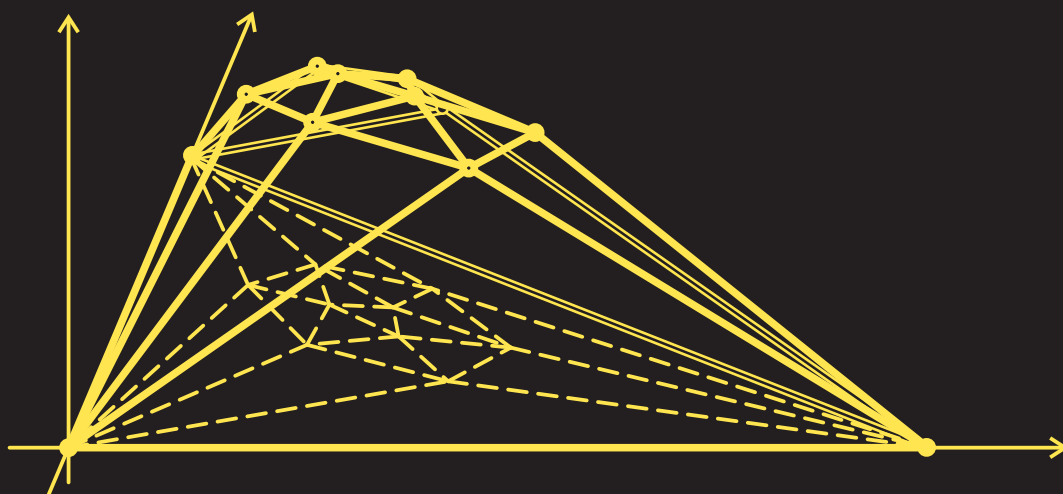


Romuald Tarczewski

Topologia form strukturalnych

Naturalne i tworzone przez człowieka
prototypy form konstrukcyjnych
w architekturze



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2011

Romuald Tarczewski

Topologia form strukturalnych

**Naturalne i tworzone przez człowieka
prototypy form konstrukcyjnych
w architekturze**

**Oficina Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2011**



Recenzenci

Tadeusz KOLENDOWICZ

Janusz RĘBIELAK

Opracowanie redakcyjne

Alina KACZAK

Korekta

Agata KACZAK

Projekt okładki

Maria W. TARCZEWSKA

Rysunek na okładce przedstawia podniesienie grafu dwudziestościanu wg W.T. Tuttego

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część niniejszej książki, zarówno w całości, jak i we fragmentach, nie może być reprodukowana w sposób elektroniczny, fotograficzny i inny bez zgody wydawcy i właściciela praw autorskich.

© Copyright by Romuald Tarczewski, Wrocław 2011

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

website: <http://www.portal.pwr.wroc.pl/oficyna.dhtml>

e-mail: oficwyd@pwr.wroc.pl

ISBN 978-83-7493-660-6

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 1240/2011.

Spis treści

Przedmowa	7
Rozdział 1. Wprowadzenie	9
Rozdział 2. Matematyczny język formy.....	15
2.1. Uwagi ogólne	17
2.2. Elementy języka formy.....	20
2.2.1. Obiekty i ich klasa.....	20
2.2.2. Hierarchia.....	25
2.2.3. Notacja	29
2.2.3.1. Symbol Schäfliego.....	30
2.2.3.2. Notacja konfiguracji wierzchołków	31
2.2.3.3. Notacja konfiguracji ścian	32
2.2.4. Reprezentacja obiektu	32
2.2.4.1. Obiekty abstrakcyjne	32
2.2.4.2. Realizacje geometryczne obiektów	40
2.2.5. Genus i charakterystyka Eulera.....	42
2.2.6. Walentność.....	46
2.2.7. Wypukłość	47
2.2.8. Planarność	48
2.2.9. Podobieństwo	50
2.2.10. Regularność.....	52
2.2.11. Dualność	55
2.2.12. Stopnie swobody	58
2.2.13. Symetria	59
2.2.13.1. Klasyfikacja izometrii	60
2.2.13.2. Grupy symetrii.....	64
2.2.13.3. Notacja sygnatur (Conwaya)	70
2.2.13.4. Uwagi ogólne na temat symetrii	71
2.3. Podstawowe zależności kombinatoryczne i metryczne	71
2.3.1. Równanie Eulera	71
2.3.2. f -wektor.....	73
2.3.3. Równanie Kartezjusza.....	74
2.3.4. Suma stopni wierzchołków	75
2.3.5. Symetria statystyczna.....	76
2.3.6. Równania Möbiusa–Maxwella.....	77
2.4. Uwagi końcowe.....	79
Rozdział 3. Topologiczne modele form strukturalnych	81
3.1. Tesselacje	82
3.2. Podziały i wypełnienia płaszczyzny ($d = 2$)	85
3.2.1. Podziały periodyczne	86

3.2.2. Podziały aperiodyczne	90
3.2.3. Symetria tesselacji na płaszczyźnie	95
3.3. Podziały i wypełnienia przestrzeni ($d = 3$)	97
3.3.1. Siatki przestrzenne	98
3.3.2. Upakowania wielościanów w przestrzeni	99
3.3.3. Tablica okresowa wielościanów	103
3.3.4. Gąbki	106
3.4. Grafy jako modele topologiczne	108
3.4.1. Wykresy Schlegla	108
3.4.2. Podstawowe właściwości grafów	112
3.5. Uwagi końcowe	117
Rozdział 4. Przekształcenia modeli topologicznych	119
4.1. Twierdzenie Steinitza	119
4.2. Twierdzenie Eberharda	120
4.3. Przekształcenia grafów zachowujące planarność	124
4.3.1. Usunięcie krawędzi	124
4.3.2. Kontrakcja (ściągnięcie)	125
4.3.3. Pominiecie krawędzi	126
4.3.4. Operacje odwrotne do usunięcia krawędzi	126
4.3.5. Operacje ΔY i odwrotne	127
4.3.6. Przykład zastosowania przekształceń do modyfikacji siatek wielościennych	130
4.4. Generowanie grafów planarnych poprzez upakowania okręgów	131
4.5. Iloczyn kartezjański grafów	133
4.6. Uwagi końcowe	139
Rozdział 5. Modele topologiczne a klasa przestrzeni	141
5.1. Przestrzenna rekonstrukcja figur płaskich	141
5.1.1. Metoda Tuttego–Maxwella–Cremony	142
5.1.2. Przedłużenia Lawrence’a	148
5.1.3. Przekształcenia Gale’a	150
5.1.4. Metoda Koebego–Andreeva–Thurstona	152
5.2. Twierdzenie Baracsa	155
5.3. Uwagi końcowe	158
Rozdział 6. Poszukiwanie modelu konstrukcji	159
6.1. Uwagi na temat matematycznej intuicji formy	160
6.2. Naturalne prototypy form	162
6.2.1. Tesselacje w naturze	162
6.2.2. Naturalne analogie do innych metod generowania modeli	177
6.2.3. Powierzchnie minimalne	178
6.3. Forma jako metafora	185
6.3.1. Linearne formy strukturalne	185
6.3.2. Powierzchniowe formy strukturalne	191
6.3.3. Formy „zdekonstruowane”	194
6.4. Losowość w modelach topologicznych	195
6.4.1. Grafy losowe	195
6.4.2. Sieci losowe	198
6.5. Wybrane przykłady procedur kształtowania form strukturalnych	201
6.5.1. Konstrukcje o układzie aperiodycznym, z zastosowaniem siatek linii Ammanna	201
6.5.2. Konstrukcje o układzie kratownicy Michella	207
6.5.3. Generowanie siatek konstrukcyjnych przez iloczyn kartezjański grafów losowych	209
6.5.4. Metoda rekonstrukcji topologicznej dźwigarów powierzchniowych	210
6.5.5. Metoda origami	216

Rozdział 7. Chaos czy struktura.....	221
7.1. Wybrane przykłady kształtowania form strukturalnych	221
7.1.1. Kształtowanie konstrukcji na powierzchniach minimalnych.....	222
7.1.1.1. Zadaszenie kortu tenisowego	222
7.1.1.2. Pawilon namiotowy	229
7.1.2. Kształtowanie konstrukcji wg topologii kratownicy Michella	233
7.1.3. Kształtowanie konstrukcji o topologii tesselacji aperiodycznej	239
7.1.4. Kształtowanie konstrukcji o topologii origami.....	246
7.2. Nowe metody kształtowania formy w wybranych obiektach architektury współczesnej	251
7.3. Uwagi końcowe.....	259
Rozdział 8. Podsumowanie	263
Bibliografia	267
Bibliografia uzupełniająca	275
Źródła ilustracji	279
Topology of Structural Forms (Summary in English).....	283

Przedmowa

Praca niniejsza powstała w ciągu ostatnich czterech lat mojej pracy na Wydziale Architektury Politechniki Wrocławskiej. Powodem, dla którego wybrałem taki właśnie temat, jest z jednej strony nieustająca fascynacja źródłami inspiracji, jakich dostarcza otaczająca nas przyroda, a z drugiej – poczucie, że wypracowane przez stulecia i wciąż stosowane metody kształtowania form konstrukcyjnych stają się w ostatnim okresie niewystarczające jako platforma współpracy pomiędzy architektem a konstruktorem. Nowe trendy estetyczne, nowy sposób myślenia kolejnych pokoleń architektów wymagają, aby konstruktorzy aktywnie uczestniczyli już w początkowym, najbardziej twórczym i determinującym późniejsze – etapie. Aby proponowali takie rozwiązania, które nie tylko spełnią swoje podstawowe zadanie zapewnienia bezpieczeństwa obiektu, ale również będą pomocne w kształtowaniu jego formy. Jest to, w pewnym sensie, powrót do czasów, kiedy architekt był jednocześnie konstruktorem.

Pierwsza wstępna redakcja pracy była gotowa już w 2009 roku, jednak ilość zebranego materiału wymagała uważnej, czasochłonnej selekcji. Manuskrypt udostępniłem kilku osobom i jestem głęboko wdzięczny tym, którzy zechcieli wyrazić swoją opinię na jego temat. Dziękuję wszystkim, którzy mnie wspierali w mojej pracy. Recenzentom dziękuję za wnikliwe uwagi, które pomogły nadać pracy końcowy kształt. Dziękuję również mojej Rodzinie za wyrozumiałość i cierpliwość w tym okresie.

Romuald Tarczewski
Wrocław, czerwiec 2011

Rozdział 1. Wprowadzenie

*Ostatnią rzeczą, jaką się odkrywa
układając dzieło, jest to, co należy
umieścić na początku.*

Błażej Pascal¹

Funkcja i forma budynku były ze sobą zawsze tradycyjnie związane poprzez określone rozwiązania materiałowe, przestrzenne i inne. Już Witruwiusz zauważał, że „przy budowie należy uwzględniać: trwałość, celowość i piękno”². Louis Sullivan, amerykański architekt przełomu XIX i XX w., podkreślał tę współzależność, twierdząc, że: „forma zawsze wynika z funkcji”³. Dwudziestowieczni moderniści zawężali z kolei funkcję jedynie do jej aspektów użytkowych. W późniejszym okresie Mircea Eliade dostrzegł sakralny charakter rytuału kształtowania form architektonicznych, który „...z amorficznej przestrzeni wydziela jej część strukturalną, prawdziwą”⁴.

Co jest w takim razie wyznacznikiem kształtowania formy obiektu, a zwłaszcza jego formy strukturalnej? Jaka jest „logika” systemu konstrukcyjnego? Dotychczas była ona rozumiana jako przejrzysty sposób przekazywania obciążeń i efektywność konstrukcyjna elementów, ale także jako swoista symbioza formy architektonicznej i systemu konstrukcyjnego. Jest widoczne w obiektach różniących się nieraz znacznie skalą i estetyką (rys. 1.1).

Ogólne trendy w kulturze ostatniego okresu niekiedy określane jako jej „pop-kulturowa infantyilizacja”⁵, cechuje kreowanie całkowicie sztucznej rzeczywistości, która, wzorem gier komputerowych, tylko udaje realność. Na tym gruncie powstał nowy paradygmat estetyki w projektowaniu architektonicznym. Można go opisać jako zbiór tendencji, określanych często wspólną nazwą *free-form design*. Architekci, którzy ten paradygmat przyjęli, kierują się – podobnie jak ich po-

¹ Błażej Pascal, *Mysli*, Kraków 2004.

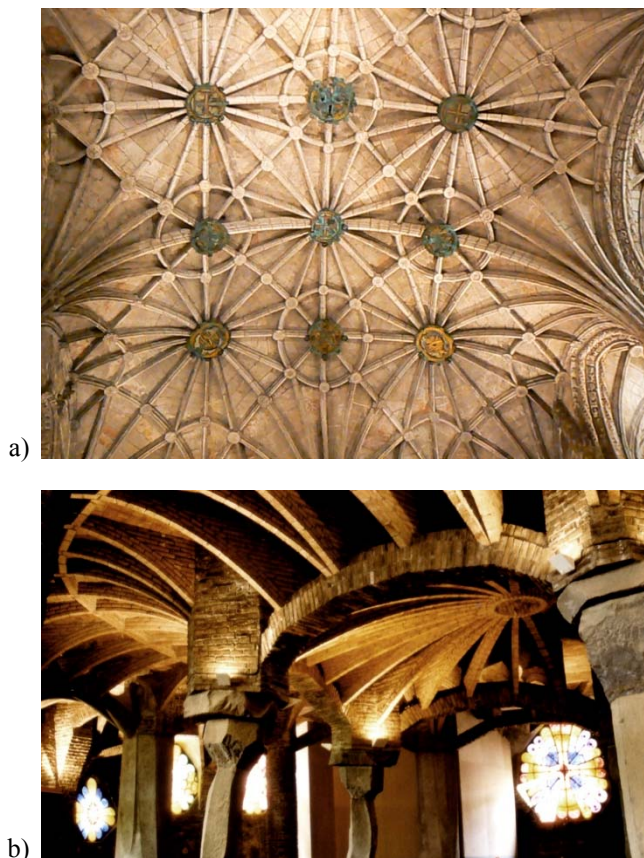
² Witruwiusz, *O architekturze ksiąg dziesięć*, Prószyński i S-ka, Warszawa (1999), s. 32.

³ „Form ever follows function” – cytaty za [106, s. 7].

⁴ Mircea Eliade, *Sacrum, mit, historia*, PIW, Warszawa (1970), s. 61.

⁵ Patrz: B. Wildstein, *W gabinecie osobliwości*, UważamRze, 9/2011, s. 58.

przednicy w okresie secesji – przede wszystkim dążeniem do uzyskania określonego wrażenia wizualnego. System konstrukcyjny może się spoza tej „maski” w ogóle nie ujawnić.



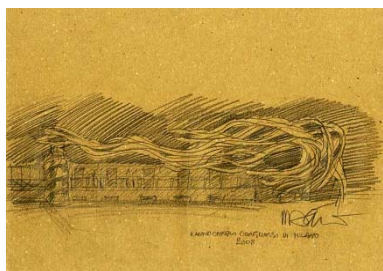
Rys. 1.1. Jedność formy architektonicznej i systemu konstrukcyjnego:

- a) sklepienie w klasztorze Hieronimitów w Belém (Lizbona),
- b) konstrukcja krypty kościoła w Colonia Güell, Santa Coloma de Cervelló k. Barcelony

Konsekwencją takiego stanowiska jest często wymuszanie skomplikowanych układów konstrukcyjnych, dalekich od wszelkich tradycyjnych reguł, niejednokrotnie tak bardzo, że wywołując podziw odbiorcy, jednocześnie wzbudzają w nim podświadomy niepokój o bezpieczeństwo całości⁶.

⁶ Taki zarzut można na przykład sformułować w stosunku do wielu projektów Santiago Calatravy, takich jak Auditorio de Tenerife, czy niektóre obiekty w Ciudad de las Artes y las Ciencias w Walencji.

Ponieważ swoboda kształtowania formy wymaga stałego zasilania nowymi pomysłami, można zauważyć wielki deficyt nowych koncepcji – brak (dostatecznie dowolnych) źródeł inspiracji, a także ich swoistą inflację – to, co było nowe wczoraj, dziś już staje się banalne i przebrzmiałe. Niektórzy twórcy otwarcie przyznają się, że ich projekty naśladowują „cokolwiek”. Przykładem może być rozbudowa budynku centrum kongresowego targów mediolańskich, MIC – Milano Convention Center (rys. 1.2a)⁷. Autor projektu⁸ powołuje się na inspirację wstążkami makaronu *pappardelle* (rys. 1.2b).



a)



b)

Rys. 1.2. Rozbudowa budynku Milano Convention Center: a) koncepcja architektoniczna, b) inspiracja formy – wstążki makaronu *pappardelle*

Systemem konstrukcyjnym, charakterystycznym dla XX w., są przestrzenne struktury prętowe. Od czasu eksperymentów Aleksandra Grahama Bella z czworosiecznymi modelami latawców, w ostatnich latach XIX w., a następnie poprzez wiele lat nieprzerwanego rozwoju, stały się one powszechnie akceptowaną formą konstrukcyjną. Wykazały swoją efektywność, a w pewnym okresie – również atrakcyjność wizualną. Ich konfiguracje, oparte na układach przestrzennych wielościanów, miały walor niebanalnej regularności, podobnej do spotykanej w kryształach różnych minerałów. Nazwiska mistrzów kształtowania struktur przestrzennych, takich jak Max Mengerlinghausen, Zygmunt Makowski, Stefan du Chateau czy Robert le Ricolais – wyznaczają kolejne etapy rozwoju ich formy. Jednak w rezultacie wielkiej skali stosowania i uprzemysłowienia produkcji preferowane były konfiguracje proste, dramatycznie ograniczające liczbę dostępnych form. Już w latach sześćdziesiątych XX w. formy oparte na sześciennym miały swoich krytyków, którzy starali się popularyzować bardziej złożone, wielościenne konfiguracje do zastosowań architektonicznych, ale w tym przypadku, trudności kształtowania i analizy obliczeniowej stworzyły nieprzekraczalną barierę.

Zastosowanie przestrzennych konstrukcji prętowych, w których regularność jest immanentną cechą, do form wykreowanych na bazie przypadkowych inspira-

⁷ Rysunek koncepcyjny ze strony autorskiej projektanta (patrz: źródła ilustracji, na końcu pracy).

⁸ Autorem projektu architektonicznego jest Mario Bellini.

cji, prowadzi często do swoistej patologii w kształtowaniu systemu konstrukcyjnego. Na rysunku 1.3 przedstawiono widok fragmentu konstrukcji zaprojektowanej dla wspomnianego uprzednio budynku MIC, gdzie liczba i układ przestrzenny prętów były wyzwaniem zarówno dla projektanta⁹, jak i dla wykonawcy.



Rys. 1.3. Rozbudowa budynku Milano Convention Center
– fragment konstrukcji

Przedstawiony przykład sygnalizuje pojawiającą się obecnie potrzebę wypracowania odpowiednich metod kształtowania form strukturalnych. Muszą one nie tylko być dostosowane do nowych tendencji estetycznych, ale same powinny dostarczać inspiracji do kształtowania formy całego obiektu. Potrzebne jest wypracowanie metod, umożliwiających przywrócenie wcześniejszej symbiozy formy i konstrukcji.

Najważniejszym wyzwaniem w tym zakresie jest opracowanie metod wstępnego formowania konstrukcji. Konieczność wstępnego ustalenia jej kształtu, znalezienia relacji pomiędzy tworzącymi ją elementami, jest najważniejszym etapem procesu kształtowania form strukturalnych. Kolejne etapy są jego konsekwencją. Niestety, etap kształtowania formy często degeneruje się tylko do forsownej analizy obliczeniowej.

Złożoność modeli stosowanych współcześnie w analizie i ciągle zwiększające się wyrafinowanie numerycznych narzędzi obliczeniowych prowadzą do obserwowanej często *obliczeniowej obsesji projektowania*. Dewiza Eugène Freyssineta: „...najpierw projektuję, a potem obliczam; jeśli obliczenia nie potwierdzają założeń – powtarzam je”¹⁰, została w ostatnim czasie nieco zapomniana [174, s. 355–357].

⁹ Autorem projektu konstrukcji jest Massimo Majowiecki.

¹⁰ Albert Einstein ujął to: „Przy fantastycznym rozwoju możliwości, obserwujemy brak wytycznych” [174, s. 357].

Z drugiej strony złożone modele obliczeniowe z trudnością mogą być świadomie kontrolowane przez jedną odpowiedzialną osobę – projektanta.

Wieloletni rozwój przestrzennych konstrukcji prętowych umożliwił ugruntowanie geometrycznych zasad ich kształtowania. Główną przeszkodą utrudniającą ich efektywne stosowanie w obiektach *free-form*, wydaje się obecnie być brak koncepcji takiego doboru wstępnej konfiguracji, aby mogły one stwarzać wizualne wrażenie przypadkowości i nieuporządkowania. Nie chodzi tutaj o jakieś konkretne nowe formy, ale raczej o sposób ich generowania.

Jak zauważył Magnus Weininger: „...zadaniem badacza nie powinno być mnożenie form, lecz dojście do leżącej głębiej teorii matematycznej, która unifikuje i systematyzuje cały zbiór form” [159, s. xi].

Nowych narzędzi kształtowania formy dostarcza dział matematyki – topologia. Jest to najbardziej podstawowy poziom reprezentacji geometrycznej. Problemy rozpatrywane na tym poziomie nie zależą od dokładnego kształtu rozpatrywanych obiektów, ale raczej od sposobu ich zorganizowania. Mają charakter jakościowy, a nie ilościowy. Ze względu na morfologię form obiekty topologiczne są swego rodzaju „zgrubnym szkicem” konstrukcji. Na tym etapie nie ma znaczenia, czy linie są proste, czy są do siebie prostopadłe lub równoległe. Miary długości nie mają znaczenia.

Formy architektoniczne powinny być najpierw syntezowane jako obiekty topologiczne, które potem mogą być sukcesywnie wzbogacane poprzez dodawanie elementów umożliwiających nadanie im właściwości projekcyjnych, następnie afinicznych i – na końcu – metrycznych. Architekt musi podejmować swoje kluczowe decyzje na poziomie geometrii projekcyjnej [33, s. 29].

Językiem topologii jest matematyczna teoria grafów. Grafy stanowią topologiczną reprezentację obiektów różnego stopnia: wielościanów, wielokątów i linii. Dlatego możemy ją zastosować do opisu siatkowych konstrukcji przestrzennych. Co więcej, można zastosować ją również do rozpatrywania konstrukcji zawierających elementy płytowo-tarczowe, korzystając z ich dualności w stosunku do konstrukcji prętowych. Grafy zachowują związki geometryczne między elementami składowymi w ich najbardziej podstawowym poziomie. Uniwersalność tej teorii polega m.in. na jej przydatności do modelowania wzorów występujących w naturze, struktur „wymyślonych” przez człowieka, a także wielu innych abstrakcyjnych koncepcji. Płaskimi modelami teorii grafów można operować stosunkowo łatwo. Swobodne układy linii i węzłów mogą być stosowane do studiowania konstrukcji nawet bardzo złożonych.

Intuicja twórcza człowieka odnosiła się zawsze do otaczającego go środowiska. W sztuce, ale jeszcze bardziej w technice, Natura była punktem odniesienia, źródłem inspiracji i ostateczną weryfikacją jego działań. Obserwacja bardzo podstawowych, często przypadkowych wzorów, pojawiających się powszechnie w naturze pozwoliła zauważyć, że występują one we wszystkich możliwych skalach: od systemów planetarnych do wirusów, od lodowców po muszle morskie, od systemów rzecznych po budowę liści itd. [112, 162, 171]. Te archetypy morfologiczne czasami wykazują pewne właściwości strukturalne, a czasami nie,

ale ich jednolitość w różnorodności jest głęboko inspirująca dla „morfologów” konstrukcji i wszystkich innych badaczy formy [86, s. 44–45]. Często obserwowane wzory pojawiają się w „dualnej” materializacji, która ujawnia zasadniczo odmienne rodzaje oddziaływań konstrukcyjnych. Kontrolowana przypadkowość, jako generator optymalnych form i podstawa twórczej inspiracji, jest odpowiedzią na zachwianie tradycyjnego rozumienia „logiki” systemów konstrukcyjnych.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie podstawowych problemów wiążących się z topologiczną¹¹ analizą architektonicznych struktur przestrzennych. Omówienie najważniejszych elementów matematycznego języka form występujących obiektów i związków pomiędzy nimi. Skrótowno przedstawiono wybrane zagadnienia z teorii grafów. Szczególną uwagę zwrócono na relacje modeli topologicznych z naturalnymi prototypami form i na możliwości przestrzennej rekonstrukcji płaskich modeli topologicznych. Wprowadzenie w pewnym zakresie odpowiedniego aparatu matematycznego było konieczne, ale nie stanowiło to samoistnego celu pracy. Można raczej powtórzyć za Hermannem Wylem, że „...praca nie wystrzega się matematyki (mijałoby się to z jej celem), ale szczegółowe omówienie większości poruszanych zagadnień, a zwłaszcza ich pełne ujęcie matematyczne nie leżało w jej planie” [163, wyd. pol., s. 7].

¹¹ Termin topologia jest tutaj zastosowany w szerszym niż tradycyjne, ściśle matematyczne znaczenie.

Rozdział 2. Matematyczny język formy

Księga natury pisana jest w matematycznym języku, jej znakami pisarskimi są trójkąty, koła i inne figury geometryczne, bez których pomocy ani słowa z niej zrozumieć niepodobna.

Galileusz¹²

Spór o koncepcję istnienia przestrzeni toczył się dawno temu¹³. Nasza percepcja otaczającego świata jest jego wynikiem – przestrzeń jawi się w codziennym odbiorze jako samoistna, zdefiniowana i niezależna od znajdujących się w niej obiektów. Stosunkowo niedawno obserwacje struktur występujących w naturze, takich jak tkanka kostna, muszle, szkielety radiolarii itp. oraz niektóre pomysły w dziedzinie kształtowania konstrukcji umożliwiły powrót do koncepcji definiowania przestrzeni poprzez wypełniające ją obiekty¹⁴.

Rzeczywiście, jeżeli rozpatrujemy przestrzeń ze względu na znajdujące się w niej elementy strukturalne, to bez tych obiektów jest ona niedefiniowalna – musi być wypełniona. Względne lub wzajemne usytuowanie elementów następu-

¹² Galileo Galilei: *Two new sciences* [47].

¹³ Na przełomie XVII i XVIII w. rywalizowały ze sobą dwie odmiennie koncepcje przestrzeni. Według pierwszej, nawiązującej do Platona (później Eudema), którą reprezentował Newton, przestrzeń istnieje niezależnie od znajdujących się w niej obiektów; według drugiej, reprezentowanej przez Leibniza, który podążał za Arystotelesem w interpretacji Teofrasta, samodzielnymi bytami mogą być jedynie ciała lub obiekty fizyczne, przestrzeń zaś jest sposobem ich uporządkowania lub organizacji (forma nie może istnieć w oderwaniu od materii). W dalszym rozwoju nauki, zwłaszcza fizyki, zwyciężył oczywiście pogląd Newtona, jednak koncepcja konkurencyjna jest nadal istotna i atrakcyjna, np. w rozpatrywaniu zagadnień kształtowania struktur przestrzennych [69, 101, 142, 171].

¹⁴ Znaczącymi pozycjami w zakresie opisu form strukturalnych w naturze były prace E. Haeckela [143] i D.W. Thompsona [59]. Koncepcje opisu konstrukcji prętowych za pomocą wielościanów przedstawił już A.F. Möbius [104], ale dopiero dzięki publikacjom O. Mohra, m.in. *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik*. Z. Architekt. u. Ing. Verlag, Hannover (1874), stały się one szerzej znane. Nastąpiło to mniej więcej w tym samym czasie, co badania Haeckela [146].

jące według określonego porządku, definiuje samo przez się przestrzeń geometryczną [45]. Można sobie zatem wyobrazić, że przestrzeń, a właściwie jej część, którą nazwiemy konstrukcją lub bardziej ogólnie – strukturą, jest podzielona (albo wypełniona) obiektami geometrycznymi różnego stopnia¹⁵, a jedynie niektóre z nich są zmaterializowane.

Szukając porządku definiującego sposoby zapełniania przestrzeni obiektami materialnymi, należy zauważyć, że w istocie możemy mówić o dwóch porządkach: porządku konkretów (obiektów materialnych) i porządku abstrakcji (relacji pomiędzy obiektami) [41]. Ponieważ obydwa te porządki i ich wzajemne oddziaływanie są stosunkowo trwałe, tworzą one system, który w tym wypadku nazywamy *systemem konstrukcyjnym*.

System, zgodnie z metodologią nauk empirycznych, jest charakteryzowany poprzez jego składniki, łączącą je teorię¹⁶, otoczenie systemu i relacje między systemem a otoczeniem [94, 76]. Liczba charakterystyk może być nieskończenie duża, praktycznie jednak jest ona ograniczona z powodów zarówno fizycznych, jak i metodologicznych. Z jednej strony bowiem nasze możliwości poznawcze są ograniczone do skończonego i przeliczalnego zbioru wielkości. Z drugiej zaś strony teorie mogą obejmować nieskończoną liczbę charakterystyk tylko wtedy, gdy dają się one sprowadzić do niewielkiej liczby charakterystyk od siebie niezależnych – teorie nie mogą być nieskończoną wyliczanką charakterystyk [94].

Obiekty opisywane przez skończoną liczbę niezależnych od siebie charakterystyk nie są konkretne, lecz abstrakcyjne [94]. Opisując zatem konkretne obiekty wchodzące w skład systemu mówimy w rzeczywistości nie o nich, lecz o ich abstrakcyjnych modelach, zbudowanych według przyjętych teorii, którym te charakterystyki nadajemy. Odwracając ten porządek, można powiedzieć, że jeżeli w ramach jakiejś teorii operujemy obiektami abstrakcyjnymi, to mogą one mieć swoje egzemplifikacje (materializacje) zawarte w realnych obiektach¹⁷.

Otoczenie systemu ma nań istotny wpływ, dostarczając nowych struktur lub wykazując ograniczenia. Samo przekształcanie jego struktur wewnętrznych nie może doprowadzić do zbudowania dostatecznie bogatej i złożonej teorii¹⁸, konieczne jest odwołanie się do szerszego kontekstu. Dla systemów konstrukcyjnych otoczeniem takim jest matematyka. Stanowi ona metasytem¹⁹, dostarczający im swoistego *języka formy*, za pomocą którego mogą być formułowane nowe, abs-

¹⁵ Pojęcie stopnia albo klasy obiektu geometrycznego wyjaśniono w rozdz. 2.2.1.

¹⁶ Teoria systemu oznacza relacje między jego składnikami i właściwościami tych relacji [41, 94].

¹⁷ Jest to jeden z warunków prawdziwości teorii empirycznej. Drugim warunkiem prawdziwości jest zgodność konkretnego z otoczeniem powodująca, że możliwe jest osiągnięcie celu, dla którego zbudowana została teoria [94, s. 40].

¹⁸ W sensie metodologicznym wynika to z twierdzeń K. Gödela o niezupełności i niesprzeczności oraz z twierdzenia A. Tarskiego o niedefiniowalności.

¹⁹ Matematyka ma również swoją „składnię języka” w postaci *metamatematyki*, abstrakcyjnego systemu, wymyślonego przez D. Hilberta, w celu uzyskania efektywnej metody ujęcia pewnych zagadnień metodologii matematyki [79, s. 17–18].

trakcyjne modele, dla których należy szukać możliwości materializacji w postaci konkretnych konstrukcji²⁰.

2.1. Uwagi ogólne

Matematyczny język formy²¹, rozumiany jako środowisko, w którym znajdują się systemy konstrukcyjne, stanowi narzędzie formułowania i wymiany powstających w tych systemach informacji. Jest to język hierarchiczny, operujący własnymi pojęciami i regułami ich używania²². Nie obejmuje on matematyki rozumianej jako „całość” tej dziedziny nauki, lecz korzysta z dorobku niektórych jej działów, poruszając się przede wszystkim w obszarze pojęć geometrycznych.

Projektowanie, szczególnie w dziedzinie architektury, jest usytuowane na pograniczu sztuki i nauki. Z jednej strony dzieła architektoniczne wyróżniają się przez swoją niepowtarzalność i jednostkowy, często twórczy charakter, a z drugiej – musi je w pewnym zakresie cechować powtarzalność uzyskiwanych rezultatów, aby mogły respektować istniejące, powtarzalne w działaniu prawa przyrody. Powtarzalność rezultatów jest konieczna w działaniach naukowych, gdyż inaczej nauka jest bezpłodna.

Projektowanie, rozumiane w węższym znaczeniu, jako poszukiwanie formy, jest często nacechowane takim „rozdarciem” między indywidualizacją a powtarzalnością, opieraniem się jedynie na intuicji a korzystaniem z usystematyzowanych narzędzi matematycznych.

Nie jest trudno zrozumieć dlaczego wprowadzenie matematyki do najbardziej twórczej fazy projektowania spotyka się z pewną niechęcią projektantów. Matematyka – w popularnym rozumieniu – operuje wielkościami, a obliczanie wielkości ma jedynie ograniczoną przydatność w poszukiwaniu formy²³. Dlatego powszechny jest wśród projektantów sceptycyzm co do możliwości oparcia tego procesu na metodach matematycznych.

²⁰ Takie podejście jest właściwe cywilizacji zachodniej. Arystotelesowskie „natura niczego nie czyni bez powodu”, stanowiło podstawę do uznania, że natura ma własny, wewnętrzny, wyższy porządek ukryty poza tym, co jest dostępne obserwacji. A to prowadziło bezpośrednio do jej analizowania za pomocą narzędzi matematycznych.

²¹ Koncepcja języka formy pojawia się m.in. w pracach C. Bragдона [16], R. Williamsa [171], A. Loeba [87, 88] i T. Westera [161].

²² A. Loeb zauważa, że tak jak gramatyka muzyki składa się z harmonii, kontrapunktów i form (takich jak sonata czy rondo), tak struktury przestrzenne mają swoją gramatykę, na którą składają się takie parametry, jak symetria, proporcje, spójność, walentność itd. [88, s. 1].

²³ Przestrzeń sama przez się – nie ma wymiarów a priori. Wymiar jest tworem sztucznym, ułatwiającym zapis zjawisk w ogólnej przestrzeni, która inaczej nie daje się odczuć (określić). To konkrety (obiekty), a także ich położenie są rzeczywiście postrzegane. L. Wittgenstein stwierdza: „Każda rzecz jest niejako w przestrzeni możliwych stanów rzeczy. Przestrzeń tę mogę pomyśleć sobie jako pustą, ale nie mogę sobie pomyśleć przestrzeni bez rzeczy” (*Tractatus Logico-Philosophicus*, PWN, Warszawa 1970, teza 2.013).

Współczesna matematyka zajmuje się zagadnieniami porządku i relacji w takim samym stopniu, jak kwestiami wielkości. I chociaż nawet ten „jakościowy” (topologiczny), a nie „ilościowy” (metryczny) rodzaj matematyki bywa nieco mniej przydatny w opisie fizycznych właściwości form, to może być z powodzeniem zastosowany do badania wzorców i zależności pojęciowych²⁴, które stają przed projektantem [1].

Należy zauważyć, że sposób zorganizowania podstawowych elementów kształtujących formę konstrukcji pozostał bardzo prosty, a wręcz prymitywny od czasu, kiedy ludzie zaczęli konstruować swoje siedziby. Dominują proste złożenia podstawowych form, najczęściej w płaskich, dwuwymiarowych układach. Poszczególne elementy współpracują, ale nie tworzą nowej jakości – nie występuje efekt synergii. Nowe jakościowo układy konstrukcyjne mogą powstawać na bazie spójnego systemu wielowymiarowych form geometrycznych. Formy te pełnią w przestrzeni rolę reperów (punktów odniesienia), względem których definiuje się elementy konstrukcji – „notuje” ich położenie w przestrzeni.

W morfologicznym projektowaniu konstrukcji topologia jest równie ważna jak kształt geometryczny. Topologia jest zazwyczaj związana z typem konstrukcji lub jej klasą i redundancją, podczas gdy kształt geometryczny jest związany ze zdolnością przenoszenia obciążeń i wielkością sił wewnętrznych. W matematycznym języku formy zasadnicze znaczenie mają intuicje geometryczne. Jerzy Geresz zauważa, że „...aparatus algebraiczny jest jedynie środkiem, a nie celem, stanowiąc wyłącznie narzędzie warsztatowe do rozwiązywania problemów, nie odgrywając roli w ich formułowaniu” [48, s. 4].

Można wyróżnić trzy poziomy zorganizowania matematycznego języka formy²⁵ [171, s. 17]:

- pojęciowy,
- znaczeniowy,
- symboliczny.

Na poziomie pojęciowym następuje wyróżnienie wszystkich, najmniejszych rozróżnialnych elementów (składników) języka i ich podstawowych właściwości. Są to najmniejsze „cegiełki” – elementy kombinatoryczne języka i reguły kombinacji (gramatyka). Elementami mogą być obiekty geometryczne i ich algebraiczne

²⁴ Poglądy o nieprzydatności narzędzi matematycznych w procesie poszukiwania formy wynikają w dużej mierze z niedostrzegania korespondencyjnego charakteru związków pomiędzy językiem matematyki i rzeczywistymi obiektami. Bez odpowiedniej teorii korespondencji nie można przenosić twierdzeń matematycznych na zagadnienia empiryczne [50, s. 35–38]. Teoria taka może zaś ustanawiać relacje zarówno na poziomie metrycznym, jak i topologicznym.

²⁵ Klasyczny podział na trzy poziomy oglądu abstrakcyjnego ustalił Arystoteles w *Analitkach*, *Fizyce* i w pismach zoologicznych. Według tego podziału, najniższy poziom odpowiada poznaniu przedmiotu przez umysł za pośrednictwem zmysłów i z zachowaniem ich specyfiki. Następny poziom to reprezentacja postrzeganej zmysłowo rzeczywistości za pomocą abstrakcji matematycznej. Najwyższy poziom w porządku wiedzy, wolny od odniesień do percepcji zmysłowej i wyobrażeń matematycznych jest przedmiotem metafizyki [50, s. 65–68]. Organizacja matematycznego języka formy pozostaje niewątpliwie w relacji do koncepcji Stagiryty.

reprezentacje, jak np. linie, wielokąty, grafy. Zasady kombinacji dotyczą tworzenia obiektów wyższego rzędu przez grupowanie obiektów niższego rzędu, np. wielokątów z wierzchołków i krawędzi itd.

Na poziomie znaczeniowym obiektom są przypisywane właściwości związane z usytuowaniem ich w konkretnym systemie konstrukcyjnym. Znaczenia nie przypisuje się poszczególnym obiektom, ale ich kombinacjom, podobnie jak w muzyce znaczenie mają nie tyle pojedyncze nuty, co ich sekwencja [171]. I tak, wielokąty mogą w jednym systemie konstrukcyjnym stanowić elementy powierzchniowe, interpretowane jako płyty lub tarcze, a w innym – mogą być fasetami wielościanów, na których siatce jest zbudowana przestrzenna konstrukcja prętowa. Elementy ulegają ukonkretnieniu i mają określone charakterystyki (rodzaj materiału, kształt przekroju poprzecznego itp.) Reguły kombinacji na tym poziomie są odniesieniem do relacji projektant–użytkownik. Dotyczą funkcji obiektu – warunków, w których będzie wykorzystywany. Sposób łączenia podstawowych elementów języka formy staje się stylem projektowania (architektonicznego, konstrukcyjnego).

Poziom symboliczny obejmuje przypisanie ukształtowanym strukturom dodatkowych cech i znaczeń. Może to dotyczyć zarówno cech dających się opisać wymiernymi charakterystykami, jak i zupełnie niewymiernych, często subiektywnych. Przykładem pierwszej grupy może być ocena konstrukcji ze względu na przyjęte kryteria optymalizacyjne. Na poziomie symbolicznym oznacza to przypisanie rozwiązaniu lepiej spełniającemu dane kryterium wyższej oceny i preferowanie go dla określonej klasy konstrukcji. Druga grupa cech dotyczy znaczeń czysto subiektywnych, często o złożonym kontekście psychologicznym, przypisywanych zaprojektowanym formom. Na przykład kształt kopuły jest powszechnie uznawany za odpowiedni dla obiektów sakralnych (w wielu kulturach tradycyjnie symbolizuje niebo w znaczeniu religijnym) czy sportowych, ale dla mieszkań już nie, pomimo istniejących zrealizowanych obiektów tego typu. Przypisanie znaczeń symbolicznych następuje często poza zamierzonymi intencjami projektanta i użytkownika.

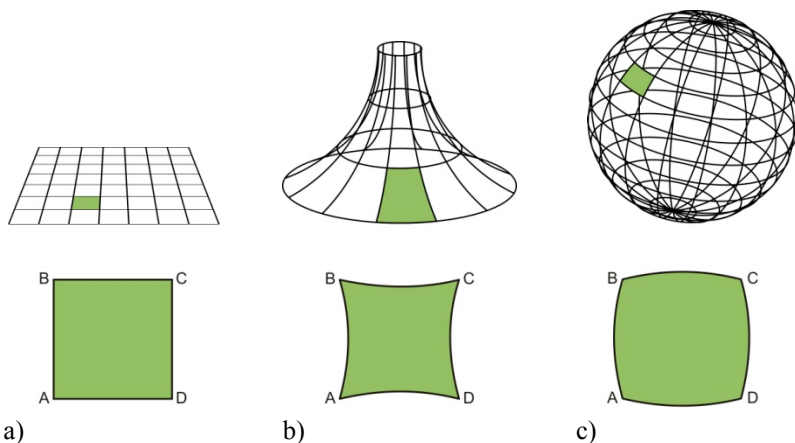
Bogactwo środków wyrazu, którymi dysponuje projektant podczas kształtowania systemów konstrukcyjnych uzewnętrznia się przede wszystkim na dwóch pierwszych poziomach organizacji matematycznego języka formy.

Język formy determinuje możliwości wyrazu nadawcy informacji i jej percepcję przez odbiorcę²⁶. Projektant operujący bogactwem środków, szerokim „słownikiem” form, może swój zamiar zrealizować w sposób pełny i interesujący, nie będąc krępowany przez ubóstwo środków.

²⁶ Matematyczna aparatura pojęciowa wyznacza zakres i sposób interpretacji zagadnień empirycznych. L. Wittgenstein pisze: „...granice mojego języka oznaczają granice mojego świata” (op.cit., teza 5.6). M. Heidegger zauważa zaś, że „...słowa i język nie są żadnymi gilzami, w które rzeczy pakuje się tylko w celu porozumienia się w mowie i piśmie. Dopiero w słowie, w języku rzeczy stają się i są.” [64, s. 19]. W myślach tych można zauważyć zbieżność z poglądem Arystotelesa (hilemorfizmem), że *forma* i *materia* nie istnieją samodzielnie, lecz jedynie w postaci konkretnych zespołów, tworząc razem *substancję* [142, s. 112].

2.2. Elementy języka formy

Dla projektanta naturalnym środowiskiem, w którym tworzy jest przestrzeń euklidesowa i związana z nią geometria euklidesowa. Chociaż w wielu zastosowaniach przydatne są również inne rodzaje geometrii (rys. 2.1), to dla potrzeb kształtowania formy konstrukcji ograniczenie do przestrzeni euklidesowej wydaje się uzasadnione.



Rys. 2.1. Porównanie obiektu w geometrii: a) euklidesowej, b) hiperbolicznej, c) eliptycznej

Na poziomie pojęciowym wyróżniane są podstawowe elementy matematycznego języka formy. Formy geometryczne są redukowane do najmniejszych rozróżnialnych komponentów i ich agregacji. Uzyskane w ten sposób *obiekty geometryczne* są przedstawiane w najprostszym możliwym opisie.

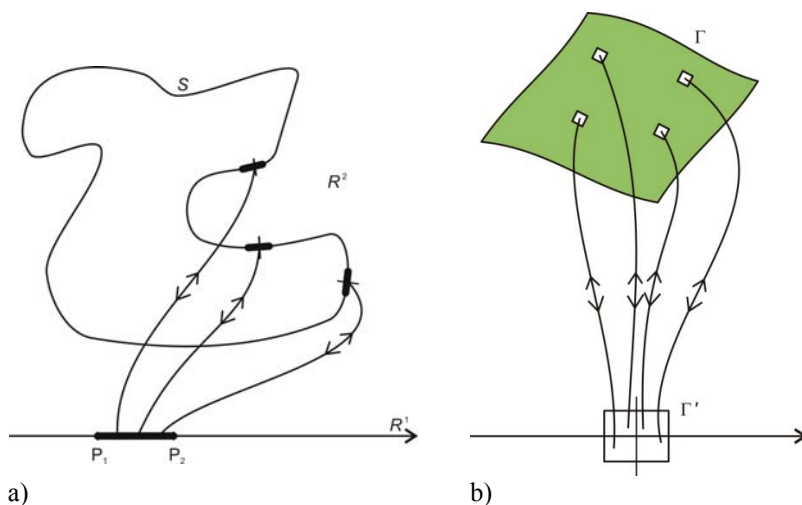
2.2.1. Obiekty i ich klasa

Przestrzeń euklidesowa może być opisywana za pomocą współrzędnych kartezjańskich $x_1, x_2, \dots, x_n$. W zależności od ich liczby mówimy, że jest ona odpowiednio 1-wymiarowa, 2-wymiarowa, ..., n -wymiarowa. Może ona być również rozpatrywana jako przestrzeń z metryką euklidesową nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych, odpowiednio: 1-wymiarowa ($\mathbb{R}^1$), 2-wymiarowa ($\mathbb{R}^2$), ..., n -wymiarowa ($\mathbb{R}^n$) [3, 31, 43, 52, 65, 117, 171]²⁷.

²⁷ W rozdziale 2.2.1 i w następnych zastosowano sposób opisu i oznaczenia powszechnie przyjęte w literaturze dotyczącej kombinatoryki i – szerzej – matematyki dyskretniej, ujednolicić je na podstawie cytowanych pozycji bibliografii.

Obiekty geometryczne, którymi będziemy operować, czyli punkty, odcinki, krzywe, powierzchnie itd., mogą być interpretowane jako przestrzenie modelowane w przestrzeni euklidesowej, określane ogólną nazwą *rozmaitości*. Są to zbiory punktów²⁸, dla których istnieje ciągle i wzajemnie jednoznaczne przekształcenie (homeomorfizm, a nawet dyfeomorfizm), przekształcające ich podzbiory na zbiory otwarte przestrzeni $\mathbb{R}^k$, przy czym wymiar przestrzeni, k , jest najniższym z możliwych²⁹. Przekształcenie takie nazywamy *mapowaniem*³⁰. Jeżeli mapowanie przekształca w sposób ciągły pewne krzywe zamknięte z jednej rozmaitości na odpowiednie krzywe zamknięte w drugiej rozmaitości, to jest *homotopijne*³¹.

Na rysunku 2.2a przedstawiono przykład mapowania pewnej krzywej S , leżącej w $\mathbb{R}^2$ na odcinek P_1P_2 leżący w $\mathbb{R}^1$. Krzywa S i odcinek P_1P_2 są zatem topologicznie równoważne³². Podobnie powierzchnia Γ leżąca w $\mathbb{R}^3$ jest mapowana na prostokąt Γ' leżący w $\mathbb{R}^2$ (rys. 2.2b) [70, s. 642], [43, s. 358–388], [117, s. 25].



Rys. 2.2. Przykłady mapowania obiektów: a) na przestrzeń $\mathbb{R}^1$, b) na przestrzeń $\mathbb{R}^2$

Mapowanie homotopijne umożliwia wprowadzenie pojęcia *klasy obiektu*. W zbiorze wszystkich obiektów wprowadzamy następującą relację równoważności: dwa obiekty k i l są równoważne wtedy i tylko wtedy, kiedy dają się mapować

²⁸ Dokładniej – przestrzenie topologiczne, patrz pkt 2.2.5.

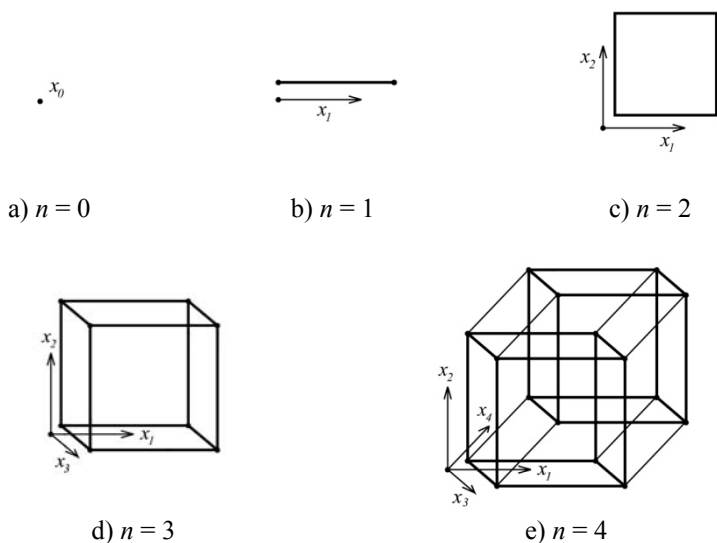
²⁹ Obiekty, dla których istnieje takie przekształcenie nazywane są rozmaitościami różniczkowymi klasy k .

³⁰ Przekształcane otwarte podzbiory przestrzeni topologicznej wraz z opisanym przekształceniem (mapowaniem) są nazywane mapami.

³¹ Dotyczy to rodzin krzywych homotopijnych – patrz pkt 2.2.5, patrz też [70, s. 642].

³² Przestrzeń $\mathbb{R}^1$ jest wystarczająca dla wzajemnej jednoznaczności przekształcenia krzywej S w odcinek P_1P_2 , ale $\mathbb{R}^0$ już nie.

na przestrzeń $\mathbb{R}^n$ o tym samym wymiarze. Relacja równoważności rozбивa zbiór obiektów na *klasy abstrakcji* (lub *klasy równoważności*, *klasy homotopii*), w ramach których obiekty są tego samego wymiaru, czyli są topologicznie równoważne. Jeżeli obiekt daje się mapować na $\mathbb{R}^1$, mówimy, że jest klasy 1 (lub wymiaru 1) itd. Oba obiekty przedstawione na rysunku 2.2, zarówno krzywa S jak i odcinek P_1P_2 są klasy 1. Przykłady obiektów różnej klasy n przedstawiono na rysunku 2.3. Dla $n = 0$ jest to punkt, dla $n = 1$ – odcinek i fragment krzywej, dla $n = 2$ – prostokąt, dla $n = 3$ – sześcian, dla $n = 4$ – odpowiednik sześcianu w 4 wymiarach³³ [171]. Wymiar (klasa) obiektu wiąże się również z pojęciem *stopni swobody*³⁴ [87, s. 29].



Rys. 2.3. Przykłady obiektów geometrycznych różnej klasy, w przestrzeni euklidesowej dla: a) $n = 0$, b) $n = 1$, c) $n = 2$, d) $n = 3$, e) $n = 4$

Obiekty klasy od 0 do 3 są bezpośrednio związane z naturalną percepcją otaczającej nas przestrzeni³⁵. Niektóre z nich, zwłaszcza odcinki, wielokąty i wielościany od dawna były traktowane jako abstrakty umożliwiające idealizację

³³ Odpowiedniki sześcianu w przestrzeni d -wymiarowej nazywa się d -kostką (ang. *d-cube*) lub d -wymiarowym hipersześcianem. Dla hipersześcianu czterowymiarowego używana jest również nazwa *tesseract*. Na rys. 2.3 bryła ta jest przedstawiona w rzucie na przestrzeń 3-wymiarową.

³⁴ Patrz pkt 2.2.12.

³⁵ Można dostrzec interesującą analogię pomiędzy pojęciem klasy obiektu a symboliką liczb wprowadzoną przez pitagorejczyków. Liczba 1 oznaczała u nich punkt, 2 – linię, 3 – figurę geometryczną, 4 – ciało geometryczne, 5 – właściwości ciał fizycznych itd. [142, s. 57].

form strukturalnych³⁶ – stąd ich szczególne znaczenie w rozważaniach nad morfologią tych form. Dla analogicznych obiektów wyższych klas używane jest określenie *wielotop*³⁷, np. *n*-wielotop lub wielotop klasy *n*.

Wielotopy można również rozpatrywać jako podzbiory przestrzeni, w których są określone³⁸, zgodnie z definicją 2.1 [65, s. 355].

Definicja 2.1. *Wielotop P w przestrzeni $\mathbb{R}^d$ jest podzbiorem $P \subseteq \mathbb{R}^d$, który może być przedstawiony jako $\mathcal{V}$ -wielotop lub $\mathcal{H}$ -wielotop, gdzie:*

a) *$\mathcal{V}$ -wielotop jest otoczką wypukłą³⁹ skończonego zbioru $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ punktów w przestrzeni $\mathbb{R}^d$:*

$$P = \text{conv}(V) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\} \quad (2.1)$$

b) *$\mathcal{H}$ -wielotop jest określony przez zbiór wspólnych rozwiązań skończonego układu nierówności liniowych*

$$P = P(a, b) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^T x \leq b_i \text{ dla } 1 \leq i \leq m \right\} \quad (2.2)$$

gdzie $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ jest macierzą rzeczywistą o wierszach a_i^T i $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem rzeczywistym o wyrazach b_i .

³⁶ Definicja wielościanów była, na przestrzeni wieków, różnie formułowana. Euklides definiował sześcian, ośmiościan i inne bryły, ale terminu „wielościan” – nie, chociaż go używał. Według definicji A.M. Legendre’a, podanej w pracy *Éléments de géométrie* (1794) (podobnej do definicji L. Eulera – patrz pkt 2.3.1) „...wielościanem nazywa się bryła ograniczona płaszczyznami, czyli ścianami płaskimi”. Podobnie E. de Jonquières, w pracy *Note sur le théorème d’Euler dans la théorie des polyèdres* (1890) stwierdza, że „...wielościan to powierzchnia, którą tworzy układ wielokątów”. Z kolei A.F. Möbius, w *Über die bestimmung des inhaltes eines Polyeders* (1865) żąda, aby „...w każdej krawędzi stykały się dwa i tylko dwa wielokąty” [79, s. 39–40]. Patrz również uwagi w pkcie 2.2.4.

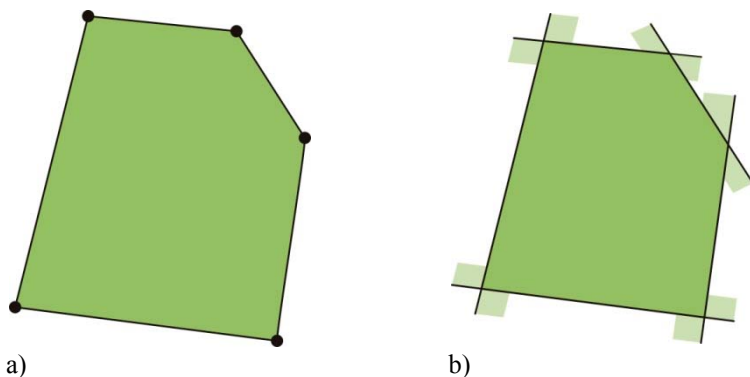
³⁷ Jest to odpowiednik angielskiego terminu *polytope*, oznaczającego uogólnienie pojęcia wieloboku w drugim i wielościanu w trzecim wymiarze (spopularyzowanego przez Alicję Bool Stott ok. roku 1904). W piśmiennictwie polskim, zwłaszcza starszym, stosowane jest bardzo często określenie *wielokomórka* (np. w [31, s. 421–428]). Spotykane są również określenia: *n*-wymiarowy wielokąt, wielokąt o współrzędnych wymiernych oraz – dość nieszczęśliwe – politop (to ostatnie np. w [79, s. 169]). Zdecydowano się tutaj używać dalej określenia wielotop, a nie wielokomórka, gdyż to drugie silniej nawiązuje do geometrycznej reprezentacji obiektu niż do jego postaci topologicznej (patrz pkt 2.2.4).

³⁸ Zazwyczaj przyjmuje się, z pewną stratą dla ogólności rozważań, że wielotopy są *pełnowymiarowe*, tzn. że *d* określa zarówno wymiar wielotopu, jak i wymiar przestrzeni, w której się on znajduje. Przykładem wielotopu, który nie jest pełnowymiarowy, jest wielokąt (*d* = 2) w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ [175, s. 5].

³⁹ *Otoczka wypukła (afiniczna) zbioru S w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest najmniejszym zbiorem afinicznym zawierającym S . Zbiór afiniczny można opisać w uproszczeniu jako podprzestrzeń wektorową bez określonego punktu początkowego. Liczby λ_i są nazywane współrzędnymi barycentrycznymi punktów wielotopu [70, s. 654]. Sposób określania otoczki wypukłej zbioru, zawarty w równaniu (2.1) jest oparty na twierdzeniu Carathéodory’ego, por. [52, s. 15].*

Definicja 2.1 określa dwa sposoby przedstawiania polytopów. $\mathcal{V}$ -wielotop jest zdefiniowany poprzez wyznaczenie otoczki wypukłej skończonego zbioru punktów (wierzchołków)⁴⁰, podczas gdy $\mathcal{H}$ -wielotop – poprzez przecięcie m domkniętych półprzestrzeni w $\mathbb{R}^d$ określonych przez ściany (fasety) – twierdzenie 2.1 [52, s. 31], [175, s. 4]. W pewnym uproszczeniu można zatem powiedzieć, że mamy definicję wierzchołkową ($\mathcal{V}$) i fasetową ($\mathcal{H}$) wielotopów. Na rysunku 2.4 przedstawiono schematycznie obydwa sposoby definiowania. Są one równoważne na podstawie tzw. głównego twierdzenia teorii wielotopów (twierdzenie 2.2) [65, s. 356], [175, s. 5, 29].

Twierdzenie 2.1. *Każdy d -wielotop P zawarty w $\mathbb{R}^d$ jest przecięciem skończonej rodziny domkniętych półprzestrzeni; najmniejsza taka rodzina składa się z tych domkniętych półprzestrzeni zawierających P , których granice są afinicznymi otoczkami faset wielotopu P .*



Rys. 2.4. Definiowanie wielotopów jako: a) $\mathcal{V}$ -wielotopów, b) $\mathcal{H}$ -wielotopów

Twierdzenie 2.2. *Definicje $\mathcal{V}$ -wielotopów i $\mathcal{H}$ -wielotopów są równoważne, tzn. każdy wielotop może być przedstawiony jako $\mathcal{V}$ -wielotop (wypukła otoczka skończonego zbioru punktów – wierzchołków) lub jako $\mathcal{H}$ -wielotop (przecięcie skończonego zbioru półprzestrzeni, opisane poprzez skończony układ nierówności).*

Równoważność definicji, według głównego twierdzenia teorii wielotopów ma charakter matematyczny, lecz nie algorytmiczny [175, s. 4]. Pewne właściwości są łatwe do zauważenia i rozpatrywania na podstawie definicji $\mathcal{V}$ -wielotopów, ale nie na podstawie definicji $\mathcal{H}$ -wielotopów i odwrotnie⁴¹.

⁴⁰ W definicji 2.1 i w następnych zakłada się milcząco, że punkty znajdują się w tzw. położeniu ogólnym tzn., że żadne $d + 1$ punktów w $\mathbb{R}^d$ nie leży na jednej hiperpłaszczyźnie.

⁴¹ Przykłady ilustrujące główne twierdzenie teorii wielotopów można znaleźć np. w pracy [65].

2.2.2. Hierarchia

Jak łatwo zauważyć, w każdym wielotopie klasy n można wyróżnić pewną liczbę wielotopów niższych klas $k \leq n-1$. W ogólnym przypadku przyjmuje się następującą notację: dla wielotopu P klasy n , liczbę zawartych w nim wielotopów (obiektów) klasy 0 oznaczamy przez N_0 , liczbę wielotopów klasy 1 przez $N_1, \dots$, liczbę wielotopów klasy $n-1$ przez N_{n-1} .

Dla szczególnego przypadku wielotopu P klasy 3 (wielościanu) przyjmuje się następujące oznaczenia: liczbę obiektów klasy 0, 1 i 2 (wierzchołków, krawędzi, ścian) oznaczamy odpowiednio przez $v = v(P)$, $e = e(P)$ oraz $f = f(P)$.

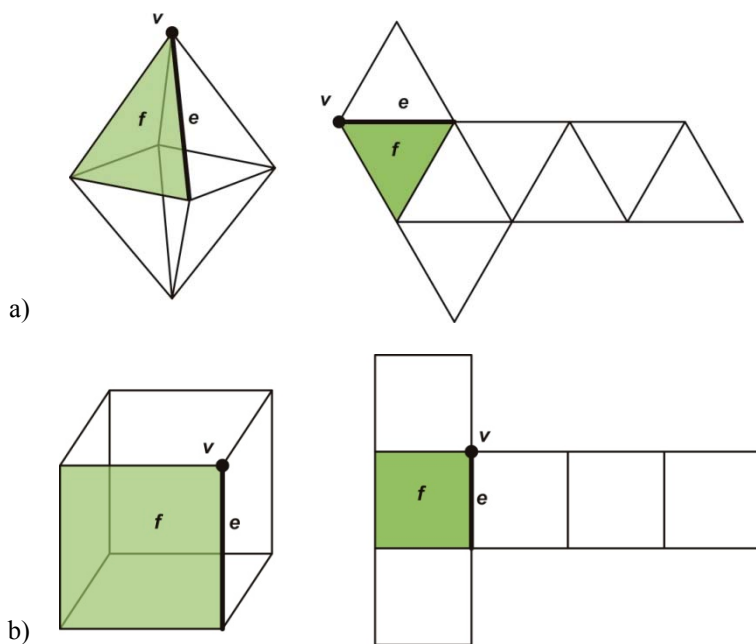
Dwa przykładowe, przedstawione⁴² na rysunku 2.5, 3-wielotopy, to ośmiościan i sześcian, dla których odpowiednio $v = 6$, $e = 12$, $f = 8$ oraz $v = 6$, $e = 12$, $f = 8$. W ramach danej klasy mogą występować różne obiekty. Przykładem jest przedstawiony na rysunku 2.6 wielościan, którego ściany są trójkątami i czworokątami⁴³.

Należy zauważyć, że wielotopy niższych klas stanowią okonturowanie wielotopów klas wyższych: punkty wyznaczają krawędzie, które wyznaczają fasety⁴⁴ (ściany), a te z kolei wyznaczają komórki. Z drugiej strony wielotopy niższych klas są generowane przez przecięcia określonej liczby wielotopów klas wyższych. Mówi o tym twierdzenie (2.3) [52, s. 35].

⁴² Po raz pierwszy wielościany zostały przedstawione jako konstrukcje siatkowe, tzn. z pokazanymi jedynie krawędziami – podczas gdy powierzchnie ścian i wnętrza wielościanów były puste – przez Leonardo da Vinci w jego ilustracjach do traktatu Luca Pacioli *De Divina Proportione* (1497). Formalnie określenia „krawędzie” (łac. *acies*), zastępując używane wcześniej określenie „bok” (*latus*), użył Leonard Euler w liście do Goldbacha z 14 listopada 1750 r. (w publikacji – w 1752 r., patrz pkt 2.3.1) [177, s. 186]. Ponieważ w tej samej pracy sformułował również swoje słynne równanie wiążące ze sobą liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanów (patrz pkt 2.3.1), wydaje się, że wprowadzenie nowego terminu miało podkreślić nowatorstwo jego aparatu pojęciowego i rewolucyjne przejście do myślenia w kategoriach obiektów zerowymiarowych wierzchołków, jednowymiarowych krawędzi i dwuwymiarowych ścian. Jednocześnie niekonsekwencją było pozostawienie dotychczasowego określenia wierzchołka (łac. *angulus solidus*) [79, s. 27–28]. Pierwsze „wykroje”, czyli rozwinięcia ścian wielościanów na płaszczyźnie w sposób umożliwiający zbudowanie ich papierowego modelu przedstawił Albrecht Dürer w IV części swojego *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit* (1525) [148, s. 14], [200, s. 126–128].

⁴³ Jest to wielościan powstały przez obrót połowy *kuboktaedru* (sześćo-ośmiościanu) (patrz przypis do pkt 2.2.3.3) wokół osi przechodzącej przez jego środek, o kąt $\pi/3$ [171, s. 99].

⁴⁴ Określenie faseta oraz ściana są często stosowane zamiennie. W rozpatrywaniu wielotopów wyższych rzędów, termin ten jest używany na określenie elementów klasy $n-1$, stanowiących okonturowanie n -wielotopu. Każda zatem faseta (n -wielotopu) klasy $n-1$ ma fasety klasy $n-2$ itd. Używane są również określenia k -ściana i k -faseta. Występuje tu pewna analogia do definiowania powierzchni w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, która jest zwykle rozumiana jako obiekt klasy $n-1$.



Rys. 2.5. Struktura wielościanów: a) ośmiościanu foremego, b) sześcianu



Rys. 2.6. Wielościan, którego ściany są trójkątami i czworokątami

Twierdzenie 2.3. *Jeżeli $-1 \leq h < k \leq d-1$ i jeżeli P jest d -wielotopem, każda h -faseta P jest przecięciem rodziny (zawierającej co najmniej $k-h+1$ elementów) k -faset P zawierających ją⁴⁵.*

⁴⁵ W sformułowaniu twierdzenia 2.3 używa się (za [52, s. 35]) określenia h -ściana lub k -ściana na określenie wielotopów niższej klasy, stanowiących okonturowanie d -wielotopu P .

Jeżeli będziemy rozpatrywać zależności tylko pomiędzy elementami należącymi do kolejnych klas, to twierdzenie 2.3 można uprościć do twierdzenia 2.4 [52, s. 34].

Twierdzenie 2.4. *Jeżeli P jest d -wielotopem, to każda $(d - 2)$ -faseta F wielotopu P jest zawarta dokładnie w dwóch fasetach F_1 i F_2 wielotopu P takich, że $F = F_1 \cap F_2$.*

Ilustracją twierdzenia 2.4 dla $n = 3$ mogą być krawędzie wielościanów, powstałe jako przecięcia dwóch ścian. Twierdzenia 2.3 i 2.4 usuwają jednocześnie pewne niejednoznaczności w definiowaniu wielotopów⁴⁶.

Określenie *fasety* stosuje się często w rozumieniu uogólnionym. Wielotop jest trywialną fasetą dla samego siebie, a zbiór pusty jest fasetą każdego wielotopu – wszystkie pozostałe fasety są *fasetami właściwymi*. Fasetami właściwymi są zatem wierzchołki, krawędzie itd. Ściany, rozumiane jako obiekty klasy niższej o jeden od klasy samego wielotopu, są maksymalnymi fasetami właściwymi.

Wielotopy klas $k < d$, które możemy wyróżnić w każdym d -wielotopie, tworzą *szkielety* tego wielotopu, zgodnie z definicją 2.2 [175, s. 64].

Definicja 2.2. *Suma k -wymiarowych faset wielotopu stanowi jego k -szkielet.*

Tak więc, 0-szkieletem jest suma wierzchołków wielotopu, 1-szkieletem – suma krawędzi, 2-szkieletem – suma ścian itd. Operowanie szkieletami różnych klas jest istotne w rozpatrywaniu reprezentacji geometrycznej obiektów⁴⁷. Każdy d -wielotop ma d szkieletów, o klasach $0 \leq k \leq d - 1$.

Wśród obiektów każdej klasy można wyróżnić pewne pierwsze i najprostsze formy. Dla $d = 2$ (wielokąty) jest to trójkąt, dla $d = 3$ (wielościany) – czworościan itd. Obiekty takie nazywamy *d -simpleksami* i oznaczamy T^d . Ogólnie, dla obiektów klasy d , jest to obiekt określony definicją 2.2. [175, s.7].

Definicja 2.3. *d -simpleks T^d jest otoczką wypukłą dowolnych $d + 1$ afinicznie niezależnych punktów w $\mathbb{R}^n$ ($n \geq d$).*

d -simpleks T^d jest zatem wielotopem klasy d , o $d + 1$ wierzchołkach. Można go również rozpatrywać jako przecięcie $d + 1$ domkniętych półprzestrzeni, określających $d + 1$ ścian klasy $(d - 1)$ ⁴⁸. Inaczej mówiąc, jest to najmniejsza otoczka wypukła, zawierająca $d + 1$ punktów. Simpleksy są wielotopami regularnymi⁴⁹. Właściwością d -simpleksów jest to, że wszystkie tworzące je obiekty są również simpleksami, odpowiednio niższej klasy, np. ścianami czworościanu są trójkąty. Ponadto, każdy wierzchołek d -simpleksu jest incydentny z d fasetami⁵⁰, np.

⁴⁶ Por. np. warunek Möbiusa w przypisie nt. sposobów definiowania wielościanów w pktcie 2.2.1.

⁴⁷ Porównaj pkt 2.2.4.

⁴⁸ Na przykład czworościan jest 3-simpleksem ($d = 3$), który ma $(d + 1) = 4$ ścian, które są klasy $(d - 1) = 2$ (płaszczyzny dwuwymiarowe).

⁴⁹ Patrz pkt 2.2.10.

⁵⁰ Tzn. w każdym wierzchołku zbiega się d -faset, porównaj pkt 2.2.6.

w każdym wierzchołku czworościanu zbiegają się trzy ściany. Z tego wynika, że dowolnie wybrane $d - 1$ wierzchołków d -simpleksu, zawsze wyznacza jego ścianę. Analogicznie, dowolnie wybrane $d - 2$ wierzchołków ściany, zawsze wyznacza jej *krawędź*⁵¹ itd. Jedynie simpleksy mają tę właściwość. Można to z łatwością zauważyć porównując np. czworościan (3-simpleks) z sześcianiem (3-wielotop, lecz nie 3-simpleks). Łatwo jest również zauważyć, że dowolne dwa d -simpleksy są afinicznie izomorficzne, tzn. mają ten sam typ kombinatoryczny⁵². Właściwości te wynikają z twierdzenia 2.5 [52, s. 53], które jednocześnie określa liczbę uogólnionych faset d -simpleksu⁵³.

Twierdzenie 2.5. *Wszystkie k -fasety, $0 \leq k \leq d - 1$, d -simpleksu T^d są k -simpleksami i każde $k + 1$ wierzchołków T^d określa k -fasetę T^d . Liczba k -faset T^d jest zatem dana jako $f_k(T^d) = \binom{d+1}{k+1}$ dla wszystkich k .*

Dla każdej klasy obiektów d , istnieje tylko jeden d -simpleks. Jednak istnieją obiekty tej samej klasy, niebędące wprawdzie d -simpleksami, ale mające tylko jedną z podanych wyżej właściwości charakteryzujących d -simpleksy.

Jeżeli wszystkie ściany d -wielotopu są $(d - 1)$ -simpleksami, ale wierzchołki są incydentne z inną liczbą faset niż d , to wielotop taki nazywamy *simplicjalnym*. Przykładem dla $d = 3$ może być dwudziestościan, którego ścianami są trójkąty (2-simpleksy), ale wierzchołki są incydentne z pięcioma ścianami. Innym przykładem jest ośmiościan. Jeżeli natomiast, wierzchołki d -wielotopu spełniają warunek incydentności z d ścianami, lecz ściany te nie są $(d - 1)$ -simpleksami, to wielotop taki nazywamy *prostym*⁵⁴. Przykładem może być dwunastościan foremny, którego wierzchołki są incydentne z trzema ścianami pięciokątnymi. Innym przykładem wielotopu prostego jest prostopadłościan, w którego wierzchołkach zbiegają się trzy czworokąty. Wielotopy proste i wielotopy simplicjalne są ze sobą powiązane koncepcją dualności⁵⁵, a jedynie simpleksy należą jednocześnie do obu rodzajów wielotopów [175, s. 8], [52, s. 57–59].

Każdy obiekt jest zarówno otoczeniem (przestrzenią realizacji) dla obiektów niższego poziomu, jak i podsystemem dla obiektów wyższego poziomu. Tworzy to układ hierarchiczny, w którym wymiar przestrzeni d jest jednocześnie indeksem poziomu w hierarchii [168, s. 138].

⁵¹ Termin „krawędź” został tu użyty na określenie obiektu o klasie o jeden rząd niższej niż klasa ściany.

⁵² Typ kombinatoryczny – patrz pkt 2.2.4.

⁵³ W twierdzeniu 2.5 wyrażenie $\binom{d+1}{k+1}$ oznacza symbol Newtona.

⁵⁴ Wielotopy proste mogą być również zdefiniowane za pomocą figur wierzchołkowych (patrz poniżej) jako wielościan, którego wszystkie figury wierzchołkowe są simpleksami [65, s. 361].

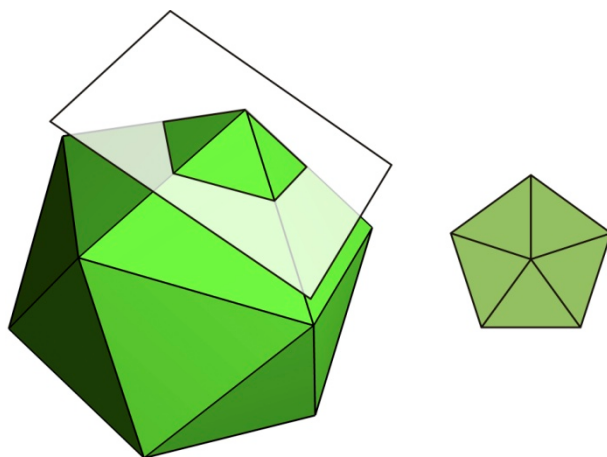
⁵⁵ Patrz pkt 2.2.11.

2.2.3. Notacja

Dla ułatwienia jednoznacznego określania wielotopów stosowanych jest wiele skrótowych form zapisu ich cech geometrycznych. Najczęściej stosowane są trzy z nich, omówione poniżej. Są to: *symbol Schälfliego* i jego rozszerzone wersje – *notacja konfiguracji wierzchołków* i *notacja konfiguracji ścian*. Oparte są one na kształcie i liczbie faset zbiegających się w wierzchołkach wielotopu. Stosowane są również: *symbol Wythoffa* i *diagram Coxetera-Dynkina*. Te rodzaje notacji korzystają z konstrukcji kalejdoskopowej, w której wielościany są przedstawiane jako podziały powierzchni sfery, płaszczyzny Euklidesowej lub płaszczyzny hiperbolicznej. Ostatnio stosowana jest również notacja, która symbolicznie opisuje właściwości symetrii obiektu lub układu obiektów. Są to tzw. *sygnatury*, które zostaną omówione w rozdz. 2.2.13.3.

Ważną charakterystyką wielotopów, która jest wykorzystywana do ich symbolicznego oznaczania, jest *figura wierzchołkowa* [65, s. 361].

Definicja 2.4. *Jeżeli v jest wierzchołkiem wielotopu P , to figura wierzchołkowa P w wierzchołku v jest wielotopem utworzonym przez przecięcie P hiperpłaszczyzną H w taki sposób, że wierzchołek v znajduje się po jednej stronie H , a wszystkie pozostałe wierzchołki znajdują się po drugiej stronie: $P / v = P \cap H$.*

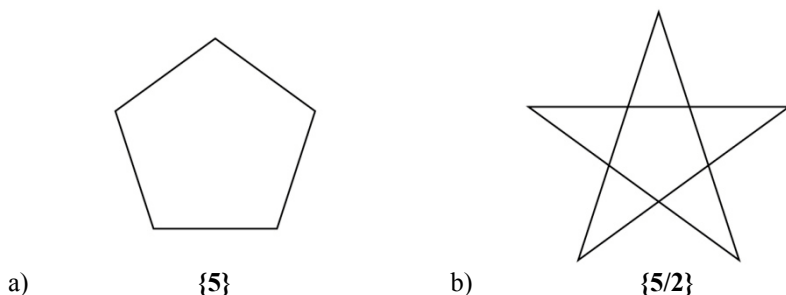


Rys. 2.7. Przykład figury wierzchołkowej dla dwudziestościanu foremnego

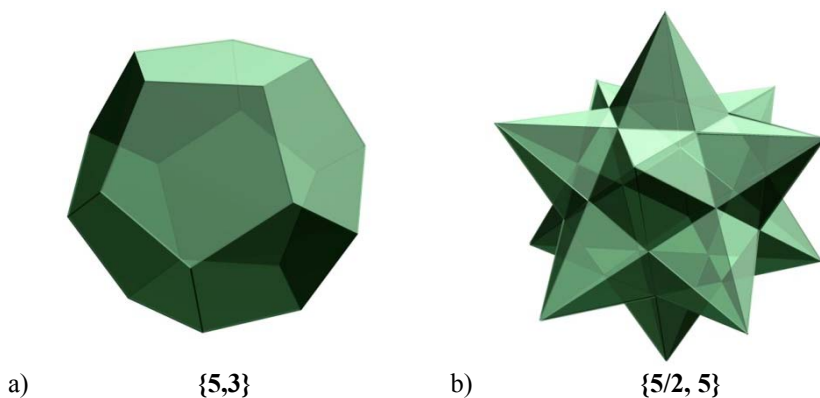
Dla $d = 3$, figura wierzchołkowa jest wielokątem, którego wierzchołki leżą na krawędziach schodzących się w danym wierzchołku wielościanu [175, s. 54]. Na przykład, w dwudziestościanie foremnym wszystkie figury wierzchołkowe są pięciokątami (rys. 2.7).

2.2.3.1. Symbol Schläfliego

Dla wielokątów foremnych (klasy 2) symbol Schläfliego ma postać $\{n\}$, gdzie n oznacza liczbę krawędzi [29, s. 69], np. $\{5\}$ jest zapisem pięciokąta foremnego (rys. 2.8.a). Wielokąty gwiaździste⁵⁶ są zapisywane w postaci $\{n/k\}$, gdzie n jest liczbą wierzchołków, natomiast k oznacza, że każdy wierzchołek jest połączony z kolejnym, k -tym następnym wierzchołkiem, zgodnie z ruchem wskazówek zegara⁵⁷. Zapis $\{5/2\}$ oznacza pentagram (rys. 2.8b). Ten sam zapis jest też stosowany dla wielokątów uogólnionych⁵⁸. Dla wielościanów foremnych ($d = 3$) symbol Schläfliego



Rys. 2.8. Przykład zapisu obiektów dla $d = 2$ za pomocą symboli Schläfliego:
a) pięciokąt foremny, b) pięciokąt gwiaździsty (pentagram)



Rys. 2.9. Przykład zapisu obiektów dla $d = 3$ za pomocą symboli Schläfliego:
a) dwunastościan foremny, b) dwunastościan gwiaździsty

⁵⁶ Wielokąty gwiaździste są definiowane za pomocą właściwości wypukłości – patrz pkt 2.2.7.

⁵⁷ Dla $k > 1$. W przypadku $k = 1$ symbol Schläfliego oznacza wielokąt foremny. Symbol $\{5/1\}$ jest zatem równoważny $\{5\}$. Ten drugi jest stosowany dla prostoty, ale w przypadku wielokątów uogólnionych (patrz pkt 2.2.4) zachowywany jest pełny zapis.

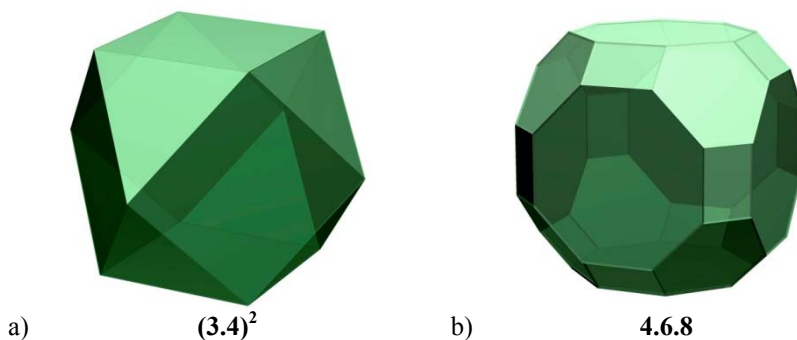
⁵⁸ Patrz pkt 2.2.4.

ma postać $\{p,q\}$, gdzie p oznacza, że ściany wielościanu są stopnia p , a w każdym wierzchołku zbiega się q ścian (wierzchołek jest q -walentny⁵⁹). Dwunastościan foremny jest zapisywany w postaci $\{5,3\}$ (rys. 2.9a). Zapis $\{5/2,5\}$ oznacza mały dwunastościan gwiaździsty⁶⁰ (rys. 2.9b).

2.2.3.2. Notacja konfiguracji wierzchołków

Notacja konfiguracji wierzchołków umożliwia zapis wielościanów, które są zbudowane ze ścian będących różnymi wielokątami [171, s. 37], [52]. W swojej podstawowej wersji może być stosowana do wielościanów *izogonalnych* (tj. takich, które mają wszystkie wierzchołki jednakowe)⁶¹. Konfiguracja wierzchołków jest zapisywana jako sekwencja liczb reprezentujących liczbę krawędzi ścian otaczających wierzchołek. Ma postać typu $a.b.c.$ co oznacza, że w wierzchołku schodzą się trzy ściany, odpowiednio stopnia a , b i c . Jeżeli któraś ze ścian lub kilka z nich występuje wielokrotnie, zapisuje się to poprzez podanie w wykładniku liczby powtórzeń. Poniżej przedstawiono sześć-ośmiościan⁶² $(3.4)^2$ (rys. 2.10a) i sześć-ośmiościan rombowy wielki 4.6.8 (rys. 2.10b).

Konfiguracja wierzchołka może być również przedstawiana graficznie jako figura wierzchołkowa, składająca się ze ścian wokół wierzchołka (rys. 2.13d). Figura wierzchołkowa ma strukturę trójwymiarową, ponieważ ściany wielościanu nie leżą w tej samej płaszczyźnie. Jednak dla wielościanów izogonalnych wszystkie sąsiadujące wierzchołki są takie same, co umożliwia płaskie przedstawienie figury wierzchołkowej (rys. 2.7).



Rys. 2.10. Przykłady zapisu wielościanów w notacji konfiguracji wierzchołków:
a) sześć-ośmiościan, b) sześć-ośmiościan rombowy wielki

⁵⁹ Patrz pkt 2.2.6.

⁶⁰ Jeden z czterech wielościanów Keplera–Poinsota, patrz pkt 2.2.4.

⁶¹ Patrz pkt 2.2.4.

⁶² W literaturze polskojęzycznej można spotkać się również z dawniej stosowanym określeniem *kubooktaedr* [131, s. 200] [39, s. 7].

2.2.3.3. Notacja konfiguracji ścian

Notacją podobną do konfiguracji wierzchołków, lecz stosowaną do zapisu wielościanów *izohedralnych* (tj. takich, które mają wszystkie ściany jednakowe)⁶³ jest *notacja konfiguracji ścian*. Konfiguracja ścian jest zapisywana jako sekwencja liczb reprezentujących liczbę ścian w kolejnych wierzchołkach dowolnej ściany wielościanu [171, s. 37] [52]. Ma postać typu $Va.b.c.d$. Litera V stosowana jest dla odróżnienia zapisu od notacji konfiguracji wierzchołków. Dalsza część zapisu oznacza, że ściana ma cztery wierzchołki, w pierwszym wierzchołku ściany schodzi się a ścian sąsiednich, w drugim – b ścian sąsiednich, w kolejnym – c ścian sąsiednich itd. Zapis $V3.4.3.4$ lub $V(3.4)^2$ oznacza dwunastościan rombowy (rys. 2.16.a). Dla wielościanów siodłowych wprowadza się dodatkowo literę s na początku symbolu, np. $sV(3.4)^2$ (rys. 2.16.b).

2.2.4. Reprezentacja obiektu

Obiekty mogą być rozpatrywane jako pewne abstrakcyjne struktury kombinatoryczne, nazywane *obiektami abstrakcyjnymi*. Poprzez mapowanie tych obiektów można uzyskać obraz nazywany *obiektem geometrycznym* lub w skrócie po prostu *obiektem*. I tak na przykład, wielościan jest obrazem *wielościanu abstrakcyjnego* powstałym przez mapowanie, w którym wierzchołki stają się punktami, krawędzie odcinkami, a ściany – wielokątami. Mówimy, że wielościan jest *realizacją bazowego wielościanu abstrakcyjnego*. Wielościany, powstałe z tego samego wielościanu bazowego są nazywane *kombinatorycznie równoważnymi* lub mającymi ten sam *typ kombinatoryczny*. W ogólnym przypadku dotyczy to nie tylko wielościanów, ale również obiektów innych klas. Rozróżnienie pomiędzy strukturą kombinatoryczną obiektu a jej geometryczną realizacją tworzy podstawy do najbardziej ogólnej, obejmującego różne przypadki, opisu obiektów.

2.2.4.1. Obiekty abstrakcyjne

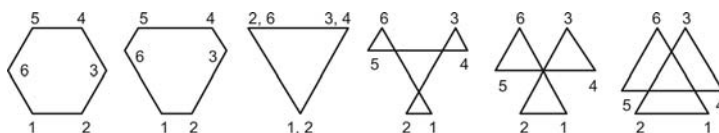
Wielokąt (zwłaszcza n -kąt, dla pewnego $n \geq 3$) jest cyklicznie zorientowaną sekwencją dowolnie wybranych punktów $v_1, v_2, \dots, v_n$ (wierzchołków wielokąta) i odcinków e_i określonych przez pary wierzchołków v_i, v_{i+1} sąsiadujących w cyklicznym porządku (krawędzi wielokąta). Każdy wierzchołek v_i jest incydentny tylko z krawędziami e_i i e_{i+1} .

Taka definicja wielokąta⁶⁴ jest bardzo szeroka [53, s. 469]. Dopuszcza ona na przykład możliwość reprezentowania dwóch różnych wierzchołków wielo-

⁶³ Patrz pkt 2.2.4.

⁶⁴ Po raz pierwszy rozpatrywał wielokąty w tak uogólniony sposób A.L.F. Meister w pracy *Generalia de genesi figurarum planarum et inde pendentibus earum affectionibus*. Novi Comm. Soc. Reg. Scient. Gotting. 1, s.144–180 (1769/70). Praca ta została na niemal dwieście lat zapo-

ścianu przez ten sam punkt. Możliwe jest występowanie krawędzi o długości równej zero, krawędzi wielokrotnych (stycznych lub niestycznych)⁶⁵. Również reprezentacja geometryczna może mieć różną postać. Na rysunku 2.11 przedstawiono przykłady różnych realizacji abstrakcyjnego sześciokąta, spełniających podaną definicję (punkty reprezentujące kolejne wierzchołki oznaczono liczbami).



Rys. 2.11. Przykłady różnych realizacji geometrycznych abstrakcyjnego sześciokąta

Dla łatwiejszego operowania tak zdefiniowanymi wielokątami (liczba możliwych, różnych realizacji geometrycznych wzrasta bardzo szybko wraz ze wzrostem n) konieczne jest ich rozpatrywanie ze względu na wybrane wspólne cechy. Są one definiowane przez właściwości jego grupy symetrii⁶⁶. Wielokąt jest nazywany *izogonalnym*, jeżeli jego wierzchołki są jednakowe⁶⁷. Jeżeli ten sam warunek jest spełniony dla krawędzi wielokąta, to jest on *izotoksalny*, a jeśli dla *flag* (flaga jest parą składającą się z wierzchołka i jednej z krawędzi incydentnych z nim) – to jest to wielokąt *regularny*. Określenia te stosują się również do wielościanów, dla których dodatkowo definiuje się wielościany *izohedralne*, tzn. o jednakowych ścianach.

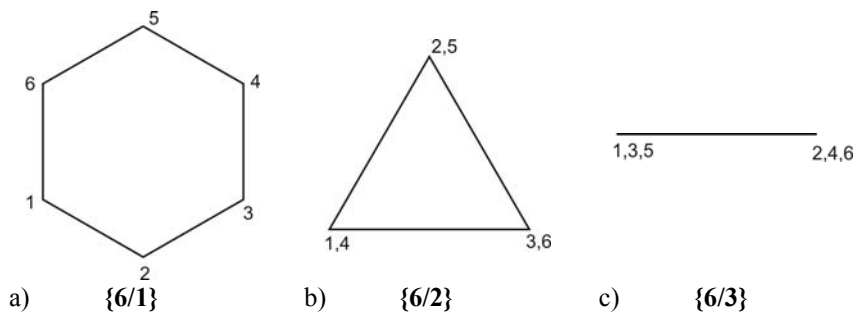
Zgodnie z przedstawioną definicją, dla każdej pary liczb całkowitych n i d , takich że $0 \leq d \leq n/2$, istnieje regularny n -kąt, oznaczany symbolem Schläffiego $\{n/d\}$. Wielokąt taki można skonstruować, przyjmując dowolny punkt na jednostkowym okręgu jako pierwszy wierzchołek, a następnie obracając go o kąt $2\pi d/n$. Oczywiście, w zależności od wartości n i d niektóre wierzchołki pośrednie mogą się nakładać, jednak ich „tożsamość” jest określona przez liczbę kroków prowadzących do ich utworzenia. Na rysunku 2.12 przedstawiono przykłady sześciokątów regularnych, skonstruowanych w opisany sposób. Koincydencja wierzchołków, taka jak na rys. 2.12b, c nie występuje wtedy i tylko wtedy, gdy n i $d > 0$ są względnie pierwsze [53, s. 466].

mniana [44, s. 1237]. Późniejsi autorzy w swoich sformułowaniach definicji wielokąta podawali różnego rodzaju dodatkowe ograniczenia [53, s. 461].

⁶⁵ Nie jest możliwe natomiast zdefiniowanie wielokąta o zerowej liczbie wierzchołków – przykładem jest okrąg, którego nie uważamy za wielokąt. Podobnie jest w przypadku wielościanów – sfera nie jest wielościanem.

⁶⁶ Patrz pkt 2.2.13.

⁶⁷ Ściślej – tworzą jedną *orbitę* w jego grupie symetrii (patrz pkt 2.2.13.). Dla uproszczenia, w dalszej części będzie używane określenie „są jednakowe”.



Rys. 2.12. Przykłady realizacji abstrakcyjnego sześciokąta regularnego o różnie określonych grupach symetrii: a), b) izogonalnych, c) izotoksalnych

Abstrakcyjny wielościan jest strukturą zdefiniowaną na zbiorach obiektów spełniających pewne aksjomaty, które są interpretowane jako wierzchołki, krawędzie, ściany. Warunki, których spełnienie pozwala traktować te zbiory jako abstrakcyjne wielościany, chociaż są formułowane w różny sposób, zawsze obejmują relacje incydencji i przylegania. Jedno z najprostszych, a jednocześnie bardzo użytecznych sformułowań definicji wielościanów jest następujące:⁶⁸

Definicja 2.5. *Wielościan jest skończonym zbiorem wielokątów, takich, że każda krawędź każdego z nich należy do dokładnie jednego z pozostałych, z zastrzeżeniem, że żaden podzbiór tego zbioru nie ma takiej samej właściwości.*

Definicja ta ma jednak pewne wady, które nie pozwalają na jej stosowanie do najbardziej ogólnych przypadków. Nie dopuszcza na przykład możliwości reprezentowania dwóch wierzchołków przez jeden punkt i krawędzi o długości zerowej [44, s. 1237].

W pracy Crapo i Whiteleya [35] definicję wielościanu sformułowano, korzystając z warunków incydencji i przystawania, z zastosowaniem konstrukcji pomocniczej. W każdej ze ścian wstawiany jest dodatkowy punkt, połączony z wierzchołkami dodatkowymi krawędziami dzielącymi ściany na pola trójkątne. Te nowe pola tworzą wokół wierzchołków ścieżki, których właściwości pozwalają zdefiniować wielościan. Ten, pozornie skomplikowany, sposób definiowania jest bardzo użyteczny w odniesieniu do wielościanów abstrakcyjnych zorientowanych⁶⁹.

⁶⁸ Definicja ta została sformułowana w pracy: H.S.M. Coxeter, M.S. Longuet-Higgins, J.C.P. Miller *Uniform polyhedra*, Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 246, s. 401–450 (1954). Podano za [44, s. 1237].

⁶⁹ Definicja podana w pracy H. Crapo i W. Whiteleya [35, s. 63] ma związek z określaniem właściwości konstrukcji prętowych na podstawie właściwości figur powstałych przez rzutowanie siatek wielościanów na płaszczyznę.

Najbardziej ogólne sformułowanie warunków, które muszą spełniać zbiory tworzące wielościany abstrakcyjne przedstawia, definicja 2.6 [53, s. 467–468], [35, s. 63].

Definicja 2.6. *Abstrakcyjny wielościan składa się ze skończonego zbioru wierzchołków (abstrakcyjnych punktów) $V=\{v_1, \dots, v_m\}$, skończonego zbioru krawędzi $E=\{e_1, \dots, e_p\}$ i skończonego zbioru ścian $F=\{f_1, \dots, f_n\}$, takich że:*

a) *Każda krawędź jest incydentna z dokładnie dwoma różnymi wierzchołkami i z dwiema różnymi ścianami. Każdy z dwóch wierzchołków jest incydentny (poprzez ścianę) z każdą z dwóch ścian. Wierzchołki incydentne poprzez krawędź są nazywane przyległymi; podobnie dwie ściany połączone poprzez krawędź są nazywane przyległymi (rys. 2.13a).*

b) *Dla każdej krawędzi oraz wierzchołka i ściany incydentnych z nią jest dokładnie jedna, inna krawędź incydentna z tym samym wierzchołkiem i ścianą. Jest ona nazywana przyległą do krawędzi początkowej (rys. 2.13b).*

c) *Dla każdej ściany istnieje całkowite k , takie że krawędzie incydentne z tą ścianą i wierzchołki incydentne z nią poprzez krawędzie tworzą cykl w tym sensie, że mogą być oznaczone jako $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 \dots v_{k-1} e_{k-1} v_k e_k v_1$, gdzie każda krawędź e_i jest incydentna z wierzchołkami v_i i v_{i+1} i przylegająca do krawędzi e_{i-1} i e_{i+1} . Wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki cyklu są różne, wszystkie indeksy są wzięte mod k , gdzie $k \geq 3$ (rys. 2.13c).*

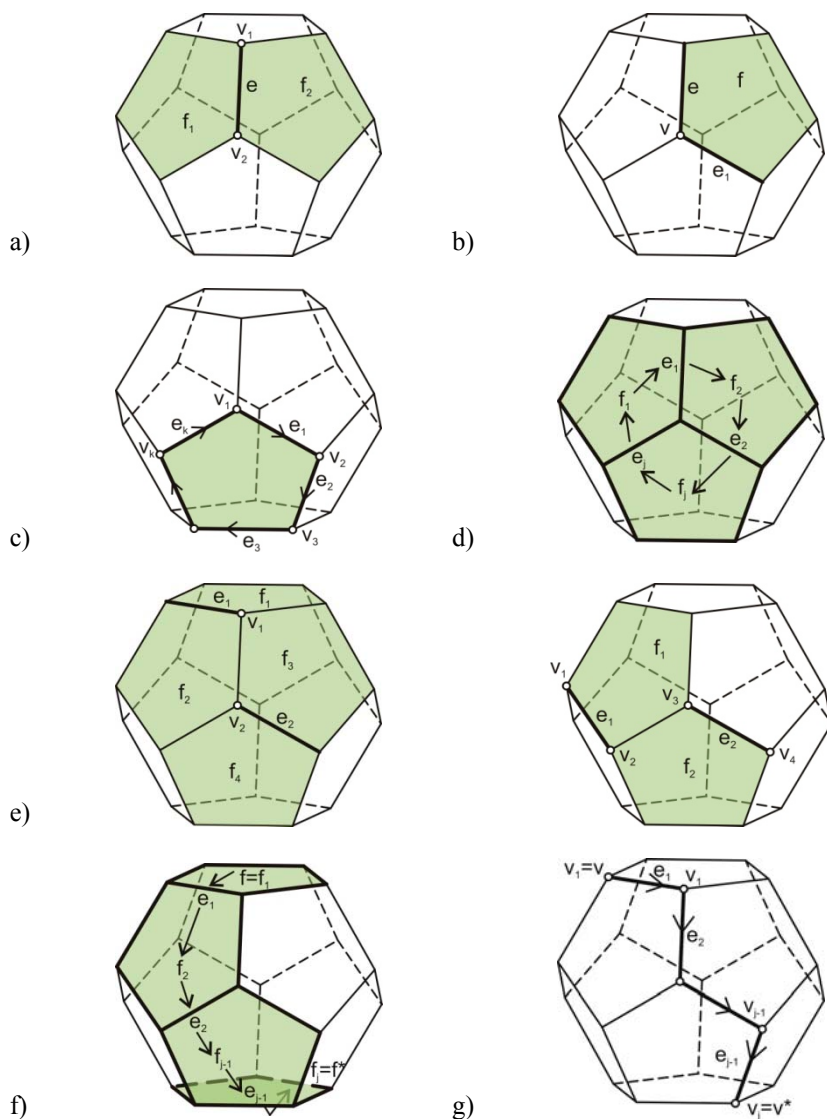
d) *Dla każdego wierzchołka istnieje całkowite j , takie że krawędzie incydentne z tym wierzchołkiem i ściany incydentne z nim poprzez krawędzie tworzą cykl w tym sensie, że mogą być oznaczone $f_1 e_1 f_2 e_2 f_3 e_3 \dots f_{j-1} e_{j-1} f_j e_j f_1$, gdzie każda krawędź e_i jest incydentna ze ścianami f_i i f_{i+1} i przylegająca do krawędzi e_{i-1} i e_{i+1} . Wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki cyklu są różne, wszystkie indeksy są wzięte mod j , gdzie⁷⁰ $j \geq 3$ (rys. 2.13d).*

e) *Jeśli dwie krawędzie są incydentne z tymi samymi dwoma wierzchołkami (ścianami), to cztery ściany (wierzchołki) incydentne z tymi dwiema krawędziami są różne (rys. 2.13e).*

f) *Każda para ścian f, f^* jest połączona dla pewnego j poprzez skończony ciąg $f_1 e_1 f_2 e_2 f_3 e_3 \dots f_{j-1} e_{j-1} f_j$ incydentnych krawędzi i ścian, gdzie $f_1 = f$ oraz $f_j = f^*$ (rys. 2.13f).*

g) *Każda para wierzchołków v, v^* jest połączona, dla pewnego j , poprzez skończony ciąg $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 \dots v_{j-1} e_{j-1} v_j$ incydentnych krawędzi i wierzchołków, gdzie $v_1 = v$ oraz $v_j = v^*$ (rys. 2.13g).*

⁷⁰ Każdej ścianie odpowiada zatem pewna zamknięta ścieżką o długości co najmniej 3 i podobnie jest dla ścieżki odpowiadającej wierzchołkom (te ostatnie są figurami wierzchołkowymi wielościanu) [53].



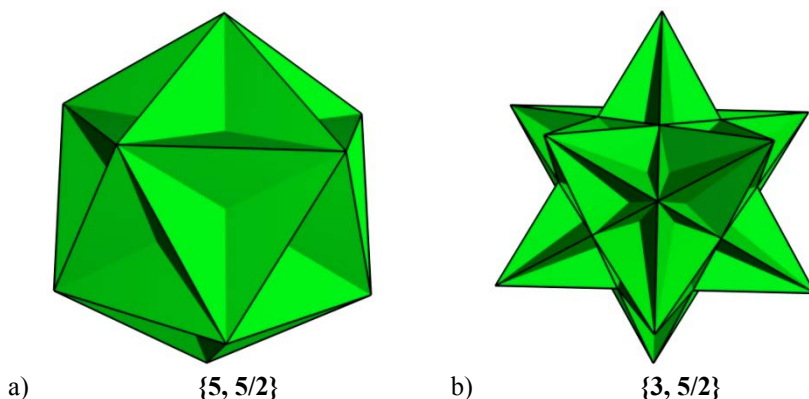
Rys. 2.13. Ilustracja sposobu definiowania wielościanów (opis w tekście)

Konsekwencje tej definicji są bardzo istotne dla naszego rozumienia pojęcia „wielościany” i znajdowania ich reprezentacji geometrycznych⁷¹. Wspomniano już

⁷¹ Według B. Grünbauma, obecna sytuacja w zakresie wielościanów: ich definiowania, określania regularności itp., przypomina pod wieloma względami sytuację, jaka powstała po odkryciu przez starożytnych Greków w V w. p.n.e. istnienia liczb niewymiernych [53, s. 462]. Aczkolwiek nie miało to wpływu na wiele rezultatów z dziedziny geometrii, było filozoficznie i logicz-

uprzednio, że dopuszcza ona koincydencję wierzchołków, czyli reprezentowanie różnych (w szczególności nawet wszystkich) wierzchołków przez jeden punkt, a także występowanie krawędzi o długości zerowej. Inną konsekwencją jest możliwość występowania tzw. realizacji *podwymiarowych*, tzn. że ich realizacje geometryczne mogą być jedno- lub dwuwymiarowe⁷². Mówiąc w uproszczeniu, oznacza to, że np. ośmiościan abstrakcyjny może mieć realizację geometryczną na płaszczyźnie lub na prostej.

Kolejną konsekwencją jest możliwość wzajemnego przecinania się i nakładania ścian. Dwa znane przykłady to wielki dwunastościan $\{5, 5/2\}$ (rys. 2.14a) i wielki dwudziestościan $\{3, 5/2\}$ (rys. 2.13b) – dwa wielościany regularne niewypukłe⁷³.



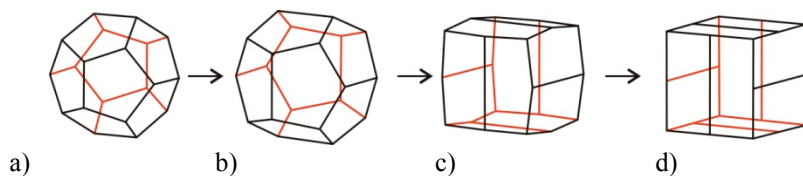
Rys. 2.14. Przykłady wielościanów niewypukłych

nie istotne, aby znaleźć sposób posługiwania się nimi. Współcześnie, pomimo iż ukazują się liczne publikacje dotyczące wielościanów, sam zakres tego pojęcia jest definiowany zazwyczaj arbitralnie i stosownie do bieżących potrzeb. Może to prowadzić do wielu nieporozumień i błędów. Za przykład może służyć historia określenia liczby wielościanów regularnych. Od starożytności wymieniano pięć „brył platońskich” (jest to temat ostatniej, XIII księgi *Elementów* Euklidesa). Lista ta, uważana za kompletną, została uzupełniona w dwa tysiące lat później przez Keplera (1619 r.) o kolejne dwie bryły, a następnie na początku XIX w. przez L. Poinsoa o kolejne dwie (1809 r.). A. Cauchy udowodnił wkrótce (1812 r.), że nie ma innych wielościanów regularnych. Jednakże w latach dwudziestych XX w., matematycy C.A. Petrie i H.S.M. Coxeter odkryli kolejne trzy wielościany regularne i udowodnili kompletność tej listy. Jednak ponownie, w 1977 roku, B. Grünbaum odkrył wiele nowych wielościanów, a A.W.M. Dress uzupełnił je w 1981 r. o jeszcze jeden i po raz kolejny wykazał kompletność listy. I znów, w roku 1993 B. Grünbaum odkrył cały szereg nowych wielościanów regularnych. Do chwili obecnej lista ta nie została uznana za zamkniętą. Przyczyną wszystkich tych zmian i uzupełnień nie były błędy w dowodzeniu kompletności listy wielościanów, lecz różnice w sposobie rozumienia terminu „wielościan” i interpretowaniu jego właściwości [53, s. 461–462], [54].

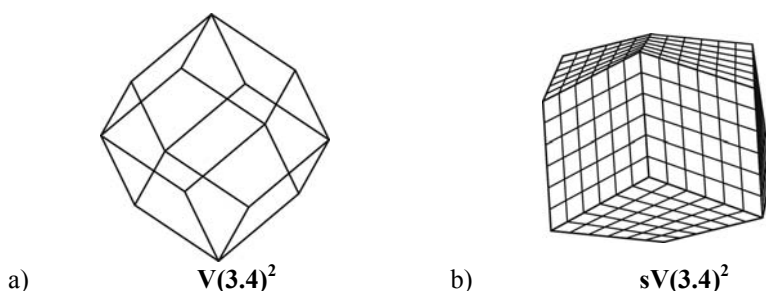
⁷² Ściślej: otoczki afiniczne ich realizacji są jedno- lub dwuwymiarowe.

⁷³ Opisane przez L. Poinsoa w pracy *Mémoire sur les polygones et les polyèdres* J. École Polytech. 10 (1810), s. 16–48. Oprócz nich występują jeszcze dwa wielościany tego typu odkryte przez Keplera: mały dwunastościan gwiaździsty $\{5/2, 5\}$ (rys. 2.8) i duży dwunastościan gwiaździsty $\{5/2, 3\}$. Warto zauważyć, że są one parami dualne. Cała grupa nosi nazwę wielościanów Keplera–Poinsoa lub regularnych wielościanów gwiaździstych [171, s. 55].

Możliwe są realizacje geometryczne dwóch wielościanów, które mają różne typy kombinatoryczne. Przykład takiej sytuacji jest przedstawiony poniżej [53]. Dwunastościan z rysunku 2.9a może być przekształcony w sposób ciągły (rys. 2.15a–c) na wielościan o ścianach parami współpłaszczyznowych (rys. 2.15.d). Zbiór punktów stanowiących tę realizację jest koincydentny ze zbiorem punktów stanowiących realizację pewnego sześcianu – są to jednak realizacje różnych wielościanów abstrakcyjnych. Realizacje takie nazywa się *izomegetycznymi*⁷⁴.



Rys. 2.15. Przykład dwóch izomegetycznych realizacji wielościanów o różnych typach kombinatorycznych



Rys. 2.16. Dwunastościan rombowy: a) o ścianach płaskich – $V(3.4)^2$, b) siodłowy – $sV(3.4)^2$

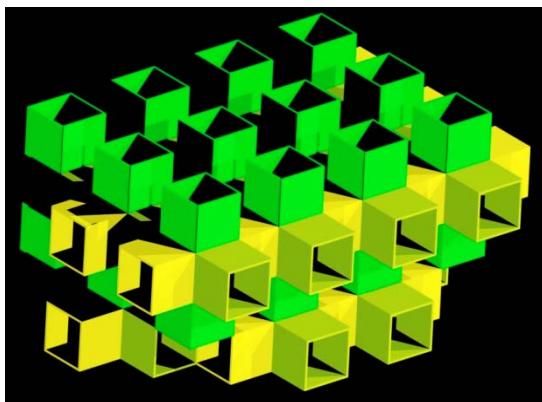
Najdalej idące wnioski wynikające z definicji 2.6 dotyczą wielościanów *ogólnych*. Są to obiekty, w przypadku których wiele założeń przyjmowanych przy tradycyjnym definiowaniu jest pomijanych. Spektakularne przykłady takich obiektów to wielościany *siodłowe* i wielościany *nieskończone*. Pierwsze z nich to wielościany, których ściany nie są płaskimi wielokątami, lecz dowolnymi powierzchniami dwuwymiarowymi, np. powierzchniami siodłowymi⁷⁵ [171, s. 230]

⁷⁴ Od greckiego *μεγεθος* – wielkość, potęga, podstawa, rozmiar [53].

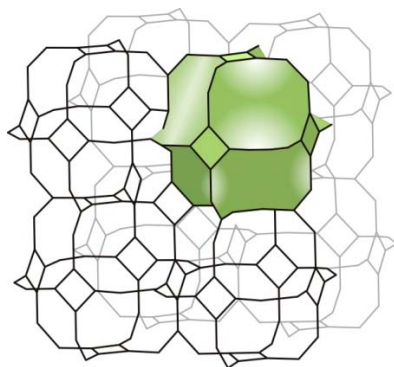
⁷⁵ Powierzchnia siodłowa jest powierzchnią gładką, zawierającą jeden lub więcej *punktów siodłowych*. Są to takie punkty, że punkty powierzchni w ich otoczeniu leżą po różnych stronach powierzchni stycznej w tym punkcie. Przykładem powierzchni siodłowej drugiego stopnia jest paraboloida hiperboliczna – powierzchnia o równaniu $z = x^2 - y^2$, nazywana często standardową lub klasyczną powierzchnią siodłową, a także *końskim siodłem*. Jest to powierzchnia prostokreślna (przez każdy jej punkt przechodzą dwie różne proste leżące w całości na tej powierzchni) zbudowaną na czterech krawędziach. Przykładem powierzchni siodłowej trzeciego stopnia jest tzw. *małpie siodło* – powierzchnia o równaniu $z = x^3 - 3xy^2$. Powierzchnie siodłowe mają ujemną krzywiznę Gaussa (są antyklasykcyjne).

[18, s. 19–109]. Przykład takiego wielościanu – dwunastościanu rombowego, o konfiguracji wierzchołków $sV(3.4)^2$ przedstawiono powyżej (rys. 2.16b). Wielościany siodłowe mogą występować również jako gwiaździste, tzn. z przecinającymi się ścianami [18, s. 49–96].

Wielościany nieskończone mają cechy podobne do „zwykłych” wielościanów (skończonych), takie jak układ ścian, konfiguracja wierzchołków itd., lecz rozciągają się w przestrzeni w sposób nieograniczony. Mogą tworzyć układy jedno- lub wielowarstwowe i wielokierunkowe. Można im przypisać właściwości regularności różnego rodzaju, podobnie jak zwykłym wielościanom⁷⁶ [153, s. III]. Na rysunku 2.17



Rys. 2.17. Jeden z trzech platońskich wielościanów nieskończonych – wielościan 4^6 (fragment)



Rys. 2.18. Przykład nieskończonego wielościanu siodłowego – wielościan $s(3.4)^2$ (fragment)

⁷⁶ Trzy nieskończone wielościany platońskie (patrz pkt 2.1.3.10) zostały opisane po raz pierwszy przez H.S.M. Coxetera. Są to wielościany o konfiguracji wierzchołków: 4^6 , 6^4 i 6^6 . Za [153, s. III].

przedstawiono przykład wielościanu nieskończonego, o konfiguracji wierzchołków 4^6 . Możliwe jest również występowanie nieskończonych wielościanów siodłowych (rys. 2.18), które tworzą struktury nazywane *gąbkami*⁷⁷ [20, 24, 84].

2.2.4.2. Realizacje geometryczne obiektów

Sposób reprezentacji przestrzeni, czyli geometria, jest zdefiniowany przez zbiór obiektów, określone na nim grupy przekształceń i przez właściwości obiektów, które pozostają niezmiennie pod działaniem tej grupy przekształceń (są jej niezmiennikami)⁷⁸. Różne grupy przekształceń definiują różne poziomy geometryczne. Na każdym z nich badane są tylko te właściwości obiektów, które są niezmiennikami przekształceń. Najczęściej rozpatrywane są cztery, częściowo nakładające się, poziomy: *topologiczny*, *projekcyjny*, *afiniczny* i *metryczny*⁷⁹. Kolejność (hierarchia), w jakiej zostały wymienione poziomy reprezentacji, odpowiada liczbie właściwości, które pozostają niezmiennicze i są tym samym potrzebne na każdym z tych poziomów do opisu obiektów. Im niższy poziom reprezentacji, tym mniej właściwości pozostaje niezmiennych, a zatem mniej jest koniecznych potrzebnych do opisu obiektów i są one prostsze, natomiast więcej przekształceń jest dopuszczalnych i więcej obiektów jest takich samych. Na każdym wyższym poziomie kolejne charakterystyki są dodawane do odziedziczonych z poziomu niższego [105, 166].

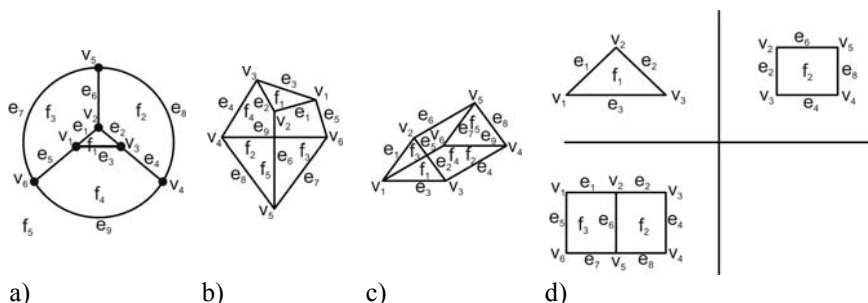
Na rysunku 2.19 przedstawiono schematycznie wielościan kombinatoryczny $V = \{v_1, \dots, v_6\}$, $E = \{e_1, \dots, e_9\}$, $F = \{f_1, \dots, f_5\}$ kolejno w reprezentacji topologicznej (rys. 2.19a), projekcyjnej (rys. 2.19b), afinicznej (rys. 2.19c) i metrycznej (rys. 2.19d).

⁷⁷ Patrz rozdz. 3.3.4.

⁷⁸ Taka definicja geometrii pochodzi od F. Kleina, który sformułował ją w swoim inauguracyjnym wykładzie na uniwersytecie w Erlangen w 1872 r., uważanym za jeden najbardziej znaczących pojedynczych wykładów w historii matematyki, a następnie opublikował w pracy *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (1872) i ponownie omówił w *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (1908). Potrzeba nowego zdefiniowania geometrii, która dotychczas była jednoznacznie rozumiana jako geometria euklidesowa dwu- lub trójwymiarowych przestrzeni, pojawiła się w związku z odkryciami matematyków w pierwszej połowie XIX w. Dotyczy to zwłaszcza przestrzeni o wymiarach wyższych niż trzy oraz odkrycia, że piąty postulat Euklidesa, dotyczący równoległości, jest niezależny od pozostałych, a zatem możliwe jest zbudowanie innego niż euklidesowy systemu geometrycznego. Dowcipnie określił to H.S.M. Coxeter, nazywając postulat równoległości jedynie „pierwszym przybliżeniem” – jeśli moglibyśmy rozciągnąć naszą wyobraźnię na miliardy mil, to może stwierdzilibyśmy, że linie nieco się do siebie zbliżają lub oddalają [197, s. 2]. Podejście zaproponowane przez Kleina pozwoliło oprzeć różne systemy geometryczne na wspólnej podstawie – teorii grup, która uabstrakcyjnia ideę symetrii za pomocą metod algebraicznych – patrz pkt 2.2.13.

⁷⁹ Istnieją jeszcze inne geometrie, np. definiowane przez grupy przekształceń podobieństwa (niezmiennikami są kąty) czy przez przekształcenia identycznościowe (niezmiennikami są położenia obiektów).

Na poziomie reprezentacji topologicznej rozpatrywane są liczby elementów i relacje incydencji i przylegania. Przekształcenia, które określają geometrię, to homeomorfizmy, a przykładem niezmienniczej właściwości jest spójność. Dwa obiekty są topologicznie ekwiwalentne, jeżeli mogą być na siebie wzajemnie mapowane.



Rys. 2.19. Reprezentacja wielościanu kombinatorycznego na różnych poziomach geometrycznych (opis w tekście)

Na poziomie projekcyjnym dodatkowo rozpatrywane są właściwości zachowywane podczas przekształcenia przez rzut środkowy. Dotyczy to zwłaszcza incydencji linii prostych i płaszczyzn. Dwa obiekty są uważane za takie same, jeżeli oba są rzutem środkowym tego samego obiektu wyjściowego.

Poziom afiniczny dotyczy takich właściwości jak współliniowość, równoległość i wypukłość, które są zachowywane w przekształceniach afinicznych (np. podczas przesunięcia).

Poziom metryczny, zachowując charakterystyki podawane na wszystkich niższych poziomach reprezentacji, dodatkowo zawiera informacje o mierzalnych zależnościach pomiędzy elementami, zwłaszcza odległościach i miarach kątów. Przekształcenia tego poziomu to izometrie.

Podstawową koncepcją geometryczną są zatem przekształcenia – układy i obiekty są niezmiennie lub tożsame pod pewnymi przekształceniami. Relacje pomiędzy grupami przekształceń definiujących różne reprezentacje geometryczne pozwalają, dzięki uabstrakcyjnieniu, powiązać ze sobą pojęcia i zależności stosowane w tych reprezentacjach. Ponieważ grupa przekształceń geometrii wyższego poziomu jest podgrupą przekształceń geometrii poziomu niższego, każde niezmiennicze pojęcie geometrii niższego poziomu jest a priori ważne w geometrii poziomu wyższego. Jeżeli dopuszczamy więcej przekształceń – więcej obiektów jest „takich samych”, a otrzymana teoria jest silniejsza i operuje mniejszą liczbą pojęć i twierdzeń, które za to są bardziej ogólne i podstawowe.

Najbardziej podstawową formą reprezentacji geometrycznej jest reprezentacja topologiczna⁸⁰. Ponieważ nie zawiera ona charakterystyk wyższego pozio-

⁸⁰ Termin topologia wprowadził niemiecki matematyk J.B. Listing w 1847 w pracy *Vorstudien zur Topologie*, a w roku 1883 został on rozpowszechniony w angielskim czasopiśmie *Nature*.

mu, przekształcenia ciągle nie zmieniają jej dokładności. Problemy rozpatrywane na tym poziomie są raczej jakościowe niż ilościowe. Topologia jest często nazywana „geometrią obiektów wykonanych z gumy”, gdyż takie obiekty można deformować, nie niszcząc ich spójności, a jednocześnie nie są zachowywane zależności metryczne. Matematycznie, topologiczna reprezentacja obiektów geometrycznych może być opisana za pomocą teorii grafów⁸¹. Ze względu na morfologię formy reprezentacja topologiczna jest rodzajem „ręcznego szkicowania” obiektów i umożliwia ich modelowanie niezależnie od skali – właściwości obiektów topologicznych nie zmieniają się przy zmianie metryki przestrzeni.

2.2.5. Genus i charakterystyka Eulera

Jak przedstawiono w rozdz. 2.2.1, mapy na płaszczyźnie są topologicznie równoważne mapom na sferze. Sfera jest przykładem powierzchni gładkiej⁸² zorientowanej. Intuicyjnie, dwuwymiarowa powierzchnia⁸³ w przestrzeni R^3 jest zorientowana, jeżeli ma stronę „wewnętrzną” i „zewnętrzną” albo, jeżeli leżąca na niej dwuwymiarowa figura nie może być przekształcona w swoje lustrzane odbicie wyłącznie poprzez przesunięcie po tej powierzchni. Na rysunku 2.20a przedstawiono powierzchnię zorientowaną – pierścień kołowy. Przykładem powierzchni niezorientowanej jest *wstęga Möbiusa*⁸⁴ (rys. 2.20b). Jest to najbardziej elementarna spośród powierzchni niezorientowanych. Wszelkie inne powierzchnie tego typu określa się, badając czy zawierają podzbiory, które są

Wcześniej stosowano określenia *geometria situs* lub *analysis situs*. Za pierwszy topologiczny topologiczny wynik w matematyce uważane jest rozwiązanie przez L. Eulera problemu mostów w Królewcu: czy możliwe jest przejście przez wszystkie siedem mostów na Pregole, które znajdują się w tym mieście, tak aby przez każdy przejść tylko jeden raz? Euler w pracy *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, przedstawionej w 1735 r. w Petersburskiej Akademii Nauk (opublikowana w *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* w 1741 r.), udowodnił, że jest to niemożliwe. Rozwiązanie miało typowo topologiczny charakter, gdyż nie zależało od długości mostów, ich odległości od siebie, kształtu koryta rzeki itd. Określenie *geometria situs* Euler zapożyczył z *analysis situs* G.W. Leibniza, który już wcześniej miał świadomość istnienia pewnych relacji o czysto topologicznym charakterze. W *Euclidis Prota*, które jest próbą uściślenia aksjomatów Euklidesa, pisze on: „...mam kilka definicji linii prostej. Prosta jest krzywą, której każdy fragment jest podobny do całości i jako jedyna ma tę właściwość, nie tylko pomiędzy krzywymi, ale i wśród zbiorów”. Tym stwierdzeniem wyprzedził pojawienie się topologii o ponad dwieście lat [93]. Innym, ważnym wynikiem Eulera w topologii było jego twierdzenie wiążące ze sobą liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanów, patrz pkt 2.3.1.

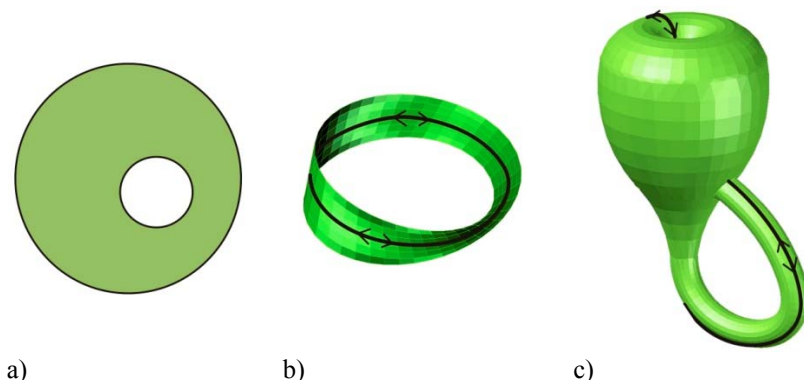
⁸¹ Patrz rozdz. 3.4.

⁸² Gładkiej – czyli nieskończenie różniczkowalnej. Sfera jest ponadto powierzchnią zamkniętą, tzn. nie mającą konturów brzegowych.

⁸³ Dokładniej: rozmaitość różniczkowalną, patrz pkt 2.1.3.1.

⁸⁴ Odkryta w 1858 r. niezależnie przez A. F. Möbiusa i J. B. Listinga.

homeomorficzne do wstęgi Möbiusa. Przykładem zamkniętej powierzchni zorientowanej jest tzw. *butelka Kleina*^{85, 86}, zawierająca dwie rodziny wstęg Möbiusa, rys. 2.20c.



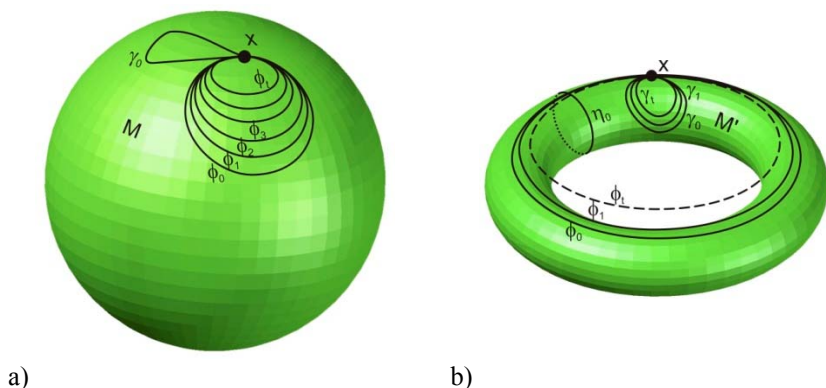
Rys. 2.20. Przykłady powierzchni zorientowanych i niezorientowanych (opis w tekście)

Jeżeli dwie krzywe zamknięte, określone na rozmaitości, np. φ_0 i φ_1 , mogą być wzajemnie jednoznacznie przekształcone na siebie w sposób ciągły, to nazywamy je *homotopijnymi*, a samo przekształcenie – *homotopią*. W szczególnym przypadku, gdy krzywa zostaje przekształcona w sposób ciągły na punkt, mówimy, że jest homotopijna z punktem lub *ściągalna* do punktu. Ilustruje to poniższy przykład dwóch rozmaitości M i M' . Krzywa φ_0 leżąca na powierzchni M (rys. 2.21a) jest przekształcana na kolejne krzywe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ z rodziny φ_t , aż w granicy staje się punktem x . Każda z krzywych φ_t leży na M . Takie przekształcenie jest również możliwe dla dowolnej innej krzywej γ_0 leżącej na M . Dla krzywej φ_0 leżącej na powierzchni M' (rys. 2.21b) takie przekształcenie jest niemożliwe, ponieważ nie wszystkie krzywe z rodziny φ_t leżą w całości na rozmaitości M' . Podobnie nie jest możliwe dla krzywej η_0 , ale jest możliwe dla krzywej γ_0 – wszystkie krzywe z rodziny γ_t leżą na M' . Krzywe φ_0, η_0 i γ_0 należą do trzech, topologicznie różnych rodzin.

Mapowanie, które przekształca krzywe zamknięte z jednej rozmaitości w odpowiednie krzywe zamknięte w drugiej rozmaitości, jest mapowaniem homotopijnym. Takie mapowanie jest możliwe tylko wtedy, gdy obie rozmaitości mają ten sam stopień *spójności*.

⁸⁵ Przykład jednostronnej powierzchni bez brzegu został podany przez F. Kleina w 1882 r. Prawdopodobnie początkowo była ona nazywana *powierzchnią Kleina* lecz niemieckie słowo „powierzchnia” (*Fläche*) błędnie przetłumaczono jako „butelka” (*Flasche*). Nazwa ta, ze względu na charakterystyczny kształt powierzchni, została szybko zaakceptowana i jest dziś powszechnie używana.

⁸⁶ Ścisłej, jest to model butelki Kleina, której realizacja wymaga czterech wymiarów (patrz np. S.L. Segal *Unknown Quantity – Book Review*. Notices of the American Mathematical Society, Vol. 55, No. 5 (2008), s. 585).



Rys. 2.21. Homotopijność krzywej z punktem na powierzchniach o różnym stopniu spójności (opis w tekście): a) na sferze, b) na torusie

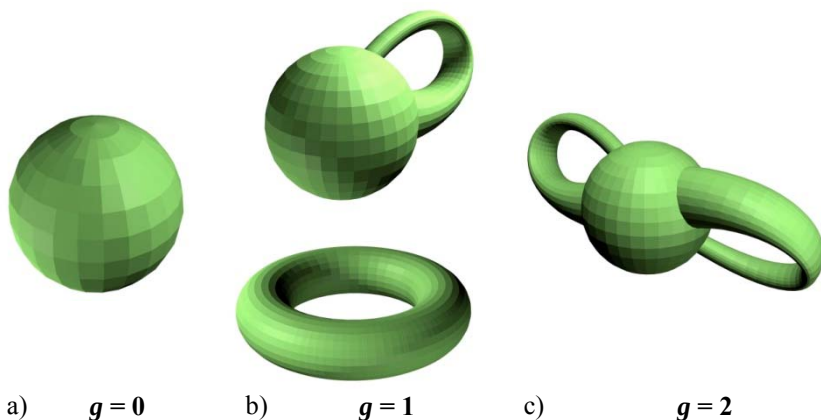
Dla powierzchni jednospójnej, np. dla sfery, każda leżąca na niej zamknięta krzywa może być przekształcona w inną leżącą na niej krzywą zamkniętą lub ściągniętą do dowolnego punktu, bez opuszczania tej powierzchni (rys. 2.21a). Na powierzchniach wielospójnych występują rodziny krzywych homotopijnych, które mogą być wzajemnie w sposób ciągły na siebie przekształcane. Niemożliwe jest natomiast przekształcenie ciągle krzywej z jednej rodziny na krzywe z drugiej rodziny lub ściągnięcie ich do tego samego punktu. Obszar M (rys. 2.21a) jest jednospójny, a obszar M' (rys. 2.21b) – dwuspójny. Na rysunku 2.21b pokazano trzy rodziny krzywych homotopijnych dla torusa.

Stopień spójności powierzchni jest charakteryzowany przez ich *genus*. Jest to stała, oznaczana literą g , o wartościach całkowitych. Dla powierzchni zorientowanych liczba genera oznacza „liczbę otworów” w zamkniętej powierzchni lub liczbę „rączek” doczepionych do sfery. Poniżej przedstawiono przykłady powierzchni zorientowanych o różnym genusie. Dla sfery i walca $g = 0$ (rys. 2.22a), dla torusa lub sfery z jedną „rączką” $g = 1$ (rys. 2.22b), dla sfery z dwoma „rączkami” lub „obwarzanka” $g = 2$ (rys. 2.22c) itd.

Różne stopnie spójności uniemożliwiają mapowanie homotopijne sfery na torus – nie są to zatem obiekty topologicznie równoważne. Aby obiekty były tej samej klasy, muszą być mapowalne na przestrzeń $\mathbb{R}^k$ o tym samym wymiarze i mieć ten sam genus.

Dla powierzchni niezorientowanych genus jest określany jako liczba całkowita dodatnia, oznaczana literą k , wyrażająca liczbę topologicznych równoważników wstęgi Möbiusa doczepionych do sfery⁸⁷. Na przykład, genus dla butelki Kleina wynosi $g = 2$.

⁸⁷ Jest to pewna analogia do liczby „rączek” w przypadku powierzchni zorientowanych.



Rys. 2.22. Przykłady powierzchni zorientowanych o różnych genusach (opis w tekście)

Spójność powierzchni ma związek z przedstawianiem modeli topologicznych wielościanów abstrakcyjnych. Każdy z nich (np. graf z rys. 2.19a) może być zawsze przedstawiony („narysowany”) na pewnej zorientowanej powierzchni zamkniętej w taki sposób, żeby jego krawędzie się nie przecinały⁸⁸. Stopień spójności tej powierzchni określa pewne właściwości grafów. Z tego powodu, dla danego wielościanu abstrakcyjnego należy zawsze rozpatrywać związaną z nim powierzchnię, na której może być przedstawiony bez przecięć, poprzez przypisanie do niego genusu lub *charakterystyki Eulera*.

Charakterystyka Eulera, oznaczana literą χ , jest związaną z genusem stałą (niezmiennikiem topologicznym), opisującą kształt lub strukturę przestrzeni topologicznej⁸⁹. Definiowana jest równaniami dla:

- powierzchni zorientowanych zamkniętych

$$\chi = 2(1 - g) \quad (2.3a)$$

- powierzchni zorientowanych z brzegami

$$\chi = 2(1 - g) - b \quad (2.3b)$$

- powierzchni niezorientowanych

⁸⁸ Na przykład, wielościany platońskie mogą być przedstawione na sferze. Patrz rozdz. 2.2.8 i twierdzenie Steinitza, w rozdz. 4.1.

⁸⁹ Charakterystyka Eulera była pierwotnie zdefiniowana dla wielościanów (jako stała o wartości równej 2, w równaniu Eulera – patrz pkt 2.3.1 [177, s. 186]) i stosowana przy formułowaniu różnych twierdzeń z tego zakresu oraz klasyfikacji brył platońskich [121, s. 2]. Obecnie jest stosowana również w wielu innych zagadnieniach topologii algebraicznej.

$$\chi = 2 - k \quad (2.3c)$$

gdzie g , k – genus, odpowiednio dla powierzchni zorientowanej i niezorientowanej, b – liczba brzegów ograniczających powierzchnię.

Szczególne, ze względu na właściwość spójności, są obiekty klasy 0 i 1. Jedynym spójnym obiektem klasy 0 jest punkt (przestrzeń jednopunktowa), a jedynym spójnym obiektem klasy 1 – prosta $\mathbb{R}^1$ (rozmaitość bez brzegu) lub odcinek (rozmaitość z brzegami).

2.2.6. Walentność

Każde dwa wierzchołki wielościanu, które są połączone krawędzią, nazywamy *sąsiednimi*. Podobnie dwie krawędzie są sąsiednie, jeśli mają wspólny wierzchołek. Krawędzie zbiegające się w danym wierzchołku nazywamy *incydentnymi* z tym wierzchołkiem i podobnie wierzchołki są incydentne ze zbiegającymi się w nich krawędziami. Wierzchołki są ponadto incydentne ze zbiegającymi się ścianami i komórkami. Ścianami wielościanów są wielokąty (2-wielotopy). Krawędzie i wierzchołki należące do danej ściany nazywamy incydentnymi z tą ścianą.

Walentność obiektu danej klasy jest to liczba obiektów innej klasy, incydentnych z nim. Rozróżniamy różne rodzaje walentności, w zależności od tego, jakie obiekty rozpatrujemy: *walentność krawędziowa* – jeśli dotyczy liczby incydentnych krawędzi, *walentność fasetowa* – jeśli dotyczy liczby incydentnych ścian itd.⁹⁰

Walentność krawędziowa wierzchołka v wielościanu P , oznaczana jako $q = \deg(v)$, jest liczbą krawędzi incydentnych z tym wierzchołkiem. Określa się ją często w skrócie po prostu jako walentność wierzchołka. Stosowane są także równoważne określenia: wierzchołki stopnia q lub wierzchołki q -spójne⁹¹. Liczba wierzchołków q -walentnych jest oznaczana przez $v_q = v_q(P)$.

W przypadku wielościanów z rysunku 2.5, w każdym wierzchołku ośmiościanu foremego łączą się cztery krawędzie, podczas gdy w każdym wierzchołku sześciianu – trzy krawędzie. Mówimy wówczas, że wierzchołki są odpowiednio 4-walentne lub 3-walentne.

Stopniem ściany p wielościanu P , oznaczanym jako k , nazywamy jej walentność krawędziową, czyli liczbę krawędzi incydentnych z tą ścianą. Inaczej mó-

⁹⁰ Takie zdefiniowanie walentności zachowuje znaczenie również w przypadku nadania obiektom geometrycznym sensu strukturalnego. Jeżeli krawędzie wielościanu będziemy interpretować jako pręty struktury przestrzennej, to liczba połączeń wierzchołka z innymi wierzchołkami oznacza liczbę połączeń przegubowych prętów w węźle. Jeżeli natomiast ściany wielościanu potraktujemy jako elementy płytowe, to krawędzie oznaczają połączenia przegubowe liniowe między tymi elementami.

⁹¹ Pojęcie walentności (stopnia) wierzchołka jest stosowane również w teorii grafów – ma to znaczenie w stosowaniu tej teorii do opisu wielościanów, patrz pkt 3.3.

wiąc, ściana stopnia k jest k -kątna. Liczba ścian stopnia k w wielościanie P jest oznaczana przez $p_k = p_k(P)$.

W przykładzie z rysunku 2.5 w ośmiościanie występuje osiem ścian trójkątnych ($p_3 = 8$), a w sześcianie – sześć ścian czworokątnych ($p_4 = 6$).

Wielościany mogą zawierać wierzchołki o różnej walentności i ściany różnego stopnia. Dla wielościanu przedstawionego na rys. 2.6 jest: $v_4 = 9$, $p_3 = 8$, $p_4 = 6$.

Ogólne zestawienie różnych rodzajów walentności dla struktur wielościennych przedstawiono w tabeli 2.1 [87, s.10]. Można na jej podstawie zauważyć pewne regularności: walentność wierzchołkowa krawędzi wynosi zawsze 2, podobnie jak walentność komórkowa ścian (z jedną ścianą są incydentne dwie komórki), a walentność fasetowa i komórkowa krawędzi są takie same. Ponadto, spośród ośmiu rodzajów walentności wymienionych w tabeli, tylko sześć jest niezależnych – wynika to z równania Eulera⁹².

Tabela 2.1. Rodzaje walentności w strukturach wielościennych

Element	wierzchołkowa	krawędziowa	fasetowa	komórkowa
Wierzchołek	–	q	r	p
Krawędź	2	–	s	s
Ściana	k	k	–	2
Komórka	n	m	l	–

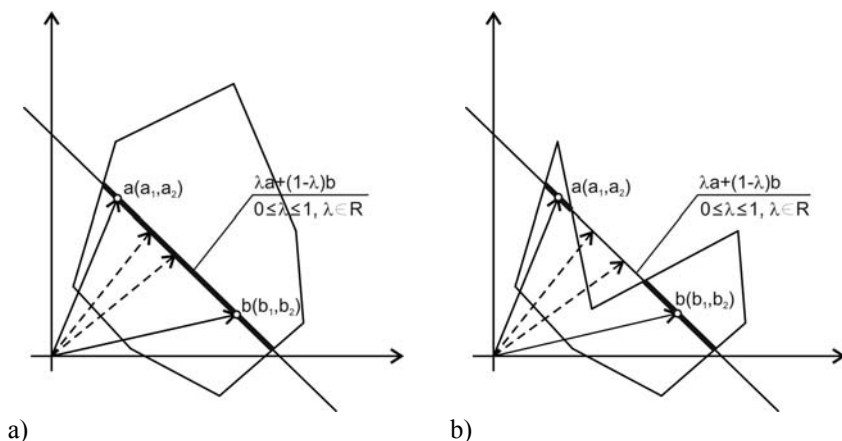
2.2.7. Wypukłość

Każdy wielotop klasy nie mniejszej niż 2 może być wypukły lub niewypukły. Pojęcie wypukłości wielotopów wywodzi się z właściwości wypukłości zbiorów. Zbiór P jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa różne punkty a, b należące do tego zbioru mogą być połączone odcinkiem o końcach a, b , który zawiera się w zbiorze P . Równoznaczne jest stwierdzenie, że zbiór P jest wypukły, jeżeli jego przecięcie dowolną linią prostą jest albo zbiorem pustym, albo zbiorem jednospójnym. Formalna definicja wypukłości jest następująca [52, s.8]:

Definicja 2.7. *Zbiór $P \subset R^d$ jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy dla $a, b \in P$ i $0 \leq \lambda \leq 1$, jest $\lambda a + (1 - \lambda) b \in P$.*

Sformułowanie definicji 2.7 jest oparte na właściwościach kombinacji liniowej wektorów. Punkty na prostej wyznaczonej przez wektory a, b są ich kombinacjami liniowymi o współczynnikach sumowalnych do 1. Definicja 2.7 wypukłości jest zilustrowana na rysunku 2.23, na przykładzie zbioru wypukłego P_1 i niewypukłego P_2 .

⁹² Patrz pkt 2.3.1.



Rys. 2.23. Określanie wypukłości zbioru (opis w tekście)

Wypukłość jest ważną cechą wielościanów, gdyż z niej wynikają ich dalsze właściwości istotne podczas rozpatrywania możliwości wypełnienia za ich pomocą przestrzeni⁹³. Przedstawiony na rysunku 2.9a wielościan $\{5,3\}$ jest wypukły, a wielościan $\{5/2,5\}$ z rys. 2.9b – niewypukły.

2.2.8. Planarność

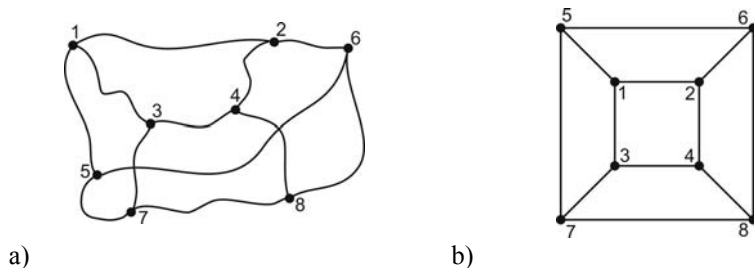
Bardzo ważną właściwością wielościanów, która wiąże je z podziałami i wypełnieniami płaszczyzny⁹⁴ jest planarność. Określa ona, czy wielościan może być przedstawiony jako graf, którego krawędzie się nie przecinają. Definicja 2.8 formułuje ten warunek formalnie [14, s. 243–244]:

Definicja 2.8. *Graf G jest planarny, jeżeli można go narysować na płaszczyźnie w taki sposób, aby jego krawędzie były incydentne jedynie w wierzchołkach. Takie odwzorowanie grafu na płaszczyznę jest nazywane jego rysunkiem płaskim. Rysunek płaski $\bar{G}$ grafu G jest grafem izomorficznym do G .*

Sposób wykonania rysunku (grafu) wielościanu na płaszczyźnie nie zmienia jego planarności. Ten sam wielościan, np. sześcián, może być przedstawiony jako graf, którego krawędzie przecinają się (rys. 2.24a) lub jako graf, którego krawędzie nie przecinają się (rys. 2.4b). Zgodnie z definicją 2.8, aby wielościan był planarny, wystarczy, jeżeli możliwe jest wykonanie jego płaskiego rysunku.

⁹³ Pewne ograniczenia podanej definicji wypukłości ujawniają się podczas rozpatrywania wielościanów „floralnych” lub „gąbek”, o których będzie mowa w dalszej części. Dla takich obiektów wypukłość jest definiowana nieco inaczej.

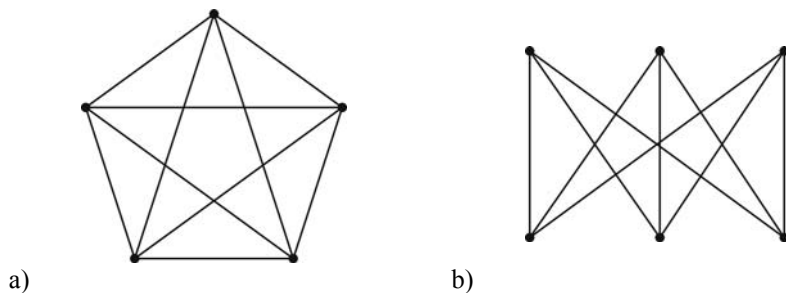
⁹⁴ Patrz rozdz. 3.3.



Rys. 2.24. Przedstawienie wielościanu planarnego (sześciianu) na płaszczyźnie, w postaci grafu, którego krawędzie: a) przecinają się, b) nie przecinają się (rysunek płaski wielościanu)

Z planarności wynikają dalsze wnioski dotyczące wewnętrznej struktury grafów. Zgodnie z twierdzeniem Kuratowskiego⁹⁵ (2.6) graf nie może być planarny, jeżeli zawiera w sobie choćby jedną z dwóch specyficznych struktur: K_5 – graf pełny o pięciu wierzchołkach, z których każdy jest połączony krawędzią z pozostałymi wierzchołkami (rys. 2.25a) lub $K_{3,3}$ – graf pełny dwudzielny o sześciu wierzchołkach, z których trzy są połączone z każdym z pozostałych trzech (rys. 2.25b) [14, s. 246, 268].

Twierdzenie 2.6 (Kuratowskiego). *Graf skończony jest grafem planarnym wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera jako podzbiorów grafów K_5 i $K_{3,3}$.*

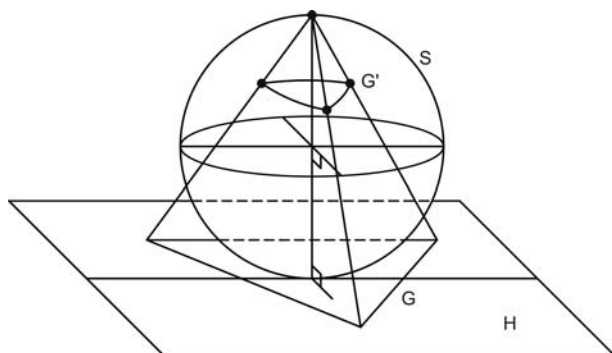


Rys. 2.25. Podgrafy, które wykluczają planarność: a) K_5 – graf pełny o pięciu wierzchołkach, b) $K_{3,3}$ – graf pełny dwudzielny o sześciu wierzchołkach

Planarność określa również, czy graf wielościanu może być narysowany jako płaski na sferze – twierdzenie 2.7 [14, s. 247]. Jest to widoczne na przykładzie rzutowania stereograficznego grafu G na sferę S (rys. 2.26). Powstały w ten sposób graf G' jest izomorficzny do G [14, s. 247], [159, s. 4].

⁹⁵ Kazimierz Kuratowski sformułował to twierdzenie w roku 1930, w pracy *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fundamenta Mathematica, 15 (1930), s. 271–283 [14, s. 611].

Twierdzenie 2.7. *Graf G ma rysunek płaski wtedy i tylko wtedy, jeżeli może być narysowany jako płaski na sferze.*



Rys. 2.26. Rzutowanie stereograficzne grafu planarnego G leżącego na płaszczyźnie H , na styczną do niej sferę S

2.2.9. Podobieństwo

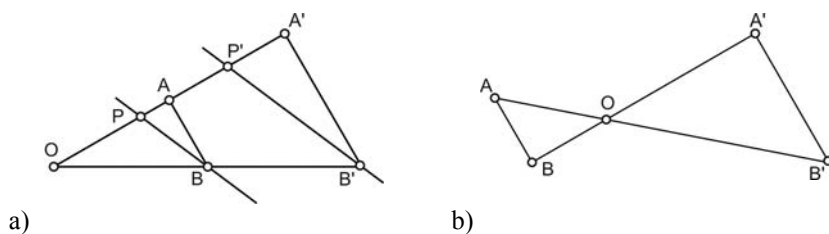
Podobieństwo jest przekształceniem obiektu geometrycznego, które zachowuje jego kształt, ale może zmienić jego wielkość. Z natury dotyczy zatem przestrzeni unormowanej, w której są zdefiniowane miary odległości, np. zwykłe odległości euklidesowe.

Definicja 2.9. *Podobieństwo jest to przekształcenie przestrzeni unormowanej na siebie przeprowadzające dowolne dwa różne punkty A i B odpowiednio na punkty A' i B' , dla którego istnieje współczynnik $\lambda \neq 0$, nazywany skalą bądź stosunkiem podobieństwa, taki że $|A-B| = \lambda \cdot |A'-B'|$.*

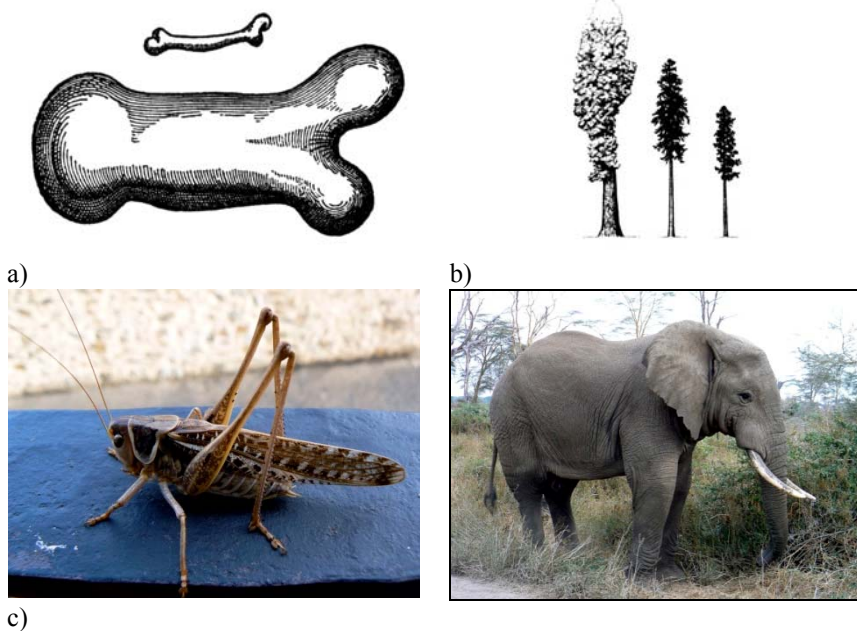
Przez podobieństwo rozumiemy również relację równoważności utożsamiającą obiekty geometryczne, które nazywane są *figurami podobnymi*, jeżeli istnieje podobieństwo przeprowadzające jeden na drugi. Każde podobieństwo, które nie jest translacją, ma dokładnie jeden punkt, który jest jego niezmiennikiem. Przekształceniem odwrotnym do podobieństwa o skali λ jest podobieństwo o skali λ^{-1} . Złożenie podobieństw o skalach λ_1 i λ_2 jest podobieństwem o skali $\lambda_1 \lambda_2$.

Przykładem podobieństwa jest przekształcenie jednokładności. Na rysunku 2.27 przedstawiony przykład jednokładności przekształcającej odcinek AB na $A'B'$. Niezmiennikiem przekształcenia jest punkt O . Dla współczynnika skali $\lambda > 0$ (rys. 2.27a) $A'B'$ leży po tej samej stronie punktu O co AB , natomiast dla $\lambda < 0$ (rys. 2.27b) $A'B'$ leży po przeciwnej stronie punktu O . Dowolny punkt P , który nie leży na odcinku AB , jest przekształcany na punkt P' taki, że linia przechodząca przez A' równoległa do AP przecina się z linią przechodzącą przez B' równoległą

do BP . Jednokładność jest zatem całkowicie zdefiniowana przez efekt jej działania na dowolne dwa punkty [31, s. 68].



Rys. 2.27. Przekształcenie podobieństwa – jednokładność (opis w tekście)



Rys. 2.28. Zmiana proporcji różnych struktur naturalnych wraz ze skalą:

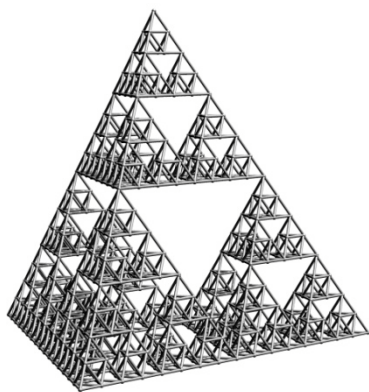
- a) porównanie proporcji budowy kości dużego i małego zwierzęcia (wg Galileusza),
- b) różnice w proporcjach drzew o różnej wielkości (wg J. Schlaicha),
- c) porównanie proporcji budowy ciała świerszcza i słonia

Uogólnienie roli jednokładności w określaniu podobieństwa obiektów geometrycznych wyraża twierdzenie 2.8 [31]:

Twierdzenie 2.8. *Dowolne podobieństwo jest złożeniem izometrii i jednokładności o skali równej skali podobieństwa.*

W geometrii, koncepcja podobieństwa wyraża fakt, że obiekt proporcjonalnie powiększony lub pomniejszony zachowuje takie same właściwości, jak obiekt oryginalny. O ile jest to prawdziwe w odniesieniu do obiektów geometrycznych, o tyle nie potwierdza się w większości realnych systemów fizycznych⁹⁶. Proporcje różnego rodzaju obiektów zmieniają się wraz ze zmianą ich skali. Pierwszy przykład takiej zależności pochodzi od Galileusza: porównanie proporcji budowy kości dużego i małego zwierzęcia (rys. 2.28a) [47, s. 131]. Dwa inne przykłady podał współcześnie Jörg Schlaich [123, s. 315]: proporcji budowy owadów i słonia (rys. 2.28c) i różnice w proporcjach drzew o różnej wielkości (rys. 2.28b).

Bardzo ciekawą formą podobieństwa (właściwie samopodobieństwa) są fraktale – obiekty, w których struktura całości wygląda zawsze analogicznie do jej lokalnego powiększenia, niezależnie od stopnia tego powiększenia [93]. Dobrze ilustruje to czworościan Sierpińskiego (rys. 2.29) [113].



Rys. 2.29. Przykład fraktalnej symetrii podobieństwa
– czworościan Sierpińskiego

2.2.10. Regularność

Zainteresowanie problemem regularności obiektów geometrycznych mające początki już w starożytności, doprowadziło, w ciągu wieków, do wielu interesujących i ważnych rezultatów⁹⁷. Najbardziej znana, ale też i najprostsza definicja regularności⁹⁸ jest następująca (tzw. definicja indukcyjna) [52, s. 412], [29, s. 15]:

⁹⁶ Fakt ten był zauważony już przez Galileusza [47, s.117]. W swoim znanym opisie dotyczącym różnych skutków upadku z tej samej wysokości dla różnych istot żywych zauważa on, że struktury naturalne przy zwiększaniu skali stają się słabsze: każda skala wymaga odpowiednich proporcji.

⁹⁷ Najstarsza zachowana wzmianka o wielościanach regularnych pochodzi z dialogu *Timajos* Platona [200, s. 51, 71], [247, s. 5]. Napisał w XI w. przez bizantyjskiego pisarza

Definicja 2.10. *d -wielotop jest regularny, jeżeli wszystkie jego ściany (fasety) i wszystkie figury wierzchołkowe są regularnymi $(d-1)$ -wielotopami.*

Równoważne z podaną definicją jest jej sformułowanie, korzystające z właściwości symetrii [52, s. 412]:

Definicja 2.11. *d -wielotop $P \subset \mathbb{R}^d$ jest regularny, jeżeli dla każdego k , $0 \leq k \leq d-1$ i dla każdej $(k+1)$ -ściany F^{k+1} oraz $(k-1)$ -ściany F^{k-1} incydentnej z F^{k+1} istnieje symetria P , taka że dwie k -ściany P incydentne zarówno z F^{k+1} jak i z F^{k-1} mapują się na siebie wzajemnie (implikuje to, że dla każdych z dwóch k -ścian P istnieje symetria zamieniająca je wzajemnie).*

Przykładami wielotopów regularnych w E^2 są np. trójkąt i pięciokąt równoboczny z rysunku 2.43 i kwadrat z rysunku 2.41. W ogólności może istnieć wielokąt regularny, n -kąt, o dowolnej liczbie boków.

W odniesieniu do wielościanów, wymagania definicji 2.10 i 2.11 można sprowadzić do spełnienia pięciu warunków:

- wszystkie wielokąty tworzące ściany są wypukłe,
- wszystkie wielokąty tworzące ściany są regularne,
- wszystkie wielokąty tworzące ściany są przystające,
- wszystkie wierzchołki są jednakowe,
- wszystkie kąty dwuścienne pomiędzy ścianami są jednakowe.

W przestrzeni E^3 wielościanami regularnymi jest pięć tzw. brył platońskich: czworościan, sześcian (rys. 2.5a), ośmiościan (rys. 2.5b), dwunastościan (rys. 2.9a) i dwudziestościan (rys. 2.7). Nie istnieją żadne inne wielościany foremne⁹⁹. Jednakże uzupełnieniem tej listy okazały się trzy tzw. nieskończone wielościany foremne¹⁰⁰, o symbolach (w notacji konfiguracji wierzchołków): 4^6 (rys. 2.17), 6^4 , 6^6 . Jeżeli dopuścimy, aby niektóre z podanych wymagań nie były spełnione, to możliwe jest zdefiniowanie dodatkowych rodzin wielościanów, o niższym poziomie regularności [171, s. 55].

Suidasa *Suda Lexicon* zawiera zapis zachowanej jeszcze wówczas tradycji, że Teteusz z Aten, uczeń Sokratesa i przyjaciel Platona po raz pierwszy napisał o „pięciu bryłach”. Przypuszcza się, że to on wprowadził ośmiościan i dwudziestościan, uzupełniając trzy znane wcześniej bryły [92, s. 82–83]. Niezależnie od zachowanych przekazów pisanych, znalezione artefakty pokazują, że znajomość wielościanów regularnych jest znacznie starsza. We Włoszech znaleziono wykonane ze steatyту etruskie ozdoby i amulety w kształcie dwunastościanu, pochodzące z ok. 500 r. p.n.e. [200, s. 71], [30, s. 67]. W Ashmolean Museum w Oksfordzie znajdują się precyzyjnie wykonane, neolityczne wyroby kamienne nieznanego przeznaczenia, o kształtach wielościanów regularnych, pochodzące z ok. 2500 r. p.n.e. Przytaczane są również inne argumenty, np. lingwistyczne, mające potwierdzać fakt, że wielościany te traktowano jako pewną szczególną grupę obiektów już w czasach przedpitagorej-skich [200, s. 74]

⁹⁸ W polskiej literaturze używana jest równorzędnie nazwa „wielościany foremne”.

⁹⁹ Dowód, że nie istnieją inne wielościany regularne podał już Euklides, w XIII księdze swoich *Elementów* [247, s. 4], [92, s. 83].

¹⁰⁰ Patrz pkt 2.2.4.

Rezygnacja z warunku wypukłości umożliwia zbudowanie czterech *wielościannów gwiazdzistych*, tzw. wielościannów *Keplera–Poinsota*. Przykładem jest mały dwunastościan gwiazdzisty $\{5/2, 5\}$ (rys. 2.9b).

Odstąpienie od warunku, aby wszystkie ściany były przystające, pozwala określić *wielościanny quasi-regularne*. Istnieją dwa takie wielościanny: sześćo-ośmiościan $(3.4)^2$ (rys. 2.10a) i dwudziesto-dwunastościan $(3.5)^2$.

Jeżeli oprócz warunku przystawiania ścian uwolniony zostanie warunek równości kątów dwuściennych, to otrzymamy *wielościanny półregularne* lub *wielościanny archimedeeskie*. Ściany wielościannów archimedeeskich są wielokątami regularnymi, ale nie wszystkie są jednakowe. Mogą to być dwa lub trzy rodzaje wielokątów. Wszystkie wierzchołki mogą być wzajemnie na siebie przekształcone poprzez działanie jednej z opisanych poniżej grup symetrii. Jest trzynaście takich wielościannów¹⁰¹, przykładem może być sześćo-ośmiościan rombowy wielki¹⁰² 4.6.8 (rys. 2.10b) [30, s. 72].

Jeszcze szerzej rozumiana regularność dotyczy *wielościannów jednorodnych*¹⁰³. Są to wielościanny, których ściany tworzą różne wielokąty foremne, a ich figury wierzchołkowe są jednakowe dla wszystkich wierzchołków. Grupa ta obejmuje wielościanny platońskie, archimedeeskie, niewypukłe wielościanny foremne, wielościanny gwiazdziste i niewypukłe wielościanny jednorodne¹⁰⁴.

Jak wspomiano w pktcie 2.2.4, lista wielościannów regularnych jest aż do ostatnich lat uzupełniana o nowe obiekty. Nie wynika jednak z tego, że poprzednie zestawienia były niekompletne i poprzednie warunki regularności były błędnie sformułowane. Przyczyną jest swoista ewolucja definicji wielościannów, która historycznie ulegała coraz większemu uogólnieniu¹⁰⁵. Zmienia się również sposób podejście do definiowania regularności. Tradycyjne warunki dotyczyły właściwości lokalnych: przystawiania ścian, równych kątów itd. Obecnie powszechne jest analizowanie właściwości globalnych, takich jak przechodność grup symetrii¹⁰⁶ [56, s. 641].

¹⁰¹ Oprócz trzynastu podstawowych wielościannów archimedeeskich, do grupy tej zaliczane są również graniastosłupy i antygraniastosłupy o podstawie wielokątów foremnych. Ich liczba jest nieskończona (tak jak liczba wielokątów foremnych, mogących stanowić ich podstawę), z tego względu często są pomijane w zestawieniach [30, s. 72].

¹⁰² Inna nazwa: sześćo-ośmiościan ścięty [39, s. 107].

¹⁰³ Termin *wielościanny jednorodne* został wprowadzony w niniejszej pracy, jako odpowiednik ang. *uniform polyhedra*. Określenia takiego używa H. Steinhaus, w odniesieniu do parkietaży płaskich, o analogicznych cechach [131, s. 80]. Z kolei R. Duda, w tłumaczeniu pracy [39], używa określenia *wielościanny jednostajne* [39, s. 123].

¹⁰⁴ Magnus Weininger wymienia łącznie 119 wielościannów jednorodnych (z pominięciem graniastosłupów i antygraniastosłupów) [158].

¹⁰⁵ B. Grünbaum podaje w pracy [53, s. 471–475] metodę konstrukcji wielościannu regularnego z dowolnego wielościannu kombinatorycznego spełniającego definicję 2.3, którą nazwał *metoda podwajania wierzchołków* (ang. *vertex-doubling*). Warunkiem koniecznym i dostatecznym jest, aby co najmniej jedna ze ścian wielościannu oryginalnego była wielokątem nieparzystym. Jeżeli nie ma takiej ściany, to podana konstrukcja prowadzi do uzyskania dwóch odrębnych wielościannów.

¹⁰⁶ Paradoksalnie, pod pewnymi względami, potwierdzają się starożytne konotacje brył platońskich. Platon przypisywał czterem żywiołom poszczególne wielościanny: ogień odpowiadał

2.2.11. Dualność

Koncepcja dualności¹⁰⁷ wywodzi się ze spostrzeżenia, że w przypadku niektórych przekształceń, obiekty geometryczne występują parami¹⁰⁸. Wszystkie właściwości i twierdzenia dotyczące jednego z obiektów tej pary są ważne również dla drugiego z nich. Oba obiekty są nazywane wzajemnie dualnymi. Formalna definicja dualności odwołuje się do mapowania pomiędzy ścianami w wielotopie podstawowym i dualnym – definicja 2.12 [52, s. 46] lub do definiowania wielotopów poprzez zbiór wierzchołków ($\mathcal{V}$ -wielotop) lub zbiór ścian ($\mathcal{H}$ -wielotop) – definicja 2.13 [65, s. 361]. Warto zauważyć, że wielościany simplicjalne i proste są dualne – twierdzenie 2.9 [175, s. 8].

Definicja 2.12. *Dwa d -wielotopy P i P^d są względem siebie dualne, jeżeli istnieje wzajemnie jednoznaczne mapowanie Ψ pomiędzy zbiorem wszystkich ścian P i zborem wszystkich ścian P^d , zachowujące inkluzję (tzn. ściany F_1 i F_2 wielotopu P spełniają warunek $F_1 \subset F_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy ściany $\Psi(F_1)$ i $\Psi(F_2)$ wielotopu P^d spełniają warunek $\Psi(F_1) \subset \Psi(F_2)$).*

Definicja 2.13. *Każda $\mathcal{V}$ -reprezentacja wielotopu P daje $\mathcal{H}$ -reprezentację wielotopu P^d i odwrotnie:*

$$P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^n\} \Leftrightarrow P^d = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \langle v^i, x \rangle \leq 1 \text{ dla } 1 \leq i \leq n \right\}$$

Twierdzenie 2.9. *Jeżeli dwa wielotopy P i P^d są względem siebie dualne, to jeden z nich jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy drugi jest simplicjalny.*

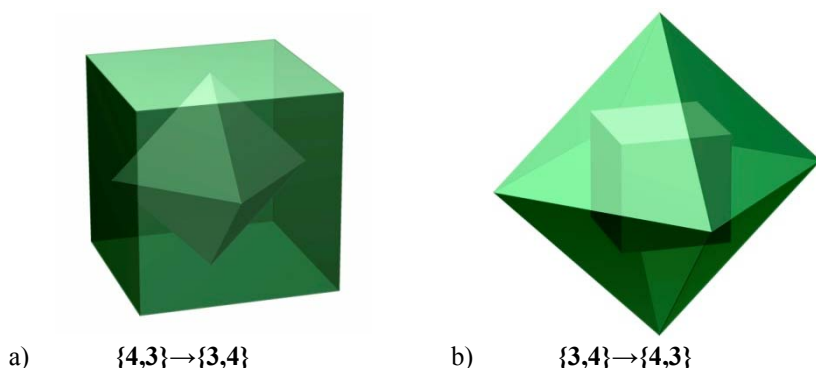
Każdy wielotop ma swój dualny odpowiednik [52, s. 46]. Wielościan P^d , dualny do wielościanu P , powstaje przez umieszczenie wierzchołków w środkach

czworościanowi, dwudziestościan – wodzie, ośmiościan – powietrzu (które jest usytuowane pomiędzy ogniem i wodą), a sześcian – ziemi. Dwunastościan odpowiadał zewnętrznemu kształtowi wszechświata. Według Platona, nadmiar wody (czyli dwudziestościanów) w organizmie, wywoływał chorobę. Obecnie, stwierdzono, że wiele wirusów ma otoczkę białkową (kapsyd) o kształcie dwudziestościanu foremnego [103, s. 18].

¹⁰⁷ W dawniejszych publikacjach w języku polskim używano określenia *dwoistość* na określenie dualności, np. [31, wyd. pol., s. 176] [39, wyd. pol., s. 116]. Podobnie, w dawniejszych publikacjach angielskojęzycznych można spotkać określenia *reciprocation* i *reciprocal* [29, s. 17]. Obecnie, znacznie częściej używane są określenia *dualność* i *dualny* (ang. *duality*, *dual* – np. [52, s. 46], ale również *polarity* – np. [65, s. 360], [175, s. 59]).

¹⁰⁸ Pierwsze spostrzeżenia dotyczące dualności pojawiły się już w napisanej przez anonimowego autora ok. roku 300 n.e. w XIV księdze *Elementów* Euklidesa. Autor wpisał ośmiościan w sześcian, a sześcian w ośmiościan oraz dwunastościan w dwudziestościan i odwrotnie. Jako pierwszy zrozumiał i opisał istotę dualności prawdopodobnie sycylijski matematyk Franciscus Maurolycus z Messyny (Francesco Maurolico), w XVI w. Dokładną definicję dualności podał dopiero M. Brückner w pracy *Vielecke unter Vielfache* Leipzig, Teubner (1900) [29, s. 30], [159, s. 1].

ścian wielościanu P . Jeżeli dwie ściany miały wspólną krawędź, to ich środki również łączymy krawędzią. Wielościan dualny P^Δ ma tyle samo krawędzi co P ; tyle wierzchołków, ile P ma ścian; tyle ścian, ile P miał wierzchołków. Wielościan dualny do P^Δ to ponownie P . W zapisie za pomocą symboli Schläfliego dualność ujawnia się poprzez zamianę pozycji: $\{p, q\} \rightarrow \{q, p\}$. Na przykład bryłą dualną względem sześciianu jest ośmiościan foremny $\{4, 3\} \rightarrow \{3, 4\}$, a dualną do ośmiościanu foremnego – ponownie sześciian $\{3, 4\} \rightarrow \{4, 3\}$ (rys. 2.30). Wielościany o tej samej grupie symetrii są dualne.



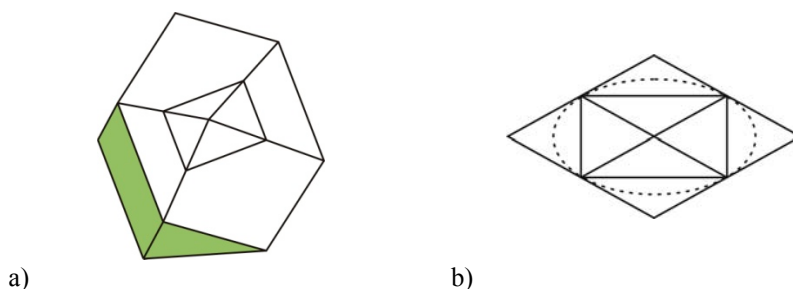
Rys. 2.30. Wielościany dualne – sześciian i ośmiookąt foremny: a) sześciian opisany na ośmioboku, b) ośmiościan opisany na sześcianie

Inną metodą konstrukcji wielościanów dualnych jest zastosowanie inwersji sferycznej¹⁰⁹. Związek z przekształceniem biegunowym i z geometrią rzutową wyjaśnia zachowywanie właściwości wielościanu oryginalnego przez wielościan dualny¹¹⁰. W metodzie tej rozpatrujemy sferę styczną do punktów środkowych krawędzi wielościanu. Następnie konstruujemy wielościan dualny, którego krawędzie są styczne do sfery w tych samych punktach, ale prostopadłe do krawędzi wielościanu oryginalnego. Odmiana tej metody, nazywana konstrukcją Dormana-Luke'a, polega na skonstruowaniu figury wierzchołkowej wielościanu, poprzez połączenie punktów środkowych krawędzi wokół wierzchołka (rys. 2.31a), opisa-

¹⁰⁹ Stąd, spotykane w literaturze, alternatywne określenie wielościanów dualnych: *wielościany biegunowe* lub *biegunowo symetryczne* (ang. *polar* lub *polar reciprocal*) [29, s. 17], [159, s. 1], [38, s. 239].

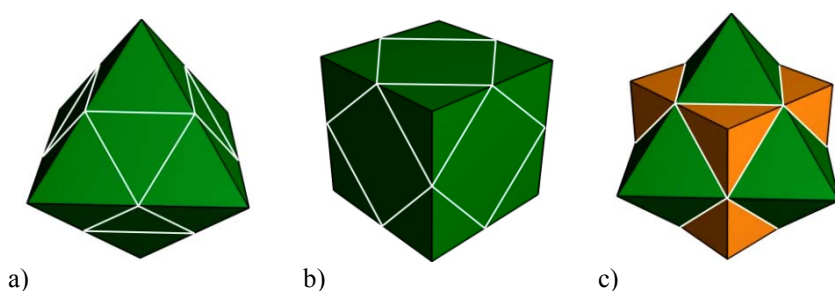
¹¹⁰ Zasada dualności w odniesieniu do geometrii rzutowej została sformułowana przez J.D. Gergonna w *Philosophie mathématique. Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue*. Ann. Math. 16 (1825–1826), 209–231, a w odniesieniu do przekształcenia biegunowego – przez J.-V. Ponceleta w *Questions résolues. Solution du dernier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 36 de ce volume; suivie d'une théorie des pôlares réciproques, et de réflexions sur l'élimination*. Ann. Math. 8 (1817–1818), 201–232 [197, s. 3–4], [38, s. 240].

niu na tej figurze okręgu i skonstruowania wielokąta stycznego do tego okręgu (rys. 2.31b) [159, s. 30]. Poniżej przedstawiono sposób wykonania tej konstrukcji dla wielościanów z rysunku 2.3: ośmiościanu (rys. 2.32a) i sześciianu (rys. 2.32b) oraz złożenie dwóch brył dualnych (rys. 2.32c). Linie na ścianach zaznaczają figury wierzchołkowe.



Rys. 2.31. Konstrukcja wielościanu dualnego metodą Dormana–Luke’a:

- a) konstrukcja figury wierzchołkowej,
- b) konstrukcja okręgu opisanego na figurze wierzchołkowej i wielokąta stycznego do tego okręgu

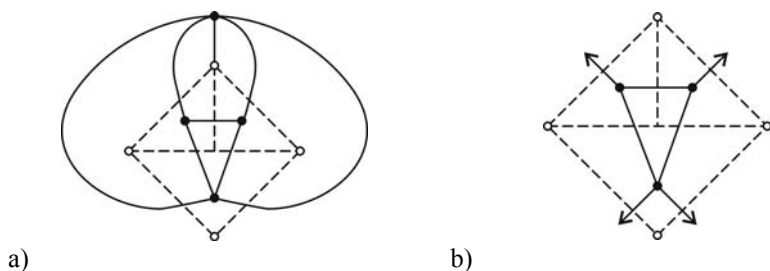


Rys. 2.32. Metoda Dormana–Luke’a zastosowana do konstrukcji figur dualnych:

- a) ośmiościanu foremnego, b) sześciianu, c) złożenie brył dualnych

W przypadku rysunków płaskich wielościanów¹¹¹ stosowane są dwie konwencje przedstawiania figur dualnych. Pierwsza nawiązuje bezpośrednio do przedstawionej zasady zastępowania ścian wierzchołkami i odwrotnie (rys. 2.32c). W drugiej konwencji wierzchołek figury dualnej, odpowiadający ścianie zewnętrznej figury podstawowej jest pomijany, a incydentne z nim krawędzie są zakończone symbolizującymi go strzałkami (rys. 2.33) [72, s. 120], [87, s. 49].

¹¹¹ Patrz pkt 2.2.8.



Rys. 2.33. Dwie konwencje rysowania figur dualnych do płaskich rysunków wielościanów:
 a) z zaznaczeniem wierzchołka odpowiadającego ścianie zewnętrznej,
 b) z pominięciem tego wierzchołka

Zgodność właściwości geometrycznych wielościanów dualnych dotyczy zwłaszcza takich cech, jak wypukłość, regularność, symetria, zgodność typu kombinatorycznego. Analiza cech strukturalnych pozwala dostrzec jeszcze jedną formę dualizmu: dualizm prętowo-płytowy. Przy zamianie walentności ścian z walentnością wierzchołków zmienia się charakter pracy konstrukcji, z układu prętowego na płytowy (i odwrotnie), podczas gdy liczba krawędzi pozostaje stała [160, s. 4]. Ta zależność jest szczególnie istotna w analizie form strukturalnych spotykanych w naturze¹¹².

Można również zauważyć, że operacja tworzenia wielościanów dualnych należy, wraz z innymi operacjami przekształcającymi wielościany, takimi jak ścinanie wierzchołków i tworzenie wielościanu gwiaździstego¹¹³, do grupy przekształceń, w których wszystkie lub część elementów danej klasy jest zastępowana elementami innej klasy (np. ściany – wierzchołkami) [87, s. 39].

2.2.12. Stopnie swobody

Pojedynczy wierzchołek ($d = 0$) na powierzchni ($d = 2$) może się poruszać w dwóch kierunkach – ma dwa stopnie swobody. Na krzywej ($d = 1$) może się poruszać tylko w jednym kierunku, zatem ma jeden stopień swobody. W przestrzeni ($d = 3$) ma natomiast trzy stopnie swobody.

Układ dwóch punktów ma w przestrzeni $2 \times 3 = 6$ stopni swobody, a układ v wierzchołków – $6v$ stopni swobody. Jeżeli przyjmiemy oś przechodzącą przez środek układu i jeden z wierzchołków, do określenia położenia układu potrzebujemy sześciu parametrów: trzech współrzędnych, dwóch kątów określających położenie osi i jednego kąta określającego orientację całego układu względem osi. Te sześć parametrów nazywamy *zewnętrznymi stopniami swobody*, a pozostałe

¹¹² Patrz rozdz. 6.

¹¹³ Ang. *truncation* i *stellation*. Polskie określenia za [39, wyd. pol., s. 8].

$(3v - 6)$ – *wewnętrznymi stopniami swobody*. Liczba wewnętrznych stopni swobody układu określa maksymalną liczbą relacji między wierzchołkami (krawędzi), które mogą być niezależnie zdefiniowane [87, s. 30]. Jest to jednocześnie minimalna liczba krawędzi niezbędna, aby dana konfiguracja wierzchołków (struktura) była sztywna. Wyrażają to równania Möbiusa–Maxwella¹¹⁴.

2.2.13. Symetria

Stwierdzenie, iż obiekt jest „symetryczny”, oznacza, że istnieje przekształcenie, które nie zmienia obiektu jako całości, permutując jedynie jego elementy składowe. *Symetria* jest pojęciem właściwym dla geometrii metrycznej¹¹⁵, a nie dla topologii, gdyż należy do przekształceń izometrycznych [29, s. 44].

Definicja 2.14. *Izometria jest to każde mapowanie przestrzeni euklidesowej E^k na samą siebie¹¹⁶, zachowujące odległości pomiędzy dowolnymi dwoma punktami. Mapowanie takie jest oznaczane $\sigma: E^k \rightarrow E^k$, a dla dowolnych punktów A, B odległość pomiędzy nimi jest równa odległości pomiędzy ich obrazami $\sigma(A)$ i $\sigma(B)$ [58, s. 26].*

Z definicji 2.14 wynika również, że kąty pomiędzy korespondującymi parami linii wyznaczonymi przez punkty i ich obrazy są równe. Izometrie są przekształceniami ciągłymi, a ich złożenie jest również izometrią. Obrazem obiektu po przekształceniu izometrycznym jest obiekt *przystający* do niego.

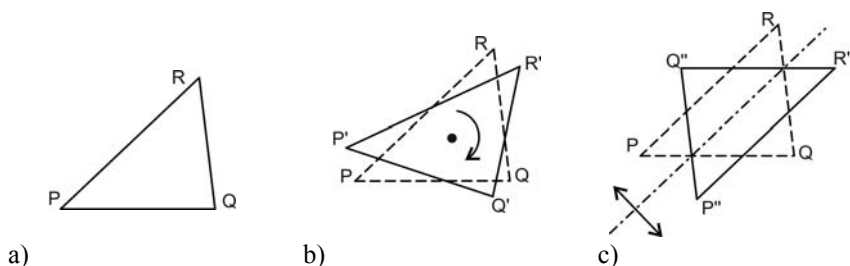
Izometria może w różny sposób oddziaływać na uporządkowanie punktów w obiekcie. W trójkącie PQR (rys. 2.34a), wierzchołki są nazwane zgodnie z ruchem wskazówek zegara (prawoskrętnie). Jeżeli trójkąt ten zostanie przekształcony przez obrót na trójkąt $P'Q'R'$ (rys. 2.34b), w którym $P' = \sigma(P)$, $R' = \sigma(R)$, $Q' = \sigma(Q)$, to kolejność, w jakiej są nazwane wierzchołki zostaje zachowana. O trójkątach PQR i $P'Q'R'$ mówimy, że są figurami *przystającymi wprost* [29, s. 33], a przekształcenie σ nazywamy *izometrią parzystą* [58, s. 26], [152, s. 16]. Jeżeli zaś w wyniku odbicia zwierciadlanego otrzymamy trójkąt $P''Q''R''$, w którym

¹¹⁴ Patrz pkt 2.3.6.

¹¹⁵ Koncepcja symetrii (z gr. *συμμετρία* = współmierność), jest powszechnie obecna w wielu dziedzinach nauki, techniki i sztuki. Jako zjawisko często obserwowane w przyrodzie, np. symetria organizmów żywych, symetria płatków śniegu itd. była od najdawniejszych czasów łączona z ideałem porządku, harmonii i piękna. Martin Gardner w swojej książce *Ambidextrouse Universe* (1964) zauważa, że obecność siły grawitacji powoduje znaczne zróżnicowanie organizmów zwierząt lądowych w kierunku pionowym, podczas gdy brak takiego oddziaływania w kierunku poziomym powoduje występowanie symetrii pomiędzy stroną lewą i prawą. O symetrii mówi się również w naukach społecznych, muzyce oraz w wielu różnych kontekstach kulturowych [72, s. 405–452] [163, s. 3].

¹¹⁶ Dalsze rozważania będą ograniczone do E^2 i E^3 (płaszczyzny i przestrzeni trójwymiarowej).

$P'' = \sigma(P)$, $R'' = \sigma(R)$, $Q'' = \sigma(Q)$ (rys. 2.34c), to kolejność nazwania wierzchołków uległa odwróceniu i jest odwrotna do ruchu wskazówek zegara (lewoskrętna). Trójkąty PQR i $P''Q''R''$ nazywamy figurami *przystającymi odwrotnie* lub *enanjomorficznymi* [72, s. 436], a przekształcenie σ – *izometrią nieparzystą*¹¹⁷ [58, s. 26] [152, s. 16].



Rys. 2.34. Przykłady izometrii prostych i odwrotnych (opis w tekście)

2.2.13.1. Klasyfikacja izometrii

Każde przekształcenie izometryczne należy do jednego spośród sześciu¹¹⁸ wymienionych w tabeli 2.2 typów przekształceń izometrycznych [58, s. 27], [152, s. 17]. Pierwszy z nich – odbicie (zwierciadlane) ma charakter podstawowy, gdyż wszystkie pięć pozostałych można przedstawić jako złożenie co najwyżej czterech odbić¹¹⁹. Liczba odbić (parzysta lub nie), po złożeniu których otrzymujemy dane przekształcenie, określa jego parzystość lub nieparzystość. Trzy spośród wymienionych przekształceń: odbicie, obrót i odbicie z poślizgiem mają swoje niezmienniki – zbiory punktów, które zostają przekształcone na te same punkty. Trzy pozostałe przekształcenia nie mają niezmienników i nazywane są *przemieszczeniami*.

¹¹⁷ Używane są również określenia: *izometria prosta* (ang. *direct isometry*) dla przekształceń parzystych i *izometria odwrotna* (ang. *indirect isometry* lub *opposite isometry*) dla przekształceń nieparzystych [29, s. 33], [58, s. 27], [152, s. 17].

¹¹⁸ Do podstawowych typów przekształceń izometrycznych zalicza się również przekształcenie tożsamościowe (identyczność), przekształcające każdy punkt obiektu na ten sam punkt. Jest to przekształcenie bezpośrednie, a jego niezmiennikiem jest cała przestrzeń [152, s. 17]. Po uwzględnieniu identyczności łączna liczba izometrii wynosi siedem.

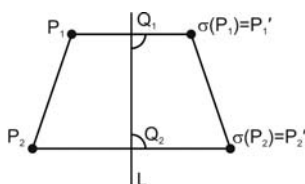
¹¹⁹ Klasyfikacja podstawowych przekształceń izometrycznych jest w pewnym stopniu niejednoznaczna. Trzy pierwsze z przekształceń wymienionych w tabeli 2.1 są nazywane przekształceniami „prymitywnymi” i np. H.S.M. Coxeter tylko te przekształcenia uważa za podstawowe, pozostałe trzy traktując jako pochodne [29, s. 44–46]. Niektórzy autorzy, jak B. Grünbaum, do przekształceń podstawowych zaliczają również odbicie z poślizgiem [58, s. 226–27]. Inni, jak H. Verheyen, za podstawowe uważają wszystkie przekształcenia wymienione w tabeli [152, s. 17]. Niewątpliwie jednak jest, że każde przekształcenie izometryczne należy do jednego z sześciu wymienionych typów [29, s. 44–47].

Tabela 2.2. Typy podstawowych przekształceń izometrycznych

Izometria	Typ	Niezmienniki w E^2	Niezmienniki w E^3
Odbicie	nieparzysta	linia	płaszczyzna
Obrót	parzysta	punkt	linia
Translacja	parzysta	–	–
Odbicie z poślizgiem	nieparzysta	–	–
Odbicie z obrotem	nieparzysta	punkt	punkt
Obrót z poślizgiem	parzysta	–	–

Odbicie (zwierciadlane)

Odbicie zwierciadlane względem prostej L (w E^2) lub płaszczyzny F (w E^3) nazywanymi odpowiednio *osią* i *płaszczyzną* tego przekształcenia (a w przypadku gdy jest to jednocześnie symetria – odpowiednio *osią symetrii* i *płaszczyzną symetrii*), jest to takie przekształcenie $\sigma: E^2 \rightarrow E^2$ (lub odpowiednio $\sigma: E^3 \rightarrow E^3$), że jeżeli Q oznacza rzut prostopadły¹²⁰ punktu P na prostą (płaszczyznę) symetrii, to σ przekształca punkt P na punkt P' w taki sposób, że $|PQ| = |QP'|$, a punkty P i P' leżą po przeciwnych stronach osi (płaszczyzny) symetrii (rys. 2.35) [58, s. 27], [152, s. 12]. Odbicie jest przekształceniem nieparzystym (złożenie jednego odbicia), a jego niezmiennikiem jest oś (płaszczyzna) symetrii.

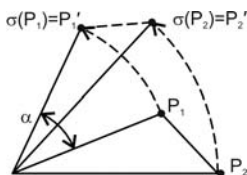


Rys. 2.35. Odbicie zwierciadlane na płaszczyźnie

Obrót

Obrót względem punktu O (w E^2) lub linii L (w E^3), nazywanymi odpowiednio *środkiem obrotu* i *osią obrotu*, jest izometrią parzystą, gdyż można go przedstawić jako złożenie dwóch odbić [58, s. 26], [152, s. 12]. Osie (płaszczyzny) symetrii przecinają się w punkcie (osi) obrotu, które są niezmiennikami tego przekształcenia (rys. 2.36).

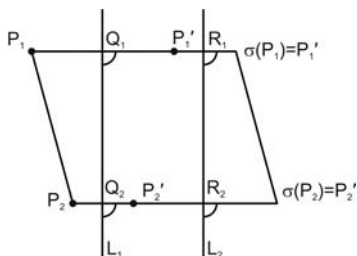
¹²⁰ Można rozpatrywać również odbicie zwierciadlane *ukośne*, w którym kierunek rzutowania punktów na oś (płaszczyznę) przekształcenia nie jest do niej prostopadły [29, s. 187].



Rys. 2.36. Obrót jako złożenie dwóch odbić na płaszczyźnie

Translacja (przesunięcie równoległe)

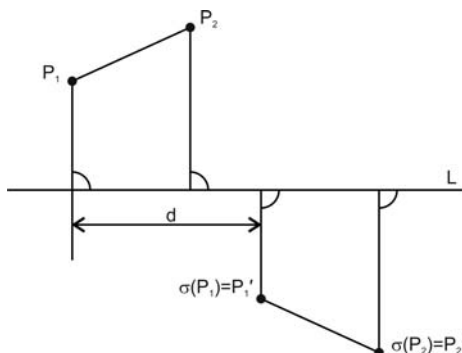
Translacja o zadany wektor d jest izometrią parzystą, gdyż można ją przedstawić jako złożenie dwóch odbić względem prostych L_1 i L_2 (w E^2) lub płaszczyzn F_1 i F_2 (w E^3) równoległych do siebie (rys. 2.37) [58, s. 27], [152, s. 13].



Rys. 2.37. Translacja jako złożenie dwóch odbić na płaszczyźnie

Odbicie z poślizgiem

Odbicie z poślizgiem jest złożeniem odbicia względem osi L (w E^2) lub płaszczyzny F (w E^3) z translacją o wektor d . Jest to izometria nieparzysta – można ją przedstawić jako złożenie trzech odbić [58, s. 27], [152, s. 15]. Dwie płaszczyzny symetrii są równoległe podobnie jak w przypadku przesunięcia, a trzecia jest do nich prostopadła (rys. 2.38).

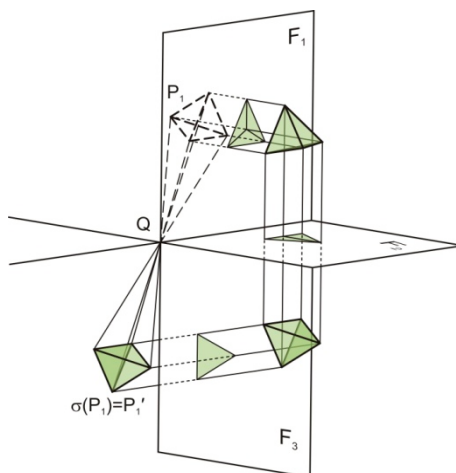


Rys. 2.38. Odbicie z poślizgiem jako złożenie trzech odbić na płaszczyźnie

Odbicie z obrotem

Odbicie z obrotem jest izometrią nieparzystą – można je przedstawić jako złożenie trzech odbić. Dwie płaszczyzny symetrii przecinają się podobnie jak w przypadku obrotu, a trzecia jest do nich prostopadła. Wspólny punkt tych trzech płaszczyzn jest niezmiennikiem przekształcenia.

Szczególny przypadek odbicia z obrotem występuje, gdy płaszczyzny F_1 i F_2 są wzajemnie prostopadłe. Jest przekształcenie równoważne dwóm innym ważnym przekształceniom [152, s. 14]. Pierwsze z nich to obrót o połowę kąta pełnego, nazywany *półobrotem*. Drugie – to *symetria środkowa* względem punktu Q , nazywanego *środkiem symetrii*. Symetria środkowa σ przekształca punkt P na punkt P' w taki sposób, że $|PQ| = |QP'|$, a punkty P i P' nazywają się *punktami symetrycznymi* względem punktu Q (rys. 2.39).

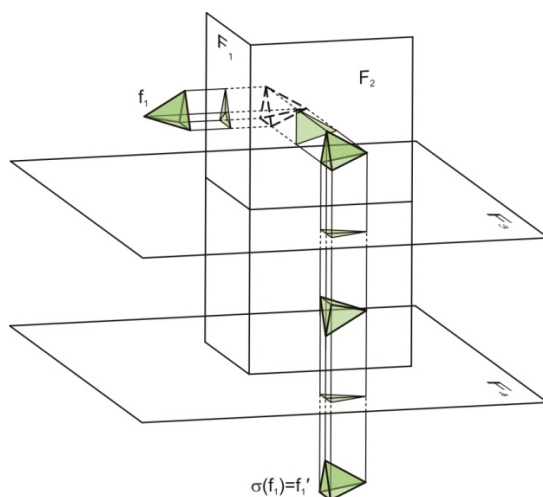


Rys. 2.39. Odbicie z obrotem dla wszystkich płaszczyzn wzajemnie prostopadłych – równoważne symetrii środkowej względem punktu przecięcia płaszczyzn

Obrót z poślizgiem (przesunięcie śrubowe)

Obrót z poślizgiem jest złożeniem obrotu i translacji wzdłuż osi obrotu. Jest to izometria parzysta, gdyż można ją przedstawić jako złożenie czterech odbić względem płaszczyzn F_1, F_2, F_3 i F_4 . Dwie płaszczyzny symetrii przecinają się, a dwie pozostałe, wzajemnie równoległe są do nich prostopadłe (rys. 2.40) [152, s. 16]. Wśród przekształceń izometrycznych na płaszczyźnie rozróżnia się również przekształcenia *właściwe* i *niewłaściwe* [72, s. 394]. Przekształcenia właściwe są to przekształcenia, powodujące przemieszczenie obiektu bez opuszczania płaszczyzny, na której leży. Przekształcenia niewłaściwe odbywają się przez przemieszczenie obiektu, w trakcie którego musi on opuścić płaszczyznę, na której

leży. Przykładami przekształceń właściwych są obrót i translacja, a niewłaściwych – odbicie i odbicie z poślizgiem¹²¹.



Rys. 2.40. Obrót z poślizgiem (przesunięcie śrubowe) jako złożenie czterech odbić

2.2.13.2. Grupy symetrii

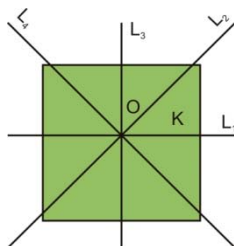
Wszystkie przekształcenia symetryczne należą do jednego z podstawowych typów wymienionych w tabeli 2.2. Formalna definicja symetrii może być sformułowana nieco inaczej niż definicja 2.14 – w wersji, która podkreśla „tożsamość” przekształconego obiektu [72, s. 409].

Definicja 2.15. *Symetria obiektu K jest to przekształcenie izometryczne, które mapuje ten obiekt na ten sam obiekt, tzn. $\sigma(K) = K$.*

Dla kwadratu (rys. 2.41) linie L_1 , L_2 , L_3 i L_4 są osiami odbić zwierciadlanych będących jego symetriami. Symetriami są również obroty przeciwnie do ruchu wskazówek zegara względem punktu O , o kąty $\pi/2$, π i $3\pi/2$ ¹²², a także przekształcenie tożsamościowe (które jest symetrią każdego obiektu). Kwadrat ma dokładnie osiem, wymienionych powyżej, symetrii.

¹²¹ Edwin A. Abbott, w swojej wydanej w 1884 r. książce *Flatland: A Romance of Many Dimensions* (wyd. polskie pt. *Flatlandia czyli Kraina Płaszczyzaków: Powieść o wielu wymiarach*, GWO, Gdańsk, 1994), opisuje przykład fikcyjnego świata na płaszczyźnie, dla którego mieszkańców tzn. obiektów płaskich, pojawienie się obiektu odwróconego w odbiciu zwierciadlanym było szokiem, gdyż żaden znany im ruch na płaszczyźnie nie pozwalał na taką transformację.

¹²² W rozważaniach tych nie wprowadza się rozróżnienia pomiędzy obrotem lewoskrętnym o kąt θ a obrotem prawoskrętnym o kąt $2\pi - \theta$, ani pomiędzy obrotem o kąt θ a obrotem o kąt $\theta + 2\pi k$ dla dowolnego k [58, s. 27].



Rys. 2.41. Symetrie kwadratu (opis w tekście)

Wszystkie osiem symetrii kwadratu K możemy potraktować jako pewien zbiór przekształceń $S(K)$, który ma właściwości algebraiczne – symetrie mogą być kolejno składane (superponowane), a wynik tego działania jest również symetrią. Działanie superponowania symetrii ma swój element neutralny – jest nim przekształcenie tożsamościowe. Dla dowolnego elementu zbioru $S(K)$ istnieje element odwrotny, gdyż każda symetria jest *inwolucją*, tzn. wykonana dwukrotnie daje w wyniku przekształcenie tożsamościowe. Ze względu na taką strukturę algebraiczną, $S(K)$ stanowi *grupę*, a liczba elementów (symetrii) zawartych w zbiorze określa *rzęd grupy*. Ponieważ elementami grupy są przekształcenia symetryczne, nazywa się ją *grupą symetrii* [58, s. 27] [72, s. 410].

Definicja 2.16. Niech K będzie obiektem w przestrzeni E^1 , E^2 lub E^3 , a σ dowolnym przekształceniem symetrycznym K . Zbiór tych przekształceń oznaczamy $S(K) = \{\sigma \mid \sigma: K \rightarrow K\}$. Niech na $S(K)$ określone będzie działanie superpozycji przekształceń $\sigma_j \circ \sigma_i$, przyporządkowujące dowolnemu elementowi $x \in K$ element $\sigma_j(\sigma_i(x)) \in K$, gdzie $\sigma_i: K \rightarrow K'$, $\sigma_j: K' \rightarrow K$. Jeżeli działanie to ma następujące właściwości:

a) dla dowolnych $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k \in S(K)$ zachodzi zależność $\sigma_k \circ (\sigma_j \circ \sigma_i) = (\sigma_k \circ \sigma_j) \circ \sigma_i$ – zachodzi łączność działania,

b) dla dowolnego $\sigma_i \in S(K)$ istnieje przekształcenie $e \in S(K)$, takie, że $\sigma_i \circ e = e \circ \sigma_i = \sigma_i$ (tzn. istnieje element neutralny działania),

c) dla dowolnego σ_i należącego do $S(K)$ istnieje przekształcenie σ_i^{-1} , takie że $\sigma_i \circ \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \circ \sigma_i = e$ (tzn. istnieje przekształcenie odwrotne do σ_i) to para uporządkowana $(S(K), \circ)$ stanowi grupę symetrii obiektu K .

Jeżeli dla obiektu można określić co najmniej jedno przekształcenie symetryczne, inne niż przekształcenie tożsamościowe, to mówimy, że jest to *obiekt symetryczny*. Jeżeli grupa symetrii obiektu zawiera co najmniej dwie translacje w kierunkach nierównoległych, to jest to *obiekt periodyczny*¹²³ [58, s. 29].

Elementem grupy symetrii obiektów skończonych, niewypełniających całej przestrzeni (E^2 lub E^3) nie może być translacja. Jedynie nieskończone parkie-

¹²³ Periodyczność jest szczególnie istotna w rozpatrywaniu podziałów i wypełnień płaszczyzny i przestrzeni, patrz rozdz. 3.2.

taż¹²⁴ mogą mieć grupy symetrii zawierające translację. Wynika z tego, że w grupach symetrii obiektów skończonych elementami są jedynie obroty i odbicia zwierciadlane, a zatem obiekty te zawierają co najmniej jeden punkt, który jest przekształcany na samego siebie („środek ciężkości”). Jeżeli liczba elementów (przekształceń symetrycznych) w grupie jest skończona, to mówimy o *grupie skończonej* [29, s. 43].

Grupy te są sklasyfikowane w pięciu izomorficznych kategoriach, które zestawiono w tablicy 2.3 i opisane poniżej [152, s.19], [31, wyd. pol. s.300].

Tabela 2.3. Skończone grupy symetrii

Kategoria	Symbol ¹²⁵	Rząd ¹²⁶
Cykliczne	C_n	n
Dwuścienne	D_n	$2n$
Czworościenne	A_4	$2e = 12$
Ośmiościenne	S_4	$2e = 24$
Dwudziestościenne	A_5	$2e = 60$

Grupy symetrii: *cykliczne* i *dwuścienne* są jedynymi skończonymi grupami symetrii na płaszczyźnie¹²⁷ (E^2). Pozostałe trzy grupy: *czworościenne*, *ośmiościenne* i *dwudziestościenne* noszą wspólną nazwę *grup wielościennej* i są jedynymi skończonymi grupami symetrii w przestrzeni (E^3) [31, s. 273].

Grupy cykliczne

Elementami grup cyklicznych są n -krotne obroty. Jeżeli obrót o kąt $(2\pi \times j)/n$ (gdzie $1 \leq j \leq n$) jest przekształceniem symetrycznym obiektu, to generowana przez takie obroty grupa symetrii składa się z n elementów i jest oznaczana symbolem C_n .

Na rysunku 2.42 przedstawiono dwa przykłady cyklicznych grup symetrii. Triskelion¹²⁸ (rys. 2.42a) ma grupę symetrii C_3 . Jej elementami są obroty o kąty $(2\pi \times 1)/3 = 120^\circ$, $(2\pi \times 2)/3 = 240^\circ$ i $(2\pi \times 3)/3 = 360^\circ$ (przekształcenie tożsamościowe). Swastyka (rys. 2.42c) posiada grupę symetrii C_4 . Jej elementami są ob-

¹²⁴ Patrz rozdz. 3.2 i 3.3.

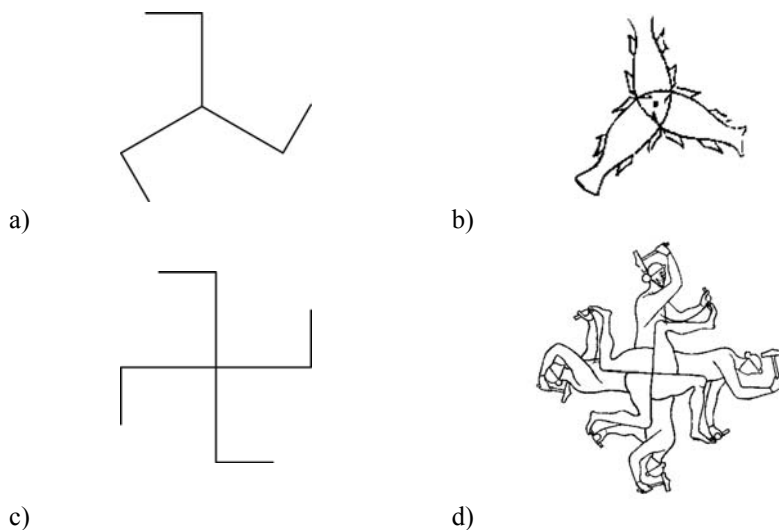
¹²⁵ Symbole oznaczające cykliczne i dwuścienne grupy symetrii są powszechnie przyjęte w literaturze. Symbole oznaczające grupy wielościenne przyjęto za [152, s. 4, 19] i [31, wyd. pol. s. 300].

¹²⁶ Symbole literowe w kolumnie „rząd grupy” oznaczają odpowiednio: n – krotność obrotu, e – liczba krawędzi bryły definiującej rodziny osi obrotu.

¹²⁷ Według Hermanna Weyla, odkrycie, że grupy C_n i D_n są jedynymi skończonymi grupami symetrii na płaszczyźnie zawdzięczamy Leonardo da Vinci, który interesował się nimi w swoich studiach architektonicznych dotyczących symetrii budynków centralnych [163, s. 66, 99].

¹²⁸ *Triskelion* (gr. τρισκελης = trójnóg lub trójnożny) jest to stary symbol magiczny. Grecy używali go z głową Meduzy w środku, jako symbolu trójkątnej Sycylii [163, wyd. pol. s. 69], [28, s. 9], znajduje się również w godle wyspy Man [28, s. 9].

roty o kąty $(2\pi \times 1)/4 = 90^\circ$, $(2\pi \times 2)/4 = 180^\circ$, $(2\pi \times 3)/4 = 270^\circ$ i $(2\pi \times 4)/4 = 360^\circ$. Takie same grupy symetrii posiadają rysunki ze szkicownika Villarda de Honnecourt¹²⁹: ornament w kształcie trzech ryb (rys. 2.42b) i studium sylwetki rzemieślnika (rys. 2.42d).



Rys. 2.42. Przykłady cyklicznych grup symetrii: a) C_3 , b), c) C_4 (opis w tekście)

Grupy dwuścienne

Grupy dwuścienne charakteryzują symetrię wielokątów regularnych. Grupa symetrii n -kąta jest oznaczana symbolem D_n . Zawiera ona $2n$ elementów: n obrotów o kąt $(2\pi \times j)/n$ (a zatem grupa cykliczna C_n jest jej podgrupą) i n odbić zwierciadlanych [152, s. 22–27].

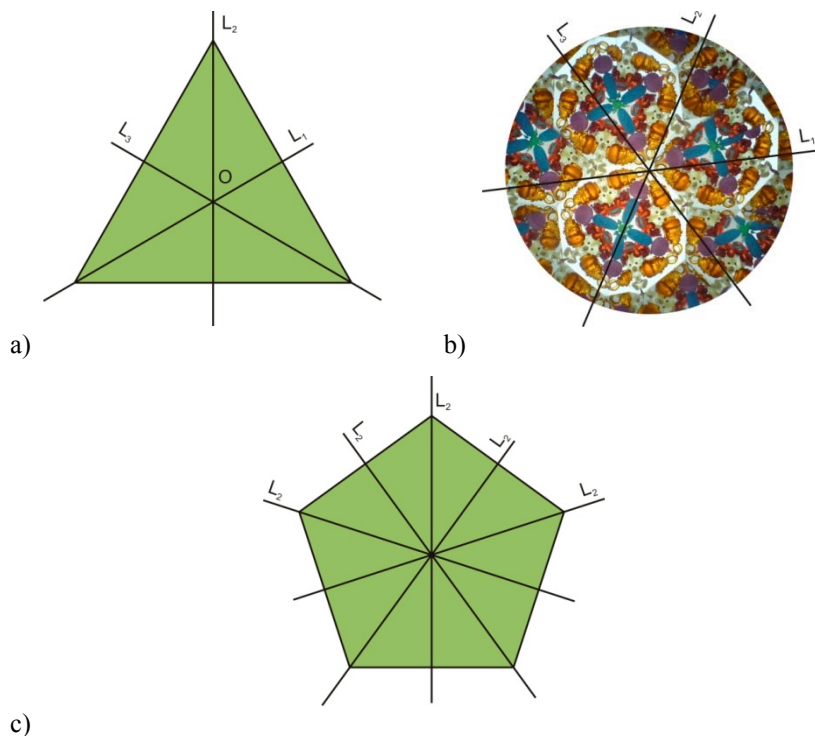
Przykładem grupy symetrii D_3 jest symetria trójkąta równobocznego (rys. 2.42a). Elementami tej grupy są 3 obroty wokół punktu O (podgrupa C_3) i 3 odbicia zwierciadlane względem osi L_1 , L_2 i L_3 . Kwadrat (rys. 2.41) ma grupę symetrii D_4 , a pięciokąt (rys. 2.43c) – grupę symetrii D_5 .

Praktycznym sposobem budowy modelu grupy D_n jest ustawienie dwóch luster ma liniach L_1 i L_2 (rys. 2.41 lub 2.43a), w taki sposób, aby stykały się w punkcie O . Lustra te będą nachylone do siebie pod kątem π/n . Każdy obiekt umieszczony pomiędzy nimi będzie miał $2n$ widocznych obrazów (wraz z samym obiektem) [31, s. 34–35]. Na takiej zasadzie zbudowany jest kalejdoskop¹³⁰. Na rysunku 2.43b

¹²⁹ Rysunki 2.42b i 2.42d pochodzą z planszy 38 szkicownika Villarda de Honnecourt.

¹³⁰ Nazwa kalejdoskop (z gr. *καλός* = piękny, *εἶδος* = forma, *σκοπεῖν* = widzieć) została ułożona przez Sir Davida Brewstera w pracy *A Treatise on the Kaleidoscope*, Constable, Edinburgh

przedstawiono obraz z kalejdoskopu o trzech lustrach ustawionych na krawędziach trójkąta równobocznego.



Rys. 2.43. Przykłady dwuściennych grup symetrii D_3 i D_5 (opis w tekście)

Grupy wielościenne

Skończone grupy symetrii wielościanów regularnych są szczególnie interesujące, gdyż charakteryzują właściwości obiektów znacznie bardziej złożonych niż wielościany w (E^2) [152, s. 27–39].

Wielościan regularny o symbolu Schläfliego $\{p, q\}$ ma v wierzchołków, e krawędzi i f ścian. Przekształcenia symetryczne tego wielościanu obejmują obroty względem trzech rodzin osi. Są to:

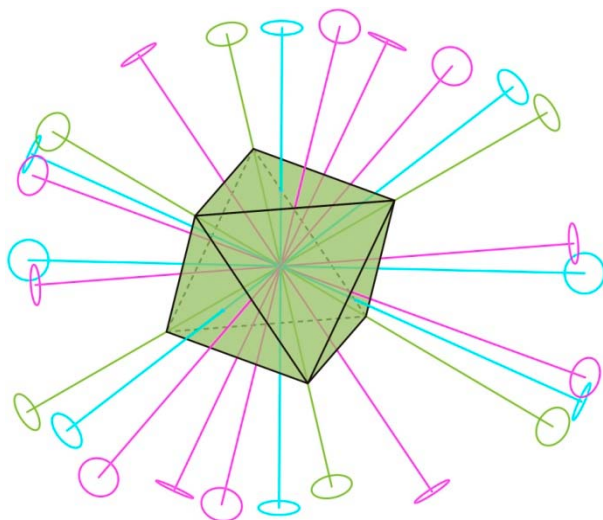
- osie przechodzące przez środek wielościanu i jeden z jego wierzchołków,
- osie przechodzące przez środek wielościanu i środek jednej z jego krawędzi,
- osie przechodzące przez środek wielościanu i środek jednej z jego ścian.

(1819), w której opisuje on historię i teorię działania tego przyrządu. Pierwsza praca na temat kalejdoskopu została opublikowana przez Athanasiusa Kirchera w 1646 r. [31, s. 35].

Dla osi przechodzących przez wierzchołki wielościanu operacjami symetrycznymi są obroty o kąt $(2\pi \times k)/q$ (gdzie $1 \leq k \leq n$), ponieważ każdy wierzchołek jest incydentny z q ścianami. Pomijając przekształcenie tożsamościowe, mamy $q-1$ obrotów dla każdej z osi.

Dla osi przechodzących przez środki krawędzi wielościanu operacjami symetrycznymi są obroty o kąt $2\pi/2 = \pi$, ponieważ każda krawędź jest incydentna z dwoma ścianami. Pomijając przekształcenie tożsamościowe, mamy 1 obrót dla każdej z osi.

Dla osi przechodzących przez środki ścian wielościanu operacjami symetrycznymi są obroty o kąt $(2\pi \times j)/p$ (gdzie $1 \leq j \leq n$), ponieważ każda ściana jest regularnym p -kątem, o grupie symetrii C_p . Pomijając przekształcenie tożsamościowe, mamy $p-1$ obrotów dla każdej z osi [29, s. 46–47].



Rys. 2.44. Osie grupy symetrii ośmiościanu (opis w tekście)

Oprócz wymienionych nie mogą wystąpić żadne inne osie obrotu dla przekształceń symetrycznych [31, s. 273]. Dodatkowo należy zauważyć, że każda z osi przechodzi przez dwa charakterystyczne punkty antypodalne: dwa wierzchołki, dwa środki ścian i dwa środki krawędzi (oprócz czworościanu, w przypadku którego naprzeciw wierzchołków leżą środki ścian), co powoduje, że obroty względem tych osi są liczone podwójnie. Całkowita liczba obrotów dla danego wielościanu wynosi zatem [29, s. 47]:

$$\frac{1}{2} [v(q-1) + e + f(p-1)] = 2e - 1 \quad (2.4)$$

a liczba elementów w grupie, wraz z przekształceniem tożsamościowym (rzęd grupy) wynosi $2e$. Grupy symetrii dla wielościanów dualnych są takie same. Zatem grupa

ośmiościenna (wielościan $\{3,4\}$) jest identyczna z grupą sześcienną (wielościan $\{4,3\}$) i zawiera 24 elementy, grupa dwunastościenna (wielościan $\{5,3\}$) jest identyczna z grupą dwudziestościenną (wielościan $\{3,5\}$) i zawiera 60 elementów. Czworoscian $\{3,3\}$ jest samodualny, a jego grupa symetrii zawiera 12 elementów. Na rysunku 2.44 przedstawiono ośmiościan wraz ze wszystkimi osiami symetrii. Kolor zielony oznacza osie przechodzące przez wierzchołki, purpurowy – osie przechodzące przez środki krawędzi, a cyjan – osie przechodzące przez środki ścian.

2.2.13.3. Notacja sygnatur (Conwaya)

Notacja sygnatur została wprowadzona przez Johna H. Conwaya¹³¹ jako narzędzie opisu figur geometrycznych oparte na ich symetrii. W zapisie tym wykorzystywane są następujące symbole [28, s. 8–13]:

- * gwiazdka – istnieje oś symetrii,
- n dla oznaczenia n -krotnej symetrii obrotowej,
- kółko pełne – istnieje punkt stały przekształcenia.

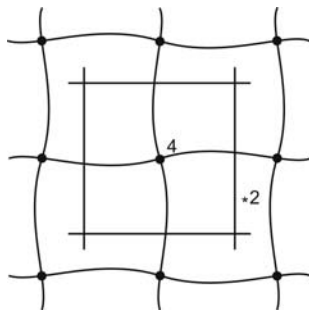
Przykłady stosowania oznaczeń:

- * występuje jedna oś symetrii,
- *2● występują dwie osie symetrii zwierciadlanej, wyznaczające punkt stały,
- 3● występuje trzykrotna symetria obrotowa (np. triskelion).

Możliwe jest również opisywanie bardziej złożonych przypadków, np:

*632 występują trzy punkty przecięcia osi symetrii zwierciadlanej, w jednym przecina się sześć osi, w drugim – trzy osie, a w trzecim – dwie osie; np. trójkąt równoboczny ma oznaczenie *333,

4*2 występuje czterokrotna symetria obrotowa i dwie osie symetrii zwierciadlanej (rys. 2.34).



Rys. 2.45. Notacja sygnatur – przykład parkietażu o sygnaturze 4*2

¹³¹ J.H. Conway opracował ten sposób zapisu wspólnie z Williamem Thurstonem, na podstawie wcześniejszego systemu opracowanego przez Murraya MacBeatha [28, s. 7]. Pierwszą i podstawową publikacją na ten temat jest praca [28], z 2008 r. W niniejszym pkie podano jedynie podstawowe informacje na temat tego bardzo rozbudowanego systemu.

2.2.13.4. Uwagi ogólne na temat symetrii

Pojęcie symetrii może dotyczyć również innych właściwości niż relacje usytuowania na płaszczyźnie (w przestrzeni). Przykładem może być *symetria dualności* – każdy obiekt, który nie jest samodualny, koresponduje z obiektem dualnym do niego. Każde twierdzenie dotyczące obiektu pierwotnego może być przekształcone na odpowiednie twierdzenie dotyczące obiektu dualnego. Ilustruje to np. symetria symboli Schläfliego i symetria w zależnościach pomiędzy ilościami zawartych w nich obiektów niższego stopnia [87]. Z ideą symetrii związanych jest także wiele koncepcji z dziedziny muzyki, literatury, relacji społecznych itp.

Naruszenie symetrii jest uważane za niezbędny warunek wystąpienia zjawisk fizycznych. Sformułował to już G. W. Leibniz w tzw. *zasadzie dostatecznej przyczyny*: jeżeli nie ma dostatecznej przyczyny, aby coś się wydarzyło, to stan początkowy nie ulega zmianie. Obecność symetrii gwarantuje, że dany wybór jest równie dobry jak każdy inny – zatem nic się nie dzieje. Jeżeli jedno zjawisko jest przyczyną innego, to symetria przyczyny musi być niższa niż symetria rezultatu¹³² [163, s. 21].

2.3. Podstawowe zależności kombinatoryczne i metryczne

Pytanie o to, jakie wielotopy są możliwe do zrealizowania może być matematycznie sformułowane na wiele sposobów. Jedna z najprostszych wersji brzmi: Jakie ciągi liczb mogą wystąpić jako liczby wierzchołków, krawędzi, ..., $(n - 1)$ powierzchni n -wielotopu wypukłego. Odpowiedź na nie prowadzi do generowania wielkiej różnorodności form przestrzennych [52, s. 130]. Istotne jest tutaj zaznaczenie, że rozpatrywane są tylko wielotopy wypukłe, ponieważ niemal wszystkie istotne rezultaty odnoszą się do tej grupy obiektów. W dalszym ciągu, jeżeli nie będzie zaznaczone inaczej, rozważania będą dotyczyły wielotopów wypukłych.

2.3.1. Równanie Eulera

Dla każdego wielotopu klasy n , liczba zawartych w nim wielotopów niższych klas, musi spełniać równanie, nazywane od nazwiska odkrywcy, równaniem

¹³² Jak zauważa Pierre Curie, w *Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique*, Journal de physique, tome III (1894), aby zaszło zjawisko fizyczne niezbędny jest brak symetrii – asymetria jest jego przyczyną. Przykład zjawiska, które nie wystąpiło ze względu na stan symetrii podał już Arystoteles w *De Caelo*, pytając jak pies, który widzi dwa jednakowo apetyczne posiłki, może w racjonalny sposób wybrać jeden z nich. Podobnie czternastowieczny francuski filozof Buridan opisuje ośła, który głoduje, nie mogąc wybrać pomiędzy dwoma, równie kuszącymi kupkami siana.

Eulera¹³³. Jest to podstawowa zależność, łącząca topologicznie różne poziomy hierarchicznego zorganizowania przestrzeni.

W postaci ogólnej, dla przestrzeni n -wymiarowej¹³⁴, równanie Eulera ma, w podanej notacji, postać przedstawioną równaniem (2.5a), lub – w rozwiniętej postaci – równaniem (2.5b) [171, s. 24], [52, s. 131], [176, s. 246].

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \cdot N_i = 1 - (-1)^n \quad (2.5a)$$

$$N_0 - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot N_{n-1} = 1 - (-1)^n \quad (2.5b)$$

Prawa strona równania przyjmuje wartość 0 dla n parzystego i 2 dla n nieparzystego. Dla przestrzeni trójwymiarowej i dla genusu równego 0, równanie (2.5) upraszcza się do postaci przedstawionej równaniem (2.6)

$$v - e + f = 2 \quad (2.6)$$

Jeżeli rozpatrywane są powierzchnie o różnych genusach, równanie (2.6) przyjmuje postać (2.7) [162, s. 1] [19, s. 12]

$$v - e + f = \chi \quad (2.7)$$

gdzie $\chi = 2(1 - g)$ jest charakterystyką Eulera.

Co ciekawe, równanie Eulera jest nie tylko podstawowym (i historycznie pierwszym) równaniem topologicznym, związanym ze strukturą wewnętrzną

¹³³ Równanie Eulera zostało sformułowane dla wielościanów ($d=3$) w tej samej pracy, w której po raz pierwszy wprowadził pojęcia krawędzi wielościanu (patrz przypis do pkt 2.2.2) – w liście do Goldbacha z 14 listopada 1750 r., a opublikowane w pracy *Elementa doctrinae solidorum* Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 4 (1752–53) 109–40 (wydrukowane w 1758 r.). Interesujące jest, że równanie to było znane Kartezjuszowi już ponad sto lat wcześniej. Sformułował je (w nieco odmienny sposób niż Euler, bez wprowadzania hierarchii obiektów tworzących wielościan) w nieopublikowanym manuskrypcie *Progymnasmata De Solidorum Elementis* (1619–1620). W pracy tej podał również równanie na deficyt kątów w wielościanie (patrz pkt 2.3.3). Rękopis jednak zaginął i został zapomniany. Wiedza o nim pochodzi z kopii wykonanej przez Leibniza już po śmierci Kartezjusza (w niezwykle barwnych okolicznościach) i znalezionej w jego papierach w Hanowerze, w 1860 r. Ludwig Schläfli uogólnił je w 1852 r. na wielotopy n -wymiarowe, choć i jego prace pozostawały w zasadzie nieznane aż do początków XX w. [177, s. 184–186] [30, s. 68] [79, s. 27–28].

¹³⁴ Leonard Euler sformułował swoje równanie dla przestrzeni trójwymiarowej ($d=3$) – równanie (2.6). Uogólnienia na większą liczbę wymiarów dokonał w 1852 r. w. Ludwik Schläfli – równanie (2.5), a udowodnił je Henri Poincaré. Z tego względu, równanie to, w rozszerzonej postaci nazywane jest również równaniem Eulera–Poincarégo [171, s. 24] [177, s. 184]. Ostatnio, w związku, z odnalezieniem informacji o pracy Kartezjusza zawierającej wcześniejszą wersję tego równania, pojawiła się w użyciu nazwa: równanie Kartezjusza–Eulera, np. w [117, s. 65].

wielotopów ale znajduje zastosowanie również w innych dziedzinach. W pracy [117, s. 63–66] podany jest przykład związku równania Eulera i charakterystyki Eulera χ z opisem dowolnego pola wektorowego na sferze.

2.3.2. f -wektor

Możliwe realizacje wielotopów są charakteryzowane przez ich f -wektory. Są to wektory, których składowe są określone liczbami całkowitymi wyrażającymi kolejno liczby obiektów niższych klas (ogólnie nazywanych fasetami – stąd oznaczanie ich literą f) zawartych w wielotopie. Dla przypadku przestrzeni trójwymiarowej, f -wektor wielościanu P ma postać [176, s. 245] [177, s. 623]:

$$f(P) = (f_0, f_1, f_2) \in R^3 \quad (2.8a)$$

a dla dowolnego d -wielotopu

$$f(P) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1}) \in R^d \quad (2.8b)$$

gdzie $f_0, f_1, \dots, f_d$ oznaczają odpowiednio liczbę ścian, wierzchołków itd. Zbiór pusty i sam wielotop P są nazywane *fasetami trywialnymi*, o wymiarze odpowiednio -1 i $\dim(P)$. Wszystkie pozostałe fasety P są *fasetami właściwymi*.

W przypadku wielościanów, tylko dwie składowe f -wektora są niezależne, trzecia jest z nimi związana równaniem Eulera (2.6). Jako niezależne przyjmowane są f_0 i f_1 . Zbiór F_3 wszystkich f -wektorów wielościanów jest zatem zbiorem 2-wymiarowym. Jest on całkowicie scharakteryzowany przez lemat Steinitza¹³⁵ (twierdzenie 2.10) [177, s. 623].

Twierdzenie 2.10 (lemat Steinitza). *Zbiór wszystkich f -wektorów 3-wielotopów jest dany zależnościami*

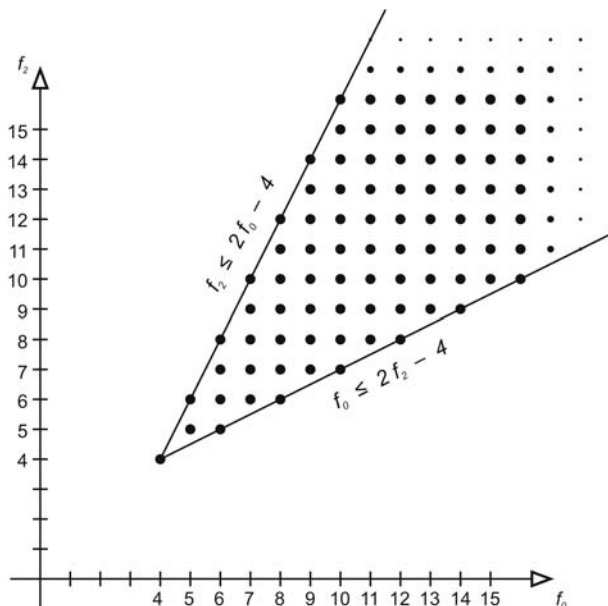
$$F_3 := \left\{ (f_0, f_1, f_2) \in R^3 : f_0 - f_1 + f_2 = 2, f_2 \leq 2f_0 - 4, f_0 \leq 2f_2 - 4 \right\} \quad (2.9)$$

Zawarte w lemacie Steinitza ograniczenia mają prostą interpretację geometryczną, przedstawioną na rysunku 2.46 [178, s. 624]:

- wszystkie wielościany muszą spełniać równanie Eulera,
- pierwsza nierówność ogranicza zbiór od góry, wyznaczając jednocześnie linię, na której leżą f -wektory *wielościanów simpleksowych*, tzn. takich, że co najwyżej $d = 3$ wierzchołków leży na jednej płaszczyźnie,

¹³⁵ Lemat ten został sformułowany w 1906 r. przez wybitnego matematyka Ernsta Steinitza, wówczas młodego „prywatnego docenta” w Technische Hochschule Berlin-Charlottenburg, w pracy *Über die Eulerschen Polyederrelationen* Archiv für Mathematik und Physik, 11 (1906) 86–88 [177, 137].

– druga nierówność ogranicza zbiór od dołu, wyznaczając linię, na której leżą f -wektory *wielościanów prostych*, tzn. takich, że każdy ich wierzchołek jest incydentny z $d = 3$ krawędziami (wielościany proste i simpleksowe są dualne).



Rys. 2.46. Zbiór wszystkich f -wektorów wielościanów ($d = 3$)

2.2.3. Równanie Kartezjusza

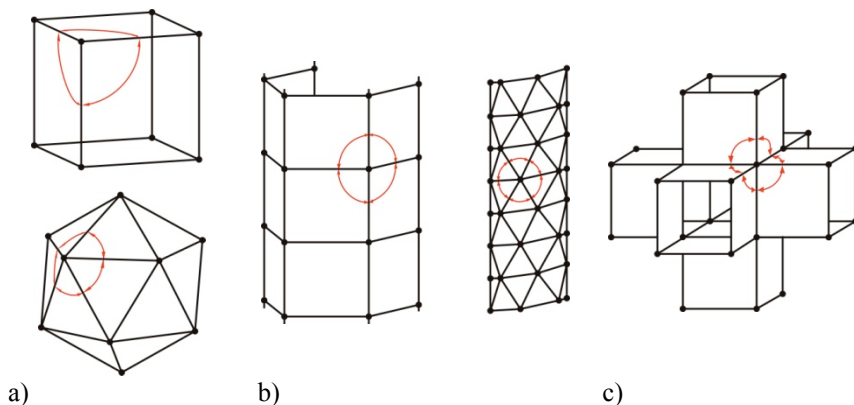
W wierzchołkach wielościanów wypukłych suma kątów zbiegających się w nich wielokątów jest mniejsza niż 360° (2π). Różnica jest oznaczana symbolem δ . Suma deficytu kątów we wszystkich wierzchołkach jest określona równaniem Kartezjusza¹³⁶ (2.10) [72, s. 274]

$$\sum_v \delta = 2\pi k \quad (2.10)$$

gdzie k oznacza charakterystykę Eulera, a sumowanie odbywa się po wszystkich wierzchołkach wielościanu.

Poniżej przedstawiono kąty wierzchołkowe dla struktur na powierzchniach o różnym genusie: $g = 0$ (rys. 2.47a), $g = 1$ (rys. 2.47b), $g = 3$ (rys. 2.47c).

¹³⁶ Kartezjusz sformułował je w pracy *De Solidorum Elementis*, patrz przypis do pkt 2.3.1.



Rys. 2.47. Kąty wierzchołkowe dla struktur na powierzchniach o różnym genusie (opis w tekście)

Dla genusu równego zero (sfera), $k = 2$, a całkowity deficyt kąta dla wielościanu wynosi 720° (4π).

Równanie Kartezjusza jest istotnym ograniczeniem w przestrzeni. Jedyne, jeśli jest spełnione, zbiór wierzchołków może tworzyć wielościan wypukły.

2.3.4. Suma stopni wierzchołków

Suma stopni wierzchołków wielościanu jest określona tzw. formułą sumy stopni (inaczej nazywaną lematem o uściskach dłoni¹³⁷) – twierdzenie 2.12a, z którego wynika bezpośrednio twierdzenie 2.12b [172, s. 25].

Twierdzenie 2.12

a) W każdym wielościanie suma stopni wszystkich wierzchołków jest liczbą parzystą, równą podwojonej liczbie krawędzi

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \quad (2.11)$$

b) W dowolnym wielościanie liczba wierzchołków o stopniach nieparzystych jest parzysta.

¹³⁷ Lemat ten sformułował L. Euler (1736). Nazwa pochodzi od wynikającego zeń wniosku, że jeżeli pewna grupa osób wita się podając sobie dłonie, to łączna liczba uściśniętych dłoni jest parzysta, gdyż w każdym uścisku uczestniczą dwie dłonie [172, s. 24–25].

2.3.5. Symetria statystyczna

Wielościanny lub ich układy, w których występuje jeden tylko typ wierzchołka, można scharakteryzować przez podanie jego walentności. Pozwala ona określić wynikające z symetrii cechy wielościannów i obowiązujące ograniczenia topologiczne. W przypadku układów całkowicie asymetrycznych, syntetyczny obraz całości można uzyskać posługując się wielkościami uśrednionymi. Na ich podstawie mogą być formułowane zależności charakteryzujące te układy. Należy podkreślić, że dla systemów regularnych wielkości uśrednione stają się wielkościami „zwykłymi”, a wynikające z nich zależności – relacjami symetrii. Dlatego w przypadku układów asymetrycznych możemy mówić o *symetrii statystycznej* [19, s. 28–32] [87, s. 17–22].

Szczególnie przydatne wielkości uśrednione to: średnia suma kątów w wierzchołku, średni deficyt kąta i średnia walentność wierzchołków.

Średnia suma kątów w wierzchołku wielościannu $\bar{\alpha}$ jest średnią arytmetyczną sumy kątów we wszystkich jego wierzchołkach. Analogicznie, średni deficyt kąta $\bar{\delta}$ wyraża całkowity deficyt kąta dla wielościannu, rozdzielony na wszystkie jego wierzchołki. Wynika z tego, że

$$\nu \bar{\delta} = \nu \left(2\pi - \sum_{\nu} \bar{\alpha} \right) = 2\pi k \quad (2.12)$$

Średnia walentność wierzchołków, $\bar{q}$, wyznaczana jako średnia arytmetyczna walentności wszystkich wierzchołków, określa intensywność połączeń pomiędzy wierzchołkami wielościannu, co w przypadku zmaterializowania wielościannu w postaci przestrzennej struktury prętowej znajduje dalej swoje odzwierciedlenie w stabilności i sztywności konstrukcji. Po przekształceniu równań (2.6) i (2.12) i zakładając, że $g = 0$, można uzyskać zależności¹³⁸ [19, s. 32]:

$$\nu = \frac{4\pi}{2\pi - \sum_{\nu} \bar{a}} \quad (2.13)$$

$$e = \frac{2\pi \bar{q}}{2\pi - \sum_{\nu} \bar{\alpha}} \quad (2.14)$$

$$f = \frac{2 \left(\pi \bar{q} - \sum_{\nu} \bar{\alpha} \right)}{2\pi - \sum_{\nu} \bar{a}} \quad (2.15)$$

¹³⁸ Analogiczne równania dla $g > 0$ podane są w pracy [19, s. 32].

Przy rozpatrywaniu przypadku dowolnego g korzysta się również z pojęcia uśrednionej liczby krawędzi na ścianę wielościanu¹³⁹, $\bar{p}$:

$$\bar{p} = \frac{2\pi q}{\pi q - \sum_v a} \quad (2.16)$$

2.3.6. Równania Möbiusa–Maxwella

Struktura o węzłach przegubowych zachowuje geometryczną niezmiennosć, jeżeli jej wierzchołki nie mogą wzajemnie zmieniać swojego położenia (z wyłączeniem odkształceń o charakterze materiałowym). Podstawowym związkiem topologicznym, określającym geometryczną niezmiennosć przestrzennych struktur prętowych o węzłach przegubowych jest równanie¹⁴⁰ (2.17) [162, s. 9] [170, s. 411].

$$e + s \geq dv \quad (2.17)$$

gdzie e , v – odpowiednio liczba krawędzi (prętów) i wierzchołków (węzłów), s – liczba więzi podporowych, d – określa wymiar przestrzeni (2 lub 3).

Dla $d = 2$ (płaszczyzna) równanie przyjmuje znaną postać warunku dla kratownic płaskich: $p \geq 2n - 3$ (liczba prętów nie mniejsza niż podwojona liczba węzłów minus trzy). Natomiast dla $d = 3$ (przestrzeń) – warunek dla kratownic przestrzennych: $p \geq 3n - 6$.

Dla przestrzennych konstrukcji płytowych, tj. takich, w których ściany wielościanów są płytami połączonymi przegubowo wzdłuż krawędzi, w sposób pozwalający na przenoszenie ścinania (zawias), warunek geometrycznej niezmiennosć przyjmuje postać¹⁴¹ (2.17) [162, s. 9]

$$e + s \geq 3f \quad (2.18)$$

gdzie e – liczba krawędzi łączących płyty (zawiasów), s – liczba punktów podparcia, f – liczba ścian (płyt).

W przestrzeni trójwymiarowej, zastąpienie struktury prętowo-płytowej strukturą do niej dualną nie zmienia jej warunków geometrycznej niezmiennosć.

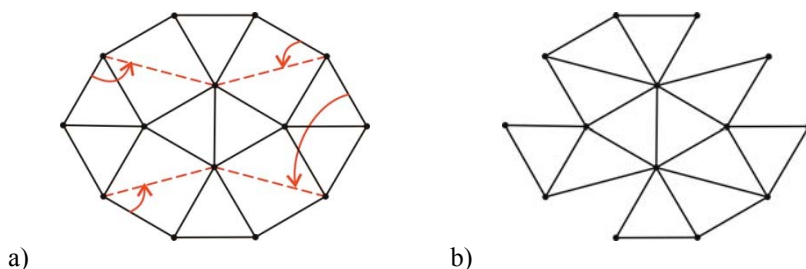
¹³⁹ Wartość $\bar{p}$ określa ile krawędzi (albo kątów) ma średnio faseta wielościanu.

¹⁴⁰ Równanie to zostało podane po raz pierwszy przez Augusta Ferdynanda Möbiusa, w pracy *Lehrbuch der Statik*, Leipzig 1837, jednak pozostało w zasadzie nieznane i sformułowane ponownie przez J.C. Maxwella w roku 1864 [146, s. 321–322].

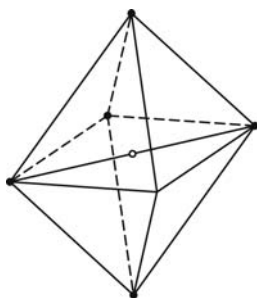
¹⁴¹ Równanie to podał Ture Wester w 1984 r. – patrz [162, s. 9].

Warunki (2.17) i (2.18) są warunkami koniecznymi, ale niewystarczającymi do zapewnienia geometrycznej niezmienności systemu. Na przykład dla płaskiej konstrukcji prętowej¹⁴², dla której $v = 14$, $e = 25$, spełniony jest warunek $e = 25 \geq 2v - 6 = 25$. Jednak konstrukcja ta dla jednej konfiguracji prętów nie jest geometrycznie niezmienna (rys. 2.48a), podczas gdy dla innej konfiguracji, powstałej poprzez przekształcenie polegające na przeniesieniu prętów bez zmiany położenia wierzchołków (rys. 2.48b) – jest.

Podobnie można przedstawić konstrukcję, która nie spełnia warunku (2.18), a jest sztywna [72, s. 272]. Jest to czworościan z dodatkowym wierzchołkiem (rys. 2.49). Warunek geometrycznej niezmienności $e = 14 \geq 3v - 6 = 3 \times 7 - 6 = 15$ nie jest spełniony, a mimo to konstrukcja jest sztywna. Jednakże w tym wypadku nieskończenie małe przemieszczenia nie są możliwe, a węzły mogą się wirtualnie przemieszczać. W praktycznym sensie oznacza to geometryczną zmienność konstrukcji.



Rys. 2.48. Przykłady konstrukcji spełniających warunek (2.13), ale różniących się geometryczną niezmiennością (opis w tekście)



Rys. 2.49. Przykład konstrukcji, która nieskończenie małe przemieszczenia nie są możliwe, a węzły mogą się wirtualnie przemieszczać (opis w tekście)

¹⁴² Przykład pochodzi od Artura Loeba, za [72, s. 273].

2.4. Uwagi końcowe

W niniejszym rozdziale przedstawiono ogólną koncepcję matematycznego języka formy, w odniesieniu do kształtowania systemów konstrukcyjnych w architekturze. Podstawową ideą tej koncepcji jest to, że formy strukturalne są systemem połączonych obiektów różnych klas. Niezależnie od klasy, obiekty są opisywane za pomocą kilku charakterystyk topologicznych, takich jak walentność, stopnie swobody, genus, i charakterystyk geometrycznych, jak deficyt kąta. Charakterystyki te decydują o wzajemnych relacjach obiektów, które są sformułowane w podstawowych zależnościach, takich jak równanie Eulera, równanie Möbiusa–Maxwella i równanie Kartezjusza. Dla dużych konfiguracji obiektów, przydatne okazuje się stosowanie charakterystyk o wartościach statystycznie uśrednionych. Przytoczono również najczęściej stosowane sposoby notacji, ułatwiające opis obiektów. Podane zostały sposoby określania cech indywidualnych obiektów, jak wypukłość, planarność i symetria.

Jak zostanie pokazane w dalszej części pracy, za pomocą takiego opisu, można usystematyzować różne obiekty, zbadać ich cechy strukturalne, określić metody łączenia w zespoły. W kolejnych rozdziałach przedstawiono sposób posługiwania się językiem formy i zastosowanie go do kształtowania form strukturalnych.

Rozdział 3. Topologiczne modele form strukturalnych

Przestrzeń nie jest pasywną próżnią; ma właściwości, które ograniczają istniejące w niej struktury.

A.L. Loeb¹⁴³

Istotą tworzenia form strukturalnych jest podział jednych obiektów w przestrzeni za pomocą innych, w uporządkowany hierarchicznie sposób. Sposób podziału i jego porządek decydują o efektywności uzyskanej formy.

Umiejętność podziału i wypełniania płaszczyzny i przestrzeni za pomocą powtarzalnych elementów wykształciła się w bardzo wczesnym okresie rozwoju cywilizacji. Gdy człowiek zaczął używać kamienia do układania posadzek (rys. 3.1a) i budowy ścian (rys. 3.1b) swoich domów, dokonywał doboru i selekcji ich wielkości, kształtu i kolorów.



a)



b)

Rys. 3.1. Przykłady prostych układów elementów kamiennych:

- a) posadzka z płytek betonowych, Zakopane,
- b) fragment ściany wiejskiego budynku, wyspa Gomera

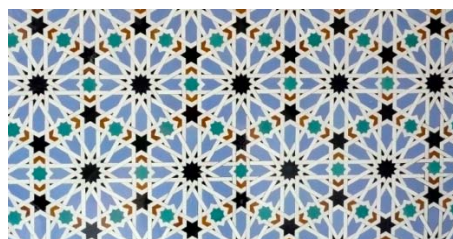
¹⁴³ Artur L. Loeb: *Concepts and Images* [88, s. 1].

Właściwości ludzkiego umysłu doprowadziły do przekształcenia tych, początkowo jedynie utylitarnych czynności, w sztukę tworzenia za pomocą obiektów geometrycznych – wzorów, często skomplikowanych, które pojawiały się wśród ludów o różnym stopniu rozwoju cywilizacyjnego. Były one – i są nadal – plecione (rys. 3.2a), tkane, rzeźbione, malowane lub układane na ścianach i posadzkach świątyń, pałaców (rys. 3.2b) i innych budynków.

Powiązanie tej tradycji z matematycznym językiem formy pozwala dostrzec jej głębokie znaczenie i znaleźć zastosowanie do kształtowania współczesnych form strukturalnych¹⁴⁴.



a)



b)

Rys. 3.2. Przykład wyrobów rzemiosła artystycznego opartych o powtarzalne podziały powierzchni:

- a) tradycyjny japoński pleciony koszyk *kagome*,
- b) fragment mozaiki z pałacu Alhambra w Grenadzie

3.1. Tesselacje

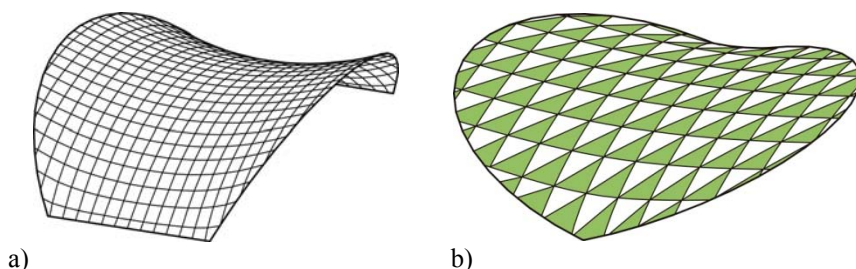
Obiekt geometryczny (lub inaczej rozmaitość¹⁴⁵), jak pokazano w poprzednim rozdziale, może mieć $d = 1, 2, 3, \dots, n$ wymiarów. Jego podział następuje poprzez rozmieszczenie innych obiektów, o tej samej lub mniejszej liczbie wymiarów.

Może to następować przez podziały lub przez wypełnienia. Różnica między podziałem a wypełnieniem odnosi się raczej do interpretacji sposobu powstawania określonych wzorów, niż do efektu końcowego, który może być w obu przypadkach identyczny. Dla uproszczenia, w dalszej części wywodu będzie używane określenie

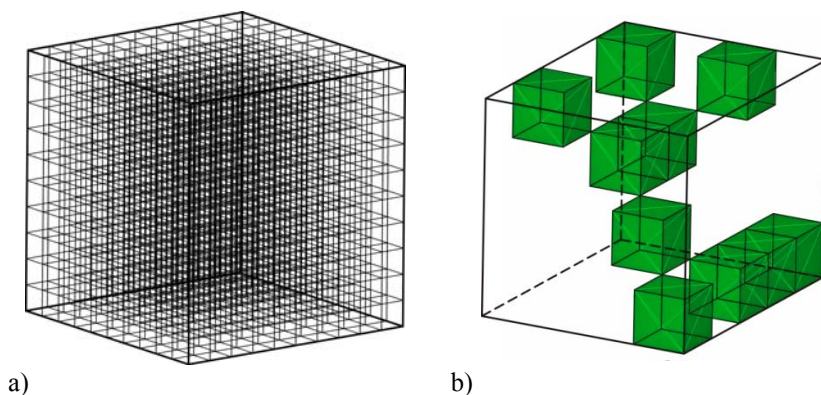
¹⁴⁴ Richard B. Fuller zauważył, że „...wzory mają swoją integralność, niezależnie od medium, przez które otrzymujemy informację, że istnieją. Każdy pierwiastek chemiczny jest integralnym wzorem. Każda jednostka ludzka jest integralnym wzorem. Integralność wzorca ludzi jest ewolucyjna, a nie statyczna”. W: *Synergetics: Explorations in the Geometry of Thinking* (1975), *Pattern Integrity* 505.201.

¹⁴⁵ Patrz pkt 2.2.1.

*tesselacja*¹⁴⁶ na oznaczenie obu tych sposobów tworzenia wzorów. W języku formy tesselację, powstałą przez wypełnienie, można określić definicją 3.1 [58, s. 16].



Rys. 3.3. Tesselacje powierzchni ($d = 2$): a) podział, b) wypełnienie



Rys. 3.4. Tesselacje przestrzeni ($d = 3$): a) podział, b) wypełnienie

Definicja 3.1. *Tesselacja – wypełnienie przestrzeni*¹⁴⁷ T , jest to przeliczalna rodzina zamkniętych zbiorów $T = \{T_1, T_2, \dots\}$, które wypełniają przestrzeń bez odstępów i bez nakładania się.

Zbiory $T_1, T_2, \dots$ są nazywane *plytkami*¹⁴⁸ T . Wnętrza zbiorów T_i są parami rozłączne. Wierzchołki i krawędzie tesselacji tworzą siatkę.

Zdefiniowanie podziału jest nieco trudniejsze, gdyż, poza intuicyjnym rozumieniem tego określenia, możliwych jest wiele sytuacji szczególnych. Definicja odwo-

¹⁴⁶ Jest to odpowiednik ang. *tesselation*. W literaturze polskiej spotyka się również określenie *parkietaż*, np. [131, s. 77–11]. Określenie to jednak kładzie nacisk na jeden tylko aspekt omawianego problemu: wypełniania obiektami o tej samej liczbie wymiarów (ang. *tilings*), pozostawiając z boku drugi ważny aspekt: podziały (ang. *patterns*) [116, s. 1–14].

¹⁴⁷ Dotyczy to zarówno przestrzeni $d = 3$, jak i $d = 2$.

¹⁴⁸ Spotykane jest również określenie *kafelki*.

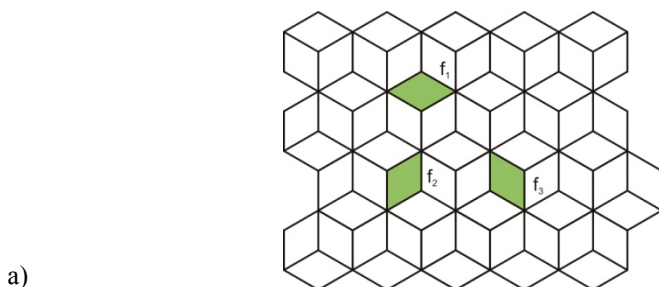
luje się do pojęcia *motywu* – powtarzalnego elementu podziału. Przez motyw rozumiemy dowolny niepusty zbiór płaski. Poniżej zdefiniowany zostanie *podział jednomotywowy*, który jest najistotniejszy, w aspekcie dalszych rozważań [58, s. 204].

Definicja 3.2. *Tesselacja – podział jednomotywowy*¹⁴⁹ P , motywem M jest to niepusta rodzina zbiorów na płaszczyźnie, oznaczonych zbiorem indeksującym I , taka że:

- a) każdy M_i przystający do M_j jest nazywany kopią M ,
- b) dla każdej pary M_i, M_j kopii motywu istnieje izometria płaszczyzny, która mapuje P na siebie oraz M_i na M_j .

Izometria, o której mowa w definicji 3.2 nazywa się symetrią wzoru P . Zbiór wszystkich takich symetrii tworzy grupę symetrii P i jest oznaczany $S(P)$. Z warunku b definicji 3.2 wynika, że $S(P)$ działa tranzytywnie na kopie M w P .

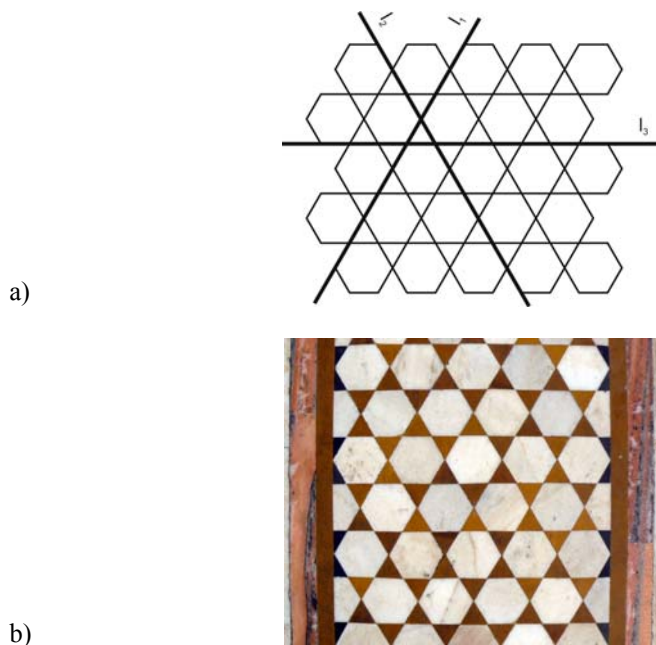
Podstawową różnicę pomiędzy podziałem i wypełnieniem przedstawiono na przykładzie posadzek kamiennych świątyni sikhijskiej Gurudwara Bangla Sahib w Delhi. Posadzka z rysunku 3.5a może zostać przedstawiona jako układ trzech zbiorów płytek f_1, f_2, f_3 , które są układane obok siebie (rys. 3.5b). Geometrycznie, płytki są takimi samymi wielokątami, a zróżnicowanie dotyczy jedynie ich koloru. Jest to więc wypełnienie powierzchni.



Rys. 3.5. Tesselacja – przykład wypełnienia powierzchni: a) schemat, b) posadzka w świątyni sikhijskiej (Gurudwara Bangla Sahib) w Delhi

¹⁴⁹ Podział jednomotywowy będzie w dalszej części pracy zamiennie nazywany *wzorem*.

Posadzka z rysunku 3.6a może zostać narysowana na płaszczyźnie jako trzy rodziny równoległych linii l_1 , l_2 i l_3 , które przecinając się, tworzą wzór posadzki¹⁵⁰ (rys. 3.1b). Jest to zatem podział powierzchni, a linie są motywami wzoru.



Rys. 3.6. Tesselacja – przykład podziału powierzchni: a) schemat, b) posadzka w świątyni sikhijskiej (Gurudwara Bangla Sahib) w Delhi

3.2. Podziały i wypełnienia płaszczyzny ($d = 2$)

Do symbolicznego oznaczania tesselacji na płaszczyźnie może być stosowany symbol Schläfliego lub notacja konfiguracji wierzchołków według zasad podanych w rozdziale 2.2.3. Z definicji 3.1 wynika, że przecięcie każdego skończonego zbioru płytek T (zawierającego co najmniej dwie różne płytki) musi mieć powierzchnię zerową. Takie przecięcie, zawierające pojedynczy punkt, jest nazywane wierzchołkiem, a linie pomiędzy wierzchołkami – krawędziami [58, s. 17].

Za najważniejsze kryterium klasyfikacji tesselacji uważa się obecnie ich symetrię, określaną przez grupy symetrii [28, s. 3], [58, s. 37]. Ze względu na to

¹⁵⁰ W sensie technicznym, posadzka jest wypełnieniem, gdyż została wykonana z układanych obok siebie kawałków marmuru.

kryterium podzielono podziały i wypełnienia płaszczyzny według tego, czy ich grupa symetrii zawiera translację.

3.2.1. Podziały periodyczne

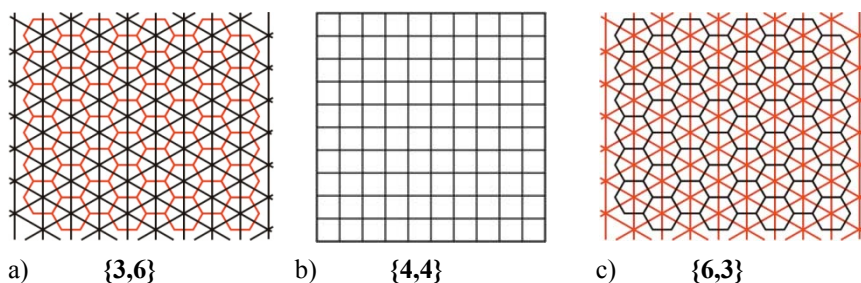
Jeżeli grupa symetrii tesselacji zawiera symetrię translacyjną, to jest nazywana *tesselacją periodyczną*. Tesselacje płaszczyzny bardzo często mają grupę symetrii zawierającą dwie niezależne translacje. Nazywane są wtedy *tesselacjami podwójnie periodycznymi*. Ze względu na swoje walory estetyczne, takie tesselacje były szczególnie chętnie stosowane przy wykonywaniu wzorów, ozdób i dekoracji [89, s. 9]. Jedną ze specyficznych cech takich tesselacji podaje twierdzenie (3.1) [58, s. 38].

Twierdzenie 3.1. *Jeżeli symetria tesselacji T , $S(T)$ zawiera translację, to zawiera ich nieskończoną liczbę.*

Jeżeli wszystkie płytki w tesselacji T są przystające, tzn. są tej samej wielkości i tego samego kształtu, jak np. na rys. 3.5a, z pominięciem koloru, to tesselację taką nazywamy *jednościnną*¹⁵¹ [58, s. 20]. Powtarzająca się płytka nazywana jest *protopłytką*¹⁵². Takie tesselacje są również nazywane *tesselacjami regularnymi*, gdyż spełniają warunki [171, s. 35]:

- wszystkie wielokąty podziału są przystające,
- wszystkie wielokąty są regularne,
- wszystkie wierzchołki są przystające, tzn. są tego samego stopnia (mają tę samą walentność).

Istnieją tylko trzy regularne tesselacje na płaszczyźnie: trójkątna, czworokątna i sześciokątna [131, s. 78]. Przykłady tych tesselacji są przedstawione na rysunku 3.7. Można zauważyć, że siatka trójkątna i sześciokątna są do siebie dualne.

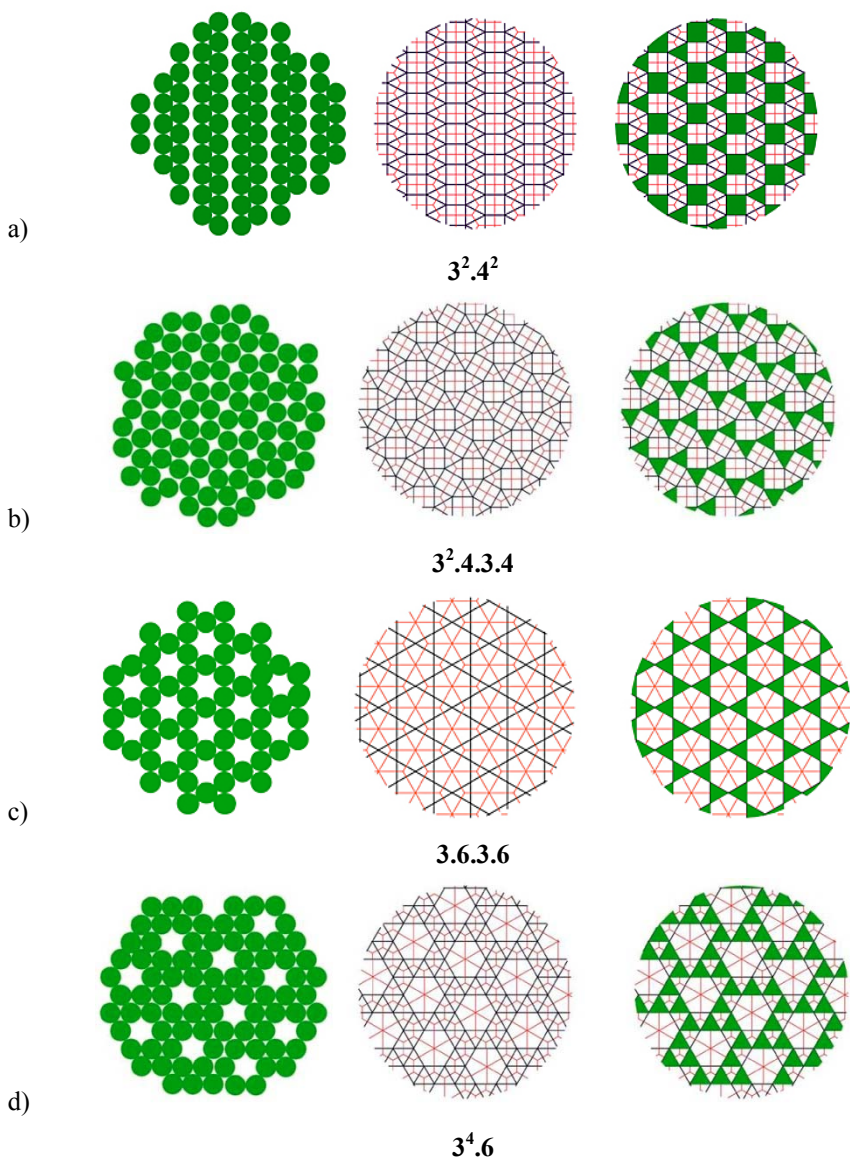


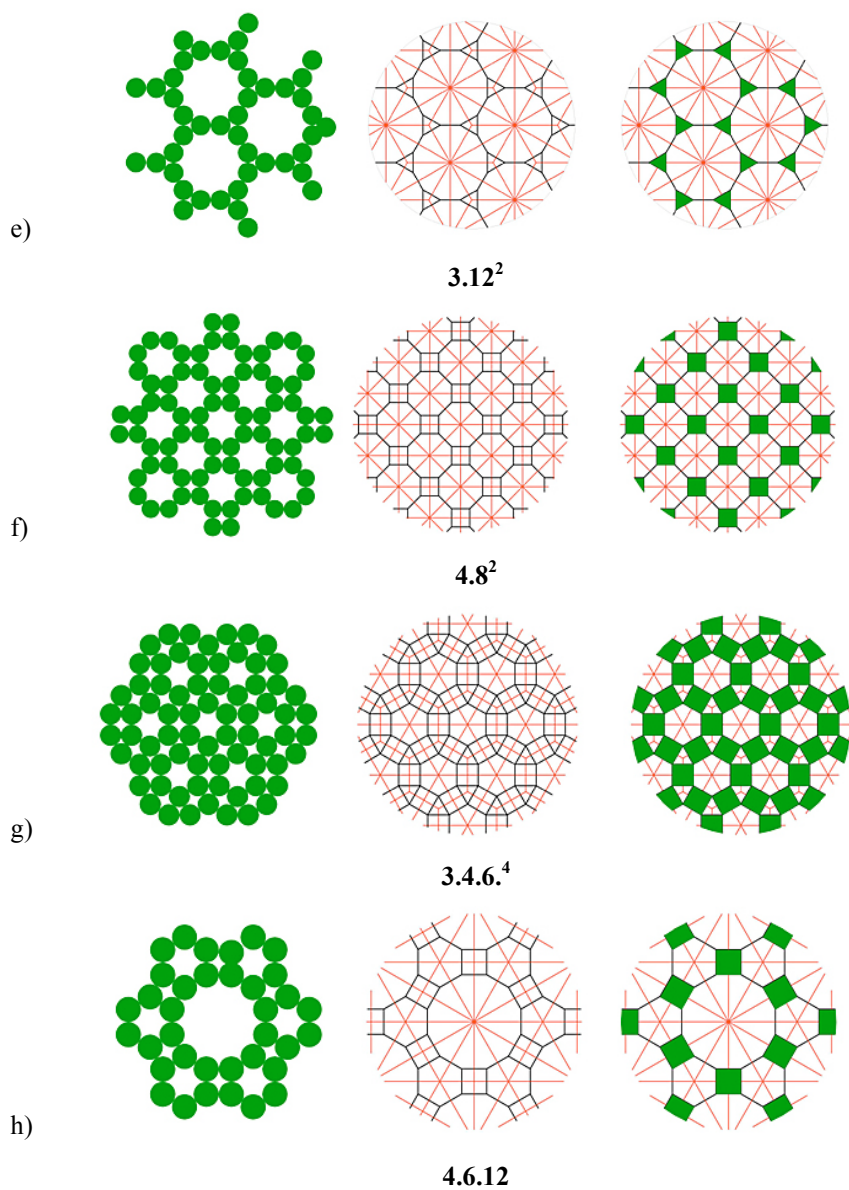
Rys. 3.7. Trzy regularne tesselacje płaszczyzny: a) trójkątna, b) czworokątna, c) sześciokątna

¹⁵¹ Ang. *monohedral*.

¹⁵² Ang. *prototile*.

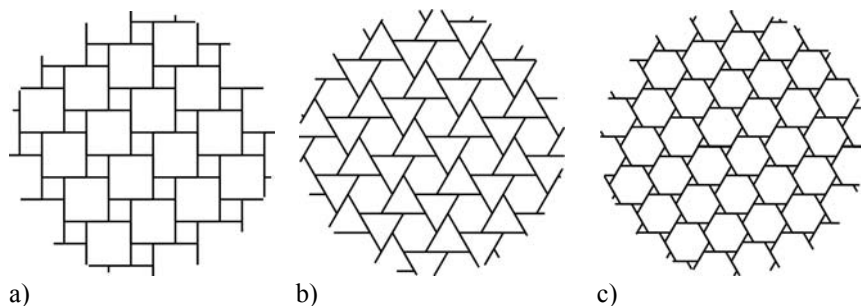
Jeżeli zrezygnujemy z warunku, aby wszystkie wielokąty podziału były przystające, to uzyskujemy osiem nowych siatek spełniających pozostałe warunki, które nazywamy *tesselacjami półregularnymi* lub *archimedejskimi*, których przykłady, wraz z tesselacjami dualnymi i upakowaniami okręgów, na których mogą być zbudowane, podano poniżej (rys. 3.8) [171, s. 37].





Rys. 3.8. Tesselacje półregularne (archimedejskie)

Przez usunięcie wybranych wierzchołków z tesselacji regularnych i półregularnych można uzyskać tesselacje o wielokątach regularnych, ale nieprzystających (rys. 3.9) [171, s. 42].

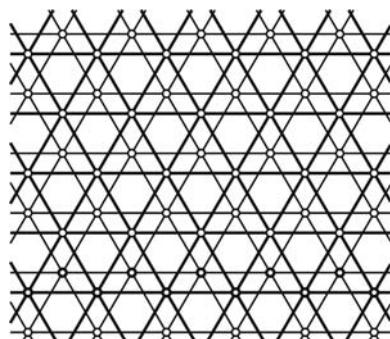


Rys. 3.9. Tesselacje o wielokątach regularnych ale nieprzystających, otrzymanych z tesselacji:
a) $\{4,4\}$, b) $\{3,6\}$, c) $3^4.6$

Uderzające podobieństwo łączy tesselacje przedstawione na rysunku 3.9, z konstrukcjami *ram wzajemnie zależnych*¹⁵³. Konstrukcje takie, często drewniane, stosowane były od bardzo dawna zarówno jako proste konstrukcje ciesielskie, jak i ozdobne przekrycia sal, a także konstrukcje mostów itp.¹⁵⁴ [116, s. 5–18].

Grupy symetrii tesselacji płaskich najczęściej zawierają obroty. Istnieje jednak ograniczenie, nazywane *restrykcją krystalograficzną*, które podaje dopuszczalne kąty obrotu, jakie mogą wystąpić (twierdzenie 3.2) [29, s. 63].

Twierdzenie 3.2. *Jeżeli dyskretna grupa przemieszczeń na płaszczyźnie ma więcej niż jeden środek obrotu, to jedynymi obrotami, które mogą wystąpić, są obroty 2-krotne, 3-krotne, 4-krotne i 6-krotne.*

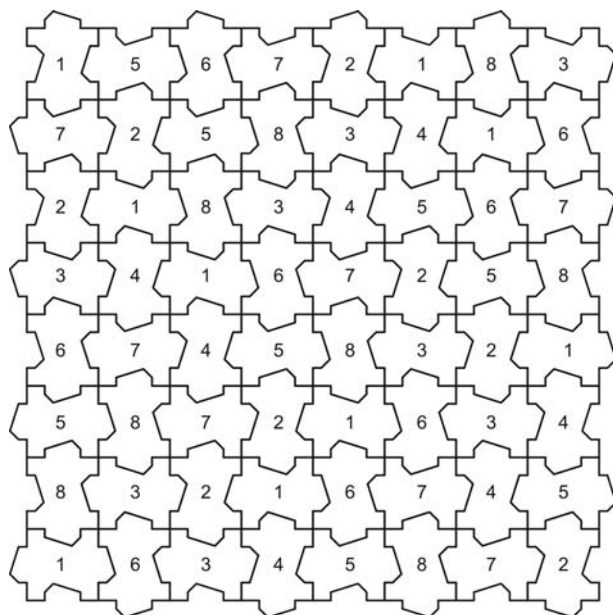


Rys. 3.10. Tesselacja o 3-krotnej symetrii obrotowej

¹⁵³ Ang. *reciprocal frames*, w języku polskim brak jest ustalonego odpowiednika tego określenia.

¹⁵⁴ Układy konstrukcyjne tego typu wykonywano już w neolicie. W późniejszych epokach znane są szkice Villarda de Honnecourt i – przede wszystkim – rysunki Leonardo da Vinci (Kodeks Madrycki I i Kodeks Atlantycki). Współcześnie, układ taki ma np. żelbetowe przekrycie sali Filharmonii Berlińskiej, proj. Hansa Scharouna [116, s. 5–18].

Na podstawie tego twierdzenia, tesselacje nie mogą być obracane o kąty inne niż $2\pi/2$, $2\pi/3$, $2\pi/4$ i $2\pi/6$, a zwłaszcza nie może wystąpić 5-krotna symetria obrotowa (o kąt $2\pi/5$) Poniżej przedstawiono przykład siatki o 3-krotnej symetrii obrotowej (rys. 3.10) [29, s. 61] oraz o 4-krotnej symetrii obrotowej (rys. 3.11) [51, s. 12].



Rys. 3.11. Tesselacja o 4-krotnej symetrii obrotowej
(fragment powtarzalny – numery oznaczają rodzaje płytek)

3.2.2. Podziały aperiodyczne

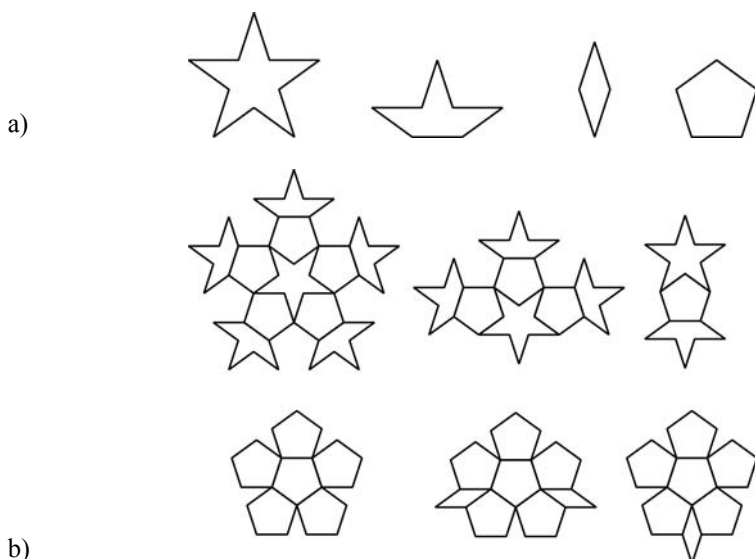
Aperiodyczne podziały przestrzeni zostały odkryte w latach 70. ubiegłego wieku przez Rogera Penrose’a, a następnie – niezależnie – przez Roberta Ammanna¹⁵⁵. Tony Robin zauważa, że „...aż do tego momentu, wzór oznaczał motyw powtarzający się w regularnych odstępach¹⁵⁶” [122, s. 61]. Wzory aperiodyczne

¹⁵⁵ Wcześniej, w 1964 r., Robert Berger odkrył wzór aperiodyczny, składający się z ponad dwudziestu tysięcy różnych płytek. Ze względu na widoczną nieprzydatność praktyczną tego wzoru, moment ten jest uznawany jedynie za początek poszukiwania wzorów aperiodycznych [122, s. 61].

¹⁵⁶ T. Robin dodaje też, że miało to wpływ również na takie przełomowe rozwiązania technologiczne, jak krosno, czy prasa drukarska, które służyły do produkcji powtarzalnych wzorów.

nie mogą być przekształcone same na siebie przez translację, jednak wykazują 5-krotną symetrię obrotową, która była wykluczona przez restrykcję krystalograficzną.

Pierwszy z podziałów aperiodycznych odkrytych przez Penrose'a, oznaczany obecnie P1, składał się z czterech elementów (rys. 3.12a). Aby zapewnić aperiodyczność wzoru, konieczne jest składanie elementów w taki sposób, żeby sąsiadujące krawędzie były oznaczone tymi samymi numerami (dlatego pięciokąty występują w trzech odmianach, różniących się oznaczeniami krawędzi, co w efekcie daje sześć różnych płytek) (rys. 3.12b) [58, s. 531–532].



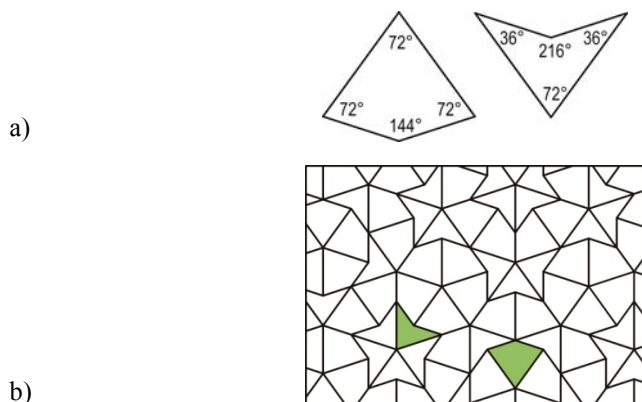
Rys. 3.12. Parkietaż Penrose'a P1: a) cztery elementy powtarzalne (płytki) – pięciokąt występuje trzykrotnie, z różnymi oznaczeniami wierzchołków, b) sześć podstawowych bloków, w których występują płytki

Nieco później, Penrose odkrył dwa przykłady podziałów aperiodycznych, które wymagały zastosowania jedynie dwóch różnych elementów powtarzalnych: P2, składający się z „latawców” i „strzałek”¹⁵⁷ (rys. 3.13) i P3 – składający się z „grubych” i „chudych” rombów¹⁵⁸ (rys. 3.14) [58, s. 539–543].

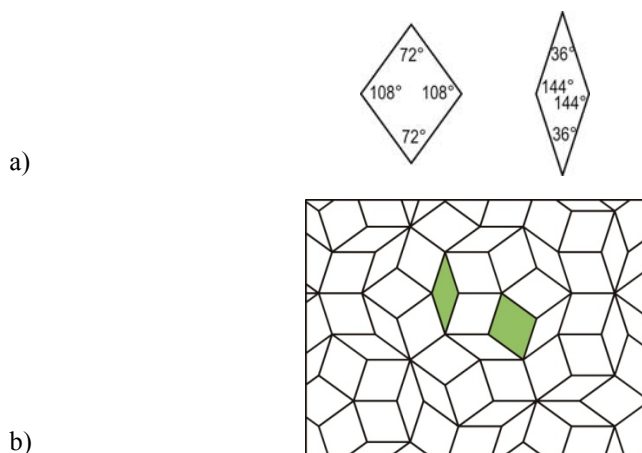
Podobnie jak w przypadku podziału Penrose'a P1, również podziały P2 i P3 wymagały stosowania odpowiednich reguł składania. Możliwe jest ich takie ułożenie, że wzór nie będzie aperiodyczny. Problem ten był rozwiązywany poprzez odpowiednie kolorowanie wierzchołków albo ich oznaczanie w inny sposób.

¹⁵⁷ Ang. „kites and darts”.

¹⁵⁸ Ang. „fat and thin rhombi”.



Rys. 3.13. Parkietaż Penrose'a P2: a) elementy powtarzalne (płytki),
b) fragment wzoru

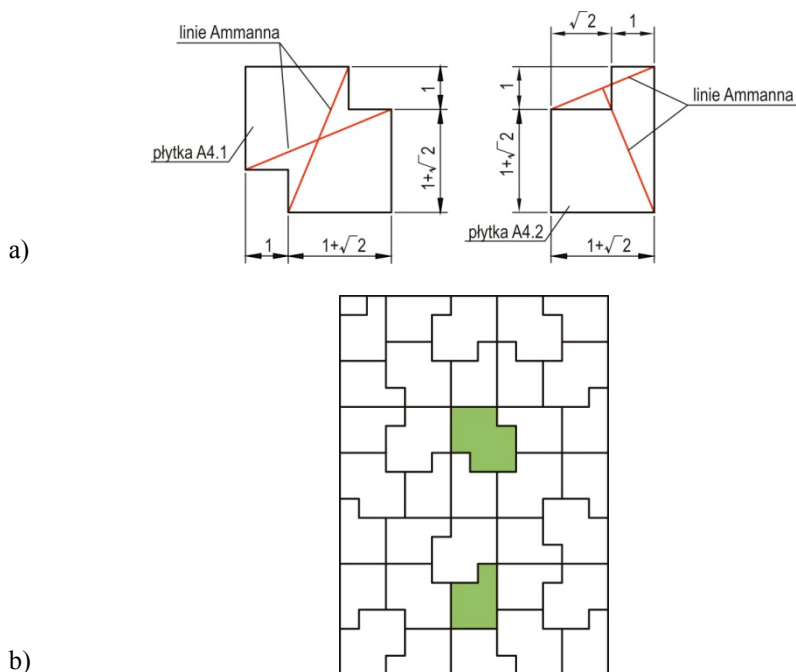


Rys. 3.14. Parkietaż Penrose'a P3: a) elementy powtarzalne (płytki),
b) fragment wzoru

Niemal równocześnie z Penrosem, Robert Ammann odkrył kilka innych zbiorów, również dwuelementowych, które umożliwiały aperiodyczne wypełnienie płaszczyzny¹⁵⁹. Spośród pięciu odkrytych przez niego zbiorów poniżej przedstawiono dwa: A4, składający się z prostokątów z odpowiednio wyciętymi narożnikami (rys. 3.15) i A5 – składający się z kwadratu i rombu¹⁶⁰ (rys. 3.16). Podziały te są wzajemnie dualne (rys. 3.17) [5, s. 2–4].

¹⁵⁹ R. Ammann odkrył swoje zbiory aperiodyczne w 1977 r. [58, s. 550]. Fascynującą historię życia tego genialnego samouka przedstawiła M. Senechal w pracy [126].

¹⁶⁰ Zaskakujące jest, że rysunek, odpowiadający parkietażowi Ammanna A5, znajduje się w XI-wiecznym komentarzu anonimowego autora, do traktatu perskiego matematyka Abu



Rys. 3.15. Parkietaż Ammanna A4: a) elementy powtarzalne (płytki),
b) fragment wzoru

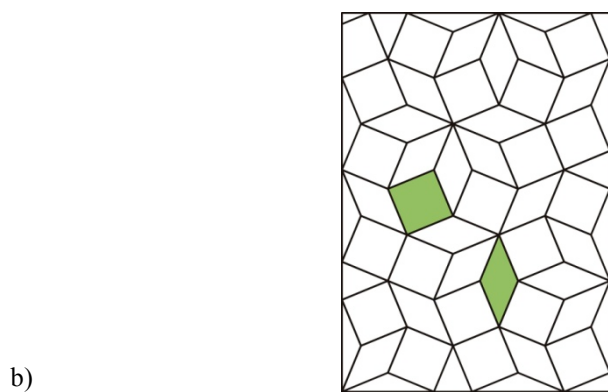
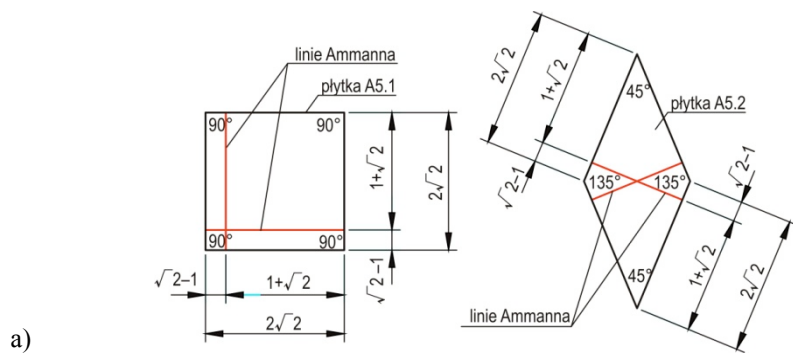
Ammann opracował również zupełnie nowy sposób zapewniania właściwego ułożenia płytek podziału: linie, nazwane od jego nazwiska *liniami Ammanna*¹⁶¹. Są to odcinki wewnątrz elementów powtarzalnych (zaznaczone na rys. 3.15a i 3.16a czerwonymi liniami). Zasada układania płytek z liniami Ammanna jest taka, że linie te muszą tworzyć w całym wzorze linie proste. Zachowanie tego warunku zapewnia aperiodyczność otrzymanego wzoru (rys. 3.18) [58, s. 552].

Ciekawą właściwością linii Ammanna jest to, że wyabstrahowane od swojego pierwotnego przeznaczenia, znalazły zastosowanie w zupełnie innych dziedzinach, np. w fizyce [91]. Wynika to niewątpliwie z silnego powiązania reguł tworzenia tych linii ze znanymi systemami proporcji. Szerzej to zagadnienie zostało omówione w pktcie 6.5. Parkietaże Ammanna i siatki linii Ammanna cechują się ponadto samopodobieństwem o charakterze fraktalnym¹⁶² (rys. 3.20).

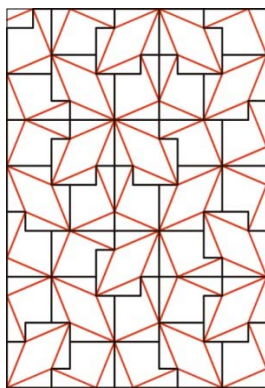
1-Wafy al Buzdżaniego (940–998), pt. *O tym, co z konstrukcji geometrycznych jest niezbędne dla rzemieślników*. Rękopis jest przechowywany we francuskiej Bibliotece Narodowej w Paryżu, w dziale rękopisów perskich, poz. 169. Znajdujący się na karcie 194a rysunek, nie jest opatrzony wyjaśnieniem [17, s. 334]. Tłumaczenie całego tekstu na język rosyjski, wraz z opracowanymi ilustracjami, znajduje się w załączniku do pracy [17].

¹⁶¹ Ang. *Ammann bars*.

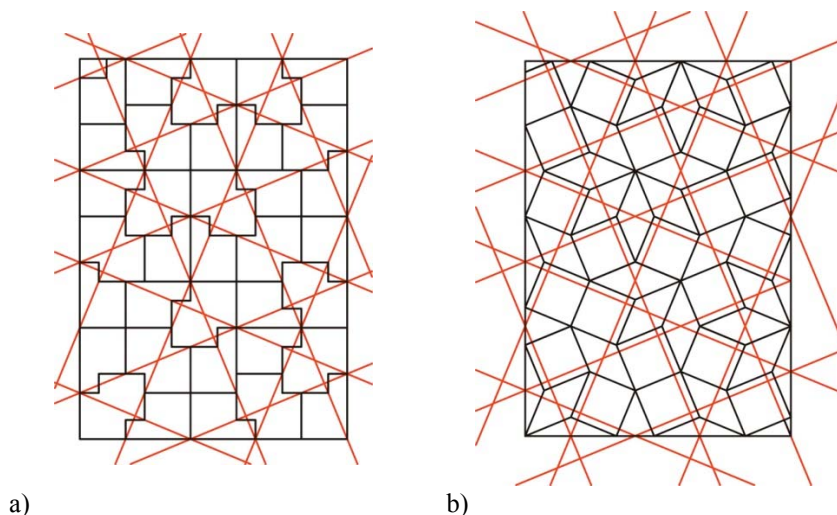
¹⁶² Patrz rozdz. 3.2.3 i 6.5.1.



Rys. 3.16. Parkietaż Ammanna A5: a) elementy powtarzalne (płytki),
b) fragment wzoru



Rys. 3.17. Dualność parkietaży Ammanna
A4 i A5



Rys. 3.18. Przykład parkietaży aperiodycznych z zaznaczonymi liniami Ammanna:
a) parkietaż A4, b) parkietaż A5

Innym, dość nieoczekiwanym odkryciem, było odnalezienie cech aperiodycznego parkietażu Penrose'a w motywach islamskiej dekoracji niektórych meczetów, np. Wielkiego Meczetu w Nayriz, w Iranie. Zostało to szczegółowo opisane w pracach [90] i [169].

3.2.3. Symetria tessellacji na płaszczyźnie

Studia nad różnymi rodzajami hierarchicznego uporządkowania tessellacji płaszczyzny doprowadziły do wypracowania spójnego sposobu opisu poprzez charakteryzujące je grupy symetrii [51, s. 7].

Wyróżnia się 17 tzw. *krystalograficznych grup symetrii*¹⁶³. Grupy te są definiowane przez ilość i rodzaj przekształceń symetrycznych. Są to jedyne grupy symetrii dla tessellacji na płaszczyźnie¹⁶⁴. W tabeli 3.1 zestawiono przekształcenia dla poszczególnych grup [31, wyd. pol, s. 74]. Tabela ta zawiera:

- 4 grupy bez rotacji (p1, pg, pm, cm),
- 5 grup z 2-krotną symetrią obrotową (p2, pgg, pmg, pmm, cmm),
- 3 grupy z 3-krotną symetrią obrotową (p3, p31m, p3m1),
- 3 grupy z 4-krotną symetrią obrotową (p4, p4m, p4g),
- 2 grupy z 6-krotną symetrią obrotową (p6, p6mm).

¹⁶³ Grupy te nazywane są też *grupami symetrii tapet*, ang. *wallpaper symmetry group*.

¹⁶⁴ Klasyfikacja ta została przedstawiona przez matematyka G. Pólya w pracy *Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene*. Zeitschrift für Kristallografie, 60 (1924) 278–282.

Poniżej przedstawiono przykład tesselacji – fragment dekoracji pałacu Alhambra w Grenadzie. Można w niej wyróżnić niezależnie dwie grupy symetrii. Wzór, rozpatrywany jako jednobarwny, ma grupę p3. Uwzględnienie koloru powoduje eliminację symetrii wzoru i barwna dekoracja ma grupę symetrii p1 (rys. 3.19) [56, s. 644].

Tabela 3.1. Krystalograficzne grupy symetrii na płaszczyźnie

Symbol ¹⁶⁵	Generatory
p1	Dwie translacje
p2	Trzy półobroty
pm	Dwa odbicia i jedna translacja
pg	Dwa równoległe odbicia z poślizgiem
cm	Jedno odbicie i jedno równoległe odbicie z poślizgiem
pmm	Odbicia w czterech bokach prostokąta
pmg	Jedno odbicie i dwa półobroty
pgg	Dwa prostopadłe odbicia z poślizgiem
cmm	Dwa odbicia prostopadłe i jeden półobrót
p4	Jeden półobrót i jeden ćwierćobrót
p4m	Odbicia w trzech bokach trójkąta (45°, 45°, 90°)
p4g	Jedno odbicie i jeden ćwierćobrót
p3	Dwa obroty o 120°
p3m1	Jedno odbicie i jeden obrót o 120°
p31m	Odbicia w trzech bokach trójkąta równobocznego
p6	Jeden półobrót i jeden obrót o 120°
p6m	Odbicia w trzech bokach trójkąta (30°, 60°, 90°)

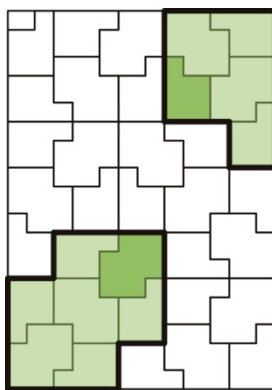


Rys. 3.19. Fragment mozaiki z pałacu Alhambra w Grenadzie – przykład tesselacji o dwóch, niezależnych grupach symetrii: p3 (wzór jednobarwny) i p1 (wzór kolorowy)

¹⁶⁵ Symbole przyjęte przez Międzynarodową Unię Krystalograficzną (IUC) w 1952 r. [28, s. 416].

Ciekawostką jest fakt, że w dekoracjach pałacu Alhambra zidentyfikowano aż 13, spośród 17 wymienionych grup symetrii. Co więcej, najprawdopodobniej pozostałe 4 grupy nie występują w ogóle w sztuce islamskiej [56, s. 642–643].

W ostatnim okresie zauważono jednak, że nie wszystkie cechy uporządkowania można opisać za pomocą 17 grup symetrii. Przykładem takiej cechy jest samopodobieństwo wzorów [51, s. 2]. Jest to dobrze widoczne na przykładzie parkietu Ammanna A4. Każda płytki z tego zbioru może być całkowicie podzielona za pomocą takich samych, ale proporcjonalnie mniejszych płytek. Także odwrotnie – może ona stanowić element podziału takiej samej, ale proporcjonalnie większej płytki (rys. 3.20). Taki proces proporcjonalnego powiększania lub pomniejszania płytek parkietu nazywany jest odpowiednio *inflacją* lub *deflacją* [58, s. 534]. Formalizm matematyczny, wiążący się z tym procesem, jest opisany w rozdziale 6.5.1.



Rys. 3.20. Samopodobieństwo parkietu Ammanna A4
(opis w tekście)

3.3. Podziały i wypełnienia przestrzeni ($d = 3$)

Dla kształtowania form strukturalnych w przestrzeni dysponujemy większym zestawem środków wyrazu, niż w przypadku płaszczyzny. W tym ostatnim, interesujące były w zasadzie tylko krawędzie elementów tworzących wzory, gdyż tylko im można przypisać funkcje w tworzonej strukturze. Dzieląc przestrzeń, możemy korzystać zarówno z krawędzi ($d = 1$), z powierzchni ($d = 2$), jak i z brył ($d = 3$). Wszystkie te elementy mogą występować razem lub rozdzielnie i wszystkim można przypisać funkcje strukturalne.

3.3.1. Siatki przestrzenne

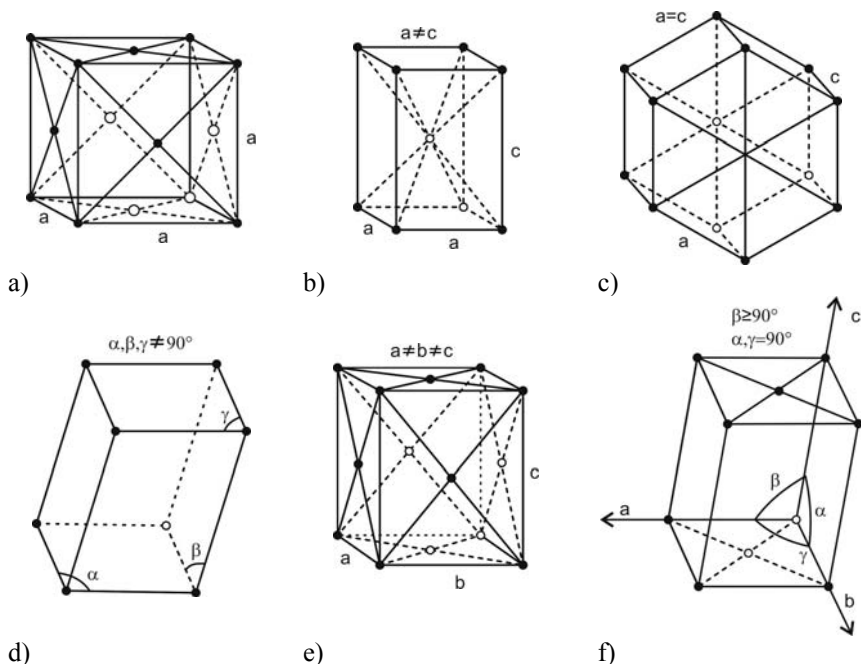
Siatki przestrzenne są konfiguracjami punktów w przestrzeni, mającymi z definicji trzy niezależne symetrie translacyjne. Są zatem *potrójnie periodyczne*. Siatki przestrzenne, nazywane też krystalicznymi są zbudowane w taki sposób, że pewna konfiguracja punktów, nazywana komórką powtarza się wielokrotnie [89, s. 32–35].

Definicja 3.3. Siatką w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej E^3 nazywamy zbiór punktów, których wektory położenia mają postać:

$$\mathbf{Z} = n_1 \mathbf{t}_1 + n_2 \mathbf{t}_2 + n_3 \mathbf{t}_3, \quad (3.1)$$

gdzie n_1, n_2, n_3 , – liczby całkowite a wektory składowe $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$, są liniowo niezależne. Wektory położenia w równaniu (3.1) określają symetrię translacyjną siatki.

Siatki określone definicją 3.3 nazywa się siatkami Bravais¹⁶⁶. Istnieje 14 takich sposobów wypełnienia przestrzeni. Różnią się one między sobą kątami pomiędzy krawędziami elementarnej (powtarzalnej) komórki i ewentualnymi różnicami



Rys. 3.21. Grupy symetrii siatek krystalicznych (Bravais): a) regularne, b) tetragonalne, c) heksagonalne, d) trójskośne, e) rombowe, f) jednoskośne

¹⁶⁶ Od nazwiska francuskiego fizyka Augusta Bravais, który w 1850 r. rozpoczął prace nad siatkami w strukturach krystalicznych [58, s. 262].

długości boków. Siatki krystaliczne można zebrać w sześć grup, odpowiednio do liczby i usytuowania osi ich symetrii obrotowej [89, s. 34]:

- siatki regularne, lub kubiczne (rys. 3.21a) – mają cztery niezależne osie 3-krotnej symetrii obrotowej,
- siatki tetragonalne (rys. 3.21b) – mają jedną oś 4-krotnej symetrii obrotowej,
- siatki heksagonalne (rys. 3.21c) – mają jedną oś 3-krotnej lub 6-krotnej symetrii obrotowej,
- siatki trójskośne (rys. 3.21d) – nie mają osi symetrii obrotowej,
- siatki rombowe (rys. 3.21e) – mają trzy, na przemian prostopadłe osie 2-krotnej symetrii obrotowej,
- siatki jednoskośne (rys. 3.21f) – mają jedną oś 2-krotnej symetrii obrotowej.

Ze względu na swoją regularność i wielokrotną symetrię, siatki krystaliczne są chętnie wykorzystywane w kształtowaniu przestrzennych konstrukcji prętowych.

3.3.2. Upakowania wielościanów w przestrzeni

Problemy podziału/wypełnienia przestrzeni 3-wymiarowej za pomocą wielościanów pojawiły się przy rozwiązywaniu wielu zagadnień praktycznych, ale okazało się, że wiążą się z istotnymi problemami natury teoretycznej¹⁶⁷. Dla kształtowania form strukturalnych ten rodzaj tesselacji jest bardzo istotny, gdyż umożliwia stosowanie elementów konstrukcyjnych odpowiadających obiektom składowym wielościanów: krawędziom, ścianom i komórkom.

Podstawowym zagadnieniem dotyczącym wypełnienia przestrzeni za pomocą wielościanów jest ułożenie ich w taki sposób, aby nie pozostały między nimi żadne puste przestrzenie pomiędzy nimi¹⁶⁸.

Podobnie jak w określaniu regularności wielotopów¹⁶⁹ również w rozpatrywaniu zagadnienia wypełnienia przestrzeni, można nałożyć dodatkowe warunki, które ograniczają zakres możliwych rozwiązań. Uwalnianie tych warunków pozwala na uwzględnienie dalszych wielościanów.

W pierwszym przybliżeniu ograniczamy poszukiwania do wielościanów o symetrii typu 4.3.2, spełniających warunki [171, s. 165]:

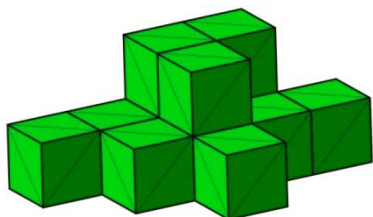
- wszystkie wielościany są regularne,
- wszystkie wielościany są regularne,
- wszystkie wielościany są jednakowe,
- wielościany mają taką samą orientację.

¹⁶⁷ Problem optymalnego wypełnienia przestrzeni zauważył już Kepler w 1619 r., analizując najbardziej efektywne sposoby układania kul armatnich. Spowodowało to jego zainteresowanie układami wielościanów [89, s. 61]. Na przełomie XIX i XX w., rosyjski krystalograf Jewgraf S. Fiodorow udowodnił, że istnieje tylko pięć wielościanów wypukłych, którymi można wypełnić przestrzeń poprzez translację [11, s. 59].

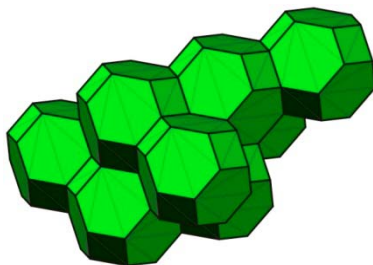
¹⁶⁸ Ang. *space-filling*.

¹⁶⁹ Patrz pkt 2.2.10.

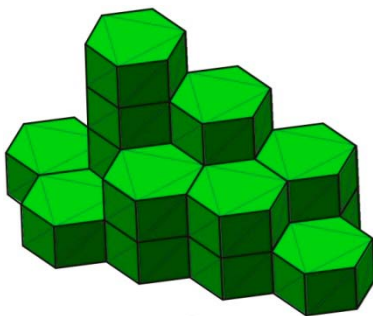
Jedyną bryłą, która spełnia wszystkie te warunki jest sześcian $\{4,3\}$ (rys. 3.22). Rezygnacja z warunku regularności wielościanów pozwala włączyć do tej grupy kolejne dwa: ośmiościan ścięty (4.6^2) (rys. 3.23) i graniastosłup sześciokątny $V(4.4.6)$ (rys. 3.24) [171, s. 165].



Rys. 3.22. Wypełnienie przestrzeni
za pomocą sześcianów



Rys. 3.23. Wypełnienie przestrzeni
za pomocą ośmiościanów ściętych (4.6^2)

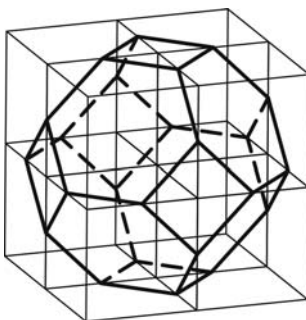


Rys. 3.24. Wypełnienie przestrzeni
za pomocą graniastosłupów sześciokątnych $V(4.4.6)$

Jeżeli dopuszczone zostaną wielościany o ścianach nieregularnych, to możliwe jest wypełnienie przestrzeni za pomocą dwunastościanów rombówych $V(3.4)^2$ i dwunastościanów rombówo-sześciokątnych. Wymienione wielościany wyczerpują podaną przez Fiodorowa listę pięciu wielościanów, które samodzielnie mogą wypełnić przestrzeń [171, s. 166].

Uwalnianie dalszych warunków lub ich kombinacji prowadzi do kilku innych wypełnień przestrzeni wielościanami, które tutaj zostaną pominięte. Podobnie, rozszerzenie zainteresowania na wielościany o symetrii 5.3.2, pozwala uzyskać wypełnienie przestrzeni bryłami, takimi jak czternastościan o ścianach pięciokątnych, piętnastościan o dwunastu ścianach pięciokątnych i trzech sześciokątnych i szesnastościan o dwunastu ścianach pięciokątnych i czterech sześciokątnych. Upakowanie takie jest możliwe, jeżeli dopuścimy nieznaczne zniekształcenie ścian i kątów bryłowych [171, s. 186].

W taki sposób, pod koniec XIX w., Kelvin odkrył wielościan, który wypełnia przestrzeń przy najmniejszej sumie powierzchni ścian bocznych na jednostkę objętości, spośród wszystkich innych wypełnień przestrzeni jedną bryłą¹⁷⁰. Był to czternastościan *tetrakaidecahedron*¹⁷¹, odkryty przez Kelvina w związku z pracami nad koncepcją eteru (rys. 3.25).



Rys. 3.25. Tetrakaidecahedron Kelvina

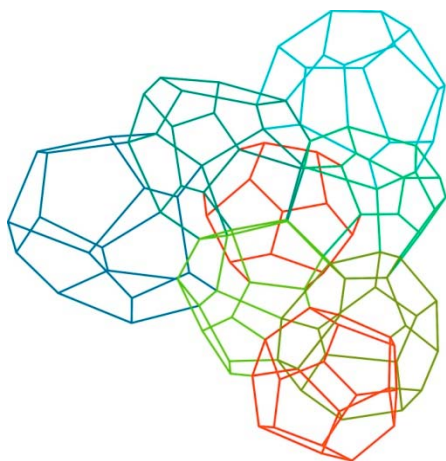
W latach dziewięćdziesiątych XX w. odkryto, że wypełnienie przestrzeni zestawem dwóch innych wielościanów (dwunastościanu i czternastościanu) daje nieco niższy stosunek powierzchni ścian do objętości¹⁷². Wielościany te muszą występować w powtarzalnych kompleksach składających się z dwóch dwunastościanów i sześciu czternastościanów. Od nazwisk odkrywców, tessellacja ta została

¹⁷⁰ Dla płaszczyzny ($d = 2$), podziałem spełniającym ten warunek jest tessellacja sześciokątna (rys. 3.7.c).

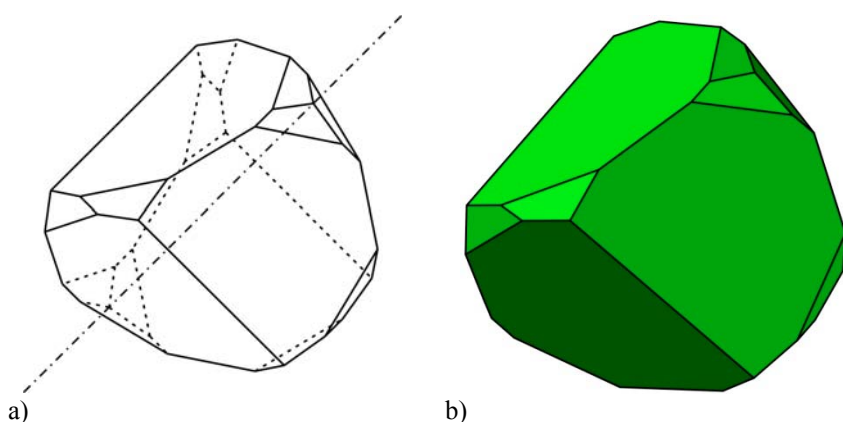
¹⁷¹ Ponieważ ściany tego wielościanu miały być powierzchniami minimalnymi, nie były one płaskie, ale nieznacznie zakrzywione, tak aby spełniały warunki Plateau (patrz pkt 6.2.3).

¹⁷² Różnica w stosunku do propozycji Kelvina wynosi prawdopodobnie ok. 0,3%, chociaż nie jest to jeszcze ostatecznie udowodnione [155, s. 35], [78, s. 234].

nazwana *podziałem Weaire'a–Phelana* lub *pianą Weaire'a–Phelana*. Podstawą odkrycia było zaobserwowanie takiego układu w strukturach krystalicznych pewnych metali [155, s. 34–37]. Powtarzalny fragment podziału Weaire'a–Phelana przedstawiono na rysunku 3.26, zaznaczając dwunastościany kolorem czerwonym, a czternastościany – odcieniami zieleni i błękitu.



Rys. 3.26. Powtarzalny układ ośmiu wielościanów w podziale Weaire-Phelana



Rys. 3.27. Osiemnastościan o jednej osi 3-krotnej symetrii obrotowej, który może całkowicie wypełnić przestrzeń: a) siatka krawędziowa, b) model bryłowy

Liczba brył, którymi można całkowicie wypełnić przestrzeń jest znaczna i często mają one zaskakujące kształty. Branko Grünbaum podaje przykład osiemnastościanu, który może całkowicie podzielić przestrzeń i ma oś 3-krotnej symetrii

obrotowej (rys. 3.27a). Jednocześnie jest to bryła o dość „egzotycznym” kształcie, którą trudno byłoby intuicyjnie zakwalifikować do wielościanów wypełniających przestrzeń (rys. 3.27b) [57, s. 59]. Ten sam autor zwraca uwagę, że w zastosowaniach architektonicznych, a także przemysłowych, nacisk kładziony w procesie kształtowania form strukturalnych opartych na wielościanach, aby nie tylko wypełniały całkowicie przestrzeń, ale również były przystające w relacji do globalnej symetrii wypełnienia, nie wynika z rzeczywistych potrzeb, lecz raczej z dążenia do matematycznej prostoty. Rezygnacja z tych wymagań prowadzi do radykalnego zwiększenia dostępnej liczby form [57, s. 58].

3.3.3. Tablica okresowa wielościanów

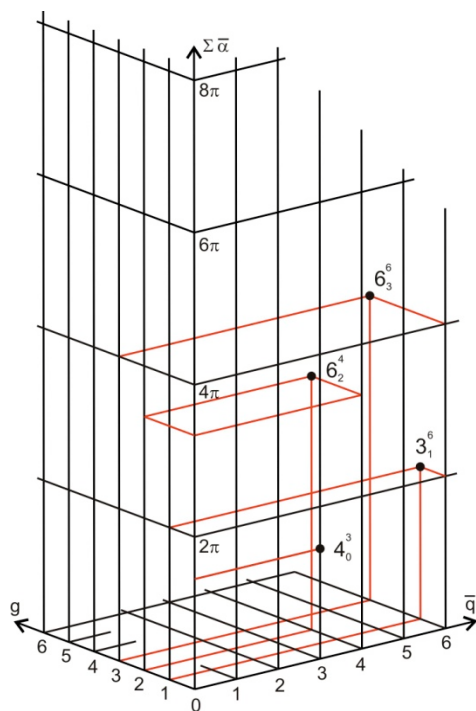
Ogarnięcie wielkiej liczby obiektów, które mogą wstąpić w przestrzeni ($d = 3$), określenie ich przewidywanych właściwości, a następnie zastosowanie do kształtowania form strukturalnych, wymaga użycia adekwatnych narzędzi opisu. We wcześniejszych punktach niniejszej pracy podano przykłady tradycyjnego już obecnie, chociaż historycznie wciąż jeszcze świeżego, opisu opartego na właściwościach symetrii danej tesselacji. Ten sposób opisu, skutecznie charakteryzujący topologiczną strukturę obiektu, nie pozwala jednak na określenie jego właściwości konstrukcyjnych, ani na przewidywanie występowania możliwych, chociaż jeszcze nieodkrytych form.

Rozwiązanie, w swym podstawowym założeniu nawiązujące do tablicy okresowej pierwiastków D. Mendelejewa i – w przekonaniu autora niniejszej pracy – równie jak ono rewolucyjne, zaproponował w roku 1996, a następnie rozszerzył w roku 2011 izraelski architekt Michael Burt [19, 20].

Pomysł tego rozwiązania polega na uszeregowaniu obiektów ($d = 3$) według podstawowych charakterystyk, a następnie na próbie uchwycenia pewnych cech wspólnych. Po licznych próbach okazało się, że jest to możliwe, jeżeli zamiast zwykłych charakterystyk, takich jak walentność i suma kątów w wierzchołku, użyte zostaną wielkości statystyczne¹⁷³: średnia walentność $\bar{q}$ i średnia suma kątów w wierzchołku $\bar{\alpha}$ oraz – jako trzeci parametr – genus g [24].

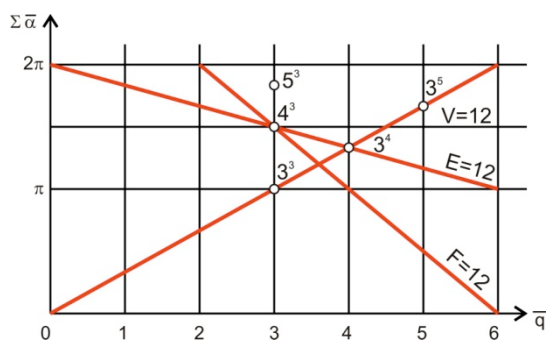
Podstawowy schemat tablicy przedstawiony jest na rysunku 3.28. Na dwóch osiach poziomych reprezentowane są: genus i średnia walentność, a na osi pionowej – średnia suma kątów w wierzchołku [19, s. 33]. W miejscach przecięcia linii dla określonych wartości są zlokalizowane punkty odpowiadające poszczególnym wielościanom. Tablica obejmuje wielościany wszelkiego rodzaju: skończone i nieskończone, o ścianach płaskich i siodłowe, opisane na powierzchniach o dowolnym genusie.

¹⁷³ Patrz pkt 2.3.5.



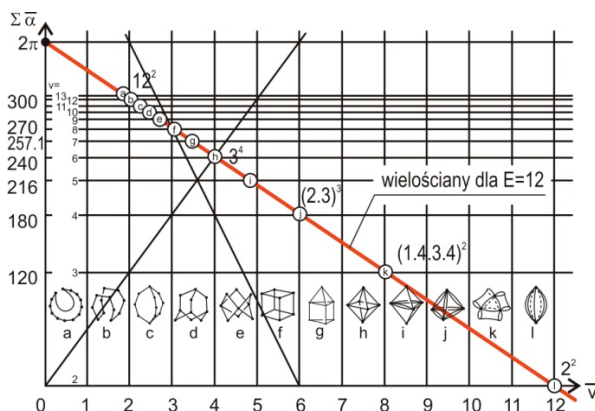
Rys. 3.28. Podstawowy schemat tablicy okresowej wielościanów

Jeżeli z ogólnego schematu „wyjmiemy” płaszczyznę odpowiadającą genusowi $g=0$, to możemy ustalić lokalizację np. wielościanów, dla których $v=8$, $e=12, f=6$, dla genusu $g=0$ (rys. 3.29) [19, s. 37].



Rys. 3.29. Lokalizacja wielościanów $v=8, e=12, f=6$, dla genusu $g=0$, w tablicy okresowej wielościanów

Podobnie można skonstruować wykres przedstawiający wszystkie wielościany, dla których $e = 12$, dla genusa $g = 0$ (rys. 3.30) [19, s. 39]. Jeżeli zbiór wszystkich rozwiązań dla $g = 0$ leży na płaszczyźnie, to zbiór rozwiązań dla wszystkich genusów tworzy kwadrykę¹⁷⁴ w układzie opisanym trzema podstawowymi parametrami [19, s. 62–66] [25, s. 873].



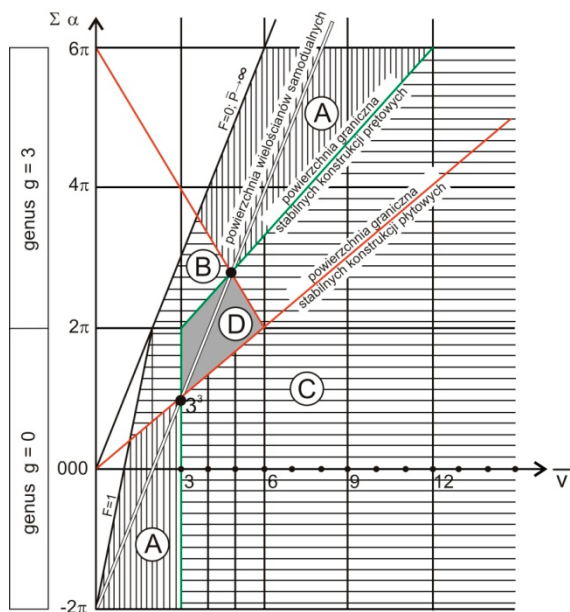
Rys. 3.30. Lokalizacja wielościanów $e = 12$, dla genusa $g = 0$, w tabeli okresowej wielościanów

Ścisły związek pomiędzy geometrią wielościanów a jej cechami strukturalnymi, opisany np. w [160], rozszerzył zawartość tabeli okresowej wielościanów o opis tych właśnie cech. Na rysunku 3.31 przedstawiono rozkład właściwości konstrukcyjnych ze względu na potencjalną stabilność wielościanów skończonych dla $g = 0$ i $g = 3$ [26, s. 873]. Obejmuje ona dwa rodzaje konstrukcji: prętowe, w których krawędzie wielościanów są zmaterializowane jako pręty połączone przegubowo w wierzchołkach (bez wypełnienia ścian) i płytowe, w których ściany są zrealizowane jako elementy płytowe, połączone przegubowo wzdłuż krawędzi. Na rysunku tym wydzielono cztery obszary:

- obszar A – hiperstabilne konstrukcje prętowe i płytowe,
- obszar B – niestabilne konstrukcje prętowe i hiperstabilne konstrukcje płytowe,
- obszar C – niestabilne konstrukcje płytowe i hiperstabilne konstrukcje prętowe,
- obszar D – niestabilne konstrukcje prętowe i płytowe.

Hiperstabilność i niestabilność są tu rozumiane jako liczba krawędzi wielościanu większa/mniejsza niż wynikająca z równań Möbiusa–Maxwella. Można zauważyć, że wielościanami granicznymi, pomiędzy obszarami A i D, są wielościany samodualne. Dla genusa $g = 0$ jest to wielościan 3^3 – czworościan. Na podstawie wykresów z rys. 3.31 można określić, w jakim zakresie form możliwe jest zastosowanie konstrukcji prętowych, a w jakim – tarczownicowych lub mieszanych.

¹⁷⁴ Powierzchnię drugiego stopnia.



Rys. 3.31. Rozkład właściwości konstrukcyjnych ze względu na potencjalną stabilność wielościanów skończonych dla $g = 0$ i $g = 3$

Skonstruowanie tablicy okresowej na podstawie prostych wielkości statystycznych oraz ogólnych zależności, takich jak przede wszystkim równanie Eulera, umożliwia nie tylko opisanie „świata wielościanów” w znanym zakresie, ale także przewidywanie występowania nowych, na razie nie opisanych jeszcze form, które mogą być ważne ze względu na kształtowanie systemów konstrukcyjnych. Przykładem takich form, które zostały odkryte i usystematyzowane w oparciu o tablicę okresową wielościanów, są omówione w następnym rozdziale, *gąbki*.

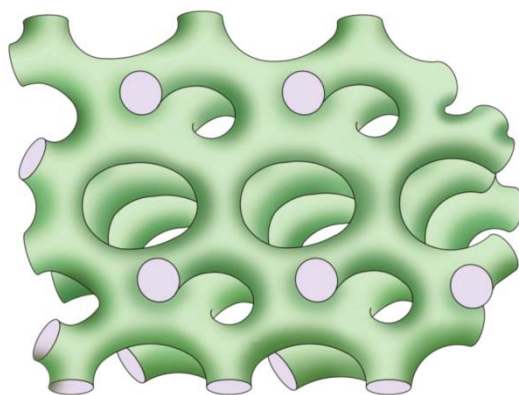
3.3.4. Gąbki

W rozdziale 2.2.4.1 podano przykłady wielościanów nieskończonych (rys. 2.17) i wielościanów siodłowych (rys. 2.16b). Możliwość występowania wielościanów nieskończonych o powierzchniach siodłowych została odkryta pod koniec lat 60. XX w. przez M. Burta [18] i A.H. Schoena [125]. Wcześniej, pod koniec XIX w., wyniki te antycypował H.A. Schwarz w swoich pracach nad potrójnie periodycznymi powierzchniami minimalnymi¹⁷⁵. Powierzchnie te, nazywane obecnie powierzchniami Schwarza, powstają w oparciu o kontur brzegowy¹⁷⁶ rozpięty na krawędziach wielościanu.

¹⁷⁵ H.A. Schwarz *Gesammelte mathematische Abhandlungen* Berlin 1890 [109, s. 142].

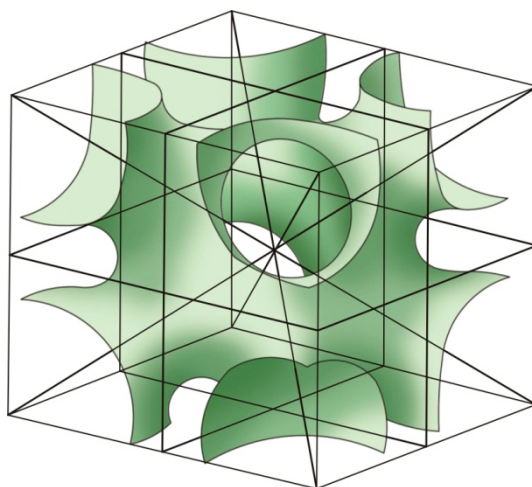
¹⁷⁶ Patrz pkt 6.2.3.

Gąbkami nazywamy struktury ukształtowane jak wielościany lub ciągle, otaczające powierzchnie podziałów, które dzielą przestrzeń na dwie komplementarne podprzestrzenie (dwa oddzielne *labirynty*) [20, s. 75], [89, s. 153 i 167], [125, s. 38–41]. Przykład gąbki przedstawiono na rysunku 3.32 [20, s. 84].



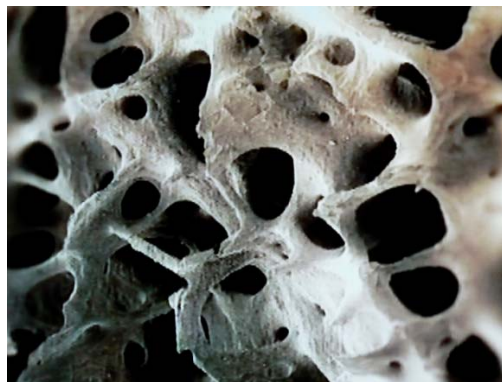
Rys. 3.32. Przykład gąbki – nieskończonej struktury o siatce wielościennej

Gąbki można przedstawić jako struktury, w których wielościany są umieszczone w węzłach pewnej siatki (tesselacji przestrzeni $d=3$) w taki sposób, że mają ze sobą wspólne krawędzie. Układ powierzchni siodłowych związanych z pojedynczym wielościanem tworzy powtarzalną *klatkę*, której zwielokrotnienie generuje gąbkę. Krawędzie klatki przechodzą przez tunele labiryntu. Na rysunku 3.33 przedstawiono przykład powtarzalnej klatki tworzącej gąbkę.



Rys. 3.33. Przykład powtarzalnej klatki tworzącej gąbkę

Struktury gąbczaste występują powszechnie w przyrodzie. Można je znaleźć na przykład w wewnętrznej budowie kości ludzi i zwierząt (rys. 6.35.a), w budowie niektórych zwierząt beztkankowych (rys. 6.30.a) [21, 22, 23], a także w niektórych obiektach architektonicznych (rys. 6.35) [84, s. 1], [83, s. 48].



Rys. 3.34. Przykład gąbki w naturze – struktura kości ludzkiej

Niedawne prace M. Burta wykazały, że struktury gąbczaste mogą być przedstawione w rozszerzonej wersji tablicy okresowej wielościanów. Umożliwia ona przewidywanie nowych struktur na podstawie ich grupy symetrii. Otwiera to zupełnie nową dziedzinę eksploracji form przestrzennych [20, s. 86–87]. Form, które są „podwójnie naturalne”. Po pierwsze, dlatego że ich istnienie wynika z właściwości przestrzeni, które za pomocą podstawowych warunków topologicznych (przede wszystkim twierdzenia Eulera) ograniczają różnorodność mogących wystąpić form. Po drugie, dlatego że struktury gąbczaste bardzo często występują w obiektach naturalnych jako rezultat naturalnych procesów samoopptymalizacji.

3.4. Grafy jako modele topologiczne

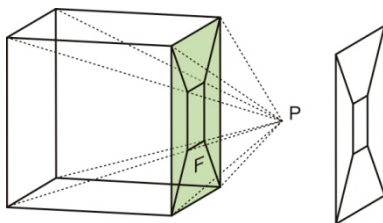
Hierarchiczne zorganizowanie form strukturalnych każe się zastanowić nad problemem ich ekwiwalentności. To znaczy, w jakim zakresie obiekty rzędu d_1 mogą być traktowane jako topologicznie równoważne obiektom rzędu d_2 , czy jest to relacja odwracalna i czy wynikają z niej pozytywne inspiracje dla kształtowania formy.

3.4.1. Wykresy Schlegla

Graf planarny jest realizacją wielościanu kombinatorycznego w przestrzeni R^2 . Każda realizacja wielościanu kombinatorycznego w R^2 koresponduje, przez wektor wysokości H , z jego realizacją w przestrzeni R^3 [178, s. 2].

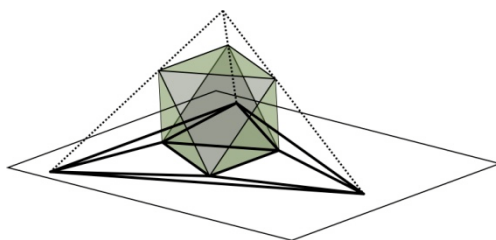
Jeżeli odwrócimy tę ideę, to można postawić sobie pytanie, w jaki sposób przedstawić dowolny wielotop, który ma realizację geometryczną w przestrzeni d -wymiarowej, za pomocą jego obrazu w przestrzeni $(d-1)$ -wymiarowej? W odniesieniu do wielościanów, które są 3-wielotopami, szukamy ich 2-wymiarowego obrazu. Techniką, która umożliwia uzyskanie takiego obrazu jest *wykres Schlegla*¹⁷⁷.

Konstrukcja wykresu Schlegla przypomina nieco sporządzanie rysunków perspektywicznych za pomocą *camera obscura*, aczkolwiek metoda ta ma zastosowanie¹⁷⁸ również dla $d > 3$. Sporządzanie wykresu rozpoczyna się od wyboru jednej ze ścian wielokąta, F , oraz punktu P na zewnątrz wielokąta, ale wciąż bardzo blisko środka ściany F . Ściana ta służy jako powierzchnia rzutowania wielościanu, a punkt P jako środek rzutowania (rys. 3.35). Ściana F jest nazywana *bazą* wykresu Schlegla [120, s. 27].



Rys. 3.35. Zasada konstruowania wykresu Schlegla na przykładzie sześcianu

W wyniku takiej procedury otrzymujemy kompletną reprezentację rzutowanego wielościanu, która może być odrotnie przekształcona z powrotem w wielościan (rys. 3.36). Otrzymany obiekt ma wymiar $(d-1)$, gdyż powstaje na ścianie, która zawsze pozostaje w takiej właśnie relacji do wielościanu. Jest tak również w przypadku wielotopów o wyższym wymiarze.

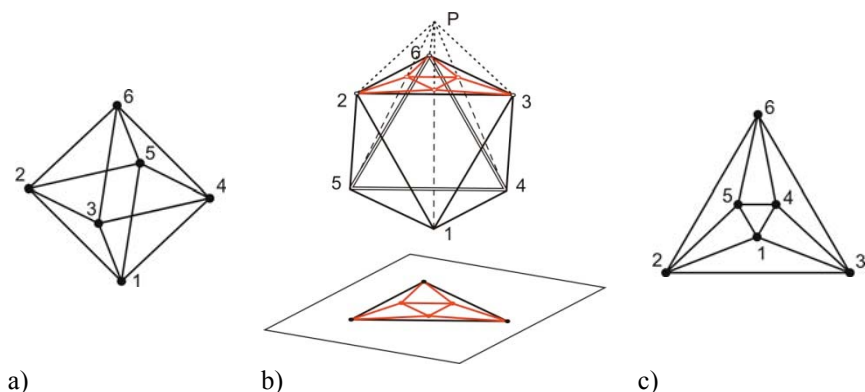


Rys. 3.36. Odwracalność wykresu Schlegla

¹⁷⁷ Metoda ta została zaproponowana w pracy V. Schlegel *Theorie der homogen. zusammengesetzten Raumgebilde* Nova Acta Leop. Carol., 44 (1883) 343–459 [52, s. 444].

¹⁷⁸ Najczęściej wykres Schlegla znajduje zastosowanie do sporządzania trójwymiarowych obrazów 4-wielotopów, ze względu na powszechność zainteresowania badaczy wielotopami w przestrzeni 4-wymiarowej oraz ze względu na możliwość objęcia uzyskanych modeli „zwykłą” percepcją geometryczną [122, s. 14].

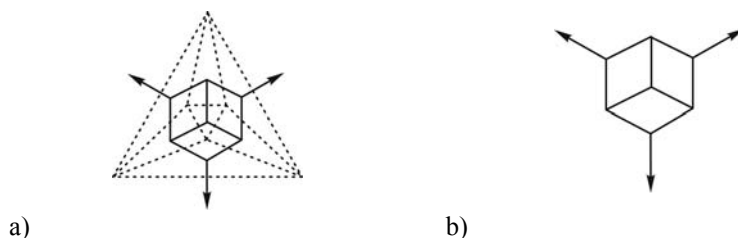
Patrząc na obraz sześcianu z wykresu Schlegla na rys. 3.35, łatwo jest zauważyć, że zawiera on wszystkie elementy, które tworzą grafy: wierzchołki, krawędzie i ściany. Innymi słowy, przez sporządzenie wykresu Schlegla wielościanu możemy uzyskać jego płaski rysunek, który jest grafem. Proces zamiany wielościanów na grafy przebiega zatem w sposób pokazany poniżej na przykładzie ośmiościanu (rys. 3.37a). Za powierzchnię rzutowania wybrano ścianę wyznaczoną przez wierzchołki 1-2-6 (rys. 3.37b). Otrzymany graf (rys. 3.37c), jest topologicznie równoważny z pierwotnym ośmiościanem. Zachowane są wszystkie zależności: walentności wierzchołków, krawędzi i ścian oraz odpowiednie relacje incydencji.



Rys. 3.37. Przekształcanie ośmiościanu na graf (opis w tekście)

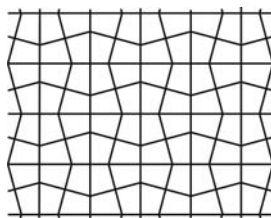
Wykres Schlegla można zastosować do przedstawiania brył dualnych. Postępując podobnie jak w konstruowaniu zwykłego grafu dualnego, można zauważyć, że liczba wierzchołków tego grafu jest mniejsza o jeden od oczekiwanej, ponieważ jedna ze ścian rzutowanego wielościanu, przeciwnie do płaszczyzny rzutowania, jest na rysunku przedstawiona jako nieograniczona część płaszczyzny, na zewnątrz wielokąta brzegowego. Brakujący wierzchołek leży zatem w nieskończoności. Problem ten można rozwiązać, rysując krawędzie incydentne z brakującym wierzchołkiem i kończąc je strzałkami, co wskazuje, że biegają w nieskończoność¹⁷⁹ [87, s. 49]. Zrozumiałe jest, że wszystkie oznaczone w ten sposób krawędzie zbiegają się i zapewniają odpowiednią walentność brakującego wierzchołka. Na rysunku 3.38a przedstawiony jest przykład grafu ośmiościanu (linie przerywane) i dualnego do niego sześcianu (linie ciągłe). Widać, że możliwe jest oznaczenie jedynie siedmiu wierzchołków sześcianu. W rysunku dualnego sześcianu (rys. 3.38b), krawędzie biegnące do niewidocznego wierzchołka są zakończone strzałkami.

¹⁷⁹ Patrz też pkt 2.2.11.

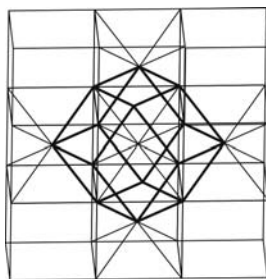


Rys. 3.38. Przykład grafu ośmiościanu (linie przerywane) i dualnego do niego sześcianu (opis w tekście)

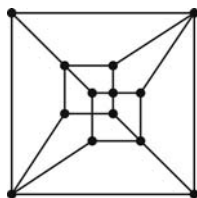
Wykres Schlegla można również zastosować do sporządzania płaskich rysunków przestrzennych tessellacji wielościennych – wypełnień przestrzeni wielościanami. Rozpatrzmy najpierw sytuację odwrotną. Dana jest pewna, nieograniczona tessellacja na płaszczyźnie, odpowiadająca wzorowi plastra miodu (rys. 3.39). Można w niej rozpoznać powtarzające się zestawienia dwunastościanów rombowych (rys. 3.40), których graf jest przedstawiony na rysunku 3.41.



Rys. 3.39. Tessellacja odpowiadająca wzorowi plastra miodu



Rys. 3.40. Powtarzalny element podziału tessellacji z rys. 3.39 – dwunastościan rombowy



Rys. 3.41. Graf dwunastościanu rombowego
z rys. 3.40

Przedstawiony przykład pokazuje, że możliwe jest interpretowanie rozległych tessellacji płaszczyzny jako kompleksu złożonego z grafów wielościanów, a zatem wykresu Schlegla dla tego kompleksu. Naturalne jest pytanie o zakres takiej relacji, tzn. czy każdy wzór na płaszczyźnie może być interpretowany jako obraz pewnej teselacji przestrzennej. Odpowiedź na to pytanie znajdujemy w twierdzeniu (3.3) [52, s. 52c].

Twierdzenie 3.3. *Każdy prosty d -rysunek jest wykresem Schlegla dla $d \geq 3$.*

Określenie „prosty” należy rozumieć jako spełniający ograniczenia narzucone przez definicję 3.4. Twierdzenie 3.3 daje wielkie możliwości kształtowania przestrzennych form strukturalnych za pomocą płaskich wzorów. Najprostsze koncepcyjnie, chociaż wcale nie łatwe technicznie, jest odtworzenie w przestrzeni odpowiadającej im konfiguracji. Wzorem wyjściowym, *prekursorem* formy, może być każdy płaski wzór spełniający warunek twierdzenia 3.3.

Dalsze bardziej zaawansowane możliwości stwarza interpretacja wzoru płaskiego jako grafu. Można wtedy zastosować do niego cały rozwinięty aparat matematycznej teorii grafów¹⁸⁰, a zwłaszcza zastosować przekształcenia, które przekształcają grafy, zachowując możliwość ich przestrzennej rekonstrukcji. Zagadnienia te są omówione w rozdziałach 4 i 5.

3.4.2. Podstawowe właściwości grafów

Ponieważ tematem tego rozdziału są wzajemne relacje obiektów różnego rzędu, tworzących formy strukturalne, opisywane za pomocą grafów, dalej podano wybrane podstawowe pojęcia z zakresu teorii grafów¹⁸¹.

Graf jest definiowany na podstawie dwóch zbiorów: zbioru wierzchołków i zbioru krawędzi. Terminologia ta nawiązuje do tradycyjnego utożsamiania grafów z ich rysunkami. W rzeczywistości graf jest pojęciem kombinatorycznym, o różnych możliwych realizacjach geometrycznych.

¹⁸⁰ Patrz np. [13, 27, 40, 49, 62, 71, 135, 136, 172].

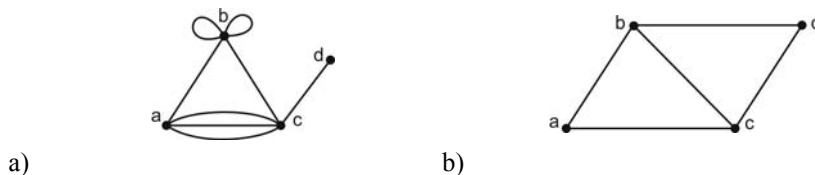
¹⁸¹ Obszerne rozszerzenie i uzupełnienie tych wiadomości można znaleźć w pracach zacytowanych w powyższym przypisie.

Definicja 3.4. *Graf G jest uporządkowaną parą rozłącznych zbiorów $G = \{V, E\}$, takich, że E jest podzbiorem uporządkowanych par V . Zbiór $V = V(G)$ zbiorem wierzchołków grafu G , a zbiór $E = E(G)$ – zbiorem krawędzi grafu G [13, s. 1].*

Zgodnie z definicją 3.4, jeśli a i b są wierzchołkami (elementami zbioru V), to $\{a, b\}$ lub po prostu ab jest krawędzią łączącą a i b . Należy zauważyć, że zgodnie z tą definicją [52, s. 12]:

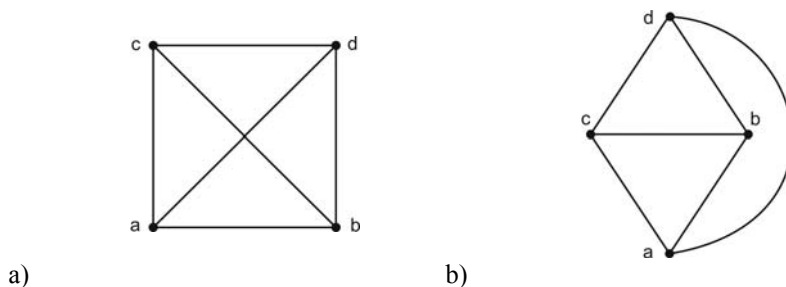
- zbiory $V(G)$ i $E(G)$ nie mogą być zbiorami pustymi; zazwyczaj przyjmuje się, że są to zbiory skończone,
- $\{a, b\}$ i $\{b, a\}$ oznaczają tę samą krawędź (zbiory nie są uporządkowane), tzn. krawędź nie ma nadanego kierunku,
- $\{a, a\}$ nie może wystąpić (nie ma powtórzeń w zbiorach), tzn. krawędzie nie mogą tworzyć pętli,
- $\{a, b\}$ może wystąpić tylko jeden raz – nie ma krawędzi wielokrotnych.

Grafy, które spełniają definicję 3.4 nazywamy *grafami prostymi* (rys. 3.42b). W wielu innych zastosowaniach nie nakłada się podanych ograniczeń na definicję grafów, które są wtedy nazywane *grafami ogólnymi* (rys. 3.42a).



Rys. 3.42. Przykłady grafów: a) niezgodnego z definicją 3.4 – występują pętle i krawędzie wielokrotne, b) zgodnego z definicją 3.4

Jak wspomniano, grafy mają charakter kombinatoryczny – nie ma jednego sposobu przedstawienia graficznego, tzn. narysowania, grafu. Dwa grafy są *izomorficzne*, jeżeli mają taką samą strukturę kombinatoryczną, a ich rysunki mogą być przerysowane, tak aby wyglądały identycznie (rys. 3.43).



Rys. 3.43. Przykład grafów izomorficznych: a) narysowanego z przecięciami krawędzi, b) narysowanego bez przecięć krawędzi

Definicja 3.5. Dwa grafy G_1 i G_2 są izomorficzne, jeżeli istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między ich wierzchołkami, taka że liczba krawędzi łączących dane dwa wierzchołki grafu G_1 jest równa liczbie krawędzi łączących odpowiadające im wierzchołki grafu G_2 [13, s. 3].

Prostoliniowość połączeń pomiędzy wierzchołkami nie ma żadnego znaczenia w rysunku grafu, gdyż nie wpływa na zmianę jego struktury. Ponadto, przecinanie się krawędzi na rysunku grafu nie oznacza występowania w tym miejscu wierzchołka, gdyż graf może być również narysowany w taki sposób, żeby krawędzie się nie przecinały (rys. 3.43b).

Definicja 3.6. Stopniem grafu G nazywamy liczbę jego wierzchołków: $|G| = |V(G)|$ [13, s. 3].

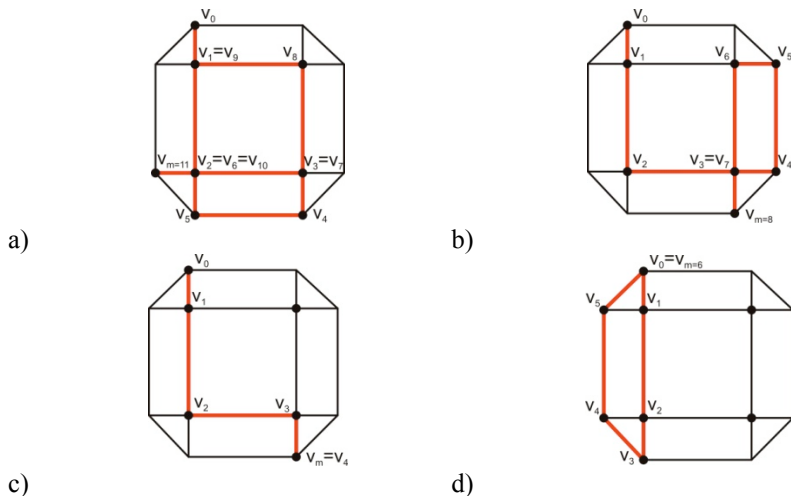
W grafach można wyróżnić pewne ciągi wierzchołków i krawędzi, po których można „przechodzić” od jednego wierzchołka do innego. Ze względu na właściwości wyróżniamy kilka rodzajów takich ciągów: trasy (rys. 3.44a), drogi (rys. 3.44b), ścieżki (rys. 3.44c) i cykle (rys. 3.44d) [13, 172].

Definicja 3.7. Trasą w grafie G nazywamy skończony ciąg krawędzi w postaci $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$, w którym każde kolejne dwie krawędzie są albo sąsiednie, albo identyczne [13, s. 3].

Definicja 3.8. Ścieżka w grafie G jest to trasa, której wszystkie krawędzie są różne [13, s. 3].

Definicja 3.9. Droga w grafie G jest to ścieżka, której wszystkie wierzchołki są różne [13, s. 3].

Definicja 3.10. Cykl jest to ścieżka zamknięta, dla której $v_0 = v_m$ [13, s. 3].



Rys. 3.44. Przykład: a) trasy, b) ścieżki, c) drogi, d) cyklu – w grafie

W uzupełnieniu do przytoczonych definicji można dodać kilka spostrzeżeń. Trasa jest to „linia”, po której można się przedostać pomiędzy dwoma różnymi wierzchołkami, składająca się z przechodzonych kolejno krawędzi. W ścieżce wszystkie krawędzie są różne, ale wierzchołki mogą się powtarzać. Występuje wtedy przecięcie trasy. W drodze żaden wierzchołek nie występuje więcej niż jeden raz.

Ważną właściwością grafów jest ich *spójność*. Jest ona warunkiem wielu właściwości grafów i twierdzeń. Intuicyjnie znaczenie spójności jest takie, że w grafie spójnym wszystkie wierzchołki można połączyć pewną trasą.

Definicja 3.11. *Graf jest spójny, jeżeli dla każdej pary różnych wierzchołków $\{v_0, v_m\}$ istnieje droga od v_0 do v_m [13, s. 4].*

Inny sposób definiowania spójności odnosi się do możliwości podzielenia grafu na części. Jeżeli graf G zostanie podzielony na dwa osobne *podgrafy*, przez usunięcie pewnej liczby krawędzi, to zbiór usuniętych krawędzi nazywamy *zbiorem rozspajającym* grafu G . Jeżeli żaden podzbiór zbioru rozspajającego nie jest już zbiorem rozspajającym, to zbiór ten nazywamy *rozcieniem* grafu G [13, s. 50].

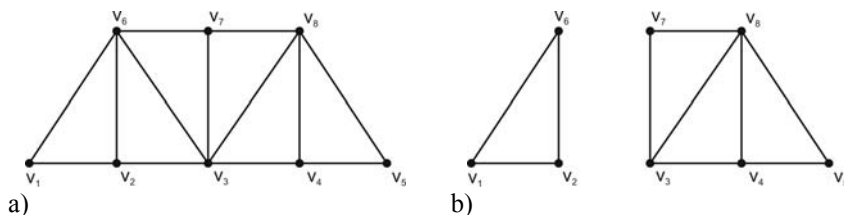
Jeżeli graf G zostanie podzielony na osobne podgrafy, poprzez usunięcie pewnej liczby wierzchołków (wraz z krawędziami incydentnymi z tymi wierzchołkami), to zbiór usuniętych wierzchołków nazywamy *zbiorem rozdzialającym* grafu G .

Możemy wyróżnić *spójność krawędziową* oraz *spójność wierzchołkową* grafu G . Spójność krawędziowa jest liczbą krawędzi grafu G , należąca do najmniejszego rozcienia. Spójność wierzchołkowa jest liczbą elementów najmniejszego zbioru rozdzialającego grafu G [13, s. 50].

Definicja 3.12. *Niech G będzie grafem spójnym o co najmniej $k+1$ wierzchołkach:*

- a) *graf G jest k -spójny wtedy i tylko wtedy, gdy nie można go rozspoić przez usunięcie mniej niż $k - 1$ lub mniej wierzchołków,*
- b) *graf G jest k -krawędziowo spójny wtedy i tylko wtedy, gdy nie można go rozspoić przez usunięcie $k - 1$ lub mniej krawędzi [13, s. 50].*

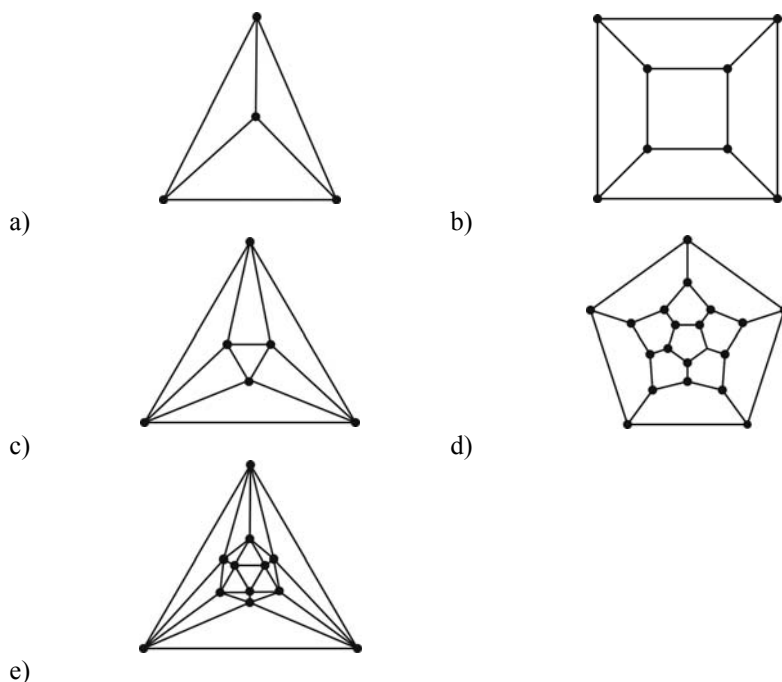
Na rysunku 3.45a przedstawiono przykład grafu spójnego, a na rysunku 3.45b – ten sam graf po rozspojeniu. Zbiór rozspajający składa się z krawędzi v_2v_3, v_3v_6, v_6v_7 .



Rys. 3.45. Rozspojenie grafu (opis w tekście)

Definicja 3.13. *Graf jest regularny, jeżeli każdy jego wierzchołek ma tę samą walentność [13, s. 50].*

W grafach regularnych stopniem grafu nazywamy walentność wierzchołków. Na rysunku 3.46 przedstawiono pięć grafów regularnych, odpowiadających wielościanom platońskim¹⁸², kolejno: czworościanu (rys. 3.46a), sześciianu (rys. 3.46b), ośmiościanu (rys. 3.46c), dwunastościanu (rys. 3.46d) i dwudziestościanu (rys. 3.46e).



Rys. 3.46. Grafy wielościanów platońskich (opis w tekście)

Cechą, która charakteryzuje ważną rodzinę grafów jest ich *planarność*. Została ona zdefiniowana w pktcie 2.2.8. Dalsze ważne właściwości rysunków grafów planarnych¹⁸³ wynikają z twierdzeń 3.4 i 3.5.

Twierdzenie 3.4 (Whitneya). *Jeżeli graf G jest planarny i 3-spójny, to zbiór jego komórek (ścian) nie zależy od wyboru konkretnego rysunku grafu [120, s. 121].*

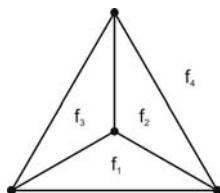
Twierdzenie 3.5 (Wagner, Fáry). *Każdy planarny graf prosty może być narysowany za pomocą odcinków.*

¹⁸² Na temat reprezentowania wielościanów przez grafy – patrz pkt 4.2.

¹⁸³ Właściwość ta jest wykorzystana w rozdziale 5, przy omawianiu rysowania grafów „naprężonych”.

Przy omawianiu planarności grafów warto zauważyć, że zgodnie z tym co zostało powiedziane w rozdziale 2, płaszczyzna jest topologicznie równoważna sferze. Rysując graf zatem na płaszczyźnie, można go sobie wyobrazić również na innych powierzchniach tej samej klasy.

Na rysunku grafów planarnych, krawędzie dzielą obszar rysunku na *ściany*. W każdym przypadku jedna ściana, leżąca na zewnątrz krawędzi brzegowych, jest nieograniczona. Ściana taka jest nazywana *ścianą nieskończoną*¹⁸⁴ (rys. 3.47).



Rys. 3.47. Podział płaszczyzny przez graf na ściany

Dualność grafów planarnych jest definiowana podobnie jak dla wielościanów. Jeżeli wewnątrz ścian grafu umieścimy wierzchołki i połączymy je, zachowując odpowiednią incydencję, to uzyskamy graf dualny.

3.5. Uwagi końcowe

Zrozumienie sposobu, w jaki powstają tesselacje i relacja między obiektami różnych klas, ma podstawowe znaczenie dla umiejętności kształtowania form strukturalnych.

W obiektach naturalnych występują dwa podstawowe mechanizmy powstawania wzorów – tesselacji. Pierwszy z nich polega na dążeniu do konfiguracji mającej najmniejszą energię potencjalną. Przykładem mogą być układy powierzchni minimalnych z błonek mydlanych [8, s. 196]. Drugi sposób to uzyskiwanie za pomocą układu równowagi przez łamanie jego symetrii. W przypadku systemu płaskiego, złamanie symetrii najpierw nastąpi w jednym kierunku, np. podział płaszczyzny liniami. Drugi etap polega na złamaniu symetrii w kierunku prostopadłym, np. podział płaszczyzny siatką kwadratową (rys. 3.7b). W trzecim kroku, może wystąpić podział trójkątny lub sześciokątny (rys. 3.7a). Rodzaj wzoru zależy od właściwości fizycznych obiektu, jego wielkości, prędkości zachodzenia procesu itp., ale jego istotą jest złamanie symetrii w dążeniu do równowagi [8, s. 197].

¹⁸⁴ Ta „nieskończoność” dotyczy tylko rysunku na płaszczyźnie. W przypadku rysowania na sferze ściana ta jest skończona i nie różni się niczym od pozostałych ścian.

Tworzenie układów strukturalnych przez człowieka jest oparte na właściwościach topologicznych obiektów. Walentność wierzchołków określa geometrię siatek przestrzennych oraz ich geometryczną niezmiennosć [60, s. 657–658]. Grupy symetrii tesselacji na płaszczyźnie decydują o możliwości łączenia ich w struktury przestrzenne. Odwołanie się do podziałów o różnym stopniu regularności: platońskich (rys. 3.7), archimedejskich (rys. 3.8), czy aperiodycznych, umożliwia tworzenie siatek o wielkiej różnorodności form, a jednocześnie efektywnych konstrukcyjnie [15, s. 132–135].

Operowanie modelami topologicznymi form strukturalnych – grafami pozwala włączyć do ich opisu metody matematyczne rozwinięte w tej dziedzinie. Dostępne są dzięki temu również takie narzędzia, jak tablica okresowa wielościanów, która opisuje i pozwala przewidywać ich istotne cechy.

Idea manipulowania klasą obiektu w tworzeniu form architektonicznych i strukturalnych jest naturalna dla architektów, którzy system konstrukcyjny traktują jako integralną część swojego dzieła. S. Calatrava twierdzi, że „...bryłę geometryczną można zredukować z trzech wymiarów o dwóch, a wreszcie zaledwie do jednego. Można wziąć wielościan, zgnieść go, sprowadzić do płaszczyzny. Kolejna transformacja sprowadzi go do pojedynczej linii, do jednego wymiaru. Cała tajemnica wszechobecnych wielościanów foremnych zsumowana jest w tym wielościanie”¹⁸⁵. Odwrócenie tego procesu jest naturalnym uzupełnieniem środków, którymi operuje język formy.

¹⁸⁵ Cytat za: Jodidio, Ph. *Calatrava*, Taschen, Köln (2008), s. 10.

Rozdział 4. Przekształcenia modeli topologicznych

Lepiej jest rozwinąć matematykę potrzebną do rozwiązywania interesujących architektonicznie problemów, niż nakładać dodatkowe ograniczenia na projektowanie jedynie dla matematycznej wygody.

Branko Grünbaum¹⁸⁶

W poprzednim rozdziale omówiono modele topologiczne w postaci różnego rodzaju wzorów na płaszczyźnie ($d = 2$) i w przestrzeni ($d = 3$). Wykazana została również ich współzależność w takim sensie, że wzory na płaszczyźnie mogą stanowić obraz wzorów w przestrzeni. W tym rozdziale postawiony zostanie problem, czy możliwe jest odwrócenie tej zależności, tzn. przejście od wzorów płaskich do przestrzennych (ogólniej: zmiana klasy obiektów), a jeśli tak, to pod jakimi warunkami. Dalej, czy wzory, o których wiemy, że mogą być odtworzone w przestrzeni, można poddawać przekształceniom bez utraty tej zdolności. Ponadto, omówione zostaną dodatkowe metody generowania grafów płaskich i przestrzennych.

Rozwiązanie tych zagadnień pozwoli wprowadzić do topologicznego kształtowania form strukturalnych nową grupę wzorów, które będą mogły stanowić inspirację i podstawę poszukiwań.

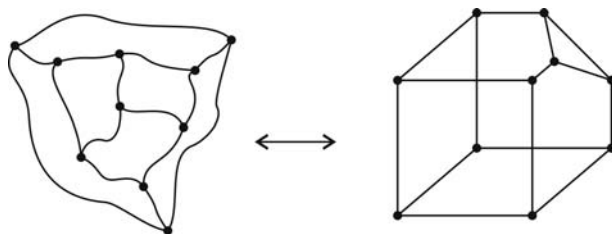
4.1. Twierdzenie Steinitza

Zależność między grafami i wielościanami, przedstawiona w rozdz. 3.4, wymaga uściślenia warunków, których spełnienie umożliwia operowanie taką obustronną zależnością. Podstawowym rezultatem w tej dziedzinie jest twierdzenie

¹⁸⁶ Branko Grünbaum, G.C Shephard *Some comments on „Juxtapositions”* [57, s. 59].

Steinitza¹⁸⁷ (twierdzenie 4.1) [52, s. 235]. Istotę twierdzenia Steinitza przedstawiono na rysunku 4.1 [120, s. 120].

Twierdzenie 4.1 (Steinitza). *Graf G jest realizowalny w przestrzeni 3-wymiarowej wtedy i tylko wtedy, jeżeli jest planarny i 3-spójny.*



Rys. 4.1. Istota twierdzenia Steinitza – realizacja przestrzenna planarnego grafu 3-spójnego

Jedną z konsekwencji twierdzenia Steinitza jest to, że nie ma znaczenia, w jaki sposób narysujemy płaski rysunek grafu, gdyż zawsze otrzymamy ten sam zbiór cykli (patrz definicja 3.10), odpowiadających ścianom wielościanu [120, s. 122]. Co więcej, zgodnie z twierdzeniem 4.2, graf planarny jest maksymalny [27, s. 89].

Twierdzenie 4.2. *Jeżeli graf G jest planarny, to jest maksymalny, tzn. nie istnieje inny graf planarny G_1 , którego G jest podzbiorem.*

Twierdzenie Steinitza umożliwia jednoznaczną selekcję tesselacji pod względem możliwości ich przestrzennej rekonstrukcji. Co więcej, pozwala określić, jakie transformacje grafów na płaszczyźnie są dopuszczalne ze względu na rekonstrukcję (porównaj pkt 4.3 i rozdz. 5).

4.2. Twierdzenie Eberharda

Drugim problemem, który pojawia się w związku z przestrzenną rekonstrukcją grafów jest pytanie: jakie typy kombinatoryczne $(d-1)$ -wielotopów i jaka ich liczba każdego typu, mogą być ze sobą połączone, aby mogły utworzyć kompleks brzegowy (ściany) d -wielotopu? Inaczej mówiąc, z jakich wielokątów i w jakiej

¹⁸⁷ Twierdzenie to uważane jest za najważniejszy i najgłębszy w treści, znany rezultat w dziedzinie wielościanów wypukłych. Podane zostało przez Ernsta Steinitza w pracy *Polyeder und Raumeinteilungen* w *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Band 3 (Geometrie), Teil 3A B12 (1922) 1–139 [52, s. 235, 445].

liczbie można zbudować wielościan? Znajomość odpowiedzi na to pytanie znacznie ułatwiłaby operowanie grafami jako modelami wielościanów i ich przekształcanie. Problem jednak ten nie jest jeszcze obecnie całkowicie rozwiązany, nawet dla $d = 3$, czyli dla zwykłych wielościanów w przestrzeni trójwymiarowej.

Częściowe rozwiązanie tego problemu jest zawarte w twierdzeniu 4.3 [52, s. 254]. Niech $(p_k) = (p_3, p_4, \dots)$ będzie ciągiem nieujemnych liczb całkowitych. Ciąg ten określa liczby wielokątów o kolejnych walentnościach, tworzących ściany wielościanu, kolejno: trójkątów, czworokątów itd.

Twierdzenie 4.3. *Warunkiem koniecznym 3-realizowalności¹⁸⁸ ciągu (p_k) jest spełnienie warunku*

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = 12 + \sum_{k \geq 7} (k-6)p_k \quad (4.1)$$

Równanie (4.1) wiąże ze sobą liczby wielokątów tworzących ściany wielościanu. Wynika z niego, że każdy prosty wielościan (dokładniej: 3-wielotop), zawiera co najmniej cztery ściany, z których każda ma nie więcej niż pięć krawędzi. Bardzo istotne jest spostrzeżenie, że dla $k = 6$ wyrażenie pod znakiem sumy po prawej stronie równania przyjmuje wartość zero, czyli że liczba sześciokątów w ciągu ścian nie ma znaczenia! Sześciokąty są elementem neutralnym w konstruowaniu wielościanów.

Przykładem zastosowania równania (4.1) jest określenie topologii fulerenów¹⁸⁹. W sensie topologicznym, fulereny są to 3-walentne grafy planarne, których ściany są wyłącznie pięciokątami lub sześciokątami. Z twierdzenia 4.3 wynika bezpośrednio, że liczba ścian pięciokątnych, dla każdego fulereny wynosi $p_5 = 12$. Po uwzględnieniu warunku twierdzenia Eulera można określić, że liczba ścian sześciokątnych w fulerenie wynosi $p_6 = v/2 - 10$. Na rysunku 4.2 przedstawiono graf fulereny C_{60} , dla którego $v = 60$, $e = 90$, $f = 32$. Jest to jednocześnie graf dwudziestościanu ściętego¹⁹⁰. Ilość ścian sześciokątnych w tym przypadku wynosi $p_6 = 20$.

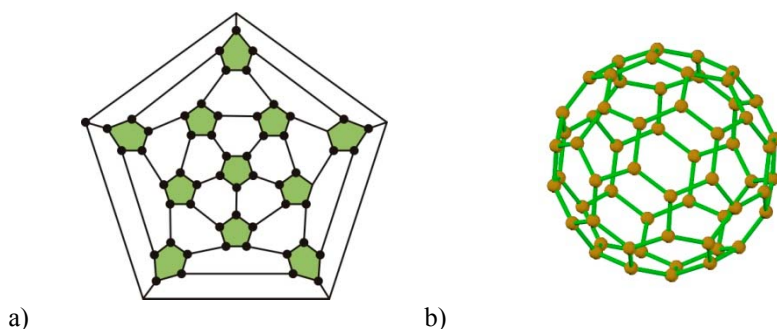
Niezależnie od wniosków z twierdzenia 4.3, wiadomo jednak, że istnieją ciągi liczby wielokątów, różniące się tylko liczbą sześciokątów, z których jeden jest 3-realizowalny, a drugi – nie. Na przykład, wspomniane fulereny, występują w odmianach C_{32} ($p_6 = 6$), C_{44} ($p_6 = 12$), C_{50} ($p_6 = 15$), C_{58} ($p_6 = 19$), C_{60} ($p_6 = 20$), C_{70} ($p_6 = 25$), C_{240} ($p_6 = 110$) i wyższych. Równanie (4.1) pozostaje zatem warunkiem

¹⁸⁸ Tzn. realizowalności w przestrzeni 3-wymiarowej.

¹⁸⁹ Fulereny, są to cząsteczki węgla o dużej masie atomowej, w których atomy są ułożone w wierzchołkach wielościanów w sposób przypominający budowę kopuł geodezyjnych. Nazwa „fulereny” nawiązuje do nazwiska Richarda Buckminster Fullera, który był pionierem konstrukcji takich kopuł. Fulereny oznacza się symbolem C z indeksem odpowiadającym liczbie atomów węgla w cząsteczce, np. C_{20} .

¹⁹⁰ Jest to jednocześnie najmniejszy graf fulereny, w którym poszczególne ściany pięciokątne nie stykają się ze sobą.

bardzo ogólnym i nie wynika z niego, w jakim zakresie wystarcza ono do określenia 3-realizowalności ciągu (p_k) . Jedynym ogólnym wynikiem w tym zakresie jest obecnie twierdzenie Eberharda¹⁹¹ (4.3) wraz z dwoma opartymi na nim wnioskami (twierdzenia 4.5 i 4.6) [52, s. 254].



Rys. 4.2. Fuleren C_{60} : a) graf, b) model przestrzenny

Twierdzenie 4.4 (Eberharda). *Dla każdego ciągu $(p_k \mid s \leq k \neq 6)$ nieujemnych liczb całkowitych, spełniających równanie (4.1), istnieje wartość p_6 , taka że ciąg $(p_k \mid k \geq 3)$ jest 3-realizowalny.*

Twierdzenie 4.5. *Istnieje stała wartość c , taka że każdy ciąg (p_k) spełniający równanie (4.1) jest 3-realizowalny dla pewnej wartości p_6 spełniającej warunek*

$$p_6 < c \sum_{3 \leq k \neq 6} p_k \quad \text{dla} \quad c \geq 1 \quad (4.2)$$

Twierdzenie 4.6. *Każdy ciąg (p_k) spełniający równanie (4.1) jest 3-realizowalny dla pewnej wartości p_6 spełniającej warunek*

$$p_6 < \max \{ k \mid p_k \neq 0 \} \quad (4.3)$$

Na podstawie przedstawionych twierdzeń wyznaczone zostały rozwiązania równania (4.1) dla minimalnych wartości p_6 , dla których ciąg (p_3, p_4, p_5, p_6) jest 3-realizowalny. Wyniki te są przedstawione w tabeli 4.1, według kolejności malejącej liczby trójkątów, p_3 [52, s. 268].

Istnieją ponadto pojedyncze, szczegółowe wyniki dotyczące liczby sześciokątów, p_6 , w ciągach ścian wielościanów. Warte przytoczenia jest twierdzenie 4.7 [52, s. 271].

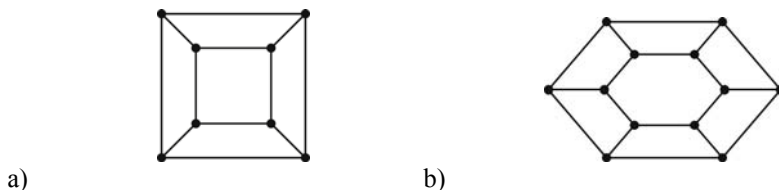
¹⁹¹ Ten ważny wynik został opublikowany w pracy V. Eberharda *Zur Morphologie der Polyeder* Leipzig (1891) [52, s. 434].

Twierdzenie 4.7. Ciągi $(0, 6, 0, p_6)$ i $(0, 0, 12, p_6)$ są realizowalne wtedy i tylko wtedy, gdy $p_6 \neq 1$. Ciąg $(4, 0, 0, p_6)$ jest 3-realizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy p_6 jest liczbą całkowitą parzystą różną od 2. Ciąg $(3, 1, 1, p_6)$ jest 3-realizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy p_6 jest liczbą całkowitą nieparzystą większą od 1.

Tabela 4.1. Rozwiązania równania (4.1) dla minimalnych wartości p_6 , dla których ciąg (p_3, p_4, p_5, p_6) jest 3-realizowalny

p_3	p_4	p_5	p_6
4	0	0	0
3	1	1	3
3	0	3	1
2	3	0	0
2	2	2	0
2	1	4	1
2	0	6	0
1	4	1	2
1	3	3	0
1	2	5	1
1	1	7	2
1	0	9	3
0	6	0	0
0	5	2	0
0	4	4	0
0	3	6	0
0	2	8	0
0	1	10	2
0	0	12	0

Pierwszy warunek tego twierdzenia dotyczy realizowalności wielościanów, które składają się z sześciu ścian czworokątnych i pewnej liczby ścian sześciokątnych. Warunek drugi – wielościanów, które składają się z czterech ścian trójkątnych i pewnej liczby ścian sześciokątnych. Warunek trzeci natomiast – wielościanów składających się z trzech ścian trójkątnych, jednej ściany czworokątnej, jednej pięciokątnej i pewnej liczby ścian sześciokątnych. Pierwszy z warunków twierdzenia ilustruje przykład. Na rysunku 4.3a przedstawiono sześcian, dla którego ciąg liczby ścian o kolejnych liczbach wierzchołków ma postać $(0, 6, 0, 0)$, natomiast na rysunku 4.3b – wielościan (graniastosłup sześciokątny) o ciągu ścian $(0, 6, 0, 2)$. W tym przypadku jeden z sześciokątów jest obszarem na zewnątrz konturu brzegowego grafu. Oba wielościany spełniają wymagania twierdzenia 4.6.



Rys. 4.3. Przykład wielościanów o ciągach liczby ścian $(0, 6, 0, p_6)$:
a) sześcian – $(0, 6, 0, 0)$, b) graniastosłup sześciokątny – $(0, 6, 0, 2)$

4.3. Przekształcenia grafów zachowujące planarność

Twierdzenie 4.1 (Steinitza) i twierdzenie 4.4 (Eberharda) stanowią podstawę przestrzennej realizacji płaskich rysunków grafów, czyli – w pewnym uproszczeniu – wzorów, narysowanych na płaszczyźnie (lub równoważnie – na sferze lub innej powierzchni o genusie $g = 0$).

Kolejne zagadnienie dotyczy przekształceń, którym możemy poddać taki wzór, wiedząc że jest on planarny, mając pewność, że przekształcenia nie zmieniają jego planarności. Grupę takich przekształceń, które są określane wspólną nazwą *redukcji szeregowo-równoległych* lub *redukcji SP^{192}* opisano w rozdziale 4.3.1 [175, s. 106].

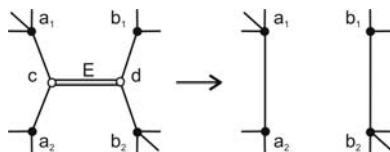
4.3.1. Usunięcie krawędzi

Pierwsza grupa przekształceń obejmuje operacje *usuwania krawędzi* grafów. Możliwe są trzy przypadki [55, s. 28]:

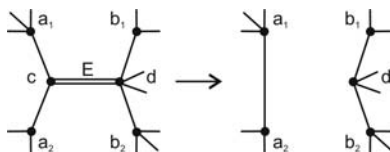
- oba wierzchołki wyznaczające krawędź są 3-walentne (rys. 4.4); w takim przypadku wraz z krawędzią E usuwamy również jej wierzchołki,
- jeden z wierzchołków krawędzi jest 3-walentny, a drugi ma większą walentność (rys. 4.5); w takim przypadku wraz z krawędzią E usuwamy tylko wierzchołek 3-walentny, a drugi pozostawiamy,
- oba wierzchołki krawędzi mają walentność większą niż 3 (rys. 4.6); w takim przypadku usuwamy tylko krawędź E , a wierzchołki pozostawiamy.

Istotą tego rozróżnienia jest to, aby po usunięciu krawędzi nie pozostawały w grafie wierzchołki 2-walentne, które „psułyby” jego strukturę, uniemożliwiając realizowalność w przestrzeni. Operacja usunięcia krawędzi oznacza scalenie dwóch ścian wielościanu. Dlatego, aby zachowana była planarność ścian, muszą być spełnione podane warunki minimalnej liczby krawędzi i stopnia wierzchołków.

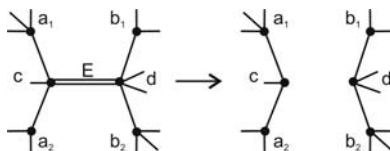
¹⁹² Od ang. określenia *series-parallel reductions*.



Rys. 4.4. Operacja usunięcia krawędzi
– dwa wierzchołki są 3-walentne



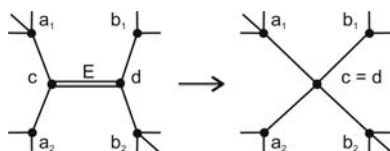
Rys. 4.5. Operacja usunięcia krawędzi
– jeden wierzchołek jest 3-walentny



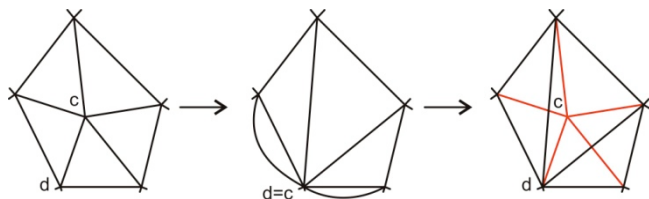
Rys. 4.6. Operacja usunięcia krawędzi
– nie ma wierzchołków 3-walentnych

4.3.2. Kontrakcja (ściągnięcie)

Szczególnym przypadkiem usuwania krawędzi jest operacja ściągnięcia, nazywana też kontrakcją (rys. 4.7). W tym przypadku wierzchołki krawędzi nie są usuwane, ale łączone, tzn. utożsamiane ze sobą (rys. 4.8). Dla tego przekształcenia początkowa walentność wierzchołków nie ma znaczenia, może być < 3 , gdyż po połączeniu wierzchołków na pewno będzie > 3 [175, s. 106].



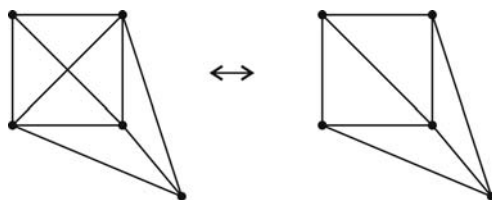
Rys. 4.7. Operacja ściągnięcia (kontrakcji)



Rys. 4.8. Kolejne fazy operacji ściągnięcia (opis w tekście)

4.3.3. Pomińnięcie krawędzi

Graf poddany operacji pominięcia krawędzi E zawiera po przekształceniu wszystkie krawędzie, oprócz E (rys. 4.9). Po zastosowaniu operacji pominięcia nie mogą pozostać wierzchołki stopnia 2 [55, s. 30].

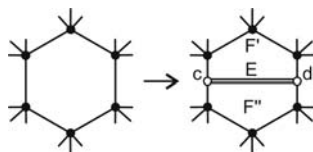


Rys. 4.9. Operacja pominięcia krawędzi (opis w tekście)

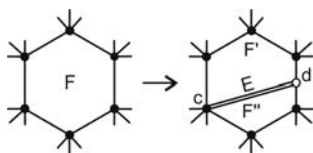
4.3.4. Operacje odwrotne do usunięcia krawędzi

Druga grupa przekształceń, które nie zmieniają realizowalności przestrzennej grafów, to przekształcenia odwrotne do usuwania wierzchołków i kontrakcji. Możliwe są tutaj trzy przypadki [55, s. 29]:

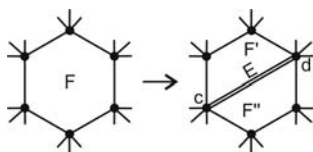
- wstawienie nowej krawędzi w taki sposób, że tworzone są dwa nowe wierzchołki grafu, które dzielą istniejące dwie krawędzie (rys. 4.10),
- wstawienie nowej krawędzi grafu w taki sposób, że jednym jej wierzchołkiem staje się jeden z istniejących wierzchołków grafu, a drugi wierzchołek jest wstawiany na istniejącej krawędzi (rys. 4.11),
- wstawienie nowej krawędzi w taki sposób, że obydwojma jej wierzchołkami stają się istniejące wierzchołki grafu (rys. 4.12).



Rys. 4.10. Wstawienie nowej krawędzi z dwoma nowymi wierzchołkami

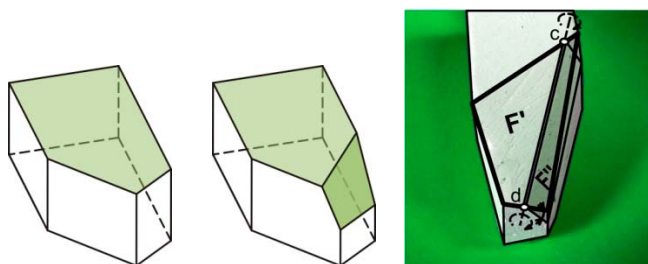


Rys. 4.11. Wstawienie nowej krawędzi z jednym nowym wierzchołkiem



Rys. 4.12. Wstawienie nowej krawędzi bez nowych wierzchołków

W przypadku wstawienia nowej krawędzi wraz dwoma nowymi wierzchołkami (rys. 4.10) należy wyeliminować koplarność ścian F' i F'' , powstałych po podziale ściany początkowej. Uzyskujemy to, stosując postępowanie iteracyjne, polegające na obróceniu jednej z uzyskanych ścian o niewielki kąt wokół wstawionej krawędzi, dostosowaniu wierzchołków wielościanu do powstałej konfiguracji, następnie ponownym obrocie jednej z nowych ścian itd., aż do całkowitego wyeliminowania koplarności ścian. Na rysunku 4.13 zilustrowano tę procedurę na przykładzie kawałka kredy o powierzchni wielościennej [55, s. 30].



Rys. 4.13. Iteracyjne usuwanie koplarności ścian podczas operacji z rys. 4.10

4.3.5 Operacje ΔY i odwrotne

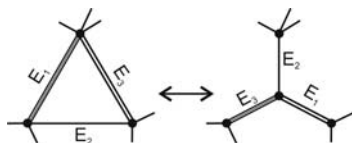
Trzecią grupą przekształceń, które nie zmieniają planarności grafów, są operacje nazywane ΔY ¹⁹³. Polegają one na zastąpieniu trójkąta otaczającego ścianę

¹⁹³ Ang. *Delta-Wye operations*.

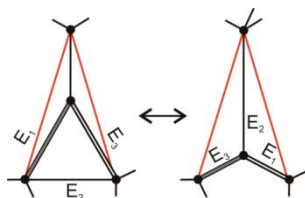
wielościanu trójramienną gwiazdą, łączącą te same wierzchołki¹⁹⁴. Możliwe są cztery przypadki [175, s. 108]:

- początkowy układ krawędzi tworzy dokładnie trójkąt i jest zamieniany na gwiazdę (rys. 4.14); wszystkie wierzchołki i krawędzie zostają zachowane,
- początkowy układ krawędzi zawiera trójkąt i jedną krawędź dodatkową (rys. 4.15); usuwany jest jeden wierzchołek i jedna krawędź,
- początkowy układ krawędzi zawiera trójkąt i dwie krawędzie dodatkowe (rys. 4.16); usuwane są dwa wierzchołki i dwie krawędzie,
- początkowy układ krawędzi zawiera trójkąt i trzy krawędzie dodatkowe (rys. 4.17); usuwane są trzy wierzchołki i trzy krawędzie.

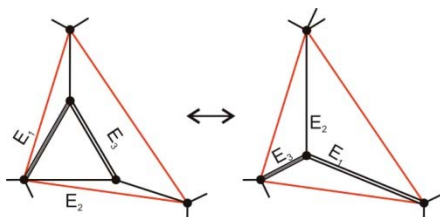
Czerwonymi liniami zaznaczono, na rysunkach 4.15–4.17, dodatkowe krawędzie, które mogą występować w przekształcanym obszarze grafu.



Rys. 4.14. Przekształcenie ΔY – początkowy układ krawędzi tworzy dokładnie trójkąt i jest zamieniany na gwiazdę; wszystkie wierzchołki i krawędzie zostają zachowane

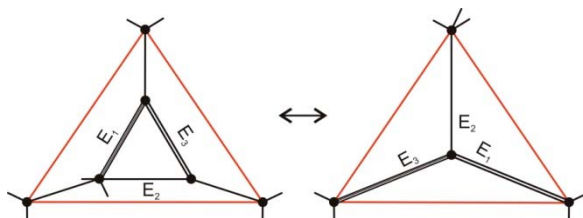


Rys. 4.15. Przekształcenie ΔY – początkowy układ krawędzi zawiera trójkąt i jedną krawędź dodatkową; usuwany jest jeden wierzchołek i jedna krawędź



Rys. 4.16. Przekształcenie ΔY – początkowy układ krawędzi zawiera trójkąt i dwie krawędzie dodatkowe; usuwane są dwa wierzchołki i dwie krawędzie

¹⁹⁴ Można tutaj zauważyć analogię do dwóch tradycyjnych sposobów łączenia sieci elektrycznych prądu zmiennego: w trójkąt i w gwiazdę.

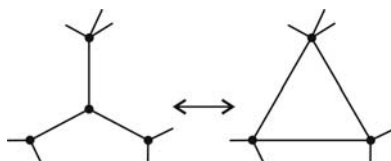


Rys. 4.17. Przekształcenie ΔY – początkowy układ krawędzi zawiera trójkąt i trzy krawędzie dodatkowe; usuwane są trzy wierzchołki i trzy krawędzie

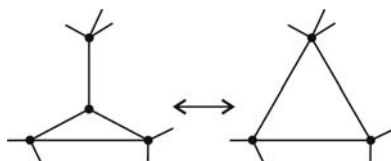
Operacje odwrotne do przekształceń ΔY nazywane są $Y\Delta$. Polegają one na zamianie wierzchołka stopnia 3 ścianą. Odpowiada to „ścięciu wierzchołka” wielościanu. Możliwe są następujące sytuacje [175, s. 108]:

- początkowy układ krawędzi tworzy gwiazdę i jest zamieniany na trójkąt (rys. 4.18); wszystkie wierzchołki i krawędzie są zachowane,
- początkowy układ krawędzi tworzy gwiazdę z jedną krawędzią dodatkową i jest zamieniany na trójkąt (rys. 4.19); usuwany jest jeden wierzchołek i jedna krawędź,
- początkowy układ krawędzi tworzy gwiazdę z dwiema krawędziami dodatkowymi i jest zamieniany na trójkąt (rys. 4.20); usuwane są dwa wierzchołki i dwie krawędzie,
- początkowy układ krawędzi tworzy gwiazdę z trzema krawędziami dodatkowymi i jest zamieniany na trójkąt (rys. 4.21); usuwane są trzy wierzchołki i trzy krawędzie.

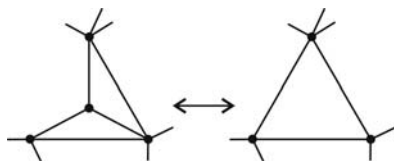
Operacje ΔY i $Y\Delta$ są operacjami dualnymi [175, s. 108].



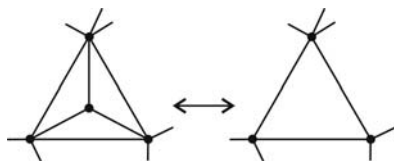
Rys. 4.18. Przekształcenie $Y\Delta$ – początkowy układ krawędzi tworzy gwiazdę i jest zamieniany na trójkąt; wszystkie wierzchołki i krawędzie są zachowane



Rys. 4.19. Przekształcenie $Y\Delta$ – początkowy układ krawędzi tworzy gwiazdę z jedną krawędzią dodatkową i jest zamieniany na trójkąt; usuwany jest jeden wierzchołek i jedna krawędź



Rys. 4.20. Przekształcenie $Y\Delta$ – początkowy układ krawędzi tworzy gwiazdę z dwiema krawędziami dodatkowymi i jest zamieniany na trójkąt; usuwane są dwa wierzchołki i dwie krawędzie



Rys. 4.21. Przekształcenie $Y\Delta$ – początkowy układ krawędzi tworzy gwiazdę z trzema krawędziami dodatkowymi i jest zamieniany na trójkąt; usuwane są trzy wierzchołki i trzy krawędzie

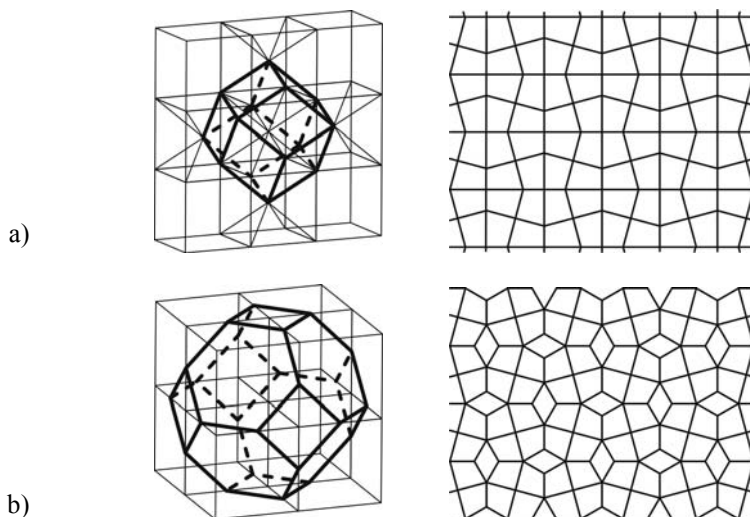
4.3.6. Przykład zastosowania przekształceń do modyfikacji siatek wielościennych

Wyjaśnienie celu wprowadzenia opisanych przekształceń przedstawiono na przykładzie. Na rysunku 4.22a przedstawiono dwunastościan rombowy i wykres Schlegla kompleksu powstałego przez połączenie tych wielościannów¹⁹⁵. Wykres ten tworzy na płaszczyźnie pewien płaski wzór (tesselację), który następnie został przekształcony poprzez operację $Y\Delta$, czyli w tym przypadku zastąpienie wierzchołka ścianą. Przekształcony wzór może być teraz zinterpretowany jako wykres Schlegla kompleksu, powstałego ze złożenia ośmiościanów rombowych ściętych¹⁹⁶ (rys. 4.22b).

Przeprowadzona operacja może się wydawać banalna, gdyż przykład dotyczył stosunkowo prostej bryły i jednego przekształcenia. Siła opisanych przekształceń tkwi w tym, że mogą one być stosowane do znacznie bardziej skomplikowanych układów wielościannów i ich wykresów Schlegla, dając jednocześnie pewność, że efekt przekształcenia pozostanie planarny. Co więcej, redukcje SP można stosować wielokrotnie, a ich złożenie w dalszym ciągu zachowa planarność [175, s. 109]. Operowanie na płaskich wzorach pozwala jednak w znacznie większym stopniu „panować” nad strukturą niż to jest możliwe przy wykonywaniu operacji w przestrzeni.

¹⁹⁵ Porównaj pkt 3.4.1.

¹⁹⁶ Jak wiadomo, dwunastościany rombowe ścięte nie wypełniają całkowicie przestrzeni i w nowym kompleksie wielościannów pozostają puste obszary, chyba że potraktujemy je jako dodatkowe bryły, dopełniające tesselację.



Rys. 4.22. Modyfikacja siatek wielościennych: a) dwunastościan rombowy i wykres Schlegla siatki zbudowanej z tych wielościianów, b) ośmiościan rombowy ścięty i wykres Schlegla siatki zbudowanej z tych wielościianów

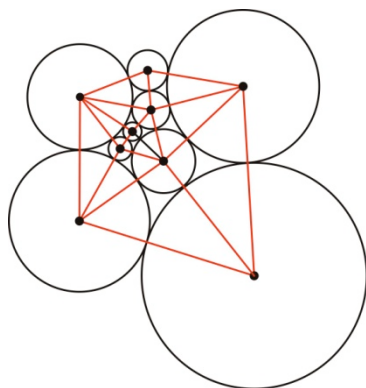
4.4. Generowanie grafów planarnych poprzez upakowania okręgów

Metoda ta jest oparta na *twierdzeniu o upakowaniu okręgów*, podanym pierwotnie przez P. Koebe'go w 1936 r., a następnie ponownie odkrytym i rozszerzonym przez E.M. Andreeva i W.P. Thurstona w połowie lat siedemdziesiątych XX w. (twierdzenie 5.2) [175, s. 117].

Twierdzenie 4.8 (Koebe-Andreev-Thurston). *Każdy 3-spójny graf planarny może być zrealizowany jako 3-wielotop, którego krawędzie są styczne do jednostkowej sfery. Realizacja taka jest unikatowa.*

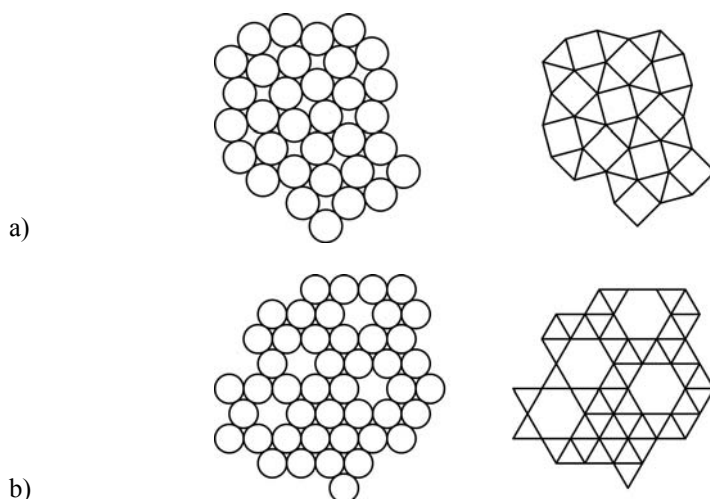
Z twierdzenia 4.8 wynika, że każdy graf planarny może być reprezentowany przez upakowanie okręgów, tj. konfigurację rozłącznych dysków, które mogą być styczne, ale nie mogą się przecinać [150, s. 117]. W upakowaniu okręgów wierzchołki odpowiadają rozłącznym dyskom, które są styczne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im wierzchołki są połączone krawędzią (rys. 4.23). Jeżeli graf jest 3-spójny, to jego reprezentacja za pomocą upakowania okręgów jest unikatowa. Inne sformułowanie tego twierdzenia mówi, że każdy 3-spójny graf planarny może być zrealizowany jako 3-wielotop (wielościian), którego wszystkie krawędzie są styczne do sfery jednostkowej [176, s. 628]. Co więcej, jednocześnie określona jest reprezentacja grafu dualnego do danego, również poprzez okręgi. Prze-

cinające się krawędzie grafu i jego grafu dualnego są reprezentowane przez okręgi, które przecinają się ortogonalnie [175, s. 117–118] [176, s. 631].



Rys. 4.23. Graf planarny reprezentowany jako układ rozłącznych dysków, stycznych, jeżeli odpowiednie wierzchołki są połączone

Jak wspomniano, okręgi nie mogą się nakładać. Jednak z twierdzenia 4.8 nie wynikają żadne inne ograniczenia, co do wzajemnego rozmieszczenia okręgów. Aby możliwe było skonstruowanie grafu, każdy okrąg musi być styczny, z co najmniej dwoma innymi okręgami. Umożliwia to konstruowanie bardzo różnorodnych upakowań. Przedstawiono upakowania okręgów, które tworzą szkielet do tesselacji $3^2.4.3.4$ (rys. 4.24a) i $3^4.6$ (rys. 4.24b) [171, s. 38–39].



Rys. 4.24. Upakowania okręgów i skonstruowane na nich tesselacje:
a) $3^2.4.3.4$, b) $3^4.6$

4.5. Iloczyn kartezjański grafów

Opisane przekształcenia działały na grafy lokalnie. Mnożenie grafów (iloczyn¹⁹⁷ kartezjański) pozwala na tworzenie nowych grafów z grafów podstawowych (czynników).

Udowodniono, że każdy spójny graf skończony ma jednoznaczny rozkład na czynniki ze względu na iloczyn kartezjański i że symetria takich grafów jest izomorficzna do symetrii jego czynników pierwszych [67, s. 126].

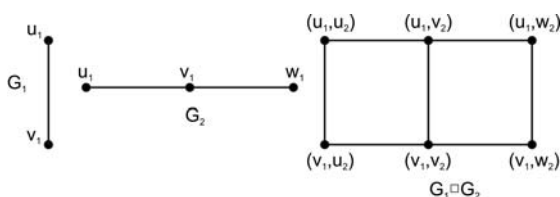
Definicja 4.1. Iloczyn kartezjański dwóch grafów G_1 and G_2 , o rozłącznych zbiorach wierzchołków V_1 i V_2 , i zbiorach krawędzi E_1 i E_2 , oznaczany $G_1 \square G_2$, jest grafem o zbiorze wierzchołków [67, s. 3–4]:

$$V(G_1 \square G_2) = V(G_1) \times V(G_2) \quad (4.4)$$

to jest, zbiorem $\{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$, lub alternatywnie:

$$E(G_1 \square G_2) = E(G_1) \times V(G_2) \cup V(G_1) \times E(G_2) \quad (4.5)$$

Zbiór krawędzi $G_1 \square G_2$ składa się ze wszystkich par wierzchołków (g_i, g_k) , gdzie $g_i \in G_1$, $g_k \in G_2$. Poniżej przedstawiono prosty przykład iloczynu kartezjańskiego grafów G_1 i G_2 (rys. 4.25) [67, s. 4].



Rys. 4.25. Iloczyn kartezjański: $G_1 \square G_2$
dwóch grafów liniowych (ścieżek)

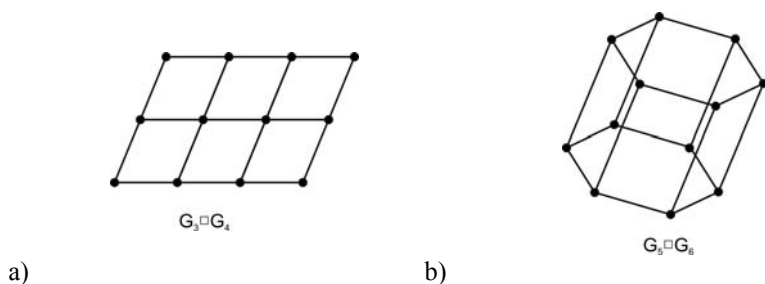
Z definicji iloczynu kartezjańskiego, wyrażonej równaniem (4.5), wynika jego istotna charakterystyka – *włókna* [67, s. 4].

Definicja 4.2. G -włóknem grafu $G \square H$ nazywamy iloczyn grafu G przez wierzchołek (h) grafu H i odwrotnie.

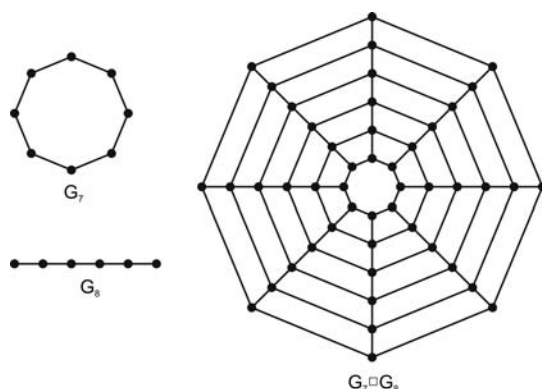
¹⁹⁷ Używane jest równorzędnie określenie *produkt kartezjański*.

Należy zauważyć, że iloczyn kartezjański dwóch grafów płaskich pozwala skonstruować bezpośrednio siatkę w przestrzeni trójwymiarowej, przy odpowiednim doborze grafów podstawowych. Poniżej zamieszczono kilka przykładów takich operacji [67, s. 4–10] [74, s. 15]:

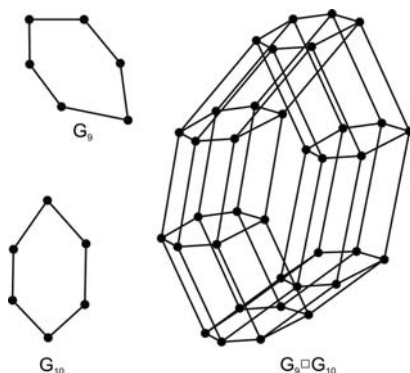
- iloczyn kartezjański $G_3 \square G_4$ dwóch ścieżek o 3 i 4 wierzchołkach (rys. 4.26a) i iloczyn kartezjański $G_5 \square G_6$ grafu heksagonalnego (cyklu) G_5 i ścieżki o 2 wierzchołkach G_6 (rys. 4.26b),
- iloczyn kartezjański $G_7 \square G_8$ grafu oktagonálnego G_7 i ścieżki o 6 wierzchołkach G_8 (rys. 4.27),
- iloczyn kartezjański $G_9 \square G_{10}$ dwóch grafów cyklicznych heksagonalnych G_9 i G_{10} (rys. 4.28),
- iloczyn kartezjański $G_{11} \square G_{12}$ dwóch grafów: G_{11} i drzewa G_{12} (rys. 4.29).



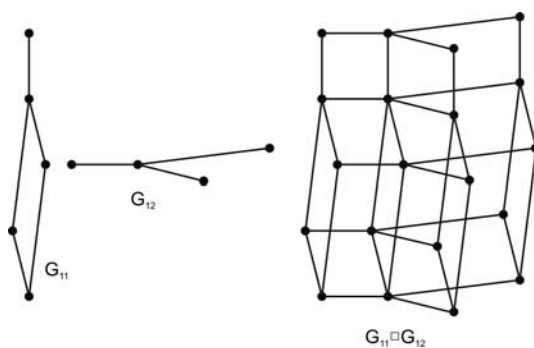
Rys. 4.26. Iloczyn kartezjański: a) $G_3 \square G_4$ dwóch ścieżek o 3 i 4 wierzchołkach, b) $G_5 \square G_6$ grafu heksagonalnego (cyklu) G_5 i ścieżki o 2 wierzchołkach G_6



Rys. 4.27. Iloczyn kartezjański $G_7 \square G_8$ grafu oktagonálnego G_7 i ścieżki o 6 wierzchołkach G_8



Rys. 4.28. Iloczyn kartezjański $G_9 \square G_{10}$
dwóch grafów cyklicznych heksagonalnych G_9 i G_{10}

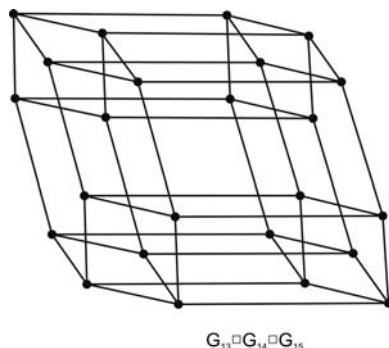


Rys. 4.29. Iloczyn kartezjański $G_{11} \square G_{12}$
grafu G_{11} i drzewa G_{12}

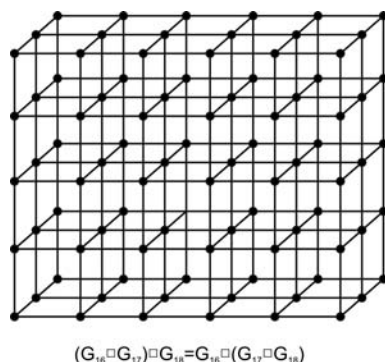
Operacja iloczynu kartezjańskiego może być przeprowadzana wielokrotnie. Przykładem może być iloczyn trzech grafów: cyklu heksagonalnego G_{13} i dwóch ścieżek G_{14} i G_{15} (rys. 4.30).

Ponieważ operacja iloczynu kartezjańskiego ma właściwość łączności, może on być definiowany alternatywnie, jako iloczyn różnych czynników. Przykładem może być graf z rysunku 4.31, który można rozpatrywać jako iloczyn $G_{16} \square G_{17} \square G_{18}$ trzech ścieżek o 3, 5 i 6 wierzchołkach lub jako iloczyn siatki prostokątnej o 3×5 ($G_{16} \square G_{17}$) wierzchołkach i ścieżki o 6 wierzchołkach G_{18} (rys. 4.31) [67, s. 9].

$$(G_{16} \square G_{17}) \square G_{18} = G_{16} \square (G_{17} \square G_{18}) \quad (4.6)$$



Rys. 4.30. Iloczyn kartezjański: $G_{13} \square G_{14} \square G_{15}$ cyklu heksagonalnego G_{13} i ścieżek G_{14} i G_{15}



Rys. 4.31. Iloczyn kartezjański $G_{13} \square G_{14} \square G_{15}$ trzech ścieżek o 3, 5 i 6 wierzchołkach lub – alternatywnie – siatki o 3×5 wierzchołkach ($G_{16} \square G_{17}$) i ścieżki o 6 wierzchołkach G_{18}

Iloczyn kartezjański może być planarny, w rozumieniu twierdzenia Steinitza, z zastrzeżeniem warunku twierdzenia (4.9) [67, s. 29].

Twierdzenie 4.9. *Niech grafy G_1 i G_2 będą grafami spójnymi, o co najmniej trzech wierzchołkach. Graf $G_1 \square G_2$ jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno G_1 , jak i G_2 są ścieżkami, lub gdy jeden z nich jest ścieżką, a drugi cyklem.*

Oprócz iloczynu kartezjańskiego, istnieją również inne sposoby mnożenia grafów, pozwalające generować nowe obiekty. Są to np. iloczyn tensorowy¹⁹⁸ (definicja 4.2) i iloczyn leksykograficzny grafów (definicja 4.3).

¹⁹⁸ Zamiast określenia iloczyn tensorowy używane są również określenia: *produkt Kroneckera* i *produkt bezpośredni*.

Definicja 4.2. Iloczyn tensorowy dwóch grafów G i H , o rozłącznych zbiorach wierzchołków $V(G)$ i $V(H)$, i zbiorach krawędzi $E(G)$ i $E(H)$, oznaczany $G \times H$, jest grafem, dla którego [61, s. 36]:

$$V(G \times H) = \{(g, h) \mid g \in V(G), h \in V(H)\} \quad (4.7)$$

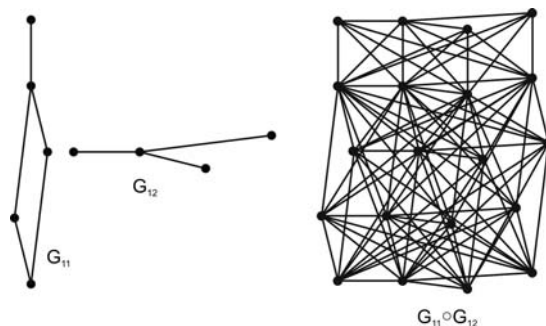
$$E(G \times H) = \{(g, h)(g', h') \mid gg' \in E(G) \text{ i } hh' \in E(H)\} \quad (4.8)$$

Definicja 4.3. Iloczyn leksykograficzny dwóch grafów G i H , o rozłącznych zbiorach wierzchołków $V(G)$ i $V(H)$, i zbiorach krawędzi $E(G)$ i $E(H)$, oznaczany $G \circ H$, jest grafem, dla którego [66, s. 185] [61, s. 43, 56]:

$$V(G \circ H) = \{(g, h) \mid g \in V(G), h \in V(H)\} \quad (4.9)$$

$$E(G \circ H) = \{(g, h)(g', h') \mid gg' \in E(G), \text{ lub } g = g' \text{ i } hh' \in E(H)\} \quad (4.10)$$

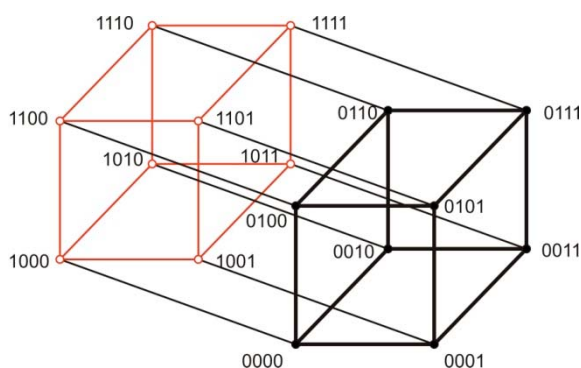
Odmienny, w stosunku do iloczynu kartezjańskiego, sposób definiowania tych operacji, prowadzi do odmiennych rezultatów – innych grafów wynikowych. Ilustruje to przedstawiony przykład iloczynu leksykograficznego grafów z rysunku 4.29 – $G_{11} \circ G_{12}$ (rys. 4.32).



Rys. 4.32. Iloczyn leksykograficzny: $G_{11} \circ G_{12}$
grafów G_{11} i G_{12} z rys. 4.29

Ciekawy sposób zastosowania mnożenia grafów przedstawiono w pracy [74]. Zaproponowano w niej przypisanie, przed wykonaniem operacji iloczynu kartezjańskiego, wag liczbowych do wierzchołków i krawędzi grafów. Poprzez manipulowanie tymi wagami możliwa jest daleko idąca kontrola nad wynikiem operacji. Autorzy stosują również dodatkowe transformacje geometryczne, uzyskanych grafów, przez zadanie funkcji określającej współrzędną z wierzchołków, uzyskując złożone formy końcowe. Metoda ta wykracza jednak dość daleko poza samo zagadnienie mnożenia grafów.

Interesującym aspektem iloczynu kartezjańskiego grafów jest zmiana wymiaru przestrzeni, w której może być zrealizowany ich iloczyn. Iloczyn dwóch grafów liniowych dał graf siatkowy na płaszczyźnie (rys. 4.26a). Iloczyn ścieżki i cyklu może być zrealizowany zarówno na płaszczyźnie (rys. 4.27), jak i w przestrzeni (rys. 4.26b). Iloczyn dwóch cykli dał graf w przestrzeni trójwymiarowej (rys. 4.28), podobnie iloczyn trzech ścieżek (rys. 4.31). Analogicznie jest z iloczynem kartezjańskim grafów zrealizowanych w przestrzeni trójwymiarowej. Jest on realizowalny w przestrzeni $d = 4$, a grafy niższego rzędu są jego włóknami. Na rysunku 4.33 przedstawiono czterowymiarowy odpowiednik sześciangu – *tesseract*. Może on być rozpatrywany jako iloczyn kartezjański grafu sześciangu i ścieżki o dwóch wierzchołkach¹⁹⁹ [67, s. 11–12].



Rys. 4.33. Graf Q_4 – hipersześcian (opis w tekście)

Odwzorowanie wielotopów z przestrzeni czterowymiarowej na przestrzeń trójwymiarową wykonywane poprzez wykresy Schlegla ma zastosowanie w kształtowaniu trójwymiarowych wypełnień aperiodycznych – przestrzennych odpowiedników parkietażu Penrose’a (patrz rozdz. 6.5) [122, s. 70].

Iloczyn kartezjański grafów wykazuje wiele podobieństw do niektórych innych metod generowania złożonych siatek przestrzennych, np. do *algebry formexów*²⁰⁰ [119] i podobnie jak ona, dobrze się nadaje do zastosowań wspomaganych komputerowo.

¹⁹⁹ Indeksy opisane przy wierzchołkach pozwalają zidentyfikować odpowiednio włókna tesseractu.

²⁰⁰ Algebra formexów jest symbolicznym językiem opisu skomplikowanych, przestrzennych konstrukcji prętowych. Stanowi ona podstawę pakietu oprogramowania Formian, opracowanego na Uniwersytecie Surrey, pod kierunkiem H. Nooshina. Wyczerpujący opis tego systemu zawiera praca [119].

4.6. Uwagi końcowe

Przedstawione metody przekształcania modeli topologicznych, charakteryzują się tym, że nie zmieniają właściwości modeli, które są istotne dla zastosowania ich w kształtowaniu form strukturalnych: niezmienności geometrycznej i możliwości przestrzennej rekonstrukcji. Umożliwia to wprowadzanie daleko idących modyfikacji, w „bezpieczny” dla właściwości strukturalnych sposób. Poddawane przekształceniom modele muszą jednak wcześniej te właściwości mieć. Jedynie wtedy stosowanie tego typu przekształceń jest celowe. Warunkiem sensowności tej procedury jest jej rozpoczęcie od wybrania modelu o odpowiednich właściwościach.

Rozdział 5. Modele topologiczne a klasa przestrzeni

*Łatwo z domu rzeczywistości zejść
do lasu matematyki, ale nieliczni
tylko umieją wrócić.*

Hugo Steinhaus²⁰¹

Jak wykazano w poprzednim rozdziale, modele topologiczne obiektów na płaszczyźnie ($d = 2$), w przestrzeni ($d = 3$), a nawet w hiperprzestrzeni ($d = 4$) nie są od siebie niezależne. Obiekty trójwymiarowe mogą być przedstawione w postaci obiektów płaskich. Za pomocą iloczynu kartezjańskiego możemy generować siatki przestrzenne z płaskich grafów. Co więcej, odwzorowanie obiektu w przestrzeni o innej klasie ujawnia niektóre jego właściwości, które wcześniej nie były oczywiste.

W dalszej części rozdziału zostaną przedstawione metody odtwarzania przestrzennego płaskich wzorów, a także korelacje, pomiędzy realizacjami wzorów w różnych wymiarach, a ich sztywnością w sensie mechanicznym.

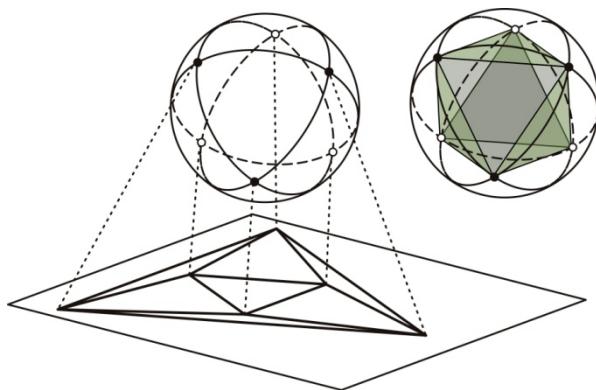
5.1. Przestrzenna rekonstrukcja figur płaskich

Analiza związków pomiędzy tesselacjami płaszczyzny oraz układami wielościannów w przestrzeni, rodzi pytanie o leżące u podstaw wspólne zasad konstrukcyjne. Czy przedstawione we wcześniejszych rozdziałach wypełnienia i podziały płaszczyzny mogą być uważane za obraz pewnych kompleksów wielościennych w przestrzeni (rys. 4.1), tzn. czy możliwe jest przeprowadzenie ich przestrzennej rekonstrukcji?

Pozytywna odpowiedź na to pytanie padła już w poprzednim rozdziale: pod pewnymi warunkami możliwe jest znalezienie wielościannu, który jest reprezenta-

²⁰¹ Cytat za: J. Łukasiewicz (red), *Między duchem a materią pośredniczy matematyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (2000), s. 16.

cją grafu planarnego [141]. Graf charakteryzuje zatem całkowicie strukturę kombinatoryczną wielościanu²⁰². Rozszerzając to na wielościenne układy w przestrzeni, można zrekonstruować cały kompleks. Ta współzależność płaskich ($d = 2$) i przestrzennych ($d = 3$) wypełnień przestrzeni ma zasadnicze znaczenie dla intuicyjnej percepcji i rozumienia form strukturalnych.



Rys. 5.1. Ogólna idea rekonstrukcji przestrzennej grafów [175, s. 105]

Metody konstruowania realizacji geometrycznych 3-wielotopów (wielościanów) można podzielić na dwie odmienne grupy:

1. Podnoszenie grafów:

- a) metoda Tuttego–Maxwella–Cremony (rzutowanie odtwarzające),
- b) przedłużenia Lawrence’a,
- c) przekształcenia Gale’a.

2. Konstrukcje oparte na upakowaniu płaskich okręgów – metoda Koebe–Andreewa–Thurstona.

Pod względem topologicznym podnoszenie grafów planarnych oznacza zwiększenie ich przestrzeni realizacji o jeden. Z każdą z wymienionych metod wiąże się inny zakres zastosowań i inne rezultaty [176, s. 626].

5.1.1. Metoda Tuttego–Maxwella–Cremony

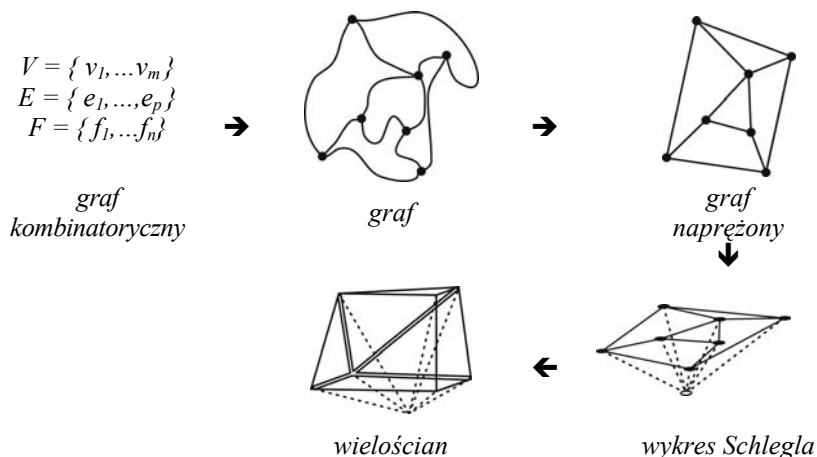
Metoda polega na przypisaniu wierzchołkom grafów wektora wysokości, przez co „podnoszą” się one z płaszczyzny i przyjmują położenie w przestrzeni. Podstawy tej metody sięgają dziewiętnastowiecznych prac J.C. Maxwella²⁰³

²⁰² Ogólniej: wielotopu, gdyż możliwość rekonstrukcji przestrzennej dotyczy również obiektów klasy wyższej niż 3.

²⁰³ W pracach [98, 99 i 100].

i L. Cremony²⁰⁴ na temat konstrukcji dualnych i rzutowania odtwarzającego²⁰⁵ [32, s. 26]. Zasadniczy wkład w jej ostateczne opracowanie wniósł jednak niemal sto lat później W.T. Tutte²⁰⁶.

Konstrukcja wielościanu jest w tej metodzie przeprowadzana w dwóch etapach: najpierw graf musi zostać „prawidłowo narysowany” na płaszczyźnie, a następnie podniesiony w przestrzeni trójwymiarowej. Sekwencję postępowania przedstawiono na rysunku 5.2 [120, s. 122–140], [176, s. 626–628], [175, s. 114].



Rys. 5.2. Schemat postępowania w metodzie Tuttego–Maxwella–Cremony

Rekonstrukcja przestrzenna grafu rozpoczyna się od 3-spójnego grafu planarnego $G = (V, E)$ o n wierzchołkach i zestawie wag przypisanych do krawędzi $\omega: E \rightarrow R$ oraz rysunku, który jest jego geometryczną realizacją na płaszczyźnie (rys. 5.3a). W pierwszym kroku, dany rysunek jest przekształcany w taki sposób, aby otrzymana figura była planarnym przedstawieniem G , w którym wszystkie krawędzie są reprezentowane przez nieprzecinające się odcinki, a ściany – przez wielokąty wypukłe (rys. 5.3b). Ten nowy rysunek jest nazywany *grafem naprężonym*. Otrzymuje się go stosując twierdzenie Tuttego [120, s. 122]:

Twierdzenie 5.1. Niech $G = \{(1, \dots, n), E\}$ będzie 3-spójnym grafem planarnym, który ma ścianę $(k+1, \dots, n)$ dla pewnego $k < n$. Niech $p_{k+1}, \dots, p_n$ będą wierzchołkami (w tej kolejności) wypukłego $(n-k)$ -kąta. Niech $\omega: E' \rightarrow R^+$ będzie przypisaniem dodatnich wag do wewnętrznych krawędzi:

a) istnieje unikatowe położenie $p_1, \dots, p_k \in R^2$ wierzchołków wewnętrznych, takie że wszystkie wierzchołki wewnętrzne są w równowadze,

²⁰⁴ W pracy [37].

²⁰⁵ Ang. *reciprocal projection*.

²⁰⁶ W pracach [151] i [150].

b) wszystkie ściany $c_1, c_2, \dots$ grafu G są zrealizowane jako nienakładające się wielokąty wypukłe.

Na podstawie twierdzenia Tuttego, graf „naprężony” otrzymuje się przez przesunięcie wierzchołków początkowego rysunku w nowe położenie $P = (p_1, \dots, p_n)$, tzw. *położenie równowagi*. Położenie to, będące odwzorowaniem $p: V \rightarrow R^2$, jest unikatowe. Dowolny wierzchołek $v \in V$ jest w równowadze, jeżeli jest spełniony warunek:

$$\sum_{(v,w) \in R} \omega_{v,w} (p_v - p_w) = 0 \quad (5.1)$$

Jeśli nie występują żadne dodatkowe ograniczenia, wagi przypisywane poszczególnym krawędziom mogą mieć wartość 1. Zgodnie z twierdzeniem Tuttego, suma kwadratów długości wszystkich krawędzi grafu naprężonego jest minimalna [120, s. 124].

Proces przekształcania grafu zwykłego na naprężony rozpoczyna się od wyboru jednej trójkątnej ściany jako zewnętrznego wielokąta c_0 . Wierzchołki tego trójkąta umieszczane są odpowiednio w początku układu współrzędnych i w jednostkowych odległościach od początku układu, na osiach x i y . Wyrazy konfiguracji P są wyznaczone poprzez rozwiązanie równań

$$M \cdot x = b_x \text{ i } M \cdot y = b_y \quad (5.2)$$

gdzie: $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$,

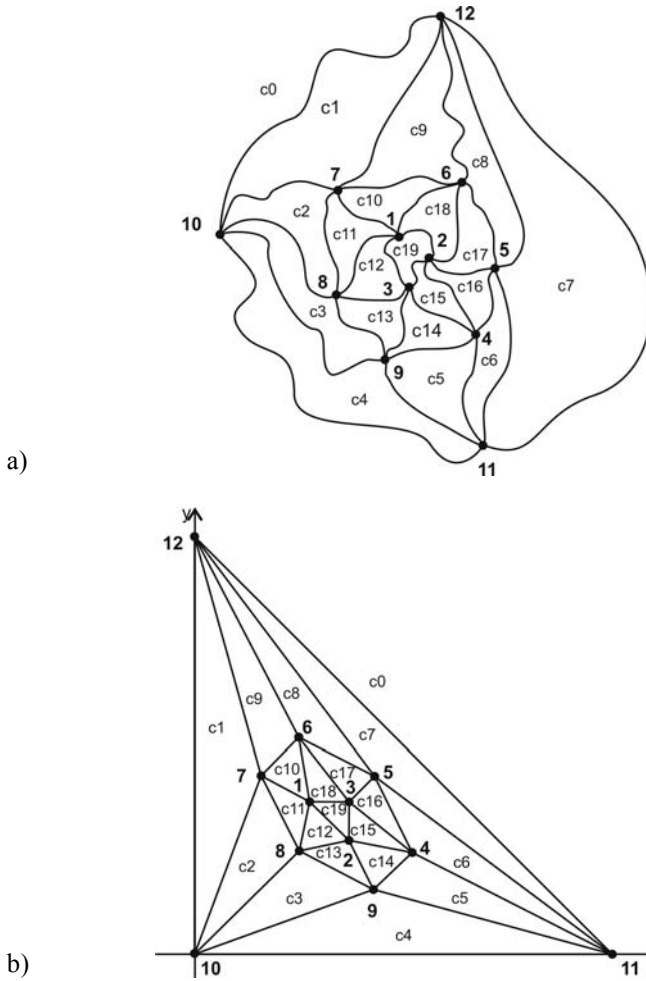
M – macierz naprężeń,

b_x i b_y – wektory

Ciekawe jest, że konstrukcja konfiguracji P grafu naprężonego ma interpretację fizyczną o typowo topologicznym charakterze. Jeżeli wyobrazimy sobie, że wszystkie krawędzie grafu są wykonane z pasków gumy, a następnie przymocuje się wierzchołki trójkąta zewnętrznego do podłoża w taki sposób, aby wszystkie krawędzie wewnętrzne były naciągnięte, to otrzymamy się położenie, w którym występuje równowaga sił [120, s. 122], [175, s. 626].

W następnym kroku rysunek grafu naprężonego G , tj. konfigurację $P = (p_1, \dots, p_n)$, interpretuje się jako wykres Schlegla pewnego wielościanu. Wykres ten zostanie następnie podniesiony, aby uzyskać trzeci wymiar.

Zakłada się, że wszystkie punkty P leżą na płaszczyźnie $z = 1$ w R^3 . Każdy punkt p_1 ma współrzędne $(x_i, y_i, 1)$. Nadaje się ścianom wewnętrznym indeksy $1, \dots, m$, a ściana zewnętrzna, odpowiadająca zewnętrznemu wielokątowi jest oznaczona c_0 . Następnie, dla krawędzi wewnętrznych można wyróżnić zorientowane czwórki $(b, t | L, R)$, gdzie b, t – odpowiednio górny i dolny wierzchołek krawędzi, L, R – lewa i prawa ściana incydentna z krawędzią.



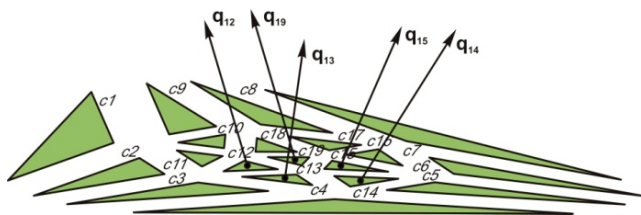
Rys. 5.3. Graf planarny: a) dowolna realizacja (rysunek) na płaszczyźnie, b) „prawidłowy rysunek” – graf naprężony

Kolejnym krokiem jest znalezienie *wektora podnoszącego* dla każdej ściany wewnętrznej c_i (rys. 5.4). Odbywa się to przez procedurę rekurencyjną, w której [120, s. 138]:

$$q_1 = (0, 0, 0) \quad (5.3)$$

$$q_L = \omega_{b,t} (p_b \times p_t) + q_R \quad (5.4)$$

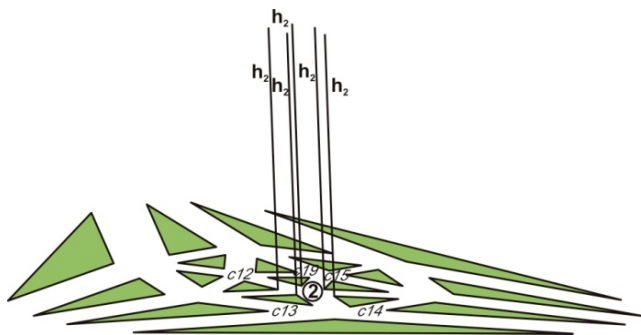
jeżeli $(b, t | L, R)$ jest zorientowaną drogą w (G, P) .



Rys. 5.4. Wektory podnoszące q_i , przypisane poszczególnym ścianom

Wektory q_i są dobrze określone, tzn. że dla każdej ściany c_i , mają tylko jedną wartość, która nie zależy od wyboru konkretnej kolejności w procesie rekurencyjnym. Wystarczające jest wybranie kolejności ścian $c_1 = c_{L_1}, c_{L_2}, \dots, c_{L_l} = c_j$, gdzie dla $i = 1, \dots, l-1$, ściany $c_{L_i}, c_{L_{i+1}} = c_{R_i}$ są jednocześnie incydentne z krawędzią (b_i, t_i) grafu G i można wyznaczyć wartość $q_{L_{i+1}}$ na podstawie q_{L_i} . Wektory q_i określają *funkcję podnoszącą* f dla ściany c_i (również dobrze określoną)

$$f(x) = \langle x, q_i \rangle, \quad x \in c_i \quad (5.5)$$

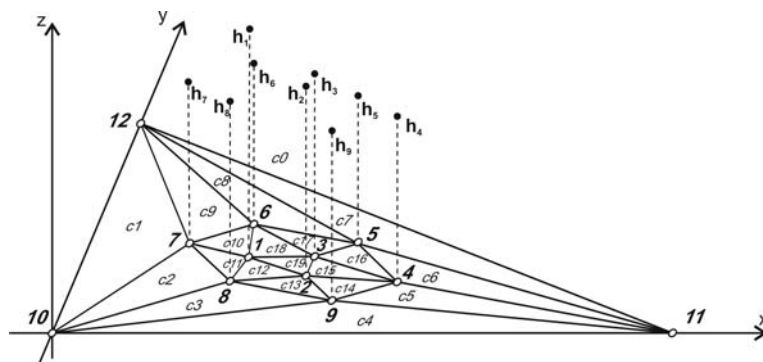


Rys. 5.5. Wysokości podnoszenia dla wierzchołka nr 2, grafu

Ostatecznie, *wysokość podnoszenia* h_v punktu $p_v \in c_i$ konfiguracji P po podniesieniu jest iloczynem skalarnym jego współrzędnych i wektora podnoszącego q_i , odpowiadającego ścianie c_i :

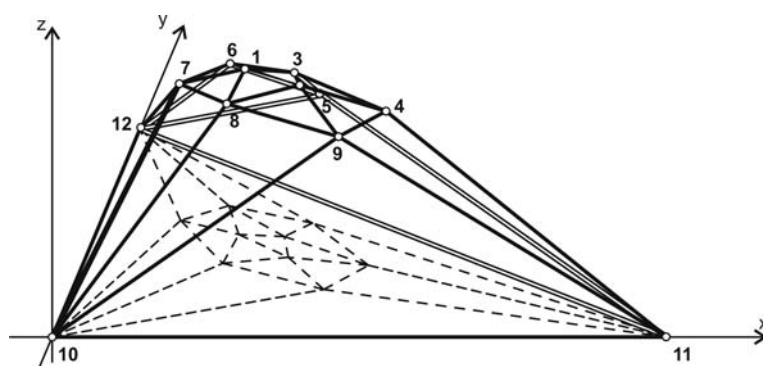
$$h_v = \langle p_v, q_i \rangle \quad (5.6)$$

Wartości h_v wyznaczone rekurencyjnie w różnej kolejności są zgodne (rys. 5.5). Niezależnie od wybranej kolejności wyznaczania wektorów i funkcji podnoszących dla poszczególnych ścian wartości te są zawsze takie same.



Rys. 5.6. Wysokości podnoszenia dla wszystkich wierzchołków grafu

Po podniesieniu w podany sposób wszystkich wierzchołków (rys. 5.6), graf G uzyskuje swoją przestrzenną reprezentację (rys. 5.7).



Rys. 5.7. Proces podnoszenia grafu

Wspomniane „gumowe” wyjaśnienie prawidłowego rysowania grafu, pozostaje w związku ze statyczną interpretacją metody Tuttego–Maxwella–Cremony. Udowodniono, że w stanie równowagi, jeżeli wszystkie siły w krawędziach są dodatnie, to ściany grafu są wielokątami wypukłymi. Co więcej, rysunek 3-spojnego grafu planarnego, w którym krawędzie są odcinkami prostymi, może być podniesiony w przestrzeń $d=3$, wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawidłowy w podanym sensie. Odpowiadające sobie krawędzie prawidłowo narysowanego grafu i jego grafu dualnego są ortogonalne [35, s. 63] [175, s. 117].

5.1.2. Przedłużenia Lawrence'a

Metoda została nazwana od nazwiska J. Lawrence'a, który opracował ją w roku 1980, na Uniwersytecie Kentucky. Jest uważana za jedną z najprostszych metod generowania wielotopów z konfiguracji planarnych [178, s. 2]. W metodzie przedłużenia Lawrence'a każdy wierzchołek wyjściowego grafu jest zastępowany dwoma nowymi punktami, współliniowymi z punktem początkowym, który następnie jest usuwany. Te nowe, podniesione punkty, generują wielotop o wyższym wymiarze.

Niech $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ będzie zbiorem wierzchołków grafu $G = (V, E)$, to jest dwuwymiarowej konfiguracji punktów, zawierającej n punktów. *Przedłużenie Lawrence'a* dowolnego punktu $v_i \in V$, uzyskuje się, zastępując go dwoma nowymi punktami v'_i i v''_i . Nowe punkty są następnie podnoszone w nowym kierunku w przestrzeni, z dwiema różnymi wysokościami podnoszenia (rys. 5.8). Procedura jest kolejno powtarzana (w dowolnej kolejności) w stosunku do wszystkich punktów $v_i \in V$. Każdy punkt konfiguracji początkowej jest przedłużany w niezależnym kierunku. Przedłużenie Lawrence'a $\Lambda(V)$ jest zbiorem wszystkich nowych punktów otrzymanych poprzez przedłużenie $v_i \in V$ (rys. 5.8) [178, s. 5]:

$$\Lambda(V) = \{ (v'_i, v''_i) \in R^{2+n} \mid i = 1, \dots, n \}. \quad (5.7)$$

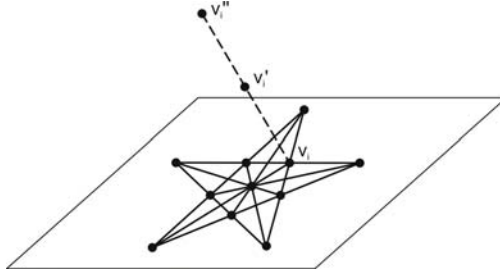
Punkty przedłużenia Lawrence'a $\Lambda(V)$ są określone macierzą o wymiarze $2n \times (2+n)$ – równanie (5.8):

$$(v'_1, v'_2, \dots, v'_n, v''_1, v''_2, \dots, v''_n)^T := \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & h'_1 & & & \\ & x'_2 & y'_2 & h'_2 & & \\ & \vdots & & & \ddots & \\ & x'_n & y'_n & & & h'_n \\ x''_1 & y''_1 & h''_1 & & & \\ x''_2 & y''_2 & & h''_2 & & \\ & \vdots & & & \ddots & \\ & x''_n & y''_n & & & h''_n \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

gdzie x'_i, y'_i, h'_i oraz x''_i, y''_i, h''_i – współrzędne i wysokość podnoszenia odpowiednio dla pierwszego i drugiego punktu przedłużenia Lawrence'a punktu v_i .

Baza projekcyjna jest wyznaczona przez cztery wektory $q_1, q_2, q_3, q_4 \in R^3$, takie że żadne trzy z nich nie są liniowo zależne. Istnieje jedyne przekształcenie liniowe, które mapuje v_i na v'_i i v''_i . Otoczką wypukłą przedłużenia Lawrence'a V jest nazywana *wielotopem Lawrence'a* $L(V)$

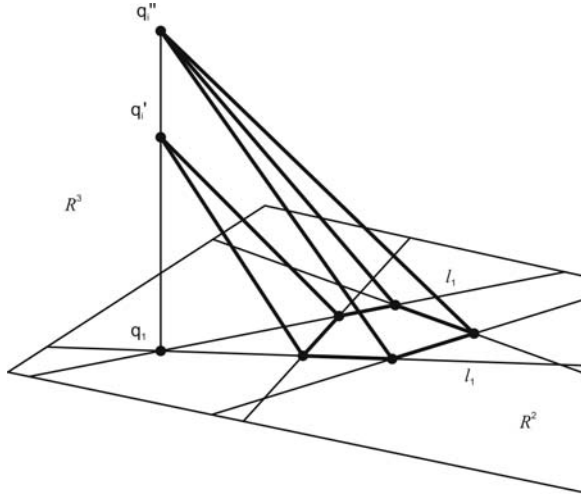
$$L(V) := \text{conv } \Lambda(V) \subset R^{2+n}. \quad (5.9)$$



Rys. 5.8. Ogólna idea przedłużenia Lawrence'a

Zależności w wyjściowej konfiguracji punktów V są reprezentowane przez zależności w otrzymanym wielotopie $L(V)$ [120]. Jeżeli jakaś linia w konfiguracji wyjściowej V zawiera punkty v_i oraz ma punkty v_j i v_k po obu stronach, gdzie indeksy i, j, k są odpowiednio elementami osobnych podzbiorów $I = (1, \dots, n)$, takich że $i \in I^0$, $j \in I^-$, $k \in I^+$ oraz $I^0 \cup I^- \cup I^+ = I$, to istnieje ściana $L(V)$ o zbiorze wierzchołków [178, s. 5]:

$$\{v'_j : j \in I^-\} \cup \{v'_i, v''_i : i \in I^0\} \cup \{v''_k : k \in I^+\} \quad (5.10)$$



Rys. 5.9. Selekttywne przedłużenie Lawrence'a dla pięciokąta

Przedłużenie Lawrence'a, opisanie powyżej, tzw. zwykle *podniesienie Lawrence'a* lub *zupelne podniesienie Lawrence'a*, przekształca 2-wymiarową konfigurację n -punktów V , na $2n$ -wymiarową konfigurację w $(2n+1)$ -wymiarowej prze-

strzeni. Zrozumiałe jest, że z powodów praktycznych, otrzymany wielotop Lawrence'a musi być realizowany w przestrzeni R^3 . Można to zapewnić przez selektywne stosowanie procesu przedłużania do pojedynczych punktów w konfiguracji planarnej. Jest to tzw. *selektywne przedłużenie Lawrence'a*. Wymaga staranności w doborze punktów, ale prowadzi do interesujących rezultatów. Powyżej przedstawiono przykład selektywnego przedłużenia Lawrence'a dla pięciokąta (rys. 5.9) [120, s. 7, 36].

5.1.3. Przekształcenia Gale'a

Metoda jest oparta na *przekształceniach* i *wykresach Gale'a*, opracowanych w latach pięćdziesiątych XX w. przez Gale'a. Wykorzystano, że projekcyjna unikatowość wielotopu może być określona przez jego wykres Gale'a, a następnie wielotop ten może być podniesiony z wielotopów o niższym wymiarze. Technika ta, o charakterze raczej algebraicznym, jest szczególnie przydatna dla wielotopów o małej liczbie wierzchołków, gdyż obejmuje przejście do przestrzeni o odpowiednio większym wymiarze (dla d -wielotopu o n wierzchołkach, przestrzeń realizacyjna ma wymiar R^{n-d-1}) [52, s. 85] [114, s. 358].

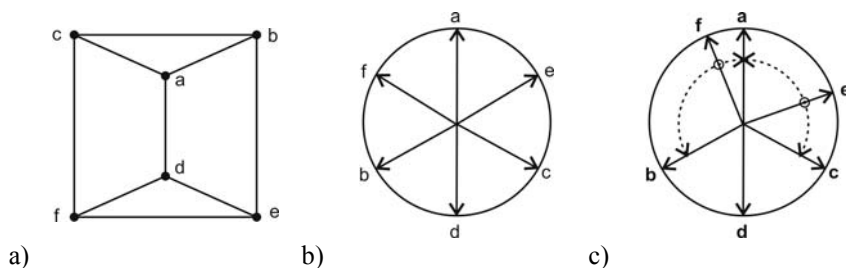
Rozważany jest ponownie zbiór $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ wierzchołków grafu $G = (V, E)$. Do każdego punktu $v_j \in \bar{V} \subset R^d$ jest przypisywany nowy punkt $\bar{v}_j \in R^{n-d-1}$. Przekształceniem Gale'a jest V n -elementowy zbiór $\bar{V} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \subset R^{n-d-1}$.

Wielotopy rozpięte na zbiorach wierzchołków V i $\bar{V}$ są projekcyjnie równoważne dla pewnego przekształcenia afinicznego A . Zakładając, że $v_i = (v_{i,1}, \dots, v_{i,d}) \in R^n$ dla $i = 1, \dots, n$ oraz że zbiór zależności afinicznych V składa się ze wszystkich punktów $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$, takich że $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ i $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, otrzymujemy [52, s. 86]:

$$(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)^T := \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,n-d-1} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,n-d-1} \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \alpha_{n,n-d-1} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Dla każdego przekształcenia Gale'a $\bar{V}$ zbioru V , definiujemy wykres Gale'a $\hat{V}$ zbioru V jako $\hat{V} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n)$, gdzie $\hat{v}_i = 0$, jeżeli $\bar{v}_i = 0$, $\hat{v}_i = \frac{\bar{v}_i}{\|\bar{v}_i\|}$, gdy $\bar{v}_i \neq 0$ oraz $\|\bar{v}_i\|$ jest długością euklidesową wektora $\bar{v}_i$.

Pomijając pewne szczegóły²⁰⁷, rysujemy wykres Gale’a $\bar{V}$ zbioru V jako okrąg C z promieniowymi wektorami reprezentującymi $\hat{v}_i$. Rysunek 5.10a przedstawia wykres Schlegla pewnego wielościanu. Wykres Gale’a dla tego wielościanu jest pokazany na rysunku 5.10b). Podobnie, jak w przypadku pewnych operacji na grafach²⁰⁸, takich jak ściągnięcie, usunięcie, pominięcie itd., możliwe jest przeprowadzenie pewnych przekształceń wykresów Gale, które nie zmieniają właściwości topologicznych reprezentowanego przez nie wielotopu. Przykład takiego przekształcenia pokazano na rysunku 5.10c. Przedstawia on wykres Gale’a wielościanu izomorficznego w stosunku do wykresu przedstawionego na rysunku 5.10b. Obrót wektora wierzchołkowego nie zmienia struktury topologicznej wielościanu, dopóki wektor ten nie „przekroczy” któregoś z sąsiednich wektorów wierzchołkowych [52, s. 109–111].



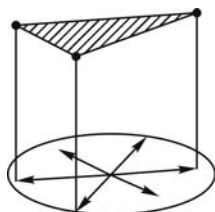
Rys. 5.10. Wykres Schlegla wielościanu oraz jego dwa izomorficzne wykresy Gale’a

Podobnie jak w przypadku wykresów Schlegla, wykresy Gale’a możemy rozpatrywać jako reprezentację wielotopu i – przez operacje odwrotne – zrekonstruować ten wielotop w przestrzeni.

Rozpatrzmy 2-wymiarowy wykres $C \subset R^{d=2}$. Wymiar jego przestrzeni realizacyjnej jest $n-d-1$. Aby zatem, rekonstruowany wielościan pozostał w przestrzeni 3-wymiarowej, musimy zawęzić obszar zastosowań przekształceń Gale’a do przypadku wielościanów o małej liczbie wierzchołków, tzn. $n=d+4=6$ wierzchołków [52, s. 109]. Nie jest to zbyt silne ograniczenie dla tego sposobu rekonstrukcji wielościanów, gdyż można wykorzystać dualność wielościanów i rozpatrywać wykresy Gale’a jako figury wierzchołkowe wielościanów (rys. 5.11). Dla pewnej rozbudowanej tesselacji na płaszczyźnie, można zatem rozpatrywać każdy wierzchołek wraz z incydentnymi z nim krawędziami jako wykres Gale’a, rekonstruować odpowiednią figurę wierzchołkową, a następnie odtwarzać całą konfigurację w przestrzeni, jako sumę odpowiednich figur wierzchołkowych.

²⁰⁷ Szczegóły te można znaleźć w pracach [52, 114, 132, 178].

²⁰⁸ Patrz rozdz. 4.



Rys. 5.11. Schemat rekonstrukcji przestrzennej wykresu Gale'a
(opis w tekście)

5.1.4. Metoda Koebe–Andreeva–Thurstona

Metoda Koebe–Andreeva–Thurstona jest oparta na twierdzeniu 4.8 o upakowaniu okręgów, z którego wynika że każdy graf planarny może być reprezentowany poprzez upakowanie okręgów²⁰⁹.

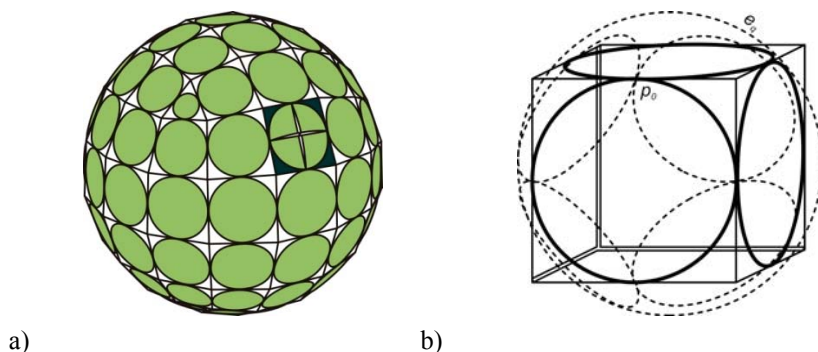
Wyjściową koncepcją metody jest krawędziowo-styczna reprezentacja wielościanu. W tej reprezentacji, krawędzie wielościanu P są styczne do jednostkowej sfery S . Płaszczyzny ścian P przecinają S tworząc okręgi, które nazywamy *okręgami ścian* (rys. 5.12a). Każdy okrąg odpowiada jednej ze ścian, a okręgi są styczne, jeżeli odpowiadające im ściany są incydentne. Jednocześnie występuje drugi układ *wierzchołkowych okręgów horyzontalnych*. Okręgi te są brzegiem wycinków sferycznych składających się ze wszystkich punktów na sferze, które są widoczne z odpowiedniego wierzchołka. Jeden wierzchołkowy okrąg horyzontalny odpowiada jednemu wierzchołkowi. Podobnie jak okręgi ścian, okręgi wierzchołkowe są styczne, jeśli odpowiadające im wierzchołki są incydentne. W każdym punkcie styczności, dwa stykające się okręgi ścian i dwa styczne wierzchołkowe okręgi horyzontalne przecinają się ortogonalnie. Przedstawiono przykład krawędziowo-stycznej reprezentacji regularnego sześciianu (rys. 5.12b). Linie ciągłe oznaczają na rysunku okręgi ścian, a linie kreskowane – wierzchołkowe okręgi horyzontalne [176, s. 628–630]. Opisane sferyczne upakowanie okręgów jest następnie „spłaszczane” przez rzutowanie stereograficzne. Za środek rzutowania przyjmowany jest jeden z punktów styczności krawędzi, p_0 , a płaszczyzna równikowa, odpowiadająca temu punktowi, e_q , jest płaszczyzną rzutowania (rys. 5.12b).

Otrzymuje się w rezultacie figurę planarną, składającą się z dwóch zbiorów okręgów, odpowiadających ścianom i wierzchołkom wielościanu P , które przecinają się ortogonalnie (rys. 5.13). Figura ta jest nazywana *prostokątnym układem okręgów*. Następnie jest ona przekształcana w tzw. *quad-graf*²¹⁰, tzn. graf, którego wszystkie ściany są czworobokami, jak to przedstawiono na rys. 5.13a – wierzchołki zaznaczone na białło są umieszczone w środkach okręgów ścian, a wierz-

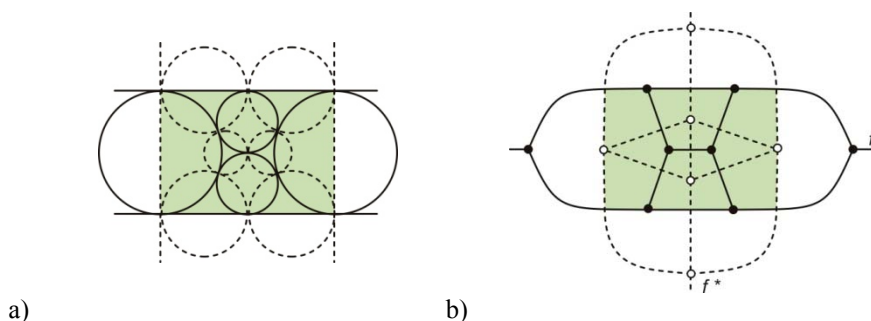
²⁰⁹ Patrz pkt 4.4.

²¹⁰ Od ang. *quadrilateral* = czworoboczny.

chołki zaznaczone na czarno są umieszczone w środkach wierzchołkowych okręgów horyzontalnych. Można to również rozpatrywać jako nałożenie grafu G (linie ciągłe) oraz grafu G^* (linie przerywane). Krawędzie oznaczone jako f oraz f^* odpowiadają rzutowi punktu p_0 . Obszary cieniowane określają *ograniczony quad-graf*, otrzymany z pełnego grafu poprzez usunięcie wszystkich elementów incydentnych z f i f^* .



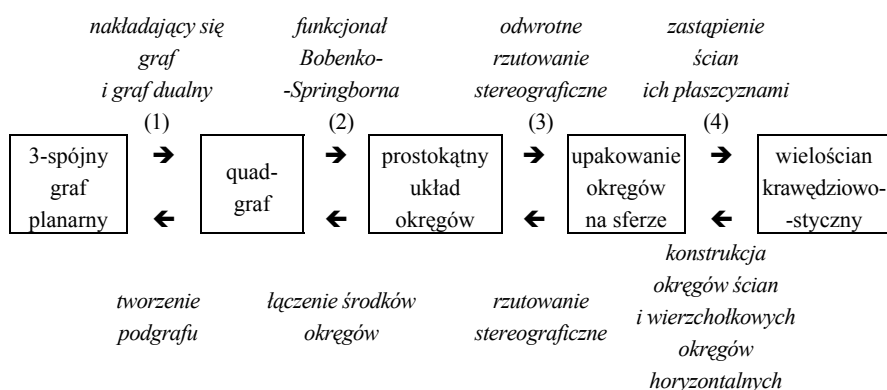
Rys. 5.12. Konstrukcja wielościanu krawędziowo-stycznego
(opis w tekście)



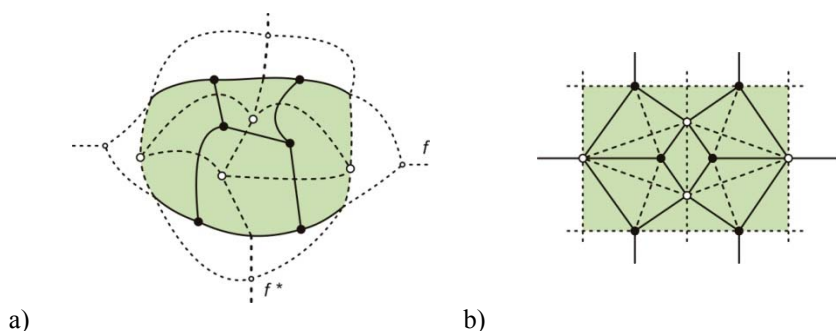
Rys. 5.13. Planarna dekompozycja wielościanu krawędziowo-stycznego

Procedura konstruowania wielościanu z danego grafu jest odwrotnością procedury konstruowania grafu na podstawie danego wielościanu (tzn. planarnej dekompozycji wielościanu krawędziowo-stycznego). Składają się na nią cztery przedstawione na rysunku 5.14 kroki [176, s. 629].

Rozpoczynając od 3-spójnego grafu planarnego G (linie ciągłe), otrzymujemy quad-graf poprzez superpozycję grafu początkowego i jego grafu dualnego G^* (linie kreskowane). Następnie redukujemy otrzymaną figurę do ograniczonego quad-grafu (rys. 5.15a) [176, s. 632].



Rys. 5.14. Schemat ogólny metody Koebego–Andreeva–Thurstona
(opis w tekście)



Rys. 5.15. Quad-graf: a) rysunek dowolny, b) rysunek „prawidłowy”
(opis w tekście)

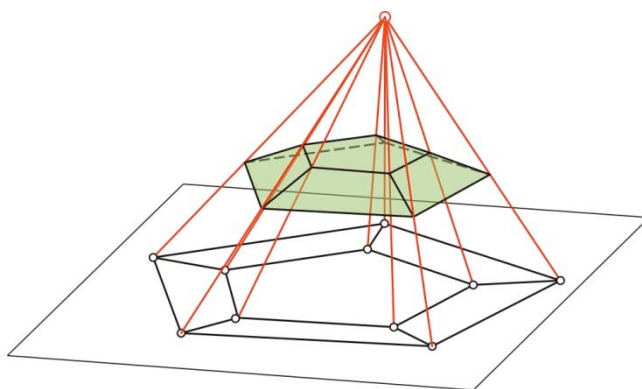
Podobnie jak w metodzie Tuttego–Maxwella–Cremony, graf musi być „prawidłowo narysowany” przed rozpoczęciem przekształcania go w wielościan – analogicznie jak naprężanie grafu (rys. 5.15b). Ten najważniejszy w całej procedurze i nietrywialny krok jest przeprowadzany za pomocą niedawno opublikowanego *funkcjonału Bobenko-Springborna*. W prawidłowym rysunku, każdy quad-graf jest przedstawiany jako układ „łatawców”, takich, że w każdym łatawcu dwie linie ciągłe mają tę samą długość, dwie linie przerywane mają tę samą długość oraz występują dwa kąty proste pomiędzy liniami ciągłymi i przerywanymi²¹¹. Następnie, mając prawidłowy układ okręgów, odtwarzamy go na sferze, poprzez odwrotną projekcję stereograficzną, a to pozwala uzyskać szukany wielościan krawędziowo-styczny [176, s. 629].

²¹¹ Szczegółowy opis tego kroku podano w pracy [176, s. 633–642].

5.2. Twierdzenie Baracsa

W latach 70. ubiegłego wieku, kanadyjski architekt pochodzenia węgierskiego, Janos Baracs, zauważył, że mechaniczne właściwości struktur prętowo-przegubowych na płaszczyźnie zależą od tego, czy mogą one być interpretowane jako rzuty wielościanów. Sformułował to w twierdzeniu 5.2 [63, s. 1]:

Twierdzenie 5.2 (Baracsa). *Jeżeli siatka (graf) A' płaskiej przegubowej konstrukcji prętowej jest rzutem siatki wielościanu A , ze środka O , na płaszczyznę p (rys. 5.13), to graf może być narysowany jako naprężony.*



Rys. 5.16. Rzutowanie wielościanu na płaszczyznę, według twierdzenia Baracsa

Twierdzenie to, udowodnione dopiero w ostatnich latach²¹² odnosi się do stopnia „nieokreśloności projekcyjnej”²¹³ figur płaskich, tworzących system konstrukcyjny. Nietrudno zauważyć, że rysunek 5.16 przedstawia, w zasadzie, rzutowanie Schlegla. Twierdzenie Baracsa odnosi się zatem do planarności grafów i do ich rekonstrukcji w oparciu o twierdzenie Steinitza (niezależnie od konkretnej metody rekonstrukcji). Jednak konsekwencje tego twierdzenia odnoszą się również do innych sytuacji.

Graf naprężony odpowiada konstrukcji prętowej w stanie samonapężenia, bez działania sił zewnętrznych [63, s. 2]. Niech v będzie liczbą wierzchołków grafu, e – liczbą ścian. Możliwe są następujące sytuacje [33, s. 29]:

$$e = 2v - 2 \quad (5.12)$$

²¹² Dowód twierdzenia Baracsa przedstawił István Hegedűs w pracy [63].

²¹³ Ang. *projective indeterminacy*.

$$e = 2v - 2 + c_1 \quad (5.13)$$

$$e = 2v - 2 - c_2 \quad (5.14)$$

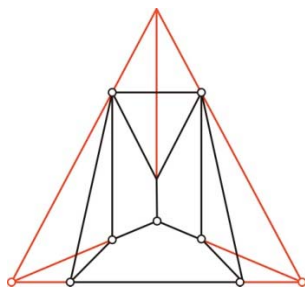
gdzie: c_1 – stopień nieokreśloności projekcyjnej (rzutowej),

c_2 – liczba warunków rzutowych do spełnienia.

Jeżeli w grafie zachodzi warunek (5.12), to graf jest projekcyjnie określony. Jeżeli zachodzi warunek (5.13), to graf jest projekcyjnie nieokreślony, tzn. istnieje c_1 wyborów przy realizacji przestrzennej wielościanu. Jeżeli natomiast zachodzi warunek (5.14), to istnieje c_2 „negatywnych wyborów”, czyli warunków projekcyjnych do spełnienia. Podniesienie grafu (rekonstrukcja przestrzenna) nie jest możliwe bez spełnienia tych warunków.

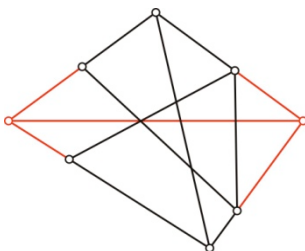
Krytyczne formy systemów prętowych występują, gdy figura płaska jest „poprawnym rysunkiem” wielościanu. Możliwe jest wtedy infinityzmalne przemieszczenie płaskiego systemu. Z przedstawionych równań wynika, że jeżeli liczba połączonych przegubowo prętów jest taka sama jak liczba niezależnych liniowo warunków równowagi możliwych do ułożenia dla systemu, to może on pozostawać w równowadze [63, s. 2].

Znaczenie równań (5.12)÷(5.14) ilustruje podany przykład. Dany jest kombinatoryczny system prętowy, o topologii wielościanu sferycznego (rys. 5.17), o liczbie krawędzi dokładnie $e = 2v - 3$ (w przykładzie jest $e = 13$, $v = 8$). Ponadto, dla każdego podzbioru wierzchołków v_1 , dla którego $v_1 \geq 2$, system ma nie więcej niż $e_1 = 2v_1 - 3$ krawędzi.



Rys. 5.17. Przykład systemu konstrukcyjnego, w którym potrzebny jest dodatkowy warunek, aby umożliwić jego przestrzenną rekonstrukcję

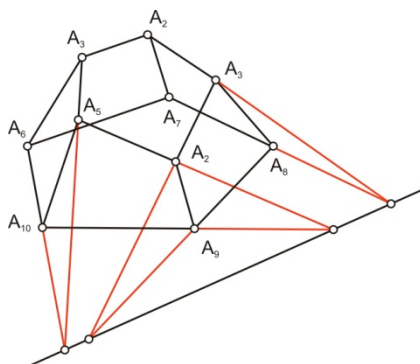
Ogólny rysunek takiego systemu konstrukcyjnego nie jest „poprawnym rysunkiem” wielościanu. Potrzebny jest dodatkowy warunek, aby właściwie rzutować wielościan. Jednocześnie wprowadzenie tego warunku umożliwia infinityzmalny ruch systemu płaskiego. Analogiczne techniki mają zastosowanie również do systemów, których nie można przedstawić w postaci grafów planarnych (rys. 5.18) [63, s. 29].



Rys. 5.18. Przykład systemu konstrukcyjnego, którego nie można przedstawić w postaci grafu planarnego

Twierdzenie dotyczące sztywności płaskich systemów prętowych w stanie samonapężenia przedstawił i udowodnił w 1912 r. E. Kötter (rys. 5.19) [63, s. 7].

Twierdzenie 5.3 (Köttera). *Każda płaska konstrukcja przegubowo-prętowa, składająca się z krawędzi k -wieloboków $A_1, A_2, \dots, A_k; A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{2k}$ i z prętów łączących $A_1A_{k+1}, A_2A_{k+2}, A_kA_{2k}$ może znaleźć się w stanie samonapężenia wtedy i tylko wtedy, gdy punkty, w których przecinają się dwie korespondujące ściany k -wieloboku leżą na tej samej linii prostej.*



Rys. 5.19. Ilustracja twierdzenia Köttera
(opis w tekście)

Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Baracsa i można je sformułować: *graf konstrukcji płaskiej musi odpowiadać rzutowanej siatce wielościanu, który ma dwie k -wieloboczne ściany połączone przez k ścian czterobocznych* [63, s. 7].

Zagadnienie analizy geometrycznej niezmienności konstrukcji przegubowo-prętowych przez badanie ich metodami geometrii rzutowej, jest w ostatnim okresie przedmiotem wielu prac badawczych z pogranicza matematyki dyskretnej i teorii konstrukcji. Należy tu przede wszystkim wymienić prace H. Crapo [32, 34, 35, 36], W. Whiteley'a [164, 165, 167] i innych, np. [145].

5.3. Uwagi końcowe

Techniki podnoszenia, zastosowane do grafów, pozwalają zrekonstruować przestrzenie różnorodne, płaskie wzory w trójwymiarowej przestrzeni. Umożliwia to operowanie we wstępnej fazie poszukiwania formy uproszczonymi dwuwymiarowymi modelami struktur, na przekształcanie ich, a następnie odtwarzanie w pełnej, wielościennej formie. Punktem wyjścia do tego procesu jest znalezienie odpowiednio atrakcyjnego „wzoru początkowego”, który będzie mógł być poddany sformalizowanym przekształceniom, aż do uzyskania końcowej, utylitarnej postaci.

Rozdział 6. Poszukiwanie modelu konstrukcji

Cokolwiek postrzegamy, możemy to zrozumieć tylko dostrzegając jego strukturę i myśląc poprzez strukturalną analogię i porównanie.

Cyril Stanley Smith²¹⁴

W świecie przyrody panuje niezwykła dualność pomiędzy porządkiem i chaosem. Dokładne badanie pozornie przypadkowych form, układów i zjawisk umożliwia zazwyczaj odkrycie w nich bardzo subtelnych form uporządkowania. John Herschel, XIX wieczny angielski astronom i chemik, powiedział, że to sama Natura, a nie matematycy, wprowadziła matematykę do filozofii przyrody [143, s. 2].

Formy strukturalne występujące w naturze były od zawsze inspiracją dla form tworzonych przez człowieka. Architektura ma swoje korzenie w bardzo bliskim kontakcie człowieka z naturą [147]. Najpierw, w najwcześniejszych etapach rozwoju, pokorne podpatrywanie znajdowanych w przyrodzie prototypów form pozwalało ludziom stawiać pierwsze kroki w konstruowaniu własnych siedzib. Przez długi czas wybierano warianty metodą prób i błędów, stopniowo powiększając liczbę i wielkość stosowanych elementów, łącząc różne elementy w całość, zwiększając stopień komplikacji obiektów [4]. Szałas, słupy i belki, kopuły to kolejne etapy rozwoju. Później, gdy problemem stało się nie samo budowanie, ale wprowadzanie go na coraz wyższy poziom wyrafinowania, w naturze zaczęto dopatrywać się uzasadnienia dla poszukiwania kształtu optymalnego, który spełniałby jednocześnie wymagania w zakresie estetyki, wytrzymałości i trwałości. Wnikliwość tego podpatrywania rozwijała się stopniowo. Od prostego naśladowania pewnych układów, po dostrzeżenie, że zarówno w mikro- jak i w makroskali struktury naturalne oparte są na takich samych, podstawowych regułach geometrycznych²¹⁵.

²¹⁴ Cytat za H. Crapo: *Review: Transpolyhedra, dual transformations by explosion-implosion, by Haresh Lalvani*, Structural Topology, No. 6 (1982), s. 17.

²¹⁵ Patrz pkt 2.2.4.

Pojawiło się wtedy pytanie: jak to jest możliwe, że fizyczne i biologiczne systemy, ukształtowane pod wpływem tak różnych oddziaływań zewnętrznych, mimo wszystko uzyskują podobną formę. Okazuje się, że dla każdego z tych zjawisk, w jego skali, czynnikiem kontrolnym są raczej ograniczenia geometryczne w przestrzeni, niż zewnętrzne siły determinujące formę [2, 42, 72].

Co więcej, okazało się także, że zastosowanie tych samych reguł w konstrukcjach tworzonych przez człowieka nie tylko jest możliwe, ale prowadzi do uzyskiwania bardzo efektywnych form strukturalnych. Przykłady tego można znaleźć w wielu udanych konstrukcjach historycznych i współczesnych.

6.1. Uwagi na temat matematycznej intuicji formy

Odnajdywanie w jednych obiektach pewnych cech, które mogą być przypisane innym obiektom, pomimo istotnych różnic pomiędzy nimi, wiąże się z intuicyjnym rozumieniem pojęcia formy. Chociaż intuicja, niejako z natury, jest pojęciem nieprecyzyjnym, to takie właśnie rozumienie formy znalazło swoje matematyczne sformułowanie. Jerzy Geresz opisuje to w ten sposób: „...Świat, który nas otacza wypełniony jest mnóstwem form. Na każdym kroku natykamy się na obiekty przybierające formy roślin, zwierząt, wytworów geologicznych, chmur... Formy te powstają samorzutnie, w wyniku pewnych procesów zachodzących w materialnym podłożu tych form. Wiele z nich – właśnie te, które mają dla nas największe znaczenie – cechuje się swoistą uporczywością, z jaką zachowują swe istnienie przy zaburzaniu (niezbyt dużym) procesu stanowiącego ich podłoże. Na przykład: jeżeli będziemy formę człowieka utożsamiać z określoną konfiguracją czasoprzestrzenną procesów biochemicznych, to stwierdzamy, że zaburzanie tych procesów (takimi czynnikami, jak zmiany pożywienia, zmiany temperatury, inwazja bakterii, działanie mechaniczne) nie wpływa na fakt, że mamy do czynienia z ciągle „tym samym” człowiekiem – o ile powyższe czynniki będą dostatecznie słabe. Tego rodzaju odporność na zaburzenia będziemy określać mianem stabilność strukturalna”²¹⁶ [48, s. 5].

Słowo forma może mieć różne znaczenia, zależnie od dziedziny, w której dotyczy. W przypadku biologii może to być forma występująca w świecie roślin, w przypadku matematyki – forma pewnej klasy funkcji itd. Aby można było mówić o realizacji kształtu, potrzebne są dwa, fenomenologicznie różne sposoby wypełniania przestrzeni, np. powietrze i kamień. Stabilność strukturalna formy jest określona definicją (6.1) [48, s. 10–11].

Definicja 6.1. *Jeżeli w pewnym zbiorze obiektów jest zdefiniowana relacja równoważności i odpowiednia topologia, to obiekt nazywamy strukturalnie stabilnym,*

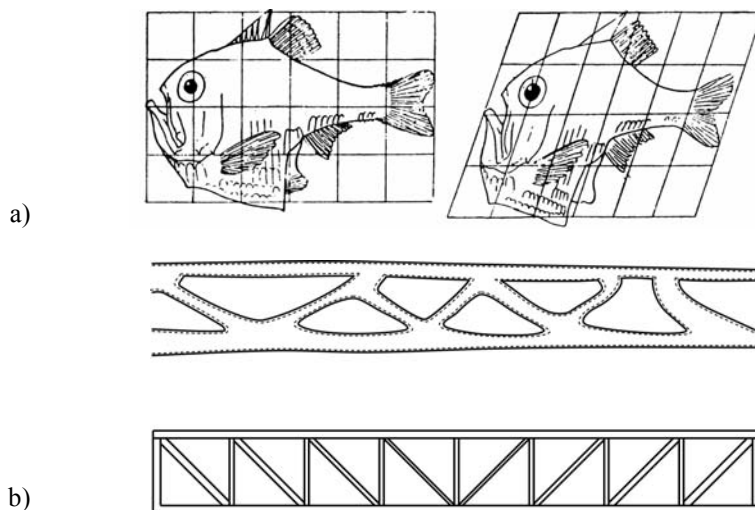
²¹⁶ Stabilność strukturalna jest podstawowym pojęciem z dziedziny matematycznej *teorii katastrof* [48, s. 3].

jeżeli istnieje jego otwarte otoczenie, które zawiera wyłącznie równoważne mu obiekty. Elementy otoczenia tego obiektu interpretujemy jako jego deformacje, a zdefiniowaną relację równoważności jako odpowiednik intuicji formy.

W zagadnieniach kształtowania form strukturalnych, idea stabilności strukturalnej pozwala na koncepcyjne przejście od naturalnego wzorca – *prototypu formy*, do obiektu topologicznego, który będzie formę modelował.

Formy naturalne cechują się dużą stabilnością strukturalną – w zbliżonych warunkach powstają takie same formy. Inaczej jest w przypadku działalności człowieka. Te same warunki wstępne zadania projektowego mogą skutkować, i zazwyczaj skutkują, różnymi rozwiązaniami. Struktury naturalne mają jeszcze jedną cechę. Niezależnie od liczby realizacji danego obiektu, występuje ograniczona liczba jego form, a pomimo to obiekty w ramach każdej z form zawsze się różnią – z dokładnością do stabilności strukturalnej. Te odchylenia od wzorca sprawiają, że poszczególne obiekty się „indywidualizują”.

Klasyczny przykład stabilności formy w świecie przyrody pochodzi od D’Arcy W. Thompsona [143, s. 1062]. Rysunek ryby z rodziny przeżreniowatych, *Argyropelecus Olfersi*, po pochyleniu ortogonalnej siatki o kąt 20° nadal jest odczytywany jako rysunek tej samej ryby²¹⁷ (rys. 6.1a). Podobnie kratownice o różnej topologii i różnym kształcie prętów zaliczamy do tej samej grupy form konstrukcyjnych (rys. 6.1b).



Rys. 6.1. Przykłady stabilności formy: a) forma biologiczna podczas pochylenia układu współrzędnych o 20° , b) kratownica typu Warrena, o prętach kształtowanych w procesie optymalizacji ewolucyjnej i kratownica typu Pratta

²¹⁷ W rzeczywistości jest to rysunek innej ryby z tej samej rodziny, *Sternoptyx diaphana*.

6.2. Naturalne prototypy form

Bezpośrednia inspiracja formami naturalnymi jest znaną i ustaloną metodą kształtowania konstrukcji i była wielokrotnie opisywana, np. w pracach [86, 110]. Niniejszy rozdział dotyczy aspektów tego procesu, które wiążą się z topologicznym kształtowaniem form strukturalnych.

Sir Frederic Charles Frank, brytyjski fizyk, zajmujący się morfologią kryształów, stwierdził, że „...przy myśleniu o strukturach, inspiracja może być czerpana z zaskakujących źródeł”²¹⁸. Formy naturalne, potraktowane jako pewien początkowy „obrazek”, wzór, który pozwala rozpocząć budowę modelu, wprowadzają doń dostatecznie dużo losowości, aby powstała w końcowym efekcie struktura odpowiadająca w swej estetyce paradygmatowi „free-form design” [137, 139, 140].

6.2.1. Tesselacje w naturze

Podczas naturalnych procesów związanych z rozwojem obiektu, jego wzrostem lub podziałem powstają różne złożone formy geometryczne, pozwalające na dostosowanie do otaczających warunków. Wymuszają to ograniczenia zewnętrzne, uwarunkowania budowy obiektu, konkurencja innych obiektów itp. Raoul Francé twierdził, że „...w naturze wszystkie formy powstały z potrzeby”²¹⁹. W wielu z tych form można znaleźć regularności odpowiadające matematycznym systemom proporcji. Ich powstawanie jest wynikiem różnych procesów, z których trzy zostaną tutaj pokrótce omówione:

- podziały komórek,
- filotaksje,
- podziały Woronoja.

Następnie przedstawione zostaną przykłady naturalnych podziałów, w których obiekty jednego wymiaru pojawiają się w obiektach innego wymiaru, tworząc wzory – prototypy form.

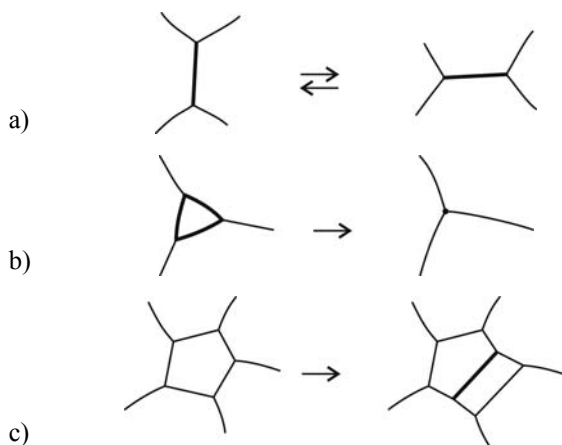
Podziały komórek

W badaniach nad geometrią podziału struktur komórkowych stwierdzono [42], że występują trzy elementarne przekształcenia, którym mogą one podlegać (rys. 6.2) [72, s. 216].

²¹⁸ Cytat za: Forma, Vol. 11, No. 3 (1996), s. 161. Autor tych słów opisuje, jak inspiracją do odkrycia znanych w krystalografii struktur Franka-Kaspera, były dla niego islamskie dekoracje licznych budynków w Toledo, w których zauważył „uporczywą próbę” wypełnienia powierzchni pięciokątami foremnymi (udało się to jedynie na powierzchni kopuły synagogi, dzięki jej sferycznemu zakrzywieniu).

²¹⁹ Raoul Francé *Die Planze als Erfinder*, Kosmos & Gesellschaft der Naturfreunde, Stuttgart (1920).

Przekształcenie T_1 (rys. 6.2a) jest prostym przeorganizowaniem układu. W przekształceniu T_2 (rys. 6.2b) komórka o trzech ściankach znika, eliminując jedno pole i sześć krawędzi (własnych oraz przylegających komórek) z układu. W przekształceniu T_3 (rys. 6.2c) komórka dzieli się na dwie (mitoza). W tym przekształceniu z n -kątniej komórki macierzystej powstają dwie komórki o łącznej liczbie krawędzi $n + 4$. Z dalszej analizy tego zjawiska wynika, że najbardziej stabilne są układy, w których występują komórki sześciokątne, gdyż są one najprostszą formą wypełniającego podziału powierzchni, w którym wierzchołki są 3-walentne [72, 143].



Rys. 6.2. Elementarne przekształcenia struktur komórkowych:
a) T_1 , b) T_2 , c) T_3

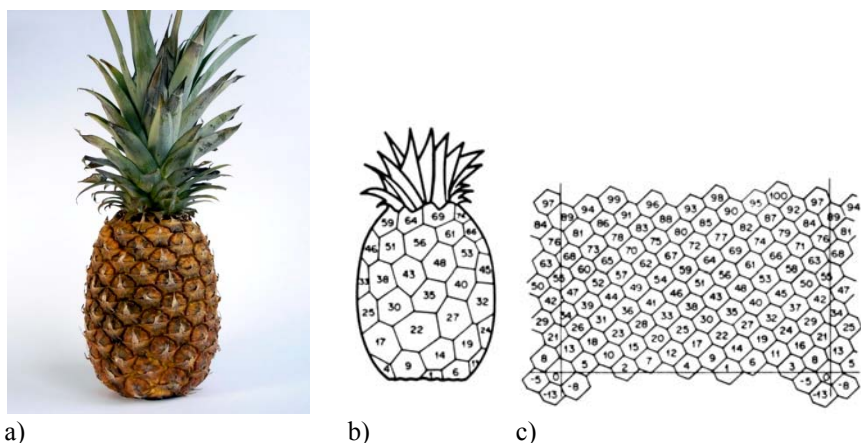
Charakterystyczne jest silne podobieństwo opisanych przekształceń komórek do opisanych w pktcie 4.3 przekształceń grafów, zachowujących ich planarność. Widać tu odpowiednio: ściągnięcie (rys. 6.2a), przekształcenie ΔY (rys. 6.2b) i wstawienie krawędzi (rys. 6.2b).

Filotaksje

W czasie naturalnie występującego rozwoju (wzrostu) obiektów naturalnych następują podziały, które prowadzą do pokrycia powierzchni wzorami, czyli do tesselacji, cechującej się regularnością szczególnego rodzaju, którą dobrze ilustruje przykład owocu ananasa.

Podziału cylindrycznej powierzchni łuski odbywa się w taki sposób, że kolejne komórki są tak rozmieszczane, jakby poprzednie były poddawane przekształceniu polegającemu na złożeniu obrotu i przesunięcia. Obrót następuje o stałą wartość kąta mierzonego względem podstawy, nazywanego kątem dywergencji λ , oraz o skok h . Skok następuje radialnie na zewnątrz owocu, po linii w przybliżeniu spiralnej (rys. 6.3a), wzdłuż powierzchni zniekształconego cylindra. Powstający wzór ma związek ze znanymi od dawna zasadami proporcjonalnego podziału. W układzie powsta-

łych komórek podziału można wyraźnie zauważyć dwie rodziny spiralnych linii logarytmicznych, lewo- i prawoskrętnych, przecinających się pod kątem prostym. Liczba tych linii w jednym i w drugim kierunku jest określona kolejnymi liczbami ciągu Fibonacciego²²⁰. Ich liczba w obu kierunkach, rozdzielona przecinkiem, jest nazywana liczbą *filotaksji*²²¹ rośliny. Dla ananasa wynosi 5,8²²². Poniżej przedstawiono schematyczny widok owocu ananasa z oznaczeniem powstałych komórek (rys. 6.3b) i rozwinięcie jego powierzchni zewnętrznej, również z oznaczeniem powstałych komórek (rys. 6.3c) [72, s. 240]. Podobnie jak dla ananasa przebiega filotaksja szyszki sosnowej, której sporofile²²³ układają się według dwóch ortogonalnych linii spiralnych (rys. 6.4a) [72, s. 92]. W przypadku liści palmy kokosowej charakterystyczny jest układ jednej rodziny linii spiralnych (rys. 6.4b).



Rys. 6.3. Filotaksja owocu ananasa: a) widok rzeczywisty, b) schemat, c) rozwinięcie powierzchni

Opracowanych zostało wiele algorytmów numerycznych opisujących filotaksję, które pozwalają budować komputerowe obrazy rozwoju i podziału obiektów naturalnych [118, s. 100–118] [72, s. 240–242]. W jednym z nich²²⁴ uzależnia się

²²⁰ Dla niektórych roślin liczby filotaksji stanowią kolejne wyrazy ciągu Lucasa.

²²¹ Filotaksja albo ulistnienie oznacza w botanice zarówno sposób rozmieszczenia liści na łodydze rośliny, z uwzględnieniem ich pozycji względem siebie, jak i sposób formowania regularnych podziałów podczas wzrostu roślin.

²²² Dla innych roślin o podobnej filotaksji, liczby te mogą być znacznie większe. Na przykład dla słonecznika jest to od 21,34 dla małych kwiatostanów do 89,144, a nawet 144,233 dla dużych [118, s. 102], [73].

²²³ Inaczej: liście zarodnikonośne.

²²⁴ Model ten został przedstawiony w publikacji: Rivier N., Occelli J., Lissowski A., *Structure of Benard Convection Cells, Phyllotaxis and Crystallography in Cylindrical Symmetry* J. Physique, 45 (1984), s. 49–63. Opis za [72, s. 241].

współrzędne biegunowe komórki, $r(l)$ i $\theta(l)$, od jej numeru l , wymiaru liniowego a oraz kąta dywergencji λ za pomocą wzorów (1.12):

$$r(l) = a\sqrt{l} \quad \theta(l) = 2\pi\lambda l \quad (6.1)$$



a)



b)

Rys. 6.4. Filotaksja spiralna: a) szyszki – dwie rodziny linii spiralnych, b) liście palmy kokosowej – jedna rodzina linii spiralnych

Jeżeli w równaniach (6.1) podstawimy $\lambda = 1/\phi$, gdzie $\phi = (\sqrt{5} - 1)/2$ – stała złotego podziału, to prowadzi to do bardzo regularnej tesselacji, w której komórki podziału są niemal identyczne. Odpowiada ona podziałom występującemu w naturze [72]. Spirala logarytmiczna jest kształtem obserwowanym również w innych obiektach naturalnych, takich jak muszle²²⁵ czy rogi różnych zwierząt (rys. 6.5) [46, 85, 156, 157].



Rys. 6.5. Rogi antylop, rozwijające się według spirali logarytmicznej

²²⁵ W rozdziale XI swojej pionierskiej pracy [143] D'Arcy W. Thompson podał szczegółowy opis spiralnej geometrii muszli morskich oraz wyniki pomiarów muszli wybranych gatunków.

Podziały Woronoja

Przy rozpatrywaniu podziałów powierzchni znaczenie ma konstrukcja geometryczna, nazywana *podziałem Woronoja*²²⁶. W przypadku przestrzeni dwuwymiarowej, dla danego zbioru n punktów, dzieli on płaszczyznę na n obszarów przypisanych do tych punktów, w taki sposób, że każdy punkt w dowolnym obszarze znajduje się bliżej punktu podziału znajdującego się w tym obszarze niż od punktów podziału znajdujących się w pozostałych obszarach [72, s. 220–224].

Podział powierzchni na obszary równoodległe od punktów (centrów) nieregularnie rozmieszczonych na powierzchni można zaobserwować w owocach niektórych roślin. Na rysunku 6.6 przedstawiono owoc namorzyn, którego powierzchnia ulega podziałowi według tej zasady.



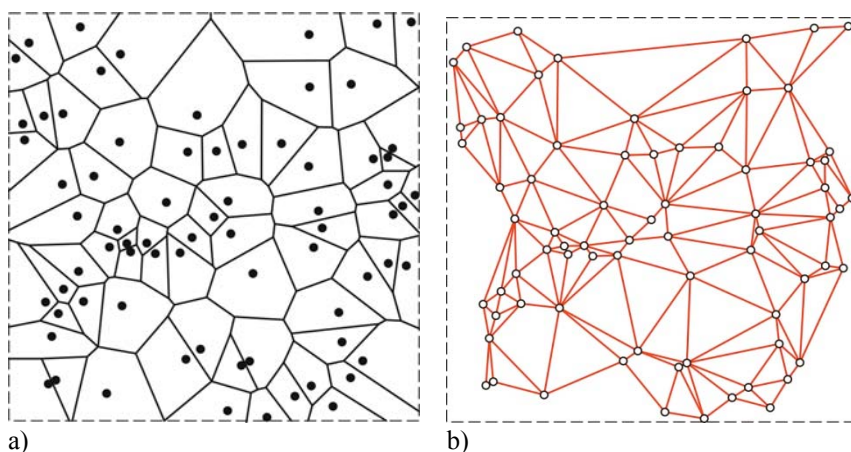
Rys. 6.6. Podział owocu drzewa namorzynowego na obszary Woronoja

Poniżej przedstawiono ogólną koncepcję podziału pewnego obszaru na obszary Woronoja (rys. 6.7a). Interpretacja tego podziału może być bardzo różna. Może on np. dotyczyć skali urbanistycznej i przedstawiać podział pewnego obszaru miejskiego na rejony szkolne. Rejony te charakteryzują się tym, że uczniowie

²²⁶ Stosowane są również określenia: *tesselacja Woronoja* lub *domeny (obszary) Dirichleta*. G.L. Dirichlet, w pracy *Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen* Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 40 (1850), s. 209–227, posługiwał się dwu- i trójwymiarowymi diagramami, które G. Woronoj (Voronoi) uogólnił na przypadek n -wymiarowy w pracy *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques* Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 133 (1907), s. 97–178. Wcześniej (w 1644 r.), w niesformalizowany sposób, posługiwał się tą koncepcją Kartezjusz.

mają zawsze najbliżej do szkoły leżącej w ich rejonie [72, s. 221]. W skali konstrukcji pewnego budynku, może przedstawiać np. podział stropu opartego na nieregularnej siatce słupów, na obszary z których obciążenia są przekazywane na dany słup.

Diagramy Woronoja dzielą płaszczyznę lub w ogólniejszym przypadku przestrzeń n -wymiarową na tzw. komórki Woronoja²²⁷, które są zawsze wielotopami wypukłymi. Konstrukcją dualną do diagramu Woronoja jest triangulacja Delaunaya (rys. 6.7b). Konstrukcja ta powstaje poprzez takie połączenie zadanych punktów na płaszczyźnie, że powstaje siatka trójkątów. Jeżeli na każdym trójkącie opiszemy okrąg, to wewnątrz tego okręgu nie będzie leżał żaden inny punkt siatki. Triangulację Delaunaya można zbudować również na podstawie diagramu Woronoja, łącząc odcinkami te punkty podziału, które leżą w przylegających komórkach. W odniesieniu do przykładu stropu opartego na nieregularnej siatce słupów, linie triangulacji Delaunaya mogą reprezentować np. układ żeber w płycie stropowej. Triangulacja Delaunaya znajduje zastosowanie m.in. w generowaniu siatki podziału w metodzie elementów skończonych stosowanej do obliczeń konstrukcji powierzchniowych.



Rys. 6.7. Przykład podziałów Woronoja: a) podział obszaru na obszary Woronoja, b) dualna do tego podziału triangulacja Delaunaya

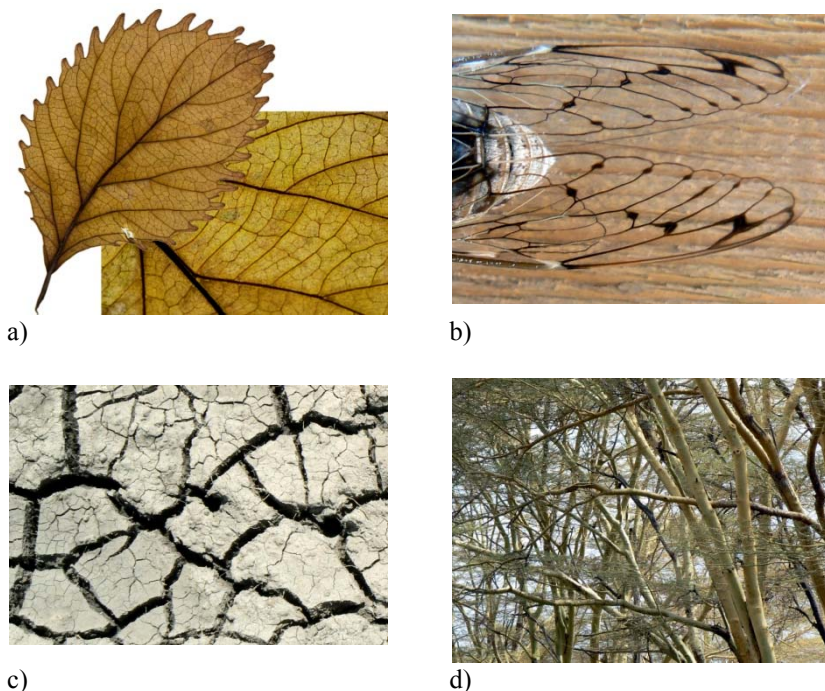
Komórki Woronoja korespondują z tesselacjami powierzchni opartymi na pół-regularnych upakowaniach kół. Tworzą one tesselacje dualne do nich²²⁸. Jak zostanie pokazane, podział Woronoja stosunkowo często występuje przy podziałach obiektów naturalnych.

²²⁷ Nazywane również *obszarami Dirichleta* [72, s. 220].

²²⁸ Patrz rozdz. 4.4.

Celowe i przypadkowe układy naturalne

W przyrodzie można zaobserwować występowanie różnego rodzaju wzorów, podziałów i wypełnień, które pojawiają się jako formy ukształtowania i budowy pewnych naturalnych obiektów lub ich przypadkowe zestawienia. Przykładem pierwszej grupy może być wewnętrzna struktura liścia brzozy (6.8a) lub budowa skrzydła ważki²²⁹ (rys. 6.8b). Natomiast spękana powierzchnia dna wyschniętej rzeki (rys. 6.8c), czy też obserwowane z pewnej odległości gałęzie drzew, mogą być postrzegane jako pewna struktura siatkowa wypełniająca pole obserwacji (rys. 6.8d). Między dwoma ostatnimi przykładami jest istotna różnica: układ spękań mułu na dnie rzeki wynika z jego składu chemicznego, przebiegu procesu wysychania itp., a układ gałęzi jest jedynie rodzajem „fotografii”, która jest chwilowym obrazem formy, zależnym w dużym stopniu od wyboru obserwatora.



Rys. 6.8. Celowe i przypadkowe układy naturalne (opis w tekście)

Podobnie jak w przypadku hierarchicznej struktury wielotopów, opisaną w rozdziale 2, wiele spośród naturalnych form strukturalnych można rozpatrywać

²²⁹ Zagadnieniem budowy obiektów naturalnych, zawierających elementy szkieletu pneumatycznego lub hydraulicznego, zajmowali się m.in. Edgar Stach (w pracach [129] i [130]) i Michael Balz.

jako zestawienia obiektów geometrycznych różnego stopnia. Skala fizyczna obiektu nie ma znaczenia dla rozpatrywania go w tym kontekście. Obiekty te można podzielić na dwie grupy:

- obiekty liniowe ($d = 1$), np. włókna roślinne i zwierzęce, pręty (łodygi roślin, pazury zwierząt itp.),
- obiekty powierzchniowe ($d = 2$), np. muszle, skorupy,
- obiekty przestrzenne ($d = 3$), np. bloki kamienne.

Obiekty mogą wchodzić ze sobą w interakcje, tworząc różnego rodzaju układy, wzory, tesselacje – często przypadkowe w układzie, ale niemal zawsze cechujące się niezmiennością geometryczną, sztywnością, zdolnością przenoszenia obciążeń. Obiekty liniowe mogą występować na powierzchniach ($d = 2$) płaskich lub zakrzywionych, a obiekty powierzchniowe, płaskie lub zakrzywione, są usytuowane w przestrzeni ($d = 3$). Obiekty przestrzenne mogą występować wyłącznie w przestrzeni ($d = 3$).

Mechanizm połączenia tych podstawowych elementów w większe układy wydaje się być unikatowy i pozwala on scalenie i współpracę obiektów, umożliwiając jednocześnie wzrost całego układu, jeżeli zachodzi taka potrzeba. Połączenie dwóch obiektów (wielotopów) stopnia n odbywa się zawsze poprzez element stopnia $n-1$, np. pręty ($d = 1$) łączą się w węzłach ($d = 0$), elementy płytowe ($d = 2$) łączą się krawędziami ($d = 1$). Połączenia umożliwiają obrót – są to przeguby, zawiasy itd., a budowa połączeń umożliwia dodawanie w nich nowych elementów. Potwierdza to wcześniejsze spostrzeżenie, że wiele charakterystyk formy oraz relacji pomiędzy formami może być opisanych w kategoriach systemów hierarchicznych. Co więcej, tego typu relacje dotyczą nie tylko przypadku „rzeczywistych” struktur powstałych naturalnie, ale także struktur utworzonych na podstawie pewnego obrazu, jak np. układ linii odpowiadających gałęziom drzew (rys. 6.8d). Wydaje się, że natura potrafi korzystać z przypadkowo wygenerowanych wzorów w procesie ewolucji [162, s. 4].

Linie ($d = 1$) na powierzchniach płaskich ($d = 2$)

Układy linii na płaszczyźnie mogą powstać przez nałożenie wielu różnie zorientowanych elementów liniowych, np. włókien jutowych rozmieszczonych dowolnie na powierzchni dachu (rys. 6.9a), czy siatki pęknięć pokrywy lodowej na jeziorze (rys. 6.38a). Podobne układy linii tworzą siatki pajęczyny, które mogą być bardzo nieregularne (rys. 6.58), lub przeciwnie – charakteryzować się znaczną regularnością (rys. 6.9b). Ciekawe jest, że model matematyczny drugiej z tych sieci można uzyskać na podstawie opisanego modelu dla filotaksji, podstawiając w równaniu (6.1) $\lambda = 13/21$, liczbę wymierną, bliską stałej złotego podziału ϕ , [72, s. 243].

Przydatność strukturalną takich dowolnych układów naturalnych można przeanalizować na przykładzie układu spękań pokrywy lodowej, w pkcie 6.4 (rys. 6.38a). Jeżeli potraktujemy taki wzór, jako pewien układ prętów, które są ze sobą połączone w miejscach przecięć w sposób przegubowy, to można zauważyć, że węzły wewnętrzne tego układu są zawsze

4-walentne²³⁰. Jedynie węzły brzegowe są 3-walentne. Układ ten można rozpatrywać jako fragment dowolnego, nieograniczonego układu na płaszczyźnie, a przyjęcie w węzłach brzegowych podpór umożliwia zastąpienie w ten sposób oddziaływanie pozostałej, odrzuconej części układu.

Jeżeli układ jest nieskończenie duży, to spełnia warunek równania Maxwella. Dla wydzielonego fragmentu struktura o wierzchołkach 4-walentnych, wraz z przytrzymanymi elementami brzegowymi, ma dostatecznie dużo prętów dla zapewnienia geometrycznej niezmienności, zgodnie z warunkiem Möbiusa–Maxwella (2.18)²³¹.



a)



b)

Rys. 6.9. Układy obiektów liniowych na płaszczyźnie:
a) układ włókien jutowych na powierzchni dachu, b) pajęczyna

Linie ($d = 1$) na powierzchniach zakrzywionych ($d = 2$)

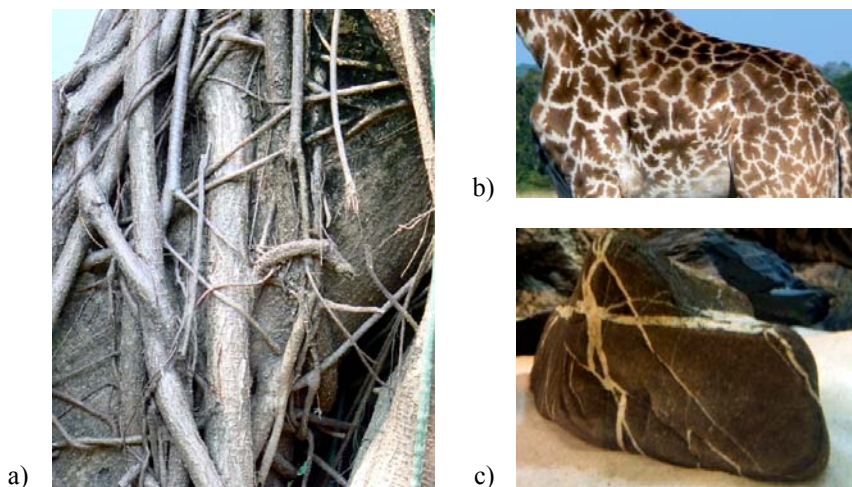
Schematy podobne do struktur przedstawionych na rysunku 6.9, można interpretować również jako obraz układu elementów liniowych ($d = 1$) na pewnej zakrzywionej powierzchni ($d = 2$).

W konfiguracjach tego rodzaju, wierzchołki mogą być 3-walentne lub – jak poprzednio – 4-walentne. Ponieważ jednak strukturę rozpatrujemy w przestrzeni trójwymiarowej, nie wystarcza to do spełnienia warunku geometrycznej niezmienności (2.18), z którego wynika, że wierzchołki powinny być co najmniej 6-walentne. W konfiguracji o wierzchołkach 4-walentnych liczba krawędzi jest dwukrotnie większa niż liczba wierzchołków: $e = 2v$. Zależność ta – po podstawieniu do równania (2.18) i po uwzględnieniu, że dla nieskończonych konfiguracji $s = 0$, daje $e = 2f$, a zatem przeciętny wielokąt w takiej konfiguracji jest czworokątem. Warunkiem geometrycznej niezmienności takiej struktury jest występowanie wypełnienia (elementów powierzchniowych) w polach – fasetach [162, s. 11].

²³⁰ Prawdopodobieństwo przecięcia się w jednym węźle więcej niż dwóch prętów jest w dużych układach nieskończenie małe. Miejsca pozornego przecięcia się większej liczby prętów to są w rzeczywistości dwa węzły leżące bardzo blisko siebie [162, s. 10].

²³¹ Patrz pkt 2.3.6.

Ilustrują to przykłady różnych siatek naturalnych na powierzchniach zakrzywionych. Pień figowca (rys. 6.10a), stanowi zakrzywioną powierzchnię bazową, a oplatające go własne korzenie tworzą siatkę 4-walentną. Innym przykładem może być układ plam na skórze żyrafy (rys. 6.10b). Jasne linie tworzą siatkę 3-walentną na zakrzywionej powierzchni skóry. Siatki 4-walentne można zauważyć na powierzchni kamienia (rys. 6.10c) utworzone przez odsłonięte przewarstwienia.



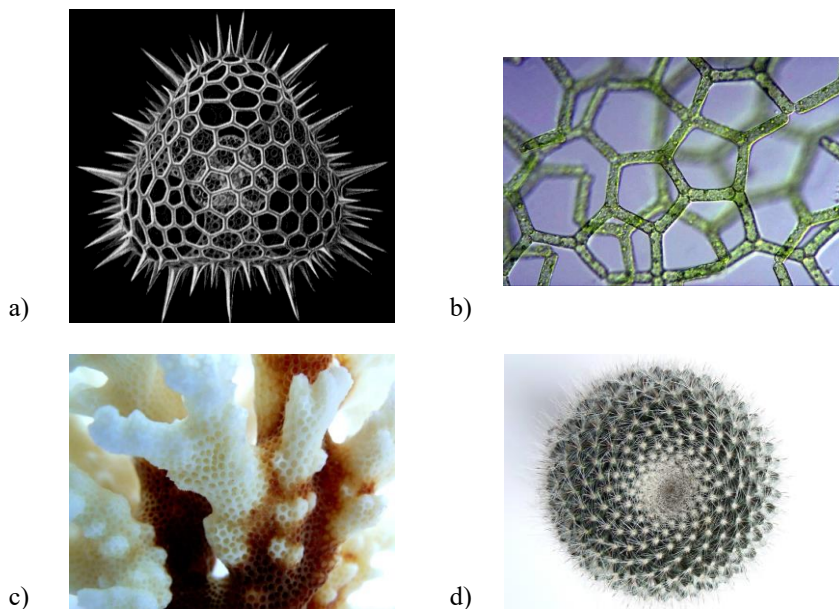
Rys. 6.10. Przykłady siatek 4-walentnych na zakrzywionej powierzchni:

a) pień figowca opleciony korzeniami,
b) ubarwienie skóry żyrafy²³², c) przewarstwienia kamienia rzeczno

Inne, ciekawe przykłady podziałów zakrzywionych powierzchni liniami, można znaleźć wśród okazów przyrody zarówno ożywionej, jak i nieożywionej. Budowa szkieletu małego pierwotniaka wodnego – radiolari²³³ (rys. 6.11a), to niemal idealna siatka z sześć- i pięciokątów na powierzchni zakrzywionej. Zbliżony sposób podziału powierzchni można zauważyć na kolonii zielonych alg morskich – hydrodictyon (rys. 6.11b), a w większej skali – na gałązkach koralowca (rys. 6.11c). Układ linii utworzonych przez ciernie na powierzchni kaktusa, odpowiada z kolei układowi dwóch rodzin linii spiralnych, podobnie jak w przypadku filotaksji ananasa (rys. 6.11d).

²³² W przypadku żyrafy możliwa jest równorzędna interpretacja jej ubarwienia, nie jako jasnych plam na ciemnej skórze, ale jako podziału jasnej skóry – ciemnymi plamami. W takim razie byłby to podział powierzchni ($d = 2$) elementami powierzchniowymi ($d = 2$).

²³³ Rysunek pochodzi ze sławnego atlasu form występujących w naturze, opracowanego przez niemieckiego badacza Ernesta Haeckela w 1904 r. – praca [59].

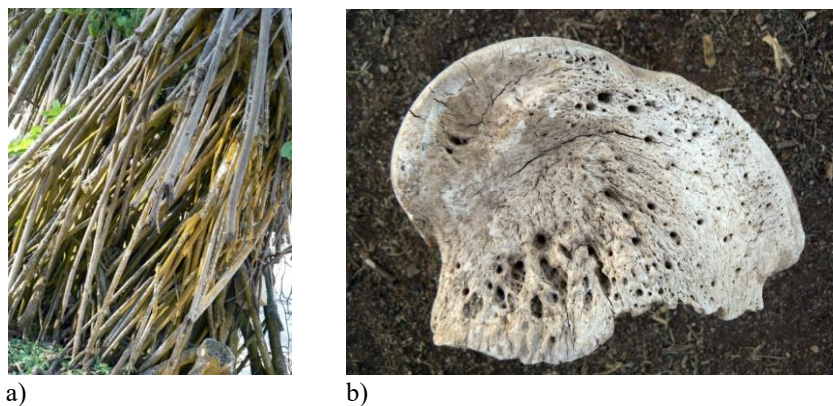


Rys. 6.11. Układy obiektów liniowych na powierzchni zakrzywionej:

- a) szkielet *radiolarii*, b) kolonia alg morskich *hydrodictyon*,
c) podział powierzchni koralowca, d) filotaksja kaktusa

Linie ($d = 1$) w przestrzeni ($d = 3$)

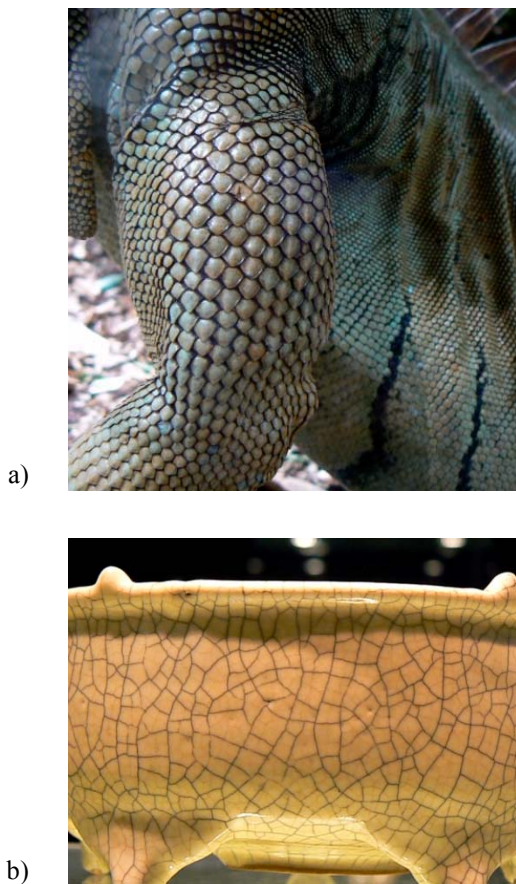
Za przykład podziału przestrzeni liniami mogą służyć odsłonięte korzenie namorzyn, układające się w wiązki wyraźnych linii (rys. 6.12a). Podobnie widoczny układ włókien w strukturze kości słonia tworzy siatkę linii w przestrzeni (rys. 6.12b).



Rys. 6.12. Układy obiektów liniowych w przestrzeni: a) korzenie namorzyn, b) układ włókien w strukturze kości słonia

Powierzchnie ($d = 2$) na powierzchniach ($d = 2$)

Układy naturalne, w których powierzchnia dwuwymiarowa jest podzielona obiektami również dwuwymiarowymi, mają bardzo często charakter omówionych powyżej podziałów Woronoja. Ilustrują to dwa przykłady odnoszące się do przyrody ożywionej – układ łusek na skórze iguany (rys. 6.13a) i do przyrody nieożywionej – siatka spękań na powierzchni porcelanowej wazy²³⁴ (rys. 6.13b).



Rys. 6.13. Układy obiektów liniowych na powierzchni ($d = 2$):

- a) łuski na skórze iguany,
- b) siatka spękań na powierzchni porcelanowej wazy

²³⁴ Waza pięcionożna do mycia, południowa dynastia Sung, ok. 1127–1279. Zbiory Muzeum Miejskiego w Szanghaju.



Rys. 6.14. Dualizm prętowo-płytkowy: struktura skorupy żółwia

Przykładem zupełnie innego układu dwuwymiarowych elementów na powierzchni ($d = 2$) jest skorupa żółwia (rys. 6.14). Jest to przykład dualizmu prętowo-płytkowego²³⁵. Poszczególne płytki skorupy nie przecinają się, lecz są połączone wzdłuż krawędzi. Poprzez zastąpienie każdej płytki węzłem i połączenie węzłów elementami liniowymi powstałaby struktura prętowa dualna do wyjściowej. Siatka zachowuje geometryczną niezmienną oraz jest podatna na dalszą rozbudowę (ewolucję).

Powierzchnie ($d = 2$) w przestrzeni ($d = 3$)

Układ linii na rysunku 6.9a może być interpretowany jeszcze inaczej niż poprzednio – jako ślady przecięcia dwuwymiarowych powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni. Charakterystyczne dla takiej konfiguracji jest to, że każda linia powstaje w wyniku przecięcia jedynie dwóch powierzchni, a każdy wierzchołek jest 6-walentny, prawdopodobieństwo wystąpienia innego rodzaju przecięć jest, podobnie jak prawdopodobieństwo wystąpienia przecięć innych niż 4-walentne na płaszczyźnie, bardzo małe.

Przestrzenie ograniczone elementami $d = 2$ tworzą n -ścienną bryłę o różnej liczbie ścian. Jeżeli wszystkie linie przecięć zinterpretujemy jako pręty, to liczba tych prętów będzie wystarczająca do spełnienia warunku (2.17), nawet jeżeli przestrzenie wewnętrzne (komórki) i fasety nie będą zmaterializowane. Przy podziale przestrzeni za pomocą wielościanów (upakowaniu), których wszystkie węzły są 6-walentne, jedynymi elementami, które wymagają materializacji dla zapewnienia

²³⁵ Patrz [160].

geometrycznej niezmienności są elementy stopnia $d=0$ (węzły) i elementy stopnia $d=2$ (ściany).

Podstawowe zależności ilościowe dla rozpatrywanej konfiguracji można określić, rozpatrując ją jako sposób podziału przestrzeni czterowymiarowej ($d=4$) za pomocą elementów stopnia niższego ($d=0, 1, 2, 3$). Równanie Eulera (2.5b) przyjmie wtedy postać:

$$v - e + f - c = 0 \quad (6.2)$$

gdzie c – liczba cel (komórek) stopnia $d=3$.



Rys. 6.15. Przecięcia powierzchni w przestrzeni: *roża pustyni*
– naturalny kompleks kryształów gipsu

Ponieważ wierzchołki są 6-walentne, a każda krawędź łączy dwa wierzchołki, zatem liczba krawędzi jest równa potrojonej liczbie wierzchołków (6.3a). Jeżeli dodatkowo uwzględnimy, że występują fasety czworokątne, a w wierzchołku łączy się dwanaście faset, to liczba faset jest równa potrojonej liczbie wierzchołków, czyli równa liczbie krawędzi (6.3b), a w konsekwencji liczba cel (komórek) jest równa liczbie wierzchołków (6.3c) [162, s. 13].

$$f = 3 \cdot v \quad (6.3a)$$

$$e = f \quad (6.3b)$$

$$v = c \quad (6.3c)$$

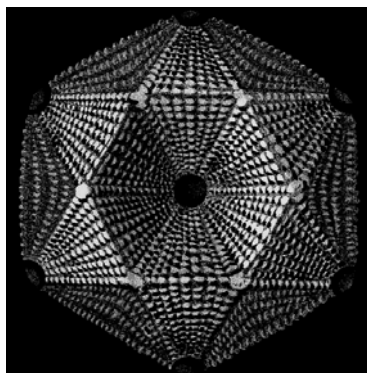
W przyrodzie powierzchnie płaskie występują znacznie rzadziej niż powierzchnie zakrzywione, które tworzą w przestrzeni struktury również przez układy wzajemnych przecięć. Poniżej pokazano podział przestrzeni układem wielu powierzchni, charakterystycznym dla tzw. *róży pustyni* (rys. 6.15).

Przestrzenie ($d = 3$) w przestrzeni ($d = 3$)

Bardzo efektownym przykładem wypełnienia przestrzeni bryłami są skały bazaltowe. Dzielą się one naturalnie na kolumny, będące graniastosłupami o podstawie najczęściej sześciokątnej (rys. 6.16a). Innym przykładem takich form jest koralowiec madreporowy (rys. 6.16b), którego kształt jest niemal dokładnie wielościannem.



a)



b)



c)

Rys. 6.16. Przykład wypełnienia przestrzeni obiektami ($d = 3$):
a) kolumny bazaltowe w tzw. Skalnych Organach, Kamenický Šenov
koło m. Česká Lípa w Czechach, b) koralowiec kamienny (madreporowy)
w kształcie wielościannu niewypukłego²³⁶, c) plaster pszczeli

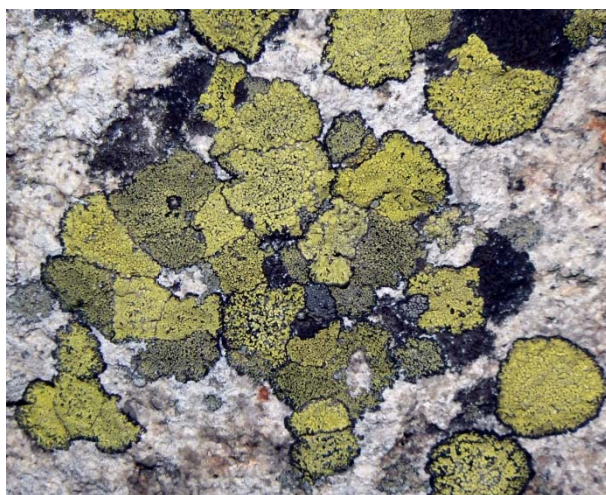
²³⁶ Rysunek E. Haeckla z pracy [59].

Bardzo regularne, ściśle upakowanie brył (graniastosłupy, z zakończeniem w kształcie dwunastościanów rombowych) w przestrzeni można zaobserwować w typowym plastrze pszczelim, wykonanym z wosku (rys. 6.16c).

6.2.2. Naturalne analogie do innych metod generowania modeli

Naturalne tesselacje nie są jedynymi źródłami inspiracji w poszukiwaniu topologicznych prototypów form strukturalnych. Wśród form naturalnych można odnaleźć także analogie do innych metod generowania modeli topologicznych.

Jeżeli siatki płaskie mogły być zbudowane na upakowaniach okręgów (rozdz. 6.4), to można je zbudować także na każdym innym, dostatecznie zbliżonym do upakowania okręgów – wzorze. Przykład takiego wzoru stanowią kolonie porostów rosnących na skałach, które rozrastają się, aż do zetknięcia z sąsiednimi koloniami. Po pewnym okresie wzrostu, kolonie wypełniają niemal całkowicie powierzchnię, tworząc charakterystyczny wzór stycznych kół (rys. 6.17).



Rys. 6.17. Kolonie porostów na skałach tworzą charakterystyczny wzór upakowania okręgów

Innym przykładem prototypu formy strukturalnej mogą być fraktale. Te samopodobne obiekty geometryczne można odnaleźć w wielu strukturach naturalnych, o bardzo różnej skali. Na rysunku 6.18 przedstawiono przykład samopodobieństwa liścia paproci.



Rys. 6.18. Fraktalne samopodobieństwo liścia paproci

6.2.3. Powierzchnie minimalne

Na powierzchnie minimalne zwrócono uwagę w związku z popularną zabawą w puszczanie baniek mydlanych²³⁷. Kiedy opracowano fenomenologiczną teorię zjawisk kapilarnych²³⁸, częścią tej teorii stała się teoria błonek mydlanych. Wtedy zauważono ich związek z powierzchniami minimalnymi i zaczęto traktować jako modele powierzchni minimalnych [6, 134].

Model matematyczny

Dowolna gładka powierzchnia S w przestrzeni trójwymiarowej (rys. 6.19) ma w dowolnym punkcie M dokładnie dwa, przeciwnie skierowane, wektory normalne N i $-N$. Przecięcie powierzchni S płaszczyznami prostopadłymi, zawierającymi te wektory, daje przekroje normalne powierzchni. Dla każdego z przekrojów normalnych można określić jego krzywiznę w punkcie M równaniami (6.4). Krzywizny r_1 i r_2 nazywa się krzywiznami głównymi, jeżeli są one ekstremalnymi krzywiznami wszystkich przekrojów normalnych powierzchni S , w punkcie M . Przekroje, dla których wyznaczono te krzywizny, przecinają się pod kątem prostym w punkcie M . Średnia krzywizna H , powierzchni S jest określona wzorem (6.5). Iloczyn krzywizn głównych, k , określony wzorem (6.6) nazywamy krzywizną Gaussa w punkcie M .

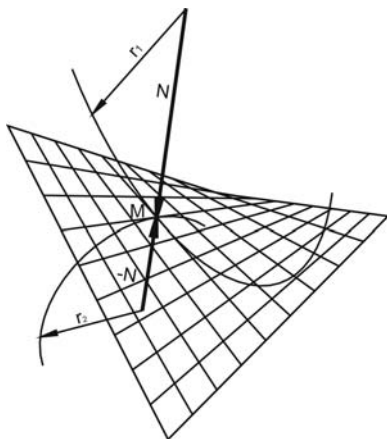
²³⁷ Znajomość baniek mydlanych jest w Europie niemal tak samo stara jak znajomość mydła. Najstarszy przedstawiający je rysunek – sztych Hendricka Golziusa pochodzi z 1594 r. Później wielokrotnie pojawiają się w sztuce, chętnie wykorzystywane jako symbol nietrwałości, ułotności i śmierci. Zabawa stała się popularna w XIX w., a powszechna – na początku XX w. [134].

²³⁸ T. Young w 1805 r. oraz niezależnie, P.S. Laplace w roku 1806 r. [134].

$$\rho_1 = \frac{1}{r_1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{r_2} \quad (6.4)$$

$$H = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \quad (6.5)$$

$$k = \rho_1 \rho_2 \quad (6.6)$$



Rys. 6.19. Sposób oznaczania dwukrzywiznowej powierzchni minimalnej (opis w tekście)

Powierzchnia minimalna znajduje się w ośrodku, który może na nią oddziaływać. W przypadku, kiedy występują różnice ciśnień po obu stronach powierzchni, aby pozostała w równowadze musi być spełniony warunek (6.7):

$$p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (6.7)$$

gdzie p – różnice ciśnień pomiędzy wewnętrzną i zewnętrzną stroną ośrodka, a σ – napężenie powierzchniowe na powierzchni minimalnej.

Jeżeli ośrodek nie oddziałuje na powierzchnię, to równanie (6.7) przyjmuje postać (6.8)

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 0 \quad (6.8)$$

po uwzględnieniu (6.4) otrzymujemy

$$\rho_1 = -\rho_2 \quad (6.9)$$

Wynika z tego, że powierzchnia minimalna o ujemnej krzywiznie Gaussa (powierzchnia antyklastyczna) jest powierzchnią stabilną, natomiast powierzchnia o dodatniej krzywiznie Gaussa (powierzchnia synklastyczna) jest stabilna tylko, jeżeli występuje różnica ciśnień po obu stronach powierzchni²³⁹. Powierzchnie synklastyczne są zawsze lokalnie wypukłe, a powierzchnie antyklastyczne – lokalnie siodłowe. Płaszczyzna ma zerową krzywiznę Gaussa. Powierzchnia kropli wody na podkładce teflonowej jest powierzchnią synklastyczną, gdyż po obu jej stronach występuje różnica ciśnień (rys. 6.20).



Rys. 6.20. Przykład powierzchni minimalnej synklastycznej – kropla wody

Powierzchnie minimalne można też zdefiniować w kategoriach rachunku wariacyjnego. Rozpatrując powierzchnię S , w przestrzeni trójwymiarowej, ograniczonej krzywą Γ , opisaną współrzędnymi x, y, z , która jest zdefiniowana na dziedzinie D , leżącej w płaszczyźnie $x-y$, ograniczonej krzywą Γ' można określić współrzędną z każdego z punktów powierzchni S , jako funkcję $z = z(x, y)$ współrzędnych odpowiedniego punktu dziedziny D . Powierzchnia S jest powierzchnią minimalną, jeżeli wszystkie jej punkty spełniają równanie Eulera–Lagrange'a²⁴⁰ (6.10).

$$(1 + z_x^2)z_{yy} - 2 \cdot z_x \cdot z_y \cdot z_{xy} + (1 + z_y^2)z_{xx} = 0 \quad (6.10)$$

²³⁹ W projektowaniu współczesnych konstrukcji membranowych uwarunkowanie to znalazło swoje odzwierciedlenie w podziale na konstrukcje namiotowe (antyklastyczne) i pneumatyczne (synklastyczne) [134].

²⁴⁰ Najwcześniejszy opis powierzchni minimalnej pochodzi od Eulera (1744 r.). Później zajmował się tym problemem Lagrange (1761 r.), ustalając ostateczną formę równania (5.8), opisującego powierzchnie minimalne. Nieco później Meusnier wykazał, w czysto matematyczny sposób, że równanie to można przedstawić w formie równania (6.10). (J.B.M.C. Meusnier, *Memoire sur la courbure des surfaces*. *Mem. Mathem. Phys. Acad. Sc. Paris, pres. par du Savans*, 1785, s. 477–510. Praca ta została zaprezentowana przed Francuską Akademią Nauk już w 1776 r.) [6, 85, 134].

Udowodniono, że dla każdej zamkniętej krzywej brzegowej istnieje co najmniej jedna stabilna powierzchnia minimalna²⁴¹ (rys. 6.21). Jeżeli krzywa brzegowa leży na płaszczyźnie, to powierzchnia minimalna również jest płaska i nazywana jest trywialną. Powierzchnie minimalne w ogólności, są matematycznymi modelami błonek mydlanych w stanie równowagi, niezależnie od tego, czy jest to równowaga trwała, czy nie. Zatem każda powierzchnia o minimalnym obszarze jest powierzchnią minimalną, ale nie każda powierzchnia minimalna jest powierzchnią o najmniejszym obszarze. Powierzchnie o najmniejszym obszarze są nazywane stabilnymi powierzchniami minimalnymi, a pozostałe powierzchnie minimalne – niestabilnymi powierzchniami minimalnymi.



Rys. 6.21. Przykład antyklastycznej powierzchni minimalnej na dowolnym konturze zamkniętym

Układy powierzchni minimalnych

Pierwszymi odkrytymi nietrywialnymi przykładami powierzchni minimalnych były: *katenuida* i *helikoida*.²⁴² Katenuida Jest to jedyna powierzchnia obrotowa, będąca powierzchnią minimalną. Powstaje ona przez obrót wokół osi z , linii łańcuchowej o równaniu:

²⁴¹ Problem istnienia stabilnych powierzchni minimalnych dla dowolnego konturu postawił belgijski fizyk, J.A.F. Plateau [68, s. 1]. W całej serii eksperymentów przeprowadzonych w latach 1843 – 1868, których zebrane wyniki opublikował w 1873 r. w pracy *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, wykazał on, że dla każdej zamkniętej krzywej brzegowej istnieje, co najmniej jedna stabilna powierzchnia minimalna. Dowód matematyczny tego twierdzenia przeprowadził dopiero w 1933 r. węgierski matematyk Tibor Rado i – niezależnie – Amerykanin Jesse Douglas [134].

²⁴² Przykłady pierwszych nietrywialnych powierzchni minimalnych: katenuidy i helikoidy, pochodzą z cytowanej pracy J.B.M.C.

$$y = \frac{1}{2}a \left(e^{\frac{z}{a}} + e^{\frac{-z}{a}} \right) \quad (6.11)$$

Równanie (6.10) jest nieliniowym równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu, dwóch zmiennych. Znalezienie ogólnych rozwiązań analitycznych tego równania, dla zadanych warunków brzegowych, tj. dla zadanej krzywej Γ , ograniczającej powierzchnię S , jest w ogólnym przypadku bardzo trudne. Współcześnie wykonuje się to za pomocą badań modelowych lub analizy komputerowej [109, 110, 134].

Wykorzystanie błonek mydlanych jako modeli fizycznych stabilnych powierzchni minimalnych, umożliwiło obserwację i badanie zjawisk, dotyczących układów składających się z wielu stykających się powierzchni minimalnych. Układy takie mogą być bardzo złożone i składać się z wielu elementów o różnej wielkości. Doprowadziło to do pytania, w jaki sposób mogą łączyć się poszczególne powierzchnie, aby powstały system był stabilny.



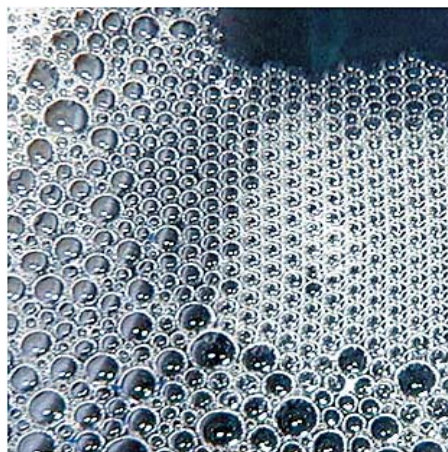
Rys. 6.22. Układ powierzchni minimalnych, których połączenia spełniają reguły Plateau

Problem połączeń powierzchni minimalnych rozwiązał w ogólnym przypadku J.A.F. Plateau, podając reguły, które muszą być spełnione, aby powstała stabilna konfiguracja powierzchni minimalnych²⁴³ (rys. 6.22). Reguły Plateau określają strukturę błonek mydlanych w dużych zespołach (tzw. pianach):

²⁴³ Plateau podał swoje reguły na podstawie wielu badań eksperymentalnych opublikowanych w cytowanej pracy.

- błonki mydlane mają całkowicie gładkie powierzchnie,
- średnia krzywizna H części błonki jest zawsze stała w każdym punkcie w tej samej części błonki,
- styk więcej niż dwóch komórek może być liniowy lub punktowy; w styku liniowym ustawiają się one w taki sposób, że co najwyżej trzy ścianki stykają się wzdłuż jednej linii, zwanej linią Plateau, tworząc kąt równy $\cos^{-1}(-1/2) = 120^\circ$; w styku punktowym w jednym punkcie mogą się stykać jedynie cztery ścianki, tworząc między sobą kąt równy $\cos^{-1}(-1/3) = 109^\circ 28' 16.3''^{244}$.

Konfiguracje, niespełniające reguł Plateau, są niestabilne i piana natychmiast dąży do przeorganizowania się w taki sposób, aby je spełnić. Na rysunku 6.23. pokazano duży zespół baniek mydlanych o bardzo regularnym, płaskim układzie. Układ ten koresponduje z tesselacjami powierzchni (upakowania okręgów) omówionymi w rozdziale 3.



Rys. 6.23. Przykład stabilnej konfiguracji powierzchni minimalnych

Sposób połączenia powierzchni minimalnych ma również związek ze sposobami podziału przestrzeni w najbardziej efektywny sposób. Pojedyncza bańka mydlana (sferyczna) zamyka zadaną objętość powietrza za pomocą najmniejszej powierzchni, a dwie złączone ze sobą bańki zamykają za pomocą najmniejszej

²⁴⁴ Jest to jeden z tzw. *kątów Maraldiego*. Nazwa pochodzi od nazwiska J.P. Maraldiego, który odkrył je w 1712 r., badając budowę plastra miodu (*Obs. sur les abeilles* Mém. Acad. R. Sciences (1712) 1731, 297–331). Wcześniej Kepler wydedukował na podstawie właściwości symetrii plastra miodu, że kąt wierzchołkowy każdej z komórek musi być taki, jak dla dwunastościanu rombowego, jednak jego odkrycie pozostało nie zauważone. Drugi z kątów Maraldiego wynosi $\cos^{-1}(1/3) = 70^\circ 31' 43.6''$, Suma tych kątów daje 180° [143, s. 498].

powierzchni dwie zadane objętości powietrza²⁴⁵. Błonki mydlane dążą do minimalizacji swojej powierzchni, aby zminimalizować energię potencjalną układu. Optymalnym kształtem dla pojedynczej izolowanej bańki jest sfera. W konfiguracjach przestrzennych układ ścianek jest dużo bardziej złożony.

Powierzchnie minimalne a rośliny

Dwie opisane cechy, charakteryzujące powierzchnie minimalne (w tym wypadku obiekty nieożywione – błonki mydlane): stała wartość naprężenia powierzchniowego, wynikająca z równania (6.7) oraz minimalizacja powierzchni, wynikająca z dążenia do minimalizacji energii potencjalnej systemu, znajdując analogie w obiektach należących do świata przyrody ożywionej.

Ogólne zasady, według których struktury biologiczne dostosowują się do warunków zewnętrznych, są znane i analizowane od dawna [143, 110]. Zwrócono również uwagę na ich cechy fraktalne [113]. Ostatnie badania wykazują [96], że struktury te samooptymalizują swój kształt przez wzrost, z uwzględnieniem działających na nie naturalnych obciążeń.

Optymalizacja oznacza w tym przypadku, że we wszystkich rozpatrywanych strukturach²⁴⁶ stan stałego naprężenia na powierzchni „biologicznego komponentu” jest zawsze utrzymywany dla naturalnych przypadków obciążenia. Mechanizm wzrostu drzew zapewnia stałą dystrybucję naprężeń na powierzchni pnia oraz gałęzi [96, 110]. Kiedy drzewo ulega uszkodzeniu, np. gałąź zostanie złamana, proces gojenia minimalizuje powierzchnię obszaru wokół uszkodzenia. „Proces naprawczy” polega w tym wypadku na minimalizacji powierzchni wokół uszkodzenia oraz powiększeniu przekroju pnia wokół niego tak, aby zachowana była stała wartość rozkładu naprężeń.

Zasada równomiernego rozkładu naprężeń powierzchniowych, którą w naturze zaobserwowano w drzewach, była zastosowana do projektowania i optymalizacji elementów konstrukcji inżynierskich poddanych działaniu obciążeń zmęczeniowych [96, 97]. W tym przypadku proces optymalizacji polega na dopuszczeniu „wzrostu” elementu do kształtu o stałym naprężeniu powierzchniowym. Ze względu na występowanie trójwymiarowego stanu naprężeń do optymalizacji jest stosowana stała wartość naprężenia zastępczego Hubera–Misesa (6.10) [12].

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (6.10)$$

²⁴⁵ Dla przypadku jednej bańki udowodnił to w 1884 r. niemiecki matematyk H.A. Schwartz. Problem dwóch baniek, nazywany w literaturze, z ang. *double bubble problem*, został rozwiązany dopiero w marcu roku 2000 przez amerykańskich matematyków: F. Morgana, M. Hutchingsa, M. Ritoriego i A. Rosa [134].

²⁴⁶ Analizowane były tak różne struktury biologiczne, jak pnie drzew, połączenia gałęzi, poroże jeleni, rogi antylopy, pazury tygrysa itp. [96].

W przypadku optymalizacji konstrukcji inżynierskich, warunek stałego naprężenia powierzchniowego, nie może być spełniony dla każdego możliwego przypadku obciążenia. Podczas gdy żywe struktury, np. drzewa, mogą dostosowywać się do zmieniających się warunków obciążenia, przez adaptacyjny wzrost – w konstrukcjach inżynierskich nie jest to możliwe. Z tego powodu decyzje optymalizacyjne mogą być podejmowane dla najbardziej krytycznego układu obciążeń. Potrzeba ustalenia zasady projektowej, która by uwzględniała różne przypadki obciążenia w procesie optymalizacji i poszukiwania kształtu, jest obszarem intensywnych prac badawczych²⁴⁷.

6.3. Forma jako metafora

Metafora jest sposobem porównywania dwóch zjawisk i odnajdywania podobieństwa nie ich samych, ale relacji, w jakich te zjawiska funkcjonują. Relacje te dotyczą cech jakościowych zjawisk [142].

Analogie do ukształtowanych w naturze efektywnych form strukturalnych można znaleźć w rozwiązaniach konstrukcyjnych wielu obiektów powstających już od pierwszej połowy XIX w. Obiekty te, najczęściej pod wieloma względami pionierskie, wyróżniają się szczególną cechą – ścisłą symbiozą formy architektonicznej i rozwiązania konstrukcyjnego. Konstrukcja jest w nich nie tylko niezbędnym warsztatem, rzemiosłem umożliwiającym zrealizowanie obiektu, ale również – a może przede wszystkim – środkiem kształtowania wyrazu architektonicznego w wymiarze estetycznym. Porównując je z naturalnymi prototypami form, można w niektórych obiektach zauważyć zapożyczenie „pomysłu”, a w innych jedynie wizualne podobieństwo.

6.3.1. Linearne formy strukturalne

W roku 1850 powstał budynek Victoria Regia House, w Chatsworth, w Anglii (rys. 6.24b) [77, s. 5]. Obiekt ten, którego lekka stalowa konstrukcja miała układ fałdowych żeber, wypełnionych płytami szklanymi, powstał pod wpływem silnej inspiracji budową ogromnego, uźebrowanego od dołu liścia rośliny²⁴⁸

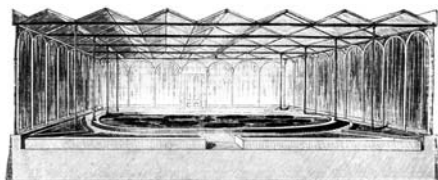
²⁴⁷ C. Mattheck [6, 96] wykazał, że elementy konstrukcji optymalizowane zgodnie z biologicznymi zasadami stałego naprężenia powierzchniowego charakteryzują się minimalną wagą. Na podstawie m.in. jego badań rozwinięto metodę „ewolucyjnej optymalizacji konstrukcji” (ESO). Polega ona na iteracyjnym (z zastosowaniem metody elementów skończonych) eliminowaniu z konstrukcji nieefektywnie użytego materiału (o małych naprężeniach). Podstawą do eliminacji materiału jest porównanie wielkości naprężenia Hubera–Misesa z przyjętą wartością porównawczą.

²⁴⁸ Obecna nazwa gatunku to *Victoria amazonica*. Jego liście osiągają wielkość do 4 m średnicy.

(rys. 6.24a) [110], której miał służyć jako schronienie i miejsce ekspozycji²⁴⁹. Pomysł ten został wkrótce powtórzony przez tego samego projektanta w znacznie większym londyńskim Crystal Palace²⁵⁰ (rys. 6.24c). Obiekt ten w rewolucyjny sposób ujawnił potencjał dwóch, stosunkowo nowych wówczas materiałów: stali i szkła. Zaprojektowany przede wszystkim do celów użytkowych stał się w niezamierzony sposób swoistym manifestem i zwiastował zbliżający się modernizm.



a)



b)



c)

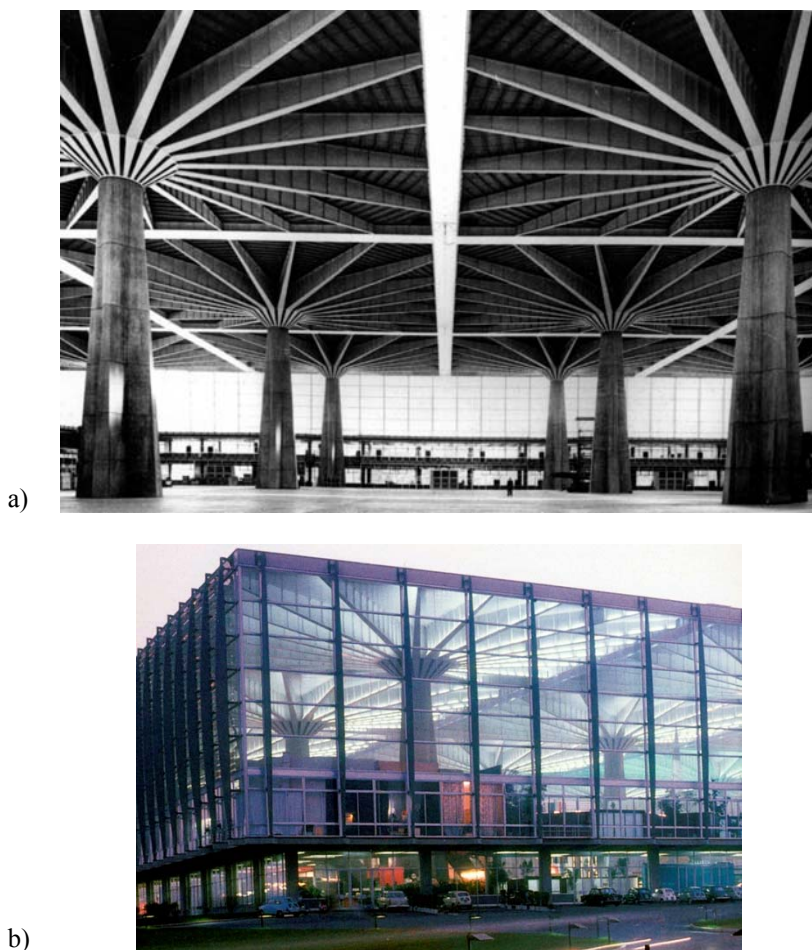
Rys. 6.24. Liść rośliny *Victoria amazonica* i obiekty inspirowane jego charakterystyczną budową (opis w tekście)

Echa tej samej inspiracji, ale w jakże innej skali i w przekształconej twórczo formie, można również odnaleźć we wielkich modułach konstrukcji późniejszego

²⁴⁹ Budynek zaprojektował J. Paxton, późniejszy projektant Crystal Palace w Londynie. Projekt ten był antycypowany przez publikację Johna Claudiusa Loudona *Remarks on the Construction of Hothouses*, z 1817 r., w którym po raz pierwszy zaproponował dach o układzie fałdowym (ang. *ridge-and-furrow*), szklarnię o krzywoliniowym przekroju poprzecznym, zaprojektowaną przez W. i D. Bailey'ów na podstawie tej publikacji w Bretton Hall (1827–1832) oraz niektóre inne obiekty szklarniowe, jak np. budynek *Jardin d'Hiver* w Paryżu (1847) [77].

²⁵⁰ Żebra w konstrukcji Crystal Palace zostały zaprojektowane jako belki z podwieszonym ściągiem stalowym, tzw. *Paxton gutter*.

o ponad sto lat od Crystal Palace, turyńskiego Pallazzo del Lavoro²⁵¹ (rys. 6.25) [95, s. 16].



Rys. 6.25. Palazzo dle Lavoro w Turynie:
a) widok wnętrza, b) widok z zewnątrz

Organiczne kształty połączenia główic słupów ze sklepieniem, w katedrze Sagrada Familia w Barcelonie²⁵², (rys. 6.26b) korespondują z podobnym ukształtowaniem fragmentu koralu madreporowego (rys. 6.26a).

²⁵¹ Zbudowany w latach 1960–1961, wg projektu P.L. Nerviego. Moduły konstrukcji, oparte na jednym słupie, wysokim na 25 m, mają wymiar 40×40 m [95, s. 16], [108].

²⁵² Zaprojektowana przez Antonio Gaudiego.



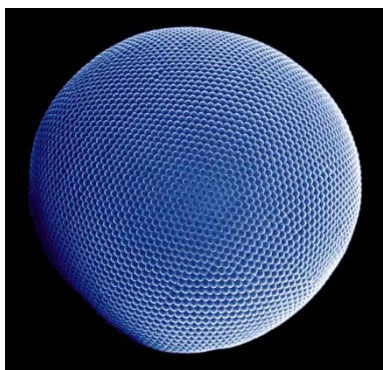
a)



b)

Rys. 6.26. Kościół Sagrada Familia w Barcelonie
a) fragment koralu madreporowego, b) detale głowicy kolumn

Podział powierzchni zakrzywionych za pomocą siatki sześciokątnej, inspirowany budową szkieletu radiolari (rys. 6.11a), pojawił się już w konstrukcji pawilonu amerykańskiego na wystawie światowej EXPO'67 w Montrealu. Od tego czasu rozwiązanie to weszło na stałe do praktyki projektowej. Innym, równie wielkim, tego typu obiektem jest kopuła EPCOT na terenie DisneyWorld w Orlando na Florydzie²⁵³ (rys. 6.27b). Jej podobieństwo do struktury oka kryla antarktycznego (*Euphausia superba*) (rys. 6.27a) jest bardzo wyraźne.



a)



b)

Rys. 6.27. Geodezyjna kopuła prętowa: a) oko kryla antarktycznego,
b) kopuła EPCOT w Orlando, na Florydzie

²⁵³ Zrealizowana w latach osiemdziesiątych XX w. Koncepcję konstrukcyjną opracował J. Clinton.

Inny sposób podziału powierzchni zakrzywionych, nawiązujący do filotaksji niektórych roślin, np. rojnika (*Sempervivum tectorum*) (rys. 6.28a) został zastosowany przy kształtowaniu formy konstrukcji zadaszenia dziedzińca w British Museum w Londynie (rys. 6.28b)²⁵⁴.



a)



b)

Rys. 6.28. Dziedziniec British Museum w Londynie:
a) filotaksja rojnika b) widok wewnętrzny

Zadaszenie nad peronami i nad wejściem do budynku Dworca Oriente w Lizbonie (rys. 6.29b) ma formę silnie zdominowaną przez układ stalowych poprzecznych żebier, odchodzących od elementów podłużnych. Układ taki przypomina budowę kręgosłupa ryby²⁵⁵ (rys. 6.29a).



a)



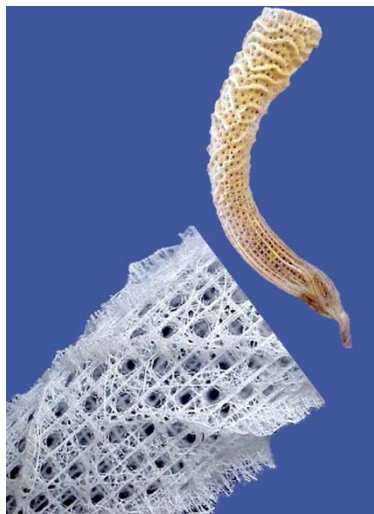
b)

Rys. 6.29. Dworzec Oriente w Lizbonie: a) szkielet ryby,
b) widok stalowej konstrukcji przekrycia peronów

²⁵⁴ Obiekt został zrealizowany w latach 1994–2000, według projektu Normana Foster.

²⁵⁵ Autor projektu, Santiago Calatrava, chętnie przyznaje się do swoich inspiracji formami naturalnymi, zwłaszcza sylwetkami ludzi i zwierząt.

Niepozorna gąbka nazywana „koszykiem kwiatowym Wenus”²⁵⁶, jest zbudowana z bardzo cienkich, organicznych włókien szklanych (rys. 6.30a). Tworzą one złożoną, zakrzywioną przestrzennie strukturę siatkową, która posiada jednak dość dużą powierzchnię otworów. Przestrzenne rozmieszczenie liniowych elementów pozwala gąbce na uzyskanie stosunkowo dużych rozmiarów. Analogię do tej formy można odnaleźć w konstrukcji budynku Swiss Re Tower w Londynie²⁵⁷ (rys. 6.30b).



a)



b)

Rys. 6.30. Budynek Swiss Re Tower w Londynie:
a) gąbka szklana *Euplectella aspergillum*, b) widok z zewnątrz

Zupełnie innym przykładem siatki prętowej zastosowanej na powierzchni zakrzywionej, eksponującej nieregularność, a wręcz pozorną przypadkowość rozwiązania, jest konstrukcja obudowy trybun stadionu olimpijskiego w Pekinie na Olimpiadę w 2008 r. (rys. 6.31b). Projektanci²⁵⁸ tego obiektu powołują się na inspirację formą ptasiego gniazda wikłacza (rys. 6.31a).

²⁵⁶ *Euplectella aspergillum* z grupy gąbek szklanych (*Hexactinellida*), została opisana w 1841 r. przez Richarda Owena, ówczesnego dyrektora British Museum. Występuje na głębokich wodach wschodniej części Oceanu Indyjskiego, o piaszczystym dnie. W 2005 r. odkryto, że organiczne włókna szklane, z których jest zbudowana, wykazują znacznie większą odporność na kruche pęknięcia niż włókna produkowane przez człowieka. Poznanie sposobu wytwarzania tego materiału przez żywe komórki pozwoli, być może, udoskonalić włókna światłowodowe produkowane dla telekomunikacji.

²⁵⁷ Projekt Normana Foster.

²⁵⁸ Projekt szwajcarskich architektów J. Herzoga i P. de Meurona.



a)



b)

Rys. 6.31. Gniazdo wikłacza (a) i konstrukcja obudowy stadionu olimpijskiego w Pekinie (b)

6.3.2. Powierzchniowe formy strukturalne

Konstrukcje, do których kształtowania zastosowano powierzchnie minimalne pojawiły się na przełomie lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych XX w. Były to powłoki żelbetowe²⁵⁹ i konstrukcje membranowe²⁶⁰.

Wypracowane zostały wówczas zasady stosowania membran tekstylnych w budownictwie²⁶¹. Konstrukcje membranowe są niemal zawsze kształtowane w swojej początkowej konfiguracji jako powierzchnie minimalne²⁶², często na

²⁵⁹ Najwybitniejszymi projektantami i badaczami dwukrzywiznowych powłok żelbetowych byli w tym okresie: pracujący w Meksyku Hiszpan, Felix Candela oraz Szwajcar, Heinz Isler.

²⁶⁰ Pionierem w początkowej fazie rozwoju konstrukcji membranowych był niemiecki architekt Frei Otto. W założonym i kierowanym przez niego Institut für Leichte Flächentragwerke (IL) w Stuttgarcie prowadzono w latach 1964–1991 badania nad formami strukturalnymi, które umożliwiają spełnienie wymagań „zasady lekkości”, tzn. uzyskiwaniu przez optymalizację kształtu stabilności i wytrzymałości, z użyciem minimalnej ilości materiału. W badaniach tych, polegających przede wszystkim na pracy eksperymentalnej, uczestniczyły interdyscyplinarne zespoły składających się z architektów, biologów i inżynierów (wg ustnej relacji arch. M. Balza, uczestnika tych prac).

²⁶¹ Równolegle rozwijały się, głównie w USA, prace nad zastosowaniami konstrukcji pneumatycznych. Przełomowym wydarzeniem dla rozwoju konstrukcji z tkanin była wystawa światowa EXPO'70, w Osace, od której zaczęto oba rodzaje konstrukcji traktować jako jedną grupę – membran tekstylnych [134].

²⁶² Przeciwnicy takiego projektowania podkreślają, że stała wartość naprężenia powierzchniowego jest możliwa wyłącznie dla jednego przypadku obciążenia – w praktyce dla stanu naprężenia wstępnego. Z tego względu kształtowanie takie jest uzasadnione dla konstrukcji o dominującym udziale ciężaru własnego w całości obciążeń. Jednak, w przypadku konstrukcji membranowych tak nie jest.

modelach z błonki mydlanej (rys. 6.32a). Powierzchnie antyklastyczne mogą być realizowane w formie przekryć namiotowych. Przykładem jest sala sportowa La Verne College w Kaliforni²⁶³ (rys. 6.32b).



a)



b)

Rys. 6.32. Konstrukcje z membran tekstylnych kształtowane na podstawie powierzchni minimalnych antyklastycznych: a) model fizyczny powierzchni, b) sala sportowa La Verne College w Kaliforni



Rys. 6.33. Konstrukcja z membran tekstylnych kształtowane na podstawie powierzchni minimalnych synklastycznych – pawilon Big Wave w Jokohamie

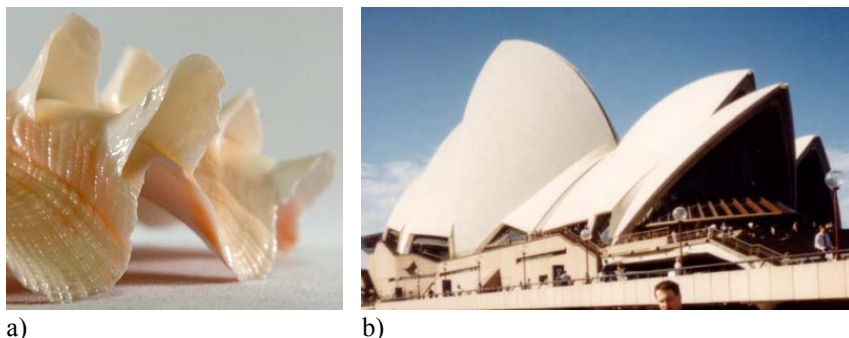
Powierzchnie synklastyczne (rys. 6.20) mogą być realizowane z wiotkich tkanin jedynie jako konstrukcje pneumatyczne. Przykładem jest pawilon Big Wave na wystawie EXPO'89 w Jokohamie²⁶⁴ (rys. 6.33).

Co więcej obciążenia zmienne mogą mieć – i najczęściej mają – różne kierunki działania i bardzo różne wartości. Dlatego w wielu przypadkach korzystniejsze jest różnicowanie wartości naprężeń wstępnych, co prowadzi do uzyskania membrany o kształcie innym niż minimalny, chociaż stabilnym.

²⁶³ Wykonana przez firmę Birdair w 1972 r. (proj. arch. – J. Shaver, proj. konstr. – B. Campbell). Był to pierwszy obiekt, wykonany z tkaniny z włókna szklanego pokrytego teflonem (na podstawie materiałów firmy Birdair).

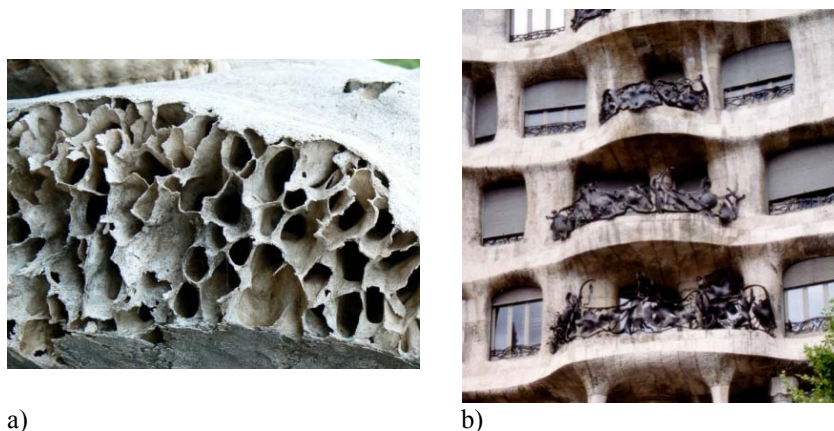
²⁶⁴ Wykonany przez firmę Birdair w 1989 r. (proj. arch. – J. Shaver, proj. konstr. – B. Campbell). Był to pierwszy obiekt, wykonany z tkaniny z włókna szklanego pokrytego teflonem (na podstawie materiałów firmy Birdair).

Inspiracją dla formy budynku Opery w Sydney (rys. 6.34b) były wypełnione wiatrem żagle jachtów na morzu²⁶⁵. Ale żelbetowe łupiny przekrycia wydają się bliższe swą formą niektórym rodzajom muszli morskich (rys. 6.34a).



Rys. 6.34. Opera w Sydney: a) przykład muszli morskiej *Acepala*,
b) widok budynku z zewnątrz

Nieskończone wielościanny o powierzchniach siodłowych tworzą formy strukturalne nazywane gąbkami [80, 84] lub labiryntami [24]. Przykładem występowania takiej formy w przyrodzie jest struktura kostna wypełniająca górną część czaszki słonia (rys. 6.35a). Strukturę labiryntową zidentyfikowano również w układzie przestrzennym kamienicy Casa Mila w Barcelonie²⁶⁶ (rys. 6.35b) [84].



Rys. 6.35. Struktura labiryntowa (gąbki): a) budowa czaszki słonia,
b) elewacja kamienicy Casa Mila w Barcelonie

²⁶⁴ Pawilon Big Wave, na wystawie EXPO'89 w Jokohamie (firma Taiyo-Kogyo).

²⁶⁵ Tak uzasadniał tę formę architekt Jørn Utzon, autor projektu.

²⁶⁶ Projekt Antonio Gaudiego.

Twórcy przedstawionych wybranych obiektów kierowali się różnymi przesłankami w fazie poszukiwania inspiracji, różny był stan dostępnej im wiedzy technicznej i stosowali różne kryteria decyzyjne w wyborze formy. Nie zawsze poszukiwali inspiracji w naturze. Jeżeli pomimo to, można dostrzec pewne relacje pomiędzy ich dziełami a formami naturalnymi, to przyczyną może być jedność uwarunkowań topologicznych obowiązujących w przestrzeni, które wyznaczają ramy dowolności kształtowanych w niej form.

6.3.3. Formy „zdekonstruowane”

Istnieją obiekty, których projektanci świadomie szukali inspiracji odległych od natury i innych tradycyjnych motywacji, dopatrując się w zupełnie przypadkowym układzie wzoru wizualnego – metafory, wokół której będą mogli zbudować swoją formę. Przykładem jest stacja kolejowa w Obersdorfie (rys. 6.36b), której projektanci otwarcie przyznają się do fascynacji widokiem złomu leżącego na składowisku (rys. 6.36a). Obraz ten był dla nich punktem wyjścia w kształtowaniu formy obiektu.



Rys. 6.36. Stacja kolejowa w Oberhausen:
a) inspiracja – składowisko złomu, b) widok budynku stacji

6.4. Losowość w modelach topologicznych

Można wyróżnić dwa aspekty losowości w modelach topologicznych. Pierwszy polega na topologicznej idealizacji losowych wzorów, znajdujących w formach naturalnych. Oparte na takich prototypach modele płaskie mogą być następnie zrekonstruowane jako przestrzenne siatki konstrukcyjne.

Drugi aspekt losowości odnosi się do grafów, których pewne cechy zostały określone w sposób losowy. Dotyczy to właściwości kombinatorycznych grafów, takich jak: liczba wierzchołków, czy liczba i konfiguracja krawędzi grafu. Niezależnie od sposobu, w jaki losowość została wprowadzona do modelu, jego strukturalna przydatność musi być zweryfikowana przez sprawdzenie podstawowych warunków topologicznych. Następnie może on być poddany dalszym przekształceniom, tak jak modele utworzone w sposób deterministyczny.

6.4.1. Grafy losowe

Wyobraźmy sobie zbiór wierzchołków z „wyjściami” w kierunku wszystkich możliwych krawędzi (wierzchołki przygotowane jak dla grafu pełnego). Dla każdego „wyjścia” wykonujemy rzut monetą. Jeżeli wypadnie orzeł, w „wyjściu” umieszczona zostanie krawędź. Jeżeli wypadnie reszka – wyjście będzie usunięte. W wyniku takiej procedury krawędź jest realizowana z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$. Ten prosty przykład, podany przez E. Palmera [111, s. 98], wyjaśnia ogólną ideę grafów losowych, formalnie ujętą w definicji 6.2.

Definicja 6.2. *Graf $G = G(n, p)$ jest grafem losowym o n wierzchołkach, jeżeli jego krawędzie są wybrane niezależnie od siebie, z prawdopodobieństwem $p = p(n)$.*

Innymi słowy, dla każdej pary wierzchołków (v_i, v_j) istnieje krawędź e_{ij} z prawdopodobieństwem p . Oczekiwana liczba krawędzi grafu G , oznaczana q , dana jest równaniem (6.11) [71].

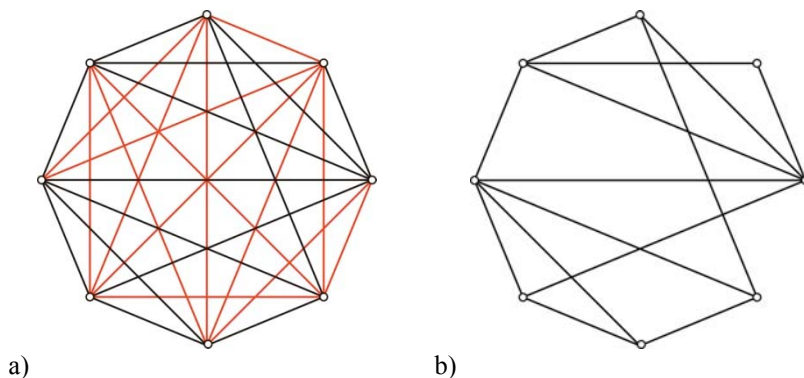
$$q = \binom{n}{2} \cdot p \quad (6.11)$$

Na rysunku 6.37 przedstawiono wizualizację opisanego przykładu. Graf ma osiem wierzchołków, „wyjścia” dla krawędzi są zaznaczone cienkimi liniami czerwonymi, a krawędzie zrealizowane w wyniku eksperymentu²⁶⁷ – liniami czarnymi. Prawdopodobieństwo wylosowania każdej krawędzi wynosiło $p = \frac{1}{2}$. Przykładowy graf może być zatem opisany jako $G = G(8, \frac{1}{2})$. Osiem wierzchołków

²⁶⁷ Eksperyment polegał na losowaniu dla każdego „wyjścia”, czy ma być zrealizowane jako krawędź, przez rzut monetą.

i dwadzieścia osiem „wyjść” daje możliwość wylosowania 251 548 592 grafów stopnia 8, które mogą być narysowane.

Ze względu na przydatność strukturalną jest możliwe nałożenie pewnych ograniczeń na procedurę losowego wyboru. Można na przykład narzucić minimalny stopień wierzchołków po zakończeniu losowania. W takiej sytuacji korzystniejsze może być losowanie nie krawędzi, które będą zrealizowane lecz krawędzi, które będą usunięte. Jeżeli usunięcie krawędzi prowadziłoby do obniżenia walentności incydentnego z nią wierzchołka, poniżej narzuconej wartości losowanie byłoby powtarzane.



Rys. 6.37. Losowa realizacja krawędzi w grafie:
a) graf ze wszystkimi „wyjściami” dla możliwych realizacji krawędzi,
b) graf powstały przez losowy wybór realizowanych krawędzi

Podany przykład odwołuje się do klasycznego modelu grafów losowych, mającego swój początek w pracach P. Erdősa i A. Rényiego, opublikowanych około pięćdziesiąt lat temu. Obecnie są stosowane w ramach tej teorii trzy podmodele, oznaczane jako A, B i C, z których każdy w nieco inny sposób ujmuje problem grafów losowych [111, s. 5]. Niniejszy rozdział oparty jest na sformułowaniach modelu A²⁶⁸.

Do opisu złożonych struktur zarówno regularnych, jak i całkowicie niesymetrycznych, stosuje się statystyczne charakterystyki topologiczne²⁶⁹. Najważniejsze z nich to średnia walentność wierzchołków (krawędziowa) $\bar{r}$ i średnia walentność ścian (krawędziowa) $\bar{q}$, określone odpowiednio równaniami (6.12) i (6.13).

$$\bar{r} = \frac{\sum_{r=2}^{\infty} V_r}{n} \quad (6.12)$$

²⁶⁸ Jedną z różnic pomiędzy modelem A a modelami B i C jest to, że w tym modelu wszystkie krawędzie są losowane z tym samym prawdopodobieństwem [111, s. 98].

²⁶⁹ Patrz pkt 2.3.5.

$$\bar{q} = \frac{\sum_{q=2}^{\infty} V_q}{n} \quad (6.13)$$

gdzie: V_r – liczba r -walentnych wierzchołków,

V_q – liczba q -walentnych ścian [87, s. 18–19].

Dla grafów losowych stopnia n (mających n wierzchołków), prawdopodobieństwo $P(G)$, że graf G ma q krawędzi, określone jest równaniem (6.14) [111, s. 7]

$$P(G) = p^q (1-p)^{\binom{n}{2}-q} \quad (6.14)$$

a walentność r_i wierzchołka i ma rozkład dwumianowy o parametrach $n-1$ i p [9]:

$$P(r_i = r) = C_{n-1}^r \cdot p^r (1-p)^{n-1-r} \quad (6.15)$$

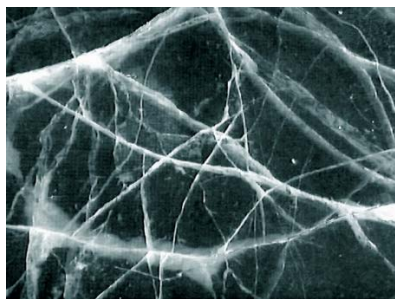
gdzie: C_{n-1}^r – liczba równoważnych sposobów wyboru r różnych wierzchołków końcowych, dla krawędzi zaczynających się w wierzchołku i .

Oczekiwana wartość średniej walentności wierzchołków wynosi:

$$\bar{r} = p(n-1) \quad (6.16)$$

Rozkład liczby wierzchołków o walentności r_i jest zbliżony do rozkładu Poissona, zgodnie z którym większość wierzchołków ma w przybliżeniu taką samą wartość walentności, bliską średniej walentności $\bar{r}$.

Rozpatrzmy teraz przykład formy strukturalnej opartej na przypadkowym wzorcu naturalnym, której siatka jest odzwierciedleniem układu spękań na powierzchni pokrywy lodowej jeziora (rys. 6.38a).



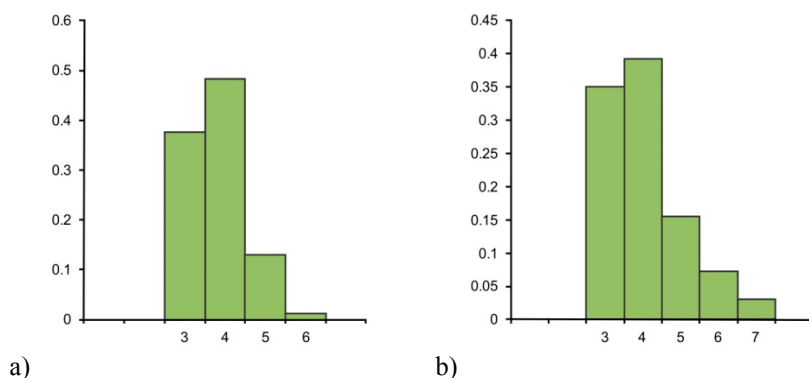
a)



b)

Rys. 6.38. Forma strukturalna oparta na przypadkowym wzorcu naturalnym: a) spękana tafla pokrywy lodowej jeziora, b) graf odpowiadający wzorcowi z rys. (a)

Jeżeli zastąpimy linie spękań odcinkami i uzupełnimy rysunek konturem brzegowym (rys. 6.38b), to otrzymamy schemat pewnej siatki losowo rozmieszczonych prętów. Dla takiej struktury możemy sporządzić diagram występowania wszystkich r -walentnych wierzchołków (rys. 6.39a) i q -walentnych ścian (rys. 6.39b). Rozkłady te są charakterystyczne. Średnie wartości w tym przykładzie wynoszą: $\bar{r} = 3.963$ i $\bar{q} = 4.041$.



Rys. 6.39. Rozkład statystycznych charakterystyk dla struktury z rys. 6.38b):
a) r -walentnych wierzchołków, b) q -walentnych ścian

Dla dużych systemów musi być spełniony warunek (6.17) [87, s. 26].

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \quad (6.17)$$

W omawianym przykładzie struktury wzorowanej na układzie spękań pokryw lodowej mamy: $1 / 3.963 + 1 / 4.041 = 0.4998 \cong 1/2$.

Przedstawiony przykład pokazuje, że nawet dla stosunkowo niewielkich struktur losowych, niezależnie od sposobu ich generowania, statystyczne wielkości ich charakterystyk topologicznych dążą do oczekiwanych wielkości granicznych.

6.4.2. Sieci losowe

Niektóre aspekty efektywności systemów strukturalnych mogą być scharakteryzowane przez średnią długość ścieżki²⁷⁰ $\bar{l}$. Odległość od wierzchołka v_i do wierzchołka v_j jest mierzona liczbą krawędzi, niezbędnych do przejścia pomiędzy tymi wierzchołkami (w grafach skierowanych odległość od v_i do v_j nie musi być

²⁷⁰ O takim wskaźniku efektywności konstrukcji, odnoszącym się do najkrótszej drogi przekazywania obciążeń na fundamenty, pisał Frei Otto w *Architecture et Bionique. Construction naturelles*. Editions Delta et Spes (1985).

taka sama jak od v_j do v_i). Średnia długość ścieżki $\bar{l}$ jest średnią arytmetyczną wielkości najkrótszych ścieżek dla wszystkich par wierzchołków w grafie.

W grafach losowych średnia długość ścieżki jest proporcjonalna do logarytmu ze stopnia grafu: $\bar{l} \propto \log n$ [10, s. 105]. Zaobserwowano, że nawet dla bardzo dużych grafów $\bar{l}$ jest relatywnie małe. Jest to tzw. efekt „świat jest mały”²⁷¹ [10, s. 105].

W modelu Erdösa–Rényiego założono „idealną” losowość, czyli każda możliwa krawędź miała takie samo prawdopodobieństwo realizacji. Był też stosowany w nieco zmienionej wersji, jako tzw. model konfiguracji, w którym graf ma określoną dystrybucję walentności wierzchołków, p_k , zamiast stałej wielkości prawdopodobieństwa.

Odmienne podejście jest stosowane w sieciach bezskalowych²⁷², czyli sieciach, które charakteryzują się bardzo nierównomiernym rozkładem krawędzi (połączeń). Zdecydowana większość wierzchołków (węzłów) takiej sieci jest połączona z niewielką liczbą innych wierzchołków, a niewielka liczba wierzchołków jest połączona wielką liczbą krawędzi z innymi wierzchołkami. Węzły takie, nazywane też hubami, znacząco przyspieszają dystrybucję wielkości przekazywanych przez krawędzie jako nośniki: sił, informacji (np. w przypadku sieci telekomunikacyjnych) itp. Obecność hubów istotnie skraca średnią długość ścieżki w sieci. Przykładem zastosowania takiego rozwiązania w kształtowaniu systemów konstrukcyjnych są podpory przekrycia hali dworca lotniczego w Stuttgarcie (rys. 6.40).



Rys. 6.40. System konstrukcyjny przekrycia hali lotniska w Stuttgarcie ma układ analogiczny do sieci bezskalowej

Przykładem sieci typu „świat jest mały” jest sieć Barabási–Alberta [9]. W tym modelu graf jest konstruowany w procesie rekurencyjnym, w którym stosowana jest *zasada preferowanego połączenia*. Polega ona na tym, że gdy każdy nowy

²⁷¹ Ang. *small-world effect*.

²⁷² Ang. *scale-free networks*.

wierzchołek o m krawędziach jest dodawany do grafu, nowe krawędzie łączą się z istniejącymi wierzchołkami, a prawdopodobieństwo połączenia z danym wierzchołkiem zależy od jego walentności:

$$\prod_i = \frac{r_i}{\sum_j r_j} \quad (6.18)$$

gdzie: r_i – walentność wierzchołka i ,

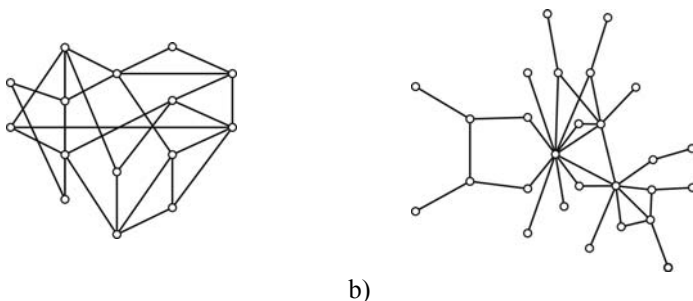
i, j – oznaczają sumowanie po wierzchołkach grafu.

Oznacza to, że nowy wierzchołek najpierw łączy się krawędziami z istniejącym wierzchołkiem o największej walentności. Dzięki temu, graf zawiera relatywnie małą liczbę wierzchołków o dużej walentności (hubów). Prawdopodobieństwo, że wierzchołek i ma walentność r_i ma rozkład wykładniczy [10, s. 102].

$$P(r_i) \propto r_i^{-\gamma} \quad (6.19)$$

gdzie γ – wykładnik.

W modelu Barabási–Alberta, $\gamma = 3$, podczas gdy w grafach tego typu obserwowanych w naturze, $2 < \gamma < 3$. Średnia długość ścieżki w tych grafach jest logarytmicznie proporcjonalna do liczby wierzchołków: $\bar{l} \propto \log n$. Przez wykładniczy rozkład walentności wierzchołków, system przejawia swoją samoorganizację do stanu bezskalowego. Przedstawiono porównanie przykładowych grafów losowych według modelu Erdösa–Rényiego (rys. 6.41a) i sieci typu „świat jest mały”, według modelu Barabási–Alberta (rys. 6.41b) [10, s. 105].



Rys. 6.41. Porównanie przykładowych grafów losowych: a) według modelu Erdösa–Rényiego, b) sieci typu „świat jest mały”, według modelu Barabási–Alberta

Opisany sposób konstruowania grafów losowych jest często opisywany jako ewolucja²⁷³. Proces rozpoczyna się od zbioru n wierzchołków i jest kontynuowany przez sukcesywne dodawanie losowo wybranych krawędzi. Na każdym etapie

²⁷³ Nazwa „świat jest mały” pochodzi od Stanleya Milgrama, który w wyniku przeprowadzonego w 1967 r. eksperymentu stwierdził, że „odległość” pomiędzy dowolnymi dwiema osobami na Ziemi, mierzona liczbą pośredników w przekazywaniu informacji wynosi ok. 6 osób.

tego procesu, graf reprezentuje zwiększające się prawdopodobieństwo p : gdy $p \rightarrow 1$, graf staje się grafem kompletnym.

Zaskakującą cechą grafów losowych jest to, że ich istotne właściwości pojawiają się nagle. Oznacza to, że dla danej wielkości o prawdopodobieństwie wystąpienia p , prawie wszystkie grafy mają tę cechę albo prawie żaden jej nie ma. Ta zmiana ma charakter gwałtowny i zawsze istnieje pewne krytyczne prawdopodobieństwo $p_c(n)$. Określanie wartości tego prawdopodobieństwa dla konkretnej wielkości wychodzi poza zakres teorii grafów losowych²⁷⁴ [9, s. 55].

6.5. Wybrane przykłady procedur kształtowania form strukturalnych

Przedstawionych zostanie kilka wybranych praktycznych metod kształtowania form strukturalnych, których wspólną cechą jest odniesienie przede wszystkim do topologicznej relacji między elementami tworzącymi formę. Przedstawiony opis jest z konieczności, podyktowanej rozmiarami niniejszej pracy, bardzo podstawowy, ale pozwala na wyrobienie sobie opinii o zakresie przydatności, zaletach i wadach każdej z metod.

6.5.1. Konstrukcje o układzie aperiodycznym, z zastosowaniem siatek linii Ammanna

W rozdziale 3.2.2 opisano jedną z grup tesselacji periodycznych – parkietaże Ammanna. W parkietażach tych²⁷⁵ można zastosować dodatkową konstrukcję, która ułatwia ułożenie płytek parkietażu w taki sposób, żeby zapewniona była aperiodyczność. Konstrukcja ta nosi nazwę linii Ammanna. Przy prawidłowym ułożeniu płytek, ich linie Ammanna tworzą w całym parkietażu linie proste (rys. 3.18). Parkietaże i ich linie Ammanna są wzajemnie dualne [5, s. 21–24].

W podstawowym opisie, linie Ammanna są jedynie pomocniczą konstrukcją ułatwiającą rysowanie parkietażu. W bardziej sformalizowanym opisie są to rodziny linii równoległych, między którymi występują dwie odległości: długa L i krótka S , o stosunku $\nu = L/S$. Te dwie rodziny linii tworzą siatkę, która jest nazywana siatką linii Ammanna. Ich struktura matematyczna pozwoliła oddzielić je od pierwotnego przeznaczenia i traktować jako niezależne obiekty. Dzięki temu znalazły zastosowanie w wielu innych dziedzinach²⁷⁶. Długie i krótkie odstęp

²⁷⁴ Analizą zjawisk, charakteryzujących się takimi nagłymi zmianami stanów, zajmuje się *Teoria katastrof*, René Thoma, patrz np. [48].

²⁷⁵ Również w parkietażach Penrose'a.

²⁷⁶ Najszersze zastosowanie znalazły siatki linii Ammanna w krytalografii [91, s. 1452].

między liniami występują w tych siatkach w kolejności odpowiadającej szeregom rekurencyjnym typu Fibonacciego i podobnym [91, s. 1437].

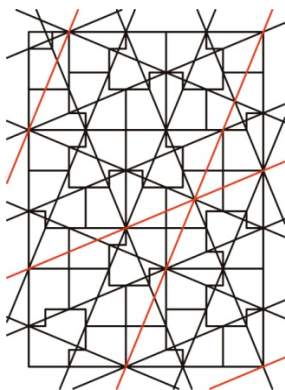
Struktura matematyczna siatek linii Ammanna

Jak pokazano (patrz pkt 3.2.3), tesselacje Ammanna wykazują fraktalne samopodobieństwo – mogą być powiększane (inflacja) lub pomniejszane (deflacja) w taki sposób, że płytki podziału większego mogą być w całości wypełnione płytkami podziału mniejszego (rys. 3.20). Proces inflacji/deflacji może być kontynuowany w nieskończoność, co powoduje, że ma on charakter fraktalny. Analogicznie, siatki linii Ammanna, odpowiadające większemu i mniejszemu podziałowi, wykazują właściwość samopodobieństwa. Wynika to z faktu, że istnieją inne, większe lub mniejsze wartości odstępów l i s , o tym samym współczynniku skali (6.19), (6.20).

$$\frac{l}{s} = \nu, \quad l < L, s < S \quad (6.19)$$

$$\frac{L}{l} = \frac{S}{s} = \lambda \quad (6.20)$$

Współczynnik λ jest nazywany odpowiednio współczynnikiem deflacji lub inflacji i jest on współczynnikiem skali dla nowych generacji linii (rys. 6.42).



Rys. 6.42. Dwie rodziny linii Ammanna dla parkietażu A4
– podstawowego i powiększonego

Można zauważyć, że dwie odległości siatki linii Ammanna są wielkościami charakterystycznymi dla pewnej macierzy (6.21) oraz że współczynniki inflacji i deflacji są wartościami własnymi tej macierzy, którą nazywamy macierzą generującą A [91, s. 1438]:

$$\begin{aligned} L &= a_l^L l + a_s^L s \\ S &= a_l^S l + a_s^S s \end{aligned} \quad (6.21)$$

gdzie: $a_i^j \in \mathbb{N}_0$ – niezerowe liczby całkowite, tworzące macierz A .

Suma wyrazów w żadnym rzędzie ani w żadnej kolumnie macierzy nie może być równa zero.

Współczynnik skalujący λ można wyrazić przez wyrazy macierzy A (6.22), (6.23), (6.24):

$$\nu = \frac{a_s^L}{\lambda - a_l^L} \quad (6.22)$$

$$\nu = \frac{\lambda - a_s^S}{a_l^S} \quad (6.23)$$

$$(\lambda - a_l^L)(\lambda - a_s^S) = a_s^L a_l^S \quad (6.24)$$

Wyrażenie określające wartości własne macierzy 2×2 jest dane równaniem (6.25):

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \left(a_l^L + a_s^S \pm \sqrt{(a_l^L + a_s^S)^2 + 4(a_l^S a_s^L - a_l^L a_s^S)} \right) \quad (6.25)$$

Niezbędny warunek wzajemnej odwrotności procesów inflacji i deflacji siatki linii Ammanna jest dany przez (6.26), (6.27):

$$\det(A) = \pm 1 \quad (6.26)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = a_l^S a_s^L - a_l^L a_s^S = \pm 1 \quad (6.27)$$

Współczynnik odstepu ν można otrzymać z równania (6.28):

$$\nu_{1/2} = \frac{1}{2a_l^S} \left(a_l^L - a_s^S \pm \sqrt{(a_l^L - a_s^S)^2 + 4a_l^S a_s^L} \right) \quad (6.28)$$

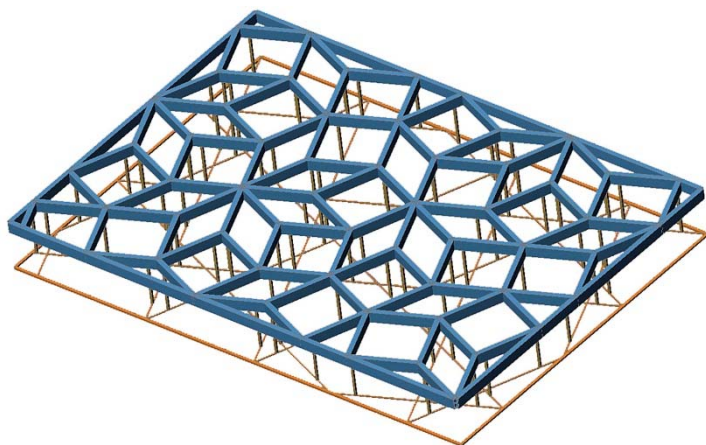
Współczynnik skalujący jest granicą ciągu rekurencyjnego (6.29):

$$\lambda = \frac{N_n}{N_{n-1}} = \frac{N_{n+1}}{N_n} = \frac{1}{2} \left(b + \sqrt{b^2 + 4a} \right) \quad (6.29)$$

Duże i małe odstępstwa w siatkach linii Ammanna tworzą sekwencję rekurencyjną, taką jak szeregi Fibonacciego (jeżeli współczynnik skalujący jest równy stałej złotej podziału $\lambda = \tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$), lub inne szeregi podobne do szeregu Fibonacciego [91, s. 1441–1444], [135]. Możliwe jest także wielokrotne złożenie siatek linii Ammanna, w wyniku czego powstają tesselacje quasi-periodyczne [91, s. 1447].

Zastosowanie siatek linii Ammanna w kształtowaniu form strukturalnych

Różne formy parkietaży aperiodycznych oraz związane z nimi siatki linii Ammanna mogą znaleźć zastosowanie w kształtowaniu architektonicznych form strukturalnych. Za przykład może służyć rozwiązanie rusztu płaskiego, jako przekrycia o dużej rozpiętości.



Rys. 6.43. Przykład rusztu trójwarstwowego, zbudowanego na podstawie parkietażu aperiodycznego A5 i siatki linii Ammanna

Możliwe są dwa rodzaje rozwiązania konstrukcji rusztu oparte na tesselacji aperiodycznej. Pierwszy z nich to jednowarstwowy ruszt płaski, o geometrii odpowiadającej np. parkietażowi A5. Drugi rodzaj konstrukcji to ruszt o identycznej geometrii, ale o układzie trójwarstwowym. W tym przypadku ruszt odpowiadający parkietażowi A5 stanowi górną warstwę rusztu, a związana z nim siatka linii Ammanna – warstwę dolną. W warstwie środkowej możliwe jest zastosowanie pionowych słupków, rozmieszczonych w stałych punktach linii Ammanna, tzn. w punktach przecięcia tych linii z krawędziami płytek (rys. 3.18) lub – alternatywnie – rozmieszczenie krzyżulców ukośnych, których jeden wierzchołek będzie się znajdował w węzłach siatki dolnej, a drugi – w węzłach siatki górnej.

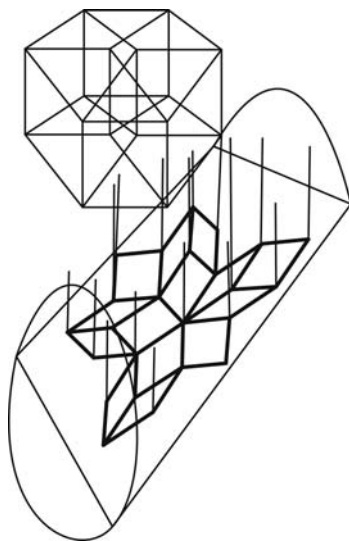
Przykład rusztu trójwarstwowego, zbudowanego na podstawie parkietażu A5 i siatki linii Ammanna, z pionowymi słupkami w warstwie środkowej, przedsta-

wiono na rysunku 6.43. Analizę efektywności konstrukcyjnej tego rozwiązania przedstawiono w rozdziale 7.

Konstrukcja „dachu Wieringa”

W roku 1980, holenderski matematyk, Nicolas de Bruijn, odkrył sposób podziału obiektów umieszczonych w przestrzeni o wymiarze d przez projekcję regularnych obiektów z przestrzeni o wyższych wymiarach [126, s. 16].

Ilustracją tego sposobu postępowania jest przykład linii prostej ($d = 1$), podzielonej przez umieszczenie jej na dwuwymiarowej siatce ($d = 2$). Jest to analogia do sposobu rysowania schodów. Aby uzyskać dwuwymiarowy parkietaż quasi-krystaliczny, należy zastosować upakowanie pięciowymiarowych hipersześcianów ($d = 5$). Po wykonaniu sekwencji kilkukrotnego rzutowania na płaszczyznę, można uzyskać dokładny parkietaż, z odpowiadającą mu siatką linii Ammanna. Zasadę tej metody ilustruje rysunek 6.44 [122, s. 65].

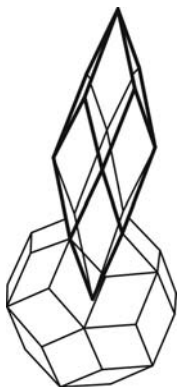


Rys. 6.44. Zasada konstrukcji parkietażu aperiodycznego przez rzutowanie z przestrzeni ($d = 5$) – opis w tekście

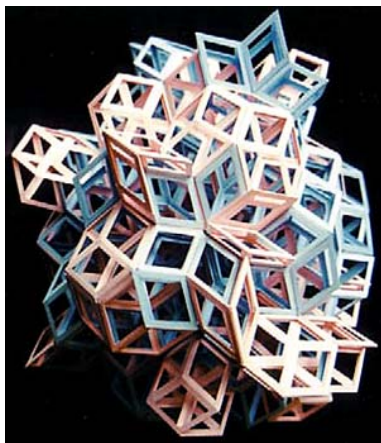
Współpracownik de Bruijna – R. Wieringa, zauważył, że jeśli zamiast hipersześcianów pięciowymiarowych zostaną użyte hipersześciany sześciowymiarowe ($d = 6$), to dwuwymiarowy (płaski) parkietaż Penrose’a stanie się siatką trójwymiarową (przestrzenną). Ta nowa tesselacja będzie zbudowana z takich samych rombów, jak parkietaż płaski, jednak inaczej zorientowanych. Taki przestrzenny wariant parkietażu nieperiodycznego nosi nazwę *dachu Wieringa* [115, s. 1].

Dach Wieringa można skonstruować, jeżeli pięć środkowych wektorów – krawędzi parkietażu Penrose’a, będzie skierowanych równolegle do wektorów łączących środki dwudziestościanu foremnego i pięć jego wierzchołków. Możliwe jest

również odtworzenie struktury dachu Wieringa przez układ nakładających się wielościanów, np. dziesięcioboków lub nakładających się gwiazd pięciokątnych [115, s. 1–2]. Podobną konstrukcję, opartą na wektorach rozchodzących się promieniście ze środka wielokąta lub wielościanu (tzw. *wektory gwiazdziste*), zaproponował Haresh Lalvani²⁷⁷ [81, s. 145–149]. Ideę tej konstrukcji przedstawiono na rysunku 6.45. Przykład trójwymiarowego odpowiednika parkietu Penrose’a przedstawiono na rysunku 6.46²⁷⁸.



Rys. 6.45. Zasada konstrukcji parkietu aperiodycznego w oparciu o wektory gwiazdziste, rozchodzące się ze środka wielościanu



Rys. 6.46. Przykład trójwymiarowego odpowiednika parkietu Penrose’a – dachu Wieringa

²⁷⁷ Patrz również prace [82, 83, 107, 154].

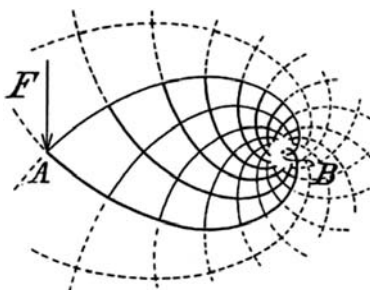
²⁷⁸ Konstrukcja tego podziału przestrzeni i rysunek zostały opracowane przez Ture Westera [162]. Rozwiązania oparte na formach zbliżonych do dachu Wieringa próbował stosować w budynkach mieszkalnych w stanie Kolorado (USA), S. Baer, już w latach 60. XX w. [7].

Matematycznie, formy przedstawione na rys. 6.46 opisuje teoria *zonotopów* [175, s. 198–208 i 217–224]. Konstrukcja dachu Wieringa stwarza możliwość kreowania wielu nowych interesujących form przestrzennych, jednakże szczegółowe omówienie tego zagadnienia wykracza poza ramy tej pracy.

6.5.2. Konstrukcje o układzie kratownicy Michella

W 1904 r. A.G.M. Michell przedstawił pracę, w której zostały sformułowane warunki optymalnego, ze względu na kryterium objętości użytego materiału, kształtu konstrukcji prętowych²⁷⁹. Jego praca wykazała, że optymalny kształt konstrukcji prętowej poddanej działaniu zadanego układu obciążeń, koresponduje z układem linii trajektorii sił wewnętrznych w analogicznie obciążonej konstrukcji powierzchniowej [173]. Przedstawiono na rysunku 6.47 schemat optymalnego ukształtowania konstrukcji poddanej działaniu jednej siły poziomej.

Topologię struktur opisanych przez Michella charakteryzują tzw. *spirale Michella*. Są to linie należące do jednej z dwóch rodzin, widocznych na rys. 6.47, które przecinają się pod kątem prostym. W ścisłym rozwiązaniu spirala Michella jest krzywą, lecz do celów praktycznych, definiuje się ją jako linię łamaną [127, s. 130].



Rys. 6.47. Schemat optymalnego układu prętów w konstrukcji obciążonej jedną siłą poziomą, wg A.G.M. Michella

Definicja 3.2. Niech r_l definiuje zbiór promieni ze wspólnego środka, O , dla $l = 0, 1, 2, \dots, q$. Niech p_l , $l = 0, 1, 2, \dots, q-1$, definiuje długość linii zaczynających się w punktach położonych na promieniu r_l i kończących się w punktach o promieniu r_{l+1} . Wtedy spirala Michella stopnia q jest zdefiniowana przez połączenie od końca do końca linii o długości p_l , spełniających warunki:

$$r_{l+1} = ar_l, \quad p_l = cr_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, q \quad (6.30)$$

gdzie $a > 0$ i $c > 0$.

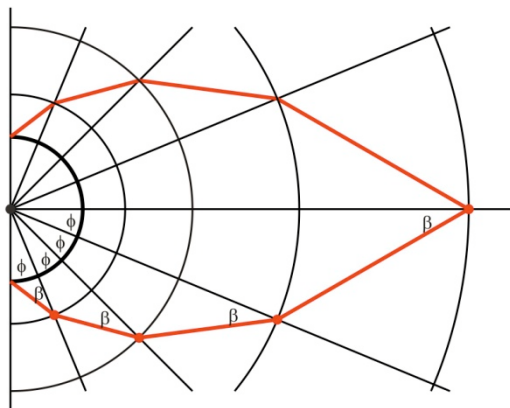
²⁷⁹ A.G.M. Michell The Limits of Economy of Material in Frame Structures. Phil Mag. S.6. Vol. 8. No. 47, (1904), s. 589–597. Publikacja ta, przez długi okres niedoceniona, została w latach 70. ubiegłego stulecia ponownie „odkryta”, m.in. w pracach W. Zalewskiego [173, 174].

Jeżeli

$$a = \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \phi)}, \quad c = \frac{\sin \phi}{\sin(\beta + \phi)}, \quad (6.31)$$

to sekwencja ta generuje spiralę Michella, przedstawioną na rysunku 6.48.

Układ prętów opisany przez topologię Michella charakteryzuje się tym, że w prętach należących do jednej rodziny, przy zadanym obciążeniu występują siły tego samego znaku. Sformalizowany sposób opisu, umożliwia konstruowanie systemów dostosowanych do bardzo różnych warunków.



Rys. 6.48. Przykład spirali Michella stopnia $q = 4$,
dla $\phi = \pi/16$, $\beta = \pi/6$



Rys. 6.49. Relacja filotaksji słonecznika i topologii Michella

Do ciekawej obserwacji prowadzi porównanie kratownicy Michella z filotaksją słonecznika. Podobnie jak w przypadku filotaksji ananasa (patrz pkt 6.2.1), w owocu słonecznika możemy dostrzec dwie rodziny linii spiralnych, tworzących charakterystyczne układy, korespondujące z kratownicą Michella (rys. 6.49).

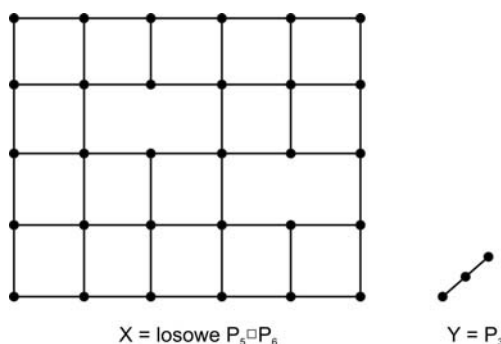
Topologia Michella umożliwia realizację różnych form strukturalnych, które cechują się dużą równomiernością wykorzystania wszystkich elementów [127, s. 129]. Przykład konstrukcji opartej na tym modelu przedstawiono w rozdziale 7.

6.5.3. Generowanie siatek konstrukcyjnych przez iloczyn kartezjański grafów losowych

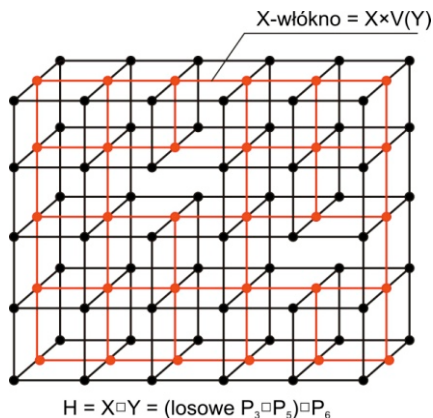
Iloczyn kartezjański grafów, przedstawiony w rozdz. 4.5, jako jedna z metod generowania prętowych siatek przestrzennych, może być zastosowany również do grafów losowych.

Można wybrać jeden z czynników iloczynu graf losowy, a jako drugi – graf losowy lub deterministyczny. Otrzymany iloczyn kartezjański będzie nowym grafem, zachowującym wprowadzony poziom losowości.

Nawiązując do przykładu z rysunku 4.30, potraktujmy przedstawioną na nim siatkę przestrzenną, jako iloczyn dwóch grafów planarnych. Jeden z nich, oznaczony X , jest iloczynem dwóch ścieżek o 5 i 6 wierzchołkach, w którym przez losowy wybór usunięto część wierzchołków, wraz z incydentnymi z nimi krawędziami. Drugi graf, oznaczony Y , jest ścieżką o 3 wierzchołkach (rys. 6.50). Iloczyn kartezjański obu grafów daje graf $H = X \square Y$ – trójwymiarową siatkę (rys. 6.51), losowo różniącą się od siatki z rysunku 4.30.



Rys. 6.50. Dwa grafy płaskie X i Y
– czynniki iloczynu kartezjańskiego; w grafie X
losowo usunięto niektóre krawędzie



Rys. 6.51. Graf losowy H
– iloczyn kartezjański grafów X i Y
z rys. 6.50

Każdy podgraf, który jest iloczynem jednego z grafów, G i wektora krawędziowego $\{h\}$, innego grafu, H :

$$G \times V(H) = \bigcup_{h \in H} (G \times \{h\}) \quad (6.32)$$

jest nazywany G -włóknem i oznaczany G^h . Każdy $G \times \{h\}$ jest kopią G . Iloczyn kartezjański jest zatem sumą wszystkich G -włókien i analogicznie – sumą wszystkich H -włókien [67, s. 4]. Na rysunku 6.51 jedno z X -włókien jest zaznaczone na czerwono. Losowość w iloczynie kartezjańskim można wprowadzać przez manipulowanie poszczególnymi włóknami grafów, dzięki czemu możliwa jest kontrola końcowego poziomu losowości²⁸⁰.

6.5.4. Metoda rekonstrukcji topologicznej dźwigarów powierzchniowych

Przedstawione w rozdziale 5 metody rekonstrukcji przestrzennej, dotyczyły modeli dyskretnych. Uzyskane w ich wyniku formy strukturalne miały charakter struktur prętowych. Jednak ich naturalne prototypy, jak wskazano w pktcie 6.2, miały często charakter powierzchniowy, ciągły. Ich zamiana w formę strukturalną była zatem procesem dyskretyzacji, zamieniającym formę ciągłą na formę dys-

²⁸⁰ Poziom losowości jest tu pojęciem umownym i odnosi się intuicyjnie do ilości włókien grafu będącego iloczynem kartezjańskim, w których wprowadzono losowe zaburzenia struktury.

kretną. Poniżej przedstawiono koncepcję metody, nazwanej *rekonstrukcją topologiczną dźwigarów powierzchniowych*, w których budowa modelu przebiega w kierunku odwrotnym: od dyskretnego prototypu, do powierzchniowej formy strukturalnej.

Strumienie sił w dźwigarach powierzchniowych

Rozpatrzmy na wstępie relację pomiędzy dźwigarami powierzchniowymi i strumieniami sił występującymi wewnątrz konstrukcji. Koncepcja strumieni sił pojawiła się w pracach W. Zalewskiego²⁸¹ i – nieco później – J. Schlaicha²⁸². U źródeł obydwu metod leży spostrzeżenie, że konieczność spełnienia zasady minimalnej energii powoduje, iż w konstrukcji powierzchniowej obciążenia zewnętrzne przenoszone są w sposób podobny jak w przypadku kratownic, czyli wytwarzają się swoiste „ścieżki”, po których są one przekazywane możliwie najkrótszą drogą na podpory. Obydwie metody pozwalają zastąpić ciągle obszary przekazywania naprężeń – wyimaginowanym systemem prętów, które przenoszą tylko ściskanie i rozciąganie [173].

Podstawowa koncepcja obu metod polega na podziale dźwigara powierzchniowego na mniejsze podobszary dwóch rodzajów:

- obszary statycznej nieciągłości, oznaczane literą D lub T²⁸³,
- obszary liniowego rozkładu naprężeń, oznaczanych literą B lub R²⁸⁴.

Rozkład obu rodzajów podobszarów zależy od trajektorii naprężeń głównych, które wynikają z obciążeń działających na dźwigar i z warunków podparcia. Następnie trajektorie naprężeń są traktowane jako wirtualna, kratownicowa konstrukcja prętowa. Pręty w takiej konstrukcji mogą mieć konfigurację równoległą, wachlarzową lub mieszaną. Przekrój prętów może być pryzmatyczny, butelkowy lub wachlarzowy. Tak, jak w rzeczywistej konstrukcji kratownicowej, wszystkie pręty są albo ściskane, albo rozciągane. Łączące je węzły mogą przenosić ściskanie (oznaczane jako typ CCC), rozciąganie (oznaczane jako typ TTT) lub ściskanie i rozciąganie (oznaczane jako typy CCT i CTT).

Na rysunku 6.52 przedstawiono ogólną zasadę konwersji konstrukcji powierzchniowej w prętową. Przykładowa belka-ściana jest obciążona w połowie rozpiętości siłą skupioną P . Siła ta jest przekazywana na podpory, za pomocą systemu trzech wyimaginowanych prętów, z których dwa są ściskane (zaznaczone linią przerywaną), a jeden rozciągany (zaznaczony linią ciągłą). Pręty ściskane przedstawione są w dwóch wariantach: jako pryzmatyczny (po lewej stronie rysunku) i jako butelko-

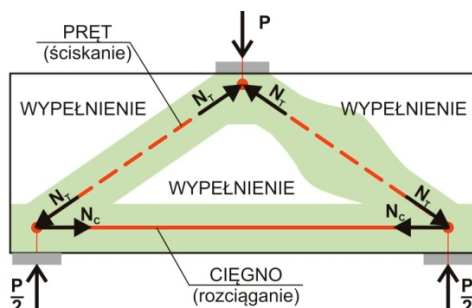
²⁸¹ Wacław Zalewski nazwał tę metodę *Flow of Forces* [173]. Metoda ta ma bardziej ogólny charakter niż metoda J. Schlaicha, gdyż dotyczy nie tylko dźwigarów powierzchniowych, ale może być równie skutecznie stosowana do kształtowania efektywnych form konstrukcji prętowych.

²⁸² Jörg Schlaich sformułował ją w pracy: Schlaich, J., Schäfer, K., Jennewein, M.: *Toward a Consistent Design of Structural Concrete*, PCI Journal, Vol. 32, No. 3, (1987), s. 74–150, pod nazwą STM (*Strut and Tie Method*).

²⁸³ Od ang. D – *discontinuity* (Schlaich) lub T – *transition* (Zalewski).

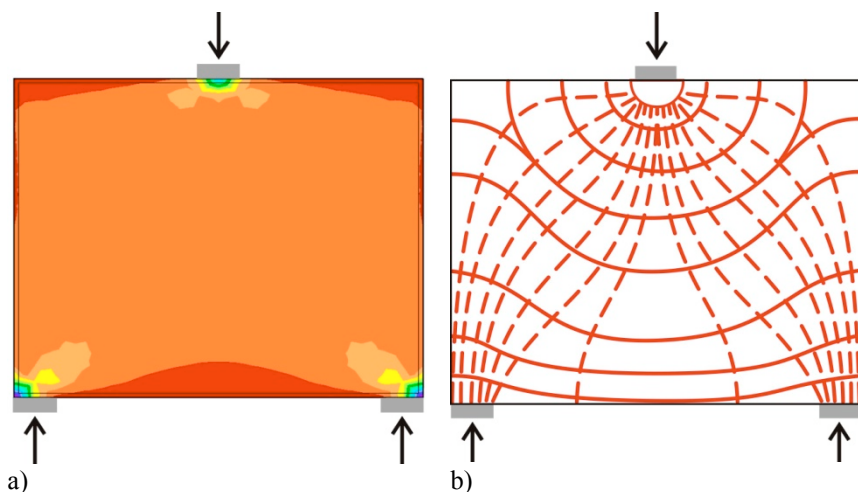
²⁸⁴ Od ang. B – *Bernoulli* (Schlaich) lub R – *regular* (Zalewski).

wy (po prawej stronie rysunku). Istotne jest, że pomiędzy obszarami rozpoznanymi jako pręty, znajduje się obszar o znikomym wyężeniu, który praktycznie nie uczestniczy w przenoszeniu obciążeń. Obszar ten jest nazywany wypełnieniem. Wizualizacja przepływu sił umożliwia łatwą identyfikację, które obszary konstrukcji „rzeczywiście” pracują, a które jedynie „wypełniają” przestrzeń.

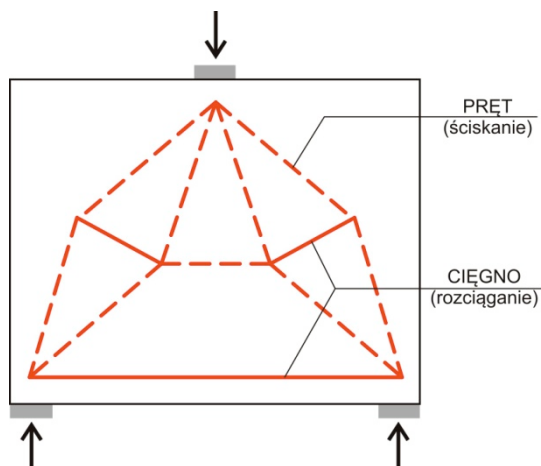


Rys. 6.52. Schemat konwersji konstrukcji powierzchniowej na prętową w metodzie STM

Kolejne przykłady przedstawiają dyskretyzację dwóch przykładowych tarczownic. W pierwszym z nich, analizowana jest kwadratowa, symetrycznie obciążona tarczownica. Mapie naprężeń w tej tarczownicy (rys. 6.53a) odpowiada określony układ trajektorii naprężeń głównych (rys. 6.53b). Ze względu na stosunek rozpiętości do wysokości, wyimaginowana kratownica wewnętrzna składa się nie z trzech prętów, jak na rysunku 6.52, lecz jest bardziej rozbudowana (rys. 6.54).

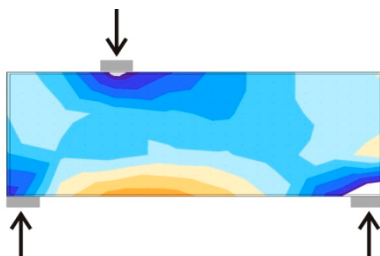


Rys. 6.53. Kwadratowa, symetrycznie obciążona tarczownica:
a) mapa naprężeń, b) trajektorie naprężeń głównych

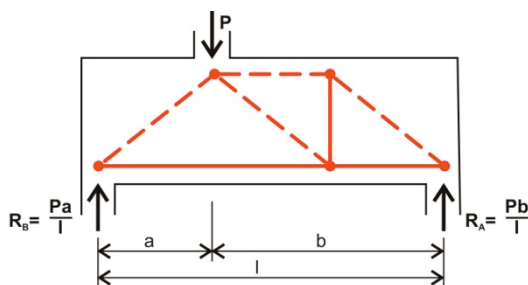


Rys. 6.54. Kwadratowa, symetrycznie obciążona tarczownica:
wymaginowana kratownica wewnętrzna

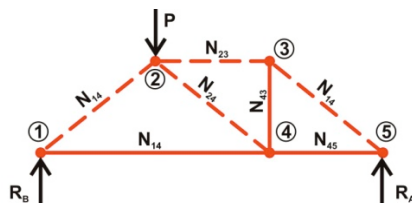
Drugi przykład przedstawia tarczownicę o mniejszej wysokości, niż poprzednia, obciążoną niesymetrycznie siłą skupioną. Mapa naprężeń (rys. 6.55) i odpowiadający jej układ trajektorii sił wewnętrznych zmieniły się (rys. 6.56). Wymaginowana kratownica wewnętrzna staje się w tym przypadku asymetryczna (rys. 6.57).



Rys. 6.55. Tarczownica prostokątna, niesymetrycznie obciążona
– mapa naprężeń



Rys. 6.56. Tarczownica prostokątna, niesymetrycznie obciążona
– układ sił wewnętrznych



Rys. 6.57. Tarczownica prostokątna, niesymetrycznie obciążona
– wymaginowana kratownica wewnętrzna

W obu tarczownicach, ich wymaginowane kratownice wewnętrzne tworzą rodzaj szkieletu konstrukcyjnego, podpierającego „zbędny” materiał. Podobnie jak w przypadku podziałów Woronoja i triangulacji Delaunaya (patrz pkt 6.2), dźwigar powierzchniowy i jego wymaginowana kratownica, mogą być rozpatrywane jako strukturalnie dualne.

Powierzchniowa rekonstrukcja prototypów formy

Ogólna koncepcja metody rekonstrukcji topologicznej stanowi odwrotność metody strumieni sił. Jeżeli w tej drugiej metodzie pewne obszary konstrukcji są traktowane jako pręty o określonych właściwościach, to w metodzie rekonstrukcji topologicznej, pręty są identyfikowane jako obszary pewnej nieznannej konstrukcji powierzchniowej.

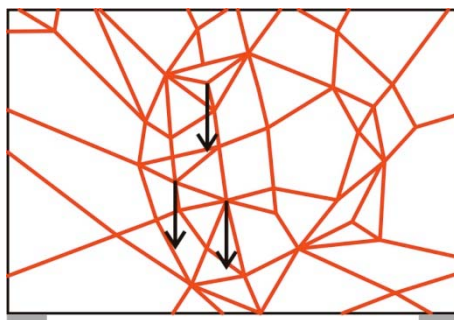


Rys. 6.58. Nieregularna siatka pajęczyny – prototyp formy
rekonstruowanego dźwigara powierzchniowego



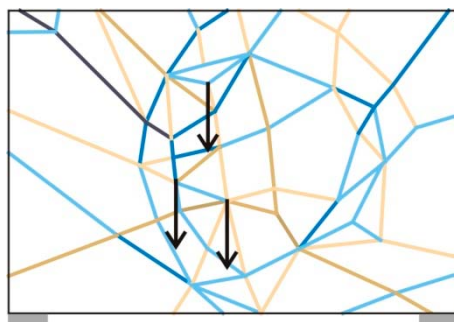
Rys. 6.59. Idealizacja siatki pajęczyny i myślowe oddzielenie jej
od początkowej formy

Kolejne kroki w tej metodzie zostaną przedstawione na przykładzie siatki pajęczyny z rysunku 6.58. Stanowi ona dostatecznie nieregularny²⁸⁵ model początkowy (prototyp formy), a jednocześnie jej strukturalna przydatność została zweryfikowana w sposób naturalny. W pierwszym kroku, wszystkie krawędzie modelu topologicznego są traktowane jako pręty, aproksymujące trajektorie naprężeń głównych pewnej nieznanej tarczownicy. Jest to tylko proste, myślowe przypisanie funkcji do obiektów. W kolejnym, bardziej kreatywnym kroku, model jest oddzielany od swojego naturalnego źródła (rys. 6.59). Teraz, od decyzji projektanta zależy zaproponowanie konturu brzegowego i warunków podparcia i obciążenia. W ten sposób otrzymywany jest model płaskiej konstrukcji prętowej (rys. 6.60).



Rys. 6.60. Model płaskiej konstrukcji prętowej utworzonej na bazie siatki pajęczyny, z ustalonymi a priori miejscami przyłożenia obciążeń zewnętrznych

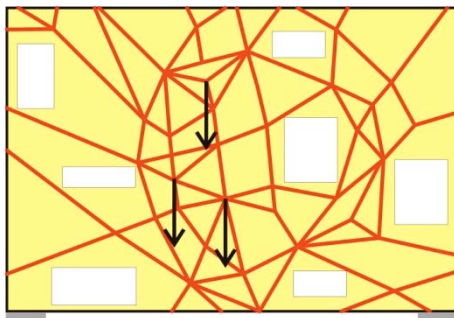
Z tego modelu, po przeprowadzeniu obliczeń, otrzymywane są wartości i kierunki sił we wszystkich prętach. Przedstawiono wyniki analizy przeprowadzonej dla modelu, po przyjęciu jednostkowej wartości sił, dla uzyskania informacji jedynie na temat znaku sił w prętach, a nie ich wartości (rys. 6.61). Rozciąganie jest zaznaczone odcieniami błękitu, a ściskanie – odcieniami brązu. W trzecim kroku, wyznaczane są niezbędne wymiary i kształt prętów i nanoszone na model.



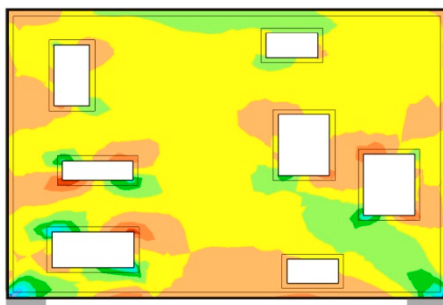
Rys. 6.61. Wyniki analizy modelu z rys. 6.60 (opis w tekście)

²⁸⁵ Dostatecznie nieregularny, w sensie poszukiwania „swobodnych” form strukturalnych.

Czwarty krok polega na wypełnieniu przestrzeni pomiędzy prętami materiałem w neutralnym stanie naprężenia lub otworami (rys. 6.62). W ten sposób skonstruowany został dźwigar powierzchniowy – tarczownica. W celu sprawdzenia, można przeprowadzić analizę MES otrzymanego dźwigara dla przyjętych obciążeń i porównać rezultaty z początkowym modelem topologicznym (rys. 6.63).



Rys. 6.62. Wypełnienie przestrzeni pomiędzy prętami materiałem w neutralnym stanie naprężenia lub otworami



Rys. 6.63. Mapa naprężeń dla tarczownicy z rysunku 6.62

Kończy to procedurę rekonstrukcji topologicznej dźwigarów powierzchniowych z modeli inspirowanych dyskretnymi formami naturalnymi. Zrozumiałe jest, że rezultat końcowy w bardzo dużym stopniu zależy od decyzji podejmowanych na każdym etapie procesu. Różne sposoby podparcia, zmiana założonych warunków obciążenia, inny wybór kształtu prętów itp. doprowadzą do innego rezultatu końcowego. Decyzje podejmowane przez projektanta są w tym zakresie kluczowe [174].

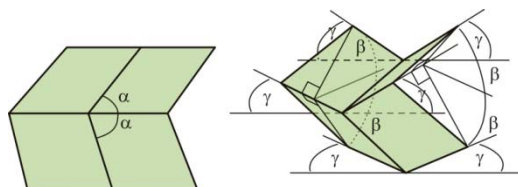
6.5.5. Metoda origami

Tradycyjna japońska sztuka wykonywania ozdób z papieru, *origami*, ma ponad tysiącletnią tradycję. Polega ona na składaniu prostokątnej kartki papieru, którą

wolno wyłącznie zaginać, bez cięcia i klejenia. Za pomocą tej techniki wykonywane są dekoracje, zabawki, a nawet drobne dzieła sztuki. W ostatnim okresie, dzięki pracom K. Miura i T. Tachi, sztuka origami nabrała znaczenia dla kształtowania form konstrukcyjnych obiektów architektonicznych [102, s. 1–3]. Punktem wyjścia ich rozważań było spostrzeżenie, że płaskie siatki tesselacji o wierzchołkach 4-walentnych odpowiadają wyjściowej konfiguracji kartki papieru, wstępnie zagiętej przed złożeniem. Jest to model konstrukcji, składającej się ze sztywnych, płaskich paneli, połączonych zawiasowo wzdłuż krawędzi. Są to tzw. konfiguracje *Miura-ori*²⁸⁶. Charakteryzują się one naprzemiennym występowaniem linii „grzbietów” i „dolin” oraz pofałdowaniem powierzchni pomiędzy tymi liniami. Powierzchnie te są układem równoległoboków. Poniżej przedstawiono fazy deformacji płaszczyzny wokół 4-walentnego wierzchołka, w czasie składania kartki papieru (rys. 6.64) [102, s. 4]. Pomiędzy kątami opisującymi układ płaszczyzn zachodzi relacja (6.33).

$$\operatorname{tg} \alpha \cos \beta = \operatorname{tg} \gamma \quad (6.33)$$

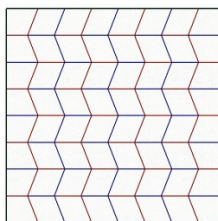
gdzie: α – wewnętrzny kąt równoległoboku (stały),
 β – połowa kąta dwuściennego (zmienny),
 γ – kąt pomiędzy liniami prostymi zagięcia, a powierzchnią bazową.



Rys. 6.64. Fazy składania kartki papieru wokół wierzchołka 4-walentnego

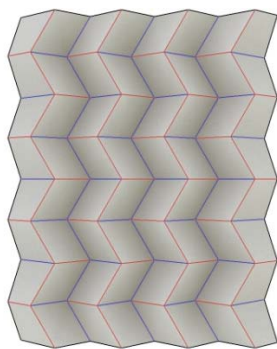
Narzucającą się interpretacją procesu wykonywania origami jest kształtowanie obiektów o zmiennej geometrii, np. składanych dachów stadionów. Jednak, w kontekście wcześniejszych rozważań, ważniejsze wydaje się zastosowanie tej metody do nadania przestrzennego charakteru („podniesienia”) płaskich tesselacji powierzchni. Przedstawiono przykład prostego wzoru, zbudowanego z prostych linii poziomych i łamanych linii pionowych (rys. 6.65).

²⁸⁶ Koryo Miura opracował konfigurację, nazywaną obecnie Miura-ori, pracując nad sposobem składania dużych baterii słonecznych dla satelitów, w ramach japońskiego programu kosmicznego. Pomysł zastosowania takiej transformacji w architekturze, pojawił się później. Duży wkład w jego rozwój miały prace studenta i doktoranta – Tomohiro Tachi, a później ich wspólne prace (źródło: osobista rozmowa z T. Tachi).

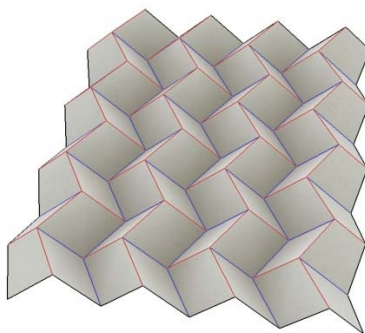


Rys. 6.65. Przykładowy płaski wzór wyjściowy do kształtowania konstrukcji metodą origami

Za pomocą koloru czerwonego oznaczono krawędzie, które po zagięciu mają pozostać wypukłe („grzbiety”), a za pomocą koloru niebieskiego – krawędzie, które po zagięciu mają pozostać wklęsłe („doliny”). Wzór zostaje następnie poddany zagięciu²⁸⁷, co prowadzi do uzyskania powierzchni fałdowej (rys. 6.66a), którą można interpretować np. jako tarczownicowe przekrycie obiektu (rys. 6.66b).



a)



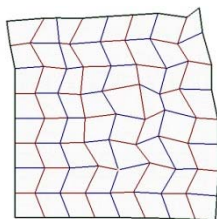
b)

Rys. 6.66. Fałdowa forma strukturalna uzyskana na podstawie wzoru z rys. 6.65

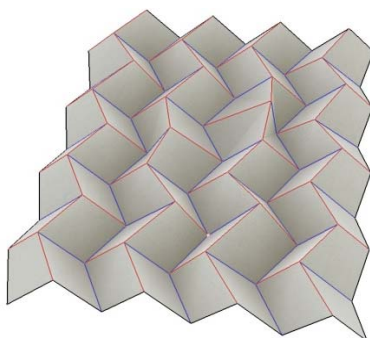
Metodą origami, podobnie jak metodami transformacji grafów²⁸⁸, można wprowadzać modyfikacje w początkowym wzorze płaskim, bez utraty możliwości jego przestrzennej rekonstrukcji. Poniżej przedstawiono zmodyfikowaną siatkę z rys. 6.65 (rys. 6.67) oraz odpowiadającą jej konstrukcję tarczownicową (rys. 6.68).

²⁸⁷ W przedstawionym przykładzie korzystano z programu FreeformOrigami v.0.1.8 Alpha, opracowanego przez T. Tachi.

²⁸⁸ Patrz rozdz. 4.3.



Rys. 6.67. Zmodyfikowana siatka wzoru z rysunku 6.65



Rys. 6.68. Faldowa forma strukturalna uzyskana na podstawie wzoru z rys 6.67

Metod kształtowania form strukturalnych za pomocą procedury origami, pojawiła się bardzo niedawno i znajduje się obecnie w okresie bardzo intensywnego rozwoju, przyciągając uwagę coraz liczniejszych badaczy. Niedawno odkryto związki pomiędzy kształtowaniem tą metodą form cylindrycznych a geometrią wielościanów gwiaździstych²⁸⁹. W przekonaniu autora, metoda ta ma wielki potencjał i będzie w przyszłości stosowana w praktyce projektowej. W rozdziale 7 przedstawiono analizę przekrycia ukształtowanego na podstawie wzoru z rysunku 6.65 za pomocą metody origami.

²⁸⁹ Patrz rozdział 2.

Rozdział 7. Chaos czy struktura²⁹⁰

Wszystko to, co jest możliwe, domaga się istnienia.

Gotfryd Wilhelm Leibniz²⁹¹

Poprzedni rozdział dotyczył poszukiwania modeli systemów konstrukcyjnych, jako podstawy kreowania formy obiektu. Przedstawiono w nim metody korzystania z inspiracji formami naturalnymi oraz pięć wybranych procedur generowania form strukturalnych, odwołujących się do omówionych wcześniej koncepcji topologicznej zależności obiektów o różnych klasach (wymiarach przestrzeni, w której są realizowane).

Przydatność tych metod można ocenić, analizując je w kontekście zastosowań praktycznych. Przedstawiono pięć przykładów kształtowania konstrukcji, zarówno na podstawie wzorców naturalnych, jak i przez generowanie podanymi metodami. Przykłady te zaczerpnięto z opracowań wykonanych przez autora w trakcie pracy nad rzeczywistymi projektami oraz w ramach prac studialnych. Z oczywistych względów nie było możliwe przedstawienie, w ramach niniejszej publikacji, wszystkich analiz i obliczeń, które zostały wykonane, a prezentacja ma przede wszystkim charakter jakościowy, a nie ilościowy. Przedstawione przykłady pozwalają jednak na ocenę wpływu, jaki ma wybór metody kształtowania systemu konstrukcyjnego na formę i wizualną percepcję obiektu.

7.1. Wybrane przykłady kształtowania form strukturalnych

Przedstawione przykłady obejmują kształtowanie obiektów na podstawie następujących metod:

²⁹⁰ Tytuł rozdziału zaczerpnięty został z książki Lecha Jęczyka *Dlaczego toniemy, czyli jeszcze nowsze średniowiecze* Zysk i S-ka, Poznań (2011), s. 50.

²⁹¹ Gotfryd Wilhelm Leibniz *De veritatibus primis*, 1686 r. – „Omne possibile exigit existere.”

- powierzchni minimalnych,
- kratownic Michella,
- tesselacji aperiodycznych,
- origami.

Dla każdego przykładu przedstawiono zadanie funkcjonalne do rozwiązania i wynikające z niego wymagania i ograniczenia. Następnie podano sposób kształtowania systemu konstrukcyjnego oraz podstawowe wyniki analizy statycznej.

7.1.1. Kształtowanie konstrukcji na powierzchniach minimalnych

Systemy konstrukcyjne, kształtowane w formie powierzchni minimalnych, charakteryzują się równomiernym rozkładem i jednakowym znakiem sił wewnętrznych²⁹². Dotyczy to jednak jedynie formy początkowej, w stanie nieobciążonym lub przy naciągu wstępnym. Wprowadzenie obciążenia zewnętrznego zmienia dystrybucję sił wewnętrznych i – w pewnym zakresie – formę konstrukcji. Kształtowanie na podstawie powierzchni minimalnych stosuje się najczęściej do przekryć z wiotkich membran (np. tekstylnych) i do lekkich powłok żelbetowych.

Dwa przedstawione przykłady to obiekty o przekryciu membranowym. Pierwszy to zadaszenie kortu tenisowego, o rzucie prostokątnym. Drugi – pawilon namiotowy, o rzucie zbliżonym do owalnego.

7.1.1.1. Zadanie kortu tenisowego

Zadaniem konstrukcji jest przekrycie pojedynczego kortu tenisowego, o wymiarach pola 17.70×36.00 m. Założono, że będzie to przekrycie bez ścian bocznych, oparte na słupach rozstawionych co 6.0 m. Minimalna wysokość wolna od konstrukcji powinna wynosić 7.0 m, a maksymalna wysokość obiektu – 12.0 m. Dodatkowo należy uzyskać formę o zróżnicowanej, rozrzeźbionej powierzchni, sprawiającej wrażenie obiektu bardzo lekkiego.

Przyjęto, że zaprojektowane zostanie przekrycie membranowe o powierzchni łamanej²⁹³, na słupach stalowych, z ociągami. Ogólny, wstępny schemat konstrukcji, wraz z określeniem wymiarów obiektu, przedstawiono na rysunku 7.1.

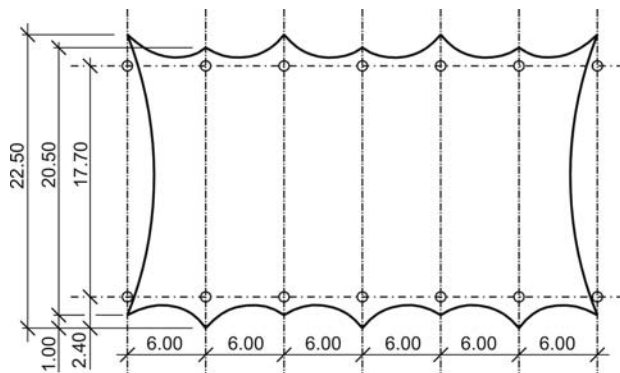
Przyjęto, że membrana będzie wykona z tkaniny poliestrowej, pokrytej polichlorkiem winylu (PE+PVC), z obustronnym wykończeniem powłoką winylidenową (PVdF) – „Big Cover”, firmy Naizil (tkanina typu 2, wg klasyfikacji niemieckiej [134]). Do obliczeń przyjęto dane dostarczone przez producenta:

- masa liniowa nitek: 1100 dtex,
- krotność nitek w kierunku osnowy i wątku: panama: 12×12,

²⁹² Patrz pkt 6.2.3.

²⁹³ Patrz [134].

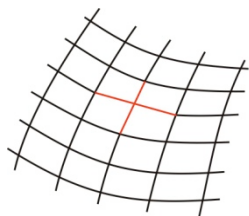
- masa powierzchniowa tkaniny: 900 g/m^2 ,
- wytrzymałość na rozciąganie w kierunku osnowy: $4.0 \text{ kN} / 5 \text{ cm}$,
- wytrzymałość na rozciąganie w kierunku wątku: $4.0 \text{ kN} / 5 \text{ cm}$,
- moduł sprężystości w kierunku osnowy: 900 kN/m ,
- moduł sprężystości w kierunku wątku: 514 kN/m .



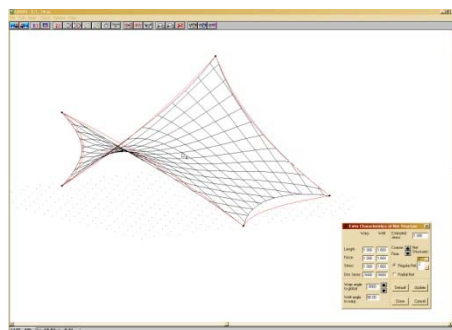
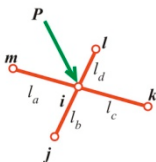
Rys. 7.1. Ogólny schemat konstrukcji przekrycia kortu
(opis w tekście), wymiary w [m]

Moduły sprężystości w obu kierunkach wyznaczono z wykresów naprężenie-odkształcenie, dostarczonych przez producenta, dla założonej kompensacji tkaniny równej 2.5%.

Elementy ciągnowe przyjęto ze wstępnie przeciągniętych lin stalowych, o module sprężystości $E = 165 \text{ GPa}$ i wytrzymałości na rozciąganie $f_d = 1770 \text{ MPa}$. Dla głównych ciągn przyjęto liny o średnicy $d = 35 \text{ mm}$, a dla ciągn brzegowych – liny o średnicy $d = 10 \text{ mm}$. Słupy przyjęto z rur stalowych bez szwu $250 \times 8 \text{ mm}$, o długości 7.0 i 12.0 m, dzięki czemu wysokość konstrukcyjna przekrycia wyniesie 5.0 m.



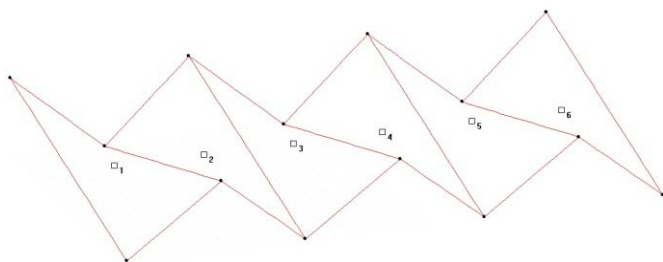
a)



b)

Rys. 7.2. Modelowanie numeryczne membrany tekstylnej: a) model obliczeniowy w metodzie gęstości sił (FDM), b) interfejs programów Cadisi i EASY

Do analizy konstrukcji membranowej zastosowano metodę gęstości sił (FDM)²⁹⁴. W metodzie tej ciągła membrana jest zastępowana siatką przegubowo połączonych prętów, nazywanych ogniwami²⁹⁵ (rys. 7.2a). W układzie równań równowagi dla siatki zastępczej udało się wyeliminować nieliniowość geometryczną i materiałową przez przyjęcie stałego parametru gęstości siły dla każdego ogniwa. Metoda FDM została zaimplementowana w programach Cadisi i EASY²⁹⁶, które zostały użyte do obliczeń w niniejszym przykładzie (rys. 7.2b).



Rys. 7.3. Schemat do wyznaczenia formy początkowej membrany

Dla wiotkiej membrany, której kształt początkowy, tzn. przyjmowany do dalszych obliczeń, ściśle łączy się z wprowadzonym naciągiem wstępnym, konieczne jest przeprowadzenie procesu wstępnego kształtowania formy. Przeprowadzony on został numerycznie, za pomocą programu Cadisi, dla schematu z rysunku 7.3 [133]. Przyjęto dwie wartości naciągu wstępnego w membranie:

- $N_{ini} = 2 \text{ kN/m}$
- $N_{ini} = 10 \text{ kN/m}$

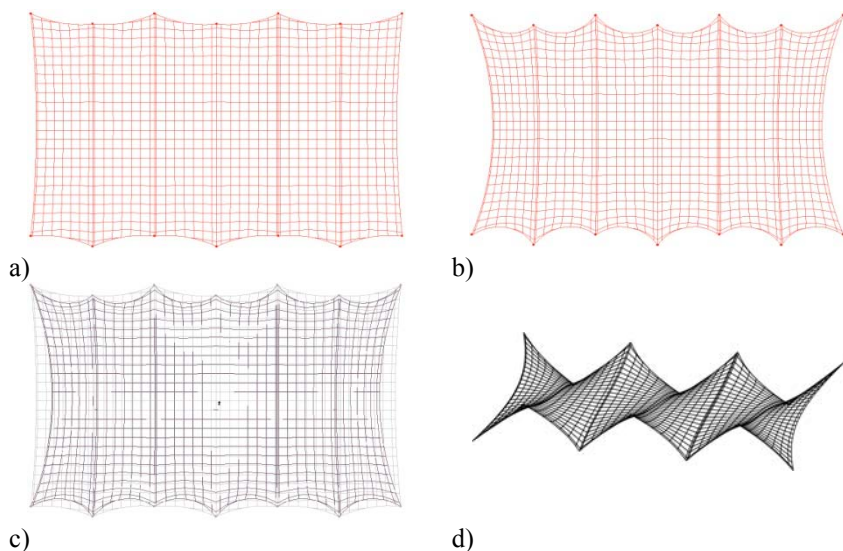
Uzyskaną formę początkową, dla $N_{ini} = 2 \text{ kN/m}$ przedstawiono na rysunku 7.4a, a dla $N_{ini} = 10 \text{ kN/m}$ – na rysunku 7.4b. Porównanie obu form w rzucie przedstawia rys. 7.4c, a widok aksonometryczny membrany dla $N_{ini} = 10 \text{ kN/m}$ – rys. 7.4d.

Widoczne jest większe zakrzywienie cięgien brzegowych przy zwiększeniu naciągu wstępnego. Siły wewnętrzne w membranie, wyznaczone za pomocą programu EASY, wykazują równomierny rozkład dla obu naciągów, przy widocznym zwiększeniu przy cięgnach grzbietowych i brzegowych, gdzie następuje zaburzenie układu membranowego (rys. 7.5a i 7.6a). Istotne różnice dotyczą wielkości sił w obu przypadkach (rys. 7.5b i 7.6b).

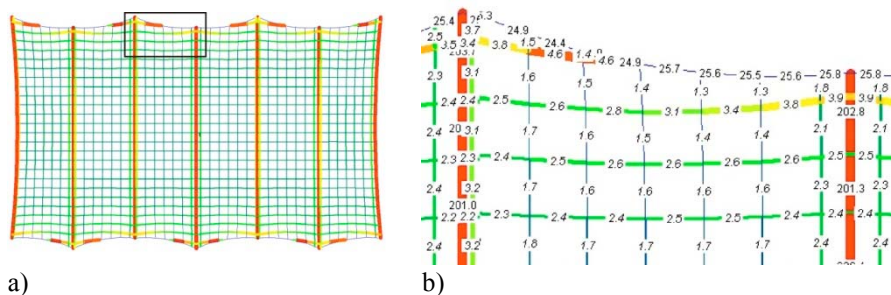
²⁹⁴ Ang. *Force Density Method*. Metoda ta została sformułowana przez K. Linkwita i H.-J. Scheka, w 1971 r. [134].

²⁹⁵ Nazwa „ogniwo” (ang. *link*) została wprowadzona przez analogię do elementów łańcucha.

²⁹⁶ Programy opracowane przez firmę Technet GmbH, z Berlina. Korzystano z programu Cadisi w wersji 3.37 i z programu EASY – w wersji 7.6.



Rys. 7.4. Kształt membrany uzyskany w procesie numerycznego kształtowania formy:
 a) dla naciągu wstępnego $N_{ini} = 2 \text{ kN/m}$, b) dla naciągu wstępnego $N_{ini} = 10 \text{ kN/m}$,
 c) porównanie obu form, d) widok aksonometryczny membrany dla naciągu wstępnego $N_{ini} = 10 \text{ kN/m}$



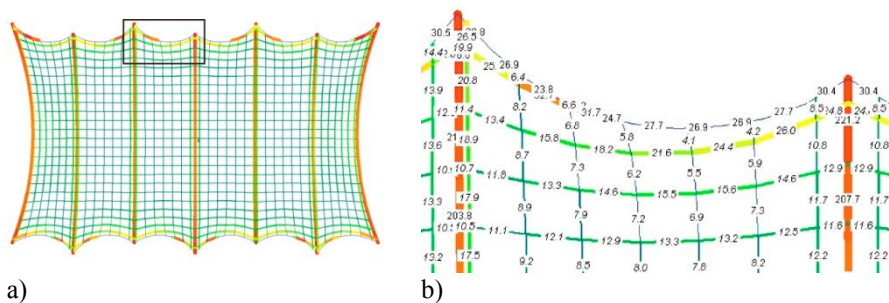
Rys. 7.5. Siły w membranie o naciągu wstępnym $N_{ini} = 2 \text{ kN/m}$:
 a) rozkład na powierzchni membrany, b) wartości w części środkowej²⁹⁷ [kN]

W kolejnym etapie analizy konstrukcji przyjęto ciężar własny i obciążenie workiem śnieżnym w części środkowej przekrycia, o wartości $P_s = 15 \text{ kN/m}^2$ (rys. 7.7). Takie obciążenia są charakterystyczne dla membran, gdy w krótkim czasie występuje naprzemiennie topnienie i zamarzanie zalegającego śniegu, przez co przywiera on do membrany i następuje jego dalsza akumulacja²⁹⁸. Przedstawiono

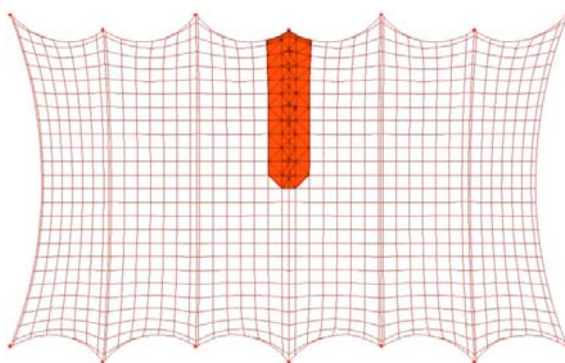
²⁹⁷ Rysunek 7.5b obejmuje część zaznaczoną prostokątem, na rys. 7.5a. Wartości odniesione są do jednego prętowego elementu zastępczego – ogniwa.

²⁹⁸ W literaturze angielskojęzycznej zjawisko takie określa się jako *ponding*.

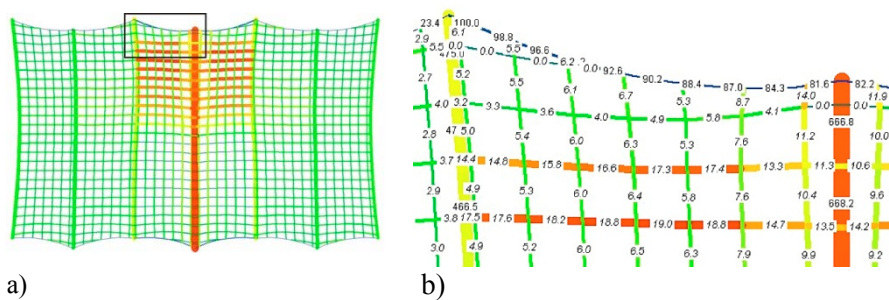
rozkład sił wewnętrznych dla obu wartości naciągu wstępnego (rys. 7.8a i 7.9a) i wielkości sił w części środkowej membrany (rys. 7.8b i 7.9b).



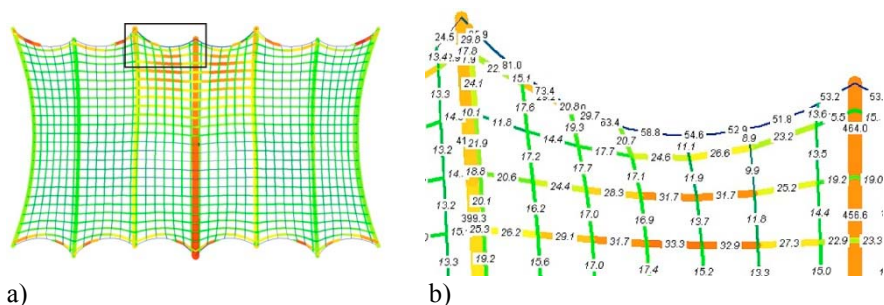
Rys. 7.6. Siły w membranie o naciągu wstępnym $N_{mi} = 10 \text{ kN/m}$: a) rozkład na powierzchni membrany, b) wartości w części środkowej [kN]



Rys. 7.7. Schemat obciążenia membrany workiem śnieżnym o wartości $P_s = 15 \text{ kN/m}^2$

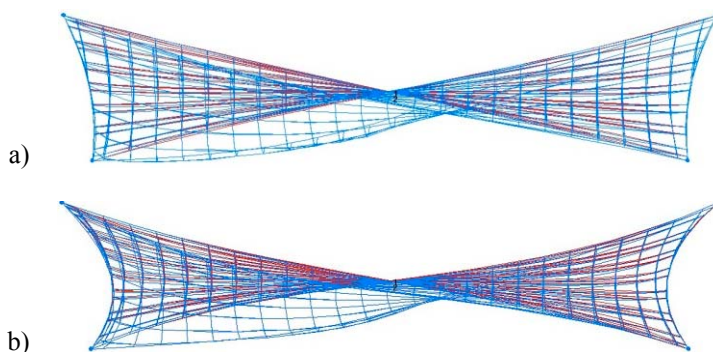


Rys. 7.8. Siły w membranie o naciągu wstępnym $N_{mi} = 2 \text{ kN/m}$, obciążonej workiem śnieżnym $P_s = 15 \text{ kN/m}^2$: a) rozkład na powierzchni membrany, b) wartości w części środkowej [kN]



Rys. 7.9. Siły w membranie o naciągu wstępnym $N_{ini} = 10 \text{ kN/m}$, obciążonej workiem śnieżnym $P_s = 15 \text{ kN/m}^2$: a) rozkład na powierzchni membrany, b) wartości w części środkowej [kN]

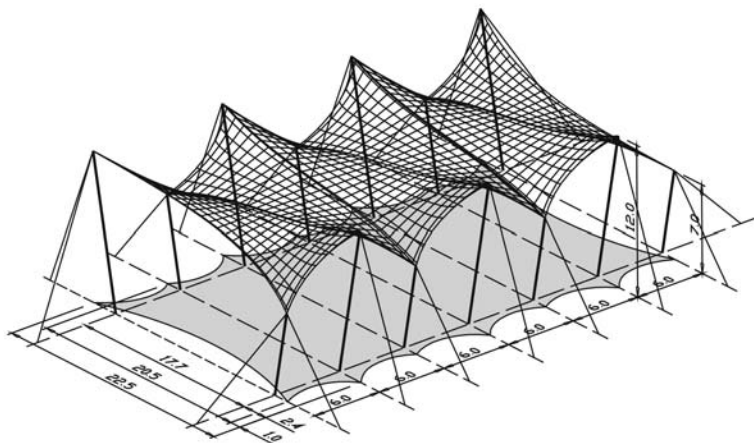
Charakterystyczne jest, że zmiana rozkładu sił wewnętrznych obejmuje stosunkowo niewielki obszar membrany, bezpośrednio przylegający do przyłożonego obciążenia. Można zauważyć deformację cięgien grzbietowych w tym obszarze. Zmiana wartości sił jest proporcjonalnie znacznie większa w membranie o mniejszym naciągu wstępnym. Większe i mające większy zasięg jest również odkształcenie membrany dla mniejszego naciągu wstępnego (rys. 7.10).



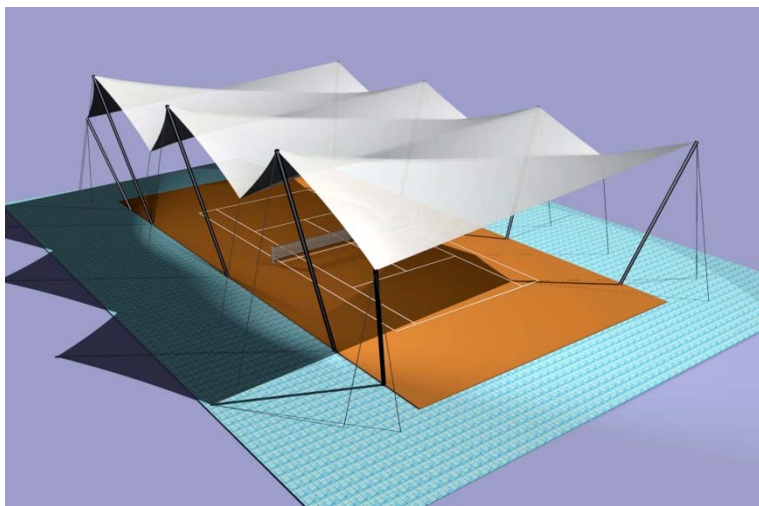
Rys. 7.10. Porównanie odkształcenia membran obciążonych workiem śnieżnym $P_s = 15 \text{ kN/m}^2$: a) dla naciągu wstępnego $N_{ini} = 2 \text{ kN/m}$, b) dla naciągu wstępnego $N_{ini} = 10 \text{ kN/m}$

Ostatecznie, jako system konstrukcyjny przekrycia kortu przyjęto powłokę membranową o naciągu wstępnym $N_{ini} = 10 \text{ kN/m}$, opartą na słupach stalowych o naprzemiennie różnej wysokości, między którymi rozpięte są cięgna grzbietowe i brzegowe. Słupy są dodatkowo ustabilizowane odciągami cięgowymi (rys. 7.11).

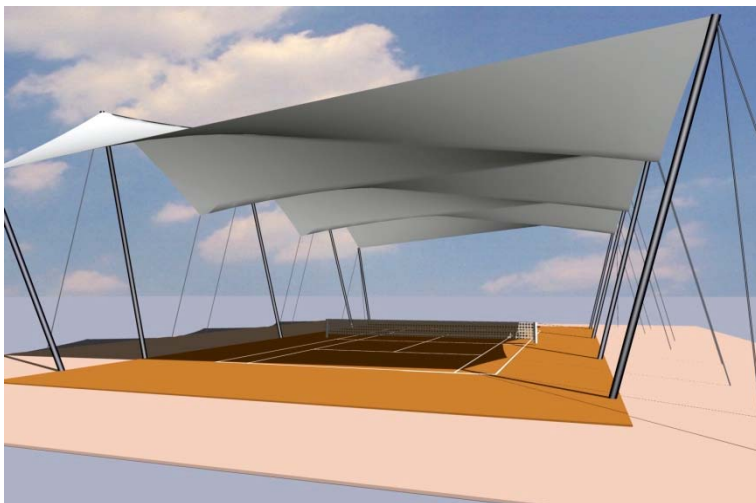
Powłoka o większej wartości naciągu wstępnego wykazuje mniejsze odkształcenia pod wpływem obciążeń zewnętrznych, a jej kształt jest odbierany jako bardziej „dynamiczny”. Na rysunkach 7.12 i 7.13 przedstawiono wizualizacje zaprojektowanego obiektu.



Rys. 7.11. Widok aksonometryczny zadaszenia kortu – membrana z konstrukcją wsporczą



Rys. 7.12. Wizualizacja zadaszzenia kortu
– widok ogólny



Rys. 7.13. Wizualizacja zadaszenia kortu
– widok wnętrza

7.1.1.2. Pawilon namiotowy

Projektowany pawilon namiotowy powinien być obiektem tymczasowym, o rzucie zbliżonym do owalnego, o wymiarach ok. 10×15 m. Jego tymczasowy charakter powinien być podkreślony przez zastosowanie masztu, podobnie jak w tradycyjnych konstrukcjach namiotowych. Obiekt powinien stanowić jedynie przekrycie, bez ścian bocznych. Ponadto z jednej strony obiekt powinien być połączony z istniejącym budynkiem.



a)



b)



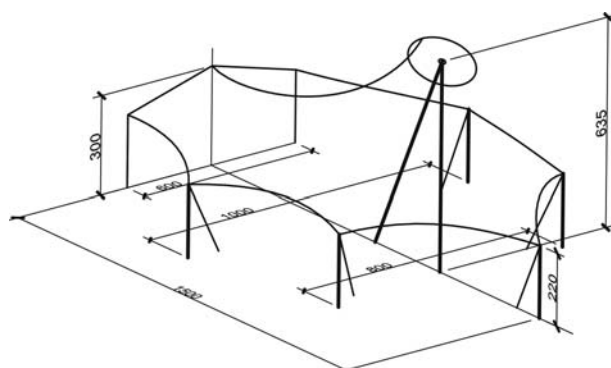
c)



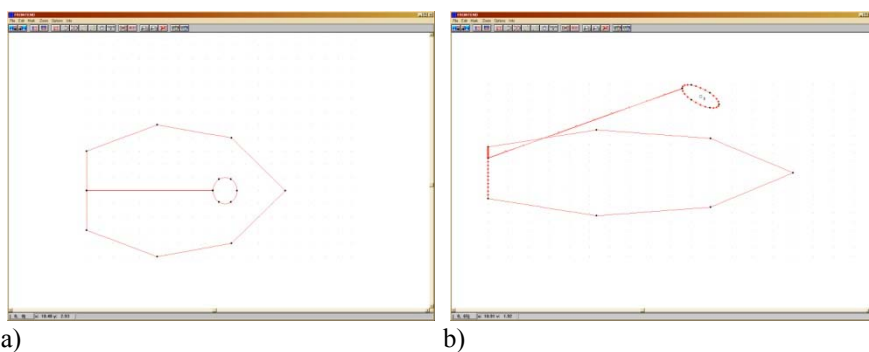
d)

Rys. 7.14. Modelowanie wstępne konstrukcji namiotowej za pomocą błonki mydlanej
– kolejne fazy wypiętrzania masztu środkowego

Kształtowanie formy konstrukcji rozpoczęto od wykonania modelu fizycznego z błonki mydlanej w skali 1:50. Wstępnie ukształtowany został z drutu kontur membrany, a w części środkowej umieszczono słupek z pierścieniem w sposób umożliwiający jego podłużny ruch. Po zanurzeniu w roztworze wodnym słupek był przesuwany, powodując wypiętrzanie błonki modelującej membranę, a jej kształt był fotografowany w kolejnych fazach (rys. 7.14). Po uzyskaniu zadowalającej formy przekrycia, na podstawie fotografii, ustalono oczekiwane proporcje kształtu membrany. Po dostosowaniu ich do zadanych wymiarów całkowitych pawilonu określono ogólny schemat konstrukcji namiotowej do dalszej analizy (rys. 7.15).



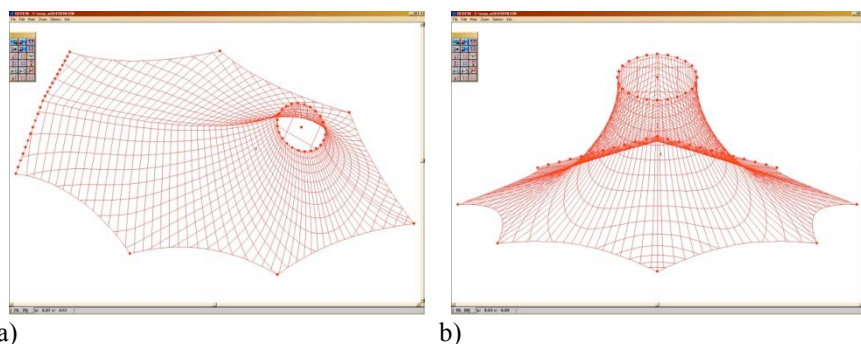
Rys. 7.15. Ogólny schemat konstrukcji namiotowej pawilonu
(opis w tekście), wymiary w [cm]



Rys. 7.16. Schemat do numerycznego wyznaczenia formy początkowej membrany namiotu:
a) rzut, b) widok boczny

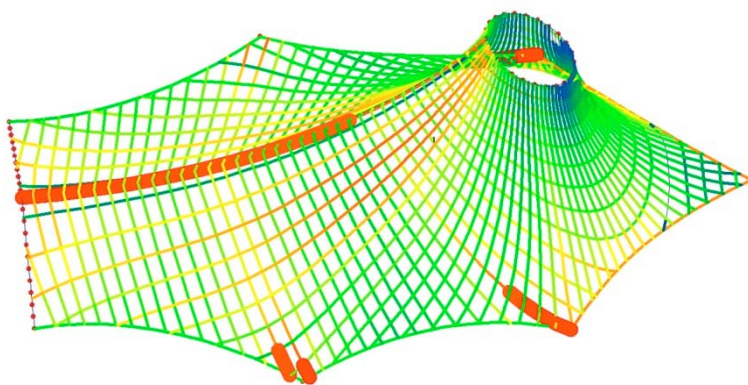
Założono, że obiekt będzie wykonany z membrany tekstylnej o parametrach takich, jak w przykładzie z pktu 7.1.1.1. Analogiczne wartości charakterystyk przyjęto również dla elementów cięgnowych. Dla cięgien brzegowych przyjęto

liny o średnicy $d = 10$ mm, a dla cięgna grzbietowego – linę podwójną $d = 2 \times 10$ mm. Słupki boczne i pierścień górny przyjęto z rur kwadratowych $60 \times 60 \times 5$ mm, a maszt środkowy – z rury kwadratowej $100 \times 100 \times 5$ mm. Numeryczne wyznaczenie formy początkowej membrany przeprowadzono dla zadanego konturu brzegowego, za pomocą programu Cadisi (rys. 7.16). Naciąg wstępny przyjęto o wartości $N_{ini} = 2$ kN/m. Uzyskany kształt początkowy membrany przedstawiono na rysunku 7.17. Widoczna jest dobra zgodność kształtu wyznaczonego numerycznie z kształtem uzyskanym przez modelowanie fizyczne.

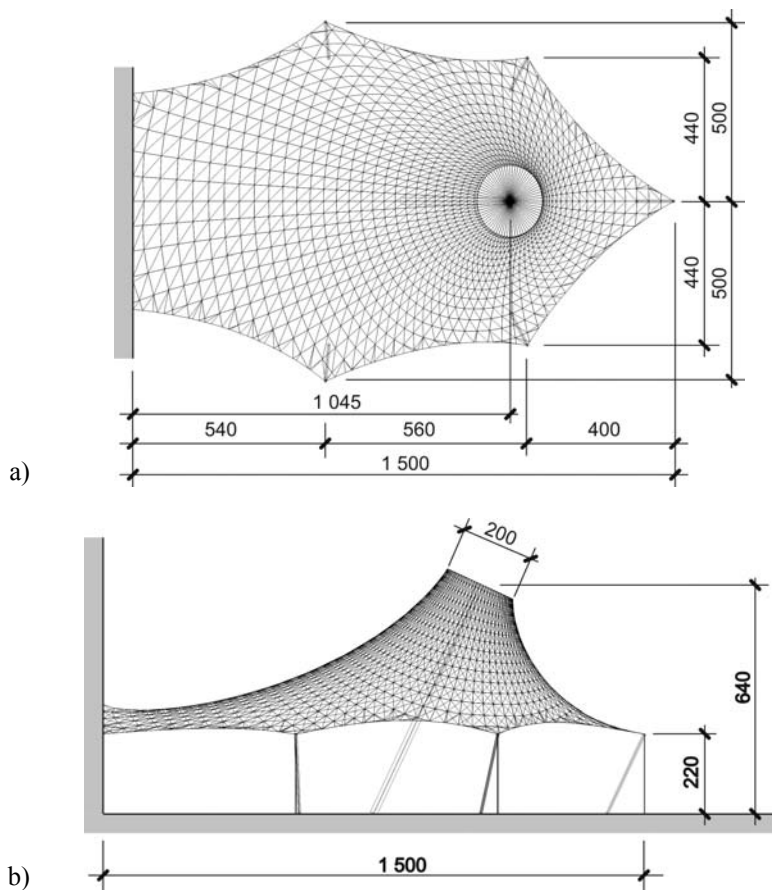


Rys. 7.17. Kształt membrany uzyskany w procesie numerycznego kształtowania formy dla naciągu wstępnego $N_{ini} = 2$ kN/m: a) widok boczny, b) widok frontowy

Do uzyskanego kształtu początkowego przeprowadzono analizę wyężenia membrany (program EASY) pod wpływem obciążenia ciężarem własnym oraz obciążenia śniegiem, o wartości odniesionej do rzutu poziomego $P_s = 0.56$ kN/m².



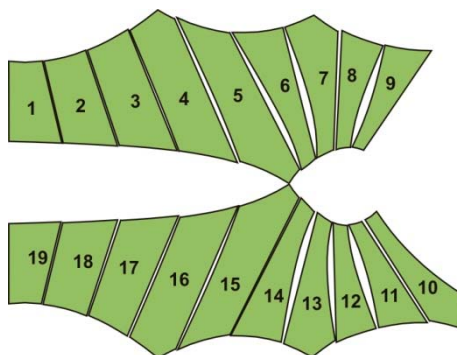
Rys. 7.18. Mapa rozkładu sił na powierzchni membrany, przy obciążeniu ciężarem własnym i śniegiem (opis w tekście)



Rys. 7.19. Końcowy schemat konstrukcji namiotowej pawilonu, po zakończeniu kształtowania formy, wymiary w [cm]

Rozkład sił wewnętrznych w membranie przedstawia rysunek 7.18. Charakterystyczne jest zwiększenie wyężenia w pobliżu ciągu grzbietowego i koncentracje naprężeń w miejscach załamania konturu brzegowego. Ustalona geometria końcowa (rys. 7.19) stała się podstawą do realizacji pawilonu²⁹⁹. Za pomocą programu EASY opracowano wykroje tkaniny do wykonania membrany. Podział powierzchni ustalono przez prowadzenie linii geodezyjnych dla założonej szerokości handlowej tkaniny równej 2.50 m. Schemat podziału i układ brytów przedstawiono na rysunku 7.20. Widok fragmentu zrealizowanego obiektu przedstawiono na rysunku 7.21.

²⁹⁹ Projektowany pawilon został zrealizowany jako obiekt tymczasowy podczas konferencji InStructA' 2011, w czerwcu 2009 r., na terenie kampusu „E”, Politechniki Wrocławskiej.



Rys. 7.20. Wykroje tkaniny do wykonania membrany – schemat podziału na bryty i ich wzajemne rozmieszczenie

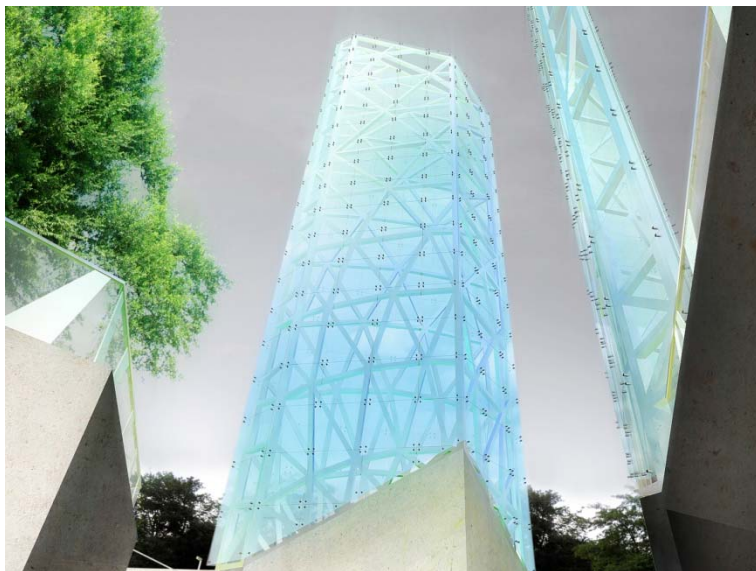


Rys. 7.21. Widok fragmentu wykonanej konstrukcji

7.1.2. Kształtowanie konstrukcji wg topologii kratownicy Michella

Obiekt, który ma stanowić część multimedialnego zespołu ekspozycyjnego³⁰⁰, jest w założeniu zespołem dwóch bliźniaczych wież, na powierzchni których umieszczone będą ekrany projekcyjne LED. Całość obudowana będzie szkłem i ma w założeniu stanowić dużą atrakcję wizualną zarówno w dzień, jak i w nocy (rys. 7.22).

³⁰⁰ Przykład pochodzi z projektu „Brama III Tysiąclecia” we Wrocławiu. Autor – arch. Michał Teller.



Rys. 7.22. Wizualizacja projektowanego obiektu – koncepcja architektoniczna

Ponieważ przezierna forma obiektu z założenia miała eksponować konstrukcję wież przyjęto, że będzie ona wykonana jako stalowa, o układzie prętów odpowiadającym układowi kratownicy Michella. W ramach niniejszego przykładu, omówiono kształtowanie wyższej z zespołu dwóch wież – wieżę A (rys. 7.23).

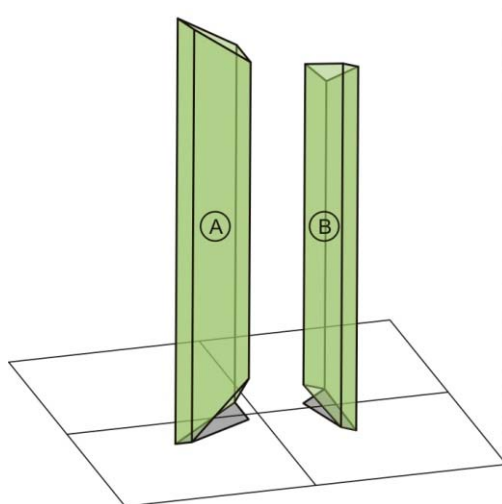
Układ kratownicy Michella został opracowany dla konstrukcji płaskiej³⁰¹, dlatego zdecydowano o jego zwielokrotnieniu przez rozłożenie siatki linii spiralnych na powierzchniach wieży. Rozwinięcie powierzchni i wymiary obiektu, przedstawiono na rysunku 7.24. Sposób generowania siatki linii spiralnych, przedstawiony na rysunku 6.48, został tak zmodyfikowany, aby zapewnić bardziej równomierne wypełnienie powierzchni wież prętami, bez rozrzedzenia siatki w części górnej, ze względu na podparcie szklanej obudowy obiektu.

Wprowadzona modyfikacja polega na zastąpieniu stałego kąta β między promieniami siatki a prętami linii spiralnych przez zależność rekurencyjną określoną wzorem (7.1):

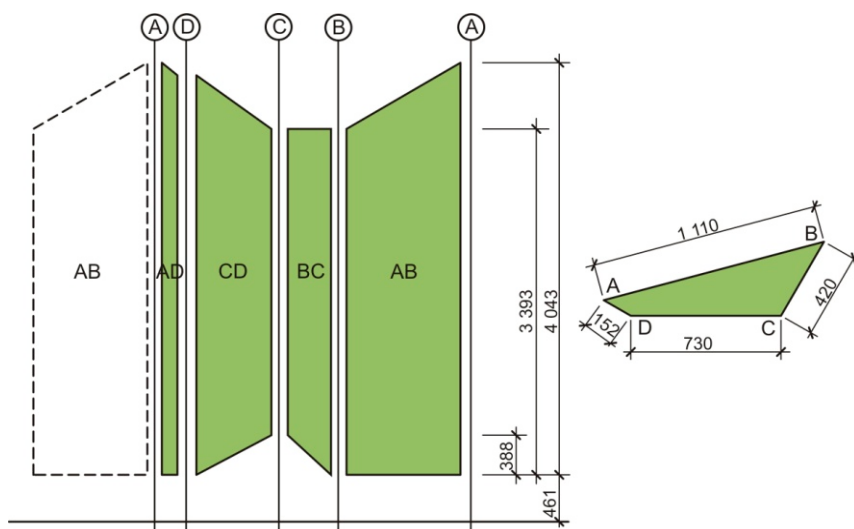
$$\beta_{i+1} = \beta_i + \Delta\beta \quad (7.1)$$

Precyzyjne dopasowanie prętów leżących na ścianach ustawionych w stosunku do siebie pod kątem ostrym wymagało wykonania wielu prób dla różnych parametrów linii spiralnych. Ostatecznie przyjęto: $\beta_1 = 12.5^\circ$, $\Delta\beta = 4^\circ$ i $\phi = 5^\circ$ (rys. 7.25).

³⁰¹ Patrz pkt 6.5.2.



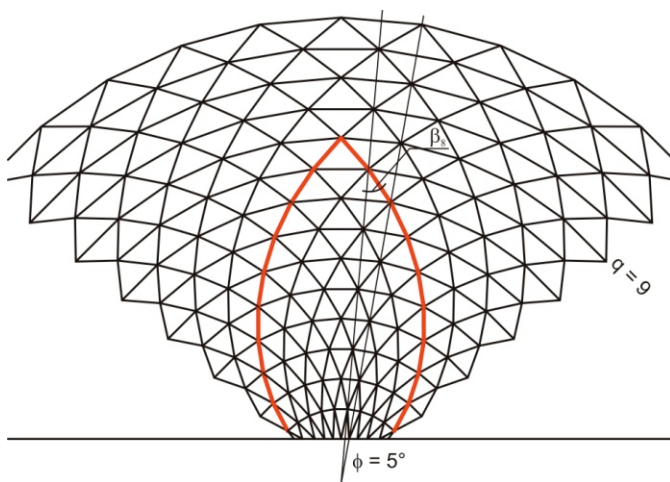
Rys. 7.23. Schemat geometryczny i usytuowanie dwóch wież tworzących obiekt



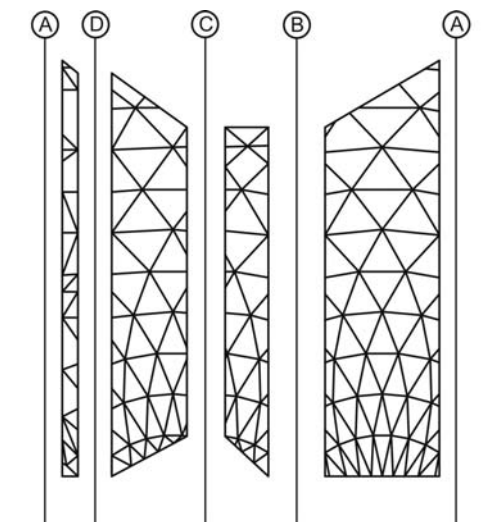
Rys. 7.24. Rozwinięcie powierzchni i rzut wieży A (wyższej),
wymiary w [cm]

Uzyskaną siatkę nałożono na rozwinięcia powierzchni wieży w taki sposób, aby skrajne, leżące najwyżej punkty dolnej krawędzi wieży znalazły się na dolnym promieniu siatki ($q = 0$). Dla punktów leżących poniżej przyjęto pręty leżące na przedłużeniach linii spiralnych (rys. 7.26). Jedynie na najwęższą ścianę wieży,

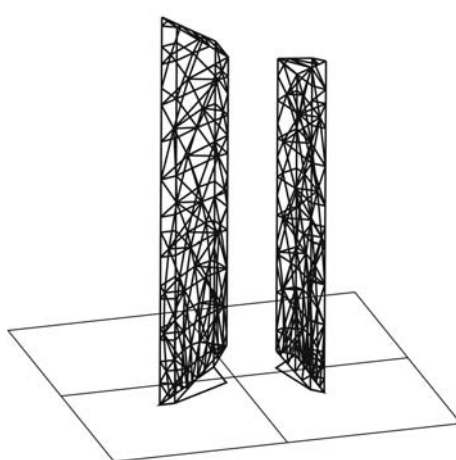
AD, nie nakładano wygenerowanej siatki, przyjmując pręty między węzłami sąsiednich ścian, AB i DC. Pomiedzy korespondującymi spiralami przewidziano skratowanie, które spowodowało, że powstała struktura przypominająca zagięte liście palmy (rys. 7.27 i 7.28b).



Rys. 7.25. Sposób generowania siatki linii spiralnych Michella – osnowy geometrycznej układu prętów na powierzchni wieży

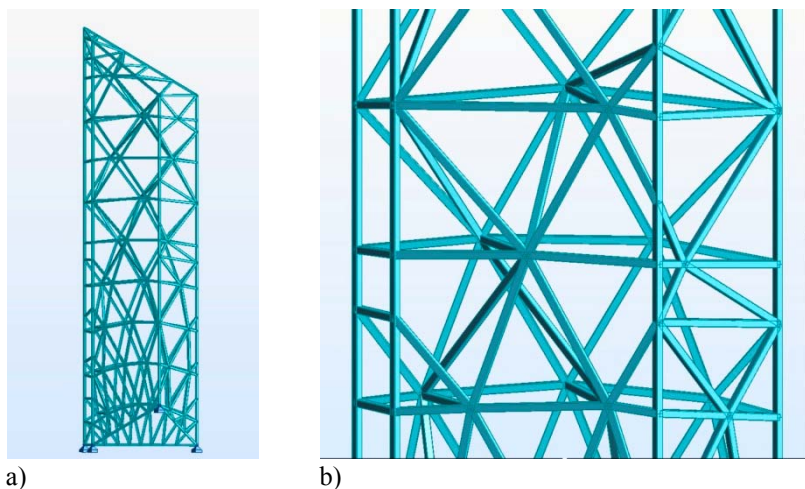


Rys. 7.26. Rozłożenie siatki linii Michella na powierzchniach wieży

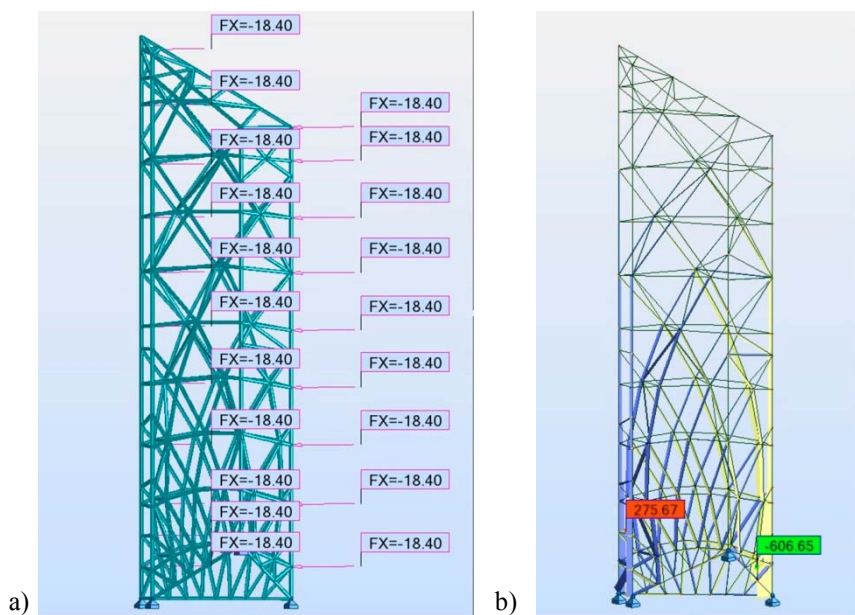


Rys. 7.27. Widok aksonometryczny dwóch wież z nałożonymi siatkami prętów

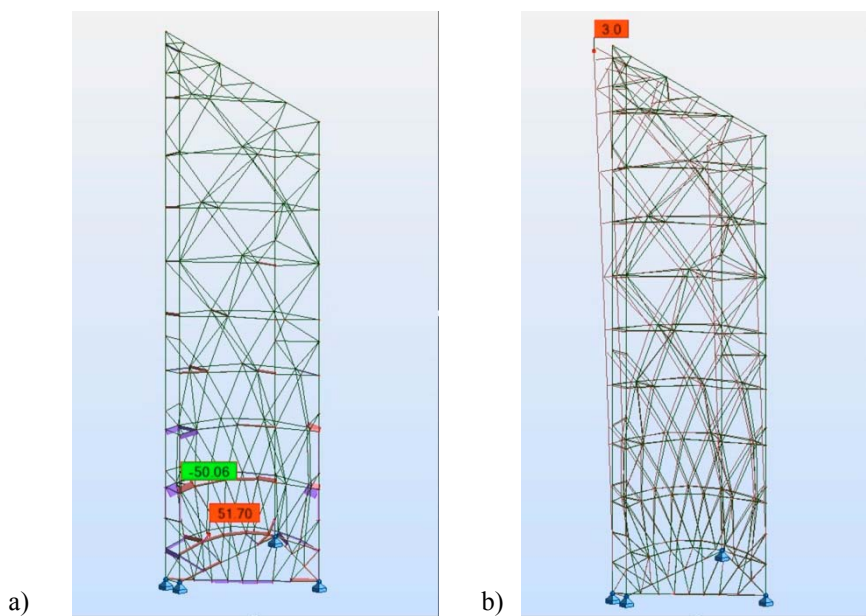
Uzyskany, w wyniku opisanej procedury, system konstrukcyjny, został przeanalizowany pod względem statyczno-wytrzymałościowym. Obliczenia zostały wykonane za pomocą programu Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2011. Do obliczeń przyjęto, że pręty wieży będą wykonane z rur kwadratowych o przekroju $200 \times 200 \times 10$ mm, ze stali S355. Model obliczeniowy konstrukcji przedstawiono na rysunku 7.28. Jako obciążenie przyjęto wiatr działający na ścianę AB, o wartości 0.80 kN/m^2 . Obciążenie to zostało przyłożone w postaci sił skupionych o wartości $F_x = 18.40 \text{ kN}$ do węzłów leżących na przecięciach linii spiralnych z krawędziami A i B (rys. 7.29a).



Rys. 7.28. Model obliczeniowy wieży: a) widok ogólny, b) detal



Rys. 7.29. Analiza statyczna wieży A: a) obciążenie wiatrem, działającym na ścianę AB [kN],
b) wykresy sił osiowych F_x w prętach [kN]

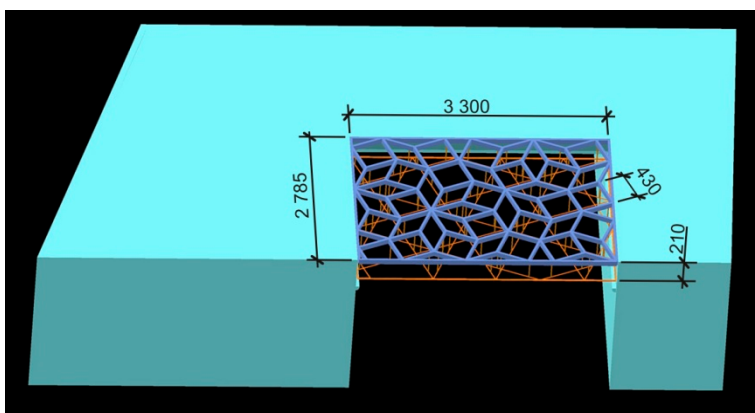


Rys. 7.30. Analiza statyczna wieży A: a) wykresy sił poprzecznych F_z w prętach [kN],
b) wykres odkształceń [cm]

Uzyskany w wyniku analizy obliczeniowej rozkład sił wewnętrznych przedstawiono na rysunkach 7.29b i 7.30a. Maksymalne wartości sił osiowych wynoszą: dla ściskania $F_{xc, \max} = 275.67 \text{ kN}$, a dla rozciągania $F_{xt, \max} = 606.65 \text{ kN}$. Siły poprzeczne mają wartości ekstremalne równe $F_{z, \max} = 51.70 \text{ kN}$ i $F_{z, \min} = 50.06 \text{ kN}$. Rozkład ten zgadza się bardzo dobrze z przyjętymi założeniami. Szczególnie warto podkreślić jest to, że pomimo „uprzestrzennienia” struktury różnic w ukształtowaniu siatki prętów w stosunku do modelu teoretycznego i nieco innego sposobu obciążenia nastąpiło wyraźne rozdzielenie sił ściskających i rozciągających między dwie rodziny linii spiralnych (rys. 7.29b). Zaproponowana forma okazała się również bardzo sztywna, maksymalne przemieszczenie poziome najwyższego węzła wynosi $u_x = 3.0 \text{ cm}$ (rys. 7.30b), co stanowi zaledwie $h/1347$ wysokości wieży. Jest to szczególnie istotne ze względu na wrażliwą na przemieszczenia szklaną okładzinę ścian.

7.1.3. Kształtowanie konstrukcji o topologii tessellacji aperiodycznej

Przeszkłone zadaszenie dziedzińca w budynku użyteczności publicznej w założeniu miało nie tylko spełniać rolę ochronny przed czynnikami atmosferycznymi, ale również stanowić atrakcyjny wizualnie element, świadczący o prestiżu obiektu³⁰². Wymiary dziedzińca wynoszą $33.0 \times 27.8 \text{ m}$. Jest on usytuowany pomiędzy dwiema bryłami budynku głównego i łączącym je wspornikowym nadwieszeniem (rys. 7.31).

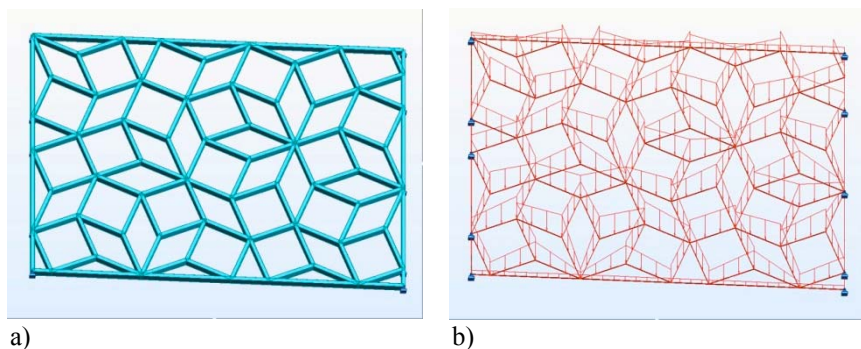


Rys. 7.31. Model bryły budynku z usytuowaniem i wymiarami przekrycia dziedzińca, wymiary w [cm]

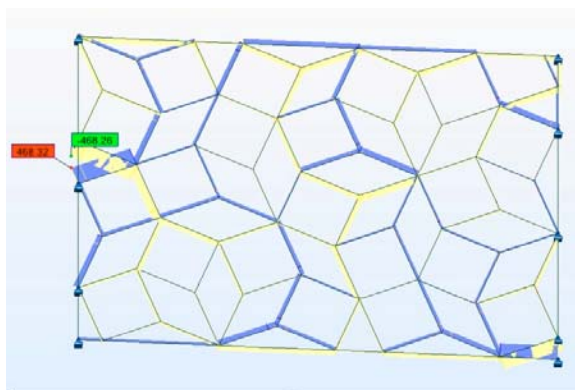
³⁰² Przykład pochodzi z projektu „Rozbudowa Opery Wrocławskiej wraz z budową Sceny Letniej” we Wrocławiu. Autor części architektonicznej opracowania – arch. Bogusław Wowrzeczka.

W jednym z rozpatrywanych wariantów rozwiązań zaproponowany został ruszt płaski, o układzie prętów odpowiadającym tessalacji aperiodycznej. Zaproponowano topologię parkietu Ammanna A5³⁰³ tak dobraną, aby podział powierzchni obejmował pełne płytki, bez ich dzielenia, z zachowaniem długości krawędzi nie większej niż 4,50 m.

W pierwszym przybliżeniu przeanalizowany został ruszt płaski, jednowarstwowy (rys. 7.32a). Obliczenia wykonano za pomocą programu Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2011. Do obliczeń przyjęto, że pręty rusztu będą wykonane z rur prostokątnych, o wymiarach 200×400×10 mm, ze stali S355. Przyjęto obciążenie ciężarem własnym konstrukcji, pokryciem ze szkła oraz obciążenie śniegiem $P_s = 0.80 \text{ kN/m}^2$ na całej powierzchni. Obciążenie zostało rozdzielone na poszczególne pręty rusztu (rys. 7.32b).



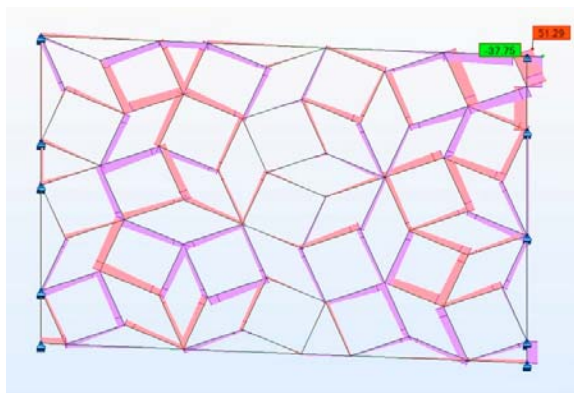
Rys. 7.32. Konstrukcja w formie rusztu jednowarstwowego:
a) schemat, b) rozkład obciążenia śniegiem na pręty



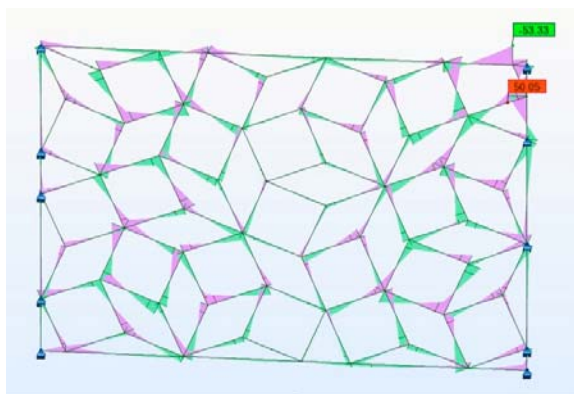
Rys. 7.33. Analiza statyczna rusztu jednowarstwowego
– siły podłużne F_x w prętach [kN]

³⁰³ Patrz pkt 3.2.2 i 6.5.1.

Rozkład, wyznaczonych w wyniku analizy sił wewnętrznych w prętach przedstawiono na rysunkach 7.33, 7.34 i 7.35. Maksymalne wartości sił osiowych wynoszą: dla ściskania $F_{xc, \max} = 468,32 \text{ kN}$, a dla rozciągania $F_{xt, \max} = 468,26 \text{ kN}$. Siły poprzeczne mają wartości ekstremalne równe: $F_{z, \max} = 51,29 \text{ kN}$ i $F_{z, \min} = 37,75 \text{ kN}$. Dla momentów zginających ekstremalne wartości wynoszą: $M_{y, \max} = 50,05 \text{ kN}\cdot\text{m}$ i $M_{y, \min} = 53,33 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Wykres odkształceń konstrukcji przedstawiono na rysunku 7.36. Maksymalna wartość ugięcia wynosi $u_z = 0,6 \text{ cm}$.



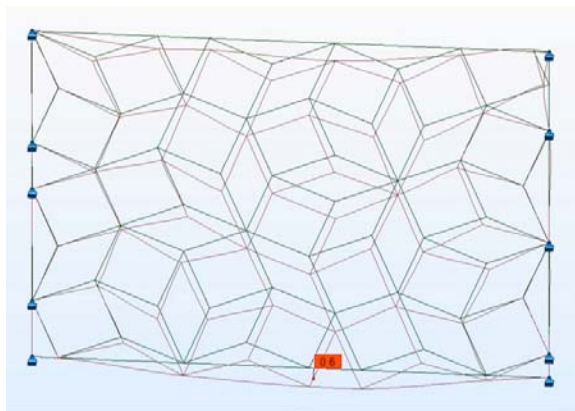
Rys. 7.34. Analiza statyczna rusztu jednowarstwowego
– siły poprzeczne F_z w prętach [kN]



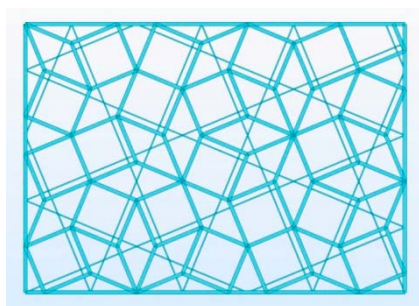
Rys. 7.35. Analiza statyczna rusztu jednowarstwowego
– momenty zginające M_y w prętach [kN·m]

W drugim przybliżeniu analizowaną konstrukcję przekształcono na ruszt trójwarstwowy. Górną warstwę stanowi wcześniej analizowany ruszt o układzie parkietażu A5 (rys. 7.32a), a warstwę dolną – dualny do niego układ prętów o geometrii siatki linii Ammanna (rys. 7.37a). W warstwie środkowej zastosowano słupki w stałych punktach przecięcia (w rzucie) linii Ammanna z krawędziami

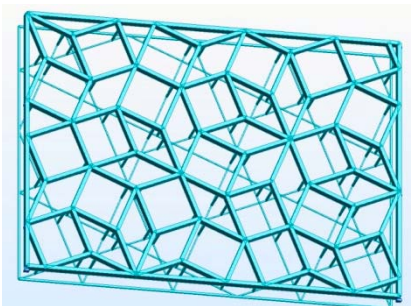
plytek parkietu (7.37b). Odległość osiową między warstwami przyjęto równą 2,10 m. W warstwie dolnej zastosowano ciągłą prętową o średnicy 25 mm, a w warstwie środkowej – słupki z rur okrągłych o średnicy 38 mm.



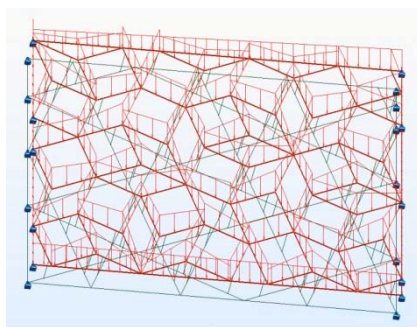
Rys. 7.36. Analiza statyczna rusztu jednowarstwowego
– wykres odkształceń [cm]



a)



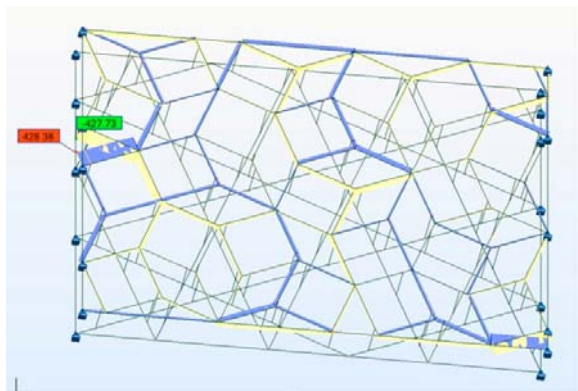
b)



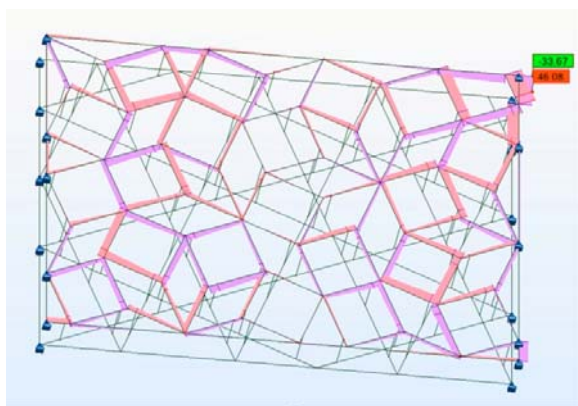
c)

Rys. 7.37. Konstrukcja w formie rusztu trójwarstwowego: a) schemat – widok z góry,
b) schemat – widok aksonometryczny c) rozkład obciążenia śniegiem na pręty

Konstrukcję obciążono tak samo jak w przypadku rusztu jednowarstwowego (rys. 7.37c). Rozkład wyznaczonych w wyniku analizy sił wewnętrznych w prętach przedstawiono na rysunkach 7.38÷7.41. Maksymalne siły osiowe wynoszą: dla ściskania $F_{xc, \max} = 428,38 \text{ kN}$, a dla rozciągania $F_{xt, \max} = 427,73 \text{ kN}$. Siły poprzeczne mają wartości ekstremalne równe: $F_{z, \max} = 46,08 \text{ kN}$ i $F_{z, \min} = 33,67 \text{ kN}$. Dla momentów zginających, ekstremalne wartości wynoszą: $M_{y, \max} = 44,89 \text{ kNm}$ i $M_{y, \min} = 47,57 \text{ kNm}$. Moment skręcając wynosi $M_{x, \max} = 4,18 \text{ kNm}$. Wykres odkształceń konstrukcji przedstawiono na rysunku 7.42. Maksymalna wartość ugięcia wynosi $u_z = 0,7 \text{ cm}$.



Rys. 7.38. Analiza statyczna rusztu trójwarstwowego
– siły podłużne F_x w prętach, [kN]

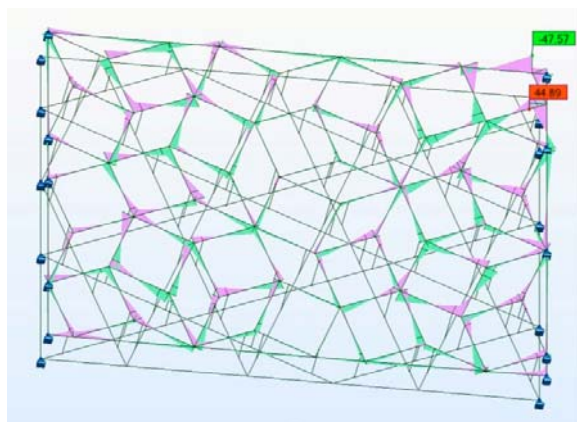


Rys. 7.39. Analiza statyczna rusztu trójwarstwowego
– siły poprzeczne F_z w prętach, [kN]

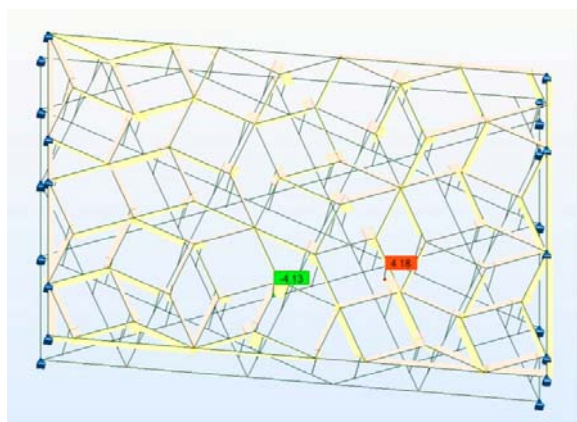
Porównanie wyników obliczeń dla rusztu jednowarstwowego z wynikami obliczeń dla rusztu trójwarstwowego, pokazuje, że rozkład sił osiowych i poprzecznych oraz momentów zginających zmienił się w nieznacznym stopniu. W przypadku rusztu trójwarstwowego zmniejszyły się ich wartości. W warstwie górnej

pojawili się momenty skręcające o niewielkiej wartości. Ugięcie praktycznie nie zmieniło się. Prowadzi to do wniosku, że przekroje prętów warstwy górnej, przyjęte wstępnie jak dla rusztu jednowarstwowego, mogłyby ulec w procesie dalszej optymalizacji zmniejszeniu.

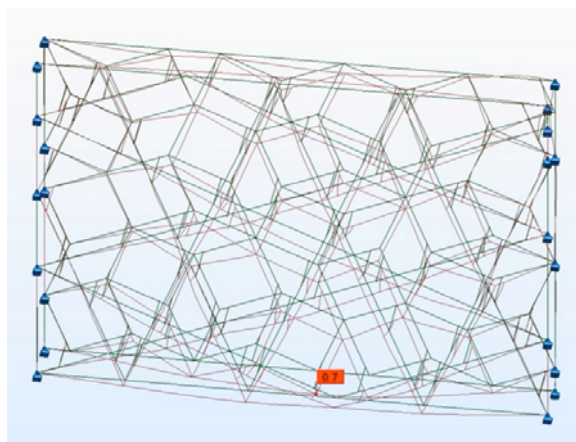
Wprowadzenie do systemu konstrukcyjnego dodatkowej warstwy nie jest zabiegiem nowatorskim. W przykładzie tym istotne jest to, że dolna warstwa została przyjęta w układzie siatek linii Ammanna, który swoje źródło ma w topologicznej organizacji aperiodycznej warstwy górnej. Układ ten przez swoją dualność okazał się strukturalnie efektywny, a jednocześnie pozwalał zachować silne złudzenie przypadkowości w rozmieszczeniu poszczególnych elementów.



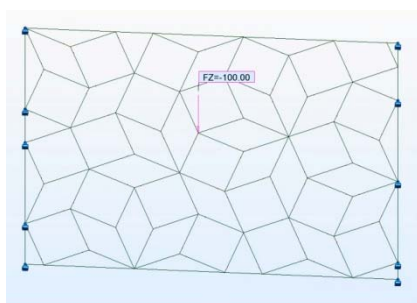
Rys. 7.40. Analiza statyczna rusztu trójwarstwowego
– momenty zginające M_y w prętach, [kN·m]



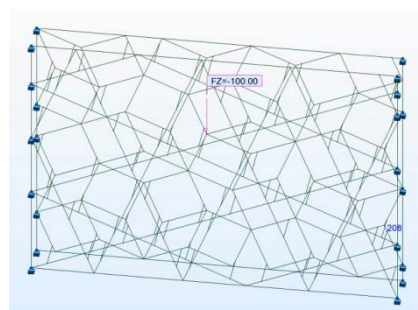
Rys. 7.41. Analiza statyczna rusztu trójwarstwowego
– momenty skręcające M_x w prętach, [kN·m]



Rys. 7.42. Analiza statyczna rusztu trójwarstwowego
– wykres odkształceń, [cm]

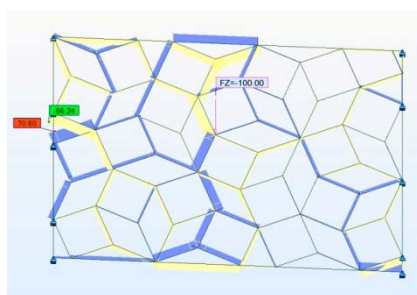


a)

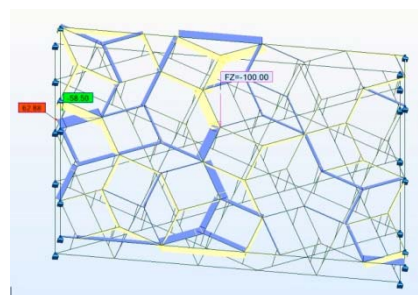


b)

Rys. 7.43. Porównanie dystrybucji siły skupionej w strukturze
– schemat obciążenia siłą $F_z = 100$ kN: a) ruszt jednowarstwowy, b) ruszt trójwarstwowy



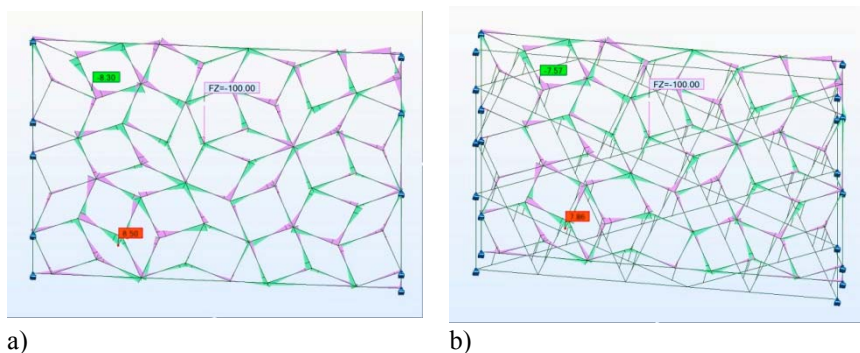
a)



b)

Rys. 7.44. Porównanie dystrybucji siły skupionej w strukturze
siły podłużne F_x w prętach [kN] : a) ruszt jednowarstwowy, b) ruszt trójwarstwowy

Dla oceny efektywności dystrybucji sił przez struktury o układzie aperiodycznym wykonano analizę przypadku obciążenia pojedynczą siłą skupioną, przyłożoną w pobliżu środka struktury. Analizowany był zarówno ruszt jednowarstwowy (rys. 7.43a), jak i ruszt trójwarstwowy (rys. 7.43b). W obu przypadkach przyjęto siłę o wartości $F_z = 100$ kN.



Rys. 7.45. Porównanie dystrybucji siły skupionej w strukturze momenty zginające M_y w prętach [kN·m] : a) ruszt jednowarstwowy, b) ruszt trójwarstwowy

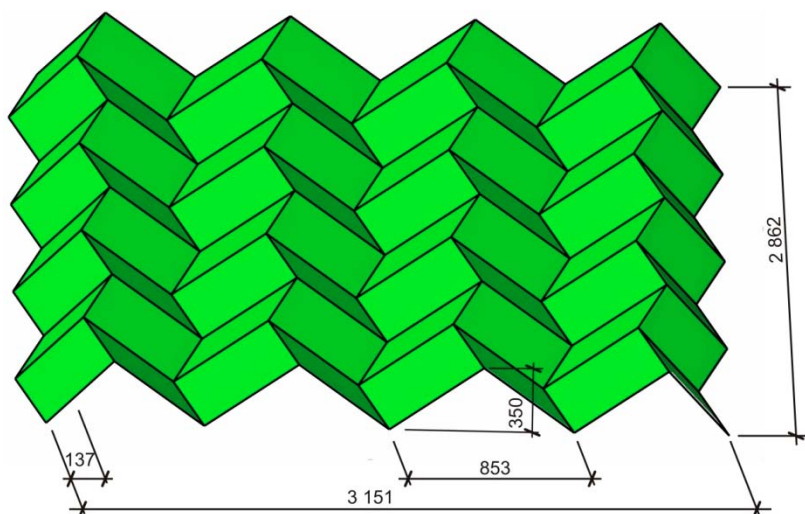
Rozkład sił wewnętrznych dla obu rusztów przedstawiono na rysunkach 7.44 i 7.45. Dla rusztu jednowarstwowego maksymalne wartości sił osiowych wynoszą: dla ściskania $F_{xc, \max} = 70,60$ kN, a dla rozciągania $F_{xt, \max} = 66,24$ kN, a ekstremalne wartości momentów zginających wynoszą: $M_{y, \max} = 8,50$ kN·m i $M_{y, \min} = -8,30$ kN·m. Dla rusztu trójwarstwowego maksymalne wartości sił osiowych wynoszą: dla ściskania $F_{xc, \max} = 62,88$ kN, a dla rozciągania $F_{xt, \max} = 58,50$ kN, a ekstremalne wartości momentów zginających wynoszą: $M_{y, \max} = 7,86$ kN·m i $M_{y, \min} = -7,57$ kN·m.

Dystrybucja sił wewnętrznych w obu przypadkach jest podobna. Można zauważyć, że siły osiowe wywołane obciążeniem skupionym, są przekazywane do węzłów brzegowych za pośrednictwem stosunkowo małej liczby prętów. Sugeruje to, że topologia rusztu aperiodycznego sprzyja efektywności systemu konstrukcyjnego.

7.1.4. Kształtowanie konstrukcji o topologii origami

Hala sportowa do uprawiania sportów wspinaczkowych ma wymiary w rzucie 31.5×28.6 m. Przewidywane jest jej wykorzystywanie w różnych konfiguracjach: do celów treningowych i organizowania imprez sportowych. Przekrycie tego obiektu powinno umożliwiać mocowanie do niego zmiennych elementów wyposażenia wewnętrznego. Ponadto, jego forma, powinna nawiązywać do przeznaczenia obiektu.

Zaproponowano przekrycie żelbetowe, tarczownicowe, o układzie fałdowym. Do kształtowania przekrycia zastosowano metodę orgiami. Założono, że analizowana będzie konstrukcja o konfiguracji Miura-ori³⁰⁴. Proces kształtowania formy przeprowadzono za pomocą programu Freeform Origami³⁰⁵. Przyjęto jako wzór wyjściowy płaski układ o czterech liniach grzbietowych i trzech „dolinach”, przedstawiony na rysunku 6.65. Za pomocą oprogramowania przeprowadzano proces wypiętrzania konstrukcji, aż do uzyskania założonej wysokości 3.50 m. Ogólny schemat konstrukcji po zakończeniu kształtowania przedstawiono na rysunku 7.46.



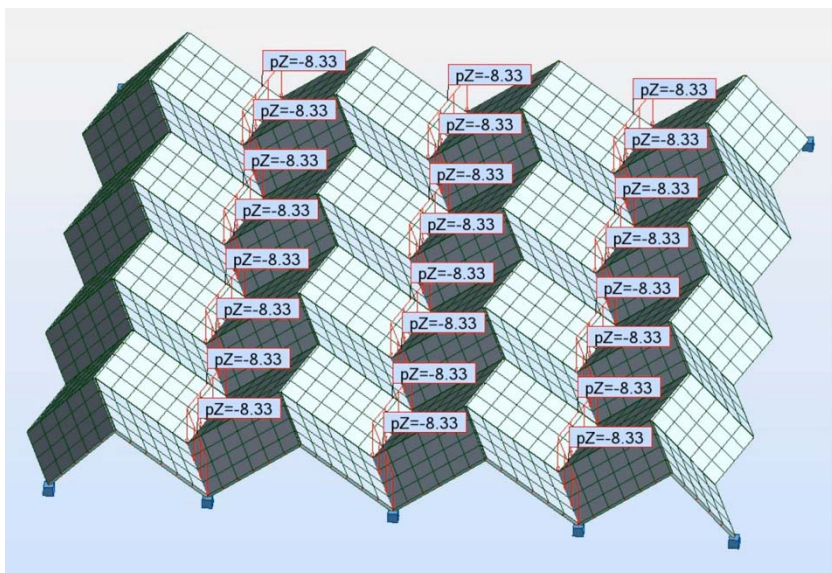
Rys. 7.46. Schemat ogólny konstrukcji przekrycia, wymiary w [cm]

Dla zaproponowanego systemu konstrukcyjnego przeprowadzono analizę statyczną. Obliczenia przeprowadzono za pomocą programu Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2011. Do obliczeń przyjęto, że przekrycie będzie wykonane z płyt żelbetowych o grubości 15 cm, z betonu C25/30, zbrojonych stalą AIIIIN. Przyjęto obciążenie ciężarem własnym konstrukcji i śniegiem, o wartości 0.7 kN/m^2 . Ze względu na ukształtowanie przekrycia przyjęto, że całość śniegu zsunie się, tworząc worki śnieżne. Obciążenie to przyłożono jako obciążenie liniowe, o wartości $P_s = 8.33 \text{ kN/m}^2$, wzdłuż „dolin” tarczownicy. Model obliczeniowy konstrukcji wraz ze schematem obciążenia przedstawiono na rysunku 7.47.

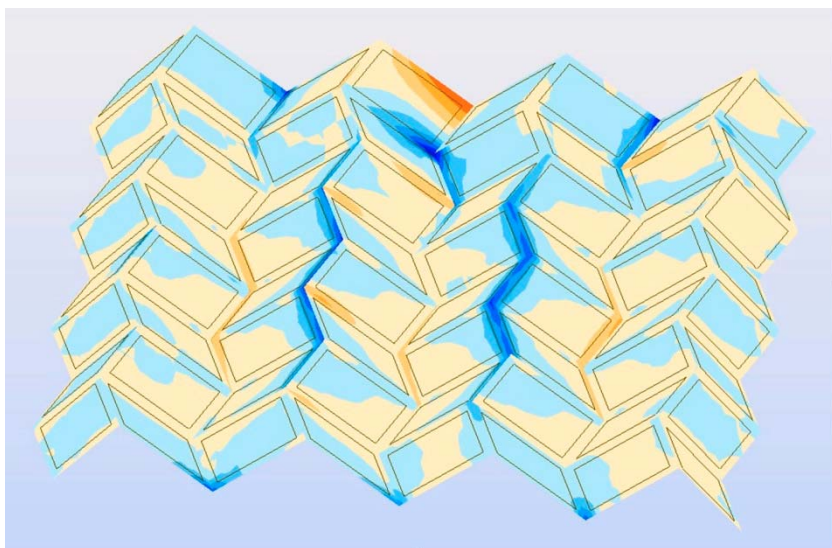
Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci mapy rozkładu sił membranowych N (rys. 7.48 i 7.49) i mapy rozkładu momentów zginających M (rys. 7.50 i 7.51).

³⁰⁴ Patrz pkt 6.5.5.

³⁰⁵ Program opracowany przez Tomohiro Tachi. Korzystano z wersji 0.1.8 Alpha programu.



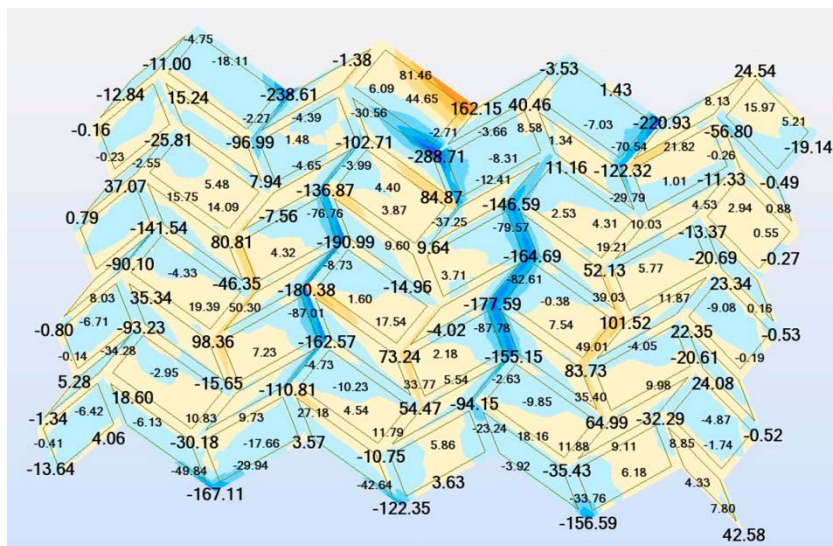
Rys. 7.47. Model obliczeniowy konstrukcji – obciążenie ciężarem własnym i śniegiem [kN/m]



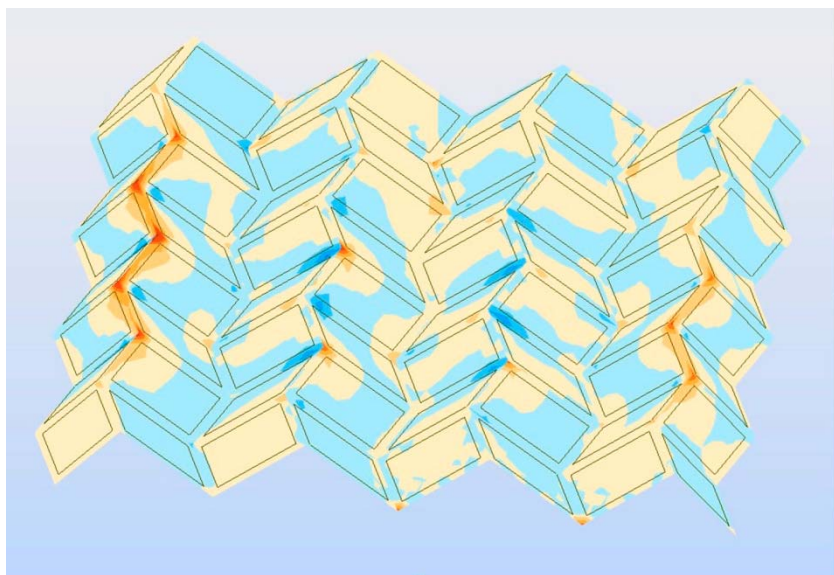
Rys. 7.48. Mapa rozkładu sił membranowych N w konstrukcji

Widoczna jest koncentracja strumieni sił wewnętrznych wzdłuż linii grzbietów tarczownicy i stosunkowo małe wykorzystanie obszarów wewnętrznych poszczególnych paneli. Umożliwiłoby to w przypadku innego przeznaczenia obiektu, wykonanie otworów doświetlających wnętrze. Rozkład głównych naprężeń jest

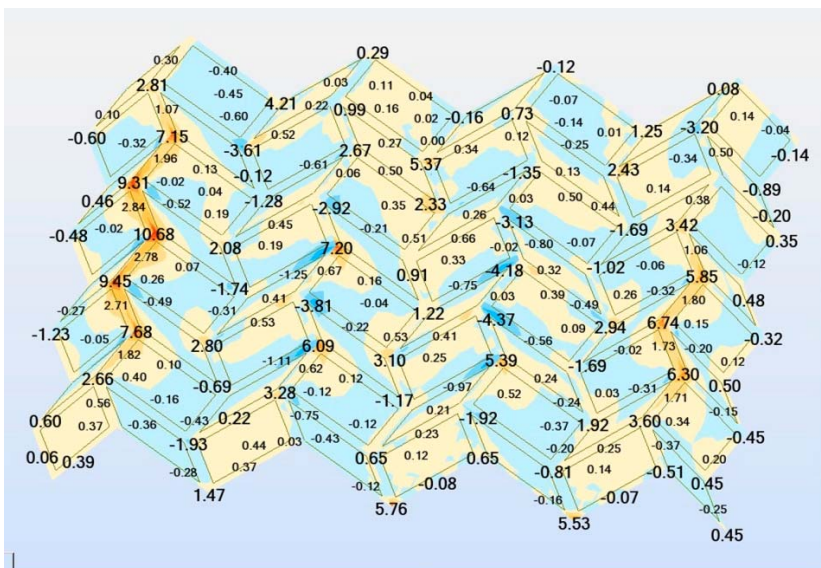
analogiczny do rozkładu sił membranowych N , a ich wartość w miejscach lokalnych koncentracji nie przekracza $\sigma_{\max} \leq 12$ MPa. Ugięcia konstrukcji nie przekraczają wartości $u_z = 0.4$ cm. Rozkład ugięć przedstawiono na rysunku 7.52.



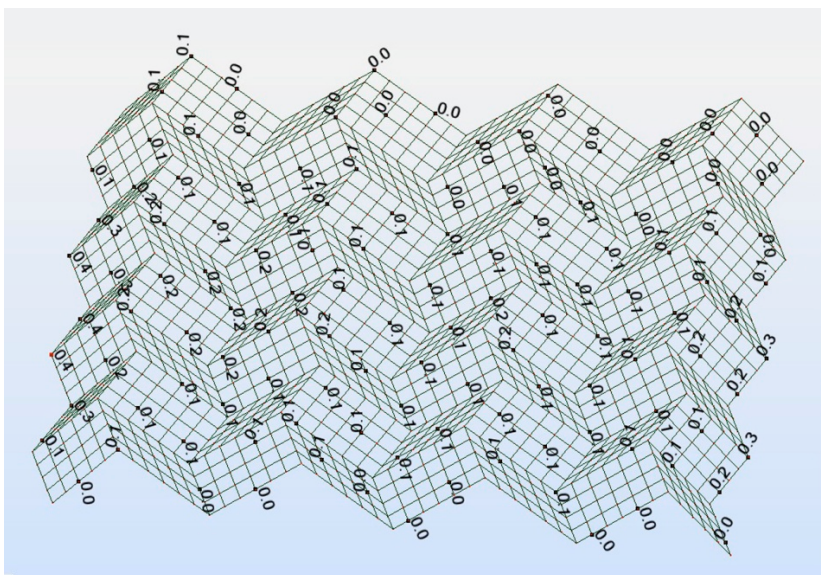
Rys. 7.49. Mapa rozkładu sił membranowych N w konstrukcji – wartości [kN/m]



Rys. 7.50. Mapa rozkładu sił momentów zginających M w konstrukcji



Rys. 7.51. Mapa rozkładu sił momentów zginających M w konstrukcji – wartości [kNm/m]



Rys. 7.52. Mapa deformacji konstrukcji – wartości [cm]

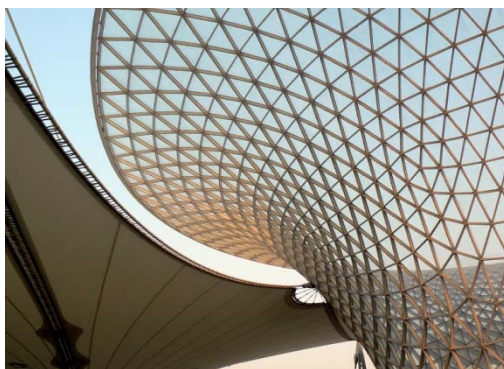
Żelbetowe konstrukcje tarczownicowe były popularne w połowie ubiegłego stulecia, konkurując przez pewien czas z konstrukcjami powłokowymi. Zastosowanie nowych metod kształtowania, np. origami, może być sposobem na przywrócenie ich atrakcyjności w architekturze.

7.2. Nowe metody kształtowania formy w wybranych obiektach architektury współczesnej

Przedstawione przykłady pokazują, że w kształtowaniu formy konstrukcyjnej możliwe jest korzystanie z metod kształtowania odwołujących się do odmiennych niż dotychczas źródeł inspiracji. Niektórzy wybitni architekci współcześni dostrzegli możliwości stwarzane przez tego rodzaju metody i stosują je w swojej twórczości. Przedstawiono dalej przykłady kilku wyróżniających się obiektów, które zostały zaprojektowane w taki sposób.

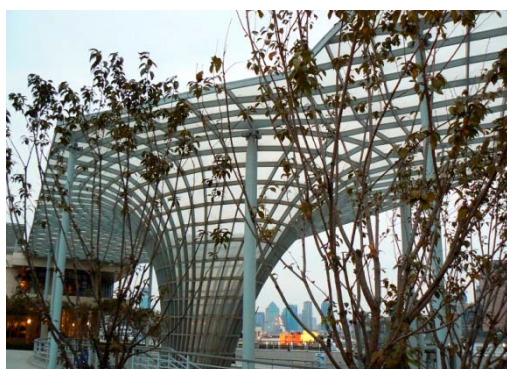


a)

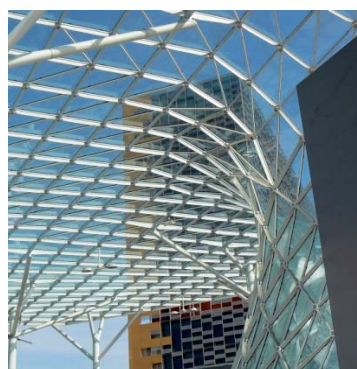


b)

Rys. 7.53. Główna aleja na wystawie EXPO 2010 w Szanghaju – Axe (proj. arch. SBA, proj. konstr. Jan Knippers): a) przeszklona, stalowa powłoka prętowa w strefie wejściowej, b) połączenie przekrycia membranowego ze stalową powłoką prętową



a)



b)

Rys. 7.54. Przeszkłone, stalowe powłoki prętowe nad przestrzeniami publicznymi: a) ShiLiuPu Ferry Terminal Roofs – Bund, Szanghaj (proj. arch. Shanghai Xian Dai Architectural Design Group, proj. konstr. RFR), b) tereny targowe Fiera Milano – Mediolan (proj. arch. M. Fuksas, proj. konstr. Schlaich, Bergermann & Partners)

Możliwości kształtowania konstrukcji na powierzchniach minimalnych nie ograniczają się tylko do powłok membranowych i żelbetowych. W ostatnim okresie powstało kilka obiektów, w których na powierzchni minimalnej rozłożona jest siatka prętów – powłok prętowych. Znane przykłady z ostatniego okresu to przekrycie głównej alei na wystawie EXPO 2010 w Szanghaju (rys. 7.53), dach terminalu promów w tym samym mieście (rys. 7.54a), czy zadaszenie pasażu na terenach targowych w Mediolanie (rys. 7.54b). Można zauważyć podobieństwo między układem prętów w tych obiektach a numerycznymi modelami membran tekstylnych (np. rys. 7.17). Podobieństwo to nie jest przypadkowe, ponieważ w procesie kształtowania tego typu konstrukcji zazwyczaj używane jest oprogramowanie do projektowania membran, a dopiero w końcowej fazie następuje „odwrócenie” konstrukcji – zamiana formy rozciąganej na ścisną³⁰⁶.

Inny, nowatorski sposób podejścia to nadawanie znanym rozwiązaniom konstrukcyjnym nowych walorów architektonicznych przez ich optymalizację. Rozwinęło się kilka metodologii optymalizacyjnych, z których każda ma swój specyficzny zakres zastosowań. Jedną z najstarszych, zastosowaną do płyt żelbetowych, polega na dostosowaniu układu żeber w płycie do kierunków trajektorii głównych naprężeń. Poza żebrami grubość płyty zostaje istotnie zmniejszona. Takie rozwiązanie zastosował już na początku lat 50. ubiegłego wieku, P.L. Nervi, w przedziałni wełny Gatti w Rzymie (rys. 7.55a). Inna metodologia została zaproponowana przez P. Dombernowsky'ego w projekcie studialnym stropu. Korzystając z tzw. metody homogenizacji³⁰⁷, uzyskał on zupełnie inny, ale również atrakcyjny wizualnie układ żeber w podpartej punktowo płycie stropowej (rys. 7.55b).



a)



b)

Rys. 7.55. Przykłady optymalizacji układów punktowo podpartych płyt żebrowych:

- a) żebra rozmieszczone wzdłuż trajektorii głównych naprężeń – przedziałnia wełny Gatti, Rzym (proj. arch. Carlo Castelli Guidi, proj. konstr. Pier Luigi Nervi), b) żebra kształtowane w procesie optymalizacji ewolucyjnej – projekt studialny (proj. Per Dombernowsky)

³⁰⁶ Również tacy twórcy, jak A. Gaudi i H. Isler, korzystali z odwróconych modeli fizycznych.

³⁰⁷ Metoda homogenizacji została sformułowana w pracy: Bendsoe, M.P., Kikuchi, N. *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 71(2), (1988) s. 197–224.

Z innej metody – optymalizacji ewolucyjnej, tzw. ESO³⁰⁸, korzystali A. Isozaki i M. Sasaki, projektując dźwigary o dużej rozpiętości, stanowiące konstrukcję podpierającą przekrycie centrum konferencyjnego w Katarze. Metoda ESO pozwala na wprowadzenie różnego rodzaju ograniczeń w procesie optymalizacji, np. narzucenia płaskiego kształtu płyty stropowej, określenia maksymalnego rozstawu punktów podparcia itp. Efektem kształtowania jest niezwykle, przypominająca drzewo, konstrukcja, której forma decyduje o wyrazie architektonicznym obiektu (rys. 7.56). Ci sami projektanci zaproponowali wcześniej podobne, chociaż w mniejszej skali, rozwiązanie dla nowego dworca kolejowego we Florencji.



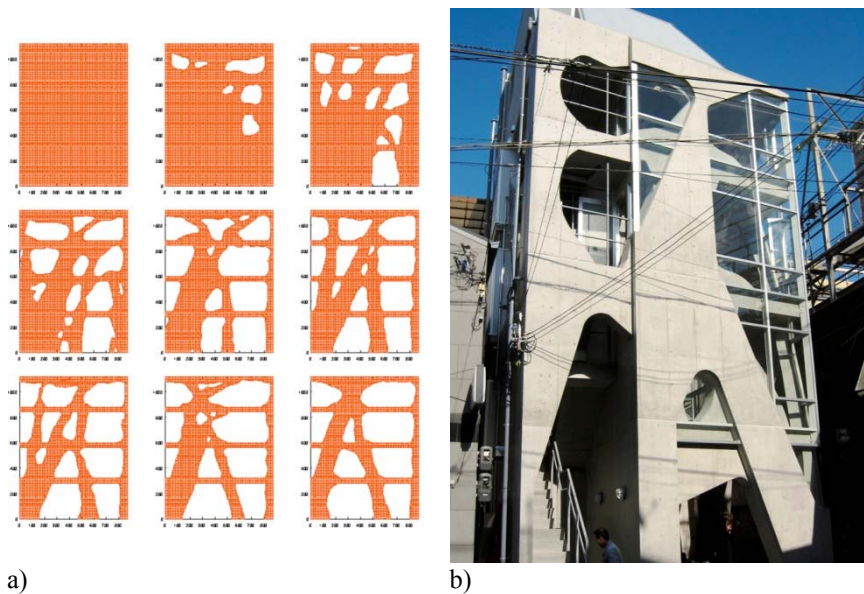
Rys. 7.56. Optymalizacja ewolucyjna konstrukcji o dużej rozpiętości
– Education City Convention Centre, Katar
(proj. arch. Arta Isozaki, proj. konstr. Mutsuro Sasaki)

Tę samą metodę, w nieco zmodyfikowanej wersji, pod nazwą BESO³⁰⁹ (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization) zastosował H. Ohmori w projekcie Akutagawa River Side, w Japonii. Główny element nośny w tym obiekcie, a jednocześnie ściana frontowa, decydująca o jego wizualnym odbiorze, została poddana optymalizacji, w wyniku której znaczna część materiału została usunięta. Nie tylko przyczyniło się to do oszczędności materiałowych, ale umożliwiło wprowadzenie znacznych przeszkleń o nietypowych kształtach, korzystnie wpływających na wygląd elewacji. Na rysunku 7.57a przedstawione zostały kolejne fazy procesu optymalizacji ściany, a na rysunku 7.57b – widok budynku z zewnątrz, po zakończeniu realizacji.

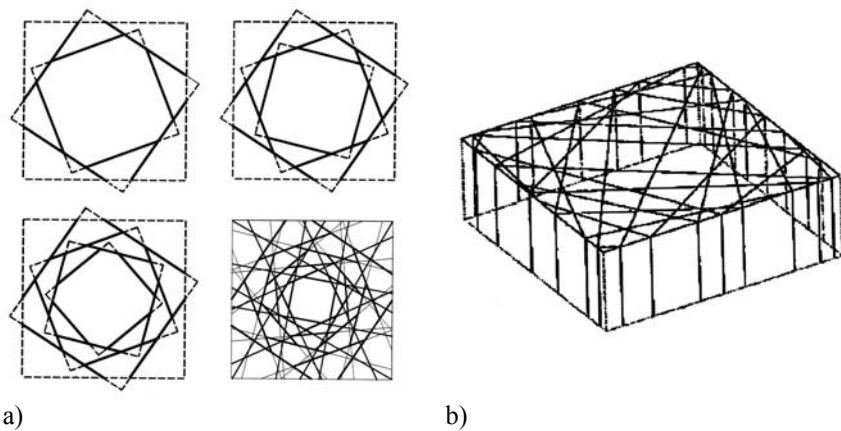
³⁰⁸ Ang. *Evolutionary Structural Optimisation*. Metoda ESO została sformułowana w pracy: Huang, E X., Xie, Y.M. *Evolutionary topology optimization of continuum structure: methods and applications*, ostatnie wydanie: John Wiley & Sons New York (2010).

³⁰⁹ Metoda BESO została zaproponowana przez H. Ohmori w 1999 r. jako rozwinięcie wcześniejszej metody ESO.

Interesujące wydaje się spostrzeżenie, że formy przedstawionych obiektów, kształtowane przez optymalizację ewolucyjną, wykazują podobieństwo do przebiegu strumieni sił w metodzie STM (rozdz. 6.5.4).



Rys. 7.57. Optymalizacja ściany metodą ewolucyjną – Akutagawa River Side Project, Japonia (proj. Hiroshi Ohmori)



Rys. 7.58. Serpentine Gallery Pavilion 2002, Londyn – kolejne kroki w generowaniu systemu konstrukcyjnego (opis w tekście)

Poszukiwanie formy o wyglądzie jak najbardziej losowym, wręcz chaotycznym, było celem Toyo Ito i Mutsuro Sasaki, podczas pracy nad projektem Serpentine Gallery Pavilion 2002, w londyńskim Hyde Parku³¹⁰. Autorzy wręcz stwierdzają, że „...naszym celem stało się znalezienie reguły, algorytmu, który generowałby chaos, z jego wrodzonym pięknem, ale posiadający ukryty głębiej porządek³¹¹”. Konstrukcja pawilonu rozpoczęła się od podziału kwadratu, wyznaczającego obrys obiektu, za pomocą odcinków stanowiących fragmenty takiego samego kwadratu, ale obróconego o pewien kąt. W następnym kroku, w obrócony kwadrat wpisywany jest kolejny, mniejszy, również obrócony. Fragmenty kwadratów, wystające poza kwadrat, w który były wpisywane, były odrzucane. Sekwencja ta była powtórzona siedem razy (rys. 7.58a). W efekcie, powstała konstrukcja, sprawiająca wrażenie całkowicie losowego podziału powierzchni za pomocą linii, takiego jak na przykład siatka spękań pokrywy lodowej przedstawiona na rysunku 6.38. Jest to jednak w rzeczywistości układ ram wzajemnie zależnych³¹², stanowiący wydajny system konstrukcyjny (rys. 7.58b). Na rysunku 7.59 przedstawiono widok wnętrza zrealizowanego pawilonu.



a)



b)

Rys. 7.59. Generowanie form pozornie losowych: a) Serpentine Gallery Pavilion 2002, Londyn (proj. arch. Toyo Ito, proj. konstr. Mutsuro Sasaki), b) dom handlowy Tod's Omotesando, Tokio (proj. arch. Arata Isozaki, proj. konstr. OAK Structural Design Office)

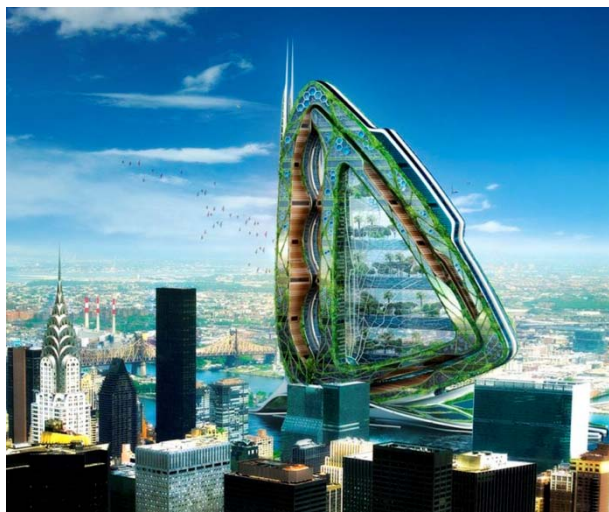
³¹⁰ Serpentine Gallery Pavilion jest wznoszony na jeden sezon, każdorazowo przez inny zespół zaproszonych projektantów, o uznanej, światowej renomie.

³¹¹ Cytat ze: Meredith, M., Aranda/Lasch, Sasaki, M. *From Control to Design. Parametric/Algorithmic Architecture*. Actar (2008), s. 36, oraz osobista rozmowa z M. Sasaki.

³¹² Patrz pkt 3.2.1.

Podobny efekt uzyskał również Arata Isozaki w budynku domu handlowego Tods Omotesando w Tokio. Jest to obiekt w skali znacznie większej niż Serpentine Gallery Pavilion i w innym standardzie wykonania – jest to obiekt stały. Został też zaprojektowany w inny sposób. Jednak układ żelbetowych prętów, oplatających ściany budynku lub rozrzuconych na powierzchni tych ścian, sprawia podobne wrażenie przypadkowości i chaosu.

Inspiracje formami naturalnymi, omówione w rozdziale 6, mogą uwidaczniać się nie tylko w kształtowaniu systemu konstrukcyjnego, ale także w wielkiej skali, jako bezpośrednia i dosłowna podstawa kształtowania bryły i estetyki obiektu. Przedstawiony dalej projekt studialny młodego belgijskiego architekta Vincenta Callebauta, jest to samowystarczalny budynek ekologiczny – „farma”, zaprojektowany dla Nowego Jorku. Obiekt jest w istocie gigantyczną kopią skrzydła ważki i w swojej strukturze powtarza wszystkie istotne jego elementy, np. podziały Wronoja³¹³ na przezroczystym wypełnieniu wnętrza obiektu (rys. 7.60).

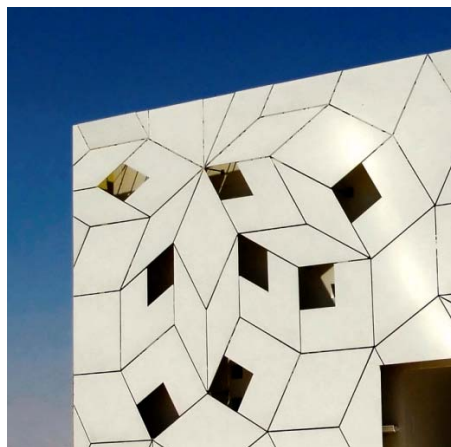


Rys. 7.60. Samowystarczalny budynek ekologiczny (Dragonfly Vertical Farm) – projekt studialny dla Nowego Jorku (arch. Vincent Callebaut)

Aperiodyczne podziały powierzchni można odnaleźć w elewacji zaprojektowanej przez A. Isozaki dla centrum kulturalnego Liberal Arts And Sciences Building w Katarze. Zastosował on w tym budynku „drugą skórę” – dodatkową elewację poprawiającą warunki klimatyczne wewnątrz obiektu. Do jej wykonania użyte zostały panele aluminiowe w kształcie równoległoboków, o kątach 90°, 60° i 30°. Pozwoliło to uzyskać wzór odpowiadający quasi-kryształicznemu podziałom

³¹³ Patrz pkt 6.2.1.

Penrose'a³¹⁴. Podobny wzór zastosowano również w ażurowych osłonach przeciwsłonecznych w oknach i na dziedzińcu budynku. Widok fragmentu elewacji przedstawiono na rysunku 7.61.



Rys. 7.61. Elewacja o podziale aperiodycznym – Liberal Arts And Sciences Building, Katar (proj. arch. Arata Isozaki)

Jeden z najciekawszych pomysłów w zakresie kształtowania formy, jaki pojawił się w ostatnim okresie, to pełna integracja systemu konstrukcyjnego i architektonicznego kształtowania wnętrza, zastosowana w projekcie Opery Stołecznej Taichung na Tajwanie. W projekcie tym, autorstwa Toyo Ito, zastosowano wiele zakrzywionych powierzchni, które przechodząc jedna w drugą zarówno w kierunku poziomym, jak i pionowym tworzą niezwykłą formę obiektu. Powierzchnie te zostały zaprojektowane jako katenoidy, jedne z powierzchni minimalnych definiowane poprzez układ równań parametrycznych [134].

Intencją projektanta było „stworzenie przestrzeni bez orientacji”³¹⁵. Powierzchnie mają dzielić przestrzeń na „groty”, „zagłębienia”, które mogą stanowić zarówno wewnętrzną, jak i zewnętrzną część budynku. Gładkość powierzchni (w sensie matematycznym) jest podyktowana nie tylko względami estetycznymi, ale również efektywnością systemu konstrukcyjnego. Elementy powłokowe nie są zróżnicowane ze względu na to, czy stanowią ścianę, czy strop, a ich przejścia są płynne. Na rysunkach 7.6a i 7.6b przedstawiono model budynku w trakcie generowania formy, powierzchnie katenoid były wpisywane w prostokątne kontury brzegowe, pozwalające precyzyjnie kontrolować ich kształt. Budynek znajduje się obecnie w trakcie realizacji. Na rysunku 7.6c przedstawiono sposób wykonywania powłokowych elementów żelbetowych.

³¹⁴ patrz pkt 3.2.2.

³¹⁵ Cytat za: Meredith, M., Aranda/Lasch, Sasaki M., op. cit., s. 55.



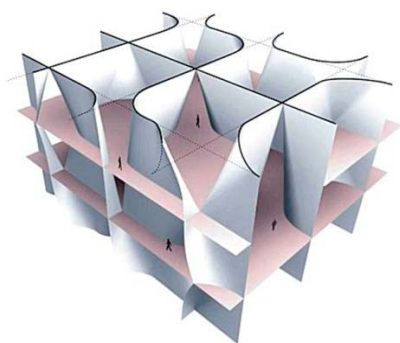
a)



b)



c)



d)

Rys. 7.62. Budynki kształtowane na podstawie nieskończonych wielościanów siódlowych – gąbki (labirynty): a), b) Opera Stołeczna Taichung, Tajwan – model fizyczny obiektu (proj. arch. Toyo Ito, proj. konstr. Arup), c) Opera Stołeczna Taichung, Tajwan – fragment obiektu w czasie realizacji, d) nowy budynek Berkeley Art Museum, San Francisco – koncepcja (proj. arch. Toyo Ito)

Ten sam projektant zaproponował również podobne rozwiązanie dla nowego budynku Berkeley Art Museum w San Francisco (rys. 7.6d).

Nie można w tych obiektach nie dostrzec bezpośredniej relacji do opisanych w rozdziale 3.3.4, nieskończonych wielościanów siodłowych, nazywanych gąbkami lub labiryntami, których korzystne właściwości konstrukcyjne można było przewidzieć na podstawie tablicy okresowej wielościanów z rozdziału 3.3.3.

7.3. Uwagi końcowe

Przedstawione projekty zostały opracowane przez architektów o różnym dorobku i różnej drodze twórczej. Wychodzili oni z różnych przesłanek estetycznych, stosowali odmienne metody i algorytmy projektowania. Wspólnym mianownikiem ich pracy jest dążenie do uzyskania oryginalnej, twórczej formy, poprzez zastosowanie racjonalnego sposobu jej kształtowania.

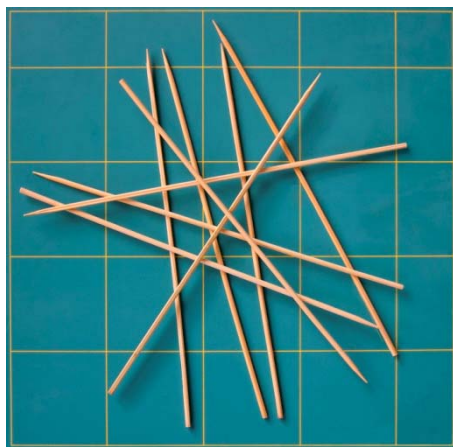
W opisanym projekcie Serpentine Gallery Pavilion 2002, Toyo Ito i Mutsuro Sasaki, poszukując wrażenia chaosu, rozpoczęli od szkicu z kilkoma przypadkowymi kreskami. Potraktowali to jednak jedynie jako punkt wyjścia³¹⁶. Kształtując strukturę i zarazem formę obiektu, wypracowali sposób takiego rozmieszczenia prętów, że tworzą one układ o wielostopniowej hierarchii, kolejno podpierających się grup elementów (rys. 7.58). Hierarchia ta, jest dodatkowo rozdzielona na elementy prętowe i zabezpieczające je przed zwirzeniem, panele. Złożoność została osiągnięta przez rekurencyjne powtarzanie prostej reguły, z której wywodzi się geometria struktury i jej detal. Możliwe było oczywiście uzyskanie „chaotycznego” rozmieszczenia prętów w inny sposób. Na przykład przez przypadkowe rozsypianie patyczków na płaszczyźnie, tak jak to przedstawiono na rysunku 7.63 lub korzystając z powszechnie dostępnych generatorów liczb losowych. Tak wygenerowany układ byłby z pewnością przypadkowy, ale jego strukturalna efektywność również byłaby przypadkowa.

System konstrukcyjny stadionu olimpijskiego w Pekinie – „ptasiego gniazda”, robi wrażenie przypadkowego i chaotycznego (rys. 6.31b), ale w rzeczywistości, tworzy go układ regularnie rozmieszczonych ram kratowych (rys. 7.64).

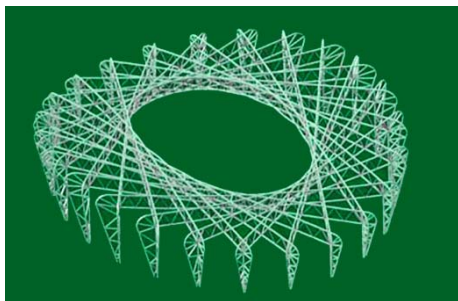
W dosłownym naśladowaniu chaosu tkwi błąd metodologiczny. Złożoność jest ukrytym porządkiem, a nie chaosem. Nie należy mylić wrażenia z istotą rzeczy. W kształtowaniu swobodnych form architektonicznych, dekonstruktywizm może być tylko pozorny, a przypadkowość – jedynie wrażeniem wizualnym. Kluczowe jest ciągle poszukiwanie ukrytych reguł, stojących za takim efektem i umiejętne stosowanie ich w praktyce.

³¹⁶ Patrz: Meredith, M., Aranda/Lasch, Sasaki, M. op. cit., s. 36–43.

Możliwe są różne strategie postępowania. Korzystając z inspiracji formami naturalnymi, można odnaleźć wiele gotowych prototypów form, których strukturalna efektywność jest bezpośrednio widoczna: powierzchnie minimalne (błonki mydlane), powłoki (muszle), sieci cięgnowe (pajęczyna) itp. Takie inspiracje mogą być stosowane niemal dosłownie. Można również znaleźć formy, które są pozornie przypadkowe, ale analiza ich właściwości topologicznych, np. symetrii statystycznej³¹⁷, prowadzi do wniosku o ich strukturalnej przydatności. Wychodząc od takich form, przez szereg dopuszczalnych topologicznie przekształceń, można uzyskać poprawny system konstrukcyjny, o pozornie losowym układzie.



Rys. 7.63. Losowy układ prętów – przypadkowe rozrzucenie na płaszczyźnie



Rys. 7.64. Główne elementy systemu konstrukcyjnego stadionu olimpijskiego w Pekinie

³¹⁷ Patrz pkt 2.3.5.

Innym sposobem podejścia są rozważania, dla których punktem wyjścia są podziały i wypełnienia przestrzeni obiektami tej samej lub niższej klasy – tesselacje. Mogą one być opisane i usystematyzowane za pomocą prostych charakterystyk topologicznych. Następnie, dzięki tablicy okresowej wielościanów, można ocenić ich właściwości strukturalne i ewentualnie poddać dalszym przekształceniom, prowadzącym do uzyskania końcowej formy. Kolejnym sposobem jest przekształcanie stosunkowo prostych, na poziomie percepcji wizualnej systemów, przez optymalizację ewolucyjną.

W rozdziale 7.1 przedstawiono przykłady posługiwania się różnymi, opisanymi wcześniej strategiami, obejmującymi zarówno korzystanie z inspiracji naturalnych, jak i przekształcenia tesselacji płaszczyzny. Wraz z przykładami realizacji z rozdziału 7.2 pokazują one, że możliwe jest zaproponowanie takich sposobów kształtowania form konstrukcyjnych, które pozwolą uzyskiwać swobodne formy architektoniczne, oparte na racjonalnych przesłankach strukturalnych.

Rozdział 8. Podsumowanie

Współczesna architektura, poza swym inżynierskim aspektem, nie odnalazła się jeszcze: styl budynku jest określony nie przez potrzeby, lecz przez kaprys projektanta.

Claude Fayette Bragdon³¹⁸

Powodem napisania niniejszej pracy było zauważalne oddalenie się kształtowania formy architektonicznej od kształtowania systemu konstrukcyjnego. Wspomniane w rozdziale pierwszym tendencje, określane jako „free form design”, powstały na gruncie nowych metod komputerowego generowania form geometrycznych. Jako przykład można podać stosowanie elastycznych powierzchni, definiowanych za pomocą punktów kontrolnych – NURBS, czy adaptację algorytmów używanych w produkcji filmów animowanych do tworzenia złożonych modeli przestrzennych³¹⁹. Takie narzędzia dają projektantom niemal nieograniczoną swobodę tworzenia, a co więcej zmieniają w pewnym stopniu sposób myślenia, uniezależniając od ortogonalnych preferencji związanych z posługiwaniem się tradycyjną deską kreślarską.

Autor słów przytoczonych na wstępie, Claude Bragdon, dodawał, że trwa proces wypracowywania form architektonicznych, odpowiednich do nowych możliwości konstrukcyjnych [16, s. 2]. Po stu latach, które upłynęły od tego stwierdzenia, sytuacja wydaje się być odwrotna. Pojawiła się potrzeba wypracowania takich metod kształtowania systemów konstrukcyjnych, które nie tylko „nadażą” za wyzwaniami stawianymi przez nowe formy geometryczne, ale same będą mogły stanowić źródło inspiracji dla tworzenia nowych form.

Dotychczas obiekty architektoniczne były tak kształtowane, że ich system konstrukcyjny informował o swojej stabilności i niezawodności. Nowy paradygmat estetyki, który w ostatnich latach zdominował twórczość wielu architektów,

³¹⁸ Claude Fayette Bragdon *Projective Ornament*, 1915 r. [16, s. 2].

³¹⁹ Przykładem może być moduł Nucleus firmy Autodesk, który powstał poprzez przeniesienie części kodu znanego programu do animacji – Maya, do środowiska programu AutoCAD.

różnych pokoleń, stara się takiej informacji nie manifestować. Co więcej, często przewrotnie, stara się stworzyć przeciwne wrażenie. Środkami wyrazu są tu: duże rozpiętości, organiczne formy, przypadkowość, nieciągłość systemu konstrukcyjnego. Trwa stałe poszukiwanie nowych źródeł inspiracji.

Autor niniejszej pracy uważa, że tendencja taka powinna być traktowana jak wszystkie style i mody w architekturze, które pojawiały się na przestrzeni czasu – ani gorzej ani lepiej. Bezrefleksyjny entuzjazm z jednej strony, a inercja i opór z drugiej, nie wpłyną korzystnie na relacje architekt – konstruktor, które ze swej natury i tak są obciążone pewnym napięciem. System konstrukcyjny powinien być zgodny z formą obiektu i stanowić dla niej wsparcie. Dotychczas taka współzależność była oczywista i nie ma powodu, aby w nowych uwarunkowaniach estetycznych było inaczej.

Praca niniejsza traktuje o wspólnych topologicznych podstawach kształtowania form strukturalnych. Matematyczny język opisu – język formy, przedstawiony w rozdziale drugim, pozwala sprowadzić opis form do poziomu podstawowego, do czysto topologicznych relacji występowania, incydencji, walentności, spójności, pozwala odkryć to, co w nich jest wspólne – bazę geometryczną.

Mnogość obserwowanych w przyrodzie obiektów, swoim kształtem, występującymi w nich wzorami, relacjami symetrii itp. wywołuje inspirację istotną ze względu na kształtowanie formy. Nie jest ona przypadkowa, gdyż stoją za nią ogólne reguły podziału i składania, zmiany wymiaru topologicznego i rzutowania, które powodują, że obserwowany przez nas świat jest spójny. Wzory te możemy następnie odnaleźć w wytworach cywilizacji: wyrobach artystycznych, tkaninach, posadzkach, wiązaniach cegieł, a dalej w wielkich konstrukcjach namiotowych, powłokowych, czy siatkowych.

Traktując formy strukturalne jako system połączonych obiektów różnych klas, odwołujemy się do tych wzorów, widząc w nich prototypy form i korzystając z dostarczanych przez matematyczny język formy, metod opisu i analizy właściwości. Możliwe jest dzięki temu tworzenie modeli topologicznych, które, korzystając z różnych źródeł inspiracji, mogą być interpretowane jako modele form strukturalnych. Metodami tworzenia takich modeli jest poświęcony rozdział trzeci.

W rozdziale czwartym omówiono metody takiego przekształcania modeli topologicznych, które zmieniając istotnie ich początkową konfigurację, pozwalają jednocześnie zachować właściwości strukturalne i zdolność do przestrzennej rekonstrukcji.

Zmiana wymiaru przestrzeni, w której mogą być realizowane modele topologiczne, czyli z jednej strony redukcja do niższego wymiaru, a z drugiej – rekonstrukcja przestrzenna, są to dwa, wzajemnie dualne, aspekty kreowania formy. Jej istotą jest podział jednych obiektów za pomocą innych, w uporządkowany hierarchicznie sposób. Opisana w rozdziale piątym rekonstrukcja przestrzenna nie tylko umożliwia zmianę klasy obiektów, ale również – przez zależności między modelami w różnych wymiarach – dostarcza narzędzi oceny właściwości mechanicznych struktur.

W rozdziale szóstym omówiono sposoby poszukiwania naturalnych źródeł inspiracji, ilustrując to następnie przykładami metaforycznego potraktowania takich inspiracji w architekturze. W dalszej części przedstawiono wybrane procedury kształtowania form strukturalnych. Omówiono przykłady metod znanych wcześniej, jak kształtowanie na powierzchniach minimalnych, czy kształtowanie w oparciu o topologię kratownic Michella, a także zaproponowano nowe metody, takie jak zastosowanie tesselacji aperiodycznych, w szczególności parkietaży z liniami Ammanna, metodę rekonstrukcji topologicznej, generowanie siatek przez iloczyn kartezjański grafów i metodę origami.

Rozdział siódmy dotyczy analizy przydatności różnych metod kształtowania formy na przykładzie opracowań własnych i wybranych prac znanych twórców z ostatniego okresu. Przedstawiono w nim jak można uzyskać wizualny efekt przypadkowości, przez tworzenie złożonych układów, w których porządek wewnętrzny nie jest bezpośrednio widoczny, a tektonika formy architektonicznej jest nieodróżnialna od jej systemu konstrukcyjnego.

Przedstawione w pracy metody odwoływania się do nieoczywistych źródeł inspiracji mają w zamierzeniu przyczynić się do powrotu sytuacji, w której system konstrukcyjny będzie podstawą kształtowania formy obiektu. Jest to próba odpowiedzi na nowe, przedstawione na początku rozdziału, wyzwania.

Działalność twórcza, jak twierdził Norwid, nie podlega prawu zachowania energii³²⁰. Intencją autora było wykazanie, że rozwinięte ostatnio metody matematyczne, szczególnie z dziedziny geometrii dyskretnej, pozwalają operować pojęciami, które dotychczas były domeną intuicji, a przez to – przywrócić projektowaniu formy jego pierwotny, twórczy sens.

³²⁰ Cytat za: Lech Jęczynek, op. cit, s. 50.

Bibliografia

- [1] Alexander Ch., *Notes on the synthesis of form*, Harvard University Press. Cambridge (1968).
- [2] Alexander Ch., Ishikawa, S., Silverstein, M. et al., *A Pattern Language: Towns, Building. Construction*. Oxford University Press, New York (1977).
- [3] Alexandroff P., *Elementary concepts of topology*. Dover Publications, New York (1961).
- [4] Altszuler H.S., *Elementy twórczości inżynierskiej*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa (1983).
- [5] Ammann R., Grünbaum, B., Shephard, G.C., Aperiodic tilings, *Discrete and Computational Geometry*, Vol. 8, No. 1 (1992), s. 1–25.
- [6] Bach K., Burkhardt, B., Otto, F., *Forming bubbles*. IL 18, Institute für Leichte Flächen-tragwerke, Universität Stuttgart (1987).
- [7] Baer S.C., *The Discovery of Space Frames with Fivefold Symmetry*. W: Hargittai I. (ed), *Fivefold Symmetry*. World Scientific Publishing Co., Singapore (1992).
- [8] Ball Ph., *The self-made tapestry. Pattern formation in nature*. Oxford University Press, New York (2001).
- [9] Barabasi A-L., Albert R., Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, No. 74 (2003), 47–97.
- [10] Barabási A-L., Oltvai Z.N., Network Biology: Understanding The Cell's Functional Organization. *Nature Reviews Genetics*, No. 5 (2004), 101–113.
- [11] Baracs J., Juxtapositions. *Structural Topology*, Vol. 1 (1979), 59–72.
- [12] Bielajew M.M., *Wytrzymałość materiałów*. Wydawnictwo MON, Warszawa (1956).
- [13] Bollobás B., *Graph Theory*. Springer, New York (1979).
- [14] Bondy J.A., Murty, U.S.R., *Graph Theory*, Springer, New York (2008).
- [15] Borrego J., *Space Grid Structures. Skeletal Frameworks and Stressed-Skin Systems*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1968).
- [16] Bragdon C., *Projective Ornament*. Manas Press, 1915. Reprint: Cosimo Classics, New York (2005).
- [17] Bulatov M.S., *Геометрическая гармонизация в архитектуре средней Азии IX–XV вв*. Издательство Наука, Москва (1988).
- [18] Burt M., *Spatial arrangement and polyhedra with curved surfaces and their architectural applications*. Technion, Haifa (1966).
- [19] Burt M., *The periodic table of the polyhedral universe*. Technion, Haifa (1996).
- [20] Burt M., The Periodic Table of the Polyhedral Universe. *International Journal of Space Structures*, Vol. 26, No. 2 (2011), 75–93.
- [21] Burt M., Periodic Sponge Polyhedra – Expanding the Domain. W: Guerri, C. (ed) *Form and Symmetry. Proceedings of the 7th Interdisciplinary Congress and Exhibition of ISIS-Symmetry*, Buenos Aires, *Symmetry: Art and Science – The Quarterly of the ISIS-Symmetry*, Vol. 19, No. 1–4 (2007), 500–504.

- [22] Burt M., Periodic Sponge Surfaces and Uniform Sponge Polyhedra in Nature and in the Realm of the Theoretically Imaginable. Visual Mathematics, Vol. 9, No. 4 (2007), <http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/index.html>
- [23] Burt M., Uniform Networks in 3-dimensional Space. Visual Mathematics, Vol. 10, No. 3 (2008). Dostępne w Internecie (dostęp: 06.11.2008): <http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/index.html>.
- [24] Burt M., korespondencja prywatna.
- [25] Burt M., Wester T., The Periodic Table of the Polyhedral Universe and the Plate-Lattice Duality. Proceedings of the IASS Symposium on Shell and Spatial Structures 1, Singapore (1997), 187–196.
- [26] Burt M., Wester T., The Basic Structural Content of the Periodic Table of the Polyhedral Universe. Proceedings of the IASS Symposium on Shell and Spatial Structures 2, Singapore (1997), 869–876.
- [27] Chartrand G., Lesniak L., *Graphs & Digraphs*. Wadsworth& Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove (1986).
- [28] Conway J.H., Burgiel H., Goodman-Strauss Ch., *The Symmetries of Things*. A K Peters Ltd., Wellesley (2008).
- [29] Coxeter H.S.M., *Regular Polytopes*. Dover Publications, New York (1973).
- [30] Coxeter H.S.M., *Regular and Semiregular Polyhedra*. W: Senechal, M., Fleck, G.(eds) Shaping Space: A Polyhedral Approach, Birkhäuser, Boston (1988).
- [31] Coxeter H.S.M., *Introduction to Geometry*. John Wiley and Sons, New York (1989); wyd. polskie: Wstęp do geometrii dawnej i nowej. Tłum. R. Krasnodebski, PWN, Warszawa (1967).
- [32] Crapo H., Structural Rigidity. Structural Topology, No. 1 (1979) , 26–45.
- [33] Crapo H., Structural Topology, or The Fine Art of Rediscovery. The Mathematical Intelligencer, Vol. 19. No. 4 (1997), 27–35.
- [34] Crapo H., Ryan J., Spatial Realizations of Linear Scenes. Structural Topology, No. 13 (1986), 33–68.
- [35] Crapo H., Whiteley W., Plane self stresses and projected polyhedra I: The basic pattern. Structural Topology, No. 20 (1993), 55–78.
- [36] Crapo H., Whiteley W., Spaces of stresses, projections and parallel drawings for spherical polyhedra. Contrib. Alg. Geom., Vol. 35 (1994), 259–281.
- [37] Cremona L., Graphical Statics. Two Treatises on the Graphical Calculus and Reciprocal Figures in Graphical Statics (Translations of “Il Calcolo Grafico” and “Le figure reciproche nelle statica graphica”, 1872), Oxford University Press, London (1890).
- [38] Cremona L., Leudesdorf Ch. (translator), Elements Of Projective Geometry (1893). Kessinger Publishing, LLC (2008).
- [39] Cundy H.M., Rollett A.P., Mathematical models. Oxford University Press, Oxford (1961), wyd. polskie: Modele matematyczne. Tłum. R. Duda, PWN, Warszawa (1967).
- [40] Diestel R., *Graph Theory*. Springer, Berlin Heidelberg (2006).
- [41] Dietrych J., *System i Konstrukcja*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa (1978).
- [42] Dormer K.J., *Fundamental tissue geometry for biologist*. Cambridge University Pres, New York (1980).
- [43] Duda, R., *Wprowadzenie do topologii*. Część I. *Topologia ogólna*. PWN, Warszawa (1986).
- [44] Ellers E.W., Grünbaum B., McMullen P., Weiss A.I., H.S.M. Coxeter (1907–2003). W: Notices of the AMS, Vol. 50, No.10 (Nov. 2003).
- [45] Emmerich G.D., Réseau W., Davis R.M. (ed), Proceedings of the International Conference on Space Structures, Blackwell, Oxford (1967), 1058–1072.
- [46] Fowler D.R., Meinhardt H., Prusinkiewicz P., *Modelling seashells*. Proceedings of SIGGRAPH’92 International Conference. Computer Graphics 26 (2) (1992), 379–387.
- [47] Galileo G., *Two new sciences*. Crew H., De Salvio A. (transl.), Dover Publications, New York (1954).
- [48] Geresz J., *Zarys podstawowych idei teorii Thoma*. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław (1980).

- [49] Grabińska T., *Philosophy in Science*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej (2003).
- [50] Grabińska T., *Od nauki do metafizyki*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Wrocław (1998).
- [51] Grünbaum B., *Levels of orderliness: Global and local symmetry*. W: Hargitai I., Laurent T.C. (eds), *Symmetry 2000, Proceedings of a symposium at the Wenner-Gren Centre, Stockholm*. Portland Press, London, Vol. I (2002), 51–61.
- [52] Grünbaum B., *Convex polytopes*. Springer, New York (2003).
- [53] Grünbaum B., *Are your polyhedra the same as my polyhedra?*. W: Aronov B., Basu S., Pach J., Sharir M. (eds), *Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift*. Springer, New York (2003), 461–488.
- [54] Grünbaum B., *Graphs of Polyhedra; Polyhedra as Graphs*. *Discrete Mathematics*, Vol. 307, Issues 3–5, 6 (2007), 445–463.
- [55] Grünbaum B., Barnette D.W., *On Steinitz's Theorem Concerning Convex 3-Polytopes and on Some Properties of Planar Graphs*. W: Chartrand, G., Kapoor, S. (eds) *The Many Facets of Graph Theory*. Springer, New York (1969).
- [56] Grünbaum B., Grünbaum Z., *Symmetry in Moorish and Other Ornaments*. *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 12, No. 3–4, Part 2 (1986), 641–653.
- [57] Grünbaum, B., Shephard, G.C., *Some Comments on "Juxtapositions"*. *Structural Topology*, No. 3 (1979), 58–61.
- [58] Grünbaum B., Shephard G.C., *Tilings and Patterns*. Freeman, New York (1987).
- [59] Haeckel E., *Art Forms from Nature*. Dover Publications Inc., Mineola, New York (2004).
- [60] Haider S.G., Strutt J.W., Shier J.H., *Networks, Structure and Form*. W: Supple, W.J. (ed), *Proceedings of the 2nd International Conference on Space Structures*, University of Surrey, Guildford (1975), 655–662.
- [61] Hammack R., Imrich W., Klavžar S., *Handbook of Product Graphs*. CRC Press, Boca Raton (2011).
- [62] Hayes B., *Graph Theory in Practice: Part I*, *American Scientist*, Vol. 88, No. 1 (2000), 9–13.
- [63] Hegedűs I., *Self stresses of projected networks of polyhedra. The proof of Baracs conjecture*. *International Journal of Solids and Structures* (preprint).
- [64] Heidegger M., *Wprowadzenie do metafizyki*. Wydawnictwo KR, Warszawa 2006.
- [65] Henk M., Richter-Geber J., Ziegler G.M., *Basic Properties of Convex Polytopes*. W: Goodman J.E., O'Rourke J. (eds), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. Second Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, Florida (2004), 353–383.
- [66] Imrich W., Klavžar S., *Product Graphs: Structure and Recognition*. Wiley-Interscience, New York (2000).
- [67] Imrich W., Klavžar S., Rall D.F., *Topics in Graph Theory. Graphs and Their Cartesian Product*. A.K. Peters Ltd., Wellesley (2008).
- [68] Isenberg C., *The Science of Soap Films and Soap Bubbles*. Dover Publications, New York (1992).
- [69] Jammer M., *Concepts of space: The history of space in physics*. Harvard University Press, Cambridge (1969).
- [70] Jankowski A., *Topologia algebraiczna*. W: Kordos M., Skwarczyński M., Zawadowski W. (eds), *Leksykon matematyczny*. Wiedza Powszechna, Warszawa (1993), 640–664.
- [71] Janson S., Łuczak T., Ruciński A., *Random Graphs*. John Wiley & Sons, New York (2000).
- [72] Kappraff J., *Connections. The geometric bridge between art and science*. World Scientific Publishing Co., Singapore (2001).
- [73] Kappraff J., *Growth in Plants: A Study in Number*. *Forma*, Vol. 19, No. 4 (2004), 335–354.
- [74] Kaveh A., Nouri M., *Weighted Graph Products for Configuration Processing of Planar and Space Structures*. *International Journal of Space Structures*, Vol. 24, No. 1 (2009), 13–26.
- [75] Kepler J., *Harmonies of the World* (S.W. Hawking – editor). Running Press Book Publishers, Philadelphia (2005).

- [76] Koj L., *Powinności w nauce*. T. 1. *Określenie i poznawalność powinności*. Wydawnictwo UMCS, Lublin (1998).
- [77] Koppelkamm S., *Künstliche Paradise*. Gewächshäuser und Wintergarten des 19. Jahrhunderts. Ernst & Sohn, Berlin (1988).
- [78] Kusner R., Sullivan J.M., Comparing the Weaire-Phelan equal-volume foam to Kelvin's foam. *Forma* 11 (3), 233–242 (1996).
- [79] Lakatos I., *Dowody i refutacje: Logika odkrycia matematycznego*. Tikkun, Warszawa (2005).
- [80] Lalvani H., Structures on Hyper-Structures. *Structural Topology*, Vol. 6 (1982), 13–16.
- [81] Lalvani H., Non-periodic Space Structures. *International Journal of Space Structures*, Vol. 2, Issue 2 (1986).
- [82] Lalvani H., *Visual Morphology of Space Labirynths: A Source for Architecture and Design*. W: Gabriel J.F. (ed), *Beyond the cube: the architecture of space, frames and polyhedra*. John Wiley and Sons, New York (1997), 409–426.
- [83] Lalvani H., Families of Multi-directional Periodic Space Labyrinths. *Structural Topology*, Vol. 21 (1995), 47–58.
- [84] Lalvani H., *Metamorphology and Gaudi*. Proceedings of the IASS 2004 Seminar, Montpellier (2004).
- [85] Lewis W.J., *Tension structures. Form and behaviour*. Thomas Telford, London (2003).
- [86] Loeb A., Natural Structure in the Man-Made Environment. *The Environmentalist*, Vol. 2 (1982), 43–49.
- [87] Loeb A., *Space Structures. Their Harmony and Counterpoint*. Birkhäuser, Boston (1991).
- [88] Loeb A., *Concepts and Images: Visual Mathematics*. Birkhäuser, Boston (1993).
- [89] Lord E.A., Mackay A.L., Ranganathan S., *New Geometry for New Materials*. Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [90] Lu P.J., Steinhart P.J., Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval islamic architecture. *Science*, Vol. 315, (2007), 1106–1110.
- [91] Lück R., Basic Ideas of Ammann Bar Grids. *International Journal of Modern Physics B*, Vol. 7, Issue 06–07 (1993), 1437–1453.
- [92] Malkevitch J., *Milestones in the History of Polyhedra*. W: Senechal M., Fleck G.(eds), *Shaping Space: A Polyhedral Approach*, Birkhäuser, Boston (1988).
- [93] Mandelbrot B., *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, New York (1982).
- [94] Marciniak Z., *Obiekt i dzieło w architekturze*. Praca doktorska. Wydział Architektury Politechniki Wrocławskiej, Wrocław (2004).
- [95] Máté M., *Pier Luigi Nervi*, Arkady, Warszawa (1978).
- [96] Mattheck C., Burkhardt S., A new method of structural shape optimization based on biological growth. *International Journal of Fatigue*, Vol. 12, No. 3, 185–190 (1999).
- [97] Mattheck C., Moldenhaus H., An intelligent CAD-method based on biological growth. *Fatigue Fractures of Engineering Materials and Structures*, Vol. 13, No. 1 (1990), 41–51.
- [98] Maxwell J.C., On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces. *Philosophical Magazine*, Vol. 4, No. 27 (1864), 250–261.
- [99] Maxwell J.C., On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Forces. *Transactions of the Royal Society Edinburgh*, Vol. 26 (1869–1872), 1–40.
- [100] Maxwell J.C., On Bow's Method of Drawing Diagrams in Graphical Statics, with Illustrations from Peaucellier's Linkage. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 2 (1876), 407–414.
- [101] Meli D.B., *Equivalence and Priority: Newton versus Leibniz: Including Leibniz's Unpublished Manuscripts on the Principia*. Oxford University Press, New York (1997).
- [102] Miura K., Tachi T., *Synthesis of rigid-foldable cylindrical polyhedra*. W: Nagy D., Lugosi G., *Symmetry: Art and Science*. Proceedings of the 8th Congress of ISIS (International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry), Gmuend, Austria, August 23–28 (2010).

- [103] Miyazaki K., *An Adventure in Multidimensional Space: The art and Geometry of Polygons, Polyhedra and Polytopes*. John Wiley & Sons, New York (1986).
- [104] Möbius A.E., *Lehrbuch der Statik*. G.J. Göschen, Leipzig (1837).
- [105] Mongeau P., Pallascio R., Allaire R., Spatial geometric competencies development. *Structural Topology*, No. 21 (1995), 15–24.
- [106] Moussavi F., *The Function of Form*. Actar and Harvard Graduate School of Design, Boston (2009).
- [107] Nakata H., Architectural Designs Derived from Four-Dimensional Hypersurfaces. *Forma*, Vol. 9, No. 1 (1994), 1–9.
- [108] Nervi P.L., *Is Architecture Moving toward Unchangeable Forms?* W: Kepes G. (ed), *Structure in Art and in Science*. George Braziller, New York (1965).
- [109] Nitsche J.C.C., *Lectures on Minimal Surfaces*, Vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge (1989).
- [110] Otto F., *Architecture et bionique*. Constructions naturelles. Edition Delta et Spes, Denges (1985).
- [111] Palmer E.M., *Graphical Evolution: An Introduction to the Theory of Random Graphs*. John Wiley & Sons, New York (1985).
- [112] Pearce P., *Structure in nature is a strategy for design*. MIT Press, Cambridge (1978).
- [113] Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D., *Granice chaosu. Fraktale*. Część 1. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (1995).
- [114] Perles M.A., Shephard G.C., A construction of projectively unique polytopes. *Geometriae Dedicata*. Vol. 3, No. 3 (1974), 357–363.
- [115] Polyakov A.A., Presentation of Penrose tiling as set of overlapping pentagonal stars. *Journal of Physics: Conference Series* 98 (2008) 012025, 1–5.
- [116] Popovic Larsen O., *Reciprocal Frame Architecture*. Elsevier, Oxford (2008).
- [117] Prasolov V.V., *Intuitive Topology*. American Mathematical Society, Providence (1995).
- [118] Prusinkiewicz P., Lindenmayer A., *The algorithmic beauty of plants*. Springer, New York (1996).
- [119] Rębielak J., *Shaping of space structures*. Examples of applications of Formian in the design of tension-strut systems. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław (2005).
- [120] Richter-Gebert J., *Realization Spaces of Polytopes*. Springer, Berlin Heidelberg (1996).
- [121] Riecheson D.S., *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*. Princeton University Press, Princeton (2008).
- [122] Robbin T., *Shadows of Reality: The Fourth Dimension in Relativity, Cubism, and Modern Thought*. Yale University Press, New Haven (2006).
- [123] Schlaich J., *Lightweight Structures*. W: Pozo F. del, Casas A. de las (eds), 10 Years of Progress in Shell and Spatial Structures, Proceedings of 30th Anniversary Symposium of IASS, Madrid, 11–15 September (1989).
- [124] Schlaich J., Koncepcyjne projektowanie lekkich konstrukcji. *Inżynieria i Budownictwo*, Nr 3 (2007), 144–148.
- [125] Schoen A.H., *Infinite Periodic Minimal Surfaces without Self-intersections*. NASA Technical Note TN D-5541. NASA, Washington (1970).
- [126] Senechal M., The Mysterious Mr. Ammann. *Mathematical Intelligencer*, Vol. 26, No.4 (2004), 10–21.
- [127] Skelton R.E., de Oliveira M.C: *Tensegrity Systems*. Springer, New York (2010).
- [128] de Spinadel V.W., The family of metallic means. *Symmetry: Culture and Science – The Quarterly of the ISIS-Symmetry*, Vol. 10, No. 3–4 (1999), 317–338.
- [129] Stach E., *Smart structures in Nature – adaptive lightweight structures in nature and engineering*. W: Onate E., Kröplin B. (eds), *Structural Membranes 2003*, Proc. of the 1st Int. Conf. on Textile Composites and Inflatable Structures, Barcelona (2003).

- [130] Stach E., *Form-optimizing process in biological structures. Self generating structures in nature based on pneumatics*. W: Motro R. (ed), *Proceedings of the IASS 2004 Seminar*, Montpellier (2004).
- [131] Steinhilber H., *Kalejdoskop matematyczny*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa (1989).
- [132] Sturmfels B., Some applications of affine Gale diagrams to polytopes with few vertices, *SIAM Journal of Discrete Mathematic*, Vol. 1, No. 1 (1988), 121–133.
- [133] Tarczewski R., Kardysz M., *Influence on local loading on form and internal forces in a chosen type of membrane structures*. W: Obrębski J.B. (ed), *Lightweight structures in civil engineering*. IASS PC Seminar, Micro-Publisher, Warsaw–Rzeszów (2003), 48–55.
- [134] Tarczewski R., *Morfologia lekkich systemów konstrukcyjnych kształtowanych w procesie deformacji geometrycznej*. Praca doktorska. Wydział Architektury Politechniki Wrocławskiej, Wrocław (2004).
- [135] Tarczewski R., *Graph Theory Applied For Shaping Architectural Structures*. Structural Engineering World Congress, Association of Consulting Civil Engineers (India), Bangalore (2007), 8.
- [136] Tarczewski R., Bober W., *Application of Algebraic Methods for Shaping of Grid Structures*. W: Obrębski J.B. (ed), *Lightweight Structures in Civil Engineering*. IASS PC Seminar, Micro-Publisher, Warsaw (2006).
- [137] Tarczewski R., Bober W., *Morphological Analysis in Structural Design*. W: Obrębski J.B. (ed), *Lightweight Structures in Civil Engineering – Contemporary Problems*. IASS PC Seminar, Micro-Publisher, Warsaw (2007), 30–32.
- [138] Tarczewski R., Bober W., *Three-dimensional Space Tessellations for Generating Structural Systems*. W: Obrębski J.B. (ed), *Lightweight Structures in Civil Engineering – Contemporary Problems*. IASS PC Seminar, Micro-Publisher, Warsaw (2007), 33–35.
- [139] Tarczewski R., Bober W., Prototyping of forms in structural morphology. Abstracts of Papers Presented to American Mathematical Society, Vol. 29, No. 2, Issue 152 (2008), 390; 1036–52–34.
- [140] Tarczewski R., Bober W., *Topological representation of natural and man-made structural forms*. W: Abel J.F., Cooke J.R. (eds.), *Spanning Nano to Mega. Proc. of the 6th Int. Conf. on Computation of Shell and Spatial Structures IASS-IACM*, Cornell Univ., Ithaca, NY, USA, (2008), 219.
- [141] Tarczewski R., Bober W., *Spatial Reconstruction of Two-dimensional Structural Models*. W: Oliva-Salinas J.G. (ed), *Shell and Spatial Structures: New Materials and Technologies, New Designs and Innovations – A Sustainable Approach to Architectural and Structural Design*, International IASS Symposium, Acapulco, (2008), 15.
- [142] Tatarkiewicz Wł., *Historia filozofii*. Wyd. 12, T. 1. PWN, Warszawa (1990).
- [143] Thompson D'Arcy W., *On growth and form*. Dover Publications, New York (1992). An unabridged, unaltered republication of the work first published by the Cambridge University Press, Cambridge, England (1942), under the title: *On growth and form: A new edition*.
- [144] Thomson W., On the Division of Space with Minimum Partitional Area. *Forma*, Vol. 11, No. 3 (1996), 183–194.
- [145] Thorpe M.F., Duxbury P.M. (eds), *Rigidity Theory and Applications*. Kluwer Academic/Plenum Publishers (1999).
- [146] Timoshenko S., *Historia wytrzymałości materiałów*. Wydawnictwo Arkady, Warszawa (1966).
- [147] Tobolczyk M., *Narodziny architektury. Wstęp do ontogenezy architektury*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (2000).
- [148] Tomlow J., *Polyhedra, from Pythagoras to Alexander Graham Bell*. W: Gabriel J.F. (ed), *Beyond the cube: the architecture of space, frames and polyhedra*. John Wiley and Sons, New York (1997), 1–34.

- [149] Torroja E., *The Structures of Eduardo Torroja*. F.W. Dodge Corporation, New York (1958).
- [150] Tutte W.T., Convex representations of graphs. *Proc. London Math. Soc.*, Vol. s. 3–10, No. 1 (1960), 304–320.
- [151] Tutte W.T., How to draw a graph. *Proc. London Math. Soc.*, Vol. s. 3–13, No. 1 (1963), 743–767.
- [152] Verheyen H.F., *Symmetry Orbits*. Birkäuser, Boston (1996).
- [153] Wachman A., Burt M., Kleinmann M., *Infinite polyhedra*. Reprinted from 1974 edition. Technion, Haifa (2005).
- [154] Watanabe Y., Soma T., Art of Quasi-Periodic Tilings. *Forma*, Vol. 9, No. 3 (1994), 217–224.
- [155] Weaire, D., Froths, Foams and Heady Geometry. *New Scientist*, No. 1926 (1994), 34–37.
- [156] Weise D., Calendars and Phyllotaxis. W: Guerri, C. (ed) *Form and Symmetry*. Proceedings of the 7th Interdisciplinary Congress and Exhibition of ISIS-Symmetry, Buenos Aires, Symmetry: Art and Science – The Quarterly of the ISIS-Symmetry, Vol. 19, No. 1–4 (2007), 488–491.
- [157] Weise, D., Principle of Minimax and Rise Phyllotaxis. *Visual Mathematics*, Vol. 1, No. 1 (1999). Dostępne w Internecie (dostęp: 22.01.2009) <http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/index.html>.
- [158] Wenninger M.J., *Polyhedron Models*. Cambridge University Press, Cambridge (1974).
- [159] Wenninger M.J., *Dual Models*. Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [160] Wester T., *Structural Order in Space – The Plate-Lattice Dualism*. Royal Academy of Fine Arts, School of Architecture, Copenhagen (1983).
- [161] Wester T., 3-D form and Force Language Proposal for a Structural Basis. *International Journal of Space Structures*, Vol. 11, Issue 1/2 (1996).
- [162] Wester T., *Structural patterns in nature*. W: Motro R. (ed), *Proceedings of the IASS 2004 Seminar*, Montpellier (2004).
- [163] Weyl H., *Symmetry*. Princeton University Press, Princeton (1983); wyd. polskie: Symetria. Prószyński i S-ka, Warszawa (1997).
- [164] Whiteley W., Realizability of Polyhedra. *Structural Topology*, No. 1 (1979), 46–58.
- [165] Whiteley W., Motions and stresses of projected polyhedra – I. *Structural Topology*, Vol. 7 (1982), 13–38.
- [166] Whiteley W., *The Decline and Rise of Geometry in 20th Century North America*. *Proceedings of the CMESG Conference*, St Catharines, Canada (1999).
- [167] Whiteley W., *Rigidity and scene analysis*. W: Goodman J.E., O'Rourke J. (eds), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. Second Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, Florida (2004), 1327–1354.
- [168] Whyte L.L., Wilson A.G., Wilson D., *Hierarchical Structures*. American Elsevier, New York (1969).
- [169] Wichmann B., Rigby J., A Penrose-type Islamic Interlacing Pattern. *Visual Mathematics*, Vol. 9, No. 2 (2007).
- [170] Wierzbicki W., *Mechanika Budowli*. Komisja Wydawnicza Towarzystwa Bratniej Pomocy Studentów Politechniki Warszawskiej, Warszawa (1948).
- [171] Williams R., *The geometrical foundation of natural structure*. Dover Publications, New York (1979).
- [172] Wilson R.J., *Wprowadzenie do teorii grafów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (2000).
- [173] Zalewski W., *The concept of The Flow of Forces*. Excerpt from Notes on Structural Behavior for Architecture Students. MIT, Boston (1975–1980).
- [174] Zalewski W., O wszczęcie nauczania projektowania konstrukcji. *Inżynieria i Budownictwo*, Nr 10–12 (1989), 355–359.
- [175] Ziegler G.M., *Lectures on Polytopes*. Springer, New York (1995).

- [176] Ziegler G.M., *Convex Polytopes: Extremal Constructions and f-Vector Shapes*. W: Miller E., Reiner V., Sturmfels B. (eds), Geometric Combinatorics, IAS/Park City Mathematics Series, Vol. 13, American Mathematical Society, Providence (2004).
- [177] Ziegler G.M., Euler's polyhedron formula – a starting point of today's polytope theory. *Elemente der Mathematik*, Vol. 62, Issue 4 (2007), 184–192.
- [178] Ziegler G.M., Non-rational configurations, polytopes, and surfaces. *Mathematical Intelligencer*, Vol. 30, No. 3 (2008), 36–42.

Bibliografia uzupełniająca

- [179] Altshiller-Court N., *Modern Pure Solid Geometry* (2nd ed.). Chelsea Publishing Company, New York (1964).
- [180] Baer S., *Dome Cook Book*. The Lama Foundation, Albuquerque (1968).
- [181] Banchoff T.F., *Beyond the Third Dimension: Geometry, Computer Graphics, and Higher Dimensions*. Scientific American Library, Freeman, New York (1996).
- [182] Baracs J., Rigidity of Articulated Spatial Panel Structures. Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures, No. 59, XVI-3 (1975), 37–52.
- [183] Barnette D.W., *Diagrams and Schlegel Diagrams*. W: Guy R. (ed), Combinatorial Structures and Their Applications, Proc. of the Calgary Intern. Conf., Gordon and Breach, New York (1969), 1–4.
- [184] Barr S., *Experiments in Topology*. Dover Publications, New York (1989).
- [185] Bayer M., Sturmfels B., Lawrence polytopes. Canadian Journal of Mathematic, Vol. 42, No. 1 (1990), 62–79.
- [186] Bobenko A.I., Springborn B.A., Variational principles for circle patterns and Koebe's theorem. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 356 (2004), s. 659–689
- [187] Bolker E.D., Roth B., When is a Bipartite Graph a Rigid Framework? Pacific Journal of Mathematics, Vol. 90, No.1 (1980), 27–44.
- [188] Bradley R.E., Sandifer C.E., *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*. Elsevier Science, Amsterdam (2007).
- [189] Brightwell G.R., Scheinerman E.R., Representations of planar graphs. SIAM Journal of Discrete Mathematic, Vol. 6, (1993), 214–229.
- [190] Bronowski J., *The Discovery of Form*. W: Kepes G. (ed), *Structure in Art and in Science*. George Braziller, New York (1965).
- [191] Buckminster Fuller R., *Conceptuality of Fundamental Structures*. W: Kepes G. (ed), *Structure in Art and in Science*. George Braziller, New York (1965).
- [192] Bucknum M.J., Castro E.A., Geometrical-Topological Correlation in Structures. Nature Precedings, March (2008).
- [193] Burt M., The Wandering Vetex Method. Structural Topology. No. 6 (1982), 5–11.
- [194] Clinton J., *A Conceptual Investigation of Rotation-Translation Transformation of Platonic Polyhedra*. NASA NsG-607. NASA, Washington (1965).
- [195] Connelly R., Rigid Circle and Sphere Packings. Part I: Finite Packings. Structural Topology, Vol. 14 (1988), 43–60.
- [196] Connelly R., Rigid Circle and Sphere Packings. Part II: Infinite Packings with Finite Motions. Structural Topology, Vol. 16 (1990), 57–76.
- [197] Coxeter H.S.M., *Projective Geometry*. Springer, New York (2003).
- [198] Crapo H., Whiteley W., Statics of Frameworks and Motions of Panel Structures: a Projective Geometric Introduction. Structural Topology, Vol. 6 (1982), 43–82.
- [199] Critchlow K., *Order in Space: A Design Source Book*. Thames & Hudson, London (2000).

- [200] Cromwell P.R., *Polyhedra*. Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- [201] Dandurand A., The Rigidity of Compound Spatial Grids. *Structural Topology*, Vol. 10 (1984), 41–56.
- [202] Danzer L., Grünbaum B., Shephard G.C., Does Every Type of Polyhedron Tile Three-Space? *Structural Topology*, Vol. 8 (1983), 3–14.
- [203] Dolbilin N., Tanemura M., How many facets on average can a tile have in a tiling? *Forma*, Vol. 21, No. 3 (2006), 177–196.
- [204] Drabkin D.L., *Fundamental Structure: Natures Architecture*. University of Pennsylvania Press (1975).
- [205] Emmerich D.G: Polyedres composites. *Structural Topology*, No. 13, 5–32 (1986).
- [206] Federico P.J., *Descartes on Polyhedra: A Study of the “De solidorum elementis”*. Springer, New York (1982).
- [207] Fejes Tóth. L., *Regular figures*. Pergamon Press, London (1964).
- [208] Fortune S., *Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations*. W: Goodman J.E., O’Rourke J. (eds), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. Second Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, Florida (2004), 513–528.
- [209] Francis G.K., *A Topological Picture Book*. Springer, New York (2007).
- [210] Grünbaum B., The Emperor’s New Cloths: Full Regalia, G string, or Nothing? *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 6, No. 4 (1984).
- [211] Grünbaum B., Shephard G.C., Tilings by regular polygons. *Mathematics Magazine*, Vol. 50, No. 5 (1977), 227–247.
- [212] Grünbaum B., Uniform tilings of 3-space. *Geombinatorics*, Vol. 4, Issue 2 (1994), 49–56.
- [213] Grünbaum, B., [4,3]-Configurations with Many Symmetries. *Geombinatorics*, Vol. 18, Issue 1 (2008), 5–12.
- [214] Grünbaum B., *Configuration of points and lines*. W: Davis Ch., Ellers E.W. (eds), *The Coxeter Legacy: Reflections And Projections*. American Mathematical Society, Providence (2005).
- [215] Grünbaum B., Small Configurations with Many Incidencies. *Geombinatorics*, Vol. 14, Issue 4 (2005), 200–207.
- [216] Hargittai I., Hargittai M., *Symmetry, A Unifying Concept*. Shelter Publications, Bolinas (1994).
- [217] Hilbert D., Cohn-Vossen S., *Geometry and the Imagination*. American Mathematical Society, Providence (1999).
- [218] Holden A., *Shapes Space and Symmetry*. Dover Publications, New York (1991).
- [219] Hopkins B., Wilson R., The Truth About Königsberg. *The College Mathematics Journal*, No. 3, Vol. 35 (2004), 198–207.
- [220] Huybers P., *Polyhedron packings and space frames*. W: Motro, R. (ed) *Proceedings of the IASS 2004 Seminar*, Montpellier (2004).
- [221] Hyde S., Andersson S., at alt., *The Language of Shape*. Elsevier, Amsterdam (1996).
- [222] Jacob M.S., Andersson S., *The Nature of Mathematics and the Mathematics of Nature*. Elsevier, Amsterdam (1998).
- [223] Jean R., Barabé D., *Symmetry in plants*. World Scientific Publishing Co., Singapore (1998).
- [224] Kappraff J., Systems of Proportion in Design and Architecture and their Relationship to Dynamical Systems Theory. *Visual Mathematics*, Vol. 1, No. 1 (1999).
- [225] Kappraff J., Adamson G.W., Polygons and Chaos. *Proceedings of the 5th Interdisciplinary Congress and Exhibition of ISIS-Symmetry*, Sydney, *Symmetry: Art and Science – The Quarterly of the ISIS-Symmetry*, No. 1–2 (2001).
- [226] Kappraff J., Adamson G.W., A unified theory of proportion. *Visual Mathematics Journal* Vol. 5, No.1 (2003).
- [227] Keller E., Leitao C., Agent Intellects: Pattern as a Form of Thought. W: Hight Ch., Perry Ch. (eds), *Collective Intelligence in Design*. Architectural Design, Vol. 76, No. 5 (2006), 10–17.

- [228] Korren A., Identical Dual Lattices and Subdivision of Space. *Visual Mathematics*, Vol. 3, No. 4 (2001).
- [229] Kraynik M., Reinelt D.A., Elastic-Plastic Behavior of a Kelvin Foam. *Forma*, Vol. 11, No. 3 (1996), 255–270.
- [230] Laman D., On Graphs and Rigidity of Plane Skeletal Structures. *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 4, No. 4 (1970), 331–340.
- [231] Leikin R., Berman A., Zaslavsky O., On the Definition of Symmetry. *Symmetry: Culture and Science – The Quarterly of the ISIS-Symmetry*, Vol. 9, No. 2–4 (1998), 375–382.
- [232] Loeb A.L., *The Architecture of Crystals*. W: Kepes G. (ed), *Module, Proportion, Symmetry, Rythm*, Goerge Braziller, New York (1966).
- [233] Loeb A.L., Vector Equilibrium Synergy. *International Journal of Space Structures*, Vol. 1 (1985), 99–103.
- [234] Loeb A.L., Warney W., A Stabilized Cuboctahedron Frame. *International Journal of Space Structures*, Vol.7 (1999), 83–90.
- [235] Lucca G., Representing Seashells Surface. *Visual Mathematics*, Vol. 5, No. 1 (2003).
- [236] Maxwell J.C., On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. *Philosophical Magazine*, Vol. 4, No. 27 (1864), 294–299.
- [237] McMullen P., Duality, Sections and Projections of Certain Euclidean Tilings. *Geometriae Dedicata*, Vol. 49, No. 2 (1994), 183–202.
- [238] Miyazaki K., *Design of Space Structures from Four-Dimensional Regular and Semi-Regular Polytopes*. W: Wester T., Medwadowski S.J., Mogensen J. (eds), *Spatial Structures at the Turn of the Millenium*, IASS Symposium, Copenhagen (1991).
- [239] Pearce P., Pearce S., *Experiments in Form*. Van Nostrand Reinhold, New York (1980).
- [240] Pólya G., Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene. *Zeitschrift für Kristallographie* Vol. 60, (1924), 278–282.
- [241] Penrose R., Pentaplexity – A Class of Non-Periodic Tilings of the Plane. *Mathematical Intelligencer*, Vol. 2, No. 1 (1979) 32–37.
- [242] Pisanski T., Randić M., *Bridges between geometry and graph theory*. W: Gorini C.A. (ed), *Geometry at Work: Papers in Applied Geometry*, s.174–194, Mathematical Association of America, Washington (2000).
- [243] Sarton G., *Introduction to the History of Science*. Carnegie Institution, Washington, reprint, Vol. 1 (1968).
- [244] Schattschneider D., *The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation*. *American Mathematical Monthly*, Vol. 85 (1978), 439–450.
- [245] Schwabe C., Polytopia Performance. W: *Symmetry: Culture and Science – The Quarterly of the ISIS-Symmetry*, No. 1–2 (2001), 166–169.
- [246] Senechal M., Fleck G., *Patterns of Symmetry*. University of Massachusetts Press (1977).
- [247] Senechal M., *A Visit to the Polyhedral Kingdom*. W: Senechal M., Fleck G.(eds), *Shaping Space: A Polyhedral Approach*, Birkhäuser, Boston (1988).
- [248] Senechal M., *Crystals and quasicrystals*. W: Goodman J.E., O'Rourke, J. (eds), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. Second Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, Florida (2004), 1377–1394.
- [249] Seymour D., Britton J., *Introduction to tessellations*. Dale Seymour Publications (1989).
- [250] Smith C.S., *Structure, substructure, superstructure*. W: Kepes G. (ed), *Structure in art and science*, G. Brazillier, New York (1965).
- [251] Smith C.S., *A Search for Structure*. MIT Press, Cambridge (1980).
- [252] Stevens P., *Patterns of Nature*. Little Brown & Co., Boston (1974).
- [253] Stewart J., *Why Beauty is Truth: A History of Symmetry*. Pegasus Books, New York (2007).
- [254] Tarnai T., Problems Concerning Spherical Polyhedra and Structural Rigidity. *Structural Topology*, Vol. 4 (1980), 61–66.
- [255] Tarnai T., Spherical Circle-Packing in Nature, Practice and Theory. *Structural Topology*, Vol. 9 (1984), 39–58.

- [256] Testa P., Weiser D., Emergent Structural Morphology. W: Ali Rahim (ed), Contemporary Techniques in Architecture. Architectural Design, Vol. 72, No. 1 (2002), 13–16.
- [257] Thomson J.M.T., *Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering*. John Wiley and Sons, New York (1982).
- [258] Torroja E., *Philosophy of Structures*. University of California, Berkeley (1958).
- [259] Ulam S., *Patterns of Growth of Figures: Mathematical Aspects*. W: Kepes G. (ed), Module, Proportion, Symmetry, Rythm, Goerge Braziller, New York (1966).
- [260] Weaire D., A Philomorph Looks at Foam. Proceedings of the American Philosophical Society, Vol. 145, No. 4 (2001), 564–574.
- [261] Wenninger M., Some interesting octahedral compounds. The Mathematical Gazette, LII (1968), 16–23.
- [262] Wenninger M., Avenues for polyhedral research. Structural Topology, No. 5 (1980), 5–26.
- [263] Wenninger M.J., *Spherical Models*. Dover Publications, New York (1999).
- [264] Wester T., *The Structural Behaviour of Arbitrarily Plane-Faceted Spatial Nets*. Proceedings of the IASS Symposium, Copenhagen (1991), 119–123.
- [265] Wester T., *The Structural Morphology of Basic Polyhedra*. W: Gabriel J.F. (ed), Beyond the cube: the architecture of space, frames and polyhedra. John Wiley and Sons, New York (1997), 301–342.
- [266] Wester T., *Structural Morphology of Penrose and Quasicrystal Patterns*. Part I. W: Scheublin F., Pronk A., Borgard A., Houtman R. (eds.), Adaptables 2006, Proceedings of the joint CIB, Tensinet, IASS International Conference on Adaptability in Design and Construction, Eindhoven (2006), 290–294.
- [267] Wetzel J.E., On the division of the plane by lines. American Mathematical Monthly, LXXXV (1978), 8.

Źródła ilustracji

- Rys. 1.2a Rozbudowa budynku Milano Convention Center – koncepcja architektoniczna. Dostępne w Internecie [dostęp 06.05.2011]: http://www.bellini.it/architecture/fiera_milano_congressi.html.
- Rys. 2.28a Porównanie proporcji budowy kości dużego i małego zwierzęcia wg Galileusza. Galileo G.: Two new sciences [21, s. 131]
- Rys. 2.28b Różnice w proporcjach drzew o różnej wielkości. Schlaich J., *Lightweight Structures* [22]
- Rys. 2.42c Rysunek ze szkicownika Villarda de Honnecourt, plansza 38. Dostępne w Internecie [dostęp 05.09.2010]: <http://www.cgagne.org/villarcg.pdf>.
- Rys. 3.1 Posadzka z płytek betonowych w Zakopanem. Autor zdjęcia: David Harvey, w: Conway, J.H., Burgiel, H., Goodman-Strauss, Ch., *The Symmetries of Things* [285, s. 184]
- Rys. 3.2a Koszyk pleciony kagome. Autor zdjęcia: Tibor Tarnai. Za: Tarnai T.: Baskets. W: New olympics, new shell and spatial structures. International Symposium IASS-APCS 2006. Committee on Spatial Structures. China Civil Engineering Society, Association for Spatial Structures, China Steel Construction Society, Beijing University of Technology, Beijing, China, October 16–19, 2006.
- Rys. 3.2b Fragment mozaiki z pałacu Alhambra w Grenadzie. Autor zdjęcia: Anneke Bart. Dostępne w Internecie [dostęp 05.09.2010, zdjęcie w domenie publicznej]: http://mathcs.slu.edu/escher/upload/6/64/Andalucia_dag_12_036.jpg.
- Rys. 3.19 Fragment mozaiki z pałacu Alhambra w Granadzie. Autor zdjęcia: gruban. Dostępne w Internecie [dostęp 05.09.2010, licencja Creative Commons]: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f7/Tassellatura_alhambra.jpg.
- Rys. 3.34 Struktura kości ludzkiej. Dostępne w Internecie [dostęp 30.11.2009]: <http://www.bbc.co.uk/science/humanbody/body/factfiles/shapeandstructure/bonemarrow.shtml>.
- Rys. 6.1 Przykład stabilności formy – sylwetka ryby. Thompson, D'Arcy W.: On growth and form [5, s. 1062]
- Rys. 6.3b, c Filotaksja owocu ananasa – schemat i rozwinięcie powierzchni. Kappraff, J., *Connections. The geometric bridge between art and science* [19, s. 92]
- Rys. 6.11a Szkielec radiolarii, Haeckel, E.: Art Forms from Nature. Permission free Dover Electronic Clip Art [6, s. 44, poz. 534]
- Rys. 6.11b Kolonia alg morskich hydrodictyon. Autor zdjęcia: Y. Tsukii, 2001. Dostępne w Internecie [dostęp 02.08.2010, reprodukcja za zgodą autora]: <http://protist.i.hosei.ac.jp/PDB3/PCD3598/htmls/45.html>, Copyright: Protist Information Server, URL: <http://protist.i.hosei.ac.jp/>.
- Rys. 6.16a Kolumny bazaltowe w tzw. Skalnych Organach, Kamenický Šenov koło m. Česká Lípa w Czechach. Autor zdjęcia: Saxo. Dostępne w Internecie [dostęp 10.08.2007, zdjęcie w domenie publicznej]: <http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Basalt-tschechien.jpg>.

- Rys. 6.16b Koralowiec madreporowy w kształcie wielościanu niewypukłego. Haeckel, E.: Art Forms from Nature. Permission free Dover Electronic Clip Art [6, s. 3, poz. 047]
- Rys. 6.16c Plaster pszczeli. Autor zdjęcia: SEVEN. Dostępne w Internecie [dostęp 10.08.2007, licencja GNU]: http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Honey_comb.jpg.
- Rys. 6.24a Liść rośliny *Victoria amazonica*. Autor zdjęcia: tammojan. Dostępne w Internecie [dostęp 10.09.2010, licencja Creative Commons]: <http://www.fotopedia.com/items/flickr-2673184499>.
- Rys. 6.24b Budynek Victoria Regia House, w Chatsworth. Koppelkamm, S.: Künstliche Paradise. Gewächshauser und Wintergarten des 19. Jahrhunderts [40, s. 28]
- Rys. 6.24c Widok Crystal Palace w Londynie. Zdjęcie z: Dickinson's Comprehensive Pictures of the Great Exhibition of 1851. Dostępne w Internecie [dostęp 12.08.2007, zdjęcie w domenie publicznej ze względu na wygaśnięcie praw autorskich]: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/92/Crystal_Palace_from_the_north_east_from_Dickinson%27s_Comprehensive_Pictures_of_the_Great_Exhibition_of_1851_1854.jpg.
- Rys. 6.25a Palazzo del Lavoro w Turynie – widok wnętrza. Olmo, C., Chiorino, C.: Pier Luigi Nervi. Architecture as Challenge. Silvana Editoriale, Milano (2010), s. 54.
- Rys. 6.25b Palazzo dla Lavoro w Turynie – widok z zewnątrz. Tulia, I.: Pier Luigi Nervi. Motta Architettura, Milan (2009), s. 62.
- Rys. 6.27a Oko kryla antarktycznego. Autor zdjęcia: Gerd Alberti i Uwe Kils. Dostępne w Internecie [dostęp 10.08.2007, licencja GNU]: <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Krilleyekils.jpg>.
- Rys. 6.30a Gąbka szklana *Euplectella aspergillum*. Autor zdjęcia: Citron. Dostępne w Internecie [dostęp 29.07.2008, zdjęcie w domenie publicznej]: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Euplectella_aspergillum_1.jpg.
- Rys. 6.30b Budynek Swiss Re Tower w Londynie. Autor zdjęcia: David Cumberland. Dostępne w Internecie [dostęp 29.07.2008, licencja Creative Commons]: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:30_St_Mary_Axe_%28The_Gherkin%29_-_geograph.org.uk_-_1083532.jpg.
- Rys. 6.32b Sala sportowa La Verne College w Kalifornii. Specialty Architectural Products – broszura firmy Birdair, Amherst, USA (2000).
- Rys. 6.33 Pawilon Big Wave, na wystawie EXPO'89 w Jokohamie. Ishii, K.: Membrane Structures in Japan. SPS Publishing Company, Tokyo (1995), s. 139.
- Rys. 6.36a Widok składowiska złomu, *Bahnhöfe für den Nahverkehr in Stahlbau*. Stahl und Form, Stahl-Informations-Zentrum, Düsseldorf (1997), s. 18–27.
- Rys. 6.36b Budynek stacji kolejowej w Oberhausen. *Bahnhöfe für den Nahverkehr in Stahlbau*. Stahl und Form, Stahl-Informations-Zentrum, Düsseldorf (1997), s. 18–27.
- Rys. 6.46 Przykład trójwymiarowego odpowiednika parkietu Penrose'a. Wester, T., *Structural patterns in nature* [16, s. 16]
- Rys. 6.47 Schemat optymalnego układu prętów w konstrukcji obciążonej jedną siłą poziomą. Michell, A.G.M.: The Limits of Economy of Material in Frame Structures. Phil Mag. S.6. Vol. 8. No. 47, (1904), s. 589–597; rysunek w domenie publicznej ze względu na wygaśnięcie praw autorskich.
- Rys. 6.58 Nieregularna siatka pajęczyny. Autor zdjęcia: USFWS Photo. Dostępne w Internecie [dostęp 10.08.2007, zdjęcie w domenie publicznej]: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Water_drops_on_spider_web.jpg.
- Rys. 7.22 Brama III Tysiąclecia we Wrocławiu – wizualizacja. Autor: arch. Michał Teller (reprodukcja za zgodą autora).
- Rys. 7.55a Przędzalnia wełny Gatti w Rzymie. M. Máté: Pier Luigi Nervi [95], s. 34.
- Rys. 7.55b Optymalizacja płyty stropowej – wizualizacja. Autor: Per Dombernowsky. Dostępne w Internecie [dostęp 20.05.2011]: http://fluxstructures.net/_subpages/_sp%201%20research/subpage%201d_research.html.

- Rys. 7.56 Education City Convention Centre, Katar – wizualizacja. Arch. Arata Isozaki. Dostępne w Internecie [dostęp 20.05.2011]: <http://marhabaqatar.files.wordpress.com/2011/10/convention-building.jpg>.
- Rys. 7.57a, b Akutagawa River Side Project, Japonia. Za: Ohmori, H.: Computational Morphogenesis. Its Current State and Possibility for the Future, W: Proceedings of the 6th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures IASS-IACM 2008: “Spanning Nano to Mega” 28–31 May 2008, Cornell University, Ithaca, NY, USA John F. Abel and J. Robert Cooke (eds.).
- Rys. 7.58a, b Generowanie systemu konstrukcyjnego Serpentine Gallery Pavilion 2002 w Londynie. Za: Meredith, M., Aranda/Lasch, Sasaki M.: From Control to Design. Parametric/Algorithmic Architecture. Actar (2008), s. 38.
- Rys. 7.59a Serpentine Gallery Pavilion 2002 w Londynie – widok wnętrza. Za: Meredith, M., Aranda/Lasch, Sasaki M., From Control to Design. Parametric/Algorithmic Architecture. Actar (2008), s. 39.
- Rys. 7.59b Dom handlowy Tod’s Omotesando w Tokio. Arch. Toyo Ito. Dostępne w Internecie [dostęp 20.05.2011]: <http://bryla.gazetadom.pl/bryla/51,85298,6543504.html?i=21>.
- Rys. 7.60 Dragonfly Vertical Farm w Nowym Jorku – wizualizacja. Arch. Vincent Callebaut. Dostępne w Internecie [dostęp 20.05.2011]: <http://vincent.callebaut.org/page1-img-dragonfly.html>.
- Rys. 7.61 Liberal Arts And Sciences Building w Katarze. Arch. Arata Isozaki. Dostępne w Internecie [dostęp 20.05.2011]: <http://www.flickr.com/photos/makz/269130655/sizes/o/in/photostream/>
- Rys. 7.62a, b Taichung Metropolitan Opera House na Tajwanie – model. Arch. Toyo Ito. Dostępne w Internecie [dostęp 20.05.2011]: <http://www.designboom.com/weblog/cat/9/view/11572/toyo-ito-wins-praemium-imperiale-exhibition-at-venice-biennale-2010.html>.
- Rys. 7.62c Taichung Metropolitan Opera House na Tajwanie – realizacja. Dostępne w Internecie [dostęp 20.05.2011]: <http://www.designboom.com/weblog/cat/9/view/11572/toyo-ito-wins-praemium-imperiale-exhibition-at-venice-biennale-2010.html>.
- Rys. 7.62d Nowy budynek Berkeley Art Museum – koncepcja. Arch. Toyo Ito. Dostępne w Internecie [dostęp 20.05.2011]: http://imgs.sfgate.com/c/pictures/2008/06/06/ddplace10_ph_0498568875.jpg
- Rys. 7.64 Konstrukcja stadionu olimpijskiego w Pekinie. Za: Fan Z., Peng Y., Wang Z., Qian J., Zhao Z., Research and design of twisted structures for National Stadium in Beijing. W: New olimpics, new shell and spatial structures. International Symposium IASS-APCS 2006. Committee on Spatial Structures. China Civil Engineering Society, Association for Spatial Structures, China Steel Construction Society, Beijing University of Technology, Beijing, China, October 16–19, 2006.
- Wszystkie pozostałe fotografie i rysunki zostały wykonane przez autora.

Teksty cytowanych licencji są dostępne w Internecie, pod adresami:

- Creative Commons – http://pl.wikipedia.org/wiki/Licencje_Creative_Commons
- GNU – http://pl.wikipedia.org/wiki/GNU_General_Public_License.

Przy sporządzeniu i opracowaniu rysunków korzystano z programów:

- AutoCAD 2010 (c) 2009 Autodesk, Inc.
- Corel Draw X4 (c) 2008 Corel Corporation
- Adobe Photoshop Elements 9 (c) 2001–2010 Adobe Systems Inc.
- Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2011 (c) 2010 Autodesk, Inc.
- Stella 4D, v.4.4, (c) 2001–2008 Software3d
- Freeform Origami, v.0.1.8 Alpha, (c) 2008–2011 Tomohiro Tachi
- EASY, r.7.6 (c) 2002 Technet GmbH
- CADISI, r.3.37 (c) 2002 Technet GmbH

Topology of Structural Forms

The function and form of buildings have traditionally been connected by specific material, spatial and other solutions. Architectural objects are shaped in such a way that their structural system informs us about their stability and reliability, and their logic has been understood not only as a clear way of transmitting the loadings and structural effectiveness of elements but also as a kind of symbiosis of architectural form and structural system. Some general trends in current culture, sometimes referred to as 'pop-culture infantilization', are characterized by the creation of completely artificial reality, which, like a computer game, only pretends to reality. On this basis, a new paradigm of aesthetics in architectural design appeared. It can be defined as a set of trends, often referred to collectively as 'free-form design'. Architects who have adopted this paradigm are guided – like their predecessors in the Art Nouveau period – chiefly by the desire to achieve a particular visual impression. Structural systems may not reveal themselves outside that 'mask', not manifesting their reliability. Moreover, often perversely, they try to create the opposite impression. Designers use means of expression such as: large span, organic forms, randomness, discontinuity of the structural system. These trends developed on the basis of new methods of computer-aided generation of geometric forms. Such tools give designers almost unlimited freedom to create and change to some extent a way of thinking, free from the orthogonal preferences associated with the use of traditional drawing boards. Since the freedom to determine the form requires a constant supply of new ideas, a great deficit of new concepts, a lack of (sufficiently casual) sources of inspiration, as well as their specific inflation, can be seen. What was new yesterday, now becomes trivial and obsolete. Some designers openly admit that their designs follow 'whatever'.

In the late nineteenth and early twentieth centuries the process of developing architectural forms appropriate to the new design possibilities was palpably under way. A hundred years later, the situation appears to be reversed. There is a need to develop methods of shaping structural systems which not only meet the challenges posed by new forms of geometry but are a source of inspiration for the creation of new forms.

The present work deals with the common topological basis for shaping structural forms. It shows that, starting from different aesthetic premises and using different methods and algorithms, one can obtain the original creative form by applying a rational method.

To achieve this, one does not literally have to follow random inspirations. This is a methodological error. Complexity is a hidden order, rather than chaos. Impressions should not be confused with the essence of things. In the creation of free forms in architecture, deconstructivism may be only apparent, and randomness may only be a visual impression. The key is to search constantly for the hidden rules behind this effect and use them skilfully in practice.

Different strategies are possible. Using the inspiration of natural forms, one can find many ready-to-use prototypes of forms in which structural efficiency is directly visible: minimal surfaces (soap bubbles), shells (seashells), tensioned nets (spiders' webs), etc. Such inspirations can be applied almost directly. One can also find forms that are seemingly random, yet analysis of

their topological properties, e.g. statistical symmetry, shows their structural usefulness. Starting from such forms, through a series of topologically admissible transformations, one can obtain the correct structural system with a seemingly random arrangement.

Another approach is based on planar and spatial tessellations. They can be described and systemized by means of simple topological characteristics. Then, thanks to a periodic table of polyhedra, it is possible to assess their structural properties and apply further transformations, leading to a final form. Another method is to transform systems that are relatively simple at the level of visual perception by means of evolutionary optimization.

Mathematical description language, the language of form, presented in chapter two, allows forms to be described at the basic level, where purely topological relationships of incidence, valency and connectivity allow us to discover what is common in them – a geometric base.

A profusion of objects observed in nature, their shape, the patterns occurring in them, relationships of symmetry, etc., offer significant inspiration from the standpoint of shaping the form. It is not coincidental, because in the background there are general rules of subdivision and composition, change in the topological dimension and projection, which means that the world observed by us is consistent. These patterns can be found in the products of civilization: in artistic products, fabrics, flooring, brick bond, and in big tent structures and shell or tensile structures.

Treating the structural forms as a system of linked objects of different classes, we refer to these patterns, seeing in them the prototypes of forms and using methods of description and analysis of the properties given by mathematical form language. Thereby it is possible to create topological models, which, using different sources of inspiration, can be interpreted as prototypes of structural forms. The third chapter deals with the methods for creating such models.

The fourth chapter discusses the methods for this transformation of topological models, which significantly changes their initial configuration while maintaining their structural characteristics and ability for spatial reconstruction.

Changing the dimension of the space in which topological models can be realized means reduction to a lower dimension and spatial reconstruction, the dual aspects of creating form. Its essence is the division of some objects by other objects, in a hierarchically structured manner. As described in chapter five, spatial reconstruction not only allows us to change the class of objects but also – through the relationships between models in different dimensions – provides tools for assessing the mechanical properties of structures.

Chapter six explains how to search for natural sources of inspiration, followed by examples illustrating the metaphorical treatment of such inspiration in architecture. Then, selected procedures of shaping structural forms are presented. Examples of well-known methods are discussed, such as formation on minimal surfaces or the topology of Michell trusses, and some new procedures are proposed, e.g. shaping on the basis of tessellations with Ammann bar grids, topological reconstruction methods, generating spatial lattices through Cartesian products and origami.

Chapter seven examines the suitability of various methods of shaping form, with reference to works of known designers selected from the last decade. It shows how one can obtain the visual effect of randomness through the creation of complex systems in which the internal order is not directly visible and the tectonics of the architectural form is indistinguishable from its structural system.

The methods presented in this work refer to the unobvious sources of inspiration, and are intended to enable the return of a situation in which the structural system will form the basis for shaping the object. This is an attempt to respond to the new challenges described above.

The author believes that the tendency to free-form should be treated just like all the styles and fashions in architecture which have occurred over time, neither worse nor better. Unreflective enthusiasm on the one hand, and inertia and resistance on the other hand, would not improve relations between architects and structural designers, which by their nature are subject to a certain tension. The structural system should be compatible with the architectural form of the object

and provide support for it. Such correlation has already been evidenced and there is no reason to think it would be otherwise in new aesthetic conditions.

Creative activity is not subject to the law of conservation of energy. The author's intention was to demonstrate that the recently developed mathematical methods, especially in the field of discrete geometry, allow the manipulation of concepts which have so far been the domain of intuition and consequently to restore the original creative sense to shaping form.

