Hiperpowierzchnie Ricci-pseudosymetryczne w przestrzeniach o stałej krzywiźnie

Małgorzata Głogowska

Hiperpowierzchnie Ricci-pseudosymetryczne w przestrzeniach o stałej krzywiźnie

UWP

Autor
Małgorzata Głogowska

Opiniodawca
dr hab. Marian Hotloś

Redaktor merytoryczny
prof. dr hab. Andrzej Borkowski

Opracowanie redakcyjne
Anna Piskor

Korekta:
Elżbieta Winiarska-Grabosz
Magdalena Kozińska

Łamanie
Małgorzata Głogowska

Projekt okładki
Paweł Wójcik

Monografie
Monografie CXLIV

ISSN 2083-5531
ISBN 978-83-7717-083-0

WYDAWNICTWO UNIWERSYTETU PRZYRODNICZEGO WE WROCŁAWIU
Redaktor Naczelny – prof. dr hab. Andrzej Kotecki
ul. Sopocka 23, 50-344 Wrocław, tel. 71 328 12 77
e-mail: wyd@up.wroc.pl

Nakład 100 + 16 egz. Ark. wyd. 3,6. Ark. druk. 5,5

Pamięci Profesora Vladislava Viktorovicha Goldberga
(1936 - 2010)

Podczas gdy algebra i analiza tworzą podstawy matematyki,
geometria jest w jej centrum.

Shiing-Shen Chern

SPIS TREŚCI

1. **Wstęp**

Badania nad rozmaitościami typu pseudosymetrycznego, tj. rozmaitościami semiriemannowskimi spełniającymi pewne warunki krzywiznowe, nazwane umownie warunkami krzywiznowymi typu pseudosymetrycznego ([44], Section 4), zostały rozpoczęte w Katedrze Matematyki Akademii Rolniczej we Wrocławiu w 1980 r. Pierwsze wyniki badań zostały przedstawione w pracy Adamów i Deszcz [2].

Najnowszymi publikacjami przeglądowymi z tego zakresu badań są prace: [55, 87, 96, 134]. Wcześniejsze przeglądy badań zostały zaprezentowane w pozycjach: [8, 23, 26, 31, 44, 47, 54, 135]. Na podstawie wyników dotychczasowych badań nad rozmaitościami spełniającymi warunki typu pseudosymetrycznego można stwierdzić, że warunki pseudosymetrii (3.4) i Ricci-pseudosymetrii (3.6) są najważniejszmi warunkami tego typu. Stwierdzenie to w pełni uzasadniają publikacje [101, 104 i 108] oraz rozdział VI "On natural symmetries" monografii [64]. W publikacjach [101] i [108] przedstawiono interpretację geometryczną obu warunków. Dodajmy jeszcze, że motto niniejszej monografii, autorstwa światowej sławy matematyka S.-S. Cherna, jest opublikowane w podręczniku [88], Introduction, p. vii.

Warunki pseudosymetrii i Ricci-pseudosymetrii spełnione są również na pewnych hiperpowierzchniach zanurzonych izometrycznie w semiriemannowskich przestrzeniach o stałej krzywiźnie. Drugi tensor podstawowy takich hiperpowierzchni spełnia równanie wielomianowe stopnia drugiego (4.6) lub też specjalnej postaci stopnia trzeciego (9.1). Głównym obiektem badań przedstawionych w pracy doktorskiej pt. "Hiperpowierzchnie Ricci-pseudosymetryczne w przestrzeniach o stałej krzywiźnie" złożonej z prac: [50, 51, 91, 92, 93, 95] są hiperpowierzchnie Ricci-pseudosymetryczne w semiriemannowskich przestrzeniach o stałej krzywiźnie. Najważniejsze wyniki tych badań zostały przedstawione w autoreferacie pracy doktorskiej [94]. Ponadto, w [94] przedstawiono wyniki badań nad innymi klasami rozmaitości typu pseudosymetrycznego, m.in. główne rezultaty prac: [25, 56, 57]. W monografii zostaną przedstawione zarówno te rezultaty, jak i najnowsze wyniki badań, m.in. zawarte w publikacjach: [78, 79, 97, 111, 130, 131, 132, 133].

W rozdziale 2 zaprezentowano podstawowe oznaczenia i definicje. Ponadto, zawarte w nim są także wyniki dotyczące własności algebraicznych symetrycznych tensorów A typu $(0, 2)$, uogólnionych tensorów krzywizny B oraz ich tensorów Tachibany $Q(A, B)$. Wyniki te są często wykorzystywane w dowodach twierdzeń dotyczących rozmaitości typu pseudosymetrycznego.

Rozdział 3 zawiera definicje podstawowych rozmaitości typu pseudosymetrycznego, a mianowicie: rozmaitości pseudosymetrycznej, Ricci-pseudosymetrycznej, weylowsko-pseudosymetrycznej oraz rozmaitości z pseudosymetrycznym tensorem Weyla. Przedstawiono także grupę warunków typu pseudosymetrycznego będących jednocześnie uogólnionymi warunkami metrycznymi Einsteina. Badanie tych warunków zostało zainspirowane twierdzeniem 3.3. Inne warunki typu pseudosymetrycznego zostaną przedstawione i omówione w następnych rozdziałach. Kolejne twierdzenia omówione w tym rozdziale dotyczą równań typu Walkera. Na przykład twierdzenie 3.4 orzeka, że na każdej semiriemannowskiej rozmaitości (M, g), wymiaru $\geqslant 4$, równania typu Walkera dla tensorów $R \cdot C$, $C \cdot R$ i $R \cdot C - C \cdot R$, tj. równania (2.32), (2.34) i (2.35), są równoważne.

Pierwsze rezultaty badań nad własnościami krzywiznowymi typu pseudosymetrycznego hiperpowierzchni zanurzonych izometrycznie w semiriemannowskich przestrzeniach o stałej krzywiźnie $N_s^{n+1}(c)$, $c = \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}$, z sygnaturą $(s, n+1-s)$, $n \geqslant 4$, zostały przedstawione w pracach: [24, 31, 33, 80, 83, 86]. Wśród tych warunków ważną rolę odgrywają warunki pseudosymetrii (3.4) i Ricci-pseudosymetrii (3.6).

W rozdziale 4 (twierdzenie 4.2) m.in. opisano podstawowe wyniki dotyczące hiperpowierzchni pseudosymetrycznych w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$. Badanie hiperpowierzchni pseudosymetrycznych prowadzi do równania (4.11), nazywanego równaniem typu Rotera. Rozmaitości spełniające (4.11) będą omawiane w następnych rozdziałach. Natomiast w tym rozdziale przedstawione zostały również tożsamości wyrażające na hiperpowierzchniach w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, tensory $S \cdot R$, $R \cdot C$, $C \cdot R$ i $R \cdot C - C \cdot R$ przez kombinacje liniowe pewnych tensorów typu $(0, 6)$ utworzonych z tensorów: metrycznego g, krzywizny R, Ricciego S, drugiego tensora podstawowego H rozważanej hiperpowierzchni i tensora A typu $(0, 2)$ zdefiniowanego przez (4.12). Tożsamości te wykorzystuje się m.in. przy wyznaczaniu własności typu pseudosymetrycznego hiperpowierzchni w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, por. [56] i [131].

Rozdział 5 dotyczy rozmaitości typu Rotera, tj. semiriemannowskich rozmaitości (M, g), $n \geqslant 4$, których tensor krzywizny spełnia równanie (4.11) na zbiorze $\mathcal{U} \subset M$ złożonym ze wszystkich punktów $x \in M$, w których tensor Weyla C jest niezerowy, tensor Ricciego S nie jest proporcjonalny do tensora metrycznego g i $\operatorname{rank}(S - \alpha\, g) > 1$, dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{R}$. Jeśli (4.11) jest spełnione na zbiorze $\mathcal{U} \subset M$ podrozmaitości (hiperpowierzchni) M, to M nazywa się podrozmaitością (hiperpowierzchnią) typu Rotera.

Rozmaitości typu Rotera tworzą jedno z możliwych rozszerzeń klasy rozmaitości konforemnie płaskich – czy też z drugiej strony – klasy rozmaitości 2-rekurencyjnych. Pewne hiperpowierzchnie pseudosymetryczne w przestrzeniach o stałej krzywiźnie są typu Rotera. Tej klasie hiperpowierzchni poświęcono rozdział 7.

Każda rozmaitość typu Rotera (M, g) spełnia związki: (4.4), (6.3) i (6.4). Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Rozmaitość semiriemannowska (M, g), $n \geqslant 4$, spełniająca te związki, tj. (4.4), (6.3) i (6.4), nazywa się rozmaitością typu Akivisa-Goldberga. W rozdziale 6 podane są przykłady tego typu rozmaitości są to pewne 4-wymiarowe rozmaitości semiriemannowskie badane w [4]. Istotne rozszerzenie klasy rozmaitości typu Akivisa-Goldberga stanowią rozmaitości typu Cartana. Rozmaitość (M, g), $n \geqslant 4$, nazywa się rozmaitością typu Cartana, jeśli spełnione są związki: (4.4), (6.3) i (10.1). Rezultaty dotyczące tej klasy zostaną przedstawione w następnych rozdziałach. Jeśli (4.4), (6.3) i (6.4) są spełnione na podrozmaitości (hiperpowierzchni) M, wymiaru $n \geqslant 4$, w rozmaitości semiriemannowskiej $(N, \widetilde{g})$, to M nazywa się podrozmaitością (hiperpowierzchnią) typu Akivisa-Goldberga. Podobnie – jeśli (4.4), (6.3) i (10.1) są spełnione na podrozmaitości (hiperpowierzchni) M, wymiaru $n \geqslant 4$, w rozmaitości semiriemannowskiej $(N, \widetilde{g})$, to M nazywa się podrozmaitością (hiperpowierzchnią) typu Cartana. Wspomnijmy jedynie, że każda hiperpowierzchnia Cartana wymiaru $\geqslant 6$ i ogólniej, każda hiperpowierzchnia Ricci-pseudosymetryczna w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, jest hiperpowierzchnią typu Cartana (twierdzenie 10.1).

W rozdziale 7 zaprezentowano rezultaty dotyczące hiperpowierzchni typu Rotera w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$. Głównym wynikiem omówionym w tym rozdziale jest twierdzenie 7.3. Z tego twierdzenia natychmiast wynika, że jeśli w każdym punkcie zbioru $\mathcal{U}$ hiperpowierzchni M w $N^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, są dokładnie dwie różne krzywizny główne, to M jest hiperpowierzchnią typu Rotera. W szczególności każdy torus Clifforda $S^p(\sqrt{\frac{p}{n}}) \times S^{n-p}(\sqrt{\frac{n-p}{n}})$, $2 \leqslant p \leqslant n-2$, $n \neq 2p$, jest hiperpowierzchnią typu Rotera, przy czym $S^p(\sqrt{\frac{p}{n}})$ i $S^{n-p}(\sqrt{\frac{n-p}{n}})$ są odpowiednio p- i $(n-p)$-wymiarowymi sferami standardowymi, odpowiednio o promieniach $\sqrt{\frac{p}{n}}$ i $\sqrt{\frac{n-p}{n}}$.

W rozdziale 8 przedstawiono rezultaty badań dotyczące problemu równoważności warunków semisymetrii (3.3) i Ricci-semisymetrii (3.5) na hiperpowierzchniach w przestrzeniach euklidesowych $\mathbb{E}^{n+1}$, $n \geqslant 4$, i ogólniej, w przestrzeniach semieuklidesowych $\mathbb{E}_s^{n+1}$, $n \geqslant 4$. Problem ten nazywany jest problemem P.J. Ryana [1, 32, 47]. Rozwiązaniem problemu P.J.

Ryana zajmowało się wielu autorów. W tym rozdziale przywołano przykłady półproduktowych rozmaitości Ricci-semisymetrycznych, różnych od semisymetrycznych, które lokalnie dają się zrealizować jako hiperpowierzchnie w $\mathbb{E}_s^{n+1}$, $n \geqslant 5$. Można również rozważać problem równoważności obu warunków na hiperpowierzchniach w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$. W przypadku hiperpowierzchni w $N_s^5(c)$ problem ten rozwiązuje twierdzenie 8.3. Dla $n \geqslant 5$ warunki te nie są równoważne. Znane są przykłady hiperpowierzchni Ricci-pseudosymetrycznych różnych od pseudosymetrycznych, np. hiperpowierzchnie Cartana wymiaru $\geqslant 6$.

Kolejny rozdział dotyczy hiperpowierzchni Ricci-pseudosymetrycznych. W twierdzeniu 9.1 przedstawione są własności krzywiznowe typu pseudosymetrycznego hiperpowierzchni Cartana wymiaru $\geqslant 6$. W twierdzeniu 9.2 zaprezentowano własności krzywiznowe typu pseudosymetrycznego hiperpowierzchni Ricci-pseudosymetrycznych. Natomiast twierdzenie 9.3 dotyczy równoważności warunku Ricci-pseudosymetrii (9.2) i warunku typu pseudosymetrycznego (9.6) na podzbiorze U_H, hiperpowierzchni w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, złożonym ze wszystkich punktów, w których kwadrat drugiego tensora podstawowego H^2 nie wyraża się przez kombinację liniową tensora H i tensora metrycznego g. Warunek (9.6) jest specjalną postacią (2.33). Własności hiperpowierzchni w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, spełniających (9.6) przedstawione są w twierdzeniach 9.4 i 9.5.

Ostatni rozdział odnosi się do hiperpowierzchni w semiriemannowskich przestrzeniach o stałej krzywiźnie spełniających inne warunki krzywiznowe. W tym rozdziale przedstawiono m.in. wyniki dotyczące hiperpowierzchni typu Cartana. Każda hiperpowierzchnia Ricci-pseudosymetryczna w przestrzeni o stałej krzywiźnie jest hiperpowierzchnią typu Cartana (twierdzenie 10.1). Quasi-einsteinowskie hiperpowierzchnie typu Cartana w semiriemannowskich przestrzeniach o stałej krzywiźnie były badane w pracy [97]. Między innymi w publikacji [97] wyznaczono warunki krzywiznowe typu pseudosymetrycznego spełnione na zbiorze U_H rozważanych hiperpowierzchni (twierdzenie 10.2). Ponadto, w rozdziale tym zaprezentowano wyniki dotyczące hiperpowierzchni, dla których jeden z tensorów: $R \cdot R$, $R \cdot C$, $C \cdot R$ lub $R \cdot C - R \cdot C$ jest równy tensorowi Tachibany $Q(g, B)$, gdzie B jest uogólnionym tensorem krzywizny (twierdzenia 10.3–10.5).

Przedstawione w tej monografii rezultaty można potraktować jako prezentację wyników pewnego zakresu badań w geometrii różniczkowej prowadzonych w Katedrze Matematyki Uniwersytetu Przyrodniczego we Wrocławiu pod kierunkiem Pana dr. hab. Ryszarda Deszcza, któremu składam serdeczne podziękowanie za udzieloną mi pomoc przy redagowaniu niniejszej monografii.

Panu dr. Janowi Jełowickiemu (Katedra Matematyki) dziękuję za opracowanie diagramu zamieszczonego w rozdziale 3.

Na zakończenie składam również podziękowanie Dziekanowi Wydziału Inżynierii Kształtowania Środowiska i Geodezji Uniwersytetu Przyrodniczego we Wrocławiu Panu prof. dr. hab. inż. Jerzemu Sobocie za umożliwienie opublikowania tej monografii w naszym wydawnictwie uczelnianym.

Wrocław, grudzień 2011 r.

2. **Tensory Tachibany**

Niech (M,g), $n = \dim M$, będzie spójną parazwartą rozmaitością semiriemannowską klasy C^{∞} z koneksją Levi-Civity ∇ i niech $\Xi(M)$ będzie algebrą Liego pól wektorowych na M. Endomorfizmy $\mathcal{R}(X,Y)$ i $X \wedge_A Y$ algebry $\Xi(M)$ zdefiniowane są następująco:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \\ (X \wedge_A Y)Z &= A(Y,Z)X - A(X,Z)Y, \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie $X, Y, Z \in \Xi(M)$, A jest tensorem typu $(0,2)$ na M, $[X,Y]$ jest nawiasem Liego pól X, Y:

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf),$$

a f jest funkcją klasy C^{∞} na M. Możemy teraz zdefiniować tensor krzywizny Riemanna-Christoffela R i tensor G rozmaitości (M,g):

$$\begin{aligned}R(X_1,X_2,X_3,X_4) &= g(\mathcal{R}(X_1,X_2)X_3,X_4), \\ G(X_1,X_2,X_3,X_4) &= g((X_1 \wedge_g X_2)X_3,X_4), \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie $X_1, \ldots, X_4 \in \Xi(M)$. Tensor Ricciego S, operator Ricciego $\mathcal{S}$ i krzywizna skalarna κ rozmaitości (M,g) zdefiniowane są przez:

$$\begin{aligned}S(X,Y) &= tr\,\{Z \to \mathcal{R}(Z,X)Y\}, \\ g(\mathcal{S}X,Y) &= S(X,Y), \\ \kappa &= tr\,\mathcal{S}.\end{aligned}$$

Endomorfizm $\mathcal{C}(X,Y)$ algebry $\Xi(M)$ oraz tensor Weyla krzywizny konforemnej C rozmaitości (M,g), $n \geqslant 3$, definiuje się następująco:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(X,Y)Z &= \mathcal{R}(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}(X \wedge_g \mathcal{S}Y + \mathcal{S}X \wedge_g Y)Z \\ &\quad + \frac{\kappa}{(n-2)(n-1)}(X \wedge_g Y)Z, \\ C(X_1,X_2,X_3,X_4) &= g(\mathcal{C}(X_1,X_2)X_3,X_4). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Niech T będzie tensorem typu $(0,k)$, $k \geqslant 1$, na semiriemannowskiej rozmaitości (M,g). Różniczkę kowariantną ∇T oraz różniczkę kowariantną rzędu drugiego $\nabla^2 T = \nabla(\nabla T)$ tensora T definiujemy następująco ([109], p. 125):

$$\begin{aligned}(\nabla T)(X_1,\ldots,X_k;X) &= (\nabla_X T)(X_1,\ldots,X_k) \\ &= \nabla_X(T(X_1,\ldots,X_k)) - \sum_{j=1}^{k} T(X_1,\ldots,\nabla_X X_j,\ldots,X_k), \\ (\nabla^2 T)(X_1,\ldots,X_k;X,Y) &= (\nabla_Y(\nabla T))(X_1,\ldots,X_k,X).\end{aligned}$$

Niech $\mathcal{B}(X,Y)$ będzie endomorfizmem skośnie symetrycznym algebry $\Xi(M)$, a B tensorem typu $(0,4)$ stowarzyszonym z $\mathcal{B}(X,Y)$ przez związek:

$$B(X_1,X_2,X_3,X_4) \;=\; g(\mathcal{B}(X_1,X_2)X_3,X_4). \tag{2.4}$$

Tensor B nazywa się uogólnionym tensorem krzywizny [121], jeśli są spełnione warunki:

$$\begin{aligned} B(X_1,X_2,X_3,X_4)+B(X_2,X_3,X_1,X_4)+B(X_3,X_1,X_2,X_4) \;&=\; 0,\\ B(X_1,X_2,X_3,X_4) \;=\; B(X_3,X_4,X_1,X_2).& \end{aligned}$$

Można sprawdzić, że tensory R, G i C są uogólnionymi tensorami krzywizny. W specjalnym przypadku uogólniony tensor krzywizny B nazywa się właściwym [121, 127], jeśli jego różniczka kowariantna ∇B spełnia równanie:

$$\begin{aligned} &(\nabla B)(X_1,X_2,X_3,X_4;X)+(\nabla B)(X_1,X_2,X_4,X;X_3)\\ +\;&(\nabla B)(X_1,X_2,X,X_3;X_4) \;=\; 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dla dowolnych symetrycznych tensorów E i F typu $(0,2)$ ich iloczyn Kulkarniego-Nomizu $E\wedge F$ jest zdefiniowany następująco:

$$\begin{aligned} (E\wedge F)(X_1,X_2,X_3,X_4) \;=\;& E(X_1,X_4)F(X_2,X_3)+E(X_2,X_3)F(X_1,X_4)\\ &-E(X_1,X_3)F(X_2,X_4)-E(X_2,X_4)F(X_1,X_3). \end{aligned}$$

Tensor $E\wedge F$ jest również uogólnionym tensorem krzywizny. Tensor $E\wedge F$ nazywamy także tensorem Kulkarniego-Nomizu tensorów E i F [58]. Dla symetrycznego tensora E typu $(0,2)$ można zdefiniować tensor $\overline{E}$ typu $(0,4)$:

$$\overline{E} \;=\; \frac{1}{2}\,E\wedge E. \tag{2.6}$$

W szczególności mamy:

$$\overline{g} \;=\; \frac{1}{2}\,g\wedge g \;=\; G. \tag{2.7}$$

Tensor Weyla C rozmaitości (M,g), $n\geqslant 3$, można przedstawić teraz w postaci:

$$C \;=\; R-\frac{1}{n-2}\,g\wedge S+\frac{\kappa}{(n-2)(n-1)}\,G. \tag{2.8}$$

Tensory R, S i C rozmaitości (M,g), $n\geqslant 4$, wyznaczają następujące podzbiory M:

$$\begin{aligned} U_R \;&=\; \{x\in M \,:\, R-\frac{\kappa}{(n-1)n}\,G\neq 0 \text{ w } x\},\\ U_S \;&=\; \{x\in M \,:\, S-\frac{\kappa}{n}\,g\neq 0 \text{ w } x\},\\ U_C \;&=\; \{x\in M \,:\, C\neq 0 \text{ w } x\}. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdza się, że $U_C \subset U_R$ i $U_S \subset U_R$. Przypomnijmy, że we wstępie zdefiniowany został zbiór $\mathcal{U} \subset M$ złożony ze wszystkich punktów $U_C \cap U_S$, w których jest spełniony warunek:

$$\operatorname{rank}(S - \alpha\, g) > 1, \quad \text{dla wszystkich} \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Niech $\mathcal{B}(X,Y)$ będzie endomorfizmem skośnie symetrycznym algebry $\Xi(M)$, a B tensorem zdefiniowanym przez (2.4). Rozszerzmy endomorfizm $\mathcal{B}(X,Y)$ do derywacji $\mathcal{B}(X,Y)\cdot$ algebry pól tensorowych na M, zakładając, że derywacja ta komutuje z kontrakcjami oraz że dla dowolnej funkcji gładkiej na M zachodzi:

$$\mathcal{B}(X,Y)\cdot f \;=\; 0.$$

Teraz dla dowolnego tensora T typu $(0,p)$, $p \geqslant 1$, oraz dowolnego tensora A typu $(0,2)$ na M można zdefiniować tensory $B \cdot T$ i $Q(A,T)$ typu $(0,p+2)$:

$$\begin{aligned}
& (B\cdot T)(X_1,\ldots,X_p;X,Y) \\
= \;& (\mathcal{B}(X,Y)\cdot T)(X_1,\ldots,X_p;X,Y) \\
= \;& -T(\mathcal{B}(X,Y)X_1,X_2,\ldots,X_p) \\
& - \cdots - T(X_1,\ldots,X_{p-1},\mathcal{B}(X,Y)X_p),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
& Q(A,T)(X_1,\ldots,X_p;X,Y) \\
= \;& (X \wedge_A Y \cdot T)(X_1,\ldots,X_p;X,Y) \\
= \;& -T((X \wedge_A Y)X_1,X_2,\ldots,X_p) \\
& - \cdots - T(X_1,\ldots,X_{p-1},(X \wedge_A Y)X_p).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Podstawiając w powyższych wzorach: $\mathcal{B} = \mathcal{R}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, $T = R$, $T = C$, $T = S$, $A = g$ i $A = S$, otrzymamy tensory: $R \cdot R$, $R \cdot C$, $C \cdot R$, $R \cdot S$, $C \cdot S$, $Q(g,R)$, $Q(S,R)$, $Q(g,C)$ i $Q(g,S)$. Dodajmy, że oznaczenie $Q(A,T)$ wprowadzono po raz pierwszy w pracy [60].

Niech $\{U, x^h\}$ będzie mapą lokalną na rozmaitości semiriemannowskiej (M,g), a $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$ bazowymi polami wektorowymi tej mapy. Wówczas:

$$\nabla_{\partial_j}\partial_k \;=\; \Gamma^s_{jk}\partial_s, \;\; \Gamma^s_{jk} \;=\; g^{sr}(\partial_j g_{kr} + \partial_k g_{jr} - \partial_r g_{jk}), \;\; [\partial_i,\partial_j] \;=\; 0, \tag{2.12}$$

przy czym $g_{ij} = g(\partial_i,\partial_j)$ i g^{ij} są współrzędnymi lokalnymi w danej mapie – odpowiednio: tensora metrycznego g i tensora odwrotnego g^{-1} tensora g, a Γ^s_{jk} symbolami Christoffela rodzaju drugiego oraz $h,i,j,k,l,m,r,s \in \{1,2,\ldots,n\}$. Ponadto, kładąc w (2.1) $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ i $Z = \partial_k$, otrzymamy:

$$\mathcal{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_k \;=\; \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k, \tag{2.13}$$

$$(\partial_i \wedge_A \partial_j)\partial_k \;=\; A_{jk}\partial_i - A_{ik}\partial_j, \tag{2.14}$$

gdzie $A_{ij} = A(\partial_i, \partial_j)$. Ze związku (2.13), po wykorzystaniu (2.12), otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= \nabla_{\partial_i}(\Gamma^s_{jk}\partial_s) - \nabla_{\partial_j}(\Gamma^s_{ik}\partial_s) \\
&= \partial_i(\Gamma^s_{jk})\partial_s + \Gamma^s_{jk}\nabla_{\partial_i}\partial_s - \partial_j(\Gamma^s_{ik})\partial_s - \Gamma^s_{ik}\nabla_{\partial_j}\partial_s \\
&= \partial_i(\Gamma^s_{jk})\partial_s - \partial_j(\Gamma^s_{ik})\partial_s + \Gamma^r_{jk}\nabla_{\partial_i}\partial_r - \Gamma^r_{ik}\nabla_{\partial_j}\partial_r \\
&= \partial_i(\Gamma^s_{jk})\partial_s - \partial_j(\Gamma^s_{ik})\partial_s + \Gamma^r_{jk}\Gamma^s_{ir}\partial_s - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{jr}\partial_s \\
&= (\partial_i\Gamma^s_{jk} - \partial_j\Gamma^s_{ik} + \Gamma^r_{jk}\Gamma^s_{ir} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{jr})\partial_s.
\end{aligned}$$

Z drugiej strony:

$$\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}{}^s\partial_s. \tag{2.15}$$

Zatem:

$$R_{ijk}{}^s = \partial_i\Gamma^s_{jk} - \partial_j\Gamma^s_{ik} + \Gamma^r_{jk}\Gamma^s_{ir} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{jr}.$$

Kładąc w (2.2) i (2.3) $X_1 = \partial_i$, $X_2 = \partial_j$, $X_3 = \partial_k$, $X_4 = \partial_l$ oraz korzystając z (2.14) i (2.15), otrzymamy:

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = g(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l) \\
&= g(R_{ijk}{}^s\partial_s, \partial_l) = R_{ijk}{}^s g_{sl},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{ijkl} &= G(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = g((\partial_i \wedge_g \partial_j)\partial_k, \partial_l) \\
&= g(g_{jk}\partial_i - g_{ik}\partial_j, \partial_l) = g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{ijkl} &= C(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = g(C(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l) \\
&= R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\,(g_{il}S_{jk} + g_{jk}S_{il} - g_{ik}S_{jl} - g_{jl}S_{ik}) \\
&\quad + \frac{\kappa}{(n-2)(n-1)}\,G_{ijkl}\,,
\end{aligned}$$

przy czym $S_{ij} = S(\partial_i, \partial_j)$.

Następnie kładąc w (2.10) i (2.11): $p = 4$, $X_1 = \partial_h$, $X_2 = \partial_i$, $X_3 = \partial_j$, $X_4 = \partial_k$, $X = \partial_l$, $Y = \partial_m$ oraz

$$B_{hijk} = B(\partial_h, \partial_i, \partial_j, \partial_k), \quad T_{hijk} = T(\partial_h, \partial_i, \partial_j, \partial_k), \quad A_{lh} = A(\partial_l, \partial_h),$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned}
& (B \cdot T)_{hijklm} \\
= \;& (B \cdot T)(\partial_h, \partial_i, \partial_j, \partial_k; \partial_l, \partial_m) \;=\; (B(\partial_l, \partial_m) \cdot T)(\partial_h, \ldots, \partial_k) \\
= \;& -T(B(\partial_l, \partial_m)\partial_h, \partial_i, \partial_j, \partial_k) - \cdots - T(\partial_h, \partial_i, \partial_j, B(\partial_l, \partial_m)\partial_k) \\
= \;& -B_{lmh}{}^{s} T(\partial_s, \partial_i, \partial_j, \partial_k) - B_{lmi}{}^{s} T(\partial_h, \partial_s, \partial_j, \partial_k) \\
& -B_{lmj}{}^{s} T(\partial_h, \partial_i, \partial_s, \partial_k) - B_{lmk}{}^{s} T(\partial_h, \partial_i, \partial_j, \partial_s) \\
= \;& -B_{lmh}{}^{s} T_{sijk} - B_{lmi}{}^{s} T_{hsjk} - B_{lmj}{}^{s} T_{hisk} - B_{lmk}{}^{s} T_{hijs} \\
= \;& -B_{lmhr} g^{rs} T_{sijk} - B_{lmir} g^{rs} T_{hsjk} - B_{lmjr} g^{rs} T_{hisk} - B_{lmkr} g^{rs} T_{hijs} \\
= \;& g^{rs}(-B_{lmhr} T_{sijk} - B_{lmir} T_{hsjk} - B_{lmjr} T_{hisk} - B_{lmkr} T_{hijs}) \\
= \;& g^{rs}(B_{rhlm} T_{sijk} + B_{rilm} T_{hsjk} + B_{rjlm} T_{hisk} + B_{rklm} T_{hijs}) \\
= \;& g^{sr}(T_{sijk} B_{rhlm} + T_{hsjk} B_{rilm} + T_{hisk} B_{rjlm} + T_{hijs} B_{rklm}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Q(A, T)_{hijklm} \\
= \;& Q(A, T)(\partial_h, \partial_i, \partial_j, \partial_k; \partial_l, \partial_m) \;=\; (\partial_l \wedge_A \partial_m \cdot T)(\partial_i, \ldots, \partial_k) \\
= \;& -T((\partial_l \wedge_A \partial_m)\partial_h, \partial_i, \partial_j, \partial_k) - \cdots - T(\partial_h, \partial_i, \partial_j(\partial_l \wedge_A \partial_m)\partial_k) \\
= \;& -T(A(\partial_m, \partial_h)\partial_l - A(\partial_l, \partial_h)\partial_m, \partial_i, \partial_j, \partial_k) \\
& - \cdots - T(\partial_h, \partial_i, \partial_j, A(\partial_m, \partial_k)\partial_l - A(\partial_l, \partial_k)\partial_m) \\
= \;& -A(\partial_m, \partial_h) T(\partial_l, \partial_i, \partial_j, \partial_k) + A(\partial_l, \partial_h) T(\partial_m, \partial_i, \partial_j, \partial_k) \\
& - \cdots - A(\partial_m, \partial_k) T(\partial_h, \partial_i, \partial_j, \partial_l) + A(\partial_l, \partial_k) T(\partial_h, \partial_i, \partial_j, \partial_m) \\
= \;& A_{lh} T_{mijk} + A_{li} T_{hmjk} + A_{lj} T_{himk} + A_{lk} T_{hijm} \\
& -A_{mh} T_{lijk} - A_{mi} T_{hljk} - A_{mj} T_{hilk} - A_{mk} T_{hijl} \,.
\end{aligned}$$

Zatem:

$$\begin{aligned}
(B \cdot T)_{hijklm} &= g^{sr}(T_{sijk} B_{rhlm} + T_{hsjk} B_{rilm} + T_{hisk} B_{rjlm} + T_{hijs} B_{rklm}), \\
Q(A, T)_{hijklm} &= A_{lh} T_{mijk} + A_{li} T_{hmjk} + A_{lj} T_{himk} + A_{lk} T_{hijm} \\
& \quad -A_{mh} T_{lijk} - A_{mi} T_{hljk} - A_{mj} T_{hilk} - A_{mk} T_{hijl}.
\end{aligned}$$

Kładąc w ostatnim wzorze $A = g$ oraz $T = R$ lub $T = C$, otrzymamy współrzędne lokalne $Q(g, R)_{hijklm}$ i $Q(g, C)_{hijklm}$ tensorów $Q(g, R)$ i $Q(g, C)$.

Wyrażenia występujące po prawej stronie ostatniego wzoru, dla $A = g$ oraz $T = R$ lub $T = C$, są podane w monografii [89] (p. 238 i 285), jak również w pracy Tachibany [141], w przypadku gdy $A = g$ i $T = R$. Dlatego też tensor $Q(g, R)$ został nazwany tensorem Tachibany, patrz np. [99 –103]. Natomiast dla tensora $Q(g, S)$ w pracach [108] i [137] zaproponowano nazwę tensor Ricciego-Tachibany, a w pracy [107] tensory $Q(g, S)$ i $Q(g, C)$ nazwano odpowiednio tensorem Tachibany-Ricciego i tensorem Tachibany-

-Weyla. W związku z tym tensor $Q(A,T)$ wyznaczony przez tensor A typu $(0,2)$ i tensor T typu $(0,k)$ będzie nazwany tensorem Tachibany tensorów A i T lub krótko tensorem Tachibany [58].

Niech $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ będzie bazą ortonormalną w przestrzeni stycznej T_xM w punkcie $x \in M$ rozmaitości semiriemannowskiej (M,g), $n \geqslant 3$, przy czym:

$$g(e_j, e_k) = \varepsilon_j \delta_{jk}, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \quad j,k \in \{1,2,\ldots,n\}. \tag{2.16}$$

Załóżmy, że $\{e_j, e_k\}$, $j \neq k$, jest bazą 2-wymiarowej płaszczyzny π w przestrzeni T_xM. Krzywiznę sekcyjną $\kappa(\pi)$ płaszczyzny π definiujemy przez [90, p. 31]:

$$\kappa(\pi) = \frac{R(e_j, e_k, e_k, e_j)}{g(e_j, e_j)g(e_k, e_k) - (g(e_j, e_k))^2} = R(e_j, e_k, e_k, e_j)\varepsilon_j\varepsilon_k\,. \tag{2.17}$$

Dla dowolnego tensora T typu $(0,k)$, $k \geqslant 1$, i symetrycznego tensora A typu $(0,2)$ definiujemy tensory A^p typu $(0,2)$, $p \geqslant 2$, oraz tensor $A \cdot T$ typu $(0,k)$ następująco:

$$\begin{aligned} A^p(X,Y) &= A^{p-1}(\mathcal{A}X, Y), \\ (A \cdot T)(X_1, \ldots, X_k) &= -T(\mathcal{A}X_1, X_2, \ldots, X_k) \\ &\quad - \ldots - T(X_1, X_2, \ldots, \mathcal{A}X_k), \end{aligned}$$

przy czym endomorfizm $\mathcal{A}$ jest zdefiniowany przez $g(\mathcal{A}X, Y) = A(X,Y)$. Kładąc w ostatnim wzorze $T = R$ lub $T = C$ i $A = S$, otrzymujemy tensory $S \cdot R$ i $S \cdot C$ typu $(0,4)$.

Iloczyn Kulkarniego-Nomizu $E \wedge T$, gdzie E jest tensorem symetrycznym typu $(0,2)$, a T tensorem typu $(0,k)$, $k \geqslant 2$, definiujemy następująco [51]:

$$\begin{aligned} & (E \wedge T)(X_1, X_2, X_3, X_4; Y_3, \ldots, Y_k) \\ = \; & E(X_1, X_4)T(X_2, X_3, Y_3, \ldots, Y_k) + E(X_2, X_3)T(X_1, X_4, Y_3, \ldots, Y_k) \\ & - E(X_1, X_3)T(X_2, X_4, Y_3, \ldots, Y_k) - E(X_2, X_4)T(X_1, X_3, Y_3, \ldots, Y_k). \end{aligned}$$

Tensor $E \wedge F$ nazywamy również tensorem Kulkarniego-Nomizu tensorów E i F [58].

Korzystając z powyższych definicji, możemy udowodnić:

Twierdzenie 2.1. ([93], *Lemma* 2.2): *Niech E_1, E_2 i F będą tensorami symetrycznymi typu $(0,2)$ w punkcie x rozmaitości semiriemannowskiej (M,g), $n \geqslant 3$. Wówczas w x spełnione jest równanie:*

$$E_1 \wedge Q(E_2, F) + E_2 \wedge Q(E_1, F) = -Q(F, E_1 \wedge E_2).$$

Jeśli $E = E_1 = E_2$, to na mocy twierdzenia 2.1 otrzymujemy [51]:

$$E \wedge Q(E,F) = -Q(F, \overline{E}). \tag{2.18}$$

Łatwo sprawdza się, że jeśli E i F są tensorami symetrycznymi typu $(0, 2)$, to jest spełniona tożsamość ([56], Section 3):

$$Q(E, E \wedge F) \;=\; -Q(F, \overline{E}). \tag{2.19}$$

Ze związków (2.18) i (2.19) natychmiast wynika, że:

$$E \wedge Q(E, F) \;=\; Q(E, E \wedge F).$$

Zauważmy, że związki (2.8) i (2.19) prowadzą do tożsamości:

$$Q(g, C) \;=\; Q(g, R) + \frac{1}{n-2}\, Q(S, G).$$

Niech B będzie uogólnionym tensorem krzywizny. Tensor conharmoniczny $conh(B)$, tensor Weyla $Weyl(B)$, tensor Ricciego $Ric(B)$ i krzywizna skalarna $\kappa(B)$ tensora B są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned}
conh(B) &= B - \frac{1}{n-2}\, g \wedge Ric(B), \\
Weyl(B) &= B - \frac{1}{n-2}\, g \wedge Ric(B) + \frac{\kappa(B)}{(n-2)(n-1)}\, G, \\
Ric(B)(X, Y) &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j\, B(e_j, X, Y, e_j), \\
\kappa(B) &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j\, Ric(B)(e_j, e_j),
\end{aligned}$$

przy czym $X, Y \in T_xM$, a $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ jest bazą ortonormalną T_xM i spełniony jest związek (2.16). Dodajmy, że tensor:

$$K \;=\; conh(R) \;=\; R - \frac{1}{n-2}\, g \wedge S$$

został zdefiniowany w [106]. Zauważmy, że (por. [106], równ. (3.6) i (3.7)):

$$conh(B) \;=\; Weyl(B) - \frac{\kappa(B)}{(n-2)(n-1)}\, G. \tag{2.20}$$

Własności tensorów $conh(B)$ i $Weyl(B)$ oraz tożsamość (2.20) pozwalają na stwierdzenie, że $conh(B) = 0$ w pewnym punkcie $x \in M$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Weyl(B) = 0$ i $\kappa(B) = 0$ w x. Zbiory U_B, $U_{Ric(B)}$ i $U_{Weyl(B)}$

definiujemy analogicznie jak zbiory U_R, U_S i U_C. Zatem:

$$\begin{aligned} U_B &= \{x \in M \,:\, B - \frac{\kappa(B)}{(n-1)n}\, G \neq 0 \text{ w } x\}, \\ U_{Ric(B)} &= \{x \in M \,:\, Ric(B) - \frac{\kappa(B)}{n}\, g \neq 0 \text{ w } x\}, \\ U_{Weyl(B)} &= \{x \in M \,:\, Weyl(B) \neq 0 \text{ w } x\}. \end{aligned}$$

Ponadto, niech:

$$U_{conh(B)} = \{x \in M \,:\, conh(B) \neq 0 \text{ w } x\}.$$

Dla tensora T typu $(0, 6)$ wyrażenie:

$$\sum_{(X_1,X_2),\,(X_3,X_4),\,(X_5,X_6)} T(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$$

będzie oznaczać sumę:

$$\begin{aligned} & T(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) + T(X_3, X_4, X_5, X_6, X_1, X_2) \\ + \;\; & T(X_5, X_6, X_1, X_2, X_3, X_4). \end{aligned}$$

Lemat 1.1 z pracy [34] można teraz przedstawić w następującej postaci:

Twierdzenie 2.2. (*por.* [34], *Lemma* 1.1): *Niech A będzie tensorem symetrycznym typu $(0, 2)$, a B uogólnionym tensorem krzywizny na rozmaitości semiriemannowskiej (M, g), $n \geqslant 3$.*
(i) *Tensor Tachibany $Q(A, B)$ spełnia na M tożsamość:*

$$\sum_{(X_1,X_2),\,(X_3,X_4),\,(X_5,X_6)} Q(A, B)(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) = 0.$$

(ii) *Tensor Tachibany $Q(g, B)$ znika w punkcie $x \in M$ wtedy i tylko wtedy, gdy w tym punkcie mamy:*

$$B = \frac{\kappa(B)}{(n-1)n}\, G. \tag{2.21}$$

(iii) *Jeśli w $x \in M$ zachodzi:*

$$R \cdot B = L\, Q(g, B),$$

to również w tym punkcie mamy:

$$R \cdot Ric(B) = L\, Q(g, Ric(B)),$$

przy czym $L \in \mathbb{R}$.

Na podstawie wyników z pracy [23] możemy przedstawić następujące rozszerzenie twierdzenia 2.2 (ii):

Twierdzenie 2.3. (*por.* [23], *Proposition* 4.1): *Niech A będzie tensorem symetrycznym typu $(0, 2)$, a B uogólnionym tensorem krzywizny na semiriemannowskiej rozmaitości (M, g), $n \geqslant 3$. Ponadto, niech $\operatorname{rank} A > 1$ w punkcie $x \in M$. Wówczas tensor Tachibany $Q(A, B)$ jest tensorem zerowym w tym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$B \;=\; \frac{\lambda}{2}\, A \wedge A, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Niech (M, g), $n \geqslant 3$, będzie rozmaitością semiriemannowską. Zauważmy, że jeśli w pewnym punkcie $x \in M$ tensor $Q(g, B)$ wyznaczony przez tensor metryczny g oraz uogólniony tensor krzywizny B jest tensorem zerowym, to na mocy ostatniego twierdzenia otrzymamy $B = \frac{\lambda}{2}\, g \wedge g$, $\lambda \in \mathbb{R}$, a w konsekwencji, po wykorzystaniu (2.7), również (2.21).

W rozdziale 4 wykorzystamy następujący wynik dotyczący uogólnionych tensorów krzywizny:

Twierdzenie 2.4. (*por.* [111], *Theorem* 3.1): *Niech A będzie tensorem symetrycznym typu $(0, 2)$, a B uogólnionym tensorem krzywizny na semiriemannowskiej rozmaitości (M, g), $n \geqslant 3$, i niech na M będzie spełniony związek:*

$$B \;=\; \frac{\alpha}{2}\, A \wedge A + \beta\, g \wedge A + \gamma\, G, \tag{2.22}$$

gdzie α, β, γ są funkcjami na M.
(i) We wszystkich punktach M, w których funkcja α jest różna od zera, mamy:

$$\begin{aligned} B \cdot B \;&=\; Q(Ric(B), B) + L_2 Q(g, Weyl(B)),\\ L_2 \;&=\; (n-2)(\frac{\beta^2}{\alpha} - \gamma). \end{aligned}$$

(ii) Dodatkowo, jeśli $A = Ric(B)$, tj. gdy:

$$B \;=\; \frac{\alpha}{2}\, (Ric(B) \wedge Ric(B)) + \beta\, (g \wedge Ric(B)) + \gamma\, G, \tag{2.23}$$

to

$$\begin{aligned}
B \cdot B &= L_B\, Q(g, B), \\
B \cdot Ric(B) &= L_B\, Q(g, Ric(B)), \\
B \cdot Weyl(B) &= L_B\, Q(g, Weyl(B)), \\
Ric(B)^2 &= (\kappa(B) - (n-2)\psi_2)\, Ric(B) + \frac{\psi_1}{\alpha}\, g, \\
L_B &= (n-2)(\frac{\beta^2}{\alpha} - \gamma) - \frac{\beta}{\alpha}, \\
\psi_1 &= (n-1)\gamma + \beta\kappa(B), \\
\psi_2 &= \frac{1-(n-2)\beta}{(n-2)\alpha}.
\end{aligned}$$

(iii) Jeśli $n \geqslant 4$ i $A = Ric(B)$, to na zbiorze $U_{Weyl(B)} \subset M$ spełnione są związki:

$$\begin{aligned}
Weyl(B) \cdot Weyl(B) &= L_1\, Q(g, Weyl(B)), \\
Weyl(B) \cdot Ric(B) &= L_1\, Q(g, Ric(B)), \\
Weyl(B) \cdot B &= L_1\, Q(g, B), \\
L_1 &= \psi_2 - \psi_3, \\
\psi_3 &= \frac{\kappa(B)}{n-1} - L_B.
\end{aligned}$$

Jeśli uogólniony tensor krzywizny B spełnia na podzbiorze $U_{Weyl(B)} \cap U_{Ric(B)}$ rozmaitości semiriemannowskiej (M, g), $n \geqslant 4$, równanie (2.23), to spełnione są również inne związki krzywiznowe typu pseudosymetrycznego ([111], Proposition 4.1).

Twierdzenie 2.5. ([34], *Lemma* 1.2; [62], *Lemma* 2; [76], *Lemma* 2.1): *Niech B będzie uogólnionym tensorem krzywizny w punkcie x semiriemannowskiej rozmaitości (M, g), $n \geqslant 3$, i niech $Weyl(B) = 0$ w x. Wówczas następujące warunki są równoważne w tym punkcie:*

$$\begin{aligned}
B \cdot B &= \alpha\, Q(g, B), \\
B \cdot Ric(B) &= \alpha\, Q(g, Ric(B)), \\
(Ric(B))^2 - \frac{tr((Ric(B))^2)}{n}\, g &= (\frac{\kappa(B)}{n-1} + (n-2)\alpha)(Ric(B) - \frac{\kappa(B)}{n}\, g),
\end{aligned}$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$.

Kolejne dwa twierdzenia dotyczą własności algebraicznych symetrycznych tensorów typu $(0, 2)$ oraz pewnych tensorów typu $(0, 4)$ utworzonych z tych tensorów.

Twierdzenie 2.6. *Niech E będzie tensorem symetrycznym typu $(0,2)$ na semiriemannowskiej rozmaitości (M,g), $n \geqslant 3$. Niech U_E będzie zbiorem wszystkich punktów M, w których tensor E nie jest proporcjonalny do tensora g.*
(i) ([92], *Lemma* 3.1) *Jeśli w $x \in U_E$ jest spełniony związek:*

$$E \wedge E \;=\; 2\alpha\, g \wedge E + 2\beta\, G, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

to w tym punkcie mamy: $\alpha^2 = -\beta$ i $rank(E - \alpha\, g) = 1$.
(ii) ([95], *eq.* (8)) *Jeśli w $x \in U_E$ jest spełniony warunek $rank(E-\alpha\, g) = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, to w tym punkcie zachodzą związki:*

$$E^2 \;=\; (tr(E) - (n-2)\alpha)\, E + \alpha((n-1)\alpha - tr(E))\, g, \tag{2.24}$$

$$E \wedge E \;=\; 2\alpha\, g \wedge E - 2\alpha^2\, G. \tag{2.25}$$

(iii) ([80], *Lemma* 2.4 *(i)*) *Jeśli w $x \in U_E$ jest spełniony związek:*

$$Q(E, F) \;=\; 0,$$

gdzie F jest tensorem symetrycznym typu $(0,2)$, to $F = \alpha\, E$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
(iv) ([80], *Lemma* 2.4 *(ii)*) *Jeśli w $x \in U_E$ jest spełniony związek:*

$$\alpha\, Q(g, E) + \beta\, Q(g, F) + \gamma\, Q(E, F) \;=\; 0, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \qquad \gamma \neq 0,$$

to w tym punkcie mamy:

$$F - \frac{tr(F)}{n}\, g \;=\; \lambda\, (E - \frac{tr(E)}{n}\, g), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(v) ([46], *Lemma* 2.1 *(i)*) *Jeśli $rank\, E = 2$ w $x \in U_E$, to:*

$$E^3 \;=\; tr(E)\, E^2 + \frac{1}{2}(tr(E^2) - (tr(E))^2)\, E.$$

Ponadto, jeśli w x mamy $E^2 = \alpha\, E + \beta\, g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to $E^2 = \frac{tr(E)}{2}\, E$.

Twierdzenie 2.7. *Niech E i F będą symetrycznymi tensorami typu $(0,2)$ w punkcie x semiriemannowskiej rozmaitości (M,g), $n \geqslant 3$ i niech D będzie tensorem typu $(0,2)$ w tym punkcie, o lokalnych współrzędnych $D_{hk} = E_{hi} g^{ij} F_{kj}$, przy czym E_{hk} i F_{hk} są lokalnymi współrzędnymi tensorów E i F. Jeśli tensor D jest tensorem symetrycznym, to w punkcie x spełniona jest tożsamość:*

$$(E \wedge F) \cdot (E \wedge F) \;=\; -\frac{1}{2}\, Q(E^2, F \wedge F) - \frac{1}{2}\, Q(F^2, E \wedge E) - Q(D, E \wedge F).$$

Dowód. Wykorzystując definicje tensorów $B \cdot B$ i $Q(A,B)$, gdzie B jest uogólnionym tensorem krzywizny, a A jest symetrycznym tensorem typu $(0,2)$, łatwo sprawdzimy prawdziwość danej tożsamości.

Niech A będzie symetrycznym tensorem typu $(0,2)$, a B uogólnionym tensorem krzywizny na semiriemannowskiej rozmaitości (M,g) wymiaru $\geqslant 3$. Można utworzyć następujące tensory Tachibany typu $(0,6)$: $Q(g,B)$, $Q(A,B)$ oraz:

$$Q(g, g\wedge g) = 0, \quad Q(g, g\wedge A) = -Q(A,G), \quad Q(g, A\wedge A) = 2\,Q(g,\overline{A}),$$
$$Q(A, A\wedge A) = 0, \quad Q(A, g\wedge A) = -Q(g,\overline{A}), \quad Q(A, g\wedge g) = 2\,Q(A,G).$$

Zatem dowolną kombinację liniową zdefinowanych wyżej tensorów Tachibany można wyrazić przez kombinację liniową tensorów: $Q(g,B)$, $Q(g, g\wedge A)$, $Q(g, A\wedge A)$ i $Q(A,B)$.

Z twierdzenia 2.6 (ii) wynika, że jeśli $\operatorname{rank}(A - \rho\, g) = 1$, dla pewnego $\rho \in \mathbb{R}$, to punkcie tym tensor A spełnia związek (2.25). Tensory $Q(g, g\wedge A)$ i $Q(g, A\wedge A)$ są więc liniowo zależne w x.

Zbadajmy teraz liniową zależność tensorów: $Q(g,B)$, $Q(A,B)$, $Q(g, g\wedge A)$ i $Q(g, A\wedge A)$ przy założeniu, że w danym punkcie semiriemannowskiej rozmaitości jest spełniony warunek: $\operatorname{rank}(A-\rho\, g) > 1$ dla wszystkich $\rho \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2.8. *Niech A będzie symetrycznym tensorem typu $(0,2)$ a B uogólnionym tensorem krzywizny w punkcie x semiriemannowskiej rozmaitości (M,g), $n \geqslant 4$. Ponadto, niech $\operatorname{rank}(A-\rho\, g) > 1$ dla wszystkich $\rho \in \mathbb{R}$. Jeśli tensory Tachibany $Q(g,B)$, $Q(g, g\wedge A)$, $Q(g, A\wedge A)$ i $Q(A,B)$ są liniowo zależne w x, to tensor B ma w tym punkcie rozkład postaci (2.22).*

Dowód. Niech w rozważanym punkcie x będzie spełnione równanie:

$$\alpha\, Q(g,B) + \beta\, Q(g, g\wedge A) + \gamma\, Q(g, A\wedge A) + \delta\, Q(A,B) = 0, \tag{2.26}$$

przy czym $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 > 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
(i) Załóżmy, że $\delta = 0$. Wówczas (2.26) przyjmie postać:

$$Q(g, \alpha\, B + \beta\, g\wedge A + \gamma\, A\wedge A) = 0,$$

skąd na mocy twierdzenia 2.2 (ii) otrzymamy:

$$\alpha\, B + \beta\, g\wedge A + \gamma\, A\wedge A = \tau\, G, \qquad \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.27}$$

Załóżmy dodatkowo, że $\alpha = 0$. Równanie (2.27) redukuje się teraz do:

$$\beta\, g\wedge A + \gamma\, A\wedge A = \tau\, G, \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

Jeśli ponadto $\gamma = 0$, to $\beta \neq 0$ i $g \wedge A = \tau_1 G$, $\tau_1 \in \mathbb{R}$, a w konsekwecji $A = \frac{tr(A)}{n} g$, sprzeczność. Jeśli $\gamma \neq 0$, to:

$$A \wedge A = \beta_1 g \wedge A + \tau_2 G, \quad \beta_1, \tau_2 \in \mathbb{R}.$$

Ostatni związek, na mocy twierdzenia 2.5 (i), prowadzi również do sprzeczności. Natomiast gdy $\alpha \neq 0$ równanie (2.27) daje (2.22).
(ii) Rozważmy teraz przypadek, gdy $\delta \neq 0$. Założenie to, po wykorzystaniu (2.19), pozwala na przedstawienie (2.26) w postaci:

$$Q(A,B) = \alpha_1 Q(g,B) + \beta_1 Q(A,G) + \gamma_1 Q(g, A \wedge A),$$

skąd otrzymamy:

$$Q(A, B - \beta_1 G) = \alpha_1 Q(g, B - \beta_1 G) + \gamma_1 Q(g, A \wedge A)$$

oraz

$$Q(A - \alpha_1 g, B - \beta_1 G) = \gamma_1 Q(g, A \wedge A). \tag{2.28}$$

Jeśli $\alpha_1 = 0$, to (2.28) po wykorzystaniu (2.6) i (2.19) daje:

$$Q(A, B - \beta_1 G + 2\gamma_1 g \wedge A) = 0.$$

Z ostatniego związku, na mocy twierdzenia 2.3 i naszych założeń wynika, że:

$$\operatorname{rank} A > 1 \quad \text{i} \quad B - \beta_1 G + 2\gamma_1 g \wedge A = \lambda A \wedge A,$$

tj. mamy (2.22). Jeśli natomiast $\alpha_1 \neq 0$, to (2.28) możemy przedstawić w postaci:

$$Q(A - \alpha_1 g, B - \beta_1 G) = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} Q(A - \alpha_1 g, A \wedge A),$$

skąd otrzymamy:

$$Q(A - \alpha_1 g, B - \frac{\gamma_1}{\alpha_1} A \wedge A - \beta_1 G) = 0.$$

Korzystając ponownie z twierdzenia 2.3, otrzymamy (2.22), co kończy już dowód.

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 2.9. *Niech A będzie symetrycznym tensorem typu $(0,2)$ a B uogólnionym tensorem krzywizny w punkcie x semiriemannowskiej rozmaitości (M,g), $n \geqslant 4$. Ponadto, niech rank$(A - \rho g) > 1$, dla wszystkich $\rho \in \mathbb{R}$. Jeśli B ma rozkład postaci (2.22), to tensory Tachibany $Q(g,B)$, $Q(g, A \wedge A)$, $Q(A,B)$ i $Q(A,G)$ są liniowo zależne w x.*

Dowód. Z równania (2.22) natychmiast otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Q(g,B) &= \frac{\alpha}{2}\, Q(g, A \wedge A) + \beta\, Q(g, g \wedge A), \\ Q(A,B) &= \beta\, Q(A, g \wedge A) + \gamma\, Q(A, G). \end{aligned}$$

Równania te, po wykorzystaniu tożsamości (2.19) i dodaniu stronami, dają:

$$Q(g,B) + Q(A,B) = \frac{\alpha - \beta}{2}\, Q(g, A \wedge A) + (\beta - \gamma)\, Q(g, g \wedge A),$$

co kończy dowód.

Na zakończenie tego rozdziału przedstawimy twierdzenie dotyczące właściwych uogólnionych tensorów krzywizny.

Twierdzenie 2.10. *Niech ω i B będą odpowiednio 1-formą i właściwym uogólnionym tensorem krzywizny na semiriemannowskiej rozmaitości (M,g), $n \geqslant 3$. Jeśli na zbiorze $U_B \subset M$ spełnione są warunki:*

$$\nabla B = B \otimes \omega, \tag{2.29}$$

$$B \cdot B = L\, Q(g,B), \tag{2.30}$$

gdzie L jest pewną funkcją na U_B, to w każdym punkcie zbioru U_B, w którym $\omega \neq 0$, mamy:

$$rank\,(B - L\,g) \leqslant 1$$

albo

$$rank\,(B - L\,g) > 1 \quad i \quad B = \frac{\lambda}{2}\,(Ric(B) - L\,g) \wedge (Ric(B) - L\,g).$$

Dowód. Związki (2.5) i (2.29) dają:

$$\begin{aligned} &\omega(X)\, B(X_1, X_2, X_3, X_4) + \omega(X_3)\, B(X_1, X_2, X_4, X) \\ &+\omega(X_4)\, B(X_1, X_2, X, X_3) = 0, \end{aligned}$$

skąd na mocy ([62], twierdzenie 4.1) otrzymamy $B \cdot B = Q(Ric(B), B)$, a po wykorzystaniu (2.30) także równość $Q(Ric(B) - L\,g, B) = 0$. Teraz twierdzenie 2.3 już kończy dowód.

Wiadomo, że na każdej rozmaitości semiriemannowskiej (M,g) spełniona jest tożsamość ([128], p. 153, Lemma 1):

$$\sum_{(X_1,X_2),\,(X_3,X_4),\,(X,Y)} (R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = 0, \tag{2.31}$$

gdzie $X, Y, X_1, \ldots, X_4$ są dowolnymi polami wektorowymi na M. Równanie (2.31) nazywa się tożsamością Walkera. Dowód tożsamości (2.31) można wykorzystać przy udowodnieniu faktu, że dowolny uogólniony tensor krzywizny B na rozmaitości (M,g) spełnia tożsamość:

$$\sum_{(X_1,X_2),\,(X_3,X_4),\,(X,Y)} (B\cdot B)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) \;=\; 0.$$

Jeśli B będzie uogólnionym tensorem krzywizny na rozmaitości semiriemannowskiej (M,g), $n \geqslant 4$, to również tensor $Weyl(B)$ jest uogólnionym tensorem krzywizny. Zatem na M spełniona jest tożsamość:

$$\sum_{(X_1,X_2),\,(X_3,X_4),\,(X,Y)} (Weyl(B)\cdot Weyl(B))(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) \;=\; 0,$$

a w szczególności:

$$\sum_{(X_1,X_2),\,(X_3,X_4),\,(X,Y)} (C\cdot C)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) \;=\; 0.$$

W pracach [52] i [65] wykazano następujące wyniki dotyczące uogólnionych tensorów krzywizny:

Twierdzenie 2.11. *Niech B będzie uogólnionym tensorem krzywizny na rozmaitości semiriemannowskiej (M,g), $n \geqslant 4$.*
(i) ([52], *Proposition* 3.1) *Na M spełnione są związki:*

$$\begin{aligned}
&Weyl(B)\cdot Weyl(B)\\
=\;& B\cdot B - \frac{1}{n-2}\left((g\wedge Ric(B))\cdot B + g\wedge (B\cdot Ric(B))\right)\\
&+\frac{\kappa(B)}{(n-2)(n-1)}\,Q(g,Weyl(B)) - \frac{1}{(n-2)^2}\,Q((Ric(B))^2,G)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&(n-2)\,(B\cdot Weyl(B) - Weyl(B)\cdot B)\\
=\;& (g\wedge Ric(B))\cdot Weyl(B) - g\wedge (Weyl(B)\cdot Ric(B))\\
&-\frac{\kappa(B)}{n-1}\,Q(g,Weyl(B)).
\end{aligned}$$

(ii) ([65]) *Jeśli A jest symetrycznym tensorem typu $(0,2)$, to na M zachodzi:*

$$\sum_{(X_1,X_2),\,(X_3,X_4),\,(X,Y)} (g\wedge (B\cdot A) + (g\wedge A)\cdot B)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) \;=\; 0.$$

Twierdzenie 2.12. ([52], *Proposition* 3.2): *Niech B będzie uogólnionym tensorem krzywizny na rozmaitości semiriemannowskiej (M,g), $n \geqslant 4$, spełniającym na $U_{Weyl(B)} \subset M$ związki:*

$$\begin{aligned}
B\cdot B - Q(Ric(B),B) &= L_1\,Q(g,Weyl(B)),\\
Weyl(B)\cdot Weyl(B) &= L_2\,Q(g,Weyl(B)),
\end{aligned}$$

przy czym L_1 i L_2 są pewnymi funkcjami na $U_{Weyl(B)}$. Ponadto, niech D będzie symetrycznym tensorem typu $(0,2)$ spełniającym na $U_{Ric(B)} \subset M$ równanie:

$$B \cdot Ric(B) \;=\; Q(g, D).$$

Wówczas na $U_{Weyl(B)} \cap U_{Ric(B)}$ zachodzi:

$$\begin{aligned} Weyl(B) \cdot B &= L_2\, Q(g, B), \\ (Ric(B))^2 &= \lambda_0\, Ric(B) + \lambda_3\, g, \\ D &= (L_2 - \frac{\kappa(B)}{(n-2)(n-1)} + \frac{\lambda_0}{n-2})\, Ric(B) + \lambda_4\, g, \\ B \cdot Ric(B) &= (L_2 - \frac{\kappa(B)}{(n-2)(n-1)} + \frac{\lambda_0}{n-2})\, Q(g, Ric(B)), \end{aligned}$$

$$Q(Ric(B) - \alpha_1\, g, Weyl(B) + \alpha_2\, G) \;=\; \frac{1}{4(n-2)}\, Q(g, Ric(B) \wedge Ric(B)),$$

gdzie λ_0, λ_3 i λ_4 są pewnymi funkcjami i:

$$\alpha_1 \;=\; \frac{1}{2}(\frac{\kappa(B)}{n-1} - L_1 + L_2), \qquad \alpha_2 \;=\; \frac{1}{n-2}(\frac{\lambda_0 - \kappa(B)}{2(n-2)} + L_2).$$

Ponadto, jeśli rank$(Ric(B) - \alpha_1\, g) \geqslant 2$ w punkcie $x \in U_{Weyl(B)} \cap U_{Ric(B)}$, to na pewnym otwartm podzbiorze $U \subset U_{Weyl(B)} \cap U_{Ric(B)}$ mamy:

$$B \;=\; \frac{\phi}{2}\, Ric(B) \wedge Ric(B) + \mu\, g \wedge Ric(B) + \eta\, G,$$

gdzie ϕ, η i μ są pewnymi funkcjami na U.

Zauważmy, że (3.7), na mocy twierdzenia 2.2 (i), implikuje:

$$\sum_{(X_1,X_2),\,(X_3,X_4),\,(X,Y)} (R \cdot C)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) \;=\; 0. \tag{2.32}$$

Zatem związek (2.32) jest również spełniony na każdej rozmaitości pseudosymetrycznej. Na ogół jednak tensor $R \cdot C$ rozmaitości (M, g), $n \geqslant 4$, nie musi spełniać (2.32). Korzystając ponownie z twierdzenia 2.2 (i), wnioskujemy, że jeśli na zbiorze $U_C \cap U_S$ rozmaitości (M, g), $n \geqslant 4$, mamy:

$$R \cdot C \;=\; L_1\, Q(S, R) + L_2\, Q(g, R) + L_3\, Q(S, G) + L_4\, Q(S, g \wedge S), \tag{2.33}$$

gdzie $L_1, \ldots, L_4$ są pewnymi funkcjami na $U_C \cap U_S$, to również warunek (2.32) jest spełniony na tym zbiorze. Zachodzi także następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.13. ([57], *Proposition* 4.1): *Na każdej rozmaitości semi-riemannowskiej* (M, g), $n \geqslant 4$, *następujące trzy związki są równoważne: (2.32),*

$$\sum_{(X_1,X_2),\,(X_3,X_4),\,(X,Y)} (R \cdot C - C \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) \;=\; 0, \quad (2.34)$$

$$\sum_{(X_1,X_2),\,(X_3,X_4),\,(X,Y)} (C \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) \;=\; 0. \quad (2.35)$$

Równania (2.32), (2.34) i (2.35) nazywamy równaniami typu Walkera, odpowiednio dla tensorów $R \cdot C$, $R \cdot C - C \cdot R$ i $C \cdot R$. Zauważmy, że jeśli tensor $R \cdot C - C \cdot R$ spełnia (3.11) na $U_C \cap U_S$, to tensor ten spełnia na tym zbiorze (2.34), a w konsekwencji także (2.32) i (2.35).

Hiperpowierzchnie w semiriemannowskich przestrzeniach o stałej krzywiźnie spełniające (2.32) były badane m.in. w [57], [74], [93]. Przegląd wyników dotyczących tej tematyki jest przedstawiony w [59]. W szczególności w [57] i [93] były również badane hiperpowierzchnie spełniające:

$$R \cdot C \;=\; L_1\, Q(S, R) + L_2\, Q(g, R) + L_3\, Q(S, G).$$

W rozdziale 9 przedstawimy najważniejsze wyniki tych prac. W rozdziale 10 będą przedstawione główne wyniki pracy [58]. W pracy tej badano hiperpowierzchnie, na których tensory $R \cdot R$, $R \cdot C$, $C \cdot R$ i $R \cdot C - C \cdot R$ wyrażone są przez przez tensor Tachibany $Q(g, B)$, gdzie B jest uogólnionym tensorem krzywizny.

Przedstawmy jeszcze tożsamości spełnione na semiriemannowskiej rozmaitości (M, g), $n \geqslant 4$, przez uogólniony tensor krzywizny B oraz tensory $Weyl(B)$, $conh(B)$ i G. Mianowicie, korzystając z tożsamości (2.20), (3.10) oraz:

$$\begin{aligned} G \cdot B &= Q(g, B), \\ G \cdot Weyl(B) &= Q(g, Weyl(B)), \\ G \cdot Ric(B) &= Q(g, Ric(B)), \end{aligned}$$

otrzymamy [53]:

$$\begin{aligned}
conh(B) \cdot B &= Weyl(B) \cdot B - \frac{\kappa(B)}{(n-2)(n-1)}\, G \cdot B \\
&= Weyl(B) \cdot B - \frac{\kappa(B)}{(n-2)(n-1)}\, Q(g, B), \\
B \cdot conh(B) &= B \cdot Weyl(B) - \frac{\kappa(B)}{(n-2)(n-1)}\, B \cdot G \\
&= B \cdot Weyl(B), \\
conh(B) \cdot conh(B) &= conh(B) \cdot Weyl(B) - \frac{\kappa(B)}{(n-2)(n-1)}\, conh(B) \cdot G \\
&= conh(B) \cdot Weyl(B) \\
&= Weyl(B) \cdot Weyl(B) - \frac{\kappa(B)}{(n-2)(n-1)}\, G \cdot Weyl(B) \\
&= Weyl(B) \cdot Weyl(B) \\
&\quad - \frac{\kappa(B)}{(n-2)(n-1)}\, Q(g, Weyl(B)) \\
conh(B) \cdot Ric(B) &= Weyl(B) \cdot Ric(B) - \frac{\kappa(B)}{(n-2)(n-1)}\, G \cdot Ric(B) \\
&= Weyl(B) \cdot Ric(B) - \frac{\kappa(B)}{(n-2)(n-1)}\, Q(g, Ric(B)).
\end{aligned}$$

Na zakończenie dodajmy, że hiperpowierzchnie zanurzone izometrycznie w przestrzeni euklidesowej lub w przestrzeni semieuklidesowej spełniające związki krzywiznowe, w których występuje tensor konharmoniczny K hiperpowierzchni, były badane w [12] i [122]. Korzystając z wyżej wyprowadzonych tożsamości, możemy wyrazić te związki w sposób równoważny, bez użycia tensora K. Na przykład rozważany w [122] związek:

$$K \cdot K = L\, Q(g, K)$$

jest równoważny warunkowi:

$$C \cdot C = (L + \frac{\kappa}{(n-2)(n-1)})\, Q(g, C).$$

3. **Rozmaitości typu pseudosymetrycznego**

Podstawową klasę rozmaitości semiriemannowskich tworzą rozmaitości o stałej krzywiźnie. Wiadomo, że każda 2-wymiarowa rozmaitość (M, g) jest rozmaitością o stałej krzywiźnie wtedy i tylko wtedy, gdy jej krzywizna skalarna jest stała [147]. Wiadomo również, że każda rozmaitość o stałej krzywiźnie (M, g), $n \geqslant 3$, jest scharakteryzowana przez warunek:

$$R \;=\; \frac{\kappa}{(n-1)n}\, G.$$

Rozmaitość semiriemannowska (M, g), $n \geqslant 3$, nazywa się rozmaitością Einsteina ([9], p. 3), jeśli na M jest spełnione równanie:

$$S \;=\; \frac{\kappa}{n}\, g. \qquad (3.1)$$

Natomiast 2-wymiarowa rozmaitość (M, g) jest rozmaitością Einsteina, jeśli jej krzywizna skalarna jest stała. Zatem każda rozmaitość o stałej krzywiźnie jest rozmaitością Einsteina. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, jeśli tylko $n \geqslant 4$. Związek (3.1) nazywamy metrycznym równaniem Einsteina ([9], Chapter 16).

Rozmaitości Einsteina tworzą podklasę rozmaitości quasi-einsteinowskich. Rozmaitość semiriemannowska (M, g), $n \geqslant 3$, nazywa się rozmaitością quasi-einsteinowską, jeśli w każdym punkcie $x \in M$ mamy:

$$S \;=\; \alpha\, g + \epsilon\, w \otimes w, \qquad w \in T^*_x M, \qquad \epsilon = \pm 1, \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \qquad (3.2)$$

Na zbiorze $U_S \subset M$, na mocy twierdzenia 2.6 (ii), związek (3.2) jest równoważny równaniu:

$$\overline{S} - \alpha\, g \wedge S + \alpha^2\, G \;=\; 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Inną podklasę rozmaitości quasi-einsteinowskich stanowią rozmaitości Ricci-proste [35], tj. rozmaitości, których rząd tensora Ricciego w każdym punkcie wynosi co najwyżej jeden.

Rozmaitość semiriemannowska (M, g), $n \geqslant 3$, nazywa się rozmaitością semisymetryczną [138–140], jeśli na M jest spełnione równanie:

$$R \cdot R \;=\; 0. \qquad (3.3)$$

Wiadomo, że każda rozmaitość lokalnie symetryczna ($\nabla R = 0$) jest semisymetryczna. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Na przykład rozmaitość półproduktowa $M_1 \times_F M_2$, z 1-wymiarową bazową (M_1, g_1), $M_1 = (0, +\infty)$, $g_{1,11} = \pm 1$, $(n-1)$-wymiarowym włóknem (M_2, g_2), $n \geqslant 3$, będącym przestrzenią o stałej krzywiźnie, i funkcją skalującą F zadaną przez

$F(t) = t^2$, $t \in M_1$, jest różną od lokalnie symetrycznej rozmaitością semisymetryczną [138]. Co więcej, rozmaitość $M_1 \times_F M_2$, z 1-wymiarową bazą (M_1, g_1), $g_{1,11} = \pm 1$, $(n-1)$-wymiarowym włóknem, będącym przestrzenią o stałej krzywiźnie (M_2, g_2), $n \geqslant 3$, i dowolną funkcją skalującą $F : M_1 \to \mathbb{R}^+$, spełnia na $U_R \subset M_1 \times M_2$ równanie ([34], Lemma 3.1):

$$R \cdot R \;=\; L_R\, Q(g, R), \tag{3.4}$$

gdzie:

$$L_R \;=\; \frac{1}{4F^2}\,((F')^2 - 2FF''), \qquad F' \;=\; \frac{dF}{dt}, \qquad F'' \;=\; \frac{dF'}{dt}, \qquad t \in M_1.$$

Dany fakt prowadzi do następującego rozszerzenia klasy rozmaitości semisymetrycznych. Rozmaitość semiriemannowska (M, g), $n \geqslant 3$, nazywa się rozmaitością pseudosymetryczną ([44], Section 3.1), jeśli w każdym punkcie M tensory $R \cdot R$ i $Q(g, R)$ są liniowo zależne. Zatem rozmaitość (M, g), $n \geqslant 3$, jest rozmaitością pseudosymetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy na zbiorze $U_R \subset M$ zachodzi (3.4), gdzie L_R jest pewną funkcją na U_R. Równanie (3.4) po raz pierwszy zostało przedstawione w pracy [98] (por. [64], p. 298), przy badaniu półproduktowych rozmaitości 2-rekurencyjnych. Dodajmy, że [60] jest pierwszą publikacją, w której rozmaitości spełniające (3.4) nazwano rozmaitościami pseudosymetrycznymi.

Warunki quasi-einsteinowskości i pseudosymetrii są równoważne na każdej 3-wymiarowej rozmaitości semiriemannowskiej.

Twierdzenie 3.1. ([82], *Theorem* 1): *Każda 3-wymiarowa rozmaitość pseudosymetryczna jest rozmaitością quasi-einsteinnowską i na odwrót.*

Rozmaitość semiriemannowska (M, g), $n \geqslant 4$, jest *rozmaitością konforemnie płaską*, jeśli na M jest spełniona równość:

$$C \;=\; 0.$$

Wiadomo, że zdefiniowane wyżej rozmaitości półproduktowe są konforemnie płaskie. Zatem czasoprzestrzenie Robertsona-Walkera są konforemnie płaskimi rozmaitościami pseudosymetrycznymi. Korzystając z twierdzenia 2.5, możemy łatwo wykazać następujący rezultat:

Twierdzenie 3.2. *Każda konforemnie płaska rozmaitość (M, g), $n \geqslant 4$, oraz każda rozmaitość 3-wymiarowa (M, g) jest rozmaitością pseudosymetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie M kwadrat tensora Ricciego S^2 jest kombinacją liniową tensora Ricciego S i tensora metrycznego g.*

Istnieją również rozmaitości pseudosymetryczne różne od rozmaitości konforemnie płaskich, np. czasoprzestrzeń Schwarzschilda, Kottlera, Reissnera-Nordströma lub anti-de Sittera Reissnera-Nordströma [81–111]. Wiadomo, że czasoprzestrzeń Schwarzschilda jest rozmaitością Ricci-płaską, a czasoprzestrzeń Kottlera jest różną od Ricci-płaskiej rozmaitością Einsteina. Czasoprzestrzenie pseudosymetryczne były również badane w pracach: [30, 63, 99, 111].

Wiadomo (patrz np. [64], p. 287), że czasoprzestrzeń Schwarzschilda została odkryta przez Karla Schwarzschilda w 1916 r. podczas jego badań nad rozwiązaniami równań Einsteina. Biorąc pod uwagę ten fakt, w ([64] p. 287) stwierdzono, że prawdopodobnie czasoprzestrzeń Schwarzschilda jest najstarszym przykładem, różnej od semisymetrycznej, półproduktowej rozmaitości pseudosymetrycznej.

W monografii [11] wyróżniono specjalną podklasę rozmaitości pseudosymetrycznych, nazywanych przestrzeniami pseudosymetrycznymi stałego typu. Mianowicie, rozmaitość pseudosymetryczna (M, g), $n \geqslant 3$, nazywa się przestrzenią pseudosymetryczną stałego typu [113], jeśli funkcja L_R zdefiniowana przez (3.4) jest stała na $U_R \subset M$. Wyniki badań nad tą specjalną podklasą rozmaitości pseudosymetrycznych są zawarte w pracach: [105, 112–115]. Przykłady rozmaitości pseudosymetrycznych stałego typu pojawiały się już we wcześniejszych pracach, np. [60].

W pracach [44, 100, 143] są przedstawione również inne fakty geometryczne prowadzące do definicji rozmaitości pseudosymetrycznych. W pracy [101] podano interpretację geometryczną warunku (3.4). Ponadto, w pracy [101] nazwano rozmaitości pseudosymetryczne rozmaitościami pseudosymetrycznymi w sensie Deszcza. Wprowadzenie tej nazwy zapobiega ewentualnym nieporozumieniom. W literaturze funkcjonuje bowiem pojęcie rozmaitości pseudosymetrycznej w sensie M.C. Chakiego ([14], [16], [44], Section 5.2).

Nazwa rozmaitość pseudosymetryczna w sensie Deszcza występuje np. w pracach: [102, 107, 108, 123, 124, 136, 137]. W pewnych publikacjach używa się również nieco krótszego określenia – rozmaitość symetryczna Deszcza (Deszcz symmetric manifold), np. w pracach: [123, 124, 136, 137, 144] lub przestrzeń symetryczna Deszcza (Deszcz symmetric space) [145, 146].

Rozmaitość semiriemannowska (M, g), $n \geqslant 3$, nazywa się rozmaitością Ricci-semisymetryczną, jeśli na M jest spełnione równanie:

$$R \cdot S \;=\; 0. \tag{3.5}$$

Wiadomo, że każda rozmaitość Ricci-symetryczna ($\nabla S = 0$) jest rozmaitością Ricci-semisymetryczną. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Na przykład rozmaitość półproduktowa $M_1 \times_F M_2$, z 1-wymiarową bazą (M_1, g_1), $M_1 = (0, +\infty)$, $g_{1,11} = \pm 1$, $(n-1)$-wymiarowym włóknem (M_2, g_2), $n \geqslant 3$, będącym rozmaitością Einsteina i funkcją skalującą F zadaną przez $F(t) = t^2$, $t \in M_1$, jest różną od Ricci-symetrycznej rozmaitością

Ricci-semisymetryczną. Co więcej, rozmaitość $M_1 \times_F M_2$, z 1-wymiarową bazą (M_1, g_1), $g_{1,11} = \pm 1$, $(n-1)$-wymiarowym włóknem (M_2, g_2), $n \geqslant 3$, będącym rozmaitością Einsteina, i funkcją skalującą $F : M_1 \to I\!R^+$, spełnia na $U_S \subset M_1 \times M_2$ równanie ([44], Section 4):

$$R \cdot S \;=\; L_S\, Q(g, S), \tag{3.6}$$

gdzie:

$$L_S \;=\; \frac{1}{4F^2}\,((F^{'})^2 - 2FF^{''}), \qquad F^{'} \;=\; \frac{dF}{dt}, \qquad F^{''} \;=\; \frac{dF^{'}}{dt}, \qquad t \in M_1.$$

Ostatnia uwaga prowadzi do następującej definicji. Rozmaitość semiriemannowska (M, g), $n \geqslant 3$, nazywa się rozmaitością Ricci-pseudosymetryczną ([44], Section 4.1), jeśli w każdym punkcie M tensory $R \cdot S$ i $Q(g, S)$ są liniowo zależne. Zatem (M, g), $n \geqslant 3$, jest rozmaitością Ricci-pseudosymetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy na zbiorze $U_S \subset M$ zachodzi (3.6), gdzie L_S jest pewną funkcją na U_S. Rozmaitość Ricci-pseudosymetryczna (M, g), $n \geqslant 3$, nazywa się rozmaitością Ricci-pseudosymetryczną stałego typu [95], jeśli funkcja L_S zdefiniowana przez (3.6) jest stała na $U_S \subset M$. W pracy [108] podano interpretację geometryczną warunku (3.6). Ponadto w tej publikacji nazwano rozmaitości Ricci-pseudosymetryczne rozmaitościami Ricci-pseudosymetrycznymi w sensie Deszcza, podobnie jak w przypadku rozmaitości pseudosymetrycznych. W literaturze funkcjonuje bowiem pojęcie rozmaitości pseudo-Ricci-symetrycznej ([15], [44], Section 5.2). Związki (3.2) i (3.6) są przykładami uogólnionych warunków metrycznych Einsteina ([9], Chapter 16).

Nazwa rozmaitość Ricci-pseudosymetryczna w sensie Deszcza występuje np. w pracach: [107, 123, 124, 136, 137]. W pewnych pracach używa się również nieco krótszego określenia – rozmaitość Ricci-symetryczna Deszcza (Deszcz Ricci-symmetric manifold), np. w pracach: [124, 136, 137].

Rozmaitość semiriemannowska (M, g), $n \geqslant 4$, nazywa się rozmaitością weylowsko-pseudosymetryczną ([44], Section 4.2), jeśli w każdym punkcie M tensory $R \cdot C$ i $Q(g, C)$ są liniowo zależne. Zatem (M, g), $n \geqslant 4$, jest rozmaitością weylowsko-pseudosymetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy na zbiorze $U_C \subset M$ zachodzi:

$$R \cdot C \;=\; L_C\, Q(g, C), \tag{3.7}$$

gdzie L_C jest pewną funkcją na U_C. Rozmaitość (M, g), $n \geqslant 4$, nazywa się rozmaitością weylowsko-semisymetryczną, jeśli na M jest spełniony warunek:

$$R \cdot C \;=\; 0.$$

Każda rozmaitość semisymetryczna, odpowiednio pseudosymetryczna, jest rozmaitością weylowsko-semisymetryczną, odpowiednio weylowsko-pseudosymetryczną. Rozmaitość weylowsko-pseudosymetryczną (M, g), $n \geqslant 4$, nazywa się rozmaitością weylowsko-pseudosymetryczną stałego typu, jeśli funkcja L_C, zdefiniowana przez (3.7) jest stała na $U_C \subset M$. Rozmaitości weylowsko-pseudosymetryczne będziemy również nazywać rozmaitościami weylowsko-pseudosymetrycznymi w sensie Deszcza [107].

W pracach: [8, 44, 54, 135, 143] przedstawiono przegląd rezultatów badań nad zdefiniowanymi wyżej klasami rozmaitości, tj. rozmaitości pseudosymetrycznych, Ricci-pseudosymetrycznych i weylowsko-pseudosymetrycznych. Na przykład w pracy ([44] Section 4) opisano zależności między tymi oraz innymi klasami rozmaitości semiriemannowskich. Związki (3.4), (3.6) lub (3.7) nazywamy warunkami krzywiznowymi typu pseudosymetrycznego, a rozmaitości semiriemannowskie realizujące te warunki – rozmaitościami typu pseudosymetrycznego.

Kolejną klasę rozmaitości typu pseudosymetrycznego tworzą rozmaitości z pseudosymetrycznym tensorem Weyla. Rozmaitość semiriemannowska (M, g), $n \geqslant 4$, nazywa się rozmaitością z pseudosymetrycznym tensorem Weyla ([44], Section 12.6; [85]), jeśli w każdym punkcie tej rozmaitości tensory $C \cdot C$ i $Q(g, C)$ są liniowo zależne. Zatem (M, g), $n \geqslant 4$, jest rozmaitością z pseudosymetrycznym tensorem Weyla wtedy i tylko wtedy, gdy na zbiorze $U_C \subset M$ zachodzi:

$$C \cdot C \;=\; L\, Q(g, C), \tag{3.8}$$

gdzie L jest pewną funkcją na U_C.

W pracy [120] badano rozmaitości (M, g), $n \geqslant 4$, spełniające w każdym punkcie M warunek: tensory $C \cdot R$ i $Q(g, R)$ są liniowo zależne. Warunek ten jest spełniony na M wtedy i tylko wtedy, gdy na zbiorze $U_R \subset M$ zachodzi:

$$C \cdot R \;=\; L\, Q(g, R), \tag{3.9}$$

gdzie L jest pewną funkcją na U_R. W ([120] Proposition 2.1) wykazano, że na zbiorze U_C (3.9) implikuje (3.8).

Łatwo sprawdza się, że na zbiorze U_R dowolnej rozmaitości semiriemannowskiej (M, g) spełniona jest następująca tożsamość [44]:

$$\begin{aligned} & (R - L_R\, G) \cdot (R - L_R\, G) \\ = \;& (R - L_R\, G) \cdot R \;=\; R \cdot R - L_R\, Q(g, R), \end{aligned} \tag{3.10}$$

przy czym L_R jest funkcją na U_R. Zatem, korzystając z (3.4) i (3.10), można łatwo wykazać, że (M, g), $n \geqslant 3$, jest rozmaitością pseudosymetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy na zbiorze $U_R \subset M$ zachodzi:

$$(R - L_R\, G) \cdot (R - L_R\, G) \;=\; 0.$$

Analogiczne równoważności można wyznaczyć dla rozmaitości Ricci-pseudosymetrycznych, weylowsko-pseudosymetrycznych i z pseudosymetrycznym tensorem Weyla, a także dla rozmaitości spełniających (3.9).

W pracy ([70] Theorem 3.1) przedstawiono następującą własność krzywiznową typu pseudosymetrycznego rozmaitości Einsteina:

Twierdzenie 3.3. ([70], *Theorem* 3.1): *Na każdej semiriemannowskiej rozmaitości Einsteina* (M, g), $n \geqslant 4$, *jest spełniona tożsamość:*

$$R \cdot C - C \cdot R \;=\; \frac{\kappa}{(n-1)n}\, Q(g, R) \;=\; \frac{\kappa}{(n-1)n}\, Q(g, C).$$

Twierdzenie 3.3 zapoczątkowało badanie rozmaitości, a w szczególności także hiperpowierzchni w przestrzeniach o stałej krzywiźnie spełniających na zbiorze $U_C \cap U_S$ warunek typu pseudosymetrycznego postaci:

$$\begin{aligned} R \cdot C - C \cdot R \;=\;& L_1\, Q(g, R) + L_2\, Q(S, R) \\ &+ L_3\, Q(S, G) + L_4\, Q(S, g \wedge S), \end{aligned} \tag{3.11}$$

tj. tensor $R \cdot C - C \cdot R$ jest kombinacją liniową tensorów Tachibany: $Q(g, R)$, $Q(S, R)$, $Q(S, G)$ i $Q(S, g \wedge S)$, gdzie $L_1, \ldots, L_4$ są pewnymi funkcjami na zbiorze $U_C \cap U_S$. Związek (3.11) jest również uogólnionym warunkiem metrycznym Einsteina. Specjalne przypadki równania (3.11) były badane m.in. w pracach: [6, 57, 67, 70]. Na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Pekinie w 2002 r. został przedstawiony poster [48] bazujący na pracy [57]. Dodajmy, że w pracy [55] jest przedstawiony przegląd wyników badań nad rozmaitościami spełniającymi (3.11).

Oznaczmy odpowiednio przez $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ i $\mathbf{S}_3$ klasy rozmaitości Einsteina, Ricci-symetrycznych, Ricci-semisymetrycznych oraz Ricci-pseudosymetrycznych. Podobnie, oznaczmy odpowiednio przez $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ i $\mathbf{R}_3$ klasy rozmaitości o stałej krzywiźnie, lokalnie symetrycznych, semisymetrycznych oraz pseudosymetrycznych. Klasy trzeciej grupy rozmaitości: konforemnie płaskie, konforemnie symetryczne, weylowsko-semisymetryczne i weylowsko-pseudosymetryczne oznaczmy odpowiednio przez $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ i $\mathbf{C}_3$. Między tymi klasami rozmaitości zachodzą następujące zawierania [44]:

$$\mathbf{S}_0 \subset \mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S}_2 \subset \mathbf{S}_3\,, \quad \mathbf{R}_0 \subset \mathbf{R}_1 \subset \mathbf{R}_2 \subset \mathbf{R}_3\,, \quad \mathbf{C}_0 \subset \mathbf{C}_1 \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{C}_3\,,$$

$$\mathbf{S}_0 \supset \mathbf{R}_0 \subset \mathbf{C}_0\,, \quad \mathbf{S}_1 \supset \mathbf{R}_1 \subset \mathbf{C}_1\,, \quad \mathbf{S}_2 \supset \mathbf{R}_2 \subset \mathbf{C}_2\,, \quad \mathbf{S}_3 \supset \mathbf{R}_3 \subset \mathbf{C}_3\,.$$

Opisane tu zależności możemy również przedstawić w postaci diagramu ([55]):

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{R\cdot S = L_S\,Q(g,S)} & \supset & \boxed{R\cdot R = L_R\,Q(g,R)} & \subset & \boxed{R\cdot C = L_C\,Q(g,C)} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{R\cdot S = 0} & \supset & \boxed{R\cdot R = 0} & \subset & \boxed{R\cdot C = 0} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{\nabla S = 0} & \supset & \boxed{\nabla R = 0} & \subset & \boxed{\nabla C = 0} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{S = \dfrac{\kappa}{n}\,g} & \supset & \boxed{R = \dfrac{\kappa}{(n-1)n}\,G} & \subset & \boxed{C = 0}
\end{array}
$$

Wszystkie zaprezentowane wyżej zawierania są właściwe, jeśli tylko wymiary rozważanych rozmaitości są $\geqslant 4$.

4. **Hiperpowierzchnie pseudosymetryczne**

Kolejny warunek typu pseudosymetrycznego otrzymamy, rozważając hiperpowierzchnie w przestrzeniach o stałej krzywiźnie. Niech M będzie hiperpowierzchnią zanurzoną izometrycznie w semiriemannowskiej przestrzeni o stałej krzywiźnie $N_s^{n+1}(c)$, $c = \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}$, z sygnaturą $(s, n+1-s)$, $n \geqslant 3$, gdzie $\widetilde{\kappa}$ jest krzywizną skalarną przestrzeni otaczającej. Na hiperpowierzchni M jest spełnione równanie Gaussa:

$$R \;=\; \varepsilon\,\overline{H} + \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\,G, \qquad \varepsilon \;=\; \pm 1,$$

gdzie g, R i H są odpowiednio: tensorem metrycznym, tensorem krzywizny i drugim tensorem podstawowym M oraz $G = \frac{1}{2}\,g \wedge g$ i $\overline{H} = \frac{1}{2}\,H \wedge H$. Równanie Gaussa ma we współrzędnych lokalnych następujące przedstawienie:

$$R_{hijk} \;=\; \varepsilon\,\overline{H}_{hijk} + \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\,G_{hijk}, \tag{4.1}$$

gdzie R_{hijk}, g_{ij}, H_{ij}, $\overline{H}_{hijk} = H_{hk}H_{ij} - H_{hj}H_{ik}$ i $G_{hijk} = g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}$ są współrzędnymi lokalnymi, odpowiednio: tensora krzywizny R, tensora metrycznego g, drugiego tensora podstawowego H oraz tensorów $\overline{H}$ i G hiperpowierzchni M, przy czym $h, i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Z równania (4.1), po kontrakcji z g^{ij} i g^{hk}, otrzymamy:

$$S_{hk} \;=\; \varepsilon\,(tr(H)\,H_{hk} - H^2_{hk}) + \frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\,g_{hk}, \tag{4.2}$$

$$\kappa \;=\; \varepsilon\,((tr(H))^2 - tr(H^2)) + \frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n+1},$$

gdzie:

$$tr(H) \;=\; g^{hk}H_{hk}, \qquad tr(H^2) \;=\; g^{hk}H^2_{hk},$$

a S_{hk} oraz H^2_{hk} są współrzędnymi lokalnymi tensorów S i H^2 hiperpowierzchni M. Współrzędne lokalne H^p_{ij} tensora H^p, $p \in \{2, 3, \ldots\}$, są zdefiniowane przez:

$$H^p_{ij} \;=\; g^{hk}H^{p-1}_{hi}H_{kj}.$$

Równanie (4.1), na mocy twierdzenia 2.4(i), daje ([80], Proposition 3.1):

$$R \cdot R - Q(S, R) \;=\; -\frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\,Q(g, C). \tag{4.3}$$

Możemy zatem stwierdzić, że w każdym punkcie hiperpowierzchni M w przestrzeni $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, tensory: $R \cdot R - Q(S,R)$ i $Q(g,C)$ są liniowo zależne. Warunek ten jest równoważny na zbiorze $U_C \subset M$ równości:

$$R \cdot R - Q(S,R) \;=\; L_4\, Q(g,C), \tag{4.4}$$

gdzie L_4 jest pewną funkcją na $U_C \subset M$. Rozmaitości półproduktowe spełniające warunek (4.4) były badane w [28]. Wykazano m.in. następujące:

Twierdzenie 4.1. (*por.* [28], *Theorem* 4.1): *Równanie (4.4) jest spełnione na zbiorze* U_C *każdej rozmaitości półproduktowej* $\overline{M} \times_F \widetilde{M}$, $dim\, \overline{M} = 1$, $dim\, \widetilde{M} = 3$.

Można również łatwo sprawdzić, że każda pseudosymetryczna rozmaitość Einsteina (M,g), $n \geqslant 4$, spełnia (4.4).

W specjalnym przypadku, gdy przestrzeń otaczająca jest przestrzenią semieuklidesową $\mathbb{E}_s^{n+1}$, $n \geqslant 3$, (4.3), przyjmuje prostszą postać:

$$R \cdot R \;=\; Q(S,R). \tag{4.5}$$

Rozmaitości spełniające (4.5) były badane m.in. w [23] i [62].

Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$. Jeśli w punkcie $x \in M$ tensor H^2 jest kombinacją liniową tensora H i tensora g, tj. gdy:

$$H^2 \;=\; \alpha\, H + \beta\, g, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \tag{4.6}$$

to w tym punkcie zachodzi związek ([83], Lemma 1):

$$R \cdot R \;=\; \left(\frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} - \varepsilon\beta\right) Q(g,R). \tag{4.7}$$

Stosując (3.1) w (4.2), otrzymamy (4.7). Zatem każda hiperpowierzchnia einsteinowska w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, jest hiperpowierzchnią pseudosymetryczną. Korzystając z wyników prac: [83] (Corollary 1) i [80] (Theorem 4.1), można stwierdzić, że w każdym punkcie hiperpowierzchni konforemnie płaskiej w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, zachodzi (4.7), a więc M jest hiperpowierzchnią pseudosymetryczną. Powyższe fakty prowadzą do wyznaczenia zbioru U_H wszystkich tych punktów M, w których H^2 nie jest kombinacją liniową tensorów H i g. Łatwo sprawdza się, że $U_H \subset U_C \subset M$ oraz $U_H \subset U_S \subset M$. Warunek (3.4) może być również spełniony w pewnych punktach zbioru $U_H \subset M$, np. w punktach, w których $rank\, H \;=\; 2$. Powstaje twierdzenie 4.2.

Twierdzenie 4.2. ([24],*Theorem* 4.2): *Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 3$. Jeśli w każdym punkcie M jej drugi tensor podstawowy H jest rzędu dwa, to na M spełniony jest związek:*

$$R \cdot R \;=\; \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\, Q(g, R). \tag{4.8}$$

Zatem hiperpowierzchnie w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 3$, których drugi tensor podstawowy H jest rzędu dwa w każdym punkcie, są rozmaitościami pseudosymetrycznymi stałego typu. Otrzymaliśmy więc klasę przykładów rozmaitości pseudosymetrycznych stałego typu. Kolejne wyniki dotyczące rozmaitości (hiperpowierzchni) pseudosymetrycznych stałego typu są zawarte zarówno w monografiach [11, 116], jak również w publikacjach [105, 112–115].

Twierdzenie 4.3. ([45], *Theorem* 5.1): *Hiperpowierzchnia M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, jest hiperpowierzchnią pseudosymetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie zbioru $U_R \subset M$ jest spełniony jeden z następujących warunków: $\operatorname{rank} H = 2$ lub (4.6).*

Jak wcześniej wspomnieliśmy, pseudosymetryczne hiperpowierzchnie M w $N_s^4(c)$ były już badane [83]. W szczególności, w publikacji ([83] Theorem 2) podane zostały warunki konieczne i wystarczające na to, aby hiperpowierzchnia M w $N_s^4(c)$ była pseudosymetryczna.

Korzystając z (4.3), twierdzenia 4.2 oraz z pracy ([7] Theorem 3.1) można wykazać twierdzenie 4.4.

Twierdzenie 4.4. (*i*) *Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$. Jeśli w pewnym punkcie $x \in U_H \subset M$ tensor Tachibany $Q(S, R)$ znika, to przestrzeń otaczająca jest semieuklidesową i $R \cdot R = 0$ na U_H.*
(ii) Na każdej hiperpowierzchni semisymetrycznej w $\mathbb{E}_s^{n+1}$, $n \geqslant 3$, tensor Tachibany $Q(S, R)$ jest tensorem zerowym.

Niech M będzie hiperpowierzchnią w riemannowskiej przestrzeni o stałej krzywiźnie $N^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, mającą w każdym punkcie dokładnie trzy różne krzywizny główne: ρ_1, ρ_2 i ρ_3 – krotności $n-2$. Można wykazać, że hiperpowierzchnia M jest hiperpowierzchnią z pseudosymetrycznym tensorem Weyla ([84], Theorem 3.1), tj. warunek (3.8) jest spełniony na zbiorze $U_C \subset M$. W specjalnym przypadku, gdy $\rho_3 = 0$, z twierdzenia 4.2 (i) wynika, że M jest hiperpowierzchnią pseudosymetryczną. Przykładem takiej hiperpowierzchni pseudosymetrycznej jest uogólniona hiperpowierzchnia Cartana ([18]). W każdym punkcie uogólnionej hiperpowierzchni Cartana są dokładnie trzy różne krzywizny główne: $\rho_1 = -\rho_2 \neq 0$ oraz $\rho_3 = 0$ – krotności $n-2$. Fakt ten, wspólnie z (4.2), prowadzi do stwierdzenia, że w każdym punkcie uogólnionej hiperpowierzchni Cartana rząd jej tensora Ricciego jest równy 2.

W pracy [68] badano hiperpowierzchnie M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, spełniające na zbiorze $U_C \subset M$ warunek typu pseudosymetrycznego:

$$R \cdot C \;=\; L\, Q(S, C). \tag{4.9}$$

gdzie L jest pewną funkcją na U_C. Wykazano m.in. twierdzenie 4.5.

Twierdzenie 4.5. ([68], *Theorem* 4.1): *Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, $c \neq 0$, spełniającą (4.9) na zbiorze $U_C \subset M$. Wówczas na zbiorze $V \subset U_H$ składającym się ze wszystkich punktów, w których $L \neq 0$, mamy związki (4.8) oraz:*

$$rank\,(S - \frac{\kappa}{n}\, g) \;=\; 1, \qquad \frac{\kappa}{n-1} \;=\; \frac{\widetilde{\kappa}}{n+1} \qquad i \qquad L \;=\; \frac{1}{n-1}.$$

W ([68] Example 5.1) jest przedstawiony przykład hiperpowierzchni realizującej założenia tego twierdzenia. Dokładniej wykazano, że pewna rozmaitość półproduktowa $\overline{M} \times_F \widetilde{M}$, z 1-wymiarową bazą $(\overline{M}, \overline{g})$ i włóknem $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ zdefiniowanym w przykładzie 4.1 w pracy [56], jest lokalnie izometryczna z hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$. Dodajmy jeszcze, że uogólnione hiperpowierzchnie Cartana nie spełniają warunku (4.9) ([68], Example 5.2).

4-wymiarowe rozmaitości półproduktowe $\overline{M} \times_F \widetilde{M}$, $\dim \overline{M} \;=\; 1$, spełniające (4.9) były badane w [76].

Niech M będzie pseudosymetryczną hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, i niech (3.4) będzie spełnione na $U_C \cap U_S \subset M$. Wówczas, korzystając z (3.4) i (4.3): otrzymamy na tym zbiorze związek ([45], eq. (3.8)):

$$Q(S - (L_R + \frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\, g, R - \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\, G) \;=\; 0. \tag{4.10}$$

Przypominamy, że $\mathcal{U}$ jest zbiorem wszystkich punktów $U_C \cap U_S \subset M$, w których spełniony jest związek (2.9). Teraz z równości (4.10), na mocy ([23] Proposition 4.1, [66], Lemma 3.4 (ii)), wynika, że:

$$\begin{aligned} R \;&=\; \frac{L}{2}\,(S - (L_R + \frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\, g) \wedge (S - (L_R + \frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\, g) \\ &\quad + \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\, G, \end{aligned}$$

gdzie L jest pewną funkcją na $\mathcal{U}$. Zatem na $\mathcal{U}$ jest spełnione równanie:

$$R \;=\; \frac{\phi}{2}\, S \wedge S + \mu\, g \wedge S + \eta\, G, \tag{4.11}$$

gdzie ϕ, μ, η są pewnymi funkcjami na $\mathcal{U}$.

Niech (M, g), $n \geqslant 4$, będzie rozmaitością semiriemannowską. Jeśli na zbiorze $\mathcal{U} \subset M$ jest spełnione równanie (4.11), przy czym ϕ, μ, η są pewnymi funkcjami na $\mathcal{U}$, to mówimy, że (M, g) spełnia równanie typu Rotera na $\mathcal{U}$ ([46]). Rezultaty dotyczące rozmaitości spełniających (4.11) będą przedstawione w następnym rozdziale.

Zauważmy, że jeśli M jest quasi-einsteinowską hiperpowierzchnią pseudosymetryczną w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, to warunek (2.9) nie jest spełniony. Zatem $\mathcal{U}$ jest zbiorem pustym. Przykładem takiej hiperpowierzchni M jest przedstawiona wyżej hiperpowierzchnia z pracy ([68] Example 5.1). Mianowicie, na $U_C \cap U_S \subset M$ spełniona jest równość:

$$rank\,(S - \frac{\kappa}{n}\,g) \;=\; 1.$$

Na hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, definiujmy tensor A typu $(0,2)$ przez ([57], eq. (13)):

$$A \;=\; H^3 - tr(H)\,H^2 + \frac{\varepsilon\kappa}{n-1}\,H, \tag{4.12}$$

gdzie κ jest krzywizną skalarną M. Zachodzi następujące twierdzenie 4.6:

Twierdzenie 4.6. (*por.* [57], *eqs.* (10–12); [46], *eq.* (34)): *Na każdej hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, są spełnione tożsamości:*

$$\begin{aligned} R \cdot C \;=\;& Q(S,R) - \frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\,Q(g,R) \\ & - \frac{(n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)}\,Q(S,G) + \frac{1}{n-2}\,g \wedge Q(H,A), \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} C \cdot R \;=\;& \frac{n-3}{n-2}\,Q(S,R) - \frac{(n^2-3n+3)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)}\,Q(g,R) \\ & - \frac{(n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)}\,Q(S,G) + \frac{1}{n-2}\,H \wedge Q(g,A), \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} R \cdot C - C \cdot R \;=\;& \frac{1}{n-2}\,Q(S,R) + \frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)}\,Q(g,R) \\ & + \frac{1}{n-2}\,(g \wedge Q(H,A) - H \wedge Q(g,A)), \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} S \cdot R \;=\;& -4(\frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} + \frac{\kappa}{n-1})\,(R - \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\,G) \\ & + 2\,H \wedge A - \frac{2\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\,g \wedge S. \end{aligned} \tag{4.16}$$

W kolejnych rozdziałach przedstawione zostaną wyniki związane z równaniami (4.13–4.16).

Na zakończenie tego rozdziału zamieścimy pewne rezultaty dotyczące hiperpowierzchni quasi-einsteinowskich, różnych od einsteinowskich, w przestrzeniach o stałej krzywiźnie $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$. Niech M będzie taką hiperpowierzchnią. Załóżmy, że zbiór $U_C \cap U_S \subset M$ jest niepusty. Otrzymujemy następujące wyniki:

Twierdzenie 4.7. ([95], *Lemma* 4.1): *Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, spełniającą (3.2) na $U_C \cap U_S \subset M$.*
(i) W każdym punkcie $x \in U_H \subset M$ mamy:

$$w^l H_{lk} \;=\; \rho\, w_k, \qquad w^k \;=\; w_l g^{lk}, \tag{4.17}$$

gdzie ρ jest pewną funkcją na U_H, a H_{kl} i w_l są, odpowiednio, współrzędnymi tensora H i kowektora w.
(ii) $U_H \;=\; U_C \cap U_S$.
(iii) Na U_H spełnione są związki:

$$\begin{aligned} H^3 \;&=\; (tr(H)+\rho)\, H^2 + \varepsilon\left(\frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} - \alpha - \varepsilon\rho tr(H)\right) H \\ &\quad +\varepsilon\rho(\alpha - \frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\, g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^4 \;&=\; ((tr(H)+\rho)^2 - \rho tr(H) + \varepsilon(\frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} - \alpha))\, H^2 \\ &\quad +(\varepsilon(tr(H)+\rho)(\frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} - \alpha - \varepsilon\rho tr(H)) + \varepsilon\rho(\alpha - \frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}))\, H \\ &\quad +\varepsilon\rho(tr(H)+\rho)(\alpha - \frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\, g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^4 \;&=\; (2tr(H)(tr(H)+\rho) + \frac{2(n-1)\varepsilon\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} - (tr(H))^2 - \varepsilon(\kappa - (n-2)\alpha))\, H^2 \\ &\quad +\varepsilon tr(H)(\kappa - n\alpha - 2\varepsilon\rho tr(H))\, H + (2\varepsilon\rho tr(H)(\alpha - \frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}) \\ &\quad -(\frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})^2 + \frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}(\kappa - (n-2)\alpha) + \alpha((n-1)\alpha - \kappa))\, g, \end{aligned}$$

$$\rho(\rho - tr(H)) \;=\; (n-1)\varepsilon(\frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} - \frac{\kappa}{n-1} + \alpha).$$

Twierdzenie 4.8. ([95], *Lemma* 4.2): *Niech* M *będzie hiperpowierzchnią w* $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, *spełniającą (3.2) na* $U_H \subset M$. *Wówczas na tym zbiorze spełnione są związki:*

$$
\begin{aligned}
S \cdot R &= -4\alpha\,(R - \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\,G) - \frac{2\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\,g \wedge S + 2\psi\,H \wedge (w \otimes w)\,,\\
Q(S - \alpha\,g, H \wedge (w \otimes w)) &= 0\,,\\
A &= \phi\,H + \psi\,w \otimes w\,,\\
\phi &= \varepsilon\,(\frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} + \frac{\kappa}{n-1} - \alpha)\,,\\
\psi &= -\varepsilon\epsilon\rho\,,
\end{aligned}
$$

gdzie A *i* ρ *są zdefiniowane, odpowiednio przez (4.12) i (4.17).*

5. **Rozmaitości typu Rotera**

Niech (M,g), $n \geqslant 4$, będzie rozmaitością pseudosymetryczną spełniającą (4.4) na zbiorze $\mathcal{U} \subset M$. Wówczas w każdym punkcie tego zbioru tensor krzywizny R rozmaitości (M,g) daje się wyrazić przez kombinację liniową tensorów: $S \wedge S$, $g \wedge S$ i G ([66], Lemma 4):

$$R \;=\; \frac{\alpha_1}{2}\, S \wedge S + \alpha_2\, g \wedge S + \alpha_3\, G, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in I\!R, \tag{5.1}$$

tj. w tym punkcie spełnione jest równanie (4.11). Na odwrót – można sprawdzić, że jeśli (5.1) jest spełnione w $x \in \mathcal{U}$, to także równania (3.4) i (4.4) są spełnione w x.

Rozmaitość semiriemannowską (M,g), $n \geqslant 4$, spełniającą na zbiorze $\mathcal{U} \subset M$ równanie typu Rotera nazywamy rozmaitością typu Rotera [46]. Zauważmy, że jeśli (4.11) jest spełnione na $\mathcal{U} \subset M$, to funkcja ϕ jest różna od zera w każdym punkcie tego zbioru. Rozkład postaci (4.11) tensora R na $U_C \cap U_S$ jest jednoznaczny ([68], Lemma 3.2). Równanie (4.11) w szczególnej postaci, gdy funkcje μ i η są równe zero na $U_C \cap U_S$, zostało otrzymane przez W. Rotera przy badaniu rozmaitości 2-rekurencyjnych [125, 126], tj. rozmaitości spełniających warunek:

$$\nabla^2 R \;=\; R \otimes \Psi,$$

gdzie Ψ jest tensorem typu $(0,2)$ na M. Na podstawie wyników prac: [46, 66, 75, 76, 79, 95, 110, 111] można stwierdzić, że rozmaitości typu Rotera tworzą istotne rozszerzenie klasy rozmaitości konforemnie płaskich oraz klasy rozmaitości 2-rekurencyjnych.

Każdą podrozmaitość (w szczególności, hiperpowierzchnię) M spełniającą na zbiorze $\mathcal{U} \subset M$ równanie typu Rotera będziemy nazywać podrozmaitością typu Rotera (w szczególności, hiperpowierzchnią typu Rotera) [95]. Rezultaty dotyczące hiperpowierzchni typu Rotera w przestrzeniach o stałej krzywiźnie zostaną przedstawione w rozdziale 7. Dodajmy, że w pracach [75, 77, 79, 95, 110, 111] badane są półproduktowe rozmaitości typu Rotera.

Podstawowe związki krzywiznowe spełnione na zbiorze $\mathcal{U} \subset M$ dowolnej rozmaitości typu Rotera (M,g), $n \geqslant 4$, są następujące [46, 95]:

$$\begin{aligned}
S^2 &= \alpha\, S + \beta\, g, \\
S \cdot R &= -4(\alpha\phi + \mu)\, \overline{S} - 2(\alpha\mu + \eta + \beta\phi)\, g \wedge S - 4\beta\mu\, G, \\
\alpha &= \kappa + \phi^{-1}\left((n-2)\mu - 1\right), \\
\beta &= \phi^{-1}(\mu\kappa + (n-1)\eta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R \cdot R &= L_R\, Q(g, R), \\
R \cdot R &= Q(S, R) + (L_R + \phi^{-1}\mu)\, Q(g, C), \\
C \cdot R &= L\, Q(g, R), \\
C \cdot C &= L\, Q(g, C), \\
L_R &= \phi^{-1}\left((n-2)(\mu^2 - \phi\eta) - \mu\right) \\
&= (n-2)(\frac{\mu}{\phi}(\mu - \frac{1}{n-2}) - \eta), \\
L &= L_R + \frac{1}{n-2}(\frac{\kappa}{n-1} - \alpha).
\end{aligned}$$

Rozmaitości typu Rotera spełniają również uogólniony metryczny warunek Einsteina (3.11). Mianowicie, korzystając z powyższych związków, łatwo otrzymuje się twierdzenie 5.1.

Twierdzenie 5.1. ([57], *Proposition* 4.2): *Na zbiorze* $\mathcal{U}$ *każdej rozmaitości typu Rotera* (M, g), $n \geqslant 4$, *są spełnione związki:*

$$\begin{aligned}
R \cdot C - C \cdot R &= \frac{1}{n-2}\, Q(S, R) + (\frac{(n-1)\mu - 1}{(n-2)\phi} + \frac{\kappa}{n-1})\, Q(g, R) \\
&\quad + \frac{\mu((n-1)\mu - 1) - (n-1)\phi\eta}{(n-2)\phi}\, Q(S, G), \\
R \cdot C - C \cdot R &= (\frac{1}{\phi}(\mu - \frac{1}{n-2}) + \frac{\kappa}{n-1})\, Q(g, R) \\
&\quad + (\frac{\mu}{\phi}(\mu - \frac{1}{n-2}) - \eta)\, Q(S, G).
\end{aligned}$$

Niech (M, g), $n \geqslant 4$, będzie semiriemannowską rozmaitością typu Rotera. Załóżmy ponadto, że w każdym punkcie zbioru $\mathcal{U} \subset M$ operator Ricciego $\mathcal{S}$ tej rozmaitości jest diagonalizowalny. Operator $\mathcal{S}^2$ rozmaitości Rotera w każdym punkcie zbioru $x \in \mathcal{U}$ jest kombinacją liniową operatora Ricciego $\mathcal{S}$ oraz odwzorowania identycznościowego Id. Zatem w przestrzeni stycznej $T_x M$ istnieje baza ortonormalna $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ taka, że:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(e_1) &= \lambda_1 e_1,\ \ldots\ ,\ \mathcal{S}(e_p) \;=\; \lambda_1 e_p, \\
\mathcal{S}(e_{p+1}) &= \lambda_2 e_{p+1},\ \ldots\ ,\ \mathcal{S}(e_n) \;=\; \lambda_2 e_n,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \in I\!R$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Równanie (5.2) możemy przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}
S(e_1, e_1) &= \lambda_1 \varepsilon_1,\ \ldots\ ,\ S(e_p, e_p) \;=\; \lambda_1 \varepsilon_p, \\
S(e_{p+1}, e_{p+1}) &= \lambda_2 \varepsilon_{p+1},\ \ldots\ ,\ S(e_n, e_n) \;=\; \lambda_2 \varepsilon_n.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Niech $\{e_{j_1}, e_{j_2}\}$, $j_1 \neq j_2$, $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, p\}$ będzie bazą płaszczyzny π_1, $\{e_{k_1}, e_{k_2}\}$, $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \in \{p+1, \ldots, n\}$ bazą płaszczyzny π_2, a $\{e_{k_1}, e_{j_1}\}$

bazą płaszczyzny π_3. Korzystając z (2.17), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa(\pi_1) = R(e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_2}, e_{j_1}), \\ \kappa_2 &= \kappa(\pi_2) = R(e_{k_1}, e_{k_2}, e_{k_2}, e_{k_1}), \\ \kappa_3 &= \kappa(\pi_3) = R(e_{j_1}, e_{k_1}, e_{k_1}, e_{j_1})\varepsilon_{j_1}\varepsilon_{k_1}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Związki (5.3), (4.11) i (5.4) dają:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \lambda_1^2\phi + 2\lambda_1\mu + \eta, \\ \kappa_2 &= \lambda_2^2\phi + 2\lambda_2\mu + \eta, \\ \kappa_3 &= \lambda_1\lambda_2\phi + (\lambda_1 + \lambda_2)\mu + \eta, \end{aligned}$$

Ostatni związek pozwala wyrazić funkcje ϕ, μ i η przez wartości własne λ_1 i λ_2 operatora Ricciego $\mathcal{S}$ i krzywizny sekcyjne κ_1, κ_2 i κ_3 rozmaitości typu Rotera:

$$\begin{aligned} \phi &= (\lambda_1 - \lambda_2)^{-2}\,(\kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_3), \\ \mu &= (\lambda_1 - \lambda_2)^{-2}\,(-\lambda_2\kappa_1 - \lambda_1\kappa_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\kappa_3), \\ \eta &= (\lambda_1 - \lambda_2)^{-2}\,(\lambda_2^2\kappa_1 + \lambda_1^2\kappa_2 - \lambda_1\lambda_2\kappa_3). \end{aligned}$$

Na zakończenie tego rozdziału zostanie przedstawiona propozycja rozszerzenia klasy rozmaitości typu Rotera [49]. Niech (M, g), $n \geqslant 4$, będzie rozmaitością semiriemannowską. Niech:

$$S^0 = g, \quad S^1 = S, \quad S^p(X, Y) = S^{p-1}(\mathcal{S}X, Y),$$

gdzie $p \in \{2, 3, \ldots\}$, a X i Y są dowolnymi polami wektorowymi na M. Jeśli (M, g), $n \geqslant 4$, jest przestrzenią o stałej krzywiźnie, to zachodzą związki:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\kappa}{2(n-1)n}\, g \wedge g = \phi_{00}\, S^0 \wedge S^0, \\ \phi_{00} &= \frac{\kappa}{2(n-1)n}. \end{aligned}$$

Podobnie, dla dowolnej konforemnie płaskiej rozmaitości, mamy:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{n-2}\, g \wedge S - \frac{\kappa}{2(n-2)(n-1)}\, g \wedge g \\ &= \phi_{00}\, S^0 \wedge S^0 + \phi_{01}\, S^0 \wedge S^1, \\ \phi_{00} &= \frac{\kappa}{2(n-2)(n-1)}, \quad \phi_{01} = \frac{1}{n-2}. \end{aligned}$$

Jeśli (M, g) jest rozmaitością typu Rotera, to na zbiorze $\mathcal{U} \subset M$ można równanie (4.11) przedstawić w postaci:

$$R = \phi_{00}\, S^0 \wedge S^0 + \phi_{01}\, S^0 \wedge S^1 + \phi_{11}\, S^1 \wedge S^1,$$

gdzie ϕ_{00}, ϕ_{01} oraz ϕ_{11} są pewnymi funkcjami na $\mathcal{U}$. Ostatnia równość jest specjalnym przypadkiem związku:

$$R = \sum_{p \leqslant q} \phi_{pq}\, S^p \wedge S^q, \tag{5.5}$$

gdzie ϕ_{pq} są pewnymi funkcjami na $U_C \cap U_S$, $p, q \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$. W pracy [133] wykazano, że pewne hiperpowierzchnie w przestrzeni o stałej krzywiźnie spełniają (5.5). Wynik ten zostanie przedstawiony w rozdziale 7.

6. **Rozmaitości typu Akivisa-Goldberga**

Niech M będzie rozmaitością wymiaru $n = rs$, $r, s \geqslant 2$ i niech $SC(r,s)$ będzie różniczkowalnym polem stożków Segre z bazą M takim, że dla każdego punktu x tej rozmaitości zachodzi $SC_x(r,s) \subset T_xM$ ([3], Chapter 7). Parę $(M, SC(r,s))$ nazywamy strukturą prawie grassmannowską. Strukturę tę oznaczamy przez $AG(r-1, r+s-1)$. Rozmaitość M wraz z strukturą $AG(r-1, r+s-1)$ nazywa się rozmaitością prawie grassmannowską ([3], Chapter 7; [4], Definition 1.1).

W pracy [4] (Examples 3.5 – 3.16) przedstawiono przykłady 4-wymiarowych rozmaitości dopuszczających takie struktury. Metryki tych rozmaitości nazywają się metrykami Akivisa-Goldberga, w skrócie AG-metrykami [91]. M.A. Akivis i V.V. Goldberg zauważyli, że metryki te spełniają związki:

$$(i) \quad \operatorname{rank} S \leqslant 2, \qquad (ii) \quad S^2 \;=\; 0, \qquad (iii) \quad \kappa \;= 0. \tag{6.1}$$

Inne własności krzywiznowe AG-metryk przedstawiono w pracy [91]. Wykazano m.in., że metryki te spełniają związki: (4.4) i (6.2):

$$S \cdot C \;=\; 0. \tag{6.2}$$

Korzystając z (6.1)(ii) oraz (6.1)(iii), a także tożsamości:

$$S \cdot g \;=\; -2S, \qquad S \cdot S \;=\; -2S^2,$$

$$S \cdot C \;=\; S \cdot R - \frac{1}{n-2}\, S \cdot (g \wedge S) + \frac{\kappa}{(n-2)(n-1)}\, S \cdot G,$$

otrzymamy:

$$S \cdot R \;=\; S \wedge S \;=\; 2\overline{S}.$$

Zatem AG-metryki spełniają również równania postaci:

$$S \cdot R \;=\; \frac{L_1}{2}\, S \wedge S + L_2\, g \wedge S + L_3\, G, \tag{6.3}$$

$$S^2 \;=\; L_5\, S + L_6\, g, \tag{6.4}$$

gdzie $L_1, \ldots, L_6$ są pewnymi funkcjami na zbiorze $U_C \cap U_S \subset M$. Na ogół rozmaitości te nie są pseudosymetryczne. Powyższe spostrzeżenia prowadzą do następującej definicji.

Rozmaitość semiriemannowska (M, g), $n \geqslant 4$, spełniająca związki: (4.4), (6.3) i (6.4) na $U_C \cap U_S \subset M$, gdzie $L_1, \ldots, L_6$ są pewnymi funkcjami na tym zbiorze, nazywa się rozmaitością typu Akivisa-Goldberga [46].

Otrzymujemy więc twierdzenie 6.1.

Twierdzenie 6.1. (*por.* [91], *Theorem* 4.4): *4-wymiarowe rozmaitości semiriemannowskie dopuszczające AG-metryki zdefiniowane w (*[4]*, Examples 3.5 – 3.16) są rozmaitościami typu Akivisa-Goldberga.*

Na zbiorze $\mathcal{U}$ każdej rozmaitości typu Rotera są spełnione związki: (4.4), (6.3) i (6.4). Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tj. istnieją rozmaitości spełniające (4.4), (6.3) i (6.4), których tensor krzywizny nie daje się przedstawić na zbiorze $\mathcal{U}$ w postaci kombinacji liniowej tensorów $S \wedge S$, $g \wedge S$ i G.

Każdą podrozmaitość (w szczególności hiperpowierzchnię) M spełniającą na zbiorze $U_C \cap U_S \subset M$ związki: (4.4), (6.3) i (6.4) będziemy nazywać podrozmaitością typu Akivisa-Goldberga (w szczególności hiperpowierzchnią typu Akivisa-Goldberga) [46].

Istnieją rozmaitości typu Akivisa-Goldberga, których metryki są różne od AG-metryk [46]. Na przykład zdefiniowana w pracy [25] rozmaitość półproduktowa $\overline{M} \times_F \widetilde{N}$, $\dim \overline{M} = p$, $\dim \widetilde{N} = n - p$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $n \geqslant 4$, spełnia związki ([95], Example 3.1): (4.5) oraz:

$$S \cdot R \;=\; 0, \qquad S^2 \;=\; \frac{\kappa}{n-p-1}\, S \neq 0, \qquad \kappa \neq 0.$$

Rozmaitość semiriemannowska (M, g), $n \geqslant 4$, spełniająca równanie:

$$\nabla C \;=\; 0$$

nazywa się rozmaitością konforemnie symetryczną. Rozmaitość konforemnie symetryczna (M, g), niebędąca rozmaitością konforemnie płaską ($C = 0$) ani też rozmaitością lokalnie symetryczną ($\nabla R = 0$), nazywa się rozmaitością istotnie konforemnie symetryczną, w skrócie e.c.s. rozmaitością [36, 37]. Na każdej e.c.s. rozmaitości (M, g) mamy $U_C = M$ oraz $\nabla R \neq 0$ w każdym punkcie M. Spełnione są również następujące zależności ([36], Theorem 7; [37], Theorem 5): (6.1), (6.2) i:

$$F\, C \;=\; \frac{1}{2}\, S \wedge S, \tag{6.5}$$

gdzie F jest pewną funkcją na M. Uzyskujemy również następujące wyniki dotyczące e.c.s. rozmaitości:

Twierdzenie 6.2. (*i*) ([36], *Theorem* 9): *Każda e.c.s. rozmaitość jest rozmaitością semisymetryczną.*
(*ii*) ([66], *Theorem* 4.3) *Każda e.c.s. rozmaitość spełnia (4.4).*

Można zatem stwierdzić, że każda e.c.s. rozmaitość (M, g), $n \geqslant 4$, jest semisymetryczną rozmaitością typu Akivisa-Goldberga.

Z (6.5) wynika, że na każdej e.c.s. rozmaitości spełniającej $\operatorname{rank} S = 2$ zachodzi:

$$C \;=\; \frac{L}{2}\, S \wedge S, \qquad L \;=\; \frac{1}{F}. \tag{6.6}$$

Zatem każda e.c.s. rozmaitość (M, g), $n \geqslant 4$, spełniająca w każdym punkcie M związek $\operatorname{rank} S = 2$ jest rozmaitością typu Rotera.

Najnowsze wyniki dotyczące e.c.s. rozmaitości są zawarte w pracach [38 –42]. Dodajmy jeszcze, że często zamiast nazwy e.c.s. rozmaitości używa się określenia rozmaitości dopuszczające metryki nieokreślone z równoległym tensorem Weyla, krócej – rozmaitości z równoległym tensorem Weyla.

W pracy [91] rozważano również kwestię, czy AG-metryki są rozmaitościami półproduktowymi. Wykazano, że AG-metryka zdefiniowana w przykładzie 3.5 pracy [4] nie jest metryką półproduktową. Dokładniej, udowodniono następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.3. ([91], *Theorem* 4.2): *Niech U będzie otwartym, spójnym i niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^4$. Niech na U będzie zadana metryka g zdefiniowana przez (*[4]*, Example 3.5):*

$$\frac{1}{2}\, g_{rs} dx^r dx^s \;=\; dx^1 dx^4 + f dx^2 dx^4 - dx^2 dx^3,$$

gdzie f jest gładką, dodatnią, różną od stałej funkcją na U zależną tylko od zmiennej x^3. Wówczas dla każdego punktu $x \in U$, w którym $f'' \neq 0$, nie istnieje mapa $\{V; x^r\}$, $x \in V$ taka, że g jest metryką półproduktową na V.

Uzyskanie ostatniego rezultatu zostało poprzedzone twierdzeniem, że rząd tensora Ricciego S 4-wymiarowej rozmaitości półproduktowej $\overline{M} \times_F \widetilde{N}$, $p = \dim \overline{M}$, $p = 1$ lub $p = 3$, o własnościach (6.1)(ii) i (6.1)(iii), spełnia nierówność $\operatorname{rank} S \leqslant 1$ ([91], Lemma 3.1, Lemma 3.2). W pracy ([25] Proposition 3.2) wykazano, że powyższy wynik jest także prawdziwy w przypadku, gdy $p = 2$.

W publikacji ([91] Lemma 3.1) wykazano również, że jeśli 4-wymiarowa rozmaitość półproduktowa $\overline{M} \times_F \widetilde{N}$, $p = \dim \overline{M}$, $p = 1$, spełnia warunki (6.1)(ii), (6.1)(iii) i (6.2), to $\overline{M} \times_F \widetilde{N}$ jest rozmaitością semisymetryczną. Przypadek, gdy $p = 2$ lub $p = 3$ badano w pracy [25]. Wykazano ([25], Proposition 3.2), że gdy $p = 2$, to $\overline{M} \times_F \widetilde{N}$ jest rozmaitością pseudosymetryczną. Ostatnie dwa wyniki dają twierdzenie 6.4.

Twierdzenie 6.4. ([25], *Corollary* 3.1): *Każde Ricci-płaskie 4-wymiarowe półproduktowe $\overline{M} \times_F \widetilde{N}$, $p = \dim \overline{M}$, $p \leqslant 2$, rozwiązanie dokładne równań Einsteina jest rozmaitością pseudosymetryczną.*

Wniosek ten uogólnia wynik [81] (Proposition 2), gdzie udowodniono, że czasoprzestrzeń Schwarzschilda jest rozmaitością pseudosymetryczną. Ponadto, w [25] (Proposition 3.3) wykazano, że rozmaitość półproduktowa $\overline{M} \times_F \widetilde{N}$, $p = 3$, spełniająca (4.5), (6.1)(ii), (6.1)(iii) i (6.2) jest rozmaitością semisymetryczną.

7. Hiperpowierzchnie typu Rotera

E.c.s. rozmaitości oraz AG-rozmaitości spełniają (6.1)(iii). Ponadto, pewne e.c.s. rozmaitości oraz 4-wymiarowe rozmaitości dopuszczające metryki zdefiniowane w [4] (Examples 3.14, 3.16) spełniają (6.6). Korzystając z (6.1)(iii) i (6.6), otrzymamy:

$$R \;=\; \frac{L}{2}\, S \wedge S + \frac{1}{n-2}\, g \wedge S. \tag{7.1}$$

Zauważmy, że z (7.1) wynika (3.3). Przedstawione uwagi prowadzą do sformułowanego poniżej zagadnienia.

Niech (M, g), $n \geqslant 4$, będzie rozmaitością semiriemannowską spełniającą:

$$R \;=\; \frac{L}{2}\, S \wedge S + \mu\, g \wedge S + \eta\, G. \tag{7.2}$$

Problem polega na wskazaniu założeń dla funkcji L, μ i η zdefiniowanych na $U_C \cap U_S \subset M$, tak aby na tym zbiorze spełniony był związek (3.3). Dodatkowo wymagamy, aby tensor Weyla C tej rozmaitości był w każdym punkcie tego zbioru proporcjonalny do kwadratu, w sensie iloczynu Kulkarniego-Nomizu, tensora $S - \alpha\, g$, tj.:

$$C \;=\; \frac{L}{2}\, (S - \alpha\, g) \wedge (S - \alpha\, g), \tag{7.3}$$

gdzie α jest pewną funkcją na $U_C \cap U_S$. W pracy [92] (p. 102) wykazano, że powyższe warunki są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy na $U_C \cap U_S$ zachodzą związki:

$$\begin{aligned} (a) \quad \mu \;&=\; \frac{1}{n-2} - \frac{L\kappa}{n-1}, \\ (b) \quad \eta \;&=\; -\frac{\mu\kappa}{n-1}, \\ (c) \quad \alpha \;&=\; \frac{\kappa}{n-1}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Równanie (7.3), przy powyższych warunkach, przyjmie postać:

$$C \;=\; \frac{L}{2}\, (S - \frac{\kappa}{n-1}\, g) \wedge (S - \frac{\kappa}{n-1}\, g). \tag{7.5}$$

Zauważmy, że gdy dodatkowo na $U_C \cap U_S$ mamy $\mu = 0$, to (7.5) prowadzi do:

$$R \;=\; \frac{n-1}{2(n-2)\kappa}\, S \wedge S. \tag{7.6}$$

Przykład rozmaitości spełniającej (7.6) jest przedstawiony w [120] (Example 3.1, Example 4.1). Rozmaitość tę można zrealizować (lokalnie) jako hiperpowierzchnię w przestrzeni semieuklidesowej $\mathbb{E}_s^{n+1}$. Warto nadmienić, że przykład ten jest modyfikacją konstrukcji rozmaitości półproduktowej przedstawionej w części 4 pracy [25].

W pracy [92] wyznaczono warunki konieczne i wystarczające na to, aby hiperpowierzchnia w przestrzeni semieuklidesowej względnie w semiriemannowskiej przestrzeni o stałej krzywiźnie spełniała warunek (7.5) ([92], Proposition 4.1, Proposition 4.2). Na przykład otrzymano następujące twierdzenie:

Twierdzenie 7.1. ([92], *Proposition* 4.1): *Niech* (M, g), $n \geqslant 4$, *będzie rozmaitością semiriemannowską i niech* U *będzie spójną składową zbioru* $U_C \cap U_S \subset M$ *taką, że* (U, g) *można zrealizować jako hiperpowierzchnię w przestrzeni semieuklidesowej* $\mathbb{E}_s^{n+1}$. *Wówczas (7.5) jest spełnione na* (U, g) *wtedy i tylko wtedy, gdy na* (U, g) *zachodzą związki:*

$$R \;=\; \frac{L}{2}\, S \wedge S \quad \text{ i } \quad L \;=\; \frac{n-1}{(n-2)\kappa}.$$

Niech $N_s^m(c)$ będzie m-wymiarową semiriemannowską przestrzenią o stałej krzywiźnie, $c = \frac{\kappa}{(m-1)m}$, o sygnaturze $(s, m-s)$, $m \geqslant 2$. W ostatnim wzorze κ oznacza krzywiznę skalarną rozważanej przestrzeni. Wiadomo, że produkt kartezjański $N_{s_1}^p(c_1) \times N_{s_2}^{n-p}(c_2)$ dwóch przestrzeni o stałej krzywiźnie jest rozmaitością semisymetryczną ([138], Theorem 4.5). Z twierdzenia 4.1 z pracy [75] wynika, że produkt kartezjański $N_{s_1}^p(c_1) \times N_{s_2}^{n-p}(c_2)$, $2 \leqslant p \leqslant n-2$, jest rozmaitością typu Rotera, jeśli tylko:

$$(a) \quad \frac{\kappa_1}{(p-1)p} + \frac{\kappa_2}{(n-p-1)(n-p)} \neq 0 \quad \text{i} \quad (b) \quad \frac{\kappa_1}{p} - \frac{\kappa_2}{n-p} \neq 0. \tag{7.7}$$

Powyższe warunki oznaczają, że dany produkt nie jest rozmaitością konforemnie płaską ani też rozmaitością Einsteina. Tensor krzywizny R rozmaitości produktowej $N_{s_1}^p(c_1) \times N_{s_2}^{n-p}(c_2)$, $2 \leqslant p \leqslant n-2$, spełnia równanie (7.2). Jednak tensor Weyla C tego produktu nie spełnia warunku (7.5). Wynika to z faktu, że nie jest spełniony związek (7.4)(a). Mamy bowiem:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa\, L}{n-1} + \mu - \frac{1}{n-2} \;&=\; \frac{(\kappa_1+\kappa_2)\, L}{n-1} + \mu - \frac{1}{n-2} \\ =\; \frac{(p-1)(n-p-1)}{(n-2)(n-1)} &\Big(\frac{\kappa_1}{p} - \frac{\kappa_2}{n-p}\Big)^{-2} \left(\frac{\kappa_1}{(p-1)p} + \frac{\kappa_2}{(n-p-1)(n-p)}\right), \end{aligned}$$

gdzie funkcje L i μ są zdefiniowane przez (7.2). Zatem, rozmaitości (M,g), $n \geqslant 4$, spełniające (7.5) na $U_C \cap U_S \subset M$ nie mogą być izometryczne z rozmaitościami produktowymi $N^p_{s_1}(c_1) \times N^{n-p}_{s_2}(c_2)$, $2 \leqslant p \leqslant n-2$, spełniającymi (7.7)(b). Łatwo sprawdza się, że produkt kartezjański trzech przestrzeni o stałej niezerowej krzywiźnie nie spełnia równania typu Rotera.

Niech $S^p(r)$ będzie p-wymiarową standardową sferą w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^{p+1}$, $p \geqslant 1$, o promieniu r. Wiadomo, że spełniony jest związek $r^{-2} = \frac{\kappa}{(p-1)p}$, gdzie κ jest krzywizną skalarną danej sfery. Z powyżej przedstawionych rozważań wynika, że produkt kartezjański $S^p(r_1) \times S^{n-p}(r_2)$, $2 \leqslant p \leqslant n-2$, jest rozmaitością typu Rotera, jeśli tylko:

$$\frac{\kappa_1}{p} - \frac{\kappa_2}{n-p} \neq 0.$$

Ostatni warunek można przedstawić w postaci:

$$\frac{1}{p-1} r_1^{-2} - \frac{1}{n-p-1} r_2^{-2} \neq 0.$$

Na mocy twierdzenia 5.1 z pracy [148] (por. [19]) stwierdzamy, że rozmaitość produktowa $M = S^p(r_1) \times S^{n-p}(r_2)$, $r_1 = \sqrt{\frac{p}{n}}$, $r_2 = \sqrt{\frac{n-p}{n}}$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, jest minimalną hiperpowierzchnią izometrycznie zanurzoną w sferze $S^{n+1}(1)$. Hiperpowierzchnia M nazywa się torusem Clifforda [19]. Torus Clifforda ma w każdym punkcie dokładnie dwie różne krzywizny główne ρ_1 i ρ_2 o krotnościach p i $n-p$. Wiadomo, że na M zachodzą związki ([19], p. 68):

$$\rho_1\rho_2 + 1 \ = \ 0, \qquad \rho_i^2 \ = \ r_i^{-2} - 1, \qquad i \ = \ 1,2.$$

Zatem otrzymujemy:

Twierdzenie 7.2. ([95], *Corollary* 3.2): *Torus Clifforda $S^p(r_1) \times S^{n-p}(r_2)$, $r_1 = \sqrt{\frac{p}{n}}$, $r_2 = \sqrt{\frac{n-p}{n}}$, $n \neq 2p$, $2 \leqslant p \leqslant n-2$, jest hiperpowierzchnią typu Rotera mającą w każdym punkcie dwie różne krzywizny główne o krotnościach p i $n-p$.*

W pracy [95] wykazano również następujące uogólnienie twierdzenia 7.2.

Twierdzenie 7.3. (*por.* [95], *Theorem* 3.1): *Niech M będzie hiperpowierzchnią w semiriemannowskiej przestrzeni o stałej krzywiźnie $N^{n+1}_s(c)$, $n \geqslant 4$. Jeśli w każdym punkcie zbioru $\mathcal{U} \subset U_C \cap U_S \subset M$ jej drugi tensor podstawowy H spełnia (4.6), to M jest hiperpowierzchnią typu Rotera.*

Z ostatniego twierdzenia wynika natychmiast:

Twierdzenie 7.4. ([95], *Corollary* 3.1): *Niech M będzie hiperpowierzchnią w riemannowskiej przestrzeni o stałej krzywiźnie $N^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$. Jeśli w każdym punkcie zbioru $\mathcal{U} \subset U_C \cap U_S \subset M$ są dokładnie dwie różne krzywizny główne, to M jest hiperpowierzchnią typu Rotera.*

Przykład hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, spełniającej związek (4.6) na zbiorze $\mathcal{U} \subset U_C \cap U_S \subset M$, jest przedstawiony w [75] (Example 4.1) oraz [95] (Example 3.1).

8. **Hiperpowierzchnie Ricci-semisymetryczne**

Rozmaitości semiriemannowskie spełniające warunki krzywiznowe typu pseudosymetrycznego były badane w wielu pracach. Główne rezultaty prac: [7, 43, 61, 67, 68, 70, 71] świadczą o tym, że pewne warunki typu pseudosymetrycznego prowadzą do (3.4). Wiadomo również, że pewne warunki nie implikują (3.4), jak np. (3.6). Podobnie warunek (3.5) nie prowadzi do (3.3). Przypomnijmy, że każda semiriemannowska rozmaitość semisymetryczna (odpowiednio: pseudosymetryczna) jest rozmaitością Ricci-semisymetryczną (odpowiednio: Ricci-pseudosymetryczną). Wyniki prac: [5, 34] czy też [69] wskazują jednak na to, że przy pewnych dodatkowych założeniach można wykazać, iż warunki (3.4) i (3.6) lub warunki (3.3) i (3.5) są równoważne. Poniżej prezentujemy dwa przykłady takich rezultatów.

Twierdzenie 8.1. (*i*) ([5], *Theorem* 5.2): *Niech* (M, g)*,* $n \geqslant 4$*, będzie riemannowską rozmaitością Ricci-semisymetryczną spełniającą (4.5). Jeśli* (M, g) *jest rozmaitością z pseudosymetrycznym tensorem Weyla, to warunek (3.3) jest spełniony na zbiorze* $U_S \subset M$*.*
(*ii*) ([120], *Theorem* 3.1 (*vi*)) *Niech* (M, g)*,* $n \geqslant 4$*, będzie rozmaitością semiriemannowską spełniającą na zbiorze* $U_C \cap U_S \subset M$ *równania: (3.5), (3.9) i (4.5). Ponadto, jeśli w punkcie* $x \in U_C \cap U_S$ *zachodzą związki:*

$$\kappa \neq 0, \qquad L \neq \pm\frac{\kappa}{n-1} \qquad i \qquad L \neq \frac{\kappa}{(n-2)(n-1)},$$

to w punkcie tym mamy: $R \cdot R \;=\; Q(S, R) \;=\; 0$ *i:*

$$R \;=\; \frac{n-1}{(n-2)(\kappa + (n-1)L)}\,\overline{S}.$$

W [120] (Example 3.1) wykorzystano przykład 4.1 z pracy [25] do konstrukcji przykładu rozmaitości półproduktowej $\overline{M} \times_F \widetilde{M}$, $2 \leqslant p \leqslant n-2$, $p = \dim \overline{M}$, spełniającej założenia twierdzenia 8.1 (ii).

Problem dotyczący równoważności warunków (3.3) i (3.5) nazywa się problemem P.J. Ryana (por. [1, 32 lub 50]). Problem ten został zainspirowany pracą P.J. Ryana ([129], Problem P 808). Najnowsze rezultaty badań nad tym problemem w przypadku, gdy przestrzeń otaczająca jest przestrzenią euklidesową, są przedstawione w pracach: [1, 21, 22, 117, 119]. Na przykład w pracy [1] skonstruowano przykład quasi-einsteinowskiej hiperpowierzchni Ricci-semisymetrycznej, różnej od semisymetrycznej, w $\mathbb{E}^{n+1}$, $n \geqslant 5$. Problem P.J. Ryana jest badany również na hiperpowierzchniach w przestrzeniach o stałej krzywiźnie. Przegląd wyników uzyskanych w zakresie powyżej omawianej problematyki jest przedstawiony w [47].

Wyniki dotyczące równoważności (3.4) i (3.6) lub (3.3) i (3.5) na hiperpowierzchniach M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, są zawarte m.in. w pracach [20, 27, 29, 32, 120]. W [29] wykazano:

Twierdzenie 8.2. (*i*) ([29], *Theorem*): *Warunki (3.3) i (3.5) są równoważne na każdej hiperpowierzchni M w $N_s^5(c)$.*
(*ii*) ([29], *Proposition* 4.1): *Każda hiperpowierzchnia Ricci-pseudosymetryczna M w $N_s^5(c)$ jest hiperpowierzchnią pseudosymetryczną.*

Natomiast w pracy [56] badano Ricci-pseudosymetryczne hiperpowierzchnie w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, spełniające:

$$rank\,(S - \frac{\kappa}{n-1}\,g) \;=\; 1. \tag{8.1}$$

Twierdzenie 8.3. ([56], *Proposition* 5.1, *Theorem* 5.1): *Na zbiorze U_S hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, spełniającej (3.6) i (8.1) zachodzi:*

$$\begin{aligned} R\cdot C \;&=\; Q(S,C) - \frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\,Q(g,R) \\ &\quad + \frac{1}{n-2}(L_S - \frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\,Q(S,G). \end{aligned}$$

Związek ten na zbiorze $U_H \subset M$ przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} R\cdot C \;&=\; Q(S,C) - \frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\,Q(g,R) \\ &\quad - \frac{(n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)}\,Q(S,G). \end{aligned} \tag{8.2}$$

Jeśli przestrzeń otaczająca jest przestrzenią semi-euklidesową, to (8.2) redukuje się na zbiorze $U_H \subset M$ do:

$$R\cdot C \;=\; Q(S,C).$$

Twierdzenie 8.4. *Niech M będzie hiperpowierzchnią w $\mathbb{E}_s^{n+1}$, $n \geqslant 4$.*
(*i*) *(por.* [56], *Proposition* 5.2) *Jeśli na zbiorze $U_C \cap U_S \subset M$ są spełnione (3.3) i (8.1), to na tym zbiorze mamy $R\cdot C = Q(S,C) = 0$ i:*

$$rank\,S \;=\; 1. \tag{8.3}$$

(*ii*) (*por.* [56], *Corollary* 5.2) *Na zbiorze $U_C \cap U_S \subset M$ warunki (3.3) i (8.3) są równoważne warunkom:*

$$R\cdot C \;=\; 0 \quad i \quad C\cdot R \;=\; 0.$$

W pracy [56] (Example 5.1) podano przykład semisymetrycznej hiperpowierzchni Ricci-prostej M w $\mathbb{E}_s^{n+1}$, $n \geqslant 4$, spełniającej $C\cdot R = 0$. Co więcej, hiperpowierzchnia ta jest hiperpowierzchnią typu Akivisa-Goldberga. Łatwo sprawdza się, że M nie jest hiperpowierzchnią typu Rotera. Hiperpowierzchnie w przestrzeni euklidesowej spełniające równanie $R \cdot C = 0$ lub $C \cdot R = 0$ były badane w pracy [10].

W publikacji [72] uzyskano m.in. następujący rezultat:

Twierdzenie 8.5. ([72], *Theorem* 5.1): *Niech M będzie hiperpowierzchnią quasi-einsteinowską w $\mathbb{E}_s^{n+1}$, $n \geqslant 4$, i niech A będzie tensorem zdefiniowanym przez (4.12). Wówczas na podzbiorze $U_H \subset M$ równości: (3.5) i $A = 0$ są równoważne. Ponadto, (3.2) przyjmuje na U_H postać (8.1).*

Z danym twierdzeniem jest również związany następujący wynik:

Twierdzenie 8.6. (*por.* [50], *Lemma* 3.1 (*ii*)): *Niech na hiperpowierzchni M w $\mathbb{E}_s^{n+1}$, $n \geqslant 4$, będzie spełniony związek (8.1). Wówczas w każdym punkcie U_H, w którym $\kappa \neq 0$, mamy $R \cdot R \neq 0$.*

Wyżej przedstawione twierdzenia odegrały ważną rolę w badaniu problemu P.J. Ryana w przypadku, gdy przestrzeń otaczająca jest przestrzenią semieuklidesową. Ułatwiły one bowiem wyznaczenie przykładów Ricci-semisymetrycznych, różnych od semisymetrycznych, hiperpowierzchni w przestrzeniach semieuklidesowych ([50], Examples 4.2, 4.3). Ściślej, w [50] wykazano, że pewne rozmaitości półproduktowe $\overline{M} \times_F \widetilde{M}$, $p = \dim \overline{M} \geqslant 1$, $n - p = \dim \widetilde{M} \geqslant 4$, są rozmaitościami Ricci-semisymetrycznymi, dającymi się lokalnie zrealizować jako hiperpowierzchnie w przestrzeni semieuklidesowej. Rozmaitość $(\overline{M}, \overline{g})$ i funkcja skalująca F są zdefinowane w przykładzie 3.1 [50]. Natomiast rozmaitość $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ jest pewną einsteinowską rozmaitością semisymetryczną, wymiaru $n - p \geqslant 4$, lub pewną rozmaitością Ricci-pseudosymetryczną, wymiaru $n - p = 6, 12, 24$. Dokładniej, w pierwszym przypadku $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ jest rozmaitością izometryczną z otwartym, niepustym i spójnym podzbiorem semiriemannowskiej einsteinowskej hiperpowierzchni semisymetrycznej zdefiniowanej w [118] (por. [50], Example 4.1, Example 4.2). Jeśli $p = 1$, to $\overline{M} \times_F \widetilde{M}$ jest rozmaitością quasi-einsteinowską ([50], Example 3.3 (i)). W drugim przypadku $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ jest rozmaitością lokalnie izometryczną z otwartym, niepustym i spójnym podzbiorem hiperpowierzchni Cartana wymiaru $n - p = 6, 12, 24$ ([50], Example 3.3). Definicja hiperpowierzchni Cartana zostanie podana w następnym rozdziale.

9. Hiperpowierzchnie Ricci-pseudosymetryczne

Każda hiperpowierzchnia pseudosymetryczna M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, jest oczywiście Ricci-pseudosymetryczna. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Na przykład hiperpowierzchnie Cartana wymiaru $\geqslant 6$ są różnymi od pseudosymetrycznych hiperpowierzchniami Ricci-pseudosymetrycznymi ([86], Theorem 1). W następującym twierdzeniu przedstawione są podstawowe fakty dotyczące hiperpowierzchni Ricci-pseudosymetrycznych.

Twierdzenie 9.1. *Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$.*
(i) (por. [24], Theorem 3.1) M jest hiperpowierzchnią Ricci-pseudosymetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie zbioru $U_S \subset M$ spełniony jest jeden z następujących warunków: (4.6) lub:

$$H^3 \; = \; tr(H)\, H^2 + \lambda\, H, \tag{9.1}$$

gdzie λ jest pewną funkcją na U_S.
(ii) (por. [24], Proposition 3.1) Jeśli M jest hiperpowierzchnią Ricci-pseudosymetryczną, to na zbiorze $U_H \subset M$ zachodzi:

$$R \cdot S \; = \; \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\, Q(g, S). \tag{9.2}$$

Z twierdzenia 9.1 (ii) wynika (por. [73], Section 1), że na zbiorze $U_H \subset M$ hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, warunki: (9.2) i:

$$A \; = \; (\lambda + \frac{\varepsilon\kappa}{n-1})\, H \tag{9.3}$$

są równoważne, przy czym A jest tensorem zdefiniowanym przez (4.12), a λ funkcją na U_H zdefiniowaną przez (9.1). Otrzymujemy również:

Twierdzenie 9.2. ([57], *Theorem* 5.1): *Na zbiorze $U_H \subset M$ hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c), n \geqslant 4$, następujące warunki są równoważne: $A = 0$ i:*

$$R \cdot C - C \cdot R \; = \; \frac{1}{n-2}\, Q(S, R) + \frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)}\, Q(g, R),$$

przy czym A jest tensorem zdefiniowanym przez (4.12).

Przedstawione wyżej rezultaty wskazują na to, że badanie krzywiznowych własności hiperpowierzchni Ricci-pseudosymetrycznych M w przestrzeniach $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, różnych od pseudosymetrycznych, należy ograniczyć do podzbioru $U_H \subset M$. Na tym zbiorze są spełnione związki (9.1) i (9.2). Zauważmy, że w przypadku, gdy przestrzeń otaczająca jest semieuklidesowa, (9.2) redukuje się do (3.5), czyli w tym przypadku dane zagadnienie sprowadza się do badania własności krzywiznowych hiperpowierzchni Ricci--semisymetrycznych w $\mathbb{E}_s^{n+1}$.

Przykład quasi-einsteinowskiej hiperpowierzchni Ricci-pseudosymetrycznej, różnej od pseudosymetrycznej, jest przedstawiony w [74] (Section 4). Dokładniej, w [74] wykazano, że pewna specjalna rozmaitość półproduktowa $\overline{M} \times_F \widetilde{M}$, z 1-wymiarową bazą $(\overline{M}, \overline{g})$ i włóknem $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, $\dim \widetilde{M} \geqslant 4$, izometrycznym z otwartym, niepustym i spójnym podzbiorem hiperpowierzchni badanej w przykładzie 4.1 pracy [50], jest lokalnie izometryczna z hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 5$.

Przykładami różnych od quasi-einsteinowskich hiperpowierzchni Ricci-pseudosymetrycznych w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, są hiperpowierzchnie Cartana ([86], Proposition 1). Hiperpowierzchnią Cartana w sferze $S^{n+1}(c)$, $c = \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}$, $n \geqslant 3$, nazywamy zwartą hiperpowierzchnię z trzema krzywiznami głównymi $-(3c)^{\frac{1}{2}}$, 0 i $(3c)^{\frac{1}{2}}$, o tej samej krotności [142]. Zatem $tr(H) = 0$, co oznacza, że hiperpowierzchnie Cartana są minimalne. Hiperpowierzchnie Cartana istnieją jedynie dla $n = 3, 6, 12, 24$. Są to jedyne zwarte hiperpowierzchnie w przestrzeniach o stałej krzywiźnie z dokładnie trzema różnymi stałymi krzywiznami głównymi [142].

Wiadomo, że hiperpowierzchnie Cartana są tubami o stałym promieniu nad standardowymi włożeniami Veronese $i : \mathbb{FP}^2 \to S^{3d+1}(c) \to \mathbb{E}^{3d+2}$, $d = 1, 2, 4, 8$, płaszczyzny rzutowej $\mathbb{FP}^2$ w sferę $S^{3d+1}(c)$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^{3d+2}$, przy czym $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (liczby rzeczywiste), $\mathbb{C}$ (liczby zespolone), $\mathbb{Q}$ (kwaterniony) lub $\mathbb{O}$ (liczby Cayley'a) [17].

Z definicji hiperpowierzchni Cartana wynika, że odpowiadający jej zbiór U_H pokrywa się z całą hiperpowierzchnią. Zatem na każdej hiperpowierzchni Cartana jest spełnione równanie (9.2) ([86], Proposition 1(i)). Dodatkowo, hiperpowierzchnie Cartana wymiaru $n = 6, 12, 24$ nie spełniają (4.8). Jedynie na 3-wymiarowej hiperpowierzchni Cartana mamy ([83], Example 2; [86], Proposition 1(ii)):

$$R \cdot R = \frac{\widetilde{\kappa}}{12} Q(g, R).$$

W pracy [51] wyznaczono pewne własności krzywiznowe hiperpowierzchni Cartana wymiaru $n = 6, 12, 24$. W ten sposób powstaje:

Twierdzenie 9.3. ([51], *Theorem* 4.3): *Na każdej hiperpowierzchni Cartana M w $S^{n+1}(c)$, $n = 6, 12$ lub 24, są spełnione związki: (9.1), (9.2) oraz:*

$$\lambda = \frac{3\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}, \qquad \kappa = \frac{(n-3)\,\widetilde{\kappa}}{n+1},$$

$$S^2 = \frac{(2n-5)\,\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\, S - \frac{(n-1)(n-4)\,\widetilde{\kappa}}{n^2(n+1)^2}\, g, \tag{9.4}$$

$$C \cdot S = \frac{(n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-2)(n-1)n(n+1)} Q(g,S),$$

$$\begin{aligned} S \cdot R &= -\frac{4(n-4)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} R - \frac{2\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} g \wedge S \\ &+ \frac{4(n-4)\widetilde{\kappa}^2}{n^2(n+1)^2} G, \end{aligned} \tag{9.5}$$

$$\begin{aligned} R \cdot C &= Q(S,R) - \frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} Q(g,R) \\ &- \frac{(n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)} Q(S,G), \end{aligned} \tag{9.6}$$

$$\begin{aligned} C \cdot R &= \frac{n-3}{n-2} Q(S,R) - \frac{(n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-1)(n+1)} Q(g,R) \\ &- \frac{(n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)} Q(S,G), \end{aligned}$$

$$R \cdot C - C \cdot R = \frac{1}{n-2} Q(S,R) - \frac{2\widetilde{\kappa}}{(n-1)n(n+1)} Q(g,R),$$

$$\begin{aligned} C \cdot C &= \frac{n-3}{n-2} Q(S,R) - \frac{(n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-1)(n+1)} Q(g,R) \\ &- \frac{(n-3)(n^2-n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-2)^2 n(n+1)^2} Q(S,G). \end{aligned}$$

Ogólniej, dla każdej hiperpowierzchni Ricci-pseudosymetrycznej w semi-riemannowskiej przestrzeni o stałej krzywiźnie mamy:

Twierdzenie 9.4. ([51], *Theorem* 3.1): *Niech M będzie Ricci-pseudosymetryczną hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$. Na zbiorze $U_H \subset M$ zachodzą następujące związki: (9.1), (9.2), (9.6) oraz:*

$$S^2 = \left(\mu + \frac{(n-1)\,\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\right) S - \frac{(n-1)\,\mu\,\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\, g,$$

$$C \cdot S = \frac{1}{n-2}\left(\frac{\kappa}{n-1} - \mu - \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\right) Q(g,S),$$

$$S \cdot R = -4\mu\, R - \frac{2\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\, g \wedge S + \frac{4\mu\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\, G,$$

$$R \cdot C - C \cdot R \; = \; \frac{1}{n-2}\, Q(S,R) + \frac{1}{n-2}(\mu - \frac{\kappa}{n-1})\, Q(g,R), \qquad (9.7)$$

$$\begin{aligned} C \cdot C \; &= \; \frac{1}{n-2}(\frac{\kappa}{n-1} + \varepsilon\lambda - \frac{(n^2-3n+3)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\, Q(g,R) + \frac{n-3}{n-2}\, Q(S,R) \\ &+ \frac{1}{(n-2)^2}(\frac{\kappa}{n-1} + \varepsilon\lambda - \frac{(n^2-4n+6)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\, Q(S,G), \end{aligned}$$

$$\mu \; = \; \frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} - \varepsilon\, \lambda,$$

gdzie funkcja λ jest zdefiniowana na U_H przez (9.1). Ponadto, na zbiorze U_H zachodzi [131]:

$$\begin{aligned} C \cdot R \; &= \; \frac{1}{n-2}(\frac{\kappa}{n-1} + \varepsilon\lambda - \frac{(n^2-3n+3)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\, Q(g,R) \\ &+ \frac{n-3}{n-2}\, Q(S,R) - \frac{(n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)}\, Q(S,G). \end{aligned}$$

Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, i niech na zbiorze $U_H \subset M$ będzie spełniony następujący uogólniony warunek metryczny Einsteina:

$$R \cdot C - C \cdot R \; = \; \alpha\, Q(S,R) + \beta\, Q(g,R), \qquad (9.8)$$

gdzie α i β są pewnymi funkcjami na U_H. Oczywiście, (9.8) jest specjalnym przypadkiem (3.11). Jeśli M jest hiperpowierzchnią Ricci-pseudosymetryczną, to na zbiorze $V = \{x \in U_H : Q(S,R) \neq 0$ w punkcie $x\}$, (9.8) przyjmuje postać (9.7). Dokładniej, mamy:

Twierdzenie 9.5. (*i*) ([73], *Theorem* 3.1) *Niech M będzie hiperpowierzchnią Ricci-pseudosymetryczną w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, i niech (9.8) będzie spełnione na zbiorze $U_H \subset M$. Wówczas na zbiorze $V \subset U_H$ zachodzą związki: (9.2), (9.3) i:*

$$\begin{aligned} \alpha \; &= \; \frac{1}{n-2}, \\ \beta \; &= \; \frac{1}{n-2}\,(\frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} - \varepsilon\lambda - \frac{\kappa}{n-1}), \end{aligned} \qquad (9.9)$$

gdzie λ jest funkcją na U_H zdefiniowaną przez (9.1).
(*ii*) ([73], *Theorem* 3.2) *Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$. Wówczas na zbiorze $V \subset U_H \subset M$ następujące trzy warunki są równoważne: (9.1), (9.2) i (9.8), z funkcjami α i β zdefiniowanymi przez (9.9).*

Z twierdzenia 4.3 (i) wynika natychmiast, że jeśli przestrzeń otaczająca $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, ma niezerową krzywiznę $\widetilde{\kappa}$, to na każdej hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c)$ zbiór V zdefiniowany powyżej pokrywa się ze zbiorem U_H. Mamy również następujący wynik dotyczący warunku (9.8).

Twierdzenie 9.6. ([57], *Theorem* 5.1): *Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$. Warunki:*

$$R \cdot C - C \cdot R \;=\; \frac{1}{n-2}\, Q(S,R) + \frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)}\, Q(g,R),$$

i $A = 0$ są równoważne na $U_H \subset M$, gdzie A jest tensorem zdefiniowanym przez (4.12).

Okazuje się także, że jedynie hiperpowierzchnie Ricci-pseudosymetryczne spełniają (9.6). Dokładniej, mamy:

Twierdzenie 9.7. ([93], *Theorem* 6.1): *Na podzbiorze $U_H \subset M$ hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, warunki (9.2) i (9.6) są równoważne.*

Załóżmy, że na zbiorze $U_H \subset M$ hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, spełniony jest związek (2.33), przy czym L_1, L_2 i L_3 są pewnymi funkcjami na U_H. Z uwagi choćby na ostatnie twierdzenie, powstał problem wyznaczenia funkcji L_1, L_2 i L_3. Został on rozwiązany w [93].

Twierdzenie 9.8. ([93], *Theorem* 6.2): *Niech na podzbiorze $U_H \subset M$ hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, będzie spełniony warunek (2.33). Jeśli na U_H zachodzi $L_1 = 1$, to M jest hiperpowierzchnią Ricci-pseudosymetryczną, a funkcje L_2 i L_3 spełniają na U_H związki:*

$$L_2 \;=\; -\frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} \quad i \quad L_3 \;=\; -\frac{(n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)}.$$

Twierdzenie 9.9. (*por.* [93], *Theorem* 6.3, *Theorem* 6.4): *Niech na podzbiorze $U_H \subset M$ hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, będzie spełniony warunek (2.33). Jeśli w każdym punkcie U_H mamy $L_1 \neq 1$, to M jest hiperpowierzchnią pseudosymetryczną, a funkcje L_2 i L_3 spełniają na U_H związki:*

$$L_2 \;=\; -\frac{((n-1)L_1-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} \quad i \quad L_3 \;=\; -\frac{((n-2)L_1-1)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)}.$$

Z równaniem (2.32) jest związane następujące:

Twierdzenie 9.10. ([93]; *Proposition* 5.1, *Proposition* 5.2): *Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, spełniającą (2.32). Wówczas na zbiorze $U_H \subset M$ mamy:*

$$
\begin{aligned}
H^3 &= tr(H)\, H^2 + \lambda\, H - \frac{\mu}{n}\, g, \qquad (9.10)\\
R \cdot S &= \frac{\tau}{n(n+1)}\, Q(g,S) - \frac{\mu}{n}\, Q(g,H),\\
R \cdot C &= Q(S,R) - \frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\, Q(g,R)\\
&\quad - \frac{(n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)}\, Q(S,G) - \frac{\mu}{(n-2)n}\, Q(H,G),\\
\mu &= -tr(H^3) + tr(H)\, tr(H^2) + \lambda\, tr(H),
\end{aligned}
$$

gdzie λ jest pewną funkcją na U_H.

Ostatnie twierdzenie wspólnie z twierdzeniem 3.2 daje:

Twierdzenie 9.11. (*i*) ([57], *Theorem* 4.1) *Jeśli na zbiorze U_H hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, zachodzi jedno z równań typu Walkera (2.32), (2.34) lub (2.35), to na U_H jest spełniony związek (9.10).*
(*ii*) ([57], *Corollary* 4.1) *Jeśli na zbiorze U_H hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, jeden z tensorów $R\cdot C$, $C\cdot R$ lub $R\cdot C - C\cdot R$, jest kombinacją liniową tensora $R\cdot R$ i skończonej sumy tensorów Tachibany $Q(E,B)$, gdzie E jest symetrycznym tensorem typu $(0,2)$, a B uogólnionym tensorem krzywizny, to na U_H jest spełniony związek (9.10).*

Niech M będzie hiperpowierzchnią w riemannowskiej przestrzeni o stałej krzywiźnie $N^{n+1}(c)$, $n \geqslant 3$. Zgodnie z [13], jeśli hiperpowierzchnia M jest hiperpowierzchnią prostą (austere hypersurface), to w każdym jej punkcie są trzy krzywizny główne $0, \lambda, -\lambda$, gdzie λ jest pewną funkcją na M, a krzywizny λ i $-\lambda$ są tej samej krotności. Zatem na każdej hiperpowierzchni prostej M w $N^{n+1}(c)$, $n \geqslant 3$, spełnione jest równanie:

$$H^3 = \lambda^2\, H,$$

a w konsekwencji, na mocy twierdzenia 9.1 (ii), M jest hiperpowierzchnią Ricci-pseudosymetryczną stałego typu (por. [87], Theorem 4.3). Hiperpowierzchnie Cartana, jak również uogólnione hiperpowierzchnie Cartana, są hiperpowierzchniami prostymi.

10. **Inne klasy hiperpowierzchni**

Na wstępie przypomnijmy podaną w rozdziale 6 definicję rozmaitości typu Akivisa-Goldberga. Rozmaitość semiriemannowską (M, g), $n \geqslant 4$, nazywamy rozmaitością typu Akivisa-Goldberga, jeśli na zbiorze $U_C \cap U_S \subset M$ spełnione są związki: (4.4), (6.3) i (6.4), tj.:

$$\begin{aligned} S \cdot R &= \frac{L_1}{2}\, S \wedge S + L_2\, g \wedge S + L_3\, G, \\ R \cdot R &= Q(S, R) + L_4\, Q(g, C), \\ S^2 &= L_5\, S + L_6\, g, \end{aligned}$$

gdzie $L_1, \ldots, L_6$ są pewnymi funkcjami na zbiorze $U_C \cap U_S$. Podobnie, każdą podrozmaitość (hiperpowierzchnię) M spełniającą na $U_C \cap U_S \subset M$ związki: (4.4), (6.3) i (6.4) nazywamy podrozmaitością (hiperpowierzchnią) typu Akivisa-Goldberga.

Zauważmy, że każda hiperpowierzchnia Cartana, wymiaru $n = 6, 12, 24$, spełnia (4.4) i (6.4), dokładniej (4.3) i (9.4). Jednak hiperpowierzchnie te nie spełniają (6.3). Rzeczywiście, gdyby związek (6.3) był spełniony, to po uwzględnieniu (9.5), doprowadziłby to do stwierdzenia, że hiperpowierzchnie Cartana, wymiaru $n = 6, 12, 24$, są rozmaitościami pseudosymetrycznymi, a jak wiadomo, takimi nie są. Fakty te prowadzą do definicji nowej klasy hiperpowierzchni, zawierającej zarówno hiperpowierzchnie typu Akivisa-Goldberga, jak i hiperpowierzchnie Cartana i ogólniej, hiperpowierzchnie Ricci-pseudosymetryczne.

Rozmaitość semiriemannowska (M, g), $n \geqslant 4$, nazywa się rozmaitością typu Cartana ([95]), jeśli na zbiorze $U_C \cap U_S \subset M$ spełnione są związki: (4.4), (6.3) i:

$$S \cdot R = L_0\, R + L_1\, \overline{S} + L_2\, g \wedge S + L_3\, G\,, \tag{10.1}$$

gdzie $L_0, \ldots, L_6$ są pewnymi funkcjami na $U_C \cap U_S$. Podobnie, każdą podrozmaitość (hiperpowierzchnię) M spełniającą na $U_C \cap U_S \subset M$ związki: (4.4), (6.3) i (10.1) nazywamy podrozmaitością (hiperpowierzchnią) typu Cartana [95].

Z twierdzenia 9.4 wynika natychmiast:

Twierdzenie 10.1. *Każda hiperpowierzchnia Ricci-pseudosymetryczna w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, jest hiperpowierzchnią typu Cartana.*

Każda hiperpowierzchnia M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, spełnia (4.3). Zatem M będzie hiperpowierzchnią typu Cartana, jeśli (6.3) i (10.1) będą spełnione na $U_C \cap U_S \subset M$.

Quasi-einsteinowskie hiperpowierzchnie typu Cartana w semiriemannowskich przestrzeniach o stałej krzywiźnie $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, były badane w [95]. Zauważmy, że zgodnie z twierdzeniem 2.6 (ii), (3.2) implikuje (2.24), ściślej (6.4) ($E = S$). Głównym wynikiem tej pracy jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 10.2. ([95], *Theorem* 6.2): *Niech M będzie quasi-einsteinowską hiperpowierzchnią typu Cartana w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, tj. na $U_H \subset M$ zachodzą związki: (3.2) i (10.1). Wówczas w każdym punkcie $x \in U_H$ spełniony jest jeden z warunków:*
(i) (4.8) i

$$C \cdot C \;=\; \frac{n-3}{2(n-2)}\Big(\frac{\widetilde{\kappa}}{n+1} - \frac{\kappa}{n-1}\Big)\, Q(g,C),$$

(ii) (9.2) i

$$R \cdot R - \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\, Q(g,R) \neq 0$$

i tensory $C \cdot C$ i $Q(g,C)$ są liniowo niezależne w tym punkcie,
(iii)

$$R \cdot S - \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\, Q(g,S) \;\neq\; 0,$$

M jest 2-quasi-umbilikalna na pewnym otoczeniu $U \subset M$ punktu x a na U zachodzi (3.8).

Na zakończenie przedstawimy najważniejsze wyniki pracy [58].

Niech M będzie hiperpowierzchnią w semiriemannowskiej przestrzeni o stałej krzywiźnie $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$.

W pracy [57](Corollary 4.1) wykazano, że jeśli w każdym punkcie zbioru $U_H \subset M$ jeden z tensorów: $R\cdot C$, $C\cdot R$ lub $R\cdot C - C\cdot R$ wyraża się przez kombinację liniową tensora $R \cdot R$ i skończoną sumę tensorów Tachibany postaci $Q(A,B)$, gdzie A jest symetrycznym tensorem typu $(0,2)$, a B uogólnionym tensorem krzywizny, to:

$$H^3 \;=\; tr(H)\, H^2 + \psi\, H + \rho\, g, \tag{10.2}$$

gdzie ψ i ρ są pewnymi funkcjami na U_H. Wiadomo również, że jeśli (10.2) zachodzi na $U_H \subset M$, to na tym zbiorze spełnione są następujące związki ([134], Theorem 5.1; [58]):

$$\begin{aligned} R \cdot C \;&=\; -\frac{\rho}{n-2}\, Q(g, g\wedge H) - \frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\, Q(g,R) \\ &\quad + Q(S,R) + \frac{(n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)}\, Q(g, g\wedge S), \end{aligned}$$

$$C \cdot R = \frac{1}{n-2}(\frac{\kappa}{n-1} + \varepsilon\psi - \frac{(n^2-3n+3)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\,Q(g,R) + \frac{n-3}{n-2}\,Q(S,R) + \frac{(n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)}\,Q(g, g\wedge S),$$

$$R \cdot C - C \cdot R = -\frac{\rho}{n-2}\,Q(g, g\wedge H) + \frac{1}{n-2}\,Q(S,R) - \frac{1}{n-2}(\frac{\kappa}{n-1} + \varepsilon\psi - \frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\,Q(g,R),$$

oraz ([133], eqs. (3.7), (3.9)):

$$\rho\, H = S^2 + (\varepsilon\psi - \frac{2(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\,S + \lambda_1\, g,$$

$$R \cdot S = \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\,Q(g,S) + \rho\, Q(g,H),$$

gdzie:

$$\lambda_1 = (\frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} - \varepsilon\psi)\frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} + \rho tr(H).$$

Niech $U_\rho \subset U_H \subset M$ będzie zbiorem wszystkich punktów, w których jest spełniony związek (10.2), przy czym funkcja ρ jest różna od zera w każdym punkcie tego zbioru. Przykłady hiperpowierzchni M w przestrzeniach euklidesowych z trzema różnymi krzywiznami głównymi spełniającymi (10.2) na $U_\rho \subset M$ są przedstawione w pracy [132]. Tensor krzywizny R hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, spełniającej (10.2) na U_ρ można przedstawić na tym zbiorze w następującej postaci ([133], Theorem 3.2):

$$2\varepsilon\rho^2\,(R - \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\,G) = A \wedge A,$$

gdzie:

$$A = S^2 - (\frac{2(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} - \varepsilon\psi)\,S + \left((\frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} - \varepsilon\psi)\frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} + \rho tr(H)\right) g.$$

Zatem tensor krzywizny R wyraża się na U_ρ przez kombinację liniową tensorów Kulkarniego-Nomizu otrzymanych z tensorów g, S and S^2.

Równanie (10.2) jest również spełnione na U_H, jeśli w każdym punkcie tego zbioru tensor $R \cdot C$ wyrażony jest przez kombinację liniową tensorów

Tachibany $Q(S,R)$, $Q(g,R)$, $Q(g, g\wedge S)$ i $Q(S, g\wedge S)$, tj. na tym zbiorze spełniony jest związek:

$$\begin{aligned} R\cdot C &= \alpha_1\, Q(S,R) + \alpha_2\, Q(g,R) \\ &\quad +\alpha_3\, Q(g, g\wedge S) + \alpha_4\, Q(S, g\wedge S) \end{aligned} \tag{10.3}$$

gdzie $\alpha_1, \ldots \alpha_4$ są pewnymi funkcjami na U_H.

Twierdzenie 10.3. ([58], *Proposition* 4.1, *Proposition* 4.2, *Theorem* 4.1): *Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, spełniającą (10.3) na $U_\rho \subset U_H \subset M$. Wówczas na U_ρ mamy:*

$$R\cdot R \;=\; Q(g,B), \tag{10.4}$$

gdzie:

$$B \;=\; T - \frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\, C,$$

$$\begin{aligned} T \;=\; & (1-\alpha_1)^{-1}\, ((\alpha_2 + \frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\, R + \frac{\alpha_1}{2}\, S\wedge S + \frac{1}{n-2}\, g\wedge S^2 \\ & + \frac{1}{n-2}(\varepsilon\psi - \frac{(3n-5)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)} - \alpha_1(\kappa + \varepsilon\psi - \frac{(2n-3)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}) - \alpha_2)\, g\wedge S), \end{aligned} \tag{10.5}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha_4 \;=\; -\frac{1}{n-2}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{n-2}(\kappa + \varepsilon\psi - \frac{(n^2-3n+3)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}), \\ \alpha_3 &= \frac{(n-3)\widetilde{\kappa}}{(n-2)n(n+1)}. \end{aligned} \tag{10.6}$$

Na odwrót, jeśli tensor B spełnia na U_H związek (10.4), to tensor ten daje się wyrazić na tym zbiorze przez kombinację liniową tensorów: R, $S\wedge S$, $g\wedge S$, $g\wedge S^2$ i G. Dokładniej, mamy:

Twierdzenie 10.4. ([58], *Theorem* 4.2): *Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$. Jeśli uogólniony tensor krzywizny B spełnia na $U_H \subset M$ związek (10.4), to tensor ten przyjmuje postać:*

$$\begin{aligned} B \;=\; & \frac{1}{n-1}\, ((\kappa + \varepsilon\psi - \frac{(n-1)^2\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\, R - \frac{1}{2}\, S\wedge S + g\wedge S^2 \\ & +(\varepsilon\psi - \frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\, g\wedge S + \lambda\, G), \end{aligned} \tag{10.7}$$

przy czym λ jest pewną funkcją na U_H.

W kolejnym twierdzeniu przedstawiamy wyniki dotyczące hiperpowierzchni, na których jeden z tensorów: $R \cdot C$, $C \cdot R$ i $R \cdot C - C \cdot R$ jest równy tensorowi Tachibany $Q(g, B)$, gdzie B jest uogólnionym tensorem krzywizny.

Twierdzenie 10.5. ([58], *Theorem* 4.3): *Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, i niech B_1, B_2 i B_3 będą uogólnionymi tensorami krzywizny na $U_H \subset M$.*
(i) Jeśli tensor B_1 spełnia na U_H związek:

$$R \cdot C \;=\; Q(g, B_1), \tag{10.8}$$

to tensor B_1 jest postaci:

$$\begin{aligned} B_1 \;=\; & \frac{1}{n-1}\,((\kappa + \varepsilon\psi - \frac{(n-1)^2\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\,R - \frac{1}{n-2}\,g \wedge S^2 \\ & -\frac{1}{2}\,S \wedge S - \frac{1}{n-2}\,(\varepsilon\psi - \frac{(n-1)^2\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\,g \wedge S + \lambda\,G) \end{aligned} \tag{10.9}$$

przy czym λ jest pewną funkcją na U_H.
(ii) Jeśli tensor B_2 spełnia na U_H związek:

$$C \cdot R \;=\; Q(g, B_2), \tag{10.10}$$

to tensor B_2 jest postaci:

$$\begin{aligned} B_2 \;=\; & (\frac{\kappa}{n-1} + \frac{2\varepsilon\psi}{n-1} - \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\,R + \lambda\,G \\ & + \frac{n-3}{(n-2)(n-1)}((\varepsilon\psi - \frac{(n-1)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})g \wedge S - \frac{1}{2}\,S \wedge S + g \wedge S^2) \end{aligned} \tag{10.11}$$

przy czym λ jest pewną funkcją na U_H.
(iii) Jeśli tensor B_3 spełnia na U_H związek:

$$R \cdot C - C \cdot R \;=\; Q(g, B_3) \tag{10.12}$$

to tensor B_3 jest postaci:

$$\begin{aligned} B_3 \;=\; & (-\frac{\varepsilon\psi}{n-1} + \frac{\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\,R + (-\frac{\varepsilon\psi}{n-1} + \frac{2\widetilde{\kappa}}{n(n+1)})\,g \wedge S \\ & -\frac{1}{n-1}\,g \wedge S^2 - \frac{1}{2(n-2)(n-1)}\,S \wedge S + \lambda\,G \end{aligned} \tag{10.13}$$

przy czym λ jest pewną funkcją na U_H.

Następne twierdzenie dotyczy hiperpowierzchni M w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$, spełniających m.in. na zbiorze $U_H \subset M$ warunek (10.14). Na mocy twierdzenia 2.6 (v), również na tym zbiorze jest spełniony związek (9.1), tj. specjalny przypadek (10.2).

Twierdzenie 10.6. ([58], *Theorem* 4.4): *Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $c \neq 0$, $n \geqslant 4$, spełniającą na $U_H \subset M$ warunki:*

$$(a) \ \ rank(H) \ = \ 2, \qquad (b) \ \ rank(H^2 - tr(H)\, H) \ = \ 1. \tag{10.14}$$

Wówczas na U_H spełnione są związki: (10.4), (10.8), (10.10) i (10.12), przy czym B, B_1, B_2 i B_3 są zdefiniowane, odpowiednio, przez (10.7), (10.9), (10.11) i (10.13). Ściślej, mamy:

$$R \cdot R \ = \ Q(g, B) \ = \ \frac{\kappa}{(n-1)n}\, Q(g, R), \tag{10.15}$$

$$\begin{aligned} R \cdot C \ &= \ Q(g, B_1) \\ &= \ \frac{1}{n-1}\, Q(g, \frac{\kappa}{n}\, R - \frac{1}{2}\, S \wedge S + \frac{(n-3)\kappa}{(n-2)n}\, g \wedge S), \end{aligned} \tag{10.16}$$

$$C \cdot R \ = \ Q(g, B_2) \ = \ 0, \tag{10.17}$$

$$\begin{aligned} R \cdot C - C \cdot R \ &= \ Q(g, B_3) \\ &= \ \frac{1}{n-1}\, Q(g, \frac{\kappa}{n}\, R - \frac{1}{2}\, S \wedge S + \frac{(n-3)\kappa}{(n-2)n}\, g \wedge S). \end{aligned} \tag{10.18}$$

Przykład hiperpowierzchni M w semiriemannowskiej przestrzeni o niezerowej stałej krzywiźnie spełniającej warunki: (10.14), (10.15), (10.16), (10.17) i (10.18) został wyznaczony w [68]. Zatem, na mocy twierdzenia 10.4 (Example 5.1), na hiperpowierzchni tej spełnione są związki: (10.4), (10.8), (10.10) i (10.12) ([58], Remark 4.1 (iii)). Natomiast w [56] (Example 4.1, Example 5.1) został wyznaczony przykład hiperpowierzchni w przestrzeni semieuklidesowej. Tensory $R \cdot R$, $R \cdot C$, $C \cdot R$, $Q(g, B)$, $Q(g, B_1)$, $Q(g, B_2)$ i $Q(g, B_3)$ tej hiperpowierzchni są tensorami zerowymi ([58], Remark 4.1 (iv)).

Na zakończenie tego rozdziału przedstawiamy tożsamość, która jest spełniona na zbiorze U_H każdej hiperpowierzchni M w przestrzeni $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$.

Twierdzenie 10.7. *Niech M będzie hiperpowierzchnią w $N_s^{n+1}(c)$, $n \geqslant 4$. Wówczas na zbiorze $U_H \subset M$ jest spełniona tożsamość:*

$$Q(g, T - \frac{(n-2)\widetilde{\kappa}}{n(n+1)}\, C - B) \ = \ 0,$$

przy czym tensory T i B są zdefiniowane przez (10.5) i (10.7), a współczynniki α_1 i α_2 – przez (10.6).

PIŚMIENNICTWO

[1] Abdalla B.E., Dillen F., 2002. A Ricci-semi-symmetric hypersurface of the Euclidean space which is not semi-symmetric, Proc. Amer. Math. Soc. 130, 1805–1808.

[2] Adamów A., Deszcz R., 1983. On totally umbilical submanifolds of some class of Riemannian manifolds, Demonstr. Math. 16, 39–59.

[3] Akivis M.A., Goldberg V.V., 1996. Conformal Differential Geometry and Its Generalizations, Wiley-Interscience Publication, New York.

[4] Akivis M.A., Goldberg V.V., 1999. Semiintegrable almost Grassmann structures, Differential Geom. Appl. 10, 257–293.

[5] Arslan K., Çelik Y., Deszcz R., Ezentaş R., 1998. On the equivalence of Ricci-semisymmetry and semisymmetry, Colloq. Math. 76, 279–294.

[6] Arslan K., Deszcz R., Ezentaş R., Hotloś M., Murathan C., 2005. On certain pseudosymmetry type warped products, Dept. Math., Agricultural Univ. Wrocław, Ser. A, Theory and Methods, Report No. 119.

[7] Arslan K., Deszcz R., Yaprak Ş., 1997. On Weyl pseudosymmetric hypersurfaces, Colloq. Math. 72, 353–361.

[8] Belkhelfa M., Deszcz R., Głogowska M., Kowalczyk D., Hotloś M., Verstraelen L., 2002. On some type of curvature conditions, [in:] Banach Center Publ. 57, Inst. Math., Polish Acad. Sci. 179–194.

[9] Besse A.L., 1987. Einstein Manifolds, Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, Bd. 10, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[10] Blair D.E., Verheyen P., Verstraelen L., 1984. Hypersurfaces satisfaisant a $R \cdot C = 0$ ou $C \cdot R = 0$, C.R. Acad. Bulgare Sci. 37, 1459–1462.

[11] Boeckx E., Kowalski O., Vanhecke L., 1996. Riemannian Manifolds of Conullity Two, World Sci., Singapore.

[12] Bokan N., Dorić M., Petrović-Torgašev M., Verstraelen L., 1989. On the conharmonic curvature tensor of hypersurfaces in Euclidean spaces, Glasnik Mat. 24 (44), 89–101.

[13] Bryant R.L., 1991. Some remarks on the geometry of austere manifolds, Bol. Soc. Brasil. Math. (N.S.) 21, 133–157.

[14] Chaki M.C., 1987. On pseudo-symmetric manifolds, An. Ştiinţ. Univ. "Al.I.Cuza" Iasi Sect. Ia Math. N.S., 33, 53–58.

[15] Chaki M.C., 1988. On conformally flat pseudo-Ricci symmetric manifolds, Period. Math. Hungar. 19, 209–215.

[16] Chaki M.C., De U.C., 1989. On pseudo symmetric spaces, Acta Math. Hung. 54, 185–190.

[17] Cecil T.E., Ryan P.J., 1988. Tight and Taut Immersions of Manifolds, Pitman, Boston.

[18] Chen B.Y., 1996. A Riemannian invariant for submanifolds in space forms and its applications, [in:] Geometry and Topology of Submanifolds, VI, World Sci., River Edge, NJ, 58–81.

[19] Chern S.S., do Carmo M., Kobayashi S., 1970. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, [in:] Functional Analysis and Related Fields, Springer, 59–75.

[20] Dąbrowska M., Defever F., Deszcz R., Kowalczyk D., 2000. Semisymmetry and Ricci-semisymmetry for hypersurfaces of semi-Euclidean spaces, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 67 (81), 103–111.

[21] Defever F., 1999. Theory of semisymmetric, conformally flat, and biharmonic submanifolds, Balkan J. Geom. and its Applications 4, 19–33.

[22] Defever F., 2000. Ricci-semisymmetric hypersurfaces, Balkan J. Geom. and its Applications 5, 81–91.

[23] Defever F., Deszcz R., 1990. On semi-Riemannian manifolds satisfying the condition $R{\cdot}R = Q(S, R)$, [in:] Geometry and Topology of Submanifolds, III, World Sci., River Edge, NJ, 108–130.

[24] Defever F., Deszcz R., Dhooghe P., Verstraelen L., Yaprak Ş., 1995. On Ricci-pseudosymmetric hypersurfaces in spaces of constant curvature, Results in Math. 27, 227–236.

[25] Defever F., Deszcz R., Głogowska M., Goldberg V.V., Verstraelen L., 2002. A class of four-dimensional warped products, Demonstr. Math. 35, 853–864.

[26] Defever F., Deszcz R., Hotloś M., Kucharski M., Ṣentürk Z., 1999. On certain classes of pseudosymmetry type manifolds, [in:] Geometry and Topology of Submanifolds, IX, World Sci., River Edge, NJ, 93–102.

[27] Defever F., Deszcz R., Kowalczyk D., Verstraelen L., 2000. Semisymmetry and Ricci-semisymmetry for hypersurfaces of semi-Riemannian space form, Arab J. Math. Sc. 6, 1–16.

[28] Defever F., Deszcz R., Prvanović M., 1994. On warped product manifolds satisfying some curvature condition of pseudosymmetric type, Bull. Greek Math. Soc. 36, 43–62.

[29] Defever F., Deszcz R., Ṣentürk Z., Verstraelen L., Yaprak Ṣ., 1999. P.J. Ryan's problem in semi-Riemannian space forms, Glasgow Math. J. 41, 271–281.

[30] Defever F., Deszcz R., Verstraelen L., Vrancken L., 1994. On pseudosymmetric space-times, J. Math. Phys. 35, 5908–5921.

[31] Defever F., Deszcz R., Verstraelen L., Yaprak Ṣ., 1993. Pseudosymmetry type curvature properties of hypersurfaces, [in:] Geometry and Topology of Submanifolds, V, World Sci., River Edge, NJ, 109–131.

[32] Defever F., Deszcz R., Verstraelen L., Yaprak Ṣ., 2001. On the equivalence of semisymmetry and Ricci-semisymmetry on hypersurfaces, Indian J. Math. 43, 1–12.

[33] Deprez J., Deszcz R., Verstraelen L., 1988. Pseudosymmetry curvature conditions on hypersurfaces of Euclidean spaces and Kählerian manifolds, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse 9, 183–192.

[34] Deprez J., Deszcz R., Verstraelen L., 1989. Examples of pseudosymmetric conformally flat warped products, Chinese J. Math. 17, 51–65.

[35] Deprez J., Roter W., Verstraelen L., 1989. Conditions on the projective curvature tensor of conformally flat Riemannian manifolds, Kyungpook Math. J. 29, 153–165.

[36] Derdziński A., Roter W., 1978. Some theorems on conformally symmetric manifolds, Tensor (N.S.) 32, 11–23.

[37] Derdziński A., Roter W., 1980. Some properties of conformally symmetric manifolds which are not Ricci-recurrent, Tensor (N.S.) 34, 11–20.

[38] Derdziński A., Roter W., 2007. Global properties of indefinite metrics with parallel Weyl tensor, [in:] Pure and Applied Differential Geometry PADGE 2007, Berichte aus der Mathematik, Shaker Verlag, Aachen, 63–72.

[39] Derdziński A., Roter W., 2007. Projectively flat surfaces, null parallel distributions, and conformally symmetric manifolds, Tôhoku Math. J. 57, 565–602.

[40] Derdziński A., Roter W., 2008. On compact manifolds admitting indefinite metrics with parallel Weyl tensor, J. Geom. and Physics 58, 1137–1147.
[41] Derdziński A., Roter W., 2009. The local structure of conformally symmetric manifolds, Bull. Belg. Math. Soc. – Simon Stevin 16, 117–128.
[42] Derdziński A., Roter W., 2010. Compact pseudo-Riemannian manifolds with parallel Weyl tensor, Ann. Global Anal Geom. 37, 73–90.
[43] Deszcz R., 1991. On four-dimensional warped product manifolds satisfying certain pseudosymmetry curvature conditions, Colloq. Math. 62, 103–120.
[44] Deszcz R., 1992. On pseudosymmetric spaces, Bull. Soc. Math. Belg. 44, Sér. A, Fasc. 1, 1–34.
[45] Deszcz R., 1997. On pseudosymmetric hypersurfaces in spaces of constant curvature, Tensor (N.S.) 58, 253–269.
[46] Deszcz R., 2003. On some Akivis-Goldberg type metrics, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 74 (88), 71–83.
[47] Deszcz R., 1998. On the equivalence of Ricci-semisymmetry and semisymmetry, Dept. Math., Agricultural Univ. Wrocław, Report No. 64.
[48] Deszcz R., 2002. Hypersurfaces in semi-Riemannian space forms satisfying some curvature conditions, Beijing, China, 20-28 August.
[49] Deszcz R., 2003. On pseudo-Riemannian manifolds of Roter's type, a talk, Seminar on Diff. Geom., Inst. of Math., Wroclaw Univ. of Technology, 24th April.
[50] Deszcz R., Głogowska M., 2002. Some examples of nonsemisymmetric Ricci-semisymmetric hypersurfaces, Colloq. Math. 94, 87–101.
[51] Deszcz R., Głogowska M., 2002. Some nonsemisymmetric Ricci-semisymmetric warped product hypersurfaces, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 72 (86), 81–94.
[52] Deszcz R., Głogowska M., Hashiguchi H., Hotloś M., Yawata M., On semi-Riemannian manifolds satisfying some conformally invariant condition, w przygotowaniu.
[53] Deszcz R., Głogowska M., Hotloś M., 2011. Some identities on hypersurfaces in conformally flat spaces, [in:] Proceedings of the International Conference XVI Geometrical Seminar, Vrnjačka banja, September, 20–25, 2010, Faculty of Science and Mathematics, University of Niš, Serbia, 34–39.
[54] Deszcz R., Głogowska M., Hotloś M., Kowalczyk D., Verstraelen L., 2000. A review on pseudosymmetry type manifolds, Dept. Math. Agricultural Univ. Wrocław, Ser. A, Theory and Methods, Report No. 84.
[55] Deszcz R., Głogowska M., Hotloś M., Sawicz K., 2011. A survey on Generalized Einstein Metric Conditions, [in:] Advances in Lorentzian Geometry: Proceedings of the Lorentzian Geometry Conference in Berlin, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics 49, S.-T. Yau (series ed.), M. Plaue, A.D. Rendall and M. Scherfner (eds.), 27–46.
[56] Deszcz R., Głogowska M., Hotloś M., Şentürk Z., 1998. On certain quasi-Einstein semisymmetric hypersurfaces, Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 41, 151–164.
[57] Deszcz R., Głogowska M., Hotloś M., Verstraelen L., 2003. On some generalized Einstein metric conditions on hypersurfaces in semi-Riemannian space forms, Colloq. Math. 96, 149–166.
[58] Deszcz R., Głogowska M., Plaue M., Sawicz K., Scherfner M., 2011. On hypersurfaces in space forms satisfying particular curvature conditions of Tachibana type, Kragujevac J. Math. 35, 223–247.

[59] Deszcz R., Głogowska M., Sawicz K., Yawata M., 2005. Walker type identities on hypersurfaces in space forms, poster, Differential Geometry, Banach Center at the Mathematical Conference Center Będlewo, Poland, 26-30 September.

[60] Deszcz R., Grycak W., 1987. On some class of warped product manifolds, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 15, 311–322.

[61] Deszcz R., Grycak W., 1989. On manifolds satisfying some curvature conditions, Colloq. Math. 57, 89–92.

[62] Deszcz R., W. Grycak, 1990. On certain curvature conditions on Riemannian manifolds, Colloq. Math. 58, 259–268.

[63] Deszcz R., Haesen S., Verstraelen L., 2004. Classification of space-times satisfying some pseudo-symmetry type conditions, Soochow J. Math. 23, 339–349. Special issue in honor of Prof. Bang-Yen Chen.

[64] Deszcz R., Haesen S., Verstraelen L., 2008. On natural symmetries, [in:] Topics in Differential Geometry, Romanian Academy of Sciences, Bucharest, 249–308.

[65] Deszcz R., Hashiguchi H., Yawata M., 2008. On Walker type identities for semi-Riemannian manifolds, a report.

[66] Deszcz R., Hotloś M., 1998. On certain subclass of pseudosymmetric manifolds, Publ. Math. Debrecen 53, 29–48.

[67] Deszcz R., Hotloś M., 2003. On some pseudosymmetry type curvature condition, Tsukuba J. Math. 27, 13–30.

[68] Deszcz R., Hotloś M., 2003. On hypersurfaces with type number two in space forms, Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 46, 19–34.

[69] Deszcz R., Hotloś M., Şentürk Z., 1999. On the equivalence of the Ricci-pseudosymmetry and pseudosymmetry, Colloq. Math. 79, 211–227.

[70] Deszcz R., Hotloś M., Şentürk Z., 2001. On some family of generalized Einstein metric conditions, Demonstr. Math. 34, 943–954.

[71] Deszcz R., Hotloś M., Şentürk Z., 2001. On a certain application of Patterson's curvature identity, Publ. Math. Debrecen 58, 93–107.

[72] Deszcz R., Hotloś M., Şentürk Z., 2001. On curvature properties of quasi-Einstein hypersurfaces in semi-Euclidean spaces, Soochow J. Math. 27, 375–389.

[73] Deszcz R., Hotloś M., Şentürk Z., 2004. On Ricci-pseudosymmetric hypersurfaces in space forms, Demonstr. Math. 37, 203–214.

[74] Deszcz R., Hotloś M., Şentürk Z., 2002. On curvature properties of certain quasi-Einstein hypersurfaces, Dept. Math., Agricultural Univ. Wrocław, Report No. 104.

[75] Deszcz R., Kowalczyk D., 2003. On some class of pseudosymmetric warped products, Colloq. Math. 97, 7–22.

[76] Deszcz R., Kucharski M., 1999. On curvature properties of certain generalized Robertson-Walker spacetimes, Tsukuba J. Math. 23, 113–130.

[77] Deszcz R., Plaue M., Scherfner M., On a particular class of generalized static spacetimes, w przygotowaniu.

[78] Deszcz R., Sawicz K., 2005. On some class of hypersurfaces in Euclidean spaces, Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 48, 87–98.

[79] Deszcz R., Scherfner M., 2007. On a particular class of warped products with fibres locally isometric to generalized Cartan hypersurfaces, Colloq. Math. 109, 13–29.

[80] Deszcz R., Verstraelen L., 1993. Hypersurfaces of semi-Riemannian conformally flat manifolds, [in:] Geometry and Topology of Submanifolds, V, World Sci., River Edge, NJ, 109–131.

[81] Deszcz R., Verstraelen L., Vrancken L., 1991. On the symmetry of warped product spacetimes, General Relativity and Gravitation 23, 671–681.
[82] Deszcz R., Verstraelen L., Yaprak Ş., 1994. Warped products realizing a certain condition of pseudosymmetry type imposed on the Weyl curvature tensor, Chinese J. Math. 22, 139–157.
[83] Deszcz R., Verstraelen L., Yaprak Ş., 1994. Pseudosymmetric hypersurfaces in 4-dimensional spaces of constant curvature, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 22, 167–179.
[84] Deszcz R., Verstraelen L., Yaprak Ş., 1998. On 2-quasi-umbilical hypersurfaces in conformally flat spaces, Acta Math. Hungar. 78, 45–57.
[85] Deszcz R., Verstraelen L., Yaprak Ş., 1999. Hypersurfaces with pseudosymmetric Weyl tensor in conformally flat manifolds, [in:] Geometry and Topology of Submanifolds, IX, World Sci., River Edge, NJ, 108–117.
[86] Deszcz R., Yaprak Ş., 1994. Curvature properties of Cartan hypersurfaces, Colloq. Math. 67, 91–98.
[87] Deszcz R., Yawata M., 2007. On Walker type identities, [in:] Pure and Applied Differential Geometry PADGE 2007, Berichte aus der Mathematik, Shaker Verlag, Aachen, 73–82.
[88] Dillen F., Verstraelen L., 2000. Handbook of Differential Geometry, Vol. 1, North Holland, Amsterdam.
[89] Eisenhart L.P., 1966. Riemannian Geometry, Princeton.
[90] Gilkey P.G., 2001. Geometric properties of natural operators defined by the Riemann curvature tensor, World Sci., River Edge, NJ.
[91] Głogowska M., 2001. Curvature properties of some four-dimensional manifolds, Demonstr. Math. 34, 901–918.
[92] Głogowska M., 2002. Semi-Riemannian manifolds whose Weyl tensor is a Kulkarni-Nomizu square, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 72 (86), 95–106.
[93] Głogowska M., 2004. On a curvature characterization of Ricci-pseudosymmetric hypersurfaces, Acta Math. Scientia 24 B, 361–375.
[94] Głogowska M., 2004. Hiperpowierzchnie Ricci-pseudosymetryczne w przestrzeniach o stałej krzywiźnie, autoreferat pracy doktorskiej, Instytut Matematyki, Politechnika Wrocławska, Wrocław.
[95] Głogowska M., 2005. Curvature conditions on hypersurfaces with two distinct principal curvatures, [in:] Banach Center Publ. 69, Inst. Math., Polish Acad. Sci. 133–143.
[96] Głogowska M., 2007. On Roter type manifolds, in: Pure and Applied Differential Geometry PADGE 2007, Berichte aus der Mathematik, Shaker Verlag, Aachen, 114–122.
[97] Głogowska M., 2008. On quasi-Einstein Cartan type hypersurfaces, J. Geom. Physics 58, 599–614.
[98] Grycak W., 1976. On semi-decomposable 2-recurrent Riemannian spaces, Sci. Papers Inst. Math. Wroclaw Techn. Univ. 16, 15–25.
[99] Haesen S., Verstraelen L., 2004. Classification of the pseudosymmetric space-times, J. Math. Phys. 45, 2343–2346.
[100] Haesen S., Verstraelen L., 2005. Curvature and symmetries of parallel transport, Extrinsic symmetries of parallel transport, Chapters 8–9, 197–255, [in:] Differential Geometry and Topology, Discrete and Computational Geometry, eds. M. Boucetta,

J.M. Morvan, NATO Science Series III: Computer and Systems Sciences, Vol. 197, IOS Press, Amsterdam.

[101] Haesen S., Verstraelen L., 2007. Properties of a scalar curvature invariant depending on two planes, Manuscripta Math. 122, 59–72.

[102] Haesen S., Verstraelen L., 2007. On the sectional curvature of Deszcz, Anal. Stiint. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi (S.N.) Matematica, Supliment, 53, 181–190. Special issue in honor of Academician Radu Miron.

[103] Haesen S., Verstraelen L., 2007. Pseudo-symmetry collineations, J. Math. Phys. 48 102501, DOI: 10.1063/1.2789554.

[104] Haesen S., Verstraelen L., 2009. Natural intrinsic geometrical symmetries, SIGMA – Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 5, doi:10.3842/SIGMA.2009.086.

[105] Hashimoto N., Sekizawa M., 2000. Three-dimensional conformally flat pseudo-symmetric spaces of constant type, Arch. Math. (Brno) 36, 279–286.

[106] Ishii Y., 1957. On conharmonic transformations, Tensor (N.S.) 7, 73–80.

[107] Jahanara B., Haesen S., Petrović-Torgašev M., Verstraelen L., 2009. On the Weyl curvature of Deszcz, Publ. Math. Debrecen 74, 417–431.

[108] Jahanara B., Haesen S., Şentürk Z., Verstraelen L., 2007. On the parallel transport of the Ricci curvatures, J. Geom. and Physics 57, 1771–1777.

[109] Kobayashi S., Nomizu K., 1963. Foundations in Differential Geometry, I, Wiley--Interscience.

[110] Kowalczyk D., 2001. On some class of semisymmetric manifolds, Soochow J. Math. 27, 445–461.

[111] Kowalczyk D., 2006. On the Reissner-Nordström-de Sitter type spacetimes, Tsukuba J. Math. 30, 363–381.

[112] Kowalski O., Sekizawa M., 1997. Riemannian 3-manifolds with c-conullity two, Bolletino U.M.I., (7) 11-B, Suppl. fasc. 2, 161–184.

[113] Kowalski O., Sekizawa M., 1997. Pseudo-symmetric spaces of constant type in dimension three – elliptic spaces, Rend. Mat. Appl., VII Ser. 17, 477–512.

[114] O. Kowalski, Sekizawa M., 1998. Pseudo-symmetric spaces of constant type in dimension three – non-elliptic spaces, Bull. Tokyo Gakugei Univ. Sect. IV, Math. Nat. Sci. 50, 1–28.

[115] Kowalski O., Sekizawa M., 1998. Pseudo-symmetric spaces of constant type in dimension three, Personal Note, Charles University – Tokyo Gakugei University, Prague – Tokyo, 1–56.

[116] Kowalski O., Sekizawa M., 2006. Hypersurfaces of type number two in the hyperbolic four-space and their etensions to Riemannian Geometry, Non-Euclidean Geometries: János Bolyai Memorial Volume, Springer, 1–20.

[117] Lumiste Ü., 2002. Semiparallelity, semisymmetricity, and Ric-semisymmetricity for normally flat submanifolds in Euclidean space, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 51, 67–85.

[118] Magid M.A., 1984. Indefinite Einstein hypersurfaces with imaginary principal curvatures, Houston J. Math. 10, 57–61.

[119] Mirzoyan V.A., 2000. Classification of Ric-semi-parallel hypersurfaces in Euclidean spaces, Matem. Sbornik 191, 65–80 (in Russian); English trans.: Sbornik Mathematics 191, 1323–1338.

[120] Murathan C., Arslan K., Deszcz R., Ezentaș R. and Özgür C., 2001. On some class of hypersurfaces of semi-Euclidean spaces, Publ. Math. Debrecen 58, 587–604.
[121] Nomizu K., 1972. On the decomposition of generalized curvature tensor fields, Differential geometry in honor of K. Yano, Kinokuniya, Tokyo, 335–345.
[122] Özgür C., 2009. Hypersurfaces satisfying some curvature conditions in the semi -Euclidean space, Chaos, Solitons and Fractals 39, 2457–2464.
[123] Petrović-Torgašev M., 2007. Deszcz symmetries of ideal submanifolds, Bull. Transilvania Univ. Brasov, ser. B, Suplement, 14 (49), 249–262.
[124] Petrović-Torgašev M., Verstraelen L., 2008. On Deszcz symmetries on Wintgen ideal submanifolds, Archivum Math. (Brno) 44, 57–62.
[125] Roter W., 1964. A note on second order recurrent spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci., Math., Astr. et Phys. 12, 621–626.
[126] Roter W., 1968. A note on infinitesimal projective transformations in recurrent spaces of second order, Zesz. Nauk. Politechn. Wroc. ser. Mathematics, 1 (197), 87–94.
[127] Roter W., 1977. On generalized curvature tensors on some Riemannian manifolds, Colloq. Math. 37, 233–240.
[128] Ruse H.S., Walker A.G., Willmore T.J., 1961. Harmonic Spaces, Ed. Cremonese, Roma.
[129] Ryan P.J., 1972. A class of complex hypersurfaces, Colloq. Math. 26, 175–182.
[130] Sawicz K., 2004. Hypersurfaces in spaces of constant curvature satisfying some Ricci-type equations, Colloq. Math. 101, 183–201.
[131] Sawicz K., 2005. On some class of hypersurfaces with three distinct principal curvatures, Banach Center Publications 69, Inst. Math. Polish Acad. Sci. 145–156.
[132] Sawicz K., 2005. Examples of hypersurfaces in Euclidean spaces with three distinct principal curvatures, Dept. Math. Agricultural Univ. Wrocław, Ser. A, Theory and Methods, Report No. 114.
[133] Sawicz K., 2006. On curvature characterization of some hypersurfaces in spaces of constant curvature, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 79 (93), 95–107.
[134] Sawicz K., 2007. Curvature identities on hypersurfaces in spaces of constant curvature, [in:] Pure and Applied Differential Geometry PADGE 2007, Berichte aus der Mathematik, Shaker Verlag, Aachen, 252–260.
[135] Șentürk Z., 2005. On warped product manifolds, [in:] Differential Geometry and its Applications, Proc. Univ. Prague, August 30 – September 3, 2004, Charles Univ. Prague (Czech Republic), 109–117.
[136] Șentürk Z., 2007. Characterization of the Deszcz symmetric ideal Wintgen submanifolds, Anal. Stiint. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi (S.N.) Matematica, Supliment, 53, 309–316. Special issue in honor of Academician Radu Miron.
[137] Șentürk Z., 2007. A geometrical interpretation of Deszcz symmetries, Bull. Transilvania Univ. Brasov, ser. B, Suplement, 14 (49), 287–292.
[138] Szabó Z.I., 1982. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R = 0$. I. The local version, J. Differential Geom. 17, 531–582.
[139] Szabó Z.I., 1984. Classification and construction of complete hypersurfaces satisfying $R(X,Y)\cdot R = 0$, Acta Sci. Math. 47, 321–348.
[140] Szabó Z.I., 1985. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R = 0$. II. Global version, Geom. Dedicata 19, 65–108.

[141] Tachibana S., 1974. A theorem on Riemannian manifolds of positive curvature operator, Proc. Japan Acad. Ser. Math. Sci. 50, 301–302.

[142] F. Tricerri and L. Vanhecke, 1990. Cartan hypersurfaces and reflections, Nihonkai Math. J. 1, 203–208.

[143] Verstraelen L., 1994. Comments on pseudo-symmetry in the sense of Ryszard Deszcz, [in:] Geometry and Topology of Submanifolds, VI, World Sci. River Edge, NJ, 199–209.

[144] Verstraelen L., 2007. Philosophiae Naturalis Principia Geometrica I, Radu Rosca in memoriam, Bull. Transilvania Univ. Brasov, ser. B, Suplement, 14 (49), 335–348.

[145] Verstraelen L., 2008. A concise mini history of geometry, preprint.

[146] Verstraelen L., 2008. On natural geometric symmetries, preprint.

[147] Wolf J.A., 1972. Spaces of Constant Curvature, Univ. California, Berkeley, California.

[148] Yano K., Ishihara S., 1971. Submanifolds with parallel mean curvature vector, J. Differential Geom. 6, 95–118.

HIPERPOWIERZCHNIE RICCI-PSEUDOSYMETRYCZNE W PRZESTRZENIACH O STAŁEJ KRZYWIŹNIE

Streszczenie

Geometria podrozmaitości zanurzonych izometrycznie w rozmaitościach Riemanna stanowi jeden z podstawowych działów geometrii różniczkowej. W ramach tego działu prowadzone są m.in. badania nad podrozmaitościami w przestrzeniach o stałej krzywiźnie, a w szczególności nad hiperpowierzchniami, tj. podrozmaitościami kowymiaru jeden.

W niniejszej monografii zostały przedstawione wyniki badań nad hiperpowierzchniami w przestrzeniach o stałej krzywiźnie, których wielomian minimalny drugiego tensora podstawowego jest co najwyżej stopnia trzeciego. Specjalna postać wielomianu minimalnego drugiego tensora podstawowego hiperpowierzchni, w wielu przypadkach, pozwala na wyznaczenie warunków krzywiznowych typu pseudosymetrycznego spełnionych na tej hiperpowierzchni. Z drugiej strony, jeśli hiperpowierzchnia spełnia warunek krzywiznowy typu pseudosymetrcznego, to w wielu przypadkach wyznaczono jej wielomian minimalny drugiego tensora podstawowego, np. w przypadku hiperpowierzchni pseudosymetrycznych lub Ricci-pseudosymetrycznych. Wiadomo, że każda rozmaitość pseudosymetryczna jest rozmaitością Ricci-pseudosymetryczną. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Na przykład hiperpowierzchnie Cartana wymiaru 6, 12 lub 24 są różnymi od pseudosymetrycznych rozmaitościami Ricci-pseudosymetrycznymi.

W rozdziale pierwszym (wstępnym) omówiono szczegółowo problematykę monografii. W rozdziale drugim przedstawiono podstawowe definicje i fakty dotyczące rozmaitości semiriemannowskich. Wyniki badań nad rozmaitościami typu pseudosymetrycznego, a w szczególności nad rozmaitościami typu Rotera oraz typu Akivisa-Goldberga, przedstawione są w rozdziałach trzecim, piątym i szóstym. Natomiast pozostałe rozdziały dotyczą hiperpowierzchni w semiriemannowskich przestrzeniach o stałej krzywiźnie. Rozdział czwarty dotyczy hiperpowierzchni pseudosymetrycznych, siódmy – hiperpowierzchni typu Rotera, ósmy – hiperpowierzchni Ricci-semisymetrycznych, a dziewiąty – hiperpowierzchni Ricci-pseudosymetrycznych. Natomiast w ostatnim rozdziale przedstawiono najnowsze rezultaty badań nad hiperpowierzchniami w semiriemannowskich przestrzeniach o stałej krzywiźnie, np. nad hiperpowierzchniami typu Cartana.

Słowa kluczowe: tensor Tachibany, rozmaitość półproduktowa, rozmaitość typu Akivisa-Goldberga, rozmaitość typu Rotera, rozmaitość pseudosymetrycza, torus Clifforda, hiperpowierzchnia Cartana, hiperpowierzchnia Ricci-pseudosymetryczna

RICCI-PSEUDOSYMMETRIC-HYPERSURFACES IN SPACES OF CONSTANT CURVATURE

Summary

Geometry of submanifolds immersed isometrically in Riemannian manifolds form a fundamental part of differential geometry. Among others things in that part submanifolds in spaces of constant curvature and in particular hypersurfaces, i.e. submanifolds of codimension one, are investigated.

In this monograph results on hypersurfaces in spaces of constant curvature, for which their minimal polynomial of the second fundamental tensor is at most of third degree are presented. The special form of the minimal polynomial of the second fundamental tensor of a hypersurface, in several cases, allow to determine curvature conditions of pseudosymmetry type realized on such hypersurface. On the other hand, if a curvature condition of pseudosymmetry type is satisfied on a hypersurface then also in several cases the minimal polynomial of its second fundamental tensor was determined, e.g. in the case of pseudosymmetric or Ricci-pseudosymmetric hypersurfaces. It is known that every pseudosymmetric manifold is Ricci-pseudosymmetric. The converse statement is not true. For instance, the Cartan hypersurfaces of dimension 6, 12 or 24 are non-pseudosymmetric Ricci-pseudosymmetric manifolds.

In chapter 1 the subject of the monograph in details is described. Next chapter contains basical facts on semi-Riemannian manifolds which are used in the monograph. Results on manifolds of pseudo-symmetry type, and in particular on Roter type and Akivis-Goldberg type manifolds, are presented in chapters 3, 5 and 6. In the remaining chapters results on hypersurfaces in semi-Riemannian spaces of constant curvature are given. Namely, chapter 4 deals pseudosymmetric hypersurfaces, chapter 7 – Roter type hypersurfaces, chapter 8 – Ricci-semisymmetric hypersurfaces, and chapter 9 – Ricci-pseudosymmetric hypersurfaces. Finally, in the last chapter recent results on hypersurfaces in semi-Riemannian spaces of constant curvature are given, e.g. on the Cartan type hypersurfaces.

Key words: Tachibana tensor, warped product manifold, Akivis-Goldberg type manifold, Roter type manifold, pseudosymmetric manifold, Clifford torus, Cartan hypersurface, Ricci-pseudosymetric hypersurface