

Sammlung Göschen

Algebraische Kurven

Neue Bearbeitung

Von

Prof. Dr. H. Wieleitner

I

Gestaltliche Verhältnisse

Mit 97 Figuren



Sammlung Göschens

Unser heutiges Wissen

Biblioteka
Politechniki Wrocławskiej

D. 1624.-

Archiwum

f.
—
ng
zig

Ein-
und
der
nen,
Be-
be-
zung
dar-
rem
venn

es vorender vorliegt, eine einheitliche, systematische
Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte.

Ein ausführliches Verzeichnis der bisher erschienenen
Nummern befindet sich am Schlusß dieses Bändchens

Mathematische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen

Jedes Bändchen in Leinwand gebunden 90 Pfennig

- Geschichte der Mathematik** von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.
- Arithmetik u. Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert. Nr. 47.
- Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra** von Professor Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.
- Ebene Geometrie** m. 110 zweifarbig. Fig. v. Prof. G. Mahler. Nr. 41.
- Ebene und sphärische Trigonometrie** mit 70 Figuren von Prof. Dr. Gerhard Hessenberg. Nr. 99.
- Stereometrie** mit 66 Figuren von Dr. Glaser. Nr. 97.
- Niedere Analysis** m. 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.
- Höhere Analysis I: Differentialrechnung** mit 68 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 87.
- Höhere Analysis II: Integralrechnung** mit 89 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 88.
- Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung** m. 46 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 146.
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung** m. 50 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 147.
- Analytische Geometrie der Ebene** mit 57 Figuren von Professor Dr. M. Simon. Nr. 65.
- Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene** mit 32 Figuren von Professor O. Th. Bürklen. Nr. 256.
- Analytische Geometrie des Raumes** mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon. Nr. 89.
- Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes** mit 8 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 309.
- Projektive Geometrie** in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Professor Dr. K. Doeblemann. Nr. 72.
- Darstellende Geometrie I** mit 110 Figuren von Professor Dr. Rob. Haßner. Nr. 142.
- **II.** Mit 40 Figuren. Nr. 143.
- Wahrscheinlichkeitsrechnung** von Dr. Franz Hack, Professor am Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart. Mit 15 Figuren im Text. Nr. 508.
- Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt** von Prof. Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Dr. Robert Haßner, Prof. a. d. Univ. Jena. Nr. 81.
- Fünfstellige Logarithmen** von Prof. Aug. Adler, Direktor der k. k' Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.
- Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik** mit 18 Fig. von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 51.
- Wenden!

- Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate** v. Prof. Wilh. Weitbrecht. 2 Bändchen. Nr. 302 u. 641.
- Vektoranalysis** mit 16 Figuren von Professor Dr. Siegfr. Valentiner. Nr. 354.
- Determinanten** von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.
- Algebraische Kurven** von Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I. Kurvendiskussion. Mit 57 Figuren im Text. Nr. 435.
- — II: Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung. Mit 52 Fig. im Text. Nr. 436.
- Koordinatensysteme** von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichtenfelde. Nr. 507.
- Einführung in die geometrische Optik** von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.
- Einleitung in die Funktionentheorie** (Theorie der komplexen Zahlenreihen) von Oberlehrer Max Rose in Berlin-Wilmersdorf. Mit 10 Figuren. Nr. 581.
- Funktionentheorie** von Dr. Konrad Knopp, Privatdozent an der Universität Berlin. I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 9 Figuren. Nr. 668.
- Versicherungsmathematik** v. Prof. Dr. Alfred Loewy. Nr. 180.
- Geometrisches Zeichnen** mit 290 Figuren und 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Nr. 58.
- Vermessungskunde** von Oberlehrer Dipl.-Ing. P. Werkmeister. 2 Bändchen mit 255 Abbildungen. Nr. 468, 469.
- Geodäsie** von Prof. Dr. C. Reinhertz, neubearbeitet von Dr. G. Förster in Potsdam. Mit 68 Abbildungen. Nr. 102.
- Astronomie.** Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neubearbeitet von Prof. Dr. Herm. Kobold. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.
- — II: Kometen, Meteore und das Sternensystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.
- Astrophysik** mit 15 Abbildungen von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus, neubearbeitet von Dr. H. Ludendorff. Nr. 91.
- Astronomische Geographie** mit 52 Figuren von Professor Dr. Siegm. Günther. Nr. 92.
- Nautik.** Kurzer Abriss des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandt. Teils d. Schiffahrtskunde m. 56 Abb. v. Dr. Franz Schulze. Nr. 84.
- Luft- und Meeresströmungen** von Dr. Franz Schulze. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

D. 1522

Sammlung Göschen

Algebraische Kurven

Neue Bearbeitung

von

Dr. H. Wieleitner

Gymnasialprofessor in Pirmasens

Erster Teil

Gestaltliche Verhältnisse

Mit 97 Figuren



Berlin und Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H.
1914

Alle Rechte, namentlich das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.



Druck
der Spamerischen
Buchdruckerei in Leipzig.

2543 1978

Inhaltsverzeichnis.

Allgemeine Gesichtspunkte.

	Seite
1. Historische Einleitung	5
2. Die kubische und die semikubische Parabel	6
3. Zentrische und axiale Symmetrie	7
4. Ordnung einer Kurve. Schnittpunkte mit Geraden	8
5. Wendetangente und Spitze	12
6. Variation von λ in der Gleichung $y^2 = \lambda x^3$	13
7. Hinzufügung einer Konstanten zu einer Gleichung (Kurve gleicher Potenz)	14
8. Variation von λ und ε in der Gleichung $y^2 = \lambda x^3 + \varepsilon^2$	15
9. Variation von ε und $\dot{\varepsilon}$ in der Gleichung $y^2 = \lambda x^3$ - $\lambda \varepsilon^2 x + \varepsilon^2$	16
10. Die Büschelform der Gleichung. Signierung	17
11. Variation von λ in der Gleichung $y^2 = \lambda x^3 - \lambda \varepsilon^2 x + \varepsilon^2$	20
12. Die Gleichungsform $\Phi = \lambda \Psi^2$	21
13. Die Gleichungsformen $\Phi = \lambda \Psi^3$ und $\Phi^2 = \lambda \dot{\Psi}^3$	22
14. Kubik mit Doppelpunkt	24
15. Kubik mit isoliertem Punkt. Das Tangentenpaar des Doppelpunktes	25
16. Der Anfangspunkt als vielfacher Punkt	27
17. Bedingung für das Vorhandensein eines Doppelpunktes. Allgemeine Gleichung des Tangentenpaars	28
18. Das „Auflösen“ von Doppelpunkten	31
19. Ableitung der Grundformen der Kubiken aus Kegel- schnitt und Gerade	33
20. Ableitung der Grundformen der Quartiken aus zwei Kegelschnitten	34

Die Beziehungen zum Unendlichfernen.

21. Einführung eines Koordinatendreiecks	35
22. Die rechtwinkligen Koordinaten als Grenzfall der Dreieckskoordinaten	38
23. Homogenisierung kartesischer Gleichungen	39
24. Die allgemeine Kubik mit Spitze	42
25. Kubiken ohne Asymptote	44
26. Allgemeine Behandlung der Asymptoten	46
27. Bestimmung einzelner Asymptoten	49
28. Berührung einer Kurve durch die unendlich ferne Gerade	50
29. Vielfacher Punkt im Unendlichen	54
30. Zirkuläre Kubiken	57
31. Bizirkuläre Quartiken	60

III. Die Kurven als Tangentengebilde.

	Seite
32. Einführung von Linienkoordinaten	64
33. Gleichungen von Punkt und Kreis	64
34. Übergang von Linien- zu Punktkoordinaten. Klasse einer Kurve	66
35. Übergang von Punkt- zu Linienkoordinaten	67
36. Homogene Linienkoordinaten	68
37. Übergang zu Plückerschen Linienkoordinaten	70
38. Das Dualitätsprinzip	71
39. Analytische Darstellung der dualistischen Umformung	72
40. Die Gleichungen der Tangente bzw. des Berührungs- punktes	74
41. Zweite Methode des Überganges von Punkt- zu Linienkoordinaten und umgekehrt	76
42. Dualität der Singularitäten	78
43. Typische Gleichungsformen in Linienkoordinaten	80
44. Formen der Kurven 3. Klasse	83
45. Kurven gleicher Potenz in Linienkoordinaten	87
46. Formen der Kurven 4. Klasse	88
47. Kurven 4. Klasse mit Wendetangenten	93
48. Kurvendiskussion in Linienkoordinaten	96

Höhere Singularitäten. Näherungskurven.

49. Superlineare Zweige	98
50. Leichtere Bestimmung von Ordnung und Klasse einer Superlinearität	103
51. Näherungskurven für singuläre Punkte. Die Spitzpunktsparabel	104
52. Die Flachpunktsparabel	106
53. Näherungskurven des Berührungsnotens	108
54. Die höheren Parabeln und Hyperbeln	110
55. Das analytische Dreieck	114
56. Beispiele zum analytischen Dreieck	118
57. Näherungskurven für unendlich ferne Punkte	122
58. Aufzählung der bei Quartiken möglichen Singularitäten	
1. Die Liniensingularitäten	127
2. Doppelpunkt und Spitze	128
3. Der Berührungsnoten	130
4. Die Schnabelspitze	132
5. Der Oskulationsnoten	135
6. Die Oskulationsnotenspitze	139
7. Die Arten des dreifachen Punktes	141
59. Zwei Beispiele von Quintiken	143
Literatur	144
Register	145

La Théorie des Lignes courbes . . .
commence où finissent les Elémens,
au delà desquels on ne va point
sans elle.

G. Cramer.

I. Allgemeine Gesichtspunkte.

1. Historische Einleitung. Schon im Altertum betrachtete man außer der Geraden, dem Kreis und den Kegelschnitten gelegentlich auch Linien höherer Art, die meist der Lösung gewisser Probleme dienten, die sich als elementar unlösbar erwiesen. Die Lehre von solchen Kurven konnte jedoch erst von dem Zeitpunkt ab systematisch behandelt werden, da Descartes in seiner *Géométrie* (1637) die Grundlagen zu ihrer Darstellung durch Koordinaten entwickelt hatte. Wiewohl Fermat fast zur selben Zeit auf den nämlichen Gedanken gekommen war, knüpfte doch die ganze spätere Entwicklung an Descartes an, in der Hauptsache wohl deswegen, weil Fermats Abhandlung erst 1679 durch den Abdruck in dessen *Varia Opera* zu öffentlicher Kenntnis kam.

Descartes wollte in der Geometrie nur die „algebraischen Kurven“ gelten lassen. Darunter sollen im folgenden immer Kurven verstanden werden, deren kartesische Gleichung durch Nullsetzen einer ganzen rationalen Funktion von x, y entsteht (vgl. S. 27). Leibniz bekämpfte diesen Standpunkt heftig. Und auf Leibniz ist es zurückzuführen, daß bald auch die sog. „transzententalen Kurven“ (Spiralen, Zykliden usw.) eingehender studiert wurden. Der heutige Standpunkt gibt im Grunde beiden Forschern

recht. Wenn man von kinematischen Gesichtspunkten ausgeht, so lassen sich algebraische und transzendentale Kurven nicht trennen, da erstere vielfach als Spezialfälle der letzteren auftreten. Wenn man aber von der kartesischen Gleichung ausgeht, bilden die algebraischen Kurven eine Familie für sich, da es eine ziemlich ausgebauten Theorie der algebraischen Funktionen gibt, während man die transzentalen Funktionen noch nicht einmal zu klassifizieren vermag. Vor allem haben wir den Vorteil, bei algebraischen Kurven in jedem Punkte die Stetigkeit der Funktion, sowie die Existenz und Stetigkeit aller Differentialquotienten voraussetzen zu können. Den Durchgang durchs Unendliche von positiven zu negativen Werten wollen wir dabei nicht als Unstetigkeit auffassen.

In dem vorliegenden Bändchen werden wir uns mit der äußeren Erscheinung der algebraischen Kurven befassen. Von dieser hatten Descartes und seine nächsten Nachfolger oft ganz unrichtige Vorstellungen, da sie nur gewohnt waren, für positive Abszissen Betrachtungen anzustellen. Erst im 18. Jahrhundert erschienen systematische Werke, die Klarheit in diese Verhältnisse brachten, vor allem Newtons geniale *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1704), Stirlings *Lineae tertii ordinis Neutonianae* (1717), dann de Guas kleines Büchlein *Usages de l'analyse de Descartes* (1740), das erste Lehrbuch der Kurvendiskussion, Eulers *Introductio in analysin infinitorum* (1748; II. Bd.) und Cramers *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (1750).

2. Die kubische und die semikubische Parabel. Zu den ersten Kurven, die mittels Koordinaten näher betrachtet wurden, gehörten die „höheren Parabeln“ mit Gleichungen der Form $y^n = a^{n-m} x^m$, unter ihnen vor allem die mit den einfachsten Gleichungen $y = \lambda x^3$ und $y^2 = \lambda x^3$,

wobei wir uns unter λ gewöhnlich nur eine Zahlengröße vorstellen. Es macht uns heute keine Schwierigkeit mehr, wenn einmal der im ersten Quadranten liegende Zweig der Kurven gezeichnet ist, uns zu überlegen, daß die „kubische Parabel“ $y = \lambda x^3$ (Fig. 1; für $\lambda = 1$) einen kongruenten*) Zweig im dritten, die „semikubische Parabel“ (auch Neilsche Parabel genannt) $y^2 = \lambda x^3$ (Fig. 2; für $\lambda = 1$) einen solchen im vierten Quadranten hat. Den negativen Werten von x entsprechen nämlich im ersten Falle negative Werte von y (λ als positiv vorausgesetzt), im zweiten Falle imaginäre. Dafür ergeben sich im Falle der semikubischen Parabel schon für positive x zwei nur durchs Zeichen verschiedene y .

3. Zentrische und

axiale Symmetrie. Die Kongruenz der Zweige bedingt bei der kubischen Parabel eine „zentrische Symmetrie“ in bezug auf den Anfangspunkt, der dann Mittelpunkt der Kurve genannt wird, bei der semikubischen Parabel eine „axiale Symmetrie“ in bezug auf die x -Achse. Wir erkennen leicht, daß die Bedingung für die letztere in dem (geraden) Exponenten 2 von y liegt. Die erstere macht sich aber erst bemerkbar, wenn wir mittels $x = \varrho \cos \theta$, $y = \varrho \sin \theta$ Polarkoordinaten ϱ , θ in die Gleichung ein-

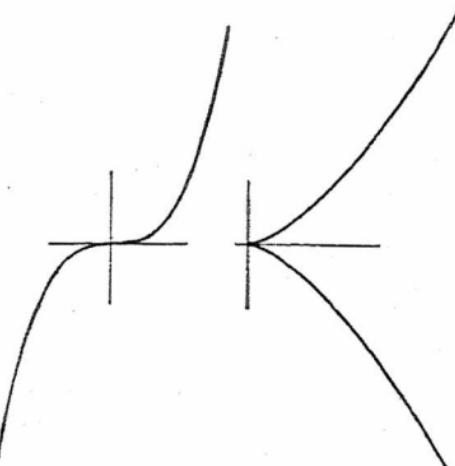


Fig. 1.

Fig. 2.

*) Das Wort „kongruent“ soll hier und in Nr. 3 lediglich die Möglichkeit der Deckung zum Ausdruck bringen.

führen. Dann sehen wir nämlich, daß sich ein Wert $\varrho = 0$ ergibt, und daß nach Division mit ϱ eine rein quadratische Gleichung für ϱ bleibt, bei beliebigem θ . Dasselbe wird in bezug auf y erreicht, wenn man die Kurve mit der Geraden $y = \mu x$ schneidet, wobei μ beliebig (ev. = 1) ist. Wir können demnach gleich allgemein sagen:

Eine Kurve ist symmetrisch gegen die x -Achse (oder y -Achse), wenn in ihrer Gleichung nur gerade Potenzen von y (oder x) auftreten.

Eine Kurve ist symmetrisch gegen den Anfangspunkt, wenn nach Ersetzung von x durch y und allfälliger Absonderung der Wurzeln $y = 0$ nur gerade Potenzen von y in der Gleichung bleiben.

Bem. Wenn in einer Gleichung x sich mit y vertauschen läßt, so besteht Symmetrie gegen die Winkelhalbierende des ersten Quadranten; wenn eine Gleichung sich nicht ändert bei gleichzeitiger Ersetzung von x durch $-y$ und von y durch $-x$, so besteht Symmetrie gegen die Winkelhalbierende des zweiten Quadranten.

Beisp. Der Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ hat alle erwähnten Arten von Symmetrie. Die Gerade $x + y = a$ liegt symmetrisch gegen die erste, die Gerade $x - y = a$ ebenso gegen die zweite Winkelhalbierende, ähnlich die beiden Kurven $x^3 + y^3 = a^3$ und $x^3 - y^3 = a^3$, die der Leser graphisch darstellen möge (sie sind kongruent). Die Hyperbel $xy = a^2$ ist symmetrisch gegen beide Winkelhalbierenden, die Hyperbel $x^3 - \lambda y^2 = a^2$ jedoch nur gegen die Achsen. Beide Hyperbeln sind auch zentrisch symmetrisch.

4. Ordnung einer Kurve. Schnittpunkte mit Geraden. Die beiden Kurven $y = \lambda x^3$ und $y^2 = \lambda x^3$ sind Kurven 3. Ordnung (Kubiken). Kubik (C_3) nennt man jede Kurve, deren Gleichung von der dritten, Quartik (C_4) jede, deren Gleichung von der vierten Dimension ist usw. Diese Dimension wird angegeben durch die Summe der Exponenten des höchsten vorkommenden Gliedes $x^m y^n$. Die „Ordnung“ kann durch eine Koordinatentransformation

$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a$, $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b$ nicht geändert werden, da durch eine solche Substitution jedes Glied $x^m y^n$ in einen Ausdruck verwandelt wird, dessen höchstes Glied wieder die Dimension $m + n$ hat. Die Ordnung ist also etwas Charakteristisches für die Kurve.

Geometrisch drückt sich die Ordnung einer algebraischen Kurve darin aus, daß eine Kurve n ter Ordnung von jeder Geraden in n Punkten geschnitten wird. Dies ist jedoch im algebraischen Sinne zu verstehen, d. h. bei der Abzählung der Schnittpunkte sind auch die imaginären und unendlich fernen mitzuzählen, die sich als gemeinsame Lösungen von $f(x, y) = 0$ und $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ergeben (vgl. II. Abschnitt). Im reellen Bild der Kurve kann es sehr wohl überhaupt keine Gerade geben, die die Kurve in n Punkten trifft. Auch können die n Punkte teilweise oder auch alle zusammenfallen. Schneidet man z. B. die kubische Parabel $y = \lambda x^3$ mit einer Geraden durch den Anfangspunkt $y = \mu x$, so fällt immer ein Schnittpunkt in den Anfangspunkt selbst, während die anderen zwei sich aus der Gleichung $\lambda x^2 = \mu$ ergeben. Für $\mu = 0$ fallen aber auch diese beiden mit dem Anfangspunkt zusammen. Die x -Achse ($y = 0$) schneidet also die Kurve im Ursprung des Koordinatensystems in drei zusammenfallenden Punkten. Für $\mu = \infty$ (d. i. beim Schnitt mit $x = 0$) fallen die beiden Schnittpunkte ins Unendliche. Man überzeugt sich davon geometrisch, indem man die Gerade um den Anfangspunkt sich drehen läßt. Bei der semikubischen Parabel $y^2 = \lambda x^3$ ergibt jede Gerade durch den Ursprung schon zwei Schnittpunkte dort und außerdem nur noch einen ($\lambda x = \mu^2$), der für $\mu = 0$ ebenfalls in den Anfangspunkt rückt und für $\mu = \infty$ ins Unendliche geht. Jede Parallele $y = k$ zur x -Achse schneidet jede der beiden Kurven in einem reellen und in zwei imaginären Punkten. Z. B. ergibt sich für die kubische Parabel

$\lambda x^3 = k$ oder, wenn man $k/\lambda = b^3$ setzt, $x^3 - b^3 = 0$, also (1) $x - b = 0$ und (2) $x^2 + xb + b^2 = 0$, woraus sich zwei konjugiert imaginäre Abszissen berechnen lassen.

Beisp. 1. Diejenigen Geraden, die einen einzelnen und zwei zusammenfallende Schnittpunkte mit einer Kubik gemein haben, ohne daß alle durch einen festen Punkt gehen, bilden das System aller Tangenten der Kubik. Nehmen wir die Gleichung einer Geraden in der Form $ux + vy + 1 = 0$, so können wir unschwer die Bedingung zwischen den Koeffizienten u, v aufstellen, die bestehen muß, damit die Gerade z. B. die kubische Parabel berührt. Denn setzen wir $y = \lambda x^3$ in die Gleichung ein, so ergibt sich für die Abszissen der Schnittpunkte

$$x^3 + \frac{u}{\lambda v} x + \frac{1}{\lambda v} = 0.$$

Damit diese Gleichung eine Doppelwurzel habe, muß ihre Diskriminante verschwinden. Diese hat für die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ die Form $27q^2 + 4p^3$, und das gibt ohne weiteres in unserem Falle

$$(1) \quad 27\lambda v + 4u^3 = 0.$$

Für die semikubische Parabel ist die Rechnung etwas weitläufiger, das Resultat aber ebenso einfach. Wir erhalten, wenn wir in $v^2y^2 = (ux + 1)^2$ den Wert $y^2 = \lambda x^3$ einsetzen, die Gleichung

$$-\lambda v^2 x^3 + u^2 x^2 + 2ux + 1 = 0.$$

Die Diskriminante für eine allgemeine kubische Gleichung $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ lautet*) $a_1^2 a_2^2 + 18a_0 a_1 a_2 a_3 - 4a_0 a_2^3 - 4a_1^3 a_3 - 27a_0^2 a_3^2$. Rechnet man diesen Wert aus, so erhält man nach einiger Reduktion

$$(2) \quad 27\lambda v^2 + 4u^3 = 0.$$

Der Leser kann mittels Differentialrechnung die Einhüllende der Geraden $ux + vy + 1 = 0$ mit der Nebenbedingung (1) oder (2) suchen und wird die beiden Parabeln erhalten**).

Beisp. 2. Die Kurve $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$ ist 3. Ordnung. Denn durch zweimaliges Kubieren erhält man die Gleichung

$$(x + y - a)^3 + 27axy = 0.$$

*) S. z. B. Pund, *Algebra*, S. Schubert VI, Leipzig, Göschen 1899.
S. 231.

**) Vgl. Junker, *Höhere Analysis I*, S. Göschen 87, S. 179f.

Bemerkt man, daß diese Kubik gegen die erste Winkelhalbierende symmetrisch ist, so wird man das Koordinatensystem um 45° drehen. Dann ist die neue Gleichung in y nur mehr quadratisch und die Kurve kann leicht punktweise berechnet werden (vgl. S. 87).

Beisp. 3. Wenn eine Gleichung in Polarkoordinaten eine algebraische Funktion von ϱ und den Funktionen $\cos\theta$ und $\sin\theta$ ist, so ist die dargestellte Kurve algebraisch. Z. B. sind die Kurven

$$(A) \varrho = \frac{a}{\cos^{\frac{1}{3}}\theta} \quad \text{und} \quad (B) \varrho = \frac{a}{\cos^3 \frac{1}{3}\theta}$$

Kubiken. Denn es ist bekanntlich $\cos\theta = 4\cos^3 \frac{1}{3}\theta - 3\cos \frac{1}{3}\theta$ und hieraus ergibt sich für (A)

$$\frac{x}{\varrho} = 4 \frac{\varrho^3}{\varrho^3} - \frac{3\varrho}{\varrho}$$

und darnach leicht

$$(A) \quad (x + 3a)(x^2 + y^2) = 4a^3.$$

Für (B) hat man zunächst

$$\frac{x}{\varrho} = 4 \frac{a}{\varrho} - 3 \left(\frac{a}{\varrho} \right)^{\frac{1}{3}}$$

und dann

$$(B) \quad 27a(x^2 + y^2) = (4a - x)^3.$$

Kurve (A) ist die sog. Maclaurinsche Trisektrix (1720; s. Fig. 3), Kurve (B) heißt Tschirnhausens Kubik (1690; s. Fig. 4). Beide Kurven sind nach ihrer Gleichung in Polarkoor-

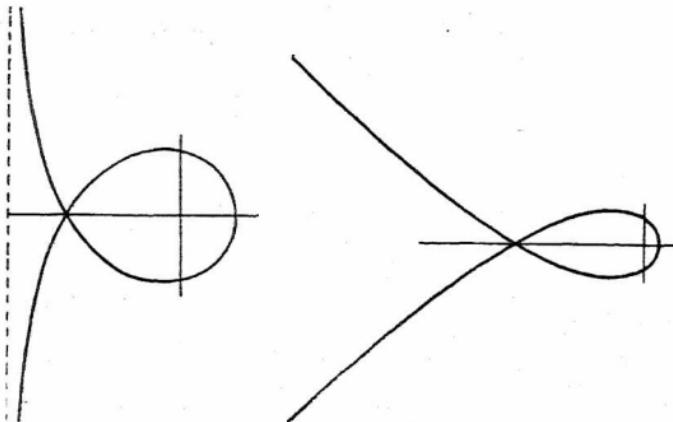


Fig. 3.

Fig. 4.

dinaten leicht zu zeichnen. Die Symmetrie ist auch daraus zu ersehen, daß für $\pm \theta$ der Radiusvektor denselben Wert erhält.

5. Wendetangente und Spitze. Bei der kubischen und der semikubischen Parabel finden wir gleich zwei Eigentümlichkeiten, die bei Kegelschnitten nicht auftreten können. Die kubische Parabel wendet zuerst ihre konkave Seite nach oben, nach dem Durchgang durch den Ursprung aber nach unten. Die Formel $R = (1 + 3x^2)^{\frac{1}{2}}/6x$, die man mittels Differentialrechnung für ihren Krümmungsradius ableitet, zeigt auch, daß R für sehr große Werte von x selbst sehr groß ist (statt $1 + 3x^2$ kann dann im Zähler einfach $3x^2$ genommen werden), dann bei abnehmendem x ein gewisses Minimum erreicht, für noch kleinere x wieder wächst, um für $x = 0$ unendlich groß zu werden und beim Übergang zu negativen x selbst das Zeichen zu wechseln. Läßt man ein Lineal, das die Kurve immer berührt, dieser entlang gleiten, so kehrt es, wenn es in die Lage der x -Achse gekommen ist, die Richtung seiner Drehung um, während der Berührungs punkt, der die Kurve beschreibt, immer in demselben Sinne längs der Kante des Lineales forschreitet. Die x -Achse ist (dreipunkig berührende) „Wendetangente“, der Anfangspunkt heißt „Wendepunkt“, ist aber an sich auf der Kurve nicht ausgezeichnet.

Das Verhalten von Tangente und Punkt bei der semi-kubischen Parabel ist gerade entgegengesetzt. Während die Tangente beim Durchgang durch die Lage der x -Achse ihre Drehungsrichtung nicht ändert, kehrt der die Kurve beschreibende Punkt dort seine Bewegungsrichtung längs der Tangente um und erzeugt eine „Spitze“. Der Krümmungsradius geht für große x von sehr großen Werten aus, nimmt aber ohne Unterbrechung bis zu 0 ab. Ein Unterschied im Vorzeichen für beide Zweige besteht nicht. Die Spitzentangente berührt ebenfalls dreipunkig. Solche

Vorkommnisse heißen „Singularitäten“. Die Wendetangente ist eine „Liniensingularität“, die Spitze eine „Punktsingularität“ (vgl. S. 98/99).

6. Variation von λ in der Gleichung $y^2 = \lambda x^3$. Um von den gegebenen Kurven einen Übergang zu anderen Formen von Kubiken zu gewinnen, werden wir zunächst Konstantenänderungen in den Gleichungen vornehmen. Wir werden dies aber nur an der semikubischen Parabel, weil es dort etwas schwieriger und lehrreicher ist; durchführen. Wenn jemand die Kurve $y^2 = \lambda x^3$ punktweise zu zeichnen unternimmt, so wird er sofort bemerken, daß er das Maß des Steigens durch den Koeffizienten λ regulieren kann. Läßt man λ unbegrenzt variieren, so bemerkt man folgendes. Für sehr kleine λ schmiegt sich die Kurve von beiden Seiten sehr nahe an die positive x -Achse an, mit der sie, wenn man sie doppelt zählt, für $\lambda = 0$ zusammenfällt. Wächst λ , so nähern sich die Zweige oben und unten immer mehr der y -Achse. Setzt man $1/\lambda = A$, so daß also die Gleichung $Ay^2 = x^3$ lautet, so sieht man, daß für $\lambda = \infty$, also $A = 0$, die Kurve in die dreifach gezählte y -Achse übergeht. Für sehr große negative λ ist sie der y -Achse links sehr nahe, nähert sich dann der negativen x -Achse und fällt mit dieser, wenn man sie doppelt zählt, für $\lambda = 0$ zusammen. Bei $\lambda = 0$ findet also ein Übergang vom negativen zum positiven Teile der x -Achse statt.

Beisp. Die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2\lambda} = 1$ stellt für positives λ

Ellipsen, für negatives λ Hyperbeln dar. Alle Kegelschnitte berühren sich in den Endpunkten A , B der großen Achse, die für alle dieselbe Länge ($2a$) hat. Für $\lambda = 0$ findet der Übergang statt. Die Gleichung ergibt in diesem Falle (nach Multiplizieren mit λ) $y^2 = 0$, also die doppelt liegende x -Achse. Je nachdem man aber von den Ellipsen herkommt oder von den Hyperbeln, ergibt sich entweder die Strecke AB selbst als gleich-

sam unendlich schmale Ellipse, oder die Strahlen von A nach links und von B nach rechts als ganz flach gedrückte Hyperbel. Ein weiterer Übergang findet für $\lambda = \pm \infty$ statt, den sich der Leser selbst veranschaulichen möge.

7. Hinzufügung einer Konstanten zu einer Gleichung (Kurve gleicher Potenz). Wir wollen nun zunächst sehen, was es bedeutet, wenn wir unserer Gleichung eine Konstante additiv beifügen, also die Kurve $y^2 = \lambda x^3 + \delta$ bilden. Schneiden wir die neue Kurve mit der ursprünglichen, setzen also in der neuen Gleichung $y^2 = \lambda x^3$, so ergibt sich $\delta = 0$. Da aber δ gerade nicht Null sein soll, ist zwischen den beiden Gleichungen ein Widerspruch vorhanden, d. h. die alte und die neue Kurve schneiden sich überhaupt nicht, soweit man nämlich das Endliche in Betracht zieht. Über das Verhalten im Unendlichen werden wir bald sprechen (vgl. S. 39 ff.). Nehmen wir δ sehr klein an, so erhalten wir eine Kurve, die ganz nahe an der ursprünglichen verläuft, und zwar außen oder innen, aber natürlich keine Spitze mehr hat. Wir können das für jede beliebige Kurve aussprechen: Ist $f(x, y) = 0$ die Gleichung irgendeiner Kurve, so stellt für kleine positive oder negative Werte von δ die Gleichung $f(x, y) = \delta$ eine neue Kurve dar, die ganz nahe an der alten verläuft, sie aber nirgends überschreitet. Von diesem Satze werden wir noch wichtigen Gebrauch machen.

Bem. Man weiß, daß beim Kreise J. Steiner (1826) den Begriff der „Potenz“ aufgestellt hat, die dargestellt wird durch das Produkt der auf einer den Punkt $P(x_0, y_0)$ enthaltenden Sehne AB durch den Punkt P gebildeten Abschnitte. Dieses Produkt $PA \cdot PB$ wird für einen Kreis mit der Gleichung $f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$ samt Vorzeichen gegeben durch $f(x_0, y_0) \equiv x_0^2 + y_0^2 - r^2$ und ist im Innern des Kreises negativ, im Äußeren positiv. Der Begriff der Potenz ist auf höhere Kurven ausdehnbar*) und die Potenz ist immer dem Ausdruck $f(x_0, y_0)$

*) Vgl. Pascal, *Repert. d. höh. Math.*, 2. Aufl. 1910, II. Bd. 1. Hälfte, S. 4367.

proportional. Auch bei der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ ist also die Potenz (bei positivem Proportionalitätsfaktor) im Innern negativ, im Äußeren positiv, bei der Parabel $y^2 - 2px$ ebenso, bei der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ ist es umgekehrt. Auf Grund dieses erweiterten Potenzbegriffes hat man die Kurven $f(x, y) + \delta = 0$ „Kurven gleicher Potenz“ in bezug auf die Grundkurve $f(x, y) = 0$ genannt.

Beisp. Die Schar der Parallelen $Ax + By = \lambda$, ferner die Schar der ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte $\frac{x^2}{\lambda a^2} + \frac{y^2}{\lambda b^2} = 1$ (der konzentrischen Kreise $x^2 + y^2 = \lambda$) kann in der eben beschriebenen Weise aufgefaßt werden, da sich überall nur die Gleichungskonstante ändert. Bei der kubischen Hyperbel $y = \lambda x^3$ bedeutet die Hinzufügung einer Konstanten nur eine Parallelverschiebung, wie überhaupt bei allen Kurven, in denen y oder x nur in der ersten Potenz vorkommt.

8. Variation von λ und ε in der Gleichung $y^2 = \lambda x^3 + \varepsilon^2$. Setzt man in der Gleichung $y^2 = \lambda x^3 + \delta$ für y die Werte $\pm \sqrt{\delta}$ ein, so ergibt sich jedesmal $x^3 = 0$, d. h. die Geraden $y = \pm \sqrt{\delta}$ schneiden die Kurve auf der y -Achse je in drei zusammenfallenden Punkten. Wir werden ohne weiteres vermuten, daß es sich um Wendepunkte handelt. Lassen wir also δ variieren, so liegen die reellen Wendepunkte des Systems $y^2 = \lambda x^3 + \delta$ für positives δ auf der y -Achse und ihre Tangenten sind parallel der x -Achse. Man sieht das noch besser, wenn man $\delta = \varepsilon^2$ setzt. Dann läßt sich die Gleichung auch schreiben $(y + \varepsilon)(y - \varepsilon) = \lambda x^3$ und diese Gleichungsform läßt gemäß unseren Ausführungen den Sachverhalt sofort erkennen. Setzen wir in dieser Gleichung $y = 0$, so erhalten wir $x^3 = -\varepsilon^2/\lambda$, d. i. eine reelle Abszisse für den Schnittpunkt der Kurve mit der x -Achse. Auch bei noch so kleinem ε kann man aber durch geeignete Wahl von λ , das man nur

entsprechend noch viel kleiner nehmen muß, erreichen, daß der Zug ACB (s. Fig. 5) sich beliebig weit z. B. nach links erstreckt. Bei festem ε findet dann der Übergang für $\lambda = 0$ so statt, daß die Kurve für ein ganz kleines positives λ so liegt, wie in Fig. 5 ($\lambda = \frac{1}{4}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$), nur daß sie sich fast ganz an die Parallelen $y = \pm \varepsilon$ anlegt, für ein ganz kleines negatives λ aber erscheint die Figur an der y -Achse gespiegelt: Der Zug ACB der Fig. 5 geht in die unendlichen Äste über und umgekehrt. Für $\varepsilon = 0$ kann der Zug ACB gar nicht mehr entstehen und wir sehen nun deutlich, warum in diesem Falle bei $\lambda = 0$ ein Übergang von der doppelt gezählten positiven zur doppelt gezählten negativen x -Achse eintreten muß.

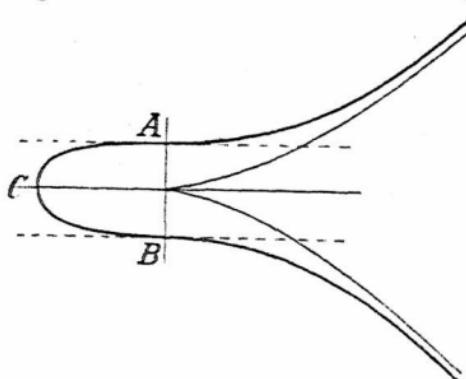


Fig. 5.

spiegel: Der Zug ACB der Fig. 5 geht in die unendlichen Äste über und umgekehrt. Für $\varepsilon = 0$ kann der Zug ACB gar nicht mehr entstehen und wir sehen nun deutlich, warum in diesem Falle bei $\lambda = 0$ ein Übergang von der doppelt gezählten positiven zur doppelt gezählten negativen x -Achse eintreten muß.

9. Variation von ε und ϵ in der Gleichung $y^2 = \lambda x^3 - \lambda \varepsilon^2 x + \varepsilon^2$. Um nun ebenso deutlich zu sehen, wieso unsere semikubische Parabel $y^2 = \lambda x^3$ für $\lambda = \infty$ in die dreifach gezählte y -Achse übergehen muß, machen wir auf der rechten Seite der Gleichung dasselbe, was wir soeben auf der linken getan haben, d. h. wir setzen statt x^3 , indem wir zwei ganz nahe Parallelen zur y -Achse ziehen, das Produkt $x(x + \varepsilon)(x - \varepsilon)$. Dann haben wir eine Kurve mit der Gleichung

$$(A) \quad (y + \varepsilon)(y - \varepsilon) = \lambda x(x + \varepsilon)(x - \varepsilon), \\ \text{oder}$$

$$(A^*) \quad y^2 = \lambda x^3 - \lambda \varepsilon^2 x + \varepsilon^2$$

und wir sehen sofort, daß die neue Kurve von der ursprünglichen semikubischen Parabel in zwei Punkten mit der gemeinschaftlichen Abszisse $x = \varepsilon^2/\lambda\dot{\varepsilon}^2$. geschnitten wird. Die Gleichung (A) zeigt uns ferner, daß die Kurve durch die 6 Punkte geht, die die Abszissen $x = 0$, $x = \dot{\varepsilon}$, $x = -\dot{\varepsilon}$ haben und für welche $y = \pm\varepsilon$ ist.

Um uns den Verlauf der Kurve (A) klarzumachen, suchen wir noch ihre Schnittpunkte mit der x -Achse. Die Substitution von $y = 0$ in (A*) ergibt

$$(B) \quad x^3 - \dot{\varepsilon}^2 x + \varepsilon^2 A = 0, \quad (A = 1/\lambda)$$

eine Gleichung, die, solange $\dot{\varepsilon}$ und ε voneinander unabhängig sind, mit Sicherheit nur eine Wurzel $x < -\dot{\varepsilon}$ ergibt (bei positivem A). Denn die linke Seite der Gleichung wird für $x = -\infty$ negativ, für $x = -\varepsilon$ aber positiv. Wir wollen deshalb etwa $\lambda = A = 1$ und $\dot{\varepsilon} = \varepsilon$ nehmen, so daß die Kurvengleichung lautet

$$(A') \quad y^2 = x^3 - \varepsilon^2 x + \varepsilon^2$$

und aus (B) wird

$$(B^*) \quad x(x^2 - \varepsilon^2) = -\varepsilon^2.$$

Wenn hier $\varepsilon < 1$ genommen wird, was wir doch jedenfalls voraussetzen wollen, ist zwischen $x = 0$ und $x = \varepsilon$ eine Wurzel unmöglich; denn für einen solchen Wert wird zwar die Klammer negativ, aber absolut genommen kleiner als ε^2 , und die Multiplikation mit x ergibt etwas noch kleineres, kann also nicht auf den absoluten Wert ε^2 führen. Daß zwischen $x = 0$ und $x = -\varepsilon$ keine Wurzel liegt, ist fast selbstverständlich; in der Tat wird für einen solchen Wert die linke Seite von (B*) positiv. Demnach läuft in diesem Falle die Kurve, wie in der Fig. 6 angegeben ($\varepsilon = \frac{1}{2}$). Diese Kurve ist etwas allgemeiner als die der Fig. 5, weil die beiden Wendetangenten nicht parallel laufen.

10. Die Büschelform der Gleichung. Signierung. Bevor wir aus Gleichung (A) noch Weiteres zulernen suchen, wollen

wir einen allgemeinen Satz aufstellen, der sich aus den bisherigen Betrachtungen durch Verallgemeinerung ohne weiteres ergibt. Hat nämlich eine Kurvengleichung die Form

$$(1) \quad A\Phi = B\Psi,$$

wo Φ und Ψ irgendwelche Funktionen von x, y bedeuten, so geht die Kurve (1) durch sämtliche Schnittpunkte der Kurven $\Phi = 0, \Psi = 0$. Denn für einen solchen Schnittpunkt (x_0, y_0) ist $\Phi(x_0, y_0) = 0$ und $\Psi(x_0, y_0) = 0$, also auch $A\Phi(x_0, y_0) = B\Psi(x_0, y_0)$. Dabei können A und B Zahlenkoeffizienten oder selbst Funktionen von x, y sein. Im letzteren Falle geht Kurve (1) durch alle Schnittpunkte der Kurve A^* mit B und Ψ und der Kurve Φ mit B und Ψ .

Nehmen wir A und B als Zahlenkoeffizienten und setzen $B/A = \lambda$, so stellt für variables λ die Gleichung

$$(2) \quad \Phi = \lambda\Psi$$

ein System von Kurven dar, die alle durch sämtliche Schnittpunkte von Φ und Ψ gehen. Man nennt ein solches System „Büschele“. Nun muß aber wegen der Stetigkeit jeder Zug einer algebraischen Kurve, sei es im Endlichen, sei es nach einmaligem oder öfterem Passieren des Unendlichen in sich zurücklaufen. Die Kurven Φ und Ψ teilen also die Ebene in eine Anzahl von Feldern. Nun gibt es gewisse Gebiete der Ebene, deren Punkte die Eigenschaft haben, daß ihre Koordinaten z. B. den Ausdruck Φ positiv machen, andere Gebiete, für die Φ negativ wird. Diese Gebiete sind überall durch die Kurve $\Phi = 0$ getrennt. Bekannte Beispiele hierfür sind ja die Gerade und die Kegelschnitte, bei welch letzteren man ein „Inneres“ und ein „Äußeres“ unterscheiden kann.

Ist nun in Gleichung (2) λ positiv, so kann die Kurve (2) nur in solchen Feldern liegen, in denen gleichzeitig Φ und

^{*}) Ich werde öfters der Kürze halber einfach „Kurve A “ statt „Kurve mit der Gleichung $A = 0$ “ sagen.

Ψ positiv oder negativ werden. Hat man ein solches Feld festgestellt, so kommt man beim Überschreiten der einen Kurve in ein anderes Feld, in welchem kein Punkt von (2) liegt usw. Indem man die letzteren Felder schraffiert und die Schnittpunkte der Kurven Φ und Ψ markiert, erhält man oft sofort ein deutliches Bild vom Verlauf der Kurve. Für negatives λ liegen alle Kurven in den nichtschraffierten Feldern. Die Übergänge finden für $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ über die Kurven Φ und Ψ statt.

Dieses „Signierungsprinzip“, wie es von Reuschle genannt wurde, wird mit besonderem Vorteil verwendet, wenn die Kurven Φ und Ψ in

mehrere Teilkurven „zerfallen“. Man erhält dann nämlich eine größere Anzahl von Feldern, da schon das Überschreiten einer einzigen solchen Teilkurve, z.B. von Φ , das Vorzeichen von Φ ändert. Ein solcher Fall liegt z. B. bei der Gleichung (A) der vorigen Nr. vor und die Fig. 6 wird dem Leser deutlicher als alle Worte zeigen, wie das Signierungsprinzip anzuwenden ist. Man sieht aus (A), daß für große positive x und große positive oder negative y bei positivem λ die beiden Seiten der Gleichung positiv werden. Demnach können in den Feldern rechts oben und rechts unten Kurvenpunkte liegen. Hiernach ist die Signierung,

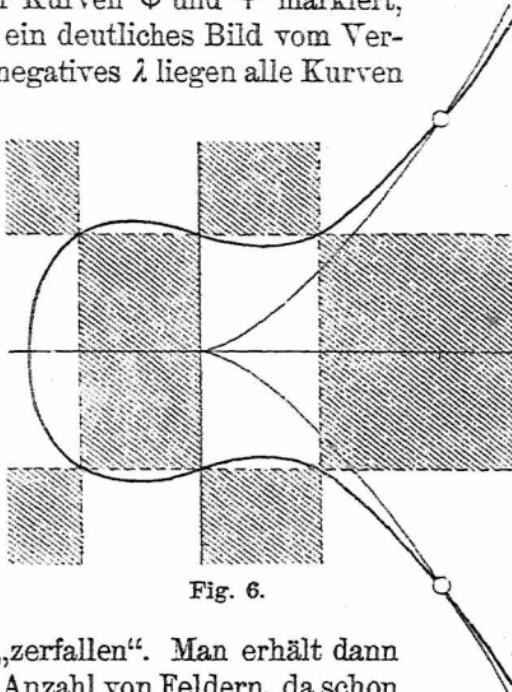


Fig. 6.

wie Fig. 6 zeigt, vorzunehmen. Zur sicheren Anwendung der Regel ist nur vorauszusetzen, daß alle vorkommenden Schnittpunkte einfach sind und zunächst wollen wir auch annehmen, daß Φ und Ψ keine vielfachen Faktoren enthalten.

11. Variation von λ in der Gleichung $y^2 = \lambda x^3 - \lambda \varepsilon^2 x + \varepsilon^2$. Wir fahren nun in der Betrachtung der Gleichung (A) der Nr. 9 fort, indem wir λ variieren, zur Vereinfachung aber $\varepsilon = \varepsilon$ setzen. Dann haben wir die Kurve
 (C) $y^2 - \varepsilon^2 = \lambda x(x^2 - \varepsilon^2)$.

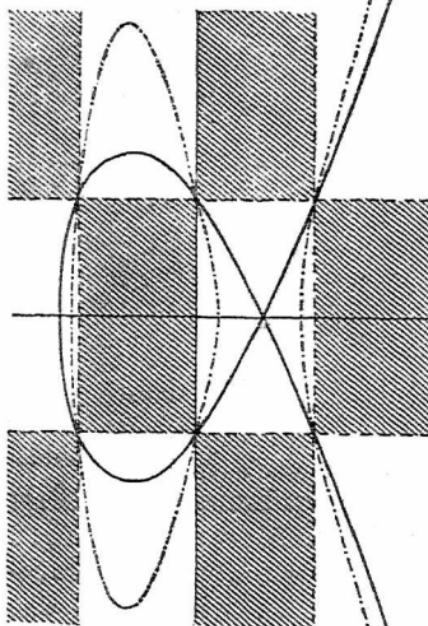


Fig. 7.

Diese Kurve ist ja für $\lambda = 1$ mit (A[†]) identisch und sie behält die charakteristische Form von Fig. 6 auch bei, wenn λ bis zu 0 abnimmt. Nur schmiegt sich die Kurve dann immer mehr an die beiden Parallelen zur x -Achse $y = \pm \varepsilon$ an, in die sie für $\lambda = 0$ übergeht. Wenn nun aber bei der Kurve (C) λ größer wird, so werden die Äste steiler, die Ein- und Ausbuchtungen stärker und es tritt für einen gewissen Wert von $\lambda (= 3\sqrt{3}/2\varepsilon)$ der Fall ein, daß die zwei Einbuchtungen in dem Raum zwischen $x = 0$ und $x = \varepsilon$ aneinanderstoßen.

Sie vereinigen sich dann zu einem „Doppelpunkt“ (Fig. 7; $\varepsilon = \frac{1}{2}$), einer Singularität, die schon bei den zwei Bei-

spielen von Nr. 4 (Fig. 3 u. 4) auftrat. Den angegebenen Wert von λ erhält man, wenn man die Diskriminante der Gleichung (B) für $\epsilon = \varepsilon$ bildet (vgl. S. 10). Wird λ noch größer, so reißt der Doppelpunkt nach der anderen Seite auf, die Kurve hat dann drei reelle Schnittpunkte mit der x -Achse, es entsteht ein von dem ins Unendliche gehenden Zug ganz getrenntes Oval (in Fig. 7 für $\lambda = 10$ gez.), das sich bei weiter wachsendem λ immer mehr den beiden Parallelen $x = 0$, $x + \varepsilon = 0$ anschmiegt, während der unendliche Zug der Geraden $x - \varepsilon = 0$ sich nähert. Für $\lambda = \infty$ artet dann die Kurve in diese drei Parallelen aus, die, wenn wir gleichzeitig ε zu Null abnehmen lassen, in $x^3 = 0$ zusammenfallen. Damit ist auch dieser Übergang anschaulich gemacht. Für sehr große negative λ erscheint die soeben betrachtete Figur wieder gegen die y -Achse gespiegelt und das jetzt rechts auftretende Oval macht den umgekehrten Prozeß durch. Der Doppelpunkt entsteht dann für $\lambda = -3\sqrt[3]{2\varepsilon}$.

Bem. Wir haben soeben eine Kurve kennen gelernt, die aus zwei getrennten Zügen besteht, ohne doch zu zerfallen. Die beiden Züge unterscheiden sich dadurch, daß der eine von einer willkürlichen Geraden nur in einer geraden Anzahl (0 oder 2), der andere nur in einer ungeraden Anzahl von Punkten (1 oder 3, wenn man ev. den unendlich fernen mitzählt) geschnitten werden kann. Ch. v. Staudt hat (1847) allgemein bewiesen, daß eine algebraische Kurve immer aus solchen „paaren“ und „unpaaren“ Zügen zusammengesetzt ist.

12. Die Gleichungsform $\Phi = \lambda \Psi^2$. Das Verfahren der Ersetzung eines zwei- oder dreifachen Faktors einer Gleichungsseite durch verschiedene, aber von dem ursprünglichen nur wenig abweichende Faktoren wollen wir nun verallgemeinern und damit die letzte der in Nr. 10 gemachten Einschränkungen teilweise aufheben. Es habe eine Kurve C die Gleichungsform

$$A\Phi = B\Psi^2,$$

wo wieder $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ Kurven seien, die aber nur einfache Schnittpunkte haben sollen (d. h. sie sollen sich nicht berühren und keine soll durch Doppelpunkte, Spitzen usw. der anderen gehen). A und B seien Koeffizienten oder auch Funktionen. Im letzteren Falle sollen aber auch $A = 0$ und $B = 0$ nur einfache, mit den Schnittpunkten von Φ und Ψ nicht zusammenfallende Schnittpunkte haben. Schreiben

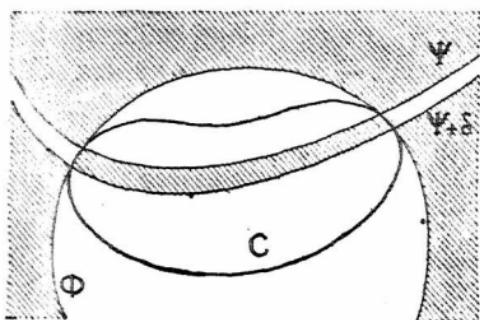


Fig. 8.

wir dann $\Psi(\Psi + \delta)$ statt Ψ^2 , so sehen wir, da wir in naher Umgebung der Schnittpunkte von Φ mit Ψ und $(\Psi + \delta)$ diese Kurven durch ihre Tangenten ersetzen können, daß sich die Kurve C in all diesen Schnitt-

punkten verhält, wie die Parabel $y = \lambda x^2$ zu den Koordinatenachsen. D. h. die Kurve C berührt die Kurve Φ (ev. auch A) überall dort, wo sie von der Kurve Ψ geschnitten wird (Fig. 8). In den Fällen, wo mehrfache Schnittpunkte auftreten, ist eine besondere Untersuchung notwendig.

Beisp. Die Gleichung $xy = \lambda(x + y - 1)^2$ stellt eine Schar sich doppelt berührender Kegelschnitte dar. Die gemeinsamen Tangenten sind die Achsen $x = 0$, $y = 0$, Berührungssehne ist die Gerade $x + y - 1 = 0$. Allgemein lautet die Gleichung einer solchen Schar

$$G_1 G_2 = \lambda G_3^2,$$

wenn G_1 , G_2 , G_3 Symbole für beliebige Geradengleichungen sind.

13. Die Gleichungsformen $\Phi = \lambda \Psi^3$ und $\Phi^2 = \lambda \Psi^3$. Ähnliche Betrachtungen führen zu den folgenden Sätzen: Hat eine Kurve C die Gleichungsform

$$A\Phi = B\Psi^3,$$

so berührt sie im allgemeinen die Kurve Φ in den einfachen Schnittpunkten von Φ und Ψ dreipunkig. Ist Φ eine Gerade, so ist sie in diesen Punkten die Wendetangente von C . Hat eine Kurve C die Gleichungsform

$$A\Phi^2 = B\Psi^3,$$

so besitzt sie im allgemeinen Spitzen in den Schnittpunkten von Φ und Ψ mit den Tangenten von Φ als Spitzentangenten. In der Aufstellung und Erweiterung solcher Sätze ist aber Vorsicht geboten (vgl. Nr. 56, Beisp. 6; s. auch S. 63).

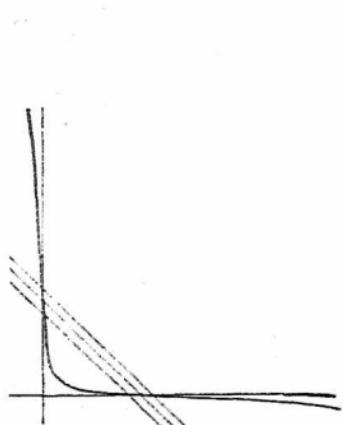


Fig. 9.

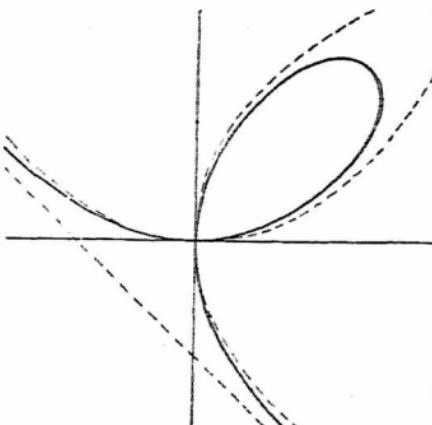


Fig. 10.

Beisp. 1. Die Kurve des Beispiels 2 von Nr. 4 mit der Gleichung $(x + y - a)^3 + 27axy = 0$ hat in den Schnittpunkten der Geraden $x + y - a = 0$ mit den beiden Achsen Wendepunkte mit den Achsen als Wendetangenten (Fig. 9).

Beisp. 2. Nicht dasselbe findet statt bei der Kurve mit der Gleichung

$$y(ax - y^2) = x^3$$

(Descartessches Blatt, 1638) weder für den Anfangspunkt $x = 0, y = 0$, noch für die Schnittpunkte der Parabel $ax - y^2 = 0$ mit $x = 0$. Wie eine Zeichnung der Kurve ergibt (vgl. Fig. 10; Polarkoordinaten!), hat sie nämlich im Anfangspunkt einen Doppelpunkt, dessen beide Tangenten die Achsen sind (ρ wird Null für $\theta = 0$ und $\theta = 90^\circ$), und die Achse $y = 0$ schneidet

die Kurve deswegen in drei zusammenfallenden Punkten ($x^3 = 0$), weil durch ihren Berührungs punkt die Kurve noch einmal hindurchgeht. Über die Parabel $ax - y^2 = 0$ siehe S. 120. Es besteht Symmetrie gegen die erste Winkelhalbierende der Achsen.

Beisp. 3. Die Quartik $x^4 - 2a^2x^2 - 4ay^3 + a^4 = 0$ (Beisp. von Cramer) läßt sich auf die Form bringen

$$(x^2 - a^2)^2 = 4ay^3.$$

In der Tat hat die Kurve, die sich ja leicht punktweise berechnen läßt (vgl. Fig. 11), in den Punkten $x = \pm a$, $y = 0$ Spitzen mit den Geraden $x = \pm a$ als Tangenten. Man erkennt leicht, daß die Kurve für negative y keine reellen Zweige hat. Die y -Achse wird in einem einzigen reellen Punkt geschnitten.

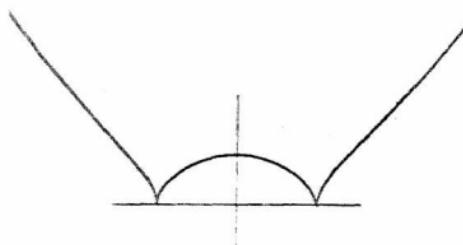


Fig. 11.

14. Kubik mit Doppelpunkt. Wir kehren nun zu unserer Kurve (C) von S. 20 zurück, die für $\lambda = 3\sqrt{3}/2\varepsilon$ einen Doppelpunkt aufwies. Das Charakte-

ristische ist, daß die Kurve sich im Doppelpunktselbst durchschneidet. Nicht charakteristisch ist die Schleife, die sich in all unseren bisherigen Fällen zeigte. Setzen wir in der Gleichung (C) den angegebenen Wert von λ ein, so ergibt sich

$$(D) \quad \frac{2\varepsilon}{3\sqrt{3}}y^2 = x^3 - \varepsilon^2 x + \frac{2\varepsilon^3}{3\sqrt{3}}.$$

Für $y = 0$ muß die entstehende Gleichung in x eine Doppelwurzel haben. Man weiß, daß die Ableitung der Gleichung nach x diese Wurzel als einfache enthält. Diese Ableitung lautet $3x^2 = \varepsilon^2$ und man erkennt leicht $x = \varepsilon/\sqrt{3}$ als die Doppelwurzel. Gleichung (D) läßt sich also schreiben

$$(D^*) \quad \frac{2\varepsilon}{3\sqrt{3}}y^2 = \left(x - \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(x + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}}\right),$$

wobei der letzte Faktor den weiteren Schnittpunkt der Kurve mit der x -Achse anzeigt.

Bem. 1. Gleichung (D^*) ist von der Form $A \Phi^2 = \Psi^2 \cdot \Psi'$, und in der Tat berührt die Kurve (D^*) die Gerade Ψ' dort, wo sie von Φ (der x -Achse) geschnitten wird (vgl. Nr. 12 und Fig. 7). In dem Schnittpunkte von Φ und Ψ liegt der Doppelpunkt. Dafür werden wir bald eine allgemeinere Gleichungsform geben (Nr. 17).

Bem. 2. Der Leser wird leicht finden, daß sich wohl die Gleichung der Tschirnhausenschen Kubik (S. 11) auf die Form (D^*) bringen läßt, nämlich

$$27ay^2 = (x + 8a)^2(x - a),$$

nicht aber die der Maclaurinschen Trisektrix, wiewohl beide Kurven ziemlich ähnlich gegen das Koordinatensystem zu liegen scheinen. Der Grund hierfür wird später ersichtlich werden (s. Beisp. 2 v. Nr. 27).

15. Kubik mit isoliertem Punkt. Das Tangentenpaar des Doppelpunktes. Die Kurve (D^*) ist offensichtlich nur ein Spezialfall der Kurven mit der Gleichung

$$(E) \quad y^2 = \lambda(x - p)^2(x - q).$$

Auf alle Fälle scheint (E) in $x = p, y = 0$ einen Doppelpunkt zu haben. Wir sehen jedoch gleich, daß (wenn $\lambda > 0$) die Gleichung für $x < q$ keine reellen Werte von y mehr gibt. Ist also $p < q$, so liegt dieser „Doppelpunkt“ ganz vereinzelt, es gehen keine reellen Zweige der Kurve durch ihn und wir nennen ihn daher „isolierten (Doppel-)Punkt“. Wollen wir also eine Form wie (D) oder wie die Tschirnhausensche Kubik erhalten, so müssen wir $p > q$ voraussetzen, eine Bedingung, die bei diesen beiden Kurven in der Tat erfüllt ist*). Für $p = q$ entsteht eine Spitze und diese Form bildet also den Übergang vom isolierten Punkt zum Doppelpunkt mit reellen Zweigen, den man zum Unterschied auch „Knoten“ nennt.

*) In der Gleichung von Nr. 14, Bem. 2 ist allerdings für $a > 0$ $\lambda < 0$. Dann muß $p < q$ sein.

Behufs genauerer Untersuchung des Doppelpunktes von (E) legen wir den Anfangspunkt des Koordinatensystems in ihn, d. h. wir setzen $x - p = \xi$, so daß die Gleichung (E) dann lautet

$$(F) \quad y^2 = \lambda \xi^2 (\xi + p - q)$$

oder

$$(F^*) \quad y^2 - \lambda(p - q)\xi^2 = \lambda\xi^3.$$

Wir sehen, daß durch diese Umformung nicht bloß das Absolutglied aus der Gleichung entfernt wurde, sondern daß in ihr auch kein lineares Glied mehr auftritt. Schneidet man die Kurve mit einer Geraden durch den Anfangspunkt $y = A\xi$, so ergibt sich (nach Abtrennung der Doppelwurzel $\xi = 0$) die Gleichung

$$(1) \quad A^2 - \lambda(p - q) = \lambda A^3 \xi.$$

Die Gerade hat also außer den zwei in den Anfangspunkt fallenden Schnittpunkten immer noch einen weiteren, dessen Abszisse durch Gleichung (1) gegeben ist. Auch der hierdurch bedingte Wert von ξ kann aber Null werden, wenn $A = \pm \sqrt[3]{\lambda(p - q)}$ wird. Das tritt offenbar dann ein, wenn die Gerade einen der Zweige des Doppelpunktes (im Anfangspunkt) berührt. Daher lauten die Gleichungen der beiden Tangenten des Doppelpunktes $y = \pm \sqrt[3]{\lambda(p - q)}$ und das Produkt dieser beiden Gleichungen ergibt $y^2 - \lambda(p - q)\xi^2 = 0$ als Gleichung des Tangentenpaars. Wir sehen, daß dies nichts anderes ist als das System der quadratischen Glieder unserer Gleichung (F*). Diese Betrachtungen sind ganz unabhängig von der Art des Doppelpunktes. Wenn man im Falle des isolierten Punktes von „Berühren“ und „Tangenten“ spricht, so denkt man sich eben zwei imaginäre Zweige durch den Punkt gehend, die man algebraisch ja ebenso wie reelle Zweige verfolgen kann. Nun erkennt man leicht, daß (immer für $\lambda > 0$) das

Tangentenpaar $y = \pm \xi / \sqrt{\lambda(p - q)}$ nur dann reell ist, wenn $p > q$. Das ist die Bedingung, die wir schon oben fanden. Rückt der Wert von p dem Wert von q immer näher, so schrumpft die Schleife, die bei dieser Art von Gleichung für $p > q$ stets vorhanden ist, immer mehr zusammen und geht schließlich in eine Spitze über.

16. Der Anfangspunkt als vielfacher Punkt. Wir können daran gleich folgenden allgemeinen Satz schließen, der genau nach dem eben benutzten Verfahren bewiesen wird: Ordnet man eine algebraische Gleichung in x, y nach dem Grade ihrer Glieder, so daß sie die Form erhält

$$(G) \quad u_0 + u_1(x, y) + u_2(x, y) + \dots + u_n(x, y) = 0,$$

wo u_1, u_2, \dots, u_n die Aggregate der Glieder ersten, zweiten, ... n^{ten} Grades sind, und ist die Konstante $u_0 = 0$, so geht die Kurve durch den Ursprung des Koordinatensystems und $u_1(x, y) = 0$ stellt die Tangente der Kurve im Ursprung dar. Ist aber $u_1(x, y) \equiv 0$, d. h. sind überhaupt keine linearen Glieder vorhanden, so hat die Kurve im Anfangspunkt einen Doppelpunkt, dessen Tangentenpaar die Gleichung $u_2(x, y) = 0$ hat. Ähnlich für einen dreifachen, bis zu $(n-1)$ -fachen Punkt. Es handelt sich aber nur dann um einen gewöhnlichen k -fachen Punkt, wenn erstens das niedrigste Aggregat $u_k(x, y)$ aus k verschiedener Faktoren besteht, zweitens auch keiner dieser Faktoren in $u_{k+1}(x, y)$ und den folgenden Aggregaten enthalten ist. Fehlen alle Glieder außer $u_n(x, y) = 0$, so besteht die Kurve aus einem System von n Geraden durch den Anfangspunkt. Denn jede homogene Gleichung n^{ten} Grades in x, y läßt sich, wenigstens theoretisch, in n lineare Gleichungen von der Form $\alpha x + \beta y = 0$ zerlegen.

Beisp. Nach der letzten Bemerkung kann es dreifache Punkte nur auf Kurven geben, die mindestens der 4. Ordnung sind. Der gewöhnliche dreifache Punkt hat zwei Arten. In

einem Falle sind alle drei Tangenten reell und getrennt, im andern ist nur eine Tangente reell, die beiden anderen sind konjugiert imaginär. Wir geben als Beispiele die beiden Quartiken $y(y^2 - x^2) = x^4 + y^4$ (Fig. 12) und $y(y^2 + x^2) = x^4 + y^4$ (Fig. 13). In dem letzteren Falle ist äußerlich keinerlei Besonderheit an der Kurve im Anfangspunkt zu bemerken.

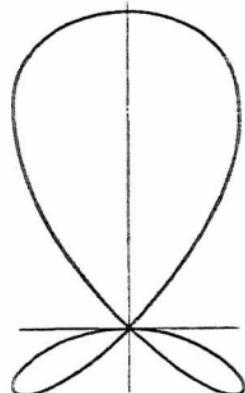


Fig. 12.

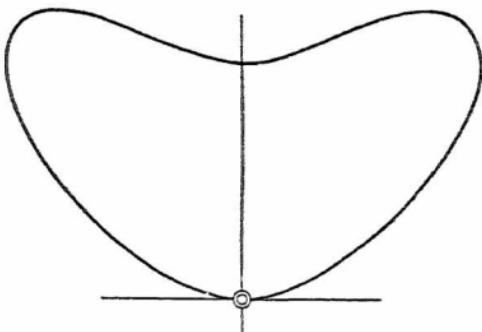


Fig. 13.

17. Bedingung für das Vorhandensein eines Doppelpunktes. Allgemeine Gleichung des Tangentenpaars. Aus dem Satze der vorigen Nr. können wir eine Gleichungsform herleiten, die das Vorhandensein eines Doppelpunktes sofort erkennen läßt. Hat z. B. eine Gleichung die Form

$$(H) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0,$$

wo A, B, C beliebige Funktionen sind, so hat die durch (H) dargestellte Kurve, sofern nicht in allen Funktionen A, B, C das Absolutglied fehlt, was wir ausschließen, eine Singularität 2. Ordnung im Ursprung. So wollen wir sagen, wenn wir nichts Genaueres wissen, als daß die niedrigsten Glieder der Gleichung von der 2. Ordnung sind. Sind α, β, γ die Absolutglieder der Funktionen A, B, C , so wird das Tangentenpaar des Doppelpunktes durch $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = 0$ dargestellt. Aber auch wenn eine Gleichung in die Form gebracht werden kann

$$(K) \quad A\Phi^2 + B\Phi\Psi + C\Psi^2 = 0,$$

wo $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$ irgendwelche Kurven sind, die sich aber nur in einfachen Punkten durchschneiden mögen, hat die Kurve (K) Singularitäten 2. Ordnung in allen Durchschnittspunkten von Φ und Ψ . Denn wenn wir uns den Ursprung in einen dieser Schnittpunkte verlegt denken, so werden die niedrigsten Glieder von Φ und Ψ linear in x, y und diese geben, in den Kombinationen $\Phi^2, \Phi\Psi, \Psi^2$ und mit den Absolutgliedern der ebenfalls transformierten Funktionen A, B, C multipliziert, die Gleichung des Tangentenpaars. Es darf nur für keinen der Schnittpunkte gleichzeitig auch $A = B = C = 0$ sein.

Über die Werte der Absolutglieder in den transformierten Funktionen A, B, C läßt sich Näheres aussagen. Liegt nämlich der fragliche Doppelpunkt im Punkte $x = a, y = b$, so ist die Transformation $x = \xi + a, y = \eta + b$ zu machen. Denkt man sich diese Transformation z.B. an A ausgeführt, so erhält man das neue Absolutglied für $\xi = 0, \eta = 0$. Das ist aber dasselbe, wie wenn man in A überall von vornherein $x = a, y = b$ gesetzt hätte (Taylorscher Lehrsatz). Die so erhaltenen Absolutglieder $A(a, b), B(a, b), C(a, b)$ sollen $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ heißen. Wenn nun Φ und Ψ gerade Linien sind, so daß also etwa

(1) $\Phi \equiv y - b - \lambda(x - a), \quad \Psi \equiv y - b - \mu(x - a),$
so werden diese Ausdrücke durch die obige Transformation zu

$$(1^*) \quad \varphi \equiv \eta - \lambda\xi, \quad \psi \equiv \eta - \mu\xi,$$

und das Tangentenpaar im Doppelpunkte der Kurve (K) hat die Gleichung

$$(2) \quad \alpha_0\varphi^2 + \beta_0\varphi\psi + \gamma_0\psi^2 = 0,$$

die auf ein parallel zu dem ursprünglichen durch die Singularität selbst gelegtes Koordinatensystem bezogen ist.

Setzen wir nachträglich in Gleichung (2) $\xi = x - a$, $\eta = y - b$, so wird aus φ wieder Φ , aus ψ wieder Ψ und wir finden die Gleichung des Tangentenpaars, bezogen auf den ursprünglichen Anfangspunkt zu

$$(2^*) \quad \alpha_0 \Phi^2 + \beta_0 \Phi \Psi + \gamma_0 \Psi^2 = 0.$$

Bem. 1. Auf dieselbe Weise ergibt sich, daß eine Kurve von der Gleichung $A\Phi + B\Psi = 0$ (vgl. S. 18), wo Φ und Ψ gerade Linien vorstellen, im Punkte $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ die Tangente $\alpha_0 \Phi + \beta_0 \Psi = 0$ hat. Die Erweiterung auf höhere, vielfache Punkte liegt ebenfalls auf der Hand.

Bem. 2. Die aus der Differentialrechnung bekannte Bedingung des Doppelpunktes $\partial f / \partial x = 0$, $\partial f / \partial y = 0$, in Verbindung mit $f = 0$ bestätigt, daß ein Punkt (a, b) der auf Φ und Ψ liegt, für die Kurve (K) im allgemeinen ein Doppelpunkt ist. Denn die Differentiation ergibt für konstante A , B , C folgende zwei Gleichungen

$$\Phi(2A\Phi'_x + B\Psi'_x) + \Psi(B\Phi'_x + 2C\Psi'_x) = 0,$$

$$\Phi(2A\Phi'_y + B\Psi'_y) + \Psi(B\Phi'_y + 2C\Psi'_y) = 0,$$

die beide für alle Werte von x , y , für welche gleichzeitig $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$ ist, ebenfalls erfüllt sind. Die Erweiterung auf variable A , B , C ist einfach.

Beisp. 1. Nach der eben angegebenen Regel muß das Tangentenpaar des Doppelpunktes der Kurve (E) (S. 25), deren Gleichung $y^2 = \lambda(x - p)^2(x - q)$ schon auf die Form (K) gebracht ist, die Gleichung $y^2 = \lambda(p - q)(x - p)^2$ haben, was mit dem S. 26 Festgestellten übereinstimmt. Für die Tschirnhausensche Kubik ergibt sich auf diese Weise $y^2 = \frac{1}{3}(x + 8a)^2$ und der Winkel der Tangenten gegen die x -Achse zu 30° .

Beisp. 2. Wenn man in der kartesischen Gleichung $(x + 3a)(x^2 + y^2) = 4a^3$ der Maclaurinschen Trisektrix $y = 0$ setzt und die Doppelwurzel der entstandenen Gleichung in x sucht (vgl. S. 10), so findet man, daß sich die Gleichung der Kurve in die Form bringen läßt

$$y^2(x + 3a) + (x - a)(x + 2a)^2 = 0,$$

die ebenfalls von der Form (K) ist. Setzt man $x = -2a$ in die Koeffizienten ein, so ergibt sich für das Tangentenpaar des Doppelpunktes $y^2 = 3(x + 2a)^2$, also der Winkel der Tangenten gegen die x -Achse zu 60° .

Beisp. 3. Die Kurve 4. Ordnung $16(y^4 - 2ay^3 - 2a^2y^2) + (x^2 - 4a^2)^2 = 0$ (Beisp. von Cramer) mit den bisher benutzten Hilfsmitteln zu diskutieren. Die Kurve ist im Endlichen geschlossen.

18. Das „Auflösen“ von Doppelpunkten. Wir wollen nun, was wir seinerzeit an der semikubischen Parabel machten (Nr. 8), auch an einer Kubik mit Doppelpunkt ausführen, nämlich die Gleichungskonstante um ein Geringes verändern. Dieses von J. Plücker in seiner *Theorie der algebraischen Kurven* (1839) eingeführte Verfahren ist von der größten Wichtigkeit zur Erforschung der möglichen Gestalten algebraischer Kurven. Für den Augenblick nehmen wir wieder die Kubik (D) von S. 24, deren Gleichung wir jetzt schreiben wollen

$$(L) \quad y^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2\varepsilon}(x^3 - \varepsilon^2 x) + \varepsilon^2$$

und von der wir wissen, daß sie im Punkte $y = 0$, $x = \varepsilon/\sqrt{3}$ einen Knoten besitzt. Die Kurve hat für jedes ε , das jetzt nicht mehr besonders klein zu sein braucht, die Form der leicht ausgezogenen Kurve in Fig. 14*). Fügen wir jetzt auf der rechten Seite von (L) eine zunächst ganz kleine Konstante $\delta = \pm \frac{1}{4}$ additiv bei, so wird nach den in Nr. 7 erläuterten Sätzen entweder eine Kurve der Art I mit einem einzigen unpaaren Zweig, oder der Art II mit einem unendlichen Zweig und einem Oval entstehen. Wir können auch gleich angeben, für welches Vorzeichen von δ das eine oder andere eintreten wird. Denken wir uns nämlich in (A) alle Glieder auf die linke Seite gebracht, so daß die Gleichung die Form $f(x, y) = 0$ hat, so sehen wir, daß (für $\varepsilon > 0$) $f(0, 0)$ negativ ($= -\varepsilon^2$) ist. Für

*) In Fig. 14 ist wie in Fig. 7 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gewählt. Wir wollten hier nicht ein zu allgemeines Beispiel nehmen, wie etwa (E) von S. 25, wo erst eine Bedingung die Form angegeben hätte, noch auch ein zu spezielles, wie etwa die Tschirnhausensche Kubik von S. 11.

jeden Punkt x_0, y_0 innerhalb der Schleife der Kurve (L) ist also $f(x_0, y_0) < 0$. Überschreitet man demnach die Schleife an irgend einem Punkte, außer am Doppelpunkt selbst, so kommt man in ein Gebiet, wo $f(x_0, y_0) > 0$ ist, und beim weiteren Überschreiten eines der unendlichen

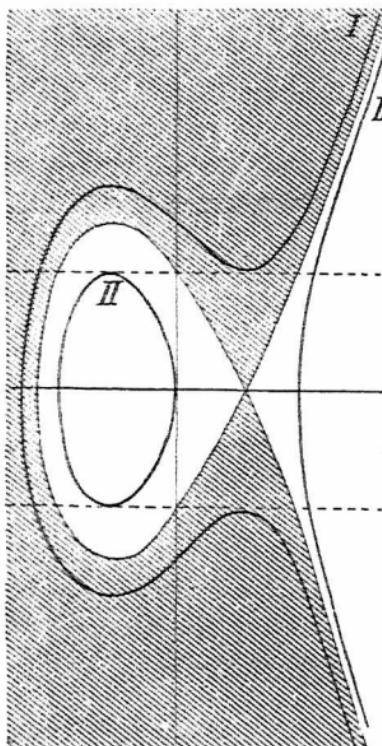


Fig. 14.

Aste in ein Gebiet, wo wieder $f(x_0, y_0) < 0$ ist, dasselbe Gebiet, das man vom Innern der Schleife aus beim Überschreiten des Doppelpunktes erreicht hätte (vgl. S. 19). Wir haben in Fig. 14 die Signierung durch Schraffierung des positiven Gebietes gekennzeichnet und können nun ohne weiteres sagen, daß (immer für $\varepsilon > 0$) die Hinzufügung eines positiven δ auf der rechten Seite von (L) eine Kurve $f(x, y) = \delta$ im schraffierten Gebiete, die Hinzufügung eines negativen δ eine solche von der Gleichung $f(x, y) = -\delta$ im nichtschraffierten Gebiete ergeben wird.

Bem. Es ist interessant, weiter zu verfolgen, was aus den Kurven der Fig. 14 wird, wenn δ im einen oder anderen Sinne unbegrenzt zunimmt. Vor allem bemerkt man, daß die Berührungs punkte der horizontalen Tangenten samt und sonders auf den beiden Geraden $x = \pm \varepsilon/\sqrt{3}$ liegen. Die Kurven des schraffierten Gebiets ändern also ihre Gestalt im wesentlichen nicht. Das Oval der Kurven des nichtschraffierten Gebiete schrumpft aber bei wachsendem $|\delta|$ immer mehr zusammen, bis es sich (für

$\delta = -4\varepsilon^3/3\sqrt{3}$) auf einen isolierten Punkt ($x_0 = -\varepsilon/\sqrt{3}$) zusammenzieht und schließlich ganz verschwindet.

19. Ableitung der Grundformen der Kubiken aus Kegelschnitt und Gerade. Sind $\Phi = 0$ und $G = 0$ die Gleichungen eines Kegelschnittes und einer Geraden, so stellt

$$\Phi G + \delta = 0$$

für kleine δ eine Kubik dar, die sich unter Auflösung der an den Schnittpunkten von Φ und G entstandenen Doppelpunkte eng an das System der beiden Linien anschmiegt (vgl. Fig. 15). Der Leser zeichne sich Figuren dieser Art

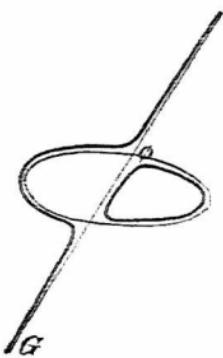


Fig. 15.

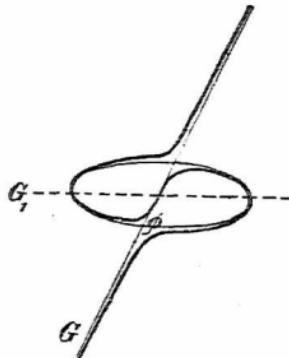


Fig. 16.

für alle möglichen Kegelschnitte mit Geraden in allen Lagen. Wird Φ von G nicht reell geschnitten, so entsteht an Stelle von G ein auf der einen Seite von G liegender flacher unpaarer Zweig mit zwei Wendepunkten, aus Φ wird ein eventuell parabolisches oder hyperbolisches Oval.

Ist G_1 eine weitere Gerade, die aber Φ reell schneiden soll, so stellt für sehr kleine δ die Gleichung

$$\Phi G + \delta G_1 = 0$$

eine Kubik dar, die wie die Kurve der Fig. 15 die Doppelpunkte, die Φ mit G bildet, löst, aber außerdem durch die Schnittpunkte von Φ und G mit G_1 geht (Fig. 16). Auch dieses Verfahren kann mannigfach variiert werden.

20. Ableitung der Grundformen der Quartiken aus zwei Kegelschnitten. Sind $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ zwei Ellip-

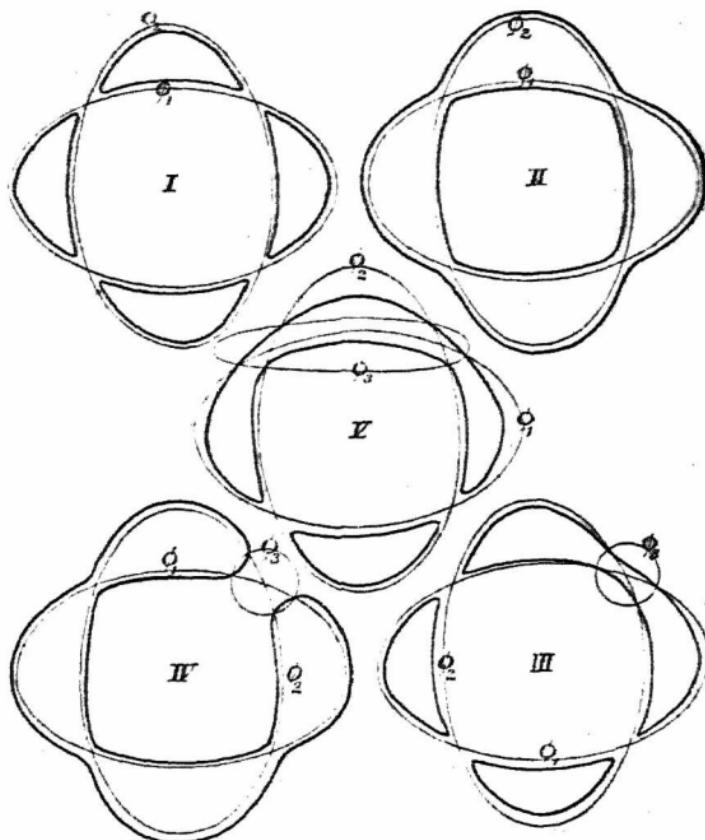


Fig. 17.

sen, die sich in vier reellen Punkten schneiden, so stellt die Gleichung

$$\Phi_1 \Phi_2 + \delta = 0$$

eine Quartik dar und zwar ergeben sich hier für verschiedene Vorzeichen von δ verschiedene Formen, je nachdem man an den Doppelpunkten „verbindet“ oder „trennt“.

Die eine (Fig. 17, I) besteht aus vier getrennten paaren Zügen mit je zwei Wendepunkten („Unifolien“), die andere (Fig. 17, II) aus einem „Quadrifolium“ mit einem eingeschlossenen Oval („Ring- oder Gürtelkurve“). Stellt Φ_3 eine weitere Ellipse (Kreis) vor, die aber ganz klein sein und nur den einen Schnittpunkt von Φ_1 mit Φ_2 umschließen soll, so gibt die Gleichung

$$\Phi_1 \Phi_2 + \delta \Phi_3 = 0$$

für positives oder negatives kleines δ an den drei anderen Schnittpunkten eine „Trennung“ (Fig. 17, III) oder eine „Verbindung“ (Fig. 17, IV), so daß entweder eine dreiteilige oder eine einteilige Form entsteht. Die erstere besitzt ein „Bifolium“ und zwei „Unifolien“, die letztere besteht aus einem „Quadrifolium“ allein. Ist der Kegelschnitt Φ_3 eine sehr schmale Ellipse, die zwei Schnittpunkte von Φ_1 , Φ_2 umschließt, so stellt die Gleichung, gleichgültig ob man an den zwei übrigen Schnittpunkten verbindet oder trennt, eine aus einem „Unifolium“ und einem „Trifolium“ bestehende, zweiteilige Form dar (Fig. 17, V; F. Klein 1876). Indem man hier den Kegelschnitten alle Lagen und Formen erteilt, lassen sich die mannigfachsten Formen ableiten. Wächst δ im Positiven oder Negativen, so verschwinden allmählich die Einbuchtungen der „Unifolien“ usw. (beim Trifolium der Kurve V schon angedeutet). So können sämtliche Züge zu reinen Ovalen werden. Die soeben abgeleiteten und gezeichneten Formen sind tatsächlich die 5 Grundtypen der reellen, singularitätenfreien Quartiken, sofern man nur die Anzahl der Züge und der Einbuchtungen in Betracht zieht (Zeuthen 1873/74).

II. Die Beziehungen zum Unendlichfernen.

21. Einführung eines Koordinatendreiecks. Wir wollen zu unseren zwei Koordinatenachsen noch eine weitere

Gerade G dazu nehmen und die Abstände von ihr mit z bezeichnen, so daß jeder Punkt P der Ebene durch die drei Abstände x, y, z bestimmt ist, die im Innern des von den drei Achsen gebildeten Dreiecks positiv sein sollen und im übrigen einzeln ihr Zeichen ändern, sobald eine Achse überschritten wird. Diese Abstände x, y, z können aber nicht mehr alle drei willkürlich gegeben werden, da schon zwei von ihnen den Punkt P festlegen. Sollen also immer alle drei Abstände x, y, z vorkommen, so dürfen wir nur verlangen, daß ein Punkt P , den wir bestimmen wollen, drei Abstände („Koordinaten“ nennen wir sie ebenfalls) habe, die gewissen Zahlen x_1, x_2, x_3 proportional sind, so daß also $x = \vartheta x_1, y = \vartheta x_2, z = \vartheta x_3$ ist. Die Konstruktion des Punktes P , wenn etwa x_1, x_2, x_3 als Strecken gegeben sind, ist ja aus den Elementen bekannt.

Die absoluten Werte von x, y, z müssen, da sie nicht unabhängig sind, einer Bedingung genügen. Diese wird durch die Lage der Geraden G bestimmt. Hat diese im alten Koordinatensystem die Gleichung, die wir in der Hesseschen Normalform annehmen wollen

$$G \equiv x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0,$$

wo p also das Lot auf die Gerade vom Ursprung und ω den Winkel dieses Lotes mit der positiven x -Achse bedeutet, so erhält man bekanntlich den Abstand eines beliebigen Punktes von G , indem man einfach die Koordinaten des Punktes statt der laufenden Koordinaten in den Ausdruck G einsetzt. Wenn p den absoluten Wert des Lotes OD (Fig. 18) bedeutet, ergeben sich so die Abstände aller Punkte P auf der Seite des Anfangspunktes als negativ. Da wir aber x_2 im Innern des Koordinatendreiecks OEF positiv haben wollen, nehmen wir

$$(1) \quad z = -(x \cos \omega + y \sin \omega - p)$$

oder

$$(1^*) \quad x \cos \omega + y \sin \omega + z = p,$$

eine Gleichung, die sich auch direkt durch Projektion des Streckenzuges $OAPC$ auf OD oder durch Ansetzen des Inhalts von $\triangle OEF$ ergäbe. Diese Gleichung (1*) oder (1) ist die gewünschte Beziehung zwischen x, y, z .

Wenn wir nun die Gleichung irgend einer Kurve, die im (x, y) -System gegeben ist, im (x, y, z) -System darstellen wollen, so ist von vornherein zu beachten, daß die neue Gleichung in x, y, z homogen werden wird, da sie ja nur eine Beziehung zwischen den Verhältnissen von x, y, z darstellen kann, nicht zwischen deren absoluten Werten. Wir können also wie oben setzen

$$(2) \quad x = \vartheta x_1, \quad y = \vartheta x_2, \quad z = \vartheta x_3,$$

wo jetzt aber die x_1, x_2, x_3 mit den x, y, z variabel sein sollen. Indem wir für z den Wert aus (1) nehmen, ergibt sich (2*) $x = \vartheta x_1, y = \vartheta x_2, p = \vartheta(x_1 \cos \omega + x_2 \sin \omega + x_3)$, demnach

$$(3) \quad x = \frac{px_1}{x_1 \cos \omega + x_2 \sin \omega + x_3},$$

$$y = \frac{px_2}{x_1 \cos \omega + x_2 \sin \omega + x_3}.$$

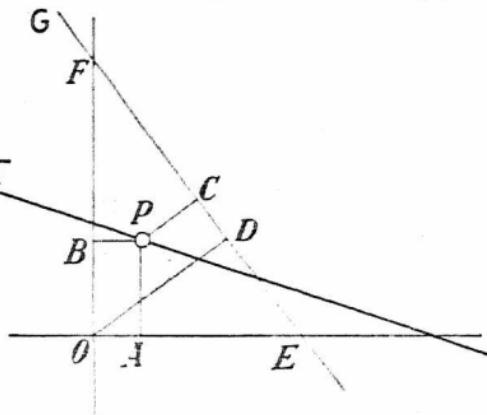


Fig. 18.

Durch diese Substitution kann jede durch eine Gleichung in (x, y) gegebene Kurve auf das Koordinatendreieck OEF bezogen werden, dessen drei Seiten die Gleichungen $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ haben.

22. Die rechtwinkligen Koordinaten als Grenzfall der Dreieckskoordinaten. Hat nun etwa eine Gerade Γ die Gleichung

$$(4) \quad \Gamma \equiv Ax + By + C = 0,$$

so erhält sie durch die Substitution (3) die in x_1, x_2, x_3 homogene Form

$$(5) \left(A + \frac{C \cos \omega}{p}\right)x_1 + \left(B + \frac{C \sin \omega}{p}\right)x_2 + \frac{C}{p}x_3 = 0.$$

Denken wir uns hier mit ϑ multipliziert, also statt x_1, x_2, x_3 wieder x, y, z geschrieben und lassen wir p immer größer und größer werden, dann werden in den Klammern, auch wenn wir dabei den Winkel ω beliebig ändern, die zweiten Glieder immer mehr der Null zustreben. Wenn man ferner in (1) mit p dividiert, so sieht man, daß für $p \rightarrow \infty z/p \rightarrow 1$ ist*), da ja auch z mit p unendlich groß wird, sofern nur x, y endlich bleiben. Wir erhalten demnach aus (5) für unendlich großes p die Gleichung (4) wieder.

Diese Tatsache zeigt, daß wir unser rechtwinkeliges Koordinatensystem als einen Grenzfall eines Systems von Dreieckskoordinaten betrachten können, wenn wir uns die dritte Koordinatenseite ins Unendliche gelegt denken. Daß diese „unendlich ferne Gerade“ keine Richtung mehr hat, daß sie also alle unendlich fernen Punkte enthält, geht daraus hervor, daß beim Grenzübergang ω beliebig ist. Ja, wenn wir wieder unser ursprüngliches, im Endlichen gelegenes Dreieckssystem zugrunde legen, können wir sogar die Bedingung in x_1, x_2, x_3 aufstellen, der alle unendlich fernen Punkte genügen, d. h. die Gleichung der unendlich fernen Geraden.

*.) Diese bequeme Limes-Bezeichnung wurde in den letzten Jahren aus England nach Deutschland eingefahrt.

Die Gerade Γ rückt nämlich dann ins Unendliche, wenn ihre Abschnitte auf den Achsen, nämlich $a = -C/A$ und $b = -C/B$, unendlich groß werden. Dies tritt für $A = 0, B = 0$ ein. Setzen wir aber in (5) $A = 0, B = 0$, so ergibt sich

$$(6) \quad x_1 \cos \omega + x_2 \sin \omega + x_3 = 0.$$

Das ist die gewünschte Gleichung. Daß sie in der Tat alle unendlich fernen Punkte der Ebene enthält, sieht man aus (3), da x und y nur unendlich werden, wenn (6) erfüllt ist.

23. Homogenisierung kartesischer Gleichungen. Suchen wir die Gleichung der unendlich fernen Geraden in unserem ursprünglichen (x, y) -System, so müßten wir eigentlich in (4) $A = 0, B = 0$ setzen. Das ergäbe die widersinnige Gleichung $C = 0$. Aber auch Gleichung (6) ist widersinnig. Denn nach (1*) ist ja die linke Seite immer der Strecke p proportional. Der Widerspruch besteht aber eben nur für endliche Werte von x, y bzw. x_1, x_2, x_3 . Gleichung (4) kann, wenn A und B Null sind, bloß für unendliche x, y bestehen, da dann die beiden Glieder Ax, By in der Form $0 \cdot \infty$ erscheinen und zusammen wohl $-C$ ergeben können. Ebenso muß man in (1*), nachdem die Substitution (2) gemacht und wenn (6) erfüllt ist, nur den Proportionalitätsfaktor ϑ gleich ∞ nehmen, damit rechts p herauskommen kann.

Um nun aber im Falle der rechtwinkligen Koordinaten auch mit der unendlich fernen Geraden wie mit einer dritten Koordinatenseite rechnen zu können, führt man in die kartesischen Gleichungen eine „homogenisierende Variable“ z ein, indem man x durch x/z , y durch y/z ersetzt. Dann lautet z. B. die Gleichung (4)

$$(7) \quad Ax + By + Cz = 0$$

und für $A = 0, B = 0$ ergibt sich $z = 0$ als Gleichung

der unendlich fernen Geraden, gerade so, als ob diese wirklich die dritte Koordinatenseite wäre. Ähnlich erhält man aus $xy = k$ durch Homogenisierung $xy = kz^2$ und wir können durch Übertragung der Betrachtungen von Nr. 12 aus dieser Form sehen, daß die Kurve (Hyperbel) von den Achsen $x = 0$, $y = 0$ in ihren Schnittpunkten mit $z = 0$, also im Unendlichen berührt wird. Wir sehen ferner, daß die Hyperbel in der Form $x^2/a^2 - y^2/b^2 = z^2$ mit $z = 0$ die durch $x^2/a^2 - y^2/b^2$ gegebenen Schnittpunkte hat und wie im vorigen Beispiel, daß dieses Geradenpaar zu gleicher Zeit die Asymptoten darstellt, da sich die Gleichung in der Form schreiben läßt $(x/a + y/b)(x/a - y/b) = z^2$. In derselben Weise erkennen wir, daß die Asymptoten der Ellipse imaginär sind und daß sie beim Kreise $x^2 + y^2 - r^2z^2 = 0$ lauten $x^2 + y^2 = 0$. Dieses imaginäre Geradenpaar $(x + iy)(x - iy) = 0$ gibt mit $z = 0$ zwei (imaginäre, unendlich ferne) Punkte, die sog. „imaginären Kreispunkte“, durch die jeder Kreis der Ebene geht, weil jede Kreisgleichung durch $z = 0$, $x^2 + y^2 = 0$ erfüllt ist.

Bem. 1. Diese unendlich ferne Gerade hat freilich keine Realität im physischen Sinne. Aber ihre Einführung und die Homogenisierung der Gleichungen erleichtert deren Diskussion sehr, wie wir im folgenden noch genugsam sehen werden. Geometrisch beruht die Einführung einer unendlich fernen Geraden darauf, daß bei der Projektion einer Ebene ε auf eine andere $\acute{\varepsilon}$ von einem Punkte A aus (Fig. 19) jede Gerade von ε in eine Gerade von $\acute{\varepsilon}$ übergeht, mit Ausnahme der Geraden G , die durch die A enthaltende Parallelebene zu $\acute{\varepsilon}$ auf ε ausgeschnitten wird. Dieser Geraden G entsprechen sämtliche unendlich fernen Punkte von $\acute{\varepsilon}$. Andererseits gibt es in $\acute{\varepsilon}$ eine Gerade H' , der alle unendlich fernen Punkte von ε entsprechen. Diese Ausnahmen werden beseitigt, wenn wir die unendlich fernen Punkte von ε bzw. $\acute{\varepsilon}$ als auf einer Geraden H , bzw. G' liegend annehmen. Sind dann OX , OY unsere rechtwinkeligen Achsen in ε , G die dritte Koordinatenseite, so gehen diese Geraden in zwei Achsen

$O X'$, $O Y'$ und die unendlich ferne Gerade von ϵ über, wobei sich die Rechtwinkligkeit von $O X'$, $O Y'$ durch geeignete Wahl von A leicht erreichen lässt. Die Fig. 19 ist so die geometrische Interpretation unserer Formeln (3).

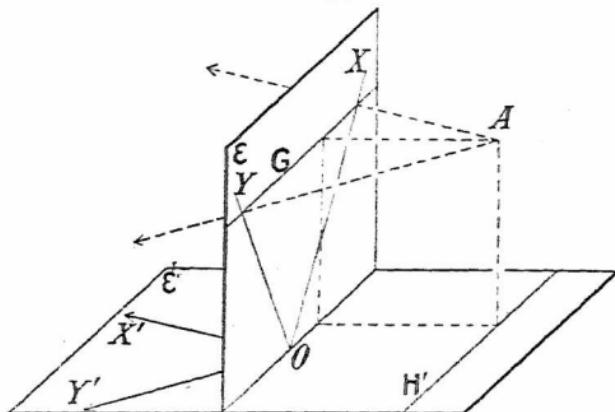


Fig. 19.

Bem. 2. Die hier gegebene Einführung der Dreieckskoordinaten ist natürlich sehr spezialisiert. Aber der Leser wird jetzt leichter folgendes verstehen*). Es seien zwei Ebenen ϵ und ϵ' gegeben, in ϵ ein rechtwinkeliges (x, y) -System, in ϵ' ein eben-solches (x', y') -System. Setzt man nun

$$x = \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma}{\alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma''}, \quad y = \frac{\alpha' x' + \beta' y' + \gamma'}{\alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma''},$$

so kann das immer als eine Zentralprojektion, („Kollineation“) geometrisch gedeutet werden. Die y -Achse der Ebene ϵ ($x = 0$) geht dabei in die Gerade $\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$ von ϵ' , die x -Achse ($y = 0$), in die Gerade $\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' = 0$ und die unendlich ferne Gerade von ϵ in die Gerade $\alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' = 0$ über. Nimmt man nun aber in ϵ' diese drei Geraden als Koordinatenachsen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, so lautet die Gleichung der Projektion irgendeiner Kurve $f(x, y, z) = 0$, wenn man sie auf dieses Koordinatendreieck bezieht, einfach $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Man wird also die Dreieckskoordinaten besonders dann verwenden-

*) Beziiglich genauerer Ausführungen sei auf K. Doeblemanns *Geom. Transformationen*, I. Teil, Smmlg. Schubert XXVII, Leipzig, Göschen, 1902, verwiesen.

den, wenn es sich um die Untersuchung von Eigenschaften handelt, die „projektiv“ sind, d. h. bei einer Zentralprojektion erhalten bleiben. Schreiben wir z. B. $x_1 x_2 = kx_3^2$ statt $xy = kz^2$, indem wir irgend ein Dreieck zugrunde legen, so stellt diese Gleichung keine Hyperbel mehr vor, ja wir können ohne genaue Festlegung der drei Koordinatenseiten gegen das ursprüngliche System gar nicht angegeben, was für eine Art Kegelschnitt es ist. Aus der Form der Gleichung sehen wir aber, daß der Kegelschnitt die Achsen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ berührt, und zwar in den Schnittpunkten mit $x_3 = 0$, d. h. in zwei Koordinatenecken. Und lassen wir k variieren, so haben wir eine Schar sich doppelt berührender Kegelschnitte (vgl. Nr. 12).

24. Die allgemeine Kubik mit Spitze. Betrachten wir nun die Kubik

$$(8) \quad x_1^2 x_2 = \lambda x_3^3,$$

die auf ein beliebiges Dreieck bezogen sei, so sehen wir, daß sie durch die Ecken $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ geht, und zwar durch die erste so, wie sich die semikubische Parabel $y^2 = \lambda x^3$ im Anfangspunkt, durch die zweite so, wie sich die kubische Parabel $y = \lambda x^3$ dort verhält (s. Nr. 13). Die Kubik (8) hat also im ersten Punkt eine Spitze mit $x_1 = 0$ als Tangente, im zweiten einen Wendepunkt mit $x_2 = 0$ als Tangente. Da in jeder Ecke die dritte Koordinate konstant ist, so kann man nämlich auf jede Koordinatenecke den Satz über die Tangenten des Anfangspunktes (Nr. 16) ohne weiteres anwenden, wenn man für den Augenblick die betreffende dritte Koordinate etwa gleich 1 setzt, so wie man sich in der Gleichung (G) von Nr. 16 $z = 1$ gesetzt denken kann (vgl. Nr. 26).

Schreiben wir nun wieder die Gleichungen der kubischen und der semikubischen Parabel in ihren ursprünglichen Formen, fügen aber die homogenisierende Variable z bei, so lauten sie

$$yz^2 = \lambda x^3, \quad y^2 z = \lambda x^3,$$

und wir sehen, daß sie auseinander hervorgehen, wenn

man nur die x -Achse ($y = 0$) und die unendlich ferne Gerade ($z = 0$) vertauscht. Die beiden Kurven sind also zueinander projektiv, und zwar hat die kubische Parabel im unendlich fernen Punkt der y -Achse eine Spitze, die semikubische Parabel in demselben Punkt einen Wendepunkt. Tangente (dreipunkig berührend) ist in beiden Fällen die unendlich ferne Gerade.

Beisp. Um uns von einer Kurve der allgemeinen Form (8) eine Vorstellung zu machen, setzen wir etwa

$$\vartheta x_1 = y; \quad \vartheta x_2 = x + y - 1; \quad \vartheta x_3 = x; \quad \lambda = 2.$$

Dann haben wir die Gleichung

$$(A) \quad y^2(x + y - 1) = 2x^3.$$

Wir wissen, daß die dargestellte Kubik im Anfangspunkt eine Spitze mit der x -Achse als Tangente hat, im Schnittpunkt von $x_2 = 0$ mit der y -Achse einen Wendepunkt mit $x_2 = 0$ als Tangente. Um eine genauere Vorstellung von der Kurve zu erhalten, suchen wir die unendlich fernen Punkte, indem wir in (A) homogenisieren (statt 1 in der Klammer z schreiben) und dann $z = 0$ setzen. Wir erhalten so

$$y^3 + y^2x - 2x^3 = 0.$$

Durch Probieren findet man den Faktor $y - x$ der linken Seite und dann die Zerlegung

$$(y - x)(y^2 + 2yx + 2x^2) = 0.$$

Der zweite Faktor gibt eine imaginäre Zerlegung. Die Kurve hat also nur einen reellen unendlich fernen Punkt in der Richtung der ersten Winkelhalbierenden $y = x$. Hierdurch läßt sich schon die bisher offene Frage entscheiden, ob die Spitze der Kurve nach rechts oder links weist (Fig. 20). Sie muß nach rechts weisen, weil sonst die Kurve eine Gestalt haben müßte, daß eine Gerade sie in 5 Punkten schneiden könnte. Das ist bei Kurvendiskussionen ein Gesichtspunkt, den man nie außer acht lassen darf.

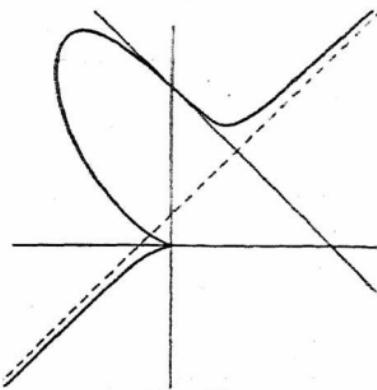


Fig. 20.

Da dem Leser der Begriff der Asymptote von der Hyperbel her bekannt ist, wollen wir gleich mittels der einfachen Methode, die man auch in der Differentialrechnung lernt, die Asymptote der Kurve bestimmen. Wir setzen nämlich $y = x + \delta$ in die Kurvengleichung ein und suchen δ so zu bestimmen, daß zwei Schnittpunkte ins Unendliche fallen, daß also die Gerade die Kurve dort berührt. Die Substitution ergibt die Gleichung

$$(x + \delta z)^3(2x + \delta z - z) = 2x^3,$$

wobei gleichzeitig homogenisiert wurde. Entwickelt man links, so sieht man gleich, daß sich $2x^3$ hebt, worauf der Faktor z heraustritt. Dieser Faktor deutet den einen Schnittpunkt im Unendlichen an. Nach seiner Abscheidung hat man die Gleichung

$$x^2(5\delta - 1) + 2xz\delta(2\delta - 1) + z^2\delta^2(\delta - 1) = 0,$$

Nehmen wir nun $5\delta - 1 = 0$, also $\delta = \frac{1}{5}$, so tritt noch einmal der Faktor z heraus und die Gerade $y = x + \frac{1}{5}$ ergibt sich als Asymptote. Den einen weiteren Schnittpunkt mit der Kurve gibt ebenfalls die vorhergehende Gleichung, wenn wir in allen Gliedern $\delta = \frac{1}{5}$ setzen. Man erhält $x = -\frac{2}{15}$, $y = \frac{1}{15}$. Zur genaueren Bestimmung kann man noch Anhaltspunkte suchen für die senkrechten und wagrechten Tangenten. Es gibt nur eine senkrechte Tangente, deren Berührungs punkt (x_0, y_0) auf der Geraden $2x + 3y - 2 = 0$ liegt ($x_0 = -0,72$, $y_0 = 1,14$) und zwei wagrechte, für deren Berührungs punkte $y = \pm x\sqrt{2}$ ist ($x_1 = 0,32$, $y_1 = 0,78$; $x_2 = -0,6$, $y_2 = 1,5$). Ferner kann man Gleichung (A) auch auf die Form bringen

$$y^2(y - 1) = -x(y + x\sqrt{2})(y - x\sqrt{2}).$$

Die Kubik geht also durch die Schnittpunkte von $y = 1$ und dem Geradenpaar $y = \pm x\sqrt{2}$ ($x = -0,71$). Das alles reicht längst hin, um die Kurve richtig zu zeichnen.

25. Kubiken ohne Asymptote. Es wäre vergebliche Mühe, bei der kubischen oder semikubischen Parabel (ähnlich wie bei der gemeinen Parabel), nach Asymptoten zu suchen, da ja die unendlich ferne Gerade selbst Tangente ist in dem einen unendlich fernen Punkt, der als dreifacher Berührungs punkt zählt. Wir werden in Zukunft öfters in die Lage kommen zu sagen, die und die Kurve habe die unendlich ferne Gerade zur einfachen

Tangente, zur Wende- oder Spitzentangente in einer bestimmten Richtung. Die Zweige werden dann immer in der Art wie bei der gewöhnlichen, bei der kubischen oder semikubischen Parabel ins Unendliche streben. Wie z. B.

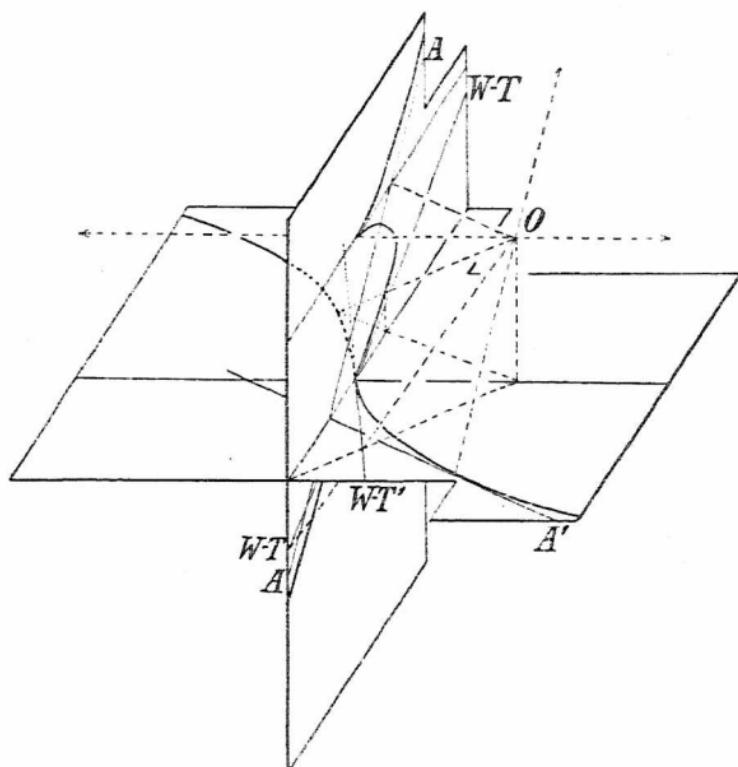


Fig. 21.

aus der Kurve (A) der vorigen Nummer die kubische Parabel durch Zentralprojektion hervorgeht, haben wir in Fig. 21, die für sich selbst sprechen mag, darzustellen versucht.

Bem. Newton hat in seiner *Enumeratio* (siehe S. 6) zuerst den Satz aufgestellt, jede Kubik könne so projiziert werden, daß ihre Gleichung in der Form erscheint
(B) $y^2 = \lambda(x^3 + Ax^2 + Bx + C)$.

Homogenisieren wir die Gleichung, so lautet sie

$$[y^2 - \lambda(Ax^2 + Bxz + Cz^2)] \cdot z = \lambda x^3.$$

Demnach ist der unendlich ferne Punkt der y -Achse Wendepunkt mit der unendlich fernen Geraden als Tangente. Die Kurven (B) gehen daher, da sie außerdem symmetrisch gegen die x -Achse sind, alle wie die semikubische Parabel $y^2 = \lambda x^3$ ins Unendliche und haben infolgedessen den gemeinsamen Namen „divergierende Parabeln“ erhalten. Wenn man die rechte Seite von (B) zerlegt, kann man schreiben

$$(B^*) \quad y^2 = \lambda(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

Wir kennen die Kurvenformen, die sich aus (B*) durch Variation von α, β, γ ergeben, schon alle und wollen hier nur die 5 Typen zusammenstellen, die Newton bereits angab ($\lambda > 0$):

I. $\alpha < \beta < \gamma$; unendlicher Zug mit Oval (vgl. Fig. 7, S. 20).

II. $\alpha = \beta < \gamma$; unendlicher Zug mit isoliertem Punkt (vgl. Nr. 15). [Fig. 4, S. 11].

III. $\alpha < \beta = \gamma$; Form mit Doppelpunkt (vgl. Fig. 7 und

IV. $\alpha = \beta = \gamma$; Form mit Spitze (vgl. Fig. 2, S. 7).

V. α und β konjugiert imaginär; unendlicher Ast allein (vgl. Fig. 5, S. 16 u. Fig. 6, S. 19).

Auch ohne nähere Kenntnisse der Theorie der Kurven 3. Ordg. kann man die Möglichkeit der Transformation einer ganz allgemeinen Gleichung in die Form (B) erkennen. Es ist nur vorauszusetzen, daß die Kurve einen Wendepunkt hat. Man transformiert dann so, daß die Wendetangente zu $z = 0$ und eine beliebige Gerade durch den Wendepunkt zu $x = 0$ wird. Dadurch kommen die Glieder mit x^2y, xy^2 und y^3 zum Fortfall. Jetzt ist nur noch $y = \varrho x' + \sigma y' + \tau z'(x = x', z = z')$ zu setzen und ϱ, σ, τ so zu bestimmen, daß auch die Glieder mit xyz und yz^2 verschwinden.

26. Allgemeine Behandlung der Asymptoten. Unsere bisherigen gelegentlichen Bemerkungen über das Verhalten der Kurven im Unendlichen wollen wir nun in etwas allgemeinerer Art zusammenfassen und die verschiedenen Vorkommnisse mit Beispielen belegen. Schreiben wir die Gleichung (G) von Nr. 16 homogenisiert, so lautet sie

$$(1) \quad C(x, y, z) \equiv u_0 z^n + u_1(x, y) \cdot z^{n-1} + \dots \\ + u_{n-1}(x, y) \cdot z + u_n(x, y) = 0,$$

wobei die $u_i(x, y)$ homogene Ausdrücke in x, y vom i^{ten} Grade sind. Setzt man in (1) $z = 0$, so erhält man nach Division der Gleichung mit dem Koeffizienten von y^n aus

(2) $u_n(x, y) \equiv (y - \lambda_1 x)(y - \lambda_2 x) \dots (y - \lambda_n x) = 0$
 die n Richtungen der unendlich fernen Punkte der Kurve. Dabei können beliebig viele λ_i gleich 0 oder gleich ∞ sein (in welch letzterem Falle der betreffende Faktor einfach die Form x hat) und auch beliebig viele λ_i, λ_j gleich sein. Auf alle Fälle sind es n Faktoren. Indem man alle übrigen Glieder zusammenfaßt, kann man statt Gleichung (1) schreiben

$$(3) \quad z \cdot \Phi(x, y, z) + u_n(x, y) = 0,$$

die gemäß Nr. 10 aussagt, daß die Kurve (3) durch die Schnittpunkte jeder einzelnen der durch $u_n(x, y) = 0$ dargestellten Geraden mit $z = 0$ geht. Die einzelnen Faktoren stellen daher, wenn wir jetzt vielfache Faktoren ausschließen, nur parallel zu den Asymptoten durch den Anfangspunkt gehende Gerade, aber nicht jene selbst dar. Haben nun die Asymptoten Gleichungen der Art $y - \lambda_i x + \delta_i z = 0$, so ist das Produkt

$$(4) \quad (y - \lambda_1 x + \delta_1 z)(y - \lambda_2 x + \delta_2 z) \dots (y - \lambda_n x + \delta_n z) \\ = u_n(x, y) + [\delta_1 u_{n(1)}(x, y) + \delta_2 u_{n(2)}(x, y) + \dots \\ + \delta_n u_{n(n)}(x, y)] \cdot z + \Theta(x, y, z) \cdot z^2.$$

Hierin soll $u_{n(i)}(x, y)$ das Produkt $u_n(x, y)$ ohne den Faktor $y - \lambda_i x$ bedeuten. In dem letzten Glied $\Theta(x, y, z) \cdot z^2$ sind alle Glieder zusammengefaßt, die eine höhere Potenz von z als die erste enthalten. Die Gleichung (3) kann aber dann geschrieben werden

$$(5) \quad \Omega(x, y, z) \cdot z^2 + (y - \lambda_1 x + \delta_1 z)(y - \lambda_2 x + \delta_2 z) \dots \\ \cdot (y - \lambda_n x + \delta_n z) = 0$$

(vgl. Nr. 12), wobei $\Omega(x, y, z)$ den Ausdruck $\Theta(x, y, z)$

als Summanden enthält. Nach Nr. 12 charakterisiert Gleichung (5) jede Gerade $y - \lambda_i x + \delta_i z = 0$ als Tangente der Kurve im Schnittpunkt mit $z = 0$, also als Asymptote. Aus Gleichung (5) ergibt sich aber ferner, daß (6) $\delta_1 u_{n(1)}(x, y) + \dots + \delta_n u_{n(n)}(x, y) \equiv u_{n-1}(x, y)$. Denn außer dem in (4) mit der eckigen Klammer behafteten Glied können weitere in z lineare Glieder in (5) nicht auftreten. Vergegenwärtigen wir uns nun die Bedeutung von $u_{n(i)}(x, y)$, so sehen wir, daß

$$(7) \frac{u_{n-1}(x, y)}{u_n(x, y)} = \frac{\delta_1}{y - \lambda_1 x} + \frac{\delta_2}{y - \lambda_2 x} + \dots + \frac{\delta_n}{y - \lambda_n x}.$$

D. h. die Partialbruchzerlegung von $u_{n-1}(x, y)/u_n(x, y)$ liefert mit einem Schlag sämtliche Ergänzungsglieder $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ der Asymptotengleichungen.

Beisp. Die Kurve (Trisektrix von de Longchamps)

$$(A) \quad x(3y^2 - x^2) + a(x^2 + y^2) = 0$$

hat drei reelle Asymptoten. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{x(3y^2 - x^2)} &= \frac{\tilde{\alpha}}{x} + \frac{\alpha}{y\sqrt{3} + x} + \frac{\tilde{\alpha}}{y\sqrt{3} - x} \\ &= \frac{\tilde{\alpha}(3y^2 - x^2) + \alpha(xy\sqrt{3} - x^2) + \tilde{\alpha}(xy\sqrt{3} + x^2)}{x(3y^2 - x^2)}. \end{aligned}$$

Die Koeffizientenvergleichung*) in den Zählern ergibt die drei Gleichungen

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} = 0; \quad 3\tilde{\alpha} = 1; \quad -\tilde{\alpha} - \alpha + \tilde{\alpha} = 1$$

und hieraus $\tilde{\alpha} = \frac{1}{3}$, $\alpha = -\frac{2}{3}$, $\tilde{\alpha} = +\frac{2}{3}$, so daß die drei Asymptoten lauten

$$x + \frac{1}{3}a = 0; \quad y\sqrt{3} \pm (x - \frac{2}{3}a) = 0.$$

Bildet man das Produkt der Asymptoten und sucht die Glieder, die zur Wiederherstellung von Gleichung (A) dienen, so findet man, wenn man homogenisiert,

$$(A^*) \quad (x + \frac{1}{3}az)[3y^2 - (x - \frac{2}{3}az)^2] + \frac{4}{27}a^3z^3 = 0.$$

Es sind also diesmal nicht bloß alle Glieder mit z , sondern auch alle mit z^2 in das Asymptotenprodukt geschlüpft. Die Asym-

*) Natürlich kann man die Zähler auch direkt bestimmen. Vgl. z. B. Bauers *Algebra*, 2. Aufl., Leipzig, Teubner, 1910, S. 39.

ptoten berühren sämtliche in Wendepunkten, sie sind „Wende-asymptoten“ (Fig. 22). Wie das aussehen muß, kann man sich von vornherein versinnlichen, wenn man sich den dritten Schnittpunkt einer Asymptote mit der Kurve ins Unendliche rückend denkt. Der unendliche Zweig gelangt eben dann vollständig auf die eine Seite der Asymptote.

Das einfachste Beispiel hierfür gibt die „kubische Hyperbel“ mit der Gleichung $x^2y = \lambda z^3$, die ebenfalls eine Projektion der Kurve (8) von Nr. 24 ist. Sie hat die x -Achse zur Wendeasymptote, und außerdem liegt auch die Spitze im Unendlichen (Spitzen-Tangente $x = 0$; Fig. 23).

Die Asymptoten der Kurve (A) bilden ein gleichseitiges Dreieck. In der Tat ist die Trisektrix von de Longchamps dreifach symmetrisch, wie besonders aus der Gleichung in Polarkoordinaten $\varrho = \cos 3\theta$, die für $\theta, \theta + 120^\circ$ und $\theta + 240^\circ$ immer dasselbe ϱ ergibt, ersichtlich ist. Im Anfangspunkt hat sie einen isolierten Punkt mit „isotropen“ Tangenten (die nach den imaginären Kreispunkten gehen). Sie gehört zum Typus II von Nr. 25.

27. Bestimmung einzelner Asymptoten. Häufig hat man nur eine Asymptote zu bestimmen, da die anderen imaginär sind. Dann ist das Verfahren der Partialbruchzerlegung zu umständlich. Auch die Methode, die wir im Beisp. von Nr. 24 angewendet haben, ist nicht sehr empfehl-

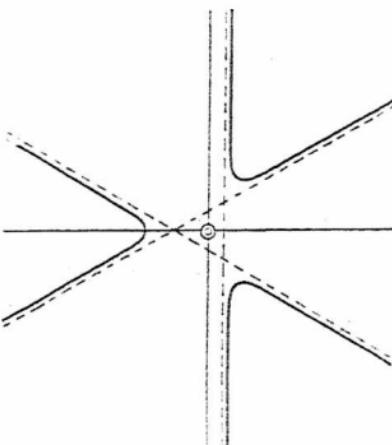


Fig. 22.

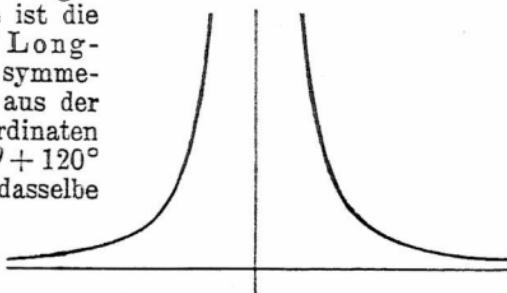


Fig. 23.

lenswert. Hingegen findet in diesem Falle (übrigens auch im Falle mehrerer Asymptoten) die Regel der Bem. 1 von S. 30 bequeme Anwendung. Denn ist nur die Gleichung in der Form geschrieben

$$(8) \quad z \cdot \Phi(x, y, z) + (y - \lambda_i x) \cdot u_{n(i)}(x, y) = 0,$$

so ergibt sich die Tangente in dem Punkte $y = \lambda_i x, z = 0$ sofort als

$$(9) \quad z \cdot \Phi(1, \lambda_i, 0) + (y - \lambda_i x) \cdot u_{n(i)}(1, \lambda_i) = 0.$$

Beisp. 1. Schreibt man die Gleichung der Kurve (A) des Beisp. von Nr. 24 in der Form

$$(y - x)(y^2 + 2yx + 2x^2) - y^2z = 0,$$

so hat man für die Asymptote ohne weiteres die Gleichung

$$(y - x)(1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2) - 1^2 z = 0$$

oder $y = x + \frac{1}{z}$.

Beisp. 2. Die Maclaurinsche Trisektrix (s. S. 11) läßt schon durch ihre Gleichung $(x + 3az)(x^2 + y^2) = 4a^3z^3$ die Gerade $x = -3a$ als Wendeasymptote erkennen. Eine gewöhnliche Asymptote wäre hier auch wegen der Symmetrie zur x -Achse nicht möglich. Auch die beiden isotropen Geraden $y = \pm i x$ (vgl. S. 49) sind Wendeasymptoten. Dieses gänzlich andere Verhalten im Unendlichen ist natürlich die Ursache, daß die Kurve nicht auf die Gleichungsform der divergierenden Parabeln gebracht werden kann (vgl. Bem. 2 v. Nr. 14).

Beisp. 3. Es sei ein Kreis vom Durchmesser $O O' = 2r$ gegeben und in O' die Tangente an den Kreis gelegt. Irgend eine Sekante durch O schneide den Kreis in A , die Tangente in B . Macht man auf dieser Sekante immer $OP = AB$, so beschreibt P die bekannte Kisoide des Diokles (wahrsch. 2. Jhrh. v. Chr.). Gleichung $x(x^2 + y^2) = 2ry^2$. Spitze im Ursprung, die Tangente des Kreises in O' ist Wendeasymptote.

28. Berührungen einer Kurve durch die unendlich ferne Gerade. Wenn die Asymptotenrichtung die einer Koordinatenachse (z. B. $y = 0$) ist, so findet man die Asymptote selbst am allereinfachsten, indem man die Tangente in jener unendlichfernen Koordinatenecke mittels der niedrigsten Glieder (z. B. in x, z) bestimmt. Dies ist besonders auch dann zu empfehlen, wenn eine höhere Potenz von x oder y

in dem Aggregat $u_n(x, y)$ als Faktor auftritt. Ist $u_n(x, y)$ allgemeiner von der Form $(y - \lambda_i x)^k u_{n(i)}(x, y)$, so daß also die Gleichung geschrieben werden kann

$$(10) \quad C(x, y, z) \equiv z \cdot \Phi(x, y, z) + (y - \lambda_i x)^k \cdot \Psi_{n-k}(x, y) = 0$$

und ist k zunächst gleich 2, so wissen wir schon aus dem Satz von Nr. 12, daß in diesem Falle die Kurve C von $z = 0$ in dem Punkte, der in der Richtung $y = \lambda_i x$ liegt, einfach (zweipunkig) berührt wird, während im Falle $k = 3$ die unendlich ferne Gerade Wendetangente ist. Im erstenen Falle hat die Kurve also einen Zweig, der wie eine gewöhnliche Parabel ins Unendliche strebt, im zweiten verlaufen zwei Äste wie die der semikubischen Parabel. Über die höheren Fälle dieser Art werden wir in Nr. 54 sprechen. Daß in jedem solchen Falle, sofern nur Φ nicht z als Faktor enthält, wirklich nur $z = 0$ die alleinige Tangente im unendlichfernen Punkte ist, kann man für ein beliebiges k beweisen, indem man eine Koordinatenachse mit der Geraden $y - \lambda_i x = 0$ zusammenfallen läßt. Die Transformation $y - \lambda_i x = \xi$, $y = \eta$ oder $\lambda_i x = \eta - \xi$, $y = \eta$ läßt nun aus der Gleichung (10) die folgende entstehen

$$(11) \quad z \cdot \Phi'(\xi, \eta, z) + \xi^k \cdot \Psi'_{n-k}(\xi, \eta) = 0.$$

In dem Ausdruck Φ der Gleichung (10) muß nun aber mindestens ein Glied $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension in x, y enthalten sein, da sonst z in einer höheren Potenz herausgestellt werden könnte. Sei dies Glied etwa $y^i x^{n-i-1}$, so wird aus ihm durch die angedeutete Transformation $\eta^i (\eta - \xi)^{n-i-1}$, so daß also in dem Ausdruck Φ' der Gleichung (11) immer ein Glied mit η^{n-1} vorkommt. Da man nun, um die Tangente in der Ecke $\xi = 0, z = 0$ zu bestimmen, die niedrigsten Glieder in ξ, z suchen muß, so geben diese in (11) nur z , da sie offenbar als Faktoren der höchsten Potenz von η

aufreten, die η^{n-1} ist, ein Glied mit $\eta^{n-1} \xi$ (für $k > 1$) aber nicht vorkommt. Die Kurve hat in dem Punkte $\xi = 0$, $z = 0$ (für $k > 2$) eine reine „Liniensingularität“.

Beisp. 1. Die Gleichung der Quartik vom Beisp. 3 d. Nr. 13 läßt sich schreiben $z(a^4 z^3 - 2a^2 x^2 z - 4a y^3) + x^4 = 0$. Die Kurve hat also in der Richtung von $x = 0$ alle 4 unendlichfernen Punkte vereinigt. Das (höchste) Glied in y hat die Potenz y^3 und den Faktor z allein. Also ist $z = 0$ die einzige Tangente dieses unendlich fernen Punktes. Über seine Art sehe man Nr. 52.

Beisp. 2. Die Kubik

$$(A) \quad (y + x)^2(y - 2x) + a(x^2 + xy + y^2) = 0$$

hat einen isolierten Punkt im Ursprung. Die unendlich fernen Punkte liegen in den Richtungen $y = -x$ und $y = 2x$. Die eine einfache Asymptote läßt sich nach der Methode von Nr. 27 sofort als $9(y - 2x) + 7a = 0$ aus der Gleichung (A) ablesen. Nun setzen wir $y + x = \xi$, $y = \eta$ oder also $x = \xi - \eta$, $y = \eta$. Dann wird die Gleichung, wenn wir noch z einführen,

$$(A^*) \quad \xi^2(3\eta - 2\xi) + az(\xi^2 - \xi\eta + \eta^2) = 0.$$

Die Gleichung ist jetzt auf ein System von schiefwinkeligen Achsen bezogen. Wie eine Zeichnung lehrt, laufen aber nur die ξ parallel zur Achse $\eta = 0$, die η bilden mit der Achse $\xi = 0$ einen Winkel von 45° (stehen senkrecht auf $\eta = 0$). Wir hätten $y = \eta\sqrt{2}$ setzen müssen, um einen richtigen Übergang zu den gewöhnlichen schiefwinkeligen Koordinaten zu erhalten. Diese Konstantenbestimmung ist aber für unsere Zwecke überflüssig. Wir fassen die ξ , η zusammen mit z als Dreieckskoordinaten auf und lassen die Frage nach den Konstanten, mit denen etwa die senkrechten Abstände eines Punktes von den Achsen $\xi = 0$, $\eta = 0$ multipliziert werden müßten, offen. Die Veränderung dieser Konstanten beeinflußt nämlich nur die Maßstäbe. Für das (projektive) Verhalten im Unendlichen und daher für die Bestimmung der Tangenten ist die Größe dieser Konstanten belanglos, zumal wir wieder ebenso zurücktransformieren.

Nachdem diese Betrachtung ein für allemal gemacht ist, sehen wir, daß (A*) im Punkte $\xi = 0$, $z = 0$ die Tangente $z = 0$ hat (Faktor des Gliedes $a\eta^2$). Wenn man nun aber eine Parabel angeben könnte, die ebenso ins Unendliche geht, wie die Kurve selbst, so hätte man einen weit besseren Anhaltspunkt für deren Verlauf.

Eine solche Parabel hat jedenfalls die Gleichung $\eta = \lambda \xi^2$. Setzen wir in der Tat $\eta = \lambda \xi^2$ in (A*) ein, so ergibt sich (für $z = 1$) die Gleichung

$$(I) \quad \xi^3(3\lambda\xi - 2) + a\xi^2(1 - \lambda\xi + \lambda^2\xi^2) = 0.$$

Diese Gleichung gibt die Abszissen der Schnittpunkte beider Kurven, von denen zwei in den Anfangspunkt fallen. Sie ist aber nur vierten statt sechsten Grades. Das zeigt an, daß zwei Werte von ξ unendlich groß sind. Jede Parabel $\eta = \lambda \xi^2$ berührt also die Kubik im Unendlichen. Bestimmen wir aber λ so, daß auch der Koeffizient von ξ^4 verschwindet, setzen also $3\lambda + a\lambda^2 = 0$, λ demnach, da $\lambda = 0$ auszuschließen ist, gleich $-3/a$, so fällt noch ein weiterer Schnittpunkt ins Unendliche. Die Parabel $a\eta = -3\xi^2$ oder

$$(II) \quad 3(x + y)^2 + ay = 0$$

oskuliert also unsere Kubik im Unendlichen. Sie ist in Fig. 24 gezeichnet. Gleichung (I)

gibt, nach Division mit ξ^2 und Einsetzung von $\lambda = -3/a$, die Abszisse $\xi = -a$ für den sechsten Schnittpunkt der Parabel mit der Kubik. Das führt zu den Koordinaten $x_0 = 2a$, $y_0 = -3a$. Der Punkt fand auf der Figur nicht mehr Platz.

Da eine Parabel durch 4 Punkte bestimmt ist, kann man in jedem Punkte einer Kurve eine Parabel angeben, die dort vierpunktig berührt. Versuchen wir das in unserem Falle zu machen, so brauchen wir der Parabelgleichung nur ein in ξ lineares Glied beizufügen, die Gleichung also etwa zu schreiben $\xi^2 + \frac{1}{3}a\eta + \beta\xi$, diese zu multiplizieren mit der Gleichung der Asymptote und das Produkt mit (A*) zu vergleichen.

Es ergibt sich, daß man (A*) in der Form schreiben kann (A**) $(3\eta - 2\xi + \frac{5}{3}a)(\xi^2 + \frac{1}{3}a\eta - \frac{1}{3}a\xi) - \frac{7}{81}a^2(3\eta - \xi) = 0$, was für (A) die Form ergibt

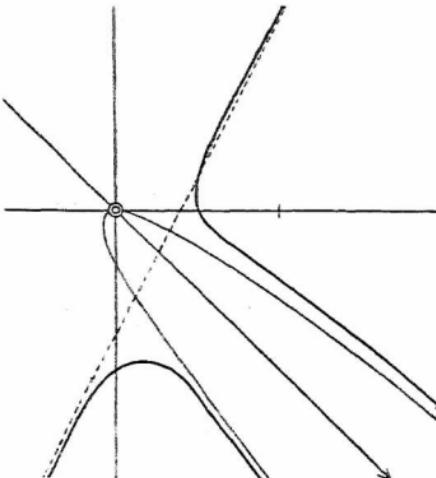


Fig. 24.

$$(A \dagger) \quad (y - 2x + \frac{1}{3}az^2) [(x+y)^2 + \frac{1}{3}a(2y-x)z] - \frac{1}{3}a^2(2y-x)z^2 = 0.$$

Diese Form ist in Symbolen geschrieben

$$A \cdot P - \lambda B z^2 = 0.$$

Die Asymptote A zeigt sich demgemäß als Tangente eines Punktes von $z = 0$, die Parabel P berührt die Kubik in allen Punkten, wo sie von $z = 0$ geschnitten wird. Da die beiden Schnittpunkte aber selbst zusammenfallen, wird die Berührung mit der Kubik vierpunktig. Außerdem erhält man jetzt noch durch $A = 0$, $B = 0$ die Koordinaten des Schnittpunktes der Kurve mit der Asymptote $x = \frac{1}{2}a$, $y = \frac{1}{2}a$.

29. Vielfacher Punkt im Unendlichen. Wenn in der Gleichung einer Kurve C nicht bloß in dem Aggregate $u_n(x, y)$ der Faktor $(y - \lambda_i x)^k$ hervortritt ($k > 1$), sondern auch in dem Restteil der Gleichung z noch in einer höheren als der ersten Potenz vor die Klammer gesetzt werden kann, so hat die Kurve in dem unendlich fernen Punkte der Richtung $y = \lambda_i x$ einen vielfachen Punkt. Die Gleichung der Kurve hat dann die Form

$$(12) \quad C(x, y, z) \equiv z^\mu \Phi_{n-\mu}(x, y, z) + (y - \lambda_i x)^k \Psi_{n-k}(x, y) = 0.$$

Wir wollen hier nur den Fall näher ins Auge fassen, daß $\mu = k$ ist. Wir verlegen dann wieder eine Ecke des Koordinatensystems in den fraglichen Punkt, indem wir $y - \lambda_i x = \xi$, also $\lambda_i x = \eta - \xi^*$, $y = \eta$ setzen. Unsere Gleichung erhält dann die Form

$$(12^*) \quad C(\xi, \eta, z) \equiv z^k \Phi'_{n-k}(\xi, \eta, z) + \xi^k \Psi'_{n-k}(\xi, \eta) = 0.$$

Die Tangenten des Punktes $\xi = 0$, $z = 0$ ergeben sich nun als die Koeffizienten der höchsten Glieder in η . Nun sind sowohl in Φ' , als in Ψ' Glieder der Art η^{n-k} vorhanden (vgl. Nr. 28). Man erhält demnach die Gleichung des Tangentensystems für den vielfachen Punkt, indem man in (12^{*}) in den Ausdrücken Φ' und $\Psi' \xi = 0$, $z = 0$

^{*)} Hier ist der Faktor λ_i bei x natürlich wesentlich.

und $\eta = 1$ setzt. Das führt zu demselben Ergebnis, als wenn man in den ursprünglichen Ausdrücken Φ und Ψ $y = \lambda_i x$, $z = 0$ und dann $x = 1$ gesetzt hätte. Nennen wir das Resultat dieser Substitution Φ_0 und Ψ_0 , so lautet also die Gleichung des Tangentensystems

$$(13) \quad z^k \Phi_0 + (y - \lambda_i x)^k \Psi_0 = 0.$$

Diese Gleichung stellt k parallele Tangenten mit der Gleichungsform $y - \lambda_i x + \delta_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, k$) dar. Wir haben also einen k -fachen Punkt in der Richtung $y = \lambda_i x$. Der Leser wird bemerken, daß die Art der Gewinnung des Tangentensystems (13) aus der Kurvengleichung (12) (für $\mu = k$) dieselbe ist, als ob der vielfache Punkt im Endlichen läge (vgl. Nr. 16). Der dort gegebene Beweis war aber nur für endliche Punkte gültig.

Man wird sofort bemerken, daß (12) (für $\mu = k$) nicht die allgemeinste Form eines k -fachen Punktes ergibt, da die Gleichung (13) ja höchstens zwei reelle Faktoren besitzt. Indem wir die allgemeinste Gleichungsform für einen unendlich fernen Doppelpunkt angeben, wird sich der Leser die Form für den k -fachen Punkt leicht selbst herstellen. Nach Nr. 17 hat eine Kurve im Punkte ($y = \lambda x$, $z = 0$) einen Doppelpunkt, wenn ihre Gleichung die Form hat

$$(14) \quad z^2 \Phi_{n-2}(x, y, z) + z(y - \lambda x) \Psi_{n-2}(x, y) + (y - \lambda x)^2 X_{n-2}(x, y) = 0.$$

Der homogene Ausdruck u_{n-1} muß demnach den Faktor $y - \lambda x$ haben und darf nicht ganz fehlen wie das für $k = 2$ in (12*) der Fall wäre. Für das Tangentenpaar (bzw. Tangentensystem) gilt ebenso wie beim endlichen Doppelpunkt (bzw. k -fachen Punkt), daß nur die Koordinaten des betreffenden (hier unendlich fernen) Punktes in die Ausdrücke Φ , Ψ , X einzusetzen sind. Natürlich kann der unendlich ferne vielfache Punkt auch isoliert sein.

Bezüglich der Fälle $\mu \geq k$ sei auf S. 121 verwiesen.

Beisp. 1. Die „Kreuzkurve“ mit der Gleichung

$$(A) \quad x^2 y^2 = (a^2 y^2 + b^2 x^2) z$$

hat im Anfangspunkt einen isolierten Punkt und in den unendlich fernen Punkten der Achsen ($x = 0, z = 0$ und $y = 0, z = 0$) Doppelpunkte. Die Tangentenpaare findet man, indem man in der Gleichung einmal $y = 1$, das andere Mal $x = 1$ setzt und dann jedesmal die niedrigsten Glieder nimmt. Es ergeben sich hiernach die parallelen Asymptotenpaare $x = \pm a, y = \pm b$. Man sieht leicht, daß keine dieser Asymptoten die Kurve anderswo außer in dem betreffenden Doppelpunkt schneidet. Dies kommt davon her, daß, wie Fig. 25 zeigt, jede Asymptote

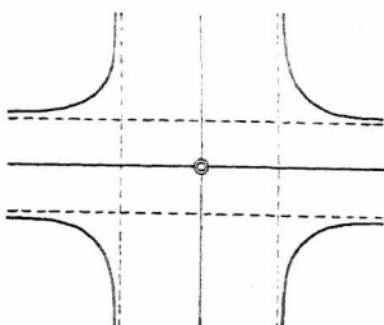


Fig. 25.

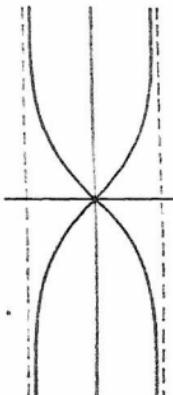


Fig. 26.

Wendeasymptote ist. Also hat sie mit der Kurve drei Schnittpunkte und wegen des durchgehenden zweiten Zweiges einen weiteren Schnittpunkt. Aber auch jede der beiden Geraden $a y \pm b i x = 0$ schneidet die Kurve nur im Anfangspunkt. Daher hat auch jeder der beiden (imaginären) Kurvenzweige des Anfangspunktes einen Wendepunkt in dem letzteren. Alle drei Doppelpunkte sind „Inflexionsknoten“.

Beisp. 2. Wie ein solcher Inflexionsknoten im Endlichen aussieht, kann man an der Kurve

$$(B) \quad x^2 y^2 = (a^2 y^2 - b^2 x^2) z^2$$

sehen, die „Kohlenspitzenkurve“ genannt wurde (Fig. 26). Die Gleichung (B) entsteht aus (A) einfach, indem man dort $z = x/a$,

$x = az'$, $y = y'$ setzt und die Striche wieder wegläßt. Die Kurven (B) und (A) sind also zueinander projektiv. Der isolierte Inflektionsknoten liegt hier in dem unendlich fernen Punkte $y = 0$, $z = 0$.

Beisp. 3. Als drittes Beispiel diene die Kurve

$$(C) \quad y^3 - (2ay^2 + axy + a^2yz - 2a^3z^2)z = 0.$$

Die Gleichung hat die Form $y^3 - Az = 0$; aber es wäre verfehlt, hieraus auf eine Spitze zu schließen (vgl. Nr. 13). Man könnte die Gleichung auch ohne weiteres in die Form $By + 2a^3z^3 = 0$ bringen, was dann eine Spitze in demselben Punkte $y = 0, z = 0$, aber in anderer Lage anzeigen könnte. Der Schluß ist deswegen nicht bindend, weil sowohl $A = 0$ als $B = 0$ durch denselben Punkt $y = 0, z = 0$ erfüllt werden. Was man aus den angegebenen Gleichungsformen mit Sicherheit sehen kann, ist nur, daß sowohl $y = 0$ als $z = 0$ die Kurve in drei zusammenfallenden Punkten schneiden. Das ist aber auch dann der Fall, wenn $y = 0, z = 0$ die beiden Tangenten eines Knotens

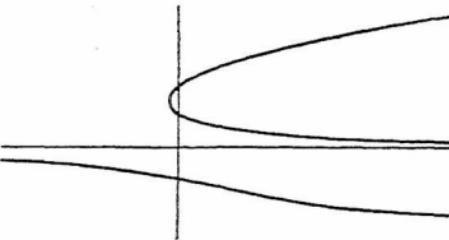


Fig. 27.

sind. In der Tat ergibt das einzige Glied zweiter Dimension in y , z das Tangentenpaar $yz = 0$ für den fraglichen Punkt (vgl. Fig. 27). Die Kurve wurde von Newton „Tridens“ genannt und ist die erste höhere Kurve die durch eine Gleichung in x, y (natürlich noch ohne z) dargestellt wurde (Descartes, *La Géométrie* 1637).*)

Beisp. 4. $x^2y + 2x^2 + xy + x - 2y - 1 = 0$.

Parallele Asymptoten $(x - 1)(x + 2) = 0$. S. des Verf. *Alg. K.* S. 102/3.

Beisp. 5. $x^2y - 4y + x - 1 = 0$.

Parallele Asymptoten $x = \pm 2$. *Alg. K.* S. 104.

30. Zirkulare Kubiken. Es kommt sehr häufig vor, insbesondere bei Kurven mit besonderen metrischen Eigenschaften, daß sie durch die imaginären Kreispunkte (s. S. 40) gehen. Haben die Kurven eine reelle Gleichung, wie wir

*) Gleichung (C) ist die von Descartes benutzte Gleichungsform (vgl. S. 125).

immer annehmen, so kann dies nur eintreten, wenn beide Kreispunkte gleich oft in Betracht kommen. Die Kurve hat dann Asymptoten, deren Gleichungen die Form haben $y = \pm i x + \delta$ und das Aggregat $u_n(x, y)$ enthält den Faktor $x^2 + y^2$, oder $(x^2 + y^2)^2$ usw. Die Kurven heißen „zirkular“, „bizirkular“ usw. So lautet z. B. die allgemeine Gleichung einer zirkularen Kubik

$$(1) \quad (x^2 + y^2)(y - \lambda x) + Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Denkt man sich den Anfangspunkt in den Schnittpunkt der beiden imaginären Asymptoten verlegt und ist $y - \lambda x + \delta = 0$ die Gleichung der dritten Asymptote, so geht nach Nr. 26 Gleichung (1) über in

$$(2) \quad (x^2 + y^2)(y - \lambda x + \delta) + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Diese Gleichung kann man sofort auch, und zwar bei beliebigem r , überführen in

(3) $(x^2 + y^2 - r^2)(y - \lambda x - \delta) + \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$, wie eine Koeffizientenvergleichung ergibt. Jeder Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ berührt nämlich beide imaginären Asymptoten von (2) und damit die Kurve selbst in den imaginären Kreispunkten. Jede zirkulare Kubik ist demnach in der Form darstellbar

$$(4) \quad K \cdot G + \lambda G' = 0,$$

wo K ein Kreis ist, G und G' Gerade bedeuten. Durch Homogenisierung wird das alles sofort deutlich.

Bem. Da jede Kubik mit den Asymptoten G_1, G_2, G_3 in der Form geschrieben werden kann

$$G_1 G_2 G_3 + \lambda G' = 0,$$

so müssen die drei einzelnen Schnittpunkte der Asymptoten G_1, G_2, G_3 mit der Kurve immer auf einer Geraden G' liegen.

Beisp. 1. Wir wollen den Satz beweisen, daß jede Fußpunktcurve einer Parabel eine zirkulare Kubik mit Doppelpunkt ist. Es habe die Parabel die Gleichung $y^2 = 2px$. Dann hat

ihre Tangente im Punkte (x_0, y_0) die Gleichung $y y_0 = p(x + x_0)$. Auf diese Tangente wollen wir von dem Pol (α, b) das Lot fällen. Die Gleichung dieses Lotes ist $(y - b)/(x - \alpha) = -y_0/p$. Drückt man hieraus y_0 aus und setzt diesen Wert in die Tangentengleichung ein, so kann man unter Beziehung der Gleichung $y_0^2 = 2px_0$ die variablen Größen x_0, y_0 ganz eliminieren und erhält

$$(A) \quad 2x(x - a)^2 + 2y(x - a)(y - b) + p(y - b)^2 = 0$$

als Gleichung für den Ort des Fußpunkts des Lotes. Diese Gleichung zeigt nach Nr. 17 sofort den Pol (α, b) als Doppelpunkt an. Verlegen wir in ihn den Koordinatenursprung, indem wir $\xi = x - a, \eta = y - b$ setzen, so erhalten wir

$$(B) \quad \xi(\xi^2 + \eta^2) + a\xi^2 + b\xi\eta + \frac{1}{2}p\eta^2 = 0.$$

Unser ursprünglicher Satz ist damit bewiesen. Seine Umkehrung gilt ebenfalls. Nun sind die Gleichungen der Asymptoten hier $\xi + \frac{1}{2}p = 0$ und $(\eta + \frac{1}{2}b) \pm i(\xi + \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}p) = 0$. Verlegt man daher den Anfangspunkt in den Punkt $\xi = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}p, \eta = -\frac{1}{2}b$ und dreht noch das Koordinatensystem um einen Winkel α , so erhält man eine Gleichung der Form (2), die aber noch die Doppelpunktsbedingung erfüllt. Nun ist (B) die allgemeinste Form der Gleichung einer zirkularen Kubik mit Doppelpunkt, wenn man nur das Koordinatensystem so legt, daß die reelle Asymptote zur η -Achse parallel läuft. Verändert man daher in der auf die Form (2) gebrachten Gleichung das Absolutglied, so muß sich unter Auflösung des Knotens eine ganz allgemeine zirkulare Kubik ergeben. Man kann demnach sagen, daß die zirkularen Kubiken Kurven gleicher Potenz (vgl. Nr. 7), in bezug auf die Fußpunktcurven der Parabel sind.

Beisp. 2. Für die Maclaurinsche Trisektrix (vgl. S. 11) mit der Gleichung $(x + 3a)(x^2 + y^2) = 4a^3$, die sofort die drei Asymptoten erkennen läßt, sind die imaginären Kreispunkte Wendepunkte. Aber auch die dritte Asymptote berührt, wie schon die Figur zeigt, in einem Wendepunkt. Alle drei Wendepunkte liegen also auf der unendlich fernen Geraden. Es ist leicht zu sehen, daß, wenn man zwei (eventuell vorhandene) Wendepunkte einer Kubik durch eine Gerade verbindet, diese Gerade die Kurve immer in einem dritten Wendepunkt schneidet. Denn seien die beiden Tangenten der gegebenen Wendepunkte G_1 und G_2 , so muß sich die Kurvengleichung in die Form bringen lassen $A G_1 G_2 + \lambda G^3 = 0$. Dann muß aber

A selbst, wenn wir die Gleichung homogen geschrieben denken, eine lineare Funktion von x, y, z sein. Die Gleichung $A = 0$ stellt also eine Gerade, nämlich die dritte Wendetangente vor. Alle drei Wendepunkte liegen auf der Geraden G . Die zirkularen Kubiken mit drei unendlich fernen Wendepunkten kann man auch alle unter der Form $KG + \delta = 0$ zusammenfassen, wo K einen Kreis bedeutet [vgl. Gleichung (4), S. 58].

31. Bizirkulare Quartiken. Sehr viele spezielle Kurven vierter Ordnung haben Doppelpunkte in den imaginären Kreispunkten. Die Gleichung einer allgemeinen „bizirkularen Quartik“ muß lauten

$$(5) (x^2 + y^2)^2 + u_3(x, y) + u_2(x, y) + u_1(x, y) + \Pi = 0.$$

Auch hier kann man ohne weiteres $x^2 + y^2 - r^2$ an Stelle von $x^2 + y^2$ setzen. Die imaginären Asymptoten haben hier aber vier Schnittpunkte im Endlichen, darunter zwei reelle, so daß man dem Koordinatenanfangspunkt keine ausgezeichnete Stelle anweisen kann. Wir wollen für die bizirkularen Quartiken in Anknüpfung an die Bemerkung in Nr. 7 einen Satz beweisen, der alle Kurven gerader Ordnung charakterisiert, deren höchste Glieder sich in die Form $(x^2 + y^2)^n$ vereinigen lassen.

Schneiden wir nämlich die Kurve (5) mit einer Geraden durch den (ganz beliebig liegenden) Anfangspunkt O , und ist ihre Gleichung $y = x \operatorname{tg} \vartheta$, so erhält man für die Abszissen x_1, x_2, x_3, x_4 der vier Schnittpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 eine Gleichung vierten Grades, welche $x_1 x_2 x_3 x_4 = \Pi / (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta)^2 = \Pi \cos^4 \vartheta$ liefert. Nun ist aber $x_i = OS_i \cos \vartheta$ und daher ist bei beliebigem Winkel ϑ das Produkt $OS_1 \cdot OS_2 \cdot OS_3 \cdot OS_4 = \Pi$ und diese Konstante Π ändert sich nur bei Verlegung des Anfangspunktes. Die Erweiterung auf Kurven $2n^{\text{ter}}$ Ordnung liegt auf der Hand. Alle diese Kurven haben also eine „Potenz“ für jeden Punkt der Ebene, die sich ganz in derselben Weise geometrisch deuten läßt wie am Kreise.

Beisp. 1. Die Fußpunktskurven der Kegelschnitte mit Mittelpunkt sind bizirkulare Quartiken mit dem Pol der Fußpunktkonstruktion als Doppelpunkt. Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig. Schreibt man den Kegelschnitt in der Form $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, wobei für die Hyperbel durchweg $i b$ statt b zu denken ist, so lautet die Tangentengleichung für den Punkt (x_0, y_0) $x x_0/a^2 + y y_0/b^2 = 1$, was für $x_0 = a \cos \omega$, $y_0 = b \sin \omega$ übergeht in $x \cos \omega/a + y \sin \omega/b = 1$. Auf diese Tangente fällen wir nun vom Punkte (m, n) aus das Lot mit der Gleichung $[(x - m)/b] \sin \omega = [(y - n)/a] \cos \omega$. Eliminiert man aus den beiden Gleichungen ω , so ergibt sich
 (A) $[x^2 + y^2 - (m x + n y)]^2 - a^2(x - m)^2 - b^2(y - n)^2 = 0$, eine Gleichung, die sofort den Punkt (m, n) als Doppelpunkt ausweist und die Bizirkularität erkennen läßt. Wir verzichten auf eine weitere Transformation (vgl. des Verf. *Spez. K.* S. 4 ff.) und bemerken nur, daß man auch hier durch Veränderung des Absolutgliedes in (A) die ganz allgemeine bizirkulare Quartik erhält, die außer den beiden Doppelpunkten in den imaginären Kreispunkten keinen weiteren Doppelpunkt mehr hat.

Beisp. 2. Man erhält ausgezeichnete Typen der eben besprochenen Fußpunktskurven, wenn man den Pol (m, n) in den Mittelpunkt des Kegelschnittes legt ($m = n = 0$). Die Kurven heißen dann Boothsche Lemniskaten (1873). Sie haben im Anfangspunkt einen Inflektionsknoten (mit reellen und imaginären Zweigen). Unter ihnen ist schon seit längerer Zeit bekannt die Fußpunktkurve der gleichseitigen Hyperbel in bezug auf den Mittelpunkt, die sog. „Bernoullische Lemniskate“ (Jak. Bernoulli 1694). Sie hat die Gleichung

$$(B) \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Transformiert man nun Gleichung (B) mittels der Substitution $y + i x = \xi$, $y - i x = \eta$, so geht sie, wenn man noch z einführt, über in

$$(B^*) \quad 2\xi^2\eta^2 = a^2(\xi^2 + \eta^2)z^2.$$

Das ist dieselbe Gleichungsform wie die der Kreuz- oder der Kohlenspitzenkurve (s. S. 56). Demnach hat die Bernoullische Lemniskate auch in den imaginären Kreispunkten Inflektionsknoten und sie kann aus der Kreuzkurve durch eine imaginäre Kollineation (eine Transformation wie die von S. 41 mit imaginären Koeffizienten) gewonnen werden. Fügt man der Gleichung (B) ein Absolutglied bei, so löst sich der im Anfangspunkt liegende Knoten und es entstehen die sog. Cassinischen Linien (1749)

als Kurven gleicher Potenz für die Bernoullische Lemniskate. Für das ganze System der Cassinischen Linien (vgl. Fig. 28) bleiben die im Endlichen liegenden Schnittpunkte der Kreispunktasymptoten („außerordentliche Brennpunkte“) fest*). Die zwei reellen M und M_1 liegen hier auf der x -Achse ($x = \pm \frac{1}{2}a\sqrt{2}$). Wir überlassen dem Leser zu beweisen, daß für alle Cassinischen Linien (mit Einschluß der Bernoullischen Lemniskate) das Produkt der von M und M_1 nach einem beliebigen Punkt der Kurve gehenden Radienvektoren konstant ist.

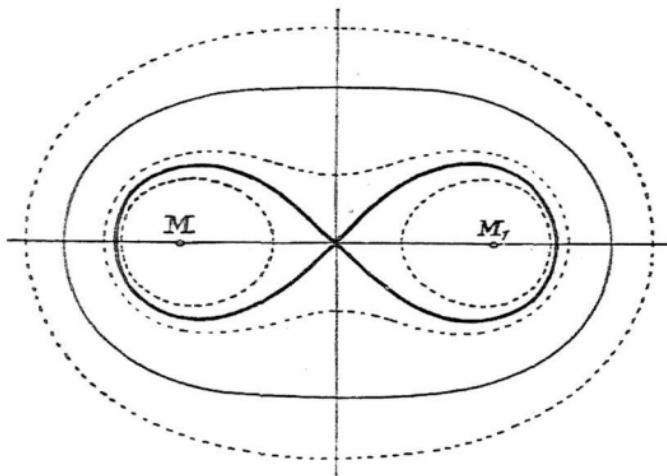


Fig. 28.

Beisp. 3. Andere ausgezeichnete Typen der Fußpunktcurven der Kegelschnitte erhält man, wenn man bei beliebiger Lage des Pols einen Kreis zugrunde legt. Setzen wir in Gleichung (A) von S. 61 $b = a$, sodann $x - m = \xi$, $y - n = \eta$ und schließlich noch, da der Kreis ja nach allen Seiten symmetrisch ist, die Kurven also eine Symmetriearchse haben müssen, $n = 0$, so ergibt sich die Gleichung der sog. „Pascalschen Schnecken“ [Stephan Pascal, um 1630)

$$(C) \quad (x^2 + y^2 - mx)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0,$$

*). Unter „Brennpunkten“ versteht man im allgemeinen die Schnittpunkte der von den imaginären Kreispunkten an eine Kurve gehenden Tangenten.

wo ξ , η durch x , y ersetzt sind. Sie haben, je nachdem der Pol im Innern, auf dem Kreise oder außerhalb seiner liegt ($m < , = , > a$), einen isolierten Punkt, eine Spitze („Kardioide“) oder einen Knoten im Pol (Fig. 29). Die Transformation $y + ix = \xi$, $y - ix = \eta$ gibt $[\xi\eta - \frac{1}{2}i m(\eta - \xi)z]^2 - a^2\xi\eta z^2 = 0$. Für die Doppelpunktstangenten in $\xi = 0$, $z = 0$ und $\eta = 0$, $z = 0$ ergeben sich die Gleichungen $(\xi - \frac{1}{2}i m)^2 = 0$ und $(\eta + \frac{1}{2}i m)^2 = 0$. Die Pascalschen Schnecken haben also Spalten in den imaginären Kreispunkten. Der Schnittpunkt der beiden Spitzentangenten (außerordentlicher Brennpunkt) befindet sich in dem halben Abstand des Poles vom Mittelpunkt des Grundkreises ($x = \frac{1}{2}m$, $y = 0$). Über die Rolle dieses Brennpunktes siehe *Spec. K. S.* 89.

Fügt man in Gleichung (C) noch ein Absolutglied bei, so erhält man die Kurven gleicher Potenz für die Pascalschen Schnecken. Es sind das die sog. Kartesischen Ovale, von Descartes erfunden zur Demonstration seines Brechungsgesetzes (1637; vgl. *Spec. K. S.* 91ff.). Wenn man den Ausdruck $(x - \frac{1}{2}m)^2 + y^2$ mit A bezeichnet (er stellt das Produkt der beiden Asymptoten dar), so kann man die Gleichung jeder Kurve gleicher Potenz für (C) in die Form bringen
 $(C^*) \quad A^2 - (\frac{1}{2}m^2 + a^2) A z^2 - (a^2 m x + A) z^3 = 0$.

Diese Form zeigt wohl für $A = 0$ drei zusammenfallende Schnittpunkte im Unendlichen (und einen im Endlichen) an, aber sie beweist andererseits, da das mittlere Glied aus (C^*) auf keinen Fall verschwinden kann, daß unsere kennzeichnende Gleichungsform von Nr. 13 für das Auftreten einer Spalte keineswegs eine notwendige Bedingung darstellt. Ähnliches gilt natürlich auch für die dort angegebene Wendepunktsform.

Beisp. 4. Die Kurven gleicher Potenz in bezug auf das

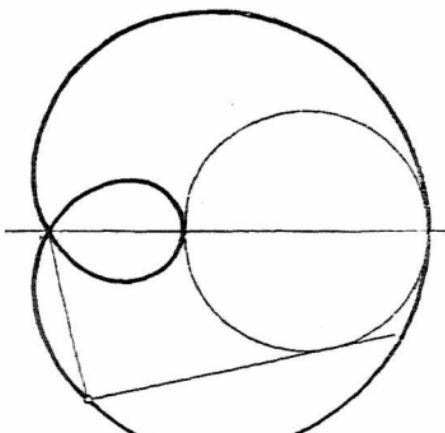


Fig. 29.

System zweier Kreise K und K' , deren Gleichung also in die Form gebracht werden kann $K \cdot K' + \delta = 0$, sind bizirkulare Quartiken mit gewöhnlichen Doppelpunkten in den imaginären Kreispunkten. Die beiden Kreismittelpunkte sind die reellen außerordentlichen Brennpunkte. Sind K und K' kongruent, so befindet sich in dem System für variables δ eine Boothsche Lemmiskate. Die Kurven selbst heißen dann „spirische Linien des Perseus“ (ca. 130 v. Chr.).

III. Die Kurven als Tangentengebilde.

32. Einführung von Linienkoordinaten. Wenn auch natürlich schon in der Zeit der Entdeckung der höheren Analysis Kurven als Einhüllende von Geraden, die bestimmten Bedingungen unterliegen, auftraten, so war es doch erst Plücker (1829), der die gerade Linie als erzeugendes Element dem Punkte als gleichwertig gegenüberstellte, Koordinaten der Geraden einführte und Gleichungen in solchen Koordinaten behandelte. In der Tat ist, wenn wir ein Achsenkreuz zugrunde legen, jede Gerade, genau wie jeder Punkt, durch zwei unabhängige Größen bestimmt und eine Bedingungsgleichung zwischen diesen beiden Größen gibt hier eine unendliche Folge von Punkten, dort eine unendliche Folge von Geraden, als deren Erzeugnis in jedem Falle eine Kurve, die gegebenenfalls auch ausgeartet sein kann, erscheint. Schreiben wir eine Gerade in der Form $ux + vy + 1 = 0$, nachdem wir mit dem Absolutglied dividiert haben, so enthält sie zwei wesentliche, unabhängige Koeffizienten u , v und gerade diese sind es, die von Plücker als Koordinaten der Geraden, „Linienkoordinaten“, wie wir heute sagen, eingeführt wurden. Aus der Gleichung ist sofort ersichtlich, daß u und v die negativen reziproken Abschnitte der Geraden auf den Achsen bedeuten.

33. Gleichungen von Punkt und Kreis. Um zu sehen, was für Gebilde durch eine Gleichung zwischen u und v

33. Linienkoordinaten. Gleichung von Punkt und Kreis. 65

dargestellt werden, betrachten wir zunächst eine lineare Gleichung

$$(1) \quad A u + B v + C = 0.$$

Wir hätten nun die Einhüllende von einer Geraden $G \equiv ux + vy + 1 = 0$ zu suchen, wenn u und v als variable Parameter betrachtet werden, zwischen denen die Bedingung (1) besteht. Es sei dem Leser empfohlen, das nach der im folgenden Beispiel angewendeten Methode mittels Differentialrechnung durchzuführen. Wir bemerken aber im vorliegenden Falle leicht, daß sich durch Einsetzen von A/C für x und von B/C für y in die Gleichung von G immer Gleichung (1) ergibt. D. h. die Gleichung der variablen Geraden G ist für alle u, v , die der Gleichung (1) genügen, durch die Koordinaten des Punktes $x_0 = A/C$, $y_0 = B/C$ erfüllt. Alle Geraden G bilden also ein Büschel durch diesen Punkt und wir können (1) als „Gleichung des Punktes“ in den Linienkoordinaten u, v auffassen. Dasselbe erkennt man übrigens, indem man aus der Gleichung von G und aus (1) etwa v eliminiert. Man erhält $(Cy - B) + u(Ay - Bx) = 0$, also bei variablem u ein Büschel von Geraden durch den Schnittpunkt von $Cy - B = 0$ und $Ay - Bx = 0$, d. i. durch den Punkt $x_0 = A/C$, $y_0 = B/C$.

Beisp. Wir wollen untersuchen, welche Kurve von einer Geraden $G \equiv ux + vy + 1 = 0$ umhüllt wird, wenn für u, v die Bedingung

$$(A) \quad u^2 + v^2 = 1/r^2$$

besteht. Die Differentialrechnung lehrt, es seien die Gleichung von G und Gleichung (A) zu differenzieren und dann u, v, du, dv aus sämtlichen Gleichungen zu eliminieren. Wir erhalten zunächst $xd u + yd v = 0$ und $ud u + vd v = 0$, woraus $u/v = x/y$ hervorgeht. Setzt man $u = \vartheta x$, $v = \vartheta y$ in G und (A) ein, so ergibt sich $\vartheta = -1/(x^2 + y^2)$ aus G und wenn man diesen Wert in (A) substituiert, lautet die Endgleichung

$$(B) \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Gleichung (A) ist demnach die Gleichung eines Kreises um den Anfangspunkt mit dem Radius r . Für $r \rightarrow \infty$ wird aus (A) $u^2 + v^2 = 0$, aber aus (B) ergäbe sich $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, was nicht direkt geometrisch deutbar ist. Es ist in diesem Falle zweckmäßig, $G \equiv ux + vy + z = 0$ zu setzen, dann heißen die beiden Gleichungen, aus denen noch ϑ zu eliminieren ist: (I) $\vartheta(x^2 + y^2) + z = 0$ und (II) $\vartheta^2(x^2 + y^2) = 0$. Damit aber diese beiden Gleichungen bei beliebigem ϑ erfüllt werden, muß $z = 0$ und $x^2 + y^2 = 0$ sein. Die Gleichung $u^2 + v^2 = 0$ stellt demnach das Paar der imaginären Kreispunkte dar (s. S. 40). Mit der asymptotischen Gleichung $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ besteht kein Widerspruch, da die Punkte ja tatsächlich unendlich fern liegen und die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ ja nur die beiden Geraden darstellt, die nach ihnen vom Anfangspunkt aus laufen.

34. Übergang von Linien- zu Punktkoordinaten.
Klasse einer Kurve. Wenn wir im allgemeinen aus einer Gleichung

$$(2) \quad f_n(u, v) = 0,$$

die vom n^{ten} Grade in u, v sei, und der Gleichung G die Variable v eliminieren, so entsteht eine Gleichung $F(u, x, y) = 0$, vom n^{ten} Grade in den Variablen u und mit Koeffizienten vom n^{ten} Grade in x, y . Denkt man sich f nach v geordnet in der Form

$$(2^*) \quad f \equiv U_n + U_{n-1}v + U_{n-2}v^2 + \dots + v^n = 0,$$

so kann man F folgendermaßen schreiben

$$(3) \quad F \equiv U_n y^n - U_{n-1} y^{n-1}(ux + 1) + \dots \\ \pm (ux + 1)^n = 0.$$

Kombiniert man nun $F = 0$ mit $F'_u = 0$, so erhält man die Diskriminante \mathfrak{D} der Gleichung $F = 0$. Diese ist bekanntlich in den Koeffizienten von F vom Grade $2(n-1)$; also ist \mathfrak{D} in x, y vom Grade $2n(n-1)$ *). In der Theorie der Formen wird nun aber bewiesen, daß \mathfrak{D} in unserem Falle den Faktor $y^{n(n-1)}$ hat**), so daß die

*) S. etwa G. Bauer, *Algebra*, 2. Aufl. 1910, S. 91.

**) S. z. B. Salmon-Fiedler, *Höh. Kurven*, S. 98f.

eigentliche Gleichung der Einhüllenden in Punktkoordinaten nur vom Grade $n(n - 1)$ ist. Wir werden diesen Satz im folgenden Bändchen mit einfacheren Mitteln wirklich beweisen, wollen ihn aber schon jetzt, indem wir Kurve (2) als „Kurve n^{ter} Klasse“ bezeichnen, in die Form bringen: Eine Kurve n^{ter} Klasse ist im allgemeinen von der Ordnung $n(n - 1)$. Ausnahmen werden wir gleich im Beisp. 1 der Nr. 35 kennen lernen.

35. Übergang von Punkt- zu Linienkoordinaten. Es sei nun

$$(4) \quad \varphi_n(x, y) = 0$$

die Gleichung einer Kurve n^{ter} Ordnung und $P \equiv ux + vy + 1 = 0$ werde als die Gleichung eines Punktes (des Punktes x, y) aufgefaßt, so erhalten wir, indem wir x und y als Parameter in P betrachten, die durch die Bedingung (4) verknüpft sind, mittels der eben dargelegten Methode eine Bedingung in u, v für alle diejenigen Punkte P , von denen aus an φ zwei zusammenfallende Tangenten gehen, genau so, wie vorhin die Gleichung $\Delta/y^{n(n-1)}$ eine Bedingung in x, y darstellte für diejenigen Geraden G , die zwei zusammenfallende Schnittpunkte mit f gemein hatten. Wir werden also aus φ und P etwa y eliminieren, erhalten eine Gleichung $\Phi(x, u, v) = 0$ vom n^{ten} Grade in x und vom n^{ten} Grade in u, v . Deren Diskriminante Δ enthält den Faktor $v^{n(n-1)}$ und die Gleichung $\Delta/v^{n(n-1)} = 0$ ist vom Grade $n(n - 1)$ in u, v . Sie stellt die Gleichung der Kurve (4) in Linienkoordinaten dar und wir können also auch sagen: Im allgemeinen ist eine Kurve n^{ter} Ordnung von der Klasse $n(n - 1)$. Diejenigen Punkte $P(x, y)$, die auf φ liegen und zugleich Geraden u, v angehören, die der Bedingung $\Delta(u, v) = 0$ genügen, sind die Berührungs punkte dieser Geraden mit der Kurve φ . Ebenso sind diejenigen Geraden $G(u, v)$, die Tangenten

von f sind und Punkte x, y enthalten, für welche $\Delta(x, y) = 0$ ist, die Tangenten der Kurve f in diesen Punkten.

Beisp. 1. Der Leser wird sich an das Beisp. 1 von Nr. 4 erinnern und jetzt erkennen, daß wir dort direkt die Gleichungen der kubischen und semikubischen Parabel in Linienkoordinaten aufgestellt haben. Zugleich sieht er, daß dort nicht der allgemeine Fall vorliegt. In der Tat hat jede der zwei Kurven eine Spitze. Infolgedessen wurde, wie im folgenden Bändchen allgemein bewiesen werden soll, die Klasse 3 und nicht 6. Wenn der Leser dann, wie schon damals empfohlen wurde, von der „Tangentialgleichung“ zur kartesischen zurückkehrt, kommt er wieder auf die Ordnung 3, statt auf 6. Die Ursache ist diesmal die Wendetangente, die wir schon in Nr. 5 als Liniensingularität bezeichnet haben.

Beisp. 2. Behandelt man die Gleichung $u^2 + v^2 = 1/r^2$ nach der Methode von Nr. 34, schreibt aber $G \equiv ux + vy + z = 0$, so ergibt sich durch Elimination von v die Gleichung $u^2(x^2 + y^2) + 2uxz + (z^2 - y^2/r^2) = 0$ mit der Diskriminante $\mathcal{D} \equiv x^2z^2 - (x^2 + y^2)(z^2 - y^2/r^2) \equiv y^2[-z^2 + (x^2 + y^2)r^2] = 0$. Hier trennt sich wirklich der Faktor y^2 ab und es bleibt die schon im Beisp. v. Nr. 33 gefundene Kreisgleichung $x^2 + y^2 - r^2z^2 = 0$, die für $r \rightarrow \infty$ aber in $z^2 = 0$ übergeht. Es erscheint also der Träger des Punktpaares $u^2 + v^2 = 0$ (die singuläre Tangente) doppelt gezählt. Durch eine einzige Gleichung in Punktkoordinaten kann das Punktpaar (der imaginären Kreispunkte) eben nicht dargestellt werden.

Ganz Entsprechendes tritt ein, wenn man versucht, ein Geradenpaar, z. B. das mit der Gleichung $y^2 - \lambda x^2 = 0$ zu Linienkoordinaten zu transformieren. Schreibt man $P \equiv ux + vy + w = 0$ und eliminiert y , so ergibt sich $\Delta \equiv \lambda v^2 w^2 = 0$. Der Faktor v^2 ist fremd und es bleibt $w^2 = 0$, das ist der doppelt gezählte Anfangspunkt ($u = v = \infty$), als Träger (singulärer Punkt) des Geradenpaares.

Daß eine allgemeine Gleichung zweiten Grades in u, v einer ebensolchen in x, y entspricht, ist leicht zu zeigen. Die Kurven zweiten Grades und zweiter Klasse sind eben die Kegelschnitte.

36. Homogene Linienkoordinaten. Bevor wir auf die Dualität näher eingehen, die sich bei der Transformation von Punkt- in Linienkoordinaten und umgekehrt schon

herausstellte, müssen wir ein Wort sagen über die homogenen Linienkoordinaten bei Annahme eines beliebigen Koordinatendreiecks. Wir werden folgerichtig, wenn die Gleichung einer Geraden G lautet

$$(5) \quad G \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

die Größen u_1, u_2, u_3 als proportional zu den Koordinaten von G ansehen; es fragt sich nur, welche geometrische Bedeutung diese Größen haben und wie man von ihnen den Übergang zu u, v bewerkstelligen kann. Setzen wir in G etwa $x_3 = 0$, so erhalten wir für den Schnittpunkt S_3 der Geraden G mit der dritten Koordinatenseite $x_1/x_2 = -u_2/u_1$. Nun kommt es auf die Definition der x_i selbst an. Wir wollen

allgemein annehmen, die x_i seien den mit beliebigen Konstanten λ_i multiplizierten Abständen r_i von den Seiten proportional, also $x_i = \vartheta \lambda_i r_i$, so daß $x_1/x_2 = \lambda_1 r_1/\lambda_2 r_2$

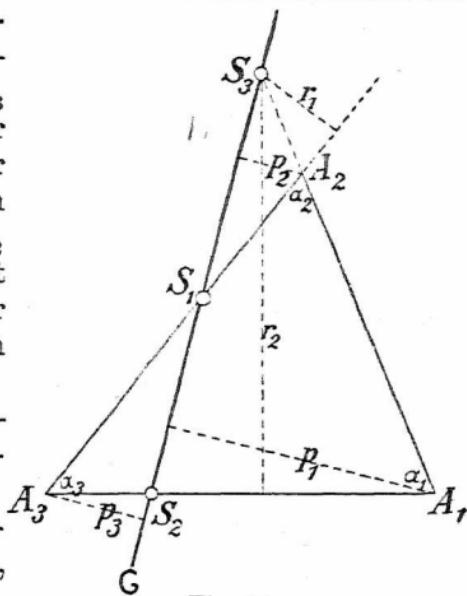


Fig. 30.

ist. Nun hat man aber andererseits (vgl. Fig. 30) $r_1 = A_2 S_3 \cdot \sin \alpha_2$, $r_2 = A_1 S_3 \cdot \sin \alpha_1$ und $A_2 S_3 / A_1 S_3 = p_2/p_1$, wenn p_2, p_1 die Abstände der Geraden G von den Ecken A_2 und A_1 bedeuten. Demnach wird $-u_2/u_1 = \lambda_1 p_2 \sin \alpha_2 / \lambda_2 p_1 \sin \alpha_1$, und da sich ähnliche Ausdrücke für die negativen Verhältnisse u_3/u_1 und u_2/u_3 ergeben, können wir setzen $u_i = \tau \cdot \frac{p_i \sin \alpha_i}{\lambda_i}$, indem wir nur be-

stimmen, daß die p_i etwa auf der Seite der Ecke A_3 positiv, auf der anderen Seite negativ zu nehmen seien. Wir sehen also, daß unsere Linienkoordinaten den mit Konstanten multiplizierten Abständen der Geraden G von den jeweiligen Ecken des Grunddreiecks proportional sind. Hätten wir alle $\lambda_i = 1$ genommen, so wären die x_i den r_i , die u_i den Größen $p_i \sin \alpha_i$ proportional; hätten wir die x_i den Größen $r_i \sin \alpha_i$ proportional genommen, so wären die u_i den p_i direkt proportional. Für Untersuchungen, bei denen metrische Verhältnisse nicht in Betracht kommen, braucht man sich über die eigentliche Bedeutung der x_i und u_i überhaupt keine Gedanken zu machen. Nur in solchen Untersuchungen werden wir aber die homogenen Koordinaten verwenden.

37. Übergang zu Plückerschen Linienkoordinaten.

Um den Übergang zu den gewöhnlichen Plückerschen Linienkoordinaten zu bewerkstelligen, können wir folgendermaßen verfahren. Wir haben

$$u_1/u_3 = \mu_1 p_1/\mu_3 p_3 = \mu_1 A_1 S_2/\mu_3 A_3 S_2,$$

$$u_2/u_3 = \mu_2 p_2/\mu_3 p_3 = \mu_2 A_2 S_1/\mu_3 A_3 S_1,$$

wobei wir μ_1, μ_2, μ_3 noch willkürlich wählen können. Rückt nun die Koordinatenseite $A_1 A_2$ ins Unendliche, so werden $A_1 S_2$ und $A_2 S_1$ unendlich groß und wir können setzen $A_1 S_2 = \omega k$, $A_2 S_1 = \tilde{\omega} k$, wo $k \rightarrow \infty$. Nehmen wir dann in jedem Stadium $\mu_3 = -k$, so brauchen wir nur noch $\mu_1 = 1/\omega$, $\mu_2 = 1/\tilde{\omega}$ zu wählen, um auch bei unendlich ferner Koordinatenseite $A_1 A_2$ zu haben

$$u_1/u_3 = -1/A_3 S_2, \quad u_2/u_3 = -1/A_3 S_1,$$

oder $u = u_1/u_3$ und $v = u_2/u_3$ gleich den negativen reziproken Abschnitten der Geraden G auf den Achsen. Da gleichzeitig auch x_1/x_3 und x_2/x_3 in x, y übergehen (vgl. Nr. 22), so wird aus (5)

$$(6) \quad ux + vy + 1 = 0.$$

Sowohl (5) als (6) können, je nachdem man die u_i (u, v)

oder die $x_i(x, y)$ als Variable betrachtet, einen Punkt oder eine Gerade darstellen, und zwar im ersteren Falle den Punkt mit den Koordinaten $x_i(x, y)$, im letzteren Falle die Gerade mit den Koordinaten $u_i(u, v)$.

38. Das Dualitätsprinzip. Die Einführung der Linienkoordinaten durch Plücker hat, wie jede wichtige Entdeckung in der Mathematik, ihre Vorgeschichte. Monge (1795—99) und Carnot (1803) hatten den Anstoß gegeben zur Lösung der seit Descartes mit der Algebra eng verknüpften Geometrie. Poncelets *Traité des propriétés projectives des figures* (1822) ist das grundlegende Werk der neuen Richtung. Hier schon, aber noch mehr in einem aus dem Jahre 1824 stammenden, i. J. 1829 erst vollständig veröffentlichten *Mémoire sur la théorie des polaires réciproques* Poncelets fanden sich deutliche Ansätze für das „Dualitätsprinzip“, das Gergonne in drei Arbeiten (1824—1827) allgemein aussprach und weiter ausbaute. Die reine Geometrie war dadurch der Koordinatengeometrie vorausgekommen und die Einführung der Dreieckskoordinaten durch Möbius in seinem *Barycentrischen Calcul* (1827), der Linienkoordinaten durch Plücker im 6. Bande des Journals für Mathematik (1829), waren die folgerichtige Reaktion der Analyse auf jene rein geometrischen Bestrebungen, und diese Neueinführungen, die fast gleichzeitig auch bei verschiedenen anderen Gelehrten auftauchten, ermöglichten es der analytischen Geometrie, den Fortschritten der synthetischen Geometrie zu folgen.

Das Prinzip der Dualität ließe sich, wie wir am Anfang dieses Abschnittes zu tun begonnen haben, auch weiter aus der einfachen Paralleldarstellung der Punkt- und Linienkoordinaten entwickeln und fortführen. Es findet aber seine stärkste Stütze und beste Veranschaulichung in der Polarentheorie der Kegelschnitte, aus der es ja auch

Poncelet in dem oben angezogenen *Mémoire* abgeleitet hat. Wenn wir uns irgend einen Kegelschnitt K denken und zu jeder Tangente G einer gegebenen Kurve L den

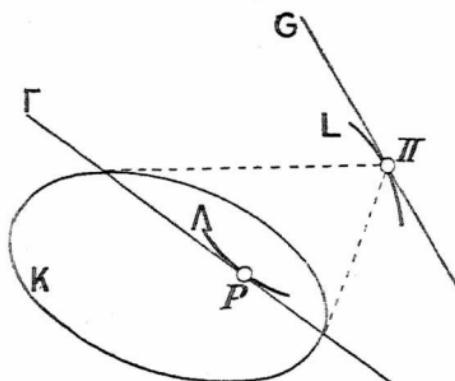


Fig. 31.

Pol P in bezug auf K suchen (vgl. Fig. 31), so werden diese Pole P eine Kurve Λ durchlaufen, die „Polarreziproke“ der Kurve L in bezug auf K . Da aber der Schnittpunkt zweier benachbarter Tangenten G , G' zur Polare die Verbindungslinie der benachbarten Pole P , P' hat,

so sehen wir, daß Λ auch erzeugt gedacht werden kann als Einhüllende der den Berührungs punkten II von G mit L entsprechenden Polaren Γ . Gleichzeitig sieht man, daß man die Kurven L und Λ ohne weiteres vertauschen kann.

39. Analytische Darstellung der dualistischen Umformung. Um diese Polarreziprozität analytisch darzustellen, nehmen wir zunächst einen ganz einfachen Fall. Es sei $K \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$ und die Gerade G habe die Gleichung $G \equiv ux + vy + 1 = 0$. Den Pol P von G in bezug auf K bestimmen wir, da wir eine ganz allgemeine Behandlung der Polarentheorie auf das 2. Bändchen verschieben, rein elementargeometrisch auf dem Lot vom Anfangspunkt zu G (von der Länge p) durch die Bedingung $q \cdot p = r^2$, die aus dem Begriff der Polare hervorgeht (Fig. 32). Da $p = 1/\sqrt{u^2 + v^2}$, wird $q = r^2/\sqrt{u^2 + v^2}$ und da für die Koordinaten ξ , η des Poles P $\xi/\eta = u/v$ ist, ergeben sich ihre Werte als

$$(7) \quad \xi = -r^2 u, \quad \eta = -r^2 v.$$

Diese Gleichungen (7) stellen die polarreziproke Verwandtschaft in bezug auf den Kreis K dar. Man erhält demnach die Polarreziproke Λ einer von G umhüllten Kurve L , wenn man in ihrer Tangentialgleichung u, v durch $-\xi/r^2, -\eta/r^2$ ersetzt. Aus unseren allgemeinen Ausführungen von Nr. 38 geht aber hervor, daß man ebenso in ihrer Punktgleichung x, y durch $-r^2 u, -r^2 v$ hätte ersetzen dürfen.

Noch einfacher wäre ja die Substitution

$$(8) \quad \xi = u, \quad \eta = v.$$

Dann müßte nur $r^2 = -1$ sein. Der Kreis $K_0 \equiv x^2$

$+ y^2 + 1 = 0$ ist dann freilich imaginär, aber der Pol P_1 zu G läßt sich auf realem Wege konstruieren, da er wegen $q = -\sqrt{u^2 + v^2}$ einfach zum Punkte P (für $r = 1$) in bezug auf den Ursprung symmetrisch liegt. P_1 beschreibt daher eine zu Λ kongruente Kurve Λ_1 .

Bem. Die allgemeine Form für eine solche dualistische Transformation („Korrelation“) ergibt sich, wenn man die Gleichungen (8) einer Kollineation (vgl. S. 41) unterwirft. Zu diesem Zweck ist es besser, in homogener Form zu setzen

$$(A) \quad x = \vartheta u, \quad y = \vartheta v, \quad z = \vartheta w.$$

Wir transformieren dann mittels der Gleichungen

$$(B) \quad \begin{cases} \mu x = a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13} z', \\ \mu z = a_{31} x' + a_{32} y' + a_{33} z', \\ \mu y = a_{21} x' + a_{22} y' + a_{23} z', \end{cases}$$

Das bedeutet, daß wir statt des Kreises K einen ganz beliebigen Kegelschnitt zugrunde legen. Es fragt sich nur, wie sich dabei gleichzeitig die u, v, w transformieren. Haben wir aber eine Geradengleichung $ux + vy + wz = 0$, nehmen in

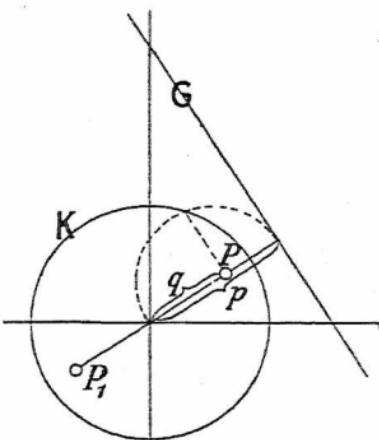


Fig. 32.

dieser die Punkttransformation (B) vor und setzen die Koeffizienten von x' , y' , z' proportional zu u' , v' , w' , so sehen wir, daß

$$(C) \quad \begin{cases} vu' = a_{11}u + a_{21}v + a_{31}w, \\ vv' = a_{12}u + a_{22}v + a_{32}w, \\ vw' = a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w. \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich aber umkehren und ergibt

$$(C^*) \quad \begin{cases} \sigma u = \alpha_{11}u' + \alpha_{12}v' + \alpha_{13}w', \\ \sigma v = \alpha_{21}u' + \alpha_{22}v' + \alpha_{23}w', \\ \sigma w = \alpha_{31}u' + \alpha_{32}v' + \alpha_{33}w', \end{cases}$$

wo die α_{ik} bekanntlich die betreffenden Unterdeterminanten der Is von Null verschiedenen vorausgesetzten Substitutionsdeterminante ($a_{11} a_{22} a_{33}$) sind.

Wenden wir nun die Substitutionen (B) und (C*) auf (A) an, so ergeben sich Gleichungen

$$(D) \quad \begin{cases} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' = s(\alpha_{11}u' + \alpha_{12}v' + \alpha_{13}w'), \\ a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' = s(\alpha_{21}u' + \alpha_{22}v' + \alpha_{23}w'), \\ a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' = s(\alpha_{31}u' + \alpha_{32}v' + \alpha_{33}w'). \end{cases}$$

die sich entweder nach den x' , y' , z' oder nach den u' , v' , w' auflösen lassen und die x' , y' , z' als lineare, homogene Funktionen der u' , v' , w' und umgekehrt ergeben. Die allgemeine Form der Korrelation ist also

$$(E) \quad \begin{cases} \dot{\varrho}x = \hat{a}_{11}u + \hat{a}_{12}v + \hat{a}_{13}w, & \dot{\varrho}u = \tilde{\alpha}_{11}x + \tilde{\alpha}_{21}y + \tilde{\alpha}_{31}z, \\ \dot{\varrho}y = \hat{a}_{21}u + \hat{a}_{22}v + \hat{a}_{23}w, & \dot{\varrho}v = \tilde{\alpha}_{12}x + \tilde{\alpha}_{22}y + \tilde{\alpha}_{32}z, \\ \dot{\varrho}z = \hat{a}_{31}u + \hat{a}_{32}v + \hat{a}_{33}w, & \dot{\varrho}v = \tilde{\alpha}_{13}x + \tilde{\alpha}_{23}y + \tilde{\alpha}_{33}z, \end{cases}$$

wobei selbstverständlich während der ganzen Untersuchung die x , y , z usw. auch auf ein beliebiges Koordinatendreieck bezogen gedacht werden können. Die Transformation (A) geht aus (E) hervor, wenn man nicht nur den Ecken des Koordinatendreiecks der einen Ebene die Seiten des Koordinatendreiecks der zweiten, sondern auch dem Punkt (1, 1, 1) die Gerade (1, 1, 1) entsprechen läßt*).

40. Die Gleichungen der Tangente bzw. des Berührungs punktes. Den dualistischen Standpunkt hat Plücker in seinem *System der analytischen Geometrie* (1831) und der *Theorie der algebraischen Curven* (1839) auf die algebraischen Kurven und deren Singularitäten angewandt.

* Genauer bei Doeblemann, *Geom. Transf.* I. Bd. Leipzig 1902.

„Wenn auf einer geraden Linie ein Punkt kontinuierlich fortrückt, während die gerade Linie selbst um diesen Punkt sich kontinuierlich dreht, wird ein und dieselbe Kurve von jener geraden Linie umhüllt und von diesem Punkte beschrieben.“ So sagt er wörtlich in dem letzteren Werke. Gerade und Punkt auf ihr sind Tangente und Berührungs punkt, wie wir schon in Nr. 35 angedeutet haben. Es obliegt uns, die Gleichung der Tangente bzw. des Berührungs punktes in allgemeiner Form für eine in Punkt bzw. Linien koordinaten gegebene Kurve aufzustellen.

Sei

$$(9) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

die Gleichung einer Kurve n^{ter} Ordnung, bezogen auf ein beliebiges Koordinatendreieck, (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ein Punkt auf ihr, dessen Tangente wir suchen. Wenn wir, wie üblich, unter $\partial f / \partial \xi_i$ den Wert von $\partial f / \partial x_i$ für $x_i = \xi_i$ verstehen, so erhalten wir aus (9) sofort die zwei Gleichungen

$$(10) \quad \begin{cases} \xi_1 \cdot \partial f / \partial \xi_1 + \xi_2 \cdot \partial f / \partial \xi_2 + \xi_3 \cdot \partial f / \partial \xi_3 = 0, \\ d\xi_1 \cdot \partial f / \partial \xi_1 + d\xi_2 \cdot \partial f / \partial \xi_2 + d\xi_3 \cdot \partial f / \partial \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Die erste geht aus dem Eulerschen Theorem über homogene Funktionen hervor, gemäß welchem die linke Seite der Gleichung gleich $n f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, also gleich Null ist*), die zweite ergibt sich durch Differentiation der Gleichung $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$. Sei nun $\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ die Gleichung der gesuchten Tangente, so muß, da einerseits der Punkt (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , andererseits der Punkt $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$ auf ihr liegen muß, das Gleichungspaar bestehen

$$(11) \quad \begin{cases} \xi_1 \cdot \alpha_1 + \xi_2 \cdot \alpha_2 + \xi_3 \cdot \alpha_3 = 0, \\ d\xi_1 \cdot \alpha_1 + d\xi_2 \cdot \alpha_2 + d\xi_3 \cdot \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

wobei die letzte Gleichung durch eine leicht ersichtliche

*) Vgl. z. B. Serret-Scheffers, *Differentialrechnung*, 4./5. Aufl. Leipzig 1908; i. d. 3. Aufl. Nr. 91 u. Nr. 139.

Subtraktion entstand. Diese Gleichungen (11) gehen aber aus den Gleichungen (10) hervor, indem man $\partial f/\partial \xi_i$ durch α_i ersetzt, und es ergibt sich also $\vartheta \alpha_i = \partial f/\partial \xi_i$. Die Gleichung der Tangente an die Kurve f in einem Punkt (ξ_1, ξ_2, ξ_3) lautet also

$$(12) \quad x_1 \cdot \partial f/\partial \xi_1 + x_2 \cdot \partial f/\partial \xi_2 + x_3 \cdot \partial f/\partial \xi_3 = 0.$$

Wir dürfen nur alles ins Dualistische übertragen, um sofort sagen zu können: Die Gleichung des Berührungs-
punktes einer Tangente (v_1, v_2, v_3) an eine Kurve
 $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$ lautet:

$$(13) \quad u_1 \cdot \partial \varphi/\partial v_1 + u_2 \cdot \partial \varphi/\partial v_2 + u_3 \cdot \partial \varphi/\partial v_3 = 0.$$

Bem. Diese Ableitung der Tangentengleichung ist völlig von der Wahl der Variablen x_1, x_2, x_3 unabhängig, da sie im Grunde auf dem Taylorschen Lehrsatz beruht. Ersetzen wir in (12) die x_i durch x, y, z , die ξ_i durch ξ, η, ζ , so erhält man zunächst $x \cdot \partial f/\partial \xi + y \cdot \partial f/\partial \eta + z \cdot \partial f/\partial \zeta = 0$ und wenn man nach dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen $\partial f/\partial \zeta = -(\xi \cdot \partial f/\partial \xi + \eta \cdot \partial f/\partial \eta)$ setzt, die aus den Elementen der Differentialrechnung bekannte Form $(x - \xi) \cdot \partial f/\partial \xi + (y - \eta) \cdot \partial f/\partial \eta = 0$. Es wäre aber umständlich, aus dieser Form Gleichung (12) abzuleiten, da hierzu eine allgemeine Transformation zu Dreieckskoordinaten nötig wäre.

41. Zweite Methode des Überganges von Punkt- zu Linienkoordinaten und umgekehrt. Die Gleichung der Tangente (oder des Berührungs punktes) gibt ein Mittel an die Hand zu einer oft bequemen Form des Überganges von Punkt- zu Linienkoordinaten (oder umgekehrt). Ist $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ die Gleichung der Kurve und nennen wir die Koordinaten der Tangente in einem Punkte (ξ_1, ξ_2, ξ_3) der Kurve u_1, u_2, u_3 , so ist nach (12)

$$(14) \quad \vartheta u_1 = \partial f/\partial \xi_1, \vartheta u_2 = \partial f/\partial \xi_2, \vartheta u_3 = \partial f/\partial \xi_3.$$

Aus diesen drei Gleichungen und aus $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ϑ zu eliminieren. Da die u_i den

$\partial f / \partial \xi_i$ proportional sind, erhält man mittels des Theorems über homogene Funktionen

$$(15) \quad u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0,$$

welche Gleichung an Stelle von $f = 0$ treten kann. Im Wesen ist natürlich diese Methode mit der in Nr. 35 darstellten identisch.

Dieselben Gleichungen (14) erhält man übrigens auch, wenn man die Aufgabe, die Einhüllende der Geraden (15) zu bestimmen, für den Fall, daß die Veränderlichen der Gleichung $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ genügen, mittels der sog. Methode der unbestimmten Koeffizienten löst*). Denn man hat dann $f = 0$ mit (15) mittels eines Parameters ϑ linear zu verbinden und diese Gleichung nach den drei vorkommenden Variablen ξ_1, ξ_2, ξ_3 zu differenzieren. Daraus entstehen die Gleichungen (14). Für den umgekehrten Übergang hat man in (14) nur Punkt- und Linienkoordinaten zu vertauschen.

Beisp. Wir wollen mittels der zuletzt angegebenen Methode nun die Gleichung

$$\varphi \equiv 27\lambda v w^2 + 4u^3 = 0$$

(vgl. S. 10) wieder zu Punktkoordinaten transformieren. Nach (14) hat man für die Koordinaten des Berührungs punktes einer Tangente (u, v, w)

$$\begin{aligned} \vartheta x &= \partial \varphi / \partial u = 12u^2, & \vartheta y &= \partial \varphi / \partial v = 27\lambda w^2, \\ \vartheta z &= \partial \varphi / \partial w = 54\lambda v w \end{aligned}$$

oder

$$\tau x = 4u^2, \quad \tau y = 9\lambda w^2, \quad \tau z = 18\lambda v w.$$

Hieraus ergibt sich durch eine kleine Rechnung

$$\sigma u = 3\sqrt[3]{\lambda} x y, \quad \sigma v = z, \quad \sigma w = 2y\sqrt[3]{\lambda}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung von φ ein, so erhält man nach Division mit $4 \cdot 27\lambda y \sqrt[3]{y}$ und Quadrierung die Gleichung

$$z^2 y = \lambda x^3,$$

d. i. die kubische Parabel. Die Vertauschung von v, w bzw. y, z ergibt die semikubische Parabel.

*) Vgl. z. B. Salmon-Fiedler, Höhere Kurven, S. 92/93.

42. Dualität der Singularitäten. Plücker hat in seiner *Theorie der algebr. Curven* auf Grund der oben zitierten Auffassung der Kurvenerzeugung die Entstehung der Singularitäten und ihr gegenseitiges Entsprechen ausführlich erläutert, indem er die Bewegung der erzeugenden Elemente als diskontinuierlich annahm, d. h. die Kurve durch einen Polygonzug ersetzte. Heute ist der Gedanke nicht mehr so neu und wir können uns wesentlich kürzer fassen, nachdem wir die Plückersche Auffassungsweise schon in Nr. 40 benutzt haben.

Einem Doppelpunkt als einem Punkt der Kurve, in welchem diese zwei verschiedene Tangenten hat, entspricht in der reziproken Kurve eine Tangente, die von der Kurve in zwei verschiedenen Punkten berührt wird, eine sog. „Doppeltangente“. Damit eine Kurve Doppelpunkte habe, muß ihre Punktgleichung Bedingungen erfüllen, Doppeltangenten hat jede ganz allgemeine Ordnungskurve (s. die Quartiken der Fig. 17 v. S. 34). Andererseits ist der Doppelpunkt ein Vorkommnis der allgemeinen Klassenkurve, während eine Tangentialgleichung Bedingungen erfüllen muß, damit die ihr entsprechende Kurve Doppeltangenten haben soll. Sind die beiden Tangenten des Doppelpunktes oder die beiden Berührungs punkte auf der Doppeltangente konjugiert imaginär, so ist der Doppelpunkt, bzw. die Doppeltangente isoliert. Fallen die Tangenten des Doppelpunktes zusammen, so entsteht die Spitze; fallen die Berührungs punkte der Doppeltangente zusammen, so entsteht die Wendetangente. Jede allgemeine Ordnungskurve hat Wendetangenten, jede allgemeine Klassenkurve Spitzen. Die Wendetangente berührt in drei zusammenfallenden Punkten, von der Spitze aus gehen drei in eine einzige zusammengefallene Tangenten an die Kurve.

Nun kann ja jede Kurve n^{ter} Ordg. bzw. r^{ter} Klasse

in Punkt- oder Linienkoordinaten dargestellt werden. Wenn sie aber (für $n > 2$, bzw. $\nu > 2$) keine Punktsingularitäten (Doppelpunkt, Spitze) hat, so hat sie bestimmte Liniensingularitäten (Wende- und Doppeltangente), ist also als Klassenkurve nicht allgemein, und umgekehrt. Selbstverständlich gibt es auch Kurven, die beide Arten von Singularitäten haben. Über die möglichen Anzahlen dieser Singularitäten und über die gegenseitigen Beziehungen dieser Anzahlen hat Plücker Formeln gegeben, die wir im zweiten Bändchen allgemein ableiten werden. Wir sahen aber schon in einem speziellen Falle, daß eine Spitze (Wendetangente) die Klasse (Ordnung) einer Ordnungskurve (Klassenkurve) um 3 erniedrigte (vgl. Beisp. 1 v. Nr. 35). Im folgenden wollen wir noch ein Beispiel geben für eine Kurve mit Doppelpunkt.

Beisp. Wir wählen das Descartessche Blatt mit der Punktgleichung (vgl. S. 23)

$$(A) \quad f \equiv x^3 + y^3 - 3axyz = 0$$

und setzen gemäß (14)

$$\vartheta u = x^2 - ayz, \quad \vartheta v = y^2 - axz, \quad \vartheta w = -axy,$$

dazu nach (15)

$$ux + vy + wz = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ist x, y, z, ϑ zu eliminieren. Um zunächst z zu entfernen, bilden wir

$$\begin{aligned} \vartheta uw &= wx^2 - ay \cdot wz = wx^2 + auy + avy^2, \\ \vartheta vw &= wy^2 - ax \cdot wz = a ux^2 + avxy + wy^2, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} 2\vartheta uw &= wx^2 + avy^2, \\ 2\vartheta vw &= a ux^2 + wy^2. \end{aligned}$$

Es ergibt sich sonach

$$\begin{aligned} (w^2 - a^2 uv)x^2 &= 2\vartheta w(uw - av^2), \\ (w^2 - a^2 uv)y^2 &= 2\vartheta w(vw - au^2). \end{aligned}$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen und setzt $x^2 y^2 = \vartheta^2 w^2/a^2$, so erhält man die Gleichung von (A) in Linienkoordinaten

$$(B) \quad (w^2 - a^2 uv)^2 = 4a^2(uw - av^2)(vw - au^2),$$

also eine Gleichung vierter Klasse. Der Doppelpunkt hat sonach die Klasse 6 der allgemeinen Kubik um 2 erniedrigt.

43. Typische Gleichungsformen in Linienkoordinaten.

- An der Hand der Gleichung (B) des vorigen Beispiels wollen wir jetzt einige der für Punktkoordinaten aufgestellten Sätze über Gleichungsformen in Linienkoordinaten umdeuten. Gleichung (B) ist von der Form

$$(16) \quad \Psi^2 = \lambda \Phi X.$$

Betrachten wir zuerst die Ausdrücke Ψ , Φ , X . Diese lassen sich selbst durch Nullsetzen alle auf die Form (16) bringen. Wäre (16) in Punktkoordinaten geschrieben, so würde Kurve (16) nach Nr. 12 durch die Schnittpunkte von Φ , Ψ und von X , Ψ hindurchgehen, dort aber überall die Tangente mit Φ bzw. X , gemein haben. Faßt man (16) als Tangentialgleichung auf, so muß demnach Kurve (16) die gemeinschaftlichen Tangenten von Φ und Ψ selbst zu Tangenten und die Berührungs punkte auf diesen Tangenten mit Φ gemeinsam haben. Dasselbe gilt für X und Ψ .

Beisp. 1. Wir wollen nun an Gleichung (B) direkt anknüpfen. Es sind $u = 0$, $v = 0$ die Gleichungen der unendlich fernen Punkte der x - bzw.

y -Achse, $w = 0$ die Gleichung des Anfangspunktes. $\Psi \equiv w^2 - a^2 u v = 0$ stellt demnach einen Kegelschnitt dar, der die Linien $u = 0$, $w = 0$ und $v = 0$, $w = 0$, d. i. die Achsen, zu Tangenten hat. Die Berührungs punkte liegen in $u = 0$ und $v = 0$. D. h. der Kegelschnitt Ψ ist eine gleichseitige Hyperbel. In ähnlicher Weise findet man, daß

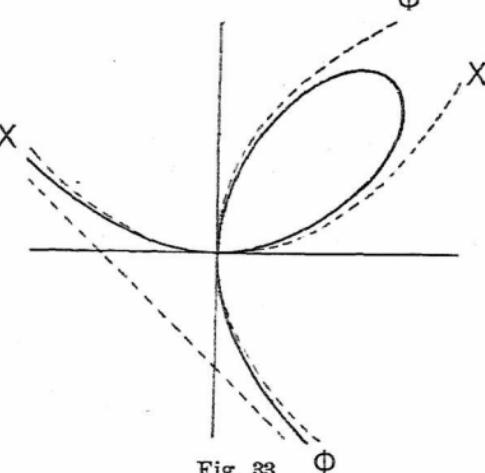


Fig. 33. Φ

Φ und X Parabeln sind mit dem Scheitel im Ursprung und der z - bzw. y -Achse als Achse*) (Fig. 33).

Nun haben Φ und Ψ die Tangente $w = 0, v = 0$ (y -Achse) gemeinsam, X und Ψ die Tangente $w = 0, u = 0$ (x -Achse). Beide Achsen berühren Φ bzw. X im Anfangspunkt. Dort muß also auch die Kurve jede Achse berühren. Damit ist der Knoten in Linienkoordinaten aufgezeigt. Außerdem haben Φ und Ψ die Tangente $u = 1/a, v = 1/a, w = 1$ gemeinsam, X und Ψ aber dieselbe Tangente. Für diese Tangente darf man also den eben gemachten Schluß nicht wiederholen (vgl. Nr. 12). Sie ist vielmehr singulär, also im gewöhnlichen Falle Doppeltangente, eventuell Wendetangente. Wir wissen, daß letzteres der Fall ist und daß der Berührungspunkt im Unendlichen liegt. Dieser unendlich ferne Punkt hat die Gleichung $u - v = 0$. Setzt man in der Tat in (B) $u = v$, so ergibt sich zunächst $(w - a u)^2 = 0$, also $u = 1/a, v = 1/a, w = 1$ als Tangente von diesem Punkte aus, doppelt gezählt. Der Rest der Gleichung liefert $w + a u = \pm 2a u$, d. i. nochmals $w - a u = 0$, also dieselbe Tangente im ganzen dreifach und außerdem $w + 3a u = 0$. Das ergibt mit $u = v$ zusammen die einfache Tangente $u = -1/3a, v = -1/3a, w = 1$ (eine zur Asymptote parallele Tangente an die Schleife). Die Tatsache, daß von dem Punkte $u - v = 0$ eine dreifach zählende Tangente an die Kurve geht, kann sowohl eine Wendetangente anzeigen (ebenso wie die Tangente einer Spitze mit der Kurve drei zusammenfallende Schnittpunkte hat), als auch eine Doppeltangente, auf der dann der Punkt $u - v = 0$ der eine Berührungs punkt wäre (ebenso wie auch die eine Tangente eines Doppel punktes dort mit der Kurve drei zusammenfallende Schnittpunkte hat). Wollte man die Entscheidung darüber unabhängig von Punktkoordinaten treffen, so würde man wohl am besten die fragliche Gerade als Achse einführen (vgl. das folgende Beisp.) oder man müßte die allgemeine Formel für die Tangenten eines Doppelpunktes (vgl. Nr. 17) in Linienkoordinaten übertragen.

Schreibt man (B) mittels der Transformation $u = -x/r^2$,

*) Man findet die Punktgleichungen dieser Kegelschnitte: $\Psi \equiv 4xy - a^2 = 0, \Phi \equiv y^2 - 4ax = 0, X \equiv x^2 - 4ay = 0$. Allgemeiner kann man sagen, daß (16), wenn Ψ, Φ, X linear sind, sowohl in Punkt- als in Linienkoordinaten ein System (Büscher-Schar) sich doppelt berührender Kegelschnitte darstellt (vgl. S. 22). Die Hyperbel Ψ möge der Leser ergänzen.

$v = -y r^2$, $w = z$ in Punktkoordinaten, so erhält man die Polareziproke des Descartesschen Blattes in bezug auf einen Kreis um den Doppelpunkt. Die Kurve ist vierter Ordnung, hat eine (unendlich ferne) Doppel-tangente und eine Spitze mit der Tangente $y - x = 0$. Ihre Gleichung lautet, für $b = r^2 \alpha$, $z = 1$

$$(xy - b^2)^2 = 4(y^2 + bx)(x^2 + by)$$

Die Diskussion aus der Form (16) heraus möge der Leser in Analogie zum Obigen selbst machen (Fig. 34).

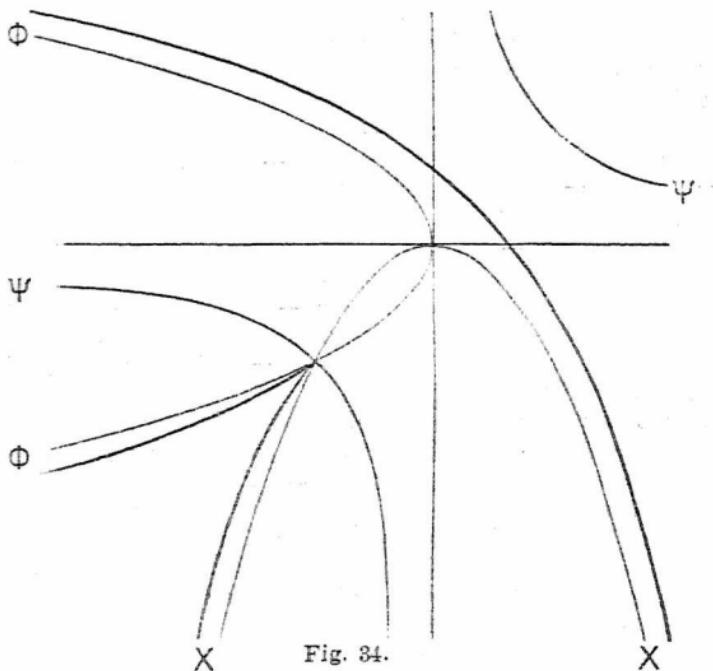


Fig. 34.

Beisp. 2. Wir wollen in demselben Sinne noch die Gleichung
(D) $u_1^2 u_2 + \lambda u_3^2 = 0$
betrachten für ein beliebiges Koordinatendreieck (vgl. Fig. 35). Wir sehen, die Kurve hat die Geraden $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ und $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ zu Tangenten. Die Gleichung des Berührungs-punktes auf der letzteren wird gegeben durch die niedrigsten Glieder in u_2 , u_3 (bei $u_1 = 1$), also durch $u_2 = 0$. Die Tangente dieses Punktes ist also einfach. Der Punkt $u_2 = 0$ ist aber, da für ihn drei Tangenten zusammenfallen ($u_3^2 = 0$), eine Spitze. Die

Gleichung des Berührungs punktes auf $u_1 = 0, u_3 = 0$ wird gegeben durch $u_1^2 = 0$. Diese Tangente ist also Doppeltangente mit zusammengefallenen Berührungs punkten, d. h. Wendetangente. Wir sehen, daß die Diskussion in Linienkoordinaten das nämliche ergibt, was wir schon früher abgeleitet haben (vgl. Nr. 24).

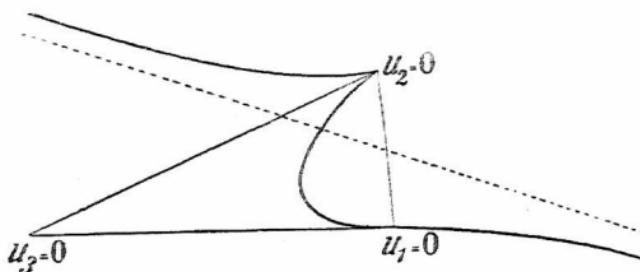


Fig. 35.

44. Formen der Kurven 3. Klasse. Leicht macht sich der Leser jetzt eine Vorstellung von den Grundformen der Linien 3. Klasse. Der „Serpentine“, d. i. dem unpaaren Zug mit 3 Wendepunkten, der den Hauptbestandteil jeder nichtsingulären Ordnungskubik bildet, entspricht ein Zug mit drei Spitzen („Dreispitz“). Es gibt Formen, bei denen der Dreispitz ganz im Endlichen liegt. Die drei Spitzentangenten gehen immer durch einen Punkt (vgl. Beisp. 2 v. Nr. 30). Dem etwa vorhandenen Oval der Ordnungskubik entspricht wieder ein Oval bei der Klassenkubik. Das Oval der Ordnungskubik muß aber offenbar so liegen, daß es von keiner Tangente der Serpentine getroffen wird. Denn jede solche Tangente würde das Oval in zwei Punkten, die Kurve also in 4 Punkten schneiden. Dualistisch übertragen heißt das, das Oval der Klassenkubik muß so liegen, daß von keinem Punkte des Dreispitzes aus eine Tangente daran gelegt werden kann. Das Oval muß also dem Dreispitz die konkave Seite zukehren. Auch das Oval kann ganz im Endlichen liegen. Man braucht nur den Mittelpunkt des Grund-

kegelschnittes der polaren Übertragung in das Oval der Ordnungskubik zu legen, so erhält man ein Klassenkubik von der Gestalt der Fig. 36.

Dem Zusammenschrumpfen des Ovals einer Ordnungskubik zu einem isolierten Punkt entspricht die Verdehnung des Ovals einer Klassenkubik zu einer isolierten Geraden (Doppeltangente).

Das Oval muß dann aber erst durch die hyperbolische Form gegangen sein (Fig. 37), worauf der hyperbolische Zweig immer flacher und flacher

gemacht werden kann. Die Formen mit reell berührender Doppeltangente erhält man, wenn man in Fig. 36 oder Fig. 37

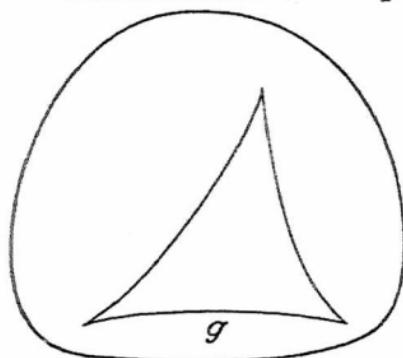


Fig. 36.

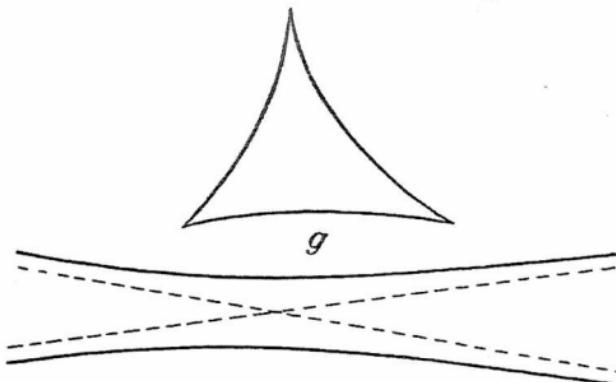


Fig. 37.

den Zwischenraum g immer schmäler werden läßt. Die Kurve springt dann sozusagen an dieser Stelle auf, und es entstehen die Formen der Figuren 38 und 39. Diese Kurven sind dann (vgl. II. Bändchen) nur mehr von der

vierten, während die der Figuren 36 und 37 von der 6. Ordnung sind. Läßt man in Fig. 39 die beiden Asymptoten zusammenfallen, so wird die Doppeltangente zur Wendetangente und man erhält die schon oft behandelte zu sich selbst reziproke Form der Fig. 35, wobei allerdings der Wendepunkt ins Unendliche zuliegen kommt (andere Art des Übergangs *Theorie d. alg. K.* S. 38). Löst man in Fig. 38 (oder 39) die Doppeltangente im entgegengesetzten Sinne auf, so kommen deren unendliche Teile außerhalb der Berührungs-punkte zur Geltung, und

man erhält aus Figur 38 eine Form wie Figur 40. Wären wir von Figur 39 ausgegangen, so hätten wir eine Kurve mit vier reellen Asymptoten erhalten. Die Form der Fig. 40 entspricht dualistisch der Form

der Kurve I in Fig. 14 (S. 32) und kann nicht ins Endliche projiziert werden.

Diese Art der Übergänge kann man schwerlich voraussehen und es ist unerlässlich, daß sich der Leser etwa ein System wie Fig. 14 wirklich polarisiert*), um in solchen Betrachtungen Übung zu gewinnen. Ebenso müssen wir es dem Leser

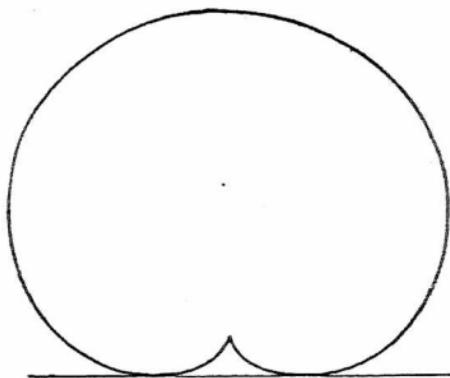


Fig. 38.

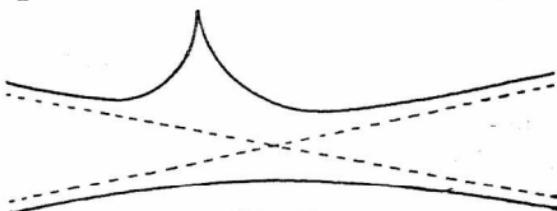


Fig. 39.

*) So wollen wir kurz sagen für: „durch Polarenbildung an einem Kegelschnitt ins Dualistische überträgt“.

überlassen, sich die angegebenen Formen in verschiedenen Lagen zur unendlich fernen Geraden darzustellen.

Beisp. Im Vorübergehen haben wir schon eine Kurve 4. Ordnung erwähnt, die drei Spitzen hatte, die Kardioide (S. 63), Fig. 38 stellt diese Kurve dar. Ihre Gleichung war, auf das Dreieck der Spitzen bezogen.

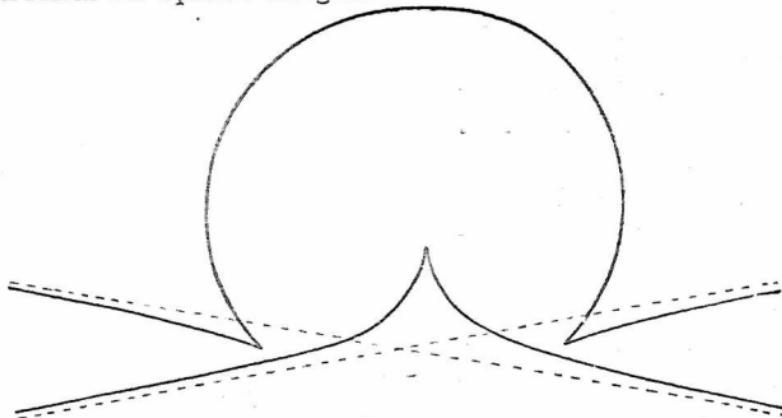


Fig. 40.

$$(A) \quad [\xi\eta - \frac{1}{2}ia(\eta - \xi)z]^2 - a^2\xi\eta z^2 = 0.$$

Wir wollen sehen, ob das wirklich eine Kurve 3. Klasse ist. Nimmt man $\frac{1}{2}az = \zeta$, so kann man die Gleichung (A) in folgender Weise umformen

$$\xi\eta - i\eta\zeta + i\xi\zeta = 2\zeta\sqrt{\xi\eta}.$$

Wenden wir nun eine imaginäre Kollineation an, indem wir $\eta = -iy$, $\xi = ix$ ($\xi\eta = xy$) und für ζ wieder z setzen, so geht die Gleichung über in

$$xy = (y + 2\sqrt{xy} + x)z,$$

was mit

$$xy = (\sqrt{y} + \sqrt{x})^2 z$$

oder mit

$$(B) \quad \sqrt{xz} + \sqrt{yz} + \sqrt{xy} = 0$$

gleichbedeutend ist, wenn man nur jeder Wurzel das doppelte Zeichen beilegt. Statt (B) schreibt man noch etwas einfacher (Division mit \sqrt{xyz})

$$(B^*) \quad x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Diese Kurve (B^*) ist von der Kardioide projektiv nicht verschieden. Nur sind jetzt die 3 Spitzen reell, dafür ist aber die Doppeltangente isoliert. Die Kurve bildet einen „Dreispitz“. Zur Transformation in Linienkoordinaten setzen wir nach Nr. 41

$$\vartheta u = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad \vartheta v = -\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}, \quad \vartheta w = -\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}},$$

oder

$$\tau u^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau v^{\frac{1}{2}} = y^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau w^{\frac{1}{2}} = z^{-\frac{1}{2}},$$

so daß die Tangentialgleichung von (B^*) lautet

$$(C) \quad u^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}} + w^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Dies ist tatsächlich eine Kurve 3. Klasse, wie aus der reziproken Gleichung, die wir schon betrachtet haben (S. 10) hervorgeht. Daß (C) die isolierte Doppeltangente $u = v = w (= 1)$ hat, sieht man, sobald (C) von den Kubikwurzeln befreit ist*).

Die ganze Betrachtung ändert sich nicht, wenn man an Stelle von x, y, z beliebige Dreieckskoordinaten und an Stelle von u, v, w die entsprechenden homogenen Linienkoordinaten setzt. Nimmt man das Koordinatendreieck gleichseitig und die Punktkoordinaten (Linienkoordinaten) direkt den Abständen von den Seiten (Ecken) proportional, so ergibt sich die sog. „Steinersche Kurve“ (1856), auch „dreispitzige Hypozykloide“ genannt, die eine Menge der merkwürdigsten Eigenschaften besitzt. Die Gerade $u = v = w$ ist dann die unendlich ferne Gerade (vgl. ...). Eine Transformation zu rechtwinkligen Koordinaten würde ergeben, daß die unendlich ferne Gerade die Kurve in den imaginären Kreispunkten berührt (Spez. K. S. 142 ff.).

45. Kurven gleicher Potenz in Linienkoordinaten. Die Kurven 4. Klasse sind natürlich in ihren Formen weit reichhaltiger, als diejenigen 3. Klasse und wir wollen hier nur (in Analogie zu Nr. 20) diejenigen Grundformen betrachten, die sich aus zwei Kegelschnitten durch „Auflösen“ der Doppeltangenten herleiten lassen. Dieses Auflösen ist analytisch natürlich wiederum durch kleine Konstantenänderungen in der Tangentialgleichung bedingt. Insbesondere werden alle Doppeltangenten der Kurve zu gleicher Zeit gelöst, wenn statt $\Phi(u, v) = 0$ geschrieben wird

*) Die Kubik des Beisp. 2 von Nr. 4 hat demnach den isolierten Doppelpunkt $x = y = -a$.

$\Phi(u, v) + \delta = 0$. Je nachdem δ positiv oder negativ genommen wird, erfolgt die Lösung in dem einen oder anderen Sinne (vgl. Nr. 44). Man kann auch hier die Kurven $\Phi(u, v) + \delta = 0$ als Kurven gleicher Potenz in bezug auf $\Phi(u, v) = 0$ (was $\Phi = 0$ auch vorstellen möge) betrachten. Denn es lässt sich auch bei Linienkoordinaten der Ausdruck $\Phi(u_0, v_0)$ geometrisch darstellen, wenn u_0, v_0 die Koordinaten irgendeiner Geraden sind (vgl. die Fußnote von S. 14). Diese Kurven gleicher Potenz haben dann mit Φ selbst und untereinander keine gemeinsamen Tangenten als die vom Anfangspunkt aus, von denen jede v -fach zählt, wenn Φ die Klasse v hat. Die Gleichung kann ja geschrieben werden $\Phi(u, v, w) + \delta w^r = 0$. Da die Lage des Anfangspunktes der Koordinaten aber immer willkürlich ist, im Gegensatz zur Lage der unendlich fernen Geraden, die der Kurve eine bestimmte Gestalt zuweist, hat auch die Bildung der Kurve gleicher Potenz einer gegebenen Klassenkurve bei kleinem δ keinen so anschaulichen Charakter wie bei einer Ordnungskurve. Dies vor allem deswegen nicht, weil die Kurve $\Phi + \delta = 0$ die Kurve $\Phi = 0$ sehr wohl schneiden kann, wie wir sofort genauer sehen werden.

46. Formen der Kurven 4. Klasse. Wir betrachten zuerst das Unifolium (s. S. 35), das sowohl allein als zu zwei, drei bis vier ein eine Kurve vierter Ordnung darstellen kann. Es ist das ein paarer Zweig mit einer Einbuchtung,



Fig. 41.

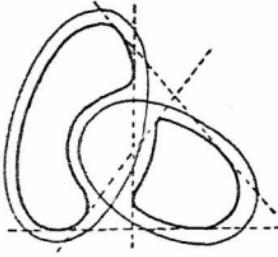


Fig. 42.

der also zwei Wendepunkte hat, denen eine Doppeltangente („Doppeltangente erster Art“) gegenüberliegt. Die Polarisation gibt einen Zug mit zwei Spitzen und einem Knoten, den man nicht unpassend „Steigbügel“ genannt hat (vgl. Fig. 41).

Solange die

Ordnungsquartik aus einem Unifolium besteht, kann auch die entsprechende Klassenquartik ganz im Endlichen liegen, da man den Mittel-

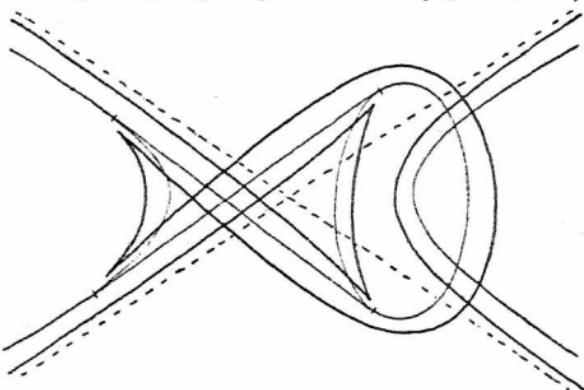


Fig. 43.

punkt des Grundkegelschnittes zur Polarisation in einen passenden Punkt im Innern des Unifoliums legen kann. Die Reziproke einer aus zwei Unifolien bestehenden Quartik (vgl. Fig. 42) geht aber mindestens zweimal durchs Unend-

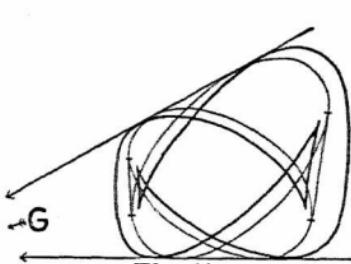


Fig. 44.

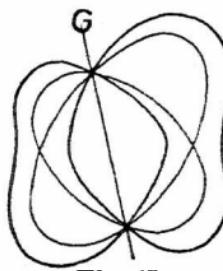


Fig. 45.

liche, da von jedem Punkt der Ebene an die Kurve der Fig. 42 mindestens zwei reelle Tangenten gehen. Fig. 43 zeigt die reziproke Kurve. Sie ist dort aus den beiden Kegelschnitten abgeleitet durch „Auflösung“ der beiden endlichen Stücke, die auf den zwei gemeinsamen Tangenten

der Kegelschnitte zwischen den Berührungs punkten liegen. Die Kurve hat außer den zwei Doppelpunkten, die zu je einem Spitzenpaar gehören, noch weitere 4 Doppelpunkte.

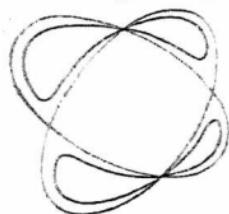


Fig. 46.

Es sind das die Bilder derjenigen 4 Doppeltangentialen von Fig. 42, die beide Unifolien berühren („Doppeltangentialen zweiter Art“). Die 8 Überschneidungen der Kurve mit dem zugrunde gelegten Kegelschnittpaar (K_1, K_2) entsprechen den 8 Doppeltangentialen, die in Fig. 42

die Quartik mit dem Paar der Grundkegelschnitte gemein hat. In beiden Figuren handelt es sich um „Kurven gleicher Potenz“ in bezug auf das Kegelschnittpaar. Die Gleichung

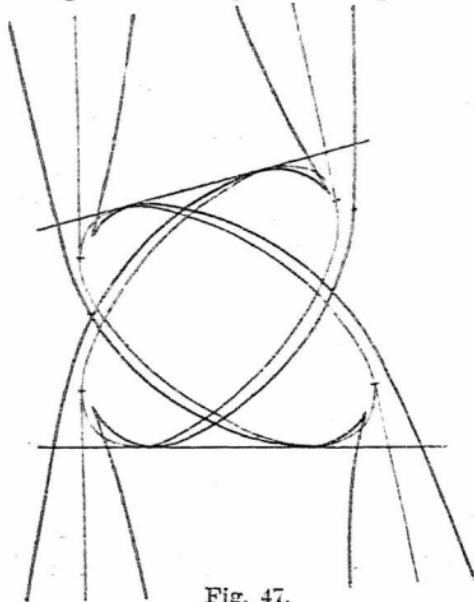


Fig. 47.

der Kurven hat also die Form $K_1 K_2 + \delta = 0$, wo K_1, K_2 entweder in Punkt oder in Linienkoordinaten geschrieben zu denken sind.

Wohl gibt es auch eine Klassenquartik, die aus zwei ganz im Endlichen liegenden „Steigbügeln“ besteht (Fig. 44). Dann sind aber zwei Doppeltangenten vorhanden, die zwei Doppelpunkten der reziproken Ordnungsquartik entsprechen (Fig. 45). Die beiden Doppelemente gehören in jedem Falle auch dem zugrunde gelegten Kegelschnittpaar an, wie die Figuren zeigen. Die anderen beiden Doppel-

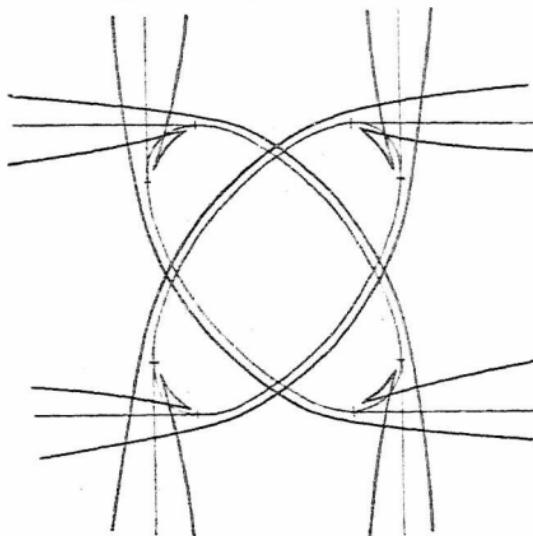


Fig. 48.

elemente sind aufgelöst. Die Gleichungsform ist hier $K_1 K_2 + \delta G = 0$, wobei G im einen Falle die Verbindungsgerade der beiden gemeinsamen Doppelpunkte, im anderen Falle den Schnittpunkt der beiden erhalten gebliebenen Doppeltangenten repräsentiert.

Erteilt man δ das entgegengesetzte Vorzeichen, so tritt bei der Ordnungskurve Trennung an denjenigen Knoten ein, wo vorher Verbindung hergestellt worden war (Fig. 46). Bei der Klassenkurve werden die unendlichen statt der endlichen Teile der Doppeltangenten aufgelöst, so daß die

neue Kurve nicht mehr ins Endliche projiziert werden kann (Fig. 47)*).

Löst man in Fig. 46 die zwei noch vorhandenen Knoten, beide im gleichen Sinne, so erhält man entweder eine Kurve mit vier Unifolien (s. S. 34) oder eine mit zwei Bifolien,

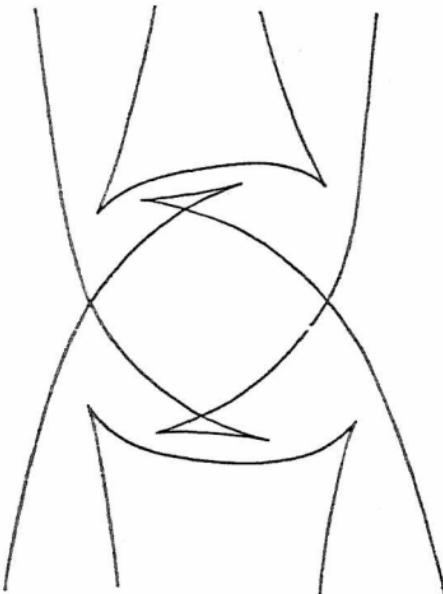


Fig. 49.

die sich der Leser leicht selbst vorstellt. Die zwei entsprechenden Klassenkurven sind in den Figuren 48 und 49 abgebildet**). Man entnimmt leicht der Anschauung, daß eine Kurve mit vier Unifolien im ganzen 28 reelle Doppel-tangenten hat. Entsprechend kann man an Fig. 48 28 reelle Knoten abzählen, wenn man die Äste nur weit genug verlängert. Daß dies die Maximalzahl für Quartiken überhaupt

*.) Die Asymptoten mußten hier und bei den folgenden Figuren wegbleiben, da sie zu nahe an die Kurvenäste herantraten.

**) Figuren von Klassenquartiken veröffentlichte zuerst F. Klein 1874 u. 1876.

ist, werden wir im II. Bändchen nachweisen. Die Möglichkeit ihrer realen Existenz hat Plücker (1839) durch die Aufstellung der Gleichung einer Quartik mit 4 Unifolien zuerst gezeigt.

47. Kurven 4. Klasse mit Wendetangenten. Wir wollen die Herstellung derjenigen Klassenquartiken, die dem Ringtypus (s. S. 35) und den andern in Fig. 17 gezeichneten Figuren entsprechen, dem Leser überlassen und hier nur noch Ordnungsquartiken mit Spitzen ins Dualistische

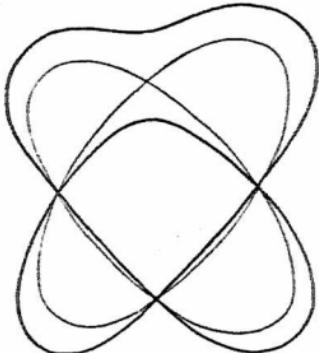


Fig. 50.

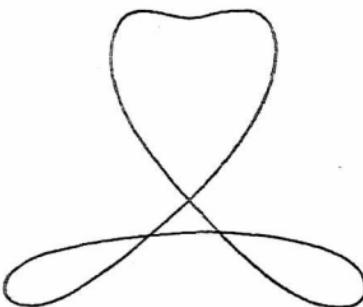


Fig. 51.

übertragen, um von Klassenquartiken mit Wendetangenten eine Vorstellung zu geben. Da wir schon an einem Beispiel (S. 86) sahen, daß eine Kurve 4. Ordnung mit drei Spitzen (und einer Doppeltangente) die Klasse 3 erhält, können wir einstweilen vermuten (und werden es im II. Bändchen beweisen), daß eine Kurve 4. Klasse mit drei Wendepunkten eine Ordnungskubik mit Doppelpunkt ist. Wir wollen uns deshalb zunächst Ordnungsquartiken mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkt herstellen. Wenn man sich zwei Kegelschnitte zuerst in der Art der Figur 50 verändert denkt, dann die entstandene Kurve verzerrt, so daß nach Übergang durch einen dreifachen Punkt die Kurve der Fig. 51 entsteht, so kann man die

beiden unteren Schleifen in Spitzen übergehen lassen. Man erhält dann die Kurve der Fig. 52, d. i. eine Steigbügelform mit einer Einbuchtung. Es ist sofort ersichtlich, daß diese Kurve zu sich selbst reziprok ist. Sie ist also 4. Klasse und 4. Ordnung.



Fig. 52.

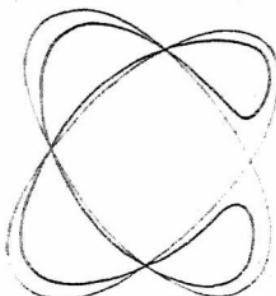


Fig. 53.

Einen anderen Typus einer Ordnungsquartik mit zwei Spitzen und Doppelpunkt erhält man aus der Kurve der Fig. 53, wenn man dort die beiden äußeren Schleifen

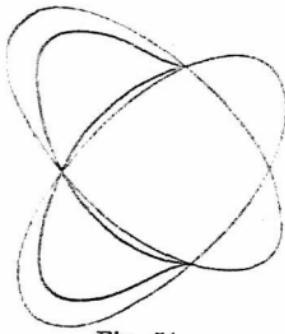


Fig. 54.



Fig. 55.

zu Spitzen macht (Fig. 54). Auch diese Kurve ist zu sich selbst reziprok. Durch Auflösen der in den Figuren 52 und 54 noch vorhandenen Doppeltangenten erhält man aber sofort allgemeinere Klassenquartiken (6. Ordnung) mit je zwei Wendetangenten, von denen wir die endlichen

Formen noch wiedergeben (Fig. 55 und 56). Wir überlassen dem Leser, die Doppeltangentialen im anderen Sinne zu lösen, an den Knoten der entstehenden Kurven zu verbinden oder zu trennen, was zu immer neuen Formen Veranlassung gibt*). Während die Kurven 4. Ordnung besonders in zwei neueren amerikanischen Dissertationen (Ruth Gentry 1896; W. G. Bullard 1899) auf der von Zeuthen (s. S. 35) gegebenen Grundlage ihrer Gestalt nach erschöpfend klassifiziert wurden, gibt es eine ähnliche Darstellung für Klassenquartiken noch nicht.

Beisp. Läßt man eine Strecke von der Länge a zwischen zwei senkrechten Achsen gleiten, so gilt für die Abschnitte m , n auf den Achsen immer die Gleichung $m^2 + n^2 = a^2$. Da

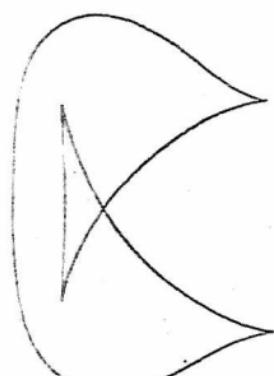


Fig. 56.

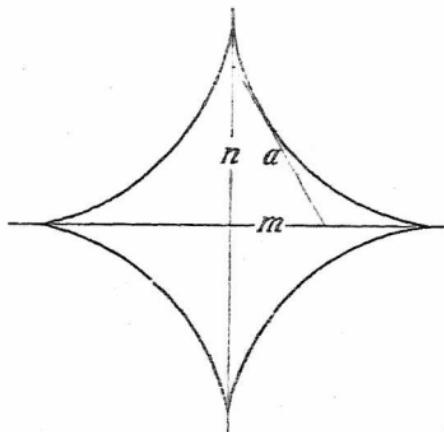


Fig. 57.

$m = -1/u$, $n = -1/v$, so hat man sofort die Tangentialgleichung der erzeugten Kurve als $u^{-2} + v^{-2} = a^2$ oder

$$(A) \quad (u^2 + v^2)w^2 = a^2 u^2 v^2.$$

Die Kurve ist 4. Klasse (Fig. 57) und charakterisiert sich sofort als eine Polarreziproke zur Bernoulli'schen Lemniskate (S. 61),

*.) Mehrere andere Formen siehe in der *Theorie d. alg. K.* S. 284/6.

sowie zur Kreuz- oder Kohlenspitzenkurve (S. 56). Die Achsen sowohl ($u = 0, w = 0$ und $v = 0, w = 0$) als die unendlich ferne Gerade ($u = 0, v = 0$) sind Doppeltangenten (vgl. Nr. 17). Die Berührungs punkte ergeben sich nach dieser Nr. durch die Gleichungen $a^2 u^2 = w^2$ und $a^2 v^2 = w^2$ als die Punkte $x = \pm a$, $y = \pm a$ auf den Achsen, durch $u^2 + v^2 = 0$ als die imaginären Kreispunkte auf der unendlich fernen Geraden. Setzt man aber z. B. $w = a u$ in (A) ein, so ergibt sich $u^4 = 0$, d. h. alle vier Tangenten von diesem Punkte aus fallen in die x -Achse. Wir erklären das so, daß der Punkt eine Spitze ist, deren Tangente für drei zählt, während sie in dem anderen Punkte die Kurve nochmals berührt. Aber dieser andere Punkt ist, wie alle vier weiteren Berührungs punkte, selbst eine Spitze. Die Kurve hat also sechs Spitzen (darunter zwei imaginäre) mit drei Spitzendoppeltangenten (den Achsen und der unendlich fernen Geraden), die den Inflektionsknoten der oben erwähnten Kurven dualistisch entsprechen. Sie heißt „Astroide“ (Littrow 1838) und hat die leicht aus (A) zu erlangende Punktgleichung

$$(B) \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

(J. Hermann 1715), die, nach der Art von Gleichung (B*) auf S. 96 behandelt, die Ordnung 6 erkennen läßt.

48. Kurvendiskussion in Linienkoordinaten. Es lag nicht in unserer Absicht, systematisch alle Regeln, die wir in Punktkoordinaten bisher gaben, auf Linienkoordinaten zu übertragen. In konkreten Fällen ist es nicht schwer, die Übertragung vorzunehmen. Die direkte Diskussion in Linienkoordinaten allein ist praktisch nicht besonders vorteilhaft, vor allem, weil das Verhalten der Kurve im Unendlichen nicht deutlich hervortritt. Wir wollen aber doch wenigstens ein charakteristisches Beispiel für eine solche Diskussion geben.

Beisp. Die Kurve mit der Gleichung

$$(A) \quad (u + w)(2u + w)(3u + w) + \lambda v^2 w = 0$$

(Beisp. von Reuschle) hat für positives λ die Form der Fig. 58 (vgl. Fig. 37 auf S. 84). Durch die Klammerausdrücke des ersten Gliedes sind die Punkte $x = 1, x = 2, x = 3$ (A, B, C) der x -Achse dargestellt, $v = 0$ ist der unendlich ferne Punkt der

y -Achse, $w = 0$ ist der Anfangspunkt O . Die Form der Gleichung zeigt nach Nr. 43 an, daß die Kurve in den Punkten A , B , C von den Parallelen zur y -Achse berührt wird. In welcher Weise diese Berührung stattfindet, kann man durch Betrachtung der Vorzeichen des Klammerproduktes der Gleichung (A) feststellen. Ein Ausdruck $\Pi \equiv \alpha u + \beta v$ $\gamma + w$ wird 0 für die Koordinaten u , v , w aller Geraden, die durch den Punkt $x_0 = \alpha/\gamma$, $y_0 = \beta/\gamma$ gehen, er wird ∞ für den Anfangspunkt ($u = \infty$, $v = \infty$, $w = 0$). Variiert man also eine Gerade (u , v , w) in der Ebene, so wird Π nur dann das Zeichen wechseln, wenn die Gerade durch den Punkt (x_0, y_0) und wenn sie durch den Anfangspunkt geht. Nun ist z. B. die Klammer $(u + w)$ positiv für die unendlich ferne Gerade ($u = 0$, $v = 0$, $w = 1$). Diese Klammer wird also negativ nur für die Koordinaten (u , v , w) von Geraden, welche die x -Achse zwischen O und A treffen. Ebenso werden $(2u + w)$ und $(3u + w)$ nur negativ für Gerade, die zwischen O und B , bzw. O und C hindurchlaufen. Das ganze Klammerprodukt in (A) kann also nur negativ werden für Gerade, die zwischen O und A oder zwischen B und C durchgehen. Die Kurve (A) kann also, da das zweite Glied der Gleichung wesentlich positiv ist, nur Tangenten haben, die die Strecken OA , bzw. BC treffen. Man kann sich das bequem durch Strichelung dieser Strecke veranschaulichen und findet nach dieser Signierung ohne Schwierigkeit, daß durch B und C ein hyperbelförmiger Zweig gehen muß. Man erkennt auch, daß die hohle Seite des Zweiges durch A nach rechts gekehrt sein muß.

Nun ist die Gleichung (A) auch erfüllt durch diejenigen drei Geraden, für die eine der drei Klammern und zugleich $w = 0$ ist. Das ist aber in jedem Falle die Gerade $u = 0$, $w = 0$, d. i. die Abszissenachse. Die drei Tangenten von $w = 0$ aus fallen also in eine einzige zusammen und der Anfangspunkt charakterisiert sich demnach als Spitze mit der x -Achse als Tangente (vgl. die

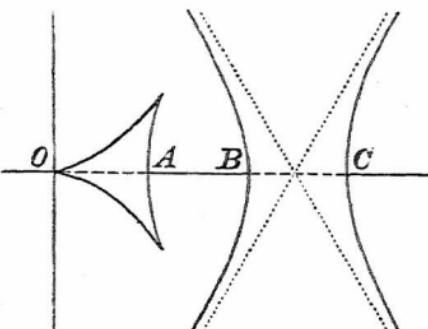


Fig. 58.

entspr. Betrachtungen über die Wendetangente S. 9). Danach muß die Tangente, die den durch A gehenden Zweig erzeugt, sich so drehen, daß sie schließlich mit der x -Achse zusammenfällt, ohne daß sie jedoch andere Teile dieser Achse trifft als die Strecke $O A$. Da eine Klassenkubik Doppelpunkte nicht besitzen kann (weil von einem solchen Doppelpunkt aus vier zu je zweien zusammenfallende Tangenten an die Kurve gingen), werden die Zweige durch O und A mittels zweier Spitzen sich in einen einzigen vereinigen müssen. Da v nur quadratisch in der Gleichung vorkommt, ist die Kurve gegen die x -Achse symmetrisch. Aus dieser Symmetrie folgt ohne weiteres auch, daß die drei Spitzentangenten sich in einem Punkte treffen. — Wie hat man sich den Übergang durch $\lambda = 0$ zu negativen λ vorzustellen?

IV. Höhere Singularitäten. Näherungskurven.

49. Superlineare Zweige. In allen unseren Beispielen haben wir bisher nur die sog. „einfachen Singularitäten“ eingehender besprochen, Doppelpunkt und Spitze als Punktsingularitäten, Doppel- und Wendetangente als Liniensingularitäten. Lediglich der k -fache Punkt, speziell der dreifache, wurde erwähnt (vgl. Nr. 16). Wir stellten uns denselben aber nur so vor, daß durch ihn die Kurve k -mal hindurchginge, ohne daß einige der k Zweige sich dort berührten. In dieser einfachen Form ist der k -fache Punkt leicht verständlich. Jede durch ihn gehende Gerade hat mit der Kurve, wenn sie nicht gerade mit einer der k Tangenten des Punktes identisch ist, k zusammenfallende Schnittpunkte. Jeder der k („linearen“) Zweige hat in dem Punkte eine einfache Tangente. Der gewöhnliche k -fache Punkt ist eine reine Punktsingularität. Ihm entspricht als reine Liniensingularität die k -fache Tangente mit k einfachen Berührungs punkten.

Nun kann es aber vorkommen, daß irgendwelche Tangenten des k -fachen Punktes als solche mehrfach zählen,

auch ohne daß sie etwa anderswo noch die Kurve berühren. Es darf nur einer der Zweige eines Doppelpunktes, um den einfachsten Fall zu erwähnen, eine Wendetangente in dem betreffenden Punkte haben. Dann ist die Singularität sowohl Punkt- als Liniensingularität. So betrachteten wir ja schon Kurven mit drei Inflexionsknoten, in denen beide Doppelpunktstangenten dreipunkig berührten (S. 56). Ebenso sind Doppeltangenten, die in Spitzen berühren (vgl. die Astroide S. 95) als gemischte Singularitäten anzusehen. So einfach und anschaulich liegt aber die Sache bei höheren Singularitäten häufig nicht. Oft hat ein k -facher Punkt nur eine einzige Tangente, die selbst l -fach zählt. D. h. irgendeine durch den Punkt gehende Gerade hat dort k zusammenfallende Schnittpunkte mit der Kurve und von den durch irgendeinen Punkt der Tangente gehenden Kurventangenten sind l in dieser Tangente selbst vereinigt. Man sagt dann, die Singularität bestehe aus einem „superlinearen Zweig“ von der Ordnung k und der Klasse l . Im allgemeinsten Falle besitzt eine höhere Singularität mehrere superlineare Zweige.

Beisp. 1. Wir betrachten die Kurve mit der Gleichung

$$(A) \quad y^3 = x^4 + y^4.$$

Sie ist im Endlichen geschlossen und hat im Anfangspunkt einen dreifachen Punkt, dessen einzige Tangente die x -Achse ($y^3 = 0$) ist (vgl. Fig. 59). Um zu sehen, ob diese Tangente auch als solche singulär ist, könnten wir einen willkürlichen Punkt $P(x=a, y=0)$ auf ihr annehmen,

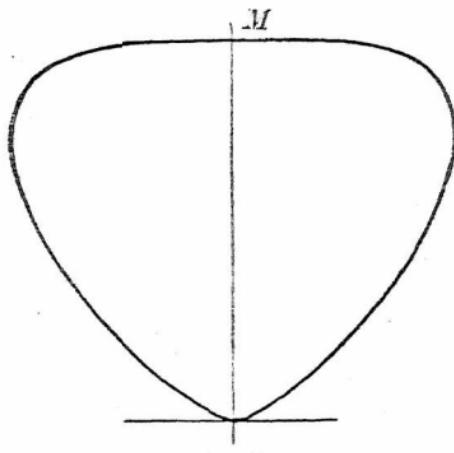


Fig. 59.

durch ihn das Geradenbüschel legen $y = \lambda(x-a)$, mit diesem die Kurve schneiden und die Diskriminante Δ der resultierenden Gleichung in x aufstellen. So viele Wurzeln $\lambda = 0$ die Gleichung $\Delta = 0$ hätte, so viele Tangenten von P aus an die Kurve fielen in $y = 0$ zusammen. Dieses Verfahren ist aber nicht kürzer, als wenn wir die Tangentialgleichung der Kurve (A) bilden, die uns darüber direkt belehren wird. Wir setzen nach Nr. 41

$$\vartheta u = 4x^3, \quad \vartheta v = 4y^3 - 3y^2 z, \quad \vartheta w = -y^3.$$

Hier können wir $\vartheta = 1$ nehmen, weil sich ϑ doch aus der Gleichung herausheben muß, und erhalten unter Benützung der Gleichung $ux + vy + wz = 0$

$$x = \frac{3}{4}u, \quad y = -\frac{3}{4}w, \quad wz = -u\frac{3}{4}u + v\frac{3}{4}w.$$

Setzt man diese Werte in (A) ein, so ergibt sich nach einer kleinen Rechnung

$$(B) \quad 256w(v+w)^3 = 27u^4$$

als Gleichung von (A) in Linienkoordinaten. Die fragliche Tangente ist $u = 0, w = 0$. Wir erhalten die Gleichung der Berührungs punkte auf ihr, wenn wir die niedrigsten Glieder in u, w gleich 0 setzen (für $v = 1$). Es ergibt sich nur $w = 0$. D. h. die x -Achse berührt im Anfangspunkt nur einfach. Die Singularität ist also eine reine Punktsingularität, trotzdem die drei Tangenten des dreifachen Punktes in eine einzige zusammengefallen sind. Man nennt sie „Spitzpunkt“ (Ordnung $k = 3$, Klasse $l = 1$).

Die Kurve (A) hat auch in dem Punkte $M(x = 0, y = 1; v + w = 0)$ eine Besonderheit; denn die Gleichung kann geschrieben werden $y^3(y-1) = x^4$. Daß der Punkt selbst nur ein gewöhnlicher Punkt der Kurve ist, sieht man schon daraus, daß die Gerade $x = 0$ dort nur einen Schnittpunkt mit der Kurve hat. Tangente ist im Punkte M schon wegen der Symmetrie die Gerade $y - 1 = 0$. Gleichung (A) ergibt für den Schnitt $x^4 = 0$, d. h. die Tangente berührt vierpunktig. Nimmt man auf ihr irgendeinen Punkt an, etwa den unendlich fernen, für den $u = 0$ ist, so gibt Gleichung (B) die Berührungs punkte der Tangenten von diesem Punkt aus. Für $u = 0$ ergibt sich aber $w = 0$ und $(v+w)^3 = 0$. D. h. von dem Punkte $u = 0$ geht eine einfache Tangente aus, die im Anfangspunkt berührt und drei zusammenfallende Tangenten, die in M berühren. Diese Betrachtung genügt vollkommen und erweist den Punkt M als

„Flachpunkt“, der zum Spitzpunkt reziprok ist (Ordnung $k = 1$, Klasse $l = 3$). Wir empfehlen aber dem Leser, die Gleichung der Kurve (B) so zu transformieren, daß die Gerade $y = 1$ eine Koordinatenseite wird (unter Belassung der anderen Koordinatenseiten). Nach dem Verfahren von S. 73/74 erhält man die Transformationsformeln $u = u'$, $v = v'$, $w = w' - v'$. Setzt man diese Werte in (B) ein und läßt die Striche an den Koordinaten wieder weg, so ergibt sich als neue Tangentialgleichung
 (B*) $256w^3(w - v) = 27u^4$.

Jetzt hat die Tangente in M die Koordinaten $u = 0, w = 0$. Für die Berührungs punkte ergibt sich aber jetzt (niedrigste Glieder in u, w für $v = 1$) $w^3 = 0$. Die Tangente ist also wirklich dreifache Tangente. Vom Berührungs punkt M selbst aus [$w = 0$ in (B*)] gehen natürlich vier zusammenfallende Tangenten an die Kurve ($u^4 = 0$). Daraus darf man aber nicht auf die Klasse der Singularität einen Schluß ziehen; denn auch vom Anfangspunkt [$w = v$ in (B*)] aus gehen vier zusammenfallende Tangenten ($u^4 = 0$) an die Kurve, wie ja sowohl die Gerade $y = 0$, als die Gerade $y = 1$ die Kurve in vier zusammenfallenden Punkten schneiden*).

Wie besonders deutlich die Gleichung (B*) zeigt, ist die ganze Kurve zu sich selbst reziprok. Man kann sie in der Tat aus einer Kurve wie Fig. 52 von S. 94 sich hervorgegangen denken (vgl. das 2. Bändchen).

Beisp. 2. Das Bild ändert sich sofort völlig, wenn wir die Kurve

$$(I) \quad y^2 = x^4 + y^4$$

betrachten. Wie die vorige ganz im Endlichen gelegen, hat sie im Anfangspunkt jedoch eine Singularität zweiter Ordnung (Tangenten $y^2 = 0$). Daß dies aber, wie es dem oberflächlichen Betrachter scheinen könnte, keine Spitze ist, sieht man daraus, daß $y = 0$ zu der Gleichung $x^4 = 0$ führt. Übrigens wäre eine Spitze schon deswegen unmöglich, weil die Kurve beide Achsen zu Symmetriearchsen hat. Die Gestalt der Kurve findet man ja leicht, indem man ein paar Punkte berechnet. Daß die Kurve in den Punkten $x = 0, y = \pm 1$ Flachpunkte hat, erkennt man wie im vorigen Beispiel. Die vertikalen Tangenten berühren

*) Es hätte auch keinen Wert, mittels $\partial f / \partial x = 0$ oder sonstwie die horizontalen Tangenten zu suchen. Denn man kann aus dem Ergebnis in keinem Falle entnehmen, in welcher Vielfachheit die Tangenten zu zählen sind.

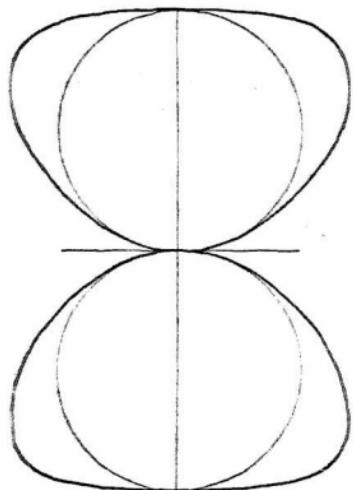


Fig. 60.

in den Punkten $x = y = 1/\sqrt{2}$. Man sieht, daß die Kurve aus zwei kongruenten Blättern besteht, die sich im Anfangspunkt berühren (Fig. 60). Dort ist ein sog. „Berührungsnoten“ oder „Selbstberührungsnoten“.

Die Untersuchung, in welchem Grade die Tangente dieses Berührungsnotens singulär ist, gestaltet sich hier wesentlich schwieriger. Da sie aber lehrreich genug ist, wollen wir die Mühe nicht scheuen. Wir stellen die Tangentialgleichung der Kurve auf, nach dem Verfahren von Nr. 34, das immer zum Ziele führt. Zuerst sei bemerkt, daß für eine Gleichung

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

wenn man

$$A \equiv a_2^2 - 3a_1 a_3 + 12a_0 a_4,$$

$$B \equiv 27a_1^2 a_4 + 27a_0 a_3^2 + 2a_2^3 - 72a_0 a_2 a_4 - 9a_1 a_2 a_3$$

setzt, die Diskriminante Δ gegeben ist durch

$$27\Delta \equiv 4A^3 - B^2*) .$$

Eliminieren wir nun aus (I) und $ux + vy + 1 = 0$ die Variable x , so erhalten wir

$$y^4(u^4 + v^4) + 4v^3y^3 + y^2(6v^2 - u^4) + 4vy + 1 = 0$$

und es ergibt sich hiernach

$$A \equiv u^4(u^4 - 12v^2 + 12), \quad B \equiv 2u^8(18v^2 - u^4 + 36),$$

woraus nach einiger nicht ganz mühseliger Rechnung die Gleichung folgt, gleich in homogener Form geschrieben,

$$u^4(u^4 + v^4 - 20v^2w^2 - 8w^4) - 16(v^2 - w^2)^3w^2 = 0.$$

Daß aus $(v \pm w)^3 = 0$ unter anderem $u^4 = 0$ folgt, weist wieder auf die beiden Flachpunkte $v \pm w = 0$ hin. Für die Berührungsnoten auf der singulären Tangente $u = 0, w = 0$, wegen deren wir die Transformation gemacht haben, erhalten wir aber durch die Koeffizienten der höchsten Potenz von v

* Vgl. die *Algebra* von O. Pund, Leipzig, G. J. Göschens 1897, S. 231. Dort ist das Vorzeichen des letzten Gliedes von B unrichtig.

(v⁶) die Gleichung $u^2 = 0$. Die Tangente zählt also wie der Punkt zweifach. Der Berührknoten hat die Ordnung $k = 2$ und die Klasse $l = 2$, ist also zu sich selbst reziprok.

50. Leichtere Bestimmung von Ordnung und Klasse einer Superlinearität. Wenn man bedenkt, daß das vorige Beispiel eines Berührknotens das allereinfachste dieser Art ist, so wird man die Behandlung höherer Singularitäten auf diesem Wege für aussichtslos halten. Die letzte Bemerkung beim Beispiel 1 der vorigen Nummer aber weist einen Weg, wie man l sofort bestimmen kann, wenn k und die Punktgleichung der Kurve bekannt ist. Jede Gerade durch den ausgezeichneten Punkt schneidet ja den superlinearen Zweig in k zusammenfallenden Punkten. Nur die ausgezeichnete Tangente selbst hat noch mehr Schnittpunkte. Um wieviel mehr? Von jedem ihrer Punkte gehen l zusammenfallende Tangenten an die Kurve. Die zugehörigen Berührpunkte sind alle auch im singulären Punkt vereinigt. Sie vermehren die Anzahl der zusammenfallenden Schnittpunkte der singulären Tangente um l , so daß die Gesamtzahl $k + l$ wird. Wenn nämlich eine sich um einen einfachen Kurvenpunkt drehende Gerade in die Tangente übergeht, tritt allemal ein neuer Schnittpunkt dazu, und wir können uns vorstellen, daß dies bei unserer Singularität l -mal eintritt. Da nun die Zahl der zusammenfallenden Schnittpunkte der singulären Tangente, sowie auch die Ordnung k aus der Punktgleichung ohne weiteres ersichtlich ist, erhält man auch die Klasse l jedesmal mit Leichtigkeit. Wäre die Tangentialgleichung und somit auch die Klasse l gegeben, so wird die Zahl $k + l$, wie eine dualistische Betrachtung ergibt, durch die Anzahl der zusammenfallenden Tangenten bestimmt, die von dem singulären Punkt aus an die Kurve gehen. Der Berührknoten des vorigen Beispiels zeigt dieses dualistische Verhalten sehr deutlich.

51. Näherungskurven für singuläre Punkte. Die Spitzpunktsparabel. Einen wirklichen Beweis konnten wir in der vorigen Nummer für die dort plausibel gemachte Tatsache nicht geben. Will man das Verhalten einer Kurve in einer Singularität näher studieren, so ist es eben unmöglich, mit der ganzen Kurvengleichung zu operieren. Man wird vielmehr zweckmäßig Näherungskurven verwenden, wie solche für einfache („lineare“) Kurvenzweige durch die ersten Glieder einer Taylorschen Reihenentwicklung gegeben sind. Lange vor Taylor, schon um das Jahr 1669, hatte aber Newton, zunächst zum Zwecke der Gleichungsauflösung, ein Verfahren angegeben und es in einem Briefe von 1676 durch eine graphische Methode erläutert und verbessert, mittels dessen er aus einer unentwickelten algebraischen Funktion von x, y die eine Variable in eine nach Potenzen der anderen fortschreitende Reihe entwickeln konnte.

Dieses Newtonsche Verfahren haben dann Stirling, de Gua und Cramer (vgl. Seite 6) auf die Untersuchung von Kurven angewendet und es so erweitert, daß es insbesondere auch für Entwickelungen in singulären Punkten brauchbar wurde. Die Reihen werden für superlineare Zweige von allgemeinerer Art, als die Taylorsche Reihe, indem sie nicht mehr nach ganzen Potenzen fortschreiten *). Um gleich zu zeigen, wie man auf solche Weise Näherungskurven erhält, nehmen wir das oben erwähnte Beispiel der Kurve $y^3 = x^4 + y^4$. Wir setzen die Gleichung einer Näherungskurve versuchsweise $y = \lambda x^\delta$ und suchen, indem wir diesen Wert in die Gleichung einsetzen, λ und δ zweckmäßig zu bestimmen. Die Substitution ergibt die Gleichung
(1)
$$x^4 + \lambda^4 x^{4\delta} - \lambda^3 x^{3\delta} = 0.$$

* Auf die moderne Grundlegung der Theorie dieser Reihen, die von J. Puiseux (1850) angebahnt wurde, können wir in diesem Bändchen nicht eingehen. Vgl. Pascals *Repertorium d. höh. Math.*, 2. Aufl., Bd. II, 1. Hälfte, Leipzig 1910, S. 291.

Diese Gleichung liefert die Schnittpunkte der „höheren Parabel“ $y = \lambda x^\delta$ mit der Kurve. Da δ im allgemeinen keine ganze Zahl ist, kann man ohne nähere Bestimmung weder den Grad der Gleichung angeben, noch auch, welches die höchsten oder niedrigsten Glieder sind. Wir suchen nun zunächst δ so zu bestimmen, daß mindestens zwei der Exponenten gleich werden, und zwar sollen dies dann die niedrigsten Exponenten sein. Der Grund hierfür wird gleich ersichtlich werden. Nachdem wir die Möglichkeit $4\delta = 3\delta$ zu setzen, ausgeschieden haben, können wir versuchen $4\delta = 4$, also $\delta = 1$ zu setzen. Dann würden aber die beiden zugehörigen Glieder den Exponenten 4, das letzte Glied den Exponenten 3 erhalten, entgegen unserer Absicht. Es bleibt also übrig $3\delta = 4$, $\delta = \frac{4}{3}$ zu setzen. Dann lautet die Gleichung

$$(2) \quad \lambda^4 x^{5\frac{1}{3}} + (1 - \lambda^3)x^4 = 0$$

oder nach Division mit x^4

$$(3) \quad \lambda^4 x^{\frac{5}{3}} + (1 - \lambda^3) = 0.$$

Wenn wir in (2) den Bruchexponenten beseitigen, so sehen wir erstens, daß die Gleichung, wie es sein muß, vom 16. Grade ist und daß man sie mit x^{12} dividieren kann. Bei beliebigem λ fallen also 12 der 16 Schnittpunkte der Parabel $y^3 = \lambda x^4$ mit der Kurve in den Anfangspunkt. Dadurch nun, daß in (2) gerade die niedrigsten Glieder wenigstens in der Zweizahl auftreten, können wir eine noch weitergehende Annäherung für den Anfangspunkt erzielen. Wenn wir nämlich im vorliegenden Falle λ so wählen, daß $\lambda^3 = 1$ wird, verschwinden diese niedrigsten Glieder und es fallen dann alle 16 Schnittpunkte in den Ursprung. Nun weiß man, daß die Gleichung $\lambda^3 = 1$ drei Wurzeln $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$ hat, und wir erhalten also drei voneinander verschiedene Reihenentwickl-

lungen für den Anfangspunkt, die drei „Partialzweigen“ entsprechen. Von diesen Partialzweigen, die zusammen den einen „superlinearen Zweig“ bilden, sind zwei imaginär und wir können diese, da sie für die äußere Erscheinung der Kurve nicht in Betracht kommen, hier übergehen. Die eine reelle Reihenentwicklung beginnt also mit $y = x^{\frac{4}{3}}$ und die „Spitzpunktsparabel“ $y^3 = x^4$ gibt die Gestalt der Kurve in der Nähe des Anfangspunktes getreu wieder.

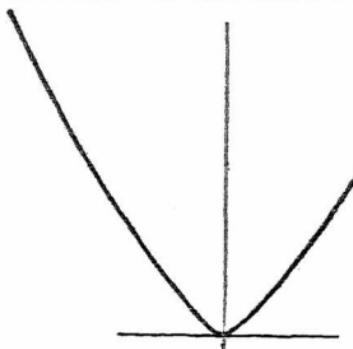


Fig. 61.

Sie hat dort dieselbe Singularität, wie die Kurve selbst (vgl. Fig. 61). Da sie sich aber sehr leicht zu Linienkoordinaten transformieren läßt, kann man das Verhalten des Spitzpunktes als Klassensingularität ohne Mühe direkt erkennen. Man erhält als Tangentialgleichung

$27u^4 = 256v^3w$, woraus man sofort $w = 0$ als Berührungs punkt der Tangente $u = 0, w = 0$ findet. Mithin erhält man das schon S. 100 abgeleitete Resultat, daß der Spitzpunkt überhaupt keine Liniensingularität ist.

52. Die Flachpunktsparabel. Wir wollen in gleicher Weise die Kurve

$$(A) \quad x^4 + y(y - 1)^3 = 0$$

betrachten. Es ist das dieselbe Kurve, wie die eben behandelte, nur umgeklappt um die Gerade $y = \frac{1}{2}$. Die Tangente des Anfangspunktes ist $y = 0$. Der Punkt ist also für Punktkoordinaten einfach ($k = 1$). Aber $y = 0$ gibt $x^4 = 0$, nach Nr. 50 muß demnach $l = 3$ sein. Setzen wir $y = \lambda x^\delta$, so gibt es die Möglichkeiten 4 gleich 4δ ,

3δ , 2δ oder δ zu setzen. Aber nur im letzten Falle werden die zwei betreffenden Glieder die niedrigsten der Gleichung. Wir haben nun noch, um eine weitere Näherung zu erzielen, $\lambda = 1$ zu setzen, und zwar gibt es hier nur diesen einen Wert von λ . Der Zweig ist wirklich „linear“. Als Näherungskurve erhält man die „Flachpunktsparabel“ $y = x^4$ (Fig. 62). In Linienkoordinaten lautet die Gleichung $27u^4 = 256vw^3$, die für die Berührungsstelle auf $u = 0$, $w = 0$ die Gleichung $w^3 = 0$ ergibt. Die Klasse l ergibt sich also direkt zu $l = 3$. Die Näherungsparabel hat hier allerdings nur 10 Schnittpunkte mit der Kurve im Anfangspunkt gemein. Natürlich hätte die Kurve $y = x^4 + y^4$, die ganz ähnlich aussieht wie die mit der Gleichung $y^3 = x^4 + y^4$, aber keinen dreifachen Punkt in $x = 0$, $y = 0$ hat, für den Flachpunkt dieselbe Näherungskurve ergeben, die hier alle 16 Schnittpunkte mit der gegebenen Kurve im Anfangspunkt gemein hätte.

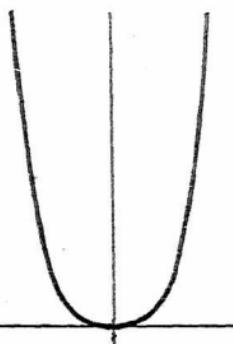


Fig. 62.

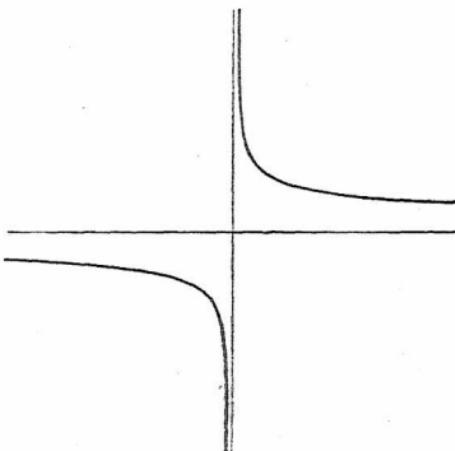


Fig. 63.

Bem. Vielleicht hat der Leser selbst schon bemerkt, daß die Spitzpunktsparabel und die Flachpunktsparabel projektivisch identisch sind. In ihren Gleichungen erscheinen nur y , z bzw. v , w vertauscht. Ver-

tauscht man aber y oder z mit x , so erhält man eine hyperbolische Form, z. B. $y^3x = z^4$, wo die Achsen jetzt die Tangenten der beiden unendlich fernen Singularitäten dies. Das drückt sich in der durch Fig. 63 charakterisierten Weise aus. Die endliche Form all dieser Kurven ist eben durch Fig. 59 gegeben.

53. Näherungskurven des Berührknotens. Der Berührknoten bietet auch bei dieser neuen Art der Behandlung Interessantes. Wir hatten die Gleichung $y^2 = x^4 + y^4$. Setzen wir $y = \lambda x^\delta$, so ergibt sich $\lambda^2 x^{2\delta} = x^4 + \lambda^4 x^{4\delta}$ und man findet ohne weiteres $\delta = 2$ und $\lambda^2 = 1$. Es ist also eine aus zwei reellen linearen Zweigen (für $\lambda = \pm 1$) bestehende Superlinearität vorhanden, die die beiden gewöhnlichen Parabeln $y = \pm x^2$ als Näherungsparabeln hat. Das charakterisiert den Berührknoten. Sämtliche 16 Schnittpunkte liegen im Anfangspunkt. Die Transformation zu Linienkoordinaten ergibt, wenn man die Gleichungen der zwei Parabeln multipliziert, $u^4 - 16v^2w^2 = 0$, also $w^2 = 0$ als Gleichung der Berührpunkte für die Tangente $u = 0, w = 0$, womit die Singularität als doppelt in bezug auf Punkt und Tangente erwiesen ist. Alle Rechnungsschwierigkeiten sind jetzt beseitigt nach Einführung der ersten Glieder der Reihenentwicklungen an Stelle der Kurvengleichung selbst.

Wir wollen dasselbe Beispiel gleich benutzen, um zu zeigen, wie man ein zweites Glied der Entwicklung bestimmen kann. Zu diesem Zwecke setzen wir $y = x^2 + \mu x^\varepsilon$ in die Gleichung ein. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\mu x^{\varepsilon+2} + \mu^2 x^{2\varepsilon} &= x^8 + 4\mu x^{\varepsilon+6} + 6\mu^2 x^{2\varepsilon+4} \\ &\quad + 4\mu^3 x^{3\varepsilon+2} + \mu^4 x^{4\varepsilon}. \end{aligned}$$

Hier muß man schon einigermaßen herumprobieren, um zu sehen, daß es zwei Möglichkeiten gibt, bei denen die Gleichsetzung zweier Exponenten zugleich diese Exponenten zu den niedrigsten werden läßt. Dies tritt näm-

lich dann ein, wenn erstens $\varepsilon + 2 = 2\varepsilon$, also $\varepsilon = 2$ gesetzt wird. Die beiden zugehörigen Glieder werden dann 4. Ordnung, alle übrigen 8. Ordnung und man erhält $\mu = -2$. Dann wird aber $y = -x^2$ und es ergibt sich also nur die andere, schon oben gefundene Näherungsparabel. Die zweite Möglichkeit ist $\varepsilon + 2 = 8$, $\varepsilon = 6$ zu setzen. Man erhält dann $\mu = \frac{1}{2}$. Die entstehende Gleichung hat Glieder vom 8., 12., 16., 20. und 24. Grade und es fallen 12 Schnittpunkte von den vorhandenen 24 in den Anfangspunkt. Die Näherungskurve heißt jetzt $y = x^2 + \frac{1}{2}x^6$ und ist natürlich durch die entsprechende $y = -x^2 - \frac{1}{2}x^6$ zu ergänzen.

Beisp. Schon die beiden ersten Parabeln zeigen bei der soeben behandelten Kurve an, wie die Zweige in dem singulären Punkt zu durchlaufen sind. Nach dem bloßen Ansehen der Fig. 60 könnte man ja auch glauben, es stießen von rechts und links je eine Spitze zusammen. Aber es ist offenbar, daß dann die Kurve mindestens von der 6. Ordnung sein müßte. In der Tat hat eine Kurve mit der Gleichung $y^4 = x^6 + y^6$, die im übrigen ganz ähnlich verläuft, wie die der Fig. 60, eine solche Singularität im Ursprung. In der Nähe der Punkte $x = 0$, $y = \pm 1$ ist diese neue Kurve noch flacher als die vorige, da die Tangente dort 6-punktig berührt. Auch könnte man etwa meinen, in Fig. 60 hingen die beiden Blätter durch zwei Wendepunkte zusammen. Aber auch dann müßte die Kurve mindestens 6. Ordnung sein. Eine solche Singularität besitzt die Kurve $y^2 = x^6 + y^6$ im Anfangspunkt. Im übrigen verläuft sie ganz ähnlich, wie die Kurve $y^4 = x^6 + y^6$. Der Leser möge für diese beiden Sextiken die Näherungskurven des Anfangspunktes selbst aufstellen.

Bem. Zur genaueren Bestimmung der Form einer Kurve ist häufig auch der Krümmungskreis von Nutzen. Die Näherungsparabeln nun lassen diesen viel leichter bestimmen, als die Kurvengleichung selbst. Ihr Krümmungskreis ist ja wegen der innigen Berührung mit dem der Kurve identisch. Nach der Formel der Differentialrechnung $R = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}/y''$ erhält man für $y = x^{\frac{1}{2}}$, also für den Spitzpunkt, den Krümmungsradius $R = 0$, für $y = x^4$ (Flachpunkt) $R = \infty$, für die Parabel $y = x^2$, also für die Kurve der Figur 60 $R = \frac{1}{2}$.

Schreibt man übrigens die Gleichung des Krümmungskreises einer Kurve für den Anfangspunkt, wo die Tangente $y = 0$ sei, in der Form $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$, so erhält man für diesen Kreis nach dem eben dargelegten Verfahren die Näherungsparabel $x^2 - 2Ry = 0$, die eben den Krümmungsradius R hat, da all ihre Schnittpunkte mit dem Kreis in den Anfangspunkt fallen. Für alle Punkte dieser Parabel ist $1/2R = y/x^2$. Insbesondere ist dies auch für $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ der Fall. Im Grenzwert muß aber der Krümmungsradius der vorliegenden Kurve mit dem der Parabel übereinstimmen. Die Formel $1/2R = y/x^2$ gilt also für jede Kurve, wenn $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ genommen wird. Nach dieser Formel läßt sich insbesondere für jede höhere Parabel $y = \lambda x^\delta$ (δ irgendeine rationale Zahl) der Krümmungsradius des Anfangspunktes sofort angeben.

54. Die höheren Parabeln und Hyperbeln. Bevor wir nun dazu übergehen, das praktische Verfahren zu erörtern, das Newton in jenem Briefe von 1676 zum erstenmal zur Sprache brachte, wollen wir ein Wort über die höheren Parabeln sagen, deren Gleichung

$$(4) \quad y = \lambda x^\delta$$

ist. Solche treten ja, soferne man nur eine der Achsen zur Tangente der Kurve im Anfangspunkt macht, immer als erste Näherungskurven auf, ob der Punkt eine Singularität enthält oder nicht. Wir deuteten schon an, daß solche Parabeln, zunächst für ganzzahlige Werte von δ , um die Zeit der Einführung der Koordinatenmethode ganz allgemein von den führenden Mathematikern betrachtet wurden, die bestrebt waren, deren Flächen und Schwerpunkte, sowie die Volumina und Schwerpunkte ihrer Rotationskörper zu berechnen. Fermat spricht schon 1636 in einem Briefe an Roberval von der „kubischen“ und der „quadratokubischen“ Parabel, welch letztere später von Wallis die „semikubische“ genannt wurde. Ursprünglich kümmerte man sich um die Gestalt der Kurven nicht; aber schon 1656 gab Wallis richtig an, daß bei geradem ganzzahligen δ die

Kurven (4) den Typus der gewöhnlichen Parabel, bei ungeradem δ jedoch den der kubischen Parabel haben. Daneben wurden auch bald die allgemeineren Kurven für rationales δ in bezug auf die erwähnten Verhältnisse untersucht und δ dabei auch negativ angenommen, was zu den „höheren Hyperbeln“ führte. Wir schließen negative δ zunächst aus und setzen $\delta = \mu/\nu (> 1)$. Dann können wir sagen, wenn μ und ν als teilerfremd angenommen werden, daß die Kurven für ungerade μ und ungerade ν vom Typus der kubischen Parabel sind, für gerade μ und ungerade ν vom Typus der gewöhnlichen Parabel und für ungerade μ und gerade ν vom Typus der semikubischen Parabel. Der Anfangspunkt ist eine Singularität von der Ordnung ν , und zwar in der eben beobachteten Reihenfolge vom Typus des Wendepunkts, des gewöhnlichen Punktes und der Spitze. Der unendlich ferne Punkt der y -Achse ist eine Singularität von der Ordnung $(\mu - \nu)$, und zwar in derselben Reihenfolge vom Typus der Spitze, des gewöhnlichen Punktes und des Wendepunktes. Das geht alles aus der Betrachtung der Vorzeichen hervor. Für $\delta < 1$ vertauschen sich nur die Achsen.

Transformiert man (4) zu Linienkoordinaten, so erhält man

$$(5) \quad u^{\delta-1} v = A u^\delta, \\ \text{wenn}$$

$$A = (-1)^\delta \lambda^{1-\delta} (\delta - 1)^{\delta-1} / \delta^\delta$$

gesetzt wird. Da die Gleichung (4) in homogener Form lautet $z^{\delta-1} y = \lambda x^\delta$, so sieht man, daß jede dieser „binomischen Parabeln“, wie man sie auch nennt, zu sich selbst reziprok ist, und zwar sind eben immer die beiden Singularitäten zueinander dualistisch. An der kubischen und semikubischen, der Spitz- und Flachpunktsparabel haben wir das ja schon deutlich gesehen.

Für den Krümmungsradius der Kurve (4) erhält man

nach der Bemerkung von S. 109 einfach $2\lambda R = x^{2-\delta}$ für $x \rightarrow 0$. Die rechte Seite ist gleich 1 für $\delta = 2$ (gewöhnliche Parabel), gleich 0 für $\delta < 2$ und gleich ∞ für $\delta > 2$. In der Tat sind die Parabeln für $\delta > 3$ entweder Flachpunktsparabeln (δ gerade) oder „Wendeflachparabeln“ (δ ungerade) von immer höherer Ordnung. In Fig. 64 ist noch die erste

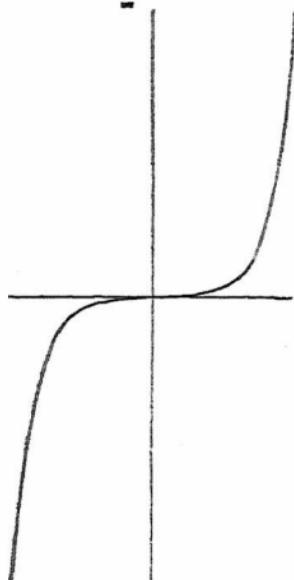


Fig. 64.

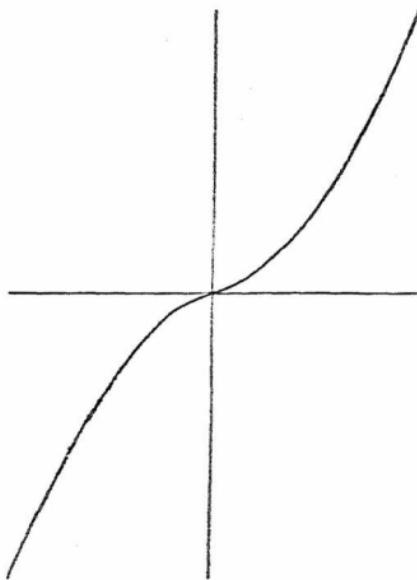


Fig. 65.

Wendeflachparabel mit der Gleichung $y = x^5$ dargestellt. Wenn δ aber ein Bruch ist, so kann die Kurve vom Typus der kubischen Parabel im Wendepunkt den Krümmungsradius 0 oder ∞ haben. Das nämliche gilt von den Kurven vom Typus der gewöhnlichen und der semikubischen Parabel. Es kommt nur darauf an, ob $\delta \leq 2$ ist. Während z. B. bei der Spitzpunktsparabel $y^3 = x^4$ der Krümmungsradius im Ursprung Null ist, ist er bei der Parabel $y^3 = x^8$ wieder ∞ . Der Spitzpunkt ist hier durch

die Vielfachheit der Tangente schon überdeckt. Hingegen hat $y^5 = x^6$ einen eigentlichen Spitzpunkt höherer Ordnung.

Von den Wendeparabeln haben wir die Formen $y = x^3$ und $y = x^5$ mit $R = \infty$ schon kennen gelernt. Die „Wendespitzparabel“ $y^3 = x^5$ macht hingegen eine sehr scharfe Wendung im Anfangspunkt, wo $R = 0$ ist (Fig. 65). Bei $y^3 = x^7$ überwiegt schon wieder die vielfache Tangente. Hingegen ist $y^5 = x^7$ wieder eine Wendespitzparabel höherer Ordnung. Von der semikubischen Parabel $y^2 = x^3$ wissen wir schon, daß der Krümmungsradius der Spitze Null ist (S. 12), bei der „Rückkehrflachparabel“ $y^2 = x^5$ herrscht die Flachheit vor ($R = \infty$), $y^4 = x^5$ ist hingegen die erste „Rückkehrspitzparabel“ (s. Fig. 66) mit sehr scharfer Spitze ($R = 0$).

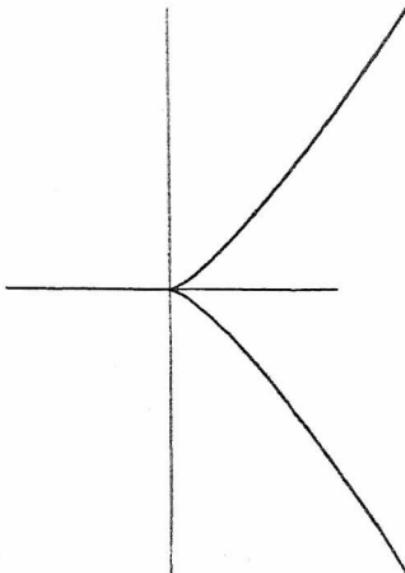


Fig. 66.

Die unendlichen Äste dieser Parabeln entfernen sich desto mehr von der y -Achse, je mehr im Punkte $x = 0$, $y = \infty$ die Flachheit überwiegt (Fig. 61 u. 66) sie nähern sich ihr um so mehr, als dort der Charakter des Spitzpunktes oder der scharfen Spitze vorherrscht (Fig. 62 u. 64).

Die höheren Hyperbeln ($\delta < 0$) haben nur zwei Erscheinungsformen. Sie sehen entweder aus wie die gewöhnliche Hyperbel oder wie die kubische Hyperbel (Fig. 23 auf S. 49). Die Achsen sind ja hier zugleich die Asymptoten, und da Wendepunkt und Spitze immer gleich-

zeitig bei derselben Kurve auftreten, fallen diese beiden Typen in einen zusammen. Je schärfer Wendepunkt oder Spitze sind, desto mehr Abstand haben die Zweige von den Achsen, je flacher Wendung oder Spitze, desto näher verlaufen sie an den Achsen. Dasselbe gilt für die unendlich fernen Flach- oder Spitzpunkte. Die Figur 63 (S. 107) für die Kurve $x y^3 = 1$ und die Fig. 67 für $x y^4 = 1$ illustrieren das Gesagte.

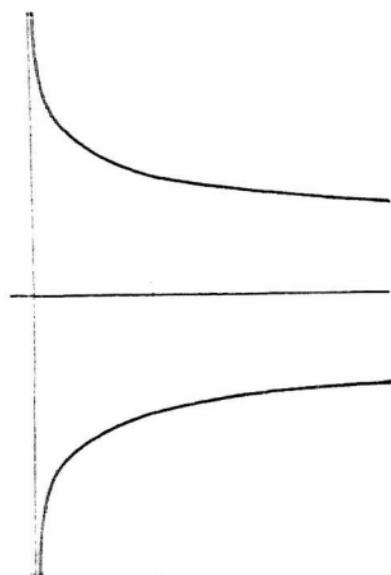


Fig. 67.

55. Das analytische Dreieck. Nun kommen wir zu jener praktischen Methode Newtons, die in der Cramerschen Verfeinerung sofort gestattet, die ersten Glieder der überhaupt möglichen reellen Entwicklungen für alle drei Koordinatenecken mit einem Male abzulesen. Newton schrieb die Glieder einer Gleichung ohne die Koeffizienten nach der Art der Fig. 68 in ein Rechteck, das, wenn die Gleichung in y bis zum μ^{ten} , in x bis zum ν^{ten} Grad

x^2	$x^2 y$	$x^2 y^2$	$x^2 y^3$
x	$x y$	$x y^2$	$x y^3$
0	y	y^2	y^3

Fig. 68.

ging, $(\mu + 1)$ Felder in horizontaler, $(\nu + 1)$ Felder in vertikaler Richtung hatte, und bezeichnete dann diejenigen Felder,

die ein Glied enthielten, das in der Gleichung wirklich vorkam, mit einem Stern. Man spricht deshalb von dem „Newton'schen Parallelogramm“. Dieses Parallelogramm enthält aber offenbar nicht alle Glieder, die in der Gleichung $(u+v)^n$ Grades vorkommen könnten. Newton kam es eben nur auf eine Entwicklung für den Anfangspunkt an. Schon de Gu a berücksichtigte auch die unendlichen Zweige und erweiterte das Parallelogramm zu einem Dreieck. In der Fig. 68 wären demnach oben noch die Felder mit den Gliedern x^3 , x^3y ,

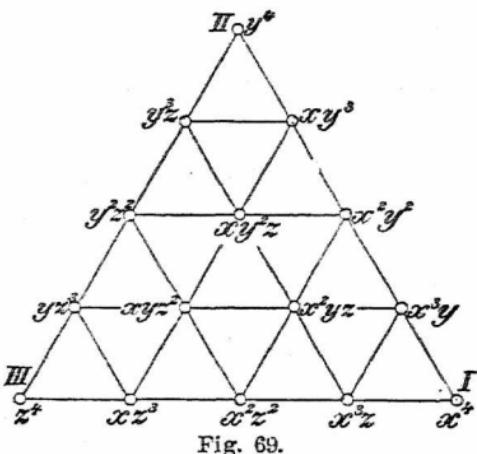


Fig. 69.

x^3y^2 ; x^4 , x^4y ; x^5 , rechts die mit den Gliedern y^4 , xy^4 ; y^5 anzufügen. Wir können, damit die gleichmäßige Berücksichtigung aller Ecken in Erscheinung tritt, die Gleichung zuerst homogenisieren, dann, wie es schon Cramer tat, nur die Mittelpunkte der Felder mit Punkten bezeichnen, diese als Repräsentanten der Gleichungsglieder nehmen und miteinander verbinden. Auch werden wir die Glieder ohne y auf der unteren, die ohne x auf der linken Dreieckseite annehmen. Dann erhält das Dreieck, das de Gu a „algebraisches“, Cramer „analytisches Dreieck“ nannte, die Form der Fig. 69, wenn wir uns auf die Glieder bis zur

4. Ordnung beschränken. Bei den gewöhnlichen Anwendungen werden wir in der Ecke *III* einen rechten Winkel zeichnen und diejenigen Glieder, die in der Gleichung wirklich vorkommen, durch Ringelchen hervorheben. Auch werden wir je nach Bedarf irgendeine der drei homogenen Koordinaten gleich 1 setzen.

Ist nun eines der in der Gleichung vorkommenden Glieder $x^\xi y^\eta$, so kann man in dem analytischen Dreieck ξ und η als Koordinaten (in bezug auf die Ecke *III*) des dem betreffenden Gliede entsprechenden Punktes betrachten. Setzen wir dann in der ganzen Gleichung $y = \lambda x^\delta$, so wird aus unserem Gliede $\lambda x^\xi x^{\delta\eta} = \lambda x^{\xi + \delta\eta}$. Wollen wir eine Annäherung für den Anfangspunkt, der als auf der Kurve liegend gedacht ist, so müssen wir, wie oben ausgeführt, δ einen solchen Wert erteilen, daß mindestens zwei der Exponenten $\xi + \delta\eta$ den gleichen Wert γ erhalten und γ dann zugleich der kleinste Exponent der Gleichung ist. Wenn man nun ξ, η als Koordinaten auffaßt, ergibt sich ohne weiteres, daß alle Punkte, für die $\xi + \delta\eta = \gamma$ ist, auch wenn deren mehr sind als zwei, auf einer Geraden mit dieser Gleichung liegen. Je nach den verschiedenen Werten von γ ordnen sich also alle Glieder in parallelen Geraden an, deren Abstand vom Anfangspunkt $\gamma/\sqrt{1 + \delta^2}$ ist. Wir finden also diejenigen Glieder, denen das kleinste γ entspricht, wenn wir zwei (oder mehr) Punkte wählen, deren Verbindungslinie dem Anfangspunkt näher ist, als irgendeine Parallelle zu ihr durch einen anderen einem Gleichungsglied entsprechenden Punkt. Wenn wir, wie Newton das ausdrückte, etwa von dem niedrigsten Glied in y allein ausgingen, an dieses ein Lineal (längs der y -Achse) anlegten und dieses so lange um diesen Punkt dem Uhrzeiger entgegen drehten, bis es auf einen oder mehrere weitere Kurvenpunkte stieße, so hätten wir eben nur eine

Entwicklung, mit der Newton sich begnügte. Wir müßten, wenn nicht der letzte von dem Lineal berührte Punkt ein Glied in x allein wäre, das Lineal um diesen letzten Punkt in demselben Sinne weiter drehen, bis es auf weitere Punkte träfe und dies so lange fortsetzen, bis das Lineal bei seiner Drehung einen Punkt der x -Seite des analytischen Dreiecks berühren würde.

Der Leser wird bemerken, daß unsere obige Regel alle diese so erhaltenen Entwicklungen umfaßt. Ganz entsprechende Regeln gelten für die beiden anderen Koordinatenecken. Indem wir alle drei gleichzeitig berücksichtigen, können wir auch folgendermaßen sagen: Man schließe alle Kurvenpunkte in ein überall konvexes Polygon ein, dessen Ecken sämtliche selbst Kurvenpunkten entsprechen, dann geben die einzelnen Polygonseiten, mit Ausnahme derjenigen, die etwa auf den Seiten des analytischen Dreiecks liegen. Näherungskurven für die ihnen gegenüberliegenden Ecken.

Selbstverständlich ist das analytische Dreieck auch für gewöhnliche Kurvenpunkte, sofern diese nur in irgend einer Koordinatenecke liegen, brauchbar. Das erste Glied der Entwicklung gibt dann freilich nur die Tangente in dem betreffenden Punkt. Man bestimmt aber sofort ein zweites Glied mit einem neuen analytischen Dreieck. Hat die erste Annäherung $y = \lambda x^\delta$ ergeben, so setzt man $y = \lambda x^\delta + y_1$ in die Kurvengleichung ein und bestimmt $y_1 = \Delta x^\delta$ aus dem neuen analytischen Dreieck. Man hat dann nur zu beachten, daß $\Delta > \delta$ werden muß. Denn $\Delta = \delta$ würde die Entwicklung nicht vorwärts bringen und $\Delta < \delta$ könnte schließlich zu negativen Exponenten führen, was dem Punkt $x = 0, y = 0$ nicht mehr entspräche. Übrigens kann der Fall $\Delta < \delta$ ohnehin nicht eintreten, da das analytische Dreieck schon immer den jeweils kleinsten Wert von δ ergibt.

56. Beispiele zum analytischen Dreieck. Wir nehmen jetzt gleich die oben behandelten Beispiele wieder vor, um den Nutzen des analytischen Dreiecks deutlich zu machen.

Beisp. 1. Für die Kurve $y^3 = x^4 + y^4$ (vgl. S. 99) ist das bestimmende Polygon in Fig. 70 wiedergegeben. Die auf den Seiten des Dreiecks liegenden Polygonseiten entsprechen offenbar den Schnittpunkten mit den Achsen unter Einschluß der unendlich fernen Geraden. Denn sie ergeben die Gleichungen $y^3 = y^4$ und $x^4 + y^4 = 0$. Es gibt demnach nur eine eigentliche

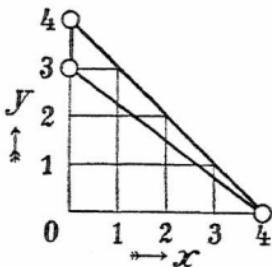


Fig. 70.

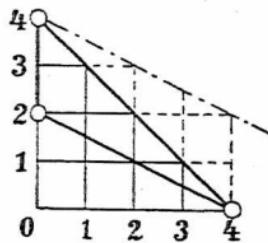


Fig. 71.

Näherungskurve $y^3 = x^4$. Das analytische Dreieck ergibt also sofort den Exponenten und den Koeffizienten λ des ersten Gliedes $y = \lambda x^\delta$ der Entwicklung. Der Nenner 3 des Bruches $\delta = \frac{4}{3}$ zeigt die Ordnung der Superlinearität an, deren Partialzweige man erhält, wenn man alle drei Werte $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ von $\sqrt[3]{1}$ berücksichtigt. Es gibt also drei Entwickelungen für den Punkt (darunter zwei imaginäre), die durch Vertauschung der drei Werte von $\sqrt[3]{1}$ ineinander übergehen. Im übrigen vgl. Beisp. 1 v. Nr. 49.

Beisp. 2. Die zweite, oben betrachtete Kurve (vgl. S. 101/2) war $y^2 = x^4 + y^4$. Das analytische Dreieck (Fig. 71) ergibt sofort die Näherung $y^2 = x^4$, also einen einzigen superlinearen Zweig im Anfangspunkt, der sich diesmal in zwei reelle Partialzweige $y = \pm x^2$ spaltet, die hier durch Vertauschung der beiden Werte von $\sqrt[4]{1}$ entstehen. Setzen wir nun $y = x^2 + y_1$ in die Gleichung ein, so ergibt sich $(x^2 + y_1)^2 = x^4 + (x^2 + y_1)^4$. Man sieht auch ohne Auspotenzieren, daß das Glied x^4 wegfällt, so daß sich das in Fig. 72 dargestellte bestimmende Polygon ergibt. Es ist nicht ohne Nutzen, die Entstehung dieses zweiten

Polygons aus dem ersten noch etwas näher zu betrachten. Durch die Substitution hat sich die Dimension der Glieder der ursprünglichen Gleichung nicht geändert. Auch im neuen Polygon liegen also die Glieder auf den nämlichen zwei Parallelens, deren eine in Fig. 71 strichpunktierte nur ein Glied enthielt. In Fig. 72 sind aber diese Parallelens ganz mit Gliedern ausgefüllt, nur daß selbstverständlich das Glied x^4 fehlt. Es scheint nun, als ob es jetzt zwei Fortsetzungen der Reihe gäbe, da jetzt zwei Seiten des Polygons dem Anfangspunkt gegenüber liegen. Aber die eine Seite ist die alte Bestimmungslinie. Sie gibt $y_1^2 + 2x^2 y_1 = 0$, also entweder $y_1 = 0$ oder $y_1 = -2x^2$.

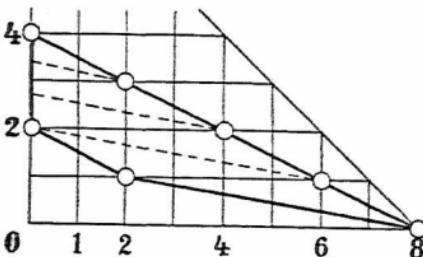


Fig. 72.

Wir bleiben demnach mit ihr ganz im Bereiche der ersten Annäherung. Vielmehr müssen wir das Lineal um den auf dieser Geraden dem weggefallenen Glied zunächst liegenden Punkt $(x^2 y_1)$ drehen, bis es den nächsten Punkt der x -Achse trifft. Dieser ist hier (x^8) und wir erhalten aus der obigen Gleichung $2x^2 y_1 = x^8$ oder $y_1 = \frac{1}{2}x^6$. Hätten wir $y = -x^2 + y'_1$ gesetzt, so hätte sich $y'_1 = -\frac{1}{2}x^6$ ergeben. Demnach haben wir die zwei Entwickelungen, die beginnen: $y = \pm(x^2 + \frac{1}{2}x^6)$.

Parallel zur neuen Bestimmungslinie ordnen sich nun die Glieder des Polygons der Fig. 72 in 5 Parallelens an, die den Dimensionen x^8 , x^{12} , x^{16} , x^{20} , x^{24} entsprechen. Die Parallelens sind in der Figur gestrichelt. Auf sie verteilen sich die Glieder eines dritten analytischen Dreiecks, wenn man $y = x^2 + \frac{1}{2}x^6 + y_2$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzt, wobei zugleich das Glied x^8 wegfällt. Der nächste Punkt der x -Seite des analytischen Dreiecks ist aber offenbar der durch die zweite Parallelie getroffene Punkt (x^{12}) . Unser Lineal muß also durch die Punkte $(x^2 y_2)$ und (x^{12}) gelegt werden. Aus der Gleichung

$$(x^2 + \frac{1}{2}x^6 + y_2)^2 = x^4 + (x^2 + \frac{1}{2}x^6 + y_2)^4$$

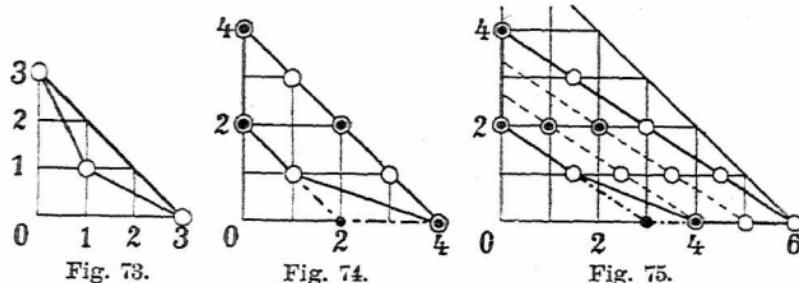
findet man, ohne daß man alles zu entwickeln braucht, als zugehörige Glieder $2x^2 y_2 + \frac{1}{4}x^{12} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{12}$, demnach $y_2 = \frac{1}{8}x^{10}$, so daß die ersten 3 Glieder der beiden Entwickelungen lauten $y = \pm(x^2 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{8}x^{10})$. Auf ähnliche Weise kann man weiterfahren, ohne daß die nötigen Rechnungen sich ins Unermeßliche

steigern. Auch läßt sich im vorliegenden Beispiel leicht erkennen, daß die bestimmende Gerade sich immer um $(x^2 y)$ dreht, während der zweite Punkt, durch den sie geht, sich beständig um 4 Einheiten weiter auf der x -Seite des analytischen Dreiecks bewegt. Man kann demnach ganz allgemein anschreiben

$$y = \pm(x^2 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{8}x^{10} + \alpha x^{14} + \beta x^{18} + \dots)$$

und die Koeffizienten α, β, \dots durch Einsetzen dieser Reihe in die ursprüngliche Gleichung bestimmen.

Beisp. 3. Legt man die Gleichung des Descartesschen Blattes $axy = x^3 + y^3$ (vgl. S. 23) auf das analytische Dreieck (vgl. Fig. 73), so ergeben sich für den Anfangspunkt sofort die beiden Näherungsparabeln $ax = y^2$ und $ay = x^2$, die in Fig. 33 (S. 80) eingezeichnet sind und die Lage der Schleife bestimmen.



Beisp. 4. Die Gleichung der Bernoullischen Lemniskate ist $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ (für $a = 1$; vgl. S. 61). Das analytische Dreieck (Fig. 74) gibt natürlich zunächst (schwarze Punkte) nur die beiden Tangenten $y = \pm x$ des Anfangspunktes. Setzt man aber $y = x + y_1$ in die Gleichung, so werden die beiden Parallelreihen ganz ausgefüllt (geringelte Punkte) mit Ausnahme des Punktes (x^2) . Aus der Gleichung findet man sofort $4x^4 = -2xy_1$, für die jetzt in Betracht kommende Bestimmungslinie, so daß $y_1 = -2x^3$ wird. Die beiden Näherungskurven lauten $y = \pm(x - 2x^3)$. Der Leser möge sie sich durch Einsetzen einiger Werte selbst zeichnen. Sie haben Wendepunkte mit den Geraden $y = \pm x$ als Tangenten und gehen wie die kubischen Parabeln $y = \mp 2x^3$ ins Unendliche.

Beisp. 5. Um auch ein Beispiel für gebrochene Exponenten zu geben, behandeln wir die Kardioide, deren Gleichung ist (für $m = a = 1$; s. S. 62) $y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x(x^2 + y^2)$. Hier gibt das analytische Dreieck (Fig. 75; schwarze Punkte) sofort $y^2 = -2x^3$,

also die beiden Partialzweige $y = \pm i\sqrt{2}x^{\frac{5}{4}}$. Diese beiden Partialzweige sind natürlich keineswegs überhaupt imaginär, sondern nur auf der Seite der positiven x . Das besagt also lediglich, daß die Spitze nach rechts gerichtet ist. Wir wollen ein weiteres Glied der Entwicklung bestimmen. Durch die Punkte, die den Gliedern der Gleichung entsprechen, gehen im ganzen 4 Parallele zur ersten Bestimmungslinie. Auf diese 4 Parallelen werden sich die neuen Glieder verteilen, wenn wir $y = i\sqrt{2}x^{\frac{5}{4}} + y_1$ in die Gleichung einsetzen. Wir erhalten

$(y_1 + i\sqrt{2}x^{\frac{5}{4}})^2 = [x^2 + (y_1 + i\sqrt{2}x^{\frac{5}{4}})^2]^2 - 2x[x^2 + (y_1 + i\sqrt{2}x^{\frac{5}{4}})^2]$ und damit die in der Figur geringelten Glieder, unter denen natürlich das Glied (x^3) fehlt. Dafür ist x^4 noch vorhanden. Die neue Bestimmungslinie geht aber nicht durch den Punkt (y_1^2) , da das neue Glied $x^{\frac{5}{4}}y_1$ aufgetreten ist. Dieses mit (x^4) verbunden gibt die Bestimmungslinie. Aus der Gleichung erhält man

$$2i\sqrt{2}x^{\frac{5}{4}}y_1 = x^4 + 4x^4,$$

also $y_1 = -\frac{1}{4}i\sqrt{2}x^{\frac{5}{4}}$. Die beiden Partialzweige lauten also $y = \pm i\sqrt{2}(x^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{4}x^{\frac{5}{4}})$. Beide zusammen geben eine Kurve 5. Ordnung mit der Gleichung $y^2 = -\frac{1}{8}x^3(5x - 4)^2$, die im Wesen wie eine semikubische Parabel aussieht, aber steiler ins Unendliche geht, wo sie einen Wendespitzenpunkt hat.

Beisp. 6. Wenn $\Phi = 0$ oder $\Psi = 0$ Gerade bedeuten, die durch den Punkt (a, b) gehen, A und B aber beliebige Funktionen in x, y sind, die nicht verschwinden für $x = a, y = b$, so stellt die Gleichung

$$(I) \quad A\Phi'' = B\Psi''$$

eine Kurve dar, die im Punkte (a, b) die Näherungskurve

$$(II) \quad \alpha_0\Phi'' = \beta_0\Psi''$$

hat, wobei α_0 und β_0 für die Ausdrücke $A(a, b)$ und $B(a, b)$ gesetzt sind.

Verschiebt man nämlich das Koordinatensystem in den Punkt (a, b) , so werden die Absolutglieder in A und B gleich α_0 und β_0 (vgl. Nr. 17), während die von Φ und Ψ verschwinden. Φ gehe in Φ_0 , Ψ in Ψ_0 über. Setzt man nun $\Phi_0 = \xi$, $\Psi_0 = \eta$, so ändern sich α_0, β_0 nicht und die Gleichung lautet

(III) $[u(\xi, \eta) + \alpha_0]\xi'' = [v(\xi, \eta) + \beta_0]\eta'',$
die, auf das analytische Dreieck gelegt, offensichtlich die Näherungskurve

$$(IV) \quad \alpha_0\xi'' = \beta_0\eta''$$

im Anfangspunkt hat. Gleichung (IV) geht aber durch Zurück-transformieren in (II) über.

Der bewiesene Satz schließt die der Nrn. 12, 13 zum Teilein. Wie weit er sich aber auf beliebige Funktionen Φ , Ψ ausdehnen läßt, ist jedesmal durch Betrachtungen am analytischen Dreieck zu entscheiden. Für $\nu = 1$, $\mu = 3$ wäre er z. B. im allgemeinen unrichtig, für $\nu = 2$, $\mu = 3$ ist er aber immer richtig.

57. Näherungskurven für unendlich ferne Punkte.

Wenn wir etwa für die Ecke I ($y = 0$, $z = 0$) des Koordinatensystems (vgl. Fig. 69 auf S. 115), die natürlich dann auf der Kurve liegen soll, eine Näherungskurve suchen, werden wir z einführen, $x = 1$ setzen und y nach z in eine Reihe entwickeln. Ergibt sich dann

$$y = \lambda z^\delta + \lambda_1 z^{\delta+\mu} + \lambda_2 z^{\delta+\mu+\nu} + \dots$$

und ersetzt man schließlich wieder y durch y/x , z durch z/x , indem man noch $z = 1$ nimmt, so erhält man eine Entwicklung der Art

$$y = \lambda x^{1-\delta} + \lambda_1 x^{1-\delta-\mu} + \lambda_2 x^{1-\delta-\mu-\nu} + \dots$$

Diese Entwicklung ist auf alle Fälle absteigend. Wenn aber $\delta < 1$ ist, kann es zu Anfang mehrere Glieder mit positiven Exponenten von x geben. Es liegen dann parabolische Näherungskurven vor. In der Tat ist für $\delta < 1$ die unendlich ferne Gerade Tangente, wie man aus der ersten Näherungskurve $y = \lambda z^\delta$ erkennt. Für $\delta = 1$ (in welchem Falle $y = \lambda$ die Asymptote gibt) und $\delta > 1$ werden die Näherungskurven hyperbolisch. Im letzteren Falle berührt die x -Achse selbst. Für die Ecke II ($x = 0$, $z = 0$) des Koordinatensystems lassen sich natürlich entsprechende Entwicklungen aufstellen. In allen Fällen, in denen Näherungskurven auftreten, die für unendlich ferne Punkte gelten, ist es zweckmäßig, in der Skizze die in Betracht kommenden Zweige etwas zu verdicken, wie das Reuschle vorgeschlagen hat. Sonst kommen leicht Verwechslungen

vor. Im übrigen bedarf das Verfahren keiner weiteren Erläuterung und wir wollen es jetzt an mehreren Beispielen aufzeigen.

Beisp. 1. Für die Kurve mit der Gleichung $(x^2 - a^2)^2 = 4ax^3$ (s. S. 24) ergibt sich durch das analytische Dreieck (Fig. 76) sofort die Näherung $4ay^3 = x^4$ in der Ecke II. Führt man z ein und setzt $y = 1$, so lautet die Gleichung $4az = x^4$, zeigt also einen Flachpunkt an mit $z = 0$ als Tangente. Das erste Glied der Entwicklung für die Ecke II lautet demnach $x = \sqrt[4]{4az^4}$. Wir wollen auch hier noch ein zweites Glied der Entwicklung

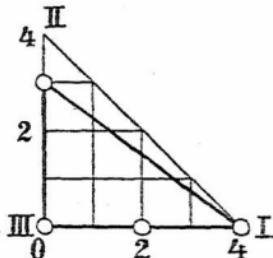


Fig. 76.

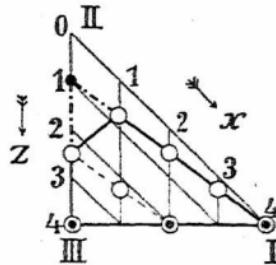


Fig. 77.

bestimmen. Es ist zu dem Zwecke besser, das analytische Dreieck so zu beziffern, wie in Fig. 77 geschehen ist. Dann führen wir auch in der ursprünglichen Gleichung z ein, setzen $y = 1$ und $x = \sqrt[4]{4az^4} + x_1$. Die neuen Glieder liegen entweder auf der ursprünglichen Bestimmungsgeraden oder auf Parallelen dazu (Fig. 77). Die ursprünglichen Glieder sind durch schwarze Punkte bezeichnet. Das Glied (z) fällt nach der Substitution natürlich weg. Sonst treten alle mit Ringelchen versehenen Glieder auf. Wir brauchen aber eigentlich nur festzustellen, daß die zwei Glieder $z^{\frac{1}{4}}$ und $x_1 z^{\frac{1}{4}}$ vorhanden sind, da diese beiden die nächste Näherung ergeben. Man erhält aus der Gleichung

$$[(\sqrt[4]{4az^4} + x_1)^2 - a^2 z^2]^2 = 4az$$

sofort: $-2a^2 \sqrt[4]{4az^4} + 4\sqrt[4]{(4a)^3} z^{\frac{3}{4}} = 0$, oder $x_1 = \frac{1}{4} a \sqrt[4]{4a^3} z^{\frac{1}{4}}$, so daß die zwei ersten Glieder lauten $x = \sqrt[4]{4az^4} + \frac{1}{4} a \sqrt[4]{4a^3} z^{\frac{1}{4}}$. Führt man wieder y ein, so erhält man

$$x = \sqrt[4]{4ay^4} + \frac{1}{4} a \sqrt[4]{4a^3} y^{-\frac{1}{4}}.$$

Von jetzt ab werden natürlich alle Glieder in y negative Exponenten haben. Es ist selbstverständlich, daß die Bestimmung des zweiten Gliedes der Entwicklung für die vorliegende Kurve wenig praktischen Wert hat. Denn sie macht kaum weniger Mühe als die Berechnung der wirklichen Koordinatenwerte aus der Gleichung selbst. Von desto größerer Wichtigkeit sind aber genauere Näherungskurven für Kurven höherer Ordnung, bei denen jeder wirkliche Punkt der Kurve nur durch ein längeres Näherungsverfahren errechnet werden könnte.

Da dies schon das dritte Beispiel ist, bei dem wir ein zweites Glied der Reihe bestimmen, wollen wir eine Regel andeuten, die zur Bestimmung der höheren Exponenten sehr dienlich ist. Wenn wir hier in die ursprüngliche Gleichung $x = \lambda z^{\frac{1}{4}}$ einsetzen, so rgeben sich Glieder mit $z, z^{\frac{5}{4}}, z^{\frac{9}{4}}$, wie ja Fig. 77 ganz deutlich eigt. Die Exponenten haben die konstante Differenz $\frac{4}{3}$. Die Differenz der Exponenten in der Reihe für x ist $\frac{4}{3} - (-\frac{4}{3})$, also ebenfalls $\frac{8}{3}$. Ähnliches können wir an den Beisp. 2 u. 5 von Nr. 56 feststellen. In der Tat ist dies kein Zufall und wir wollen versuchen, den Zusammenhang an dem vorliegenden Beispiel klarzumachen. Da die erste Näherung $x = \lambda z^{\frac{1}{4}}$ ist und durch die Substitution $x = \lambda z^{\frac{1}{4}} + x_1$ das Glied z^1 verloren geht, muß die neue Bestimmungslinie durch den (z^1) nächst gelegenen Punkt auf der ersten Bestimmungslinie gehen. Das ist der Punkt $(x_1 z^{1-\frac{1}{4}})$. Dieser Punkt wird mit dem (z^1) zunächst gelegenen Punkt der Seite II-III verbunden, das ist mit $(z^{1+\frac{2}{3}})$. Setzt man nun $\alpha x_1 z^{1-\frac{1}{4}} = \beta z^{1+\frac{2}{3}}$, so erhält man offenbar $x_1 = \gamma z^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}}$ und man sieht jetzt deutlich, woher diese Vernehrung des Exponenten um $\frac{2}{3}$ kommt. Genau so verhielt es sich bei den anderen Beispielen. Cramer hat diese Regel allgemein formuliert und auch auf die Fälle ausgedehnt, in denen die Ordnungen der Glieder der Gleichung sich in mehrere arithmetische Reihen sondern. Dann schreiten auch die Exponenten der Entwicklung in mehreren arithmetischen Reihen fort. Die arithmetischen Reihen beginnen aber überhaupt erst dann, wenn schon so weit entwickelt ist, daß keine Gabelungen mehr eintreten, d. h. für diesen Fall, daß das Glied $(x_1 z^{\frac{1}{4}})$ wirklich vorhanden ist. Denn würde etwa erst $x_1^\sigma z^{1-\frac{1}{4}\sigma}$ ($\sigma = 2, 3$) vorhanden sein, so gäbe es noch σ Werte für x_1 . Diese Gabelungen müssen aber nach einer endlichen Anzahl von Gliedern aufhören, einfach deswegen,

weil es ja für eine Kurve n -ter Ordnung im ganzen höchstens n verschiedene Entwicklungen geben kann.

Beisp. 2. Die vorgelegte Kurve sei eine Kubik mit der Gleichung

$$xy = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

Schreibt man die Gleichung homogen, so sieht man gleich, daß die Kurve in der Ecke II einen Doppelpunkt mit den Tangenten $x = 0, z = 0$ hat. Daher ist $x = 0$ eine Asymptote und die Kurve geht außerdem noch parabolisch durch diesen Punkt. Das analytische Dreieck (Fig. 78) gibt die beiden Näherungskurven $xy = d$, eine Hyperbel, die zeigt, in welcher Weise sich die Kubik der Asymptote nähert, und $xy = a x^3$ oder $y = a x^2$, eine Näherungsparabel für den parabolischen Zweig. Der Leser hat wohl schon bemerkt, daß er einen Tridens (s. S. 57) vor sich hat, in anderer Lage zum Koordinatensystem.

II

3
2
11
2
3

I

Fig. 78.

3

2

1

0

1
2
3

Fig. 79.

III

1
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
31
2
3

wenn a den Abstand des Punktes $O O'$ von G bedeutet. Nach dem analytischen Dreieck hat die Kurve für den Anfangspunkt die Näherung $(a^2 - l^2)y^2 + a^2x^2 = 0$. Diese Gleichung gibt das Tangentenpaar des Doppelpunkts, der im Anfangspunkt liegt. Man sieht, daß für $l > a$ ein Knoten, für $l = a$ eine Spitze, für $l < a$ ein isolierter Punkt entsteht. Dem letzten Falle entspricht unsere Figur. Für die Ecke I zeigt das analytische Dreieck

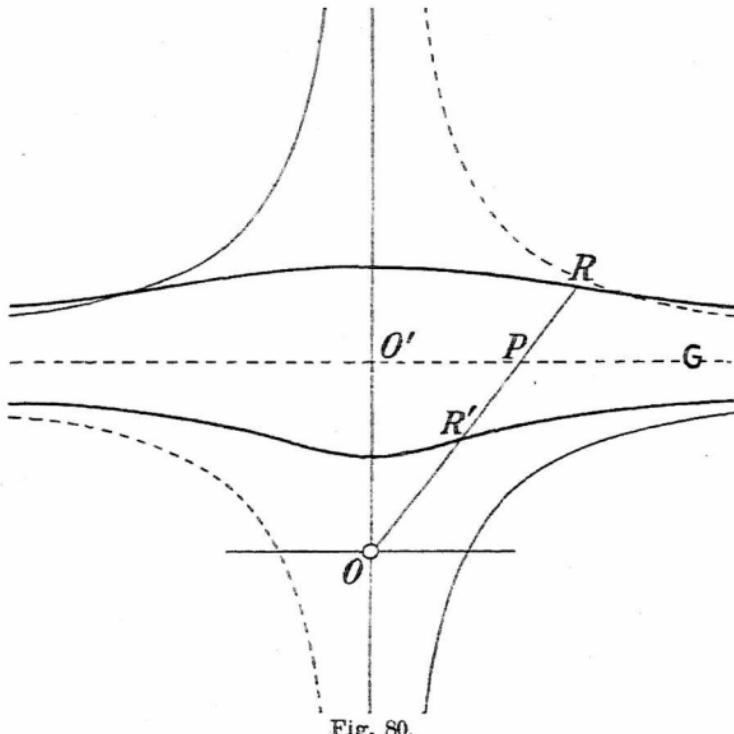


Fig. 80.

die Näherung an $a^2x^2 - 2ax^2y + x^2y^2 = 0$, d. i. nach Abtrennung des hier bedeutungslosen Faktors x^2 die Gleichung $(y - a)^2 = 0$, welche die gegebene Gerade G als doppelt zährende Asymptote kennzeichnet. Entwickeln wir weiter, so muß offenbar jetzt eine Gabelung eintreten. In der Tat, schreiben wir die Gleichung in y, z allein $(1 + y^2)(y - az)^2 - l^2y^2z^2 = 0$ und setzen $y = az + y_1$, so ergibt sich

$$[1 + (az + y_1)^2]y_1^2 - l^2z^2(az + y_1)^2 = 0$$

und das analytische Dreieck (Fig. 81) zeigt, daß zwei der (schwarzen) Punkte der ersten Bestimmungslinie weggefallen sind. Die neue Bestimmungslinie geht durch (z^4) und $(z^2 y_1^2)$ und ergibt $y_1^2 - l^2 a^2 z^4 = 0$, also $y_1 = \pm a l z^2$, demnach die Entwicklung $y = a z \pm a l z^2$ oder $(y - a z)^2 = a^2 l^2 z^4$, was einen Berührungs-knoten mit der Tangente $y = a z$ anzeigt. Kehren wir wieder zu x, y zurück, so erhalten wir die beiden Hyperbeln $x(y - a) = \pm a l$.

58. Aufzählung der bei Quartiken möglichen Singularitäten.

1. Die Liniensingularitäten. Wer bisher hier gefolgt ist, wird wohl imstande sein,

auch kompliziertere Kurvengleichungen zu diskutieren. Von großem Nutzen ist dabei allerdings, wenn man die Formen der Kubiken und Quartiken einigermaßen kennt. Freilich konnte eine vollständige Übersicht über die möglichen Formen auch nur der Kubiken nicht gegeben werden. Doch ist es, wenn man die Grundformen kennt (vgl. S. 46), nicht besonders schwierig, diese nach Art des durch Fig. 21 (S. 45) erläuterten Verfahrens in verschiedene Lagen zur unendlich fernen Geraden zu bringen. Wenn man versucht, sich verschiedene Formen von Kubiken zu skizzieren, darf man nur nie außer acht lassen, daß eine beliebige Tangente, besonders eine Asymptote, die Kurve nur mehr in einem Punkte, eine Wendetangente sie hingegen gar nicht mehr schneiden kann. Schwieriger ist die Sache schon bei Quartiken. Doch ist es immerhin möglich, nach den hier gegebenen Beispielen (vgl. S. 34) von den meisten der singularitäten-freien Formen eine Vorstellung zu gewinnen. Indem man diese in verschiedener Weise projiziert oder indem man statt der von uns immer benützten Ellipsen Hyperbeln, Parabeln oder Geradenpaare zugrunde legt, auch indem man von einer Kubik und einer Geraden ausgeht, kommt

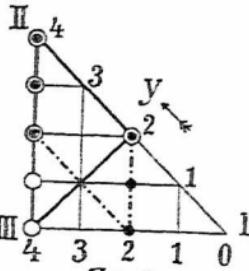


Fig. 81.

man zu den Formen mit ins Unendliche gehenden Ästen.

Um aber eine Übersicht über die Quartiken mit Singularitäten zu gewinnen, wollen wir in diesem letzten Abschnitt noch das analytische Dreieck in systematischer Weise heranziehen. Dabei wollen wir immer voraussetzen, daß die x -Achse Tangente der Kurve sei, so daß also in der Gleichung das Absolutglied und das Glied (x) von vornherein fehlen (Fig. 82). Dann erhält man als erste Näherungs-

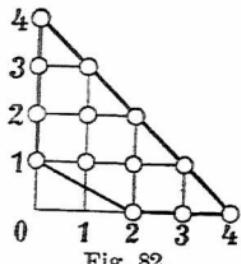


Fig. 82.

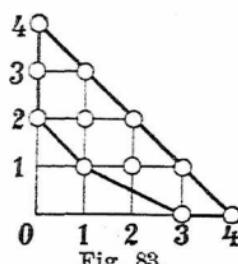


Fig. 83.

kurve eine Parabel $y = \lambda x^2$, wo das Vorzeichen von λ angibt, nach welcher Seite der x -Achse die Kurve gekrümmmt ist. Nun wollen wir zunächst das Glied y festhalten und andere Glieder zum Verschwinden bringen. Wenn x^2 fehlt, so existiert die Näherungskurve $y = \mu x^3$, die eine Wendetangente anzeigt. Fehlt auch x^3 , so gibt die Näherungskurve $y = \nu x^4$ das Kennzeichen eines Flachpunktes. All das ist uns bekannt. Das Glied x^4 kann nicht fehlen, weil sonst die Gleichung durch y teilbar wäre. Demnach sind alle einfachen Liniensingularitäten erschöpft.

2. Doppelpunkt und Spitze. Nun wollen wir das Glied y weglassen, das Glied x^3 aber wieder einsetzen. Soll $y = 0$ Tangente sein, so muß jetzt x^2 fehlen (Fig. 83). Die zwei niedrigsten Glieder der Gleichung sind dann y^2 und xy . Die Kurve hat im Anfangspunkt eine Singularität der Ordnung 2 mit dem Tangentenpaar $y(y + \alpha x) = 0$. Für

die x -Achse ergibt sich sofort eine Näherungsparabel $y + \beta x^2 = 0$ durch die Verbindungsgeraden von (x, y) und (βx^3) . Ist der Faktor y auch Faktor in $u_3(x, y)$, so muß wenigstens das Glied x^3 fehlen. Die Näherungskurve lautet dann $y + \gamma x^3 = 0$, der eine Zweig hat eine Wendung im Doppelpunkt. Dasselbe kann gleichzeitig für den anderen Zweig eintreten. Denn wir können durch die Substitution $y + \alpha x = \xi$, $y = \eta$ die andere Tangente zur y -Achse machen. Dann wird, während ein Glied ξ^2 oder ξ^3 , sofern es nicht schon vorhanden war, nicht auftreten kann, mit Sicherheit η^2 wegfallen, η^3 aber wegfallen können. Das analytische Dreieck sieht dann für den Inflexionsknoten (vgl. S. 56), wenn dessen Tangenten Koordinatenachsen sind, so aus, wie es Fig. 84 zeigt. Der Winkel im Anfangspunkt mag den Winkel der beiden Inflexionstangenten andeuten. Natürlich können die Glieder dritter Dimension in x, y ganz fehlen. Auch die drei mittleren Glieder von $u_4(x, y)$ sind nicht nötig. So wird die einfachste Gleichung einer lemniskatenähnlichen Kurve, die außer dem Inflexionsknoten keine weiteren Singularitäten besitzt, lauten $xy = \lambda x^4 + \lambda y^4$ bei positivem λ und beliebigem Achsenwinkel.

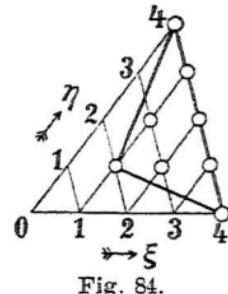


Fig. 84.

Bem. Der sog. „isolierte Punkt“ ist vorhanden, wenn das Aggregat $u_2(x, y) = 0$, das die Doppelpunktstangenten liefert, in zwei konjugiert imaginäre Faktoren $(y + i\lambda x)(y - i\lambda x) = 0$ zerfällt. Dann kann (bei reeller Gleichung) das Glied x^2 nicht fehlen, sondern es fehlt xy und die beiden Glieder x^2 und y^2 haben gleiches Vorzeichen. Es ergeben sich zwei konjugiert imaginäre Entwicklungen für den Punkt. Der isolierte Punkt wird zum isolierten Inflexionsknoten, wenn das Aggregat $u_3(x, y)$ den Faktor $y^2 + \lambda^2 x^2$ enthält. Einen isolierten Knoten, bei dem nur einer der Zweige eine Wendung im Doppelpunkt besitzt, kann eine reelle Kurve natürlich nicht haben.

Beisp. Hier sei noch die Kurve $x^4 - y^4 + x^2 - 2y^2 = 0$ als sehr spezialisiertes Beispiel einer Kurvenform angegeben, auf die der Leser sonst vielleicht nicht ohne weiteres kommen würde. Eine Quartik kann nämlich, wie die Gestalt dieser Kurve zeigt (Fig. 85), auch aus zwei sich durchsetzenden unpaaren Zügen bestehen.

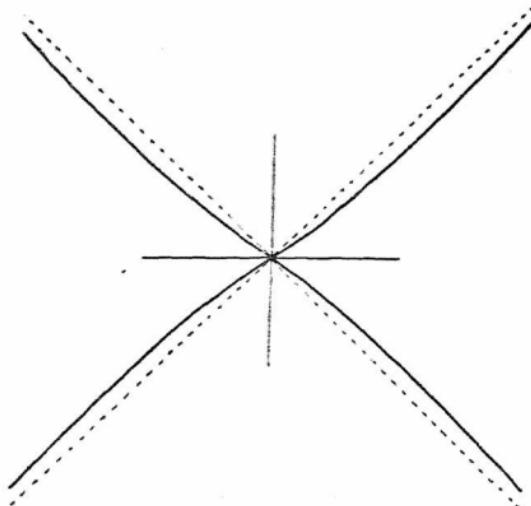


Fig. 85.

Es bleibt uns nun übrig, wenn wir weiterhin wieder von dem analytischen Dreieck der Fig. 83 ausgehen, noch

das Glied xy wegzulassen. Dann sind die Tangenten der Singularität vereinigt in $y^2 = 0$. Die Kurve hat, wenn das Glied x^3 nicht fehlt, in dem Punkte eine Spitze, denn die Näherungskurve lautet $y^2 + \vartheta x^3 = 0$.

3. Der Berührknoten.

Fehlt nun in der Gleichung das Glied x^3 , d. h. ist y auch Faktor des Aggregates $u_3(x, y)$, so kommen die drei Glieder y^2 , x^2y und x^4 für die erste Näherung in Betracht (Fig. 86). Eine Gleichung

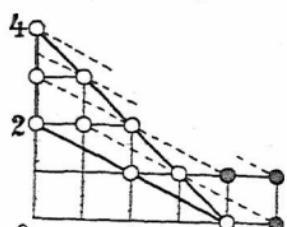


Fig. 86.

$$(1) \quad y^2 - 2\lambda x^2 y + z x^4 = 0$$

zerfällt aber in das Produkt

(2) $[y - (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - z})x^2][y - (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - z})x^2] = 0$,
 das zwei sich im Anfangspunkt berührende Parabeln darstellt. Wir haben also zwei lineare Zweige, wie beim gewöhnlichen Knoten, hier aber mit derselben Tangente. Es liegt ein Berührknoten vor. Die Zweige sind reell für $z < \lambda^2$, konjugiert imaginär für $z > \lambda^2$. Im letzteren Falle ist der Berührknoten isoliert. Der Fall $z = \lambda^2$ erfordert eine gesonderte Betrachtung.

Für $\sqrt{\lambda^2 - z} < \lambda$ sind beide Parabeln nach derselben Seite gerichtet, für $\sqrt{\lambda^2 - z} > \lambda$ nach entgegengesetzter Seite. Der Fall $\sqrt{\lambda^2 - z} = \lambda$ ist nur für $z = 0$ möglich, was ein Zerfallen der Kurve bewirken würde. Ist aber $\lambda = 0$, d. h. fehlt das Glied $x^2 y$, so ergibt sich lediglich $(y - \sqrt{-z} x^2)(y + \sqrt{-z} x^2)$, also für positives z zwei konjugiert imaginäre, für negatives z zwei reelle Parabeln derselben Art, wie im allgemeinen Falle. Die Parabeln liegen nur hier symmetrisch zur gemeinsamen Tangente.

Beisp. 1. Um noch ein in bezug auf die Gestalt charakteristisches Beispiel zu geben (siehe im übrigen S. 102), betrachten wir die Kurve $y^2 = x^4 - x^3 y$ (zentrische Symmetrie!). Näherung für $x = 0$, $z = 0$ ist $y = -x^3$, also dort Spitze mit $z = 0$ als Tangente. Näherung für den Anfangspunkt $y = \pm x^2$. Die Linien $y = -x^3$ und $y = \pm x^2$ schneiden sich in den Punkten $x = \pm 1$, $y = \mp 1$. Keine der Näherungskurven trifft aber die gegebene Kurve anderswo als im Anfangspunkt. Die Parabeln $y = \pm x^2$ berühren sie dort 5-punkig, also so, daß die Kurve gleichzeitig überschritten wird. Da ferner $x - y = 0$ einfache Asymptote ist, muß die Kurve laufen, wie in Fig. 87 angegeben.

Beisp. 2. Die Kurve $y^4 = a^2(y^2 - x^2)$, für die schon Gregorius a St. Vincentio in seinem *Opus geometricum* (1647) eine Konstruktion angab, wird gerne „Achterkurve“ genannt. Diese Kurve hat in $y = 0$, $z = 0$ eine Singularität mit $z = 0$ als Tangente, für die sich die Näherung $-a^2 x^2 = y^4$ er-

gibt. Die beiden Bestandteile $y^2 = \pm i a x$ sind imaginär. Es liegt ein isolierter Berührungsnoten vor.

Beisp. 3. Die Kurve $x^4 + y^4 - 4x^2y + y^2 = 0$ möge der Leser selbst behandeln (*Theorie d. alg. K.* S. 106).

4. Die Schnabelspitze. Wir haben nun den Fall genauer ins Auge zu fassen, daß die erste Näherung

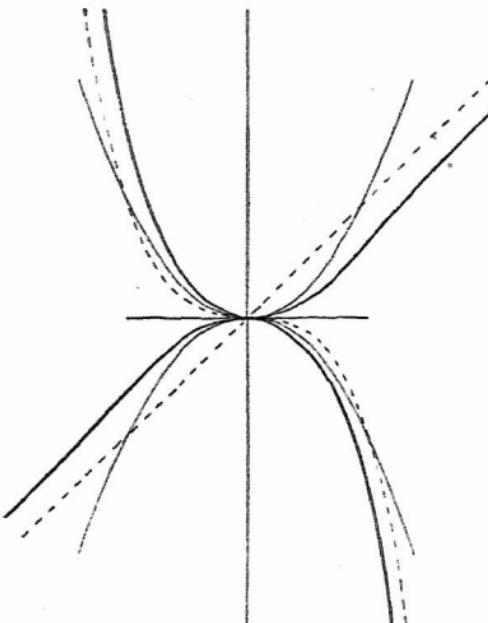


Fig. 87.

$y^2 - 2\lambda x^2 y + \alpha x^2$ ein vollständiges Quadrat bildet, was für $\alpha = \lambda^2$ der Fall ist. Die Gleichung der Quartik lautet dann

$$(3) \quad (y - \lambda x^2)^2 = (\alpha x y^2 + \beta x^3 y) + (\gamma y^3 + \delta x^2 y^2) \\ + \varepsilon x y^3 + \zeta y^4.$$

Wir haben hier gleich die Glieder derselben Ordnung in Klammern zusammengefaßt. Sie sind auf der rechten Seite der Reihe nach von der 5., 6., 7. und 8. Ordnung für $y = \lambda x^2$. Setzt man also, um eine weitere Näherung zu

erhalten, $y = \lambda x^2 + y_1$, so genügt es fürs erste, nur die Glieder 5. Ordnung ins Auge zu fassen (vgl. Fig. 86). Man erhält

$$(4) \quad y_1^2 = [\lambda(\alpha\lambda + \beta)x^5 + (2\alpha\lambda + \beta)x^3y_1 + \alpha xy_1^2] + \dots$$

Da λ auf alle Fälle von Null verschieden ist, brauchen wir nur $\alpha\lambda + \beta \geq 0$ vorauszusetzen, dann gibt $y_1^2 = \lambda(\alpha\lambda + \beta)x^5$ die nächste Näherung und wir erhalten die Entwicklung

$$(5) \quad y = \lambda x^2 \pm \sqrt{\lambda(\alpha\lambda + \beta)}x^{\frac{5}{2}}.$$

Die Kurve $y = \lambda x^2 \pm \lambda x^{\frac{5}{2}}$ hat ein ganz charakteristisches Verhalten. Vor allem zeigt das

Glied mit dem Exponenten $\frac{5}{2}$, daß sich die Kurve nicht nach der negativen Seite der Abszissen erstreckt. Der Zweig, der dem Pluszeichen entspricht, geht vom Anfangspunkt aus, wo er die Parabel $y = \lambda x^2$ berührt, und steigt ohne weitere Besonderheiten im Innern der Parabel steil an (vgl. Fig. 88). Der zweite Zweig muß sich im Anfangspunkt ebenfalls der nämlichen Parabel anschmiegen.

Hieraus allein geht schon hervor, daß auch der zweite Zweig seine hohle Seite zunächst nach oben kehrt. Wir haben eine sog. „Schnabelspitze“. Dies wird noch deutlicher, wenn man für den zweiten Zweig die Differentialquotienten y' und y'' bildet. Zunächst sieht man, daß für $y = 0$ $x_0 = (\lambda/\Lambda)^2$ ist. Ferner gibt $y' = 0$ die Abszisse für ein Maximum nämlich $x_1 = (4\lambda/5\Lambda)^2 < x_0$. Schließlich liefert $y'' = 0$ die Abszisse eines Wendepunktes, näm-

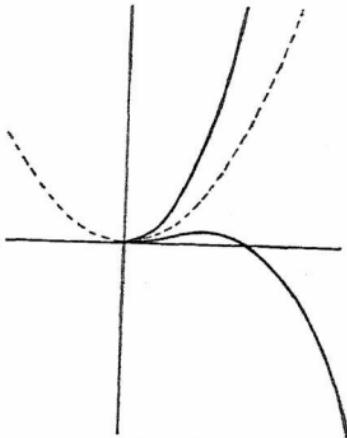


Fig. 88.

lich $x_2 = (8\lambda/15A)^2 < x_1$. Bringt man die Gleichung in die rationale Form $(y - \lambda x^2)^2 = A^2 x^5$, so ergibt sich für den Punkt $x = 0, z = 0$ als Näherungskurve die Rückkehrflachparabel $y^2 = A^2 x^5$, die im Unendlichen einen Wendespitzenpunkt hat und also wie die semikubische Parabel, nur steiler, ins Unendliche geht. Der Charakter der Figur 88 ist damit auch analytisch vollständig geklärt.

Von Interesse ist noch, daß der Krümmungsradius R der Schnabelspitze endlich ist. Er ist einfach gleich demjenigen ($R = 1/2\lambda$) der Näherungsparabel $y = \lambda x^2$, wie man mittels der auf S. 110 gegebenen Formel sofort erkennt. Es erscheint uns heute merkwürdig, daß de Gua die Möglichkeit einer Schnabelspitze noch 1740 leugnete, nachdem schon der Marquis de L'Hospital in seiner *Analyse des infiniment petits* i. J. 1696 ihre Existenz, wenn auch nicht in analytischer Form, nachgewiesen hatte. Cramer folgte de Gua hierin nicht; aber erst Euler stellte 1751 in einer eigenen Abhandlung die bezüglichen Verhältnisse vollständig klar. Daß die Schnabelspitze zu sich selbst dualistisch ist, zeigt eine Skizze der polarisierten Kurve. Auf die analytische Behandlung dieser (vgl. *Theorie d. alg. K.* S. 131) und der folgenden Singularitäten in Linienkoordinaten müssen wir hier verzichten.

Beisp. 1. In ein Quadrat $A O B C$ (von der Seitenlänge 2) ist ein Kreis einbeschrieben. Durch einen Punkt P_0 des Kreises werde $P_0 P_1$ (P_1 auf $O C$) $\parallel B O$ gezogen. Der Schnittpunkt P von $A P_1$ und $O P_0$ durchläuft eine Kurve mit der Gleichung

$$(4x^4 - 4x^3y + 5x^2y^2 + 2xy^3 + y^4) - 4y(2x^2 + xy + y^2) + 4y^2 = 0,$$

wenn P_0 auf dem Kreise läuft. Der Leser beweise die aus der Fig. 89 ersichtlichen Eigenschaften der Kurve analytisch (Beisp. von Schoute).

Beisp. 2. Die Kurve

$$(x^4 + xy^3 + 4y^4) - y(2x^2 + xy + 4y^2) + y^2 = 0$$

hat wie die vorige eine Schnabelspitze im Ursprung, besteht

aber aus zwei getrennten Teilen. Tangenten vom Anfangspunkt an die Kurve, die anderswo berühren, sind die Geraden mit der Gleichung $y = \lambda x$ für $\lambda = \infty$, $\lambda = -4$, $\lambda = -\frac{1}{4}$. Die Gerade

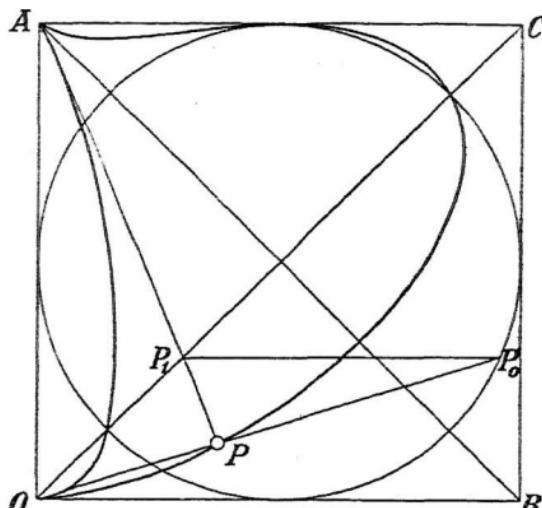


Fig. 89.

$y = 1$ berührt die Kurve in den Punkten $x = \pm 1$. Wenn das freie Unifolium an den Zug mit der Schnabelspitze herantritt, entsteht eine Form mit Doppelpunkt (vgl. das System in *Theorie d. alg. K.* S. 111), und wenn die Schleife des Doppelpunktes sich zusammenzieht, eine Form mit Spitze wie im vorigen Beispiel.

5. Der Oskulationsknoten. Wir nehmen nun an, $\alpha\lambda + \beta$ sei gleich Null. Dann tritt in der Gleichung (4) kein Glied mit x^5 auf und wir müssen das Glied mit x^6 noch berücksichtigen.

Dieses lautet $\lambda^2(\gamma\lambda + \delta)x^6$. Auf der Verbindungsline von (y_1^2) mit (x^6) liegt aber auch das Glied x^3y_1 (s. Fig. 90), dessen Koeffizient $2\alpha\lambda + \beta$ jetzt gleich $\alpha\lambda$ ist. Demnach

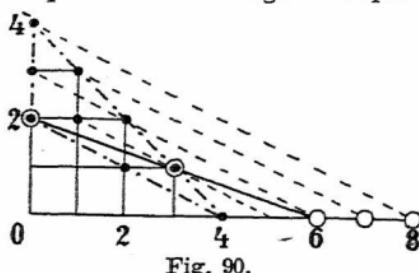


Fig. 90.

lautet in diesem Falle die zweite Annäherung

$$(6) \quad y_1^2 = \alpha \lambda x^3 y_1 + \lambda^2 (\gamma \lambda + \delta) x^6,$$

die zu zwei Zweigen Veranlassung gibt:

$$(7) \quad y = \lambda x^2 + (\frac{1}{2} \alpha \pm \sqrt{\frac{1}{4} \alpha^2 + (\gamma \lambda + \delta)}) \lambda x^3.$$

Beide Näherungskurven sind von der Form $y = \lambda x^2 + Ax^3$, sie oskulieren die erste Näherungsparabel $\eta = \lambda x^2$, weil die Differenz $y - \eta$ den Faktor x^3 vortreten läßt, und

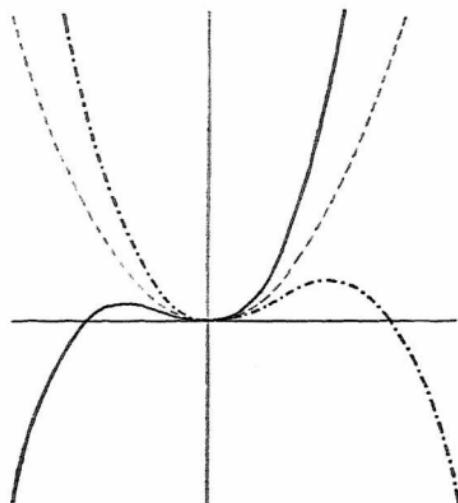


Fig. 91.

sie oskulieren einander aus demselben Grunde. Die genauere Untersuchung (ähnlich wie S. 133/4) läßt die in Fig. 91 dargestellte Form erkennen. Diese Figur setzt voraus, daß (wenn $\alpha > 0$) A für das Minuszeichen in (7) negativ wird, daß also $\gamma \lambda + \delta > 0$ ist*). Der wesentliche Sachverhalt bleibt aber für $\gamma \lambda + \delta < 0$ durchaus derselbe. Den Fall $\gamma \lambda + \delta = 0$ wollen wir gesondert betrachten. Es liegt also ein Berührknoten vor, bei dem aber die Berührung

*) In Fig. 91 ist $\lambda = 1$; für die ausgezogene Kurve ist ferner $A = 1$, für die strichpunktiierte $A = -\frac{2}{3}$.

der Zweige oskulierend ist. Man nennt die Singularität daher „Oskulationsknoten“. Die sich überschneidenden Zweige, deren gemeinschaftlicher Krümmungskreis den Radius $R = 1/2\lambda$ hat, sind notwendig beide nach derselben Seite gewendet. Auch der Oskulationsknoten ist zu sich selbst reziprok.

Wenn $\gamma\lambda + \delta = 0$ ist, so fehlt das Glied mit x^6 in (6). Die Bestimmungslinie der Fig. 90 gibt also nur die eine Näherung $y_1 = \alpha\lambda x^3$.

Das analytische Dreieck liefert aber dann eine zweite Näherung, wenn man noch das Glied x^7 zu Hilfe nimmt. Dieses lautet $\varepsilon\lambda^3x^7$ und man erhält daher die Näherung $\alpha\lambda x^3 y_1 + \varepsilon\lambda^3 x^7 = 0$ oder $y_1 = -x^4 \cdot \varepsilon\lambda^2/\alpha$. Die zwei Entwicklungen beginnen also in diesem Falle so:

$$(8) \quad y^I = \lambda x^2 + \alpha\lambda x^3, \\ y^{II} = \lambda x^2 - x^4 \cdot \varepsilon\lambda^2/\alpha.$$

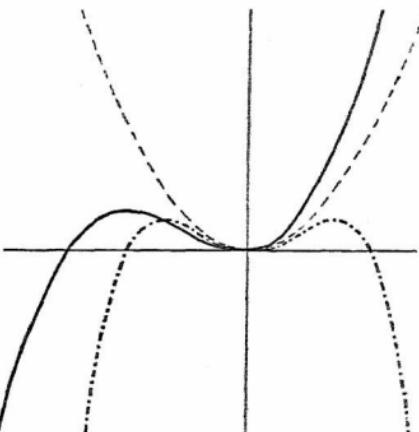


Fig. 92.

Die Berührungsstelle der beiden Näherungskurven ist aber keine andere, als im Hauptfalle. In Fig. 92 ist außer $\alpha > 0$ auch $\varepsilon > 0$ angenommen*). Das Fehlen des Gliedes mit x^3 in der Entwicklung y^{II} ist also unwesentlich. Ja, es kann sogar das Glied mit x^4 fehlen. Denn wenn $\varepsilon = 0$ ist, tritt statt des Gliedes x^7 für die zweite Annäherung das Glied x^8 ein. Dieses lautet $\zeta\lambda^4x^8$, die Näherung also $\alpha\lambda x^3 y_1 + \zeta\lambda^4 x^8 = 0$ oder $y_1 = -x^5 \cdot \zeta\lambda^3/\alpha$, so daß die zweite Entwicklung beginnt mit $y^{II*} = \lambda x^2 - x^5 \cdot \zeta\lambda^3/\alpha$, und auch $y^{II*} - y^I$ ist mit keiner höheren Potenz als x^3 teilbar.

*) Fig. 92 stellt die Kurven $y^I = x^2 + \frac{2}{3}x^3$ und $y^{II} = x^2 - x^4$ dar.

Der Koeffizient ζ darf allerdings dann nicht auch noch verschwinden, sonst wäre die ursprüngliche Gleichung durch $y - \lambda x^2$ teilbar. In allen anderen Fällen des Oskulationsknotens läßt sich die Gleichung in die Form bringen
(9) $(y - \lambda x^2 - \frac{1}{2}\alpha xy)^2 = \gamma y^3 + \kappa x^2 y^2 + \varepsilon xy^3 + \zeta y^4$,
wo $\kappa = \delta + \frac{1}{4}\alpha^2$ ist.

Der Oskulationsknoten ist isoliert, wenn $\gamma\lambda + \delta < 0$ und $|\gamma\lambda + \delta| > \frac{1}{4}\alpha^2$ ist. Wenn $\gamma\lambda + \delta = -\frac{1}{4}\alpha^2$ ist, so liegt eine neue Singularität vor.

Bem. Wir haben bisher immer $\alpha \geq 0$ vorausgesetzt. Ist nun etwa $\alpha = 0$, aber $\beta \geq 0$, so handelt es sich um eine Schnabelspitze. Wenn aber auch $\beta = 0$ ist, so beginnen die beiden Entwicklungen so: $y = \lambda x^2 + \lambda \sqrt{\gamma\lambda + \delta} \cdot x^3$. Wir haben auch jetzt einen gewöhnlichen Oskulationsknoten. Wird aber nun hier $\gamma\lambda + \delta = 0$ genommen, so erhält man als zweite Näherung $y_1^2 = \varepsilon \lambda^3 x^7$. Das führt auf den folgenden Fall. Ist aber etwa auch $\varepsilon = 0$, so läßt sich die Gleichung

$$(y - \lambda x^2)^2 - \gamma y^3 + \gamma \lambda x^2 y^2 - \zeta y^4 = 0$$

zerlegen in ein Produkt

$$(y - \lambda x^2 + \vartheta y^2)(y - \lambda x^2 + \theta y^2) = 0$$

zweier sich im Anfangspunkt vierpunktig berührenden Kegelschnitte ($\vartheta + \theta = -\gamma$, $\vartheta \theta = -\zeta$).

Beisp. 1. Die Kurve

$$(y - x^2)^2 = y^2(x^2 - y^2)$$

hat das Aussehen der Fig. 93. Die Entwicklungen lauten $y = x^2 + x^3$. Durch Einsetzen überzeugt man sich sofort, daß jede dieser Näherungskurven die Kurve im Ursprung in 7 Punkten trifft, d. h. sie schmiegt sich ihrem zugehörigen Zweig 4punktig, dem andern dreipunktig an. Der jeweilige 8te reelle Schnittpunkt ist aus der Figur ersichtlich.

Beisp. 2. Die Kurve

$$(y - x^2 - \frac{1}{2}y^2)(y - x^2 - \frac{1}{3}y^2) = \mu x^2 y^2$$

besteht für $\mu > 0$ aus zwei ineinander liegenden durch einen Oskulationsknoten verbundenen Ovalen und zeigt für $\mu = 0$, für welchen Wert die Kurve zerfällt, den Übergang zum isolierten Oskulationsknoten bei $\mu < 0$. Das äußere Oval hat eine Einbuchtung für $|\mu| > \frac{1}{6}$, einen Flachpunkt für $|\mu| = \frac{1}{6}$ und

eine isolierte Doppeltangente für $|u| < \frac{1}{6}$. Den Formenwechsel möge der Leser selbst verfolgen.

6. Die Oskulationsknotenspitze. Wir setzen nun voraus, daß außer $\alpha\lambda + \beta = 0$ auch $\gamma\lambda + \delta = -\frac{1}{4}\alpha^2$.

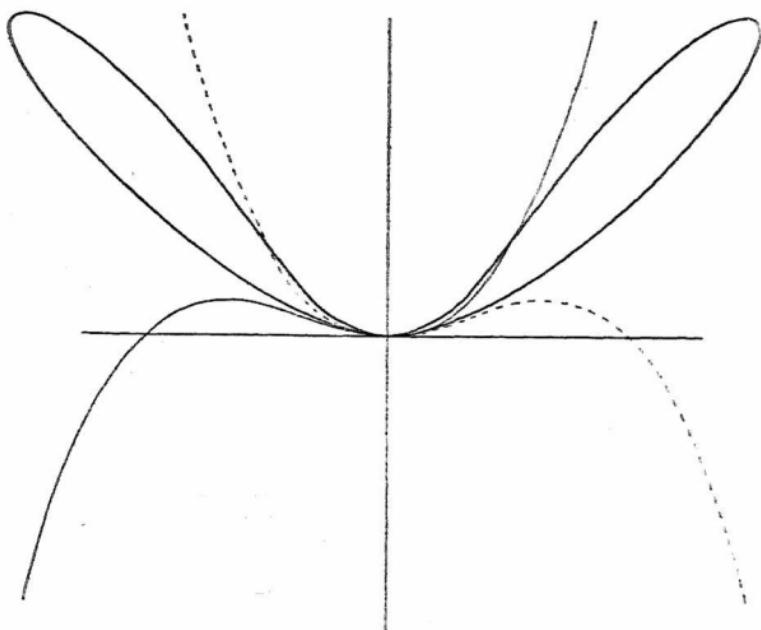


Fig. 93.

sei. Indem wir mit Hilfe dieser Gleichungen β und δ aus der Gleichung (3) eliminieren, erhält diese die Form

$$(10) \quad (y - \lambda x^2)^2 = (\alpha x y + \gamma y^2)(y - \lambda x^2) - \frac{1}{4}\alpha^2 x^2 y^2 + \varepsilon x y^3 + \zeta y^4.$$

Man kann sie demnach auch folgendermaßen schreiben

$$(11) \quad [(y - \lambda x^2) - \frac{1}{2}(\alpha x y + \gamma y^2)]^2 = (\varepsilon + \frac{1}{2}\alpha y) x y^3 + (\zeta + \frac{1}{4}\gamma^2) y^4.$$

In diese Gleichung haben wir einzusetzen

$$y = \lambda x^2 + \frac{1}{2}\alpha \lambda x^3 + y_2.$$

Diese Substitution würde, obwohl Gleichung (11) immerhin schon eine bessere Übersicht gewährt als Gleichung (10), doch viele Mühe machen. Wir sehen aber aus (6), S. 136, wenn wir dort $y_1 = \frac{1}{2}\alpha\lambda x^3 + y_2$ setzen, daß die Glieder $x^3 y_2$ und x^6 in Wegfall kommen, so daß von der ausgezogenen Bestimmungslinie der Fig. 90 nur das Glied y_2^2 übrigbleibt. Ferner wissen wir (vgl. S. 119), daß alle übrigen Glieder sich auf Parallelen zu dieser Bestimmungslinie anordnen. Die nächst gelegene Parallele ist nun die durch den Punkt (xy^2) , die die x -Seite des analytischen Dreiecks in Punkte (x^7) trifft und diese Potenz ist es allein, die wir aus der Gleichung (11) nach erfolgter Substitution herauszusuchen haben. Denn (y_2^2) mit (x^7) verbunden, gibt ohne Zweifel die nächste Bestimmungslinie. Es ist nun nicht schwer zu übersehen, daß die Potenz x^7 nur in dem Glied mit xy^3 auf der rechten Seite von (11) auftreten kann. Man erhält daher $y_2^2 = (\varepsilon + \frac{1}{2}\alpha\gamma)\lambda^3 x^7$ und damit die beiden Entwicklungen

$$(12) \quad y = \lambda x^2 + \frac{1}{2}\alpha\lambda x \pm \lambda\sqrt{\lambda(\varepsilon + \frac{1}{2}\alpha\gamma)} \cdot x^{\frac{7}{2}}.$$

Der Exponent $\frac{7}{2}$ zeigt hier wieder an, daß eine Spitze vorliegt, und zwar nennt man diese höhere Singularität „Oskulationsknotenspitze“. Sie sieht aus wie eine sehr scharfe Schnabelspitze und ist ebenfalls zu sich selbst reziprok. Der Krümmungsradius ist natürlich auch hier $R = 1/2\lambda$. Wie die Schnabelspitze und die gewöhnliche Spitze, kann auch die Oskulationsknotenspitze nicht isoliert sein. Wenn nämlich der Ausdruck unter der Wurzel in (12) etwa negativ wäre, so würde das nur besagen, daß die Spitze sich nach der Seite der negativen x wendet. Der Ausdruck unter der Wurzel kann aber auch nicht Null werden. Denn da $\lambda \geq 0$ ist (seit S. 133), müßte $\varepsilon + \frac{1}{2}\alpha\gamma = 0$ sein. Dann zerfiele aber die durch Gleichung (11) dargestellte Kurve in zwei Kegelschnitte. Es ist also unmöglich, daß die Ent-

wicklung sich noch später gabelt als an dieser Stelle, und wir haben damit alle Möglichkeiten der Singularitäten 2. Ordnung (die sämtlich auch 2. Klasse sind) bei Quartiken erschöpft.

Beisp. 1. Als Beispiel für die typische Form einer mit Oskulationsknotenspitze versehenen Quartik nehmen wir die Kurve

$$(y - x^2)^2 = y^3(x - y),$$

die durch Fig. 94 wiedergegeben wird. Die Näherungskurven lauten $y = x^2 \pm x^{\frac{5}{3}}$. Sie kann aus der vorigen Art (Fig. 93) dadurch abgeleitet werden, daß man das linke Blatt in den Oskulationsknoten hineinschlüpfen läßt.

Beisp. 2. Das Beispiel

$$(y - x^2)^2 = x y^3$$

soll zeigen, daß in Gleichung (11) nicht bloß α , sondern auch und sogar gleichzeitig γ Null sein darf. Die Entwicklungen beginnen auch hier mit $y = x^2 \pm x^{\frac{5}{3}}$. Die Kurve hat die Geraden $x = 0$ und $y = x - \frac{2}{3}$ zu Asymptoten und für die erste Asymptote die 5punktig be-

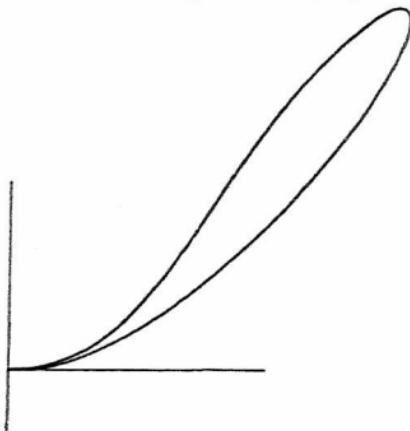


Fig. 94.

rührende Näherungshyperbel $xy = 1$. Der Leser zeichne die Kurve, die natürlich als Projektion der vorigen Form aufgefaßt werden kann, selbst und lege sich noch die Frage vor, wie die Quartik $(y - x^2)^2 = x$ aussieht, die aus der obigen durch Vertauschung von y und z hervorgeht.

7. Die Arten des dreifachen Punktes. Wir kommen jetzt zu den Singularitäten dritter Ordnung, die wir zum größten Teil schon kennen und mit Beispielen belegt haben. Wir stellen hier nur die möglichen Fälle noch systematisch zusammen. (I) Das Aggregat der in x, y niedrigsten Glieder $u_3(x, y)$ zerfällt in drei verschiedene Faktoren $(y - \lambda_1 x)$ $(y - \lambda_2 x)$ $(y - \lambda_3 x)$; es gibt drei lineare Zweige mit den

entsprechenden Entwicklungen $y = \lambda_i x + \mu_i x^2 + \dots$ (s. S. 28). (II) Der Fall, daß zwei der λ_i konjugiert imaginär sind, ist analytisch von dem vorigen nicht verschieden; zwei Entwicklungen sind eben dann auch konju-

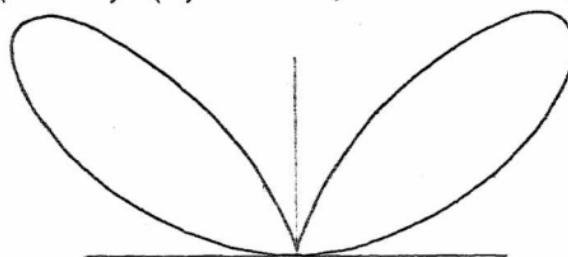


Fig. 95.

giert imaginär (s. Fig. 13). (III) Es ist $u_3 \equiv (y - \lambda_1 x)^2(y - \lambda_2 x)$. Die Kurve hat eine Spitze mit durchgehendem einfachen Zweig. Die eine Entwicklung lautet $y = \lambda_1 x + \mu x^3 + \dots$, die andere $y = \lambda_2 x + \nu x^2 + \dots$. Die Figur 95 gibt als Beispiel die Kurve $yx^2 = x^4 + y^4$ wieder. (IV) Es ist $u_3 \equiv (y - \lambda x)^3$. Das ist der Fall des Spitzpunktes. Die Entwicklung gibt $y = \lambda x + \mu x^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{1} + \dots$ (vgl. S. 100).

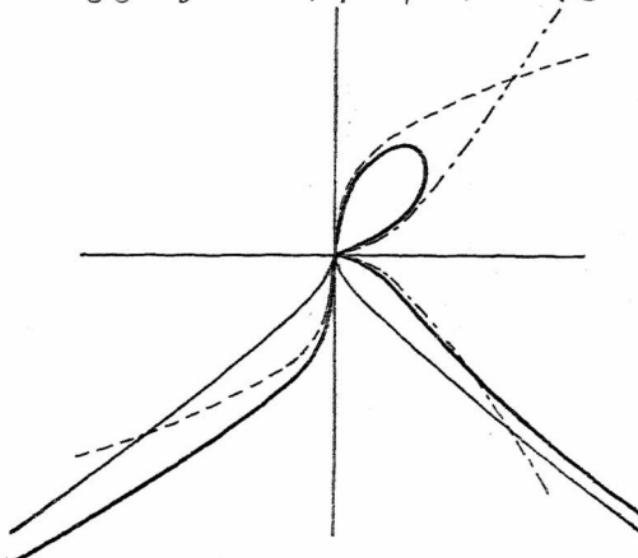


Fig. 96.

59. Zwei Beispiele von Quintiken. Zum Schluß geben wir noch zwei Beispiele von Kurven 5. Ordnung mit einem singulären Punkt der Ordnung 3 im Ursprung.

Beisp. 1. Für die Kurve

$$y^5 + ax^4 - b^2 xy^3 = 0$$

(Beispiel von Cramer) erhält man im Anfangspunkt die Näherungen $b^2 x = y^3$ (12 Schnittpunkte im Ursprung) und $b^2 y^2 = ax^3$, also liegt eine Spitze mit der x -Achse als Tangente, für $a > 0$ nach links gerichtet, und ein weiterer Zweig mit Wendepunkt im Anfangspunkt und der y -Achse als Tangente vor, der vom ersten in den dritten Quadranten geht. Im Punkte $y = 0$, $z = 0$ gilt die Näherung $ax^4 + y^5 = 0$, also ist dort ein Wendeflachpunkt mit $z = 0$ als Tangente (Fig. 96).

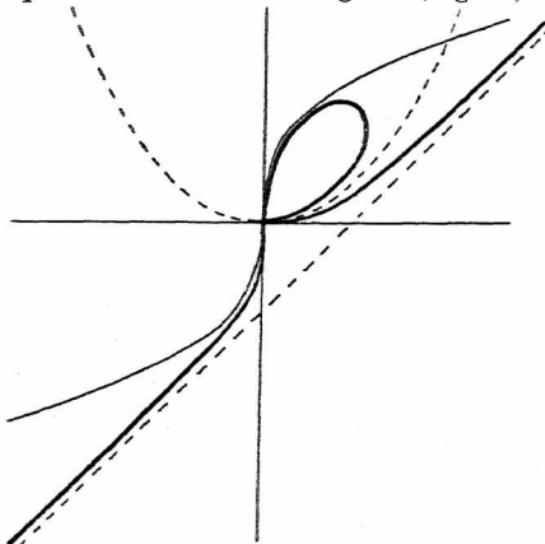


Fig. 96.

Beisp. 2. $x^5 - y^5 - 2x^3 y + x y^3 = 0$.

Diese Quintik hat die Asymptote $x - y = \frac{1}{2}$. Für den Anfangspunkt hat man zwei Näherungen. Erstens $x = y^3$, zweitens $(y - x^2)^2 = 0$. Entwickelt man im zweiten Falle weiter, so ergibt sich $y = x^2 \pm x^{\frac{2}{3}}$, also eine Oskulationsknotenspitze höherer Art (Fig. 97).

Literatur.

Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*. I. Band. Leipzig 1876.

Durège, H., *Die ebenen Curven dritter Ordnung*. Leipzig 1871.

Ebner, F., *Leitfaden der technisch wichtigen Kurven*. Leipzig 1904.

Loria, G., *Spezielle algebr. u. transz. ebene Kurven*, 2. Aufl. 2 Bde. Leipzig 1910/11.

Reuschle, C., *Praxis der Currendiscussion*. Stuttgart 1886.

—, *Das Signirungsprincip für Linienkoordinaten*. Tagebl. der 62. Vers. Dtsch. Naturf. u. Ärzte. Heidelberg 1859 (veröff. 1890).

Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie d. höh. ebenen Kurven*. 2. Aufl. Leipzig 1882.

Wieleitner, H., *Theorie d. eb. alg. Kurven höh. Ordnung*. Leipzig 1905.

—, *Spezielle ebene Kurven*. Leipzig 1908.

Berzolari, L., *Allg. Theorie j[d. höh. alg. Kurven*. Enc. math. Wiss. III C4.

Brill-Noether, *Die Entwicklung d. Theorie d. alg. Funktionen usw.* Jahresh. Dtsch. Math.-Ver. 3, 1894.

Kohn, G. u. G. Loria, *Spec. eb. alg. Kurven*. Enc. math. Wiss. III C5.

Pascal-Timerding, *Repert. der höh. Geometrie*. 2. Aufl. 1. Hälfte. Leipzig 1910.

Wieleitner, H., *Bibliographie d. höh. alg. K. für d. Zeitabschn. 1890—1904*. Leipzig 1905.

Register.

Achterkurve 131.
 Analytisches Dreieck 114 ff.
 Astroide 96.
 Asymptoten 40, 44, 46 f., 49, 50, 58.
 Asymptoten, krummlinige 122 ff.
 Auflösen von Doppelpunkten 31 f., — von Doppeltangenten 84 f.
Bauer 48, 66.
Bernoulli, *Jak.* 61, 62, 95.
 Berührungsnoten 102, 108, 130 f.
 Berührungs punkt 74.
Berzolari 144.
Booth 61, 64.
 Brennpunkte 62.
Brill 144.
Bullard 95.
Büschen 17, 18.
Carnot 71.
 Cassinische Linien 61, 62.
Clebsch 144.
Cramer 5, 6, 24, 31, 104, 114, 115, 124, 134, 142.
Descartes 5, 6, 57, 63, 71.
 Descartessches Blatt 23, 79/80, 82, 120.
Dickles 50.
Doehlemann 41, 74.
 Doppelpunkt 20, 21, 24, 25–30, 78/79, 128.
 Doppeltangente 78/79, 89, 90.
 Dreieckskoordinaten 36 ff., 71.
 Dreifacher Punkt 27/28, 141.
 Dualitätsprinzip 71.
Durège 144.

Ebner 144.
 Einhüllende 65, 67, 77.
 Ellipse 18, 15, 40, 61.
Euler 6, 75, 76, 134.
Fermat 5, 110.
Fiedler 66, 77, 144.
 Flachpunkt 101, 109, 128.
 Flachpunktparabel 107.
 Fußpunktskurven der Kegelschnitte 61 f. — d. Parabel 58/59.
Gentry 95.
 Geradenpaar 68.
Gergonne 71.
Gregorius a St. Vincentio 131.
Gua, *de* 6, 104, 115, 134.
Hermann, J. 96.
Hesse 36.
 Homogenisierung von Gleichungen 39, 40.
 Hyperbel 8, 18, 15, 40, 61, —, kubische 49.
 Hyperbeln, höhere 113/14.
 Hypozykloide, dreispitzige 87.
 Inflextionsnoten 56, 61, 129.
 Isolierter Punkt 25, 129.
Junker 10.
 Kardioide 63, 86, 120.
 Kegelschnitte 8, 13, 15, 18, 22, 40, 42, 61, 68, 81.
 Kissidoide des Dickles 50.
 Klasse e. Kurve 66, 67, — e. Superlinearität 99, 103.
Klein, F. 35, 92.
 Knoten 25.
 Kohlenspitzenkurve 56, 61, 96.

Kohn 144.
 Kollineation 41, 73.
 Konchoide des Nikomedes 125.
 Koordinaten, homogene 36 ff.
 Koordinatendreieck 35 f.
 Korrelation 73.
 Kreis 8, 14, 15, 40, 62, 65/66, 68.
 Kreispunkte, imaginäre 40, 66, 68.
 Kreuzkurve 56, 61, 96.
 Krümmungsradius 109 bis 110, 111.
 Kubik, Tschirnhausens 11, 25, 30.
 Kubiken 8, 10, 11, 13, 33, 42, 44, 45.
 —, zirkulare 57 f.
 Kurve gleicher Potenz 14, 15, 59, 63, 87.
 Kurven 3. Klasse 83 ff. — 4. Klasse 88 ff.
Leibniz 5.
 Lemniskaten 61, 62, 64, 95.
L'Hospital, *de* 134.
Lindemann 144.
 Linienkoordinaten 64 ff.
 Liniensingularität 13, 52, 127.
Littrow 96.
Longchamps, *de* 48, 49.
Loria 144.
MacLaurin 11, 25, 30, 50, 59.
Möbius 71.
Monge 71.
 Näherungskurven 104 ff.
Neil 7.
Newton 6, 45, 46, 57, 104, 110, 114, 115, 116, 117, 125.

- | | | |
|---|---|--|
| <p>Newton'sches Parallelogramm 115.
 <i>Nikomedes</i> 125.
 <i>Noether</i> 144.</p> <p>Ordnung e. Kurve 8, 9.
 — <i>e. Superlinearität</i> 99, 103.</p> <p>Oskulationsknoten 135f.
 Oskulationsknotenspitze 139f., 142.</p> <p>Ovale, Kartesische 63.</p> <p>Parabel 15, 59.
 —, kubische 6, 7, 9, 10, 12, 15, 42, 43, 44, 68, 77, 111.
 —, semikubische (=Neilsche Parabel) 6, 7, 9, 10, 12, 13, 16, 17, 42, 43, 44, 68, 77, 111.</p> <p>Parabeln, divergierende 46.
 —, höhere 105, 110f.</p> <p><i>Pascal</i> 14, 104, 144.</p> <p>Pascalsche Schnecken 62, 63.</p> <p><i>Perseus</i> 64.</p> <p><i>Plücker</i> 31, 64, 70, 71, 74, 78/79, 93.</p> <p>Polarreziprozität 72/73.</p> <p><i>Poncelet</i> 71, 72.</p> <p>Potenz 14, 15, 59, 60, 63, 87.</p> <p>Projektive Eigenschaften 42.</p> <p><i>Puisseux</i> 104.</p> <p><i>Pund</i> 10, 102.</p> <p>Punktepaar 68.</p> | <p>Punktsingularität 13.</p> <p>Quartiken 8, 34/35.
 —, bizirkulare 60f.
 — m. Singularitäten 127ff.</p> <p>Quintiken 142.</p> <p><i>Reuschle</i> 19, 96, 122, 144.</p> <p><i>Roberval</i> 110.</p> <p>Rückkehrflachparabel 113.</p> <p>Rückkehrspitzparabel 113.</p> <p><i>Salmon-Fiedler</i> 66, 77, 144.</p> <p><i>Scheffers</i> 75.</p> <p>Schnabelspitze 132f.</p> <p><i>Schoute</i> 134.</p> <p>Selbstberührungs-punkt 102.</p> <p><i>Serret-Scheffers</i> 75.</p> <p>Signierung 17f., 32.</p> <p>Singularitäten 13, 78/79, 98ff.</p> <p>Spirische Linien 64.</p> <p>Spitze 12, 23, 25, 42, 57, 63, 68, 78/79, 128.</p> <p>Spitzpunkt 100, 109, 142.</p> <p>Spitzpunktparabel 106.</p> <p><i>Staudt</i>, v. 21. [107.]</p> <p><i>Steiner</i> 14.</p> <p>Steinersche Kurve 87.</p> <p><i>Stirling</i> 6, 104.</p> <p>Superlinearitäten 98ff.</p> <p>Symmetrie 7, 8.</p> <p>Tangente 74.</p> <p>Tangentenpaar e. Doppelpunktes 25, 28f.</p> | <p>Tangentialgleichung 64 ff.
 — d. kub. (semikub.) Parabel 10.</p> <p><i>Taylor</i> 104.</p> <p><i>Timerding</i> 144.</p> <p><i>Tridens</i> 57, 125.</p> <p>Trisektrix v. de Long-champs 48, 49.</p> <p>—, Maclaurinsche 11, 25, 30, 50, 59.</p> <p><i>Tschirnhausens</i> Kubik 11, 25, 30.</p> <p>Unendlich ferne Gerade 38, 39, 40.</p> <p>Vielfacher Punkt 27, 54, 55.</p> <p><i>Wallis</i> 110.</p> <p>Wendeasympoten 49.</p> <p>Wendeflachparabel 112.</p> <p>Wendepunkt 12, 15.</p> <p>Wendepunkte einer Kubik 59/60.</p> <p>Wendespitzparabel 113.</p> <p>Wendetangente 12, 23, 63, 68, 78/79, 128.</p> <p><i>Wieleitner</i> 144.</p> <p>Zentralprojektion 40, 41, 45.</p> <p>Zerfallene Kurven 19.</p> <p><i>Zeuthen</i> 35, 95.</p> <p>Züge (paare u. unpaare) 21.</p> |
|---|---|--|
-

**G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H.
Berlin W 10 und Leipzig**

Von dem gleichen Verfasser ist ferner erschienen:

Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung

Mit 82 Figuren im Text

(Sammlung Schubert Bd. XLIII)

In Leinwand gebunden M. 10.—

Dieses Buch soll seiner ganzen Anlage nach ein einführendes Lehrbuch für Anfänger sein. Beim Lesen wird nur die Kenntnis der Anfangsgründe der Differentialrechnung und Algebra mit Einschluß der Determinanten vorausgesetzt, sowie die Bekanntschaft mit der Theorie der Kegelschnitte.

Was den behandelten Stoff betrifft, so steht das Buch dem von Salmon-Fiedler am nächsten. Doch hat sich der Verfasser bemüht, überall das in den letzten 20 Jahren neu Hinzugekommene mit zu verarbeiten. In dieser Beziehung ist hinzzuweisen auf das Czubersche Verfahren zur Enveloppenbestimmung, die Behandlung der Kurvendiskussion und der höheren Singularitäten, sowie auf den Abschnitt über Punktgruppen auf Kurven. Auch der Abschnitt über Kurven dritter Ordnung enthält Eigenartiges. So sind die verwinkelt scheinenden Beziehungen zwischen der Grundkurve, der Hesseschen, Cayleyschen und der Fundamentalkurve dritter Klasse mit möglichst einfachen Mitteln präzis dargestellt. Dieser Abschnitt schließt mit der ebenfalls neuen Kölmel-Wienerschen Einteilung der Kubiken.

Um den Leser direkt mit der Literatur in Beziehung zu setzen, sind möglichst viele und genaue Literaturangaben gemacht. Besondere Sorgfalt wurde auch den Figuren zugewandt, von denen die allermeisten punktweise gerechnet oder konstruiert sind.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H.
Berlin W 10 und Leipzig

Von dem gleichen Verfasser ist ferner erschienen:

Spezielle ebene Kurven

Mit 189 Figuren im Text

(Sammlung Schubert Bd. LVI)

In Leinwand gebunden M. 12.—

Noch bis vor wenigen Jahren gab es weder in Deutschland noch anderswo eine zusammenfassende Darstellung der unzähligen, zerstreuten Arbeiten über spezielle Kurven. Das Bedürfnis einer solchen veranlaßte die Akademie der Wissenschaften zu Madrid im Jahre 1892 und wiederholt im Jahre 1895, die Herstellung eines Kataloges der speziellen Kurven, mit Angaben über deren Eigenschaften, Entdecker und Bearbeiter, als Preisaufgabe auszuschreiben. Dieser Anregung verdanken die Werke von Gino Loria und von F. Gomes Teixeira ihre Entstehung. Beide sind in ihrer Anlage ganz verschieden. Für Loria bildet das historische Moment den Hintergrund der Darstellung, Teixeira hält sich mehr an die Forderung eines Kurvenkataloges. Das vorliegende Buch möchte nun einen dritten Standpunkt einnehmen. Es will die Kurven zusammenstellen ohne Rücksicht auf Ordnung und etwaige Transzendenz, nach ihrer Erzeugungsweise oder Definition. Freilich wird niemand annehmen dürfen, daß sich so eine Kette bilden ließe, wo logisch ein Glied aus dem anderen hervorgeht. Es ist ein vielverzweigtes Netzwerk geworden, aus dem nur die Hauptfäden noch deutlich hervortreten. Denn um Zusammenhanglose Sonderkapitel zu vermeiden, mußte der Verfasser zu jeder Hauptfamilie diejenigen Kurven hinzunehmen, die sich aus den ursprünglichen durch einfache Ableitungsverfahren (Inversion, Fußpunktskonstruktion usw.) ergaben.

Dabei hat der Verfasser noch zwei Behandlungsmethoden besonderes Augenmerk geschenkt und ihre Theorie von Grund aus, soweit er sie nötig hatte, entwickelt: der Methode der kinematischen Geometrie und der Methode der natürlichen Koordinaten.

Gammlung

Jeder Band in Leinw. geb. 90 Pf. Göschchen

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände

- Abwässer.** Wasser und Abwässer. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung u. Untersuchung von Professor Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landw. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 473.
Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre v. Dr. Paul Rippert i. Essen u. Ernst Langenbeck, Gr.-Lichterfelde. Nr. 232.
Agrarwesen und Agrarpolitik von Prof. Dr. W. Wygodzinski in Bonn. 2 Bändchen. I: Boden u. Unternehmung. Nr. 592.
— II: Kapital u. Arbeit in der Landwirtschaft. Bewertung der landwirtschaftl. Produkte. Organisation des landwirtschaftl. Berufsstandes. Nr. 593.
Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung v. Dr. Karl Grauer. Nr. 329.
Agrikulturchemische Kontrollwesen, Das, v. Dr. Paul Krüger in Leopoldshall-Staßfurt. Nr. 304.
— **Untersuchungsmethoden** von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftl. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 470.
Akkumulatoren, Die, für Elektrizität v. Kais. Reg.-Rat Dr.-Ing. Richard Albrecht in Berlin-Behlsdorf. Mit 52 Figuren. Nr. 620.
Akustik. Theoret. Physik I: Mechanik u. Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an d. Techn. Hochschule in Wien. Mit 19 Abb. Nr. 76.
— **Musikalische**, von Professor Dr. Karl S. Schäfer in Berlin. Mit 36 Abbil. Nr. 21.
Algebra. Arithmetik und Algebra von Dr. H. Schubert, Professor an der Gelehrten schule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

- Algebra. Beispieldersammlung z. Arithmetik und Algebra** von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrten schule d. Johanneums i. Hamburg. Nr. 48.
Algebraische Kurven. Neue Bearbeitung von Dr. H. Weileitner, Gymnasialprof. i. Birkenfels. I: Gestaltliche Verhältnisse. Mit zahlreichen Fig. Nr. 435.
— II: Theorie u. Kurven dritte u. vierter Ordnung v. Eugen Beutel, Oberreal. in Laiingen-Graz. Mit 52 Fig. im Text. Nr. 436.
Algen, Moose und Farne pflanzen von Professor Dr. H. Klebahn in Hamburg. Mit zahlr. Abbildungen. Nr. 736.
Alpen, Die, von Dr. Rob. Sieger, Professor an der Universität Graz. Mit 19 Abb. u. 1 Karte. Nr. 129.
Althochdeutsche Grammatik von Dr. Hans Raumann, Privatdozent an der Universität Straßburg. Nr. 727.
Althochdeutsche Literatur mit Grammatik, Übersetzung u. Erläuterungen v. Th. Schäffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.
Althochdeutsches Lesebuch von Dr. Hans Raumann, Privatdozent an der Universität Straßburg. Nr. 734.
Altestamentl. Religionsgeschichte von D. Dr. Max Löhr, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 292.
Amphibien. Das Tierreich III: Reptilien u. Amphibien v. Dr. Franz Werner, Prof. an der Universität Wien. Mit 48 Abbil. Nr. 383.
Analyse, Tech.-Chem., von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechnischen Schule in Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.

- Änalyse, höhere, I:** Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junfer, Rektor des Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. Mit 67 Figuren. Nr. 87.
- Repetitorium und Aufgaben-sammlung zur Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junfer, Rektor d. Realgymnas. u. d. Oberrealsch. in Göppingen. Mit 46 Fig. Nr. 140.
 - II: Integralrechnung. Von Dr. Friedr. Junfer, Rektor des Realgymnas. u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 89 Fig. Nr. 88.
 - Repetitorium und Aufgaben-sammlung zur Integralrechnung v. Dr. Friedr. Junfer, Reft. d. Realgymnas. und der Oberrealschule in Göppingen. Mit 50 Fig. Nr. 147.
 - Niedere, von Prof. Dr. Benedict Sporer in Tübingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.
- Arbeiterfrage, Die gewerbliche,** von Werner Sombart, Prof. an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.
- Arbeiterversicherung siehe: Sozial-versicherung.**
- Arthäologie von Dr. Friedrich Roepp,** Prof. an der Universität Münster i. W. 3 Bändchen. Nr. 28 Abb. im Text u. 40 Tafeln. Nr. 538/40.
- Arithmetik u. Algebra von Dr. Herm. Schubert,** Prof. a. b. Gelehrten-schule des Johanneums in Ham-burg. Nr. 47.
- Beispielsammlung zur Arith-metik und Algebra von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. b. Gelehrten-schule des Johanneums in Ham-burg. Nr. 48.
- Armeepferd, Das, und die Versorgung der modernen Heere mit Pferden v. Feliz von Damitz,** General der Kavallerie z. D. u. ehemal. Preuß. Remontenpfeifeur. Nr. 514.
- Armenwesen und Armenfürsorge.** Einführung in d. soziale Hilfsarbeit v. Dr. Adolf Weber, Prof. an der Handelshochschule in Köln. Nr. 346.
- Arzneimittel, Neuere, ihre Zusam-menzung, Wirkung und Anwen-dung von Dr. med. C. Bachem,** Professor der Pharmakologie an der Universität Bonn. Nr. 669.
- Ästhetik, Allgemeine, von Prof. Dr. Max Diez,** Lehrer a.b. Akad. Akademie b. bild. Künste in Stuttgart. Nr. 300.
- Astronomie, Größe, Bewegung u. Ent-fernung der Himmelskörper v. A. F. Möbius,** neu bearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Universität Kiel. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.
- II: Kometen, Meteore u. das Sternensystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.
- Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther,** Professor an der Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.
- Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper v. Prof. W. F. Wislicenus.** Neu bearbeitet von Dr. S. Ludendorff in Potsdam. Mit 15 Abbild. Nr. 91.
- Atherische Öle und Riechstoffe von Dr. F. Kochissen in Wiltz.** Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.
- Aufsakentwürfe v. Oberstudienrat Dr. L. W. Straub,** Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnas. i. Stuttg. Nr. 12.
- Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate von Wilh. Weitbrecht,** Prof. der Geo-bäckerei in Stuttgart. 2 Bändchen. Mit 16 Figuren. Nr. 302 u. 641.
- Außeneuropäische Erdteile, Länder-kunde der, von Dr. Franz Heiderich,** Professor an der Erzportakademie in Wien. Mit 11 Textblättchen und Profilen. Nr. 63.
- Australien. Landeskunde u. Wirt-schaftsgeographie des Festlandes Australien von Dr. Kurt Hassett,** Prof. d. Geographie an d. Handelshochschule in Köln. Mit 8 Abb., 6 graph. Tab. u. 1 Karte. Nr. 319.
- Autogenes Schweiz- und Schneid-verfahren von Jürgen. Hans Nieße in Kiel.** Mit 30 Figuren. Nr. 499.
- Bade- u. Schwimmanstalten, Öffent-liche, v. Dr. Karl Wolff, Stadtüber-baur., Hannover.** Nr. 50 Fig. Nr. 330.
- Baben. Badische Geschichte von Dr. Karl Brunner,** Prof. am Gymnas. in Pforzheim u. Privatdozent der Geschichte an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.
- Landeskunde von Baden von Prof. Dr. O. Kienitz i. Karlsruhe. Mit Profil, Abb. u. 1 Karte. Nr. 199.

- Bahnhöfe.** Hochbauten der Bahnhöfe v. Eisenbahnbauinstitut. C. Schwab, Vorstand b. Rgl. C.-Hochbauktion Stuttgart II. I: Empfangsgebäude, Nebengebäude. Güterbahnhöfe, Lokomotivschuppen. Mit 91 Abbildungen. Nr. 515.
- Balkanstaaten.** Geschichte d. christlichen Balkanstaaten (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.
- Baukunst.** siehe: Baukunst und Bauwesen.
- Baukunst.** Technik des Baukunstwesens von Dr. Walter Conrad,stellvert. Vorsteher der staatl. Abteilung der Reichsbank in Berlin. Nr. 484.
- Bauführung.** Kurzgefasstes Handbuch über das Wesen der Bauführung v. Archit. Emil Beutinger, Assistent an d. Techn. Hochschule in Darmstadt. M. 35 Fig. u. 11 Tabell. Nr. 399.
- Baukunst, Die, des Abendlandes** v. Dr. K. Schäfer, Assist. a. Gewerbe-museum, Bremen. Mit 22 Abb. Nr. 74.
- des Schulhauses v. Prof. Dr.-Ing. Ernst Betterlein, Darmstadt. I: Das Schulhaus. M. 38 Abb. Nr. 443.
 - II: Die Schulräume — Die Nebenanlagen. M. 31 Abb. Nr. 444.
- Baumaschinen,** Die, von Ingenieur Johannes Röring in Düsseldorf. Mit 180 Abbildungen. Nr. 702.
- Bausteine.** Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.
- Baustoffkunde,** Die, v. Prof. H. Haberstroh, Überl. a. d. Herzogl. Bau-gewerbeschule Holzminden. Mit 36 Abbildungen. Nr. 506.
- Bayern.** Bayerische Geschichte von Dr. Hans Odeli. Augsburg. Nr. 160.
- Landeskunde des Königreichs Bayern v. Dr. W. Götz, Prof. a. d. Rgl. Techn. Hochschule München. M. Profil, Abb. u. 1 Karte. Nr. 176.
- Befestigungswesen.** Die geschichtliche Entwicklung des Befestigungs-wesens vom Aufkommen der Pulvergeschütze bis zur Neuzeit von Reuleaux, Major b. Staats d. 1. Westpreuß. Pionierbataill. Nr. 17. Mit 30 Bildern. Nr. 569.
- Beschwerderecht.** Das Disziplinar- u. Beschwerderecht für Heer u. Marine v. Dr. Max E. Mayer, Prof. a. d. Univ. Straßburg i. F. Nr. 517.
- Betriebskraft,** Die zweitmächtigste, von Friedr. Barth, Überlingen im Nürnberg. 1. Teil: Einleitung. Tampf-kraftanlagen. Verchied. Kraft-maschinen. M. 27 Abb. Nr. 224.
- II: Gas-, Wasser u. Wind-Kraftanlagen. M. 31 Abb. Nr. 225.
 - III: Elektromotoren. Betriebs-lostentabellen. Graph. Darstell. Wahl d. Betriebskraft. M. 27 Abb. Nr. 474.
- Bevölkerungswissenschaft.** Eine Einführung in die Bevölkerungsprobleme der Gegenwart von Dr. Otto Moit, Beigeordneter der Stadt Düsseldorf, Vorstand des Städtischen Statistischen Amtes und Dozent an der Akademie für kommunale Verwaltung. Nr. 686.
- Bewegungsspiele** v. Dr. C. Kohlrausch, Prof. am Rgl. Kaiser Wilh.-Gymna-zu Hannover. Mit 15 Abb. Nr. 96.
- Bleidirei.** Textil-Industrie III: Wäscherie, Bleidirei, Färberrei und ihre Hilfsstoffe v. Dr. Wilh. Massot, Prof. a. d. Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.
- Blütenplanzen,** Das System der, mit Ausführ. der Gymnospermen von Dr. R. Pilger, Kustos am Rgl. Botanischen Garten in Berlin-Dahlem. Mit 31 Figuren. Nr. 393.
- Bodenfunde** von Dr. W. Bageler in Königsberg i. Pr. Nr. 455.
- Bolivia.** Die Cordillerenstaaten von Dr. Wilhelm Sievers, Prof. an der Universität Gießen. I: Einleitung, Bolivia u. Peru. Mit 16 Tafeln u. 1 Lithogr. Karte. Nr. 632.
- Brandenburg.** Preußische Geschichte von Prof. Dr. M. Thamm, Dir. des Kaiser Wilhelms-Gymnasiums in Montabaur. Nr. 600.
- Brasiliens.** Landeskunde der Republik Brasilien von Bel Rodolpho von Ihering. Mit 12 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 373.
- Brauereimessen** I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Dir. der Brauer- u. Mälzereischule zu Grimma. Mit 16 Abbildungen. Nr. 803.
- II: Brauerei. Mit 35 Abbildungen. Nr. 724.

- Britisch-Nordamerika.** Landeskunde von Britisch-Nordamerika v. Prof. Dr. A. Coppel in Bremen. Mit 13 Abb. und 1 Karte. Nr. 284.
- Brünnenbau.** Die allgemeinen Grundlagen des, von Prof. Dr.-Ing. Th. Lüddecke, Geh. Baurat in Berlin. Mit 45 Figuren. Nr. 687.
- Buchführung in einfachen u. doppelten Posten** v. Prof. Rob. Stern, Überl. d. öffentl. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule zu Leipzig. Mit vielen Formul. Nr. 115.
- Buddha** von Professor Dr. Edmund Hardt. Nr. 174.
- Burgenfunde,** Abriss der, von Hofrat Dr. Otto Pöper in München. Mit 30 Abbildungen. Nr. 119.
- Bürgerliches Gesetzbuch** siehe: Recht des BGB.
- Byzantinisches Reich.** Geschichte des byzantinischen Reiches von Dr. R. Roth in Kempten. Nr. 190.
- Chemie, Allgemeine u. physikalische**, von Dr. Hugo Kauffmann, Prof. an der Königl. Techn. Hochschule in Stuttgart. 2 Teile. Mit 15 Figuren. Nr. 71. 698.
- **Analytische**, von Dr. Johannes Hoppe in München. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.
 - II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.
 - **Anorganische**, von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.
 - **Geschichte der**, von Dr. Hugo Bauer, Assist. am chemischen Laboratorium der Königl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis z. Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.
 - II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.
 - **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistant am chem. Laboratorium d. Königl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.
 - III: Carbocyclische Verbindungen. Nr. 148.
 - IV: Heterocyclische Verbindungen. Nr. 194
 - **Organische**, von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 35.
- Chemie, Pharmazeutische**, von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 4 Bändchen. Nr. 543/44, 588 u. 682.
- **Physiologische**, von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.
 - II: Dissimilation. Nr. 1 Tafel. Nr. 241.
 - **Toxikologische**, von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.
- Chemische Industrie, Anorganische**, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsoda-industrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.
- II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.
 - III: Anorganische chemische Präparate. Nr. 6 Taf. Nr. 207.
- Chemische Technologie, Allgemeine**, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.
- Chemisch-Technische Analyse** von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgen. Polytechnischen Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.
- Chemisch-technische Rechnungen v. Chem.** H. Deegener. Mit 4 Figuren. Nr. 701.
- Chile, Landeskunde von (República de Chile)** von Prof. Dr. P. Stange in Schleswig. Mit 3 Profilen, 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 743.
- Christlichen Literaturen des Orients**, Die, von Dr. Anton Baumgart. I: Einleitung. — Das christlich-arabische u. d. koptische Schrifttum. Nr. 527.
- II: Das christl.-arab. und das äthiop. Schrifttum. — Das christl. Schrifttum d. Armenier und Georgier. Nr. 528.
- Colombia.** Die Corräderstaaten von Dr. Wilhelm Sievers, Prof. an der Universität Gießen. II: Ecuador, Colombia u. Venezuela. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 653.
- Corräderstaaten, Die**, von Dr. Wilhelm Sievers, Prof. an der Universität Gießen. I: Einleitung, Bolivia u. Peru. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 652.
- II: Ecuador, Colombia u. Venezuela. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 653.

- Dampfkessel, Die.** Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. den praktischen Gebrauch von Oberingenieur Friedr. Barth in Nürnberg. I: Feuerelemente und Feuerungen. Mit 48 Fig. Nr. 8.
 — II: Bau und Betrieb der Dampfkessel. Nr. 57 Fig. Nr. 521.
- Dampfmaschinen, Die.** Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 2 Bdchn. I: Wärmetheoretische und dampftechn. Grundlagen. Mit 64 Fig. Nr. 8.
 — II: Bau u. Betrieb der Dampfmaschinen. Mit 109 Fig. Nr. 572.
- Dampfturbinen, Die, ihre Wirkungsweise u. Konstruktion von Ingen. Herm. Wilba, Prof. a. staatl. Technikum in Bremen.** 3 Bdchn. Mit zahlr. Abb. Nr. 274, 715 u. 716.
- Desinfektion von Dr. M. Christian, Stabsarzt a. D. in Berlin.** Mit 18 Abbildungen. Nr. 546.
- Determinanten von B. B. Fischer, Überl. a. d. Oberrealsch. z. Groß-Lichterfelde.** Nr. 402.
- Deutsche Altertümer von Dr. Franz Fühse, Dir. d. städt. Museums in Braunschweig.** M. 70 Abb. Nr. 124.
- Deutsche Fortbildungsschulen, Das,** nach seiner geschichtlichen Entwicklung u. in seiner gegenwärt. Gestalt von H. Gierds, Revisor gewerblicher Fortbildungsschulen in Schleswig. Nr. 392.
- Deutsches Fremdwörterbuch von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig.** Nr. 273.
- Deutsche Geschichte von Dr. F. Kurze, Prof. a. Kgl. Luisengymnas. in Berlin.** I: Mittelalter (bis 1519). Nr. 33.
 — II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege (1517 bis 1648). Nr. 34.
 — III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs (1648—1806). Nr. 35.
 — siehe auch: Quellenkunde.
- Deutsche Grammatik und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Prof. Dr. O. Heyn in Dresden.** Nr. 20.
- Deutsche Handelskorrespondenz von Prof. Th. de Beauz, Officier de l'Instruction Publique.** Nr. 182.
- Deutsches Handelsrecht von Dr. Karl Lehmann, Prof. an der Universität Göttingen.** 2 Bdte. Nr. 457 u. 458.
- Deutsche Heldensage, Die, von Dr. Otto Lüttg. Kürzel, Prof. a. b. Univ. Würzburg.** Mit 5 Taf. Nr. 32.
- Deutsche Kirchenlied, Das, in seinen charakteristischen Erscheinungen ausgewählt v. D. Friedrich Spitta, Prof. a. b. Universität in Straßburg i. G.** I: Mittelalter u. Reformationszeit. Nr. 602.
- Deutsches Kolonialrecht von Prof. Dr. S. Edler von Hoffmann, Studien-Direktor d. Akademie f. kommunale Verwaltung in Düsseldorf.** Nr. 318.
- Deutsche Kolonien.** I: Zogo und Kamerun von Prof. Dr. A. Dove. Nr. 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 441.
 — II: Das Südseegebiet und Kinafesch von Prof. Dr. A. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lith. Karte. Nr. 520.
 — III: Ostafrika von Prof. Dr. A. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 567.
 — IV: Südwestafrika von Prof. Dr. A. Dove. Mit 16 Taf. und 1 lithogr. Karte. Nr. 637.
- Deutsche Kulturgeschichte von Dr. Reinhard Günther.** Nr. 56.
- Deutsches Leben im 12. u. 13. Jahrhundert.** Realcommentar zu den Volks- u. Kunsteppen u. zum Minnesang. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbach in Freiburg i. B. I: Öffentliches Leben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 93.
 — II: Privatleben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 328.
- Deutsche Literatur des 13. Jahrhunderts. Die Epigonen d. höfischen Epos.** Auswahl a. deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Victor Junct. Asturius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.
- Deutsche Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts.** Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Janzen, Direktor d. Königin Luisenschule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.
- des 16. Jahrhunderts.** I: Martin Luther und Thom. Murner. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlin, Oberlehrer am Nikolai-Gymnas. zu Leipzig. Nr. 7.

- Deutsche Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts. II: Hans Sachs. Ausgewählt u. erläut. v. Prof. Dr. J. Sahr. Nr. 24.
- III: Von Brant bis Noltenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Diererepos u. Fabel. Ausgew. u. erläut. von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.
- des 17. und 18. Jahrhunderts bis Klosterhof. I: Lyr. von Dr. Paul Legband in Berlin. Nr. 364.
- II: Prosa v. Dr. Hans Legband in Kassel. Nr. 365.
- Deutsche Literaturgeschichte von Dr. Max Koch, Prof. an der Universität Breslau. Nr. 31.
- Deutsche Literaturgeschichte d. Klassikerzeit v. Carl Weitbrecht, durchgesehen u. ergänzt v. Karl Berger. Nr. 161.
- des 19. Jahrhunderts von Carl Weitbrecht, neu bearbeitet von Dr. Rich. Weitbrecht in Wimpfen. I. II. Nr. 134. 135.
- Deutsche Lyrik, Geschichte der, von Prof. Dr. Rich. Findeis in Wien. 2 Bde. Nr. 737/8.
- Deutschen Mundarten, Die, von Prof. Dr. H. Reis in Mainz. Nr. 605.
- Deutsche Mythologie. Germanische Mythologie von Dr. Eugen Mög, Prof. an der Universität Leipzig. Nr. 15.
- Deutschen Personennamen, Die, v. Dr. Kub. Kleinpaul i. Leipzig. Nr. 422.
- Deutsche Poetik von Dr. K. Vorinäsi, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.
- Deutsche Rechtsgeschichte v. Dr. Richard Schröder, Prof. a. d. Univers. Heidelberg. I: Bis z. Mittelalter. Nr. 621.
- II: Die Neuzeit. Nr. 664.
- Deutsche Rechtelehre von Hans Probst, Gymnasialprof. i. Bamberg. Nr. 61.
- Deutsche Schule, Die, im Auslande von Hans Amrhein, Seminaroberlehrer in Rheinfelden. Nr. 259.
- Deutsches Seerecht v. Dr. Otto Brandt, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. I: Allgem. Lehren: Perionen u. Sachen d. Seerechts. Nr. 386.
- II: Die einz. jurettl. Schulverhältnisse: Verträge des Seerechts u. außervertragliche Haftung. Nr. 387.
- Deutsche Stammeskunde v. Dr. Rud. Much, a. o. Prof. a. d. Univ. Wien. Mit 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.
- Deutsche Stadt, Die, und ihre Verwaltung. Eine Einführung i. d. Kommunalpolitik d. Gegenw. Herausgeg. v. Dr. Otto Rost, Beigeordn. d. Stadt Düsseldorf. I: Verfassung u. Verwaltung im allgemeinen; Finanzen und Steuern; Bildungs- und Kunspflege; Gesundheitspflege. Nr. 617.
- II: Wirtschafts- u. Sozialpolitik. Nr. 662.
- III: Technik: Städtebau, Tief- u. Hochbau. Mit 48 Abb. Nr. 663.
- DeutschesslUnterrichtswesen. Geschichte des deutschen Unterrichtswesens v. Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des kgl. Gymnasiums zu Landau. I: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.
- II: Vom Beginn d. 19. Jahrh. bis auf die Gegenwart. Nr. 276.
- Deutsche Urheberrecht. Das, an literarischen, künstlerischen u. gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internat. Verträge v. Dr. Gust. Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.
- Deutsche Volkslied, Das, ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25 u. 132.
- Deutsche Wehrverfassung von Karl Endres, Geheimer Kriegsrat u. vortragender Rat im Kriegsministerium in München. Nr. 401.
- Deutsches Wörterbuch v. Dr. Richard Loewe. Nr. 64.
- Deutsche Zeitungswesen, Das, v. Dr. R. Brunhuber i. Köln a. Rh. Nr. 400.
- Deutsches Zivilprozeßrecht von Prof. Dr. Wilhelm Küch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.
- Deutschland in römischer Zeit von Dr. Franz Cramer, Provinzialschulrat zu Münster i. W. Mit 23 Abbildungen. Nr. 633.
- Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Alstv. mit Einlsg. u. Wörterb. herausgeg. v. Dr. Herm. Janzen, Direktor d. Königin Louise-Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 137.
- Dietrichseen. Ausdruck und Dietrichseen. Mit Einleitung u. Wörterbuch von Dr. O. L. Stritzel, Prof. a. d. Universität Würzburg. Nr. 10.
- Differentialrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rektor d. Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. Mit 58 Figuren. Nr. 87.

- Differentialrechnung.** Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung v. Dr. Friedr. Junfer, Rektor des Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 46 Fig. Nr. 148.
- Disziplinar u. Beischwerderecht für Heer u. Marine.** Das, von Dr. Mag. E. Wacker, Professor a. d. Universität Straßburg i. G. Nr. 517.
- Drogenfund von Rich.** Dorfweitz in Leipzig und Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.
- Druckwasser- und Druckluft-Anlagen.** Pumpen, Druckvasser- u. Druckluft-Anlagen von Dipl.-Ing. Rudolf Bogdt, Regierungsbauinspr. a. D. in Aachen. Mit 87 Fig. Nr. 290.
- Ecuador.** Die Cordillerenstaaten von Dr. Wilhelm Sieters, Prof. an der Universität Gießen. II: Ecuador, Colombia u. Venezuela. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 653.
- Ebdalieder mit Grammatik, Übersetzung u. Erläuterungen** von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasialoberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.
- Eisenbahnen.** Die Entwicklung des modernen Eisenbahnbaues v. Dipl.-Ing. Alfred Birk, o. ö. Prof. a. d. f. f. Deutschen Techn. Hochschule in Prag. Mit 27 Abbild. Nr. 553.
- Eisenbahnbetrieb,** Der, v. S. Scheidner, Königl. Oberbaurat a. D. in Berlin. Mit 3 Abbildgn. Nr. 676.
- Eisenbahnen,** Die Linienführung der, von H. Begele, Professor an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 52 Abbildungen. Nr. 623.
- Eisenbahnfahrzeuge von H. Hinzenthal,** Regierungsbaumeister u. Überingenier in Hannover. I: Die Lokomotiven. Mit 89 Abbild. im Text und 2 Tafeln. Nr. 107.
- II: Die Eisenbahnwagen und Bremsen. Mit Anh.: Die Eisenbahnfahrzeuge im Betrieb. Mit 56 Abb. im Text u. 3 Taf. Nr. 108.
- Eisenbahnpolitik.** Geschichte d. deutschen Eisenbahnpolitik v. Betriebsinspektor Dr. Edwin Reich in Karlsruhe i. W. Nr. 533.
- Eisenbahnverkehr,** Der, v. Kgl. Eisenbahn-Rechnungsdirektor Th. Wilbrand in Berlin-Friedenau. Nr. 618.
- Eisenbetonbau,** Der, v. Reg.-Baumstr. Karl Rögle. Nr. 75 Abbild. Nr. 349.
- Eisenbetonbrücken** von Dr.-Ing. K. W. Schaechterle in Stuttgart. Mit 104 Abbildungen. Nr. 627.
- Eisenhüttenkunde** von A. Graub, bisl. Hütteningenieur. I: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Taf. Nr. 132.
- II: Das Schmiedeisen. Nr. 25 Fig. u. 5 Taf. Nr. 158.
- Eisenkonstruktionen im Hochbau von Ingeln.** Karl Schindler in Meißen. Mit 115 Figuren. Nr. 822.
- Eiszeitalter,** Das, v. Dr. Emil Werth in Berlin-Wilmersdorf. Mit 17 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 431.
- Glastizitätslehre** für Ingenieure I: Grundlagen und Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, Ebene Platten, Torsion, Gekrümmt. Träger. Von Dr.-Ing. Max Enßlin, Prof. a. d. Kgl. Bau-gewerbeschule Stuttgart und Privatdozent a. d. Techn. Hochschule Stuttgart. Mit 60 Abbild. Nr. 519.
- Elektrischen Messinstrumente,** Die, von J. Herrmann, Prof. an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Mit 103 Figuren. Nr. 477.
- Elektrische Öfen** von Dr. Hans Goerges in Berlin-Südende. Mit 68 Abbildgn. Nr. 704.
- Elektrische Schaltapparate** von Dr.-Ing. Erich Bedermann, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 54 Fig. u. 107 Abb. auf 16 Tafeln. Nr. 711.
- Elektrische Telegraphie,** Die, von Dr. Lud. Rellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.
- Elektrizität.** Theoret. Physik III: Elektrizität u. Magnetismus von Dr. Gust. Jäger, Prof. a. b. Techn. Hochschule in Wien. Mit 38 Abbildgn. Nr. 78.
- Elektrochemie** von Dr. Heinr. Danneel in Genf. I: Theoretische Elektrochemie u. ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 16 Fig. Nr. 252.
- II: Experiment. Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Fig. Nr. 253.
- Elektromagnet.** Lichttheorie. Theoret. Physik IV: Elektromagnet. Lichttheorie u. Elektronik von Professor Dr. Gust. Jäger in Wien. Mit 21 Figuren. Nr. 374.
- Elektrometallurgie** von Dr. Friedrich Regelsberger, Kaiserl. Reg.-Rat in Steglitz-Berlin. Nr. 16 Fig. Nr. 110.

- Elektrotechnik.** Einführung in die Starkstromtechnik v. J. Herrmann, Prof. d. Elektrotechnik an der Agl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 93 Fig. u. 10 Taf. Nr. 196.
 — II: Die Gleichstromtechnik. Mit 112 Fig. und 18 Taf. Nr. 197.
 — III: Die Wechselstromtechnik. Mit 154 Fig. u. 18 Taf. Nr. 198.
 — IV: Die Erzeugung und Verteilung der elektrischen Energie. Mit 98 Figuren u. 16 Tafeln. Nr. 657.
- Elektrotechnik.** Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik von Ing. Prof. Herm. Wilba i. Bremen. Nr. 3 Abb. Nr. 476.
- Elsäss-Lothringen,** Landeskunde von, v. Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. S. Mit 11 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 215.
- Englisch.** Neuenglische Laut- u. Formenlehre siehe: Neuenglisch.
- Englisch-deutsches Gesprächsbuch** von Prof. Dr. G. Hausknecht in Lassonne. Nr. 424.
- Englisch für Techniker.** Ein Lehr- und Übungsbuch f. Ing. u. zum Gebrauch an Tech.-Lehranstalten. Unter Mitarb. v. W. Banch Heatherstonhaugh, Dozent a. d. militärtechn. Akad. i. Charlottenburg herausgeg. von Ingenieur Carl Volt, Direktor der Beuth-Schule, Berlin. I. Teil. Mit 25 Fig. Nr. 705.
- Englische Geschichte** v. Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.
- Englische Handelskorrespondenz** von C. E. Whifford, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.
- Englische Literaturgeschichte** von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.
- Englische Literaturgeschichte.** Grundzüge und Haupttypen d. englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold M. M. Schröer, Professor an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.
- Englische Phonetik mit Lesestudien** von Dr. A. C. Dunstan, Lector an der Univ. Königsberg i. Pr. Nr. 601.
- Entwickelungsgeschichte der Tiere** von Dr. Johannes Meisenheimer, Prof. der Zoologie an der Universität Jena. I: Furchung, Primitivlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.
- Entwickelungsgeschichte der Tiere** von Dr. Joh. Meisenheimer, Prof. der Zool. a. d. Univ. Jena. II: Organbildung. Mit 46 Fig. Nr. 379.
- Spiponen,** Die, des höfischen Gesetz. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 18. Jahrhunderts von Dr. Victor Junck, Attuarius d. Kaiserl. Akad. der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.
- Erbrecht.** Recht des Bürgerl. Gesetzbuches. Fünftes Buch: Erbrecht von Dr. Wilhelm von Blume, ord. Prof. der Rechte an der Univ. Tübingen. I. Abteilung: Einleitung — Die Grundlagen des Erbrechts. II. Abteilung: Die Nachlaßbeteiligten. Mit 28 Figuren. Nr. 659/60.
- Erbau von Reg.-Baum.** Erwin Linz in Stuttgart. Mit 72 Abbild. Nr. 630.
- Grdmagnetismus, Grdstrom u. Polarlicht** von Dr. A. Nipkow, Mitglied des Königl. Preußischen Meteorologischen Instituts in Potsdam. Mit 7 Tafeln und 16 Figuren. Nr. 175.
- Erdeite, Länderkunde der außereuropäischen,** von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. d. Exportakad. in Wien. Mit 11 Tafelkarten u. Profilen. Nr. 63.
- Grnährung und Nahrungsmitte** von Oberstabsarzt Professor H. Bischoff in Berlin. Mit 4 Abbild. Nr. 464.
- Gthit** von Prof. Dr. Thomas Adelais in Bremen. Nr. 90.
- Europa, Länderkunde von,** von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. d. Exportakademie in Wien. Mit 14 Tafelkarten u. Diagrammen u. einer Karte der Ebeneinteilung. Nr. 62.
- Exkursionsflora von Deutschland** zum Bestimmen d. häufigeren i. Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbildungen. Nr. 268 und 269.
- Experimentalphysik** v. Prof. R. Lang in Stuttgart. I: Mechanik d. fest., flüss. u. gasigen Körper. Nr. 125 Fig. Nr. 611.
 — II: Wellenlehre u. Akustik. Mit 69 Figuren. Nr. 612.
- Explosivstoffe.** Einführung in d. Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. H. Brunschwig in Steglitz. Mit 6 Abbild. und 12 Tab. Nr. 338.
- Familienrecht.** Recht d. Bürgerlichen Gesetzbuches. Biertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Eise, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Nr. 305.

Färbererei, Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färbererei und ihre Hilfsmittel von Dr. Wilhelm Massot, Prof. an der Preußischen höheren Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186. Farnpflanzen siehe: Algen, Moose und Farnpflanzen.

Feldgeschütz, Das moderne, v. Oberstleutnant W. Hebenreich, Militärlehrer a. d. Militärtechn. Akademie in Berlin. I: Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschl. der Erfindung des rauchl. Pulvers, etwa 1850 bis 1890. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

— II: Die Entwicklung d. heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart. Mit 11 Abbild. Nr. 307.

Fernmeldewesen, Das elektrische Fernmelmewesen bei den Eisenbahnen von S. Finn, Geheim-Baurat in Hannover. Mit 50 Figuren. Nr. 707.

Fernsprechwesen, Das, von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Fig. und 1 Tafel. Nr. 155.

Festigkeitslehre v. Prof. W. Hauber, Dipl.-Ing. Mit 56 Fig. Nr. 288.

Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen von R. Harten, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 42 Fig. Nr. 491.

Fette, Die, und Öle sowie die Seifen- u. Kerzenfabrikat u. d. Harze, Lade, Firmiti m. ihren wichtigsten Stoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. I: Einführung in die Chemie, Beschreibung einiger Salze und der Fette und Öle. Nr. 335.

— II: Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbildungen. Nr. 336.

— III: Harze, Lade, Firmiti. Nr. 337.

Feuerwaffen, Geschichte d. gesamten Feuerwaffen bis 1850. Die Entwicklung der Feuerwaffen v. ihrem ersten Auftreten bis zur Einführung d. gezog. Hinterlader, unter besond. Berücksichtig. d. Heeresbewaffnung von Major a. D. W. Göhlte, Steglitz-Berlin. Mit 103 Abbildungen. Nr. 530.

Feuerwerkerei, Die, von Direktor Dr. Alons Bujard, Vorstand des Städt. Chemischen Laboratoriums in Stuttgart. Mit 6 Fig. Nr. 634.

Filzfabrikation, Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spiken- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gütler, Geh. Regierungsr. im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185. Finanzsysteme der Großmächte, Die, (Internat. Staats- und Gemeindefinanzwesen) v. O. Schwarz, Geh. Oberfinanzrat in Berlin. 2 Bändchen. Nr. 450 und 451.

Finanzwissenschaft von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. I: Allgemeiner Teil. Nr. 148.

— II: Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.

Finnisch-ugrische Sprachwissenschaft von Dr. Josef Szinnesi, Prof. an der Universität Budapest. Nr. 463.

Finnland, Landeskunde des Europäischen Russlands nebst Finnlands von Prof. Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.

Firmiti. Harze, Lade, Firmiti von Dr. Karl Braun in Berlin. (Fette und Öle III.) Nr. 337.

Fische, Das Tierreich IV: Fische von Prof. Dr. Max Kautner in Neapel. Mit 87 Abbild. Nr. 356.

Fischerei und Fischzucht von Dr. Karl Edstein, Prof. a. b. Forstakademie Eberswalde. Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Betriebswesens. Nr. 159.

Flechten, Die, Eine Übersicht unserer Kenntnisse v. Prof. Dr. G. Lindau, Gustav a. Kgl. Botanisch. Museum, Ordinarius an d. Univers. Berlin. Mit 55 Figuren. Nr. 688.

Flora, Excursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigsten in Deutschland wildwachsenden Pflanzen v. Dr. W. Miquula, Prof. a. b. Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbild. Nr. 268, 269.

Flussschiffe von Regierungsbaumeister Otto Kappeler in Stuttgart. Mit 102 Abbildungen. Nr. 897.

Fördermaschinen, Die elektrisch betriebenen, von U. Barthauer, Dipl.-Bergingeneur. Mit 62 Figuren. Nr. 678.

- Gorenfische Psychiatrie** von Professor Dr. W. Wengandt, Dir. d. Irrenanstalt Friederichsberg i. Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 u. 411.
- Fortschreitende Fortschreitung** v. Dr. Ad. Schwappach, Prof. a. d. Fortschad. Eberswalde, Abteil.-Dirig. b. d. Hauptstat. d. fort. Berufsschule. Nr. 106.
- Fortschreibungsschulwesen, Das deutsche** nach seiner geschichtl. Entwicklung u. i. sein gegenwärt. Gestalt v. H. Sierks, Revisor gewerbtl. Fortbildungsschulen im Schleswig. Nr. 392.
- Franken, Geschichte Frankens** v. Dr. Christ. Meier, Reg. preuß. Staatsarchivar a. D., München. Nr. 434.
- Frankreich, Französische Geschichte** v. Dr. R. Sternjell, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 85.
- Frankreich, Landesk. v. Frankreich** v. Dr. Rich. Neuse, Direkt. d. Überrealische in Spandau. 1. Bändch. Nr. 23 Abb. im Text u. 16 Landschaftsbild. auf 16 Taf. Nr. 466.
- 2. Bändchen. Mit 15 Abb. im Text, 18 Landschaftsbild. auf 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 467.
- Französisch-deutsches Gesprächsbuch** von C. Francillon, Lector am orientalisch Seminar u. an d. Handelshochschule in Berlin. Nr. 596.
- Französische Grammatik** von Cyprien Francillon, Lehrer am oriental. Seminar und an der Handelshochschule in Berlin. Nr. 729.
- Französische Handelskorrespondenz** v. Prof. Th. de Beauz, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.
- Französisches Lesebuch mit Wörterverzeichnis** von Cyprien Francillon, Lector a. oriental. Seminar u. a. d. Handelshochschule; Berlin Nr. 418.
- Fremdwort, Das, im Deutschen** v. Dr. Stub. Kleinpaul, Leipzig. Nr. 55.
- Fremdwörterbuch, Deutsches**, von Dr. Stub. Kleinpaul, Leipzig. Nr. 273.
- Fuge, Erläuterung u. Anleitung zur Komposition** derselben v. Prof. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 418.
- Funktionslehre** von Dr. Konrad Knopp, Privatdozent an der Universität Berlin. I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analyt. Funktionen. Mit 9 Fig. Nr. 668.
- II: Unwendungen der Theorie zur Untersuchung spezieller analytischer Funktionen. Mit 10 Figuren. Nr. 703.

- Funktionslehre, Einleitung in die** (Theorie der komplexen Zahlenreihen) von Mag. Roje, Oberlehrer an der Goethechule in Deutsch-Wilmersdorf. Mit 10 Fig. Nr. 581.
- Fußartillerie, Die, ihre Organisation, Bewaffnung u. Ausbildung v. Splett, Oberleutn. im Lehrbat. d. Fußart.-Schießchule u. Biermann, Oberleutn. in der Beruchsatt. d. Art.-Prüfungskomm. Mit 25 Fig. Nr. 560.**
- Gardinenfabrikation, Textilindustrie** II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spisen- u. Gardinenfabrikation u. Filzfabrikation von Prof. Mag. Gürler, Geh. Reg.-Rat im Reg. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.
- Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen** von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbildungen. Nr. 412.
- Gastraffmaschinen, Die**, v. Ing. Alfred Kriché in Kiel. 2 Bändchen. Mit 116 Abb. u. 6 Tafeln. Nr. 316 u. 651.
- Gasthäuser und Hotels** von Architekt Mag. Böhler in Düsseldorf. I: Die Bestandteile u. die Einrichtung des Gasthauses. Mit 70 Fig. Nr. 525.
- II: Die verschiedenen Arten von Gasthäusern. Mit 82 Fig. Nr. 526.
- Gebirgsartillerie**. Die Entwicklung der Gebirgsartillerie von Klüßmann, Oberst u. Kommandeur der 1. Feld-Art.-Brigade in Königsberg i. Pr. Mit 78 Bildern und Übersichtstafeln. Nr. 531.
- Genossenschaftswesen, Das, in Deutschland** v. Dr. Otto Lindbeck in Düsseldorf. Nr. 384.
- Geobasis** von Prof. Dr. C. Reinherz in Hannover. Neubearbeitet von Dr. G. Förster, Observator a. Geodätisch. Inst. Potsdam. Nr. 68 Abb. Nr. 102.
- Vermessungskunde von Diplom.-Ing. B. Werkmeister, Oberlehr. a. d. Kgl. Techn. Schule i. Straßburg i. E. I: Feldmessen u. Nivellieren. Mit 146 Abb. II: Der Theodolit. Trigonometr. u. barometr. Höhenmessung. Tachymetr. Nr. 109 Abb. Nr. 468, 469.
- Geographie, Geschichte der**, von Prof. Dr. Konrad Kretschmer i. Charlottenburg. Mit 11 Kort. im Text. Nr. 624.

- Geologie** in kurzen Auszug f. Schulen u. zur Selbstbelehrung zusammengestellt v. Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. u. 4 Tafeln mit 51 Figuren. Nr. 13.
- Geometrie, Analytische**, der Ebene v. Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 52 Figuren. Nr. 65.
- **Aufgabensammlung** zur Analytischen Geometrie der Ebene von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Fig. Nr. 256.
 - des Raumes von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.
 - **Aufgabensammlung** zur Analytischen Geometrie des Raumes von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 8 Fig. Nr. 209.
 - Darstellende, von Dr. Robert Haubner, Prof. an d. Univ. Jena, I. Mit 110 Figuren. Nr. 142.
 - II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.
 - Ebene, von G. Wahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarbigem Figuren. Nr. 41.
 - **Projektive**, in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doeblemann, Prof. an der Universität München. Mit 91 Figuren. Nr. 72.
- Geometrische Optik, Einführung** in die, von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.
- Geometrisches Zeichnen** von H. Beder, Architekt u. Lehrer an der Bauernschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Bonderlinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.
- Germanische Mythologie** von Dr. E. Vogl, Prof. a. d. Univ. Leipzig. Nr. 15.
- Germanische Sprachwissenschaft** von Dr. Rich. Loewe. Nr. 238.
- Gesangskunst. Technik** der deutschen Gesangskunst von Lst. Ros u. Dr. Hans Joachim Woer. Nr. 576.
- Geschäfts- und Warenhäuser** v. Hans Schliepmann, Königl. Baurat in Berlin. I: Vom Laden zum „Grand Magasin“. Mit 23 Abb. Nr. 655.
- II: Die weitere Entwicklung d. Warenhäuser. Mit 29 Abb. Nr. 656.
- Gesichtswissenschaft, Einleitung** in die, v. Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Univ. Greifswald. Nr. 270.
- Geschütze, Die modernen**, der Fußartillerie v. Mummendorff, Oberstleutnant u. Kommand. d. Thür. Fußartillerie Regts. Nr. 18. I: Vom Auftreten d. gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890. Mit 50 Textbildern. Nr. 334.
- II: Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 33 Textbildern. Nr. 382.
- Geschwindigkeitsregler** der Kraftmaschinen, Die, v. Dr.-Ing. S. Kröner in Friedberg. Mit 33 Fig. Nr. 604.
- Gesetzbuch, Bürgerliches**, siehe: Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches.
- Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten** v. C. Rebmann, Oberchirur. in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. S. Seiler. Mit 47 Abbild. u. 1 Tafel. Nr. 18.
- Gewerbehyggiene** von Dr. G. Roth in Potsdam. Nr. 350.
- Gewerbewesen** von Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. I. II. Nr. 203, 204.
- Gewerbliche Arbeiterfrage**, Die, von Werner Sombart, Prof. a. d. Handelshochschule Berlin. Nr. 209.
- Gewerbliche Bauten. Industrielle und gewerbliche Bauten** (Speicher, Lagerhäuser u. Fabrien) v. Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. I: Allgemeines über Anlage und Konstruktion der industriellen und gewerblichen Bauten. Nr. 511.
- II: Speicher und Lagerhäuser. Mit 123 Figuren. Nr. 512.
- Gewichtswesen. Maß-, Münz- u. Gewichtswesen** v. Dr. Aug. Blind, Prof. a. d. Handelschule in Köln. Nr. 283.
- Gieckereimaschinen** von Dipl.-Ing. Emil Treiber in Heidenheim a. W. Mit 51 Figuren. Nr. 548.
- Glas- und Keramische Industrie** (Industrie der Silikate, der fünflichen Bausteine und des Mörtels I) v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 231.
- Gleichstrommaschine, Die**, von Ing. Dr. C. Kinsbunner in London. Mit 81 Figuren. Nr. 257.

- Gletscherkunde** v. Dr. Fritz Machaefel in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.
- Gotische Sprachdenkmäler mit Grammatik**, Übersetzung u. Erläuterungen v. Dr. Herm. Janzen, Direktor d. Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.
- Gottfried von Straßburg**. Hartmann von Aue. Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl a. d. höfisch. Epos m. Unterricht u. Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichs-Kolleg. zu Königsberg. Pr. Nr. 22.
- Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik** von Dr. Marcello v. Pisani, Obering., Privatdozent an der Kgl. Techn. Hochschule in Charlottenburg. Mit 58 Taf. Nr. 728.
- Graphischen Künste**, Die, von Carl Stumpmann, f. f. Lehrer an der f. f. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbildungen u. Beilagen. Nr. 75.
- Griechisch**. Neugriechisch - deutsches Gesprächsbuch siehe: Neugriechisch. Griechisch. Neugriechisches Lesebuch siehe: Neugriechisch.
- Griechische Altertumskunde** v. Prof. Dr. Rich. Matzsch, neu bearbeitet v. Rektor Dr. Franz Wohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.
- Griechische Geschichte** von Dr. Heinrich Swoboda, Professor an d. deutschen Universität Prag. Nr. 49.
- Griechische Literaturgeschichte mit Berücksichtigung d. Geschichte der Wissenschaften** v. Dr. Alfred Gerde, Prof. an der Univ. Breslau. 2 Bändchen. Nr. 70 u. 557.
- Griechischen Papyri**, Auswahl aus, von Prof. Dr. Robert Helbing in Karlsruhe i. B. Nr. 625.
- Griechischen Sprache**, Geschichte der, I: Bis zum Ausgange d. klassischen Zeit v. Dr. Otto Hoffmann, Prof. an der Univ. Münster. Nr. 111.
- Griechische u. römische Mythologie** v. Prof. Dr. Herm. Steubing, Reft. d. Gymnas. in Schneeberg. Nr. 27.
- Grundbuchrecht**, Das formelle, von Oberlandesgerichtsr. Dr. F. Krebsjäger in Dresden. Nr. 549.
- Handelspolitik**, Auswärtige, von Dr. Heinr. Sieveking, Professor an der Universität Zürich. Nr. 245.

- Handelsrecht, Deutsches**, von Dr. Karl Lehmann, Prof. an d. Universität Göttingen. I: Einleitung. Der Kaufmann u. seine Hilfspersonen. Offene Handelsgesellschaft. Kommandit- und stille Gesellschaft. Nr. 457.
- II: Aktiengesellschaft. Gesellsc. m. b. o. Ging. Gen. Handelsgesell. Nr. 458.
- Handelswesen**, Das deutsche, von Direktor Theodor Blum in Dessau. Nr. 558.
- Handelstand**, Der, von Rechtsanwalt Dr. jur. Bruno Springer in Leipzig (Kaufmänn. Rechtsfunde. Bd. 2). Nr. 545.
- Handelswesen**, Das, von Geh. Oberregierungsrat Dr. Wilh. Leriz, Professor an der Universität Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.
- II: Die Effetenbüro und die innere Handelspolitik. Nr. 297.
- Handfeuerwaffen**, Die Entwicklung der, seit der Mitte des 19. Jahrhunderts u. ihr heutiger Stand von G. Wrzodel, Hauptmann u. Kompaniechef im Inf.-Reg. Freiherr Hiller von Görlitz(4. Posensches) Nr. 59 i. Soldau. Nr. 21 Abb. Nr. 366.
- Harmonielehre** von A. Halm. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 120.
- Hartmann von Aue**, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus d. höfischen Epos mit Unterricht u. Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Königl. Friedrichs-Kollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.
- Hasze, Lade, Firnisse** von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öl III). Nr. 337.
- Hebezeuge**, Die, ihre Konstitution u. Berechnung von Ing. Prof. Herm. Wilba, Bremen. Mit 399 Abb. Nr. 414.
- Heeresorganisation**, Die Entwicklung der, seit Einführung der stehenden Heere von Otto Neuschäfer, Hauptmann und Kompaniechef. I: Geschichtliche Entwicklung bis zum Ausgange d. 19. Jahrh. Nr. 552.
- II: Die Heeresorganisation im 20. Jahrhundert. Nr. 731.

- Heizung u. Lüftung v. Ing. Johannes Körting** in Düsseldorf. I: Das Wesen u. die Berechnung der Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 34 Figuren. Nr. 342.
- II: Die Ausführung der Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.
- Hessen.** Landeskunde des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck v. Prof. Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.
- Hieroglyphen von Geh. Regier.-Rat Dr. Ad. Erman,** Prof. an der Universität Berlin. Nr. 608.
- Hochspannungstechnik, Einführ.** in die moderne, von Dr.-Ing. R. Fischer in Hamburg-Bergedorf. Mit 92 Fig. Nr. 609.
- Holz, Das.** Aufbau, Eigenschaften u. Verwendung v. Ing. Prof. Herm. Wilba in Bremen. Mit 33 Abb. Nr. 459.
- Hotels.** Gaithäuser und Hotels von Archit. Max Wöhler in Düsseldorf. I: Die Bestandteile u. d. Einrichtg. des Gaithauses. Mit 70 Fig. Nr. 525.
- II: Die verschiedenen Arten von Gaithäusern. Mit 82 Fig. Nr. 526.
- Hydraulik v. W. Hauber,** Dipl.-Ing. in Stuttgart. Mit 44 Fig. Nr. 397.
- Hygiene des Städtebaus, Die,** von Prof. H. Chr. Nussbaum in Hannover. Mit 30 Abb. Nr. 348.
- des Wohnungswesens, Die, von Prof. H. Chr. Nussbaum in Hannover. Mit 20 Abbild. Nr. 363.
- Iberische Halbinsel.** Landeskunde der Iberischen Halbinsel von Dr. Fritz Regel, Prof. a. d. Univ. Würzburg. Nr. 8 Kärtchen u. 8 Abb. im Tert u. 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.
- Indische Religionsgeschichte** von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.
- Indogerman. Sprachwissenschaft** von Dr. R. Meringer, Professor an der Univers. Graz. Nr. 1 Tafel. Nr. 59.
- Industrielle u. gewerbliche Bauten** (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) von Architekt Heintz. Salzmann in Düsseldorf. I: Allgemeines üb. Anlage u. Konstruktion d. industriellen u. gewerblichen Bauten. Nr. 511.
- II: Speicher und Lagerhäuser. Mit 123 Figuren. Nr. 512.
- Infektionsschrankheiten, Die, und ihre Verhütung** von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildungen und einer Tafel. Nr. 327.
- Insekten.** Das Tierreich V: Insekten v. Dr. J. Groß in Neapel (Statione solna). Mit 56 Abb. Nr. 594.
- Instrumentenlehre v. Rauschir.** Professor Franz Mayerhoff in Chemnitz. I: Tert. Nr. 437.
- II: Notenbeispiele. Nr. 438.
- Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junfer, Rekt. d. Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 89 Figuren. Nr. 88.
- Integralrechnung. Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junfer, Rekt. d. Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. Mit 52 Figuren. Nr. 147.
- Israel.** Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.
- Italienische Handelskorespondenz** v. Prof. Alberto de Beauz, Überlehrer am Königl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.
- Italienische Literaturgeschichte** von Dr. Karl Böhlker, Professor an der Universität München. Nr. 125.
- Jugendpflege I:** Männliche Jugend von H. Sierds. Vorsitzender des Vereins für Jugendwohlfahrt in Schleswig-Holstein in Schleswig. Nr. 714.
- Kalligraphie, Die, im malerischen u. Ing. H. Bethmann, Doz. — capit. Altenburg. Mit 13 Abb. Nr. 486.**
- Kältemaschinen.** Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmeträger- und Kältemaschinen von Dr. Röttinger, Dipl.-Ing. in Mannheim. Mit 78 Figuren. Nr. 2.
- Kamerun.** Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithogr. Karte. Nr. 441.
- Kampf um befestigte Stellungen, seine Formen und Grundsätze** von Major Tiersch, Kommandeur des Kürassier-Pionier-Bat. Nr. 11. Nr. 732.
- Kampfesformen u. Kampfweise der Ja-unteri** von Hrn. Oberleutnant beim Stabe des 5. Westpreußischen Infanterie-Regiments Nr. 148 in Bromberg. Mit 15 Abbildgn. Nr. 712.

- Kanal- und Schleusenbau** von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 78 Abb. Nr. 585.
- Kant, Immanuel**, Geschichte d. Philosophie Bd. 5) v. Dr. Bruno Bauch, Prof. a. d. Univ. Jena. Nr. 536.
- Kartell u. Trust** v. Dr. S. Tschirerichky in Düsseldorf. Nr. 522.
- Kartenkunde** von Dr. W. Gross, Kartograph i. Berlin. 2 Bändchen. I: Die Projektionen. Mit 56 Fig. Nr. 30.
- II: Der Karteninhalt u. das Maßstab auf Karten. Mit 39 Fig. Nr. 598.
- Kartographische Aufnahmen** u. geograph. Ortsbestimmung auf Reisen von Dr.-Ing. R. Hugershoff, Prof. an der Forstakademie zu Tharandt. Mit 73 Figuren. Nr. 607.
- Katholischen Kirche**, Geschichte der, von der Mitte des 18. Jahrh. bis zum Vatikanischen Konzil von Geh. Konf.-Rat Prof. D. Mirbt. Göttingen. Nr. 700.
- Kaufmännische Rechtskunde**. I: Das Wechselwesen v. Rechtsanwalt Dr. Rud. Mothes in Leipzig. Nr. 103.
- II: Der Handelsstand v. Rechtsanw. Dr. jur. S. Springer, Leipzig. Nr. 545.
- Kaufmännisches Rechnen** von Prof. Richard Just, Oberlehrer a. d. Öffentl. Handelslehranstalt d. Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 129, 140, 187.
- Zeitschrift**, Die, von Dr. Bruno Meißner, o. Professor a. d. Universität Breslau. Mit 6 Abbildungen. Nr. 708.
- Keramische Industrie**. Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bansteine und des Mörtels von Dr. Gust. Rauter. I: Glas- u. keram. Industrie. Mit 12 Taf. Nr. 233.
- Kerzenfabrikation**. Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette u. Ole II.) Mit 25 Abb. Nr. 336.
- Kiautschou**. Die deutschen Kolonien II: Das Südseegebiet und Kiautschou v. Prof. Dr. A. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 520.
- Kinderrecht u. Kinderwohl** von Professor H. G. Wendel in Grunewald. Nr. 693.
- Kinematik** von Dipl.-Ing. Hans Pöster, Assist. a. d. Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 76 Abb. Nr. 584.
- Kirchenrecht** v. Dr. E. Gehling, ord. Prof. d. Rechte in Erlangen. Nr. 377
- Klima und Leben** (Bioklimatologie) von Dr. Wilh. R. Gerdau, Assist. an der öffentl. Wetterbeobachtungsstelle in Weilburg. Nr. 629.
- Klimakunde I**: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. u. 2 Figuren. Nr. 114.
- Kolonialgeschichte** von Dr. Dietrich Schäfer, Professor der Geschichte an der Universität Berlin. Nr. 156.
- Kolonialrecht, Deutsches**, von Prof. Dr. H. Edler von Hoffmann, Studiendirektor d. Akademie für kommunale Verwaltung in Düsseldorf. Nr. 218.
- Kometen**. Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Univ. Kiel. II: Kometen, Meteore u. das Sternhimmel. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.
- Kommunale Wirtschaftspflege** von Dr. Alfons Nies, Magistratsassessor in Berlin. Nr. 534.
- Kompositionsslehre**. Musikalische Formenlehre v. Steph. Krehl. I. II. Drei viel. Notenbeispiel. Nr. 149, 150.
- Kontrapunkt**. Die Lehre von der selbstständigen Stimmführung v. Steph. Krehl in Leipzig. Nr. 390.
- Kontrollweisen**, Das agrarwirtschaftliche, von Dr. Paul Kitzsche in Leopoldshall-Stuttgart. Nr. 304.
- Koordinatenysteme** v. Paul B. Fischer, Oberl. a. d. Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Mit 8 Fig. Nr. 507.
- Körper**, Der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten von C. Remann, Oberlehrer i. Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Nr. 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18. „Anatomisch“ siehe: Anatomie.
- Kredit- und Bankwesen** von Geh. Oberregierungsrat Wilhelm Legis, Prof. an der Univ. Göttingen. Nr. 733.
- Kriegsschiffbau**. Die Entwicklung des Kriegsschiffbaues vom Altertum bis zur Neuzeit. Von J.ard Schwarze. Geh. Marineteaurat u. Schiffbau-Direktor. I. Teil: Das Zeitalter der RuderSchiffe u. der Segelschiffe f. b. Kriegsführung i. See vom Altertum bis 1840. Mit 32 Abb. Nr. 471.
- II. Teil: Das Zeitalter der am. Schiffe f. b. Kriegsführ. g. See v. 1840 bis zur Neuzeit. Mit 81 Abb. Nr. 472.

- Kriegswesen, Geschichte des**, von Dr. Emil Daniels in Berlin I: Das antike Kriegswesen. Nr. 488.
 — II: Das mittelalterliche Kriegswesen. Nr. 498.
 — III: Das Kriegswesen der Neuzeit. Erster Teil. Nr. 518.
 — IV: Das Kriegswesen der Neuzeit. Zweiter Teil. Nr. 537.
 — V: Das Kriegswesen der Neuzeit. Dritter Teil. Nr. 568.
 — VI: Das Kriegswesen der Neuzeit. Vierter Teil. Nr. 670.
 — VII: Das Kriegswesen der Neuzeit. Fünfter Teil. Nr. 671.
- Kristallographie** v. Dr. W. Brüns, Prof. a. d. Bergakademie Clausthal. Mit 190 Abbild. Nr. 210.
- Kristallopitik, Einführung in die**, von Dr. Eberhard Buchwald i. München. Mit 124 Abbildungen. Nr. 619.
- Kudrun und Dietrichen**. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Kitzel, Professor an der Universität Würzburg. Nr. 10.
- Kultur, Die, der Renaissance**. Gesittung, Forschung, Dichtung v. Dr. Robert F. Arnold, Professor an der Universität Wien. Nr. 189.
- Kulturgeschichte, Deutsche**, von Dr. Reinhard Günther. Nr. 56.
- Kurbendiskussion. Algebraische Kurven** von C. Beutel, Oberreallehrer in Balingen-Enz. I: Kurbendiskussion. Mit 57 Fig. im Text. Nr. 425.
- Kurzschrift** siehe: Stenographie.
- Küstenartillerie**. Die Entwicklung der Schiffss- und Küstenartillerie bis zur Gegenwart v. Korvettenkapitän Hünigen. Mit Abb. u. Tab. Nr. 606.
- Lade, Harze, Lade, Firmisse** von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle III.) Nr. 337.
- Lagerhäuser. Industrielle und gewerbliche Bauten**. (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) von Architekt H. Salzmann, Düsseldorf. I: Allgem. über Anlage u. Konstrukt. d. Industr. u. gewerb. Bauten. Nr. 511.
 — II: Speicher u. Lagerhäuser. Mit 123 Fig. Nr. 512.
- Länder- und Völternamen** von Dr. Hub. Klempau in Leipzig. Nr. 478.
- Landstraßenbau** von Rgl. Oberlehrer U. Liebmann, Betriebsdirekt. a. D. i. Magdeburg. Mit 44 Fig. Nr. 598.

- Landwirtschaftliche Betriebslehre v. S. Langenbeck** in Groß-Lichterfelde. Nr. 227.
- Landwirtschaftlichen Maschinen**, Die, von Karl Walther, Diplom.-Ing. in Mannheim. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildgn. Nr. 407—409.
- lateinische Grammatik. Grundriss der lateinischen Sprachlehre** v. Prof. Dr. W. Voß in Magdeburg. Nr. 82.
- Sprache. Geschichte der lateinischen Sprache** v. Dr. Friedr. Stoltz, Prof. an d. Univ. Bonn. Druckn. Nr. 492.
- lateinisches Lesebuch für Überrealschulen und zum Selbststudium enthaltend: Cäsars Kämpfe mit den Germanen und den zweiten Punischen Krieg von Professor Lic. theol. Johannes Hillmann, Überlehrer an der Klingenberg-Oberrealschule in Frankfurt a. M.** Mit Vocabular. Nr. 713.
- Laubholz, Die**. Kurzgeschilderte Beschreibung der in Mitteleuropa einheimischen Bäume und Sträucher, sowie der wichtigeren in Gärten gezogenen Laubholzplanten von Dr. F. W. Röger, Professor an der Rgl. Bergakademie Tharandt. Mit 74 Tafelabbildgn. und 6 Tabellen. Nr. 718.
- Leuchtgasfabrikation, Die Nebenprodukte der**, von Dr. phil. A. R. Lange, Diplom-Ingenieur. Mit 18 Figuren. Nr. 661.
- Licht. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme**. Von Dr. Gustav Föger, Prof. an der Techn. Hochschule in Wien. Nr. 47 Abb. Nr. 77.
- Logarithmen. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches u. trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt** von Dr. Herm. Schubert, Prof. an der Lehrerenschule des Johanneums in Hamburg. Neue Ausgabe v. Dr. Robert Haufner, Prof. an der Universität Jena. Nr. 81.
- Fünfstellige**, von Professor August Adler, Direktor der I. l. Staats-Oberrealschule in Wien. Nr. 423.
- Logik. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie** von Professor Dr. Th. Eisenhans. Mit 18 Figuren. Nr. 11.
- Lokomotiven. Eisenbahnfahrzeuge** von H. Hinzenhain. I: Die Lokomotiven. Mit 89 Abb. im Text u. 2 Tafeln. Nr. 107.

- Lothringen. Geschichte Lothringens** von Dr. Herm. Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.
- **Landeskunde v. Elsaß-Lothringen** v. Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abb. u. 1 Karte. Nr. 215.
 - Lötrohrprobierkunde.** Qualitative Analyse mit Hilfe des Lötrohrs von Dr. Mart. Henglein in Freiberg i. Sa. Mit 10 Figuren. Nr. 483.
 - Lübeck. Landeskunde d. Großherzogtümmer Mecklenburg u. der Freien u. Hansestadt Lübeck v. Dr. Gebald Schwarz, Direktor der Realchule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbildungen und Karten im Text und 1 lithographischen Karte. Nr. 487.**
 - Aufstelektrität** von Dr. Karl Kähler, wissenschaftlichem Hilfsarbeiter am Königl. Preuß. Meteorologisch-Magnetischen Observatorium in Potsdam. Mit 18 Abb. Nr. 649.
 - Aufstafelter.** Seine Gewinnung durch den elektrischen Flammenbogen von Dr. G. Brion, Prof. an der Königl. Bergakademie in Freiberg. Mit 50 Figuren. Nr. 616.
 - Auf- und Meereströmungen** von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationschule zu Lübeck. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.
 - Außentüpfel.** Heizung und Lüftung von Ing. Johannes Körting in Düsseldorf. I: Das Wesen und die Berechnung d. Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 84 Fig. Nr. 342.
 - II: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343. - Luther, Martin, und Thom. Murner.** Ausgewählt und mit Einleitungen u. Anmerkungen versehen v. Prof. C. Berlit, Oberlehrer am Nikolai-Gymnasium zu Leipzig. Nr. 7.
 - agnetismus. Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus.** Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule Wien. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.
 - Mälzerei. Brauereiwesen I: Mälzerei** von Dr. P. Dreverhoff, Direktor d. Öffentlichen und 1. Sächs. Versuchsanstalt für Brauerei und Mälzerei, sowie der Brauer- und Mälzereischule zu Grimma. Nr. 303.
 - Märkte und Markthallen für Lebensmittel** von Richard Schachner, Stadtbaurat in München. I: Zweck und Bedeutung d. Märkte u. Markthallen, ihre Anlage u. Ausgehalt. II: Markthallenbauten. Mit zahlr. Abb. Nr. 719 u. 720.
 - Maschinenbau, Die Kalkulation im,** v. Ing. H. Behmann, Doz. a. Techn. Altenburg. Mit 63 Abb. Nr. 486.
 - **Die Materialien des Maschinenbaus und der Elektrotechnik** von Ingenieur Prof. Hermann Wilda. Mit 3 Abbildungen. Nr. 476.
 - Maschinenelemente, Die.** Kurzgefasstes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Fr. Barth, Überlingen in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 3.
 - Maschinenzeichnen, Praktisches,** von Überling, Rich. Schissner in Warmbrunn. I: Grundbegriffe, Einfache Maschinenteile bis zu den Kuppelungen. Mit 60 Tafeln. Nr. 589.
 - II: Lager, Riem., u. Scheiben, Zahnräder, Kolbenpumpe. Mit 51 Tafeln. Nr. 590. - Mashanalysé** von Dr. Otto Röhmk in Darmstadt. Mit 14 Fig. Nr. 221.
 - Maß-, Münz- und Gewichtswesen** von Dr. August Blind, Professor an der Handelschule in Köln. Nr. 283.
 - Materialprüfungswesen.** Einführung in die moderne Technik d. Materialprüfung v. R. Memmler, Dipl.-Ing., ständ. Mitarbeiter a. Königl. Materialprüfungsanstalt zu Gr. Lichtenfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel f. Festigkeitsversuche. Mit 58 Fig. Nr. 311.
 - II: Metallprüfung und Prüfung v. Hilfsmaterialien des Maschinenbaus. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Fig. Nr. 312. - Mathematische Formelsammlung und Repertorium der Mathematik,** enthaltend die wichtigsten Formeln u. Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- u. Integralrechnung. O. Th. Bürlen, Prof. am Königl. Realgymn. in Schw.-Gmünd. Nr. 18 Fig. Nr. 51.

- Mathematik, Geschichte der**, von Dr. A. Sturm, Prof. am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.
- Maurer- und Steinhauerarbeiten** von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Eb. Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbild. Nr. 419—421.
- Mechanik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik.** Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.
- Mechanische Technologie** von Geh. Hofrat Professor A. Lüddecke in Braunschweig. 2 Bändchen. Nr. 340, 341.
- Mecklenburg. Landeskunde d. Großherzogtümmer Mecklenburg u. der Freien u. Hansestadt Lübeck** von Dr. Gebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbild. im Text, 16 Taf. und 1 Karte in Lithographie. Nr. 487.
- Mecklenburgische Geschichte** von Oberlehrer Otto Bitenje in Neubrandenburg i. M. Nr. 610.
- Medizin, Geschichte der**, von Dr. med. et phil. Paul Diepgen, Privatdozent für Geschichte der Medizin in Freiburg i. Br. I: Altertum. Nr. 679.
- Meereskunde, Physische**, von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher bei d. Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.
- Meeresströmungen, Luft- u. Meeresströmungen** v. Dr. Franz Schulze, Dir. d. Navigationschule zu Lübeck. Mit 27 Abb. u. 8 Tafeln. Nr. 551.
- Metamorphosen** v. Baurat Otto Hauser in Ellwangen. 2 Bdchen. Mit vielen Fig. Nr. 691/92.
- Menschliche Körper, Der, sein Bau u. seine Tätigkeiten** von C. Rebmann, Oberstabsrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre v. Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Tafel. Nr. 18.
- Metallographie.** Kurze, gemeinfassliche Darstellung der Lehre von den Metallen u. ihren Legierungen unter besond. Berücksichtigung der Metallmikroskopie v. Prof. F. Heyn u. Prof. O. Bauer a. Kgl. Materialprüfungsamt (Gr.-Lichterfelde) d. K. Techn. Hochschule zu Berlin. I: Allgem. Teil. Mit 45 Abb. im Text und 5 Lichtbildern auf 3 Tafeln. Nr. 432.
- Metallographie. II: Spez. Teil.** Mit 49 Abb. im Text und 37 Lichtbildern auf 19 Tafeln. Nr. 433.
- Metallurgie** von Dr. August Geij in Kristiansand (Norwegen). I. II. Mit 21 Figuren. Nr. 318, 314.
- Meteore. Astronomie.** Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearbeitet von Dr. Herm. Kobold, Prof. a. b. Univ. Kiel. II: Kometen, Meteore u. das Sternensystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.
- Meteorologie** v. Dr. W. Trabert, Prof. an der Universität Wien. Mit 49 Abbild. u. 7 Tafeln. Nr. 54.
- Militärische Bauten** v. Rg.-Bauinsfr. Lang i. Stuttgart. Nr. 59 Abb. Nr. 626.
- Militärstrafrecht** Deutsches, v. Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an d. Univ. Straßburg i. G. 2 Bde. Nr. 371, 372.
- Mineralogie von Geheimer Bergrat Dr. R. Brauns**, Prof. an d. Univ. Bonn. Mit 132 Abbild. Nr. 29.
- Minnesang und Spruchdichtung.** Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen u. einem Wörterb. von O. Günther, Prof. an d. Oberrealschule u. an d. Techn. Hochschule i. Stuttgart. Nr. 23.
- Mittelhochdeutsche Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit.** In Auswahl mit Einleitung u. Wörterbuch herausgeg. von Dr. Hermann Janzen, Dir. d. Königin Luise Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 137.
- Mittelhochdeutsche Grammatik.** Der Nibelunge Röt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurz. Wörterb. v. Dr. W. Goither, Prof. a. b. Univ. Rostod. Nr. 1.
- Moose siehe: Algen, Moose und Hornpflanzen.**
- Morgenland. Geschichte des alten Morgenlandes** v. Dr. Fr. Hommel, Prof. an d. Universität München. Mit 9 Bildern u. 1 Karte. Nr. 43.
- Morphologie und Organographie der Pflanzen** v. Prof. Dr. W. Nordhausen in Kiel. Nr. 123 Abb. Nr. 141.
- Mörtel.** Die Industrie d. künftlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.
- Münzbarten, Die deutschen**, von Prof. Dr. H. Reis in Mainz. Nr. 605.

- Mundarten, Plattdeutsche, von Dr. Hubert Grimm, Professor an der Univers. Münster i. W. Nr. 461.
- Münzwesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. a. d. Handelschule in Köln. Nr. 283.
- Murner, Thomas. Martin Luther u. Thomas Murner. Ausgewählt u. m. Einleitungen u. Anmerk. versehen von Prof. G. Berlin, Oberlehrer am Nikolaigymnas. zu Leipzig. Nr. 7.
- Musik, Geheimtheit der alten und mittelalterlichen, v. Dr. A. Möhler in Steinhäusen. 2 Bdch. Mit zahlr. Abb. u. Musikbeil. Nr. 121 u. 347.
- Musikalische Akustik von Professor Dr. Karl L. Schäfer in Berlin. Mit 36 Abbildungen. Nr. 21.
- Musikal. Formenlehre (Kompositionslehre) von Stephan Krehl. I. II. Mit viel Notenbeisp. Nr. 149, 150.
- Musikästhetik von Dr. Karl Grunsh in Stuttgart. Nr. 344.
- Musikgeschichte des 17. Jahrhunderts v. Dr. Karl Grunsh in Stuttgart. Nr. 239.
- Musikgeschichte des 18. Jahrhunderts von Dr. Karl Grunsh in Stuttgart. I. II. Nr. 710, 725.
- Musikgeschichte seit Beginn des 19. Jahrhunderts v. Dr. K. Grunsh in Stuttgart. I. II. Nr. 164, 165.
- Musiklehre, Allgemeine, von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.
- Nadelhölzer, Die, von Dr. F. W. Reger, Prof. an der Königl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 55 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.
- Nahrungsmittel. Ernährung u. Nahrungsmitte v. Oberarztarzt Prof. H. Bischoff in Berlin. Mit 4 Abbildungen. Nr. 464.
- Nautik. Kurzer Abriss d. täglich an Bord von Handels Schiffen angew. Teils d. Schiffahrtstunde. Von Dr. Franz Schulze, Dir. d. Navigationsschule zu Lübeck. Mit 56 Abbildgn. Nr. 84.
- Neuenglische Saut- und Formenlehre von Dr. Gilbert Etwall, Prof. an der Univ. Lund. Nr. 735.
- Neugriechisch - deutsches Gesprächsbuch mit besond. Berücksichtigung d. Umgangssprache v. Dr. Johannes Kaltsounatis, Doz. am Seminar für orient. Sprache in Berlin. Nr. 587.
- Neunzehntes Jahrhundert. Geschichte des 19. Jahrhunderts von Oskar Jäger, o. Honorarprof. a. d. Univ. Bonn. 1. Bdch.: 1800—1852. Nr. 216.
- 2. Bändchen: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.
- Neuorientalische Zeitgeschichte von Lic. Dr. W. Staert, Prof. a. der Univ. in Jena. I: Der historische u. kulturgechichtl. Hintergrund d. Christentums. M. 3 Karten. Nr. 325.
- II: Die Religion d. Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit 1 Blechwiese. Nr. 326.
- Nibelungen Nöt. Der, in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterb. v. Dr. W. Golther, Prof. an der Univ. Rostod. Nr. 1.
- Nordamerikanische Literatur, Geschichte der, von Dr. Leon Kellner, Prof. an der Univ. Czernowitz. 2 Bdchen. Nr. 685/86.
- Nordische Literaturgeschichte I: Die isländ. u. norweg. Literatur des Mittelalters v. Dr. Wolfgang Golther, Prof. an der Universität Rostod. Nr. 254.
- Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großherzogl. landwirtschaftl. Versuchsanst Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.
- Öle. Die Fette u. Öle sowie d. Seifen- u. Kerzenfabrikation u. d. Harze, Lade, Firniße mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. I: Einführung in d. Chemie, Besprechung einiger Salze u. der Fette und Öle. Nr. 335.
- Öle und Fette, Alkalische, von Dr. F. Hochhausen in Wiltz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.
- Öptik. Einführung in d. geometrische Öptik von Dr. W. Hinrichs in Bismarckdorf-Berlin. Nr. 532.
- Orientalistische Literaturen. Die Hauptliteraturen des Orients von Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. an d. Universität Wien. I: Die Literaturen Ostasiens und Indiens. Nr. 162.
- II: Die Literaturen der Perier, Semiten und Türken. Nr. 163.

- Orientalische Literaturen.** Die christlichen Literaturen des Orients von Dr. Ant. Baumstark. I: Einleitung. — Das christl.-aramäische u. d. syr. Schrifttum. Nr. 527.
- II: Das christl.-arabische und das äthiopische Schrifttum. — Das christliche Schrifttum der Armenier und Georgier. Nr. 528.
- Oriennamen im Deutschen.** Die, ihre Entwicklung u. ihre Herkunft von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig-Gohlis. Nr. 578.
- Ostafrika.** Die deutschen Kolonien III: Ostafrika von Prof. Dr. A. Dove. Mit 18 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 587.
- Österreich.** Österreichische Geschichte von Prof. Dr. Franz v. Krones, neu bearb. von Dr. Karl Uhlitz, Prof. a. b. Univ. Graz. I: Vor d. Urzeit b. z. Tode König Albrechts II. (1439). Mit 11 Stammtaf. Nr. 104.
- II: Von Tode König Albrechts II. bis z. Westf. Frieden (1440–1648). Mit 3 Stammtafeln. Nr. 105.
- Landeskunde v. Österreich-Ungarn von Dr. Alfred Grund, Prof. an d. Universität Prag. Mit 10 Textillustrationen u. 1 Karte. Nr. 244.
- Ovidius Naso.** Die Metamorphosen des. In Auswahl mit einer Einheit. u. Anmerk. herausgeg. v. Dr. Jul. Biehn in Frankfurt a. M. Nr. 442.
- Pädagogik** im Grundsatz von Professor Dr. W. Rein, Direktor d. Pädagog. Seminars a. d. Univ. Jena. Nr. 12.
- Geschichte der, von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.
- Paläogeographie.** Geolog. Geschichte der Meere und Festländer von Dr. Franz Kossmat in Wien. Mit 6 Karten. Nr. 406.
- Paläoklimatologie** von Dr. Wilh. R. Edarbt i. Weilburg (Lahn). Nr. 482.
- Paläontologie** von Dr. Rud. Hoernes, Professor an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.
- Paläontologie und Abstammungslehre** von Dr. Karl Dierer, Prof. an der Univ. Wien. Mit 9 Abbildungen. Nr. 460.
- Palästina.** Landes- und Volkskunde Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölscher in Halle. Mit 8 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 345.
- Parallelperspektive.** Rechtwinklige u. schiefwinklige Ueronometrie v. Prof. J. Bondermann in Münster. Mit 121 Figuren. Nr. 280.
- Personennamen.** Die deutschen, v. Dr. Sub. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 422.
- Peru.** Die Cordillerestaaten von Dr. Wilhelm Sievers, Prof. an der Universität Gießen. I: Einleitung, Bolivie und Peru. Mit 16 Tafeln u. 1 lith. Karte. Nr. 652.
- Petrographie** v. Dr. W. Brüns, Prof. an der Bergakademie Clausthal. Mit 15 Abbildungen. Nr. 173.
- Pflanze, Die**, ihr Bau und ihr Leben von Prof. Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.
- von Geh. Hofz. Prof. Dr. Adolf Hansen in Gießen. Mit zahlr. Abb. Nr. 742.
- Pflanzenbaulehre.** Ackerbau- und Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Eisen u. Ernst Langenbeck in Groß-Lichterfelde. Nr. 232.
- Pflanzenbiologie** v. Dr. W. Migula, Professor an d. Forstakademie Gienach. I: Allgemeine Biologie. Mit 43 Abbildungen. Nr. 127.
- Pflanzenernährung.** Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung v. Dr. Karl Grauer. Nr. 239.
- Pflanzengeographie** v. Prof. Dr. Lubin Diels in Marburg (Hessen). Nr. 389.
- Pflanzenkrankheiten** von Dr. Werner Friedt. Privatdoz. i. Gießen. Mit 1 farb. Taf. u. 45 Abb. Nr. 310.
- Pflanzenmorphologie.** Morphologie u. Organographie d. Pflanzen von Prof. Dr. W. Nordhausen in Kiel. Mit 123 Abbildungen. Nr. 141.
- Pflanzenphysiologie** von Dr. Adolf Hansen, Prof. an der Universität Gießen. Mit 43 Abbild. Nr. 591.
- Pflanzenreichs,** Die Stämme des, von Privatdoz. Dr. Rob. Pilger, Kurios am Agl. Botan. Garten in Berlin-Dahlem. Mit 22 Abb. Nr. 485.
- Pflanzenwelt,** Die, der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstak. Gienach. Mit 50 Abb. Nr. 158.
- Pflanzenzellenlehre.** Zellenlehre und Anatomie der Pflanzen von Prof. Dr. H. Niehe in Leipzig. Mit 79 Abbildungen. Nr. 556.
- Pharmakognosie.** Von Apotheker F. Schmitthenner, Assist. a. Botan. Institut d. Techn. Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

- Pharmazeutische Chemie** von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 4 Bändchen. Nr. 543/44, 588, 682.
- Philologie**, Geschichte d. klassischen, v. Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. a. d. Univ. Münster in Westf. Nr. 367.
- Philosophie**, Einführung in die, von Dr. Max Wentischer, Professor an der Universität Bonn. Nr. 281.
- Philosophie**, Geschichte b., IV: Neuere Philosophie bis Kant von Dr. Bruno Bauch, Professor an der Universität Jena. Nr. 394.
- V: Immanuel Kant von Dr. Bruno Bauch, Professor an b. Universität Jena. Nr. 536.
- VI: Die Philosophie im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts von Arthur Drews, Prof. der Philosophie an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 571.
- VII: Die Philosophie im zweiten Drittel des 19. Jahrhunderts von Arthur Drews, Prof. der Philosophie an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 709.
- Hauptprobleme der, v. Dr. Georg Simmel, Professor an der Universität Berlin. Nr. 500.
- Psychologie und Logik zur Eins. in b. Philosophie von Prof. Dr. Th. Ehrenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.
- Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie** von Professor Dr. Hans Doe in Mähr.-Weißkirchen. Mit 59 Abbildn. Nr. 699.
- Photographie**, Die. Von S. Kehler, Prof. an d. f. f. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 3 Taf. und 42 Abbild. Nr. 94.
- Physik**, Theoretische, von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik a. b. Techn. Hochschule i. Wien. I. Teil: Mechanik und Akustik. Mit 24 Abb. Nr. 76.
- II. Teil: Licht u. Wärme. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.
- III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Mit 33 Taf. Nr. 78.
- IV. Teil: Elektromagnet. Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Fig. Nr. 874.
- Physik**, Geschichte, der, von Prof. A. Künter in Wertheim a. N. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.
- Physik, Geschichte, der, von Prof. A. Künter in Wertheim a. N. II: Die Physik von Newton bis z. Gegenwart. Mit 3 Fig. Nr. 294.
- Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben** von Prof. Dr. R. Abegg und Privatdozent Dr. O. Sadur, beide an der Univ. Breslau. Nr. 445.
- Physikalische Aufgabensammlung** von G. Mahler, Prof. der Mathematik u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.
- Formelsammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 65 Figuren. Nr. 136.
- Messungsmethoden von Dr. Wilh. Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.
- Tabellen v. Dr. A. Leid, Oberlehrer an der Comeniuschule zu Berlin-Schöneberg. Nr. 650.
- Physiologische Chemie** von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.
- II: Dissimilation. Mit 1 Taf. Nr. 241.
- Physische Geographie** von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Reg. Techn. Hochschule in München. Mit 37 Abbildungen. Nr. 26.
- Physische Meeresfunde** von Prof. Dr. Gerh. Schott, Abteilungsvoß. b. d. Deutsc. Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abb. im Text u. 8 Taf. Nr. 112.
- Pilze**, Die. Eine Einführung in die Kenntnis ihrer Formenreihen von Prof. Dr. G. Lindau in Berlin. Mit 10 Figurengruppen i. Text. Nr. 574.
- Pionierdienst**, Der, von Major Reichardt, Bataillonsstomm. im Infanter.-Regmt. "Kronprinz" (Nr. 4) in Chemnitz. Mit 150 Abb. Nr. 730.
- Planetensystem. Astronomie** (Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper) von A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. a. b. Univ. Kiel. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbild. Nr. 11.
- Plankton**, Das, des Meeres von Dr. G. Stiasny in Wien. Mit 83 Abbildungen. Nr. 675.
- Plastik**, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Director des Bayer. Nationalmuseums in München. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

- Bläckl, Die, seit Beginn des 19. Jahrhunderts von A. Heilmeyer in München.** Mit 41 Vollbildern. Nr. 321.
- Plattdeutsche Mundarten von Dr. Hub. Grimm, Professor an der Universität Münster i. W.** Nr. 461.
- Poetil, Deutsche, v. Dr. K. Borinski, Prof. a. d. Univ. München.** Nr. 40.
- Polarlicht. Erdmagnetismus, Erdstrom u. Polarlicht von Dr. A. Nippoldt, Mitglied des Kgl. Preuß. Meteorolog. Instituts zu Potsdam.** Mit 7 Taf. u. 16 Figuren. Nr. 175.
- Polnische Geschichte von Dr. Clemens Brandenburger in Posen.** Nr. 338.
- Pommern. Landeskunde von Pommern von Dr. W. Deege, Prof. an der Universität Freiburg i. B.** Mit 10 Abb. und Karten im Text und 1 Karte in Lithographie. Nr. 575.
- Portugiesische Geschichte v. Dr. Gustav Dierdorff in Berlin-Steglitz.** Nr. 622.
- Portugiesische Literaturgeschichte von Dr. Karl von Reinhardtsvoettner, Professor an der Kgl. Techn. Hochschule München.** Nr. 213.
- Posamentiererei Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentierei, Spiken- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation v. Prof. Max Gürtsler, Geh. Regierungsrat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin.** Mit 29 Fig. Nr. 185.
- Postrecht von Dr. Alfred Wolde, Postinspektor in Bonn.** Nr. 425.
- Preßluftwaffe, Die, von Diplom-Ing. P. Iltis, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg.** Mit 82 Figuren. Nr. 493.
- Preußische Geschichte. Brandenburgisch-Preußische Geschichte v. Prof. Dr. M. Thamm, Direktor d. Kaiser Wilhelms-Gymnasiums in Montabaur.** Nr. 600.
- Preußisches Staatsrecht von Dr. Erich Eiter-Somlo, Prof. an der Univ. Bonn.** 2 Teile. Nr. 298, 299.
- Psychiatrie, Forensische, von Professor Dr. W. Wehrgandt, Dir. der Irrenanstalt Friedrichsberg in Hamburg.** 2 Bändchen. Nr. 410 und 411.
- Psychologie und Logik zur Einführung in d. Philosophie v. Prof. Dr. Th. Ehrenbans.** Mit 13 Fig. Nr. 14.
- Psychophysiologie, Grundriss der, v. Prof. Dr. G. F. Lips in Zürich.** Mit 3 Figuren. Nr. 98.
- Pumpen, Druckwasser- und Druckluft-Anlagen.** Ein kurzer Überblick von Dipl.-Ing. Rudolf Vogdt, Regelungsbaumeister a. D. in Lachen. Mit 87 Abbildungen. Nr. 290.
- Quellenfunde d. deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Universität Tübingen.** 1. Band. Nr. 279.
- Radioaktivität von Dipl.-Ing. Wih. Frommel.** Mit 21 Abb. Nr. 317.
- Rechnen, Das, in der Technik u. seine Hilfsmittel (Rechenstabe, Rechen-tafeln, Rechenmaschinen usw.)** von Ing. Joh. Eug. Maner in Freiburg i. Br. Mit 30 Abbild. Nr. 405.
- Kaufmännisches, von Professor Richard Guß, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. L II. III. Nr. 139, 140, 187.
- Recht des Bürgerlichen Gesetzbuchs.** Erstes Buch: Allg. Teil. I: Einleitung — Lehre v. d. Personen u. v. d. Sachen v. Dr. P. Lertmann, Prof. a. d. Univ. Erlangen. Nr. 447.
- II: Erwerb u. Verlust, Geltendmachung u. Schutz der Rechte von Dr. Paul Lertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 448.
- Zweites Buch: Schulrecht. I Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Lertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 323.
- II Abt.: Die einzelnen Schulverhältnisse v. Dr. Paul Lertmann, Prof. an der Universität Erlangen. Nr. 324.
- Drittes Buch: Sachenrecht von Dr. F. Kreuzkmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. I: Allgem. Lehren. Besitz und Eigentum. Nr. 480.
- II: Begrenzte Rechte. Nr. 481.
- Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Tise, Professor an der Universität Göttingen. Nr. 305.
- Fünftes Buch: Erbrecht von Dr. Wilhelm von Blume, ord. Prof. der Rechte an der Universität Tübingen. I. Abteilung: Einleitung. — Die Grundlagen des Erbrechts. Nr. 659.
- II. Abteilung: Die Nachlaß-beteiligten. Mit 23 Figuren. Nr. 660.

- Recht der Versicherungsunternehmungen.** Das, von Regierungsrat a. D. Dr. jur. F. Leibl, ehemaligem Direktor der Nürnberger Lebensversicherungsbank, früher Mitglied des Kaiserlichen Aufsichtsamts für Privatversicherung. Nr. 635.
- Rechtsschutz.** Der internationale gewerbliche, von F. Neuberg, kaiserl. Regierungsrat, Mitglied d. Kaiserl. Patentamt zu Berlin. Nr. 271.
- Rechtswissenschaft.** Einführung in die, von Dr. Theodor Sternberg in Berlin. I: Methoden- und Quellenlehre. Nr. 169.
— II: Das System. Nr. 170.
- Nedelehre.** Deutsche, v. Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Nr. 61.
- Nedelehrfestschrift** siehe: Stenographie.
- Reichsfinanzen.** Die Entwicklung der, von Präsident Dr. R. van der Vorst in Berlin. Nr. 427.
- Religion.** Die Entwicklung der christlichen, innerhalb des neuen Testaments von Professor Dr. Lic. Carl Clemens. Nr. 388.
- Religion.** Die, des Judentums im Altertum des Hellenismus u. der Römerherrschaft von Lic. Dr. W. Staerk (Neutestamentliche Zeitgeschichte II.) Mit einer Planlage. Nr. 326.
- Religionen der Naturvölker.** Die, von Dr. Th. Achelis, Professor in Bremen. Nr. 449.
- Religionswissenschaft.** Abriss der vergleichenden, von Professor Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.
- Renaissance.** Die Kultur der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung v. Dr. Robert F. Arnولد, Prof. an der Universität Wien. Nr. 189.
- Reptilien.** Das Tierreich III: Reptilien und Amphibien. Von Dr. Franz Werner, Prof. a. b. Universität Wien. Mit 48 Abb. Nr. 383.
- Rheinprovinz.** Landeskunde der, von Dr. A. Etterle, Direktor d. Realgymnasiums in Essen. Mit 9 Abb., 3 Kärtchen und 1 Karte. Nr. 308.
- Riedstrasse.** Atherinale u. d. Riedstrasse von Dr. F. Kochusser in Münzig. Mit 9 Abb. Nr. 446.
- Roman.** Geschichte des deutschen Romans von Dr. Hellm. Wielle. Nr. 229.
- Romanische Sprachwissenschaft** von Dr. Adolf Bauner, Prof. a. b. Univ. Graz. 2 Bände. Nr. 128, 250.
- Römische Altertumskunde** von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Vollbildern. Nr. 45.
- Römische Geschichte** von Realgymnasial-Direktor Dr. Jul. Koch in Grunewald. 2 Bände. (I: Königsgesetz und Republik. II: Die Kaiserzeit bis zum Untergang des Weströmischen Reiches.) Nr. 19 u. 677.
- Römische Literaturgeschichte** von Dr. Herm. Joachim in Hamburg. Nr. 52.
- Römische und griechische Mythologie** von Professor Dr. Hermann Steuding, Rektor des Gymnasiums in Schneeberg. Nr. 27.
- Römische Rechtsge schichte** von Dr. Robert von Mahr, Prof. an der Deutschen Universit. Prag. 1. Buch: Die Zeit d. Volksrechtes. 1. Hälfte: Das öffentliche Recht. Nr. 577.
— 2. Hälfte: Das Privatrecht. Nr. 578.
- 2. Buch: Die Zeit des Umts- und Verkehrsrechtes. 1. Hälfte: Das öffentliche Recht. Nr. 645.
- 2. Hälfte: Das Privatrecht I Nr. 646.
- 2. Hälfte: Das Privatrecht II. Nr. 647.
- 3. Buch: Die Zeit des Reichs- und Volksrechtes. Nr. 648.
- 4. Buch: Die Zeit der Orientalisierung des römischen Rechtes. Nr. 697.
- Rußland.** Russische Geschichte von Prof. Dr. W. Bleib, Oberlehrer am Neuen Gymnasium in Mainz. Nr. 4.
- Landeskunde des Europäischen Russlands nebst Finnlands von Professor Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.
- Russisch-deutsches Gesprächsbuch** von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 68.
- Russische Grammatik** von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 66.
- Russische Handelskorrespondenz** von Dr. Theodor von Kavranzh in Leipzig. Nr. 315.
- Russisches Lesebuch mit Glossar** von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 67.

- Russische Literatur** von Dr. Erich Boehme, Leitor a. d. Handelshochschule Berlin. I. Teil: Auswahl moderner Prosa u. Poesie mit ausführlichen Anmerkungen u. Uzenterzeichnung. Nr. 403.
- II. Teil: Wsewold Garmintz, Erzählungen. Mit Anmerkungen und Uzenterzeichnungen. Nr. 404.
- Russische Literaturgeschichte** von Dr. Georg Polonstki in München. Nr. 166.
- Russisches Vokabelbuch**, Kleines, von Dr. Erich Boehme, Leitor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 475.
- Russisches Wörterbuch**. Deutsch-russisches kaufmännisches Wörterbuch von Michael Kuharek in Dresden. Nr. 717.
- Ruthenische Grammatik** von Dr. Stephan von Smal-Stodki, o. ö. Prof. an d. Univ. Czernowitz. Nr. 680.
- Ruthenisch-deutsches Gesprächsbuch** von Dr. Stephan von Smal-Stodki, o. ö. Prof. an d. Univ. Czernowitz. Nr. 681.
- Sachsenrecht**. Recht d. Bürgerl. Gesetzbuches. Drittes Buch: Sachsenrecht von Dr. F. Krebsdmar, Oberlandesgerichtsrat i. Dresden. I: Allgemeine Lehren. Besitz u. Eigentum, — II: Begrenzte Rechte. Nr. 480. 481.
- Sachs., Hans.** Ausgewählt u. erläut. v. Prof. Dr. Julius Saft. Nr. 24.
- Sachsen. Sächsische Geschichte** v. Prof. Otto Kaemmel, Rektor d. Nikolai-Gymnasium zu Leipzig. Nr. 100.
- **Landeskunde des Königreichs Sachsen** v. Dr. J. Semmrich, Oberlehrer am Realgymnas. in Plauen. Mit 12 Abb. u. 1 Karte. Nr. 258.
- Säugetiere. Das Tierreich I: Säugetiere** von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Rgl. Naturalienkabinett in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.
- Schaltapparate** siehe: Elektrische Schaltapparate.
- Schattenkonstruktionen** von Professor J. Bonderlin in Münster. Mit 114 Figuren. Nr. 238.
- Schleswig-Holstein. Landeskunde von Schleswig-Holstein**, Helgoland u. der freien und Hansestadt Hamburg von Dr. Paul Hambruch, Abteilungsvorsteher am Museum für Völkerkunde in Hamburg. Mit Abb., Plänen, Profilen und 1 Karte in Lithographie. Nr. 563.
- Schiff- und Küstenartillerie bis zur Gegenwart**, Die Entwicklung der, von Korvettenkapitän Huning. Mit Abbild. und Tabellen. Nr. 606.
- Schleusenbau. Kanal- u. Schleusenbau** von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 78 Abbildungen. Nr. 585.
- Schmalspurbahnen** (Klein-, Arbeits- u. Feldbahnen) v. Dipl.-Ing. August Boshart in Nürnberg. Mit 99 Abbildungen. Nr. 524.
- Schmarotzer und Schmarotzertum in der Tierwelt**. Erste Einführung in die tierische Schmarotzfunde von Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. a. b. Univ. Graz. Mit 67 Abb. Nr. 151.
- Schreiner-Arbeiten. Tischler- (Schnitzer-) Arbeiten I: Materialien, Handwerkzeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterladen, Treppen, Abriebe von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Fig. auf 75 Tafeln. Nr. 502.**
- Schuldrecht. Recht des Bürgerl. Gesetzbuches**. Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Lermann, Prof. a. d. Univ. Erlangen. Nr. 323.
- II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse von Dr. Paul Lermann, Professor a. d. Universität Erlangen. Nr. 324.
- Schule**, die deutsche, im Auslande von Hans Umrein, Seminarlehrer in Rhéndt. Nr. 259.
- Schulhaus**. Die Baukunst des Schulhauses von Prof. Dr.-Ing. Ernst Betterlein in Darmstadt. I: Das Schulhaus. Mit 38 Abbild. II: Die Schulräume — Die Nebenanlagen. Mit 31 Abbild. Nr. 443 und 444.
- Schulpraxis**. Methodik der Volksschule von Dr. R. Seifert, Seminarlehrer in Bischopau. Nr. 50.
- Schweiß- und Schneidverfahren**, Das autogene, von Ingenieur Hans Rieze in Kiel. Mit 80 Fig. Nr. 499.
- Schweiz. Schweizerische Geschichte** von Dr. A. Dändliker, Professor an der Universität Zürich. Nr. 188.
- **Landeskunde der Schweiz** von Prof. Dr. H. Walser in Bern. Mit 16 Abb. und 1 Karte. Nr. 898.

- Schwimmanstalten.** Öffentl. Babes und Schwimmanstalten von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.
- Seemacht, Die, in der deutschen Geschichte** von Wirth. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Professor an der Universität Berlin. Nr. 370.
- Seerecht, Das deutsche,** von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. I: Allgemeine Lehren: Personen und Sachen des Seerechts. Nr. 386.
- II: Die einzelnen seerechtlichen Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts und außervertragliche Haftung. Nr. 387.
- Seifenfabrikation, Die, die Seifenanalyse und d. Kerzenfabrikation** v. Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Reihe u. die II.) Mit 25 Abbildgn. Nr. 386.
- Semittische Sprachwissenschaft** von Dr. C. Brodemann, Professor an der Univ. Königsberg. Nr. 291.
- Serbokroatische Grammatik** von Dr. Vladimir Corović, Bibliothekar des bosn.-herzegow. Landesmuseums in Sarajevo (Bosnien). Nr. 638.
- Serbovolkostisches Lesebuch mit Glossar** von Dr. Vladimir Corović, Bibliothekar des bosn.-herzegow. Landesmuseums i. Sarajevo (Bosn.). Nr. 639.
- Serbovolkostisch-deutsches Gesprächsbuch** von Dr. Vladimir Corović, Bibliothekar des bosn.-herzegow. Landesmuseums i. Sarajevo (Bosn.). Nr. 640.
- Silicate. Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels** von Dr. Gustav Rauter in Charlottenburg. I: Glas u. keramische Industrie. Mit 12 Taf. Nr. 233.
- II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.
- Simplicius Simplicissimus** von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgeg. von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 188.
- Skandinavien, Landeskunde von,** (Schweden, Norwegen u. Dänemark) von Heinrich Kerp, Kreis-schulinspektor in Kreuzburg. Mit 11 Abb. und 1 Karte. Nr. 202.
- Slavische Literaturgeschichte** v. Dr. J. Karášek in Wien. I: Alte Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.
- II: Das 19. Jahrh. Nr. 278.
- Soziale Frage. Die Entwicklung der sozialen Frage** von Professor Dr. Ferdinand Tönnies. Nr. 353.
- Sozialversicherung** von Prof. Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.
- Soziologie** von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.
- Syphale und Schleimpilze.** Eine Einführung in ihre Kenntnis von Prof. Dr. Gustav Lindau, Ausstoss am Kgl. Botanischen Museum und Privatdozent der Botanik an der Univ. Berlin. Mit 11 Abb. Nr. 642.
- Spanien. Spanische Geschichte** von Dr. Gustav Dierds. Nr. 266.
- **Landeskunde der Iberischen Halbinsel** v. Dr. Fritz Regel, Prof. an der Univ. Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbild. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.
- Spanische Handelskorrespondenz** von Dr. Ulstredo Rabal de Maricurrena. Nr. 295.
- Spanische Literaturgeschichte** v. Dr. Rud. Beer, Wien. I. II. Nr. 167, 168.
- Speicher, Industrielle und gewerbliche Bauten** (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) v. Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. II: Speicher u. Lagerhäuser. Mit 123 Fig. Nr. 512.
- Spinnerei. Textilindustrie I:** Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Mag. Görtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.
- Spitzenfabrikation. Textilindustrie II:** Weberei, Wirkerei, Rosamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikat. u. Filzfabrication von Prof. Mag. Görtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.
- Sportanlagen von Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt.** I. Mit 78 Abbildungen. Nr. 684.
- Sprachdichtung.** Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Sprachdichtung. Mit Notizen u. einem Wörterbuch v. Otto Günther, Prof. a. d. Oberrealschule u. an der Technischen Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

- Staatslehre, Allgemeine**, von Dr. Hermann Rehm, Prof. a. d. Universität Straßburg i. C. Nr. 358.
- Staatsrecht, Allgemeines**, von Dr. Julius Hartel, Prof. d. Rechte an der Universität Göttingen. 3 Bändchen. Nr. 415—417.
- Staatsrecht, Preußisches**, von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. a. d. Universität Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.
- Stadtstraßenbau** von Dr.-Ing. Georg Große in Berlin. Mit 50 Abb. Nr. 740.
- Taumelskunde, Deutsche**, von Dr. Rudolf Wuch, a. o. Prof. a. d. Univ. Wien. W. 2 Kärt. u. 2 Taf. Nr. 126.
- Statistik** von W. Haubter, Dipl.-Ing. I. Teil: Die Grundzüge der Statistik starrer Körper. Mit 82 Fig. Nr. 178.
- II. Teil: Angewandte Statistik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.
 - Graphische, mit besond. Berücksichtigung der Einflußlinien von Rgl. Überlehrer Dipl.-Ing. Otto Hentel in Kiel in Rendsburg. 2 Teile. Mit 207 Fig. Nr. 603, 695.
- Steinbauerarbeiten**. Maurer- und Steinbauerarbeiten von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 419—421.
- Stellwerke**. Die Kraftstellwerke der Eisenbahnen von S. Scheibner, Rgl. Oberbaurat a. D. in Berlin. 2 Bändchen. Mit 72 Abbild. Nr. 689/90.
- Die mechanischen Stellwerke der Eisenbahnen von S. Scheibner, Rgl. Oberbaurat a. D. in Berlin. 2 Bändchen. Mit 79 Abbild. Nr. 674 u. 688.
- Stenographie. Geschichte der Stenographie** von Dr. Arthur Menz in Königsberg i. Pr. Nr. 501.
- Stenographie n. d. System v. F. X. Gabelsberger** von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 246.
- Die Redeschrift des Gabelsberger'schen Systems von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 368.
- Stenographie. Lehrbuch d. Vereinfachten Deutschen Stenographie** (Gnig. - Chitem - Stolze - Schreh) nebst Schlüssel, Lesestudien u. einem Anhang von Professor Dr. Umsel, Überlehrer des Kadettenkorps in Lichtenfels. Nr. 86.

- Stenographie. Redeschrift. Lehrbuch d. Redeschrift d. Gnig. - Stolze - Schreh** nebst Kürzungsbetyp., Lesestudien, Schlüssel und einer Anleitung zur Steigerung der stenographischen Fertigkeit von Heinrich Dröse, a. m. b. Landtagsstenograph in Karlsruhe (B.). Nr. 494.
- Stereoschemie** von Dr. G. Webelin. Prof. an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.
- Stereometrie** von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 66 Figuren. Nr. 97.
- Sternsystem. Astronomie**. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. L. J. Möbius, neu bearb. v. Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univ. Kiel. II: Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.
- Steuerysteme des Auslandes**, Die, v. Geh. Oberfinanzrat O. Schwartz in Berlin. Nr. 426.
- Stiftskunde** v. Prof. Karl Otto Hartmann in Stuttgart. Mit 7 Vollbild. u. 195 Zeichnungen. Nr. 80.
- Stöchiometrische Aufgaben Sammlung** von Dr. Wilh. Bahrdt, Oberl. an d. Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit den Resultaten. Nr. 452.
- Straßenbahnen** von Dipl.-Ing. Aug. Boshart in Nürnberg. Mit 72 Abbildungen. Nr. 559.
- Strategie** von Löffler, Major im Rgl. Sächs. Kriegsmin. i. Dresd. Nr. 505.
- Ströme und Spannungen in Starkstromnetzen** v. Jos. Herzog, Dipl.-Elektroing. in Budapest u. Clarence Feldmann, Prof. d. Elektrotechnik in Delft. Mit 68 Abb. Nr. 456.
- Südamerika. Geschichte Südamerikas** von Dr. Hermann Lüfft I: Das spanische Südamerika (Chile, Argentinien und die kleineren Staaten). Nr. 632.
- II: Das portugiesische Südamerika (Brasilien). Nr. 672.
- Südseegebiet. Die deutschen Kolonien** II: Das Südseegebiet und Micronesia v. Prof. Dr. K. Dove. W. 16 Taf. u. 1 lith. Karte. Nr. 520.
- Talmud**. Die Entstehung des Talmuds von Dr. S. Gund in Bostowitz. Nr. 479.
- Talmudproben** von Dr. S. Gund in Bostowitz. Nr. 583.

- Technisch-Chemische Analyse** von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgenöss. PolYTECHN. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.
- Technisch-chemische Rechnungen** v. Chem. H. Deegener. Mit 4 Fig. Nr. 701.
- Technische Tabellen und Formeln** von Dr.-Ing. W. Müller, Dipl.-Ing. am Kgl. Materialprüfungsamt zu Groß-Lichterfelde. Mit 106 Figuren. Nr. 579.
- Technisches Wörterbuch**, enthaltend die wichtigsten Ausdrücke d. Maschinenbaus, Schiffbaus u. d. Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I. Teil: Dtsch.-Engl. Nr. 395. — II. Teil: Engl.-Dtsch. Nr. 396. — III. Teil: Dtsch.-Franz. Nr. 453. — IV. Teil: Franz.-Dtsch. Nr. 454.
- Technologie, Allg. chemisch**, v. Dr. Gust. Staeter in Charlottenburg. Nr. 113.
- Mechanische, v. Geh. Hofrat Prof. A. Südive in Braunschweig. 2 Bde. Nr. 340, 341.
- Teerfarbstoffe, Die**, mit bes. Berücksichtig. der synthetisch. Methoden v. Dr. Hans Bucherer, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule, Dresden. Nr. 214.
- Telegraphenherrrecht** v. Postinspektor Dr. jur. Alfred Wolde in Bonn. I: Einleitung. Geschichtliche Entwicklung. Die Stellung d. deutsch. Telegraphenwesens im öffentl. Rechte, allgemeiner Teil. Nr. 509.
- II: Die Stellung d. deutsch. Telegraphenwesens im öffentl. Rechte, besonderer Teil. Das Telegraphen-Strafrecht. Rechtsverhältnis d. Telegraphie z. Publikum. Nr. 510.
- Telegraphie, Die elektrische**, v. Dr. Lub. Rellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.
- Testament. Die Entstehung des Alten Testaments** v. Lic. Dr. W. Staerl, Prof. a. d. Univ. Jena. Nr. 272.
- Die Entstehung des Neuen Testaments v. Prof. Lic. Dr. Carl Clemens in Bonn. Nr. 285.
- Textilindustrie. I: Spinnerei und Zwirnerei** v. Prof. Mag. Gürler, Geh. Reg.-Rat im Kgl. Landesgewerbeamt, Berlin. Nr. 9 Fig. Nr. 184.
- II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spiegels- und Gardinenfabrikation und Filzfabrication v. Prof. M. Gürler, Geh. Regierungsrat i. Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Nr. 29 Fig. Nr. 185.
- Textilindustrie. III: Wäscherei, Bleicherei, Färbererei und ihre Hilfsstoffe v. Dr. Wilh. Majot, Prof. a. d. Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie i. Kreisfeld. Nr. 28 Fig. Nr. 186.
- Textiltechnische Untersuchungsmethoden** von Dr. Wilhelm Majot, Professor an der Färbererei u. Farbenfachschule Kreisfeld. I: Die Mikroskopie der Textilmaterialien. Mit 92 Figuren. Nr. 673.
- Thermostomat** (Technische Wärmelehre) v. R. Walther u. M. Röttlinger, Dipl.-Ing. Nr. 54 Fig. Nr. 242.
- Thermodynamik** (Technische Wärmelehre). Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmeträger- und Kältemaschinen von M. Röttlinger, Dipl.-Ing. in Mannheim. Nr. 2.
- Thüringische Geschichte** v. Dr. Ernst Devrient in Leipzig. Nr. 352.
- Zierbiologie. Abriss der Biologie der Tiere** v. Dr. Heinrich Simroth, Prof. a. d. Univ. Leipzig. I: Entstehung u. Weiterbildung der Tierwelt. — Beziehungen zur organ. Natur. Mit 34 Abbild. Nr. 181.
- II: Beziehungen der Tiere zur organischen Natur. Mit 35 Abbild. Nr. 654.
- Tiere, Entwicklungsgeschichte der**, von Dr. Johs. Meisenheimer, Prof. der Zoologie a. d. Universität Jena. I: Furchung, Primitivanslagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.
- II: Organbildung. Mit 46 Figuren. Nr. 379.
- Ziergeographie** v. Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie a. d. Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.
- Ziergefüde** von Dr. Franz v. Wagner, Prof. a. d. Universität Graz. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.
- Zierreich, Das, I: Säugetiere** v. Oberstudienr. Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorst. d. Kgl. Naturalientabinettis in Stuttgart. Nr. 15 Abb. Nr. 282.
- III: Reptilien und Amphibien von Dr. Franz Werner, Prof. a. d. Univ. Wien. Mit 48 Abb. Nr. 383.
- IV: Fische von Prof. Dr. Mag. Rauter in Neapel. Nr. 356.
- V: Insekten von Dr. J. Groß in Neapel (Stazione Zoologica). Mit 56 Abbildungen. Nr. 394.

- Tierreich, Das, VI:** Die wirbellosen Tiere von Dr. Ludw. Böhmig, Prof. d. Biol. a. d. Univ. Graz. I: Untiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen und Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.
- II: Krebse, Spinntiere, Lausefüßer, Weichtiere, Moostiere, Armfüßer, Stachelhäuter und Manteltiere. Mit 97 Fig. Nr. 440.
- Zierzuchtlehre, Allgemeine und spezielle**, von Dr. Paul Rippert in Gien. Nr. 228.
- Tischler- (Schreiner-) Arbeiten I:** Materialien, Handwerkszeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterläden, Treppen, Aborte von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Figuren auf 75 Tafeln. Nr. 502.
- Togo.** Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithographischen Karte. Nr. 441.
- Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn.** Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.
- Trigonometrie, Ebene und sphärische**, von Prof. Dr. Gerh. Heijenberg in Breslau. Mit 70 Fig. Nr. 99.
- Tropenhygiene v. Medizinalrat Prof. Dr. Kocht,** Direktor des Instituts für Schiffs- und Tropentränkenheiten in Hamburg. Nr. 369.
- Trust, Kartell und Trust von Dr. S. Dichterichs** in Düsseldorf. Nr. 522.
- Tschechisch-deutschsches Gesprächsbuch v. Dr. Emil Smetáňa, o. Prof. an der böhm. Univ. Prag.** Nr. 722.
- Tschechische Grammatik von Dr. Emil Smetáňa, o. Prof. an der böhm. Univ. Prag.** Nr. 721.
- Tschechisches Lesebuch mit Glossar von Dr. Emil Smetáňa, o. Prof. an der böhm. Univ. Prag.** Nr. 723.
- Turnen, Das deutsche**, v. Dr. Rudolf Gaßch, Prof. a. König Georg-Gymn. in Dresden. Mit 87 Abb. Nr. 628.
- Turnkunst, Geschichte der**, von Dr. Rudolf Gaßch, Prof. a. König Georg-Gymn. in Dresden. Mit 17 Abbildungen. Nr. 504.
- Ungarn. Landeskunde von Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Prof. an der Universität Prag. Mit 10 Textillust. u. 1 Karte. Nr. 244.
- Ungarisch-deutschsches Gesprächsbuch von Dr. Wilhelm Tolnai, Prof. an der staatl. Bürgerschullehrerinnen-Bildungsanstalt in Budapest. Nr. 739.
- Ungarische Literatur, Geschichte der, von Prof. Dr. Ludwig Katona und Dr. Franz Szinnhei, beide an der Universität Budapest. Nr. 550.
- Ungarische Sprachlehre v. Dr. Józef Szinnhei, o. ö. Prof. an der Universität Budapest. Nr. 505.
- Ungarisches Lesebuch mit Glossar von Dr. Wilhelm Tolnai, Professor an der staatlichen Bürgerschullehrerinnen-Bildungsanstalt in Budapest. Nr. 694.
- Unterrichtswesen.** Bejegyítések d. deutscher Unterrichtswesens von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Lüdau. I. Teil: Von Anfang an bis zum Ende d. 18. Jahrh. Nr. 275.
- II. Teil: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.
- Das höhere und mittlere Unterrichtswesen in Deutschland von Schulrat Prof. Dr. Jakob Weidner in Nümb. Nr. 644.
- Untersuchungsmethoden, Agrarchemische**, von Professor Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftlichen Versuchsanstalt in Marburg in Hessen. Nr. 470.
- Urgeschichte der Menschheit** von Dr. Moriz Hoernes, Professor an der Univ. Wien. Mit 85 Abb. Nr. 42.
- Urheberrecht, Das**, an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken d. bildenden Künste u. Photographie v. Staatsanw. Dr. F. Schlüttgen in Chemnitz. Nr. 361.
- Urheberrecht, Das deutsche**, an literarischen, künstlerischen u. gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Beiträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.
- Urzeit, Kultur der Urzeit** von Dr. Moriz Hoernes, o. ö. Prof. an der Univ. Wien. 3 Bände. I: Steinzeit. Mit 40 Bildergrupp. Nr. 564.
- II: Bronzezeit. Mit 36 Bildergruppen. Nr. 565.
- III: Eisenzeit. Mit 35 Bildergruppen. Nr. 566.

- Belforanalysis** von Dr. Siegfr. Valentin, Prof. an der Bergakademie in Clausthal. Mit 16 Fig. Nr. 354.
- Venezuela.** Die Cordillerenstaaten von Dr. Wilhelm Sievers, Prof. an der Universität Gießen II: Ecuador, Colombia u. Venezuela. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 653.
- Beranschlägen.** Das, im Hochbau. Kurzgefasstes Handbuch üb. d. Wesen d. Kostenanrechnungs v. Architekt Emil Beutinger, Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Fig. Nr. 385.
- Vereinigte Staaten.** Landeskunde der Vereinigten Staaten von Nordamerika von Professor Heinrich Fischer, Oberlehrer am Luisenstädt. Realgymnasium in Berlin. I. Teil: Mit 22 Karten und Figuren im Text und 14 Tafeln. Nr. 381.
- II. Teil: Mit 3 Karten im Text, 17 Tafeln u. 1 lith. Karte. Nr. 382.
- ergil.** Die Gedichte des P. Vergilius Maro. In Auswahl mit einer Einleitung u. Anmerkungen herausgeg. von Dr. Julius Biehen. I: Einleitung und Ueneis. Nr. 497.
- Bermessungskunde** von Dipl.-Ing. W. Wertmeister, Oberlehrer an der Kaiserl. Techn. Schule in Straßburg i. E. I: Feldmeisten und Röbelnieren. Mit 146 Abb. Nr. 468.
- II: Der Theodolit. Trigonometrische u. barometrische Höhenmessung. Tachymetrie. Mit 109 Abbildungen. Nr. 469.
- Versicherungsmathematik** von Dr. Alfred Löwen, Professor an der Universität Freiburg i. B. Nr. 180.
- Versicherungswesen,** Das, von Dr. iur. Paul Moldenhauer, Professor der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. I: Allgemeine Versicherungstheorie. Nr. 262.
- II: Die einzelnen Versicherungszweige. Nr. 636.
- Versicherungswesen,** Technik des, von Dr. Hans Hübert in Berlin. Nr. 741.
- Völkerkunde** v. Dr. Michael Haberlandt, I. u. I. Auflös. d. ethnogr. Sammlung d. naturhist. Hofmuseums u. Privatdozent a. d. Univ. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.
- Völkernamen.** Länder- u. Völkernamen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.
- Volksschulen** (Bücher u. Lesehallen), ihre Einrichtung u. Verwaltung v. Emil Jaeschke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.
- Volkslied.** Das deutsche, ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25, 132.
- Volkswirtschaftslehre** von Dr. Carl Jöbs. Fuchs, Professor an der Universität Tübingen. Nr. 133.
- Volkswirtschaftspolitik** v. Präsident Dr. R. van d. Vorcht, Berlin. Nr. 177.
- Waffen,** Die blanken, und die Schußwaffen, ihre Entwicklung von der Zeit der Landsknechte bis zur Gegenwart m. besonderer Berücksichtigung der Waffen in Deutschland, Österreich-Ungarn und Frankreich von W. Götsche, Feuerwerks-Major a. D. in Berlin-Steglitz. Mit 115 Abbildungen. Nr. 631.
- Wahrscheinlichkeitsrechnung** von Dr. F. Had, Prof. a. Eberh.-Ludw.-Gymn. in Stuttgart. Nr. 15 Fig. Nr. 508.
- Waldeck.** Landeskunde des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck von Professor Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.
- Waltherlied,** Das, im Versmaße der Urschrift überlegt u. erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer am Realgymnas. in Weimar. Nr. 46.
- Walther von der Vogelweide,** mit Auswahl a. Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkgn. u. einem Wörterbuch v. Otto Günter, Prof. a. d. Oberrealhschule und an der Techn. Hochsch. in Stuttgart. Nr. 23.
- Walzwerke.** Die, Einrichtung und Betrieb. Von Dipl.-Ing. A. Holzerjäger, Oberlehrer a. d. Kgl. Maschinenbau- u. Hüttenschule in Duisburg. Mit 151 Abbild. Nr. 580.
- Warenhäuser.** Geschäft- u. Warenhäuser v. H. Schiepmann, Kgl. Baur. i. Berlin. I: Vom Laden zum „Grand Magasin“. Mit 23 Abb. Nr. 655.
- II: Die weitere Entwicklung der Kaufhäuser. Mit 39 Abb. Nr. 656.
- Warenkunde** von Dr. Karl Hassad, Prof. u. Leiter der I. I. Handelsakademie in Graz. I. Teil: Unorganische Waren. Nr. 40 Abb. Nr. 222.
- II. Teil: Organische Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.

- Warenzeichenrecht.** Das. Nach dem Gesetz z. Schutz d. Warenbezeichnungen v. 12. Mai 1894. Von Reg.-Rat J. Neuberg, Mitglied des Kais. Patentamts zu Berlin. Nr. 360.
- Wärme. Theoretische Physik II. T.:** Licht u. Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien. Mit 47 Abbildgn. Nr. 77.
- Wärmekraftmaschinen.** Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- u. Kältemaschinen von Dr. Röttinger, Diplom-Ing. in Mannheim. Mit 73 Fig. Nr. 2.
- Wärmelehre, Technische, (Thermodynamik) v. K. Walther u. M. Möttlinger, Dipl.-Ing. Mit 54 Fig. Nr. 242.**
- Wäscherei. Textilindustrie III:** Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wihl. Majjot, Prof. an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.
- Wasser, Das, und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe** v. Dr. Ernst Leher, Dipl.-Ing. in Saalfeld. Mit 18 Abbildungen. Nr. 261.
- Wasser und Abwässer.** Ihre Zusammensetzung, Beurteilung u. Untersuchung v. Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorst.d. landwirtsh. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 473.
- Wasserinstallationen. Gas- und Wasserinstallationen mit Einstufung der Abortanlagen** v. Prof. Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbild. Nr. 412.
- Wasserkrtaftanlagen von Th. Kümmelin,** Regierungsbaumeister a. D., Oberingenieur in Dresden. I: Beschreibung. Mit 66 Figuren. Nr. 665.
- II: Gewinnung der Wasserkraft. Mit 35 Figuren. Nr. 666.
- III: Bau und Betrieb. Mit 56 Figuren. Nr. 667.
- Wasserturbinen, Die, von Dipl.-Ing. P. Holl in Berlin.** I: Allgemeines. Die Freistrahlturbinen. Mit 113 Abbildungen. Nr. 541.
- II: Die Überdruckturbinen. Die Wasserkraftanlagen. Mit 102 Abbild. Nr. 542.
- Wasserversorgung der Ortschaften** v. Dr.-Ing. Robert Wenrauch, Prof. an der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 85 Fig. Nr. 5.
- Weberet. Textilindustrie II: Weberet, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** von Prof. Max Gürler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.
- Wechselstromerzeuger** von Ing. Karl Bichelmaier, Prof. an der L. L. Technischen Hochschule in Wien. Mit 40 Figuren. Nr. 547.
- Wechselwesen, Das, v. Rechtsanwiv. Dr. Rudolf Mothes in Leipzig.** Nr. 103.
- Wehrverfassung, Deutsche, von Geh. Kriegsrat Karl Endres, vortr. Rat i. Kriegsminist. i. München.** Nr. 401.
- Werkzeugmaschinen für Holzbearbeitung, Die, von Ing. Professor Hermann Wilda in Bremen.** Mit 125 Abbildungen. Nr. 582.
- Werkzeugmaschinen für Metallbearbeitung, Die, von Ing. Prof. Hermann Wilda in Bremen.** I: Die Mechanismen der Werkzeugmaschinen. Die Drehbänke. Die Fräsmaschinen. Mit 319 Abb. Nr. 561.
- II: Die Bohr- und Schleifmaschinen. Die Hobel-, Shaping- u. Stoßmaschinen. Die Sägen u. Scheren. Antrieb u. Kraftbedarf. Mit 206 Abbild. Nr. 562.
- Westpreußen. Landeskunde der Provinz Westpreußen** von Fritz Braun, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium in Graudenz. Mit 16 Tafeln, 7 Texttafeln u. 1 lith. Karte. Nr. 570.
- Wettbewerb, Der unlautere, von Rechtsanwalt Dr. Martin Wassermann in Hamburg.** I: Generallauzel, Reklameauswüchse, Ausverkaufswesen, Angestelltenbesiedlung. Nr. 339.
- II: Krebsföhlübung, Firmen- und Namenmissbrauch, Verrat von Geheimnissen, Ausländerbeh. Nr. 585.
- Wirbellose Tiere. Das Tierreich VI: Die wirbellosen Tiere** von Dr. Ludwig Böhning, Prof. d. Zoologie an der Univ. Graz. I: Insekten, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen u. Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.
- II: Krebse, Spinnentiere, Tauendfüßer, Weichtiere, Moostiere, Almfüßer, Stachelhäuter u. Manteltiere. Mit 97 Fig. Nr. 440.

- Wirkerei. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gütler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.**
- Wirtschaftlichen Verbände, Die, von Dr. Leo Müffelmann in Rostod. Nr. 586.**
- Wirtschaftspflege. Kommunale Wirtschaftspflege von Dr. Alfons Rieß, Magistratsass. in Berlin. Nr. 534.**
- Wohnungsfrage, Die, v. Dr. L. Pohle, Prof. der Staatswissenschaften zu Frankfurt a. M. I: Das Wohnungswesen i. d. modern. Stadt. Nr. 495.**
- — II: Die städtische Wohnungs- und Bodenpolitik. Nr. 496
- Wolfram von Eichenbach. Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eichenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos m. Untersuchungen u. Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichscolleg. zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.**
- Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.**
- Deutsches, von Dr. Richard Loewe in Berlin. Nr. 64.
- Technisches, enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaus und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.
- II. Teil: Engl.-Dtch. Nr. 396.
- III. Teil: Dtch.-Franz. Nr. 453.
- IV. Teil: Franz.-Dtch. Nr. 454.
- Württemberg. Württembergische Geschichte v. Dr. Karl Weller, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 462.**
- Württemberg. Landeskunde des Königreichs Württemberg von Dr. A. Hassert, Prof. d. Geographie a. d. Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern u. 1 Karte. Nr. 157.**
- Zeichenschule von Prof. A. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck und 200 Voll- und Tiefbildern. Nr. 39.**
- Zeichnen, Geometrisches, von Dr. G. Beder, Architekt und Lehrer an der Baugewerbeschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Bonderlin, Direktor der königl. Baugewerbeschule zu Münster. Mit 290 Fig. u. 23 Taf. im Text. Nr. 58.
- Zeitungswesen, Das deutsche, von Dr. A. Brunhuber, Köln a. Rh. Nr. 400.**
- Zeitungswesen, Das moderne, (Syst. d. Zeitungslehre) von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320.**
- Zeitungswesen, Allgemeine Geschichte des, von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.**
- Zellenlehre und Anatomie der Pflanzen von Prof. Dr. H. Wiehe in Leipzig. Mit 79 Abbild. Nr. 556.**
- Zentrale-Perspektive von Architekt Hans Freyberger, neu bearbeitet von Professor J. Bonderlin, Direktor der königl. Baugewerbeschule in Münster i. Westf. Mit 132 Fig. Nr. 57.**
- Zimmerarbeiten von Carl Opitz, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg i. E. I: Allgemeines, Balkenlagen, Zwischenenden und Deckenbildungen, hölz. Fußböden, Fachwerksvände, Hänge- und Sprengverste. Mit 169 Abbildungen. Nr. 489.**
- — II: Dächer, Wandbelædungen, Simschalungen, Blöf., Bohlen- und Brettervände, Jäne, Türen, Tore, Tribünen und Baugerüste. Mit 167 Abbildungen. Nr. 490.
- Zivilprozeßrecht, Deutsches, von Prof. Dr. Wilhelm Küch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.**
- Zoologie, Geschichte der, von Prof. Dr. Rud. Bürkhardt. Nr. 357.**
- Zündwaren von Direktor Dr. Alfons Bujard, Vorst. des Städt. Chem. Laboratoriums Stuttgart. Nr. 109.**
- Zwangsvorsteigerung, Die, und die Zwangsvorsteigerung von Dr. F. Krebsjmar, Überlandbesitzerstat in Dresden. Nr. 523.**
- Zwirnerei. Textilindustrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gütler, Geh. Regierungsrat im Königlichen Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Fig. Nr. 184.**

== Weitere Bände sind in Vorbereitung ==

Allgemeine Verkehrsgeographie.

Von Prof. Dr. Kurt Hassert. Mit 12 Karten und graphischen Darstellungen. Brosch. M. 10.—, in Halbfanz geb. M. 12.—.

Geschichte der Aufteilung und Kolonisation Afrikas seit dem Zeitalter der Entdeckungen. Von Prof. Dr. Paul Darmstaedter. Erster Band: 1415—1870. Brosch. M. 7.50, in Halbfanz geb. M. 9.50.

Goethes Wilhelm Meister und die Entwicklung des modernen Lebensideals. Von Professor Max Wundt. Brosch. M. 8.—, geb. M. 8.80.

Grundriß einer Philosophie des Schaffens als Kulturphilosophie.

Einführung in die Philosophie als Weltanschauungslehre. Von Privatdozent Dr. Otto Braun. Brosch. M. 4.50, geb. M. 5.—.

Das Gefühl. Eine psychologische Untersuchung. Von Professor Dr. Theobald Ziegler. 5. durchges. u. verb. Aufl. Brosch. M. 4.20, geb. M. 5.20.

Historif. Ein Organon geschichtlichen Denkens und Forschens. Von Privatdozent Dr. Ludwig Rieß. Erster Band. Brosch. M. 7.50, in Halbfanz geb. M. 9.50.

Volkspsychologie

Das Seelenleben im Spiegel der Sprache

Von Dr. Rudolf Kleinpaul.

Preis: broschiert M. 4.80, gebunden M. 5.50.

Der Verfasser beginnt in der Einleitung des Werkes mit dem Nachweis, wie überhaupt eine Psyche in die Welt gekommen und den Naturkindern der Begriff eines intwendigen Menschen aufgegangen ist und schildert dann in großen Zügen die Schicksale und die Hauptbegebenheiten, die eine müßige Menge diesem intwendigen Menschen zuschreibt: sein romanhaftes Gemütsleben, sein geplagtes Alltagsleben, sein Naturleben, seine Erfahrungswissenschaft, sein Traumleben, seine Eßtaten und sein Leben nach dem Tode. Er entwickelt die sensualistische Erkenntnistheorie des Volkes. Mit bei spielloser Kühnheit wird im Verfolg seiner Anschauungen der Vorhang von der geheimen Werkstätte des Geistes weggezogen und dem philosophischen Ich auf den Grund gegangen. Zum erstenmal und mit überlegener Kunst wurde hier an die Grundlagen des psychologischen Wissens selbst gerührt und von dem hergebrachten Schematismus an die Worte und ihren sichtbaren Ursprung appelliert. Auf die einfachsten Begriffe der Seelenlehre, der Logik und der Moral fällt dabei plötzlich und überraschend ein helles Schlaglicht — man sieht den Frieden und den Kummer, wie er gewejen ist, und den Schmerz, wie in ein Laotoon gefühlt hat, man sieht die Geduld tragen, den Verstand stehen und die Intelligenz lesen — der Grund, der zureichende Grund, daß Wissen selbst erscheint in seiner wahren, unverfälschten und unverkünstelten Gestalt, eine Umrüstung der gesamten philosophischen Terminologie tritt ein, und dennoch ist es keine neue Phantasie, sondern nur eine Wiederherstellung des Alten, Ein gebürgerten und männlich Bekannten.

