur solui possunt problemata, quibus requiritur recta ex A ad datam lineam ducta, super qua corpus descendendo vel maximam acqui-

 rat

rat celeritatem, vel citissime ad eam lineam pertingat. Quamobrem hisce problematibus non diutius immorabimur, sed ad ascensum super lineis rectis considerandum progrediemur.

PROPOSITIO 58.

Problema.

Tabula XII. Fig. 6. 505. *In hypothesi grauitatis vniformis* g *et medio quocunque resistente vniformi determinare motum corporis data cum celeritate initiali ex* A *ascendentis super linea recta* AB *vtcunque inclinata ad horizontem.*

Solutio.

Ducta horizontali AC et ex M ad eam perpendiculari MP vocetur PM$=x$, sitque AM$=nx$. Sit altitudo debita celeritati initiali in A$=b$, et altitudo debita celeritati initiali in M$=v$; resistentia vero in M sit $=\frac{V}{K}$. His positis erit $dv=-gdx-\frac{nVdx}{K}$ (475.), vnde habetur $dx=\frac{-Kdv}{gk+nV}$ atque $x=\int\frac{-Kdv}{gK+nV}$ hoc integrali ita accepto vt euanescat posito $v=b$. Si deinde ponatur $v=o$, prodibit $x=$BC, vbi in puncto B corpus omnem celeritatem amittit. Tempus vero, quo corpus per AM ascendit est $=\int\frac{-nKdv}{(gK+nV)\sqrt{v}}$ hoc integrali quoque ita accepto, vt euanescat posito $v=b$, in quo si si porro ponatur $v=o$, prodibit tempus totius ascensus per AMB. Pressio autem, quam linea AMB sustinet, vbique est constans et aequalis vi normali $= \frac{g\sqrt{(n^2-1)}}{n}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

506. Si linea AMB fit horizontalis euanescente angulo BAC fiet $n=\infty$. Posito igitur AM $=z=nx$, erit $z=\int\frac{-Kdv}{V}$, et tempus quo per AM progreditur erit $=\int\frac{-Kdv}{V\sqrt{v}}$.

Corollarium 2.

507. Si resistentia fuerit vt potestas exponentis $2m$ celeritatum erit $V=v^m$ et $K=k^m$. Hoc ergo casu erit $x=\int\frac{-k^m dv}{gk^m+nv^m}$, atque tempus per AM $=\int\frac{-nk^m dv}{(gk^m+nv^m)\sqrt{v}}$.

Corollarium 3.

508. Vtraque haec expressio in seriem conversa dat $x=\frac{b-v}{g}-\frac{n(b^{m+1}-v^{m+1})}{(m+1)g^2k^m}+\frac{n^2(b^{2m+1}-v^{2m+1})}{(2m+1)g^3k^{2m}}-$ etc. Atque tempus per AM $=\frac{2n(\sqrt{b}-\sqrt{v})}{g}-\frac{2n^2(b^{m+\frac{1}{2}}-v^{m+\frac{1}{2}})}{(2m+1)g^2k^m}+$

 2n

$\frac{2n^3(b^{2m+\frac{1}{2}}-v^{2m+\frac{1}{2}})}{(4m+1)g^3k^{2m}}$ — etc. Quamobrem posito $v=o$ erit $BC=\frac{b}{g}-\frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}+\frac{n^2b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}}$ — etc. atque tempus totius ascensus per $AB=\frac{2n\sqrt{b}}{g}-\frac{2n^2b^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2k^m}+\frac{2n^3b^{2m+\frac{1}{2}}}{(4m+1)g_3k^{2m}}$ — etc.

Exemplum I.

509. Sit resistentia celeritatibus proportionalis, erit $m=\frac{1}{2}$, atque $x=\int\frac{-dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k}+n\sqrt{v}}=\frac{2\sqrt{bk}}{n}-\frac{2\sqrt{kv}}{n}+\frac{2gk}{n^2}\,l\,\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{v}}{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}$. Hinc erit tota altitudo BC ad quam corpus pertingere valet $=\frac{2\sqrt{bk}}{n}-\frac{2gk}{n^2}\,l\,\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Tempus vero, quo per AM ascendit est $=\int\frac{-ndv\sqrt{k}}{(g\sqrt{k}+n\sqrt{v})\sqrt{v}}=2\sqrt{k}\,l\,\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}+n\sqrt{v}}$. Quare
Tabula XII. Fig 7. tempus totius ascensus per AMB erit $=2\sqrt{k}\,l\,\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Si igitur corpus super linea inclinata AC descenderit et celeritate in C acquisita ascendat in CB vsque ad B; sitque AC $=$ N. AD et BC $=n$. BE atque celeritas in C debita altitudini b; erit $AD=-\frac{2\sqrt{bk}}{N}+\frac{2gk}{N^2}\,l\,\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$; $AC=-2\sqrt{bk}+\frac{2gk}{N}\,l\,\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$ (486); $BE=\frac{2\sqrt{bk}}{n}-\frac{2gk}{n^2}\,l\,\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$; $CB=2\sqrt{bk}-\frac{2gk}{n}\,l\,\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Atque tempus descensus per $AC=2\sqrt{k}\,l\,\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$ (cit.) et tempus ascensus per $CB=2\sqrt{k}\,l\,\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Vnde

de descensus et ascensus super lineis rectis inter se comparari possunt.

Corollarium 4.

510. Si hi logarithmi per series exprimantur, patet fieri non posse, vt sit $BE = AD$, est enim in quacunque resistentiae hypothesi, vt ex seriebus (508. et 488.) intelligitur, $BE < \frac{b}{g}$ et $AD > \frac{b}{g}$. Fieri autem potest vt sit $AC = BC$.

Corollarium 5.

511. Effici autem facile potest vt tempus descensus per AC aequale sit tempori ascensus per CB. Fieri scilicet debet $ng\sqrt{k} = Ng\sqrt{k} + Nn\sqrt{b}$, seu $n = \frac{Ng\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - N\sqrt{b}}$. Est igitur $n > N$ seu ang. $BCE <$ ang. ACD. Relatio autem inter N et n pendet a celeritate in puncto C.

Corollarium 6.

512. Si autem angulus BCE aequalis fuerit angulo ACD, seu $N = n$ tempus ascensus per BC minus erit tempore descensus per AC. Atque hoc generaliter locum habet in quacunque resistentiae hypothesi; est enim tempus descensus per $AC > \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ et tempus ascensus per $CB < \frac{2n\sqrt{b}}{g}$, vt ex seriebus supra datis (488. et 508.) apparet.

Exem-

Exemplum 2.

Tabula XII. Fig. 6. 513. Resiſtat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m = 1$. Quare habebitur $x = \int \frac{-kdv}{gk+nv} = \frac{k}{n} l \frac{gk+nb}{gk+nv}$ atque $BC = \frac{k}{n} l \frac{gk+nb}{gk}$, et $AB = k l \frac{gk+nb}{gk}$. Tempus vero aſcenſus AM erit $= \int \frac{-nkdv}{(gk+nv)\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}}$ (A. tang. $\sqrt{\frac{nb}{gk}}$ − A. tang. $\sqrt{\frac{nv}{gk}}$) exiſtente radio $= 1$, et A denotante arcum circuli. Erit ergo tempus aſcenſus per $AB = \frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}}$ A tang. $\sqrt{\frac{nb}{gk}}$

Tabula XII. Fig. 7. Si nunc corpus ſuper linea inclinata AC deſcenderit, et celeritate in C acquiſita, quae debita ſit altitudini b rurſus aſcendat per CB, fueritque $AC = N.AD$ et $BC = n.BE$, erit $AD = \frac{K}{N} l \frac{gk}{gk-Nb}$ et $AC = k l \frac{gk}{gk-Nb}$, atque tempus deſcenſus per $AC = \frac{\sqrt{Nk}}{\sqrt{g}} l \frac{\sqrt{gk}+\sqrt{Nb}}{\sqrt{gk}-\sqrt{Nb}}$ (487.). Porro vero erit $BE = \frac{k}{n} l \frac{gk+nb}{gk}$; $BC = k l \frac{gk+nb}{gk}$ et tempus aſcenſus per $CB = \frac{2\sqrt{nk}}{\sqrt{g}}$ A. tang. $\sqrt{\frac{nb}{gk}}$.

Corollarium 7.

514. In hac reſiſtentiae hypotheſi commode effici poteſt, vt ſit $AC = BC$: debebit enim eſſe $ngk = Ngk + Nnb$, ſeu $n = \frac{Ngk}{gk-Nb}$. Eſt igitur $n > N$ hincque ang. $BCE < ACD$.

Exemplum 3.

515. Sit reſiſtentia quam minima et proportionalis poteſtati $2m$ celeritatum, erit k quantitas vehe-

vehementer magna. Si ergo celeritas in C fuerit debita altitudini b et AC $=$ N. AD atque BC $= n$. BE, corpusque super AC descendat et super CB ascendat; erit AD $= \frac{b}{g} + \frac{Nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$; et tempus descensus per AC $= \frac{2N\sqrt{b}}{g} + \frac{2N^2b^m\sqrt{b}}{(2m+1)g^2k^m}$ (488.). Pro ascensu vero erit BE $= \frac{b}{g} - \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$ et tempus per CB $= \frac{2n\sqrt{b}}{g} - \frac{2n^2b^m\sqrt{b}}{(2m+1)g^2k^m}$ (508) Si igitur effici debeat vt sit AC $=$ BC, oportet esse $N + \frac{N^2b^m}{(m+1)gk^m} = n - \frac{n^2b^m}{(m+1)gk^m}$, vnde fit $n = N + \frac{2N^2b^m}{(m+1)gk^m}$, propter quantitatem k valde magnam. At quo tempus descensus per AC aequale sit tempori ascensus per CB, debet esse $N + \frac{N^2b^m}{(2m+1)gk^m} = n - \frac{n^2b^m}{(2m+1)gk^m}$, seu $n = N + \frac{2N^2b^m}{(2m+1)gk^m}$.

Scholion I.

516. In casu huius exempli, quo resistentia est valde parua, curua AMD potest determinari Tabula XII. Fig. 8.

huius proprietatis, vt corpus ex C celeritate altitudini b debita ascendendo super quauis recta CM ad curuam AMD pertingat. Posita enim $CM = z$, et $MP = x$, erit $n = \frac{z}{x}$ atque $x = \frac{b}{g} - \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$. Quare habebitur ista aequatio $b^{m+1}z = (m+1)gbk^m x - (m+1)g^2k^m x^2$. Sit $CP = y$ et loco $\frac{b^{m+1}}{(m+1)gk^m}$ scribatur f orietur $f\sqrt{(x^2+y^2)} = bx - gx^2$ seu $ffyy = (bb-ff)xx - 2gbx^3 + g^2x^4$. Si ponatur $y = o$, erit et $x = o$ et $x = \frac{b-f}{g} = CA$. Curua ergo etiam per punctum C transit, quae autem eius pars quaestioni satisfacere cessat, propter sequentes terminos neglectos, qui perperam negliguntur si n seu $\frac{z}{x}$ fit quoque valde magnum. Aequatio vero dat curuam ellipsiformem maxime oblongam circa axem minorem AC descriptam. Vera autem curua habet formam AMD, cuius asymtotos est horizontalis CE, si quidem est $m > 1$, eiusque aequatio habetur omnibus sumendis terminis, quae erit $xdz + (m-1)zdx = \frac{bk^m(zdx - xdz)}{gk^m x + b^m z}$. Si $m < 1$ curua non in infinitum progredietur, sed incidet in CE sumendo $CE = \frac{bk^m}{(1-m)b^m}$. Nam si $m < 1$ corpus horizontaliter non in infinitum progredi potest, sed in distantia finita omnem amittit celeritatem.

Scho-

Scholion 2.

517. Si medium resistens non sit vniforme, tum linea non esset recta, super qua motus facillime determinari posset: idem quoque est notandum si potentia sollicitans non fuerit vniformis. Vt sit potentia sollicitans $= P$ et resistentia $= \frac{V}{Q}$, vbi Q talis est functio exponentis resistentiae variabilis q, qualis V est ipsius v: His positis motus corporis super quacunque curua exprimitur hac aequatione $dv = + Pdx + \frac{Vds}{Q}$. Eius ergo curuae, super qua motus facillime definitur, haec erit aequatio $PQdx = Ads$, ex qua oritur sequens $\frac{Adv}{\pm A \pm V} = Pdx$, motum super hac curua determinans, in qua indeterminatae sunt a se inuicem separatae. Quare si etiam huiusmodi hypotheses persequi vellemus, loco linearum rectarum huiusmodi curuas hac aequatione expressas $PQdx = Ads$ assumere deberemus. Sed quia statuimus hypothesin potentiae sollicitantis et resistentiae vniformis tantum susius pertractare, missis his ad eos casus progredimur, in quibus v vnicam tantum habet dimensionem, id quod euenit, si resistentia proportionalis fuerit quadratis celeritatum.

PROPOSITIO 59.

Problema.

518. *In hypothesi grauitatis vniformis* g, *et resistentiae quadratis celeritatum proportionalis descen-* Tabula XII. Fig. 1.

 dat

dat corpus ſuper curua quacunque AMB; *determinare eius motum et preſſionem, quam curua in ſingulis punctis ſuſtinet.*

Solutio.

In axe verticali ſumatur abſciſſa AP $= x$ et ponatur arcus AM $= s$, celeritas in M debita altitudini v et exponens reſiſtentiae k, erit reſiſtentia $= \frac{v}{k}$. Quamobrem iſta habebitur aequatio motum corporis exponens $dv = gdx - \frac{vds}{k}$ (465). Ad hanc integrandam multiplico per $e^{\frac{s}{k}}$ eritque integralis $e^{\frac{s}{k}} v = \int e^{\frac{s}{k}} g\,dx$. Ita autem ſumi debet hoc integrale, vt poſito $s = o$, abeat v in altitudinem celeritati initiali in A debitam. Si igitur deſcenſus ex quiete fieri ponatur, $e^{\frac{s}{k}} g\,dx$ ita debet integrari vt euaneſcat poſito $s = o$. Hoc itaque facto erit $v = g \cdot e^{\frac{-s}{k}} \int e^{\frac{s}{k}} dx$. Vnde tempus per AM erit $= \int \frac{e^{\frac{-s}{2k}} ds}{\sqrt{g \int e^{\frac{s}{k}} dx}}$. Poſito nunc PM $= y$ ſumtoque dx conſtante, erit preſſio, quam curua in M ſecundum normalem MN ſuſtinet $= \frac{gdy}{ds} + \frac{2ge^{\frac{-s}{k}} dx\,ddy \int e^{\frac{s}{k}} dx}{ds^3}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

519. Pressio, quam curua sustinet in hanc formam potest transmutari $\frac{g\,ds}{e^{-\frac{s}{k}}dy\,dx} - d.\frac{dy^2}{ds^2}\int e^{\frac{s}{k}} dx$, quae, postquam pro data curua integratum est $e^{-\frac{s}{k}}dx$, commodius ad quosuis casus accommodatur.

Corollarium 2.

520. Corpus in descensu maximam habet celeritatem, vbi est $v = \frac{gk\,dx}{ds}$. Hoc vero euenit vbi est $e^{-\frac{s}{k}}k\,dx = ds\int e^{-\frac{s}{k}}dx$, seu vbi $d.\,l\int e^{-\frac{s}{k}}dx = \frac{ds}{k}$, in quo puncto patet tangentem non esse horizontalem.

Corollarium 3.

521. Si fuerit $\int e^{-\frac{s}{k}}dx = \frac{e^{-\frac{s}{k}}s^n}{a^{n-1}}$, erit $dx = \frac{ns^{n-1}ds}{a^{n-1}} + \frac{s^n ds}{a^{n-1}k}$ atque $x = \frac{s^n}{a^{n-1}} + \frac{s^{n+1}}{(n+1)a^{n-1}k}$. Quare si haec aequatio exprimat curuae quaesitae naturam, erit $v = \frac{gs^n}{a^{n-1}}$ et tempus per AM $= \frac{2a^{\frac{n-1}{2}}s^{\frac{2-n}{2}}}{(2-n)\sqrt{g}}$ si quidem n fuerit minor binario; nam

nam si $n = 2$ vel $n > 2$, curua in A tangentem horizontalem habebit, atque corpus ibi perpetuo permanebit.

Corollarium 4.

522. Simili modo etiam perspicitur, si x fuerit potestas quaecunque ipsius s vel huiusmodi potestatum aggregatum, semper integrari posse $e^{\frac{s}{k}}dx$ atque ideo celeritatem terminis finitis exhiberi.

Corollarium 5.

523. Si autem abscissae in axe verticali BQ sumantur et celeritas, quam corpus in B habebit debita sit altitudini b; praetereaque vocetur BQ $= x$ et BM $= s$, erit $dv = -gdx + \frac{vds}{k}$, cuius integralis est $e^{\frac{-s}{k}}v = b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ integrali scilicet $\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ ita accepto vt euanescat posito $x = 0$. Hanc ob rem erit $v = be^{\frac{s}{k}} - ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$, et tempus, quo in descensu arcus MB absoluitur $=$

$$\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)}}.$$

Corollarium 6.

524. Si igitur detur celeritas in puncto B nempe $\sqrt{b}$, inueniri potest in curua BMA punctum A, ex quo descendere incepit, vbique celeritatem ha-

habuit $=o$. Quaeri debet scilicet locus, vbi est $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \frac{b}{g}$. Atque etiam expressio temporis $\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)}}$ dabit tempus totius descensus per AMB, si post integrationem ponatur $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \frac{b}{g}$.

Scholion.

525. Duplicem hic motum inuestigandi modum ideo attulimus, vt tam ad descensus ex dato puncto factos, quam ad descensus vsque ad datum punctum, vt in motu oscillatorio fieri solet, accommodari possit.

PROPOSITIO 60.

Problema.

526. *Existente potentia sollicitante vniformi et medio vniformi resistente in duplicata ratione celeritatum; determinare motum corporis ascendentis super data curua* AMD, *et pressionem quam curua sustinet in singulis punctis M.* Tabula XII. Fig. 2.

Solutio.

In linea verticali AP ponatur abscissa AP $= x$, arcus AM $= s$; celeritas in A debita altitudini b, et celeritas in M altitudini v. Sit potentia sollicitans deorsum $= g$ et resistentia $= \frac{v}{k}$. His positis erit $dv = -gdx - \frac{vds}{k}$ (475.), quae multiplicata

cata per $e^{\frac{s}{k}}$ dat integrale $e^{\frac{s}{k}}v = b - g\int e^{\frac{s}{k}}dx$ ita sumto $\int e^{\frac{s}{k}}dx$ ut euanescat posito $x = 0$. Hanc ob rem erit $v = e^{\frac{-s}{k}}b - ge^{\frac{-s}{k}}\int e^{\frac{s}{k}}dx$, atque tempus ascensus per arcum AM $= \int \frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{\sqrt{(b - g\int e^{\frac{s}{k}}dx)}}$. Ex inuenta celeritate habebitur pressio, quam curua in M secundum normalem MN patitur, $= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^3}$ (475), posito PM $= y$ et sumto dx pro constante. Q. E. I.

Corollarium 1.

527. Posito ergo $v = 0$, erit $g\int e^{\frac{s}{k}}dx = b$, ex qua aequatione obtinebitur punctum D, quousque corpus ex A ascendere poterit. Atque tempus totius ascensus per AMD habebitur, si in expressione temporis ponatur $g\int e^{\frac{s}{k}}dx = b$.

Corollarium 2.

528. Si in formula pressionem exhibente loco v eius valor inuentus substituatur, habebitur

$$-\frac{2e^{\frac{-s}{k}}bdxddy}{ds^3} + \frac{gdy}{ds} + \frac{2ge^{\frac{-s}{k}}dxddy\int e^{\frac{s}{k}}dx}{ds^3}$$

Quae transmutari potest in hanc formam —

2e

$$\frac{2e^{\frac{-s}{k}}bdx\,ddy}{ds^3}+\frac{g\,ds}{e^{\frac{s}{k}}dy\,dx}\,\mathrm{d}.\frac{dy^2}{ds^2}\int e^{\frac{s}{k}}dx.$$

Corollarium 3.

529. Pro descensu vero, si celeritas in A debita quoque est altitudini b, pressio quam curua in M secundum normalem MN sustinet est $=-$

$$\frac{2e^{\frac{s}{k}}bdx\,ddy}{ds^3}+\frac{ge^{\frac{s}{k}}ds}{dy\,dx}\,\mathrm{d}.\frac{dy^2}{ds^2}\int e^{\frac{-s}{k}}dx.$$

Corollarium 4.

530. Si igitur tam ascensus quam descensus respectu axis AP definiatur, aequatio ascensum determinans transmutari potest in aequationem descensus scribendo $-k$ loco k; atque vicissim. Quare si super curua AM descensus fuerit determinatus, habebitur quoque ascensus et vicissim.

Scholion.

531. Quia formulae ascensum et descensum determinantes tantam inter se habent affinitatem, ascensus et descensus facile poterunt inter se comparari, atque ideo oscillationes super data curua determinari. Id quod in sequente propositione, quantum generaliter fieri potest, praestabimus.

PROPOSITIO 61.

Problema.

Tabula XII. Fig. 9. 532. *Sint curuae quaecunque* MA *et* NA *in infimo puncto* A *coniunctae, atque corpus descendat super curua* AN *in medio resistente vniformi secundum quadrata celeritatum; inter se comparare descensum super curua* MA *et ascensum super curua* AN.

Solutio.

Sit celeritas in puncto A debita altitudini b; atque in axe verticali AP abscissa AP$=x$, arcus AM$=s$. Pro curua ascensus AN vero sit AQ$=t$ et AN$=r$. His positis erit corporis descendentis celeritas in M debita altitudini $e^{\frac{s}{k}}b - ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$. (523.) Corporis vero ascendentis super curua AN celeritas in N debita est altitudini $e^{\frac{-r}{k}}b - ge^{\frac{-r}{k}}\int e^{\frac{r}{k}}dt$ (526). Quare si celeritates in M et N euanescant, ita vt MAN sit arcus vna semioscillatione descriptus erit $\frac{b}{g} = \int e^{\frac{-s}{k}}dx$ et $\frac{b}{g} = \int e^{\frac{r}{k}}dt$. Si nunc concipiatur alia semioscillatio arcum mAn absoluens, in qua celeritas in puncto A debita sit altitudini $b + db$, erit $\frac{b+db}{g} = \int e^{\frac{-s}{k}}dx + e^{\frac{-s}{k}}dx$, hincque $e^{\frac{-s}{k}}dx = \frac{db}{g}$, seu $e^{\frac{-AM}{k}}.Pp = \frac{db}{g}$. Similiter pro ascensu erit $e^{\frac{AN}{k}}.Qq = \frac{db}{g}$. Ex quibus

bus fiet $\frac{Pp}{Qq} = e^{\frac{AM+AN}{k}}$, seu $lPp - lQq = \frac{AM+AN}{k}$. Dato ergo arcu MAN vna semioscillatione descripto, si corpus in puncto proximo superiore m descendere incipiat, inuenietur punctum n ad quod supra N pertinget: erit nempe $Qq = \frac{Pp}{e^{\frac{AM+AN}{k}}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

533. Si igitur MAN et mAn fuerint duo arcus oscillationibus proximis descripti, erit semper $Qq < Pp$, eoque minus erit Qq quam Pp, quo maior fuerit summa arcuum $AM+AN$. Semper igitur quoque erit AQ minor quam AP.

Corollarium 2.

534. In vacuo, quia est $k = \infty$, erit $e^{\frac{AM+AN}{k}} = 1$; fietque $Qq = Pp$, atque hinc $AQ = AP$. Quare corpus oscillans in vacuo ad tantam ascendit altitudinem, quanta erat illa ex qua descendit.

Corollarium 3.

535. Si resistentia fuerit valde parua, ideoque k vehementer magnum, erit $e^{\frac{AM+AN}{k}} = 1 + \frac{MAN}{k}$. Quare hoc casu erit $Qq + \frac{MAN.Qq}{k} = Pp$, atque $Qq = \frac{Pp(k - MAN)}{k}$.

Corollarium 4.

536. Si punctum O fuerit locus, in quo corpus descendens maximam habet celeritatem, ibique ponatur $AO = s$, $AS = x$, erit $\frac{gkdx}{ds} = e^{\frac{s}{k}} b - g e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} dx$, seu $b = g \int e^{\frac{-s}{k}} dx + \frac{gkdx}{ds}$. Quare si corpus ex m descendat, erit punctum maximae celeritatis in o, existente $db = g e^{\frac{-s}{k}} dx + \frac{gkdy}{p}$ existente $dy = ov$ et radio osculi in puncto O, seu $\frac{db}{g} = e^{\frac{-AO}{k}} Ss + \frac{kov}{p}$.

Corollarium 5.

537. Tempus vnius itus per MAN habetur, si in integralium summa $\int \frac{e^{\frac{-s}{2k}} ds}{\sqrt{(b - g \int e^{\frac{-s}{k}} dx)}} + \int \frac{e^{\frac{r}{2k}} ds}{\sqrt{(b - g \int e^{\frac{r}{k}} dt)}}$ ponatur $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = g$ atque $\int e^{\frac{r}{k}} dt = \frac{b}{g}$. Sicque prodibit tempus vnius semioscillationis.

Corollarium 6.

538 Ex dictis alia elegans sequitur proprietas, vt si corpus ex A celeritate $\sqrt{b}$ ascendat ad N atque ex N iterum decidat per NA sitque celeritas quam tum in A habebit debita altitudini c. Dein-

Deinde ex A celeritate altitudini $b+db$ debita aſcendat pertingatque ad n, vnde rurſus deſcendendo in A acquirat celeritatem altitudini $c+dc$ debitam. Erit ergo $\frac{db}{g}=e^{\frac{AN}{k}}.Qq$ et $\frac{dc}{g}=e^{\frac{-AN}{k}}.Qq$. Atque $Qq^2=\frac{db.dc}{g^2}$, vel etiam $\frac{db}{dc}=e^{\frac{2AN}{k}}$.

Scholion.

539. Reſtat vt haec generalia ad exempla ſeu datas curuas accommodemus, quo vſus eorum eo magis pateat. Accipiemus autem pro curua data cycloidem tantum, eo quod $\int e^{\frac{s}{k}}dx$ in ea facile poſſit exhiberi, et aequatio quoque inter s et x ſit algebraica. Inueſtigabimus ergo tam deſcenſus ſuper cycloide factos, quam oſcillationes, quo appareat, quantum oſcillationes, quae in cycloide fiunt, ab iſochronismo diſcrepent; quippe quae in vacuo omnes eodem tempore abſolui ſunt demonſtratae.

PROPOSITIO 62.

Problema.

540. *Sit curua data cyclois* ACB *ſuper baſi horizontali* AB *prouolutione circuli diametri* CD *deſcripta; corpusque ſuper ea ex* A *deſcendat in medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum, determinare motum corporis deſcendentis.* Tab. XIII. Fig. 1.

Solutio.

Posita $2CD = a$, $AL = x$, et $AM = s$ erit ex natura cycloidis $s = a - \sqrt{(a^2 - 2ax)}$ seu $2ax = 2as - ss$. Celeritas vero in M debita sit altitudini v, erit $v = ge^{\frac{-s}{k}} \int e^{\frac{s}{k}} dx$. Quia autem est $dx = ds - \frac{sds}{a}$, erit $\int e^{\frac{s}{k}} dx = ke^{\frac{s}{k}} + \frac{k^2 e^{\frac{s}{k}}}{a} - \frac{ke^{\frac{s}{k}} s}{a} - k - \frac{k^2}{a} = e^{\frac{s}{k}} \left(\frac{ak + k^2 - ks}{a} \right) - \frac{ak - k^2}{a}$. Quo valore substituto erit $v = \frac{gak + gk^2 - gks}{a} - \frac{ge^{\frac{-s}{k}}(ak + k^2)}{a}$. Maxima corporis erit celeritas vbi est $v = \frac{gkdx}{ds} = \frac{gak - gks}{a}$; hoc igitur accidit vbi est $e^{\frac{s}{k}} k = a + k$ seu $s = k\, l \frac{a+k}{k}$. Inueniri etiam potest punctum N in quo corpus omnem celeritatem perdit faciendo $v = o$ seu $e^{\frac{s}{k}} = \frac{a+k}{a+k-s}$ seu $s = k\, l \frac{a+k}{a+k-s}$, ex qua aequatione valor ipsius s dat arcum ACN. Tempus quo arcus AM descensu absoluitur est $= \int \frac{ds\sqrt{a}}{\sqrt{gk(a+k-s-e^{\frac{-s}{k}}(a+k))}}$.

Deinde ad pressionem inueniendam est $\frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{(2as - ss)}}{a} = \frac{\sqrt{2ax}}{a}$, vnde pressio ipsa in puncto M prodit $= \frac{g\sqrt{2ax}}{a} + \frac{2gak + 2gkk - 2gks}{a\sqrt{2ax}} - \frac{2gak - 2gkk}{e^{\frac{s}{k}} a\sqrt{2ax}}$

De-

Determinauimus ergo celeritatem, et tempus, et pressionem, vnde motus corporis innotescit. Q.E.I.

Corollarium 1.

541. Quia est $e^{\frac{-s}{k}} = 1 - \frac{s}{1.k} + \frac{s^2}{1.2k^2} - \frac{s^3}{1.2.3k^3}$ $+$ etc. si ponatur $a + k = c$ seu $a = c - k$ erit $\frac{(c-k)v}{gk} = -s + \frac{cs}{1.k} - \frac{cs^2}{1.2k^2} + \frac{cs^3}{1.2.3k^3} -$ etc. $= \frac{as}{1k} - \frac{cs^2}{1.2k^2} + \frac{cs^3}{1.2.3k^3} -$ etc. Quare erit $v = \frac{gs}{a}(\frac{a}{1} - \frac{s}{1.2} - \frac{as}{1.2k} + \frac{(a+k)s^2}{1.2.3k^2} - \frac{(a+k)s^3}{1.2.3.4k^3} +$ etc.

Corollarium 2.

542. In vacuo igitur, vbi k est infinitum, erit $v = gs - \frac{gs^2}{2a} = gx$, vt constat. At si resistentia tantum sit valde parua et propterea k valde magnum erit $v = gs - \frac{gs^2}{2a} - \frac{gs^2}{2k} + \frac{gs^3}{6ak}$.

Corollarium 3.

543. In vacuo apparet celeritatem corporis esse nullam in duobus punctis vbi est $s = o$ et $s = 2a$, i. e. in duobus cuspidibus A et B. In medio vero resistente alter locus est $s = o$, alter vero ex hac aequatione erui debet $a = \frac{cs}{1.2k} - \frac{cs^2}{1.2.3k^2} + \frac{cs^3}{1.2.3.4k^3}$ $-$ etc. vnde inuenitur $s = \frac{2ak}{c} + \frac{4a^2k}{3c^2} + \frac{13a^3k}{9c^3} + \frac{196a^4k}{135c^4} +$ etc. Si igitur k fuerit valde magnum erit $s = \frac{2ak}{a+k} + \frac{4a^2k}{3(a+k)^2} = 2a - \frac{2a^2}{3k}$ quam proxime.

Co-

Corollarium 4.

544. Eadem haec series inuenta substituto $a+k$ loco c transformatur in hanc $s=2a-\frac{2a^2}{3k}+\frac{7a^3}{9k^2}-\frac{119a^4}{135k^3}+$ etc. ex qua valor ipsius s dat arcum ACN, quo vsque corpus motu suo peruenire potest.

Corollarium 5.

545. Arcus AO ab A vsque ad O, vbi corpus maximam habet celeritatem, est $=kl\frac{a+k}{k}=a-\frac{a^2}{2k}+\frac{a^3}{3k^2}-\frac{a^4}{4k^3}+\frac{a^5}{5k^4}+$ etc. Quare erit arcus $ON=a-\frac{a^2}{6k}+\frac{4a^3}{9k^2}-$ etc. $OC=\frac{a^2}{2k}-\frac{a^3}{3k^2}+\frac{a^4}{4k^3}-$ etc. et $-AO+ON=\frac{a^2}{3k}+\frac{a^3}{9k^2}$.

Corollarium 6.

546. Celeritas vero in puncto C reperitur debita altitudini $=\frac{gk^2-ge^{\frac{-a}{k}}(ak+kk)}{a}=g$ $(\frac{a}{2}-\frac{a^2}{1.3k}+\frac{a^3}{1.2.4.k^2}-\frac{a^4}{1.2.3.5k^3}+\frac{a^5}{1.2.3.4.6k^4}-$ etc. $)$. Vnde perspicitur celeritatem in C nunquam posse esse euanescentem; nam altitudo huic celeritati debita est $=\frac{gk^2}{e^{\frac{a}{k}}a}(e^{\frac{a}{k}}-1-\frac{a}{k})$, atque $e^{\frac{a}{k}}$ semper maius est quam $1+\frac{a}{k}$; excessus autem maior est quam $\frac{a^2}{2k^2}$. Quare altitudo debita celeritati in C ma-

maior eſt quam $\frac{ga}{2c^{\frac{a}{k}}}$, ideoque ACN maior eſt quam AC.

Corollarium 7.

547. Altitudo debita celeritati maximae in O eſt $= gk - \frac{gk^2}{a} l \frac{a+k}{k} = g(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} - \frac{a^4}{5k^3} +$ etc.). Quare exceſſus huius altitudinis ſupra altitudinem celeritati in C debitam eſt $= g(\frac{a^3}{1.2.4k^2} - \frac{5a^4}{1.2.3.5k^3} + \frac{23a^5}{1.2.3.4.6.k^4} -$ etc.) $= gc^{\frac{-a}{k}}(\frac{a^3}{8k} + \frac{a^4}{24k^3}$ + etc. Haec nempe expreſſio obtinetur, ſi in generali valore ipſius v ſubſtituatur $k l \frac{a+k}{k}$ loco s, quippe cui quantitati arcus AO eſt aequalis.

Scholion.

548. In ſolutione huius propoſitionis conſiderandum venit, quod ex formula deſcenſum tantum determinante etiam aſcenſum corporis ſuper arcu CN deriuauimus; ex quo dubium oriri poteſt, an iſte aſcenſus legitime ſit definitus. Hoc autem ex ipſa formula aſcenſum determinante facile perſpicitur. Vſi enim ſuimus formula hac $dv = gdx - Rds$, quae puncto M vltra punctum C cadente propter dx factum negatiuum abit in hanc $dv = -gdx - Rds$, quae reuera naturam aſcenſus continet. Ex his intelligitur continuitas inter aſcenſum et deſcenſum, qua nullo interiecto

 ſaltu

ſaltu inter ſe cohaerent. Vbi enim curua ſe ſurſum flectere incipit, ibi ſimul formula deſcenſui inſeruiens transmutatur ſponte in formulam aſcenſus. Atque haec connexio locum habet in medio quocunque reſiſtente, vti ex generalibus formulis apparet, quae tantum ſigno ipſius dx diſcrepant. Quamobrem data aequatione pro curua quacunque, non eſt neceſſe vt inquiratur, ſuper quanam parte corpus aſcendat deſcendatve, ſed alterutra formula ad aequationem accommodata verum dabit motum ſuper curua propoſita. Hoc tantum eſt tenendum, vt abſciſſae in axe verticali capiantur, atque ea formula ſiue aſcenſus ſiue deſcenſus adhibeatur, quae cum motus initio congruat.

PROPOSITIO 65.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 1. 549. *Sit curua data* ACB *cyclois ſuper baſi horizontali* AB *deſcripta et deorſum ſpectans, corpusque ſuper ea oſcillationes peragat in medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum, determinare motum oſcillatorium.*

Solutio.

Ponatur diameter circuli CD$=\frac{1}{2}a$, in eaque ſumatur abſciſſa CP$=x$, et arcus CM vocetur s, erit ex natura cycloidis $s=\sqrt{2ax}$ et $x=\frac{ss}{2a}$ atque $dx=\frac{sds}{a}$. Deſcendat nunc corpus ſuper arcu cu MC, sitque eius celeritas in C debita atitudini b, erit altitudo debita celeritati in M $= e^{\frac{s}{k}} b - g e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} dx$ (523.). Est vero $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \int \frac{e^{\frac{-s}{k}} s ds}{a} = \frac{k^2 - k^2 e^{\frac{-s}{k}} - k e^{\frac{-s}{k}} s}{a}$; quare altitudo debita celeritati in M est $= \frac{e^{\frac{s}{k}}(ab - gk^2) + gk^2 + gks}{a} = e^{\frac{s}{k}} b - \frac{g}{a}\left(\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2.3k} + \frac{s^4}{2.3.4.k^2} + \frac{s^5}{2.3.4.5.k^3} + \text{etc.}\right)$ Arcus ergo in quo integer fit descensus habebitur si ipsius s valor ex hac aequatione quaeratur: $e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2 + gks}{gk^2 - ab}$. Fiet autem hinc in serie $s = A + \frac{A^2}{3k} + \frac{5A^3}{24k^2} + \frac{11A^4}{180k^3} +$ etc. posito breuitatis ergo A loco $\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Huic ergo seriei aequatur arcus CM, si quidem corpus ex puncto M descendere inceperit. Celeritatem maximam corpus habebit in O sumto CO $= s$ ex hac aequatione $e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2 - ab}$ seu CO $= k\, l \frac{gk^2}{gk^2 - ab}$, atque altitudo huic maximae celeritati debita est $= \frac{gk.CO}{a} - \frac{gk^2}{a}\, l \frac{gk^2}{gk^2 - ab} = b + \frac{ab^2}{2gk^2} + \frac{a^2b^3}{3g^2k^4} +$ etc. Ad tempus determinandum conuenit ad punctum O celeritatemque maximam respicere, et tempus per MO definire. Hanc ob rem pono altitudinem celeritati in O debitam $= c$,

 et

et arcum MO $= q$, erit CO $= \frac{ac}{gk}$ et $ab = gk^2 (1 - e^{\frac{-ac}{gk^2}})$, $s = \frac{ac}{gk} + q$. His ſubſtitutis erit altitudo debita celeritati in M ſeu $v = \frac{gk^2 + ac + gkq - e^{\frac{q}{k}} gk^2}{a}$

Quia nunc v minor eſt quam c, pono $c - v = z$, eritque $az + gk^2 + gkq = e^{\frac{q}{k}} gk^2$ atque in ſerie $\frac{az}{g} = \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2} + \frac{q^5}{120k^3} +$ etc. Ex qua conuertendo fit $q = \frac{\sqrt{2az}}{\sqrt{g}} - \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt{2az}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2z^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2z^2\sqrt{2az}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} -$ etc. Incipiat deſcenſus in puncto M, erit ibi $v = 0$ et $z = c$, ideoque OM $= \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} -$ etc. Ex eadem formula, ſi ponatur q negatiuum, habebitur motus per OCN: at quia perinde eſt, ſiue q ponatur negatiuum ſiue k, erit arcus ON, ſi N fuerit punctum quousque corpus aſcendit, $= \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g\,k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} +$ etc. Tempus vero per MO hoc modo inuenitur; quia eſt $ds = dq = \frac{adz}{\sqrt{2gaz}} - \frac{adz}{3gk} + \frac{adz\sqrt{2az}}{12gk^2\sqrt{g}} - \frac{4a^2zdz}{135g^2k^3} + \frac{a^2zdz\sqrt{2az}}{432g^2k^4\sqrt{g}} -$ etc. hoc diuiſum per $\sqrt{v} = \sqrt{(c - z)}$ dat elementum temporis $= \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{2g(cz - z^2)}} - \frac{adz}{3gk\sqrt{(c-z)}} + \frac{azdz\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g(cz-zz)}} - \frac{4a^2zdz}{135g^2k^3\sqrt{(c-z)}} + \frac{a^2z^2dz\sqrt{2a}}{432g^2k^4\sqrt{g(cz-z^2)}} -$ etc. Quod ita integrari debet vt poſito $v = c$ vel $z = 0$ euaneſcat; deinde ſi ponatur $z = c$ habebitur tempus quo corpus per arcum MO deſcendit. Hoc igitur tempus poſita peripheriae ad diametrum

ratione

ratione π ad 1 erit $= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} - \frac{2a\sqrt{c}}{3gk} + \frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}} - \frac{4a^2c\sqrt{c}}{135g^2k^3}$ $+$ etc. Posito igitur k negatiuo erit tempus quo corpus ex O ad N vsque ascendit $= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} + \frac{2a\sqrt{c}}{3gk} + \frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}} + \frac{4a^2c\sqrt{c}}{135g^2k^3} +$ etc. Tempus ergo per MCN seu tempus vnius dimidiae oscillationis est $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}} +$ etc. Q. E. I.

Corollarium 1.

550. Si ergo celeritas maxima corporis descendentis fuerit debita altitudini c, propter CO $= \frac{ac}{gk}$ erit MC $= \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} -$ etc. Totus vero ascensus CN erit $= \mathrm{ON} - \mathrm{CO} = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} +$ etc. Hinc erit $\mathrm{CM} - \mathrm{CN} = \frac{4ac}{3gk} - \frac{4a^2c^2}{135g^2k^3} -$ etc. atque MCN $= \frac{2\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{9gk^2\sqrt{g}} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{540g^2k^4\sqrt{g}}$ $+$ etc.

Corollarium 2.

551. Si totus arcus descensus MC ponatur $=$E et sequens arcus ascensus CN$=$F, atque altitudo debita celeritati in C$=b$, erit $\frac{ab}{g} = k^2 - e^{\frac{-E}{k}}(k^2 + kE) = \frac{E^2}{2} - \frac{E^3}{3k} + \frac{E^4}{8k^2} - \frac{E^5}{30k^3} + \frac{E^6}{144k^4} -$ etc. Atque posito k negatiuo eodem modo inuenitur $\frac{ab}{g} = \frac{F^2}{2} + \frac{F^3}{3k} + \frac{F^4}{8k^2} + \frac{F^5}{30k^3} + \frac{F^6}{144k^4} +$ etc. Ex quibus fit $F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2} - \frac{26E^4}{135k^3} + \frac{86E^5}{405k^4} -$ etc.

 at-

atque altitudo debita celeritati maximae $c = \frac{gE^2}{2a} - \frac{gE^3}{3ak} + \frac{gE^4}{4ak^2} - \text{etc.}$

Corollarium 3.

552. Quia F eſt arcus aſcenſus in prima dimidia oſcillatione, erit idem arcus F arcus deſcenſus in ſequente oſcillatione: cum quo ergo coniungetur arcus aſcenſus $G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2} - \frac{28E^4}{15k^3} + \frac{964E^5}{405k^4} - \text{etc.}$ Atque ſimili modo ſequentes oſcillationes quotquot libuerit definiri poſſunt.

Corollarium 4.

553. Ex aequatione tempus exponente apparet tempus quo corpus ex M ad O peruenit ſemper minus eſſe tempore quo corpus ex O ad N vsque pertingit. Simili modo etiam arcus ON maior eſt quam arcus OM, arcus vero CN minor eſt arcu MC.

Corollarium 5.

554. Si oſcillationes fuerint infinite paruae, ſeu c quantitas euaneſcens, congruent oſcillationes cum oſcillationibus in vacuo factis; in ſingulis enim expreſſionibus iidem termini euaneſcent, qui euaneſcerent poſito $k = \infty$. Minimis ergo oſcillationibus iſochronae erunt oſcillationes penduli longitudinis a in vacuo, ſollicitati a potentia g, ſeu penduli in hypotheſi grauitatis $= 1$, cuius longitudo eſt $= \frac{a}{g}$.

Co-

Corollarium 6.

555. At si oscillationes fiant maiores, tempora oscillationum quoque fient maiora, quare in hac resistentiae hypothesi cyclois tautochronismi proprietate non gaudet. Quo enim in quaque oscillatione maior fuerit celeritas maxima, maior quoque erit excessus temporis oscillationis huiusmodi supra tempus oscillationis minimae.

Scholion I.

556. Quod diximus oscillationes minimas cum oscillationibus in vacuo congruere locum habet, si a et k fuerint quantitates finitae magnitudinis. Si enim a esset infinite magnum, seu k infinite paruum, sequentes termini tempus exprimentes $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}} +$ etc. non euanescerent etiamsi c, esset infinite paruum. Tum igitur tantum oscillationes minimae super curua quacunque in vacuo et medio resistente inter se congruent, quando neque radius osculi curuae in infimo puncto fuerit infinite magnus, neque resistentia infinite magna.

Exemplum.

557. Exempli loco euoluamus casum, quo resistentia tam sit exigua, ideoque k quantitas tam magna vt fractiones, in quarum denominatoribus k plures duabus habet dimensiones, tuti pro nihilo haberi possint. Dicta igitur altitudine celeritati maximae in O debita c, ita vt sit $CO = \frac{ac}{gk}$; erit

erit arcus descensus $MC = E = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$ et sequens arcus ascensus $CN = F = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$. Vnde inuenitur $\sqrt{c} = \frac{E\sqrt{g}}{\sqrt{2a}} - \frac{E^2\sqrt{g}}{3k\sqrt{2a}} + \frac{7E^3\sqrt{g}}{36k^2\sqrt{2a}}$, seu $c = \frac{gE^2}{2a} - \frac{gE^3}{3ak} + \frac{gE^4}{3ak^2}$ atque $F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$. Tempus ergo dimidiae oscillationis per MCN est $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$. In sequente dimidia oscillatione est arcus descensus $= F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$, quem sequetur arcus ascensus $G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2}$; atque tempus huius dimidiae oscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}} - \frac{\pi E^3\sqrt{2a}}{18k^3\sqrt{g}}$, vbi vltimus terminus negligi potest ob k^3 in denominatore. In tertia semioscillatione est arcus descensus $= G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{36E^3}{9k^2}$, et arcus descensus $= H = E - \frac{6E^2}{3k} + \frac{36E^3}{9k^2}$ Atque generaliter in ea semioscillatione, quae indicatur numero n est arcus descensus $= E - \frac{2(n-1)E^3}{3k} + \frac{4(n-1)^2E^3}{9k^2}$ et arcus ascensus $= E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$ Quamobrem post n semioscillationes corpus ab infimo puncto C distabit arcu $E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$, qui minor est quam arcus descensus primae oscillationis quantitate $\frac{2nE^2}{3k} - \frac{4n^2E^3}{9k^2}$. Tempus autem semioscillationis numero n indicatae erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}} - \frac{\pi(n-1)E^3\sqrt{2a}}{18k^3\sqrt{g}}$ At si totus arcus primae semioscillationis MCN dicatur A, erit $A = 2E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$ et $E = \frac{A}{2} + \frac{A^2}{12k}$ euanescente sponte termino sequente. Hinc toſequente. Hinc totus arcus oſcillatione per numerum n indicata deſcriptus erit $= 2E - \frac{2(2n-1)E^2}{3k} + \frac{4(2n^2-2n+1)E^3}{9k^2} = A - \frac{(n-1)A^2}{3k} + \frac{(n-1)^2A^3}{9k^2}$.

Corollarium 7.

558 Si n fiant oſcillationes dimidiae et arcus deſcenſus primae oſcillationis fuerit E et arcus aſcenſus vltimae $= L$, erit $L = E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$, quae expreſſio, ſi per ſeriem propius capiatur, fere congruet cum progreſſione geometrica eiusdem initii, hancque ob rem erit $L = \frac{3Ek}{3k+2nE}$ ſeu $3k(E-L) = 2nEL$.

Corollarium 8.

559. Hinc ſi peractis aliquot ſemioſcillationibus detur arcus deſcenſus primae oſcillationis E, vna cum arcu aſcenſus vltimae L inueniri poteſt numerus ſemioſcillationum n eſt, namque $n = \frac{3k(E-L)}{2EL}$.

Corollarium 9.

560. Patet ergo diminutionem arcuum non a longitudine penduli pendere, ſed ex n et E datis idem reperitur arcus L quaecunque fuerit longitudo penduli a. Atque eſt ſemper n proportionalis ipſi $\frac{1}{L} - \frac{1}{E}$.

Scholion 2.

561. Huiusmodi experimenta circa oſcillationes in medio reſiſtente multa recenſet Newt. in

Phil. Lib. II. vbi notat arcum deſcenſus primae, arcum deſcenſus vltimae oſcillationis atque numerum oſcillationum tam in aëre quam in aqua et mercurio. Quare ſi haec media perfecte reſiſterent in duplicata celeritatum ratione, congrua eſſe deberent cum hisce formulis, ita vt decrementum arcus proportionale eſſet numero oſcillationum et arcui primo et vltimo coniunctim. Quod etiam locum habere obſeruaui in maioribus oſcillationibus, in quibus celeritas non eſt nimis exigua. At in oſcillationibus minimis maxima aberratio ab hac regula conſpicitur. Ex quo colligitur quo maior fuerit corporis celeritas in fluido, eo propius reſiſtentiam accedere ad rationem duplicatam celeritatum, motum autem tardiſſimum alii reſiſtentiae inſuper eſſe obnoxium, quae in motibus celerioribus prae reſiſtentia, quae quadratis celeritatum eſt proportionalis, euaneſcat. In hisce quoque experimentis Newtonus reſiſtentiam partim ſimplici celeritatum rationi, partim ſesquiplicatae, partim duplicatae proportionalem aſſumſit, neque tamen pro motibus tardiſſimis ſatisfecit. In vltima vero Phil. Editione ipſe Newtonus quoque inſufficientem priorem theoriam ſuam agnoſcit, atque pluribus rationibus oſtendit alteram illam fluidorum reſiſtentiam eſſe conſtantem ſeu temporis momentis proportionalem; quam antea ipſis celeritatibus proportionalem erat arbitratus. Hanc ob rem iſtam reſiſtentiam cum ea, quae quadratis celeritatum eſt propor-

proportionalis in sequenti propositione coniunctam considerabimus; cum praesertim aequationum resolutio et celeritatum determinatio hac adiectione non difficilior euadat.

Corollarium 10.

562. Quod ad tempora oscillationum et semioscillationum attinet, perspicuum est ea decrescere, quo minores fiant arcus descripti; atque si arcus plane euanescant tempus dimidiae oscillationis fore $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$.

Corollarium 11.

563. Excessus autem cuiusque semioscillationis temporis supra tempus minimae semioscillationis in casu resistentiae minimae est $\frac{\pi E^2 \sqrt{2a}}{24 k^2 \sqrt{g}}$, denotante E arcum descensus illius semioscillationis Quare iste excessus proportionalis est quadrato arcus descensus, vel etiam quadrato totius arcus semioscillatione descripti.

Scholion 3.

564. Cyclois igitur, quae ab Hugenio apta est demonstrata ad isochronismum pendulorum producendum, hanc proprietatem in medio resistente in duplicata celeritatum ratione amittit, et hanc ob rem in aëre non inseruit, nisi vel oscillationes sint valde paruae, vel inter se proxime aequales. Ex hoc vero, quod maiores o-

 scilla-

ſcillationes diutius durent, colligi licet, veram curuam tautochronam in hac reſiſtentiae hypotheſi magis eſſe curuam quam cycloidem. Quemadmodum ſcilicet cyclois in circulo eiusdem radii, cuius cyclois eſt in infimo puncto, continetur, ita quoque vera tautochrona in cycloide continebitur, atque eius curuedo a puncto infimo magis decreſcet, quam curuedo cycloidis.

PROPOSITIO 64.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 1.

565. *Si medii reſiſtentia partim fuerit conſtans, partim quadratis celeritatum proportionalis, determinare motum oſcillatorium corporis ſuper cycloide* MCB, *ſaltem in caſu quo reſiſtentia eſt valde parua.*

Solutio.

Sit vt ante diameter circuli generatoris CP $= \frac{1}{2}a$; CP$=x$; et arcus CM$=s$. Ponatur celeritas in C debita altitudini b, et celeritas in M altitudini v. Potentia corpus perpetuo deorſum ſollicitans ſit $=g$, pars reſiſtentiae quae eſt conſtans ſit $=h$, et pars reſiſtentiae quadratis celeritatum proportionalis ſit $= \frac{v}{k}$ vt ante; erit k quantitas valde magna reſpectu v et s et a; atque h valde paruum reſpectu g. Iam fiat deſcenſus ſuper arcu MC, erit $dv = -gdx + hds + \frac{vds}{k}$, atque hinc $v = e^{\frac{s}{k}} b - e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} (gdx - hds)$.

An

At quia est ex natura cycloidis $dx = \frac{sds}{a}$ erit $\int e^{-\frac{s}{k}} g\,dx = \frac{gk^2 - gk^2 e^{-\frac{s}{k}} - gke^{-\frac{s}{k}} s}{a}$ et $\int e^{-\frac{s}{k}} b\,ds = bk - bke^{-\frac{s}{k}}$; vnde fit $v = \frac{e^{\frac{s}{k}}(ab + bak - gk^2) - bak + gk^2 + gks}{a}$

Celeritas maxima habetur si fuerit $\frac{gs}{a} = b + \frac{v}{k}$ seu $e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2 - ab - bak}$. Dicatur altitudo debita celeritati maximae in $O = c$, erit $CO = \frac{ba}{g} + \frac{ac}{gk}$ et $ab = gk^2 - bak - gk^2 e^{\frac{-bak - ac}{gk^2}}$. Ponatur arcus $MO = q$ erit $s = \frac{ba}{g} + \frac{ac}{gk} + q$; vnde fit $v = \frac{ac + gk^2 + gkq - e^{\frac{q}{k}} gk^2}{a}$. Quia nunc v minus est quam c, pono $c - v = z$, erit $az + gk^2 + gkq = e^{\frac{q}{k}} gk^2$. Quae aequatio in seriem conuersa dat vt supra $\frac{az}{g} = \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2}$, atque $q = \frac{\sqrt{2az}}{\sqrt{g}} - \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt{2az}}{18gk^2\sqrt{g}}$. Incipiat descensus ex M, erit ibi $v = o$ et $z = c$, ideoque $MO = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$. Ex eadem formula reperitur arcus ascensus $ON = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$; atque cum in his b non reperiatur erit vt supra tempus semioscillationis per $MON = \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}}$. Totus vero arcus descensus MC erit $= \frac{ba}{g} + \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$, atque arcus ascensus $CN = -\frac{ba}{g} + \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$.

Quare ſi arcus deſcenſus MC ponatur E et arcus aſcenſus $CN = F$, erit $F = E - \frac{2ba}{g} - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4baE}{3gk} + \frac{4E^3}{9k^2}$. In ſequente ſemioſcillatione eſt arcus deſcenſus F et arcus aſcenſus $G = E - \frac{4ba}{g} - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16baE}{3gk} + \frac{16E^3}{9k^2}$. Atque generaliter in ea ſemioſcillatione, quae indicatur numero n, arcus aſcenſus eſt $= E - \frac{2nba}{g} - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2baE}{3gk} + \frac{4n^2E^3}{9k^2} = \frac{3gkE - 6bnak}{3gk + 2gnE}$. Quare ſi peractis n ſemioſcillationibus dicatur arcus deſcenſus primae E et arcus aſcenſus vltimae L, erit $2gnEL = 3gk(E-L) - 6bnak$ ſeu $n = \frac{3gk(E-L)}{2gEL + 6bak}$. Tempus vero quo quaelibet ſemioſcillatio per MCN abſoluitur eſt $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi(gE - ba)^2\sqrt{2a}}{24g^2k^2\sqrt{g}}$ loco c eius valore ſubſtituto. Q. E. I.

Corollarium I.

566. Si ponatur $c = 0$, vt locus prodeat in quo corpus ſit quieturum, inuenitur $MC = \frac{ba}{g}$; corpus ergo in quiete permanere poteſt non ſolum in puncto C, ſed extra C quoque in diſtantia $\frac{ba}{g}$ cis et vltra C. Quare in huiusmodi medio reſiſtente ex ſtatu quietis penduli non exacte linea verticalis poteſt cognoſci; ſed angulo cuius ſinus eſt $\frac{b}{g}$ aberrari poteſt.

Scholion I.

567. Huiusmodi reſiſtentiam in aqua locum habere experimentis facile euincitur, quippe in moti-

motibus tardissimis resistentia quadratis celeritatum minime proportionalis obseruatur; in fluido vero praeter resistentiam quadratis celeritatum proportionalem aliam non dari probabile est, nisi resistentiam constantem. Confirmatur hoc etiam experimentis a *La Hirio* institutis, quibus monstrauit pendulum in aqua extra situm verticalem in quiete permanere posse. Quod fieri non posset, si resistentia a sola celeritate penderet. Ex experimentis *Newtoni*, quae circa retardationem motus pendulorum in aëre instituit, concludi potest globi plumbei diametri 2 dig. resistentiam constantem esse circiter partem millionesimam grauitatis, seu $\frac{h}{g} = \frac{1}{1000000}$. Hic ergo globus filo suspensus a linea verticali aberrare potest angulo $10'''$, qui autem error est insensibilis. Maior autem et sensibilis esse poterit hic error, quo minor simulque leuior globus adhibeatur.

Corollarium 2.

568. Ad hunc angulum inueniendum inseruit ista aequatio ex superiori deducta $\frac{h}{g} = \frac{E-L}{2na} - \frac{EL}{3ak} =$ sinui anguli, quo pendulum a linea verticali declinare potest. At loco E arcum paruum accipi conuenit, quo termini neglecti eo magis fiant insensibiles.

Corollarium 3.

569. Ex aequatione $n = \frac{3gk(E-L)}{2gEL+6hak}$ apparet quo maior sit arcus oscillatione descriptus eo minorem

norem fieri terminum $6hak$ respectu $2gEL$. Atque hoc in causa est, quod haec resistentia tantum in minimis oscillationibus sentiatur.

Corollarium 4.

570. Quia h est numerus tum per hypothesin valde paruus, tum in subtilibus fluidis, ad quae haec propositio est accommodata, reipsa fere euanescens: in expressione temporis euanescet quoque ha prae gE, ideoque tempus vnius semioscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$. Resistentia igitur constans non immutabit tempora oscillationum.

Scholion 2.

571. Etiamsi ergo haec resistentia constans cum resistentia quadratis celeritatum proportionali coniuncta consideretur, calculus eo neque fit prolixior neque difficilior. Nam ex celeritate maxima Vc totus arcus vna semioscillatione descriptus eodem modo determinatur, siue haec resistentia constans adsit siue non; vtroque enim casu plane eadem obtinetur aequatio. Quamobrem vel ex hoc ipso sequi videtur, hanc resistentiae legem in natura locum habere, alias vero resistentias praeter hanc et eam, quae quadratis celeritatum est proportionalis, actu non inueniri. Fluida autem iam pridem duplicem resistentiam exercere obseruata sunt, alteram quadra-
is

tis celeritatum proportionalem, quae in motibus celerioribus ſola obſeruetur, alteram in motibus tardiſſimis tantum ſenſibilem. Illa reſiſtentia oritur a vi inertiae particularum fluidi, et per eam corpus de motu ſuo amittit, quando particulas eas remouet; quam quadratis celeritatum proportionalem eſſe dubitari nequit. Haec vero reſiſtentia a tenacitate fluidi ortum habet, qua particulae fluidi inter ſe cohaerent et difficulter a ſe inuicem ſeparantur. Dum igitur corpus per datum ſpatium mouetur datus particularum numerus ipſi ſpatio proportionalis a ſe inuicem diuelli debet; quare haec reſiſtentia congruit cum potentia abſoluta motum corporis retardante; quippe quae etiam per aequalia ſpatia aequalem ictuum numerum in corpus exerit. Haec igitur reſiſtentia ſeu vis motui corporis ſemper eſt contraria, et ſecundum ipſam directionem motus in corpus agit, atque ideo eſt vis tangentialis perpetuo conſtans et retardans. At hoc caſu natura a calculo exceptionem poſtulat, quando corpus quieſcit. Quoniam enim haec vis eſt conſtans, aeque agere deberet in corpus quieſcens ac in motum; quieſcens autem corpus, quia fluidi particulas non diuellit, hanc vim ſentire nequit. Accedit ad hoc, quod, cum haec vis directioni motus ſit contraria, ea in corpus quieſcens, quod nullam habeat directionem, nullum effectum habere queat. At ſi motus ſuper linea curua inueſtigatur, tangens curuae ſemper pro directione motus habetur, etiamſi corpus actu quiescat, atque ideo calculus effectum huius vis etiam in corpore quiescente ostendit; hoc igitur casu a calculo exceptionem fieri oportet. Corpus pendulum ergo per aliquod paruum spatium circa C in quiete permanere posse ideo est dicendum, quia eius nisus versus C non sufficit ad particulas fluidi a se inuicem separandas. Quare corpus quiescere potest in quolibet puncto illius spatioli, etiamsi calculus ostendat, etiam in ipso puncto C corpus non in quiete perseuerare posse.

Scholion 3.

572. Ex his quae partim generaliter tradidimus partim de cycloide attulimus, perspicitur, quomodo in medio resistente in duplicata ratione celeritatum motus corporis super quacunque curua possit determinari. Considerauimus quidem medium resistens vniforme, et potentiam sollicitantem quoque aequabilem; sed ex aequatione resoluenda apparet, eam quoque integrari posse, quomodocunque tum medium sit difforme, tum potentia sollicitans variabilis, semper enim in aequatione altitudo celeritati debita v vnicam tantum habet dimensionem. Progredior igitur ad alias medii resistentis hypotheses; sed quia tum non pro quauis curua motus potest definiri, curuae primo sunt inueniendae, quae determinationem motus admittunt. Assumimus hic autem iuxta

ta institutum nostrum eas curuas, quae ad aequationem homogeneam deducunt, in qua indeterminatae vbique eundem obtinent dimensionum numerum. Si resistentia fuerit potestati celeritatum exponentis $2m$ proportionalis, habetur ista aequatio $dv = \pm g dx \pm \frac{v^m ds}{k^m}$, quae quo sit homogenea inter v et x debet esse $ds = x^{-m} dx$, seu $s = a^m x^{1-m}$, seu $x = a^{\frac{m}{m-1}} s^{\frac{1}{1-m}}$. Vel si x et s datis quantitatibus augeantur vel diminuantur, in curua, cuius haec est aequatio $x = a^{\frac{m}{m-1}} (s+f)^{\frac{1}{1-m}} - a^{\frac{m}{m-1}} f^{\frac{1}{1-m}}$, motus quoque determinari potest. In medio ergo resistente in simplici ratione celeritatum curua sit cyclois, ideoque motum super ea determinemus.

PROPOSITIO 65.

Problema.

573. *In medio quod resistit in simplici ratione celeritatum, determinare motum oscillatorium corporis super cycloide* ACB, *existente tam medio quam potentia sollicitante vniformi.* Tab. XIII. Fig. 1.

Solutio.

Sit iterum vt ante diameter circuli generatoris CD $= \frac{1}{2}a$: abscissa CP $= x$, et arcus CM $= s$.

Ponatur celeritas in C debita altitudini b et celeritas in M altitudini v. Potentia corpus perpetuo deorſum trahens ſit $= g$; et reſiſtentia $= \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Fiat ſuper parte AMC deſcenſus, erit ex natura deſcenſus $dv = -g\,dx + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = -\frac{gsds}{a} + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Ponatur $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{u}{a}$, erit $v = \frac{ku^2}{a^2}$ et $dv = \frac{2kudu}{a^2}$, vnde fit $2kudu = -gasds + auds$, quae aequatio ita debet integrari vt facto $s = o$ fiat $u = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{k}}$. Pro aſcenſu vero ſuper arcu CN haec habetur aequatio $2kudu = -gasds - auds$. Ponatur $u = ps$, habebitur pro deſcenſu $2kp^2sds + 2kps^2dp = -gasds + apsds$, ſeu $\frac{2kpdp}{ap - ga - 2kp^2} = \frac{ds}{s}$. Hinc fit integrando $ls = lC - \frac{1}{2}l(p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}) + \frac{a}{2\sqrt{(a^2 - 8gak)}}$ $l\frac{4kp - a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4kp - a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}} = lC - \frac{1}{2}l\frac{2a^2v\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}}{2ks^2\sqrt{k}} + \frac{a}{2\sqrt{(a^2 - 8gak)}}l\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}$, ſeu $lC = l(2a^2v\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}) - \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}l\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}$ Ponatur $s = o$ et $v = b$ fiet $lC = l2a^2b\sqrt{k}$; hinc fiet $\frac{2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = (\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}})^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}$ In altera vero curuae parte CN pro aſcenſu corporis poſito $CN = s$ habetur haec aequatio $\frac{2av\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = (\frac{4a\sqrt{kv} + as - s\sqrt{(a^7 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} + as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}})^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}$. Si altitudo celeritati maximae, quae ſit in O, debita dicatur c, erit $CO = \frac{a\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}$, atque $c = b$ $(\frac{4gk - a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4gk - a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}})^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}$. Hae autem aequationes locum non habent, niſi ſit $a^2 > 8gak$, ſeu

$k <$

$k < \frac{a}{8g}$. Nam si $k > \frac{a}{8g}$ aequationes a logarithmis et quadratura circuli simul pendebunt. Ponamus esse $k = \frac{a}{8g}$, eritque $\frac{ds}{s} = \frac{-pdp}{(p-\frac{a}{4k})^2} = \frac{-dp}{p-\frac{a}{4k}} - \frac{adp}{4k(p-\frac{a}{4k})^2}$. Integrando ergo prodibit $ls = lC - l(p-\frac{a}{4k}) + \frac{a}{4kp-a} = lC - l(\frac{a\sqrt{v}}{s\sqrt{k}} - \frac{a}{4k}) + \frac{as}{4a\sqrt{kv}-as} = lC - l(4a\sqrt{kv}-as) + ls + \frac{as}{4a\sqrt{kv}-as}$. Fit igitur $lC = l4a\sqrt{kb}$; vnde habebitur $l\frac{4\sqrt{kv}-s}{4\sqrt{kb}} = \frac{s}{4\sqrt{kv}-s}$. Apparet hinc in descensu celeritatem nusquam esse posse $=o$, semper enim $4\sqrt{kv}$ maius esse debet quam s. Hoc ergo casu, si celeritas in puncto C sit realis descensus initium sit imaginarium. Quare vbicunque corpus descensum inceperit celeritas in puncto infimo C erit $=o$. Ad motum igitur inuestigandum si descensus sit ex puncto dato E fueritque $CE = f$, erit $lC = l - af + 1$, ideoque $1^{\frac{s-4\sqrt{kv}}{f}} = \frac{4\sqrt{kv}}{4\sqrt{kv}-s}$. Ex quo intelligitur semper esse debere $4\sqrt{kv} < s$, quamobrem in puncto C vbi $s=o$ debet quoque esse $v=o$. Maxima celeritas, quae sit in O habetur ponendo $\sqrt{v} = \frac{gs\sqrt{k}}{a}$ seu $s = 8\sqrt{kv}$, quo posito prodit $l\frac{s}{2f} = -1$, seu $s = \frac{2f}{e} = CO$ denotante e numerum, cuius logarithmus est $=1$. His igitur casibus, quibus arcus descensus est realis, nullus est arcus ascensus. At si corpus per arcum CN celeritate initiali in C altitudini b debita ascendat, motus

 hac

hac aequatione exprimetur $l\frac{4\sqrt{kv}+s}{4\sqrt{kb}} = \frac{-s}{4\sqrt{kv}+s}$, ex qua patet eſſe $s + 4\sqrt{kv} < 4\sqrt{kb}$ et $\sqrt{v} < \sqrt{b}\frac{s}{4\sqrt{k}}$. Totus arcus aſcenſus CN reperitur faciendo $v = o$, tumque erit $l\frac{s}{4\sqrt{kb}} = -1$, ſeu $CN = \frac{4\sqrt{kb}}{e}$. Si eſt $k < \frac{a}{8g}$, quem caſum iam tractauimus, reſiſtentia adhuc ſit maior, quamobrem multo magis celeritas in C erit $= o$, ſi quidem deſcenſus ex puncto dato fiat; atque pro data celeritate in C initium deſcenſus erit imaginarium Quamobrem aequatio quam pro deſcenſu dedimus eſt imaginaria, niſi conſtans determinetur ex dato deſcenſus initio. Sit igitur arcus $CE = f$, erit $lC = lgaf^{a}\sqrt{k} - \frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}\, l\frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}$ factoque $s = o$ erit $l\frac{gf^{a}}{aa} = \frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}\, l\frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}$ ſi v non eſſet $= o$, nam ſi v eſt $= o$ haec aequatio non valet. Apparet autem hanc aequationem contradictionem continere, quia av maius eſſe deberet quam gff ſeu $v > \frac{gss}{a}$ poſito s pro f. At eſt $\frac{ss}{a} = 2x$ atque ita eſſet $v > 2gx$, quod eſt abſurdum, nam in vacuo eſt tantum $v = gx$, atque in medio reſiſtente adhuc minor eſſe debet. Pro aſcenſu autem inſeruit aequatio inuenta atque ex ea totus arcus aſcenſus CN reperitur faciendo $v = o$, quo poſito prodit $\frac{as^2}{2ab} = \left(\frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}} = \frac{g.CQ}{b}$. Ex his igitur perſpicitur ſi fuerit vel $k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$ oſcillationes peragi non poſſe, quia poſt nullum deſcenſum aſcenſus ſequi poteſt. Quare nobis potiſſimum reliqui caſus, quibus eſt $k > \frac{a}{8g}$, ſunt inueſtiuestigandi; quia enim in his resistentia est minor, atque quantumuis parua assumi potest, oscillationes vtique perfici poterunt. Factis ergo superioribus substitutionibus habemus $\frac{-ds}{s} = \frac{pdp}{p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}}$ quae aequatio posito $q = p - \frac{a}{4k}$ abit in hanc $\frac{-ds}{s} = \frac{qdq + \frac{adq}{4k}}{qq + \frac{ga}{2k} - \frac{a^2}{16k^2}}$. Ponatur $\frac{ga}{2k} - \frac{a^2}{16k^2} = B^2$, quia est quantitas affirmatiua, eritque $lC - ls = l\sqrt{(q^2 + B^2)} + \frac{a}{4k}\int\frac{dq}{q^2+B^2} = l\sqrt{(q^2 + B^2)} + \frac{a}{4Bk}\, At.\, \frac{q}{B}$, vbi $At.\, \frac{q}{B}$ est arcus circuli cuius tangens est $\frac{q}{B}$ existente sinu toto $= 1$. Restituto autem pro q valore debito erit $lC = l\sqrt{(2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2 \sqrt{k})} + \frac{a}{4Bk}\, At.\, \frac{4a\sqrt{kv} - as}{4Bks}$. Ponatur ad lC definiendum $s = o$ et $v = b$, erit $lC = l\sqrt{\,} 2ab\sqrt{k} + \frac{a}{4Bk}\, At.\, \infty$, quare erit $l\frac{\sqrt{2ab\sqrt{k}}}{\sqrt{(2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})}} = -\frac{a}{4Bk}\, At.\, \frac{4Bks}{4a\sqrt{k}\sqrt{-as}}$. Pro ascensu vero per arcum CN inuenitur $l\frac{\sqrt{2ab\sqrt{k}}}{\sqrt{(2av\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})}} = \frac{a}{4Bk}\, At.\, \frac{4Bks}{4a\sqrt{kv} + as}$. Posito nunc $v = o$ prodit integer arcus descensus MC ex hac aequatione $l\sqrt{\frac{2ab}{gss}} = \frac{a}{4Bk}\, At.\, \frac{4Bk}{a} = l\sqrt{\frac{b}{g.CP}}$. Atque totus arcus ascensus CN inuenietur ex hac aequatione $l\sqrt{\frac{2ab}{gss}} = \frac{a}{4Bk}\, At.\, \frac{4Bk}{a} = l\sqrt{\frac{b}{g.CQ}}$. Ex his aequationibus quanquam videantur arcus ascensus et descensus inter se aequales, tamen sunt inaequales; dantur enim infiniti arcus quorum tangens est eadem $\frac{4Bk}{a}$, atque pro ascensu alius accipi debet alius pro descensu. Atque

cum

cum infiniti dentur arcus tangentis $\frac{4Bk}{a}$, quilibet eorum ad propositum accommodari potest. His enim sumtis arcubus in ordine prodeunt successiue omnes arcus tam ascensus quam descensus, quam diu corpus oscillationes peragit; nam quia aequatio inuenta est generalis ea omnia loca ostendere debet, in quibus corporis oscillantis celeritas vnquam est $= o$. Quare in hac resistentiae hypothesi hoc habetur commodum, quod statim pro qualibet oscillatione centesima v. gr. arcus tam descensus quam ascensus possit definiri. Sit arcus D cuius tangens est $\frac{4Bk}{a}$, et posita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, erit eadem tangens $\frac{4Bk}{a}$ omnium horum arcuum D; $\pi + D$; $2\pi + D$; $3\pi + D$; etc. Pro arcu descensus nunc primae oscillationis MC sumi debet arcus D, eritque $\frac{2ab}{gss} = e^{\frac{Da}{2Bk}}$ seu abscissa arcus MC $= \frac{b}{g} e^{\frac{-Da}{2Bk}}$. Abscissa autem arcus ascensus sequentis seu abscissa arcus descensus secundae semioscillationis erit $\frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi + D)}{2Bk}}$. Simili modo abscissa arcus descensus in tertia semioscillatione erit $= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(2\pi + D)}{2Bk}}$. Atque generaliter abscissa arcus descensus in oscillatione quae indicatur per $n + 1$ est $\frac{b}{g} e^{\frac{-a(n\pi + D)}{2Bk}}$, quae simul est abscissa arcus ascensus in oscillatione quae indicatur numero n. Quod ad tempora oscillationum attinet, ea sequenti propositioni reseruamus. Q.E.I.

Co-

Corollarium 1.

574. Nisi ergo fuerit $k > \frac{a}{8g}$, oscillationes absolui non possunt; quia finito primo descensu corpus ad quietem redigitur, si vel $k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$. At si $k > \frac{a}{8g}$ oscillationes perpetuo durabunt, quia expressio $\frac{b}{g} e^{\frac{-a(n\pi + D)}{2Bk}}$ neque euanescere neque negatiua fieri potest.

Corollarium 2.

575. Arcus descensus se habet ad arcum sequentem ascensus in data ratione; est enim abscissarum ratio $\frac{b}{g} e^{\frac{-Da}{2Bk}}$ ad $\frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi+D)}{2Bk}}$, ideoque ipsorum arcuum 1 ad $e^{\frac{-\pi a}{4Bk}}$, quae ratio non pendet a celeritate data $\sqrt{b}$.

Corollarium 3.

576. Atque simili modo arcus descensus primae semioscillationis ad arcum ascensus semioscillationis numero n indicatae datam habet rationem, est enim haec ratio vt $e^{\frac{\pi n a}{4Bk}}$ ad 1. Quare si numerus semioscillationum duplo fit maior haec ratio fit duplicata.

Corollarium 4.

577. Arcus descensus quotcunque semioscillationum se insequentium constituunt progressionem geometricam decrescentem in ratione 1 ad $e^{\frac{-\pi a}{4Bk}}$. Atque ideo integri etiam arcus semioscillationibus de-

ſcripti erunt in progreſſione geometrica eiusdem denominatoris.

Scholion I.

578. Quia autem pro D infiniti arcus accipi poſſunt, quo appareat quinam ex iis pro arcu deſcenſus accipi debeat; ſumo caſum quo $k = \frac{a}{8g}$, atque arcus aſcenſus $= \frac{4\sqrt{kb}}{e}$; ſeu eius abſciſſa $= \frac{8kb}{ae^2} = \frac{b}{g}e^{-2}$. Hoc autem caſu eſt $B = o$ atque abſciſſa arcus aſcenſus $= \frac{b}{g}e^{\frac{-a(\pi + D)}{2Bk}}$. Debet ergo eſſe $\frac{a(\pi + D)}{2Bk} = 2$ et $\pi + D = \frac{4Bk}{a} = o$. Eſt vero $\frac{4Bk}{a}$ tangens arcus $\pi + D$, et cum $\frac{4Bk}{a}$ ſit $= o$, debet $\pi + D$ eſſe $= o$. Ex quo intelligitur $\pi + D$ eſſe minimum arcum tangenti $\frac{4Bk}{a}$ reſpondentem. Dicatur ergo minimus arcus tangenti $\frac{4Bk}{a}$ reſpondens E, erit $D = E - \pi$. Quocirca in prima ſemioſcillatione erit abſciſſa arcus deſcenſus $= \frac{b}{g}e^{\frac{a(\pi - E)}{2Bk}} = \frac{MC^2}{2a}$, ideoque ipſe arcus $MC = e^{\frac{a(\pi - E)}{4Bk}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Ponatur $\frac{4Bk}{a}$ ſeu tangens arcus $E = \tau$, erit arcus deſcenſus primae ſemioſcillationis $= e^{\frac{\pi - E}{\tau}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Arcus aſcenſus primae ſeu arcus deſcenſus ſecundae ſemioſcillationis $= e^{\frac{-E}{\tau}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Atque arcus deſcenſus in ſemioſcillatione quae indicatur numero $n + 1$ erit $= e^{\frac{-E-(n+1)\pi}{\tau}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$, qui eſt ſimul arcus aſcenſus in ſemioſcillatione numero n indicata. Progreſſionis geometricae ergo, quam hi arcus aſcenſus conſtituunt, denominator eſt $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

Co-

Corollarium 5.

579. Ex his etiam in qualibet semioscillatione celeritas in puncto infimo C potest definiri. Sit enim in semioscillatione, quae numero n indicatur, celeritas in C debita altitudini β, erit arcus ascensus $= e^{\frac{-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$, qui aequalis esse debet ipsi $e^{\frac{-E-(n-1)\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Hinc fit $\sqrt{\beta} = e^{\frac{-(n-1)\pi}{\tau}} \sqrt{b}$. Celeritates ergo in puncto C in semioscillationibus successiuis progressionem geometricam quoque constituunt cuius denominator est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

Corollarium 6.

580. Si n ponatur numerus negatiuus semioscillationes, quae ante primam factae esse possent, cognoscuntur. Vt in semioscillatione primam praecedente arcus descensus esse debuisset $= e^{\frac{2\pi - E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$.

Corollarium 7.

581. Si in prima semioscillatione descensus fiat ex puncto cycloidis supremo A, erit arcus descensus $= a$. Quare est $\sqrt{\frac{ag}{2b}} = e^{\frac{\pi - E}{\tau}}$ et celeritas in puncto infimo C seu $\sqrt{b}$ erit $e^{\frac{E-\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{ga}{2}}$.

Corollarium 8.

582. Si resistentia fere euanescat, seu k fuerit quantitas vehementer magna erit $B = \sqrt{\frac{ga}{2k}}$ et

$\tau = \frac{4\sqrt{gk}}{\sqrt{2a}} = \frac{2\sqrt{2gk}}{\sqrt{a}}$. Cum igitur ſit τ valde magnum erit $E = \frac{\pi}{2}$, atque arcus deſcenſus primae ſemioſcillationis $= e^{\frac{\pi}{2\tau}} V \frac{2ab}{g} = (1 + \frac{\pi}{2\tau}) V \frac{2ab}{g}$ et arcus aſcenſus $= (1 - \frac{\pi}{2\tau}) V \frac{2ab}{g}$.

Scholion 2.

583. Ex ſolutione huius propoſitionis inter cetera intelligi poteſt, quanta circumſpectione ſaepe opus ſit ad concluſiones ex aequationibus deducendas. Nam in caſu $k > \frac{a}{8g}$, aequationes quas pro deſcenſu et aſcenſu inuenimus ita ſunt comparatae, vt ex iis ſequi videatur arcum aſcenſus aequalem eſſe arcui deſcenſus; nam facto $v = o$ ex vtraque aequatione prodit $\frac{gs^2}{2ab} = \left(\frac{a - V(a^2 - 8gak)}{a + V(a^2 - 8gak)}\right)^{\frac{a}{V(a^2 - 8gak)}}$. Atque hoc ita ſe quoque haberet, niſi deſcenſus neceſſario faceret $b = o$. Poſito autem $b = o$, nullus datur aſcenſus et aequatio pro deſcenſu prorſus eſt immutanda. Quare niſi ex caſu quo $k = \frac{a}{8g}$ aduertiſſemus b eſſe $= o$, difficulter ex aequatione veritas cognoſci potuiſſet. Idem quoque accidit, vbi in eadem hypotheſi $k < \frac{a}{8g}$ deſcenſu ex dato puncto facto celeritatem in puncto C inueſtigauimus, poſito enim $s = o$, aequatio ad abſurdum deduxit. Ita enim eſt comparata illa aequatio, vt facto $s = o$ non oſtendat eſſe quoque $v = o$, etiamſi reuera ſit $v = o$; ii enim tantum termini ſunt neglecti, in quibus reperiebatur s, cum reliqui v continentes eodem iure negligi

negligi debuissent. Inueniri ergo non potest esse $v=o$ si $s=o$, sed quia ex aequatione absurdum sequitur, nisi esset $v=o$, ex hoc concludi potest esse $v=o$ si $s=o$. In aliis vero casibus, in quibus absurdum non tam facile perspicitur, difficulter lapsus euitari poterit.

PROPOSITIO 66.

Theorema.

584. *In medio vniformi, quod resistit in simplici celeritatum ratione, omnes descensus super cycloide* AMC *fiunt aequalibus temporibus: atque similiter etiam omnes ascensus super cycloide* CNB *aequalibus temporibus absoluuntur; si quidem potentia sollicitans fuerit vniformis et deorsum directa.* Tab. XIII. Fig. 1.

Demonstratio.

Pro descensu si dicatur arcus $CM=s$ et altitudo debita celeritati in M, v, habetur ista aequatio $dv=-\frac{gsds}{a}+\frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Ponatur $\sqrt{v}=u$, erit u vt ipsa celeritas in M, atque ob $dv=2udu$ habetur ista aequatio $2udu=-\frac{gsds}{a}+\frac{uds}{\sqrt{k}}$, in qua u et s vbique eundem tenent dimensionum numerum. Quare si ponatur initium descensus in E et arcus $CE=f$, et integretur aequatio proposita ita vt fiat $u=o$ posito $s=f$, prodibit aequatio integralis in qua u, f et s vbique eundem dimensionum numerum constituunt. Ex hac igitur aequa-

 bitur

bitur u functioni vnius dimensionis ipsarum f et s. Quocirca elementum temporis $\frac{ds}{u}$ erit functio nullius dimensionis ipsarum f, s atque elementi ds. Eius ergo integrale ita acceptum vt euanescat posito $s=0$, erit functio quoque nullius dimensionis ipsarum f et s, et exhibebit tempus per arcum CM. In hac igitur functione si ponatur $s=f$, euanescet f vbique ex ea functione, aequabiturque tempus totius descensus per EC functioni ex quantitatibus constantibus g, a et k tantum compositae, in quam neque f neque alia quantitas punctum E respiciens ingredietur. Quamobrem tempus descensus per EC eadem exprimetur quantitate, vbicunque punctum E accipiatur, atque ideo omnes descensus aequalibus absoluentur temporibus. Si in formula tempus descensus exhibente ponatur $-\sqrt{k}$ loco $\sqrt{k}$ prodibit tempus ascensus in arcu CNB, quod propterea quoque erit constans, quantuscunque fuerit arcus ascensu percursus. Q. E. D.

Corollarium I.

585. Quia u aequalis est functio vnius dimensionis ipsarum f et s aequabitur $\frac{u}{f}$ functioni nullius dimensionis ipsarum f et s. Quare si ponatur $s=nf$ aequabitur $\frac{u}{f}$ quantitati constanti, in qua non inerit f. In variis ergo descensibus celeritates in punctis homologis totorum arcuum, erunt ipsis arcubus f proportionales.

Co-

Corollarium 2.

586. Cum in descensu maxima celeritas sit vbi est $u = \frac{gs\sqrt{k}}{a}$, inuenietur punctum O seu arcus CO ex aequatione in qua f et s vbique eundem dimensionum numerum constituunt; ex qua ergo erit s seu CO ipsi f proportionalis. In pluribus ergo descensibus tam maximae celeritates ipsae, quam arcus CO arcubus descensuum totis erunt proportionales.

Corollarium 3.

587. Quia tempus per MC aequale est functioni nullius dimensionis ipsarum f et s; tempus quoque per EM aequabitur functioni nullius dimensionis ipsarum f et s, seu etiam ipsius f et arcus EM.

Corollarium 4.

588. Hinc consequitur non solum tempora integrorum descensuum, sed etiam tempora descensuum per partes similes arcuum totorum esse inter se aequalia. Similique modo hoc locum habet in ascensibus.

Corollarium 5.

589. Cum igitur tam omnes descensus sint isochroni quam omnes ascensus; etiam omnes semioscillationes aequalibus absoluentur temporibus. Atque in casu $k > \frac{a}{8g}$, quo corpus perpetuo oscil-

oſcillationes continuat, omnes abſoluentur temporibus aequalibus.

Corollarium 6.

590. Cyclois ergo, quae eſt curua tautochrona in vacuo, eandem proprietatem retinet in medio quod reſiſtit in ſimplici ratione celeritatum. Praeterea cyclois quoque tautochronismum obtinet in medio, cuius reſiſtentia eſt conſtans, ſeu momentis temporum, vt *Newtonus* loquitur, proportionalis. (570.)

Scholion 1.

591. Hunc triplicem cycloidis tautochronismum *Newtonus* quoque demonſtrauit in Princ. Phil. atque quod ad reſiſtentiam ipſis celeritatibus proportionalem attinet, ex hoc demonſtrationem formauit, quod in diuerſis deſcenſibus, ſi arcuum partes totis arcubus proportionales accipiantur, in iis locis celeritates ſint totis arcubus quoque proportionales. Nam ſi celeritates totis arcubus fuerint proportionales, ſi elementa quoque capiantur totis arcubus proportionalia, tempora per ea erunt inter ſe aequalia.

Scholion 2.

592. Etſi autem ex his appareat, tempora tam aſcenſuum quam deſcenſuum inter ſe eſſe aequalia, tamen determinari non poteſt, quantum ſit tempus ſiue deſcenſuum ſiue aſcenſuum neque

etiam

etiam tempora deſcenſuum et aſcenſuum inter ſe poſſunt comparari. Aequatio enim relationem inter s et u definiens ita eſt complicata, vt ex ea elementum temporis $\frac{ds}{u}$, per vnicam variabilem non poſſit exprimi. Praeterea oſcillationes infinite paruae, quae ante in determinandis temporibus calculum valde facilem reddiderunt, in hac reſiſtentiae hypotheſi nihil adiuuant. Nam etiam ſi arcus totus deſcriptus ponatur infinite paruus, in aequatione $l \frac{\sqrt{2ac^2\sqrt{k}}}{\sqrt{(2auu^2\sqrt{k} - aus + gss\sqrt{k})}} = \frac{a}{4Bk} A.t.\frac{4Bks}{as - 4au\sqrt{k}}$ quae ex ſuperiori integrata oritur, ne vnicus terminus euaneſcit prae ceteris. Pendebit autem tempus aſcenſus a quantitatibus a, k et g, at quomodo ex his ſit compoſitum non liquet. Interim tamen hoc certum eſt, quo maior ſit g ceteris paribus, minus eſſe tempus, at creſcente a tempus quoque creſcere; k vero creſcente diminui, quia reſiſtentia fit minor. In hac igitur reſiſtentiae hypotheſi reſiſtentia in motibus tardiſſimis non euaneſcit, quemadmodum in reſiſtentia quadratis caleritatum proportionali. Ex quo conſequi videtur, ſi reſiſtentia in maiore quam duplicata celeritatum ratione creſcat, in motibus tardiſſimis reſiſtentiam negligi poſſe; at ſi reſiſtentia fuerit in minore ratione, etiam in motibus tardiſſimis reſiſtentiam conſiderari debere.

PROPOSITIO 67.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 1.

593. *In medio uniformi, quod resistit in ratione multiplicata celeritatum, cuius exponens est* $2m$, *determinare motum corporis super curua* CMA, *in qua arcus quisque* CM *proportionalis est potestati abscissae* CP, *cuius exponens est* $1-m$.

Solutio.

Positis abscissa $CP = x$ et arcu $CM = s$ erit $ds = \frac{a^m dx}{x^m}$. Sit celeritas in M debita altitudini v, erit resistentia in $M = \frac{v^m}{k^m}$; atque ideo si corpus descendere ponatur super arcu CM habebitur ista aequatio $dv = -gdx + \frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}$. Pro ascensu autem super eadem curua inseruit ista aequatio: $dv = -gdx - \frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}$. Vtraque vero aequatio separationem admittet, si ponatur $v = tx$; prodibit enim pro descensu $xdt = -tdx - gdx + \frac{a^m t^m dx}{k^m}$ seu $\frac{-k^m dt}{k^m(g+t) - a^m t^m} = \frac{dx}{x}$, atq; pro ascensu haec aequatio $\frac{-k^m dt}{k^m(g+t) + a^m t^m} = \frac{dx}{x}$. In quibus aequationibus variabiles t et x a se inuicem sunt separatae; ita

vt

vt t per x ope quadraturarum possit determinari. Constans in integratione addenda definiri debet vel ex data celeritate in puncto C vel ex loco curuae in quo vel descensus incipit vel ascensus finitur. Si ponatur abscissa toti arcui descensus vel ascensus respondens f; aequalis erit v functioni vnius dimensionis ipsarum f et x tam in descensu quam ascensu propter aequationes differentiales homogeneas. Hanc ob rem $\sqrt{v}$ aequabitur functioni dimidiae dimensionis ipsarum f et x. Tempus igitur descensus per MC, quod est $=$ $\frac{ds}{\sqrt{v}} = a^m \int \frac{dx}{x^m \sqrt{v}}$ aequale erit functioni $\frac{1}{2} - m$ dimensionum ipsarum f et x. Quia autem posito $x = f$ prodit tempus totius descensus vt $f^{\frac{1}{2} - m}$; cui etiam proportionale est tempus totius ascensus, si quidem f abscissam arcus totius ascensus designat. Si ponatur totus arcus vel descensus vel ascensus $= A$, quia est A vt f^{1-m}, erit tempus totum vel ascensus vel descensus vt $\frac{A}{f^{\frac{1}{2}}}$ vel vt $A^{\frac{1-2m}{2-2m}}$ Plurium ergo descensuum tempora sunt in ratione $\frac{1-2m}{2-2m}$ multiplicata totorum arcuum descriptorum. Atque in eadem ratione sunt quoque tempora ascensuum inter se; sed tempora ascensuum et descensuum inter se non comparantur. Q.E.I.

Corollarium I.

594. Quia celeritas seu $\sqrt{v}$ aequalis est functioni dimidiae dimensionis ipsarum f et x; in

pluribus descensibus celeritates in puncto C acquisitae sunt in subduplicata ratione altitudinum, ex quibus corpus descendit. Atque altitudines, ad quas corpus ascendens pertingit, sunt in duplicata ratione celeritatum initialium in C.

Corollarium 2.

595. Cum tam tempora descensus quam ascensus sint vt $f^{\frac{1}{2}-m}$; omnes descensus aequalibus absoluentur temporibus, si fuerit $m=\frac{1}{2}$ seu resistentia ipsis celeritatibus proportionalis. Atque hac hypothesi pariter tempora ascensuum inter se erunt aequalia. Curua autem erit cyclois, vt ante ostendimus

Corollarium 3.

596. Quia est $ds=\frac{a^m dx}{x^m}$ erit $s=\frac{a^m x^{1-m}}{1-m}$ Ex quo perspicitur, nisi sit $m<1$, curuam AMC fore negatiuam seu quod perinde est imaginariam. Semper enim curua maior esse debet quam abscissa.

Corollarium 4.

597. Praeterea semper debet esse $ds>dx$; quare quo hoc accidat si $x=o$ debet m esse numerus positiuus. Hinc nostra propositio requirit vt m inter limites o et 1 contineatur.

Co-

Corollarium 5.

598. In his casibus maximus ipsius x valor erit a; ibique erit $ds = dx$, seu tangens verticalis. Hocque loco curua habebit cuspidem, altius enim ascendere nequit, quia si $x > a$, foret $ds < dx$, quod fieri nequit.

Corollarium 6.

599. Si m continetur intra limites 0 et 1, curua in C habebit tangentem horizontalem, atque radius osculi in C erit $= \frac{sds}{dx} = \frac{a^{2m}x^{1-2m}}{1-m}$. posito $x = 0$. Quare radius osculi in C erit infinite paruus si $m < \frac{1}{2}$ finitus si $m = \frac{1}{2}$ et infinite magnus si $m > \frac{1}{2}$.

Corollarium 7.

600. Tempora minimorum descensuum et ascensuum sunt infinite parua, si $m < \frac{1}{2}$, at finita si $m = \frac{1}{2}$. Infinite magna denique erunt, si $m > \frac{1}{2}$ Tenent ergo radiorum osculi in infimo puncto C rationem.

Scholion.

601. Habemus hic ergo exempla curuarum pro resistentia minorem quam duplicatam rationem celeritatum tenente, super quibus motus corporis potest determinari. At si medium in ma-

iore quam duplicata ratione resistit, curua nusquam habebit tangentem horizontalem, atque ideo descensus et ascensus nunquam finiri possunt. Quo autem in exemplo appareat, qualis sit motus corporis in medio, quod in maiore quam duplicata ratione celeritatum resistit, inuestigare lubet motum corporis super cycloide saltem in medio, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum. Hanc vero resistentiae hypothesin prae aliis eligo, quia in ea celeritas commode per seriem potest definiri.

PROPOSITIO 68.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 1. 602. *In medio uniformi, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum, determinare tam descensum quam ascensum corporis quemcunque super cycloide* ACB.

Solutio.

Posita potentia uniformi corpus perpetuo deorsum trahente g, et abscissa $CP = x$, et arcu $CM = s$, erit ex natura cycloidis $dx = \frac{sds}{a}$. Sit celeritas in C debita altitudini b, et in M altitudini v; atque exponens resistentiae k, erit resistentia in $M = \frac{v^2}{k^2}$. Pro descensu ergo habebitur haec aequatio $dv = -gdx + \frac{v^2ds}{k^2} = -\frac{gsds}{a} + \frac{v^2ds}{k^2}$; at pro ascensu ista: $dv = -\frac{gsds}{a} - \frac{v^2ds}{k^2}$. Pro descensu

po-

ponatur $v = \frac{-k^2 dz}{z ds}$; erit $dv = \frac{-k^2 ddz}{z ds} + \frac{k^2 dz^2}{z^2 ds}$ posito ds constante. Quamobrem habebitur $k^2 ddz = \frac{gzsds^2}{a}$; quae aequatio in seriem conuersa dat $z = f + bs + \frac{fgs^3}{2.3.ak^2} + \frac{bgs^4}{3.4.ak^2} + \frac{fg^2s^6}{2.3.5.6a^2k^4} + \frac{bg^2s^7}{3.4.6.7a^2k^4} + \frac{fg^3s^9}{2.3.5.6.8.9a^3k^6} +$ etc. Ad constantes f et b determinandas quaeratur valor ipsius v posito $s = o$; erit ergo $b = -\frac{k^2 b}{f}$. Et quia si $s = o$ est $dv = \frac{v^2 ds}{k^2} = \frac{b^2 ds}{k^2}$, propter $dv = \frac{-k^2 ddz}{z ds} + \frac{k^2 dz^2}{z^2 ds}$, erit $\frac{b^2}{k^2} = \frac{k^2 b^2}{ff}$ quae aequatio cum illa congruit erit ergo $b = -\frac{bf}{k^2}$. Hoc substituto erit $v =$

$$\frac{b - \frac{gs^2}{2a} + \frac{bgs^3}{3ak^2} - \frac{g^2s^5}{2.3.5a^2k^2} + \frac{bg^2s^6}{3.4.6a^2k^4} \text{ etc.}}{1 - \frac{bs}{k^2} + \frac{gs^3}{2.3ak^2} - \frac{bgs^4}{3.4.ak^4} + \frac{g^2s^6}{2.3.5.6a^2k^4} \text{ etc.}}$$

Pro ascensu vero posito $-s$ loco s habebitur $v =$

$$\frac{b - \frac{gs^2}{2a} - \frac{bgs^3}{3k^2} + \frac{g^2s^5}{2.3.5a^2k^2} + \frac{bg^2s^6}{3.4.6a^2k^4} - \text{etc.}}{1 + \frac{bs}{k^2} - \frac{gs^3}{2.3ak^2} - \frac{bgs^4}{3.4ak^4} + \frac{g^2s^6}{2.3.5.6a^2k^4} + \text{etc.}}$$

Ex his aequationibus totus arcus vel descensus vel ascensus inuenitur, si ponatur $v = o$, atque valor ipsius s inuestigatur. Vt si k fuerit quantitas valde magna erit arcus descensus qui sit $E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{8ab^2}{15gk^2} + \frac{17a^2b^4\sqrt{g}}{25g^2k^4\sqrt{2ab}} +$ etc. At sequens arcus ascensus qui sit F erit $= \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{8ab^2}{15gk^2} + \frac{17a^2b^4\sqrt{g}}{25g^2k^4\sqrt{2ab}} -$ etc. Q. E. I.

Corollarium I.

603. Si ergo resistentia est quam minima erit summa arcuum descensus et ascensus seu arcus

cus una semioscillatione descriptus, i. e. $E+F=\frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$, quam proxime.

Corollarium 2.

604. Differentia autem inter arcum ascensus et descensus scilicet $E-F=\frac{16ab^2}{15gk^2}=\frac{g(E+F)^4}{60ak^2}$. Quare differentia inter arcuum descensus et ascensus est ut biquadratum summae arcuum.

Scholion 1.

605. Ex his perspicitur in medio rarissimo, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum differentiam inter arcus ascensus et descensus proportionalem esse biquadrato summae arcuum, seu $E-F=\frac{g(E+F)^4}{60ak^2}$. Supra autem vidimus in medio rarissimo, quod in duplicata ratione celeritatum resistit, esse arcum descensus $E=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{2ab}{3gk}$, et arcum ascensus $F=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{2ab}{3gk}$; hinc erit $E+F=\frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$ et $E-F=\frac{4ab}{3gk}=\frac{(E+F)^2}{6k}$ (557.). Quare in hac resistentia est differentia inter arcus ascensus et descensus ut quadratum summae arcuum. Atque in medio quod in simplici ratione celeritatum resistit, si fuerit rarissimum est $E=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}}$ et $F=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}}$ (582). Quare erit $E-F=\frac{\pi a\sqrt{b}}{2g\sqrt{k}}=\frac{\pi(E+F)\sqrt{a}}{4\sqrt{2kg}}$. Seu differentia inter arcus descensus et ascensus est ipsi summae arcuum proportionalis.

Ex

Ex quo consequi videtur in medio quocunque rarissimo, quod resistit in $2m$ multiplicata ratione celeritatum, differentiam inter arcus ascensus et descensus super cycloide proportionalem esse potestati summae arcuum ascensus et descensus, cuius exponens sit $2m$. Atque in hac resistentiae hypothesi coniectare licet, fore arcum descensus $E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2.4.6 \cdots 2m.ab^m}{3.5.7 \cdots (2m+1)gk^m}$ et arcum ascensut $F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{2.4.6 \cdots 2m.ab^m}{3.5.7 \cdots (2m+1)gk^m}$. Vnde fit $E - F = \frac{1.2.3 \cdots m.g^{m-1}(E+F)^{2m}}{3.5.7 \cdots (2m+1)2^{2m-1}a^{m-1}k^m}$. Quoties ergo m est numerus integer seu $2m$ numerus par, assignari potést aequatio inter $E-F$ et $E+F$: at si m fuerit numerus fractus valor fractionis $\frac{1.2.3 \cdots m}{3.5.7 \cdots (2m+1)}$ per methodum interpolationem, quam exhibui in Comment. Acad. Petrop. A. 1730, inuestigari potest. Ex qua quidem constat si $2m$ fuerit numerus impar valorem huius fractionis inuoluere quadraturam circuli, quemadmodum etiam in casu, quo $2m = 1$ reperimus.

Scholion 2.

606. Quod quidem ad ipsam propositionem attinet, esse differentiam inter arcus descensus et ascensus super cycloide in totuplicata ratione summae arcuum, in quotuplicata ratione ce-

leritatum sit resistentia, si quidem fuerit minima *Newtonus* in Princ. demonstrauit. Atque demonstrationem etiam ex ipsa aequatione $dv = -\frac{gsds}{a} + \frac{v^m ds}{k^m}$ deriuare licet. Ponatur enim $v = b - \frac{gs^2}{2a} + Q$, vbi Q erit quantitas valde parua prae b et $\frac{gs^2}{2a}$. Hanc ob rem habebitur $-\frac{gsds}{a} + dQ = \frac{-gsds}{a} + \frac{(b-\frac{gs^2}{2a})^m ds}{k^m}$ pro descensu seu $Q = \int \frac{(2ab-gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$ hoc integrali ita accepto vt euanescat posito $s = o$. Pro descensu ergo erit $v = b - \frac{gs^2}{2a} + \int \frac{(2ab-gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$ et pro ascensu $v = b - \frac{gs^2}{2a} - \int \frac{(2ab-gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$. Ponatur $v = o$, et quia tunc proxime est $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$ ponatur $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + q$, erit $o = \frac{-gq\sqrt{2ab}}{a\sqrt{g}} + \int \frac{(2ab-gss)^m ds}{(2ak)^m}$, atque $q = \sqrt{\frac{a}{2gb}} \int \frac{(2ab-gss)^m ds}{(2ak)^m}$ siquidem post integrationem ponatur $s = \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. At quia in hoc ipsius q valore ipsarum $\sqrt{b}$ et s sunt $2m$ dimensiones habebit q huiusmodi formam Nb^m. Quocirca erit arcus descensus $E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + Nb^m$ et arcus ascensus $F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - Nb^m$. Hinc ergo habebitur $E - F = 2Nb^m = \frac{Ng^m(E+F)^{2m}}{2^{3m-1}a^m}$. At numerus N obtinebitur ex formula $\sqrt{\frac{a}{2gb}} \int (\frac{2ab-gss}{2abk})^m ds$ si-

ſi poſt integrationem ponatur $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Atque haec eſt demonſtratio illius ipſius, quod in praecedente ſcholio ex inductione deriuabamus. Erit enim N numerus rationalis, quoties m fuerit numerus integer affirmatiuus; at ſi $2m$ fuerit numerus integer impar inuentio numeri N a quadratura circuli pendebit. Generaliter autem valor ipſius q cum hac expreſſione $\frac{2.4.6 \cdots 2m\, ab^m}{3.5.7 \cdots (2m+1) g k^m}$ congruit.

PROPOSITIO 69.

Problema.

607. *In medio, quo reſiſtit in quadruplicata ratione celeritatum, ſi detur corporis ſuper curua* AMC *ex dato puncto* A. *deſcendentis in ſingulis locis celeritas, inuenire celeritatem eiusdem corporis deſcenſum in quocunque alio puncto* E *incipientis.* Tab. XIII. Fig 2.

Solutio.

Poſito $CP = x$ et $CM = s$, ſit corporis ex A delapſi celeritas in M debita altitudini u, quae quantitas u ergo per hyp. datur per x et s. Iam ſi corpus deſcenſum ex quocunque puncto E incipiat, ſit celeritas in M debita altitudini v. Aequatio vero motum determinans erit $dv = -g\,dx + \frac{v^2 ds}{k^2}$, quae dat valorem ipſius v vbicunque deſcenſus inceperit; erit ergo etiam $du = -g\,dx + \frac{u^2 ds}{k^2}$

$\frac{u^2 ds}{k^2}$. Ponatur $v = u - q$, erit $du - dq = -g dx + \frac{u^2 ds}{k^2} - \frac{2 qu ds}{k^2} + \frac{q^2 ds}{k^2}$; ex qua aequatione propter $du = -g dx + \frac{u^2 ds}{k^2}$ oritur $-dq = -\frac{2qu ds}{k^2} + \frac{q^2 ds}{k^2}$ ſeu $-\frac{dq}{q^2} + \frac{2u ds}{k^2} = \frac{ds}{k^2}$, quae multiplicata per $e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}$ dat hanc integralem $e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} = cq + q\int \frac{e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}{k^2}$, ex qua prodit $q = \frac{k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}}{c + \int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}$. Quocirca erit $v = u - \frac{k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}}{c + \int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}$, in qua aequatione integralia $\int \frac{u ds}{k^2}$ et $\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds$ ita ſint accepta vt euaneſcant poſito $s = 0$. Sit nunc altitudo celeritati in C debita $= a$, ſi deſcenſus ex A fiat; at altitudo celeritati in C debita ſi deſcenſus ex E fit $= b$; erit $b = a - \frac{k^2}{c}$. Ex quo habebitur $v = u - \frac{(a-b)k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}}{k^2 + (a-b)\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}$. Data ergo celeritate in C nempe $\sqrt{b}$ inuenietur punctum E, in quo deſcenſus incepit ex hac aequatione $u = \frac{(a-b)k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}}{k^2 + (a-b)\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}$, ex qua valor ipſius s dabit arcum CME. Quia igitur datur u per s ex hac aequatione celeritas corporis ex quocunque

que alio puncto delapsi super curua AMC inuenietur. Q. E. I.

Corollarium I.

608. Si valor ipsius v ita immutetur vt tam in numeratore quam in denominatore b sine coefficiente appareat, prodibit $v = \frac{(u\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}} ds - k^2 e^{\frac{2\int uds}{k^2}})}{\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}} ds}$

$$\frac{\left(b-a+\frac{k^2 u}{k^2 e^{\frac{2\int uds}{k^2}} - u\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}} ds}\right)}{\left(b-a-\frac{k^2}{\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}} ds}\right)}.$$ Atque erit $v = o$ si est $a + \frac{k^2 u}{u\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}} ds - k^2 e^{\frac{2\int uds}{k^2}}} = b$.

Corollarium 2.

609. Quia est $du - \frac{u^2 ds}{k^2} = -g dx$, erit huius aequationis per $e^{\frac{2\int uds}{k^2}}$ multiplicatae integralis haec $u = ae^{\frac{\int uds}{k^2}} - ge^{\frac{\int uds}{k^2}} \int e^{\frac{-\int uds}{k^2}} dx$; integralibus ita sumtis vt euanescant posito s vel $x = o$. Vel etiam est $\frac{du}{u} + \frac{gdx}{u} = \frac{uds}{k^2}$, atque hinc $\int \frac{uds}{k^2} = l\frac{u}{a} + \int \frac{gdx}{u}$. Quare erit $e^{\frac{\int uds}{k^2}} = \frac{e^{\int \frac{gdx}{u}} u}{a}$; vnde dx loco ds in aequatione superiore potest introduci.

Corollarium 3.

610. Si resistentia fuerit quam minima, euanescet $\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}} ds$ prae k^2; et ideo erit $v = u - (a-b) e^{\frac{2\int uds}{k^2}} = u - (a-b)(1 + 2\int \frac{uds}{k^2})$, propter k quantitatem maximam. Quamobrem erit $v = b + \frac{2b\int uds}{k^2} - a - 2\int \frac{uds}{k^2} + u = (1 + \frac{2\int uds}{k^2})(b - a + \frac{u}{1 + \frac{2\int uds}{k^2}})$.

Corollarium 4.

611. Cum autem sit $\sqrt{(1 + \frac{2\int uds}{k^2})} = 1 + \frac{\int uds}{k^2}$ erit elementum temporis $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{k^2 ds}{(k^2 + \int uds)\sqrt{(b - a + \frac{k^2 u}{k^2 + 2\int uds})}}$. Per aequationem autem $du = -g dx + \frac{u^2 ds}{k^2}$ est quam proxime $u = a - gx + \int \frac{(a-gx)^2 ds}{k^2}$, vnde erit $\int uds = \int (a-gx) ds$, atque $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{k^2 ds}{(k^2 + \int (a-gx)ds) \sqrt{(b - a + \frac{k^2 a - gk^2 x + \int (a-gx)^2 ds}{k^2 + 2\int (a-gx) ds})}} = \frac{k^2 ds}{(k^2 + \int (a-gx) ds \sqrt{(b - \frac{gk^2 x - \int (a^2 - g^2 x^2) ds}{k^2 + 2\int (a-gx) ds})}}$.

Scholion.

612. Quemadmodum hypothesis resistentiae quadratis celeritatum proportionalis prae aliis hypothesibus excepta ea, quae est constans, hanc habet praerogatiuam, vt corporis super quacunque

curua moti celeritas in omnibus locis ex aequatione curuae poſſit definiri; ita haec reſiſtentiae hypotheſis in hoc prae reliquis excellit, quod ex dato vnico deſcenſu vel aſcenſu, ſimul omnes deſcenſus et aſcenſus poſſint determinari. In aliis enim reſiſtentiis operatio, qua hic vſi ſumus, non ſuccedit, neque ad aequationem deducit, in in qua indeterminatae a ſe inuicem ſeparari poſſunt. Hanc ob rem vti reſiſtentia conſtans eſt ſimpliciſſima, eamque ſequitur ea, quae quadratis celeritatum eſt proportionalis, ita poſt has pro ſimpliciſſima reſiſtentiae hypotheſi eſt habenda ea, quae fit in quadruplicata ratione celeritatum. Videtur quidem ex his parum commodi ad motum in hac reſiſtentiae hypotheſi definiendum obtineri, quia vnus deſcenſus tanquam datus accipitur, qui autem inuentu aeque eſt difficilis ac quisque alius. At ſi plures deſcenſus conſiderantur, et inter ſe comparantur, aequatio $dv = -gdx + \frac{v^2 ds}{k^2}$ reipſa tres variabiles implicat, nempe praeter v et s ſeu x celeritatem in puncto C, quae in variis deſcenſibus variatur. Quare cum reſolutionem huius aequationis ad hanc aequationem $du = -gdx + \frac{u^2 ds}{k^2}$ reduxerimus, quae ad vnicum deſcenſum ſpectat, illud incommodum trium variabilium hoc modo tollitur. Praeterea ope iſtius artificii plures deſcenſus inter ſe comparari poſſunt, quod in aliis reſiſtentiae hypotheſibus ne quidem fieri poteſt. Atque hinc etiam multa pro-

ble-

blemata inuersa pro hac resistentiae hypothesi resolui possunt, quae in aliis omnino tractari nequeunt.

PROPOSITIO 70.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 3. 613. *Si resistentia fuerit quam minima respectu potentiae sollicitantis absolutae, et proportionalis potestati cuicunque celeritatum determinare motum corporis super quacunque curua* AM.

Solutio.

Descendat corpus super curua AM, descensus initio in A existente; ponatur super axe verticali abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$; et potentia perpetuo deorsum trahens $= g$. Sit celeritas in M debita altitudini v et resistentia ibidem $= \frac{v^m}{k^m}$, ita vt resistentia sit proportionalis potestati exponentis $2m$ celeritatum. His positis erit $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$; at quia resistentia ponitur valde parua, erit terminus $\frac{v^m ds}{k^m}$ vehementer exiguus, atque propterea $v = gx$ quam proxime. Substituatur gx loco v in termino $\frac{v^m ds}{k^m}$ erit $v = gx - \frac{g^m}{k^m} \int x^m ds$

at-

atque simili modo adhuc propius $v = gx - \frac{g^m}{k^m}\int x^m ds$ $+ \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}} \int x^{m-1} ds \int x^m ds$. Quae integralia ita sunt accipienda vt euanescant posito $x = o$. Hinc ergo erit $\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{gx}} + \frac{g^m \int x^m ds}{2k^m gx\sqrt{gx}} - \frac{mg^{2m}\int x^{m-1} ds \int x^m ds}{2k^{2m} g^2 x\sqrt{gx}}$ $+ \frac{3g^{2m}(\int x^m ds)^2}{8k^{2m} g^2 x^2 \sqrt{gx}}$. Atque tempus descensus per AM erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int x^{-\frac{3}{2}} ds \int x^m ds$. q. pr. At si descensus ad fixum punctum C vsque desideretur, initio descensus ex puncto E facto, ponatur puncti E supra C altitudo verticalis $CD = a$; abscissa $CP = x$ et arcus $CM = s$; quibus positis hic casus ad superiorem reducetur, si ibi loco x ponatur $a - x$ et $-ds$ loco ds. Quare si altitudo celeritati in M debita vocetur v, erit $v = g(a-x) + \frac{g^m}{k^m}\int (a-x)^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}} \int (a-x)^{m-1} ds \int (a-x)^m ds$; q. p. Haec vero integralia ita sunt accipienda vt euanescant posito $x = a$. Atque tempus per arcum EM est $= -\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$. q. pr. vbi iterum omnia integralia ita sunt capienda, vt euanescant posito $x = a$. Similimodo si corpus ex C super curua CME ascendat tanta celeritate, qua ad Fig. 2.

punctum E vsque pertingere possit, eaedem aequationes locum habebunt si modo loco k^m ponatur $-k^m$. Hanc ob rem erit $v = g(a-x) - \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}}\int(a-x)^{m-1} ds \int(a-x)^m ds$, q. p. atque tempus ascensus per $ME = -\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} - \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int(a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int(a-x)^m ds$ q. pr. omnibus his integralibus quoque ita acceptis, vt euanescant posito $x=a$. Atque hoc modo tam descensus corporis super curua quacunque, quam oscillationes super curua idonea in medio rarissimo poterunt determinari. Q. E. I.

Corollarium 1.

Fig. 3. 614. Apparet ex his, quod quidem per se intelligitur, si corpus in medio resistente super curua AM descendat, fore celeritatem in M minorem, quam si corpus in vacuo super eadem curua descendisset. Atque tempus in medio resistente maius est, quam tempus descensus per AM in vacuo.

Corollarium 2.

Fig. 2. 615. Altitudo celeritati in puncto infimo C debita prodibit, si in expressione ipsius v ponatur $x=o$. Hoc autem facto fit $v = ga + \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$ q. pr. posito post integrationem supra

pra praescripto modo peractam $x=o$. At si $(a-x)^m ds$ ita capiatur vt euanescat posito $x=o$, tum erit in puncto C, $v=ga-\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$, si post integrationem ponatur $x=a$. Id quod ad descensum pertinet.

Corollarium 3.

616. At pro ascensu celeritas corporis in C qua ad E vsque ascendere valet debita erit altitudini $=ga+\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$, si hoc integrale ita accipiatur vt euanescat posito $x=o$, atque post integrationem ponatur $x=a$.

Corollarium 4.

617. Sit altitudo debita celeritati in $C=b$ quam iam descendendo per EMC acquisiuit, et qua iterum super eadem curua ascendet; ponatur altitudo DC descensu percursa vt ante a, et altitudo ad quam quam ascensu pertinget $a-d$, erit d quantitas valde parua; atque ideo $b=ga-\frac{g^m}{k^m}$ $\int(a-x)^m ds=ga-gd+\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$, et $d=\frac{2g^{m-1}}{k^m}$ $\int(a-x)^m ds$. Vel etiam $d=\frac{2ga-2b}{g}$.

Corollarium 5.

618. Quia tempus descensus per EM est $= -\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$ his integralibus ita acceptis vt euanescant posito $x=a$; erit tempus per $CM = \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} - \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$, si integralia ita accipiantur vt euanescant posito $x=o$. Atque simili modo in ascensu erit tempus per $CM = \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$.

Corollarium 6.

619. Integrum ergo tempus vel descensus vel ascensus per CME habebitur, si in his posterioribus formulis ponatur post integrationem $x=a$.

Scholion.

620. Satis iam expositis iis, quae ad motum corporis super data curua inueniendum pertinent, progredior ad quaestiones inuersas, in quibus ex aliis datis, quae incognita sunt, inuestigantur. Et primum quidem occurrunt huiusmodi problemata, in quibus lex accelerationis seu scala celeritatum datur, et curua quaeritur, quae motum illi scalae conuenientem producat in medio

dio quocunque resistente; potentiam vero absolutam vt hactenus constantem et deorsum directam assumemus.

PROPOSITIO 71.

Problema.

621. *In medio, quod resistit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, inuenire curuam* AM, *super qua corpus ita descendat, vt in singulis punctis* M *celeritatem habeat debitam altitudini, quae aequalis sit applicatae respondenti* PL *datae curuae* BL. Tab. XIII. Fig. 4.

Solutio.

Posita $AP = x$ et $PL = v$ dabitur aequatio inter x et v propter curuam BL datam. Iam sit arcus $AM = s$, et exponens rationis multiplicatae celeritatum $2m$, cui resistentia est proportionalis; quibus positis erit $dv = g\,dx - \frac{v^m\,ds}{k^m}$; denotante g potentiam vniformem deorsum trahentem et k exponentem resistentiae. Ex hac igitur aequatione est $ds = \frac{gk^m\,dx - k^m\,dv}{v^m}$, quae quia v per x dari ponitur, variabiles habet a se inuicem separatas, atque idcirco sufficit ad curuam quaesitam AM construendam. At quia ds semper maius esse debet quam dx; ne curua AM fiat imaginaria, oportet vt sit $gk^m\,dx - k^m\,dv > v^m\,dx$, seu

 $dx >$

$dx > \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$. Namque vbi est $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$ ibi curuae AM tangens fit verticalis; et vbi $dx < \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$, ibi curua AM omnino partem habere nequit. Q. E. I.

Corollarium 1.

622. Cum vbi curuae BL tangens est verticalis, fit $dv = o$, erit in loco respondente curuae AL, $ds = \frac{gk^m dx}{v^m}$, in quo puncto corpus descendens maximam vel minimam habebit celeritatem. Ne igitur hoc curuae AL punctum sit imaginarium, oportet sit $gk^m > v^m$, seu $v < k\sqrt[m]{g}$.

Corollarium 2.

623. Si curua BL alicubi incidat in axem AP, vt ibi sit $v = o$; erit in loco curuae AM respondente $ds = \infty$; si quidem m fuerit numerus affirmatiuus. Hoc ergo loco curua AM habebit tangentem horizontalem, in quam curua desinet.

Corollarium 3.

624. Habeat curua AM alicubi tangentem horizontalem, euanescet illo loco dx prae ds. Quamobrem erit $ds = \frac{-k^m dv}{v^m}$. Ex quo apparet

in

in loco curuae BL respondente applicatas decrescere debere, atque ibi curuae BL tangentem fore horizontalem, quia dv infinities quoque maius erit quam dx.

Corollarium 4.

625. Curuae AM tangens, vt vidimus, est verticalis, vbi est $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$. Quo igitur curua in initio A, vbi celeritas sit nulla, habeat tangentem verticalem, oportet vt ibi sit $dv = gdx$, seu $v = gx$. Hoc ergo casu tangens anguli, quem curua BL in A cum AP constituet, erit $= g$.

Corollarium 5.

626. Cum sit $ds = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^m}$, erit elementum temporis $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^{m+\frac{1}{2}}}$. Quocirca tempus descensus per AM erit $= \frac{2k^m}{(2m-1)v^{m-\frac{1}{2}}} + gk^m \int \frac{dx}{v^{m+\frac{1}{2}}}$.

Scholion I.

627. Si curua BL super AB ascenderet, tum curua AM quoque sursum vergeret; atque loco descensus problemati satisfaceret ascensus super

per illa curua. Fit enim hoc casu abscissa x negatiua ideoque et eius elementum dx; quamobrem habebitur ista aequatio $ds = \frac{-gk^m dx - k^m dv}{v^m}$ quae oritur ex aequatione $dv = -g dx - \frac{v^m ds}{k^m}$ naturam ascensus continente. Simili modo si curua BL ita est comparata, vt rursus ascendat; tum curua AM quoque sursum dirigetur; et partim descensu partim ascensu conditioni praescriptae satisfaciet.

Exemplum I.

628. Si quaeratur curua AM super qua corpus aequabiliter moueatur celeritate scilicet altitudini b debita; erit BL linea recta parallela axi AP atque $v = b$. Hanc ob rem erit $ds = \frac{gk^m dx}{b^m}$. Vnde sequitur lineam AM fore rectam inclinatam, et cosinum anguli, quem cum verticali AP constituet fore $= \frac{b^m}{gk^m}$ posito 1 pro sinu toto. Quo igitur maior fuerit b, seu celeritas, qua corpus ferri debet, eo minor erit angulus cum verticali AP, atque si fuerit $b^m = gk^m$, tum linea quaesita ipsa erit verticalis AP. At si b^m maior proponeretur quam gk^m, tum solutio perduceret ad imaginarium, ad angulum scilicet, cuius cosinus esset maior

maior ſinu toto. Tempus porro, quo lineae portio AM deſcenſu abſoluitur, erit $= \frac{gk^m x}{b^m \sqrt{b}} = \frac{s}{\sqrt{b}}$.

Exemplum 2.

629. Quaeratur curua AM ſuper qua corpus ita deſcendat, vt eius celeritas in ſingulis punctis ſit vt radix quadrata ex altitudine AP, quae eſt proprietas omni motui in vacuo competens. Erit igitur $v = \alpha x$, et $dv = \alpha dx$; hisque ſubſtitutis habebitur $ds = \frac{gk^m dx - \alpha k^m dx}{\alpha^m x^m}$ et $s = \frac{(g-\alpha)k^m x^{1-m}}{(1-m)\alpha^m}$, vbi conſtantis additione non eſt opus ſi $m < 1$. At ſi $m = 1$. curua eſt tractoria ſuper linea horizontali per A transeunte deſcripta; ſuper qua corpus ab infinita diſtantia, concurſu ſcilicet tractoriae cum aſymtoto, deſcenſum incipit. Simili modo ſi $m > 1$, curua formam habebit tractoriae ſimilem. Semper autem eſſe debet $\alpha < g$; ex quo perſpicitur corpus in medio reſiſtente non tantam acquirere poſſe celeritatem quantam in vacuo. Deinde quia ds maius eſſe debet quam dx, erit $(g-\alpha)k^m > \alpha^m x^m$; corpus igitur profundius deſcendere nequit, quam per altitudinem $= \frac{k}{\alpha}\sqrt[m]{(g-\alpha)}$; quo loco curuae tangens erit verticalis, curuaque punctum reuerſionis habebit. Tempus autem, quo corpus per arcum

AM descendit est $= \int \frac{ds}{\sqrt{ax}} = \frac{2(g-\alpha)k^m x^{\frac{1}{2}-m}}{(1-2m)k^{m+\frac{1}{2}}}$.
Quare nisi sit $m < \frac{1}{2}$ tempus non potest esse finitum; sed est infinite magnum; nam si $m = \frac{1}{2}$ curua erit cyclois deorsum versa, super cuius vertice A corpus perpetuo permanebit.

Corollarium 6.

630. Perspicitur ergo in medio resistente motum non vltra datum punctum posse continuari, ita vt celeritates semper sint in subduplicata ratione altitudinum.

Corollarium 7.

631. Ex his apparet omnes curuas hoc modo inuentas habere in A tangentem horizontalem. Quamdiu ergo radius osculi in A est finitae magnitudinis, corpus nunquam descendet. At si radius osculi sit infinite paruus, quod euenit si $m < \frac{1}{2}$, tum corpus descendere poterit; id quod ex eo, quod tempus sit finitum, intelligitur.

Scholion 2.

632. Si corpus ex A descensum incipiat, atque curuae AM in A tangens non fuerit horizontalis, tum ipso motus initio resistentia est nulla, erit ergo ibi $dv = g dx$. Quamobrem quo loco AM curua prodeat non habens in A tangentem

tem horizontalem, curua BL, quae in A conueniet cum AP, ita debet esse comparata, vt in ipso initio sit $v = gx$; seu tangens curuae BL in A cum axe AP angulum constituere debet, cuius tangens sit $= g$; alioquin enim curua AM non angulum acutum cum AP conficeret. Magis autem descendendo semper esse debet $v < gx$, in medio enim resistente celeritas ex quacunque altitudine acquisita minor est celeritate, quae in vacuo ex eadem altitudine acquiritur. Porro in medio resistente corpus maiorem celeritatem acquirere non potest, quam si per lineam verticalem delaberetur, quia enim linea verticalis est breuissima, et citissime descensu absoluitur, corpus quam minime resistentiae actioni est expositum. Quamobrem in medio resistente curua BL ita debet esse comparata, vt v vbique sit minor, quam altitudo debita celeritati, quae a corpore in eodem medio resistente per AP cadendo acquiritur. Vbi enim v hanc altitudinem superat, ibi curua AM fit imaginaria.

Scholion 3.

633. Simili modo res se habet si pro ascensu detur curua BLD, cuius applicatae PL sint altitudines debitae celeritatibus corporis ascendentis super curua inuenienda AME in punctis M. Dictis enim $AP = x$; $PL = v$ et $AM = s$, erit $ds = \frac{-gk^m dx - k^m dv}{v^m}$. Ne igitur ds sit negatiuum, Tab. XIII. Fig. 5.

 opor-

oportet, vt dv habeat valorem negatiuum, i. e. vt curua BL continuo ad axem AD conuergat. Deinde etiam $-dv$ maius esse debet quam gdx seu tangens curuae BL vbique cum axe AP maiorem angulum constituere debet, quam est is, cuius tangens est $=g$. Neque vero hoc sufficit, sed praeterea $-dv-gdx$ maius esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$; seu $-dv > \frac{(gk^m+v^m)dx}{k^m}$, siue differentia inter $-dv$ et gdx maior esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$. Haec postrema conditio huc redit, vt PL sit minor, quam altitudo debita celeritati, quam corpus in P haberet, si ex A celeritate alt. AB debita, per AP ascendisset. In ascensu enim per lineam verticalem corpus pro ratione altitudinis percursae minimum celeritatis detrimentum a resistentia patitur. In ipso autem puncto D, angulus ADB tantus esse debet vt eius tangens sit $=g$; quia prope punctum E, in quo celeritas est nulla, resistentiae effectus euanescit: sin vero iste angulus esset maior, curua AME in E tangentem haberet horizontalem, vti in praeced. scholio quoque de descensu monuimus.

PROPOSITIO 72.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 6. 634. *Si detur curua* AM *super qua corpus in vacuo moueatur; inuenire curuam* am, *super qua corpus*

pus in medio resistente ita descendat, vt celeritas in a *aequalis sit celeritati in* A, *et sumtis arcubs* A M *et* a m *aequalibus, vt celeritates in singulis punctis* M *et* m *sint quoque aequales.*

Solutio.

Ductis axibus verticalibus AP et ap, et horizontalibus MP, mp; sit $AM = am = s$; $AP = t$, et $ap = x$; propter curuam AM datam dabitur aequatio inter s et t. Iam sint celeritates in punctis A et a debitae altitudini b, et celeritates in M et m debitae altitudini v. Sit potentia absoluta deorsum sollicitans g, et resistentia vt potestas exponentis $2m$ celeritatum. His positis erit pro motu in vacuo super curua AM, $dv = -gdt$, seu $v = b - gt$; et pro descensu in medio resistente super curua ma erit $dv = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m}$; in qua aequatione si loco dv et v substituantur valores ex priori aequatione inuenti, prodibit $-gdt = -gdx + \frac{(b-gt)^m ds}{k^m}$; seu $dx = dt + \frac{(b-gt)^m ds}{gk^m}$. Quia autem datur aequatio inter t et s; si loco t eius valor in s substituatur, habebitur aequatio inter x et s pro curua quaesita am. Q. E. I.

Corollarium 1.

635. Si in curua AM punctum B fuerit initium descensus, ideoque eius altitudo supra A $= \frac{b}{g}$; habebitur quoque in curua am initium descensus b, sumendo arcum $amb = AMB$.

Corollarium 2.

636. Ex solutione apparet esse semper $dx > dt$: quare altitudo ap maior erit quam altitudo AP; in medio enim resistente maiore opus est altitudine ad eandem celeritatem generandam quam in vacuo.

Corollarium 3.

637. Quia in curuis AM et am sumtis aequalibus arcubus, celeritates in illis locis sunt aequales; tempora quoque, quibus aequales arcus AM et am describuntur, erunt aequalia. Atque ideo tempus descensus in medio resistente per $bm\alpha$ aequale est tempori descensus in vacuo per BMA.

Corollarium 4.

637. Ne curua bma fiat imaginaria, oportet vt sit vbique $dx < ds$. Hanc ob rem debet esse $dt + \frac{(b-gt)^m ds}{gk^m} < ds$ seu $gk^m dt < gk^m ds - (b-gt)^m ds$. Hoc autem ita se habet si fuerit gk^m

dt

$<(gk^m-b^m)ds$, qui est casus si t euanescit et pertinet ad punctum a, nisi t alicubi habeat valorem negatiuum. Quocirca ad hoc tantum est respiciendum vt punctum a fiat reale, quod euenit si $gk^m dt$ non maius fuerit quam $(gk^m-b^m)ds$.

Corollarium 5.

639. Ne igitur curua am fiat imaginaria, ante omnia necesse est, vt sit $b < k\sqrt[m]{g}$. Sit in puncto A $ds = \alpha dt$, erit α numerus vnitate maior; et ideo erit $gk^m < \alpha(gk^m-b^m)$ seu $b < k\sqrt[m]{\frac{g(\alpha-1)}{\alpha}}$. Si ergo curua MA in A habeat tangentem horizontalem debet esse $b < k\sqrt[m]{g}$ propter $\alpha = \infty$.

Corollarium 6.

640. Sit autem, si fuerit $ds = \alpha dt$ in puncto A, $b^m = \frac{g(\alpha-1)}{\alpha}k^m$; erit in ipso puncto a, $dx = \frac{ds}{\alpha} + \frac{(\alpha-1)ds}{\alpha} = ds$. Hoc ergo casu curua am in a tangentem habebit verticalem.

Corollarium 7.

641. In initio motus in B fit $b = gt$, seu $t = \frac{b}{g}$. Pro puncto b igitur erit $dx = dt$ curuarum elementis sumtis aequalibus. Quare tangentes in punctis B et b aequaliter erunt inclinatae.

Scho-

Scholion I.

642. Quia curua am non abſolute ex curua AM conſtrui poteſt, ſed praeterea noſſe oportet celeritatem in puncto A ſeu deſcenſus initium B; ſi in curua AM aliud deſcenſus initium accipiatur, alia inuenietur curua am. Curuae ergo BMA et bma ratione vnici deſcenſus tantum ita congruunt, vt celeritates aequalibus percurſis ſpatiis ſint inter ſe aequales; et ſi in aliis punctis initia deſcenſus ponantur, haec conuenientia non amplius locum habebit. Non igitur dantur duae curuae ſuper quibus deſcenſus omnes ad datum punctum vsque inter ſe congruant, altera in vacuo altera in medio reſiſtente conſtituta.

Exemplum I.

642. Sit AMB linea recta vtcunque inclinata ita vt ſit $s=\alpha t$; et quaeratur curua amb ſuper qua corpus ſimili modo progrediatur in medio reſiſtente, quo ſuper AMB in vacuo. Poſito autem $\frac{s}{\alpha}$ loco t prodibit ſequens aequatio inter x et s pro curua quaeſita amb: $dx=\frac{ds}{\alpha}+\frac{(\alpha b-gs)^m}{g\alpha^m k^m}ds$, cuius integralis eſt $x=\frac{s}{\alpha}+\frac{\alpha b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}-\frac{(\alpha b-gs)^{m+1}}{(m+1)g^2\alpha^m k^m}$. Nepunctum a fiat

ima-

imaginarium oportet vt $\frac{1}{\alpha}+\frac{b^m}{gk^m}<1$. Nam si fuerit $b^m=\frac{(\alpha-1)gk^m}{\alpha}$ curua in a habebit tangentem verticalem; neque propterea b maiorem habere poterit valorem. Ponatur igitur corpus super linea inclinata BMA ex tanta altitudine descendisse, vt fiat $b=k\sqrt[m]{\frac{g(\alpha-1)}{\alpha}}$, erit $dx=\frac{ds}{\alpha}+\frac{(k\sqrt[m]{g\alpha^{m-1}(\alpha-1)}-gs)^m ds}{g\alpha^m k^m}$, quae est aequatio pro curua amb, in qua initium descensus in b est capiendum, vbi est $ds=\alpha dx$, seu arcus amb erit $=k\sqrt[m]{\frac{\alpha^{m-1}(\alpha-1)}{g^{m-1}}}$. Si resistentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis erit $m=1$, ideoque $dx=\frac{ds}{\alpha}+\frac{(gk(\alpha-1)-gs)ds}{g\alpha k}=ds-\frac{sds}{\alpha k}$ et integrando $x=s-\frac{ss}{2\alpha k}$. Quae est aequatio pro cycloide super basi horizontali descripta, cuius circuli generatoris diameter est $\frac{\alpha k}{2}$.

Corollarium 8.

644. Sit ergo super basi horizontali CB descripta cyclois AMB circulo generatore ANC, et sit medium resistens in duplicata ratione celeritatum, cuius exponens sit $=k$. Si nunc in circulo ANC sumatur chorda $AN=\frac{k}{2}$ ducaturque horizontalis PNM, et ex M tangens MT: atque duo corpora ponantur descendere alterum Tab. XIII. Fig 7.

ſuper MT in vacuo et alterum ſuper curua MB in medio reſiſtente, ambo haec corpora aequalibus temporibus aequalia ſpatia abſoluent.

Exemplum 2.

Fig. 6 645. Sit curua AMB cyclois deorſum ſpectans, cuius circuli generatoris diameter $= \frac{a}{2}$; erit $ss = 2at$ et $t = \frac{ss}{2a}$ atque $dt = \frac{sds}{a}$. His ergo ſubſtitutis prodibit pro curua amb ſequens aequatio $dx = \frac{sds}{a} + \frac{(2ab - gss)^m ds}{2^m g a^m k^m}$; vel ſi totus arcus AMB, qui in vacuo deſcenſu abſolui ponitur, vocetur c erit $b = \frac{gcc}{2a}$; ideoque pro curua amb orietur iſta aequatio $dx = \frac{sds}{a} + \frac{g^{m-1}(cc - ss)^m ds}{2^m a^m k^m}$. Ne igitur haec curua in puncto a fiat imaginaria, oportet ſit $g^{m-1} c^{2m} < 2^m a^m k^m$, vel altitudo arcus AB minor eſſe debet quam $\frac{k}{g}\sqrt[m]{g}$; nam ſi fuerit altitudo arcus $AB = \frac{k}{g}\sqrt[m]{g}$, tum curuae amb tangens in b erit verticalis. Si ergo B ſit cuſpis cycloidis, erit $\frac{cc}{2a} = \frac{a}{2}$ ſeu $c = a$: et ſi ſit praeterea $g^{m-1} a^m = 2^m k^m$, quo curuae amb in a tangens fiat verticalis, habebitur iſta aequatio $dx = \frac{sds}{a} + \frac{(aa - ss)^m ds}{a^{2m}}$; quae curua in duobus punctis a et b habebit tangentes verticales.

Co-

Corollarium 9.

646. Cum igitur corpus in vacuo ſuper cycloide ita deſcendat, vt eius accelerationes ſint ſpatiis percurrendis proportionales; eandem proprietatem habebit deſcenſus in medio reſiſtente ſuper curua *bma*, ſi initium deſcenſus ſumatur in puncto *b*, quod per aequationem ad curuam *amb*, determinatur, erit ſcilicet $amb = c$.

Corollarium 10.

647. Si in curua AMB aliud deſcenſus initium B capiatur; tota curua *amb* alia reperietur, quia in eius aequatione longitudo arcus $AMB = c$ continetur. Quare etiamſi cyclois ſit curua tautochrona in vacuo, curua *amb* talis tamen non erit in medio reſiſtente: quia pluribus deſcenſibus ſuper AMB totidem curuae diuerſae in medio reſiſtente reſpondent.

Scholion 2.

648. Curuae hoc exemplo erutae ſunt eae ipſae, quas Clar. Hermannus in Comm. Tom. II. pro tautochronis in mediis reſiſtentibus inuenit; ſed ſimul ipſe demonſtrauit eas quaeſito ſatisfacere non poſſe. Ceterum ex his intelligitur, ſimili modo in medio reſiſtente curuam poſſe inueniri, ſuper qua corpus aſcendendo eodem modo moueatur, quo ſuper dato curua in vacuo. Sint

enim puncta Ae t a initia ascensus illud in vacuo hoc in medio resistente; sitque celeritas initialis debita altitudini b; habebitur pro curua amb ista aequatio $dx = dt - \frac{(b-gt)^m ds}{gk^m}$; ex qua aequatione intelligitur, curuam amb non fieri posse imaginariam, nisi ipsa curua AMB talis fuerit. Nam quia, ne curua amb sit imaginaria, esse debet $dx < ds$; hic dx minus est quam dt, quod per se minus est quam ds. Vt si linea AMB sit linea verticalis, altera amb poterit assignari; nam posita $AB = c$, erit $b = gc$, et $s = t$; quare pro curua amb inuenitur ista aequatio $dx = ds - \frac{g^{m-1}(c-s)^m ds}{k^m}$, cuius integralis est $x = s + \frac{g^{m-1}(c-s)^{m+1} - g^{m-1}c^{m+1}}{(m+1)k^m}$. Accommodetur haec aequatio ad resistentiam quadratis celeritatum proportionalem fiet $m = 1$, ideoque erit $x = s +$
Fig. 7. $\frac{(c-s)^2 - c^2}{2k} = \frac{2(k-c)s + ss}{2k}$, quae est ad cycloidem hoc modo: describatur cyclois AMB circulo generatore diametri $AC = \frac{k}{2}$, super basi horizontali BC, tum capiatur arcus $AM = k - c$; erit M initium ascensus, ex quo puncto, si corpus MA ascendat celeritate altitudini gc debita, in medio resistente in duplicata ratione celeritatum eodem modo mouebitur, quo in vacuo eadem celeritate initiali sursum ascendens verticaliter.

PROPOSITIO 73.
Problema.

649. *Si potentia fuerit vniformis et deorsum directa, mediumque in ratione quacunque multiplicata celeritatum resistat; determinare curuam AM, super qua corpus descendendo secundum horizontalem AH aequabiliter progrediatur.* Tab. XIV. Fig. 1.

Solutio.

Sit A curuae punctum supremum, per quod ducatur axis verticalis AP; celeritasque, qua corpus horizontaliter progreditur, sit debita altitudini b. Sumatur abscissa AP $= x$, applicata PM $= y$ et arcus AM $= s$; sitque corporis in M celeritas debita altitudini v; qua celeritate corporis elementum M$m = ds$ percurret. Erit ergo vt ds ad dy ita corporis celeritas per Mm, quae est vt $\sqrt{v}$ ad celeritatem horizontalem $\sqrt{b}$, vnde oritur $v = \frac{bds^2}{dy^2}$. Iam sit potentia sollicitans $= g$; exponens resistentiae k, et ipsa resistentia $= \frac{v^m}{k^m}$. His positis erit $dv = g\,dx - \frac{v^m ds}{k^m}$, quae aequatio, si loco v valor $\frac{bds^2}{dy^2}$ substituatur, exprimet naturam curuae quaesitae. Sit autem $ds = p\,dy$, erit $v = bp^2$ et $dx = dy\sqrt{(p^2-1)}$. Quocirca habebitur $2bp\,dp = g\,dy \sqrt{(p^2-1)} - \frac{b^m p^{2m+1} dy}{k^m}$, quae separata dat $dy =$

 2bk

$\frac{2bk^m p dp}{gk^m \sqrt{(p^2-1)}-b^m p^{2m+1}}$. Curuae igitur quaesitae sequens erit constructio; sumto $y = \int \frac{2bk^m p dp}{gk^m \sqrt{(p^2-1)}-b^m p^{2m+1}}$ erit $x = \int \frac{2bk^m p dp \sqrt{(p^2-1)}}{g^m \sqrt{(p^2-1)}-b^m p^{2m+1}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

650. Si loco pp restituatur $\frac{v}{b}$, atque per v definiantur y et x, erit $y = \int \frac{k^m dv \sqrt{b}}{gk^m \sqrt{(v-b)}-v^m \sqrt{v}}$ atque $x = \int \frac{k^m dv \sqrt{(v-b)}}{gk^m \sqrt{(v-b)}-v^m \sqrt{v}}$. Similique modo hinc erit arcus $s = \int \frac{k^m dv \sqrt{v}}{gk^m \sqrt{(v-b)}-v^m \sqrt{v}}$. Sumto autem $\frac{v}{b}$ loco pp erit $ds = \frac{dy\sqrt{v}}{\sqrt{b}}$ et $dx = \frac{dy\sqrt{(v-b)}}{\sqrt{v}}$ atque $ds = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{(v-b)}}$.

Corollarium 2.

651. Quia aequatio $dy = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{gk^m \sqrt{(v-b)}-v^m \sqrt{v}}$ est separata; ex ea solutio particularis quaesito satisfaciens erui potest, faciendo denominatorem $gk^m \sqrt{(v-b)}-v^m \sqrt{v}=0$, vnde erit ipsa celeritas $\sqrt{v}$ constans. Sit ergo $v=c$ erit $\sqrt{(v-b)} = \frac{c^m \sqrt{c}}{gk^m}$;

atque

atque ideo $ds = \frac{gk^m dx}{c^m}$ pro linea recta inclinata vt supra iam inuenimus (627).

Corollarium 3.

652. Quo autem corpus data celeritate, quae debita est altitudini b horizontaliter progrediatur, ex aequatione $\surd(c-b) = \frac{c^m \surd c}{gk^m}$ definiri debet altitudo c. Qua inuenta habebitur inclinatio rectae satisfacientis, et celeritas corporis initialis $\surd c$ in A; qua aequabiliter per rectam descendet.

Corollarium 4.

653. Si resistentia euanescat corpusque in vacuo moueatur fiet $k = \infty$ ideoque $x = \int \frac{dv}{g}$ seu $v = g(a+x)$, atque $dy = \frac{dx \surd b}{\surd(ga+gx-b)}$. Integrando ergo fiet $y = \frac{2}{g}\surd b(ga+gx-b) - \frac{2}{g}\surd b(ga-b)$ quae est aequatio pro parabola, quam corpus proiectum libere describit.

Exemplum.

654. Si medium fuerit rarissimum, atque ideo k valde magnum, erit $\frac{1}{gk^m \surd(v-b) - v^m \surd v}$ $= \frac{1}{gk^m \surd(v-b)} + \frac{v^m \surd v}{g^2 k^{2m}(v-b)}$ q. pr. Hanc ob rem ha-

habebitur $y = \frac{2\sqrt{b(v-b)}}{g} + \int \frac{v^m dv \sqrt{bv}}{g^2 k^m (v-b)}$ et $x = \frac{v}{g} + \int \frac{v^m dv \sqrt{v}}{g^2 k^m \sqrt{(v-b)}}$. Ex hac posteriori aequatione est quam proxime $v = gx - \int \frac{g^{m-1} x^m dx \sqrt{gx}}{k^m \sqrt{(gx-b)}}$, qui valor in aequatione $dy = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(v-b)}}$ substitutus dat aequationem inter x et y pro curua quaesita.

PROPOSITIO 74.

Problema.

Tab. XIV. Fig. 2. 655. *Inuenire curuam AM super qua corpus descendens in medio quocunque resistente aequabiliter deorsum progrediatur existente potentia absoluta vniformi et deorsum directa.*

Solutio.

Posita abscissa $AP = x$, $AM = s$, sit celeritas qua corpus vniformiter descendere debet debita altitudini b. Potentia porro vniformis deorsum directa sit g, et altitudo debita celeritati $M = v$ atque resistentia $= \frac{v^m}{k^m}$, erit ergo $dv = g dx - \frac{v^m ds}{k^m}$. Debebit autem esse vt $Mm : MN = \sqrt{v} : \sqrt{b}$, vnde erit $v = \frac{bds^2}{dx^2}$. Ex hac ergo aequatione erit $ds = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{b}}$, quo valore in aequatione substituto habebitur $dx = g dx - \frac{v^{m+\frac{1}{2}} dx}{k^m \sqrt{b}}$ seu $dx = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}$.

Quam-

Quamobrem erit $x = \int \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}$; $s = \int \frac{k^m dv \sqrt{v}}{g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}$, atque applicata $PM = y = \int \frac{k^m dv \sqrt{(v-b)}}{g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}$. Ex quibus aequationibus constructio curuae quaesitae conficitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

656. Ex his tribus aequationibus, si desideretur aequatio ex x, y et s tantum consistens, accipi potest ea, ex qua valor ipsius v commodissime poterit inueniri, isque deinceps in alterutra reliquarum substitui.

Corollarium 2.

657. Quia aequatio $dx = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}$ indetermitas a se inuicem habet separatas, poterit solutio particularis obtineri ponendo $g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v} = 0$. Hinc igitur erit $v = g^{\frac{1}{2m+1}} k^{\frac{2m}{2m+1}} b^{\frac{1}{2m+1}}$ ideoque $ds = \frac{g^{\frac{1}{2m+1}} k^{\frac{m}{2m+1}} dx}{b^{\frac{m}{2m+1}}}$. Satisfacit ergo linea recta inclinata, si corpus data celeritate $\sqrt{v}$ super ea moueatur.

Scholion I.

658. Quod in praecedente et hoc problemate linea recta inclinata ſolutionem praebeat particularem, ex eo intelligi poteſt, quod in medio reſiſtente recta inclinata inueniri poſſit, ſuper qua corpus aequabiliter moueatur, vt ſupra (627) oſtendimus. Hic autem ipſe caſus vtrique problemati ſatisfacit; ſi enim corpus ſuper recta aequabili motu incedit, tam horizontaliter, quam verticaliter aequabiliter quoque promouetur; quin etiam ſecundum quamcunque plagam aequabiliter fertur.

Corollarium 3.

659. Pro vacuo ſit $k = \infty$. Quamobrem erit $x = \frac{v}{g}$ ſeu $v = gx$ atque $ds = \frac{dx\sqrt{gx}}{\sqrt{b}}$ et $dy = \frac{dx\sqrt{(gx-b)}}{\sqrt{b}}$ quae aequatio integrata dat $y = \frac{2(gx-b)^{\frac{3}{2}}}{3g\sqrt{b}}$, et praebet parabolam cubicalem rectificabilem vt ſupra iam inuenimus.

Exemplum I.

660. Ponamus reſiſtentiam ipſis celeritatibus proportionalem erit $m = \frac{1}{2}$, ideoque $x = \int \frac{dv\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk} - v} = \sqrt{bk}\, l \frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk} - v}$, ſi initium aſciſſarum in eo puncto accipiatur, vbi v euaneſcit. Ex hac autem aequatione prodit $e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}} = \frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk} - v}$ ſeu $v = e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}}$

$(e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}}$

$(e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}}-1)g\sqrt{bk}=g\sqrt{bk},(1-e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}})$. Valore hoc ipsius v substituto habebitur $ds=\frac{dx\sqrt{g(1-e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}})\sqrt{bk}}}{\sqrt{b}}$

Vel cum sit $ds=\frac{dv\sqrt{kv}}{g\sqrt{bk}-v}$, ponatur $v=u^2$ erit $ds=\frac{2u^2du\sqrt{k}}{g\sqrt{bk}-uu}=\frac{2gkdu\sqrt{b}}{g\sqrt{bk}-uu}-2du\sqrt{k}$, quae integrata dat $s=\sqrt[4]{g^2bk^3}\,l\frac{\sqrt[4]{g^2bk}+\sqrt{v}}{\sqrt[4]{g^2bk}-\sqrt{v}}-2\sqrt{kv}$, in qua valor ipsius v ante inuentus substitui potest, quo prodeat aequatio inter x et s.

Exemplum 2.

661. Resistat nunc medium in duplicata celeritatum ratione, erit $m=1$; ideoque $dx=\frac{kdv\sqrt{b}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}}$ et $ds=\frac{kdv\sqrt{v}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}}$. Huius posterioris aequationis integrale est $s=\frac{2k}{3}\,l\frac{gk\sqrt{b}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}}$, ex qua oritur $e^{\frac{3s}{2k}}=\frac{gk\sqrt{b}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}}$; atque $v^{\frac{3}{2}}=gk(e^{\frac{3s}{2k}}-1)e^{\frac{-3s}{2k}}\sqrt{b}=gk(1-e^{\frac{-3s}{2k}})\sqrt{b}$. Quocirca erit $\sqrt{v}=\sqrt[3]{gk(1-e^{\frac{-3s}{2k}})\sqrt{b}}$; qui valor in aequatione $dx=\frac{ds\sqrt{b}}{\sqrt{v}}$ substitutus dat aequationem inter s et x pro curua quaesita.

Scholion 2.

662. Quemadmodum in his duobus problematibus curuas determinauimus super quibus corpus motum vel secundum horizontem vel deorsum aequabiliter feratur, ita simili modo proble

ma resolui potest, si corpus secundum quamuis aliam plagam aequabiliter progredi debeat; ipsam autem quaestionem, quia nihil concinni ex solutione deduci potest, hic omisi; atque ob eandem causam problema isochronae paracentricae in medio resistente non attingo. Adiungam vero his, in quibus celeritatum quaedam lex proponitur, non parum curiosum problema, quod a nemine adhuc est tractatum, pro mediis resistentibus; quod pro vacuo propositum ne problema quidem est. Quaeritur scilicet curua super qua corpus ad datum punctum maxima celeritate pertingat; in vacuo enim corpus super quacunque curua motum in eodem loco semper eandem obtinet celeritatem.

PROPOSITIO 75.

Problema.

Tab. XIV. Fig. 3. 663. *Inter omnes curuas puncta* A *et* C *iungentes determinare eam* AMC, *super qua corpus ex* A *ad* C *descendens maximam acquirat celeritatem existente resistentia in quacunque multiplicata ratione celeritatum, et potentia uniformi deorsum tendente.*

Solutio.

Quo corpus ad punctum C maxima cum celeritate perueniat, curuae quaesitae AMC duo quaeque elementa Mm, $m\mu$ ita posita esse debent, vt corpus ea percurrendo maximum accipiat celerileritatis incrementum. Nam si corpus per alia elementa $M\nu\mu$ maius acquireret celeritatis augmentum, maiorem quoque in C habiturum esset celeritatem. Per methodum igitur maximorum positio elementorum $Mm, m\mu$ inuenietur, si elementa haec cum proximis Mn, $n\mu$ comparentur et celeritatis augmenta, quae per vtraque generantur, inter se aequalia ponantur. Ducantur ad hoc ad axem verticalem AP *plicatae* MP, *nmp* et $\mu\pi$ sintque elementa axis Pp, $p\pi$ aequalia. Ducantur quoque verticales MF, mg, et in curuae elementa normales mf, ng. Iam sit potentia sollicitans $= g$, exponens resistentiae $= k$, ipsa resistentia in $2m$ multiplicata ratione celeritatum, et altitudo celeritati in M debita $= v$. His positis erit incrementum ipsius v per $Mm = g.\,MF - \frac{v^m Mm}{k^m}$ et incrementum altitudinis celeritati debitae dum corpus per $m\mu$ progreditur $= g.\,mG - \frac{(v + g.\,MF - \frac{v^m.\,Mm}{k^m})^m m\mu}{k^m}$. Dum ergo corpus elementa Mm et $m\mu$ conficit altitudo v accipit augmentum $= g\,(MF + mG) - \frac{v^m.\,Mm}{k^m} - \frac{(v + g.\,MF - \frac{v^m}{k^m} Mm)^m\, m\mu}{k^m}$. At elementa $Mn, n\mu$ percurrendo accipiet v augmentum $= g(MF + mG) -$

 $v^m.\,Mn$

$\frac{v^m Mn}{k^m} - \frac{(v+g.MF-\frac{v^m}{k^m}Mn)^m n\mu}{k^m}$. Quibus sibi aequalibus positis habebitur $o = v^m(Mn - Mm) + (v+g.MF-\frac{v^m}{k^m}.Mn)^m n\mu - (v+g.MF-\frac{v^m}{k^m}.Mm)^m m\mu$. Est vero $Mn - Mm = nf$ et $(v+g.MF-\frac{v^m}{k^m}Mn)^m = v^m + mgv^{m-1}MF - \frac{mv^{2m-1}}{k^m}Mn$ atque $(v+g.MF-\frac{v^m}{k^m}.Mm)^m = v^m + mgv^{m-1}.MF - \frac{mv^{2m-1}}{k^m}Mm$. Nunc vero his valoribus substituendis proueniet haec aequatio $v(nf-mg) - mg.MF.mg + \frac{mv^m}{k^m}(Mn.n\mu - Mm.m\mu) = o$. At est $Mn.n\mu - Mm.m\mu = m\mu.nf - Mm.mg$, atque ob triangula nfm, mFM et mgn, μGm similia est $nf = \frac{mF.mn}{Mm}$ atque $mg = \frac{\mu G.mn}{m\mu}$. His substitutis et per mn diuiso prodit $v(\frac{mF}{Mm} - \frac{\mu G}{m\mu}) - mg.\frac{MF.\mu G}{m\mu} + \frac{mv^m}{k^m}(\frac{m\mu.mF}{Mm} - \frac{Mm\,\mu G}{m\mu}) = o$. Huius aequationis duo priora membra sunt differentialia primi gradus, tertium vero, quia differentiali secundi gradus aequi pollet, reiici potest; fiet ergo $\frac{mg.MF.\mu G}{m\mu} + v(\frac{\mu G}{m\mu} - \frac{mF}{Mm}) = o$, siue $\frac{mg.MF.mF}{Mm} + v\,d.\frac{mF}{Mm} = o$. Ex qua aequatione determinatur positio elementorum Mm et $m\mu$.

$m\mu$. Quo autem symbolis vtamur, sit $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$ erit $Pp = p\pi = dx$, $mF = dy$, et $Mm = ds$, prodibitque $\frac{mgdxdy}{ds} + vd.\frac{dy}{ds} = o$. Aequatio vero canonica est $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$, in qua si loco gdx ex superiore aequatione substituatur $\frac{-vds}{mdy}$ d. $\frac{dy}{ds}$ habebitur $dv + \frac{vds}{mdy}$ d. $\frac{dy}{ds} + \frac{v^m ds}{k^m} = o$, seu $\frac{mdvdy}{ds} + v$d. $\frac{dy}{ds} + \frac{mv^m dy}{k^m} = o$. Sit $dy = pds$ et $v^{1-m} = u$, erit vt sequitur $pdu + \frac{(1-m}{m} udp + \frac{(1-m)pds}{k^m} = o$, ex qua integrata prodit $u = \frac{(m-1)p^{\frac{m-1}{m}}}{k^m} \int p^{\frac{1-m}{m}} ds$. Ex hoc u obtinebitur ergo vicissim $v = u^{\frac{1}{1-m}}$, qui valor in superiori aequatione $mgpds\sqrt{(1-pp)} + vdp = o$ substitutus, dabit aequationem inter p et s, et consequenter inter y et s. Ad curuam autem construendam hoc modo computum institui expedit: Posito $dy = pds$ habentur hae duae aequationes $mgpds\sqrt{(1-pp)} + vdp = o$ et $dv = gds\sqrt{(1-pp)} - \frac{v^m ds}{k^m}$. Ex illa est $ds = \frac{-vdp}{mgp\sqrt{(1-p^2)}}$ qui in hac substitutus dat $mpdv + vdp = \frac{v^{m+1}dp}{gk^m\sqrt{(1-pp)}}$. Haec diuisa per $v^{m+1}p^2$ fit integrabilis eritque integrale

$1 =$

$\frac{1}{v^m p} = C + \frac{\sqrt{(1-pp)}}{gk^m p}$ seu $v^m = \frac{gk^m}{ap+\sqrt{(1-pp)}}$ et $v = \frac{k\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{(ap+\sqrt{(1-pp)})}}$. Quocirca erit $mgds = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(ap+\sqrt{(1-pp)})}}$ et $mgdx = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p\sqrt[m]{(ap+\sqrt{(1-pp)})}}$ atque $mgdy = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(ap+\sqrt{(1-pp)})}}$. Ex quibus aequationibus facile est curuam quaesitam construere. Q. E. I.

Corollarium 1.

664. Si radius osculi curuae in M versus axem directus vocetur r, erit d. $\frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{r}$. Hocque valore substituto habetur $\frac{mgdy}{ds} = \frac{v}{r}$ seu $\frac{2mgdy}{ds} = \frac{2v}{r}$. Est vero $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga corporis in hac curua moti, cuius directio est ab axe directa et $\frac{gdy}{ds}$ est vis normalis. Quare in curua quaesita vis centrifuga est contraria vi normali et se habet ad vim normalem vt $2m$ ad 1, id est, vt exponens potestatis celeritatis, cui resistentia est proportionalis ad vnitatem.

Corollarium 2.

665. Hae igitur omnes curuae parte concaua sunt deorsum directae. Quia enim vis normalis

malis directio deorsum respicit, et radius osculi in eandem plagam tendit, concauitas curuae quoque deorsum respicere debet.

Corollarium 3.

666. In medio resistente in simplici ratione celeritatum erit $2m = 1$. Hoc ergo casu vis centrifuga aequalis est et contraria vi normali. Quamobrem curua quaesito satisfaciens, erit ipsa proiectoria, quam corpus proiectum libere describit.

Corollarium 4.

667. Quia in aequatione
$$mgds = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(ap+\sqrt{(1-pp)})}}$$
indeterminatae sunt separatae, tres solutiones particulares inde obtinentur. Primam dat aequatio $ap+\sqrt{(1-pp)}=0$, quo casu celeritas fit infinita, et quaeuis recta satisfacit. Secunda est $p=1$, seu $dy=ds$, quae est pro recta horizontali, et tertia est $p=0$, pro recta verticali; quae semper hanc habet proprietatem, vt corpus in ea descendens maxima celeritatis augmenta accipiat.

Exemplum 1.

668. Resistat medium in simplici ratione celeritatum erit $m=\frac{1}{2}$. Sumatur ex tribus inuentis

 aequa-

aequationibus ea, quae dy continet, erit $dy = \frac{-2gkdp}{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})^2 \sqrt{(1-pp)}}$, cuius integralis est $y = C - \frac{2gkp}{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}$. Cum autem sit $p = \frac{dy}{ds}$ et $\sqrt{(1-pp)} = \frac{dx}{ds}$, erit $y = C - \frac{2gkdy}{\alpha dy + dx}$ seu neglecta constante C, quia curuam non immutat, erit $\alpha y dy + y dx + 2gkdy = o$. Quae aequatio per y diuisa et denuo integrata dat $\alpha y + x + 2gkly = C$. Quae est aequatio pro curua logarithmicali ea ipsa, quam Libr. I. proiectoriam in hac resistentiae hypothesi inuenimus.

Exemplum 2.

669. Sit nunc resistentia quadratis celeritatum proportionalis erit $m = 1$. Sumatur aequatio ista $ds = \frac{-kdp}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}$. Huius autem integralis est $s = k\, l \frac{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}{\beta p}$, siue $e^{\frac{s}{k}} = \frac{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}{\beta p} = \frac{\alpha dy + dx}{\beta dy}$. Hinc fit $\beta e^{\frac{s}{k}} dy - \alpha dy = dx$, atque $ds = dy \sqrt{(1 + (\beta e^{\frac{s}{k}} - \alpha)^2)}$. Quae est aequatio pro curua quaesita, quae hanc habebit proprietatem, vt vis centrifuga corporis sit duplo maior quam vis normalis. Curua igitur perpetuo sursum premetur vi aequali vel ipsi vi normali vel dimidio vis centrifugae. In hac vero curua corpus ita mouebitur vt altitudo celeritati in M debita sit $= \frac{gk}{e^{\frac{s}{k}} \beta p} = \frac{gkds}{\beta e^{\frac{s}{k}} dy} = \frac{gkds}{dx + \alpha dy}$.

Scho-

Scholion 1.

670. Cum in quauis resistentiae hypothesi peculiaris ratio inter vim centrifugam et vim normalem locum habeat; vacuum autem tanquam casus cuiusque resistentiae considerari queat: sequitur in vacuo quamvis curuam satisfacere debere. Omnes enim curuae in vacuo hanc habent proprietatem, vt super iis ex aequalibus altitudinibus aequales generentur celeritates; ideoque nulla potest definiri, quae potius quam reliquae quaesito satisfaciant.

Scholion 2.

671. Notatu dignum est, quod in omnibus his curuis inuentis nusquam corporis celeritas sit aequalis nihilo. Atque idcirco problema hac methodo non ita resolui potest, vt determinetur inter omnes descensus ex A ad C ex quiete factos is, in quo corpus maximam acquirit celeritatem; cui quaestioni sola recta verticalis per C transiens et cum horizontali per A ducta coniuncta satisfacit. Nostra autem solutio ita est comparata, vt duorum elementorum quorumque contiguorum positionem eam definiat, quae maximum vel minimum celeritatis augmentum producat. Quamobrem hac methodo ea curua inuenitur, super qua corpus motum vel maius vel minus celeritatis augmentum acquirit, quam super alia quacunque curua A et C iungente, si

corpus ex A eadem celeritate descensum inchoet. Ex inuentis autem colligi potest, hac ratione eam prodire curuam, super qua minimum celeritatis incrementum generetur, vel super qua corpus motu maxime vniformi feratur. Atque hoc sensu facile perspicitur, motum ex quiete incipere non posse. Quanquam enim certum est, si puncta A et C in linea verticali sunt posita, super hac verticali motu in A ex quiete facto maximam in C generari celeritatem; tamen calculus non hanc dat solutionem, etiamsi praebeat lineam verticalem; sed celeritatem initialem in A facit debitam alt. $k\sqrt[m]{g}$, quae celeritas tanta est, vt non amplius augmentum accipere queat. Hac igitur celeritate corpus aequabiliter ex A ad C descendet; hacque ratione nullum, hoc est minimum capit celeritatis incrementum. Problema ergo, vt solutioni consentaneum fuisset, ita proponi debuisset; inter omnes lineas puncta A et C iungentes eam determinare, super qua corpus motum minima accipiat celeritatis augmenta; atque simul celeritatem initialem in A huic quaesito accommodatam definire.

Scholion 5.

672. Secundum ordinem praescriptum sequi deberent nunc huiusmodi problemata, in quibus temporum quadam lege data curuae essent inuestigandae idoneae; sed cum temporum leges pleraeque

raeque ad celeritatum leges possint reduci, huiusmodi quaestiones non profero. Sed vnicam in hoc negotio quaestionem de curuis brachystochronis tractabo, quia ea etsi temporis praescripta est conditio ad celeritatum rationes, quas iam peruoluimus, reduci non potest. Qua in re iisdem praemissis vtar, quae supra circa brachystochronas in vacuo sunt tradita.

PROPOSITIO 76.

Theorema.

673. *In medio quocunque resistente et potentiarum absolutarum hypothesi quacunque ea curua* AMC *est brachystochrona seu breuissimum ab* A *ad* C *producit descensum; in qua vis centrifuga est aequalis vi normali, et in eandem plagam directa.* Tab. XIV. Fig. 4.

Demonstratio.

Quaecunque fuerint potentiae absolutae in corpus in M agentes, eae in duas inter se normales possunt resolui, quarum altera sit $ML = P$, altera $MN = Q$. Sumto curuae elemento $Mm = ds$, ductisque perpendiculis ml, mn, sit $Ml = mn = dx$ et $ml = Mn = dy$. Ponatur altitudo celeritati in M debita $= v$ et vis resistentiae $= R$, atque radius osculi in $M = r$, quem pono sursum directum, ita vt posito dx constante sit $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$ His positis erit $dv = Pdx + Qdy - Rds$, quia

 Pdx

$\frac{Pdx+Qdy}{ds}$ eſt vis tangentialis ex potentiis P et Q orta. At ſupra ex natura brachyſtochronismi ſi fuerit $dv = Pdx + Qdy + Rds$ inuenimus fore $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$ (364), quae formulae ab hac noſtra tantum in ſigno literae R differunt, haecque in computum non venit. Denotat autem $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam ſecundum normalem MO agentem atque $\frac{Pdy-Qdx}{ds}$ eſt vis normalis iuxta MO agens ex vtraque vi P et Q orta. Quare ſi fuerit vis centrifuga vi normali aequalis, et in eandem plagam directa, curua erit brachyſtochrona. Q.E.D.

Corollarium 1.

674. Si vis normalis, quae oritur ex reſolutione potentiarum abſolutarum corpus ſollicitantium, vocetur N et vis tangentialis ex eadem reſolutione orta ponatur T, erit $dv = (T - R)ds$ et $\frac{2v}{r} = N$, quae duae aequationes coniunctae dabunt curuam brachyſtochronam.

Corollarium 2.

675. Quaecunque igitur fuerit reſiſtentia, erit ſemper $v = \frac{Nr}{2}$, vnde celeritas corporis ſuper brachyſtochrona facile inuenitur. Erit enim vt vis grauitatis 1 ad vim normalem N ita dimidium radii oſculi ad altitudinem celeritati in M debitam.

Scho-

Scholion.

676. Haec eadem proportio quoque locum habet in motu corporum proiectorum libero, est enim pariter pro motu libero vis centrifuga aequalis vi normali. Discrimen autem in hoc consistit, vt in motu libero vires centrifuga et normalis sint inter se oppositae; pro curuis brachystochronis autem conspirantes. Siue in motu libero directiones radii osculi r et vis normalis N coincidunt; in brachystochronis vero inter se sunt contrariae. Hanc ob rem hic sumsimus $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$ cum in motu libero sit $r = \frac{-ds^3}{dx\,ddy}$.

Corollarium 3.

677. Cum ex formula brachystochronismi indolem continente prodeat $v = \frac{Nr}{2}$; si hic valor vbique loco v in altera aequatione $dv = (T-R)\,ds$ substituatur, habebitur aequatio naturam curuae brachystochronae exhibens.

Corollarium 4.

678. In quocunque ergo medio resistente et quibuscunque sollicitantibus corpus potentiis, eae curuae omnes erunt brachystochronae, in quibus tota, quam sustinent, pressio duplo maior est quam vel sola vis centrifuga vel sola ex potentiarum sollicitantium resolutione orta vis normalis.

PRO-

PROPOSITIO 77.

Problema.

Tab. XIV. Fig. 2. 679. *In medio uniformi quod resistit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, et potentia absoluta existente uniformi et deorsum directa; determinare curuam brachystochronam* AM, *super qua corpus descendens tempore breuissimo ex* A *ad* M *perueniat.*

Solutio.

Positis in axe verticali abscissa AP $= x$, eique respondente applicata PM $= y$, arcuque curuae quaesitae AM $= s$; sit g potentia deorsum sollicitans, et $\frac{v^m}{k^m}$ resistentia in M, si quidem celeritas in M fuerit debita altitudini v. His positis erit vis normalis $= \frac{gdy}{ds}$; cui aequalis esse debet vis centrifuga, quae est $\frac{2v}{r} = \frac{2v.dxddy}{ds^3}$ (676), sumto dx pro constante. Facta ergo aequatione est $v = \frac{gds^2dy}{2dxddy}$. Aequatio vero canonica pro descensu in hoc medio resistente dat $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$. Prior autem aequatio posito $dsdds$ loco $dyddy$ propter dx constans abit in hanc $v = \frac{gdsdy^2}{2dxdds}$, ex qua fit $dv = \frac{gdy^2}{2dx} + \frac{gdsdyddy}{uxdds} - \frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} = \frac{gdy^2}{2dx} + \frac{gds^2}{dx} - \frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$, quae aequatio reducta dat $\frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} -$

$\frac{3gdy^2}{2dx}$

$\frac{3gdy^2}{2dx} = \frac{g^m ds^{m+1} dy^{2m}}{2^m k^m dx^m dds^m}$, seu $ds\, d^3 s = 3 dds^2 = \frac{g^{m-1} ds^{m-1} dy^{2m-2}}{2^{m-1} k^m dx^{m-1} dd^{m-2}}$; haecque aequatio exponit naturam curuae quaesitae. Quae aequatio quo reducatur et ad constructionem praeparetur, pono $ds = pdx$, vt sit $dy = dx\sqrt{(p^2 - 1)}$, eritque $dds = dpdx$ et $d^3 s = dxddp$. His substitutis habebitur ista aequatio $pddp - 3dp^2 = \frac{g^{m-1} p^{m+1} dx^m (pp-1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m dp^{m-2}}$. Nunc sit porro $dx = qdp$; erit $ddx = 0 = dqdp + qddp$ seu $ddp = \frac{-dpdq}{q}$; orieturque haec aequatio $-\frac{pdq}{q} - 3dp = \frac{g^{m-1} p^{m+1} q^m dp (p^2 - 1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m}$ seu $\frac{-pdq - 3qdp}{q^{m+1}} = \frac{g^{m-1} p^{m+1} dp (p^2 - 1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m}$. Multiplicetur haec aequatio quo integrabilis fiat per mp^{-3m-1} et habebitur $-mp^{-3m} q^{-m-1} dq - 3mp^{-3m-1} q^{-m} dp = \frac{mg^{m-1} p^{-2m} dp (p^2 - 1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m}$, cuius integralis est $p^{-3m} q^{-m} = \frac{mg^{m-1}}{2^{m-1} k^m} \int \frac{(p^2 - 1)^{m-1} dp}{p^{2m}}$. Ponatur $\frac{mg^{m-1}}{2^{m-1} k^m} \int \frac{(p^2 - 1)^{m-1} dp}{p^{2m}} = P^{-m}$, erit P functio quaedam ipsius p, et proinde dabitur concessis saltem quadraturis. His igitur positis erit $p^3 q = P$, atque $q = \frac{P}{p^3}$. Quia vero est $dx = qdp$ erit $x = \int \frac{Pdp}{p^3}$

et $s = \int \frac{Pdp}{p^2}$ atque $y = \int \frac{Pdp\sqrt{(p^2-1)}}{p^3}$. Unde constructio curuae brachystochronae sequitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

680. Sit A punctum in quo motus incipit atque celeritas est nulla; erit ibi $v = o$ seu $\frac{gdsdy^2}{2dxdds} = o$, vnde fit $dy = o$, quia ds euanescere non potest. In puncto A ergo curua habebit tangentem verticalem.

Corollarium 2.

681. Quia in ipso motus initio motus in medio resistente a motu in vacuo non discrepat, curuae AM initium A a cycloidis cuspide, quae est brachystochrona in vacuo non discrepabit. Ideoque in A non solum tangens erit verticalis, sed etiam radius osculi in eo loco erit infinite paruus.

Corollarium 3.

682. Quia in A est $dy = o$; atque est $dy = dx\sqrt{(p^2-1)}$, erit pro puncto A, $p = 1$. Ex data ergo curuae constructione punctum A obtinebitur, si fiat $p = 1$. Integralia ergo illa ita debebunt accipi vt x, s et y euanescant posito $p = 1$.

Corollarium 4.

683. Quoniam est $v = \frac{gdsdy^2}{2dxdds}$, erit propter $ds = pdx$ et $dds = dpdx$; $v = \frac{gpdx(p^2-1)}{2dp}$, atque ob

ob $dx = q\,dp$, erit $v = \frac{gpq(pp-1)}{2} = \frac{gP(pp-1)}{2p^2}$. Vnde patet v euanescere si sit $p = 1$.

Corollarium 5.

684. Radius osculi in puncto quocunque M est $= \frac{ds^3}{dx\,ddy} = \frac{ds^2\,dy}{a\,x\,dds}$. Quare ob $ds = p\,dx$ erit radius osculi $r = \frac{p^2 dx \sqrt{(p^2-1)}}{dp} = p^2 q \sqrt{(p^2-1)} = \frac{P\sqrt{(p^2-1)}}{p}$. In puncto ergo A vbi est $p = 1$ erit radius osculi $r = o$.

Corollarium 6.

685. Sit B punctum brachystochronae, in quo tangens est horizontalis; erit ibi $dy = \infty$ ideoque $p = \infty$. Punctum igitur B inuenietur ponendo $p = \infty$. Erit ergo in hoc puncto $v = \frac{gP}{2}$ et radius osculi $r = P$.

Exemplum 1.

686. Ponamus resistentiam euanescentem ita vt motus fiat in vacuo, erit $k = \infty$, ideoque habebitur $ds\,d^3s - 3\,dds^2 = o$. Quae aequatio diuisa per $ds\,dds$ et integrata dat $l\,dds - 3\,l\,ds = l\,C$ seu $\frac{dds}{ds^3} = \frac{1}{adx} = \frac{dx}{adx^2}$. Haec aequatio denuo integrata dat $-\frac{1}{2\,ds^2} = \frac{x}{adx^2} + C$. Vel mutatis constantibue positoque $ds = p\,dx$; erit $-a = ppx + Cpp$, quas quia posito $p = 1$, x debet euanescere, abit in hanc $x = \frac{a(pp-1)}{pp}$ seu $p = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}}$, ideoque $ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}}$, quae est aequatio pro cycloide vt constat.

Exemplum 2.

687. Refiſtat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m = 1$; atque $\frac{1}{P} = \frac{1}{k}\int\frac{dp}{p^2} = C - \frac{1}{kp}$. Vnde fit $P = \frac{kp}{Ckp-1} = \frac{akp}{kp-a}$. Hanc ob rem erit $x = \int\frac{akdp}{p^2(kp-a)}$ et $s = \int\frac{akdp}{p(kp-a)}$. Fit ergo $s = kl\frac{kp-a}{(k-a)p}$ atque $e^{\frac{s}{k}} = \frac{kp-a}{(k-a)p} = \frac{kds-adx}{(k-a)ds}$ ob $ds = pdx$. Porro ergo habebitur $(k-a)e^{\frac{s}{k}}ds = kds - adx$, quae integrata dat $k(k-a)e^{\frac{s}{k}} = ks - ax + k(k-a)$. Vel eliminata quantitate exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ erit $ksds - axds - akds + akdx = 0$. At ſi exponentialem $e^{\frac{s}{k}}$ per ſeriem exprimere velimus, erit $k(k-a)e^{\frac{s}{k}} - k(k-a) = k(k-a)(\frac{s}{k} + \frac{ss}{1.2k^2} + \frac{s^3}{1.2.3k^3} + \frac{s^4}{1.2.3.4k^4} +$ etc.). Quae ſeries ſubſtituta dat $\frac{a(s-x)}{k-a} = \frac{s^2}{1.2.k} + \frac{s^3}{1.2.3k^2} + \frac{s^4}{1.2.3.4k^3} +$ etc.. In quouis puncto M eſt $v = \frac{gak(pp-1)}{2p(kp-a)}$. Pro puncto B vero in quo tangens eſt horizontalis erit $s = kl\frac{k}{k-a}$, atque $e^{\frac{s}{k}} = \frac{k}{k-a}$ et idcirco $x = -k + \frac{kk}{a}l\frac{k}{k-a}$. Continuetur nunc curua vltra B in BNC, cuius natura vt inueniatur in axe BQ ponatur abſciſſa $BQ = t$, et arcus $BN = z$. His poſitis erit $AP = x = -k - t + \frac{k^2}{a}l\frac{k}{k-a}$ et $AMN = s = z + kl\frac{k}{k-a}$. Erit ergo $e^{\frac{s}{k}} = \frac{k}{k-a}e^{\frac{z}{k}}$; quibus valoribus in ſuperiore aequatione ſubſtitutis prodibit: $k^2e^{\frac{z}{k}} = kz + k^2 + at$, ſeu

$at =$

$at = k^2(e^{\frac{z}{k}} - 1) - kz$. Atque per seriem $at = \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3k} + \frac{z^4}{1.2.3.4k^2} +$ etc. pro curua BNC; at pro ramo BMA in quo erit arcus BM, z negatiuus erit $at = k^2(e^{\frac{-z}{k}} - 1) + kz = \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3}{1.2.3.k} + \frac{z^4}{1.2.3.4.k^2} -$ etc. Curua vero BNC in C habebit quoque tangentem verticalem, quod punctum inuenitur ponendo $dz = dt$. Fiet vero hoc posito $a = ke^{\frac{z}{k}} - k$, seu $z = kl\frac{a+k}{k} = BNC$. Atque $t = CE = k - \frac{kk}{a}l\frac{a+k}{k} = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} -$ etc. cum contra sit $AD = \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} +$ etc. Ex quo apparet punctum A esse altius positum quam punctum C; atque in A et E curuam habere cuspides seu puncta reuersionis, ita vt tam AD quam CE sint curuae diametri; id quod ex hoc intelligitur, quod sit $x = \int \frac{Pdp\sqrt{(pp-1)}}{p^4}$, vbi $\sqrt{(p^2-1)}$ valorem habet tam affirmatiuum quam negatiuum.

Scholion I.

688. Infra perspicietur hanc curuam brachystochronam congruere cum curua tautochrona in eadem resistentiae hypothesi. Haec vero inter motus tautochronos et brachystochronos interest differentia; Tab. XIV. Fig. 6. vt ad tautochronismum obtinendum corpus in ramo CND descendere in altero ascendere debeat, cum e contrario pro brachystochronismo descensus per AMB fieri debeat. Interim tamen

 haec

haec vtriusque curuae conuenientia attentione digna videtur, cum et in vacuo eadem congruentia obferuetur.

Exemplum 3.

689. Refiftat medium in quadruplicata ratione celeritatum, ita vt fit $m = 2$. Habebitur ergo pro curua quaefita ifta aequatio: $ds\,d^3 s - 3\,dds^2 = \frac{g\,ds^3\,dy^2}{2k^2\,dx}$. Ad conftruendam vero curuam $\frac{1}{P^2} = \frac{g}{k^2}\int\left(\frac{dp}{p^2} - \frac{dp}{p^4}\right)$; vnde fit $P = \frac{kp\sqrt{3np}}{\sqrt{g(p^3 - 3np^2 + n)}}$ atque $s = \int\frac{kdp\sqrt{3n}}{\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}$; et $x = \int\frac{kdp\sqrt{3n}}{p\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}$ ac $y = \int\frac{k\,dp\sqrt{3n(pp-1)}}{p\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}$. Huius ergo curuae conftructio vti generalis habetur. Quia autem n numerum quemcunque denotat, fit $n = \frac{1}{2}$ erit $y = \int\frac{kdp\sqrt{3}}{p\sqrt{g(2p^2 - p)}} = \frac{2k\sqrt{3(2p-1)}}{\sqrt{g}\,p} - \frac{2k\sqrt{3}}{\sqrt{g}}$; quam conftantem ideo adiecimus, quo fiat $y = 0$ pofito $p = 1$. Atque pofito $p = \infty$ erit applicata $DB = \frac{2k(\sqrt{6} - \sqrt{3})}{\sqrt{g}}$. Fit autem $p = \frac{12k^2}{12k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2}$ atque $\sqrt{(p^2 - 1)} = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(96k^3y\sqrt{3g} - 24gk^2y^2 - 8gky^3\sqrt{3g} - g^2y^4)}}{12k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2}$. Ex quo oritur $x = \int\frac{12k^2dy - 4kydy\sqrt{3g} - gy^2dy}{\sqrt{(96k^3y\sqrt{3g} - 24gk^2y^2 - 8gky^3\sqrt{3g} - g^2y^4)}} = \int\frac{12k^2dy - 4kydy\sqrt{3g} - gy^2dy}{\sqrt{(9y^2 + 4ky\sqrt{3g})(24k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2)}}$, quae eft aequatio inter coordinatas x et y pro curua quaefita.

Scholion 2.

690. In medio, quod in fimplici celeritatum ratione refiftit, brachyftochronam fimplicius determi-

terminare non licet, quam ſtatim ex vniuerſali conſtructione conſequitur. Quamobrem hunc reſiſtentiae caſum exemplo non ſumus proſecuti. Quod autem ad reliquas huc pertinentes propoſitiones attinet, in quibus curua quaerirur, ſuper qua corpus deſcendens citiſſime ad datam lineam ſiue rectam ſiue curuam perueniat; ea ſimili modo pro reſiſtente medio ſoluuntur, quo pro vacno. Cum ſcilicet ex eodem puncto A innumerabiles egrediantur curuae brachyſtochronae; ex iis ea eſt eligenda, quae datae lineae ſiue rectae ſiue curuae ad angulos rectos occurrat; ſuper hac enim corpus ad iſtam lineam breuiſſimo tempore peruenire capite praec. eſt demonſtratum. Simili ratione curua, quae omnes brachyſtochronas ad angulos rectos traiicit, ab omnibus arcus abſcindet iſochronos, ſeu quos corpus deſcendens aequalibus temporibus abſoluit. Haecque omnia eodem ſe habent modo, quaecunque fuerit reſiſtentia, et quaecunque potentiae abſolutae. Problema autem brachyſtochronarum generaliſſime conceptum euoluemus.

PROPOSITIO 78.
Problema.

691. *In medio reſiſtente quocunque, et potentiis ſollicitantibus quibuscunque, inuenire curuam brachyſtochronam* AM, *ſuper qua corpus deſcendens ex* A *ad* M *citiſſime perueniat.* Tab. XIV. Fig. 6.

So-

Solutio.

Sit A motus initium; per quod ducatur recta quaecunque AP pro axe habenda, in qua sumatur abscissa $AP = x$; cui respondeat applicata $PM = y$ et arcus $AM = s$. Sit porro corporis in M celeritas debita altitudini v; et resistentia utcunque a celeritate pendens $= R$. Quaecunque nunc corpus sollicitent potentiae absolutae, earum loco duae potentiae substitui possunt in datis directionibus ML et MN, quarum illa axi AP sit parallela, haec vero ad illum normalis. Vis autem corpus secundum ML sollicitans sit $= P$ et vis secundum $MN = Q$. Ex his viribus oritur $dv = Pdx + Qdy - Rds$. Atque natura brachystochronismi dat $\frac{2v}{r} = \frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$ (673.) denotante r radium osculi curuae in M versus superiora directum; pro quo ergo sumto dx constante ponimus $\frac{+ds^3}{dxddy}$, cum alias deberet esse $r = \frac{-ds^3}{dxddy}$. Ex his ergo duabus aequationibus $dv = Pdx + Qdy - Rds$ et $\frac{2vdxddy}{ds^2} = Pdy - Qdx$, si eliminetur v, habebitur aequatio pro curua brachystochrona quaesita; est nempe $v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}$: cuius differentiale loco dv, atque ipsum v in resistentia R substitutum dabit aequationem pro curua quaesita. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

692. Aequatio pro curua, si dicto modo v eliminetur fit differentialis tertii gradus. Quare si triplex integratio adhibeatur, tres quoque constantes adiici poterunt, quibus effici potest vt euanescente x simul quoque y et s et v euanescant, atque praeterea curua per datum punctum M transeat.

Corollarium 2.

693. Quia igitur semper curua brachystochrona potest exhiberi, quae initium habeat in A et per datum punctum transeat; infinitae curuae brachystochronae ex puncto A educi possunt.

Corollarium 3.

694. Inuenta aequatione pro curua brachystochrona AM, innotescet simul corporis super ea descendentis celeritas in singulis punctis; erit namque $v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}$.

Corollarium 4.

695. Data celeritate determinari ex ea poterit tempus, quo corpus arcum AM absoluit: erit scilicet tempus per $AM = \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{\sqrt{2dxddy}}{\sqrt{(Pdy - Qdx)}}$; quod propter aequationem inter x et y iam inuentam poterit saltem per quadraturas exhiberi.

Corollarium 5.

696. Si igitur curua esset inuenienda, quae omnes brachystochronas ex A eductas ad angu-

los rectos traiicere deberet; tum eius lineae constructio haberetur, si ab omnibus abscinderetur $\int \frac{\sqrt{2dxddy}}{\sqrt{(Pdy - Qdx)}}$ eiusdem magnitudinis. Hac enim ratione ab istis curuis infinitis arcus isochroni abscinduntur, qui, quoniam omnes curuae sunt brachystochronae, terminabuntur ad traiectoriam orthogonalem.

Exemplum.

697. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis; atque exponens resistentiae vtcunque variabilis q; erit $R = \frac{v}{q}$. Cum ergo sit $dv = Pdx + Qdy - \frac{vds}{q}$, erit integrando $e^{\int \frac{ds}{q}} v = \int e^{\int \frac{ds}{q}} (Pdx + Qdy)$. Cum autem sit $v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}$ erit $2dxddy \int e^{\int \frac{ds}{q}} (Pdx + Qdy) = e^{\int \frac{ds}{q}} ds^2 (Pdy + Qdx)$, in qua aequatione non amplius inest v. Interim tamen haec aequatio fit differentialis tertii gradus, si differentiatione signa integralia tollantur. Indeterminati praeterea ipsarum P, Q et q valores in causa sunt, quo minus aequatio ad constructionem praeparari queat.

Scholion.

698. Quae hic ex duabus potentiis P et Q circa curuas brachystochronas sunt deducta, latissime patent; quia, quotcunque potentiae corpus sollicitauerint, eae omnes in huiusmodi duas possunt

ſunt reſolui; ſi modo omnium directiones in eodem plano fuerint poſitae. Quamobrem in hac quoque propoſitione continentur brachyſtochronae pro quacunque virium centripetarum hypotheſi, quas autem, quia neque concinnae, neque conſtruibiles aequationes proueniunt, vlterius non perſequimur. Miſſis igitur his, in quibus celeritatum quaedam lex praeſcribitur, progredimur ad ſequentes quaeſtiones, in quibus curuae requiruntur, quae a corpore ſuper iis moto datam ſuſtineant preſſionem.

PROPOSITIO 79.

Problema.

699. *In hypotheſi grauitatis vniformis, et medio vniformi, quod in ratione quacunque celeritatum reſiſtit, determinare curuam aequabilis preſſionis* AM, *quae a corpore ſuper ea deſcendente, vbique eandem ſuſtineat preſſionem.* Tab. XV. Fig. 1.

Solutio.

Poſitis $AP = x$; $PM = y$; $AM = s$, et celeritati in M altitudine debita $= v$; ſit potentia corpus deorſum ſecundum ML trahens $= g$ et vis reſiſtentiae in $M = \frac{v^m}{k^m}$. Erit ergo dum corpus per elementum Mm progreditur $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$. Ponamus curuam deorſum eſſe conuexam, ita vt

 MR

MR sit radii osculi directio, atque ipse radius osculi $MR = \frac{ds^3}{dxddy}$ posito dx constante. Vis ergo centrifugae directio erit in normali MN; eiusque quantitas est $= \frac{2vdxddy}{ds^3}$. Secundum eandem vero directionem curua premitur a vi normali ex resolutione potentiae $ML = g$ orta, quae est $= \frac{gdy}{ds}$. Tota ergo vis qua curua secundum MN premitur est $= \frac{gdy}{ds} + \frac{2vdxddy}{ds^3}$; quae cum debeat esse constans ponatur ea aequalis αg, habebiturque $\alpha g ds^3 = gdy\, ds^2 + 2vdxddy$, atque hinc $v = \frac{\alpha g ds^3 - gdyds^2}{2dxddy}$. Sit $ds = pdx$, atque $dy = dx\sqrt{(p^2-1)}$; erit $ddy = \frac{pdpdx}{\sqrt{(p^2-1)}}$ His substitutis erit $v = \frac{(\alpha g p^3 dx - gp^2 dx\sqrt{(p^2-1)})\sqrt{(pp-1)}}{2pdp} = \frac{\alpha g p^2 dx\sqrt{(p^2-1)} - gpdx(p^2-1)}{2dp}$. Sit porro $dx = 2qdp$ erit $v = gpq(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1))$ vel $v = Pq$, posito $gp(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1) = P$. Erit ergo $dv = Pdq + qdP$ et $v^m = P^m q^m$. Quibus valoribus in aequatione $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$ substitutis prodibit $Pdq + qdP = gdx - \frac{P^m q^m ds}{k^m}$. Est vero $dx = 2qdp$ et $ds = pdx = 2pdqdp$. Quamobrem proueniet ista aequatio: $Pdq + qdP = 2gqdp - \frac{2P^m q^{m+1} pdp}{k^m}$, quae duas tantum continet variabilem p et q, quia P per p datur. Ad hanc aequationem construendam ponatur $q = \frac{1}{Pu^{\frac{1}{m}}}$; quo facto obtinebitur ista aequatio $du + \frac{2mgudp}{P} = \frac{}{2mp}$

$\frac{2mp\,dp}{k^m P}$; quae ducta in $e^{\frac{2mg\int dp}{P}}$ et integrata abit in hanc $u = \frac{2me^{\frac{-2mg\int dp}{P}}}{k^m} \int \frac{e^{\frac{2mg\int dp}{P}} p\,dp}{P}$. Hinc ergo inuenitur u per p, atque u inuento erit $q = \frac{1}{Pu^{\frac{1}{m}}}$ atque $x = \int \frac{2\,dp}{Pu^{\frac{1}{m}}}$ et $s = \int \frac{2\,dp}{Pu^{\frac{1}{m}}}$ et $y = \int \frac{2dp\sqrt{(p^2-1)}}{Pu^{\frac{1}{m}}}$. Cum autem sit $P = gp(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1)$ erit $\frac{g\,dp}{P} = \frac{dp}{p} + \frac{dp}{\alpha\sqrt{(p^2-1)}} + \frac{(1-\alpha^2)dp}{\alpha^2 p - \alpha\sqrt{(p^2-1)}}$ atque $\int \frac{g\,dp}{P} = lp + \frac{1}{\alpha} l(p+\sqrt{(p^2-1)}) - \frac{(\alpha+1)}{2\alpha} l \frac{\alpha p - \sqrt{(p^2-1)}}{p-\sqrt{(p^2-1)}}$ et $e^{\frac{2mg\int dp}{P}} = p^{2m}(p-\sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}} (\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}$.

Est vero $\int \frac{e^{\frac{2mg\int dp}{P}} p\,dp}{P} = \frac{e^{\frac{2mg\int dp}{P}} p}{2mg} - \frac{1}{2mg} \int e^{\frac{2m\int dp}{P}} dp$.

Quocirca erit $u = \frac{p}{gk^m} - \frac{e^{\frac{-2mg\int dp}{P}}}{gk^m} \int e^{\frac{2mg\int dp}{P}} dp = \frac{p}{gk^m}$

$$- \frac{\int p^{2m}(p-\sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}} (\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}} dp}{gk^m p^{2m}(p-\sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}} (\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}}$$

Cum igitur hoc modo ex p inueniri possit u; curuae quaesitae constructio hinc perficietur. Q.E.I.

Corollarium I.

700. Curua inuenta ergo hanc habebit proprietatem, vt in quouis puncto M prematur ver-

ſus MN vi conſtanti, quae eſt ad vim grauitatis ML, g vt α ad 1.

Corollarium 2.

701. Si pro α ſumatur numerus negatiuus, curua vbique ſecundum MR directionem priori oppoſitam aequabiliter premetur. Hoc ergo caſu curua debet eſſe concaua deorſum, quia vis centrifuga contraria atque maior eſſe debet quam vis normalis, cuius directio ſemper in MN eſt ſita.

Corollarium 3.

702. Si $\alpha = o$; tum curua prodibit, quae nullam omnino preſſionem a corpore ſuſtinet: Quae ergo curua eſt ea ipſa, quam corpus proiectum libere motum deſcribit.

Corollarium 4.

703. Si $\alpha = 1$ ſeu tota preſſio $= g$, tum curua erit conuexa deorſum vbique. Nam quia vis normalis ſola vbique eſt minor quam g niſi caſu quo $ds = dy$; vis centrifuga cum ea conſpirare debet, ideoque radius oſculi in plagam ipſi MN oppoſitam cadere.

Corollarium 5.

704. Si ponatur $k^m e^{\frac{2mg\int dp}{p}} u = 2mz$, erit $dz =$
e^{2mg}

$\frac{e^{\frac{2mg\int dp}{P}} p\,dp}{P}$. Particularis ergo solutio, quia in hac aequatione indeterminatae sunt a se inuicem separatae, habebitur si ponatur $P = o$. Hinc autem fit $gp(\alpha p \surd (p^2 - 1) - p^2 + 1) = o$, seu $\alpha p = \surd (p^2 - 1)$ siue $\alpha ds = dy$. Vnde prodit $\alpha s = y$. Satisfacit ergo recta angulum cum verticali AP constituens, cuius sinus est α sumto 1 pro sinu toto. Hoc enim casu vis centrifuga euanescit, et vis normalis fit $= \alpha g$.

Exemplum

705. Sit $\alpha = 1$, seu quaeratur curua, quae vbique vi $= g$ prematur; quo casu integratio ipsius $\frac{g\,dp}{P}$ simplicior euadit: erit enim $e^{\frac{2mg\int dp}{P}} = p^{2m} (p - \surd (p^2 - 1))^{-2m} = (\frac{p}{p - \surd (p^2 - 1)})^{2m} = (p^2 + p\surd (p^2 - 1))^{2m}$. Hanc ob rem erit $u = \frac{p}{gk^m} - \frac{\int (p^2 + p\surd (p^2 - 1))^{2m} dp}{gk^m (p^2 + p\surd (p^2 - 1))^{2m}}$. Quae aequatio quoties $2m$ est numerus integer integrationem admittit. Posito enim $p^2 + p\surd (p^2 - 1) = \frac{r+1}{2}$; erit $p = \frac{r+1}{2\surd r}$ atque $u = \frac{r+1}{2gk^m \surd r} - \frac{1}{4gk^m (r+1)^{2m}} \int \frac{(r-1)(r+1)^{2m} dr}{r\surd r}$. Est autem hac positione $r = 2p^2 - 1 + 2p\surd (p^2 - 1)$, seu $\surd r = p + \surd (p^2 - 1)$. Vt si fuerit $m = \frac{1}{2}$ seu resistentia celeritatibus proportionalis erit $u = \frac{r+1}{2g\surd kr} - \frac{1}{4g(r+1)\surd k} \int \frac{(r^2-1)dr}{r\surd r}$

$\int \frac{(r^2-1)dr}{r\sqrt{r}} = \frac{1}{2g\sqrt{k}} \left(\frac{r+1}{\sqrt{r}} - \frac{r^2+8\sqrt{r}-3}{3(r+1)\sqrt{r}} \right) = \frac{2rr+6r+8\sqrt{r}}{6g(r+1)\sqrt{kr}}$ seu mutata constante C est $u = \frac{r\sqrt{r}+3\sqrt{r}+2C}{3g(r+1)\sqrt{k}}$. Posito autem loco r eius valore erit $u = \frac{p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)}}{3gp\sqrt{k}} + \frac{C}{3g(p^2+p\sqrt{(p^2-1)})\sqrt{k}}$. Sit $C = 0$; erit $u^{\frac{1}{m}} = u^2 = \frac{(p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)})^2}{9g^2kp^2}$, et propter $P = gp(p-\sqrt{(p^2-1)})\sqrt{(p^2-1)})$, erit $Pu^{\frac{1}{m}} = \frac{(p-\sqrt{(p^2-1)})(p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)})^2\sqrt{(p^2-1)}}{9gkp}$ atque $x = \frac{2gk}{3p^2-1-3p\sqrt{(p^2-1)}} - 2gkl(3p^2-1-3p\sqrt{(p^2-1)})$.

Scholion.

706. Similis integratio formulae, cui u est aequalis, etiam succedit si $\alpha = -1$, quo casu prodit, concaua deorsum in qua vis centrifuga contraria est et maior quam vis normalis, quippe excessus est $= g$. Eadem vero ipsa prodit aequatio, quae pro casu $\alpha = 1$, nisi quod signum ipsius $\sqrt{(p^2-1)}$ debet immutari Quod ad reliquas quaestiones huc pertinentes attinet, in quibus aliae pressionum leges proponuntur; eae vel ad nimis prolixos calculos deducunt; vel iam sunt pertractatae. Vidimus enim curuas, in quibus pressio totalis sit duplo maior, quam vel sola vis centrifuga vel sola normalis, esse brachystochronas, atque curuas in quibus alia obtinet ratio, supra quoque iam pertractauimus, cum curuas inuestigaremus, super quibus motus quam minime acceleraretur. Sequitur ergo, vt ad curuas inuenien-

das

das progrediamur, ſuper quibus plures diuerſi deſcenſus vel aſcenſus datam inter ſe teneant leges, quae quaeſtiones plurimum difficultatis in ſe habent. Neceſſe enim eſt ad huiusmodi problemata ſoluenda, vt celeritas corporis in ſingulis locis poſſit exprimi per quantitates, quibus curuae natura determinatur. Quod autem cum non in quauis reſiſtentiae hypotheſi poſſit perfici, vti ſupra notauimus; tales quaeſtiones tantum pro ſpecialibus reſiſtentiae hypotheſibus poterunt proponi. Praecipue ergo iſta tractatio ad reſiſtentiam quadratis celeritatum proportionalem eſt accommodanda; quia hoc caſu aequatio canonica, qua celeritas determinatur, ſeparationem variabilium admittit, atque ipſa celeritas poteſt exhiberi. Tum etiam conſiderari poteſt reſiſtentia, quae biquadratis celeritatum eſt proportionalis; cum pro hac hypotheſi celeritas quodammodo cognoſcatur. Denique quaecunque fuerit reſiſtentiae lex, ſi modo reſiſtentia eſt valde parua, huiusmodi quaeſtiones ſolutu faciliores euadent. In his vero problematis vel ratio celeritatum, quae in diuerſis deſcenſibus ſuper eadem curua acquiruntur, inueſtigatur; vel temporum, quibus diuerſi deſcenſus aut aſcenſus abſoluuntur, ratio. Atque in vtroque genere, ex data vel temporum vel celeritatum variis deſcenſibus acquiſitarum ratione ipſae curuae ſunt inueniendae.

PROPOSITIO 80.

Problema.

Tab. XV. Fig. 2. 707. *In medio vniformi, quod resistit in duplicata ratione celeritatum, atque potentia absoluta deorsum tendente; comparare inter se celeritates in puncto* A, *quae in diuersis descensibus corporis super curua* MA *acquiruntur.*

Solutio.

Sit celeritas in A quam vno descensu acquisiuit debita altitudini b, et celeritas in M debita altitudini v. Ponantur $AP = x$, $AM = s$, potentia sollicitans in M quae sit vtcunque variabilis $= P$; atque exponens resistentiae $= k$. His positis erit $dv = -Pdx + \frac{vds}{k}$, quae aequatio integrata dat $v = e^{\frac{s}{k}}(b - \int e^{\frac{-s}{k}} P dx)$ integrali $\int e^{\frac{-s}{k}} P dx$ ita accepto vt euanescat posito $x = o$. Sit nunc M initium descensus vbi est $v = o$, inuenietur hoc punctum ex aequatione $b = \int e^{\frac{-s}{k}} P dx$. Iam ponatur alius descensus fieri ex puncto proximo m, atque celeritas in A acquisita sit debita altitud. $b + db$. Erit ergo $b + db = \int e^{\frac{-s}{k}} P dx =$ summae omnium $e^{\frac{-s}{k}} P dx$ ab A vsque ad m; in aequatione vero priore $\int e^{\frac{-s}{k}} P dx$ significat summam omnium $e^{\frac{-s}{k}} P dx$ ab A vsque ad M tantum. Illa ergo summa superat hanc summam vltimo elemento $e^{\frac{-s}{k}}$ $P dx$

Pdx existente $AM = s$ et $Pp = dx$. Erit ergo $db = e^{\frac{-s}{k}} Pdx$. Ex qua aequatione datur relatio inter arcum MA descensu percursum et inter celeritatem in puncto infimo A acquisitam. Q.E.I.

Corollarium 1.

708. Dato ergo arcu descensus $AM = s$; erit altitudo celeritati in A acquisitae debita, $b = \int e^{\frac{-s}{k}} Pdx$. Seu si punctum M et celeritas in A tanquam variabiles quantitates considerantur, erit aequatio inter eas $db = e^{\frac{-s}{k}} Pdx$.

Corollarium 2.

709. Ex hac ergo aequatione, si proposita fuerit quaecunque ratio inter arcus descensus et celeritates in puncto A acquisitas; inuenietur aequatio pro curua AM propositae conditioni satisfaciens.

Corollarium 3.

710. Si medium non fuerit vniforme sed difforme vtcunque, existente eius exponente $= q$; loco aequationis inuentae prodibit ista aequatio $db = e^{-\int \frac{ds}{q}} Pdx$, cuius similis est vsus.

Corollarium 4.

711. Quia valor ipsius e est vnitate maior, quippe 2,718218284, erit $e^{-\int \frac{ds}{q}}$ seu $e^{\frac{-s}{k}}$ vnitate minor;

et hanc ob rem $db < Pdx$. In vacuo vero esset $db = Pdx$.

Scholion 1.

712. Simili modo res se habet in ascensu, quando corpus celeritate altitudini b debita ex A per arcum A M $= s$ ascendit. Tum enim erit $db = e^{\frac{s}{k}} Pdx$ vel in medio difformi $db = e^{\int\frac{ds}{q}} Pdx$. Quae formulae ex illis descensui inseruientibus inuenientur ponendo $-s$ loco $+s$; qua substitutione semper descensus in ascensum transmutatur. Hinc apparet quemadmodum pro descensu semper erat $db < Pdx$, ita fore pro ascensu semper $db > Pdx$, quia $e^{\frac{s}{k}}$ seu $e^{\int\frac{ds}{q}}$ est vnitate maior.

Corollarium 5.

713. In medio ergo resistente neque pro ascensu neque pro descensu esse potest $b = \int Pdx$ vel $b = \alpha\int Pdx$; tum enim foret $e^{\frac{s}{k}} = \alpha$; seu $s =$ const. in qua aequatione nulla linea continetur.

Corollarium 6.

714. Neque etiam curua poterit inueniri, pro qua vel in descensu vel in ascensu foret $b = \int Qdx$; denotante Q functionem quamcunq; ipsarum s et x; nisi Q ita sit comparata vt $\frac{Q}{P}$ fiat $= 1$ positis s et $x = o$.

Fit

Fit enim $e^{\frac{\pm\int ds}{q}}P = Q$ et $e^{\frac{\pm\int ds}{q}}$ abit in 1 posito $s = o$.

Scholion 2.

715. Ratio huius est, quod posuimus s euanescere euanescente x; atque hanc ob rem aequatio $db = e^{\frac{\pm\int ds}{q}}Pdx$ ita debet integrari, vt euanescat posito $x = o$. Si autem b ita detur, vt db per dx exprimatur, aequatio per dx diuidi poterit. Quocirca ea ad hanc legem non potest accommodari, nisi forte sponte aequatio hac proprietate iam gaudeat. Sin autem datus ipsius b valor talis fuerit, vt esset $db = Rds$, seu $b = \int Rds$ euanescente b facto $s = o$; tum aequatio pro curua quaesita erit $Rds = e^{\frac{\pm\int ds}{q}}Pdx$, quae semper est pro curua reali, dummodo $\int Rds$ habeat valorem affirmatiuum, prodeatque $ds > dx$ seu $e^{\frac{\pm\int ds}{q}}P > R$. Tab. XV. Fig. 3.

Exemplum 1.

716. Sit potentia sollicitans vniformis, seu $P = g$, et medium resistens vniforme, requiraturque curua MA hanc habens proprietatem, vt corpus in singulis descensibus ad A vsque acquirat celeritates, quae sint in subduplicata ratione arcuum descensu percursorum. Erit ergo Vb vt Vs seu $b = as$; vnde fit $ads = ge^{\frac{-s}{k}}dx$ seu $ae^{\frac{s}{k}}ds = gdx$ Tab. XV. Fig. 4.

$= g\,dx$, cuius integralis est $ak(e^{\frac{s}{k}} - 1) = gx$; addita constante, quo fiat $x = o$ euanescente s. Habebitur ergo $e^{\frac{s}{k}} = \frac{ak + gx}{ak}$ atque $\frac{s}{k} = l(ak + gx) - lak$. Quae differentiata dat $\frac{ds}{k} = \frac{g\,dx}{ak + gx}$; ex quo intelligitur curuam esse tractoriam filo longitudinis k super basi horizontali a puncto A deorsum distante interuallo $\frac{ak}{g}$. Construetur ergo curua hoc modo: super basi horizontali CE et filo BC$=k$ describatur tractoria BA; tum ducatur horizontalis DA a CE ad distantiam DC$= \frac{ak}{g}$; quo facto satisfaciet curuae portio BA quaesito. Ponimus autem BC verticalem et B punctum tractoriae summum; ex quo intelligitur a necessario minus esse debere quam g. Si enim esset maior foret CD $>$ CB, ideoque punctum A imaginarium. Sin autem esset $a = g$, punctum A in B caderet, adeoque nonnisi punctum satisfaceret. Si fuerit $a = o$, punctum A infinite distaret, et corpus descendens omnem amitteret celeritatem. Cum igitur debeat esse $a < g$ erit $b < gs$.

Tab. XV. Fig. 3.

Exemplum 2.

Tab. XV. Fig. 4.

717. In superiori tam resistentiae quam potentiae sollicitantis hypothesi quaeratur curua AMF super qua omnes ascensus ex puncto A facti ita se habeant; vt toti arcus ascensibus singulis absoluti sint quadratis celeritatum initialium in A propor-

portionales. Erit ergo vt ante $b = as$; atque $db = ads$. Cum autem pro aſcenſibus ſit $db = ge^{\frac{s}{k}} dx$, erit $ae^{\frac{-s}{k}} ds = gdx$, atque integrando $ak(1 - e^{\frac{-s}{k}}) = gx$. Hinc igitur habetur $e^{\frac{-s}{k}} = \frac{ak-gx}{ak}$; atque $\frac{ds}{k} = \frac{gdx}{ak-gx}$ ſeu $(\frac{ak}{g} - x)\frac{ds}{dx} = k$. Ex quo apparet curuam ſatisfacientem eſſe iterum tractoriam ſuper baſi horizontali CE filo longitudinis k conſtructam; ſed deorſum ſpectantem, cuius cuspis ſit in B exiſtente $BC = k$. Sumatur autem $CD = \frac{ak}{g}$; ductaque horizontali DA erit A punctum in quo aſcenſus omnes incipere debent. Hinc ergo quoque intelligitur a non poſſe eſſe maius quam g; quia alias punctum A foret imaginarium. At ſi fuerit $a = g$ ſeu $b = gs$ incidet A in B eritque arcus quolibet aſcenſu percurſus $= \frac{b}{g}$.

Scholion 3.

718. Plura huiusmodi exempla, quia tam facile ex vniuerſali formula inuenta reſolui poſſunt, hic praetermitto; neque etiam huiusmodi quaeſtiones pro aliis reſiſtentiae hypotheſibus, quibus ſolutio earum inueniri queat, affero; quoniam tales quaeſtiones neque iam ſunt agitatae, neque ſatis ſunt curioſae, vt earum ſolutiones requirantur. Ad digniora igitur progredior problemata, in quibus curuae quaeruntur tautochronae, ſuper quibus omnes vel aſcenſus vel deſcenſus aequalibus abſoluantur temporibus.

PRO-

PROPOSITIO 81.

Problema.

Tab. XV. Fig. 2.

719. *In hypothesi potentiae vniformis deorsum directae et medio vniformi, quod resistit in duplicata ratione celeritatum inuenire curuam tautochronam* AM, *super qua omnes descensus ad punctum* A *vsque absoluantur aequalibus temporibus.*

Solutio.

Consideretur quicunque descensus, in quo celeritas quam corpus in puncto infimo A acquirit, debita sit altitudini b. Ponantur AP $= x$; AM $= s$; altitudo celeritati in M debita $= v$; atque potentia sollicitans $= g$ et medii exponen- $= k$, ita vt resistentia in M sit ad vim grauitatis vt $\frac{v}{k}$ ad 1. His positis erit $dv = -gdx + \frac{vds}{k}$; quae aequatio integrata dat $v = e^{\frac{s}{k}}(b - \int e^{\frac{-s}{k}}gdx)$ integrali $\int e^{\frac{-s}{k}}gdx$ ita sumto vt euanescat posito x vel $s = o$. Ex hac ergo aequatione initium descensus inuenitur ponendo $v = o$ seu $\int e^{\frac{-s}{k}}gdx = b$. Tempus vero quo arcus MA absoluitur hinc erit $= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b - e^{\frac{-s}{k}}gdx)}}$, ex quo prodibit totius descensus tempus, si post integrationem fiat $\int e^{\frac{-s}{k}}gdx = b$. Ponamus breuitatis gratia $\int e^{\frac{-s}{k}}gdx = t$, et et $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = du$, ita vt ſit tempus totius deſcenſus $= \int \frac{du}{\sqrt{(b-t)}}$, poſito poſt integrationem $t = b$. Quo nunc haec expreſſio perpetuo eundem obtineat obtineat valorem, debebit $\int \frac{du}{\sqrt{(b-t)}}$ eſſe functio nullius dimenſionis ipſarum b et t, vt poſito $t = b$ ex formula b euaneſcat. Hanc ob rem du debet eſſe functio dimidiae dimenſionis ipſius t tantum, quia u a b pendere non poteſt. Fieri ergo neceſſe eſt $du = \frac{\alpha dt}{\sqrt{t}}$ exiſtente α quantitate conſtante b non continente. Hoc poſito erit tempus vnius deſcenſus $= \alpha \int \frac{dt}{\sqrt{(bt-tt)}}$, poſito poſt integrationem $t = b$. Vel poſita ratione diametri ad peripheriam $1 : \pi$ erit tempus vnius deſcenſus $= \alpha\pi$; qui valor perpetuo idem manet quomodocunque b ſeu deſcenſus initium mutetur. Curua ergo tautochrona quaeſita determinabitur ex hac aequatione $du = \frac{\alpha dt}{\sqrt{t}} = \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}}$, cuius integralis eſt $2\alpha\sqrt{t} = 2k$ $(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ ſeu $t = \frac{k^2}{\alpha^2}(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$ addita ſcilicet conſtante, quae faciat t euaneſcere poſito $s = o$. Cum autem ſit $t = \int e^{\frac{-s}{k}} g dx$, erit $dt = e^{\frac{-s}{k}} g\, dx = \frac{k}{\alpha^2}$ $(1 - e^{\frac{-s}{2k}}) e^{\frac{-s}{2k}} ds$. Ponamus $\alpha^2 g = a$ ſeu $\alpha = \sqrt{\frac{a}{g}}$; erit $a dx = k(e^{\frac{s}{2k}} - 1) ds$, cuius integralis eſt $ax = 2k^2(e^{\frac{s}{2k}} - 1) - ks$, quae quidem aequationes, quia variabiles s et x a se inuicem sunt separatae ad curuam construendam sufficiunt. Sin autem aequatio ab exponentialibus libera desideretur, quia ex altera aequatione est $k(e^{\frac{s}{2k}}-1)=\frac{ax+ks}{2k}$; erit hoc valore in altera substituto $axds+ksds=2akdx$. Q. E. I.

Corollarium 1.

720. Quia est $\alpha=\sqrt{\frac{a}{g}}$; erit tempus vnius descensus $=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. In vacuo autem et grauitate $=1$, est tempus descensus penduli $f=\frac{\pi\sqrt{2f}}{2}$ (166). Quare longitudo penduli isochroni in vacuo est $=\frac{2a}{g}$.

Corollarium 2.

721. Si igitur fuerit $\frac{2a}{g}=3166$ part. millesimarum pedis Rhenani, descensus absoluetur dimidio minuto secundo; hoc ergo euenit si sit $a=1583g$ scrup. ped. Rhen.

Corollarium 3.

722. Altitudo celeritati in M debita seu v est $=e^{\frac{s}{k}}(b-\int e^{\frac{-s}{k}}gdx)=e^{\frac{s}{k}}(b-t)$ atque ob $t=\frac{gk^2(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2}{a}$ erit $v=e^{\frac{s}{k}}(-\frac{gk^2}{a}(1-e^{\frac{-s}{k}})^2)=$

$$\frac{abe^{\frac{s}{k}}-gk^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)^2}{a},$$

Co-

Corollarium 4.

723. Posito $v=0$, prodibit totus arcus descensus ex hac aequatione $ab=gk^2(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2$. Si ergo arcus descensus ponatur $=f$, erit $ab=gk^2(1-e^{\frac{-f}{2k}})^2$. Quare dato arcu descensus f erit $v=\frac{gk^2e^{\frac{s}{k}}}{a}((1-e^{\frac{-f}{2k}})^2-(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2)$.

Corollarium 5.

724. Aequatio pro curua haec $ax=2k^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)-ks$ in seriem exponentiali $e^{\frac{s}{2k}}$ conuertendo, quae est $1+\frac{s}{2k}+\frac{s^2}{1.2.4k^2}+\frac{s^3}{1.2.3.8k^3}+$ etc. abit in hanc $ax=\frac{s^2}{1.2.2}+\frac{s^3}{1.2.3.4k}+\frac{s^4}{1.2.3.4.8k^2}+$ etc. seu $2ax=\frac{s^2}{1.2}+\frac{s^3}{1.2.3.2k}+\frac{s^4}{1.2.3.4.4k^2}+$ etc.

Scholion 1.

725. Notari hic conuenit hanc curuam simili aequatione exprimi, qua supra brachystochrona ascensui inseruiens exprimebatur; ibi enim erat $at=\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3k}+\frac{z^4}{1.2.3.4.k^2}+$ etc. (687), quae aequatio ab hac nostra pro tautochrona inuenta in hoc tantum differt, quod hic sit $2a$ quod ibi erat a, atque exponens resistentiae brachystochronae duplo maior est exponente resistentiae pro tautochrona. Curua ergo brachystochrona quoque ad tautochronismum producendum accom-

 moda-

modari potest; arcu ascensus descensui tributo, in medio resistente, cuius exponens est duplo minor.

Corollarium 6.

726. Ad inueniendam continuationem curuae MA vltra A poni debet s negatiuum, quo facto habebitur $ax = 2k^2(e^{\frac{-s}{2k}} - 1) + ks$ vel $2ax = \frac{s^2}{1.2} - \frac{s^3}{1.2.3.2k} + \frac{s^4}{1.2.3.4.4k^2} - \text{etc.}$ Quae eadem aequatio prodiisset, si k negatiuum fecissemus. Facto autem k negatiuo descensus mutatur in ascensum; quocirca curua MA vltra A continuata ascensui inseruiet atque super ea omnes ascensus eodem absoluentur tempore scilicet $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$.

Corollarium 7.

Tab. XV. Fig. 5. 727. Eadem ergo curua continua BMANC erit tautochrona tam pro descensu quam pro ascensu. Namque super arcu BMA omnes descensus eodem tempore absoluuntur, atque super arcu ANC omnes ascensus. Quare omnes dimidiae oscillationes, quae in arcu BMA incipiunt, erunt inter se isochronae, atque tempus vnius semioscillationis erit $= 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$.

Corollarium 8.

728. Si resistentia euanescit, quo casu k fit ∞, curua haec in cycloidem abire debet, quae

est

est curua tautochrona in vacuo. Hoc ipsum aequatio per seriem expressa indicat, fit enim $2ax = \frac{s^2}{1.2}$ seu $4ax = s^2$ aequatio pro cycloide.

Corollarium 9.

729. Curua ergo BMANC prout cyclois habebit cuspides verticales in B et C, ad quas inueniendas ponatur $dx = ds$, eritque pro arcu BMA, $a = k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$ seu $s = 2kl\frac{a+k}{k} = AMB$; atque eius altitudo BD erit $= 2k - \frac{2k^2}{a} l\frac{a+k}{k}$. Pro arcu ascensus vero ANC erit $ANC = 2kl\frac{k}{k-a}$, et $CE = \frac{2k^2}{a} l\frac{k}{k-a} - 2k$. Siue per series erit BD $= a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} - \frac{2a^4}{5k^3} +$ etc. Atque CE $= a + \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} + \frac{2a^4}{5k^3} +$ etc.

Corollarium 10.

730. Ex his perspicitur cuspicem C arcus ascensus eleuatiorem esse cuspide A arcus descensus. Atque arcus ANC cuspis in infinitum abit si $k = a$; et si $a > k$ cuspis C erit imaginaria. Ceterum ex aequatione patet, tam BC quam CE esse diametros curuae inuentae.

Corollarium 11.

731. Si corpus in dimidia oscillatione habuerit celeritatem altitudini b debitam, erit arcus descensus $= 2kl\frac{k\surd g}{k\surd g - \surd ab}$ seu per seriem $= \frac{2\surd ab}{\surd g} + \frac{2ab}{2gk}$

$\frac{2ab}{2gk} + \frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}} +$ etc. atque sequens arcus ascensus $=$ $2kl\frac{k\sqrt{g}+\sqrt{ab}}{k\sqrt{g}} = \frac{2\sqrt{ab}}{2gk} - \frac{2ab}{2gk} + \frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}} -$ etc.

Corollarium 12.

732. Si ergo descensus fiat ex puncto B ita vt arcus descensus sit $= AMB = 2kl\frac{a+k}{k}$ erit $b = \frac{gak^2}{(a+k)^2}$, sequentis vero ascensus arcus erit $= 2k$ $l\frac{2a+k}{a+k}$.

Corollarium 13.

733. Ex aequatione pro hac curua apparet curuam in puncto A habituram esse tangentem horizontalem. Cum porro posito ds constante radius osculi in M sit $= \frac{dsdy}{ddx} = \frac{ds\sqrt{(ds^2-dx^2)}}{ddx}$; quia est $dx = \frac{k}{a}(e^{\frac{s}{2k}} - 1)ds$, s erit $ddx = \frac{1}{2a}e^{\frac{s}{2k}}ds^2$ et $\sqrt{(ds^2 - dx^2)} = ds\sqrt{(1 - \frac{k^2}{a^2}(e^{\frac{s}{2k}}-1)^2)}$; erit radius osculi in M $=$ $\frac{\sqrt{(4a^2 - 4k^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)^2)}}{e^{\frac{s}{2k}}}$. Posito ergo $s = o$ erit radius osculi in puncto infimo $A = 2a$. In B vero et C radius osculi euanescit.

Corollarium 14.

734. Radius osculi non est maximus in puncto infimo A; sed per methodum maximorum maximus inuenitur in arcu ascensus, idque in puncto

cto O existente $AO = 2kl\frac{k^2}{k^2-a^2}$. In hoc enim puncto est radius osculi $= \frac{2ak}{\sqrt{(k^2-a^2)}}$. Ex quo concluditur nisi sit $k > a$, curuaturam curuae ANC perpetuo diminui, neque punctum O usquam existere.

Scholion 2.

735. Hoc igitur problemate duas inuenimus curuas, super quarum altera omnes descensus, sualtera vero omnes ascensus aequalibus absoluntur temporibus. Atque cum super tota curua BAC omnes itus seu semioscillationes aequalibus peragantur temporibus, si quidem in curuae portione BA incipiant; haec curua ad oscillationes in fluido isochronas faciendas esset idonea, si modo reditus quoque inter se essent isochroni, de quo vero non constat. Quia autem in fluidis praeter resistentiam quadratis celeritatum proportionalem alia insuper obseruatur, quam momentis temporum proportionalem seu constantem esse probabile est; etiam coniunctim cum ista resistentia tautochronam determinare operae pretium est; quod vero facile ex praecedente effici potest. Sit enim resistentia constans $= h$, erit pro descensu $dv = -gdx + hds + \frac{vds}{k}$. Quare si in priore operatione tantum loco gdx vbique $gdx - hds$ substituatur, tautochrona satisfaciens simili modo obtinebitur; pro descensu scilicet prodibit ita curua $ax = (\frac{ab}{g} - k)s + 2k^2(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$; atque pro ascensu vero haec

$ax =$

$ax = (k - \frac{ab}{g})s + 2k^2(e^{\frac{-s}{2k}} - 1)$, quae curua quoque cum priore eandem curuam continuam conſtituit, abit enim altera in alteram ponendo s negatiuum. Notandum hic eſt ſi fuerit $k = \frac{ab}{g}$ fore curuam tautochronam tractoriam BAF aſymtotam habentem horizontalem CE, quae a puncto A diſtet interuallo $AE = \frac{2k^2}{a}$. Fili autem longitudo, quo haec tractoria deſcribitur, eſt $= 2k$. Quod autem ſuper huiusmodi curua tangentem horizontalem nusquam habente ſemioſcillatio abſolui poſſit, atque alicubi punctum aequilibrii A exiſtere, mirum non eſt; cum, vt ſupra iam obſeruauimus, in tali reſiſtentiae hypotheſi, corpus in loco ſubſiſtere queat decliui. His autem caſibus, quibus curua vltra A deſcendere pergit nulli reditus atque ideo nullae oſcillationes peragi poſſunt, quia corpus, quanquam ſuper plano decliui ad quietem peruenire poteſt, tamen ſuper eo aſcendere nequit; in quouis enim curuae portionis AF puncto corpus in quiete perſeuerare poteſt.

Scholion 3.

736. Non multo difficilior fit problematis ſolutio, ſi potentia deorſum tendens non conſtans, ſed variabilis vtcunque P, atque exponens reſiſtentiae etiam variabilis q ponatur. Habebitur enim pro elemento temporis in deſcenſu $\frac{ds}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{ds}{q}}\sqrt{(b - \int e^{-\int\frac{ds}{q}} P\,dx)}}$. Si nunc vt ante ponatur

$\int e^{-\int\frac{ds}{q}}$

$\int e^{-\int \frac{ds}{q}} P dx = t$; et $\frac{ds}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{ds}{q}}} = du$; debebit quoque esse $du = \frac{\alpha dt}{\sqrt{t}}$ seu $t = \frac{\alpha^2 dt^2}{du^2} = \frac{\alpha^2 P^2 dx^2}{e^{\int\frac{ds}{q}} ds^2}$. Quae aequatio denuo differentiata posito ds constante et loco dt eius valore substituto dabit $\frac{q ds^2}{2\alpha^2} = Pq ddx + q dP dx - 2 P dx ds$ pro curua descensus isochronos habente; Huiusque curuae continua vltra A ascensibus inseruiet.

Scholion 4.

737. Tautochronam hanc in hypothesi resistentiae quadratis celeritatum proportionalis primus ego dedi in Comment. Tomo IV. vbi eadem, qua hic, sum vsus methodo. Deinceps vero etiam Cel. *Ioh. Bernoulli* mihi per literas significauit, se quoque in eadem resistentiae hypothesi istam tautochronam reperisse; cuius methodus extat in Comm. Acad. Paris. A. 1730. In aliis vero resistentiae hypothesibus, excepta ea, quae ipsis celeritatibus est proportionalis, nemo adhuc, quantum mihi constat, tautochronas determinauit. Quod enim ad eas curuas attinet, quas in Act. Lips. A. 1726. tautochronarum nomine dedi; eae quaesito non satisfaciunt; vti Cel. *Hermannus*, qui primum in easdem inciderat, atque ego postea monstrauimus. Difficultas autem methodi huius tautochronas inueniendi in hoc

consistit, quod in aliis resistentiae hypothesibus celeritas non possit vniuersaliter ex aequatione canonica determinari. Quomodo vero nihilominus pro aliis resistentiis tautochronae inuestigari queant, ex sequente propositione colligi poterit; in qua pro mediis rarissimis in quacunque celeritatum ratione multiplicata resistentibus tautochronae inueniendae proponuntur.

PROPOSITIO 82.

Problema.

Tab. XV. Fig. 2.

738. *In medio rarissimo, quod resistit in quacunque multiplicata ratione celeritatum, et hypothesi potentiae vniformis deorsum tendentis, determinare curuam tautochronam* AM, *super qua vel omnes descensus vel ascensus aequalibus absoluantur temporibus.*

Solutio.

Positis abscissa $AP = x$ et arcu $AM = s$; sit totus arcus descensu aliquo descriptus $= f$. Potentia sollicitans deorsum ponatur $= g$ altitudo celeritati in M debita sit $= v$, exponens resistentiae $= k$, atque ipsa resistentiae vis $= \frac{v^m}{k^m}$, vbi k est quantitas valde magna ita vt fractiones, quae in denominatore k plurium quam m dimensionum habent, pro euanescentibus haberi queant. His positis erit ex natura descensus $dv = -gdx +$

$v^m ds$ con-

$\frac{v^m ds}{k^m}$. Iam si resistentia prorsus abesset, curua quaesita esset cyclois, cuius aequatio est $gx = \alpha s^2$; quia autem medium est rarissimum, curua quaesita non multum a cycloide differet; ponatur igitur aequatio pro curua quaesita haec $gx = \alpha s^2 + \frac{\beta s^n}{k^m}$. Quia vero est $dv = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m}$ propter terminum $\frac{v^m ds}{k^m}$ valde paruum erit proxime $v = C - gx = C\alpha s^2 - \frac{\beta s^n}{k^m}$, vbi constans C ex hoc determinatur, quod si fit $s = f$ fiat $v = o$. Quocirca erit $v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n)$ quam proxime. Ponatur ergo $v = \alpha (f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n) + Q$, erit $dv = -2\alpha s ds - \frac{n\beta s^{n-1} ds}{k^m} + dQ = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m} = -2\alpha s ds - \frac{n\beta s^{n-1} ds}{k^m} + \frac{\alpha^m (f^2 - s^2)^m ds}{k^m}$, neglectis reliquis terminis qui pro v^m poni deberent; quia in iis k plures quam m in denomitatore habet dimensiones. Ex his iam sequitur fore $Q = \frac{\alpha^m}{k^m}\int (f^2 - s^2)^m ds$ integrali hoc ita accepto vt euanescat posito $s = f$. Erit ergo $v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n) + \frac{\alpha^m}{k^m}\int (f^2 - s^2)^m ds$;

atque hinc $\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}} - \frac{\mathfrak{C}(f^n-s^n)-\alpha^m\int(f^2-s^2)^m ds}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ omittendis iterum terminis sequentibus ob memoratam rationem. Hinc nunc prodibit tempus $\int\frac{ds}{\sqrt{v}} = \int\frac{ds}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}}$

$$- \frac{\mathfrak{C}}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m}\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha^m}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m}\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}},$$

quod ita integratum, vt euanescat posito $s=0$; dabit tempus, quo corpus descendens arcum MA $=s$ absoluit. Totum ergo descensus tempus per arcum f obtinebitur, si post integrationem ponatur $s=f$; quod tempus debet esse constans seu ita comparatum, vt non pendeat ab f. Primus autem temporis terminus $\int\frac{ds}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}}$ posito post inteprationem $s=f$ iam dat huiusmodi expressionem, in qua non amplius inest f; prodit enim $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$. Quamobrem si duo reliqui termini ita essent comparati, vt postquam positum est $s=f$ sese destruant; quaesito foret satisfactum; haberetur enim pro integro descensus tempore haec expressio $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$; quae est constans. Debebit ergo esse $\mathfrak{C}\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ $= -\alpha^m\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$, posito post integrationem $s=f$. Dat autem $\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ posito $s=f$, multiplum potestatis ipsius f, cuius exponens est $n-2$, atque alterum integrale $\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$,

possposito $s=f$ dat multiplum potestatis ipsius f, cuius exponens est $2m-1$. Fiat igitur $n=2m+1$, atque $\mathfrak{C}$ ita sumatur vt hae duae potestates ipsius f, quarum vtriusque exponens erit $2m-1$, sese destruant. Quo autem appareat quales coefficientes habiturae sint istae ipsius f potestates; ex casibus simplicioribus concludemus. Integratis igitur sequentibus formulis ita vt euanescant posito $s=0$, tumque facto $s=f$ reperietur $\int\frac{(f-s)ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}=f^{-1}$; atque $\int\frac{(f^3-s^3)ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{1}f^1$; et $\int\frac{(f^5-s^5)ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2.4}{1.3}f^3$; hincque erit generaliter $\int\frac{(f^{2m+1}-s^{2m+1})ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2.4.6.\ldots 2m}{1.3.5.\ldots(2m-1)}f^{2m-1}$, vnde erit $\mathfrak{C}\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2.4.6.\ldots 2m}{1.3.5.\ldots(2m-1)}\mathfrak{C}f^{2m-1}$. Alterius termini coefficiens ex eadem analogia innotescet. Est enim integratione ita instituta, vt integrale euanescat posito $s=0$; per seriem $\int(f^2-s^2)^m ds=-f^{2m}(f-s)+\frac{m}{1.3}f^{2m-2}(f^3-s^3)-\frac{m(m-1)}{1.2.5}f^{2m-4}(f^5-s^5)+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.7}f^{2m-6}(f^7-s^7)-$ etc. Haec igitur series in $-\frac{\alpha^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ ducta et integrata atque tum posito $s=f$, dabit $\alpha^m f^{2m-1}(1-\frac{2m}{1.3}+\frac{4m(m-1)}{1.3.5}-\frac{8m(m-1)(m-2)}{1.3.5.7}+$ etc.$)=\frac{\alpha^m f^{2m-1}}{2m+1}$. His igitur duobus valoribus inter se aequatis prodit $\mathfrak{C}=$

 1.3.5.

$\frac{1.3.5.7 - - - (2m-1)\, a^m}{2.4.6.8 - - - 2m(2m+1)}$, quo valore loco $\mathfrak{G}$ substituto habebitur pro curua tautochrona ad descensus pertinente, posito $\frac{1}{a}$ loco a homogeneitatis ergo, sequens aequatio $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{1.3.5 - - - (2m-1)\, s^{2m+1}}{2.4.6 - - - 2m(2m+1)\, a^m k^m}$. Vel si ex x desideretur s hinc oritur ista aequatio $s = \sqrt{gax} - \frac{1.3.5 - - - (2m-1) g^m a x^m}{2.4.6 - - - 2m(2m+1)\, 2\, k^m}$. Atque tempus vnius cuiusque descensus super hac curua erit $= \frac{\pi \sqrt{a}}{2}$, seu longitudo penduli in vacuo a grauitate naturali $= 1$ sollicitati, eodem tempore descensus absoluentis erit $= \frac{a}{2}$. Eadem aequatio pro curua tautochrona mutatur in aequationem pro curua super qua omnes ascensus aequalibus temporibus, tempore scilicet $\frac{\pi \sqrt{a}}{2}$ absoluuntur, si loco k^m scribatur $-k^m$. Q. E. I.

Corollarium 1.

739. Si $2m+1 > 2$ seu $m > \frac{1}{2}$, curuae radius osculi in puncto A idem erit, qui pro aequatione $gx = \frac{s^2}{a}$; scilicet $\frac{ga}{2}$. In his ergo casibus corpus minimum descensum absoluit eodem tempore quo in vacuo; seu descensus super infima curuae portiuncula infinite parua, idem erit in vacuo et in medio resistente si modo $m > \frac{1}{2}$.

Co-

Corollarium 2.

740. Si $m = \frac{1}{2}$ in vtroque termino s habebit duas dimensiones. Quare radius osculi in A non amplius erit $\frac{ga}{2}$ sed eo erit minor. In hoc ergo medio, quod in ratione celeritatum resistit; tempus descensus minimi per arculum circularem maius erit quam in vacuo; hocque in data ratione.

Corollarium 3.

741. Si m fuerit $< \frac{1}{2}$; verum tamen $> o$, radius osculi in A erit infinite paruus; super hac ergo curua in vacuo minimus descensus absolueretur tempore infinite paruo; cum in medio resistente finito tempore perficiatur.

Scholion 1.

742. Quod ad hunc casum $m < \frac{1}{2}$ attinet, hoc quod diximus quidem ex aequatione sequitur, quam in medio rarissimo quaesito plene satisfacere ponimus. In casu autem quo $m < \frac{1}{2}$, tres termini, ex quibus aequatio consistit, etiamsi medium sit rarissimum non satisfaciunt. Duo enim termini quibus gx aequatur, considerari debent tanquam duo termini initiales seriei conuergentis, in qua sequentes prae primis euanescant. Tota vero series huiusmodi habebit formam $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m+1} k^{2m}} + \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2} k^{3m}} +$ etc. in

qua

qua exponentes ipsius s in progressione arithmetica progrediuntur; haecque forma partim ex analogia partim ea ipsa ratione, qua ad secundum terminum inueniendum vsi sumus, colligi potest. Ex hac iam forma apparet curuae in puncto infimo A conditionem, si $m < \frac{1}{2}$ ex duobus terminis primis cognosci non posse, quantumuis k sit magnum. Quia enim exponentes ipsius s decrescunt, in sequentibus terminis s tandem in denominatorem migrabit, ideoque posito $s = 0$ fiet $x = \infty$, ex quo apparet curuam his casibus in A, non terminari; neque radium osculi in hoc loco posse definiri. Quod incommodum non habet locum, si exponentes ipsius s crescunt.

Scholion 2.

743. Hinc igitur patet modus curuam tautochronam in medio in quacunque celeritatum ratione multiplicata resistente inueniendi; etiamsi medium non fuerit rarissimum. Cum enim aequatio pro tautochrona sit huius formae $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1}k^{2m}} + \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2}k^{3m}} +$ etc. quemadmodum ex conditione tautochronismi valorem coefficientis A determinauimus; eodem modo etiam coefficientes reliquorum terminorum poterunt definiri. At propter tantopere compositas formulas integrales labor fere fit insuperabilis; qui autem forte subleuabitur, si quis tantum vnicum coef-

coefficientem B vel ad ſummum duos B et C determinandi operam adhibuerit, quoniam ſequentes ex analogia concludi poſſent. Ad haec accedit, quod haec ſeries in caſu, quo $m=1$ cognita ſit; quippe ex ſuperioribus (724) habemus $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^3}{6k} + \frac{s^4}{48ak^2} + \frac{s^5}{480ak^3} +$ etc. quae ſeries ad generalem inueniendam non parum ſubſidii afferet. Terminus vero B inueniri debet ex ſequente aequatione $B\int\frac{(f^{4m}-s^{4m})ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4}A^2$

$$\int\frac{(f^{2m+1}-s^{2m+1})^2 ds}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{2}A\int\frac{ds(f^{2m+1}-s^{2m+1})\int ds(ff-ss)^m}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}}$$

$$+\frac{3}{4}\int\frac{ds(\int ds(f^2-s^2)^m)^2}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}} - mA\int\frac{ds\int ds(ff-ss)^{m-1}(f^{2m+1}-s^{2m+1})}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-m\int\frac{ds\int ds(ff-ss)^{m-1}\int ds(ff-ss)^m}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}},$$ cuius aequationis integralia ita ſunt ſumenda vt euaneſcant poſito $s=f$, quo facto poni debet $s=o$; atque tum valor ipſius B inuenietur. Coefficiens vero A iam cognitus eſt; inuenimus enim $A = \frac{1.3.5 \text{-----} (2m-1)}{2.4.6 \text{-----} 2m(2m+1)}$. Pro caſu quo $m=1$, ſuperiorem aequationem euolui inuenique $B = \frac{1}{48}$; exiſtente $A = \frac{1}{6}$, id quod egregie congruit. Si autem valores coefficientium in infinitum innoteſcerent, tum haberetur quidem aequatio ſerie infinita conſtans pro tautochrona quaeſita; quae autem ſi eius lex cognita fuerit, per methodum meam ſeries ſummandi, in aequationem terminorum numero finito conſtantem transformari po-

terit. Atque hanc propemodum vnicam et tutissimam iudico methodum, cuius ope tautochronae in aliis resistentiae hypothesibus inueniri queant.

Corollarium 4.

744. Si igitur aequatio $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1}k^{2m}} +$ etc. exprimat tautochronam descensuum; ascensus tautochronos producet ista curua $gx = \frac{s^2}{a} - \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1}k^{2m}} - \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2}k^{3m}}$ + etc. quae oritur ponendo k^m negatiuum.

Corollarium 5.

745. Perspicitur hinc quoties m fuerit numerus integer, toties tautochronam ascensibus inseruientem ANC esse continuam tautochronae descensuum BMA. Eadem enim aequatio oritur siue k^m siue s ponatur negatiuum.

Corollarium 6.

746 Praeterea intelligitur curuam ANC, super qua omnes ascensus eodem tempore absoluuntur, quo descensus super curua BMA, minus esse curuam quam BMA, et cuspidem C altius habere positam quemadmodum in medio quod in duplicata celeritatum ratione resistit.

Co-

Corollarium 7.

747. In medio quod in ſimplici ratione celeritatum reſiſtit, omnes ipſius s exponentes fiunt $= 2$; ex quo ſequitur tam tautochronam deſcenſuum quam aſcenſuum eſſe ſemicycloides. Ea vero pro aſcenſu, quia s^2 minorem habet coefficientem, quam pro deſcenſu maiore circulo erit genita; ſi quidem tempora aſcenſuum aequalia eſſe debeant temporibus deſcenſuum. Interim vero eadem cyclois continua ſemioſcillationes quoque producit iſochronas, aſcenſuum vero tempora erunt minora quam tempora deſcenſuum.

Scholion 3.

748. Si m eſt numerus integer facile ex data forma poteſt ipſius A valor definiri. Namque ſi $m = 1$ erit $A = \frac{1}{6}$; ſi $m = 2$ erit $A = \frac{3}{40}$ et ita porro. At ſi m non eſt numerus integer difficilius eſt valorem A exhibere; ſeries enim valorum ipſius A debet interpolari. Pro fractionibus quidem, quarum denominator eſt 2 valor ipſius A per quadraturam circuli poteſt definiri. Poſito enim π pro perimetro circuli, cuius diameter eſt 1, erit vt ſequitur:

$$\begin{array}{c|lllll} m & \frac{1}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{5}{2}, & \frac{7}{2}, & \text{etc.} \\ A & \frac{1}{\pi}, & \frac{2.1}{3.2\pi}, & \frac{2.4.1}{3.5.3\pi}, & \frac{2.4.6.1}{3.5.7.4\pi}, & \text{etc.} \end{array}$$

Ex quo patet ſi fuerit $m = \frac{2n+1}{2}$ fore $A = \frac{2.4.6 \cdots 2n}{3.5.7 \cdots (2n+1)} \frac{1}{(n+1)\pi}$, atque adeo $g\,x = \frac{s^2}{a} +$

 2.4.6

$\frac{2.4.6 \cdots 2n.\ s^{2n+2}}{3.5.7 \cdots (2n+1)(n+1)\pi a^m k^m}$ existente scilicet $m = \frac{2n+1}{2}$. Quaecunque autem m fuerit fractio, erit perpetuo $A = \frac{1}{(2m+1)\int dz(1-z)^m}$, hoc integrali ita accepto, vt euanescat posito $z=0$; atque tum posito $z=1$. Quemadmodum docui in Comment. A. 1730. in Diss. de progressionibus transcendentibus.

Corollarium 8.

749. Si nunc pro singulis mediis resistentibus rarissimis quaerantur tautochronae descensuum eae se habebunt vt sequitur:

$m=0$	$gx = \frac{s^2}{a} + s$
$m=\frac{1}{2}$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^2}{\pi\sqrt{ak}}$
$m=1$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^3}{6ak}$
$m=\frac{3}{2}$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^4}{3\pi ak\sqrt{ak}}$
$m=2$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{3s^5}{40a^2k^2}$
$m=\frac{5}{2}$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{8s^6}{45\pi a^2k^2\sqrt{ak}}$
$m=3$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{5s^7}{112a^3k^3}$

Ex his formabuntur tautochronae ascensuum; si vltimi termini fiant negatiui.

Scholion 4.

750. Haec igitur sufficiant de tautochronis simplicibus, super quibus vel omnes descensus tantum

tum, vel omnes aſcenſus aequalibus abſoluuntur temporibus. Praeter has autem curuas etiam aliae tautochronarum nomine appellari poſſunt, ſuper quibus vel omnes ſemioſcillationes, vel etiam ſolum omnes integrae oſcillationes ſint iſochronae; quarum curuarum numerus vti etiam in vacuo eſt infinitus. Quod autem ad integras oſcillationes attinet, haec quaeſtio reſiſtentiae propria eſt, in vacuo enim omnes ſemioſcillationes inter ſe ſunt aequales. Quia autem in his quaeſtionibus duae curuae inueniendae proponuntur, quarum altera ad aſcenſus altera ad deſcenſus pertineat; antequam huiusmodi quaeſtiones pro tautochroniſmo ſoluamus, alias faciliores propoſitiones circa binas curuas aſcenſum et deſcenſum ſpectantes praemittemus.

PROPOSITIO 83.

Problema.

751. *In hypotheſi potentiae vniformis deorſum tendentis et medio vniformi, quod reſiſtit in duplicata ratione celeritatum, data curua* MA *inuenire alteram* AN *illi in* A *iungendam huius indolis; vt corpus per arcum quemcunque* MA *ſuper curua data deſcendens ſuper curua quaeſita aſcenſu conficiat arcum* AN, *qui aequalis ſit arcui* MA. Tab. XV. Fig. 6.

Solutio.

Poſitis potentia ſollicitante g; exponente reſiſtentiae k, et celeritate in A, quam ex deſcen-

 ſu

su acquisiuit, quaque super curua quaesita AN ascensum inchoat, debita altitudini b; sit pro curua data abscissa AP$=x$; arcus AM$=s$; pro quaesita vero sit abscissa AQ$=t$ atque arcus AN$=r$. His positis erit altitudo celeritati corporis descendentis in M debita $=e^{\frac{s}{k}}(b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)$ et altitudo celeritati corporis ascendentis in N debita $=e^{\frac{-r}{k}}(b-g\int e^{\frac{r}{k}}dt)$. Integer ergo arcus descensus prouenit ex hac aequatione $b=g\int e^{\frac{-s}{k}}dx$; integer vero arcus ascensus ex hac aequatione $b=g\int e^{\frac{r}{k}}dt$. Inter arcus igitur descensus et ascensus haec habebitur aequatio: $\int e^{\frac{-s}{k}}dx=\int e^{\frac{r}{k}}dt$ seu huius differentialis $e^{\frac{-s}{k}}dx=e^{\frac{r}{k}}dt$. Quare cum arcus ascensus aequalis esse debeat arcui descensus ponatur $r=s$; quo facto prodibit ista aequatio $e^{\frac{-2s}{k}}dx=dt$. Cum autem curua MA data sit, dabitur aequatio inter s et x; ex qua, si loco dx eius valor per s et ds substituatur, prodibit aequatio inter t et s seu inter t et r propter $r=s$; quae determinabit naturam curuae quaesitae AN. Q. E. I.

Corollarium I.

752. Si curuae datae MA portio infima exprimatur aequatione $x=\alpha s^n$; erit pro portione

insiinfima curuae AN haec aequatio $dt = \alpha n e^{\frac{-2s}{k}} s^{n-1} ds$. Eſt vero propter s arcum minimum $e^{\frac{-2s}{k}} = 1 - \frac{2s}{k}$, vnde erit $t = \alpha s^n - \frac{2\alpha n s^{n+1}}{(n+1)k}$ ſeu tantum $t = \alpha s^n$. Portiones ergo infimae vtriusque curuae erunt inter ſe ſimiles.

Corollarium 2.

753. Ex aequatione $e^{\frac{-2s}{k}} dx = dt$ intelligitur eſſe ſemper $dt < dx$ ſeu $t < x$. Punctum ergo N ſemper humilius erit poſitum, quam punctum reſpondens M. Ex quo ſequitur curuam AN minus eſſe curuam verſus AB, quam curuam AM.

Corollarium 3.

754. Hanc ob rem curua ANC non poterit eſſe ſimilis et aequalis curuae AM; quia hoc caſu puncta M et N arcus aequales AM et AN terminantia forent in eadem altitudine ſita.

Corollarium 4.

755. Si corpus ſuper curua MA ex altitudine infinita deſcenderet, quia in A celeritatem tantum finitam acquirit ad altitudinem tantum finitam aſcendere poterit. Hoc ergo caſu, quo curua AM in infinitum porrigitur, curua ANC non vltra datam altitudinem aſcendere poterit, ſed

 aſym-

asymtoton habebit horizontalem BC. Id quod etiam ex hoc apparet, si fit $s = \infty$; tum enim prodit $dt = o$.

Scholion I.

756. Quemadmodum ex hac propositione intelligitur, quomodo ex data curua descensuum MA inueniri debeat curua ascensuum AN; ita vicissim hinc facile erit ex data curua AN alteram definire. Si enim detur aequatio inter t et s, erit $dx = e^{\frac{2s}{k}} dt$, aequatio pro curua AM.

Corollarium 5.

757. Quia curuae descensuum MA respondet curua ascensuum AN, cuius haec est aequatio $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx$. Ita si haec curua AN pro curua descensuum accipiatur, erit respondentis curuae ascensuum abscissa $= \int e^{\frac{-2s}{k}} dt = \int e^{\frac{-4s}{k}} dx$.

Corollarium 6.

758. Si hoc modo vlteriores curuae respondentes quaerantur, obtinebitur sequens aequationum series.

Abscissa curuae respondens arcui s.

$$\text{I} = x$$

$$\text{II} = \int e^{\frac{-2s}{k}} dx$$

$$\text{III} = \int e^{\frac{-4s}{k}} dx$$

IV

$$\text{IV} = \int e^{\frac{-6s}{k}} dx$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$n = \int e^{\frac{-2(n-1)s}{k}} dx.$$

Corollarium 7.

759. Huius igitur ſeriei duae curuae contiguae hanc habebunt proprietatem, vt, iis in infimo puncto A coniunctis, corpus ſuper priori deſcendens, ſuper altera per arcum aſcendat aequalem arcui deſcenſus. Infiniteſima autem huius ſeriei curua facto $n = \infty$, fit recta horizontalis, quia euaneſcit $e^{\frac{-\infty s}{k}}$; ideoque ipſa curuae abſciſſa.

Exemplum I.

760. Sit linea data recta verticalis, erit $x = s$. Tab. XVI. Fig. 1.
Pro curua ergo aſcenſuum quaeſita ANE exiſtente $AQ = t$ et $AN = s$ habebitur iſta aequatio $dt = e^{\frac{-2s}{k}} ds$ ſeu $t = \frac{k}{2}(1 - e^{\frac{-2s}{k}})$. Atque eliminata quantitate exponentiali erit $2tds = kds - kdt$ ſiue $\frac{(\frac{1}{2}k - t)ds}{dt} = \frac{1}{2}k$. Ex qua aequatione perſpicitur curuam ANE eſſe tractoriam ſuper aſymtoto horizontali BD filo longitudinis $\frac{1}{2}k$ genitam. Quare altitudo aſymtoti AB erit $= \frac{1}{2}k$. Si nunc haec ipſa tractoria ANE pro curua deſcenſuum accipiatur, ei reſpondebit curua quaeſita, cuius ab-

ſciſſa arcui s reſpondens erit $= \int e^{\frac{-4s}{k}} ds$; quae ergo curua iterum erit tractoria aſymtoton horizontalem habens, cuius aſymtotos ſupra A eleuata eſt interuallo $\frac{1}{4}k$, cui longitudo fili aequatur. Seriei vero ſuperioris omnes curuae erunt tractoriae, quae filis generantur, quorum longitudines conſtituunt hanc ſeriem $\frac{k}{0}$, $\frac{k}{2}$, $\frac{k}{4}$, $\frac{k}{6}$ etc. Recta ſcilicet verticalis tanquam tractoria conſiderari poteſt, cuius filum generans eſt $\frac{k}{0}$ ſeu infinitum. Vltima autem huius ſeriei tractoria in rectam abit horizontalem per A ductam.

Exemplum 2.

761. Si linea deſcenſuum data fuerit recta vtcunque ad horizontem inclinata MA, ita vt ſit MA (s): AP(x) $= \alpha : 1$, ſeu $dx = \frac{ds}{\alpha}$; habebitur pro curua quaeſita AN iſta aequatio $\alpha dt = e^{\frac{-2s}{k}} ds$, cuius integralis eſt $\alpha t = \frac{k}{2}(1 - e^{\frac{-2s}{k}})$. Ex quibus aequationibus coniunctis oritur $2\alpha t\, ds = k ds - \alpha k dt$ ſeu $\frac{(\frac{k}{2\alpha} - t) ds}{dt} = \frac{k}{2}$. Quae aequatio quoque eſt pro tractoria filo longitudinis $\frac{k}{2}$ ſuper aſymtoto horizontali BD genita; exiſtente AB $= \frac{k}{2\alpha}$; haecque tractoria per A tranſire debet. Seriei ſequentes curuae omnes ſunt quoque tractoriae, vt in praecedente exemplo, quarum fila generantia ſunt $\frac{k}{0}$, $\frac{k}{2}$, $\frac{k}{4}$, $\frac{k}{6}$, etc. earum vero aſymtotorm a puncto

A.

A distantiae tenent hanc progressionem $\frac{k}{0\alpha}$, $\frac{k}{2\alpha}$, $\frac{k}{4\alpha}$, $\frac{k}{6\alpha}$ etc. Hae scilicet omnes tractoriae cum axe verticali AB angulum constituent aequalem angulo PAM.

Corollarium 8.

762. Tractoriarum harum ea, quae primam seu rectam MA praecedit, hanc ergo habebit proprietatem, vt corpus super ea descendens, posteaque super recta AM ascendens aequalia spatia percurrat.

Corollarium 9.

763. Ad curuam igitur descensuum CA inueniendam, cui respondeat recta inclinata AM; super asymtoto horizontali filo longitudinis $\frac{k}{2}$ describatur tractoria CA, in eaque sumatur applicata $Ab = \frac{k}{2\alpha}$ et ex A constituatur recta inclinata AM; eritque CA curua descensuum, cui respondet recta AM pro ascensibus. Tab. XVI. Fig. 2.

Scholion 2.

764. Inseruire potest hic casus instar exempli problematis inuersi, quo ex data curua ascensuum, curua descensuum requiritur.

Exemplum 3.

Tab. XV. Fig. 6. 765. Sit curua descensuum data cyclois MA, cuius natura hac aequatione sit expressa $2ax = s^2$, seu circuli genitoris diameter $= \frac{a}{2}$. Erit ergo $dx = \frac{sds}{a}$, vnde pro curua altera ascensuum AN haec inuenitur aequatio $adt = e^{\frac{-2s}{k}} sds$, cuius integralis est, $at = \frac{k^2}{4}(1 - e^{\frac{-2s}{k}}) - \frac{k}{2} e^{\frac{-2s}{k}} s$, quae propter $e^{\frac{-2s}{k}} = \frac{adt}{sds}$, abit in hanc $atsds = -\frac{ak^2dt}{4} + \frac{k^2sds}{4} - \frac{aksdt}{2}$. Haec curua in A, vt iam est dictum, tangentem habebit horizontalem. Habebit vero etiam asymtoton BC horizontalem; cuius altitudo BA reperietur si s fiat $= \infty$. Fiet autem hoc casu $e^{\frac{-2s}{k}} = 0$; quare erit $t = AB = \frac{k^2}{4a}$. Ex hoc intelligitur curuam alicubi punctum flexus contrarii habere debere; quod inuenietur si posito dt constante, ponatur $dds = 0$. Hinc vero prodibit $1 = \frac{2s}{k}$ seu $s = \frac{k}{2}$. Quare si sumatur arcus $AN = \frac{k}{2}$ erit N punctum flexus contrarii; cui respondet abscissa $AQ = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2e}$ seu $BQ = \frac{k^2}{2e}$. Quo circa erit semper $AB : BQ = e : 2 = 2,71828 : 2$.

Scholion 3.

766. Problema hoc propositum extat ab anonymo in Act. Lips. A. 1728 eiusque solutionem dedit in Comment. Acad. Petrop. A. 1729. Cl. D. *Bernoulli*, alia vsus methodo. Praeter hanc

hanc vero conditionem anonymus ille potiſſimum requirit vnam curuam continuam, cuius alter ramus deſcenſibus alter aſcenſibus inſeruiat, cuiusmodi curuae dantur innumerabiles, quas in ſequente propoſitione detegemus.

PROPOSITIO 84.

Problema.

767. *Iisdem poſitis vt ante, inuenire curuam continuam* MAN *huiusmodi, vt in quauis ſemioſcillatione, quae ſemper in arcu* MA *incipiat, ſuper ea facta arcus deſcenſus* MA *aequalis ſit arcui aſcenſus ſequentis* AN. Tab. XV. Fig. 6.

Solutio.

Propoſitio haec a praecedente in hoc tantum differt, quod ibi data fuerit curua MA; hic vero ea quoque quaeri debeat ex hac conditione, quod vtraque curua MA et AN vnam eandemque curuam continuam conſtituere debeant. Sumtis igitur arcubus AM et AN aequalibus $= s$, et poſita AP $= x$ atque AQ $= t$, erit $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx$. Quia autem curua MAN debet eſſe continua, aequationem inter s et x ita oportet eſſe comparatam, vt ſi in ea loco s ponatur minus $-s$, quo caſu arcus AM in arcum AN abit, valor ipſius x fiat $= t$ ſeu $= \int e^{\frac{-2s}{k}} dx$. Pono igitur

tur $dx = M ds$, vbi M sit functio quaedam ipsius s; eaque abeat in N, si loco s ponatur $-s$. Ponatur ergo $-s$ loco s quo casu x abit in t, eritque $dt = -N ds$. Est vero quoque $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx$ $= e^{\frac{-2s}{k}} M ds$, quocirca erit $N = -e^{\frac{-2s}{k}} M$. Sit porro $M = e^{\frac{+s}{k}} P$, abeatque P in Q posito $-s$ loco s eritque $N = e^{\frac{-s}{k}} Q$. Quibus valoribus loco M et N substitutis prodibit $Q = -P$. Ex quo apparet P huiusmodi esse debere functionem ipsius s, quae abeat in $-P$ posito $-s$ loco s, quas functiones impares appellare consueui. Sit itaque P functio quaecunque impar ipsius s, cuiusmodi sunt e.gr. αs, αs^3, αs^5 etc. eritque $M = e^{\frac{s}{k}} P ds$ seu $x = \int e^{\frac{s}{k}} P ds$. Quae est aequatio pro curua quaesita. Q.E.I.

Corollarium 1.

768. Quia est $dx = e^{\frac{s}{k}} P ds$ erit sumendis logarithmis $l dx = \frac{s}{k} + lP + l ds$. Differentietur haec aequatio denuo posito ds constante, prodibitque $\frac{ddx}{dx} = \frac{ds}{k} + \frac{dP}{P}$ seu $kP ddx = P dx ds + k dx dP$. Quae aequatio ab exponentialibus est libera.

Corollarium 2.

769. Quoniam P per s dari debet aequatio inuenta non habet variabiles inter se permixtas; quamobrem ea sufficit ad curuas in ea contentas construendas.

Exem-

Exemplum.

770. Ponamus esse $P = \frac{s}{a}$, erit $ax = \int e^{\frac{s}{k}} s\,ds$ $= ke^{\frac{s}{k}} s - k^2 e^{\frac{s}{k}} + k^2$, quae est aequatio pro vna et fortasse simplicissima curua satisfaciente. Haec vero aequatio eliminato exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ abit in hanc $axs\,ds = aks\,dx - k^2 a\,dx + k^2 s\,ds$. Vel exposito $e^{\frac{s}{k}}$ per seriem prodibit ista aequatio $ax = \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{1.3k} + \frac{s^4}{1.2.4k^2} + \frac{s^5}{1.3.4.5k^3} +$ etc. Haec ergo curua in A habet tangentem horizontalem, eiusque radius osculi in hoc loco est a. Quia ne curua fiat imaginaria esse debet $dx < ds$ debebit esse $e^{\frac{s}{k}} s < a$. Quo ergo loco fit $e^{\frac{s}{k}} s$, quae expressio crescente s quoque crescit, aequalis a, ibi curua AM habebit tangentem verticalem atque punctum reuersionis. Pro ramo AN posito $-s$ loco $+s$ haec habetur aequatio $ax = \int e^{\frac{-s}{k}} s\,ds$, seu $dx = \frac{e^{\frac{-s}{k}} s\,ds}{a}$. Quare quamdiu fuerit $e^{\frac{-s}{k}} s < a$, curua non fit imaginaria. At si vsquam si $e^{\frac{-s}{k}} s = a$, ibi curua quoque habebit punctum reuersionis et diametrum verticalem. Fieri autem potest si a satis magnum accipiatur, vt $e^{\frac{-s}{k}} s$ semper minus sit quam a, quo casu curua AN in infinitum abibit, asymtotonque habebit horizontalem

lem BC. Fit autem $e^{\frac{-s}{k}}s = o$ casibus, $s = o$ et $s = \infty$, habebit ergo valorem maximum, si eius differentiale $= o$, hoc vero casu fit $k = s$, et $e^{\frac{-s}{k}}s = \frac{k}{e}$. Quare si fuerit $a > \frac{k}{e}$ curua habebit asymtoton BC, cuius altitudo BA erit $= \frac{k^2}{a}$. At si fuerit $a < \frac{k}{e}$ curua AN, vti alter ramus, habebit quoque punctum reuersionis, quod ex hac aequatione determinabitur, $a = e^{\frac{-s}{k}}s$. In priori casu curua AN habere debet punctum flexus contrarii, quod reperietur ex hac aequatione $1 = \frac{s}{k}$; erit scilicet in N sumto arcu $AN = k$.

PROPOSITIO 85.

Problema.

Tab. XV. Fig. 6. 771. *In hypothesi grauitatis et resistentiae praecedenti si data fuerit curua MA, super qua descensus absoluantur; inuenire pro ascensibus curuam AN huius proprietatis, vt ascensus cuiusque tempus aequale sit tempori descensus praecedentis.*

Solutio.

Positis vt ante potentia sollicitante $= g$; et medii exponente $= k$; sit pro curua MA abscissa $AP = x$; arcus $AM = s$; atque pro curua quaesita AN, abscissa $AQ = t$; arcus $AN = r$. Ponatur altitudo celeritati descensu quodam in A acquisito debita $= b$, qua celeritate sequentem ascensum in curua AN absoluet. His positis erit alti-

altitudo celeritati in M debita $= e^{\frac{s}{k}}(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)$ et altitudo in ascensu celeritati in N debita $= e^{\frac{-r}{k}}$ $(b - g\int e^{\frac{r}{k}}dt)$. Tempus ergo descensus per arcum MA erit $= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)}}$, et tempus ascensus per arcum AN $= \int \frac{e^{\frac{r}{2k}}dr}{\sqrt{(b - g\int e^{\frac{r}{k}}dt)}}$, quae duo tempora, si post integrationem ponatur $g\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ $= b$, atque $g\int e^{\frac{r}{k}}dt = b$ debent esse aequalia. Ponatur ad hoc obtinendum $g\int e^{\frac{-s}{k}}dx = X$; $g\int e^{\frac{r}{k}}dt$ $= T$; atque $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dS$ et $e^{\frac{r}{2k}}dr = dR$, vbi X, T, S et R sint tales functiones, quae euanescant posito x, s, t et $r = o$. Efficiendum ergo est, vt haec duo integralia $\int \frac{dS}{\sqrt{(b-X)}}$ et $\int \frac{dR}{\sqrt{(b-T)}}$ fiant inter se aequalia, si post integrationem ponatur $X = b$ et $T = b$. At S et R vti et X et T sunt quantitates a b prorsus non pendentes, atque eandem inter se relationem tenere debent, quemcunque valorem b habuerit. Quaesito ergo satisfiet, si R fuerit talis functio ipsius T, qualis S est ipsius X. Vel sumto $R = S$ esse quoque debet $T = X$. Est vero $S = 2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ et $R = 2k(e^{\frac{r}{2k}}$ $- 1)$

-1); facto igitur $R = S$ erit $2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$, atque $r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$. Quia autem hoc posito esse debet $X = T$ seu $e^{\frac{-s}{k}}dx = e^{\frac{r}{k}}dt$ fiet $t = \int e^{\frac{-s-r}{k}}dx$. Cum vero sit $e^{\frac{r}{k}} = (2 - e^{\frac{-s}{2k}})^2 = 4 - 4e^{\frac{-s}{2k}} + e^{\frac{-s}{k}}$, erit $t = \int \frac{dx}{e^{\frac{s}{k}}(2 - e^{\frac{-s}{2k}})^2} = \int \frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}$. Ex quibus ergo constructio curuae innotescit, quia sumto arcu $AN = r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$ huic respondet abscissa $AQ = t = \int \frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}$; Aequatio vero pro curua AN commodius inuenietur ex data aequatione inter s et x. Nam quia est $s = -2kl(2 - e^{\frac{r}{2k}})$ et $x = \int \frac{dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1)^2}$; si loco s et x hi valores substituantur, prodibit aequatio inter t et r pro curua quaesita AN. Q. E. I.

Corollarium I.

772. Quia est $r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$ erit $dr = \frac{e^{\frac{-s}{2k}}ds}{(2 - e^{\frac{-s}{2k}})}$. Cum vero ne curua AN fiat imaginaria esse debeat $dr > dt$; curua AN eousque erit

erit realis, quousque $ds > \frac{dx}{e^{\frac{s}{2k}}(2 - e^{\frac{-s}{2k}})}$, seu $ds >$ $\frac{dx}{2e^{\frac{s}{2k}} - 1}$.

Corollarium 2.

773. Est vero $e^{\frac{s}{2k}}$ semper maius vnitate; ex quo sequitur vbi fuerit $ds > dx$ eo magis fore $ds > \frac{dx}{2e^{\frac{s}{2k}} - 1}$. Quare si curua data fuerit realis, quaesita quoque semper erit realis.

Corollarium 3.

774. Cum sit $s = -2kl(2 - e^{\frac{r}{2k}})$ erit $ds = \frac{e^{\frac{r}{2k}}dr}{(2 - e^{\frac{r}{2k}})} = \frac{dr}{(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1)}$, vnde facilius relatio inter ds et dx in computum duci potest.

Corollarium 4.

775. Ex solutione problematis simul apparet, quomodo eius inuersum sit soluendum. Si enim curua ascensuum A N datur, seu aequatio inter t et r, ex ea aequatio inter x et s formabitur ope aequationum $t = \int \frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}$ et $r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$.

 Co-

Corollarium 5.

776. Ad curuae formam circa punctum A indagandam ponantur s et r valde exigua, eritque $e^{\frac{-s}{2k}} = 1$, vnde fiet $dr = ds$ atque $dt = dx$. Ex quo perspicitur curuarum MA et NA infimas portiones esse inter se similes et aequales.

Exemplum I.

Tab. XVI. Fig. I. 777. Sit linea descensuum data recta MA, vtcunque inclinata, vt sit $s = \alpha x$ seu $ds = \alpha dx$. Cum nunc sit $ds = \frac{dr}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1}$ et $dx = \frac{dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1)^2}$ habebitur inter t et r pro curua quaesita ista aequatio, $dr = \frac{\alpha dt}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1}$ seu $\alpha dt = 2e^{\frac{-r}{2k}} dr - dr$ cuius integralis est $\alpha t = 4k(1 - e^{\frac{-r}{2k}}) - r$. Quae aequatio in seriem conuersa dat $\alpha t = r - \frac{r^2}{1.2.k} + \frac{r^3}{1.2.3.2k^2} - \frac{r^4}{1.2.3.4.4k^3} + \text{etc.}$ ideoque in puncto infimo A est $dr = \alpha dt$. Curua haec alicubi habebit tangentem horizontalem, qui locus inuenietur ponendo $dt = 0$ tum vero erit $2 = e^{\frac{r}{2k}}$ seu $r = 2kl2$, cui respondet $\alpha t = 2k - 2kl2$. Atque si r fiat maius quam $2kl2$ valor ipsius dt fiet negatiuus, ideoque curua iterum descendet, donec $-dt$ fiat $= dr$, hoc autem accidit, si est $1 - \alpha = 2e^{\frac{-r}{2k}}$ seu $r = 2k l\frac{2}{1-\alpha}$

$l\frac{2}{1-\alpha}$. At quia α non potest esse minus quam 1; si est $\alpha = 1$ tangens verticalis in infinitum ab A distabit; atque si $\alpha > 1$ vltra tangentem horizontalem nusquam habebit tangentem verticalem. Sed antrorsum vltra tangentem habebit verticalem, vbi est $r = -2kl\frac{1+\alpha}{2}$. Casu ergo quo linea data est verticalis, seu $\alpha = 1$ fit $r = o$, seu tangens in A erit verticalis.

Corollarium 6.

778. Si s denotet totum arcum descensus, r exprimet totum arcum sequenti ascensu super curua AN descriptum. Quare si detur arcus descensus s reperietur arcus ascensus $r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$. Quoniam enim posuimus $T = X$ integros arcus descensus et ascensus litterae s et r denotant. Tab. XV. Fig. 6.

Exemplum 2.

779. Sit curua data MA ipsa tautochrona descensuum, quam ante pro eadem resistentiae hypothesi inuenimus; habebit curua AN hanc proprietatem, vt omnes ascensus aequalibus quoque absoluantur temporibus; iisdem nempe quibus descensus super MA. Quare curua AN erit ipsa tautochrona ascensuum cum curua MA continua iam ante inuenta. Quo hoc autem ex isto calculo ostendatur, sumamus aequationem pro curua tautochrona descensuum, quae est vel $adx = k$

 $(e^{\frac{s}{2k}}$

$(e^{\frac{s}{2k}}-1)ds$ vel $ax=2k^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)-ks$. Cum nunc sit $ds=\dfrac{dr}{2e^{\frac{-r}{2k}}-1}$ et $e^{\frac{s}{2k}}=\dfrac{e^{\frac{-r}{2k}}}{2e^{\frac{-r}{2k}}-1}$ atque $dx=\dfrac{dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)^2}$, his substitutis erit $\dfrac{a\,dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)^2}=\dfrac{k\,dr(1-e^{\frac{-r}{2k}})}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)^2}$ seu $a\,dt=k(1-e^{\frac{-r}{2k}})dr$. Quae aequatio ex illa formatur, si pro x ponatur t atque $-r$ pro s. Quare haec curua AN est continua cum MA atque tautochrona ascensuum.

Corollarium 7.

780. Dato ergo arcu descensus s super tautochrona descensuum; erit arcus ascensus sequentis super tautochrona ascensuum $r=2kl(2-e^{\frac{-s}{2k}})$. Atque si descensus a cuspide tautochronae descensuum incipiat, cuius locum dat $e^{\frac{s}{2k}}=\frac{a+k}{k}$ (729.) erit arcus ascensus $r=2kl\frac{2a+k}{a+k}$, vt supra inuenimus (732).

Scholion.

781. Cum itaque tautochrona in hac resistentiae hypothesi quaesito satisfaciat atque sit curua continua; hinc ansam arripimus inuestigandi plures

plures curuas continuas, quarum duo rami vices curuarum MA et AN sustinere queant; id quod in sequente propositione praestabimus.

PROPOSITIO 86.

Problema.

782. *Iisdem positis vt ante inuenire casus, quibus duae curuae* MA *et* AN, *super quibus descensus et sequentes ascensus aequalibus temporibus absoluantur, vnam curuam continuam constituunt.* Tab XV Fig. 6.

Solutio.

Manentibus iisdem denominationibus, quibus in praecedente propositione vsi sumus, scilicet $AP = x$; $AM = s$, $AQ = t$ et $AN = r$; praeter duas aequationes ibi inuentas $2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$ et $e^{\frac{-s}{k}} dx = e^{\frac{r}{k}} dt$ effici debet, vt aequationes inter s et x et inter r et t sub eadem aequatione comprehendantur. Sumamus ad hoc nouam variabilem z, ex qua punctum M in curua AM determinetur, ita vt si z fiat negatiuum, eodem modo obtineatur punctum N in altera curua. Hanc ob rem s huiusmodi esse oportet functionem ipsius z, vt eadem, si loco z ponatur $-z$, det arcum AN, qui ob positionem negatiuam est $-r$, ita vt s abeat in $-r$ posito $-z$ loco z. Ponatur $e^{\frac{-s}{2k}} = 1 + Q$, erit $e^{\frac{r}{2k}} = 1 - Q$ propter $2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$ ideo-

ideoque Q erit functio impar ipsius z, quae in sui negatiuam abit facto z negatiuo. Erit itaque $e^{\frac{-s}{k}} = (1+Q)^2$ et $e^{\frac{r}{k}} = (1-Q)^2$. Porro autem esse debet $dx(1+Q)^2 = dt(1-Q)^2$, atque x talis esse debet functio ipsius z, quae abit in t posito z negatiuo. Ponatur $dx = Mdz$, abeatque M in N facto z negatiuo, erit ergo $dt = -Ndz$. Quamobrem fiet $M(1+Q)^2 = -N(1-Q)^2$. Sit ergo $M = P(1-Q)^2$ existente P quoque = functioni impari ipsius z; atque tum fiet $N = -P(1+Q)^2$; ideoque aequalia inter se erunt $M(1+Q)^2$ et $-N(1-Q)^2$ vti requiritur. Sumtis ergo pro lubitu loco P et Q functionibus imparibus ipsius z, erit $dx = Pdz(1-Q)^2$ seu $x = \int Pdz(1-Q)^2$ atque $s = 2kl\frac{1}{1+Q}$. Vnde innumerabiles oriuntur curuae MA, quarum partes continuae AN ascensus producunt isochronos respectiue descensibus super MA factis. Quia autem duae functiones occurrunt P et Q, determinetur altera, vt sit $Q = -z$ erit $s = 2kl\frac{1}{1-z}$ atque $x = \int Pdz(1+z)^2$. In quarum posteriore aequatione valor ipsius z ex priore, qui est $= 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ substituatur, habebiturque aequatio inter x et s pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium I.

783. Si $z = o$, fit quoque $s = o$. Quare integrale ipsius $Pdz(1+z)^2$ ita accipi debet vt euanescat posito $z = o$. Nam euanescente arcu s abscissa quoque x euanescere debet.

Co-

Corollarium 2.

784. Cum ſit $s = 2kl\frac{1}{1-z}$ erit $ds = \frac{2kdz}{1-z}$, et quia eſt $dx = Pdz(1+z)^2$, erit $\frac{ds}{dx} = \frac{2k}{P(1-z^2)(1+z)}$, niſi ergo $P(1-z)^2(1+z)$ maius fuerit quam $2k$ curua erit realis.

Corollarium 3.

785. In puncto infimo A, quia euaneſcit z, erit $\frac{ds}{dz} = \frac{2k}{P}$. Quare P talis eſſe debet functio impar ipſius z, vt ea, ſi $z = o$, minor ſit quam $2k$: hoc autem euenire non poteſt, niſi P talis fuerit functio ipſius z, quae euaneſcat poſito $z = o$, hocque caſu tangens in A erit horizontalis.

Exemplum 1.

786. Quia P debet eſſe functio impar ipſius z, ponatur $P = \frac{az}{(1-z^2)^2}$. Quo poſito erit $x = \int\frac{azdz}{(1-z)^2}$ ſeu $dx = \frac{azdz}{(1-z)^2}$. Eſt vero $z = 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ et $dz = \frac{1}{2k}e^{\frac{-s}{2k}}ds$, atque $1 - z = e^{\frac{-s}{2k}}$. Quibus ſubſtitutis habebitur $dx = \frac{ae^{\frac{-s}{2k}}ds(1-e^{\frac{-s}{2k}})}{2ke^{\frac{-s}{k}}} = \frac{ads}{2k}(e^{\frac{s}{2k}}-1)$. Quae eſt aequatio pro curua tautochrona ſupra inuenta, ſuper cuius parte MA omnes deſcenſus aequalibus abſoluuntur temporibus; ſuper parte autem altera AN omnes aſcenſus iiſdem temporibus.

Exemplum 2.

787. Sit $P = \frac{6az - 2az^3}{(1-zz)^2}$; erit $x = \int \frac{6azdz - 2az^3dz}{(1-z)^2} = \frac{3az^2 + az^3}{1-z}$. Cum autem sit $z = 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ et $1 - z = e^{\frac{-s}{2k}}$; erit $x = \frac{a(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2 (4 - e^{\frac{-s}{2k}})}{e^{\frac{-s}{2k}}} = a(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2 (4\, e^{\frac{s}{2k}} - 1) = a(4 e^{\frac{s}{2k}} - (3 - e^{\frac{-s}{2k}})^2)$. Quae aequatio in seriem conuersa dat $\frac{4k^2x}{3a} = ss + \frac{s^3}{6k} - \frac{s^4}{48k^2} + \frac{s^5}{96k^3} - \frac{s^6}{640k^4} + \text{etc.} = bx$ mutata constante a in $\frac{4k^2}{3b}$.

PROPOSITIO 87.

Problema.

Tab. XVI. Fig. 3.

788. *In hypothesi grauitatis vniformis deorsum tendentis et medio vniformi in duplicata celeritatum ratione resistente, si detur curua quaecunque* MA, *super qua corpus descensus absoluat, inuenire curuam* AN *ei iungendam ad ascensus idoneam, ita vt omnes semioscillationes, quae super curua* MAN *fiunt, aequalibus absoluantur temporibus.*

Solutio.

Positis vt hactenus potentia sollicitante, g, et exponente resistentiae k; sit curuae datae MA abscissa AP $= x$; arcus AM $= s$; curuae vero quaesitae abscissa AQ $= t$; arcus AN $= r$. Incipiat nunc descensus in quocunque curuae MA puncto, sit-

que

que celeritas in A acquisita debita altitudini b, qua celeritate sequentem ascensum in curua AN absoluet. His positis erit altitudo celeritati corporis descendentis in M debita $= e^{\frac{s}{k}}(b - g\int e^{\frac{-s}{k}} dx)$, et altitudo celeritati corporis ascendentis in N debita $a = e^{\frac{-r}{k}}(b - g\int e^{\frac{r}{k}} dt)$. Ex his erit tempus, quo in hac semioscillatione arcus MA et AN percurruntur $= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b - g\int e^{\frac{-s}{2k}} dx)}} + \int \frac{dr}{e^{\frac{-r}{2k}}\sqrt{(b - g\int e^{\frac{r}{2k}} dt)}}$, quae expressio integrum dabit semioscillationis tempus, si post integrationem ponatur $g\int e^{\frac{-s}{k}} dx = b$, atque $g\int e^{\frac{r}{k}} dt = b$. Cum igitur hoc tempus debeat semper habere valorem constantem, qui non a quantitate litterae b pendeat, ex hac conditione determinari debebit aequatio inter t et r ope datae aequationis inter x et s. Ponamus breuitatis gratia $g\int e^{\frac{-s}{k}} dx = X$ et $g\int e^{\frac{r}{k}} dt = T$, atque $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dS$ et $\frac{dr}{e^{\frac{-r}{2k}}} = dR$. Quibus substitutis habere debebit $\int \frac{dS}{\sqrt{(b - X)}} + \int \frac{dR}{\sqrt{(b - T)}}$ valorem constantem si post integrationem ponatur $X = b$, et $T = b$. Fiat ergo generaliter $T = X$, quia T ab X non pendet, habebimus pro tempore hanc expressionem: $\int \frac{dS + dR}{\sqrt{(b - X)}}$, quae ita debet esse comparata, vt post integrationem facto $X = b$ littera b prorsus ex calculo euanescat. Hoc autem fiet, si fuerit $dS + dR = \frac{\alpha dX}{\sqrt{X}}$, erit enim tempus semioscillationis $= \int \frac{\alpha dX}{\sqrt{(bX - XX)}} = \pi\alpha$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$. Sit $\alpha = \frac{\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$, denotabit f longitudinem penduli in vacuo et grauitate $= g$ semioscillationes minimas eodem tempore absoluentis, quo hae semioscillationes super curuis MA et AN peraguntur (167). Cum igitur sit $dS + dR = \frac{dX\sqrt{2f}}{\sqrt{X}}$, erit $S + R = 2\sqrt{2fX} = 2\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx}$. Est vero $S = 2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ et $R = 2k(e^{\frac{r}{2k}} - 1)$, vnde erit $k e^{\frac{r}{2k}} - k e^{\frac{-s}{2k}} = \sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx}$, seu $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx}$, ideoque fiet $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx})$. Huic vero valori ipsius r respondens valor ipsius t ex hac aequatione determinabitur $T = X$ seu $e^{\frac{r}{k}}dt = e^{\frac{-s}{k}}dx$. Ex quo inuenitur $t = \int \frac{dx}{(1 + \frac{1}{k}e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx})^2}$ ex quibus constructio curuae innotescit. Aequatio autem pro curua quaesita AN commodius ex data aequatione inter x et s obtinebitur, si loco s substituatur $-2k(l(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}}dt})$ et loco x hic valor $\int \frac{dt}{(1 - \frac{1}{k}e^{\frac{-r}{2k}}\sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}}dt})^2}$. His enim substitutis orietur haec aequatio inter r et t, quae est pro curua quaesita AN. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

789. Cum oscillationes minimae congruant cum oscillationibus in vacuo, si curuae MA tangens in A non fuerit horizontalis, vel si radius osculi in A fuerit infinite paruus, curuae quaesitae AN radius osculi in A erit $4f$. Erit enim hoc casu tempus descensus minimi $=o$ et tempus ascensus $=\frac{\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$.

Corollarium 2.

790. Sin autem curuae MA in A radius osculi fuerit finitae magnitudinis scilicet h, erit tempus descensus minimi $=\frac{\pi\sqrt{2h}}{2\sqrt{g}}$ (166). Quo igitur tempus semioscillationis sit $=\frac{\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$ erit radius osculi curuae AN in A$=(2\sqrt{f}-\sqrt{h})^2$; debet autem esse $h<4f$, seu $f>\frac{1}{4}h$, ne curua AN fiat imaginaria.

Corollarium 3.

791. Curuae ergo MA et AN in A et tangentem horizontalem, et radium osculi communem habebunt, si fuerit $f=h$. Hoc enim casu curuae AN radius osculi in A fiet quoque $=h$.

Scholion 1.

792. Quemadmodum hic ex data curua descensuum curua ascensuum determinauimus; ita perspicitur simili modo ex curua ascensuum data curuam descensuum inueniri posse; si enim detur aequa-

tio inter t et r; quia est $s = -2kl(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{-r}{k}}dt})$ atque $x = \int \frac{dt}{(1 - \frac{1}{k}e^{\frac{-r}{k}}\sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}}dt})^2}$; his valoribus substituendis aequatio pro curua descensuum inter s et x obtinebitur.

Corollarium 4.

793. Cum f innumerabiles habere possit valores, modo sit $f > \frac{1}{4}b$; ad quamuis curuam siue descensuum siue ascensuum datam innumerae adiungi possunt curuae, eiusmodi, vt semioscillationes super iis factae sint omnes isochronae, omnino vti in vacuo fieri potest.

Corollarium 5.

794. Quia in solutione posuimus T = X hac aequatione relatio continetur, inter quemque arcum descensus integrum et arcum respondentis ascensus. Ita si arcus descensus fuerit s erit arcus ascensus $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx})$.

Exemplum 1.

795. Sit linea descensuum data recta verticalis PA pro qua est $s = x$. Erit ergo quoque $ds = dx$, atque $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = k(1 - e^{\frac{-s}{k}})$. Vnde igitur fiet $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}(1 - e^{\frac{-s}{k}})})$ seu $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}(1 - e^{\frac{-s}{k}})}$

Porro

Porro autem est $t = \int \frac{ds}{(1 + e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{\frac{2f}{k}(1 - e^{\frac{-s}{k}})})^2}$, seu $e^{\frac{r+s}{k}} dt = ds$. Eliminato ergo s prodibit pro curua ascensuum ista aequatio: $(2f+k)^2 dt = k(2f-k)dr - \frac{2kf(2f+k)dr + 4fk^2 e^{\frac{-r}{k}} dr}{e^{\frac{r}{2k}} \sqrt{(4ff + 2fk - 2fke^{\frac{-r}{k}})}}$; in qua variabiles sunt a se inuicem separatae, quare ea ad curuam construendam sufficit. Integratio vero huius aequationis a quadratura circuli pendet. Pro vacuo ex hac aequatione elicitur faciendo $k = \infty$ ista aequatio $dt + dr = \frac{dr\sqrt{2f}}{\sqrt{(2f-r)}}$ seu $t = 4f - r - 2\sqrt{2f(2f-r)}$, quae aequatio ad eam quam in cap. praec. inuenimus reduci potest.

Exemplum 2.

796. Sit linea descensuum data ipsa tautochrona descensuum supra inuenta, cuius aequatio est $adx = kds(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$. Erit ergo $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{k}{a} \int ds (e^{\frac{-s}{2k}} - e^{\frac{-s}{k}}) = \frac{2k^2}{a}(\frac{1}{2} - e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{2} e^{\frac{-s}{k}}) = \frac{k^2}{a}(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$ et $\sqrt{\int e^{\frac{-s}{k}} dx} = \frac{k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})}{\sqrt{a}}$. Quamobrem fiet $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{\sqrt{2f} - e^{\frac{-s}{2k}} \sqrt{2f}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2f} + e^{\frac{-s}{2k}}(\sqrt{a} - \sqrt{2f})}{\sqrt{a}}$ atque $e^{\frac{-s}{2k}} =$

 $e^{\frac{r}{2k}}$

$\frac{e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a}-\sqrt{2f}}{\sqrt{a}-\sqrt{2f}}$ et $ds=\frac{e^{\frac{r}{2k}}dr\sqrt{a}}{\sqrt{2f}-e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a}}$ atque $adx=$ $\frac{ake^{\frac{r}{2k}}dr(e^{\frac{r}{2k}}-1)}{(e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a}-\sqrt{2f})^2}$. Cum autem porro sit $e^{\frac{-s}{k}}dx$ $=e^{\frac{r}{k}}dt$, erit $ae^{\frac{r}{k}}dt=\frac{ake^{\frac{r}{2k}}dr(e^{\frac{r}{2k}}-1)}{(-\sqrt{a}+\sqrt{2f})^2}$ siue $adt=$ $\frac{akdr(1-e^{\frac{-r}{2k}})}{(-\sqrt{a}+\sqrt{2f})^2}$ seu $(-\sqrt{a}+\sqrt{2f})^2dt=kdr(1-e^{\frac{-r}{2k}})$ vbi $\sqrt{2f}$ maius esse debet quam $\sqrt{a}$. Haec autem aequatio inuenta comprehendit omnes tautochronas ascensuum; quae enim harumcunque cum tautochrona descensuum iungatur, super curua ex iis composita omnes semioscillationes debent esse isochronae. Si sumatur $f=2a$, aequatio erit haec $adt=kdr(1-e^{\frac{-r}{2k}})$, quae est pro tautochrona ascensuum, super qua omnes ascensus eodem tempore absoluuntur, quo descensus super tautochrona descensuum data, atque ea est continuatio tautochronae descensuum.

Exemplum 3.

797. Sit linea descensuum data MA tautochrona ascensuum, et quaeratur quales curuae cum ea iunctae semioscillationes isochronas producant. Aequatio vero pro hac curua MA est $adx=kds$ $(1-e$

$(1-e^{\frac{-s}{2k}})$. Erit ergo $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \frac{k}{a}\int ds(e^{\frac{-s}{k}} - e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{a}(\frac{1}{3} - e^{\frac{-s}{k}} + \frac{2}{3}e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{3a}(1 - 3e^{\frac{-s}{k}} + 2e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{3a}(1 + 2e^{\frac{-s}{2k}})(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$. Ex his oritur $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + (1 - e^{\frac{-s}{2k}})\sqrt{\frac{2f}{3a}}(1 + 2e^{\frac{-s}{2k}})$ atque $t = -\frac{k}{a}\int \frac{ds(1 - e^{\frac{-s}{2k}})}{(1 + (e^{\frac{s}{2k}} - 1)\sqrt{\frac{2f}{3a}}(1 + 2e^{\frac{-s}{2k}}))^2}$, ex quibus constructio curuae consequitur.

Scholion 2.

798. Hoc exemplum ideo attulimus, vt appareat, cum quanam curua tautochronam ascensuum coniunctam esse oporteat, quo semioscillationes omnes aequalibus temporibus absoluantur. Ex formulis autem inuentis apparet curuam quaesitam non esse tautochronam descensuum; aequatio enim $cdt = kdr(e^{\frac{r}{2k}} - 1)$ in illis formulis non continetur, quod periculum facienti statim patebit. Quamobrem si MA fuerit tautochrona descensuum et AN ascensuum, etiamsi omnes itus per MAN iisdem absoluantur temporibus, tamen reditus seu semioscillationes sequentes per NAM non erunt isochronae. Pendulum ergo, quod secundum curuas MA et AN oscillari efficitur, oscillationes non faciet isochronas etiamsi alternae semioscillationes, in quibus descensus in curua MA incipit, aequalibus peragantur temporibus. Haec

consequenter curua composita MAN non est idonea ad pendulorum motum in medio resistente aequabilem efficiendum. Optimum vero huic incommodo remedium afferretur, si casus determinaretur, quo curua AN similis et aequalis curuae MA prodiret.

PROPOSITIO 88.

Problema.

Tab. XVI. Fig. 3. 799. *Si curuae* MA *et* AN *eam habuerint proprietatem, vt omnes semioscillationes, quae in curua* MA *incipiunt, sint inter se isochronae in medio quod in duplicata ratione celeritatum resistit; determinare casus, quibus hae duae curuae coniunctae* MA *et* AN *vnam curuam continuam constituunt.*

Solutio.

Manentibus iisdem denominationibus, quas in praecedente Prop. adhibuimus; scilicet AP $= x$; AM $= s$; AQ $= t$; et AN $= r$, atque $f =$ longitudini penduli isochroni in vacuo et grauitate $= g$: inuenimus ibi has duas aequationes $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = \surd 2 f s e^{\frac{-s}{k}} dx$ et $e^{\frac{r}{k}} dt = e^{\frac{-s}{k}} dx$, quibus relatio inter vtramque curuam continetur. Iam quia curuae MA et NA duo debent esse rami curuae continuae, aequatio inter x et s ita debet esse comparata, vt si x abeat in t, tum s fiat $= -r$ propter situm negatiuum. Ad hoc accipiamus nouam variabilem z, cuius s et x sint tales functiones, vt facto

facto z negatiuo x abeat in t et s in $-r$. Sit $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = z^2$; erit $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = z\sqrt{2f}$; facto enim z negatiuo, quo casu r in $-s$ et $-s$ in r transit, prodibit $ke^{\frac{-s}{2k}} - ke^{\frac{r}{2k}} = -z\sqrt{2f}$; quae aequatio cum priore congruit. Sit P functio quaecunque par ipsius z, quae non mutatur etiam si loco z ponatur $-z$; et ponatur $ke^{\frac{-s}{2k}} = -\frac{1}{2}z\sqrt{2f} + P$; quo posito quaesito satisfiet. Namque faciamus z negatiuum; abibit $-s$ in r; atque habebitur $ke^{\frac{r}{2k}} = \frac{1}{2}z\sqrt{2f} + P$; ac $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = z\sqrt{2f}$; vti requiritur. Alteri aequationi $\int e^{\frac{r}{k}}dt = \int e^{\frac{-s}{k}}dx$ per hanc $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = z^2$ iam satisfit; posito enim z negatiuo et dt loco dx atque r loco $-s$ prodit $\int e^{\frac{r}{k}}dt = z^2 = \int e^{\frac{-s}{k}}dx$. Ex variabili ergo z, cuius P est functio quaecunque par; curua quaesita AM, cuius continua est altera AN ita determinatur, vt sit $e^{\frac{-s}{2k}} = -\frac{z\sqrt{2f}}{2k} + \frac{P}{k}$, atque $dx = 2e^{\frac{s}{k}}zdz = \frac{8k^2zdz}{(2P - z\sqrt{2f})^2}$. Erit ergo $x = 8k^2\int\frac{zdz}{(2P - z\sqrt{2f})^2}$ et $s = 2kl\frac{2k}{2P - z\sqrt{2f}}$. Sit $z = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{f}}$ tum ad formulas simpliciores efficiendas tum ad homogeneitatem commodius producendam, quia debebit esse u vnius dimensionis, erit ergo P functio par ipsius u vnius dimensionis quoque. Quare habebitur $s = 2kl\frac{k}{P-u}$ atque $x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)^2}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

800. Infinitae ergo curuae tautochronae MAN inuenientur; si infiniti varii valores loco P, qui omnes sint functiones pares ipsius u substituantur. Aequatio vero inter x et s obtinebitur, si ex duabus aequationibus inuentis $s = 2kl\frac{k}{P-u}$ atque $x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)^2}$, variabilis u quae etiam in P inest, eliminetur.

Corollarium 2.

801. Quia est $s = 2kl\frac{k}{P-u}$ erit $ds = \frac{2k(du-dP)}{P-u}$ et $e^{\frac{s}{2k}} = \frac{k}{P-u}$ seu $P-u = ke^{\frac{-s}{2k}}$. Atque $e^{\frac{s}{2k}}ds = \frac{2k^2(du-dP)}{(P-u)^2}$. Cum qua aequatione si altera $dx = \frac{4k^2udu}{f(P-u)^2}$ coniungatur, prodibit $\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx} = \frac{f(du-dP)}{2udu}$. Quae aequatio ad eliminandum u est saepe commodissima.

Scholion 1.

802. Quia euanescente s quoque x euanescere debet; primum inuestigandum est, quo ipsi u dato valore s euanescat. Deinde integrale $\int\frac{udu}{(P-u)^2}$ ita accipi debet, vt euanescat, si loco u idem valor substituatur. Hocque obseruandum est, cum in constructione curuae, quae ope duarum inuentarum aequationum perfici potest, tum in concinnatione aequationis inter x et s; si quidem ea ex

ex aequatione integrata $x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)^2}$ deducatur. Ceterum si loco u et P quaelibet eorum multipla adhibeantur, loco duarum inuentarum aequationum adhiberi possunt istae $s = 2kl\frac{c}{P-u}$ et $x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)^2}$ vbi constans c est arbitraria, et idcirco ita determinari potest, vt s eodem casu euanescat, quo euanescit x. At s euanescit si $u = o$; quia est $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \frac{2u^2}{f}$; atque $\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ euanescit euanescente s; quare c aequale esse debet valori ipsius P si in eo ponatur $u = o$. Eodem ergo casu x debet euanescere, ex quo constans in integratione valoris ipsius x determinatur. Vel etiam loco P talis functio par ipsius u accipi debet, quae fiat $= c$ si ponatur $u = o$.

Corollarium 3.

803. Cum longitudo penduli isochroni in vacuo et grauitate $= g$ sit $= f$; atque oscillationes minimae in medio resistente non discrepent ab oscillationibus in vacuo: erit radius osculi curuae in A $= f$; si quidem tangens curuae in A fuerit horizontalis.

Exemplum 1.

804. Quia P esse debet functio par ipsius u, sit P constans $= c = k$; quo posito $u = o$ fiat $s = o$. Erit ergo $k - u = ke^{\frac{-s}{2k}}$ seu $u = k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$. Atque ob $dP = o$, habebitur $\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx} = \frac{f}{2u}$ seu $u = \frac{\int e^{\frac{-s}{2k}}dx}{2ds}$.

Ex quibus aequationibus conficitur ista $\frac{fdx}{2} = kds(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$. Quae aequatio est pro ipsa tautochrona descensuum; quae vltra A continuata dat tautochronam ascensuum; atque omnes semioscillationes super hac curua continua, si modo in ramo MA incipiant, erunt isochronae.

Exemplum 2.

805. Sit $P = k + \frac{u^2}{a}$; retinebit P eundem valorem facto u negatiuo. Hoc posito erit $k - u + \frac{u^2}{a} = ke^{\frac{-s}{2k}}$; et propter $dP = \frac{2udu}{a}$ erit $\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx} = \frac{f(a-2u)}{2au}$; ex qua aequatione prodit $u = \frac{fadx}{2(ae^{\frac{s}{2k}}ds + fdx)}$. Qui ipsius u valor in altera aequatione substitutus dat $2fa^2e^{\frac{s}{k}}dxds = 4k(e^{\frac{s}{2k}}-1)(ae^{\frac{s}{2k}}ds + fdx)^2 - f^2ae^{\frac{s}{2k}}dx^2$; atque extracta radice

$$\frac{ae^{\frac{s}{2k}}ds}{fdx} = \frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}}-1)} - 1 \pm \sqrt{\frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}}-1)}\left(\frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}}-1)} - 1\right)}$$

In casu speciali si fuerit $a = 4k$ ista aequatio abit in hanc $\frac{4ke^{\frac{s}{2k}}ds}{fdx} = \frac{1 + e^{\frac{s}{4k}}}{e^{\frac{s}{2k}} - 1}$, quae duas aequationes in se complectitur, quarum altera est $fdx = 4ke^{\frac{s}{2k}}ds(e^{\frac{s}{4k}} - 1)$, et altera $-fdx = 4ke^{\frac{s}{2k}}ds(e^{\frac{s}{4k}} + 1)$

$+1$). Harum autem posterior, quia posito $s=0$, non euanescit dx, et ob valorem ipsius dx negatiuum, est inutilis. Prior vero integrata dat $fx = 16k^2 \left(\frac{e^{\frac{3s}{4k}}}{3} - \frac{e^{\frac{s}{2k}}}{2} + \frac{1}{6}\right)$ seu $3fx = 8k^2(2e^{\frac{3s}{4k}} - 3e^{\frac{s}{2k}} + 1)$ Quae vltra A continuata hac aequatione exprimitur $3ft = 8k^2(2e^{\frac{-3r}{4k}} - 3e^{\frac{-r}{2k}} + 1)$. Per seriem vero habetur ista aequatio: $fx = \frac{s^2}{2} + \frac{5s^3}{24k} + \frac{19s^4}{384k^2}$ $+$ etc. et pro altera curuae parte AN haec: $ft = \frac{r^2}{2} - \frac{5r^3}{24k} + \frac{19r^4}{384k^2} -$ etc.

Corollarium 4.

806. Quia est $z^2 = \frac{2u^2}{f} = \int e^{\frac{-s}{k}} dx$, erit $u = \sqrt{\frac{1}{2} f \int e^{\frac{-s}{k}} dx}$. Eliminato vero u est $P = ke^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{1}{2} f \int e^{\frac{-s}{k}} dx}$. Quare si ille valor ipsius u in hac aequatione substituatur, prodibit statim aequatio inter s et x.

Exemplum 3.

807. Ponamus esse $P = \sqrt{(k^2 + u^2)}$, seu $P^2 = k^2 + u$; substitutis loco P et u^2 valoribus supra datis, $k^2 e^{\frac{-s}{k}} + ke^{\frac{-s}{2k}} \sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}} dx} = k^2$, seu $\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}} dx} = k(e^{\frac{s}{2k}} - e^{\frac{-s}{2k}})$. Hinc quadratis sumendis oritur $2f\int e^{\frac{-s}{k}} dx = k^2(e^{\frac{s}{2k}} - e^{\frac{-s}{2k}})^2 = k^2(e^{\frac{s}{k}} + e^{\frac{-s}{k}} - 2)$. Haec vero aequatio differentiata dat hanc $2fe^{\frac{-s}{k}} dx = kds$

(e

$(e^{\frac{s}{k}} - e^{\frac{-s}{k}})$ seu $2fdx = kds(e^{\frac{2s}{k}} - 1)$, cuius integralis est $2fx = \frac{k^2 e^{\frac{2s}{k}}}{2} - ks - \frac{k^2}{2}$. Quae aequatio in seriem conuersa dat $fx = \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3k} + \frac{s^4}{6k^2} + \frac{s^5}{15k^3} + \frac{s^6}{45k^4} + \text{etc.}$

Scholion 2.

808. Quas in his exemplis inuenimus curuas tautochronas pro medio quod resistit in duplicata ratione celeritatum, eae ita sunt comparatae, vt arcus MA et AN sint dissimiles. Cum igitur omnes descensus super curua MA incipere debeant, sequentes semioscillationes, quae in curua NA incipiunt, non erunt tautochronae, id quod in caussa est, quod hae curuae ad motum oscillatorium accommodari nequeant. Huic autem incommodo remedium afferretur, si huiusmodi curuarum MA et NA par inueniretur, quae essent inter se similes et aequales, hoc enim casu perinde super vtraque curua descensus fieri posset. Dubium quoque nullum est, quin talis casus existat; eiusque inuentio, quia hae duae curuae forte non erunt continuae, ad praecedentem propositionem potius pertinet. Indagari scilicet debet curua descensuum, cui respondens curua ascensuum similis et aequalis sit; haec vero inuestigatio ob defectum analyseos ita est difficilis, vt dubitem, num quisquam ante insignem analyseos promotionem, ad hunc scopum pertingere possit. Haec vero quae-

stio

ſtio huc reducitur, vt inueſtigetur aequatio inter s et x huius conditionis, vt ſi in ea ponatur $-2kl(e^{\frac{s}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2\int\int e^{\frac{s}{k}} dx})$ loco s; et $\int \frac{dx}{(1 - \frac{1}{k} e^{\frac{-s}{2k}} \sqrt{2\int\int e^{\frac{s}{k}} dx})^2}$ loco x, eadem prodeat aequatio, quae habebatur ante. Conditio quidem haec multis modis facilior effici poteſt; attamen quomodo ei ſatisfieri poſſit non video. Si medium fuerit rariſſimum, non difficile eſt ex allatis caſum inuenire, quo duae curuae MA et AN ſint inter ſe ſimiles et aequales. Ego quidem ad finem perducto calculo hanc inueni aequationem $\int dx = sds + \frac{s^3 ds}{9k^2}$, ſeu $fx = \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{36k^2}$; quae curua ſimul vltra A continuata ramum habet AO ſimilem et aequalem arcui AM; quare pendulum in hac curua oſcillans ſingulas ſemioſcillationes abſoluet aequalibus temporibus. Erit autem $s^2 = -9k^2 + 3k\sqrt{(9k^2 + 4fx)}$ et $s = \sqrt{(-9k^2 + 3k\sqrt{(9k^2 + 4fx)})}$. Quia vero k eſt quantitas valde magna, erit $s = \sqrt{2fx} - \frac{fx\sqrt{2fx}}{18k^2}$, atque $ds = \frac{fdx}{\sqrt{2fx}} - \frac{fdx\sqrt{2fx}}{12k^2}$. Hincque fit $dy = dx\sqrt{\frac{f-2x}{2x}} - \frac{f^2 dx}{12k^2}\sqrt{\frac{2x}{f-2x}}$. Ponatur $f = 2a$ erit $y = \int dx\sqrt{\frac{a-x}{x}} - \int\frac{adx}{3k^2}\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \int\frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax-xx)}} - \int\frac{a^2 xdx}{3k^2\sqrt{(ax-xx)}}$
$= (1 + \frac{a^2}{3k^2})\sqrt{(ax-xx)} + (1 - \frac{a^2}{3k^2})\int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$.
Quae ergo curua eodem fere modo, quo cyclois deſcribi poteſt ope rectificationis circuli.

Corollarium 5.

809. Si sumatur $a = k\sqrt{3}$ seu $f = 2k\sqrt{3}$; curua haec abit in ellipsin, cuius axis horizontalis est duplo maior quam verticalis, qui est $= k\sqrt{3}$. Fieri ergo potest, vt ellipsis sit tautochrona in fluido rarissimo; atque magis satisfaciat quam cyclois.

Scholion 3.

Tab. XVI. Fig. 4. 810. Constructio autem curuae tautochronae in medio rarissimo in praec. scholio datae est vt sequitur. Super recta verticali $AB = a = \frac{1}{2}f$ describatur semicirculus AOB, et ex hoc super basi BD cyclois AFD; quae eadem inuerso situ describatur AGD. Quibus factis curua quaesita AMC construetur sumendis vbique eius applicatis $PM = PF - \frac{a^2}{3k^2}PG$; qua ratione curuae infinita puncta cognoscuntur. Vel etiam accipi potest $PM = (1 + \frac{a^2}{3k^2})PO + (1 - \frac{a^2}{3k^2})AO$, ita vt cycloide non sit opus. Curua autem haec alicubi habebit tangentem verticalem, seu applicatam PM maximam quae inuenitur posito $dy = o$. Prodibit autem $\frac{a-x}{x} = \frac{a^2}{3k^2}$ seu $x = \frac{3ak^2}{a^2+3k^2}$ cui valori si AP aequalis capiatur, inuenietur applicata maxima.

PROPOSITIO 89.

Problema.

Tab. XVI. Fig. 5. 811. *In hypothesi grauitatis vniformis deorsum tendentis* g, *data curua quacunque* am *pro descensibus*

bus in vacuo; inuenire curuam AM *pro descensibus in medio resistente vniformi in duplicata ratione celeritatum huius indolis, vt omnes descensus super* MA *sint isochroni respectiue omnibus descensibus super* ma; *si celeritates in punctis imis* a *et* A *fuerint aequales.*

Solutio.

Sit pro curua descensuum in vacuo am abscissa $ap = t$; arcus $am = r$; pro curua vero descensuum in medio resistente sit $AP = x$ et $AM = s$; resistentiae vero exponens ponatur $= k$. Iam considerentur bini descensus super his curuis, in quibus celeritates in A et a acquisitae sint aequales et debitae altitudini b. Erit ergo tempus descensus in vacuo $= \int \frac{dr}{\sqrt{(b-gt)}}$, si post integrationem ponatur $gt = b$. At pro tempore descensus in medio resistente super curua MA habebitur $\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{(b - g\int e^{\frac{-s}{2k}} dx)}}$ si item post integrationem ponatur $g \int e^{\frac{-s}{k}} dx = b$. Quamobrem haec tempora erunt aequalia si fuerit $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dr$ et $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = t$; his enim positis pro vtroque tempore habebitur eadem expressio $\int \frac{dr}{\sqrt{(b-gt)}}$. Cum igitur sit $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dr$, erit integrando $2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}}) = r$ atque $e^{\frac{-s}{2k}} = \frac{2k-r}{2k}$

$\frac{2k-r}{2k}$; vnde prodit $s = 2kl\frac{2k}{2k-r}$. Altera vero aequatio $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = t$ dat $e^{\frac{-s}{k}}dx = dt$. Est autem $e^{\frac{-s}{k}} = \frac{(2k-r)^2}{4k^2}$ quo valore substituto habetur $dx = \frac{4k^2dt}{(2k-r)^2}$ ex quo oritur $x = \int\frac{4k^2dt}{(2k-r)^2}$. Data ergo aequatione inter t et r pro curua am ope duarum harum aequationum, quibus s et x per t et r determinantur, construi poterit curua quaesita AM. Aequatio vero inter x et s commodius inuenietur ex data aequatione inter t et r; si in ea loco r substituatur $2k(1-e^{\frac{-s}{2k}})$ et $\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ loco t. Q. E. I.

Corollarium 1.

812. Circa punctum infimum A vbi t et r sunt quantitates euanescentes fit $s = r + \frac{r^2}{4k}$; et $x = t + \int\frac{rdt}{k}$, seu $dx = dt + \frac{rds}{k}$ et $ds = dr + \frac{rdr}{2k}$. Quare inclinatio curuae MA ad axem in A aequalis erit inclinationi curuae ma in A.

Corollarium 2.

813. Porro radius osculi in puncto infimo a si tangens fuerit horizontalis est $= \frac{rdr}{dt}$; et in A quia tangens quoque erit horizontalis $= \frac{sds}{dx} = \frac{rdr + \frac{3r^2dr}{4k}}{dt + \frac{rdt}{k}}$. Erit ergo $\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt} - \frac{r^2dr}{4kdt} = \frac{rdr}{dt}(1 - \frac{r}{4k})$. Quare ob r infinite paruum erit $\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt}$.

Corollarium 3.

814. Si ergo curua ma in a habuerit tangentem horizontalem; erit curuae MA tangens in

A

A quoque horizontalis; atque radius osculi in A aequalis erit radio osculi in a.

Corollarium 4.

815. Si igitur in vacuo inuenta fuerit curua ma; in qua tempora descensuum quameunque habeant relationem ad celeritates in a acquisitas; idem problema pro medio resistente soluetur curua MA, quae praescripta ratione ex curua ma construitur.

Corollarium 5.

816. Si igitur curua ma fuerit cyclois seu tautochrona in vacuo; AM erit tautochrona descensuum in medio resistente supra inuenta. Posito enim $r^2 = 2at$ seu $rdr = adt$; prodibit substitutis loco r et t inuentis valoribus ista aequatio $2ke^{\frac{-s}{2k}}ds(1-e^{\frac{-s}{2k}}) = ae^{\frac{-s}{k}}dx$ seu $adx = 2kds(e^{\frac{s}{2k}}-1)$.

Exemplum.

817. Sit am linea recta vtcunque inclinata, ita vt sit $r = nt$; erit tempus descensus, quo celeritas altitudini b debita generatur $= \int\frac{ndt}{\sqrt{(b-gt)}} = \frac{2n\sqrt{b}}{g}$. Eandem ergo habebit proprietatem curua MA, vt tempus cuiusque descensus in medio resistente quo celeritas $\sqrt{b}$ generatur, sit $= \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ seu proportionale ipsi celeritati genitae. Cum autem sit $r = nt$; erit $dr = ndt$; in qua si loco dr et dt valores inuenti substituantur prodibit $e^{\frac{-s}{2k}}ds = ne^{\frac{-s}{k}}$

 dx

dx ſeu $ndx = e^{\frac{s}{2k}}ds$; quae eſt aequatio pro tractoria filo longitudinis $2k$ generata, qualis repraeſentatur in fig. 2. Tab. XVI. nempe curua CA, quae in A eam habet inclinationem quam recta data ma.

Scholion 1.

818. Quemadmodum hic curua MA eſt determinata, ſuper qua omnes deſcenſus in medio reſiſtente iisdem abſoluuntur temporibus, quibus deſcenſus in vacuo ſuper curua ma, ſi celeritates vltimae in A et a fuerit aequales; ita eodem modo curua MA poteſt definiri, ſuper qua omnes aſcenſus in medio reſiſtente iisdem temporibus abſoluuntur, quibus ſimiles iisdem celeritatibus incipientes aſcenſus in vacuo ſuper curua am. Nam cum in medio reſiſtente deſcenſus in aſcenſum mutetur facto k negatiuo; ſi ponantur AP $= x$ et AM $= s$ habebitur $x = \int \frac{4k^2dt}{(2k+r)^2}$ et $s = 2kl\frac{2k+r}{2k}$ ſeu inuerſe $t = \int e^{\frac{s}{k}}dx$ et $r = 2k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$. Ex quibus tum facile curua AM poteſt conſtrui et aequatio pro ea inueniri.

Scholion 2.

819. In hoc problemate ex curua deſcenſuum in vacuo data determinauimus curuam deſcenſuum in medio reſiſtente. Facile autem apparet viciſſim ex data curua AM pro medio reſiſtente alteram am pro vacuo inueniri poſſe. Cum enim ſit $r = 2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ et $t = \int e^{\frac{-s}{k}}dx$ conſtructio curuae am ope harum duarum aequationum perficitur. Aequatio vero pro curua

am inter t et r commodius ex data aequatione inter x et s reperitur; si in ea loco x substituatur $\int \frac{4k^2 dt}{(2k-r)^2}$ et $2kl\frac{2k}{2k-r}$ loco s. Quod hic praeterea de descensibus dictum est, idem de ascensibus valet, si modo k ponatur negatiuum vti in Scholio I. monuimus.

Scholion 3.

420. Tradita hic inuentio alterius curuae duarum *am* et AM ex altera etiam locum habet, si datae curuae non habeatur aequatio, sed si manu vtcunque fuerit ducta; ex formulis enim inuentis constructio potest deduci, quae ab aequatione non amplius pendeat. Quamobrem cum in cap. praec. (432.) in casum inciderimus pro vacuo quo curuam *cm* inuenimus cum data *ac* iungendam, vt omnes descensus ex quouis puncto curuae *cm* vsque ad *a* aequalibus absoluantur temporibus; similia exempla ex iis pro medio resistente erui poterunt, quibus linea ex partibus duarum diuersarum curuarum composita sit tautochrona. Si enim curua *acm* fuerit huiusmodi curua tautochrona pro vacuo, ex ea per solutionem huius problematis similis curua composita pro medio resistente inuenietur. Scilicet ex *ac* methodo tradita curua AC definiatur; qua inuenta posita $bp = t$, $cm = r$; et $BP = x$, atque $CM = s$; et praeterea $ab = a$, $ac = c$ et $AB = A$ et $AC = C$; tum enim cum data sit aequatio inter t et r erit $AP = A + x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k-c-r)^2}$ et $AM = C + s = 2kl\frac{2k}{2k-c-r}$. Tab. XVI. Fig. 6.

At

At ſi pro medio reſiſtente data fuerit curua AC; atqne requiratur altera CM eius proprietatis, vt omnes deſcenſus ſuper MCA aequalibus abſoluantur temporibus; ſolutio non diſſimili modo efficietur. Nam ex data curua AC pro medio reſiſtente, inueniatur curua eiusdem proprietatis pro vacuo *ac* per Scholion 2. Qua inuenta quaeratur curua *cm* ei adiungenda, quae omnes deſcenſus in vacuo iſochronos producat (432.). Denique methodo modo tradita ex curua compoſita *acm* pro vacuo quaeratur ſimilis curua compoſita pro medio reſiſtente ACM, cuius quidem pars AC iam eſt cognita, quippe ex ea lineam *ac* definiuimus. Idem ergo problema quod in vacuo tantum in ſe habebat difficultatis, in medio quoque reſiſtente reſoluitur. Denique hinc caput hoc finiens Lectorem beneuolum rogo, vt antequam ad caput ſequens progrediatur, quae in Cap. I. ab §. 58. vsque ad finem cap. tradita ſunt, repetere velit.

CAPUT

CAPUT QUARTUM
DE
MOTU PUNCTI SUPER DATA SUPERFICIE.

PROPOSITIO 90.
Problema.

821.

Data via in superficie quacunque $Mm\mu$; *inuenire eius positionem respectu plani dati* APQ, *et radii osculi illius viae in* M *tam positionem quam longitudinem; nec non normalis in superficiem situm.* Tab. XVII. Fig. 1.

Solutio.

Sumto pro lubitu plano APQ in eoque axe AP, quorum respectu positio curuae $Mm\mu$ sit determinanda; ex tribus punctis proximis M, m et μ datae viae in superficie in planum APQ demittantur perpendicula MQ, mq, $\mu\varrho$; atque ex punctis Q, q, ϱ ad axem AP perpendicula QP, qp et $\varrho\pi$. Posito nunc initio abscissarum in A, sit $AP = x$; $PQ = y$ et $QM = z$. Quia porro superficies data ponitur, dabitur aequatio eius naturam exprimens inter tres has variabiles x, y et z; quae aequatio sit haec $dz = Pdx + Qdy$. Cum hac aequatione si coniungatur alia aequatio, exprimetur linea quaedam in ista superficie existens; quare cum linea $Mm\mu$ data po-

ponatur dabitur praeter aequationem $dz = Pdx + Qdy$ inſuper alia aequatio, qua curua $Mm\mu$ determinatur, quam autem hic repraeſentare non eſt opus. Sint elementa abſciſſae Pp, $p\pi = dx$ inter ſe aequalia, ſeu ſumatur elementum dx conſtans. Erit ergo $pq = y + dy$; $\pi\varrho = y + 2dy + ddy$; atque $qm = z + dz$, et $\varrho\mu = z + 2dz + ddz$. His poſitis ſit MN normalis in ſuperficiem in puncto M, et N punctum quo haec normalis plano APQ occurrit, demittatur ex N in axem perpendiculum NH; erit $AH = x + Pz$ et $HN = -Qz - y$ (68). Sit nunc MR poſitio radii oſculi curuae $Mm\mu$, et R incidentia eius in planum APQ; erit ex R in axem demiſſo perpendiculo RX; $AX = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} + x$; atque $XR = \frac{zdx^2ddy + zdz(dzddy - dyddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} - y$ (68). Longitudo vero radii oſculi ſcilicet MO =

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dyddz - dzddy)^2)}} \quad (72).$$

Denique concipiatur planum, in quo ſita ſunt elementa Mm, $m\mu$, productum, donec planum APQ interſecet ſitque interſectio recta RKI, cui ex A erecta perpendicularis in K occurrat, et ex P in V; inuentum eſt ſupra eſſe $PV = \frac{zddy}{ddz} - y$ (68). Cum nunc ſit $XR - PV : AX - AP = PV : PI$, erit $PI = \frac{(AX - AP)PV}{XR - PV}$. Eſt vero $AX - AP = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydyddy}$ atque $XR - PV = \frac{zddyddz(dz^2 - dy^2) + zdydz(ddy^2 - ddz^2)}{ddz((dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy)}$. Quibus ſubſtitutis erit $PI = \frac{dx(dyddy + dzddz)(zddy - yddz)}{ddyddz(dz^2 - dy^2) + dydz(ddy^2 - ddz^2)}$

=

$= \frac{zdxddy - ydxddz}{dzddy - dyddz}$ atque $AI = PI - AP = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dzddy - dyddz}$. Hinc reperitur $AK = \frac{PV.AI}{PI} = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dxddz}$. Plani vero in quo ſita ſunt elementa Mm et $m\mu$, inclinatio ad planum APQ inuenietur, demittenda ex Q perpendiculari QS ad interſectionem RI; erit enim tangens anguli inclinationis $= \frac{QM}{QS}$. At cum ſit $IV : PI = QV : QS$ erit illa tangens $= \frac{QM.IV}{PI.QV} = \frac{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}$. Anguli vero NMR, quem radius osculi cum normali in ſuperficiem conſtituit, tangens eſt $= \frac{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(ddz - Qddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$ (71). Ex his igitur omnia deduci poſſunt, quae ad poſitionem curuae $Mm\mu$ cognoscendam requiruntur. Q.E.I.

Corollarium 1.

822. Curuae $Mm\mu$ proiectio in plano APQ eſt curua $Qq\varrho$, cuius natura exprimitur aequatione inter x et y. Quare iſta proiectio habebitur, ſi ope aequationum $dz = Pdx + Qdy$, et eius, qua ipſa curua in ſuperficie ducta determinatur, noua formetur aequatio eliminanda variabili z, quae ſit inter x et y tantum.

Corollarium 2.

823. Simili modo, ſi eliminetur x, vt prodeat aequatio inter y et z; hac aequatione definietur proiectio curuae $Mm\mu$ in plano quod eſt normale ad axem AX. Atque aequatio in qua non ineſt y,

 ſed

ſed tantum x et z dabit proiectionem curuae $Mm\mu$ in plano, quod normaliter planum APQ ſecundum axem AX interſecat.

Corollarium 3.

824. Curuae autem $Mm\mu$ natura ex duabus eius proiectionibus in duobus planis inuicem normalibus diſtincte cognoſcitur. Qualem cognitionem quoque ſuppeditat vnica proiectio vna cum ipſa ſuperficie.

Corollarium 4.

825. Quamobrem ad curuam in ſuperficie data quamcunque characteribus deſignandam requiritur, vt praeter aequationem $dz = Pdx + Qdy$, qua ſuperficies determinatur, detur aequatio duas tantum variabiles inuoluens pro proiectione quapiam curuae $Mm\mu$.

Corollarium 5.

826. Si ſuperficies ſecetur plano, ſimili modo, quo conus ad ſectiones conicas producendas ſecari ſolet, curua ex hac ſectione orta erit in eodem plano. Quare his caſibus tam poſitio rectae IR erit conſtans, quam plani IMR inclinatio ad planum APQ.

Exemplum.

827. Si igitur detur ſuperficies quaecunque eaque ſecetur plano IMR; quaeratur curua hac ſectio-

tione orta. Ad hoc ponatur AI$=a$; AK$=b$; et anguli inclinationis plani IMR ad planum APQ tangens $=m$; eritque $a=\frac{zdxddy-ydxddz}{dzddy-dyddz}-x$ et $b=\frac{zdxddy-ydxddz-xdzddy+xdyddz}{dxddz}$, atque $m=\frac{\surd(dx^2ddz^2+(dzddy-dyddz)^2)}{dxddy}$. Ex quibus aequationibus coniunctis cum $dz=Pdx-Qdy$ natura curua hac ſectione genitae determinabitur. Ex prioribus vero duabus aequationibus oritur $\frac{b}{a}=\frac{dzddy-dyddz}{dxddz}$ ſeu $ddz : ddy=adz : bdx+ady$; cuius aequationis integralis eſt $\frac{1}{a}l\,dz=\frac{1}{a}l(bdx+ady)-\frac{1}{a}l\,c$, ſeu $cdz=bdx+ady$, et porro $cz=bx+ay+ff$. In prima vero aequatione ſi loco ddz et ddy eorum proportionalia ſubſtituantur, prodibit $a+x=\frac{bzdx+azdy-aydz}{bdz}$, ſeu $abdz+bxdz=bzdx+azdy-aydz$, cuius per zz diuiſae integralis eſt haec $c-\frac{ab}{z}=\frac{bx+ay}{z}$ ſeu $cz=bx+ay+ab$ quod ergo ante erat ff hic eſt ab ſeu $ff=ab$. Conſtantem vero c tertia aequatio definiet; erit autem $m=\frac{dz\surd(a^2+b^2)}{bdx+ady}$ ſeu $\frac{dz\surd(a^2+b^2)}{m}=ady+bdx$. Quare erit ſuperior littera $c=\frac{\surd(a^2+b^2)}{m}$, atque praeter aequationem ſuperficiei naturam exprimentem habetur iſta $\frac{z\surd(a^2+b^2)}{m}=bx+ay+ab$, ex quibus natura quaeſitae curuae eſt deriuanda. Quia autem tota curua quaeſita eſt in plano IMR, commodiſſime ea exprimetur aequatione inter coordinatas orthogonales in eodem plano ſumtas. Sumto ergo IR pro axe, ex M in eum demittatur perpendiculum MS et vocetur IS$=t$ et MS$=u$. Eſt vero IA : AK$=$IP : PV ſeu PV$=\frac{ab+bx}{a}$ et QV$=\frac{ab+bx+ay}{a}=\frac{z\surd(a^2+b^2)}{ma}$. Porro eſt

$\surd(a^2+b^2):a = \frac{z\surd(a^2+b^2)}{ma}:QS$; quare erit $QS=\frac{z}{m}$ et $SV=\frac{bz}{ma}$. Ex his prodibit $MS=u=\frac{z\surd(1+m^2)}{m}$ atque $IS=t=\frac{m(a+x)\surd(a^2+b^2)-bz}{ma}$. Ex quo oritur $z=\frac{mu}{\surd(1+m^2)}$ et $x=\frac{bu+at\surd(1+m^2)}{\surd(a^2+b^2)(1+m^2)}-a$ et ſubſtitutis his valoribus in aequatione $\frac{z\surd(a^2+b^2)}{m}=bx+ay+ab$ prodibit $y=\frac{au-bt\surd(1+m^2)}{\surd(1+m^2)(a^2+b^2)}$. His igitur valoribus loco x, y et z in aequatione ſuperficiei ſubſtitutis proueniet aequatio inter t et u ſeu coordinatas orthogonales curuae quaeſitae.

Corollarium 6.

828. Si interſectio plani ſecantis IR in ipſum axem AX incidat ſumaturque I in A; erit $z=\frac{mu}{\surd(1+m^2)}$; $y=\frac{u}{\surd(1+m^2)}$ et $x=t$.

Corollarium 7.

829. Si interſectio IR plani ſecantis SMR cum plano APQ fuerit normalis ad axem AX erit $b=\infty$. Quare prodibunt $z=\frac{mu}{\surd(1+m^2)}$; $x=\frac{u}{\surd(1+m^2)}-a$ et $y=-t$.

Corollarium 8.

830. Cum valores loco z, y et x ſubſtituendi ſint vnius dimenſionis ipſarum t et u, perſpicuum eſt aequationem inter t et u non plures habere poſſe dimenſiones, quam ipſam aequationem inter z, y et x.

Co-

Corollarium 9.

831. Quare si aequatio inter z, y et x fuerit duarum dimensionum, cuiusmodi praeter conicam innumerabiles dantur superficies, omnes sectiones plano factae erunt sectiones conicae.

Scholion.

832. In Comment. Tom. III. ea dissertatione, in qua lineam breuissimam in superficie quacunque determinaui, tria praecipue superficierum genera sum persecutus, quae erant cylindrica, conica et tornata seu rotunda. Aequatio vero generalis $dz = Pdx + Qdy$ dat superficies cylindricas si P euanescit et Q tantum ab y et z pendeat, ita vt aequationem pro hoc superficierum genere abscissa x non ingrediatur; omnes enim sectiones inter se parallelae sunt quoque aequales; pro his ergo est aequatio $dz = Qdy$. Ad genus conoidicum refero omnes eas superficies quae genenrantur ducendis rectis ex singulis curuae cuiuspiam punctis ad punctum fixum extra planum eius curuae situm. Quae superficies hanc habent proprietatem, vt omnes sectiones parallelae sint inter se similes earumque latera homologa, vt distantiae sectionum a vertice coni. Aequationes vero pro huiusmodi superficiebus, si quidam vertex poli fuerit in A, ita sunt comparatae, vt x, y et z coniunctim vbique eundem dimensionum numerum constituant. Superficies denique tornatae seu rotundae mihi sunt, quae

gene-

generantur conuersione cuiuscunque curuae circa axem, qui axis si fuerit AX, posito x constante aequatio inter y et z dabit circulum centri P. Quare aequatio pro iis hanc habebit formam $dz = Pdx - \frac{ydy}{z}$, seu $zdz + ydy = zPdx$, vbi Pz ab x tantum pendet; seu est $Q = -\frac{y}{z}$ et $P = \frac{X}{z}$ existente X functione ipsius x. Quemadmodum autem in his superficiebus tornatis omnes sectiones axi normales sunt circuli, ita tales superficies concipi possunt, quarum sectiones axi normales sint curuae quaecunque similes. Tales superficies omnes hac continebuntur proprietate generali vt functio quaecunque ipsius x aequalis sit functioni eiusdem vbique dimensionum ipsarum y et z numeri. Vt si iste dimensionum numerus fuerit n; aequationis $Pdx = Rdz + Qdy$ pro ea haec erit proprietas vt sit $Rz + Qy = n\int Pdx$, vel $Rdx + Qdy = \frac{zdR + ydQ}{n - 1}$. Ex quo, an data aequatio sit ad huiusmodi superficiem, statim concludi potest.

PROPOSITIO 91.

Problema.

833. *In superficie quacunque data lineam determinare, quam corpus in ea motum et a nullis potentiis sollicitatum describit tam in vacuo quam in medio quocunque resistente.*

So-

Solutio.

Quia corpus a nullis potentiis abſolutis ſollicitari ponitur, linea ab eo in ſuperficie deſcripta erit linea breuiſſima in vacuo (62.). Medii autem reſiſtentis vis celeritatem corporis tantum imminuit, neque directionem vllo modo afficit, quare etiam in medio reſiſtente via a corpore in quauis ſuperficie deſcripta erit pariter breuiſſima. Manentibus igitur vt ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, ſit $dz = Pdx + Qdy$ aequatio ſuperficiei naturam exprimens, atque Mm, $m\mu$ duo lineae breuiſſimae cuiuspiam elementa. Ex his ſupra pro linea breuiſſima inuenta eſt haec aequatio $Pdzddy + dxddy = Pdyddz - Qdxddz$ (69.), vnde oritur $ddz = \frac{(Pdz + dx)ddy}{Pdy - Qdx}$. At aequatio ad ſuperficiem differentiata dat $ddz = dPdx + Qddy + dQdy$, ex quibus coniunctis fit $ddy = \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$ et $ddz = \frac{(Pdz + dx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$. Dato ergo elemento Mm, ſequens $m\mu$ in linea breuiſſima inuenietur; erit enim $\pi\varrho = PQ + 2dy + ddy$ et $\varrho\mu = QM + 2dz + ddz$, et ipſarum ddy et ddz valores ſunt inuenti. Quare hinc ſequentis cuiusque elementi poſitio determinatur, atque ipſius lineae breuiſſimae natura per quamcunque eius proiectionem cognoſcitur. Q. E. I.

Corollarium I.

834. Si in aequatione pro ſuperficie P et Q tantum per x et y dantur, aequatio $ddy =$

$\frac{(Pdy-Qdx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ proiectionem lineae breuissimae in plano APQ denotat.

Corollarium 2.

835. Pro linea ergo breuissima $Mm\mu$ sumtis elementis axis aequalibus erit $\pi\varrho = y + 2dy + \frac{(Pdy-Qdx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ atque $\varrho\mu = z + 2dz + \frac{(Pdz+dx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$, ex quibus aequationibus punctum μ ex duobus praecedentibus M et m cognoscitur.

Corollarium 3.

836. Quia pro linea breuissima angulus RMN euanescit (71.), incidet R in N, positio ergo radii osculi ita se habebit, vt sit $AX = x + Pz$ et $XR = -Qz - y$. Longitudo vero radii osculi erit $= -\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{dPdx+dQdy}$.

Corollarium 4.

837. Planum vero IMR in quo sita sunt elementa lineae breuissimae $Mm\mu$ ita determinabitur, vt sit $AL = -x + \frac{y(dx+Pdz)-z(Pdy-Qdx)}{Qdz+dy}$; et $AK = -y + \frac{z(Pdy-Qdx)+x(dy+Qdz)}{dx+Pdz}$. Tangens vero anguli quem planum IMR cum plano APQ constituit erit $= \frac{\sqrt{((dx+Pdz)^2+(dy+Qdz)^2)}}{Pdy-Qdx}$. Huiusque anguli secans est $= \frac{\sqrt{(1+P^2+Q^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}{Pdy-Qdx}$, seu cosinus $= \frac{Pdy-Qdx}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$.

Exem-

Exemplum 1.

838. Sit ſuperficies cylindrica quaecunque axem habens AP, exprimetur eius natura hac aequatione $dz = Qdy$ euaneſcente P in generali aequatione $dz = Pdx + Qdy$. Quare pro proiectione lineae breuiſſimae huius ſuperficiei in plano APQ habebitur ob $P = o$ et $dP = o$ haec aequatio $ddy = \frac{-QdQdy}{1+Q^2}$ ſeu $l\frac{\alpha dx}{dy} = lV(1+Q^2)$ et $\alpha dx = dy V(1+Q_2)$, ſi quidem Q tantum per y detur; at ſi Q per y et z detur variabilis z eſt eliminanda ope aequationis $dz = Qdy$. Vti in cylindro circulari in quo eſt $z^2 + y^2 = a^2$; erit $z = V(a^2 - y^2)$, et $Q = \frac{y}{V(a^2-y^2)}$. Quare erit $\alpha dx = \frac{ady}{V(a^2-y^2)}$. In genere autem $\int dy V(1+Q^2)$ exprimit arcum ſectionis ad axem AP normalis; quare dicto hoc arcu $= s$ erit $\alpha x = s$. Ex quo intelligitur, ſi talis ſuperficies in planum explicetur, fore lineam breuiſſimam rectam; vti conſtat.

Exemplum 2.

839. Sit ſuperficies propoſita conica quaecunque verticem habens in A; aequatio pro tali ſuperficie ita poterit adaptari, vt z aequetur functioni vnius dimenſionis ipſarum x et y. Quare in aequatione $dz = Pdx + Qdy$, litterae P et Q erunt functiones nullius dimenſionis ipſarum x et y. Hanc ob rem, vti iam alibi oſtendi, erit $Px + Qy = o$, ſeu $Q = \frac{-Px}{y}$; vnde fiet $dQ = \frac{Pxdy - Pydx - yxdP}{y^2}$,

 et

et $Pdy - Qdx = \frac{P(ydy + xdx)}{y}$; atque $dPdx + dQdy = \frac{y^2 dPdx + Pxdy^2 - Pydxdy - yxdPdy}{y^2} = \frac{(ydx - xdy)(ydP - Pdy)}{y^2}$ et tandem $(1 + P^2 + Q^2) = \frac{y^2 + P^2y^2 + P^2x^2}{y^2}$. Quibus substitutis erit $ddy = \frac{P(ydy + xdx)(ydx - xdy)(ydP - Pdy)}{ydx(y^2 + P^2y^2 + P^2x^2)}$. Ponatur $y = px$; aequabitur P functioni cuidam ipsius p tantum, quia P est functio nullius dimensionis ipsarum x et y. Erit vero $dy = pdx + xdp$ et $ddy = xddp + 2dxdp = -\frac{P(p^2xdx + px^2dp + xdx)(pxdP - Ppdx - PxdP)x^2dp}{px^3dx(p^2 + P^2p^2 + P^2)} = \frac{Pdp(p^2dx + pxdp + dx)(Ppdx + PxdP - pxdP)}{pdx(p^2 + P^2 + P^2p^2)}$. Ex qua aequatione quidem proiectio difficulter cognoscitur. Quomodo autem linea breuissima in tali superficie sit determinanda fusius docui in Comment. III. p. 120. Ceterum idem de linea breuissima est notandum quod ante, scilicet quod ea in planum explicata superficie conica abeat in rectam.

Scholion.

840. Simili modo in determinandis lineis breuissimis super aliis superficierum speciebus non hic immoror, quia in cit. loco hanc materiam plenius exposui. Progredior ergo ad inuestigationem linearum, quae in superficie a corpore a quibuscunque potentiis sollicitato describuntur. Antea vero necesse est, vt in effectus cuiusque potentiae curatius inquiramus.

DEFINITIO 4.

841. *Vim prementem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius directio est normalis ad ipsam superficiem in qua corpus mouetur.* Co-

Corollarium.

842. Haec vis premens ergo vel auget vim centrifugam vel minuit, prout eius directio directioni radii osculi lineae breuissimae vel contraria est vel in eam incidit (79.).

DEFINITIO 5.

843. *Vim deflectentem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius directio est in plano superficiem tangente et perpendicularis in viam a corpore descriptam.*

Corollarium.

844. Haec ergo vis corpus a linea breuissima, quam a nullis potentiis sollicitatum describeret, deflectit, et vel cis vel vltra eam detrahit pro eius directione vel cis vel vltra tendente.

PROPOSITIO 92.
Problema.

845. *Determinare effectum vis prementis in corpus super superficie quacunque motum, quod praeterea a nullis potentiis sollicitatur.* Tab. XVII. Fig. 1.

Solutio.

Quia haec vis premens est normalis in superficiem, ideoque eius directio MN; ea neque celeritatem, neque directionem motus afficiet, sed tota in pressione superficiei consumetur, corpus igitur in eadem linea progredietur, in qua si haec vis abesset, moueretur; quae autem est linea breuissima in prop. praec. determinata. Mouebitur ergo corpus in linea $Mm\mu$, cuius radius osculi MO incidet in normalem superficiei MN. Sit ergo MN directio huius potentiae prementis, quae propterea superficiem versus interiora secundum MN premet. Ponatur haec vis premens $= M$; premetur ab ea superficies secundum MN vi $= M$. At si radius osculi MO in eandem plagam incidere ponatur, vis centrifuga vi prementi erit contraria eiusque effectum minuet. Cum autem $Mm\mu$ sit linea breuissima, est radius osculi $MO = -\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{dPdx+dQdy}$, per quem si diuidatur dupla altitudo v celeritati in M debita, prodibit vis centrifuga. Hanc ob rem erit vis, qua superficies secundum MN premitur $= +\frac{2v(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}} + M$. Positio tandem huius vis prementis per superiora inuenta est $AH = x + Pz$ et $HN = -Qz - y$; demisso scilicet ex puncto N, in quo normalis MN plano APQ occurrit, ad axem perpendiculo NH. Q. E. I.

Tab. XVII. Fig. 1.

Corollarium I.

846. Cum neque altera vis normalis deflectens, neque vis tangentialis neque vis resistentiae, si quae adest, pressionem in superficiem afficiant; per-

perſpicitur, a quibuscunque potentiis corpus praeterea ſollicitetur, preſſionem ſemper tantam eſſe quantam hic aſſignauimus.

Corollarium 2.

847. Quantumuis igitur via a corpore deſcripta a linea breuiſſima diſcrepet, tamen preſſio in ſuperficiem fit ſecundum normalem in ſuperficiem, ſeu ſecundum radium oſculi lineae breuiſſimae, non vero ſecundum ipſius curuae deſcriptae radium oſculi, cuius longitudo etiam ad preſſionem non requiritur.

Scholion.

848. Ob hanc cauſam eam radii oſculi lineae breuiſſimae formulam adhibuimus, in qua differentialia ſecundi gradus non inſunt, ne is pendeat a poſitione duorum elementorum Mm et $m\mu$, per quae corpus reipſa mouetur. Sed iſte radius oſculi ex vnico elemento Mm innoteſcere debet: Si enim corpus propter vim deflectentem non lineam breuiſſimam deſcribat, differentialia ſecundi gradus ddy et ddz non amplius in radium oſculi lineae breuiſſimae ingredi debent.

PROPOSITIO 93.

Problema.

849. *Vis tangentialis, quae ſecundum tangentem* MT *corpus trahit, effectum in corpus in ſuperficie quacunque motum determinare.* Tab. XVII. Fig. 2.

So-

Solutio.

Sit haec vis tangentialis $= T$, corpusque per elementum Mm progrediatur celeritate altitudini v debita; quia haec vis motum diminuit, erit $dv = -T. Mm = -T\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, manentibus iisdem denominationibus, quibus ante sumus vsi. Praeterea vero haec vis neque pressionem neque deuiationem a linea breuissima afficit. Ad positionem vero directionis huius vis inueniendam, producatur tangens MT donec occurrat plano APQ in T; erit T punctum in elemento qQ producto. Fiat ergo $dz : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = z : QT$; eritque $QT = \frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dz}$. Ex T demittatur in axem perpendiculum TF; erit $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = QT : PF$; quare habetur $PF = \frac{zdx}{dz}$ et $AF = \frac{zdx - xdz}{dz}$. Porro ob $dx : dy = \frac{zdx}{dz} : y - FT$ erit $FT = y - \frac{zdy}{dz}$; ex quo punctum T determinatur. Q. E. I.

Corollarium.

850. Cum resistentia ad vim tangentialem sit referenda, ex his intelligitur, quomodo resistentiae effectus sit determinandus. Vt si fuerit resistentia $= R$, erit $dv = -(T + R)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$.

PROPOSITIO 94.

Problema.

Tab. XVII. Fig. 3. 851. *Vis normalis deflectentis N effectum in corpus super superficie quacunque motum determinare.*

Solu-

Solutio.

Positis vt ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, exprimatur superficiei natura hac aequatione $dz = Pdx + Qdy$; et moueatur corpus celeritate altitudini v debita per elementum Mm: quo percurso, nisi vis deflectens adesset, progrederetur per elementum $m\mu$ secundum lineam breuissimam; foretque $\pi\varrho = y + 2dy + \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$ et $\varrho\mu = z + 2dz + \frac{(dx + Pdz)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$ (835.). Iam accedat vis normalis deflectens N, quae directionem habeat antrorsum. Haec ergo vis efficiet, vt corpus descripto elemento Mm non per $m\mu$ incedat, sed ab hac directione antrorsum deflectat. Ponamus igitur pergere per $m\nu$, erunt Mm et $m\nu$ duo elementa curuae a corpore descriptae. Quare demisso ex ν in planum APQ perpendiculo $\nu\sigma$; erit $\pi\sigma = y + 2dy + ddy$ et $\sigma\nu = z + 2dz + ddz$. Hinc ergo habebitur $\sigma\varrho = \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} - ddy$ et $\mu\varrho - \nu\sigma = \frac{(dx + Pdz)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} - ddz$. Posito vero breuitatis ergo $\frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} = dd\eta$ et $\frac{(dx + Pdz)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} = dd\zeta$, inuenietur radius osculi angulo elementari $\mu m\nu$ respondens =

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{((dz\,dd\eta - dz\,ddy - dy\,dd\zeta + dy\,ddz)^2 + dx^2(dd\eta - ddy)^2 + dx^2(dd\zeta - ddz)^2)}}$$

Hic ergo si dicatur $= r$ erit $N = \frac{2v}{r}$ seu $2v = Nr$, quia hic angulus eodem modo generatur, quo corpus a vi normali in plano a linea recta deflectitur. Est vero $dzdd\eta - dydd\zeta = -\frac{(dy+Qdz)(dPdx+dQdy)}{(1+P^2+Q^2)}$. Atque loco $dd\eta$ et $dd\zeta$ debitis valoribus substitutis fit

$$r = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2+ddz^2)+(dzddy-dyddz)^2-\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(dPdx+dQdy)^2}{1+P^2+Q^2})}}$$

Cum autem per aequationem $dz = Pdx + Qdy$ sit $dPdx + dQdy = ddz - Qddy$, erit in subsidium hac ipsa aequatione $dz = Pdx + Qdy$ vocata $r = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{-ddy(dx+Pdz)+ddz(Pdy-Qdx)}$. Hanc ob rem erit $ddz(Pdy-Qdx)-ddy(dx+Pdz) = \frac{N}{2v}(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. Q. E. I.

Scholion I.

852. Congruit haec formula cum ea, quam supra (79) pro effectu huiusmodi vis determinando inuenimus. Differentia enim tantum est in signo litterae N, quam vim ibi negatiue accipiendam esse apparet. Atque hic etiam de signo non certi esse potuissemus, quia ex quantitate radix quadrata, quam hic extraximus, aeque potest esse negatiua ac affirmatiua. Hoc vero dubium, si calculus ad casum specialem accommodetur, statim tollitur; quia formula eiusmodi esse debet, vt punctum ν cis μ cadat si potentia N antrorsum, vt posuimus, fuerit directa. Ex quo ope exempli etiam signum radicis quadratae determinaui; atque hanc ipsam formulam inueni.

Co-

Corollarium 1.

853. Si vis deflectens N euanescat, corpus motum suum in linea breuissima continuabit; id quod ipsa aequatio quoque indicat. Posito enim $N = o$, habebitur $ddy(dx + Pdz) = ddz(Pdy - Qdx)$, quae aequatio est pro linea breuissima.

Corollarium 2.

854. Quaecunque ergo vis premens, et vis tangentialis atque resistentia corpus in superficie motum sollicitet, si modo nulla affuerit vis deflectens, corpus semper in linea breuissima mouebitur.

Scholion 2.

855. Quod autem ad positionem huius vis deflectentis N attinet, ea ex hoc deducetur, quod ea posita sit in plano tangente superficiem, atque simul sit normalis curuae descriptae; sit ergo MG eius directio et G punctum, in quo plano APQ occurrit; ita vt vis N secundum MG trahere censenda sit, dum eam ante antrorsum vrgere posuimus. Primo ergo determinari debet intersectio plani superficiem in M tangentis intersectio cum plano APQ, quae sit recta TVG; Haec vero inuenietur, si duae tangentes superficiem ad planum APQ vsque producantur, atque puncta, in quibus in planum APQ incidunt linea recta iungantur. Sit ergo MT tangens lineae descriptae, Tab. XVII. Fig. 4.

quae propterea ſuperficiem quoque tanget; erit vt iam inuenimus $AF = \frac{zdx}{dz} - x$ et $FT = y - \frac{zdy}{dz}$ (849.). Porro ſuperficies ſecta intelligatur plano PQM, ſitque MV ſectionis huius tangens; erit $QV = \frac{z}{Q}$, ex aequatione $dz = Pdx + Qdy$ poſito $dx = 0$. Innoteſcit ergo punctum V, quocirca recta TV producta erit interſectio plani tangentis ſuperficiem in M cum plano APQ. Punctum ergo G in quo recta MG plano APQ occurrit, poſitum erit in recta TV. Porro in recta TQ ſumatur $QS = \frac{zdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$; eritque MS normalis in elementum Mm deſcriptum. Atque ſi ad QS ducatur normalis SG, ex hac recta SG omnes rectae ad M ductae erunt in elementum Mm perpendiculares. Quare cum MG ſit quoque normalis in elementum deſcriptum, punctum G quoque poſitum erit in recta SG. Punctum ergo G erit in interſectione rectarum TV et SG. Eſt vero $PL = \frac{ydy + zdz}{dx}$, et ang. ELG = ang. PQT. Ponatur $GE = t$, erit $LE = \frac{tdy}{dx}$, et $PE = \frac{ydy + tdy + zdz}{dx}$. Deinde etiam propter triangula ſimilia eſt $FP : FT + PV = PE : GE - PV$, hoc eſt $\frac{zdx}{dz} : \frac{z}{Q} - \frac{zdy}{dz} = \frac{ydy + tdy + zdz}{dx} : t - \frac{z}{Q} + y$. Hinc prouenit $t = \frac{z(dx + Pdz)}{Qdx - Pdy} - y = GE$, et $AE = x + \frac{z(dy + Qdz)}{Qdx - Pdy}$, vnde punctum G determinatur. Si ergo ducatur recta QG erit $QG^2 = \frac{z^2(dx + Pdz)^2}{(Qdx - Pdy^2)} + \frac{z^2(dy + Qdz)^2}{(Qdx - Pdy)^2}$, et $QG = \frac{z\sqrt{(dy^2 + dy^2 + dz^2 + dz^2(1 + P^2 + Q^2))}}{Qdx - Pdy}$ atque ipſa

$$MG = \frac{z(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{Qdx - Pdy}.$$

 PRO-

PROPOSITIO 95.

Problema.

856. *Si corpus super superficie motum a quotcunque potentiis sollicitetur; definire vires normales prementem scilicet et deflectentem, atque vim tangentialem ex resolutione omnium ortam.*

Solutio.

Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes eae ad tres reduci possunt, quarum directiones sint secundum tres coordinatas x, y z. Sit nunc vis corpus in M secundum parallelam abscissae PA trahens $=E$; vis secundum parallelam ipsi QP trahens $=F$, et vis secundum MQ trahens $=G$. Singulae ergo hae vires resoluendae sunt in ternas, normalem prementem scilicet, normalem deflectentem et tangentialem. Quia autem hae tres directiones sunt inter se normales, ex quaque ipsarum E, F et G vires normales et tangentialis prodibunt, si illae ducantur in cosinum anguli, quem illarum virium directiones cum istis constituunt. Incipiamus a vi tangentiali, cuius directio est MT existente $AF = \frac{zdx}{dz} - x$ et $FT = y - \frac{zdy}{dz}$, atque $QT = \frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dz}$ et $MT = \frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{dz}$. Vnde erit cosinus anguli QMT, quem directio vis G cum vi tangentiali constituit $= \frac{QM}{MT} = \frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. In quem si ducatur vis G, prodibit vis tangentialis ex ea orta $= \frac{Gdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Cosinus vero anguli, quem MT con- Tab. XVII. Fig. 2.

 con-

constituit cum directione vis F, quae est ipsi QP parallela est $=$ cos. PQT: $\int$ QMT $= \frac{PQ - FT}{QT} \cdot \frac{QT}{MT} = \frac{dy}{\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Vis ergo tangentialis ex F orta est $= \frac{Fdy}{\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Cosinus porro anguli, quem directio vis E constituit cum MT est $= \frac{dx}{\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ ideoque vis tangentialis ex vi E orta $= \frac{Edx}{\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$

Tab. XVII. Fig. I. Iam consideretur vis premens, cuius directio est MN, existente AH $= x + Pz$ et HN $= -y - Qz$, seu PH $=$ Pz et QP $+$ HN $= -Qz$. Ex quo erit QN $= z\surd(P^2 + Q^2)$ et MN $= z\surd(1 + P^2 + Q^2)$. Anguli ergo, quem directio potentiae G cum MN constituit, cosinus est $\frac{MQ}{NM} = \frac{1}{\surd(1 + P^2 + Q^2)}$, ideoque vis premens ex G orta $= \frac{G}{\surd(1 + P^2 + Q^2)}$ Porro anguli, quem directio vis F, quae est parallela ipsi QP, cum MN constituit, cosinus est $=$ cos. PQN. $\int$ QMN $= \frac{(PQ + HN)QN}{QN.MN} = -\frac{Q}{\surd(1 + P^2 + Q^2)}$. Ergo vis premens ex vi F orta est

Tab. XVII. Tab. 4. $= -\frac{FQ}{\surd(1 + P^2 + Q^2)}$. Atque simili modo vis premens ex vi E orta est $= -\frac{EP}{\surd(1 + P^2 + Q^2)}$. Denique cum vis deflectentis directio sit MG, atque PE $= \frac{z(dy + Qdz)}{Qdx - Pdy}$ et QP $+$ EG $= \frac{z(dx + Pdz)}{Qdx - Pdy}$; erit anguli, quem MG cum directione vis G constituit, cosinus $= \frac{Qdx - Pdy}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}\surd(1 + P^2 + Q^2)}$; quare vis deflectens ex vi G orta est $= \frac{G(Qdx - Pdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}\surd(1 + P^2 + Q^2)}$

Porro anguli, quem MG cum directione vis F con-

constituit, cosinus est $= \frac{PQ + EG}{MG} = \frac{dx + Pdz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$; quamobrem vis deflectens ex vi F orta est $= \frac{F(dx + Pdz)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$

Denique anguli, quem directio vis E cum MG constituit, cosinus est $= \frac{-PE}{MG} = \frac{-dy - Qdz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$. Vis ergo deflectens ex vi E orta est $= \frac{-E(dy + Qdz)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$.

Cum autem ante vim tangentialem vocauerimus T; vim prementem $= M$ et vim deflectentem $= N$: ad has vires tres propositas E, F, et G reduximus; erit namque $T = \frac{Edx + Fdy + Gdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$ et $M = \frac{-EP - FQ + G}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$ atque $N = \frac{-E(dy + Qdz) + F(dx + Pdz) + G(Qdx - Pdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$.

Q. E. I.

Corollarium I.

857. Si igitur corpus a tribus potentiis E, F et G sollicitetur; erit, posito v pro altitudine debita celeritati in M, $dv = -Edx - Fdy - Gdz$ (849.), si loco T ponatur vis tangentialis ex resolutione potentiarum E, F et G orta.

Co-

Corollarium 2.

858. Si praeterea corpus in medio resistente moueatur, atque resistentia in M fuerit $= R$; erit $dv = -E\,dx - F\,dy - G\,dz - R\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$.

Corollarium 3.

859. Si in aequatione §. 851. inuenta, in qua effectus vis deflectentis N est determinatus, loco N substituatur vis deflectens ex resolutione virium E, F et G orta, prodibit $\frac{2v\,ddz(P\,dy - Q\,dx) - 2v\,ddy(dx + P\,dz)}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ $= -E(dy + Q\,dz) + F(dx + P\,dz) - G(P\,dy - Q\,dx)$.

Corollarium 4.

860. Si ergo ex istis duabus aequationibus confletur vna eliminanda v; prodibit aequatio, quae cum locali ad superficiem $dz = P\,dx + Q\,dy$ coniuncta determinabit viam a corpore in superficie descriptam.

Corollarium 5.

861. Vis autem, qua superficies secundum normalem in eam premitur, tam ex vi normali premente M, quam ex vi centrifuga orta est $= \frac{(G - EP - FQ)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2v(dP\,dx + dQ\,dy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$ (845), substituto loco M valore inuento.

Corollarium 6.

862. Est vero ex aequatione coroll. 3. inuenta $2v = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(E(dy + Q\,dz) - F(dx + P\,dz) + G(P\,dy - Q\,dx))}{-ddz(P\,dy - Q\,dx) + ddy(dx + P\,dz)}$

quo

quo valore ibi substituto prodibit tota pressio $=$ $\frac{(Gdxddy - Fdxddz + Edyddz - Edzddy)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz)}$.

Scholion.

863. Quia tres potentiae E, F, G directiones habent inuicem normales, erit potentia iis aequiualens $= \sqrt{(E^2 + F^2 + G^2)}$. His vero tribus viribus aequiualere inuenimus tres M, N et T, quarum directiones sunt quoque inuicem normales; quare istis tribus aequivalens vis erit $= \sqrt{(M^2 + N^2 + T^2)}$. Quamobrem si loco M, N et T substituantur valores inuenti ex E, F et G, prodire debet quoque $\sqrt{(E^2 + F^2 + G^2)}$; id quod calculo instituto re ipsa se habere deprehendetur. Inseruit autem hoc instar probationis, vtrum calculus prolixus, quo haec resolutio est absoluta, recte fuerit institutus, an vero secus. Hac vero probatione instituta reperientur se hae formulae recte habere.

PROPOSITIO 96.

Problema.

864. *In hypothesi grauitatis vniformis et deorsum directae* g, *determinare lineam, quam corpus super quacunque superficie proiectum in vacuo describit.*

Solutio.

Sit APQ planum horizontale, et M punctum tam in superficie data, quam in linea a corpore Tab. XVII Fig. 2.

descripta. Erit ergo MQ verticalis et propterea directio vis grauitatis g. Positis $AP = x$, $PQ = y$, et $QM = z$, atque aequatione superficiei naturam exprimente $dz = Pdx + Qdy$; sit celeritas in M, qua elementum Mm percurritur, debita altitudini v. Cum igitur problema hoc sit casus praecedentis; fit enim $G = g$, $E = o$ et $F = o$; habebuntur hae duae aequationes $dv = -gdz$ (857.), atque $2vddz (Pdy - Qdx) - 2vddy(dx + Pdz) + g(Pdy - Qdx) (dx^2 + dy^2 + dz^2) = o$. Sit porro altitudo debita celeritati, quam corpus habiturum esset, si in planum horizontale APQ perueniret, $= b$; erit $v = b - gz$. Per alteram vero aequationem est $2v = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}$. Vnde erit $\frac{dv}{2v} = \frac{dzddz(Pdy - Qdx) - dzddy(dx + Pdz)}{(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Quae aequatio ope aequationis $dz = Pdx + Qdy$ transmutatur in hanc $\frac{dv}{2v} = \frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} - \frac{Pddy}{Pdy - Qdx}$; quae integrata dat $lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\int \frac{Pddy}{Pdy - Qdx}$. In quouis ergo casu speciali inuestigari debet, an $\frac{Pddy}{Pdy - Qdx}$ integrationem admittat. Quod si contigerit, habebitur v in differentialibus primi gradus; atque cum sit $v = b - gz$, orietur aequatio differentialis primi gradus curuae descriptae naturam exprimens. Pressio vero in superficiem secundum normalem erit $= \frac{gdxddy\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz)}$, quae sublatis differentialibus secundi gradus abit in hanc $\frac{-g}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}} - \frac{2(b - gz)(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

865. Celeritas ergo corporis in hypothesi grauitatis vniformis g et deorsum directae in superficie quacunque moti ex sola altitudine cognosci potest, omnino vt si corpus in eodem plano moueretur.

Corollarium 2.

866. Si tempusculum, quo elementum Mm absoluitur, ponatur dt, erit $dt = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{v}}$. Per aequationem ergo inuentam erit $ldt = \int \frac{Pddy}{Pdy-Qdx}$; atque $\frac{ddt}{dt} = \frac{Pddy}{Pdy-Qdx}$.

Corollarium 3.

867. Ex inuentis aequationibus reperietur $ddy = \frac{g(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{2dx(b-gz)(1+P^2+Q^2)} + \frac{(dPdx+dQdy)(Pdy-Qdx)}{(1+P^2+Q^2)dx}$ atque $ddz = \frac{gQ(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dx^2)}{2dx(b-gz)(1+P^2+Q^2)} + \frac{(dPdx+dQdy)(dx+Pdz)}{(1+P^2+Q^2)dx}$. Hinc erit $dzddy - dyddz = \frac{gP(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{2(b-gz)(1+P^2+Q^2)} - \frac{(dPdx+dQdy)(dy+Qdz)}{1+P^2+Q^2}$. Curuae vero descriptae radius osculi erit $= \frac{2(dx^2+dy^2+dz^2)(b-gz)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{\sqrt{(g^2(Pdy-Qdx)^2(dx^2+dy^2+dz^2)+4(b-gz)^2(dPdx+dQdy)^2)}}$

Scholion.

868. Harum formularum vsum in casibus particularibus, quibus certa quaedam species superficierum consideratur, in sequentibus problematis fusius exponemus, quibus singularium superficierum exempla adiungemus.

PROPOSITIO 97.
Problema.

Tab. XVIII. Fig. 1.

869. *In hypothesi grauitatis vniformis deorsum tendentis* g, *determinare motum corporis in superficie cuiuscunque cylindri, cuius axis sit verticalis.*

Solutio.

Quia axis cylindri ponitur verticalis, erunt omnes sectiones horizontales inter se aequales; sit igitur ABQC basis cylindri, in cuius superficie mouetur corpus. Ponatur $AP = x$, $PQ = y$, sitque z corporis altitudo super puncto Q in superficie cylindri. Natura ergo huius superficiei cylindricae hac exprimetur aequatione $o = Pdx + Qdy$ seu $Qdy = -Pdx$. Haec autem aequatio orietur ex generali $dz = Pdx + Qdy$, si P et Q fiant quantitates infinite magnae, seu euanescente coefficiente ipsius dz, si quem assumsissemus. Quamobrem in aequationibus ante inuentis P et Q quasi quantitates infinite magnae considerari debent, etiamsi sint finitae magnitudinis. Erunt autem P et Q functiones ipsarum x et y tantum, neque in iis inerit z. His ergo in calculum deductis, habebitur $v = b - gz$; atque $2v = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{Pdzddy - Pdyddz + Qdxddz} = \frac{g(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dydzddy - dy^2ddz - dx^2ddz}$ propter analogiam $P : Q = dy : -dx$. At posterior aequatio logarithmica erit $lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\int\frac{dyddy}{dx^2 + dy^2} = l(dx^2 + dy^2 + dz^2)$

$-l(dx^2+dy^2)+lc$. Vnde fit $\frac{v}{c}=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dx^2+dy^2}=\frac{b-gz}{c}=1+\frac{dz^2}{dx^2+dy^2}$. Hinc oritur $(b-c-gz)(dx^2+dy^2)=c\,dz^2$ seu $V(dx^2+dy^2)=\frac{dz\sqrt{c}}{\sqrt{(b-c-gz)}}$, cuius integralis est $\int V(dx^2+dy^2)=-\frac{\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}$, vbi $\int V(dx^2+dy^2)$ denotat arcum basis BQC motu horizontali percursum. Si tempusculum quo elementum Mm absoluitur ponatur dt, erit $\frac{ddt}{dt}=\frac{dyddy}{dx^2+dy^2}$ atque $\alpha dt=V(dx^2+dy^2)$, porroque $\alpha t=\int V(dx^2+dy^2)$. Quare tempora erunt proportionalia arcubus in basi respondentibus. Aequatio autem $\int V(dx^2+dy^2)=-\frac{\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}$, dabit aequationem pro curua in superficie cylindrica descripta, si haec superficies in planum concipiatur explicata: denotabit enim tum $\int V(dx^2+dy^2)$ abscissam in axe horizontali et z applicatam verticalem. Proiectionem vero curuae descriptae in plano verticali planum horizontale iuxta AC secante habebimus, si ope aequationis $Pdx+Qdy=0$ eliminetur y, vt prodeat aequatio inter x et z, quae erunt coordinatae huius proiectionis. Scilicet ob $dy=-\frac{Pdx}{Q}$ erit $V(dx^2+dy^2)=\frac{dx}{Q}V(P^2+Q^2)$, ideoque $\int\frac{dx\sqrt{(P^2+Q^2)}}{Q}=\frac{\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}$, vbi in P et Q loco y eius valor in x debet substitui. Pressio vero quam superficies sustinebit a sola vi centrifuga orietur, propter potentiam g in ipsa superficie sitam, eritque $=\frac{2(b-gz)(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2)}}$, qua vi corpus ab axe

 cylin-

cylindri recedere conabitur, si haec expressio fuerit affirmatiua. Q. E. I.

Corollarium 1.

870. Curua ergo, quam corpus in superficie cylindri describit, si superficies in planum explicetur, abibit in parabolam, ipsam scilicet proiectoriam, quam corpus proiectum in plano verticali describeret.

Corollarium 2.

871. Si motus corporis super superficie cylindrica compositus consideretur ex motu verticali, quod vel sursum vel deorsum progreditur, et ex horizontali; erit motus horizontalis aequabilis, quia tempora t proportionalia sunt $\int V(dx^2 + dy^2)$ i. e. arcubus horizontali motu percursis. Motus vero verticalis erit vel aequabiliter acceleratus vel retardatus.

Corollarium 3.

872. Si ergo motus horizontalis euanescit, corpus recta vel ascendet vel descendet, omnino ac si libere ascenderet vel descenderet. Hicque casus prodit, si fuerit $c = o$, quo $V(dx^2 + dy^2)$ euanescit.

Exemplum.

873. Sit basis cylindri circulus cuius, quadrans sit BQC et radius $AB = a$; erit $x^2 + y^2 = a^2$ et $xdx + ydy = o$. Fiet ergo $P = x$ et $Q = y = V(a^2 - x^2)$. Proiectio vero lineae in superficie cylindrica hac descriptae in plano verticali ex AC erecto exprimetur aequatione $\int \frac{a\,dx}{V(a^2-x^2)} = \frac{Vc(b-c-gz)}{g}$. Si ergo fuerit $c = o$, fiet $dx = o$, atque $x =$ constanti; quare hoc casu proiectio erit linea recta. Curua vero, quae est proiectio pro quocunque ipsius c valore, ope rectificationis circuli construetur. Pressio autem, quam superficies cylindri sustinet est $= \frac{2(b-gz)(dx^2+dy^2)}{(dx^2+dy^2+dz^2)a} = \frac{2c}{a}$, propter aequationem $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dx^2+dy^2} = \frac{b-gz}{c}$. Quare pressio vbique erit constans et ipsi c proportionalis.

Corollarium 4.

874. Propter eandem aequationem erit generaliter pressio, quam cylinder quicunque sustinet $=$

$$\frac{2c(dPdx + dQdy)}{(dx^2+dy^2)V(P^2+Q^2)} = \frac{2Q^2c(dPdx+dQdy)}{dx^2(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2Qc(QdP-PdQ)}{dx(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Scholion.

875. Non solum autem ope resolutionis motus super superficie cylindrica erecta corporis mo-

tus facile poteſt determinari; ſed etiam ſi cylindri axis fuerit horizontalis eadem facilitate motus corporis cognoſcetur. Namque ſi corpus non habeat motum horizontalem iuxta axem cylindri corpus perpetuo in eadem cylindri ſectione permanebit, in eaque mouebitur tanquam ſuper linea data. Sin vero accedat motus horizontalis, is perpetuo idem manebit, neque alterum motum perturbabit; atque his motibus coniungendis verus corporis motus facile cognoſcetur.

PROPOSITIO 98.

Problema.

Tab.XVIII. Fig. 2. 876. *Si corpus moueatur in ſuperficie ſolidi rotundi, cuius axis eſt verticalis* AL, *in vacuo a grauitate uniformi* g *ſollicitatum; determinare motum corporis ſuper huiusmodi ſuperficie.*

Solutio.

Generetur ſolidum rotundum conuerſione curuae AM circa axem verticalem AL, erunt omnes eius ſectiones horizontales circuli, quorum radii ſunt applicatae curuae AM. Aequatio ergo naturam huius ſuperficiei exprimens erit $dz = \frac{xdx+ydy}{Z}$ denotante Z functionem quamcunque ipſius z; erit enim $2\int Zdz = x^2 + y^2 = LM^2$. Si ergo detur aequatio pro curua AM, inter $AL = z$ et $LM = \sqrt{2\int Zdz}$; dabitur quoque Z. His praemiſſis erit itaque

itaque $P = \frac{x}{Z}$ et $Q = \frac{y}{Z}$; qui valores si substituantur, habebuntur duae sequentes aequationes, ex quibus tam curua descripta quam motus super ea cognoscetur, $v = b - gz$ atque $lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\int \frac{xddy}{xdy - ydx} = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2l(xdy - ydx) +$ const. Quare erit $v = \frac{c^3(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(xdy - ydx)^2} = b - gz$. Ponatur $x^2 + y^2 = u^2$; erit u functio quaedam ipsius z, nempe $u^2 = 2\int Zdz$; atque superior aequatio abibit in hanc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\sqrt{(c^3dz^2 + u^2du^2(b - gz))}}{\sqrt{(u^2(b - gz) - c^3)}}$. Proiectio vero in plano horizontali per aequationem inter x et y habebitur, si ex aequatione $x^2 + y^2 = 2\int Zdz$ valor ipsius z in x et y substituatur; huiusque proiectionis arcus est $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. In plano autem verticali habebitur proiectio eliminanda y; quo facto prodit aequatio $\frac{udx - xdu}{c\sqrt{c(u^2 + x^2)}} = \sqrt{\frac{du^2 + dz^2}{u^2(b - gz) - c^3}}$, quae aequatio si per u diuidatur constructionem admittit. Pressio vero quam superficies sustinet axem versus erit $= \frac{-gZ}{\sqrt{(x^2 + y^2 + Z^2)}} - \frac{2c^3Z(dx^2 + dy^2) + 2c^3dZ(xdx + ydy)}{Z(xdy - ydx)^2\sqrt{(x^2 + y^2 + Z^2)}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

877. Si tempusculum, quo elementum Mm absoluitur ponatur dt; erit $\frac{ddt}{dt} = \frac{xddy}{xdy - ydx}$, cuius integralis est $adt = xdy - ydx$. Ipsum ergo tempus erit vt $xy - 2\int ydx$, denotante $\int ydx$ aream proiectionis in plano horizontali.

Corollarium 2.

878. Si corpus in proiectione in plano horizontali moueri concipiatur, erit celeritas eius in Q debita altitudini $\frac{c^3(dx^2+dy^2)}{(ydx-xdy)^2}$; ex quo motu in proiectione ipse motus in superficie inuenietur.

Corollarium 3.

Tab. XVIII. Fig. 3. 879. Sit igitur BQC proiectio curuae in plano horizontali, in qua moueatur corpus ita vt motus eius respondeat motui corporis in superficie ipsa; erit tempus quo arcus BQ absoluitur vt $\frac{xy}{2} - \int ydx$ seu negatiue vt $\int ydx - \frac{xy}{2}$ i. e. vt area BAQ ducto radio AQ.

Corollarium 4.

880. Areae autem BAQ elementum est $\frac{ydx-xdy}{2}$. Ducta ergo tangente QT et demisso in eam ex A perpendiculo AT erit $AT = \frac{ydx-xdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Quare altitudo celeritati in Q debita est $= \frac{c^3}{AT^2} = \frac{c^3}{p^2}$, posito $AT = p$.

Corollarium 5.

881. Corpus ergo in proiectione motum perinde in ea mouebitur, ac si libere moueretur attractum vi quadam centripeta ad centrum A.

Corollarium 6.

882. Respondeat punctum B motus in superficie facti initio, et cum detur directio prima

ma motus in ſuperficie, dabitur perpendiculum in tangentem in B. Sit ergo $AB = f$, et perpendiculum in tangentem $= h$; erit altitudo celeritati in B debita $= \frac{c^3}{h^2}$.

Corollarium 7.

883. Vis ergo centripeta verſus A tendens, quae faciet, vt corpus in proiectione BQC libere moueatur, erit $= \frac{2c^3 dp}{p^3 du}$, poſito u pro $\sqrt{(x^2 + y^2)}$. Aequatio vero inter u et z exprimet naturam curuae, cuius conuerſione genita eſt ſuperficies propoſita, ideoque datur.

Corollarium 8.

884. Eſt porro $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{udu}{\sqrt{(u^2 - p^2)}}$ et $ydx - xdy = \frac{pudu}{\sqrt{(u^2 - p^2)}}$. Hi valores ſi in aequatione inuenta ſubſtituantur, dabunt $c^3 u^2 du^2 + c^3 u^2 dz^2 - c^3 p^2 dz^2 = (b - gz) p^2 u^2 du^2$, ſeu $p^2 = \frac{c^3 u^2 (du^2 + dz^2)}{c^3 dz^2 + u^2 du^2 (b - gz)}$.

Corollarium 9.

885. Huius ergo quantitatis $- \frac{c^3 dz^2 - u^2 du^2 (b - gz)}{u^2 (du^2 + dz^2)}$ differentiale per du diuiſum dabit vim centripetam in A requiſitam, vt corpus in proiectione BQC moueatur libere, motu reſpondente motui corporis in ſuperficie.

Corollarium 10.

886. Si $c = o$, fiet quoque $p = o$. Quare hoc caſu proiectio in plano horizontali erit recta per A

A transiens. Super qua corpus ad A accedens ita attrahetur vt ſit vis centripeta $\frac{1}{du}d.\frac{-du^2(b-gz)}{(du^2+dz^2)}$.

Corollarium 11.

887. Si corporis directio prima fuerit horizontalis tangens in B ad AB erit normalis; ideoque $b=f$. Hoc vero caſu celeritas in ſuperficie aequalis erit celeritati in proiectione; quare ſi fuerit i valor ipſius z, ſi eſt $u=f$; erit $b-gi=\frac{c^3}{f^2}$.

Corollarium 12.

888. Si praeterea vis centripeta in B aequalis fuerit vi centrifugae, curua BQC erit circulus, et propterea ipſa quoque curua in ſuperficie deſcripta, atque motus tam in ſuperficie quam in proiectione aequabilis. Sit vbi eſt $u=f$ et $z=i$, $dz=mdu$; erit ob $p=f$, et $u=f$ et $z=y$ in caſu, quo circulus deſcribitur, $2c^3=gmf^2$.

Corollarium 13.

889 Si ponatur $\pi:1$ vt peripheria ad diametrum erit circuli noſtri peripheria $=2\pi f$, quae diuiſa per celeritatem $\sqrt{\frac{c^3}{f^2}}$ i. e. $\sqrt{\frac{gmf}{2}}$, dat tempus vnius periodi in circulo, quod ergo erit $=\frac{2\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{gm}}$. Pendulum ergo integras oſcillationes his periodis iſochronas abſoluens erit $=\frac{f}{m}$ in eadem grauitatis hypotheſi.

Corollarium 14.

890. In ſuperficie ergo, quae generatur conuerſione curuae AM circa axem verticalem AL, Co-

corpus proiectum circulum radii LM describere potest eodem tempore, quo pendulum longitudinis $=$ subnormali LS integram oscillationem absoluit.

Corollarium 15.

891. Si ergo curua AM fuerit parabola omnes periodi per circulos horizontales in conoide parabolica aequalibus absoluentur temporibus; atque penduli, iisdem temporibus oscillationes integras peragentis longitudo aequabitur dimidiae parti parametri.

Scholion 1.

892. Quaecunque assumatur curua AM; si vis centripeta motus in proiectione versus A ex data formula definiatur, eaque aequalis ponatur vi centrifugae, atque coniungatur cum aequatione $b-gi = \frac{c^3}{f^2}$; prodibit $2c^2 = gmf^2$; hoc enim casu tam proiectio erit circulus, quam ipsa curua in superficie descripta. Quo vero hoc melius appareat ponatur $dz = q\,du$, prouenietque vis centripeta $=$ $\frac{2q\,dq(bu^2 - gzu^2 - c^3)}{u^2 du(1+q^2)^2} + \frac{2c^3q^2 + gqu^3}{u^3(1+q^2)}$. Iam ponatur $u = f$; $z = i$; et $bf^2 = gf^2 i + c^3$; atque $q = m$; erit vis centripeta $=$ $\frac{2c^3m^2 + gmf^3}{f^3(1+m^2)}$, aequalis posita vi centrifugae $\frac{zz}{f^3}$ dat $2c^3 = gmf^3$.

Exemplum.

893. Sit superficies conica circularis seu AM linea recta vtcunque inclinata ad axem AL; quare erit Tab. XVIII. Fig. 2, et 3.

erit $z=mu$ et $dz=mdu$. Vis ergo centripeta ad A tendens, quae faciet vt corpus libere in proiectione BQC moueatur, erit $=\frac{2c^3m^2+gmu^3}{u^3(1+m^2)}$. Haec ergo vis erit composita ex vi constante et vi reciproce cubis distantiarum a centro A proportionali. Si $c=o$, tum proiectio erit linea recta per A transiens, atque vis centripeta erit $=\frac{gm}{1+m^2}$ siue constans. Corpus ergo motu aequabiliter accelerato ad A accedet, motus vero in superficie conica congruet cum descensu vel ascensu super recta inclinata eritque pariter aequabiliter acceleratus. Sin autem proiectio fuerit curuilinea et tangens in B normalis ad AB, erit $i=mf$, atque $b-mf=\frac{c^3}{f^2}$, posito AB$=f$. Erit ergo hoc casu $b=\frac{c^3+mf^3}{f^2}$ atque si corpus in circulo horizontali reuoluitur, erit insuper $2c^3=gmf^3$. Quo ergo hoc accidat debet esse celeritas corporis debita altitudini $\frac{c^3}{f^2}=\frac{gmf}{2}$. Atque periodi in hoc circulo iisdem absoluentur temporibus, quibus penduli longitudinis $\frac{f}{m}$ integrae oscillationes. At si non fuerit $2c^3=gmf^3$, verum tamen $b=\frac{c^3+mf^3}{f}$, curua BQC habebit quidem in B tangentem ad AB normalem, sed proiectio haec non erit circulus. At si $2c^3$ proxime aequale fuerit ipsi gmf^3, curua quoque a circulo non multum discrepabit; habebit autem absides varias, in quibus tangens ad radium est perpendicularis. Harum absidum vero positio per prop. 91 Libr. praeced. determinatur. Quoniam enim vis centripeta est $\frac{2c^3m^2+gmu^3}{u^3(1+m^2)}$, si haec comparetur cum illa vi centripeta $\frac{P}{y^2}$ ob $y=u$, erit P$=$

$2c^3$

$\frac{2c^3m^2+gmu^3}{1+m^2}$, atque $\frac{dP}{P} = \frac{3gmu^2du}{2c^3m^2+gmu^3}$ atque $\frac{Pdy}{ydP} = \frac{2mc^3+gu^3}{3gu^3}$; ideoque poſito $u = f$, diſtabit quoque linea abſidum a praecedente abſide angulo $180\sqrt{\frac{2mc^3+gf^3}{3gf^3}}$ graduum. Quoniam autem proxime eſt $2c^3 = gmf^3$, erit angulus inter duas abſides interceptus $= 180\sqrt{\frac{m^2+1}{3}}$ graduum. Cum ergo $\frac{m^2+1}{3}$ ſemper ſit maius quam $\frac{1}{3}$ erit angulus inter duas abſides interceptus maior quam 103 grad. 55′.

Scholion 2.

894. Exemplum ſuperficiei ſphaericae hic non adiungo, ſed motus ſuper ea determinationi ſequentem propoſitionem deſtino, quia haec materia particulari pertractatione eſt digna. Si enim pendulum non ſecundum planum verticale impellitur, tum corpus in ſuperficie ſphaerae mouebitur, et vel circulos deſcribet vel alias curuas non parum elegantes, quemadmodum cuiuis experimentum inſtituenti innoteſcet. Caſus quidem, quo pendulum circulos abſoluit, a Cel. *Ioh. Bernoullio* in Act. Lipſ. A. 1719 iam eſt expoſitus ſub titulo motus turbinatorii. At ſi curua non fuerit circulus, nemo quantum ſcio, hunc penduli motum vel conſiderauit vel determinauit.

DEFINITIO 6.

895. Motus turbinatorius vocatur penduli non in plano verticali impulſi motus. *Hoc ergo caſu pendulum non in eodem plano verticali mouetur, ſed curuam*

uam quandam describet in superficie sphaerica, cuius radius est ipsa pendulo longitudo, sitam.

PROPOSITIO 99.

Problema.

Tab. XVIII. Fig. 2. et 3. 896. *Penduli ad motum turbinatorium incitati, determinare motum et lineam curuam, quam in superficie sphaerica describit.*

Solutio.

Quia corpus motum pendulo est alligatum in superficie sphaerica mouebitur, cuius radius est longitudo penduli. Sit haec longitudo seu radius sphaerae $=a$, erit $z=a-\sqrt{(a^2-u^2)}$ ex natura circuli AM. Erit ergo $q=\frac{u}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$ et $dq=\frac{a^2du}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}$ ideoque $\frac{2qdq}{u^2du}=\frac{2a^2}{u(a^2-u^2)^2}$. Ex his inuenitur vis centripeta ad A tendens, quae facit, vt corpus in proiectione BQC libere moueatur, $=\frac{2bu-2gau+3gu\sqrt{(a^2-u^2)}}{a^2}$. Atque pro curua BQC haec habebitur aequatio $p^2=\frac{a^2c^3}{c^3+(b-ga)(a^2-u^2)+g(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}$, quae ad proiectionem BQC construendam sufficit. Sit tangens in B perpendicularis ad radium AB, id quod semper alicubi contingere debet, nisi proiectio sit linea recta, quia vis centripeta decrescit, decrescente u. Ponatur $AB=f$; erit $i=a-\sqrt{(a^2-f^2)}$, atque $b-ga$ $+g\sqrt{}$

$+ g\sqrt{(a^2-f^2)} = \frac{c^3}{f^2}$. Si praeterea fuerit $2c^3 = \frac{gf^4}{\sqrt{(a^2-f^2)}}$, corpus in circulo reuoluetur, cuius radius eſt f, celeritate debita altitudini $\frac{c^3}{f^2} = \frac{gf^2}{2\sqrt{(a^2-f^2)}}$. Penduli vero integras oſcillationes iisdem temporibus abſoluentis longitudo eſt $= \sqrt{(a^2-f^2)}$. Sin autem non fuerit $2c^3 = \frac{gf^4}{\sqrt{(a^2-f^2)}}$, differentia vero ſit valde exigua; curua BQC a circulo non multum diſcrepabit. Cuius curuae, quo poſitiones abſidum inueniantur, erit iuxta prop. 91. Libri praeced. $y = u$ et $P = \frac{u^4}{a^2}(2b - 2ga + 3g\sqrt{(a^2-u^2)})$. Hinc eſt $\frac{dP}{P} = \frac{4du}{u} - \frac{3gudu}{(2b-2ga)\sqrt{(a^2-u^2)}+3g(a^2-u^2)}$, atque $\frac{ydP}{Pdy} = 4 - \frac{3gu^2}{(2b-2ga)\sqrt{(a^2-u^2)}+3g(a^2-u^2)}$. Quia curua fere eſt circulus, ponatur $u = f$, atque $2b - 2ga = \frac{gf^2}{\sqrt{(a^2-f^2)}} - 2g\sqrt{(a^2-f^2)} = \frac{3gf^2-2ga^2}{\sqrt{(a^2-f^2)}}$, quo facto prodibit $\frac{ydP}{Pdy} = 4 - \frac{3f^2}{a^2}$. Hinc ſequitur interuallum inter duas abſides eſſe angulum $\frac{180a}{\sqrt{(4a^2-3f^2)}}$ graduum. Tanto ſcilicet angulo locus, in quo pendulum ab axe maxime diſtat, diſſitus eſt a loco, in quo pendulum axi eſt proximum. Q. E. I.

Corollarium 1.

897. Quo igitur pendulum $AB = a$ motu turbinatorio circulum BDCE deſcribat, oportet vt eius celeritas debita ſit altitudini $\frac{g . BO^2}{2 . AO}$. Tab. XVIII Fig. 4.

Corollarium 2.

898. Longitudo vero penduli, quod oſcillationes minimas integras eodem tempore abſol-

uit, quo periodus in circulo BDCE conficitur, est $= AO$.

Corollarium 3.

899. Tempora ergo, quibus diuersi circuli motu turbinatorio a pendulo AB percurruntur, sunt in subduplicata ratione altitudinum AO.

Corollarium 4.

900. Quo igitur pendulum longitudinis a circulum horizontalem maximum conficiat, cuius radius est a, celeritas infinite magna requiritur; atque quaeque periodus tempore infinite paruo absoluitur.

Corollarium 5.

901. Si radius circuli BO fuerit valde paruus respectu penduli $AB = a$, congruent periodi motus turbinatorii cum oscillationibus integris eiusdem penduli.

Corollarium 6.

902. Si curua descripta non fuerit circulus, sed figura proxima, atque BO valde paruum; erit angulus inter duas absides 90°, seu rectus.

Corollarium 7.

903. Hoc vero casu curua a corpore descripta erit ellipsis centrum habens in A. Quod ex

vi centripeta colligitur, quae tum ipsis distantiis fit proportionalis.

Corollarium 8.

904. Quo maior autem est radius BO; eo maior quoque erit angulus inter duas absides interceptus. Atque si fiat BO$=$BA, erit hic angulus 180°.

Corollarium 9.

905. Si angulus BAO fuerit 30. grad. erit BO $= \frac{1}{2}$ BA seu $f = \frac{1}{2}a$. Angulus ergo inter duas absides interceptus erit $\frac{360}{\sqrt{13}}$ graduum seu 99°, $50'$. Proiectionis ergo in plano horizontali haec erit figura *abcdefghik* etc. in qua absides summae sunt in *a*, *c*, *e*, *g*, *i*, et imae in *b*, *d*, *f*, *h*, *k*. Fig. 5.

Corollarium 10.

906. In hac igitur figura linea absidum mouetur in consequentia; singulis enim periodis circiter 39° progredietur in consequentia.

Corollarium II.

907. Sin autem ille angulus BAO minor fuerit quam 30. graduum; tum minor etiam erit absidum progressio. Quae quo pro quouis angulo BAO statim cognoscatur, fractionem $\frac{a}{\sqrt{(4g^2-3f^2)}}$

in

in seriem resoluo, quae erit sequens, $\frac{1}{2} + \frac{3f^2}{16a^2} + \frac{27f^4}{256a^4} +$ etc. Vna ergo periodo linea absi- promouetur angulo $\frac{135f^2}{a^2}$ graduum, q. pr. si f valde est paruum.

Corollarium 12.

908. Ex his apparet promotionem lineae absidum in singulis periodis proxime esse in duplicata ratione sinus anguli BAO.

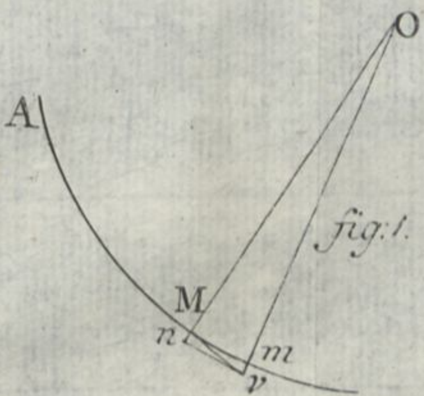


fig: 1.

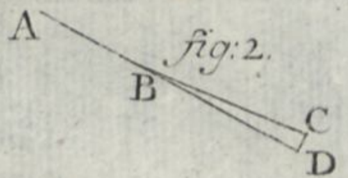


fig: 2.

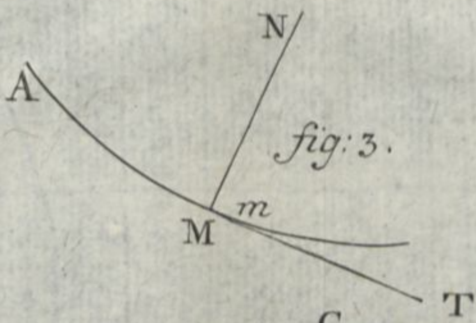


fig: 3.

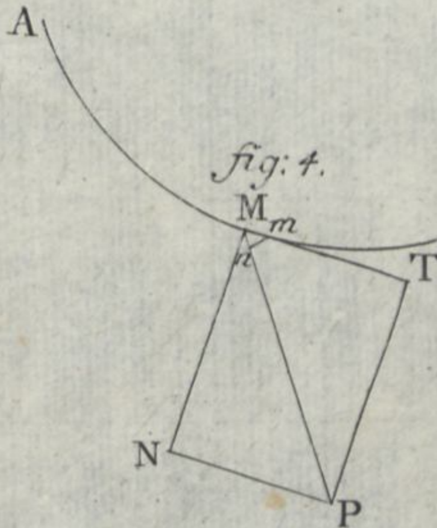


fig: 4.

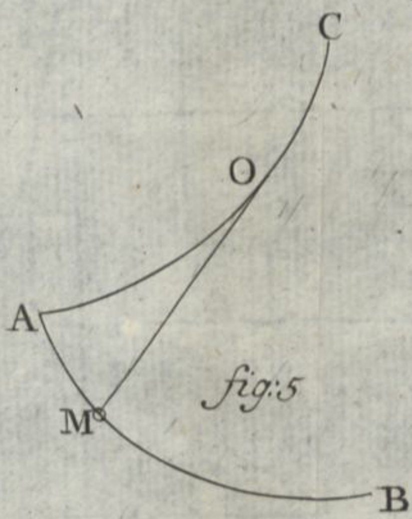


fig: 5

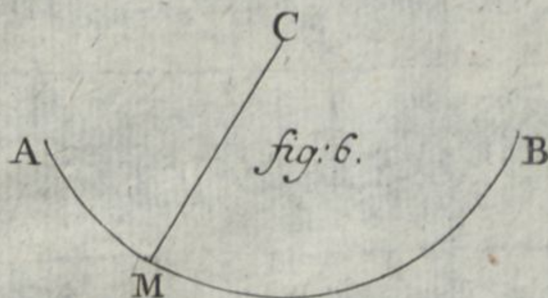


fig: 6.

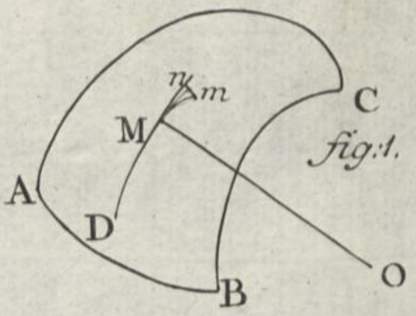


fig:1.

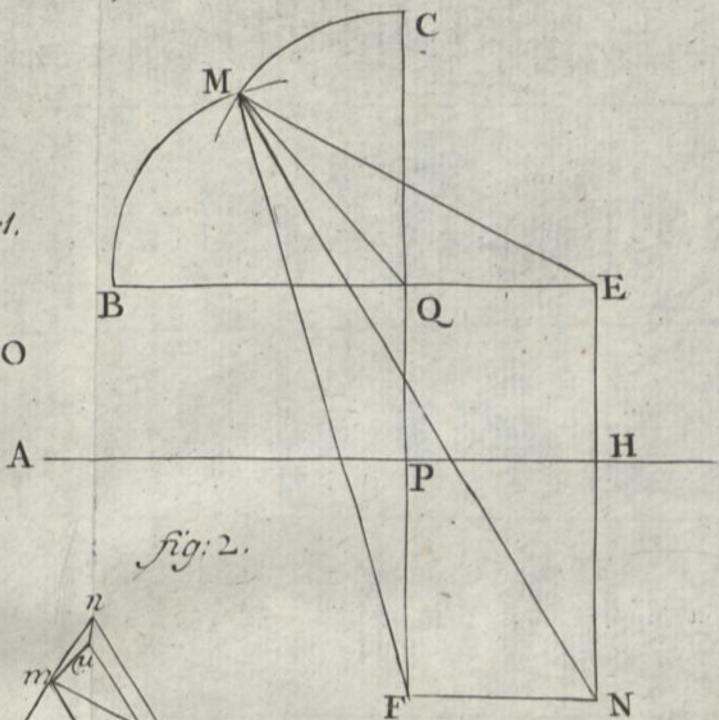


fig: 2.

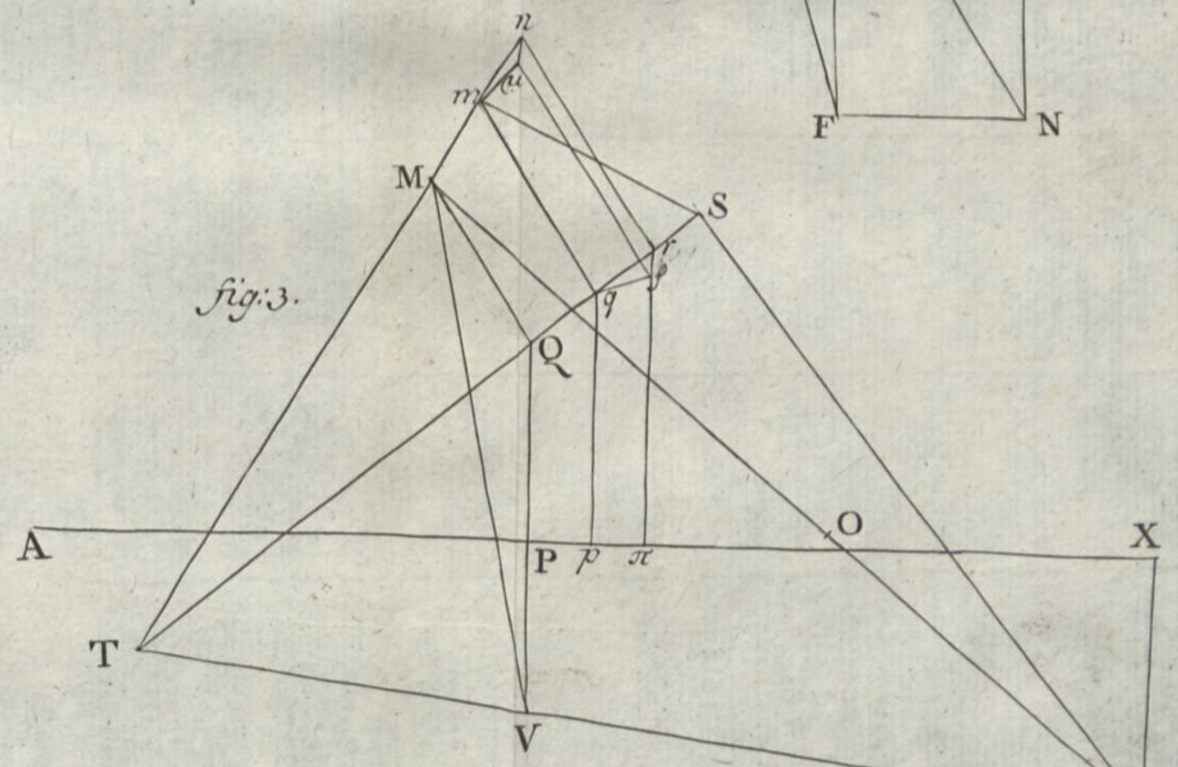


fig:3.

Tom:II. Tab:II

fig:1.

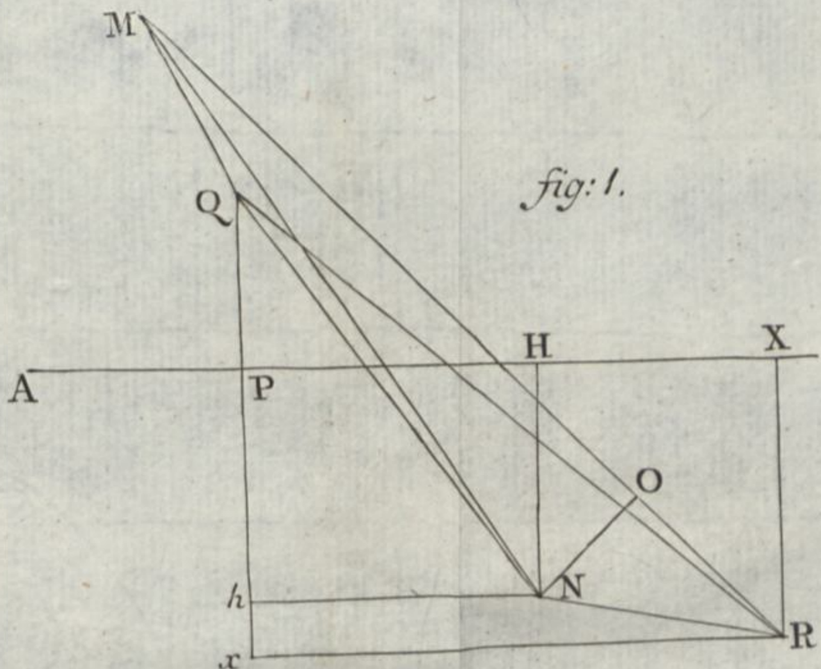


fig:2.

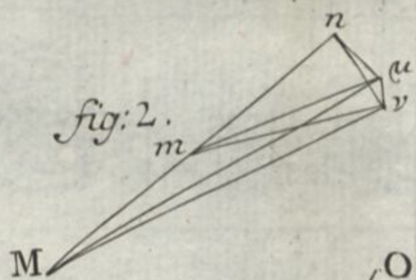


fig:3.

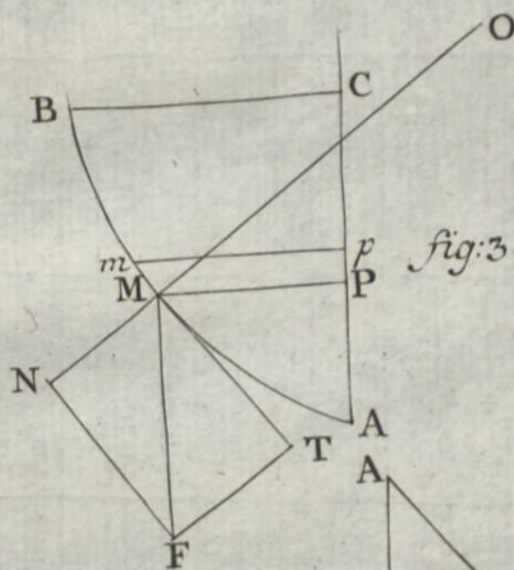


fig:4.

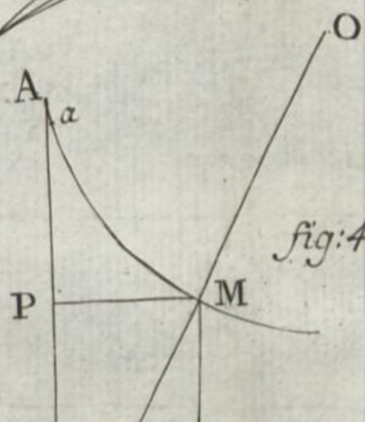
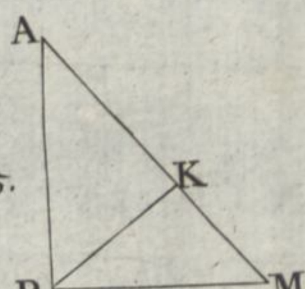


fig:5.



Tom:II. Tab:III.

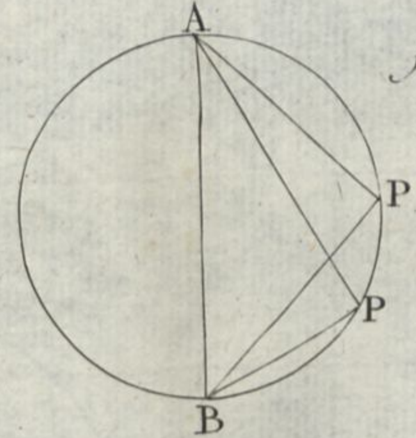


fig: 1.

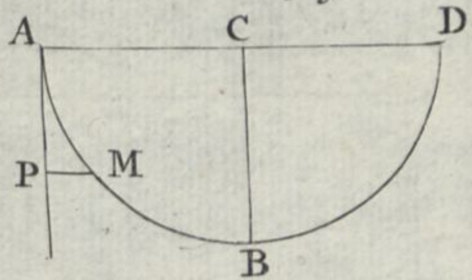


fig: 2.

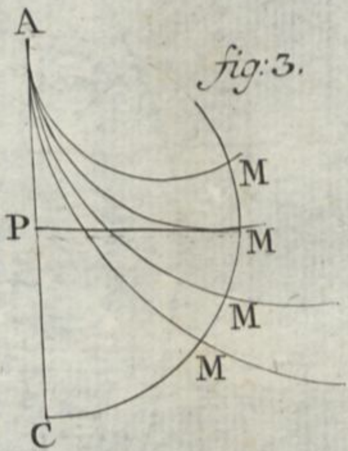


fig: 3.

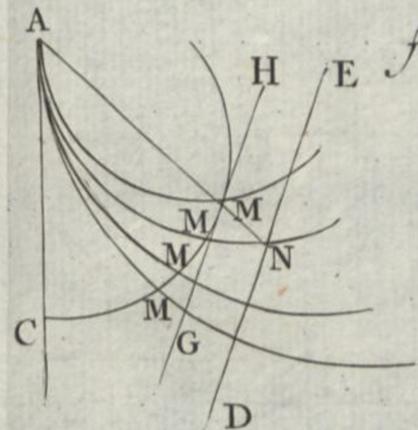


fig: 4.

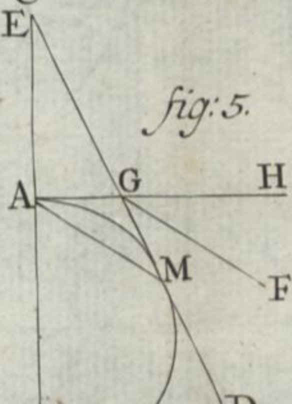


fig: 5.

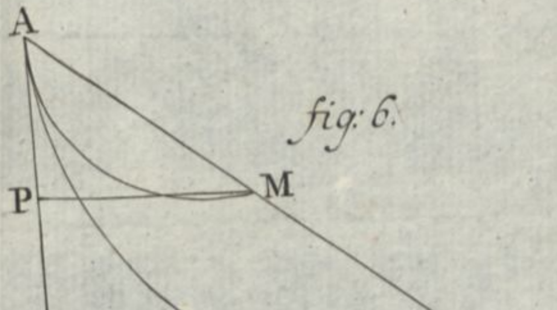


fig: 6.

fig:1.

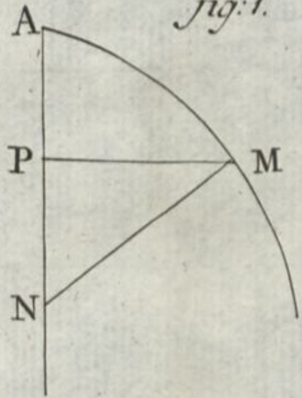


fig:2.

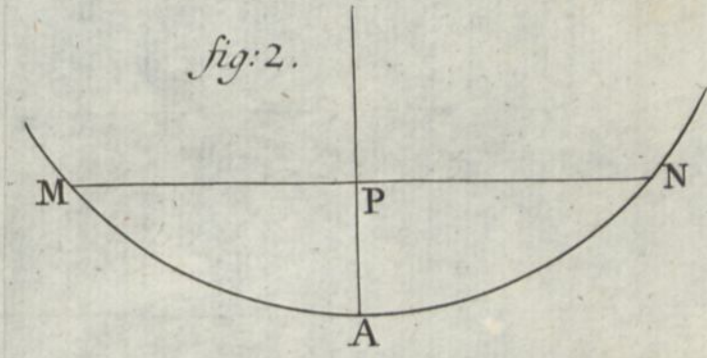


fig:3.

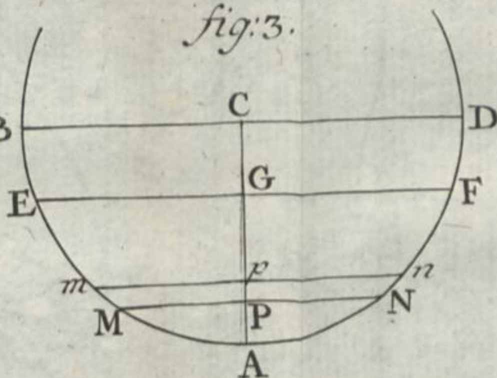
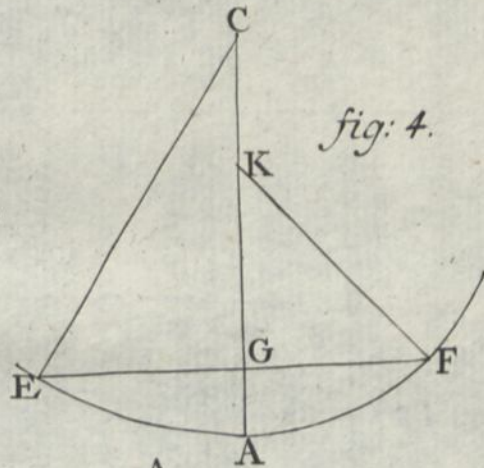


fig: 4.



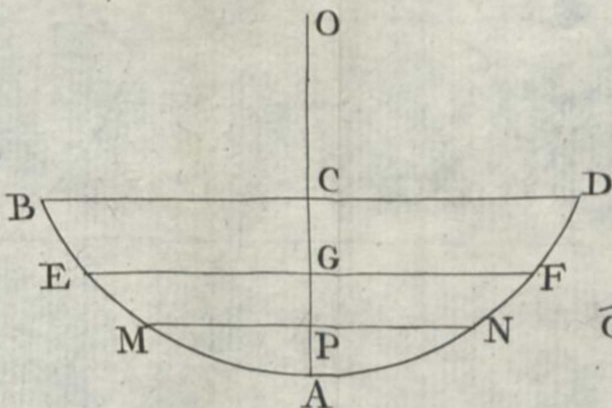
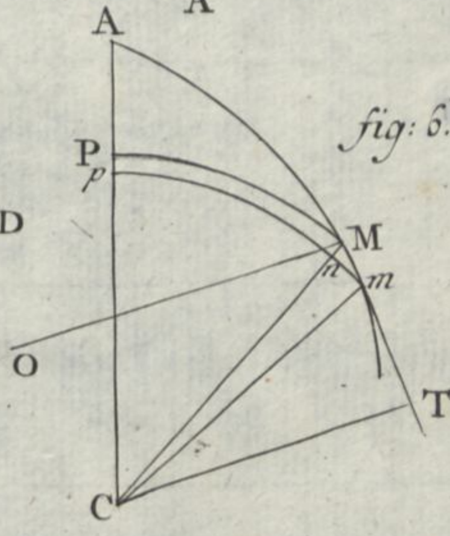


fig:5.

fig: 6.



Tom:II.Tab: V.

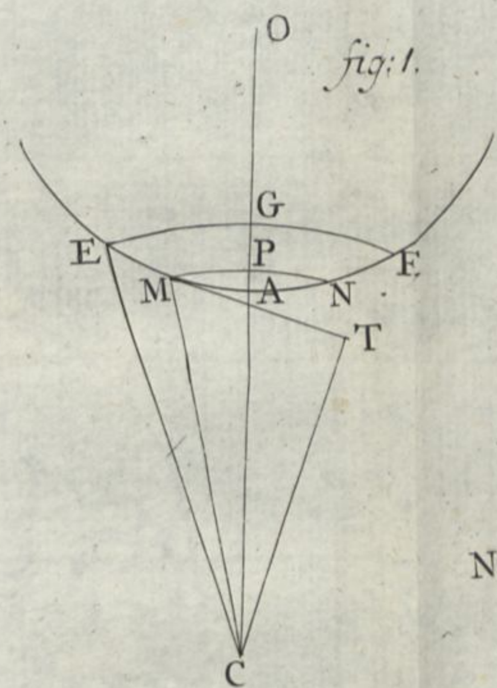


fig: 1.

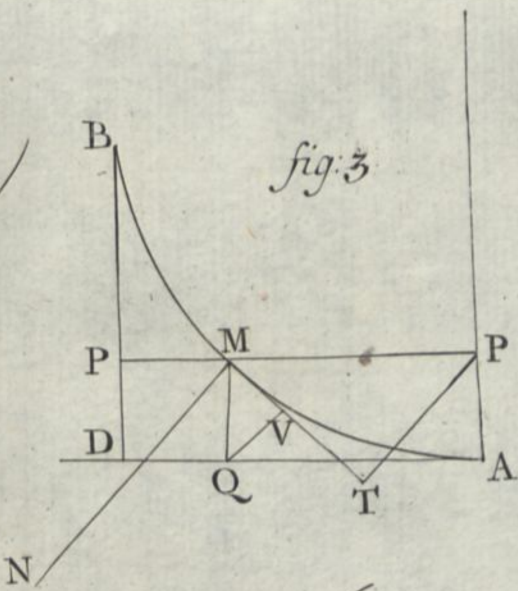


fig: 3.

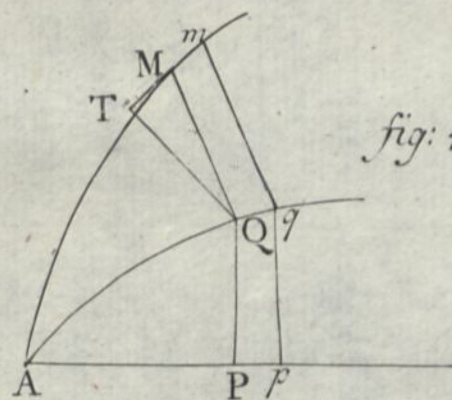


fig: 4.

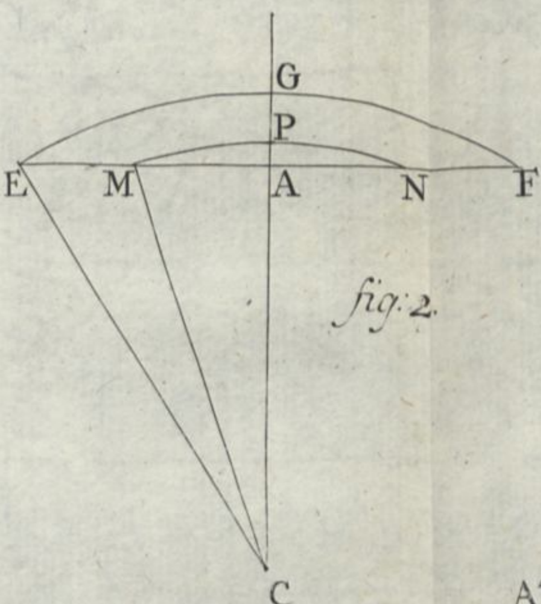


fig: 2.

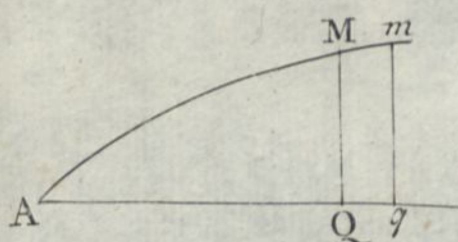


fig: 5.

Tom: II. Tab: VI.

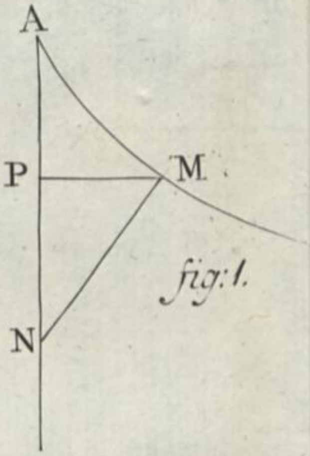


fig:1.

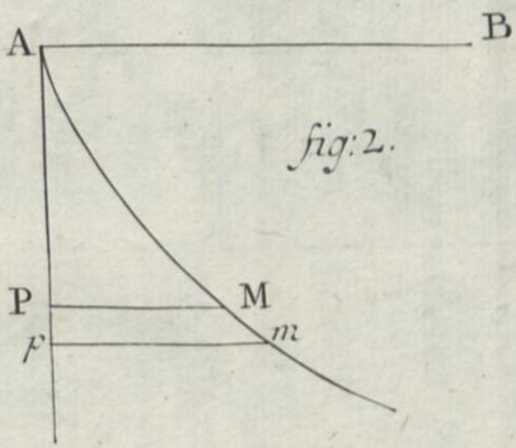


fig:2.

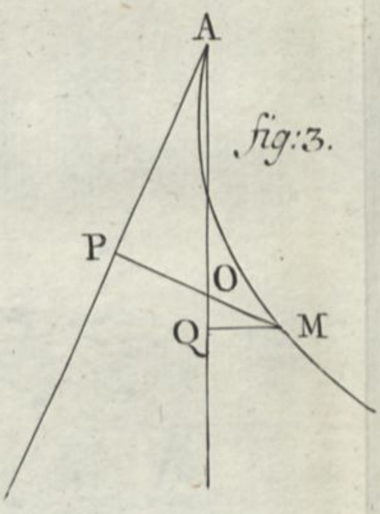


fig:3.

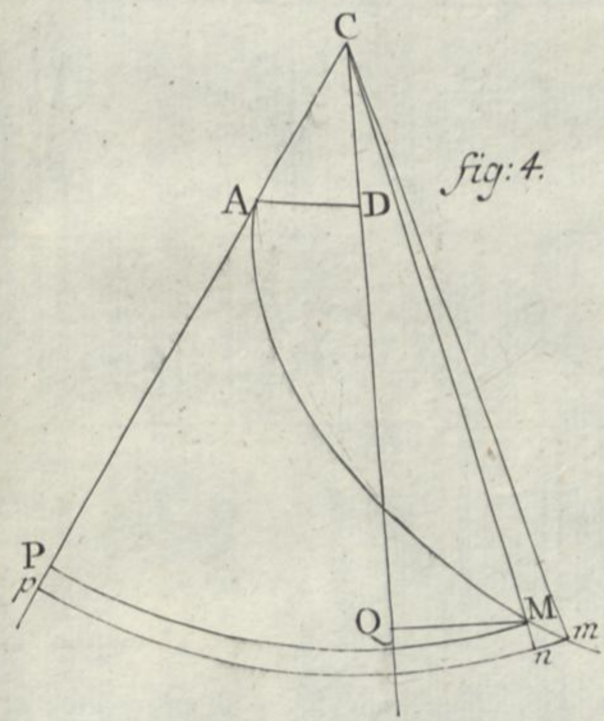


fig:4.

Tom:II. Tab: VII.

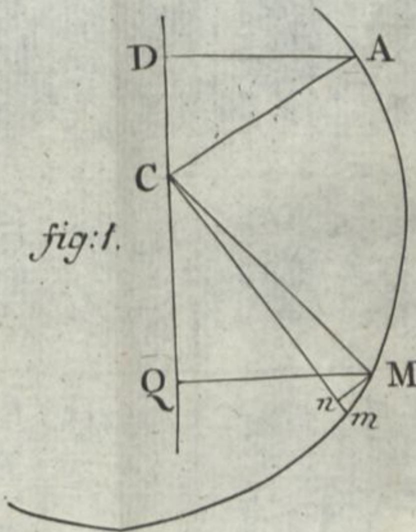


fig:1.

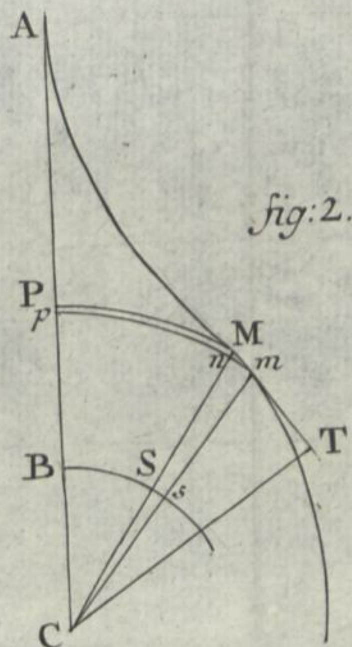


fig:2.

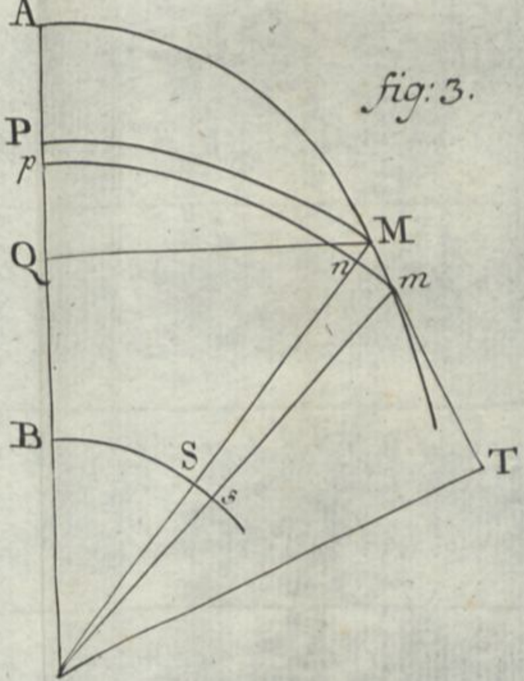


fig:3.

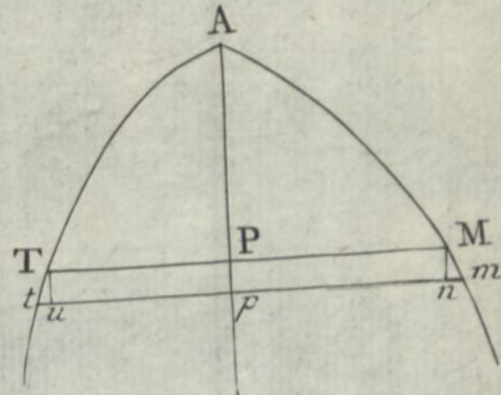


fig:4.

Tom:II.Tab:VIII.

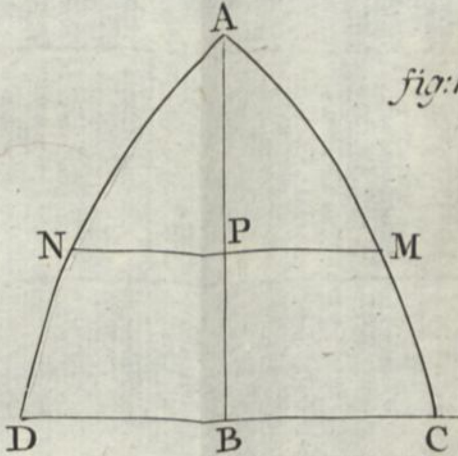


fig:1.

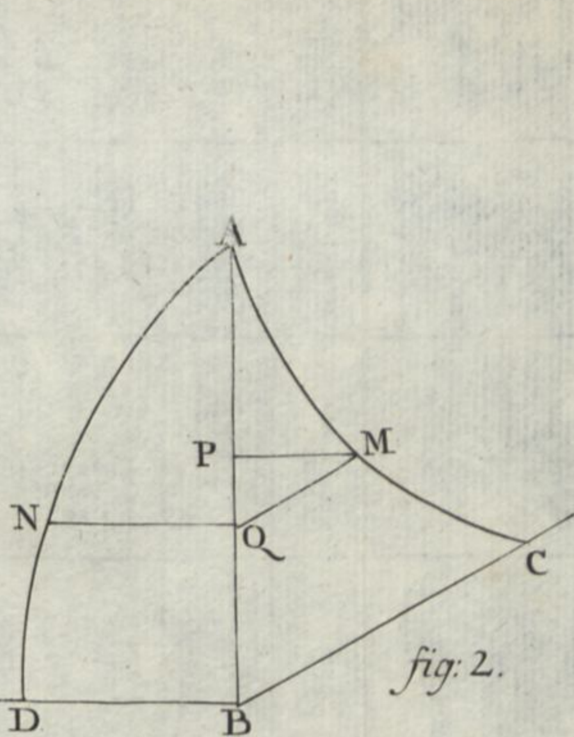


fig: 2.

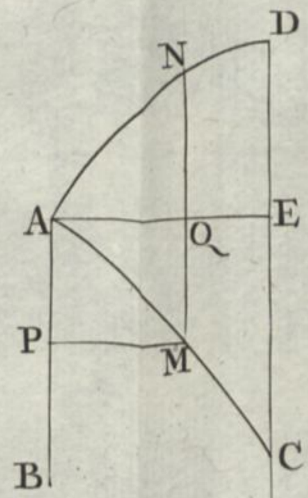


fig:3.

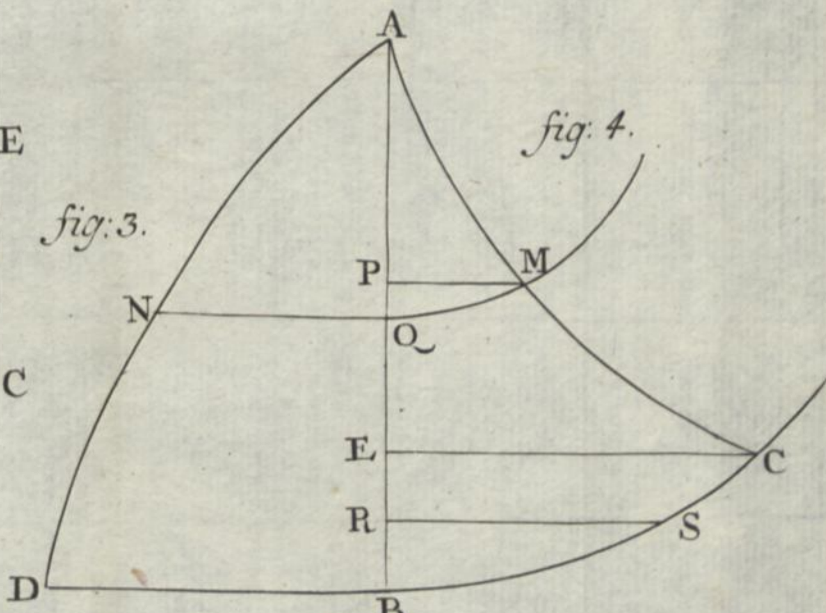


fig: 4.

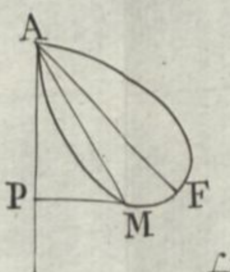


fig: 5.

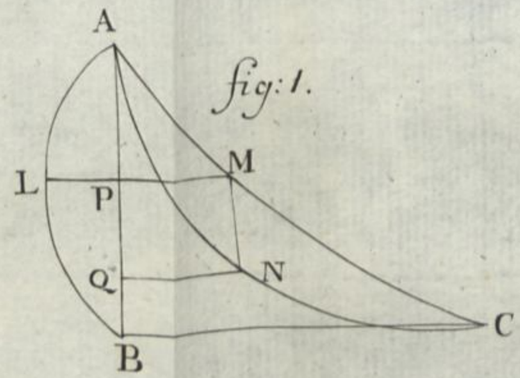


fig: 1.

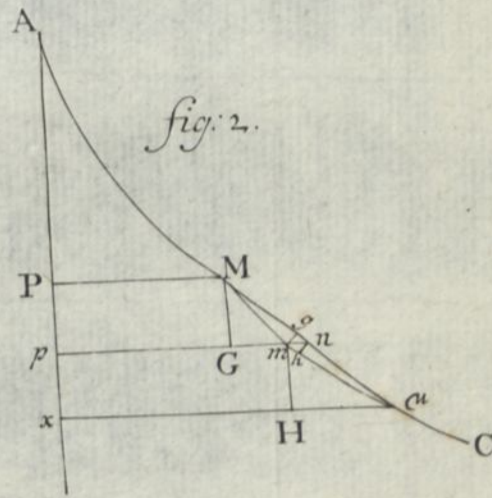


fig: 2.

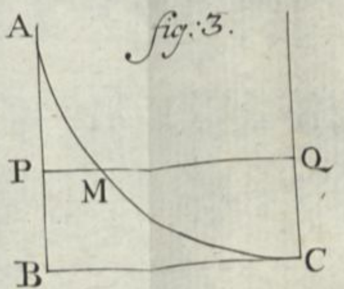


fig: 3.

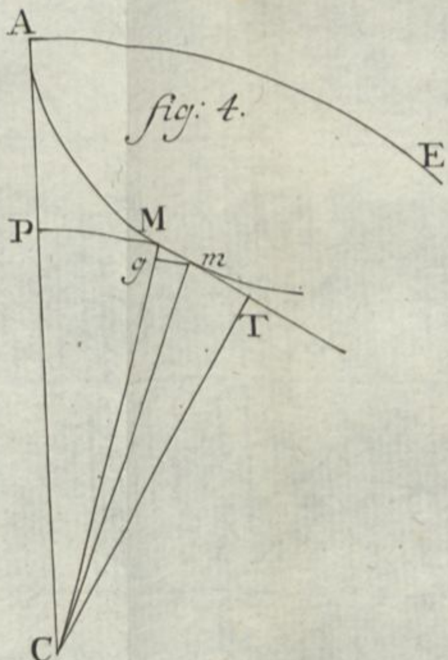


fig: 4.

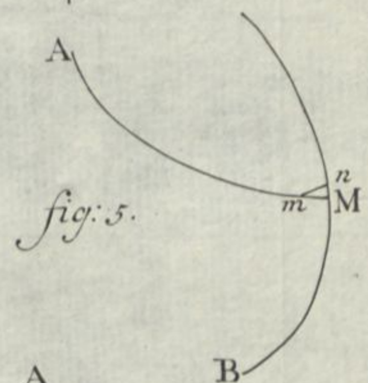


fig: 5.

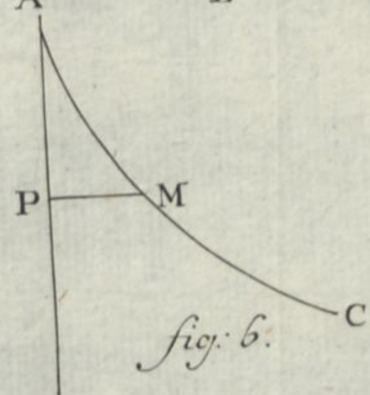


fig: 6.

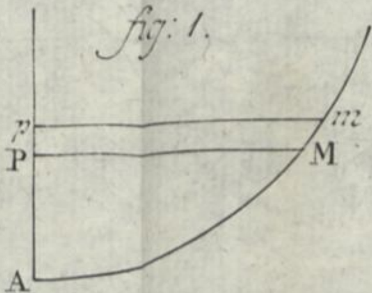


fig: 1.

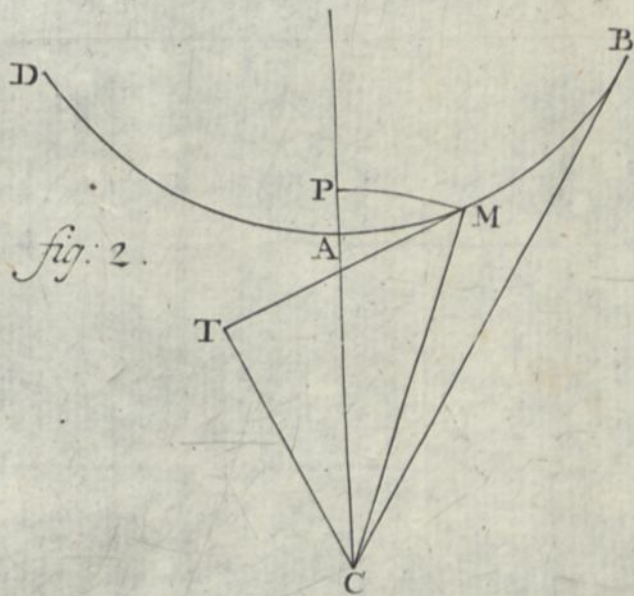


fig: 2.

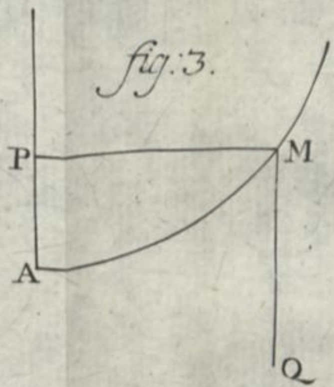


fig: 3.

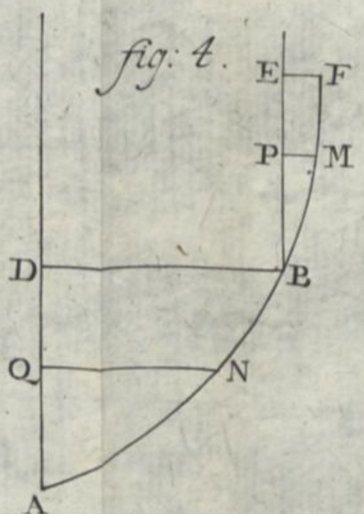


fig: 4.

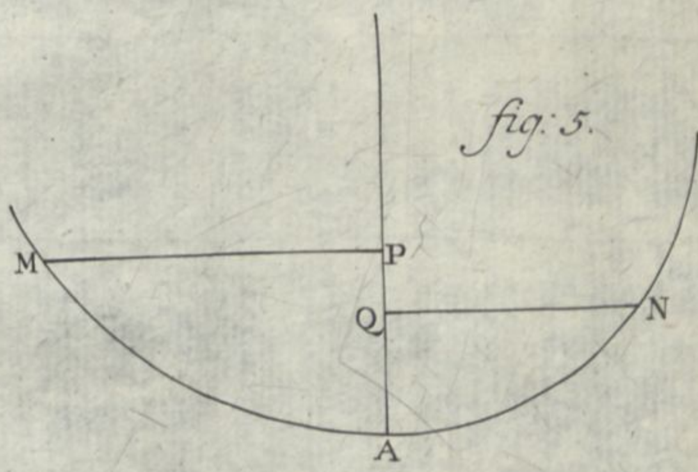


fig: 5.

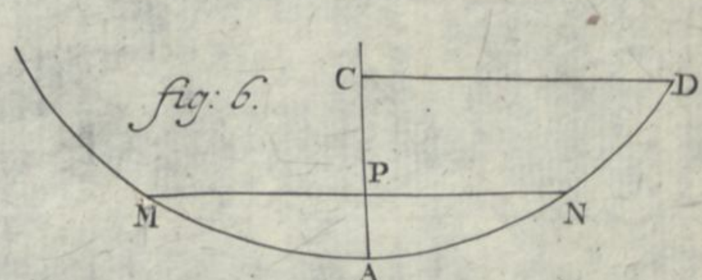


fig: 6.

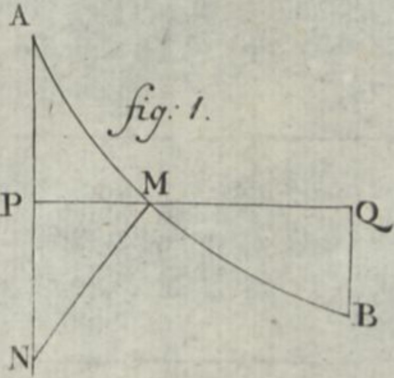


fig: 1.

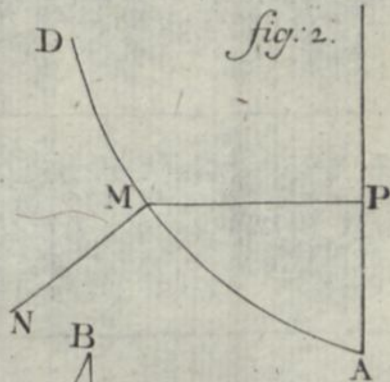


fig: 2.

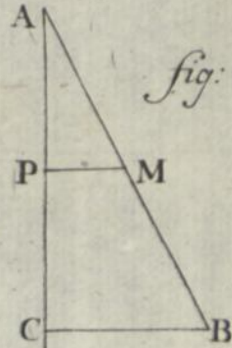


fig: 3.

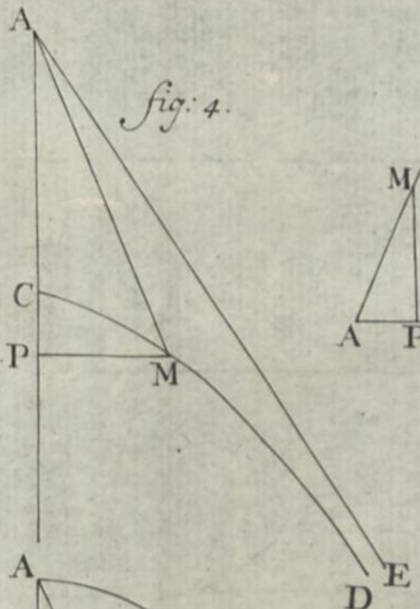


fig: 4.

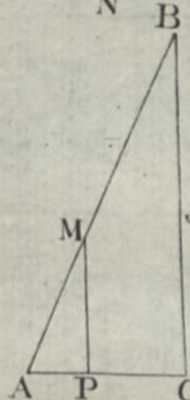


fig: 6

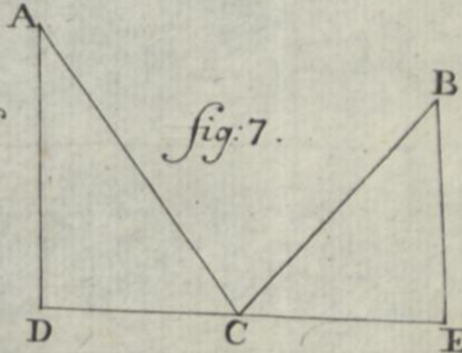


fig: 7.

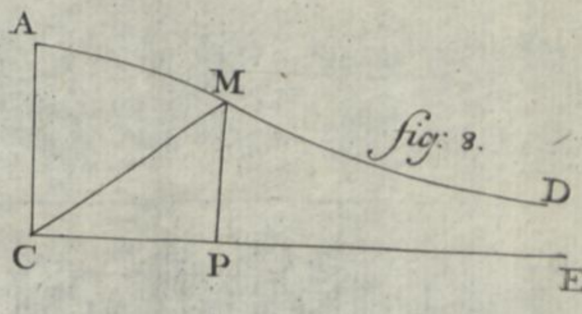


fig: 8.

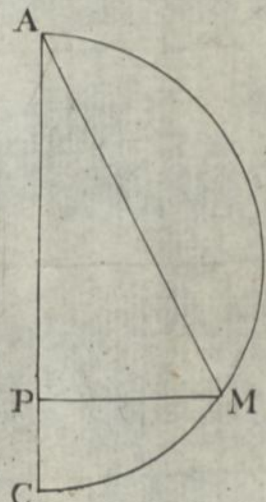


fig: 5.

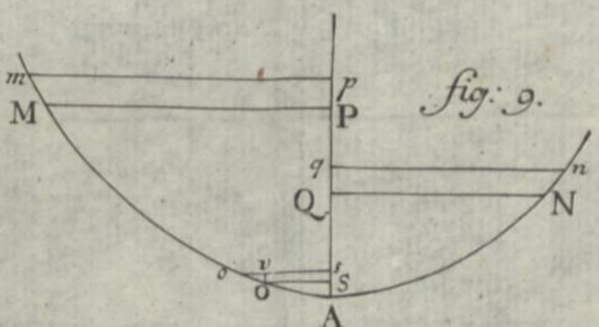
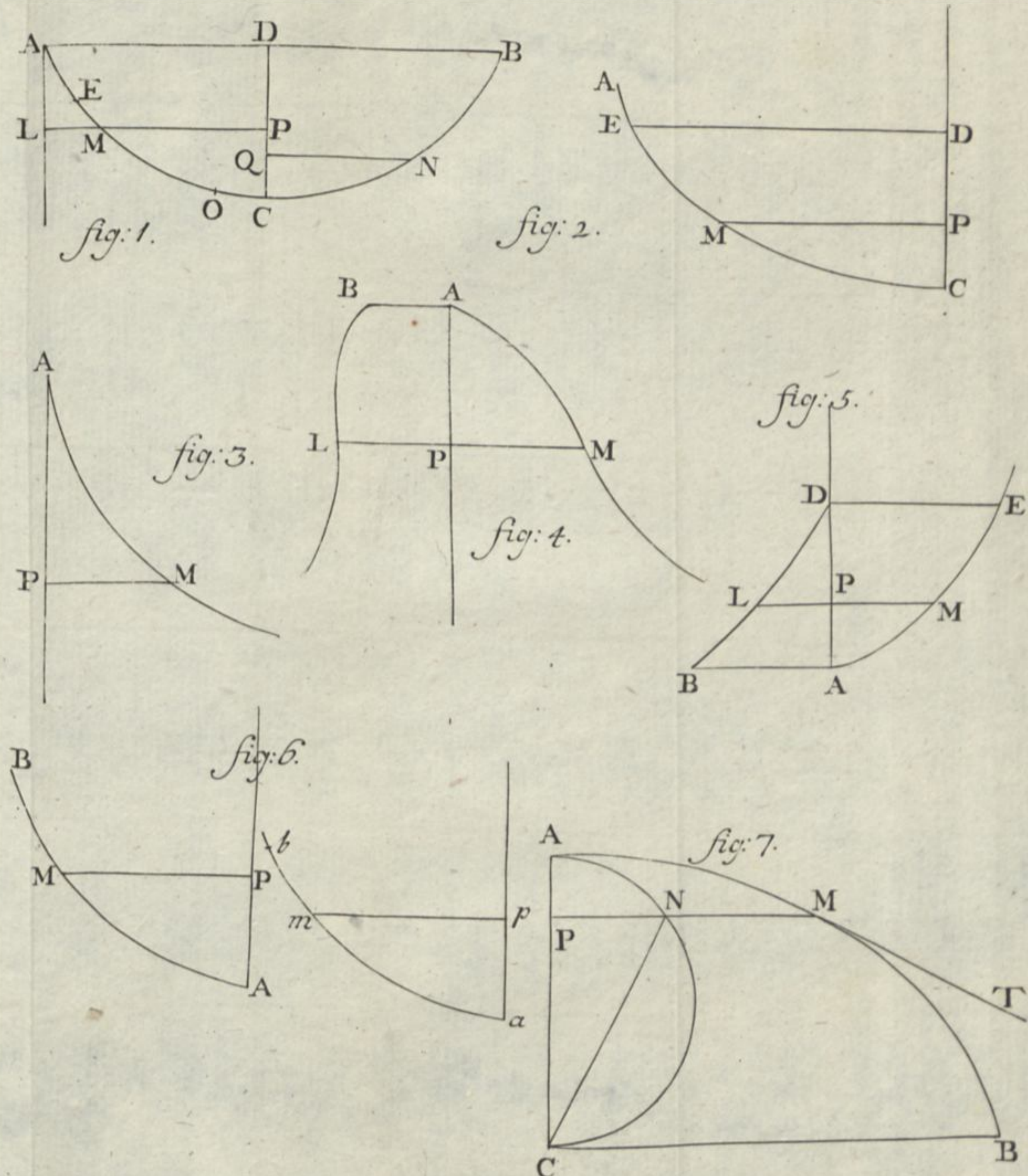
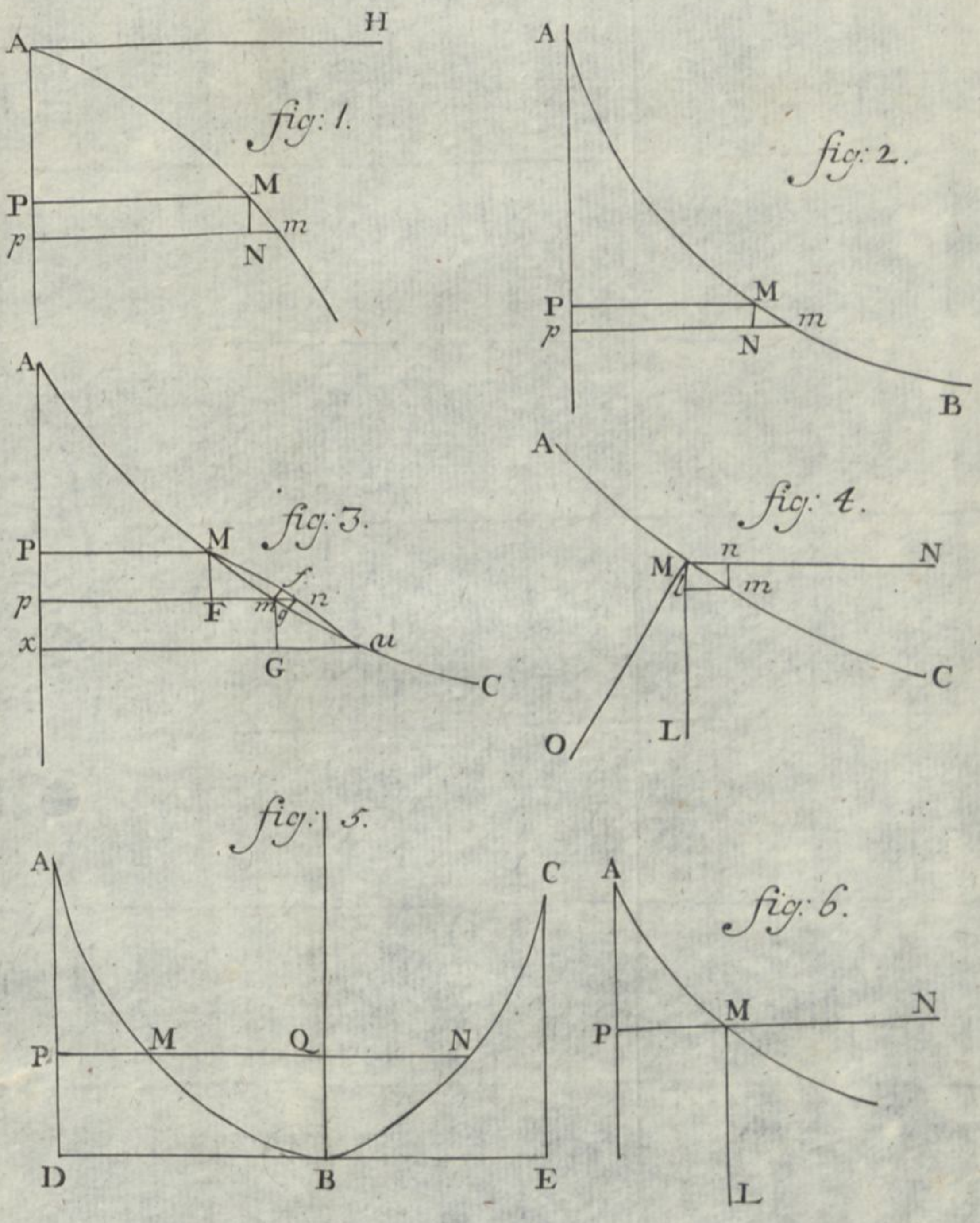


fig: 9.

Tom: II. Tab: XII.



Tom: II. Tab: XIII.



Tom: II. Tab: XIV.

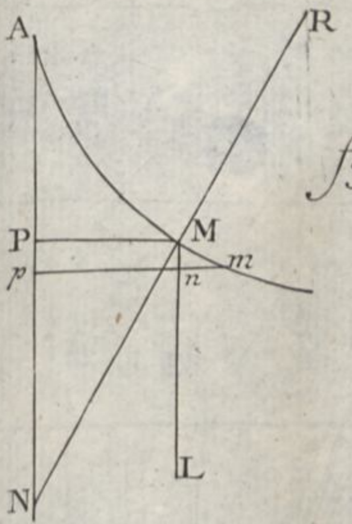


fig: 1.

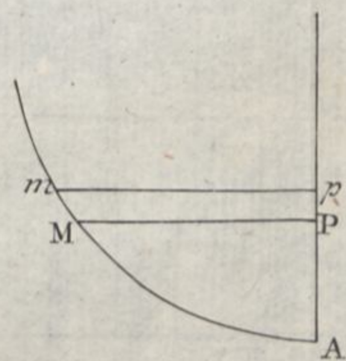


fig: 2.

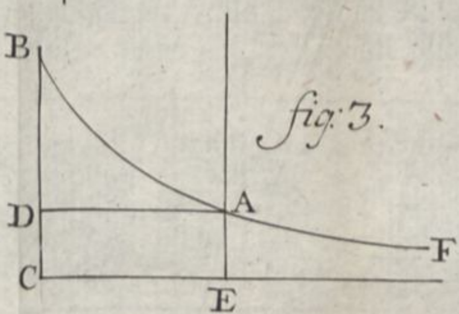


fig: 3.

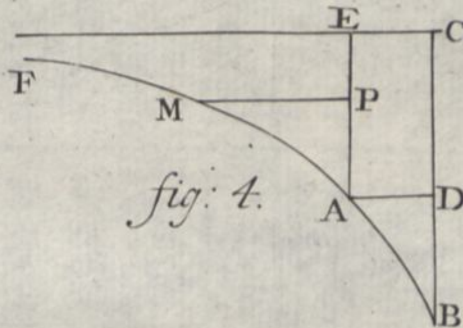


fig: 4.

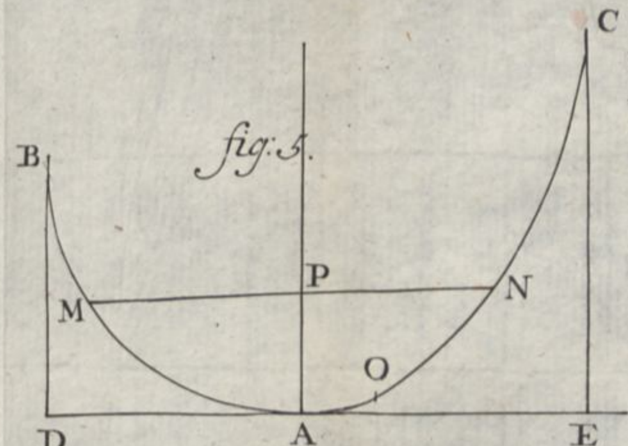


fig: 5.

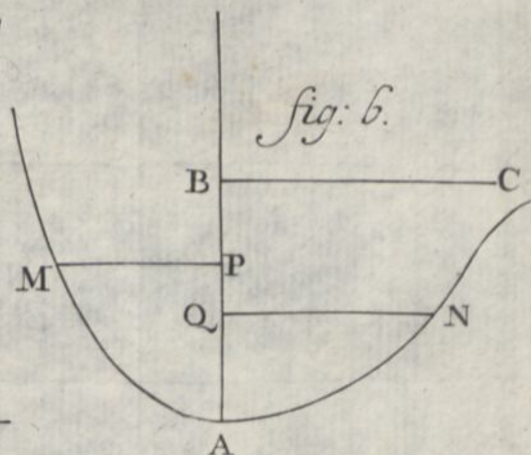


fig: 6.

Tom: II. Tab: XV.

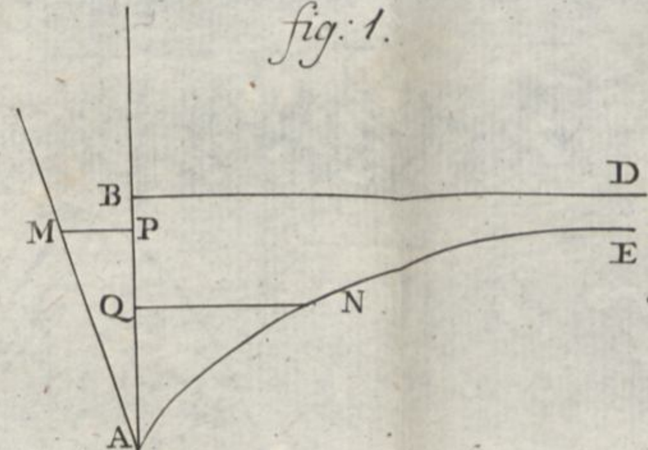


fig: 1.

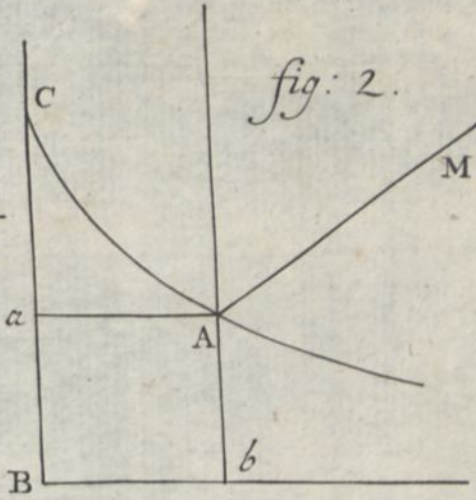


fig: 2.

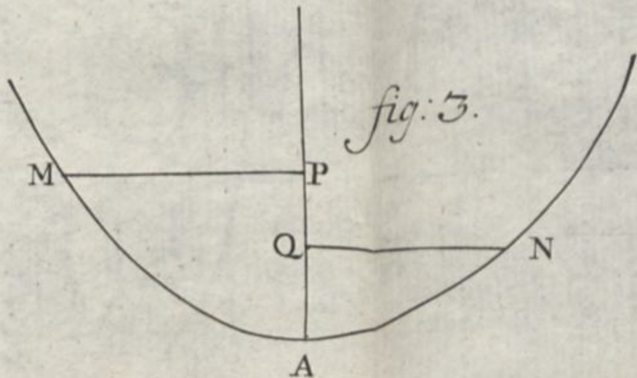


fig: 3.

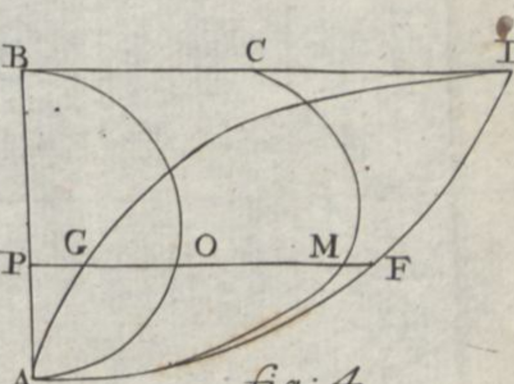


fig: 4.

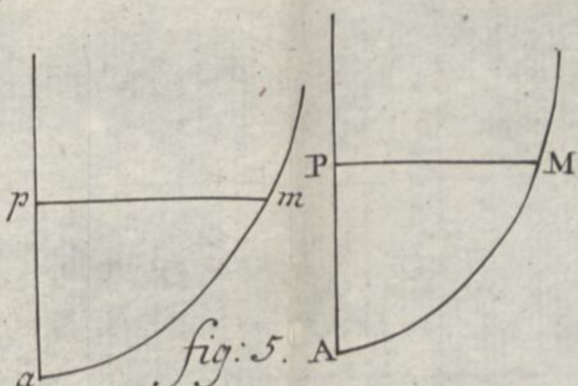


fig: 5.

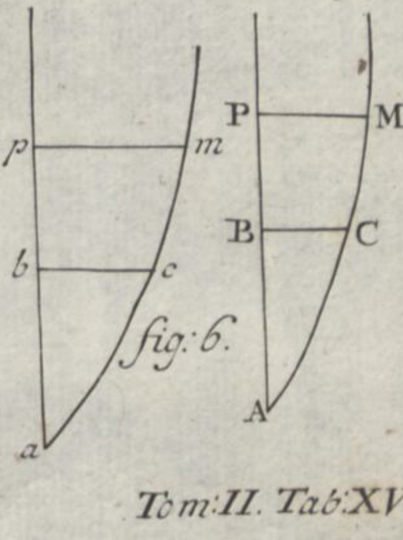


fig: 6.

Tom: II. Tab: XVI

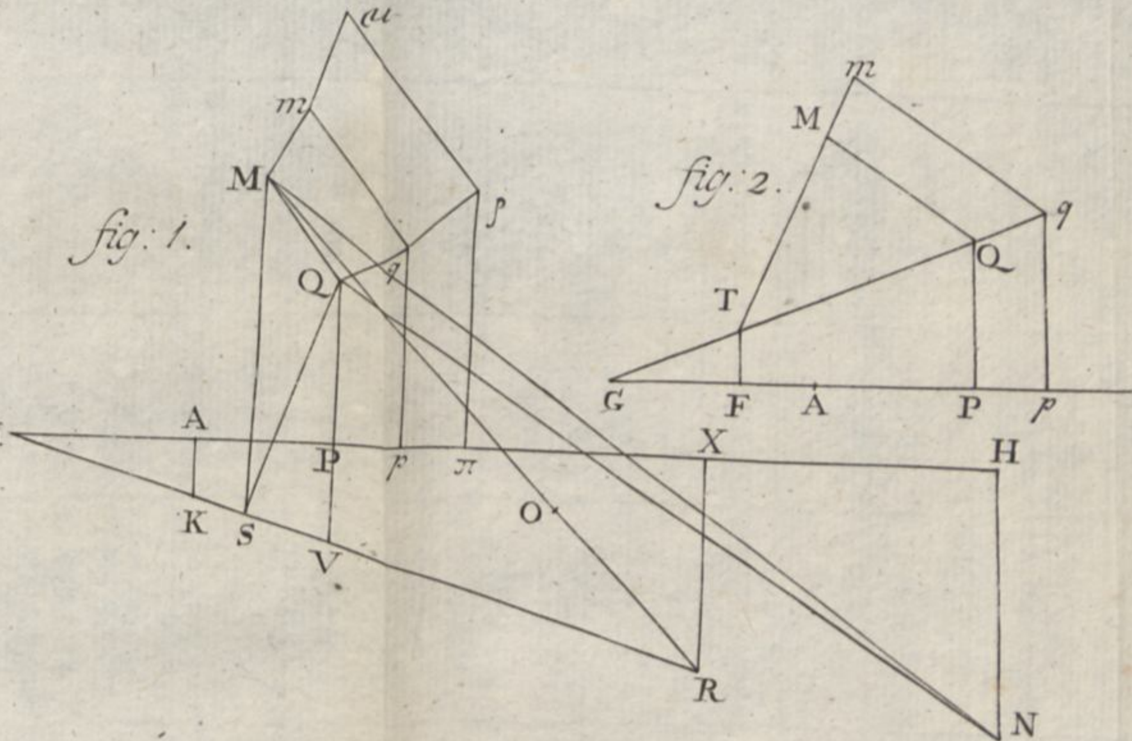


fig: 1.

fig: 2.

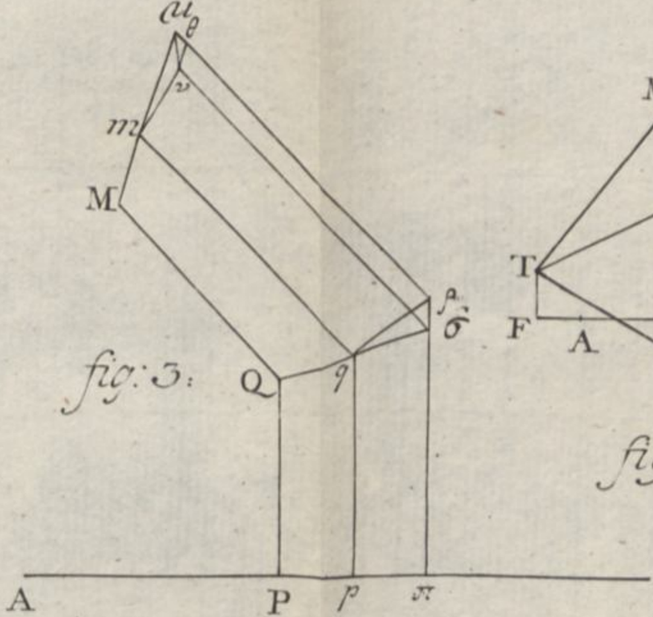


fig: 3.

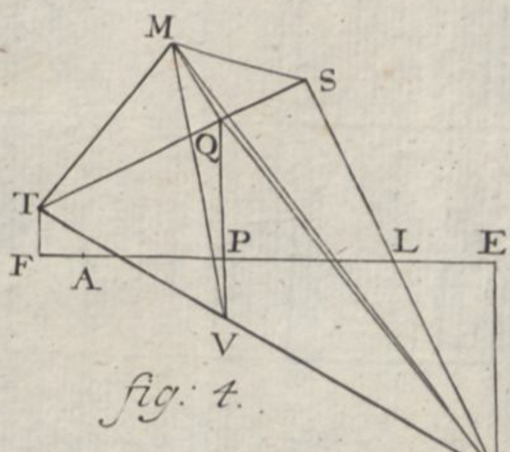


fig: 4.

Tom:II.Tab:XVII

fig: 1.

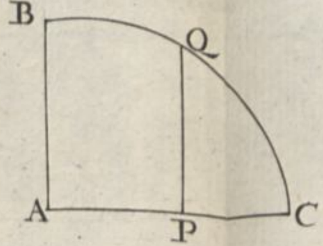


fig: 2.

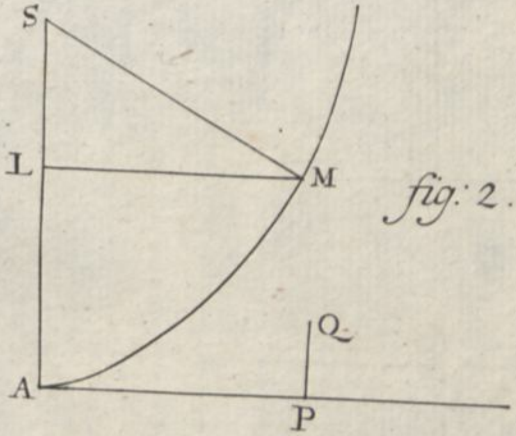


fig: 3.

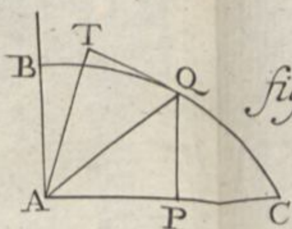


fig: 4.

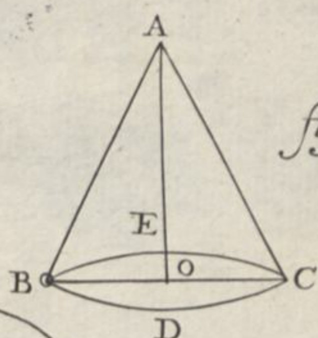


fig: 5.