VORLESUNGEN ÜBER DIE PRINZIPE DER MECHANIK

VON

LUDWIG BOLTZMANN
WEIL. PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK
A. D. UNIVERSITÄT WIEN

I. TEIL

DIE PRINZIPE, BEI DENEN NICHT AUSDRÜCKE NACH DER ZEIT INTEGRIERT WERDEN, WELCHE VARIATIONEN DER KOORDINATEN ODER IHRER ABLEITUNGEN NACH DER ZEIT ENTHALTEN

DRITTER ABDRUCK

MIT 16 FIGUREN

1922

LEIPZIG · VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

Vorwort.

Bring' vor, was wahr ist;
Schreib' so, dass es klar ist
Und verficht's, bis es mit dir gar ist!

Wenn ich nun wieder statt des zweiten Theiles der Gastheorie den ersten der Mechanik publicire, so will ich das nicht mit dem Hinweise auf berühmte Muster für die Reihenfolge des Erscheinens der Bände entschuldigen. Das kam vielmehr so. Im zweiten Theile der Gastheorie häuften sich die nothwendigen Einschaltungen über Mechanik so, dass sie erst einen ganzen Paragraph, dann einen Abschnitt auszufüllen schienen und ich mich zuletzt entschloss, ein ganzes Buch daraus zu machen, indem ich noch ein Vorlesungsheft hinzunahm, das ich in den vorigen Ferien für Vorlesungen über Mechanik im folgenden Wintersemester ausgearbeitet hatte. Als ich mir aber mein Auditorium betrachtete, glaubte ich die ganze Methode desselben mit einer einfacheren vertauschen zu sollen. Dafür nahm ich den Inhalt des betreffenden Heftes, damit doch meine Mühe nicht ganz verloren sei, in das vorliegende Buch auf, welches ich also als Vorlesungen bezeichnen könnte, die ich an der Wiener Universität nicht gehalten habe.

Man sprach in neuerer Zeit viel über die Dunkelheiten in den Principien der Mechanik und suchte sie dadurch zu beseitigen, dass man der Mechanik ein ganz neues, fremdartiges Gewand gab. Ich habe hier den entgegengesetzten Weg eingeschlagen und versucht, ob sich nicht bei möglichst treuer Darstellung der Mechanik in ihrer alten classischen Form die Dunkelheiten ebenfalls vermeiden liessen, theils indem ich gewisse Dinge, die man früher überging oder als selbstverständlich nur obenhin berührte, ausführlich behandelte, theils indem ich jede berechtigte Kritik sorgfältig berücksichtigte. Besonders kann ich da den Bemerkungen Hertz' über den Ideenreichthum der einschlägigen Schriften Mach's nur aufs Wärmste zustimmen, wenn ich auch keineswegs überall derselben Ansicht bin, wie Mach.

Gerne hätte ich mich der Bezeichnungsweise der Quaternionen angeschlossen; doch wäre dies meinem Bestreben, alles dem deutschen Publikum fremdartige auszuschliessen, zuwidergelaufen.

Der zweite Theil der Vorlesungen über Mechanik, der erst die gastheoretisch wichtigen Principe bringen wird, soll in kürzester Zeit und dann, sobald es mir möglich sein wird, auch der zweite Theil der Gastheorie erscheinen. Ein dritter Theil der Mechanik soll die Elasticitätslehre und Hydrodynamik enthalten, und so wieder zur Gastheorie zurückleiten.

Von Vollständigkeit und wesentlich Neuem kann natürlich bei einem so umfangreichen und vielbearbeiteten Gebiete, wie die Mechanik, nicht die Rede sein. Trotzdem stellte es sich vom Abschnitte über das Kräftenparallelogramm (§ 10) bis zur Definition des Gleichgewichtes eines Systems, dem d'Alembert'schen Principe und der allgemeinen Form der Bewegungsgleichungen (§§ 72, 73 und 74) heraus, dass auch manche specielle Sätze der Mechanik noch der schärferen Präcisirung bedürfen. Natürlich konnte hier keine dieser Fragen zum Abschlusse gebracht werden; das wäre nur in einer Monographie möglich; aber ich bin zufrieden, wenn ich auf Lücken hingewiesen und Anregung zu weiterer Forschung gegeben habe.

Abbazia, den 3. August 1897.

Ludwig Boltzmann.

Inhaltsverzeichniss.

III. Allgemeine Integrale der Bewegungsgleichungen.

IV. Das Princip der virtuellen Verschiebungen.

I. Grundbegriffe.

§ 1. Charakterisirung der gewählten Methode.

Die Mechanik ist die Lehre von der Bewegung der Naturkörper, d. h. der Ortsveränderung (relativen Lagenänderung) derselben, welche mit keinerlei Aenderung ihrer übrigen Eigenschaften verbunden ist. Sie hat nach dieser Definition auch die Bedingungen zu erforschen, unter denen ein Körper seinen Ort nicht verändert, d. h. ruht.

Da die Ortsveränderungen die allereinfachsten Erscheinungen sind, so ist die Mechanik das Fundament der gesammten Naturwissenschaft. Es kann uns daher nicht wundern, dass sie schon früh (durch Newton, Lagrange, Euler etc.) hoch entwickelt und gegenwärtig zu immer grösserer Vollendung gebracht wurde. Diese Vollendung besteht aber mehr in der Sicherheit, specielle Aufgaben zu behandeln, als in der ihrer Grundprincipien. Letztere wurden vielmehr gerade in der neuesten Zeit vielfach angegriffen. Ich citire da nur das bekannte Buch Hertz's[1]), welcher freilich dann zugiebt, dass die Unklarheit der Grundprincipien der Mechanik hauptsächlich durch die mangelhafte Darstellung in den Lehrbüchern verschuldet sei. Auf meine Ansicht über die Ursache, welche zu dieser mangelhaften Art der Darstellung verleitete, werde ich alsbald zu sprechen kommen.

Es wurde wohl niemals bezweifelt und wird von Hertz in dem angeführten Buche besonders hervorgehoben, dass

[1]) Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt von Heinrich Hertz. Leipzig, J. A. Barth, 1894.

unsere Gedanken blosse Bilder der Objecte (besser Zeichen für dieselben) sind, welche mit diesen höchstens eine gewisse Verwandtschaft haben, sich aber mit ihnen niemals decken können, sondern sich zu ihnen verhalten, wie die Buchstaben zu den Lauten oder die Noten zu den Tönen. Sie vermögen auch wegen der Beschränktheit unseres Intellects immer nur einen kleinen Theil der Objecte wiederzuspiegeln.

Wir können nun in zweierlei Weise verfahren: 1. Wir können die Bilder mehr allgemein lassen. Wir laufen dann weniger Gefahr, dass sie sich später als falsch erweisen werden, da sie sich neuentdeckten Thatsachen leichter anpassen lassen; allein durch ihre Allgemeinheit werden die Bilder mehr unbestimmt und verwaschen und ihre Weiterentwicklung wird mit einer gewissen Unsicherheit und Vieldeutigkeit verknüpft sein. 2. Wir specialisiren die Bilder und führen sie bis zu einem gewissen Grade ins Detail aus. Dann werden wir viel mehr Willkürliches (Hypothetisches) hineintragen müssen, was vielleicht auf neue Erfahrungen nicht passt; dagegen haben wir den Vortheil, dass die Bilder möglichst klar und deutlich sind, und wir alle Consequenzen aus denselben mit voller Bestimmtheit und Eindeutigkeit zu ziehen vermögen.

Gerade die Unklarheiten in den Principien der Mechanik scheinen mir daher zu stammen, dass man nicht sogleich mit hypothetischen Bildern unseres Geistes beginnen, sondern anfangs an die Erfahrung anknüpfen wollte. Den Uebergang zu den Hypothesen suchte man dann mehr zu verdecken, wenn nicht gar einen Beweis zu erkünsteln, dass das ganze Gebäude nothwendig und hypothesenfrei sei, verfiel aber gerade dadurch in Unklarheit.

Vollends in der neuesten Zeit wird häufig die Forderung aufgestellt, man solle nur die direct gegebenen Erscheinungen erfassen und ihnen nichts Willkürliches hinzufügen. So sehr es sich empfiehlt, das Thatsächliche vom Hypothetischen zu trennen und letzteres nie grundlos zu häufen, so glaube ich doch, dass man ohne alles Hypothetische über eine unvereinfachte Markirung jeder einzelnen Erscheinung im Gedächtnisse gar nicht hinauskommen könnte. Alle Vereinfachungen der Gedächtnissbilder, alle Erfassung von Gesetzmässigkeiten, alle Regeln, complicirte Erscheinungen kurz zusammen zu fassen und nach einfachen Vorschriften voraus zu bestimmen, beruhen auf der Anwendung von Bildern, die von fremden einfachen Erscheinungen und Willensacten hergenommen sind.

Man hat als Ideal die blosse Aufstellung von partiellen Differentialgleichungen und Vorhersagung der Erscheinungen aus denselben hingestellt. Allein auch diese sind nichts anderes, als Regeln zur Construction fremder Vorstellungsbilder, der Zahlenreihen. Partielle Differentialgleichungen fordern die Construction von Zahlenzusammenstellungen, die eine Mannigfaltigkeit von mehreren Dimensionen bilden. Sie sind, wenn man sich der Bedeutung ihrer Symbolik erinnert, absolut nichts anderes als die Forderung, sich sehr viele Punkte solcher Mannigfaltigkeiten (d. h. Stellen, die durch mehrere Zahlen der Mannigfaltigkeit, wie Raumpunkte durch die Coordinaten charakterisirt sind) vorzustellen und daraus nach bestimmten Regeln fortwährend neue Mannigfaltigkeitspunkte abzuleiten, gewissermaassen eine Fortbewegung der Punkte in der Mannigfaltigkeit zu denken.[1]

So enthalten, wenn man auf den Grund geht, auch die Maxwell'schen elektromagnetischen Gleichungen in der Form, in der sie Hertz reproducirt, Hypothetisches, der Erfahrung Hinzugefügtes, das wie immer durch Uebertragung der an endlichen Körpern beobachteten Gesetze auf von uns fingirte Elemente gebildet wird. Sie sowie alle partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, welche zudem beim gleichzeitigen Zusammenwirken mehrerer Naturkräfte (Elektricität, Magnetismus, Elasticität, Wärme, Chemismus) eine fast unübersehbare Complication haben, sind ebenfalls nur, wenn auch aus etwas anderen Elementen als den uns gewohnten Atomen zusammengesetzte, unexacte schematische Bilder für bestimmte Thatsachengebiete. Ihre Rechtfertigung sucht Hertz erst nachträglich in der Ueber-

[1] Vgl. Boltzmann, Ueber die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft. Wien. Sitzber. Bd. 105, S. 907, 7. Nov. 1896. Wied. Ann. Bd. 60, S. 231, 1897.

einstimmung mit der Erfahrung, geradeso wie wir es für die atomistischen Bilder thun werden.

Die Behauptung, dass durch die Atomistik, nicht aber durch die partiellen Differentialgleichungen den Thatsachen Fremdes hinzugefügt werde, scheint mir unbegründet. Allerdings darf man nicht aus der häufig durch Thatsachen so nahe gelegten Anwendbarkeit der Atomistik schliessen, dass ihre Bilder überall ausreichen müssen. Wo ihre ungezwungene Anwendung noch nicht gelang, soll man andere, von anderen Elementen ausgehende Bilder beiziehen. Man darf nur in den Thatsachen selbst wohlbegründete atomistische Bilder anwenden, niemals durch Willkürliches, Phantastisches der Natur Gewalt anthun.

In dieser Hinsicht wird gewiss Niemand die Atomistik für alle Phantastereien verantwortlich machen, welche von Unberufenen auf ihrem Gebiete getrieben wurden. Wer weiss, ob die Energetik, wenn sie je das heutige Alter der Atomistik erreichen sollte, an solchen Auswüchsen ärmer sein würde?

Man darf auch nie metaphysische Gründe für das Bild suchen oder daraus voreilige Schlüsse, wie dass die chemischen Atome materielle Punkte seien, ziehen. Ebenso wenig darf man die Möglichkeit aus dem Auge verlieren, dass es noch einmal durch ganz andere Bilder verdrängt werden könne, sagen wir, um ja nicht engherzig zu erscheinen, sogar von Mannigfaltigkeiten hergenommene, die nicht einmal die Eigenschaften unseres dreidimensionalen Raumes haben, so dass also z. B. die einfachen geometrischen Constructionen der Atomistik durch Manipulationen mit Zahlen zu ersetzen wären, die eine complicirte Mannigfaltigkeit bilden.

Ich bin somit der Letzte, der die Möglichkeit, auf anderem als atomistischem Wege ein besseres Bild der Natur zu gewinnen, leugnen würde. Gerade um für den Werth eines etwaigen anderen derartigen Naturbildes einen Maassstab zu gewinnen, will ich in diesem Buche danach streben, die alten Bilder der Mechanik so klar und consequent, als es mir möglich ist, zu entwickeln. Nun versuche man es, ein anderes hypothesenfreieres Weltbild, sei es auf energetischer oder rein phänomenologischer Basis, nicht blos in einigen unbestimmten Andeutungen als möglich hinzustellen, sondern vom Anfange bis zum Ende mit der gleichen Klarheit zu entwickeln, wie im Folgenden das mechanische Bild dargestellt werden wird. Hic Rhodus, hic salta!

So lange dies noch nicht gelungen ist, gebe ich die Möglichkeit, nicht aber die Gewissheit zu, dass ein anderes Weltbild das mechanische verdrängen wird.

Bildern aber, welche unbestimmter und verschwommener als das nun zu entwickelnde sind, werden wir blos einen Platz neben diesem zuerkennen, da jenen zwar grössere Anpassungsfähigkeit, diesem aber die grösste innere Vollkommenheit zukommt, wodurch es gewissermaassen zum Musterbilde wird, mit dem sich an Klarheit und Deutlichkeit jede neue theoretische Vorstellung wird messen müssen.

Wir werden ferner von der Grundannahme einer wenn auch grossen, so doch endlichen Zahl von materiellen Punkten ausgehen. Man sagt gewöhnlich, durch die Differentialgleichungen werde ein zuerst von einer endlichen Zahl ausgehendes Bild ganz vermieden, allein das ist wieder Täuschung. Die Differentialgleichungen fordern gerade so wie die Atomistik zunächst die Vorstellung einer grossen endlichen Zahl von Zahlenwerthen und Mannigfaltigkeitspunkten, d. h. Stellen in der Zahlenmannigfaltigkeit. Sie behaupten nur hinterdrein, dass das Bild die Erscheinungen niemals exact darstelle, sondern nur um so mehr angenähert, je grösser man die Zahl dieser Mannigfaltigkeitspunkte und je kleiner man ihren Abstand wählt und da scheint mir wieder vorläufig die Möglichkeit noch gar nicht ausgeschlossen, dass das Bild bei einer gewissen sehr grossen Zahl der Mannigfaltigkeitspunkte die Erscheinungen am besten darstelle und bei weiterer Vergrösserung dieser Zahl sich wieder von ihnen entferne, dass die Atome in einer grossen aber endlichen Zahl existiren.

Die qualitativen Gesetze der Naturerscheinungen und auch die quantitativen Beziehungen unter sehr einfachen Verhältnissen, z. B. die Bedingungen des Gleichgewichts eines schweren Parallelepipeds, dessen Kanten sich wie 1:2:3 verhalten, kann man freilich auch im Geiste abbilden, ohne von einer sehr grossen endlichen Zahl von Elementen auszugehen. Sobald man aber die Gesetze bei complicirten Bedingungen quantitativ angeben will, muss man immer von Differentialgleichungen ausgehen, d. h. zuerst eine grosse endliche Zahl von Mannigfaltigkeitspunkten sich vorstellen, also atomistisch denken, woran dadurch nichts geändert wird, dass man sich hinterher durch Vermehrung der Zahl der vorgestellten Punkte dem Continuum beliebig nähern kann, ohne es jemals zu erreichen.

Doch wie dem auch sei, gerade heute hat es einen Reiz, die durchsichtigste naturwissenschaftliche Disciplin, die Mechanik nach einer Methode zu behandeln, welche der momentan modernen gerade entgegengesetzt ist und von vornherein ganz specielle Vorstellungsbilder zu Grunde zu legen. Der Leser wird sich vielleicht anfangs des Gefühls nicht erwehren können, dass wir blos ein Spiel mit Gedankenbildern treiben und die Wirklichkeit aus dem Auge verlieren. Unbekümmert darum werden wir zunächst trachten, das Vorstellungsgebäude möglichst klar und widerspruchslos zu gestalten. Zeigt es sich dann in Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit, so ist damit das Willkürliche in den Grundvorstellungen entschuldigt. Wir wollten ja nichts, als ein Bild der Natur haben und dadurch, dass wir uns dessen klar bewusst sind, laufen wir nicht Gefahr, dem Bilde mehr als der Erfahrung zu trauen und gegen letztere blind zu werden.

§ 2. Die der Lehre von Raum und Zeit entlehnten Grundbegriffe. Erste Grundannahme. Continuität der Bewegung.

Jede Ortsveränderung geschieht im Verlaufe der Zeit und spielt sich im Raume ab. Die Lehre vom Raume als solchen und der Zeit als solcher haben wir daher vorauszusetzen, ehe wir die Mechanik in Angriff nehmen. Die Zeit als Mannigfaltigkeit einer Dimension ist durch die in einer Dimension angeordnete Mannigfaltigkeit der Zahlen darstellbar, dagegen geben die Raumverhältnisse zu einer besonderen Wissenschaft, der Geometrie, Veranlassung. Die gesammte Lehre der rationalen und irrationalen reellen Zahlen mit Einschluss der Infinitesimalrechnung sowie die gesammte Geometrie setzen wir daher als bekannt voraus. Zwar involviren auch diese Wissenschaften manche principielle Schwierigkeiten. Doch dieselben übertragen sich gleichmässig auf alle Ansichten über die Principien der Mechanik, da alle von Raum und Zeit ausgehen müssen. Da wir hier aber nur die der Mechanik eigenthümlichen principiellen Schwierigkeiten besprechen wollen, so wollen wir uns um die der Arithmetik und Geometrie nicht kümmern.

Wir können offenbar kein Bild von Körpern und Bewegungen derselben erhalten, wenn wir alle Theile des gesammten unendlichen Raumes gleichmässig ins Auge fassen. Wir wollen daher zahlreiche einzelne Punkte desselben vor den übrigen hervorheben. Diese vor den übrigen ausgezeichneten Raumpunkte nennen wir materielle Punkte.

Um die Lage irgend eines der materiellen Punkte zu irgend einer Zeit zu definiren, denken wir uns zu allen Zeiten im Raume ein bestimmtes rechtwinkeliges Coordinatensystem vorhanden. Unter dem Orte unseres materiellen Punktes zur gegebenen Zeit verstehen wir dessen Lage relativ gegen jenes Coordinatensystem, welche wir in bekannter Weise durch cartesische oder Polarcoordinaten oder sonst wie bestimmen.

Das Coordinatensystem ist freilich nichts Reelles, allein darin liegt nach den hier zu Grunde gelegten Anschauungen keine Schwierigkeit, da es sich ja gegenwärtig blos um Construction eines Vorstellungsbildes handelt. Wir werden später sehen, dass dieses Coordinatensystem in verschiedener Weise gewählt werden kann. Wir werden auch sehen, dass der Ort eines materiellen Punktes statt durch seine relative Lage gegen dieses Coordinatensystem durch die gegen drei besonders hervorzuhebende materielle Punkte oder einen Körper, welche gewisse Eigenschaften besitzen müssen, definirt werden kann oder auch gegen gewisse aus der Gesammtheit der Punkte abzuleitende Gerade oder Ebenen, so dass man in das Gedankenbild blos Gleichartiges (lauter materielle Punkte), nicht auch dazu noch ein Coordinatensystem aufzunehmen braucht. Doch es würde unser Bild nur verwirren, wenn wir dies jetzt berücksichtigen würden. Unser Bild besteht daher aus dem Coordinatensysteme und sämmtlichen materiellen Punkten, welche zu jeder Zeit eine gegebene Lage relativ gegen das Coordinatensystem haben. Dass wir noch andere Coordinatensysteme wählen können, ohne dass das Bild von seiner Uebereinstimmung mit der Erfahrung etwas einbüssen würde, kümmert uns einstweilen nicht.

Ebenso wenig als die Frage nach der Möglichkeit, Lagen im Raume absolut zu bestimmen, macht uns die nach dem Kriterium der Gleichheit verschiedener Zeitintervalle von unserem Standpunkte Schwierigkeiten. Wir fingiren die Möglichkeit der Construction eines vollkommen sich gleich bleibenden Chronometers, der genügenden Abhaltung aller störenden Einflüsse von demselben und seiner Ersetzung durch ein anderes gleich beschaffenes, noch bevor es sich im Mindesten abgenutzt hat. Ein Blick auf das Chronometer belehrt uns dann über den Werth derjenigen independenten Variabeln, welche wir die Zeit nannten.

Ich bin weit entfernt mir einzubilden, dass es möglich sei, hier und im Folgenden jedes Wort vor dem Gebrauche exact zu definiren. (Vgl. die erste Seite meiner Abhandlung „über die Frage nach der objectiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur“.)[1] Die Ursache der Klarheit obiger Bilder liegt auf der Hand; es sind Vorschriften, räumliche Verhältnisse zu denken, welche sich jeder leicht angenähert mit Lineal und Bleistift oder Holzstäben und Stricknadeln sichtbar und greifbar darstellen kann und welche so geläufig sind, dass ihre blosse Vorstellung meist schon ohne Zeichnung ausreichend klar ist. Dabei wird von einem Minimum von Vorstellungen Gebrauch gemacht. Der Uebergang von wenigen einzeln vorstellbaren Punkten zu sehr vielen wird durch allgemeine Regeln übersichtlich vermittelt. Je mehr sich durch diese einfachen Bilder, die wir doch zur Darstellung gewisser Phänomene gegenwärtig sicher nicht ent-

---

[1] Wien. Sitzber., Bd. 106, S. 83, 7. Januar 1897.

lehren können, darstellen lässt, desto begreiflicher muss uns die Natur erscheinen.

Was nur durch Zuziehung anderer Vorstellungen erklärt werden kann, erscheint uns weit unbegreiflicher. Jedenfalls aber soll man auch bei Darlegung derartiger anderer Vorstellungen die Elemente, von denen man ausgeht, nicht blos unbestimmt andeuten, sondern ebenso aufrichtig und klar präcisiren, wie ich dies hier versuche.

Wir wollen nun unser Bild weiter ausführen dadurch dass wir uns bestimmte Gesetze für die Ortsveränderung aller dieser materiellen Punkte mit der Zeit fingiren. Annahme 1. Wir stellen uns vor, dass zur selben Zeit niemals zwei verschiedene materielle Punkte zusammenfallen resp. unendlich nahe aneinander liegen, dass dagegen jedesmal, wenn sich zu irgend einer Zeit irgend ein materieller Punkt an irgend einem Orte (natürlich relativ gegen unser Coordinatensystem) befindet, dann zu einer unendlich benachbarten Zeit sich ebenfalls ein und nur ein materieller Punkt an einem dem ersteren Orte unendlich benachbarten Orte befindet. Wir sagen, der letztere materielle Punkt ist derselbe wie der erstere und nennen dies das Gesetz der Continuität der Bewegung. Es giebt uns allein die Möglichkeit, denselben materiellen Punkt zu verschiedenen Zeiten wieder zu erkennen. Den Inbegriff aller Orte, an denen sich ein und derselbe materielle Punkt im Verlaufe aller Zeiten befindet, heisst die Bahn dieses materiellen Punktes, der Inbegriff derjenigen Orte, welche er während einer endlich begrenzten Zeit durchlief, heisst der Weg während dieser Zeit.

Wir können das Gesetz der Continuität auch so formuliren: Jedem materiellen Punkte, der zu einer gewissen Zeit gewisse Coordinaten hatte, entspricht zu einer unendlich wenig verschiedenen Zeit ein und nur ein materieller Punkt mit je unendlich wenig verschiedenen Coordinaten, welcher derselbe materielle Punkt heisst, d. h. die Coordinaten jedes materiellen Punktes sind continuirliche Functionen der Zeit, $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$, $z = \psi(t)$.

§ 3. Zweite Grundannahme. Existenz der Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit. Begriff der Geschwindigkeit und deren Componenten.

Wir wollen unser Bild weiter dahin ergänzen, dass die eben besprochenen Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ und $\chi(t)$, welche die Abhängigkeit der Coordinaten jedes materiellen Punktes von der Zeit ausdrücken, erste und zweite Differentialquotienten haben sollen, die nirgends unendlich werden, was wir die Grundannahme 2 nennen wollen. Wir wollen mit x, y, z resp. $x_1 = x + \xi$, $y_1 = y + \eta$, $z_1 = z + \zeta$ die Coordinaten der beiden Raumpunkte A und A' bezeichnen, wo sich ein bestimmter materieller Punkt zur Zeit t resp. $t + \tau$ befand. σ sei die Länge der Geraden AA'. Wenn dann t constant bleibt und τ immer mehr abnimmt, so muss also Folgendes eintreten:

1. Der Quotient ξ/τ nähert sich einer bestimmten endlichen Grenze, welche wir mit u bezeichnen. Nach der Symbolik der Differentialrechnung wird sie mit dx/dt oder $\varphi'(t)$ bezeichnet. Dasselbe gilt für η/τ und ζ/τ. Es ist also

$$1)\left\{\begin{aligned} &\lim \frac{\xi}{\tau} = u = \frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \quad \lim \frac{\eta}{\tau} = v = \frac{dy}{dt} = \psi'(t), \\ &\qquad\qquad \lim \frac{\zeta}{\tau} = w = \frac{dz}{dt} = \chi'(t), \end{aligned}\right.$$

welche Grössen positiv and negativ und auch gleich Null sein können und die Componenten der Geschwindigkeit des materiellen Punktes in den drei Coordinatenrichtungen heissen.

2. Da für jeden Wert von τ die Gleichung

$$\sigma = + \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

besteht, so nähert sich der Quotient σ/τ der Limite

$$2)\left\{\begin{aligned} c &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}, \\ &= \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} \end{aligned}\right.$$

welche die Geschwindigkeit des materiellen Punktes zur Zeit t heisst und nur einen endlichen positiven Wert einschliesslich der Null haben kann.

3. Wenn die letztere Limite nicht gleich Null ist, so nähert sich die Richtung der von A gegen A' gezogenen Geraden jedenfalls einer bestimmten, in einem bestimmten Sinne gezogenen Richtung im Raume, welche die Richtung der Geschwindigkeit des materiellen Punktes zur Zeit t heisst. Wir wollen allgemein die Winkel einer beliebigen gerichteten (in einem bestimmten Sinne gezogenen) Geraden G mit den positiven Coordinatenaxen mit (G, x), (G, y) und (G, z), den Winkel zweier gerichteter Geraden G und H mit (G, H) bezeichnen. Da für jeden Werth von τ die Gleichung $\xi = \sigma \cos(\sigma, x)$ mit zwei analogen, für die beiden übrigen Coordinatenaxen geltenden besteht, so ist auch:

$$3) \qquad u = c \cos(c, x), \quad v = c \cos(c, y), \quad w = c \cos(c, z).$$

Seien A'', A''', ... $A^{(n)}$ die Raumpunkte, wo sich der materielle Punkt zu den Zeiten $t + 2\tau$, $t + 3\tau$, ... $t + n\tau = T$ befindet, so nähert sich dann, wie die Integralrechnung lehrt, auch die Summe der Geraden AA', $A'A''$, ... $A^{(n-1)}A^{(n)}$, wenn τ immer mehr abnimmt, dagegen t und das Product $n\tau$ constante endliche Grössen sind, einer bestimmten Limite, welche der in der Zeit $T - t$ zurückgelegte Weg heisst und nach der in der Integralrechnung üblichen Symbolik mit $\int\limits_t^T c\,dt$ bezeichnet wird, wobei man noch häufig ds für $c\,dt$ schreibt, so dass

$$4) \qquad \frac{ds}{dt} = c = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

ist. Die erste der Gleichungen 1) hat keine andere Bedeutung, als dass der Zuwachs ξ der Abscisse sich von dem mit u multiplicirten Zuwachse τ der Zeit nur um eine Grösse unterscheidet, welche durch τ dividirt sich mit abnehmendem τ der Grenze Null nähert. Die Bedeutung solcher Gleichungen wird besonders kurz und anschaulich ausgedrückt, wenn man die Zuwächse der Variabeln gleich anfangs durch den betreffenden Variabeln vorangestellte Differentialzeichen bezeichnet. Die Gleichheit zweier Differentialausdrücke bedeutet dann nichts anderes, als dass sich dieselben nur um eine Grösse unterscheiden, welche durch eines der Differentiale (wenn der Coefficient eines derselben Null ist, muss dieses gewählt werden) dividirt, sich mit abnehmendem Werthe des Nenners der Grenze Null nähert (unendlich klein höherer Ordnung ist). Die Gleichheit zweier Differentialausdrücke ist daher erwiesen, wenn man geometrisch oder sonst wie zeigen kann, dass ihr Unterschied unendlich klein höherer Ordnung ist.

Wir wollen uns sehr häufig der Gleichungen zwischen Differentialausdrücken in diesem Sinne bedienen und schreiben daher die Gleichungen 1), 2), 4) einfacher in der Form:

$$\text{4a)}\qquad \begin{cases} dx = u\,dt, \quad dy = v\,dt, \quad dz = w\,dt, \\ ds = c\,dt = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \end{cases}$$

Die letzte dieser Gleichungen besagt, dass sich der Unterschied zwischen dem sehr kleinen Wege ds und der mit c multiplicirten Zeit dt, während welcher er zurückgelegt wurde, durch dt dividirt der Grenze Null nähert, woraus sofort folgt, dass die Summe $\int ds$ aller während einer endlichen Zeit zurückgelegten Wege gleich dem Integrale $\int c\,dt$ ist, wenn c als Function der Zeit gegeben ist.

Es giebt wie bekannt auch Functionen, welche bei jedem unendlich kleinen Zuwachs des Argumentes unendlich wenig wachsen, ohne dass sich für irgend einen Werth des Argumentes der Quotient des Zuwachses des Argumentes in den der Function bei unendlicher Abnahme des ersteren irgend einer bestimmten Grenze nähert, daher folgt aus der Annahme 1 noch keineswegs die Annahme 2. Jeder, der einmal Mechanik studirte, wird sich wohl erinnern, welche Schwierigkeiten ihm das Verständniss der Beweise machte, dass die Bewegung während einer sehr kurzen Zeit als geradlinig und gleichförmig, die Kräfte während einer solchen als unveränderlich betrachtet werden können. Diese Schwierigkeiten liegen einfach darin, dass die betreffenden Beweise gar nicht richtig sind.

Die analytischen Functionen haben wir ja gerade zur Darstellung der Erfahrungsthatsachen gemacht. Ihre Differentiirbarkeit kann nicht als Beweis für die Differentiirbarkeit empirisch gegebener Functionen gelten, da ja die Zahl der denkbaren undifferentiirbaren Functionen gerade so unendlich gross ist, wie die der differentiirbaren. Ebenso ist die Thatsache, dass jeder mit der Hand oder einer Maschine gezogene Strich dem Habitus einer differenzirbaren Function entspricht, nur ein Beweis, dass, so weit heute unsere Beobachtungsmittel gehen, die Differentiirbarkeit der in der Mechanik empirisch gegebenen Functionen eben etwas erfahrungsmässig Gegebenes ist.

Deshalb haben wir ohne jede Beschönigung die Differentiirbarkeit einfach als Annahme hingestellt, welche mit den bisherigen Erfahrungsthatsachen übereinstimmt.

§ 4. Einführung der Vectoren.

Im Folgenden wird uns die Vectorrechnung oft nützlich sein. Wir wollen daher ihre Grundbegriffe schon an diesem einfachen Falle erörtern. Unter einem Vector verstehen wir eine endliche Gerade von bestimmter Länge, bestimmter Richtung und bestimmtem Sinne (Angabe, welcher ihrer Endpunkte als Anfangs-, welcher als Endpunkt anzusehen ist). Da der Zweck des Vectors nur der sein soll, uns diese drei Dinge zu versinnlichen, so ist es, so lange der Vector nicht noch etwas anderes ausdrücken soll, gleichgültig, von welchem Punkte des Raumes aus er gezogen wird. Am häufigsten wollen wir einen Vector vom Coordinatenursprunge O aus ziehen (diesen als Anfangspunkt der betreffenden Geraden wählen).

Unter der Summe zweier Vectoren (Vectorsumme) verstehen wir einen dritten, den wir erhalten, wenn wir vom Endpunkte des einen Vectors aus den zweiten Vector auftragen und den Anfangspunkt des ersten mit dem Endpunkte des so erhaltenen zweiten Vectors verbinden. Die Summe wird also aus den beiden Vectoren so erhalten, wie nach dem Kräfteparallelogramme die Resultirende zweier Kräfte. Ein Vector, dessen Summe mit einem zweiten einen dritten Vector liefert, heisst die Differenz (Vectordifferenz) des dritten und zweiten Vectors. Wenn die Projection eines Vectors auf die Abscissenaxe gleich der Summe der Projectionen zweier anderer Vectoren auf die Abscissenaxe ist und dasselbe von den beiden anderen Coordinatenaxen gilt, so ist, wie man sofort sieht, der erste Vector die Summe der beiden anderen. Dasselbe gilt für die Differenz zweier Vectoren und für die Summe von mehr als zwei Vectoren. Um letztere zu finden, muss man zur Summe des ersten und zweiten den dritten addiren u. s. w., daher vom Endpunkte B des ersten Vectors AB eine Gerade BC gleich lang und gleich gerichtet wie der zweite Vector, vom Endpunkte C dieser Geraden eine Gerade CD gleich lang und gleich gerichtet wie der dritte Vector u. s. w. ziehen. Die vom Anfangspunkte A des ersten Vectors zum Endpunkte M der letzten dieser Geraden gezogene Gerade ist dann die Summe aller Vectoren. Die Figur

$$ABCD \ldots M, \tag{5}$$

die natürlich nicht in einer Ebene zu liegen braucht, heisst das Vectorpolygon, speciell, wenn die Vectoren Kräfte darstellen, das Kräftepolygon.

Wir können offenbar die Lage beliebiger materieller Punkte zu einer beliebigen Zeit auch durch die Vectoren darstellen, welche man von irgend einem Raumpunkte, z. B. vom Coordinatenursprunge gegen diejenigen Raumpunkte ziehen kann, in denen sich die materiellen Punkte zur betreffenden Zeit befinden. Die Entfernung AA' der Raumpunkte A und A', wo sich ein materieller Punkt zu den Zeiten t und $t + \tau$ befindet, kann dann ebenfalls als Vector betrachtet werden und zwar ist derselbe die Differenz der Vektoren OA' und OA, welche die Punkte A und A' mit dem Coordinatenursprunge O verbinden. Wir können von einem beliebigen Punkte, z. B. vom Coordinatenursprung O aus auch einen Vector Ob ziehen, welcher gleich gerichtet und gleich lang wie AA' ist. Da jedoch die Länge von AA' mit abnehmendem τ selbst bis ins Unendliche abnimmt, so können wir auch die Länge dieses Vectors Ob im Verhältnisse von τ zu irgend einer ein für allemal unveränderlich gewählten Zeit (der Zeiteinheit) vergrössern. Die Grenze OB, welcher sich der so vergrösserte Vector mit abnehmendem τ

nähert, nennen wir den Geschwindigkeitsvector des betreffenden materiellen Punktes zur Zeit t. Er selbst stellt die Geschwindigkeit des betreffenden materiellen Punktes in Grösse und Richtung, seine Projectionen auf die drei Coordinatenaxen, deren Componenten u, v, w dar, und zwar gleichgültig, von welchem Punkte des Raumes aus er gezogen wird.

§ 5. **Begriff der Beschleunigung und deren Componenten.**

Wir haben in die Grundannahme 2 auch die Bedingung aufgenommen, dass die Coordinaten zweite Differentialquotienten nach der Zeit besitzen. Wenn diese Differentialquotienten während einer endlichen Zeit $n\tau$ gleich Null sind, so liegen die Verbindungslinien AA', $A'A''$, $A''A'''$ ... der Raumpunkte, wo sich der materielle Punkt zu den Zeiten t, $t+\tau$, $t+2\tau$, ... $t+n\tau$ befindet, alle in ein und derselben Geraden und sind alle untereinander gleich lang; die Bahn des materiellen Punktes ist also eine Gerade und es werden in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt. Die Geschwindigkeit ist constant, die Bewegung gleichförmig. Jede Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung, jede Krümmung der Bahn nach der einen oder anderen Seite ist also dadurch bedingt, dass die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit von Null verschiedene Werthe haben. Es sind daher jetzt vor allem anderen die Werthe dieser zweiten Differentialquotienten zu studiren.

Ein materieller Punkt möge sich wieder zu den Zeiten t, $t+\tau$ und $t+2\tau$ in den Raumpunkten A, A' und A'' befinden, deren Projectionen auf die Abscissenaxe D, D', D'' seien (s. Fig. 1). x, y, z resp. x', y', z' und x'', y'', z'' seien die Coordinaten des materiellen Punktes zu den Zeiten t resp. $t+\tau$ und $t+2\tau$. Dann ist bekanntlich der zweite Differentialquotient der Abscisse x des materiellen Punktes nach der Zeit, welchen man die Componente der Beschleunigung dieses materiellen Punktes in der Abscissenrichtung nennt, gleich der Limite des Ausdrucks

$$\frac{x'' - x' - (x' - x)}{\tau^2} = \frac{D'D'' - DD'}{\tau^2} \tag{6}$$

für unendlich abnehmende τ; nun sind aber die Strecken DD' und $D'D''$ die Projectionen der Vectoren AA' und $A'A''$ auf die Abscissenaxe. Der Zähler des Bruches der Formel 6 ist also die Projection der Differenz dieser beiden Vectoren auf die Abscissenaxe. Da es hierbei offenbar gleichgültig ist, von welchem Punkte aus man die Vectoren aufträgt, so wollen wir die beden Vectoren von demselben Raumpunkte aus auftragen, also z. B. den Vector AA' durch einen gleich langen und gleich gerichteten, von A' aus gezogenen Vector $A'E$ ersetzen.

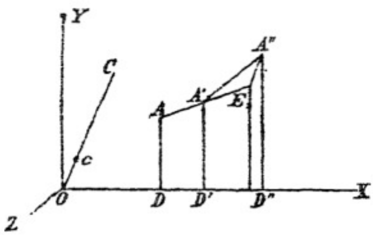

Fig 1.

Die Verbindungslinie EA'' der Endpunkte der beiden Vectoren $A'E$ und $A'A''$ oder eine ihr parallel vom Coordinatenursprunge aus gezogene gleich lange Gerade Oc stellt also die Differenz der beiden Vectoren $A'A''$ und AA' dar. Die Projection von Oc oder EA'' auf die Abscissenaxe ist daher gleich dem Zähler der Formel 6. Die Limite, welcher sich diese durch τ^2 dividirte Differenz nähert, ist die Componente der Beschleunigung in der Abscissenrichtung. Da dasselbe von den beiden übrigen Coordinatenrichtungen gilt, so giebt uns also der Vector EA'' oder Oc ein genaues Bild von der Krümmung der Bahn, sowie von der Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung. Man wird die Länge dieses Vectors wieder lieber im Verhältnisse von τ^2 zum Quadrate der gewählten Zeiteinheit vergrössert zeichnen. Die Limite OC, welcher sich der so vergrösserte, vom Coordinatenursprunge aus gezogene Vector bei constantem t und abnehmendem τ nähert, heisst der Vector der Beschleunigung oder noch kürzer einfach die Beschleunigung des betreffenden materiellen Punktes zur Zeit t. Seine Componenten in den drei Coordinatenrichtungen sind gleich dem, was wir schon früher die Componenten der Beschleunigung in den drei Coordinatenrichtungen genannt haben, also gleich $\frac{d^2 x}{d t^2}$

resp. $\frac{d^2 y}{d t^2}$ und $\frac{d^2 z}{d t^2}$. Die Gesammtlänge des Vectors OC ist die positive Quadratwurzel aus:

$$\left(\frac{d^2 x}{d t^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{d t^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{d t^2}\right)^2.$$

Selbstverständlich hätte man denselben Vector OC auch erhalten, wenn man die Endpunkte der beiden Geschwindigkeitsvectoren OB und OB' des materiellen Punktes zu den Zeiten t und $t + \tau$ durch eine Gerade verbunden und die Limite gesucht hätte, welcher sich diese Gerade durch τ dividirt nähert.

Seien (g, x), (g, y) und (g, z) die Winkel zwischen der Beschleunigung unseres materiellen Punktes (d. h. dem Vector OC), und den drei Coordinatenaxen und g die Grösse dieser Beschleunigung (d. h. die Länge dieses Vectors); dann ist also:

$$7)\quad \frac{d^2 x}{d t^2} = g \cos (g, x), \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = g \cos (g, y), \quad \frac{d^2 z}{d t^2} = g (\cos (g, z).$$

Wenn die Beschleunigung eines materiellen Punktes in einem Falle durch irgend einen Vector OC, in einem andern Falle durch einen andern Vector OD dargestellt ist, so verstehen wir unter der Summe dieser beiden Beschleunigungen diejenige Beschleunigung, welche durch die Summe der beiden Vectoren OC und OD dargestellt wird. Sind die Componenten der Beschleunigung OC nach den Coordinatenrichtungen gleich

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2}, \quad \frac{d^2 y_1}{d t^2}, \quad \frac{d^2 z_1}{d t^2},$$

die der Beschleunigung OD

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2}, \quad \frac{d^2 y_2}{d t^2}, \quad \frac{d^2 z_2}{d t^2},$$

so sind die Componenten der Summe beider Beschleunigungen

$$8)\qquad \frac{d^2 x_1}{d t^2} + \frac{d^2 x_2}{d t^2}, \quad \frac{d^2 y_1}{d t^2} + \frac{d^2 y_2}{d t^2}, \quad \frac{d^2 z_1}{d t^2} + \frac{d^2 z_2}{d t^2}.$$

Analog definiren wir die Summe von drei und mehr Beschleunigungen.

§ 6. Grundannahme 3—7.

Es sei eine beliebige Anzahl (n) materieller Punkte gegeben. Zu irgend einer Zeit t sollen sich dieselben in den Raumpunkten A_1, A_2, $A_3 \ldots A_n$ befinden. Wir ergänzen nun unser Bild durch folgende weitere Grundannahmen, welche uns die Beschleunigungen aus der Constellation der materiellen Punkte finden lehren.

Grundannahme 3. Die (im Sinne des obigen als Vector zu denkende) Beschleunigung irgend eines materiellen Punktes ist gleich der Summe von $n-1$ (ebenso zu denkenden) Beschleunigungen, von denen jede die Richtung der durch den betrachteten materiellen Punkt und einen der übrigen materiellen Punkte gezogenen Geraden hat und als die von jenem zweiten Punkte dem ersten ertheilte Beschleunigung oder als die Beschleunigung des ersten materiellen Punktes durch den zweiten bezeichnet wird.

Grundannahme 4. Die Beschleunigung irgend eines materiellen Punktes durch einen zweiten ist immer entgegengesetzt gerichtet, der des zweiten durch den ersten. Wenn also die erste Beschleunigung die Richtung der von dem ersten gegen den zweiten Punkt gezogenen Verbindungslinie hat (Fall B), so hat die zweite die Richtung der von dem zweiten gegen den ersten Punkt gezogenen Verbindungslinie. Man sagt dann, die beiden materiellen Punkte ziehen sich an. Hat dagegen die erste Beschleunigung die Richtung der Verlängerung der vom zweiten gegen den ersten Punkt gezogenen Verbindungslinie über den ersten Punkt hinaus (Fall A), so hat auch die zweite Beschleunigung die Richtung der Verlängerung der von dem ersten gegen den zweiten Punkt gezogenen Verbindungslinie über den zweiten hinaus, die beiden materiellen Punkte stossen sich ab.

Grundannahme 5. Die Grösse der Beschleunigung g_{12} eines beliebigen materiellen Punktes durch einen beliebigen anderen hängt weder von der absoluten Lage der beiden Punkte im Raume, noch von dem Absolutwerthe der Zeit, noch von der Beschaffenheit der Umgebung oder der Geschwindigkeit der betreffenden Punkte, noch von der Richtung ihrer Verbindungslinie im Raume, sondern allein von der Länge r_{12} dieser Verbindungslinie ab. Sie ist also allein eine Function $F(r_{12})$ dieser Länge. Wir geben der Function $F(r_{12})$ das positive oder negative Vorzeichen, setzen also, da wir der Beschleunigung g_{12} als einem Vector immer das positive Vorzeichen geben, $g_{12} = + F(r_{12})$ oder $- F(r_{12})$, je nachdem die beiden Punkte sich abstossen oder anziehen, je nachdem also die Beschleunigung in die Richtung der Verlängerung der Verbindungslinie oder in diese selbst fällt. Die Form dieser Function lassen wir vorläufig noch vollständig unbestimmt.[1])

Grundannahme 6. Die Grösse der Beschleunigung, welche der erste materielle Punkt dem zweiten ertheilt, braucht zwar nicht gleich der zu sein, welche umgekehrt der zweite dem ersten ertheilt. Beide Beschleunigungen stehen jedoch in einem zu allen Zeiten und in allen Entfernungen constantem Verhältnisse. Setzen wir daher die Grösse der Beschleunigung g_{21} des zweiten materiellen Punktes durch den ersten gleich $\mu_2 F(r_{12})$, so ist μ_2 eine für dieses Punktepaar zu allen Zeiten und in allen Entfernungen constante Grösse. Sie ist wesentlich positiv, da wir auch für den zweiten Punkt im Falle der Anziehung $g_{21} = + \mu_2 F(r_{12})$, im Falle der Abstossung $g_{21} = - \mu_2 F(r_{12})$ setzen.

Grundannahme 7. Ist r_{13} die Entfernung desjenigen materiellen Punktes, welchen wir den ersten genannt haben, von einem ebenfalls beliebigen dritten materiellen Punkte und $\Phi(r_{13})$ die Beschleunigung des ersten materiellen Punktes durch den dritten, ferner $\mu_3 \Phi(r_{13})$ die des dritten durch den ersten materiellen Punkt, so steht immer die Beschleunigung des zweiten materiellen Punktes durch den dritten

---

[1]) Hier ist allerdings ohne erhebliche Störung der Klarheit eine Verallgemeinerung des Bildes möglich und auch versucht worden, durch die Annahme, dass die Function F auch den ersten oder sogar den zweiten Differentialquotienten von r_{12} nach der Zeit enthält. Ist letzterer linear darin enthalten, so kann man auch sagen, dass die Factoren m, von denen später die Rede sein wird, nicht constant sind. Doch hat diese Verallgemeinerung so wenig praktische Bedeutung erlangt, dass wir hier nicht weiter darauf eingehen wollen.

zu der des dritten durch den zweiten im constanten Verhältnisse $\mu_2 : \mu_3$, so dass, wenn r_{23} die Entfernung der letzteren beiden materiellen Punkte und $\Psi(r_{23})$ die Beschleunigung des zweiten materiellen Punktes durch den dritten ist, dann $\frac{\mu_3}{\mu_2} \Psi(r_{23})$ die des dritten durch den zweiten sein muss.

Um dieser Annahme einen mehr symmetrischen Ausdruck zu verleihen, bezeichnen wir mit m_1 eine ganz beliebige, aber zu allen Zeiten und an allen Orten constante positive Zahl und setzen:

$$\frac{m_1}{\mu_2} = m_2, \quad \frac{m_1}{\mu_3} = m_3 .$$

Ferner bezeichnen wir die Grösse $m_1 . F(r_{12})$, welche offenbar ebenfalls eine Function von r_{12} sein wird, die dasselbe Vorzeichen wie $F(r_{12})$ hat, mit $f_{12}(r_{12})$; die Grössen $\frac{m_1}{\mu_2} \Phi(r_{13})$ und $\frac{m_1}{\mu_2} \Psi(r_{23})$ mit $f_{13}(r_{13})$ und $f_{23}(r_{23})$. Dann können wir die obigen Relationen in der folgenden symmetrischen Form schreiben:

$$\begin{aligned} m_1 g_{12} &= m_2 g_{21} = \pm f_{12}(r_{12}), \\ m_1 g_{13} &= m_3 g_{31} = \pm f_{13}(r_{13}), \\ m_2 g_{23} &= m_3 g_{32} = \pm f_{23}(r_{23}), \end{aligned}$$

wo im Falle der Abstossung das positive, in dem der Anziehung das negative Zeichen gilt.

Ziehen wir einen vierten materiellen Punkt in den Kreis der Betrachtungen, so können wir erfahrungsmässig constatiren die Beschleunigungen

$$g_{14} = F_1(r_{14}), \quad g_{24} = \Phi_1(r_{24}), \quad g_{34} = \Psi_1(r_{34}),$$

welche der erste, zweite und dritte materielle Punkt in den Entfernungen r_{14}, r_{24} und r_{34} durch den vierten erfahren, ferner den Factor μ_4, mit den man die Beschleunigung $F_1(r_{14})$ multipliciren muss, um die Beschleunigung g_{41} des vierten materiellen Punktes durch den ersten zu erhalten. Da die Grundannahme, welche wir die Grundannahme 7 nannten, für je drei beliebige materielle Punkte gelten soll, so muss dann die Beschleunigung g_{42} des vierten materiellen

Punktes durch den zweiten gleich $\frac{\mu_4}{\mu_2}\Phi_1(r_{24})$ und die Beschleunigung g_{43} des vierten materiellen Punktes durch den dritten gleich $\frac{\mu_4}{\mu_3}\Psi_1(r_{34})$ sein. Wenn wir nun genau wie früher setzen

$$\frac{m_1}{\mu_4} = m_4,\ m_1 F(r_{14}) = f_{14}(r_{14}),$$
$$\frac{m_1}{\mu_2}\Phi_1(r_{24}) = m_2\,\Phi_1(r_{24}) = f_{24}(r_{24}),$$
$$\frac{m_1}{\mu_3}\Psi_1(r_{34}) = m_3\,\Psi_1(r_{34}) = f_{34}(r_{34}),$$

so erhalten wir:

$$m_1 g_{14} = m_4 g_{41} = \pm f_{14}(r_{14}),$$
$$m_2 g_{24} = m_4 g_{42} = \pm f_{24}(r_{24}),$$
$$m_3 g_{34} = m_4 g_{43} = \pm f_{34}(r_{34}).$$

Die Ausdehnung dieser Gleichungen auf mehr als vier materielle Punkte hat keine Schwierigkeit.

§ 7. Masse und Kraft. Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung.

Wir erhalten nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten für jeden materiellen Punkt eine bestimmte Zahl m, welche wir dessen Masse nennen und für je zwei materielle Punkte eine Function $f(r)$ ihrer Entfernung r, welche wir die zwischen diesen materiellen Punkten in dieser Entfernung wirkende Kraft nennen. Den Absolutwerth von $f(r)$ bezeichnet man als die Intensität dieser Kraft, sowohl der Kraft, welche der erste Punkt auf den zweiten ausübt, und welche gleich dem Producte der Masse des ersten in die Beschleunigung ist, die er durch den zweiten erfährt, als auch der Kraft des zweiten Punktes auf den ersten, die gleich dem Producte der Masse des zweiten in dessen Beschleunigung durch den ersten ist. Die Intensität der Kraft soll also wie der Absolutwerth der Beschleunigung als wesentlich positiv betrachtet werden. Die Richtung der Beschleunigung, welche der zweite Punkt dem ersten ertheilt, nennt man die

Richtung der von dem zweiten auf den ersten ausgeübten Kraft. Sie ist immer entgegengesetzt wie die Richtung der vom ersten auf den zweiten ausgeübten Kraft und gegen den zweiten oder von ihm weg gerichtet, je nachdem $f(r)$ negativ oder positiv ist.

Die von einem materiellen Punkte auf einen zweiten ausgeübte Kraft ist also immer gleich, aber entgegengesetzt gerichtet der von dem zweiten auf den ersten ausgeübten. Man sagt auch, Wirkung und Gegenwirkung sind gleich, aber entgegengesetzt gerichtet.

Wir sagen der Kürze halber, die zwischen zwei Punkten wirkende Kraft ist eine Centrikraft, womit wir ausdrücken: 1. dass ihre Intensität nur Function der Länge der Entfernung der beiden Punkte ist, 2. dass ihre Richtung in die Richtung der Verbindungslinie derselben fällt, 3. dass Wirkung und Gegenwirkung gleich und entgegengesetzt gerichtet sind. Damit die Bewegung sicher eindeutig bestimmt ist, nehmen wir noch an, dass die natürlich eindeutige Function der Entfernung r, welche die Kraft giebt, für alle in Betracht kommenden Werthe des r eine endliche erste Ableitung hat (incl. Null) oder dass wenigstens der Quotient des Zuwachses von r in den dazu gehörigen Zuwachs von $f(r)$ für diese Werthe von r niemals unendlich wird.

Von den Massen m aller materiellen Punkte ist eine ganz willkürlich. Sämmtliche anderen aber sind durch diese eine und durch die Erfahrungsthatsachen bestimmt.

Obwohl ich statt aller Citate lieber vorausschicke, dass ich in diesem Buche blos Bekanntes darstelle und keinen der angeführten Sätze selbst gefunden zu haben beanspruche, so will ich doch hier, da dies vielleicht weniger bekannt ist, erwähnen, dass die auseinandergesetzte Definition der Masse von Mach stammt.[1])

Es würde unser Bild vereinfachen, wenn wir die Massen aller materiellen Punkte gleich annähmen, also voraussetzten, dass sich je zwei materielle Punkte gleiche, aber entgegengesetzte Beschleunigungen ertheilen. Würde man dann an-

---

[1]) Carl's Repertorium, Bd. 4.

nehmen, dass in dichteren Körpern einfach mehr materielle Punkte auf die Volumeinheit entfallen, so könnte man alle Erscheinungen ebenso gut darstellen. Auch einen materiellen Punkt von der Masse m könnte man sich sehr angenähert durch m sehr nahe, fest verbundene materielle Punkte von der Masse 1 darstellen. Ich habe das allgemeinere Bild blos deshalb acceptirt, weil es ebenfalls mit keiner Unklarheit oder Unbestimmtheit behaftet ist.

Natürlich sind die hier gemachten Grundannahmen organisch miteinander verbunden, so dass man vielfach in Widersprüche gerathen würde, wenn man nur eine oder wenige fallen liesse oder veränderte, während man die übrigen unverändert beibehielte. So kann man z. B. zeigen, dass, wenn man die Unabhängigkeit der Beschleunigung, die sich zwei materielle Punkte ertheilen, von ihrer Lage im Raume und vom Absolutwerthe der Zeit annimmt, aber eine der Annahme 4, 5 oder 7 fallen lässt, die Geschwindigkeit zweier fest verbundener materieller Punkte mit der Zeit ins Unendliche wachsen könnte, wobei natürlich noch vorausgesetzt ist, dass die Wirkung der Vorrichtung, welche sie (nahe) fest verbindet, selbst durch Kräfte erzeugt ist, die unseren Annahmen entsprechen. Daraus folgt jedoch selbstverständlich nicht, dass sich die Gesammtheit unserer Annahmen durch das Energieprincip oder andere allgemeine Principien ersetzen liesse. Die Möglichkeit, einen Theil unserer Grundannahmen durch derartige Principien zu ersetzen, will ich keineswegs leugnen.

Ja man könnte sogar statt von dem Begriffe der Beschleunigung von der Gleichung der lebendigen Kraft ausgehen, indem man z. B. voraussetzt, dass diese Gleichung für jede Coordinatenrichtung gesondert gilt. Es dürfte dies bei der wichtigen Rolle, die das Energieprincip in der gesammten Natur spielt, vielleicht Manchem sympathisch sein. Doch fand ich keine Möglichkeit, die Ersetzung der hier gemachten Grundannahmen durch allgemeinere Principien in einer Weise zu bewerkstelligen, wodurch die Grundannahmen wirklich wesentlich vereinfacht würden. Ich habe mich darum auch nicht besonders bemüht, da mir dies keineswegs wesentlich und aussichtsvoll vorkommt, sobald man sich doch entschliesst, von der Fernwirkung materieller Punkte auszugehen und erst aus dieser das Hamilton'sche Princip, die Gleichungen der Elasticitätslehre und Hydrodynamik etc. abzuleiten.

§ 8. Allgemeine Bewegungsgleichungen.

Falls die zwischen zwei materiellen Punkten, deren Coordinaten x_1, y_1, z_1 resp. x_2, y_2, z_2 seien, wirkende Kraft eine abstossende ist, fällt, wie schon bemerkt, die Beschleunigung g_{12} des ersten materiellen Punktes durch den zweiten in die Richtung der Verlängerung der vom zweiten gegen den ersten gezogenen Geraden r_{12}, welche mit den positiven Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus

$$\frac{x_1 - x_2}{r_{12}}, \quad \frac{y_1 - y_2}{r_{12}}, \quad \frac{z_1 - z_2}{r_{12}}$$

sind. Dies sind also die Cosinusse der Winkel (g_{12}, x), (g_{12}, y), (g_{12}, z), welche die Beschleunigung g_{12} mit den positiven Coordinatenaxen bildet. Dann ertheilen wir auch der Function $f_{12}(r_{12})$ das positive Vorzeichen. Würde also der erste materielle Punkt nur durch den zweiten beschleunigt, so hätte man nach Formel 7)

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} = g_{12} \cos(g_{12}, x) = \frac{1}{m_1} f_{12}(r_{12}) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}}$$

mit zwei analogen Gleichungen für die y- und z-Axe. Wenn die Beschleunigung die entgegengesetzte Richtung hat, so nehmen wir sie wieder positiv, geben aber dem Cosinus das entgegengesetzte Zeichen, setzen also

$$\cos(g_{12}, x) = \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}.$$

Da wir aber dann auch der Funktion $f_{12}(r_{12})$ das entgegengesetzte Zeichen geben, so ist auch in diesem Falle

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} = \frac{1}{m_1} f_{12}(r_{12}) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}}.$$

Nach der dritten Grundannahme ist nun die gesammte Beschleunigung des ersten materiellen Punktes die Vectorsumme der verschiedenen Beschleunigungen, die er von allen übrigen materiellen Punkten erfährt, und nach 8) ist dann die Gesammtcomponente der Beschleunigung in der Abscissenrichtung gleich der gewöhnlichen algebraischen Summe der einzelnen Beschleunigungen. Man hat also allgemein

$$9) \qquad m_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} = \sum_{k=2}^{k=n} f_{1k}(r_{1k}) \frac{x_1 - x_k}{r_{1k}}$$

mit zwei analogen Gleichungen für die beiden übrigen Coordinaten und $3n - 3$ analogen Gleichungen für die anderen materiellen Punkte.

Die über und unter dem Summenzeichen angegebenen Werthe der Grösse, nach der zu summiren ist, drücken (wie im Folgenden immer) aus, dass im Ausdrucke, dem das Summenzeichen vorgesetzt ist, dieser Grösse alle positiven ganzen Zahlenwerthe vom unten bis zum oben angegebenen incl. zu ertheilen und dann alle so gebildeten Ausdrücke zu addiren sind. Wir bezeichnen mit $\varphi_{hk}(r_{hk})$ das unbestimmte Integrale $\int f_{hk}(r_{hk})\, d r_{hk}$, wobei der Integrationsconstante ein beliebiger specieller Werth ertheilt werden kann.

Ferner werden wir oft nöthig haben, in einem Ausdrucke, welcher die Coordinaten beliebiger unserer materiellen Punkte enthält, einer einzigen dieser Coordinaten einen sehr kleinen Zuwachs zu ertheilen, alle anderen constant zu lassen. Die Zuwächse, welche in solcher Weise entstehen, nennen wir partielle und bezeichnen sie durch das Zeichen ∂. Sie sind nicht zu verwechseln mit den Zuwächsen, die während der Zeit dt eintreten (den totalen); denn während dieser Zeit ändern sich im Allgemeinen alle Coordinaten. So hat der partielle Differentialquotient $\frac{\partial r_{hk}}{\partial x_h}$ von r_{hk} nach x_h folgende Bedeutung: man ertheile von allen Coordinaten nur dem x_h einen kleinen Zuwachs, suche den dadurch erzeugten Zuwachs von r_{hk}, dividire ihn durch den Zuwachs von x_h und suche endlich die Limite, welcher sich der Quotient mit abnehmendem Zuwachs des x_h nähert. Da

$$r_{hk} = \sqrt{(x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2 + (z_h - z_k)^2}$$

ist, so findet man nach den Regeln der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial r_{hk}}{\partial x_h} = \frac{x_h - x_k}{r_{hk}},$$

ebenso

$$\frac{\partial r_{hk}}{\partial y_h} = \frac{y_h - y_k}{r_{hk}}, \quad \frac{\partial r_{hk}}{\partial z_h} = \frac{z_h - z_k}{r_{hk}}.$$

Ferner folgt gemäss der Definition der Functionen φ

$$\frac{\partial \varphi_{hk}(r_{hk})}{\partial x_h} = \varphi_{hk}'(r_{hk}) \frac{x_h - x_k}{r_{hk}} = f_{hk}(r_{hk}) \frac{x_h - x_k}{r_{hk}}$$

und analog für y und z.

Wir wollen nun in dem Ausdrucke $\varphi_{hk}(r_{hk})$ der Reihe nach h gleich jeder positiven ganzen Zahl von eins bis n incl. und für jedes h wieder k gleich jeder dieser Zahlen mit Ausnahme der, die gleich h ist, setzen. Die Summe aller so erhaltenen Ausdrücke bezeichnen wir mit

$$\sum\sum \varphi_{hk}(r_{hk}) = -V. \tag{10}$$

Die Gleichung 9) kann dann in der Form geschrieben werden:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \tag{11}$$

mit zwei analogen Gleichungen für die beiden anderen Coordinatenaxen und $3n - 3$ analogen für die anderen materiellen Punkte. Die in irgend einer Coordinatenrichtung auf irgend einen materiellen Punkt wirkende Kraftcomponente ist daher die negative partielle Ableitung der Function V aller Coordinaten (der Kraftfunction) nach der betreffenden Coordinate.

Für mein Gefühl liegt in den Differentialquotienten nach der Zeit noch eine gewisse Unklarheit. Abgesehen von den wenigen Fällen, wo sich eine analytische Function finden lässt, welche genau die vorgeschriebenen Differentialquotienten nach der Zeit hat, wird man behufs Herstellung eines Zahlenbildes die Zeit immer in eine endliche Zahl von Zeittheilen getheilt denken müssen, bevor man zur Limite übergeht.[1]) Vielleicht sind unsere Formeln nur der sehr angenäherte Ausdruck für Durchschnittswerthe, die sich aus

---

[1]) Vgl. Wien. Sitzber. 105, S. 912, 1896. Wied. Ann. 60, S. 236, 1897.

viel feineren Elementen construiren lassen und nicht im strengen Sinne differentiirbar sind. Doch fehlt hierfür bisher noch jeder Anhaltspunkt in der Erfahrung.

§ 9. Verschiedene Ausdrucksweisen. Resultirende. Componenten.

Statt zu sagen, der zweite materielle Punkt ertheilt dem ersten die Beschleunigung g_{12}, wollen wir auch sagen: die Kraft $\pm f_{12}(r_{12})$, welche der zweite auf den ersten ausübt, erzeugt diese Beschleunigung, dürfen aber dabei natürlich nie vergessen, dass dies nur verschiedene Worte für ein und dieselbe Thatsache sind. Wie schon bemerkt, bezeichnen wir den Absolutwerth der Function $f_{12}(r_{12})$, welcher gleich ist dem Producte aus der Masse m des materiellen Punktes, auf den sie wirkt, und der Beschleunigung g, die sie ihm ertheilt, als die Intensität, die Richtung dieser Beschleunigung als die Richtung der Kraft. Genau so, wie die Beschleunigungen, können wir daher auch die Kräfte durch Vectoren (Pfeile) ausdrücken, deren Länge gleich der Intensität der betreffenden Kraft ist und deren Richtung mit der Richtung der Kraft zusammenfällt, also auch mit der Richtung der von ihr erzeugten Beschleunigung. Diese Vectoren, welche die Kräfte darstellen, trägt man gewöhnlich nicht vom Coordinatenursprunge, sondern von dem Punkte aus auf, auf welchen die Kraft wirkt.

Die Vectorsumme aller Kräfte, welche auf einen materiellen Punkt wirken, stellt wieder eine Kraft dar, welche man die Resultirende nennt; die Einzelkräfte nennt man die Componenten derselben. Da nach Grundannahme 3 die wirkliche Beschleunigung eines materiellen Punktes die Vectorsumme der verschiedenen Beschleunigungen ist, welche er durch die einzelnen Kräfte erfahren würde und sich die Vectoren, welche die Kräfte darstellen, von denen, welche die Beschleunigungen darstellen, nur dadurch unterscheiden, dass die Längen der ersteren alle m mal grösser sind, so folgt, dass die wirkliche Beschleunigung des materiellen Punktes die Richtung der resultirenden Kraft hat und ihr Product in die Masse des materiellen Punktes gleich der

Intensität der resultirenden Kraft ist. Die wirkliche Beschleunigung wird daher aus der resultirenden Kraft gerade so gefunden, wie die durch eine einzelne Kraft erzeugte Beschleunigung aus dieser einzelnen Kraft.

Man kann dies leicht noch weiter verallgemeinern. Sei der Vector $\mathfrak{R}$ die Summe beliebiger anderer Vectoren C, so ist die Beschleunigung, welche die durch den Vector $\mathfrak{R}$ dargestellte Kraft einem materiellen Punkte ertheilt, die Vectorsumme der Beschleunigungen, welche die verschiedenen durch die Vectoren C dargestellten Kräfte demselben materiellen Punkte ertheilen würden. Da es gleichgültig ist, in welcher Ordnung man Vectoren zu einer Summe vereinigt, da ferner die Vectoren, welche Kräfte darstellen, immer m mal so lang und gleich gerichtet sind wie die, welche die entsprechenden Beschleunigungen darstellen, und nach der Grundannahme 3 sich Beschleunigungen wie Vectoren addiren, so wird der materielle Punkt durch die einzige Kraft $\mathfrak{R}$ (die Resultirende) dieselbe Beschleunigung erfahren, wie durch alle Kräfte C (die Componenten derselben) zusammen, sei es, dass sonst keine oder dass ausserdem noch beliebig andere Kräfte auf ihn wirken, deren Beschleunigung sich dann noch zu dieser addirt.

Die Summe zweier Vectoren kann nur dann ein Vector von der Länge Null sein, wenn beide Vectoren gleich lang, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Ein materieller Punkt, auf welchen zwei Kräfte wirken, wird also dann und nur dann gar keine Beschleunigung erfahren, also sich genau so verhalten, als ob gar keine Kraft auf ihn wirkte, wenn jene beiden Kräfte gleiche Intensität, aber entgegengesetzte Richtung haben. Man sagt dann, die Kräfte halten sich das Gleichgewicht. Da die Resultirende einer beliebigen Zahl von Kräften, die auf einen materiellen Punkt wirken, durch die Figur 5 des § 4 (das Kräftepolygon, für zwei Kräfte Kräfteparallelogramm) gefunden wird, so werden sich die Kräfte dann das Gleichgewicht halten, d. h. dem Punkte keine Beschleunigung ertheilen, wenn das Kräftepolygon $ABC\ldots M$ ein geschlossenes ist, also sein Endpunkt M mit seinem Anfangspunkt A zusammenfällt.

Man sieht aus der Construction des Kräftepolygons, dass die Wirkung einer Kraft P durch die der drei in den drei Coordinatenrichtungen wirkenden Kräfte

12) $X = P\cos(P,x)$, $Y = P\cos(P,y)$, $Z = P\cos(P,z)$,

welche ihre Componenten nach den Coordinatenrichtungen heissen, vollkommen ersetzt werden kann.

Wir bezeichnen noch mit P_1 die Resultirende aller Kräfte, die auf den materiellen Punkt von der Masse m_1 wirken, auf den sich die Gleichungen 9) beziehen, mit $P_1', P_1'' \ldots$ irgend welche Componenten, in die man die Kraft P_1 zerlegen kann, mit X_1, Y_1, Z_1, X_1', Y_1', Z_1', $X_1'', Y_1'', Z_1'' \ldots$ die Componenten der Kräfte P_1, resp. $P_1', P_1'' \ldots$ in den Coordinatenrichtungen. Dann können wir nach dem Gesagten die Gleichung 9) auch so schreiben:

13) $$m_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} = X_1 = X_1' + X_1'' + \ldots$$

Analoge Gleichungen gelten natürlich für die übrigen Coordinatenaxen und materiellen Punkte.

§ 10. Poisson's Beweis des Kräftenparallelogramms.

Von den zahlreichen Beweisen, die für den Satz vom Parallelogramme der Kräfte gegeben worden sind, will ich hier nur als Musterbild kurz den von Poisson in seiner Mechanik gegebenen in etwas modificirter Form auseinandersetzen.

Wir nehmen an, dass wir mehrere Kräfte (die Componenten), welche auf einen Punkt wirken, immer in allen ihren Wirkungen durch eine einzige (die Resultirende) ersetzen können. Daraus folgt, dass man die Resultirende von mehr als zwei Kräften immer finden kann, indem man zuerst zwei beliebige derselben zu einer Resultirenden, dann diese mit irgend einer dritten zu einer neuen Resultirenden u. s. w. zusammensetzt. Denn da die erste Resultirende die beiden ersten Kräfte vollständig vertritt, so muss die neue Resultirende, welche unter allen Umständen dieselbe Wirkung hat wie die erste Resultirende und die dritte Kraft zusammen, auch dieselbe Wirkung haben wie die ersten drei Kräfte u. s. w.

Wir setzen ferner voraus, dass die Intensität der Resultirenden und deren relative Lage zu den Componenten von der absoluten Lage der Figur im Raume, den Bewegungsverhältnissen, den früheren Zeitumständen und der Provenienz der Kräfte unabhängig ist, dass also Kräfte beliebigen Ursprungs sich gleich verhalten. Als Kraft von doppelter Intensität bezeichnen wir eine solche, welche dasselbe leistet, wie zwei vollkommen gleiche gleich gerichtete Kräfte zusammen. Als Kraft von dreifacher Intensität eine solche, die dasselbe leistet, wie drei gleich beschaffene gleich gerichtete u. s. w. Gesetze und selbst Sinn der erzeugten Bewegung kümmert uns dabei nicht.

Wenn zwei vollkommen gleiche Kräfte in entgegengesetzter Richtung auf einen Punkt wirken, so ist dadurch weder eine Bewegung in ihrer Geraden, noch senkrecht darauf bestimmt. Der Punkt muss also, wenn er anfangs ruhte, in Ruhe bleiben, es muss also Gleichgewicht eintreten; der Punkt muss sich so verhalten, als ob gar keine Kraft auf ihn wirkte.

Wenn daher eine Kraft in einem Sinne und eine Kraft von doppelter Intensität im entgegengesetzten Sinne auf einen Punkt wirkt, so können wir letztere durch zwei Kräfte von einfacher Intensität ersetzen, von denen eine durch die entgegengesetzte Kraft aufgehoben wird. Es bleibt also nur noch eine derselben.

Fährt man so zu schliessen fort, so erkennt man leicht, dass die Resultirende von beliebig vielen Kräften, deren Richtungen in eine Gerade fallen, deren algebraische Summe ist, wobei wir die in der einen Richtung wirkenden Kräfte positiv, die in der anderen Richtung wirkenden negativ zählen und auch die Resultirende in der einen und anderen Richtung wirkt, je nachdem die algebraische Summe positiv oder negativ ist.

Nun sollen auf einen Punkt A zwei gleiche Kräfte AB und AC wirken, welche einen beliebigen Winkel miteinander einschliessen. Wir wollen die eine Hälfte AH der unendlichen Geraden, welche diesen Winkel halbirt, als die positive, die andere als die negative Halbirungslinie bezeichnen. α sei der Winkel zwischen der positiven Halbirungslinie und einer der Kräfte, welche also untereinander den Winkel 2α einschliessen. α kann vorläufig spitz oder stumpf, gleich Null, gleich einem oder gleich zwei rechten sein.

Die einzige Gerade, welche durch zwei gleich lange von einem Punkte ausgehende Gerade eindeutig bestimmt ist, ist die Halbirungslinie ihres Winkels. Die Resultirende AD der Kräfte AB und AC muss daher in diese Halbirungslinie fallen, nach ihrer positiven oder negativen Seite hin.

Wird die Intensität jeder der Kräfte AB und AC ohne Aenderung ihrer Richtung verdoppelt, so können wir uns die Sache so denken, als ob in der Richtung von AB zwei der ursprünglichen Kraft gleiche Kräfte AB und AB_1 wirkten, ebenso in der Richtung AC zwei gleiche Kräfte AC und AC_1. Die Resultirende von AB und AC ist AD, die von AB_1 und AC_1 ist eine gleiche gleich gerichtete Kraft AD_1. AD und AD_1 geben aber zusammen eine Resultirende, die gleich gerichtet aber doppelt so gross wie AD ist. So beweist man, dass AD überhaupt der Intensität der gleichen Kräfte AB und AC proportional sein muss. Es kann aber noch irgendwie von dem Winkel der letzteren Kräfte abhängen. Wir wollen daher

$$AD = AB\,f(\alpha)$$

setzen, wobei wir der Function $f(\alpha)$ in jenen Fällen das positive Zeichen geben, wo AD auf die positive Seite AH der Halbirungslinie fällt, in jenen Fällen aber, wo sie die Richtung der negativen Halbirungslinie hat, das negative Zeichen.

Wenn wir $180 - \alpha$ für α setzen, so machen die beiden Kräfte denselben Winkel nach der entgegengesetzten Seite, daher muss auch die Resultirende einfach ihre Richtung umkehren, es ist also

$$f(180 - \alpha) = -f(\alpha)$$

und es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir in dem, was nun zunächst folgt, voraussetzen, dass α nicht grösser als 90^0 ist. Wir wollen nun eine Gerade AK ziehen, welche mit der Geraden AH einen beliebigen Winkel β, der zwischen α und 90^0 liegt, nach derjenigen Seite hin einschliesst, wo die Kraft AB liegt.

Wir lassen ferner auf den Punkt A noch zwei Kräfte AB' und AC' wirken, welche durch Pfeile dargestellt sind, die genau die Spiegelbilder der Pfeile AB und AC bezüglich der Geraden AK sind. AH' sei das Spiegelbild der Geraden AH bezüglich AK als Spiegel. Die beiden Kräfte AB' und AC' haben dann eine Resultirende AD', welche ebenfalls das Spiegelbild von AD bezüglich AK ist und wir erhalten die Resultirende aller vier Kräfte AB, AC, AB', AC', indem wir die Resultirende von AD und AD' suchen. Letztere beiden Kräfte sind untereinander gleich und bilden den Winkel β mit der Geraden AK oder ihrer Verlängerung, je nachdem $f(\alpha)$ positiv oder negativ ist. Ihre Resultirende ist also

$$AD\,f(\beta) = AB\,(f\alpha)\,f(\beta) \tag{13a}$$

und wirkt in der Richtung AK oder in der entgegengesetzten, je nachdem dieser Ausdruck positiv oder negativ ist. Dieselbe Kraft müssen wir aber auch erhalten, wenn wir zuerst die Resultirende von AB und AB', dann die von AC und AC' bilden und schliesslich diese beiden Resultirenden wieder zu einer einzigen zusammensetzen. Die Resultirende von AB und AB' ist gleich $AB\,f(\beta - \alpha)$, die von AC und AC' gleich $AB\,f(\beta + \alpha)$. Beide fallen in die Gerade AK. Jede hat die Richtung AK oder die entgegengesetzte, je nachdem der für sie aufgestellte Ausdruck positiv oder negativ ist. Die Resultirende dieser beiden Resultirenden ist also ihre algebraische Summe

$$AB.[f(\beta - \alpha) + f(\beta + \alpha)]$$

und wirkt ebenfalls in der Richtung AK oder der entgegengesetzten, je nachdem dieser Ausdruck positiv oder negativ ist.

Da wir also für die Resultirende der vier Kräfte AB, AB', AC und AC einerseits diesen Ausdruck, andererseits den Ausdruck 13a) erhalten haben, so müssen beide Ausdrücke untereinander gleich sein. Auch das Vorzeichen hat in beiden die gleiche Bedeutung. Das positive drückt eine Wirkung in der Richtung AK, das negative in der entgegengesetzten aus. Wir erhalten somit:

13b) $$f(\alpha)f(\beta) = f(\beta - \alpha) + f(\beta + \alpha)$$

für alle Werthe von α und β, die innerhalb der im Obigen angenommenen Grenzen liegen.

Für $\alpha = 0$ ist die Resultirende doppelt so gross als jede der Componenten. Daher ist $f(0) = 2$. Wenn ε ein sehr kleiner Winkel ist, so können wir jedenfalls $f(\varepsilon) = e^{\zeta} + e^{-\zeta}$ oder $= -(e^{\zeta} + e^{-\zeta})$ oder $= 2\cos\zeta$ setzen, je nachdem $f(\varepsilon) > 2$ oder < -2 ist oder zwischen $+2$ oder -2 liegt. Wäre es genau gleich $+2$ oder -2, so würden wir die erste oder zweite Form mit $\zeta = 0$ wählen. Machen wir nun in Gleichung 13b) der Reihe nach folgende Substitutionen: $\alpha = \varepsilon, \beta = \varepsilon$, dann $\alpha = \varepsilon, \beta = 2\varepsilon$, dann $\alpha = \varepsilon, \beta = 3\varepsilon$ oder $\alpha = \beta = 2\varepsilon$, dann $\alpha = \varepsilon, \beta = 4\varepsilon$ oder $\alpha = 2\varepsilon, \beta = 3\varepsilon$ u. s. f., so finden wir ohne Schwierigkeit für beliebige ganze Zahlen h $f(h\varepsilon) = e^{h\zeta} + e^{-h\zeta}$ oder $= (-1)^h(e^{h\zeta} + e^{-h\zeta})$ oder $= 2\cos h\zeta$, je nachdem wir die erste, zweite oder dritte Form für $f(\varepsilon)$ gewählt haben. Nun verschwindet die Resultirende, also $f(h\varepsilon)$ für $h\varepsilon = 90^0$, aber für keinen Werth des $h\varepsilon$, der zwischen 0^0 und 90^0 liegt; daher kann $f(h\varepsilon)$ nicht durch eine der Exponentialformeln dargestellt sein. Es muss also gleich $2\cos(h\zeta)$ sein und zwar muss für $h\varepsilon = 90^0$ auch $h\zeta = 90^0$, also $\zeta = \varepsilon$ sein. Man erhält also $f(h\varepsilon) = 2\cos(h\varepsilon)$ und wenn man die ganz beliebige Grösse $h\varepsilon$ mit α bezeichnet, $f(\alpha) = 2\cos\alpha$, womit das Kräftenparallelogramm für den Fall bewiesen ist, dass beide Componenten untereinander gleich sind.

Nun geht man zu dem Falle über, dass zwei ungleiche aufeinander senkrechte Kräfte AB und AC auf einen Punkt A wirken. Man halbirt die Gerade BC im Punkte D und zerlegt jede der gegebenen Kräfte in eine Componente in der Richtung AD und eine zweite, die mit der zu zerlegenden Kraft denselben Winkel nach der entgegengesetzten Seite einschliesst. Die beiden letzteren Componenten heben sich auf, die beiden ersteren sind beide gleich AD und geben zusammen die nach dem Satze vom Kräftenparallelogramme folgende Resultirende der beiden ursprünglich gegebenen Kräfte.

Nun erst kann man die Resultirende der ganz beliebigen Kräfte AB und AC finden, die auf einen Punkt A wirken. Man zeichnet das Parallelogramm $ABDC$ und zerlegt jede der Kräfte in zwei Componenten, von denen eine die Richtung AD hat und die andere darauf senkrecht steht. Man sieht sofort, dass die beiden letzteren Componenten sich aufheben, die beiden ersteren aber wieder die durch die Diagonale AD dargestellte Resultirende liefern.

Natürlich ist dies keineswegs ein Beweis, dass alle unsere im Früheren gemachten Annahmen richtig seien. Es zeigt nur, dass man sich in Widersprüche verwickeln würde, wenn man unsere zur Definition der Kräfte gemachten Annahmen im Uebrigen beibehalten und nur über die Art der Construction der Resultirenden zweier Kräfte eine andere Annahme machen wollte.

Selbst die Annahme, dass die Intensität der Resultirenden und ihre relative Lage gegen die Componenten nicht von der Lage der Figur gegen den Raum resp. gegen die Fixsternwelt abhängt, ist nicht so selbstverständlich, als man glaubt, da ja z. B. die Kräfte, welche im Stande sind, ein gewisses System in einer gewissen relativen Lage seiner Theile dauernd zu erhalten, keineswegs blos von dieser relativen Lage abhängen, sondern sich ändern, wenn das ganze System sich im Raume ohne jede Aenderung der relativen Lage seiner Theile dreht.

§ 11. Ueber die Ersetzung des Coordinatensystems des Bildes durch andere.

Da durch die Gleichungen 9) blos die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit bestimmt sind, so müssen noch die $6n$ Werthe sämmtlicher Coordinaten und ihrer ersten Differentialquotienten nach der Zeit (Geschwindigkeitscomponenten) zu irgend einer Zeit (der Anfangszeit) gegeben sein. Man bezeichnet die Anfangszeit häufig als die Zeit t_0 oder Null und die Werthe der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten zu dieser Zeit mit

$x_1^0, y_1^0, \ldots w_n^0$. Durch diese $6n$ Grössen und die Differentialgleichungen 9) sind dann die Werthe sämmtlicher Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten zu jeder anderen Zeit eindeutig bestimmt.

Da wir unserem Bilde ein einziges bestimmtes Coordinatensystem zu Grunde legten, so haben wir erst zu untersuchen, in wie weit dieselben Regeln der Bestimmung der Werthe der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten aus deren Anfangswerthen auch für andere Coordinatensysteme giltig bleiben. Alle Coordinatensysteme, für welche dies der Fall ist, sowie das ursprünglich gewählte Coordinatensystem nennen wir taugliche Bezugsysteme. Wir denken uns zuerst ein beliebiges anderes Coordinatensystem eingeführt, dessen Axen zu jeder Zeit parallel denen des ursprünglichen Coordinatensystems unseres Bildes sind und ihre Lage gegen dieses erste Coordinatensystem nicht ändern. Dann unterscheiden sich die Coordinaten irgend eines Punktes zu irgend einer Zeit bezüglich des neuen Coordinatensystems von denen bezüglich des alten nur durch additive Constanten; während die Geschwindigkeitscomponenten, die Beschleunigungen, sowie alle Glieder der rechten Seite der Gleichungen 9), von denen man sofort sieht, dass sie nur von der relativen Lage der materiellen Punkte abhängen, vollständig unverändert bleiben. Die Gleichungen 9) bleiben also ganz unverändert gültig, wenn man darin die Coordinaten bezüglich des ursprünglichen Coordinatensystems mit denen bezüglich des neuen ersetzt. Das neue Coordinatensystem leistet also genau dasselbe wie das ursprüngliche, da die Veränderungen der Coordinaten bezüglich des neuen Systems genau nach denselben Regeln aus den Anfangswerthen der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten abgeleitet werden können, die wir für das ursprüngliche Coordinatensystem fanden. Dies gilt auch noch, wenn die neuen Coordinatenaxen den alten parallel bleiben, aber der neue Coordinatenursprung relativ gegen die alten Coordinatenaxen in einer geraden Linie mit constanter Geschwindigkeit fortwandert, deren Componenten bezüglich der drei Coordinatenaxen a, b, c seien. Dann tritt nämlich beim Uebergang zum neuen

Coordinatensysteme zu sämmtlichen Geschwindigkeitscomponenten in der Abscissenrichtung die Constante a, zu denen in der y- resp. z-Richtung aber die Constante b resp. c, zu den Abscissen aller Punkte aber der Ausdruck $at + \alpha$, zu den y- und z-Coordinaten $bt + \beta$ resp. $ct + \gamma$ hinzu, wobei α, β, γ drei neue Constanten sind. Hierdurch werden wieder weder die Beschleunigungen noch die Glieder der rechten Seite der Gleichungen 9) irgendwie verändert und unsere Regeln, die Bewegung des Systems zu finden, gelten bezüglich des neuen Coordinatensystems unverändert wie bezüglich des alten.

Dasselbe gilt auch noch, wenn bei Ruhe oder geradliniger gleichförmiger Bewegung des neuen Coordinatenursprungs die Axen des neuen, ebenfalls rechtwinkeligen Coordinatensystems nicht denen des alten parallel sind, aber ihre Winkel mit den Axen des alten Coordinatensystems sich nicht ändern. Denn sowohl die Beschleunigungen als auch die Kräfte haben wir durch Construction von Vectoren bestimmt, welche von der Lage des Coordinatensystems unabhängig sind. Die Ausdrücke für die Projectionen der Beschleunigungen und Kräfte auf die Coordinatenrichtungen aber sind für alle Coordinatensysteme gleich. Bezeichnen wir die Coordinaten bezüglich des neuen Systems mit Accenten und mit (x, x'), (x, y'), ... die Winkel der alten und neuen Coordinatenaxen, so ist ja

$$\frac{d^2 x_1'}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \cos(x, x') + \frac{d^2 y_1}{dt^2} \cos(y, x') + \frac{d^2 z_1}{dt^2} \cos(z, x').$$

Substituirt man hier für $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_1}{dt^2}$ ihre Werthe aus den Gleichungen 9), worin man wieder für $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$ und $z_1 - z_2$ zu substituiren hat

$$(x_1' - x_2') \cos(x, x') + (y_1' - y_2') \cos(x, y')$$
$$+ (z_1' - z_2') \cos(x, z') \text{ etc.}$$

und verfährt ebenso mit $\frac{d^2 y_1'}{dt^2}$ und $\frac{d^2 z_1'}{dt^2}$, so kann man die Gleichungen für die neuen Coordinaten leicht wieder genau in die Form der Gleichungen 9) bringen.

Es giebt also sehr verschiedene Coordinatensysteme, welche genau ebenso wie das ursprüngliche Coordinatensystem dem Bilde zu Grunde gelegt werden können, ohne dass die Regeln der Ableitung der Bewegung des Systems aus den Anfangswerthen der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten irgend eine Aenderung erfahren, die alle taugliche Bezugssysteme sind. Dies ist von grosser Wichtigkeit, da oft die Wahl des einen oder anderen Coordinatensystems gewisse Vortheile bietet. Dagegen darf das neue Coordinatensystem sich nicht bezüglich des alten mit einer gewissen Geschwindigkeit drehen oder der neue Coordinatenursprung bezüglich des alten Coordinatensystems sich ungleichförmig oder krummlinig bewegen, wenn diese Regeln keine Aenderung erfahren sollen; denn im ersten Falle wären die Winkel (x, x') etc., im letzten die mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ bezeichneten Grössen keine Constanten mehr, es würden also die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit nicht mehr die obige Form annehmen, was wir im 2. Theile näher ausführen werden. Im letzteren Falle käme nur zu allen zweiten Differentialquotienten der Abscissen nach der Zeit die gleiche Function der Zeit dazu und dasselbe gälte für die beiden anderen Coordinaten.

§ 12. **Verhältniss dieser Darstellung zu anderen.**

Wir haben uns absichtlich ziemlich weit von der Wirklichkeit entfernt, um ein mit den einfachsten Mitteln construirbares, möglichst genaues und klares Bild zu erhalten, d. h. ein solches, welches frei von verschwommenen Begriffen ist, der Rechnung die bestimmtesten Anhaltspunkte liefert, und daher in jedem bestimmten Falle eindeutig und sicher das zu erwartende Resultat mit beliebiger Annäherung vorher zu bestimmen gestattet.[1]) Die Forderung einer solchen un-

[1]) Unser Bild genügt insofern der bekannten Kirchhoff'schen Forderung, dass die Physik die Thatsachen blos zu beschreiben habe, als es lediglich ein Inbegriff von Regeln zur Construction arithmetischer und geometrischer Vorstellungen ist, mittelst welcher die Thatsachen allezeit richtig vorhergesagt werden können. Die Begriffe Ursache und Wirkung sind dabei ganz vermieden. Denn wenn man

zweideutigen Bestimmtheit des Bildes scheint mir das zu sein, was Hertz unter der Forderung versteht, dass das Bild mit den Denkgesetzen übereinstimmen müsse; denn ein anderes Denkgesetz, als dass unsere Bilder klar und eindeutig vorstellbar seien und sich daraus möglichst leicht und sicher stets das mit der Erfahrung übereinstimmende Resultat ableiten lasse, kann ich mir nicht recht vorstellen. Auch bin ich durchaus nicht der Ansicht, dass irgend etwas z. B. die geometrischen Bilder nur aus den Denkgesetzen abgeleitet werden könne.

Dagegen scheint mir die Bemerkung Hertz' gerechtfertigt, dass die meisten Darstellungen der Grundprincipien der Mechanik der wünschenswerthen Consequenz und Deutlichkeit entbehren, welche ich hier dadurch anstrebte, dass ich ungescheut ganz bestimmte, ins Detail ausgearbeitete Hypothesen voranstellte. Man definirt häufig das Verhältniss der Massen der Körper als das verkehrte Verhältniss der Beschleunigungen, die sie unter dem Einflusse gleicher Kräfte annehmen. Gleiche Kräfte kann man auf ausgedehnte feste Körper wirken lassen, indem man sie auf einen horizontalen, vollkommen glatten Tisch legt und dann dieselbe gleichgedehnte elastische Schnur oder denselben gleichen Einflüssen unterworfenen kleinen Magnet oder elektrischen Gegenstand einmal an dem einen, das andere Mal an dem anderen Körper befestigt. Flüssigkeiten müssten dabei in eine Hülle von geringer Masse eingeschlossen werden, an welcher die Befestigung vorzunehmen wäre. Wie wir später aus dem Bilde, das wir uns von der Wirkung der benachbarten Volumelemente elastischer und flüssiger Körper machen können, sehen werden, kann dann in der That der Schwerpunkt des Systems, Körper und Magnet oder Hülle, Flüssigkeit und Magnet, wie eine einzige Masse betrachtet

---

auch hie und da die Anwesenheit des einen materiellen Punktes als die Ursache der Beschleunigung des anderen bezeichnet, so will man damit doch nichts als die Vorstellung der Thatsache ausdrücken, dass beide in einer bestimmten Entfernung bestimmte Beschleunigungen erhalten. Ich hoffe daher, dass gegen die hier gewählte Darstellung erkenntnisstheoretische Einwände nicht gemacht werden können.

werden, auf welche eine Kraft wirkt, die nur von der Beschaffenheit des Magnets und den Einflüssen abhängt, denen dieser ausgesetzt ist. Dasselbe gilt auch für den Fall der gespannten Schnur, wenn deren Masse verschwindet. Allein wie will man gleiche Kräfte an einzelne materielle Punkte anbringen? Entnimmt man aber die Definition des Massenverhältnisses zweier Körper dem Stosse derselben, so kann man ebenfalls die Betrachtung der stossenden Volumelemente nicht entbehren; entnimmt man sie der directen Fernwirkung zweier kleiner Körper, so gelangt man bei consequenter Durchführung wieder zu unserer Definition.

Wenn man mit einem vollständig klaren Bilde für die Wechselwirkung der Volumelemente elastischer Körper beginnen und daraus die Grundbegriffe und Gesetze der gewöhnlichen Mechanik ableiten würde, so wäre dagegen natürlich nichts einzuwenden.[1]) Dies geschieht jedoch keineswegs, man definirt vielmehr durch Vorgänge, bei denen solche Volumelemente unentbehrlich sind, wie den Stoss oder die Befestigung derselben elastischen Schnur an verschiedene Körper, die Eigenschaften (Massen) und Gesetze der Veränderungen (Kräfte) der einfachen materiellen Punkte. In den Vorstellungen, die man sich von den letzteren macht, werden Erfahrungen an ausgedehnten Objecten mit begrifflichen Constructionen an einzelnen Punkten vermischt. Wer empfände nicht den Circulus vitiosus, der darin liegt, wenn man bei Aufstellung der Grundbegriffe den materiellen Punkt als einen sehr kleinen Körper definirt und sich darauf beruft, dass es sich als entfernte Consequenz der hierauf gegründeten Theorie ergeben wird, dass man nur unendlich kleines höherer Ordnung vernachlässigt, wenn man die Volumelemente, die

---

[1]) Dass jedes klare Bild der Wechselwirkung der Volumelemente weit mehr mit der heutigen Atomistik gemein haben müsste, als man gewöhnlich annimmt, glaube ich anderswo nachgewiesen zu haben. Daselbst habe ich auch gezeigt, dass es die Vorstellung verwirrt und die Berechnung der Limite unmöglich macht, wenn man die einfachen Elemente selbst wieder ausgedehnt und in Differentiale zerlegbar annimmt. Wien. Sitzber. 105, S. 907, 7. Nov. 1896. Wied. Ann. 60, S. 231, 1897.

eigentlich kleine Körper sind, als einfache Raumpunkte behandelt. Wie weit klarer ist es, ausgedehnte Körper von vornherein unter dem Bilde zahlreicher, dicht gedrängter Punkte zu betrachten, deren Geschwindigkeit sich beim Uebergang zum Nachbarpunkt immer nur sehr wenig ändert. Ohne Vorausschickung des Begriffes des materiellen Punktes sogleich mit den Beschleunigungen endlicher Körper zu beginnen, geht aber wieder nicht an, wenn man nicht den Schwerpunktssatz schon kennt. Man wende nicht ein, dass dies nur andere Worte für dieselbe Sache seien. Darum, glaube ich, handelt es sich gerade die Worte so zu wählen, dass an das richtige erkenntnisstheoretische Verhältniss aller Begriffe stets in zweckmässigster Weise erinnert wird.

Aber selbst zugegeben, dass man das Anbringen derselben Kraft an verschiedene materielle Punkte definiren kann, ohne vorher deren Masse zu definieren, so müssen die Thatsachen, dass das Verhältniss der Beschleunigungen der materiellen Punkte kein anderes wird, je nach Wahl der Kraft, dass das Verhältniss der Beschleunigungen der materiellen Punkte A und C gleich dem Produkte der entsprechenden Verhältnisse für A und B einerseits und B und C andererseits ist, noch als besondere Erfahrungsthatsachen betrachtet werden, oder es müssen allgemeinere Erfahrungsthatsachen (z. B. das Energieprincip) vorausgeschickt werden, aus denen sie folgen. Ueber alle diese Sätze, sowie über die Gesetze der Wechselwirkung der Volumelemente, den Schwerpunktssatz etc. mit einem Schlage eine klare Anschauung zu geben, ist eben der Vorzug unseres Bildes der Centrikräfte.

Auch in den Vorlesungen Kirchhoff's über Mechanik befriedigt mich die Definition des Massenbegriffes nicht. Gerade der Fall, wo zwischen den Coordinaten der materiellen Punkte gegebene Gleichungen bestehen (erzwungene Bewegung), scheint mir mehr eine Abstraction, als ein der Natur entsprechender Fall zu sein. In allen anderen Fällen aber wird Kirchhoff's Definition schwankend, wie dies besonders bei der Einführung der Masse und Dichte eines Volumelementes eines elastischen Körpers hervortritt.

Hertz' Mechanik wird freilich dadurch, dass sie keine anderen Kräfte als die bei der erzwungenen Bewegung kennt, zu einem vollkommen verständlichen, klaren, eindeutig bestimmten Bilde. Sie entspricht, wie sich Hertz ausdrückt, den Denkgesetzen. Hier vermisse ich nur eines, nämlich den Beweis, dass sich durch dieses Bild die Natur wirklich darstellen lässt.

Natürlich leugne ich nicht die Möglichkeit, diese Begriffe in anderer Weise, als es hier geschieht, klar darzustellen; nur bisher scheint mir dies noch nicht gelungen zu sein. Auch will ich keineswegs gesagt haben, dass es mir wahrscheinlich wäre, dass die als Function der Entfernung erscheinende Fernwirkung zwischen materiellen Punkten das endgültige Bild der Naturvorgänge sein müsse. Es ist schon vielfach der Versuch gemacht worden, dieselbe durch Stösse der Molecüle eines Mediums (des Lichtäthers) zu erklären. Allein man muss da ziemlich verwickelte Nebenannahmen machen, z. B. zur Erklärung der Cohäsion den ponderablen Molecülen eine gitterartige Structur beilegen. Auch bedarf man der Stossgesetze und damit wieder des Massenbegriffes. Andererseits suchte man die Molecüle als Wirbelringe aufzufassen und dadurch ihre scheinbare Fernwirkung zu erklären. Die Möglichkeit, dass derartige Erklärungsversuche die Fernkräfte einmal verdrängen werden, besteht sicher. Doch scheinen mir die bisher zu diesem Zwecke gemachten Annahmen weder einfacher noch klarer, als das Bild, von dem ich hier ausging. Dieselben scheinen mir vielmehr die Zahl der willkürlichen Hypothesen unnütz und ohne entsprechenden Gewinn an Einfachheit und Deutlichkeit zu vermehren, was, wie ich glaube, ebenso vermieden werden muss, wie Unklarheit und Verschwommenheit der Bilder durch zu geringe Specialisirung derselben. Ueberhaupt möchte ich an Stelle der Frage, wie sind die Dinge wirklich beschaffen, die bescheidenere, aber klarere setzen, durch welche Bilder werden unsere Erfahrungen gegenwärtig am einfachsten und unzweideutigsten dargestellt.

Wie dem immer sei, ob die zukünftige Vervollkommnung der Mechanik von der Weiterentwickelung der heute gebräuchlichen speciellen Bilder oder von der Ersetzung derselben durch allgemeinere Vorstellungen energetischen oder phänomenologischen Charakters zu erwarten ist, jedenfalls glaube ich, dass eine möglichst klare Präcisirung der gegenwärtigen atomistischen Mechanik nur von Nutzen sein kann, indem diese im ersten Falle die Grundlage der Weiterentwickelung liefert, im letzteren Falle aber als Muster der für jede neue Theorie unentbehrlichen Klarheit und inneren Consequenz dienen kann. Diese scheint mir keineswegs in der Uebereinstimmung mit besonderen Denkgesetzen, sondern vielmehr darin begründet, dass sie durchaus Regeln und Constructionen benutzt, welche erfahrungsmässig stets eine eindeutig definirte Anwendung zulassen und auch, wenn man das zu erhaltende Resultat nicht im Voraus weiss, ein klar bestimmtes, mit der Beobachtung stimmendes Ergebniss liefern.

II. Betrachtung der Bewegung eines materiellen Punktes.

§ 13. Tangential-, Centripetal- und Centrifugalkraft.

Wir wollen uns nun folgendes Problem stellen: Es sei die Bahn irgend eines materiellen Punktes von der Masse m gegeben und auch der Ort der Bahn, wo sich der materielle Punkt zu jeder Zeit befindet. Es soll die Kraft bestimmt werden, welche nothwendig ist, um diese vorgeschriebene Bewegung desselben zu bewirken. Der materielle Punkt soll sich zur Zeit t in A, zur Zeit $t+\tau$ in A', zur Zeit $t+2\tau$ in A'' befinden. Dann verstanden wir unter der Geschwindigkeit c den Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$ des Weges nach der Zeit, also die Limite des Quotienten AA'/τ. Den Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit $\frac{dv}{dt}$ finden wir nach den Regeln der Differentialrechnung, indem wir von dem analog für die Zeit $t+\tau$ gebildeten Ausdruck

$A'A''/\tau$ den für die Zeit t geltenden AA'/τ abziehen, die Differenz nochmals durch τ dividiren und wieder die Limite für verschwindende τ suchen. Es ist also:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \lim \frac{A'A'' - AA'}{\tau^2}.$$

Um die Beschleunigung zu erhalten, müssen wir nach den in § 5 gegebenen Regeln die beiden Vectoren AA' und $A'A''$ von einem und demselben Punkte des Raumes auftragen, wozu wir wieder den Punkt A' wählen; wir ziehen also von diesem Punkte aus die Gerade $A'E$, welche die geradlinige Fortsetzung von AA' und auch gleich lang wie AA' ist (s. Fig. 2). Hierauf ziehen wir von E gegen A'' die Gerade EA''. Die Limite, welcher sich diese letztere Gerade durch τ^2 dividirt nähert, ist dann die Beschleunigung des materiellen Punktes m zur Zeit t. Wir können den Vector EA'' in zwei Componenten EF und EG in der Richtung $A'E$ und der darauf senkrechten zerlegen. Die thatsächliche Beschleunigung, welche der materielle Punkt m zur Zeit t erfährt, kann also erzeugt werden, wenn wir zwei Kräfte darauf wirken lassen, eine Kraft (sie heisse die Tangentialkraft) in der Richtung, welcher sich die Gerade $A'E$ bei abnehmendem τ nähert, also in der Richtung der Bewegung des materiellen Punktes zur Zeit t und eine zweite, die Centripetalkraft, in der Richtung EG. Letztere Richtung nähert sich mit abnehmendem τ der in der Schmiegungsebene der Bahncurve auf die Bewegungsrichtung gezogenen Normalen, also der vom Orte des Beweglichen gegen den Krümmungsmittelpunkt der Bahn hin gezogenen Geraden. Denn die Gerade EG liegt in der Ebene der drei Punkte A, A', A'' und diejenige Grenze, welcher sich diese Ebene mit abnehmendem τ nähert, nennt man die Schmiegungsebene der durch die drei Punkte A, A' und A'' gehenden Bahncurve. Die Intensität S der Tangentialkraft ist nach § 7 gleich $m \lim \frac{EF}{\tau^2}$. Nun ist aber $A'F$ von $A'A''$ nur durch ein un-

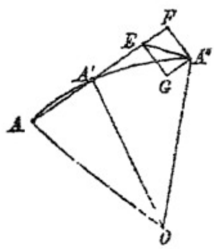

Fig. 2.

endlich Kleines von der Ordnung $\tau^2 . AA'$, also von der Ordnung τ^3, verschieden, da AA' unendlich klein von der Ordnung τ ist. Daher ist auch EF von der Differenz $A'A'' - AA'$ nur durch ein unendlich Kleines von der Ordnung τ^3 ververschieden. Es ist also:

$$\lim \frac{EF}{\tau^2} = \lim \frac{A'A'' - AA'}{\tau^2} = \frac{dc}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

und daher

$$S = m \frac{dc}{dt} = m \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{14}$$

Aus dieser und der Gleichung 4)

$$c = \frac{ds}{dt}$$

kann der Weg als Function der Zeit gefunden werden, wenn die Bahn und die Tangentialkraft S gegeben sind.

Die Intensität Z der Centripetalkraft ist gleich $m \lim \frac{EG}{\tau^2}$. Man bezeichnet die Limite, welcher sich der durch die drei Punkte A, A' und A'' gezogene Kreis nähert, als den Krümmungskreis der Bahncurve im Punkte A, seinen Mittelpunkt O als den Krümmungsmittelpunkt, seinen Radius R als den Krümmungsradius. Nach einer aus der Theorie der Krümmung der Curven bekannten Construction kann man mit Vernachlässigung von unendlich Kleinen höherer Ordnung die Dreiecke $A''A'F$ und $A'OA''$ der Figur 2 als ähnliche Dreiecke betrachten und hat also

$$FA'' : A'A'' = A'A'' : OA',$$

daher

$$FA'' = EG = \frac{A'A''^2}{OA'} = \frac{A'A''^2}{R}.$$

Nun ist aber

$$\lim \frac{A'A''}{\tau} = c,$$

daher

$$Z = m \lim \frac{EG}{\tau^2} = \frac{mc^2}{R}. \tag{15}$$

Die Kräfte, welche auf den materiellen Punkt wirken, können den verschiedensten Ursprung haben, aber immer muss ihre Resultirende gleich der der beiden Kräfte S und Z sein, wenn sie bewirken soll, dass sich der materielle Punkt in der gegebenen Weise (so dass also der Weg gleich der vorgeschriebenen Funktion der Zeit ist) auf der gegebenen Curve bewegen soll.

Wenn wir z. B. eine beliebige Vorrichtung haben, unter deren Einfluss sich ein materieller Punkt von der Masse m mit constanter Geschwindigkeit c in einem Kreise vom Radius R bewegt, so wissen wir, dass die Resultirende aller Kräfte, welche die materiellen Punkte, aus denen jene Vorrichtung besteht, auf den bewegten Punkt ausüben, eine gegen das Centrum des Kreises gerichtete Kraft von der Intensität mc^2/R ist, welche die Centripetalkraft heisst. Da Wirkung und Gegenwirkung gleich sind, so muss auch der bewegte materielle Punkt eine genau gleiche, aber entgegengesetzte, also vom Centrum des Kreises hinweg gerichtete Kraft, die Centrifugalkraft, auf die materiellen Punkte ausüben, aus denen die Vorrichtung besteht. Ich glaube, dass in dieser Darstellung der Begriff der Centrifugalkraft wohl von jenen Dunkelheiten frei ist, welche Hertz a. a. O. S. 7 erwähnt.

§ 14. Gleichförmige und gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Es ist höchst wahrscheinlich, dass die Kraft $f(r)$, die zwischen zwei beliebigen materiellen Punkten wirkt, jedesmal verschwindend klein wird, sobald die Entfernung r eine gewisse Grenze überschreitet, d. h. dass unser Bild nur mit den Thatsachen übereinstimmt, wenn wir diese Annahme machen. Diese Entfernungsgrenze könnte sogar von der Grössenordnung der Moleculardimensionen sein, wenn alle Wirkungen, die sich scheinbar auf grössere Entfernungen erstrecken, durch ein Medium vermittelt würden.

Den einfachsten Fall der Bewegung eines materiellen Punktes erhalten wir daher, wenn derselbe so weit von allen übrigen entfernt ist, dass kein einziger eine bemerkbare Kraft auf ihn ausübt. Dann sind, wie wir sahen, die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten des beweglichen materiellen Punktes nach der Zeit gleich Null, die Geschwindigkeitscomponenten constant. Der materielle Punkt bleibt also, wenn er anfangs in Ruhe war, immer in Ruhe; hatte er dagegen schon anfangs eine Geschwindigkeit, so bewegt er sich mit dieser gleichförmig in einer geradlinigen Bahn (das Trägheitsgesetz oder Galilei'sche Princip).

Ein zweiter Fall wäre der, dass die Resultirende aller Kräfte, welche auf einen materiellen Punkt von der Masse m wirken, während der ganzen Zeit seiner Bewegung in Intensität und Richtung vollständig unveränderlich ist. Dieser Fall würde angenähert eintreten, wenn auf den beweglichen materiellen Punkt beliebige, sehr weit entfernte ruhende materielle Punkte wirken und die von allen ausgeübte Kraft zwar so gross ist, dass sie trotz der grossen Entfernung nicht verschwindet, ihre Grössen- und Richtungsänderung aber wegen der Grösse der Entfernung der wirkenden Punkte während der ganzen Bewegung vernachlässigt, daher die auf das Bewegliche wirkende Kraft als constant betrachtet werden kann. Wir wählen den Raumpunkt, wo sich der bewegliche materielle Punkt zu Anfang der Zeit befindet, zum Coordinatenursprung, die Richtung der gesammten auf ihn wirkenden Kraft, deren Intensität $p = mg$ heissen mag, als y-Richtung und die Abscissenaxe in der Ebene, welche diese Richtung und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Punktes enthält, dessen Coordinaten zur Zeit t x, y, z heissen mögen. Dann wird nach Gleichung 13)

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = p = m g, \quad \frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{d^2 z}{d t^2} = 0.$$

Da ausserdem für den Anfang der Zeit, für welchen $t = 0$ gesetzt werden soll, $x = y = z = w = 0$ ist, und u und v gleich den gegebenen Componenten u_0, v_0 der Anfangsgeschwindigkeit sind, so findet man, mit Rücksicht darauf, dass

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}$$

ist, durch eine Rechnung, welche zu einfach ist, als dass es nöthig wäre, hier darauf einzugehen:

$$z = 0, \quad x = u_0 t, \quad y = v_0 t + g \frac{t^2}{2}.$$

Unter der Gleichung der Bahn versteht man eine Gleichung zwischen x und y, welche für jeden Punkt der Bahn, also für jeden Werth der Zeit t besteht; wir erhalten sie also, wenn wir die Zeit t aus den letzten beiden Gleichungen eliminiren, wodurch sich für $u_0 = 0$ ergiebt, $x = 0$; für jeden anderen Werth von u_0 aber

$$y = \frac{v_0}{u_0} x + \frac{g}{2 u_0^2} x^2$$

oder

$$\left(y + \frac{v_0^2}{2g}\right) \frac{2 u_0^2}{g} = \left(x + \frac{u_0 v_0}{g}\right)^2.$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel dar, deren Axe parallel der y-Axe ist, deren Parameter gleich u_0^2/g ist und deren Scheitel die Coordinaten $-u_0 v_0/g$ und $-v_0^2/2g$ hat. Nach den durch diese Formeln dargestellten Gesetzen bewegt sich jeder Punkt eines dem Einflusse der Erdschwere allein unterworfenen, anfangs sich nicht drehenden Körpers und zwar ist die Beschleunigung g gegen den Erdmittelpunkt gerichtet. Jeder derartige Punkt verhält sich daher so, als ob eine constante Kraft von unveränderlicher Richtung vertical nach abwärts auf ihn wirkte (sein Gewicht). Die Intensität dieser Kraft ist zwar nicht an allen Stellen der Erdoberfläche dieselbe, kann aber innerhalb des Raumes des Laboratoriums als überall gleich betrachtet werden. Eine merkwürdige Erfahrungsthatsache ist hierbei, dass alle Körper an derselben Stelle der Erdoberfläche dieselbe Beschleunigung erfahren, welche man die Beschleunigung der Schwere nennt.

§ 15. Bewegungsmoment. Antrieb.

Wir wollen nun wieder zum allgemeinsten Fall der Bewegung eines beliebigen materiellen Punktes zurückkehren, welche also durch die allgemeinsten Gleichungen 13) dargestellt ist. Da wir nur einen materiellen Punkt betrachten, so wollen wir den Index 1 weglassen. Es sei die Gesammtkraft P, welche auf den materiellen Punkt wirkt, sowie ihre Richtung als Function der Zeit gegeben oder es seien die verschiedenen Componenten P', P'' . . ., deren Resultirende die Kraft P ist, alle sammt ihrer jedesmaligen Richtung als Function der Zeit gegeben. Da die Masse m des materiellen Punktes constant ist, so können wir die Gleichung 13) in der Form schreiben:

$$16)\qquad \frac{d(mu)}{dt} = X = X' + X'' + \dots$$

oder $d(mu) = X dt$, welche nach unseren Festsetzungen besagt, dass sich der Zuwachs der Grösse mu während einer sehr kleinen Zeit dt vom Product der Zeit dt in den Werth, den die x-Componente der Kraft in irgend einem Momente während dieser Zeit hatte, nur um unendlich Kleines höherer Ordnung unterscheidet, d. h. um eine Grösse, welche durch dt dividirt sich mit abnehmendem dt der Grenze Null nähert. Die Integration dieser Gleichung liefert, wenn wir die zu irgend einer Zeit t_0 (der Anfangszeit) gehörigen Werthe mit dem Index Null, die zu einer späteren, ebenfalls beliebigen Zeit t_n mit dem Index n bezeichnen:

$$17)\qquad m u_n - m u_0 = \int_{t_0}^{t_n} X dt.$$

Das Product aus der Masse in die Geschwindigkeitscomponente in der Abscissenrichtung nennt man das Bewegungsmoment des materiellen Punktes bezüglich der Abscissenrichtung, das Produkt $X dt$ den Antrieb der Kraft in dieser Richtung während des Zeitdifferentiales dt, das bestimmte Integrale $\int_{t_0}^{t_n} X dt$ den gesammten Antrieb der Kraft während der Zeit $t_n - t_0$ in dieser Richtung. Man kann also die Gleichung 17) mit folgenden Worten aussprechen: der Zuwachs des Bewegungsmomentes des materiellen Punktes bezüglich der Abscissenrichtung während einer beliebigen Zeit ist gleich dem gesammten Antriebe, der auf ihn wirkenden Kraft in dieser Richtung während dieser Zeit, was natürlich auch für beliebig kleine Zeitmomente gilt. Das bestimmte Integrale drückt natürlich aus, dass der Antrieb in der Abscissenrichtung während der Zeit $t_n - t_0$ so zu definieren ist: Man theilt die gesammte Zeit $t_n - t_0$

in sehr viele sehr kleine Theile $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1 \ldots t_n - t_{n-1}$. Man bezeichnet den Werth der X-Componente der Kraft P zu irgend einer innerhalb der Zeitstrecke $t_1 - t_0$ liegenden Zeit mit X_1, zu irgend einer innerhalb $t_2 - t_1$ liegenden Zeit mit $X_2 \ldots$ Der Gesammtantrieb der Kraft P in der Abscissenrichtung während der Zeit $t_n - t_0$ ist dann zu definiren als die Limite der Summe:

18) $$X_1(t_1 - t_0) + X_2(t_2 - t_1) \ldots X_n(t_n - t_{n-1}).$$

Daraus, dass sich $X_k(t_k - t_{k-1})$ nur um ein unendlich Kleines höherer Ordnung vom Zuwachse des in der Abscissenrichtung geschätzten Bewegungsmomentes unterscheidet, folgt sofort, dass sich der Ausdruck 18) dem Gesammtzuwachse dieses Bewegungsmomentes während der Zeit $t_n - t_0$ als Limite nähert.

Da immer $X = X' + X'' + \ldots$ ist, so sieht man sofort, dass der Antrieb der Resultirenden immer gleich der Summe der Antriebe ihrer Componenten ist. Schreiben wir statt t_n, was ja eine ganz beliebige Zeit ist, wieder t und daher auch statt u_n wieder u, so können wir die Gleichung 17) auch so schreiben:

$$u = u_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} X\,dt.$$

Da $u = \frac{dx}{dt}$ ist, so liefert die nochmalige Integration nach t, wenn man t_0 und daher auch u_0 constant betrachtet:

19) $$\begin{cases} x = x_0 + u_0(t - t_0) + \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\, X \\ \quad = x_0 + u_0(t - t_0) + \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{t_0}^{t} (q - t_0)\, X(q)\, dq, \end{cases}$$

wobei $X(q)$ die Grösse ist, die man erhält, wenn man X als Function von t ausdrückt und dann statt t die Integrationsvariable q substituirt.

Alles Gesagte gilt natürlich ebenso wie für die Abscissenrichtung auch für die y- und z-Richtung. Die Grösse $P\,dt$ nennt man auch den gesammten Antrieb der Kraft P während der Zeit dt.

§ 16. Lebendige Kraft. Arbeit.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen führen unmittelbar zur Lösung der Aufgabe, wenn die Kraft direct als Function der Zeit gegeben ist. Dies ist jedoch meist nicht der Fall, meist sind die Kräfte als Functionen der relativen Lage verschiedener materieller Punkte gegeben. Dann haben die im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln wenig Nutzen. Denn um $\int X dt$, $\int Y dt$ und $\int Z dt$ berechnen zu können, müsste man die relative Lage sämmtlicher Punkte als Function der Zeit bereits kennen, also die ganze Aufgabe schon gelöst haben. Mehr Nutzen gewährt dann der Satz der lebendigen Kraft, zu dem man in folgender Weise gelangt. Aus den Gleichungen 14) folgt, da sich ds/dt der Grenze c, daher $c\frac{dc}{ds}$ derselben Grenze, wie $\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dc}{ds}$ oder $\frac{dc}{dt}$, nähert,

$$mc\frac{dc}{ds} = S$$

oder in Differentialform nach dem Schema 4a geschrieben,

$$mc\,dc = S\,ds$$

und durch Integration

$$\frac{mc^2}{2} - \frac{mc_0^2}{2} = \int S\,ds. \tag{20}$$

Man nennt nun das Product der Masse in das halbe Quadrat der Geschwindigkeit die lebendige Kraft, das Product $S\,ds$ die während des Weges ds geleistete Arbeit, das Integral $\int S\,ds$ die gesammte Arbeit der Kraft. Die Gleichung 20) besagt also in Worten ausgedrückt, dass der Zuwachs der lebendigen Kraft eines materiellen Punktes immer gleich der Gesammtarbeit der auf ihn wirkenden Kraft ist.

S ist die Componente der Gesammtkraft P, welche auf den materiellen Punkt wirkt in der Richtung des Weges ds. Wir bezeichnen mit dx, dy, dz die Zuwächse, welche die Coordinaten x, y, z des materiellen Punktes erfahren, wenn derselbe den Weg ds zurücklegt, also die Componenten des Weges ds in den drei Coordinatenrichtungen; ferner mit X, Y, Z die Componenten der Kraft P in den Coordinatenrichtungen, endlich mit dp die Projection des Weges ds auf die Richtung von P. Die Projectionen S und dp sind mit positiven oder negativen Zeichen zu versehen, je nachdem sie in die Richtung von ds resp. P oder die entgegengesetzte fallen. Dann ist:

$$21)\left\{\begin{array}{l} S = P\cos(P, ds),\ dp = ds\cos(P, ds), \\ \quad \cos(P, ds) = \cos(P, x)\cos(ds, x) + \cos(P, y)\cos(ds, y) + \\ \quad + \cos(P, z)\cos(ds, z), \\ X = P\cos(P, x);\ dx = ds\cos(ds, x) \end{array}\right.$$

mit vier analogen Gleichungen für die beiden anderen Coordinatenaxen. Daher ist die während des Weges ds geleistete Arbeit

$$22)\quad S\,ds = P\,ds\cos(P, ds) = P\,dp = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Man kann daher die Arbeit einer Kraft während einer unendlich kleinen Wegstrecke auch finden, indem man die Intensität der Kraft mit der Länge der Wegstrecke und dem Cosinus des von beiden eingeschlossenen Winkels oder mit der Projection der Wegstrecke auf die Richtung der Kraft multiplicirt. Die letzte der Gleichungen 22) besagt, dass die Arbeit einer Kraft gleich der der Summe ihrer Componenten nach den drei Coordinatenrichtungen ist, denn $X\,dx$ ist gemäss der gegebenen Definition die Arbeit der x-Componente unserer Kraft. Es gilt noch allgemeiner folgender Satz: wenn beliebige, auf einen Punkt wirkende Kräfte $P', P'', \ldots$ die Resultirende P haben und dieser Punkt einen beliebigen, unendlich kleinen Weg zurücklegt, so ist die Arbeit der Kraft P immer gleich der Summe der Arbeiten ihrer Componenten. Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieses Satzes am leichtesten, wenn man die Arbeit jeder dieser Kräfte durch die Summe der Arbeiten ihrer drei Componenten nach den drei Coordinatenrichtungen ersetzt.

Man kann die Gleichung

$$d\left(\frac{mc^2}{2}\right) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

auch direct in folgender Weise ableiten: man multiplicirt die linke Seite der Gleichung 16) mit $u\,dt$, die rechte mit dx, was ja gleich $u\,dt$ ist, ferner multiplicirt man die analoge Gleichung bezüglich der y-Axe, also die Gleichung $m\frac{dv}{dt} = Y$, links mit $v\,dt$, rechts mit dy, verfährt analog mit der entsprechenden Gleichung bezüglich der z-Axe und addirt schliesslich die drei so erhaltenen Gleichungen. Man erhält so eine Gleichung, deren linke Seite $m(u\,du + v\,dv + w\,dw)$, also gleich $d(\frac{1}{2}mc^2)$ und deren rechte Seite gleich $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ ist.

Wollte man Gleichungen zwischen Differentialausdrücken vermeiden, so müsste man zunächst sehr viele sehr nahe liegende, vom Beweglichen durchlaufene Raumpunkte A_0, A_1, A_2, ... durch Gerade $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, ... $A_{n-1} A_n$ verbinden. Wir bezeichnen für einen beliebigen Werth von k die Gerade $A_{k-1} A_k$ mit $\varDelta s_k$; ferner mit P_k die Kraft, welche auf den materiellen Punkt in A_k wirkt, mit S_k, X_k, Y_k, Z_k deren Componenten in der Richtung $A_{k-1} A_k$ und in den Coordinatenrichtungen, mit $\varDelta p_k$, $\varDelta x_k$, $\varDelta y_k$, $\varDelta z_k$ die Projectionen von $\varDelta s_k$ auf die Richtungen von P_k und die Coordinatenrichtungen, endlich durch ein vorgesetztes $\varDelta$ den Zuwachs einer der Grössen t, c, u, v, w beim Uebergange vom Punkte A_{k-1} zu A_k, z. B. mit $\varDelta t$ die dazu erforderliche Zeit. Die Gleichungen 21) und 22) gelten dann unverändert, nur dass man für P, S, X, Y, Z, ds, dp, dx, dy, dz zu schreiben hat: P_k, S_k, X_k, Y_k, Z_k, $\varDelta s_k$, $\varDelta x_k$, $\varDelta y_k$, $\varDelta z_k$. Die Gleichungen, welche durch diese Buchstabenvertauschung daraus entstehen, wollen wir die Gleichungen 21*) und 22*) nennen.

Die Gleichungen 1), 4) und 16) schreiben sich in der Form

$$c = \lim \frac{\varDelta s_k}{\varDelta t}, \quad u = \lim \frac{\varDelta x_k}{\varDelta t}, \quad m \lim \frac{\varDelta u_k}{\varDelta t} = X_k \text{ etc.}$$

woraus folgt

$$m \lim \left(u \frac{\varDelta u}{\varDelta s_k} + v \frac{\varDelta v}{\varDelta s_k} + w \frac{\varDelta w}{\varDelta s_k}\right) = \lim \frac{\varDelta\left(\frac{m c^2}{2}\right)}{\varDelta s_k} = S_k.$$

Daraus und aus den Gleichungen 21*) und 22*) folgt dann nach den Regeln der Integralrechnung:

$$\begin{aligned}\lim \sum S_k \varDelta s_k = \lim \sum P_k \varDelta p_k = \lim \sum P_k \varDelta s_k \cos(P_k \varDelta s_k) = \\ = \lim \sum (X_k \varDelta x_k + Y_k \varDelta y_k + Z_k \varDelta z_k) = \\ = \frac{m}{2}(c_n^2 - c_0^2),\end{aligned}$$

welche eben in der symbolischen Schreibweise der Integralrechnung die Form 20) annimmt. Die Gleichung 19) müsste entweder als abgekürzter Ausdruck für die Integralgleichung 20) betrachtet oder in Quotientenform so geschrieben werden:

$$\frac{P\,ds\cos(P, ds)}{S\,ds} = \frac{P\,dp}{S\,ds} = \frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{S\,ds} = 1.$$

§ 17. Die Lissajous'schen Figuren.

Wir wollen als ersten speciellen Fall denjenigen betrachten, wo ein einziger materieller Punkt von der Masse m vorhanden ist, dessen rechtwinkelige Coordinaten wir mit x, y, z, dessen Geschwindigkeitscomponenten wir mit u, v, w bezeichnen. Die drei Componenten X, Y, Z der darauf wirkenden Gesammtkraft in den Coordinatenrichtungen sollen den Coordinaten des materiellen Punktes proportional sein. Sie sollen immer nach der Seite wirken, wo der Coordinatenursprung liegt, so dass sie für positive Werthe der Coordinaten die Richtung der negativen Coordinatenaxen haben, weshalb wir sie mit negativen Zeichen versehen wollen. Es wird also dann sein:

$$23)\qquad X = -a_{11}x, \quad Y = -a_{22}y, \quad Z = -a_{33}z,$$

wobei a_{11}, a_{22} und a_{33} constant sind. Es ist daher in den allgemeinen Bewegungsgleichungen 13) für $m_1, x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1, X_1, Y_1, Z_1$ zu setzen $m, x, y, z, u, v, w,$

$$X = -a_{11}x, \quad Y = -a_{22}y, \quad Z = -a_{33}z,$$

wodurch sie die Form annehmen:

$$24)\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -a_{11}x,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = -a_{22}y,\ m\frac{d^2z}{dt^2} = -a_{33}z.$$

Kräfte, welche von anderen im Endlichen liegenden Punkten auf unseren materiellen Punkt ausgeübt werden. können nicht genau nach diesem Gesetze auf ihn wirken, weil ja dann die Anziehung in unendlicher Entfernung nicht verschwinden, sondern im Gegentheile unendlich gross werden würde. Wir finden jedoch einen Fall, wo die Gleichungen 23) wenigstens angenähert gelten in folgender Weise. Der bewegliche materielle Punkt von der Masse m befinde sich unter dem Einflusse beliebig vieler anderer im Raume unbeweglicher materieller Punkte, welche solche Kräfte auf ihn ausüben, dass er, sobald er sich im Coordinatenanfangspunkte befindet, im Gleichgewichte ist, d. h. dass sich daselbst alle auf ihn wirkenden Kräfte aufheben. Ferner soll sich der bewegliche materielle Punkt vom Coordinatenursprunge immer nur um eine Strecke entfernen, welche klein ist gegenüber jeder der Entfernungen der auf ihn wirkenden materiellen Punkte. Dann sind auch die Coordinaten x, y, z des beweglichen materiellen Punktes klein gegen alle diese Entfernungen und man kann die Kraftfunction V nach Potenzen dieser Coordinaten entwickeln. Bezeichnen wir die Werthe, welche man erhält, wenn man in

$$V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cdots$$

$x = y = z = 0$ setzt, mit $a_0, a_1, a_2, a_3, a_{11}, a_{12} \ldots$, so wird:

$$V = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_{11} \frac{x^2}{2} + a_{12} \frac{x y}{2} + \ldots.$$

Da die in den Coordinatenrichtungen auf den beweglichen materiellen Punkt wirkenden Kraftcomponenten immer die negativen partiellen Differentialquotienten von V nach den betreffenden Coordinaten sind und für $x = y = z = 0$ verschwinden sollen, so muss $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ sein. Ich setze ferner als aus der analytischen Geometrie bekannt voraus, dass man die Lage der Coordinatenaxen immer so wählen kann, dass $a_{12} = a_{23} = a_{13} = 0$ wird. Acceptiren wir diese Lage der Coordinatenaxen und vernachlässigen wegen der Kleinheit der Coordinaten die Glieder, welche bezüglich derselben von höherer Ordnung als der zweiten sind, so folgt:

$$V = a_0 + \tfrac{1}{2}(a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2).$$

Wir erhalten daher für die Componenten der Kräfte, welche auf den materiellen Punkt in den Coordinatenrichtungen wirken und für die Bewegungsgleichungen die Gleichungen 23) und 24).

Wenn die drei Constanten a_{11}, a_{22} und a_{33} positiv sind, so wird, sobald der materielle Punkt unendlich wenig in irgend einer der drei Coordinatenrichtungen von seiner Ruhelage entfernt wird, immer eine Kraft geweckt, welche ihn wieder gegen diese zurücktreibt. Man sagt dann, das Gleichgewicht des materiellen Punktes in seiner Ruhelage ist stabil. Wäre einer oder mehrere dieser Coefficienten negativ, so würde, wenn sich der materielle Punkt ein wenig in der betreffenden Coordinatenrichtung aus seiner Ruhelage entfernt, eine Kraft wirksam, die ihn noch weiter von derselben wegtreibt. Es müsste also dann, wenn der materielle Punkt keine Anfangsgeschwindigkeit hätte, die betreffende Coordinate mindestens so lange fortwachsen, bis die obigen Formeln, die ja blosse Annäherungsformeln sind, nicht mehr gelten. Man sagt dann, das Gleichgewicht ist labil. Diesen Fall, sowie die Fälle, dass einer oder mehrere der Coefficienten a_{11}, a_{22} und a_{33} verschwinden oder dass die gemachte Reihenentwickelung unzulässig wird, wollen wir nicht näher betrachten. Letzteres wäre nur möglich, wenn die Kraft, die einer der wirkenden Punkte auf den Beweglichen ausübt, in der unmittelbaren Umgebung der der Ruhelage des letzteren entsprechenden Entfernung nicht nach dem Taylor'schen Satze entwickelbar wäre. Wir beschäftigen uns daher ausschliesslich mit dem Falle, dass a_{11}, a_{22} und a_{33} positiv sind.

Die drei Differentialgleichungen 24) sind vollkommen von einander unabhängig. Daher genügt es, die erste zu behandeln. Ich setze ihr Integrale als bekannt voraus. Wenn A und B zwei willkürliche Constanten und $+\sqrt{A^2+B^2}=C$, $\operatorname{arctg}(A/B)=-D$ ist, so lautet dasselbe:

$$x = A\cos\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}}\right) + B\sin\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}}\right)$$
$$= C\sin\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}} - D\right).$$

Bestimmt man die Constante so, dass für $t=0$, $x=x_0$, $u=\frac{dx}{dt}=u_0$ wird, so folgt:

$$x = x_0\cos\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}}\right) + u_0\sqrt{\frac{m}{a_{11}}}\sin\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}}\right). \tag{25}$$

Die Componente der Bewegung in der Abscissenrichtung ist eine periodische. Der Werth von x schwankt zwischen

$+C = \sqrt{x_0^2 + \frac{u_0^2 m}{a_{11}}}$ und $-C$ fortwährend hin und her und ist bei passend gewähltem Zeitanfange immer proportional dem Sinus des mit einer Constanten multiplicirten Werthes der Zeit. Man nennt eine solche Bewegung eine einfache Sinusbewegung oder eine harmonische Bewegung oder auch, weil das Pendel angenähert nach diesen Gesetzen schwingt, eine einfache Pendelschwingung. Dieselben Werthe von x und u kehren der Reihe nach wieder, wenn die Grösse unter dem Sinus- und Cosinuszeichen um 2π, also wenn t um $2\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{a_{11}}}$ gewachsen ist. Die Hälfte τ dieser Grösse, also die Dauer eines Hinganges, welche gleich der eines Herganges ist, nennt man die Schwingungsdauer. Das durch die Schwingungsdauer dividirte Product der Zahl π und der Zeit, welche seit dem Momente verging, wo x zum letzten Male gleich $+C$ war, nennt man die Phase der Bewegung.

Gleiches gilt natürlich für die Componente der Bewegung in der Richtung der y- und z-Axe; doch sind die entsprechenden Schwingungsdauern τ' und τ'' im Allgemeinen unter einander und von τ verschieden.

Wir wollen nur noch einige Worte über die jedenfalls möglichen Lösungen bemerken, für welche zu jeder Zeit $z = 0$ ist. Dann bekommen wir nebst der Gleichung 25) die analoge Gleichung für die y-Axe:

$$26) \qquad y = y_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{a_{22}}{m}}\right) + v_0\sqrt{\frac{m}{a_{22}}}\sin\left(t\sqrt{\frac{a_{22}}{m}}\right).$$

Sei das eine Ende eines elastischen Stabes von rechteckigem Querschnitte festgeklemmt, am anderen Ende aber eine verhältnissmässig grosse Masse m befestigt (Wheatstone's Kaleidophon), so macht diesselbe angenähert die durch die Gleichungen 25) und 26) dargestellte Bewegung, ebenso ein Punkt eines Lichtstrahles, welcher vorher von zwei Spiegeln reflectirt wurde, die an den Zinken zweier in auf einander senkrechten Ebenen schwingender Stimmgabeln befestigt sind (Lissajous'sche Figuren). Beides kann entweder als Erfahrungsthatsache betrachtet oder aus den späteren Bildern für die elastischen Erscheinungen abgeleitet werden.

Die Bahn finden wir in diesem Falle, wenn wir die Zeit aus den beiden Gleichungen 25) und 26) eliminiren. Ist das Verhältniss der Schwingungsdauern τ und τ' ein rationales, so erhält man dadurch immer eine algebraische Gleichung zwischen x und y. Ist dieses Verhältniss aber irrational, so bildet die Bahn zwar einen fortlaufenden Linienzug, dieser aber füllt mit wachsender Zeit allmählich ein ganzes endliches Stück der Ebene (ein Rechteck) immer mehr continuirlich aus, so dass der materielle Punkt jedem Punkte dieses Stückes der Ebene beliebig nahe kommt, wenn nur die Zeitdauer der Bewegung lang genug gewählt wird.

Wir wollen noch folgenden Fall betrachten: Auf unseren materiellen Punkt, auf welchen in der Richtung OX die Kraft $-a_{11}x$, in der Richtung OY die Kraft $-a_{22}y$ wirkt, soll noch eine dritte Kraft von constanter Intensität p wirken, welche in der xy-Ebene gerade vom Coordinatenursprung hinweg gerichtet ist. Es wäre dies der Fall, wenn die Axe des Stabes des Wheatstone'schen Kaleidophons horizontal wäre und auf die am Ende befestigte Masse m ausser der Elasticität des Stabes noch die Schwere wirken würde. Wenn p in der Abscissenrichtung wirkt, tritt das Gleichgewicht für $x = p/a_{11}$ ein, wirkt dagegen p in der Richtung der y-Axe, so ist für den Fall des Gleichgewichtes $y = p/a_{22}$. Ist endlich die Richtung der Kraft p gegen diese beiden Richtungen geneigt, so fällt die Verschiebung, welche der materielle Punkt aus seiner Ruhelage O erfährt, im Falle des Gleichgewichtes nicht in die Richtung der Kraft, wenn a_{11} und a_{22} verschieden sind. Sind z. B. die Seitenflächen des Stabes des Wheatstone'schen Kaleidophons gegen die Horizontalebene geneigt, so wird derselbe durch ein am Ende angehängtes Gewicht nicht in einer Verticalebene, sondern in einer gegen die Verticale geneigten Ebene nach abwärts gebogen, wenn sein Querschnitt ein Rechteck ist.

Wir kehren wieder zu der durch die allgemeinen Gleichungen 25) und 26) bestimmten Bewegung ohne Wirksamkeit der Kraft p zurück und betrachten den Fall, wo

$a_{11} = a_{22}$ ist, der immer eintritt, sobald jedem auf das Bewegliche wirkenden materiellen Punkte ein zweiter entspricht, der ebenso relativ gegen die y-Axe, wie der erste gegen die x-Axe liegt. Wir wollen dann $a_{11} = a_{22} = a$ setzen. Die Elimination der Zeit aus den beiden Gleichungen 25) und 26) lehrt, dass dann die Bahn geradlinig wird, falls x und y gleichzeitig ihre grössten gleich oder entgegengesetzt bezeichneten Werthe annehmen.

Wählt man diese Zeit als Zeitanfang, so ist $u_0 = v_0 = 0$, x_0 und y_0 sind im ersten Fall gleich-, im zweiten entgegengesetzt bezeichnet. Man sagt dann, die Phasendifferenz zwischen der Bewegung in der Abscissen- und Ordinatenrichtung ist gleich Null oder π. Von der Geraden wird natürlich nur ein endliches Stück $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ von O aus in der einen und anderen Richtung durchlaufen. Wenn die Phasendifferenz dieser beiden Bewegungen $\frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$ ist, d. h. wenn x seinen grössten positiven oder negativen Werth hat, während $y = 0$ ist und umgekehrt, so ist, wenn man einen der ersten Momente als Zeitanfang wählt, $u_0 = y_0 = 0$. Die Elimination der Zeit zeigt, dass dann die Bahn eine Ellipse, deren Axen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, oder ein Kreis ist; sonst ist die Bahn eine geneigte Ellipse.

Wenn in den Gleichungen 25) und 26) a_{11} und a_{22} nicht völlig gleich, aber nur wenig verschieden sind, so geschieht die Bewegung lange so, als ob sie vollständig gleich wären und es ändert sich nur allmählich die Phasendifferenz zwischen den Bewegungen in der Abscissen- und Ordinatenrichtung. Auch wenn $\sqrt{a_{11}}$ und $\sqrt{a_{22}}$ sehr angenähert in einem durch einfache Zahlen ausdrückbaren rationalen Verhältnisse stehen, geschieht die Bewegung lange so, als ob sie genau in diesem Verhältnisse stünden und es findet allmählich wieder eine Phasenverschiebung zwischen der Bewegung in der Abscissen- und Ordinatenrichtung statt.

Aehnlich betrachtet man in der Astronomie die Störungen der Planetenbahnen so, als ob jeder Planet sich in jedem Momente nach den **Kepler**'schen Gesetzen in einer gewissen Bahn bewegte und nur allmählich die Elemente dieser Bahn sich mit der Zeit änderten.

§ 18. Gedämpfte harmonische Schwingungen.

Wir wollen nun noch den Fall betrachten, dass nebst der der Coordinate proportionalen Kraft noch eine der Geschwindigkeit proportionale wirkt. Wir wollen in diesem Falle aber nur die Bewegung in einer Geraden ins Auge fassen. Wählen wir diese Gerade zur Abscissenaxe, so erhalten wir also jetzt an Stelle der ersten der Gleichungen 24) die Gleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -ax - 2b\frac{dx}{dt}. \tag{27}$$

a und b sind Constanten. Die der Geschwindigkeit proportionale Kraft soll stets der Bewegung entgegenwirken, weshalb wir ihr das negative Zeichen geben. Die Bewegung eines langsam unter dem Einflusse der Schwere und des Luftwiderstandes schwingenden Pendels geschieht, wie wir später sehen werden, mit grosser Annäherung nach den durch diese Gleichungen ausgesprochenen Gesetzen. Die Kräfte, welche Lufttheilchen ausüben, lassen sich gut durch das Bild von Centrikräften darstellen und man kann hieraus (wenigstens beiläufig) motiviren oder als aus der Erfahrung bekannt voraussetzen, dass die Bewegung der Lufttheilchen in der Umgebung des schwingenden Pendels angenähert so geschieht, dass die Kraft der ersteren auf das letztere der Geschwindigkeit desselben proportional ist. Nach den durch die Gleichung 27) bestimmten Gesetzen schwingt auch ein durch eine Kupfermasse gedämpfter Magnet. Wir wissen in diesem Falle weniger über die Bilder, durch welche sich die von den elektrischen Strömen der Kupfermasse auf den Magneten ausgeübten Kräfte darstellen lassen. Es lehrt aber auch hier wieder die Erfahrung, dass die dämpfende Kraft der Geschwindigkeit proportional ist. Die Integration der Gleichung 27) liefert

$$x = Ce^{-\alpha_1 t} + C_1 e^{-\alpha_2 t},$$

sobald $b^2 > am$ ist, wobei

$$\alpha_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - am}}{m}$$

$$\alpha_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - am}}{m}$$

positive Grössen sind, wenn, wie wir annehmen, a und b positiv sind, d. h. wenn die der Coordinate proportionale Kraft eine Anziehung, die der Geschwindigkeit proportionale eine Dämpfung ist. C und C_1 sind die Integrationsconstanten, die ohne Weiteres bestimmt werden können, wenn die Werthe der Coordinate und Geschwindigkeit zu Anfang der Zeit gegeben sind. Die irgend einer Zeit entsprechende Abscisse besteht also aus zwei Summanden, welche sich beide mit wachsender Zeit nach dem Exponentialgesetze asymptotisch der Null nähern, d. h. sie nehmen in geometrischer Progression ab, wenn die Zeit in arithmetischer wächst. Der erste Summand nimmt noch weit rascher als der zweite ab, so dass nach längerer Zeit zwar auch der zweite sehr klein, aber der erste noch viel kleiner geworden ist.

Für $b^2 = am$ folgt aus Gleichung 27)

$$x = (Ct + C_1)e^{-\frac{bt}{m}}.$$

Beide Glieder nähern sich mit wachsender Zeit asymptotisch der Null, jedoch nur das zweite nach dem einfachen Exponentialgesetze und es wäre wie im früheren Falle leicht, diejenige Relation zwischen dem Anfangswerthe der Coordinate und dem der Geschwindigkeit zu finden, welche erfüllt sein muss, damit nur das eine oder nur das andere Glied auftritt. Die Bewegung heisst in den beiden betrachteten Fällen eine aperiodische.

Ist $b^2 < am$, so werden die beiden im ersten Falle mit α_1 und α_2 bezeichneten Constanten complex und man findet, wenn man die imaginären Exponentiellen in bekannter Weise durch trigonometrische Functionen ersetzt:

$$x = \left[C \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) + C_1 \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right] e^{-\frac{\lambda}{\tau} t},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

28) $$\tau = \frac{\pi m}{\sqrt{ma - b^2}}, \quad \lambda = \frac{\pi b}{\sqrt{ma - b^2}},$$

so dass

28 a) $$\frac{b}{m} = \frac{\lambda}{\tau}, \quad \frac{a}{m} = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\tau^2}$$

ist. Wenn t um τ wächst, wechseln beide Addenden im Ausdrucke für x, daher auch x selbst das Vorzeichen. Es muss also x jedesmal im Verlaufe einer Zeitstrecke von der Länge τ einmal Null werden. Wählen wir einen solchen Zeitmoment, für den $x = 0$ wird, als Zeit Null, so wird:

28b) $$x = Ce^{-\frac{\lambda}{\tau}t}\sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right).$$

Jedesmal nach Verlauf der Zeit τ, sonst aber nicht, wird $x = 0$. Dazwischen hat x abwechselnd positive und negative Maxima, sobald $dx/dt = 0$ ist, welche Bedingung sich wegen

29) $$\frac{dx}{dt} = \frac{C}{\tau}e^{-\frac{\lambda}{\tau}t}\left[-\lambda\sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) + \pi\cos\frac{\pi t}{\tau}\right]$$

auf

30) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) = \frac{\pi}{\lambda}$$

reducirt. Wir wollen jeden positiven und jeden negativen grössten Zahlenwerth von x eine grösste Excursion nennen. Ist t_1 die zwischen Null und $\frac{1}{2}\tau$ liegende Wurzel dieser Gleichung, so hat jede folgende die Form $t_1 + k\tau$. τ ist also die Zeit, welche zwischen dem Eintritt einer grössten Excursion und der nächsten darauf folgenden oder, wie man auch sagt, eines Umkehrpunktes und des nächstfolgenden vergeht, also die Zeit eines ganzen Hinganges, welche natürlich gleich der Zeit eines Herganges ist und welche wir die Schwingungsdauer nennen wollen. Sie ist auch die Zeit, welche zwischen zwei sich folgenden Durchgängen durch die Ruhelage vergeht.

Ist x_k der Absolutwerth irgend einer grössten Excursion, so ist der der nächsten $x_{k+1} = x_k . e^{-\lambda}$. Die Bewegung ist daher ebenfalls eine periodische, schwingende; aber die grössten Excursionen nähern sich in geometrischer Progression asymptotisch der Nulle. Aus der letzten Gleichung findet man:

$$\lambda = \log\text{nat}\frac{x_k}{x_{k+1}} = \log\text{nat}\frac{x_{k+1} + x_k}{x_{k+2} + x_{k+1}}.$$

Man nennt λ das logarithmische Decrement. Es ist der natürliche Logarithmus des Quotienten zweier sich folgender grösster Excursionen oder auch des Quotienten des Abstandes des $k+1$ten und $k+2$ten Umkehrpunktes in den des $k$ten und $k+1$ten. Man nennt den Abstand zweier sich folgender Umkehrpunkte die betreffende Schwingungsweite.

§ 19. Verschiedene Anregungsarten gedämpfter Pendelschwingungen.

Wir wollen nun folgende Anregungsarten betrachten. Es sei das Bewegliche anfangs in Ruhe. Zur Zeit Null werde ihm plötzlich die Geschwindigkeit u_0 ertheilt. Der dazu erforderliche Antrieb ist:

$$A_0 = \int X dt = m u_0 .$$

Dann gelten die Gleichungen 28b) und 29), da für $t = 0$, $x = 0$ ist. In letzterer wird für $t = 0$, $dx/dt = u_0$. Es ist also

$$C = \frac{\tau u_0}{\pi} .$$

Daher wird die darauf folgende grösste Excursion

$$31)\quad x_m = \frac{\tau u_0}{\pi} e^{-\frac{\lambda}{\tau} t_1} \sin\left(\frac{\pi t_1}{\tau}\right) = \frac{\tau u_0}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} .$$

Denn dieselbe tritt für $t = t_1$ ein, was die kleinste positive Wurzel der Gleichung 30) ist. Man kann daher, wenn λ und τ bekannt sind, aus der ersten grössten Excursion die anfangs ertheilte Geschwindigkeit berechnen. Führt man A_0 statt u_0 ein und setzt für m seinen Werth aus der zweiten der Gleichungen 28a), so folgt

$$x_m = \frac{A_0 \sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{a\tau} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} .$$

In der Galvanometrie gilt eine der Gleichung 27) gleichlautende Gleichung, nur bedeutet x den galvanischen Strom, A_0 den Integralstrom, a den Reductionsfactor, m das Trägheitsmoment.

Wir betrachten nun folgende andere Anregungsweise des materiellen Punktes zur Bewegung. Man ertheile demselben im Augenblicke jedes Durchganges durch die Ruhelage die Geschwindigkeit u_1 in der Richtung, in der er sich gerade bewegt. Der gesammte dazu erforderliche Antrieb sei A_1. Man nennt dies die ballistische Multiplicationsmethode. Es wird dann mit der Zeit ein stationärer Schwingungszustand eintreten, wobei die grösste Excursion jedesmal dieselbe ist. Für diesen muss dann nach jeder Rückkehr in die Ruhelage die seit dem vorigen Durchgange durch diese verlorene Geschwindigkeit durch die neu ertheilte u_1 gerade ersetzt werden. Wenn also u_0 die Geschwindigkeit im Momente nach Hinzufügung der Geschwindigkeit u_1 ist, so ist (vgl. Formel 29) $u_0 e^{-\lambda}$ die Geschwindigkeit, mit welcher der materielle Punkt wieder in die Ruhelage zurückkehrt und da diese durch Hinzufügung von u_1 wieder in u_0 übergehen muss, so hat man:

$$u_1 = u_0(1 - e^{-\lambda}), \quad u_0 = \frac{u_1}{1 - e^{-\lambda}},$$

x_m ist wie früher durch die Gleichung 31) mit u_0 verbunden, aus welcher durch Substitution von u_1 sich ergiebt

$$x_m = \frac{\tau u_1}{(1 - e^{-\lambda})\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} =$$

$$= \frac{A_1 \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{a \tau (1 - e^{-\lambda})} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}}.$$

$2x_m$ ist im stationären Zustande die Schwingungsweite. Würde die Geschwindigkeit u_1 immer nur beim Durchgange durch die Ruhelage in dem einen Sinne, nicht aber bei dem im entgegengesetzten Sinne ertheilt, so würde sich nichts ändern, als das

$$u_0 = \frac{u_1}{1 - e^{-2\lambda}}$$

wäre. In jedem Falle lässt sich u_1 aus der Schwingungsweite des stationären Zustandes und aus λ und τ berechnen. Ist überdies noch m oder a bekannt, so kann auch der jedesmal ertheilte Antrieb gefunden werden.

Eine dritte Anregungsmethode ist die Zurückwerfungsmethode. Dabei ertheilt man bei jedem zweiten Durchgange durch die Ruhelage eine Geschwindigkeit u_2 in der der Bewegung entgegengesetzten Richtung. Wenn das Bewegliche unmittelbar nachher die Geschwindigkeit u_0 hat, so hat es bei der zweiten Rückkehr nach der Ruhelage die Geschwindigkeit $u_0 e^{-2\lambda}$ und es muss für den stationären Zustand

$$u_2 - u_0 e^{-2\lambda} = u_0 ,$$

daher

$$u_2 = \frac{u_0}{1 + e^{-2\lambda}}$$

sein. Die erste eintretende grösste Excursion ist wieder mit u_0 durch die Gleichung 31) verbunden, die zweite ist $e^{-\lambda}$mal kleiner. Die Einführung von u_2 statt u_0 in diese Gleichung bietet keine Schwierigkeit.

Wir wollen noch eine vierte Anregungsweise betrachten, welche wir das Multiplicationsverfahren mit andauernder Kraft nennen wollen. Wir lassen während eines ganzen Hinganges auf das Bewegliche eine constante Kraft X in der Bewegungsrichtung wirken. Während des ganzen Herganges lassen wir eine gleiche entgegengesetzte Kraft wirken, welche also jetzt wieder die Richtung der Bewegung hat. Ist der Zustand stationär geworden, so geschieht der Hingang einfach so, als ob die Ruhelage nicht im Coordinatenursprunge, sondern in dem Punkte mit der Abscisse $\xi = X/a$ wäre, beim Hergange aber im Punkte mit der Abscisse $-\xi$. Wenn daher $2x_m$ die Schwingungsweite im stationären Zustande ist, so ist während eines Hinganges $x_m + \xi$ als die erste und $x_m - \xi$ als die zweite grösste Excursion anzusehen. Es ist also

$$x_m + \xi = (x_m - \xi)\, e^{\lambda}$$

oder

$$x_m = \xi \frac{e^{\lambda} + 1}{e^{\lambda} - 1} = \frac{X}{a} \frac{e^{\lambda} + 1}{e^{\lambda} - 1} .$$

Die letzten Aufgaben sind specielle Fälle des allgemeinen Problems, dass auf den materiellen Punkt ausser den beiden bisher betrachteten Kräften, von denen die erste der Excursion, die zweite der Geschwindigkeit proportional ist, noch eine andere Kraft wirkt, welche eine beliebige Function $f(t)$ der Zeit ist, so dass die Bewegungsgleichung lautet:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} + 2 b \frac{d x}{d t} + a x = f(t).$$

Die allgemeine Integration dieser Gleichung nach der Methode der Integration von linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten und zweitem Theile hat keine Schwierigkeit. Für

$$f(t) = B \sin \frac{\pi t}{\tau_1},$$

wo diese Gleichung das Mitschwingen eines elastischen Körpers oder sonstigen Resonators mit einem einfachen Tone liefert, nimmt ihr allgemeines Integral die Gestalt an:

$$x = \left[C \cos \frac{\pi t}{\tau} + C_1 \sin \frac{\pi t}{\tau} \right] e^{-\lambda \frac{t}{\tau}} + \frac{B}{\omega} \sin \left(\frac{\pi t}{\tau_1} - \vartheta \right).$$

Dabei sind τ und λ wiederum durch die Gleichungen 28) gegeben. ω und ϑ aber sind Constanten, deren Werthe durch die beiden Gleichungen

$$\omega \cos \vartheta = a - \frac{\pi^2 m}{\tau_1^2},$$

$$\omega \sin \vartheta = \frac{2 \pi b}{\tau_1}$$

bestimmt sind.

Für den stationären Zustand verschwinden im Ausdrucke für x alle Glieder bis auf das letzte. Der materielle Punkt macht also einfache harmonische Schwingungen, welche dieselbe Periode, wie die anregende Kraft haben. Die Schwingungsweite $2 B / \omega$ ist ein Maximum, wenn $\tau_1 = \pi m / \sqrt{a m - 2 b^2}$ ist. Wenn $\tau_1 = \pi \sqrt{m / a}$, also gleich der Schwingungsdauer ist, welche der materielle Punkt hätte, wenn er ohne Dämpfung bei gleicher, der Coordinate proportionalen Kraft schwingen würde, so ist die Geschwindigkeit in der Ruhelage ein Maximum und $\vartheta = \frac{1}{2} \pi$; die Phasendifferenz zwischen den Schwingungen des Punktes und denen der Kraft ist also $\frac{1}{2} \pi$. Für grössere τ_1 liegt sie zwischen Null und $\frac{1}{2} \pi$, für kleinere zwischen $\frac{1}{2} \pi$ und π.

§ 20. Grundgleichungen für die Centralbewegung.

Wir wollen uns nun mit dem folgenden Beispiele befassen. Die Resultirende aller Kräfte, welche auf einen beweglichen materiellen Punkt von der Masse m wirken, dessen

Coordinaten zur Zeit t mit x, y, z bezeichnet werden sollen, sei eine Function $f(r)$ der Entfernung desselben von einem im Raume festen Punkt O und falle auch immer in die Richtung von r. Wir geben wieder der Function $f(r)$ das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Kraft die Entfernung r zu vergrössern oder zu verkleinern strebt, d. h. je nachdem sie von O weg- oder gegen O hingerichtet ist. Eine solche Kraft nennen wir eine Centralkraft. Die Bewegung, welche ein materieller Punkt unter ihrem Einflusse macht, nennen wir eine Centralbewegung.

Diese Bedingungen sind realisirt, wenn auf den beweglichen materiellen Punkt ein einziger anderer wirkt, welcher in der Entfernung r die Kraft $f(r)$ auf ihn ausübt und entweder durch irgend eine Vorrichtung immer in dem fixen Raumpunkte O festgehalten wird oder zu Anfang ruhte und eine sehr grosse Masse gegenüber der Masse des beweglichen Punktes hat. Im letzteren Falle sind die Bedingungen natürlich nur angenähert realisirt, da die Beschleunigung des wirkenden materiellen Punktes immer sehr klein gegen die des anderen ist und daher auch die Geschwindigkeit und Ortsveränderung des wirkenden materiellen Punktes sehr klein bleiben.

Wir wählen den Punkt O als Coordinatenursprung und die Ebene, welche ihn und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des beweglichen materiellen Punktes enthält, als xy-Ebene, dann enthält die Gleichung 9) ein einziges Glied, in welchem für $x_1, y_1, z_1, x_k, y_k, z_k, m_1, r_{1k}$ und $f_{1k}(r_{1k})$ zu schreiben ist $x, y, z, 0, 0, 0, m, r$ und $f(r)$. Wir erhalten daher, wenn wir die jeder der Coordinatenaxen entsprechende Gleichung hinschreiben, die drei Gleichungen

$$32)\quad m\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{x}{r} f(r), \quad m\frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{y}{r} f(r), \quad m\frac{d^2 z}{d t^2} = \frac{z}{r} f(r).$$

Da zu Anfang der Zeit $z = dz/dt = 0$ ist, so ist alles bezüglich der xy-Ebene symmetrisch, und wir erhalten die einzig mögliche Lösung, indem wir für alle Zeiten $z = 0$ setzen. Denn würde irgend einmal z von Null verschiedene Werthe annehmen, so müsste die Lösung, wo z die gleichen entgegengesetzt bezeichneten Werthe hat, ebenso gut möglich sein. Wenn aber der Quotient des Zuwachses von r in den von $f(r)$ niemals unendlich wird, so ist das Problem immer eindeutig bestimmt, d. h. es können nie aus den gleichen Anfangswerthen nach einer endlichen Zeit sich zweierlei Werthcombinationen der Coordinaten ergeben.

Wir haben also nur noch die beiden ersten der Gleichungen 32) weiter zu behandeln. Wir leiten da zuerst die Gleichung der lebendigen Kraft nach der Methode ab, die wir schon bei Entwickelung der Gleichung 20) auseinandergesetzt haben. Wir multipliciren die linke Seite der ersten der Gleichungen 32) mit $u\,dt$, die rechte mit dx, die linke Seite der zweiten Gleichung mit $v\,dt$, die rechte mit dy und addiren dann beide Gleichungen. Da

$$\frac{d^2 x}{d t^2} dt = du$$

ist, so erhalten wir auf diese Weise links

$$m(u\,du + v\,dv) = d\left(\frac{m c^2}{2}\right),$$

rechts aber

$$f(r)\frac{x\,dx + y\,dy}{r} = f(r)\,dr,$$

da ja $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist. Die Integration liefert

33) $$\frac{m c^2}{2} = \varphi(r) + \frac{h m}{2},$$

wobei das unbestimmte Integrale

34) $$\int f(r)\,dr = \varphi(r)$$

gesetzt und die willkürliche Constante h beigefügt wurde, damit der Integrationsconstante des unbestimmten Integrales ein beliebiger, möglichst einfach zu wählender specieller Werth ertheilt werden kann.

Die Ableitung $\varphi'(r)$ von $\varphi(r)$ ist also gleich $f(r)$.

Eine zweite Integralgleichung (d. h. Gleichung mit einer willkürlichen Integrationsconstante) gewinnen wir, wenn wir die erste der Gleichungen 32) mit $-y$, die zweite mit $+x$ multipliciren und dann wieder beide addiren. Dadurch folgt:

$$m\left(x\frac{d^2 y}{d t^2} - y\frac{d^2 x}{d t^2}\right) = 0.$$

Da m nicht verschwinden kann, so muss der Ausdruck in der Klammer verschwinden. Derselbe ist aber der Differentialquotient nach der Zeit von

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}.$$

Es liefert daher die Integration

35) $$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k,$$

wobei k eine neue aus den Anfangsbedingungen zu bestimmende Integrationsconstante ist.

Es empfiehlt sich nun, r und den Winkel ϑ der vom Punkte O aus gezogenen Geraden r mit der positiven Abscissenaxe als Polarcoordinaten einzuführen. Dann wird:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen liefert:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\vartheta - r\frac{d\vartheta}{dt}\sin\vartheta,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\vartheta + r\frac{d\vartheta}{dt}\cos\vartheta.$$

Es wird also:

$$c^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Die Gleichungen 33) und 35) verwandeln sich daher in:

36) $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\varphi(r) + h$$

und

37) $$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = k.$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

38) $$\int r^2 d\vartheta = kt.$$

t stellt eine beliebige Zeit dar. Das Integrale links ist über den Bogen der Bahncurve zu erstrecken, der während dieser Zeit durchlaufen wird und stellt bekanntlich die Fläche der dreieckartigen Figur dar, welche von jenem Bogen und den beiden seine Endpunkte mit dem Coordinatenanfangspunkte verbindenden Geraden begrenzt wird. Man kann sie die während der Zeit t vom Leitstrahle r durchstrichene Fläche nennen. Die Gleichung 38) besagt, dass ihr Flächeninhalt der Zeit proportional ist, während welcher er durchstrichen wird. Eliminirt man $d\vartheta/dt$ aus den Gleichungen 36) und 37), so folgt:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\varphi(r) + h - \frac{k^2}{r^2}}} \tag{39}$$

und daraus wieder nach 37):

$$d\vartheta = \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}\varphi(r) + h - \frac{k^2}{r^2}}}. \tag{40}$$

Wenn wir $f(r) = -ar$ setzen, wobei a eine Constante ist, wenn also auf den materiellen Punkt eine dem Leitstrahle r direct proportionale Anziehung wirkt, so erhalten wir wieder den speciellen Fall, der sich aus den schon behandelten Gleichungen 24) ergiebt, wenn man darin $z = 0$ und $a_{11} = a_{22} = a$ setzt und wir wollen natürlich nicht die uns schon bekannten Resultate nochmals aus den Gleichungen dieses Paragraphen ableiten.

§ 21. Centralbewegung nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze.

Es sei nun die Centralkraft eine dem Quadrate von r verkehrt proportionale Anziehungskraft. Wenn wir den Proportionalitätsfactor mit λm bezeichnen, wo λ eine Constante ist, so ist also dann

$$f(r) = -\frac{\lambda m}{r^2}.$$

Da wir in Formel 34) den bequemsten Werth für die Integrationsconstante wählen können, so wollen wir $\varphi(r) = \lambda m/r$ setzen. Dann liefert die Gleichung 40)

$$d\vartheta = \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{h + \frac{2\lambda}{r} - \frac{k^2}{r^2}}}.$$

Setzen wir

$$\frac{k}{r} = x + \frac{\lambda}{k},$$

so erhalten wir

$$d\vartheta = -\frac{dx}{\sqrt{h + \frac{\lambda^2}{k^2} - x^2}}.$$

Wir wollen noch die positive Quadratwurzel aus $1 + \frac{hk^2}{\lambda^2}$ mit ε bezeichnen, so dass

41) $$1 - \varepsilon^2 = -\frac{hk^2}{\lambda^2}$$

wird. Ferner ertheilen wir der zu ϑ hinzutretenden Integrationsconstanten den Werth Null. Dann liefert die Integration

42) $$r = \frac{k^2}{\lambda(1 + \varepsilon\cos\vartheta)}.$$

Für $\vartheta = 0$ hat r seinen kleinsten Werth. Die getroffene Wahl der zu ϑ hinzutretenden Integrationsconstante hat also die Bedeutung, dass wir die vom Anziehungscentrum nach dem Perihele, d. h. nach demjenigen Punkte der Bahn, welcher dem Anziehungscentrum am nächsten liegt, gezogene Gerade zur positiven Abscissenaxe wählen. Ich kann aus der analytischen Geometrie als bekannt voraussetzen, dass die Gleichung 42) eine Kegelschnittlinie darstellt, in deren einem Brennpunkte der Coordinatenursprung liegt, deren Excentricität ε ist und deren Axen die Richtung der beiden Coordinatenaxen haben. Dieselbe ist eine Hyperbel, wenn $\varepsilon > 1$, also h positiv ist, eine Parabel, wenn $\varepsilon = 1$, daher $h = 0$ ist, eine Ellipse, wenn $\varepsilon < 1$ oder h negativ ist, ein Kreis für $\varepsilon = 0$. Im letzteren Falle ist h gleich $-\lambda^2/k^2$. Ist h negativ und hat einen grösseren Absolutwerth, so ist keine Bahn mehr möglich. Dabei ist immer eine Anziehung, also λ positiv, vorausgesetzt.

In der That hat nach Gleichung 33) oder 36), falls h positiv ist, die Geschwindigkeit in unendlicher Entfernung noch den reellen Werth $+\sqrt{h}$, falls $h = 0$ ist, nähert sie sich mit wachsender Entfernung der Grenze Null, falls h negativ ist, wird sie in unendlicher Entfernung imaginär. Ist endlich

$h = -\lambda^2/k^2$, so sieht man leicht, dass die Anziehung gleich der der Kreisbahn entsprechenden Centripetalkraft ist.

Wäre die dem Quadrate der Entfernung verkehrt proportionale Kraft eine abstossende, so wäre λ negativ. Dann wäre für reelle Werthe der Geschwindigkeiten stets h positiv und daher $\varepsilon > 1$. Die Bewegung würde also stets in einer Hyperbel erfolgen, wenn k von Null verschieden ist.

Wir wollen nur noch dem Falle, dass $\varepsilon < 1$ und λ natürlich positiv ist, einige Betrachtungen widmen. Die Bahn ist dann eine Ellipse, deren grosse Halbaxe a das arithmetische Mittel des grössten und kleinsten Werthes von r (der Perihel- und Apheldistanz) ist. Es ist also:

43) $$a = \frac{k^2}{\lambda(1-\varepsilon^2)} = -\frac{\lambda}{h}.$$

Die kleine Halbaxe ist

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{k}{\sqrt{-h}}.$$

Sind die Anfangswerthe r_0 und c_0 von r und c und der Winkel zwischen beiden (r_0, c_0) gegeben, so finden sich daraus die Constanten h und k durch folgende Gleichungen:

$$h = c_0^2 - \frac{2\lambda}{r_0}, \quad k = r_0 c_0 \sin(r_0, c_0).$$

Um r und ϑ als Functionen der Zeit zu finden, dient die Gleichung 39), welche sich in unserem Falle auf

44) $$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{hr^2 + 2\lambda r - k^2}}$$

reducirt. Diese wird bekanntlich integrirt, indem man einen Hülfswinkel u einführt, welcher durch die Gleichung

45) $$r = a(1 - \varepsilon\cos u)$$

definirt ist. u heisst die mittlere, ϑ die wahre Anomalie. Der Winkel u kann leicht durch Construction gefunden werden. Sei die Bahnellipse gegeben, O' ihr Mittelpunkt, O ihr Brennpunkt, OA ihre grosse Axe, M irgend ein Punkt derselben in der Entfernung r von O mit der wahren Anomalie ϑ. Wir construiren Fig. 3 den Kreis vom Radius a

und Mittelpunkte O' um die Ellipse herum. Die durch M auf OA gezogene Senkrechte soll die auf derselben Seite wie M liegende Hälfte des Kreises im Punkte N treffen. Ferner sollen x und y die rechtwinkeligen Coordinaten des Punktes M bezüglich eines Coordinatensystems sein, dessen Ursprung in O' liegt, dessen Abscissenaxe die Richtung der grossen, dessen Ordinatenaxe die Richtung der kleinen Axe der Ellipse hat. Dann ist:

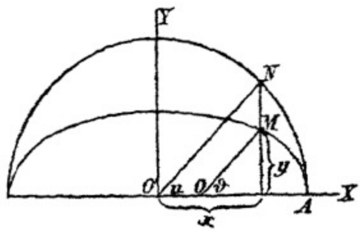

Fig. 3.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ferner ist

$$y^2 = r^2 - (x - \varepsilon a)^2.$$

Die Substitution dieses Werthes von y in die vorige Gleichung liefert

$$r = a - \varepsilon x = a\,[1 - \varepsilon \cos(N O' A)].$$

Es ist also $N O' A$ der Winkel, den wir die mittlere Anomalie des Punktes M genannt und mit u bezeichnet haben. Aus der Gleichung 45) folgt

$$dr = a\,\varepsilon \sin u\, du,$$

ferner folgt aus den Gleichungen 43) und 45)

$$h r^2 = -\lambda a (1 - \varepsilon \cos u)^2, \quad k^2 = a \lambda (1 - \varepsilon^2),$$

daher

$$\sqrt{h r^2 + 2 \lambda r - k^2} = \varepsilon \sqrt{a \lambda} \sin u.$$

Nach Substitution aller dieser Werthe in die Gleichung 44) liefert die Integration:

46) $$t = \sqrt{\frac{a^3}{\lambda}}\,(u - \varepsilon \sin u),$$

wenn die Constante so bestimmt wird, dass im Momente eines Durchgangs durch das Perihel, also für $u = 0$, $t = 0$ ist.

Wir setzen voraus, dass die Bahn gegeben ist. Wenn gefragt wird, wann ϑ einen gegebenen Werth hat, so hat man zunächst z. B. durch die geometrische Construction das diesem ϑ entsprechende u und dann aus Gleichung 46) den entsprechenden Werth von t zu berechnen. Fragt man umgekehrt, welchen Werth bei gegebener Bahn ϑ zu einer gegebenen Zeit hat, so muss man zuerst u aus der für u transcendenten Gleichung 46) finden (Kepler'sches Problem), und dann aus Gleichung 45) r und aus Gleichung 42) oder aus der geometrischen Construction ϑ finden.

§ 22. Die Centralkraft enthält ein der dritten Potenz der Entfernung verkehrt proportionales Glied.

Die bisher behandelten Fälle der Centralbewegung sind wohl die einzigen, welche beobachteten Naturvorgängen entsprechen. Hertz hat dem Bilde der Natur, dessen Darstellung im vorliegenden Buche wieder versucht wurde, den Vorwurf gemacht, dass es zu weit sei, d. h. dass es eine unendliche Menge von speciellen Bildern enthalte, denen keine Thatsachen entsprechen. Ich glaube, dass dieser Vorwurf überhaupt schwer zu vermeiden ist und jedenfalls auch Hertz' Mechanik trifft, da von der unendlichen Menge von Bedingungsgleichungen oder verborgenen Bewegungen, welche nach Hertz' Vorstellungen möglich sind, sicher auch nur ausserordentlich wenige auf wirklich beobachtbare Fälle passen.

Ja so lange die Aussicht auf ein Bild, welches nicht mehr als die Thatsachen giebt, noch so ferne wie gegenwärtig ist, scheint es mir sogar wichtig, auch jenen speciellen Fällen der gegenwärtig aussichtsvollsten Bilder, welche nicht bisher beobachteten Thatsachen entsprechen, einige Aufmerksamkeit zu schenken. Sie können erstens in Zukunft einmal zur Darstellung beobachteter Thatsachen sich eignen und zweitens erhalten wir erst durch das Studium aller möglichen Fälle auch eine bessere Uebersicht über den inneren Zusammenhang jener speciellen Fälle, die uns schon jetzt nützlich sind.

In den bisher betrachteten Fällen der Centralbewegung kommen nun zufällig nur ganz wenige specielle Bahnformen vor, welche keineswegs eine Vorstellung von dem allgemeinen Charakter aller bei der Centralbewegung möglichen Bahnformen geben. Gerade unter den Bahnformen, die uns noch nicht untergekommen sind, befinden sich aber solche, an denen einige allgemeine Sätze zum einfachsten Ausdrucke kommen, die bei verwickelteren, praktisch nicht unwichtigen Problemen, z. B. dem Dreikörperprobleme, eine wesentliche Rolle spielen. Deshalb wollen wir in Kürze noch so viele der übrigen einfachsten Centralbewegungen betrachten, als notwendig sind, um eine Uebersicht über den allgemeinen Charakter aller bei der Centralbewegung möglichen Bahnformen zu erhalten.

Wir wollen zunächst einen Satz ableiten, der uns hierbei nützlich ist. Die Centralkraft bestehe aus zwei Summanden. Der eine Theil $f(r)$ sei eine beliebige Function der Entfernung. Dazu komme noch eine Kraft $m a/r^3$, welche der dritten Potenz der Entfernung verkehrt proportional ist und abstossend oder anziehend wirkt, je nachdem die Constante a positiv oder negativ ist. $\varphi(r)$ sei die Function, welche zu $f(r)$ in dem durch die Gleichung 34) angegebenen Verhältnisse steht. Die der jetzt betrachteten Centralkraft $f(r) + m a/r^3$ entsprechende Function $\varphi(r)$ hat also den Werth $\varphi(r) - m a/2 r^2$. Daher verwandelt sich die Gleichung 40) für diese Centralbewegung in die folgende

$$d\vartheta = \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2\varphi(r)}{m} + h - \frac{k^2+a}{r^2}}}.$$

Wir wollen diese Centralbewegung mit einer zweiten vergleichen, bei welcher die Centralkraft blos gleich $f(r)$ ist, h denselben Werth, k aber den Werth $k_0 = \sqrt{k^2+a}$ hat. Wir bezeichnen für beide Centralbewegungen den zu einem gleichen ein für allemal gegebenen Werthe r_0 des r gehörigen Werth von ϑ mit Null: den zu irgend einem anderen Werthe des r gehörigen Werth von ϑ bezeichnen wir für die erste Centralbewegung mit ϑ, für die zweite mit ϑ_0.

Die Gleichung, welche der Gleichung 40) für die zweite Centralbewegung entspricht, können wir dann leicht in die Form bringen:

$$47)\qquad d\left(\vartheta_0\sqrt{\frac{k^2}{k^2+a}}\right) = \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2\varphi(r)}{m} + h - \frac{k^2+a}{r^2}}}.$$

Es ist also bei der zweiten Centralbewegung $\vartheta_0 \sqrt{\frac{k^2}{k^2+a}}$ dieselbe Function von r, wie für die erste ϑ. Ist uns die Bahn der zweiten Centralbewegung bekannt, so finden wir daraus die der ersten, indem wir jedem r, zu dem bei der zweiten Centralbewegung der Winkel ϑ_0 gehört, einen $\varkappa = \sqrt{\frac{k^2}{k^2+a}}$ fachen Polarwinkel zutheilen. Der zeitliche Verlauf der Centralbewegung ergiebt sich dann immer sofort aus dem Flächensatze.

Erstes Beispiel. Sei $f(r) = 0$. Dann geschieht die zweite Centralbewegung in einer Geraden MN. $OP = r_0$ sei deren kürzester Abstand von O, A sei irgend ein Punkt der Geraden. Dann ist AOP der mit ϑ_0 bezeichnete Winkel und man hat

48) $$OA = r = r_0 / \cos \vartheta_0.$$

Wenn a positiv ist, so geschieht die erste Centralbewegung unter dem Einflusse einer der dritten Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Abstossung. Dann ist $\varkappa < 1$. Wir finden also die Bahn, indem wir die Länge des Leit-

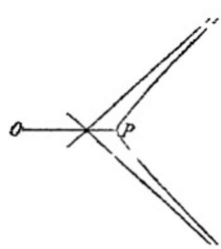

Fig. 4.

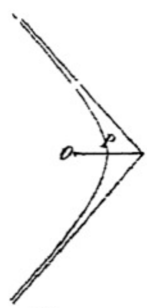

Fig. 5.

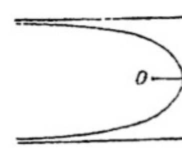

Fig. 6.

strahles OA jedes Punktes A der Geraden MN unverändert lassen, aber den Winkel $AOP = \vartheta_0$ jedesmal im Verhältnisse $1 : \varkappa$ verkleinern. Ihre Form ist in Fig. 4 dargestellt, sie hat zwei Asymptoten, von denen jede mit der Perihel distanz OP den Winkel $\frac{1}{2}\varkappa\pi$ bildet und den Abstand $\varkappa r_0$ vom Anziehungscentrum O hat.

Ist a negativ, so geschieht die erste Centralbewegung unter dem Einflusse einer der dritten Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Anziehung und es wird $\varkappa > 1$. Es ist dann der Winkel AOP im Verhältnisse $1 : \varkappa$ zu vergrössern. Falls $-a < 3k^2/4$ ist, so ist $\varkappa < 2$, der Winkel einer Asymptote mit der Periheldistanz ist dann $< \pi$, die Bahn hat die in Fig. 5 dargestellte Gestalt. Ist $-a$ gleich $3k^2/4$, so ist $\varkappa = 2$. Die beiden Asymptoten sind der von O nach P gezogenen Geraden (der Periheldistanz) parallel, aber entgegengesetzt gerichtet und haben jede die Entfernung $2r_0$ vom Anziehungscentrum (Fig. 6). Liegt $-a$ zwischen $3k^2/4$ und k^2, so schlingt sich die Bahn

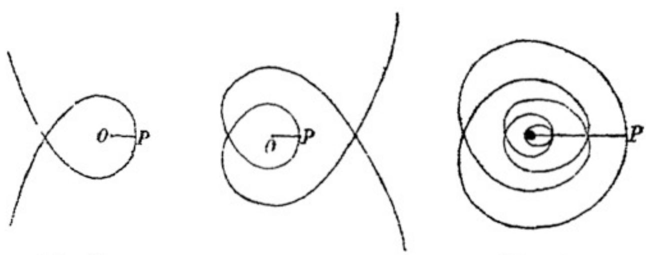

Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

spiralig um das Anziehungscentrum (Figg. 7 und 8) und die Anzahl der Windungen der Spirale nimmt immer mehr zu, je näher sich die Grössen $-a$ und k^2 kommen. Für $-a = k^2$ geschieht die Bewegung in einer hyperbolischen Spirale, oder der (stets instabilen) Kreisbahn. Ist $-a$ noch grösser, so setzen wir $\sqrt{\frac{-k^2}{a+k^2}} = \frac{1}{\varkappa'}$. Die directe Integration der Gleichung 40) liefert für negative h

$$r = \frac{2r_0}{e^{\varkappa'\vartheta} + e^{-\varkappa'\vartheta}}.$$

Es ist also $OP = r_0$ jetzt der grösste Werth des r und die Bahn besteht aus zwei zu OP symmetrischen Zweigen, deren jeder eine Spirale ist, die sich dem Coordinatenursprunge in unendlich vielen Windungen asymptotisch nähert (Fig. 9). Für $h = 0$ ist die Bahn eine logarithmische Spirale, für positive h eine vom Anziehungscentrum bis ins Unendliche reichende Spirale mit der Gleichung

$$r\,(e^{\varkappa'\vartheta} - e^{-\varkappa'\vartheta}) = \text{const.}$$

Wir setzten bisher in Formel 47) $f(r) = \varphi(r) = 0$. Wir erhalten ein zweites Beispiel, welches uns einige neue Bahntypen kennen lehrt, wenn wir in dieser Formel

$$f(r) = -\frac{m\lambda}{r^2}, \text{ daher } \varphi(r) = \frac{m\lambda}{r}$$

setzen. Die zweite Centralbewegung wird dann mit der Planetenbewegung nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze identisch, die erste geschieht unter dem Einflusse einer Kraft, welche aus einem dem Quadrate und einem

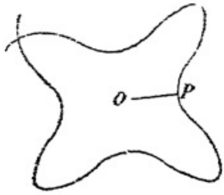

Fig. 10.

Fig. 11.

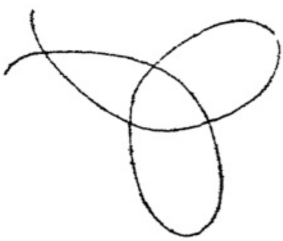

Fig. 12.

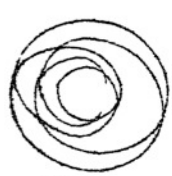

Fig. 13.

der dritten Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Summanden besteht. Wir finden also für eine solche Kraft die Bahn, indem wir in den Planetenbahnen den zu jedem r gehörigen Polarwinkel mit $\varkappa$ multipliciren. Die Bahnen, welche dadurch aus der parabolischen und den hyperbolischen entstehen, sowie diejenigen, welche man für imaginäre $\varkappa$ erhält, haben ganz den Typus einer der Figuren 4 bis 9.

Aus den elliptischen Bahnen aber entstehen eigenthümliche sternförmige geschlossene oder ungeschlossene Bahnen, welche, je nachdem $\varkappa$ von einem sehr kleinen bis zu einem sehr grossen Werthe variirt, den Typus der Figuren 10 bis 13 haben. Ist die Bahn ungeschlossen, so kommt das Bewegliche, wie wir es schon bei den Lissajous'schen Figuren als möglich erkannten, während genügend langer Zeit jedem Punkte, der in einem von zwei concentrischen Kreisen begrenztem Stücke der Ebene liegt, beliebig nahe. Die Bahngleichung giebt uns daher nicht für jede Abscisse des Beweglichen eine einzige oder eine endliche Anzahl möglicher Ordinaten, sondern blos in jedem Punkte die Richtung und Geschwindigkeit der Weiterbewegung.

§ 23. Discussion der möglichen Bahntypen.

Wir wollen noch einige allgemeine Betrachtungen anstellen, um uns zu überzeugen, welche Bahntypen ausser denen, die wir bisher zufällig kennen gelernt haben, noch möglich sind. Wir wollen uns mit dem leicht zu behandelnden Falle, dass $k = 0$, also die Bahn eine Gerade ist, nicht befassen.

Setzen wir

49) $$\psi(r) = \frac{2}{m}\varphi(r) + h - \frac{k^2}{r^2},$$

so erhalten wir:

50) $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \psi(r); \quad \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{r^4}{k^2}\psi(r).$$

$f(r)$ kann beliebige positive oder negative Werthe einschliesslich Null haben, soll aber zwischen $r = 0$ und $r = \infty$ eindeutig, endlich und continuirlich bleiben. Da wir in der Physik unendliche Kräfte nicht zulassen, so sollten wir in diese Bedingung die Werthe $r = 0$ und $r = \infty$ einschliessen. Doch wollen wir theils der allgemeinen Uebersicht, theils gewisser beliebter Kraftgesetze wegen ein unendliches Anwachsen der Kraft für $r = 0$ und $r = \infty$ zulassen. Unter diesen Annahmen sind auch $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ exclusive der Grenzen zwischen $r = 0$ und $r = \infty$ eindeutig, endlich und continuirlich.

Aus den Gleichungen 50) folgt, dass, wenn das Kraftgesetz und die Werthe der Constanten h und k gegeben sind, nur solche Werthe von r in reellen Bahnen vorkommen können, für welche $\psi(r)$ nicht negativ ist. Andererseits wird man in jedem Punkte A, für welchen $\psi(r)$

positiv ist, einen positiven und einen gleichen negativen Werth für $dr/d\vartheta$ finden können, welcher unseren Gleichungen genügt. Durch jeden solchen Punkt werden also zwei mögliche Bahnen gehen, die übrigens vollkommen congruent und Spiegelbilder bezüglich der Geraden OA sind. Durch jeden anderen Punkt B, der sich in der gleichen Entfernung von O befindet, gehen bei dem gleichen Kraftgesetze zwei congruente, gleichen Werthen von h und k entsprechende Bahnen, die um den Winkel BOA gegen die durch A gehenden Bahnen gedreht sind. Wir wollen alle diese Bahnen, da sie untereinander congruent sind, als eine einzige Bahnform bezeichnen.

Wenn $\psi(r)$ für sehr kleine r positiv und für $r = 0$ noch positiv oder gleich Null ist, so endet eine Bahnform in O. $\psi(0)$ kann natürlich nur Null oder positiv sein, wenn $\varphi(r)$ mit abnehmendem r unendlich gross von der Ordnung $1/r^2$ oder noch höherer, daher die Kraft $f(r)$ von der Ordnung $1/r^3$ oder höherer unendlich wird. Für kein anderes Kraftgesetz kann das Bewegliche nach O gelangen, ohne dass $k = 0$ ist. Die Zeit τ, welche vergeht, bis r von einem kleinen Werthe ε bis Null abnimmt oder umgekehrt und der gesammte Winkel α, um welchen sich dabei der Leitstrahl r dreht, sind gegeben durch

51) $$\tau = \int_0^\varepsilon \frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{2r^2}{m}\varphi(r) + hr^2 - k^2}},$$

52) $$\alpha = \int_0^\varepsilon \frac{k\,dr}{r\sqrt{\frac{2r^2}{m}\varphi(r) + hr^2 - k^2}}.$$

α nimmt daher mit abnehmendem ε ab, wenn $r\sqrt{\varphi(r)}$ mit abnehmendem r von höherer Ordnung unendlich wird als $l\left(\frac{1}{r}\right).\,ll\left(\frac{1}{r}\right).\,lll\left(\frac{1}{r}\right)\ldots$, wobei l der natürliche Logarithmus, ll der natürliche Logarithmus des natürlichen Logarithmus etc. ist. Sonst wird α unendlich und die Bahn umwindet den Punkt O in unendlich vielen Windungen. Die dazu erforderliche Zeit könnte nur unendlich werden, wenn $2r^2\varphi(r)$

für kleine r von $m k^2 - m h r^2$ um kleines von höherer Ordnung als $r^4 \left[l \frac{1}{r} \, l l \frac{1}{r} \, .. \right]^2$ verschieden wäre.

Ebenso reicht eine Bahn in unendliche Entfernung, wenn $\psi(r)$ für $r = \infty$ positiv ist oder von einem positiven Werth aus sich der Grenze Null nähert, was für die physikalisch eigentlich allein wichtigen Fälle, dass $\varphi(\infty)$ verschwindet, nur für positive h, oder wenn $\varphi(r)$ für grosse r positiv ist, auch für $h = 0$ eintreten kann. Ob der Leitstrahl r dabei einen endlichen Winkel beschreibt oder unendlich viele Umläufe macht, sowie ob das Bewegliche eine beliebig grosse Entfernung in endlicher oder erst unendlicher Zeit erreicht, hängt wieder von dem leicht zu discutirendem Werthe zweier bestimmter Integrale ab, welche sonst genau mit den bestimmten Integralen 51) und 52) übereinstimmen; nur dass ihre untere Grenze sehr gross, ihre obere unendlich ist.

Da $\psi(r)$ continuirlich ist, so kann es von einem positiven zu einem negativen Werth nur durch den Werth Null übergehen. Wir wollen bei gegebenem Kraftgesetze die verschiedenen, einem gegebenen Werthepaare von h und k entsprechenden Bahnen untersuchen. Für ihre Anzahl ist die Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung

$$53) \qquad \psi(r) = 0$$

maassgebend. Wir setzen zunächst voraus, dass für das gegebene Werthepaar von h und k die obige Gleichung 53) keine gleichen positiven Wurzeln hat, dass also für keinen positiven Werth des r, der sie befriedigt, auch $\psi'(r) = 0$ ist. Dann wird für jede positive Wurzel r_0 der Gleichung 53) $\psi(r)$ mit wachsendem r entweder von einem negativen Werth zu einem positiven oder umgekehrt übergehen. Wir nennen die Wurzel $r = r_0$ im ersten Falle eine steigende, im zweiten Falle eine sinkende. Für jede solche Wurzel ist $dr/d\vartheta = 0$.

Zwischen jeder sinkenden und der nächst grösseren steigenden Wurzel ist $\psi(r)$ negativ, daher keine Bahn möglich. Zwischen einer steigenden und der nächst grösseren sinkenden ist immer eine Bahnform möglich, deren Periheldistanz die steigende, deren Apheldistanz die sinkende Wurzel ist.

Grösser kann r in dieser Bahn nicht werden. Die Bahn muss sich daher nach dem Aphel in einem Zweige fortsetzen, der wieder zum Perihel zurückkehrt und wegen des gleichen Baues der Differentialgleichung mit dem vor dem Aphel liegenden Theil congruent ist. Dasselbe gilt von jedem Perihel.

In dem angenommenen Falle, dass r_0 keine doppelte Wurzel der Gleichung 53) ist, kann r nur eine sehr kurze Zeit hindurch sehr nahe gleich r_0 sein, der auch wegen des Flächensatzes nur eine sehr kleine Aenderung von ϑ entspricht. Dies lehrt die in bekannter Weise auszuführende Discussion der Differentialgleichung für den Fall, dass r nahe gleich r_0 ist. Ich führe hier diese Discussion nur beiläufig aus. Sei r zur Zeit t_0 gleich r_0, was eine steigende einfache Wurzel der Gleichung 53) sei. Zur Zeit $t_0 + \tau$ aber sei $r = r_0 + \varrho$. Setzt man $\sqrt{\psi'(r_0)} = 2a$, so reducirt sich die erste der Differentialgleichungen 50) für kleine ϱ auf

$$\frac{d\varrho}{dt} = \sqrt{\psi(r_0 + \varrho)} = 2a\sqrt{\varrho},$$

woraus folgt $\varrho = a^2 \tau^2$. So lange ϱ sehr klein ist, wird also immer r während einer sehr kurzen Zeit von r_0 bis $r_0 + \varrho$ wachsen. Dasselbe gilt auch für eine sehr kleine Abnahme des ϱ im Aphel.

Da nach dem Flächensatze $d\vartheta/dt$ sein Zeichen nicht wechselt und nur in unendlicher Entfernung Null werden kann, so kann die Tangente zur Bahn niemals durch den Coordinatenursprung O gehen. Das Bewegliche muss vielmehr den Punkt O immer im einen oder anderen Sinne umkreisen. Wir erhalten daher stets geschlossene oder ungeschlossene Bahnen von dem Typus der Figuren 10 bis 13, von denen ellipsenartige Bahnen ein specieller Fall sind, wobei zu bemerken ist, dass der Krümmungshalbmesser der Bahn unendlich wird, wo $f(r) = 0$ ist, dagegen ist die Bahn nach derjenigen Seite der Tangente, auf welcher O liegt, concav oder convex, wenn $f(r)$ negativ oder positiv ist. Man sieht dies ein, wenn man $f(r)$ in die Tangentialkraft und in die nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn hin gerichtete Centripetalkraft zerlegt.

Zwischen dem Perihel und Aphel kann natürlich möglicher Weise die eine und die andere Krümmung öfters wechseln. In Figg. 5 bis 9 ist die Krümmung immer gegen O gerichtet, in Figg. 10 und 11 wechselt sie zwischen Perihel und Aphel einmal.

Ist $\psi(r)$ für sehr kleine Werthe von r positiv, so muss die kleinste positive Wurzel der Gleichung 53), wenn diese überhaupt positive Wurzeln hat, eine sinkende sein. Dann giebt es eine im Coordinatenursprunge endende Bahn, deren Aphel diese kleinste Wurzel ist, welche aber ins Unendliche geht, wenn keine positive Wurzel existirt. Im ersten Falle theilt der nach dem Aphel gezogene Leitstrahl natürlich die Bahn wieder in zwei Aeste, die Spiegelbilder bezüglich des Leitstrahles sind.

Ist $\psi(r)$ für sehr grosse r positiv, so ist, falls die Gleichung 53) überhaupt positive Wurzeln hat, die grösste derselben eine steigende und gleich der Periheldistanz der sich ins Unendliche erstreckenden Bahn, welche auch wieder durch den nach dem Perihel gezogenen Leitstrahl in zwei Aeste getheilt wird, die bezüglich des Leitstrahles Spiegelbilder sind. Die im Anziehungscentrum endenden oder ins Unendliche gehenden Bahnen haben den Typus der Figuren 9 oder 4 bis 8, wobei jedoch natürlich auch wieder Einwärts- und Auswärtskrümmung wechseln kann. Bei den ersteren Bahnen kann natürlich die Anzahl der Windungen um den Coordinatenursprung auch beliebig gering sein.

Hat die Gleichung 53) gar keine positive Wurzel, so kann $\psi(r)$ von $r = 0$ bis $r = \infty$ sein Zeichen nicht wechseln. Ist dieses Zeichen negativ, so ist überhaupt keine Bahn möglich, ist es positiv, so erstreckt sich die einzig mögliche Bahnform vom Anziehungscentrum bis ins Unendliche. Es ist dies der einzige Fall, wo ausser dem Anziehungscentrum und dem unendlich entfernten Punkte kein Perihel oder Aphel existirt, wo also nicht jede Bahn selbst aus zwei congruenten Aesten besteht, die Spiegelbilder zu einander sind, sondern diese beiden Spiegelbilder als zwei verschiedene Bahnformen betrachtet werden können, da sie sich nur im Unendlichen oder im Anziehungscentrum treffen.

§ 24. Bahnen, welche sich der Kreisbahn asymptotisch nähern oder sie osculiren.

Es ist noch der Fall zu betrachten, dass für gewisse Werthepaare von h und k, z. B. $h = h_1$, $k = k_1$ die Gleichung 53) zwei gleiche Wurzeln $r = r_1$ besitzt. Dann ist gleichzeitig $\psi(r_1) = \psi'(r_1) = 0$, also:

$$\text{54)} \qquad \frac{1}{m} f(r_1) + \frac{k^2}{r_1^3} = 0.$$

Wegen der ersten der Gleichungen 50) ist $dr/dt = 0$, daher

$$r \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{k}{r}$$

gleich der gesammten Geschwindigkeit c. Aus Gleichung 54) folgt daher:

$$f(r) = -mc^2/r.$$

Die Centralkraft ist anziehend und gleich der der Kreisbewegung entsprechenden Centripetalkraft. Da für $r = r_1$ die Gleichung $dr/d\vartheta = 0$ besteht, so kann die Bewegung fortwährend im Kreise erfolgen.

Es soll zunächst $\psi''(r_1)$ negativ sein. Dies tritt wegen $\psi'(r_1) = 0$ ein, wenn für $r = r_1$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{2} m r^3 \psi'(r)\right] = \frac{d}{dr}\left[r^3 f(r)\right]$$

negativ ist, also $f(r)$ in der unmittelbaren Umgebung des Werthes $r = r_1$ mit wachsendem r ab- oder weniger rasch zunimmt, als die mit einer Constanten multiplicirte reciproke dritte Potenz von r. Dann liegt für das gegebene Werthepaar von h und k zu beiden Seiten des Kreises $r = r_1$ ein Gebiet, wo keine Centralbewegung möglich ist. Stört man die Bahn sehr wenig, d. h. verändert man die Werthe von h und k sehr wenig, so muss daher die Bahn immer der Kreisbewegung unendlich nahe bleiben, man sagt, die Kreisbewegung ist eine stabile Bahn.

Ist dagegen $\psi''(r_1)$ positiv, d. h. wächst die Kraft in der unmittelbaren Umgebung des Werthes $r = r_1$ mit wachsendem r rascher als die mit einer Constanten multiplicirte reciproke dritte Potenz von r, so liegt für das in Frage stehende Werthepaar von h und k zu beiden Seiten des Kreises $r = r_1$

ein Gebiet, wo durch jeden Punkt zwei Bahnen (beide natürlich Spiegelbilder voneinander) gehen. Wenn also wieder ϱ eine kleine positive oder negative Grösse ist, so gehen durch jeden Punkt, der die Entfernung $r_1 + \varrho$ vom Anziehungscentrum hat, zwei derartige Bahnen hindurch, für welche h und k dieselben Werthe, wie für die Bewegung im Kreise $r = r_1$ haben.

Der Typus dieser Bahnen wird durch Discussion der Differentialgleichung für den Fall, dass nahe $r = r_1$ ist, gefunden. Wir wollen in die erste der Gleichungen 50) $r = r_1 + \varrho$ setzen und ohne uns in eine detaillirte Analyse der Reihenentwickelung einzulassen, durch welche die folgenden Resultate exact begründet werden können, alle Glieder bis auf die der niedrigsten Ordnung weglassen. Wenn wir den reciproken Werth der Grösse $\frac{1}{2}\psi''(r_1)$ mit b^2 bezeichnen, so erhalten wir dann:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \pm \frac{\varrho}{b}, \quad t - t_0 = \pm\, b\, l\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right),$$

wobei l den natürlichen Logarithmus, ϱ_0 den Werth des ϱ zur Zeit t_0 bedeutet. Es ist also sowohl die Zeit, welche vergeht, bis ϱ einen endlichen Werth annimmt, als auch die, welche vergeht, bis ϱ exact gleich Null wird, also die Bewegung exact mit der Kreisbewegung identisch wird, unendlich. Man könnte daher sagen, dass für das gegebene Werthepaar von h und k in der unmittelbaren Umgebung des Werthes $r = r_1$ drei Arten von Centralbewegungen möglich sind, die exact im Kreise $r = r_1$, eine zweite ausserhalb, die sich, wenn sie von aussen nach innen durchlaufen wird, in unendlich vielen Windungen, deren Zurücklegung eine unendlich lange Zeit beansprucht, der Kreisbahn asymptotisch nähert, eine dritte, die sich ebenso von innen der Kreisbewegung asymptotisch nähert. Alle drei können natürlich auch als eine einzige aufgefasst werden, in der das Bewegliche, wenn es sich z. B. von innen nach aussen bewegt, sich zuerst der Kreisbahn nähert, dann in dieser unendlich lange verbleibt und sie dann erst in unendlich vielen Windungen nach aussen wieder verlässt. Da es jetzt keine Bahn giebt, die sehr nahe der Kreisbahn ein Perihel und auch ein Aphel hat, so ist letztere instabil, d. h. die kleinste Störung bewirkt, dass sich das Bewegliche durch sehr lange Zeit immer mehr und schliesslich um Endliches von ihr entfernt.

Jede der im vorigen Paragraphen beschriebenen Bahnen kann daher statt des Perihels oder Aphels oder auch statt beider sich einer Kreisbahn von aussen oder innen nähern.

Wenn h und k nicht exact, aber sehr nahe gleich solchen Werthen h_1 und k_1 sind, für welche die Gleichung 53) gleiche Wurzeln hat, so sind zwei Fälle möglich:

Fall 1: h und k haben solche sehr nahe an h_1 und k_1 gelegene Werthe h_2 und k_2, dass $\psi(r_1)$ einen kleinen negativen Werth hat, wobei r_1 wieder die für $h = h_1$ und $k = k_1$ vorhandene doppelte Wurzel der Gleichung 53) ist. Dann ist der Kreis $r = r_1$ von einem sehr schmalen Ringe umgeben, innerhalb dessen keine Centralbewegung mit den Werthen h_2 und k_2 der Constanten möglich ist.[1]) Die innerhalb dieses Ringes liegenden Bahnen, bei denen die Constanten diese Werthe haben, werden daher, nachdem sie sich in vielen nahe kreisförmigen Windungen dem Ringe näherten, an dessen innerem Rande ihr Aphel haben. Ebenso haben die ausserhalb liegenden Bahnen nach vielen nahe kreisförmigen Windungen am Aussenrande des Ringes ihr Perihel und das Bewegliche kann niemals von einer innerhalb des Ringes liegenden zu einer ausserhalb liegenden Bahn gelangen.

Fall 2: h und k sollen solche Werthe h_3 und k_3 haben, welche ebenfalls von h_1 und k_1 sehr wenig abweichen, aber gerade im entgegengesetzten Sinne wie h_2 und k_2, so dass $\psi(r)$ für keinen Werth von r gleich Null oder negativ wird, der sehr nahe an r_1 liegt. Eine Bahn, welche mit den Werthen h_3 und k_3 der Constanten innerhalb des Kreises $r = r_1$ beginnt, wird sich zwar anfangs auch diesem Kreise in sehr vielen Windungen nähern, dann aber ihn durchbrechen und nach nochmaliger Beschreibung sehr vieler dem Kreise sehr nahe liegender Windungen ihn nach aussen zu ganz verlassen.

Wenn wir daher von demselben Punkte innerhalb des Kreises $r = r_1$ einmal eine Bahn mit den Werthen h_2 und k_2,

[1]) Dieser Ring kann auch ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des Kreises, aber immer sehr nahe daran liegen.

dann mit den Werthen h_2 und k_2 der Constanten ausgehen lassen, so werden beide Bahnen und auch die Bewegungsgeschwindigkeiten in denselben anfangs nur sehr wenig verschieden sein. Dann aber wird die erste Bahn in der unmittelbaren Nähe des Kreises $r = r_1$ umkehren, die letzte dagegen wird diesen Kreis um endliches überschreiten und dann total von der ersten Bahn verschieden verlaufen. Aehnliches kann natürlich auch beim Dreikörperproblem eintreten. Ein Erstaunen hierüber scheint mir kaum gerechtfertigt, da die Zeit der Bewegung, nach welcher die beiden Bahnen weit voneinander abweichen, eine enorm grosse ist. Nach einer enorm grossen Zeit aber weichen ja auch zwei ungeschlossene Bahnen von dem in Figg. 10 bis 13 dargestellten Typus in ihrer Lage, freilich nicht in ihrer Form, um Endliches voneinander ab, auch wenn sowohl sie, als auch die Bewegungsgeschwindigkeiten anfangs fast vollständig übereinstimmten.

Nicht wesentlich verschieden sind die Verhältnisse, wenn für $r = r_1$ nebst ψ selbst noch mehr Ableitungen als die erste verschwinden und eine gerade Ableitung die erste ist, die nicht verschwindet. Nur ist dann die Zeit, während welcher $r - r_1$ von einem endlichen, bis zu einem gegebenen sehr kleinen Werth sinkt, von noch höherer Ordnung gross. Wenn dagegen eine ungerade Ableitung die erste ist, welche nicht verschwindet, so nähern sich die Bahnen nur von einer Seite der Kreisbahn mit dem Radius r_1 asymptotisch, während auf der anderen Seite für die in Rede stehenden Werthe von h und k keine Bahnen möglich sind. Wenn alle Ableitungen verschwinden, so erhalten wir den schon discutirten Fall einer der dritten Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft. Bezüglich aller näheren Details muss auf die Originalabhandlungen verwiesen werden.[1])

Ich füge noch einige Worte über den Fall bei, dass

$$f(r) = -\frac{a}{r^3} + b(r - r_1)^\gamma$$

ist, wo $1 > \gamma > 0$ ist. Dann ist die Kraft in der Nähe des Werthes $r = r_1$ eine eindeutige und continuirliche Function

[1]) Korteweg, Arch. neerl. Bd. 19; Boussinesq, Compt. rend. Bd. 84, p. 944.

von r, deren Ableitung nach r jedoch unendlich wird. In diesem Falle ist die Bahn durch die Bewegungsgleichungen, die Anfangslage und Grösse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit nicht immer eindeutig bestimmt, da das Bewegliche für diejenigen Werthe der Integrationsconstanten, für welche $\psi(r_1) = \psi'(r_1) = 0$ ist, sich sowohl im Kreise mit dem Radius r_1, als auch in einer anderen Bahn, die diesen Kreis osculirt, bewegen kann, und zwar erreicht das Bewegliche auf der letzteren Bahn in endlicher Zeit eine von der Kreisbahn um Endliches abstehende Stelle, wie man sehr leicht findet, wenn man $r = r_1 + \varrho$ setzt, wie früher nach Potenzen von ϱ entwickelt und die Zeit sucht, während welcher ϱ von Null bis zu einem kleinen endlichen Werthe wächst.

Deshalb nehmen wir immer an, dass der Quotient des Zuwachses der Entfernung in den entsprechenden Zuwachs der Kraft nicht unendlich werden kann. Dann sind nach der Theorie der Differentialgleichungen Mehrdeutigkeiten innerhalb endlicher Zeit ausgeschlossen.[1]) In den früher betrachteten Fällen der Bahnen, die sich der Kreisbahn asymptotisch nähern, hatte das Bewegliche zwar auch, wenn es anfangs auf der Kreisbahn war, gewissermaassen die Wahl auf dieser zu bleiben oder die sich ihr asymptotisch nähernde einzuschlagen. Diese Wahl wurde aber dadurch illusorisch, dass sich die Bewegung im letzteren Falle erst nach unendlich langer Zeit von der im ersteren Falle unterscheidet.

III. Allgemeine Integrale der Bewegungsgleichungen.

§ 25. Bewegung zweier beweglicher materieller Punkte unter dem Einflusse einer Centrikraft.

Wir betrachten nun als einfaches Beispiel den Fall, dass sich nur zwei materielle Punkte mit den Massen m_1 und m_2, zwischen denen eine Centrikraft $f(r)$ thätig ist, in einer Ebene bewegen. $\int f(r)dr$ mit einer bestimmten, in

[1]) Wien. Sitzber. 106, S. 12, 7. Januar 1897.

einfachster Weise gewählten Constante werde wieder mit $\varphi(r)$ bezeichnet. r sei die Entfernung der beiden materiellen Punkte, x_1, y_1, x_2, y_2 deren rechtwinkelige Coordinaten zu irgend einer Zeit t. Nach Gleichung 9) erhält man dann die folgenden Gleichungen:

$$55)\quad \begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{d t^2} = f(r) \dfrac{x_1 - x_2}{r}, & m_1 \dfrac{d^2 y_1}{d t^2} = f(r) \dfrac{y_1 - y_2}{r}, \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{d t^2} = f(r) \dfrac{x_2 - x_1}{r}, & m_2 \dfrac{d^2 y_2}{d t^2} = f(r) \dfrac{y_2 - y_1}{r}, \end{cases}$$

Addiren wir von diesen Gleichungen je zwei übereinanderstehende, so folgt:

$$56)\qquad \frac{d^2(m_1 x_1 + m_2 x_2)}{d t^2} = \frac{d^2(m_1 y_1 + m_2 y_2)}{d t^2} = 0.$$

Wir wollen nun die gerade Verbindungslinie der beiden materiellen Punkte zu jeder Zeit durch einen Punkt S in zwei Stücke theilen, die sich verkehrt wie die ihnen anliegenden Massen verhalten. Der Punkt S, den wir den Schwerpunkt des von beiden Massen gebildeten Systems oder kürzer den Schwerpunkt der beiden Massen nennen, hat dann zu jeder Zeit eine bestimmte Lage, die sich continuirlich mit der Zeit verändert und man kann von seiner Bewegung wie von der eines materiellen Punktes sprechen. Für die Coordinaten des Schwerpunktes zur Zeit t findet man durch eine einfache Rechnung die Werthe

$$57)\qquad \xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad \eta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Wenn beide Massen gleich sind, so liegt also der Schwerpunkt gerade in der Mitte zwischen beiden und seine Abscisse ist das arithmetische Mittel ihrer Abscissen und gleiches gilt für die y-Coordinate. Ist dagegen eine Masse grösser, so rückt ihr der Schwerpunkt um so näher, je grösser sie ist. Die Gleichungen 56) reduciren sich daher, da wir die Massen als ein für allemal constant betrachten, auf $d^2 \xi / d t^2 = d^2 \eta / d t^2 = 0$. Der Schwerpunkt bewegt sich daher gleichförmig in einer Geraden mit der Geschwindigkeit, die er zu Anfang hatte fort, genau so wie ein materieller Punkt, auf den gar keine Kräfte wirken.

Es handelt sich nur noch darum, die relative Bewegung der beiden materiellen Punkte relativ gegen den Schwerpunkt zu finden. Wir wollen lieber die relative Bewegung der einen Masse m_1 gegen die andere m_2 aufsuchen. Durch diese ist uns dann die Richtung und Länge der Verbindungslinie der Massen zu jeder Zeit gegeben. Da wir auch die Lage des Schwerpunktes zu jeder Zeit kennen, und wissen in welchem Verhältnisse derselbe diese Verbindungslinie theilt, so können wir dann unmittelbar die Lage jeder der Massen zu jeder Zeit sofort finden.

Wir wollen ein zweites Coordinatensystem benutzen, dessen Axen immer denen des ersten parallel bleiben, aber sich parallel zu sich selbst so im Raume bewegen, dass ihr Coordinatenanfangspunkt immer mit der augenblicklichen Lage des materiellen Punktes m_2 zusammenfällt. Die Coordinaten der Masse m_1 zur Zeit t bezüglich dieses zweiten Coordinatensystems bezeichnen wir mit x, y ohne Index. Dann ist:

$$x = x_1 - x_2, \quad y = y_1 - y_2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dividirt man die erste Gleichung in der ersten Zeile der Gleichungen 55) durch m_1, subtrahirt davon die darunter stehende Gleichung, nachdem man letztere durch m_2 dividirt hat und setzt noch

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m \text{ oder } \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

so erhält man:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = f(r) \frac{x}{r}.$$

Ebenso erhält man, wenn man in der ersten Zeile der Gleichungen 55) die zweite Gleichung durch m_1 dividirt und davon die durch m_2 dividirte, unmittelbar darunter stehende Gleichung subtrahirt:

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = f(r) \frac{y}{r}.$$

Diese und die vorhergehende Gleichung stimmen vollkommen mit den Gleichungen 32) überein. Die relative Bewegung des materiellen Punktes m_1 gegen den Punkt m_2, worunter wir nichts anderes verstehen, als die Art der Veränderung der Coordinaten x, y des ersten materiellen Punktes bezüglich des zweiten Coordinatensystems, dessen Axen sich immer parallel bleiben und immer durch den zweiten materiellen Punkt gehen, geschieht also genau nach den Gesetzen, welche wir für die Centralbewegung um ein fixes Centrum kennen gelernt haben. Genauer gesprochen so, als ob der zweite materielle Punkt unveränderlich im Raume festgehalten würde und dieselbe Centrikraft $f(r)$ auf den ersten ausübte, der aber nicht die Masse m_1, sondern die mit m bezeichneten Massen haben müsste; als ob ferner der erste materielle Punkt zu Anfang genau diejenige Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung gehabt hätte, welche er in Wirklichkeit relativ gegen das zweite Coordinatensystem hatte, d. h. als ob seine Geschwindigkeitscomponenten in den Coordinatenrichtungen zu Anfang der Zeit gleich

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d(y_1 - y_2)}{dt}$$

gewesen wären. Da wir die Gesetze der Centralbewegung um ein fixes Centrum bereits kennen gelernt haben, so ersparen wir durch die angeführten Sätze für die Auflösung des in diesem Paragraphen gestellten Problems jede neue Rechnung. Diese Bewegung in der xy-Ebene (der Bahnebene) wird natürlich nicht gestört, wenn beide materielle Punkte dazu noch die gleiche Geschwindigkeit senkrecht zu dieser Ebene haben.

§ 26. Das Energieprincip.

Wir kehren nun zur Betrachtung beliebiger materieller Punkte zurück. Wir bezeichnen die Coordinaten irgend eines (des $h$ten) derselben zur Zeit t mit x_h, y_h, z_h, die gesammte Geschwindigkeit desselben mit c_h, die Componenten der gesammten Kraft, welche auf ihn wirkt, in den Coordinatenrichtungen mit X_h, Y_h, Z_h. Die allgemeinen Gleichungen 13) schreiben sich dann in der Form

$$58) \quad \begin{cases} m_h \dfrac{d^2 x_h}{dt^2} = X_h, \quad m_h \dfrac{d^2 y_h}{dt^2} = Y_h, \quad m_h \dfrac{d^2 z_h}{dt^2} = Z_h, \\ \qquad\qquad h = 1, \; 2 \ldots . n. \end{cases}$$

Letzterer Zusatz hat hier wie später immer die Bedeutung, dass die Gleichungen immer richtig sind, welchen zwischen 1 und n incl. liegenden ganzen Zahlenwerth man dem h auch ertheilen möge. Da

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d(c_h^2)}{dt}=\frac{dx_h}{dt}\frac{d^2x_h}{dt^2}+\frac{dy_h}{dt}\frac{d^2y_h}{dt^2}+\frac{dz_h}{dt}\frac{d^2z_h}{dt^2}$$

ist, so erhält man, indem man die erste der Gleichungen 58) mit dx_h/dt, die zweite mit dy_h/dt, die dritte mit dz_h/dt multiplicirt und dann alle für jeden zulässigen Werth von h so gebildeten Gleichungen addirt:

$$59)\qquad \frac{dT}{dt}=\sum_{h=1}^{h=n}\left(X_h\frac{dx_h}{dt}+Y_h\frac{dy_h}{dt}+Z_h\frac{dz_h}{dt}\right).$$

Hierbei ist

$$60)\qquad T=\sum_{h=1}^{h=n}\tfrac{1}{2}m_h c_h^2$$

die gesammte lebendige Kraft aller n materiellen Punkte.

Die Integration liefert:

$$61)\qquad T_1-T_0=\int\sum_{h=1}^{h=n}(X_h\,dx_h+Y_h\,dy_h+Z_h\,dz_h)$$

Hierbei sind T_1 und T_0 die Werthe von T zu den beliebigen Zeiten t_1 und t_0; die Integration ist über die ganze Bewegung während der Zeit t_1-t_0 zu erstrecken. Es ist also, wenn man wieder die Begriffe des § 16 einführt, der Zuwachs der gesammten lebendigen Kraft des Systems während einer beliebigen Zeit gleich der gesammten Arbeit, welche alle auf seine Punkte wirkenden Kräfte während dieser Zeit geleistet haben. Letztere ist positiv zu zählen, wenn der Weg in die Richtung der auf den betreffenden Punkt wirkenden Kraft fällt. Dies folgt übrigens schon, wenn man die Gleichung 20) für alle Punkte des Systems bildet und alle diese Gleichungen addirt.

Wir betrachten den besonderen Fall, dass die Grösse, welche auf der rechten Seite der Gleichung 61) unter dem Integralzeichen steht, das vollständige Differentiale einer eindeutigen Function $-V$ ist, welche blos die Coordinaten der n materiellen Punkte enthält. Man sagt dann, es existirt eine Kraftfunction, welche die Zeit nicht explicit enthält, und nennt V die Kraftfunction. In diesem Falle ist:

$$62)\quad \begin{cases} X_h = -\frac{\partial V}{\partial x_h}, \quad Y_h = -\frac{\partial V}{\partial y_h}, \quad Z_h = -\frac{\partial V}{\partial z_h}, \\ \qquad h = 1, \ 2 \ldots . n, \end{cases}$$

d. h. die Kraft, welche auf irgend einen materiellen Punkt in irgend einer der Coordinatenrichtungen wirkt, ist die negative partielle Ableitung der Kraftfunction nach der betreffenden Coordinate. Die Ausführung der Integration auf der rechten Seite der Gleichungen 61) liefert dann:

$$T_1 - T_0 = -V_1 + V_0,$$

wobei V_1 und V_0 die Werthe der Kraftfunction zu den ganz beliebigen, schon oben mit t_1 und t_0 bezeichneten Zeiten sind. Die Summe der gesammten lebendigen Kraft und des Werthes der Kraftfunction bleibt also während der ganzen Bewegung constant. Da V eine eindeutige Function der Coordinaten sein soll, so muss es denselben Werth annehmen, so oft sämmtliche Punkte des Systems in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren, es muss also dann jedesmal die gesammte lebendige Kraft aller Punkte des Systems auch wieder denselben Werth annehmen. Nach § 8 existirt eine Kraftfunction immer, wenn die materiellen Punkte jeder fremden Einwirkung entzogen sind und sich blos unter dem Einflusse der zwischen ihnen wirkenden Centrikräfte bewegen. Es ist dann nach Gleichung 10)

$$V = -\sum\sum \varphi_{hk}(r_{hk}).$$

Ebenso muss eine Kraftfunction existiren, wenn noch ν beliebige andere materielle Punkte, von denen jedoch jeder eine unveränderliche feste Lage im Raume hat, Centrikräfte auf die n materiellen Punkte ausüben. Denn man kann ja dann die Gleichung auf das von den $n + \nu$ Punkten gebildete System anwenden, und darin die Coordinaten der ν Punkte constant, resp. ihre Massen unendlich gross setzen. Ist $F_{hk}(r_{hk})$ die Kraft, welche einer der ν Punkte auf einen der n Punkte in der Entfernung r_{hk} ausübt und

$$\int F_{hk}(r_{hk})\, d r_{hk} = \Phi_{hk}(r_{hk}),$$

so ist dann:

$$V = -\sum\sum \varphi_{hk}(r_{hk}) - \sum_{h=1}^{h=\nu} \sum_{k=1}^{k=n} \Phi_{hk}(r_{hk}). \tag{62a}$$

In allen diesen Fällen wird die Summe der lebendigen Kraft und Kraftfunction constant bleiben, also die gesammte lebendige Kraft der n Punkte jedesmal denselben Werth annehmen, sobald jeder derselben zur ursprünglichen Position im Raume zurückgekehrt ist. Daraus folgt aber noch keineswegs, dass auch jeder einzelne materielle Punkt wieder die ursprüngliche Geschwindigkeit haben muss. Speciell wenn es sich um ein System von Körpern handelt, die aus einer sehr grossen Zahl so dicht gedrängter materieller Punkte bestehen, dass man die materiellen Punkte einzeln nicht wahrnehmen kann, so ergiebt sich aus dem Bilde, welches wir uns gemacht haben, mit logischer Consequenz Folgendes: es können dann und werden im Allgemeinen relative Bewegungen der einzelnen materiellen Punkte gegeneinander entstehen, die wir offenbar so wenig als die einzelnen Punkte direct beobachten können. Es kann nun sein, dass diese verborgenen Bewegungen andere wahrnehmbare, quantitativ messbare Effecte haben, welche der lebendigen Kraft dieser unsichtbaren Bewegungen der materiellen Punkte gegeneinander mit Einschluss der hierbei durch Verschiebungen der Punkte geleisteten Arbeit der Molekularkräfte proportional, also mit entsprechendem Coefficienten multiplicirt gleich sind. Dann muss die Summe der lebendigen Kraft der sichtbaren Bewegung, der Kraftfunction der sichtbar zwischen den Körpern wirkenden Kräfte und der mit den entsprechenden Coefficienten multiplicirten Quantität aller jener anderen Effecte immer constant sein. Nennen wir daher jeden dieser Summanden eine Energie, so muss die Summe aller Energien constant sein. Dies ist das Energieprincip.

Man hat die Sache manchesmal so dargestellt, als ob das ganze mechanische Bild nur den Zweck hätte, dieses Princip zu erklären. Dann wäre freilich, sobald man das Princip selbst klar erkannt hat, das Bild überflüssig geworden. Es ist aber das Princip der Erhaltung der Energie nur ein kleiner Bruchtheil alles dessen, was durch das Bild dargestellt wird und die Uebereinstimmung mit diesem grossen allgemeinen Naturprincipe kann also nur als eine einzelne, specielle, werthvolle Bestätigung unseres Bildes betrachtet werden. Erst wenn es gelungen wäre, ohne Zuziehung unseres Bildes einen Inbegriff von ebenso viel Thatsachen ebenso klar und übersichtlich wie durch das Bild darzustellen, könnte man sagen, das Bild sei überflüssig geworden.

Wenn die ν materiellen Punkte, welche auf das betrachtete System der n Punkte wirken, nicht ruhen, sondern eine bekannte (vorgeschriebene) Bewegung machen, so sind im zweiten Gliede des Ausdruckes für V (Gleichung 62a) die Coordinaten der ν Punkte als gegebene Functionen der Zeit t allein zu betrachten. Daher enthält V ausser den Coordinaten der n Punkte noch die Zeit explicit. Die Kraft, welche auf irgend einen der n Punkte in irgend einer der Coordinatenrichtungen wirkt, ist noch immer die negative partielle Ableitung des V nach der betreffenden Coordinate des betreffenden Punktes. Aber der totale Differentialquotient dV/dt des V nach der Zeit, d. h. die Limite, welcher der durch dt dividirte gesammte Zuwachs des V während der Zeit dt zueilt, besteht aus zwei Theilen: Demjenigen, welcher durch die gegebene Veränderung der ν Punkte entsteht, der also, wie man sagt, daher rührt, dass V die Zeit explicit enthält (wir wollen ihn mit $\partial V/\partial t$ bezeichnen) und dem, welcher daher rührt, dass die Coordinaten der n Punkte während der Zeit dt ihre respectiven Zuwächse $dx_1, dy_1, \ldots dz_n$ erfahren. Letzterer ist gleich:

$$\sum_{h=1}^{h=n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_h}\frac{dx_h}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y_h}\frac{dy_h}{dt}+\frac{\partial V}{\partial z_h}\frac{dz_h}{dt}\right).$$

Nach Gleichung 59) ist nur der letztere Ausdruck gleich $-dT/dt$, wenn mit T wie früher die gesammte lebendige Kraft der n Punkte bezeichnet wird. Man hat also in diesem Falle

$$-\frac{dT}{dt}=\frac{dV}{dt}-\frac{\partial V}{\partial t},$$

woraus natürlich nicht folgt, dass $V + T$ constant sein müsste. Es ist also jetzt die gesammte Energie des Systems der n Punkte nicht constant. Man sagt, das System der n Punkte empfängt von den ν Punkten und den ihre Bewegung unterhaltenden Kräften Energie oder giebt Energie an sie ab. Wenn die ν Punkte in Bewegung begriffen sind, so braucht also die Energie der n Punkte nicht constant zu sein.

Trotzdem sind Fälle möglich, wo die Kräfte $X_1, Y_1 \ldots Z_n$, welche auf die n Punkte wirken, als blosse Functionen dieser Coordinaten ausgedrückt werden können, z. B. wenn die Bewegung der ν Punkte eine cyklische ist, so dass an Stelle jedes dieser Punkte, sobald er seinen Platz verlässt, sogleich ein gleich beschaffener tritt und die Art und Weise dieser cyklischen Bewegung selbst von der Position der n Punkte abhängt oder überhaupt wenn die Bewegung der ν Punkte in gegebener Weise von der Lage der n Punkte abhängt. Dann kann aber $X_1\, dx_1 + Y_1\, dy_1 + \ldots Z_n\, dz_n$ auch das Differentiale einer mehrdeutigen Function sein, welche blos die Coordinaten der n Punkte enthält, oder es kann gar kein vollständiges Differentiale sein.

Die Kräfte, welche auf einen Magnetpol wirken, bieten ein Beispiel des ersten Falles, wenn sich im Felde constante lineare, in sich geschlossene Ströme befinden, ein Beispiel des zweiten Falles, wenn sich der Magnetpol im Innern eines überall von elektrischen Stromfäden durchsetzten körperlichen Leiters befindet. In beiden Fällen sind Bewegungen der n Punkte möglich, wobei dieselben periodisch wieder in die Anfangslage zurückkehren, aber ihre Gesammtenergie auf Kosten der Energie der von aussen auf sie wirkenden Körper fortwährend wächst.

Noch complicirtere Fälle treten natürlich auf, wenn die Bewegung der ν Punkte auch eine Function der Geschwindigkeitscomponenten der n Punkte oder noch anderer Bestimmungsstücke ihrer Bewegung ist, so dass auch die auf die n Punkte wirkenden Kräfte Functionen dieser Grösse werden, in dem Sinne, wie wir schon in § 18 von Kräften sprachen, die Functionen der Geschwindigkeit sind, worauf ich nicht weiter eingehen will.

§ 27. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes.

Wir kehren wieder zum allgemeinsten Falle zurück, dass beliebige n Punkte ihrer Wechselwirkung und der Einwirkung ν fremder Punkte unterworfen sind. Der $h$te der n Punkte habe die Masse m_h und zur Zeit t die Coordinaten x_h, y_h, z_h. Die Resultirende aller von den ν Punkten auf ihn zur Zeit t ausgeübten Kräfte sei $\mathfrak{P}_h$ und ihre Componenten in den drei Coordinatenrichtungen seien $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$, $\mathfrak{Z}_h$. Alle diese Kräfte, welche von den ν Punkten auf die n Punkte ausgeübt werden, bezeichnen wir als die Kräfte, welche auf das System unserer n Punkte von aussen wirken, d. h. welche von materiellen Punkten ausgehen, die dem Systeme nicht angehören. Im Gegensatze hierzu nennen wir die Centrikräfte, welche zwischen je zwei Punkten des Systems wirken, die inneren Kräfte des Systems. $f_{hk}(r_{hk})$ sei wie früher die zwischen dem $h$ten und $k$ten Punkte des Systems wirkende innere Kraft. Die Gleichungen 10) resp. 13) und 58) verwandeln sich bei Einführung dieser neuen Bezeichnung in

$$63)\qquad m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \sum_{k=2}^{k=n} f_{1k}(r_{1k}) \frac{x_1 - x_k}{r_{1k}} + \mathfrak{X}_1$$

mit zwei analogen Gleichungen für die y- und z-Axe und $3n-3$ analogen Gleichungen für die übrigen materiellen Punkte.

Addiren wir von diesen Gleichungen alle, welche sich auf die x-Coordinate beziehen, so tilgen sich alle Glieder, welche die Functionen f enthalten und es folgt

$$64)\qquad \frac{d^2}{dt^2} \sum_{h=1}^{h=n} m_h x_h = \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{X}_h .$$

Analoge Gleichungen erhalten wir natürlich für die y- und z-Axe. Wir wollen nun mit S_2 den Schwerpunkt des von den beiden Massen m_1 und m_2 gebildeten Systemes und mit ξ_2 dessen Abscisse bezeichnen. Dann ist vermöge der Gleichung 57)

$$\xi_2 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} .$$

Wir denken uns ferner im Punkte S_2 eine Masse befindlich, welche gleich $m_1 + m_2$, also gleich der Summe der

Massen ist, deren Schwerpunkt S_2 ist und bezeichnen mit S_3 den Schwerpunkt des von dieser in S_2 fingirten Masse und von der Masse m_3 gebildeten Systemes und mit ξ_3 die Abscisse von S_3. Dann ist wieder nach Gleichung 57)

$$\xi_3 = \frac{(m_1 + m_2)\,\xi_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Wir nennen dann S_3 auch den Schwerpunkt der drei Massen m_1, m_2, m_3. Ebenso wollen wir als den Schwerpunkt S_4 der vier Massen m_1, m_2, m_3 und m_4 denjenigen Punkt bezeichnen, welchen wir erhalten, wenn wir den Schwerpunkt des Systems suchen, welches von der Masse m_4 und der im Punkte S_3 gedachten Masse $m_1 + m_2 + m_3$ gebildet wird. Für seine Abscisse folgt wie früher der Werth:

$$\xi_4 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Fahren wir in dieser Weise fort, was wir die synthetische Definition des Schwerpunktes nennen wollen, so erhalten wir für die Coordinaten ξ, η, ζ des Schwerpunktes aller n Massen die Werthe:

$$65)\quad \xi = \frac{1}{M}\sum_{h=1}^{h=n} m_h x_h, \quad \eta = \frac{1}{M}\sum_{h=1}^{h=n} m_h y_h, \quad \zeta = \frac{1}{M}\sum_{h=1}^{h=n} m_h z_h,$$

wobei $M = \sum_{h=1}^{h=n} m_h$ die Summe aller Massen des Systemes ist, welche wir auch als die Gesammtmasse desselben bezeichnen wollen. Die in diesen Gleichungen enthaltene Definition des Schwerpunktes nennen wir dessen analytische Bestimmung. Sie zeigt unmittelbar, dass man bei der synthetischen Definition jedesmal denselben Punkt als Schwerpunkt eines Systems materieller Punkte erhält, in welcher Reihenfolge man immer die verschiedenen Massen des Systems nehmen mag. Führen wir die Grössen ξ, η, ζ ein, so reducirt sich die Gleichung 64), sowie die beiden ihr entsprechenden, für die beiden anderen Coordinatenrichtungen geltenden auf

$$66)\quad M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum_{h=1}^{h=n}\mathfrak{X}_h, \quad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum_{h=1}^{h=n}\mathfrak{Y}_h, \quad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum_{h=1}^{h=n}\mathfrak{Z}_h.$$

Genau dieselben Gleichungen würden wir für die Bewegung eines materiellen Punktes erhalten, der die Masse M hätte und auf welchen in jedem Augenblicke die Resultirende aller Kräfte wirken würde, welche von aussen auf jeden der n materiellen Punkte wirken. Von den inneren Kräften, also den zwischen den Punkten des Systems wirkenden Centrikräften, ist dabei ganz abzusehen. Wir können daher sagen: der Schwerpunkt bewegt sich gerade so, wie ein einzelner materieller Punkt, dessen Masse gleich ist der Summe der Massen aller materiellen Punkte des Systems und auf den in jedem Augenblicke eine Kraft wirkt, welche man findet, indem man den Angriffspunkt jeder Kraft, welche auf irgend einen der materiellen Punkte wirkt, ohne Aenderung ihrer Grösse und Richtung nach jenem Punkte versetzt und dann die Resultirende aller dieser Kräfte sucht. Die Componente dieser Kraft nach jeder der Coordinatenrichtungen muss daher die Summe der Componenten aller äusseren Kräfte in der betreffenden Coordinatenrichtung sein, welche auf alle materiellen Punkte des Systems wirken. Natürlich muss dieser einzige materielle Punkt auch zu Anfang der Zeit gleiche Lage haben wie der Schwerpunkt des Systems und seine Anfangsgeschwindigkeit muss gleiche Grösse und Richtung haben.[1])

Bewegt sich speciell das System der n materiellen Punkte blos unter dem Einflusse der zwischen je zwei derselben wirkenden Centrikräfte, so sind keine äusseren Kräfte vor-

---

[1]) Wegen der grossen Entfernung zwischen Erde und Sonne ist die Kraft, welche die Sonne nach dem Newton'schen Gesetze auf irgend einen Punkt der Erde ausübt, nahezu dem Quadrate der Entfernung des Erdschwerpunktes vom Sonnenschwerpunkte verkehrt proportional und gegen den letzteren gerichtet. Wenn also nur Erde und Sonne aufeinander wirken würden, so würden sich ihre Schwerpunkte wie materielle mit der Masse des betreffenden Himmelskörpers behaftete Punkte bewegen, die sich mit einer dem Quadrate ihrer Entfernung verkehrt proportionalen Kraft anziehen, also ganz nach den in §§ 21 und 25 erläuterten Gesetzen, wodurch deren Anwendung auf praktische Fälle klar wird. Dies gilt übrigens, wenn man Erde und Sonne als starre Kugeln betrachtet, auch ohne Vernachlässigung, wie wir in der Potentialtheorie sehen werden.

handen und der Schwerpunkt ruht für alle Zeiten, wenn er zu Anfang der Zeit ruhte. Sonst bewegt er sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit in einer Geraden. Die inneren Kräfte, welche ja aus den Gleichungen 64) vollkommen herausgefallen sind, afficiren also die Bewegung des Schwerpunktes gar nicht.

Wenn eine geladene Kanone, welche frei von jeder Einwirkung anderer Körper im Raume schweben würde, anfangs ruhte und plötzlich in Folge der Einwirkung innerer Kräfte losginge, würde zwar die Kugel in heftige Bewegung in einer bestimmten Richtung gerathen, der Körper der Kanone aber würde genau mit einer solchen Geschwindigkeit sich in entgegengesetzter Richtung zu bewegen anfangen, dass der Schwerpunkt des von der Kugel und Kanone gebildeten Systems nach wie vor ruhen würde. Dasselbe gilt von jedem Körper, dessen Theile blos durch innere Kräfte in relative Bewegung gegeneinander kommen.

§ 28. Masse und Gewicht des Gramms. Dyn. Schwerpunktsberechnung.

Wir kommen jetzt wenigstens in einer Hinsicht in Contact mit der Wirklichkeit. Wir sahen, dass die Masse eines von allen materiellen Punkten ganz willkürlich gewählt werden kann. Statt dessen können wir, da wir einzelne materielle Punkte nicht wahrnehmen, jetzt die Gesammtmasse irgend eines bestimmten Körpers willkürlich wählen. Wir wollen z. B. die Summe der Massen aller materiellen Punkte, die in einem Cubikcentimeter reinen destillirten Wassers bei dem dem Normalbarometerstande entsprechenden Drucke und der Temperatur des Dichtemaximums vorhanden sind, mit 1 bezeichnen.

Eine theoretische Möglichkeit, die Masse irgend eines anderen Körpers zu bestimmen, ergiebt sich dann wie folgt. Die Resultirende aller Kräfte, welche die materiellen Punkte irgend eines Körpers A auf die irgend eines anderen Körpers B ausüben, muss, wenn man alle in demselben Punkte angreifend denkt, gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sein der Resultirenden der Kräfte, welche umgekehrt die materiellen Punkte des Körpers B auf die des Körpers A ausüben, da dies für jede einzelne dieser Kräfte gilt. Die Massen zweier in Wechselwirkung befindlicher Körper verhalten sich daher umgekehrt wie die beobachtbaren Beschleunigungen, welche ihre Schwerpunkte durch diese Wechselwirkung erfahren, also z. B. auch umgekehrt wie die gesammten Geschwindigkeitsänderungen, welche sie beim Stosse aufeinander erhalten.

Als Krafteinheit haben wir, wenn zu den Formeln 9), 13) etc. kein constanter Factor dazutreten soll, diejenige Kraft zu bezeichnen, welche dem Schwerpunkte eines Körpers von der Masse 1 in der Zeiteinheit die Beschleunigung 1 ertheilt, wobei wir Secunde und Centimeter als Zeit- und Längeneinheit wählen. Wir wollen diese Kraft Dyn nennen. Wenn wir z. B. an einem ϱ cm langen Faden einen kleinen Körper, dessen Masse gleich μ Gramm, also durch Stoss oder sonstige Wechselwirkungsversuche μ mal so gross, als die oben definirte Wassermasse gefunden wurde, so im Kreise schwingen, dass er in der Secunde einen Weg von γ Centimetern zurücklegt, so ersehen wir aus Formel 15), dass der Faden mit einer Kraft von $\mu\gamma^2/\varrho$ Dynen gespannt wird.

Schon das am Schlusse des § 14 Angeführte macht es wahrscheinlich, dass an einer bestimmten Stelle der Erde durch die Wirkung der Schwere allein alle Punkte aller Körper dieselbe Beschleunigung g (in unseren Breiten am Meeresniveau etwa 981 cm in der Secunde) erhalten. Alle Consequenzen, die man aus dieser Annahme ziehen kann, haben sich so vollständig bestätigt (vergl. Schluss des § 51), dass wir dieselbe als wohlbegründete Erfahrungsthatsache bezeichnen können. Die Intensität der Kraft, welche die Schwere auf einen beliebigen Körper von der Masse m ausübt (das Gewicht dieses Körpers), ist also nach Formel 14)

$$P = mg.$$

Das Gewicht eines Körpers von der Masse eines Gramms ertheilt daher in unseren Gegenden diesem eine etwa 981 mal grössere Beschleunigung, als die Kraft eines Dyns. Dieses

Gewicht, welches man auch das Gewicht eines Gramms (nicht zu verwechseln mit der Masse eines Gramms) nennt, ist also etwa gleich 981 Dynen. Ein Dyn ist der 981. Theil des Gewichts eines Gramms, rund das Gewicht eines Milligramms.

Das Verhältniss der Massen zweier Körper braucht man daher nicht durch Stossversuche oder sonstige Versuche der Wechselwirkung derselben zu bestimmen, sondern dieses Verhältniss ist gleich dem Verhältnisse ihrer Gewichte an derselben Stelle des Erdkörpers, da daselbst g für alle Körper denselben Werth hat. Letzteres Verhältniss aber kann ebenso bequem als genau durch die Waage bestimmt werden, deren Theorie wir freilich erst etwas später kennen lernen werden. (Vergl. § 56.)

Am Aequator erhält jeder Körper durch die Schwere wieder die gleiche Beschleunigung, wie jeder andere. Diese ist aber etwas kleiner als die in unseren Breiten, wogegen sie in der Nähe des Poles etwas grösser ist. Am Aequator ist daher das Gewicht eines und desselben Körpers etwas kleiner, in der Nähe des Poles etwas grösser als bei uns. Es würde auch dieselbe elastische Feder bei gleicher Temperatur durch Anhängung desselben Körpers am Pole etwas mehr, am Aequator etwas weniger gedehnt, als bei uns. Die Masse eines und desselben Körpers aber bleibt überall genau gleich. Bei der Masse eines Cubikcentimeter Wassers liegt dies einfach in unserer Definition der Masse 1. Die Constanz des Massenverhältnisses zweier Körper aber folgt aus der Uebereinstimmung unserer Grundannahme 6 mit der Erfahrung.

Um anzuzeigen, in welcher Weise sich die eine Grösse ausdrückende Zahl mit den gewählten Einheiten ändert, schreiben wir jeder Grösse gewisse Dimensionen zu. Wir sagen, jede Strecke hat die Dimension einer Länge $[l]$, d. h. sie wird durch eine $l$fache Zahl dargestellt, wenn wir die Längeneinheit $l$mal kleiner wählen, eine Fläche hat die Dimension $[l^2]$, ein Volum $[l^3]$, weil im gleichen Falle die sie darstellenden Zahlen l^2, resp. l^3 mal grösser werden. Eine Kraft hat die Dimension $[m l t^{-2}]$, weil sie durch eine

$m l t^{-2}$ mal so grosse Zahl dargestellt wird, wenn wir die Masseneinheit m mal, die Längeneinheit l mal, die Zeiteinheit t mal kleiner wählen. Diese Dimensionen sind unmittelbar aus der definirenden Formel $X = m\, d^2 x / d t^2$ ersichtlich, d und d^2 haben keine Dimensionen, da sie nur Zuwächse ausdrücken.

Ein Vector als eine Länge kann einer Kraft oder einer Geschwindigkeit so wenig gleich sein, wie eine Anzahl Aepfel einer Zahl Birnen. Es kann nur die Länge des ersten durch dieselbe Zahl, wie die Intensität der zweiten ausgedrückt werden. Man strebt auch dies, also dass ein Dyn gerade durch einen Pfeil von der Länge eines Centimeters dargestellt wird, in den seltensten Fällen an. Man würde also besser sagen, dass die Intensitäten aller Kräfte gleich den mit demselben Reductionsfactor Γ multiplicirten Längen der Pfeile sind. Nur weil man sich auch so zu verstehen glaubt, schweigt man von diesem Reductionsfactor, der immer hinzuzudenken ist, wenn man eine Gleichung wie P(Kraft) $= AB$(Länge) schreibt.

Da wir nur ein richtiges Bild der Körper erhalten, wenn wir uns jeden Körper aus sehr vielen, nicht einzeln aufzählbaren materiellen Punkten bestehend denken, so könnte die in den Formeln 65) angezeigte Summirung nicht wirklich ausgeführt werden, wenn es nicht möglich wäre, in allen Fällen dadurch gute Uebereinstimmung mit der Erfahrung zu erzielen, dass man sich in der Anordnung der materiellen Punkte gewisse Regelmässigkeiten denkt. Die höchste Regelmässigkeit ist die, dass alle materiellen Punkte gleich beschaffen und gleichmässig im ganzen Volumen des Körpers vertheilt sind. Ihre Voraussetzung liefert oft gute Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Dann verhält sich die in irgend einem Volumtheile des Körpers enthaltene Masse m zur Gesammtmasse M des Körpers wie das Volumen ω dieses Volumtheiles zum gesammten Volumen Ω des Körpers. Es ist also $m = \varrho\, \omega$, wobei $\varrho = M / \Omega$ die auf die Volumeinheit entfallende Masse (die Dichte des Körpers) ist. Wenn die Anordnung der Massentheilchen nicht in dieser Weise regelmässig ist, so machen wir die freilich in keiner anderen

Weise als durch die wenigstens angenäherte Uebereinstimmung der aus ihr folgenden Bilder mit der Erfahrung beweisbare Annahme, dass diese Regelmässigkeit wenigstens in in der unmittelbaren Umgebung eines jeden Punktes des Körpers vorhanden ist, d. h. dass der Quotient des Volumens do jedes Volumelementes des Körpers in die gesammte darin enthaltene Masse dm mit abnehmender Grösse des do stets gegen eine feste endliche Grenze ϱ convergirt, deren Werth sich continuirlich von Punkt zu Punkt im Körper ändern kann, so dass man mit Vernachlässigung von unendlich Kleinem höherer Ordnung hat

$$dm = \varrho\, do.$$

Die Summen der Formeln 65) verwandeln sich dann in Integrale, die über das gesammte Volumen des Körpers zu erstrecken sind, und es wird:

$$67)\quad \begin{cases} M = \int dm = \int \varrho\, do, \quad \xi = \frac{1}{M}\int x\varrho\, do, \\ \qquad \eta = \frac{1}{M}\int y\varrho\, do, \quad \zeta = \frac{1}{M}\int z\varrho\, do. \end{cases}$$

Der Fall eines dünnen Bleches oder eines geraden oder krummen Drahtes veranlasst uns zur Fiction einer ebenen oder krummen Fläche und einer geraden oder krummen Linie, welche continuirlich mit materiellen Punkten besetzt sind. Für die Fläche sei df ein Element derselben und $\varphi\, df$ bis auf unendlich Kleines höherer Ordnung die darauf befindliche Masse. Für die Linie sei ds ein Längenelement und $\sigma\, ds$ die Masse darauf, dann ist im ersten Falle

$$68)\quad \begin{cases} M = \int \varphi\, df, \quad \xi = \frac{1}{M}\int x\varphi\, df, \quad \eta = \frac{1}{M}\int y\varphi\, df, \\ \qquad \zeta = \frac{1}{M}\int z\varphi\, df, \end{cases}$$

und im zweiten

$$69)\quad \begin{cases} M = \int \sigma\, ds, \quad \xi = \frac{1}{M}\int x\sigma\, ds, \quad \eta = \frac{1}{M}\int y\sigma\, ds, \\ \qquad \zeta = \frac{1}{M}\int z\sigma\, ds. \end{cases}$$

ϱ heisst die räumliche, φ die Flächendichte, σ die lineare Dichte der Massenvertheilung. Falls die Massen gleichförmig vertheilt sind, sind es natürlich Constanten, die vor die Integralzeichen kommen können.

§ 29. Moment einer Kraft. Drehungssinn.

Wir schreiben nun die der Gleichung 63) analoge für die y-Axe hin und multipliciren sie mit x_1, ferner multipliciren wir die Gleichung 63) selbst mit $-y_1$ und addiren schliesslich die beiden so gebildeten Gleichungen: es ergiebt sich:

$$69\text{a})\quad \begin{cases} m_1\left(x_1 \dfrac{d^2 y_1}{d t^2} - y_1 \dfrac{d^2 x_1}{d t^2}\right) = \\ \quad = x_1 \mathfrak{Y}_1 - y_1 \mathfrak{X}_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} f_{1k}(r_{1k}) \frac{x_k y_1 - x_1 y_k}{r_{1k}}. \end{cases}$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann in der Form geschrieben werden:

$$\frac{d}{d t}\left[m_1\left(x_1 \frac{d y_1}{d t} - y_1 \frac{d x_1}{d t}\right)\right].$$

Bildet man die der Gleichung 69a) analogen Gleichungen für alle übrigen der n materiellen Punkte unseres Systems und addirt alle diese Gleichungen, so tilgen sich die Glieder, welche die verschiedenen Functionen f enthalten, vollständig und man erhält:

$$70)\quad \frac{d}{d t} \sum_{h=1}^{h=n} m_h\left(x_h \frac{d y_h}{d t} - y_h \frac{d x_h}{d t}\right) = \sum_{h=1}^{h=n} (x_h \mathfrak{Y}_h - y_h \mathfrak{X}_h).$$

Es sei nun irgend eine gerichtete Gerade G im Raume gegeben. $\mathfrak{P}_h$ sei eine beliebige Kraft, A ihr Angriffspunkt, dessen Coordinaten wie in Formel 70) mit x_h, y_h, z_h bezeichnet werden sollen, AB der Pfeil, der diese Kraft in Grösse und Richtung darstellt, wobei wir, wie allgemein üblich, den Reductionsfactor weglassen, obwohl correcter $\mathfrak{P}_h$ gleich Γ mal AB zu setzen wäre.

Wir definiren nun das Moment der Kraft $\mathfrak{P}_h$ bezüglich der Geraden G als das Product

$$71) \qquad \pm pK$$

der zur Geraden senkrechten Componente K dieser Kraft in den Abstand p der Kraftrichtung von der Geraden und zwar mit positiven oder negativen Zeichen genommen, je nachdem die Drehungsrichtung der Kraft um die Gerade gegen diese dieselbe oder die entgegengesetzte Lage hat, wie gegen die positive z-Axe die Drehung von der positiven x-Axe auf kürzestem Wege zur positiven y-Axe. Den Sinn der letzteren Angabe kann man folgendermaassen näher erläutern. Eine von der Geraden G begrenzte Halbebene gehe zuerst durch den Anfangspunkt A des Pfeiles AB, der die Kraft $\mathfrak{P}_h$ darstellt und werde dann auf kürzestem Wege so gedreht, dass sie noch immer von der Geraden G begrenzt durch den Endpunkt B desselben Pfeiles geht. Wenn diese Drehung für ein Auge, das von dorther blickt, wohin die Gerade G gerichtet ist, im selben Sinne erfolgt wie die Drehung, welche die positive x-Axe auf kürzestem Wege in die positive y-Axe überführt für ein Auge, das von dorther blickt, wohin die positive z-Axe zeigt, so haben wir das positive Zeichen zu wählen. Wir nennen diesen Drehungssinn immer den positiven um jene gerichtete Gerade. Gemäss dieser Uebereinkunft ist also durch den Sinn, in dem eine Axe gezogen wird, zugleich der positive Drehungssinn um dieselbe mitbestimmt.

Wäre dann A ein Punkt eines starren, um die Axe G drehbaren Körpers, so würde die Kraft $\mathfrak{P}_h$ diesen Körper im positiven Sinne um die Axe G zu drehen suchen. Wir sagen kurz, die Kraft $\mathfrak{P}_h$ wirkt im positiven Sinne drehend um die gerichtete Axe G.

Im entgegengesetzten Falle, wenn die Kraft im nega- Sinne um die Axe G zu drehen sucht, ist in Formel 71) das negative Zeichen zu wählen. Diese Formel zeigt, dass das Moment die Dimension Kraft $\times$ Länge hat. Wir können es auch so construiren.

Wir wählen auf der Geraden G einen beliebigen Punkt C

und legen durch denselben eine Ebene E senkrecht zur Geraden. A' und B' seien die Projectionen der Endpunkte A und B des die Kraft $\mathfrak{P}_h$ darstellenden Pfeiles auf diese Ebene. Dann stellt also der Pfeil $A'B'$ die Componente K der Kraft $\mathfrak{P}_h$ senkrecht zur Geraden G dar. Das Product dieser Componente in den senkrechten Abstand der Kraftrichtung von der Geraden ist also der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $CA'B'$, da wir die Länge des Pfeiles AB einfach gleich der Intensität der Kraft $\mathfrak{P}_h$ gesetzt haben. Dieser der früher gegebenen Regel entsprechend positiv oder negativ zu nehmende doppelte Flächeninhalt

$$\pm 2\,CA'B' \tag{72}$$

ist also nach unserer Definition gleich dem Momente der Kraft $\mathfrak{P}_h$ bezüglich der Geraden G.

Wir können auch so verfahren: Wir errichten auf der Ebene des Dreiecks CAB, dessen Flächeninhalt wir ebenfalls mit CAB bezeichnen, im Punkte C eine Normale N in dem Sinne, dass die Kraft $\mathfrak{P}_h$ im positiven Sinne um N drehend wirkt, dann ist:

$$CA'B' = \pm\, CAB \cos(N, G),$$

wo immer dasselbe Zeichen wie in den Ausdrücken 71) oder 72) gilt. Es kann also das Moment der Kraft $\mathfrak{P}_h$ bezüglich der Axe G auch definirt werden als die Grösse

$$2\,CAB \cos(N, G), \tag{73}$$

wobei die beiden Vorzeichen ausgefallen sind. Das Vorzeichen dieses Ausdruckes ist also dafür ausschlaggebend, in welchem Sinne die Kraft $\mathfrak{P}_h$ um die Axe drehend wirkt. Ebenso ist, wie wir später sehen werden, der Zahlenwerth dieser Grösse ausschlaggebend für die Intensität, mit welcher jene Kraft einen starren Körper um die Axe G zu drehen sucht. Dies ist der Grund, weshalb diese Grösse das Moment oder auch das Drehmoment der Kraft bezüglich jener Axe heisst.

Wir wollen nun gemäss der zweiten Definition das Moment der Kraft $\mathfrak{P}_h$, deren Angriffspunkt, wie dies in Formel 70) vorausgesetzt ist, die Coordinaten x_h, y_h, z_h haben soll, bezüglich der z-Axe als Drehungsaxe suchen, welche natürlich von den negativen z gegen die positiven gerichtet zu denken ist. Als Punkt C können wir dann den Coordinatenursprung wählen, so dass die xy-Ebene an Stelle der Ebene E tritt. Da x_h, y_h, z_h die Coordinaten des Angriffspunktes A der Kraft sind, so sind x_h, y_h, 0 die des Punktes A'. Da ferner $A'B'$ die Projection der Kraft $\mathfrak{P}_h$ auf die xy-Ebene ist, so sind

$$x_h + \mathfrak{X}_h, \quad y_h + \mathfrak{Y}_h, \quad 0$$

die Coordinaten des Punktes B'. Nach dem bekannten Ausdrucke für den Flächeninhalt eines Dreiecks durch die Coordinaten seiner Eckpunkte ist also in diesem Falle der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $CA'B'$ gleich

$$\pm (x_h \mathfrak{Y}_h - y_h \mathfrak{X}_h)$$

und man sieht leicht, dass wieder wie in Formel 71) und 72) das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Gerade OA' durch eine positive oder negative Drehung um die z-Axe auf kürzestem Wege in die Lage OB' gelangt. Es ist also in jedem Falle $x_h \mathfrak{Y}_h - y_h \mathfrak{X}_h$ das, was wir als das Moment der Kraft $\mathfrak{P}_h$ bezüglich der z-Axe definirt haben. Hätten wir einen Reductionsfactor Γ zur Reduction der Längen der Pfeile auf die Intensitäten der Kräfte eingeführt, so wäre dieser jetzt, da wir die Pfeile wieder durch Kräfte ausdrückten, wieder weggefallen. Die rechte Seite der Gleichung 70) ist also die Summe der Momente aller auf das System der n materiellen Punkte von aussen wirkenden Kräfte bezüglich der z-Axe.

§ 30. Französisches und englisches Coordinatensystem.

Es ist dabei vollkommen gleichgültig, in welchem Sinne für ein Auge, welches aus jener Richtung auf den Coordinatenursprung blickt, nach welcher die positive z-Axe zeigt, die Drehung von der positiven x- gegen die positive y-Axe auf kürzestem Wege geschieht, wenn nur die Drehung um jede gerichtete Axe im selben Sinne als positiv aufgefasst wird. Es erfolgt dann immer auch im positiven Sinne um die positive x-Axe die Drehung von der positiven y- zu der positiven z-Axe auf kürzestem Wege und um die positive y-Axe die Drehung von der positiven z- gegen die positive x-Axe auf kürzestem Wege, wie schon die cyklische Vertauschung lehrt.

Wenn dieser Sinn derjenige ist, in welchem sich der Zeiger einer Uhr dreht, deren Zifferblatt dorthin gewendet ist, wohin die Axe gerichtet ist, so nennt man das Coordinatensystem ein französisches, im entgegengesetzten Falle ein englisches. Ersteres kann auch so definirt werden: Eine Person, welche ihren Kopf nach der positiven z-Richtung, ihr Gesicht nach der positiven y-Richtung kehrt, hat die positive x-Richtung zur linken Hand, oder: wenn man auf der Schultafel die positive z-Richtung nach aufwärts, die positive y-Richtung gegen den Beschauer zieht, so ist die positive x-Richtung gegen die Rechte des Beschauers gewendet, oder: wenn in ein Brett, das der xy-Ebene parallel ist, eine Schraubenmutter eingeschnitten ist, so dreht sich darin eine in dem in Europa allgemein üblichen Sinne geschnittene Schraube, welche im Sinne der positiven z-Richtung fortschreitet so, wie man auf kürzestem Wege von der ositiven y- zu der positiven x-Richtung gelangt, oder: wenn ie xy-Ebene ein Ackerfeld, die z-Axe eine Holzstange ist, ɔ schlingt sich eine nach aufwärts wachsende Hopfenranke ɔ um die z-Axe, wie man von der positiven x-Richtung auf ürzestem Wege zur positiven y-Richtung gelangt, eine Veinranke im entgegengesetzten Sinne. Natürlich verhält sich ein englisches Coordinatensystem in allen diesen Fällen gerade umgekehrt. Bringt man bei beiden Coordinatensystemen die positiven x- und y-Axen zur Deckung, so fällt die positive z-Axe des einen genau in die Richtung der negativen z-Axe des anderen. Beide Coordinatensysteme lassen sich daher, wenn man die positive und negative Coordinatenrichtung als verschieden betrachtet, nicht vollständig zur Deckung bringen, sondern verhalten sich zu einander wie Spiegelbilder, wie ein sonst gleicher rechter und linker Handschuh.

Eine Entscheidung für das eine oder andere System braucht man erst zu treffen, wenn man zur Darstellung von

Phänomenen übergeht, bei denen nicht beide Rotationsrichtungen gleich berechtigt sind, wo also physikalisch gegebene Rotationen, wie die Erddrehung, oder asymmetrische Naturkörper eine Rolle spielen, wie bei der Wechselwirkung von elektrischen Strömen und Magneten, der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch den Magnetismus etc. oder wenn man selbst eine räumliche Construction ausführt.

Das französische Coordinatensystem hat folgenden Vortheil. Will man bei Construction der Fläche $z = f(x, y)$ die x-Axe in die Tafel und die z-Axe vertical nach aufwärts legen, so schreiten die wachsenden x wie man schreibt, die wachsenden y nach dem Beschauer fort. Beim englischen Systeme muss man entweder die $+x$ wie die Orientalen schreiben, oder die $+y$ vom Beschauer weg, oder die $+z$ nach abwärts, während wir doch aufwärts bauen, fortschreiten lassen; oder man muss die y-Axe in die Tafel und die x-Axe gegen den Beschauer oder die y-Axe aufwärts und die z-Axe gegen den Beschauer ziehen, was alles unbequemer oder doch ungewohnter ist. Für den Physiker dagegen hat das englische System den Vorzug, dass der Strom der positiven Elektricität ein Solenoid in dem nach diesem Systeme positiven Sinne umkreist, wenn dessen Nordpol (das nach dem geographischen Norden zeigende, meist als positiv bezeichnete Ende) dorthin zeigt, wohin die Drehungsaxe weist.

Wir wollen im Folgenden in unseren Figuren das französische Coordinatensystem benutzen, unter einer positiven Drehung um eine gerichtete Axe also eine solche verstehen, welche einem Auge, das von dort herblickt, wohin die Axe gerichtet ist, im Sinne des Uhrzeigers zu geschehen scheint.

§ 31. **Der Flächensatz.**

Aehnliche Betrachtungen, wie wir sie in § 29 angestellt haben, lassen sich auch auf die linke Seite der Gleichung 70) anwenden. Sei wieder G eine beliebig gerichtete Gerade, C ein Punkt derselben und E die durch diesen Punkt zur Geraden senkrecht gelegte Ebene. Aber es sei jetzt A der Punkt des Raumes, wo sich zur Zeit t der materielle Punkt mit der Masse m_h befindet, dessen

Coordinaten, wie schon in Formel 70), ebenfalls mit x_h, y_h, z_h bezeichnet werden sollen. Ferner sei jetzt B der Punkt, wo sich die Masse m_h zur Zeit $t + dt$ befindet, so dass also, wie in Formel 70), die Coordinaten des Punktes B mit $x_h + dx_h$, $y_h + dy_h$, $z_h + dz_h$ zu bezeichnen sind. Endlich seien A' und B' die Projectionen von A und B auf die Ebene E, df_h und df_h' die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke CAB und $CA'B'$ und N die auf die Ebene des ersten Dreiecks im Punkte C nach derjenigen Seite gezogene Normale, dass die Drehung der Geraden CA in die Lage CB auf kürzestem Wege eine positive Drehung um die Normale ist; wir sagen kurz, dass die Bewegung von A nach B im positiven Sinne um die Normale N geschieht. Das Product aus der Masse m_h, dem Cosinus des Winkels (N, G) und der Limite, welcher sich der Quotient df_h/dt nähert, also die Grösse

$$m_h \cos(N, G)\, df_h/dt \tag{74}$$

bezeichnen wir dann als das Flächenmoment der Masse m_h bezüglich der Axe G. Dasselbe ist auch gleich

$$\pm\, m_h\, df_h'/dt, \tag{75}$$

wobei natürlich wieder das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Bewegung von A nach B im positiven oder negativen Sinne um die Axe G geschieht.

Im speciellen Falle, dass man unter G die positive z-Axe versteht, kann man an Stelle des Punktes C den Coordinatenursprung setzen, was in diesem Paragraphen nun immer geschehen soll. Dann sind die x- und y-Coordinaten der drei Punkte C, A', B' gleich 0, 0; x_h, y_h resp. $x_h + dx_h$, $y_h + dy_h$. Daher ist:

$$df' = \pm\,(x_h\, dy_h - y_h\, dx_h),$$

wobei das Zeichen genau dasselbe wie im Ausdrucke 75) ist. Daher ist der von uns eingeführten Definition des Flächenmomentes gemäss

$$m_h\left(x_h \frac{dy_h}{dt} - y_h \frac{dx_h}{dt}\right)$$

zur Zeit t das Flächenmoment der Masse m_h bezüglich der z-Axe.

Die Grösse, welche auf der linken Seite der Gleichung 70) nach t differentiirt erscheint, ist also die Summe W der Flächenmomente aller n materiellen Punkte des Systems bezüglich der z-Axe; wir wollen W kurz das gesammte Flächenmoment des Systems bezüglich der z-Axe nennen. Nach 74) ist:

$$W = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \cos(N, z) \frac{d f_h}{d t}.$$

$d f_h$ ist der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks, dessen eine Ecke die Lage des materiellen Punktes m_h zur Zeit t, dessen zweite Ecke die Lage desselben Punktes zur Zeit $t + dt$, dessen dritte der Coordinatenursprung ist. N ist die auf dieses Dreieck so gezogene Normale, dass um sie die Drehung von A nach B eine positive ist.

Ist U und V im gleichen Sinne das gesammte Flächenmoment unseres Systems bezüglich der x- resp. y-Axe, so ist ebenso:

$$U = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \left(y_h \frac{d z_h}{d t} - z_h \frac{d y_h}{d t} \right) = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \cos(N, x) \frac{d f_h}{d t},$$

$$V = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \left(z_h \frac{d x_h}{d t} - x_h \frac{d z_h}{d t} \right) = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \cos(N, y) \frac{d f_h}{d t}.$$

Das gesammte Flächenmoment des Systems bezüglich einer beliebigen, durch den Coordinatenursprung gezogenen gerichteten Geraden G aber ist:

$$76) \quad \begin{cases} \Phi = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \cos(G, N) \frac{d f_h}{d t} = \\ \quad = U \cos(G, x) + V \cos(G, y) + W \cos(G, z). \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit Δ die positive Quadratwurzel aus $U^2 + V^2 + W^2$ und ziehen durch den Coordinatenursprung die gerichtete Gerade L so, dass

$$\cos(L, x) = U/\Delta, \quad \cos(L, y) = V/\Delta, \quad \cos(L, z) = W/\Delta$$

ist, wobei die betreffenden Winkel spitz oder stumpf sind, je nachdem U, V oder W positiv oder negativ sind, so ist nach Formel 76) das gesammte Flächenmoment des Systems bezüglich der Axe L gleich $\varDelta$, bezüglich der beliebigen durch O gehenden Axe G gleich der Projection der in der Richtung von L aufgetragenen Geraden $\varDelta$ auf die Richtung G und zwar positiv oder negativ, je nachdem die Projection auf die positive oder negative Seite der Geraden G fällt. Das gesammte Flächenmoment ist also bezüglich der Axe L grösser als bezüglich jeder anderen durch den Coordinatenursprung O gezogenen Axe (Axe des grössten Flächenmomentes bezüglich des Punktes O).

Bezüglich jeder durch O senkrecht zu L gezogenen Geraden aber ist das gesammte Flächenmoment Null.

Man beweist leicht, dass das gesammte Flächenmoment eines beliebigen Systems bezüglich einer beliebigen Axe gleich ist dem Momente bezüglich einer parallelen durch den Schwerpunkt des Systems gehenden Axe, vermehrt um das Flächenmoment, welches die gesammte Masse des Systems bezüglich der ersteren Axe hätte, wenn sie sich im Schwerpunkte des Systems befände und mit der Geschwindigkeit desselben in der Bewegungsrichtung desselben bewegte.

Ebenso leicht sieht man, dass sich ganz in analoger Weise aus der geometrischen Darstellung der Kräftemomente durch Dreiecksflächen analoge Sätze von den Momenten aller Kräfte, die von aussen auf ein beliebiges System wirken, beweisen lassen. Seien:

$$D = \sum_{h=1}^{h=n} (y_h \mathfrak{Z}_h - z_h \mathfrak{Y}_h), \quad E = \sum_{h=1}^{h=n} (z_h \mathfrak{X}_h - x_h \mathfrak{Z}_h),$$

$$F = \sum_{h=1}^{h=n} (x_h \mathfrak{Y}_h - y_h \mathfrak{X}_h)$$

die Momente bezüglich der Coordinatenaxen, so ist das Moment derselben Kräfte bezüglich einer beliebigen, durch den Coordinatenursprung O gezogenen gerichteten Geraden G

$$D \cos (G, x) + E \cos (G, y) + F \cos (G, z) = H \cos (G, H),$$

wobei H eine von O aus gezogene Gerade von der Länge $+\sqrt{D^2 + E^2 + F^2}$ ist, welche mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus D/H, E/H, F/H sind. Das

Moment bezüglich der Axe, welche die Richtung der Geraden H hat, ist gleich H, bezüglich jeder durch O senkrecht zu H gezogenen Geraden Null, bezüglich jeder anderen durch O gezogenen Geraden liegt es zwischen $-H$ und $+H$. Endlich ist das Moment aller auf das System wirkenden Kräfte bezüglich irgend einer Axe gleich dem Momente bezüglich einer parallelen und gleichgerichteten Axe vermehrt um das Moment, welches alle darauf wirkenden Kräfte bezüglich der ersten Axe hätten, wenn sie ohne Aenderung ihrer Grösse und Richtung in einem Punkte der zweiten Axe angreifen würden. Das Gesammtmoment der inneren Kräfte eines Systems, d. h. der Centrikräfte zwischen je zwei Punkten ist natürlich bezüglich jeder Axe Null.

Wenn speciell von aussen keine Kräfte auf das System wirken, so sind auch die Momente der äusseren Kräfte gleich Null; es ist also $D = E = F = 0$ und aus Gleichung 70) und den analogen für die y- und z-Axe folgt, dass U, V und W drei Constanten sein müssen. Es hat also die durch einen beliebigen ruhenden oder geradlinig und gleichförmig bewegten Punkt P gezogene Axe L des Maximums des Flächenmomentes, sowie die auf der Axe senkrechte Ebene eine unveränderliche Richtung im Raume (unveränderliche Axe, unveränderliche Ebene) und das Flächenmoment bezüglich jeder solchen Axe ändert sich ebenfalls nicht mit der Zeit.

Wenn z. B. ein Körper ohne Einwirkung äusserer Kräfte frei im Raume sich befindet, anfangs alle seine Theile in Ruhe waren und dann blos durch innere Kräfte ein Theil desselben in drehende Bewegung kommt, so muss ein anderer Theil derart in eine entgegengesetzte Drehung gerathen, dass das gesammte Flächenmoment bezüglich einer beliebigen Axe gleich Null bleibt, da es ja anfangs gleich Null war. In dieser Beziehung hat der Flächensatz eine gewisse Verwandtschaft mit dem Schwerpunktssatze. Doch besteht der folgende wesentliche Unterschied. Bei diesem sind die Differentialquotienten, welche gleich Null sind (die linken Seiten der Gleichung 64) und der entsprechenden Gleichungen für die übrigen Coordinatenaxen), die vollständigen Differentialquotienten bestimmter Grössen, nämlich der Coordinaten des

Schwerpunktes. Die Grössen aber, welche gemäss des Flächenprincips bei Ermangelung äusserer Kräfte gleich Null werden (nämlich die linken Seiten der Gleichung 70) und der entsprechenden Gleichungen für die übrigen Coordinatenaxen), sind nicht die vollständigen Differentialquotienten von Functionen der Coordinaten nach der Zeit.

Ein Körper schwebe ohne Einwirkung äusserer Kräfte frei im Raume. Anfangs ruhe er. Später sollen seine Theile durch innere Kräfte in relative Bewegungen gerathen. Sobald dieselben zu zwei verschiedenen Zeiten t_0 und t_1 die gleiche relative Lage gegeneinander haben, muss nothwendig auch der Schwerpunkt des Körpers die gleiche absolute Lage im Raume haben, da er diese überhaupt nicht ändert. Aber der Körper kann sich während der Zeit $t_1 - t_0$ beliebig um den Schwerpunkt gedreht haben, wenn gewisse Theile desselben nicht auf dem gleichen Wege in ihre ursprüngliche Lage zurückgekehrt sind, auf welchem sie diese verliessen, sondern sich in geschlossenen Bahnen bewegt haben, die eine endliche Fläche umschliessen.

Eine frei im Raume schwebende, anfangs ruhende Katze kann sich beliebig um ihre Axe drehen, wenn sie ihre Pfoten in vom Körper weggestreckter Lage nach links bewegt, dann gegen den Körper zu einzieht, im eingezogenen Zustande nach rechts bewegt, dann wieder ausstreckt und dasselbe Spiel wiederholt. Dieselbe Katze kann aber in keiner Weise die Lage ihres Schwerpunktes ändern. So lange sehr viele Schiffe im Sinne der Axendrehung um die Erde herumfahren, wird der Tag verlängert. Die Axendrehung des als fest gedachten Erdkörpers nimmt zwar sofort wieder die alte Geschwindigkeit an, sobald die Schiffe still stehen, aber eine vom Erdmittelpunkte nach einer festen Bergspitze am Aequator gezogene Gerade ist durch das Manöver der Schiffe dauernd um eine bestimmte Constante in ihrer Winkeldrehung zurückgeblieben, also die astronomische Zeit ist zurückgeblieben.

IV. Das Princip der virtuellen Verschiebungen.

§ 32. Starre und einseitige Verbindungen.

Wir wollen wieder der Wirklichkeit um einen Schritt näher treten. In der Erfahrung sind uns zahlreiche Körper gegeben, welche die mannigfaltigsten Bewegungen im Raume machen, ohne dass sich dabei ihre Gestalt, also die relative Lage ihrer einzelnen Theile gegeneinander in bemerkbarer Weise verändert. Wir nennen solche Körper feste, und bilden uns das Ideal eines starren Körpers, d. h. eines Körpers, dessen Theile in ihrer relativen Lage niemals die mindeste Veränderung erfahren können.

Wenn wir uns also einen solchen Körper aus materiellen Punkten bestehend denken, so müssen die Coordinaten derselben während der ganzen Bewegung gewisse Gleichungen erfüllen, welche ausdrücken, dass die Entfernung je zweier dieser materiellen Punkte constant bleibt. Wir nennen diese Gleichungen die Bedingungen des Systems. Ihr Bestehen, sowie das sehr verschiedener anderer während der Bewegung materieller Punkte, können wir uns durch Specialisirung des bisherigen mechanischen Bildes gut darstellen.

Von der Bewegung starrer Körper erhalten wir folgendermaassen ein anschauliches Bild. Wir denken uns ein System von sehr vielen sehr dicht gedrängten materiellen Punkten. Diese materiellen Punkte sollen sich ganz nach den bisher aufgestellten Gesetzen bewegen. In einer bestimmten relativen Lage der materiellen Punkte (der Normallage), welche eben die Gestalt des festen Körpers bestimmt, soll die Resultirende aller inneren Kräfte, welche auf jeden derselben wirken, gleich Null sein. Sobald aber die Entfernung irgend zweier benachbarter materieller Punkte nur ein klein wenig grösser oder kleiner wird, sollen sofort enorm grosse innere Kräfte auftreten, welche sie wieder in die ursprüngliche Entfernung (die Normalentfernung) zurückzutreiben suchen.

Diese Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn wir folgende specielle Annahmen über die inneren Kräfte machen. Für jeden materiellen Punkt soll es mindestens drei oder mehr andere, nicht mit ihm in einer Ebene liegende Punkte (wir wollen sie seine Nachbarpunkte nennen) von folgender Beschaffenheit geben: Die Kraft $f(r)$, welche zwischen ihm und einem Nachbarpunkte in der Entfernung r wirkt, soll gleich Null sein, sobald r gleich der Normalentfernung ist, aber einen sehr grossen positiven Werth annehmen, sobald r ein wenig kleiner, dagegen einen sehr grossen negativen Werth, sobald r ein wenig grösser als die Normalentfernung ist. Im ersteren Falle soll also sofort eine enorme Abstossung, im letzteren eine enorme Anziehung auftreten. Wir sagen dann kurz, die beiden materiellen Punkte sind starr verbunden, da die zwischen ihnen wirkende Centrikraft weder gestattet, dass ihre Entfernung erheblich grösser, noch auch kleiner als die Normalentfernung sei. Für alle übrigen materiellen Punkte, welche nicht das Verhalten derjenigen zeigen, die wir Nachbarpunkte nannten, soll die zwischen ihnen wirkende Kraft in der Normalentfernung und in nicht viel davon verschiedenen Entfernungen verschwinden.

Wenn ausser diesen inneren Kräften noch beliebige andere, von fremden Punkten ausgehende äussere Kräfte auf das Punktesystem wirken, so treten, sobald während der Bewegung die materiellen Punkte ihre relative Lage nur ein wenig ändern, sogleich enorme Kräfte auf, welche die ursprüngliche relative Lage wieder herzustellen suchen, das System wird also angenähert das Bild eines starren Körpers bieten, wenn wir die durch kleine Deformationen geweckten inneren Kräfte genügend gross gegenüber den äusseren denken. Allerdings nur angenähert; denn es werden bei Wirksamkeit äusserer Kräfte im Allgemeinen immer kleine Gestaltänderungen eintreten, ja in bestimmten Specialfällen, wo eine Dimension des von den Punkten erfüllten Raumes klein ist, z. B. wenn dieser die Gestalt einer Uhrfeder hat, werden auch grössere Deformationen möglich sein. Es weicht also unser Bild von dem Ideale des absolut starren Körpers ab; aber gerade in derselben Weise, in der auch die wirklichen festen Körper von diesem Ideale abweichen.

Ausser der starren Verbindung zweier materieller Punkte ist noch eine andere Verbindungsart, welche wir die einseitige nennen wollen, von hoher Wichtigkeit. Wir haben bisher angenommen, dass die zwischen zwei materiellen Punkten wirksame Kraft weder eine bemerkbare Annäherung noch Entfernung gegenüber der Normaldistanz zulässt.

Es soll jetzt die Kraft entweder zwar für jede Entfernung, die nur ein wenig grösser ist, als die normale, einen enorm grossen negativen Werth annehmen, aber für die normale und jede kleinere Entfernung Null sein, oder zwar für jede Entfernung, die nur ein wenig kleiner als die normale ist, einen enorm grossen positiven Werth haben, aber wieder für die normale und jede grössere Entfernung Null sein. In ersterem Falle wird die zwischen den beiden materiellen Punkten wirksame Kraft zwar jede Entfernung über die normale Distanz verhindern, sich aber einer beliebigen Annäherung nicht in den Weg stellen, in letzterem Falle ist die Annäherung über eine gewisse Grenze unmöglich, aber einer beliebigen Entfernung steht nichts im Wege. Wir sagen in diesen beiden Fällen, dass die beiden materiellen Punkte einseitig verbunden sind.

Ein angenähertes Beispiel für den ersten Fall bieten uns zwei durch einen dünnen, nahezu unausdehnbaren Faden verbundene kleine Körper, ein Beispiel für den zweiten Fall zwei starre Kugeln, deren Mittelpunkte sich entfernen, aber in keinen kleineren Abstand gelangen können, als die Summe ihrer Radien.

§ 33. Verschiedene Formen der Bedingungen, denen Punktsysteme unterworfen sein können.

Man kann durch derartige Verbindungen Fälle darstellen, wo zwischen den Coordinaten der Punkte eines Systems Bedingungsgleichungen vorhanden sind, z. B. den Fall einer Masse, welche gezwungen ist, während ihrer Bewegung auf einer vorgeschriebenen Fläche oder Curve zu bleiben. Die Darstellung geschieht in diesem Falle in folgender Weise:

Es soll eine Kugel vom Radius a ausserordentlich dicht und gleichförmig mit starr verbundenen materiellen Punkten erfüllt sein, so dass sie sich angenähert wie eine starre materielle Kugel verhält. Ferner sollen zwei continuirliche Flächen, deren senkrechter Abstand immer und überall gleich (gleich $2b$) ist, unendlich dicht mit anderen materiellen Punkten besetzt sein, welche entweder durch entsprechende Kräfte unveränderlich im Raume festgehalten oder in vorgeschriebener Weise bewegt werden, jedoch so, dass der senkrechte Abstand der beiden Flächen immer und überall gleich $2b$ bleibt. Wir bezeichnen diese letzteren materiellen Punkte als die der Vorrichtung, welche die Bewegungsfreiheit beschränkt.

Die Kugel soll sich anfangs genau zwischen den beiden Flächen befinden. Die Kraft, welche irgend ein materieller Punkt einer der Flächen auf irgend einen materiellen Punkt der Oberfläche der Kugel ausübt, soll in der Entfernung $b - a$ und einer grösseren gleich Null, in einer ein wenig kleineren Entfernung aber schon gleich einer enorm grossen Abstossung sein. Andere Kräfte sollen zwischen den materiellen Punkten der Kugel und der Vorrichtung nicht wirken. Die Distanz zweier benachbarter materieller Punkte soll sowohl in der Kugel, als auch in den beiden Flächen sehr klein gegenüber $b - a$ sein. Wir haben dann den Fall nachgeahmt, dass sich eine vollkommen glatte starre Kugel zwischen zwei vollständig glatten festen Flächen bewegt. Der Schwerpunkt der Kugel, welcher mit ihrem Mittelpunkte zusammenfällt, muss dann, wenn noch beliebige äussere Kräfte auf ihn wirken, eine solche Bewegung machen, dass er fortwährend auf der zwischen beiden Flächen in der Mitte liegenden Fläche bleibt, welche unveränderlich oder mit der Zeit in gegebener Weise veränderlich ist, je nachdem diese Flächen es sind. Es wird also während der ganzen Bewegung zwischen seinen Coordinaten eine Gleichung bestehen, welche im letzteren Falle die Zeit explicit enthält. Will man die Bewegung eines einzigen materiellen Punktes darstellen, welcher gezwungen ist, auf einer Fläche zu bleiben, so kann man sich alle Punkte der Kugel bis auf den Mittelpunkt masselos denken oder die Kugel durch einen einzigen materiellen Punkt ersetzen, auf den sehr grosse abstossende Kräfte wirken, wenn seine Entfernung von irgend einem Punkte einer der Flächen ein wenig kleiner als b wird. Die

Entfernung zweier Nachbarpunkte auf je einer der Flächen muss verschwindend klein gegen b sein.

Bilden die materiellen Punkte der Vorrichtung eine Röhre von überall gleichem kreisförmigen Querschnitte, welche die Kugel oder den einen materiellen Punkt umschliesst, so erhalten wir eine Masse, die gezwungen ist, sich auf einer vorgeschriebenen Curve zu bewegen; dann bestehen also während der ganzen Bewegung zwischen ihren Coordinaten zwei Gleichungen.

Es versteht sich von selbst, dass man mittelst der gleichen Hülfsmittel sehr verschiedene Fälle realisiren kann, wo sich materielle Punkte so bewegen, dass zwischen ihren Coordinaten während der Bewegung irgend eine Zahl von Gleichungen besteht, welche die Zeit explicit enthalten oder auch von ihr unabhängig sein können.

Jede Bedingung des Systems, welche durch eine Gleichung

77) $$\varphi(t, x_1, y_1 \ldots z_n) = 0$$

zwischen den Coordinaten $x_1, y_1 \ldots z_n$ seiner materiellen Punkte darstellbar ist, welche die Zeit t explicit enthalten kann oder nicht, wollen wir eine holonome Bedingung nennen. Ein System, welches nur holonomen Bedingungen unterworfen ist, nennen wir ein holonomes System.

Durch starre Verbindungen materieller Punkte können auch Gleichungen dargestellt werden, welche ausser den Coordinaten noch deren Differentiale in einer Verbindung enthalten, die einen nicht integrabeln Differentialausdruck darstellt. Wenn wieder $x_1, y_1, \ldots z_n$ die Coordinaten der materiellen Punkte sind, so ist die einfachste Form dieser Gleichungen die folgende:

78) $$\tau\, dt + \xi_1\, dx_1 + \eta_1\, dy_1 + \ldots \zeta_n\, dz_n = 0,$$

wobei $\tau, \xi_1, \eta_1, \ldots \zeta_n$ beliebige Functionen von $t, x_1, y_1 \ldots z_n$ sind und die linke Seite keinen integrirenden Factor hat.[1]) Jede Bedingung, welche nur in dieser Weise darstellbar ist,

[1]) Noch allgemeinere Formen, wie

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} = 5$$

wollen wir ausschliessen.

nennen wir eine nicht holonome und ein System, unter dessen Bedingungen sich auch nur eine nicht holonome befindet, nennen wir ein nicht holonomes.

Eine solche Gleichung würde sich ergeben, wenn sich eine starre Kugel, deren Oberfläche voll von ausserordentlich vielen äquidistanten, sehr feinen Spitzen wäre, zwischen einer glatten und einer mit zahlreichen Löchern versehenen Fläche so bewegen würde, dass die Spitzen stets in die Löcher eingreifen, wodurch mit beliebiger Annäherung die Bedingung dargestellt werden könnte, dass eine feste Kugel gezwungen ist, auf einer festen oder veränderlichen Fläche zu rollen. Ob nicht holonome Bedingungen durch unser Bild anders, als in diesem Sinne mit beliebiger Annäherung dargestellt werden können, lasse ich dahingestellt.

In der Mechanik wird häufig auch der Fall betrachtet, dass zwischen den Coordinaten gewisser materieller Punkte nicht Gleichungen, sondern Ungleichungen bestehen. Sei $\varphi(x, y, z)$ eine Function der rechtwinkeligen Coordinaten, x, y, z eines Punktes, welche auf einer geschlossenen Fläche (der Fläche F) gleich Null, innerhalb derselben < 0, ausserhalb > 0 ist. Die Bedingung, dass für einen materiellen Punkt während der ganzen Zeit seiner Bewegung $\varphi(x,y,z) \leqq 0$ sein soll, kann man dann dadurch darstellen, dass man ausserhalb der Fläche F eine andere Fläche G construirt, welche von der Fläche F immer den senkrechten Abstand a hat und dicht mit materiellen Punkten besäet ist, welche alle auf einen anderen materiellen Punkt in einer Entfernung, die grösser oder gleich a ist, keine Kraft, in einer Entfernung aber, die nur wenig kleiner als a ist, sogleich eine ausserordentlich grosse Abstossung ausüben. Die Entfernung je zweier benachbarter materieller Punkte auf der Fläche G soll dabei sehr klein gegen a sein. Wir haben dann eine undurchdringliche, vollkommen glatte Schale nachgebildet, in deren Innern sich eine materielle Kugel befindet.

Es können also in Folge einseitiger Verbindungen Ungleichungen bestehen, welche nur die Coordinaten der verschiedenen materiellen Punkte und eventuell auch die Zeit t explicit enthalten, also die Form

79) $$\varphi(t, x_1, y_1 \ldots z_n) \leqq 0$$

haben. Wir nennen sie dann holonome Bedingungsungleichungen. Die betreffenden Ungleichungen können aber auch die Differentiale der Coordinaten enthalten, ohne auf die Form 79) reducirbar zu sein (nicht holonome Bedingungsungleichungen), in welchem Falle wir uns auf solche beschränken, welche in die Form

80) $$\tau\, dt + \xi_1\, dx_1 + \eta_1\, dy_1 \ldots \zeta_n\, dz_n \leqq 0$$

gebracht werden können.

Um die Mannigfaltigkeit der auf diese Weise construirbaren Modelle zu zeigen, wollen wir uns noch eine enorm grosse Zahl gleich beschaffener materieller Punkte denken, welche alle in der sehr kleinen Entfernung a und in grösserer Entfernung nicht aufeinander wirken, sich aber in ein wenig kleinerer Entfernung sofort sehr stark abstossen. Alle diese materiellen Punkte sollen durch irgend eine äussere Druckkraft in einem Gefässe dicht aneinander gedrängt werden, so dass zwei benachbarte immer sehr nahe die Entfernung a haben. Sie werden sich dann wie winzig kleine, vollkommen glatte Sandkörner oder auch wie die Theilchen einer reibungslosen unzusammendrückbaren Flüssigkeit verhalten. Letztere können ja auch nur durch einen auf ihre Oberfläche wirkenden Druck an der vollständigen Verdunstung verhindert werden.

Es kann nun sein, dass wir dieselben Gleichungen oder Ungleichungen nicht blos in einer, sondern in mehreren Weisen durch verschiedene Vorrichtungen erzielen können, z. B. die Ungleichung $x^2 + y^2 + z^2 \lesseqgtr 1$ dadurch, dass wir einen materiellen Punkt durch einen unausdehnbaren, aber vollkommen biegsamen Faden mit dem fix gedachten Coordinatenursprung verbinden oder dass wir ihn in eine starre Hohlkugel einschliessen. Wir werden sehen, dass die Bewegungsgleichungen, welche wir aus dem mechanischen Bild erhalten, nur von dem Werthe der expliciten Kräfte und der Form der Bedingungsgleichungen oder Ungleichungen abhängen, nicht aber davon, ob diese Gleichungen oder Ungleichungen durch die eine oder andere Vorrichtung realisirt sind. In allen Fällen also, wo die Bewegung durch die Bewegungsgleichungen, die Anfangslagen, die Anfangsgeschwindigkeiten und deren Richtungen eindeutig bestimmt ist, kann sie nicht von der speciellen Art abhängen, wie diese Bedingungen mechanisch realisirt sind.

Wenn wir im Folgenden von irgend welchen Bedingungen sprechen, so verstehen wir darunter immer solche, welche durch starre oder einseitige Verbindungen irgendwie realisirt werden können. Unter den dabei geltenden Bewegungsgleichungen verstehen wir diejenigen, welche nach dem mechanischen Bilde aus diesen Verbindungen folgen. Man hat es als selbstverständlich betrachtet, dass für die Bewegungsgleichungen nur die Beschränkung maassgebend sein kann, welche die Bewegung durch die Bedingungen in der unmittelbar benachbarten Zeit erfährt, sowie dass diese durch Relationen bestimmt ist, welche wie die Relationen 78) oder 80) die Coordinatenzuwächse linear enthalten und worin die Coordinaten selbst als constant angesehen werden können. Man hat dann bewiesen, dass jede solche lineare Relation zwischen den Coordinatenzuwächsen durch starre und einseitige Verbindungen hergestellt werden kann, dass also beliebige Bedingungen durch allerdings mit der Zeit wechselnde starre und einseitige Verbindungen mit passend gewählten materiellen Punkten ersetzt werden können. Wir wollen jedoch hierauf nicht näher eingehen und nicht näher prüfen, ob es möglich ist, alle denkbaren Gleichungen und Ungleichungen zwischen den Coordinaten in dieser Weise zu realisiren; für uns existiren nur solche Bedingungen, die wir in dieser Weise realisiren können. Ebenso wenig können und wollen wir einen Beweis liefern, dass sich in der Natur Körper, welche während ihrer Bewegung solchen Bedingungsgleichungen unterworfen sind, nach den aus unserem Bilde folgenden Gesetzen bewegen. Zu prüfen, in wie weit dies der Fall ist, ist Sache der Experimentalphysik.

§ 34. Begriff der expliciten, verlorenen Kraft, der virtuellen Verschiebung, etc.

Wir wollen nun die Gleichungen für den allgemeinsten Fall ableiten, welcher durch unser Bild dargestellt werden kann. Es sei ein System von n materiellen Punkten gegeben, von denen beliebige starr oder einseitig untereinander oder mit anderen μ materiellen Punkten verbunden sind, welche letztere entweder fix sind oder sich irgendwie in vorgeschriebener Weise im Raume bewegen.

Die Kräfte, welche von diesen Verbindungen herrühren, nennen wir die Verbindungskräfte. Ausserdem können noch beliebige der n materiellen Punkte, die nicht starr verbunden sind, untereinander Centrikräfte ausüben (die inneren expliciten Kräfte) oder es können beliebige andere (ν) materielle Punkte vorhanden sein, welche beliebige Centrikräfte auf irgend welche der n materiellen Punkte ausüben (die äusseren expliciten Kräfte). Wir nennen alle diese Kräfte die expliciten Kräfte, weil sie nicht von den starren oder einseitigen Verbindungen der n Punkte untereinander oder mit den μ Punkten herrühren.[1])

Die Verbindungen können wir immer durch gewisse Gleichungen oder Ungleichungen zwischen den Coordinaten der n materiellen Punkte ersetzen, welche wir die Bedingungen des Systems nennen.

Wir bezeichnen nun mit m_h die Masse irgend eines unserer n materiellen Punkte (des $h$ten), mit x_h, y_h, z_h dessen Coordinaten zur Zeit t, mit $\mathfrak{x}_h$, $\mathfrak{y}_h$, $\mathfrak{z}_h$ die nach den Coordinatenrichtungen geschätzten Componenten der Resultirenden aller Verbindungskräfte, sowie mit X_h, Y_h, Z_h die ebenso geschätzten Componenten der Resultirenden aller expliciten Kräfte, welche zur Zeit t auf diesen materiellen Punkt wirken. Dann erhalten wir nach 13) folgende Gleichungen:

$$81) \quad \begin{cases} m_h \dfrac{d^2 x_h}{dt^2} = X_h + \mathfrak{x}_h, \quad m_h \dfrac{d^2 y}{dt^2} = Y_h + \mathfrak{y}_h, \\ \qquad m_h \dfrac{d^2 z_h}{dt^2} = Z_h + \mathfrak{z}_h. \end{cases}$$

[1]) Die expliciten Kräfte fallen natürlich mit den äusseren zusammen, falls die n materiellen Punkte keine anderen Kräfte als die Verbindungskräfte aufeinander ausüben, d. h. falls zwischen ihnen keine anderen Centrikräfte als diejenigen thätig sind, welche die Verbindungsgleichungen erhalten, z. B. wenn es die Theilchen eines einzigen oder mehrerer nicht aufeinander fernwirkender fester oder tropfbar flüssiger Körper sind.

Theils um das Verständniss anderer Schriften, wo diese Bezeichnungen gebraucht sind, zu erleichtern, theils weil wirklich eine anschauliche Terminologie der Auffassung wesentlich zu Hülfe kommt, wollen wir noch folgende Bezeichnungen einführen: Die Summe (natürlich Vectorsumme) der expliciten und der Verbindungskräfte, welche auf einen Punkt wirken, nennen wir die Totalkraft auf diesen Punkt. Die Componenten der auf einen Punkt des Systems wirkenden Totalkraft in den Coordinatenrichtungen sind also die Ausdrücke 81). Sie sind gleich den mit der Masse desselben multiplicirten entsprechenden Componenten der wirklich eintretenden Beschleunigung dieses Punktes, was selbstverständlich ist, da ja die Totalkraft die Summe aller Kräfte darstellt, die überhaupt auf den betreffenden Punkt wirken.

Dagegen fallen die wirklichen Beschleunigungen nicht mit denen zusammen, welche durch die expliciten Kräfte allein bewirkt würden. Wir stellen uns da vor, dass durch die Verbindungen ein Theil der expliciten Kräfte für die erzeugte Beschleunigung verloren geht. Dieser Theil der expliciten Kräfte, welcher für die wirkliche Beschleunigung verloren geht und nur den Widerstand der Verbindungen überwindet, soll als die verlorene Kraft bezeichnet werden. Die verlorenen Kräfte sind also gleich, aber gerade entgegengesetzt gerichtet den Verbindungskräften, da sie von letzteren aufgehoben werden.

$$82)\qquad -\mathfrak{x}_h\,,\ -\mathfrak{y}_h\,,\ -\mathfrak{z}_h$$

sind also die Componenten nach den Coordinatenrichtungen von derjenigen Kraft, die von der auf m_h wirkenden expliciten Kraft verloren geht. Wenn man von der expliciten Kraft, deren Componenten X_h, Y_h, Z_h sind, die allein zur Wirksamkeit kommende Totalkraft, deren Componenten $X_h + \mathfrak{x}_h$, $Y_h + \mathfrak{y}_h$, $Z + \mathfrak{z}_h$ sind, abzieht, so erhält man das, was durch die Verbindungskräfte verloren geht, also die Ausdrücke 82).

Ferner wollen wir im Gegensatz zur wirklichen Beschleunigung irgend eines materiellen Punktes, welche in der Abscissenrichtung die Componente

$$83)\qquad \frac{d^2 x_h}{d t^2} = \frac{1}{m_h}(X_h + \mathfrak{x}_h)$$

hat, diejenige, die derselbe materielle Punkt, wenn keine Verbindungen vorhanden wären, durch die expliciten Kräfte allein erhalten hätte, die explicite Beschleunigung nennen. Ihre Projection auf die Abscissenrichtung ist

$$84)\qquad \frac{1}{m_h} X_h.$$

Durch die Verbindungen wird die explicite Beschleunigung auf die wirkliche reducirt. Was dabei verloren geht, also die durch die Verbindungskräfte verlorene Beschleunigung erhalten wir, wenn wir von der expliciten Beschleunigung die wirkliche abziehen, so dass also

$$85)\qquad \frac{1}{m_h} X_h - \frac{1}{m_h}(X_h + \mathfrak{x}_h) = -\frac{1}{m_h}\mathfrak{x}_h$$

die Componente der verlorenen Beschleunigung des Punktes m_h in der Abscissenrichtung ist. Dieselbe ist wieder gleich, aber entgegengesetzt gerichtet als die durch die Verbindungskräfte allein erzeugte Beschleunigung.

Die Componenten X_h, Y_h, Z_h der expliciten Kräfte setzen wir als gegeben voraus, die der Verbindungskräfte $\mathfrak{x}_h$, $\mathfrak{y}_h$, $\mathfrak{z}_h$ werden wir im folgenden Paragraphen eliminiren. Zu diesem Zwecke fassen wir die Lage sämmtlicher materieller Punkte zu irgend einer Zeit t ins Auge und denken uns jedem Raumpunkte, wo sich irgend einer der n materiellen Punkte zur Zeit t befindet, eine ganz beliebige, unendlich kleine Verschiebung ertheilt. Die Coordinaten x_h, y_h, z_h des Raumpunktes, wo sich zur Zeit t der $h$te materielle Punkt befand, sollen dabei um δx_h, δy_h, δz_h wachsen. Alle diese Coordinatenzuwächse sollen nur der einen Bedingung unterworfen sein, dass sie den Bedingungsgleichungen und Ungleichungen des Systems zur Zeit t genügen, in denen jedoch die Zeit t, insofern sie explicit darin vorkommt, als constant zu betrachten ist. Die so erhaltenen Bedingungen des Systems müssten also erfüllt bleiben, wenn jeder materielle Punkt wirklich von dem Raumpunkte, wo er zur Zeit t ist, nach derjenigen Stelle versetzt würde, wohin dieser Raumpunkt verschoben wurde.

Wir wollen alle möglichen unendlich kleinen Verschiebungen, welche dieser einen Forderung genügen, virtuelle Verschiebungen nennen. Dieselben sind durchaus nicht zu verwechseln mit den Verschiebungen, welche die materiellen Punkte wirklich während des auf die Zeit t folgenden Zeitdifferentiales dt erleiden. Letztere nennen wir die wirklichen Verschiebungen während der Zeit dt. Die Zuwächse, welche in Folge der letzteren Verschiebungen die Coordinaten des $h$ten der n materiellen Punkte erleiden, bezeichnen wir mit dx_h, dy_h, dz_h und nennen sie die Differentiale der Coordinaten zum Unterschiede von δx_h, δy_h, δz_h, welche wir die Variationen der Coordinaten nennen.

Wenn die materiellen Punkte, welche wir die μ materiellen Punkte nannten, welche wir also zur Realisirung der Bedingungen des Systems benutzten, fix im Raume sind, mit anderen Worten, wenn die Bedingungen des Systems mit der Zeit unveränderlich sind, so müssen die Differentiale denselben Bedingungen wie die Variationen genügen. Es können also die Variationen auch gleich den Differentialen gemacht werden, aber der erstere Begriff ist viel allgemeiner, indem er überhaupt alle möglichen unendlich kleinen Zuwächse umfasst, welche den Bedingungen genügen, während der letztere nur diejenigen speciellen Zuwächse ausdrückt, welche während der Zeit dt wirklich eintreten. Wenn dagegen die Bedingungen des Systems die Zeit explicit enthalten, so sind überhaupt im Allgemeinen die Bedingungen für die Differentiale andere als für die Variationen. Fassen wir eine holonome, die Zeit explicit enthaltende Bedingung ins Auge, die sich durch die Relation 77) oder 79) ausspricht. Dann müssen die variirten Coordinaten $x_h + \delta x_h$, $y_h + \delta y_h$, $z_h + \delta z_h$ noch immer der Bedingung genügen, welche zur Zeit t besteht, wogegen die der Zeit $t + dt$ entsprechenden Coordinaten $x_h + dx_h$, $y + dy_h$, $z_h + dz_h$ der Bedingung genügen müssen, welche zur Zeit $t + dt$ besteht. Man hat also, falls die Function φ für die betreffenden Werthe der Variabeln differentiirbar ist:

$$86)\qquad \sum_{h=1}^{h=n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\delta x_h + \frac{\partial \varphi}{\partial y_h}\delta y_h + \frac{\partial \varphi}{\partial z_h}\delta z_h\right) \leqq 0,$$

wogegen man für die Differentiale die Relation hat:

$$87)\quad \frac{\partial \varphi}{d\,t}\,dt + \sum_{h=1}^{h=n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\,d\,x_h + \frac{\partial \varphi}{\partial y_h}\,d\,y_h + \frac{\partial \varphi}{\partial z_h}\,d\,z_h\right) \leqq 0.$$

Es gilt das blosse Gleichheitszeichen oder beide Zeichen, je nachdem die Relation durch 77) oder 79) definirt ist. Bei einer nicht holonomen Bedingung müssen die Differentiale eine Relation von der Form 78) oder 80) erfüllen. Wenn man darin t constant setzt, so erhält man die zwischen den Variationen bestehende Relation. Letztere ist also

$$88)\qquad \sum_{h=1}^{h=n}(\xi_h\,\delta\,x_h + \eta_h\,\delta\,y_h + \zeta_h\,\delta\,z_h) \leqq 0$$

wobei natürlich wieder das Gleichheitszeichen der Relation 78), beide Zeichen der Relation 80) entsprechen. Die Relationen 86) und 87) sind übrigens nur specielle Fälle der Relationen 80) und 88), die man erhält, wenn man darin

$$89)\qquad \tau = \frac{\partial \varphi}{\partial t},\quad \xi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1},\quad \eta_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \cdots \zeta_n = \frac{\partial \varphi}{d\,z_n}$$

setzt. Natürlich sind die Relationen 86) und 87) nicht gleichbedeutend mit der Relation 79), da aus letzterer die Gültigkeit der ersteren Relationen nur folgt, wenn die Ausgangswerthe der Coordinaten die Gleichung 77) befriedigen. Wenn das Ungleichheitszeichen gilt, so sind auch andere Ausgangswerthe möglich und dann besagt die Relation 79) gar nichts über die Differentiale oder Variationen. Es wäre auch möglich, dass eine nicht holonome Relation von der Form 80) nur im Falle des Bestehens gewisser Gleichungen zwischen den Coordinaten gilt, z. B. nur so lange ein fester Körper eine gewisse Fläche berührt, die er nach einer Seite verlassen kann. Eine virtuelle Verrückung des Systems ist in jedem Falle jede unendlich kleine Verrückung desselben, bei welcher die Verschiebungen aller n Punkte des Systems allen, durch irgend welche Bedingungen desselben vorgeschriebenen Relationen 86) oder 88) genügen.

§ 35. Mathematischer Ausdruck des Princips der virtuellen Verschiebungen.

Es seien nun $\delta x_1, \delta y_1 \ldots \delta z_n$ die irgend einer virtuellen Verrückung des Systems entsprechenden Coordinatenzuwächse. Wir multipliciren von den Gleichungen, welche wir aus 81) erhalten, wenn wir $h = 1$ setzen, die erste mit δx_1, die zweite mit δy_1, die dritte mit δz_1, ebenso von den Gleichungen, die wir aus 81) erhalten, wenn wir $h = 2$ setzen, die erste mit δx_2, die zweite mit δy_2, die dritte mit δz_2 u. s. f. bis zur letzten. Indem wir dann alle so erhaltenen Gleichungen addiren, folgt:

$$90)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{h=1}^{h=n}\left[\left(m_h\frac{d^2 x_h}{d t^2} - X_h\right)\delta x_h + \left(m_h\frac{d^2 y_h}{d t^2} - Y_h\right)\delta y_h\right.\\ &\qquad\qquad\qquad\left. + \left(m_h\frac{d^2 z_h}{d t^2} - Z_h\right)\delta z_h\right]\\ &= \sum_{h=1}^{h=n}(\mathfrak{X}_h\,\delta x_h + \mathfrak{Y}_h\,\delta y_h + \mathfrak{Z}_h\,\delta z_h). \end{aligned}\right.$$

Es sei nun m_k ein zweiter materieller Punkt, mit welchem der materielle Punkt mit der Masse m_h starr oder einseitig verbunden ist, x_k, y_k, z_k seien die Coordinaten des zweiten materiellen Punktes, r_{hk} die Entfernung beider materieller Punkte, $f_{hk}(r_{hk})$ die vermöge der starren oder einseitigen Verbindung zwischen ihnen wirkende Kraft. Dann liefert diese Kraft in die rechte Seite der Gleichung 90), je nachdem der Punkt m_k den n Punkten oder den μ Punkten angehört, drei oder sechs Addenden, deren Summe jedenfalls gleich

$$91)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{f_{hk}(r_{hk})}{r_{hk}}[(x_h - x_k)(\delta x_h - \delta x_k) + (y_h - y_k)(\delta y_h - \delta y_k)\\ &\qquad + (z_h - z_k)(\delta z_h - \delta z_k)] = f_{hk}(r_{hk})\,\delta r_{hk} \end{aligned}\right.$$

ist, wobei δr_{hk} der Zuwachs der Entfernung r_{hk} in Folge der virtuellen Verschiebungen ist. Es ist ja

$$r_{hk}^2 = (x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2 + (z_h - z_k)^2.$$

Der Ausdruck 91) gilt unverändert, ob der materielle Punkt m_k ebenfalls den n materiellen Punkten oder ob er den μ materiellen Punkten angehört; denn in letzterem Falle ist einfach

$\delta x_k = \delta y_k = \delta z_k = 0$, da die virtuellen Verschiebungen ohne Aenderung der Bedingungsgleichungen, also ohne Aenderung der Lage der μ materiellen Punkte vorzunehmen sind. In letzterem Falle liefert die betreffende Verbindungskraft nur drei Addenden in die rechte Seite der Gleichung 90).

Wenn nun die beiden materiellen Punkte m_h und m_k starr miteinander verbunden sind, so müssen die Verschiebungen, damit sie virtuell seien, so gewählt werden, dass dabei die Entfernung der beiden Punkte unverändert bleibt, also $\delta r_{hk} = 0$ ist. Dann reducirt sich also der Ausdruck 91) auf Null. Sind alle Verbindungen starr, so reduciren sich daher für jede Verbindung zweier der n Punkte je sechs Glieder, für jede Verbindung eines der n Punkte mit einem der μ Punkte aber je drei Glieder der rechten Seite der Gleichung 90) auf Null. Es ist also dann die gesammte rechte Seite dieser Gleichung Null.[1])

Für einseitige Verbindungen zweier materieller Punkte sind zwei Fälle möglich.

1. Die zwischen beiden Punkten wirkenden Kräfte lassen keine Verkleinerung der Entfernung derselben zu, ohne sich ihrer Vergrösserung zu widersetzen. Dann kann die zwischen den Punkten wirkende Kraft $f_{hk}(r_{hk})$ nicht anziehend, also nicht negativ sein. Aber auch die Entfernung der Punkte kann nicht abnehmen, auch δr_{hk} kann nicht negativ sein, der Ausdruck 91) kann daher nicht negativ, er kann nur gleich Null oder positiv sein.

2. Die Kraft verhindert nur die Vergrösserung der Entfernung, dann kann sie höchstens anziehend, niemals abstossend sein, kann also keinen positiven Werth haben und auch δr_{hk} kann nicht positiv sein. Das Product 91) ist also wieder entweder gleich Null oder positiv, niemals negativ. Denn damit es negativ wäre, müsste nothwendig ein Factor negativ, der andere aber positiv sein. Daraus folgt, dass wenn unter den Verbindungen einseitige sind, die rechte

[1]) Das im Texte Gesagte gilt für exact starre Verbindungen mathematisch exact, physikalisch aber gilt es nur angenähert. So ist hervorzuheben, dass die Entstehung von unsichtbaren Schwingungen der Punkte gegeneinander aus unserem Bilde sogar vorauszusehen ist.

Seite der Gleichung 90) jedesmal nur gleich Null oder positiv, niemals negativ sein kann, also

$$92)\qquad \sum_{h=1}^{h=n}(\mathfrak{x}_h\,\delta x_h + \mathfrak{y}_h\,\delta y_h + \mathfrak{z}_h\,\delta z_h) \geqq 0.$$

Dasselbe muss daher auch von der linken Seite gelten und wir erhalten:

$$93)\left\{\begin{aligned}\sum_{h=1}^{h=n}\Big[\Big(m_h\frac{d^2x_h}{dt^2}-X_h\Big)\delta x_h+\Big(m_h\frac{d^2y_h}{dt^2}-Y_h\Big)\delta y_h\\+\Big(m_h\frac{d^2z_h}{dt^2}-Z_h\Big)\delta z_h\Big]\geqq 0,\end{aligned}\right.$$

wobei für durchaus starre Verbindungen das Gleichheitszeichen, für einseitige das Gleichheits- oder Ungleichheitszeichen gilt.

Wir wollen das durch diese Gleichung ausgesprochene Princip das der virtuellen Verschiebungen nennen, indem wir diesen Namen in etwas allgemeinerem Sinne als Lagrange gebrauchen und Verallgemeinerungen, die durch Fourier, Gauss und durch Beiziehung des d'Alembert'schen Princips daran angebracht wurden, unter diesem Namen mitbegreifen.

Wenn mehrere einseitige Verbindungen bestehen, so kann es geschehen, dass jede virtuelle Verrückung des Systems, sobald man das Zeichen sämmtlicher Variationen der Coordinaten verkehrt, ohne deren Absolutwerth zu ändern, wieder in eine virtuelle Verrückung übergeht, dass immer die entgegengesetzte Verrückung auch virtuell ist. Dann muss in allen Bedingungen blos das Gleichheitszeichen gelten, da ja ihre Richtigkeit durch Umkehrung der Zeichen aller Variationen nicht alterirt werden darf. Dann muss aber auch in der Relation 93) wie im Falle lauter starrer Verbindungen immer das Gleichheitszeichen gelten, da der Ausdruck links auch für keine virtuelle Verrückung positiv sein kann; denn er wäre sonst für die virtuelle Verrückung, die dieser gerade entgegengesetzt ist, negativ, was nach dem allgemeinen Principe unmöglich ist. Ein Beispiel hierfür haben wir, wenn eine starre glatte Kugel zwischen zwei starren glatten

Flächen eingeschlossen ist, deren Abstand überall gleich dem Kugeldurchmesser ist. Sie dürfte sich dann von jeder der Flächen beliebig entfernen, kann es aber nicht vermöge des Widerstandes der gegenüberliegenden Fläche.

Da $\sum_{h=1}^{h=n}(\mathfrak{x}_h \delta x_h + \mathfrak{y}_h \delta y_h + \mathfrak{z}_h \delta z_h)$ die bei der betreffenden Verrückung von den Verbindungskräften geleistete Arbeit ist, so kann man sagen: für jede virtuelle Verrückung kann die Arbeit der von den Verbindungen herrührenden Kräfte, wenn lauter Gleichungen bestehen, nur gleich Null, wenn auch Ungleichungen bestehen, nur gleich Null oder positiv sein.[1]) Wenn die Bedingungen die Zeit nicht explicit enthalten, also von der Zeit unabhängig gelten, so muss die wirkliche Verschiebung während der Zeit dt mit denselben Bedingungen verträglich sein, wie die virtuellen Verschiebungen, also ein specieller Fall der letzteren sein. Es muss daher die Arbeit der Verbindungskräfte auch für die wirklichen Verschiebungen die obigen Bedingungen erfüllen. Eine fixe starre glatte Röhre kann auf eine genau hineinpassende starre glatte Kugel keine Arbeit übertragen, noch von ihr empfangen. Aendert sich aber die Lage der Mittellinie mit der Zeit, so kann auf die Kugel Arbeit übertragen werden. Uebrigens kann auch beim Vorhandensein von mit der Zeit unveränderlichen Ungleichungen nur während einer unendlich kurzen Zeit der Bewegung eine unendlich kleine Arbeit übertragen werden, da sich ja hierbei der einseitig gebundene materielle Punkt dann sogleich von der Vorrichtung entfernt.

[1]) Der Arbeit der Verbindungskräfte gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet ist die der verlorenen Kräfte, deren Componenten wir ja gleich $-\mathfrak{x}_h$, $-\mathfrak{y}_h$, $-\mathfrak{z}_h$ fanden. Die Relation 92) besagt daher, dass die Arbeit der letzteren beim Uebergange von der wirklichen zu einer anderen möglichen Bewegung nie positiv sein kann. Da Kräfte jede Bewegung zu erzeugen streben, bei der sie positive Arbeit leisten, so kann man auch sagen, die wirkliche Bewegung geschieht so, dass es keine andere mögliche giebt von der Beschaffenheit, dass die verlorenen Kräfte den Uebergang von der wirklichen zu jener möglichen anstrebten. Im Falle des Gleichgewichtes z. B. gehen alle expliciten Kräfte verloren und dieses kann nur bestehen, wenn dieselben keine mögliche Bewegung anstreben, wenn sie bei keiner möglichen Bewegung positive Arbeit leisten.

Man könnte sich versucht fühlen, es als a priori evident hinzustellen, dass die Arbeit der Widerstandskräfte, welche gewisse Bedingungen anfrecht erhalten, bei jeder diesen Bedingungen nicht widersprechenden Bewegung gleich Null sein müsse. Allein in dieser Allgemeinheit wäre diese Behauptung sogar unrichtig; denn die Widerstandskräfte können ja mit Reibung verbunden sein, welche Arbeit verzehrt. Man müsste daher den Satz auf reine Widerstandskräfte, d. h. auf solche beschränken, die ausser der Herhaltung gewisser Bedingungsgleichungen keine Wirkung haben. Da man die Abwesenheit anderer Wirknngen kaum anders als durch die Abwesenheit von Arbeit bei mit den Bedingungen verträglichen Bewegungen definiren kann, so wäre es am besten einfach zu sagen, man verstehe unter reinen Widerstandskräften solche, bei denen diese Arbeit fehlt. Diese rein negative Definition ist natürlich die allgemeinste, giebt aber keine Vorstellung von der Art der Wirksamkeit dieser Kräfte.

Bezeichnet man mit P_h die Resultirende aller expliciten Kräfte, die auf den materiellen Punkt m_h wirken, und mit δl_h die Verschiebung ihres Angriffspunktes, so dass X_h, Y_h, Z_h und δx_h, δy_h, δz_h die Projectionen von P_h und δl_h auf die Coordinatenrichtungen sind, bezeichnet man ferner mit $\delta p_h = \delta l_h \cos(P_h, \delta l_h)$ und $L_h = P_h \cos(P_h, \delta l_h)$ die Componente von δl_h in der Richtung P_h und von P_h in der Richtung δl_h, so ist

$$94) \left\{ \begin{aligned} \sum_{h=1}^{h=n}(X_h \delta x_h + Y_h \delta y_h + Z_h \delta z_h) &= \sum P_h \delta l_h \cos(P_h, \delta l_h) \\ &= \sum P_h \delta p_h = \sum L_h \delta l_h. \end{aligned} \right.$$

Die Projection δp_h ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem sie in die Richtung von P_h oder in die entgegengesetzte fällt. Analog bestimmt sich das Zeichen von L_h.

Aehnlich kann

$$\sum m_h \left(\frac{d^2 x_h}{d t^2} \delta x_h + \frac{d^2 y_h}{d t^2} \delta y_h + \frac{d^2 z_h}{d t^2} \delta z_h \right)$$

ausgedrückt werden, wenn man den Absolutwerth der Beschleunigung, ihre Componente in der Richtung der Verschiebung und die Projection der letzteren auf die Richtung der Beschleunigung einführt.

Den Fall, dass ein System anfangs ruht und unter dem Einflusse der darauf wirkenden Kräfte dauernd in Ruhe bleibt, nennt man den des Gleichgewichtes im Ruhezustande.

Für diesen verschwinden alle Beschleunigungen und man erhält aus 93)

$$\sum_{h=1}^{h=n}(X_h\,\delta x_h + Y_h\,\delta y_h + Z_h\,\delta z_h) \leqq 0 \tag{95}$$

oder nach 94)

$$\sum_{h=1}^{h=n} P_h\,\delta l_h \cos(P_h, \delta l_h) \leqq 0 \tag{96}$$

oder

$$\sum_{h=1}^{h=n} P_h\,\delta p_h \leqq 0. \tag{97}$$

§ 36. Lagrange's Beweis des Princips der virtuellen Verschiebungen.

Dem Bestreben, die Unabhängigkeit des Princips der virtuellen Verschiebungen von irgend einer Ansicht über die nähere Natur der Kräfte zu zeigen, verdankt der alte klassische Beweis Lagrange's seine Entstehung. Man denkt sich da an den Angriffspunkt der ersten Kraft P_1, welche auf irgend ein beliebigen Bedingungen unterworfenes System wirkt, einen vollkommen glatten Ring R_1 befestigt und in der Richtung der betreffenden Kraft einen zweiten ebenso glatten Ring S_1 fix im Raume vorhanden. Ebenso befestigt man an dem Angriffspunkte der zweiten Kraft P_2 den Ring R_2 und legt fix im Raume in die Richtung der zweiten Kraft den Ring S_2 u. s. f.

Wir können mit beliebiger Annäherung voraussetzen, dass die Intensitäten sämmtlicher Kräfte das gemeinsame Maass q haben, wenn wir dasselbe genügend klein wählen. Es sei

$$P_1 = n_1 q,\ P_2 = n_2 q,\ \ldots$$

Man befestigt nun an dem Ringe S_1 das eine Ende eines unendlich biegsamen glatten Fadens, zieht diesen hierauf durch R_1, dann durch S_1, dann wieder durch R_1 etc., bis $2\,n_1$ Fadentheile die beiden Ringe R_1 und S_1 verbinden. Der letzte dieser Fadentheile geht durch S_1 und wird von dort durch S_2, dann durch R_2, dann wieder durch S_2 etc. gezogen, bis wieder zwischen R_2 und S_2 im Ganzen $2\,n_2$ Fadenstücke gezogen sind. Nun führt man den Faden nach S_3 u. s. f., bis man den letzten fixen Ring mit dem letzten beweglichen durch eine entsprechende Anzahl von Fadentheilen verbunden hat, worauf man das andere Ende E des Fadens aus dem letzten Ringe heraushängen lässt. Auf dieses Ende wird schliesslich mit der Hand der Zug $\frac{1}{2}\,q$ ausgeübt.

Da der absolut biegsame und glatte Faden in allen Theilen dieselbe Spannung besitzt, so üben alle Fadentheile auf alle beweglichen Ringe und durch diese auf die Angriffspunkte aller Kräfte dieselbe Wirkung aus, wie die ursprünglich gegebenen Kräfte. Man kann daher das ursprünglich gegebene Kraftsystem weglassen und seine Wirkung durch jene Fäden ersetzen.

Es soll sich nun der Angriffspunkt der ersten Kraft und mit ihm der Ring R_1 um das unendlich kleine Stück δl_1 verschieben, dessen Projection auf die Richtung der Kraft P_1 gleich δp_1 sei, welche Grösse wir mit positiven Zeichen versehen, wenn sie in die Richtung der Kraft P_1 fällt, mit negativem, wenn sie in die entgegengesetzte Richtung fällt. Durch die Verschiebung des Ringes R_1 verkürzt sich jeder der zwischen R_1 und S_1 gespannten Fäden um ein Stück, welches mit Vernachlässigung von unendlich Kleinem höherer Ordnung gleich δp_1 ist, alle zwischen R_1 und S_1 gespannten Fäden zusammen verkürzen sich daher um das Stück $2\,n_1\,\delta p_1$; das negative Zeichen von δp_1 würde eine Verlängerung bedeuten. Da dasselbe von allen übrigen Fadenstücken gilt, so ist die gesammte Verkürzung aller dieser Fadenstücke und daher auch, da wir den Faden als unausdehnbar voraussetzen, das Stück, um welches das Ende E weiter aus dem letzten fixen Ringe heraustritt, gleich

98) $$2\,n_1\,\delta p_1 + 2\,n_2\,\delta p_2 + \dots$$

Wenn anfangs alle Ringe ruhen und irgend eine Verschiebung der Ringe möglich ist, bei welcher diese Grösse positiv ist, bei welcher also das Fadenende E wirklich weiter aus dem fixen Ringe heraustritt, so wird diese sicher durch die Kraft $\frac{1}{2}q$, welche wir darauf ausüben, bewirkt werden. Gleichgewicht kann daher nur bestehen, wenn der Ausdruck 98) für keine mögliche Verschiebung positiv ist. Dieser Ausdruck wird aber durch Multiplication mit der wesentlich positiven Grösse $\frac{1}{2}q$ mit der linken Seite der Relation 97) identisch, wodurch diese Relation für den Fall des Gleichgewichtes und der Ruhe bewiesen ist.

Dieser Beweis charakterisirt die geniale Einfachheit und Anschaulichkeit der alten Schlussweise, aber auch deren Mängel. Dass die Glieder zweiter Ordnung nur auf die Stabilität oder Labilität, nicht auf das Gleichgewicht selbst von Einfluss sind, resp. dass erst nach unendlich langer Zeit eine Bewegung eintritt, wenn blos Verschiebungen möglich sind, bei denen das Fadenende E eine Senkung erfährt, die unendlich klein höherer Ordnung ist, wird als selbstverständlich angenommen; ebenso die Gesetze der Fadenspannung und des Gleitens, sowie dass die Wirkungsgesetze der Kräfte immer dieselben sind, ob diese von dem Zuge von Fäden oder von anderen Ursachen herstammen und dass sie so allgemein gelten, dass die Heranziehung beliebiger idealer Fälle wie absolut glatter und biegsamer Schnüre unbedingt erlaubt ist. Alle diese Gesetze galten damals als weit sicherer, als das Princip selbst. Der Beweis der Relation 93) für den Fall der Bewegung wird dann durch eine ebenfalls nicht ganz einwurfsfreie Begründung des d'Alembert'schen Princips vermittelt. Ueber das d'Alembert'sche Princip vergl. §§ 72 und 73.

§ 37. **Ein materieller Punkt ist gezwungen, auf einer Fläche zu bleiben.**

Diesen Fall wollen wir zunächst als das einfachste Beispiel für die in den beiden vorigen Paragraphen erörterten Sätze behandeln.

Sei m die Masse des materiellen Punktes; x, y, z dessen Coordinaten zur Zeit t. Unter den expliciten oder äusseren

Kräften haben wir alle auf den materiellen Punkt wirkenden Kräfte zu verstehen mit Ausnahme der Kräfte, welche von der Vorrichtung ausgehen, die ihn zwingt, auf der betreffenden Fläche zu bleiben. Die Summe der Componenten der äusseren Kräfte in der Abscissenrichtung sei X; die gleiche Bedeutung habe Y und Z für die beiden anderen Coordinatenrichtungen. Ferner sei

$$\varphi(x, y, z, t) = 0 \tag{99}$$

die Gleichung der Fläche, auf welcher zu bleiben der materielle Punkt gezwungen ist und deren Gestalt mit der Zeit veränderlich sein kann. Wir schliessen zunächst den Fall aus, dass an der Stelle A, wo sich der materielle Punkt gerade befindet, zur betreffenden Zeit die Function φ undifferentiirbar ist oder dass alle drei partiellen Ableitungen derselben nach den drei Coordinaten gleichzeitig verschwinden. Dann wird die Function φ für Punkte, die der Fläche auf der einen Seite sehr nahe anliegen, > 0, auf der anderen < 0 sein. Wir wollen die erste Seite die positive, die letztere die negative nennen.

Es erfahre der materielle Punkt eine beliebige unendlich kleine Verschiebung, wobei seine Coordinaten x, y, z die beliebigen unendlich kleinen Zuwächse δx, δy, δz erleiden sollen. Als Bedingung, dass die Verschiebung eine virtuelle sei, erhalten wir nach 86), wo jetzt das Gleichheitszeichen gilt, da es auch in 99) gilt, die Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z = 0. \tag{100}$$

Da die jeder möglichen Verschiebung entgegengesetzte Verschiebung ebenfalls virtuell ist, so gilt auch in Relation 93) das Gleichheitszeichen, welche sich daher auf

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(m \frac{d^2 x}{d t^2} - X\right) \delta x + \left(m \frac{d^2 y}{d t^2} - Y\right) \delta y + \\ &\qquad\qquad + \left(m \frac{d^2 z}{d t^2} - Z\right) \delta z = 0 \end{aligned} \right. \tag{101}$$

reducirt. Hier sind von den drei Coordinatenvariationen δx, δy, δz zwei vollkommen willkürlich. Hat man aber für diese beiden bestimmte Werthe angenommen, so ist der

Werth der dritten durch die Gleichung 100) bestimmt. Man verfährt nun folgendermaassen: man multiplicirt die Gleichung 100) mit einem passend zu bestimmenden Factor $-\lambda$ und addirt sie zur Gleichung 101). Die so gebildete Gleichung wollen wir als die Gleichung 102) bezeichnen und sie der Raumersparniss halber gar nicht anschreiben.

Man kann nun die Grösse λ so wählen, dass in der Gleichung 102) die Variation einer der Coordinaten, z. B. δx,[1]) den Coefficienten Null erhält, d. h. man bestimmt λ durch die Gleichung

103) $$m \frac{d^2 x}{d t^2} = X + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Dann entfällt in der Gleichung 102) das mit δx multiplicirte Glied vollständig. Die Gleichung 102) muss nun bestehen, wenn man $\delta x = 0$ und δy von Null verschieden annimmt. Es muss also der Coefficient von δy in derselben verschwinden und aus einem analogen Grunde muss auch der Coefficient von δz verschwinden, so dass man noch die beiden Gleichungen

104) $$\begin{cases} m \dfrac{d^2 y}{d t^2} = Y + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ m \dfrac{d^2 y}{d t^2} = Z + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases}$$

erhält.

Wir haben nebst den drei Coordinaten x, y, z des materiellen Punktes noch eine vierte Unbekannte λ eingeführt. Wir haben aber auch vier Gleichungen 99), 103) und die beiden Gleichungen 104). Die vier Unbekannten können aus diesen vier Gleichungen im Allgemeinen als Functionen der Zeit bestimmt werden. Zu diesem Behufe müssen ausser der Gleichung der Fläche zu jeder Zeit (also der Function φ) und den äusseren Kräften auch noch die Anfangswerthe der Coordinaten und der Componenten der

---

[1]) Falls $\partial \varphi / \partial x = 0$ wäre, so wäre δy, falls auch $\partial \varphi / \partial y = 0$ wäre, δz statt δx zu wählen, damit nicht λ unendlich oder unbestimmt würde. Nur wenn die partiellen Ableitungen des φ nach allen drei Coordinaten verschwinden würden, wäre die Methode nicht anwendbar, vergl. § 39.

Geschwindigkeiten des materiellen Punktes in den Coordinatenrichtungen gegeben sein.

Zur Bestimmung dieser sechs Anfangswerthe reichen vier Variable aus, da zwischen ihnen zwei Gleichungen bestehen. Zunächst muss auch zwischen den Anfangswerthen der Coordinaten die Gleichung 99) bestehen. Da ferner diese Gleichung ebenso zur Zeit $t + dt$ bestehen muss, so hat man nach 87) zu jeder und folglich auch zu Anfang der Zeit die Gleichung

$$105) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

Der Anblick der Gleichungen 103) und 104) lehrt, dass die Bewegung genau so geschieht, als ob der materielle Punkt vollkommen frei wäre, aber nebst den äusseren Kräften noch eine Kraft auf ihn wirken würde, welche in den drei Coordinatenrichtungen die Componenten

$$106) \qquad \mathfrak{x} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{y} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{z} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

hat. Dies ist also die Kraft, welche die Vorrichtung auf n ausübt, die ihn zwingt, auf der betreffenden Fläche zu eiben. Auf diese Kraft reduciren sich in diesem Falle e Verbindungskräfte. Wir wollen sie kurz den Widerstand r betreffenden Fläche oder der Vorrichtung nennen.

§ 38. Richtung der Widerstandskraft.

Wir wollen nun im Punkte A der Fläche, wo sich der materielle Punkt zur Zeit t befindet, eine Normale an die betreffende Fläche nach derjenigen Seite hin ziehen, welche wir die positive genannt haben, wo also die Function φ zur Zeit t einen positiven Werth hat, und mit α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche diese Normale mit den positiven Coordinatenaxen bildet. Wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist, sind die Cosinusse dieser Winkel durch folgende Gleichungen gegeben:

$$107) \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

wobei σ die positive Quadratwurzel aus

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2$$

ist.

Diese Gleichungen ergeben sich am leichtesten in folgender Weise: Die Fläche, welche zur Zeit t die Gleichung 99) hat, heisse die Fläche F. Wir construiren die ihr unendlich benachbarte Fläche F_1, welche die Gleichung hat

108) $$\varphi\,(x, y, z) = \varepsilon\,,$$

wobei ε eine sehr kleine positive Grösse ist. Die Zeit wurde unter dem Functionszeichen weggelassen, da sie jetzt ein für allemal als Constante anzusehen ist. Wir ziehen vom Punkte A aus, welcher der Fläche F angehört, drei Gerade in den Richtungen der drei Coordinatenaxen und eine normal zur Fläche F. Diese vier Geraden sollen die Fläche F_1 in den vier Punkten B, C, D und E treffen. Dann hat AE die Richtung der nach derjenigen Seite gezogenen Normalen, wo φ wächst. Da die Function φ in der unmittelbaren Nähe des Punktes A keine singuläre Stelle hat, so kann die Fläche F_1 in der unmittelbaren Umgebung von E als eben und parallel mit F betrachtet werden. Es ist also

109) $$AE = AB\cos\alpha = AC\cos\beta = AD\cos\gamma\,.$$

Damit in den Gleichungen 109) auch das Zeichen stimmt, wollen wir AE immer als positiv betrachten, AB, AC, AD dagegen sollen positiv oder negativ sein, je nachdem sie vom Punkt A aus gezogen die Richtung der positiven oder negativen Coordinatenaxen haben, also je nachdem α resp. β oder γ spitz oder stumpf sind, so dass AB stets dasselbe Zeichen wie $\cos\alpha$, ebenso AC wie $\cos\beta$ und AD wie $\cos\gamma$ hat. Aus den Gleichungen 109) folgt:

110) $$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{AB}}{\sqrt{\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}}}\,,$$

wobei der Wurzel das positive Zeichen zu geben ist, da AB und $\cos\alpha$ dasselbe Zeichen haben.

Da andererseits die Coordinaten der vier Punkte B, C, D und E die Gleichung 108) erfüllen, so ist

$$\varepsilon = \frac{\partial \varphi}{\partial x} AB = \frac{\partial \varphi}{\partial y} AC = \frac{\partial \varphi}{\partial z} AD,$$

wobei auch das Vorzeichen stimmt, da wir AB, AC und AD positiv oder negativ zu nehmen haben, je nachdem sie in die positive oder negative Coordinatenrichtung fallen, also je nachdem sie einen Zuwachs oder eine Abnahme der betreffenden Coordinaten ausdrücken. Substituirt man die hieraus folgenden Werthe für AB, AC und AD in die Gleichung 110) und in die analogen Gleichungen für $\cos\beta$ und $\cos\gamma$, so erhält man die Gleichungen 107) und zwar mit richtigem Vorzeichen, da ja ε wesentlich positiv ist. Aus den Gleichungen 106) und 107) folgt, dass die immer positiv zu betrachtende Gesammtintensität des Widerstandes der Fläche durch

111) $$i = \pm \lambda \sigma$$

gegeben ist. Die Werthe ihrer Componenten in den Coordinatenrichtungen können vermöge der Gleichungen 107) auch in der Form geschrieben werden:

$$\mathfrak{x} = \pm i \cos\alpha, \quad \mathfrak{y} = \pm i \cos\beta, \quad \mathfrak{z} = \pm i \cos\gamma.$$

Hier gilt überall das positive oder negative Zeichen, je nachdem λ positiv oder negativ ist. Diese Formeln zeigen, dass die Widerstandskraft i, welche die Vorrichtung auf den materiellen Punkt ausübt, immer auf der Fläche, auf welcher zu bleiben derselbe gezwungen ist, senkrecht steht, und dass sie gegen die Seite hin gerichtet ist, wo die Function φ zunimmt oder abnimmt, je nachdem die Gleichungen für λ einen positiven oder negativen Werth ergeben. Da Wirkung und Gegenwirkung immer gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind, so ist umgekehrt der Druck, welchen der materielle Punkt auf die Vorrichtung ausübt, immer gleich, aber entgegengesetzt gerichtet wie die Kraft der Vorrichtung auf den materiellen Punkt. Unsere Formeln lehren daher auch jedesmal die Grösse des letzteren Druckes kennen. Dieser Druck ist derjenige Theil der äusseren Kraft, welcher nicht auf Beschleunigung des materiellen Punktes verwendet wird, sondern in Ueberwindung des Widerstandes der Fläche verloren geht, also die verlorene äussere Kraft. Die Beschleunigung, welche sie dem materiellen Punkte ertheilen würde, ist die durch den Widerstand der Fläche verlorene Beschleunigung.

Wenn die Fläche, welche die Gleichung 99) hat, mit der Zeit nicht veränderlich ist, oder immer durch den Punkt geht, wo sich das Bewegliche zu Anfang befand, so ist dauernde Ruhe desselben mit den Bedingungen verträglich. Für diese verschwinden die Beschleunigungen und man hat daher als Bedingung des Gleichgewichtes im Ruhezustande:

$$112)\qquad X = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad Y = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad Z = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Die äusseren Kräfte müssen also in diesem Falle normal auf der Fläche sein. Dies folgt übrigens ohne Rechnung aus der Formel 96), da der Ausdruck links in dieser Formel nur für $\sphericalangle P, \delta l = 90^0$ verschwinden kann.

In diesem Falle wird der Punkt, wenn er anfangs ruhte, in Ruhe bleiben; dann sind seine Beschleunigungen Null, alle äussere Kraft geht für die Beschleunigung verloren und wird auf Ueberwindung des Widerstandes der Vorrichtung verwendet. Die Kraft, welche der materielle Punkt auf die Vorrichtung ausübt, ist genau gleich der gesammten Kraft, welche von aussen auf ihn wirkt. Wenn er sich bewegt und die äusseren Kräfte stets senkrecht auf der Fläche mit der Gleichung 99) stehen, also die Bedingungen 112) erfüllen, so geschieht die Bewegung, wie man aus den Gleichungen 103) und 104) sieht, gerade so, als ob er den gleichen Bedingungen unterworfen wäre und keine äusseren Kräfte auf ihn wirkten. Zu dem Drucke, den er in letzterem Falle schon auf die Vorrichtung ausüben würde, addiren sich aber dann die äusseren Kräfte.

§ 39. Singuläre Fälle. Bedingungen, die durch Ungleichungen ausgedrückt sind.

Wir wollen nur noch wenige Worte über den Fall sagen, wo alle drei partiellen Ableitungen der Function φ nach den Coordinaten verschwinden oder der betreffende Punkt der Fläche sonst ein singulärer ist. Wenn das Bewegliche nur in einzelnen Zeitmomenten einzelne derartige singuläre Punkte durchläuft, so kann die Bewegung daselbst mittelst folgender Regeln meist eindeutig bestimmt werden. Wenn eine Bahn möglich ist, für welche die Geschwindigkeiten sich nicht sprungweise ändern, so geschieht die Bewegung in dieser Bahn; wenn es zwei oder mehrere solche Bahnen giebt, in derjenigen, für welche die Beschleunigung am wenigsten von der durch die äusseren Kräfte erzeugten abweicht. Falls sich aber alle möglichen Bahnen knicken oder mehrere mögliche Bahnen osculiren oder das Bewegliche während einer endlichen Zeit lauter singuläre Punkte durchläuft, kann die Bewegung mathematisch unbestimmt werden, was aber, wie wir sahen, ohne praktische Bedeutung ist, da solche Bedingungen durch die von uns angenommenen Vorrichtungen nie mathematisch exact erzeugt werden können.

Für den Fall des Gleichgewichtes an einem solchen singulären Punkte A, wo alle drei partiellen Ableitungen von φ verschwinden, liefern uns die Gleichungen 112), falls nicht λ unendlich wird, $X = Y = Z = 0$. In der That reducirt sich dann $\varphi(x+\alpha,\ y+\beta,\ z+\gamma)$ auf

$$113)\quad \begin{cases} \frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\beta^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\gamma^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \\ \qquad + \beta\gamma\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z} + \alpha\gamma\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} + \alpha\beta\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}. \end{cases}$$

Wenn sich dies nicht wieder identisch auf Null oder auf das Quadrat einer linearen Function von α, β, γ reducirt, welche in dieser Formel beliebige sehr kleine Coordinatenzuwächse bedeuten, so hat die Fläche F in der unmittelbaren Umgebung des Punktes A die Gestalt einer Kegelfläche, deren Spitze in A ist, oder zweier sich in A schneidender Ebenen, denn für jeden Punkt der Fläche muss

$$\varphi(x+\alpha,\ y+\beta,\ z+\gamma) = 0$$

sein. Das Bewegliche kann also in der That nur im Gleichgewichte sein, wenn keine Kraft darauf wirkt. Ist aber der Ausdruck 113) ein vollständiges Quadrat einer linearen Function von α, β, γ oder verschwinden auch alle zweiten partiellen Differentialquotienten der Function φ nach den Coordinaten, oder ist diese Function an der betreffenden Stelle überhaupt nicht nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickelbar, so treten noch complicirtere Verhältnisse ein, welche eine besondere Untersuchung jedes speciellen Falles erfordern und auf welche wir nicht näher eingehen wollen.

Wir wollen nun noch einige Worte über den Fall sagen, wo zwischen den Coordinaten eines materiellen Punktes nicht eine Gleichung, sondern eine Ungleichung besteht, welche wir immer in die Form bringen können:

$$114) \qquad \varphi(x, y, z, t) \leqq 0.$$

Das Bewegliche kann also dann die Fläche, welche die Gleichung 99) hat, nach derjenigen Seite derselben, welche wir die negative genannt haben, ungehindert verlassen, dagegen nicht auf die positive Seite derselben gelangen.

Die Fläche kann nur eine von der positiven Seite gegen die negative hin gerichtete Widerstandskraft auf das Bewegliche, umgekehrt letzteres auf erstere nur eine von der negativen gegen die positive Seite gewendete Druckkraft ausüben. So lange die Widerstandskraft diese Richtung hat, d. h. so lange λ negativ ist, wird die Bewegung wie im früher betrachteten Falle geschehen und auch die Gleichgewichtsbedingungen werden dieselben sein. In dem Momente aber, wo λ einen positiven Werth annehmen würde, wird die Gültigkeit der früher entwickelten Gleichungen aufhören, das Bewegliche wird die Fläche verlassen und sich wie ein vollkommen freier materieller Punkt bewegen. (Vergl. §§ 41 und 74.)

Die wirkliche Bewegung wird nun zwar immer dem Principe der virtuellen Verschiebungen genügen, allein wir haben keinen Beweis geliefert, dass dieses auch die Beschleunigung immer eindeutig bestimmt. Wir werden in der That an speciellen Fällen zeigen, dass die Beschleunigung manchmal erst indirect durch Zuziehung von Continuitätsbetrachtungen bestimmt werden muss. (§ 69.)

Da ein drei unabhängige Differentiale enthaltender

Differentialausdruck bereits nicht integrabel sein kann, so kann ein einzelner materieller Punkt bereits einer nicht holonomen Bedingung von der Form

$$\tau\, dt + \xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz \leqq 0$$

unterworfen sein. Es gilt dann alles bisher Gesagte; nur dass ξ, η, ζ an die Stelle von $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$ und $\partial\varphi/\partial z$ treten. Nach dieser Vertauschung sind die Beschleunigungen und λ wieder aus den Gleichungen 103) und 104) zu bestimmen, denen noch die zwischen den Geschwindigkeitscomponenten geltende Gleichung

$$\tau + \xi\frac{dx}{dt} + \eta\frac{dy}{dt} + \zeta\frac{dz}{dt} = 0$$

beizuziehen ist. Der Widerstand der Vorrichtung hat immer die Richtung der Geraden, deren Richtungscosinus $\xi/\sigma, \eta/\sigma, \zeta/\sigma$ sind, wo $\sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ ist. Wenn man dem Beweglichen alle möglichen unendlich kleinen Verschiebungen ertheilt, für welche $\xi\,\delta x + \eta\,\delta y + \zeta\,\delta z$ verschwindet, so liegen alle Punkte, wohin es dabei verschoben wurde, auf einer unendlich kleinen Ebene. Die Seite dieser Ebene, wohin es gelangt, wenn bei der Verschiebung $\xi\,\delta x + \eta\,\delta y + \zeta\,\delta z$ positiv ist, nennen wir die positive, die andere die negative Seite der Ebene. Der Widerstand der Vorrichtung wirkt wieder nach dieser positiven oder negativen Seite, je nachdem λ positiv oder negativ ist. Ersterer Fall kann nicht eintreten, wenn das Ungleichheitszeichen gilt.

§ 40. Das einfache Pendel.

Wir betrachten nun den ganz speciellen Fall, dass ein schwerer Punkt gezwungen ist, sich auf einer unveränderlichen Kugelfläche zu bewegen und ausser der Schwere und der Kraft, welche ihn zwingt, auf der Kugelfläche zu bleiben, sonst keine Kraft auf ihn wirkt. Die Kugelfläche habe ihren Mittelpunkt im Coordinatenursprunge und ihr Radius sei gleich l, so dass sie die Gleichung hat: $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$. Es ist also

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 - l^2.$$

Ferner ist dann, wenn wir die positive z-Axe vertical nach abwärts ziehen,

$$X = Y = 0\,, \quad Z = mg$$

und die Bewegungsgleichungen 103) und 104) verwandeln sich in

115) $$m\frac{d^2 x}{d t^2} = 2\lambda x,\; m\frac{d^2 y}{d t^2} = 2\lambda y,\; m\frac{d^2 z}{d t^2} = 2\lambda z + mg.$$

Die Addition der mit $-y$ multiplicirten ersten und der mit x multiplicirten zweiten Gleichung liefert:

116) $$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k.$$

Die Addition der ersten, zweiten und dritten Gleichung, die erste mit $\frac{dx}{dt}$, die zweite mit $\frac{dy}{dt}$, die dritte mit $\frac{dz}{dt}$ multiplicirt aber liefert:

117) $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = H + 2gz;$$

denn da die Gleichung der Kugel zu jeder Zeit erfüllt sein muss, so folgt durch deren Differentiation:

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0.$$

H und k sind Integrationsconstanten.

Die beiden Gleichungen 116) und 117) sind übrigens selbstverständlich; denn erstere drückt das Flächenprincip bezüglich der z-Axe aus, welches weder durch die Schwere, noch durch die stets durch die z-Axe gehende Widerstandskraft der Kugel gestört werden kann, letztere ist der Ausdruck des Princips der lebendigen Kraft, dessen Gültigkeit ebenfalls durch die Widerstandskraft der Kugel nicht beeinträchtigt wird.

Wir führen Polarcoordinaten ein, indem wir setzen

118) $$x = l \sin w \cos \vartheta,\; y = l \sin w \sin \vartheta,\; z = l \cos w.$$

Dann verwandeln sich die Gleichungen 116) und 117) in

119) $$\begin{cases} l^2 \sin^2 w \dfrac{d\vartheta}{dt} = k, \\ l^2 \left(\dfrac{dw}{dt}\right)^2 + l^2 \sin^2 w \left(\dfrac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - 2gl\cos w = H. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann $d\vartheta$ eliminirt werden und man erhält zunächst t durch Quadraturen durch w ausgedrückt. Mittelst der ersten dieser Gleichungen kann dann auch ϑ durch Quadraturen als Function von w gefunden werden, genau so wie bei der Centralbewegung.

Falls sich das Bewegliche nur wenig von der Ruhelage entfernt, also w sehr klein ist, werden die Gleichungen sogar mit den für die Centralbewegung gefundenen völlig identisch. Setzen wir in diesem Falle

$$r = lw, \quad H + 2gl = h,$$

so erhalten wir:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = k, \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = h - \frac{g}{l} r^2.$$

Diese beiden Gleichungen stimmen genau mit den Gleichungen 36) und 37) des § 20, falls man in den letzteren setzt:

$$\varphi(r) = -\frac{mgr^2}{2l}.$$

Die Projection des materiellen Punktes auf die xy-Ebene bewegt sich daher genau so wie ein materieller Punkt, der mit der Kraft mgr/l gegen die Ruhelage gezogen wird. In der That überzeugt man sich leicht, dass die Componente des Gewichtes des materiellen Punktes in der Richtung tangential zur Kugelfläche angenähert diesen Werth hat, während die normal zur Kugelfläche von dem Widerstande derselben aufgehoben wird.

Wir sahen schon damals, dass die Bewegung in einer Ellipse geschieht, deren Mittelpunkt die Ruhelage ist und dass $\pi\sqrt{l/g}$ die Zeit ist, während welcher die Hälfte dieser Ellipse beschrieben wird. Man nennt diese Zeit die Schwingungsdauer des Pendels. Für beliebige, nicht kleine Werthe von w wollen wir nur den Fall behandeln, dass sich der materielle Punkt in einer verticalen Ebene bewegt, als welche man die xz-Ebene wählen kann; dann ist $\vartheta = 0$ und man erhält:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{H}{l^2} + \frac{2g}{l} \cos w,$$

woraus durch Differentiation folgt:

120) $$\frac{d^2 w}{d t^2} = -\frac{g}{l} \sin w.$$

Wenn überhaupt eine Bewegung möglich sein soll, so kann H nicht gleich $-2gl$ sein oder einen noch grösseren negativen Werth haben; es sind also drei Fälle möglich:

Erster Fall:

$$-2gl < H < +2gl.$$

Dann giebt es immer einen zwischen Null und π liegenden Winkel α, dessen Cosinus gleich $-H/2gl$ ist. Führt man diesen Winkel ein, so wird:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos w - \cos \alpha) = \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{w}{2}\right).$$

Da $\frac{dw}{dt}$ sein Zeichen nur wechseln kann, indem es durch Null geht, so muss w zwischen $+\alpha$ und $-\alpha$ hin- und herschwanken. Setzt man

$$\sin\frac{w}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi,$$

so folgt:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\, d\psi \left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Wenn α, also die Amplitude der Schwingungen, nicht allzu gross ist, so liefert die Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze immer eine gut convergirende Reihe, welche man ohne Weiteres integriren kann. Die Schwingungsdauer (Zeit, während welcher w von $-\alpha$ bis $+\alpha$ wächst), erhält man, wenn man zwischen diesen Grenzen, also von $\psi = -\frac{1}{2}\pi$ bis $\psi = +\frac{1}{2}\pi$ integrirt; sie ist also:

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\psi \left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Entwickelt man nach dem binomischen Lehrsatze und bedenkt, dass

$$2\sqrt{-1}\sin\psi = e^{\psi\sqrt{-1}} - e^{-\psi\sqrt{-1}},$$

daher

$$2^{2n}(-1)^n \sin^{2n}\psi = 2\binom{2n}{0}\cos 2n\psi - \\ - 2\binom{2n}{1}\cos(2n-2)\psi, \ldots (-1)^n\binom{2n}{n},$$

daher endlich:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\psi\, d\psi = \frac{\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n}(n!)^2}$$

ist, so folgt:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{a^2}{4} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.a^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}a^6\ldots\right),$$

wobei $a = \sin\frac{\alpha}{2}$ ist.

Zweiter Fall.

$$H = 2gl.$$

Dann folgt:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(1 + \cos w) = \frac{4g}{l}\cos^2\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\text{lognat.}\,\text{cotg}\left(\frac{\pi - w}{4}\right) + \text{const.}$$

Das Bewegliche nähert sich dann asymptotisch der Stelle, welche vertical über seiner Ruhelage liegt.

Dritter Fall. Es sei

$$H > 2gl.$$

Dann ist

$$dt = \sqrt{\frac{l}{H + 2gl}}\,dw\left(1 - \frac{4gl}{H + 2gl}\sin^2\frac{w}{2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

was man wieder nach dem binomischen Lehrsatze in eine stets convergirende Reihe entwickeln und dann integriren kann.

§ 41. Das Fadenpendel.

Die entwickelten Formeln gelten nur, wenn das Pendel die Kugelfläche nach keiner Seite hin verlassen kann. Als Prototyp der Bewegung beim Vorhandensein einer Ungleichung soll noch kurz der Fall betrachtet werden, wo ein schwerer materieller Punkt an einem unausdehnbaren, vollkommen biegsamen Faden von der Länge l befestigt ist, dessen anderes Ende fix ist, so dass er die bisher besprochene Kugelfläche nach innen beliebig verlassen kann. Die Bewegung geschieht dann genau nach den früher entwickelten Gesetzen, so lange der Faden auf Spannung beansprucht wird, d. h. die vom Beweglichen auf die Vorrichtung ausgeübte Kraft vom Mittelpunkte der Kugel hinweg, also von der Seite, wo $x^2 + y^2 + z^2 < l^2$ gegen die, wo $x^2 + y^2 + z^2 > l^2$ ist, hin gerichtet ist, d. h. also, so lange λ negativ ist. In dem Momente, wo λ durch Null zu einem positiven Werthe übergeht, müsste der Faden das Bewegliche vom Mittelpunkte der Kugel hinweg drücken, damit es auf der Kugelfläche bleibe und da dies nicht möglich ist, verlässt es diese und beschreibt innerhalb derselben die gewöhnliche Fallparabel.

Wir behandeln nur den Fall, dass sich das Bewegliche in einer Ebene bewegt, welche wir zur xz-Ebene wählen, dass also $y = \vartheta = 0$ ist. Die Gleichungen 115) und 118) liefern, wenn wir wieder die Winkelgeschwindigkeit dw/dt mit ω bezeichnen,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -z\frac{d\omega}{dt} - x\omega^2 = \frac{2\lambda x}{m},$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = x\frac{d\omega}{dt} - z\omega^2 = \frac{2\lambda z}{m} + g.$$

Die Addition der mit x multiplicirten ersten zu der mit z multiplicirten zweiten Gleichung liefert:

$$2l\lambda = -m\omega^2 l - \frac{mgz}{l}.$$

Dies ist die Inanspruchnahme des Fadens, so lange λ negativ ist, auf Zug, da die in Formel 111) mit σ bezeichnete Grösse in unserem Falle den Werth $2l$ hat. Man sieht auch sofort, dass das erste Glied die Centrifugalkraft, das zweite die Componente der Schwere in der Fadenrichtung ist. λ kann nur Null oder positiv werden für negative z also, wenn wir $-z = h$ setzen für positive h und zwar wird $\lambda = 0$ für:

121) $$h = \omega^2 l^2/g.$$

Wir wollen der zur Gleichung der lebendigen Kraft hinzutretenden Constante eine solche Form geben, dass diese Gleichung in der Gestalt

$$\text{122)} \qquad \frac{m l^2 \omega^2}{2} = m g (z + k)$$

erscheint. Dann ist also k die grösste Höhe über dem Kugelcentrum, bis zu welcher sich das Bewegliche vermöge der ihm innewohnenden lebendigen Kraft erheben kann und bis zu welcher es sich wirklich erhebt, falls es gezwungen ist, immer auf der Kugelfläche zu bleiben und nicht $k > l$ ist. Setzen wir in 122) wieder $z = -h$, so erhalten wir:

$$\frac{l^2 \omega^2}{g} = 2k - 2h.$$

Setzen wir hier h gleich der Höhe über dem Kugelmittelpunkte, bei welcher das Fadenpendel die Kugelfläche verlässt, so ist ω die Winkelgeschwindigkeit, bei welcher dies geschieht, hat also in der letzten Gleichung dieselbe Bedeutung wie in Gleichung 121) und es folgt aus beiden Gleichungen $h = 2k/3$. Das Fadenpendel kann also die Kugelfläche nur verlassen, wenn k positiv ist, d. h. wenn seine lebendige Kraft ausreicht, es über die durch den Kugelmittelpunkt gehende horizontale Ebene zu heben. Ist $0 < k < l$, so würde das Pendel, wenn es starr mit dem Kugelmittelpunkte verbunden wäre, in der Höhe k über der durch diesen gehenden Horizontalebene umkehren. Ist es aber durch einen biegsamen Faden verbunden, so verlässt er die Kugelfläche schon in der Höhe $2k/3$.

Ist $l < k < 3l/2$, so würde das Bewegliche im ersten Falle den ganzen Kreis beschreiben. Im zweiten Falle verlässt es ihn in der Höhe $2k/3$. Ist endlich $k \geqq 3l/2$, so verlässt das Bewegliche auch im zweiten Falle den Kreis nicht mehr. In den Fällen, wo das Bewegliche die Kugelfläche verlässt, folgt es der Fallparabel und trifft nach einiger Zeit die Kugelfläche wieder, aber nicht tangential, sondern unter einem gewissen Winkel. Dann hängt die Weiterbewegung davon ab, ob der Aufhängefaden des Pendels vollkommen elastisch oder theilweise oder ganz unelastisch ist, also von Fragen, deren Beantwortung in unseren bisherigen Gleichungen nicht enthalten ist.

§ 42. Punkt, der gezwungen ist, auf einer räumlichen Curve zu bleiben.

Wir betrachten nun einen materiellen Punkt, welcher gezwungen ist, auf einer bestimmten räumlichen Curve zu bleiben. Die übrigen Bezeichnungen sollen dieselben wie in § 37 sein. Die Curve aber soll durch die beiden Gleichungen

$$\varphi_1(x, y, z, t) = 0 \tag{123}$$

und

$$\varphi_2(x, y, z, t) = 0 \tag{124}$$

charakterisirt sein. Es gilt wieder die Gleichung 101). Dazu kommen aber in dem Falle der Entwickelbarkeit beider Functionen φ nach dem Taylor'schen Lehrsatze die beiden Gleichungen

$$\delta x \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \delta y \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \delta z \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0$$

und

$$\delta x \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \delta y \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \delta z \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0.$$

Wir können die erste dieser Bedingungen mit dem Factor $-\lambda_1$, die zweite mit dem Factor $-\lambda_2$ multiplicirt, zur Gleichung 101) addiren, ferner λ_1 und λ_2 so wählen, dass in der so erhaltenen Gleichung die Coefficienten von δx und δy verschwinden. Dann muss auch der von δz verschwinden, denn dieses ist ja willkürlich, da blos zwei Gleichungen zwischen den drei Coordinatenvariationen bestehen. Die zwei Gleichungen, welche die gewünschte Eigenschaft der λ ausdrücken, vereint mit der, welche das Verschwinden des Coefficienten von δz anzeigt, lauten:

$$\left\{\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{d t^2} &= X + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{d t^2} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{d y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \\ m \frac{d^2 z}{d t^2} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{125}$$

Diese drei Gleichungen verbunden mit den zwei Gleichungen 123) und 124) geben die fünf Gleichungen, welche zur Bestimmung der fünf Unbekannten x, y, z, λ_1, λ_2 erforderlich sind. Die Elimination von λ_1 und λ_2 liefert zwischen den Coordinaten allein die Gleichung

$$\text{126)} \qquad \begin{vmatrix} m\frac{d^2x}{dt^2} - X, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} - Y, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} - Z, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Der Widerstand, welchen die Vorrichtung auf den materiellen Punkt ausübt, kann als die Resultirende zweier Kräfte aufgefasst werden. Die erste hat in den Coordinatenrichtungen die Componenten $\lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$, $\lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$, $\lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$, steht also nach dem im § 38 Bewiesenen senkrecht auf der Fläche, welche die Gleichung 123) hat. Analog sind die Ausdrücke für die Componenten der zweiten Kraft, welche in Folge dessen auf der Fläche mit der Gleichung 124) senkrecht steht. Die Resultirende beider, d. h. der gesammte Widerstand der Curve muss also auf dieser, welche ja die Durchschnittslinie jener beiden Flächen ist, senkrecht stehen.

Die Bedingung des Gleichgewichts erhalten wir, indem wir die Beschleunigung gleich Null setzen. Das Verschwinden der Determinante, welche man so aus der Determinante 126) erhält, giebt die Bedingung, dass der Vector mit den Componenten $X, Y, Z,$ also die auf das Bewegliche wirkende äussere Kraft auf der Durchschnittslinie der beiden Flächen mit den Gleichungen 123) und 124) senkrecht steht.

§ 43. Methode der Multiplicatoren, wenn beliebige Bedingungsgleichungen zwischen beliebigen Punkten bestehen.

Es hat nun keine Schwierigkeit, die Methode der unbestimmten Multiplicatoren auf den allgemeinen Fall anzuwenden, dass ein beliebiges materielles System beliebigen Bedingungen unterworfen ist. Sei zunächst das System holonom und die Bedingungen durch Gleichungen ausgedrückt, dann können dieselben unter Beibehaltung der Bezeichnungen der §§ 34 und 35 in die Form gebracht werden:

$$127)\qquad \varphi_l(t, x_1, y_1, \ldots z_n) = 0, \quad l = 1, 2 \ldots \sigma,$$

wobei $\sigma < 3n$ sein muss, da sonst alle Coordinaten durch die Bedingungen bestimmt, also bis auf singuläre Fälle keine Bewegung möglich wäre. Die Functionen φ sollen nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickelbar sein.

In Relation 93) gilt dann das Gleichheitszeichen. Dazu treten die Bedingungen:

$$128)\quad \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_n}\delta z_n = 0, \quad l = 1, 2 \ldots \sigma.$$

Man multiplicirt nun die erste dieser Bedingungsgleichungen mit $-\lambda_1$, die zweite mit $-\lambda_2 \ldots$, addirt alle zur Relation 93) und wählt dann sämmtliche λ so, dass die Coefficienten von σ der Variationen verschwinden. Da gerade σ der Variationen durch die Bedingungsgleichungen bestimmt, die übrigen aber voneinander unabhängig sind, so müssen auch die Coefficienten aller übrigen Variationen verschwinden und man erhält die Bedingungsgleichungen in der Form:

$$129)\quad m_h \frac{d^2 x_h}{d t^2} = X_h + \sum_{l=1}^{l=\sigma} \lambda_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_h}, \quad h = 1, 2 \ldots n$$

mit zwei analogen Gleichungen für die beiden übrigen Coordinatenaxen. Die Elimination der λ liefert die Bedingung, dass die Determinante von je $\sigma + 1$ Horizontalreihen der nachfolgenden Tabelle 130) verschwinden muss, was im Ganzen $3n - \sigma$ voneinander unabhängige Gleichungen liefert, welche wir, ohne sie hinzuschreiben, die Gleichungen 131) nennen wollen:

$$130)\qquad \left\{\begin{array}{l} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{d t^2} - X_1, \ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_1} \\ m_1 \dfrac{d^2 y_1}{d t^2} - Y_1, \ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}, \ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \ldots \dfrac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ m_n \dfrac{d^2 z_n}{d t^2} - Z_n, \ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_n}, \ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z_n} \ldots \dfrac{\partial \varphi_\sigma}{\partial z_n}. \end{array}\right.$$

Ist das System nicht holonom, haben also einige der Bedingungsgleichungen die Form 78), so ändert sich hieran nichts, als dass an Stelle der partiellen Ableitungen der betreffenden Functionen φ die Grössen $\xi_1, \eta_1 \ldots \zeta_n$ treten.

Hiermit sind die Bewegungsgleichungen in dem allgemeinsten Falle, wo ein System beliebiger materieller Punkte beliebigen holonomen oder nicht holonomen Bedingungen unterworfen ist, gefunden, sobald dieselben durch lauter Gleichungen ausgedrückt werden können, also darunter keine durch eine Ungleichung dargestellt wird.

Wenn sich aus den Bedingungen 78) σ der Coordinatendifferentiale bestimmen lassen, so können immer auch aus den Gleichungen 131) $3n - \sigma$ der Beschleunigungen gefunden werden. Wenn der Fall, dass durch die Bedingungen 78) nicht σ der Coordinatendifferentiale bestimmt sind, für ein endliches Werthegebiet der Variabeln eintritt, so sind nicht alle Bedingungsgleichungen voneinander verschieden.[1] Diese müssen also auf weniger reducirt werden. Für einzelne singuläre Werthe dagegen kann dieser Fall allerdings eintreten, z. B. wenn zwischen den Coordinaten eines einzigen materiellen Punktes eine einzige Gleichung $\varphi(x, y, z, t) = 0$ besteht und alle partiellen Differentialquotienten des φ nach den Coordinaten verschwinden oder wenn zwischen denselben Coordinaten zwei Gleichungen $\varphi(x, y, z, t) = 0$ und $\psi(x, y, z, t) = 0$ bestehen und für gewisse Werthe von x, y, z und t die beiden durch diese Gleichungen dargestellten Flächen dieselbe Tangentialebene haben. Dann können aus dem Princip der virtuellen Verschiebungen aber mehr als $3n - \sigma$ Beschleunigungen bestimmbar sein. Alle diese Fälle, sowie die, dass einzelne der Coefficienten ξ, η, ζ der Gleichungen 78) unendlich oder unbestimmt werden oder die

---

[1]) Die bekannte analytische Bedingung dafür, dass von den Gleichungen $\varphi_1 = \varphi_2 \ldots \varphi_\sigma = 0$ nicht alle voneinander unabhängig sind, ist ja, dass diejenigen Determinanten der Ausdrücke 130), welche die Coefficienten der Beschleunigungen in einer der Gleichungen 131) darstellen, sämmtlich verschwinden. Dann reducirt sich in der That eine der letzteren Gleichungen identisch auf Null und ist zur Bestimmung der Beschleunigungen ungeeignet.

Bedingungsgleichungen eine noch complicirtere Form annehmen, bedürfen natürlich einer besonderen Untersuchung und es würde uns zu weit führen, alle hier möglichen Fälle eingehend zu erörtern. Wie schon bei der Bewegung eines materiellen Punktes beim Vorhandensein einer Bedingungsgleichung (Anfang des § 39), so kann auch hier wieder sogar der Fall eintreten, dass die Aufgabe durch die geometrischen Bedingungen des Systems überhaupt nicht eindeutig bestimmt ist, z. B. wenn ein materieller Punkt gezwungen wäre, auf einer Curve zu bleiben, welche sich in zwei oder mehrere Aeste theilt, die sich am Verzweigungspunkte osculiren, also daselbst eine Berührung von der zweiten oder noch höheren Ordnung haben. Allein derartige Mehrdeutigkeiten sind nicht von praktischer Bedeutung, da sie niemals eintreten können, wenn die Bedingungen in der von uns vorausgesetzten Weise durch eine endliche, wenn auch sehr grosse Zahl von noch so plötzlich sich ändernden Verbindungskräften hergestellt werden. Sie können also nur durch den Grenzübergang zu einer unendlichen Zahl materieller Punkte entstanden sein.

Wir werden den Fall, dass auch beliebige Bedingungen vorhanden sind, die durch Ungleichheitszeichen ausgedrückt werden, erst im § 74 behandeln und uns früher mit einem wichtigen speciellen Falle beschäftigen.

V. Anwendung auf feste Körper.

§ 44. Bestimmung der Lage eines festen Körpers.

Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen für einen einzigen starren Körper, d. h. für ein System materieller Punkte entwickeln, welche so verbunden sind, dass sich während ihrer ganzen Bewegung ihre relative Lage nicht ändern kann, genauer gesprochen, dass jede sehr kleine Aenderung der relativen Lage so grosse innere Kräfte wachruft, dass nie eine merkliche Aenderung der relativen Lage Platz greifen kann, wenn die äusseren Kräfte unter einer gewissen Grenze liegen (vergl. Anfang des § 32, der Körper ist fest für unter dieser Grenze liegende äussere Kräfte). Um auszudrücken, dass es absolut starre Körper nicht giebt, wollen wir den Körper immer einen festen nennen, obwohl wir ihn geometrisch so betrachten, als ob er absolut starr wäre.

Die Lage eines gegebenen festen Körpers im Raume ist durch die dreier Punkte desselben A, B, C, welche nicht in einer Geraden liegen, eindeutig bestimmt. Da der feste Körper gegeben ist, ist die Entfernung jedes anderen Massenpunktes desselben von jedem dieser drei Punkte gegeben und es ist auch gegeben, auf welcher Seite der Ebene der drei Punkte der andere Massenpunkt liegt, wenn er nicht in dieser Ebene liegt. Dadurch ist aber die Lage jedes anderen Massenpunktes gegeben. Es ist dabei nicht einmal nothwendig, dass die Punkte wirklich dem Körper angehören, einer, zwei oder alle drei können auch ausserhalb desselben liegen, wenn nur ihre relative Lage gegen den Körper unveränderlich gegeben ist, dessen sämmtliche Punkte ebenfalls gegebene unveränderliche Lage gegeneinander haben. Wenn die Lage dieser drei Punkte im Raume gegeben ist, so ist dadurch die Lage sämmtlicher materieller Punkte des Körpers bestimmt.

Wir können uns, um dies und ähnliche Sätze nicht fortwährend wiederholen zu müssen, unendlich viele, den ganzen Raum erfüllende Punkte starr mit dem Körper verbunden und sich mit demselben im Raume bewegt denken. Den Inbegriff dieser Punkte nennen wir den erweiterten festen Körper, nur in wenigen dieser Raumpunkte wird sich wirklich Materie befinden.

Zur Bestimmung der Lage des ersten Punktes A, welcher die Position des festen Körpers bestimmt, sind drei Variable (Coordinaten) erforderlich. Zur Bestimmung der Lage des zweiten Punktes B nur noch zwei, da die Entfernung AB gegeben ist. Zur Bestimmung der Lage des dritten Massenpunktes C ist nur noch eine Variable erforderlich, da dessen Entfernung von A und B dadurch gegeben ist, dass der feste Körper, d. h. die relative Lage aller seiner Massenpunkte gegeben ist. Der dritte Punkt muss daher in einem Kreise liegen, dessen Ebene senkrecht zur Geraden AB und dessen Radius der gegebene Abstand des Punktes von dieser Geraden ist.

Im Ganzen genügen also sechs Variable zur Bestimmung der Lage eines beliebigen festen Körpers. Ausgenommen davon sind die Grenzfälle, wo alle materiellen Punkte des festen Körpers in einer Geraden liegen oder wo dieser aus einem einzigen materiellen Punkte besteht. Dann genügen fünf resp. drei Variable. Doch wollen wir diese Grenzfälle im Allgemeinen von unseren Betrachtungen ausschliessen.

Da zwischen den materiellen Punkten des Körpers keine anderen Kräfte als die Verbindungskräfte wirken, so sind die expliciten Kräfte mit den von aussen auf den festen Körper wirkenden Kräften (den äusseren Kräften) identisch. Es sind also die Kräfte, deren Componenten in den Formeln 63) bis 70) mit $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$, $\mathfrak{Z}_h$ bezeichnet wurden, mit denen, deren Componenten in den Formeln 81) bis 95) mit X_h, Y_h, Z_h bezeichnet wurden, identisch. Es werden jedenfalls die sechs Gleichungen 66) und 70) der §§ 27 und 29 gelten, welche also zur Berechnung der sechs die Lage des festen Körpers bestimmenden Variabeln ausreichen, so dass wir die Grundgleichungen schon besitzen.

§ 45. Parallelverschiebung und Drehung eines festen Körpers.

Um uns aber die zweckmässigste Wahl der sechs Variabeln zu erleichtern, ist es nothwendig, in die Geometrie der Bewegung eines festen Körpers näher einzugehen. Dabei bietet sich uns zugleich eine neue Ableitung der Gleichungen 66) und 70) aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten. Wenn jeder Punkt eines festen Körpers um eine gleich lange, gleich gerichtete Strecke verschoben wird, so ändert sich dabei die relative Lage sämmtlicher Punkte offenbar nicht. Eine solche Bewegung ist also jedenfalls eine mögliche Bewegung des festen Körpers. Sie heisse eine Parallelverschiebung desselben.

Wenn bei einer Verschiebung eines festen Körpers zwei ihm angehörende oder fest mit ihm verbunden gedachte Punkte A und B ihre Lage im Raume nicht ändern, so können auch alle in der Geraden AB liegenden, mit dem Körper fest verbunden gedachten Punkte ihre Lage nicht ändern, da sie sonst ihre Entfernung mindestens von einem der Punkte A oder B ändern müssten. Ein nicht auf der Geraden AB liegender Punkt des Körpers kann, da seine Entfernung von A und B unveränderlich ist, nur einen Bogen eines Kreises beschreiben, dessen Ebene senkrecht auf AB steht und dessen Mittelpunkt auf AB liegt. Da endlich auch die Entfernungen aller übrigen Punkte voneinander gleich bleiben müssen, so muss der Centriwinkel, welchem dieser Bogen gegenüber liegt, für alle Punkte des Körpers derselbe sein und alle Punkte müssen den Bogen auch in gleichem Sinne beschreiben. Die so definirte Bewegung eines festen Körpers, welche die einzig mögliche ist, wenn zwei Punkte desselben ihre Lage nicht ändern, heisst eine Drehung desselben. Die gerade Verbindungslinie der beiden in Ruhe bleibenden Punkte heisst die Drehungsaxe, der betreffende Centriwinkel der Drehungswinkel, wobei wir aber vorläufig nur die Anfangs- und Endlage, nicht den ganzen Process des Ueberganges ins Auge fassen.

Die Darstellung einer Parallelverschiebung durch einen Vector, d. h. durch eine Gerade von bestimmter Länge und Richtung bedarf keiner Erläuterung. Jede Gerade, welche die gleiche Länge und gleiche Richtung wie die Verschiebung irgend eines Punktes des Körpers hat, kann als solcher Vector dienen. Aber auch die Drehung eines Körpers kann durch einen Vector dargestellt werden, dessen Anfangspunkt jedoch nicht beliebig ist, sondern mit einem Punkte der Drehungsaxe zusammenfallen muss. Die Richtung des Vectors muss die Richtung der Drehungsaxe angeben. Die Grösse des Vectors muss proportional dem positiv vorausgesetzten Drehungswinkel w, also etwa gleich Γw sein, wobei Γ eine beliebige, aber für alle Drehungen gleich anzunehmende Länge ist.

Um durch den Sinn, in welchem der Vector von seinem Anfangspunkte aus gezogen ist, auch den Sinn der Drehung auszudrücken, soll die Richtung des Vectors immer so gewählt werden, dass die Drehung um ihn als Axe im positiven Sinne geschieht, dass sich also seine Richtung zur Drehungsrichtung so verhält, wie die der positiven z-Axe zur Drehung von der positiven x- auf kürzestem Wege zur positiven y-Axe. Wenn wir daher vom französischen Coordinatensystem Gebrauch machen, so soll für ein Auge, welches von dort herblickt, wohin der Vector zeigt, die Drehung im Sinne des Uhrzeigers geschehen.

Ist N der Abstand irgend eines Punktes des Körpers von der Drehungsaxe, w der Drehungswinkel und V der Vector, der die Drehung darstellt, so ist der Bogen, welchen der betreffende materielle Punkt beschreiben würde, wenn sich der Körper continuirlich aus der Anfangslage in die Endlage drehen würde:

132) $$Nw = NV/\Gamma,$$

wobei es natürlich ebenfalls gleichgültig ist, ob der betreffende Punkt wirklich dem Körper angehört oder blos starr damit verbunden gedacht wird. Die Punkte der Axe erfahren, wie schon bemerkt, keine Lagenänderung. Dieselbe kann auch ganz ausserhalb des Körpers liegen, muss aber dann starr mit demselben verbunden gedacht werden.

§ 46. Allgemeinste Verschiebung eines festen Körpers.

Jeder feste Körper kann aus jeder Lage in jede andere durch eine Parallelverschiebung und zwei Drehungen um zwei Axen gebracht werden, welche durch einen beliebig gegebenen Punkt des Raumes oder des Körpers gehen. In speciellen Fällen kann natürlich die Parallelverschiebung oder die Drehung verschwinden, d. h. wegzufallen haben. Wenn beide Drehungen wegfallen, wenn also der Körper von der ersten Lage in die zweite durch eine blosse Parallelverschiebung übergeführt werden kann, nennt man die zweite Lage eine Translation der ersten. Eine Bewegung eines festen Körpers, wobei jede Lage eine Translation der ersten ist, nennt man eine Translationsbewegung. Dabei kann ein Punkt des Körpers noch eine beliebige Bahn beschreiben.

Sei A' der Punkt des Raumes, durch welchen die beiden Drehungsaxen gehen sollen. Derjenige Punkt a des festen Körpers, der sich in der Endlage in A' befindet, soll sich in der Anfangslage des Körpers in A befunden haben. Wir denken uns dabei den festen Körper immer in dem Sinne, wie wir dies früher definirt haben, erweitert, also den Punkt, welcher sich in der Anfangslage in A, in der Endlage in A' befindet, falls er nicht wirklich dem Körper angehört, mit diesem fest verbunden.

Wir betrachten nun den Körper zunächst in seiner Anfangslage und ertheilen ihm zuvörderst die Parallelverschiebung AA', welche natürlich wegfiele, wenn die Punkte A und A' zusammenfallen. Dabei schreiten alle Punkte des Körpers in derselben Richtung um das Stück AA' fort, der Punkt a des Körpers kommt also von A nach A'. Irgend ein anderer, dem festen Körper angehöriger oder in Gedanken damit starr verbundener Punkt b, welcher in der Anfangslage des Körpers in B war, komme durch jene Parallelverschiebung allein nach B''. In der Endlage des festen Körpers wird er sich im Allgemeinen nicht in B'', sondern in B' befinden, wobei aber $A'B' = A'B''$ sein muss, da die Punkte a und b fest verbunden sind. Man drehe nun den Körper um eine durch A' gehende, auf der Ebene $B'A'B''$ senkrechte Axe um einen solchen Winkel, dass der Punkt b des Körpers von B'' nach B' gelangt. Da die Axe durch den Punkt A' geht, so verändert letzterer dabei seine Lage nicht weiter; es wurden also schon die beiden Punkte a und b des Körpers in diejenige Lage gebracht, die sie in dessen Endlage haben müssen. Wenn der Punkt b schon nach der Parallelverschiebung dort war, wo er sich in der Endlage des Körpers befinden soll, so entfällt natürlich wieder diese Drehung.

Ein dritter Punkt c, der dem starren Körper angehört oder fest damit verbunden zu denken ist und der nicht mit den Punkten a und b in derselben Geraden liegen soll, sei in der Anfangslage des Körpers in C gewesen, durch die

Parallelverschiebung AA' nach C''', durch die erste Drehung nach C'' gelangt, während er in der definitiven Endlage des Körpers in C' sein soll. Man denke sich nun den Körper, nachdem er schon die Parallelverschiebung AA' und die erste Drehung erfahren hat, um eine Axe, welche durch die beiden Punkte A' und B' geht, um einen solchen Winkel gedreht, dass auch der Punkt c von C'' nach C' übergeführt wird. Nun sind drei Punkte des starren Körpers, die nicht in einer Geraden liegen, an diejenigen Stellen gelangt, welche sie in der Endlage des Körpers einnehmen müssen, folglich ist der ganze Körper in seine Endlage übergeführt worden, da dessen Lage durch die dieser drei Punkte bestimmt ist.

Wenn also Anfangslage und Endlage gegeben sind, so können wir immer eine gewisse Parallelverschiebung und zwei Drehungen um zwei durch einen beliebig gegebenen Punkt gehende Axen finden, welche den festen Körper aus der gegebenen Anfangslage in die gegebene Endlage überführen. Falls der Punkt C'' ohnedies schon mit C' zusammenfiele, würde die dritte Drehung in Wegfall kommen.

§ 47. Zusammensetzung zweier Drehungen.

Wenn ein fester Körper nacheinander zwei Drehungen um zwei Axen erfährt, die sich in einem Punkte schneiden, so kann die gesammte Lagenänderung, welche er dadurch erhält, immer durch eine einzige Drehung um eine andere, ebenfalls durch diesen Punkt gehende Axe ersetzt werden. Sei A der Punkt, wo sich die beiden Axen schneiden. Wir construiren um A als Mittelpunkt eine Kugelfläche vom Radius 1. Dieselbe werde von den beiden gegebenen Drehungsaxen in den Punkten B_1 und B_2 durchstochen. w_1 und w_2 seien die beiden Winkel, um welche der Körper nacheinander um diese Axen gedreht werden soll. Wir construiren auf der Kugel mit dem Radius 1 die beiden grössten Kreise K_1 und K_2, welche durch B_1 gehen und mit dem grössten Kreise $B_1 B_2$ nach der einen und der anderen Seite hin den Winkel $\frac{1}{2} w_1$ bilden. Von dem Bogen $B_1 B_2$ komme man nach K_2 auf kürzestem Wege im Sinne der Drehung, die der feste Körper um die Axe AB_1 macht, nach K_1 im entgegengesetzten Sinne (Fig. 14). Ebenso construiren wir die beiden grössten Kreise K_3 und K_4, welche beide durch B_2 gehen und den Winkel $\frac{1}{2} w_2$ mit $B_2 B_1$ einschliessen, so dass man wieder von $B_2 B_1$ nach K_3 auf kürzestem Wege so gelangt, wie sich der Körper um die Axe $A B_2$ dreht. Es seien C_1 und C_2 diejenigen Durchschnittspunkte der grössten Kreise K_1 und K_3 resp. K_2 und K_4, welche den Punkten B_1 und B_2 am nächsten liegen. Derjenige Punkt des festen Körpers, welcher sich anfangs in C_1 befand, wird durch die Drehung, welche der Körper um die Axe $A B_1$ erfährt, nach C_2, durch die darauffolgende Drehung um $A B_2$ aber wieder nach C_1 zurückgeführt und da auch der Punkt A durch beide Drehungen keine Lagenänderung erfährt, so kann die gesammte durch beide Drehungen erzeugte Lagenänderung jedenfalls auch durch eine einzige Drehung um die Axe $A C_1$ erzeugt werden, welche wir die resultirende der beiden ursprünglich gegebenen Drehungen nennen wollen. Die Grösse des entsprechenden Drehungswinkels kann leicht gefunden werden. Der Punkt des festen Körpers, welcher anfangs in B_1 lag, erfährt durch die erste Drehung keine Lagenänderung. Durch die zweite um die Axe $A B_2$ soll er den Bogen $B_1 B_3$, dessen Halbirungspunkt H sei, beschreiben. Durch die resultirende Drehung muss dieser Punkt des festen Körpers ebenfalls nach B_3 übergeführt werden. Es muss also der Winkel

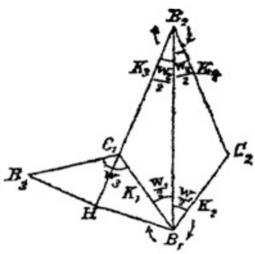

Fig. 14.

$$w_3 = B_1 C_1 B_3 = 2 B_1 C_1 H$$

der Drehungswinkel der resultirenden Drehung sein. Man sieht, dass durch diese resultirende Drehung die drei Punkte des festen Körpers, welche sich anfangs in C_1 und B_1 und im Kugelmittelpunkte A befanden und welche wir, falls sie nicht dem Körper selbst angehören, mit diesem starr verbunden denken können, in dieselben Lagen übergeführt werden, als ob der Körper zuerst die gegebene Drehung um die Axe $A B_1$, dann die um die Axe $A B_2$ machte, womit bewiesen ist, dass der Körper durch die resultirende Drehung allein genau in dieselbe schliessliche Lage übergeführt wird, wie durch die beiden gegebenen Drehungen, welche wir die zusammensetzenden Drehungen oder die Componenten nennen wollen.

Aus dem sphärischen Dreiecke $B_1 B_2 C_1$ finden wir:

$$\sin(B_1 A C_1) : \sin(B_2 A C_1) = \sin\frac{w_2}{2} : \sin\frac{w_1}{2}$$

und

$$\cos\frac{w_3}{2} = \cos\frac{w_1}{2}\cos\frac{w_2}{2} - \sin\frac{w_1}{2}\sin\frac{w_2}{2}\cos(B_1 A B_2).$$

Mit Rücksicht hierauf lassen sich die beiden Drehungen des Lehrsatzes des § 46 immer durch eine einzige ersetzen. Dieser Lehrsatz kann daher auch so ausgesprochen werden: Jeder feste Körper kann aus jeder gegebenen Lage in jede andere durch eine passend gewählte Parallelverschiebung und eine einzige Drehung übergeführt werden. Dabei kann noch ein Punkt vorgeschrieben werden, durch welchen die Drehungsaxe gehen muss. Ihre Lage im Raume und der Drehungswinkel sind aber dann bestimmt.

§ 48. **Die Drehungen sind unendlich klein.**

Die Formeln für die Lage der Axe und Grösse des Winkels der resultirenden Drehung vereinfachen sich, wenn die beiden Drehungswinkel w_1 und w_2 der ursprünglich gegebenen Drehungen sehr klein sind. Dann fällt die Axe $A C_1$ in die Ebene der beiden anderen Drehungsaxen AB_1 und AB_2. Ferner wird dann

$$\sin(B_1 A C_1) : \sin(B_2 A C_1) = w_2 : w_1$$

und

$$w_3^2 = w_1^2 + w_2^2 + 2 w_1 w_2 \cos(B_1 A B_2).$$

Stellt man sich jetzt die drei Drehungen durch Vectoren dar, indem man vom Punkte A aus auf der Axe $A B_1$ eine Strecke von der Länge Γw_1, auf der Axe $A B_2$ eine Strecke von der Länge Γw_2, auf der Axe $A C_1$ eine Strecke von der Länge Γw_3 aufträgt, so sieht man, dass der Vector, welcher die resultirende Drehung darstellt, aus den Vectoren, welche die Componenten darstellen, durch dieselbe Construction gefunden wird wie die Resultirende aus zwei gegebenen Kräften.[1]) Es ist dann auch gleichgültig, welche der beiden zusammensetzenden Drehungen früher und welche nachher erfolgt, während dies bei endlichen Drehungen für die Lage der resultirenden Drehungsaxe nicht gleichgültig ist. Bei endlichen Drehungen ist ferner nur bei gegebener Anfangsposition die Endposition, welche der Körper in Folge

[1]) Man führt für sehr kleine Drehungen diesen Beweis einfacher so. In Fig. 15 soll AB_1CB_2 ein Parallelogramm sein. Ferner seien CD, CE, B_1G und B_1F senkrecht auf AB_1, AB_2, AC und AB_2 resp. Es sollen nun die drei Vectoren AB_1, AB_2, AC der Fig. 15 drei unendlich kleine Drehungen eines beliebigen festen Körpers um die betreffenden Axen im Sinne der den Scheibchen beigesetzten Pfeile darstellen. $w_1 = \Gamma . AB_1$, $w_2 = \Gamma . AB_2$, $w_3 = \Gamma . AC$ seien die entsprechenden Drehungswinkel. Der Punkt A des festen Körpers erfährt in Folge aller drei Drehungen keine Verschiebung. Der Punkt C erfährt in Folge der ersten Drehung die unendlich kleine Verschiebung $w_1 . CD = \Gamma . AB_1 . CD$ hinter die Ebene der Zeichnung, in Folge der zweiten Drehung die Verschiebung $w_2 . CE = \Gamma . AB_2 . CE$ vor die Ebene der Zeichnung, beide senkrecht zu dieser Ebene. Da, wie man leicht beweist, diese beiden Grössen gleich sind, so erfährt er in

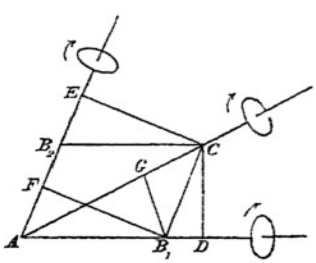

Fig. 15.

Folge der beiden Drehungen zusammen keine Verschiebung, also dieselbe, die er durch die Drehung AC allein erfahren würde. Der Punkt B_1 endlich erfährt durch die erste Drehung keine Verschiebung, durch die zweite die Verschiebung $w_2 . B_1F = \Gamma . AB_2 . B_1F$, in Folge der dritten die Verschiebung $w_3 . B_1G = \Gamma . AC . B_1G$, beide senkrecht zur Zeichnungsebene vor dieselbe. Aus der Gleichheit der beiden Dreiecke AB_2B_1 und ACB_1, welche beide halb so gross als das Parallelogramm AB_1CB_2 sind, folgt die Gleichheit dieser beiden Verschiebungen, da der Flächeninhalt des ersten Dreiecks gleich $AB_2 . B_1F$, der des zweiten gleich $AC . B_1G$ ist. Es erfahren daher alle drei Punkte A, C und B_1 und daher auch der ganze Körper in Folge der Drehung AC dieselbe Lagenänderung wie in Folge der beiden Drehungen AB_1 und AB_2 zusammen. Der letztere Schluss würde hinfällig, wenn die drei Punkte A, B_1, B_2 in dieselbe Gerade fielen. Doch überzeugt man sich leicht, dass der Lehrsatz auch dann richtig ist, da sich dann die Drehungen einfach addiren oder subtrahiren.

der resultirenden Drehung annimmt, gleich der, welche er annimmt, wenn er zuerst die erste, dann die zweite der zusammensetzenden Drehungen erfährt. Bei unendlich kleinen Drehungen dagegen ist die resultirende Drehung fortwährend den Componenten äquivalent; genauer gesprochen: Wenn sich der Körper zuerst um $\frac{1}{n}$ des Winkels w_1 um die Axe AB_1, dann um $\frac{1}{n}$ des Winkels w_2 um die Axe AB_2 dreht, so erfährt er bis auf unendlich Kleines zweiter Ordnung wiederum dieselbe Lagenänderung, als wenn er sich um $\frac{1}{n}$ des Winkels w_3 um die Axe AC_1 dreht und dasselbe gilt, wenn er sich abermals um $\frac{1}{n}$ dieser Winkel dreht, bis die ganzen Winkel beschrieben sind.

Alle Sätze über Zerlegung und Zusammensetzung von Kräften folgen aus dem Satze vom Kräftenparallelogramme und sind daher unverändert auf unendlich kleine Drehungen anwendbar, wenn letztere in der geschilderten Weise durch Vectoren dargestellt werden. Man kann beliebig viele unendlich kleine Drehungen um Axen, die sich in einem Punkte schneiden, zu einer einzigen Resultirenden zusammensetzen oder eine Drehung in beliebig viele Componenten um derartige Axen zerlegen. Unter anderen kann man eine beliebige unendlich kleine Drehung um eine Axe, die durch den Coordinatenursprung geht, in drei zusammensetzende Drehungen um die drei Coordinatenaxen zerlegen, wobei die Pfeile, welche die Drehungen darstellen, so gefunden werden, als ob sie Kräfte darstellten.

§ 49. Allgemeine Bewegungsgleichungen für einen festen Körper.

Nach dem Gesagten ist es ein Leichtes, die analytische Form für die virtuelle Verschiebung eines festen Körpers zu finden, dessen Theile sonst keiner Bedingung unterworfen sind, als dass sie sämmtlich starr verbunden sind. Wir können jede beliebige unendlich kleine Verschiebung des Körpers erzeugen durch eine Parallelverschiebung und eine

Drehung um eine Axe, die durch den Coordinatenursprung geht. Die Parallelverschiebung können wir in drei Verschiebungen nach den drei Coordinatenrichtungen um die Stücke $\delta\xi$ resp. $\delta\eta$, $\delta\zeta$ zerlegen, die Drehung in drei zusammensetzende Drehungen um die drei Coordinatenaxen um die Winkel $\delta\alpha$ resp. $\delta\beta$ und $\delta\gamma$. Diese sechs Grössen

133) $$\delta\xi,\ \delta\eta,\ \delta\zeta,\ \delta\alpha,\ \delta\beta,\ \delta\gamma$$

können offenbar ganz unabhängig voneinander ganz beliebige Werthe haben.

Den Coefficienten von $\delta\xi$ im Ausdrucke 93) finden wir, indem wir alle übrigen der Grössen 133) gleich Null setzen. Es werden dann die Variationen der x-Coordinaten für alle Punkte untereinander gleich und gleich $\delta\xi$, alle anderen Coordinatenvariationen aber gleich Null. Die linke Seite des Ausdruckes 93) verwandelt sich daher in:

$$\delta\xi\sum_{h=1}^{h=n}\left(m_h\frac{d^2x_h}{dt^2}-X_h\right).$$

Der Coefficient von $\delta\xi$ muss verschwinden, da die sechs Variabeln 133) vollkommen voneinander unabhängig sind. Daher folgt:

$$\sum_{h=1}^{h=n}m_h\frac{d^2x_h}{dt^2}=\sum_{h=1}^{h=n}X_h,$$

was mit der ersten der Gleichungen 64) identisch ist.

Ebenso folgen die entsprechenden, auf die anderen Coordinatenaxen Bezug habenden Gleichungen.

Häufig, besonders wenn nach mehreren Indices zu summiren ist, entstehen leicht Verwirrungen, wenn man nicht jede Grösse, die in den verschiedenen Gliedern der Summe einen verschiedenen Werth hat, durch einen angehängten Index bezeichnet. Hier ist jedoch die Sache so einfach, dass wir künftig den Index h und die Grenzwerthe über und unter dem Summenzeichen weglassen wollen, ohne einen Irrthum zu befürchten, wie die Summe zu bilden ist.

Dazu kommt noch folgender Umstand: Es kann sein, dass auf diejenigen materiellen Punkte des Körpers keine äusseren Kraft wirkt, welche gerade dessen Hauptmasse ausmachen. Andererseits können die Punkte, auf welche die äusseren Kräfte wirken, durch Stangen von verhältnissmässig kleiner Masse mit dem Körper verbunden sein, was zur Fiction führt, dass sie durch massenlose Vorrichtungen starr damit verbunden sind, dass also die Massenpunkte des Körpers andere als die Angriffspunkte der Kräfte sind. Dann ist es oft bequemer, die Summation nach den Massen nur über die ersteren, die über die Kräfte nur über die letzteren Punkte zu erstrecken, obwohl man auch dann beide Summen über alle Punkte erstrecken und für die ersteren einfach die Kräfte, für die letzteren die Massen gleich Null setzen kann. Wir schreiben also statt der letzten Formel einfach

134) $$\sum m \frac{d^2 x}{d t^2} = \sum X.$$

Um den Coefficienten von $\delta\alpha$ im Ausdrucke 93) zu finden, haben wir wieder alle anderen der Grössen 133) bis auf $\delta\alpha$ gleich Null zu setzen und die in diesem Falle auftretenden Zuwächse der Coordinaten der verschiedenen Punkte des Körpers zu bestimmen. Diese Coordinatenzuwächse sind diejenigen, welche eintreten, wenn der Körper keine andere Lagenänderung als eine Drehung um den unendlich kleinen Winkel $\delta\alpha$ um die Abscissenaxe in dem Sinne erfährt, in dem man auf kürzestem Wege von der positiven y- zur positiven z-Axe gelangt. Dabei beschreibt ein Punkt, der die Coordinaten x, y, z hat und sich in der Entfernung r von der Abscissenaxe befindet, einen unendlich kleinen Kreisbogen von der Länge $r\,\delta\alpha$, der senkrecht auf der Geraden r steht. Die Projectionen dieses Bogens auf die drei Coordinatenrichtungen sind daher: Null, $-z\,\delta\alpha$, $y\,\delta\alpha$. Die Veränderungen der Coordinaten des in Rede stehenden Punktes sind daher

135) $$\delta x = 0\,, \quad \delta y = -z\,\delta\alpha\,, \quad \delta z = y\,\delta\alpha.$$

Durch Substitution dieser Werthe geht die linke Seite der Relation 93) über in:

$$\delta\alpha \sum \left[m \left(y \frac{d^2 z}{d t^2} - z \frac{d^2 y}{d^2 t} \right) + z\,Y - y\,Z \right].$$

Hier muss wieder der Coefficient von $\delta\alpha$ verschwinden, wodurch sich die mit der Gleichung 70) identische Gleichung:

$$136)\qquad \frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\sum(yZ-zY)$$

ergiebt. Die sechs Gleichungen, welche man erhält, wenn man zu den Gleichungen 134) und 136) die analogen für die y- und z-Axe hinzufügt, sind also nothwendig und hinreichend, um die sechs zur Bestimmung der Lage eines festen Körpers erforderlichen Variabeln als Functionen der Zeit zu finden, wenn die Anfangswerthe der Variabeln selbst und ihrer Differentialquotienten nach der Zeit, sowie die äusseren Kräfte gegeben sind. Die letzteren kommen nur in den sechs Ausdrücken

$$137)\qquad \begin{cases} A=\sum X, \quad B=\sum Y, \quad C=\sum Z, \\ D=\sum(yZ-zY), \quad E=\sum(zX-xZ), \\ F=\sum(xY-yX) \end{cases}$$

vor, welche wir schon in § 29 die Componentensummen und die Momente der Kräfte bezüglich der Coordinatenaxen genannt haben. Wenn daher ein beliebiges anderes System von Kräften auf denselben festen Körper wirkt, dessen Theilchen dieselben Positionen, Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen haben, so wird derselbe, wenn zur betreffenden Zeit für das zweite Kraftsystem diese sechs Grössen dieselben Werthe wie für das erste haben, durch dasselbe die gleichen Beschleunigungen wie durch das erste erfahren. Man sagt dann, beide Kräftesysteme sind einander äquivalent. Wenn dies durch eine längere Zeit gilt und die Positionen, Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen aller materiellen Punkte zu Anfang dieser Zeit die gleichen sind, so wird der Körper unter dem Einflusse des einen oder des anderen Kraftsystems während der ganzen Zeit dieselbe Bewegung machen.[1])

[1]) Wenn ein Kräftesystem K einem anderen A äquivalent ist, so erzeugt, wie man sofort aus unseren Gleichungen sieht, auch K mit einem dritten Kräftesysteme K' zusammen dieselbe Bewegung, wie A mit K' zusammen. Speciell wenn sich K und K' das Gleichgewicht halten, so halten sich auch A und K' das Gleichgewicht.

So ist jede Kraft einer gleichen gleichgerichteten äquivalent, wenn die Verbindungslinie beider Angriffspunkte in die Richtung der Kräfte fällt. Man sagt, der Angriffspunkt jeder Kraft kann bei ungeänderter Grösse und Richtung derselben nach jedem anderen in ihrer Richtung liegenden Punkte versetzt werden, ohne deren Wirkung auf den festen Körper zu ändern; denn dadurch werden weder die Grössen A, B, C, noch die Momente der betreffenden Kraft bezüglich der Coordinatenrichtungen verändert. Letzteres folgt unmittelbar aus der in § 29 durch die Gleichung 71) gegebenen geometrischen Definition des Momentes.

Lässt man irgend ein Kraftsystem und gleichzeitig ein damit äquivalentes, in dem man aber die Richtung jeder Kraft ohne Aenderung der Grösse umgekehrt hat, auf den Körper wirken, so haben alle sechs Grössen 137) den Werth Null; der Körper bewegt sich also gerade so, als ob gar keine Kräfte auf ihn wirkten, wobei selbstverständlich, wenn der Körper nicht ruht, im Allgemeinen nicht die Beschleunigungen aller Punkte desselben Null sein werden. Jedes Kräftesystem hält daher einem umgekehrten äquivalenten das Gleichgewicht (vergl. Schluss des § 35, sowie §§ 70 und 73). Alle Kräfte eines auf einen festen Körper wirkenden Kräftesystems werden sich das Gleichgewicht halten, wenn die sechs Grössen 137) verschwinden. Der feste Körper wird dann, wenn anfangs alle seine Punkte in Ruhe waren, in Ruhe bleiben, wenn er in Bewegung war, sich so bewegen, als ob keine Kräfte auf ihn wirkten, oder wenn das Gleichgewicht nur in einem bestimmten Zeitmomente herrschte, so werden alle seine Punkte in diesem Zeitmomente dieselbe Beschleunigung erfahren, als ob in diesem Zeitmomente keine Kräfte auf ihn wirkten.

Es sei hier noch ein Satz erwähnt, der später in der Elasticitätslehre Anwendung findet. Wenn auf einen festen Körper gewisse Kräfte wirken, so wird er im Allgemeinen durch dieselben ein wenig deformirt. Wenn er nach der Deformation ruht und sich die Kräfte das Gleichgewicht halten, so kann dieses dadurch nicht gestört werden, dass man die Theile des Körpers in der Lage, die sie nach der

Deformation angenommen haben, beliebig starr verbindet. Denn die Theilchen üben ohnedies schon solche innere Kräfte aufeinander aus, welche den äusseren das Gleichgewicht halten. Durch die starre Verbindung würden sie dazu noch befähigt, bei der kleinsten Aenderung ihrer Entfernung Verbindungskräfte von beliebiger Grösse aufeinander auszuüben. Sie sind also um so mehr noch fähig, die Kräfte, welche sie ohnedies schon aufeinander ausüben, weiter ungeändert auszuüben.

§ 50. Wann haben Kräfte, die auf einen festen Körper wirken, eine Resultirende?

Wir können nach dem Gesagten auch die Frage beantworten, wann sich ein auf einen festen Körper wirkendes System von Kräften durch eine einzige Kraft ersetzen lässt, welche also, wenn dies nur für einen Zeitmoment gilt, während dieses Zeitmomentes dieselbe Beschleunigung jedes Punktes des Körpers erzeugt. Wenn sich aber das während jedes Zeitmomentes einer endlichen Zeit auf den festen Körper wirkende System von Kräften durch eine einzige Kraft ersetzen lässt, die natürlich in Grösse und Richtung mit der Zeit veränderlich sein kann, so erzeugt dieselbe während jener ganzen Zeit bei gleichen Anfangsbedingungen dieselbe Bewegung, wie das System von Kräften. Man sagt dann, diese einzige Kraft ist dem Kraftsysteme äquivalent oder sie ist eine Resultirende desselben.

Dazu ist erforderlich, dass die sechs Grössen 137) für die eine Kraft (die Resultirende) dieselben Werthe haben, wie für das gegebene Kraftsystem. Es müssen also A, B, C die Componenten der Resultirenden nach den drei Coordinatenrichtungen sein. Sind ξ, η, ζ die Coordinaten ihres Angriffspunktes, so muss ferner:

138) $$\eta C - \zeta B = D, \quad \zeta A - \xi C = E, \quad \xi B - \eta A = F$$

sein. Hierbei sind A, B, C, D, E, F die Werthe der sechs Grössen 137) für das gegebene Kraftsystem. Addirt man die Gleichungen 138), nachdem man die erste mit A, die zweite mit B, die dritte mit C multiplicirt hat, so folgt:

139) $$AD + BE + CF = 0.$$

Diese Gleichung muss also zwischen den sechs durch das gegebene Kräftesystem bedingten Grössen 137) nothwendig erfüllt sein, wenn dieses überhaupt durch eine einzige Kraft ersetzbar sein soll, d. h. wenn überhaupt eine Resultirende existiren soll. Ist sie erfüllt und wenigstens eine der Grössen A, B, C von Null verschieden, so existirt immer eine Resultirende. Ist z. B. A von Null verschieden, so folgt aus den beiden letzten der Gleichungen 138)

$$140)\qquad \eta = \frac{\xi B}{A} - \frac{F}{A},\quad \zeta = \frac{\xi C}{A} + \frac{E}{A}$$

und die Substitution dieser Werthe zeigt, dass auch die erste der Gleichungen 138) erfüllt ist. Da zwischen den drei Coordinaten des Angriffspunktes der Resultirenden nur die zwei Gleichungen 140) bestehen, so ist diese zwar in Grösse und Richtung bestimmt, als Angriffspunkt derselben kann aber jeder beliebige Punkt der durch die Gleichungen 140) bestimmten Geraden, welche die Richtung der Resultirenden hat, gewählt werden. Dass, wenn eine Resultirende existirt, auch jeder andere Punkt ihrer Richtung als Angriffspunkt gewählt werden kann, folgt natürlich schon aus dem Satze über die Versetzbarkeit von Kräften an festen Körpern. Falls der gewählte Angriffspunkt der Resultirenden nicht ohnehin schon dem festen Körper angehören würde, müsste er natürlich fest damit verbunden gedacht werden (durch massenlose Versteifungen etc.). Denn unsere Formeln gelten nur für Punkte, welche fest mit dem Körper verbunden sind.

Falls $A = B = C = 0$ ist, können die Gleichungen 138) nur erfüllt sein, wenn auch $D = E = F = 0$, wenn also die Kräfte des gegebenen Kräftesystems sich untereinander das Gleichgewicht halten. Die Resultirende ist dann natürlich Null.

Ein specielles Beispiel liefert der Fall, dass alle Kräfte, welche auf einen festen Körper wirken, untereinander parallel sind. Wir wollen dann mit a, b, c die Richtungscosinus einer mit ihnen parallelen Geraden G bezeichnen, welche wir, wenn alle Kräfte im selben Sinne wirken, ebenfalls in diesem Sinne ziehen. Wenn nicht, so wollen wir sie in dem Sinne ziehen, dass die Summe der Intensitäten der im gleichen

Sinne wirkenden Kräfte grösser ist als die Summe der im entgegengesetzten Sinne wirkenden Kräfte. Dann ist

$$X = aP, \quad Y = bP, \quad Z = cP.$$

Dabei ist P die Kraft, welche auf irgend einen Punkt des Körpers, dessen Coordinaten x, y, z sind, wirkt. Wir geben ihr das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem sie die Richtung der Geraden G oder die entgegengesetzte hat. X, Y, Z sind die Componenten der Kraft P in den Coordinatenrichtungen. Der Factor a ist für alle Kräfte gleich, ebenso b und c. Es ist also

$$A = a\sum P, \quad B = b\sum P, \quad C = c\sum P,$$
$$D = b\sum zP - c\sum yP, \quad E = c\sum xP - a\sum zP,$$
$$F = a\sum yP - b\sum xP.$$

Die Bedingung 139) ist also erfüllt und es existirt immer eine Resultirende, wenn nicht $A = B = C = 0$, also $\sum P = 0$ ist, von welchem Falle später die Rede sein soll.

Die Intensität der Resultirenden ist $\sum P$, also die algebraische Summe der Intensitäten aller Einzelkräfte. Dieselbe hat die Richtung der Geraden G, ist also parallel den gegebenen Kräften und wirkt in dem Sinne, für welchen die Summe der Intensitäten der dahin gerichteten Kräfte grösser ausfällt. Die Gleichungen 140) reduciren sich auf

$$\frac{1}{a}\left(\xi - \frac{\sum xP}{\sum P}\right) = \frac{1}{b}\left(\eta - \frac{\sum yP}{\sum P}\right) = \frac{1}{c}\left(\zeta - \frac{\sum zP}{\sum P}\right).$$

Diese Gleichungen sind sicher erfüllt, wenn

$$141) \qquad \xi = \frac{\sum xP}{\sum P}, \quad \eta = \frac{\sum yP}{\sum P}, \quad \zeta = \frac{\sum zP}{\sum P}$$

ist. Der Punkt, dessen Coordinaten durch diese Gleichungen bestimmt sind, heisst der Mittelpunkt der parallelen Kräfte. Er kann als Angriffspunkt der Resultirenden gewählt werden. Als solcher kann auch jeder andere Punkt der durch ihn der Richtung der Kräfte parallel gezogenen Geraden gewählt werden. Der erstere Angriffspunkt hat jedoch einen besonderen Vorzug. Die durch die Gleichungen 141) gegebenen Werthe seiner Coordinaten sind nämlich unabhängig von a, b, c, also von der Richtung der parallelen Kräfte. Er hört also nicht auf, Angriffspunkt der Resultirenden zu sein, wenn sich blos diese Richtung ändert, d. h. wenn die Intensität jeder der Kräfte unverändert bleibt und auch jede unverändert auf denselben Punkt des Körpers wirkt, sich aber die Richtung aller Kräfte in gleicher Weise ändert, so dass alle parallel bleiben und auch die Gleichgerichteten wieder gleichgerichtet sind.

Da nur die relative Lagenänderung maassgebend ist, so bleibt der Mittelpunkt auch Angriffspunkt der Resultirenden, wenn er mit dem Körper fest verbunden ist und letzterer sich beliebig dreht oder im Raume verschiebt, sobald dabei auch die Angriffspunkte der auf ihn wirkenden parallelen Kräfte fest mit dem Körper verbunden sind und letztere weder Grösse noch Richtung ändern.

Wir haben bisher den Fall ausgeschlossen, dass $\sum P = 0$ ist. In diesem Falle wird $A = B = C = 0$. Eine Resultirende existirt, wie wir sahen, dann nur, wenn auch $D = E = F = 0$ ist, d. h. die gegebenen Kräfte sich das Gleichgewicht halten.

§ 51. Specielle Fälle paralleler Kräfte.

Als ganz specielles Beispiel erwähnen wir den Fall, dass zwei parallele Kräfte auf einen festen Körper wirken. Wir wählen den Angriffspunkt der ersten zum Coordinatenursprung und ziehen die positive Abscissenaxe durch den Angriffspunkt der zweiten Kraft. Der Mittelpunkt liegt dann auf der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte und seine Entfernungen von diesen verhalten sich umgekehrt wie die Intensitäten der Kräfte. Wenn die beiden Kräfte gleich gerichtet sind, so liegt der Mittelpunkt zwischen ihren Angriffspunkten, sonst jenseits des Angriffspunktes der grösseren Kraft.

Die Ableitung dieser Resultate aus den Gleichungen 141) ist so leicht, dass wir nicht weiter darauf eingehen wollen. Wenn beide Kräfte gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind, so halten sie sich das Gleichgewicht, wenn ihre Richtungen in dieselbe Gerade fallen. Sonst haben sie keine Resultirende, sondern bilden das, was man ein Kräftepaar nennt, wovon später die Rede sein soll.

Wir sahen bereits, dass jedes Massentheilchen m eines schweren, geworfenen, sich nicht drehenden Körpers so bewegt, als ob darauf eine unveränderliche, gegen den Erdmittelpunkt gerichtete Kraft mg (dessen Gewicht) wirkte, wobei g an derselben Stelle der Erde für alle Massentheilchen denselben Werth hat und die Beschleunigung der Schwere heisst. Wir suchen nun unter der Hypothese, dass auch in allen anderen Fällen die Wirkung der Schwere mit der eben beschriebenen Kraft mg identisch ist, die Resultirende der gesammten Wirkung der Schwere auf irgend einen festen Körper. Wegen der grossen Entfernung des Erdmittelpunktes sind alle auf die verschiedenen Massentheilchen wirkenden Kräfte parallel und gleich gerichtet.

Die Resultirende aller Kräfte, welche die Schwere auf den ganzen Körper ausübt, ist daher ebenfalls gegen den Erdmittelpunkt gerichtet; ihre Intensität

$$g \sum m$$

ist gleich der Summe der Gewichte aller Massentheilchen, welche man das gesammte Gewicht des Körpers nennt und welches gleich der mit der Beschleunigung der Schwere multiplicirten Gesammtmasse desselben ist. Der Mittelpunkt der parallelen Kräfte hat vermöge der Gleichungen 141) die Coordinaten

$$\xi = \frac{\sum m x}{\sum m}, \quad \eta = \frac{\sum m y}{\sum m}, \quad \zeta = \frac{\sum m z}{\sum m}.$$

Es ist also der Punkt, welchen wir schon früher den Schwerpunkt genannt haben. Wenn sich der Körper dreht, ändert sich das Gewicht der einzelnen Massentheilchen weder in Grösse, noch in Richtung, noch im Angriffspunkte. Der mit dem Körper fest verbunden gedachte Schwerpunkt hört also nicht auf Angriffspunkt der Resultirenden aller auf alle Massentheilchen des Körpers wirkenden Schwerkräfte zu sein, wenn sich der Körper beliebig bewegt. Wenn man daher eine einzige Kraft von der Intensität des gesammten Gewichtes des Körpers an dessen Schwerpunkte anbringt, so erzeugt dieselbe in jedem Augenblicke die gleiche Bewegung, wie die verschiedenen auf die einzelnen Theilchen des Körpers wirkenden Schwerkräfte. Man kann, wie man sich ausdrückt, das ganze Gewicht des Körpers in dessen

Schwerpunkte concentrirt denken. Man darf aber dabei nicht vergessen, dass dies nur so lange gilt, als der Körper als starr betrachtet werden darf. Die elastische Deformation des Körpers, z. B. die Compression oder Biegung durch sein eigenes Gewicht, wäre natürlich eine ganz andere, wenn die Schwere statt auf alle Theilchen des Körpers nur auf dessen Schwerpunkt wirken würde. Alle diese Gesetze bestätigen sich in der Erfahrung, so dass wir also unsere Hypothese über die Wirkung der Schwere auf die Massentheilchen eines Körpers als in der Erfahrung wohlbegründet betrachten dürfen.

§ 52. Theorie der Kräftepaare.

Unter einem Kräftepaare verstanden wir zwei gleiche entgegengesetzt gerichtete Kräfte, die auf einen festen Körper wirken und nicht die gleiche Richtung wie die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte haben. Die Ebene, welche beide Angriffspunkte und die Richtungen beider Kräfte enthält, heisst die Ebene des Kräftepaares. Die darauf errichtete Normale heisst die Axe des Kräftepaares. Sie ist immer in dem Sinne zu ziehen, dass das Paar um sie im positiven Sinne zu drehen sucht, d. h. dass sie gegen die Drehungsrichtung des Kräftepaares dieselbe Lage hat, wie die positive z-Axe gegen die Drehung von der positiven x-Axe auf kürzestem Wege zur positiven y-Axe, dass also bei Zugrundelegung eines französischen Coordinatensystems das Paar für ein Auge im Sinne des Uhrzeigers zu drehen sucht, das von dorther blickt, wohin die Axe zeigt.

Wir wollen beide Kräfte durch Pfeile ausdrücken und den Proportionalitätsfactor zwischen Kraft und Pfeil gleich 1 setzen. Das Parallelogramm, welches wir erhalten, wenn wir den Angriffspunkt jeder Kraft mit dem Endpunkte der anderen Kraft verbinden, nennen wir das Parallelogramm des Kräftepaares, seinen Flächeninhalt dessen Totalmoment. Für jedes Kräftepaar ist $A = B = C = 0$. Das Moment D der beiden Kräfte des Kräftepaares bezüglich der Abscissenaxe finden wir nach Formel 71), indem wir die Pfeile, welche die beiden Kräfte darstellen, auf die yz-Ebene projiciren, jede

Projection mit ihrem senkrechten Abstande vom Coordinatenursprunge multipliciren und die Differenz dieser beiden Producte bilden. Diese Differenz ist, wie man unmittelbar sieht, gleich dem Flächeninhalte der Projection des Parallelogramms des Kräftepaares, also seines Totalmomentes auf die yz-Ebene und zwar mit positiven oder negativen Zeichen, je nachdem die Projection des Paares auf die yz-Ebene den Körper im positiven oder negativen Sinne um die positive Abscissenaxe zu drehen sucht. Analog werden E und F gefunden.

Die Werthe von D, E und F sind alle nur abhängig von der Richtung der Ebene des Paares, von dem Totalmomente desselben und von dem Sinne, in dem es zu drehen sucht. Da aber A, B und C für jedes Paar verschwinden, so sind alle Paare äquivalent, d. h. sie erzeugen unter allen Umständen dieselbe Bewegung des festen Körpers, wenn nur ihre Ebenen parallel, ihre Totalmomente gleich und ihr Drehungssinn derselbe ist. Man kann daher jedes Kräftepaar in seiner Ebene beliebig versetzen, sein Parallelogramm in derselben beliebig drehen und durch ein anderes von gleicher Fläche und gleichem Drehungssinn ersetzen und auch die Ebene des Paares parallel zu sich selbst beliebig verschieben, ohne dass das Kräftepaar aufhört, genau die gleiche Wirkung auf den festen Körper auszuüben.

Wie Drehungen, kann man auch jedes Kräftepaar durch einen Vector V darstellen. Derselbe kann von einem beliebigen Punkte des Raumes aus gezogen werden, seine Richtung muss die der Axe des Kräftepaares, seine mit einem passenden, ein für allemal constantem Reductionsfactor Γ multiplicirte Länge gleich dem Totalmomente des Kräftepaares sein. Wenn man von den Dimensionen absieht, kann man natürlich auch $\Gamma = 1$ setzen.

Die drei Grössen D, E, F sind die mit Γ multiplicirten Projectionen dieses Vectors auf die drei Coordinatenrichtungen, denen wir das positive oder negative Zeichen ertheilen, je nachdem sie in die positive oder negative Coordinatenrichtung fallen. D, E und F sind also durch den Vector eindeutig bestimmt. Alle Paare, welche in dieser

Weise durch den gleichen Vector dargestellt werden, sind äquivalent und man sieht sofort, dass bei dieser Darstellungsweise Kräftepaare genau so zu Resultirenden zusammengesetzt oder in Componenten zerlegt werden können, wie einfache Kräfte. Seien V_1, V_2, V_3 die Projectionen des Vectors V, welcher unser Kräftepaar darstellt, auf die drei Coordinatenaxen, so stellen diese drei neuen Vectoren Kräftepaare dar, für welche die Momente bezüglich der Coordinatenaxe die Werthe

$$D, 0, 0; \quad 0, E, 0 \text{ resp. } 0, 0, F$$

haben. Für diese drei Kräftepaare zusammen ist also die Summe der Momente bezüglich der Coordinatenaxen genau so gross, wie für das ursprünglich gegebene Kräftepaar, und da für alle Paare $A = B = C = 0$ ist, so sind die drei durch die Vectoren V_1, V_2, V_3 dargestellten Kräftepaare zusammen dem einzigen durch den Vector V dargestellten äquivalent, genau so wie die drei durch die Pfeile V_1, V_2, V_3 dargestellten Kräfte die Componenten der durch V dargestellten Kraft sind. Dieser Satz ist zwar nur ein specieller Fall der Anwendbarkeit der Construction des Kräftenparallelogramms auf Kräftepaare; man kann aber sofort daraus den allgemeinen Fall beweisen, indem man jedes Paar in drei Componenten nach den drei Coordinatenaxen zerlegt und dann nachweist, dass diese für die Resultirende gleich ausfallen würden, wie für die Vereinigung aller Componenten.

§ 53. Ersetzung beliebiger Kräfte durch eine Kraft und ein Paar.

Es sei ein beliebiges auf einen festen Körper wirkendes System von Kräften gegeben. Wir sahen, dass es nicht immer möglich ist, eine einzige Kraft zu finden, welche dem gegebenen Kräftesysteme äquivalent ist. Es ist aber immer möglich, eine Kraft und ein Kräftepaar zu finden, welche zusammen dem gegebenen Kräftesysteme äquivalent sind, wobei noch der Angriffspunkt der Kraft beliebig gewählt werden kann. Seien A, B, C die Summen der Componenten der gegebenen Kräfte, D, E, F die Summen ihrer Momente bezüglich der Coordinatenaxen, so kann man vom Coordinatenursprunge aus, den man beliebig wählen kann, zwei Vectoren von OK und OP ziehen, welche eine Kraft und ein Kräftepaar mit den Componenten A, B, C resp. D, E, F in den Coordinatenrichtungen darstellen. Man nennt sie die resultirende Kraft und das resultirende Paar. Beide zusammen sind dem gegebenen Kräftesysteme äquivalent, da für die Kraft D, E und F, für das Paar A, B und C verschwinden, daher für die Kraft und das Paar zusammen die sechs Grössen A, B, C, D, E, F dieselben Werthe haben, wie für das ursprünglich gegebene Kräftesystem.

Das Paar können wir dabei durch einen beliebigen gleichen und gleich gerichteten, von einem anderen Punkte des Raumes ausgehenden Vector darstellen. Wenn wir aber für die Kraft einen anderen, nicht in ihrer Richtung liegenden Angriffspunkt wählen, so müssen wir das Paar in einer Weise verändern, die man durch die nachfolgenden Betrachtungen finden kann.

Es wirke auf einen festen Körper eine einzige Kraft. O sei ihr Angriffspunkt, OK der Pfeil, der sie in Grösse und Richtung darstellt. Wir können ihre Wirkung auf den festen Körper immer ersetzen durch eine gleiche, gleich gerichtete Kraft, die in irgend einem anderen Punkte O' angreift, der nicht in der Richtung der ersteren Kraft liegt, und ein Kräftepaar. Um dies zu zeigen, fügen wir noch zwei Kräfte $O'K'$ und $O'K''$ hinzu, welche beide im Punkte O' angreifen, von denen die erste gleich und gleich gerichtet, die zweite ebenfalls gleich, aber entgegengesetzt gerichtet wie die Kraft OK ist. Da sich diese beiden Kräfte aufheben, so ist die gegebene Kraft OK äquivalent mit dem Systeme, das aus den drei Kräften OK, $O'K'$ und $O'K''$ besteht. Die beiden Kräfte OK und $O'K''$ bilden aber ein Kräftepaar, welches wir durch einen Vector $O'P'$ darstellen können, der senkrecht auf der Ebene OKO' in demjenigen Sinne steht, dass um ihn die Drehungsrichtung des Paares, also auch die von OK gegen OO' auf kürzestem Wege im positiven Sinne geschieht. Das Moment des durch $O'P'$ dargestellten Kräftepaares ist gleich der Fläche des Parallelogramms $O K O' K''$, also der doppelten Fläche des Dreiecks $O K O'$. Diese doppelte Fläche ist also gleich der mit Γ multiplicirten Länge des Vectors $O' P'$.

Die Kraft $O' K'$ und das so gefundene Paar $O' P'$ sind immer der einen Kraft $O K$ äquivalent, was wir den Satz 142) nennen wollen.

Sei nun ein beliebiger fester Körper und ein beliebiges darauf wirkendes System von Kräften gegeben. Dasselbe sei der Kraft $O K$ und dem Paare $O P$ äquivalent. O' sei ein beliebiger anderer Punkt. Es sei die Aufgabe gestellt, das ursprünglich gegebene Kräftesystem durch eine im Punkte O' angreifende Kraft und ein Kräftepaar zu ersetzen.

Wir können das Paar auch durch einen von O' gezogenen, mit $O P$ gleichen und gleich gerichteten Pfeil $O' P''$, die Kraft aber durch eine auf O' wirkende, mit $O K$ gleiche und gleich gerichtete Kraft $O' K'$ und noch durch ein Paar $O' P'$ ersetzen, das durch die Bedingungen 142) bestimmt ist. Die beiden Paare $O' P'$ und $O' P''$ können wir zu einem einzigen Paare $O' P'''$ zusammensetzen, welches also mit der Kraft $O' K'$ vereint dem ursprünglich gegebenen Kräftesysteme äquivalent ist, womit die gestellte Aufgabe gelöst ist.

Die neue Resultirende $O' K'$ ist gleich und gleich gerichtet der alten $O K$. Das neue resultirende Paar $O' P'''$ aber hat nur dann das gleiche Moment und eine gleich gerichtete Axe wie das frühere resultirende Paar $O P$, wenn der Punkt O' in der Richtung der Kraft $O K$ liegt.

Es verdient noch erwähnt zu werden, dass der Angriffspunkt O' der resultirenden Kraft immer so gewählt werden kann, dass dieselbe auf der Ebene desjenigen Paares, welches mit ihr vereint dem gegebenen Kräftesysteme äquivalent ist, senkrecht steht, dass also die Axe des resultirenden Paares die Richtung der resultirenden Kraft hat. Man nennt den Inbegriff einer auf einen festen Körper wirkenden Kraft und eines ebenfalls darauf wirkenden Paares, dessen Axe die Richtung der Kraft hat, öfters eine Dyname.

Dass der Angriffspunkt der resultirenden Kraft wirklich immer so gewählt werden kann, beweisen wir wie folgt.

Es giebt stets, wie wir wissen, eine in einem beliebigen Punkte O angreifende Kraft OK, welche, vereint mit einem Paare OP, dem gegebenen Kräftesysteme äquivalent ist. Man kann das Paar immer in zwei Componenten zerlegen, welche durch die Vectoren OF, ON dargestellt sind, von denen der erstere in dieselbe Gerade wie die Kraft OK fällt, der letztere darauf senkrecht steht. Man ziehe nun die Gerade OO' senkrecht auf die Ebene NOK nach derjenigen Seite hin, dass die Drehung, welche OK auf kürzestem Wege nach OO' überführt, um ON im negativen Sinne geschieht. Dem Stücke OO' giebt man die Länge $\Gamma . ON/OK$.

Nach dem Satze 142) ist nun die Kraft OK äquivalent einer gleichen, gleich gerichteten, in O' angreifenden Kraft $O'K'$ und einem Paare, welches dieselbe Axe und dasselbe Gesammtmoment, aber gerade den entgegengesetzten Drehungssinn wie das Paar ON hat und sich daher mit diesem aufhebt. Das Paar OF aber kann auch durch einen gleichen, gleich gerichteten, von O' aus gezogenen Pfeil $O'F'$ dargestellt werden. Die Kraft $O'K'$ und das Paar $O'F'$, dessen Axe in die Richtung der Kraft $O'K'$ fällt, dessen Ebene also senkrecht darauf steht, sind also dem ursprünglich gegebenen Kräftesysteme äquivalent. Da OF und ON die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks sind, dessen Hypothenuse OP ist, so ist nothwendig $OF < OP$.

Wenn also die resultirende Kraft in O' oder einem beliebigen anderen Punkte der unendlichen Geraden $O'K'$ angreift, so dass sie die Richtung der Axe des dazu gehörigen resultirenden Paares hat, so ist das Moment des letzteren kleiner, als bei jeder anderen Lage des Angriffspunktes der resultirenden Kraft.

§ 54. Ersatz einer Drehung durch eine andere und eine Parallelverschiebung. Schraubenbewegung.

Ganz analoge Sätze lassen sich für Drehungen entwickeln. Gerade so wie jedes Kräftesystem durch eine einzige Kraft und ein einziges Paar ersetzt werden kann, so kann jede beliebige Lagenänderung eines festen Körpers durch den Verein einer einzigen Drehung und einer einzigen Parallelverschiebung erzeugt werden. Gerade so wie der Vector, der ein Kräftepaar darstellt, von jedem Punkte des Raumes aus gezogen werden kann, so kann auch der Vector, der die Parallelverschiebung darstellt, von jedem Punkte des Raumes aus gezogen werden. Derselbe soll daher wieder mit OP bezeichnet werden. Der Vector, welcher die Drehung ausdrückt, kann von jedem Punkte der Drehungsaxe aus gezogen werden, wie der Vector, der eine Kraft darstellt, von jedem Punkte ihrer Richtung aus gezogen werden kann. Ein Vector, welcher eine Drehung darstellt, soll daher wieder mit OK bezeichnet werden. Ein von einem beliebigen anderen Punkte O' aus gezogener Vector $O'K'$, der gleich und gleich gerichtet wie OK ist, stellt uns eine gleiche, gleich gerichtete Drehung um eine parallele Axe dar.

Genau so wie früher die Kraft OK äquivalent der Kraft $O'K'$ und einem Paare $O'P'$ war, so ist auch die Lagenänderung, welche durch die Drehung OK erzeugt wird, identisch mit der, welche durch die Drehung $O'K'$ vereint mit einer Parallelverschiebung $O'P'$ erzeugt wird.

Wir beschränken uns auf unendlich kleine Drehungen und Parallelverschiebungen, für welche auch die Parallelverschiebung $O'P'$ in Grösse und Richtung durch Regeln bestimmt ist, die dem Satze 142) vollkommen analog sind, welcher damals das Paar $O'P'$ bestimmte.

Durch die Drehung OK erfährt, wenn sie unendlich klein ist, der Punkt O' eine Verschiebung $O'P'$ senkrecht zur Ebene OKO' in dem Sinne, dass um die von O' nach P' gerichtete Gerade die Drehung der Geraden OK auf kürzestem Wege in die Lage OO' im positiven Sinne erfolgt. Die Grösse dieser Verschiebung ist $w \,.\, O'A$, wobei w der Drehungswinkel der durch OK dargestellten Drehung, $O'A$ der senkrechte Abstand des Punktes O' von der Drehungsaxe OK ist. Sei Γ der Reductionsfactor, so dass die Länge des Pfeiles OK gleich Γw ist, so ist also:

143) $$O'P' = \frac{OK \,.\, O'A}{\Gamma} = \frac{2\, OKO'}{\Gamma},$$

wobei OKO' der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist.

Ertheilen wir nun dem ganzen festen Körper die Parallelverschiebung $O'P'$ und die durch $O'K'$ dargestellten Drehung um eine zu OK parallele, durch O' gehende Axe, wobei auch der Drehungssinn und Drehungswinkel derselbe wie bei der Drehung OK ist. Dadurch wird, wie man leicht beweist, der Punkt A des festen Körpers und daher auch jeder Punkt desselben, der ursprünglich in der Geraden OK lag, schliesslich wieder in seine alte Lage zurückgeführt. Ferner kommen alle Punkte des Körpers, die in der durch O' in der Richtung OK gezogenen Geraden liegen, daher auch schliesslich der ganze feste Körper in dieselbe Lage, wie durch die Drehung OK. Es erfährt daher der ganze Körper durch die Drehung OK allein dieselbe Lagenänderung, wie durch die Drehung $O'K'$ und die durch die Formel 143) gegebene Parallelverschiebung $O'P'$ zusammen.

Daraus ersieht man sofort Folgendes: 1. Sei OP die Parallelverschiebung und OK die Drehung, durch welche irgend eine unendlich kleine Lagenänderung irgend eines festen Körpers erzeugt werden kann und O' ein beliebig gegebener Punkt. Es sei die Aufgabe gestellt, dieselbe Lagenänderung durch eine Parallelverschiebung und eine Drehung um eine durch O' gehende Axe zu erzeugen. Die Parallelverschiebung können wir auch durch einen Pfeil $O'P''$, der gleich und gleich gerichtet wie OP vom Punkte O' aus gezogen ist, darstellen. Die Drehung OK aber können wir durch eine Drehung, die durch einen von O' aus gezogenen, mit OK gleichen und gleich gerichteten Pfeil $O'K'$ dargestellt ist, im Vereine mit einer Parallelverschiebung $O'P'$ ersetzen. Die Grösse der letzteren ist durch Formel 143) und ihre Richtung durch die bei Entwickelung jener Formel gegebene Regel bestimmt. $O'P'$ muss so senkrecht auf der Ebene OKO' sein, dass die Drehung von OK auf kürzestem Wege nach OO' eine positive Drehung um $O'P'$ ist. Die Aufgabe ist dann gelöst, wenn man noch die beiden Parallelverschiebungen $O'P'$ und $O'P''$ zu einer einzigen $O'P'''$ zusammengesetzt hat.

2. Es kann auch hier wieder der Punkt O' so gewählt werden, dass die Parallelverschiebung in dieselbe Gerade

fällt, wie die Drehungsaxe. Um den hierzu geeigneten Punkt O' zu finden, zerlegen wir die Parallelverschiebung OP in zwei Componenten OF und ON, von denen die erstere in die Richtung OK fällt, die letztere darauf senkrecht steht. Wir ziehen nun die Gerade OO' so senkrecht auf die Ebene KON, dass die Drehung der Geraden OK auf kürzestem Wege in die Lage OO' im negativen Sinne um ON geschieht und machen die Länge

$$OO' = \Gamma . ON/OK.$$

Dann wird die Drehung OK dieselbe Lagenänderung erzeugen, wie die durch einen von O' aus gezogenen, mit OK gleichen und gleich gerichteten Pfeil $O'K'$ dargestellte Drehung vereint mit einer Parallelverschiebung, welche die Parallelverschiebung ON gerade aufhebt. Die Drehung $O'K'$ und die Parallelverschiebung OF längs der Axe derselben erzeugen daher jedesmal die gegebene Lagenänderung des festen Körpers.

Eine Drehung vereint mit einer Parallelverschiebung in der Richtung der Drehungsaxe nennt man eine Schraubenbewegung, da eine Schraube, die sich in ihrer Mutter dreht, stets eine solche Bewegung macht. Jede unendlich kleine Lagenänderung eines festen Körpers kann daher durch eine einzige Schraubenbewegung erzeugt werden, wenn der Drehungswinkel, die Axe und die Ganghöhe der Schraube passend gewählt werden.

§ 55. Allgemeine Gleichungen für die Drehung eines festen Körpers um eine feste Axe.

Wir gehen nun zur Bewegung eines festen Körpers über, in welchem zwei Punkte, daher auch alle Punkte, die in ihrer Verbindungslinie liegen, festgehalten werden. Wir können z. B. durch den festen Körper eine fest damit verbundene Axe gesteckt denken, deren beide Enden zugespitzt sind und in festen Lagern ruhen.

Die Position des festen Körpers ist in diesem Falle durch die eines einzigen Punktes A desselben bestimmt, der nicht auf der Axe liegt. Um aber diese zu bestimmen, fällen wir von A eine Senkrechte auf die Axe und bezeichnen den

Winkel zwischen der Lage, welche diese Senkrechte zu Anfang der Zeit hatte und der, welche sie zu irgend einer Zeit t hat, mit w. Dieser Winkel misst ja in der That die Drehung, welche der Körper seit dem Zeitanfange erfahren hat. Wir können den Winkel w in beliebigem Sinne herum zählen, bezeichnen aber diejenige Richtung der Drehungsaxe, um welche diese Zählung im positiven Sinne erfolgt, als die positive.

Wir können die Gleichungen, welche für einen vollkommen freien Körper gelten, auch in diesem Falle anwenden, wenn wir zu den äusseren Kräften auch die Kräfte rechnen, welche die Drehungsaxe resp. die beiden Lager in unveränderlicher Lage erhalten.

Irgend ein Massentheilchen m des Körpers habe zur Zeit t die Coordinaten x, y, z und die Entfernung r von der Drehungsaxe, welche wir zur Abscissenaxe wählen (und zwar ihre positive Richtung als positive Abscissenaxe). Die Gerade r, von der Axe gegen den Punkt m gezogen, schliesse mit der positiven xy-Ebene den ebenfalls im positiven Sinne zu zählenden Winkel α ein, so dass

144) $$y = r \cos \alpha, \quad z = r \sin \alpha$$

ist. Während der Zeit dt soll der Winkel w um dw wachsen, so dass sich also der Körper um den Winkel dw um die Abscissenaxe dreht und zwar im positiven oder negativen Sinne, je nachdem dw positiv oder negativ ist. Den Differentialquotienten dw/dt bezeichnen wir mit ω und nennen ihn die Winkelgeschwindigkeit. Daher ist auch der Zuwachs $d\alpha$ des Winkels α gleich dw, während r und x constant bleiben. Man findet daher aus den Gleichungen 144):

145) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = -r \sin \alpha . \frac{dw}{dt} = -z\omega, \\ &\qquad\qquad \frac{dz}{dt} = r \cos \alpha . \omega = y\omega, \\ &\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -y\omega^2 - z\frac{d\omega}{dt}, \\ &\qquad\qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -z\omega^2 + y\frac{d\omega}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Wir wollen ferner mit $-A_l$, $-B_l$, $-C_l$ die Summe der Componenten der von den Lagern auf die Axe und durch diese auf den Körper wirkenden Kräfte in den drei Coordinatenrichtungen, mit $-D_l$, $-E_l$, $-F_l$ die Summe der Momente derselben bezüglich der Coordinatenaxen, ferner mit A_a, B_a, C_a, D_a, E_a, F_a dieselben Grössen bezüglich der übrigen äusseren Kräfte bezeichnen, die auf den Körper wirken. Die auf die Axe wirkenden Kräfte können wir uns an den beiden Spitzen derselben angreifend denken. Ihre Angriffspunkte liegen daher jedenfalls in der Abscissenaxe und ihr Moment bezüglich der Abscissenaxe ist gleich Null. Es ist also $D_l = 0$.

Die Substitution der Werthe 144) und 145) für die Coordinaten, sowie der Werthe für die Kraftcomponenten und Momente in die Gleichungen 134) und 136), wobei letztere in der Form $\sum m\left(y\frac{d^2 z}{d t^2} - z\frac{d^2 y}{d t^2}\right) = D$ etc. zu schreiben sind, liefert die folgenden Gleichungen:

$$
146)\quad \begin{cases}
-A_l + A_a = 0, \\
-B_l + B_a = -\omega^2 \sum m y - \frac{d\omega}{dt}\sum m z, \\
-C_l + C_a = -\omega^2 \sum m z + \frac{d\omega}{dt}\sum m y, \\
-E_l + E_a = \omega^2 \sum m x z - \frac{d\omega}{dt}\sum m x y, \\
-F_l + F_a = -\omega^2 \sum m x y - \frac{d\omega}{dt}\sum m x z, \\
\qquad D_a = \frac{d\omega}{dt}\sum m(y^2 + z^2).
\end{cases}
$$

Dabei wurde ω^2 und $\frac{d\omega}{dt}$ vor die Summenzeichen gesetzt, da w sowie dessen Differentialquotienten nach der Zeit für alle Punkte des Körpers dieselben Werthe haben.

Die ersten fünf dieser Gleichungen bestimmen die Kraftcomponenten $-A_l$, $-B_l$, $-C_l$ und die Drehmomente $-E_l$ und $-F_l$, welche von den Lagern auf die Axe ausgeübt werden, dienen daher auch umgekehrt zur Bestimmung der Summen A_l, B_l, C_l der Componenten der Kräfte nach den

Coordinatenaxen und der Drehmomente E_l und F_l bezüglich der y- und z-Axe, welche der Körper auf die Vorrichtung, welche die Lager festhält, ausübt. Die letzte Gleichung dient zur Bestimmung der Bewegung des Körpers.

Die auf ihrer linken Seite mit $d\omega/dt$ multiplicirte Summe wird gebildet, wenn man jedes Massentheilchen des Körpers mit dem Quadrate seiner Entfernung von der Axe multiplicirt und alle so gebildete Producte addirt. Sie heisst das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich dieser Axe und soll mit K bezeichnet werden. Da sich während der Bewegung weder die Masse eines Massentheilchens, noch dessen Entfernung von der Drehungsaxe verändert, so bleibt das Trägheitsmoment während der ganzen Bewegung constant. Unter Einführung desselben erhält man aus der letzten der Gleichungen 146):

147) $$K\frac{d\omega}{dt} = D_a, \quad \omega = \frac{dw}{dt}.$$

Man sieht, dass für die Winkelbeschleunigung

$$d\omega/dt = d^2 w/dt^2$$

nur die Grösse D_a ausschlaggebend ist. Zwei Kräfte, welche zu dieser Grösse denselben Betrag liefern, üben genau dieselbe drehende Wirkung um die betreffende Axe auf den Körper aus, woher der Name Drehmoment bezüglich einer Axe stammt.

§ 56. Gleichförmige und gleichförmig beschleunigte Drehung. Physisches Pendel. Waage.

Die Gleichungen 147) haben genau dieselbe Form wie die Gleichungen 13) und 14) für die Bewegung eines Körpers in einer geraden oder krummen Linie. Man kann daher jeden Satz, den wir für die letztere Bewegung gefunden haben, in einen entsprechenden Satz für die drehende Bewegung eines festen Körpers um eine feste Axe verwandeln, indem man folgende Vertauschungen vornimmt: Man setzt den Drehungswinkel w statt des Weges s, die Winkelgeschwindigkeit ω statt der Geschwindigkeit c im gewöhnlichen Sinne, das Trägheitsmoment K des Körpers bezüglich der Drehungsaxe statt der Masse und die Summe D_a der Momente aller auf den Körper wirkenden Kräfte bezüglich der Drehungsaxe statt der Summe S der Componenten der Kräfte in der Richtung der Bewegung des Körpers.

So geschieht, wenn die Summe der Momente der Kräfte bezüglich der Drehungsaxe Null ist, die Drehung gleichförmig; wenn diese Summe constant ist, so erhält man

$$\omega = \frac{D_a t}{K}, \quad w = \frac{D_a t^2}{2K}.$$

Ein weiteres Beispiel ist folgendes: Auf einen Magnet vom Trägheitsmomente K, der in einem Kupfergehäuse an einem Faden aufgehängt ist, übt dessen Torsion und der Erdmagnetismus ein gegen die Ruhelage treibendes Drehmoment $-aw$ aus, welches nahe dem Ausschlagwinkel w proportional ist; ein anderes theils von den im Gehäuse inducirten Strömen, theils vom Luftwiderstande herrührendes Drehmoment $-b\omega$ ist der Winkelgeschwindigkeit proportional und wirkt der Bewegung entgegen. Wir können daher in diesem Falle alle Formeln des § 18 unverändert anwenden, wenn wir K, w, ω statt m, x, u schreiben, wodurch deren Anwendbarkeit auf praktische Fälle illustrirt wird.

Einen Körper, welcher gezwungen ist, sich unter dem Einflusse der Schwere um eine nicht verticale Axe zu drehen, nennt man ein physisches Pendel. Sind die Schwingungen klein, so sind, wenn wir den Luftwiderstand als eine der Winkelgeschwindigkeit proportionale Dämpfung mit in Rechnung ziehen, wieder genau dieselben Formeln wie beim Magnete anwendbar. Ohne hierauf näher einzugehen, will ich noch einiges über endliche Schwingungen bei Ausschluss jeder anderen Kraft ausser der Schwere und der Festigkeit des Körpers und der Axe bemerken.

Sei die Drehungsaxe, welche wir wieder zur Abscissenaxe wählen, horizontal. Die y-Axe wollen wir vertical nach abwärts ziehen. σ sei die Länge der vom Schwerpunkte auf die Drehungsaxe gefällten Senkrechten, welche mit der xy-Ebene den Winkel w bilde, M sei die gesammte Masse des Körpers, K dessen Trägheitsmoment bezüglich der Abscissenaxe. Das ganze Gewicht Mg kann man sich im Schwerpunkte angreifend denken. Sein Drehungsmoment bezüglich der Abscissenaxe ist also $-Mg\sigma \sin w$, wobei das negative Zeichen gesetzt werden muss, da es den Winkel w zu verkleinern strebt. Man erhält daher die Gleichung:

$$K \frac{d^2 w}{d t^2} = - M g \sigma \sin w .$$

Vergleicht man dieselbe mit der Gleichung 120), so sieht man, dass sich der Winkel w genau nach demselben Gesetze wie beim einfachen Pendel verändert, nur dass $K/M\sigma$ statt der Pendellänge l zu schreiben ist. So ist die Schwingungsdauer

$$148) \qquad \tau = \pi \sqrt{\frac{K}{M\sigma g}} \left(1 + \frac{1^2 . a^2}{2^2} + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2} a^4 \ldots\right),$$

wobei wieder a der Sinus des grössten Elongationswinkels ist. Wäre die Drehungsaxe nicht horizontal, so würde an die Stelle von g die Componente der Beschleunigung der Schwere in der Richtung senkrecht zur Drehungsaxe, also g multiplicirt mit dem Sinus des Winkels zwischen der Drehungsaxe und der Verticalen treten.

Unter denselben mechanischen Bedingungen befindet sich die Waage. Wir haben uns da einen schweren, um eine horizontale Axe drehbaren Körper zu denken. Derselbe ist im stabilen Gleichgewichte, d. h. die Schwere führt ihn bei jeder kleinen Störung wieder in die Gleichgewichtslage zurück (vergl. § 70), wenn der Schwerpunkt vertical unter der Drehaxe liegt. In dieser Lage sind zu entgegengesetzten Seiten der Drehaxe zwei gleich schwere Waagschalen so befestigt, dass die Punkte, auf welche sie drücken, vollkommen symmetrisch bezüglich der durch die Drehaxe gelegten Verticalebene liegen. Legt man daher einen Körper auf die eine, einen zweiten auf die andere Waagschale, so kann man daran, dass das Gleichgewicht ohne Drehung des Körpers bestehen bleibt, erkennen, dass beide Körper das gleiche Gewicht und daher auch die gleiche Masse haben, da das Gewicht gleich dem Producte aus Masse und Beschleunigung der Schwere, letztere aber erfahrungsmässig für alle Körper gleich ist. Hält ein auf der einen Waagschale liegender

Körper zwei anderen, unter sich ganz gleich beschaffenen, auf der anderen Waagschale liegenden das Gleichgewicht, so erkennen wir, dass er die doppelte Masse als jeder der letzteren hat etc.

Die Regeln für die einfachste praktische Bestimmung der Masse folgen auch bei uns erst aus sehr verwickelten Consequenzen unseres Bildes. Allein dies ist keine logische Schwäche, wie wenn erst die Grundbegriffe und Fundamentaldefinitionen aus Consequenzen unserer Constructionen folgen würden, zu deren Aufbau sie die Grundpfeiler hätten sein sollen.

§ 57. Trägheitsradius. Trägheitsmomente bezüglich paralleler Axen.

Die Grösse K heisst das Trägheitsmoment, weil sie an die Stelle der Masse tritt, welche ja das Maass des Trägheitswiderstandes ist, den der Körper der Beschleunigung entgegensetzt.

Setzt man $\lambda = \sqrt{\frac{K}{M}}$, so ist λ die Entfernung, in welcher sich die gesammte Masse M des Körpers, wenn sie in einem einzigen Punkte vereint wäre, von der Drehungsaxe befinden müsste, um dasselbe Trägheitsmoment wie der ganze Körper zu haben. Denkt man sich daher den ganzen übrigen Körper massenlos und seine Masse in einem einzigen, fest damit verbundenen Punkte concentrirt, der sich in der Distanz λ von der Drehungsaxe befindet, so würde er unter dem Einflusse derselben Kräfte bei denselben Anfangsbedingungen dieselbe Drehung um die fix gedachte Drehungsaxe machen.

Da jede im Körper gezogene Gerade Drehungsaxe sein kann, so ist es von Wichtigkeit, das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich jeder beliebigen darin gezogenen Geraden leicht bestimmen zu können. Zu diesem Zwecke sind die nun zu behandelnden Sätze nützlich, mittelst welcher das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer beliebigen Axe leicht berechnet werden kann, wenn man das Trägheitsmoment desselben Körpers bezüglich dreier bestimmter, durch seinen Schwerpunkt gehender Axen berechnet hat.

Satz über das Trägheitsmoment bezüglich paralleler Axen.

Heisst K das Trägheitsmoment irgend eines Körpers bezüglich einer beliebigen Axe, L das bezüglich einer parallelen, durch den Schwerpunkt gehenden Axe, welcher von der ersten Axe den Abstand σ haben soll, und ist r die Entfernung irgend eines Massentheilchens m von der ersten, ϱ die von der zweiten Axe, so ist gemäss der Definition des Trägheitsmomentes

$$K = \sum m r^2, \quad L = \sum m \varrho^2.$$

Die Werthe dieser Grössen beziehen sich auf kein Coordinatensystem. Sie sind daher unabhängig von der Lage eines Coordinatensystems, welches wir jetzt erst einführen wollen. Wir wählen den Schwerpunkt als Coordinatenursprung, die von ihm auf die erste Axe gefällte Senkrechte als Abscissenaxe und die der ersten Axe parallele, durch den Schwerpunkt gehende Axe als z-Axe; ferner bezeichnen wir die Coordinaten des Massenpunktes m mit x, y, z. Dann ist:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2,$$

$$r^2 = (x - \sigma)^2 + y^2 = \varrho^2 + \sigma^2 - 2\sigma x,$$

daher:

148 a) $$\sum m r^2 = \sum m \varrho^2 + \sigma^2 M - 2\sigma \sum m x.$$

M ist die gesammte Masse des Körpers. Da nun die Abscissenaxe durch den Schwerpunkt geht, so ist dessen Abscisse also auch $\sum m x = 0$. Ferner ist in Gleichung 148 a) der Ausdruck links das Trägheitsmoment bezüglich der ersten, das erste Glied rechts das bezüglich der zweiten, parallel durch den Schwerpunkt gehenden Axe. Es ist also

149) $$K = L + M\sigma^2.$$

Dieser Ausdruck erlaubt das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen Axe zu berechnen, wenn das bezüglich einer parallelen, durch den Schwerpunkt gehenden, die gesammte Masse des Körpers und die Entfernung des Schwerpunktes von der ersten Axe gegeben sind.

Sei noch eine andere, der ersten Axe parallele Axe gegeben, sei K' das Trägheitsmoment desselben Körpers bezüglich der letzteren Axe und σ' ihre Entfernung vom Schwerpunkte des Körpers, so ist:

$$K' = L + M\sigma'^2,$$

daher:

$$K' = K + M(\sigma'^2 - \sigma^2).$$

Aus der letzten Formel kann das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen Axe berechnet werden, wenn das bezüglich einer beliebigen anderen, ihr parallelen, die Distanz beider Axen vom Schwerpunkte des Körpers und die Gesammtmasse des Körpers gegeben sind.

§ 58. Das Trägheitsellipsoid.

Wir bezeichnen nun mit O einen beliebigen Punkt im Innern oder ausserhalb des festen Körpers, ziehen durch denselben Axen nach allen möglichen Richtungen im Raume und stellen uns die Aufgabe, die Relation zu finden, welche zwischen den Trägheitsmomenten desselben Körpers bezüglich dieser verschiedenen Axen besteht.

Wir machen den Punkt O zum Anfangspunkte eines vorläufig noch ganz willkürlichen Coordinatensystems und ziehen durch O eine willkürliche Gerade $\mathfrak{G}$, deren Richtungscosinus bezüglich dieses Coordinatensystems wir mit α, β, γ bezeichnen. K sei das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Geraden $\mathfrak{G}$. Ferner sei m ein beliebiges Massentheilchen des Körpers, r dessen Entfernung von der Geraden $\mathfrak{G}$, R die Länge der vom Coordinatenursprunge nach der Masse m gezogenen Geraden, λ, μ, ν die Richtungscosinus der letzteren Geraden und ε der Winkel, den sie mit der Geraden $\mathfrak{G}$ einschliesst. Endlich seien $x = R\lambda$, $y = R\mu$ und $z = R\nu$ die Coordinaten des Massentheilchens m. Dann ist

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 \sin^2\varepsilon = R^2[1 - (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)^2] = \\ &= R^2[\alpha^2(\mu^2 + \nu^2) + \beta^2(\lambda^2 + \nu^2) + \gamma^2(\lambda^2 + \mu^2) - \\ &\qquad - 2\alpha\beta\lambda\mu - 2\alpha\gamma\lambda\nu - 2\beta\gamma\mu\nu] = \\ &= \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(x^2 + z^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - \\ &\qquad - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz. \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$150)\left\{\begin{aligned} a=\sum m(y^2+z^2),\quad b=\sum m(x^2+z^2),\quad c=\sum m(x^2+y^2),\\ d=\sum m\,y\,z,\quad e=\sum m\,x\,z,\quad f=\sum m\,x\,z, \end{aligned}\right.$$

so erhält man also für das Trägheitsmoment bezüglich der Axe $\mathfrak{S}$ den Werth:

$$151)\quad K=\sum m\,r^2=a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2-2\,d\,\beta\gamma-2\,e\,\alpha\gamma-2\,f\,\alpha\beta.$$

Die Kenntniss der sechs Constanten 150), von denen a, b, c offenbar die Trägheitsmomente desselben Körpers bezüglich der drei Coordinatenaxen sind, genügt also, um das Trägheitsmoment bezüglich jeder beliebigen durch O gezogenen Axe zu berechnen.

Man kann sich von der durch Formel 151) ausgedrückten Abhängigkeit der Grösse des Trägheitsmomentes von der Lage der betreffenden, durch O gehenden Axe ein anschauliches Bild machen, wenn man sich durch O alle möglichen Axen gezogen denkt und auf jeder von O aus eine Länge aufträgt, welche genau gleich dem Trägheitsmomente des Körpers bezüglich dieser Axe ist. (Den Reductionsfactor wollen wir, die Dimensionen nicht beachtend, gleich Eins setzen.) Die O gegenüberliegenden Endpunkte aller dieser Geraden würden dann eine Fläche bilden, die uns ein anschauliches Bild von der Abhängigkeit der Grösse des Trägheitsmomentes von der Richtung der Axe gäbe. Die Anschaulichkeit wird nicht wesentlich geringer werden, wenn wir auf jede Axe das Quadrat oder den Logarithmus oder sonst eine einfache Function des betreffenden Trägheitsmomentes auftrügen. Wir wollen, da dann die betreffende Fläche besonders einfach ausfällt, die reciproke Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente auftragen. Wir tragen also auf die Gerade $\mathfrak{S}$ von O aus ein Stück $OP_1=\mathfrak{r}$ auf, dessen Länge $1/\sqrt{K}$ sei. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{x}=\mathfrak{r}\alpha$, $\mathfrak{y}=\mathfrak{r}\beta$, $\mathfrak{z}=\mathfrak{r}\gamma$ die Coordinaten des Punktes P_1, so folgt, wenn wir für K seinen Werth $1/\mathfrak{r}^2$ substituiren, aus 151):

$$152)\quad 1=a\mathfrak{x}^2+b\mathfrak{y}^2+c\mathfrak{z}^2-2\,d\,\mathfrak{y}\mathfrak{z}-2\,e\,\mathfrak{x}\mathfrak{z}-2\,f\,\mathfrak{x}\mathfrak{y}.$$

Wenn wir durch O nach allen möglichen Richtungen Gerade ziehen und auf jeder von O aus eine Strecke auftragen, deren Länge die reciproke Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente des Körpers bezüglich der betreffenden Geraden ist, so genügen die Coordinaten der anderen Endpunkte aller dieser Geraden der Gleichung 152). Dieselbe ist also die Gleichung der Fläche, welche von allen diesen Endpunkten gebildet wird. Man nennt sie das Trägheitsellipsoid oder auch das Centralellipsoid, welches zu dem Punkte O des betreffenden Körpers gehört. Schliessen wir nämlich den Fall aus, dass alle Massenpunkte des Körpers in einer Geraden liegen, so kann K niemals Null, daher $\mathfrak{r}$ niemals unendlich werden. Die durch die Gleichung 152) dargestellte Fläche kann sich daher nirgends ins Unendliche erstrecken. Sie muss, da diese Gleichung vom zweiten Grade ist, ein Ellipsoid (einschliesslich der Kugelfläche) sein.

Haben wir die sechs Grössen a, b, c, d, e, f berechnet, so können wir dieses Ellipsoid construiren und erhalten so ein anschauliches Bild der verschiedenen Trägheitsmomente. Die Wahl der Coordinatenaxen war bisher vollkommen willkürlich. Wir können immer die drei Axen des Trägheitsellipsoides (falls dieses ein Rotationsellipsoid oder eine Kugelfläche ist, drei beliebige aufeinander senkrechte Axen desselben) als Coordinatenaxen wählen. Wir bezeichnen diese neuen Coordinatenaxen mit OX_1, OY_1, OZ_1. Die Gleichung des Trägheitsellipsoides reducirt sich dann, wenn $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ die Coordinaten eines Punktes desselben bezüglich der neuen Coordinatenaxen sind, auf

153) $$1 = a_1 \mathfrak{x}_1^2 + b_1 \mathfrak{y}_1^2 + c_1 \mathfrak{z}_1^2 .$$

Da alles, was früher allgemein bewiesen wurde, auch von den neuen Coordinatenaxen gelten muss, so ist, wenn x_1, y_1, z_1 die Coordinaten irgend eines Massentheilchens m des Körpers bezüglich der neuen Coordinatenaxen sind

$$a_1 = \sum m(y_1^2 + z_1^2),\ b_1 = \sum m(x_1^2 + z_1^2),\ c_1 = \sum m(x_1^2 + y_1^2),$$
$$\sum m y_1 z_1 = \sum m x_1 z_1 = \sum m x_1 y_1 = 0.$$

Die letzten drei Summen müssen ja nach 152) für jedes Coordinatensystem gleich den Coefficienten von $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ in der Gleichung des Trägheitsellipsoides sein, welche für unser gegenwärtiges Coordinatensystem verschwinden.

§ 59. Hauptträgheitsmomente.

Jede Axe des Trägheitsellipsoids nennt man eine zum Punkte O gehörige Hauptträgheitsaxe des Körpers und das dazu gehörige Trägheitsmoment ein Hauptträgheitsmoment. Da $1/\sqrt{a_1}$, $1/\sqrt{b_1}$ und $1/\sqrt{c_1}$ die Halbaxen des Trägheitsellipsoides sind, welches, wenn man seine Axen als Coordinatenaxen wählt, ja die Gleichung 153) hat, so sind die Hauptträgheitsmomente die reciproken Quadrate der Halbaxen des Trägheitsellipsoides. Ist das Trägheitsellipsoid ein dreiaxiges Ellipsoid, so giebt es nur drei zum Punkte O gehörige Hauptträgheitsaxen. Ist es ein Rotationsellipsoid, so existirt für den Punkt eine singuläre Hauptträgheitsaxe und jede darauf Senkrechte ist ebenfalls Hauptträgheitsaxe. Dann sind auch alle Trägheitsmomente nach den letzteren Axen gleich. Dies ist selbstverständlich, wenn der Körper um die singuläre Hauptträgheitsaxe symmetrisch, z. B. ein homogen mit Masse erfüllter Rotationskörper und der Punkt O ein Punkt der Rotationsaxe ist. Es kann aber auch ohne Symmetrie des Körpers eintreten. Bei einem beliebigen Körper z. B., dessen Trägheitsellipsoid ein dreiaxiges ist, kann man durch Hinzufügung einer einzigen oder beliebig vieler Massen auf der Axe des mittleren Trägheitsmomentes diesem das kleinste gleich machen. Dann muss der Körper ohne jede Symmetrie für alle in deren Ebene liegenden Axen gleiches Trägheitsmoment haben.

Ist das Trägheitsellipsoid eine Kugel, so sind alle ihre Radien Hauptträgheitsaxen, alle Trägheitsmomente bezüglich derselben gleich. Dies tritt bei regulären, gleichförmig mit Masse erfüllten Körpern (Kugel, Würfel) immer ein, wenn der Punkt O ihr Mittelpunkt ist, kann aber auch bei ganz unregelmässigen Körpern gewissermaassen zufällig eintreten.

Wenn wir drei Hauptträgheitsaxen als Coordinatenaxen einführen, so verschwinden in Gleichung 152) alle drei Coefficienten d, e und f. Wenn wir dann blos die y- und z-Axe in der yz-Ebene drehen, so erhält blos d einen von Null verschiedenen Werth. Wir können daher eine zu O gehörige Hauptträgheitsaxe als eine solche definiren, für welche, wenn wir sie als x-Axe und O als Coordinatenursprung wählen, bei beliebiger Lage der y- und z-Axe (natürlich für rechtwinkelige Coordinaten)

$$\sum m x y = \sum m x z = 0 \quad \text{wird.} \tag{154}$$

Wenn jedem Massenpunkte des Körpers, der auf der einen Seite irgend einer Ebene liegt, ein anderer von genau gleicher Masse entspricht, der dessen Spiegelbild bezüglich der Ebene ist, so nennt man diese Ebene eine Symmetrieebene des Körpers. Wenn ein Körper eine Symmetrieebene hat und wir diese zur yz-Ebene wählen, so entspricht jedem Punkte ein anderer mit gleichem m, y und z, und gleichem, aber entgegengesetzt bezeichneten x, so dass

$$\sum m x y = \sum m x z = 0$$

ist; dann ist also jede auf der Symmetrieebene senkrechte Gerade eine zu ihrem Durchschnittspunkte mit der Symmetrieebene gehörige Hauptträgheitsaxe. Ebenso sieht man, dass, wenn ein Körper zwei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen hat, ihre Durchschnittslinie bezüglich jedes ihrer Punkte Hauptträgheitsaxe ist. Bezüglich jedes dieser Punkte können daher dann die Hauptträgheitsaxen ohne Rechnung gefunden werden, da auch jede durch ihn in einer Symmetrieebene senkrecht zur Durchschnittslinie beider gezogene Axe Hauptträgheitsaxe ist. Man wird daher dann zunächst die drei zum Schwerpunkte gehörigen Hauptträgheitsmomente berechnen, der ja auch auf der Durchschnittslinie der beiden Symmetrieebenen liegen muss. Daraus kann man dann leicht das Trägheitsmoment bezüglich jeder anderen durch den Schwerpunkt gehenden und dann auch bezüglich jeder parallelen Axe berechnen.

Hat aber der Körper keine Symmetrien, so bleibt nichts übrig, als bezüglich irgend welcher, am besten durch den Schwerpunkt gehender Coordinatenaxen die sechs Cofficienten a, b, c, d, e, f zu berechnen, und nach den Methoden der analytischen Geometrie die Axen des Ellipsoides 152) zu suchen.

Um die Trägheitsmomente K_1, K_2 und K_3 eines Körpers bezüglich der drei Coordinatenaxen zu erhalten, empfiehlt es sich oft zuerst die Grössen

$$155)\qquad L_1 = \sum m x^2,\ \ L_2 = \sum m y^2,\ \ L_3 = \sum m z^2$$

zu berechnen (Binet'sche, Minding'sche Trägheitsmomente), welche natürlich ähnliche Eigenschaften haben wie die gewöhnlichen Trägheitsmomente und durch ähnliche Ellipsoide (Binet's, Darboux's, Culmann's, Reye's Ellipsoid) dargestellt werden können.[1]) Es ist dann

$$K_1 = L_2 + L_3,\ \ K_2 = L_1 + L_3,\ \ K_3 = L_1 + L_2.$$

Daraus folgt $K_1 + K_2 > K_3 > K_1 - K_2$. Zwei der Trägheitsmomente bezüglich der Coordinatenaxen können daher beliebige positive Werthe haben; das dritte aber muss zwischen deren Summe und Differenz, welche natürlich durch Subtraction des kleineren vom grösseren zu bilden ist, liegen. Da dies auch von den Hauptträgheitsmomenten gilt, welche gleich den reciproken Quadraten der Halbaxen α_1, α_2, α_3 des Trägheitsellipsoides sind, so muss auch

$$\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} > \frac{1}{\alpha_3^2} > \frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_2^2}$$

sein. Ein Ellipsoid, dessen Halbaxen dieser Relation nicht genügen, kann also nicht Trägheitsellipsoid sein. Gilt sie für eine Halbaxe α_3 und ist α_1 die kleinere der beiden anderen, so muss sie auch, wie man leicht sieht, für jede andere Halbaxe gelten.

Der von uns bisher ausgeschlossene Fall, dass alle Massen in einer Geraden liegen, bildet nur dann einen singulären Fall, wenn auch der Punkt O in dieser Geraden liegt. Dann ist das Trägheitsmoment bezüglich dieser Geraden, welche natürlich Hauptträgheitsaxe ist, Null, bezüglich jeder darauf Senkrechten, die ebenfalls Hauptträgheitsaxe ist, gleich. Das Trägheitsellipsoid degenerirt also in einen unendlichen Kreiscylinder.

Bei Berechnung der Trägheitsmomente oder der Ausdrücke 155) wird natürlich gerade, wie wir dies in § 28 bei Berechnung der Schwerpunktscoordinaten thaten, der feste Körper meist als ein continuirlich mit Masse von constanter oder veränderlicher Dichte erfülltes Volumen oder als eine

---

[1]) Wied. Beibl. 7, 571, 1883; 8, 269, 1884.

mit Masse continuirlich bedeckte Fläche oder Linie zu betrachten sein. Es werden also die Summenzeichen mit Integralzeichen zu vertauschen und für m zu setzen sein $\varrho\, d\, o$, $\varphi\, d\, f$ resp. $\sigma\, d\, s$, wobei die Buchstaben dieselbe Bedeutung wie in den Formeln 67), 68) und 69) haben.

§ 60. **Kräfte auf die Lager.**

Wir wollen nun sogleich einige Anwendungen der Sätze über die Trägheitsmomente machen.

Die durch die Formeln 146) bestimmten Grössen A_l, B_l, C_l, E_l, F_l sind die Summen der Componenten bezüglich der Coordinatenaxen und die Momente bezüglich der y- und z-Axe von denjenigen Kräften, welche bei einem nur um eine feste Axe drehbaren Körper letztere auf ihre Lager ausübt. Diese Formeln zeigen zunächst den selbstverständlichen Satz, dass diese, wenn der Körper ruht, gleich denen der äusseren Kräfte sind, welche auf den Körper wirken. Wenn sich aber der Körper dreht, wirken auf die Lager ausser den von aussen auf den Körper wirkenden Kräften noch andere Kräfte, welche durch die negativ genommenen Glieder der rechten Seiten der fünf ersten der Gleichungen 146) gegeben sind.

Wir wollen nur noch den speciellen Fall discutiren, dass dass keine äusseren Kräfte auf den Körper wirken, also $A_a = B_a = C_a = D_a = E_a = F_a = 0$ ist. Dann dreht er sich gleichförmig; es ist also auch $d\omega / d\mathfrak{t} = 0$ und man erhält

$$156)\quad \begin{cases} A_l = 0, \;\; B_l = \omega^2 \sum m y, \;\; C_l = \omega^2 \sum m z, \\ E_l = -\,\omega^2 \sum m x z, \;\; F_l = \omega^2 \sum m x y. \end{cases}$$

Sind ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunktes des Körpers und ist M dessen Gesammtmasse, so ist $B_l = \omega^2 M \eta$, $C_l = \omega^2 M \zeta$. Dies sind also die Componenten der Centrifugalkraft, welche die ganze Masse des Körpers hätte, wenn sie sich, stets im Schwerpunkte des Körpers concentrirt, mitdrehen würde. Diese Centrifugalkraft überträgt sich daher durch die Axe auf die Lager. Ausserdem wirken aber noch die Drehmomente E_l und F_l auf die die Lager tragende Vorrichtung. Man sieht leicht, dass es die Momente der Centrifugalkräfte der einzelnen Massentheilchen des Körpers bezüglich der y- und

x-Axe sind. Durch diese Kräfte und Momente, welche ihre Richtung fortwährend ändern, wird die Vorrichtung, welche die Axe trägt, hin- und hergeschüttelt, während der Körper gleichmässig rotirt, was man als das Schlagen der Axe bezeichnet. Würde die Axe nicht durch die Lager fixirt, so würde sie sofort aus ihrer Lage weichen. Wenn $\varDelta$ die Länge der Axe, also die Entfernung der beiden Lager ist, so wirkt auf das der positiven Abscissenaxe zugekehrte Lager in der y-Richtung die Kraft $\frac{1}{2}B_l + \frac{F_l}{\varDelta}$, in der z-Richtung die Kraft $\frac{1}{2}C_l - \frac{E_l}{\varDelta}$, auf das andere Lager aber sind die entsprechenden Kraftcomponenten $\frac{1}{2}B_l - \frac{F_l}{\varDelta}$ und $\frac{1}{2}C_l + \frac{E_l}{\varDelta}$; denn diese Kräfte geben die Componentensummen B_l, C_l und die Momente E_l und F_l.

Nur wenn die Ausdrücke 156) verschwinden, wirkt bei Abwesenheit äusserer Kräfte in Folge der Rotation auf keines der Lager eine Kraft, so dass die Axe nicht schlägt und auch dann in unveränderter Lage fortfährt, die Rotationsaxe des Körpers zu sein, wenn die Lager hinweggenommen würden. Die Axe heisst dann eine freie Drehungsaxe. B_l und C_l verschwinden, wenn die Axe durch den Schwerpunkt geht. Es muss aber auch noch E_l und F_l, also $\sum m x y$ und $\sum m x z$ verschwinden, d. h. die Axe muss eine zum Schwerpunkte gehörige Hauptträgheitsaxe sein. Dann ist sie freie Drehungsaxe.

Die Formeln 146) zeigen, dass dann auch, wenn äussere Kräfte auf den Körper wirken, die Componentensummen bezüglich der Coordinatenaxen und die Momente bezüglich der y- und z-Axe für die auf die Lager wirkenden Kräfte und für die äusseren auf den Körper wirkenden Kräfte gleich sind, so dass vermöge der Rotation, mag diese gleichförmig oder beschleunigt sein, keine neuen Kräfte auf die Lager hinzutreten.

§ 61. Das Reversionspendel.

Sei die Länge l und die Schwingungsdauer τ eines einfachen Pendels genau bekannt; dann lässt sich daraus die überaus wichtige und schwer direct bestimmbare Grösse g der Beschleunigung der Schwere mittelst der Formel

157) $$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

berechnen. Leider lässt sich ein einfaches Pendel nur sehr unexact herstellen. Ein zusammengesetztes Pendel (physisches) lässt sich zwar ohne Schwierigkeit herstellen, allein mittelst der zur Bestimmung seiner Schwingungsdauer dienenden Formel kann die Beschleunigung der Schwere nur dann berechnet werden, wenn das Trägheitsmoment, der Schwerpunkt etc. bekannt sind, die wieder nicht leicht mit der genügenden Genauigkeit berechnet werden können. Es ist daher willkommen, dass man, indem man ein zusammengesetztes Pendel um zwei parallele Axen schwingen lässt, leicht die Länge des einfachen Pendels bestimmen kann, welches genau dieselbe Schwingungsdauer wie das zusammengesetzte Pendel hätte. Aus dieser Länge kann dann, wenn auch noch die Schwingungsdauer genau gemessen ist, die Beschleunigung der Schwere bestimmt werden.

Behufs Ableitung der hierzu erforderlichen Sätze denken wir uns einen beliebigen festen Körper von der Masse M, der bezüglich irgend einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Axe das Trägheitsmoment L hat.

$$\lambda = \sqrt{L/M}$$

sei der Trägheitsradius bezüglich dieser Axe. Wir ziehen eine zu dieser Axe Parallele durch den Körper, welche die Entfernung σ vom Schwerpunkte hat, stellen diesen so, dass beide Axen horizontal liegen und lassen ihn unter dem Einflusse der Schwere allein um die letztere Axe schwingen. Sein Trägheitsmoment bezüglich der letzteren Axe ist

$$L + M\sigma^2 = M(\lambda^2 + \sigma^2),$$

daher seine Schwingungsdauer

158) $$\pi\sqrt{\frac{L + M\sigma^2}{Mg\sigma}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{\lambda^2}{\sigma} + \sigma}.$$

Dieselbe ist also für alle parallelen, in gleicher Distanz vom Schwerpunkt befindlichen Axen gleich.

Betrachten wir in diesem Ausdrucke nur σ als variabel, so wird er ein Minimum $\pi\sqrt{2\lambda/g}$ für $\sigma = \lambda$ haben. Die

Schwingungsdauer ist also sehr gross, wenn sich die Axe in sehr grosser Entfernung vom Schwerpunkte befindet. Sie wird kleiner, bis die Entfernung der Drehungsaxe vom Schwerpunkte gleich dem Trägheitsradius ist, welcher der parallelen, durch den Schwerpunkt gehenden Axe entspricht. Rückt die Axe noch näher an den Schwerpunkt, so wächst die Schwingungsdauer wieder und wird abermals unendlich, wenn die Axe dem Schwerpunkte unendlich nahe kommt. Wir fragen nun, wie gross σ gewählt werden muss, damit die Schwingungsdauer gleich der eines einfachen Pendels von gegebener Länge l ist. Ist l kleiner als 2λ, so ist offenbar die Schwingungsdauer des einfachen Pendels kleiner als die kleinste Schwingungsdauer des zusammengesetzten, die Aufgabe daher nicht lösbar. Ist $l = 2\lambda$, so tritt die Gleichheit der Schwingungsdauer gerade für die kleinste Schwingungsdauer des zusammengesetzten Pendels, also für $\sigma = \lambda$ ein. Ist endlich $l > 2\lambda$, so muss es immer zwei Werthe von σ geben, σ_1 und σ_2, für welche die Schwingungsdauern gleich werden. In der That liefert die Gleichsetzung der beiden Schwingungsdauern also der beiden Ausdrücke 157) und 158) die quadratische Gleichung $\sigma^2 - l\sigma + \lambda^2 = 0$, welche in diesem Falle stets zwei verschiedene Wurzeln hat. Aus den bekannten Eigenschaften der Wurzeln einer Gleichung folgt, dass die Summe $\sigma_1 + \sigma_2$ der beiden Distanzen der Axe vom Schwerpunkte, für welche die Schwingungsdauer der des einfachen Pendels gleich ist, gleich der Länge l dieses einfachen Pendels ist. Der Trägheitsradius λ, welcher der parallelen, durch den Schwerpunkt gehenden Axe entspricht, ist aber das geometrische Mittel der beiden Werthe des σ.

Das experimentelle Verfahren kann nun folgendermaassen skizzirt werden. Man verfertigt ein bezüglich einer Ebene möglichst symmetrisches Pendel und bringt daran zu entgegengesetzten Seiten des Schwerpunktes zwei Schneiden so an, dass beide ihre scharfe Kante dem Schwerpunkte zukehren und sich so verschieben lassen, dass ihre scharfen Kanten dabei immer möglichst parallel und in der Symmetrieebene bleiben. Man stellt sie dann durch Kunstgriffe, deren Beschreibung nicht hierher gehört, so ein, dass das Pendel auf jede der beiden Kanten dieser Schneiden aufgelegt genau dieselbe Schwingungsdauer hat, ohne dass jedoch beide dieselbe Entfernung vom Schwerpunkte haben. Dann ist die Summe der Entfernungen der beiden Kanten vom Schwerpunkte, also, da dieser in ihrer Ebene liegt, die Entfernung der beiden Kanten gleich der Länge des einfachen Pendels, welches dieselbe Schwingungsdauer hätte. Die Entfernung der beiden Kanten und die Schwingungsdauer des auf der einen oder anderen Kante ruhenden zusammengesetzten (physischen) Pendels kann aber sehr genau gemessen und so indirect die Länge l eines einfachen Pendels von gleicher Schwingungsdauer τ und diese Schwingungsdauer selbst bestimmt werden, woraus dann g mittelst der Formel 157) folgt. Die Correctionen, welche man wegen des Luftwiderstandes, der mangelnden unendlichen Kleinheit der Amplituden, der unvollständigen Realisirung dieser oder jener Bedingung anzubringen hat, wären nicht allzu schwer ableitbar, aber viel zu weitläufig, um hier erwähnt werden zu können.

§ 62. Der Schwingungsmittelpunkt.

Wir wollen hieran noch einige Bemerkungen knüpfen, welche Maxwell in seiner Mechanik bringt. Wenn ein um eine Axe drehbarer Körper nicht aufhört starr zu sein und dieselben Kräfte auf ihn wirken, so würde er sich, wie wir sahen, unter denselben Anfangsbedingungen in derselben Weise bewegen, wenn die Masse aller übrigen Massentheilchen desselben gleich Null gemacht und nur die eines einzigen Massentheilchens gleich der gesammten Masse M des Körpers gemacht würde, welches sich in einer Entfernung von der Axe befindet, die gleich dem Trägheitsradius λ ist. Man kann sagen, dass sich das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich jener Axe durch das dieser einzigen Masse ersetzen lässt. Wir können dieselbe auch durch zwei Massen μ_1 und μ_2 ersetzen, von denen die eine in der Axe, die andere in einem zu suchenden Abstande davon sich befindet und welche zusammen gleich der Gesammtmasse des Körpers sind. Da wir nun eine verfügbare Grösse mehr haben, so können wir diese beiden Massentheilchen so wählen, dass auch ihr gemeinsamer Schwerpunkt mit dem des Körpers zusammenfällt. Wir erreichen dadurch einen zweifachen Vortheil.

Erstens ist auch die Resultirende der Schwerkräfte, welche auf diese beiden Massentheilchen wirken, identisch wie für die Schwerkräfte, welche auf den ursprünglich gegebenen Körper wirken.

Zweitens ist nach dem in § 57 entwickelten Satze über das Trägheitsmoment bezüglich paralleler Axen auch das Trägheitsmoment der beiden Massen gleich dem des Körpers bezüglich jeder der ursprünglich gegebenen parallelen Axe.

Um Grösse und Lage dieser beiden Massen zu finden, fällen wir vom Schwerpunkte S des Körpers auf die ursprünglich gegebene Drehungsaxe eine Senkrechte $S\,O$, deren Länge wir wieder mit σ bezeichnen. In O denken wir uns eine Masse μ_1, auf der von O nach S gezogenen Geraden im Punkte P jenseits S eine zweite Masse μ_2 in der Entfernung x von S; wir erhalten

$$\mu_1 + \mu_2 = M,$$

weil die Gesammtmasse,

$$\mu_1\,\sigma^2 + \mu_2\,x^2 = L = \lambda^2 M,$$

weil das Trägheitsmoment bezüglich der durch den Schwerpunkt gehenden Axe und

$$\mu_1\,\sigma = \mu_2\,x,$$

weil der Schwerpunkt für den Körper und für das aus beiden Massen gebildete System gleich sein soll.

Substituirt man den aus der ersten Gleichung folgenden Werth von μ_2 in die zweite und dritte und dann den aus der dritten folgenden Werth von μ_1 in die zweite, so folgt

$$x = \lambda^2 / \sigma,$$

daher

$$\mu_1 = \frac{M\lambda^2}{\lambda^2 + \sigma^2}, \quad \mu_2 = \frac{M\sigma^2}{\lambda^2 + \sigma^2}.$$

Da nun das System der beiden starr verbunden gedachten Massen μ_1 und μ_2 dasselbe Trägheitsmoment bezüglich der ursprünglich gegebenen Axe hat, wie der gegebene Körper und auch die Schwere dieselbe Wirkung darauf ausübt, so muss es als zusammengesetztes Pendel unter dem

Einflusse der Schwere um diese Axe, welche wir uns horizontal denken, schwingend auch dieselbe Schwingungsdauer haben. Da ferner μ_1 in der Axe selbst liegt, so ist dies die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels, dessen Masse sich in P befindet. Der Körper schwingt also um die betreffende Axe genau so wie ein einfaches Pendel, dessen Masse sich in P befindet, weshalb P der Schwingungsmittelpunkt des zusammengesetzten Pendels heisst. Da dieses einfache Pendel die Länge

$$\sigma + x = \sigma + \lambda^2/\sigma$$

hat, so ist dies die früher mit l bezeichnete Länge desjenigen einfachen Pendels, das dieselbe Schwingungsdauer hat. Nun hat aber das starr verbundene System der beiden Massen μ_1 und μ_2 auch bezüglich jeder parallelen Axe dasselbe Trägheitsmoment wie der Körper. Wenn wir daher jetzt beide Systeme um eine parallele durch den Punkt P, der früher Schwingungsmittelpunkt war, also durch die Masse μ_2 gehende Axe unter dem Einflusse der Schwere schwingen lassen, so haben beide untereinander wieder dieselbe Schwingungsdauer. Das System der beiden Massen μ_1 und μ_2 ist aber dann wieder ein einfaches Pendel von der Länge $l = \sigma + \lambda^2/\sigma$. Daher ist jetzt O der Schwingungsmittelpunkt des Körpers, welcher wieder dieselbe Schwingungsdauer hat wie früher, wo O der Drehungspunkt und P der Schwingungsmittelpunkt war und man sieht ohne Rechnung, dass der Körper um beide Axen dieselbe Schwingungsdauer hat, sowie auch ein einfaches Pendel, dessen Länge der Abstand der Axen ist.

Wir wollen durch ein ebenes Bret eine Stricknadel senkrecht auf dessen Ebene stecken. l sei die Entfernung des Schwingungsmittelpunktes von der Stricknadel, wenn diese horizontal liegt und das Bret als Pendel um sie als Axe schwingt. An die Stricknadel befestigen wir einen Faden von der Länge l, dessen Ende eine kleine Kugel trägt, welche das Bret gerade berühren soll. Wir fassen die beiden Enden der Stricknadel mit den Fingern und bewegen sie beliebig auf und ab und hin und her, jedoch so, dass sie immer horizontal und das Bret immer in derselben Ebene bleibt. Nun ist die Bewegung der Kugel vom

Absolutwerth ihrer Masse unabhängig; bei passender Wahl desselben aber sowohl das Trägheitsmoment, als auch die Wirkung der Schwere für das Bret und die kleine Kugel gleich; daher bewegen sie sich genau in derselben Weise. Die Kugel berührt also das Bret immer in demselben Punkte. Die durch ihren Mittelpunkt gezogene horizontale Gerade geht fortwährend durch den Schwingungsmittelpunkt des Brettes.

§ 63. Der Mittelpunkt des Stosses.

Wir wollen wieder zu dem ursprünglich gegebenen Körper und den beiden starr verbundenen Massen μ_1 und μ_2 zurückkehren. Der Körper und die beiden Massen sollen mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um die ursprüngliche Axe rotiren. Die Wirkung der Schwere können wir uns dabei, wenn wir wollen, hinwegdenken. Durch die Masse μ_2 sei eine zweite, der ersten Axe parallele, massenlose Axe gelegt und mit beiden Massen starr verbunden. Wir denken uns diese zweite Axe plötzlich festgehalten und gleichzeitig die Lager der ursprünglichen Axe entfernt. Dadurch wird die Masse μ_2 in ihrer Bewegung plötzlich aufgehalten und da μ_1 ohnedies ruhte, kommt das System beider Massen zur Ruhe, ohne dass auf die erste Masse irgend ein Stoss ausgeübt wird. Würden wir dagegen irgend eine andere, mit beiden Massen fest verbundene Axe, welche nicht durch die augenblickliche Bewegungsrichtung der Masse μ_2 hindurchgeht, plötzlich festhalten, so würde das System nur zur Ruhe kommen, wenn wir gleichzeitig die ursprüngliche Axe festhalten würden, welche also einen Stoss erführe. Das Gleiche gilt natürlich auch von dem Körper, da dessen Trägheitsmoment bezüglich aller dieser Axen dasselbe ist. Wenn wir ihn durch irgend eine Kraft plötzlich aufhalten, deren Richtung durch eine durch den Schwingungsmittelpunkt parallel der Drehungsaxe gezogene Gerade geht und senkrecht auf der durch diesen und die Drehungsaxe gelegten Ebene steht, so erfährt die ursprüngliche Drehungsaxe dabei keinen Stoss.

Wenn die Drehungsaxe ausserdem noch Hauptträgheitsaxe bezüglich ihres Durchschnittspunktes mit der zu ihr senkrechten, die Richtung der Kraft enthaltenden Ebene ist, so erfährt sie auch kein Drehmoment, es erfährt also dann jedes der Lager keinen Stoss. Der Fusspunkt der in diesem Falle von der Axe auf die Richtung der Kraft gefällten Senkrechten heisst der Mittelpunkt des Stosses. Nicht nur wenn die durch ihn der ursprünglichen Drehaxe parallel gezogene Axe, sondern auch wenn dieser eine Punkt während der Drehung plötzlich festgehalten wird, erfährt keines der Lager der ursprünglichen Drehaxe einen Stoss.

§ 64. Reduction der allgemeinen Bewegung eines festen Körpers auf die, wo ein Punkt festgehalten ist. Lebendige Kraft der Bewegung relativ gegen den Schwerpunkt.

Wenn in einem festen Körper ein einziger Punkt festgehalten wird, so kann er sich noch beliebig nach allen Richtungen um denselben drehen. Um die Gesetze dieser Drehung zu finden, müssen wir uns zu den Kräften, welche sonst auf den festen Körper wirken, noch eine in diesem Punkte angreifende Kraft hinzugefügt denken, deren Grösse und Richtung aus den drei Gleichungen 134) stets so zu bestimmen ist, dass dieser Punkt in Ruhe bleibt. Diese Kraft ist eben diejenige, welche die den Punkt festhaltende Vorrichtung auf den Körper ausübt. Wir wollen den festen Punkt als Coordinatenanfangspunkt eines im Raume fixen wählen, dann sind also die Momente dieser Kraft bezüglich der Coordinatenaxen Null. Dieselbe geht also in die drei Gleichungen 136) nicht ein, welche somit die Bewegung des Körpers bestimmen. Bezeichnen wir mit x', y', z' die Coordinaten irgend eines Punktes des Körpers bezüglich dieses Coordinatensystems und mit X, Y, Z die Componenten der darauf wirkenden gesammten äusseren Kraft in den Coordinatenrichtungen, so erhalten wir, wenn wir immer blos die auf eine der Coordinatenrichtungen bezughabende Gleichung hinschreiben, analog mit Gleichung 136) folgende Gleichung

$$159)\qquad \sum m\left(y'\frac{d^2 z'}{dt^2} - z'\frac{d^2 y'}{dt^2}\right) = \sum (y'Z - z'Y)$$

als Repräsentanten der drei Bewegungsgleichungen des Körpers bei der Drehung um einen festen Punkt.

Wir sahen, dass bei einem beliebigen Systeme die Bewegung des Schwerpunktes durch die Gleichungen 66) bestimmt ist, also immer so geschieht, als ob daselbst die ganze Masse des Körpers vereint wäre und alle auf den Körper wirkenden Kräfte auf sie wirkten. Die Bewegung des Schwerpunktes ist hiermit auf das einfachere, schon behandelte Problem der Bewegung eines einzigen materiellen Punktes unter dem Einflusse gewisser Kräfte zurückgeführt. Dies gilt also auch für einen beliebigen festen Körper. Da wir jetzt die äusseren Kräfte nicht mit den deutschen, sondern den lateinischen Buchstaben bezeichnen, so verwandeln sich die Gleichungen 66) für einen solchen in

$$160)\quad M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X, \quad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum Y, \quad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum Z,$$

wenn wie in den Formeln 66) M die Gesammtmasse des Körpers ist.

Wir wollen nun ferner beweisen, dass die Drehung eines vollkommen freien festen Körpers um den Schwerpunkt immer genau so geschieht, als ob der Schwerpunkt festgehalten wäre und im Uebrigen dieselben Kräfte auf den festen Körper wirkten, was wir den Satz über die Reduction der freien Drehung eines festen Körpers auf die um einen festen Punkt nennen wollen. Wir können daher das Problem der Bewegung eines vollkommen freien festen Körpers unter dem Einflusse beliebiger Kräfte als gelöst betrachten, wenn wir das der Drehung desselben um einen festen Punkt unter dem Einflusse beliebiger Kräfte gelöst haben. Wir werden das letztere Problem im zweiten Theile ausführlich behandeln, wollen aber jetzt schon den Beweis des Theorems der Reduction der freien Drehung eines festen Körpers auf die um einen festen Punkt liefern. Die Momentengleichung 70) lautet in unserer jetzigen Bezeichnung für den vollkommen freien Körper:

$$161)\qquad \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum(yZ - zY),$$

welche wir wieder auch als Repräsentanten der beiden analogen, für die beiden anderen Coordinatenaxen betrachten. Seien wieder ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunktes S des Körpers. Wir benutzen nun ein zweites bewegliches

Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt S des Körpers sei und dessen Axen denen des ersten Coordinatensystems stets parallel seien. x', y', z' seien die Coordinaten desjenigen Punktes des Körpers bezüglich des zweiten Coordinatensystems, der bezüglich des ersten Coordinatensystems die Coordinaten x, y, z hat. Dann ist

$$x = x' + \xi,\; y = y' + \eta,\; z = z' + \zeta. \tag{162}$$

Ferner ist, da der Schwerpunkt zu jeder Zeit der Coordinatenursprung des neuen Coordinatensystems ist, zu jeder Zeit

$$\sum m x' = \sum m y' = \sum m z' = 0, \tag{163}$$

woraus durch Differentiation nach der Zeit folgt

$$\sum m \frac{d x'}{d t} = 0,\; \sum m \frac{d^2 x'}{d t^2} = 0, \text{ etc.} \tag{164}$$

Mit Rücksicht auf die Werthe 162) folgt

$$\sum m y \frac{d^2 z}{d t^2} = \sum m (y' + \eta)\left(\frac{d^2 z'}{d t^2} + \frac{d^2 \zeta}{d t^2}\right) =$$

$$= \sum m y' \frac{d^2 z'}{d t^2} + \eta \sum m \frac{d^2 z'}{d t^2} + \frac{d^2 \zeta}{d^2 t} \sum m y' + \eta \frac{d^2 \zeta}{d t^2} M.$$

Das zweite und dritte Glied der letzten Zeile verschwindet mit Rücksicht auf 163) und 164), das letzte ist mit Rücksicht auf 160) gleich $\eta \sum Z$. Daher folgt

$$\sum m y \frac{d^2 z}{d t^2} = \sum m y' \frac{d^2 z'}{d t^2} + \eta \sum Z$$

und ebenso

$$\sum m z \frac{d^2 y}{d t^2} = \sum m z' \frac{d^2 y'}{d t^2} + \zeta \sum Y.$$

Da ferner

$$\sum (y Z - z Y) = \sum (y' Z - z' Y) + \eta \sum Z - \zeta \sum Y$$

ist, so folgt endlich aus 161)

$$\sum m \left(y' \frac{d^2 z'}{d t^2} - z' \frac{d^2 y'}{d t^2}\right) = \sum (y' Z - z' Y).$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung 159). Letztere würde die Bewegung desselben Körpers relativ gegen drei stets durch den Schwerpunkt gehende, nicht rotirende Coordinatenaxen bestimmen, wenn nebst den übrigen unverändert auf den Körper wirkenden Kräften auf dessen Schwerpunkt noch stets eine Kraft wirken würde, die ihn fortwährend in Ruhe erhält. Es geschieht also in der That die Drehung um den Schwerpunkt genau so, als ob derselbe ohne eine andere Veränderung der auf den Körper wirkenden Kräfte fortwährend festgehalten würde. Bevor wir jedoch zur Drehung eines festen Körpers um einen festen Punkt übergehen, wollen wir noch eine Reihe wichtiger allgemeiner Principe kennen lernen.

Wir wollen vorher noch kurz ein allgemeines Theorem, dass sich nicht blos auf feste Körper bezieht, beweisen. Seien n ganz beliebige materielle Punkte gegeben, die starr verbunden sein können oder nicht. ξ, η, ζ seien die Coordinaten des Schwerpunktes des von diesen Punkten gebildeten Systems zur Zeit t bezüglich eines beliebigen fixen Coordinatensystems. x, y, z die Coordinaten eines beliebigen der materiellen Punkte zur selben Zeit bezüglich desselben Coordinatensystems, x', y', z' die Coordinaten desselben materiellen Punktes bezüglich eines Coordinatensystems, dessen Axen immer denen des ursprünglichen parallel sind, aber sich so parallel zu sich selbst im Raume bewegen, dass sie immer durch den Schwerpunkt gehen. Es ist dann:

$$T = \sum \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

die gesammte lebendige Kraft des Systems. Den Ausdruck

$$T' = \sum \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]$$

können wir als die lebendige Kraft der relativen Bewegung der materiellen Punkte gegen den Schwerpunkt bezeichnen.

Substituiren wir im Ausdrucke für T die Werthe 162) und bedenken, dass

$$\sum m \frac{d\xi}{dt}\frac{dx'}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\sum m \frac{dx'}{dt}$$

ist, also nach 164) verschwindet, so folgt

$$T = T' + \frac{m}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right].$$

Hier ist das letzte Glied die lebendige Kraft, welche der gesammten Masse aller Punkte zukäme, wenn dieselbe fortwährend im Schwerpunkte vereint wäre und die Bewegung desselben hätte. Man nennt diese letztere lebendige Kraft die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes. Es ist also die gesammte lebendige Kraft aller Punkte des Systems immer gleich der Summe der lebendigen Kraft ihrer Bewegung relativ gegen den Schwerpunkt und der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes.

VI. Vergleich der Principe, die durch Variation des Zustandes zu einer bestimmten Zeit gewonnen werden.

---

§ 65. Analytischer Beweis eines speciellen Falles des Gauss'schen Principes.

Wir wollen nun zur Ableitung eines neuen mechanischen Principes übergehen. Es sei zunächst ein beliebiges holonomes System gegeben, dessen Bedingungen ausschliesslich durch Gleichungen definirt seien, die wir also in der Form

165) $$\varphi_l(t, x_1, y_1 \dots z_n) = 0$$

schreiben können, welche gleichlautend mit 127) ist. Auch in allem Uebrigen wollen wir die in § 34 gebrauchten Bezeichnungen verwenden. Wir bezeichnen wieder die Bewegung, welche das System bei einem bestimmten Anfangszustande unter dem Einflusse der darauf wirkenden Kräfte und unter den herrschenden Bedingungen macht, als die wirkliche Bewegung desselben. Dabei sind die Coordinaten x_h, y_h, z_h des $h$ten materiellen Punktes gewisse Functionen $\chi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ der Zeit. Wir fanden schon in § 43, dass die wirkliche Bewegung durch die Gleichungen 129) bestimmt ist.

Wir wollen nun die Coordinaten x_h, y_h, z_h jedes materiellen Punktes gleich etwas anderen Functionen $\chi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $\omega_1(t)$ der Zeit setzen. Die dadurch bestimmte Bewegung des

Systems nennen wir die nach Gauss' Manier variirte Bewegung. Diese anderen Functionen der Zeit sollen so gewählt werden, dass zu einer bestimmten Zeit, die übrigens beliebig gewählt werden kann, weder die Werthe der Coordinaten, noch deren erste Differentialquotienten nach der Zeit, die wir durch einen angehängten Strich markiren, eine Veränderung erfahren. Wohl aber sollen die zu dieser Zeit geltenden Werthe der Beschleunigungen x_h'', y_h'', z_h'' für jeden materiellen Punkt unendlich kleine Zuwächse $\delta x_h''$, $\delta y_h''$, $\delta z_h''$ erfahren, welche sonst beliebig sind; sie sollen nur der Beschränkung unterworfen sein, dass die variirte Bewegung ebenfalls den Bedingungen des Systems genügen soll, d. h. die Substitution von $\chi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $\omega_1(t)$ für x_h, y_h, z_h soll ebenfalls die Bedingungen des Systems, welche die Form 165) haben, befriedigen. Die Zuwächse, welche die der Zeit t entsprechenden Werthe der verschiedenen Grössen beim Uebergang von der wirklichen zu der nach Gauss' Manier variirten Bewegung erfahren, bezeichnen wir wieder durch ein vorgesetztes δ. Wir wollen nun beweisen, dass für den Uebergang von der wirklichen Bewegung zu der nach Gauss' Methode variirten stets

$$166) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{h=1}^{h=n} [(m_h x_h'' - X_h)\,\delta x_h'' + (m_h y_h'' - Y_h)\,\delta y_h'' \\ + (m_h z_h'' - Z_h)\,\delta z_h''] = 0 \quad \text{ist.} \end{aligned} \right.$$

Natürlich gilt dies nur gerade für den fraglichen Zeitmoment, für welchen die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten keine Aenderungen erfahren, also:

$$167) \quad \left\{ \begin{gathered} \delta x_h = \delta y_h = \delta z_h = \delta x_h' = \delta y_h' = \delta z_h' = 0, \\ h = 1,\ 2 \ldots n \end{gathered} \right.$$

ist. Die Functionen $\chi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $\omega_1(t)$ können immer so gewählt werden, dass diese Gleichung für einen bestimmten, beliebig gewählten Zeitmoment, nicht aber so, dass sie für eine endliche Zeitdauer erfüllt sind. In letzterem Falle müssten auch $\delta x_h''$, $\delta y_h''$, $\delta z_h''$ während der ganzen Zeit verschwinden. Wir beweisen die Gleichung 166) in folgender Weise: aus den Gleichungen 165) folgt für die wirkliche Bewegung während der Zeit dt

$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial t} + \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_h} x'_h + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_h} y'_h + \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_h} z'_h \right) = 0.$$

Daraus folgt durch nochmalige Differentiation nach t

$$168)\qquad \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_h} x''_h + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_h} y''_h + \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_h} z''_h \right) = \Phi,$$

wobei Φ blos die Zeit t, die Coordinaten und deren erste Ableitungen nach der Zeit enthält. Da nun aber weder die Coordinaten, noch deren erste Ableitungen nach der Zeit beim Uebergange von der wirklichen zu der nach Gauss' Manier variirten Bewegung eine Veränderung erfahren, so erfährt weder Φ noch $\partial \varphi_l / \partial x_h$, $\partial \varphi_l / \partial y_h$, $\partial \varphi_l / \partial z_h$ bei diesem Uebergange eine Veränderung. Es folgt also aus Gleichung 168)

$$169)\qquad \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_h} \delta x''_h + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_h} \delta y''_h + \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_h} \delta z''_h \right) = 0.$$

Die wirkliche Bewegung erfolgt nun den Gleichungen 129) gemäss. Multiplicirt man die Gleichung 129) mit $\delta x''_h$, die beiden analogen für die y- und z-Axe geltenden aber mit $\delta y''_h$ und $\delta z''_h$ und addirt alle so für alle Werthe des h gebildeten Gleichungen, so folgt mit Rücksicht auf 169) sofort die Gleichung 166). Bilden wir nun den Ausdruck

$$170)\qquad \sum_{h=1}^{h=n} \frac{1}{m_h} \left[(m_h x''_h - X_h)^2 + (m_h y''_h - Y_h)^2 + (m_h z''_h - Z_h)^2 \right],$$

so erfahren in diesem Ausdrucke beim Uebergange von der wirklichen zu der nach Gauss' Manier variirten Bewegung nur die Grössen x''_h, y''_h und z''_h Veränderungen. Die erste Variation des Ausdruckes 170) ist also durch die linke Seite der Gleichung 166) gegeben. Diese Gleichung drückt also aus, dass die erste Variation des Ausdruckes 170) beim Uebergange von der wirklichen zu der nach Gauss' Manier variirten Bewegung für die Zeit t verschwindet und da, wie man sofort sieht, die zweite Variation dieses Ausdruckes jedenfalls positiv ist, so ist dieser Ausdruck ein Minimum. Er nimmt für jede Zeit t zu, wenn man für diese Zeit von der wirklichen Bewegung zu einer beliebigen nach Gauss' Manier variirten übergeht.

Befinden sich unter den Bedingungen nicht holonome Gleichungen von der Form 78), so muss für jede Bedingung von dieser Form beim Uebergange von der wirklichen zur variirten Bewegung, damit der Ausdruck 170) ein Minimum sei, wiederum auch die variirte Bewegung in ihrem zeitlichen Verlaufe jener Bedingung entsprechen. Es muss also auch für die variirte Bewegung

$$\tau + \sum_{h=1}^{h=n} (\xi_h x'_h + \eta_h y'_h + \zeta_h z'_h) = 0$$

sein. Hieraus folgt durch Differentiation nach der Zeit

$$\sum_{h=1}^{h=n} (\xi_h x''_h + \eta_h y''_h + \zeta_h z''_h) = \Phi,$$

wobei Φ wie in 168) eine Function der Grössen ist, deren Variation nach 167) verschwindet. Daher folgt aus der letzten Gleichung durch Variation

171) $$\sum_{h=1}^{h=n} (\xi_h \delta x''_h + \eta_h \delta y''_h + \zeta_h \delta z''_h) = 0.$$

Das im gegenwärtigen Paragraphen Vorgetragene bildet im Wesentlichsten den Inhalt des Gauss'schen Princips des kleinsten Zwanges. Wir wollen es durch geometrische Constructionen noch weiter veranschaulichen und dabei auch den bisher ausgeschlossenen Fall mit einbeziehen, dass gewisse Bedingungen die Form von Ungleichungen haben.

§ 66. Begriff des Zwanges.

Wir wollen uns die Lage der sämmtlichen n materiellen Punkte zu den Zeiten t, $t + dt$ und $t + 2\,dt$ vorzeichnen. Der $h$te derselben, dessen Masse m_h ist, soll sich zu diesen Zeiten in den Punkten A_h, B_h, C_h befinden (Fig. 16).

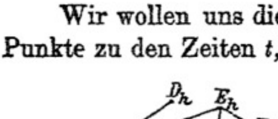

Fig. 16.

Sei ferner D_h der Punkt des Raumes, wohin dieser materielle Punkt zur Zeit $t + 2\,dt$ gelangt wäre, wenn er sich, wie dies wirklich der Fall ist, zur Zeit t in A_h, zur Zeit $t + dt$ in B_h befunden hätte, wenn aber gar keine Kräfte auf ihn gewirkt hätten. E_h aber sei der Punkt des Raumes, wohin er zur Zeit $t + 2\,dt$ gelangt wäre, wenn er wieder zur Zeit t in A_h, zur Zeit $t + dt$ in B_h gewesen wäre und blos die expliciten Kräfte auf ihn gewirkt hätten, deren Resultirende in den Coordinatenrichtungen die Componenten X_h, Y_h, Z_h hat.

Dann ist $B_h D_h = A_h B_h$ und diese Strecken fallen auch in dieselbe Gerade. $D_h E_h$ ist die mit dt^2 multiplicirte Beschleunigung, welche der materielle Punkt durch die expliciten Kräfte allein während der Zeit dt erfahren würde und welche wir in § 34 die explicite Beschleunigung genannt haben. Die Projectionen dieser Strecke $D_h E_h$ auf die Coordinatenaxen sind daher nach 84)

$$\frac{1}{m_h} X_h\,dt^2,\ \ \frac{1}{m_h} Y_h\,dt^2,\ \ \frac{1}{m_h} Z_h\,dt^2.$$

$D_h C_h$ dagegen ist die mit dt^2 multiplicirte Beschleunigung, welche er wirklich erfährt, welche also durch die Totalkräfte, d. h. die expliciten und die Verbindungskräfte zusammen erzeugt wird.

Bezeichnen wir wie in Gleichung 85) die Componenten der resultirenden Verbindungskraft, welche auf den $h$ten materiellen Punkt wirkt, in den Coordinatenrichtungen mit $\mathfrak{x}_h$, $\mathfrak{y}_h$, $\mathfrak{z}_h$, so sind also nach 81) und 83)

$$\frac{1}{m_h}(X_h + \mathfrak{x}_h) = \frac{d^2 x_h}{dt^2} = x_h'',\quad \frac{1}{m_h}(Y_h + \mathfrak{y}_h) = y_h'',$$
$$\frac{1}{m_h}(Z_h + \mathfrak{z}_h) = z_h''$$

die durch dt^2 dividirten Projectionen der Geraden $D_h C_h$ auf die Coordinatenaxen. Verbinden wir die beiden Punkte E_h und C_h durch die vom ersteren gegen den letzteren Punkt hin gezogene Gerade $E_h C_h$, so stellt diese Gerade die mit dt^2 multiplicirte Beschleunigung dar, welche der materielle Punkt durch die Verbindungskräfte allein während der Zeit dt erhalten hätte. Die durch dt^2 dividirten Projectionen von $E_h C_h$ auf die Cordinatenaxen sind also

$$\frac{1}{m_h}\mathfrak{x}_h,\ \ \frac{1}{m_h}\mathfrak{y}_h,\ \ \frac{1}{m_h}\mathfrak{z}_h.$$

Die gleiche, aber entgegengesetzte Gerade $C_h E_h$ ist durch dt^2 dividirt, das, was wir in § 34 die verlorene Beschleunigung des betreffenden Punktes nannten, d. h. die Grösse, die man von der Beschleunigung, welche die expliciten Kräfte bei Abwesenheit aller Bedingungen erzeugen würden, abziehen muss, um die wirkliche Beschleunigung zu erhalten. Die durch dt^2 dividirten Projectionen von $C_h E_h$ auf die Coordinatenaxen sind also nach 85)

$$172)\quad \begin{cases} -\dfrac{\mathfrak{x}_h}{m_h} = \dfrac{1}{m_h}(X_h - m_h x_h''), \quad -\dfrac{\mathfrak{y}_h}{m_h} = \dfrac{1}{m_h}(Y_h - m_h y_h''), \\ \qquad\qquad -\dfrac{\mathfrak{z}_h}{m_h} = \dfrac{1}{m_h}(Z_h - m_h z_h''). \end{cases}$$

Nach 172) ist der Ausdruck 170), von dem wir bewiesen haben, dass er für die wirkliche Bewegung ein Minimum ist, gleich

$$173)\qquad \frac{1}{dt^4}\sum_{h=1}^{h=n} m_h \cdot (C_h E_h)^2,$$

also gleich der Summe der mit der jedesmaligen Masse multiplicirten Quadrate der verlorenen Beschleunigungen aller materiellen Punkte oder der Summe der durch die Masse dividirten Quadrate aller verlorenen Kräfte, da für jeden Punkt die verlorene Kraft gleich dem Producte seiner Masse in seine verlorene Beschleunigung ist.

Wären keine Verbindungskräfte vorhanden, so wäre der materielle Punkt m_h zur Zeit $t + 2\,dt$ unter dem Einflusse der wirkenden expliciten Kräfte nach E_h gelangt. In Folge der Verbindungskräfte, welche die Bedingungsgleichungen herhalten, ist er nicht nach E_h, sondern nach C_h gelangt, er wurde also durch die Verbindungskräfte gezwungen, sich nach C_h, statt nach E_h zu bewegen. Die Strecke $E_h C_h$ ist die durch die Verbindungen erzwungene Abweichung von der expliciten Bewegung.

Bekanntlich wird in der Methode der kleinsten Quadrate das Quadrat der Abweichung des beobachteten vom wahren Werthe multiplicirt mit dem sogenannten Gewichte der Beobachtung als ausschlaggebend angesehen. Analog wollen wir auch hier das mit der Masse des materiellen Punktes multiplicirte Quadrat der Abweichung $E_h C_h$, das wir noch mit der als constant zu betrachtenden Grösse dt^4 dividiren, um Endliches zu erhalten,[1]) also die Grösse

$$m_h . (C_h E_h)^2 / d t^4$$

als das Maass der durch die Verbindungen bewirkten Störung der Bewegung bezeichnen. Wir nennen diese Grösse auch das Maass des Zwanges, den der betreffende Punkt durch die Verbindungen erlitten hat oder kürzer den Zwang des betreffenden Punktes. Die Summe der so für alle materiellen Punkte des Systems gebildeten Grössen, also der Ausdruck 173) heisst der Zwang des ganzen Systems zur betreffenden Zeit.

Der im vorigen Paragraphen gefundene Satz kann also unter Einführung dieser Ausdrucksweise dahin ausgesprochen werden, dass der Zwang des ganzen Systems für die wirkliche Bewegung zu jeder Zeit ein Minimum ist, d. h. dass er zu jeder Zeit wächst, wenn man von der wirklichen Bewegung zu einer beliebigen, nach Gauss' Manier variirten Bewegung übergeht.

Unter dem Zwange des Systems bei der variirten Bewegung verstehen wir dabei den Ausdruck, den wir aus 173) erhalten, wenn wir darin für C_h den Punkt F_h des Raumes setzen, wo sich der betreffende materielle Punkt bei der variirten Bewegung zur Zeit $t + 2 d t$ befindet. Letzterer Zwang ist also

174) $$\frac{1}{d t^4} \sum_{h=1}^{h=n} m_h . (F_h E_h)^2 .$$

Das Minimum des Ausdruckes 173) ist also so zu verstehen: die Lage sämmtlicher Punkte zu den ebenfalls gegebenen Zeiten t und $t + d t$ sei unverändert gegeben. Daraus kann die Lage berechnet werden, welche sie zur Zeit $t + 2 d t$ hätten, wenn nur die expliciten Kräfte, aber keine Bedingungen

---

[1]) Gerade der Quotient $m_h . (C_h E_h)^2 / d t^4$ ist von der Grösse des dt unabhängig, da $C_h E_h$ proportional $d t^2$ ist.

vorhanden wären. Der Punkt m_h wäre dann zur Zeit $t + 2\,dt$ in E_h; nun werde sämmtlichen Punkten zur Zeit $t + 2\,dt$ irgend eine andere, aber eine mit den Bedingungen verträgliche Lage gegeben, wobei sich m_h in F_h befinde. Von allen diesen Lagen wird zur Zeit $t + 2\,dt$ unter dem vereinten Einflusse der expliciten Kräfte und der Bedingungen des Systems diejenige wirklich eintreten, für welche $\sum_{h=1}^{h=n} m_h . (E_h F_h)^2$ ein Minimum ist, da ja dt als gegebene Constante zu betrachten ist.

Wenn keine expliciten Kräfte vorhanden sind, so würde ohne Verbindungen keiner der Punkte eine Beschleunigung erfahren. Dann fallen die Punkte D_h und E_h zusammen. $E_h C_h$ ist identisch mit der gesammten Beschleunigung und der Ausdruck 173) stellt einfach die Summe der mit den Massen multiplicirten Quadrate der Beschleunigungen aller materiellen Punkte dar. Die Bewegung, für welche diese Summe ein Minimum ist, nennt man in neuer Zeit auch die geradeste, mit den Bedingungen verträgliche Bewegung. Sie tritt dem Principe des kleinsten Zwanges gemäss bei den herrschenden Bedingungen immer ein, wenn keine expliciten Kräfte wirken.

§ 67. Geometrischer Beweis des Princips des kleinsten Zwanges.

Wir wollen nun noch diese Sätze, für welche wir bisher nur den analytischen Beweis des § 65 gegeben haben, geometrisch beweisen, wobei wir uns auch von der beim früheren Beweise eingeführten Beschränkung frei machen werden, dass die Bedingungen keine Ungleichungen enthalten.

Wir fassen da zunächst den Verlauf der wirklichen und derjenigen Bewegung unserer materiellen Punkte von der Zeit t bis zur Zeit $t + 2\,dt$ ins Auge, welche wir die nach Gauss'scher Manier variirte nannten, jetzt aber kurz die variirte nennen wollen. Bei der letzteren sollen sämmtliche materielle Punkte zur Zeit t dieselbe Lage haben, wie bei der wirklichen Bewegung, ebenso zur Zeit $t + dt$. Dadurch sind die Bedingungen 167) ausgedrückt, dass weder die

Coordinaten, noch deren erste Differentialquotienten nach der Zeit eine Aenderung erfahren sollen.

Zur Zeit $t + 2\,dt$ aber soll der $h$te Punkt bei der wirklichen Bewegung in C_h sein, bei der variirten aber irgend eine andere Lage F_h haben. Alle diese neuen Lagen sollen blos an die Bedingung gebunden sein, dass sie mit den zur Zeit $t + 2\,dt$ herrschenden, durch Gleichungen oder Ungleichungen ausgedrückten Bedingungen des Systems vereinbar sind.

Bezeichnen wir daher mit δa_h, δb_h, δc_h die Projectionen der Verschiebung $C_h F_h$ des materiellen Punktes m_h auf die Coordinatenaxen, so muss jeder holonomen Bedingungsgleichung von der Form 165) an Stelle der Relation 86) die Gleichung oder Ungleichung

$$175)\qquad \sum_{h=1}^{h=n}\left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_h}\delta a_h + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_h}\delta b_h + \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_h}\delta c_h\right) \lesseqgtr 0$$

entsprechen. Jeder nicht holonomen Bedingungsgleichung oder Ungleichung von der Form 78) oder 80) aber entspricht, wie wir bei Ableitung der Gleichung 171) sahen, an Stelle der Relation 88) die Gleichung oder Ungleichung

$$176)\qquad \sum_{h=1}^{h=n}(\xi_h\,\delta a_h + \eta_h\,\delta b_h + \zeta_h\,\delta c_h) \lesseqgtr 0.$$

In diesen beiden Relationen ist für t eigentlich $t + 2\,dt$ zu setzen, wodurch aber die betreffende Relation nur unendlich wenig abgeändert wird.

Nach unseren Festsetzungen ist also die Verschiebung des Systems aus der wirklichen Lage, welche es zur Zeit $t + 2\,dt$ hat, in die variirte Lage, welche es zur selben Zeit hat, jedenfalls eine der Zeit $t + 2\,dt$ entsprechende Virtuelle. Die Relationen 175) und 176) unterscheiden sich ja von 86) und 88) nur dadurch, dass δa_h, δb_h, δc_h statt δx_h, δy_h, δz_h steht. Es muss also die Relation 92), die ja für alle Zeiten gilt, erfüllt sein. An Stelle der in dieser Relation vorkommenden Grössen δx_h, δy_h, δz_h sind natürlich wieder die Projectionen δa_h, δb_h, δc_h der gegenwärtig mit $C_h F_h$ bezeichneten Verschiebung des materiellen Punktes m_h auf die Coordinatenrichtungen zu setzen. Diese Relation lautet daher:

177) $$\sum_{h=1}^{h=n}(\mathfrak{x}_h\,\delta a_h + \mathfrak{y}_h\,\delta b_h + \mathfrak{z}_h\,\delta c_h) \geqq 0.$$

$-\mathfrak{x}_h$, $-\mathfrak{y}_h$, $-\mathfrak{z}_h$ sind aber nach 172) die mit m_h/dt^2 multiplicirten Projectionen von $C_h E_h$ auf die Coordinatenrichtungen. Es ist daher

$$\mathfrak{x}_h\,\delta a_h + \mathfrak{y}_h\,\delta b_h + \mathfrak{z}_h\,\delta c_h = -\,C_h E_h \,.\, C_h F_h \,.\cos\vartheta_h \,.\, m_h/dt^2,$$

wo ϑ_h der Winkel der gerichteten Geraden $C_h E_h$ und $C_h F_h$ ist (vergl. Fig. 16 S. 212).

Bildet man diesen Ausdruck für alle materiellen Punkte, so erhält man gemäss der Relation 177)

178) $$\sum_{h=1}^{h=n} m_h \,.\, C_h E_h \,.\, C_h F_h \,.\cos\vartheta_h/dt^2 \leqq 0\,.$$

Der Zwang für die wirkliche Bewegung wurde durch den Ausdruck 173), der für die variirte Bewegung durch den Ausdruck 174) definirt; nun ist in dem Dreiecke $C_h E_h F_h$ (Fig. 16)

$$F_h E_h^{\,2} = C_h E_h^{\,2} + C_h F_h^{\,2} - 2\,C_h E_h \,.\, C_h F_h \cos\vartheta_h\,.$$

Daher wird:

$$\sum_{h=1}^{h=n} m_h \frac{(F_h E_h)^2}{dt^4} = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \frac{(C_h E_h)^2}{dt^4} + \sum_{h=1}^{h=n} m_k \frac{(C_h F_h)^2}{dt^4} -$$
$$-\,2\sum_{h=1}^{h=n} m_h \frac{C_h E_h \,.\, C_h F_h}{dt^4}\cos\vartheta_h.$$

Das zweite Glied der rechten Seite ist nothwendig positiv, wenn nicht alle $C_h F_h = 0$, resp. unendlich klein höherer Ordnung als dt^2 sind, wenn also nicht sämmtliche Beschleunigungen für die variirte Bewegung mit denen für die wirkliche zusammenfallen. Das dritte Glied kann nach 178) auch nicht negativ sein. Da nun nach 174) die linke Seite den Zwang für die variirte, das erste Glied der rechten Seite aber nach 173) den Zwang für die wirkliche Bewegung darstellt, so ist für die wirkliche Bewegung der Zwang immer kleiner, als für jede nach der obigen Festsetzung mögliche variirte.

Ersetzen wir in dem ersten Gliede der rechten Seite $(C_h E_h)^2$ durch die Summe der Quadrate seiner durch 172 gegebenen Componenten in den Coordinatenrichtungen, so geht dasselbe wieder über in:

$$\sum_{h=1}^{h=n} m_h \frac{(C_h E_h)^2}{d t^4} = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \left[\left(x_h'' - \frac{1}{m_h} X_h\right)^2 + \left(y_h'' - \frac{1}{m_h} Y_h\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(z_h'' - \frac{1}{m_h} Z_h\right)^2\right],$$

was mit 170) übereinstimmt. Da in diesem Ausdrucke X_h, Y_h, Z_h als gegeben, die Beschleunigungen aber als variabel zu betrachten sind, so liefert die Bedingung, dass derselbe ein Minimum sein soll, allgemein die Relation

$$179)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{h=1}^{h=n} [(m_h x_h'' - X_h)\, \delta x_h'' + (m_h y_h'' - Y_h)\, \delta y_h'' + \\ &\qquad\qquad + (m_h z_h'' - Z_h)\, \delta z_h''] \geqq 0 \,. \end{aligned} \right.$$

Die Bedingung, dass die Lage sämmtlicher materieller Punkte zu zwei unendlich nahe liegenden Zeiten (den Zeiten t und $t + dt$) mit den für die wirkliche Bewegung zu diesen Zeiten geltenden Lagen zusammenfallen muss, ist der geometrische Ausdruck der Gleichungen 167). Dieselbe wird häufig als selbstverständlich nicht erwähnt, doch ist es jedenfalls im Interesse der Klarheit, sie ausdrücklich hervorzuheben. Die Functionen, welche die Coordinaten für die wirkliche und für die variirte Bewegung durch die Zeit ausdrücken, dürfen für die fragliche Zeit erst in den zweiten Ableitungen und da nur so abweichen, dass die zu dieser Zeit geltenden Bedingungen des Systems erfüllt bleiben.

Man sieht übrigens leicht, dass die Relation 178) mit 179) identisch ist. Da $C_h F_h$ eine ganz beliebige, der Zeit $t + 2\,dt$ entsprechende virtuelle Verschiebung ist, so waren wir berechtigt, ihre Projectionen δa_h, δb_h, δc_h auf die Coordinatenaxen für δx_h, δy_h, δz_h in die Relationen 92) zu substituiren.

Wenn wir aber die wirkliche Bewegung des Systems mit der variirten vergleichen, so sehen wir, dass $D_h C_h$ (Fig. 16) die mit dt^2 multiplicirte Beschleunigung des betreffenden materiellen Punktes für die wirkliche Bewegung, $D_h F_h$ dagegen derselbe Ausdruck für die variirte Bewegung ist. Daher ist $C_h F_h$ die mit dt^2 multiplicirte Variation, welche die Beschleunigung des betreffenden materiellen Punktes beim Uebergange von der wirklichen zur variirten Bewegung erfahren hat. Die mit dt^2 dividirten Projectionen $\delta a_h, \delta b_h, \delta c_h$ von $C_h F_h$ auf die Coordinatenaxen sind also die Zuwächse $\delta x_h'', \delta y_h'', \delta z_h''$, welche die Componenten der Beschleunigung in den Coordinatenrichtungen beim Uebergange von der wirklichen zur variirten Bewegung erfahren. Substituiren wir diese Werthe und für die Projectionen von $C_h E_h$ die mit dt^2 multiplicirten Ausdrücke 172), so folgt:

$$\begin{aligned}
&- C_h F_h . C_h E_h . \cos \vartheta_h = \\
&= \left[\left(x_h'' - \frac{1}{m_h} X_h\right) \delta x_h'' + \left(y_h'' - \frac{1}{m_h} Y_h\right) \delta y_h'' + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(z_h'' - \frac{1}{m_h} Z_h\right) \delta z_h''\right] dt^4 .
\end{aligned}$$

Mit Rücksicht hierauf geht die Relation 178) sofort in 179) über. dt gilt wie immer als gegebene Constante.

Substituirt man dieselben Werthe für $\delta a_h, \delta b_h, \delta c_h$ in in die Relationen 175) und 176) und dividirt durch dt^2, so gehen dieselben in folgende Relationen über:

$$180) \quad \begin{cases}
\sum\limits_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_h} \delta x_h'' + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_h} \delta y_h'' + \frac{\partial \varphi_l}{\partial c_h} \delta z_h'' \right) \leqq 0, \\
\sum\limits_{h=1}^{h=n} (\xi_h \delta x_h'' + \eta_h \delta y_h'' + \zeta_h \delta z_h') \leqq 0,
\end{cases}$$

von denen die erste irgend einer holonomen, die zweite irgend einer nicht holonomen Bedingungsgleichung oder Ungleichung entspricht. Diese beiden Relationen sind also der allgemeinste analytische Ausdruck für die Bedingungen, welche nebst den Gleichungen 167) erfüllt sein müssen, damit der Ausdruck 170) ein Minimum wird. (Vergl. die Gleichungen 169) und 171).

§ 68. Vergleich des Princips des kleinsten Zwanges mit dem der virtuellen Verschiebungen.

Wir haben das Princip des kleinsten Zwanges aus dem der virtuellen Verschiebungen abgeleitet. So lange das Gleichheitszeichen gilt, folgt wieder umgekehrt aus der abgeleiteten Gleichung auch die ursprüngliche, da wir ja Mehrdeutigkeiten ausschlossen. Sobald also immer Gleichheitszeichen gelten, ist das Princip der virtuellen Verschiebungen mit dem des kleinsten Zwanges gleichbedeutend.

Wenn aber aus zwei Ungleichungen eine dritte folgt, so folgt aus der zweiten und dritten im Allgemeinen nicht wieder die erste. Es ist also die zweite und dritte nicht mit der ersten und zweiten gleichbedeutend. Daher sind auch die Bedingungen 180) nicht mit 86) und 88) identisch, und das Princip des kleinsten Zwanges ist, wenn Relationen mit Ungleichheitszeichen vorhanden sind, im Allgemeinen nicht mit dem der virtuellen Verschiebungen gleichbedeutend.

Für dauernde Ruhe sämmtlicher materieller Punkte sind jedoch beide Principe auch in letzterem Falle gleichbedeutend, so dass auch aus dem Principe der virtuellen Verschiebungen die Bedingungen des Gleichgewichtes im Ruhezustande immer eindeutig folgen, wie man folgendermaassen sieht. Im Falle des Gleichgewichtes im Ruhezustande coincidiren die vier Punkte A_h B_h, C_h, D_h (§ 66, Fig. 16), da die Anfangsgeschwindigkeit sämmtlicher Punkte Null ist. Es wird also der Unterschied $C_h F_h$ zwischen der Beschleunigung bei der variirten und wirklichen Bewegung identisch mit der virtuellen Verschiebung des betreffenden Punktes. Die Projectionen von $C_h F_h$ auf die Coordinatenaxen können daher ebenso gut die Grössen $\delta x_h''$, $\delta y_h''$ und $\delta z_h''$ als die Grössen δx_h, δy_h und δz_h bedeuten und die beiden Relationen 93) und 179) werden identisch.

Analytisch spricht sich dies dadurch aus, dass man während jedes Zeitmomentes einer sehr kleinen Zeit τ den x'', y'' und z'', welche anfangs alle gleich Null sind, beliebige mit den Bedingungen verträgliche sehr kleine Werthe $\delta x''$, $\delta y''$ und $\delta z''$ ertheilen kann. Die Relation 179) gilt dann während jedes dieser Zeitmomente. Integrirt man zweimal von 0 bis τ, so kann man die Kräfte dabei constant betrachten, da die Bewegung des Systems anfangs mit der Geschwindigkeit Null, später nur mit unendlich kleiner Geschwindigkeit geschieht; die Beschleunigungen x_h'', y_h'', z_h'' aber sind anfangs Null, bleiben immer sehr klein gegen X_h/m_h, Y_h/m_h und Z_h/m_h und können daher vernachlässigt werden.

Es folgt also zunächst

$$180\text{a)}\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{h=1}^{h=n} \Big(X_h \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt\, \delta x_h'' + Y_h \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt\, \delta y_h'' + \\ + Z_h \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt\, \delta z_h'' \Big) \gtreqless 0. \end{aligned} \right.$$

Offenbar ist aber

$$\int_0^\tau dt \int_0^\tau dt\, \delta x_h''$$

der gesammte Coordinatenzuwachs δx_h, und dasselbe gilt für die y- und z-Axe. Die Relation 180a) ist daher identisch mit

$$\sum_{h=1}^{h=n} (X_h\, \delta x_h + Y_h\, \delta y_h + Z_h\, \delta z_h) \gtreqless 0.$$

Ebenso findet man, dass die Bedingungen 180), welche für das Princip des kleinsten Zwanges gelten, mit den Bedingungen 86) und 88), welche für das Princip der virtuellen Verschiebungen gelten, identisch werden.

Das Princip der virtuellen Verschiebungen ist also mit dem des kleinsten Zwanges für den Fall des Gleichgewichtes im Ruhezustande identisch.

Im Falle der Bewegung und des Herrschens von Ungleichungen aber kann kein Beweis geliefert werden, dass die das Princip der virtuellen Verschiebungen darstellende Relation 93) die eintretenden Beschleunigungen auch immer eindeutig bestimmt. Um dies nachzuweisen, genügt es offenbar an irgend einem speciellen Beispiele zu zeigen, dass Fälle möglich sind, wo die Relation 93) für verschiedene mögliche Bewegungsarten gilt, so dass aus ihr allein nicht erkennbar ist, welche derselben eintritt.

Ein derartiges specielles, von **Gibbs** erdachtes Beispiel wollen wir im folgenden Paragraphen behandeln.

§ 69. Specieller Fall, wo das Princip des kleinsten Zwanges mehr leistet, als das der virtuellen Verschiebungen.

Es sei eine Fläche F gegeben, welche durch den Coordinatenursprung geht, daselbst senkrecht auf der Abscissenaxe steht und der positiven Abscissenrichtung ihre concave Seite zuwendet. Ein beweglicher materieller Punkt von der Masse m, dessen rechtwinkelige Coordinaten im Allgemeinen x, y, z heissen sollen, passire zur Zeit t, für welche man seine Beschleunigung sucht, gerade den Coordinatenursprung mit der Geschwindigkeit v. Der Krümmungsradius des Schnittes der Fläche F und der Ebene, welche v und die Abscissenaxe enthält, sei R. Die Bedingung, welcher der materielle Punkt unterworfen ist, bestehe zur Zeit t darin, dass er die Fläche F nach der der negativen Abscissenrichtung zugewandten Seite nicht überschreiten darf, sich aber nach der positiven Abscissenrichtung hin beliebig von derselben entfernen kann. Bei Anwendung des Principes der virtuellen Verschiebung ist daher δy und δz beliebig, δx dagegen kann ebenfalls beliebige, aber nur positive Werthe (incl. Null) annehmen. Die Relation 93) fordert daher, dass $m y'' = Y$ und $m z'' = Z$ sei. Da δx nur gleich Null oder positiv, und x'' vermöge der Bedingungen des Systems gleich oder beliebig grösser als v^2/R sein kann (vergl. § 13), so ist die Relation 93) immer erfüllt, falls x'' gleich dem grösseren der beiden Ausdrücke v^2/R oder X/m oder noch grösser ist. Diese Relation lässt also völlig unbestimmt, ob sich nicht das Bewegliche schon für Werthe des X, die kleiner als die Centrifugalkraft $m v^2/R$ sind, von der Fläche loslöst. Die Unmöglichkeit hiervon kann man nur indirect daran erkennen, dass dann sofort nach der Loslösung das Bewegliche völlig frei und seine Beschleunigung in der Abscissenrichtung gleich X/m, also kleiner als v^2/R werden müsste, so dass es sich sofort wieder an die Fläche anschliessen müsste.

Bei Anwendung des Principes des kleinsten Zwanges ist weder der Ort, wo sich der materielle Punkt befindet, noch sind dessen Geschwindigkeitscomponenten zu variiren. Die Variationen $\delta y''$ und $\delta z''$ der Componenten der Beschleunigung in der y- und z-Richtung sind willkürlich; daher folgt aus der Relation 179) wieder $m y'' = Y$, $m z'' = Z$ und diese reducirt sich auf

181) $$(m x'' - X)\,\delta x'' \geqq 0.$$

Die Geschwindigkeit v kann keine negative Componente in der Abscissenrichtung haben, da das Bewegliche verhindert ist, auf die Seite der negativen Abscissenaxe zu gelangen. Sie kann aber auch keine positive Componente in der Abscissenrichtung haben, da das Bewegliche sonst von der Seite der negativen Abscissen kommen müsste, wenn dessen Geschwindigkeit nicht eine endliche Richtungsänderung erfährt, was wir ausschliessen wollen, da dazu eine unendliche Kraft erforderlich wäre. Es steht also die Geschwindigkeit v senkrecht auf der Abscissenrichtung und daher ist die Beschleunigung x'' in der positiven Abscissenrichtung, wenn sich das Bewegliche gerade in der Fläche F bewegt, gleich v^2/R. Das Bewegliche kann sich nicht in einer weniger gekrümmten oder gar nach der anderen Seite gekrümmten Bahn bewegen, da es sonst nach derjenigen Seite der Fläche F gelangen würde, welche der negativen Abscissenrichtung zugewandt ist. Es kann also die Beschleunigung keinen negativen und keinen kleineren Werth als v^2/R annehmen. Dagegen kann die Bahn stärker nach der positiven Abscissenseite hin gekrümmt, also x'' beliebig grösser als v^2/R sein. Wir erhalten daher für $\delta x''$ folgende Bedingungen: Wenn $x'' = v^2/R$ ist, kann $\delta x''$ nur gleich Null oder positiv sein. Wenn dagegen $x'' > v^2/R$ ist, so ist $\delta x''$ ebenso willkürlich wie $\delta y''$ und $\delta z''$.

Nachdem dies festgestellt ist, wollen wir untersuchen, was aus dem Principe des kleinsten Zwanges, das sich auf die Relation 181) reducirt hat, folgt. Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. X sei negativ oder habe einen so kleinen positiven Werth, dass $X/m < v^2/R$ ist. Dann ist in 181) der erste Factor nothwendig positiv, da $x'' \geqq v^2/R$ ist. Der Fall, dass $x'' > v^2/R$ ist, ist also dann durch die Relation 181) ausgeschlossen, da in diesem Falle $\delta x''$ und damit die linke Seite von 181) auch negativ sein könnte. In diesem Falle,

dass X negativ oder $< m v^2/R$ ist, muss also $x'' = v^2/R$ sein, d. h. der materielle Punkt bleibt auf der Fläche, was mit der Erfahrung stimmt, da dann in der That die äussere Kraft entweder nach der Seite der negativen Abscissen gerichtet ist oder, wenn sie die entgegengesetzte Richtung hat, kleiner ist als die das Bewegliche an die Fläche andrückende Centrifugalkraft.

2. Wäre $X/m > v^2/R$, so wäre, wenn $x'' = v^2/R$ wäre, der erste Factor der linken Seite der Relation 181) negativ. Da $\delta x''$ jedenfalls positive Werthe haben kann, so wäre also diese Relation nicht erfüllt. Dann muss also $x'' > v^2/R$ sein. Da aber in diesem Falle $\delta x''$ positiv und negativ sein kann, so kann die Relation 181) nur erfüllt sein, wenn $m x'' = X$ ist. Das Bewegliche löst sich also von der Fläche ab und bewegt sich so, als ob es frei wäre. Dies stimmt wieder mit der Erfahrung, da jetzt die Componente der Kraft, welche das Bewegliche von der Fläche hinwegtreibt, grösser als die Centrifugalkraft ist.

3. Ist endlich $X/m = v^2/R$, so ist jedenfalls auch $x'' = v^2/R$. Denn wenn $x'' > v^2/R$ wäre, so wäre in 181) der erste Factor positiv und der zweite könnte auch negativ sein. Die Bahn des Beweglichen würde dann auch, wenn es frei wäre, die Fläche F osculiren.

Aus den angestellten Betrachtungen folgt sofort Folgendes. Ein materieller Punkt bewege sich längs einer krummen Fläche, welche er nach der concaven, nicht aber nach der anderen Seite hin verlassen kann. Die Componente N der von aussen auf ihn wirkenden Kraft senkrecht zu dieser Fläche wachse continuirlich von einem Werthe, der kleiner als $m v^2/R$ ist, zu einem grösseren oder springe plötzlich zu einem solchen über. Dann löst sich das Bewegliche im Momente, wo $N \geqq m v^2/R$ wird, von der Fläche mit der Beschleunigung N/m los. Aus dem Principe des kleinsten Zwanges folgt dies unmittelbar durch seine Anwendung auf jeden einzelnen Moment der Bewegung, aus dem der virtuellen Geschwindigkeiten aber nur durch Zuziehung fremdartiger Betrachtungen, z. B. über die Bewegung, welche sich dann für spätere Zeitmomente ergeben würde.

§ 70. Gleichgewicht im Ruhezustande, wenn eine Kraftfunction existirt.

Besonders einfach gestaltet sich die Gleichgewichtsbedingung für den Ruhezustand, wenn die gegebenen Kräfte eine Kraftfunction haben. Dann ist:

$$X_h = -\frac{\partial V}{\partial x_h}, \quad Y_h = -\frac{\partial V}{\partial y_h}, \quad Z_h = -\frac{\partial V}{\partial z_h}$$

und aus 95) folgt $\delta V \geqq 0$ für alle mit den Bedingungen verträglichen Veränderungen der Coordinaten.

Es ist also dann der die Variationen enthaltende Ausdruck 95), der das Kriterium für das Gleichgewicht liefert, die vollständige Variation einer Function der Coordinaten, welche noch die natürlich nicht zu variirende Zeit explicit enthalten kann. Durch Angabe dieser einzigen Function und natürlich der Bedingungen des Systems, wenn solche vorhanden sind, kann daher die Frage nach dem Gleichgewichte auf eine lediglich mathematische Aufgabe zurückgeführt werden, weshalb man der Kraftfunction auch den Namen statisches Potential giebt. Wir werden im zweiten Theile sehen, dass in vielen Fällen auch die Auffindung der Bewegung des Systems durch die Forderung, dass eine einzige Function, die dann allerdings noch die Geschwindigkeitscomponenten enthält, ein Grenzwerth sein soll, auf eine rein mathematische Aufgabe zurückgeführt werden kann. Jene Function werden wir dann das (mittlere) kinetische Potential nennen.

Wenn dauernde Ruhe des Systems mit den Bedingungen desselben vereinbar ist und ein statisches Potential existirt, wird also das System immer im Gleichgewichte bleiben, wenn es anfangs in Ruhe war und die erste Variation des statischen Potentiales für keine unendlich kleine mögliche Verschiebung der Punkte negativ ausfällt.

In diesem Falle ist auch die Definition der Stabilität oder Labilität des Gleichgewichtes eine sehr einfache. Das Gleichgewicht heisst stabil, wenn, sobald man jedem Punkte des Systems eine sehr kleine Verschiebung und Geschwindigkeit ertheilt, diese zu allen späteren Zeiten sehr klein bleiben, sobald sich das System unter dem Einflusse der gegebenen expliciten Kräfte weiter bewegt, wie immer die ursprünglich ertheilte Verschiebung und Geschwindigkeit beschaffen sein mag, unter der Bedingung, dass ihre Grösse unterhalb einer gewissen Grenze liegt. Ist es dagegen möglich, durch irgend eine beliebig kleine, den Punkten des Systems anfangs ertheilte Verschiebung und Geschwindigkeit zu bewirken, dass diese mit der Zeit endliche Lagenänderungen und Geschwindigkeiten annehmen, so heisst das Gleichgewicht labil. Der erste Fall tritt immer ein, wenn auch mit Berücksichtigung der unendlich Kleinen höherer Ordnung V für alle möglichen sehr kleinen Coordinatenvariationen nur positive Zuwächse erfährt, die wachsen, wenn die Coordinatenvariationen einander proportional wachsen.

Sei V_0 der Werth der Kraftfunction in der Ruhelage. Es werde jedem Punkte eine unendlich kleine Verschiebung und Geschwindigkeit ertheilt, wodurch die Kraftfunction den Werth $V_0 + \varDelta_0$ die lebendige Kraft den Werth T_0 annehmen soll. Nun bewege sich das System von diesem Anfangszustande ausgehend den Bewegungsgleichungen entsprechend. Zu irgend einer späteren Zeit t sollen $V_0 + \varDelta$ und T die Werthe der Kraftfunction und lebendigen Kraft sein. Dann ist nach dem Energieprincipe

$$\varDelta_0 + T_0 = \varDelta + T.$$

Es kann also weder $\varDelta$ noch T einen grösseren als den sehr kleinen Werth $\varDelta_0 + T_0$ annehmen. Da aber $\varDelta$ unserer Annahme gemäss nothwendig früher über den Werth $\varDelta_0$, der ja beliebig klein gemacht werden kann, hinauswachsen müsste, bevor irgend eine Coordinate einen endlichen Zuwachs erführe und auch die lebendige Kraft T nothwendig einen grösseren endlichen Werth erhält, wenn irgend eine Geschwindigkeit zu einem endlichen Werthe anwächst, so müssen alle Geschwindigkeiten stets sehr klein und alle Coordinaten sehr nahe gleich ihrem ursprünglichen Werthe bleiben.

Wenn V zwar nicht abnehmen kann, aber bis zu einem endlichen Zuwachse einer oder mehrerer Coordinaten constant bleibt, so heisst das Gleichgewicht indifferent. Dann kann sich das System nach einer unendlich kleinen Störung um Endliches aus seiner Lage entfernen, aber keine endlichen Geschwindigkeiten annehmen.

Wenn dagegen V abnehmen kann, so wird es, wenn es durch eine passende Störung eine kleine Abnahme erfährt, bei wachsender lebendiger Kraft, also mit wachsender Geschwindigkeit zu immer kleineren Werthen fortschreiten, bis die für kleine Werthe geltenden Formeln überhaupt nicht mehr anwendbar sind. Das Gleichgewicht heisst dann labil.

Ein Jedermann geläufiges Beispiel bietet das Gleichgewicht eines festen Körpers unter dem Einflusse der Schwere. Zieht man die z-Axe vertical nach abwärts und bezeichnet mit ζ die z-Coordinate des Schwerpunktes des Körpers, mit p dessen Gewicht, so ist $V = -p\zeta$. Gleichgewicht findet statt, wenn bei jeder virtuellen Verschiebung des Körpers ζ abnimmt oder nur um unendlich Kleines höherer Ordnung zunimmt. Kommt der Schwerpunkt bei jeder kleinen möglichen Verschiebung höher zu liegen, so ist das Gleichgewicht stabil. Giebt es kleine Verschiebungen, für welche der Schwerpunkt sinkt (Ei, das auf der Spitze steht), so ist das Gleichgewicht labil. Ein Beispiel des indifferenten Gleichgewichtes bietet eine Kugel oder ein gerader Kreiscylinder auf horizontaler Unterlage.

§ 71. Bezeichnung sämmtlicher Coordinaten mit gleichen Buchstaben.

Das Princip der virtuellen Verschiebungen oder des kleinsten Zwanges können wir in der Form

$$182)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{h=1}^{h=n}[(m_h x_h'' - X_h)\,\delta x_h^\alpha + (m y_h'' - Y_h)\,\delta y_h^\alpha + \\ &\qquad\qquad + (m z_h'' - Z_h)\,\delta z_h^\alpha] \geqq 0 \end{aligned}\right.$$

schreiben, wobei $\alpha = 0$ oder gleich **2** ist, d. h. ganz wegzulassen oder durch zwei Striche zu ersetzen ist, je nachdem es sich um das erstere oder letztere Princip handelt. Die Variationen haben dabei die Relation 86), 88), 169) oder 180) zu erfüllen, welche wir in der Form

$$183)\quad \sum_{h=1}^{h=n}(\xi_h^l\,\delta x_h^\alpha + \eta_h^l\,\delta y_h^\alpha + \zeta_h^l\,\delta z_h^\alpha) \leqq 0$$

schreiben können und wobei beide Zeichen gelten oder blos das Gleichheitszeichen, je nachdem dies in 79) oder 80) der Fall ist. Die ξ, η, ζ können in die Form 89) gebracht werden oder nicht, je nachdem die betreffende Bedingung holonom ist oder nicht. Es ist $\alpha = 0$ oder 2, je nachdem wir das Princip der virtuellen Verschiebungen oder des kleinsten Zwanges benutzen.

Wir wollen nun eine Veränderung der Bezeichnungsweise einführen, die uns einige unnütze Schreibereien erspart. Wir bezeichnen die Masse des ersten materiellen Punktes nach Belieben mit m_1, m_2 oder m_3, so dass also m_1, m_2 und m_3 drei untereinander gleiche Grössen sind. Die rechtwinkeligen Coordinaten des ersteren materiellen Punktes bezeichnen wir mit x_1, x_2, x_3, die Componenten seiner Geschwindigkeit und Beschleunigung mit $x_1', x_2', x_3', x_1'', x_2'', x_3''$, die Componenten der auf ihn wirkenden expliciten Kräfte mit X_1, X_2, X_3, alle Componenten natürlich in den Coordinatenrichtungen verstanden. Ebenso bezeichnen wir die Masse des zweiten materiellen Punktes mit m_4, m_5 oder m_6, wobei natürlich wieder $m_4 = m_5 = m_6$ ist. Seine Coordinaten, Geschwindigkeits- und Beschleunigungscomponenten und die Componenten der auf ihn wirkenden expliciten Kräfte mit $x_4, x_5, x_6, x_4', x_5', x_6', x_4'', x_5'', x_6''$ und X_4, X_5, X_6. So fahren wir fort bis zum letzten materiellen Punkte, dessen Masse also mit $m_{3n-2} = m_{3n-1} = m_{3n}$ etc. bezeichnet wird.

Die Relation 182) nimmt jetzt die einfachere Form an

184) $$\sum_{h=1}^{h=3n} (m_h x_h'' - X_h)\, \delta x_h^\alpha \geqq 0;$$

für das Gleichgewicht im Ruhezustande aber, wo alle Beschleunigungen verschwinden, erhält man

185) $$\sum_{h=1}^{h=3n} X_h\, \delta x_h^\alpha \leqq 0,$$

während man die Bedingungen 183) für die Variationen der Coordinaten in der Form schreiben kann

186) $$\sum_{h=1}^{h=3n} \xi_h^l\, \delta x_h^\alpha \leqq 0,$$

da wir auch $\xi_2^l, \xi_3^l, \xi_4^l \ldots$ für $\eta_1^l, \zeta_1^l, \xi_2^l \ldots$ schreiben wollen.

§ 72. Das d'Alembert'sche Princip.

Sei ein beliebiges System materieller Punkte gegeben. Die Bedingungsgleichungen seien so beschaffen, dass vollkommene Ruhe des Systems oder wenigstens das Verschwinden sämmtlicher Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sämmtlicher Punkte des Systems zu einer bestimmten Zeit ϑ damit vereinbar ist. Die Bedingung, dass das System sich unter dem Einflusse der darauf wirkenden Kräfte zur Zeit ϑ im Ruhezustande im Gleichgewichte befinden kann, ist durch die Relation 185) ausgedrückt. Ist das System zur selben Zeit in irgend einer Bewegung begriffen, so sind die Bewegungsgleichungen durch die Relationen 184) bestimmt. Man sieht also sofort, dass man die Bewegungsgleichungen erhält, indem man in den Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht im Ruhezustande einfach statt der Componenten der expliciten Kräfte X_h schreibt

187) $$X_h - m_h x_h'',$$

was wir die erste Form des d'Alembert'schen Princips nennen wollen.

Wir nehmen jetzt an, dass sich dasselbe System unter dem Einflusse der darauf wirkenden Kräfte von beliebigen Anfangsbedingungen ausgehend in beliebiger Weise bewege, so dass also die die Gesetze der Bewegung bestimmende Relation 184) gilt. Zur Zeit ϑ soll nun plötzlich auf jeden Punkt des Systems zu den ohnehin schon darauf wirkenden expliciten Kräften eine Kraft hinzugefügt werden, welche derjenigen gerade gleich und entgegengesetzt ist, die wir früher im § 34 die Totalkraft genannt haben, also eine Kraft, deren Richtung der augenblicklichen Beschleunigung dieses Punktes entgegengesetzt und deren Intensität gleich dem Producte dieser Beschleunigung in die Masse des betreffenden Punktes ist; mit anderen Worten, deren Componente in der Richtung der $h$ten Coordinate gleich

188) $$- m_h x_h''$$

ist. Wir wollen das System von Kräften, welches durch Hinzufügung dieser Kräfte zu den expliciten Kräften entsteht, das Kraftsystem $\mathfrak{B}$ nennen. Zugleich soll jeder Punkt in Ruhe versetzt werden. Hierdurch kommt das System sofort ins Gleichgewicht, was wir die zweite Form des d'Alembert'schen Princips nennen wollen.

Man beweist dies leicht in folgender Weise: Die $h$te Componente in einer der Coordinatenrichtungen ist für das Kräftesystem $\mathfrak{B}$

189) $$X_h^v = X_h - m_h x_h''.$$

Man erhält also aus den Bewegungsgleichungen 184), welche ja für die wirkliche Bewegung, wie sie unter dem Einflusse der sie erzeugenden Kräfte, deren $h$te Componente X_h ist, vor sich gehen, erfüllt sein müssen:

190) $$\sum_{h=1}^{h=3n} X_h^v \, \delta x_h^a \leqq 0.$$

Dies ist aber gemäss 185) gerade die Bedingung, dass sich das System unter dem Einflusse der Kräfte $\mathfrak{B}$ zur Zeit ϑ im Gleichgewichte im Ruhezustande befinden kann. Die Kräfte $\mathfrak{B}$ sind übrigens identisch mit den Kräften, welche wir in § 34 die verlorenen genannt haben und welche den Verbindungskräften gleich und entgegengesetzt gerichtet waren. Die Componenten der verlorenen Kräfte waren ja durch die Ausdrücke 82) gegeben, welche, wie man aus 81) ersieht, mit 189) identisch sind. Wir können daher das System der expliciten Kräfte ($h$te Componente $= X_h$) in zwei Kräftesysteme zerlegen: das der totalen Kräfte ($h$te Componente $= m_h x_h''$) und das der verlorenen ($h$te Componente $= X_h - m_h x_h''$). Das erste System ist so beschaffen, dass die auf jeden einzelnen Punkt wirkenden Kräfte diesem, wenn er vollkommen frei wäre, genau diejenigen Beschleunigungen ertheilen würden, die er wirklich zur betreffenden Zeit erfährt. Das letztere Kraftsystem ist dem Systeme der Verbindungskräfte gleich und entgegengesetzt gerichtet. Es würde sich, wenn das materielle System momentan zur Ruhe gelangen würde, an diesem immer das Gleichgewicht halten, wenn zur betreffenden Zeit Ruhe des Systems überhaupt mit den Bedingungen vereinbar wäre. Wir wollen dies die dritte Form des d'Alembert'schen Princips nennen.

Dasselbe entspricht dem schon in der Anmerkung auf S. 131 (§ 35) bewiesenen Satze, dass es nie eine mögliche Bewegung giebt, welche die verlorenen Kräfte gegenüber der wirklichen anstreben. Es ist klar, dass Kräfte, welche den Verbindungskräften entgegengesetzt gleich sind, durch diese aufgehoben werden können und sich daher das Gleichgewicht halten.

Es kann vorkommen, dass die Kräfte als Functionen der Geschwindigkeiten oder anderer den Zustand des Systems bestimmender Grössen gegeben sind. Wenn wir sagen, wir versetzen das System plötzlich in Ruhe und lassen dieselben Kräfte darauf wirken, so meinen wir natürlich nicht, dass die Kräfte dieselben Functionen der Geschwindigkeiten oder dieser anderen Grössen bleiben sollen, sondern dass die auf jeden Punkt wirkende Kraft durch den gleichen gleich gerichteten Vector dargestellt werden soll. Wenn die Kräfte blos Functionen der Lage und der Zeit sind, so tritt dies in der That ein, wenn diese Functionen ungeändert bleiben, da wir ja, als wir das System plötzlich in Ruhe versetzten, nicht die Lage seiner Theile, wohl aber die Geschwindigkeiten änderten.

Wir können endlich noch folgenden Satz aussprechen, den wir (allerdings im uneigentlichen Sinne) die vierte Form des d'Alembert'schen Princips nennen wollen: Wenn sich gewisse Kräfte am ruhenden Systeme das Gleichgewicht halten, so verändern sie, zu anderen Kräften hinzugefügt, die durch letztere erzeugte Bewegung nicht. Wenn sich die Bedingungen mit der Zeit ändern, muss man sagen, dass die durch gewisse Kräfte zu irgend einer Zeit erzeugte Beschleunigung des Systems durch Hinzufügung anderer Kräfte nicht verändert wird, wenn sich jene anderen Kräfte zur selben Zeit an dem in gleicher Lage ruhenden Systeme das Gleichgewicht halten würden. Wir wollen den übrigens leichten Beweis dieses Satzes später nachholen.

§ 73. Definition des Gleichgewichtes der Kräfte an einem bewegten Systeme.

Damit alle diese Sätze, welche wir die verschiedenen Formen des d'Alembert'schen Princips genannt haben auch in dem Falle einen Sinn behalten, wo Ruhe aller Punkte des Systems mit den Bedingungen desselben nicht vereinbar ist, muss eine Definition des Gleichgewichtes von Kräften an bewegten Körpern aufgestellt werden, das man jedenfalls nicht auf den Fall beschränken kann, wo keiner der Punkte des Systems eine Beschleunigung erfährt. Es bleiben alle diese Sätze mit verhältnissmässig geringen Modificationen richtig, wenn man von dem Gleichgewichte von Kräften folgende ganz allgemeine Definition aufstellt, welche, falls das System ruht, mit der früher vom Gleichgewichte im Ruhezustande aufgestellten zusammenfällt, diese also als Specialfall in sich begreift, aber auch auf den Fall anwendbar ist, dass Ruhe des Systems gar nicht mit den Bedingungen vereinbar ist.

Sei ein materielles System gegeben. Ruhe desselben kann mit den Bedingungen vereinbar sein oder nicht. Falls keine expliciten Kräfte vorhanden sind, wird bei gegebener Anfangslage und Grösse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeiten sämmtlicher materiellen Punkte eine gewisse Bewegung, also eine gewisse Beschleunigung sämmtlicher Punkte eintreten. Wenn nun trotzdem, dass bestimmte explicite Kräfte wirken, dasselbe System bei gleichen Bedingungen, gleicher Lage, gleicher Grösse und Richtung sämmtlicher Geschwindigkeiten zu einer bestimmten Zeit wieder dieselbe Bewegung macht, genauer gesprochen, wenn daran zu dieser Zeit genau wieder dieselben Beschleunigungen eintreten, so wollen wir sagen, jene expliciten Kräfte halten sich an dem Systeme zu dieser Zeit das Gleichgewicht, gerade so wie wir für einen einzelnen freien materiellen Punkt sagen, dass sich die auf ihn wirkenden Kräfte das Gleichgewicht halten, wenn er sich geradlinig und gleichförmig bewegt, wie er es bei Abwesenheit aller Kräfte thut.

Wenn keine expliciten Kräfte vorhanden sind, erhält man aus 184)

191) $$\sum_{h=1}^{h=3n} m_h x_h'' \delta x_h^a \geqq 0.$$

Wenn sich gewisse Kräfte (ihre $h$te Componente nach einer Coordinatenaxe heisse X_h^g) nach unserer neuen Definition das Gleichgewicht halten sollen, so muss für die gleiche Bewegung

$$\sum_{h=1}^{h=3n} (m_h x_h'' - X_h^g)\,\delta x_h^a \gtreqqless 0,$$

daher

192) $$\sum_{h=1}^{h=3n} X_h^g\,\delta x_h^a \lesseqgtr \sum_{h=1}^{h=3n} m_h x_h''\,\delta x_h^a$$

sein. In den Fällen, wo überall nur die Gleichheitszeichen gelten, folgt hieraus und aus 191)

193) $$\sum_{h=1}^{h=3n} X_h^g\,\delta x_h^a = 0.$$

Die Bedingung des Gleichgewichtes ist also durch dieselbe Relation (95) gegeben, wie bei der früheren Definition, und alle vier Formen des d'Alembert'schen Princips bleiben unverändert giltig. Man erhält wieder aus der Gleichgewichtsbedingung 193) die Bewegungsgleichungen, indem man darin

194) $$X_h - m_h x_h'' \text{ für } X_h^g$$

schreibt. Die verlorenen Kräfte, deren $h$te Componente $X_h - m_h x_h''$ ist, welche man also erhält, wenn man ausser den expliciten Kräften noch die negativ genommenen totalen, also auf jeden Punkt noch eine Kraft wirken lässt, die entgegengesetzt wie dessen Beschleunigung ist und deren Intensität das Product aus der Masse des Punktes in seine Beschleunigung ist, müssen bei jeder Bewegung die Bedingung 193) erfüllen, also sich das Gleichgewicht halten. Man kann die expliciten Kräfte immer als die Superposition der negativ genommenen letzteren (der positiv genommenen totalen) und der verlorenen betrachten.

Wenn sich endlich irgend welche Kräfte das Gleichgewicht halten, so erfüllen sie die Bedingung 193). Fügt man sie daher zu beliebigen anderen hinzu, so sieht die für die Summe beider Kräfte gebildete Relation 184) genau so aus, wie die für die anderen Kräfte allein gebildete, und da diese Relation die Bewegung vollständig bestimmt, so wird auch die durch die anderen Kräfte allein bewirkte Bewegung durch die Hinzufügung der im Gleichgewichte befindlichen Kräfte nicht verändert. Man sieht sofort, dass dieser Beweis auf Kräfte, die sich nach der alten Definition am ruhenden Systeme das Gleichgewicht halten, auch anwendbar ist, wenn unter den Bedingungen Ungleichungen vorkommen.

Bei Kräften, die sich nur nach der neuen Definition das Gleichgewicht halten, erfahren aber diese Sätze einige Beschränkung, wenn auch Ungleichheitszeichen zulässig sind. Zunächst wird wegen 191) die Relation 184) sicher erfüllt sein, wenn gewisse Kräfte die Relation

195) $$\sum_{h=1}^{h=3n} X_h^g \, \delta x_h^a \leqq 0$$

erfüllen. Bezeichnen wir die Componenten $X_h - m_h x_h''$ der verlorenen Kräfte mit X_h^g, so erfüllen sie aber nach 184) die Relation 195). Die verlorenen Kräfte halten sich also sicher wieder das Gleichgewicht. Das d'Alembert'sche Princip bleibt in der Fassung, die wir seine zweite und dritte Form nannten, richtig, selbst wenn Verschwinden aller Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gar nicht mit den Bedingungen des Systems vereinbar ist. In Worten ausgedrückt: lässt man ausser den expliciten Kräften noch die negativen totalen, d. h. noch auf jeden Punkt eine Kraft wirken, welche gleich der mit der Masse multiplicirten Beschleunigung und der letzteren entgegengesetzt gerichtet ist, so tritt Gleichgewicht ein. Die expliciten Kräfte sind die Superposition der diesen entgegengesetzten (der positiven totalen) und der im Gleichgewichte befindlichen verlorenen Kräfte.

Dagegen gelten die Sätze, welche wir die erste und vierte Form des d'Alembert'schen Principes genannt haben, nicht mehr, da ja die Gleichung 185) diejenige ist, aus welcher die Bewegungsgleichungen durch die Vertauschung 187) gewonnen werden, wogegen das Gleichgewicht durch die Relation 192) bestimmt wird, welche nicht mit 185) identisch ist und auch nicht mehr Garantie giebt, dass durch Hinzufügung von Kräften, die ihr genügen, zu anderen die von jenen anderen Kräften erzeugte Bewegung nicht verändert wird.

Da stets die Totalkräfte dieselbe Bewegung des Systems erzeugen, wie die expliciten, so sind beide einander immer bezüglich des Systems äquivalent.

Ich fand ausser der gegebenen Definition des Gleichgewichtes keine, welche auch auf den Fall anwendbar wäre, wo das Verschwinden aller Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gar nicht mit den Bedingungen des Systems vereinbar ist. Ist es mit diesen vereinbar, so könnte man auch die Definition des Gleichgewichtes im Ruhezustande in einer anderen Weise so erweitern, dass sie sich auf den Bewegungszustand erstreckt. Man könnte als Kräfte, die sich am bewegten Systeme das Gleichgewicht halten, solche definiren, die sich zur gleichen Zeit an dem in gleicher Lage ruhenden Systeme das Gleichgewicht halten würden, was wir die zweite Definition des Gleichgewichtes von Kräften an einem bewegten Systeme nennen wollen. Dann wäre das Gleichgewicht durch die Relation 195) gegeben und man hätte den Vortheil, dass das d'Alembert'sche Princip in allen vier Formen richtig bleiben würde, aber den Nachtheil, dass die Definition im Falle, wo Ruhe des Systems mit dessen Bedingungen nicht vereinbar ist, nicht anwendbar wäre, was doch wünschenswerth wäre, wenn man wie so häufig den folgenden Satz als allgemein gültig hinstellt: Jedes bewegte System kommt sofort ins Gleichgewicht, wenn man nebst den ohnedies wirkenden Kräften auf jeden Punkt noch eine Kraft wirken lässt, die der Beschleunigung desselben entgegengesetzt gerichtet und deren Intensität gleich der mit der Masse multiplicirten Beschleunigung ist.

Da aus den Relationen 191) und 195) nothwendig 192) folgt, so müssen Kräfte, die sich nach der zweiten Definition das Gleichgewicht halten, es nothwendig auch nach der ersten thun, was übrigens schon aus der ersten Definition selbst folgt, da sie ja die Ruhe des Systems nicht stören und diese jedenfalls auch ohne explicite Kräfte möglich ist. Es können sich aber Kräfte nach der ersten Definition auch das Gleichgewicht halten, wenn Relation 195) nicht erfüllt ist, sondern die linke Seite von 195) positiv ist, so lange sie nur kleiner als die rechte von 192) ist. Dann halten sich die betreffenden Kräfte nach der zweiten, nicht aber nach der ersten Definition das Gleichgewicht. Dies ist z. B. der Fall, wenn sich eine Kugel der concaven Seite einer starren, glatten, gekrümmten Wand anliegend bewegt. Eine senkrecht nach der concaven Seite der Wand wirkende Kraft ändert die Bewegung der Kugel nicht, so lange sie kleiner als die Centrifugalkraft ist, würde aber die ruhende Kugel nicht im Gleichgewichte erhalten. Eine solche Kraft kann auch, obwohl sie sich nach der ersten Definition im Gleichgewichte befindet, doch zu anderen Kräften hinzugefügt, die von jenen anderen Kräften erzeugte Bewegung verändern, wenn ihre Hinzufügung bewirkt, dass eine schon früher senkrecht nach der concaven Seite gerichtete Kraft nun grösser als die Centrifugalkraft wird.

Die Lehre vom Gleichgewichte der Kräfte bezeichnet man als die Statik, die von der Bewegung der Körper als die Dynamik, wobei wir es unentschieden lassen können, ob die Fälle, wo sich Kräfte an bewegten Systemen, namentlich im Falle, dass die Bedingungen Ruhe derselben gar nicht zulassen, das Gleichgewicht halten, in die Statik oder Dynamik gehören, da wir die Probleme der Statik und Dynamik ohnedies immer unter einem behandeln werden.

§ 74. Anwendung der Methode der Multiplicatoren auf den allgemeinsten Fall, dass beliebige holonome oder nicht holonome Bedingungsgleichungen oder Ungleichungen bestehen.

Wir sahen, dass das Princip des kleinsten Zwanges bis auf gewisse singuläre Fälle die Bewegung immer eindeutig bestimmt. Dieses Princip wird ausgedrückt durch die Relation 184) mit den Bedingungen 186), deren Gesammtzah σ sei, worin aber überall $\alpha = 2$ gesetzt werden muss. Wenn wir daher eine Lösung gefunden haben, welche die Relation 184) für alle den Bedingungen 186) genügenden Werthe der Variationen erfüllt, so ist sie die Lösung des mechanischen Problems, falls sie auch noch so viel Constanten besitzt, dass man allen möglichen Anfangsbedingungen genügen kann.

Wir wollen nun zeigen, wie eine solche ganz allgemeine Lösung mittelst der Methode der unbestimmten Multiplicatoren gefunden werden kann. Von den σ Bedingungen für die wirkliche Bewegung können die holonomen in der Form

196) $$\varphi_l(t, x_1, x_2 \ldots x_{3n}) \leqq 0,$$

die nicht holonomen aber in der Form

197) $$\tau_l + \sum_{h=1}^{h=3n} \xi_h^l x_h' \leqq 0$$

geschrieben werden. Um die Stilisirung der späteren Theoreme zu vereinfachen, denken wir uns wie bisher das Zeichen der Functionen φ, τ und ξ der linken Seite in 196) und 197) immer so gewählt, dass dieselbe $\leqq 0$, niemals dass sie $\geqq 0$ ist. Wir wollen für den Augenblick in allen diesen σ Relationen, welche die σ Bedingungen des Systems ausdrücken, das Gleichheitszeichen gelten lassen, so dass wir also statt der Relationen 196) und 197) durchaus die folgenden gelten lassen:

198) $$\varphi_l(t, x_1, x_2 \ldots x_{3n}) = 0,$$

199) $$\tau_l + \sum_{h=1}^{h=3n} \xi_h^l x_h' = 0.$$

Dazu fügen wir noch die Gleichungen

200) $$m_h x_h'' - X_h - \sum_{l=1}^{l=\sigma} \lambda_l \xi_h^l = 0,$$

worin dem h alle Werthe von 1 bis $3n$ ertheilt werden können. Für diejenigen Bedingungen, welche die Form 197) haben, ist in der letzten Gleichung ξ_h^l der auch in 197) dort so bezeichnete Coefficient. Für die Bedingungen von der Form 196) aber ist ξ_h^l eine Abkürzung für $\partial \varphi_l / \partial x_h$. Es gelten dann die Gleichungen 89). Aus den $3n + \sigma$ Gleichungen 198), 199) und 200) können wir im Allgemeinen die $3n + \sigma$ Grössen x'' und λ bestimmen. Ueber die singulären Fälle, wo diese Bestimmung auf Schwierigkeiten stösst, gilt das am Schlusse des § 43 Gesagte und es ist hier wieder nicht möglich, auf dieselben einzugehen. Nehmen wir an, wir hätten die Gleichungen 198), 199) und 200) allgemein gelöst.

Für alle Werthe der Integrationsconstanten und der Zeit, für welche dabei kein λ positiv wird, dessen Index gleich dem einer solchen Relation ist, für welche auch das Ungleichheitszeichen gilt, ist die gefundene Lösung die des mechanischen Problems, da sie der Relation 184) mit den

Bedingungen 186) in der That genügt und diese die Lösung der mechanischen Aufgabe eindeutig bestimmt, abgesehen von den schon erwähnten Singularitäten. Multipliciren wir nämlich die Gleichung 200) mit δx_h^a und addiren alle so für alle h folgenden Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\sum_{h=1}^{h=3n} (m_h x_h'' - X_h)\,\delta x_h^a = \sum_{l=1}^{l=\sigma} \sum_{h=1}^{h=3n} \lambda_l\, \xi_h^l\, \delta x_h^a .$$

$\sum_{h=1}^{h=3n} \xi_h^l\, \delta x_h^a$ ist nun für alle l, für welche in der betreffenden Relation 186) nur das Gleichheitszeichen gilt, gleich Null, für alle anderen negativ (incl. Null). Es folgt also in der That die Relation 184). Da nun die gefundene Lösung auch die erforderliche Zahl von Integrationsconstanten enthält, so ist sie die allgemeine Lösung der mechanischen Aufgabe.[1]) Specielle Beispiele gaben wir schon in § 41 und zum Schlusse von § 43.

Würde für einige (sagen wir σ') der Werthe der l, für welche in den Relationen 196) oder 197) auch das Ungleichheitszeichen gilt, λ_l positiv, so wäre die entsprechende Gleichung aus den Gleichungen 198) oder 199), aber auch das mit dem entsprechenden λ behaftete Glied aus den Gleichungen 200) wegzulassen. Denn wenn die Bewegung der entsprechenden Gleichung 198) oder 199) gemäss erfolgen würde, so würde von der Vorrichtung, die die betreffende Relation herstellt, eine Widerstandskraft gefordert, die sie nur zu leisten vermöchte, wenn sie auch zu verhindern vermöchte, dass die linke Seite der Gleichung 196) oder 197) grösser als Null wird; daher geschieht die wirkliche Bewegung unbekümmert um diese Vorrichtung.

Wir haben nun nur mehr $3n + \sigma - \sigma'$ Gleichungen, aber auch nur mehr $3n + \sigma - \sigma'$ Unbekannte. Die aus diesen Gleichungen folgenden Werthe der Unbekannten nennen wir die Lösungswerthe. Dieselben befriedigen die

[1]) Jede der Coordinaten, die wir uns durch eine der Relationen 198) eliminirt denken, bringt keine, jede durch 199) eliminirte eine, jede andere Coordinate zwei Integrationsconstanten hinein und man sieht leicht, dass es ebensoviele voneinander unabhängige Anfangswerthe giebt.

Relation 184) unter den Bedingungen 186) sowohl für $\alpha = 0$, als auch für $\alpha = 2$. Für $\alpha = 2$ ist diese Relation der Ausdruck des Princips des kleinsten Zwanges. Dieses giebt eine Grösse an, welche immer für die wirkliche Bewegung ein absolutes Minimum sein muss und nicht mehrerer Minima fähig ist. Da wir also Beschleunigungen gefunden haben, für welche ein solches Minimum eintritt, so wissen wir sicher, dass sie die richtige Lösung des mechanischen Problems bilden, dass also die Werthe, welche wir die Lösungswerthe genannt haben, die wirkliche Bewegung darstellen. Diese Werthe geben also die Lösung der Aufgabe im allgemeinsten Falle mit der einzigen Ausnahme der singulären Fälle, von denen am Schlusse des § 43 die Rede war.

Wären die Anfangswerthe der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten so beschaffen, dass das System schon zu Anfang der Zeit mit irgend einer Vorrichtung gar nicht in Verbindung wäre oder sich im Momente des Zeitanfangs bereits löste, so wäre die betreffende Bedingungsgleichung schon von Anfang der Zeit an gar nicht mehr zu berücksichtigen. Das Kriterium dafür, dass eine Vorrichtung ganz ausser Wirksamkeit ist, besteht immer darin, dass durch die ihr entsprechende Relation sämmtlichen Beschleunigungen gar keine Beschränkung auferlegt wird, da das Princip des kleinsten Zwanges die einzige die Bewegung immer eindeutig bestimmende Relation ist.

Sobald eine solche Beschränkung wieder eintritt, tritt das System mit der betreffenden Vorrichtung wieder in Wechselwirkung und sie ist unter die σ Relationen einzubeziehen. Wenn zudem das betreffende λ negativ wird, so ist auch die entsprechende Gleichung 198) oder 199) unter diese Gleichungen und auch das entsprechende λ enthaltende Glied in Gleichung 200) einzubeziehen.

Wenn die Coordinaten und Geschwindigkeiten zu Anfang oder im Momente, wo das System mit irgend einer Vorrichtung wieder in Wechselwirkung tritt, so beschaffen sind, dass ohne endliche Aenderungen der Grössen oder Richtungen der Geschwindigkeiten (ohne unendliche Beschleunigungen) die Bedingungsgleichungen im nächsten

Momente nicht mehr erfüllt sein können, so kann die Aufgabe mittelst der Gleichungen, die wir bisher aus dem Bilde abgeleitet haben, nicht mehr gelöst werden. Doch spricht dies nicht gegen das Bild, da durch näheres Eingehen in dasselbe neue zur Lösung der Aufgabe geeignete Gleichungen gewonnen werden können. Man muss berücksichtigen, dass die starren Verbindungen etwas dehnsam, die starren Körper etwas deformirbar sind, eventuell auch dass Molekülarbewegungen in den Körpern und der Vorrichtung entstehen können. Ein Beispiel hierfür liefert ein fester Körper, der in einer undurchdringlichen Schale schief gegen die Wand derselben anprallt und sich dabei nach den Gesetzen des elastischen oder unelastischen Stosses verhält.

Ist das System anfangs mit allen Vorrichtungen in Wechselwirkung, so erfolgt die gänzliche Loslösung von irgend einer Vorrichtung, wenn sich die expliciten Kräfte continuirlich ändern, jedesmal schon in dem Momente, wo λ durch Null zu einem positiven Werthe übergeht.

Im Falle des Gleichgewichtes im Ruhezustande müssen alle Beschleunigungen gleich Null sein; daher gehen die allgemeinen Gleichungen 200) über in

$$X_h + \sum_{l=1}^{l=\sigma} \lambda_l \, \xi_h^l = 0.$$

Jedesmal, wenn es Werthe der λ giebt, welche für die in Rede stehenden expliciten Kräfte diese Gleichungen erfüllen, und wenn die λ, welche solchen Bedingungen entsprechen, die auch das Ungleichheitszeichen enthalten, nicht positiv sind, so ist das System unter dem Einflusse dieser expliciten Kräfte im Gleichgewichte, wenn es anfangs ruhte. Natürlich ist dabei wie immer vorausgesetzt, dass die Functionen φ, τ und ξ der linken Seite von 196) und 197) schon von Anfang an stets mit solchem Zeichen gewählt wurden, dass jede Bedingung dahin geht, dass diese linke Seite $\leqq 0$, niemals $\geqq$ ist.