Handbuch
der
Statik fester Körper.

Mit
vorzüglicher Rücksicht
auf
ihre Anwendung in der Architektur.

Aufgesetzt
von

J. A. Eytelwein,

Königl. Preuß. geheimen Oberbaurathe; Director der Königl. Bau-Akademie; der Akademie der Wissenschaften und der Akademie der Künste und deren Senats zu Berlin, der batavischen Gesellschaft der Experimental-Philosophie zu Rotterdam, der Gesellschaft der Wissenschaften und Künste zu Frankfurth an der Oder, der Ostpreuß. physikalisch-ökonomischen Gesellschaft, der ökonomischen Societät zu Leipzig, und der märkischen ökonomischen Gesellschaft zu Potsdam Mitgliede.

Zweiter Band.

Mit sieben Kupfertafeln.

Berlin, 1808.
In der Realschulbuchhandlung.

Handbuch
der
Statik fester Körper.
mit
vorzüglicher Rücksicht
auf
ihre Anwendung in der Architektur.

Ausgefertigt
von

Dr. 19474.

J. A. Eytelwein,
Königl. Preuß. geheimen Oberbaurathe; Director der Königl. Bau-Akademie; der Akademie der Wissenschaften und der Akademie der Künste und deren Senats zu Berlin, der batavischen Gesellschaft der Experimental-Philosophie zu Rotterdam, der Gesellschaft der Wissenschaften und Künste zu Frankfurth an der Oder, der Ostpreuß. physikalisch-ökonomischen Gesellschaft, der ökonomischen Societät zu Leipzig, und der märkischen ökonomischen Gesellschaft zu Potsdam Mitgliede.

Zweiter Band.

Mit sieben Kupfertafeln.

Berlin, 1808.
In der Realschulbuchhandlung.

Inhalt
des
zweiten Bandes.

XI. Kapitel. Von den gespannten Seilen.

Statik

der

festen Körper.

Zweiter Band.

Elftes Kapitel.
Von den gespannten Seilen.

I. Von der Seilmaschine.

§. 295.

Die Verbindung mehrerer Seile oder Fäden unter einander, um daran Kräfte ins Gleichgewicht zu bringen, heißt eine Seilmaschine *(Machine funiculaire)*.

Wenn bei der Untersuchung dieser Maschine keine Erinnerung beigefügt ist, so wird man voraussetzen, daß die Seile vollkommen biegsam, unausdehnbar und ohne Schwere sind und daß die Richtungen aller Kräfte in einerlei Ebene fallen.

Befestigt man einen Faden an einem Ende und läßt an dem andern Ende desselben eine Kraft T wirken, so wird er nach seiner Länge ausgespannt und wenn man ihn an irgend einem Orte durchschneidet, so erfordert das Gleichgewicht mit der Kraft T, daß eine eben so große Kraft nach entgegengesetzter Richtung angebracht werde. Diese Kraft T heißt die Spannung *(Tension)* des Fadens. Sie ist für den ganzen Faden einerlei und jeder Querschnitt desselben wird mit einer Kraft T ausgedehnt.

Denjenigen Punkt in welchem mehrere Seile vereinigt sind, nennt man einen Knoten *(Noeud)*. Dieser Knoten ist fest *(fixe)*, wenn die Seile im Vereinigungspunkte nicht verschoben werden können; beweglich, *(coulant)* wenn ein oder mehrere Seile mittelst eines verschiebbaren Ringes, mit den übrigen Seilen verbunden sind.

§. 296.

Taf. XI. Fig. 163. Sind drei Seile CP, CQ, CR, Figur 163., in einem Knoten vereinigt und an den Enden eines jeden Seils wirken Kräfte P, Q, R, so lassen sich leicht die Bedingungen für das Gleichgewicht angeben, weil hier die allgemeinen Sätze §. 19. ihre unmittelbare Anwendung finden. Setzt man die Winkel $PCR = \gamma$, $PCQ = \delta$ und $QCR = \eta$, so erhält man nach §. 19., weil daselbst $\alpha + \beta = \delta$, $\alpha = 180^\circ - \gamma$, $\beta = 180^\circ - \eta$ ist, $\sin\alpha = \sin\gamma$, $\sin\beta = \sin\eta$; $\cos\alpha = -\cos\gamma$, $\cos\beta = -\cos\eta$ und weil $\sin\gamma = -\sin(\delta + \eta)$, $\sin\delta = -\sin(\gamma + \eta)$ und $\sin\eta = -\sin(\gamma + \delta)$ ist, so findet man:

$$P = \frac{Q \sin \eta}{\sin \gamma} = \frac{R \sin \eta}{\sin \delta} = -\frac{Q \sin(\gamma + \delta)}{\sin \gamma}$$

$$Q = \frac{P \sin \gamma}{\sin \eta} = \frac{R \sin \gamma}{\sin \delta} = -\frac{P \sin(\delta + \eta)}{\sin \eta}$$

$$\text{Cos}\ \delta = \frac{R^2 - P^2 - Q^2}{2PQ}$$

$$\text{Cos}\ \gamma = \frac{Q^2 - P^2 - R^2}{2PR}$$

$$\text{Cos}\ \eta = \frac{P^2 - Q^2 - R^2}{2QR}$$

u. s. w.

Es können daher jedesmal, wenn von den sechs Größen P, Q, R, γ, δ, η, drei gegeben sind, die übrigen bestimmt werden. Hieraus erhält man

$P : Q = \sin \eta : \sin \gamma$ und $Q : R = \sin \gamma : \sin \delta$ also

$$P : Q : R = \sin \eta : \sin \gamma : \sin \delta$$

d. h. **wenn drei Kräfte mittelst Seile an einem Knoten im Gleichgewichte sind, so muß sich jede dieser Kräfte wie der Sinus des Winkels verhalten welchen die Richtungen der beiden andern Kräfte einschließen.**

§. 297.

Aufgabe. Die Länge des Seils ACB Figur 164. nebst der Lage der beiden Endpunkte A und B wo dasselbe befestigt werden soll, sind gegeben. Mittelst eines längs diesem Seile beweglichen Ringes ist ein Gewicht Q aufgehängt. Man sucht den Ort C wo dieser Ring in Ruhe ist. Taf. XI. Fig. 164.

Auflösung. Man ziehe durch einen der beiden Punkte A, B, hier etwa durch B, die Vertikale BE. Trage aus A die gegebene Länge des Seils bis E, ziehe AE und nehme EF = FB, so wird die auf BE senkrechte Linie FC die Linie AE in C schneiden, wodurch der Punkt C für den Ort des Ringes gefunden ist. Da nun CB = CE und AE die gegebene Länge des Seils ist, so ist auch AE = AC + CB.

Der Grund dieses Verfahrens läßt sich leicht einsehen, wenn man erwägt daß das Seil ACB durch den Ring C frei durchgeht, daß daher die Spannung des Seils durchgängig gleich groß seyn muß, weil sonst der Ring nicht in Ruhe bleiben kann. So bald aber die Spannung des Seils CA der Spannung des Seils CB gleich ist, so müssen auch, wenn CG vertikal gezogen wird, die Winkel ACG und GCB einander gleich seyn. Hieraus erläutert sich die gegebene Auflösung, weil der Winkel $GEB = EBC = ACG = GCB$ ist.

§. 298.

Zusatz. Wollte man aus der gegebenen Lage der Punkte A, B und aus der Länge des Seils nebst dem Gewicht Q, die Lage des Punkts C und die Spannung des Seils durch Rechnung finden, so setze man den Horizontalabstand $AD = a$, den Vertikalabstand $DB = b$, die Länge des Seils $ACB = L$; ferner $AG = x$, $GC = y$, den Winkel $ACB = \varphi$ und die Spannung des Seils $ACB = T$. Alsdann ist der Winkel $ACG = \frac{1}{2}\varphi = AED$ also $\sin AED = \frac{AD}{AE}$ oder

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{a}{L} \text{ und } \cos\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{(1 - \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2)} = \frac{\sqrt{(L^2 - a^2)}}{L}$$

folglich §. 21. I. die Spannung $T = \frac{Q}{2\cos\frac{1}{2}\varphi}$ oder

$$\text{(I)} \quad T = \frac{Q \cdot L}{2\sqrt{(L^2 - a^2)}}$$

Für $L = a$ wird $T = \infty$ oder es wird eine unendliche Kraft erfordert, das Seil zwischen den beiden in einerlei Horizonte liegenden Punkten A und B grade zu spannen. Je weniger L von a verschieden ist, desto größer wird die Spannung und man sieht hieraus wie sehr die Kraft T durch die Verkürzung der Länge des Seils vermehrt werden kann.

Man verlängere AD und CB bis H so ist

$$CH = CA = \frac{AG}{\sin \frac{1}{2}\varphi} = \frac{L.x}{a}$$

$$HB = \frac{BD}{\cos \frac{1}{2}\varphi} = \frac{L.b}{\sqrt{(L^2 - a^2)}}, \text{ also}$$

$$AC + CH - HB = \frac{2L.x}{a} - \frac{L.b}{\sqrt{(L^2 - a^2)}} = L$$

und hieraus AG oder

$$(II)\ x = \tfrac{1}{2}a + \frac{ab}{2\sqrt{(L^2 - a^2)}}$$

Ferner ist $\cot \frac{1}{2}\varphi = \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi} = \frac{\sqrt{(L^2 - a^2)}}{a}$ und CG = AG $\cot \frac{1}{2}\varphi$ oder $y = x \cot \frac{1}{2}\varphi$ daher CG oder

$$(III)\ y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(L^2 - a^2)} + \tfrac{1}{2}b.$$

Beispiel. An einem 16 Fuß langen Seile soll mittelst eines Ringes eine Last von 100 Pfund aufgehängt werden. Der Horizontalabstand von den Enden des Seils ist 12 und der Vertikalabstand 2 Fuß. Man sucht die Spannung des Seils und den Ort wo die Last in Ruhe bleibt. Hier ist $a = 12$, $b = 2$, $L = 16$ Fuß und $Q = 100$ Pfund, daher

die Spannung $T = \frac{16.\ 100}{2\sqrt{(256 - 144)}} = 75{,}59$ Pfund

der Horizontalabstand AG oder $x = \frac{1}{2}.12 + \frac{12.2}{2\sqrt{(256-144)}}$
$= 6 + 1{,}134 = 7{,}134$ Fuß

der Vertikalabstand DB oder $y = \frac{1}{2}\sqrt{(256 - 144)} + \frac{1}{2}.2 = 6{,}292$ Fuß.

§. 299.

Aufgabe. An einem Knoten C Figur 165. sind drei Seile befestigt, wovon zwei mit den daran befindlichen Gewichten P, Q über die Rollen A, B hängen. Am dritten Seile hängt die Last R frei herunter; man fragt welche Taf. XI. Fig. 165.

Lage der Knoten C der Seilmaschine annehmen wird, wenn die Gewichte P, Q, R nebst der Lage der Rollen A und B gegeben sind.

Auflösung. In derselben Ebene, in welcher sich die Seile befinden, beschreibe man ein Dreieck abc, dessen Seite a b vertikal ist, indem man

$$ab : ac : bc = R : P : Q$$

annimmt. Zieht man alsdann AC mit ac und BC mit cb parallel, so ist der Durchschnittspunkt C der Ort für den Knoten.

Der Grund dieses Verfahrens läßt sich einsehen, wenn man die vertikale Richtung des Gewichts R nach CD verlängert und das Parallelogramm DECF beschreibt. Nun sind nach §. 17. die Kräfte R, P, Q nur dann im Gleichgewichte, wenn sich verhält

$$CD : DF : FC = R : P : Q.$$

Es müssen daher auch die Dreiecke DFC und acb einander ähnlich seyn, folglich hat der Punkt C die für das Gleichgewicht erforderliche Lage.

§. 300.

Taf. XI. Fig. 166. Aufgabe. Die Größe dreier Kräfte P, Q, R welche an dem Knoten einer Seilmaschine wirken und die Lage dreier Punkte A, B, C, Figur 166., ist gegeben. Man soll die Lage des Knotens bestimmen, damit die Richtungen der Kräfte P, Q, R durch die Punkte A, B, C gehen und die Kräfte selbst untereinander im Gleichgewichte sind.

Auflösung. Man ziehe AB und nehme

$$R : Q : P = AB : AD : BD$$

Mit den gefundenen Linien werde das Dreieck ABD beschrieben und durch die Punkte A, B, D ein Kreis geschlagen. Durch C und D ziehe man DC, so ist da wo diese Linie die Peripherie des Kreises in G schneidet, die Stelle des Knoten und GA, GB, GC sind die Richtungen der Kräfte P, Q, R für das Gleichgewicht, welche durch die gegebenen Punkte A, B, C gehen.

Beweis. Man setze den Winkel $AGD = \alpha$, $BGD = \beta$, so ist $AGD = ABD = \alpha$, $BGD = BAD = \beta$, weil diese Winkel auf einerlei Bogen im Kreise stehen. Aber im Dreiecke ABD verhält sich

$BD : AD = \sin BAD : \sin ABD$ oder

$P : Q = \sin \beta : \sin \alpha$ daher $P = \frac{Q \sin \beta}{\sin \alpha}$

Ferner ist der Winkel ADB im Dreieck $ABD = 180° - \alpha - \beta$ daher $\sin ADB = \sin (\alpha + \beta)$. Es verhält sich aber

$BD : AB = \sin BAD : \sin ADB$ oder

$P : R = \sin \beta : \sin (\alpha + \beta)$ daher $P = \frac{R \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$

Da nun $P = \frac{Q \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{R \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$ so sind die drei Kräfte P, Q, R nach §. 19. (I) im Gleichgewichte.

§. 301.

Aufgabe. Auf horizontalem Boden EF Figur 167. Taf. XI. befindet sich ein Schlitten oder Wagen, vor welchen ein Fig. 167. Pferd gespannt ist. Man kennt die Kraft Q, mit welcher der Schlitten der Fortbewegung nach horizontaler Richtung widersteht und soll daraus die Kraft bestimmen, mit welcher der Brustriemen AC und Trageriemen BC das Pferd preßt.

Auflösung. Man ziehe DG horizontal und setze die Höhe des Brustriemen über dem Angriffspunkte D oder
a b CG = a und die Länge des Zugseils CD = b. Der Vertikaldruck des Trageriemen auf den Rücken des Pferdes
V des sei V, die Kraft welche dem Pferde nach horizontaler Richtung am Brustriemen AC widersteht = P und die Spannung des Zugseils DC = T, so zerlegt sich die Kraft T im Punkte D nach einer vertikalen Richtung aufwärts und nach der horizontalen Richtung DG. Der erste Druck wird vom Gewichte des Schlitten aufgehoben, der letztere nach der Richtung DG ist = T cos CDG und muß auf den Widerstand des Schlittens verwandt werden, daher ist §. 20.

$$Q = T \cos CDG$$

Im Punkt C wirkt die Spannung T nach der Richtung CD und kann daselbst in den Horizontaldruck P nach der Richtung AC und in den Vertikaldruck V nach der Richtung BC zerlegt werden. Man erhält alsdann §. 20.

$$P = T \cos CDG \text{ und } V = T \sin CDG$$

Es ist daher P = Q oder die Kraft welche das Pferd am Brustriemen anwenden muß, ist eben so groß als die Gewalt mit welcher der Schlitten der horizontalen Fortbewegung widersteht.

Weil $V = T \sin CDG$ und $Q = T \cos CDG$, so erhält man $V = Q \operatorname{tgt} CDG$. Aber tgt CDG $= \frac{CG}{DG} = \frac{a}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$; daher findet man den Druck, mit welchem der Rücken des Pferdes durch den Trageriemen vertikal herunter gepreßt wird, oder

$$V = \frac{a\,Q}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$$

Der Vertikaldruck V wird daher bei einerlei Widerstand Q desto geringer, je kleiner a und je größer b ist, oder je kleiner der Abstand der Horizontale durch den Angriffspunkt D vom Brustriemen ist, und je länger das Zugseil CD angenommen wird.

Man sehe hierüber eine Abhandlung von Couplet, Réflexions sur le tirage des charettes et des traineaux in den Mém. de l'ac. de Paris année 1733. p. 67 etc. ed. Amst.

§. 302.

Zusatz. Sucht man die erforderliche Länge des Zugseils b, damit ein Pferd bei der zur horizontalen Bewegung anzuwendenden Kraft nur einen gegebenen Vertikaldruck leide, so darf aus der gefundenen Gleichung nur b entwickelt werden. Nun ist $V^2 (b^2 - a^2) = a^2 Q^2$, daher findet man die erforderliche Länge des Zugseils oder

$$b = \frac{a}{V} \sqrt{(Q^2 + V^2)}$$

Beispiel. Eine Last auf horizontalem Boden fort zu bewegen, werde eine Kraft von 200 Pfund erfordert. Man sucht die nöthige Länge des Zugseils, damit ein Pferd, welches diese Last mittelst einer Schleife ziehen soll, nicht stärker als mit einer Gewalt von 100 Pfund vertikal gegen den Boden gedrückt wird, wenn bekannt ist daß der Brustriemen $3\frac{1}{2}$ Fuß, und der Ort wo das Seil an der Schleife befestigt ist, $\frac{1}{2}$ Fuß über dem horizontalen Boden liegt.

Hier ist $a = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3$ Fuß; $Q = 200$ und $V = 100$ Pfund, daher die Länge des Zugseils

$$b = \frac{3}{100} \sqrt{(200^2 + 100^2)} = 6,7 \text{ Fuß.}$$

§. 303.

Taf. XI. Fig. 168 Aufgabe. An einem Faden $T C C' C'' T'''$ Figur 168., wirken mehrere Kräfte T, P, P', P'', T''' in den Punkten C, C', C''; man soll die Bedingungen für das Gleichgewicht angeben, wenn die Größe und Richtung jeder Kraft bekannt ist.

Auflösung. Die Linie OZ werde willkürlich gezogen und man bestimme die Lage der Fäden TC, CC', CC'', $C''T'''$, indem man solche bis an OZ in A, A', A'', A''' verlängert; setze die Winkel $CAZ = \alpha$, $C'A'Z = \alpha' \ldots$, und verfahre eben so mit den Richtungen der Kräfte P, P', P'', indem man solche bis B, B', B'' verlängert und die Winkel $CBZ = \gamma$, $C'B'Z = \gamma'$, $C''B''Z = \gamma''$ setzt. Die Spannung der Fäden $CT = T$ und $C''T''' = T'''$ ist gegeben und die der Fäden CC' und $C' C''$ sei T' und T'', so ist für die Kräfte P, T, T' am Knoten C, wenn ein Gleichgewicht bestehen soll und man von denjenigen Kräften, deren Richtungen rückwärts verlängert die Linie OZ schneiden, die Winkel, wie nach §. 29. erfordert wird, negativ in Rechnung bringt:

$$P \sin \gamma - T \sin \alpha + T' \sin \alpha' = 0 \quad [I]$$

$$P \cos \gamma - T \cos \alpha + T' \cos \alpha' = 0$$

Für den Knoten C' ist eben so

$$P' \sin \gamma' - T' \sin \alpha' - T'' \sin \alpha'' = 0 \quad [II]$$

$$P' \cos \gamma' - T' \cos \alpha' - T'' \cos \alpha'' = 0$$

und für den Knoten C''

$$P'' \sin \gamma'' + T'' \sin \alpha'' - T''' \sin \alpha''' = 0 \quad [III]$$

$P'' \cos\gamma'' + T'' \cos\alpha'' - T''' \cos\alpha''' = 0$

Addirt man die Gleichung [I] zu [II], so wird

$$-T \sin\alpha - T'' \sin\alpha'' + P \sin\gamma + P' \sin\gamma' = 0.$$

und wenn hiezu die Gleichung [III] addirt wird

$$-T \sin\alpha - T''' \sin\alpha''' + P \sin\gamma + P' \sin\gamma' + P'' \sin\gamma'' = 0$$

Auf eine ähnliche Art erhält man auch

$$-T \cos\alpha - T''' \cos\alpha''' + P \cos\gamma + P' \cos\gamma' + P'' \cos\gamma'' = 0$$

Da dies Verfahren dasselbe bleibt, wenn auch noch so viele Kräfte P, P', P'', P''' .... vorhanden sind, so kann man die am letzten Faden wirkende Kraft $= S$ und den zugehörigen Winkel $= \beta$ setzen und erhält alsdann ganz allgemein die Bedingungen für das Gleichgewicht.

$$\text{(I)} \; -T \sin\alpha - S \sin\beta + P \sin\gamma + P' \sin\gamma' + P'' \sin\gamma'' + \ldots = 0$$

$$\text{(II)} \; -T \cos\alpha - S \cos\beta + P \cos\gamma + P' \cos\gamma' + P'' \cos\gamma'' + \ldots = 0$$

wo T und S die Spannungen des ersten und letzten Fadens sind und P, P', P'' .... die an jedem Knoten angebrachten Kräfte bezeichnen. Auch ist zu bemerken, daß in diesen beiden Ausdrücken diejenigen Winkel negativ in Rechnung gebracht werden, bei welchen die Richtungen der Kräfte rückwärts verlängert die Axe OZ schneiden.

Setzt man voraus, daß die Endpunkte der Fäden in D und E befestigt sind, so leidet jeder Punkt nach der Richtung des daran befestigten Fadens den Druck T und S. Diese Pressungen sowohl als die Winkel α oder β lassen sich durch ein ähnliches Verfahren wie §. 24. leicht finden.

§. 304.

Zusatz. Denkt man sich die Kräfte T, S, P, P', P''.... an einem einzigen Punkte nach ihren Richtungen angebracht, so erhält man für das Gleichgewicht unter diesen Kräften nach §. 28. eben dieselben Gleichungen, welche im vorhergehenden §. gefunden worden sind. Wenn sich daher an einer Seilmaschine mehrere Kräfte im Gleichgewichte befinden, so müssen solche auch, an einem einzigen Punkte nach parallelen Richtungen angebracht, im Gleichgewichte seyn.

§. 305.

Taf. XI. Fig. 169. Aufgabe. Eine Seilmaschine mit zwei festen Knoten ist in den Punkten A, B, Figur 169. befestigt, und man verlangt, daß solche frei herabhängend in die gegebene Lage ACDB kommen soll. Wie groß müssen die in C und D aufzuhängenden Gewichte P und Q seyn, damit die Seile die gegebenen Winkel $ACD = \alpha$ und $CDB = \beta$ einschließen.

Auflösung. Man ziehe die Linien CP, DQ vertikal, verlängere AC bis E und BD bis F, so bestimmen die Linien DE und CF das Verhältniß der Kräfte P und Q für das Gleichgewicht, oder es muß sich verhalten

$$P : Q = DE : CF.$$

Beweis. Man setze den Winkel $CED = \delta$, $CFD = \delta'$, so verhält sich

$DE : CD = \sin DCE : \sin CED = \sin \alpha : \sin \delta$ und
$CD : CF = \sin CFD : \sin CDF = \sin \delta' : \sin \beta$ daher
$DE : CF = \sin \alpha \sin \delta' : \sin \beta \sin \delta$.

Setzt man die Spannung des Seils $CD = W$, so ist, weil der Winkel $ECF = \delta$ und $EDF = \delta'$ nach §. 19.

$P : W = \sin\alpha : \sin\delta$
$W : Q = \sin\delta' : \sin\beta$ daher
$P : Q = \sin\alpha \sin\delta' : \sin\beta \sin\delta$. Aber auch
$DE : CF = \sin\alpha \sin\delta' : \sin\beta \sin\delta$ folglich
$P : Q = DE : CF$

Anmerkung. Man kann sich dieser Einrichtung anstatt einer Wage bedienen, wenn man aus dem bekannten Gewichte P die Größe der Last Q finden will. Denn es ist $Q = \frac{CF}{DE} \cdot P$; daher, wenn man die Länge CF und DE kennt, so ist dadurch die Last Q leicht gefunden.

§. 306.

Aufgabe. An einer in D und E, Figur 170., befestigten Seilmaschine sind in den Knoten C, C′ C″... Gewichte P, P′, P″.... aufgehängt; man soll die Bedingungen für das Gleichgewicht finden. Taf. XI, Fig. 170.

Auflösung. Die Spannung des ersten Fadens CD sey T und des letzten $C''' E = S$; der Winkel, welchen T S der erste Faden mit dem Horizonte DM′ bildet oder $CDM' = \alpha$ und eben so $C''' EF = \beta$. Denkt man sich nun α β §. 303., Fig. 168., die Linie OZ horizontal, so ist jeder Fig. 168. von den Winkeln $\gamma, \gamma' \ldots = 90^0$ daher $\sin\gamma = 1$, $\cos\gamma = 0$ und man erhält nach (I) und (II) §. 303.

$-T \sin\alpha - S \sin\beta + P + P' + P'' + \ldots = 0$ und
$-T \cos\alpha - S \cos\beta = 0$

oder wenn man die Summe der Gewichte

$P + P' + P'' + \ldots = V$ V

setzt, so ist

(I) $T \sin\alpha + S \sin\beta = V$ und
(II) $T \cos\alpha + S \cos\beta = 0$

Es können daher noch so viel Gewichte P, P'.... an der Seilmaschine angebracht seyn, so ist doch jedesmal

1) die Summe der Gewichte eben so groß, als wenn man jede Spannung am äußersten Ende mit dem Sinus ihres Neigungswinkels gegen den Horizont multiplicirt und beide Produkte addirt.

2) Die Summe von den Produkten aus den Spannungen der äußersten Enden in die Cosinus ihrer Neigungswinkel gegen den Horizont, ist jedesmal Null.

Mit Hülfe der Gleichungen (I) und (II) lassen sich leicht, wenn drei von den Größen V, S, T, α, β gegeben sind, die beiden übrigen finden.

Entwickelt man aus beiden Gleichungen S, so wird

$S = \frac{V - T \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{-T\cos\alpha}{\cos\beta}$ und hieraus

$V\cos\beta = T(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = T\sin(\alpha - \beta)$

daher

(III) $V : T = \sin(\alpha - \beta) : \cos\beta$.

Auf ähnliche Art findet man, wenn T entwickelt wird,

(IV) $V : S = \sin(\beta - \alpha) : \cos\alpha$

d. h. die Summe sämmtlicher Gewichte verhält sich zur Spannung des Fadens an dem einen Ende, wie der Sinus von der Differenz beider Winkel, welche die Richtung der äußersten Enden der Fäden mit dem Horizonte bilden, zu dem Cosinus des Winkels am andern Ende des Fadens.

§. 307.

1. Zusatz. Man verlängere die Richtung der beiden äußersten Fäden DC, EC''' bis sich solche in N schneiden

und

und ziehe durch N die Vertikallinie NM, welche die Horizontallinien durch D und E in M und F schneidet; setze den Winkel DNM $= \delta$ und MNE $= \delta'$, so ist

$\alpha = 90^\circ + \delta$; $\beta = 90^\circ - \delta'$; $\alpha - \beta = \delta + \delta'$;
$\beta - \alpha = -(\delta + \delta')$

$\cos\alpha = -\sin\delta$; $\cos\beta = \sin\delta'$; $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\delta + \delta')$; $\sin(\beta - \alpha) = -\sin(\delta + \delta')$

Nach (III) des vorhergehenden §. ist aber $V \cos\beta = T \sin(\alpha - \beta)$ daher

(I) $V \sin\delta' = T \sin(\delta + \delta')$

Ferner ist nach (IV) $V \cos\alpha = S \sin(\beta - \alpha)$ daher

(II) $V \sin\delta = S \sin(\delta + \delta')$

und wenn man V aus (I) und (II) entwickelt, so erhält man

(III) $T \sin\delta = S \sin\delta'$

Vergleicht man diese drei Ausdrücke mit den §. 19 gefundenen, so folgt daraus, daß die Kräfte V, T, S am Punkte N nach den Richtungen MN, ND, NE im Gleichgewichte sind; MN ist daher die mittlere Richtung von sämmtlichen Gewichten $P, P', P'' \ldots = V$ und man findet daher diese mittlere Richtung eben so, als wenn man die beiden Spannungen T und S als Seitenkräfte ansieht und zu denselben die Lage der Mittelkraft V sucht.

Weil sämmtliche Gewichte von D bis C″ im Gleichgewichte bleiben müssen, wenn man statt des Gewichtes P″ den Faden bei C″ befestigt, so müssen auch die vorstehenden Sätze auf eine ähnliche Art vom Punkte C″ wie vom Punkte E, und eben so von jedem andern Knoten gelten.

§. 308.

Taf. XI. Fig. 170. 2. Zusatz. Denkt man sich die Knoten C, C', C''...., Figur 170., unendlich nahe an einander und jeden mit einem kleinen Gewichte beschwert, so entsteht hieraus ein schweres vollkommen biegsames Seil und die krumme Linie, welche dasselbe bildet, nennt man die Kettenlinie. Ist V das Gewicht dieses Seils zwischen den beiden Spannungen T und S, so gelten noch die im vorigen §. erwiesene Sätze. Es sei daher D G C E, Figur 171., ein
Fig. 171. solches in den Punkten D und E aufgehängtes Seil und C ein Punkt in demselben, dessen Tangente CN horizontal ist. Für irgend einen andern Punkt G sei die Tan-
C gente GN und die Spannung in $G = T$, in $C = C$;
V das Gewicht des Seiles zwischen G und $C = V$, so ist,
wenn man NM vertikal und GM horizontal zieht, den
φ Winkel $GNM = \delta$, $MNC = \delta'$ und $NGM = \varphi$ setzt:

$$V \sin \delta' = T \sin (\delta + \delta') \;;\; V \sin \delta = C \sin (\delta + \delta')$$

$$\text{und } T \sin \delta = C \sin \delta'$$

Es ist aber

$$\delta = 90^\circ - \varphi \;;\; \delta' = 90^\circ \;;\; \delta + \delta' = 180^\circ - \varphi \text{ daher}$$

$$\sin \delta = \cos \varphi \;;\; \sin \delta' = 1 \;;\; \sin (\delta + \delta') = \sin \varphi$$

folglich, wenn man diese Werthe in die vorstehenden drei Gleichungen setzt,

$$\text{(I)} \quad V = T \sin \varphi$$

$$\text{(II)} \quad V = C \operatorname{tgt} \varphi$$

$$\text{(III)} \quad T \cos \varphi = C$$

welches die Fundamentalgleichungen für die Kettenlinie sind, woraus man alle übrige Eigenschaften derselben, wie im fünften Abschnitte des Anhanges, entwickeln kann.

§. 309.

Aufgabe. An einer Seilmaschine, wovon das eine Ende der Schnur CA in A befestigt ist, sind zwei Gewichte P, Q dergestalt aufgehängt, daß das eine P am Knoten C, Figur 172., und das andere an der Schnur CB über die Rolle B frei herunter hängt; man sucht die Lage des Knoten C bei welcher die gegebenen Gewichte P, Q im Gleichgewichte sind. Taf. XI. Fig. 172.

Auflösung. Durch den bestimmten Punkt A werde die Vertikale AD gezogen und mit der gegebenen Schnurlänge AC der Kreisbogen DC beschrieben. In einem willkürlichen Punkte e der Linie AD ziehe man ef auf Ae senkrecht und nehme $Ae : ef = P : Q$.

Durch A und f werde die Linie Af und durch mehrere Punkte wie e′, die Linien e′f′ mit ef parallel gezogen. Ferner ziehe man durch e, e′ ... die Linien eB, e′B ... welche die Rolle in B berühren, nehme $ec = ef$; $e'c' = e'f'$; ... ziehe durch die Punkte c, c′, ... die Kurve cCc′ bis solche den Kreisbogen DC in C schneidet, so ist in C der Ort wo der Knoten der Seilmaschine hängen muß und CP, CA, CB ist die Lage der Schnüre, wenn P mit Q im Gleichgewichte seyn soll.

Beweis. Man verlängere die Richtung PC nach G und setze den Winkel $ACG = \delta$, $BCG = \delta'$ so verhält sich

$$AE : EC = \sin ACE : \sin CAE$$ oder
$$AE : EF = \sin(\delta + \delta') : \sin \delta$$. Aber
$$AE : EF = Ae : ef = P : Q$$ daher
$$P : Q = \sin(\delta + \delta') : \sin \delta$$ oder
$$P \sin \delta = Q \sin(\delta + \delta')$$
daher ist nach §. 307. (II). P mit Q im Gleichgewichte.

§. 310.

Zusatz. Wenn die Kurve Acc′ beschrieben ist und man verändert den Halbmesser AD = AC, so erhält man dadurch einen andern Durchschnittspunkt in der Kurve Ac′ wo der Knoten hängen muß, damit die Gewichte P, Q im Gleichgewichte sind. Giebt man daher dem Halbmesser AD alle mögliche positive Werthe, so wird der Knoten in alle Punkte der Kurve Ac′ fallen. Wenn daher das Gewicht P nicht an einem Knoten in C befestigt, sondern mittelst eines Ringes an der Schnur ACB sich frei beweglich ist, so giebt die Kurve Acc′ alle mögliche Punkte an, in welchen sich der Ring befinden kann, damit an der Seilmaschine ein Gleichgewicht ist.

Diese Auflösung findet man in der Nouvelle Mécanique ou Statique de *Varignon* à Paris 1725, Tome II. p. 314.

II. Von der Reibung eines um einen Cylinder gespannten Seiles.

§. 311.

Aufgabe. Um den Cylinder ABD Figur 173. ist ein Seil QABV geschlagen, an dessen einem Ende die Last Q hängt; man sucht die Kraft V am andern Ende, welche der Last Q und der Reibung längs dem Umfange AMB das Gleichgewicht hält. Taf. XI. Fig. 173.

Auflösung. Man setze den Halbmesser $AC = r$ und für irgend einen Bogen AM sei der zugehörige Bogen dessen Halbmesser 1 ist $= \varphi$, so ist der Bogen $AM = r\varphi$. Ist nun der Normaldruck auf den Bogen AM, welcher von den Kräften Q, V herrührt $= N$ und wächst AM um das Element $Mm = r\partial\varphi$, so ist der Normaldruck auf $Mm = \partial N$. Man theile Mm in zwei gleiche Theile in n, setze die Spannung des Seils in $M = T$, so wirkt auch im Punkte n eine Kraft T nach nM und eine eben so große Kraft nach nm. Mit diesen beiden Kräften muß die Kraft ∂N in n im Gleichgewichte seyn oder beide Kräfte müssen nach nC einen Druck ∂N hervor bringen. Man erhält daher nach §. 21. II. die Mittelkraft

$\partial N = 2\,T \cos CnM$.

Aber $\cos CnM = \frac{Mn}{Cn} = \frac{\frac{1}{2} r\partial\varphi}{r} = \frac{1}{2}\partial\varphi$ daher

$\partial N = T\,\partial\varphi$.

Von dem Drucke N entsteht eine Reibung μN, es ist daher $T = Q + \mu N$, oder wenn man differenziirt $\partial T = \mu \partial N$ oder statt ∂N den gefundenen Werth gesetzt

$$\partial T = \mu T \partial \varphi' \text{ oder } \frac{\partial T}{T} = \mu \partial \varphi'$$

und wenn man integrirt

$\log n\, T = \mu \varphi + \text{const}$. Für $\varphi = 0$ wird $T = Q$ also $\log n\, Q = \text{const}$ daher $\log n\, T = \mu \varphi + \log n\, Q$ oder

$$\log n \frac{T}{Q} = \mu \varphi$$

oder wenn $e = 2{,}7182818$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet

$$\frac{T}{Q} = e^{\mu \varphi} \text{ folglich } T = Q e^{\mu \varphi}$$

Ist nun der Bogen, welcher zum Winkel ACB für den Halbmesser 1 gehört $= \alpha$, so wird $T = V$ wenn $\varphi = \alpha$ wird, man erhält daher die Kraft

$$V = Q e^{\mu \alpha}$$

Hieraus folgt, daß wenn der Bogen α, um welchen das Seil gewickelt ist, in einer arithmetischen Progression wächst, so muß die Kraft V in einer geometrischen Progression zunehmen, woraus leicht folgt, daß nach einigen Umwickelungen die Kraft V sehr groß seyn muß.

§. 312.

Für eine Umwickelung wird $\alpha = 2\pi$, also für n Umwickelungen $= 2n\pi$, daher für diesen Fall

$$V = Q e^{2n\mu\pi}$$

Beispiel. Die Last Q am Ende des Seiles sei 10 Pfund und das Seil sei um den vierten Theil des Umfangs eines Cylinders geschlungen, so ist $n = \frac{1}{4}$ und wenn $\mu = \frac{1}{3}$ gesetzt wird, so erhält man

$2n\mu\pi = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,14159 \ldots = 0,5235987756$

Rechnet man nun mit gemeinen Logarithmen, so ist

$\lg e = \lg 2,7182 \ldots = 0,4342945$. Es ist aber

$\lg e^{0,5235 \ldots} = 0,52359 \cdot \lg e = 0,5235988 \cdot 0,4342945$ und

$\lg 0,5235988 = 0,7189985 - 1$

$\lg 0,4342945 = 0,6377843 - 1$

$0,3567828 - 1 = \lg 0,2273960$ also

$\lg e^{0,523 \ldots} = 0,227396 = \lg 1,688092$ also

$e^{0,523 \ldots} = 1,688092$ folglich

$V = Q e^{0,523} = 10 \cdot 1,688092 = 16,88092$ Pfund.

Um besser zu übersehen, wie schnell die Werthe von V mit der Zahl der Umwickelungen wachsen, können nachstehende Resultate dienen. Für

$n = 0$	wird $V =$	. . . . . . 1,000 Q
$n = \frac{1}{4}$	" $V =$	. . . . . . 1,688 Q
$n = \frac{1}{2}$	" $V =$	. . . . . . 2,850 Q
$n = 1$	" $V =$	. . . . . . 8,121 Q
$n = 2$	" $V =$	. . . . . . 65,944 Q
$n = 4$	" $V =$	. . . . . 4348,555 Q
$n = 6$	" $V =$	. . . . 286788,920 Q
$n = 8$	" $V =$	. . 18908434,000 Q
$n = 10$	" $V =$	. 1248142286,000 Q

III. Von der Steifigkeit der Seile.

§. 313.

Bei dem Gebrauche der Seile ist es öfters nothwendig, solche über Rollen oder Walzen zu biegen; da nun die Seile nicht als vollkommen biegsam anzuneh-

men sind, und eine gewisse Kraft erfordert wird, wenn ein grades etwas dickes Seil in eine Krümmung gebogen werden soll, so ist es nothwendig, für jeden besondern Fall diejenige Kraft kennen zu lernen, welche zur Biegung eines Seiles verwandt werden muß. Die Gewalt, mit welcher ein Seil dem Biegen widersteht, nennt man seine Steifigkeit. Um von der Gewalt, mit welcher die Seile dem Biegen widerstehen, eine richtige Vorstellung zu erhalten und die zur Ueberwältigung dieses Widerstandes erforderliche Kraft zu bestimmen, denke man sich eine um den festen Bolzen
Taf. XI. C, Figur 174., bewegliche Rolle AB, über welche ein
Fig. 174. Seil VADBQ gelegt ist, an dessen Enden die Gewichte V, Q herunter hängen. Kommt nun die Rolle von B nach D in Bewegung und das Gewicht Q steigt in die Höhe, so muß das Seil bei B umgebogen werden. Wegen seiner Steifigkeit widersteht es aber der Biegung und der Erfolg muß der seyn, daß die Last Q desto mehr von der Vertikale BB′ abweicht, je größer die Steifigkeit des Seiles ist. Durch den Schwerpunkt der Last Q sei die Vertikallinie Qb gezogen, so wird bei A in dem Verhältnisse mehr Kraft zur Umdrehung der Rolle erfordert werden, als der Horizontalabstand Cb größer wie CB ist. Noch kommt bei der Steifigkeit der Umstand in Betrachtung, daß das Seil bei A wieder grade gebogen werden muß. Wäre das Seil vollkommen elastisch; so würde solches nach aufgehobenem Drucke seine grade Gestalt wieder

annehmen. Weil aber die Elasticität der Seile nur sehr unvollkommen ist, so gehört auch einige Kraft dazu, ein krumm gebogenes Seil wieder grade zu biegen. Aus dieser Ursache wird das zweite aufgehängte Gewicht V nicht vertikal abwärts nach AA′ hängen, sondern nach AV von der Vertikallinie AA′ abweichen, weil das gebogene Seil seine Krümmung beizubehalten strebt. Soll nun das Uebergewicht von V die Umdrehung der Rolle und die Erhebung des Gewichtes Q bewirken, so wird der Abstand Ca der Kraft V kleiner als der Halbmesser der Rolle und man muß auch dieserhalb oder zur Gradebiegung des Seils einige Kraft verwenden. Diese ist aber gewöhnlich so unbedeutend, daß solche aus der Rechnung gänzlich wegfallen kann. Die Beugung aus der graden Richtung in die krumme erfordert aber eine nähere Untersuchung.

§. 314.

Will man ein loses Seil um eine Walze oder Rolle biegen, so wird offenbar mehr Kraft zur Biegung des Seiles erfordert, je dicker dasselbe und je kleiner der Halbmesser der Rolle ist. Ob aber die Steifigkeit der Dicke des Seiles oder irgend einer Potenz dieser Dicke proportional, und welche Potenz des Halbmessers der Rollen anzunehmen sei, dieses kann nur durch genaue Versuche ausgemittelt werden. Man setze die Dicke oder den Durchmesser des Seiles $= \delta$, den Halbmesser der Rolle $= r$, so wird sich die Kraft, welche zur Biegung des losen Seils erfordert wird, durch $A\frac{\delta^n}{r^m}$ ausdrücken lassen, wo die unveränderlichen Größen A, m, n durch Versuche zu bestimmen sind.

Zur Biegung eines angespannten Seiles wird mehr Kraft erfordert, als wenn dasselbe lose ist. Je größer die Kraft Q ist, welche ein Seil ausspannt, desto mehr Kraft muß auch auf die Biegung verwandt werden, und man kann daher, wegen der Spannung Q die zum Biegen eines gespannten Seiles erforderliche Kraft, einer Potenz von Q proportional annehmen. Ein angespanntes Seil zu biegen erfordere daher eine Kraft $B\frac{\delta^n}{r^m}Q^t$ wo B und t ebenfalls durch Versuche zu bestimmen sind.

Nun war für das lose Seil die erforderliche Kraft zum Biegen $= A\frac{\delta^n}{r^m}$ und da diese Kraft auch beim gespannten Seile ohne Rücksicht auf die Spannung verwandt werden muß, so erhält man, wenn F die erforderliche Kraft bezeichnet, welche zur Ueberwältigung der Steifigkeit des Seils erfordert wird

$$F = A\frac{\delta^n}{r^m} + B\frac{\delta^n}{r^m}Q^t = \frac{\delta^n}{r^m}(A + BQ^t).$$

Taf.XI. Um diesen Ausdruck richtig zu verstehen, sei AB, Figur
Fig.174. 174., eine Rolle, deren Halbmesser CA = r ist. Die Dicke oder der Durchmesser vom Querschnitte des Seiles sei δ und an jedem Ende desselben hänge eine Last Q, so ist die Spannung des Seils = Q. Legt man nun dem Gewichte Q bei A′ noch so lange Gewichte zu, bis die Steifigkeit des Seiles bei B überwältigt wird, so ist

dasjenige Gewicht F, welches noch zu Q bei A′ hinzu gefügt werden muß, um das Gleichgewicht mit der Steifigkeit zu halten, dem vorhin gefundenen Ausdrucke gleich.

§. 315.

Die ersten Versuche über Steifigkeit der Seile sind von Amonton angestellt und in den Mémoires de l'Académie de Paris, année 1699 (p. 259-286. edit. Amst.) beschrieben, auch ist zugleich eine sinnreiche Methode angegeben, wie die Steifigkeit der Seile mit der erforderlichen Genauigkeit ausgemittelt werden kann. Von zwei gleichen Seilen sei jedes an einem Ende bei A, Figur 175., befestigt und an dem andern Taf. XI. bei B eine große Wageschale D mit einer Belastung R Fig. 175. angebracht. Werden nun beide Seile um einen Cylinder C geschlagen und man belastet denselben mit Hülfe einer kleinen Wageschale F, welche an einem sehr biegsamen Faden seines Umfanges befestigt ist, so lange bis er herunter sinkt, so ist dadurch die Steifigkeit beider Seile überwältigt. Amonton hat mit dieser Vorrichtung mehrere Versuche angestellt und a. a. O. beschrieben. Allein seine Seile waren nur 1, 2 bis 3 Linien dick und die größte Belastung der Wageschale D hat nur 60 Pfund, also auf jedes Seil nur 30 Pfund betragen, dabei waren die Cylinder nur $\frac{1}{2}$, 1 und $1\frac{1}{2}$ Zoll dick, so daß von den gefundenen Resultaten nur wenig Gebrauch in der Ausübung zu machen ist. Weit wichtiger sind die mannigfaltigen Versuche, welche Herr

Coulomb bei Gelegenheit seiner Untersuchung über die Reibung angestellt hat. Die Beschreibung dieser Versuche findet man in den §. 186. angeführten Mémoires de Mathématiques etc. und man wird sich hier damit begnügen, diese Versuche tabellarisch darzustellen, damit aus denselben die nöthigen Folgerungen, zur Erlangung eines Ausdrucks für die Steifigkeit der Seile leicht erhalten werden können.

Zuvor ist noch anzumerken, daß die Spannung eines jeden Seiles, bei der Amontonschen Vorrichtung, nur halb so viel beträgt, als das Gewicht der Wageschale D nebst der Belastung R, und daß, wenn man die mit dieser Vorrichtung angestellten Versuche bei einer Rolle anwenden will, welche mit der Walze gleichen Halbmesser hat und bei welcher die Spannung des Seiles eben so groß als bei jedem einzelnen Seile an der Walze seyn soll,

$$Q = \tfrac{1}{2} R \text{ und } f = \tfrac{1}{2} C + F$$

ist, wo R das Gewicht der Wageschale D nebst der Belastung, C das Gewicht des Cylinders und F das Gewicht der kleinen Wageschale F nebst ihrer Belastung ist, die Größen Q und f aber die §. 313. gegebene Bedeutung haben. Um zu übersehen, daß $f = \tfrac{1}{2} C + F$ ist, setze man die Last C der Welle, welche in ihrer Axe vereinigt ist, sei für sich allein mit der Steifigkeit beider Seile im Gleichgewichte, so wirkt die Last $\tfrac{1}{2}$ C zur Biegung eines Seiles am Halbmesser der Welle, und eben so groß ist der Halbmesser, an welchem die

Kraft f zur Biegung des Seiles um die Rolle wirkt; daher muß $f = \frac{1}{2} C$ seyn, oder die Last $\frac{1}{2} C$ in der Mitte der Welle wirkt auf die Biegung des Seiles eben so, als wenn dasselbe über eine Rolle von gleichem Durchmesser geschlagen wäre und am Umfang der Rolle diese Kraft $\frac{1}{2} C$ die Biegung bewirkte. Bringt man nun statt des Gewichtes F, welches am Durchmesser der Welle zur Biegung der Seile bei E wirkt, ein gleichgeltendes im Mittelpunkte der Welle an, so muß dies = 2 F seyn, weil der Abstand von E nur halb so groß ist. Da nun 2 F beide Seile biegt, so ist F die Kraft zur Biegung eines Seiles, welche im Mittelpunkte der Welle bei der Amontonschen Vorrichtung eben so wirkt, als wenn solche am Umfange einer Rolle angebracht wäre.

§. 316.

Die Coulombschen Versuche, deren Resultate die nachstehende Tafel enthält, sind mit vier neuen trocknen Seilen angestellt worden. Man hatte, um die Seile beinahe in denselben Zustand zu setzen wie sie beim Gebrauche vorkommen, solche über eine Rolle gebracht und an beiden Enden Gewichte von 4 bis 500 Pfund angehängt, und sie von einem Menschen eine Stunde lang auf und nieder bewegen lassen, damit sie nach ihrer ganzen Länge eine gleichförmige Biegsamkeit erhielten. Das erste Seil hatte drei Litzen (*Torons*) jede von zwei Fäden (*Filet de carret*) bestand also überhaupt aus 6 Fäden. Der Umfang des Seiles war $12\frac{1}{2}$ Linie, also $\delta = 3,98'''$. Sechs Zoll der Länge wogen $\frac{9}{4}$ Gros poids de marc.

Das zweite Seil hatte 3 Litzen jede von 5 Fäden, also überhaupt 15 Fäden. Der Umfang des Seiles war 20 Linien, also $\delta = 6,36'''$. Sechs Zoll der Länge wogen $\frac{25}{4}$ Gros.

Das dritte Seil hatte drei Litzen, jede von 10 Fäden, also überhaupt 30 Fäden. Der Umfang war 28 Linien, also $\delta = 8,91'''$. Sechs Zoll der Länge wogen $\frac{42}{4}$ Gros.

Das vierte Seil hatte 4 Litzen, jede von 28 Fäden, also überhaupt 112 Fäden. In der Mitte des Seiles befand sich eine Litze (*Meche*) um den Raum auszufüllen, welcher sich zwischen den vier Litzen befand. Der Umfang des Seiles war 57 Linien, also $\delta = 18,14'''$. Sechs Zoll wogen $\frac{170}{4}$ Gros.

Die Versuche sind zwar mit der beschriebenen Amontonschen Vorrichtung angestellt worden, in der nachstehenden Tafel hat man aber die Resultate so aufgeführt, daß sich solche nur auf ein Seil beziehen, welches über eine Rolle gespannt ist. Zur Abkürzung bezeichnet

p den Umfang des Seiles

r den Halbmesser der Walze (Rolle)

Q die Spannung eines Seiles

f die Kraft, welche erfordert wird, das Seil zu biegen, wenn es über eine Rolle geschlagen und die Kraft am Umfange der Rolle angebracht wäre.

Sämmtliche Längenmaaße beziehen sich auf das Pariser Fußmaaß, wo 1 Pariser Fuß = 1,0350032 rheinländische ist. Die Gewichte sind das pariser Poids de marc, wovon 1 Pfund = 1,0447582 berliner Pfund ist.

M. s. meine Vergleichung der Maaße und Gewichte S. 73 und 77.

Die folgende Tafel enthält noch eine Spalte mit der Ueberschrift $\frac{p^2 Q}{r L}$, wovon erst in der Folge die Rede seyn wird.

Versuche mit neuen trocknen Seilen.

N°.	p Linien	r Zoll	Q Pfund	F Pfund	$\frac{p^2 Q}{r f}$
1	12½	½	12½	2,0	1953,12
2	12½	½	62½	11,0	1775,47
3	12½	½	112½	17,0	2068,01
4	12½	½	212½	31,0	2142,12
5	12½	½	312½	43,0	2271,07
6	12½	1	62½	4,0	2441,40
7	12½	1	112½	6,5	2704,32
8	12½	1	212½	12,0	2766,92
9	12½	1	312½	15,0	3255,21
10	12½	2	212½	5,7	2912,55
11	12½	2	312½	7,2	3390,84
12	12½	2	512½	11,0	3639,91
13	20	½	12½	7,0	1428,57
14	20	½	62½	22,0	2272,72
15	20	½	112½	30,0	3000,00
16	20	½	212½	65,0	2615,38
17	20	½	312½	92,0	2717,39
18	20	1	12½	3,2	1562,50
19	20	1	62½	9,0	2777,77
20	20	1	112½	17,0	2647,06
21	20	1	212½	31,0	2741,93
22	20	1	312½	41,0	3048,88
23	20	2	12½	1,7	1470,59
24	20	2	62½	5,0	2500,00
25	20	2	112½	7,0	3214,28
26	20	2	212½	13,0	3261,53
27	20	2	312½	16,7	3712,57
28	20	2	512½	27,0	3981,48
29	28	1	12½	11,0	890,90
30	28	1	62½	21,0	2333,33
31	28	1	112½	29,0	3041,37
32	28	1	212½	47,0	3544,68
33	28	1	312½	67,0	3656,71
34	28	2	12½	5,0	980,00
35	28	2	62½	8,5	2882,35
36	28	2	112½	14,0	3150,00
37	28	2	212½	23,0	3621,74
38	28	2	312½	31,0	3951,61
39	28	2	512½	50,0	4018,00
40	28	3	512½	34,0	3939,21
41	57	3	50	19,0	2850,00
42	57	3	500	100,0	5415,00

§. 317.

§. 317.

Um zu finden, welcher Potenz der Spannung Q die Steifigkeit der Seile entspricht, kommt es darauf an, den Werth t §. 214. aus den vorstehenden Versuchen zu finden. Sind daher F, Q, r, δ und F', Q', r', δ' zusammengehörige Werthe zweier Versuche, so ist

$$F = \frac{\delta^n}{r^m} A + \frac{\delta^n}{r^m} B Q^t \text{ und } F' = \frac{\delta'^n}{r'^m} A + \frac{\delta'^n}{r'^m} B Q'^t$$

also wenn $\delta = \delta'$ und $r = r'$, so erhält man

$$F' - F = \frac{\delta^n}{r^m} B (Q'^t - Q^t)$$

und auf ähnliche Art

$$F'' - F = \frac{\delta^n}{r^m} B (Q''^t - Q^t); \text{ daher}$$

$$\frac{F'' - F}{F' - F} = \frac{Q''^t - Q^t}{Q'^t - Q^t} \text{ und wenn } t = 1 \text{ wäre}$$

$$\frac{F'' - F}{F' - F} = \frac{Q'' - Q}{Q' - Q}$$

Vergleicht man mit dieser Voraussetzung die Versuche N°. 1, 3 und 5, so ist $F = 2$, $F' = 17$, $F'' = 43$ u. s. w.; man erhält daher

$$\frac{F'' - F}{F' - F} = \frac{41}{15} = 2{,}733$$

$$\frac{Q'' - Q}{Q' - Q} = \frac{300}{100} = 3{,}000$$

Vergleicht man die übrigen Versuche auf eine ähnliche Art, so entsteht folgende Tafel

No. d. Versuche	$F''-F$	$F'-F$	$Q''-Q$	$Q'-Q$	$\frac{F''-F}{F'-F}$	$\frac{Q''-Q}{Q'-Q}$
1. 3. 5	41,0	15,0	300	100	2,73	3,00
6. 7. 9	11,0	2,5	250	50	4,40	5,00
10.11.12	5,3	1,5	300	100	3,53	3,00
13.15.17	85,0	23,0	300	100	3,65	3,00
18.20.22	37,8	13,8	300	100	2,74	3,00
23.26.28	25,3	11,3	500	200	2,24	2,50
29.31.33	56,0	18,0	300	100	3,11	3,00
34.37.39	45,0	18,0	500	200	2,50	2,50

Hieraus sieht man, daß die Werthe von $\frac{Q''-Q}{Q'-Q}$ bald größer oder kleiner wie $\frac{F''-F}{F'-F}$ werden, daß man also für die Ausübung ohne merklichen Fehler voraussetzen darf, daß unter übrigens gleichen Umständen die Steifigkeit der Seile ihrer Spannung proportional sei. Dies giebt $t = 1$ also $Q^t = Q$.

§. 318.

Weil $F = \frac{\delta^n}{r^m}(A + BQ)$, also $r^m = \frac{\delta^n}{F}(A+BQ)$, so erhält man bei einer ähnlichen Bezeichnung für einen zweiten Versuch $r'^m = \frac{\delta'^n}{F'}(A + BQ')$; oder wenn man $\delta = \delta'$ und $Q = Q'$ setzt $r^m = \frac{\delta^n}{F}(A+BQ)$ und $r'^m = \frac{\delta^n}{F'}(A+BQ)$ also $\frac{r^m}{r'^m} = \left(\frac{r}{r'}\right)^m = \frac{F'}{F}$ daher $m \log \frac{r}{r'} = \log \frac{F'}{F}$

oder $m = \frac{\log \frac{F'}{F}}{\log \frac{r}{r'}}$

Mittelst dieses Ausdrucks läßt sich der Exponent m vom Halbmesser r der Rolle aus den Versuchen finden. Verbindet man die Versuche N°. 2 und 6 mit einander, so wird $\frac{F'}{F} = \frac{11}{4} = 2,75$ und $\frac{r}{r'} = \frac{1}{0,5} = 2$ oder $m = \frac{\log 2,75}{\log\ 2} = \frac{0,4393}{0,3010} = 1,45$

Verfährt man auf eine ähnliche Art mit den übrigen Versuchen, so entsteht nachstehende Tafel

N°. der Versuche	Q	$\frac{F'}{F}$	$\frac{r}{r'}$	m
2. 6	$62\frac{1}{2}$	2,75	2	1,45
5. 9	$312\frac{1}{2}$	2,87	2	1,52
4.10	$212\frac{1}{2}$	5,44	4	1,22
8.10	$212\frac{1}{2}$	2,11	2	1,07
9.11	$312\frac{1}{2}$	2,08	2	1,06
13.18	$12\frac{1}{2}$	2,19	2	1,33
13.23	$12\frac{1}{2}$	4,12	4	1,02
17.22	$312\frac{1}{2}$	2,24	2	1,16
17.27	$312\frac{1}{2}$	5,51	4	1,23
18.23	$12\frac{1}{2}$	1,88	2	0,91
22.27	$312\frac{1}{2}$	2,45	2	1,29
29.34	$12\frac{1}{2}$	2,20	2	1,14
33.38	$312\frac{1}{2}$	2,16	2	1,11
39.40	$512\frac{1}{2}$	1,47	1,5	0,95

Als Mittelwerth für m erhält man 1, 2; woraus folgt, daß sich unter übrigens gleichen Umständen die Steifigkeiten zweier Seile umgekehrt wie $r^{1,2}$ verhalten.

§. 319.

Nach Amontons Versuchen sollen sich zwar die Steifigkeiten der Seile unter übrigens gleichen Umständen wie ihre Dicken δ verhalten; vergleicht man aber die vielfältigern Coulombschen Versuche, so entstehn ganz andere Resultate. Mit Beibehaltung der angenommenen Bezeichnung erhält man

$\delta^n = \frac{r_m F}{A + BQ}$, und wenn $r = r'$ und $Q = Q'$ gesetzt wird, so erhält man

$\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^n = \frac{F'}{F}$ also $n \log \frac{\delta'}{\delta} = \log \frac{F'}{F}$, folglich

$$n = \frac{\log \frac{F'}{F}}{\log \frac{\delta'}{\delta}} = \frac{\log \frac{F'}{F}}{\log \frac{p'}{p}}$$

Berechnet man aus mehrern zusammengehörigen Versuchen die Werthe für n, so entsteht nachstehende Tafel

N°. der Versuche	r	Q	F′ : F	p′ : p	n
18.29	1	$12\frac{1}{2}$	3,2:11,0	20:28	3,6
23.34	2	$12\frac{1}{2}$	1,7: 5,0	20:28	3,2
1.13	$\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	2,0: 7,0	$12\frac{1}{2}$:20	2,6
25.36	2	$112\frac{1}{2}$	7,0:14,0	20:28	2,6
9.22	1	$312\frac{1}{2}$	15,0:41,0	$12\frac{1}{2}$:20	2,1
7.20	1	$112\frac{1}{2}$	6,5:17,0	$12\frac{1}{2}$:20	2,0
12.28	2	$512\frac{1}{2}$	11,0:27,0	$12\frac{1}{2}$:20	1,9
9.33	1	$312\frac{1}{2}$	15,0:67,0	$12\frac{1}{2}$:28	1,8
11.38	2	$312\frac{1}{2}$	7,2:31,0	$12\frac{1}{2}$:28	1,8
27.38	2	$312\frac{1}{2}$	16,7:31,0	20:28	1,8
12.39	2	$512\frac{1}{2}$	11,0:50,0	$12\frac{1}{2}$:28	1,8
10.26	2	$212\frac{1}{2}$	5,7:13,0	$12\frac{1}{2}$:20	1,7
10.37	2	$212\frac{1}{2}$	5,7:23,0	$12\frac{1}{2}$:28	1,7
11.27	2	$312\frac{1}{2}$	7,2:16,7	$12\frac{1}{2}$:20	1,7
5.17	$\frac{1}{2}$	$312\frac{1}{2}$	43,0:92,0	$12\frac{1}{2}$:20	1,6
20.31	1	$112\frac{1}{2}$	17,0:29,0	20:28	1,6

Die vorstehende Tafel giebt so abweichende Werthe für n, daß man die Hoffnung beinahe aufgeben muß, einen allgemein gültigen Ausdruck für F zu finden, welcher nur allein auf die Versuche §. 316. paßt. Eben so abweichende Werthe erhält man, wenn die willkürlich angenommenen Koefficienten A und B bestimmt werden, es bleibt daher nichts übrig, als daß man, wenn eine bedeutende Genauigkeit verlangt wird, sehr verschiedene Ausdrücke für F bildet und die Grenzen genau bestimmt, innerhalb welchen sie angewandt werden können. Wollte man sich für n mit einem Mittelwerthe begnügen, so kann $n = 2$ gesetzt werden.

In der Neuen Architektura Hydraulika von Prony findet man §. 1180. folgenden Ausdruck zur Berechnung der Steifigkeit der Seile angegeben

$$F = \frac{\delta^{1{,}7}}{r} (2{,}45 + 0{,}053\, Q)$$

wo sich r und δ auf pariser Linien und Q, F auf pariser Pfunde beziehen. Allein derselbe ist nur vorzüglich für die Coulombsche Versuche N°. 29 bis 33. §. 316. entwickelt. Wollte man denselben auch auf die übrigen Versuche, z. B. auf N°. 1. anwenden, so erhält man $F = 12{,}045$ Pfund, statt daß die Versuche $F = 2$ Pfund geben.

§. 320.

Weil es für die Ausübung zu weitläuftig ist, nach mehrern Formeln die Steifigkeit der Seile zu berechnen, und da sich schon aus den vorhergehenden drei §§. ergiebt, daß dennoch keine große Genauigkeit zu erwarten ist, überdies aber selbst bei gleich dicken Seilen öfters eine ansehnliche Verschiedenheit in Absicht ihrer Steifigkeit statt findet, so wird es genügen, einen weniger zusammengesetzten Ausdruck für F anzunehmen. Da sich nun die zum Biegen der Seile erforderliche Kraft F nahe genug wie die Spannung

Q, wie das Quadrat von der Dicke des Seiles (δ^2) und umgekehrt wie der Halbmesser r der Rolle verhält, so kann man

$$F = k\frac{\delta^2}{r} Q$$

setzen, wo k ein aus den Versuchen zu bestimmender Koefficient ist. Hieraus findet man, weil $p = \pi\delta$

$$k = \frac{Fr}{\delta^2 Q} = \frac{\pi^2 Fr}{p^2 Q} \text{ oder}$$

$$\frac{p^2 Q}{Fr} = \frac{\pi^2}{k}$$

Die Werthe für $\frac{p^2 Q}{Fr}$ sind in der Tafel §. 316. berechnet. Zur Bestimmung eines Mittelwerthes addire man solche und dividire durch die Anzahl der Versuche, so erhält man

$$\frac{118548,50}{42} = 2822,58 = \frac{\pi^2}{k}$$

oder weil $\pi^2 = 9,8696$ ist, so erhält man

$$\frac{1}{k} = \frac{2822,58}{9,8696} = 285,98; \text{ also}$$

$$k = \frac{1}{285,98}$$

Dies giebt $F = k\frac{\delta^2}{r} Q = \frac{\delta^2 Q}{285,98 r}$. Weil aber hier δ in Linien und r in Zollen ausgedrückt ist, so muß 12 r statt r gesetzt werden, wenn sich der Halbmesser r der Rolle auf Fußmaaß beziehen soll. Dies giebt

$$F = \frac{\delta^2 Q}{3431,76 r}$$

indem, zur Vermeidung der Brüche, δ in Linien ausgedrückt beibehalten werden kann. Weil sich aber alle

Größen auf das pariser Maaß beziehen (§. 316.), so ist noch die nöthige Abänderung vorzunehmen, damit der Ausdruck für F für die hier angenommenen Maaße und Gewichte gilt. Giebt man dem gefundenen Ausdrucke folgende Gestalt, $\frac{F}{Q} = \frac{\delta}{r} \cdot \frac{\delta}{3431,76}$, so läßt sich übersehen, daß $\frac{F}{Q}$ ungeändert bleibt, wenn F, Q in einerlei Gewicht ausgedrückt werden. Dasselbe gilt in Absicht des Längenmaaßes eines jeden Landes für $\frac{\delta}{r}$, wenn nur r in Fußen und δ in Linien ausgedrückt wird, deren 144 auf einen Fuß gehen. Es bleibt also nur noch der Ausdruck $\frac{\delta}{3431,76}$ übrig. Will man nun δ nach rheinländischen Linien in Rechnung bringen, statt daß solches nach pariser Linien geschehen sollte, so müssen die δ rheinländische Linien in pariser verwandelt werden. Nun ist 1 rheinländische Linie = 0,96618 pariser, daher erhält man $\frac{0,96618\,\delta}{3431,76}$ statt $\frac{\delta}{3431,76}$ oder weil $\frac{0,96618\,\delta}{3431,76} = \frac{\delta}{3551,9}$, so kann man um so mehr dafür $\frac{\delta}{3500}$ annehmen, damit die Kraft F nicht zu klein gefunden werde. Es ist daher die zum Biegen des Seiles über eine Rolle erforderliche Kraft

$$F = \frac{\delta^2 Q}{3500\,r} = \frac{k\delta^2 Q}{r}$$

nur ist bei diesem Ausdrucke wohl zu bemerken, daß

r der Halbmesser der Rolle, in rheinländischem Fußmaaße, und

δ die Dicke des Seiles in rheinländischen Linien ausgedrückt werden müssen.

Uebrigens findet man in demselben Gewichte, worin Q ausgedrückt wird, auch F.

Beispiel. Ueber eine Rolle, deren Halbmesser zwei Zoll beträgt, hängt ein 9 Linien dickes Seil. An jedem Ende des Seiles sind 60 Pfund Last befestigt, man sucht die zur Ueberwältigung der Steifigkeit erforderliche Kraft.

Hier ist die Spannung Q = 60 Pfund; $\delta = 9'''$ und $r = \frac{1}{6}$ Fuß, daher die gesuchte Kraft

$$F = \frac{9 \cdot 9 \cdot 60}{3500 \cdot \frac{1}{6}} = 8{,}3 \text{ Pfund.}$$

§. 321.

Aufgabe. Die erforderliche Kraft V zu finden, welche bei einer festen Rolle mit der Steifigkeit des Seiles, der Reibung am Zapfen und mit der Last Q im Gleichgewichte ist.

Auflösung. Mit Beibehaltung der bisher angenommenen Bezeichnung, und wenn vorausgesetzt wird, daß die Seile nach vertikalen Richtungen gespannt sind, ist der Vertikaldruck des Zapfens auf die Pfanne $= V + Q + M$. Das davon entstehende Moment der Reibung $= \mu\varrho\ (V + Q + M)$. Die Spannung des Seiles, welches gebogen wird, $= Q$, also die zur Biegung erforderliche Kraft $= \frac{\delta^2 Q}{3500 r} = \frac{k\delta^2 Q}{r}$ und das Moment derselben $= k\delta^2 Q$. Endlich ist das Moment der Last $= rQ$, daher für das Gleichgewicht

$$rV = rQ + \mu\varrho(V + Q + M) + k\delta^2 Q$$

und man findet hieraus die Kraft

$$\text{(I)} \quad V = \frac{(r + \mu\varrho + k\delta^2)\,Q + \mu\varrho M}{r - \mu\varrho}$$

wo $k = \frac{1}{3500}$ ist.

Wird das Gewicht M der Rolle bei Seite gesetzt, so erhält man

$$\text{(II)} \quad V = \frac{r + \mu\varrho + k\delta^2}{r - \mu\varrho}\,Q$$

Beispiel. Mittelst einer Rolle, welche 12 Pfund wiegt und deren Halbmesser 3 Zoll ist, soll an einem 10 Linien dicken Seile eine Last von 500 Pfund aufgezogen werden; man sucht die erforderliche Kraft, wenn der Halbmesser des Bolzens $\frac{1}{2}$ Zoll beträgt, und $\mu = \frac{1}{5}$ ist.

Hier wird $r = \frac{1}{4}$, $\varrho = \frac{1}{24}$ Fuß; $\delta = 10$ Linien; $Q = 500$ und $M = 12$ Pfund, daher ist die Kraft

$$V = \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5 \cdot 24} + \frac{100}{3500}\right) 500 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24} \cdot 12}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5 \cdot 24}} = 594{,}00 \text{ Pfund}$$

Setzt man $M = 0$, so wird

$$V = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{5 \cdot 24} + \frac{100}{3500}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5 \cdot 24}} \cdot 500 = 593{,}45 \text{ Pfund}$$

welches nur wenig von 594 verschieden ist.

§. 322.

Aufgabe. Die Kraft V zu finden, welche bei einer beweglichen Rolle erfordert wird, um der Steifigkeit des Seiles, der Reibung am Zapfen und der Last Q das Gleichgewicht zu halten.

Auflösung. Man setze das Gewicht der Rolle, an welcher das Gewicht Q frei hängt = M und die Spannung des Seiles AB, Figur 90., welches in A Taf. IV. Fig. 90.

befestiget ist $= S$. Die Kraft V wirke nach vertikaler Richtung aufwärts, so ist Q der Druck des Zapfens gegen die Pfanne und das Moment der Reibung $= \mu \varrho Q$. Die Spannung des Seiles, welches gebogen wird, ist S, daher die Kraft zum Biegen $= \frac{k\delta^2 S}{r}$, und deren Moment $= k\delta^2 S$. Endlich ist das Moment der Spannung $= rS$; man findet daher das Moment der Kraft V, welche diesen Momenten das Gleichgewicht halten muß

$$rV = rS + \mu\varrho Q + k\delta^2 S.$$

Ferner wird für das Gleichgewicht erfordert $S + V = Q + M$, dies giebt $S = Q + M - V$ also

$$rV = (r + k\delta^2)(Q + M) - (r + k\delta^2)V + \mu\varrho Q$$

folglich erhält man die gesuchte Kraft

$$\text{(I)}\quad V = \frac{(r + k\delta^2)(Q + M) + \mu\varrho Q}{2r + k\delta^2} \text{ oder auch}$$

$$V = \frac{(r + k\delta^2 + \mu\varrho)\,Q + (r + k\delta^2)\,M}{2r + k\delta^2}.$$

Für $M = 0$ wird

$$\text{(II)}\quad V = \frac{r + k\delta^2 + \mu\varrho}{2r + k\delta^2}\,Q.$$

Wollte man die Kraft V aus der Spannung S des Seiles AB finden, so erhält man statt $rV = rS + \mu\varrho Q + k\delta^2 S$, wenn $S + V - M$ für Q gesetzt wird, die Kraft

$$\text{(III)}\quad V = \frac{(r + \mu\varrho + k\delta^2)\,S - \mu\varrho M}{r - \mu\varrho}$$

und für $M = 0$

$$\text{(IV)}\quad V = \frac{r + \mu\varrho + k\delta^2}{r - \mu\varrho}\,S$$

welcher Ausdruck mit (II) im vorigen §. übereinkommt.

Beispiel. An einer beweglichen Rolle, welche 12 Pfund wiegt und deren Halbmesser 3 Zoll ist, hängt eine Last von 1000 Pfund. Die Dicke des Seiles ist 10 Linien und der Halbmesser des Zapfens $\frac{1}{2}$ Zoll. Wie viel Kraft wird man anwenden müssen, damit diese Last bei dem kleinsten Ueberschusse an Kraft vertikal aufwärts gezogen wird, wenn $\mu = \frac{1}{5}$ ist.

Hier wird $r = \frac{1}{4}$, $\varrho = \frac{1}{24}$ Fuß; δ = 10 Linien, $Q = 1000$ und $M = 12$ Pfund, daher ist die Kraft

$$V = \frac{(\frac{1}{4} + \frac{100}{3500})(1000 + 12) + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24} \cdot 1000}{2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{100}{3500}} = 549{,}3 \text{ Pfund}$$

Für $M = 0$ wird

$$V = \frac{\frac{1}{4} + \frac{100}{3500} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24}}{2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{100}{3500}} \cdot 1000 = 542{,}8 \text{ Pfund.}$$

Anmerkung. Es könnte scheinen, als wenn man nicht berechtigt wäre, die beiden Spannungen $S + V$ der Last $Q + M$ gleich zu setzen, weil ein Theil der Spannung V auf die Reibung und Steifigkeit des Seiles verwandt wird, und daß man diesen Theil vorher abziehen müßte, ehe man die Spannungen $S + V$ der Last $Q + M$ gleich setzen kann. Allein es ist zu erwägen, daß der Erfolg von der auf die Reibung verwandten Kraft kein anderer ist, als daß der Unterstützungspunkt der Last außer der Vertikale durch den Mittelpunkt des Bolzens näher nach der Richtung von V fällt, wie solches §. 230. auseinander gesetzt ist. Eben so bewirkt die Kraft, welche von V auf die Steifigkeit des Seiles verwandt wird, daß sich das Seil AB biegen muß (§. 313.), weshalb die beiden Kräfte $S + V$ offenbar $= Q + M$ seyn müssen. Wollte man mit Herrn Langsdorf (Handbuch der Maschinenlehre 2ter Band, S. 87.) annehmen, daß $S + V$ größer als $Q + M$ ist, so denke man sich die ganze Maschine, an welcher die Kräfte S, V, Q, M wirken, frei schwebend; alsdann müßte solche noch im Gleichgewichte seyn, wenn sie vorher im Gleichgewichte war. Allein wegen $S + V > Q + M$ ist alsdann kein Gleichgewicht möglich, weshalb diese Voraussetzung nicht statthaft ist.

§. 323.

Außer den Versuchen mit neuen trocknen Seilen hat Coulomb noch andere mit nassen und mit getheerten Seilen angestellt. Er fand, daß die Feuchtigkeit die Biegsamkeit bei dünnen Seilen vermehrt, daß aber dicke Seile, besonders wenn sie von wenig Kraft gespannt werden, unbiegsamer sind, als trockne Seile bei übrigens gleichen Umständen. Dagegen war bei dünnen getheerten Seilen die Steifigkeit, in Vergleichung mit trocknen Seilen von eben den Abmessungen, nur wenig vermehrt, und nur bei dicken getheerten Seilen wurde die Steifigkeit um etwa $\frac{1}{6}$ größer, als bei trocknen Seilen.

IV. Von dem Rollen- und Flaschenzuge.

§. 324.

Die Verbindung mehrerer einzelner Rollen durch darüber geschlungene Seile, um mit Hülfe derselben eine Last zu heben, heißt ein Rollenzug (*Systême de poulies*). Befinden sich hingegen mehrere Rollen in einerlei Gehäuse oder Hülse über oder neben einander, so daß sich keine Rolle ohne das Gehäuse von der Stelle bewegen kann, so heißt eine solche engere Verbindung der Rollen, ein Kloben oder eine Flasche (Rechamus. *Mouffle*).

Die Verbindung zweier Flaschen mittelst Seile heißt ein Flaschenzug (Polyspastus), wo man, wie bei den Rollen, die bewegliche Flasche von der unbeweglichen unterscheidet.

Die gewöhnlichste Einrichtung eines Rollenzuges ist Figur 176. abgebildet, wo an der untersten beweglichen Taf. XI.
Rolle B die Last Q hängt. Ueber derselben befinden sich Fig. 176.
mehr oder weniger bewegliche Rollen wie D, F und jedes Seil, welches um eine Rolle geht, ist mit dem einen Ende oberhalb wie bei A, C, E an einer festen Wand und mit dem andern Ende wie bei D, F, an der Hülse von der darüber befindlichen Rolle befestigt. Das letzte Seil FGH geht über eine Handrolle G (*Poulie de renvoi*), welche fest ist, so daß mittelst einer am Ende des Seiles GH angebrachten Kraft V, die Last Q gehoben werden kann. Bei dieser Einrichtung ist es aber nicht möglich, die Last Q bis zur Handrolle G zu erheben, weil sich D von F und B von D desto mehr entfernt, je näher die Rolle F nach G kommt.

Die Flaschenzüge können auf mancherlei Art angeordnet werden, wie Figur 177. 178. 179. und 180., wo Figur 177. zu den gewöhnlichsten Einrichtungen gehört. Außer den in jeder Flasche abgebildeten Rollen können noch mehrere über und neben einander angebracht werden, wobei es jedesmal nur darauf ankommt, daß man den Anfang des Seiles entweder an den unbeweglichen Flaschen Figur 177. und 178. in A, oder an den beweglichen Flaschen, Figur 179. und 180., in A befestiget und solches zuerst um die kleinsten und dann um die größern herumlegt. Hat die Kraft V, welche am Ende des Seiles wirkt, eben die Richtung wie die Last Q, so sind HK, Figur 177., und LM, Figur 179., Handrollen. Will man, daß bei der Anordnung eines Flaschenzuges in beiden Flaschen gleich viel Rollen in jeder Flasche in Thätigkeit kommen sollen, so muß der Anfang A des Seiles an derjenige Flasche befestiget werden, um welche das letzte Ende V des Seiles geschlagen ist, wie bei Figur 177 und 180. Im entgegengesetzten Falle, wie bei Figur 178 und 179., wird allemal an derjenigen Flasche, woran das Seil befestigt ist, eine Rolle weniger als bei der andern Flasche erfordert.

Bei den nachstehenden Untersuchungen wird jedesmal vorausgesetzt werden, daß die Richtung der gespannten Seile parallel ist, weil die etwanige geringe Abweichung von der parallelen Lage bei gut angeordneten Rollen- und Flaschenzügen keinen erheblichen Einfluß auf die Vermehrung der Kraft haben kann. Eben so wird auch das Gewicht der Seile bei Seite gesetzt werden.

§. 325.

Aufgabe. Aus der gegebenen Last Q beim Rollenzuge die Größe der Kraft V zu finden, wenn man die Seile als vollkommen biegsam annimmt und die Reibung bei Seite setzt.

Taf. XI. Auflösung. Die Anzahl der beweglichen Rollen
Fig. 177. B, D, F, Figur 177. sey n; die Spannung des ersten
n Seiles $AB = T'$, des zweiten $CD = T''$, des dritten T'''

u. s. w. und des letzten oder nten Seiles (EF) $= V'$, so ist, wenn das Gewicht einer jeden beweglichen Rolle $=$ M ist, nach §. 171.

$$T' = \tfrac{1}{2}(Q + M)$$

Weil aber das Seil BD ebenfalls mit der Kraft T' gespannt ist, so wird aus ähnlichen Gründen

$T'' = \tfrac{1}{2}(T' + M)$ oder wenn man für T' seinen Werth setzt

$$T'' = \frac{1}{4}Q + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)M = \frac{1}{2^2}Q + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\right)M;$$

$$T''' = \frac{1}{2}(T'' + M) = \frac{1}{2^3}Q + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\right)M$$

und man erhält auf eine ähnliche Art die Spannung für das letzte oder nte Seil

$$V' = \frac{1}{2^n}Q + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \ldots \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\right)M$$

oder $V' = \frac{1}{2^n}Q + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)M$

Die Zahlen in der Parenthese bilden eine geometrische Reihe, von welcher n die Anzahl der Glieder und $\frac{1}{2}$ der Exponent ist, daher findet man die Summe dieser Reihe

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{1 - 2} = \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{-1} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Es ist daher

$$V' = \frac{1}{2^n}Q + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)M = \frac{Q - M}{2^n} + M$$

Nun ist V' die Spannung des letzten Seiles EF, welche der Spannung des Seiles FG gleich ist, und weil dadurch, daß dieses Seil über die Handrolle G geht, die

Spannung nicht geändert wird, so ist auch die Spannung des Seiles $GH = V'$. Zur Erhaltung des Gleichgewichtes muß aber die Kraft V der Spannung V' gleich seyn, daher erhält man $V' = V$ und man findet die für das Gleichgewicht erforderliche Kraft

$$\text{(I)}\quad V = \frac{Q-M}{2^n} + M$$

wo n die Anzahl der beweglichen Rollen bezeichnet. Wird das Gewicht der Rollen bei Seite gesetzt, so ist $M = 0$ also

$$\text{(II)}\quad V = \frac{1}{2^n}\,Q.$$

Beispiel. An einem Rollenzuge sind drei bewegliche Rollen, wovon jede 12 Pfund wiegt; man sucht die Kraft V, welche erfordert wird, einer Last von 800 Pfund das Gleichgewicht zu halten. Hier ist $Q = 800$, $M = 12$ Pfund und $n = 3$, daher die Kraft

$V = \frac{1}{8}(800 - 12) + 12 = 110\frac{1}{2}$ Pfund.

Für $M = 0$ ist

$V = \frac{1}{8} \cdot 800 = 100$ Pfund.

§. 326.

Zusatz. Aus der gegebenen Kraft V, dem Gewichte M und der Anzahl der Rollen findet man die Last

$$\text{(I)}\quad Q = 2^n(V - M) + M$$

und wenn man die erforderliche Anzahl der beweglichen Rollen sucht, so ist

$$2^n = \frac{Q-M}{V-M} \text{ also } \log 2^n = n \log 2 = \log \frac{Q-M}{V-M} \text{ oder}$$

$$\text{(II)}\quad n = \frac{\log(Q-M) - \log(V-M)}{\log 2}.$$

Wird durch die Rechnung für n keine ganze Zahl gefunden,

den, so muß statt des Bruches eine Einheit mehr gerechnet werden, in welchem Falle die Kraft V verhältnißmäßig etwas kleiner angenommen werden kann.

Beispiel. Man sucht die Anzahl der erforderlichen beweglichen Rollen bei einem Rollenzuge, wenn jede Rolle 12 Pfund wiegt und mit einer Kraft von $110\frac{1}{2}$ Pfund einer Last von 800 Pfund das Gleichgewicht gehalten werden soll.

Hier ist $V = 110\frac{1}{2}$, $Q = 800$ und $M = 12$ Pfund, daher

$$\log(Q - M) = \log 788 = 2{,}8965262$$
$$\log(V - M) = \log 98{,}5 = \underline{1{,}9934362}$$
$$0{,}9030900$$

$\log 2 = 0{,}3010300$; folglich ist die Anzahl der beweglichen Rollen oder

$$n = \frac{0{,}9030900}{0{,}3010300} = 3$$

§. 327.

Aufgabe. Die Kraft V bei einem Rollenzuge zu finden, welche mit der Last Q, der Reibung an den Rollzapfen und der Steifigkeit der Seile das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Man bezeichne durch

r den Halbmesser jeder Rolle,

ϱ den Halbmesser jedes Rollzapfens,

δ die Dicke des Seiles (in Linien ausgedrückt)

M das Gewicht jeder Rolle, und durch

n die Anzahl der beweglichen Rollen.

Ferner sei

$$A = \frac{r + k\delta^2 + \mu\varrho}{2r + k\delta^2} \text{ und } B = \frac{r + k\delta^2}{2r + k\delta^2}$$

auch bezeichne man durch

Taf.XI. T' die Spannung des ersten Seiles BD, Figur 176.
Fig.176. T'' die Spannung des zweiten Seiles BF,

T''' die Spannung des dritten Seiles,

u. s. w. und durch

V' die Spannung des $n$ten oder letzten Seiles FG,

so ist §. 322. I.

$$T' = AQ + BM$$
$$T'' = AT' + BM$$
$$T''' = AT'' + BM \text{ u. s. w.}$$

und wenn man die Werthe für T', T''... in die darauf folgenden Gleichungen setzt, so wird:

$$T' = AQ + BM$$
$$T'' = A^2 Q + (1 + A) BM$$
$$T''' = A^3 Q + (1 + A + A^2) BM.$$

\- - - - - - - - - - - - -

$$V' = A^n Q + (1 + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}) BM$$

Nun ist die Summe der geometrischen Progression

$1 + A + A^2 + \ldots + A^{n-1} = \frac{A^n - 1}{A - 1} = \frac{1 - A^n}{1 - A}$ daher die Spannung des Seiles FG oder

$$V' = A^n Q + \frac{1 - A^n}{1 - A} BM.$$

Man setze

$$C = \frac{r + k\delta^2 + \mu\varrho}{r - \mu\varrho}; \quad D = \frac{\mu\varrho}{r - \mu\varrho}$$

und die Spannung des Seiles $GH = V''$, so ist §. 321. I.

$V'' = CV' + DM$, daher

$$V'' = A^n CQ + \frac{1 - A^n}{1 - A} BCM + DM$$

oder weil die Spannung V'' der Kraft V gleich seyn muß, so erhält man die zum Gleichgewichte erforderliche Kraft

$$\text{(I)}\quad V = A^n CQ + \frac{1-A^n}{1-A} BCM + DM.$$

Setzt man das Gewicht der Rollen bei Seite, so wird $M = 0$, also

$$\text{(II)}\quad V = A^n CQ = \frac{(r + k\delta^2 + \mu\varrho)^{n+1}}{(2r + k\delta^2)^n\,(r - \mu\varrho)}\,Q.$$

Beispiel. Ein Rollenzug besteht aus drei beweglichen Rollen, deren jede 6 Zoll im Durchmesser hat und 12 Pfund wiegt; der Halbmesser jedes Rollzapfens ist $\frac{1}{2}$ Zoll und die Dicke des Seiles 10 Linien; man sucht die erforderliche Kraft, welche einer Last von 800 Pfund das Gleichgewicht hält.

Hier ist $r = \frac{1}{4}$, $\varrho = \frac{1}{24}$ Fuß; $\delta = 10$ Linien; $Q = 800$, $M = 12$ Pfund, und $n = 3$. Setzt man nun $\mu = \frac{1}{6}$, so ist, weil §. 320. $k = \frac{1}{3500}$, der Werth von

$$A = \frac{\frac{1}{4} + \frac{100}{3500} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{24}}{2\cdot\frac{1}{4} + \frac{100}{3500}} = \frac{0{,}28551}{0{,}52857} = 0{,}5401$$

$$A^n = A^3 = 0{,}1576$$

$$B = \frac{\frac{1}{4} + \frac{100}{3500}}{2\cdot\frac{1}{4} + \frac{100}{3500}} = 0{,}5270$$

$$C = \frac{\frac{1}{4} + \frac{100}{3500} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{24}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{24}} = 1{,}1746$$

$$D = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{24}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{24}} = 0{,}0244 \text{ und}$$

$$\frac{1-A^n}{1-A} = \frac{0{,}8424}{0{,}4599} = 1{,}8317$$

daher findet man die Kraft

$V = 0{,}1576 \cdot 1{,}1746 \cdot 800 + 1{,}8317 \cdot 0{,}527 \cdot 1{,}1746 \cdot 12 + 0{,}0244 \cdot 12 = 148{,}093 + 10{,}808 + 0{,}293 = 159{,}19$ Pfund.

Wollte man das Gewicht M der Rollen bei Seite setzen, so findet man

$$V = 0{,}1576 \cdot 1{,}1746 \cdot 800 = 148{,}09 \text{ Pfund.}$$

Diese Rechnungen können am leichtesten mit Hülfe der Logarithmen ausgeführt werden.

§. 328.

Zusatz. Wollte man aus der gegebenen Kraft und den übrigen Abmessungen eines Rollenzuges die Größe der Last Q bestimmen, so erhält man, wenn diese aus der zuletzt gefundenen Formel entwickelt wird, die Last

$$Q = \frac{V - DM}{A^n C} - \frac{(1 - A^n) BM}{(1 - A) A^n}.$$

Soll hingegen die Anzahl der beweglichen Rollen gesucht werden, so ist

$$A^n = \frac{(1-A)(V-DM) - BCM}{(1-A) CQ - BCM}, \text{ folglich}$$

$$n = \frac{\log[(1-A)(V-DM)-BCM] - \log[(1-A)CQ-BCM]}{\log A}$$

§. 329.

Aufgabe. Bei dem Flaschenzuge die für das Gleichgewicht erforderliche Kraft zu finden, wenn auf die Steifigkeit der Seile und auf die Reibung nicht Rücksicht genommen wird.

Auflösung. Es sey V die gesuchte Kraft; Q die gegebene Last, M das Gewicht der untern oder beweglichen Flasche und m die Anzahl der gespannten Seile, an welchen die Last hängt, so ist die Kraft

$$V = \frac{Q + M}{m}.$$

Denn im Zustande des Gleichgewichts müssen die vollkommen biegsamen Seile gleich stark gespannt seyn, also ist die Summe von den Spannungen der Seile, an welchen die Last Q + M hängt, eben so groß als diese Last. Jedes Seil ist aber mit derselben Kraft V gespannt, welche an dem letzten Seile wirkt, daher m V = Q + M.

Um dies noch mehr zu erläutern, bemerke man, daß, Figur 177., die Last Q + M an den vier Seilen AB, CD, EF, GH hängt; es ist daher hier $V = \frac{1}{4}(Q + M)$ und wenn gleich noch das Seil KL vorhanden ist, so kann dasselbe doch nicht mit gerechnet werden, weil solches die Last nicht trägt und es zur Erhaltung der Last gleichgültig ist, ob dieses Seil über die Handrolle HK geht, oder ob solches ohne Handrolle, wie Figur 178., nach vertikaler Richtung GH aufwärts gezogen wird; in welchem Falle dennoch die Last an vier Seilen hängt, ob gleich alsdann nur drei Rollen erfordert werden. Eben so hängt die Last Q + M, Figur 179. und 180. an fünf Seilen; es ist daher hier $V = \frac{1}{5}(Q + M)$. Taf. XI. Fig. 177. Fig. 178. Fig. 179. 180.

§. 330.

Aufgabe. An einem Flaschenzuge befinden sich m gleich große Rollen; man sucht die Kraft V, welche der Last Q, der Steifigkeit der Seile und der Reibung an den Rollzapfen das Gleichgewicht hält.

Auflösung. So fern alle Rollen in den Flaschen von gleicher Größe sind, so können solche nicht über einander angebracht werden, sondern es wird erfordert, daß sie sich neben einander befinden. Man muß sich daher vorstellen, daß BC und DE, Figur 181., die vordern Rollen einer jeden Flasche sind, hinter welchen sich noch mehrere befinden können. Es bezeichne nun Taf. XI. Fig. 181.

r den Halbmesser jeder Rolle,

ϱ den Halbmesser des Rollzapfens,

δ die Dicke des Seiles (in Linien ausgedrückt), M das Gewicht der untern oder beweglichen Flasche, und

m die Anzahl der Rollen, welche mit der Anzahl der Seile, woran die Last hängt, gleich groß ist.

Ferner setze man

$$C = \frac{1 + k\delta^2 + \mu\varrho}{1 - \mu\varrho}$$

und bezeichne durch

T' die Spannung des ersten Seiles AB,

T'' die Spannung des zweiten Seiles CD,

T''' die Spannung des dritten Seiles EB,

T'''' die Spannung des vierten Seiles (bei CD) u. s. w. und durch

V' die Spannung des nten oder letzten Seiles (bei CD).

Es ist daher §. 322. IV., wenn man das Gewicht der einzelnen Rollen bei Seite setzt,

$T'' = CT'$; $T''' = CT''$; $T'''' = CT'''$; .....

oder wenn alles durch C und T' ausgedrückt wird

$$T' = 1 \,.\, T'$$
$$T'' = C \,.\, T'$$
$$T''' = C^2 \,.\, T'$$
$$T'''' = C^3 \,.\, T'$$
- - - - - - - - -
$$V' = C^{m-1}\, T'.$$

Soll ein Gleichgewicht entstehen, so müssen die Spannungen der Seile, woran die Last hängt, der Last gleich seyn, also

$$T' + T'' + T''' + \ldots + V' = Q + M \text{ oder}$$
$$(1 + C + C^2 + C^3 + \ldots + C^{m-1})\, T' = Q + M$$

oder weil die Summe der geometrischen Progression

$$1 + C + C^2 + C^3 + \ldots + C^{m-1} = \frac{C . C^{m-1} - 1}{C - 1} = \frac{C^m - 1}{C - 1}$$

so erhält man

$\frac{C^m - 1}{C - 1} T' = Q + M$ oder $T' = \frac{(C-1)(Q+M)}{C^m - 1}$. Aber

$V' = C^{m-1} T'$ daher $T' = \frac{V'}{C^{m-1}}$ folglich

$$V' = \frac{C^{m-1}(C-1)(Q+M)}{C^m - 1} = \frac{C^m - C^{m-1}}{C^m - 1}(Q + M)$$

welches die Spannung von dem $m$ten oder letzten Seile bei CD ist. Dieses Seil muß aber noch um die Handrolle bei DE gebogen werden, wenn es in die Lage EF kommen soll. Man setze daher die Spannung des Seiles $EF = V$, so ist §. 321. II. $V = CV'$ oder $V = C . \frac{C^m - C^{m-1}}{C^m - 1}(Q + M)$; oder, weil die Spannung des Seiles EF mit der an diesem Seile erforderlichen Kraft gleich groß ist, so findet man die Kraft

$$V = \frac{C^{m+1} - C^m}{C^m - 1}(Q + M).$$

wo $C = \frac{r + k\delta^2 + \mu\varrho}{r - \mu\varrho}$ ist.

Beispiel. An einem Flaschenzuge befinden sich acht gleich große Rollen, jede von $3\frac{1}{2}$ Zoll im Halbmesser. Der Halbmesser des Rollzapfens ist $\frac{1}{2}$ Zoll und die Dicke des Seiles 10 Linien; man sucht die erforderliche Kraft, um bei dieser Einrichtung mit dem kleinsten Ueberschusse eine Last von 900 Pfund in die Höhe zu heben, wenn das Gewicht der untern Flasche 100 Pfund beträgt.

Auflösung. Hier ist $r = \frac{3\frac{1}{2}}{12} = \frac{7}{24}$, $\varrho = \frac{1}{24}$ Fuß; $\delta = 10$ Linien; $Q = 900$, $M = 100$ Pfund und $m = 8$.

Ferner ist $k = \frac{1}{3500}$ und wenn $\mu = \frac{1}{5}$ gesetzt wird, so erhält man

$$C = \frac{\frac{7}{24} + \frac{100}{3500} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24}}{\frac{7}{24} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24}} = 1{,}1596$$

$$\log C = \log 1{,}1596 = 0{,}0643082$$

$$\log C^8 = 8 \log 1{,}1596 = 0{,}5144656 = \log 3{,}2694$$

$$\log C^9 = 9 \log 1{,}1596 = 0{,}5787738 = \log 3{,}7912 \text{ also}$$

$$\begin{aligned} C^{m+1} &= C^9 = 3{,}7912 \\ C^m &= C^8 = 3{,}2694 \\ C^{m+1} - C^m &= 0{,}5218 \text{ folglich} \end{aligned}$$

$$V = \frac{0{,}5218}{2{,}2694}(900 + 100) = 229{,}9 \text{ Pfund.}$$

Wird die Reibung und Steifigkeit der Seile bei Seite gesetzt, so wäre §. 329. $V = \frac{1000}{8} = 125$ Pfund, also wird in dem vorliegenden Falle lediglich auf Reibung und Steifigkeit eine Kraft von 104,9 Pfund verwendet.

§. 331.

Zusatz. Zieht die Kraft nicht abwärts, sondern vertikal aufwärts der Richtung der Last entgegen, so darf das letzte Seil nicht über die Handrolle gebogen werden. Setzt man in diesem Falle die zur Erhaltung des Gleichgewichtes erforderliche Kraft $= V'$, so ist

$$V' = \frac{C^m - C^{m-1}}{C^m - 1}(Q + M).$$

§. 332.

Aufgabe. Aus der gegebenen Last und Kraft bei einem Flaschenzuge von gleich großen Rollen, die für das Gleichgewicht erforderliche Anzahl der Rollen zu finden, wenn die übrigen Abmessungen des Flaschenzuges bekannt sind.

Auflösung. Nach §. 330. ist

$V(C^m - 1) = (C^{m+1} - C^m)(Q + M)$ oder

$C^m V - V = C^m (C - 1)(Q + M)$ also

$C^m = \frac{V}{V - (C-1)(Q+M)}$; und man findet, weil $\log C^m = m \log C$ ist, die erforderliche Anzahl der Seile, woran die Last hängt, welche mit der Anzahl der Rollen gleich ist

$$m = \frac{\log V - \log [V - (C-1)(Q+M)]}{\log C}.$$

Fände man für m keine gerade Zahl, so muß die nächst größere gerade Zahl dafür angenommen werden, weil nach der vorausgesetzten Anordnung in jeder Flasche gleich viel Rollen seyn müssen.

§. 333.

Aufgabe. Aus den gegebenen Abmessungen eines Flaschenzuges, welcher aus n Paar Rollen von zweierlei Durchmessern besteht, die Kraft V zu finden, welche einer gegebenen Last Q, der Steifigkeit der Seile und der Reibung an den Rollzapfen das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Der Flaschenzug habe die Einrichtung Taf. XI. Figur 177., wo man sich hinter jeden Rollen noch die Fig. 177. erforderliche Anzahl hinzu denken kann. Man bezeichne durch

a den Halbmesser der kleinen Rollen BC, DE,

b den Halbmesser der großen Rollen FG, HK,

α den Halbmesser des Zapfens der kleinen Rollen,

β den Halbmesser des Zapfens der großen Rollen,

δ die Dicke des Seiles (in Linien)

M das Gewicht der untern oder beweglichen Flasche,

n die halbe Anzahl sämmtlicher Rollen, welche mit der halben Anzahl der Seile, woran die Last hängt, übereinkommt.

Ferner setze man

$$C = \frac{a + k\delta^2 + \mu\alpha}{a - \mu\alpha};\ E = \frac{b + k\delta^2 + \mu\beta}{b - \mu\beta}$$

und bezeichne bei den kleinen Rollen durch

t' die Spannung des ersten Seiles AB,

t'' die Spannung des zweiten Seiles CD,

t''' die Spannung des dritten Seiles EB,

t'''' die Spannung des vierten Seiles bei CD u. s. w. und durch

v' die Spannung des nten oder letzten Seiles an den kleinen Rollen bei CD.

Ferner bezeichne man auf eine ähnliche Art bei den großen Rollen durch

T' die Spannung des ersten Seiles EF,

T'' die Spannung des zweiten Seiles GH,

T''' die Spannung des dritten Seiles KF u. s. w. und durch

V' die Spannung des nten oder letzten Seiles bei GH, so ist nach §. 322. IV., wenn man das Gewicht der einzelnen Rollen bei Seite setzt, wie §. 330.

$t' = 1 \,.\, t'$

$t'' = C \,.\, t'$

$t''' = C^2\, t'$

$t'''' = C^3\ t'$

- - - - - - - - -

$v' = C^{n-1}\ t'$

Eben so findet man bei den großen Rollen

$T' = 1 . T'$

$T'' = E . T'$

$T''' = E^2 . T'$

- - - - - - - - - -

$V' = E^{n-1}\ T'$

Das Gleichgewicht zwischen der Last $(Q + M)$ und sämmtlichen Spannungen erfordert

$$Q + M = t' + t'' + t''' + \dots + v' + T' + T'' + T''' + \dots + V' \text{ oder}$$

$$Q + M = (1 + C + C^2 + \dots C^{n-1})\, t' + (1 + E + E^2 + \dots E^{n-1})\ T'$$

Es ist aber

$$1 + C + C^2 + \dots C^{n-1} = \frac{C^n - 1}{C - 1} \text{ und}$$

$$1 + E + E^2 + \dots + E^{n-1} = \frac{E^n - 1}{E - 1}, \text{ daher}$$

$$Q + M = \frac{C^n - 1}{C - 1}\, t' + \frac{E^n - 1}{E - 1}\, T' \quad [I]$$

Ferner war nach dem Vorhergehenden

$V' = E^{n-1}\ T'$ also $T' = \frac{V'}{E^{n-1}}$

Aus der Spannung v' des nten Seiles findet man (§. 322.) die Spannung T' des folgenden

$T' = Cv'$ also $v' = \frac{T'}{C}$. Es ist aber auch

$v' = C^{n-1}\ t'$ also $t' = \frac{v'}{C^{n-1}}$ oder

$$t' = \frac{T'}{C\,C^{n-1}} = \frac{T'}{C^n} = \frac{V'}{C^n\,E^{n-1}}$$

Setzt man die für t', T' gefundenen Werthe in die Gleichung [I], so erhält man

$$Q+M = \frac{C^n - 1}{C - 1} \cdot \frac{V'}{C^n\,E^{n-1}} + \frac{E^n - 1}{E - 1} \cdot \frac{V'}{E^{n-1}} \text{ oder}$$

$$Q+M = \frac{(C^n - 1)(E - 1) + C^n\,(C - 1)(E^n - 1)}{C^n\,E^{n-1}\,(C - 1)(E - 1)} \cdot V'$$

und hieraus

$$V' = \frac{C^n\,E^{n-1}\,(C-1)(E-1)(Q+M)}{C^n\,(C-1)(E^n-1)+(C^n-1)(E-1)}$$

Das letzte Seil bei GH, dessen Spannung V' ist, muß noch um die letzte Rolle bei HK gebogen werden, um in die Lage KL zu kommen. Nun ist die Spannung des Seiles KL der Kraft V gleich, daher (§. 321.) $V = EV'$, also $V' = \frac{V}{E}$ oder wenn statt V' der gefundene Werth gesetzt wird, so erhält man ganz allgemein die zur Erhaltung des Gleichgewichts erforderliche Kraft

$$V = \frac{C^n\,E^n\,(C-1)(E-1)(Q+M)}{C^n\,(C-1)(E^n-1)+(C^n-1)(E-1)}.$$

wo $C = \frac{a + k\delta^2 + \mu\alpha}{a - \mu\alpha}$

$E = \frac{b + k\delta^2 + \mu\beta}{b - \mu\beta}$ und

n die halbe Anzahl der Rollen oder 2n die Anzahl sämmtlicher Seile bezeichnet, woran die Last hängt.

Beispiel. Ein Flaschenzug von zweierlei Rollen hat in jeder Flasche 4, also überhaupt 8 Rollen, und man soll mittelst desselben eine Last von 900 Pfund in die Höhe ziehen; wie viel Kraft wird zur Ueberwäl=

tigung dieser Last und der übrigen Hindernisse der Bewegung erfordert, wenn das Gewicht der untern Flasche 100 Pfund, der Halbmesser der großen Rollen 4 Zoll, der kleinen 3 Zoll, der Halbmesser der Bolzen $\frac{1}{2}$ Zoll und die Dicke des Seiles 10 Linien beträgt?

Hier ist $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{5}$, $\alpha = \beta = \frac{1}{24}$ Fuß; $\delta = 10$ Linien; $Q = 900$, $M = 100$ Pfund und $n=4$; daher, weil $k = \frac{1}{3500}$ ist, und wenn $\mu = \frac{1}{5}$ gesetzt wird, findet man

$$C = \frac{\frac{1}{4} + \frac{100}{3500} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24}} = 1,1872$$

$$E = \frac{\frac{1}{5} + \frac{100}{3500} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24}} = 1,1392$$

$$\log C = \log 1,1872 = 0,0745239$$
$$\log C^4 = 4 \log 1,1872 = 0,2980956 = \log 1,9866$$
$$\log E = \log 1,1392 = 0,0566000$$
$$\log E^4 = 4 \log 1,1392 = 0,2264000 = \log 1,6842$$
$$\log (C-1) = \log 0,1872 = 0,2773058 - 1$$
$$\log (C^4-1) = \log 0,9866 = 0,9941411 - 1$$
$$\log (E-1) = \log 0,1392 = 0,1436392 - 1$$
$$\log (E^4-1) = \log 0,6842 = 0,8351831 - 1$$
$$\log (Q+M) = \log 1000 = 3,0000000$$

$$\begin{array}{l} 0,2980956 \\ 0,2264000 \\ 0,2773058 - 1 \\ 0,1436392 - 1 \\ \underline{3,0000000} \\ 1,9454406 = \log [C^4 E^4 (C-1)(E-1)(Q+M)] = \log 88,19432 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0,2980956 \\ 0,2773058 - 1 \\ \underline{0,8351831 - 1} \\ 0,4105845 - 1 = \log [C^n (C-1)(E^n-1)] = \log 0,25738 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0,9941411 - 1 \\ \underline{0,1436392 - 1} \\ 0,1377803 - 1 = \log [(C^n - 1)(E-1) = \log 0,13733 \end{array}$$

Hieraus erhält man die Kraft

$$V = \frac{88,19432}{0,25738 + 0,13733} = 223,4 \text{ Pfund.}$$

§. 334.

Zusatz. Will man die weitläuftige Rechnung des vorigen §. ersparen und sich mit einem ziemlich nahen Werthe begnügen, so darf man nur zwischen den Halbmessern a, b der Rollen und zwischen den Halbmessern α, β ihrer Zapfen das arithmetische Mittel nehmen und nach §. 330. so rechnen, als wenn die Rollen und Zapfen von gleicher Größe wären. Für das Beispiel des vorigen §. erhält man $\frac{a+b}{2} = \frac{3+4}{2} = 3\frac{1}{2}$, und wenn hienach der Werth von der Kraft V gesucht wird, so findet man nach §. 330. $V = 229,9$ Pfund, statt daß nach dem vorigen §. $V = 223,4$ Pfund seyn sollte.

Zwölftes Kapitel.

Von der Vertheilung des Druckes auf die Unterstützungspunkte der Körper.

§. 335.

Aufgabe. An einer festen, unbiegsamen, wagerechten Ebene, welche in den drei Punkten A, B, C, Figur 182., unterstützt ist, befindet sich in G ein Gewicht P; man sucht den Druck auf die Unterstützungspunkte. Taf. XII Fig. 182.

Auflösung. Es sei Q der gesuchte Druck auf A; Q′ auf B, Q″ auf C; ferner CA = a, CB = b; und, wenn DG mit CB parallel gezogen wird, CD = a′, DG = b′. Da nun die Pressungen Q, Q′, Q″ als Kräfte angesehen werden können, welche der Kraft P entgegen wirken und mit ihr im Gleichgewichte sind, so ist

$$P = Q + Q' + Q'' \text{ [I]}$$

Nimmt man BC als Axe der Momente an, so wird

$$a' P = a Q \text{ [II]}$$

und eben so, wenn man AC als Momentenaxe annimmt,

$$b' P = b Q' \text{ [III] (§. 61.)}$$

Hieraus findet man aus [II] den Druck auf A oder

$$Q = \frac{a'}{a} P$$

Aus [III] den Druck auf B oder

$$Q' = \frac{b'}{b} P$$

und aus [I] und den zuletzt für Q und Q′ gefundenen Werthen, den Druck auf C

$$Q''=(1-\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b})\ P.$$

Wäre die Ebene ABC die Grundfläche eines festen Körpers und G die Projection seines Schwerpunktes, so würde man ähnliche Resultate erhalten, wenn P das Gewicht des Körpers ausdrückt.

§. 336.

1. Zusatz. Für $a'=\frac{1}{3}a$ und $b'=\frac{1}{3}b$ fällt G in den Schwerpunkt des Dreiecks ABC und man erhält

$$Q=Q'=Q''=\tfrac{1}{3}P.$$

Fällt G auf A, so wird $a'=a;\ b'=0$ also

$$Q=P;\ Q'=0;\ Q''=0.$$

Aehnliche Resultate erhält man, wenn G auf B oder C fällt.

§. 337.

2. Zusatz. Man kann auch den Druck auf die
Taf. XII Fig. 183. Punkte A, B, C, Figur 183., noch anders ausdrücken, indem aus G nach diesen Punkten die Linien GA, GB, GC und auf die Seiten des Dreiecks die senkrechte Linien GD, GE, GF und AH, BK, CL gezogen werden. Alsdann ist (§. 61.)

$$Q=\frac{DG}{AH}P;\ Q'=\frac{EG}{BK}P;\ Q''=\frac{FG}{CL}P.$$

Es verhält sich aber:

$DG : AH = \triangle BCG : \triangle ABC$

$EG : BK = \triangle ACG : \triangle ABC$ und

$FG : CL = \triangle ABG : \triangle ABC.$

Hieraus

Hieraus findet man

$$\frac{DG}{AH} = \frac{\Delta BCG}{\Delta ABC}$$

$$\frac{EG}{BK} = \frac{\Delta ACG}{\Delta ABC} \text{ und}$$

$$\frac{FG}{CL} = \frac{\Delta ABG}{\Delta ABC}, \text{ daher ist}$$

der Druck auf A oder

$$Q = \frac{\Delta BCG}{\Delta ABC} P$$

der Druck auf B oder

$$Q' = \frac{\Delta ACG}{\Delta ABC} P$$

und der Druck auf C oder

$$Q'' = \frac{\Delta ABG}{\Delta ABC} P,$$

oder die Pressungen auf die Punkte A, B, C verhalten sich wie die Dreiecke BCG, ACG, ABG.

Nimmt man an, daß die Punkte B und G in die Linie AC fallen, oder daß die drei Unterstützungen in einer graden Linie liegen, so werden die Pressungen auf die Unterstützungen unbestimmt, weil alsdann die Inhalte der Dreiecke verschwinden.

* §. 338.

Aufgabe. Eine feste, unbiegsame, horizontale Ebene ist in den vier Punkten A, B, C, D, Figur 184., unterstützt und in G mit einem Gewichte P belastet; man sucht den Druck auf jeden Unterstützungspunkt. Taf. XII Fig. 184.

Auflösung. Man setze, daß Q, Q′, Q″, Q‴ die Pressungen auf A, B, C, D bezeichnen und es sei BF, CJ, GE auf AD senkrecht, $DA = a$, $DF = b$, $DJ = c$, $DE = e$; $BF = b'$, $CJ = c'$, $GE = e'$.

Aus den Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen P und den Pressungen auf die Unterstützungspunkte, erhält man folgende Gleichungen:

(I) $P = Q + Q' + Q'' + Q'''$ (§. 46.)

(II) $eP = aQ + bQ' + cQ''$ und

(III) $e'P = b'Q' + c'Q''$ (§. 64.)

und weil diese drei Gleichungen nicht zureichen, die Werthe der vier unbekannten Größen zu bestimmen, so läßt sich durch folgende Vorstellung noch eine vierte Gleichung erlangen. Man denke sich, daß die Unterlagen von den in einerlei Horizontalebene liegenden Punkten A, B, C, D, mit dieser Ebene, in eben dem Verhältniß, wie sie gedrückt werden, etwas nachgeben, so daß die Punkte A, B, C, D um die äußerst kleine Tiefen y, y', y'', y''' sinken, so muß die erweiterte schiefe Ebene, welche durch die tiefsten Punkte der Linien y, y', y'', y''' geht, die erweiterte Horizontalebene, in welcher A, B, C, D liegen, in irgend einer Horizontallinie MN durchschneiden. Man ziehe AA', BB', CC', DD', FF', JJ', auf MN senkrecht, verlängere AD bis M und setze den Winkel $AMN = \varphi$; ferner $AA' = a''$, $BB' = b''$, $CC' = c''$, $DD' = d''$, $DM = x$, so werden sich wegen der Lage der schiefen Ebene gegen die Horizontalebene, die Tiefen y, y', y'', y''', wie ihre Entfernungen vom Durchschnitte beider Ebenen, oder wie a'', b'', c'', d'' verhalten, daher auch

$$\left.\begin{array}{l} y - y''' : y' - y''' = a'' - d'' : b'' - d'' \text{ und} \\ y - y''' : y'' - y''' = a'' - d'' : c'' - d'' \end{array}\right\} (A)$$

Nun ist, wenn FH auf BB′ und JK auf CC′ senkrecht gezogen werden,

$a'' = MA. \sin\varphi = (a + x) \sin\varphi$

$b'' = FF' + BH = MF \sin\varphi + BF \cos\varphi = (b + x) \sin\varphi + b' \cos\varphi$

$c'' = JJ' + CK = MJ \sin\varphi + CJ \cos\varphi = (c + x) \sin\varphi + c' \cos\varphi$

$d'' = MD \sin\varphi = x \sin\varphi$ also

$a'' - d'' = a \sin\varphi$

$b'' - d'' = b \sin\varphi + b' \cos\varphi = (b + b' \cot\varphi) \sin\varphi$

$c'' - d'' = c \sin\varphi + c' \cos\varphi = (c + c' \cot\varphi) \sin\varphi$

Setzt man diese Werthe in die beiden Proportionen (A), so wird, weil sich Q, Q', Q', Q''' wie y, y', y'', y''' verhalten

$Q - Q''' : Q' - Q''' = a : b + b' \cot\varphi$

$Q - Q''' : Q'' - Q''' = a : c + c' \cot\varphi$

Beide Gleichungen mit einander verbunden und $\cot\varphi$ weggeschafft, giebt:

(IV.) $aB' (Q'' - Q''') + bc' (Q - Q''') = ac' (Q' - Q''') + b'c (Q - Q''')$

da sich denn leicht mittelst der vier Gleichungen I. II. III. IV. die Werthe der unbekannten Größen Q, Q', Q'', Q''' für jeden besondern Fall finden lassen.

* §. 339.

1. Zusatz. Liegen die vier Stützen in den Eckpunkten eines Rechtecks ABCD, Figur 185., dessen Seiten Taf. XII Fig. 185.

$AD = BC = a$ und $AB = DC = h$ sind, ist ferner $DE = e$ und $EG = e'$ gegeben, so wird nach den Bezeichnungen des vorigen §. $a = b$; $c = 0$; $b' = c' = h$ und die vier Hauptgleichungen verwandeln sich in nachstehende

$$P = Q + Q' + Q'' + Q'''$$
$$eP = aQ + aQ'$$
$$e'P = hQ' + hQ''$$
$$Q'' - Q''' + Q = Q'$$

woraus man durch die Entwickelung findet, den

Druck auf A, oder $Q = \left(\frac{1}{4} + \frac{e}{2a} - \frac{e'}{2h}\right) P$

Druck auf B, oder $Q' = \left(\frac{e}{2a} + \frac{e'}{2h} - \frac{1}{4}\right) P$

Druck auf C, oder $Q'' = \left(\frac{1}{4} - \frac{e}{2a} + \frac{e'}{2h}\right) P$

Druck auf D, oder $Q''' = \left(\frac{3}{4} - \frac{e}{2a} - \frac{e'}{2h}\right) P$.

Beispiel. Für $a = 10$, $h = 6$, $e = 7$, $e' = 2$ Fuß und $P = 100$ Pfund ist

$Q \;\; = (\frac{1}{4} + \frac{7}{20} - \frac{2}{12}) . 100 = 43\frac{1}{3}$ Pfund

$Q' \; = (\frac{7}{20} + \frac{2}{12} - \frac{1}{4}) . 100 = 26\frac{2}{3}$ „ „

$Q'' = (\frac{1}{4} - \frac{7}{20} + \frac{2}{12}) . 100 = 6\frac{2}{3}$ „ „

$Q''' = (\frac{3}{4} - \frac{7}{20} - \frac{2}{12}) . 100 = 23\frac{1}{3}$ „ „

2. Zusatz. Fällt der Punkt G, Figur 185., in die Mitte von der Diagonale des Rechtecks, so ist $e = \frac{1}{2}a$; $e' = \frac{1}{2}h$ und man findet

$$Q = Q' = Q'' = Q''' = \frac{1}{4}P$$

oder der Druck wird auf alle vier Punkte gleich vertheilt.

3. Zusatz. Fällt G auf die Stütze A, so wird $e = a$, $e' = o$, also

$Q = \frac{3}{4}P$; $Q' = \frac{1}{4}P$; $Q'' = -\frac{1}{4}P$; $Q''' = \frac{1}{4}P$.

Der negative Druck $-\frac{1}{4}P$ auf den Punkt C zeigt an, daß sich der Punkt C mit einer Kraft $\frac{1}{4}P$ von seiner Stütze aufwärts zu entfernen strebt.

* §. 340.

4. Zusatz. Sind die Seiten des Rechtecks einander gleich, so wird ABCD, Figur 185., ein Quadrat; alsdann ist $a = h$ daher

$$Q = \left(\frac{1}{4} + \frac{e - e'}{2a}\right) P$$

$$Q' = \left(\frac{e + e'}{2a} - \frac{1}{4}\right) P$$

$$Q'' = \left(\frac{1}{4} - \frac{e - e'}{2a}\right) P$$

$$Q''' = \left(\frac{3}{4} - \frac{e + e'}{2a}\right) P.$$

Anmerkung. Die Voraussetzung §. 338., daß bei einer festen, unbiegsamen Ebene die Unterlagen in demselben Verhältnisse, wie sie gedrückt werden, etwas nachgeben, und daß die tiefsten Punkte dieser Eindrücke noch in einerlei Ebene fallen, ist zuerst von L. Euler in einer Abhandlung: De Pressione ponderis in planum cui incumbit im XVIII. Bande der Novi commentarii acad. scient. Petropolitanae pro Anno 1773, Seite 289. u. f. angenommen und daraus mit Hülfe der höhern Analysis, vorstehende und mehrere andere Aufgaben aufgelöst worden.

§. 341.

Wird eine gerade, unbiegsame Linie in drei Punkten unterstützt und man sucht den Druck, welchen jede Stütze von einer zwischen denselben an der festen Linie aufgehängten Last leidet, so werden nach §. 337. sämmtliche Dreiecke = o, also der Druck auf die einzelnen Punkte unbestimmt. Es läßt sich zwar sehr leicht mit Hülfe der von Euler angenommenen Voraussetzung §. 338. die Größe des Drucks auf die einzelnen Stützen bestimmen, man sieht aber bald ein, daß diese Voraussetzung auf Resultate führen muß, die deshalb bei einer geraden Linie unstatthaft sind, weil alsdann die von der Last entferntere Stütze einen größern Druck leiden müßte, als die näher gelegene. Wenn nun überdies die langen Baukörper von der Beschaffenheit sind, daß sie sich schon durch ihre eigene Last biegen, und selbst lange Steine, besonders aber Balken, nicht als unbiegsame Körper angesehen werden können, so wird die Voraussetzung einer vollkommen unbiegsamen Linie um so weniger zuläßig seyn, weil ein länglichter, zwischen zwei Stützen belasteter, Körper nur in so fern weiter entlegene und in einerlei Horizontale liegende Stützen pressen kann, als sein eigenes Gewicht ihn auf die entfernten Stützen herunter biegt, wobei aber eine zwischen den mittlern Stützen angebrachte Belastung noch dazu beiträgt, daß der Druck auf die entfernten Stützen vermindert wird.

Es ist daher nothwendig, daß der in mehrern Punkten unterstützten Linie, eine gewisse, wenn gleich nur äußerst geringe Biegsamkeit und Elasticität zugeschrieben wird. Weil aber diese Untersuchung von der

Natur der elastischen Kurven abhängt, welche, so weit sie hieher gehören, im sechsten Abschnitte des Anhanges abgehandelt sind, so ist es zureichend, wenn hier die daselbst gefundenen Resultate angegeben werden.

§. 342.

Aufgabe. Ein Balken ABC, Figur 186., welcher in allen seinen Theilen gleiche Biegsamkeit besitzt, ist in drei Punkten A, B, C so unterstützt, daß die höchsten Punkte der Unterlagen in einerlei Horizontallinie fallen; in D und F sind Gewichte P, P′ angebracht: man sucht den Druck auf jede einzelne Stütze, welcher von der Last und dem Gewichte des Balkens entstehet. Taf. XII Fig. 186.

Auflösung. Es sei Q der Druck auf A; Q′ auf B; Q″ auf C, und das Gewicht von jedem Fuße des Balkens nach der Länge gemessen = G Pfund. Ist nun ferner

AD = a, AF = b, AB = c, AC = e, so findet man, wenn e — c = f gesetzt wird (§. 123. Anhang), den Druck auf A, oder

$$Q = \frac{f(c-a)(2ce-ac-a^2)P+c(b-c)(e-b)(b+c-2e)P'+\frac{1}{4}cef(c^2+3ce-e^2)G}{2c^2ef}$$

den Druck auf B, oder

$$Q' = \frac{af(2ce-a^2-c^2)P+c(e-b)(2be-b^2-c^2)P'+\frac{1}{4}cef(e^2+ce-c^2)G}{2c^2f^2}$$

den Druck auf C, oder

$$Q'' = \frac{c(b-c)(3be-bc-ce-b^2)P'-af(c+a)(c-a)P+\frac{1}{4}cef(3e^2-5ce+c^2)G}{2cef^2}$$

§. 343.

1. Zusatz. Wenn das Gewicht des Balkens wegen der großen Belastung nicht in Rechnung kommt, so ist $G = 0$ also

$$Q = \frac{f(c-a)(2ce-ac-a^2)P+c(b-c)(e-b)(b+c-2e)P'}{2c^2ef}$$

$$Q' = \frac{af(2ce-a^2-c^2)P+c(e-b)(2be-b^2-c^2)P'}{2c^2f^2}$$

$$Q'' = \frac{c(b-c)(3be-bc-ce-b^2)P'-af(c+a)(c-a)P}{2cef^2}$$

Beispiel. Ein 36 Fuß langer Balken, dessen Gewicht hier bei Seite gesetzt wird, ist an seinen beiden Enden und 16 Fuß von der ersten Unterlage unterstützt. Eine Last von 2000 Pfund ist 9 Fuß und eine Last von 1000 Pfund 28 Fuß von dieser ersten Stütze entfernt; man sucht den Druck auf jede einzelne Stütze?

Hier ist $a = 9$, $b = 28$, $c = 16$, $e = 36$, $f = 20$, daher der Druck auf die erste Stütze oder

$$Q = \frac{20 \cdot 7 \cdot 927 \cdot 2000 - 16 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 28 \cdot 1000}{2 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 36 \cdot 20} = 587{,}43 \text{ Pfd.}$$

$$Q' = \frac{9 \cdot 20 \cdot 815 \cdot 2000 + 16 \cdot 8 \cdot 976 \cdot 1000}{2 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 20} = 2042{,}62 \text{ Pfd.}$$

$$Q'' = \frac{16 \cdot 12 \cdot 1216 \cdot 1000 - 9 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 7 \cdot 2000}{2 \cdot 16 \cdot 36 \cdot 20 \cdot 20} = 369{,}95 \text{ P.}$$

§. 344.

2. Zusatz. Ist die mittelste Stütze von den beiden übrigen gleich weit entfernt, und man nimmt auf das Gewicht des Balkens Rücksicht, so ist $AB = BC$, also $e = 2c$ und man erhält

$$Q = \frac{(c-a)(4c^2-ac-a^2)P-(b-c)(2c-b)(3c-b)P'}{4c^3} + \tfrac{3}{8}cG$$

$$Q' = \frac{a(3c^2-a^2)P+(2c-b)(4bc-b^2-c^2)P'}{2c^3} + \tfrac{5}{4}cG$$

$$Q'' = \frac{(b-c)(5bc-2c^2-b^2)P'-a(c+a)(c-a)P}{4c^3} + \tfrac{3}{8}cG$$

und wenn, außer der gleichen Entfernung der Stützen von einander, auch die Gewichte in der Mitte zwischen den Stützen angebracht sind, also $AD = DB = BF = FC$ oder $c = 2a$, $b = 3a$, $e = 4a$ wird, so ist

$$Q = \frac{13P - 3P' + 6eG}{32}$$

$$Q' = \frac{11P + 11P' + 10eG}{16}$$

$$Q'' = \frac{13P' - 3P + 6eG}{32}$$

Es läßt sich einsehen, daß hier Fälle eintreten können, wo Q oder $Q'' = 0$ wird, also die Stütze A oder C gar keinen Druck leidet. Auch kann Q oder Q'' negativ werden, das heißt, es wird alsdann noch Kraft erfordert, das Ende des Balkens bis zur Stütze in die Horizontallinie AC herunter zu biegen, weil bei der Bestimmung der Werthe von Q, Q', Q'' die Bedingung angenommen ist, daß sich die Endpunkte der Balken von ihren Stützen nicht entfernen sollen.

Beispiel. Ein 30 Fuß langer Balken, von welchem jeder laufende Fuß 34 Pfund wiegt, ist in der Mitte und an beiden Enden unterstützt. In der Mitte zwischen den beiden ersten Stützen, ist eine Last von 1000, und zwischen den beiden letzten eine Last von 1800 Pfund angebracht; man sucht den Druck, welchen jede Stütze leidet?

Hier ist $e = 30$ Fuß; $P = 1000$, $P' = 1800$, $G = 34$ Pfund, also

$$Q = \frac{13 \cdot 1000 - 3 \cdot 1800 + 6 \cdot 30 \cdot 34}{32} = 428\tfrac{3}{4} \text{ Pfund}$$

$$Q' = \frac{11 \cdot 1000 + 11 \cdot 1800 + 10 \cdot 30 \cdot 34}{16} = 2562\tfrac{1}{2} \text{ Pfund}$$

$$Q'' = \frac{13 \cdot 1800 - 3 \cdot 1000 + 6 \cdot 30 \cdot 34}{32} = 828\tfrac{3}{4} \text{ Pfund.}$$

§. 345.

3. Zusatz. Drückt ein Balken nur durch sein eigenes Gewicht auf die Unterlagen, ohne in einzelnen Punkten noch mit besondern Gewichten beschwert zu seyn, oder wenn die Belastung gleichförmig über dem Balken verbreitet ist, wie bei Magazinen auf den Schüttböden, so werden P und P′ = 0 und man erhält

$$Q = \frac{c^2 + 3ce - e^2}{8c} G$$

$$Q' = \frac{e(e^2 + ce - c^2)}{8c(e-c)} G$$

$$Q'' = \frac{3e^2 - 5ce + c^2}{8(e-c)} G$$

wo G außer dem Gewichte von jedem laufenden Fuße des Balkens auch das Gewicht der gleichförmig verbreiteten Belastung auf jeden Fuß bezeichnet.

Beispiel. Ein 26 Fuß langer Balken ist drei mal unterstützt, so daß die erste und letzte Stütze an die Enden fallen, die zweite aber 12 Fuß von der ersten entfernt ist. Mit dem Gewichte des Balkens kommen auf jeden laufenden Fuß 100 Pfund Belastung; man fragt, wie groß der Druck auf jede Stütze sei?

Weil hier e = 26, c = 12 Fuß und G = 100 Pfund ist, so findet man die Pressungen

$$Q = \frac{12 \cdot 12 + 3 \cdot 12 \cdot 26 - 26 \cdot 26}{8 \cdot 12} 100 = 420\tfrac{5}{6} \text{ Pfund}$$

$$Q' = \frac{26(26 \cdot 26 + 12 \cdot 26 - 12 \cdot 12)}{8 \cdot 12 \cdot 14} 100 = 1632\tfrac{31}{42} \text{ „}$$

$$Q'' = \frac{3 \cdot 26 \cdot 26 - 5 \cdot 12 \cdot 26 + 12 \cdot 12}{8 \cdot 14} 100 = 546\tfrac{3}{7} \text{ „}$$

Der Punkt A Figur 186. leidet keinen Druck, wenn Taf. XII $e + 3ce - e^2 = 0$, oder wenn $c = \frac{1}{2}e(-3 + \sqrt{13})$ Fig. 186. $= 0{,}3027756\,e$ ist. In diesem Falle wird der Theil AB des Balkens eben so stark durch sein eigenes Gewicht auf die Stütze A gedrückt, als der Theil BC durch sein Gewicht den Endpunkt des Balkens bei A, von seiner Stütze aufwärts zu entfernen strebt. Wird c noch kleiner als $0{,}3027756\,e$, oder rückt der Punkt B noch näher an A, so wird der Druck auf die Stütze A negativ, oder das Ende des Balkens bei A strebt sich von seiner Unterstützung zu entfernen. Weil aber vorausgesetzt ist, daß die Endpunkte der Balken ihre Unterstützungen nicht verlassen sollen, so wird eine Kraft erfordert, den Balken bei A herunter zu drücken, wodurch auf B ein vermehrter Druck entsteht, welcher immer größer werden muß, je näher B nach A rückt, und zuletzt unendlich groß wird, wenn B in A fällt oder $c = 0$ ist. Dasselbe läßt sich von der Unterstützung C in Beziehung auf B sagen.

§. 346.

4. Zusatz. Sind die beiden in gleichen Entfernungen von den Stützen aufgehängten Gewichte P und P′ einander gleich, so ist

$$Q = \frac{5P + 3eG}{16}$$

$$Q' = \frac{22P + 10eG}{16}$$

$$Q'' = \frac{5P + 3eG}{16}$$

Setzt man das Gewicht des Balkens bei Seite, so wird

$$Q = \frac{5}{16} P;\ Q' = \frac{22}{16} P;\ Q'' = \frac{5}{16} P$$

und wenn keine Gewichte am Balken angebracht sind, dagegen das Gewicht des Balkens der vorhin angenommenen Belastung gleich, oder $eG = 2P$ ist, so erhält man für diesen Fall

$$Q = \frac{6}{16} P;\ Q' = \frac{20}{16} P;\ Q'' = \frac{6}{16} P$$

Vergleicht man die für beide Fälle gefundenen Ausdrücke mit einander, so folgt daraus, daß die in der Mitte zwischen den Stützen aufgehängten Gewichte, die mittlere Stütze stärker und die äußersten Stützen schwächer drücken, als wenn eben diese Last auf dem Balken gleichförmig verbreitet wäre.

§. 347.

5. Zusatz. Ist an dem in drei Punkten unterstützten Balken nur eine Last P aufgehängt, und wird auf das Gewicht desselben nicht Rücksicht genommen, so ist, wenn das Gewicht P zwischen die beiden ersten Stützen fällt, P' und $G = 0$, daher, wenn die zweite Stütze in der Mitte des Balkens angenommen wird,

$$Q = \frac{(c-a)(4c^2 - ac - a^2)}{4c^3} P$$

$$Q' = \frac{a(3c^2 - a^2)}{2c^3} P$$

$$Q'' = -\frac{a(c+a)(c-a)}{4c^3} P$$

wo Q'' allemal negativ wird, wenn $c > a$ ist, weil nothwendig eine Kraft dazu erfordert wird, das Ende des Balkens herunter zu biegen.

Fällt der Aufhängepunkt der Last P auf die erste Stütze in A, so ist $a = 0$ also

$$Q = P; \quad Q' = 0; \quad Q'' = 0$$

Wird die Last P über die mittlere Stütze B angebracht, so ist $a = c$ also

$$Q = 0; \quad Q' = P; \quad Q'' = 0$$

Hängt hingegen eine Last P' zwischen den beiden letzten Stützen B und C, so ist für P und $G = 0$

$$Q = -\frac{(b-c)(2c-b)(3c-b)}{4c^3} P'$$

$$Q' = \frac{(2c-b)(4bc-b^2-c^2)}{2c^3} P'$$

$$Q'' = \frac{(b-c)(5bc-2c^2-b^2)}{4c^3} P'$$

Für $b = c$ oder wenn die Last P' auf die mittlere Stütze fällt, ist wie vorhin

$$Q = 0; \quad Q' = P'; \quad Q'' = 0$$

und, wenn die Last über die dritte Stütze fällt, oder wenn $b = 2c$ wird, ist

$$Q = 0; \quad Q' = 0; \quad Q'' = P'.$$

§. 348.

Aufgabe. Der horizontale Balken, AD Figur 187., ist in den vier Punkten A, B, C, D unterstützt und zwischen denselben in den Punkten E, F, G mit Gewichten belastet; man sucht den Druck auf jeden Unterstützungspunkt. Taf. XII Fig. 187.

Auflösung. In der Voraussetzung, daß die Last in

$E = P$, der Last in G gleich, ferner $AE = DG = a$, $AF = FD = b$, und $AB = DC = c$ sei, und jeder Fuß von der Länge des Balkens noch außerdem G Pfund wiege, findet man den Druck Q' in B oder C nach §. 127. des Anhanges

$$Q' = \frac{4a(6bc - a^2 - 3c^2)P + 2c(3b^2 - c^2)P' + c(8b^3 + c^3 - 4bc^2)G}{8c^2(3b - 2c)}$$

und den Druck Q auf jeden der äußersten Punkte A oder D

$$Q = \frac{4(a^3 - 6abc + 3ac^2 + 6bc^2 - 4c^3)P - 6c(b - c)^2 P' + c(24b^2c - 8b^3 - c^3 - 12bc^2)G}{8c^2(3b - 2c)}$$

Wenn nur ein Gewicht in der Mitte des Balkens angebracht ist, so wird $P = 0$ also

$$Q' = \frac{2(3b^2 - c^2)P' + (8b^3 + c^3 - 4bc^2)G}{8c(3b - 2c)}, \text{ und}$$

$$Q = \frac{-6(b - c)^2 P' + (24b^2c - 8b^3 - c^3 - 12bc^2)G}{8c(3b - 2c)}.$$

Sind hingegen die Stützen gleich weit von einander entfernt, nnd hängt jedes der Gewichte P, P', P in der Mitte zwischen den Stützen, so ist

$$Q' = \frac{23P + 23P' + 88aG}{40} \text{ und}$$

$$Q = \frac{17P - 3P' + 32aG}{40}.$$

§. 349.

Taf. XII Fig. 186. Stellt man sich vor, daß der Balken AC, Figur 186., unter irgend einem Winkel $= \alpha$ gegen den Horizont geneigt sei, und daß mit Beibehaltung der Bezeichnung §. 342. die Gewichte P, P' und eG vertikal abwärts wirken, so kann man jedes dieser Gewichte wie P, in eine Kraft P $\cos\alpha$ senkrecht auf AC und in eine Kraft P $\sin\alpha$ nach der Richtung AC zerlegen. Die Pressungen, welche von den Kräften P $\cos\alpha$, $P'\cos\alpha$, $eG\cos\alpha$ auf die Punkte A, B, C senkrecht auf AC entstehen, lassen sich nach den Gesetzen §. 342. finden, und wenn man diese Pressungen durch q, q', q'' bezeichnet, so ist

$$q = (A\,P + B\,P' + C\,e\,G)\cos\alpha$$
$$q' = (A'\,P + B'\,P' + C'\,e\,G)\cos\alpha$$
$$q'' = (A''\,P + B''\,P' + C''\,e\,G)\cos\alpha$$

wo $A, A' \ldots C', C''$ die nach §. 342. zu bestimmenden Koeffizienten bezeichnen.

Setzt man die von den Kräften P $\sin\alpha$, $P'\sin\alpha$, $eG\sin\alpha$ nach der Richtung AC auf die Punkte A, B, C entstehenden Pressungen $= p, p', p''$, so kann man die Kräfte P $\sin\alpha$, $P'\sin\alpha$, $eG\sin\alpha$ gleichfalls auf die Punkte A, B, C zertheilen, und es ist

$$p = (A\,P + B\,P' + C\,e\,G)\sin\alpha$$
$$p' = (A'\,P + B'\,P' + C'\,e\,G)\sin\alpha$$
$$p'' = (A''\,P + B''\,P' + C''\,e\,G)\sin\alpha$$

Es entsteht daher auf den Punkt A ein Druck q senkrecht auf AC und ein Druck P nach AC, senkrecht auf die Richtung des Drucks q. Wird aus beiden Kräften q, p, eine Mittelkraft nach vertikaler Richtung zusammen gesetzt, so erhält man §. 20. IV. den auf den Punkt A entstehenden Vertikaldruck

$$= AP + BP' + CeG = Q$$

welcher mit dem Vertikaldruck §. 342. genau überein stimmt, und weil dies von den Punkten B und C eben so gilt, so folgt hieraus, daß, wenn ein gegen den Horizont geneigter Balken in mehrern Punkten unterstützt und durch Gewichte nach vertikaler Richtung belastet ist, man die Vertikalpressungen auf die Unterstüstungspunkte eben so findet, als wenn diese Gewichte an einem wagerechten Balken bei gleichen Abmessungen angebracht wären.

Drei-

Dreizehntes Kapitel.

Statik der gebräuchlichsten Holzverbindungen.

§. 350.

Zur Erleichterung der folgenden Untersuchungen wird vorausgesetzt, daß sich der Schwerpunkt der Holzstücke in der Mitte ihrer Länge befinde, und daß überhaupt ihr Gewicht ihrer Länge proportional sei, so wie auch angenommen wird, daß diese Hölzer in Absicht der anzubringenden Kräfte unbiegsam sind und die Reibung bei Seite gesetzt werde.

Es sei AC, Figur 188., eine vertikale Wand, und BC ein horizontaler Boden. Der Sparren AB, welcher hier ohne Schwere voraus gesetzt wird, lehne sich gegen die Wand AC in einer vertikalen Ebene und bilde mit dem Boden den Winkel ABC $= \alpha$. In der Mitte des Sparren sei in G ein Gewicht P aufgehängt, man fragt: Taf. XII Fig. 188.

I. wie groß ist der horizontale Druck gegen die vertikale Wand AC;

II. wie groß ist der Druck oder Schub, mit welchem der Sparren nach der horizontalen Richtung BH auszuweichen sucht, und

III. welchen Druck V leidet der Punkt B nach der vertikalen Richtung BK.

Von der Last P entsteht auf jeden der Punkte A und B ein vertikaler Druck $= \frac{1}{2} P$ (§. 57.) Man nehme $AD = \frac{1}{2} P$, zeichne das Parallelogramm ADEF, so ist die Seitenkraft

$$AF = AD. \cot \alpha = \frac{1}{2} P \cot \alpha \text{ und}$$

$$AE = \frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{P}{2 \sin \alpha}$$

In der Verlängerung von AB sei $BI = AE$, so leidet der Punkt B von der Kraft AE nach der Richtung BI einen Druck

$$BI = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

Zeichnet man nun das Parallelogramm BIHK, so ist die Seitenkraft

$$BH = BI. \cos \alpha = \frac{P \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{2} P \cot \alpha \text{ und}$$

$$BK = BI. \sin \alpha = \frac{P \sin \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{2} P.$$

Nun ist AF der horizontale Druck des Sparren gegen die vertikale Wand, oder

(I) $AF = \frac{1}{2} P \cot \alpha.$

Der Schub, mit welchem der Sparren nach horizontaler Richtung auf dem Boden auszuweichen sucht, sei S, so ist $S = BH$, oder

(II) $S = \frac{1}{2} P \cot \alpha.$

Ferner leidet der Punkt B vom Gewichte P einen vertikalen Druck $= \frac{1}{2} P$ und außerdem von der Kraft BI einen vertikalen Druck $BK = \frac{1}{2} P$, daher ist der vertikale Druck, welchen der Boden in B leidet

(III) $V = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P = P$

oder der horizontale Boden wird so stark von dem gegen eine lothrechte Wand angelehnten Sparren in vertikaler Richtung gedrückt, als wenn der Sparren senkrecht auf dem Boden stände.

Auch folgt aus (I) und (II), daß der Sparren eben so stark senkrecht auf die vertikale Wand drückt, wie er auf dem Boden nach horizontaler Richtung schiebt, und daß dieser Schub kleiner wird, wenn man den Sparren steiler setzt.

§. 351.

Aufgabe. Zwei gleich große Sparren AB, AD, Figur 189., sind in einer Vertikalfläche zu einem Leergespärre verbunden, man fragt, wie groß die Kraft sei, mit welcher die Sparren auf dem horizontalen Boden fort zu schieben streben. Taf. XII Fig. 189.

Auflösung. Es sei die halbe Tiefe des Dachs $BC = CD = a$; die Länge des Sparren $AB = AD = b$; die Dachhöhe $AC = h$; das Gewicht eines Fußes von der Länge der Sparren $= g$; der Neigungswinkel der Sparren $ABC = \alpha$ und der Schub der Sparren in B oder D, welcher hier der Sparrenschub heißen soll, $= S$, so läßt sich mit Bezug auf den vorhergehenden §. leicht einsehn, daß hier die Sparren wechselseitig die Stelle der vertikalen Wand AC Figur 188. vertreten, und daß sich daher die bei A entstehenden horizontalen Pressungen einander aufheben. Der horizontale Schub auf dem Boden BD ist alsdann bei jedem Sparrenende

$$S = \tfrac{1}{2} P \cot \alpha$$

wo P das Gewicht eines Sparren ist. Aber $P = bg$ und $\cot\alpha = \frac{a}{h} = \frac{a}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$, daher findet man den Sparrenschub eines Leergespärres

$$S = \tfrac{1}{2} b g \cot\alpha = \frac{ab}{2h} g = \frac{abg}{2\sqrt{(b^2 - a^2)}} = \frac{a\sqrt{(a^2 + h^2)}}{2h} g$$

oder weil $b = \frac{a}{\cos\alpha}$ so ist auch

$$S = \frac{a \cot\alpha}{2\cos\alpha} g = \frac{ag}{2\sin a}$$

hieraus folgt, daß bei unveränderter Tiefe des Dachs der Sparrenschub desto größer wird, je kleiner der Neigungswinkel der Sparren oder je kleiner die Dachhöhe ist. Auch wird bei einerlei Länge der Sparren und Höhe des Dachs der Schub in dem Verhältniß größer, wie das Gewicht der Sparren und ihrer Bedeckung zunimmt.

Die Gewalt, mit welcher die Sparren auseinander zu gehen streben, wird gewöhnlich dadurch aufgehalten, daß sie mit Zapfen in die Löcher eines durchgehenden Balkens eingesetzt werden, und es kommt nur darauf an, daß vor dem Zapfenloche so viel Hirnholz stehen bleibt, daß das Loch nicht ausreißt. Andere Mittel, den Sparrenschub zu vermindern, werden noch vorkommen. Wenn aber ein Gebäude keine durchgehende Balken hat, in welche die Sparren eingezapft sind, so kann alsdann der Schub der Sparren für die Umfassungswände sehr gefährlich werden.

Für ein Kirchdach ist die Höhe doppelt so groß als die Tiefe, daher $h = 4a$, folglich der Sparrenschub

$$S = ag\frac{\sqrt{17}}{8} = 0{,}515388\,2 \,.\, ag$$

Bei dem altdeutschen Dache ist die Tiefe der Höhe gleich, also $h = 2a$, daher

$$S = ag\frac{\sqrt{5}}{4} = 0{,}5590170 \,.\, ag$$

Für ein altfranzösisches Dach ist die Sparrenlänge der Tiefe des Dachs gleich, also $b = 2a$ folglich

$$S = \frac{ag}{\sqrt{3}} = ag\frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}5773503 \,.\, ag$$

Das neudeutsche Dach hat die halbe Tiefe zur Höhe oder $a = h$, daher ist

$$S = ag\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707107 \,.\, ag$$

Bei den italiänischen Dächern ist $h = \frac{1}{2}a$, daher

$$S = ag\frac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}118034 \,.\, ag$$

Für $h = \frac{1}{4}a$ ist

$$S = ag\frac{\sqrt{17}}{2} = 2{,}0615528 \,.\, ag$$

also schiebt dies Dach beinahe viermal so stark, als ein eben so tiefes Kirchdach bei einer viermal so großen Belastung. Auch läßt sich hieraus deutlich einsehn, welchen Vortheil die hohen Kirchdächer haben, im Falle bei einem Gebäude keine durchgehende Balken angebracht sind, wie dies häufig bei Kirchen der Fall ist.

Sucht man den vertikalen Druck des Sparren auf die Unterlage bei B, so ist, wenn derselbe durch V bezeichnet wird, nach §. 350.

$$V = gb = \frac{ag}{\cos\alpha} = g\sqrt{(a^2 + h^2)}$$

und eben so groß ist der Druck bei D.

§. 352.

Taf. XII Fig. 190. Aufgabe. Ein Sparren AB, Figur 190., liegt mit seinem oberen Ende auf (nicht gegen) einem lothrechten Stiele AC und mit seinem untern B steht er auf horizontalem Boden. In der Mitte zwischen den Unterstützungspunkten bei A und B hängt an dem Sparren eine Last P; man sucht die Pressungen, welche aus dieser Zusammenstellung entstehen.

Auflösung. Die Kraft P zertheilt sich auf die beiden Punkte A, B, indem sie auf jeden einen vertikalen Druck $\frac{1}{2}$ P verursacht. Der Druck auf A nach AD zerlegt sich senkrecht auf AB nach AF und nach der Richtung AB. Man setze den Winkel ABC $= \alpha$, so ist

der Druck nach AF $= \frac{1}{2} P \cos \alpha$,

und der Druck nach AB oder

nach BI $= \frac{1}{2} P \sin \alpha$.

Der Druck nach BI zerlegt sich wagerecht nach BH und vertikal nach BK und es ist der

Druck nach BH $= \frac{1}{2} P \sin \alpha \cos \alpha$

Druck nach BK $= \frac{1}{2} P \sin \alpha \sin \alpha$.

Außer diesem zuletzt gefundenen Druck wird auch noch der Punkt B mit einer Kraft $\frac{1}{2}$ P vertikal gegen den Boden gepreßt, es ist daher der vertikale Druck des Sparrens auf den Boden

$$\tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2} P \sin \alpha^2 = \tfrac{1}{2} P (1 + \sin \alpha^2)$$

und der wagerechte Schub des Sparrens oder

$$S = \tfrac{1}{2} P \sin \alpha \cos \alpha = \tfrac{1}{4} P \sin 2 \alpha$$

Die Kraft $\frac{1}{2} P \cos \alpha$, welche nach AF wirkt, zerlegt sich horizontal nach AL und vertikal nach AM, und man findet die Kraft, mit welcher der Sparren den Stiel nach wagerechter Richtung im Punkt A wegzudrükken strebt

$$= \tfrac{1}{2} P \cos \alpha . \sin \alpha = \tfrac{1}{4} P \sin 2 \alpha$$

welche dem Sparrenschub S bei B gleich ist.

Nach vertikaler Richtung AM wird der Stiel von dem Sparren mit einer Kraft auf den Boden gedrückt

$$= \tfrac{1}{2} P \cos \alpha . \cos \alpha = \tfrac{1}{2} P \cos \alpha^2,$$

wozu noch das Gewicht des Stiels AC kommt.

Der vertikale Druck auf den Boden bei B war $\frac{1}{2} P (1 + \sin \alpha^2)$ und bei $C = \frac{1}{2} P \cos \alpha^2$. Werden beide Pressungen addirt, so erhält man $\frac{1}{2} P (1 + \sin \alpha^2 + \cos \alpha^2) = \frac{1}{2} P (1 + 1) = P$.

§. 353.

Bei dem Leergespärre eines Pultdachs, Figur 191., Taf. XII Fig. 191.
sei $AB = b$ die Sparrenlänge, $AC = h$ die Dachhöhe oder Länge des Wandstiels; gb das Gewicht des Sparrens und $g'h$ des Stiels, so ist nach dem vorigen §. $P = gb$, also die Gewalt, mit welcher der wagerechte Boden unter dem Stiele bei C gedrückt wird

$$= \tfrac{1}{2} gb \cos \alpha^2 + g'h$$

Der Boden unter dem Sparren bei B wird vertikal gedrückt mit einer Kraft

$$V = \tfrac{1}{2} gb (1 + \sin \alpha^2)$$

Die Gewalt, mit welcher der Sparren den Stiel bei A wagerecht fort zu drücken strebt, ist dem Sparrenschub bei B gleich, daher für beide Fälle

$$S = \frac{1}{2} gb \sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{4} gb \sin 2\alpha.$$

Hieraus folgt, weil $\sin 2\alpha$ seinen größten Werth erhält, wenn $\alpha = 45$ Grad wird, daß bei ungeänderter Sparrenlänge an einem Pultdache, die Sparren am stärksten schieben, wenn solche mit dem Horizont einen Winkel von 45 Grad einschließen.

Wird die Tiefe des Dachs $BC = a$ gesetzt, so ist $b = \frac{a}{\cos\alpha}$ daher

$$S = \frac{1}{2} ga \sin\alpha$$

also ist bei Pultdächern von gleicher Tiefe der Sparrenschub desto größer, je größer der Neigungswinkel der Sparren, oder je größer die Dachhöhe ist.

Der hier untersuchte Fall giebt umgekehrte Resultate von denen §. 351; daher folgt, daß man zur Verminderung des Drucks gegen die Wandstiele und zur Verminderung des Sparrenschubs, die Sparren eines Pultdachs so flach legen muß, als es die übrigen Umstände gestatten.

§. 354.

Taf. XII Fig. 192. Aufgabe. Das Leergespärre ABD, Figur 192., ist mit einer lothrechten Stütze oder Säule AC verbunden, welche von dem Gipfel oder der Forst A bis auf den wagerechten Boden BD geht; man soll die vertikalen Pressungen der Stütze und der Sparren, nebst dem Sparrenschub finden.

Auflösung. Das Gewicht eines Sparren mit seiner Belastung sei gb, das Gewicht der Stütze $= g'h$ und $BC = CD = a$, so ist, weil $b = \frac{a}{\cos\alpha}$ und $h = a \operatorname{tgt} \alpha$, nach dem vorigen §. der vertikale Druck der Stütze AC

$$gb \cos\alpha^2 + g'h = ga \cos\alpha + g'a \operatorname{tgt} \alpha.$$

Der vertikale Druck eines jeden Sparren auf den Boden ist

$$V = \tfrac{1}{2} gb\ (1 + \sin\alpha^2) = \tfrac{1}{2} ga \frac{1 + \sin\alpha^2}{\cos\alpha}$$

und der Sparrenschub

$$S = \tfrac{1}{2}\ ga\ \sin\ \alpha = \frac{ahg}{2\sqrt{(a^2 + h^2)}}$$

welcher bei einerlei Tiefe des Gebäudes desto kleiner wird, je kleiner der Neigungswinkel der Sparren ist. Man erhält daher bei sehr flachen Dächern durch die Anbringung der Säule AC ein vorzügliches Mittel, den sehr bedeutenden Sparrenschub zu vermindern.

Um diesen Vortheil besser zu übersehen, so ist nach §. 351. der Sparrenschub bei einem italiänischen Dache ohne Säule

$$= 1{,}118034 \,.\, ag.$$

Bei einem Dache von denselben Abmessungen mit einer Säule ist dieser Sparrenschub

$$ag \frac{\sqrt{5}}{10} = 0{,}2236068 \,.\, ag$$

welches nur der fünfte Theil von ersterm ist.

§. 355.

Aufgabe. Ein senkrecht stehender Stiel AB, Fig. 193.,

Taf. XII ist auf dem Boden bei B befestigt, senkrecht auf sei-
Fig. 193. ne Länge wird derselbe in A von einer Kraft P nach der Richtung AF gezogen, und in der Vertikalfläche, welche durch diese Richtung geht, sei die Strebe DE angebracht; man sucht die verschiedenen Pressungen, welche von der Kraft P bewirkt werden.

Auflösung. Man setze $AB = h$, $ED = b$ und den Winkel DEB, unter welchem die Strebe gegen den Horizont geneigt ist $= \alpha$.

Auf den Punkt D entstehet senkrecht auf die Länge des Stiels ein Druck

$$p = \frac{AB \,.\, P}{BD} = \frac{h\,P}{b \sin \alpha} \text{ (§. 41.)}$$

Dieser zerlegt sich nach $DA = p \text{ tgt } \alpha$ und nach $DE = \frac{p}{\cos \alpha}$ (§. 19.) es ist daher, weil

$$p \text{ tgt } \alpha = \frac{h\,P \text{ tgt } \alpha}{b \sin \alpha}$$

I. die Gewalt, mit welcher der Stiel AB vertikal aufwärts nach der Richtung BA gezogen wird

$$= \frac{h\,P}{b \cos \alpha}$$

woraus folgt, daß, wenn die Länge des Stiels unverändert bleibt, je kürzer die Strebe bei einerlei Neigung gegen den Horizont wird, desto größer ist die Gewalt, mit welcher der Stiel aufwärts gezogen wird, und je kleiner bei einerlei Länge der Strebe ihr Neigungswinkel gegen den Horizont ist, desto weniger Kraft wird erfordert, den Stiel am Boden fest zu halten.

Weil $\frac{p}{\cos\alpha} = \frac{hP}{b \sin\alpha \cos\alpha}$, so ist

II. die Kraft, mit welcher die Strebe nach ihrer Länge in den Boden gedrückt wird

$$= \frac{2hP}{b \sin 2\alpha}.$$

Dieser Ausdruck wird desto kleiner, je größer $\sin 2\alpha$ wird, da nun $\sin 90°$ der größte Werth für $\sin 2\alpha$ ist, so folgt daraus, daß wenn die Länge einer Strebe ungeändert bleibt, so leidet sie den wenigsten Druck, wenn ihre Neigung gegen den Horizont der Hälfte eines rechten Winkels gleich ist.

Wird die Gewalt, mit welcher die Strebe nach der Richtung DE preßt, in zwei andere Kräfte senkrecht auf den Boden

$$= \frac{p}{\cos\alpha} . \sin\alpha$$

und nach der Richtung BE

$$= \frac{p}{\cos\alpha} \cos\alpha$$

zerlegt, so erhält man, weil

$$\frac{p \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{hP \sin\alpha}{b \sin\alpha \cos\alpha}$$

III den Druck, welcher von der Strebe senkrecht auf den Boden entsteht

$$= \frac{hP}{b \cos\alpha}; \text{ wie bei I.}$$

und weil $p = \frac{hP}{b \sin\alpha}$, so ist

IV der Seitenschub, mit welchem die Strebe nach der Richtung BE auszuweichen strebt

$$= \frac{hP}{b \sin\alpha}$$

Es wird übrigens leicht seyn, das Gewicht der Holzstücke, wenn solches beträchtlich ist, mit in Rechnung zu bringen.

Beispiel. Am Ende eines 20 Fuß langen Stiels wirke eine Kraft von 600 Pfund nach horizontaler Richtung. Der Stiel sei durch eine 15 Fuß lange Strebe gestützt, welche mit dem Horizont einen Winkel von 65 Grad einschließt; man sucht die Gewalt, welche auf die Strebe nach ihrer Länge wirkt?

Nach II erhält man den Druck nach der Länge der Strebe, weil hier $P = 600$ Pfund; $h = 20$, $b = 15$ Fuß und $\alpha = 65^\circ$

$$= \frac{2 \cdot 20 \cdot 600}{15 \cdot \sin 130^\circ} = 2088{,}6 \text{ Pfund},$$

wo das Gewicht der Holzstücke bei Seite gesetzt ist.

§. 356.

Taf. XII Fig. 194 Aufgabe. Der horizontale Balken AB, Figur 194., sei in A mit dem lothrechten Stiele AC verbunden, und durch ein Winkelband DE werde der Balken mit seiner Last P unterstützt; man sucht die Kräfte, welche auf das Winkelband wirken.

Auflösung. Man setze die Länge $AB = a$, $ED = b$ und den Winkel $ADE = \alpha$, so ist, wenn p den lothrechten Druck auf den Punkt D bezeichnet

$$p = \frac{AB.\,P}{AD} = \frac{a\,P}{b \cos \alpha}$$

Ist nun Q die Kraft, mit welcher das Band nach der Richtung ED wiedersteht, so kann diese Kraft in zwei andere, eine auf AB senkrecht nach Dp′, und eine zweite nach der Richtung DB zerlegt werden. Die

Kraft nach $Dp' = Q \sin \alpha$ muß im Falle des Gleichgewichts $= p$ seyn, man findet daher die Gewalt, mit welcher das Winkelband nach der Richtung DE gedrückt wird, oder

(I.) $Q = \frac{a P}{b \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 a P}{b \sin 2 \alpha}$

dieser Ausdruck wird am kleinsten, wenn a, b, P unverändert bleiben und $\sin 2 \alpha$ seinen größten Werth für $\alpha = 45°$ erhält; es folgt daher hieraus, daß unter mehreren Winkelbändern von einerlei Länge, derjenige den kleinsten Druck nach der Richtung seiner Länge leidet, welcher bei übrigens gleichen Umständen unter einem Winkel von 45 Grad angebracht ist.

Hieraus erklärt sich, weshalb man in der Zimmermannskunst denjenigen Winkelband, welcher unter einem Winkel von 45 Grad eingesetzt wird, einen Ruheband nennt.

Aus der Kraft Q, mit welcher der Winkelband widerstehet, findet man die Kraft, mit welcher der Balken AB nach der Richtung AB gezogen wird

(II.) $Q \cos \alpha = \frac{a P}{b \sin \alpha}$.

Um sich diese Wirkung zu erklären, darf man nur an den Enden des Winkelbandes in D und E Gelenke annehmen, und die Befestigung zwischen Stiel und Balken bei A aufheben, so wird am Balken in A nach der Richtung BA eine Kraft $\frac{a P}{b \sin \alpha}$ erfordert, wenn die Last P nicht sinken soll.

Beispiel. Am Ende eines 12 Fuß langen Balkens ist eine Last von 500 Pfund angebracht; das andere Ende des Balkens ist mit einem Stiele verbunden und zugleich ein 5 Fuß langer Winkelband so angebracht, daß derselbe mit dem Balken einen Winkel von 50 Grad einschließt; man sucht die Gewalt, mit welcher das Winkelband nach seiner Länge gedrückt wird?

Hier ist nach I. $a = 12$, $b = 5$ Fuß; $P = 500$ Pfund und $\alpha = 50^\circ$, daher

$$Q = \frac{2 \cdot 12 \cdot 500}{5 \cdot \sin 100^\circ} = 2437 \text{ Pfund},$$

wo das Gewicht des Holzes bei Seite gesetzt ist.

§. 357.

Taf. XII Fig. 195. Aufgabe. Ein Dachgespärre BAD. Figur 195., welches in den Balken BD eingezapft ist, sei mit einem Kehlbalken EF versehen; man sucht den Sparrenschub und die Kraft, mit welcher der Kehlbalken von der Belastung des Dachs zusammen gepreßt wird.

Auflösung. Man setze die halbe Länge des Balkens oder $\frac{1}{2}$ BD $= a$, die Sparrenlänge AB $=$ AD $= b$, die Entfernung AE $= c$, den Winkel ABD $= \alpha$, und es werde jeder laufende Fuß des Sparren mit einem Gewicht G belastet, so ist bG die ganze Last eines Sparren. Der vertikale Druck, welcher aus der Vertheilung der Last auf die drei Unterstützungspunkte in A, E, B entstehet, sei in A nach A a $= Q$, in E nach E e $= Q'$, in B nach Bb $= Q''$, so findet man nach §. 345. und 349.

$$Q = \frac{c^2 + 3bc - b^2}{8c} G$$

$$Q' = \frac{b(b^2 + bc - c^2)}{8c(b-c)} G$$

$$Q'' = \frac{3b^2 - 5bc + c^2}{8(b-c)} G.$$

Der Druck Q in A zerlegt sich nach horizontaler Richtung und nach der Richtung AB. Der horizontale Druck wird vom Gegendruck des zweiten Sparren aufgehoben, nach AB entsteht aber ein Druck

$$= \frac{Q}{\sin\alpha}$$

welcher sich in B nach der verlängerten Richtung BJ fortpflanzt.

Der Druck Q' bei E zerlegt sich nach den Richtungen EF und EB;

nach $EF = Q' \cot\alpha$

nach $EB = \frac{Q'}{\sin\alpha}$

Die beiden Pressungen in A und E nach der Richtung AB oder BJ geben zusammen einen Druck nach BJ

$$= \frac{Q}{\sin\alpha} + \frac{Q'}{\sin\alpha} = \frac{Q + Q'}{\sin\alpha}.$$

Dieser Druck zerlegt sich horizontal nach BH und vertikal nach BK. Ersterer giebt den Sparrenschub

$$S = \frac{Q+Q'}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha = (Q + Q') \cot\alpha.$$

Vertikal entstehet ein Druck nach BK

$$= \frac{Q+Q'}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha = Q + Q',$$

welcher mit dem Druck Q'' zusammen genommen der Belastung des Sparren bG gleich ist.

Setzt man in den für S gefundenen Ausdruck die Werthe für Q und Q′, so erhält man den Sparrenschub

$$S = \frac{5b^2 - 3bc - c^2}{8(b-c)} G \cot \alpha.$$

In E war der Druck nach $EF = Q' \cot \alpha$. Wird für Q′ sein Werth gesetzt, so erhält man die Kraft, mit welcher der Kehlbalken zusammen gedrückt wird

$$= \frac{b(b^2 + bc - c^2)}{8c(b-c)} G \cot \alpha.$$

Da nun $\cot \alpha$ wächst, wenn der Winkel α abnimmt, so folgt daraus, daß bei unveränderter Sparrenlänge die Kraft, welche den Kehlbalken zusammen preßt, desto größer wird, je kleiner der Neigungswinkel der Sparren gegen den Horizont ist. Dasselbe gilt von dem Sparrenschub.

§. 358.

1. Zusatz. Für $c = \frac{1}{4} b$ erhält man den Sparrenschub

$$S = \tfrac{67}{96} b G \cot \alpha = 0{,}69791\, b G \cot \alpha.$$

Für $c = \frac{1}{2} b$ wird

$$S = \tfrac{13}{16} b G \cot \alpha = 0{,}81250\, b G \cot \alpha$$

und für $c = \frac{3}{4} b$ erhält man

$$S = \tfrac{35}{32} b G \cot \alpha = 1{,}09375\, b G \cot \alpha.$$

Der Sparrenschub bei einem Leergespärre ist nach §. 351.

$$= \tfrac{1}{2} b G \cot \alpha,$$

es folgt also hieraus, daß der Sparrenschub bei einem Dachgespärre, welches mit einem Kehlbalken versehen

versehen ist, größer ist, als wenn der Kehlbalken nicht vorhanden wäre. Auch wird bei einem Kehlgebälke der Sparrenschub desto größer, je mehr sich der Kehlbalken dem Hauptbalken nähert.

Weil das Gewicht des Kehlbalkens nur gering gegen die Belastung des Dachs ausfällt, so ist es nicht mit in Rechnung gezogen worden, es wird aber leicht seyn, dasselbe ebenfalls in Rechnung zu bringen.

2. Zusatz. Die Kraft, mit welcher die Sparren an der Forst bei A Figur 195. gegen einander drücken, ist Taf. XII Fig. 196

$$Q \cot \alpha = \frac{c^2 + 3bc - b^2}{8c} G \cot \alpha.$$

Dieser Druck verschwindet, wenn

$c^2 + 3bc - b^2 = 0$ oder wenn

$c = \frac{1}{2} b (-3 + \sqrt{13}) = 0{,}30277 . b$ beinahe $= \frac{3}{10} b$

wird. Wäre c noch kleiner als $\frac{3}{10}$ b, so wird der horizontale Druck der Sparren gegen einander negativ, oder die Sparren streben bei A sich von einander zu entfernen, weshalb der Kehlbalken nicht höher als $\frac{2}{3}$ von der ganzen Dachhöhe anzubringen ist, wenn sich die Sparren an der Forst nicht von einander geben sollen.

§. 359.

Aufgabe. Ein Dachgespärre ist mit einem stehenden Stuhle versehen; man fragt nach der Größe des Sparrenschubs, dem Druck, welchen die Stuhlsäulen EE′, FF′, Figur 196., leiden und nach der Größe der Kraft, mit welcher der Kehlbalken zusammen gepreßt wird. Taf. XII Fig. 196.

Auflösung. Mit Beibehaltung der Bezeichnung §. 357. ist der vertikale Druck auf den Sparren bei E oder $Ee = Q'$. Diese Kraft zerlegt sich in der Richtung des Sparrens nach EB und senkrecht auf den Sparren nach Ee'.

Die Kraft nach EB ist $= Q' \sin \alpha$

nach $Ee' = Q' \cos \alpha$.

Wird letztere vertikal nach EE' und horizontal nach EF zerlegt, so erhält man den Vertikaldruck nach EE $= Q' \cos \alpha^2$ und den Horizontaldruck nach $EF = Q' \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} Q' \sin 2\alpha$.

Für Q' nach §. 357. seinen Werth gesetzt, giebt den vertikalen Druck, welchen jede Stuhlsäule von der Belastung des Dachs leidet

$$= \frac{b(b^2 + bc - c^2)}{8c(b-c)} G \cos \alpha^2.$$

Je kleiner daher der Neigungswinkel der Dachfläche bei einerlei Sparrenlänge ist, desto größer wird der Druck auf die Stuhlsäulen.

Die Kraft, mit welcher der Kehlbalken zusammen gedrückt wird, ist

$$= \frac{b(b^2 + bc - c^2)}{16c(b-c)} G \sin 2\alpha.$$

Bei E entstand ein Druck nach der Richtung $EB = Q' \sin \alpha$ und bei A findet man den daselbst entstehenden Druck nach derselben Richtung wie §. 357. $= \frac{Q}{\sin \alpha}$, daher ist der gesammte Druck nach der verlängerten Richtung des Sparrens BJ

$$=\frac{Q}{\sin\alpha}+Q'\sin\alpha.$$

Diese Kraft horizontal nach BH zerlegt, giebt den Sparrenschub

$$S=\left(\frac{Q}{\sin\alpha}+Q'\sin\alpha\right)\cos\alpha=(Q+Q'\sin\alpha^2)\cot\alpha$$

wo für Q und Q′ die gleichen Werthe nach §. 157. gesetzt werden können.

Für ein Dachgespärre ohne Stuhlsäulen war $S=(Q+Q')\cot\alpha$. Weil nun allemal Q′ größer als $Q'\sin\alpha^2$ ist, so folgt daraus, daß durch die Anordnung eines stehenden Stuhls bei einem Dachgespärre der Sparrenschub vermindert wird.

Von der Kraft $\frac{Q}{\sin\alpha}+Q'\sin\alpha$ entstehet bei B ein vertikaler Druck

$$\left(\frac{Q}{\sin\alpha}+Q'\sin\alpha\right)\sin\alpha=Q+Q'\sin\alpha^2$$

dazu kommt noch der vertikale Druck Q″, und wenn hiezu der vertikale Druck der Stuhlsäule $Q'\cos\alpha^2$ addirt wird, so erhält man den gesammten vertikalen Druck auf den Balken BD, welcher von der einen Hälfte des Dachverbandes entsteht

$$Q+Q'\sin\alpha^2+Q''+Q'\cos\alpha^2=Q+Q'+Q''=bG$$

wie erfordert wird.

Bei dem liegenden Stuhle eines Dachgespärres wird die Stuhlsäule unmittelbar neben dem Sparren in einer schrägen Lage aufgestellt, es finden daher in diesem Falle die §. 357. angeführten Sätze statt, weil der Druck eben so wie bei einem Sparren mit Kehlbalken ohne stehende Säule gefunden wird. Es ist daher der Sparrenschub beim liegenden Stuhle merklich größer als beim stehenden.

§. 360.

Taf. XII Fig. 197. Aufgabe. Das Gespärre ABC Figur 197. eines Pultdachs ist mit einer Strebe (Stuhlsäule) ED verbunden, welche bei D senkrecht auf dem Sparren AB steht; man sucht den Sparrenschub und den Druck auf die Strebe.

Auflösung. Man setze die Länge des Sparren AB $= b$, die Entfernung $AD = c$, den Winkel $ABC = \alpha$; es sei jeder Fuß von der Länge des Sparrens mit einem Gewicht G belastet, also das ganze Gewicht des Sparren $AB = bG$. Der vertikale Druck von der Belastung bG sei in $A = Q$, in $D = Q'$, in $B = Q''$, so zerlegt sich die Kraft Q in A nach der Richtung AB und darauf senkrecht. Nach AB findet man die Kraft

$$= Q \sin \alpha.$$

Die Kraft Q' in D zerlegt sich nach den Richtungen DB und DC;

$$\text{nach } DB = Q' \sin \alpha,$$

$$\text{nach } DE = Q' \cos \alpha.$$

Der gesammte Druck nach der verlängerten Richtung BJ ist daher

$$Q \sin \alpha + Q' \sin \alpha = (Q + Q') \sin \alpha.$$

Wird dieser horizontal nach der Richtung BH zerlegt, so erhält man den Sparrenschub

$$S = (Q + Q') \sin \alpha \cos \alpha = \tfrac{1}{2} (Q + Q') \sin 2\alpha,$$

oder wenn nach §. 357. für Q und Q' die gleichen Werthe gesetzt werden, so ist

$$S = \frac{5b^2 - 3bc - c^2}{16(b-c)} G \sin 2\alpha.$$

Nun fällt der Werth von c zwischen o und b, und da innerhalb dieser Grenzen der Werth von S desto kleiner wird, je kleiner man c nimmt, so muß zur Verminderung des Sparrenschubs, die Strebe DE so weit nach oben angebracht werden, als es die übrigen Umstände gestatten.

Der Druck in D nach der Richtung DE ist $= Q' \cos \alpha$; wird daher nach §. 357. für Q' sein Werth gesetzt, so erhält man den Druck auf die Strebe DE

$$= \frac{b(b^2 + bc - c^2)}{8c(b-c)} G \cos \alpha.$$

§. 361.

Aufgabe. Zwei Sparren, AB und BD, Figur 198., Taf. XII
sollen auf einem wagerechten Boden CD gegen eine vertikale Wand AC so auf einander gestellt werden, daß sie im Gleichgewichte bleiben; man sucht die Winkel, welche diese Sparren alsdann mit dem Horizont einschließen müssen, vorausgesetzt, daß der untere Sparren auf dem wagerechten Boden nicht ausweichen kann. Fig. 198.

Auflösung. Die Länge des Sparrens AB sei $= b$, und jeder Fuß desselben wiege G Pfund. Eben das bezeichne b' und G' für den Sparren BD. Ferner sei der Winkel ABE $= \alpha$, BDC $= \alpha'$, so erhält man, weil bG das Gewicht des Sparrens BA bezeichnet, den

Sparrenschub nach der horizontalen Richtung Bb (§. 350. II.)

$$= \tfrac{1}{2} bG. \cot \alpha.$$

Auf den Punkt B entsteht vom Sparren AB ein vertikaler Druck $= bG$. (§. 350. III). Weil aber der Sparren AB sich nicht auf horizontalem Boden befindet, sondern durch BD gestützt ist, so zerlegt sich die Kraft bG, mit welcher der Obertheil des Sparrens BD vertikal gepreßt wird, wenn die Linie BJ diesen Druck vorstellt, in zwei andere Kräfte, nach BD und nach horizontaler Richtung BE. Der nach horizontaler Richtung BE entstehende Druck ist

$$= bG \cot \alpha'$$

und dem Druck nach $Bb = \tfrac{1}{2} bG \cot \alpha$ grade entgegen gesetzt. Von dem Sparren BD, dessen Gewicht $= b'G'$ ist, entstehet ebenfalls nach der horizontalen Richtung BE ein Druck (§. 350. I.)

$$= \tfrac{1}{2} b'G' \cot \alpha'.$$

Kann daher der Sparren DB an dem Orte, wo er auf den wagerechten Boden CD gestellt wird, in horizontaler Richtung nicht ausweichen, so wird nur dann zwischen beiden Sparren ein Gleichgewicht seyn, wenn die Pressungen nach der Richtung Bb und BE einander aufheben, oder wenn

$$\tfrac{1}{2} bG \cot \alpha = bG \cot \alpha' + \tfrac{1}{2} b'G' \cot \alpha' \text{ ist.}$$

Zur Erhaltung des Gleichgewichts erhält man daher die Bedingung

$$\cot \alpha = \left(2 + \frac{b'G'}{bG}\right) \cot \alpha'$$

oder weil $\cot \alpha = \frac{1}{\operatorname{tgt} \alpha}$, so erhält man

$$(\text{I.})\quad \operatorname{tgt} \alpha' = \left(2 + \frac{b' G'}{b G}\right) \operatorname{tgt} \alpha$$

Sind gleiche Sparrenlängen gleich stark belastet, so ist $G = G'$, alsdann erhält man, wenn die Längen b, b' der Sparren verschieden sind

$$(\text{II.})\quad \operatorname{tgt} \alpha' = \left(2 + \frac{b'}{b}\right) \operatorname{tgt} \alpha.$$

Wenn hingegen beide Sparren gleich lang sind und gleiches Gewicht haben, so wird $\frac{b'}{b} = 1$ also

$$(\text{III.})\quad \operatorname{tgt} \alpha' = 3 \operatorname{tgt} \alpha.$$

So bald daher die Längen und Gewichte der Sparren nebst einem Neigungswinkel gegeben sind, so kann daraus der andere Neigungswinkel gefunden werden. Auch läßt sich leicht einsehen, wie aus den beiden Neigungswinkeln und einer Sparrenlänge die Länge des andern Sparrens gefunden werden kann. Gewöhnlich ist für die Ausübung der Winkel α, welchen der Sparren mit dem Horizont einschließt, gegeben, weil dieser Winkel vom Klima und der Eindeckung abhängt.

Die hier gefundenen Ausdrücke enthalten die Grundlage zur statischen Theorie der gebrochenen Dächer oder Mansarden, wenn auf die Befestigung durch den bei BE anzubringenden Kehlbalken nicht Rücksicht genommen wird, und es läßt sich leicht einsehen, daß das Gleichgewicht auch noch bestehen muß, wenn statt der Wand AC, zwei andere Sparren von gleichen Abmessungen symmetrisch angebracht werden. Auch gründet sich besonders hierauf die Theorie von den Bohlendächern.

1. Beispiel. Bei einem gebrochenen Dache sollen beide Sparren gleich lang, aber das Gewicht des obern doppelt so groß, als das untere seyn; man sucht die Neigung des untern Sparrens, wenn der obere mit dem Horizont einen Winkel von 45 Grad einschließt.

Hier ist $\frac{b'}{b} = 1$, $\frac{G'}{G} = \frac{1}{2}$,

$\mathrm{tgt}\,\alpha = \mathrm{tgt}\,45° = 1$, daher nach (I.)

$\mathrm{tgt}\,\alpha' = (2 + \frac{1}{2}) = 2,5.$

Hiezu stimmt ein Winkel von 68 Grad 12 Minuten, es muß daher der untere Sparren mit dem Horizont einen Winkel von 68 Grad 12 Minuten einschließen.

2. Beispiel. Beide Sparren eines gebrochenen Dachs sollen gleich lang seyn und gleiches Gewicht haben, man sucht den Neigungswinkel für den untern Sparren, wenn der des obern 25 Grad beträgt.

Hier ist $\mathrm{tgt}\,\alpha = \mathrm{tgt}\,25° = 0{,}4663077$, daher nach (III)
$\mathrm{tgt}\,\alpha' = 3 . 0{,}4663077 = 1{,}398923 1$,
wozu ein Winkel von 54 Grad 27 Minuten stimmt, es ist daher $\alpha' = 54$ Grad 27 Minuten.

Für $\alpha = 30$ Grad wird
$\mathrm{tgt}\,\alpha' = 3 . 0{,}5773503 = 1{,}7320509$,
also $\alpha' = 60$ Grad.

Für $\alpha = 35$ Grad wird
$\mathrm{tgt}\,\alpha' = 3 . 0{,}7002075 = 2{,}1006225$,
also $\alpha' = 64$ Grad 32 Minuten.

Für $\alpha = 40$ Grad wird
$\mathrm{tgt}\,\alpha' = 3 . 0{,}8390996 = 2{,}5172988$,
also $\alpha' = 68$ Grad 20 Minuten.

Für $\alpha = 45$ Grad wird $\mathrm{tgt}\,\alpha = 1$, daher $\mathrm{tgt}\,\alpha' = 3$,
also $\alpha' = 71$ Grad 34 Minuten.

§. 362.

Zusatz. Wenn die Sparren eines gebrochenen Dachs gleiche Länge und gleiches Gewicht haben sollen, so kann aus dem gegebenen Neigungswinkel des einen Sparrens, der Neigungswinkel des andern für das Gleichgewicht durch eine leichte Zeichnung gefunden werden.

Es sei AB, Figur 199, die gegebene Länge des Sparrens, und ABC $= \alpha$ der gegebene Neigungswinkel für den obern Sparren. Man ziehe durch A die auf BC senkrechte Linie CD, nehme CD $= 3 \,.\, AC$, so ist DBC $= \alpha'$ der Neigungswinkel für den untern Sparren, weil alsdann $\text{tgt}\,\alpha' = 3\,\text{tgt}\,\alpha$ ist, wie nach (III.) erfordert wird. Wird nun die Linie DB nach E verlängert und BE $=$ BA genommen, so ist ABE die für das Gleichgewicht erforderliche Zusammenstellung der Sparren. Taf. XII Fig. 199.

Es läßt sich leicht einsehn, daß bei ungleicher Länge und Gewicht der Sparren auf eine ähnliche Art die Zusammenstellung derselben durch Zeichnung gefunden werden könne.

§. 363.

Wird verlangt, daß bei einem gebrochenen Dache die Länge der Sparren AB, BD, Figur 198., und die Höhe des Dachs AC $=$ h aus der gegebenen halben Breite DC $=$ a durch Rechnung unter der Bedingung gefunden werden soll, daß die Sparren unter einander im Gleichgewichte sind, so kann dies mit Beibehaltung der Bezeichnung §. 361. folgendergestalt geschehen. Taf. XII Fig. 198.

Wenn der Winkel α und das Verhältniß $\frac{b'}{b} = n$ nach den Umständen oder willkürlich angenommen worden, so läßt sich, wenn ebenfalls $\frac{G'}{G}$ gegeben, oder nach Willkür angenommen ist, der Winkel α' aus der Gleichung §. 361. I

$$\text{tgt}\ \alpha' = \left(2 + n\frac{G'}{G}\right)\ \text{tgt}\ \alpha$$

bestimmen. Nun ist $BE = KC = b \cos\alpha$ und $DK = b' \cos\alpha'$, daher

$KC + DK = CD = a = b \cos\alpha + b' \cos\alpha'$,

oder weil $b' = nb$ ist, so wird $a = b\ (\cos\alpha + n \cos\alpha')$ und man findet die Länge des obersten Sparrens AB oder

$$b = \frac{a}{\cos\alpha + n \cos\alpha'}$$

woraus sich leicht die Länge des untern Sparrens BD $= b' = nb$ finden läßt.

Ferner ist $AE = b \sin\alpha$ und $BK = EC = b' \sin\alpha' = nb \sin\alpha'$, daher $AE + EC = AC = h = b \sin\alpha + nb \sin\alpha'$, folglich findet man die Dachhöhe AC oder

$$h = b\ (\sin\alpha + n \sin\alpha').$$

Beispiel. Die halbe Breite eines Dachs sei 20 Fuß, der Neigungswinkel der obern Sparren 25 Grad, das Verhältniß der Sparrenlängen $\frac{b'}{b} = \frac{2}{3}$ und $\frac{G'}{G} = 1$ sind gegeben, man sucht die Länge der Sparren und die Dachhöhe.

Hier ist $\alpha = 25$ Grad, $n = \frac{2}{3}$ und $a = 20$, daher

$\text{tgt}\,\alpha' = (2+\frac{2}{3})\,\text{tgt}\,25^\circ = \frac{8}{3}\cdot 0{,}4663077 = 1{,}2434872$
also $\alpha' = 51$ Grad 12 Minuten.
Hieraus findet man die Länge des obersten Sparrens

$$b = \frac{20}{\cos 25^\circ + \frac{2}{3}\cos 51^\circ\, 12'} = 15{,}143 \text{ Fuß}$$

und die Länge des untersten Sparrens
$b' = \frac{2}{3} b = 10{,}095$ Fuß.
Endlich erhält man die Dachhöhe
$h = 15{,}143\,(\sin 25^\circ + \frac{2}{3}\sin 51^\circ\, 12') = 14{,}272$ Fuß.

§. 364.

Zusatz. Sind die Sparrenlängen b, b' einander gleich und $\frac{G'}{G} = 1$, also $\text{tgt}\,\alpha' = 3\,\text{tgt}\,\alpha$, so findet man die Sparrenlänge

$$b = \frac{a}{\cos\alpha + \cos\alpha'}$$

Nun ist $h = b\,(\sin\alpha + \sin\alpha') = \frac{a\,(\sin\alpha + \sin\alpha')}{\cos\alpha + \cos\alpha'}$

oder weil nach bekannten trigonometrischen Sätzen

$$\frac{\sin\alpha + \sin\alpha'}{\cos\alpha + \cos\alpha'} = \text{tgt}\,\frac{\alpha+\alpha'}{2}$$

ist, so erhält man die Dachhöhe

$$h = a\,\text{tgt}\,\frac{\alpha+\alpha'}{2}$$

Beispiele. Für $\alpha = 25^\circ$ ist $\alpha' = 54^\circ\, 27'$, daher die Sparrenlänge

$$b = \frac{a}{\cos 25^\circ + \cos 54^\circ\, 27'} = 0{,}671\ a$$

und die Dachhöhe
$h = a\ \text{tgt}\ 39^\circ\ 43\frac{1}{2}' = 0{,}639\ a.$
Für $\alpha = 30^\circ$ ist $\alpha' = 60^\circ$, daher
$b = 0{,}732\ a$
$h = a.$

Für $\alpha = 35°$ ist $\alpha' = 64° \; 32'$ also
$b = 0{,}800 \; a$
$h = 1{,}182 \; a.$

§. 365.

Soll hingegen aus der gegebenen halben Breite a und aus der Höhe h des Dachs die Neigung und Länge der Sparren durch Rechnung gefunden werden, wenn vorausgesetzt wird, daß beide Sparren von gleicher Länge sind, und $\frac{G'}{G} = 1$ ist, so erhält man nach §. 363.

$$b = \frac{a}{\cos\alpha + \cos\alpha'} \text{ und } b = \frac{h}{\sin\alpha + \sin\alpha'} ; \text{ also,}$$

wenn beide Ausdrücke einander gleich gesetzt werden,
$a \sin\alpha' - h \cos\alpha' = h \cos\alpha - a \sin\alpha$, oder weil

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha' \cos\alpha'}{\cos\alpha'} = \operatorname{tgt}\alpha' \cos\alpha', \text{ also}$$

$$(a \operatorname{tgt}\alpha' - h) \cos\alpha' = (h - a \operatorname{tgt}\alpha) \cos\alpha.$$

Nun ist $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 + \operatorname{tgt}\alpha^2)}}$ und

$$\cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{(1 + \operatorname{tgt}\alpha'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + 9 \operatorname{tgt}\alpha^2)}}.$$

weil $\operatorname{tgt}\alpha' = 3 \operatorname{tgt}\alpha$ ist, daher

$$\frac{3 a \operatorname{tgt}\alpha - h}{\sqrt{(1 + 9 \operatorname{tgt}\alpha^2)}} = \frac{h - a \operatorname{tgt}\alpha}{\sqrt{(1 + \operatorname{tgt}\alpha^2)}}.$$

Werden nun beide Ausdrücke quadrirt und nach tgt α geordnet, so erhält man

$$\operatorname{tgt}\alpha^2 + \tfrac{2}{3} \frac{a^2 - h^2}{a h} \operatorname{tgt}\alpha - \tfrac{1}{3} = 0, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tgt}\alpha = \frac{h^2 - a^2 + \sqrt{(a^4 + a^2 h^2 + h^4)}}{3 a h}$$

woraus leicht

$$\text{tgt}\,\alpha' = 3\,\text{tgt}\,\alpha \text{ und}$$

$$b = \frac{a}{\cos\alpha + \cos\alpha'}$$

gefunden werden kann.

Für $a = h$ wird

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3a^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = \text{tgt}\,30^\circ$$

$$\text{tgt}\,\alpha' = \sqrt{3} = \text{tgt}\,60^\circ$$

$$b = \frac{a}{\cos 30^\circ + \cos 60^\circ} = \frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}} = 0{,}73205\,a$$

Für $h = 2a$ wird

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{3 + \sqrt{21}}{6} = 1{,}2637626 = \text{tgt}\,51^\circ\,39'$$

$$\text{tgt}\,\alpha' = 3 \,.\, 1{,}2637626 = \text{tgt}\,75^\circ\,14'$$

$$b = \frac{a}{\cos 51^\circ\,39' + \cos 75^\circ\,14'} = 1{,}14240\,a$$

Beispiel. Bei einem gebrochenen Dache soll die halbe Tiefe 20 Fuß und die Höhe 16 Fuß betragen; man sucht die Neigung der Sparren und ihre Länge.

Es ist $a = 20$; $h = 16$ daher

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{-144 + \sqrt{327936}}{960} = 0{,}4465205,$$

wozu ein Winkel von 24 Grad 4 Minuten stimmt, welches der Neigungswinkel der obern Sparren ist.

Für den Neigungswinkel der untern Sparren erhält man

$$\text{tgt}\,\alpha' = 3\,\text{tgt}\,\alpha = 1{,}3395615,$$

wozu ein Winkel von 53 Grad 15 Minuten gehört.

Die Länge eines jeden Sparren findet man

$$b = \frac{20}{\cos 24^\circ\,4' + \cos 53^\circ\,15'} = 13{,}23 \text{ Fuß.}$$

§. 366.

Zusatz. Wird die Dachhöhe der halben Breite des Daches gleich, oder $h = a$, so erhält man

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{a^2\sqrt{3}}{3\,a^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = \text{tgt}\,30^\circ \text{ und}$$

$$\text{tgt}\,\alpha' = \sqrt{3} = \text{tgt}\,60^\circ \text{ wie §. 365.}$$

Für diesen besondern Fall kann leicht aus der gegebe-
Taf. XII nen Dachbreite AB, Figur 200, die Lage und Länge
Fig. 200. der Sparren durch Zeichnung gefunden werden, wenn man über AB einen Halbkreis beschreibt, denselben in sechs gleiche Theile in E, F, D, G, H, theilt und die Linien AF, ED, DH und BG zieht; alsdann ist AJDKB die Lage der Sparren. Denn der Winkel α = DJK = DEH hat den halben Bogen DGH zu seinem Maaße, also ist α = 30 Grad; der Winkel α' = FAB hat den halben Bogen FDGHB zu seinem Maaße, und ist daher = 60 Grad.

Noch auf eine andere Art kann aus der gegebe-
Taf. XII nen Breite AB, Figur 201., für den angenommenen
Fig. 201. Fall die Lage der Sparren gefunden werden, wenn in der Mitte von AB die Linie CD senkrecht gezogen und = $\frac{1}{2}$ AB genommen wird. Verlängert man AB, CD unbestimmt und nimmt AE = BE = DF = DG = AB, so erhält man die Durchschnitte J, K und dadurch die Gestalt des Dachs AJDKB. Der Grund dieses Verfahrens läßt sich ebenfalls leicht einsehen, weil der Winkel DFC = α also DF sin α = DC = $\frac{1}{2}$ DF, also sin $\alpha = \frac{1}{2}$ = sin 30°, daher α' = 60°, wie erfordert wird.

§. 367.

Der Sparrenschub S eines gebrochenen Dachs,

dessen Sparren bei B, Figur 198., im Gleichgewichte Taf XII.
sind, läßt sich nach §. 361. leicht bestimmen. Denn Fig. 198.
der unterste Sparren BD wird bei B mit einer Kraft bG vertikal gepreßt, wovon nach der Richtung BD eine Kraft $\frac{bG}{\sin\alpha'}$ entsteht, welche diesen Sparren nach horizontaler Richtung Dd mit einer Gewalt

$$\frac{bG}{\sin\alpha'} \cdot \cos\alpha' = bG \cot\alpha'$$

fort schiebt. Hierzu kommt der vom Gewicht b'G' des Sparrens BD entstehende Schub §. 361.

$$= \tfrac{1}{2}\, b'G' \cot\alpha'$$

daher ist der gesammte Sparrenschub

$$S = (bG + \tfrac{1}{2}\, b'G') \cot\alpha'$$

oder weil (§. 361). $\frac{1}{2}\, bG \cot\alpha = (bG + \frac{1}{2}\, b'G') \cot\alpha'$, so erhält man auch:

$$S = \tfrac{1}{2}\, bG \cot\alpha.$$

Eben so stark würde der vom obersten Sparren AB allein bewirkte Sparrenschub seyn, (§. 360.), daher äußern zwei über einander gestellte Sparren eines gebrochenen Dachs, wenn sie sich im Gleichgewichte befinden, einen eben so großen Sparrenschub, als wenn der oberste Sparren allein, ohne Verbindung mit dem untern wirkte.

Wäre a die halbe Breite und h die Höhe des gebrochenen Dachs, so ist

für $a = h$ (§. 365.), $b = 0{,}73205\, a$

und $\alpha = 30°$ also $\cot\alpha = \sqrt{3}$, daher der Sparrenschub

$S = \frac{1}{2} . 0,73205 \sqrt{3} . aG = 0,63397\ aG.$

Ferner für $h = 2a$ ist (§ 365.)

$b = 1,14240\ a$ und $\alpha = 51^\circ\ 39'$, also

$\cot \alpha = 0,79117$, daher der Sparrenschub

$S = \frac{1}{2} . 1,14240 . 0,79117\ aG = 0,45191\ aG.$

Der Sparrenschub grader Dächer von eben der Breite und Höhe (§. 351.) ist

für $a = h$, $S = 0,70711\ aG$ und

für $h = 2a$, $S = 0,54902\ aG$

Vergleicht man diese Werthe mit den vorhergehenden bei gebrochenen Dächern, so folgt daraus, daß für gleiche Höhe und Breite bei graden Dächern der Sparrenschub größer als bei gebrochenen Dächern ist.

§. 368.

Zusatz. Sind mehrere Sparren von verschiedener
Taf. XII Länge und Gewicht, wie ABLMNOP, Figur 202.,
Fig. 202. so über einander gestellt, daß sie sich im Gleichgewichte halten, so muß nothwendig der Sparrenschub in den Punkten B, L, M, N, O, P, welchen die über diesen Punkten befindliche Sparren verursachen, gleich groß seyn.

Gesetzt in M sei der Sparrenschub von $ABLM = H$ und in N von den Sparren $ABLMN = H'$. Ferner setze man das Gewicht von $ABLM = V$, von $MN = v$; den Winkel, welchen der Sparren LM mit dem Horizont einschließt $= \varphi$, so erfordert das Gleichgewicht unter den Sparren beim Punkte M, daß der

nach

nach horizontaler Richtung MM′ entstehende Druck, dem Sparrenschub H, nach der Richtung MH gleich sei. Nun ist der vom nächsten Sparren NM entstehende horizontale Druck nach MM′ $= \frac{1}{2}$ v cot φ (§. 350.), weil an den übrigen Punkten B, L, N, O, die horizontalen Pressungen im Gleichgewicht sind. Ferner drückt in M auf den Sparren MN die Last V senkrecht, wovon ein horizontaler Druck nach MM′

$$= V \cot \varphi$$

und nach MN ein Druck

$$= \frac{V}{\sin \varphi}$$

entsteht. Beide horizontale Pressungen $\frac{1}{2}$ v cot φ + V. cot φ müssen für das Gleichgewicht dem Sparrenschub H gleich seyn, also

$$H = (V + \tfrac{1}{2} v) \cot \varphi.$$

Von der Last V entsteht nach MN ein Druck $\frac{V}{\sin \varphi}$, welcher nach der horizontalen Richtung NH′ zerlegt, einen Schub $\frac{V}{\sin \varphi} . \cos \varphi = V \cot \varphi$ verursacht; wird hiezu der Sparrenschub addirt, welcher vom Sparren MN entsteht, $= \frac{1}{2}$ v cot φ (§. 350.), so ist der gesammte Sparrenschub bei N, welcher von den Sparren ABLMN entsteht, oder

$$H' = (V + \tfrac{1}{2} v) \cot \varphi \text{ also } H = H',$$

welches sich auf eine ähnliche Art für alle folgende im Gleichgewichte befindliche Sparren beweisen läßt, so verschieden auch die Länge und das Gewicht der Sparren seyn mag.

§. 369.

Werden die über einander gestellten Sparren so äußerst klein angenommen, daß solche eine stetige krumme Linie AM Fig. 203. bilden, so muß noch der im vorigen §. erwiesene Satz gelten, daß in jedem Punkte der krummen Linie AM, der wagerechte Druck gleich groß ist, wenn alle Theile derselben im Gleichgewichte sind. Da nun dies eine der vorzüglichsten Eigenschaften der Kettenlinie ist (§. 90. I. Anhang), aus welcher sich alle übrige Eigenschaften dieser krummen Linie ableiten lassen, so werden die unendlich kleinen über einander gestellten Sparren, wenn solche im Gleichgewichte sind, eine Kettenlinie bilden. Eine frei hängende Kette giebt daher genau die Gestalt an, nach welcher man mehrere äußerst kurze Sparren zusammen setzen muß, welche einander im Gleichgewichte halten sollen; nur daß man die Kettenlinie umgekehrt aufrichten muß. Wäre A der Scheitel dieser krummen Linie, und man nimmt von demselben auf der Vertikallinie AC die Abscissen und darauf senkrecht die Ordinaten, so erhält man für AP = x und PM = y folgende Gleichung (§. 95. Anhang), um für jedes x den zugehörigen Werth von y zu finden,

Taf. XII. Fig. 203.

$$y = \sqrt{\frac{79888\,c^2 x + 6913\,c x^2 - 157\,x^3}{39939\,c + 10000\,x}},$$

wo c eine beständige Größe ist, welche aus der halben Breite BC = a und Höhe AC = h durch nachstehenden Ausdruck gefunden wird (Anh. 95.)

$$c = \frac{25\,a^2 - 4{,}33\,h^2 + \sqrt{(625\,a^4 + 1036\,a^2 h^2 + 38\,h^4)}}{100\,h}$$

Der Winkel, welchen die Tangente der Kurve AB im Punkte B mit der Horizontale BD einschließt, sey α, so findet man (Anh. §. 96. I.)

$$\text{tgt}\ \alpha = \frac{\sqrt{(2ch + h^2)}}{c}$$

und wenn r den Krümmungshalbmesser im Scheitel A, und r′ im Punkte B bezeichnet, so ist (Anh. §. 98.)

$$r = c \text{ und } r' = \frac{(c+h)^2}{c}.$$

Nun ist offenbar, daß, wenn es darauf ankommt, den aus einzelnen Brettstücken zusammengesetzten Sparren eines Bohlendachs (Bogendach) anzugeben, dieser am geschicktesten seyn wird, der von der Eindeckung und seinem eigenen Gewicht entstehenden Belastung zu widerstehen, wenn sich alle Theile desselben im Gleichgewichte befinden, das heißt, wenn die Sparren nach einer Kettenlinie gekrümmt sind.

Gewöhnlich pflegt man einen Kreisbogen zur Krümmung der Sparren bei den Bogendächern zu nehmen, weil es in der Ausübung mit zu viel Schwierigkeiten verbunden ist, wenn man dem Bohlensparren nicht durchgängig einerlei Krümmung geben wollte. Aber auch dann, wenn der Sparren nach einem Kreisbogen geformt wird, kann man verlangen, daß die Gestalt des Kreisbogens so viel wie möglich mit der Kettenlinie überein kommt. Nun ist den Erfahrungen gemäß bei den Bogensparren der Untertheil der schwächste und am meisten dem Einbiegen ausgesetzt; auch bedarf derselbe deshalb eine sorgfältige Konstrukzion, weil der Obertheil gewöhnlich durch den Holz-

verband eine größere Verstärkung als der Untertheil erhält. Es wird also darauf ankommen, daß wenn die
Taf. XII halbe Dachbreite, Figur 204., $BC = a$ und die Dach-
Fig. 204. höhe $AC = h$ gegeben ist, die Tangente des dazu gehörigen Kreisbogen AB bei B mit dem Horizonte BC eben den Winkel $TBC = \alpha$ bildet, welchen eine durch die Punkte BA gelegte Kettenlinie erhält, deren Scheitel in A fällt, und daß der Halbmesser des Kreisbogens $BQ = R$, mit dem Krümmungshalbmesser der Kettenlinie für den Untertheil des Bogens, so viel wie möglich überein kommt.

§. 370.

Mit Beibehaltung der Bezeichnung des vorigen §. läßt sich für den Kreisbogen AB, Figur 204., wenn a, h und α gegeben sind, der Halbmesser R finden.

Es sey Q der gesuchte Mittelpunkt. Man verlängere AC und BC bis M und N, und ziehe QP auf BN senkrecht, so ist der Winkel

$BQP = QBT = \alpha$ daher

$BP = R \sin \alpha$ und

$PQ = R \cos \alpha$. Nun ist ferner

$CN = 2 . BP - a = 2 R \sin \alpha - a$ und

$CM = 2 . PQ + h = 2 R \cos \alpha + h$

und weil aus geometrischen Gründen

$BC . CN = AC . CM$ oder $a . CN = h . CM$

so ist auch

$a (2 R \sin \alpha - a) = h (2 R \cos \alpha + h)$

folglich, wenn hieraus der Halbmesser R entwickelt wird,

$$R = \frac{a^2 + h^2}{2(a \sin \alpha - h \cos \alpha)}.$$

Es ist aber auch

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tgt} \alpha}{\sqrt{(1 + \operatorname{tgt} \alpha^2)}} \text{ und } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 + \operatorname{tgt} \alpha^2)}}.$$

Setzt man diese Werthe in vorstehende Gleichung, so wird

$$R = \frac{(a^2 + h^2)\sqrt{(1 + \operatorname{tgt} \alpha^2)}}{2 a \operatorname{tgt} \alpha - h}$$

Soll nun der Winkel α mit demjenigen überein kommen, welchen eine durch AB gelegte Kettenlinie bildet, so wird erfordert, daß nach §. 369.

$$\operatorname{tgt} \alpha = \frac{\sqrt{(2ch + h^2)}}{c} \text{ sei.}$$

Diesen Werth in die zuletzt gefundene Gleichung gesetzt, giebt

$$R = \frac{(a^2 + h^2)(c + h)}{2[a\sqrt{(2ch + h^2)} - ch]}$$

So bald nun aus a und h der Werth von c bekannt ist, so läßt sich daraus der Halbmesser R finden.

Bezeichnet r den Krümmungshalbmesser der Kettenlinie für $x = \frac{1}{2} h$, so ist (Anh. §. 98.)

$$r = \frac{(c + \frac{1}{2} h)^2}{c}$$

Nun ist für $a = h$; $c = 0{,}619\, h$, (Anh. §. 95.) daher

$$R = \frac{2 \cdot 1{,}619\, h}{2(\sqrt{2{,}238} - 0{,}619)} = 1{,}846\, h$$

$$r = \frac{(0{,}619 + 0{,}5)^2}{0{,}619} h = 2{,}023\, h.$$

Soll daher der Kreisbogen AB mit der Kettenlinie unter den festgesetzten Bedingungen möglichst überein stimmen, so müßte auch $R = 2{,}023\,h$ seyn; alsdann würde aber α kleiner wie erfordert wird, weshalb als Mittelwerth $R = 2\,h$ gesetzt werden kann; das heißt, bei einem Bogensparren, wo die Dachhöhe der halben Breite des Dachs gleich ist, muß der Halbmesser des Kreisbogens doppelt so groß als die Dachhöhe seyn, wenn der Kreisbogen so viel wie möglich die Gestalt einer Kettenlinie erhalten soll.

Für $a = \frac{3}{4}\,h$ oder wenn die Breite des Dachs um die Hälfte größer, als die Höhe ist, erhält man $c = 0{,}383\,h$ also

$$R = 3{,}662\,h \text{ und } r = 2{,}036\,h.$$

Das arithmetische Mittel zwischen beiden Halbmessern ist $= 2{,}849$, so daß man für $a = \frac{3}{4}\,h$, den Halbmesser $R = 3\,h$ annehmen kann.

Wird $a = \frac{1}{2}\,h$, so ist $c = 0{,}202\,h$ also

$$R = 1{,}924\,h \text{ und } r = 2{,}440\,h,$$

so daß für diesen Fall $R = 2\,h$ angenommen werden kann.

§. 371.

Ein an beiden Enden aufliegender Balken AB, Taf. XII. Figur 205, welcher unterhalb durch Streben CD, EF Fig. 205. mit Hülfe eines Spannriegels CE gestützt wird, bildet ein Sprengewerk, und man kann die Last, welche der Balken tragen muß, so ansehen, als wenn sie auf die vier Punkte A, C, E und B vertheilt wäre. Es sei $AC = BE = c$ und der vertikale Druck auf C oder

$E = Q'$, so läßt sich Q' nach §. 348. leicht finden. Der horizontale Druck der Strebe CD gegen ihre Widerlage bei D sey S, so findet man, wenn der Winkel $ACD = \alpha$ ist, die Kraft, mit welcher die Widerlage horizontal weggedrückt wird, oder

$$S = Q' \cot \alpha.$$

Je größer daher der Winkel α oder je länger die Strebe CD bei unveränderter Länge des Spannriegels wird, desto geringer ist der Schub gegen die Widerlage.

Weil aber der Punkt D in den meisten Fällen, und besonders bei Brücken deshalb gegeben ist, weil solcher wegen des Eisganges noch über den Wasserspiegel fallen muß, so ist $AD = h$ als eine gegebene Größe anzusehen, und man erhält, weil $\cot \alpha = \frac{c}{h}$ ist,

$$S = \frac{c}{h} Q'.$$

Nun ist für den Fall, wenn auf der Mitte des Balkens AB in G eine Last P' liegt, und kein anderes Gewicht in Rechnung gebracht, auch $AG = b$ gesetzt wird, nach §. 348.

$$Q' = \frac{3b^2 - c^2}{4c(3b - 2c)} P' \text{ also}$$

$$S = \frac{3b^2 - c^2}{4h(3b - 2c)} P'.$$

Weil sich dieser Ausdruck aber auch so vorstellen läßt

$$S = \frac{P'}{16h} \left(3b + 2c + \frac{3b^2}{3b - 2c}\right)$$

so folgt daraus, daß S mit c wächst, oder wenn unter übrigens gleichen Umständen der Stützpunkt D der Strebe eines Sprengewerks gegeben ist, so wird der horizontale Druck gegen die Widerlage desto größer, je länger die Strebe ist.

Wäre die Last P′ nicht in der Mitte G angebracht, sondern über den ganzen Balken AB dergestalt gleichförmig verbreitet, daß auf jeden Fuß von der Länge des Balkens, G Pfund von der Last P′ kommen, so erhält man §. 348.

$$Q' = \frac{8\,b^3 + c^3 - 4\,b\,c^2}{8\,c\,(3\,b - 2\,c)}\;G \text{ also}$$

$$S = \frac{8\,b^3 + (c - 4\,b)\,c^2}{8\,h\,(3\,b - 2\,c)}\;G$$

daher auch bei einer auf dem Balken gleichförmig verbreiteten Last, der zuletzt angeführte Satz seine Anwendung findet.

§. 372.

Ueber dem an beiden Enden unterstützten Balken
Taf.XII. AB, Figur 206, eines Hängewerks, sind die Streben
Fig.206. AC, BD, der Spannriegel CD und die mit dem Balken verbundene Hängesäulen CE, DF angebracht, so kann man, wenn die Belastung des Balkens AB gegeben ist, den Druck auf die Punkte E und F nach §. 371. finden, wodurch zugleich die Kraft bestimmt ist, mit welcher jede Hängesäule vertikal abwärts gezogen wird. Diese sei Q′; ferner AE $= c$; CE $= h$ und der Winkel CAE $= \alpha$, so läßt sich Q′ in C, nach CA und CD zerlegen, und man erhält die Kraft, mit welcher die Strebe nach CA gedrückt wird

$$= \frac{Q'}{\sin\alpha} = \frac{Q' \sqrt{(c^2 + h^2)}}{h}$$

und die Kraft, mit welcher der Spannriegel CD zusammen gedrückt wird

$$= Q' \cot\alpha = \frac{c}{h} Q'$$

Sind daher die Punkte E, F, über welchen die Hängesäulen angebracht sind, bestimmt, so wird bei einerlei Belastung und unveränderter Balkenlänge, sowohl der Druck auf die Strebe, als auch auf den Spannriegel, desto geringer, je größer man die Länge der Hängesäule annimmt.

Die halbe Länge des Balkens sei $= b$ und in der Mitte desselben ein Gewicht P′ angebracht, so erhält man den Druck, welcher sich auf die Punkte E und F vertheilt, oder die Kraft, mit welcher jede Hängesäule vertikal abwärts gezogen wird (§. 348.)

$$Q' = \frac{3b^2 - c^2}{4c(3b - 2c)} P'$$

folglich die Kraft, mit welcher die Strebe nach CA gedrückt wird

$$= \frac{(3b^2 - c^2) \sqrt{(c^2 + h^2)}}{4ch(3b - 2c)} P',$$

und eben so findet man die Kraft, mit welcher der Spannriegel zusammen gedrückt wird

$$= \frac{3b^2 - c^2}{4h(3b - 2c)} P'.$$

Vierzehntes Kapitel.
Statik der Gewölbe und Widerlagen.

§. 373.

Statt eines Keils, welcher mit den Widerständen an seinen Seitenflächen im Gleichgewichte ist, kann man sich mehrere Keile neben einander denken, welche ein Gewölbe (Fornix, Concameratio. *Voûte*)
Taf.XIII ABDFF'A', Figur 207, bilden, von dessen Hälfte die
Fig.207. angeführte Figur einen vertikalen Durchschnitt vorstellt. Die einzelnen Keile wie AA'B'B (welchen hier der Untertheil ABO fehlt) heißen Gewölbsteine (Cunei. *Voussoirs*), die Flächen, mit welchen sich die Gewölbsteine berühren, die Bindungs- oder Lagerflächen (*Lits*) und der Raum zwischen zwei an einander stoßenden Gewölbsteinen, die Fuge (Coagmentum. *Joint*). Diejenige Masse FF'J, von welcher der Untertheil des Gewölbes gestützt und getragen wird, heißt die Widerlage (*Support. Pied-droit*); bei Brükken der Stirnpfeiler (*Culée*) und wenn zwei neben einander befindliche Gewölbe darauf ruhen, ein Pfeiler (*Pilier*). Derjenige Theil des Gewölbes, welcher sich zunächst an der Widerlage befindet, heißt der Anfang des Gewölbes (*Naissance*); der daselbst befindliche Gewölbstein, welcher der unterste ist, der erste Wölb-

stein (*Coussinet*), so wie der oberste der Schlußstein (*Clef*) heißt.

Macht man durch den Schlußstein und die beiden Widerlagen eines Gewölbes einen solchen Querschnitt, welcher die innere und äußere Fläche des Gewölbes senkrecht durchschneidet, so heißt die Fläche, deren Durchschnitt in die Linie ABDEF fällt, die innere Wölbung (*Intrados*), die Fläche, deren Durchschnitt die Linie A'B'D'E'F' vorstellt, die äußere Wölbung (*Extrados*) und die höchsten Punkte A, A', die Scheitel dieser Wölbungen. Die Linien ABDEF und A'B'D'E'F' heißen die Wölblinien, welche man auch unter dem Namen Wölbung begreift. Sind alle mit einander parallele senkrechte Querschnitte eines Gewölbes einander gleich, also alle zwischen zwei solchen parallelen Querschnitten gelegene Gewölbstücke Prismen, so heißt das Gewölbe ein grades Tonnengewölbe (*Berceau*), welches symmetrisch ist, wenn die beiden Hälften der Wölbung, vom Scheitel bis zur Widerlage gerechnet, einander gleich sind. Liegen die Scheitel der verschiedenen parallelen Querschnitte in einer wagerechten Linie, so ist das Tonnengewölbe wagerecht, sonst schief. Die Gestalt der innern Wölbung bestimmt gewöhnlich den Beinamen des Gewölbes. Bei einem scheidrechten Gewölbe (*Platte-bande droite*), ist die innere Wölbung grade.

Die vordere Ansicht eines Tonnengewölbes heißt die Stirnfläche (*Parement*), bei welcher hier immer vorausgesetzt wird, daß sie auf der Fläche der innern Wölbung senkrecht stehe.

Eine andere Art Gewölbe sind die Kuppel- oder Kesselgewölbe (Tholi. *Voûtes en dôme*) deren Höhlung irgend ein Konoid bildet, dessen krumme Oberfläche mit der innern Wölbung des Kuppelgewölbes überein kommt.

Mehrere Benennungen und Eintheilungen der Gewölbe sind zu dem vorgesetzten Zwecke nicht erforderlich.

I. Tonnengewölbe.

A. Wenn die Gewölbsteine unter einander ohne Rücksicht auf Reibung und Kohäsion im Gleichgewichte sind.

§. 374.

Aufgabe. Mehrere Gewölbsteine AB′, BD′, DE′....

Taf. XIII Fig. 207 Figur 207., auf welche außer ihrem eigenen Gewichte keine andere Kräfte wirken, befinden sich im Gleichgewichte, vorausgesetzt, daß in den vollkommen ebenen Fugen weder Kohäsion noch Reibung statt finde, und daß im Scheitel bei AA′ eine vertikale Wand und bei FF′ die feste Widerlage FJ das Ausweichen verhindere; man sucht die Bedingungen, unter welchen die einzelnen Steine mit einander im Gleichgewichte seyn müssen.

Auflösung. Die einzelnen Gewölbsteine können offenbar durch den Druck der übrigen Masse des Gewölbes nicht ausgedrängt werden, und müssen sich im Gleichgewichte befinden, wenn das Gewicht eines jeden Steins einen eben so starken Normaldruck gegen die Fläche oder Fuge der angrenzenden Steine ausübt, als diese gegen den einzelnen Gewölbstein. Es sei daher das Gewicht des Steins $AB' = S$ und der Winkel $A'OB'$, welchen seine unterste Fuge $B'B$ mit der Vertikale OA bildet $= \alpha$. Durch den Schwerpunkt G des Gewölbsteins AB' sei die Vertikallinie GS gezogen, so wirkt das Gewicht S in dieser Linie vertikal nach unten, und man kann dasselbe horizontal nach GH in eine Kraft C und auf $B'B$ senkrecht nach GK in eine Kraft N zerlegen. Nach §. 217. (I) findet man die Kraft, mit welcher der Gewölbstein AB' gegen die vertikale Fuge $A'A$ gepreßt wird, oder

$$C = S \cot \alpha \text{ oder } S = C \operatorname{tgt} \alpha.$$

Eben so ist der Normaldruck auf $B'B$ oder

$$N = \frac{S}{\sin \alpha}$$

Das Gewicht des folgenden Gewölbsteins sei S' und der Winkel $D'O'o'$, welchen seine untere Fuge mit der Vertikale $o'O'$ bildet $= \alpha'$, so kann man das Gewicht S', welches in der durch den Schwerpunkt G' des Steins gezogenen Vertikallinie $G'S'$ wirkt, nach $G'K$ senkrecht auf BB' in die Kraft M' und senkrecht auf $D'D$ nach der Richtung $G'L'$ in die Kraft N' zerlegen. Man ziehe $G'gg'$ horizontal, so ist $\Delta\, G'gK \backsim gOg'$ also der Winkel $KG'g = \alpha$, folglich $KG'S' = 90° + \alpha$. Weil ferner $G'S'$ mit $A'O$ parallel läuft, so ist $LhG' = \alpha'$ also $LG'S' = 90° - \alpha'$ und daher $LG'K = LG'S' + KG'S' = 180° - (\alpha' - \alpha)$. Hiernach erhält man $\sin LG'S' = \cos \alpha'$, $\sin KG'S' =$

$\cos\alpha$ und $\sin LG'K = \sin(\alpha' - \alpha)$. Es ist daher nach §. 19. (I) die Normalkraft, welche der Gewölbstein BD' gegen BB' ausübt, oder

$$M' = \frac{\sin LG'S'}{\sin LG'K} \cdot S' = \frac{S' \cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$$

und die Normalkraft gegen $D'D$, oder

$$N' = \frac{\sin KG'S'}{\sin LG'K} \cdot S' = \frac{S' \cos\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)}.$$

Des hierauf folgenden Gewölbsteins DE' Gewicht sei S'' und der Winkel $E'O''o''$, welchen die unterste Fuge $E'E$ mit der Vertikale $o''O''$ einschließt $= \alpha''$, ferner der Normaldruck gegen $DD' = M''$ und gegen $EE' = N''$, so findet man wie vorhin

$$M'' = \frac{S'' \cos\alpha''}{\sin(\alpha'' - \alpha')} \text{ und}$$

$$N'' = \frac{S'' \cos\alpha'}{\sin(\alpha'' - \alpha')}.$$

Auf ganz ähnliche Art erhält man die Normalpressungen von den Gewichten S''', S^{IV}.... der folgenden Gewölbsteine. Sollen nun sämmtliche Steine mit einander im Gleichgewichte seyn, so muß $N = M'$, $N' = M''$, $N'' = M'''$ u. s. w. seyn und man erhält

$$\frac{S}{\sin\alpha} = \frac{S' \cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$$

$$\frac{S' \cos\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)} = \frac{S'' \cos\alpha''}{\sin(\alpha'' - \alpha')}$$

$$\frac{S'' \cos\alpha'}{\sin(\alpha'' - \alpha')} = \frac{S''' \cos\alpha'''}{\sin(\alpha''' - \alpha'')} \text{ u. s. w.}$$

Werden statt $\sin(\alpha' - \alpha)$; $\sin(\alpha'' - \alpha')$ ... die gleichen Werthe $\sin\alpha' \cos\alpha - \cos\alpha' \sin\alpha$; .....

gesetzt und statt der Sinus und Cosinus, die Tangenten eingeführt, so erhält man nach der Entwickelung

$$S' = S \frac{\text{tgt}\,\alpha' - \text{tgt}\,\alpha}{\text{tgt}\,\alpha}$$

$$S'' = S' \frac{\text{tgt}\,\alpha'' - \text{tgt}\,\alpha'}{\text{tgt}\,\alpha' - \text{tgt}\,\alpha}$$

$$S''' = S'' \frac{\text{tgt}\,\alpha''' - \text{tgt}\,\alpha''}{\text{tgt}\,\alpha'' - \text{tgt}\,\alpha'}$$

$$S^{\text{IV}} = S''' \frac{\text{tgt}\,\alpha^{\text{IV}} - \text{tgt}\,\alpha'''}{\text{tgt}\,\alpha''' - \text{tgt}\,\alpha''} \text{ u. s. w.}$$

Es ist aber $S = C\,\text{tgt}\,\alpha$, und wenn dieser Werth statt S; der dadurch für S' gefundene Werth statt S' u. s. w. in vorstehende Gleichungen eingeführt wird, so erhält man

$$S = C\,\text{tgt}\,\alpha$$
$$S' = C\,(\text{tgt}\,\alpha' - \text{tgt}\,\alpha)$$
$$S'' = C\,(\text{tgt}\,\alpha'' - \text{tgt}\,\alpha')$$
$$S''' = C\,(\text{tgt}\,\alpha''' - \text{tgt}\,\alpha'') \text{ u. s. w.}$$

und hieraus

$$S = C\,\text{tgt}\,\alpha$$
$$S + S' = C\,\text{tgt}\,\alpha'$$
$$S + S' + S'' = C\,\text{tgt}\,\alpha''$$
$$S + S' + S'' + S''' = C\,\text{tgt}\,\alpha''' \text{ u. s. w.}$$

welches eben so für jede noch größere Anzahl von Gewölbsteinen bewiesen werden kann.

In allen diesen Ausdrücken ändert sich der Winkel $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$, wenn sich die Summe von den Gewichten $S, S', S'' \ldots$ ändert, so groß oder klein man auch das Gewicht S des ersten Gewölbsteins annimmt, dagegen bleibt in allen Ausdrücken der Druck C eine unveränderliche Größe.

Wenn daher Q das Gewicht des Gewölbbogens bezeichnet, welcher aus einzelnen Steinen bestehet, deren Gewichte S, S', S'', S''' ..... sind, und die oberste Fuge desselben ist vertikal, die unterste bildet aber mit der Vertikallinie einen Winkel φ, so ist allgemein

(I) $Q = C \operatorname{tgt} \varphi$ oder $C = Q \cot \varphi$,

wo C die horizontale Pressung des obersten oder am Scheitel befindlichen Gewölbsteins, gegen die vertikale Fuge bezeichnet. Dieser Druck C muß übrigens von einerlei Größe bleiben, so groß auch das im Gleichgewicht befindliche Gewölbe werden mag, weil für das Gleichgewicht jeder folgende Gewölbstein den über ihm liegenden nur eben so stark preßt, als er von diesem gedrückt wird.

Daß dieser Horizontaldruck C des ersten Gewölbsteins, dessen Gewicht S ist, immer unverändert bleibt, so groß oder klein man auch den ersten Gewölbstein annehmen mag, kann man sich noch folgendergestalt überzeugen. Wäre der erste Gewölbstein z. B nur halb so dick, also sein Gewicht $s = \frac{1}{2} S$; der zugehörige Winkel $= \beta$ und der davon entstehende Horizontaldruck nicht C sondern C', so erhält man wie vorher

$s = C' \operatorname{tgt} \beta$; $S = C' \operatorname{tgt} \alpha$ u. s. w.

Nun war auch $S = C \operatorname{tgt} \alpha$, daher ist $C' = C$.

Wäre W das Gewicht desjenigen Gewölbsteins, welcher unmittelbar auf das Gewölbstück folgt, dessen Gewicht Q ist, so sei φ' der Winkel, den seine untere Fuge

mit

mit der Vertikale einschließt, alsdann ist ϕ dieser Winkel für die oberste Fuge desselben und man erhält wie oben

(II) $W = C\,(\text{tgt}\,\phi' - \text{tgt}\,\phi)$

oder auch nach der ersten Bezeichnung

(III) $W = \frac{C \sin(\phi' - \phi)}{\cos\phi' \cos\phi}$

Aus der Verbindung (I) mit (II) erhält man

(IV) $Q : W = \text{tgt}\,\phi : \text{tgt}\,\phi' - \text{tgt}\,\phi$

oder für das Gleichgewicht unter den Steinen eines Gewölbes wird erfordert, daß sich das Gewicht eines Stücks dieses Gewölbes, vom Scheitel an bis zu irgend einem Gewölbsteine gerechnet, zum Gewichte dieses unmittelbar darunter liegenden Gewölbsteins verhält, wie die Tangente des Winkels, welchen die untere Fuge des Gewölbstücks mit der Vertikale bildet, zur Differenz der Tangenten der Winkel, welche die Fugen des Gewölbsteins mit der Vertikale einschließen.

Aus (III) erhält man ferner

(V) $Q : Q + W = \text{tgt}\,\phi : \text{tgt}\,\phi'$

oder die Gewichte zweier Gewölbstücke, vom Scheitel an gerechnet, müssen sich eben so wie die Tangenten der Winkel verhalten, welche ihre untere Fugen mit der Vertikale bilden, wenn unter den Gewölbsteinen ein Gleichgewicht entstehen soll.

§. 375.

Zusatz. Für irgend einen Gewölbstein, dessen Gewicht W ist, und dessen beide Fugen mit der Vertikallinie die Winkel φ und φ' einschließen, findet man den Normaldruck N auf den unterhalb darauf folgenden Gewölbstein

$$N = \frac{W \cos \varphi}{\sin (\varphi' - \varphi)}$$

Dieser Normaldruck kann in einen horizontalen H und in einen vertikalen Q′ zerlegt werden, alsdann ist (§. 20. I. II.)

$H = N \cos \varphi'$ und $Q' = N \sin \varphi'$ oder

$$H = W \frac{\cos \varphi' \cos \varphi}{\sin (\varphi' - \varphi)} = \frac{W}{\operatorname{tgt} \varphi' - \operatorname{tgt} \varphi}$$

weil aber (§. 374. II) $W = C (\operatorname{tgt} \varphi' - \operatorname{tgt} \varphi)$ ist, so erhält man

(I) $H = C.$

Da nun der gefundene Ausdruck unverändert bleibt, wenn auch der horizontale Druck auf jede andere Fuge gesucht wird, so folgt hieraus, daß wenn alle Gewölbsteine im Gleichgewichte sind, so ist der horizontale Druck eines jeden Gewölbstücks auf den darunter befindlichen Gewölbstein, oder der horizontale Druck des ganzen Gewölbes auf die darunter befindliche Widerlage, dem horizontalen Druck des Gewölbes gegen die am Scheitel befindliche vertikale Fuge gleich.

Für den vertikalen Druck erhält man

$$Q' = N \sin \varphi' = W \frac{\sin \varphi' \cos \varphi}{\sin (\varphi' - \varphi)} = \frac{W \operatorname{tgt} \varphi'}{\operatorname{tgt} \varphi' - \operatorname{tgt} \varphi}.$$

Nun ist (§. 374. V) $\operatorname{tgt} \varphi' = \frac{(Q + W) \operatorname{tgt} \varphi}{Q}$ und

(§. 374. I) $\frac{\operatorname{tgt} \varphi}{Q} = \frac{1}{C}$ also $\operatorname{tgt} \varphi' = \frac{Q + W}{C}.$

Ferner ist nach eben dem §. (II) $W = C$ ($\operatorname{tgt}\varphi' - \operatorname{tgt}\varphi$) daher

$$\text{(II)}\ Q' = Q + W,$$

d. h. der vertikale Druck eines jeden Gewölbstücks, vom Scheitel an gerechnet, gegen die darunter befindliche Fuge, ist dem Gewichte dieses Gewölbstücks gleich.

Uebrigens bleibt der horizontale und vertikale Druck unverändert, das Gewölbstück mag aus einer zusammenhängenden Masse oder aus noch so vielen einzelnen Gewölbsteinen bestehen, wenn nur sämmtliche Fugen die für das Gleichgewicht erforderliche Lage erhalten.

§. 376.

Mit Hülfe des §. 374. (V) erwiesenen Satzes, ist man im Stande, durch Zeichnung die erforderliche Höhe der Gewölbsteine eines Tonnengewölbes anzugeben, wenn vorausgesetzt wird, daß die innere Wölbung ein Kreisbogen ist, sämmtliche Steine gleiches spezifisches Gewicht haben, und daß die Richtung sämmtlicher Fugen nach dem Mittelpunkte des Kreisbogens gehet. Haben nun sämmtliche Steine an der innern Wölbung gleiche Breite, also AB = BD = DE ꝛc. Figur 208., so wird sich das Gewicht derselben wie die Flächen AB′, BD′, DE′ ꝛc. oder beinahe wie ihre Höhen, AA′, BB′ DD′ ꝛc. verhalten. Man verlängere die Vertikale CA nebst dem Halbmesser CB des obersten Gewölbsteins so weit, bis eine auf aC senkrechte Linie ab, der gegebenen Höhe A′A des obersten Gewölb- Taf. XII. Fig. 208.

steins gleich ist. Auf der Verlängerung von ab bemerke man die Punkte d, e, f, g ...., welche durch die Verlängerung von CD, CE, CF, ... gefunden werden, so sind ab, bd, de, ef, fg u. s. w. eben so groß, als die erforderlichen Höhen AA′, BB′, DD′, EE′, FF′ u. s. w. der dazu gehörigen Gewölbsteine.

Setzt man das Gewicht des Steins AB′ = Q, des Steins BD′ = W, den Winkel ACB = φ, ACD = φ', so verhält sich (§. 374. IV.)

$$Q : W = \mathrm{tgt}\,\varphi : \mathrm{tgt}\,\varphi' - \mathrm{tgt}\,\varphi \text{ oder}$$

$$AA' : BB' = ab : ad - ab.$$

Nun ist $AA' = ab$ also

$BB' = ad - ab = bd.$

Hienach ist ferner $AA' + BB'$ dem Gewichte des Gewölbstücks AD' proportional; setzt man dies = Q und $DE' = W$; ferner den Winkel ACD = φ und DCE = φ', so wird, weil

$$Q : W = \mathrm{tgt}\,\varphi : \mathrm{tgt}\,\varphi' - \mathrm{tgt}\,\varphi, \text{ auch}$$

$$AA' + BB' : DD' = ad : ae - ad$$

oder weil $AA' + BB' = ad$, so ist auch $DD' = ae - ad = de$ die erforderliche Höhe des dritten Gewölbsteines. Auf eben die Art kann man sich überzeugen, daß auf der Linie ah, sämmtliche Höhen für die zugehörigen Gewölbsteine angegeben werden. Es läßt sich aber auch einsehn, wie fern wegen der zunehmenden Breite der Gewölbsteine dieses Verfahren noch einiger Berichtigung bedarf.

Nimmt man an, daß die Gewölbsteine nur sehr wenig Dicke hätten, welches um so mehr verstattet ist, da ein Gewölbe mit mehr Fugen nichts an seiner Festigkeit verliert und alle einzelne Steine bei mehrern Fugen noch wie vorher im Gleichgewichte bleiben müssen, so kann man die Linie, welche die äußere Wölbung bildet, mit Hülfe der angegebenen Zeichnungsart als eine zusammenhängende krumme Linie angeben, wie solche Figur A′ W abgebildet ist. Weil aber diese Linie den verlängerten horizontalen Durchmesser KL nie erreichen kann, so zeigt dies an, daß für das Gleichgewicht unter sämmtlichen Gewölbsteinen der unterste Gewölbstein unmittelbar über der Widerlage unendlich lang seyn müßte, wenn man voraussetzt, daß zwischen den Steinen weder Kohäsion noch Reibung vorhanden ist. Es läßt sich aber auch einsehn, daß der unterste oder erste Gewölbstein eben nicht sehr lang seyn darf, wenn auf die Reibung Rücksicht genommen wird, ob es gleich wichtig war, die Umstände näher kennen zu lernen, unter welchen ein Gewölbe nur im Gleichgewichte seyn kann, dessen Steine ohne Reibung und Kohäsion voraus gesetzt werden.

§. 377.

Die Dicke eines Gewölbes kann mit Hülfe der innern Wölbung dadurch bezeichnet werden, daß man zu irgend einem Punkte M, Figur 208, der innern Taf. XIII Wölbung eine Tangente MT zieht, und auf diese in Fig. 208. dem angenommenen Punkte M eine Linie MN senkrecht auf MT so weit verlängert, bis solche die äußere Wölbung in N schneidet, alsdann ist MN die Dicke des Gewölbes im Punkte M. Stehen die Fugen auf der innern Wölbung senkrecht, so ist MN die Länge der Fuge für den Punkt M und in diesem Falle sind die Längen der Fugen mit den Gewölbdicken einerlei. Stehen hingegen die Fugen auf der innern Wölbung nicht senkrecht, so ist auch die zu irgend einem Punkte der Wölbung gehörige Gewölbdicke von der zugehörigen Fugenlänge verschieden.

Weil jedes grade Tonnengewölbe zwischen zwei parallelen gleich großen Stirnflächen enthalten ist, so nennt man den Abstand dieser Stirnflächen von einander, die Länge des Gewölbes, welche mit der Dicke nicht verwechselt werden darf. Bei den folgenden Untersuchungen wird man diese Länge durchgängig = 1 setzen, weil dadurch die Rechnung erleichtert wird und es leicht ist, wenn man die Eigenschaften eines Gewölbes für die Länge = 1 kennt, die Schlüsse auch auf jede andere Länge fort zu setzen. Unter dieser Voraussetzung entspricht daher einem jeden Quadratfuß von der Stirnfläche, ein Kubikfuß von der Masse des Gewölbes.

§. 378.

Aufgabe. Man sucht die erforderliche Dicke eines Tonnengewölbes, wenn sämmtliche Gewölbsteine ohne Reibung und Kohäsion einander im Gleichgewicht erhalten sollen, die innere Wölbung aus irgend einer krummen Linie besteht, und dabei vorausgesetzt wird, daß sämmtliche Fugen auf der innern Wölbung senkrecht stehen.

Auflösung. Weil die innere Wölbung gegeben ist, so kommt es lediglich darauf an, die Länge einer jeden Fuge zu finden, und weil diese zugleich die Dicke des Gewölbes angiebt, so ist die Aufgabe aufgelöst. Nun sei AMK, Figur 209, die gegebene innere Wölbung, A der Scheitel derselben und MmnN irgend ein sehr schmaler Gewölbstein, dessen verlängerte Fugen sich in O schneiden. Das Gewicht dieses Steins sei W; der Winkel MOo, welchen die Fuge NM mit der Vertikal oO bildet $= \varphi$ und der Winkel MOm $= \delta$, so ist, wenn C den unveränderlichen Horizontaldruck des Gewölbes gegen die vertikale Fuge AA' bezeichnet, nach §. 374. (III) Taf. XIII Fig. 209.

$$\frac{W}{C} = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi \cos (\varphi + \delta)}.$$

Da es nun ohne Unterbrechung des Gleichgewichts verstattet ist, den Gewölbstein Mn so dünn als man will, anzunehmen, so kann auch der Winkel δ so äußerst klein angenommen werden, daß sein Bogen für den Halbmesser 1, von seinem Sinus nicht verschieden ist; alsdann wird $\sin \delta =$ Bogen δ oder $= \delta$, und wegen des äußerst kleinen Werths von δ, ist hier $\cos (\varphi + \delta) = \cos \varphi$, daher

$$\frac{W}{C} = \frac{\delta}{\cos \varphi^2}.$$

Nun sei $r = OM$ der Krümmungshalbmesser für den kleinen Bogen Mm und die Länge der Fuge $MN = z$, so verhält sich r z

$1 : r = \delta : Mm$, also ist $Mm = r\delta$.

Ferner verhält sich

$r : r + z = Mm : Nn$ also ist $Nn = \frac{r+z}{r} \cdot Mm = (r + z)\,\delta$.

Der Inhalt von der Stirnfläche des Gewölbsteins $MmnN$ sei $= f$, so ist

$f = \frac{1}{2} \cdot ON \cdot Nn - \frac{1}{2} \cdot OM \cdot mM$, oder

$$f = \tfrac{1}{2}(r + z)(r + z)\,\delta - \tfrac{1}{2} r \cdot r\delta$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[(r + z)^2 - r^2\right]\delta.$$

Der Stirnfläche f entspricht das Gewicht W und es läßt sich eben so für den Druck C gegen AA', eine Fläche angeben, welche sich zu f, wie C zu W verhält. Man setze die Dicke des Gewölbes im Scheitel oder $AA' = b$ und die Fläche, welche dem Druck

b

C oder dem ihm gleichen Gewichte C entspricht $= b \cdot c$, wo c die Seite eines Rechtecks bezeichnet, dessen Höhe b ist, so verhält sich

$W : C = f : b \cdot c$ daher ist

$$\frac{W}{C} = \frac{f}{bc} = \frac{\left[(r+z)^2 - r^2\right]\delta}{2bc}$$

oder, wenn dieser Werth in die Gleichung $\frac{W}{C} = \frac{\delta}{\cos\varphi^2}$ gesetzt wird

$$\frac{\left[(r+z)^2 - r^2\right]\delta}{2bc} = \frac{\delta}{\cos\varphi^2} \text{ oder}$$

$$(r + z)^2 - r^2 = \frac{2bc}{\cos\varphi^2}$$

daher, wenn man hieraus z entwickelt,

$$\text{(I) } z = -r + \sqrt{\left[r^2 + \frac{2bc}{\cos\varphi^2}\right]}.$$

Nun ist im Scheitel A die Höhe oder Dicke des Gewölbsteins $AA' = b$, und man erhält, wenn der Krümmungshalbmesser im Scheitel bei $A = \varrho$ gesetzt wird, nach der angenommenen Bezeichnung, indem man die gefundene Gleichung (I) auf den Scheitel anwendet, $z = b$, $r = \varrho$, $\varphi = 0$ also $\cos\varphi = 1$, daher, wenn diese Werthe in die vorstehende Gleichung gesetzt werden

$$b = -\varrho + \sqrt{(\varrho^2 + 2bc)} \text{ oder}$$

$$bc = \frac{2\varrho b + b^2}{2}$$

und wenn dieser Werth statt bc in die Gleichung (I) eingeführt wird, so findet man für jeden Punkt der innern Wölbung die Dicke des Gewölbes oder die Länge der Fuge

$$\text{(II) } z = -r + \sqrt{\left(r^2 + \frac{2\varrho b + b^2}{\cos\varphi^2}\right)}.$$

Wenn daher für irgend einen Punkt der innern Wölbung der Krümmungshalbmesser r und der Winkel φ gegeben und die Dicke des Gewölbes im Scheitel nebst dem Krümmungshalbmesser daselbst bekannt sind, so läßt sich daraus leicht die Dicke des Gewölbes also auch die Gestalt der äußern Wölbung für das Gleichgewicht finden.

§. 379.

Die innere Wölbung sei ein Kreisbogen KAL, Figur 208, und $AC = r$ sein Halbmesser, so ist für Taf. XIII alle Punkte der innern Wölbung r eine unveränderli- Fig. 208. che Größe, also $\varrho = r$ und

$$z = -r + \sqrt{\left(r^2 + \frac{2rb + b^2}{\cos\varphi^2}\right)}.$$

Für $AP = x$ sei der Winkel $ACM = \varphi$, so ist $CM \cos\varphi = CP$ oder $r \cos\varphi = r - x$ daher

$$\cos\varphi^2 = \frac{(r-x)^2}{r^2}.$$

Setzt man den Werth für $\cos\varphi^2$ in die obige Gleichung, so erhält man die Länge eines jeden Gewölbsteins, wenn die innere Wölbung ein Kreisbogen ist, oder

$$z = -r + r\sqrt{\left(1 + \frac{b^2 + 2br}{(r-x)^2}\right)}.$$

Beispiel. Der Halbmesser von der innern Wölbung eines kreisförmigen Gewölbes sei 6 Fuß, und seine Dicke im Scheitel 1 Fuß, so ist hier $r = 6$, $b = 1$ also

$$z = -6 + 6\sqrt{\left(1 + \frac{13}{(6-x)^2}\right)}.$$

Für $x =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6
wird $z =$ 1,397; 2,078; 3,381; 6,369; 16,450; ∞
hienach ist die äußere Wölbung A′R, Figur 208, aufgetragen, welche von der §. 376. aus den daselbst angeführten Gründen um so mehr abweicht, je dicker die Gewölbsteine werden, weil daselbst die Stirnfläche der Gewölbsteine als Rechtecke angenommen sind, welches aber um so mehr von der Wahrheit abweicht, je länger die Fugen ausfallen.

§. 380.

Wäre die innere Wölbung ein gedruckter Bogen, welcher aus mehrern Kreisbogen zusammen gesetzt ist, so kann unter der Voraussetzung, daß sämmtliche Fugenschnitte senkrecht auf der innern Wölbung stehen, die Dicke des Gewölbes oder die Länge jedes Gewölbsteins leicht berechnet werden.

Die halbe Wölbung AB, Figur 210, bestehe aus Taf. XIII den beiden Kreisbogen AD, DB, deren Mittelpunkte in Fig 210. O und G liegen. Es sei AO = OD = r, AA′ = b so läßt sich, wie im vorigen §., nach der Formel

$$(I)\ z = -r + r\sqrt{\left(1 + \frac{b^2 + 2br}{(r-x)^2}\right)}$$

für jeden Werth von x die zugehörige Länge z der Fuge von A bis D bestimmen. Man ziehe DE senkrecht auf AC, so kann man ebenfalls für x = AE den zugehörigen Werth von z = DD′ finden. Nun sei DD′ = β, DF auf BG und MP auf DF senkrecht; ferner DF = h, DG = GB = ϱ, DP = x′ und der Winkel gGM, welchen die Fuge M′M mit der Vertikale gG einschließt = ψ, so ist nach §. 378. (I) MM′, oder wenn überhaupt die Länge einer jeden Fuge von D bis B durch z′ bezeichnet wird,

$$z' = -\varrho + \sqrt{\left(\varrho^2 + \frac{2bc}{\cos\psi^2}\right)}.$$

Man verlängere MP bis g, so ist

MG. cos ψ = Gg = FP, oder $\varrho \cos\psi = h - x'$ daher

$\cos\psi^2 = \frac{(h-x')^2}{\varrho^2}$ also nach §. 378. I.

$$z' = -\varrho + \sqrt{\left[\varrho^2 + \frac{2bc\varrho^2}{(h-x')^2}\right]}\ [I]$$

Für x′ = o wird z′ = β also

$$\beta = -\varrho + \sqrt{\left(\varrho^2 + \frac{2bc\varrho^2}{h^2}\right)},$$

woraus man findet

$$2bc = \frac{(2\varrho + \beta)\beta h^2}{\varrho^2}.$$

Wird dieser für $2bc$ gefundene Werth in die Gleichung [I] gesetzt, so erhält man für den Bogen DB die Länge jeder Fuge

$$\text{(II)}\quad z' = -\varrho + \sqrt{\left[\varrho^2 + \frac{(2\varrho+\beta)\beta h^2}{(h-x')^2}\right]}.$$

Ist AB aus mehr als zwei Kreisbogen zusammen gesetzt, so wird für jeden folgenden Bogen auf eine ähnliche Art verfahren.

Beispiel. Für die innnere Wölbung sei die Höhe $AC = 18$, die halbe Weite $BC = 24$ Fuß. Ferner $AO = OD = r = 30$ und $GD = GB = \varrho = 15$ Fuß, so verhält sich

$OG : OC = DG : DF$, also $DF = \frac{OC \cdot DG}{OG} = \frac{12 \cdot 15}{15}$ $= 12$ oder $h = 12$ also $AE = 6$ Fuß, daher findet man, wenn $AA' = b = 3$ Fuß gesetzt wird, die Länge jeder Fuge von A bis D nach (I)

$$z = -30 + 30\sqrt{\left(1 + \frac{189}{(30-x)^2}\right)}.$$

Für $x = AE = 6$ erhält man

$$\beta = -30 + 30\sqrt{\left(1 + \frac{189}{576}\right)} = 4{,}572$$

und hieraus nach (II) die Länge jeder Fuge von D bis B oder

$$z' = -15 + \sqrt{\left(225 + \frac{22761{,}1}{(12-x')^2}\right)}.$$

Hieraus findet man für $x = 1$;

$$z = -30 + 30\sqrt{\left(1 + \frac{189}{841}\right)} = 3{,}192 \text{ und}$$

für $x' = 1$;

$$z' = -15 + \sqrt{\left(225 + \frac{22761{,}1}{121}\right)} = 5{,}325 \text{ Fuß}$$

und wenn man eben so die übrigen Werthe für z von A bis D und für z' von D bis B berechnet, so läßt sich danach das ganze Gewölbe auftragen.

§. 381.

Aufgabe. Den Inhalt von der Stirnfläche desjenigen Tonnengewölbes zu finden, dessen Steine ohne Reibung unter einander im Gleichgewichte sind, wenn die innere Wölbung ein Kreisbogen ist.

Auflösung. Der Halbmesser AC, Figur 208, von Taf. XIII der innern Wölbung sey r, die Höhe der vertikalen Fuge $AA' = b$, die Fläche $AA'NM = F$ der zugehörige Winkel am Mittelpunkte $ACM = \varphi$ und MN $= z$, so findet man den Inhalt Fig. 208.

$$F = \frac{2rb + b^2}{2} \operatorname{tgt} \varphi.$$

Um diesen Ausdruck zu erhalten, setze man daß φ um $\partial\varphi$ wächst, so erhält man wie §. 378. das Element

$$MNnm = \partial F = \tfrac{1}{2} [(r + z)^2 - r^2] \partial\varphi$$

oder weil nach §. 379.

$$(r + z)^2 - r^2 = \frac{2rb + b^2}{\cos\varphi^2}, \text{ so wird}$$

$$F = \frac{2rb + b^2}{2} \int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2}.$$ Es ist aber (P. A. S. 80)

$$\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2} = \partial \operatorname{tgt} \varphi \text{ also } \int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2} = \operatorname{tgt} \varphi,$$ wo keine Constante hinzu kommt, weil mit $\varphi = 0$ auch F verschwindet; folglich der Flächeneinhalt

$$F = \frac{b^2 + 2rb}{2} \operatorname{tgt} \varphi.$$

Beispiel. Der Halbmesser der innern Wölbung sei 30 und die Dicke des Gewölbes am Scheitel 3 Fuß; man sucht den Inhalt der Stirnfläche des Gewölbes, wenn der Winkel am Mittelpunkte der innern Wölbung vom Scheitel an gerechnet, einen Winkel von 48 Grad einschließt.

Hier ist $r = 30$, $b = 3$ Fuß und $\varphi = 48$ Grad, also $\operatorname{tgt} \varphi = 1{,}1106125$ daher die gesuchte Fläche

$$F = \frac{189 \cdot 1{,}1106125}{2} = 104{,}95 \text{ Quadratfuß.}$$

§. 382.

Soll die Dicke des Gewölbes für den Fall gefunden werden, daß die innere Wölbung eine Parabel ist und alle Fugen auf der innern Wölbung senkrecht stehen, so sei a die halbe lichte Weite und h die lichte Höhe des Gewölbes, alsdann ist die Gleichung für die Parabel, wenn der Anfangspunkt der Abscissen im Scheitel genommen wird, und wenn sich die senkrechten Coordinaten auf die innere Wölbung beziehen

$$a^2 x = h y^2$$

Setzt man $\frac{a^2}{h} = p$, so ist nach den Eigenschaften der Parabel, der Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{(p + 4x)\sqrt{(p^2 + 4px)}}{2p}$$

also, für $x = 0$, der Krümmungshalbmesser am Scheitel, oder

$$\varrho = \tfrac{1}{2} p$$

und weil ferner für die Parabel

$$\cos \varphi^2 = \frac{p}{4x + p}$$

so ist §. 378. (II) die gesuchte Dicke des Gewölbes für jeden Werth von x, oder

$$z = -\frac{(p+4x)\sqrt{(p^2+4px)}}{2p} + \sqrt{\left[\frac{(p+4x)^3}{4p} + \frac{b(p+b)(p+4x)}{p}\right]}$$

Für $x = 0$ wird

$$z = -\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}p + b = b$$

wie erfordert wird.

Für $h = a$ wird $p = a$, und man findet für $x = a = h$ die Dicke des parabolischen Gewölbes an der Widerlage, wenn seine lichte Höhe der halben lichten Weite gleich ist, oder

$$z = -\tfrac{5}{2}a\sqrt{5} + \sqrt{\left[\tfrac{125}{4}a^2 + 5b(a+b)\right]}.$$

§. 383.

Mit Hülfe des allgemeinen Ausdrucks für z (§. 378) läßt sich für jede als innere Wölbung gegebene Linie die erforderliche Gewölbdicke finden, so bald nur der Werth r für den Krümmungshalbmesser nebst $\cos\varphi$, durch eine Funkzion von der Abscisse x ausgedrückt und in die Gleichung gesetzt wird. Wäre z. B. BAD, Figur 211., eine Ellipse, deren halbe große Axe $BC = CD = m$, halbe kleine Axe $AC = n$; der Anfangspunkt der Abscissen in A; $AP = x$; $PM = y$; der zu x gehörige Krümmungshalbmesser für den Punkt $M = r$ und der Winkel $MOA = \varphi$ ist, so ist nach den bekannten Eigenschaften der Ellipse Taf. XIII Fig. 211.

$$y^2 = \frac{m^2}{n^2}(2nx - x^2)$$

$$\cos\varphi^2 = \frac{m^2(n-x)^2}{m^2n^2 - (m^2 - n^2)(2nx - x^2)}$$

$$r = \frac{\sqrt{[m^2n^2 - (2nx - x^2)(m^2 - n^2)]^3}}{mn^4}$$

und für $x = 0$ ist $r = \varrho = \frac{m^2}{n}$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung für die Fugenlänge z, §. 378., so erhält man einen Ausdruck, durch welchen für jeden Werth von $AP = x$, der entsprechende Werth von z gefunden werden kann.

§. 384.

Soll die innere Wölbung eine Kettenlinie seyn, und wird die §. 378. angenommene Bezeichnung beibehalten, so ist für die Kettenlinie (§. 98. und 96. Anh.)

$$r = \frac{(\gamma + x)^2}{\gamma} \text{ und } \cos\varphi = \frac{\gamma}{\gamma + x}$$

wo γ eine beständige Größe bezeichnet, durch welche die Gestalt der Kettenlinie für die gegebene Weite und Höhe der innern Wölbung bestimmt wird.

Für $x = 0$ wird $r = \varrho = \gamma$, man erhält daher §. 378. (II) die Dicke des Gewölbes

$$z = -\frac{(\gamma + x)^2}{\gamma} + \frac{\gamma + x}{\gamma} \sqrt{[(\gamma + x)^2 + 2\gamma b + b^2]}.$$

Taf. XIII Wäre die halbe Weite des Gewölbes KC, Figur 209.,
Fig. 209. der Höhe AC desselben gleich, so ist, wenn $KC = a$ gesetzt wird (§. 97. Anh.)

$$a = 1{,}616\,\gamma \text{ oder } \gamma = \tfrac{13}{21}\,a.$$

Für $a = 10$ ist $\gamma = \frac{130}{21}$ und wenn man für diesen Fall die Länge KK′ der unteren Fuge sucht, indem $A'A = b = 1\frac{1}{2}$ gesetzt wird, so erhält man, weil alsdann $x = a = 10$ wird

$$z = -42{,}344 + 2{,}615 \sqrt{282{,}952} = 1{,}640 \text{ Fuß.}$$

Der Winkel, unter welchen die untere Fuge KK′

gegen

gegen die Vertikale geneigt ist, sei $= \alpha$, so erhält man für $x = a = 10$ (§. 97. Anh.)

$$\cos \alpha = \frac{\gamma}{\gamma + a} = 0{,}38235 = \cos 67^\circ\, 31'.$$

Die unterste Fuge ist daher gegen die Vertikale um einen Winkel von 67 Grad 31 Minuten geneigt.

§. 385.

Bei den bisherigen Voraussetznngen, wo alle grade Fugen senkrecht auf der innern Wölbung stehen und keine Reibung zwischen den Steinen statt finden soll, muß jede horizontale Fuge unendlich groß werden, wenn das Gleichgewicht unter den Gewölbsteinen nicht aufgehoben werden soll. Denn so oft $\phi = 90$ Grad ist, wird in dem allgemeinen Ausdruck §. 378; $\cos \phi = 0$ also $z = \infty$.

Mit Hülfe des angeführten Ausdrucks läßt sich die Bedingung angeben, unter welcher bei einem gleich dicken Gewölbe alle Steine, deren Fugen auf der innern Wölbung senkrecht stehen, im Gleichgewichte sind. Denn weil z durchgängig einerlei Werth haben soll, so setze man $z = b$, dies giebt

$$b = -r + \sqrt{\left(r^2 + \frac{2\,bc}{\cos \phi^2}\right)} \text{ oder}$$

$$(b + 2r) \cos \phi^2 = 2c$$

wo r und ϕ veränderliche Größen sind. Wählt man daher zur innern Wölbung eine Kurve, bei welcher das Produkt $(b + 2r) \cos \phi^2$ einer beständigen Größe gleich ist, so wird in diesem Falle bei einem gleich dicken Gewölbe ein Gleichgewicht entstehen, so fern alle Fugen senkrecht auf der innern Wölbung sind.

§. 386.

Aendert man die bisherige Voraussetzung dahin ab, daß man bei einem Gewölbe von gleicher Dicke diejenige Kurve als gegeben ansieht, welche durch die Mitte des Gewölbes geht, so ist in diesem Falle die Lage der Fugen, welche durch den Winkel φ bezeichnet wird, aus den gegebenen Größen für das Gleichgewicht zu bestimmen. So bald die Lage der Fugen bekannt ist, so läßt sich alsdann auch mit Hülfe der Gleichung §. 378. die Länge der Fugen bestimmen.

Bisher hat man unter der Dicke eines Gewölbes diejenige Linie verstanden, welche auf der innern Wölbung senkrecht stand und bis an die äußere Wölbung reichte; von jetzt an soll aber unter der Dicke des Gewölbes diejenige Linie verstanden werden, welche auf der durch die Mitte des Gewölbes gehenden Kurve senkrecht steht und verlängert bis an die innere und äußere Wölbung reicht. Diese mittlere Kurve, welche auch die **mittlere Wölbung** heißen kann, geht also jedesmal durch die Mitte von der Dicke des Gewölbes. Ueberhaupt wird man die Dicke des Gewölbes jedesmal durch ein Perpendikel auf diejenige Wölbungslinie bestimmen, durch welche die Gestalt des Gewölbes festgesetzt wird.

§. 387.

Aufgabe. Ein Tonnengewölbe sei durchgängig gleich dick; man sucht die Lage der Fugen für das Gleichgewicht, wenn die mittlere Wölbung eine vorgeschriebene krumme Linie bilden soll.

Auflösung. Durch den Scheitel A, Figur 212., der mittlern Wölbung AMB sei die Vertikale A″C gezogen; ist nun das Gewicht des Gewölbstücks A′M′M″A″ = Q, die Gewölbdicke A′A″ = b und M′M″ die gesuchte Fuge, deren Lage durch den Winkel ARM = φ bestimmt wird, so erhält man, wenn ein Gleichgewicht entstehen soll (§. 374. I.), Taf. XIII Fig. 212.

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{Q}{C}$$

wo C den Horizontaldruck des Gewölbes gegen die Vertikale A′A″ bezeichnet. Ist nun für einen bestimmten Werth von Q = A (etwa für das Gewölbstück A′A″B″B′) der Winkel φ = α (= AOB) bekannt, so erhält man

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{A}{C} \text{ also } C = \frac{A}{\text{tgt}\,\alpha} = A \cot \alpha$$

und wenn dieser Werth statt C in die obige Gleichung gesetzt wird, so ist

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{Q\,\text{tgt}\,\alpha}{A}$$

und es läßt sich alsdann für jeden Werth von Q, der Winkel φ leicht finden, wodurch die Lage der Fuge bestimmt wird.

§. 388.

Wäre die mittlere Wölbung ein Kreisbogen, so sind die innern und äußern Wölbungen ebenfalls Kreisbogen. Man setze Figur 212. den Halbmesser AC = BC = r, A′A″ = B′B″ = b, den zum Winkel φ gehörigen Bogen AM = v, so wäre bv der Inhalt von dem Gewölbstücke $A'M'M''A''$, wenn $M''M'$ verlängert durch den Mittelpunkt C ginge. Weil aber die Abweichung der Linie MR von der Linie MC nicht bedeutend ist und auf die Bestimmung des Inhalts der Fläche $A'M'M''A''$ alsdann beinahe keinen Einfluß hat, so erhält man unter dieser Voraussetzung, wenn das Gewicht des Gewölbes, welches auf jeden Quadratfuß der Stirnfläche kommt $= 1$ gesetzt wird

$$Q = bv.$$

Für den Viertelkreis sei $Q = A$ und der zugehörige Winkel $AOB = \alpha$, so ist $A = \frac{1}{2}\pi r b$. Wird ferner vorausgesetzt, daß die Schwerpunkte aller einzelnen Gewölbsteine in den Bogen AMB fallen, so ist für den Viertelkreis (§. 209.) $\alpha = 70$ Grad $\frac{2}{3}$ Minute und

$$C = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)A = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\pi r b = (\tfrac{1}{2}\pi - 1)\,br = 0{,}570796\,br$$

also

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{bv}{0{,}570796\,br} = 1{,}75194\,\frac{v}{r}\ \text{beinahe} = \frac{7v}{4r}.$$

Für einen Winkel am Mittelpunkte $ACM = 30$ Grad ist $v = \frac{1}{6}\pi r$ oder wenn $\pi = \frac{22}{7}$ gesetzt wird, $v = \frac{22r}{6.7}$ also

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{7}{4.r}\cdot\frac{22r}{6.7} = \frac{11}{12} = 0{,}917 = \text{tgt}\,42^\circ\,32'.$$

Für einen Winkel am Mittelpunkte von 60 Grad ist $v = \frac{1}{3}\pi r = \frac{22r}{3.7}$ also

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{7}{4r}\cdot\frac{22r}{3.7} = \frac{11}{6} = 1{,}833 = \text{tgt}\,61^\circ\,23'.$$

Wird der Winkel am Mittelpunkt ein rechter, so ist $v = \frac{1}{2}\pi r = \frac{22\,r}{2\cdot 7}$ also

$$\operatorname{tgt}\varphi = \frac{7}{4\cdot r}\cdot\frac{22\,r}{2\cdot 7} = \frac{11}{4} = 2{,}75 = \operatorname{tgt} 70^\circ\, 1'.$$

Man kann auch die für das Gleichgewicht unter den Gewölbsteinen erforderliche Lage einer jeden Fuge durch eine leichte Zeichnung finden, wenn man auf der durch A gehenden Horizontale AN, um die Lage der Fuge in M zu finden, $1\frac{3}{4}$ von dem Bogen AM, von A nach N trägt, so daß AN $= \frac{7}{4}$ AM wird. Zieht man alsdann NC und durch M die Linie M′M″ mit NC parallel, so ist M′M″ die gesuchte Lage des Fugenschnitts. Der Grund dieses Verfahrens läßt sich leicht einsehn, wenn man MP auf AC senkrecht zieht; alsdann verhält sich

$$RP : PM = CA : AN \text{ oder}$$

$$1 : \operatorname{tgt}\varphi = r : \tfrac{7}{4}\,v$$

es ist daher $\operatorname{tgt}\varphi = \frac{7\,v}{4\,r}$ wie erfordert wird.

Es kann daher auch in dem Falle ein gleich dickes kreisförmiges Gewölbe im Gleichgewichte seyn, wenn keine Reibung oder Kohäsion zwischen den Gewölbsteinen statt findet; nur müssen alsdann die Fugenschnitte nicht durch den Mittelpunkt des Gewölbes gehen.

§. 389.

Nur in dem Falle, wenn alle Fugen auf der mittlern Wölbung senkrecht stehen, erhält man bei einem gleich dicken Gewölbe den Flächeninhalt zwischen zwei Fugen ganz genau, wenn man die Dicke des Gewölbes mit den Längen der mittlern Wölbung zwischen den beiden Fugen multiplicirt. Es sei daher bei einem solchen Gewölbe der Bogen AM, Figur 213., $= v$, $A'A'' = M'M'' = b$, so ist der Inhalt von $A'M'M''A'' = bv$.

Taf. XIII Fig. 213.

Alsdann ist, wenn $ARM = \varphi$, nach §. 374. I. und Seite 136.

$$\operatorname{tgt} \varphi = \frac{bv}{bc} \text{ oder}$$

$$\frac{v}{\operatorname{tgt} \varphi} = c = \text{einer beständigen Größe.}$$

Könnte man nun irgend eine Kurve AMB angeben, bei welcher für jeden Punkt M derselben, $\frac{v}{\operatorname{tgt} \varphi}$ beständig einerlei Werth behält, so hätte diese krumme Linie die Eigenschaft, daß sie als mittlere Wölbungslinie angewandt, nicht nur lauter gleich lange Fugen giebt, sondern daß auch sämmtliche Fugen auf der mittlern Wölbung senkrecht stehen. Nach §. 97. I. des Anhanges, hat die Kettenlinie die Eigenschaft, daß bei ihr $\frac{v}{\operatorname{tgt} \varphi} = c$ ist, wird daher die mittlere Wölbung eines gleich dicken Gewölbes nach einer Kettenlinie gebildet, so erhalten sich alle Steine desselben im Gleichgewicht, wenn ihre Fugen senkrecht auf die mittlere Wölbungslinie stehen.

Aus der Gleichung $c = \frac{v}{\operatorname{tgt} \varphi}$ erhält man die Gleichung für die Kettenlinie folgendergestalt. Es ist

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{\partial x}{\partial y},$$

wenn AP = x und PM = y wird, also

$$c^2 = v^2 \frac{\partial y^2}{\partial x^2}.$$

Nun ist $\partial v^2 = \partial x^2 + \partial y^2$ oder $\frac{\partial v^2}{\partial x^2} = 1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}$, also

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{\partial v^2}{\partial x^2} - 1, \text{ daher}$$

$$c^2 = v^2 \left(\frac{\partial v^2}{\partial x^2} - 1\right) \text{ oder } (c^2 + v^2)\,\partial x^2 = v^2\,\partial v^2, \text{ also}$$

$$x = \int \frac{v\,\partial v}{\sqrt{(c^2+v^2)}} = \sqrt{(c^2 + v^2)} + \text{const.}$$

Für $x = 0$ ist $v = 0$ also $\text{const} = -c$ daher

$$x = \sqrt{(c^2 + v^2)} - c \text{ oder}$$

$$v = \sqrt{(2cx + x^2)}$$

welches die Gleichung für den Bogen einer Kettenlinie ist, welcher einer gegebenen Abscisse entspricht.

§. 390.

Außer dem eigenen Gewichte eines Gewölbes kann auch noch diejenige Last in Rechnung gebracht werden, welche auf dem Gewölbbogen vertheilt ist. Nimmt man an, daß die auf dem Gewölbe AMB, Figur 214., ver- Taf. XIII theilte Last sich wie die Ordinaten PM verhalte, oder daß Fig. 214. die Last mit den Ordinaten gleichförmig wächst, so daß wenn AP = x, PM = y, AA′ = MN = BB′ = b′ der Druck auf AM, der Fläche ANA′ = b′y proportional sei; so ist, wenn MRA = φ gesetzt wird, §. 374. I.

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{Q}{C} = \frac{b'y}{bc} \text{ oder}$$

$$\frac{y}{\text{tgt}\,\varphi} = \frac{bc}{b'} = \text{einer beständigen Größe.}$$

Soll daher ein Gleichgewicht entstehen, so muß die krumme Linie AMB die Eigenschaft haben, daß sich ihre Ordinaten, wie die Tangenten der Winkel φ verhalten. Da nun dies eine Eigenschaft der Parabel ist, so muß AMB eine Parabel seyn.

Weil $\text{tgt}\,\varphi = \frac{\partial x}{\partial y}$ also $\partial x = \partial y \,\text{tgt}\,\varphi$, so wird

$\partial x = \frac{b'}{bc}\, y \partial y$ also

$x = \frac{b'}{2bc}\, y^2$ oder $y^2 = \frac{2bc}{b'}\, x$, welches die Gleichung für die Linie AMB ist.

Bei dieser Untersuchung hätte eigentlich das Gewicht des Gewölbes AMB noch besonders in Rechnung gebracht werden müssen. Hier ist aber zur mehreren Erleichterung angenommen, daß das Gewicht des Gewölbes AM, durch den Flächenraum $AMNA' = yb'$, mit ausgedrückt werde.

§. 391.

Taf. XIII Fig. 215. Die auf dem Gewölbe AMB, Figur 215., vertheilte Last, werde oberhalb durch eine wagerechte Linie $A'B'$ begrenzt, und der Druck auf das Gewölbstück AM, der Fläche $AMNA'$ proportional angenommen, so erfordert das Gleichgewicht, daß die krumme Linie AMB eine Kettenlinie sei, auf welcher die Fugen senkrecht stehen.

Man setze $AA' = b'$, $AP = x$, $PM = y$, den Winkel $ARM = \varphi$, so ist die Fläche $AMNA' = \int (b' + x) \partial y$, also nach §. 374. I.

$\text{tgt}\,\varphi = \frac{\int (b' + x)\partial y}{bc}$ oder weil $\text{tgt}\,\varphi = \frac{\partial x}{\partial y}$ ist,

$$bc \frac{\partial x}{\partial y} = \int (b' + x)\,\partial y.$$

Diese Ausdrücke differenziirt und ∂y als beständig angesehen, giebt

$$bc \frac{\partial^2 x}{\partial y} = (b' + x)\,\partial y \text{ oder } \frac{bc}{\partial y^2}\partial x\,\partial^2 x = (b'+x)\partial x.$$

Durch die Integration erhält man

$$\frac{bc\,\partial x^2}{2\,\partial y^2} = b'x + \tfrac{1}{2}x^2,$$

wo keine Constante hinzu kommt, weil für $x = 0$ auch $\frac{\partial x}{\partial y} = \text{tgt}\,\varphi = 0$ wird. Es ist daher ferner

$$\partial y = \frac{\partial x \sqrt{bc}}{\sqrt{(2b'x + x^2)}} \text{ also wie (§. 92. II. Anh.)}$$

$$y = \log \frac{b' + x + \sqrt{(2b'x + x^2)}}{b'} . \sqrt{(bc)}.$$

Hier gilt dieselbe Bemerkung, wie am Ende des vorigen §.

§. 392.

Aufgabe. Die innere Wölbung AMB, Figur 216., sei ein Parabel, und statt der äußern Wölbung werden die Gewölbsteine durch eine wagerechte Linie A′M′ begrenzt; man sucht die Lage jeder Fuge wie MM′. Taf. XIII Fig. 216.

Auflösung. Für den Bogen AM, sey $AP = x$, $PM = y$ der Winkel $ARM = \varphi$, $AA' = b$ und die Fläche $AMM'A' = f$. Aber Fl. $APM = \frac{2}{3}xy$; $A'PMN = (b + x)\,y$; $MNM' = \frac{1}{2}(b + x)^2 \text{ tgt}\,\varphi$ also

$$f = (b + x)y + \tfrac{1}{2}(b + x)^2 \text{ tgt}\,\varphi - \tfrac{2}{3}xy. \text{ Nun ist}$$

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{Q}{C} = \frac{f}{bc} \text{ daher}$$

$$bc \text{ tgt}\,\varphi = (b + x)\,y + \tfrac{1}{2}(b + x)^2 \text{ tgt}\,\varphi - \tfrac{2}{3}xy$$

oder

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{(b+\frac{1}{3}x)\,y}{bc-\frac{1}{2}(b+x)^2}.$$

Um den Werth von c zu bestimmen, kann die Lage irgend einer Fuge als gegeben angesehen werden, wenn nur der Winkel φ nicht größer als 90 Grad angenommen wird. Gesetzt die unterste Fuge BB′ soll mit der Vertikale den Winkel $BDA = \alpha$ bilden, und es sei für diesen Fall, die halbe lichte Weite des Gewölbes oder $BC = a$ und die lichte Höhe $AC = h$, so erhält man für $\varphi = \alpha$, $y = a$ und $x = h$,

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{(b+\frac{1}{3}h)\,a}{bc-\frac{1}{2}(b+h)^2} \text{ also}$$

$$bc = \frac{a(b+\frac{1}{3}h)}{\text{tgt}\,\alpha} + \frac{1}{2}(b+h)^2$$

und hieraus findet man zur Bestimmung der Lage einer jeden Fuge

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{2y(b+\frac{1}{3}x)\,\text{tgt}\,\alpha}{2a(b+\frac{1}{3}h)+[(b+h)^2-(b+x)^2]\,\text{tgt}\,\alpha}.$$

Beispiel. Wäre $a = 9$, $h = 10$, $b = 2$ Fuß und $\alpha = 45$ Grad, so erhält man, wenn $7{,}5\,x = y^2$ die Gleichung der Parabel ist, für $x = 5$; $y = \sqrt{37{,}5} = 6{,}124$; daher, weil $\text{tgt}\,45° = 1$ ist,

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{44{,}9093}{191} = 0{,}2351 = \text{tgt}\,13°\,14'.$$

Für $x = 6$ ist $y = \sqrt{45} = 6{,}708$ also

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{53{,}664}{176} = 0{,}3049 = \text{tgt}\,16°\,57',$$

so daß für $x = 5$; $\varphi = 13$ Grad 14 Minuten und für $x = 6$; $\varphi = 16$ Grad 57 Minuten genommen werden muß.

§. 393.

Aufgabe. Bei einem scheidrechten oder graden

Gewölbe, die Lage der Fugen zu finden, damit unter den Gewölbsteinen ein Gleichgewicht entstehe.

Auflösung. Die Länge der vertikalen Fuge A′A, Figur 217., oder die Dicke des Gewölbes sei $= b$, Taf. XIII
AK $= a$, das Gewicht des ganzen Gewölbes AKK′A′ Fig. 217
$= F$, des Stücks AMM′A′ $= Q$; der Winkel ACM $= \varphi$. Bezeichnet nun ferner C den horizontalen Druck welchen das Gewölbe gegen die Fuge A′A ausübt, so erfordert das Gleichgewicht, daß (§. 374. I.)

$$Q = C \operatorname{tgt} \varphi \text{ oder } C = \frac{Q}{\operatorname{tgt} \varphi} \text{ sei.}$$

Nun ist Q der Fläche AMM′A′ proportional, daher kann diese Fläche statt Q in Rechnung gebracht werden. Es ist also, wenn AC $= r$ gesetzt wird

$$Q = \tfrac{1}{2}(r+b)^2 \operatorname{tgt} \varphi - \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{tgt} \varphi = \frac{2rb+b^2}{2} \operatorname{tgt} \varphi$$

und wenn dieser Werth statt Q in die obige Gleichung kommt

$$C = \frac{2rb+b^2}{2} \text{ oder}$$

$$r = \frac{2C-b^2}{2b}.$$

Da nun b und C beständige Größen sind, so ist r für jede Fuge eine unveränderliche Größe, es müssen daher die Verlängerungen sämmtlicher Fugen in einen gemeinschaftlichen Punkt C zusammen fallen. Daher fällt auch die Verlängerung der ersten Fuge K′K an der Widerlage in den Punkt C.

Der gegebene Winkel K′CA′ sei $= \alpha$. Nun verhält sich

$r : a = r + b : A'K'$ also ist $A'K' = \frac{a(r+b)}{r}$,

daher

(I) $F = \frac{1}{2}(r+b)\,A'K' - \frac{1}{2}\,ar = \frac{a(2rb+b^2)}{2r}$

und weil für das Gleichgewicht (§. 374. I.) $F = G$
$\operatorname{tgt}\alpha = \frac{2rb+b^2}{2}\operatorname{tgt}\alpha$ seyn muß, so erhält man

(II) $\operatorname{tgt}\alpha = \frac{a}{r}$,

so daß wenn von den drei Größen a, r, α zwei gegeben oder willkürlich angenommen sind, daraus leicht die dritte bestimmt werden kann.

Wäre gh eine Vertikallinie, welche durch den Schwerpunkt des Gewölbes AKK'A' geht, so kann man das Gewicht desselben aus irgend einem Punkte der Linie gh in zwei Seitenkräfte zerlegen, wovon die eine wagerecht oder senkrecht auf AA' und die andere nach einer auf die Fuge KK' senkrechten Richtung fällt. Hiebei kann sich der Fall ereignen, daß die Seitenkraft, deren Richtung senkrecht auf die Fuge KK' fällt, diese Fuge selbst nicht trifft, sondern ihre Verlängerung. Gesetzt, man habe für r die Länge AC' willkürlich angenommen, so ist KK'' die Länge der ersten Fuge bei der Widerlage. Nun sei in der Vertikallinie gh das Gewicht des Gewölbes AKK''A' = F, in irgend einem nahe an der äußern Wölbung gelegenen Punkte g, welcher noch innerhalb des Gewölbes fällt, wagerecht nach gc und senkrecht auf KK'' oder auf die Verlängerung von $K''K$, nach gn' zerlegt (§. 203.), so fällt hier n' nicht auf die Fuge KK'', sondern außerhalb derselben. Will man, daß dies vermieden werde und verlangt, daß der Punkt n' noch innerhalb KK'' fällt, so darf nur $r = AC'$ hinlänglich vergrößert werden. Nun ist der Normalabstand der Vertikallinie gh vom Punkte K jederzeit kleiner als $\frac{1}{2}$ $KA = \frac{1}{2} a = KE$; wird daher aus der Mitte von AK, die Vertikallinie EF gezogen, so ist der Winkel FKE von der Beschaffenheit, daß, wenn derselbe $= \alpha$ gesetzt und der Winkel ACK eben so groß angenommen wird, alsdann jedesmal die Punkte c und n noch innerhalb der Fugen AA' und KK' fallen. Es ist aber $KE \,.\, \text{tgt}\, FKE = FE$ also $\frac{1}{2} a \,\text{tgt}\, \alpha = b$, oder, unter der angenommenen Voraussetzung,

$$\text{(III)} \quad \text{tgt}\, \alpha = \frac{2b}{a} \text{ oder auch } \cot \alpha = \frac{a}{2b}.$$

Wird dieser Werth in die Gleichung (I) gesetzt, so erhält man den Abstand AC für den Punkt, durch welchen alle Fugenschnitte verlängert gehen müssen, oder

$$\text{(IV)} \quad r = \frac{a^2}{2b}.$$

Für diese Voraussetzung erhält man ferner die Stirnfläche des Gewölbes

$$\text{(V)} \quad F = \frac{b}{a}(a^2 + b^2) \text{ und}$$

$$\text{(VI)} \quad C = \frac{a^2 + b^2}{2},$$

Durch eine leichte Zeichnung läßt sich hienach der Punkt C finden, wenn die Hälfte von der lichten Weite des

Gewölbes $AK = a$ und die Dicke desselben $AA' = b$ gegeben ist; denn man darf nur $A'A'' = AA'$ annehmen, die Linie $A''K$ ziehen und in K auf KA'' senkrecht die Linie KC ziehen und so weit verlängern, bis solche von der Linie $A''A$ in C geschnitten wird. Der Grund dieses Verfahrens läßt sich leicht einsehn, wenn man durch die Punkte $A''KC$ einen Halbkreis beschreibt. Alsdann ist $AK^2 = A''A \cdot AC$ oder $a^2 = 2br$, wie erfordert wird.

§. 394.

Der Anfang eines Tonnengewölbes werde nicht wie bisher vom festen Boden gehalten, sondern von einer Widerlage gestützt und getragen, so wird die Widerlage denjenigen Kräften das Gleichgewicht halten müssen, welche vorher auf den festen Boden wirkten. Hiebei soll aber vorausgesetzt werden, daß die Widerlage selbst, auf einem festen Boden stehe und durch die Gewalt, welche der Gewölbbogen gegen dieselbe ausübt, wenn ihre Stabilität nicht hinreichend ist, zwar umgeworfen, aber nicht nach horizontaler Richtung fort geschoben werden kann.

Sind alle Steine eines Gewölbes ohne Rücksicht auf Reibung mit einander im Gleichgewicht, so ist der Normaldruck auf jede Fuge von dem darüber befindlichen Gewölbstück eben so groß als von dem darunter liegenden Gewölbsteine, und nur der Druck, welcher vom untersten Gewölbsteine gegen die Widerlage entsteht, muß aufgehoben werden, wenn das ganze Gewölbe im Gleichgewichte seyn soll.

Es sey α der Winkel, welcher die an der Widerlage befindliche Fuge mit der Vertikallinie einschließt, so ist bei einem Gewölbe, wo alle Steine ohne Rücksicht auf Reibung mit einander im Gleichgewichte sind, wenn Q das Gewicht des Gewölbbogens von der Widerlage bis zum Scheitel bezeichnet, der vertikale Druck auf die Widerlage

$$= Q \text{ (§. 375. II.)}$$

und der vom Gewölbe entstehende horizontale Druck gegen die Widerlage (§. 375. I.)

$$\text{(I) } C = Q \cot \alpha.$$

Bei dem Gebrauche dieses Ausdrucks ist aber die Voraussetzung wohl zu bemerken, daß sämmtliche Gewölbsteine einander wechselseitig gleich stark pressen oder im Gleichgewichte sind.

Es sei nun AKK'A', Fig. 218., die Hälfte eines Gewölbes, dessen Gewicht Q ist und $AA' = b$, $KK' = b'$; ferner sei die Höhe der Widerlage von der Mitte N der untersten Fuge KK' gerechnet, oder $NN' = k$, die Breite der Widerlage $DE = w$ und der Winkel $K'CA = \alpha$. Taf. XIII Fig. 218. Ist nun das Gewölbe mit der Widerlage von gleich schwerer Materie, so kann die Fläche $AKK'A' = F$ statt Q und die Fläche $KK'ED = w.k$ statt des Gewichts der Widerlage in Rechnung gebracht werden, weil man genau genug NN' als mittlere Höhe der Fläche DKK'E annehmen kann. Man ziehe Kn senkrecht auf NN', so ist der Winkel KNn $= \alpha$ also Kn $=$ KN. $\sin\alpha$ oder DN' $= \frac{1}{2} b' \sin\alpha$, daher

$$EN' = w - \tfrac{1}{2} b' \sin\alpha.$$

Es sei G der Schwerpunkt der Widerlage und GG' vertikal, so ist EG' $= \frac{1}{2}$ w und für das Gleichgewicht wird erfordert, daß

$$EG' . wk + EN' . F = k . C \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2} w . wk + (w - \tfrac{1}{2} b' \sin\alpha) F = k . F . \cot\alpha \text{ ist.}$$

Hieraus findet man die zum Gleichgewichte erforderliche Breite der Widerlage

$$\text{(II) } w = \frac{-F + \sqrt{[F(F + b'k\sin\alpha + 2k^2\cot\alpha)]}}{k}.$$

§. 395.

Aufgabe. Die Stärke der Widerlage eines Gewölbes zu bestimmen, dessen innere Wölbung aus einem Kreisbogen besteht, wenn sämmtliche Gewölbsteine unter einander im Gleichgewichte sind.

Auflösung. Die Stärke des Gewölbes am Scheitel sei b, sein Halbmesser r und der Winkel, welchen die unterste Fuge an der Widerlage mit der Vertikale bildet $= \alpha$, so findet man die Stärke des Gewölbes an der Widerlage (§. 378. II.) oder,

$$b' = -r + \sqrt{\left(r^2 + \frac{2rb + b^2}{\cos\alpha^2}\right)}.$$

Ferner findet man (§. 381.) den Flächeninhalt des Gewölbes

F =

$$F = \frac{2rb + b^2}{2} \operatorname{tgt} \alpha$$

und hieraus die Stärke der Widerlage

$$w = \frac{-F + \sqrt{[F(F + b'k \sin\alpha + 2k^2 \cot\alpha)]}}{k}.$$

Beispiel. Die Stärke des Gewölbes am Scheitel sei 1 Fuß, der Halbmesser des innern Gewölbbogens 6 Fuß, der Winkel, welcher zum halben Gewölbbogen gehört, 45 Grad und die Höhe der Widerlage 6 Fuß, so ist hier $r = 6$, $b = 1$, $\alpha = 45°$ und $k = 6$, also die Dicke des Gewölbes an der Widerlage oder

$$b' = -6 + \sqrt{\left(36 + \frac{13}{0,5}\right)} = 1,874 \text{ Fuß}.$$

Die Stirnfläche des halben Gewölbes ist

$$F = \frac{13}{2} \cdot 1 = 6,5 \square \text{Fuß}$$

und daher die Breite der Widerlage für $k = 6$ Fuß,

$$w = \frac{-6,5 + \sqrt{61,929}}{6} = 2,867 \text{ Fuß}.$$

Für $k = 1$ Fuß wird $w = 1,491$ Fuß,
und für $k = 20$ Fuß ist $w = 3,354$ Fuß.

§. 396.

Die innere Wölbung sei eine Kettenlinie, so kann zur Bestimmung der Breite der Widerlage, wenn die halbe innere Weite des Gewölbes $= a$ gegeben ist, die Dicke b' von dem Gewölbe an der Widerlage, nach §. 384. gefunden werden, weil

$$b' = -\frac{(\gamma + a)^2}{\gamma} + \frac{\gamma + a}{\gamma} \sqrt{[(\gamma + a)^2 + 2\gamma b + b^2]}$$

wo γ diejenige beständige Größe bezeichnet, durch welche die Gestalt der Kettenlinie bestimmt wird.

Ferner ist der Inhalt von der Stirnfläche des Gewölbes (§. 107. Anhang), wenn h die Höhe der innern Wölbung bezeichnet

$$F = \frac{2b\gamma + b^2}{2\gamma} \sqrt{(2\gamma h + h^2)}$$

so daß nun leicht aus b′ und F, wenn k und α gegeben sind, die Breite der Widerlage nach §. 395. gefunden werden kann. Wäre α nicht gegeben, so findet man (§. 97. I. Anhang)

$$\cot\alpha = \frac{\gamma}{\sqrt{(2\gamma a + a^2)}}.$$

Beispiel. Die halbe Weite der innern Wölbung sei 10 Fuß, und eben so groß die Höhe der innern Wölbung. Ferner sei die Dicke des Gewölbes im Scheitel $1\frac{1}{2}$ Fuß und die Höhe der Widerlage 10 Fuß, so ist hier $a = h = 10$, $b = 1\frac{1}{2}$, $k = 10$.
Für $a = h$ ist (§. 384.)

$$\gamma = \frac{13}{21} a = \frac{130}{21}$$

und hieraus wie §. 384.

$$b' = 1{,}64 \text{ Fuß}.$$

Für den Inhalt der Stirnfläche des Gewölbes findet man

$$F = 3{,}317 \sqrt{112{,}381} = 33{,}173 \ \square \text{ Fuß}$$

und für den Winkel, welchen die Fuge an der Widerlage mit der Vertikale einschließt

$$\cot\alpha = 0{,}4138 = \cot 67^\circ\, 31' \text{ und}$$
$$\sin\alpha = 0{,}9240$$

Hieraus erhält man die Breite der Widerlage

$$w = \frac{-33{,}173 + \sqrt{4348{,}546}}{10} = 3{,}277 \text{ Fuß}.$$

§. 397.

Aufgabe. Die mittlere Wölbung eines durchgängig gleich dicken Tonnengewölbes sei ein Kreisbogen, man sucht die Stärke der Widerlage, vorausgesetzt, daß alle Gewölbsteine unter sich im Gleichgewichte und die Fugenschnitte nach §. 388. angeordnet sind.

Auflösung. So bald aus dem Gewichte Q und dem unveränderlichen Druck C der Werth von α oder

$$\cot\alpha = \frac{Q}{C}$$

bekannt ist, so läßt sich daraus die Breite w der Widerlage nach §. 394. finden.

Beispiel. Der Halbmesser für die innere Wölbung oder AC = CB, Figur 212., sei 10 Fuß, der Bogen AB ein Viertelkreis, die Gewölbdicke A′A″ = 2 Fuß, und die Höhe der Widerlage B′L = 10 Fuß, so ist hier $r = 10$, $b = b' = 2$ und $k = 10$. Ferner ist der Bogen $v = \frac{1}{2}\pi r$ also $F = \frac{1}{2}\pi r b = 31{,}416$ □ Fuß. Aus §. 209. findet man für den gegebenen Fall,

$$\cot\alpha = 0{,}364 \text{ und } \sin\alpha = 0{,}940$$

daher ist §. 394. die Breite der Widerlage oder

$$w = \frac{-31{,}416 + \sqrt{3864{,}671}}{10} = 3{,}075 \text{ Fuß.}$$

§. 398.

Aufgabe. Die Stärke der Widerlage eines gleich dicken Gewölbbogens zu finden, dessen mittlere Wölbung eine Kettenlinie ist.

Auflösung. Weil hier die Länge der innern Wölbung mit dem Gewichte des Gewölbes in gleichem Verhältnisse zunimmt, so erhält man, wenn, Figur 213., Taf. XIII BC = a und CA = h gegeben ist, den Werth von Fig. 213. c für den horizontalen Druck am Scheitel A (§. 96. Anhang) oder

$$c = \frac{25a^2 - 4{,}33h^2 + \sqrt{(38h^4 + 1036a^2h^2 + 625a^4)}}{100h}.$$

Für $a = h$ wird $c = 0{,}619\,h$.

Hiedurch ist, wenn vorausgesetzt wird, daß jeder Quadratfuß der Stirnfläche einem Gewichte $= 1$ entspricht §. 378. Seite 136.

$$C = bc$$

und hieraus, weil $F = bv$ ist,

$$\cot\alpha = \frac{C}{Q} = \frac{bc}{bv} = \frac{c}{v}$$

woraus, wenn $\cot\alpha$ bekannt ist, die Breite der Widerlage nach §. 394. gefunden werden kann.

Den Bogen AB findet man (§. 92. I. Anhang)

$$v = \sqrt{(2ch + h^2)}.$$

Beispiel. Es sei $BC = AC = 10$ Fuß, die Dicke des Gewölbbogens 2 Fuß und die Höhe $B'L$ der Widerlage 10 Fuß, so ist hier $a = h = 10$, $b = b' = 2$, $k = 10$, daher

$c = 6{,}19$ und der Bogen AB oder

$v = \sqrt{223{,}8} = 14{,}96$ Fuß.

Die Stirnfläche des Gewölbes ist alsdann

$F = bv = 29{,}92$ □ Fuß,

$\cot\alpha = \frac{c}{v} = 0{,}4131 = \cot 67°\,33'$ und

$\sin\alpha = 0{,}9242$,

folglich die Breite der Widerlage oder

$$w = \frac{-29{,}92 + \sqrt{3920{,}12}}{10} = 3{,}209 \text{ Fuß}.$$

§. 399.

Aufgabe. Bei einem scheidrechten Gewölbe die Stärke der Widerlage zu finden, wenn sämmtliche Gewölbsteine unter einander im Gleichgewichte sind.

Auflösung. Vorausgesetzt, daß die Gewölbsteine nach den Ausmittelungen am Ende §. 393. geschnitten sind, so erhält man, wenn a die halbe lichte Weite des Gewölbes bezeichnet (§. 393. III.)

$$\cot\alpha = \frac{a}{2b}$$

und die Stirnfläche (§. 393. V.)

$$F = \frac{b}{a}(a^2 + b^2).$$

Nun ist $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1+\cot\alpha^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{4b^2}\right)}} = \frac{2b}{\sqrt{(a^2+4b^2)}}$

und die Länge der Fuge KK′, Figur 217, an der Widerlage, oder Taf. XIII Fig. 217.

$$b' = \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{b\sqrt{(1+\cot\varphi^2)}}{\cot\varphi} = \frac{b\sqrt{(a^2+4b^2)}}{a}$$

wenn man daher die Werthe für F, $\cot\alpha$, $\sin\alpha$ und b' in die Gleichung §. 394. II. setzt, so erhält man die für das Gleichgewicht erforderliche Breite der Widerlage.

Beispiel. Die halbe lichte Weite des scheidrechten Gewölbes sei 5 Fuß, die Höhe der Widerlage = 10 Fuß und die Dicke des Gewölbes = 2 Fuß, so ist hier $a = 5$, $b = 2$, $k = 10$, also

$$\cot\alpha = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

$$F = \frac{2}{5} \cdot 29 = 11{,}6$$

$$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{4\sqrt{41}}{41} = 0{,}6247$$

$$b' = \frac{2\sqrt{41}}{5} = 2{,}561$$

und hieraus die Breite der Widerlage oder

$$w = \frac{-11,6 + \sqrt{3220,143}}{10} = 4,515 \text{ Fuß.}$$

*B. Wenn die Steine des Tonnengewölbes ohne Reibung und Kohäsion nicht im Gleichgewichte sind.

§. 400.

Die Bestimmung der erforderlichen Stärke der Widerlage eines Gewölbes, wenn sämmtliche Gewölbsteine einander wechselseitig gleich stark pressen, ist schon §. 394. auseinander gesetzt worden. Wenn aber diese wechselseitigen Pressungen ungleich sind und die Gewölbsteine nur so fern in Ruhe bleiben und nicht ausgedrängt werden, so fern der Ueberschuß ihrer durch ihr eigenes Gewicht verursachten wechselseitigen Pressungen, durch die Reibung und Kohäsion aufgehoben wird, so muß dieser Ueberschuß der Pressungen von jedem Gewölbsteine besonders in Rechnung gebracht werden. Soll alsdann das Gleichgewicht zwischen dem Gewölbe und der Widerlage für jede Anzahl von Fugen bestehen, so ist es zweckmäßig, bei der Bestimmung der Widerlage die Gewölbsteine als äußerst dünn in Rechnung zu bringen, weil alsdann auch bei einer kleinern Anzahl von Gewölbsteinen, das Gleichgewicht zwischen Gewölbe und Widerlage nicht unterbrochen wird.

Taf. XIV. Fig. 219. Im Gewölbe A'KK'A", Figur 219., sei AMN die mittlere Wölbung irgend eine krumme Linie und die Dicke $m\mu$ des Gewölbes, nach irgend einem Gesetze bestimmt; auch werde wie bisher vorausgesetzt, daß sich die Gewichte der Gewölbsteine wie ihre Stirnflächen ver-

halten, so daß, wenn das Gewicht, welches jedem Quadratfuße der Stirnfläche entspricht, = 1 gesetzt wird, die Stirnfläche statt des Gewichts, oder umgekehrt, das Gewicht statt der Stirnfläche in Rechnung gebracht werden kann. Ferner sei in der Vertikallinie AB, welche durch den Scheitel des Gewölbes geht, $AP = x$ und darauf senkrecht $PM = y$, der dazu gehörige Bogen $AM = v$ und das Gewicht des zugehörigen Gewölbstücks $A'm\mu A'' = Q$. Sämmtliche Fugen sollen auf den Ele- Q
menten der mittlern Wölbung senkrecht stehen, und es sei für den Punkt M der Winkel, welchen die verlängerte Fuge μm mit der Vertikallinie Oo einschließt, oder $MOo = \varphi$ und der zu M gehörige Krümmungshalb- φ
messer $MO = r$. Wächst nun $AM = v$ um $MM' = \partial v$, r
so ist $m\mu\mu' m' = \partial Q$ und der Winkel $MOM' = \partial\varphi$. Nun sei $v + \partial v = v'$; $Q + \partial Q = Q'$ und $\varphi + \partial\varphi = \varphi'$, so wird, wenn v' um $M'M'' = \partial v'$ wächst, Q' um $m'\mu'\mu'' m'' = \partial Q'$ und $\varphi' = o'O'M'$ um $M'O'M'' = \partial\varphi'$ wachsen.

Vom Gewichte des Steins $\mu m' = \partial Q$, entsteht gegen den darunter befindlichen Stein $\mu' m''$ ein Normaldruck (§. 374. Seite 126.)

$$N = \frac{\partial Q \cdot \cos\varphi}{\sin(\varphi' - \varphi)} = \frac{\partial Q \cdot \cos\varphi}{\sin\partial\varphi}$$

und von dem unterhalb liegenden Steine $\mu' m'' = \partial Q'$ entsteht gegen den oberhalb liegenden Stein $\mu m'$ ein Normaldruck (§. 374.)

$$M = \frac{\partial Q' \cdot \cos(\varphi' + \partial\varphi')}{\sin(\varphi' + \partial\varphi' - \varphi')} = \frac{\partial Q' \cdot \cos(\varphi' + \partial\varphi')}{\sin\partial\varphi'}.$$

Nun ist $Q' = Q + \partial Q$, also wenn man differenziirt $\partial Q' = \partial Q + \partial^2 Q$ und eben so $\partial\varphi' = \partial\varphi + \partial^2\varphi$, also

$\varphi' + \partial\varphi' = \varphi + 2\partial\varphi + \partial^2\varphi$. Da nun ferner
$\sin\partial\varphi = \partial\varphi$; $\cos\partial\varphi = 1$; $\sin\partial\varphi' = \partial\varphi' = \partial\varphi + \partial^2\varphi$
$\cos\varphi' = \cos(\varphi + \partial\varphi) = \cos\varphi - \partial\varphi . \sin\varphi$
$\cos(\varphi' + \partial\varphi') = \cos(\varphi + 2\partial\varphi + \partial^2\varphi) = \cos\varphi - (2\partial\varphi + \partial^2\varphi)\sin\varphi$,

so erhält man

$$N = \frac{\partial Q . \cos\varphi}{\partial\varphi} \text{ und}$$

$$M = \frac{(\partial Q + \partial^2 Q)(\cos\varphi - 2\partial\varphi . \sin\varphi - \partial^2\varphi . \sin\varphi)}{\partial\varphi + \partial^2\varphi}.$$

Der Druck M wirkt dem Druck N grade entgegen und hebt ihn zum Theil auf. Setzt man daher den Ueberschuß dieser Pressungen, welcher sich gegen die übrigen untern Steine fort pflanzt $= \delta$, so ist

$$\delta = N - M$$

oder wenn man die gefundenen Werthe setzt

$$\delta = \frac{\partial Q \cos\varphi}{\partial\varphi} - \frac{(\partial Q + \partial^2 Q)(\cos\varphi - 2\partial\varphi . \sin\varphi - \partial^2\varphi . \sin\varphi)}{\partial\varphi + \partial^2\varphi}$$

$$= \frac{\partial Q(\partial^2\varphi\cos\varphi + 2\partial\varphi^2\sin\varphi + \partial\varphi\,\partial^2\varphi\sin\varphi)}{\partial\varphi(\partial\varphi + \partial^2\varphi)}$$

$$- \frac{\partial^2 Q(\cos\varphi - 2\partial\varphi\sin\varphi - \partial^2\varphi\sin\varphi)}{\partial\varphi + \partial^2\varphi}$$

oder weil die Differentialien der höhern Ordnungen, so fern sie zu niedern Differentialien addirt oder davon subtrahirt werden sollen, den Werth derselben nicht ändern, also wegfallen können, *) so erhält man

*) Man darf sich nur erinnern, daß $\partial(xy) = x\partial y + y\partial x$ ist, ob man gleich $\partial(xy) = x\partial y + y\partial x + \partial x\,\partial y$ findet.

$$\delta = \frac{\partial Q(\partial^2\phi \cos\phi + 2\partial\phi^2 \sin\phi)}{\partial\phi^2} - \frac{\partial^2 Q \cos\phi}{\partial\phi}.$$

Nun sei die Länge $m\mu = z$, so ist die Fläche $m\mu\mu'm'$ oder

$$\partial Q = z\partial v.$$

Wird nun ∂v constant angenommen, so ist

$$\partial^2 Q = \partial z\, \partial v \text{ daher}$$

$$\delta = \frac{\partial v\, \partial^2\phi}{\partial\phi^2} z \cos\phi + 2 z\partial v . \sin\phi - \frac{\partial v}{\partial\phi}\partial z . \cos\phi.$$

Für jede krumme Linie ist der Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{\partial v}{\partial\phi} \text{ also } \partial v = r\partial\phi.$$

Den letzten Ausdruck differenziirt und dabei ∂v constant genommen, giebt

$$0 = r\partial^2\phi + \partial r\partial\phi = \frac{\partial v}{\partial\phi}\partial^2\phi + \partial r\partial\phi \text{ und hieraus}$$

$$-\partial r = \frac{\partial v\, \partial^2\phi}{\partial\phi^2}.$$

Diesen Werth in die letzte für δ gefundene Gleichung gesetzt und eben so ∂v und $\frac{\partial v}{\partial\phi}$ mit $r\partial\phi$ und r vertauscht, giebt

$$\delta = - z\partial r \cos\phi + 2 r z\partial\phi . \sin\phi - r\partial z . \cos\phi \text{ oder}$$

$$\delta = 2 r z \partial\phi . \sin\phi - (z\partial r + r\partial z) \cos\phi$$

folglich findet man, weil $\partial\phi \sin\phi = -\partial \cos\phi$ ist, den Unterschied von den Pressungen zweier auf einander folgenden Elemente des Gewölbes oder

$$\text{(I) } \delta = - 2 r z \partial \cos\phi - \partial (r z) . \cos\phi,$$

welches eine Fundamentalgleichung für alle Arten von Gewölben ist, deren Fugen auf die mittlere Wölbungslinie senkrecht stehen.

Will man statt des Winkels φ die Ordinate y einführen, so ist

$$\cos\varphi = \frac{\partial y}{\partial v} \text{ und } \partial \cos\varphi = \partial \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial v}$$

weil ∂v constant ist; daher erhält man auch

$$\text{(II) } \delta = -2rz\frac{\partial^2 y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\partial(rz).$$

Bei einem Gewölbe, welches durchgängig gleich dick ist, werde $z = b$, so erhält man

$$\text{(III) } \delta = -2br\partial\cos\varphi - b\partial r.\cos\varphi$$

oder auch

$$\text{(IV) } \delta = -2br\frac{\partial^2 y}{\partial v} - b\frac{\partial y\,\partial r}{\partial v}.$$

Für den Kreis ist r eine beständige Größe also $\partial r = 0$; wenn daher ein kreisförmiges Gewölbe gleich dick ist, so erhält man

$$\delta = -2br\partial\cos\varphi \text{ oder } \delta = -2br\frac{\partial^2 y}{\partial v}.$$

Nun ist für die Kreislinie $\cos\varphi = \frac{r-x}{r}$, also

$\partial\cos\varphi = -\frac{\partial x}{r}$ folglich

$$\text{(V) } \delta = -2b\partial x.$$

§. 401.

Sollen sich die Gewölbsteine unter einander im Gleichgewichte erhalten, so wird $\delta = 0$ also

$$-2br\partial\cos\varphi - b\partial r.\cos\varphi = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{\partial r}{r} = -2\frac{\partial\cos\varphi}{\cos\varphi}.$$

Sucht man nun diejenige Linie, welche dieser Forderung entspricht, so darf der gefundene Ausdruck nur integrirt werden. Dies giebt:

$\log r = -2\log.\cos\varphi + \log$ const oder wenn const $= c$ gesetzt wird

$$\log r = \log \frac{c}{\cos\varphi^2} \text{ oder } r = \frac{c}{\cos\varphi^2}$$

welches eine Eigenschaft der Kettenlinie ist (§. 99. III. Anhang), daher können auch nur bei dieser sämmtliche Gewölbsteine einander das Gleichgewicht halten, wenn sämmtliche gleich lange Fugen auf der mittlern Wölbung senkrecht stehen.

Wollte man die Gleichung für die Kettenlinie aus dem im vorigen §. (IV) gefundenen Ausdruck ableiten, so ist hier $\delta = o$ also $2r\partial^2 y + \partial y \partial r = o$.

Man setze $\partial y = p\partial v$, so ist $\partial^2 y = \partial p \partial v$, also

$2r\partial p + p\partial r = o$, oder

$\frac{2\partial p}{p} = \frac{-\partial r}{r}$ daher $2\log p = -\log r + \log c$ oder

$\log p^2 = \log\frac{c}{r}$ also $p^2 = \frac{c}{r} = \frac{\partial y^2}{\partial v^2}$.

Nun ist für jede Kurve, wenn ∂v constant genommen wird, der Krümmungshalbmesser

$r = -\frac{\partial x \partial v}{\partial^2 y}$ also

$\frac{\partial y^2}{\partial v^2} = \frac{-c\partial^2 y}{\partial x \partial v}$ oder $\partial x = -c\partial v \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$,

hievon das Integral

$x + c' = \frac{c\partial v}{\partial y}$ oder

$(x + c')^2 \partial y^2 = c^2 \partial v^2 = c^2 (\partial x^2 + \partial y^2)$, also

$$\partial y = \frac{c\,\partial x}{\sqrt{[(x+c')^2 - c^2]}}.$$

Weil $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$ den Ort angiebt, wo die Tangente mit den Ordinaten parallel ist, so erhält man für diesen Fall $\sqrt{[(x+c')^2 - c^2]} = 0$ also $x = c - c'$ und für $x = 0$; $c' = c$, daher verwandelt sich obiger Ausdruck in diesen

$$\partial y = \frac{c\,\partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}}$$

welches die Gleichung für die gemeine Kettenlinie ist.

§. 402.

Sucht man den Werth von δ, wenn sich die Abscissen und Ordinaten auf die innere Wölbung $A'mK$, Fi-

Taf.XIV gur 219., beziehen, so daß hier $A'p = x$, $pm = y$,

Fig.219 $A'm = v$ und $Om = r$ wird, so erhält man wie

§. 400.

$$\delta = \frac{\partial Q(\partial^2\varphi\cos\varphi + 2\partial\varphi^2.\sin\varphi)}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2 Q\cos\varphi}{\partial\varphi}$$

und nur die übrigen Schlüsse müssen abgeändert werden. Weil der Bogen $\partial\varphi$ zum Halbmesser 1 gehört, so verhält sich

$$1 : r + \tfrac{1}{2}z = \partial\varphi : MM' \text{ also } MM' = (r + \tfrac{1}{2}z)\,\partial\varphi.$$

Aber $\partial Q = MM'.z$ daher

$$\partial Q = (rz + \tfrac{1}{2}z^2)\,\partial\varphi = z\,\partial v + \tfrac{1}{2}z^2\,\partial\varphi$$

weil $r\,\partial\varphi = \partial v$ ist. Ferner

$$\begin{aligned}\partial^2 Q &= \partial z\,\partial v + z\,\partial z\,\partial\varphi + \tfrac{1}{2}z^2\,\partial^2\varphi \\ &= \partial z.r\,\partial\varphi + z\,\partial z\,\partial\varphi + \tfrac{1}{2}z^2\,\partial^2\varphi \\ &= (r+z)\,\partial z\,\partial\varphi + \tfrac{1}{2}z^2\,\partial^2\varphi.\end{aligned}$$

Diese Werthe für ∂Q und $\partial^2 Q$ in obige Gleichung gesetzt, giebt

$$\delta = (rz + \tfrac{1}{2}z^2)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi}\cos\varphi + 2\partial\varphi.\sin\varphi\right) - (r+z)$$

$$\partial z.\cos\varphi - \tfrac{1}{2}z^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi}\cos\varphi$$

$$= rz\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi}\cos\varphi + 2rz\,\partial\varphi.\sin\varphi + z^2\,\partial\varphi.\sin\varphi$$

$$-(r+z)\partial z.\cos\varphi.$$

Es ist aber §. 400.

$-\partial r = \frac{\partial v\,\partial^2\varphi}{\partial\varphi^2}$; also, weil $\frac{\partial v}{\partial\varphi} = r$ ist,

$-\partial r = \frac{r\partial^2\varphi}{\partial\varphi}$; diesen Werth in die vorstehende Gleichung gesetzt, giebt, weil $-\partial\cos\varphi = \partial\varphi\sin\varphi$ ist,

$$\delta = -(r+z)(z\,\partial\cos\varphi + \partial z\cos\varphi)$$

$$-z(\partial r\cos\varphi + r\,\partial\cos\varphi)$$

folglich

(I) $\delta = -(r+z)\,\partial(z\cos\varphi) - z\,\partial(r\cos\varphi)$

oder auch, weil $\frac{\partial y}{\partial v} = \cos\varphi$,

(II) $\delta = -(r+z)\,\partial\frac{z\partial y}{\partial v} - z\,\partial\frac{r\partial y}{\partial v}$

wo ∂v constant ist.

Ist das Gewölbe durchgängig gleich dick, so wird $z = b$ also

(III) $\delta = -(2br + b^2)\,\partial\cos\varphi - b\cos\varphi\,\partial r$,

oder

(IV) $\delta = -(2br + b^2)\frac{\partial^2 y}{\partial v} - b\frac{\partial r\,\partial y}{\partial v}$.

Wenn die innere Wölbung ein Kreisbogen ist, so erhält man für das gleich dicke Gewölbe

$$\delta = -(2br + b^2)\, \partial \cos \varphi.$$

Weil aber bei der Kreislinie $\cos \varphi = \frac{r - x}{r}$ also $\partial \cos \varphi$ $= -\frac{\partial x}{r}$ ist, so wird

$$\text{(V)}\ \delta = \frac{2br + b^2}{r}\, \partial x.$$

§. 403.

Die Ausdrücke des vorigen §. hätte man auch sogleich für die innere Wölbung aus §. 401. erhalten können, wenn daselbst $r + \frac{1}{2}z$ statt r gesetzt worden wäre, weil für die innere Wölbung der Krümmungshalbmesser um $\frac{1}{2}z$ zu groß ist.

Wollte man δ für die äußere Wölbung $A''K'$, Figur 219., finden, so darf nur §. 402., $r - \frac{1}{2}z$ statt r oder im vorigen §, $r - z$ statt r gesetzt werden, so erhält man

$$\text{(I)}\ \delta = -(r - z)\, \partial\, (z \cos \varphi) - z \partial\, (r \cos \varphi)$$

und für $z = b$

$$\text{(II)}\ \delta = -(2br - b^2)\, \partial \cos \varphi - b \cos \varphi\, \partial r.$$

Aus den verschiedenen für δ gefundenen Werthen kann man eben so wie §. 378. die erforderliche Dicke z des Gewölbes für den Fall finden, wenn alle Steine einander wechselseitig gleich stark pressen sollen, indem man nur $\delta = 0$ setzen darf, um daraus den Werth von z zu entwickeln. Die Rechnung ist aber alsdann weitläuftiger als §. 378.

§. 404.

Um die erforderliche Stärke der Widerlage irgend eines Gewölbes zu finden, dessen mittlere Wölbung gegeben ist, wenn alle Fugenschnitte auf dieser senkrecht stehen, muß der Ueberschuß von der Kraft, welchen jedes Element des Gewölbes gegen das darunter befindliche Element ausübt oder δ nach vertikaler Richtung MJ, Figur 219., und nach horizontaler MH zerlegt werden, wobei vorausgesetzt wird, daß der Mittelpunkt des Drucks in der mittlern Wölbung liege. Der Vertikaldruck in $M = \delta \sin \varphi$ strebt die Widerlage um den Punkt E nach MJ, und der Horizontaldruck $= \delta \cos \varphi$ nach MH zu drehen. Das Moment dieses Vertikaldrucks ist $= EJ . \delta \sin \varphi$ und die Summe aller Momente von A bis M Taf. XIV Fig. 219.

$$= \int EJ . \delta \sin \varphi$$

wodurch zugleich die Summe von dem Ueberschusse aller Vertikalpressungen von A bis N ausgedrückt werden kann, wenn man voraus setzt, daß das Integeal für $x = AB$ genommen werde. Eben so findet man die Summe aller Momente von dem Ueberschusse der Horizontalpressungen von A bis N

$$= \int EH . \delta \cos \varphi .$$

Das Element des Gewölbes, welches unmittelbar an die Widerlage bei KK′ fällt, wirkt mit seinem Normaldruck

$$N = \frac{\partial Q . \cos \varphi}{\partial \varphi} \text{ (§. 400.)}$$

gegen die Widerlage, und weil dieser Druck nicht durch den Gegendruck M eines Gewölbsteins aufgehoben werden kann, so wird sich derselbe gegen die Widerlage fortpflanzen und sie um E zu drehen streben.*) Es ist aber

$$N = \frac{\partial Q \,.\, \cos\varphi}{\partial \varphi} = \frac{z \partial v \,.\, \cos\varphi}{\partial \varphi} = r z \cos\varphi$$

weil (§. 400.), $\partial Q = z \partial v$ und $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = r$ ist. Für die Fuge KK′ an der Widerlage sei $z = z'$, $r = r'$ und φ oder der Winkel ACK′ $= \alpha$, so wird der Normaldruck

$$N = r' z' \cos\alpha$$

und wenn diese Kraft nach vertikaler und horizontaler Richtung zerlegt wird, so ist der Vertikaldruck $= N \sin\alpha = r' z' \sin\alpha \cos\alpha$ und der Horizontaldruck $= N \cos\alpha = r' z' \cos\alpha^2$. Hieraus findet man das Moment

des Vertikaldrucks $= EN' . r' z' \sin\alpha \cos\alpha$

des Horizontaldrucks $= N'N . r' z' \cos\alpha^2$.

b, a, k, w Man setze AB $= h$, BN $=$ FN′ $= a$, NN′ $= k$, ED $= w$, so kann das Gewicht der Widerlage EDKK′ durch $k w$ ausgedrückt werden und man erhält das Moment dieses Vertikaldrucks

$$= \tfrac{1}{2} k w^2.$$

Für das Gleichgewicht wird erfordert, daß die Summe aller Momente von den Vertikalpressungen, der Summe der Momente von den Horizontalpressungen gleich sei, oder

$$\int EJ . \delta \sin\varphi + EN' . r' z' \sin\alpha \cos\alpha + \frac{k w^2}{2}$$
$$= \int EH . \delta \cos\varphi + NN' . r' z' \cos\alpha^2.$$

Es

*) Bei entstehendem Zweifel, ob es nöthig sei, diesen Normaldruck noch besonders in Rechnung zu bringen, kann man sich am besten dadurch überzeugen, wenn man das Gewölbe aus einer bestimmten Anzahl Gewölbsteine bestehend annimmt.

Es ist aber im ΔKNn, $nK = \frac{1}{2} z' \sin \alpha$, also
$EJ = ED - DN' + N'F - FJ = ED - nK + NB - PM$, oder
$EJ = w - \frac{1}{2} z' \sin \alpha + a - y$
$EN' = w - \frac{1}{2} z' \sin \alpha$
$EH = k + h - x$, $NN' = k$ und
$\delta = -2\, rz \partial \cos \varphi - \partial (rz) \cos \varphi$
Setzt man diese Werthe in die gefundene Gleichung, so kann für jeden besondern Fall daraus die Breite der Widerlage oder w entwickelt werden, wenn die mittlere Wölbung gegeben ist.

§. 405.

Wäre irgend eine Kurve als innere Wölbung gegeben und man sucht daraus die Breite der Widerlage, so sei mit Beibehaltung der Bezeichnung §. 402, Figur 219., $A'B' = h$, $B'K = FD = a$, $NN' = k$, $ED = w$, so ist wie im vorigen §. die Summe von den Momenten aller Pressungen des Gewölbes von A bis N Taf. XIV Fig. 219.

nach vertikaler Richtung $= \int EJ \,.\, \delta \sin \varphi$

nach horizontaler Richtung $= \int EH \,.\, \delta \cos \varphi$.

Der Normaldruck im Punkte N ist (§. 404)

$$N = \frac{\partial Q \cos \varphi}{\partial \varphi} = (rz + \tfrac{1}{2} z^2) \cos \varphi$$

weil (§. 402.) $\partial Q = (rz + \frac{1}{2} z^2)\, \partial \varphi$ ist, oder weil für die Fuge KK', $z = z'$, $r = r'$ und $\varphi = \alpha$ wird,

$N = (r' + \frac{1}{2} z') z' \cos \alpha$. Hieraus entsteht ein Vertikaldruck $= (r' + \frac{1}{2} z') z' \sin \alpha \cos \alpha$ und ein Horizontaldruck $= (r' + \frac{1}{2} z') z' \cos \alpha^2$, woraus man das Moment des Vertikaldrucks $= EN'.(r' + \frac{1}{2}z')\, z' \sin\alpha \cos\alpha$ und das Moment des Horizontaldrucks $= NN'.(r' + \frac{1}{2}z')\, z' \cos\alpha^2$ findet.

Wird zu den Momenten der Vertikalpressungen noch das Moment der Widerlage $= \frac{1}{2}\, kw^2$ hinzu gesetzt, so erhält man für das Gleichgewicht

$$\int EJ.\delta \sin\varphi + EN'.(r' + \tfrac{1}{2}z')z' \sin\alpha \cos\alpha + \frac{kw^2}{2} = \int EH.\delta \cos\varphi + NN'(r' + \tfrac{1}{2}z')\, z' \cos\alpha^2.$$

Im $\triangle\, Mmq$ ist $Mm = \frac{1}{2}z$ und

$mq = \frac{1}{2}z \sin\varphi$; $Mq = \frac{1}{2}z \cos\varphi$; auch ist $nK = \frac{1}{2}z' \sin\alpha$ und $nN = \frac{1}{2}z' \cos\alpha$, daher erhält man

$$EJ = ED + DF - mp - mq$$
$$= w + a - y - \tfrac{1}{2}z \sin\varphi.$$
$$EN' = w - \tfrac{1}{2}z' \sin\alpha$$
$$EH = N'N - nN + A'B' - A'p + qM$$
$$= k - \tfrac{1}{2}z' \cos\alpha + h - x + \tfrac{1}{2}z \cos\varphi \text{ und}$$
$$\delta = -(r+z)\,\partial\,(z \cos\varphi) - z\,\partial\,(r \cos\varphi) \text{ oder}$$
$$\delta = -(r+z)\,\partial\,\frac{z\,\partial y}{\partial v} - z\,\partial\,\frac{r\,\partial y}{\partial v}.$$

Der bessern Uebersicht wegen kann man

$\int EJ.\delta \sin\varphi$ das erste Moment des Vertikaldrucks,

$EN'.(r' + \frac{1}{2}z')\, z' \sin\alpha \cos\alpha$ das zweite Moment, und

$\frac{kw^2}{2}$ das dritte Moment desselben; ferner

$\int EH.\delta \cos\varphi$ das erste Moment des Horizontaldrucks und

$NN'.(r' + \frac{1}{2} z')\, z' \cos\alpha^2$ das zweite Moment des letztern nennen.

§. 406.

Zusatz. Die innere Wölbung sei ein Kreisbogen $A'mK$, Figur 220, und das Gewölbe durchgängig von einerlei Dicke $mm' = A'A'' = KK' = b$, so ist hier $z = z' = b$. Wird die Bezeichnung im vorigen §. auf Figur 220. übergetragen, so ist hier Taf. XIV Fig. 220.

$A'C = CK = r = r'$, $A'B' = h$, $B'K = a$, $NN' = k$;
$A'p = x$, $pm = y$; der Winkel $A'CK = \alpha$, $A'Cm = \varphi$.

Nach den Eigenschaften des Kreises ist

$pm = y = r \sin\varphi$ und $A'p = x = r - r\cos\varphi$

daher §. 405.

$EJ = w + a - (r + \frac{1}{2} b) \sin\varphi$

$EN' = w - \frac{1}{2} b \sin\alpha$

$EH = k - \frac{1}{2} b \cos\alpha + h - r + (r + \frac{1}{2} b) \cos\varphi$

$\delta = -(2\,br + b^2)\, \partial \cos\varphi = (2\,br + b^2)\, \partial\varphi \sin\varphi$

Es ist daher

$$\int EJ.\delta \sin\varphi = (2\,br + b^2) \int [w + a - (r + \tfrac{1}{2} b) \sin\varphi]\, \partial\varphi \sin\varphi^2.$$

Aber (P. A. S. 247. 248)

$\int \partial\varphi \sin\varphi^2 = \frac{1}{2} \operatorname{arc}\varphi - \frac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi + C$ und

$\int \partial\varphi \sin\varphi^3 = -\frac{1}{3} \sin\varphi^2 \cos\varphi - \frac{2}{3} \cos\varphi + C'$.

Für $\varphi = 0$ verschwinden die Integrale, daher

$0 = C$ und $0 = -\frac{2}{3} + C'$ also

$\int \partial\varphi \sin\varphi^2 = \frac{1}{2} \operatorname{arc}\varphi - \frac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi$

$\int \partial\varphi \sin\varphi^3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sin\varphi^2\cos\varphi - \frac{2}{3}\cos\varphi.$

Für $\varphi = \alpha$ werden die Integrale vollständig. Es ist aber

$$\sin\alpha = \frac{a}{r} \text{ und } \cos\alpha = \frac{r-h}{r} \text{ daher}$$

wenn α statt φ und demnächst die hier gefundenen Werthe in die letzten Integralgleichungen gesetzt werden

$$\int \partial\varphi \sin\varphi^2 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc}\,\alpha - \frac{a(r-h)}{2r^2} = \frac{r^2\,\mathrm{arc}\,\alpha - a(r-h)}{2r^2}$$

$$\int \partial\varphi \sin\varphi^3 = \frac{2}{3} - \frac{a^2(r-h)}{3r^3} - \frac{2(r-h)}{3r} = \frac{2hr^2 - a^2(r-h)}{3r^3}.$$

Nun war

$$\int EJ.\delta \sin\varphi = (2br + b^2)(w+a)\int\partial\varphi\sin\varphi^2 - (2br+b^2)(r+\tfrac{1}{2}b)\int\partial\varphi\sin\varphi^3$$

daher findet man, wenn die gefundenen Werthe statt der Integrale in diese Gleichung gesetzt werden, und

$$\frac{2br + b^2}{6r^3} = A$$

gesetzt wird, das erste Moment des Vertikaldrucks

$$(\mathrm{I}) = A\,[3r(w+a)(r^2\,\mathrm{arc}\,\alpha - ar + ah) - (2r+b)(2hr^2 - a^2r + a^2h)].$$

Ferner ist hier

$$EN'.(r' + \tfrac{1}{2}z')z'\sin\alpha\cos\alpha = (w - \tfrac{1}{2}b\sin\alpha)(r + \tfrac{1}{2}b)\,b\sin\alpha\cos\alpha,$$

oder wenn statt $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ die gefundenen Werthe gesetzt werden, so ist das zweite Moment des Vertikaldrucks

$$(\mathrm{II}) = \frac{ab(r-h)(2r+b)(2rw-ab)}{4r^3}.$$

Das dritte Moment des Vertikaldrucks bleibt ungeändert

$$(III) = \tfrac{1}{2}\, kw^2.$$

Es ist ferner

$$\int EH.\partial \cos\varphi = -(2br + b^2)$$
$$\int [k - \tfrac{1}{2} b \cos\alpha + h - r + (r + \tfrac{1}{2} b) \cos\varphi] \cos\varphi . \partial \cos\varphi \; [I].$$

Aber $\int \cos\varphi\, \partial \cos\varphi = \frac{1}{2} \cos\varphi^2 + C$ und

$$\int \cos\varphi^2\, \partial \cos\varphi = \tfrac{1}{3} \cos\varphi^3 + C'.$$

Für $\varphi = 0$ verschwinden die Integralien und man erhält $0 = \frac{1}{2} + C$ und $0 = \frac{1}{3} + C'$ daher

$$\int \cos\varphi\, \partial \cos\varphi = \tfrac{1}{2} \cos\varphi^2 - \tfrac{1}{2}$$
$$\int \cos\varphi^2\, \partial \cos\varphi = \tfrac{1}{3} \cos\varphi^3 - \tfrac{1}{3}.$$

Für $\varphi = \alpha$ werden die Integrale vollständig und man erhält, wenn statt $\cos\alpha$ sein Werth $\frac{r-h}{r}$ gesetzt wird,

$$\int \cos\varphi\, \partial \cos\varphi = \frac{(r-h)^2 - r^2}{2r^2}$$
$$\int \cos\varphi^2\, \partial \cos\varphi = \frac{(r-h)^3 - r^3}{3r^3}.$$

Setzt man diese Werthe in die vorstehende Gleichung [I], so findet man das erste Moment des Horizontaldrucks

$$(IV) = hA\,[3kr(2r-h) + h(3r-h)(r + \tfrac{1}{2} b)].$$

Endlich findet man statt $NN'.(r' + \frac{1}{2} z')\, z' \cos\alpha^2$, das zweite Moment des Horizontaldrucks

$$(V) = \frac{bk(2r+b)(r-h)^2}{2r^2} = 3krA\,(r-h)^2.$$

Durch die Ausdrücke (I) bis (V) erhält man §. 405.

$(I) + (II) + (III) = (IV) + (V)$

in gegebenen Größen, so daß nur die Breite der Widerlage w unbekannt bleibt, welche sich alsdann leicht entwickeln läßt.

§. 407.

Aufgabe. Die erforderliche Stärke der Widerlage eines Gewölbes von gleicher Dicke zu finden, dessen innere Wölbung ein Kreisbogen ist, auf welchem alle Fugenschnitte senkrecht stehn, wenn weder Reibung noch Kohäsion zwischen den Gewölbsteinen in Rechnung gebracht wird.

Taf. XIV Fig. 220. Auflösung. Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung sei Figur 220. $A'A'' = KK' = b$, $A'C = CK = r$, $A'B' = h$, $B'K = a$, $NN' = k$ und der Winkel $A'CK = \alpha$, so kommt es darauf an, aus den für das Gleichgewicht gefundenen fünf Ausdrücken §. 406. die Breite der Widerlage oder $w = DE$ zu entwickeln. Giebt man den Momenten (I) und (II) die zu diesem Endzwecke bequemste Gestalt, so ist

$$(I) = 3\,r A\,(r^2 \operatorname{arc} \alpha - a r + a h)\, w + A$$
$$[3 a r^3 \operatorname{arc} \alpha - 2 h r^2 (2r + b) - a^2 (r - h)(r - b)].$$
$$(II) = 3 a r A\,(r - h)\, w - \tfrac{3}{2} a^2 b A\,(r - h)$$

und wenn man (I) und (II) addirt, so wird $(I) + (II) =$

$$3 r^3 A w \operatorname{arc} \alpha + A$$
$$[3 a r^3 \operatorname{arc} \alpha - (r + \tfrac{1}{2} b)(4 h r^2 + a^2 r - a^2 h)].$$

Nun ist $A = \frac{2 b r + b^2}{6 r^3}$;

ferner setze man

$B = 3r^3 \text{ arc } \alpha,$

$C = (r + \tfrac{1}{2}b)[4hr^2 + a^2(r-h)] - a.B,$

$D = h\,[3kr(2r-h) + h(3r-h)(r + \tfrac{1}{2}b)],$

so wird, weil (§. 406.) (III) + (I) + (II) — (IV) — (V) = o ist,

$$\tfrac{1}{2}kw^2 + A.Bw - A.C - A.D - 3krA(r-h)^2 = 0$$

oder

$$w^2 = \frac{2A.B}{k}w - \frac{2A}{k}[C + D + 3kr(r-h)^2] = 0$$

und hieraus findet man die Breite der Widerlage oder

$$w = \frac{-A.B + \sqrt{\{A^2.B^2 + 2kA[C + D + 3kr(r-h)^2]\}}}{k}.$$

Beispiel. Die halbe Weite des kreisförmigen Gewölbes sei 7 Fuß, die lichte Höhe 4 Fuß, die Dicke des Gewölbes 2 Fuß und die Höhe der Widerlage 10 Fuß, man sucht die Breite derselben.

Hier ist $a = 7$, $h = 4$, $r = 10$, $b = 2$ und $k = 10$ Fuß. Ferner ist

$\sin\alpha = \frac{a}{r} = 0{,}7 = \sin 44^\circ\, 26'$ also

$\text{arc } \alpha = \text{arc } 44^\circ\, 26' = 0{,}7755$ folglich

$A = 0{,}007333$; $B = 2326{,}5$;

$C = 4548{,}5$; $D = 23776$;

daher findet man die Breite der Widerlage

$$w = \frac{-17{,}0602 + \sqrt{5737{,}999}}{10} = 5{,}869 \text{ Fuß.}$$

§. 408.

1. Zusatz. Besteht die ganze innere Wölbung aus einem halben Kreise, so wird $a = h = r$ und $\alpha = 90$ Grad, also $\text{arc } \alpha = \tfrac{1}{2}\pi$, daher

$$A = \frac{2br + b^2}{6r^3}$$

$$B = \tfrac{3}{2}\pi r^3$$

$$C = r^3 (2b + 4r - \tfrac{3}{2}\pi r)$$

$$D = r^3 (b + 3k + 2r).$$

Setzt man diese Werthe in die zuletzt im vorigen §. gefundene Gleichung, so erhält man für das vollständige kreisförmige Tonnengewölbe die Breite der Widerlage oder

$$w = \frac{-\frac{1}{4}\pi(2br+b^2) + \sqrt{[\frac{1}{16}\pi^2(2br+b^2)^2 + k(2br+b^2)(b+k+2r-\frac{1}{2}\pi r)]}}{k}.$$

1. Beispiel. Der Halbmesser eines Gewölbes, dessen ganze innere Wölbung einen Halbkreis bildet, sei 10 Fuß, die Höhe der Widerlage eben so groß, und die Dicke des Gewölbes 2 Fuß, man sucht die Stärke der Widerlage.

Hier ist $r = k = 10$ Fuß, $b = 2$ Fuß, also die Breite der Widerlage oder

$$w = \frac{-34{,}557 + \sqrt{8362{,}71}}{10} = 5{,}689 \text{ Fuß}.$$

2. Beispiel. Bleibt alles übrige wie vorhin, nur daß $r = 9$ Fuß wird, so erhält man für die Breite

$$w = \frac{-31{,}416 + \sqrt{7332{,}08}}{10} = 5{,}4213 \text{ Fuß}.$$

§. 409.

2. Zusatz. Die Summe der Momente von den Vertikalpressungen ist §. 407. bei dem kreisförmigen Gewölbe, wenn das Moment der Widerlage nicht mit gerechnet wird $= A.Bw - A.C$ und von den Horizontalpressungen $= A.D - 3kr A (r - h)^2$; daher erhält man,

wenn die innere Wölbung ein Halbkreis ist, die Summe der Momente von den Vertikalpressungen

$$= r^3 A \left(\tfrac{3}{2}\pi w - 2b - 4r + \tfrac{3}{2}\pi r\right)$$

und die Summe von den Momenten der Horizontalpressungen

$$= r^3 A (b + 3k + 2r).$$

§. 410.

Bei einem Gewölbe, dessen mittlere Wölbung nach der Kettenlinie gebildet war, fand man §. 398. für $a = h = k = 10$ und $b = 2$ Fuß, die für das Gleichgewicht erforderliche Breite der Widerlage

$$w = 3{,}209 \text{ Fuß}.$$

Dagegen wird nach §. 408., wenn a, h, k und b für ein kreisförmiges Gewölbe eben diese Abmessungen erhalten, die erforderliche Breite der Widerlage

$$w = 5{,}422 \text{ Fuß},$$

woraus schon in dieser Hinsicht der große Vortheil erhellet, welchen die nach einer Kette gebildeten Gewölbe gegen die kreisförmigen gewähren.

Wenn also Herr v. Apfaltern in der Abhandlung vom Druck der Gewölbe auf ihre Seitenmauern (Wien 1782.) S. 161 meint, daß man auf die Vortheile, welche ein Gewölbe von der Kettenlinie haben soll, getrost Verzicht leisten könnte und (S. 155) daß die Beweise für die Vortheile der Kettenlinie dann nicht mehr paßten, wenn die Gewölbdicke mit in Anschlag kommt, so lassen sich diese Behauptungen sehr leicht durch die vorhergehenden Auseinandersetzungen widerlegen.

§. 411.

Aufgabe. Die Stärke der Widerlage eines gleich dicken Gewölbes zu finden, dessen innere Wölbung irgend einen gedrückten Bogen bildet, welcher aus drei Kreisbogen zusammen gesetzt ist.

Taf. XVI Fig. 221. Auflösung. Es sei, Figur 221, $A'C = Cn = r$
r ϱ der Halbmesser für den mittlern und $Gn = GK = \varrho$
a für den untern Kreisbogen. Ferner sei $KB = a$,
h k h' $A'B = h$, $DK = k$, so kann daraus $A'L = h'$ und
h'' $nS = h''$ gefunden werden. Denn

$CG : BC = Gn : nS$ oder

$r - \varrho : r - h = \varrho : h''$ also

$h'' = \frac{r-h}{r-\varrho} \cdot \varrho$ und hieraus $h' = h - h''$.

Ferner verhält sich $CG : GB = Gn : GS$
a' a'' Wird nun $Ln = a'$ und $KS = a''$ gesetzt, so findet man eben so leicht

$$a'' = \frac{r-a}{r-\varrho} \cdot \varrho \text{ und } a' = a - a''.$$

Um die Gleichung für die Stärke der Widerlage DE
w $= w$ zu erhalten, muß zuerst die Summe der Momente von A bis N', für den Halbmesser r und dann von N' bis N, für den Halbmesser ϱ gesucht werden, wodurch in Verbindung mit dem Momente $\frac{1}{2} k w^2$ eine Gleichung entsteht, aus welcher w entwickelt werden kann.

Man setze den Winkel $A'Cn = \alpha$ und $mGK = \alpha'$, $\alpha\ \alpha'$
so ist nach einem ganz ähnlichen Verfahren wie §. 407.

$$EJ = w + a - (r + \tfrac{1}{2} b) \sin \varphi$$

$$EH = DK + BA' - A'C + CP$$

$$= k + h - r + (r + \tfrac{1}{2} b) \cos \varphi, \text{ daher}$$

$$\int EJ \,.\, \partial \sin \varphi = (2\,br + b^2) \int [w + a - (r + \tfrac{1}{2} b) \sin \varphi]\, \partial\varphi \sin \varphi^2$$

und weil $\sin \alpha = \frac{a'}{r}$ und $\cos \alpha = \frac{r - h'}{r}$ ist, so wird

$$\int \partial\varphi \sin \varphi^2 = \frac{r^2 \operatorname{arc} \alpha - a'(r - h')}{2 r^2} \text{ und}$$

$$\int \partial\varphi \sin \varphi^3 = \frac{2 h' r^2 - a' a' (r - h')}{3 r^3}, \text{ folglich}$$

das Moment des Vertikaldrucks für den Bogen AN' $= \int EJ \,.\, \partial \sin \varphi$ oder

$$(\mathrm{I}) = A\,[3r(w+a)(r^2 \operatorname{arc} \alpha - \alpha' r + a'h') - (2r+b)(2h'r^2 - a'a'r + a'a'h')].$$

Weil ferner

$$\int EH \,.\, \partial \cos \varphi = -(2br + b^2) \int (k + h - r + r \cos \varphi) \cos \varphi \,.\, \partial \cos \varphi \text{ und}$$

$$\int \cos \varphi\, \partial \cos \varphi = \frac{(r - h')^2 - r^2}{2 r^2};$$

$$\int \cos \varphi^2\, \partial \cos \varphi = \frac{(r - h')^3 - r^3}{3 r^3},$$

so findet man das Moment des Horizontaldrucks für den Bogen AN'

$$(\mathrm{II}) = h'A\,[3r(k+h-r)(2r-h') + (2r+b)(3r^2 - 3rh' + h'h')].$$

Die Momente, welche aus dem Normaldruck auf die

Fuge nn' entstehen, werden hier nicht besonders in Rechnung gebracht, weil diese bei den Momenten für das Gewölbstück $N'N$ mit inbegriffen werden.

Um die Momente für den Untertheil des Gewölbes von N' bis N zu finden, nehme man die Summe der Momente für den ganzen Quadranten Kna, dessen Halbmesser $= \varrho$ ist, und ziehe davon die Momente für den Bogen an ab, so bleibt die Summe der Momente für nK übrig.

Nach §. 409. ist für den Quadranten Kna, wenn

$$A' = \frac{2b\varrho + b^2}{6\varrho^3}$$

gesetzt wird, das Moment der Vertikalpressungen

$$(\mathrm{III}) = \varrho^3 A' (\tfrac{3}{2}\pi w - 2b - 4\varrho + \tfrac{3}{2}\pi\varrho)$$

und das Moment der Horizontalpressungen

$$(\mathrm{IV}) = \varrho^3 A' (b + 3k + 2\varrho).$$

Für das Gewölbstück an ist das Moment des Horizontaldrucks wie bei (I), wenn der Winkel $aGn = \beta$ und $SG = \varrho - a'' = f$ gesetzt wird

$$(\mathrm{V}) = A' [3\varrho^3 (w + \varrho) \operatorname{arc}\beta - (2\varrho + b) (2\varrho^3 - 2\varrho^2 h'' - f^2 h'')].$$

und das Moment des Horizontaldrucks wie bei (II)

$$(\mathrm{VI}) = (\varrho - h'') A' [3k\varrho(\varrho + h'') + (2\varrho + b) (\varrho^2 + \varrho h'' + h'' h'')].$$

Wird (V) von (III) abgezogen, so erhält man das Moment des Vertikaldrucks für das Gewölbstück $N'N$, wenn $\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arc}\alpha'$ statt $\operatorname{arc}\beta$ gesetzt wird,

$$(VII) = A' [3\varrho^3 w \,\mathrm{arc}\,\alpha' + 3\varrho^4 \,\mathrm{arc}\,\alpha' - h'' (2\varrho + b)(2\varrho^2 + f^2)]$$

und wenn man (VI) von (IV) abzieht, so ist das Moment des Horizontaldrucks für das Gewölbstück $N'N$

$$(VIII) = h''h'' A' [3k\varrho + 2\varrho h'' + bh''].$$

Endlich ist das Moment vom Vertikaldruck der Widerlage

$$(IX) = \tfrac{1}{2} k w^2.$$

Daher weil für das Gleichgewicht, die Summe der Momente von den Vertikalpressungen, den Momenten der Horizontalpressungen gleich seyn müssen, so wird

$$(I) + (VII) + (IX) = (II) + (VIII).$$

Es ist aber

$$(I) + (VII)$$
$$= 3w[A(r^2 \,\mathrm{arc}\,\alpha - a'r + a'h) + \varrho^3 A' \,\mathrm{arc}\,\alpha']$$
$$+ A[3ar(r^2 \,\mathrm{arc}\,\alpha - a'r + a'h) - (2r + b)(2h'r^2 - a'a'r + a'a'h')]$$
$$+ A'[3\varrho^4 \,\mathrm{arc}\,\alpha' - h''(2\varrho + b)(2\varrho^2 + f^2)].$$

Nun war

$$A = \frac{2br + b^2}{6r^3} \text{ und } A' = \frac{2b\varrho + b^2}{2\varrho^3}$$

daher wenn man

$$B = 3[A(r^2 \,\mathrm{arc}\,\alpha - a'r + a'h) + \varrho^3 A' \,\mathrm{arc}\,\alpha']$$
$$C = A[3ar(r^2 \,\mathrm{arc}\,\alpha - a'r + a'h) - (2r + b)(2h'r^2 - a'a'r + a'a'h')]$$
$$D = A'[3\varrho^4 \,\mathrm{arc}\,\alpha' - h''(2\varrho + b)(2\varrho^2 + f^2)]$$
$$E = h' A[3r(k + h - r)(2r - h') + (2r + b)(3r^2 - 3rh' + h'h')] \text{ und}$$

$F = h''h''A'[3k\varrho + 2\varrho h'' + bh'']$ setzt, erhält man

$$wB + C + D + \tfrac{1}{2}kw^2 = E + F \text{ oder}$$

$$w^2 + \frac{2B}{k}w + \frac{2}{k}(C + D - E - F) = 0$$

und hieraus die Breite der Widerlage

$$w = \frac{-B + \sqrt{[B^2 - 2k(C + D - E - F)]}}{k}.$$

Die Weitläuftigkeit der Rechnung könnte dadurch ansehnlich verkürzt werden, wenn man den Winkel ACN' auf eine gegebene Anzahl Grade beschränkte. In diesem Falle ginge aber die Allgemeinheit der Auflösung verloren und man wäre auf einen einzelnen Fall eingeschränkt.

Beispiel. Von einem gedrückten Gewölbbogen, welcher aus drei Kreisbogen besteht, sei die halbe lichte Weite $BK = a = 12$ Fuß, die lichte Höhe $BA' = h = 9$ Fuß, die Dicke $A'A'' = b = 2$ Fuß und die Höhe der Widerlage $DK = k = 10$ Fuß; ferner $A'C = Cn = r = 15$ Fuß und $GK = Gn = \varrho = 7\tfrac{1}{2}$ Fuß, so ist

$h' = 3$; $h'' = 6$; $a' = 9$; $a'' = 3$ und $f = \varrho - a'' = 4\tfrac{1}{2}$ Fuß.

Weil $\sin\alpha = \frac{a'}{r} = 0{,}6 = \sin 36^\circ\ 52'$, so wird

$\text{arc}\,\alpha = 0{,}64344$.

Aber $\alpha' = 90^\circ - \alpha$ daher $\text{arc}\,\alpha' = 0{,}92735$ und man findet

$A = 0{,}0031605$; $A' = 0{,}013432$; $B = 16{,}105$;
$C = 24{,}512$; $D = -63{,}675$; $E = 187{,}022$;
$F = 158{,}098$ und man erhält hieraus für die Breite der Widerlage

$$w = \frac{-16{,}105 + \sqrt{7945{,}03}}{10} = 7{,}303 \text{ Fuß.}$$

§. 412.

Außer dem Gewichte der Gewölbsteine können auch noch andere Kräfte auf das Gewölbe pressen, wohin besonders die Fälle gehören, wenn eine auf die äußere Wölbung vertheilte Last nach vertikaler Richtung wirkt. Beziehen sich die Coordinaten auf die mittlere Wölbung AMN, Figur 219, wie §. 400., und wird die daselbst angenommene Bezeichnung mit dem Unterschiede beibehalten, daß hier das Gewölbe durchgängig gleich dick, also $z = b$ voraus gesetzt wird, so sei ∂P ∂P
diejenige äußere Kraft, welche nach vertikaler Richtung auf das Element $\mu\mu'$ der äußern Wölbung wirkt. Für $\mu'\mu''$ sei diese Kraft $\partial P'$, so läßt sich ∂P nach horizontaler Richtung und senkrecht auf $\mu\mu'$ zerlegen. Der Horizontaldruck ist

$$= \partial P \,.\, \operatorname{tgt} \varphi$$

welcher keinen Druck auf das Gewölbe, sondern nur gegen die Widerlage verursacht. Der senkrechte Druck auf $\mu\mu'$ ist

$$= \frac{\partial P}{\cos\varphi} \text{ und auf } \mu'\mu'' = \frac{\partial P'}{\cos\varphi'}$$

und die Kraft $\frac{\partial P}{\cos\varphi}$ wird ohne Rücksicht auf das Gewicht ∂Q, gegen $m'\mu'$ einen Normaldruck N' verursachen, der zum Theil oder gänzlich von dem Normaldruck aufgehoben wird, welchen die Kraft $\frac{\partial P'}{\cos\varphi'}$ gegen eben die Fläche $m'\mu'$ aufwärts hervorbringt. Dieser sei M′, so ist N′ — M′ der Ueberschuß des Drucks gegen $m'\mu'$ und mit Rücksicht auf die Gewichte ∂Q, $\partial Q'$ ist dieser Ueberschuß nach §. 400., N — M + N′ — M′, welcher hier = δ' gesetzt werden soll. Es ist aber §. 216.

$$N' = \frac{\partial P}{2 \cos\varphi \sin \partial \tfrac{1}{2}\varphi} = \frac{\partial P}{\partial\varphi \cos\varphi} \text{ und eben so}$$

$$M' = \frac{\partial P'}{\partial\varphi' \cos\varphi'} \text{ also } N' - M' = \frac{\partial P}{\partial\varphi \cos\varphi} - \frac{\partial P'}{\partial\varphi' \cos\varphi'}$$

Aber $P' = P + \partial P$ also $\partial P' = \partial P + \partial^2 P$;
$\partial\varphi' = \partial\varphi + \partial^2\varphi$ und $\cos\varphi' = \cos\varphi - \partial\varphi \sin\varphi$ (§. 402.) daher

$$N' - M' = \frac{\partial^2\varphi \cos\varphi\, \partial P - \partial\varphi^2 \sin\varphi\, \partial P - \partial\varphi \cos\varphi\, \partial^2 P}{\partial\varphi^2 \cos\varphi^2}$$

oder

$$N' - M' = -\partial \frac{\partial P}{\partial\varphi \cos\varphi} = -\partial \frac{r\, \partial P}{\partial v \cos\varphi}$$

weil $\partial\varphi = \frac{\partial v}{r}$ ist.

Nun ist für $z = b$ nach §. 400. (III)

$$N - M = -2 b r \partial \cos\varphi - b \cos\varphi\, \partial r;$$

daher, wenn sich die Coordinaten auf die mittlere Wölbung beziehen,

$$\text{(I) } \delta' = -2 b r \partial \cos\varphi - b \cos\varphi\, \partial r - \partial \frac{\partial P}{\partial\varphi \cos\varphi}.$$

Beziehen sich die Coordinaten auf die innere Wölbung, so bleibt der Ausdruck für N′ — M′ ungeändert. Man erhält daher für diesen Fall nach §. 402. (III)

(II)

(II) $\delta = -(2br + b^2)\partial\cos\varphi - b\cos\varphi\,\partial r - \partial\frac{r\,\partial P}{\partial r\cos\varphi}$.

Ist die innere Wölbung ein Kreisbogen, so erhält man

(III) $\delta = -(2br + b^2)\partial\cos\varphi - \partial\frac{\partial P}{\partial\varphi\cos\varphi}$

oder auch

$$= \frac{2br + b^2}{r}\partial x - \partial\frac{\partial P}{\partial\varphi\cos\varphi}.$$

§. 413.

Aufgabe. Ein Gewölbbogen $A'K'$, Figur 222., sei noch mit einer Stirnmauer $A''K'SL$ belastet, welche sich in eine wagerechte Linie LL' endet und mit dem Gewölbe von einerlei Materie ist; man sucht die erforderliche Stärke der Widerlage, wenn die innere Wölbung ein Kreisbogen ist. Taf. XIV Fig. 222.

Auflösung. Das Gewölbe sei durchgängig von einerlei Dicke, die Höhe der Stirnmauer über dem Scheitel mit Inbegriff der Gewölbdicke oder $A'L = e$, die übrige Bezeichnung aber wie §. 406. und 412., so müssen sowohl die Momente von den Kräften, welche von dem Gewichte des Gewölbbogens entstehen, und eben so die Momente von dem Druck auf die äußere Wölbung $A''\mu K'$ gesucht werden.

Auf das Element $\mu\mu'$ der äußern Wölbung drückt die Masse $\mu R r \mu' = \partial P$ vertikal. Nun verhält sich $1 : r + b = \partial\varphi : \mu\mu'$ also ist $\mu\mu' = (r + b)\,\partial\varphi$. Aber

$\mu n' = \mu\mu'.\cos\varphi = (r + b)\,\partial\varphi.\cos\varphi$ und

$R\mu = LA' + A'C - CP - n\mu$

$\quad = e + r - (r + b)\cos\varphi$, daher

$\partial P = R\mu . \mu n' = (r+b)[e+r-(r+b)\cos\varphi]\partial\varphi.\cos\varphi.$

Hienach ist §. 412. (III)

$$\delta' = -(2br+b^2)\,\partial\cos\varphi$$
$$-(r+b)\,\partial[e+r-(r+b)\cos\varphi]$$

oder

$$\delta' = r^2\,\partial\cos\varphi = -r^2\,\partial\varphi\,\sin\varphi.$$

Nun ist §. 406.

$$EJ = w + a - (r+\tfrac{1}{2}b)\sin\varphi$$
$$EH = k - \tfrac{1}{2}b\cos\alpha + h - r + (r+\tfrac{1}{2}b)\cos\varphi, \text{ daher}$$
$$\int EJ\,\delta'\,\sin\varphi = -r^2$$
$$\int[w+a-(r+\tfrac{1}{2}b)\sin\varphi]\,\partial\varphi\,\sin\varphi^2,$$

also ist wie §. 406. (I) das erste Moment des Vertikaldrucks

$$(I) = -\tfrac{1}{6r}\,[3r(w+a)(r^2\,\mathrm{arc}\,\alpha - ar + ah) -$$
$$(2r+b)(2hr^2 - a^2r + a^2h)].$$

Die Summe der Momente des Horizontaldrucks, welche von dem Ueberschuß der Pressungen sämmtlicher Gewölbsteine entsteht, ist

$$\int EH.\delta'\cos\varphi = r^2$$
$$\int[k-\tfrac{1}{2}b\cos\alpha + h - r(r+\tfrac{1}{2}b)\cos\varphi]\cos\varphi.\partial\cos\varphi$$

und man findet wie §. 406. (IV) das erste Moment des Horizontaldrucks

$$(II) = \tfrac{-h}{6r}[3kr(2r-h) + h(3r-h)(r+\tfrac{1}{2}b)].$$

Gegen jede Fuge wie $m'\mu'$ entsteht von dem darüber befindlichen Elemente des Gewölbsteins $m\mu\mu'm'$ ein Normaldruck (§. 404.)

$$= (rb + \tfrac{1}{2}b^2)\cos\varphi$$

und von der Kraft ∂P entsteht ebenfalls gegen $m'\mu'$ nach §. 412. ein Normaldruck

$$= \frac{\partial P}{\partial \varphi \cos \varphi} = (r+b)\,[e+r-(r+b)\cos\varphi].$$

Für die erste Fuge KK′ wird $\varphi = \alpha$, also die Summe dieser beiden Pressungen in N, welche sich gegen die Widerlage fortpflanzen, oder

$$N = (b+r)(e+r) - (\tfrac{1}{2}b^2 + br + r^2)\cos\alpha,$$

oder man erhält auch, weil $\cos\alpha = \frac{r-h}{r}$ ist,

$$N = (b+r)(e+h) - \frac{b^2(r-h)}{r}.$$

Hievon ist das

Moment des Vertikaldrucks $= EN'.N \sin\alpha$ und das Moment des Horizontaldrucks $= N'N.N\cos\alpha$. Aber

$$EN' = w - \tfrac{1}{2} b \sin\alpha;$$

$$NN' = k;\ \sin\alpha = \frac{a}{r};\ \cos\alpha = \frac{r-h}{r}$$

daher findet man das zweite Moment des Vertikaldrucks

$$(III) = \frac{a(2rw-ab)}{4r^3}\,[2r(b+r)(e+h) - b^2(r-h)]$$

und das zweite Moment des Horizontaldrucks

$$(IV) = \frac{k(r-h)}{2r^2}\,[2r(b+r)(e+h) - b^2(r-h)].$$

Vom Druck der Stirnmauer auf die äußere Wölbung entsteht auf jedes Element $\mu\mu'$ nach §. 412. ein Horizontaldruck $= \partial P.\operatorname{tgt}\varphi$, dessen Moment $= \mu J'.\partial P \operatorname{tgt}\varphi$ die Widerlage nach horizontaler Richtung um den Punkt E zu drehen strebt. Nun ist

$$\mu J' = NN' - BB' + B'A' - A'P + n\mu$$
$$= k - \tfrac{1}{2} b \cos\alpha + h - (r - r\cos\varphi) + b\cos\varphi$$
$$= k - \frac{br - bh}{2r} + h - r + (b+r)\cos\varphi,$$

oder wenn man

$$A = \frac{2r(k+h+e) - b(r-h)}{4r}$$

setzt, so ist

$$\mu J' = 2A - (e+r) + (b+r)\cos\varphi,$$

daher findet man die Summe der Momente oder

$$\int \mu J' : \partial P \operatorname{tgt}\varphi$$
$$= (b+r)\int [2A - (r+e) + (b+r)\cos\varphi]$$
$$[e + r - (b+r)\cos\varphi]\, \partial\varphi \cos\varphi \operatorname{tgt}\varphi$$
$$= (b+r)\int [(e+r)(2A - e - r) + 2(b+r)$$
$$(e + r - A)\cos\varphi - (b+r)^2 \cos\varphi^2]\, \partial\varphi \sin\varphi.$$

Es ist aber $\int \partial\varphi \sin\varphi = -\cos\varphi + C$;

$\int \partial\varphi \sin\varphi\cos\varphi = -\frac{1}{2}\cos\varphi^2 + C'$ und

$\int \partial\varphi \sin\varphi\cos\varphi^2 = -\frac{1}{3}\cos\varphi^3 + C''$.

Für $\varphi = 0$ verschwinden die Integrale und man findet

$$C = 1;\quad C' = \tfrac{1}{2};\quad C'' = \tfrac{1}{3}.$$

Für $\varphi = \alpha$ werden die Integrale vollständig, und man erhält, wenn $\frac{r-h}{r}$ statt $\cos\alpha$ gesetzt wird,

$$\int \partial\varphi \sin\varphi = 1 - \frac{r-h}{r} = \frac{h}{r}$$

$$\int \partial\varphi \sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2} - \frac{(r-h)^2}{2r^2} = \frac{2hr - h^2}{2r^2}$$

$$\int \partial\varphi \sin\varphi\cos\varphi^2 = \frac{1}{3} - \frac{(r-h)^3}{3r^3} = \frac{r^3 - (r-h)^3}{3r^3},$$ daher

$\int \mu J'.\partial\varphi \operatorname{tgt}\varphi$ oder das dritte Moment des Horizontaldrucks

$$(V) = \frac{b+r}{3r^3}\{3hr^2(e+r)(2A-e-r)$$
$$+3hr(b+r)(2r-h)(e+r-A)$$
$$-(b+r)^2[r^3-(r-h)^3]\}.$$

Endlich ist $TD = b \sin\alpha = \frac{ab}{r}$, daher das Moment von dem Theile ETSL' der Widerlage

$$= \tfrac{1}{2}\left(w-\frac{ab}{r}\right)^2\left(k-\frac{b(r-h)}{2r}+h+e\right)$$

und das Moment von dem Theile TK'KD der Widerlage

$$= \left(w-\frac{ab}{2r}\right)k.\frac{ab}{r}.$$

Beide Momente addirt und die Größe A eingeführt, geben das Moment der ganzen Widerlage oder das dritte Moment des Vertikaldrucks

$$(VI)\ A w^2 - \frac{2A-k}{r}abw + \frac{2A-k}{2r^2}a^2b^2.$$

Werden die Momente der Vertikalpressungen, den Momenten der Horizontalpressungen gleich gesetzt, so erhält man für das Gleichgewicht

$$(I)+(III)+(VI)=(II)+(IV)+(V).$$

Nun ist (I) + (III) + (VI)]

$$= \frac{-w}{2}(r^2 \operatorname{arc}\alpha - ar + ah)]$$

$$-\frac{a}{2}(r^2 \operatorname{arc}\alpha - ar + ah) + \frac{2r+b}{6r}(2hr^2 - a^2r + a^2h)$$

$$+\frac{aw}{2r^2}[2r(b+r)(e+h)-b^2(r-h)]$$

$$-\frac{a^2b}{4r^3}[2r(b+r)(e+h)-b^2(r-h)]$$

$$+Aw^2-\frac{2A-k}{r}abw+\frac{2A-k}{2r^2}a^2b^2$$

$$=Aw^2+\frac{a(r-h)(r^2-b^2)+2ar(b+r)(e+h)+4abr(k-A)-r^4\operatorname{arc}\alpha}{2r^2}.w$$

$$+\frac{1}{12r^3}[a^2(r-h)(2r^3-2br^2+3b^3)+2hr^4(2r+b)$$

$$-6a^2br(b+r)(e+h)+6a^2b^2r(2A-k)$$

$$-6ar^5\operatorname{arc}\alpha].$$

Ferner ist (II) + (IV)

$$=\frac{6kr(r-h)(b+r)(e+h)-3b^2k(r-h)^2-3hkr^2(2r-h)-h^2r(3r-h)(r+\tfrac{1}{2}b)}{6r^2}.$$

Setzt man nun

$$B=\frac{a(r-h)(r^2-b^2)+2ar(b+r)(e+h)+4abr(k-A)-r^4\operatorname{arc}\alpha}{2r^2}$$

$$C=\frac{1}{12r^3}[6ar^5\operatorname{arc}\alpha+6a^2br(b+r)(e+h)$$

$$-6a^2b^2r(2A-k)-a^2(r-h)(2r^3-2br^2+3b^3)$$

$$-2hr^4(2r+b)]$$

$$D=\frac{6kr(r-h)(b+r)(e+h)-3b^2k(r-h)^2-3hkr^2(2r-h)-h^2r(3r-h)(r+\tfrac{1}{2}b)}{6r^2}$$

$$E=\frac{b+r}{3r^3}\{3hr^2(e+r)(2A-e-r)+3hr(b+r)(2r-h)(e+r-A)$$

$$-(b+r)^2[r^3-(r-h)^3]\}$$

so wird

$$Aw^2+Bw-C=D+E \text{ oder}$$

$$w^2+\frac{B}{A}w-\frac{C+D+E}{A}=0$$

daher findet man die Breite der Widerlage oder

$$w = \frac{-B + \sqrt{[B^2 + 4A(C+D+E)]}}{2A}.$$

Beispiel. Für ein Gewölbe mit einer Stirnmauer sei $a = 7$, $h = 4$, $r = 10$, $b = 2$, $e = 4$ und $k =$ 10 Fuß, so erhält man

$\sin\alpha = \frac{a}{r} = 0,7 = \sin 44^\circ\ 26'$ daher

$\text{arc}\ \alpha = \text{arc}\ 44^\circ\ 26' = 0,7755$ folglich

$A = 8,7$; $B = 52,225$; $B^2 = 2727,451$

$C = 249,758$; $D = 172,533$; $E = 16,584$

und hieraus die Breite der Widerlage oder

$$w = \frac{-52,225 + \sqrt{18000,201}}{17,4} = 4,71 \text{ Fuß}.$$

Es ist daher in diesem Falle die erforderliche Breite der Widerlage bei einer Stirnmauer geringer, als wenn sich keine Stirnmauer auf dem Gewölbe befindet. Man vergleiche §. 407.

§. 414.

Zusatz. Besteht der Gewölbbogen, auf welchem die Stirnmauer ruht, aus einem Halbkreise, so wird $a = h = r$, $r - h = 0$ und $\text{arc}\ \alpha = \frac{1}{2}\pi$; man erhält daher

$$A = \frac{k + r + e}{2}$$

$$B = bk + r(e + r) - \tfrac{1}{4}\pi r^2$$

$$C = \frac{3\pi r^3 + 6\,ber - 4r^2(r - b)}{12}$$

$$D = -\frac{r^2(3k + 2r + b)}{6}$$

$$E = \frac{(b + r)[6k(e + r) + (b + r)(3e + r - 2b - 3k)]}{6}$$

woraus die Breite der Widerlage

$$w = \frac{-B + \sqrt{[B^2 + 4A(C + D + E)]}}{2A}$$

leicht gefunden werden kann.

Beispiel. Der Halbmesser der innern Wölbung sei 10 Fuß, die Gewölbdicke $1\frac{5}{6}$ Fuß, die Höhe der Stirnmauer über dem Scheitel der äußern Wölbung 2 Fuß und die Höhe der Widerlage 10 Fuß, so ist hier

$$r = 10;\ b = \frac{11}{6};\ e = \frac{23}{6} \text{ und } k = 10 \text{ Fuß};$$

ferner

$$A = 8{,}083; \quad B = 78{,}127; \quad B^2 = 6103{,}828$$
$$C = 548{,}315; \quad D = -863{,}889; \quad E = 1524{,}145,$$

daher findet man die Breite der Widerlage

$$w = \frac{-78{,}127 + \sqrt{45179{,}345}}{16{,}166} = 8{,}315 \text{ Fuß}.$$

Im System der Mechanik fester Körper (1. Th. S. 248.) findet Hr. Ide für dieses Beispiel $w = 22{,}647$ Fuß, welches mit daher rührt, weil daselbst $N = 0$ gesetzt ist, ob gleich für $h = r$ nur ein Theil von N verschwindet.

§. 415.

Wenn der Mörtel in den Fugen eines Gewölbes, welches nach den Grundsätzen §. 378. angeordnet worden, erhärtet ist, so kann es gleichgültig seyn, an welchen Stellen dasselbe Risse oder Sprünge nach den Richtungen dieser Fugen erhält, weil das ganze Gewölbe so angeordnet ist, daß sich die einzelnen Gewölbsteine ohne Rücksicht auf Reibung und Kohäsion im Gleichgewichte halten, wenn nur keine andere Kräfte als die in Rechnung gebrachten auf das Umwerfen

wirken. Wenn aber das Gewölbe nach andern Regeln ausgeführt ist, und die einzelnen Steine sich nicht im Gleichgewichte erhalten, so kann es nicht gleichgültig seyn, an welchen Stellen das Gewölbe Sprünge oder Risse erhält, weil hiedurch die Kohäsion des Mörtels aufgehoben wird, und die getrennten Gewölbstücke als einzelne Keile auf das Umwerfen der Widerlage wirken. Bisher war angenommen, daß die Gewölbe aus einer unzähligen Menge einzelner Steine bestanden; wird daher angenommen, daß an einem Gewölbbogen, dessen einzelne Steine nicht im Gleichgewichte sind, in gleichen Entfernungen vom Scheitel A, Figur 223., Taf. XIV
bei M und M′ nach den Richtungen der Fugen Risse Fig. 223
entstehen, indem der Scheitel ungetrennt bleibt, so wird das Gewölbstück MAM′ die Widerlagen nebst den damit verbundenen Gewölbmassen umzuwerfen streben, und diejenigen Fugen, wo die meiste Gefahr zum Umwerfen des darunter befindlichen Gewölbstücks nebst der Widerlage vorhanden ist, sollen hier die Brechungsfugen heißen. Bezeichnet nun W das Moment der Vertikalpressungen, mit welchen das Gewölbe nebst der Widerlage der Umdrehung um den Punkt E widersteht und W′ das Moment der Horizontalpressungen, welche die Gewölbmasse ME um den Punkt E nach der horizontalen Richtung MH umzuwerfen strebt, und man setzt

$$W - W' = D$$

so ist diejenige Fuge M, wo D seinen kleinsten positiven oder seinen größten negativen Werth erhält, die Brechungsfuge.

Für ein gleich dickes Gewölbe aus vollem Kreise, dessen Fugen verlängert im Mittelpunkte C zusammenlaufen, sei M die Brechungsfuge; $AP = x$, $PM = y$, der Bogen $AM = v$, der Halbmesser $AC = CN = r$, die Gewölbdicke $= b$, $KD = k$, $ED = w$ und der Winkel $ACM = \varphi$, so ist, wenn das Gewicht, welches jedem Quadratfuße von der Stirnfläche der Gewölbmasse entspricht, $= 1$ gesetzt wird, das Gewicht vom Gewölbstücke $MAM' = 2bv$. Senkrecht auf die Fugen M, M′ sei MO, M′O gezogen, so ist der Winkel $MOC = 90° - \varphi$ und wenn man die Kraft $2bv$ nach den Richtungen OM, OM′ zerlegt, so erhält man (§. 21.) den Normaldruck auf die Fuge M

$$= \frac{bv}{\sin\varphi}.$$

Diesen Druck nach vertikaler Richtung MJ und nach horizontaler MH zerlegt, giebt, weil

Taf. XIV Fig. 223.

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \text{ und } \cos\varphi = \frac{r - x}{r} \text{ ist,}$$

den Vertikaldruck in $M = bv$ und

den Horizontaldruck in $M = \frac{bv\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{bv(r - x)}{y}$.

Nun ist $EH = k + r - x$, daher erhält man, wenn voraus gesetzt wird, daß die Widerlage auf dem festen Boden ED nach horizontaler Richtung nicht weichen, wohl aber sich um den Punkt E herum drehen kann, das Moment der Horizontalpressungen nach MH, oder

$$W' = (k + r - x)\frac{bv(r-x)}{y}$$

$$= \frac{bv}{y}(kr + r^2 - kx - 2rx + x^2),$$

oder, weil $2rx - x^2 = y^2$ ist,

$$W' = \frac{bv}{y}(kr + r^2 - kx - y^2).$$

Für den Vertikaldruck bv in M ist das Moment

$$EJ \, . \, bv = (w + r - y)\, bv.$$

Das Gewicht vom Gewölbstücke MN ist $= b\left(\frac{1}{2}\pi r - v\right)$ und wenn durch den Schwerpunkt g desselben die Vertikallinie gg″ gezogen wird, so findet man (§. 86. I.) den Abstand

$$Ng' = r - \frac{r(r-x)}{\frac{1}{2}\pi r - v}, \text{ also}$$

$$Eg'' = (w - \tfrac{1}{2}b) + Ng' = w - \tfrac{1}{2}b + r - \frac{r(r-x)}{\frac{1}{2}\pi r - v}$$

daher ist das Moment vom Vertikaldruck des Gewölbstücks MN

$$= b\left(w + r - \tfrac{1}{2}b - \frac{r(r-x)}{\frac{1}{2}\pi r - v}\right)\left(\tfrac{1}{2}\pi r - v\right).$$

Endlich ist das Moment vom Vertikaldruck der Widerlage $= \frac{1}{2}w \, . \, wk$, also sämmtliche Momente der Vertikalpressungen, oder

$$W = \tfrac{1}{2}kw^2 + b\left[w + r - \tfrac{1}{2}b - \frac{r(r-x)}{\frac{1}{2}\pi r - v}\right]$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\pi r - v\right) + bv(w + r - y) \text{ oder}$$

$$W = \tfrac{1}{2}kw^2 + b\left[\tfrac{1}{2}\pi r(w + r - \tfrac{1}{2}b)\right.$$
$$\left. - r^2 + \tfrac{1}{2}bv + rx - vy\right],$$

daher erhält man, wenn

$$\tfrac{1}{2}\,kw^2 + \tfrac{1}{2}\,\pi\,br\,(w + r - \tfrac{1}{2}b) - br^2 = B$$

gesetzt wird, nach gehöriger Zusammenziehung $W - W'$ oder

$$\text{(I)}\quad D = B + b\,[\tfrac{1}{2}\,bv + rx - \tfrac{v}{y}\,(r^2 + kr - kx)].$$

Setzt man statt x, y, v die Werthe $r - r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, $r\varphi$, so erhält man auch

$$\text{(II)}\quad D = B + br\,[r + \tfrac{1}{2}\,b\,\varphi - r\cos\varphi - \tfrac{\varphi}{\sin\varphi}\,(r + k\cos\varphi)].$$

Um zu untersuchen, für welchen Werth von φ, D seinen kleinsten positiven oder größten negativen Werth erhält, setze man $B + br^2 = B'$, so ist B' eine beständige Größe, welche nicht von φ abhängt, man hat alsdann

$$D = B' + br\left[\tfrac{1}{2}\,\varphi\,.\,b - \left(\cos\varphi + \frac{\varphi}{\sin\varphi}\right) r - \frac{\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}\,.\,k\right].$$

Giebt man nun φ verschiedene Werthe, so findet man, daß für

$\varphi = 0$ wird $D = B' + br\,(0{,}000\,b - 1{,}000\,r - 1{,}000\,k)$
$\varphi = 30°$ „ $D = B' + br\,(0{,}083\,b - 0{,}913\,r - 0{,}907\,k)$
$\varphi = 60°$ „ $D = B' + br\,(0{,}166\,b - 0{,}709\,r - 0{,}605\,k)$
$\varphi = 90°$ „ $D = B' + br\,(0{,}500\,b - 0{,}571\,r - 0{,}000\,k)$

Hieraus läßt sich übersehen, daß innerhalb der Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 90°$ der Ausdruck für D weder ein Größtes noch Kleinstes giebt, daß aber für $\varphi = 0$ der kleinste Werth für D erhalten wird, oder daß die Brechungsfuge zunächst bei dem Scheitel des Gewölbbogens angenommen werden muß. Auch sind Brüche für die Stabilität des Gewölbes desto nachtheiliger, je näher sie bei dem Scheitel entstehen. Man darf daher unter der angenommenen Voraussetzung bei einem gleich dicken kreisförmigen Gewölbe, die Brechungsfuge weder mit de la Hire bei $\varphi = 45$ Grad, noch mit andern nahe über oder unter diesem Winkel annehmen, sondern so fern der Theil des Gewölbes und der Widerlage, welche sich unter der Brechungsfuge befinden, als eine zusammenhängende feste Masse angesehen werden, muß solche zunächst an dem Scheitel angenommen werden, so daß das abgelöste Gewölbstück als äußerst dünne vorauszusetzen ist. Hieraus folgt ferner, daß in jedem Falle die Stärke der Widerlage zu klein gefunden wird, wenn man solche unter der Bedingung berechnet, daß bei einem kreisförmigen Gewölbe die Brechungsfuge um einen bedeutenden Theil vom Scheitel entfernt ist.

Will man den Ausdruck (I) auf das Beispiel §. 408. anwenden, wo hier $r = 10$, $k = 10$, $b = 2$ und $w = 5{,}4213$ ist; so erhält man

$$D = 400 + 2v + 20x - 20\frac{v}{y}(20 - x)$$

und hienach für verschiedene Werthe von x nachstehende Tafel

x	φ		$\frac{v}{y}$	D
0	0°	0′	1,000	0,00
0,1	8°	7′	1,004	5,17
0,5	12°	35′	1,008	21,41
1	25°	50′	1,035	35,91
5	60°	—	1,209	210,59
10	90°	—	1,571	631,42

Wegen des Ausdrucks $\frac{v}{y} = \frac{\varphi}{\sin\varphi}$, für $\varphi = 0$, ist noch zu bemerken, daß der alsdann entstehende Werth $\frac{\varphi}{\sin\varphi} = \frac{0}{0}$ zwar unbestimmt zu seyn scheint, daß aber dergleichen Ausdrücke $\frac{0}{0}$ jedesmal einen bestimmten Werth haben, welchen man findet, wenn im Differential des Zählers und Nenners der gegebene Werth gesetzt wird. (P. A. S. 360.) Man erhält daher für $\varphi = 0$

$$\frac{\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi \cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos 0^0} = 1.$$

§. 416.

In dem allgemeinen Ausdruck für $D = W - W'$ (§. 416. I) erhält man, wenn $\varphi = 0$ gesetzt wird,

$D = B - br(r + k)$ oder wenn man statt B seinen Werth setzt

$$D = \tfrac{1}{2} kw^2 + \tfrac{1}{2} \pi br (w + r - \tfrac{1}{2} b) - br(2r + k).$$

Wird nun angenommen, daß die Horizontalpressungen des Gewölbes mit den Vertikalpressungen im Gleichgewichte seyn sollen, so ist $W - W'$ oder $D = 0$, daher

$$0 = \tfrac{1}{2} kw^2 + \tfrac{1}{2} \pi br (w + r - \tfrac{1}{2} b) - br(2r + k),$$

oder wenn sich der Halbmesser nicht auf die mittlere, sondern auf die innere Wölbung beziehen soll, so muß $r + \frac{1}{2} b$ statt r gesetzt werden und man erhält:

$$0 = \tfrac{1}{2} kw^2 + \tfrac{1}{2} \pi b (r + \tfrac{1}{2} b)(w + r) \\ - b(r + \tfrac{1}{2} b)(2r + b + k)$$

oder

$$w^2 + \frac{\pi}{2k}(2br + b^2) . w$$
$$= \frac{2br + b^2}{k}(b + k + 2r - \tfrac{1}{2}\pi r).$$

Entwickelt man hieraus w, so findet man bei einem kreisförmigen Gewölbe, welches nur im Scheitel durch einen äußerst dünnen Gewölbstein getrennt ist, und wenn unter den Horizontal- und Vertikalpressungen ein Gleichgewicht entstehen soll, die erforderliche Breite der Widerlage, oder

$$w = \frac{-\frac{1}{4}\pi(2br+b^2) + \sqrt{[\frac{1}{16}\pi^2(2br+b^2)^2 + k(2br+b^2)(b+k+2r-\frac{1}{2}\pi r)]}}{k}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit §. 408., so findet man eine vollkommene Uebereinstimmung mit der daselbst gefundenen Breite der Widerlage, woraus der merkwürdige Satz folgt: Die Breite der Widerlage wird bei einem kreisförmigen Gewölbe eben so groß gefunden, wenn man in der Rechnung voraussetzt, daß das ganze Gewölbe aus unzähligen Gewölbsteinen bestehe, welche unter sich weder durch Kohäsion, noch auf sonst eine Art Zusammenhang haben; oder wenn man voraussetzt, daß das Gewölbe mit der Widerlage aus einer zusammenhängenden Masse bestehe, welche nur im Scheitel durch einen äußerst dünnen Gewölbstein getrennt ist.

Herr Rath Langsdorf findet zwar im Lehrbuche der Hydraulik S. 259 bei einem gleich dicken kreisförmigen Gewölbbogen, daß für $\varphi = 62$ Grad, das Bestreben zum Umstürzen des Gewölbes am größten ist. Allein dies Resultat entsteht daher, daß mehrere Wirkungen, welche aus der Zerlegung der Kräfte entstehen, nicht in Rechnung gebracht sind. Denn statt, daß hier der Horizontaldruck in M nach $MH = V \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = V \cot \varphi$ gefunden worden, so findet Herr Langsdorf (S. 252) diesen Druck $= V (\sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi)$.

§. 417.

Um näher zu bestimmen, wie fern bei entstehenden Brüchen in einem Gewölbbogen durch die Reibung das Einstürzen des Gewölbes verhindert werde, setze man voraus, daß die Gewölbsteine ohne Reibung und Kohäsion nicht im Gleichgewichte sind, daß aber die Widerlage B
Taf. XIV und D, Figur 224., und ein Theil des damit verbunde-
Fig. 224. nen Gewölbes BE und DF als feststehend angenommen werden können, welches nach Erhärtung des Mörtels leicht der Fall ist. Entsteht nun durch irgend einen Umstand im Scheitel A eine Trennung, so daß die beiden Gewölbstücke AE und AF als einzelne Körper auf den festen Unterlagen EB und FD ruhen, so kann nur die Reibung der Steine und die Kohäsion des Mörtels dem Ausweichen widerstehen und das Niedersinken vom Obertheile des Gewölbes verhindern. Es ist nicht anzurathen, viel auf die Kohäsion zu rechnen, weil besonders bei neuen Gewölben solche viel geringer als bei alten ist; dagegen ist die Reibung der Gewölbsteine auf einander so bedeutend, daß sie in vielen Fällen allein zureicht, das Ausweichen einzelner Gewölbstücke zu verhindern.

Unter der angenommenen Voraussetzung sei C der Horizontaldruck vom Gewölbstück AE in A, und R die Kraft, mit welcher AE in E, nach der Richtung Ee

des

des verlängerten Fugenschnitts auszuweichen strebt, so ist, wenn diese Fuge mit der Vertikallinie den Winkel φ bildet, nach §. 204. II. b., die Kraft, mit welcher das Gewölbstück AE nach außen auszuweichen strebt, oder

$$(I)\quad R = C \sin \varphi - Q \cos \varphi$$

wo Q das Gewicht vom Gewölbstücke AE bezeichnet. Nur wenn $R = 0$ wird, ist kein Ausweichen auch ohne Reibung zu befürchten. Wird hingegen R negativ, so hat der Untertheil des Gewölbstücks AE ein Bestreben nach innen abzugleiten.

Der Normaldruck von AE auf die Fuge E sey N und $1 : \mu$ das Verhältniß des Drucks zur Reibung bei Gewölbsteinen, so ist μN die Kraft, mit welcher die Reibung das Ausweichen des Gewölbstücks AE verhindert und das Gewölbe behält einen sichern Stand, wenn

$$\mu N > \text{oder} = \pm R$$

ist, wo das obere Zeichen für positive und das untere für negative Werthe von R genommen wird.

Nach §. 204. III. ist $N = Q \sin \varphi + C \cos \varphi$, also

$$(II)\quad \mu N = \mu Q \sin \varphi + \mu C \cos \varphi$$

Es läßt sich nun für jede Fuge eines Gewölbes bestimmen, ob das darüber befindliche Gewölbstück ein Bestreben hat, nach innen oder nach außen auszuweichen, und wenn man

$$(III)\quad D = \mu N - (\pm R) = \mu N \mp R$$

setzt, wo das obere Zeichen für positive und das untere für negative Werthe von R gilt, so wird bei einem negativen Werthe von D allemal ein Ausweichen des Gewölbes unter den angenommenen Voraussetzungen entstehen.

Der größte negative Werth von D, oder wenn keine negative Werthe vorhanden sind, der kleinste positive Werth von D, giebt die schwächste Stelle des Gewölbes an; ist dabei R positiv, so strebt das Gewölbstück nach außen und wenn R negativ ist, nach innen abzugleiten.

§. 418.

Werden die Ausmittelungen des vorigen §. auf ein kreisförmiges gleich dickes Gewölbe, dessen Fugenschnitte verlängert nach dem Mittelpunkte gehen, angewandt, so muß zuvor für dasselbe der Werth C allgemein gesucht werden. Man setze für irgend eine
Taf. XLV Fuge E Figur 225. das Gewicht vom Bogen $AE = Q$,
Fig. 225. und wenn sich die rechtwinklichten Coordinaten auf die mittlere Wölbung beziehen, $AP = x$, $PE = y$, den Bogen $AE = v$, den Winkel $ACE = \phi$ und den Halbmesser $AC = CB = r$. Ferner sei GV eine durch den Schwerpunkt des Bogens AE gezogene Vertikallinie und $EG = u$, so ist §. 84. I. $u = y - \frac{rx}{v}$

Aber $v = r\phi$; $y = r \sin \phi$; $r - x = r \cos \phi$ also $x = r - r \cos \phi$, daher

$$u = \frac{r(\phi \sin \phi + \cos \phi - 1)}{\phi}$$

Nun ist §. 204. I.; $C = \frac{u}{x} Q$ oder wenn die Gewölbdicke $= b$ gesetzt wird, so ist $Q = bv = br\varphi$ also $C = \frac{br\varphi u}{x} = \frac{b\varphi u}{1-\cos\varphi}$, daher findet man

$$C = \frac{br(\varphi \sin\varphi + \cos\varphi - 1)}{1 - \cos\varphi}$$

und hieraus §. 417. I.

$$R = \frac{br(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1)\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} - br\varphi\cos\varphi = \frac{\varphi + \sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{1 - \cos\varphi} . br$$

oder wenn der Zähler durch $1 - \cos\varphi$ dividirt wird, so findet man die Kraft, mit welcher der Untertheil des Gewölbstückes AE bei E auszuweichen strebt, oder

$$R = br(\varphi - \sin\varphi)$$

Weil der Bogen φ eines Kreises nie kleiner als der zugehörige Sinus ist, so kann R nicht negativ werden, oder bei einem gleich dicken kreisförmigen Gewölbe, ist kein Abgleiten des Gewölbbogens nach innen zu befürchten. Dagegen ist das Bestreben zum Ausweichen nach außen an derjenigen Stelle am größten, wo $\varphi - \sin\varphi$ seinen größten Werth erhält. Dies ist der Fall für $\sin\varphi = 1$, also bei B und D; daher ist das Bestreben des Gewölbes zum Ausweichen nach außen beim Anfange des Bogens oder an der Widerlage am größten, vorausgesetzt, daß der Gewölbbogen außer seiner eigenen Last nichts weiter zu tragen hat.

Für den angenommenen Gewölbbogen erhält man ferner (§. 417. II.)

$$\mu N = \mu\,(Q \sin\varphi + C \cos\varphi) =$$
$$\mu b r \left[\varphi \sin\varphi + \frac{(\varphi \sin\varphi + \cos\varphi - 1)\cos\varphi}{1 - \cos\varphi}\right]$$
$$= \mu b r\ \frac{\varphi \sin\varphi + \cos\varphi^2 - \cos\varphi}{1 - \cos\varphi} = \mu\,b r \left(\frac{\varphi \sin\varphi}{1 - \cos\varphi} - \cos\varphi\right)$$

oder weil $\sin\varphi = 2 \sin \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi$ und $1 - \cos\varphi = 2 \sin \frac{1}{2}\varphi^2$ ist, so erhält man auch

$$\mu N = \mu\,b r\,(\varphi \cot \tfrac{1}{2}\varphi - \cos\varphi)$$

folglich findet man, weil $R = b r\ (\varphi - \sin\varphi)$ ist, die Kraft, mit welcher das Gewölbstück AE nach Abzug der Reibung bei E ausweicht, oder

$$D = \mu N - R = \mu b r (\varphi \cot \tfrac{1}{2}\varphi - \cos\varphi) - b r (\varphi - \sin\varphi)$$

So lange dieser Ausdruck positiv bleibt oder 0 wird, ist kein Ausweichen des Gewölbes zu fürchten. Auch giebt der kleinste positive oder größte negative Werth desselben die schwächste Stelle des Gewölbes an, wobei aber zuvor μ bekannt seyn muß. Zur bessern Uebersicht erhält man für verschiedene Werthe von φ nachstehende Tafel, in welcher μ unbestimmt geblieben ist.

Winkel φ	μN	R
0°	1,0000.μbr	0
10°	1,0101.μbr	0,0009.br
20°	1,0400.μbr	0,0070.br
30°	1,0881.μbr	0,0236.br
40°	1,1518.μbr	0,0553.br
50°	1,2286.μbr	0,1066.br
60°	1,3138.μbr	0,1812.br
70°	1,4028.μbr	0,2820.br
80°	1,4904.μbr	0,4115.br
90°	1,5708.μbr	0,5708.br

Um nun zu übersehen, in welche Stelle des Gewölbes die kleinsten positiven oder größten negativen

Werthe für $D = \mu N - R$ fallen, darf man nur μ verschiedene Werthe geben, so entsteht folgende Vergleichung:

φ	$N - R$	$\frac{1}{2}N - R$	$\frac{1}{3}N - R$	$\frac{1}{4}N - R$	$\frac{1}{10}N - R$
0	1,000.br	0,500.br	+0,333.br	+0,250.br	+0,100.br
10°	1,009.br	0,504.br	+0,336.br	+0,252.br	+0,100.br
20°	1,033.br	0,513.br	+0,340.br	+0,253.br	+0,097.br
30°	1,065.br	0,520.br	+0,339.br	+0,248.br	+0,085.br
40°	1,097.br	0,521.br	+0,329.br	+0,233.br	+0,060.br
50°	1,122.br	0,508.br	+0,303.br	+0,201.br	+0,016.br
60°	1,133.br	0,476.br	+0,257.br	+0,147.br	−0,050.br
70°	1,121.br	0,419.br	+0,186.br	+0,069.br	−0,142.br
80°	1,079.br	0,334.br	+0,085.br	−0,039.br	−0,263.br
90°	1,000.br	0,215.br	−0,047.br	−0,178.br	−0,414.br

Mit Hülfe dieser Tafel übersieht man, daß auch mit Rücksicht auf Reibung die Gefahr zum Ausweichen des Gewölbbogens bei der Widerlage am größten ist. Denn wenn gleich der Normaldruck, also auch der Widerstand, welcher von der Reibung entsteht, an der Widerlage am größten wird, so fallen doch die kleinsten positiven und die größten negativen Werthe von $D = \mu N - R$ zunächst an die Widerlage. Beträgt die Reibung die Hälfte des Druckes, ($\mu = \frac{1}{2}$), so ist unter den angenommenen Voraussetzungen noch kein Ausweichen des Gewölbes zu fürchten; wird aber $\mu = \frac{1}{3}$ oder noch kleiner, so erhält man für D negative Werthe und das Gewölbe kann unter den angenommenen Voraussetzungen keinen sichern Stand haben.

Der äußerste Fall, in welchem noch ein Gleichgewicht bestehen kann, tritt ein, wenn der Widerstand der Reibung der Kraft, mit welcher das Gewölbstück auszuweichen strebt, gleich ist, oder wenn $\mu N = R$ wird. Dies giebt für $\varphi = \text{Arc } 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$; $\cot \frac{1}{2}\varphi = \cot 45^\circ = 1$; $\cos\varphi = \cos 90^\circ = 0$ und $\sin\varphi = \sin 90^\circ = 1$ also

$$D = \mu br \,.\, \tfrac{1}{2}\pi - br\,(\tfrac{1}{2}\pi - 1) = 0 \quad \text{also}$$

$$\mu = \frac{\pi - 2}{\pi} = 0{,}36338,\ \text{beinahe} = \frac{4}{11}$$

Wenn daher die Reibung nicht mindestens $\frac{4}{11}$ des Druckes beträgt, so ist unter den angenommenen Voraussetzungen ein Ausweichen des Gewölbes zu befürchten.

Uebrigens lassen sich diese Untersuchungen auch auf anders gestaltete Gewölbe anwenden, wenn man dabei auf eine ähnliche Art verfährt. Auch lassen sich noch mehrere Voraussetzungen untersuchen, welche sich auf das Gleichgewicht der Gewölbe beziehen. Hier war es zureichend, die vorzüglichsten Umstände, welche auf das Gleichgewicht Einfluß haben, auseinander zu setzen.

§. 419.

Zur Beurtheilung der Stärke der Gewölbsteine ist es nothwendig, den Druck zu kennen, welchen solche unter verschiedenen Umständen leiden. Untersucht man zuerst den Normaldruck gegen den Scheitel des Gewölbes, so wird derselbe verschieden ausfallen, nach-
Taf. XIV dem man voraussetzt, daß ein größeres oder kleineres
Fig. 225. Gewölbstück, wie AE Figur 225., von der übrigen Gewölbmasse, welche als feststehend angenommen wird, getrennt sei. Man setze, daß von dem Gewölbstücke

AE gegen den Gewölbstein im Scheitel bei A, ein Horizontaldruck C entstehe, so ist §. 418. für ein kreisförmiges Gewölbe von gleicher Dicke

$$C = \frac{br(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1)}{1 - \cos\varphi} = br\left(\frac{\varphi\sin\varphi}{1-\cos\varphi} - 1\right) \text{ oder}$$

$$C = br\,(\varphi \cot \tfrac{1}{2}\varphi - 1)$$

Sind b und r unveränderlich, so hängt die Größe des Druckes C im Scheitel lediglich von φ ab. Um denjenigen Werth von φ zu finden, bei welchem C am größten wird, suche man den größten oder kleinsten Werth für C. Nun ist

$$\frac{\partial C}{\partial \varphi} = br\left[\cot\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi\,(\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\varphi)^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \varphi^2} = br\left(\tfrac{1}{2}\varphi\cot\tfrac{1}{2}\varphi - 1\right)\left(\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\varphi\right)^2$$

$$= br\,\frac{\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi - \sin\tfrac{1}{2}\varphi}{(\sin\tfrac{1}{2}\varphi)^3}$$

Aus $\cot\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi\,(\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\varphi)^2 = 0$ erhält man

$\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi = \sin\varphi$ also $\frac{\varphi}{\sin\varphi} = 1$.

Nun ist $\frac{\varphi}{\sin\varphi} = 1$ wenn $\varphi = 0$ wird (§. 415.); setzt man daher diesen Werth in den Ausdruck für das zweite Differential, so wird $\frac{\partial^2 C}{\partial\varphi^2} = br\,.\frac{0}{0}$. Um den wahren Werth zu finden, suche man das Differential vom Zähler und Nenner, so ist

$$\frac{\partial(\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi - \sin\tfrac{1}{2}\varphi)}{\partial(\sin\tfrac{1}{2}\varphi)^3} = \frac{-\varphi}{6\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi} = \frac{-\varphi}{3\sin\varphi} = -\tfrac{1}{3}$$

Es ist daher $\frac{\partial^2 C}{\partial\varphi^2}$ eine negative Größe, also wird C ein Größtes für $\varphi = 0$. Weil aber für $\varphi = 0$,

$\varphi \cot \frac{1}{2} \varphi = 0 . \infty$ wird, so muß man zur Bestimmung des eigentlichen Werthes für $\varphi \cot \frac{1}{2} \varphi = \frac{\varphi \cos \frac{1}{2} \varphi}{\sin \frac{1}{2} \varphi}$ auf eine ähnliche Art verfahren und man findet $\frac{\partial (\varphi \cos \frac{1}{2} \varphi)}{\partial \sin \frac{1}{2} \varphi} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \varphi - \varphi \sin \frac{1}{2} \varphi}{\cos \frac{1}{2} \varphi}$ für, $\varphi = 0$ wird also

$\varphi \cos \frac{1}{2} \varphi = 2.$

Man erhält daher den größten Werth für den Normaldruck C im Scheitel oder

$$C = b r$$

Hiebei ist die Voraussetzung (§. 388. und 400.) wohl zu bemerken, daß das Gewicht, welches jedem Quadratfuße der Stirnfläche des Gewölbes entspricht $= 1$ angenommen ist, und daß auf jeden Quadratfuß von der Stirnfläche ein Kubikfuß von der Masse des Gewölbes gerechnet wird, wenn man die Länge des Gewölbes $= 1$. setzt (§. 377.). Wäre daher das Gewicht von einem Kubikfuße von der Masse des Gewölbes $= G$, so ist der größte Normaldruck auf die Gewölbsteine im Scheitel oder

$$C = b r G$$

Bei der Länge des Gewölbes $= 1$, bildet der vertikale Querschnitt im Scheitel eine Fläche, deren Inhalt $= b$ ist, und weil diese Fläche einen Normaldruck $= b r G$ leidet, so findet man den Druck auf jeden Quadratfuß der Fuge im Scheitel des Gewölbes

$$= r G$$

Dieser Druck ist unabhängig von dem Winkel φ; daher bleibt der größte Druck auf den Scheitel eines gleichdicken kreisförmigen Gewölbes ungeändert, so groß oder klein man auch die Länge der Wölblinie annimmt.

Außer dem Druck, welcher vom Gewölbstücke AE im Scheitel A entsteht, wird auch noch ein Normaldruck N gegen den bei E befindlichen Gewölbstein entstehen. Behält G die angenommene Bedeutung, so ist der Normaldruck (§. 418.)

$$N = brG\,(\varphi \cot \tfrac{1}{2}\varphi - \cos\varphi)$$

Sucht man nun den größten Normaldruck, welchen die Steine in irgend einer Fuge E leiden, so weiß man schon aus der ersten Tafel §. 418., daß N mit φ wächst. Daher wird bei einem kreisförmigen Gewölbe derjenige Stein von dem darüber befindlichen Gewölbstücke am stärksten zusammen gedrückt, welcher sich zunächst bei der Widerlage befindet. Jeder Quadratfuß der Fuge leidet alsdann einen Normaldruck

$$\frac{N}{b} = rG\,(\varphi \cot \tfrac{1}{2}\varphi - \cos\varphi)$$

* II. Kuppelgewölbe.

§. 420.

Dreht sich die Vertikalfläche A'K'K"A" Figur 226. Taf. XIV Fig. 226.
um die vertikale Axe AB, so erzeugt solche ein Kuppelgewölbe oder einen Dom, bei welchem zweierlei Fugen wohl zu unterscheiden sind. Die Stoßfugen,

welche sämmtlich vertikal sind und mit der Axe der Kuppel in einerlei Ebene liegen und die Stand- oder Lagerfugen, welche wie NM′M″ die innere oder mittlere Wölbung senkrecht schneiden. Ein Stück des Gewölbes, welches zwischen zwei durch den Scheitel A gehende Stoßfugen liegt, heißt ein Ausschnitt, wie A′kK″A″, zu welchem ein horizontaler Mittelpunktswinkel kBK′ gehört. Bei den Tonnengewölben bedurften die Stoßfugen keiner besondern Untersuchung, weil solche mit einander parallel waren und keinen besondern Einfluß auf das Ausweichen der Gewölbsteine hatten. Hier aber tritt der Umstand ein, daß die Gewölbsteine zwischen zwei Stoßfugen gegen die Axe zu schmäler werden. Man darf daher unter diesen Umständen auch nicht befürchten, daß eine Kuppel nach innen einstürzt, selbst wenn die Wölbung gegen die Axe convex oder grade ist, so fern nur kein Theil der Wölbung horizontal und das Gewölbe gegen den Schub nach Außen durch die Lage der Standfugen und die Widerlage gesichert ist. Wird hier durchgängig vorausgesetzt, daß sämmtliche Standfugen auf der mittlern Wölbung senkrecht sind, so müssen alle Kuppelgewölbe, deren mittlere Wölbung gegen die Axe convex ist, wie
Fig. 227. Amk Figur 227. gegen das Ausweichen der Steine sowohl nach innen als nach außen gesichert seyn, wenn nur kein Theil der Wölbung horizontal und der Untertheil des Gewölbes durch die Widerlage gegen das Ausweichen gesichert ist. Dasselbe gilt von den graden Wölbungen, wo die Kuppel einen zum Theil ausgehöhlten

Kegel bildet. Mit Hülfe des §. 203. überzeugt man sich leicht von der Wahrheit dieses Satzes. Denn gesetzt die mittlere Wölbung AMK Figur 227. sei eine grade Linie, M′M″ eine willkürliche Standfuge, V das Gewicht des Gewölbstücks AM′M″, dessen Schwerpunkt innerhalb AM etwa in G liegt, und man zieht G′V durch G vertikal und AG′ horizontal, so läßt sich die Kraft V nach G′A und nach G′M zerlegen und das Gewölbstück AM erhält ein Bestreben nach M″M′ oder nach innen auszuweichen, so fern der Winkel G′MM′ größer als ein rechter ist, (§. 203.) Nun ist AMM′ ein rechter Winkel, daher mag der Punkt G′ in die Linie AG″ fallen wo er will, so muß G′MM′ größer als ein rechter Winkel seyn. Da dieser Satz von der graden Wölbung AMK gilt, so muß er um so mehr von der gegen die Axe AB convexen Wölbung Amk gelten, und da in beiden Fällen die Gewölbstücke nur ein Bestreben haben, nach innen auszuweichen, dies aber wegen der vertikalen Stoßfugen nicht möglich ist, so folgt hieraus, daß alle Kuppelgewölbe von den angegebenen Gestalten, mit Rücksicht auf ihre Widerlagen, gegen das Ausweichen gesichert sind.

Bei den Kuppeln, deren Wölbung gegen die Axe hohl oder concav ist, hat man zwar ebenfalls gegen das Ausweichen nach innen nichts zu fürchten, weil aber bei denselben der Fall eintreten kann, daß der auf die Standfuge entstehende Druck dem Gewölbstück ein Bestreben mittheilt, nach außen auszuweichen, so werden nicht alle Kurven, welche gegen die Axe hohl sind, zur mittlern

Wölbung angewandt werden können, wenn man verlangt, daß alle Gewölbsteine ohne Rücksicht auf Reibung und Kohäsion gegen das Ausweichen gesichert seyn sollen.

Taf. XIV Fig 226. Es sei Figur 226. $AkK''A''$ irgend ein Ausschnitt einer Kuppel und $M''M'N$ eine Standfuge desselben, auf welcher das Gewölbstück $A'NM''A''$, dessen Gewicht $= Q$ ist, steht. Der Winkel, welchen die Standfuge mit der Vertikale bildet oder $M''OA$ sei φ und der Horizontaldruck des Gewölbstücks ANM'' gegen $A = C$. Nach §. 204. und 374. ist das Gewölbstück AM im Gleichgewichte, wenn durchgängig $\text{Tgt}\,\varphi = \frac{Q}{C}$ ist. Wird hingegen $\text{Tgt}\,\varphi > \frac{Q}{C}$, so erhält das Gewölbstück ein Bestreben nach außen oder nach der Richtung $M'M''$ zu weichen (§. 203.) und weil nur in diesem Falle das Gewölbstück der Gefahr des Einstürzens ausgesetzt ist, so muß als Regel angenommen werden, daß $\text{Tgt}\,\varphi < \frac{Q}{C}$ und nur im äußersten Falle $\text{Tgt}\,\varphi = \frac{Q}{C}$ ist. Dies soll durch $\text{Tgt}\,\varphi \leqq \frac{Q}{C}$ angedeutet werden.

Man setze $AP = x$, $PM = y$, Bogen $AM = v$, $M'M'' = z$, so ist für $Mm = \partial v$, die Fläche $M'M''m''m' = z\partial v$ und der Körper, welcher durch die Umdrehung dieser Fläche um die Axe AB durch die ganze Kuppel entsteht

$= 2\pi y z \partial v$, wovon der Theil, welcher zum Ausschnitt $A'kK''A''$ gehört oder $NM'M''m'n = \lambda y z \partial v$ seyn soll. Alsdann ist

$\partial Q = \lambda z y \partial v$ und $Q = \lambda \int z y \partial v$

daher, weil $\mathrm{Tgt}\,\phi = \frac{\partial x}{\partial y}$ ist,

$\frac{\partial x}{\partial y} \leqq \frac{\lambda \int z y \partial v}{C}$ und wenn man differenzirt, indem ∂y als constant angesehen wird

$\frac{\partial^2 x}{\partial y} \leqq \frac{\lambda z y \partial v}{C}$ so erhält man, wenn dieser Ausdruck durch den vorstehenden dividirt wird,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x} \leqq \frac{z y d v}{\int z y \partial v}$$

Hat das Gewölbe durchgängig gleiche Dicke, so daß $z = b$ wird, so erhält man hieraus

$\int y \partial v \leqq \frac{y \partial v \partial x}{\partial^2 x}$, wo ∂y constant ist.

So oft daher bei irgend einer Kurve $\int y \partial v \leqq \frac{y \partial v \partial x}{\partial^2 x}$ ist, so kann solche zur Wölbung einer Kuppel angewandt werden, weil alsdann die Gewölbsteine nicht ausweichen können. Ist hingegen $\int y \partial v > \frac{y \partial v \partial x}{\partial^2 x}$, so werden die Steine von der Axe abwärts ausgedrängt.

§. 421.

Aufgabe. Die vorzüglichsten krummen Linien anzugeben, welche zur mittlern Wölbung bei Kuppeln von gleicher Dicke angewandt werden können, ohne daß ein Ausdrängen der Gewölbsteine zu befürchten ist.

Auflösung. (I) Für die Kettenlinie ist (§. 92. Anhang)

$v \partial y = c \partial x$ daher, wenn ∂y constant, genommen wird

$\partial v \partial y = c \partial^2 x$ oder mit $y \partial x$ multiplizirt

$y\partial x\partial v\partial y = cy\partial x\partial^2 x$ also

$\frac{y\partial v\partial x}{\partial^2 x} = \frac{cydx}{dy} = cy \cdot \frac{v}{c} = yv$ daher §. 420.

$\int y\partial v \leqq yv$ oder

$yv - \int v\partial y \quad yv$ also $0 \leqq \int v\partial y$.

Aber $v\partial y = c\partial x$ also $\int v\partial y = cx$ folglich

$0 \leqq cx$.

Weil cx für jeden angeblichen Werth von x größer als 0 ist, so kann daher die Kettenlinie mit Sicherheit bei Kuppelgewölben angewandt werden.

(II) Für den Kreisbogen ist, wenn r den Halbmesser bezeichnet, $y^2 = 2rx - x^2$, daher

$y\partial y = r\partial x - x\partial x$, und, weil ∂y constant,

$\partial y^2 = r\partial^2 x - x\partial^2 x - \partial x^2$ also

$\partial x = \frac{y\partial y}{r-x}$ und

$\partial^2 x = \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{r-x} = \frac{\partial v^2}{r-x}$, daher $\frac{\partial x}{\partial^2 x} = \frac{y\partial y}{\partial v^2}$ oder

$\frac{y\partial v\partial x}{\partial^2 x} = \frac{y^2\partial y}{\partial v}$. Nun ist

$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{\partial x^2}{\partial y^2})}}$ und man erhält, weil

$\frac{\partial x^2}{\partial y^2} = \frac{y^2}{(r-x)^2} = \frac{y^2}{r^2-y^2}$ ist,

$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\sqrt{(r^2-y^2)}}{r}$ also mit Hülfe dieses Ausdrucks

$\frac{y\partial v\partial x}{\partial^2 x} = y^2\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{y^2\sqrt{(r^2-y^2)}}{r}$.

Ferner ist

$\int y\partial v = \int \frac{rydy}{\sqrt{(r^2-y^2)}} = -r\sqrt{(r^2-y^2)} + \text{const.}$

Für $y = 0$ verschwindet das Integral, also ist

$o = - r^2 + \text{const}$ daher

$\int y \partial v = r^2 - r \sqrt{(r^2 - y^2)}.$

Nach §. 420. wird erfordert, daß

$\int y \partial v \leqq \frac{y \partial v \partial x}{\partial x}$ sei, dies giebt

$r^2 - r \sqrt{(r^2 - y^2)} \leqq \frac{y^2 \sqrt{(r^2 - y^2)}}{r}$ oder

$r^6 \leqq (r^2 + y^2)^2 (r^2 - y^2)$ oder

$y^4 + r^2 y^2 - r^4 \leqq o$ Hievon die Quadratwurzel, giebt

$y^2 - r^2 (-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}) \leqq o$ und nochmals diese Wurzel genommen, giebt

$y \leqq r \sqrt{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5})}$ also nahe genug

$y \leqq 0{,}78615\, r$

Nun ist $\frac{y}{r} = \sin \varphi$ also

$\sin \varphi = 0{,}78615 = \sin 51^\circ\, 50'$

Ein Kreisbogen kann daher nur auf eine gewisse Länge bei einem Kuppelgewölbe angewandt werden, wenn es darauf ankommt, daß die Steine ohne Rücksicht auf Reibung nicht ausgedrängt werden sollen, weil bei einem Kreisbogen, dessen Winkel am Mittelpunkte mehr als 51 Grad 50 Minuten hält, diejenigen Steine dem Ausdrängen ausgesetzt sind, welche unterhalb dieses Winkels, vom Scheitel an gerechnet, liegen; oder damit bei einem kreisförmigen Kuppelgewölbe kein Stein dem Ausdrängen ausgesetzt sei, muß der Kreisbogen der Wölbung vom Scheitel an gerechnet, nicht mehr als etwa $\frac{4}{7}$ von der Länge des zugehörigen Quadranten seyn.

(III) Für die Parabel ist $px = y^2$ also $p\partial x = 2y\partial y$ und $p\partial^2 x = 2\partial y^2$. Ferner

$\frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2})} = \frac{\sqrt{(p^2+4y^2)}}{p}$ also

$\frac{y\partial v \partial x}{\partial^2 x} = \frac{y^2}{p}\sqrt{(p^2+4y^2)}$.

Ferner ist

$\int y\partial v = \int \frac{y\partial y}{p}\sqrt{(p^2+4y^2)}$ oder $p^2+4y^2=z^2$ gesetzt, giebt

$\int y\partial v = \int \frac{z^2\partial z}{4p} = \frac{z^3}{12p} + \text{const.}$ Für $y=0$ wird $z=p$ also das vollständige Integral

$\int y\partial v = \frac{z^3}{12p} - \frac{p^2}{12} = \frac{\sqrt{(p^2+4y^2)^3} - p^3}{12p}$ folglich erhält man weil nach §. 420.

$\int y\partial v \leqq \frac{y\partial v\partial x}{\partial^2 x}$ seyn muß,

$\frac{\sqrt{(p+4y^2)} - p^3}{12p} \leqq \frac{y^2}{p}\sqrt{(p^2+4y^2)}$ und hieraus

$64y^4 \leqq 3p^4$, oder weil $p = \frac{y^2}{x}$ ist

$64x^4 \leqq 3y^4$ folglich,

$\frac{x}{y} \leqq \sqrt[4]{\frac{3}{64}} = 0{,}465302$.

Es darf daher, wenn eine Parabel zum Kuppelgewölbe angewandt wird, keine Abscisse x größer als etwa $\frac{7}{15}$ der zugehörigen Ordinate y seyn.

Man habe z. B. die Gleichung $100\,x = y^2$, wo der Parameter $p = 100$ ist, so erhält man $x = \frac{y^2}{100}$

Weil aber $x \leqq \frac{7}{15} y$ so wird

$\frac{y^2}{100} \leqq \frac{7}{15} y$ oder $y \leqq 46\frac{2}{3}$.

Ferner ist $y = \sqrt{100x}$ und $\frac{15}{7} x \leqq y$ daher

$x \leqq 21\frac{7}{9}$.

Bei einer Parabel, zu welcher die Gleichung $10x = y^2$ gehört, darf daher x nicht größer als $21\frac{7}{9}$ oder y nicht größer als $46\frac{2}{3}$ seyn, wenn solche auf ein Kuppelgewölbe dergestalt angewandt werden soll, daß kein Gewölbstein ausgedrängt wird.

(IV) Für die Ellipse, bei welcher die Abscissen vom Scheitel der großen Axe an gerechnet werden, erhält man, wenn a die halbe große und b die halbe kleine Axe bezeichnet,

$a^2y^2 = b^2(2ax - x^2)$

$a^2y\partial y = b^2(a - x)\partial x$ und, weil ∂y constant,

$a^2\partial y^2 = ab^2\partial^2 x - b^2 x\partial^2 x - b\partial x^2$

$$\frac{\partial x^2}{\partial^2 x} = \frac{b^2(a-x)}{b^2 + a^2 . \frac{\partial y^2}{\partial x^2}} = \frac{(a-x)y^2}{b^2}$$

und, wenn man $a^2 - b^2 = e^2$ und $a - x = u$ setzt,

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{b\sqrt{(a^4 - e^2u^2)}}{a^2 y}$, also

$$\frac{y\partial v\partial x}{\partial^2 x} = \frac{bu(a^2 - u^2)\sqrt{(a^4 - e^2u^2)}}{a^4}.$$

Ferner ist

$$\int y\partial v = -\frac{b}{a^2}\int du\sqrt{(a^4 - e^2u^2)} = \text{const} - \frac{bu}{2a^2}\sqrt{(a^4 - e^2u^2)}$$
$$- \frac{a^2 b}{2e} \arcsin \frac{eu}{a}$$

(P. A. S. 161.) Dies Integral verschwindet für $x = 0$ also für $u = a$. Setzt man daher

$\arcsin e - \arcsin \frac{eu}{a} = \psi$ so erhält man

$\int y \partial v = \frac{1}{2} b^2 - \frac{bu}{2a^2} \sqrt{(a^4 - e^2 u^2)} + \frac{a^2 b}{2e} \psi$ folglich §. 420.

$$\frac{b^2}{2} - \frac{bu}{2a^2} \sqrt{(a^4 - e^2 u^2)} + \frac{a^2 b}{2e} \psi \leqq \frac{bu\sqrt{(a^4 - e^2 u^2)}}{a^4}$$ oder

$$0 \leqq u(a^2 - 2u^2)\sqrt{(a^4 - e^2 u^2)} - a^4 b - \frac{a^6}{e} \psi.$$

Weil sich aus diesem Ausdrucke der Werth u nicht allgemein entwickeln läßt, so kommt es darauf an, daß in jedem besondern Falle der vorstehende Ausdruck noch einen positiven Werth behält.

§. 422.

Wollte man untersuchen, welche Kurve zur innern Wölbung einer gleich dicken Kuppel angewandt werden müßte, damit alle Gewölbsteine einander im Gleichgewichte erhalten, ohne daß ein Ausdrängen der Steine, oder nur ein Bestreben dazu, erfolge, so läßt sich dies mit Hülfe des allgemeinen Ausdrucks §. 420. bewerkstelligen. Denn unter den angegebenen Bedingungen ist $\mathrm{Tgt}\,\varphi = \frac{Q}{C}$ oder $\frac{\partial^2 x}{\partial y} = \frac{\lambda z y \partial v}{C}$.

Weil hier $z = b$ eine beständige Größe ist, so setze man $\frac{\lambda z}{C} = \frac{1}{A}$, alsdann wird

$$\frac{A \partial^2 x}{\partial y} = y \partial v = y\sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)} = y \partial y \sqrt{(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2})}.$$

Es sei ferner $\partial x = p \partial y$ also, $\partial^2 x = \partial p \partial y$, folglich

$A \partial p = y \partial y \sqrt{(1 + p^2)}$ oder $y \partial y = \frac{A \partial p}{\sqrt{(1 + p^2)}}$ daher

(P. A. S. 134.)

$\frac{y^2}{2} = \int \frac{A\partial p}{\sqrt{(1+p^2)}} = A \log [p + \sqrt{(1+p^2)}] - \log B,$

wenn B die beständige Größe bezeichnet, oder

$\frac{y^2}{2A} = \log \frac{p+\sqrt{(1+p^2)}}{B}.$

Die weitere Entwickelung dieses Ausdrucks zur Bestimmung der Gleichung zwischen den Coordinaten ist mit vieler Weitläuftigkeit verbunden; so viel geht aber daraus hervor, daß die gesuchte Kurve keine Kettenlinie ist, ob gleich (§. 421. I.) die Kettenlinie bei Kuppeln angewandt werden kann, ohne ein Ausdrängen nach der Außenseite zu befürchten.

§. 423.

Aufgabe. Irgend eine krumme Linie werde zur mittlern Wölbung einer Kuppel angewandt; man suche die erforderliche Dicke der Gewölbsteine, damit solche untereinander im Gleichgewichte sind.

Auflösung. Sollen sämmtliche Gewölbsteine im Gleichgewichte seyn, so wird nach §. 374. I. erfordert, daß $\text{Tgt}\ \varphi = \frac{Q}{C}$ sei. Dies giebt, wenn man differenziirt

$\frac{\partial \varphi}{\cos \varphi^2} = \frac{\partial Q}{C} = \frac{\lambda y z \partial v}{C} = \frac{\lambda y z r \partial \varphi}{C}$ oder,

wenn $\frac{\lambda}{C} = \frac{1}{A}$ gesetzt wird, die erforderliche Dicke

$z = \frac{A}{r y \cos \varphi^2}.$

Hieraus folgt, daß wenn für $\varphi = 0$ der Krümmungshalbmesser r einen endlichen Werth erhält, alsdann für $y = 0$, $z = \infty$ ist; es werden daher alle diese krumme Linien, bei welchen die Ordinate am Scheitel

$= 0$ wird, eine unendliche Gewölbdicke am Scheitel erfordern, wenn die Steine untereinander im Gleichgewichte seyn sollen. Wäre e eine beständige Größe und $y = e + y$, also

$$z = \frac{A}{r(e+y)\cos\varphi^2},$$

so erhält z einen endlichen Werth, wenn $y = 0$ wird. Dieser Fall findet bei jeder Kuppel statt, wo im Scheitel ein kreisförmiges Gewölbstück ausgeschnitten ist, oder in welchem sich eine Scheitelöffnung befindet.

Taf. XVI Fig. 228. Man setze daher, daß Figur 228. ADMK irgend eine Kurve sei, deren Scheitel in A falle, von welcher aber das Stück AD fehle, so daß nur der übrige Theil DMK durch Umdrehung um die Axe EB, ein oben offenes Kuppelgewölbe erzeuge. Nun sei $AE = a$, $ED = PD' = e$, $EP = DD' = x$, $D'M = y$ also $PM = e + y$. Für den Punkt D sei der Krümmungshalbmesser $r = \varrho$, $\varphi = \alpha$ und $z = b$, so ist:

$$z = \frac{A}{r(e+y)\cos\varphi^2} \text{ daher, für } y = 0,$$

$$b = \frac{A}{\varrho e \cos\alpha^2} \text{ oder } A = b\,e\,\varrho\cos\alpha^2, \text{ folglich}$$

$$z = \frac{be\varrho\cos\alpha^2}{r(e+y)\cos\varphi^2}.$$

Zur Anwendung dieses allgemeinen Ausdrucks auf einen besondern Fall, sei die gegebene Kurve ein Kreisbogen, so ist hier $r = \varrho$, also

$$z = \frac{be\cos\alpha^2}{(e+y)\cos\varphi^2}.$$

Für den Kreis ist aber hier

$\cos\varphi^2 = \frac{r^2-(e+y)}{r^2}$, und für $y=0$,

$\cos\alpha^2 = \frac{r^2-e^2}{r^2}$, daher die Breite

$z = \frac{be(r^2-e^2)}{(e+y)[r^2-(e+y)^2]}$.

Bei näherer Untersuchung findet man für diesen Ausdruck folgende merkwürdige Eigenschaften. Für $r=e+y$ wird der Nenner $=0$ oder das Gewölbe muß in dem Falle, wenn alle Steine ohne Reibung und Kohäsion im Gleichgewicht seyn sollen, unendlich dick werden, wenn $y=r-e$ ist. Ferner erhält man nach den Regeln der Differenzialrechnung für z ein Kleinstes, wenn $y=\frac{r\sqrt{3}}{3}-e$ wird.

Wäre z. B. $b=2$, $e=2$ und $r=10$, so findet man für gegebene Werthe von y nachstehende Werthe für z.

y	z	y	z
0	2,00	4	1,00
1	1,41	5	1,02
2	1,14	6	1,33
3	1,02	7	2,24
3,5	0,99	8	∞

§. 424.

Der Unterschied zwischen den Pressungen zweier aufeinander folgenden Elemente des Kuppelgewölbes sei δ, so findet man nach §. 400. ganz allgemein

$$\delta = \partial Q.\cos\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi^2} + 2\partial Q.\sin\varphi - \frac{\partial^2 Q.\cos\varphi}{\partial\varphi}.$$

Beziehen sich nun die Coordinaten auf die innere

Taf. XIV Wölbung, so daß Figur 226. $A'p = x$, $pM' = y$ ist,
Fig. 226. so verhält sich

$1 : r + \frac{1}{2}z = \partial\varphi : Mm$ also $Mm = (r + \frac{1}{2}z)\partial\varphi$.

Es ist daher die Fläche $M'M''m''m' = (rz + \frac{1}{2}z^2)\partial\varphi$.

Ferner ist $PM = y + \frac{1}{2}z\sin\varphi$, also der Inhalt des Körpers, welcher durch die Umdrehung des Elements $M'M''m''m'$ entsteht

$= 2\pi(y + \frac{1}{2}z\sin\varphi)(rz + \frac{1}{2}z^2)\partial\varphi$.

Irgend ein Theil dieses Elementarkörpers sei ∂V, welcher zu einem bestimmten Ausschnitte der Kuppel gehört, so daß

$\partial Q = (rz + \frac{1}{2}z^2)(y + \frac{1}{2}z\sin\varphi)\partial\varphi$

sei. Ferner setze man

$R = rz + \frac{1}{2}z^2$ und

$Y = y + \frac{1}{2}z\sin\varphi$, so wird

$$\partial Q = RY\partial\varphi \text{ und}$$

$$\partial^2 Q = RY\partial^2\varphi + \partial\varphi\,\partial(RY), \text{ daher}$$

nach gehöriger Abkürzung

$\delta = 2RY\sin\varphi\,\partial\varphi - \cos\varphi\,\partial(RY)$ oder

(I) $\delta = -2RY\partial\cos\varphi - \cos\varphi\,\partial(RY)$.

Beziehen sich die Coordinaten auf die mittlere Wölbung, so wird

$R = rz$ und $Y = y$, daher

(II) $\delta = -2ryz\,\partial\cos\varphi - \cos\varphi\,\partial(ryz)$

Ist die Gewölbdicke durchgängig gleich, also $z = b$, so erhält man für die mittlere Wölbung

(III) $\delta = -2bry\,\partial\cos\varphi - b\cos\varphi\,\partial(ry)$

und für den Kreis, weil $\cos\varphi = \frac{r-x}{r}$ ist,

(IV) $\delta = 2by\partial x - b(r-x)\partial y$.

§. 425.

Zusatz. Wollte man aus dem zuletzt gefundenen Ausdrucke die erforderliche Dicke des Gewölbes bestimmen, damit alle Gewölbsteine im Gleichgewichte sind, so ist für diesen Fall $\delta = 0$, also

$2ryz\partial\cos\varphi + \cos\varphi\,\partial(ryz) = 0$ oder

$\frac{2\partial\cos\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\partial(ryz)}{ryz} = 0$; davon das Integral

$2\log\cos\varphi + \log ryz = \log A$ oder

$\log ryz\cos\varphi^2 = \log A$, daher $ryz\cos\varphi^2 = A$ wie §. 423.

§. 426.

Zu den ältesten Untersuchungen über die Theorie der Gewölbe, gehört die Abhandlung von de la Hire: *Sur la construction des voûtes dans les édifices*, in den *Mémoires de l'académie de Paris, année* 1712. *p.* 91 — 101. und die spätere Untersuchung von Belidor in der *Science des Ingenieurs*, wobei die de la Hiresche Hypothese zum Grunde gelegt ist. Späterhin sind mehrere Untersuchungen über die Theorie der Gewölbe bekannt geworden, welche aber oft in Absicht der Resultate sehr von einander abweichen. Einige der vorzüglichsten sind nach der Zeitfolge geordnet hier angeführt.

De la poussée des voûtes. Par M. *Couplet*, In den Mém. de l'acad. de Paris, année 1729. p. 107 — 163 et an. 1730. p. 167-203.

Sur les lignes courbes qui sont propres à former les voûtes en domes. Par M. *Bouguer*. Mem. de l'ac. de Paris année 1734. p. 204-227.

J. H. Lambert, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik, 3. Theil. Berlin 1772. S. 359 u. f.

Recherches sur l'équilibre des voûtes. Par M. *Bossut*. Mem. de l'ac. de Paris, année 1774. p. 534-566.

Nouvelles recherches sur l'équilibre des voûtes en dome. Par M. *Bossut*. Mem. de l'ac. de Paris, année 1776. p. 587—596.

Ch. Hutton. The principles of Bridges. The second Edition, London 1801. (Die erste Auflage v. J. 1772.)

J. J. A. Ide. System der reinen und angewandten Mechanik fester Körper, 1ster Theil. Berlin 1802. S. 229—249.

Funfzehntes Kapitel.

Von der Festigkeit der Materialien.

§. 427.

Die Kraft, mit welcher ein Körper der Trennung seiner Theile widersteht, nennt man seine Festigkeit (Cohaesio s. Cohaerentia, *Resistance*).

Um die Festigkeit mehrerer Körper von verschiedener Materie mit einander zu vergleichen, kann man Prismen oder Stangen von gleicher Größe aus denselben verfertigen. Alsdann läßt sich die Trennung dieser Stangen auf mancherlei Weise bewerkstelligen, von welchen man vorzüglich hieher zählen kann: I. das Zerreißen, II. das Zerbrechen und III. das Zerdrücken.

Die Kraft, mit welcher ein prismatischer Körper dem Zerreißen widersteht, wenn derselbe an dem einen Ende hinlänglich befestigt wird, und an dem andern Ende eine Kraft nach einer mit der Länge des Prismen parallelen Richtung vom Körper abwärts wirkt, nennt man seine absolute Festigkeit. Sie wird durch diejenige Kraft gemessen, welche ohne die geringste Verminderung im Stande ist, den Körper zu zerreißen.

Wirkt die Kraft auf den befestigten prismatischen Körper nicht parallel mit der Länge desselben, sondern senkrecht auf seine Länge, und es erfolgt ein Zerbre=

chen, so nennt man diejenige Kraft, welche ohne die geringste Verminderung dies Zerbrechen bewirkt, seine respective oder relative Festigkeit, (Cohaerentia respectiva aut transversa).

Wenn hingegen die an dem einen Ende des Körpers angebrachte Kraft gegen den Körper parallel mit dessen Länge wirkt, so erfolgt ein Zerdrücken oder Zerknicken, und man nennt die Kraft, mit welcher der Körper dem Zerdrücken oder Zerknicken widersteht, seine rückwirkende Festigkeit (Cohaer. corporum compressorum).

In Absicht der Festigkeit kann man die Körper noch in harte, biegsame, elastische, gleichartige und ungleichartige eintheilen und bei den einzelnen Körpern eine oder mehrere dieser Eigenschaften in einem höhern oder geringern Grade voraussetzen.

Unter einem harten (spröden, unpreßbaren) Körper wird hier derjenige verstanden, welcher zerbricht ohne sich vorher zu biegen. Die uns bekannten Körper haben zwar durchgängig einen gewissen Grad von Biegsamkeit, dieser ist aber bei einigen, besonders bei mehrern Steinarten, so geringe, daß solcher als nicht vorhanden angesehen werden kann.

Biegsame Körper sind hier diejenigen, welche vor dem Zerbrechen gebogen werden.

Ein Körper ist elastisch oder besitzt eine Federkraft, wenn die ursprüngliche Gestalt desselben durch die Wirkung einer äußern Kraft verändert wird, und der Körper nach aufgehobener Wirkung der Kraft seine vorige oder ursprüngliche Gestalt wieder annimmt. In diesem Falle sagt man die Elasticität ist vollkommen. Wenn aber nach aufgehobener Wirkung der angebrachten Kraft die Gestalt des Körpers der vorherigen nicht ganz gleich ist, so sagt man, der Körper ist unvollkommen elastisch. Zur vollkommenen Elasticität wird auch noch erfordert, daß bei einem Körper, dessen Gestalt durch einen Druck so weit geändert ist, daß der Druck mit der Kraft, durch welche der Körper dem fernern Biegen oder Zusammendrücken widersteht oder mit seiner Elasticität im Gleichgewichte ist, auch alsdann das Gleichgewicht bestehe, so lange der Druck währt, und daß ohne Vermehrung desselben auch kein ferneres Biegen oder Zusammendrücken erfolge. Je mehr Kraft dazu erfordert wird, die Gestalt eines elastischen Körpers zu verändern, desto mehr Elasticität oder Federkraft wird demselben zugeschrieben.

Die Materie eines Körpers ist in Absicht der Festigkeit gleichartig (homogen), wenn alle gleich große Körper, welche aus dieser Materie gebildet werden, gleiche absolute und respective Festigkeit besitzen. Man sagt alsdann von allen Körpern, welche aus dieser Materie geformt werden können, daß sie gleichartig-feste Körper sind. Schneidet man aus einem Sandsteine nach allen Richtnngen Prismen von gleicher Größe und diese Prismen haben alle gleiche absolute und auch gleiche respective Festigkeit, so groß oder klein man die gleichen Prismen annehmen mag, so ist der Sandstein in Absicht der Festigkeit homogen. Wenn dagegen ein Körper aus Fibern besteht, wie Holz, so werden die Prismen, welche man nach der Richtung der Fibern schneidet, eine andere Festigkeit als diejenigen besitzen, welche man erhält, wenn die Fibern quer durch geschnitten werden. Solche Körper sind in Absicht ihrer Festigkeit ungleichartig; obgleich, wenn nur von der Festigkeit nach einerlei Richtung die Rede ist, ein ungleichartiger Körper als homogen angesehen werden kann, wie dies beim Holze der Fall seyn kann, wenn man Prismen daraus schneidet, bei welchen die Seiten mit den gleichartigen Fibern parallel laufen.

Man trift zwar in der Natur eben so wenig vollkommen homogene und vollkommen elastische Körper an, als man vollkommen harte findet. Nachdem aber einem Körper diese Eigenschaften mehr oder weniger zukommen, in eben dem Verhältnisse müssen auch die Gesetze, welche für diese verschiedenen Eigenschaften der Körper entwickelt werden, ihre Anwendung finden.

Wenn gleich die uns bekannten Körper vor dem Zerbrechen erst gebogen und vor dem Zerreißen erst ausgedehnt werden, so pflegt man doch nur die gesammte Kraft, welche zum Biegen und Brechen erfordert wird, die respective, und die gesammte Kraft, welche zum Ausdehnen und Zerreißen erfordert wird, die absolute Festigkeit zu nennen. Dagegen kommt es bei der Anwendung auf architektonische Gegenstände vorzüglich darauf an, den Grad der Biegsamkeit für verschiedene Körper zu bestimmen, weil schon bei den meisten Zusammensetzungen ein merkliches Biegen vermieden werden muß.

I. Die absolute Festigkeit.

§. 428.

Die absolute Festigkeit eines prismatischen Körpers kann man mittelst Gewichte auf zweierlei Art ausmitteln; entweder man befestigt den Körper AD Figur 229. mit dem einen Ende A in einer Wand Taf. XV
CD dergestalt, daß der Körper AD, welcher zerrissen Fig. 229.
werden soll, in eine vertikale Lage kommt, und hängt am andern Ende bei B so lange Gewichte an, bis der Körper zerreißt, da alsdann die Summe der aufgehängten Gewichte, nebst dem Gewichte desjenigen Stücks vom Körper, welches abgerissen ist, die absolute Festigkeit von dem horizontalen Querschnitte des Körpers bestimmt; oder man befestigt den Körper EF, Figur 230., welcher zerrissen werden Fig. 230.
soll, dergestalt mit dem einen Ende E in einer vertikalen Wand, daß derselbe eine horizontale Lage erhält, und befestigt am andern Ende bei F ein Seil, welches über eine Rolle J geht, dergestalt, daß die Richtung des Seiles FJ in die Axe des Körpers fällt; wird nun am Ende des Seiles ein Gewicht K

aufgehängt, welches eben im Stande ist, den Körper EF zu zerreißen, so ist K die absolute Festigkeit für jeden vertikalen Durchschnitt dieses Körpers, vorausgesetzt, daß die Steifigkeit des Seiles und die Reibung am Rollzapfen als unbedeutend bei Seite gesetzt werden können.

Bei den folgenden Untersuchungen wird man jederzeit, wenn keine Erinnerung beigefügt ist, Körper von gleichartiger Materie in Absicht der Festigkeit verstehen. Auch wird bei allen diesen Untersuchungen vorausgesetzt, daß die Gewichte, welche das Zerreißen verursachen, ohne Erschütterung oder Stoß wirken, weil sonst öfters nur ein sehr geringer Stoß erforderlich ist, eine Trennung zu bewirken.

§. 429.

Die absoluten Festigkeiten zweier Prismen von einerlei Materie, verhalten sich wie die Querschnitte derselben, welche auf die Richtungen der zerreißenden Kräfte senkrecht sind.

Denn man setze voraus, der Querschnitt F des einen Prismen sei n mal größer als der Querschnitt f des andern, oder $F = n f$, so sind auch in dem ersten Prismen n mal so viel Theile, welche zerrissen werden müssen, als in dem zweiten, wozu offenbar, da alles übrige gleich ist, auch n mal so viel Kraft erfordert wird.

Da bei einem gleichförmig festen Körper diejenige Stelle die schwächste ist, wo der Querschnitt, welcher senkrecht auf die Richtung der zerreißenden Kraft steht, am kleinsten wird, so kann man auch sagen, daß sich die absoluten Festigkeiten zweier Körper von einerlei Materie, wie ihre kleinsten Durchschnittsflächen, verhalten, welche auf die Richtung der zerreißenden Kräfte senkrecht sind. Hiebei muß aber vorausgesetzt werden, daß das Gewicht desjenigen Theils vom Körper, welcher abreißt, nicht außer Acht gelassen werde.

Sind hingegen die Körper nicht von gleichförmiger Festigkeit, wie beim Holze von einerlei Stamme, wo die Fasern näher an der Rinde weniger absolute Festigkeit als am Kerne haben, so finden auch in solchen Fällen die vorstehenden Sätze keine Anwendung, es sei denn, daß man sich mit Mittelresultaten begnügen wolle.

Die meisten Körper, und vorzüglich die Metalle, dehnen sich, ehe sie zerreißen. Hier wird auf diese Kraft, welche zum Dehnen erfordert wird, nicht besonders Rücksicht genommen, sondern man versteht unter absoluter Festigkeit diejenige Kraft, welche sowohl zur Ausdehnung als auch zum Zerreißen des Körpers erfordert wird.

§. 430.

Damit man die absolute Festigkeit mehrerer Körper leicht mit einander vergleichen könne, ist es nothwendig, irgend eine Einheit als Querschnitt des Körpers anzunehmen, für welchen die Festigkeit bestimmt werden soll. Setzt man voraus, daß durch-k gängig der Buchstab k dasjenige Gewicht in Berliner Pfunden bezeichnen soll, welches der absoluten Festigkeit von dem Querschnitte eines rheinländischen Quadratzolls entspricht, so kann man k das Maaß der absoluten Festigkeit nennen. Ist daher für irgend einen Körper, dessen kleinster Querschnitt F rheinländische Quadratzoll groß ist, das Maaß der absoluten Festigkeit bekannt, so findet man daraus seine absolute Festigkeit K für den Querschnitt F

$$K = kF.$$

Hätte man hinlänglich genaue Tafeln, in welchen für die am meisten vorkommenden Körper die Werthe von k enthalten wären, so könnte man daraus in jedem besondern Falle entweder die Kraft K zum Zerreißen eines Körpers oder auch die Fläche F bestimmen, welche irgend ein Körper haben muß, damit seine absolute Festigkeit einer gegebenen Kraft K entspricht.

§. 431.

Die vielfältigsten bis jetzt bekannten Versuche über die absolute Festigkeit sind von Muſſchenbroek angestellt und beschrieben worden. Man darf aber bei der Ungleichartigkeit der Materie in einerlei Körper nicht einmal erwarten, daß man durchgängig gleiche Festigkeit findet, und um so weniger steht zu erwarten, daß andere Versuche eben dieselben Resultate geben werden, so wenig als man berechtigt ist, die aus den Muſſchenbroekschen Versuchen gezogenen Werthe von k unbedingt auf andere Fälle anzuwenden. Vielmehr muß man die Werthe von k als Mittelresultate

telresultate ansehen, weil hier eben so wenig als bei der Reibung, Steifigkeit der Seile u. d. gl. ganz genaue Uebereinstimmung zu erwarten ist. Auch hat der verschiedene Grad von Wärme, Trockenheit rc. bei einerlei Materie einen so wesentlichen Einfluß auf ihre Festigkeit, daß auch dieserhalb schon ansehnliche Abweichungrn entstehen müssen.

Weil der Werth, welchen dergleichen Versuche haben können, außer der Sorgfalt, mit welcher sie angestellt werden, auch von der Größe der Körper, welche zum Zerreißen dienen, abhängt, so soll hier eine umständliche Uebersicht der Musschenbrökschen Versuche gegeben werden.

Nachstehende Tafel ist aus der Musschenbrökschen Schrift: Introductio ad cohaerent. corpor. firmor. p. 63. etc. (in dessen Dissert. physicae et geometricae, Viennae 1756.) gezogen. Sämmtliche Körper waren Parallelepipeden oder Cylinder, welches durch ein P oder C bemerkt ist. Die Parallelepipeden hatten Quadrate zum Querschnitt und die neben den Buchstaben P oder C stehende Zahl, bezeichnet entweder die Seite von diesem Querschnitte oder den Durchmesser des Cylinders in rheinländischen Zollen. Die Gewichte, welche zum Zerreißen erforderlich waren, sind in amsterdammer Pfunden angegeben, und es ist hier noch die letzte Spalte beigefügt worden, welche die absolute Festigkeit von einem rheinländischen Quadratzolle oder k in berliner Pfunden angiebt. Hiebei ist zu bemerken, daß ein berliner Pfund

9747 und ein amsterdammer Pfund 10280 holländische Asse schwer ist.

Sämmtliche Holzstücke waren 6 Zoll lang. (p. 115.)

Materie des Körpers, welcher zerrissen worden ist.	C Durchmesser oder P Seite des Querschnitts. Rhld. Zoll.	Gewicht zum Zerreißen. Amstd. Pfund.	Gewicht, 1 □ Zoll zu zerreissen. Berl. Pfund.
Lindenholz . .	0,27.C	720	13269
	0,27.P	1000	14472
Erlenholz . .	0,27.C	800	14755
	0,27.P	1000	14472
Kiefernholz . .	0,27.C	800	14755
Weißtanne . .	0,27.C	650	11975
	0,27.P	600	8683
Eichenholz . .	0,27.C	1150	21188
	0,27.P	1150	16625
Ulmenholz . .	0,26.C	850	16905
	0,27.P	950	13745
Olivenholz . .	0,27.C	650	11975
	0,26.P	850	13254
Büchenholz . .	0,26.C	1150	22924
	0,26.P	1250	19497
Buchsbaumholz .	0,26.C	850	16906
	0,26.P	950	14674
Birnbaumholz .	0,24.C	450	10509
	0,25.P	700	11808
Nußbaumholz .	0,26.C	800	16038
	0,26.P	800	12485
Weidenholz . .	0,26.C	1000	19906
	0,26.P	900	14039
Eschenholz . .	0,26.C	1050	20887
	0,25.P	1250	21088
Rothtannenholz .	0,26.C	550	10359
	0,26.P	850	12574
Pflaumbaumholz .	0,25.C	600	12918
	0,25.P	550	9280
Apfelbaumholz .	0,25.C	500	10755
	0,25.P	550	9280
Zuckerkistenholz .	0,25.C	700	15061
	0,26.P	1500	22603

Materie des Körpers, welcher zerrissen worden ist.	C Durchmesser oder P Seite des Querschnitts.	Gewicht zum Zerreißen.	Gewicht, 1 □ Zoll zu zerreißen.
	Rhld. Zoll.	Amstd. Pfund.	Berl. Pfund.
Wispelbaumholz .	0,26.P	650	10133
	0,26.C	700	13924
Guajacholz . .	0,25.P	855	14432
Weißdornholz .	0,25.C	1000	21531
	0,25.P	900	15184
Kirschbaumholz, wildes	0,25.C	650	13978
Sakkerdanholz .	0,25.P	1350	22784
Granadillenholz .	0,25.C	950	20551
	0,25.P	800	13504
Santelbaumholz, rothes	0,25.P	600	10128
Ebenholz . .	0,25.P	800	13504
Kupferdrath, roth schwed.	0,10.C	299¼	40205
Messingdrath .	0,10.C	360	48480
Golddrath, Pistolettengold	0,10.C	500	67129
Bleidrath . .	0,10.C	29¼	3934
Zinndrath, reinstes Zinn	0,10.C	49¼	6609
Silberdrath . .	0,10.C	370	49690
Eisendrath . .	0,10.C	450	60433
Glas, weißes .	0,23.C	118	2997
	0,25.C	150	3228
	0,167.P	78	2963
	0,16.P	50	2058

Noch andere Versuche über absolute Festigkeit beschreibt Musschenbroek in seiner Introductio ad philosophiam naturalem, T. I. (Lugd. 1762.) C. 21. p. 414. etc., von welchen die Mittelwerthe in nachstehender Tafel angegeben sind. Auch hat man dieser Tafel eine Spalte beigefügt, welche die Werthe für k in berliner Pfunden angiebt. Sämmtliche Querschnitte der Körper waren Quadrate.

Materie von dem Parallelepipeden, welches zerrissen worden.	Seite des Querschnitts.	Gewicht zum Zerreißen.	Gewicht, 1 □ Zoll zu zerreißen. k	Spezifisches Gewicht.
	Rhld. Zoll.	Amstd. Pf.	Berl. Pfd.	
Rothtannenholz .	0,20	333	8780	
Kiefernholz .	0,20	306	8065	
Erlenholz . .	0,20	555	14632	
Kampferholz .	0,20	620	16347	
Cedernholz . .	0,20	195	5142	
Büchenholz . .	0,20	693	18272	
Weidenholz . .	0,20	500	13182	
Holunderholz .	0,20	400	10547	
Ulmenholz . .	0,20	528	13922	
Gold, gegossen .	0,17	578	21093	19,238
Silber, feines, gegossen	0,17	1156	42186	11,091
Kupfer, gelbes, aus der Barbarei, gegossen	0,17	638	23284	8,1818
Kupfer, gelbes, japanisches, gegossen .	0,17	573	20910	8,7267
Eisen, deutsches, gegossen	0,17	1930	70433	7,8076
Zinn, englisches, gegossen	0,17	169	6167	7,295
Zinn, aus Banca, geg.	0,17	104	3796	7,2165
Zinn, aus Malacca, geg.	0,17	91	3322	6,1256
Blei, englisches, gegossen	0,17	25	913	11,3333
Spiesglaskönig, gegoss.	0,17	30	1093	4,500
Zink, goslarsches, geg.	0,17	79½	2903	7,215
Wismuth, gegossen	0,17	88½	3228	9,850
Eisen, schwedisches, geschmiedet .	0,10	726	76570	
— osmunder, geschm.	0,10	700	73830	
— deutsches, gutes, geschmiedet .	0,10	740	78035	
— deutsches, gemeines, geschmiedet .	0,10	676	71300	
Stahl, bester, biegsamer	0,10	1190	125510	
— mittelmäßiger, biegsamer . .	0,10	1240	130780	
— gemeiner, biegsamer	0,10	1080	113900	

Materie von dem Parallelepipeden, welches zerrissen worden.	Seite des Querschnitts. Rhld. Zoll.	Gewicht zum Zerreißen. Amstd. Pf.	Gewicht 1 □Zoll zu zerreißen. k Berl. Pfd.	Spezifisches Gewicht.
Stahl, gehärtet .	0,10	1120	118120	
— bester, wie zu Scheermessern . .	0,10	1500	158200	
— bester, wie zu gemeinen Messern .	0,10	1350	142380	
Kupfer, schwedisches, geschmiedet .	0,17	1065	38865	
— schwed. gegossen	0,17	1054	38463	
— barbarisches, geg.	0,17	638	23284	
— ——— geschm.	0,17	1127	41128	
— ungarisches, geg.	0,17	895	32661	
— japanisches, geg.	0,17	573	20910	
— spanisches, geg.	0,17	597	21785	

Durch die Vermischung zweier Metalle leidet sowohl die Festigkeit als auch das eigenthümliche Gewicht eine merkwürdige Veränderung, weil selten die Festigkeit und das spezifische Gewicht des vermischten Körpers demjenigen entspricht, welches man aus den unvermischten Körpern folgern würde. Hierüber hat ebenfalls Mußchenbroek Versuche angestellt, welche man a. a. O. S. 419. u. f. beschrieben findet und wovon hier nur ein Auszug mitgetheilt werden kann. Die Körper hatten sämmtlich Quadrate zum Querschnitt.

Vermischungen.	Seite des Querschnitts	Gew. zum Zerreißen.	Gewicht 1 □ Zoll zu zerreißen. k	Specifisches Gewicht.
t bedeutet Theile.	rhld. Zoll	Amst. Pf.	Berl. Pfd.	
Gold 24 t. Silber 1 t.	0,10	240	25310	
— 10 t. — 1 t.	0,10	240	25310	
— 9 t. — 1 t.	0,10	235	24780	
— 6 t. — 1 t.	0,10	255	26890	
— 4 t. — 1 t.	0,10	271	28580	
— 2 t. — 1 t.	0,10	285	30060	
— 1 t. — 1 t.	0,10	280	29530	
Gold 20 t. schwed. Kupf. 1 t.	0,10	361	38170	18,760
— 15 t. — — 1 t.	0,10	400	42190	17,180
— 10 t. — — 1 t.	0,10	430	45350	17,01754
— 5 t. — — 1 t.	0,10	500	52730	15,84615
— 2 t. — — 1 t.	0,10	480	50620	13,920
— 1 t. — — 1 t.	0,10	320	33750	11,4807
Silber 10 t. schwed. Kup. 1 t.	0,10	460	48520	10,3076
— 8 t. — — 1 t.	0,10	480	50620	
— 6 t. — — 1 t.	0,10	475	50100	
— 4 t. — — 1 t.	0,10	470	49570	
— 2 t. — — 1 t.	0,10	445	46930	
— 1 t. — — 1 t.	0,10	400	42190	9,317
Silber 10 t. Schott. Blei 1 t.	0,17	338	12335	10,4333
— 4 t. — — 1 t.	0,17	202	7373	10,3694
— 1 t. — — 1 t.	0,17	283	10328	10,4801
Silber 10 t. Engl. Zinn 1 t.	0,17	1098	40138	10,0000
— 4 t. — — 1 t.	0,17	1228	44811	9,5625
— 1 t. — — 1 t.	0,17	606	22114	9,9348
Kupfer, gelbes 10 t. Engl. Zinn 1 t.	0,17	920	33574	8,35135
— — 6 t. — — 1 t.	0,17	1145	41785	8,70777
— — 1 t. — — 1 t.	0,17	23½	861	8,62500

Vermischungen.	Seite des Querschnitts	Gew. zum Zerreißen.	Gewicht 1 □ Zoll zu zerreißen. k	Spezifisches Gewicht.
t bedeutet Theile.	rhld. Zoll.	Astd. Pf.	Berl. Pfd.	
Kupfer, gelb. 1t. Zink 1t.	0,10	128	13498	8,0476
— — 2t. — 1t.	0,10	207½	21884	8,275
— — 4t. — 3t.	0,10	415	43770	9,600
— — 1t. — 4t.	0,10	255	26894	8,325
Kupfer, gelbes 5t. schwed. Eisen 1t.	0,10	402	42398	
— — 10t. — — 3t.	0,10	345	36386	
— — 50t. — — 4t. und Zinn 10t.	0,10	460	48520	
Kupfer, gelbes 10t. schw. Eisen 1t. und Zinn 2t.	0,10	395	41660	
Kupfer, gelbes 50t. Messing 4t. und Zinn 5t.	0,10	513	5410	

Aus den vorstehenden Tafeln läßt sich leicht übersehen, daß in der Regel die geschmiedeten Metalle mehr Festigkeit als die gegossenen erhalten. Eben so findet man nach der letzten Tafel, daß die Festigkeit des Goldes durch die Beimischung von Silber oder Kupfer verstärkt wird. Dagegen kann durch Vermischung zweier Metalle die Festigkeit derselben sehr geschwächt werden, wie dies beim Kupfer und Zinn, zu gleichen Theilen vermischt, der Fall ist, welche unvermischt eine größere Last tragen können.

§. 432.

Im Jahre 1789 hat der Herr Schiffbaudirector

Quantin aus Stettin in Berlin Versuche über die absolute und respective Festigkeit einiger Körper mit einer von ihm verfertigten Maschine angestellt, welche
Taf. XV Fig. 233. mit der Figur 233. abgebildeten Zurüstung in den wesentlichen Theilen übereinstimmte, nur daß zur Vermehrung der Kraft einige Hebel über einander angebracht waren. Nachstehende Versuche sind in meiner Gegenwart über die absolute Festigkeit des Eisens angestellt worden *).

1. Versuch. Eine 18 rheinl. Zoll lange Stange von geschmiedetem schlesischen Eisen, deren Querschnitt ein Quadrat bildete, dessen Seiten 6 Linien groß waren, zerriß durch eine Kraft von 21160 berl. Pfund.

2. Versuch. Eine eiserne Stange von denselben Abmessungen, welche vor dem Zerreißen mit der ersten verglichen, durchaus keinen Unterschied bemerken ließ, zerriß bei 17560 Pfund.

3. Versuch. Eine Stange von geschmiedetem schlesischen Eisen von 2 Linien im Geviert, zerriß bei 2600 Pfund.

4. Versuch. Eine der vorigen dem Anscheine

(*) Es ist sehr zu bedauern, daß die vielerlei von Herrn Quantin mit seiner großen Maschine angestellten Versuche nicht so, wie die vorstehenden, sorgfältig aufgezeichnet worden sind, weil hiedurch das Gebiet der Erfahrungen über die Festigkeit der Körper ansehnlich erweitert werden könnte.

nach ganz gleiche Stange Eisen wurde von 1780 Pfund zerrissen.

Das Mittel aus den beiden ersten Versuchen giebt für einen Querschnitt von $\frac{1}{4}$ Quadratzoll 19360, also für das Maaß der absoluten Festigkeit 77440 Pfund. Aus den beiden letzten Versuchen erhält man als Mittelwerth für die absolute Festigkeit eines Querschnitts von $\frac{1}{36}$ Quadratzoll, 2190 Pfund, also für das Maaß der absoluten Festigkeit 78840 Pfund.

Als Mittelwerth für das Maaß der absoluten Festigkeit des geschmiedeten schlesischen Eisens kann man daher 78140 Pfund annehmen.

Die hier gemachte Erfahrung, daß bei dünnen geschmiedeten eisernen Stangen das Maaß der absoluten Festigkeit größer als bei dickern ist, stimmt auch mit den Erfahrungen Mußchenbröks überein, weil beim Bearbeiten der Metalle die dünnen Stangen besser als die dickern gehämmert werden können. Auch bei dünnen Metalldräthen findet man gewöhnlich das Maaß der absoluten Festigkeit größer als bei dicken, weil man zum dünnen Drath in der Regel das beste Material wählt.

§. 433.

Die größten Abweichungen unter den Mußchenbrökschen Angaben über die absolute Festigkeit der Körper finden sich bei den Holzarten, wenn man beide §. 431. enthaltene Tafeln mit einander vergleicht. Es steht zwar zu erwarten, daß man beim Holze von einerlei Stamme auch selbst dann, wenn man Kern und Splint sorgfältig von einander unterscheidet, dennoch abweichende Resultate erhält. Allein die großen Abweichungen bei den Mußchenbrökschen Resultaten und der Umstand, daß noch keine Versuche über die absolute Festigkeit der bei uns einheimischen und beim Bauwesen vorkommenden Holzarten bekannt sind, veranlaßten mich, einige Versuche hierüber anzustellen.

Jedes Holzstück, dessen man sich zu den Versuchen bediente, war aus einem Parallelepipeden geschnitten und erhielt die Gestalt Figur 231. AB, so daß der mittlere Theil CD, welcher zum Zerreißen bestimmt war, ein Parallelepipeden von 6 Zoll Länge bildete, dessen Querschnitt ein Quadrat war, von welchem jede Seite $\frac{1}{2}$ Zoll Länge hatte. Beim Bearbeiten dieser Hölzer wurde mit der größten Sorgfalt darauf gehalten, daß die Holzfasern durchgängig parallel mit einer der Seitenflächen des Holzes waren, so daß man nach der Kunstsprache auf zwei entgegen stehenden Seiten den Holzspiegel hatte. War bei einem solchen Holzstücke der Spiegel oder die glatte Holzfaser durchschnitten, welches bei wenn gleich unmerklichen Längenkrümmungen öfters der Fall gewesen, so wurde das Holz als untauglich zu den Versuchen verworfen. Diese Holzstücke einzufassen, um sie bequem zu zerreißen, dienten zwei gleiche eiserne $2\frac{3}{4}$ Zoll lange, zwei Zoll breite und $\frac{5}{8}$ Zoll dicke eiserne Schlösser, Figur 232., die in ihrer Mitte eine Oeffnung bildeten,

Taf. XV Fig. 231.

welche oben einen und unten $\frac{1}{2}$ Zoll im Geviert hatte. Das Einsatzstück E des Schlosses konnte man herausnehmen, um die Hölzer einzuspannen, deren schräge Seiten genau in die Oeffnung des Schlosses paßten. Wurde alsdann noch das Einsatzstück E eingeschoben, und mittelst durchgesteckter Bolzen F,F befestigt, so durfte man nur die beiden Schlösser von einander entfernen, um das Holz zu zerreißen. Hiezu diente eine Vorrichtung, deren wesentliche Theile, Figur 233., abgebildet sind. An einem festen Gerüste ABC war eine, mit einem starken eisernen Wagebalken versehene Schnellwage DEF in A so aufgehängt, daß solche leicht höher oder niedriger geschraubt werden konnte. Am kurzen Arme der Wage in D war eine Kette befestigt, welche sich in zwei eiserne Haken H,H endete, deren Untertheile rechtwinklicht gebogen waren. Auf diesen Untertheilen ruhte das oberste Schloß von dem eingespannten Holzstück J. Das unterste Schloß ward ebenfalls von zwei gleichen in entgegengesetzter Lage befindlichen Haken bei K,K gefaßt, welche mit Hülfe einer Kette bei L befestigt waren. Mittelst des Gegengewichts G konnte man die zum Zerreißen verwandte Kraft bis auf zehn Pfunde genau bestimmen, auch konnte man durch Vorhängegewichte bei F die Kraft vermehren. Die Mittellinien AE und DL waren beide vertikal und wenn durch die aufgehängten Gewichte die Zunge nicht mehr einspielte, so konnte der Wagebalken leicht wieder in die horizontale Lage gebracht werden. Außerdem war noch eine Vorrichtung vorhanden, damit nach erfolgter Zer-

Taf. XV Fig. 233.

reißung des Holzes, der Arm EF, nebst dem daran befindlichen Gewichte nicht herunter sinken konnte, welche aber hier nicht abgebildet ist.

Man wählte zu den Versuchen nur Hölzer aus einheimischen Forsten, welche schon zwei Jahr gefällt und trocken aufbewahrt waren, an welchen man weder Aeste noch sonst einen Tadel auffinden konnte. Besonders strengte man alle Aufmerksamkeit an, nur solche Holzstücke zu zerreißen, bei welchen durchgängig die Fasern parallel mit den Seitenflächen angesehn werden konnten. Sämmtliche bearbeiteten Hölzer hatten, so weit solche zwischen beiden Schlössern enthalten waren, auf eine Länge von 6 Zoll ein Quadrat zum Querschnitt, dessen Inhalt genau einen viertel Quadratzoll groß war. Die Resultate aus sämmtlichen Versuchen sind in der nachstehenden Tafel aufgeführt, wo die zusammen geklammerten Zahlen in der dritten Vertikalspalte anzeigen, daß die zugehörigen Hölzer von einerlei Stamme, und so weit sich beurtheilen ließ, keinen bemerkbaren Unterschied anzeigten.

Holzarten.	No. des Versuchs.	Gew. zum Zerreißen Pfunde	Mittelwerth dieses Gewichts. Pfunde	Eigenthümliches Gewicht.	Gew. 1 □Zoll zu zerreißen. Pfunde.
Kiefer (Pinus sylvestris)					
vom Kern	1	5540	5350	0,623	21400
„ „	2	5160			
vom Kern, harzig „	3	4040	4040	0,624	16160
zwischen Kern u. Splint	4	5100	5170	0,612	20873
„ „ „ „	5	5240			
„ „ „ „	6	5510	5455	0,565	
„ „ „ „	7	5400			
„ „ „ „	8	4680	5030	0,604	
„ „ „ „	9	5380			
„ „ sehr harzig	10	2900	3130	0,657	12520
„ „ „ „	11	3360			
vom Splint	12	4400	4580	0,554	18320
„ „	13	4760			
Sommereiche (Quercus foemina)					
vom Kern	14	7020	6650	0,795	26600
„ „	15	6280			
zwischen Kern u. Splint	16	4740	4600	0,685	21940
„ „ „ „	17	4460			
„ „ „ „	18	6900	6370	0,618	
„ „ „ „	19	5840			
vom Splint	20	3420	3690	0,616	14760
„ „	21	3960			
Steineiche (Quercus robur)					
zwischen Kern u. Splint	22	5640	5530	0,747	22120
„ „ „ „	23	5420			
Rothtanne (Fichte, Pinus picea)					
zwischen Kern u. Splint	24	2700	2730	0,374	10920
„ „ „ „	25	2760			
Weißtanne (Pin. abies)					
zwischen Kern u. Splint	26	3860	3850	0,421	15400
„ „ „ „	27	3840			

Holzarten.	No. des Versuchs.	Gew. zum Zerreißen Pfunde	Mittelwerth dieses Gewichts. Pfunde	Eigenthümliches Gewicht.	Gew. 1 □ Zoll zu zerreißen. Pfunde.
Weißbüchen Hornbaum (Carpinus betulus)					
zwischen Kern u. Splint	28	5240	5100	0,765	20400
„ „ „ „	29	4960			
Büche. Rothbüche (Fag. sylvat.)					
zwischen Kern u. Splint	30	5500	5590	0,762	22360
„ „ „ „	31	5680			
Erle (Betula alnus)					
zwischen Kern u. Splint	32	6400	6185	0,656	24740
„ „ „ „	33	5970			

Bei diesen Versuchen ist noch zu bemerken, daß man ein jedes Holzstück, sobald es aufgehängt war, nur nach und nach mit einer größern Kraft anspannte und daß, als die Kraft bis auf 1000 Pfund vermehrt war, die ganze Zurüstung unter dieser Spannung wenigstens einige Stunden ruhig stehen blieb. Alsdann vermehrte man die Kraft von 10 zu 10 Pfund, allemal erst nach Verlauf einiger Minuten, wobei man alle Erschütterungen sorgfältig vermied, bis der Bruch erfolgte.

Der äußere Bruch war zwar jedesmal zwischen
Taf. XV CD, Figur 231., enthalten, allein die Fläche des
Fig. 231. Bruchs war sehr uneben und mit einzelnen hervorragenden Holzfasern versehen. Zuweilen waren diese einzelnen aus der Mitte der Bruchfläche hervorragenden Spitzen 4 bis 5 Zoll lang.

Aus den Versuchen selbst geht so viel hervor, daß bei einem gesunden Stamme der Kern die größte und der Splint die geringste absolute Festigkeit besitzt, und daß beim kiefern Holze diese Festigkeit geringer wird, wenn das Holz harzig ist.

§. 434.

Bei den Seilen ist der Unterschied in Absicht der absoluten Festigkeit sehr groß, weil derselbe von der Güte des Hanfs und der Art, wie die Seile verfertigt werden, abhängt. Mußchenbrök beschreibt (Intr. ad cohaer. p. 96.) drei von ihm angestellte Versuche, bei welchen dünne Seile von gemeinem Hanf verfertigt, zerrissen worden sind. Jedes Seil war aus 6 Fäden zusammengesetzt.

Das erste hatte 2 rheinländische Linien im Umfange und trug 92 amsterdammer Pfunde.

Das zweite von 0,4 Zoll oder 4,8 Linien Umfang, zerriß bei 160 Pfund.

Das dritte von 0,54 Zoll oder 6,48 Linien Umfang, hatte 240 Pfund getragen.

Außer diesen Versuchen giebt Mußchenbroek in der Introd. ad phil. nat. T. I. p. 409. eine Tafel über die absolute Festigkeit der Seile. Er beschreibt zwar die angestellten Versuche nicht, versichert aber, daß sich die Tafel auf Versuche gründet und bestimmt die Abmessungen der Seile nach ihrer Dicke, obgleich sonst von ihm nur der Umfang der Seile angegeben wird. Dieser Umstand ist deshalb zu bemerken, weil in dem Falle, daß man in der Mußchenbrökschen Tafel die gegebenen Abmessungen der Querschnitte von den Seilen als Dicke annimmt, die angegebenen Resultate durchaus nicht mit den oben angeführten Versuchen übereinstimmen. Man wird daher berechtigt seyn, den Mußchenbrökschen Ausdruck: Funis crassus, als einen Schreibfehler anzusehen und Umfang anstatt Dicke zu schreiben. Hienach ist die Ueberschrift in der ersten Vertikalspalte der nachstehenden Mußchenbrökschen Tafel abgeändert und derselben noch die beiden letzten Vertikalspalten beigefügt worden.

Umfang des Seils	Absolute Festigkeit.		
	dieses Seils.		von 1 □ Zoll k
rhld. Linien	Amstd. Pfd.	Berl. Pfund	Berl. Pfund
6	190	200	10052
8	330	348	9812
10	540	569	10317
12	750	791	9948
13	840	886	9478
15	990	1044	8412
16	1030	1086	7685
20	2080	2194	9913
24	3000	3164	9939
30	4730	4988	10048
36	7900	8332	11632

Wegen des angeführten Zweifels bin ich veranlaßt worden, einige Versuche mit gewöhnlichen hanfenen Seilen, wie solche in Berlin verfertigt werden, anzustellen. Die Länge des Seils, welches man der Spannung aussetzte, war drei Fuß. Das obere Ende des

des Seils war an eine auf zwei Rüstböcken ruhende Wälze geknüpft, und am untern Ende befestigte man eine große Wageschale, welche nach und nach immer mit kleinern Gewichten beschwert worden, nachdem vor dem Auflegen eines neuen Gewichts jedesmal eine geraume Zeit verflossen war.

1. Versuch. Ein neues Seil von drei Litzen, jede von zwei Fäden, also überhaupt von 6 Fäden, hatte $6\frac{1}{2}$ Linien im Umfange, oder 2,07 Linien Dicke und wog, 4 Fuß lang, 1 Loth $\frac{3}{4}$ Quentchen berlin. Hand. Gew. Es zerriß unter einer Belastung von 261 Pfund.

2. Versuch. Ein neues Seil von 4 Litzen, jede zu 3 Fäden, zusammen 12 Fäden, hatte $10\frac{1}{4}$ Linien im Umfange, also 3,26 Linien Dicke und wog, 4 Fuß lang, 3 Loth $\frac{1}{4}$ Quentchen. Es zerriß bei einer angehängten Last von 610 Pfund.

Aus dem ersten Versuche findet man für das Maaß der absoluten Festigkeit des Seils 11168 Pfund und aus dem zweiten Versuche 10523 Pfund.

Noch ist zu bemerken, daß man von dem Seile, welches zum ersten Versuche diente, vorher ein Stück von 12 Zoll lang abschnitt und aufdrehte. Jede der drei Litzen hatte alsdann grade ausgespannt eine Länge von $14\frac{1}{8}$ Zoll, und wenn man jede Litze aufdrehte, so war im Durchschnitt die Länge eines jeden Fadens $15\frac{1}{12}$ Zoll, so daß jeder im Seile befindliche Faden etwa um $\frac{1}{4}$ seiner Länge verkürzt war.

Bei dem Seile des zweiten Versuchs fand man, wenn vor dem Gebrauche ein Ende von 12 Zoll lang abgeschnitten und aufgedreht worden, daß jede Litze $14\frac{3}{4}$ Zoll lang war. Die drei Fäden einer Litze hatten im Durchschnitte jeder $17\frac{1}{4}$ Zoll Länge. Es war daher jeder Faden beinahe um den dritten Theil seiner Länge eingedreht.

§. 435.

Damit die Fäden und die daraus zu verfertigenden Seile nicht zu locker werden, muß jeder Faden wenigstens so weit eingedreht werden, daß er etwa nur um den fünften Theil seiner Länge kürzer wird, obgleich die Seiler sehr häufig die Stricke so weit eindrehen, daß solche den dritten Theil ihrer Länge verlieren. Allein durch dieses Zusammendrehen verlieren die Seile, besonders wenn die einzelnen Hanffasern steif und wenig biegsam sind, an ihrer Festigkeit, weil die Fäden in einen gespannten Zustand kommen, welcher so anzusehen ist, als wenn schon eine Last an dem Seile wirkte. Auch kann diese Spannung so vermehrt werden, daß die Seile ohne angehängte Last zerreißen müssen. Die Erfahrung bestätigt auffallend, wie sehr die Seile an Festigkeit verlieren, wenn solche zusammen gedreht werden. So konnte nach Mußchenbroeks Versuchen (Introd. ad phil. nat. T. I. p. 407.) ein Seil, dessen Fäden um $\frac{1}{5}$ ihrer Länge eingedreht waren, 6205 amsterdammer Pfunde tragen. Wenn man aber die Fäden bis auf $\frac{1}{4}$ ihrer Länge verkürzte, trug das Seil nur 4850 Pfund, und bei einer Verkürzung, welche den dritten Theil der Länge betragen hat, nur 4098 Pfund.

Auffallend sind die in dieser Absicht von Reaumur (Mem. de l'acad. de Paris, année 1711 p. 7-19. edit. bat.) angestellten Versuche, bei welchen vorher die Last, welche jede einzelne Schnur, ohne zu zerreißen, tragen konnte, durch Versuche bestimmt worden ist, und wo man, als aus diesen Schnüren auf die gewöhnliche Art gedrehte Seile verfertigt worden, eine weit geringere Last zum Zerreißen der Seile nöthig hatte, als die Summe der Lasten, welche die einzelnen Schnüre tragen konnten, ausmachte. Nachstehende Tafel enthält einen Auszug aus diesen Versuchen.

Anzahl der Schnüre.	Summe der Last, welche die einzelnen Schnüre tragen konnten. Pfund.	Das aus den Schnüren gedrehte Seil konnte nur tragen. Pfund.
2	19	$15\frac{1}{2}$
3	$23\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$
4	29	21
5	33	22
6	36	31
10	60	50

Muſſchenbrök (Intr. ad cohaer. corpor. c. 4. p. 99.) ließ aus drei Schnüren ein Seil aber nur wenig drehen und fand, daß solches 50 Pfund, stärker gedreht, nur 40 Pfund tragen konnte. Wurde hingegen aus den drei Fäden ein Seil nach Art der Weiberzöpfe geflochten, so konnte solches 58 Pfund tragen. Hiedurch ist hinlänglich erwiesen, daß das Zusammendrehen der Seile die absolute Festigkeit derselben vermindert, obgleich das

Drehen bis zu einem gewissen Grade gegen die stärkere Abnutzung der Seile sichert. Man hat zur Vermeidung des Nachtheils, welcher aus dem Drehen der Seile entsteht, eine andere Art zur Verfertigung der Seile vorgeschlagen, indem die Seile wie die hanfenen Spritzenschläuche gewebt werden. Die von Herrn D. Rappolt mit diesen gewebten Seilen angestellten Versuche geben vortheilhafte Zeugnisse über ihre Festigkeit, und wenn ihrem Gebrauche in Absicht der Abnutzung nichts im Wege steht, so verdienen sie in jeder Rücksicht Vorzüge vor den bisher üblichen. Bei einem Versuche mit einem aus 54 Fäden gewebten $\frac{1}{8}$ pariser Zoll dicken Seile fand Herr Rappolt, daß es, ohne zu zerreißen, 213 Pfund tragen konnte. Ein anderes rund gewebtes Seil, welches aus 96 Fäden bestand, und $2\frac{3}{4}$ pariser Linien im Durchmesser hatte, trug ein Gewicht von 383 Pfund, ohne zu zerreißen. Es ist zwar nicht angegeben, was für Pfunde hier zu verstehen sind, indessen folgt aus diesen Angaben, daß die gewebten Seile vor den gedrehten in Absicht der Festigkeit den Vorzug verdienen. Nähere Nachricht findet man in der kleinen Schrift: Ueber die Stärke rund gewobener Seile, wie sie nach Musschenbrökischen Grundsätzen auf dem Bühlhof bei Calw im Wirtembergischen verfertigt werden. Ein Aufsatz mit Versuchen begleitet von W. G. Rappolt. Tübingen, 1795.

Noch kann man in Absicht der Festigkeit der Seile bemerken, daß die Seile durch Nässe an Festigkeit verlieren, und daß unter übrigens gleichen Umständen ein nasses

Seil etwa den vierten Theil schwächer als ein ganz trocknes Seil ist. So hat Musschenbrök gefunden (Introd. ad phil. nat. T. I. p. 408.), daß ein trocknes Seil, welches bis 5400 amsterd. Pfunde tragen konnte, genäßt nur 4000 Pfund trug. Ein anderes Seil wurde trocken von 7800 Pfund zerrissen, welches genäßt schon von 5800 Pfund zerrissen worden.

Das sorgfältige Hecheln des Hanfs vermehrt ebenfalls die Stärke des Seils. Nach Musschenbrök (a. a. O. S. 408.) ist ein Seil von 3 rheinländischen Zollen im Umfange aus schlecht gehecheltem Hanfe von 5754 amsterd. Pfund zerrissen worden, statt daß ein Seil von denselben Abmessungen aus gut gehecheltem Hanfe bis 6638 Pfund getragen hat.

§. 436.

In der nachstehenden Tafel ist das Maaß der absoluten Festigkeit mehrerer Materien größtentheils nach den bereits angeführten Versuchen in berlinischem Maaße und Gewichte angegeben. Man darf aber bei der großen Mannichfaltigkeit der gleichnamigten Materien die angegebenen Zahlen nur als Mittelwerthe ansehen. Auch ist zu bemerken, daß bei den Holzarten die Festigkeit nur nach der Richtung der Holzfasern angegeben ist.

Tafel
über das Maaß der absoluten Festigkeit mehrerer Materien.

Prismatische Körper, deren Querschnitt einen rheinländischen Quadratzoll groß ist.	Absolute Festigkeit k Berl. Pfund
Apfelbaumholz	10018
Birnbaumholz	11158
Blei, englisches, gegossen . . .	913
Bleidrath	3934
Büchen, (Rothbüchen) . . .	22360
Buchsbaumholz	15790
Cedernholz	5142
Ebenholz	13504
Eichenholz, Sommereichen, vom Kerne	26600
zwischen Kern und Splint . .	21940
vom Splint	14760
Steineichen	22120
Eisen, deutsches, gegossen . . .	70433
— — gutes, geschmiedet .	78050
— — gemeines, geschmiedet .	71300
— osmunder, geschmiedet . .	73830
— schwedisches, geschmiedet . .	76570
— schlesisches, geschmiedet . .	78140
Eisendrath	60433
Erlenholz	24740
Eschenholz	21488
Fichte, s. Rothtanne.	
Glas, weißes	2812
Gold, gegossen	21093
Golddrath, Pistolengold . . .	67129
Granadillenholz	17028
Guajacholz	14432
Holunderholz	10547
Hornbaum	20400
Kampferholz	16347
Kiefernholz, vom Kerne . . .	21400
vom Kerne, harzig . . .	16160
zwischen Kern und Splint . .	20873
zwischen Kern und Splint, sehr harzig	12520
vom Splint	18320

Prismatische Körper, deren Querschnitt einen rheinländischen Quadratzoll groß ist.	Absolute Festigkeit k Berl. Pfund
Kirschbaumholz, wildes . . .	13978
Kupfer, gelbes, barbarisches, gegossen	23284
— — — geschmiedet	41128
— — japanisches, gegossen .	20910
— — schwedisches, gegossen .	38463
— — — geschmiedet	38865
— — spanisches, gegossen .	21785
— — ungarisches, gegossen .	32661
Kupferdrath, roth schwedisches K. .	40205
Lindenholz	13870
Mauerziegel, gebrannter . . .	290
Messingdrath	48480
Mispelbaumholz	12028
Nußbaumholz	14261
Olivenholz	12614
Pflaumbaumholz	11099
Rothbüchen, s. Büchen.	
Sakkerdanholz	22784
Santelbaumholz, rothes . . .	10128
Seile, von Hanf gedreht . . .	9000
Silber, feines, gegossen . . .	42186
Silberdrath	49690
Spiesglaskönig, gegossen . . .	1093
Stahl, bester, biegsamer . . .	125510
— mittelmäßiger, biegsamer . .	130780
— gemeiner, biegsamer . . .	113900
— bester, gehärtet . . .	118120
— wie zu Scheermessern . .	158200
— wie zu gemeinen Messern . .	142380
Steineichenholz	22120
Tannenholz, Rothtanne . . .	10920
— Weißtanne	15400
Ulmenholz	14857
Weidenholz	15709
Weißbüche, s. Hornbaum.	
Weißdornholz	18358
Wismuth, gegossen	3228

Prismatische Körper, deren Querschnitt einen rheinländischen Quadratzoll groß ist.	Absolute Festigkeit k Berl. Pfund
Zink, goslarischer, gegossen . .	2903
Zinn, aus Banca, gegossen . . .	3796
„ englisches, gegossen . . .	6167
„ aus Malacca, gegossen . .	3322
Zinndrath	6609
Zuckerkistenholz	18832

§. 437.

Wenn es darauf ankommt, aus dem bekannten Maaße der absoluten Festigkeit eines Körpers diejenige

K' Last K' zu bestimmen, welche er mit Sicherheit tragen kann, so scheint es rathsam zu seyn, bei Metallen nur die Hälfte und bei Holzarten und Seilen nur den dritten Theil der absoluten Festigkeit in Rechnung zu bringen. Dies giebt für Metalle die Last, welche der Körper tragen kann, oder

$$K' = \tfrac{1}{2} k F \text{ und } F = \frac{K'}{\tfrac{1}{2} k}$$

und für Holzarten und Seile

$$K' = \tfrac{1}{3} k F \text{ und } F = \frac{K'}{\tfrac{1}{3} k}$$

wo F in rheinländischen Quadratzollen ausgedrückt und K' in berliner Pfunden gefunden wird.

1. Beispiel. Wie viel Last wird man an einen geschmiedeten eisernen Bolzen, welcher $\frac{1}{2}$ Zoll dick ist, mit Sicherheit hängen können?

Hier ist $F = 0{,}7854 . (\tfrac{1}{2})^2 = 0{,}1963$ und $\tfrac{1}{2} k = 37500$, daher die Last, welche der Bolzen mit Sicherheit tragen kann, oder

$$K' = 0{,}1963 . 37500 = 7361\tfrac{1}{4} \text{ berliner Pfund.}$$

2. Beispiel. Der Querschnitt einer fichtenen Hängesäule soll ein Quadrat seyn. Wie groß wird man denselben annehmen müssen, damit die Hängesäule eine Last von 72000 Pfund mit Sicherheit tragen kann? Hier ist $K' = 72000$ und $\frac{1}{5} k = 2562$, daher der Querschnitt $F = \frac{72000}{2562} = 28{,}1$ Quadrat Zoll, also die Seite von dem Querschnitte der Hängsäule

$= \sqrt{28{,}1} = 5{,}3$ rheinld. Zoll.

§. 438.

Sind die Körper, an welchen Lasten aufgehängt werden sollen, von beträchtlicher Länge, so muß bei einem ansehnlichen spezifischen Gewichte das Gewicht des Körpers mit in Rechnung gebracht werden, weil dasselbe ebenfalls zum Zerreißen des Körpers beiträgt. Bei gleichförmiger Festigkeit, und wenn die Körper prismatisch gestaltet sind, wird der Riß allemal an der obersten Stelle des Körpers erfolgen, weil daselbst die größte Last das Zerreißen bewirkt. Setzt man daher voraus, daß L die Länge, F den Querschnitt und g das spezifische Gewicht eines prismatischen Körpers bezeichne, dessen absolute Festigkeit $= K$ ist, so ist das Gewicht desselben (§. 74.) $= g\gamma FL$, daher wird $K - g\gamma FL$ die Last bezeichnen, welche man an den vertikal aufgehängten Körper anbringen muß, um denselben zu zerreißen. Diese Last sei Q, so wird $Q = K - g\gamma FL$ oder man findet, weil (§. 430.) $K = kF$,

$$\text{(I)}\quad Q = (k - g\gamma L) F.$$

und hieraus den Flächeninhalt des Querschnitts, oder

$$(\mathrm{II})\ F = \frac{Q}{k - g\gamma L}$$

Weil hier k die Festigkeit von einem Quadratzolle bezeichnet, so muß auch L in Zollen ausgedrückt werden. Auch ist hier γ das Gewicht von einem Kubikzolle Regenwasser = 0,038158 berl. Pfund.

Der Körper muß durch sein eigenes Gewicht zerreißen, wenn $Q = 0$ oder $k = g\gamma L$ wird; dies giebt die Länge, bei welcher der prismatische Körper durch sein eigenes Gewicht zerreißt, oder

$$(\mathrm{III})\ L = \frac{k}{g\gamma}$$

Hiebei ist zu bemerken, daß wenn von der Last die Rede ist, welche ein Körper mit Sicherheit tragen kann, nur die Hälfte oder der dritte Theil von k in Rechnung kommt.

1. Beispiel. An einer 100 Fuß langen eisernen Stange soll ein Gewicht von 1000 Pfund aufgehängt werden. Wie groß muß der Querschnitt dieser Stange seyn, damit sie das aufgehängte Gewicht noch mit Sicherheit tragen kann? Wäre die Stange von gegossenem Eisen, so ist hier $\frac{1}{2}k = 33326$; $g = 7{,}199$; $L = 1200$ Zoll und $Q = 1000$, daher nach (II) der Querschnitt

$$F = \frac{1000}{33326 - 7{,}199 \cdot 0{,}03816 \cdot 1200} = 3{,}03 \text{ rhld. } \square \text{ Zoll,}$$

also der Durchmesser bei einem kreisförmigen Querschnitte 1,96 Zoll.

2. Beispiel. Man fragt, wie lang muß ein aufgehängter bleierner Drath seyn, damit er durch sein eigenes Gewicht zerreißt?

Hier ist $k = 3717$; $g = 11,309$, daher nach (III) die gesuchte Länge

$$L = \frac{3717}{11,309 \cdot 0,03816} = 8631 \text{ Zoll} = 717\tfrac{3}{4} \text{ Fuß}.$$

* §. 439.

Will man einem Körper BCDE, Figur 234., Taf. XV Fig. 234. an dessen Ende ein Gewicht Q aufgehängt werden soll, durchgängig gleiche Festigkeit geben, so muß jeder höhere Querschnitt wie MN größer als die untern werden. Man setze daher, daß der unterste Querschnitt bei $BC = F$ zureichend sei, die Last Q mit Sicherheit zu tragen und daß auf die Höhe $AP = x$ ein Querschnitt $MN = Z$ erfordert werde, damit der Körper eben die absolute Festigkeit bei P wie bei A erhalte. Das Gewicht des Körpers BCMN sei Q' und das spezifische Gewicht des ganzen Körpers $= g$. Wächst nun x um ∂x, so wächst Q' um $\partial Q' = g\gamma Z \partial x$. Es verhält sich aber nach §. 429.

$Q : Q + Q' = F : Z$, daher ist $Q + Q' = \frac{Q}{F} Z$,

oder wenn man differenziirt

$\partial Q' = \frac{Q}{F} \partial Z$ also $\frac{Q}{F} \partial Z = g\gamma Z \partial x$ oder

$\frac{\partial Z}{Z} = \frac{g\gamma F}{Q} \partial x$ oder integrirt

$$\log Z = \frac{g\gamma F x}{Q} + \text{const.}$$

Für $x = 0$ wird $Z = F$ also $\text{const} = \log F$ daher

$\log \frac{Z}{F} = \frac{g\gamma F x}{Q}$ oder wenn $\frac{g\gamma F x}{Q} = y$ gesetzt wird

und e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet

$\frac{Z}{F} = e^y$. Aber $e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2\cdot3}y^3 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}y^4 + ..$ oder wenn man diese Reihe in einen zusammenhängenden Bruch verwandelt und einen Näherungswerth sucht, so findet man nahe genug

$e^y = \frac{12 + 6y + y^2}{12 - 6y + y^2}$ daher, wenn für y sein Werth gesetzt wird,

$\frac{Z}{F} = \frac{12Q^2 + 6g\gamma FQx + g^2\gamma^2F^2x^2}{12Q^2 - 6g\gamma FQx + g^2\gamma^2F^2x^2}$ oder

man findet für den Körper von gleicher absoluter Festigkeit, den Flächeninhalt von dem erforderlichen Querschnitte

(I) $Z = \frac{12Q^2 + 6g\gamma FQx + g^2\gamma^2F^2x^2}{12Q^2 - 6g\gamma FQx + g^2\gamma^2F^2x^2} F$.

Der Ausdruck für Z wird weniger weitläuftig, aber auch weniger genau, wenn man $e^y = \frac{2+y}{2-y}$ annimmt; alsdann erhält man für den Querschnitt

(II) $Z = \frac{2Q + g\gamma Fx}{2Q - g\gamma Fx} F$.

Wie hienach die Abmessungen der Ketten und Taue von gleicher Festigkeit bestimmt werden können, läßt sich leicht übersehen.

Beispiel. An einer gegossenen eisernen Stange, deren unterer Querschnitt einen Quadratzoll groß ist, soll eine Last von 5000 Pfund aufgehängt werden; man sucht die erforderliche Größe der Querschnitte von 100 zu 100 Zoll.

Bedient man sich hiezu der Formel

$Z = \frac{12Q^2 + 6g\gamma FQx + g^2\gamma^2F^2x^2}{12Q^2 - 6g\gamma FQx + g^2\gamma^2F^2x^2} F$, so ist hier $Q = 5000$; $F = 1$; $g = 7,199$, $\varkappa = 0,03816$, also

$$Z = \frac{300000000 + 8241,36x + 0,075468x^2}{300000000 - 8241,36x + 0,075468x^2}$$

Für $x = 100$ erhält man $Z = 1,0055$ □ Zoll

$x = 200$ „ „ $Z = 1,0110$

$x = 300$ „ „ $Z = 1,0166$

$x = 400$ „ „ $Z = 1,0222$

$x = 500$ „ „ $Z = 1,0278$

$x = 1000$ „ „ $Z = 1,0564$

II. Von der respectiven Festigkeit.

A. Von den Balken.

§. 440.

Bei der respectiven Festigkeit sind vorzüglich zwei Arten von Körper zu unterscheiden, die harten oder spröden, welche brechen, ohne sich vorher zu biegen, und die biegsamen, welche zugleich elastisch seyn können.

Es sei AE, Figur 236., ein wagerechter Balken Taf. XV (ein Parallelepipeden) aus einer harten unbiegsa- Fig. 235. men Materie, mit dem einen Ende bei DF in der vertikalen Wand MN befestigt und an dem andern Ende bei A mit einem Gewichte Q belastet. Man setze die Länge DB, oder diejenige Dimension, welche wenn der Körper aus Fasern besteht, nach der Richtung dieser Fasern genommen wird $= a$; die Höhe DE oder diejenige Dimension, welche auf der Länge senkrecht und mit der Richtung der Last Q parallel ist $= h$; die Breite EF oder die Dimension, welche auf Länge und Höhe senkrecht steht $= b$ und das

Maaß der absoluten Festigkeit $= k$, so ist die absolute Festigkeit des Balkens (§. 430.) $= kbh$. Ist nun das Gewicht Q mit der absoluten Festigkeit der Fläche DEF im Gleichgewicht, so wird, wenn G der Schwerpunkt der Fläche DEF ist, eine Kraft $= kbh$ in G, welche senkrecht auf diese Fläche wirkt, mit der Kraft Q im Gleichgewichte seyn. Erfolgt nun der Bruch bei DF plötzlich und die Materie des Balkens ist so fest, daß der Punkt H nicht ausweicht und als Umdrehungspunkt angenommen werden kann, so müssen, wenn das Gewicht des Balkens bei Seite gesetzt wird, die Momente $HA.Q$ und $HG.kbh$ einander gleich seyn. Es ist aber $HG = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} h$, daher $aQ = \frac{1}{2} h . kbh$, folglich die respective Festigkeit bei einem harten unbiegsamen Balken oder

$$Q = \frac{1}{2} k \frac{bh^2}{a}$$

Dieser Ausdruck stimmt mit der Regel des Galilei überein.

Die Fläche DEF, in welcher der Bruch des Körpers erfolgt, heißt die Brechungsfläche (*Base de fracture*) und muß, wenn die Materie des Balkens von gleicher Festigkeit ist, allemal in diejenige Fläche fallen, wo der Balken aus der Wand MN herauskommt, oder unter allen senkrechten Querschnitten des Balkens wird die Brechungsebene in denjenigen fallen, für welchen das Moment der Last Q am größten wird, weil offenbar alsdann unter allen Querschnitten auf diesen die meiste Gewalt zur Trennung angewandt wird. Wäre bei einem andern Balken von derselben Materie Q′ die respective Festigkeit und A, B, H die Abmessungen des Balkens, so ist

$$Q' = \tfrac{1}{2} k \frac{BH^2}{A^2}$$ daher verhält sich

$$Q : Q' = \frac{bh^2}{a} : \frac{BH^2}{A}$$

oder die respectiven Festigkeiten zweier Balken von einerlei Materie verhalten sich wie die Producte aus den Breiten in die Quadrate der Höhen von den Brechungsebenen und umgekehrt wie die Längen der Balken.

§. 441.

Aus dem allgemeinen Ausdrucke des vorherigen §. scheint zwar zu folgen, daß wenn die absolute Festigkeit eines Körpers bekannt ist, daraus leicht die respective gefunden werden kann. Weil aber kein vollkommen harter unbiegsamer Körper bekannt ist, so läßt sich auch die respective Festigkeit nicht mit Sicherheit aus der absoluten bestimmen, und man muß sich damit begnügen, die respectiven Festigkeiten nur unter sich nach der zuletzt gefundenen Proportion zu vergleichen.

Vor der nähern Untersuchung der Festigkeit biegsamer Körper ist es nothwendig, zuvor einige Sätze über die Ausdehnung und Zusammendrückung biegsamer Fasern voraus zu schicken.

* §. 442.

Die Fasern zweier prismatischen Körper von einerlei Materie mögen vollkommen oder nur unvollkommen elastisch seyn, so müssen doch die folgenden beide Sätze von denselben gelten, vorausgesetzt, daß die Ausdehnung oder Zusammendrückung keine Zerstörung des Körpers bewirke, und daß bei unvollkommen elastischen Körpern die Ausdehnung oder Zusammendrückung nur sehr klein sei.

I. Fasern von gleichen Querschnitten und ungleichen Längen werden von gleichen Kräften nach Verhältniß ihrer Längen ausgedehnt oder zusammengedrückt.

II. Fasern von gleichen Längen aber ungleichen Querschnitten werden durch Kräfte, welche diesen Querschnitten proportional sind, gleich viel ausgedehnt oder zusammen gedrückt.

Der erste Satz ist deshalb einleuchtend, weil bei einer doppelt so großen Länge nochmal so viel Theile sind, welche ausgedehnt oder zusammen gedrückt werden. Die Verlängerung oder Verkürzung muß daher auch doppelt so groß seyn. Da dies nun eben so von jedem andern Verhältnisse der Längen gilt, so müssen sich überhaupt, unter übrigens gleichen Umständen, die Zunahmen an Länge oder die Ausdehnungen wie die Längen verhalten. Dasselbe gilt von den Abnahmen an Länge oder von den Zusammendrückungen.

Der zweite Satz ist eben so einleuchtend; weil zwei gleiche Fiebern, gleich viel auszudehnen, offenbar doppelt so viel Kraft erfordern als eine u. s. w., woraus die Richtigkeit des zweiten Satzes folgt.

Von

Von drei prismatischen elastischen Körpern, welche aus gleicher Materie bestehen, bezeichne

A, B, C die Körper,

α, α', α' die Ausdehnungen oder Zusammendrükkungen nach ihrer Länge,

β, β, β' die Querschnitte der Körper,

λ, λ', λ' die Längen im natürlichen Zustande, und

q, q, q' die Kräfte, welche die Ausdehnung oder Zusammendrückung nach der Länge dieser Körper bewirken, so verhält sich für A und B nach I.

$\alpha : \alpha' = \lambda : \lambda'$

und für die Körper B und C nach II.

$\beta : \beta' = q : q'$ daher

$\alpha\beta : \alpha'\beta' = \lambda q : \lambda' q'$ oder es ist die Ausdehnung

$$\alpha = \frac{\alpha'\beta'}{\lambda' q'} \cdot \frac{\lambda q}{\beta}.$$

Ist nun für irgend eine Materie aus Versuchen bekannt, wie groß bei einem Körper C, dessen Querschnitt β' und Länge λ' ist, die Ausdehnung α' bei einer Kraft q' wird, so läßt sich daraus der Werth $\frac{\alpha'\beta'}{\lambda' q'}$ finden, welcher eine beständige Größe ist und = n gesetzt werden kann. Hieraus erhält man, wenn n die Zahl n bekannt ist, welche hier der Ausdehnungscoefficient heißen kann, für jeden andern prismatischen Körper von gleicher Materie, die Ausdehnung

(I) $\alpha = \frac{n\lambda}{\beta} q$.

Weil man zu der Annahme nicht berechtigt ist, daß bei einer Faser dieselbe Kraft q, welche eine Verlängerung α bewirkt, auch nach entgegengesetzter Richtung angebracht, eine eben so große Verkürzung $= \alpha$ bewirken wird, so sei die Verkürzung der Länge λ, welche das Gewicht q bewirkt $= \alpha'$, der Coefficient $n = n'$, wo n' der Coefficient der Zusammendrückung heißen kann, so erhält man für einerlei β wie vorhin die Verkürzung der Faser, oder

$$\text{(II)}\ \alpha' = \frac{n'\lambda}{\beta}\, q.$$

* §. 443.

Ein biegsamer Balken, dessen Schwere man bei
Taf. XV Seite setzt, sei in einer Wand CG, Figur 236., so
Fig. 236. befestigt, daß er in seinem natürlichen Zustande nach der graden Linie BT' gerichtet ist. Durch ein am Ende des Balkens aufgehängtes Gewicht Q werde derselbe aus der Lage BT' in die Lage BMA gebogen, so muß dadurch ein Theil seiner Fasern ausgedehnt, ein anderer zusammen gedrückt werden. Zwischen diesen muß eine Faser liegen, welche weder ausgedehnt noch zusammen gedrückt wird und durch welche man die Linie BMA ziehen kann. Von dieser Linie sei $Mm = \lambda$ ein sehr kleiner Theil und man ziehe $M'M''$ und $m'm''$ auf die Linie BMA in den Punkten M und m senkrecht, so ist $M'M''m''m'$ ein Scheibchen oder ein Element des Balkens, welches im natürlichen Zustande durchgängig die Länge $Mm = \lambda$ hat. Zieht man daher no durch M mit $m'm''$ parallel, so ist $m'n = mM = m''o = \lambda$ und $nM' = \alpha$ ist der Theil,

um welchen die oberste Faser $m'M'$ ausgedehnt worden. Ist nun uw irgend eine andere Faser, deren Abstand von M oder $Mw = u$ ist, und man setzt die Breite des Balkens $= b$, die Höhe $M'M'' = h$ und den Abstand $MM' = f$, also $MM'' = h - f$, so verhält sich $MM' : Mw = nM' : vw$ oder $f : u = \alpha : vw$, daher ist

die Ausdehnung der Faser $m'M'$ oder $vw = \frac{\alpha}{f} u$.

Die Dicke der Faser uw sei ∂u, so ist ihr Querschnitt $= b\partial u$, und wenn solcher mit der Kraft q ausgedehnt wird, so erhält man auch §. 442.

$vw = \frac{n\lambda q}{b\partial u}$ also $\frac{n\lambda q}{b\partial u} = \frac{\alpha}{f} u$ und hieraus

die Kraft, mit welcher die Faser uw gespannt wird,

oder $q = \frac{\alpha b}{n\lambda f} u \partial u$.

Wäre rs irgend eine andere unterhalb mM gelegene Faser, welche um den Theil st durch eine Kraft q' zusammen gedrückt ist, so erhält man, wenn $Ms = w$ gesetzt wird, $MM' : Ms = Mn : st$ oder $f : w = \alpha : st$ daher

$st = \frac{\alpha w}{f}$. Auch ist §. 442. (II) wenn n' der Verkürzung der Fasern entspricht,

$st = \frac{n'\lambda q'}{b\partial w}$, daher die Kraft, welche die Faser rs zusammen drückt oder

$q' = \frac{\alpha b}{n'\lambda f} w \partial w$.

Die zum Punkte M gehörige Tangente MT werde in T von der verlängerten Richtung der Kraft Q geschnitten, so kann man statt des Stücks MA des Balkens die Tangente MT als eine feste unbiegsame Stange annehmen, welche mit dem Elemente M′M″ m″m′ in M genau verbunden ist; alsdann wird das Gewicht Q in T aufgehängt das Element M′M″m″m′ eben so biegen, als wenn es in A aufgehängt wäre. Man ziehe durch A die Linie AC horizontal und MP darauf senkrecht. Ist alsdann $AP = x$, so findet man das Moment der Kraft Q, welches an der Stange MT wirkt $= xQ$. Soll ein Gleichgewicht zwischen Q und den Kräften, durch welche das Element M′m″ zusammen gedrückt und ausgedehnt wird, entstehen, so muß das Moment xQ der Summe von den Momenten dieser Kräfte gleich seyn. Nun ist die Kraft, welche die Faser uw ausdehnt, oder

$q = \frac{\alpha b}{n\lambda f} u \partial u$, daher das Moment oder

$u.q = \frac{\alpha b}{n\lambda f} u^2 \partial u$,

also die Summe der Momente von M bis w

$\frac{\alpha b}{n\lambda f} \int u^2 \partial u = \frac{\alpha b u^3}{3 n\lambda f}$, wo keine Constante hinzukommt, weil die Momente mit $u = 0$ verschwinden.

Für $u = MM' = f$ erhält man die Summe der Momente von M bis M′

$$= \frac{\alpha b f^3}{3 n\lambda f} = \frac{\alpha b f^2}{3 n\lambda}$$

Auf eine ähnliche Art findet man die Summe der Momente von M bis M″

$$= \frac{\alpha b(h-f)^3}{3n'\lambda k}$$

daher ist für das Gleichgewicht

$$\text{(I)}\ xQ = \frac{\alpha b f^2}{3n\lambda} + \frac{\alpha b(h-f)^3}{3n'\lambda k} = \frac{\alpha b}{3\lambda k}\left[\frac{f^3}{n} + \frac{(h-f)^3}{n'}\right]$$

Weil aber die Faser Mm von der Kraft, welche den Balken biegt, weder ausgedehnt noch zusammengedrückt wird, so darf der Punkt M keinen Druck leiden. Dies geschieht aber nur, wenn die Summe der Pressungen gegen MM′ eben so groß, als gegen MM″ ist (§. 43.). Nun findet man die Summe der Pressungen gegen MM′ =

$$\frac{\alpha b}{n\lambda k}\int u\,\partial u = \frac{\alpha b u^2}{2n\lambda k} \text{ und für } u = f; = \frac{\alpha b f^2}{2n\lambda k}.$$

Eben so ist die Summe der Pressungen gegen MM″

$$= \frac{\alpha b(h-f)^2}{2n'\lambda k},$$

folglich $\frac{\alpha b f^2}{2n\lambda k} = \frac{\alpha b(h-f)^2}{2n'\lambda k}$ oder

$$n' = \frac{n(h-f)^2}{f^2}.$$

Diesen Werth in die Gleichung (I) anstatt n′ gesetzt, giebt

$$\text{(II)}\ xQ = \frac{\alpha b h k}{3n\lambda}.$$

Anmerkung. Wenn bei den vorstehenden Untersuchungen eine Ausdehnung der Fiebern angenommen ist, so stimmt dies mit den Voraussetzungen von Leibnitz und Mariotte überein; so fern aber zugleich auf den größern oder geringern Grad der Zusammendrückbarkeit

(Compressibilität) Rücksicht genommen worden, so ist dies den Voraussetzungen von Jacob Bernoulli gemäß. Die Bernoullische Theorie in dessen Abhandlung: Veritable hypothèse de la résistance des solides (Mém. de l'ac. de Paris 1805, p. 230. etc. ed. bat.) ist aber gegründeten Zweifeln ausgesetzt, weil der vierte Lehnsatz (Lemme IV. p. 236.), worauf sich die Theorie stützt, keineswegs befriedigt und weil sich die Unrichtigkeit desselben beweisen läßt. Man war daher bemüht, in den beiden vorhergehenden §. §. diese wichtige Theorie so vorzutragen, daß solche mit der erforderlichen Ueberzeugung die möglichste Kürze verbindet, ohne in Gefahr zu kommen, dieserhalb ein eigenes weitläufiges Werk zu schreiben, welches der Herausgeber von Jacob Bernoulli's Werken nöthig findet, wenn man eine genauere Auflösung geben will. M. s. Jacobi *Bernoulli* Opera. Tom. II. Genevae 1744. p. 984.

* §. 444.

Zusatz. Verlängert man die beiden Seiten $M'M''$ und $m'm''$, Figur 236., bis sie sich in R schneiden, so ist $MR = r$ der Krümmungshalbmesser für das Bogenelement Mm. Nun ist das Dreieck RMm dem Dreieck MM'n ähnlich, weil die Linien Rm' und Mn parallel sind, daher verhält sich

Taf. XV Fig. 236.

$$RM : Mm = MM' : M'n \text{ oder}$$

$$r : \lambda = f : \alpha \text{ also ist } \frac{f}{r} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

und wenn man diesen Werth statt $\frac{\alpha}{\lambda}$ in die Gleichung (II) setzt, so wird, wenn die Fasern des Balkens ausdehnbar und compressibel sind,

$$xQ = \frac{bhf^2}{3ur} \text{ oder } rxQ = \frac{bhf^2}{3n}.$$

Es ist aber $MM' = f$ bei einerlei Balken irgend ein Theil von der Höhe $M'M'' = h$. Setzt man daher $f = mh$, so wird m

$$rxQ = \frac{m^2}{3n} bh^3.$$

Bei einerlei Balken muß der Ausdruck $\frac{m^2}{3n} bh^3$ einerlei Werth behalten oder eine beständige Größe seyn, weil bh^3 von den Dimensionen und $\frac{m^2}{3n}$ von der Materie des Balkens abhängt, welche hier durchgängig als gleichartig vorausgesetzt wird. Besonders ist der letztere Ausdruck $\frac{m^2}{3n}$ von der Elasticität, Biegsamkeit oder Steifigkeit der Materie abhängig. Setzt man daher

$$\frac{m^2}{3n} = e^2 \text{ und } \frac{m^2}{3n} bh^3 = E^2,$$

so kann man e^2 die absolute Elasticität oder Stei- e
figkeit der Materie des Balkens und E^2 die relative E
Elasticität des Balkens nennen. Alsdann ist

$$E^2 = e^2 bh^3 \text{ und}$$

$$rxQ = E^2$$

oder wenn man das Moment $xQ = M$ setzt M

$$rM = E^2.$$

Weil nun für einerlei Balken E^2 eine beständige Größe ist und für jeden andern Querschnitt die dazu gehörigen Werthe $r'M'$ ebenfalls $= E^2$ sind, so folgt hieraus, daß bei einem gebogenen Balken für jeden auf seiner Länge senkrechten Querschnitt, die Produkte aus dem Krümmungshalbmesser in das Moment der Kraft für diesen Querschnitt, einander gleich seyn müssen.

Uebrigens kann $M = xQ$ jede Summe von den Momenten mehrerer Gewichte bezeichnen, welche an dem Balken angebracht seyn mögen, weil auch für diesen Fall alle Folgerungen dieselben bleiben.

* §. 445.

Nimmt man an, daß der Balken bei einer anfänglich wagerechten Lage nur wenig gebogen sei, so
Taf. XV daß man ohne Nachtheil den Abstand $AP = x$, Fi-
Fig. 236. gur 236., der Länge AM gleich setzen kann, so wird,
a wenn $AM = a$ ist, auch $x = a$, also §. 443. (II) $aQ = \frac{\alpha b h f}{3n\lambda}$, oder wenn nach §. 444., $f = mh$ gesetzt wird

$$aQ = \frac{m\alpha}{3n\lambda} bh^2.$$

Damit die Länge λ der Faser um den Theil α ausgedehnt werde, sei p die für irgend einen Querschnitt β erforderliche Kraft. Alsdann ist §. 442. $\alpha = \frac{n\lambda p}{\beta}$ oder $\frac{\alpha}{n\lambda} = \frac{p}{\beta}$. Wird der Balken bei $m'm''$ befestigt und man nimmt die Kraft p so groß an, daß die Faser bei der Ausdehnung α zerreißen muß, so ist p die absolute Festigkeit für den Querschnitt β. Setzt man daher für den Querschnitt von einem Quadratzolle die absolute Festigkeit der Faser oder des Bal-
k kens $= k$, so verhält sich $\beta : 1 = p : k$ §. 430.

also ist $k = \frac{p}{\beta}$ daher $k = \frac{\alpha}{n\lambda}$.

Diesen Werth in die vorstehende Gleichung gesetzt giebt $aQ = \frac{1}{3} mk . bh^2$ und weil unter diesen Umständen die oberste Faser M'm' um die Länge α ausgedehnt wird, bei welcher sie zerreißt, so muß auch jede darunter befindliche Faser zerreißen oder der ganze Balken brechen. Es ist daher Q die respective Festigkeit des biegsamen und zugleich compressibelen Balkens AM und man findet

$$Q = \frac{1}{3} mk . \frac{bh^2}{a},$$

woraus folgt, daß die respective Festigkeit Q, außer den Abmessungen des Balkens, auch zugleich von seiner absoluten Festigkeit k und von der Biegsamkeit der Fasern abhängt, statt daß §. 440. nach der Hypothese des Galilei die respective Festigkeit nur durch die absolute Festigkeit und die Abmessungen des Balkens bestimmt wird.

Für einen andern Balken von derselben Materie sei Q' die respective Festigkeit, A seine Länge, B die Breite und H die Höhe, so ist ebenfalls

$$Q' = \frac{1}{3} mk . \frac{BH^2}{A},$$

daher verhält sich

$$Q : Q' = \frac{bh^2}{a} : \frac{BH^2}{A},$$

oder bei biegsamen Balken von einerlei Materie verhalten sich eben so wie bei unbiegsamen (§. 440.) die respectiven Festigkeiten wie ihre Breiten, wie die Quadrate der Höhen und umgekehrt wie die Längen.

§. 446.

Zusatz. Sind die Längen und Höhen zweier Balken einander gleich, aber ihre Breiten b und B von einander verschieden, so verhält sich, wenn beide Balken von einerlei Materie sind

$$Q : Q' = b : B$$

oder bei gleich langen und gleich hohen Balken verhalten sich die respectiven Festigkeiten wie ihre Breiten.

Wäre $b = B$ und $h = H$, so verhält sich

$$Q : Q' = A : a$$

oder bei gleich hohen und breiten Balken verhalten sich die respective Festigkeiten umgekehrt wie ihre Längen.

Ist endlich $a = A$ und $b = B$, so verhält sich

$$Q : Q' = h^2 : H^2$$

oder bei gleich langen und gleich breiten Balken verhalten sich die respectiven Festigkeiten wie die Quadrate ihrer Höhen.

Es wird daher ein doppelt so hoher Balken unter übrigens gleichen Umständen viermal so viel als bei der einfachen Höhe tragen. Ueberhaupt geht hieraus hervor, wie wichtig es sei, die Balken auf ihre schmale Seite, oder wie man sich ausdrückt, auf die hohe Kante zu legen (poser de champ), weil sie alsdann die größte Last zu tragen im Stande sind.

Will man übrigens die respective Festigkeit mehrerer Balken von einerlei Materie mit einander vergleichen, so darf man nur für jeden derselben den

Werth $\frac{bh^2}{a}$ suchen und in dem Verhältnisse wie diese Werthe größer gefunden werden, in demselben Verhältnisse haben auch die Balken mehrere respective Festigkeit.

1. Beispiel. Ein Balken ist so behauen worden, daß solcher 9 Zoll breit und 11 Zoll im Querschnitt hoch ist. Wie verhalten sich die respectiven Festigkeiten desselben, wenn solcher auf die breite oder schmale Seite gelegt wird.

Im ersten Fall ist $\frac{bh^2}{a} = \frac{11 \cdot 9 \cdot 9}{a}$ und die respective Festigkeit sei Q. Im zweiten Falle ist $\frac{BH^2}{A} = \frac{9 \cdot 11 \cdot 11}{a}$ (weil $A = a$ ist) und die respective Festigkeit sei Q′. Nun verhält sich

$Q : Q' = \frac{11 \cdot 9 \cdot 9}{a} : \frac{9 \cdot 11 \cdot 11}{a} = 9 : 11$ also ist

$Q = \frac{9}{11} Q'$ oder der Balken auf die breite Seite gelegt, hat nur $\frac{9}{11}$ so viel Festigkeit als auf der hohen Kante.

2. Beispiel. Man soll die respective Festigkeit eines 24 Fuß langen, 8 Zoll breiten und 9 Zoll hohen Balkens mit der eines 14 Fuß langen, 6 Zoll breiten und 7 Zoll hohen Balkens vergleichen.

Man setze die respective Festigkeit des ersten Balkens $= Q$, des zweiten Q′, so ist für den ersten Balken $\frac{bh^2}{a} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 9}{24} = 27$ und für den zweiten $\frac{BH^2}{A} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 7}{14}$ $= 21$, daher verhält sich

$Q : Q' = 27 : 21 = 9 : 7$ oder es ist

$Q' = \frac{7}{9} Q$, folglich wird die respective Festigkeit des zweiten Balkens $\frac{2}{9}$ geringer als die des ersten seyn.

3. Beispiel. Ein 8 Zoll breiter und 9 Zoll hoher Balken ist zureichend, eine gewisse Last zu tragen. Wie hoch wird eine dreizöllige Bohle seyn müssen, damit sie bei gleicher Länge mit dem Balken eben dieselbe respective Festigkeit hat.

Die Festigkeit des Balkens sei Q, der Bohle Q′ und die gesuchte Höhe der Bohle = x, so findet man

für den Balken $\frac{bh^2}{a} = \frac{8.9.9}{a}$

für die Bohle $\frac{BH^2}{A} = \frac{3.x^2}{a}$ also

$Q : Q' = \frac{8.9.9}{a} : \frac{3x^2}{a} = 8.9.9 : 3x^2.$

Aber Q = Q′ also $8.9.9 = 3x^2$, folglich die gesuchte Höhe der Bohle oder

$$x = \sqrt{8.9.3} = 6\sqrt{6} = 14{,}69 \text{ Zoll.}$$

§. 447.

Aufgabe. Aus einem runden Stück Bauholze den stärksten Balken zu schneiden.

Auflösung. Vorausgesetzt, daß der kleinste Querschnitt des Bauholzes kreisförmig sei oder daß man auf diesem Querschnitt den größt möglichen Kreis
Taf. XVI ADBE, Figur 237., beschrieben habe, so ziehe man
Fig. 237. in demselben den Durchmesser AB, theile solchen in drei gleiche Theile AC, CF, FB; ziehe CD und FE senkrecht auf AB, bis solche den Kreis in D und E schneiden. Verbindet man alsdann die Punkte A, D, B, E durch grade Linien, so giebt das Rechteck ADBE den Querschnitt des stärksten Balkens, wenn AE = BD zur Höhe angenommen wird.

Jeder breiterer oder schmälerer Balken, welcher sich aus diesem Kreise schneiden läßt, wird schwächer seyn.

Beweis. Man setze den Durchmesser $AB = c$, die gesuchte Breite $BE = x$, die Höhe $AE = y$, so muß für den stärksten Balken xy^2 den größtmöglichen Werth erhalten (§. 446.). Es ist aber $y^2 = c^2 - x^2$ also

$xy^2 = c^2x - x^3$. Damit dieser Ausdruck ein Größtes werde, muß

$\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} = c^2 - 3x^2 = 0$ und

$\frac{\partial^2(xy^2)}{\partial x^2} = - 6x$ eine negative Größe seyn.

Aus $c^2 - 3x^2 = 0$ findet man

$x^2 = \frac{1}{3}c^2$ also $y^2 = c^2 - x^2 = \frac{2}{3}c^2$ oder

$x = c\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $y = c\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Nun verhält sich nach der angenommenen Auflösung

$BF : BE = BE : BA$ oder

$\frac{1}{3}c : x = x : c$ daher ist $x^2 = \frac{1}{3}c^2$

wie erfordert wird.

Vergleicht man die Breite des Balkens mit dem Durchmesser oder der Diagonale seines Querschnitts, so verhält sich

$x : c = \sqrt{\frac{1}{3}} : 1 = 1 : \sqrt{3} = 1 : 1{,}7320508$ oder beinahe

$= 41 : 71$ oder $15 : 26$ oder $8 : 19$ oder $4 : 7$.

Vergleicht man die Breite mit der Höhe, so verhält sich

$x:y = c\sqrt{\tfrac{1}{3}} : c\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 1:\sqrt{2} = 1:1{,}4142136$ oder beinahe $= 70:99$ oder $12:17$ oder $5:7$.

§. 448.

Bei harten unbiegsamen Balken ist §. 440. die respective Festigkeit

$$Q = \tfrac{1}{2} k \frac{bh^2}{a}.$$

Sind die Fasern des Balkens ausdehnbar aber nicht compressibel, so wird $f = h$, also $m = 1$ daher

$$Q = \tfrac{1}{3} k \frac{bh^2}{a} \ [I]$$

und wenn die Fasern ausdehnbar und compressibel sind §. 445.

$$Q = \tfrac{1}{3} m k \frac{bh^2}{a}$$

wo m denjenigen Theil von der ganzen Höhe des Balkens anzeigt, welcher ausgedehnt und nicht zusammen gedrückt wird.

Wäre die Materie eines Balkens von der Beschaffenheit, daß eben so viel Kraft zur Ausdehnung als zur Zusammendrückung einer Fieber erfordert würde, so ist $f = \tfrac{1}{2} h$ also $m = \tfrac{1}{2}$ daher

$$Q = \tfrac{1}{6} k \frac{bh^2}{a}.$$

Für $m = \tfrac{3}{4}$ erhält man

$$Q = \tfrac{1}{4} k \frac{bh^2}{a}.$$

Könnte man für verschiedene Materien den Werth m genau bestimmen, so ließe sich alsdann mit Hülfe des Maaßes k von der absoluten Festigkeit die respective

Festigkeit eines Balkens angeben. Die Bestimmung von m hat aber ihre eigenen Schwierigkeiten, und da es überhaupt mißlich ist, aus der absoluten Festigkeit auf die respective zu schließen, weil nach der Mannigfaltigkeit der Materie beim Zerbrechen der Körper solche Umstände eintreten können, welche die Vergleichung mit der absoluten Festigkeit unsicher machen, so wird es zweckmäßiger seyn, Körper von einerlei Materie in Absicht ihrer respectiven Festigkeit nur unter sich zu vergleichen, ohne auf die Werthe von k und m Rücksicht zu nehmen. Es sei daher für irgend einen Balken A die Länge, B die Breite, H die Höhe und Q′ das Gewicht, welches am Ende des Balkens aufgehängt, ohne die geringste Verminderung im Stande ist, den Balken zu zerbrechen. Werden bei einem Balken von eben der Materie, die Größen a, b, h, Q in der bisherigen Bedeutung genommen, so verhält sich ganz allgemein §. 440

$$Q : Q' = \frac{bh^2}{a} : \frac{BH^2}{A} \text{ daher wird}$$

$$Q = \frac{AQ'}{BH^2} \cdot \frac{bh^2}{a}.$$

Ist nun der Werth $\frac{AQ'}{BH^2}$ aus zuverläßigen Versuchen bekannt, so kann man

$$\frac{AQ'}{BH^2} = N$$

setzen und erhält alsdann die respective Festigkeit

$$\text{(I)}\quad Q = N\frac{bh^2}{a}$$

und hieraus das Moment des Gewichts, welches den an seinem Ende befestigten Balken zerbricht

$$(\mathrm{II})\ aQ = Nbh^2$$

wo man N den Coeffizienten der respectiven Festigkeit oder den Brechungscoeffizienten einer Materie nennen kann. Uebrigens wird hier und in der Folge ohne weitere Erinnerung jederzeit vorausgesetzt, daß sich die Balken in einer wagerechten Lage befinden.

Hätte man Tafeln, in welchen die Werthe von N für verschiedene Materien enthalten wären, so könnte man daraus die respectiven Festigkeiten für jede Abmessung eines Balkens von dieser Materie finden. In der folgenden Abtheilung zu diesem Kapitel, §. 495., sind für mehrere Holzarten die Werthe von N angegeben, wenn sich die Abmessungen des Balkens auf rheinländische Zoll beziehen.

§. 449.

Taf. XV Fig. 235. Anstatt den Balken AE, Figur 235., an dem einen Ende bei DF in eine Wand MN zu befestigen, kann man sich den Balken, dessen Gewicht hier bei Seite gesetzt wird, nach der andern Seite verlängert und bei D hinlänglich unterstützt, vorstellen, wie Figur 238. Wird alsdann an dem andern Ende bei B ein Gewicht Q′ aufgehängt und es ist AD = a, BD = c und das Moment cQ′ = aQ, so bleibt der Balken auf der Stütze bei D im Gleichgewichte, und wenn die Kraft Q im Stande ist, den Balken bei D zu brechen, so wird die Kraft Q′, welche die

Taf. XVI Fig. 238.

Stelle

Stelle der Wand vertritt, eben das für das Ende BD bewirken. Der Punkt D leidet alsdann einen Druck $Q + Q'$ und man kann statt der Stütze D eine Kraft $P = Q + Q'$ noch oben anbringen, da alsdann der Bruch bei D noch eben so wie bei der angebrachten Stütze erfolgen muß. Denkt man sich den ganzen Balken umgedreht, so daß die Kräfte Q, Q', P nun nach entgegengesetzten Richtungen wirken, wie bei Figur 239., so wird das Ende A mit der Kraft Q und B mit der Kraft Q' von der Kraft P vertikal herunter gedrückt, und man kann statt der Kräfte Q und Q' bei A und B Stützen anbringen, so daß nunmehr durch die Kraft P der Bruch bei D eben so erfolgen muß, als wenn am Hebelsarme $AD = a$ die Kraft Q den Bruch des Balkens bewirkt. Fig. 239.

Nun ist §. 448. $Q = N \frac{bh^2}{a}$ und eben so $Q' = N \frac{bh^2}{c}$, daher $P = N \frac{bh^2}{a} + N \frac{bh^2}{c} = N \frac{bh^2(a+c)}{ac}$ weil $P = Q + Q'$ ist.

Setzt man die ganze Länge des Balkens oder $AB = l$ so ist $c = (l - a)$, daher findet man die respective Festigkeit eines an beiden Enden unterstützten Balkens, wenn das Gewicht zwischen den Unterstützungen angebracht wird, oder

(I) $P = N \frac{lbh^2}{a(l-a)}$.

Hängt das Gewicht P in der Mitte, so wird $l = 2a$ oder $a = \frac{1}{2} l$, daher

(II) $P = 4N \frac{bh^2}{l}$

wenn daher die Abmessungen eines an beiden Enden unterstützten und in seiner Mitte belasteten Balkens mit den Abmessungen eines andern Balkens von derselben Materie gleich sind, welcher aber an dem einen Ende in einer Wand befestigt und am andern Ende belastet ist, so wird ersterer in seiner Mitte viermal so viel Kraft zum Zerbrechen erfordern, als bei letzterm am Ende angebracht werden muß. (§. 448. I.)

Hier und in der Folge wird ohne weitere Erinnerung vorausgesetzt, daß die beiden Stützen am Ende des Balkens wagerecht liegen.

§. 450.

Das Zerbrechen eines Balkens kann nur dadurch bewirkt werden, daß durch die Biegung desselben die äußersten am meisten ausgedehnten Fibern eine solche Spannung erhalten, daß sie zerreißen müssen. Erfolgt dieser Bruch bei einigen Fibern, so ist bei unveränderter Kraft das Zerreißen der übrigen ein nothwendiger Erfolg, weil die Festigkeit des Balkens durch den Bruch einiger Fibern schon vermindert ist. Damit aber die Fibern eine gewisse Ausdehnung erhalten, so muß der Balken eine bestimmte Krümmung annehmen, und es giebt daher für jeden Balken eine gewisse Biegung, bei welcher derselbe brechen muß. Jede Krümmung läßt sich aber durch den zugehörigen Krümmungshalbmesser bestimmen; wenn daher bei zwei gleichen Balken von einerlei Materie der eine bei einer Biegung, zu welcher ein Krümmungshalbmesser r gehört, zerbricht, so kommt der andere so viel mehr in die Gefahr zu zerbrechen, je kleiner sein Krümmungshalbmesser wird, und je mehr sich derselbe dem Werthe r nähert. Ueberhaupt wenn ein belasteter Balken unter einer Biegung, deren Krümmungshalbmesser = r ist, zerbricht, so wird ein anderer gleicher von eben der Materie, aber auf eine verschiedene Art belasteter Balken ebenfalls zerbrechen müssen, wenn an irgend einer Stelle sein kleinster Krümmungshalbmesser = r wird.

Man denke sich einen an beiden Enden unterstützten Balken ohne Gewicht, welcher in seiner Mitte beschwert unter der Last P zerbricht, wenn im Augenblick des Bruchs sein Krümmnngshalbmesser = r wird. Auf einem andern gleichen Balken von derselben Materie werde aber eine Last P′ gleichförmig verbreitet, oder außer der Mitte aufgehängt, so wird der Balken nur dann brechen, wenn P′ so groß wird, daß dessen kleinster Krümmungshalbmesser mit r übereinkommt.

Ein Balken, dessen Länge = l ist, werde in seiner Mitte mit einem Gewichte P belastet, welches denselben zu zerbrechen im Stande ist, so findet man für diese Belastung (§. 119. Anhang) seinen kleinsten Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{4E^2}{lP}$$

wo E^2 die relative Elasticität bezeichnet (§. 444.).

Ein gleicher Balken werde an irgend einer andern Stelle mit dem Gewichte P′ belastet, dessen Aufhängepunkt von der Unterlage um die Weite a entfernt ist, so findet man unter dieser Voraussetzung, wenn r′ den kleinsten Krümmungshalbmesser dieses zweiten Balkens bezeichnet (§. 118. Anhang)

$$r' = \frac{lE^2}{a(l-a)P'},$$

Soll nun der zweite Balken ebenfalls brechen, so muß $r = r'$ seyn, dies giebt $\frac{4E^2}{lP} = \frac{lE^2}{a(l-a)P'}$ folglich

$$P' = \frac{l^2 P}{4a(l-a)}.$$

Ist nun a nicht größer als $\frac{1}{2}l$, so folgt hieraus, daß P′ desto größer werden muß, je kleiner a ist, oder es wird desto mehr Kraft erfordert, den Balken zu zerbrechen, je weiter die Belastung von der Mitte entfernt wird.

Für $a = \frac{1}{2}l$ ist $P' = P$ wie erfordert wird.
Für $a = \frac{1}{3}l$ ist $P' = \frac{9}{8}P = 1{,}125\ P$
Für $a = \frac{1}{4}l$ ist $P' = \frac{4}{3}P = 1{,}333\ P$
Für $a = \frac{1}{10}l$ ist $P' = \frac{25}{9}P = 2{,}777\ P$.

Eben diesen Ausdruck hätte man nach §. 449. erhalten können. Denn nach den angenommenen Bezeichnungen ist $P = 4N\frac{bh^2}{l}$ und $P' = N\frac{lbh^2}{a(l-a)}$ oder $\frac{lP}{4} = Nbh^2$ und $\frac{a(l-a)P'}{l} = Nbh^2$ daher $\frac{a(l-a)P'}{l} = \frac{lP}{4}$ oder $P' = \frac{l^2P}{4a(l-a)}$.

§. 451.

Wird eine Last auf einem Balken gleichförmig verbreitet, so wird die größte Ordinate der Krümmung oder derjenige Theil, um welchen der Balken von seiner ursprünglich graden Richtung abgebogen wird, nur $\frac{5}{8}$ von demjenigen Abstande betragen, welcher entsteht, wenn man diese Last in der Mitte des Balkens aufhängt (§. 122. Anhang).

Damit zwei übrigens ganz gleiche Balken, von welchen der eine in seiner Mitte mit einem Gewichte beschwert und der andere durchgängig auf seine ganze Länge gleichförmig belastet ist, einerlei Krümmung erhalten, oder sich in gleicher Gefahr zu zerbrechen befinden, so wird erfordert, daß nur die Hälfte der Last in der Mitte des einen Balkens aufgehängt wird, welche auf dem zweiten Balken verbreitet ist, weil nur in diesem Falle die kleinsten Krümmungshalbmesser einander gleich sind (§. 122. Anh.)

Daher wird in Absicht des Zerbrechens eine in der Mitte eines Balkens aufgehängte Last eben dasselbe bewirken, als wenn die doppelte Last auf dem Balken gleichförmig verbreitet wäre.

Es sei P′ die auf einem Balken gleichförmig verbreitete Last und P die zum Zerbrechen desselben in der Mitte erforderliche Kraft, so ist $P = \frac{1}{2} P'$. Aber §. 449. (II.) $P = 4N \frac{bh^2}{l}$, daher findet man die Last, che auf einem Balken gleichförmig verbreitet werden muß, um ihn zu zerbrechen, oder

$$P' = 8 N \frac{bh^2}{l}$$

Dieser wichtige Satz findet seine Anwendung, wenn Balken mit Getreide u. d. gl. beschwert sind. Auch folgt daraus, wenn man das Gewicht eines Balkens als Belastung mit in Rechnung bringen will, daß man sich sein halbes Gewicht in der Mitte vereinigt vorstellen kann, indem übrigens der Balken so angesehen wird, als wenn er in Absicht des Zerbrechens ohne Schwere wäre.

Hiedurch erhält man ein leichtes Mittel, das Gewicht der Balken, auf welches bisher nicht Rücksicht genommen worden, mit in Rechnung zu bringen, wenn es darauf ankommt, ihre respective Festigkeit zu bestimmen *).

g Man setze, daß g das spezifische Gewicht des Balkens bezeichne, so ist das absolute Gewicht desselben zwischen den Unterlagen $= g \gamma b h l$ (§. 74.) und

*) Gewöhnlich pflegt man sich das Gewicht eines an beiden Enden unterstützten Balkens in seinem Schwerpunkte vereinigt vorzustellen und daher so zu rechnen, als wenn eine Last, die dem ganzen Gewichte des Balkens gleich ist, in seiner Mitte aufgehängt wäre. Dies kann aber nur in Beziehung auf den Druck gelten, welchen die Unterlagen leiden, nicht aber in Bezug auf die Kraft, welche zum Zerbrechen des Balkens mit wirkt.

dies Gewicht wirkt eben so, als wenn in der Mitte des Balkens eine Last $\frac{1}{2} g\gamma bhl$ aufgehängt wäre. Ist nun P derjenige Theil der Kraft, welcher in der Mitte des Balkens angebracht, zum Zerbrechen noch erfordert wird, so erhält man §. 449. (II.) $P + \frac{1}{2} g\gamma bhl = 4N\frac{bh^2}{l}$ oder

$$\text{(I)}\ P = 4N\frac{bh^2}{l} - \frac{1}{2} g\gamma bhl.$$

Für $P = 0$ muß der Balken durch sein eigenes Gewicht zerbrechen, dies giebt $4N\frac{bh^2}{l} = \frac{1}{2} g\gamma bhl$ oder man findet die Länge

$$\text{(II)}\ l = 2\sqrt{\frac{2Nh}{g\gamma}}.$$

§. 452.

Zusatz. Wäre der Balken an dem einen Ende in einer Wand befestigt, und am andern Ende in der Entfernung a eine Last Q aufgehängt, so erhält der gebogene Balken an derjenigen Stelle, wo er an der Wand befestigt ist, seinen kleinsten Krümmungshalbmesser (§. 112. Anhang), oder er muß daselbst brechen, weil an dieser Stelle das Moment der Last Q am größten wird, vorausgesetzt, daß die Materie des Balken durchgängig gleich fest ist. Will man bei einem solchen Balken sein Gewicht als Belastung mit in Rechnung bringen, so wirkt dasselbe auf das Biegen nud Zerbrechen eben so, als wenn das halbe Gewicht des Balkens am Ende desselben als Last aufgehängt wäre. (§. 114. Anhang).

Bezeichnet daher g das spezifische Gewicht des Balkens, so ist sein absolutes Gewicht $= g\gamma bha$ (§. 74.) Wäre daher Q die noch fehlende Belastung, welche am Ende des Balkens das Zerbrechen bewirkt, so ist die gesammte Belastung am Ende des Balkens $= Q + \frac{1}{2} g\gamma bha$, also §. 448.

$Q + \frac{1}{2} g\gamma bha = N\frac{bh^2}{a}$, und hieraus erhält man mit Rücksicht auf das Gewicht des Balkens, die Last, welche zum Zerbrechen desselben an seinem Ende aufgehängt werden muß, oder

$$\text{(I)}\quad Q = N\frac{bh^2}{a} - \tfrac{1}{2} g\gamma bha.$$

Für $Q = 0$ wird der Balken durch sein eigenes Gewicht zerbrechen, und man findet alsdann die Länge

$$\text{(II)}\quad a = \sqrt{\frac{2Nh}{g\gamma}}.$$

§. 453.

Taf. XVI Fig. 240. Auf den beiden Stützen A, B, Figur 240., liege ein Balken EF. Die Entfernung AB sei $= l$; ferner $AE = AD = a$ und $BF = BD = l - a$. Soll nun der Balken bei A und B brechen, so wäre §. 448. bei E ein Gewicht $Q = N\frac{bh^2}{a}$ und

bei F ein Gewicht $Q' = N\frac{bh^2}{l-a}$,

erforderlich. Sollte außerdem noch der Balken an einer dritten Stelle bei D brechen, so wird zur Bewirkung dieses Bruchs §. 449. (I)

bei D ein Gewicht $P = N\frac{lbh^2}{a(l-a)}$ erfordert.

Werden statt der Stützen bei A und B Wände angebracht und in diese die Balken befestigt, so fallen die in E und F aufgehängten Gewichte Q, Q′ weg. Soll alsdann doch noch bei A ein Bruch erfolgen, so muß zur Bewirkung dieses Bruchs das Gewicht Q in D am Hebel AD = AE aufgehängt werden. Eben so wird zur Bewirkung des Bruchs bei B in D das Gewicht Q′ erfordert. Hängt man also an dem an beiden Enden AB eingemauerten Balken in D die drei Gewichte Q, Q′ und P auf, so wird der Balken an drei Stellen A, B, D brechen, und wenn R das Gewicht bezeichnet, welches diese drei Brüche bewirkt, so ist $R = Q + Q' + P$. R

Aber

$$Q+Q'+P=Nbh^2\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{l-a}+\frac{1}{a(l-a)}\right]=2N\frac{lbh^2}{a(l-a)},$$

daher findet man die Kraft, welche erfordert wird, einen an beiden Enden eingemauerten Balken an drei Stellen zu zerbrechen, oder

$$\text{(I)}\quad R = 2N\frac{lbh^2}{a(l-a)}.$$

Wäre der Balken auf seinen Unterstützungen nicht befestigt oder eingemauert, so wird nur halb so viel Kraft zum Zerbrechen desselben erfordert.

Bei der Bestimmung von R liegt die Bedingung zum Grunde, daß die Balkenenden so befestigt sind, daß sie nicht nachgeben können. So fern also diese Enden nachgeben, so wird auch R kleiner als

$2N\frac{lbh^2}{a(l-a)}$ und muß $= N\frac{lbh^2}{a(l-a)}$ werden, wenn sich die Balkenenden frei um die Stützen A, B drehen können.

Für $l = 2a$ oder wenn die Last R in der Mitte des Balkens hängt, erhält man

$$\text{(II)} \quad R = 8N\frac{bh^2}{l}.$$

§. 454.

Wäre der Balken nur auf der einen Stütze bei A,
Taf. XVI Figur 240., befestigt oder eingemauert, auf die andere B
Fig. 240. aber frei aufgelegt, so werden nur zwei Brüche bei A und D erfolgen, wenn in D eine hinlängliche Last aufgehängt wird. Diese sei R′, so ist zur Bewirkung beider Brüche $R' = Q + P = N\frac{bh^2}{a} + N\frac{lbh^2}{a(l-a)}$; man findet daher die Kraft, welche erfordert wird, den an einem Ende eingemauerten und am andern Ende frei liegenden Balken zu zerbrechen, wenn a den Abstand der Last vom eingemauerten Ende bezeichnet

$$\text{(I)} \quad R' = N\frac{bh^2(2l-a)}{a(l-a)}$$

und wenn $l = 2a$, also R in der Mitte aufgehängt wird

$$\text{(II)} \quad R' = 6N\frac{bh^2}{l}.$$

§. 455.

Zur Beurtheilung der Biegung eines an beiden Enden unterstützten und in der Mitte belasteten Balkens sei
U U die in seiner Mitte aufgehängte Last, bei welcher der
Taf XVI Balken so weit von seiner ursprünglich wagerechten Lage
Fig. 241. ACB, Figur 241., abgebogen ist, daß seine größte

Ordinate CD = u werde, so erhält man, wenn die übrigen Abmessungen des Balkens bekannt sind, und wie bisher bezeichnet werden (§. 119. II. Anhang) die respective Elasticität $E^2 = \frac{l^3 U}{48 u}$, oder weil §. 444. $E^2 = e^2 b h^3$ ist, so wird $e^2 b h^3 = \frac{l^3 U}{48 u}$ und man findet aus der Belastung U, den Abmessungen des Balkens und der absoluten Elasticität e^2 desselben, die größte Ordinate, oder

$$\text{(I)}\quad u = \frac{l^3 U}{48 e^2 b h^3}.$$

Unter übrigens gleichen Umständen verhalten sich daher die größten Biegungen zweier belasteter Balken, wie die Würfel ihrer Länge und umgekehrt wie ihre Breiten multiplizirt mit den Würfeln der Höhe.

Von zwei Balken, wovon der eine doppelt so lang als der andere ist, bei welchen aber alle übrige Umstände gleich sind, wird der doppelt so lange bei gleicher Belastung eine achtmal so große Biegung erhalten, als der einfache, weil sich die Biegungen unter übrigens gleichen Umständen, wie die Würfel der Balkenlängen verhalten.

Wäre bei einerlei Balken für die Belastung U′ die zugehörige Ordinate u′, so erhält man ebenfalls $u' = \frac{l^3 U'}{48 e^2 b h^3}$, daher verhält sich

$u : u' = U : U'$ oder es ist

$$\text{(II)}\quad u' = \frac{u U'}{U};$$

es verhalten sich daher bei einerlei Balken die größten Ordinaten wie die zugehörigen Belastungen.

Setzt man, daß in dem Augenblicke des Bruchs
w die größte Ordinate = w und das zugehörige Ge-
P wicht in der Mitte des Balkens = P werde, so findet man für u = w und U = P die größte Ordinate beim Bruch oder

$$\text{(III)}\ w = \frac{l^3 P}{48 e^2 b h^3}.$$

Es ist aber $P = 4N\frac{bh^2}{l}$ (§. 449.) und wenn dieser Werth statt P in die Gleichung gesetzt wird

$$\text{(IV)}\ w = \frac{Nl^2}{12 e^2 h};$$

daher verhalten sich bei Balken von einerlei Materie **die größten Ordinaten, bei welchen der Bruch erfolgt, wie die Quadrate der Längen und umgekehrt wie die Höhen der Balken.**

Sowohl die Werthe für e^2 als auch für $\frac{12e^2}{N}$ findet man in Bezug auf die bei uns gebräuchlichen Holzarten §. 494. angegeben.

§. 456.

Ein Balken sei nicht in seiner Mitte allein, sondern durchgängig auf seine ganze Länge gleichförmig belastet. Wird die Bezeichnung des vorigen §. beibehalten, und U ist die auf den ganzen Balken ausgebreitete Last, so findet man die zugehörige größte Ordinate (§. 122. Anhang)

$$\text{(I)}\ u = \frac{5 l^3 U}{384 e^2 b h^3}.$$

Wäre w die größte Ordinate, wenn der Balken unter der Belastung P zerbricht, so ist

$$\text{(II)}\quad w = \frac{5l^3P}{384e^2bh^3}.$$

Nach §. 451. ist $P = 8N\frac{bh^2}{l}$, daher findet man auch

$$\text{(III)}\quad w = \frac{5Nl^2}{48e^2h}.$$

Uebrigens lassen sich aus den hier gefundenen Gleichungen eben die Folgerungen wie im vorhergehenden §. ableiten.

* §. 457.

Wollte man denjenigen Theil von der Höhe eines Balkens kennen lernen, dessen Fasern ausgedehnt und nicht zusammen gedrückt werden, so wird erfordert, daß man die absolute Festigkeit k und den Brechungscoeffizienten N des Balkens kennt. Man setze Taf. XV Figur 236. die Höhe des Balkens oder $M'M'' = h$, Fig. 236. den Theil von der Höhe, auf welchen die Fasern ausgedehnt werden, oder $M'M = f$ und es sei $m.h = f$, so ist nach §. 445. $Q = \frac{1}{3}mk\frac{bh^2}{a}$ und nach §. 448. (I) $Q = N\frac{bh^2}{a}$ also $\frac{1}{3}mk = N$, folglich

$$\text{(I)}\quad m = \frac{3N}{k} \text{ oder } f = \frac{3N}{k}h.$$

Eben so kann man mit Hülfe der absoluten Elasticität e^2 eines Balkens finden, um wie viel eine Faser von gegebener Länge ausgedehnt werden muß, bis sie zerreißt, weil alsdann nur der Ausdehnungscoeffizient n bekannt seyn darf. Nach §. 444. ist $e^2 = \frac{m^2}{3n}$

oder $n = \frac{m^2}{3e^2}$, daher, wenn statt m der oben gefundene Werth gesetzt wird,

$$\text{(II)}\ n = \frac{3N^2}{e^2k^2}.$$

Bezeichnet nun λ die Länge einer Faser, welche um den Theil α vor dem Zerreißen ausgedehnt wird, und es ist k die Kraft, welche einen Körper, dessen Querschnitt einen Quadratzoll beträgt, zerreißt, so ist §. 442. (I) $\alpha = n\lambda k$ oder

$$\text{(III)}\ \alpha = \frac{3N^2\lambda}{e^2k}.$$

Wäre n' der Coeffizient der Zusammendrückung für dieselbe Materie des Balkens, so ist §. 443. $\frac{n'}{n} = \frac{(h-\mathfrak{h})^2}{\mathfrak{f}^2}$ oder es wird $\frac{n'}{n} = \frac{(1-m)^2}{m^2}$, weil $\mathfrak{f} = mh$, und man findet, wenn aus (I) statt m sein Werth gesetzt wird, das Verhältniß

$$\text{(IV)}\quad \frac{n'}{n} = \frac{(k-3N)^2}{9N^2}.$$

Auch findet man hieraus nach (II)

$$\text{(V)}\ n' = \frac{(k-3N)^2}{3e^2k^2}.$$

* B. Von der respectiven Festigkeit der prismatischen Körper überhaupt.

§. 458.

Weil alle Körper vor dem Brechen, wenn auch noch so wenig, ausgedehnt werden, so kann hier nicht die Rede davon seyn, die allgemeineren Untersuchungen über die respective Festigkeit auf die Galileische Hypothese §. 440. zu gründen, sondern da jede Materie als ausdehnbar und compressibel anzunehmen ist, so müßten diese Untersuchungen auch auf diese beiden Eigenschaften der Körper ausgedehnt werden. Allein die nachstehende Auseinandersetzung zeigte, wie weitläuftig die Rechnung wird, wenn man zugleich auf Compressibilität Rücksicht nimmt, und weil diese Eigenschaft denjenigen Körpern, welche hier untersucht werden, nur sehr wenig zukommt, so wird man solche um so mehr bei Seite setzen können.

Um zu übersehen, wie die Rechnung geführt werden müßte, wenn auf Ausdehnung und Zusammendrückbarkeit der Materie Rücksicht genommen wird, so sei das rechtwinklichte Dreieck ABD, Figur 242., der auf die Länge eines prismatischen Körpers senkrechte Querschnitt und die Seite AB vertikal. Man setze AB $= h$, BD $= b$ und es gehe die Horizontale ON durch diejenige Reihe von Fiebern, welche weder ausgedehnt noch zusammen gedrückt werden, so müssen sämmtliche Fibern der Fläche OBDN eine Ausdehnung und der Fläche ONA eine Zusammendrückung erleiden. Die noch unbekannte Größe BO sei $= f$; ferner NN′ und DE mit AB parallel, so verhält sich Taf. XVI Fig. 242.

$AB : BD = AO : ON$ oder $h : b = h - f : ON$ also ist

$ON = \frac{b(h-f)}{h}$.

Im Punkte B werde eine Faser von der Länge λ um den Theil α ausgedehnt, so ist, wenn n den Coeffizienten für die Ausdehnbarkeit der Materie des Körpers bezeichnet, nach §. 443. die Summe der Pressungen, welche das Rechteck ONN'B leidet,

$$= \frac{\alpha . ON . f}{2 n \lambda}.$$

Oder weil $ON = \frac{b(h-f)}{h}$ und §. 445. das Maaß der absoluten Festigkeit oder $k = \frac{\alpha}{n\lambda}$, so ist auch die Summe der Pressungen gegen ONN'B

$$= \frac{kbf(h-f)}{2h}.$$

Zur Bestimmung der Pressungen gegen NN'D sei MQ mit NN' parallel. Man setze $NM = x$, so verhält sich $AB : BD = DE : EN$ oder $h : b = f : EN$, also ist $EN = \frac{bf}{h}$; $BD : AB = NM : MP$ oder $b : h = x : MP$, also ist $MP = \frac{hx}{b}$. Wächst $NM = x$ um $Mm = \partial x$ und man zieht mq mit MQ parallel, so sei für irgend einen Punkt v in MQ, $Mv = u$, $vv'' = \partial u$ und das Elementarrechteck $vv'v'' = vv' . \partial u = \partial x \partial u$. Die Kraft, mit welcher dieses Rechteck ausgedehnt werde, sei q, so ist §. 443.

$q = \frac{\alpha . vv'}{n \lambda f} u \partial u = \frac{k . vv'}{f} u \partial u$, also die Pressungen auf den Streifen $Pvv'p =$

$\frac{k . vv'}{f} \int u \partial u = \frac{k . vv'}{2f} u^2 + \text{const}$. Für $u = MP = \frac{hx}{b}$ verschwinden die Pressungen, also ist $o = \frac{k . vv'}{2f} . \frac{h^2 x^2}{b^2} +$ const. Daher $\frac{k . vv'}{f} \int u \partial u = \frac{k . vv'}{2f} \left(u^2 - \frac{h^2 x^2}{b^2}\right)$. Für $u = MQ = f$ findet man die Summe aller Pressungen auf den Streifen $PQqp =$

$\frac{k . vv'}{2f}$

$\frac{k.vv'}{2f}\left(f^2 - \frac{h^2x^2}{b^2}\right) = \frac{k\partial x}{2b^2f}(b^2f^2 - h^2x^2)$.

Hieraus erhält man die Summe der Pressungen auf die Fläche NPQN' =

$\frac{k}{2b^2f}\int\partial x(b^2f^2 - h^2x^2) = \frac{k}{2b^2f}(b^2f^2x - \frac{1}{3}h^2x^3)$

wo keine Constante hinzu kommt, weil das Integral mit $x = 0$ verschwindet. Für $x = NE = \frac{bf}{h}$ erhält man die Summe der Pressungen auf die ganze Fläche NN'D =

$$\frac{k}{2b^2f}\left(b^2f^2\frac{bf}{h} - \frac{1}{3}h^2\frac{b^3f^3}{h^3}\right) = \frac{kbf^2}{3h}.$$

Es ist daher die Summe aller Pressungen, durch welche die Fasern der Fläche ONDB ausgedehnt werden

$\frac{kbf(h-f)}{2h} + \frac{kbf^2}{3h} = \frac{kbf(3h-f)}{6h}$.

Nun sei n' der Koeffizient, durch welchen die Zusammendrückbarkeit der Fasern des Körpers ausgedrückt werde, und man nehme für das Dreieck ONA, $OR = x$; ziehe RS mit OA parallel und setze $Rt = w$. Wächst $OR = x$ um $Rr = \partial x$ und man zieht rs mit RS parallel, so ist die Fläche des Elementarrechtecks $tt't'' = tt'.\partial w = \partial x\partial w$.

Ferner verhält sich

$BD : AB = NR : RS$ oder weil $NR = NO - OR$

$b : h = \frac{b(h-f)}{h} - x : RS$ daher ist

$RS = \frac{b(h-f) - hx}{b}$.

Nach §. 443. ist alsdann die Kraft, mit welcher dieses Rechteck zusammengedrückt wird, oder

$q' = \frac{\alpha.tt'}{n'\lambda f} w\partial w$, also der Druck auf den Streifen $Rtt'r =$

$\frac{\alpha.tt'}{n'\lambda f}\int w\partial w = \frac{\alpha.tt'}{2n'\lambda f} w^2$ wo keine Constante hinzu kommt.

Für $w = RS = \frac{b(h-f)-hx}{b}$ findet man die Summe der Pressungen auf den ganzen Streifen $RSsr =$

$$\frac{\alpha.tt'}{2n'\lambda f}\left(\frac{b(h-f)-hx}{b}\right)^2 = \frac{\alpha\partial x}{2n'\lambda b^2 f}\left[b^2(h-f)^2-2bh(h-f)x+h^2x^2\right]$$

Wird dieser Ausdruck integrirt, so findet man die Summe aller Pressungen gegen die Fläche ORSA =

$$\frac{\alpha}{2n'\lambda b^2 f}\left[b^2(h-f)^2x-bh(h-f)x^2+\tfrac{1}{3}h^2x^3\right].$$

Für $x = ON = \frac{b(h-f)}{h}$ erhält man den gesammten Druck auf die Fläche ONA =

$$\frac{\alpha}{2n'\lambda b^2 f}\left[\frac{b^3(h-f)^3}{h}-\frac{b^3(h-f)^3}{h}+\frac{b^3(h-f)^3}{3h}\right] = \frac{\alpha b(h-f)^3}{6n'\lambda hf}$$

und weil nach §. 443. dieser Druck eben so groß seyn muß als die Summe der Pressungen auf die Fläche ONDB, so erhält man

$$\frac{\alpha b(h-f)^3}{6n'\lambda hf} = \frac{kbf(3h-f)}{6h} \text{ oder } \frac{\alpha}{n'\lambda k} = \frac{f^2(3h-f)}{(h-f)^3}.$$

Um nun mittelst dieser Gleichung den Werth von f durch bekannte Größen zu bestimmen, so ist §. 445.

$\frac{\alpha}{n\lambda} = k$ also $\frac{\alpha}{\lambda k} = n$, daher

$$\frac{n}{n'} = \frac{f^2(3h-f)}{(h-f)^3}$$

und weil §. 457., $\frac{n}{n'} = \frac{9N^2}{(k-3N)^2}$ ist, also durch solche Größen ausgedrückt wird, welche hier als bekannt angesehen werden, so kann aus dem vorstehenden Ausdruck der

Werth f, durch die Auflösung einer kubischen Gleichung gefunden werden. Ist f bekannt, so darf man nur die Momente von den Pressungen auf die beiden Flächen ONDB und ONA addiren und auf eine ähnliche Art wie §. 443. verfahren, um die respective Festigkeit zu finden.

Wäre $n = n'$ also $(h-f)^3 = f^2(3h-f)$, so findet man für diesen Fall $f = \frac{1}{3}h$.

§. 459.

Aus dem vorhergehenden §. kann man sich hinlänglich überzeugen, daß nicht ohne die größte Weitläuftigkeit die respective Festigkeit eines prismatischen Körpers bestimmt werden kann, wenn man zugleich auf die Compressibilität der Fasern Rücksicht nehmen will. Nur bei den Balken konnte man deshalb sehr einfache Resultate erhalten, weil die Querschnitte derselben Rechtecke sind. Wird demnach bei den folgenden Untersuchungen vorausgesetzt, daß die Materie der Körper so hart sei, daß man ihre Zusammendrückbarkeit nicht in Rechnung bringen darf, und daß man nur lediglich auf ihre Ausdehnbarkeit Rücksicht zu nehmen hat, so sei ABCA, Figur 243., ein Querschnitt von einem prismatischen Körper, dessen Gestalt durch eine Gleichung zwischen den senkrechten Coordinaten $AP = x$ und $PQ = y$ bestimmt werde. Ferner sei $AB = h$ vertikal und die größte Abscisse $AE = b$. Wächst nun $AP = x$ um $Pp = \partial x$ und wird pq mit PQ parallel gezogen, so ist, wenn für irgend einen Punkt v in PQ, $Pv = u$ und $vv'' = \partial u$ gesetzt wird, der Inhalt des Elementarrechtecks $vv'v'' = vv'.\partial u = \partial x.\partial u$. Taf. XVI Fig. 243.

Im Punkte B der Brechungsebene ABC werde eine Faser von der Länge λ um den Theil α ausgedehnt, und es sei q die Kraft, welche zur Ausdehnung der Fasern des Rechtecks $vv'v''$ in Bezug auf die Umdrehungsaxe AE erfordert wird, so erhält man, wie §. 443., wenn hier h den Abstand der am meisten ausgedehnten Fiber von der Drehungsaxe anzeigt,

$q = \frac{\alpha . vv'}{n\lambda h} u\partial u$, oder man findet, weil §. 445., $\frac{\alpha}{n\lambda} = k$ ist, die Kraft zur Ausdehnung der Fläche $vv'v''$, oder

$q = \frac{k.vv'}{h} u\partial u$ also das Moment $= Pv.q = \frac{k.vv'}{h} u^2\partial u$.

Das Integral hievon giebt die Summe der Momente für den Streifen $Pvv'p =$

$\frac{k.vv'}{3h}(u^3 + C)$ wo die Constante C so bestimmt werden muß, daß die Summe der Momente für $u = PR$ verschwindet.

Für $u = y$ erhält man das Moment für den ganzen Streifen PQqp $=$

$\frac{k.vv'}{3h}(y^3 + C) = \frac{k\partial x}{3h}(y^3 + C)$.

Das Integral von diesem Ausdruck giebt die Summe der Momente für die Fläche ARQB

$$= \frac{k}{3h} \int (y^3 + C)\partial x$$

und wenn nach vollendeter Integration $b = AE$ statt x gesetzt wird, so erhält man die Summe der Momente für die ganze Fläche ABC, welche alsdann, wenn a den Abstand der Last Q von der Brechungsebene ABC bezeichnet, dem Momente aQ gleich seyn muß, daher

$$\text{(I)}\ aQ = \frac{k}{3h} \int (y^3 + C) \partial x \text{ für } x = b.$$

Dieser Ausdruck gilt für ein an dem einen Ende befestigtes und am andern Ende belastetes Prismen.

Wäre das Prismen an beiden Enden unterstützt, und in der Mitte mit dem Gewichte P belastet, so ist wenn l die Länge des an beiden Enden unterstützten Prismen bezeichnet, für $l = a$; $P = 4Q$ (§. 449.) oder $\frac{1}{4} P = Q$, daher erhält man, wenn diese Werthe in die Gleichung (I) gesetzt werden,

$$\text{(II)}\ lP = \frac{4k}{3h} \int (y^3 + C) \partial x \text{ für } x = b.$$

Bei den folgenden Untersuchungen wird man stets voraussetzen, daß das Prismen an dem einen Ende befestigt und am andern Ende belastet ist, weil man leicht daraus für die übrigen Fälle das Erforderliche ableiten kann.

§. 460.

Aufgabe. Der Querschnitt eines prismatischen Körpers bilde irgend ein Dreieck; man soll die respective Festigkeit des Körpers finden.

Auflösung. Die Seite AB, Figur 244., von dem Dreieck ABC, welches den Querschnitt bildet, sei auf der wagerechten Umdrehungsaxe AE senkrecht und PQ, CE, mit AB parallel. Man setze AB = h, AE = b, EC = c; AP = x, PQ = y. Nun verhält sich Taf XVI Fig. 244.

$AE : EC = AP : PR$ oder

$b : c = x : PR$ also ist $PR = \frac{cx}{b}$

$EA : EP = AB : RQ$ oder

$b : b-x = h : RQ$ also ist $RQ = \frac{bh-hx}{b}$.

Im Integral $\int(y^3+C)\partial x$ wird nach §. 459. die Constante C dadurch bestimmt, daß $y^3 + C = 0$ wird, wenn man $y = PR = \frac{cx}{b}$ setzt. Es ist daher

$\frac{c^3x^3}{b^3} + C = 0$ also $C = -\frac{c^3x^3}{b^3}$.

Aber $PQ = PR + RQ$ daher

$$y = \frac{cx}{b} + \frac{bh-hx}{b} = \frac{bh-(h-c)x}{b} \text{ und}$$

$$y^3 + C = \frac{b^3h^3 - 3b^2h^2(h-c)x + 3bh(h-c)^2x^2 - (h-c)^3x^3 - c^3x^3}{b^3}$$

hieraus findet man

$$\int(y^3+C)\partial x = \frac{1}{b^3}\left[b^3h^3x - \tfrac{3}{2}b^2h^2(h-c)x^2 + bh(h-c)^2x^3 \right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{4}(h-c)^3x^4 - \tfrac{1}{4}c^3x^4\right]$$

wo keine Constante hinzu kommt, weil das Integral mit $x = 0$ verschwindet. Für $x = b$ erhält man

$$\int(y^3+C)\partial x = \frac{bh}{4}(c^2 + ch + h^2)$$

folglich findet man, wenn eine von den Seiten des Dreiecks, welches die Brechungsebene bildet, vertikal steht, die respective Festigkeit §. 459. (I) oder

$$\text{(I)} \quad Q = \frac{kb}{12a}(c^2 + ch + h^2).$$

Fällt die Seite AB des Dreiecks ABC, Figur 245., nicht in die Vertikallinie, welche durch A geht, so sei irgend eine andere Linie AB′ auf der wagerechten Umdrehungsaxe EF senkrecht. Man setze $AE = b$, $EC = c$, $AF = d$, $FB = e$ und $AB' = h$. Ist nun die respective Festigkeit für die ganze Brechungsebene $ABC = Q$, für das Dreieck $AB'C = Q'$ und für $AB'B = Q''$ also $Q = Q' + Q''$, so findet man aus (I)

$Q' = \frac{kb}{12a}(c^2 + ch + h^2)$ und eben so

$Q'' = \frac{kd}{12a}(e^2 + eh + h^2)$ daher ist $Q' + Q''$ oder die respective Festigkeit für die Brechungsebene ABC, Figur 245., wenn keine Seite des Dreiecks vertikal ist, und das Dreieck auf der Spitze steht,

(II) $Q = \frac{k}{12a}\left[bc^2 + de^2 + (bc + de)h + (b + d)h^2\right]$,

oder weil sich verhält $b + d : e - c = b : h - c$, so findet man $h = \frac{be + cd}{b + d}$. Wird dieser Ausdruck statt h in die gefundene Gleichung gesetzt und $b + d = \beta$ angenommen, so erhält man auch

(III) $Q = \frac{k\beta}{12a}(c^2 + ce + e^2)$.

Wäre $EA = AF$ also $b = d$, so erhält man aus (II)

(IV) $Q = \frac{kb}{12a}\left[c^2 + e^2 + (c + e)h + 2h^2\right]$.

Für $b = d$ und $c = e$ ist

(V) $Q = \frac{kb}{6a}(c^2 + ch + h^2)$.

Für $b + d = \beta$ und $c = e = h$ oder für jedes Dreieck, dessen oberste Seite wagerecht liegt, erhält man aus (II)

(VI) $Q = \frac{k\beta h^2}{4a}$

und endlich für $b + d = \beta$ und $c = o$, $e = o$, oder wenn die eine Seite des Dreiecks in die Umdrehungsaxe fällt, wird

$$(\text{VII})\ Q = \frac{k\beta h^2}{12a}.$$

§. 461.

1. Zusatz. Der Querschnitt des prismatischen Körpers sei ein gleichseitiges Dreieck, bei welchem jede Seite $= A$ ist.

Steht eine Seite des Dreiecks auf der wagerechten Umdrehungsaxe vertikal, so ist $b = \frac{1}{2} A \sqrt{3}$, $c = \frac{1}{2} A$ und $h = A$ daher (I)

$$(\text{I})\ Q = \frac{7\sqrt{3}}{96} \cdot \frac{kA^3}{a} = 0{,}1262954 \frac{kA^3}{a}.$$

Wird die oberste Seite des Dreiecks wagerecht, und die eine Spitze fällt in die Umdrehungsaxe, so ist $b + d = A$, $c = e = h = \frac{1}{2} A \sqrt{3}$ daher (VI)

$$(\text{II})\ Q = \frac{3kA^3}{16a} = 0{,}1875 \frac{kA^3}{a}.$$

Fällt eine Seite des Dreiecks in die wagerechte Umdrehungsaxe, so ist $b = d = \frac{1}{2} A$, c und $e = o$, $h = \frac{1}{2} A \sqrt{3}$ also (VII)

$$(\text{III})\ Q = \frac{kA^3}{16a} = 0{,}0625 \frac{kA^3}{a}.$$

Den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite A ist, findet man $= \frac{1}{4} A^2 \sqrt{3}$, also ist die Seite eines Quadrats, welches mit dem Dreiecke gleichen Inhalt hat, $= \frac{1}{2} A \sqrt[4]{3}$, folglich die respective Festigkeit, wenn der Querschnitt vom Prismen ein Quadrat ist, welches mit dem gleichseitigen Dreiecke gleichen Inhalt hat, bei unveränderter Länge §. 448. [1] oder

$$(IV)\ Q = \frac{\sqrt[4]{27}}{24} \cdot \frac{kA^3}{a} = 0{,}09'49795 \frac{kA^3}{a}.$$

Hieraus folgt, daß wenn bei einem prismatischen Körper die Brechungsebene ein gleichseitiges Dreieck ist, und man setzt das Dreieck mit seiner Spitze so auf die Drehungsaxe, daß die oberste Seite des Dreiecks wagerecht wird, so ist seine respective Festigkeit dreimal so groß, als wenn man eine Seite des Dreiecks in die Brechungsebene fallen läßt.

Ein prismatischer Körper von derselben Länge, dessen Brechungsebene ein Quadrat bildet, welches gleichen Inhalt mit dem gleichseitigen Dreieck hat, und bei welchem die eine Seite in die Drehungsaxe fällt, besitzt weniger respective Festigkeit, als wenn der Querschnitt ein Dreieck in den zuerst angeführten Lagen wäre, und mehr als bei dem Dreiecke, dessen Seite in die Drehungsaxe fällt.

§. 462.

2. Zusatz. Der Querschnitt des prismatischen Körpers sei ein rechtwinklichtes Dreieck, dessen beide Katheten A und B sind.

Stellt man das Dreieck so, daß eine Spitze in die wagerechte Drehungsaxe fällt, und die Seite B mit dieser Axe parallel ist, so wird $b = B$, $c = A$ und $h = A$, also 460. (I)

$$(I)\ Q = \frac{kBA^2}{4a}.$$

Fällt die Seite B des Dreiecks in die Drehungsaxe, so ist $b = B$, $c = o$, $h = A$, daher §. 460. (VII)

(II) $Q = \frac{kBA^2}{12a}$.

Für einen Balken von derselben Länge, dessen Höhe $= A$ und Breite $= B$ ist, erhält man §. 448. [I]

(III) $Q = \frac{kBA^2}{3a}$.

Wenn man daher einen Balken nach der Länge so schneidet, daß die Durchschnittsfläche durch einerlei Diagonale der Querschnitte geht, so wird die obere Hälfte des Balkens dreimal so viel respective Festigkeit als die untere haben. Diese Festigkeit der obern Hälfte verhält sich zur Festigkeit des ganzen Balkens wie 3 zu 4, und in Absicht der untern Hälfte wie 1 zu 4.

Eben dieselben Verhältnisse erhält man, wenn das rechtwinklichte Dreieck gleichschenklicht wird. Alsdann ist der Querschnitt des Balkens ein Quadrat und in den Ausdrücken für Q verwandelt sich der Factor BA^2 in A^3.

§. 463.

3. Zusatz. Wird das rechtwinklichte Dreieck, welches den Querschnitt vom Prismen bildet, so gestellt, daß die Hypothenuse desselben vertikal steht, so kann man zwei Fälle unterscheiden:

Wenn die Seite A in die untere Spitze des Dreiecks an die Drehungsaxe fällt, so ist $b = \frac{AB}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$,

$c = \frac{A^2}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$ und $h = \sqrt{(A^2+B^2)}$, und man findet nach §. 460. (I) die respective Festigkeit

(I) $Q = \frac{k}{12a} AB. \frac{3A^4+3A^2B^2+B^4}{\sqrt{(A^2+B^2)^3}}$.

Fällt hingegen die Seite B an die Drehungsaxe, so wird $b = \frac{AB}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, $c = \frac{B^2}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$ und $h = \sqrt{(A^2+B^2)}$, daher

(II) $Q = \frac{k}{12a} AB. \frac{A^4+3A^2B^2+3B^4}{\sqrt{(A^2+B^2)^3}}$.

Wäre A die Höhe und B die Breite eines Balkens von gleicher Länge, so ist der Inhalt seines Querschnitts A.B und wenn man diesen so legt, daß die Diagonale seines Querschnitts vertikal steht, so ist seine respective Festigkeit so groß, wie die Summe der beiden vorstehenden Ausdrücke, daher findet man die respective Festigkeit eines Balkens, dessen Diagonale vertikal steht, oder

(III) $Q = \frac{k}{6a} AB. \frac{2A^4+3A^2B^2+2B^4}{\sqrt{(A^2+B^2)^3}}$.

Fällt die Seite B des Balkens in die wagerechte Drehungsaxe, so ist §. 462. (III)

$$Q = \frac{kA^2B}{3a}.$$

Wenn daher einerlei Balken einmal auf die hohe Kante und dann so gelegt wird, daß die Diagonale seines Querschnitts vertikal steht, so verhalten sich die respectiven Festigkeiten für beide Fälle, wie

$2A : \frac{2A^4 + 3A^2B^2 + 2B^4}{\sqrt{(A^2+B^2)^3}}$, oder wie $2A\sqrt{(A^2+B^2)^3}$

$: 2A^4 + 3A^2B^2 + 2B^4$.

Ist der Querschnitt des Balkens ein Quadrat, so wird $A = B$. Legt man alsdann den Balken einmal so, daß eine von den Seiten seines Querschnitts in die wagerechte Drehungsaxe fällt und dann so, daß seine Diagonale auf der Drehungsaxe senkrecht steht, so verhalten sich in beiden Fällen die respectiven Festigkeiten, wie

$$4A^4\sqrt{2} : 7A^4 = 4\sqrt{2} : 7 = 0{,}808122 : 1.$$

§. 464.

Aufgabe. Die respective Festigkeit eines Cylinders zu finden.

Taf. XVI Fig. 246. Auflösung. Der Halbmesser $CA = r$, Figur 246. vom Querschnitte des Cylinders stehe auf der wagerechten Drehungsaxe AE senkrecht. Man setze $AP = x$ und die auf AE senkrechte Ordinate $PQ = y$, so ist, wenn CD mit AE parallel gezogen wird, $RS = \sqrt{(CR^2 - CS^2)} = \sqrt{(r^2 - x^2)} = SQ$, daher $PQ = PS + SQ$, oder $y = r + \sqrt{(r^2 - x^2)}$ und $PR = r - \sqrt{(r^2 - x^2)}$.

Um den Werth C im Integral $\int (y^3 + C)\, \partial x$ nach §. 459. zu bestimmen, muß $y^3 + C = 0$ werden, wenn man $y = PR = r - \sqrt{(r^2 - x^2)}$ setzt, daher ist $C = -[r - \sqrt{(r^2 - x^2)}]^3$, folglich

$$y^3 + C = [r + \sqrt{(r^2 - x^2)}]^3 - [r - \sqrt{(r^2 - x^2)}]^3$$
$$= 6r^2\sqrt{(r^2 - x^2)} + 2\sqrt{(r^2 - x^2)^3}$$
$$= 2(4r^2 - x^2)\sqrt{(r^2 - x^2)}.$$

Es ist aber P. A. S. 161 und S. 145. n. I.

$$\int \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{(r^2 - x^2)} + \tfrac{1}{2} r^2 \arcsin \frac{x}{r}$$

$$\int x^2 \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)} = \frac{2x^3 - xr^2}{8} + \frac{r^4}{8} \arcsin \frac{x}{r}$$

wo keine Constanten hinzu kommen, weil mit $x = 0$ auch die Integrale verschwinden müssen. Für $x = r$ erhält man die Integrale für den ganzen Halbkreis ABDA, und es wird

$\arcsin \frac{x}{r} = \arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$, daher für diesen Fall

$$\int \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)} = \tfrac{1}{4} \pi r^2 \text{ und } \int x^2 \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)} = \tfrac{1}{16} \pi r^4$$

und man findet

$$\int (y^3 + C) \partial x = 8 r^2 . \tfrac{1}{4} \pi r^2 - 2 . \tfrac{1}{16} \pi r^4 = \frac{15 \pi r^4}{8}$$

daher ist §. 459. I. die respective Festigkeit für den Halbkreis ABDA $= \frac{k}{3ah} . \frac{15 \pi r^4}{8} = \frac{5 \pi k r^4}{8ah}$, oder, weil hier $h = 2r$ ist, $= \frac{5 \pi k r^3}{16 a}$, und wenn man die respective Festigkeit für die ganze Kreisfläche ADBA $= Q$ setzt, so erhält man die respective Festigkeit des Cylinders.

$$\text{(I) } Q = \frac{5\pi}{8} . \frac{kr^3}{a} = 1{,}9634954 . \frac{kr^3}{a} \text{ (*)}.$$

Für ein Quadrat, welches um die Kreisfläche beschrieben wird, ist bei unveränderter Länge, die respective Festigkeit §. 448. [I].

$$\text{(II) } Q = \frac{8}{3} \frac{kr^3}{a}$$

(*) Herr Girard findet (Traité analyt. de la résistance etc. p. 23) statt des hier gegebenen Koeffizienten die Zahl 1,966349, welches daher entsteht, weil das Integral mittelst Reihen gesucht worden, obgleich eine directe Integration Statt findet.

Daher verhält sich die respective Festigkeit eines Cylinders zu der eines Balkens von gleicher Länge, dessen Querschnitt ein um die Kreisfläche des Cylinders beschriebenes Quadrat ist, wie

$$1{,}9634954 \text{ zu } \frac{8}{3} \text{ oder wie } 0{,}7363108 : 1$$

oder beinahe wie 14 zu 19.

Bleibt $2r$ die Seite von dem Querschnitte des quadratförmigen Balkens, und man setzt bei einem Cylinder, welcher mit dem Balken gleichen Querschnitt hat, den Halbmesser $= \varrho$, so ist der Flächeninhalt $4r^2 = \pi\varrho^2$ also $\varrho = \frac{2r}{\sqrt{\pi}}$. Man findet daher die respective Festigkeit des Balkens $= \frac{8}{3}\frac{kr^3}{a}$ und die des Cylinders von gleicher Länge $= \frac{5\pi}{8}\frac{k\varrho^3}{a} = \frac{5}{\sqrt{\pi}}\frac{kr^3}{a}$. Es verhält sich daher die respective Festigkeit eines Balkens, dessen Länge und quadratförmiger Querschnitt der Länge und dem Querschnitte eines Cylinders gleich ist, zu der respectiven Festigkeit dieses Cylinders, wie

$$\frac{8}{3} : \frac{5}{\sqrt{\pi}} = \frac{8}{3} : 2{,}820948 = 1 : 1{,}057856.$$

§. 465.

Tf. XVI. Fig. 246. Aufgabe. Die respective Festigkeit eines halben Cylinders zu finden.

Auflösung. Wird der Querschnitt des halben Cylinders so gestellt, daß der Durchmesser desselben auf der Drehungsaxe senkrecht steht, so ist nach §. 464.

$$\text{(I)}\quad Q = \frac{5\pi}{16}\cdot\frac{kr^3}{a} = 0{,}9817477\,\frac{kr^3}{a}$$

Nimmt man hingegen an, daß der Durchmesser DF, Figur 246, vom Querschnitte DAFD wagerecht liegt, und daß die wagerechte Drehungsaxe AE den Umfang des Querschnitts in A berührt, so ist $AP = x$, $PS = y = r$ und wie §. 464. $PR = r - \sqrt{(r^2 - x^2)}$ und $C = -[r - \sqrt{(r^2 - x^2)}]^3$, daher

$$y^3 + C = r^3 - [r - \sqrt{(r^2 - x^2)}]^3 = (4r^2 - x^2)\sqrt{(r^2 - x^2)} - 3r(r^2 - x^2).$$

Nun ist $\int 3r(r^2 - x^2)\partial x = 3r^3 x - r x^3$, wo keine Constante hinzu kommt. Für $x = r$ erhält man

$$\int 3r(r^2 - x^2)\partial x = 2r^4.$$

Ferner ist nach §. 464. für $x = r$

$$\int (4r^2 - x^2)\sqrt{(r^2 - x^2)}\partial x = \frac{15\pi r^4}{16}, \text{ daher}$$

$$\int (y^3 + C)\partial x = \frac{15\pi r^4}{16} - 2r^4 = \frac{15\pi - 32}{16} r^4,$$

folglich die respective Festigkeit für den Quadranten ACDA (§. 459.) $= \frac{k}{3ah} \cdot \frac{15\pi - 32}{16} \cdot r^4 = \frac{15\pi - 32}{48} \cdot \frac{kr^3}{a}$, weil hier $h = r$ ist.

Für beide Quadranten ACD und ACF, oder für den Halbkreis ADFA erhält man daher die respective Festigkeit

$$\text{(II)} \quad Q = \frac{15\pi - 32}{24} \cdot \frac{kr^3}{a} = 0{,}6301621 \cdot \frac{kr^3}{a}$$

Fällt der Durchmesser von dem Querschnitte des halben Cylinders in die Drehungsaxe, so sei DFB, Fig. 246. dieser Querschnitt, DF die Drehungsaxe, $CS = x$, $SQ = y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$; (§. 464). Nun ist hier nach §. 461. $PR = 0$, also $C = 0$, daher für $x = r$

$$\int (y^3 + C)\partial x = \int (r^2 - x^2)\sqrt{(r^2 - x^2)}\,\partial x = r^2 \cdot \tfrac{1}{4}\pi r^2 - \tfrac{1}{16}\pi r^4 = \tfrac{3}{16}\pi r^4.$$

Für den Quadranten CDBC ist daher die respective Festigkeit $= \frac{k}{3ah} \cdot \frac{3\pi r^4}{16} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{kr^3}{a}$, und man findet für beide Quadranten oder für den ganzen Halbkreis DFBF, dessen Halbmesser in die wagerechte Drehungsaxe fällt

$$\text{(III)}\ Q = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{kr^3}{a} = 0{,}3926966\ \frac{kr^3}{a}.$$

Wird daher ein halber Cylinder so gelegt, daß von seinem Querschnitte

1. der Durchmesser senkrecht auf der Drehungsaxe steht, oder
2. der Durchmesser parallel mit der Drehungsaxe ist, oder
3. dieser Durchmesser in die Drehungsaxe fällt, so verhalten sich in diesen drei Fällen die respectiven Festigkeiten des halben Cylinders, wie

$$0{,}9817477 : 0{,}6301621 : 0{,}3926966.$$

§. 466.

Aufgabe. Die respective Festigkeit einer cylindrischen Röhre zu finden.

Tf.XVI. Fig.247. Auflösung. Es sei $AC = r$, Figur 247. der Halbmesser des äußern und $CA' = \varrho$ der Halbmesser des innern Kreises oder der Höhlung und AP die wagerechte Drehungsaxe. Berechnet man die respective Festigkeit eines Cylinders, welcher mit der Höhlung einerlei Querschnitt hat und zieht diese von der Festigkeit

keit eines Cylinders ab, dessen Halbmesser r ist, so erhält man dadurch die Festigkeit der Röhre. Man setze $AP = x$, $PQ = y$, so ist $RS = SQ = \sqrt{(\varrho^2 - x^2)}$, also $PQ = y = r + \sqrt{(\varrho^2 - x^2)}$ und $PR = r - \sqrt{(\varrho^2 - x^2)}$. Zur Bestimmung des Integrals (§. 459.) $\int (y^3 + C)\,\partial x$ erhält man hier $C = -[r - \sqrt{(\varrho^2 - x^2)}]^3$, daher

$$y^3 + C = [r + \sqrt{(\varrho^2 - x^2)}]^3 - [r - \sqrt{(\varrho^2 - x^2)}]^3$$
$$= 2(3r^2 + \varrho^2 - x^2)\sqrt{(\varrho^2 - x^2)}.$$

Nun ist §. 464. für $x = \varrho$

$$\int \partial x \sqrt{(\varrho^2 - x^2)} = \tfrac{1}{4}\pi\varrho^2 \text{ und } \int x^2 \partial x \sqrt{(\varrho^2 - x^2)}$$
$$= \tfrac{1}{16}\pi\varrho^4, \text{ daher}$$

$$\int (y^3 + C)\,\partial x = 2(3r^2 + \varrho^2) \cdot \tfrac{1}{4}\pi\varrho^2 - 2 \cdot \tfrac{1}{16}\pi\varrho^4$$
$$= \frac{3\pi\varrho^2}{8}(4r^2 + \varrho^2),$$

daher §. 459. (I) die respective Festigkeit für den Halbkreis

$$A'DB'A' = \frac{k}{3ah} \cdot \frac{3\pi\varrho^2}{8}(4r^2 + \varrho^2) = \frac{\pi k \varrho^2}{16ra}(4r^2 + \varrho^2),$$

weil hier $h = AB = 2r$ der Abstand der am meisten ausgedehnten Fiber von der Umdrehungsaxe ist (§. 459.) Für die ganze Kreisfläche $A'DB'D'A'$, deren Halbmesser $= \varrho$ und deren Mittelpunkt von der Umdrehungsaxe AP um die Weite r entfernt ist, erhält man daher die respective Festigkeit

$$\text{(I)}\quad Q = \frac{\pi k \varrho^2}{4ah}(4r^2 + \varrho^2) = \frac{\pi k \varrho^2 (4r^2 + \varrho^2)}{8ra}$$

weil hier $h = AB = 2r$ ist.

Für den Cylinder, dessen Querschnitt ABA ist, findet man die respective Festigkeit §. 464. (I).

$$= \frac{5\pi k r^3}{8a}$$

daher, wenn von diesem Ausdrucke der vorstehende abgezogen wird, so erhält man die respective Festigkeit der Röhre, oder

$$\text{(II)}\ Q = \frac{\pi k}{8ar}(5r^4 - 4r^2\varrho^2 - \varrho^4) = \frac{\pi k}{8ar}(r^2 - \varrho^2)(5r^2 + \varrho^2).$$

Wäre $\varrho = \frac{1}{2}r$, so findet man

$$Q = \frac{63\pi k r^3}{128a}$$

Für einen vollen Cylinder von gleicher Masse mit der Röhre, wäre der Halbmesser $\sqrt{(r^2 - \varrho^2)} = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$ und seine respective Festigkeit §. 464. (I)

$$\frac{5\pi k}{8a} \cdot \frac{3r^3\sqrt{3}}{8} = \frac{15\pi k r^3\sqrt{3}}{64a}$$

Daher verhält sich für $\varrho = \frac{1}{2}r$, die respective Festigkeit der Röhre zu der eines gleich langen vollen Cylinders, welcher eben so viel Masse enthält, wie

$$\frac{63}{128} : \frac{15\sqrt{3}}{64} = 21 : 10\sqrt{3} = 1 : 0{,}824786.$$

Anmerkung. Nach H. Girard (a. a. O. §. 45. p. 25.) soll $Q = \frac{k}{3ar}\, 5{,}899043 \cdot (r^4 - r^2\varrho^2 - \varrho^4)$ seyn. Von der Unrichtigkeit dieses Ausdrucks kann man sich sogleich dadurch überzeugen, wenn man $r = \varrho$ setzt. Alsdann erhält man für Q eine negative Größe, statt daß in diesem Falle $Q = 0$ seyn muß.

§. 467.

Taf. XVI Fig. 248. Aufgabe. Die respective Festigkeit eines Kettenringes zu finden.

Auflösung. Die centrische Linie des Ringes AEBF, Figur 248. sei ein Kreis, und jeder auf die centrische Linie senkrechte Querschnitt wie AA′, BB′, eine Kreisfläche. Soll der Ring zerbrechen und nicht zerreißen, wenn in F nach der verlängerten Richtung des Halbmessers CF die Kraft P wirkt und der Ring am entgegengesetzten Ende bei E gehalten wird, so werde durch C die Linie AB auf EF senkrecht gezogen; alsdann fällt die Drehungsaxe in den Punkt A, und AA′, BB′ sind Brechungsebenen. Man setze den Halbmesser $CA = CB = CF = c$ und den Halbmesser der Querschnitte AA′, $BB' = \varrho$, so ist §. 466. I. die respective Festigkeit für die Brechungsebene $BB' = \frac{\pi k \varrho^2}{4ah}(4r^2 + \varrho^2)$, wo $a = AC = c$ den Abstand der Kraft P von der Drehungsaxe, $h = AB = 2c$ den Abstand der am meisten ausgedehnten Fiber von der Drehungsaxe und $r = 2c - \varrho$ den Abstand des Mittelpunkts der Fläche BB′ von eben dieser Axe bezeichnet. Der obige Ausdruck verwandelt sich daher in $\frac{\pi k \varrho^2}{8c^2}[4(2c - \varrho)^2 + \varrho^2]$. Ferner erhält man nach §. 464. die respective Festigkeit für die Brechungsebene $AA' = \frac{5\pi k \varrho^4}{4ah}$, und weil hier a und h bei einerlei Körper dieselben Werthe c und 2c behalten, so verwandelt sich der gefundene Ausdruck in $\frac{5\pi k \varrho^4}{8c^2}$.

Beide Ausdrücke zusammen genommen geben die respective Festigkeit des ganzen Ringes, oder

$$P = \frac{\pi k \varrho^2}{8c^2}\left[4(2c-\varrho)^2+\varrho^2\right] + \frac{5\pi k \varrho^4}{8c^2}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{\pi k \varrho^2}{4c^2}(8c^2 - 8c\varrho + 5\varrho^2).$$

Soll der Ring nicht zerbrechen, sondern zerreißen, so sei K seine absolute Festigkeit. Alsdann erhält man §. 430.

$$K = 2\pi k \varrho^2.$$

Die respective Festigkeit P wird am größten oder kleinsten, wenn $\frac{8c^2-8c\varrho+5\varrho^2}{c^2}$ ein Größtes oder Kleinstes wird. Setzt man diesen Werth $= z$, so ist, wenn man differentiirt und c veränderlich nimmt

$$\frac{\partial z}{\partial c} = \frac{8c\varrho - 10\varrho^2}{c^3} \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial c^2} = \frac{30\varrho^2 - 16c\varrho}{c^4}.$$

Aus $\frac{8c\varrho - 10\varrho^2}{c^3} = 0$ erhält man $c = \frac{5}{4}\varrho$ und $c = \infty$. Der erste Werth in $\frac{\partial^2 z}{\partial c^2}$ gesetzt, giebt eine positive und der zweite eine negative Größe, daher wird P ein Kleinstes für $c = \frac{5}{4}\varrho$ und ein Größtes für $c = \infty$. Da nun c nie kleiner als 4ϱ werden kann und für $c = \infty$, die respective Festigkeit oder $P = 2\pi k \varrho^2$ wird, so folgt hieraus, daß die absolute Festigkeit eines Ringes allemal größer als die respective ist, und daß beide nur einander gleich werden können, wenn der Ring unendlich weit wäre.

Unter übrigens gleichen Umständen wird daher jeder Ring, welcher weiter ist, auch mehr respective Festigkeit besitzen.

Herr Ide (Syst. d. Mechanik, 1 Th. §. 300. S. 382.)

erhält in Absicht der Weite der Kettenglieder ein entgegengesetztes Resultat. Die Begründung dieses Resultats läßt indessen einige Zweifel zurück.

Beispiel. Ein Kettenglied von geschmiedetem Eisen ist $\frac{1}{4}$ Zoll dick und im Lichten $\frac{3}{4}$ Zoll weit; man soll die respective Festigkeit desselben ohne Rücksicht auf das übrige Gewicht der Kette finden.

Hier ist $\varrho = \frac{1}{4}$ und $c = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$ Zoll.

Nach §. 436. ist $k = 71300$; also die respective Festigkeit oder

$$P = \frac{\pi \cdot 71300 \cdot \frac{1}{16}}{4 \cdot \frac{49}{64}} \left(8 \cdot \frac{49}{64} - 8 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{16}\right) = 12962{,}8$$

Pfund.

Daher wird dieser Ring mit Sicherheit eine Last von 6481 Pfund tragen können.

§. 468.

Herr Quantin hat im Jahr 1789 mit der §. 432. angeführten Maschine einen Versuch über die Festigkeit einer $1\frac{1}{2}$ Fuß langen Kette angestellt, von welcher jedes Glied 4 Linien Dicke hatte und innerhalb, oder im Lichten 8 Linien weit war. Die Kette war aus schlesischem Eisen geschmiedet und zerbrach bei einer Spannung von 10160 berliner Pfund.

Vergleicht man diesen Versuch mit dem gefundenen allgemeinen Ausdruck für die Festigkeit einer Kette, indem nach §. 432. $k = 78140$ gesetzt wird, so erhält man, weil hier $\varrho = \frac{1}{6}$ Zoll und $c = \frac{2}{3}$ Zoll ist,

$$P = \frac{\pi \cdot 78140 \cdot 101}{2304},$$

oder, wenn man die Rechnung durch Logarithmen ausführt

$$\begin{array}{lcl} \text{Log } 101 & = & 2{,}0043214 \\ \text{Log } 78140 & = & 4{,}8928734 \\ \text{Log } \pi & = & \underline{0{,}4971498} \\ & & 7{,}3943446 \\ \text{Log } 2304 & = & \underline{3{,}3624825} \\ & & 4{,}0318421 = \log 10760{,}73. \end{array}$$

Es ist daher $P = 10760{,}7$ Pfund, statt daß der Versuch $P = 10160$ giebt.

* C. Von der respectiven Festigkeit solcher Körper, deren Querschnitte ungleich sind.

Erster Fall. Wenn man die Körper an dem einen Ende befestigt.

§. 469.

Bei prismatischen Körpern, welche mit dem einen Ende in eine Wand befestigt sind, und am andern Ende belastet werden, widersteht zwar jeder senkrechte Querschnitt des Körpers mit gleicher Kraft, weil aber an derjenigen Stelle des Körpers, wo er aus der Wand tritt, welche hier die Grundfläche des Körpers heißen soll, das Gewicht, welches das Zerbrechen bewirkt, die größte Gewalt ausübt, so muß die Brechungsebene unter allen Querschnitten des prismatischen Körpers am weitesten vom Aufhängepunkt der Last entfernt seyn. Sind dagegen nicht alle Querschnitte eines Körpers einander gleich, so kann man fragen, wo sich der Querschnitt befindet, auf dessen Trennung die mindeste Belastung am Ende des Körpers verwandt werden muß, und dieser Querschnitt ist alsdann offenbar die Brechungsebene, weil der Körper an dieser Stelle die mindeste respective Festigkeit besitzt, und daselbst brechen muß.

Die Brechungsebene eines jeden Körpers wird daher gefunden, wenn man untersucht, für welchen Querschnitt des Körpers das zum Zerbrechen erforderliche Gewicht oder seine respective Festigkeit den kleinsten Werth erhält.

Setzt man voraus, daß die Wand, in welcher der Körper befestigt ist, vertikal steht, und daß alle mit der vertikalen Wand parallele Querschnitte des Körpers Rechtecke bilden, deren senkrechte Abstände von einander zugleich die Länge des Körpers angeben, ist überdies die Grundlinie dieser Rechtecke wagerecht und man setzt, daß für irgend einen Querschnitt des Körpers

x die Grundlinie

y die Höhe und

z den Abstand des Querschnitts von dem Punkte, an welchem die Last wirkt, bezeichnet, so ist, wenn das eigene Gewicht des Körpers nicht in Rechnung kommt, das zum Zerbrechen erforderliche Gewicht §. 448.

$$Q = N\frac{xy^2}{z}.$$

Nun ist N für einerlei Materie des Körpers eine unveränderliche Größe, daher wird Q desto kleiner, je kleiner $\frac{xy^2}{z}$ ist und wenn $\frac{xy^2}{z}$ seinen kleinst möglichen Werth erhält, so ist auch das hienach bestimmte Gewicht Q das kleinste, welches das Zerbrechen des Körpers nur allein an demjenigen Querschnitte bewirken kann, welchem die Abmessungen x, y, z entsprechen, wodurch die Brechungsebene gefunden ist.

Um daher die Brechungsebene eines jeden an dem einen Ende befestigten und am andern Ende belasteten Körpers, dessen Querschnitte Rechtecke sind, zu finden, darf man nur untersuchen, wo der Ausdruck $\frac{xy^2}{z}$ den kleinst möglichen Werth erhält. An dieser Stelle befindet sich die Brechungsebene.

Für einen Balken sei b die Breite, h die Höhe und a seine Länge, so ist für denselben $xy^2 = bh^2$ eine unveränderliche Größe, also

$$\frac{xy^2}{z} = \frac{bh^2}{z}$$

wo nur noch z veränderlich ist. Der Ausdruck $\frac{bh^2}{z}$ wird offenbar desto kleiner, je größer z wird, also für $z = a$ am kleinsten, daher ist die Brechungsebene eines Balkens um die Länge a von der Last entfernt; welches auch schon bekannt ist.

Es läßt sich übrigens leicht einsehn, daß man den kleinsten Werth für $\frac{xy^2}{z}$ erhält, wenn man die geringsten Werthe für diesen Ausdruck aufsucht und darunter den kleinsten nimmt. Weil aber die brauchbaren geringsten Werthe zwischen $z = 0$ und $z = a$ fallen müssen, da weder negative Werthe für z noch solche, welche größer als a ausfallen, statthaft sind, so muß man, wenn für $z > a$ ein Kleinstes gefunden wird, den Werth $z = a$ ebenfalls in Betrachtung ziehen. Dasselbe gilt, wenn z für das Kleinste des Ausdrucks $\frac{xy^2}{z}$ negativ gefunden wird, alsdann muß zur Auffindung des kleinstmöglichen Werths auf $z = 0$ Rücksicht genommen werden.

§. 470.

Aufgabe. Der Körper ACD, Figur 249., sei mit seiner Fläche AC in der vertikalen Wand YZ befestigt und am andern Ende bei DF mit einem Gewichte Q belastet. Die Seitenfläche BCFE ist ein Trapez und der Fläche ADG gleich und parallel; man soll die schwächste Stelle dieses Körpers oder seine Brechungsebene suchen. Taf XVI Fig. 249.

Auflösung. Man setze $AB = DE = b$, $BC = h$, $EF = DG = c$ und $BE = a$. Wäre nun der mit der Grundfläche AC parallele Querschnitt MP die Brechungsebene, also $MN = PQ = x$, $PN = y$, $DM = z$, so ist $x = b$. Ferner verhält sich

$a : h - c = z : y - c$ also ist $y = \frac{ac + (h-c)z}{a}$ folglich §469.

$$\frac{xy^2}{z} = \frac{b[ac + (h-c)z]^2}{az} = \frac{b}{a}\left[\frac{a^2c^2}{z} + 2ac(h-c) + (h-c)^2 z\right]$$

Wird das erste Differential $= 0$ gesetzt, so erhält man

$$-\frac{a^2c^2}{z^2}\partial z + (h-c)^2\partial z = 0 \text{ also } z = \frac{ac}{h-c}.$$

Wird nochmals differenziirt, so findet man $\frac{2a^2c^2}{z^4}$ welches eine positive Größe wird, daher giebt $z = \frac{ac}{h-c}$ für $\frac{xy^2}{z}$ ein Kleinstes. Für die Brechungsebene ist daher der Abstand $DM = z = \frac{ac}{h-c}$ und

ihre Höhe $PN = y = 2c$.

Hienach findet man die geringste Kraft, welche zum Zerbrechen des Körpers erfordert wird, oder

$Q = N\frac{xy^2}{z} = N\,\frac{4bc(h-c)}{a}$.

Wäre $c = \frac{1}{4}h$, so wird $z = \frac{1}{3}a$ und $y = \frac{1}{2}h$ also

$$Q = N\frac{3bh^2}{4a}.$$

§. 471.

Aufgabe. Die Brechungsebene einer abgekürzten Pyramide zu bestimmen.

Auflösung. Die abgekürzte Pyramide AF, Figur 250., sei bei AC befestigt und in J das Gewicht Q aufgehängt. Man setze

Taf. XVI Fig. 250.

$AB = b$, $BC = h$, $DE = \frac{1}{2}b$, $EF = \frac{1}{2}h$; für die Brechungsebene MP, $MN = x$, $NP = y$ und die Abstände $JG = a$, $JH = z$, so verhält sich

$a : \frac{1}{2}b = z : x - \frac{1}{2}b$ also ist $x = \frac{b(a+z)}{2a}$

$a : \frac{1}{2}h = z : y - \frac{1}{2}h$ also ist $y = \frac{h(a+z)}{2a}$ folglich

$\frac{xy^2}{z} = \frac{bh^2}{8a^3}\cdot\frac{(a+z)^3}{z}$, und wenn das Differential des veränderlichen Theils dieses Ausdrucks $= 0$ gesetzt wird

$\frac{3(a+z)^2z-(a+z)^3}{z^2} = 0$ oder $3z-(a+z) = 0$ daher $z = \frac{1}{2}a$.

Für das zweite Differential dieses Ausdrucks erhält man

$\frac{(a+z)(2a^2-2az-z^2)}{z^3}$ und für $z = \frac{1}{2}a$ findet man $+ 9$, daher wird für $z = \frac{1}{2}a$ ein Kleinstes erhalten und es ist:

$z = \frac{1}{2}a$; $x = \frac{3}{4}b$; $y = \frac{3}{4}h$.

Die Brechungsebene liegt daher in der Mitte der gegebenen abgekürzten Pyramide.

Für die respective Festigkeit findet man

$$Q = \frac{27}{32} N \frac{bh^2}{a} = 0{,}84375 N \frac{bh^2}{a}.$$

Wollte man $z = 0{,}4a$, also kleiner annehmen, so wird $x = 0{,}7b$ und $y = 0{,}7h$ daher

$$Q = 0{,}8575 N \frac{bh^2}{a}.$$

Für $z = 0{,}6a$, ist $x = 0{,}8b$ und $y = 0{,}8h$ daher

$$Q = 0{,}8533 N \frac{bh^2}{a}$$

wie erfordert wird.

§. 472.

Es läßt sich einsehn, daß man die schwächsten Stellen oder Brechungsebenen derjenigen Körper, bei welchen die senkrechten Durchschnitte Dreiecke, Kreisflächen oder irgend eine andere Figur bilden, auf eine ähnliche Art wie im vorhergehenden finden kann. Wollte man zugleich das Gewicht des Körpers, welcher zerbrochen werden soll, mit in Rechnung bringen, so sei M das Moment gegen die Brechungsebene von demjenigen Theile des Körpers, welcher abbricht. Wird nun zur Bewirkung des Bruchs am Ende desselben noch eine Last Q erfordert und man setzt mit Beibehaltung der übrigen bisherigen Bezeichnung, voraus, daß die Brechungsebene ein Rechteck ist, so erhält man wie §. 451.

$$Q + M = N \frac{xy^2}{z} \text{ also } Q = N \frac{xy^2}{z} - M.$$

An demjenigen Querschnitte des Körpers, wo Q seinen kleinsten Werth erhält, muß derselbe die geringste respective Festigkeit haben, und daselbst vor allen andern Querschnitten zerbrechen. Man erhält daher den Abstand der rechtwinklichten Brechungsebene vom Aufhängepunkt der Last Q, wenn für den Ausdruck

$$N \frac{xy^2}{z} - M$$

der kleinst mögliche Werth gesucht und daraus z entwickelt wird.

Wären alle Querschnitte des gegebenen Körpers Kreisflächen und der Halbmesser der Brechungsebene = y, so ist §. 464. (I)

$$Q + M = \frac{5\pi k}{8} \cdot \frac{y^3}{z} \text{ also } Q = \frac{5\pi k}{8} \cdot \frac{y^3}{z} - M.$$

Wird daher für den Ausdruck

$$\frac{5\pi k}{8} \cdot \frac{y^3}{z} - M$$

der kleinste Werth gesucht, so kann mit Hülfe desselben z bestimmt werden.

Ein ähnliches Verfahren wird bei jedem anders gestalteten Körper beobachtet.

§. 473.

TafXVI Fig 251. Aufgabe. Die Brechungsebene des prismatischen Keils ACED, Figur 251., zu finden, wenn auf das Gewicht dieses Körpers Rücksicht genommen wird.

Auflösung. Man setze $AD = BE = a$, $AB = ED = b$, $BC = h$, und wenn MNP die Brechungsebene ist, $DM = EN = z$, $MN = x = b$, $NP = y$, so verhält sich $a : h = z : y$, also ist $y = \frac{hz}{a}$.

Jeder Kubikfuß von der Materie des Keils wiege G Pfund, so ist das Gewicht des Körpers MNPED $= \frac{bzy}{2} \cdot G = \frac{bhz^2}{2a} \cdot G$ und sein Moment gegen die Fläche $MP = \frac{1}{3} z \cdot \frac{bhz^2}{2a} G$, daher

$$M = \frac{Gbh}{6a} z^3, \text{ folglich}$$

$$N\frac{xy^2}{z} - M = \frac{Nbh^2}{a^2} z - \frac{Gbh}{6a} z^3.$$

Wird das Differential dieses Ausdrucks $= 0$ gesetzt, so erhält man

$$\frac{Nbh^2}{a^2} - \frac{Gbh}{2a} z^2 = 0, \text{ daher } z = \sqrt{\frac{2Nh}{aG}}.$$

Das zweite Differential wird negativ, daher erhält man in diesem Falle für $N\frac{xy^2}{z} - M$ einen größten und keinen kleinsten Werth, welches doch nach den Bedingungen der Aufgabe gesucht wird. Es giebt daher für den Körper ACED zwischen A und D, oder innerhalb desselben keine Brechungsebene; man kann aber aus dem gefundenen größten Werthe folgern, daß die Brechungsebene an das Ende desselben in die Fläche ABC fällt, welche in der festen vertikalen Wand befestigt ist.

§. 474.

Aufgabe. Die Brechungsebene eines Kegels zu finden, wenn auf das Gewicht desselben Rücksicht genommen wird.

Taf. XVI Fig. 252. Auflösung. Von der Grundfläche AB, Figur 252. sei der Halbmesser $AC = r$ und der Abstand $CD = a$, ferner, wenn MP die Brechungsebene ist, der Halbmesser $MN = y$ und $ND = z$, so ist das Gewicht des Kegels $DMP = \frac{\pi y^2 z}{3} G$ und sein Moment gegen die Fläche $MP = \frac{1}{4} z \cdot \frac{\pi y^2 z}{3} G$ (§. 130.) oder $M = \frac{\pi G}{12} z^2 y^2$. Es verhält sich aber $a : r = z : y$, daher ist $y = \frac{rz}{a}$, folglich

$$M = \frac{\pi G r^2}{12 a^2} z^4.$$

Ferner ist $\frac{5\pi k}{8} \cdot \frac{y^3}{z} = \frac{5\pi k r^3}{8 a^3} z^2$, also §. 472.

$$\frac{5\pi k y^3}{8z} - M = \frac{\pi r^2}{4a^2}\left(\frac{5kr}{2a} z^2 - \frac{G}{3} z^4\right).$$

Das Differential dieses Ausdrucks $= 0$ gesetzt, giebt: $\frac{5kr}{a} z - \frac{4G^3}{3} z^3 = 0$, und daraus $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15kr}{Ga}}$.

Das zweite Differential ist $\frac{5kr}{a} - \frac{4G}{9} z^2 = \frac{10}{3}\frac{kr}{a}$, also eine positive Größe, daher erhält man ein Kleinstes, wenn $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15kr}{Ga}}$ angenommen wird. Hieraus findet man

den Halbmesser $y = \frac{r}{2a}\sqrt{\frac{15kr}{Ga}}$,

und die zum Zerbrechen erforderliche Kraft

$$Q = \frac{75\pi k^2 r^4}{64 G a^3}.$$

§. 475.

So wie die respective Festigkeit für jeden Querschnitt eines Körpers verschieden seyn kann, so lassen sich Körper denken, bei welchen für alle ihre Querschnitte die respective Festigkeit gleich groß ist, in welchem Falle für einerlei Gewicht Q, alle Querschnitte Brechungsebenen sind. Ein solcher Körper, welcher für alle mit der Grundfläche (§. 469.) parallele Querschnitte gleiche respective Festigkeit hat, soll hier ein Körper von gleichem **Widerstande** (*d'égale résistance*) heißen.

Wäre Q die respective Festigkeit von der Grundfläche eines Körpers, und R der allgemeine Ausdruck von der respectiven Festigkeit für jeden andern mit der Grundfläche parallelen Querschnitt, so muß, wenn der Körper von gleichem Widerstande seyn soll, für alle Querschnitte

$$R = Q$$

seyn. Es kommt also nur darauf an, wenn die Abmessungen der Grundfläche gegeben sind, daraus Q zu bestimmen, und alsdann R so anzunehmen, daß durchgängig $R = Q$ bleibt.

Sind die Querschnitte des Körpers durchgängig Rechtecke, die Abmessungen der Grundfläche b, h; des unbestimmten Querschnitts x, y, der Abstand des Aufhängepunkts der Last Q von der Grundfläche $= a$, und von dem unbestimmten Querschnitte $= z$, so findet man §. 448. wenn auf das Gewicht des Körpers nicht

Rücksicht genommen wird, $Q = N\frac{bh^2}{a}$; $R = N\frac{xy^2}{z}$, daher erhält man, weil $R = Q$ seyn muß, wenn die Querschnitte des Körpers durchgängig Rechtecke sind, deren untere Seiten wagerecht liegen, $\frac{xy^2}{z} = \frac{bh^2}{a}$, oder weil es darauf ankommt, die Abmessungen des unbestimmten Querschnitts für jeden besondern Fall anzugeben;

$$\text{(I)}\ xy^2 = \frac{bh^2}{a} z.$$

Eben diesen Ausdruck erhält man, wenn sämmtliche Querschnitte des Körpers Dreiecke sind, deren eine wagerechte Seite in oder über die Umdrehungsaxe fällt (§. 460. VI. VII.); wo alsdann b, x die wagerechten Seiten und h, y die Höhen der Dreiecke bezeichnen.

Wenn sämmtliche Querschnitte des Körpers Kreisflächen bilden und man setzt den Halbmesser der Grundfläche $= r$ und den Halbmesser eines jeden andern Querschnitts $= y$, so ist §. 464. (I).

$$A = \frac{5\pi k}{8} \cdot \frac{r^3}{a} \text{ und } R = \frac{5\pi k}{8} \cdot \frac{y^3}{z}, \text{ daher}$$

$$\text{(II)}\ y^3 = \frac{r^3}{a} \cdot z.$$

Auf eine ähnliche Art verfährt man bei jeder andern Gestalt der Querschnitte.

Aus dem allgemeinen Ausdruck (I) geht hervor, daß wenn die Querschnitte des Körpers Dreiecke oder Rechtecke bilden, so muß für $z = 0$ auch $xy^2 = 0$ werden. Dies kann geschehen, wenn allein $x = 0$, oder allein $y = 0$ oder beide zugleich Null werden.

Es

Es muß daher jedesmal im Aufhängepunkt der Last, eine von den Dimensionen des Körpers oder beide zugleich Null werden.

§. 476.

Aufgabe. Die Gestalt eines Körpers von gleichem Widerstande zu finden, dessen Querschnitte Rechtecke von gleicher Breite sind.

Auflösung. Für die Grundfläche AC, Figur 253. Taf. XVI Fig. 253.
sei $AB = b$, $BC = h$ und der Abstand $AD = a$, so ist für irgend einen andern Querschnitt $MN = x = b$, $NP = y$, $MD = NE = z$, daher $xy^2 = by^2 = \frac{bh^2}{a} z$, oder

$$y^2 = \frac{h^2}{a} z$$

Die Linie EPC ist daher eine gemeine Parabel, deren Abscissen $EN = z$ und Ordinaten $NP = y$ sind. Der Parameter dieser Parabel ist $\frac{h^2}{a}$.

Soll daher ein Körper, dessen Querschnitte Rechtecke von gleicher Breite sind, durchgängig von gleichem Widerstande seyn, so müssen seine parallele Seitenflächen Parabeln bilden, deren Parameter die dritte Proportionallinie zur Länge des Körpers und Höhe der Grundfläche ist.

Wollte man die Höhe $BC = h$ aus dem Gewichte Q und den Abmessungen a, b finden, so ist nach §. 475. $N\frac{bh^2}{a} = Q$, daher findet man

$$h = \sqrt{\frac{aQ}{Nb}}.$$

Eben so leicht könnte man a und b bestimmen.

§. 477.

Aufgabe. Die Gestalt eines Körpers von gleichem Widerstande zu finden, dessen Querschnitte Rechtecke von gleicher Höhe sind.

Taf.XVI Fig.254. Auflösung. Hier ist Figur 254. für $AB = b$, $BC = h$, $DG = a$; $MN = x$, die Höhe $NP = y = h$ und $DK = z$, daher $xy^2 = xh^2 = \frac{bh^2}{a}z$, oder

$$x = \frac{b}{a}z.$$

Daher verhält sich $a : b = x : z$, oder $DNB = EPC$ ist eine gerade Linie.

§. 478.

Aufgabe. Die Gestalt eines Körpers von gleichem Widerstande zu finden, dessen Querschnitte durchgängig ähnliche Rechtecke sind.

Taf.XVI Fig.255. Auflösung. Man setze die halbe Breite der Grundfläche AC, Figur 255, oder $GB = GA = b$, die Höhe $GH = h$ und den Abstand $GD = a$; ferner für irgend einen Querschnitt MP, die halbe Breite $OM = ON = x$, $OU = NP = y$ und $OD = z$, so verhält sich nach den Bedingungen der Aufgabe

$b : h = x : y$, also ist $y = \frac{hx}{b}$ und $x = \frac{by}{h}$, daher erhält man $xy^2 = \frac{h^2}{b^2}x^3 = \frac{bh^2}{a}z$, oder

$x^3 = \frac{b^3}{a}z$ und $y^3 = \frac{h^3}{a}z$; es verhält sich also

$a : z = b^3 : x^3$ und $a : z = h^3 : y^3$.

Für die Abscissen $DO = z$ sind die zugehörigen Ordinaten ON = OM = x, daher sind die Linien DMA und DNB die Schenkel einer kubischen Parabel, deren Scheitel in D fällt. Eben so ist die Linie DUH eine kubische Parabel, deren Scheitel gleichfalls in D liegt.

§. 479.

Zusatz. Ganz ähnliche Resultate erhält man, wenn sämmtliche Querschnitte ähnliche Dreiecke sind. Als dann sind die Linien DMA, DNB und DUH, Figur 256, kubische Parabeln. Taf. XVI Fig. 256.

§. 480.

Aufgabe. Man soll die Gestalt eines Körpers von gleichem Widerstande finden, dessen Querschnitte sämmtlich Kreisflächen sind.

Auflösung. Der Halbmesser der Grundfläche AB, Figur 257, oder AC sei r und CD = a. Für irgend einen Querschnitt MP sei MN = NP = y und ND = z, so erhält man nach §. 475. (II). Tf. XVII Fig. 257.

$$y^3 = \frac{r^3}{a} \cdot z.$$

Es verhält sich daher $a : z = r^3 : y^3$, folglich ist die Linie DMA oder DPB eine kubische Parabel, deren Scheitel in den Aufhängepunkt D fällt.

§. 481.

Zusatz. Wären sämmtliche Querschnitte des Körpers Halbkreise, deren Durchmesser wagerecht liegen, und man setzt den Halbmesser der Grundfläche, Figur 258. CA = CE = CB = r und für den unbestimmten Tf. XVII Fig. 258.

Querschnitt NM = NO = NP = y, so findet man ähnliche Resultate, wie im vorhergehenden §. und die Linien DMA, DOE, DPB sind kubische Parabeln.

§. 482.

Für alle diejenigen Körper, welche einem an ihrem Ende angebrachten Gewichte Q gleichen Widerstand leisten, und deren Querschnitte Rechtecke oder Dreiecke sind, wird für jede Stelle, zu welcher irgend eine Höhe y gehört, die Biegung desto größer, je kleiner y ist, weil sich die Krümmungshalbmesser wie die zugehörigen Höhen der Querschnitte verhalten.

Wäre für irgend einen Querschnitt die Breite x, die Höhe y, der Abstand vom Aufhängepunkt des Gewichts Q = z und für die Biegung bei diesem Querschnitt der Krümmungshalbmesser = R, so ist §. 444. $RzQ = E^2$ und $E^2 = e^2 xy^3$, also $R = e^2 \frac{xy^3}{zQ}$. Nun ist für Körper von gleichem Widerstande (§. 475.) $Q = N\frac{xy^2}{z}$, oder $\frac{xy^2}{zQ} = N$, daher der Krümmungshalbmesser

$$R = e^2 Ny.$$

Es sind aber $e^2 . N$ für einerlei Körper unveränderliche Größen, daher ist R nur mit y veränderlich.

Wäre y durchgängig = h, so ist

$$R = e^2 Nh$$

eine beständige Größe, daher müssen Körper von gleichem Widerstande und gleicher Höhe, durchgängig einerlei Biegung annehmen oder nach einem Kreisbogen gekrümmt werden.

Anmerkung. Dieser letzte Satz ist nur unter der angegebenen Einschränkung wahr. Wenn daher Herr Girard (a. a. O. §. 133. p. 82.) diesen Satz unbedingt ohne Rücksicht auf die Höhe der Körper annimmt, so rührt dies wohl daher, daß durchgängig der Ausdruck E^2 (§. 444.) unter der Benennung als absolute Elasticität vorkommt, ob er gleich für jeden verschiedenen Querschnitt des Körpers auch einen verschiedenen Werth erhält.

§. 483.

Will man die Gestalt derjenigen Körper von gleichem Widerstande auffinden, bei welcher ihr eigenes Gewicht die Stelle der Last Q vertritt, so muß für jeden Querschnitt, wie MP, Figur 255, das Moment des Körpers MDP mit der Festigkeit der zugehörigen Brechungsebene im Gleichgewichte seyn. Man setze wie vorher, indem man voraussetzt, daß sämmtliche Querschnitte Rechtecke sind, $ON = OM = x$, $NP = y$, $OD = z$, den Inhalt des Körpers $MDP = R$, und das Gewicht von einem Kubikfuße desselben $= G$, so ist $G.R$ das Gewicht dieses Körpers, und wenn u den Abstand seines Schwerpunkts von der Ebene MP bezeichnet, so ist sein Moment Taf. XVI. Fig. 255.

$$u.R.G = Nxy^2.$$

Wäre der Abstand des Schwerpunkts von $D = u'$, so ist $u' = z - u$. Aber nach §. 142. ist $u'R = \int z \partial R$, daher

$(z-u)R = \int z \partial R$, oder $uR = Rz - \int z \partial R$, also

$$G.Rz - G\int z \partial R = Nxy^2.$$

Wird dieser Ausdruck differentiirt, so ist

$$GR\partial z + Gz\partial R - Gz\partial R = N\partial(xy^2),\ \text{oder}$$

$$GR\partial z = N\partial(xy^2),$$ und wenn man nochmals differentiirt, dabei aber ∂z constant annimmt, so wird

$$G\partial R\partial z = N\partial^2(xy^2).$$

Aber $\partial R = xy \cdot \partial z$, daher

$$\text{(I)}\ Gxy\partial z^2 = N\partial^2(xy^2).$$

Wären die Querschnitte des Körpers durchgängig Kreisflächen, und man setzt den Halbmesser der Brechungsebene $= y$, so wird $\partial R = \pi y^2 \partial z$, und statt Nxy^2 erhält man (§. 464. II)

$\frac{8\pi k}{3} y^3$, daher

$$\text{(II)}\ Gy^2\partial z^2 = \frac{8k}{3}\partial^2(y^3).$$

§. 484.

Aufgabe. Die Gestalt eines Körpers von gleichem Widerstande zu finden, dessen Querschnitte Rechtecke von gleicher Breite sind; wenn derselbe seinem eigenen Gewichte widerstehen soll.

Tf. XVII Fig. 259. Auflösung. Man setze, Figur 259, die Breite $MN = AB = ED$, oder $x = b$, so wird §. 483. (I);

$Gy\partial z^2 = N\partial^2(y^2)$, oder wenn man $y^2 = u$ und $\partial u = p\partial z$ setzt, so ist, weil ∂z constant angenommen ist, $\partial^2 u = \partial p \partial z$, daher

$$\frac{G}{N}\sqrt{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p\partial p}{\partial u},\ \text{oder}$$

$\frac{G}{N}\partial u\sqrt{u} = p\partial p$. Hievon ist das Integral

$\frac{G}{N} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} p^2$, oder die Quadratwurzel ausgezogen:

$2 u^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{G}{3N}} = p = \frac{\partial u}{\partial z}$, daher

$2 \partial z \sqrt{\frac{G}{3N}} = u^{-\frac{3}{4}} \partial u$. Nochmals integrirt, giebt

$2 z \sqrt{\frac{G}{3N}} = 4 u^{\frac{1}{4}} = 4 y^{\frac{1}{2}}$, wo keine Constante hinzu kommt, weil nach §. 475. mit $z = 0$ auch y verschwindet. Wird der zuletzt gefundene Ausdruck quadrirt, so ist

$$y = \frac{G}{12N} z^2.$$

Die Linie DPC ist daher eine gemeine **Parabel**, und DB eine Tangente des Scheitels D.

§. 485.

Aufgabe. Die Gestalt eines Körpers von gleichem Widerstande zu finden, dessen Querschnitte Rechtecke von gleicher Höhe sind, wenn derselbe seinem eigenen Gewichte widerstehen soll.

Auflösung. Man setze die Höhe $y = h$, so wird §. 483. (I); $G x \partial z^2 = h N \partial^2 x$. Ferner sei $\partial x = p \partial z$, so ist, weil ∂z constant angenommen worden, $\partial^2 x = \partial p \partial z$, also

$\frac{Gx}{hN} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p \partial p}{\partial x}$, oder $2x \partial x = \frac{hN}{G} 2p \partial p$,

daher, wenn man integrirt

$x^2 + C = \frac{hN}{G} p^2$, und wenn die Quadratwurzel ausgezogen wird

$\sqrt{(x^2 + C)} = p \sqrt{\frac{hN}{G}} = \frac{\partial x}{\partial z} \sqrt{\frac{hN}{G}}$, oder

$$\partial z \sqrt{\frac{G}{hN}} = \frac{\partial x}{\sqrt{(x^2+C)}}.$$

Wird nochmals integrirt, so ist

$$z\sqrt{\frac{G}{hN}} = \log\left[x+\sqrt{(x^2+C)}\right] - \log C'.$$

Für $z=0$ wird $x=0$, also

$0 = \log \sqrt{C} - \log C'$ oder $C' = \sqrt{C}$, folglich

$$z\sqrt{\frac{G}{hN}} = \log\frac{x+\sqrt{(x^2+C)}}{\sqrt{C}},$$

daher ist die Kurve, welche die horizontalen Querschnitte des prismatischen Körpers begrenzt, eine logarithmische Linie.

§. 486.

Aufgabe. Die Gestalt eines Körpers von gleichem Widerstande zu finden, dessen Querschnitte Kreisflächen sind, wenn derselbe seinem eigenen Gewichte widerstehen soll.

Tf. XVII Fig. 260. Auflösung. Es sei, Figur 260, MP ein Querschnitt des Körpers, welcher auf der Axe DN senkrecht steht. Ist nun der Halbmesser $NM = MP = y$ und $ND = z$, so erhält man §. 483. II; $\frac{3G}{8k} y^2 \partial z^2 = \partial^2(y^3)$, oder wenn man $y^3 = u$ und $\partial u = p\partial z$ setzt, so ist $\partial^2 u = \partial p \partial z$, daher

$\frac{3G}{8k} u^{\frac{2}{3}} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p\partial p}{\partial u}$, oder

$\frac{3G}{8k} u^{\frac{2}{3}} \partial u = p\partial p$, davon das Integral

$\frac{3G}{8k} \cdot \frac{3}{5} u^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2} p^2$, oder die Quadratwurzel ausgezogen

$u^{\frac{5}{6}} \sqrt{\frac{9G}{20k}} = p = \frac{\partial u}{\partial z}$, daher $\partial z \sqrt{\frac{9G}{20k}} = u^{-\frac{5}{6}} \partial u$,

und wenn man nochmals integrirt, so wird

$z\sqrt{\frac{9G}{20k}} = 6u^{\frac{1}{6}} = 6y^{\frac{1}{2}}$, wo keine Constante hinzu kommt, weil y mit $z = 0$ verschwindet. Wird dieser gefundene Ausdruck quadrirt, so erhält man

$$y = \frac{3G}{40k} z^2.$$

Die Linie DPB ist daher eine gemeine Parabel, zu welcher die Axe DN als Tangente ihres Scheitels D gehört. Durch Umdrehung dieser Parabel um die Tangente ihres Scheitels, wird der gesuchte Körper erzeugt, welcher daher eine trompetenförmige Gestalt erhält.

Zweiter Fall. Wenn die Körper an beiden Enden unterstützt sind.

§. 487.

Auf eine ganz ähnliche Art, wie solches §. 449. geschehen ist, kann man auch hier die Lehren von der respectiven Festigkeit solcher Körper, welche nur an dem einen Ende befestigt sind, auf die Fälle anwenden, wenn diese Körper an beiden Enden unterstützt sind. Gesetzt, der feste Körper ADECHB, Figur 261, sei an seinen beiden Enden D und F gestützt und zwischen denselben ohne Rücksicht auf sein eigenes Gewicht, in G mit einer Last P beschwert, so entsteht hievon auf D ein Druck Q und auf F ein Druck Q'. Man setze den Tf. XVII Fig. 261.

Abstand $GD = a$, und die ganze Länge $DF = l$, so ist $GF = l - a$, daher für das Gleichgewicht

$$Q = \frac{l-a}{l} P \text{ und } Q' = \frac{a}{l} P$$

und es ist einerlei, ob in G das Gewicht P wirkt und an beiden Enden die Unterlagen D, F angebracht sind, oder ob man den Körper in dem vertikalen Querschnitt ABCG befestigt und an beiden Enden D, E die Kräfte Q, Q′ vertikal aufwärts anbringt. So fern in diesem letzten Falle die Festigkeit des Körpers mit den Kräften Q, Q′ im Gleichgewichte ist, so wird solches auch für die Kraft P und die Unterstützungen D, E gelten.

Ist daher der gegebene Körper von ungleichem Widerstande, so kann man aus den gegebenen Abmessungen die Brechungsebene für den Theil ACD und ACF und die Kräfte Q, Q′ finden. Ist alsdann $aQ = (l-a)\,Q'$, so wird $P = Q + Q'$ die respective Festigkeit für den an beiden Enden unterstützten Körper. Wäre hingegen aQ größer oder kleiner als $(l-a)\,Q'$, so muß der kleinste von diesen Ausdrücken gewählt und mit Hülfe desselben die respective Festigkeit P gesucht werden.

§. 483.

Wollte man einen an beiden Enden unterstützten Körper von gleichem Widerstande haben, wenn man voraussetzt, daß die Last P nicht in der Mitte angebracht wäre, so setze man mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung, daß die Querschnitte MP, M'P', Figur 261, auf der Länge FD senkrecht, oder mit dem Querschnitt AC parallel und durchgängig Rechtecke sind. Auch sei $MN = x$, $NP = y$, $EP = z$ und $M'N' = x'$, $N'P' = y'$, $HP' = z'$ und für die Ebene AC, an welcher das Gewicht P unmittelbar wirkt, $AB = b$, $BC = h$, $CE = a$ und $CH = l - a$. Sollte nun der Körper von gleichem Widerstande seyn, so muß für alle Querschnitte wie MP, das Moment $Qz = Nxy^2$ und eben so $Q'z' = Nx'y'y'$ seyn. Für $z = a$ wird $x = b$ und $y = h$, also $aQ = Nbh^2$. Eben so ist für $z' = l - a$, $x' = b$, $y' = h$, also $(l - a) Q' = Nbh^2$, daher $aQ = (l - a) Q'$, wie erfordert wird. Tf. XVII Fig. 261.

Soll die Breite des Körpers von gleichem Widerstande durchgängig gleich groß seyn, also $MN = M'N' = AB$ oder $x = x' = b$, so erhält man für diesen Fall nach §. 476.

$$y^2 = \frac{h^2}{a} z \text{ und } y'y' = \frac{h^2}{l-a} \cdot z',$$

daher sind die Linien BNE und BN'H gemeine Parabeln. Soll die Höhe $BC = h$ mit Hülfe des Gewichtes P gefunden werden, so ist §. 476.

$$N\frac{bh^2}{a} = Q, \text{ aber } Q = \frac{l-a}{l} P, \text{ daher } N\frac{bh^2}{a} = \frac{l-a}{l} P,$$

folglich

$$h = \sqrt{\frac{a(l-a)}{Nbl} P}.$$

Auf eine ähnliche Art verfährt man, wenn irgend eine andere Bedingung für den Querschnitt des Körpers gegeben wird.

§. 489.

Tf.XVII Fig. 261. u. 262. Zusatz. Wäre die Linie ECH, Figur 261., nicht grade, sondern wie ECH, Figur 262., irgend eine krumme Linie, so muß nothwendig für diese krumme Linie jeder Querschnitt des Körpers für gleiche Abstände von den Unterstützungen auch eben die Abmessungen haben, als wenn die Linie ECH grade wäre. Ist daher eblce der Längendurchschnitt des Körpers, wenn die krumme Linie ECH in die grade Linie EH = eh fiele und bildet EHhe ein Rechteck, so darf man nur mit eE parallel die Linien nP, bC, n′P′ u. s. w. ziehen, PN = pn, CB = cb, P′N′ = p′n′ u. s. w. nehmen, so erhält man dadurch den Längendurchschnitt EBHCE für den Körper von gleichem Widerstande, dessen Breite durchgängig gleich groß ist.

D. Versuche über die Biegsamkeit und respective Festigkeit mehrerer Holzarten.

§. 490.

Es ist schon angeführt worden, daß man nicht von der bekannten Festigkeit einer Materie unbedingt auf die Festigkeit einer andern, dem Anscheine nach ganz gleichen Materie, schließen könne, und daß man daher die Resultate über die Festigkeit der Materialien nur als Mittelwerthe ansehen kann. In Absicht der respectiven Festigkeit des Holzes giebt es besonders vielerlei Umstände, welche zu ansehnlichen Abweichungen Veranlassung geben. So findet man gewöhnlich, daß bei einerlei Baum das Holz am Kerne stärker als näher nach dem Splinte und vom Splint am schwächsten ist. Näher nach der Wurzel haben gleiche Holzstücke mehr Festigkeit als am Wipfel, und wenn man ein Holzstück nimmt, dessen Fasern oder Holzringe mit einer seiner Seitenflächen parallel gehen, so findet man, daß es unter übrigens gleichen Umständen mehr Festigkeit besitzt, wenn man die Holzringe vertikal oder mit der Richtung der Last parallel stellt, als wenn man die Holzringe wagerecht legt. Nur bei sehr altem Holze findet man die Festigkeit des Kerns geringer als zwischen Kern und Splint. Frisches Holz, welches gleich nach dem Fällen untersucht wird, ist gewöhnlich fester als mehrere Jahre nachher, so wie auch die Umstände, ob es während dieser Zeit der abwechselnden Witterung ausgesetzt war, sehr viel zur Veränderung seiner Festigkeit beitragen, weil das gut ausgetrocknete Holz weit mehr Festigkeit besitzt, als wenn Sonne und Regen darauf gewirkt haben, oder wenn bei dem frischen Holze aus Mangel an allem Luftzuge die Säfte stocken. Auch findet man die Bäume von einerlei Gattung aus einerlei Wald, sehr verschieden, weil außer dem Unterschiede des Bodens, auch der höhere oder niedrigere Stand, die freie Lage gegen Luftzug und Sonnenstrahlen und noch viele andere

Umstände auf die verschiedene Festigkeit Einfluß haben. Eben das gilt von Bäumen die in wärmern Ländern wachsen, welche gewöhnlich fester sind als Bäume von gleicher Gattung in kältern Ländern.

Die angeführten Umstände, aus welchen schon eine große Verschiedenheit der Festigkeit für einerlei Holzart entsteht, machen es um so wünschenswerther, recht viel genaue Versuche über die respective Festigkeit verschiedener Holzarten zu erhalten. Bis jetzt kennt man aber nur wenig dergleichen Bemühungen, wohin nur die von Parent, Musschenbrök, Büffon, Belidor und Girard gezählt werden können. Die Parentschen Versuche (Mem. de l'ac. de Paris, année 1707. p. 680.) sind mit Stückchen Holz von Eichen und Fichten, $5\frac{1}{2}$ bis 24 Zoll lang und 5 bis 12 Linien stark und die Musschenbrökschen zwar beinahe mit allen Holzarten, aber gewöhnlich nur mit 5 bis 18 Zoll langen und $\frac{1}{4}$ bis $\frac{3}{4}$ Zoll starken Stückchen Holz angestellt. Dabei ist aber eben so wenig als bei den Belidorschen Versuchen (Ingenieur-Wissenschaft 1ster Theil 4. Buch 3. Kap.), welcher mit 18 bis 36 Zoll langen und $\frac{1}{2}$ bis 2 Zoll starken Stücken Eichenholz gemacht sind, die Zeit angegeben, wie lange das Gewicht vor dem Bruch gelegen hat; auch fehlt die Angabe, um wie viel sich der Körper bis zum Brechen gebogen hatte. Die Büffonschen Versuche haben den wesentlichen Vorzug, daß sie mit 7 bis 28 Fuß langen und 4 bis 8 Zoll starken eichenen Balken angestellt sind, wobei zugleich die Zeit, welche während der Belastung verflossen und die Biegung, welche der Balken erhalten hat, größtentheils angegeben ist. Bei diesen Versuchen ist nur zu bedauern, daß die Belastung so sehr schnell hinter einander aufgebracht worden, indem man noch nicht eine halbe Stunde darauf verwandt hat, um durch Lasten von 80 Centner einen Bruch zu bewirken. Hiedurch mußte nothwendig zum Zerbrechen des Balkens ein größeres Gewicht verwandt werden, als nöthig war, den Balken nach einer längern Zeit zu zerbrechen, weil eine Last noch lange fortfährt, den Balken zu biegen, und ihn erst nach mehrern Tagen zerbricht, statt daß zum augenblicklichen Bruch ein weit größeres Gewicht erfordert wird. Die Girardschen Versuche über respective Festigkeit des eichen und kiefern Holzes betreffen lediglich das Biegen desselben, weil kein Holzstück zum Zerbrechen verwandt worden. Aber wenn gleich in Absicht des Zerbrechens keine Folgerungen aus denselben entspringen, so wären sie doch in Absicht der Biegung dieser beiden Holzarten sehr wichtig, wenn nicht die Holzstücke zu diesen Versuchen schon vorher bei Versuchen über die rückwirkende Festigkeit wären gebogen worden. Wenn man nun gleich nur solche Hölzer zu den Versuchen gebrauchte, welche sich, der Versicherung gemäß, nach der vorhergegangenen Biegung wieder grade gerichtet hatten, so ist es doch sehr einleuchtend, daß durch die erste Biegung das Holz einen Theil von derjenigen

Kraft verloren hat, mit welcher solches dem Biegen widersteht. Es mußten daher die mit diesen Hölzern angestellten Versuche größere Biegungen angeben, als wenn das Holz ohne vorheriges Krümmen wäre verwandt worden.

§. 491.

Da keine Versuche über die respective Festigkeit der bei uns einheimischen Holzarten bekannt sind, so hat mir dies Veranlassung gegeben, die Biegsamkeit und respective Festigkeit einiger dieser Holzarten mit Rücksicht auf die während der Belastung verflossene Zeit näher zu untersuchen.

Die Zurüstung, deren man sich zu den Versuchen bediente, bestand aus zwei unverrückbar mit ein-
Tf.XVII ander verbundenen Rüstböcken HJ, KL, Figur 263.,
Fig.263. auf welchen zwei balkenförmige eiserne Stäbe F, G so befestigt waren, daß die beiden obersten Flächen dieser Stäbe in einerlei wagerechter Ebene sich befanden, weil man befürchten mußte, daß wenn man die Kanten dieser Stäbe nach oben brachte, und darauf die zum Zerbrechen bestimmte Hölzer legte, viel leichter tiefe Eindrücke in dem aufgelegten Holze entstehen konnten. Sobald man das ganze Gerüst so verbunden hatte, daß die lichte Entfernung DE von den beiden mit einander parallelen eisernen Stäben F, G die erforderliche Größe hatte, legte man das balkenförmig bearbeitete Holzstück auf die beiden Unterlagen F, G, so daß seine Länge mit der Länge dieser Stäbe rechte

Winkel

Winkel bildete. Hing man nun einen äußerst feinen gewichsten Faden pDCEp, an dessen Enden kleine Gewichte p, p befestigt waren, über die Unterlagen F, G, und fand man, daß der Faden genau mit der Unterkante des aufgelegten Holzes zusammentraf, so konnte man sich überzeugen, daß das Holz als ungebogen zu den Versuchen brauchbar war. Alle Holzstücke, welche diese Eigenschaft nicht hatten, wurden als zu den Versuchen unbrauchbar verworfen. Um mit Leichtigkeit Gewichte an das Holz zu hängen, diente ein eiserner Bügel QR, Figur 264., welcher Figur 263. im Durchschnitt abgebildet ist. Diesen Bügel hing man so über das Holzstück AB, daß sein Obertheil Q genau die bemerkte Mitte des Holzes berührte; damit aber von Q kein Einschnitt in das Holz entstehen konnte, so war der Theil Q mit einer sehr flachen Ründung abgefeilt. An diesem Bügel hing eine Wageschaale RS, welche nach Gefallen mit Gewichten U belastet werden konnte.

Um für jede Belastung und für irgend eine Zeit genau anzugeben, wie viel sich die Mitte des Holzes gesenkt hatte, konnte zugleich der Faden pDEp benutzt werden. Man befestigte in der Mitte von der Länge des Holzes AB auf seine ganze Höhe einen auf Pergament gezeichneten Maaßstab Mm, von welchem jeder Zoll genau in hundert gleiche Theile eingetheilt war, dergestalt, daß der Nullpunkt desselben genau mit der Unterkante des Holzes in M zusammen fiel.

Die Höhe MC bestimmte alsdann, um wie viel Hunderttheile eines Zoll die Mitte des Holzes gesenkt war. Diese Einrichtung konnte aber nur so lange benutzt werden, bis der Punkt m den Faden in C erreicht hatte, weil alsdann derselbe von dem Obertheile Q des Bandes QR gebogen wurde. Um daher auch größere Senkungen zu messen, ward ein zweiter Faden ono mit DE parallel mittelst kleiner Gewichte q,q ausgespannt. Hierauf befestigte man so nahe wie möglich, neben dem Quereisen Q des Bügels QR, auf der obersten Fläche des Holzstücks AB einen schmalen vertikalen Maaßstab Nn, dessen Nullpunkt bei N, wenn das Holz nicht belastet war, mit der Linie, welche der Faden oo bildete, zusammen fiel. Hatte alsdann der unterste Faden DE ebenfalls gleiche Höhe mit der Unterkante des Holzstücks AB, so konnte man nach angehängtem Bügel und aufgelegter Belastung mit dem Maaßstabe Nn die Senkungen messen, welches mit dem Maaßstabe Mm aber nur so lange möglich war, als die Senkung die Höhe des Holzes nicht übertraf. Bei den Versuchen konnte man sich jedesmal von der richtigen Stellung des Maaßstabes Nn überzeugen, weil anfänglich stets Nn = MC seyn mußte. War der eiserne Bügel aufgeschoben, so hatte man zu mehrerer Vorsicht noch einen zweiten Maaßstab N'n' angebracht, welcher mit Nn durchgängig übereinstimmte.

Weil die Hölzer beim Biegen zuweilen ihre Unterstützungspunkte D, E verlassen, so waren an jedem Holzstücke die beiden Linien Dd, Ee bemerkt, welche, wenn das Holz nicht belastet war, vertikal über den Unterstützungspunkten standen. Auch ist noch zu erinnern, daß, wenn man mittelst horizontaler Abscissen und vertikaler Ordinaten die Gestalt der Krümmung des gebogenen Holzes bestimmen wollte, alsdann auf einer der vertikalen Seitenflächen des ungebogenen Holzes, in der Mitte zwischen Ober- und Unterkante, eine grade Linie gezogen, und die Gestalt der Krümmung durch ihre Abstände vom Faden oo bestimmt worden ist. Dieselbe Krümmung fand man bei der Unterkante des Holzes.

§. 492.

Zu den Versuchen wählte man nur Hölzer aus einheimischen Forsten, welche vor zwei bis drei Jahren gehauen und während dieser Zeit trocken aufbewahrt waren, so daß man die Hölzer als hinlänglich ausgetrocknet ansehen konnte, weil dies eigentlich der Zustand ist, unter welchem das Holz zu Gebäuden verwandt werden sollte. Da hier nur die Rede davon seyn kann, die Festigkeit gesunder möglichst tadelloser Hölzer zu bestimmen, weil sich die übrigen für uns beinahe außer aller Regel befinden, so war man bemüht, nur ausgezeichnet gutes Holz zu den Versuchen zu verwenden. Jeder Ast und jede Krümmung in der Länge der Fasern machte dasselbe zu den Versuchen unbrauchbar. Jedes Holzstück wurde Balkenförmig bearbeitet und mit dem Hobel genau so abgeglichen, daß alle Querschnitte desselben gleich große Rechtecke bildeten. Dabei durfte kein Holz über den Span geschnitten oder überspänig seyn (d. h. die Holzfasern, deren Fläche in die Außenseite des Holzes fiel, durften nicht durchgeschnitten seyn, sondern mußten einen Spiegel bilden), weil sonst beim Biegen das Ablösen einzelner Späne oder Fasern, ohne zerrissen zu seyn, zu befürchten war.

Um in der Folge die ganze Länge eines zu den Versuchen verwendeten Holzes von derjenigen zu unterscheiden, auf welche dasselbe zwischen den Unterstützungspunkten D,E, Figur 263., frei gelegen hat, weil nur der Abstand der Unterstützungspunkte als Länge des Holzes in Rechnung kommen kann, so soll derselbe oder die Weite DE, auf welche der Balken AB zwischen seinen Stützen frei liegt, die respective Länge des Balkens heißen. Auch wird allemal, wenn lediglich von Balkenlänge die Rede ist, diese respective Balkenlänge verstanden werden.

Bei der Beschreibung von den folgenden Versuchen wird man sich zu mehrerer Abkürzung nachstehender Bezeichnung bedienen:

l respective Länge des Holzes in Zollen.

b Breite desselben oder diejenige Dimension, welche horizontal lag, in Zollen.

h Höhe des Holzes, in Zollen.

G das Gewicht von einem Kubikfuße des Holzes in Pfunden,

g das zugehörige eigenthümliche Gewicht.

U die Belastung in Pfunden, welche zum Biegen verwandt worden, mit Inbegriff der Wageschaale, des eisernen Bügels und des halben Gewichts des Holzes.

t die Zeit in Stunden, welche während dieser Belastung verflossen, und

u die Tiefe in Zollen, um welche die Mitte des Holzes am Ende der Zeit t von ihrer ursprünglichen horizontalen Lage abwich.

Wenn endlich bei mehrerern Versuchen diejenigen Punkte des Holzes, welche mit den Punkten der Unterlage zusammen fielen, wegen der ansehnlichen Biegung des Holzes, von den Unterlagen F und G gewichen waren, so bezeichnet

d den Abstand der Unterlage von demjenigen Punkte des Holzes, welcher anfänglich sich über der Unterlage befand, wenn das Holz nicht belastet war, in Zollen.

Fanden sich bei jeder Unterlage solche Abweichungen, so bezeichnet d jedesmal die Summe beider Abweichungen.

Ob man gleich bei den Versuchen die Gewichte nur allmählig aufsetzte, damit keine Erschütterung des Holzes entstehen konnte, so war doch die Zeit, welche man auf dieses Aufbringen verwandte, so unbedeutend klein, daß man solche nicht in Rechnung bringen konnte und daher $t = 0$ gesetzt hat.

Bei sämmtlichen zu den Versuchen verwandten Hölzern erfolgte der Bruch jedesmal in der Mitte oder sehr nahe bei derselben. Mehrmals zerplatzte die unterste Holzfaser, worauf bald der Bruch plötzlich erfolgte; öfter entstand aber der Bruch so plötzlich mit einem kurz vorher gegangenen Krachen, daß man kein einzelnes Zerplatzen einer Faser bemerken konnte. Die Bruchfläche war nie eben, sondern dermaßen splitterig, daß einzelne Fasern tief aus der Mitte des Holzes herausgerissen waren. Nur einigemal beim Kiefernholze waren zwei bis drei Fasern über einander in einerlei Ebene zerbrochen, gewöhnlich aber bestand die Bruchfläche aus sehr vielen Hervorragungen und Vertiefungen.

(I.) Versuche mit Kiefernholz.

1. Versuch. Das Holz vom Splint des Stammes sehr wenig harzig, 2 Fuß $7\frac{1}{2}$ Zoll lang; $l = 30$, $b = 0{,}7$ und $h = 0{,}958$ Zoll, wog $13\frac{1}{2}$ Loth. Man fand $G = 37{,}49$ Pfund, also $g = 0{,}567$.

Auf jeden Zoll der Dicke waren 18 Holzringe und beim Auflegen bildeten die Fasern oder Holzringe mit dem Horizont einen Winkel von 45 Grad.

U	t	u
13	0	0,09
13	1	0,15
25	0	0,30
25	3	0,34
41	0	0,52
41	6	0,53
51	0	0,65
51	12	0,66
55	0	0,70
55	1	0,71
61	0	0,74
61	1	0,74
70	0	0,83
70	$\frac{1}{2}$	0,83
80	0	0,92

U	t	u
80	0	0,92
80	$\frac{1}{2}$	0,94
90	0	1,03
90	$\frac{1}{2}$	1,06
96	0	1,11
96	$\frac{1}{2}$	1,13
102	0	1,18
102	$\frac{1}{2}$	1,20
108	0	1,27
108	$\frac{1}{2}$	1,31
114	0	1,37
114	1	1,42
118	0	1,48
118	$\frac{1}{4}$	1,50
118	$\frac{1}{3}$	1,51

Unter einer Belastung von 118 Pfund zerbrach das Holz, als sich seine Mitte bis auf 1,51 Zoll gesenkt hatte. Die anfänglich unterstützten Punkte des Holzes waren nicht von der Unterlage gewichen, also durchgängig $d = 0$. Der ganze Versuch hat vom Anfange der Belastung bis zum Bruch $28\frac{7}{12}$ Stunden gedauert.

2. Versuch. Das Holz vom Splint, ohne Harz, vorher 8 Tage über einem Ofen ausgetrocknet, 2 Fuß $7\frac{1}{2}$ Zoll lang; $l = 30$, $b = 0,812$ und $h = 1,02$ Zoll, wog $14\frac{1}{5}$ Loth. $G = 29,10$ Pfund, $g = 0,441$. Auf jeden Zoll der Dicke 17 Holzringe. Die Fasern horizontal gelegt.

U	t	u	U	t	u
80	0	0,36	104	4	1,36
80	3	0,62	105	0	1,37
80	5	0,75	105	6	1,40
80	7	0,79	106	0	1,41
80	9	0,81	106	14	1,44
80	25	0,91	107	0	1,46
90	0	0,99	107	29	1,53
90	17	1,06	108	0	1,55
90	27	1,10	108	18	1,57
96	0	1,15	109	0	1,59
96	3	1,16	109	4	1,60
100	0	1,18	109	16	1,62
100	15	1,25	109	33	1,64
100	27	1,29	109	63	1,65
102	0	1,31	109	103	1,66
102	11	1,33	$109\frac{1}{2}$	0	1,67
104	0	1,35	$109\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1,68

Unter einer Belastung von $109\frac{1}{2}$ Pfund bei einer Senkung in der Mitte von 1,68 Zoll zerbrochen. Hier war d durchgängig = o. Die Dauer des Versuchs war $264\frac{1}{2}$ Stunden oder sehr nahe 11 Tage und Nächte.

3. Versuch. Das Holz zwischen Kern und Splint des Stammes, ohne Harz, 4 Fuß $3\frac{1}{2}$ Zoll lang, $l = 48$, $b = 1{,}146$ und $h = 1{,}028$ Zoll, wog ein Pfund $12\frac{3}{4}$ Loth. $G = 39{,}84$ Pfund, $g = 0{,}604$. Auf jeden Zoll der Dicke 16 Holzringe. Die Fasern horizontal.

U	t	u
128	0	1,28
128	$\frac{1}{4}$	1,36
128	$\frac{3}{4}$	1,43
128	$1\frac{1}{2}$	1,48
128	$2\frac{1}{2}$	1,52
128	4	1,58
128	6	1,63
128	9	1,68
128	11	1,70
128	26	1,82
156	0	2,08
156	$\frac{1}{4}$	2,11
168	0	2,22
168	$\frac{1}{4}$	2,25
178	0	2,33
178	$\frac{1}{4}$	2,36
186	0	2,45
186	$\frac{1}{4}$	2,49
192	0	2,54

U	t	u
192	$\frac{1}{4}$	2,59
196	0	2,66
196	$\frac{1}{4}$	2,70
200	0	2,74
200	$\frac{1}{4}$	2,79
204	0	2,84
204	$\frac{1}{4}$	2,88
208	0	2,92
208	$\frac{1}{4}$	3,00
212	0	3,03
212	$\frac{1}{4}$	3,09
216	0	3,13
216	$\frac{1}{4}$	3,17
220	0	3,22
220	$\frac{1}{4}$	3,29
223	0	3,33
223	$\frac{1}{4}$	3,43
226	0	3,48
226	$\frac{1}{8}$	3,51

Unter einer Last von 226 Pfund, bei einer Senkung in der Mitte von 3,51 Zoll zerbrochen. Die Abweichung oder d durchgängig = o.

Die absolute Festigkeit dieses Holzes ist im 8ten und 9ten Versuch §. 433. angegeben, so daß für dasselbe k = 20120 Pfund ist.

4. Versuch. Das Holz vom Kern und durchgängig harzig, 4 Fuß 3,3 Zoll lang; l = 49, b = h = 1,04 Zoll, wog 1 Pfund $10\frac{9}{16}$ Loth. G = 41,15 Pfund, g = 0,624. Auf jeden Zoll der Dicke 7 Holzringe. Die Fasern bildeten mit dem Horizont einen Winkel von 40 Grad.

U	t	u
73	0	1,00
73	1	1,08
73	3	1,15
73	5	1,20
73	8	1,26
73	12	1,29
73	27	1,36
73	40	1,39
79	0	1,49
79	4	1,50
79	15	1,52
79	32	1,55
79	62	1,58
79	96	1,60
79	133	1,62
79	181	1,65
79	220	1,67
79	264	1,69
79	319	1,71
79	386	1,73
79	466	1,75
79	556	1,77
79	647	1,79
79	706	1,80
79	771	1,81

U	t	u
86	0	1,90
86	2	1,91
92	0	1,97
92	2	1,99
98	0	2,07
98	1	2,07
102	0	2,11
102	2	2,12
105	0	2,16
105	1	2,16
107	0	2,18
107	1	2,19
108	0	2,20
108	1	2,21
109	0	2,22
109	6	2,23
110	0	2,24
110	1	2,25
111	0	2,26
111	$\frac{1}{2}$	2,26
112	0	2,27
112	$\frac{1}{2}$	2,27
113	0	2,28
113	$\frac{1}{2}$	2,28
114	0	2,29

U	t	u	d
114	½	2,30	0
115	0	2,31	0
115	½	2,31	0
116	0	2,32	0
116	½	2,32	0
117	0	2,33	0
117	½	2,34	0,01
118	0	2,35	0,01
118	½	2,35	0,01
119	0	2,36	0,01
119	½	2,37	0,02
120	0	2,38	0,02
120	½	2,38	0,02
121	0	2,39	0,02
121	½	2,40	0,03
122	0	2,41	0,03
122	½	2,41	0,03
123	0	2,42	0,03
123	½	2,42	0,03
124	0	2,43	0,03
124	½	2,44	0,04
125	0	2,45	0,04
125	½	2,45	0,04
126	0	2,46	0,04
126	½	2,47	0,04
127	0	2,48	0,04
127	½	2,49	0,05
128	0	2,50	0,05
128	½	2,50	0,05
129	0	2,51	0,05
129	½	2,51	0,05
130	0	2,52	0,05
130	½	2,52	0,05
131	0	2,53	0,05
131	½	2,54	0,06
132	0	2,55	0,06
132	½	2,56	0,06

U	t	u	d
133	0	2,57	0,06
133	½	2,58	0,06
134	0	2,59	0,06
134	½	2,60	0,06
135	0	2,61	0,06
135	½	2,61	0,06
136	0	2,62	0,06
136	½	2,63	0,07
137	0	2,64	0,07
137	10	2,68	0,07
138	0	2,69	0,07
138	½	2,70	0,07
139	0	2,71	0,07
139	½	2,71	0,08
140	0	2,72	0,08
140	½	2,73	0,08
141	0	2,74	0,08
141	½	2,74	0,08
142	0	2,75	0,08
142	½	2,75	0,09
143	0	2,76	0,09
143	½	2,78	0,09
144	0	2,79	0,09
144	½	2,79	0,09
145	0	2,80	0,09
145	2	2,82	0,10
146	0	2,83	0,10
146	½	2,83	0,10
147	0	2,84	0,10
147	½	2,85	0,11
148	0	2,86	0,11
148	½	2,87	0,11
149	0	2,88	0,11
149	½	2,89	0,12
150	0	2,90	0,12
150	½	2,90	0,12
151	0	2,91	0,12

U	t	u	d
151	½	2,92	0,12
152	0	2,93	0,12
152	½	2,94	0,13
153	0	2,95	0,13
153	½	2,96	0,13
154	0	2,97	0,13
154	½	2,97	0,13
155	0	2,98	0,13
155	½	2,99	0,14
156	0	3,00	0,14
156	½	3,01	0,14
157	0	3,02	0,14
157	½	3,03	0,14
158	0	3,04	0,14
158	½	3,06	0,15
159	0	3,07	0,15
159	½	3,08	0,15
160	0	3,09	0,15
160	½	3,11	0,15
161	0	3,12	0,15
161	½	3,13	0,16
162	0	3,14	0,16
162	½	3,15	0,16
163	0	3,16	0,16
163	10	3,24	0,16
164	0	3,25	0,16
164	½	3,26	0,17
165	0	3,26	0,17
165	½	3,27	0,17
166	0	3,28	0,17
166	½	3,29	0,17
167	0	3,30	0,17
167	½	3,30	0,18
168	0	3,31	0,18
168	½	3,32	0,18
169	0	3,33	0,18
169	½	3,34	0,18
169	½	3,34	0,18
170	0	3,35	0,18
170	½	3,37	0,19
171	0	3,38	0,19
171	½	3,39	0,19
172	0	3,40	0,19
172	½	3,42	0,20
173	0	3,43	0,20
173	½	3,45	0,20
174	0	3,46	0,20
174	½	3,47	0,20
175	0	3,48	0,20
175	½	3,49	0,20
176	0	3,50	0,20
176	½	3,51	0,20
177	0	3,52	0,20
177	½	3,54	0,21
178	0	3,56	0,21
178	½	3,57	0,21
179	0	3,58	0,21
179	½	3,59	0,22
180	0	3,60	0,22
180	½	3,62	0,23
181	0	3,63	0,23
181	½	3,65	0,25
182	0	3,66	0,26
182	½	3,67	0,28
183	0	3,68	0,29
183	½	3,70	0,32
184	0	3,72	0,33
184	1	3,77	0,35
185	0	3,79	0,35
185	½	3,83	0,36
185	1½	3,85	0,38
185	2½	3,89	0,40
185	6	3,96	0,44
185	8½	3,99	0,46

Unter einer Last von 185 Pfund bei einer Senkung in der Mitte von 3,99 Zoll zerbrochen.

Die absolute Festigkeit dieses Holzes ist §. 433. im dritten Versuch angegeben. Das Maaß derselben oder k fand man 16160 Pfund.

5. Versuch. Das Holz aus der Mitte zwischen Kern und Splint des Stammes, sehr harzig, 4 Fuß $3\frac{7}{12}$ Zoll lang; $l = 50$, $b = 1{,}222$ und $h = 1{,}229$ Zoll, wog 1 Pfund $30\frac{3}{16}$ Loth. $G = 43{,}33$ Pfund, also $g = 0{,}657$.

Auf jeden Zoll Dicke, $6\frac{1}{2}$ Holzringe. Die Holzringe hatten eine solche Lage, daß ihre größte Sehnen mit dem Horizonte einen Winkel von 45 Grad bildeten.

U	t	u
73	0	0,59
73	$\frac{1}{4}$	0,67
73	$\frac{1}{2}$	0,73
73	1	0,80
73	2	0,87
73	5	0,94
73	7	0,97
73	10	1,00
73	12	1,01
73	16	1,03
73	24	1,06

U	t	u
73	24	1,06
73	27	1,07
73	32	1,08
156	0	1,77
156	$\frac{1}{4}$	1,87
156	1	1,90
156	2	1,93
156	4	1,98
156	7	2,01
156	16	2,05
156	20	2,09

Um zu beobachten, nach welchem Verhältnisse sich das Holz von aller Belastung befreit, wieder grade richtet, nahm man die ganze Belastung hinweg, und legte dasselbe auf eine wagerechte Tafel, damit durch das Gewicht des Holzes die Verminderung der Senkung u nicht verhindert werden konnte. Die Verminderungen der Senkung sind in der folgenden Tafel enthalten.

U	t	u
156	20	2,09
0	0	0,73
0	$\frac{1}{4}$	0,68
0	1	0,59
0	2	0,57
0	6	0,56
0	20	0,55

U	t	u
0	20	0,55
0	44	0,50
0	68	0,48
0	92	0,46
0	116	0,46
0	140	0,45
0	908	0,45

Während 32 Tage behielt das Holz unverändert eine Senkung der Mitte von 0,45 Zoll, und man hatte also keine Hoffnung, daß es sich wieder grade richten würde. Man legte dasselbe also wieder auf seine vorige Unterlagen, um zu bemerken, nach welcher Ordnung sich dasselbe bei einer der vorherigen gleichen Belastung biegen würde.

U	t	u	d
0	908	0,45	0
73	0	1,03	0
73	$\frac{1}{4}$	1,06	0
73	$\frac{1}{2}$	1,07	0
73	1	1,08	0
156	0	1,79	0
156	1	1,93	0
184	0	2,16	0
184	$\frac{1}{2}$	2,19	0,01
211	0	2,39	0 01
211	$\frac{1}{2}$	2,46	0,03

U	t	u	d
223	0	2,54	0,03
223	$\frac{1}{2}$	2,60	0,05
233	0	2,68	0,05
233	$\frac{1}{2}$	2,74	0,08
243	0	2,83	0,08
243	$\frac{1}{4}$	2,90	0,13
251	0	2,96	0,13
251	$\frac{1}{4}$	3,03	0,15
257	0	3,09	0,15
257	$\frac{1}{4}$	3,16	0,21
263	0	3,20	0,21

U	t	u	d
263	$\frac{1}{4}$	3,30	0,24
267	0	3,33	0,24
267	$\frac{1}{4}$	3,40	0,28
271	0	3,43	0,28
271	$\frac{1}{4}$	3,49	0,28
275	0	3,53	0,28

U	t	u	d
275	$\frac{1}{4}$	3,57	0,29
279	0	3,60	0,29
279	$\frac{1}{4}$	3,65	0,31
283	0	3,67	0,31
283	$\frac{1}{12}$	3,70	0,36
283	$\frac{1}{10}$	3,70	0,36

Als die Last von 283 Pfund 5 Minuten aufgehängt war, hatte sich die Mitte des Holzes 3,70 Zoll gesenkt und eine der untersten Fasern in der Mitte zerplatzte, worauf das Holz nach einer Minute plötzlich zerbrach.

Als Maaß der absoluten Festigkeit dieses Holzes fand man $k = 12520$ Pfund, wie solches §. 433. durch den 10ten und 11ten Versuch bestimmt worden ist.

6. Versuch. Das Holz aus der Mitte zwischen Kern und Splint des Stammes, ohne Harz, 6 Fuß $2\frac{3}{4}$ Zoll lang; $l = 66$, $b = h = 2$ Zoll, wog 6 Pfund $14\frac{1}{4}$ Loth. $G = 37{,}247$ Pfund; $g = 0{,}565$.

Auf jeden Zoll Dicke 12 Holzringe. Die Fasern horizontal gelegt.

U	t	u
598	0	1,16
598	$\frac{1}{4}$	1,22
598	1	1,25
598	3	1,28
598	8	1,31
598	17	1,34

U	t	u
598	25	1,37
598	40	1,41
598	55	1,44
598	75	1,46
598	97	1,48
708	0	1,71

U	t	u
708	1	1,75
873	0	2,08
873	2	2,25
873	7	2,36
873	15	2,45
873	30	2,63
873	40	2,75
873	44	2,77
885	0	2,80
885	$\frac{1}{4}$	2,81
895	0	2,83
895	$\frac{1}{4}$	2,84
905	0	2,87
905	$\frac{1}{4}$	2,88
915	0	2,91
915	$\frac{1}{4}$	2,92

U	t	u
915	$\frac{1}{4}$	2,92
915	$\frac{1}{2}$	2,94
915	$\frac{3}{4}$	2,97
915	1	3,00
915	$1\frac{1}{4}$	3,03
915	$1\frac{1}{2}$	3,06
915	$1\frac{3}{4}$	3,10
915	2	3,15
915	$2\frac{1}{12}$	3,17
915	$2\frac{1}{6}$	3,19
915	$2\frac{1}{4}$	3,21
915	$2\frac{1}{2}$	3,31
915	$2\frac{7}{12}$	3,43
915	$2\frac{2}{3}$	3,50
915	$2\frac{3}{4}$	3,70
915	$2\frac{5}{6}$	3,80

Nachdem die Belastung von 915 Pfund 2 Stunden 35 Minuten aufgehängt und die Mitte bis 3,43 Zoll gesenkt war, zerplatzte ein Theil von der untersten Holzfaser an der Kante. Nach 2 Stunden 40 Minuten bei 3,50 Zoll Senkung, war die ganze unterste Holzfaser zerplatzt und nach 2 Stunden 50 Minuten unter einer Senkung von 3,80 Zoll zerbrach das Holz plötzlich.

Während des ganzen Versuchs war $d = 0$.

Das Maaß der absoluten Festigkeit dieses Holzes oder k fand man = 21[illegible]20 Pfund, wie solches §. 433. des 6ten und 7ten Versuchs angegeben ist.

Zur Ausmittelung derjenigen Linie, nach welcher das Holz gebogen wird, hatte man in der Mitte der vertikalen Außenfläche des Holzes zwischen Ober- und Unterkante vor der Belastung desselben eine gerade Linie gezogen und für dieselbe die horizontalen Abscissen und vertikalen Ordinaten bestimmt. Weil die Unterkante des Holzes dieselbe Biegung annahm, so enthält die nachstehende Tafel die gefundenen Abmessungen, wenn die wagerechte Linie, welche durch die Unterstützungspunkte des Holzes geht, als Abscissenaxe und die Unterstützungspunkte selbst als Anfangspunkte der Abscissen angenommen werden, indem man die Abscissen nicht weiter als bis zur Mitte des Holzes rechnet. Als die Mitte des Holzes genau 2,75 Zoll gesenkt war, maß man die Ordinaten.

Abscissen	Ordinaten auf der einen Hälfte	Ordinaten auf der andern Hälfte
Zoll.	Zoll.	Zoll.
3	0,35	0,36
6	0,69	0,70
9	1,02	1,03
12	1,36	1,38
15	1,69	1,70
18	1,96	1,98

Abscissen	Ordinaten auf der einen Hälfte	Ordinaten auf der andern Hälfte
Zoll.	Zoll.	Zoll.
18	1,96	1,98
21	2,20	2,22
24	2,41	2,42
27	2,59	2,60
30	2,71	2,70
33	2,75	2,75

7. **Versuch.** Kiefernholz aus der Mitte zwischen Kern und Splint, sehr wenig harzig, 6 Fuß $2\frac{1}{4}$ Zoll lang; $l = 66$, $b = 1{,}5$ und $h = 1{,}542$ Zoll, wog 4 Pfund. $G = 39{,}976$ Pfund, also $g = 0{,}606$. Auf jeden Zoll der Dicke 8 Holzringe. Die Fasern horizontal gelegt.

Dieses Holzstück war von allen übrigen darin verschieden, daß bei demselben in der Mitte seiner Länge ein

$\frac{1}{2}$ Zoll

$\frac{1}{3}$ Zoll dicker Ast in vertikaler Richtung von der Mitte der obern Fläche nach der untern ging. Ob nun gleich alle Hölzer, bei welchen sich Aeste zeigten, als unbrauchbar zu den Versuchen verworfen wurden, so hielt man es doch für nützlich, mit diesem Holzstück, welches außerdem ohne allen Tadel war, einen Versuch anzustellen, um den Einfluß des Astes auf die Biegung und auf die größte Ordinate beim Bruche kennen zu lernen.

U	t	u
295	0	1,95
295	$\frac{1}{2}$	2,20
295	1	2,29
295	2	2,35
295	6	2,50

U	t	u	d
295	6	2,50	0
295	16	2,72	0,02
295	$19\frac{1}{4}$	3,04	0,06
295	$19\frac{1}{2}$	3,16	0,09
295	$19\frac{7}{12}$	3,20	0,11

Als die Last von 295 Pfund $19\frac{1}{2}$ Stunden angehängt und die Mitte bis auf 3,16 Zoll gesenkt war, bemerkte man ein geringes Krachen und eine Ablösung eines Theils der Fibern des Holzes von dem Aste. Nach 19 Stunden 35 Minuten zerbrach endlich das Holz plötzlich unter der anfänglichen Belastung.

8. Versuch. Kiefernholz aus der Mitte zwischen Herz und Splint, ohne Harz, 6 Fuß 1 Zoll lang, $l=66$, $b=h=1{,}60$ Zoll, wog 4 Pfund $1\frac{1}{2}$ Loth. $G=$ 41,388 Pfund, also $g=0{,}628$.

Auf jeden Zoll Dicke 12 Holzringe. Die Fasern hatten eine wagerechte Lage.

Die Belastung war vom Anfange bis zum Ende des Versuchs U=112 Pfund.

t	u	t	u	t	u
0	0,76	50	0,97	600	1,15
$\frac{1}{4}$	0,80	72	0,99	768	1,17
$\frac{1}{2}$	0,82	96	1,01	864	1,18
1	0,83	144	1,03	960	1,19
2	0,85	192	1,06	1008	1,20
6	0,88	264	1,08	1128	1,21
12	0,90	336	1,10	1272	1,22
24	0,93	432	1,12	1584	1,23
35	0,95	528	1,14	2040	1,24
50	0,97	600	1,15	4224	1,24

Nachdem die Last von 112 Pfund 85 Tage aufgehängt war, hatte sich die Mitte bis auf 1,24 Zoll gesenkt, ohne daß das Holz während des Versuchs von seinen Unterlagen gewichen wäre. Als nach Verlauf von noch 79 Tagen die Senkung unverändert 1,24 Zoll blieb, befreite man das Holz von seiner Belastung, welche überhaupt 164 Tage, also beinahe ein halbes Jahr aufgehängt war. Auf eine ähnliche Art wie beim fünften Versuche, bemerkte man die Verminderung der Senkungen, welche in folgender Tafel enthalten sind.

U	t	u	U	t	u
112	4224	1,24	0	4	0,37
0	0	0,46	0	21	0,36
0	$\frac{1}{4}$	0,43	0	120	0,35
0	1	0,39	0	672	0,34
0	4	0,37	0	2136	0,34

Nach 28 Tagen hatte sich die Senkung des Holzes bis auf 0,34 Zoll vermindert. Als aber nach Verlauf von 2 Monaten die Krümmung unverändert blieb, konnte man den Versuch als beendet ansehn.

9. **Versuch.** Kiefernholz aus der Mitte zwischen Herz und Splint, ohne Harz, 6 Fuß $2\frac{3}{4}$ Zoll lang; $l = 66$, $b = 1,958$ und $h = 2,04$ Zoll, wog 6 Pfund 31 Loth. $G = 40\frac{1}{3}$ Pfund, also $g = 0,612$.

Auf jeden Zoll Dicke, 8 Holzringe. Die Fasern hatten eine horizontale Lage.

U	t	u
681	0	1,54
681	$\frac{1}{2}$	1,70
681	1	1,73
681	2	1,78
681	3	1,81
681	5	1,85
681	18	1,95
681	29	2,08
681	42	2,18
681	54	2,22
681	68	2,26
736	0	2,38
736	$\frac{1}{2}$	2,40

U	t	u
736	$\frac{1}{2}$	2,40
764	0	2,45
764	$\frac{1}{2}$	2,48
800	0	2,54
800	$\frac{1}{2}$	2,58
800	1	2,60
800	$1\frac{1}{2}$	2,62
828	0	2,68
828	$\frac{1}{2}$	2,72
840	0	2,75
840	$\frac{1}{4}$	2,78
850	0	2,80
850	$\frac{1}{5}$	2,82

Unter einer Last von 850 Pfund, nachdem sich die Mitte um 2,82 Zoll gesenkt hatte, plötzlich zerbrochen. Hier war $d = 0$, welches für die Folge allemal gilt, wenn weiter nichts bemerkt wird.

Das Maaß der absoluten Festigkeit dieses Holzes war k = 20680 Pfund. M. s. §. 433. den 4. und 5. Versuch.

Auf eine ähnliche Art wie beim sechsten Versuch näher beschrieben ist, wurde hier die Biegung des ganzen Holzstücks gemessen, als die Mitte desselben genau 2,60 Zoll gesenkt war. Die ausgemessenen Ordinaten sind in der nachstehenden Tafel aufgeführt.

Abscissen	Ordinaten auf der einen Hälfte	Ordinaten auf der andern Hälfte
Zoll.	Zoll.	Zoll.
3	0,34	0,34
6	0,69	0,68
9	1,01	1,00
12	1,32	1,32
15	1,63	1,63
18	1,89	1,89

Abscissen	Ordinaten auf der einen Hälfte	Ordinaten auf der andern Hälfte
Zoll.	Zoll.	Zoll.
18	1,89	1,89
21	2,12	2,13
24	2,30	2,30
27	2,44	2,44
30	2,54	2,55
33	2,60	2,60

10. Versuch. Kiefernholz vom Splint, ohne Harz, 6 Fuß $2\frac{3}{4}$ Zoll lang; $l = 70$, $b = h = 2$ Zoll, wog 6 Pfund $10\frac{1}{2}$ Loth. $G = 36,57$ Pfund, also $g = 0,554$.

Auf jeden Zoll der Dicke 18 Holzringe. Die Fasern waren horizontal gelegt.

U	t	u
735	0	2,35
735	$\frac{1}{4}$	2,92

U	t	u
735	$\frac{1}{2}$	3,06
735	$\frac{3}{4}$	3,14

Bei der anfänglichen Belastung von 735 Pfund war das Holz nach 45 Minuten zerbrochen, als sich die Mitte bis auf 3,14 Zoll gesenkt hatte.

Die absolute Festigkeit von einem Quadratzolle des Querschnitts war 18320 Pfund. M. s. §. 433. den 12. und 13. Versuch.

11. Versuch. Kiefernholz vom Kern, ohne Harz, 6 Fuß 3 Zoll lang; $l = 72$, $b = 1,458$ und $h = 1,5$ Zoll, wog 3 Pfund $28\frac{1}{2}$ Loth. $G = 40,987$ Pfund, also $g = 0,623$.

Auf jeden Zoll Dicke 13 Holzringe, die Fasern lagen horizontal.

U	t	u
239	0	1,89
239	$\frac{1}{4}$	1,97
239	$\frac{1}{2}$	2,01
239	1	2,05
239	2	2,13
239	4	2,23
239	13	2,40
239	23	2,58

U	t	u	d
239	29	2,63	0,01
239	42	2,68	0,03
349	0	3,57	0,06
349	$\frac{1}{4}$	3,73	0,13
377	0	3,99	0,13
377	$\frac{1}{4}$	4,16	0,21
404	0	4,41	0,22
404	$\frac{1}{5}$	4,50	0,24

Als die Last von 404 Pfund 12 Minuten gehangen hatte, war die Mitte um 4,5 Zoll gesenkt und das Holz zerbrach plötzlich.

Das Maaß der absoluten Festigkeit war $k = 21400$ Pfund. M. s. §. 433. den 1. und 2. Versuch.

12. Versuch. Kiefernholz aus der Mitte zwischen Herz und Splint, sehr wenig harzig; 6 Fuß 3 Zoll lang; $l = 72$, $b = h = 1,276$ Zoll, wog 2 Pfund 25 Loth. $G = 39,232$ Pfund, also $g = 0,595$.

Auf jeden Zoll Dicke 8 Holzringe. Die Fasern lagen horizontal.

Die aufgehängte Last war während des ganzen Versuchs unveränderlich 84 Pfund.

t	u	d
0	1,90	0,05
$\frac{1}{4}$	1,95	0,05
$\frac{1}{2}$	1,98	0,05
$\frac{3}{4}$	2,00	0,05
1	2,02	0,05
$1\frac{1}{2}$	2,04	0,05
2	2,05	0,06
3	2,08	0,06
5	2,14	0,06
8	2,19	0,06
13	2,23	0,07
21	2,29	0,07
28	2,34	0,07
37	2,39	0,07
50	2,45	0,08
74	2,53	0,08
98	2,59	0,08
122	2,64	0,08
146	2,69	0,08
170	2,73	0,09
194	2,76	0,09
242	2,80	0,10
314	2,94	0,11
410	3,00	0,11
530	3,07	0,12
650	3,13	0,12
962	3,52	0,17
1250	3,66	0,20
1562	3,90	0,30
1778	4,14	0.30
2018	4,45	0,51
2290	4,78	0,60
2338	4,89	0,65
2610	5,18	0,68
2706	5,32	0,73
2778	5,34	0,75
2994	5,40	0,78
3066	5,44	0,78
3210	5,46	0,78
3258	5,56	0,80
3354	5,68	0,86
3450	5,70	0,88
3618	5,78	0.90
3810	5,89	0,93
4002	5,95	0,98
4290	6,03	1,02
4602	6,15	1,03
5082	6,27	1,05
6200	6,39	1,08
7016	6,43	1,10
8192	6,44	1,10
9392	6,44	1,10

Bei diesem Versuche sind die Beobachtungen über ein Jahr lang fortgesetzt worden. Nach 341 Tagen vom Anfange der Belastung hatte sich die Mitte bis auf 6,44 Zoll gesenkt und das Holz war um 1,1 Zoll von den Unterlagen abgewichen. Da man keine weitere Veränderungen nach dieser Zeit bemerkte und auch nach 50 Tagen die Senkung und Abweichung unverändert blieb, so konnte man den Versuch als beendet ansehen. Beim plötzlichen Abnehmen der Belastung verminderte sich die Senkung u bis auf 4,85 Zoll.

13. Versuch. Kiefernholz aus der Mitte zwischen Kern und Splint, ohne Harz; 8 Fuß $\frac{1}{4}$ Zoll lang; $l = 88$, $b = 1{,}9$ und $h = 2$ Zoll, wog 7 Pfund 12 Loth. $G = 34{,}753$, also $g = 0{,}527$.

Auf jeden Zoll Dicke 13 Holzringe. Die Fasern lagen horizontal.

U	t	u
4	0	0
20	0	0,10
50	0	0,28
351	0	2,06
351	$\frac{1}{4}$	2,13
351	$\frac{1}{2}$	2,15
351	1	2,17
351	2	2,18
351	5	2,21
351	7	2,23
351	10	2,24
351	18	2,26
351	22	2,27
351	30	2,29
351	45	2,31
406	0	2,60
406	$\frac{1}{12}$	2,61

U	t	u	d
406	$\frac{1}{12}$	2,61	0
461	0	2,91	0
461	$\frac{1}{12}$	2,93	0
516	0	3,25	0
516	$\frac{1}{12}$	3,30	0,01
571	0	3,62	0,01
571	$\frac{1}{12}$	3,71	0,03
626	0	4,05	0,03
626	$\frac{1}{12}$	4,26	0,04
626	$\frac{1}{6}$	4,30	0,05
654	0	4,52	0,05
654	$\frac{1}{12}$	4,65	0,06
654	$\frac{1}{8}$	4,70	0,07
654	$\frac{1}{6}$	4,78	0,09
654	$\frac{5}{24}$	4,90	0,11
654	$\frac{1}{4}$	4,97	0,12
654	$\frac{1}{3}$	5,50	0,15

Weil die Zeit äußerst kurz war, in welcher man hinter einander 4; 20; 50 und 351 Pfund aufgehängt hatte, so ist solche hier als 0 angegeben. Als die Last von 654 Pfund $12\frac{1}{2}$ Minute aufgehangt und die Mitte 4,9 Zoll gesenkt war, zerplatzte ein Theil der untersten Fäser, und als sich nach 20 Minuten die Mitte bis auf 5,5 Zoll gesenkt hatte, zerbrach das Holz plötzlich.

(II). Versuche mit Sommereichen.

14. Versuch. Das Holz vom Kern, 4 Fuß $3\frac{3}{8}$ Zoll lang; $l = 48$, $b = 0{,}98$ und $h = 1{,}18$ Zoll, wog 1 Pfund $20\frac{1}{8}$ Loth. $G = 47{,}38$ Pfund, also $g = 0{,}719$.

Beim Auflegen des Holzes bildeten die Fasern mit dem Horizont einen Winkel von 45 Grad.

U	t	u
85	0	0,60
85	$\frac{1}{4}$	0,65
85	1	0,73
85	7	0,75
85	15	0,76
85	26	0,77
85	40	0,78

U	t	u
85	40	0,78
150	0	1,36
150	$\frac{1}{2}$	1,44
150	5	1,50
150	14	1,55
150	26	1,58
150	50	1,62

Als man die aufgehängte Last von 150 bis auf 85 Pfund verminderte, fand man für die größte Senkung unter dieser Last 1,06 Zoll und als man alle Gewichte abnahm und das Holz schnell auf eine wagerechte Tafel legte, blieb nur noch eine Senkung der Mitte von 0,22 Zoll. Die nachstehende Tafel enthält die Abnahmen dieser Senkung nebst der verflossenen Zeit.

U	t	u
150	50	1,62
85	0	1,06
0	0	0,22
0	$\frac{1}{4}$	0,19
0	1	0,16
0	5	0,12
0	12	0,11
0	22	0,10

U	t	u
0	45	0,09
0	69	0,08
0	117	0,07
0	189	0,05
0	285	0,04
0	621	0,03
0	1077	0,02
0	1797	0,02

Nach beinahe 45 Tagen hatte sich das Holz wieder so weit grade gerichtet, daß in seiner Mitte nur eine Senkung von $\frac{1}{50}$ Zoll blieb, und als sich diese während 30 Tage nicht änderte, so brachte man das Holz wieder auf die Unterlagen um zu bemerken, wie viel sich dasselbe bei einer der vorigen gleichen Belastung biegen werde.

U	t	u	d
0	1797	0,02	0,00
85	0	0,82	0,00
85	$\frac{1}{4}$	0,85	0,00
85	1	0,86	0,00
150	0	1,47	0,00
150	$\frac{1}{2}$	1,51	0,00
150	2	1,54	0,00
178	0	1,79	0,00
178	1	1,85	0,02
205	0	2,09	0,03

U	t	u	d
205	0	2,09	0,03
205	$\frac{1}{2}$	2,22	0,05
233	0	2,46	0,07
233	$\frac{1}{2}$	2,77	0,15
243	0	2,86	0,15
243	$\frac{1}{4}$	2,96	0,17
360	0	3,15	0,20
360	$\frac{1}{4}$	3,34	0,26
370	0	3,48	0,26
370	$\frac{5}{12}$	3,70	0,38

Unter einer Belastung von 370 Pfund, als sich die Mitte bis auf 3,7 Zoll gesenkt hatte, zerbrach das Holz plötzlich nach 25 Minuten.

15. Versuch. Sommereichenholz vom Splint, 4 Fuß $3\frac{4}{5}$ Zoll lang; $l = 50$, $b = 1$ und $h = 1{,}2$ Zoll; wog 1 Pfund $13\frac{3}{4}$ Loth. $G = 39{,}75$ Pfund, also $g = 0{,}603$.

Die Holzringe machten beim Auflegen einen Winkel von 45 Grad.

U	t	u	d
183	0	1,52	0,20
183	$\frac{1}{12}$	2,64	0,28
183	$\frac{1}{6}$	3,10	0,32
183	$\frac{1}{4}$	3,32	0,32
183	$\frac{1}{2}$	3,56	0,36
183	$\frac{3}{4}$	3,65	0,40
183	1	3,70	0,42
183	$1\frac{1}{2}$	3,79	0,44

U	t	u	d
183	$1\frac{1}{2}$	3,79	0,44
183	2	3,85	0,46
183	3	4,00	0,47
183	4	4,10	0,50
183	5	4,15	0,60
183	6	4,18	0,62
183	8	4,22	0,63
183	$8\frac{1}{4}$	4,23	0,64

Als die Mitte bis auf 4,23 Zoll gesenkt war, zerbrach das Holz nach 8 Stunden 15 Minuten unter der anfänglichen Belastung von 183 Pfund.

16. Versuch. Sommereiche, vom Kern, 6 Fuß $2\frac{1}{2}$ Zoll lang; $l = 66$, $b = h = 1\frac{1}{2}$ Zoll; wog 5 Pfund 1 Loth. $G = 51{,}275$ Pfund, also $g = 0{,}795$.

Die größten Sehnen der Holzfasern lagen horizontal.

U	t	u	d
295	0	1,66	0
295	$\frac{1}{4}$	1,81	0
295	$\frac{1}{2}$	1,86	0
295	1	1,92	0
295	2	1,99	0
295	3	2,04	0
295	5	2,10	0
295	14	2,23	0
295	18	2,32	0
295	26	2,44	0
295	38	2,52	0
295	52	2,61	0
295	71	2,70	0,01
323	0	2,83	0,01
323	$\frac{1}{2}$	2,86	0,02
350	0	3,00	0,02
350	$\frac{1}{2}$	3,03	0,03
378	0	3,16	0,04
378	$\frac{1}{2}$	3,23	0,05
405	0	3,38	0,05

U	t	u	d
405	$\frac{1}{2}$	3,46	0,05
417	0	3,51	0,05
417	$\frac{1}{2}$	3,60	0,06
427	0	3,66	0,07
427	$\frac{1}{2}$	3,71	0,08
435	0	3,76	0,09
435	$\frac{1}{2}$	3,82	0,11
441	0	3,86	0,12
441	$\frac{1}{2}$	3,93	0,12
445	0	3,96	0,12
445	$\frac{1}{2}$	4,00	0,13
448	0	4,02	0,13
448	1	4,13	0,17
451	0	4,15	0,17
451	$\frac{1}{4}$	4,19	0,18
454	0	4,20	0,18
454	$\frac{1}{4}$	4,22	0,18
454	1	4,28	0,20
454	2	4,34	0,22
454	5	4,58	0,33

Als das Holz während 5 Stunden mit 454 Pfund belastet war, zerbrach dasselbe bei einer Senkung von 4,58 Zoll plötzlich.

Das Maaß der absoluten Festigkeit oder k fand man = 26600 Pfund, wie solches §. 433. in den Versuchen 14 und 15 näher angegeben ist.

17. Versuch. Sommereiche, aus der Mitte zwischen Kern und Splint, 6 Fuß 2 Zoll lang; $l = 66$, $b = 1,5$ und $h = 1,542$ Zoll, wog 4 Pfund $1\frac{1}{8}$ Loth. $G = 40,74$ Pfund, also $g = 0,618$.

Die Holzringe lagen horizontal.

U	t	u	d
295	0	1,78	0
295	$\frac{1}{4}$	2,10	0
295	$\frac{1}{2}$	2,20	0
295	1	2,28	0
295	2	2,34	0
295	4	2,42	0
295	8	2,50	0
295	18	2,61	0,02
295	26	2,68	0,02
295	30	2,71	0,03
295	42	2,77	0,04
295	54	2,81	0,04
295	66	2,85	0,05
295	78	2,88	0,06
295	90	2,90	0,06
322	0	3,08	0,10
322	1	3,10	0,10
450	0	3,27	0,10
450	1	3,32	0,12
462	0	3,39	0,12
462	1	3,45	0,14
474	0	3,52	0,15
474	$\frac{1}{4}$	3,56	0,15
484	0	3,61	0,15
484	$\frac{1}{4}$	3,66	0,15
494	0	3,71	0,15
494	$\frac{1}{4}$	3,78	0,17
504	0	3,84	0,17
504	$\frac{1}{4}$	3,91	0,20
514	0	4,00	0,22
514	$\frac{1}{4}$	4,05	0,23
522	0	4,10	0,23
522	$\frac{1}{4}$	4,20	0,26
530	0	4,28	0,26
530	$\frac{1}{4}$	4,38	0,29
538	0	4,42	0,30
538	$\frac{1}{4}$	4,50	0,32
544	0	4,54	0,32
544	$\frac{1}{4}$	4,62	0,34
550	0	4,66	0,34
550	$\frac{1}{4}$	4,73	0,38
556	0	4,78	0,38
556	$\frac{1}{4}$	4,82	0,40
562	0	4,88	0,40
562	$\frac{1}{10}$	5,00	0,47
562	$\frac{1}{4}$	5,16	0,50
562	$\frac{1}{2}$	5,35	0,53
562	$\frac{7}{12}$	5,38	0,54

Das Holz war 6 Minuten mit der Last von 562 Pfund beschwert, als bei einer Senkung von 5,00 Zoll die unterste Faser beinahe gänzlich zerplatzte. Als noch 29 Minuten verflossen waren, zerbrach das Holz plötzlich bei einer Senkung von 5,38 Zoll.

Das Maaß der absoluten Festigkeit fand man = 25480 Pfund. M. s. §. 433. den 18. und 19. Versuch.

18. Versuch. Sommereiche vom Splint, 6 Fuß $2\frac{1}{2}$ Zoll lang: $l = 66$ Zoll, $b = 1,46$ und $h = 1,96$ Zoll, wog 5 Pfund. $G = 40,608$ Pfund, also $g = 0,616$.

Die Holzringe lagen horizontal.

U	t	u
515	0	1,59
515	$\frac{1}{4}$	2,08
515	$\frac{1}{2}$	2,38
515	1	2,70
515	2	2,80

U	t	u	d
515	3	2,87	0
515	5	2,94	0
515	16	3,17	0
515	19	3,24	0,02
515	$20\frac{3}{4}$	3,29	0,05

Vom ersten Augenblick der Belastung mit 515 Pfund bis zum Bruch, welcher plötzlich erfolgte, waren 20 Stunden 45 Minuten verflossen, und die Mitte hatte sich 3,29 Zoll gesenkt.

Das Maaß der absoluten Festigkeit oder k fand man = 14760 Pfund. M. s. §. 433. den 20. und 21. Versuch.

19. Versuch. Sommereiche zwischen Kern und Splint, 6 Fuß $2\frac{1}{4}$ Zoll lang; $l = 66$, $b = h = 2$ Zoll, wog 7 Pfund 1 Loth. $G = 40,909$ Pfund, also $g = 0,620$.

Die Holzringe lagen horizontal.

U	t	u
682	0	1,31
682	$\frac{1}{4}$	1,99
682	$\frac{1}{2}$	2,38
682	1	2,68
682	2	2,83
682	4	2,96

U	t	u
682	4	2,96
682	8	3,11
682	24	3,47
682	$24\frac{1}{2}$	3,52
682	25	3,56
682	$25\frac{1}{2}$	3,61

Als das Holz während 25 Stunden 30 Minuten mit 682 Pfund belastet war, zerbrach dasselbe plötzlich bei einer Senkung von 3,61 Zoll.

Eben so wie solches beim sechsten Versuche beschrieben ist, maß man hier die Biegung des ganzen Holzes, als die Mitte genau 3,52 Zoll gesenkt war.

Abscissen	Ordinaten auf der einen Hälfte	Ordinaten auf der andern Hälfte
Zoll.	Zoll.	Zoll.
3	0,48	0,47
6	0,93	0,91
9	1,37	1,35
12	1,79	1,76
15	2,20	2,18
18	2,54	2,52

Abscissen	Ordinaten auf der einen Hälfte	Ordinaten auf der andern Hälfte
Zoll.	Zoll.	Zoll.
18	2,54	2,52
21	2,91	2,88
24	3,14	3,12
27	3,34	3,32
30	3,48	3,47
33	3,52	3,52

20. Versuch. Sommereiche vom Herz, 6 Fuß $2\frac{1}{4}$ Zoll lang; $l = 66$, $b = 1,46$ und $h = 2,08$ Zoll, wog 6 Pfund 2 Loth. $G = 46,44$ Pfund, also $g = 0,704$.

Die Holzringe lagen horizontal.

U	t	u
570	0	1,12
570	$\frac{1}{4}$	1,49
570	$\frac{1}{2}$	1,63
570	1	1,73
570	3	1,82
570	5	1,88
570	14	1,97
570	26	2,15
570	38	2,22
570	44	2,25
570	64	2,33
625	0	2,46
625	$\frac{1}{2}$	2,47

U	t	u
625	$\frac{1}{2}$	2,47
680	0	2,60
680	$\frac{1}{4}$	2,62
708	0	2,69
708	$\frac{1}{4}$	2,72
735	0	2,78
735	$\frac{1}{4}$	2,82
763	0	2,89
763	$\frac{1}{4}$	2,95
775	0	2,98
775	$\frac{1}{4}$	3,04
785	0	3,07
785	$\frac{1}{4}$	3,11

Als die Mitte bis auf 3,11 Zoll gesenkt war, zerbrach das Holz plötzlich, nachdem eine Last von 785 Pfund 15 Minuten daran gehangen hatte.

21. Versuch. Sommereiche, aus der Mitte zwischen Herz und Splint, 6 Fuß $2\frac{1}{4}$ Zoll lang; $l = 72$, $b = 1,17$ und $h = 1,34$ Zoll, wog 3 Pfund $\frac{3}{4}$ Loth. $G = 45,16$ Pfund, also $g = 0,685$.

Die Holzringe horizontal.

U	t	u	d
182	0	2,71	0
182	$\frac{1}{4}$	3,28	0,02
182	$\frac{1}{2}$	3,59	0,02
182	1	3,99	0,28
182	2	4,19	0,32
182	3	4,33	0,34

U	t	u	d
182	3	4,33	0,34
182	4	4,42	0,36
182	7	4,60	0,39
182	8	4,66	0,39
182	18	5,05	0,50
182	28	5,37	0,60

Man belastete das Holz nach und nach mit größern Gewichten, und als man 254 Pfund aufgebracht hatte, senkte sich die Mitte bis auf 7,40 Zoll. Allein, da solches auf beiden Seiten zu wenig über die Unterlagen hervor stand, so verließen die Enden des Holzes die Unterlagen, ohne daß das Holz zerbrach, weshalb man den Versuch enden mußte, weil das einmal gebogene Holz zu keinem andern Versuche brauchbar war.

Das Maaß der absoluten Festigkeit dieses Holzes oder k fand man = 18400 Pfund. M. s. §. 433. den 16. und 17. Versuch.

22. Versuch. Sommereiche, aus der Mitte zwischen Herz und Splint, 8 Fuß $3\frac{1}{4}$ Zoll lang, $l = 84$, $b = h = 2$ Zoll; wog 10 Pfund 16 Loth. $G = 45{,}702$, also $g = 0{,}693$.

Die Holzfasern hatten eine solche Lage, daß sie gegen den Horizont unter einem Winkel von etwa 30 Grad geneigt waren.

Dieses Holzstück war von allen übrigen darin verschieden, daß die Fasern dergestalt über den Spahn geschnitten waren, daß solche, ohne durchschnitten zu seyn, nur eine Länge von 20 bis 24 Zoll hatten, statt daß bei allen übrigen Hölzern die Fasern genau eben so lang waren als das ganze Holzstück. Um den Unterschied beim Biegen und Brechen dieses Holzes gegen die andern Hölzer kennen zu lernen, welche nicht über den Spahn geschnitten waren, dient nachstehende Tafel.

U	t	u
352	0	2,09
352	$\frac{1}{4}$	2,82
352	$\frac{1}{2}$	3,13
352	1	3,28
352	3	3,35
352	7	3,44
352	21	3,65
352	48	3,91
407	0	4,32

U	t	u
407	$\frac{1}{4}$	4,36
462	0	4,77
462	$\frac{1}{4}$	4,93
490	0	5,12
490	$\frac{1}{4}$	5,21
517	0	5,49
517	$\frac{3}{4}$	5,64
544	0	5,88
544	$\frac{1}{4}$	6,12

Als die Last von 544 Pfund während $\frac{1}{4}$ Stunde aufgehängt war, zerbrach das Holz plötzlich in der Mitte, bei einer Senkung von 6,12 Zoll. Der Bruch bildete eine mit den Fasern parallele Fläche.

(III). Versuche mit Steineichen.

23. Versuch. Das Holz zwischen Kern und Splint 3 Fuß 8 Zoll lang; $l = 42$, $b = 1,48$, $h = 1,13$ Zoll, wog 2 Pfund $1\frac{1}{4}$ Loth. $G = 47,88$ Pfund, also $g = 0,726$.

Die Holzringe lagen horizontal.

U	t	u	d
349	0	1,34	0
349	$\frac{1}{4}$	1,47	0
349	$\frac{1}{2}$	1,51	0
349	1	1,56	0
349	4	1,72	0
349	7	1,78	0,01

U	t	u	d
349	16	1,92	0,04
349	21	2,00	0,05
349	30	2,10	0,08
349	40	2,20	0,10
349	55	2,26	0,12
349	63	2,39	0,14

Bei einer Belastung von 349 Pfund war dieses Holz nach 63 Stunden gebrochen, als sich die Mitte bis auf 2,39 Zoll gesenkt hatte.

24. Versuch. Steineichenholz, aus der Mitte zwischen Herz und Splint; 5 Fuß 1 Zoll lang; $l = 56$, $b = h = 1{,}5$ Zoll, wog 3 Pfund $29\frac{1}{4}$ Loth. $G = 49{,}28$ Pfund, also $g = 0{,}747$.

Die Holzringe lagen horizontal.

U	t	u	d	U	t	u	d
240	0	0,83	0	282	0	2,03	0
240	$\frac{1}{4}$	0,97	0	282	1	2,05	0,01
240	$\frac{1}{2}$	1,16	0	292	0	2,09	0,01
240	1	1,23	0	292	$\frac{1}{2}$	2,11	0,01
240	2	1,28	0	302	0	2,15	0,01
240	6	1,37	0	302	$\frac{1}{2}$	2,17	0,01
240	10	1,43	0	312	0	2,20	0,01
240	25	1,57	0	312	$\frac{1}{2}$	2,23	0,02
240	33	1,62	0	322	0	2,27	0,02
240	42	1,66	0	322	$\frac{1}{2}$	2,30	0,02
240	54	1,71	0	332	0	2,34	0,02
240	66	1,75	0	332	$\frac{1}{2}$	2,37	0,02
240	78	1,79	0	342	0	2,40	0,02
240	90	1,82	0	342	2	2,50	0,03
252	0	1,87	0	352	0	2,54	0,03
252	$\frac{1}{2}$	1,88	0	352	$\frac{1}{2}$	2,56	0,04
262	0	1,91	0	362	0	2,60	0,04
262	$\frac{1}{2}$	1,93	0	362	$\frac{1}{2}$	2,64	0,05
272	0	1,96	0	370	0	2,68	0,05
272	1	1,99	0	370	$\frac{1}{2}$	2,72	0,06

U	t	u	d
378	0	2,76	0,06
378	$\frac{1}{2}$	2,79	0,06
396	0	2,82	0,06
396	$\frac{1}{4}$	2,84	0,06
404	0	2,87	0,06
404	$\frac{1}{4}$	2,90	0,06
412	0	2,94	0,06
412	$\frac{1}{12}$	2,96	0,06
420	0	3,00	0,06
420	$\frac{1}{12}$	3,01	0,06
428	0	3,06	0,06
428	$\frac{1}{12}$	3,08	0,07
436	0	3,11	0,07
436	$\frac{1}{12}$	3,13	0,08
444	0	3,18	0,08
444	$\frac{1}{12}$	3,21	0,08
452	0	3,26	0,08
452	$\frac{1}{12}$	3,29	0,08
460	0	3,32	0,08
460	$\frac{1}{12}$	3,36	0,08
468	0	3,41	0,08
468	$\frac{1}{12}$	3,48	0,10
476	0	3,50	0,10
476	$\frac{1}{12}$	3,54	0,12
484	0	3,59	0,12
484	$\frac{1}{12}$	3,65	0,13
492	0	3,70	0,13
492	$\frac{1}{12}$	3,73	0,13
500	0	3,79	0,13
500	$\frac{1}{12}$	3,85	0,18
508	0	3,90	0,18
508	$\frac{1}{12}$	3,98	0,19
516	0	4,02	0,19
516	$\frac{1}{12}$	4,12	0,24

Als die Last von 516 Pfund während 5 Minuten aufgehängt war, zerbrach das Holz plötzlich, nachdem seine Mitte bis auf 4,12 Zoll gesenkt war.

Das Maaß der absoluten Festigkeit oder k fand man = 22120 Pfund. M. s. §. 433. den 22. und 23. Versuch.

(IV) Versuche mit Rothtannen.

25. Versuch. Das Holz aus der Mitte zwischen Kern und Splint, 4 Fuß lang; $l = 46$, $b = h = 1,208$ Zoll; wog 1 Pfund. $G = 24,657$ Pfund, also $g = 0,374$.

Die Holzringe machten mit dem Horizont einen Winkel von 45 Grad.

U	t	u
128	0	1,10
128	$\frac{1}{4}$	1,21
128	$\frac{1}{2}$	1,25
128	1	1,30
128	2	1,35
128	3	1,39
128	5	1,46
128	7	1,50
128	9	1,53

U	t	u	d
128	9	1,53	0
128	14	1,61	0
128	22	1,66	0
128	30	1,70	0
156	0	1,92	0,06
156	$\frac{1}{6}$	1,93	0,06
185	0	2,35	0,10
185	$\frac{1}{6}$	2,66	0,17
185	$\frac{5}{24}$	2,70	0,18

Nachdem die Belastung von 185 Pfund 5 Minuten angehängt war, bemerkte man ein starkes Krachen und nach $12\frac{1}{2}$ Minuten zerbrach das Holz plötzlich, als sich die Mitte bis 2,70 Zoll gesenkt hatte.

Das Maaß der absoluten Festigkeit war 10920 Pfund. M. s. §. 433. den 24sten und 25sten Versuch.

(V) Versuche mit Weißtannen.

26. Versuch. Das Holz aus der Mitte zwischen Kern und Splint; 4 Fuß $3\frac{1}{2}$ Zoll lang; $l = 48$, $b = h = 1$ Zoll, wog 27 Loth. $G = 27,78$ Pfund, also $g = 0,421$.

Die Fasern lagen wagerecht.

U	t	u	d
101	0	1,38	0
101	$\frac{1}{4}$	1,46	0
101	$\frac{1}{2}$	1,49	0
101	1	1,54	0
101	2	1,58	0
101	3	1,62	0
101	7	1,72	0
101	15	1,80	0,01
101	20	1,84	0,02
101	24	1,86	0,03
113	0	2,04	0,05
113	$\frac{1}{6}$	2,05	0,06

U	t	u	d
113	$\frac{1}{6}$	2,05	0,06
123	0	2,19	0,08
123	$\frac{1}{6}$	2,22	0,11
133	0	2,36	0,12
133	$\frac{1}{6}$	2,46	0,15
140	0	2,56	0,16
140	$\frac{1}{6}$	2,62	0,17
145	0	2,70	0,19
145	$\frac{1}{6}$	2,86	0,20
150	0	2,96	0,20
150	$\frac{1}{12}$	3,08	0,22
150	$\frac{1}{6}$	3,20	0,36

Als die Last von 150 Pfund 10 Minuten gehangen hatte und die Mitte bis auf 3,20 Zoll gesenkt war, zerbrach das Holz plötzlich.

Das Maaß der absoluten Festigkeit fand man = 15400 Pfund. M. s. §. 433. den 26sten und 27sten Versuch.

27. Versuch. Weißtannen aus der Mitte zwischen Herz und Splint; 4 Fuß $3\frac{1}{2}$ Zoll lang; $l = 48$, $b = 1,48$ und $h = 1,5$ Zoll; wog 1 Pfund $27\frac{1}{4}$ Loth. $G = 27,96$ Pfund, also $g = 0,424$.

Die Fasern lagen horizontal.

U	t	u
348	0	1,04
348	$\frac{1}{4}$	1,08
348	1	1,11
348	3	1,14
348	10	1,18
348	20	1,20
348	32	1,22
348	45	1,24
348	68	1,28
348	93	1,30
348	117	1,33
348	141	1,36
348	165	1,38
348	189	1,40
348	213	1,42
348	237	1,43

U	t	u	d
348	261	1,44	0
348	309	1,45	0
348	357	1,46	0
348	405	1,47	0
348	465	1,48	0
403	0	1,63	0
403	$\frac{1}{2}$	1,64	0,01
458	0	1,80	0,01
458	$\frac{1}{2}$	1,90	0,02
486	0	1,99	0,02
486	$\frac{5}{12}$	2,21	0,02
486	$\frac{1}{2}$	2,40	0,03
486	$\frac{7}{12}$	2,56	0,04
486	$\frac{2}{3}$	2,72	0,06
486	$\frac{3}{4}$	2,90	0,10
486	$\frac{4}{5}$	3,25	0,13

Als die Belastung von 486 Pfd. 25 Minuten gehangen hatte und die Mitte bis auf 2,21 Zoll gesenkt war, zerplatzte ein Theil der untersten Eckfaser und nach 48 Minuten zerbrach das Holz plötzlich bei einer Senkung von 3,25 Zoll. Man konnte an demselben sehr deutlich bemerken, daß die oberste Faser an mehrern Stellen zusammen gestaucht war.

(VI) Versuche mit Büchenholz (Rothbüchen).

28. Versuch. Das Holz vom Splint, 2 Fuß $11\frac{1}{2}$ Zoll lang; $l = 32$, $b = 1$ und $h = 0{,}82$ Zoll; wog $25\frac{5}{8}$ Loth. $G = 47{,}516$ Pfund also $g = 0{,}721$.

Die Holzringe lagen wagerecht.

U	t	u	d
164	0	1,15	0,03
164	$\frac{1}{4}$	1,25	0,04
164	$\frac{1}{2}$	1,31	0,05
164	2	1,38	0,05
164	4	1,42	0,05
164	12	1,51	0,07
164	22	1,57	0,08

U	t	u	d
164	37	1,67	0,11
164	46	1,72	0,12
164	61	1,80	0,12
164	76	1,85	0,14
164	95	1,89	0,15
210	0	2,18	0,20
210	1	2,50	0,28

Nachdem zuletzt während einer Stunde eine Last von 210 Pfund aufgehängt war, zerbrach das Holz plötzlich bei einer Senkung von 2,5 Zoll.

29. Versuch. Büchenholz vom Stamme zwischen Herz und Splint, 2 Fuß $11\frac{3}{4}$ Zoll lang; $l = 34$, $b = 1$ und $h = 0{,}8$ Zoll, wog $26\frac{5}{8}$ Loth. $G = 50{,}27$ Pfund, also $g = 0{,}762$.

Die Holzringe lagen wagerecht.

U	t	u	d
128	0	0,98	0
128	$\frac{1}{4}$	1,04	0
128	$\frac{1}{2}$	1,08	0
128	1	1,11	0
128	2	1,16	0
128	3	1,18	0
128	5	1,22	0
128	13	1,33	0
128	18	1,40	0
128	25	1,49	0
128	29	1,52	0
128	38	1,56	0,05
138	0	1,63	0,08
138	$\frac{1}{2}$	1,64	0,08
148	0	1,70	0,08

U	t	u	d
148	$\frac{1}{2}$	1,73	0,09
158	0	1,80	0,09
158	$\frac{1}{4}$	1,82	0,10
168	0	1,89	0,11
168	$\frac{1}{4}$	1,95	0,13
178	0	2,14	0,16
178	$\frac{1}{4}$	2,15	0,16
182	0	2,19	0,16
182	$\frac{1}{4}$	2,26	0,20
184	0	2,29	0,23
184	$\frac{1}{4}$	2,34	0,23
186	0	2,36	0,23
186	$\frac{1}{4}$	2,42	0,25
188	0	2,46	0,28
188	$\frac{1}{2}$	2,51	0,30

U	t	u	d
190	0	2,54	0,30
190	$\frac{1}{4}$	2,63	0,32
192	0	2,65	0,32
192	$\frac{1}{6}$	2,71	0,32
194	0	2,75	0,33
194	$\frac{1}{6}$	2,76	0,35
196	0	2,78	0,37
196	$\frac{1}{6}$	2,81	0,38

U	t	u	d
198	0	2,82	0,38
198	$\frac{1}{6}$	2,90	0,42
200	0	2,91	0,42
200	$\frac{1}{12}$	2,93	0,42
202	0	2,96	0,42
202	$\frac{1}{12}$	3,00	0,48
202	$\frac{1}{6}$	3,09	0,53
202	$\frac{1}{4}$	3,50	0,60

Unter einer Belastung von 202 Pfund zerplatzte nach 5 Minuten bei einer Senkung von 3,00 Zoll ein Theil der untersten Faser und nach 15 Minuten zerbrach das Holz plötzlich bei einer Senkung von 3,50 Zoll.

Das Maaß der absoluten Festigkeit dieses Holzes fand man = 22360 Pfund. M. s. §. 433. den 30sten und 31sten Versuch.

(VII) Versuche mit Hornbaumholz (Weißbüchen).

30. Versuch. Das Holz vom Stamme, zwischen Kern und Splint, 4 Fuß $\frac{3}{4}$ Zoll lang; $l = 42$, $b = 1{,}07$ und $h = 1$ Zoll, wog 1 Pfund $19\frac{1}{4}$ Loth. $G = 53{,}07$ Pfund, also $g = 0{,}805$.

Die Holzringe lagen horizontal.

U	t	u	d
156	0	1,32	0
156	$\frac{1}{4}$	1,52	0
156	$\frac{3}{4}$	1,62	0
156	$1\frac{1}{4}$	1,67	0
156	3	1,77	0,01
156	19	2,18	0,07

U	t	u	d
156	26	2,28	0,09
156	35	2,35	0,11
156	47	2,42	0,17
156	59	2,47	0,17
168	0	2,55	0,17
168	$\frac{1}{4}$	2,56	0,20

U	t	u	d
180	0	2,65	0,20
180	$\frac{1}{4}$	2,66	0,21
190	0	2,74	0,21
190	$\frac{1}{4}$	2,78	0,24
200	0	2,86	0,24

U	t	u	d
200	$\frac{1}{4}$	2,93	0,28
206	0	2,97	0,28
206	$\frac{1}{6}$	3,04	0,32
212	0	3,09	0,32
212	$\frac{1}{12}$	3,09	0,32

Nachdem zuletzt während 5 Minuten eine Belastung von 212 Pfund aufgehängt war, zerbrach das Holz plötzlich bei einer Senkung von 3,09 Zoll.

31. Versuch. Weißbüchen vom Stamme zwischen Kern und Splint, 4 Fuß $\frac{3}{4}$ Zoll lang; $l = 46$, $b = 1,06$ und $h = 1,03$ Zoll, wog 1 Pfund $17\frac{11}{16}$ Loth. $G = 50,452$, also $g = 0,765$.

Die Holzringe lagen wagerecht.

U	t	u	d
183	0	2,24	0,08
183	$\frac{1}{8}$	2,62	0,15

U	t	u	d
183	$\frac{1}{4}$	2,94	0,20
183	$\frac{3}{8}$	3,02	0,28

Als die Mitte bis auf 3,02 Zoll gesenkt war, und während $22\frac{1}{2}$ Minute 183 Pfund aufgehängt waren, zerbrach das Holz plötzlich.

Das Maaß der absoluten Festigkeit dieses Holzes fand man = 20400 Pfund. M. s. §. 433. den 28sten und 29sten Versuch.

(VIII) Versuche mit Erlenholz.

32. Versuch. Vom Stamme zwischen Herz und Splint, 3 Fuß 10 Zoll lang; $l = 43$, $b = 1,02$ und

$h = 0{,}92$ Zoll, wog 1 Pfund $\frac{5}{16}$ Loth. $G = 43{,}32$ Pfund, also $g = 0{,}656$.

Die Holzringe lagen wagerecht.

U	t	u	d
128	0	1,58	0,03
128	$\frac{1}{4}$	1,77	0,05
128	$\frac{1}{2}$	1,80	0,05
128	1	1,88	0,06
128	2	1,93	0,07
128	4	2,06	0,08
128	7	2,14	0,11
128	10	2,20	0,11
128	18	2,31	0,14
128	22	2,35	0,14
128	29	2,41	0,15
128	35	2,43	0,15
128	48	2,47	0,15
138	0	2,59	0,18
138	$\frac{1}{2}$	2,61	0,18

U	t	u	d
138	$\frac{1}{2}$	2,61	0,18
148	0	2,71	0,19
148	$\frac{1}{4}$	2,73	0,20
158	0	2,83	0,22
158	$\frac{1}{2}$	2,91	0,23
168	0	3,02	0,25
168	$\frac{1}{4}$	3,14	0,31
174	0	3,20	0,34
174	$\frac{1}{4}$	3,36	0,34
180	0	3,44	0,40
180	$\frac{1}{4}$	3,56	0,45
184	0	3,63	0,45
184	$\frac{1}{12}$	3,70	0,52
184	$\frac{1}{4}$	3,81	0,57
184	$\frac{1}{3}$	3,88	0,60

Unter einer Belastung von 184 Pfund, als sich die Mitte nach 5 Minuten bis auf 3,70 Zoll gesenkt hatte, krachte das Holz und nach 20 Minuten zerbrach dasselbe plötzlich bei einer Senkung von 3,88 Zoll.

Das Maaß der absoluten Festigkeit dieses Holzes oder k fand man = 24740 Pfund. M. s. §. 433. den 32sten und 33sten Versuch.

33. Versuch. Erlenholz vom Splint, 3 Fuß 10 Zoll lang; $l = 43$, $b = 1$ und $h = 0{,}95$ Zoll, wog $30\frac{1}{2}$ Loth. $G = 37{,}68$ Pfund, also $g = 0{,}572$.

Die Holzringe lagen wagerecht.

U	t	u	d
156	0	2,00	0,05
156	$\frac{1}{4}$	2,24	0,09
156	$\frac{1}{2}$	2,30	0,10
156	1	2,38	0,11
156	2	2,45	0,14

U	t	u	d
156	2	2,45	0,14
156	4	2,54	0,15
156	8	2,65	0,17
156	14	2,85	0,22
156	21	3,28	0,30

Unter einer Belastung von 156 Pfund zerbrach das Holz plötzlich nach 21 Stunden, als sich die Mitte bis auf 3,28 Zoll gesenkt hatte.

§. 493.

Aus der Vergleichung der vorstehenden Versuche unter einander überzeugt man sich bald, daß es bei der Bestimmung der respectiven Festigkeit des Holzes wesentlich auf die Zeit ankommt, welche man zur Belastung verwandt hat. Dabei ist es wieder nicht gleichgültig, ob man kleine Gewichte in kleinen Zeitabtheilungen oder größere Gewichte in verhältnißmäßig größern Zeittheilen auflegt. Da es nun bei der Bestimmung der respectiven Festigkeit eines Körpers darauf ankommt, das kleinste Gewicht anzugeben, welches einen Körper zu zerbrechen im Stande ist, so muß man bei Erwägung dieser Umstände beinahe verzweifeln, die respective Festigkeit eines Körpers aus Versuchen abzuleiten. Denn wollte man auch jeden einzelnen Versuch auf mehrere Jahre ausdehnen und dadurch das Gewicht finden, welches den Körper z. B. nach drei Jahren zerbrochen hätte, so ist doch dadurch die respective Festigkeit des Körpers noch nicht bekannt, weil derselbe bei einem etwas kleinern Gewichte ebenfalls zerbrechen konnte, wenn nur die Belastung von längerer Dauer gewesen wäre. Setzt man diese Schlüsse ohne Rücksicht auf die Verweslichkeit des Holzes für jede andere Anzahl Jahre fort, so müßten die Versuche ewig dauern, um endlich die respective Festigkeit eines Körpers zu finden.

Wollte man nach irgend einer Voraussetzung aus allgemeinen Gründen ein Gesetz aufsuchen, nach welchem aus dergleichen Versuchen über das Zerbrechen der Körper ihre respective Festigkeit bestimmt werden könnte, so geben die unzureichenden Kenntnisse von der Struktur des Holzes und von den Kräften, welche der Veränderung seiner Gestalt widerstehen, nur wenig Hoffnung zur Erlangung eines allgemein gültigen Ausdrucks. Eben so wenig darf man erwarten, einen auf alle Versuche passenden einfachen Näherungsausdruck zu erhalten.

Wären die Hölzer vollkommen elastisch, so müßte, wenn der wagerechte Balken in seiner Mitte durch ein Gewicht U belastet wird, irgend eine Senkung u in der Mitte desselben entstehen, und wenn die kleine zur Senkung des Gewichts erforderliche Zeit verflossen ist, so müßte die Last U bei der Senkung u mit der Elasticität des Balkens im Gleichgewichte bleiben, ohne daß ein ferneres Senken erfolgen könnte. Alsdann wäre nach §. 455. I.

$$u = \frac{l^3 U}{48 e^2 bh^3},$$

so daß, wenn U, die Abmessungen des Balkens und die Elasticität e^2 unverändert bleiben, auch u einerlei Werth behalten, also die Elasticität mit der Last U im Gleichgewichte bleiben müßte.

Die vorstehenden Versuche gaben indessen in Absicht des Biegens der Hölzer ganz andere Resultate, welches man auch schon deshalb erwarten konnte, weil die Hölzer nur als unvollkommen elastische Körper angesehen werden können. Man bemerkt allgemein, wenn ein Balken von irgend einer Holzart in seiner Mitte belastet wird, daß in dem Augenblick, wenn man das Gewicht aufhängt, ein plötzliches Senken seiner Mitte entsteht, und das aufgehängte Gewicht scheint alsdann mit der Elasticität des Balkens im Gleichgewichte zu seyn. Allein der Balken fährt fort, sich zu biegen, und wenn gleich die zunehmende Senkung nach Verlauf einiger Stunden gegen die erste Senkung nur geringe ist, so fährt dennoch der Balken fort, sich auch nach mehrern Monaten noch zu biegen, bis endlich nach Verlauf einer sehr großen Zeit (m. s. den 8ten und 12. Versuch), keine weitere Senkung erfolgt. Daß am Ende der auf die Belastung verwandten Zeit ein Theil der Elasticität des Balkens vernichtet worden, beweisen die Versuche (5. 8 und 14.) bei welchen nach abgenommener Belastung dennoch eine Krümmung des Holzstücks zurückblieb. Hieraus geht hervor, daß die Elasticität nach und nach vermindert wird, weil sie nicht im Stande ist, mit der Last U fortwährend im Gleichgewichte zu bleiben, und daß man nur bei der ersten plötzlichen Senkung die Elasticität des Holzes als unverändert ansehn kann. Soll daher die veränderliche Senkung des Balkens durch die Gleichung $u = \frac{l^3 U}{48 e^2 bh^3}$ ausgedrückt werden, so muß man e^2 als veränderlich annehmen. Bezeichnet z^2 den allgemeinen Ausdruck, welchen man statt e^2 setzen muß, um nach Verlauf einer jeden Zeit t die Senkung u zu finden, so erhält man

$$u = \frac{l^3 U}{48bh^3z^2} \text{ oder } z^2 = \frac{l^3 U}{48bh^3u}.$$

Für z^2 müßte man nun eine Funktion von t, etwa von der Form $\frac{\alpha+\beta t^n}{\gamma+t^n}$ annehmen, welche, wenn die erste plötzliche Senkung so angenommen wird, als wenn sie in der Zeit $t=0$ erfolgte, sowohl für $t=0$ als auch für $t=\infty$ einen endlichen Werth für u giebt, und man könnte alsdann aus den Versuchen die Werthe für die beständigen Größen α, β, γ und n ableiten. Allein da mehrere dergleichen angestellte Untersuchungen keine befriedigende Resultate lieferten, so hat man diesen Weg nicht weiter verfolgt. Uebrigens wird man bei der Ausmittelung der Gesetze, nach welchen das Biegen eines Holzstücks erfolgt, sehr wohl unterscheiden müssen, ob dasselbe während des Biegens von seinen Unterlagen abweicht oder nicht, weil im erstern Falle die größte Ordinate u zugleich eine Funkzion dieser Abweichung ist.

§. 494.

Ist gleich das Gesetz unbekannt, nach welchem bei einer gegebenen Belastung die größte Ordinate in bestimmten Zeiten wächst, so ist doch die absolute Elasticität e^2 für den ungebogenen Balken eine beständige Größe. Wird der Balken belastet, so müßte e^2 für jeden Zeitraum ungeändert bleiben, wenn sich die Elasticität des Holzes nicht änderte. Da es indessen wahrscheinlich ist, daß die Elasticität ohne Rücksicht auf zufällige Einwirkungen der Temperatur, Feuchtigkeit u. s. w., auch noch eine Funkzion von der während der Belastung verflossenen Zeit und von andern Größen ist, so muß sich aus den Versuchen ergeben, wie weit die Voraussetzung statthaft ist, daß die absolute Elasticität im ersten Augenblicke nach der Belastung unveränderlich bleibt. Werden die bisher angenommenen Bezeichnungen beibehalten, so daß U die im ersten Augenblicke aufgelegte Belastung anzeigt, bei welcher die Mitte des Holzes sogleich um die Tiefe c gesenkt worden, und setzt man noch, daß w diejenige größte Ordinate bezeichnet, bei welcher das Holz zerbrochen ist, so müßte, wenn die angenommene Voraussetzung statthaft ist,

$$e^2 = \frac{l^3 U}{48 b h^3 c}$$

und nach §. 455. IV.

$$\frac{12 e^2}{N} = \frac{l^2}{h w}$$

seyn. In der folgenden Tafel sind diese Werthe für die verschiedenen Versuche zusammen gestellt, wobei noch zu bemerken ist, daß die verschiedenen Holzstücke durch die Buchstaben K, M, S bezeichnet sind, so daß

K, Kern,

M, aus der Mitte zwischen Kern und Splint, und

S, Splint bedeutet.

	No. des Versuchs	l	h	b	c	U	w	$\frac{l^3U}{bch^3}=48e^2$	$\frac{l^2}{hw}$
Kiefernholz.	1. S.	30	0,958	0,70	0,09	13	1,51	6336804	622
	2. S.	30	1,02	0,812	0,36	80	1,68	7345008	535
	3. M.	48	1,028	1,146	1,28	128	3,51	8882982	638
	4. K.	49	1,04	1,04	1,00	73	3,99	7338005	579
	5. M.	50	1,229	1,222	0,59	73	3,70	6817950	550
	6. M.	66	2,00	2,00	1,16	598	3,43	9263069	635
	7. M.	66	1,542	1,500	1,95	295	3,20*	7908144	(883)
	8. M.	66	1,60	1,60	0,76	112		6464814	
	9. M.	66	2,04	1,958	1,54	681	2,82	7648127	757
	10. S.	70	2,00	2,00	2,35	735	3,14	6704920	780
	11. K.	72	1,50	1,458	1,89	239	4,50	9591847	768
	12. M.	72	1,276	1,276	1,90	84		6224726	
	13. M.	83	2,00	1,90	2,06	351	5,50	7639139	700
Sommereichen.	14. K.	48	1,18	0,89	0,60	85	3,70	10689441	528
	15. S.	50	1,20	1,00	1,52	183	4,23	8709110	492
	16. K.	66	1,50	1,50	1,66	295	4,58	10092075	634
	17. M.	66	1,542	1,50	1,78	295	5,00	8663416	565
	18. S.	66	1,96	1,46	1,59	515	3,29	8470726	676
	19. M.	66	2,00	2,00	1,31	682	3,61	9354590	603
	20. K.	66	2,08	1,46	1,12	570	3,11	11136426	673
	21. M.	72	1,34	1,17	2,71	182		8904290	
	22. M.	84	2,00	2,00	2,09	352	6,12*	(6238990)	576
Steineichen.	23. M.	42	1,13	1,48	1,34	349	2,39	9035904	653
	24. M.	56	1,50	1,50	0,83	240	4,12	10030717	507
Rothtannen	25. M.	46	1,208	1,208	1,10	128	2,70	5318916	649
Weißtannen.	26. M.	48	1,00	1,00	1,38	101	3,20	8094050	720
	27. M.	48	1,50	1,48	1,04	348	2,21	7408590	695
Rothbüchen.	28. S.	32	0,82	1,00	1,15	164	2,50	8475282	500
	29. M.	34	0,80	1,00	0,98	128	3,00	10026527	482
Weißbüchen.	30. M.	42	1,00	1,07	1,32	156	3,09	8183042	571
	31. M.	46	1,03	1,06	2,24	183	3,02	6865293	680
Erlen.	32. M.	43	0,92	1,02	1,58	128	3,88	8109514	518
	33. S.	43	0,95	1,00	2,00	156	3,28	7233180	593

*) Beim 7ten Versuche hatte das Holz einen Ast, und beim 22sten Versuche war es über den Span geschnitten.

Wären

Wären die Ausdrücke $\frac{l^3U}{bch^3}$ und $\frac{l^2}{bw}$ durchgängig für einerlei Holzart gleich groß, so könnte man daraus e^2 und N mit Sicherheit finden. Allein die zufälligen Umstände bei den Versuchen, der bedeutende Einfluß, welchen Wärme und Feuchtigkeit auf das Biegen haben, die Verschiedenheit der Hölzer von einerlei Art und die Schwierigkeit, die Senkung c genau anzugeben, lassen schon keine genaue Bestimmung dieser Werthe zu, wenn auch die Voraussetzung angenommen werden könnte, daß die absolute Elasticität bei einerlei Holzstück lediglich eine Funkzion von der Zeit wäre. Auch müßte man in der Rechnung darauf Rücksicht nehmen, um wie viel die aufgelegten Hölzer von ihrer Unterlage gewichen sind, weil durch größere Werthe von d die Werthe für w größer ausfallen. Will man sich damit begnügen, aus den Zahlen der vorstehenden Tafel Mittelwerthe zu ziehen, so erhält man folgende Zusammenstellung:

	$\frac{l^3U}{bch^3}=48e^2$	$\frac{l^2}{bw}=\frac{12e^2}{N}$
Kiefernholz . . .	7551195	656
Sommereichen . .	9502509	593
Steineichen . . .	9533310	580
Rothtannen . . .	5318916	649
Weißtannen . . .	7751320	708
Rothbüchen . . .	9250904	491
Weißbüchen . . .	7524168	626
Erlenholz . . .	7671347	556

§. 495.

Will man für die verschiedenen Holzarten die Werthe für e^2 und N finden, so darf nur in der letzten Tafel die zweite vertikale Zahlenreihe durch 48 dividirt werden, um e^2 zu erhalten; und wenn mit den Zahlen $\left(\frac{12e^2}{N}\right)$ die Zahlen $(48e^2)$ der ersten Reihe dividirt werden, so erhält man 4N, woraus N leicht gefunden wird. Es ist aber wohl zu bemerken, daß die Werthe von e^2 und N sich nur auf den ersten Augenblick der Senkung des Balkens beziehen, daher auch alle Anwendungen, welche hierauf gegründet werden, nur für die erste angenblickliche Senkung desselben gelten.

Nachstehende Tafel enthält diese Werthe für die absolute Elasticität e^2 und für den Koeffizienten N der respectiven Festigkeit.

	e^2	N
Kiefernholz . . .	157315	2878
Sommereichen . .	197969	4006
Steineichen . .	198611	4109
Rothtannen . .	110811	2049
Weißtannen . .	161486	2737
Rothbüchen . .	192727	4710
Weißbüchen . .	156754	3005
Erlenholz . . .	159820	3449

Nun ist nach §. 449. die respective Festigkeit

$$P = 4N\frac{bh^2}{l}$$

daher läßt sich hienach die Last P bestimmen, welche einen Balken im ersten Augenblicke zu zerbrechen im Stande ist, wenn man den für N gefundenen Werth in die Gleichung setzt. Uebrigens ist zu bemerken, daß sich P auf berliner Pfunde und die Längen b, h, l auf rheinländische Zolle beziehen.

§. 496.

Mit Hülfe der kleinen Tafel §. 495. läßt sich für jeden Balken die Senkung seiner Mitte nahe genug angeben, bei welcher derselbe zerbrechen wird. Denn nach §. 455. IV. ist $w = \frac{N}{12e^2} \cdot \frac{l^2}{h}$ und weil nach der angeführten Tafel die Werthe für $\frac{12e^2}{N}$ bekannt sind, so hat die Bestimmung der größten Ordinate, bei welcher der Bruch erfolgen wird, keine Schwierigkeiten, wenn nur vorausgesetzt wird, daß das Holz durchgängig fehlerfrei und trocken ist. So hätte man z. B. für Sommereichen die größte Ordinate, bei welcher der Bruch erfolgt, oder

$$w = \frac{l^2}{593h}$$

wo l, h und w in jedem Längenmaaße ausgedrückt werden können.

Wäre $l = 12$ und $h = 1$ Fuß, so erhält man

$$w = \frac{144}{593} = 0{,}2428 \text{ Fuß} = 2{,}91 \text{ Zoll.}$$

Für $l = 14$ und $h = \frac{2}{3}$ Fuß wird

$$w = \frac{196 \cdot 3}{593 \cdot 2} = 0{,}4958 \text{ Fuß} = 5{,}95 \text{ Zoll.}$$

Hiebei ist wohl zu bemerken, daß sich diese Angaben auf trocknes Holz beziehen. Frisch gehauenes oder nasses Holz kann weit mehr gebogen werden, ehe der Bruch erfolgt.

Weil es für die Ausübung sehr wichtig ist, diejenige Belastung ungefähr zu kennen, welche ein Balken noch mit Sicherheit tragen kann, so wird man zu Begründung eines allgemeinen Ausdrucks den aus vieljähriger Erfahrung bekannten Satz annehmen können, daß bei einem Getreidemagazin ein 9 Zoll breiter und 12 Zoll hoher kieferner Balken, welcher auf 15 Fuß weit frei liegt und dessen Mitte von der Mitte der nächsten Balken $3\frac{1}{2}$ Fuß weit entfernt ist, hinlängliche Stärke besitzt, eine 2 Fuß hohe Schüttung von Roggenkörnern zu tragen. Die Bodenfläche der Schüttung, welche auf jeden Balken kommt, ist daher $15 \cdot 3\frac{1}{2} = 52\frac{1}{2}$ □ Fuß, also der Kubikinhalt des Getreides, welches den Balken belastet $= 52\frac{1}{2} \cdot 2 = 105$ Kubikfuß. Jeder Kubikfuß Roggen wiegt etwa 45 Pfund, daher ist die auf dem Balken verbreitete Last $= 105 \cdot 45 = 4725$ berliner Pfund. Das Gewicht des Balkens ist nach §. 74. II. $= 0{,}64 \cdot 65{,}9 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 15 = 475$ Pfund beinahe, also die gesammte Belastung $= 5200$ Pfund, wobei die Bediehlung nicht mit gerechnet ist. Von dieser Last kann man annehmen, daß sie auf die Länge des Balkens gleichförmig verbreitet sei. Will man nun hieraus die Last kennen lernen, welche der Balken in seiner Mitte zu tragen im Stande ist, so darf man nur (§. 449.) von der gefundenen Last die Hälfte nehmen.

Hieraus folgt, daß ein kieferner, 15 Fuß langer, 9 Zoll breiter und 12 Zoll hoher Balken in seiner Mitte eine Last von 2600 Pfund mit Sicherheit zu tragen im Stande ist, wenn das Gewicht des Balkens in dieser Last mit inbegriffen wird.

Nun war $P = 4N\frac{bh^2}{l}$ oder für Kiefernholz $P = 11512\frac{bh^2}{l}$, wenn P diejenige Last bezeichnet, bei welcher der Balken im ersten Augenblicke brechen muß. Setzt man nun diejenige Last, welche der Balken noch mit Sicherheit tragen kann $= U$, so daß $U = \frac{1}{n}P$ ist, wo n eine noch näher zu bestimmende Zahl bezeichnet, so erhält man

$nU = 11512\frac{bh^2}{l}$ also $n = 11512\frac{bh^2}{lU}$

Setzt man für b, h, l, U die oben angegebenen Werthe, so wird

$$n = \frac{11512 . 9 . 12 . 12}{15 . 12 , 2600} = 31{,}87$$

wofür man $n = 32$ annehmen kann. Hieraus folgt, daß ein Balken den zwei und dreißigsten Theil derjenigen Last in seiner Mitte tragen kann, welche denselben im ersten Augenblicke zu zerbrechen im Stande wäre. Man erhält daher

$$\text{(I)} \quad U = \frac{4N}{32} . \frac{bh^2}{l} = \frac{1}{8}N\frac{bh^2}{l}$$

und wenn u die zur Last U gehörige Senkung des Balkens in seiner Mitte für den ersten Augenblick der Belastung bezeichnet, so ist (§. 455. I.) $u = \frac{l^3U}{48e^2bh^3}$

oder man erhält, wenn statt U der eben gefundene Werth gesetzt wird, die zur Last U gehörige Senkung

$$(II)\ u = \frac{1}{32} \cdot \frac{N}{120^2} \cdot \frac{l^2}{h}.$$

§. 497.

Mittelst der beiden allgemeinen Ausdrücke für die Belastung U, welche ein Balken mit Sicherheit tragen kann und für die größte Senkung u, welche dieser Belastung im ersten Augenblick entspricht, erhält man mit Hülfe der Tafeln §. 495. und 496. nachstehende Werthe für

Kiefernholz:

$$U = 360 \frac{bh^2}{l};\ u = \frac{l^2}{20992\,h}$$

Sommereichen:

$$U = 501 \frac{bh^2}{l};\ u = \frac{l^2}{18976\,h}$$

Steineichen:

$$U = 514 \frac{bh^2}{l};\ u = \frac{l^2}{18560\,h}$$

Rothtannen:

$$U = 256 \frac{bh^2}{l};\ u = \frac{l^2}{20768\,h}$$

Weißtannen:

$$U = 342 \frac{bh^2}{l};\ u = \frac{l^2}{22656\,h}$$

Rothbüchen:

$$U = 589 \frac{bh^2}{l};\ u = \frac{l^2}{15712\,h}$$

Weißbüchen:

$$U = 376 \frac{bh^2}{l};\ u = \frac{l^2}{20052\,h}$$

Erlenholz:

$$U = 431 \frac{bh^2}{l}; \; u = \frac{l^2}{17792\,h}.$$

Bei dem Gebrauche dieser Ausdrücke darf nicht vergessen werden, daß sich die Gewichte auf berliner Pfunde und die Längen auf rheinländische Zolle beziehen. Auch bezeichnet U die gesammte in der Mitte angebrachte Belastung, nebst dem halben Gewichte des Balkens. Nach §. 47. II. findet man das halbe Gewicht des Balkens, wenn γ' das Gewicht von einem γ'
Kubikzoll Wasser bezeichnet $= \frac{1}{2} g \gamma' bhl$. Bezeichnet daher U' die Last, welche der Balken ohne sein eige- U'
nes Gewicht noch mit Sicherheit tragen kann, so ist $U = U' + \frac{1}{2} g \gamma' bhl$, daher die in der Mitte des Balkens aufzubringende Belastung oder

$$U' = \frac{1}{8} N \frac{bh^2}{l} - \frac{1}{2} g \gamma' bhl = \frac{bh}{8l} (Nh - 4 g \gamma' l^2).$$

Hienach erhält man als Mittelwerthe für

Kiefernholz: $U' = \frac{bh}{8l}(2878\,h - 0{,}0916\,l^2)$

Sommereichen: $U' = \frac{bh}{8l}(4006\,h - 0{,}1206\,l^2)$

Steineichen: $U' = \frac{bh}{8l}(4109\,h - 0{,}1526\,l^2)$

Rothtannen: $U' = \frac{bh}{8l}(2049\,h - 0{,}0748\,l^2)$

Weißtannen: $U' = \frac{bh}{8l}(2737\,h - 0{,}0656\,l^2)$

Rothbüchen: $U' = \frac{bh}{8l}(4710\,h - 0{,}1297\,l^2)$

Weißbüchen: $U' = \frac{bh}{8l}(3005\,h - 0{,}1221\,l^2)$

Erlenholz: $U' = \frac{bh}{8l}(3449\,h - 0{,}1000\,l^2)$,

wo sich sich die Größen b, h, l auf rheinländische Zolle beziehen.

Die größte Länge, auf welche ein Balken ohne Belastung mit Sicherheit frei liegen kann, findet man aus den vorstehenden Ausdrücken, wenn die in den Parenthesen enthaltenen entgegengesetzten Werthe einander gleich gesetzt werden, weil alsdann $U = 0$ ist.

1. Beispiel. Man sucht die Last, welche ein 18 Fuß langer, 8 Zoll breiter und 11 Zoll hoher kieferner Balken, mit aller Sicherheit tragen kann? Hier ist $l = 12 \cdot 18 = 216$, $b = 8$ und $h = 11$ Zoll, daher die Last

$$U' = \frac{8 \cdot 11}{8 \cdot 216}(2878 \cdot 11 - 0{,}0916 \cdot 216^2) = 1395 \text{ Pfd.}$$

2. Beispiel. Die größte Senkung im ersten Augenblicke der Belastung nach dem vorigen Beispiele zu finden. Hier ist

$$u = \frac{46656}{20992 \cdot 11} = 0{,}211 \text{ Zoll.}$$

3. Beispiel. Für die größte Länge, auf welcher ein kieferner Balken frei liegen kann, erhält man

$$l = \sqrt{\frac{2878\,h}{0{,}0916}}.$$

Wenn daher die Höhe des Balkens 12 Zoll beträgt, so findet man die große Länge, auf welche der Balken mit Sicherheit ohne alle Belastung liegen kann, oder

$$l = \sqrt{\frac{2878 \cdot 12}{0{,}0916}} = 614 \text{ Zoll} = 51{,}2 \text{ Fuß.}$$

Die Senkung, welche alsdann im ersten Augenblick entsteht, ist

$$u = \frac{377031}{20992 \cdot 12} = 1{,}49 \text{ Zoll.}$$

III. Die rückwirkende Festigkeit.

§. 498.

Wird ein prismatischer Körper, dessen oberstes Ende belastet ist, auf einen festen wagerechten Boden senkrecht gestellt, und man bezeichnet durch Q die kleinste Last, welche erfordert wird, den Körper zu zerdrücken oder nach vorhergegangenem Biegen zu zerbrechen, so ist Q die rückwirkende Festigkeit dieses Körpers.

Ist der prismatische Körper elastisch, und man bezeichnet durch a seine Länge, durch E seine respective Elasticität und durch π die Zahl 3,14159..., so ist für denselben die rückwirkende Festigkeit

$$Q = \frac{\pi^2 E^2}{a^2}.$$

Denn nach §. 133 des Anhanges, ist Q nicht nur die kleinste Kraft, welche den Körper zu biegen im Stande ist, sondern sie ist auch zureichend dem Widerstande des Körpers bei jeder Krümmung das Gleichgewicht zu halten, also auch bei derjenigen Krümmung, unter welcher der Bruch des Körpers erfolgt, daher ist $\frac{\pi^2 E^2}{a^2}$ die gesuchte Festigkeit des Körpers.

Der Querschnitt des belasteten prismatischen Körpers sei ein Rechteck und man nenne diejenige Seite des Rechtecks, nach welcher die Biegung erfolgt, die Dicke und die andere Seite die Breite des Körpers, so ist, wenn man, Figur 265, durch h die Dicke AD = BC Tf. XVII und durch b die Breite AB = CD des Körpers be- Fig. 265.

zeichnet, nach §. 444. die respective Elasticität desselben oder $E^2 = e^2 b h^3$, und wenn man diesen Werth mit E^2 im vorstehenden Ausdruck vertauscht, so wird

$$Q = \pi^2 e^2 \frac{b h^3}{a^2},$$

wo $\pi^2 = 9{,}8696044$ und $\frac{1}{\pi^2} = 0{,}1013212$ ist. Für Körper von einerlei Materie ist e^2 eine beständige Größe, daher verhalten sich bei Parallelepipeden von einerlei Materie, die rückwirkenden Festigkeiten, wie die Würfel der Dicke, multiplizirt mit der Breite und dividirt durch das Quadrat der Länge.

Weil unter übrigens gleichen Umständen der Körper nach derjenigen Seite gebogen wird, wo der geringste Widerstand entsteht, so wird in diesen Fällen allemal die kleinste Seite des Rechtecks, welches den Querschnitt des Parallelepipeden bildet, die Dicke dieses Körpers angeben.

§. 499.

Zusatz. Bezeichnen Q, Q′ die rückwirkenden Festigkeiten und a, b, h; A, B, H die Längen, Breiten und Dicken zweier Parallelepipeden von einerlei Materie, so verhält sich

$$Q : Q' = \frac{b h^3}{a^2} : \frac{B H^3}{A^2}.$$

Ist nun $a = A$ und $h = H$, so verhält sich

$$Q : Q' = b : B,$$

oder bei gleich langen und gleich dicken Parallelepipeden verhalten sich die rückwirkenden Festigkeiten wie ihre Breiten.

Wäre $a = A$ und $b = B$, so verhält sich

$$Q : Q' = h^3 : H^3,$$

also: bei gleich langen und gleich breiten Parallelepipeden verhalten sich die rückwirkenden Festigkeiten, wie die Würfel ihrer Dicke.

Wenn endlich $b = B$ und $h = H$ ist, so verhält sich

$$Q : Q' = A^2 : a^2,$$

daher verhalten sich bei Parallelepipeden von gleicher Breite und Dicke, die rückwirkenden Festigkeiten umgekehrt wie die Quadrate der Länge dieser Körper.

§. 500.

Weil die rückwirkende Festigkeit eines Körpers durch

$$Q = \pi^2 e^2 \cdot \frac{bh^3}{a^2}$$

ausgedrückt wird, so kommt es bei der Anwendung dieses Ausdrucks darauf an, die absolute Elasticität e^2 zu wissen. Will man solche nach §. 495. bestimmen, so ist für

Kiefernholz, $\pi^2 e^2 = 1552642$.
Sommereichen, $\pi^2 e^2 = 1953875$.
Rothtannen, $\pi^2 e^2 = 1093661$.
Rothbüchen, $\pi^2 e^2 = 1902139$.

Wollte man auf eine ähnliche Art wie §. 496 diejenige Last bestimmen, welche ein Stiel mit aller erforderlichen Sicherheit tragen kann, so wird man hier eben so wie in dem angeführten §. $\frac{1}{32} \pi^2 e^2$ statt $\pi^2 e^2$ in Rechnung bringen können.

Dies giebt alsdann, wenn sich alle Abmessungen auf rheinländische Zolle beziehen, und wenn Q' diejenige Last bezeichnet, welchen der Stiel mit Sicherheit tragen kann, für

Kiefernholz, $Q' = 48520 \frac{bh^3}{a^2}$.

Eichenholz, $Q' = 61408 \frac{bh^3}{a^2}$.

Ueber die rückwirkende Festigkeit haben Muschenbrök und Girard Versuche angestellt. Die nachstehende Tafel giebt eine Uebersicht von den Muschenbrökschen Versuchen, wobei zu bemerken ist, daß die von Muschenbrök angegebenen amsterdammer Pfunde, der bessern Uebersicht wegen, in berliner Pfunde verwandelt worden sind. Auch enthält die letzte Spalte noch diejenigen Werthe, welche man aus jedem nebenstehenden Versuche für $\pi^2 e^2$ erhält. Noch ist zu erinnern, daß die Versuche No. 1 bis 10 aus der Introd. ad philos. nat. p. 474. und die Versuche No. 11 bis 31 aus der Introd. ad cohaerent. etc. p. 235 seq. genommen sind.

Holzarten.	No. des Vers.	Länge a Zoll.	Breite b Zoll.	Dicke h Zoll.	Last Q Berl Pfund.	$\frac{a^2Q}{b h^3} = \pi^2 e^2$
Rothtannen	1	48	0,51	0,51	68,1	2319256
	2	48	0,70	0,70	238,3	2286727
Linden	3	48	0,50	0,50	53,8	1983100
	4	48	0,71	0,71	217,3	1970194
Büchen	5	48	0,49	0,49	43,2	1726560
	6	48	0,60	0,60	74,9	1331555
	7	48	0,70	0,70	154,0	1477784
Eichen	8	48	0,50	0,42	21,1	1311436
	9	48	0,60	0,60	38,0	675552
	10	48	0,70	0,70	90,7	869156
Eichen	11	18	0,23	0,23	24,2	2801878
	12	9	0,23	0,23	97,0	2807666
	13	8	0,23	0,23	124,4	2845045
	14	12	0,35	0,35	195,1	1872181
Eschen	15	18	0,25	0,24	15,8	1481250
	16	6	0,25	0,24	139,2	1450001
	17	12	0,34	0,24	58,0	1776961
	18	9	0,34	0,24	105,4	1816407
	19	18	0,42	0,24	31,6	1763394
	20	11½	0,42	0,24	78,1	1778949
	21	11½	0,52	0,22	84,4	2015890
Linden	22	12	0,35	0,25	47,4	1248109
	23	11	0,35	0,25	57,0	1194789
	24	12	0,44	0,25	50,6	1059840
	25	11	0,44	0,25	50,6	890560
	26	12	0,50	0,25	71,7	1321574
	27	11	0,50	0,25	84,4	1307187
	28	12	0,34	0,34	85,4	920247
Kiefern	29	12	0,42	0,25	83,3	1827840
	30	10	0,42	0,25	87,5	1333333
	31	12	0,34	0,34	143,4	1545240

Die Vergleichung der Werthe $\pi^2 e^2$ in der vorstehenden Tafel zeigt sehr bedeutende Unregelmäßigkeiten. Nicht nur findet man für Rothtannenholz eine größere Festigkeit als beim Büchen- und Kiefernholze, welches durchaus unwahrscheinlich ist, sondern man findet auch besonders beim Eichenholze so große Abweichungen, daß man solche Versehen bei den Versuchen oder Angaben zuschreiben muß. Auch entsteht zuweilen beim Zerdrücken des Holzes der Fall, daß solches nicht nach der Dicke, sondern nach der Diagonale oder einer andern Richtung gebogen wird, besonders wenn die Holzfasern nicht mit der breiten Seite des Holzes parallel sind. Da nun diese Umstände nicht näher angegeben sind, so verlieren diese Versuche dadurch einen großen Theil ihrer Brauchbarkeit. Indessen ist es bemerkenswerth, daß der mittlere Werth von $\pi^2 e^2$

für Eichenholz $= 1883273$, und

für Kiefernholz $= 1568804$

gut genug mit den am Anfange dieses §. gegebenen Werthen 1953875 und 1552642 übereinstimmt.

§. 501.

Aufgabe. Wie müssen die Streben und Spannriegel eines Hängewerks angeordnet werden, damit solche dem Biegen mit gleicher Gewalt widerstehen?

Auflösung. Setzt man die Länge der Strebe AC,
Taf. XII Fig. 206. Figur 206. $= x$, die Länge des Spannriegels $CD = y$ und die ganze Länge des Balkens oder $AB = l$, so

ist $AE = BF = \frac{1}{2}(l-y)$; es verhält sich daher nach §. 372. die Kraft, welche die Strebe zu biegen strebt, zur Kraft, welche den Spannriegel zu biegen strebt, wie $x : \frac{1}{2}(l-y)$. Sind die Querschnitte beider Holzstücke einander gleich, so verhalten sich nach §. 500. die Kräfte, womit solche dem Biegen widerstehen, wie $\frac{1}{x^2}$ zu $\frac{1}{y^2}$. Sollen daher beide Hölzer mit gleicher Gewalt dem Biegen widerstehen, so muß sich verhalten

$$x : \tfrac{1}{2}(l-y) = \tfrac{1}{x^2} : \tfrac{1}{y^2}.$$

Hieraus findet man $x^3 = \frac{1}{2}(ly^2 - y^3)$. Wenn daher die Länge l des Balkens und die Länge y des Spannriegels bekannt ist, so findet man die erforderliche Länge der Strebe oder

$$x = \sqrt[3]{\frac{ly^2 - y^3}{2}}.$$

Soll der Spannriegel halb so lang wie der Balken werden, so ist $y = \frac{1}{2}l$, also die Länge der Strebe, oder $x = \frac{1}{4}l\sqrt[3]{4} = 0{,}397\, l$, oder beinahe $\frac{2}{5}l$. Die Länge der Hängsäule CE, vom Spannriegel bis zum Balken gemessen, ist alsdann

$= \sqrt{(0{,}397^2 l^2 - \frac{1}{16}l^2)} = 0{,}3084\, l$ beinahe $\frac{3}{10}l$.

Wollte man der Strebe gleiche Länge mit dem Spannriegel geben, so wird $x = y$, also $x^3 = \frac{1}{2}(lx^2 - x^3)$, oder $2x = l - x$; man findet daher für diesen Fall die Länge der Strebe und des Spannriegels, oder

$$x = y = \tfrac{1}{3}l.$$

Es müßten alsdann beide Streben nebst dem Spannriegel zusammen eben so lang wie die Balken werden, woraus folgt, daß wenn, die Streben und der Spanriegel mit gleicher Gewalt gebogen werden sollen, der Spanuriegel niemals gleiche Länge mit den Streben erhalten könne.

* §. 502.

Wäre die Materie eines aufrecht stehenden prismatischen Körpers von der Beschaffenheit, daß solche durch eine an seinem Obertheile angebrachte Last nicht gebogen, sondern der Körper im eigentlichen Sinne zerdrückt wird, so kann man sich dies Zerdrücken so vorstellen, als wenn alle einzelnen Theilchen der Materie, die darunter befindlichen Theile wie keilförmige Körper aus einander trieben, oder daß, wenn der Zusammenhang in irgend einem Schnitte des Körpers aufgehoben wird, der Obertheil desselben nebst der darauf befindlichen Belastung über den fest stehenden Untertheil herab gleitete. Dieser Fall wird am leichtesten bei Steinarten, besonders bei Sandsteinen, Anwendung finden.

Man setze voraus, daß der Körper ABE, Figur
Tf.XVII Fig.266. 266., ein Parallelepipeden von gleichartiger Materie sei, und daß ein prismatischer Körper einerlei Widerstand ausübe, die Kraft mag parallel mit der Fläche des Bruchs wirken, oder zum Zerreißen des Körpers senkrecht auf die Fläche des Bruchs angebracht seyn. Entsteht nun durch die Wirkung der Kraft Q in dem Körper ABE ein Bruch IFH, so daß die Brechungsebene IFH mit dem Horizont einen Winkel $IFL = \varphi$ bilde,

bilde, so wird für verschiedene Werthe von φ, auch Q verschiedene Werthe erhalten, und es muß irgend einen Winkel φ geben, bei welchem die Last Q am kleinsten wird. Dieser Werth von Q ist alsdann die rückwirkende Festigkeit des Körpers. (§. 498.)

Die Kraft, mit welcher jeder Quadratfuß von der Materie des Körpers ABE zusammenhängt, oder das Maaß seiner absoluten Festigkeit sei $= k$; $DE = FH = b$; $AD = FL = h$, so ist

$$IF = \frac{LF}{\cos\varphi} = \frac{h}{\cos\varphi}$$

also der Inhalt der Bruchfläche $= \frac{bh}{\cos\varphi}$ und daher ihre absolute Festigkeit (§. 430.)

$$= \frac{bhk}{\cos\varphi}$$

und eben so groß muß nach der Voraussetzung die Kraft seyn, welche nach der Richtung IF oder GM in der Bruchfläche angebracht, den Körper zu zerbrechen im Stande ist.

Rechnet man das Gewicht des abgetrennten Körpers AIFHE mit zur Last, oder setzt dasselbe bei Seite und nimmt an, daß eine Vertikallinie durch den Schwerpunkt der Last Q, die Bruchfläche IFH in G T. XVII schneide, so kann man die Last Q im Punkte G, senk- Fig. 266. recht auf diese Fläche und abwärts nach der mit IF parallelen Richtung GM zerlegen. Man findet alsdann

den Normaldruck auf die Bruchfläche $= Q \cos\varphi$

den Druck nach der Richtung GM $= Q \sin\varphi$

Dieser letzte Druck muß mit der Kraft $\frac{bhk}{\cos\varphi}$ im Gleichgewichte seyn, man erhält daher $Q \sin\varphi = \frac{bhk}{\cos\varphi}$ oder

$$Q = \frac{bhk}{\sin\varphi \cos\varphi}.$$

Weil nur φ veränderlich ist; so wird dieser Ausdruck am kleinsten, wenn $\sin\varphi \cos\varphi$ am größten wird. Man setze daher

$z = \sin\varphi \cos\varphi$, so wird

$\frac{dz}{d\varphi} = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2$ und

$\frac{d^2z}{d\varphi^2} = -4 \sin\varphi \cos\varphi.$

Für $\frac{dz}{d\varphi} = 0$ findet man $\sin\varphi = \cos\varphi$, also $\varphi = 45$ Grad, daher $\sin\varphi \cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

Nun ist $\frac{d^2z}{d\varphi^2}$ für $\varphi = 45$ Grad eine negative Größe, also z ein Größtes, oder Q ein Kleinstes, wenn $\varphi = 45$ Grad angenommen wird. Man erhält daher die rückwirkende Festigkeit des Pfeilers ABCE, oder

$$Q = 2bhk$$

unter den angenommenen Voraussetzungen ist daher die rückwirkende Festigkeit eines Pfeilers doppelt so groß als die Kraft, welche zum Zerreißen desselben erfordert wird.

Hiebei ist zu bemerken, daß Q oder die zum Zerdrücken erforderliche Last, sowohl die am Obertheile des Pfeilers angebrachte Kraft als auch das Gewicht des Pfeilers, welcher sich über der Bruchfläche befindet, in sich begreift.

* §. 503.

Will man auch noch die Reibung in Rechnung bringen, weil der Körper beim Abgleiten von der Fläche IFH, Figur 266, außer der Kohäsion auch noch die Reibung überwältigen muß, so sei $\mu : 1$ das Verhältniß der Reibung zum Druck; da nun der Normaldruck auf $IFH = Q \cos \varphi$ ist, so widersteht die Reibung dem Abgleiten des Körpers mit einer Kraft $= \mu Q \cos \varphi$, daher erhält man für das Gleichgewicht Tf. XVII Fig. 266.

$Q \sin \varphi = \frac{bhk}{\cos \varphi} + \mu Q \cos \varphi$, und man findet

$$Q = \frac{bhk}{\cos \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)}.$$

Nun wird Q ein Kleinstes, wenn $\cos \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi) = z$ ein Größtes wird, und man erhält

$$\frac{dz}{d\varphi} = \cos \varphi^2 - \sin \varphi^2 + 2 \mu \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} = -4 \sin \varphi \cos \varphi + 2 \mu \cos \varphi^2 - 2 \mu \sin \varphi^2.$$

Für $\frac{dz}{d\varphi} = 0$ wird $\sin \varphi^2 = \cos \varphi^2 + 2 \mu \sin \varphi \cos \varphi$, oder durch $\cos \varphi^2$ dividirt, $\operatorname{tgt} \varphi^2 = 1 + 2 \mu \operatorname{tgt} \varphi$ und hieraus

$$\operatorname{tgt} \varphi = \mu \pm \sqrt{(1 + \mu^2)},$$

wo nur das obere Zeichen gilt, weil Winkel, welche größer als 90 Grad sind, hier nicht gesucht werden.

In $\frac{d^2 z}{d\varphi^2}$ setze man $\cos \varphi^2 + 2 \mu \sin \varphi \cos \varphi$ statt $\sin \varphi^2$, so wird

$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} = -4(1 + \mu^2) \sin \varphi \cos \varphi$ eine positive Größe, also ist z ein Größtes, oder für

$$\text{tgt}\,\varphi = \mu + \sqrt{(1+\mu^2)}$$

wird Q ein Kleinstes.

Nun ist $\sin\varphi = \frac{\text{tgt}\,\varphi}{\sqrt{(1+\text{tgt}\,\varphi^2)}}$ und $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+\text{tgt}\,\varphi^2)}}$ daher wird, wenn man diese Werthe in die zuerst gefundene Gleichung einführt,

$$Q = k\,b\,h\,\frac{1+\text{tgt}\,\varphi^2}{\text{tgt}\,\varphi - \mu} = 2\,b\,h\,k\,\frac{\mu^2+1+\mu\sqrt{(1+\mu^2)}}{\sqrt{(1+\mu^2)}},$$

oder man findet die rückwirkende Festigkeit des Pfeilers, wenn zugleich auf die Reibung beim Abgleiten Rücksicht genommen wird.

$$\text{(I)}\quad Q = 2\,b\,h\,k\,[\mu + \sqrt{(1+\mu^2)}].$$

Für $\mu = \frac{1}{2}$ wird $\text{tgt}\,\varphi = 1{,}618034$, also $\varphi = 58$ Grad 17 Minuten und

$$\text{(II)}\quad Q = 3{,}236068\,.\,b\,h\,k.$$

und für $\mu = \frac{3}{4}$ erhält man $\text{tgt}\,\varphi = 2$, also $\varphi = 63$ Grad 26 Minuten, daher

$$\text{(III)}\quad Q = 4\,b\,h\,k.$$

§. 504.

Herr Quantin hat im Jahre 1789 mit der §. 432. beschriebenen Maschine auch einige Versuche über das Zerdrücken der Körper angestellt.

Ein Cylinder von rothenburger Sandstein, 8 Zoll lang und 3 Zoll dick, ward durch ein Gewicht von 18596 Pfund zerdrückt.

Ein gut gebrannter Mauerstein oder Ziegel, dessen Grundfläche ein Quadrat von $2\frac{1}{2}$ Zoll Seitenlänge bildete, war 5 Zoll hoch und wurde durch eine Belastung von 7025 Pfund zerdrückt.

Durch Wiederholung dieser Versuche fand man dieselben Resultate.

Hiernach ist die rückwirkende Festigkeit eines Quadratzolls

Sandstein = 2631 Pfund.

Ziegelstein = 1124 Pfund.

Das Gewicht von einem Kubikfuße rothenburger Sandstein ist im Durchschnitt 132 Pfund und vom Kubikfuße Ziegelstein etwa 110 Pfund. Bezeichnet nun r den Halbmesser von der mittlern Wölblinie eines kreisförmigen Gewölbes und G das Gewicht von einem Kubikfuße seiner Materie, so findet man (§. 419.) den Druck auf jeden Quadratfuß der Fuge am Scheitel des Gewölbes = rG. Für ein gleich dickes kreisförmiges Gewölbe von Sandsteinen ist der Druck $rG = 132.r$; sollen daher die Steine am Scheitel desselben nicht zerdrückt werden, so darf $132.r$ nicht größer, als 2631 seyn. Für $132.r = 2631$ findet man

$$r = \frac{2631}{132} = 19{,}93 \text{ Fuß}.$$

Damit die Gewölbsteine am Scheitel eines kreisförmigen Gewölbes nicht zerdrückt werden, wenn solche von gleicher Materie von denjenigen Steinen sind, welche zu den Versuchen angewandt worden, so darf der Halbmesser r des Gewölbes nicht größer als 19,93 Fuß seyn.

Für ein gleich dickes kreisförmiges Gewölbe von Ziegelsteinen ist $rG = 110.r$, also findet man für $110.r = 1124$, den Halbmesser

$$r = \frac{1124}{110} = 10{,}22 \text{ Fuß.}$$

Diese Bestimmungen sind übrigens unabhängig von der Dicke des Gewölbes, weil mit Vermehrung der Dicke, der Druck mit der gedrückten Fläche zugleich wächst, vorausgesetzt, daß das Gewölbe durchgängig einerlei Dicke hat.

§. 505.

Zu den vorzüglichsten Schriften über die Festigkeit der Materialien, nach der Zeitfolge geordnet, kann man nachstehende rechnen.

Galileo *Galilei* angef. Discorsi etc. v. J. 1638. Dialogo secondo p. 108 etc.

Leibnitz. Demonstrationes novae resistentia solidorum. — Acta Erudit. Lipsiae 1684. p. 319.

Mariotte, Traité du mouvement des eaux. Paris 1686. Part. V. Disc. II.

Varignon. De la résistance des solides en général pour tout ce qu'on peut faire d'hypothèses touchant la force ou la ténacité des fibres des corps à rompre; et en particulier pour les hypothèses de Galilée et de M. Mariotte. — Mém. de l'acad. de Paris, année 1702. p. 90 etc. ed. bat.

Jac. *Bernouilli*, véritable hypothèse de la résistance des solides. — Mém. de l'acad. de Paris. 1705. p. 230. ed. bat.

Parent, Des résistances des tuyaux cylindriques, pour des charges d'eau et des diamètres donnes. Mém. de l'ac. de Paris, 1707. p. 135. ed. bat.

Parent, Des résistances des poûtres par rapport à leurs longueurs ou portées, et à leurs dimensions et situations; et des poûtres de plus grande résistance, indépendamment de tout système physique. — Mém. de l'ac. de Paris, 1708. p. 20. ed. bat.

Parent, Des points de rupture des figures. I. Mémoire. Des figures retenues par un de leurs bouts, et tirées par telles et tant de puissances qu'on voudra. — M. de l'ac. de Paris 1710. p. 235. ed. bat.

de *Reaumur*, Expériences pour connoître si la force des cordes surpasse la somme des forces des fils qui composent ces mêmes cordes. — M. de l'ac. de Paris 1711. p. 7. ed. bat.

G. B. *Bulfinger*, De solidorum resistentia specimen. — Comment. acad. Petropol. Tom. IV. ad An. 1729. p. 164.

P. van *Musschenbroek*, Physicae experimentales, et geometricae dissertationes. Viennae 1756. — Introductio ad cohaerentiam corporum firmorum. (Die erste Ausgabe ist vom Jahre 1729.)

de *Buffon*, Expériences sur la force du bois. Mém. de l'ac. de Paris 1740. p. 636.
Second Mémoire. 1741. p. 394. ed. bat.
Eine Uebersetzung findet man im Hamburger Magazin, 5. Band, S. 179. und die Fortsetzung S. 506.

P. van *Musschenbroek*, Introductio ad Philosophiam naturalem. Tomus I. Lugduni bat. 1762. — Cap. XXI. De Cohaerentia et Firmitate, p. 390 etc.

de la *Grange*, sur la figure des colonnes. — Mélang. de philos. et de mathém. de la soc. roy. de Turin 1770-1773. p. 123 etc.

Coulomb, Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques Problèmes de statique, relatifs à l'architecture. — Mém. de math. et de phys., prés. à l'ac. de Paris. Année 1773. à Paris 1776. p. 343. etc.

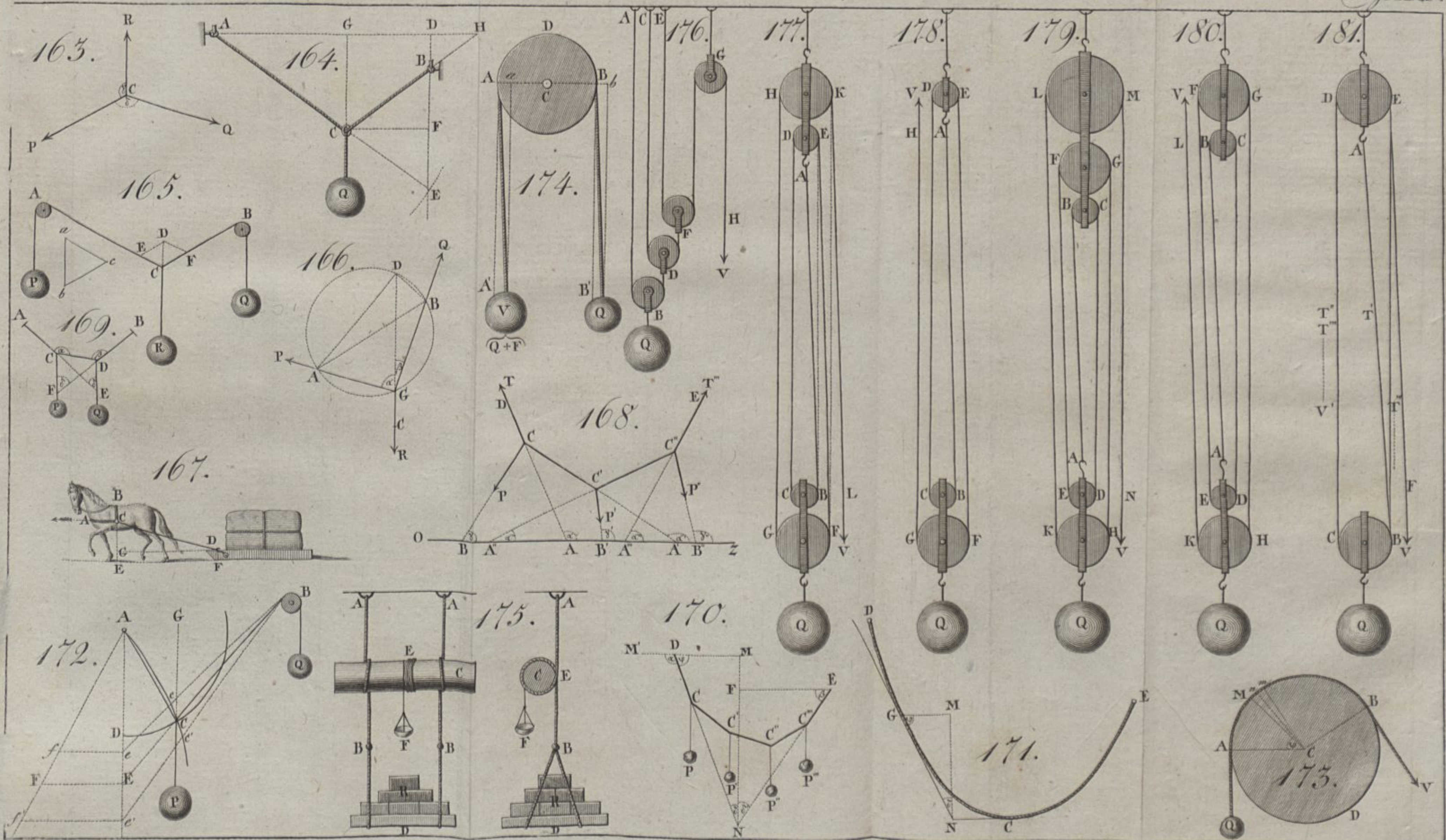
L. *Euler*, Determinatio onerum, quae columnae gestare valent. — Acta acad. Petrop. P. I. A. 1778. p. 121. etc.

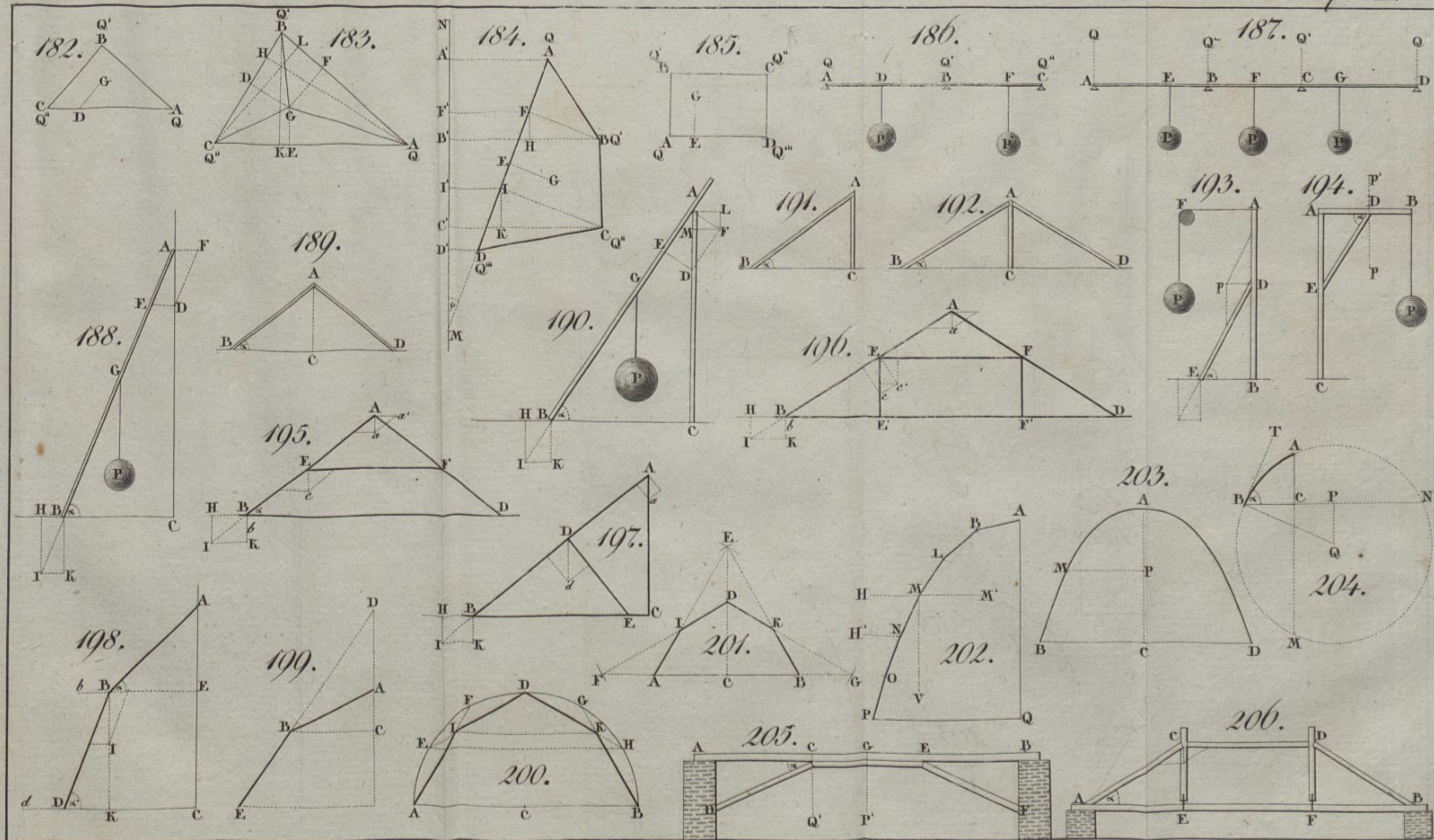
P. S. *Girard*, Traité analytique de la resistance des Solides, et de Solides d'égale résistance. Auquel on a joint une suite de nouvelles Expériences sur la force, et l'élasticité spécifique des Bois de Chêne et de Sapin. à Paris an VI. (1798.)

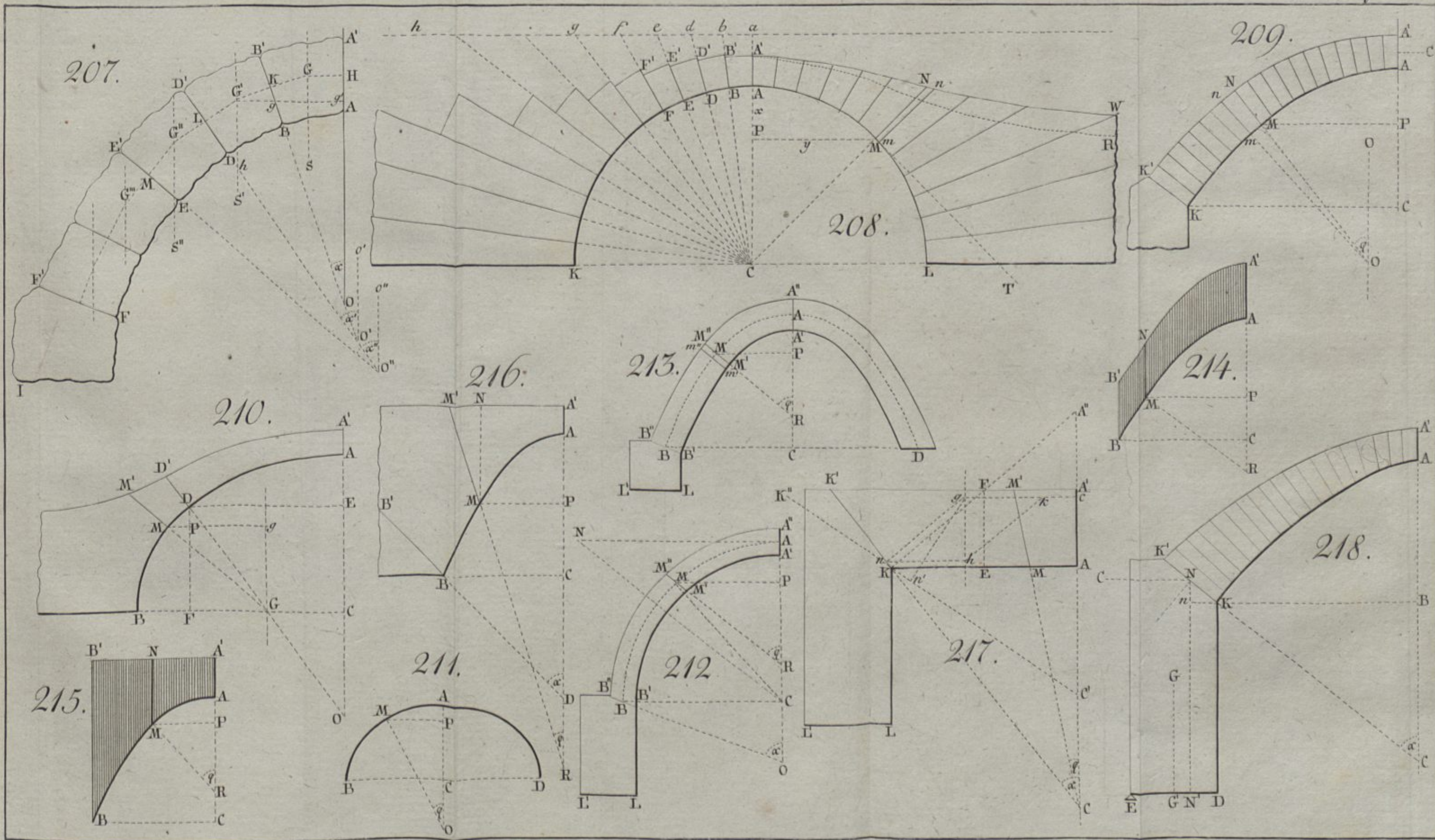
Eine deutsche Uebersetzung vom Hrn. Steuerrath Krönke hat den Titel:

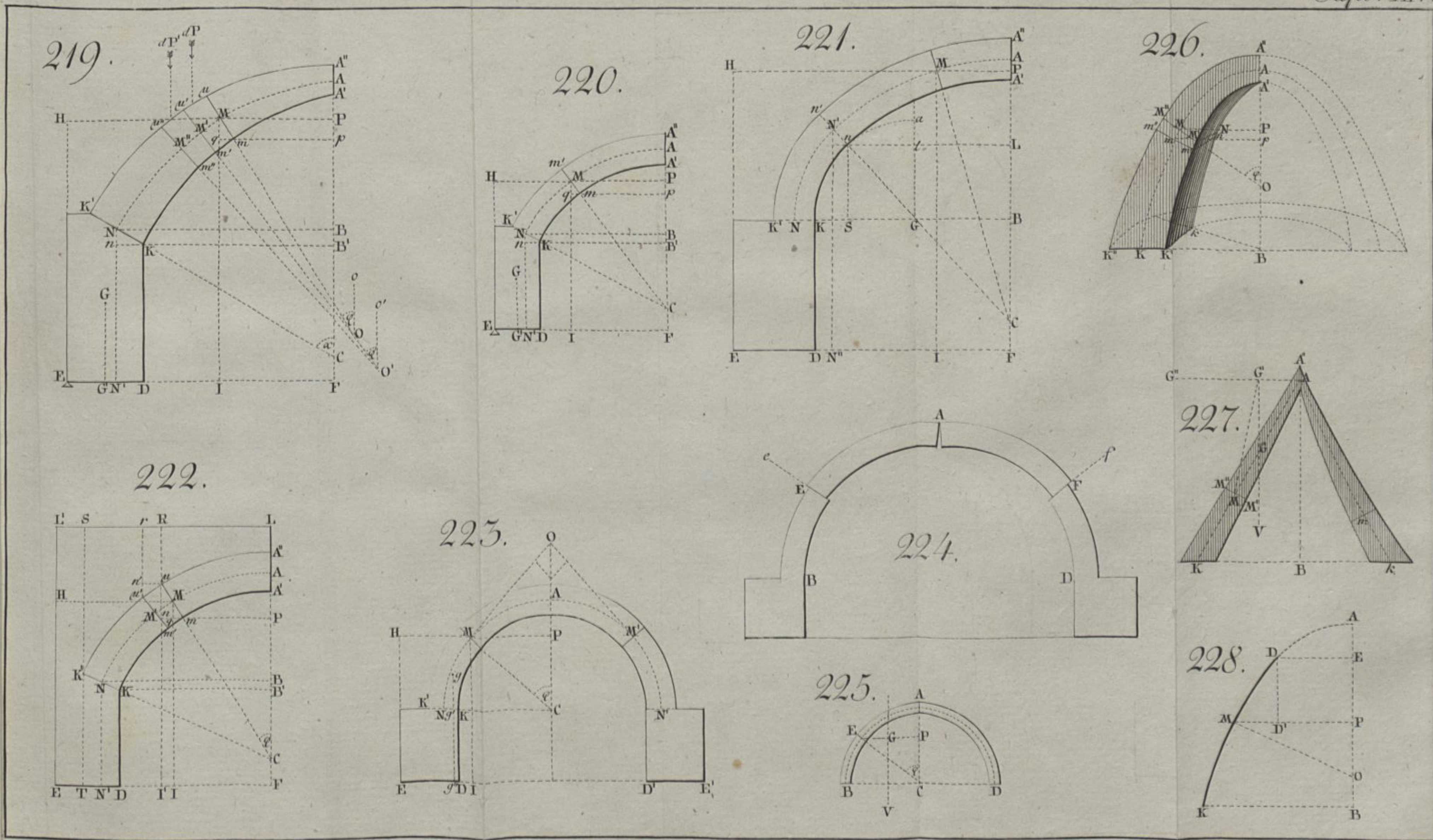
P. S. Girards Analytische Abhandlung von dem Widerstande fester Körper rc. Giesen 1803.

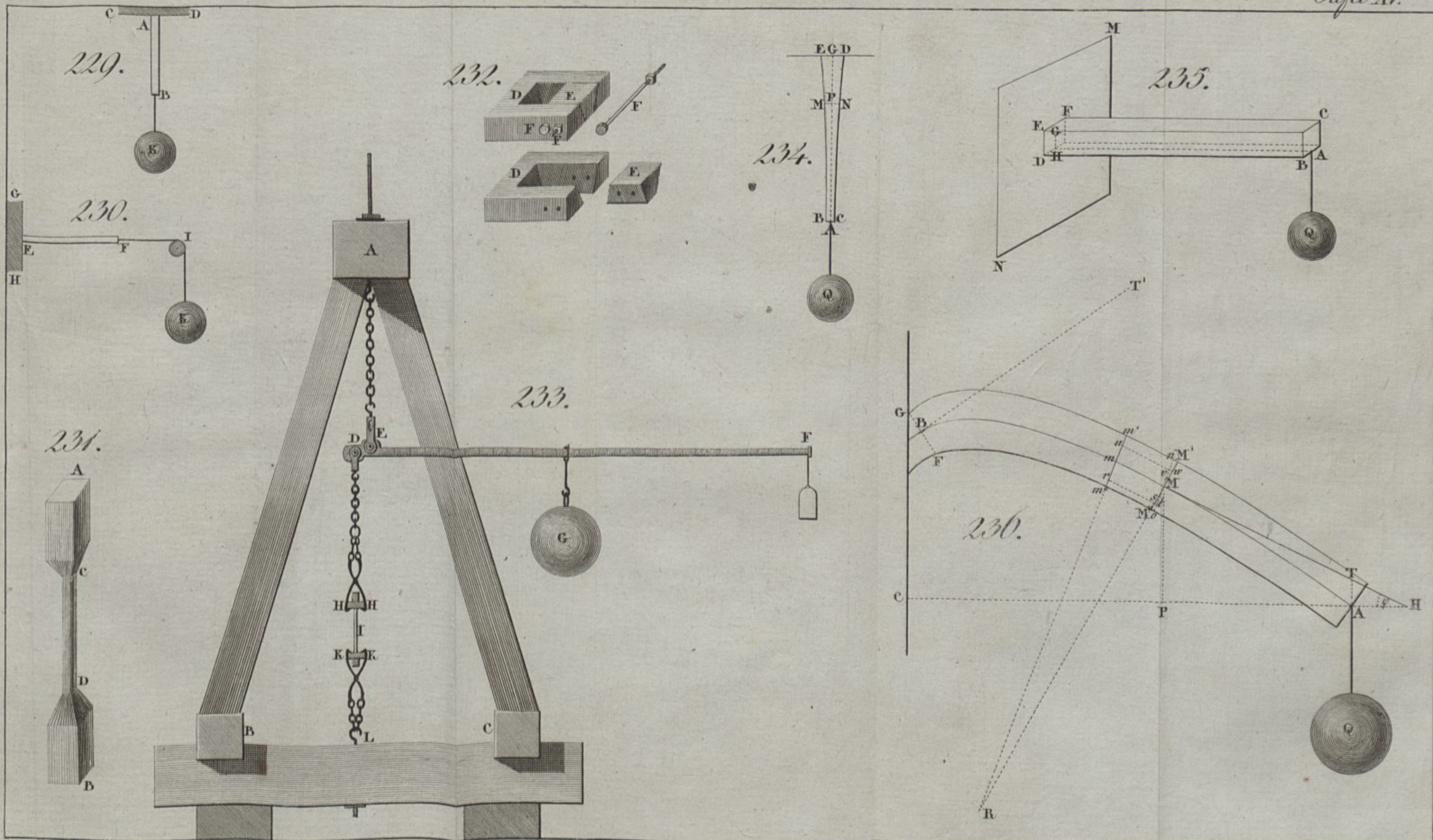
Ende des zweiten Bandes.

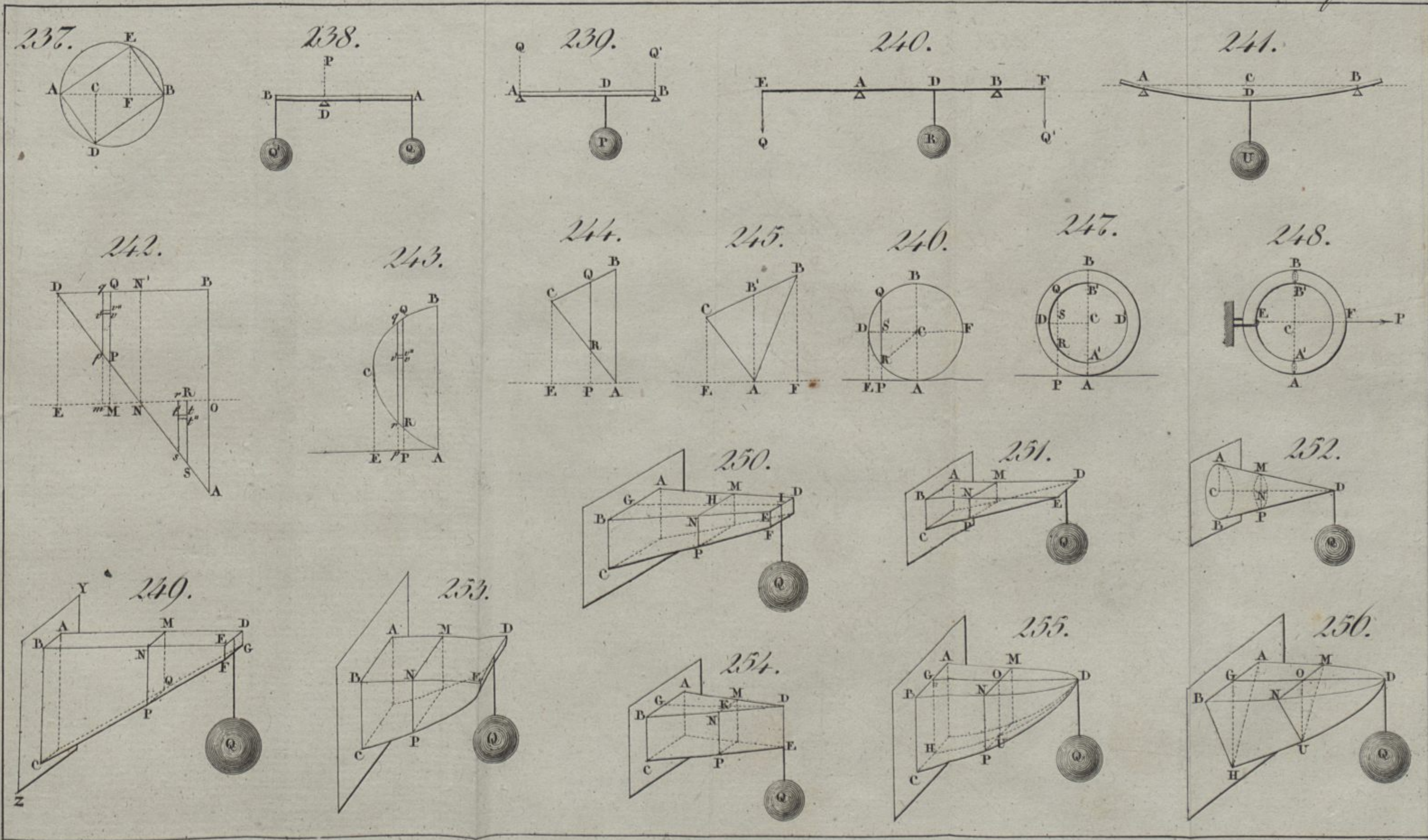

163.
164.
165.
166.
167.
168.
169.
170.
171.
172.
173.
174.
175.
176.
177.
178.
179.
180.
181.


182.
183.
184.
185.
186.
187.
188.
189.
190.
191.
192.
193.
194.
195.
196.
197.
198.
199.
200.
201.
202.
203.
204.
205.
206.

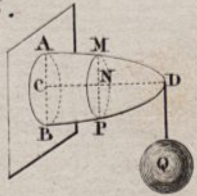

207.
208.
209.
210.
211.
212.
213.
214.
215.
216.
217.
218.


219.
220.
221.
226.
227.
228.
222.
223.
224.
225.

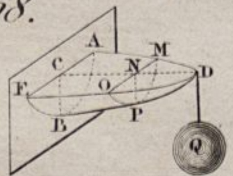

229.
230.
231.
232.
233.
234.
235.
236.


237.
238.
239.
240.
241.
242.
243.
244.
245.
246.
247.
248.
249.
250.
251.
252.
253.
254.
255.
256.

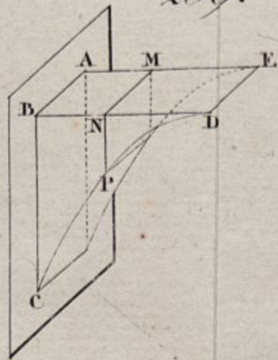
257.



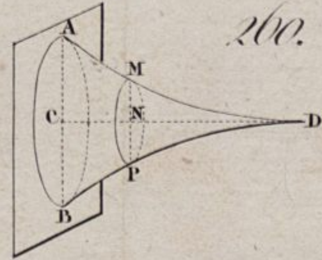
258.



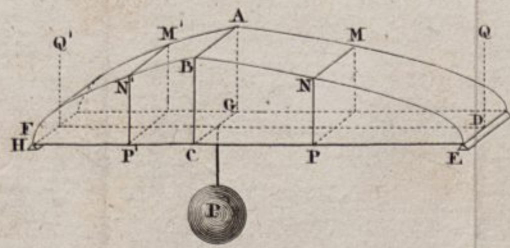
259.



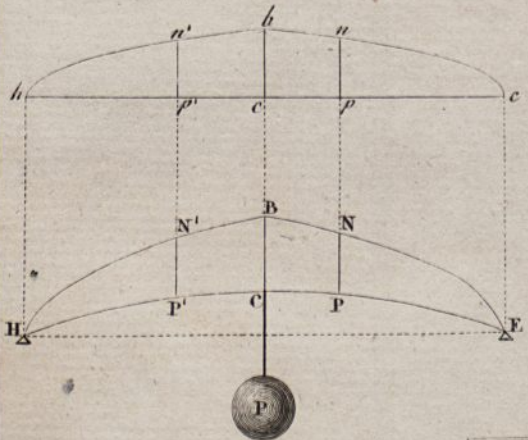
260.



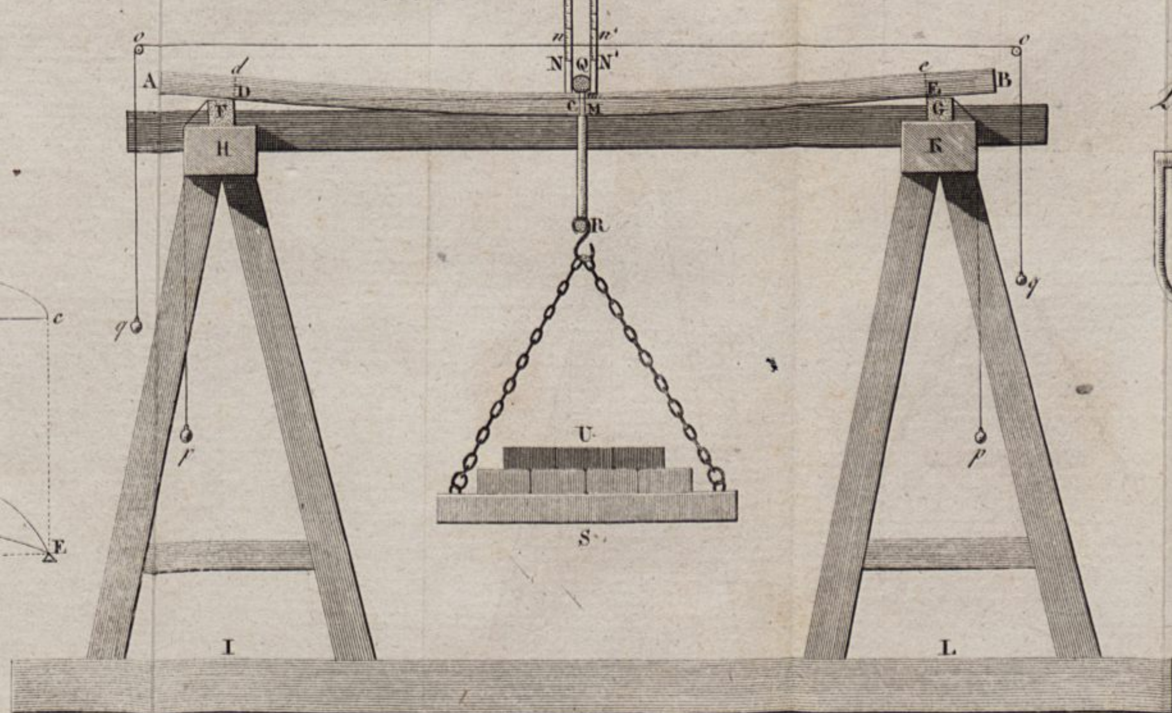
261.



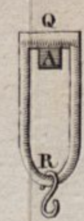
262.



263.



264.



265.

266.