Fischer.

Kreismessung des Arch. v. Syracus nebst dem dazugehoerigen Commentare des Eutokius von Ascalon, griech. u. deutsch mit Anmerk. u. einer Einleitg. über die Zahlenbez. bei den Griechen. von Jos. Gutenaecker k. Prof. am Gymnas. zu Münnerstadt. 2 Aufl. Würzb. 1828 Rthl. Recensirt in Jahns Jahrb. XIV. 2.

Eratosthenes von der Verdoppelung des Würfels. Progr. von Joh. Heinr. Drexler Prof. u. Rect. des Paed. zu Dillenburg. 1828.

De Archim. problemate bovino Einladungsschrift acad. Leipz. 1828.

ARCHIMEDES
VON SYRAKUS
VORHANDENE WERKE,

AUS DEM GRIECHISCHEN ÜBERSETZT

UND

MIT ERLÄUTERNDEN UND KRITISCHEN ANMERKUNGEN BEGLEITET

VON

ERNST NIZZE.

MIT 13 TAFELN IN STEINDRUCK.

STRALSUND 1824.
VERLAG VON CARL LÖFFLER.

Ἐυτυχοίης Λέον Γεωμέτρα.
Πολλοὺς ἐς λυκάβαντας ἴοις πολὺ φίλτατε μούσαις.

(Ex cod. Florent. in fin. Quadr. Parab.)

Vorrede.

Der erste Versuch, eine Schrift des Archimedes ins Deutsche zu übertragen, ist von Joh. Christoph Sturm (damals Pfarrer zu Deiningen in der Grafschaft Oettingen, nachher Professor der Mathematik und Physik zu Altdorf, gestorben 1703 am 26 Dezember,) durch die Uebersetzung des ψαμμίτης unter folgendem Titel gemacht worden: *Des unvergleichlichen Archimedis Sand-Rechnung, aus dem Griechischen in das Hochteutsche übersetzet, und mit nothwendigen Anmerkungen durchgehends erläutert. Nürnberg in Verlegung Paul Fürstens Wittib. 1667. Fol.* Drei Jahre darauf gab er eine Uebersetzung der übrigen damals bekannten Schriften des Archimedes heraus unter dem Titel: *Des unvergleichlichen Archimedis Kunst-Bücher u. s. w. Nürnberg in Verlegung Paul Fürstens Wittib und Erben. 1670. Fol.* Hierin lieferte er folgende Schriften:

1) *Von der Kugel und Rund-Säule, zwei Bücher.*
2) *Von der Kreis- und Scheibenmessung, ein Buch.*
3) *Von derer Flächen Gleichgewichtigkeit, zwei Bücher.*
4) *Von der Parabel-Vierung, ein Buch.*
5) *Von denen Kegel- und Kugel-ähnlichen Figuren, ein Buch.*
6) *Von denen Schnecken-Linien und Flächen, ein Buch.* Auch wird jene frü-

her herausgegebene Sand-Rechnung hier noch einmal aufgeführt, obgleich keine neue Auflage veranstaltet ist; also

7) *Von einer Zahl, welche gröſser ist, als die Zahl alles Sandes, womit die Höhe des ganzen Firmaments könnte ausgefüllet werden.*

Ueber den bei dieser Arbeit zum Grunde gelegten Text erklärt Sturm sich nicht, doch geht aus der Vorrede hervor, daſs er vorzugsweise die Ausgabe und Bearbeitung Rivaults benutzt habe. Die Uebersetzung ist namentlich in den Beweisen nicht wörtlich treu, sondern hat häufig Abkürzungen, doch muſs man gestehen, daſs sie den Sinn der Urschrift nur selten verfehlt. Die beigefügten Erläuterungen sind theils aus dem Kommentare des Eutocius entlehnt, theils mit Benutzung deſsen, was zu jener Zeit schon für die Erklärung des Archimedes geleistet war, vom Uebersetzer selbst geliefert, und haben allerdings Werth. Auch findet man hier als besondere Abhandlungen sowohl eine deutsche Bearbeitung der *Elementa curvarum linearum* des Johann de Witt, als auch Franz von Schooten drei Wege, die Parabel zu quadriren aus dessen *Exercitation. geometr.* Für die Sprache hat Sturms Arbeit eine besondere Wichtigkeit, indem er zuerst den freilich nur selten gelungenen Verſuch macht, die Kunstwörter der Mathematik deutsch wiederzugeben.

Seit Sturm ist in einem Zeitraume von mehr als hundert Jahren für den Archimedes in Deutschland nichts gethan. Endlich erschien: *Archimeds zwei Bücher, über Kugel und Cylinder. Ebendesselben Kreismessung. Uebersetzt mit Anmerkungen u. s. w. begleitet von KARL FRIEDR. HAUBER. Tübingen* 1798. 8. Die Uebersetzung ist sehr verdienstlich, indem sie der Urschrift treu folgt, und von erklärenden Bemerkungen, gröſstentheils nach Eutocius, begleitet wird. Zur Berichtigung des Textes ist Einiges geleistet, und einen neuen Werth erhält die Arbeit durch den Anhang mehrerer Sätze über verwandte Gegenstände aus Lucas Valerius, Tacquet und Torricelli. Ich bekenne gern, dieser Uebersetzung recht viel zu verdanken, und habe mich nicht gescheut, ihr da zu folgen, wo ich Abweichung nicht für Verbesserung halten durfte.

Hiernächst erschien: *Die Quadratur der Parabel des Archimedes, mit nöthi-*

gen Hülfssätzen und Erläuterungen versehen von JOH. JOS. IGN. HOFFMANN. Aschaffenburg 1817. 4. Der Uebersetzer giebt nicht die ganze Schrift des Archimedes, sondern nur dessen rein geometrische Quadratur, und schickt in einem besonderen Abschnitte die zum Verständnisse der Schrift selbst erfoderlichen Hülfssätze voraus, fügt auch hinterher noch einen Abschnitt mit Erläuterungen dazu. Als eine Einleitung in das Studium des Archimedes ist die kleine Schrift brauchbar.

Noch erwähne ich *ARCHIMEDES über die Menge des Sandes, oder Berechnung der Gröfse der Welt in Sandkörnern, a. d. griech. übersetzt von JOH. FRIED. KRÜGER. Quedlinburg und Leipzig* 1820. 8. Der Übersetzer scheint seinem Unternehmen nicht gewachsen zu sein, indem er bedeutende Fehler begeht. In der Vorrede wird eine ähnliche Bearbeitung anderer Schriften des Archimedes angekündigt, wovon seitdem nichts verlautet hat.

Eine rühmliche Anerkennung verdient die französische Uebersetzung unter dem Titel: *Oeuvres d'ARCHIMÈDE, traduites littéralement, avec un commentaire par F. PEYRARD, suivies d'un mémoire du traducteur, sur un nouveau miroir ardent, et d'un autre mémoire de M. DELAMBRE, sur l'arithmétique des Grecs. Seconde édition. A Paris* 1808. *Tom. I et II.* 8. Die Uebersetzung zeichnet sich durch Treue aus, und die erklärenden Anmerkungen sind sehr umsichtig abgefafst. Nicht selten aber wird man im Texte auf Noten verwiesen, die sich gar nicht vorfinden. Für die Kritik des griechischen Textes ist fast nichts gethan; sondern der Uebersetzer folgt überall Torelli, nur nicht in der Reihenfolge der einzelnen Schriften, die er nach dem griechischen Texte der Baseler Ausgabe liefert. Vollständige Uebersetzungen in neuere fremde Sprachen aufser der eben genannten sind mir nicht bekannt; einzelne Schriften giebt es in geringer Anzahl. (Vgl. Fabricii bibl. gr. IV. pag. 191 ed. Harl.)

Die neuere Zeit hat die Foderungen an den Uebersetzer klafsischer Werke des Alterthums höher gesteigert, seitdem uns wenigstens eben so sehr die formelle Vollendung der Urschrift anzieht, als die Gediegenheit des Inhalts. Der Uebersezzer mathematischer Schriften indessen wird sein Hauptaugenmerk immer auf die deutliche Darlegung des Inhalts zu richten haben, und man wird in dieser Rücksicht vielleicht einer gedrängten Bearbeitung des Originals einen eben so grofsen Werth beilegen müssen, als einer treuen Uebersetzung. Um indessen ein anschauliches Bild des Gedankenganges der Alten zu geben, wird man sich mit einer Bearbeitung nicht begnügen dürfen; und sollte bei mathematischen Schriften dieser Gedankengang uns auch nicht selten als ein schwerfälliger erscheinen, so werden wir doch eben so oft Gelegenheit finden, den Scharfsinn zu bewundern, der mit geringen Mitteln so Grofses zu leisten vermogte. Wenn aber bei den elementaren Schriften anderer griechischen Mathematiker die Ausführlichkeit der Darstellung selten oder gar nicht eine Undeutlichkeit läfst, so finden wir bei unserem Verfasser Stellen in Menge, in denen eine rasch übersehene Schlufsreihe mit übersprungenen Mittelgliedern dargelegt ist, und den minder Geübten in Verlegenheit läfst, wenn kein begleitender Kommentar zur rechten Zeit einen Wink giebt. Dieses Bedürfnifs erzeugte schon im Alterthum die Bemerkungen des Eutocius, denen sich andere von verschiedenem Werthe aus der neueren Zeit angereihet haben. Auch ich bin der Meinung gewesen, meine Uebersetzung nicht ohne erklärende Anmerkungen hervortreten lassen zu dürfen, und bin bei ihrer Abfassung von der Absicht ausgegangen, nur so viel geben zu wollen, als zum Verständnifse erfoderlich schien, mit Zurückweisung fast aller solchen Bemerkungen, welche sich auf den Gegensatz der alten und der jetzigen Weise in Behandlung der Mathematik beziehen.

Dafs dabei die Arbeiten meiner Vorgänger sorgfältig benutzt worden sind, wird sich aus der Vergleichung ergeben. Es sind hiebei namentlich die Untersuchungen übergangen, die sich mehrmals aufdrängen wollten, auf welchem Wege denn Archimedes zu der Entdeckung mancher auf eine höchst verwickelte Weise durchgeführten Sätze gekommen sei; denn man wird allerdings dem Urtheile Wallis beipflichten müssen (*Epist. ad Kenelmum Digby. Opp. II. p.* 782.) ... „*non „ignotum credo fore, id quidem in ARCHIMEDE a gravissimis viris doctissimisque „maxime desiderari, et tantum non vitio verti, quod ipse quasi data opera ita occul„taverit sua inquisitionis vestigia; quasi invidisset posteris investigandi artem, a quibus „tamen assensum inventis extorquere vellet. Sed nec ARCHIMEDES solus, verum „et veterum plerique omnes Analyticen suam* (*quam habuisse extra dubium est,*) *co-*

„*usque celarunt posteros, ut recentioribus facilius jam fuerit, nova in suo marte com-*
„*minisci, quam indagasse veterem.*" (Vgl. Anmerkung ε zu Gleichgew. d. Ebenen II. 10.)

Die Reihenfolge der archimedischen Werke ist von Torelli theils nach den Angaben bestimmt, welche sich in den Zueignungsbriefen derselben finden, theils nach den Berufungen, welche hin und wieder in den Schriften selbst vorkommen. Den Schlufs machen dabei die beiden Bücher Von schwimmenden Körpern und die Sammlung der Wahlsätze, weil beide nicht mehr in der Ursprache, sondern erstere nur in der lateinischen Übersetzung eines Unbekannten, letztere nur in arabischer Sprache vorhanden sind, und die Zeit ihrer Abfassung nicht ausgemittelt werden kann. Jene Zueignungsbriefe sind sämtlich an den Dositheus, einen Freund des Archimedes gerichtet, und weil schon in dem ersten derselben vor der Quadratur der Parabel der Tod des Konon, eines andern Freundes des Archimedes, beklagt wird, dem dieser sonst seine Schriften zuzusenden gewohnt war, so ist möglich, dafs das erste Buch vom Gleichgewicht der Ebenen, das einzige vorhandene Werk, welches der Quadratur der Parabel vorangeht, ursprünglich dem Konon zugeeignet gewesen ist, wenigstens lebte Konon zur Zeit der Abfassung aller übrigen griechisch auf uns gekommenen Werke nicht mehr.

Der einzige Kommentar zum Archimedes aus dem Alterthume selbst rührt von Eutocius von Ascalon her, der im Zeitalter Justinians lebte (*Kästner Gesch. d. Math. I. S.* 10.). Seine Anmerkungen beziehen sich jedoch nicht auf alle archimedischen Werke, sondern nur auf die beiden Bücher Vom Gleichgewichte der Ebenen, auf die beiden Von der Kugel und dem Cylinder und auf die Kreismessung; wobei es besonders auffält, dafs die Quadratur der Parabel von ihm gar nicht berücksichtiget ist, da doch das zweite Buch vom Gleichgewichte der Ebenen ausdrückliche Hinweisungen auf jenes enthält. Wenn man nun dem Eutocius die Kenntnifs aller nicht kommentirten Schriften des Archimedes deshalb nicht absprechen darf, weil er keine Erklärungen zu ihnen geliefert hat; so läfst sich doch beweisen, dafs er die Quadratur der Parabel zur Zeit der Abfassung der andern Erklärungen zwar dem Titel nach gekannt, aber noch nie selbst gelesen habe. Die Gründe sind folgende:

1., Die Erläuterungen, welche Eutocius an mehreren Orten aus diesem Buche hätte hernehmen können, giebt er entweder gar nicht, oder entlehnt sie anderswoher; namentlich

a., Gleichgew. d. E. II. S. 2. Hier giebt Eutocius an, was Apollonius den Scheitel einer Parabel nenne, ohne zu erwähnen, daſs Archimedes selbst diese Erklärung gegeben hat (Quadr. d. Par. S. 17, Anm.) Überhaupt hätte er die ganze beigebrachte Erläuterung aus der archimedischen Schrift selbst herholen können, statt daſs er sie seiner eigenen Angabe nach aus dem Apollonius entlehnt. (Vgl. Anmkg. γ zu Gleichgew. d. Eb. II. S. 1.)

b., Gleichgew. d. Eb. II. S. 4. Hier verweiset Eutocius auf das zehnte Buch der Elemente Euklids, und auf das erste Buch des Arch. Von Kug. u. Cyl., da doch Archimedes (Quadr. d. Par. S. 20. Folg.) das Nöthige selbst ausspricht.

c., Gleichgew. d. Eb. II. S. 5. *Δέδεικται γὰρ ἐν ἄλλοις.* Dieser Ort ist Quadr. d. Par. S. 24, was Eut. nicht bemerkt, sondern die Stelle mit Stillschweigen übergeht.

2., Eutocius meldet zwar, daſs Arch. eine Abhandlung über die Quadr. d. Par. verfaſst habe, nimt aber diese Nachricht nicht aus eigener Kenntniſs der Schrift, sondern aus der Anführung des Archimedes in der Einleitung zu seiner Schrift Von Kug. u. Cyl. Dieſs geschieht

a., Gleichgew. d. Eb. II. S. 1. Archimedes setzt hier voraus, man könne eine parabolische Fläche in ein Parallelogramm verwandeln, was nach Quadr. d. Par. S. 24 ausführbar ist. Eutocius aber beruft sich keineswegs auf diesen Satz, sondern sagt: . . . . *δέδεικται αὐτῷ, ὡς καὶ ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρȣ εἶπεν, ὅτι τὸ τοιȣ̃τον σχῆμα ἐπίτριτόν ἐςι τριγώνȣ τȣ̃ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον* . . . .

b., Gleichgew. d. Eb. II. S. 8. Hier wird die Quadratur der Parabel allerdings von Eutocius angeführt mit den Worten: *Δέδεικται γὰρ ὑπ' αὐτȣ̃ ἐν τῷ περὶ τετραγωνισμȣ̃ τῆς ὀρθογωνίȣ κώνȣ τομῆς, ὅτι πᾶν σχῆμα περιεχόμενον* . . . .; allein auch diese Stelle enthält nichts als die eigenen Worte des Archimedes im Eingange der Schrift Von Kug. u. Cyl., nur daſs Eutocius sowohl hier, als zuvor σχῆμα statt τμῆμα braucht, vermuthlich weil er die Worte aus dem Gedächtnifse hinschrieb.

Der Text des Archimedes, welcher zuerst in der *Baseler Ausgabe* 1544 Fol. im Druck erschien, hat seitdem theilweise von Mehreren Berichtigungen erfahren, obgleich auch dieser alte Mathematiker das Schicksal der meisten seiner Genossen theilt, weit weniger in der Ursprache als in der lateinischen Übersetzung gelesen und bearbeitet zu sein. Diese Ausgabe besteht eigentlich aus vier Theilen mit besonderen Seitenzahlen. Der erste giebt den Text, der zweite die lateinische Übersetzung, der dritte die Anmerkungen des Eutocius griechisch, und der vierte die lateinische Übersetzung derselben. Die drei ersten haben besondere Titel, nicht so der vierte, auch fehlt dem zweiten die Jahrszahl. Seit jener *Editio princeps* ist nur eine einzige vollständige Ausgabe erschienen, die *Torellische zu Oxford* 1792 *Fol.* So viel Verdienst sich Torelli hiebei erworben hat, so sauber das Äufsere dieser Ausgabe ist; so streng mufs man doch die unverantwortliche Nachläfsigkeit rügen, mit welcher Robertson, dem die Herausgabe übertragen war, die Correctur besorgt hat, indem fast keine Seite fehlerlos geblieben ist. Wegen dieser durchweg sichtbaren Sorglosigkeit sind auch die Varianten, welche aus einem Florentiner und vier Pariser Handschriften der Ausgabe beigefügt sind, nicht mehr als zuverläfsig anzusehen, verlieren also einen grofsen Theil ihrer Brauchbarkeit. Noch schlimmer steht es um die Varianten, welche Torelli selbst aus einem venetianischen Codex herbeigeschafft und unter den Text zu setzen verordnet hatte; denn weil ebendaselbst auch die Abweichungen der Baseler Ausgabe anzutreffen sein sollen, diese aber theils unvollständig an sich, theils unter jene andern ohne gehörige Unterscheidungszeichen gemischt sind und überdiefs deutliche Spuren eines fehlerhaften Abdrucks tragen; so sind diese unter dem Texte befindlichen Varianten fast gänzlich werthlos geworden. Unter den früheren Bearbeitern hat Rivault seiner Ausgabe, (*Paris* 1615. *Fol.*) welche nur den griechischen Text der einzelnen Sätze, nicht aber der Beweise, enthält, aufser einer lateinischen Übersetzung auch Erläuterungen beigefügt, die ihm den Spottnamen *Infelix Commentator* zugezogen, obgleich sie manches Brauchbare enthalten. Verdienstlich war späterhin die gedrängte Bearbeitung Barrows (*London* 1675. 4.)

*

worin Einiges für die Berichtigung des Textes geschehen ist. Besonders schätzbar ist aber die Ausgabe der Kreismessung und der Sandeszahl von Wallis; (Beide *Oxford* 1676. 8. und nachher *in Opp. III.* 1699 *Fol.*) denn hier ist nicht nur der vorhandene Text an unzähligen Stellen scharfsinnig hergestellt, sondern es ist auch mit gewissenhafter Treue von den vorgenommenen Änderungen Rechenschaft gegeben. Hätte Wallis den ganzen Archimedes so bearbeitet, so würde für Torelli nur noch eine sparsame Nachlese geblieben sein. Jetzt aber bleibt noch für den Nachfolger des letzteren keine geringe Ausbeute. Ohne mit Ernst an eine neue Ausgabe zu denken, habe ich doch bei meiner Arbeit die kritische Beleuchtung des Textes nicht aus den Augen verlieren dürfen, um der Übersetzung die mir erreichbare Vollendung zu geben, und wenn ich die kritischen Bemerkungen hier anfüge, welche beim Übersetzen entstanden sind, so gebe ich sie als Materialien zu weiterer Prüfung für den künftigen Herausgeber, ohne zu verkennen, daſs mancher Vorschlag einer solchen Prüfung noch gar sehr bedürfe. Weil aber selbst ein Irthum nicht selten das Wahre ans Licht fördert, so stelle ich jetzt keine strengere Sichtung des Probehaltigen an. Sollte es mir einmal gelingen, die Schwierigkeiten zu überwinden, über welche von den Herausgebern griechischer Mathematiker seit Jahrhunderten geklagt ist, so würden Berichtigungen meiner Kritik von Freunden dieses Zweiges der alterthümlichen Bildung meine ganze Dankbarkeit in Anspruch nehmen. Auf die Übersetzung hat die Textesberichtigung natürlich Einfluſs gehabt, doch ist die Anzahl solcher Stellen nur geringe, in welchen ich eine den ganzen Sinn ändernde Verbesserung eintreten lassen zu müssen glaubte.

Daſs ich den fortlaufenden Text des ψαμμίτης in Paragraphen getheilt habe, wird hoffentlich keine Miſsbilligung erfahren. Eher dürfte man darüber mit mir rechten wollen, das ich statt der ältern Benennungen der Kegelschnitte die späteren des Apollonius eingeführt, auch den Parameter, die Asymptoten u. d. gl. mit diesem und nicht mit ihrem früheren Namen bezeichnet habe; indessen mag mich hier das Beispiel Peyrards und die Billigung Delambres entschuldigen. (Vgl. *Peyrards Übersetzung I. p. XII etc.*) Es ist bisher noch nicht mit Entschiedenheit ermittelt worden, ob Archimedes die seit Apollonius gebräuchlichen Namen der Kegelschnitte, Parabel, Ellipse und Hyperbel, gekannt, ferner ob er gewufst, dafs alle diese Schnitte aus einem einzigen willkührlichen Kegel entstehen können, endlich ob er selbst ein Elementarwerk über die Kegelschnitte verfafst habe. Die erste Frage glaube ich verneinen zu müfsen, und gebe meine Gründe in den kritischen Anmerkungen zu S. 270 Z. 1 v. u. (*ed. Torelli.*). Zur Beantwortung der zweiten Frage findet man Materialien in *Guidi Ubaldi e Marchionibus Montis in duos Archimedis aequiponderantium libros paraphrasis scholiis illustrata. Pisauri* 1588 *Fol. pag.* 117 *seqq.* Es gehet daraus hervor, dafs Archimedes den schiefen Kegel, welchen Euklides gar nicht betrachtet, allerdings schon gekannt, und dafs er gewufst habe, die Ellipse könne nicht blofs aus einem geraden spitzwinkligen Kegel, sondern auch aus jedem andern, ja selbst aus einem Cylinder, geschnitten werden; allein der Schlufs Ubaldis, dem Archimedes sei also die allgemeine Entstehungsart aller Kegelschnitte aus jedem Kegel bekannt gewesen, ist zu rasch, da sich nachweisen läfst, dafs ihm keine andere Entftehung der Parabel, als die aus dem geraden rechtwinkligen Kegel bekannt gewesen. Dieser Beweis kann durch seine Angabe der Gröfse des Parameters der Parabel (Konoïd. u. Sphäroid. S. 4. B.) geführt werden, indem die dort bezeichnete Gröfse des Parameters nur für den geraden rechtwinkligen Kegel richtig, sonst aber falsch ist. Es läfst sich deshalb wohl vermuthen, dafs er die Hyperbel auch nur als den Schnitt eines stumpfwinkligen geraden Kegels gekannt habe, denn freilich finde ich weder für noch gegen die letztere Meinung eine haltbare Stütze. Die Beantwortung der dritten Frage ist schwierig; sie wird bejahet von Rivault (*Praefat. ad Conoid. et Sphäroid.*) mit Hinzufügung der Behauptung des Heraclius, der eine Lebensbeschreibung des Archimedes verfafst hat, dafs die Kegelschnitte des Apollonius eigentlich dem Archimedes angehören. Indessen dürften die dort vorgebrachten Gründe schwerlich genügen, diese Behauptung aufser Zweifel zu setzen. Möglich ist allerdings, dafs Archimedes eine schon früh verlorne Schrift über die Kegelschnitte (vielleicht unter dem Titel τάξεις, oder ϛοιχεῖα κωνικὰ, oder Κωνικά. Man sehe die kritische Anmerk. zu S. 36. Z. 7 v. u. ferner S. 264. Z. 30, und S. 265. Z. 20.) verfafste, die späterhin vom Apollonius benutzt ward, allein mehr läfst sich schwerlich mit einiger Wahrscheinlichkeit behaupten. (Vgl. *Ubaldi a. a. O.*) Beiläufig bemerke ich noch, dafs aus der oben für die Bezeichnung des Parameters angeführten Stelle (Konoid. u. Sphäroid. S. 4 B) auch ein Zeugnifs für die Ächtheit der lateinisch vorhandenen Schrift *Von schwimmenden Körpern* hergeleitet werden kann, indem hier der halbe Parameter der Parabel ebenfalls als die Entfernung der Axe vom Kegelscheitel angegeben wird. (Vgl. Schwimm. Körp. II. S. 2, und öfter.)

In den Anmerkungen bezieht sich das nur selten vorkommende Citat Geom. auf des Übersetzers Geometrie. In den kritischen Anmerkungen bedeutet S die Seite der Ausgabe Torellis, und beim Zählen der Zeilen sind die Überschriften nicht mitgezählt; in den Erläuterungen dagegen hat S die Bedeutung Satz. Die Abkürzung Rec. endlich bezeichnet den Recensenten der Torellischen Ausgabe in der *Hall. Allg. Litt. Ztg.* (*Jahrg.* 1795. *Nr.* 172.)

Stralsund, am 4. Oktober 1824.

N.

Vom Gleichgewichte der Ebenen;

oder

von den Schwerpunkten derselben.

Erstes Buch.

Voraussetzungen.

1) Gleich schwere Gröſsen in gleichen Entfernungen wirkend sind im Gleichgewichte. (α)

2) Gleich schwere Gröſsen in ungleichen Entfernungen wirkend sind nicht im Gleichgewichte; sondern die an der längern Entfernung wirkende sinkt.

3) Wenn einer schweren Gröſse, die mit einer andern in gewissen Entfernungen im Gleichgewichte ist, etwas zugefügt wird, so bleiben sie nicht mehr im Gleichgewichte; sondern diejenige sinkt, der etwas zugelegt worden. (β)

4) Gleicherweise, wenn von der einen dieser schweren Gröſsen etwas weggenommen wird, so bleiben sie nicht mehr im Gleichgewichte; sondern diejenige sinkt, von welcher nichts weggenommen ist. (β)

5) Wenn gleiche und ähnliche Figuren auf einander gepaſst sind, so treffen auch deren Schwerpunkte auf einander.

6) Die Schwerpunkte ungleicher, jedoch ähnlicher ebener Figuren liegen ähnlich.

(Vorauss. α) Archimedes setzt stillschweigend voraus, daſs die von ihm in Betrachtung gezogenen Gröſsen gleichartig, und die Gewichte derselben ihrer Gröſse proportionirt sind, daher er von der Gleichheit des Gewichts auf die Gleichheit der Gröſse selbst schlieſst, und umgekehrt. Er hat übrigens in dieser Abhandlung zunächst nur schwere Ebenen ins Auge gefaſst.

(β) Das Hinzufügen und Abnehmen bezieht Arch. stillschweigend nicht bloſs auf die Gröſse der schweren Gröſsen selbst, sondern auch auf die Gröſse ihrer Entfernungen vom Aufhängungspunkte oder Unterstützungspunkte des Hebels, an dessen Armen die schweren Gröſsen aufgehängt sind. (Vgl. S. 7. α, 2.)

Man sagt aber: Punkte liegen ähnlich in ähnlichen Figuren, wenn die geraden, von ihnen nach den Spitzen der gleichen Winkel gezogenen Linien mit den gleichliegenden Seiten gleiche Winkel machen.

7) Wenn Gröfsen in gewissen Entfernungen im Gleichgewichte sind, so sind ihnen gleiche in denselben Entfernungen auch im Gleichgewichte.

8) Der Schwerpunkt einer jeden Figur, deren Umfang nach einerlei Gegend hohl ist, (γ) mufs innerhalb der Figur liegen. (δ)

Satz 1.

Gröfsen, die in gleichen Entfernungen im Gleichgewichte sich befinden, sind gleich schwer.

Denn wären sie ungleich schwer, so würden sie, nach Wegnahme des Gewichtüberschusses von der schwereren, nicht mehr im Gleichgewichte sein (V. 4.).

Satz 2.

Ungleich schwere Gröfsen sind bei gleichen Entfernungen nicht im Gleichgewichte, sondern die schwerere wird sinken.

Denn nach Wegnahme des Ueberschusses von der schwereren werden sie im Gleichgewichte sein (V. 1.); legt man also wieder hinzu, was man weggenommen, so wird die vergröfserte schwere Gröfse sinken (V. 3.).

Satz 3.

Wenn ungleich schwere Gröfsen in ungleichen Entfernungen im Gleichgewichte sind, so befindet sich die schwerere in der kleineren Entfernung.

F. 1. Es seien A, B ungleich schwere Gröfsen, $A > B$, und beide in den Entfernungen AC, BC, im Gleichgewichte; so mufs erwiesen werden, dafs $AC < BC$.

Die Entfernung AC sei nicht die kleinere. Man nehme den Ueberschufs von A über B weg, so mufs B sinken (V. 4.). Es kann aber B nicht sinken: denn ist $AC = BC$, so findet Gleichgewicht Statt (V. 1.); und ist $AC > BC$, so mufs A sinken (V. 2.); folglich ist $AC < BC$.

Satz 4.

Wenn zwei gleich schwere Gröfsen nicht einerlei Schwerpunkt haben, so liegt der Mittelpunkt der Schwere einer aus diesen beiden zusammengesetzten Gröfse in der Mitte derjenigen geraden Linie, welche die Schwerpunkte beider Gröfsen verbindet. (α)

F. 2. Es sei A der Schwerpunkt der Gröfse A, und B der Schwerpunkt der Gröfse B, auch

---

(γ) Vgl. V. d. Kug. u. d. Cyl. I. Vorauss. 2.

(δ) Eutocius bemerkt ganz richtig, dafs der Schwerpunkt einer Figur von dem Mittelpunkte derselben zu unterscheiden sei. So liegt der Mittelpunkt des Halbkreises im Umfange, und der Mittelpunkt der Hyperbel gar aufserhalb der Figur.

(S. 4. α) Gleich schwere, oder was hier dasselbe ist, gleiche und gleichartige Gröfsen können einerlei Schwerpunkt haben, z. B. ein Ring und ein Kreis von gleichem Inhalte u. s. w. Dergleichen schliefst Arch. aus.

werde die Verbindungslinie AB durch C in zwei Hälften getheilt. Ich behaupte, dafs C der Schwerpunkt der aus beiden Gröfsen zusammengesetzten Gröfse sei.

Denn wo nicht, so sei D der Schwerpunkt der aus den Gröfsen A, B, zusammengesetzten Gröfse, wenn diefs möglich ist. (Denn dafs der Schwerpunkt in der Linie AB liege, ist schon gezeigt.) (β) Wird dann D gehalten, so sind beide Gröfsen A, B, im Gleichgewichte in den Entfernungen AD, BD, welches unmöglich ist (V. 2.) Folglich ist C der Schwerpunkt der zusammengesetzten Gröfse.

Satz 5.

Wenn die Schwerpunkte dreier Gröfsen in einer geraden Linie liegen, auch die Gröfsen selbst gleiches Gewicht haben, und wenn die Zwischenweiten der Schwerpunkte gleich sind; so wird der Schwerpunkt der aus allen dreien zusammengesetzten Gröfse derjenige Punkt sein, welcher auch Schwerpunkt der mittlern Gröfse ist.

Es seien A, B, C, drei Gröfsen, deren Schwerpunkte A, B, C, in einer geraden Linie liegen; auch seien die Gröfsen A = B = C und die geraden Linien AC = BC. Ich behaupte, dafs C der Schwerpunkt der aus allen diesen Gröfsen zusammengesetzten Gröfse sei. F. 3.

Weil nämlich die beiden Gröfsen A, B, gleich schwer sind, so ist ihr Schwerpunkt der Punkt C (S. 4.). Aber der Punkt C ist auch Schwerpunkt der Gröfse C; folglich ist der Schwerpunkt der aus allen zusammengesetzten Gröfse derselbe Punkt, welcher Schwerpunkt der mittlern Gröfse ist.

Folgerung 1. Hieraus erhellt, wenn die Schwerpunkte einer willkührlichen ungeraden Anzahl von Gröfsen in einer geraden Linie liegen, wenn ferner diejenigen gleiches Gewicht haben, welche von der mittlern gleich weit abstehen, und wenn die Zwischenweiten ihrer Schwerpunkte gleich sind; dafs der Schwerpunkt einer aus ihnen allen zusammengesetzten Gröfse eben der Punkt ist, welcher der Schwerpunkt der mittlern Gröfse ist.

Folgerung 2. Wenn aber die Gröfsen in gerader Anzahl vorhanden sind, und ihre Schwerpunkte in gerader Linie liegen, auch jede mittlern gleiches Gewicht haben, und die Zwischenweiten der Schwerpunkte gleich sind, so wird der Schwerpunkt einer aus ihnen allen zusammengesetzten Gröfse in der Mitte derjenigen geraden Linie liegen, welche die sämmtlichen Schwerpunkte verbindet. F. 4.

Satz 6.

Kommensurable Gröfsen sind im Gleichgewichte, wenn sie ihren Entfernungen umgekehrt proportionirt sind.

Es seien A, B, kommensurable Gröfsen mit den Schwerpunkten A, B, und ED sei irgend eine Länge, auch sei F. 5.

(β) Ausdrücklich zeigt diefs Arch. nirgend; er versteht aber nach Eutocius unter dem Schwerpunkte zweier Gröfsen den Aufhängungspunkt einer als Wagestange gedachten, die Schwerpunkte beider Gröfsen verbindenden geraden Linie, wenn derselbe so gewählt ist, dafs die Wagestange ruhig in horizontaler Lage verharret. Nach dieser Erklärung giebt die erste Voraussetzung schon den Grund an, warum der Schwerpunkt in AB liegen mufs; ja streng genommen, sagt der ganze Lehrsatz nichts anders, als die erste Voraussetzung.

$$A : B = DC : EC,$$

so ist zu beweisen, dafs C der Schwerpunkt einer aus A, B, zusammengesetzten Gröfse sei.

Weil A : B = DC : EC, so sind auch DC und EC, d. i., eine gerade Linie einer geraden, kommensurabel. Also haben DC und EC ein gemeinschaftliches Maafs, welches N sein mag. Man setze EC = DG = DK, und EL = DC. Weil nun DG = EC, so ist auch DC = EG, und eben so LE = EG. Also ist LG = 2 DC, und GK = 2 EC: folglich mifst die Linie N jede der beiden Linien LG und GK, da sie deren Hälften mifst.

$$\begin{array}{rl} \text{Weil nun } A : B &= DC : EC \\ \text{und } DC : EC &= LG : GK \\ \hline \text{so ist } A : B &= LG : GK \end{array}$$

Ein so Vielfaches aber LG ist von N, ein eben so Vielfaches sei A von F, d. h.

$$\begin{array}{rl} LG : N &= A : F \\ \text{und weil } GK : LG &= B : A \\ \hline \text{so ist } GK : N &= B : F \end{array}$$

Also ist B ein eben so Vielfaches von F, wie GK von N. Es ward aber schon gezeigt, dafs auch A ein Vielfaches von F sei, mithin ist F ein gemeinschaftliches Maafs von A und B. Theilt man nun LG in lauter der Linie N, und A in lauter der Gröfse F gleiche Theile, so ist die Zahl dieser Theile von LG eben so grofs, als die Zahl solcher Theile von A. Hängt man demnach an jeden der gleichen Abschnitte von LG eine Gröfse = F, die ihren Schwerpunkt in der Mitte des Abschnitts hat, so sind diese Gröfsen zusammen = A, und der Schwerpunkt der aus ihnen allen zusammengesetzten Gröfse ist E (S. 5, F. 2.); denn sie sind sämmtlich in gerader Anzahl vorhanden, weil LE = GE. Eben so würde sich zeigen lassen, wenn an jeden jener Abschnitte der Linie GK eine Gröfse = F gehängt wird, deren Schwerpunkt in der Mitte ihres Abschnitts liegt, dafs alle diese Gröfsen zusammen = B seien, und der Schwerpunkt der aus ihnen zusammengesetzten Gröfse in D liege. Also liegt nunmehr A in E, und B in D, d. h. es liegen lauter gleiche Gröfsen in gerader Anzahl auf einer geraden Linie mit gleichen Zwischenweiten ihrer Schwerpunkte; woraus erhellet, dafs der Schwerpunkt einer aus ihnen allen zusammengesetzten Gröfse die Mitte derjenigen geraden Linie ist, welche die Schwerpunkte der mittleren verbindet (S. 5, F. 2.). Nun ist

$$\begin{array}{c} LE = CD \\ EC = DK \\ \hline LC = CK \end{array}$$

mithin ist C der Schwerpunkt der aus allen zusammengesetzten Gröfse, also findet Gleichgewicht in Beziehung auf den Punkt C Statt, wenn A in E, und B in D liegt.

Satz 7.

Auch wenn Gröfsen nicht kommensurabel sind, so stehen sie doch im Gleichgewichte, sobald sie ihren Entfernungen umgekehrt proportionirt sind.

F. 6. Die nicht kommensurabeln Gröfsen sollen AB und C, ihre Entfernungen DE und EF sein, und man habe:

$$AB : C = DE : EF$$

Ich behaupte, dafs E der Schwerpunkt der aus AB und C zusammengesetzten Gröfse sei.

Gesetzt nämlich, es fände nicht Gleichgewicht Statt, nachdem AB an F, und C an D gehängt worden, so ist AB entweder zu grofs im Verhältnifs zu C, um das Gleichgewicht zu halten, oder nicht. Darum sei AB zu grofs, und man nehme von dieser Gröfse etwas weniger weg, als das, um welches sie für das Gleichgewicht mit C zu grofs ist; jedoch so, dafs der Rest A mit C kommensurabel wird. (α) Weil nun hieraus folgt, dafs

$$A : C < DE : EF,$$

so können die Gröfsen A und C in den Entfernungen DE und EF nicht im Gleichgewichte sein, wenn A an F und C an D gehängt wird. (S. 6.)

Durch dieselben Schlüsse ergiebt sich, dafs kein Gleichgewicht Statt finde, wenn man von der Annahme ausgeht, dafs C im Verhältnifs zu AB allzugrofs sei.

Satz 8.

Wenn von irgend einer Gröfse ein Theil weggenommen wird, der nicht einerlei Schwerpunkt mit dem Ganzen hat, so findet man den Schwerpunkt des Restes also: man verlängere die Verbindungslinie der Schwerpunkte der ganzen Gröfse und des abgeschnittenen Theils über den ersten Punkt hinaus, und schneide diese Verlängerung in einer solchen Länge ab, dafs sie zu der zwischen jenen Schwerpunkten befindlichen Linie sich verhalte, wie das Gewicht (α) des weggenommenen Theils zu dem des Restes; dann ist der Endpunkt dieser Verlängerung der Schwerpunkt des Restes.

Der Punkt C sei der Schwerpunkt einer Gröfse AB. Man nehme davon die Gröfse AD weg, deren Schwerpunkt E sei. Die Verbindunglinie EC verlängere man, und schneide darauf CF dergestalt ab, dafs $DG : AD = EC : CF$; so mufs gezeigt werden, dafs der Punkt F der Schwerpunkt der Gröfse DG sei. F. 7.

Es sei nämlich nicht also, sondern H sei dieser Punkt, wenn das möglich ist. (β) Da nun E der Schwerpunkt von AD, und H der Schwerpunkt von DG ist, so wird der Schwer-

(S. 7. α) 1. Es sei nämlich AB im Verhältnifs zu C um die Gröfse M zu grofs. Durch fortgesetzte Halbtheilungen der Gröfse C kann man auf einen Theil N kommen, der kleiner ist, als M. Sind nun C und $AB-M$ kommensurabel, also etwa $AB-M=(n-1)N$, so mache man $A=nN$. Sind aber C und $AB-M$ nicht kommensurabel, so setze man den Theil N so oft (etwa r mal) zusammen, dafs $(r-1)N$ zwar noch kleiner als $AB-M$, aber rN schon gröfser als $AB-M$ wird; und mache $A=rN$. In beiden Fällen ist dann die Foderung erfüllt.

2. Deutlicher wird die Darstellung, wenn man so fortfährt:

Dann bleibt fortwährend ein Uebergewicht in dem Punkte F; weil aber: $A : C < DE : EF$, so können A und C in den Punkten F und E nicht gleichgewichtig sein (S. 6.), sondern das Uebergewicht müfste sich in dem Punkte D befinden, welches einen Widerspruch enthält.

Dafs aber wirklich das Uebergewicht in D sein müsse, erhellt so:

Es ist $A : C < DE : EF$; man verkürze DE und DG dergestalt, dafs nunmehr $A : C = EG : EF$, so sind A und C im Gleichgewichte in den Punkten F und G. Hierauf rücke man C nach D, so wird das Gleichgewicht aufgehoben, und das Uebergewicht befindet sich in D (V. 3, β).

(S. 8. α) Vgl. Vorauss. 1. α.

(β) Der Punkt H mufs in der geraden Linie EC (oder deren Verlängerung) liegen, weil der Schwerpunkt einer aus AD und DG zusammengesetzten Gröfse in derjenigen geraden Linie liegt, welche die Schwerpunkte dieser beiden Gröfsen verbindet.

punkt der aus AD und DG zusammengesetzten Gröſse in der also geschnittenen Linie EH liegen, daſs die Abschnitte der beiden Gröſsen umgekehrt proportionirt sind. (S. 6. 7.). Also wird der Punkt C nicht in diesem erwähnten Schnitte liegen: mithin ist der Punkt C nicht der Schwerpunkt der aus AD, DG, zusammengestzten Gröſse, d. h. der Gröſse AB. Er ist es aber nach der Annahme; folglich ist H nicht der Schwerpunkt der Gröſse DG.

Satz 9.

Der Schwerpunkt eines jeden Parallelogramms liegt in der geraden Linie, welche die Mitten der gegenüberstehenden Seiten verbindet.

F. 8. Es sei ABCD ein Parallelogramm. Zwischen den Mitten der Seiten AB, CD, liege EF. Ich behaupte, daſs der Schwerpunkt des Parallelogramms ABCD in EF liege.

Es sei nämlich nicht also, sondern H sei der Schwerpunkt, wenn dieſs möglich. Man ziehe HI ǂ AB. Theilt man dann EB fortwährend in Hälften, so wird man einmal auf einen Theil kommen, der kleiner ist, als IH. Man zerlege daher jede der geraden Linien AE, EB, in Theile, die einzeln gleich EK sind, und durch die Theilungspunkte ziehe man Parallelen mit EF, wodurch das ganze Parallelogramm in andere zerlegt wird, die dem Parallelogramm KF gleich und ähnlich sind. Würden nun diese dem KF gleichen und ähnlichen Parallelogramme auf einander gepaſst, so würden auch ihre Schwerpunkte auf einander fallen (V. 5.). Die Parallelogramme werden demnach gewisse Gröſsen sein, die einzeln gleich dem KF, in gerader Anzahl vorhanden und deren Schwerpunkte in gerader Linie liegen. (α) Auch sind die mittlern sowohl, als alle zu beiden Seiten befindlichen, samt den Zwischenweiten ihrer Schwerpunkte gleich. Folglich liegt der Schwerpunkt der aus allen diesen Gröſsen zusammengesetzten Gröſse in derjenigen geraden Linie, welche die Schwerpunkte der mittlern Gröſsen verbindet (S. 5, F. 2.). Er liegt aber nicht dort; denn der Punkt H liegt auſserhalb der mittlern Parallelogrammen. Demnach ist deutlich, daſs der Schwerpunkt des Parallelogramms ABCD in der geraden Linie EF liegt. (β.)

Satz 10.

Der Schwerpunkt eines jeden Parallelogramms ist derjenige Punkt, in welchem die Diagonalen sich treffen.

F. 9. Es sei ABCD ein Parallelogramm, dessen Seiten AB, CD, durch EF, die Seiten AC, BD, aber durch KL in Hälften getheilt werden. Der Schwerpunkt des Parallelogramms liegt nach dem eben Erwiesenen (S. 9.) in EF. Durch dieselben Schlüsse findet er sich auch in KL, mithin ist H der Schwerpunkt. In H aber treffen sich die Diagonalen; (α) also ist der Beweis geführt.

F. 8 a. (S. 9. α) Es sei AF ≅ BG ≅ CH; auch sollen I, K, L, die Schwerpunkte der drei Parallelogramme sein. Man fälle die Perpendikel IM, KN, LO, und ziehe die Verbindungslinien IK und KL. Legt man dann die Parallelogramme so auf einander, daſs sie sich decken, so treffen nicht allein die Punkte I, K, L, sondern auch die Perpendikel in einander; also ist IM = KN = LO; folglich ist MK ein Rechteck, eben so NL; also NKI = NKL = R; mithin IKL eine gerade Linie. Man sieht, daſs der Beweis sich leicht auf mehr als drei Parallelogramme ausdehnen läſst.

(β) In der Urschrift scheint der Beweis zwar nur von einem rechtwinkligen Parallelogramm geführt zu sein, wenn man die Figur betrachtet; allein er läſst sich ohne Schwierigkeit auch auf das schiefwinklige anwenden.

F. 9 a. (S. 10. α) Man ziehe nämlich HA und HD, so hat man

Der Satz läfst sich auch noch anders beweisen.

Es sei ABCD ein Parallelogramm mit der Diagonale BD; dann ist $\Delta ABD \cong \Delta BDC$; F. 10. werden mithin beide Dreiecke auf einander gepafst, so fallen auch ihre Schwerpunkte auf einander (V. 5.). Nun sei E der Schwerpunkt des Dreiecks ABD; man theile BD durch den Punkt H in Hälften, ziehe EH, und nehme auf deren Verlängerung $HF = HE$; legt man dann Δ ABD so auf Δ BDC, dafs AB auf DC und AD auf BC trifft, so wird auch die gerade Linie HE mit HF zusammenfallen, und der Punkt E mit F; aber auch mit dem Schwerpunkte des Δ BDC (V. 5.); also weil E der Schwerpunkt des Dreiecks ABD und F der Schwerpunkt des Dreiecks BDC ist, so erhellet, dafs der Schwerpunkt der aus beiden Dreiecken zusammengesetzten Gröfse die Mitte der geraden Linie BD ist, d. h. der Punkt H. (β)

Satz 11.

Wenn von zwei in zwei ähnlichen Dreiecken ähnlich liegenden Punkten (V. 6.) der eine des Dreiecks Schwerpunkt ist, worin er sich befindet, so ist auch der andere desjenigen Dreiecks Schwerpunkt, worin er liegt.

Es sollen Δ ABC und Δ DEF zwei Dreiecke sein, in denen $AC : DF = AB : DE$ F. 11. $= BC : EF$, und in denen die Punkte H, N, gleichliegend sind; auch sei H der Schwerpunkt des Dreiecks ABC. Ich behaupte, dafs auch N der Schwerpunkt des Δ DEF sei.

Gesetzt es sei nicht also, sondern, wenn diefs möglich, es sei G der Schwerpunkt des Δ DEF. Man ziehe HA, HB, HC, DN, EN, FN, DG, EG, FG. Weil nun $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ und H, G, die Schwerpunkte sind, auch in ähnlichen Figuren die Schwerpunkte ähnlich liegen, d. h. gleiche Winkel gegenseitig gegen die gleichliegenden Seiten hervorbringen, (V. 6.), so ist $GDE = HAB$. Es ist aber $HAB = NDE$, weil H, N, gleichliegend sind, folglich ist $GDE = NDE$, d. h. der gröfsere Winkel ist dem kleineren gleich, welches unmöglich ist. Keineswegs liegt also der Schwerpunkt des Dreiecks DEF aufser dem Punkte N; also ist er N selbst, wie behauptet ward.

Satz 12.

Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, und wenn der Schwerpunkt des einen in einer geraden, aus irgend einer Winkelspitze gegen die Mitte der Grundlinie gezogenen Linie sich befindet, so liegt auch der Schwerpunkt des andern Dreiecks in einer ähnlich gezogenen Linie.

Die beiden Dreiecke sollen Δ ABC, Δ DEF sein, in denen $AC : DF = AB : DE$ F. 12. $= BC : EF$ ist. Man theile AC durch G in Hälften und ziehe BG. Nun liege der Schwer-

---

$$\begin{aligned} AHE &= HDL \\ EHL &= HLD \\ LHD &= LHD \\ \hline AHE + EHL + LHD &= HDL + HLD + LHD = 2\,R; \end{aligned}$$

also ist AHD eine gerade Linie, d. h. die Diagonale selbst. Eben so läfst sich zeigen, dafs auch die zweite Diagonale BC durch den Punkt H geht.

(β) Die zweite Diagonale geht ebenfalls durch H; denn die Diagonalen eines Parallelogramms theilen sich gegenseitig in Hälften. Es seien nämlich AD, BC die Diagonalen des Parallelogramms ABDC, so ist $\Delta AHC \cong \Delta BHD$, also $AH = DH$, und $CH = BH$. F. 9 a.

punkt des Δ ABC in dem auf BG befindlichen Punkte H; so behaupte ich, dafs auch der Schwerpunkt das Δ DEF sich in einer ähnlich gezogenen Linie befinde.

Es sei DF durch den Punkt M in Hälften getheilt, und EM gezogen, demnächst bestimme man den Punkt N so, dafs sich verhalte:

$$BG : BH = EM : EN$$

und ziehe AH, CH, DN, FN. Weil nun $AG = \frac{1}{2}\,AC$, $DM = \frac{1}{2}\,DF$, so ist:

$$BA : ED = AG : DM$$

Hier werden also gleiche Winkel von proportionirten Seiten eingeschlossen, mithin ist auch AGB = DME, und:

$$\begin{array}{rc} & AG : DM = GB : ME \\ \text{es ist aber} & \underline{GB : ME = BH : EN} \\ \text{folglich} & BA : ED = BH : EN \end{array}$$

Hier werden wieder gleiche Winkel von proportionirten Seiten eingeschlossen, mithin ist auch BAH = EDN, also auch HAG = NDM, als gleiche Reste. Aus denselben Gründen ist BCH = EFN und HCG = NFM. Ferner ist gezeigt worden, dafs ABH = DEN, folglich ist auch HBC = NEF. Aus diesem allem geht hervor, dafs die Punkte H, N, gleichliegend sind, denn sie bilden gleiche Winkel; und weil diefs der Fall ist, weil ferner H der Schwerpunkt des Δ ABC ist, so ist auch N der Schwerpunkt des Δ DEF.

Satz 13.

Der Schwerpunkt eines jeden Dreiecks liegt in einer geraden Linie, welche von einem Winkel nach der Mitte der Grundlinie gezogen worden.

F. 13. In dem Δ ABC treffe AD die Mitte der Grundlinie BC. Dann ist zu zeigen, dafs der Schwerpunkt des Dreiecks in der Linie AD sich befinde.

Dem sei nicht also, sondern, wenn diefs möglich, es sei H der Schwerpunkt, und man ziehe HI ‡ BC. Durch fortgesetzte Halbtheilung der Linie DC wird man auf eine Linie kommen, die kleiner ist, als HI. Man theile demnach jeden der Abschnitte BD, DC, in solche gleiche Theile, lege durch die Theilungspunkte Parallelen mit AD, und ziehe die Verbindungslinien EF, GK, LM, welche der Linie BC parallel sein werden. (α) Nun liegt der Schwerpunkt des Parallelogramms MN in SY, des Parallelogramms KX in YT, und endlich des Parallelogramms FO in TD (S. 9.); also liegt der Schwerpunkt einer aus ihnen allen zusammengesetzten Gröfse in SD. (β) Dieser Punkt sei R; man ziehe RH, verlängere sie und ziehe CU ‡ DA.

Fer-

(S. 13. α) Es verhält sich nämlich:

$$\begin{array}{l} BO : BD = BE : BA, \text{ weil } EO ‡ AD \\ CZ : CD = CF : CA, \text{ weil } FZ ‡ AD \\ \underline{BO : BD = CZ : CD, \text{ weil } BD = CD \text{ und } BO = CZ} \\ BE : BA = CF : CA, \text{ mithin } EF ‡ BC. \end{array}$$

Auf dieselbe Weise zeigt man, dafs GK ‡ BC u. s. w.

(β) Es liegt nämlich der Schwerpunkt einer aus MN und KX zusammengesetzten Gröfse in der geraden Linie ST (S. 6. 7.). Setzt man ferner diese Gröfse mit FO zusammen, so folgt aus denselben Gründen, dafs der Schwerpunkt der uenen Gröfse in SD liegen müsse.

Ferner verhält sich ΔADC zur Summe aller auf den Grundlinien AM, MK, KF, FC beschriebenen, dem ΔADC ähnlichen Dreiecke, wie AC zu AM, wegen der Gleichheit der Linien AM, MK, KF, FC. (γ) Weil ferner auch ΔADB sich zur Summe aller der ihm selbst ähnlichen Dreiecke auf den Grundlinien AL, LG, GE, EB verhält, wie AB zu AL; so verhält sich:

$$\Delta ABC : \textit{Summe aller genannten } \Delta\Delta = AC : AM \ (\gamma)$$

$$\text{Es ist aber:} \quad AC : AM > UR : RH$$

denn man hat aus ähnlichen Dreiecken: $AC : AM = UR : RP$; (δ) folglich

$$\Delta ABC : \textit{Summe obiger Dreiecke} > UR : RH; \text{ also}$$

$$(\Delta ABC - \textit{Summe der } \Delta\Delta) : \textit{Summe der } \Delta\Delta > (UR - RH) : RH$$

$$\text{d. h. } (MN + KX + FO) : \textit{Summe der } \Delta\Delta > UH : RH$$

Es sei demnach:

$$(MN + KX + FO) : \textit{Summe der } \Delta\Delta = QH : RH.$$

Weil dann ΔABC eine gewisse Gröfse, und H deren Schwerpunkt ist, und von dieser Gröfse eine andere aus den Parallelogrammen MN, KX, FO zusammengesetzte weggenommen worden, deren Schwerpunkt in R liegt, so befindet sich der Schwerpunkt des aus den übrigbleibenden Dreiecken bestehenden Restes am Ende der so weit verlängerten Linie RH, dafs die Verlängerung sich zu RH verhält, wie die abgezogene Gröfse zum Reste (S. 8.). Also ist der Punkt Q der Schwerpunkt der aus den übrigbleibenden Dreiecken zusammengesetzten Gröfse. Diefs ist aber unmöglich; denn würde man durch Q in derselben Ebene eine Parallele mit AD ziehen, so würden sich sämmtliche Dreiecke auf einerlei Seite (auf einer von beiden) befinden. Mithin erhellt die Richtigkeit der Behauptung (V. 8.).

Anderer Beweis. Das Dreieck sei ABC, und in ihm AD nach der Mitte von BC gezogen. Ich behaupte, dafs der Schwerpunkt des Dreiecks ABC in der geraden Linie AD liege.

Gesetzt es sei nicht also, sondern H sei der Schwerpunkt, wenn diefs möglich ist; so ziehe man AH, HB, HC, imgleichen ED, FE nach den Mitten der Seiten AB, AC. Ferner ziehe man parallel mit AH die Linien EK, FL, und die Verbindungslinien KL, LD, KD, F. 14.

(γ) Denn wegen der Gleichheit dieser Linien ist, wenn n deren Anzahl bezeichnet:

$$\Delta ADC : \Delta ASM = AC^2 : AM^2$$
$$\Delta ADC : \Delta MVK = AC^2 : MK^2 = AC^2 : AM^2$$
$$\vdots$$
$$\overline{\Delta ADC : (\Delta ASM + \Delta MVK + \ldots) = AC^2 : n.\ AM^2}$$
$$\text{Es ist aber} \qquad AC = n.\ AM$$
$$\overline{\text{also } \Delta ADC : (\Delta ASM + \Delta MVK + \ldots) = AC : AM}$$

Auf demselben Wege ergiebt sich:

$$\Delta ADB : (\Delta ASL + \Delta LNG + \ldots) = AB : AL = AC : AM$$
$$\overline{\Delta ABC : (\Delta ASM + \Delta MVK + \ldots + \Delta ASL + \Delta LNG + \ldots) = AC : AM}$$

(δ) Die ähnlichen Dreiecke ergeben sich, wenn man UR verlängert, bis CB getroffen wird. Daraus hat man:

$$UR : RP = CD : DW = CA : AM.$$

Sollte etwa $UR \neq CD$ sein, so fände dasselbe Verhältnifs Statt, weil dann zugleich $UR = CD$, und $RP = DW$ sein müfste.

DH, MN. Dann ist $\triangle ABC \sim \triangle DFC$, weil $BA \parallel DF$. Da nun der Schwerpunkt des $\triangle ABC$ in H liegt, so ist L der Schwerpunkt des $\triangle DFC$ (S. 11.): denn diese beiden Punkte H, L, sind in beiden Dreiecken gleichliegend, indem sie offenbar gegen die Seiten ihrer Dreiecke unter gleichen Winkeln liegen. (ε) Aus denselben Gründen ist K der Schwerpunkt des $\triangle EBD$; mithin liegt der Schwerpunkt einer aus diesen beiden Dreiecken zusammengesetzten Gröſse in der Mitte der geraden Linie KL, indem $\triangle EBD = \triangle DFC$. Die Mitte von KL ist aber N; denn es ist:

$$BE : EA = BK : KH$$

$$\text{und } CF : FA = CL : LH$$

folglich ist $BC \parallel KL$. Es ward schon gezogen DH, also hat man:

$$BD : DC = KN : NL$$

und mithin liegt der Schwerpunkt einer aus den erwähnten Dreiecken zusammengesetzten Grösse wirklich in N.

Ferner ist M der Schwerpunkt des Parallelogramms AEDF (S. 10.); also liegt der Schwerpunkt einer aus diesen allen zusammengesetzten Gröſse in der geraden Linie MN. Da nun H als Schwerpunkt des $\triangle ABC$ angenommen, so muſs die Verlängerung der Linie MN durch den Punkt H gehen, welches unmöglich ist. (ζ) Keineswegs befindet sich daher der Schwerpunkt des $\triangle ABC$ auſserhalb der Linie AD, folglich liegt er in ihr.

Satz 14.

Eines jeden Dreiecks Schwerpunkt liegt in demjenigen Punkte, in welchem die aus den Winkelspitzen nach den Mitten der Seiten gezogenen Linien sich schneiden.

F. 15. In dem $\triangle ABC$ ziehe man AD gegen die Mitte von BC, und BE gegen die Mitte von AC. Nun liegt der Schwerpunkt des Dreiecks sowohl in AD als in BE, wie gezeigt worden (S. 13.); folglich ist F dieser Schwerpunkt.

Satz 15.

Der Schwerpunkt eines jeden Vierecks mit zwei parallelen Seiten (Trapezium) befindet sich in derjenigen geraden Linie, welche die Mitten der beiden parallelen Seiten verbindet; und zwar in einem Punkte, in welchem diese Linie so getheilt ist, daſs der Abschnitt, welcher sich in der Mitte der kleinern Parallele endiget, zu dem andern Abschnitte sich verhält, wie die zwiefache gröſsere mit der kleinern Parallele zu der zwiefachen kleinern mit der gröſsern.

F. 16. Es sei ABCD das Trapezium mit den Parallelen $AD \parallel BC$, und man verbinde die Mitten dieser Linien durch EF; so ist klar, daſs der Schwerpunkt des Trapeziums sich in der Linie EF befinde; denn verlängern wir CD, FE und BA, so treffen sich alle drei in einerlei Punkte G (*); also liegt der Schwerpunkt des $\triangle BGC$ in der Linie GF, und eben so der

(ε) Weil $AH \parallel FL$, so ist: $CL : CH = CF : CA = CD : CB$, also auch $DL \parallel BH$; und weil zugleich $DF \parallel BA$, so ist $\triangle HAB \sim \triangle LFD$, mithin die Punkte H, L, gleichliegend.

(ζ) Denn wie N die Mitte von KL, so ist M die Mitte von EF, also $MN \parallel FL \parallel AH$.

(S. 15. *) Daſs die Verlängerungen der drei Linien BA, CD, FE sich in einem einzigen Punkte treffen, läſst sich also zeigen:

Schwerpunkt des $\triangle AGD$ in der Linie GE; mithin ist auch des übrig bleibenden Trapeziums $ABCD$ Schwerpunkt in der Linie EF (S. 8.)

Man ziehe nun BD, und theile sie durch die Punkte K, H in drei gleiche Theile; durch die Theilungspunkte lege man parallel mit BC die Linien LHM, NKT, und ziehe DF, BE, OX. Dann befindet der Schwerpunkt des $\triangle DBC$ sich in der Linie HM, weil $BH = \frac{1}{3} BD$, und $HM \parallel BC$ durch den Punkt H gelegt worden. (β) Zugleich befindet sich der Schwerpunkt eben dieses Dreiecks BDC in der Linie DF, mithin ist der Punkt X des genannten Dreiecks Schwerpunkt. Durch dieselben Schlüsse findet sich, dafs O der Schwerpunkt des $\triangle ABD$ ist; also liegt der Schwerpunkt der aus beiden zusammengesetzten Gröfse, d. h. des Trapeziums, in der geraden Linie OX. Zugleich liegt der Schwerpunkt des genannten Trapeziums in der Linie EF, mithin ist der Schwerpunkt von $ABCD$ der Punkt P; also wird man haben:

$$\triangle BDC : \triangle ABD = OP : PX \text{ (S. 6 und 7.)}$$

$$\text{Zugleich ist } \triangle BDC : \triangle ABD = BC : AD$$

$$\text{Endlich ist } \underline{OP : PX = RP : PS} \ (\gamma)$$

$$\text{folglich } BC : AD = RP : PS; \text{ mithin auch}$$

$$(2BC + AD) : (2AD + BC) = (2RP + PS) : (2PS + RP) \ (\delta)$$

$$\text{Nun ist } 2RP + PS = RS + RP = PE$$

$$\text{und } \underline{2PS + RP = RS + PS = PF}$$

$$(2BC + AD) : (2AD + BC) = PE : PF$$

wodurch die Behauptung erwiesen ist.

Verlängert man BA und CD, so treffen sich die Verlängerungen gewifs irgendwo. Der Durchschnittspunkt sei G, man ziehe GF nach der Mitte von BC, wodurch AD willkührlich in E geschnitten werde; dann ist, weil $AD \parallel BC$,

$$BF : FC = AE : ED,$$

$$\text{Nun ist } BF = FC, \text{ also auch } AE = ED,$$

d. h. der Punkt E ist die Mitte von AD. Wird also umgekehrt durch die Mitten der Linien BC und AD eine gerade Linie gelegt, so trifft diese nach G.

(β) Es sollen in dem Dreieck ABC aus allen Winkelspitzen die geraden Linien AF, BE, CD nach den Mitten der gegenüberstehenden Seiten gezogen sein. In jeder dieser Linien befindet sich der Schwerpunkt des Dreiecks (S. 14.), also in ihrem Durchschnittspunkte G, welcher nur einer sein kann, weil sonst das Dreieck mehr als einen Schwerpunkt hätte. F. 16a.

$$\text{Weil nun } BF = FC, \text{ so ist } \triangle BAF = \triangle CAF$$

$$\text{und aus demselben Grunde } \underline{\triangle BGF = \triangle CGF}$$

$$\text{folglich } \triangle BGA = \triangle CGA$$

$$\text{Weil ferner } AD = BD, \text{ so ist } \underline{\triangle BGA = 2 \triangle DGA}$$

$$\text{also auch } \triangle CGA = 2 \triangle DGA$$

und aus der gleichen Höhe folgt $CG = 2DG$, oder $DG = \frac{1}{3} DC$. Wird also durch G eine Linie $IGH \parallel AB$ gelegt, so ergiebt sich $AH = \frac{1}{3} AC$.

Wird folglich umgekehrt irgend eine Seite AC so getheilt, dafs $AH = \frac{1}{3} AC$ ist, und wird durch H eine Linie $HI \parallel AB$ gelegt, so geht HI durch G, enthält also den Schwerpunkt des Dreiecks in sich.

Einen rein geometrischen Beweis der Behauptung, dafs die drei Linien AF, BC, CD sich in dem Punkte G durchschneiden, findet man in **Klügels Math. Wörterb. Art. Dreieck.** I, S. 925.

(γ) Weil $\triangle OPR \sim \triangle XSP$.

(δ) Es sei allgemein:

$$a : b = c : d$$

$$\text{so ist } (a + b) : (c + d) = a : c = b : d$$

$$\text{also auch } (2a + b) : (2c + d) = a : c$$

$$\text{und } \underline{(a + 2b) : (c + 2d) = b : d = a : c}$$

$$\text{folglich } (2a + b) : (2b + a) = (2c + d) : (2d + c)$$

Die Quadratur

der

Parabel.

Archimedes grüſst den Dositheus!

Nachdem ich erfahren hatte, daſs Konon gestorben, der mir noch von den Freunden übrig geblieben war, du aber genau bekannt mit ihm gewesen, und in der Geometrie wohl bewandert seist, so betrauerte ich zwar tief den Tod des Freundes und des bewundernswürdigen Mathematikers, nahm mir aber vor, dir, wie ich jenem gewohnt war, die Bearbeitung eines geometrischen Satzes zu übersenden, den bisher noch Niemand betrachtet hat, der aber nunmehr von mir untersucht worden ist; indem ich ihn aufgefunden habe durch die Anwendung von Sätzen der Mechanik, demnächst aber auch erwiesen durch geometrische Schlüsse.

Unter denen, die früher mit geometrischen Untersuchungen sich beschäftigt, haben einige darzulegen versucht, in wie fern es möglich sei, eine geradlinige Figur zu finden, die einem gegebenen Kreise, oder einem gegebenen Kreisabschnitte gleich kommt. Hiernächst haben sie den von einer Ellipse und einer geraden Linie umschlossenen Raum zu quadriren unternommen, doch mit Annahme nicht so leicht zugeblicher Lehrsätze, weſshalb ihnen sehr häufig die Verfehlung ihres Ziels vorgeworfen ist. Mir ist aber Niemand bekannt, der es versucht hätte, den von einer geraden Linie und einer Parabel umschlossenen Raum zu quadriren, was ich eben jetzt erfunden habe. Ich beweise nämlich, daſs jeder parabolische Abschnitt drei Viertheile eines Dreiecks betrage, welches einerlei Grundlinie und gleiche Höhe mit dem Abschnitt hat; und zwar vermittelst des folgenden Lehnsatzes:

Wenn zwei Flächenräume ungleich sind, so ist es möglich, den Unterschied, um welchen der kleinere von dem gröſsern übertroffen wird, so oft zu sich selbst zu setzen, daſs dadurch jeder gegebene endliche Flächenraum übertroffen wird. (α)

Auch die frühern Geometer haben sich dieses Lehnsatzes bedient: daſs nämlich Kreise im zwiefachen Verhältnisse ihrer Durchmesser zu einander stehen, haben sie durch Anwendung eben dieses Lehrsatzes nachgewiesen; auch daſs Kugeln im dreifachen Verhältnisse ihrer Durchmesser sich befinden; ferner daſs jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma auf derselben Grundfläche und von gleicher Höhe mit der Pyramide ist; imgleichen daſs jeder Kegel den dritten Theil eines Cylinders auf derselben Grundfläche und von gleicher Höhe mit

(Vorr. α) Dieser Satz, der bei den Alten beständig als Grundsatz angewendet wird, ist die Grundlage ihrer höhern Analysis (Vgl. Klügels Math. Wört. Art. Exhaustionsmethode. II. S. 152.)

dem Kegel ausmacht: alles dieses haben sie durch Annahme des aufgestellten Lehnsatzes erwiesen. Nun ist aber jeder der angeführten Lehrsätze keineswegs minder annehmbar befunden, als solche, die ohne Zuziehung jenes Lehnsatzes dargethan sind; und somit hat dasjenige, was ich jetzt darlege, dieselbe Annehmbarkeit für sich. Nachdem ich also die Beweise aufgesetzt, übersende ich sie dir; nämlich erst, wie sie durch Lehren der Mechanik gefunden worden, und dann, wie sie auch durch rein geometrische Schlüsse nachgewiesen sind. Vorangestellt sind Anfangsgründe der Kegelschnitte, die zum Beweise erfodert werden. Lebe wohl.

Satz 1.

Wenn ABC eine Parabel, die gerade Linie BD entweder ein Durchmesser oder die Axe selbst ist, und wenn die gerade Linie ADC mit einer durch B gelegten Berührungslinie parallel liegt, so ist $AD = DC$; wenn aber $AD = DC$ ist, so wird ADC parallel der durch B gehenden Berührungslinie sein. (α) F. 17.

Satz 2.

Wenn ABC eine Parabel, die gerade Linie BD deren Durchmesser, oder die Axe selbst, ADC parallel einer durch B gelegten Berührungslinie, und CE eine Berührungslinie für den Punkt C ist, so wird $DB = BE$ sein. (α) F. 18.

Satz 3.

Wenn ABC eine Parabel, die gerade Linie BD deren Durchmesser oder die Axe selbst ist, und wenn die geraden AD, EF parallel einer durch B gelegten Berührungslinie gezogen werden, so verhalten sich die Längen BD und BF, wie die Quadrate der geraden Linien AD und EF: F. 19.

Diese Sätze sind in den Anfangsgründen der Kegelschnitte erwiesen. (α)

Satz 4.

Es sei ABC ein parabolischer Abschnitt. Durch die Mitte der Linie AC sei DB gezogen, welche entweder ein Durchmesser oder die Axe selbst ist. Man ziehe BC und verlängere sie. Wird dann eine andere gerade Linie $FH \ddagger BD$ gezogen, welche AC und BC schneidet, so ist: F. 20.

$$FH : GH = DA : DF.$$

Man ziehe nämlich durch G die Linie $GK \ddagger AC$, so ist:

$$BD : BK = DC^2 : KG^2 \text{ (S. 3.)}$$

$$\text{also auch } BC : BI = DC^2 : DF^2, \text{ weil } DF = KG$$

$$\text{und } BC : BI = BC^2 : BH^2$$

$$\text{also ist } BC : BH = BH : BI$$

$$\text{folglich } BC : BH = CH : HI$$

(S. 1. α) Apollonius Kegelsch. I. S. 46 und II. S. 5.

(S. 2. α) Apollonius Kegelsch. I. S. 35.

(S. 3. α) Apollonius Kegelsch. I. S. 20.

Es ist also auch $CD : DF = FH : GH$ (α), oder weil $CD = DA$,
so folgt nunmehr $DA : DF = FH : GH$.

Satz 5.

F. 21. Es sei ABC ein parabolischer Abschnitt. Man ziehe durch A die gerade Linie AF parallel der Axe und lege an den Punkt C die Berührungslinie CF (α) für diesen Punkt. Zieht man demnächst in dem Δ AFC eine Parallele zu AF, so wird diese neu gezogene Linie durch die Parabel nach demselben Verhältnisse geschnitten, wie AC durch die neue Linie; und zwar entspricht der an A liegende Abschnitt der Linie AC dem gegen A liegenden Abschnitte der neuen Linie.

Man ziehe nämlich DE ‡ AF, so daſs zuvörderst AC dadurch in zwei gleiche Abschnitte getheilt wird; dann wird eine durch B gelegte Berührungslinie der Parabel parallel mit AC sein, weil ABC eine Parabel, BD ein Durchmesser und $AD = DC$ ist (S. 1.). Ferner ist $EB = BD$ (S. 2.) folglich:

$$AD : DC = DB : BE$$

der Beweis ist also für den Fall geführt, da AC durch die neue Linie gehalbtheilt wird.

Wenn dieſs aber nicht Statt findet, so ziehe man irgend eine andere Linie KL ‡ AF. Dann wird zu erweisen sein, daſs nunmehr sich verhalte:

$$AK : KC = KH : HL.$$

Weil nun $BE = BD$, so ist auch $IL = IK$; also:

$$KL : KI = AC : AD$$

Es ist aber nach dem im vorigen Satze Erwiesenen:

$$\begin{array}{rl} & KI : KH = AD : AK \ (\beta) \\ \hline \text{folglich} & KL : KH = AC : AK \\ \text{also auch} & KH : HL = AK : KC \ (\gamma) \end{array}$$

mithin ist das Behauptetete dargethan.

(S. 4. α) Denn es ist

$$\begin{array}{ll} & DC : DF = BC : BH \\ \text{folglich} & BC : BI = DC^2 : DF^2 = BC^2 : BH^2 \\ \text{d. h.} & 1 : BI = BC : BH^2 \\ \text{oder} & BC : BH = BH : BI \\ & (BC \pm BH) : (BH \pm BI) = BC : BH \\ \text{d. h.} & CH : HI = BC : BH \\ \text{ferner ist} & DC : DF = BC : BH \\ \hline \text{folglich} & DC : DF = CH : HI = HF : HG. \end{array}$$

(S. 5. α) Die Linien AF und CF müssen sich treffen, weil sonst CF zu der Reihe der Durchmesser der Parabel gehören würde.

(β) In S. 4 ward erwiesen, daſs $KI : IH = AD : DK$

$$\begin{array}{ll} \text{folglich} & (KI \pm IH) : KI = (AD \pm DK) : AD \\ \text{d. h.} & KH : KI = AK : AD \end{array}$$

(γ) Aus der Proportion: $KL : KH = AC : AK$

$$\begin{array}{ll} \text{folgt} & (KL - KH) : KH = (AC - AK) : AK \\ \text{d. h.} & HL : KH = KC : AK \end{array}$$

Satz 6.

Man denke sich nun die Gegenstände unserer Betrachtung vor den Augen in einer auf den Horizont senkrechten, durch die Linie AB gelegten Ebene, und dasjenige nach unten, was auf der Seite von D, dasjenige aber nach oben, was auf der andern Seite sich befindet. Es sei aber ΔDBC ein in B rechtwinkliges Dreieck, und die Seite BC gleich der Hälfte einer Wagestange, nämlich $AB = BC$. Das ΔDBC sei in den beiden Punkten B, C aufgehängt, ein anderer Flächenraum F aber sei in dem andern Endpunkte der Wagestange, in A, aufgehängt; auch halte die in A aufgehängte Figur F dem ΔDBC in seiner jetzigen Lage das Gleichgewicht; so behaupte ich, dafs der Flächenraum F dem dritten Theile des ΔDBC gleich sei. F. 22.

Weil nämlich Gleichgewicht der Wagestange vorausgesetzt wird, so liegt die Linie AC horizontal, und alle in der auf dem Horizont senkrechten Ebene unter rechten Winkeln gegen AC gezogenen Linien werden auf dem Horizont selbst senkrecht sein. Man schneide nun BC in dem Punkte E so, dafs $EC = 2BE$, ziehe $KE \ddagger DB$ und theile KE in Hälften durch den Punkt H, dann ist H der Schwerpunkt des ΔDBC, wie in den mechanischen Untersuchungen erwiesen worden. (α) Wenn demnach das in B, C aufgehängte ΔDBC von diesen Aufhängungspunkten gelöset und in E aufgehängt wird, so bleibt dasselbe in seiner gegenwärtigen Lage. Denn jedes hangende Ding verharrt in einer solchen Lage gegen den Punkt, von welchem es in Ruhe herabhängt, dafs dieser und der Schwerpunkt des schwebenden Dinges in einer senkrechten Linie sich befinden. Auch diefs ist also gezeigt.

Weil demnach das ΔDBC dieselbe Lage gegen die Wagestange beibehalten wird, so wird der Flächenraum F ihm unverändert das Gleichgewicht halten; und weil die in A aufgehängte Figur F mit dem in E aufgehängten ΔDBC im Gleichgewichte sich befindet, so erhellt, dafs beide ihren Entfernungen umgekehrt proportionirt sind (*Gleichgew. I. S. 6. 7.*), d. h.

$$AB : BE = \Delta DBC : F$$

Es ist aber $AB = 3BE$

folglich auch $\Delta DBC = 3F$

Auch ist einleuchtend, wenn umgekehrt $\Delta DBC = 3F$, dafs dann beide Figuren gleichfalls im Gleichgewichte sein werden.

Satz 7.

Wiederum sei die Linie AC eine Wagestange, B deren Mitte, und es werde das ΔCDG mit Beziehung auf B (α) angehängt. Es sei nämlich ΔCDG stumpfwinklig und habe die Grundlinie DG, die Höhe BC, welche der halben Wagestange gleich ist. Nun werde ΔCDG an die Punkte B, C gehängt, und eine aus A schwebende Figur F sei mit dem in seiner jetzigen Lage befindlichen ΔCDG gleichgewichtig, so wird sich gleicherweise zeigen lassen, dafs die Figur F dem dritten Theile des ΔCDG gleich ist. F. 23.

Man hänge nämlich noch eine andere Figur L an A, welche den dritten Theil des

(S. 6. α) Gleichgew. I. S. 15, β.

(S. 7. α) D. h. der Punkt B soll der Unterstützungspunkt des doppelarmigen Hebels AC sein. Eben diese Bemerkung gilt für die sämmtlichen folgenden Sätze bis S. 15.

ΔBCG beträgt; dann wird ΔBDC mit FL im Gleichgewichte sein. Weil nun ΔBCG mit L im Gleichgewichte sich befindet, und ΔBCD mit FL, und weil $\Delta BCD = 3FL$ (S. 6.), so erhellt, dafs $\Delta CDG = 3F$ sein müsse.

Satz 8.

F. 24. Es sei AC eine Wagestange, B deren Mitte. Mit Beziehung auf B werde das in E rechtwinklige ΔCDE angehängt, und zwar an die Punkte C, E der Wagestange. Die Figur F aber werde an A gehängt, so dafs sie dem ΔCDE in seiner gegenwärtigen Lage das Gleichgewicht halte. Ferner verhalte sich $AB : BE = \Delta CDE : K$; dann behaupte ich, dafs die Figur F kleiner sei als ΔCDE, gröfser aber als K.

Man suche den Schwerpunkt des ΔDEC, er sei H, und ziehe $HG \nparallel DE$. Weil nun ΔCDE der Figur F das Gleichgewicht hält, so ist:

$\Delta CDE : F = AB : BG$ (*Gleichgew. I. S. 6. 7.*)

folglich ist $F < \Delta CDE$

Weil aber $\Delta CDE : F = AB : BG$

und $\Delta CDE : K = AB : BE$

so ist offenbar $\Delta CDE : K > \Delta CDE : F$ (*)

also $F > K$.

Satz 9.

F. 25. Es sei wieder AC eine Wagestange und B deren Mitte. Das stumpfwinklige ΔCDK aber habe zur Grundlinie DK, zur Höhe EC, und sei an die Punkte C, E der Wagestange gehängt. Der Flächenraum F hange an A, und halte dem ΔCDK in dessen jetziger Lage das Gleichgewicht. Ferner verhalte sich $AB : BE = \Delta CDK : L$; so behaupte ich, dafs $F > L$, aber $F < \Delta CDK$.

Der Beweis ist dem des vorigen Satzes ähnlich.

Satz 10.

F. 26. Wiederum sei ABC eine Wagestange und B die Mitte derselben. Das Trapezium $BDKG$ habe bei B, G rechte Winkel, und seine Seite KD sei gegen den Punkt C gerichtet, auch verhalte sich $AB : BG = BDKG : L$. Das Trapezium $BDKG$ hange an den Punkten B, G der Wagestange, die Figur F aber an dem Punkte A, und sei mit dem Trapezium bei dessen jetziger Lage im Gleichgewichte. Ich behaupte, es sei $F < L$.

Es werde nämlich AC in dem Punkte E so geschnitten, dafs sich verhält:

$$(2DB + KG) : (2KG + DB) = EG : BE$$

dann werde durch E eine Linie $EN \nparallel BD$ gezogen, und in dem Punkte H gehalbtheilt, so ist H der Schwerpunkt des Trapeziums $BDKG$, wie in den mechanischen Untersuchungen erwiesen worden (*Gleichgew. I. S. 15.*). Wenn demnach das Trapezium $BDKG$ an E aufgehängt, von den

---

(S. 8. *) Denn weil $BE < BG$,
so ist $AB : BE > AB : BG$,
mithin auch $\Delta CDE : K > \Delta CDE : F$.

den Punkten B, G aber gelöset wird, so verharrt es, aus denselben Gründen, wie zuvor (S. 6.), im Zustande der Ruhe und bleibt im Gleichgewichte mit der Figur F. Weil also das in E aufgehängte Trapezium BDKG der in A aufgehängten Figur F gleichgewichtig ist, so wird sich verhalten:

$BA : BE = BDKG : F$ (*Gleichgew. I. S. 6. 7.*)

Weil nun auch $BA : BE > BA : BG$

so ist $BDKG : F > BDKG : L$

mithin $F < L$

Satz 11.

Es soll wieder AC eine Wagestange, B deren Mitte sein. Des Trapeziums DKTR F. 27.
Seiten DK, RT sollen gegen C gerichtet sein, die Seiten RD, TK aber senkrecht gegen BC, auch treffe RD nach B. Dann sei:

$$AB : BH = DKTR : L$$

das Trapezium DKTR soll von den Punkten B, G der Wagestange, die Figur F aber von dem Punkte A herabhangen, und die Figur F soll dem Trapezium DKTR bei dessen jetziger Lage das Gleichgewicht halten; dann kann auf ähnliche Weise, wie zuvor, gezeigt werden, dafs $F < L$ sei.

Satz 12.

Wiederum soll AC eine Wagestange und B deren Mitte sein. Das Trapezium DEGK F. 28.
soll an den Punkten E, G rechte Winkel haben, seine Seiten DK, EG, aber gegen C gerichtet sein; auch verhalte sich:

$$AB : BG = DEGK : M$$
$$AB : BE = DEGK : L$$

das Trapezium DEGK soll von den Punkten E, G der Wagestange, der Flächenraum F aber von A herabhangen, auch letzterer dem ersteren in dessen jetziger Lage das Gleichgewicht halten; dann behaupte ich, dafs $F > L$ und $F < M$ sei.

Ich habe nämlich den Schwerpunkt des Trapeziums DEGK gesucht; er soll H sein, und wird wie zuvor gefunden (S. 10.), und ziehe HI ‡ DE. Wird nun DEGK an I aufgehängt, von E, G aber gelöset, so verharret es in demselben Zustande der Ruhe und hält F das Gleichgewicht nach dem obigen (S. 6.). Weil also das in I aufgehängte Trapezium mit der in A aufgehängten Figur F im Gleichgewichte sich befindet, so wird sich verhalten:

$DEGK : F = AB : BI$ (*Gleichgew. I. S. 6. 7.*)

folglich $DEGK : L > DEGK : F$

und $DEGK : M < DEGK : F$

Mithin ist $F > L$ und $F < M$.

Satz 13.

Wiederum sei AC eine Wagestange, B deren Mitte; KDTR aber ein Trapezium, F. 29
dessen Seiten DK, TR gegen C gerichtet, dessen Seiten TD, RK aber senkrecht gegen BC sind. Dasselbe sei an den Punkten E, G der Wagestange aufgehängt; die Figur F dagegen

hange an A und sei dem Trapezium KDTR in dessen gegenwärtiger Lage gleichgewichtig. Auch verhalte sich:

$$AB : BE = DKRT : L$$
$$AB : BG = DKRT : M$$

dann wird sich, wie vorhin, zeigen lassen, dafs $F > L$ und $F < M$.

Satz 14.

F. 30. Es sei BHC ein parabolischer Abschnitt. Nun sei zuvörderst BC rechtwinklig gegen die Axe und man ziehe aus dem Punkte B die Linie BD parallel der Axe, an C aber die Berührungslinie CD der Parabel für diesen Punkt, so wird ΔBCD ein rechtwinkliges Dreieck sein. Dann theile man BC in eine willkührliche Menge von gleichen Theilen BE, EF, FG, GI, IC, aus den Theilungspunkten ziehe man parallel der Axe die Linien ES, FT, GY, IX und durch die Durchschnittspunkte dieser Linien mit der Parabel lege man Verbindungslinien nach C und verlängere sie. Ich behaupte nun, dafs ΔBDC kleiner sei, als die dreifache Summe der Trapezien KE, LF, MG, PI und des Dreiecks XIC; gröfser aber, als die dreifache Summe der Trapezien FU, GH, IP und des Dreiecks IOC.

Die gerade Linie werde nämlich verlängert und $BA = BC$ darauf abgetragen; man betrachte dann AC wie eine Wagestange, deren Mitte B sein wird, und welche in B aufgehängt sei. Das ΔBDC sei an die Punkte B, C der Wagestange gehängt, von deren anderem Ende A die Flächenräume Q, R, V, W, Z herabhangen mögen. Nun sei Q im Gleichgewichte mit dem Trapezium DE in dessen jetziger Lage, R mit dem Trapezium SF, ferner V mit TG, dann W mit YI und Z mit ΔXIC. Folglich wird auch das Ganze dem Ganzen gleichgewichtig sein, d. h. $\Delta BDC = 3\,(Q + R + V + W + Z)$ (S. 6.).

Weil nun BCH ein parabolischer Abschnitt ist, weil ferner BD der Axe parallel, an C aber die Berührungslinie dieses Punktes der Parabel CD, und noch eine andere Linie SE der Axe parallel gezogen worden, so ist:

$$BC : BE = SE : EU \text{ (S. 5.)}$$
$$\text{also auch} \quad BA : BE = DE : KE \ (\alpha)$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich noch:

$$BA : BF = SF : LF$$
$$BA : BG = TG : MG$$
$$BA : BI = YI : NI$$

Weil nun das Trapezium DE bei B, E rechte Winkel und zwei gegen C gerichtete Seiten hat; weil ferner die in A aufgehängte Figur Q mit dem Trapezium DE in seiner jetzi-

---

(S. 14. α) Es ist nämlich

$$DE = \Delta BDC - \Delta ESC$$
$$KE = \Delta BKC - \Delta EUC$$

Nun ist

$$\Delta BDC : \Delta BKC = BD : BK$$
$$\Delta ESC : \Delta EUC = ES : EU = BD : BK$$

$$\Delta BDC : \Delta BKC = \Delta ESC : \Delta EUC$$
$$(\Delta BDC - \Delta ESC) : (\Delta BKC - \Delta EUC) = \Delta ESC : \Delta EUC$$
$$\text{d. h.} \quad DE : KE = ES : EU = BA : BE$$

gen Lage gleichgewichtig ist, und weil $BA : BE = DE : KE$, so ist $KE > Q$, wie erwiesen worden (S. 10.).

Demnächst hat das Trapezium SF bei E, F rechte Winkel, die Seite ST gegen C gerichtet, und die an A hangende Figur R hält ihm in seiner jetzigen Lage das Gleichgewicht; auch ist:

$$BA : BE = FS : FU \ (\beta)$$
$$BA : BF = FS : LF$$

folglich ist $R < LF$ und $R > FU$, wie ebenfalls erwiesen worden (S. 12.). Aus denselben Gründen ist mithin $V < MG$ und $V > HG$, ferner $W < NI$ und $W > PI$, endlich $Z < \Delta XIC$ und $Z > \Delta CIO$ (S. 8.). Man hat mithin:

$$\begin{array}{c} KE > Q \\ LF > R \\ MG > V \\ NI > W \\ \Delta XIC > Z \\ \hline KE + LF + MG + NI + \Delta XIC > Q + R + V + W + Z \end{array}$$

Aber es ist: $Q + R + V + W + Z = \frac{4}{3} \Delta BCD$ (S. 6.)

folglich $\Delta BCD < 3\,(KE + LF + MG + NI + \Delta XIC)$

Ferner ist:

$$\begin{array}{c} FU < R \\ HG < V \\ PI < W \\ \Delta CIO < Z \\ \hline FU + HG + PI + \Delta CIO < R + V + W + Z \end{array}$$

und so erhellet denn, daſs:

$$\Delta BCD > 3\,(FU + HG + PI + \Delta CIO) \ (\gamma)$$

Satz 15.

Wiederum sei BHC ein parabolischer Abschnitt; BC aber sei nicht rechtwinklig gegen die Axe: dann muſs nothwendig entweder die aus dem Punkte B, oder die aus C parallel der Axe nach der Seite des Abschnitts hingezogene Linie, einen stumpfen Winkel mit BC machen; darum bilde die durch B gelegte Linie den stumpfen Winkel, und man ziehe aus B die Linie BD der Axe parallel, an C aber die Berührungslinie CD für diesen Punkt der Parabel. Ferner theile man BC in eine willkührliche Menge gleicher Theile BE, EF, FG, GI, IC, lege durch E, F, G, I die Linien ES, FT, GY, IX parallel der Axe, ziehe dann durch die Durchschnittspunkte dieser Linien mit der Parabel Verbindungslinien nach C und verlängere sie; so behaupte ich auch jetzt, daſs ΔBDC kleiner sei, als die dreifache Summe der Trapezien BU, LF, F. 31.

(β) Denn oben verhielt sich $BA : BE = SE : EU$
zugleich ist $SE : EU = SF : UF$
folglich $BA : BE = SF : UF$

(γ) Weil nämlich $Q + R + V + W + Z = \frac{4}{3} \Delta BDC$
so ist $R + V + W + Z < \frac{4}{3} \Delta BDC$
folglich um so mehr $3\,(FU + HG + PI + \Delta CIO) < \Delta BDC$

MG, NI und des Dreiecks CIX; gröſser aber, als die dreifache Summe der Trapezien FU, HG, PI und des Dreiecks COI.

Es sei DB nach der andern Seite verlängert. Nachdem ich nun CK rechtwinklig daran gezogen, habe ich $AK = KC$ genommen. Dann denke man sich AC wieder als eine Wagestange, deren Mitte K ist, und hänge sie in K auf. Das ΔCKD werde ferner, von der Mitte der Wagestange an, in den Punkten C, K aufgehängt; und wenn es in dieser Lage sich befindet, so sollen von dem andern Ende A der Wagestange die Flächenräume Q, R, V, W, Z herabhangen; auch sei Q mit dem Trapezium DE in dessen gegenwärtiger Lage im Gleichgewichte, R aber mit dem Trapezium SF, ferner V mit TG, ferner W mit YI und Z mit ΔCIX. Dann wird auch das Ganze dem Ganzen gleichgewichtig sein; also $\Delta DBC = 3(Q + R + V + W + Z)$ (S. 7.). Man wird hiernach wie zuvor erweisen können, daſs $BU > Q$; ferner $HE > R$, aber $FU < R$; dann $MG > V$, aber $HG < V$; weiter $NI > W$, aber $PI < W$; und $\Delta CIX > Z$, aber $\Delta CIO < Z$; woraus das Behauptete erhellet.

Satz 16.

F. 32. Es sei wieder BHC ein parabolischer Abschnitt. Man ziehe durch B der Axe parallel die Linie BD, an C aber die Berührungslinie CD dieses Punkts der Parabel. Der Flächenraum F betrage den dritten Theil des ΔBDC; so behaupte ich, der Abschnitt BHC sei der Figur F gleich. Wenn er ihm nämlich nicht gleich ist, so ist er entweder gröſser oder kleiner.

1) Er sei demnach gröſser, wenn dieſs möglich ist. Der Ueberschuſs des Abschnitts BHC über die Figur F, gewisse Mal zu sich selbst gethan, giebt mehr als ΔBCD. Nun ist es aber möglich, einen noch kleinern Flächenraum, als jenen Ueberschuſs, anzunehmen, welcher ein gewissemaliger Theil von ΔDBC ist. So sei denn ΔBCE kleiner, als der erwähnte Ueberschuſs, und sei ein gewissemaliger Theil des ΔBDC; dann wird BE ein eben so vielmaliger Theil von BD sein. Man theile also BD durch die Punkte K, I, G in solche Theile, ziehe von diesen Punkten gerade Verbindungslinien nach C und lege durch die Durchschnittspunkte dieser Linien mit der Parabel die geraden Linien MU, NR, XH, PO parallel der Axe, folglich parallel BD.

Weil nun ΔBCE weniger beträgt, als den Ueberschuſs des Abschnitts BHC über die Figur F, so erhellet, daſs $F + \Delta BCE <$ *Absch.* BHC. Indessen beträgt das ΔBCE so viel, als die Trapezien zusammen, durch welche die Parabel geht, samt dem ΔCOS, d. h.

$$\Delta BCE = ME + LU + YZ + VT + \Delta COS;$$

denn das Trapezium ME ist beiden gemein, ferner ist

$$ML = LU,\ LX = YZ,\ XQ = VT \text{ und } \Delta CQP = \Delta COS;\ (\alpha)$$

folglich ist: $$F < ML + XR + PH + \Delta CPO\ (\beta).$$

(S. 16. α) Denn es ist $MW = WU$, $NL = LR = RZ$ u. s. w. Zieht man also die Diagonalen WN, WR u. s. w. so ist:

$$\Delta MWN = \Delta WUR$$
$$\Delta LNW = \Delta WRL$$
$$\Delta MWN + \Delta LNW = \Delta WUR + \Delta WRL$$

d. h. $ML = LU$ u. s. w.

(β) Denn es ist $F <$ *Absch.* $BHC - \Delta BCE$,
also $F <$ *Absch.* $BHC - (ME + LU + YZ + VT + \Delta COS)$

Ferner ist $\Delta BDC = 3F$, mithin müfste sein:

$$\Delta BDC < 3(ML + XR + PH + \Delta CPO),$$

welches unmöglich ist, da gezeigt worden, das Dreieck sei gröfser, als jene dreifache Summe (S. 14.). Folglich ist der Abschnitt BHC nicht gröfser als F.

Ich behaupte nun, dafs der Abschnitt BHC auch nicht kleiner sei, als F.

2) Gesetzt nämlich, er sei kleiner, wenn diefs möglich ist. Wiederum giebt der Ueberschufs der Figur F über den Abschnitt BHC, gewissemal zu sich selbst gethan, mehr als ΔBDC. Es ist aber möglich, einen noch kleineren Flächenraum, als diesen Ueberschufs, anzunehmen, welcher ein gewissemaliger Theil von ΔBDC ist. Darum sei ΔBCE ein gewissemaliger Theil von ΔBDC, und kleiner als der Ueberschufs; auch werde alles Übrige wie zuvor eingerichtet.

Weil nun ΔBCE weniger beträgt, als jenen Ueberschufs, so ist

$$\Delta BEC + \textit{Absch.}\ BHC < F;$$

es ist aber $F < EM + UN + ZX + TP + \Delta CPS$;

denn es ist $\Delta BDC = 3F$; nach dem vorherigen Beweise (S. 15.) ist aber:

$$\Delta BDC < 3(EM + UN + ZX + TP + \Delta CPS),$$

folglich $\Delta BEC + \textit{Absch.}\ BHC < EM + UN + ZX + TP + \Delta CPS.$

Nimt man von beiden den gemeinschaftlichen Abschnitt weg, so müfste demnach folgen, dafs ΔBEC kleiner sei, als die übrigbleibenden Flächenräume zusammen, welches unmöglich ist; denn es ward gezeigt, dafs

$$\Delta BEC = EM + UL + ZY + TV + \Delta COS,$$

welche Summe mehr beträgt, als jene übrigbleibenden Flächenräume. Mithin ist der Abschnitt BHC nicht kleiner, als F.

Dafs er auch nicht gröfser sei, ward schon gezeigt, folglich ist er gleich F.

Satz 17.

Nachdem dieses erwiesen, so ist nun einleuchtend, dafs jeder parabolische Abschnitt vier Drittheile eines Dreiecks auf derselben Grundlinie und von gleicher Höhe beträgt.

Es sei nämlich BHC der gedachte Abschnitt, sein Scheitel aber der Punkt H. Das ΔBHC sei darin beschrieben, so dafs es mit dem Abschnitte einerlei Grundlinie und gleiche Höhe habe. Weil nun eben H der Scheitel des Abschnitts ist, so halbtheilt eine durch H mit der Axe parallel geführte gerade Linie die Linie BC, indem BC parallel ist mit einer durch H gelegten Berührungslinie (S. 1.). Es sei demnach EH der Axe parallel, und gleichfalls BD der Axe parallel gezogen; von C aus aber die Berührungslinie CD der Parabel für diesen Punkt. Da nun KH der Axe parallel, CD aber die Berührungslinie des Punkts C ist, auch EC einer durch H gehenden Berührungslinie parallel liegt; so ist $\Delta BDC = 4\Delta BHC$; (α) defs- F. 33.

Zugleich ist $\textit{Absch.}\ BHC < ME + LU + YZ + VT + \Delta COS + ML + XR + PH + \Delta PCO$

also $\textit{Absch.}\ BHC - (ME + LU + YZ + VT + \Delta COS) < ML + XR + PH + \Delta PCO$

und um so mehr $F < ML + XR + PH + \Delta PCO.$

(S. 17. α) Da die Dreiecke BDC, BHC einerlei Grundlinie haben, so verhalten sie sich, wie ihre Höhen, welche entweder die Linien BD, EH selbst sind, oder doch wie diese sich verhalten, also hat man:

wegen, und weil $\Delta BDC = 3$ *Absch.* BHC, so folgt nunmehr, dafs der *Abschnitt* $BHC = \frac{4}{3}\Delta BHC$ sei.

Anmerkung. Grundlinie eines Abschnitts nenne ich diejenige gerade Linie, welche mit einer krummen den Abschnitt umschliefst; Höhe aber die gröfste senkrechte, welche von der krummen Linie gegen die Grundlinie geführt ist; Scheitel endlich den Punkt, von welchem die gröfste senkrechte geführt worden.

Satz 18.

Wenn in einem parabolischen Abschnitte aus der Mitte der Grundlinie eine gerade Linie parallel der Axe gezogen wird, so ist der Scheitel des Abschnitts derjenige Punkt, wo diese Parallele die Parabel trifft.

F. 34. Es sei nämlich ABC der gedachte Abschnitt, und aus der Mitte der Linie AC ziehe man DB der Axe parallel; dann ist AC parallel einer durch B gelegten Berührungslinie für diesen Punkt (S. 1.). Es ist also ersichtlich, dafs unter allen Perpendikeln zwischen diesen beiden Parallelen dasjenige am gröfsten sein wird, welches von dem Punkte B ausgeht; mithin ist B der Scheitel (S. 17. Anm.)

Satz 19.

Wenn in einem parabolischen Abschnitte zwei gerade Linien der Axe parallel gezogen worden, die eine aus der Mitte der Grundlinie, die andere aus der Mitte der halben Grundlinie, so beträgt die Länge der ersteren vier Drittheile der letztern.

F. 35. Es sei ABC der erwähnte Abschnitt; parallel der Axe sei aus der Mitte der Linie AC die Linie DB, aus der Mitte von AD aber die Linie EF, und endlich sei $FH \ddagger AC$ gezogen. Dann verhält sich $BD : BH = AD^2 : FH^2$ (S. 3); also ist $BD = 4BH$, woraus erhellet, dafs $BD = \frac{4}{3} EF$ ist.

Satz 20.

Wenn in einen parabolischen Abschnitt ein Dreieck eingeschrieben wird, das einerlei Grundlinie und einerlei Höhe mit dem Abschnitte hat, so ist das Dreieck gröfser, als die Hälfte des Abschnitts.

F. 36. Es sei ABC der gedachte Abschnitt, und hineingeschrieben sei ΔABC, welches einerlei Grundlinie mit dem Ganzen und gleiche Höhe hat. Dann ist nothwendig B der Scheitelpunkt des Abschnitts (S. 18.). Mithin ist AC parallel einer an B gelegten Berührungslinie dieses Punktes. Man ziehe demnach durch B die Linie $DE \ddagger AC$, und aus A, C die Linien AD, CE parallel der Axe; sie werden aufserhalb des Abschnitts fallen. Weil nun $\Delta ABC = \frac{1}{2} ADEC$, so erhellt, dafs das Dreieck gröfser ist, als des Abschnittes Hälfte.

Folgerung. Nachdem dieses erwiesen, leuchtet ein, dafs es möglich sei, in diesen Abschnitt ein Vieleck dergestalt einzuschreiben, dafs die Summe der übrigbleibenden Abschnitte kleiner ist, als jeder angebbare Flächenraum. Indem wir nämlich jedesmal mehr als

---

$$\Delta BDC : \Delta BHC = BD : EH$$

Nun ist (nach S. 2.) $EK = 2\,EH$, also $BD = 2\,EK = 4\,EH$

folglich $\Delta BDC : \Delta BHC = 4 : 1$

die Hälfte wegnehmen, so werden wir offenbar durch die fortwährende Verkleinerung der übrigbleibenden Abschnitte deren Summe kleiner machen, als jeden gegebenen Flächenraum.

Satz 21.

Wenn in einen parabolischen Abschnitt ein Dreieck von derselben Grundlinie und derselben Höhe des Abschnitts eingeschrieben wird, und wenn in die übrigbleibenden Abschnitte ebenfalls Dreiecke von einerlei Grundlinie und Höhe mit diesen eingeschrieben werden, so wird jedes der beiden in den übrigbleibenden Abschnitten beschriebenen Dreiecke dem achten Theile des in den ganzen Abschnitt eingeschriebenen Dreiecks gleich sein.

Es sei ABC der erwähnte Abschnitt. Man theile AC in Hälften durch D und ziehe F. 37.
den Durchmesser DB, so ist der Punkt B der Scheitel des Abschnitts (S. 18.), und das ΔABC hat einerlei Grundlinie und Höhe mit dem Abschnitte. Ferner theile man AD in Hälften durch E, und ziehe den Durchmesser EF, wodurch AB in H geschnitten werde, dann ist also F der Scheitel des Abschnittes AFB (α) und das ΔAFB hat einerlei Grundlinie und Höhe mit diesem Abschnitte. Es muſs gezeigt werden, daſs $\Delta ABC = 8 \Delta AFB$ sei.

Es ist nämlich $BD = \frac{4}{3} EF$ (S. 19.)
und $BD = 2 EH$.

also $EH = 2 HF$ (β)
mithin $\Delta AEB = 2 \Delta FBA$; denn $\Delta AEH = 2 \Delta AHF$,
und $\Delta HBE = 2 \Delta FHB$: folglich ist $\Delta ABC = 8 \Delta AFB$.

Auf gleiche Weise wird sich zeigen lassen, daſs auch $\Delta ABC = 8 \Delta BGC$ ist.

Satz 22.

Wenn man einen parabolischen Abschnitt und eine willkührliche Menge solcher Flächenräume annimmt, deren jeder mit dem nach der Reihe folgenden in dem Verhältnisse 4 : 1 steht; und wenn der gröſste dieser Flächenräume dem Dreiecke gleich ist, welches einerlei Grundlinie und Höhe mit dem Abschnitte hat; so ist die Summe aller dieser Flächenräume kleiner, als der Abschnitt.

Es sei ADBEC der gedachte Abschnitt; die willkührliche Menge der Flächenräume sei F. 38.
nach der Reihe F, G, H, I. Es sei aber der vorangehende immer viermal gröſser, als der folgende, und F der gröſste, auch sei F dem Dreiecke gleich, das mit dem Abschnitte dieselbe Grundlinie und gleiche Höhe hat. Ich behaupte, daſs der Abschnitt gröſser sei, als die Summe der Flächenräume F, G, H, I.

Der Scheitel des ganzen Abschnitts sei B, der übrigbleibenden Abschnitte aber D, E. Weil nun $\Delta ABD = 8 \Delta ABC = 8 \Delta BEC$, so ist $\Delta ABC = 4 (\Delta ABD + \Delta BEC)$; weil ferner $\Delta ABC = F$, so ist ebenfalls $\Delta ABD + \Delta BEC = G$. Auf gleiche Weise läſst sich zeigen, daſs die in die jetzt übrigbleibenden Abschnitte eingeschriebenen Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe mit ihren Abschnitten zusammen gleich H, und daſs die in die nunmehr wieder übrigbleibenden Abschnitte eingeschriebenen Dreiecke zusammen gleich I sind.

(S. 21. α) Denn weil EH ‡ DB, und $AE = ED$, so ist auch $AH = HB$.

(β) Es ist $EH = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} EF = \frac{2}{3} EF = \frac{2}{3} EH + \frac{2}{3} HF$; mithin $\frac{1}{3} EH = \frac{2}{3} HF$, oder $EH = 2 HF$.

Die Summe aller gegebenen Flächenräume wird mithin einem in den Abschnitt eingeschriebenen Vielecke gleich, und folglich kleiner sein, als der Abschnitt selbst.

Satz 23.

Wenn eine willkührliche Menge von Gröſsen nach dem Verhältnisse $4:1$ in eine geometrische Progression gebracht wird, so beträgt die Summe aller, samt dem dritten Theile der kleinsten, vier Drittheile der gröſsten.

F. 39. Es sei A, B, C, D, E, eine willkührliche Menge von Gröſsen, deren jede nach dieser Reihenfolge das Vierfache der folgenden ist, und die gröſste sei A. Ferner sei $F=\frac{1}{3}B$, $G=\frac{1}{3}C$, $H=\frac{1}{3}D$ und $I=\frac{1}{3}E$.

Weil nun $F=\frac{1}{3}B\ [=\frac{1}{12}A]$

und $B=\frac{1}{4}A$

so ist $B+F=\frac{1}{3}A$

Eben so findet sich $C+G=\frac{1}{3}B$, ferner $D+H+\frac{1}{3}C$, und $E+I=\frac{1}{3}D$, und man erhält:

$$B+C+D+E+F+G+H+I=\frac{1}{3}(A+B+C+D)$$

Es ist aber $$F+G+H=\frac{1}{3}(B+C+D)$$

folglich $$B+C+D+E+I=\frac{1}{3}A$$

$$A+B+C+D+E+I=\frac{1}{3}A+A$$

oder $$A+B+C+D+E+\frac{1}{3}E=\frac{4}{3}A\ (\alpha)$$

Satz 24.

Jeder parabolische Abschnitt ist vier Drittheilen eines Dreiecks gleich, das einerlei Grundlinie und gleiche Höhe mit dem Abschnitte hat.

F. 40. Es sei ADBEC der parabolische Abschnitt, und ΔABC sei das Dreieck, was einerlei Grundlinie und gleiche Höhe mit ihm hat; auch sei der Flächenraum $K=\frac{4}{3}\Delta ABC$, so soll erwiesen werden, daſs $K=ADBEC$ sei.

Wenn nämlich der Flächenraum K nicht gleich ist ADBEC, so ist er entweder gröſser oder kleiner.

1) Es sei also, wenn dieſs möglich, $ADBEC > K$. Ich habe nun ΔADB und ΔBEC auf die schon erwähnte Weise (S. 21.) eingeschrieben, dann in die übrigbleibenden Abschnitte andere Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe mit ihren Abschnitten; und so schreibe ich fortwährend in die übrigbleibenden Abschnitte Paare von Dreiecken, die mit ihren Abschnitten gleiche Grundlinie und Höhe haben. Dann wird folglich die Summe der übrigbleibenden Abschnitte kleiner werden, als der Ueberschuſs des Abschnitts ADBEC über K (S. 20.

(S. 23. α) Durch Hülfe der Algebra findet man den Beweis dieses Lehrsatzes leichter. Es sei nämlich die Progression gegeben: $S=a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{16}a+\ldots+u$

so ist $S=\frac{a-\frac{1}{4}u}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4a-u}{3}$

mithin $S+\frac{1}{3}u=\frac{4}{3}a$.

20. Folgerung). Mithin wird das eingeschriebene Vieleck gröſser werden, als K; und dieſs ist unmöglich. Es finden hier nämlich Flächenräume Statt, die sich nach ihrer Folge verhalten, wie 4 : 1; denn zuerst ist $\Delta ABC = 4\,(\Delta ADB + \Delta BEC)$ (S. 21.); ferner betragen die beiden letzteren Dreiecke viermal so viel, als die Summe der in die zunächst folgenden Abschnitte eingeschriebenen, und so fortwährend: woraus klar ist, daſs die Summe aller dieser Flächenräume weniger beträgt, als vier Drittheile des gröſsten (S. 23.). Nun ist aber K gleich vier Drittheilen dieses gröſsten Flächenraums; mithin ist der Abschnitt ADBEC nicht gröſser, als K.

2) Es sei demnach, wenn dieſs möglich, $ADBEC < K$. Man setze $\Delta ABC = F$, $H = \frac{1}{4}F$, $G = \frac{1}{4}H$ und so weiter, bis der letzte Flächenraum kleiner ist, als der Ueberschuſs von K über den Abschnitt; und es sei I dieser kleinere Flächenraum. Dann ist:

$$F + G + H + \ldots + I + \tfrac{1}{3}I = \tfrac{4}{3}F$$

es ist aber auch:

$$K = \tfrac{4}{3}F$$

folglich

$$F + G + H + \ldots + I + \tfrac{1}{3}I = K$$

Weil nun K die Summe der Flächenräume $F + G + H + \ldots + I + \frac{1}{3}I$ um weniger als I übertrifft, den Abschnitt aber um mehr als I, so müssen offenbar die Flächenräume $F + G + H + \ldots + I + \frac{1}{3}I$ zusammen gröſser sein, als der Abschnitt; welches unmöglich ist: denn es ist bewiesen worden, daſs wenn eine willkührliche Menge von Flächenräumen nach ihrer Folge sich wie 4 : 1 verhalten, und der gröſste gleich ist dem in dem Abschnitt beschriebenen Dreiecke, die Summe aller dieser Räume kleiner sei, als der Abschnitt (S. 22.). Also ist ADBEC nicht kleiner als K.

Vorhin ward bewiesen, daſs der Abschnitt auch nicht gröſser sei; mithin ist er gleich K. Es ist aber $K = \frac{4}{3}\,\Delta ABC$; also ist der Abschnitt $ADBEC = \frac{4}{3}\,\Delta ABC$.

Vom Gleichgewichte der Ebenen;

oder

von den Schwerpunkten derselben.

Zweites Buch.

Satz 1.

Wenn zwei von einer geraden Linie und einer Parabel umschlossene Flächenräume, welche wir an eine gegebene gerade Linie als Parallelogramme legen können, (α) nicht einerlei Schwerpunkt haben, so wird der Schwerpunkt einer aus beiden zusammengesetzten Gröſse in einer die Schwerpunkte derselben verbindenden geraden Linie liegen, welche so geschnitten ist, daſs die Abschnitte derselben jenen Flächenräumen umgekehrt proportionirt sind. (β)

F. 41. Die beiden Flächenräume AB, CD sollen die erwähnte Beschaffenheit haben; ihre Schwerpunkte aber sollen die Punkte E, F, sein, und es verhalte sich $AB : CD = FH : HE$; so wird zu zeigen sein, daſs der Schwerpunkt einer aus beiden zusammengesetzten Gröſse in H liege.

Es sei $EH = FG = FK$, und $FH = EL$, d. h. $EG = EL$. Dann ist $LH = KH$ und zugleich $LG : GK = AB : CD$; denn es ist $LG = 2FH$ und $GK = 2HE$. Nun lege man zu beiden Seiten der Linie LG, und mit ihr parallel den Flächenraum AB, so daſs $MN = AB$;

(S. 1. α) Weil jeder parabolische Abschnitt vier Drittheilen eines Dreiecks gleich ist, das mit dem Abschnitte gleiche Grundlinie und Höhe hat (Quadr. d. Par. S. 24.). Dieses Dreieck läſst sich konstruiren, dann in ein Parallelogramm mit gegebener Seite verwandeln, und dieses wieder so auf die gegebene Linie legen, daſs es dadurch in zwei gleiche Parallelogramme getheilt wird, welche selbst die gegebene Seite haben.

(β) Dieser Lehrsatz enthält nur einen besondern Fall des sechsten und siebenten im ersten Buche, wie schon Eutocius zu verstehen giebt. Man sieht demnach die Nothwendigkeit eines neuen Beweises nicht ein. Vielleicht wollte Arch. nur zeigen, daſs der sechste und siebente Satz des ersten Buchs, in einen einzigen vereinigt, sich allgemein direkt darthun lasse, wenn man S. 9 u. 10 vorausschickt, welche von S. 6 u. 7 allerdings unabhängig sind.

dann wird E der Schwerpunkt von MN sein (I. S. 10. Man vollende ferner NX, so wird sich verhalten:

$$\begin{array}{rl} & MN : NX = LG : GK \\ \text{Es ist aber auch} & AB : CD = LG : GK \\ \hline \text{also} & AB : CD = MN : NX \\ \text{oder} & AB : MN = CD : NX \end{array}$$

Es ist aber $AB = MN$, folglich auch $CD = NX$, und F ist der Schwerpunkt von NX (I. S. 10.). Weil nun $LH = HK$, und weil die ganze Linie LK die gegenüberliegenden Seiten halbtheilt, so ist H der Schwerpunkt der ganzen Figur PM (I. S. 10.). Es ist aber $PM = MN + NX$, folglich ist H der Schwerpunkt des aus AB, CD zusammengesetzten Flächenraums.

Lehnsatz. Wenn in einen parabolischen Abschnitt ein Dreieck von derselben Grundlinie und gleicher Höhe eingeschrieben wird; dann wiederum in die übrigbleibenden Abschnitte Dreiecke von der Grundlinie und Höhe ihrer Abschnitte, und immerfort in die übrigbleibenden Abschnitte Dreiecke nach derselben Weise, so soll die dadurch gebildete Figur eine **gehörig** eingeschriebene genannt werden.

Es ist aber deutlich, daſs in einer also beschriebenen Figur die Verbindungslinien nicht bloſs derjenigen Winkelspitzen, welche dem Scheitel des Abschnitts zunächst liegen, sondern auch derer, die nach der Reihe darauf folgen, der Grundlinie parallel sein werden. Auch werden sie durch den Durchmesser des Abschnitts gehalbtheilt, und sie selbst theilen den Durchmesser nach dem Verhältnisse der auf einander folgenden ungeraden Zahlen, wenn man das Stück am Scheitel des Abschnitts Eins nennt. Dies muſs erwiesen werden in den „Ordnungen.“ (γ.)

(γ) **Eutocius** liefert diesen Beweis in seinem Kommentare nach Anleitung der Kegelschnitte des **Apollonius**. Hier folgt ein wesentlich abgekürzter:

Das Vieleck APETBQFOC soll in den parabolischen Abschnitt ABC **gehörig** eingeschrieben sein; es wird behauptet: F. 41 a.

1) daſs $AC \ddagger PO \ddagger EF \ddagger TQ$ sei;
2) daſs $PI = IO$, $EU = UF$, $TX = XQ$ sei;
3) daſs sich verhalte $BX : XU : UI : ID = 1 : 3 : 5 : 7$.

Man theile AB, AE, EB durch die Punkte G, M, N in Hälften, und lege durch diese Punkte die geraden Linien HE, SP, VT parallel dem Durchmesser DB; sie treffen allemal die Scheitel ihrer Abschnitte (Quadr. d. Par. S. 18.). Zugleich ist dadurch $AH = HD$, ferner $AS = SH$ und $HV = VD$. Dasselbe läſst sich an der andern Seite des Durchmessers DB nachweisen; und weil $AD = DC$, so sind die sämmtlichen acht Abschnitte der Grundlinie, AS, SH, HV, VD, DW, WK, KL, LC einander gleich.

$$\begin{array}{rl} \text{Nun ist} & AS : SR = AD : DB \\ & LC : LY = DC : DB = AD : DB \\ \hline \text{folglich} & SR = LY \\ \text{Ferner ist} & SR : RP = DC : DS \text{ (Quadr. d. Par. S. 4.)} \\ \text{und eben so} & LY : YO = AD : DL = DC : DS \\ \hline \text{folglich} & RP = YO \\ \text{mithin auch} & SP = LO. \end{array}$$

Weil zugleich $SP \ddagger LO$, so ist PL ein Parallelogramm, also $AC \ddagger PO$.
Auf dieselbe Weise findet man $AC \ddagger EF \ddagger TQ$, wodurch das erste bewiesen ist.

Satz 2.

Wenn in einen parabolischen Abschnitt eine geradlinige Figur gehörig eingeschrieben wird, so liegt der Schwerpunkt derselben in dem Durchmesser des Abschnitts.

F. 42. Der gedachte Abschnitt sei ABC, und in ihn die geradlinige Figur AEFGBHIKC gehörig eingeschrieben. Der Durchmesser des Abschnitts sei BD. Es ist zu zeigen, dafs der Schwerpunkt der geradlinigen Figur in BD liege.

Weil nämlich der Schwerpunkt des Trapeziums AEKC in DL (I. S. 15.), des Trapeziums EFIK in LM, des Trapeziums FGHI in MN und endlich des ΔGBH in NB (I. S. 13.) sich befindet, so erhellt, dafs der Schwerpunkt der ganzen geradlinigen Figur in BD ist (I. S. 4.).

Satz 3.

Wenn in jeden von zwei ähnlichen parabolischen Abschnitten eine geradlinige Figur gehörig eingeschrieben wird, die in beiden gleich viele Seiten hat, so theilen die Schwerpunkte beider geradlinigen Figuren die Durchmesser ihrer Abschnitte proportionirt. (α)

F. 43. Die beiden Abschnitte sollen ABC, abc, geradlinige Figuren von gleicher Seitenzahl

---

Weil hiernach sowohl PL, als EZ und Ta Parallelogramme sind, weil ferner SD$=$DL, und DI$\ddagger$PS, so ist PI$=$IO, und aus denselben Gründen auch EU$=$UF, TX$=$XQ, wodurch das zweite erwiesen ist.

Ferner ist TX$=$VD, EU$=$HD$=$2VD, PI$=$SD$=$3VD, AD$=$4VD, mithin:

$$TX : EU : PI : AD = 1 : 2 : 3 : 4$$

folglich

$$TX^2 : EU^2 : PI^2 : AD^2 = 1 : 4 : 9 : 16$$

Man hat aber (Quadr. d. Par. S. 3):

$$TX^2 : EU^2 : PI^2 : AD^2 = BX : BU : BI : BD$$

folglich

$$BX : BU : BI : BD = 1 : 4 : 9 : 16$$

und hieraus:

$$BX : (BU-BX) : (BI-BU) : (BD-BI) = 1 : 3 : 5 : 7$$

d. h.

$$BX : XU : UI : ID = 1 : 3 : 5 : 7$$

womit der Beweis vollendet ist.

(S. 3. α) Da bekanntlich alle Parabeln ähnlich sind, so könnte man ungewifs sein, zu welchem Zwecke Archimedes den gegenwärtigen Lehrsatz ausdrücklich auf ähnliche parabolische Abschnitte bezieht. Eutocius giebt darüber Auskunft, indem er mittheilt, was Apollonius unter ähnlichen Abschnitten der Kegelschnitte verstanden habe; nämlich zwei solche, deren in gleicher Anzahl vorhandene Ordinaten sich gegenseitig verhalten, wie die Abscissen, wenn zugleich die Abscissen vom Scheitel gegenseitig proportionirt sind. Vergleicht man mit dieser Angabe des Eutocius den Apollonius selbst (Kegelsch. VI Erkl. 7), so findet man, dafs Eutocius noch eine Bestimmung ausgelassen habe, nämlich die, dafs in beiden Abschnitten die Ordinaten unter gleichen Winkeln von ihren Durchmessern geschnitten werden. Eutocius fügt die richtige Bemerkung des Apollonius hinzu, dafs alle Parabeln ähnlich seien, was aber nach dieser Erklärung nicht von allen parabolischen Abschnitten gilt. Nun hat ohne Zweifel Archimedes eben die Erklärung ähnlicher Abschnitte im Sinne gehabt, welche Apollonius giebt, wie deutlich aus S. 7 erhellet, wo wieder von ähnlichen Abschnitten geredet wird. Der Lehrsatz gebietet zwar keineswegs diese Einschränkung, sondern läfst sich allgemein erweisen; geht man indessen von den angegebenen Annahmen aus, so verstatten diese eine Beweisart, die für andere Fälle nicht zuläfsig ist. In den folgenden Anmerkungen soll zunächst auf die eingeschränkte Bedeutung der Aehnlichkeit Rücksicht genommen, und hinterher ein allgemeiner Beweis gegeben werden. Zu den im Archimedischen Beweise aufgeführten Annahmen kommen demnach vorläufig noch die, dafs ADB$=$adb gesetzt wird, und dafs AD : BD$=$ad : bd.

gehörig in sie eingeschrieben, auch BD, bd die Durchmesser der Abschnitte, und die Verbindungslinien EK, FI, GH, ek, fi, gh gezogen sein. Weil nun BD durch die Parallelen nach dem Verhältnisse der auf einander folgenden ungeraden Zahlen getheilt ist, und bd nach ähnlicher Weise, auch diese Theile beider Linien in gleicher Anzahl vorhanden sind, so ist deutlich, dafs sowohl die Theile der Durchmesser in gleichem Verhältnisse stehen, (β) als auch die Parallelen selbst. (γ). Auch liegen die Schwerpunkte der Trapezien AEKC, aekc ähnlich in den geraden Linien LD, ld, weil AC : EK = ac : ek. (δ).

Eben so liegen die Schwerpunkte der Trapezien EFIK, efik in den Linien LM, lm ähnlich; in den Trapezien FH, fh liegen die Schwerpunkte ähnlich auf MN, mn, und endlich liegen die Schwerpunkte der Dreiecke GBH, gbh ähnlich in BN, bn. (ε) Es stehen aber die Trapezien sowohl, als die Dreiecke in einerlei Verhältnifs; (ζ) folglich ist deutlich, dafs

---

(β) Es verhält sich: $BN : NM : ML : LD = 1 : 3 : 5 : 7$, also auch

$$BN : (BN + NM) : (BN + NM + ML) : (BN + NM + ML + LD) = 1 : 4 : 9 : 16$$

d. h. $BN : BM : BL : BD = 1 : 4 : 9 : 16$

Eben so ergiebt sich: $bn : bm : bl : bd = 1 : 4 : 9 : 16$

$$\overline{BN : BM : BL : BD = bn : bm : bl : bd}$$

(γ) Man hat nämlich:

$$GN^2 : FM^2 : EL^2 : AD^2 = BN : BM : BL : BD$$
$$gn^2 : fm^2 : el^2 : ad^2 = bn : bm : bl : bd$$
$$\overline{GN^2 : FM^2 : EL^2 : AD^2 = gn^2 : fm^2 : el^2 : ad^2}$$

Bemerkt man, dafs sämtliche Parallelen durch ihre Durchmesser gehalbtheilt werden (S. 1. γ), so ergiebt sich:

$$GH : FI : EK : AC = gh : fi : ek : ac$$

(δ) Weil $AC : EK = ac : ek$, so ist auch (I. S. 15, δ.):

$$(2AC + EK) : (2EK + AC) = (2ac + ek) : (2ek + ac)$$

Durch dieses Verhältnifs wird aber in I S. 15 die Lage des Schwerpunkts eines Trapeziums angegeben; mithin sind die Schwerpunkte beider Trapezien gleichliegend.

(ε) I. S. 14 und I. S. 15, β.

(ζ) Weil $AD : ad = DB : db$ (α) F. 43 a.

und $DB : db = BL : bl$ (β)

also auch $(DB - BL) : (db - bl) = DB : db$

d. h. $\underline{DL : dl = DB : db}$

so ist $AD : ad = DL : dl$

Zugleich ist $\underline{\angle ADL = \angle adl}$ (α)

$\triangle ADL \sim \triangle adl$

Ferner ist $EL : el = AD : ad$ (γ)

also auch $EL : el = Dl : dl = AL : al$

Zugleich ist $\underline{\angle ELA = \angle ela}$

$\triangle ELA \sim \triangle ela$

Hieraus folgt leicht $ED \sim ed$, ferner eben so $DK \sim dk$ und hieraus $EC \sim ec$. Auf demselben Wege ergiebt sich die Aehnlichkeit aller Paare von Trapezien und die Aehnlichkeit der Dreiecke BGH, bgh; woraus man sofort auf die Aehnlichkeit der ganzen eingeschriebenen Figuren, und hieraus unmittelbar (I. V. 6.) auf die ähnliche Lage der Schwerpunkte beider Figuren schliefsen könnte. So folgert aber Archimedes nicht, sondern nach ihm mufs nun so fortgefahren werden: weil *Trap.* EC ∼ *Trap.* ec, so ist:

$$Trap.\ EC : Trap.\ ec = EK^2 : ek^2$$

ferner aus demselben Grunde:

$$Trap.\ EI : Trap.\ ei = EK^2 : ek^2$$
$$\overline{Trap.\ EC : Trap.\ ec = Trap.\ EI : Trap.\ ei}, \text{ u. s. w.}$$

der Schwerpunkt der ganzen in ABC beschriebenen geradlinigen Figur die Linie BD nach demselben Verhältnisse schneidet, wie der Schwerpunkt der in abc beschriebenen geradlinigen Figur die Linie bd; (ч) und diefs sollte erwiesen werden. (ϑ).

Satz 4.

Der Schwerpunkt eines jeden parabolischen Abschnitts liegt in dem Durchmesser des Abschnitts.

F. 44. Der gedachte Abschnitt sei ABC, dessen Durchmesser BD, so ist zu zeigen, dafs der Schwerpunkt des Abschnitts in BD liege.

Wo nicht nämlich, so sei E der Schwerpunkt; man ziehe dadurch EF ╪ BD, und beschreibe in dem Abschnitte das Dreieck ABC auf einerlei Grundlinie und mit gleicher Höhe, auch verhalte sich:

$$CF : DF = \triangle ABC : K \ (\alpha)$$

(ч) Es ist nämlich deutlich, dafs der Schwerpunkt einer aus den Trapezien EC, EI zusammengesetzten Figur nicht nur in MD liege, sondern auch diese Linie nach demselben Verhältnisse theile, wie der Schwerpunkt der aus den Trapezien ec, ei zusammengesetzten Figur die Linie md theilt (I. S. 6. 7.). Hieraus folgt ferner die gleichförmige Lage der Schwerpunkte der Figuren AH, ah, in den Durchmessern u. s. w.

F. 43 a. (ϑ) Nunmehr ist noch der (α) versprochene allgemeine Beweis nachzutragen. Es mögen ABC, abc überhaupt zwei parabolische Abschnitte, BD, bd deren Durchmesser, und die geradlinigen Figuren gehörig eingeschrieben sein; so wird behauptet, dafs die Schwerpunkte der eingeschriebenen Figuren die Durchmesser in proportionirte Stücke schneiden.

Man hat wie vorhin:

$$1)\ BN : NM : ML : LD = bn : nm : ml : ld$$
$$2)\ BN : BM : BL : BD = bn : bm : bl : bd$$
$$3)\ GH : FI : EK : AC = gh : fi : ek : ac$$

Fällt man demnächst die Perpendikel BP, bp, so ist:

Trap. $EC = \frac{1}{2}(AC + EK) . QP$;	*Trap.* $ec = \frac{1}{2}(ac + ek) . qp$
Trap. $EI = \frac{1}{2}(EK + FI) . RQ$;	*Trap.* $ei = \frac{1}{2}(ek + fi) . rq$
Trap. $FH = \frac{1}{2}(FI + GH) . SR$;	*Trap.* $fh = \frac{1}{2}(fi + gh) . sr$
$\triangle GBH = \frac{1}{2} GH . BS$;	$\triangle gbh = \frac{1}{2} gh . bs.$

Also verhält sich:

$$EC : EI : FH : \triangle GBH = (AC + EK) . QP : (EK + FI) . RQ : (FI + GH) . SR : GH . BS$$
$$ec : ei : fh : \triangle gbh = (ac + ek) . qp : (ek + fi) : rq : (fi + gh) . sr : gh . bs$$

Aus der Proportion 3 ergiebt sich:

$$(AC + EK) : (EK + FI) : (FI + GH) : GH = (ac + ek) : (ek + fi) : (fi + gh) : gh$$

Zugleich ist:
$$QP : RQ : SR : BS = LD : ML : NM : BN$$
$$qp : rq : sr : bs = ld : ml : nm : bn$$
$$\overline{QP : RQ : SR : BS = qp : rq : sr : bs}$$

Also auch:

$$(AC + EK) . QP : (EK + FI) . RQ : (FI + GH) . SR : GH . BS = (ac + ek) . qp : (ek + fi) . rq : (fi + gh) . sr : gh . bs$$

mithin endlich:
$$EC : EI : FH : \triangle GBH = ec : ei : fh : \triangle gbh$$

d. h. sämtliche Trapezien und Dreiecke stehn in gleichem Verhältnifse. Die Schwerpunkte der entsprechenden Trapezien und Dreiecke sind gleichliegend (ϑ); also folgt nunmehr ebenfalls die gleichförmige Lage der Schwerpunkte beider eingeschriebenen Figuren in deren Durchmessern BD, bd (ч).

(S. 4. α) Man suche nämlich die vierte Proportionale zu CF, DF, AC, sie sei X, und errichte auf X ein Dreieck von der Höhe des $\triangle ABC$; diefs sei K, dann ist $\triangle ABC : K = AC : X = CF : DF$.

Ferner werde in den Abschnitt eine geradlinige Figur gehörig eingeschrieben; so daſs die übrigbleibenden Abschnitte zusammen weniger betragen, als K (β). Der Schwerpunkt der eingeschriebenen geradlinigen Figur liegt in BD (S. 2.), er sei H; man ziehe die Verbindungslinie HE, verlängere sie, und ziehe CL ‡ BD. Dann ist offenbar:

die eingeschriebene Figur : Summe d. übrigen Absch. $>$ $\Delta ABC : K$

Man hat aber: $\Delta ABC : K = CF : DF$

folgl. *d. eingesch. Fig. : Summe d. übr. Absch.* $> CF : DF$

d. h. $> LE : EH$

Es sei daher:

$ME : EH =$ *eingeschr. Figur : Summe d. übr. Absch.*

Da nun E der Schwerpunkt des ganzen Abschnitts, H aber der darin beschriebenen geradlinigen Figur ist, so erhellt, daſs der Schwerpunkt des Restes, welcher aus sämtlichen übrigbleibenden Abschnitten besteht, in der Verlängerung der Linie HE sich befindet, und zwar so, daſs sich verhält: (I. S. 8.).

Diese Verlängerung : $HE =$ *eingeschr. Fig. : Summe d. übr. Absch.*

Also würde M der Schwerpunkt der aus den übrigbleibenden Abschnitten zusammengesetzten Gröſse sein, welches widersinnig ist; denn alle übrigbleibenden Abschnitte werden sich an einerlei Seite der durch M mit BD parallel gezogenen geraden Linie befinden. Mithin erhellt, daſs der Schwerpunkt in BD liegt (I. V. 8.).

Satz 5.

Wenn in einen parabolischen Abschnitt eine geradlinige Figur gehörig eingeschrieben wird, so ist der Schwerpunkt des ganzen Abschnitts dem Scheitel desselben näher, als der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur.

Es sei ABC der erwähnte Abschnitt und DB dessen Durchmesser, ferner ΔABC gehörig in ihn eingeschrieben und BD in E so getheilt, daſs $BE = 2ED$; dann ist E der Schwerpunkt des ΔABC (α). Es werde ferner AB und BC durch F, G in Hälften getheilt und man ziehe durch diese Punkte die Linien FK, GL parallel mit BD. Dann wird folglich der Schwerpunkt des Abschnitts AKB in FK, des Abschnitts BCL aber in LG liegen (S. 4). Es mögen H, I, diese Punkte sein; und man ziehe HI. Weil nun HFGI ein Parallelogramm (β) und $FN = NG$ ist, so ist auch $QH = QI$. Also liegt der Schwerpunkt einer aus den beiden Abschnitten AKB und BLC zusammengesetzten Gröſse in der Mitte der Linie HI, d. i. in Q; denn die Abschnitte sind gleich. (γ) Weil ferner der Schwerpunkt des ΔABC F. 43.

(β) Dieſs ist möglich, weil die Summe der übrigbleibenden Abschnitte kleiner gemacht werden kann, als jeder vorgelegte Flächenraum, indem durch jede neue Einschreibung eines Dreiecks in einen Abschnitt mehr als die Hälfte von dem Abschnitte weggenommen wird (*Quadr. d. Par. S.* 20. *Folgerung.*)

(S. 5. α) I. S. 15, β.

(β) Zöge man nämlich KL, so hätte man KL ‡ AC und FG ‡ AC; zugleich ist KF ‡ LG, also $KF = LG$; daraus folgt $HF =$ u. ‡ IG, also ist HG ein Parallelogramm.

(γ) Weil Absch. $AKB = \frac{4}{3} \Delta AKB$ und Absch. $BLC = \frac{4}{3} \Delta BLC$ (*Quadr. d. Par. S.* 24.) Diese beiden Dreiecke sind aber gleich; denn betrachtet man $KF = LG$ als Grundlinien der Dreiecke BKF und BLG, so sind deren Höhen die Perpendikel von B auf die verlängerten Linien KF, LG. Diese Perpendikel sind gleich, weil im Punkte E liegt, der Schwerpunkt der aus den beiden Abschnitten AKB, BLC zusammengesetzten Gröfse aber in Q; so erhellet, dafs der Schwerpunkt des ganzen Abschnitts ABC in QE liegt, nämlich zwischen Q und E. Mithin wird auch der Schwerpunkt des ganzen Abschnitts dem Scheitel desselben näher liegen, als der Schwerpunkt des gehörig eingeschriebenen Dreiecks.

F. 46. Es sei ferner das geradlinige Fünfeck AKBLC in den Abschnitt ABC gehörig eingeschrieben. BD sei der Durchmesser des ganzen Abschnitts, KF und LG aber die Durchmesser der beiden Abschnitte AKB und BLC. Weil nun in dem Abschnitte AKB ein Dreieck gehörig beschrieben ist, so liegt dieses Abschnitts Schwerpunkt seinem Scheitel näher, als der Schwerpunkt des Dreiecks. Daher sei H der Schwerpunkt des Abschnitts AKB, I aber der Schwerpunkt des Dreiecks. Ferner sei M der Schwerpunkt des Abschnitts BLC, N aber der Schwerpunkt des Dreiecks; auch verbinde man die Punkte H, M und I, N. Dann folgt HQ = QM und IT = TN. Aber es ist auch ΔAKB = ΔBLC und *Absch.* AKB = *Absch.* BLC, denn es ist an einem andern Orte (*Q. d. Par. S.* 24.) gezeigt worden, dafs jeder Abschnitt vier Drittheilen seines Dreiecks gleich ist. Es wird folglich der Schwerpunkt einer aus beiden Abschnitten AKB und BLC zusammengesetzten Gröfse in Q liegen, der Schwerpunkt der aus beiden Dreiecken AKB und BLC bestehenden Gröfse aber in T. Weil ferner der Schwerpunkt des ΔABC in E liegt, der Schwerpunkt der aus beiden Abschnitten AKB, BLC zusammengesetzten Gröfse aber in Q, so erhellet, dafs der Schwerpunkt des ganzen Abschnitts ABC in der geraden Linie QE da liegt, wo diese so getheilt wird, dafs ΔABC zu der Summe der Abschnitte AKB, BLC sich so verhält, wie das an Q gränzende Stück zu dem kleinern (I. S. 8.). Es liegt aber der Schwerpunkt des Fünfecks AKBLC auf der geraden Linie ET da, wo diese so getheilt wird, dafs das Dreieck ABC zur Summe der Dreiecke AKB, BLC sich verhält, wie das an T gränzende Stück zu dem Reste. Weil nun

$$\Delta ABC : (\Delta AKB + \Delta BLC) > \Delta ABC : \textit{Summe der Abschnitte},$$

so erhellt, dafs der Schwerpunkt des Abschnitts ABC dem Scheitel B näher liegt, als der des eingeschriebenen Vielecks. (δ) Dieselbe Schlufsreihe gilt für alle gehörig eingeschriebenen geradlinigen Figuren.

Satz 6.

In einen gegebenen parabolischen Abschnitt kann man eine geradlinige Figur dergestalt gehörig einschreiben, dafs die gerade Linie zwischen den Schwerpunkten des Abschnitts und der eingeschriebenen Figur kleiner wird, als jede vorgelegte gerade Linie.

F. 47. Der erwähnte gegebene Abschnitt sei ABC, sein Schwerpunkt H, und in ihn sei ΔABC gehörig eingeschrieben; auch sei F eine vorgelegte gerade Linie, und es verhalte sich BH:

KF, LG gleich weit von BD abstehen. Also ist ΔBKF = ΔBLG. Ferner ist ΔBKF = $\frac{1}{2}\Delta$BKA und ΔBLG = $\frac{1}{2}\Delta$BLC, mithin ΔBKA = ΔBLC.

(δ) Fielen nämlich beide Schwerpunkte in einander, so müfste sein:

ΔABC : (ΔKAB + ΔBLC) = ΔABC : *Summe der Abschnitte.*

Fiele aber gar der Schwerpunkt des Fünfecks näher an T, als der Schwerpunkt des Abschnitts selbst, so müfste sein:

ΔABC : (ΔKAB + ΔBLC) < ΔABC : *Summe der Abschnitte.*

Beides führt auf einen Widerspruch.

BH : F = $\triangle$ ABC : K; (α) ferner sei die geradlinige Figur AKBLC in den Abschnitt ABC gehörig eingeschrieben, so dafs die übrigbleibenden Abschnitte zusammen weniger betragen, als K, und endlich sei E der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur; so behaupte ich, dafs HE $<$ F sei.

Wo nicht nämlich, so ist entweder HE = F oder HE $>$ F.

Weil aber:

Vieleck AKBLC : *Summe d. übr. Absch.* $>$ $\triangle$ ABC : K (β)
d. h. $>$ BH : F

und weil das Verhältnifs BH : F nicht kleiner ist, als das Verhältnifs BH : HE, indem HE nicht kleiner ist, als F; so ist um desto mehr:

Vieleck AKBLC : *Summe d. übr. Absch.* $>$ BH : HE.

Wenn wir demnach machen, dafs das Vieleck AKBLC zur Summe der übrigbleibenden Abschnitte sich verhalte, wie irgend eine andere Linie zu HE, so wird diese Linie gröfser sein, als BH; sie sei HG. (Da nämlich der Schwerpunkt des Abschnitts ABC in H, des geradlinigen Vielecks aber in E liegt, so wird eine Verlängerung der Linie EH, die man so lang macht, dafs sich verhält:

Diese Verlängerung : EH = *Vieleck* AKBLC : *Summe d. übr. Abschn.*,

gröfser sein, als HB.) Es sei daher:

HG : EH = *Vieleck* AKBLC : *Summe d. übr. Absch.*;

dann ist also G der Schwerpunkt einer aus der Summe der übrigbleibenden Abschnitte zusammengesetzten Gröfse (I. S. 8.); diefs aber ist unmöglich; denn zieht man durch G eine Parallele zu AC, so liegen die Abschnitte sämtlich auf einerlei Seite derselben. Es erhellet mithin, dafs HE $<$ F; und eben diefs sollte erwiesen werden. (γ)

Satz 7.

Die Schwerpunkte zweier ähnlichen parabolischen Abschnitte theilen ihre Durchmesser nach demselben Verhältnisse. (α)

Die gedachten beiden Abschnitte sollen ABC, EFG sein, und deren Durchmesser BD, FH. Der Schwerpunkt des Abschnitts ABC sei K, des Abschnitts EFG aber L. Es ist zu zeigen, dafs K und L ihre Durchmesser nach demselben Verhältnisse theilen. F. 48.

(S. 6. α) Vgl. S. 4, α.

(β) Es ist nämlich das Vieleck AKBLC $>$ $\triangle$ABC, und die Summe der übrigbleibenden Abschnitte kann kleiner gemacht werden, als K.

(γ) Eutocius giebt folgenden andern Beweis des Lehrsatzes:

Der Schwerpunkt H des Abschnitts ist nur einer, und er liegt dem Scheitel des Abschnitts näher, als die Schwerpunkte der eingeschriebenen Vielecke. Nun sei E der Schwerpunkt des $\triangle$ABC, wobei BD so geschnitten wird, dafs 2DE = EB ist. Dann ist deutlich, dafs die Schwerpunkte aller eingeschriebenen Vielecke zwischen die Punkte H, E fallen werden. Je mehr Seiten aber das gehörig eingeschriebene Vieleck erhält, desto näher an H wird sein Schwerpunkt liegen. Hieraus erhellt, dafs die Entfernung der Schwerpunkte des Abschnitts und der gehörig eingeschriebenen Figur durchaus nicht gröfser sein könne, als HE; wohl aber kleiner, als HE nicht nur, sondern auch als jede vorgelegte Linie.

(S. 7. α) Archimedes geht hier von demselben Begriffe der Achnlichkeit parabolischer Abschnitte aus, wie in S. 3, α angegeben ist; jedoch läfst sich auch dieser Satz allgemein erweisen, wie in γ geschehen soll.

Wo nicht nämlich, so sei KB : KD = FM : HM.

Man beschreibe in dem Abschnitte EFG eine geradlinige Figur gehörig, so daſs die Entfernung des Schwerpunkts des Abschnitts von dem der eingeschriebenen Figur kleiner ist als LM (S. 6.). So sei denn X der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur. (β) Ferner beschreibe man in dem Abschnitte ABC eine der in EFG beschriebenen ähnliche geradlinige Figur, also gleichfalls gehörig. (γ) Der Schwerpunkt derselben läge demnach dem Scheitel näher, als der Schwerpunkt des Abschnitts, (δ) welches unmöglich ist (S. 5.). Es geht also hervor, daſs sich verhält BK : KD = FL : LH. (ε)

Satz 8.

Der Schwerpunkt eines jeden parabolischen Abschnitts theilt den Durchmesser desselben so, daſs der am Scheitel liegende Theil dreimal die Hälfte des Theils an der Grundlinie beträgt.

F. 49. Es sei ABC der parabolische Abschnitt, BD sein Durchmesser, H sein Schwerpunkt; so ist zu zeigen, daſs $BH = \frac{3}{2} HD$ sei.

Man schreibe in den Abschnitt ABC das Δ ABC gehörig ein, dessen Schwerpunkt E sein soll. Dann theile man AB, BC durch die Punkte F, G in Hälften und ziehe KF, LG parallel mit BD, so sind diese Linien die Durchmesser der Abschnitte AKB, BLC.

Nun sei M der Schwerpunkt des Abschnitts AKB, der Schwerpunkt von BLC aber sei N; man ziehe die Verbindungslinien FG, MN, KL, so ist Q der Schwerpunkt der aus den beiden Abschnitten zusammengesetzten Gröſse. Weil demnächst

$$BH : HD = KM : MF \quad (\alpha)$$

so ist auch $(BH + HD) (KM + MT) = HD : MF$

d. h. $\quad BD \quad : \quad KF \quad = HD : MF$

(β) Der Punkt X muſs zwischen L, M, liegen, nicht zwischen L, F (S. 5.).

(γ) Wenn beide parabolischen Abschnitte ähnlich sind, so werden allerdings auch die gehörig eingeschriebenen Figuren ähnlich sein (S. 3. ζ); allein wenn auch diese Aehnlichkeit nicht statt findet, so schneiden die Schwerpunkte der gehörig eingeschriebenen Figuren den Durchmesser dennoch in proportionirte Stücke (S. 3, η); mithin gelten die folgenden Schlüsse allgemein von allen parabolischen Abschnitten.

(δ) Weil X dem Scheitel näher liegt, als M.

(ε) Arch. hat nicht Rücksicht darauf genommen, daſs der Punkt M auch zwischen L, F fallen könnte; doch ergiebt sich für diesen Fall leicht eine ähnliche Ungereimtheit, denn man setze, es sei:

$$KB : KD = FM' : M'H;$$

dann bestimme man den Punkt N nach der Proportion FL : LH = BN : ND, wo begreiflich N zwischen K, D liegen muſs, weil L zwischen M', H liegt. Nunmehr beschreibe man gehörig ein Vieleck in dem Abschnitte ABC, so daſs die Entfernung des Schwerpunkts K von dem Schwerpunkte der eingeschriebenen Figur kleiner ist, als KN. Endlich werde auch in dem Abschnitte EFG ein ähnliches Vieleck beschrieben, dessen Schwerpunkt nach S. 3 zwischen L, M' fallen, also dem Scheitel näher sein müſste, als der Schwerpunkt L; welches wiederum dem S. 5 widerspricht.

(S. 8. α) Eutocius behauptet hier: weil die Abschnitte ähnlich seien, so werden ihre Durchmesser durch die Schwerpunkte proportionirt geschnitten, und die Erklärer nach ihm haben dieſs nachgesprochen. Aber die Abschnitte sind keineswegs ähnlich; denn weder bilden ihre Durchmesser KF, LG, BD mit den Grundlinien AB, BC, AC gleiche Winkel, noch verhält sich:

$$KF : LG : BD = FB : BG : AD;$$

und doch müſsten beide Bedingungen Statt finden, wenn die Abschnitte ähnlich sein sollten. Der Archimedische Lehrsatz steht freilich dennoch fest; denn die Proportion BH : HD = KM : MF ist richtig, weil der S. 7 nicht

Es ist aber $BD = 4KF$, (dieſs wird nämlich bewiesen.) (β) also auch $HD = 4MF$ (S. 7.), und folglich $BH = 4KM = 4SQ$, mithin $BH - SQ = BS + QH = 3SQ$.

Ferner sei $BS = 3SX$, so ist auch $QH = 3XQ$.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Nun ist} & BD = 4BS, \text{ (auch dieſs beweiset man nämlich.) } (\gamma) \\
\text{und} & BS = 3SX \\
\hline
\text{folgl.} & BD = 3BX \ (\delta) \\
\text{Auch ist} & BD = 3ED, \text{ weil E der Schwerpunkt des } \Delta ABC \text{ ist.} \\
\hline
\text{also} & XE = BD - (BX + ED) = \tfrac{1}{3} BD. \ (\varepsilon)
\end{array}
$$

Weil ferner H der Schwerpunkt des ganzen Abschnitts, Q der Schwerpunkt der aus den beiden Abschnitten AKB, BLC zusammengesetzten Gröſse, und E der Schwerpunkt des ΔABC ist; so verhält sich (I. S. 8):

$$\Delta ABC : \textit{Summe d. übr. Abschnitte} = QH : HE.$$

Es ist aber ΔABC dreimal so groſs, als die Summe der Abschnitte, weil der ganze Abschnitt vier Drittheile des ΔABC beträgt; (ζ) mithin ist auch:

$$
\begin{array}{rl}
& QH = 3HE. \text{ Vorhin ward gezeigt,} \\
\text{daſs} & QH = 3XQ \\
\hline
\text{folglich} & XE = 5HE = DE, \ (\eta) \text{ weil } XE = DE \\
\text{folglich} & DH = 6HE; \\
\text{ferner ist} & DE = \tfrac{1}{3} BD, \text{ also } BH = \tfrac{3}{2} HD; \ (\vartheta)
\end{array}
$$

was erwiesen werden sollte.

Satz 9.

Wenn vier gerade Linien stetig proportionirt sind; wenn ferner die kleinste zu dem

---

bloſs von ähnlichen, sondern von allen parabolischen Abschnitten gilt; aber durch welche Schluſsreihe Archimedes diese Proportion gerechtfertigt habe, das ist mir dunkel geblieben.

(β) Arch. selbst beweiset diese Behauptung nirgend; Eutocius aber giebt folgenden Beweis:
Nach der schon angegebenen Konstruktion ist $AF = FB$, also $BR = RD$ oder $2BR = BD$ und $2FR = AD$; weil jedoch KR ein Parallelogramm ist, so hat man $FR = KS$, also $4FR^2 = 4KS^2 = AD^2$. Daraus folgt $BD = 4BS$; denn es ist $KS^2 : AD^2 = BS : BD$, also auch $4KS^2 : AD^2 = 4BS : BD$, (Quadr. d. Par. S. 3.). Weil nun $BD = 2BR = 4BS$, so ist $BR = 2BS$, mithin $BS = SR = KF$, also $BD = 4KF$.

(γ) Vgl. β.

(δ)
$$
\begin{array}{ll}
\text{Weil} & BD = 4BS, \text{ und } BS = 3SX, \\
\text{so ist} & BD = 12SX, \text{ und weil } SX = \tfrac{1}{4} BX, \\
\text{so ist} & BD = 3BX.
\end{array}
$$

(ε) Es ist $BX = \frac{1}{3} BD$ und $ED = \frac{1}{3} BD$, folglich
$$XE = BD - (BX + ED) = BD - \tfrac{2}{3} BD = \tfrac{1}{3} BD.$$

(ζ) Quadr. d. Par. S. 24.

(η) Es ist nämlich
$$
\begin{array}{r}
XE = XQ + QH + HE \\
XQ = \tfrac{1}{3} QH = HE \\
QH = 3HE \\
\hline
XE = HE + 3HE + HE = 5HE.
\end{array}
$$

(ϑ) Es ist
$$
\begin{array}{r}
BH = BD - HD \\
BD = 3DE = 15HE = 2HD + \tfrac{1}{2} HD \\
\hline
BH = HD + \tfrac{1}{2} HD = \tfrac{3}{2} HD.
\end{array}
$$

Ueberschufs der gröfsten über die kleinste sich verhält, wie irgend eine angenommene Linie zu drei Fünftheilen des Ueberschusses der gröfsten über die dritte der proportionirten Linien; wenn endlich diejenige Linie, welche gleich ist der Summe aus der zwiefachen gröfsten, der vierfachen zweiten, der sechsfachen dritten und der dreifachen vierten, zu einer andern, welche gleich ist der Summe aus der fünffachen gröfsten, der zehnfachen zweiten, der zehnfachen dritten und der fünffachen vierten der proportionirten Linien, sich so verhält, wie irgend eine angenommene Linie zu dem Ueberschufs der gröfsten über die dritte der proportionirten Linien; so wird die Summe der beiden angenommenen Linien zwei Fünftheile der gröfsten betragen.

F. 50. Es sollen BA, BC, BD, BE die vier stetig proportionirten Linien sein, und es verhalte sich:

1. $BE : EA = FG : \frac{3}{5} AD$

2. $(2BA + 4BC + 6BD + 3BE) : (5BA + 10BC + 10BD + 5BE) = GH : AD$;

so soll gezeigt werden, dafs $HF = \frac{2}{5} AB$ sei.

1. Weil nämlich $\div BA : BC : BD : BE$,
so ist zugleich $\div CA : DC : ED$, nach demselben Verhältnisse.

Ferner ist: $(BA + BC) : BD = AD : ED$ (α)

und $(BD + BC) : BE = AD : ED$ (α)

folglich $(BA + 2BC + BD) : (BD + BE) = AD : ED$

und $(2BA + 3BC + BD) : (2BD + BE) = AD : ED$

Es ist hiernach:

$$(2BA + 4BC + 4BD + 2BE) : (2BD + BE) > AD : ED$$

daher sei:

$$AD : OD = (2BA + 4BC + 4BD + 2BE) : (2BD + BE)$$

folglich:

$$(AD + OD) : AD = OA : AD = (2BA + 4BC + 6BD + 3BE) : (2BA + 2BE + 4BC + 4BD)$$

(S. 9. α) Es ist gegeben $BA : BC = BC : BD = BD : BE$

also hat man $(BA - BC) : (BC - BD) = BC : BD$

$(BC - BD) : (BD - BE) = BC : BD$

$(BA - BC) : (BC - BD) = (BC - BD) : (BD - BE)$

d. h. $CA : CD = CD : ED = BC : BD$

also auch $BA : BC = CA : CD$

mithin $(BA + BC) : BC = (CA + CD) : CD$

d. h. $(BA + BC) : BC = AD : CD$

Zugleich war $BC : BD = CD : ED$

also ist 1) $(BA + BC) : BD = AD : ED$

Ferner ist $BC : BD = CA : CD$

mithin $(BC + BD) : BD = (CA + CD) : CD$

d. h. $(BC + BD) : BD = AD : CD$

Zugleich war $BD : BE = CD : ED$

folglich ist 2) $(BC + BD) : BE = AD : ED$

Setzt man hiemit die zweite der angenommenen Proportionen zusammen, so erhält man:

$$OA : GH = (5BA + 5BE + 10BC + 10BD) : (2BA + 2BE + 4BC + 4BD)$$

d. h. $\quad OA : GH = 5 : 2.$

2. Ferner weil:

$$OD : AD = (BE + 2BD) : (2BA + 2BE + 4BC + 4BD)$$

und $\quad \underline{AD : ED = (2BA + 3BC + BD) : (2BD + BE)}$

so ist $OD : ED = (2BA + 3BC + BD) : (2BA + 2BE + 4BC + 4BD)$

mithin auch:

$$(ED - OD) : ED = EO : ED = (BC + 3BD + 2BE) : (2BA + 2BE + 4BC + 4BD)$$

Zugleich hat man noch:

$$ED : BE = CA : BC = CD : BD \ (\beta)$$

also auch $\quad ED : BE = 3CD : 3BD = 2ED : 2BE$

und $\quad ED : BE = (CA + 3CD + 2ED) : (BC + 3BD + 2BE)$

und durch Zusammensetzung mit dem Verhältnisse $EO : ED$,

$$EO : BE = (CA + 3CD + 2ED) : (2BA + 2BE + 4BC + 4BD)$$

woraus folgt:

$$(EO + BE) : BE = OB : BE = (3BA + 6BC + 3BD) : (2BA + 2BE + 4BC + 4BD) \ (\gamma)$$

Weil ferner $\div ED : DC : CA$, und in demselben Verhältnisse auch $\quad \div (BE + BD) : (BD + BC) : (BC + BA)$, so ist:

$$ED : AD = (BE + BD) : (BD + BC + BC + BA), \ (\delta) \text{ mithin}$$

$$ED + AD : AD = AE : AD = (BE + BA + 2BD + 2BC) : (BD + BA + 2BC)$$

woraus durch Verdoppelung folgt:

$$AE : AD = (2BE + 2BA + 4BD + 4BC) : (2BD + 2BA + 4BC)$$

und ferner:

$$AE : \tfrac{3}{5}AD = (2BE + 2BA + 4BD + 4BC) : \tfrac{3}{5}(2BD + 2BA + 4BC)$$

(β) Es ist nämlich $\quad BD : BE = BA : BC = BC : BD$

also $\quad (BD - BE) : BE = (BA - BC) : BC = (BC - BD) : BD$

d. h. $\quad ED : BE = CA : BC = CD : BD$

(γ) Das Vorderglied des zweiten Verhältnisses sollte eigentlich heifsen:

$$CA + 3CD + 2ED + 2BA + 2BE + 4BC + 4BD$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} CA + BC &= BA \\ 3CD + 3BD &= 3BC \\ 2ED + 2BE &= 2BD \\ 2BA + 3BC + BD &= 2BA + 3BC + BD \\ \hline CA + 3CD + 2ED + 2BA + 4BC + 4BD + 2BE &= 3BA + 6BC + 3BD \end{aligned}$$

(δ) Weil nämlich $\quad \div ED : DC : CA$

und in demselben Verhältnisse $\quad \div BE : BD : BC : BA$, so ist gleichfalls

in demselben Verhältnisse $\quad \div (BE + BD) : (BD + BC) : (BC + BA)$;

folglich $\quad DC : CA = (BD + BC) : (BC + BA)$

also auch $\quad DC : (DC + CA) = (BD + BC) : (BD + 2BC + BA)$

Ferner ist $\quad \underline{ED : DC = (BE + BD) : (BD + BC)}$

also $\quad ED : (DC + CA) = (BE + BD) : (BD + 2BC + BA)$

oder $\quad ED : AD = (BE + BD) : (BD + 2BC + BA)$

Man hat aber $AE : \frac{3}{5} AD = BE : FG$, folglich:

$$BE : FG = (2BA + 2BE + 4BC + 4BD) : \tfrac{3}{5}(2BA + 2BD + 4BC)$$

Es ward aber gezeigt, dafs

$$OB : BE = (3BA + 3BD + 6BC) : (2BA + 2BE + 4BC + 4BD)$$

also findet man durch Zusammensetzung beider Proportionen:

$$OB : FG = (3BA + 3BD + 6BC) : \tfrac{3}{5}(2BA + 2BD + 4BC)$$

Nun verhält sich:

$$(BA + 3BD + 6BC) : (2BA + 2BD + 4BC) = 3 : 2$$

Also ist: $OB : FG = 5 : 2$
vorhin ward gezeigt: $OA : GH = 5 : 2$

Mithin durch Addition $BA : HF = 5 : 2$
und daraus folgt $HF = \frac{2}{5} BA$,
was gezeigt werden sollte. (*)

Satz 10.

Der Schwerpunkt eines jeden abgestumpften parabolischen Abschnitts befindet sich in derjenigen geraden Linie, welche Durchmesser desselben ist; und zwar, wenn diese Linie in fünf gleiche Theile getheilt wird, in demjenigen Punkte des mittlern Theils, der diesen dergestalt zerlegt, dafs der gegen die kleinere Grundlinie des stumpfen Abschnitts belegene Theil zu dem andern sich verhält, wie ein Körper, dessen Grundfläche dem Quadrate der halben gröfsten Grundlinie des stumpfen Abschnitts, und dessen Höhe der Summe der doppelten

---

(*) Anstatt dieses weitläuftigen und keineswegs bequemen Beweises, der durch Eutocius Erläuterung noch bedeutend an Länge zugenommen, liefert schon Sturm folgenden ganz kurzen durch Hülfe der Algebra:

Es sei gegeben die Progression:

$$\div\, ae^3 : ae^2 : ae : a$$

und 1. $a : (ae^3 - a) = x : \frac{3}{5}(ae^3 - ae)$

2. $(2ae^3 + 4ae^2 + 6ae + 3a) : (5ae^3 + 10ae^2 + 10ae + 5a) = y : (ae^3 - ae)$

Daraus soll folgen, dafs $x + y = \frac{2}{5} ae^3$ sei.

Man erhält nämlich $x = \dfrac{3(ae^3 - ae)}{5(e^3 - 1)} = \dfrac{ae(3e^2 - 3)}{5(e^3 - 1)}$

$$y = \frac{(2ae^3 + 4ae^2 + 6ae + 3a)(ae^3 - ae)}{5ae^3 + 10ae^2 + 10ae + 5a}$$

oder nach gehöriger Rechnung:

$$y = \frac{ae(2e^5 + 4e^4 + 4e^3 - e^2 - 6e - 3)}{5(e^3 + 2e^2 + 2e + 1)}$$

und hieraus durch gehörige Reduktion:

$$x + y = \frac{ae}{5} \cdot \frac{2e^8 + 4e^7 + 4e^6 - 4e^4 - 4e^3 - 2e^2}{e^6 + 2e^5 + 2e^4 - 2e^2 - 2e - 1} = \frac{ae}{5} \cdot 2e^2 = \frac{2ae^2}{5}.$$

Es ist schwer zu glauben, dafs Archimedes auf seinem beschwerlichen Wege diesen Satz wirklich erst aufgefunden habe, sondern wahrscheinlich entdeckte er ihn durch irgend ein anderes Mittel und bewies ihn hinterher durch die den Geometern seiner Zeit gewöhnliche Methode. (Lagrange und Delambre zu Peyrards Uebersetzung.)

kleinsten samt der gröfsten Grundlinie gleich ist, zu einem Körper, dessen Grundfläche dem Quadrate der halben kleinsten Grundlinie des stumpfen Abschnitts, dessen Höhe aber der Summe der doppelten gröfsten samt der kleinsten Grundlinie gleich ist.

In einem parabolischen Abschnitte befinden sich die beiden geraden Linien AC, DE; (α) der Durchmesser des Abschnitts ABC sei BF, so erhellt, dafs GF der Durchmesser des abgestumpften Abschnitts ADEC sei; auch sind AC, DE parallel der Berührungslinie durch B. Man theile GF in fünf gleiche Theile, deren mittlerer HK sein soll, und es verhalte sich: F. 51.

$$HI : IK = V : W,$$

wenn V einen Körper bezeichnet, dessen Grundfläche AF^2, und dessen Höhe $2DG + AF$ ist; W aber einen Körper, dessen Grundfläche DG^2 und dessen Höhe $2AF + DG$ ist; dann ist zu zeigen, dafs I der Schwerpunkt von ADEC sei. (β)

Es sei $FB = MN$ und $GB = NO$, auch mache man

$$MN : NX = NX : NO$$

ferner $$MN : NO = NX : NT$$

und $$MT : NT = FH : IR,$$

wobei gleichgültig ist, wohin der Punkt R fält, ob zwischen F, G, oder zwischen G, B, nur dafs die Linie von I anfange.

Weil nun FB ein Durchmesser der Parabel ist, so ist FG entweder die Axe selbst, oder derselben parallel gezogen; die Linien AF, DG aber sind deren Ordinaten, indem sie der Berührungslinie durch B parallel sind; und hiernach ist:

$$AF^2 : DG^2 = FB : BG = MN : NO \ (\gamma)$$

Nun ist $$MN : NO = MN^2 : NX^2 \ (\delta)$$

folglich $$AF^2 : DG^2 = MN^2 : NX^2$$

also auch $$AF : DG = MN : NX$$

mithin $$AF^3 : DG^3 = MN^3 : NX^3$$

(S. 10. α) Man mufs hinzudenken: einander parallel.

(β) Die behauptete Proportion ist demnach:

$$HI : IK = V : W = AF^2 (2DG + AF) : DG^2 (2AF + DG)$$

Nach der wörtlichen Bezeichnung im Lehrsatze selbst wäre eigentlich folgende Proportion aufzustellen:

$$HI : IK = AF^2 (2DE + AC) : DG^2 (2AC + DE)$$

Weil aber $DG = \frac{1}{2} DE$ und $AF = \frac{1}{2} AC$, so ist jene mit dieser gleichbedeutend.

(γ) Quadr. d. Par. S. 3.

(δ) Es ist

$$\begin{array}{l} MN : NX = NX : NO \\ MN : NX = MN : NX \\ \hline MN^2 : NX^2 = MN : NO \end{array}$$

Ferner ist $AF^3 : DG^3 = Absch.\ ABC : Absch.\ DBE$ (ε)

$MN^3 : NX^3 = MN : NT$ (ζ)

also $Absch.\ ADEC : Absch.\ DBE = MT : NT = \frac{3}{5} FG : IR$

Weil nun $V : AF^3 = (2DG + AF) : AF = (2NX + MN) : MN$

ferner $AF^3 : DG^3 = MN : NT$

ferner $DG^3 : W = DG : (2AF + DG) = NT : (2ON + NT)$;

so giebt es hier vier Gröfsen, nämlich V, AF^3, DG^3, W, die paarweise vier andern proportionirt sind, nämlich den Gröfsen $(2NX + MN)$, MN, NT, $(2AF + DG)$, (η) wodurch man erhält:

$$V : W = (2NX + MN) : (2NO + NT)$$

Es ist aber $V : W = HI : IK$

folglich $HI : IK = (2NX + MN) : (2NO + NT)$

Mithin erhält man durch Addition, und durch Multiplikation der Vorderglieder mit der Zahl 5

$$FG : IK = (5MN + 5NT + 10NX + 10NO) : (2NO + NT)$$

Es

(ε) Die beiden Abschnitte ABC und DBE verhalten sich, wie die Dreiecke ABC und DBE, welche in ihnen beschrieben werden können; diese aber verhalten sich, wie die Dreiecke AFB und DGB, welche wegen ihrer gleichen Winkel bei F und G sich verhalten, wie die Rechtecke aus AF, FB und aus DG, GB, d. h.

$$Absch.\ ABC : Absch.\ DBE = AF \cdot FB : DG \cdot GB$$

nun ist aber $FB : GB = AF^2 : DG^2$

also $Absch.\ ABC : Absch.\ DBE = AF^3 : DG^3$

(ζ) Weil

$$\begin{aligned} MN : NX &= NX : NO \\ MN : NX &= NO : NT \\ MN : NX &= MN : NX \\ \hline MN^3 : NX^3 &= MN : NT \end{aligned}$$

(η) Weil $V = AF^2 (2DG + AF)$

und $W = DG^2 (2AF + DG)$

so folgt leicht $V : AF^3 = (2DG + AF) : AF$

$W : DG^3 = (2AF + DG) : DG$

Nun war $AF : DG = MN : NX$

also auch $AF : 2DG = MN : 2NX$

und $(2DG + AF) : AF = (2NX + MN) : MN$

also $V : AF^3 = (2NX + MN) : MN$

Ferner war $AF : DG = NO : NT$

also ist $(2AF + DG) : DG = (2NO + NT) : NT$

mithin $W : DG^3 = (2NO + NT) : NT$,

Verbindet man hiemit die Proportion:

$$AF^3 : DG^3 = MN^3 : NX^3 = MN : NT,$$

so erhält man $V : AF^3 : DG^3 : W = (2NX + MN) : MN : NT : (2NO + NT)$.

Es ist aber $FK = \frac{2}{5} FG$, also:

$$\frac{FG : FK = (5MN + 5NT + 10NX + 10NO) : (2MN + 2NT + 4NX + 4NO)}{FG : FI = (5MN + 5NT + 10NX\ 10NO) : (2MN + 4NX + 6NO + 3NT)}\ (\vartheta)$$

Da nun die vier Linien MN, NX, NO, NT einander stetig proportionirt sind; da ferner:

$$NT : MT = IR : \tfrac{3}{5} FG = IR : \tfrac{3}{5} MO$$

und da endlich:

$$(2MN + 4NX + 6NO + 3NT) : (5MN + 5NT + 10NX + 10NO) = IF : FG = IF : MO,$$

so ist nach dem Vorherigen (S. 9.) $RF = \frac{2}{5} MN = \frac{2}{5} FB$. Mithin ist R der Schwerpunkt des Abschnitts ABC (ι)

Es sei ferner Q der Schwerpunkt des Abschnitts DBE; dann wird der Schwerpunkt des abgestumpften Abschnitts ADEC am Ende derjenigen Verlängerung der Linie QR liegen, die sich zu QR verhält, wie der abgeschnittene Theil zu dem Reste (I. S. 8.). Der Punkt I ist dieser Punkt. Weil nämlich $BR = \frac{3}{5} FB$
und $BQ = \frac{3}{5} GB$ ($\varkappa$)

so ist $BR - BQ = QR = \frac{3}{5} FG$

Da nun *Absch.* ADEC : *Absch.* DBE = MT : NT

$MT : NT = \frac{3}{5} FG : IR = QR : IR$

so ist *Absch.* ADEC : *Absch.* DBE = QR : IR

Nun ist R der Schwerpunkt des ganzen Abschnitts, Q aber des Abschnitts DBE; mithin erhellet, dafs auch der Punkt I der Schwerpunkt des Abschnitts ADEC ist.

(ϑ) Wenn nämlich $a : b = c : d$
und $a : \beta = c : \delta$

so ist auch $a : (b + \beta) = c : (d + \delta)$

(ι) Es ist nämlich $RF = \frac{2}{5} FB = \frac{2}{5} (RF + BR)$
d. h. $\frac{3}{5} RF = \frac{2}{5} BR$
mithin $\frac{3}{2} RF = BR$ (Vgl. S. 8)

($\varkappa$) Es ist $BR = FB - RF = FB - \frac{2}{5} FB = \frac{3}{5} FB$, und weil Q der Schwerpunkt des Abschnitts DBE ist, so hat man zugleich $BQ = \frac{3}{5} GB$.

Von der Kugel und dem Cylinder.

Erstes Buch.

Archimedes grüfst den Dositheus.

Schon vormals habe ich dir die Ergebnisse meiner Untersuchungen samt ihren Beweisen zugesandt; z. B. dafs jeder von einer geraden Linie und einer Parabel begränzte Abschnitt vier Drittheilen eines Dreiecks gleich sei, welches einerlei Grundlinie und gleiche Höhe mit dem Abschnitt habe. Gegenwärtig nun habe ich die Beweise folgender Lehrsätze ausgearbeitet, auf die ich gefallen bin.

1) dafs die Oberfläche einer Kugel (α) dem Vierfachen ihres Normalkreises gleich sei;

2) dafs die Oberfläche eines Kugelabschnitts (β) so grofs sei, als ein Kreis, dessen Halbmesser einer geraden Linie vom Scheitel des Abschnitts bis an den Umfang des Grundkreises gleich ist;

3) dafs jeder Cylinder, welcher zur Grundfläche einen Normalkreis der Kugel, zur Höhe aber den Durchmesser dieser Kugel hat, anderthalbmal so grofs sei, als die Kugel; und seine Oberfläche (γ) auch anderthalbmal so grofs, als die der Kugel.

Diese Eigenschaften lagen zwar ihrer Natur nach schon vorher in den genannten Figuren, aber sie waren von denen nicht erkannt, welche vor mir geometrische Lehrsätze ausgeforscht haben; und doch wird Jeder ihre Wahrheit einsehen, welcher an diesen Figuren die Beweise mit den Lehrsätzen selbst vergleichen will. Eben so verhält es sich mit vielen der von Eudoxus über die Körper aufgefundenen Sätze, die Beifall gefunden haben; z. B. dafs jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma sei, welches mit ihr dieselbe Grundfläche und

---

(Vorr. α) Diese Oberfläche soll in Zukunft die Sphäre heifsen. Der Satz selbst steht I, 35.

(β) Diese Oberfläche nennt man gewöhnlich die Kalotte oder Haube. Der Satz ist I, 48. 49.

(γ) Die gekrümmte Oberfläche eines runden Körpers nennt man gewöhnlich den Mantel derselben. Hier ist der Mantel samt beiden Grundflächen zu verstehen. Der Satz ist I, 37.

gleiche Höhe hat; — ferner daſs jeder Kegel der dritte Theil eines Cylinders von derselben Grundfläche und Höhe des Kegels sei. Obgleich auch dieses wesentlich schon vorher in den betreffenden Figuren lag, so hat es doch die ganze Menge der sonst achtungswerthen Geometer vor Eudoxus nicht erkannt, kein Einziger entdeckt.

Es sei nun Jedem freigestellt, der es vermag, diese Untersuchungen zu prüfen. Zwar wäre zu wünschen gewesen, ich hätte sie noch bei Konons Leben herausgegeben; denn dieser würde meines Erachtens am besten vermogt haben, einen Ausspruch darüber zu thun. Weil ich indessen doch für gut halte, sie auch Anderen mitzutheilen, die in der Mathematik heimisch sind, so übersende ich sie dir mit den Beweisen, welche diejenigen weiter prüfen mögen, die sich mit mathematischen Gegenständen beschäftigen. Lebe wohl.

Zuerst setze ich die Erklärungen und Annahmen zu den Beweisen meiner Sätze hieher.

Erklärungen.

1) Es giebt begränzte gebogene Linien in einer Ebene, welche entweder ganz auf einer Seite derjenigen geraden Linien sich befinden, die ihre Endpunkte verbinden, oder doch keinen ihrer Theile auf der andern Seite derselben haben. (α)

2) Nach einerlei Seite hohl nenne ich eine Linie, wenn zwischen jeden zwei willkührlich angenommenen Punkten derselben die geraden Verbindungslinien entweder sämtlich auf einerlei Seite der gebogenen fallen, oder theils auf einerlei Seite, theils in sie selbst, keine aber auf die andere Seite. (β)

3) Eben so giebt es begränzte Flächen, welche zwar nicht in einer Ebene liegen, jedoch ihre Gränzen in einer Ebene haben, und welche entweder ganz auf einerlei Seite der Ebene liegen, in welcher die Gränzen sich befinden, oder doch keinen ihrer Theile auf der andern Seite haben.

4) Nach einerlei Seite hohl nenne ich aber eine Fläche, wenn zwischen jeden zwei willkührlich angenommenen Punkten derselben die geraden Verbindungslinien entweder sämtlich auf einerlei Seite der Fläche fallen, oder theils auf einerlei Seite, theils aber in sie selbst, keine jedoch auf die andere Seite.

5) Einen körperlichen Ausschnitt nenne ich diejenige Figur, welche entsteht, wenn eine Kugel von einem Kegel geschnitten wird, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, und die der Mantel des Kegels samt dem innerhalb des Kegels befindlichen Theil der Kugelfläche begränzt.

6) Eine körperliche Raute nenne ich diejenige körperliche Figur, welche entsteht,

---

(Erklr. α) Gebogene Linien nennt Archimedes sowohl die krummen, als die aus geraden, oder aus geraden und krummen zusammengesetzten.

(β) An jeder Linie, sie sei gerade oder gebogen, lassen sich zwei Seiten unterscheiden, weil keine Linie ohne die zwei Flächenräume gedacht werden kann, welche sie von einander trennt. Befindet sich die trennende Linie in einer Ebene, und sind die dadurch getrennten Ebenenräume durch nichts anderes zu unterscheiden, als durch ihre entgegengesetzte Lage, so ist die Linie gerade. Die Buchstaben CDEFGHI stehen an einer Seite der gebogenen Linie AB, die Buchstaben KLMNOPQ an der andern. F. 51. a wenn zwei Kegel auf einer gemeinschaftlichen Grundfläche stehen, ihre Spitzen aber auf entgegengesetzten Seiten dieser Grundfläche, und ihre Axen in einerlei geraden Linie sich befinden.

Folgendes wird angenommen.

Annahmen.

1) Von den Linien, welche einerlei Endpunkte haben, ist am kürzesten die gerade Linie. (α)

2) Von andern Linien mit einerlei Endpunkten in einer Ebene sind je zwei solche ungleich, welche nach einerlei Seite hohl sind, wenn deren eine, mit der geraden die Gränzen verbindenden, die andern entweder ganz umschliefst, oder nur zum Theil, und zum Theil in sie fält. Auch ist die umschlossene die kleinere. (β)

3) Eben so ist von den Flächen, welche einerlei Gränzen haben, wenn letztere in einer Ebene liegen, am kleinsten die ebene.

4) Von den übrigen Flächen mit einerlei Begränzung, wofern diese in einer Ebene liegt, sind je zwei solche ungleich, welche nach einerlei Seite hohl sind, wenn deren eine entweder ganz umschlossen wird von der andern und von der Ebene, welche mit ihr einerlei Begränzung hat, oder nur zum Theil umschlossen ist, zum Theil aber mit ihr zusammenfält; und zwar ist die umschlossene die kleinere.

5) Auch ist bei ungleichen Linien, Flächen und Körpern der Ueberschufs des gröfsern über das kleinere so grofs, dafs er durch mehrmalige Zusammenfügung zu sich selbst gröfser werden kann, als jede gegebene Gröfse von der Art der verglichenen. (γ)

Diefs vorausgesetzt.

Satz 1.

Wenn ein Vieleck in einem Kreise beschrieben wird, so ist offenbar der Umfang des eingeschriebenen Vielecks kleiner, als der Umfang des Kreises.

Denn jede Seite des Vielecks ist kleiner, als der von ihr abgeschnittene Kreisbogen (*Annahme* 1.)

(Annahm. α) Man hat diese Annahme des Arch. häufig für eine Erklärung der geraden Linie ausgegeben, da sie doch nur eine Eigenschaft derselben ausspricht. Nach meiner Ansicht trifft dieser Vorwurf alle Erklärungen der geraden Linie, mit Ausnahme der, welche in der vorigen Anmerkung aufgestellt ist. Aehnliches gilt von Annahme 3.

(β) Archimedes war genöthigt, diese Annahme ohne Beweis hinzustellen, wofern er den Gebrauch des Unendlichen vermeiden wollte. Alle Versuche, den Beweis ohne Einmischung des Unendlichen zu geben, sind gescheitert. Dieselbe Bemerkung gilt für Annahme 4. (Vgl. Geom. I, §§. 273. 292. II, §§. 244. 266. 271.)

(γ) Hiedurch wird nichts anderes ausgesagt, als: Jede gerade Linie (Fläche, Körper) kann durch Wiederholung gröfser werden, als irgend eine angebbare Linie (Fläche, Körper). Euklides spricht eine solche Annahme nirgend als eigenen Satz aus, allein der erste Satz des zehnten Buchs der Elemente beruhet darauf. Ich bemerke diefs deshalb, weil Peyrard nach Rivaults Vorgange die Sache umkehrt.

Satz 2.

Wenn ein Vieleck um einen Kreis beschrieben wird, so ist der Umfang des umschriebenen Vielecks gröfser, als der Umfang des Kreises.

Es sei das um den Kreis beschriebene Vieleck gegeben. Ich behaupte, dafs der Umfang des Vielecks gröfser sei, als der Umfang des Kreises. F. 52.

Weil nämlich

$$\left.\begin{array}{l} BA + AL > BL \\ BC + CD > BD \\ LK + KH > LH \\ HG + GF > HF \\ FE + ED > FD \end{array}\right\} \textit{Annahme 2.}$$

so folgt, dafs der ganze Umfang des Vielecks gröfser sei, als der Umfang des Kreises.

Satz 3.

Wenn zwei ungleiche Gröfsen gegeben sind, so lassen sich zwei ungleiche gerade Linien finden, deren gröfsere zur kleineren in einem kleineren Verhältnisse steht, als die gröfsere Gröfse zur kleineren.

Die beiden ungleichen Gröfsen sollen AB und D sein, AB die gröfsere. Ich behaupte, man könne zwei ungleiche gerade Linien der gedachten Bedingung gemäfs finden. F. 53.

Man setze $BC = D$, und eine willkührliche gerade Linie FG. Wird nun AC gewissemal zusammengesetzt, so wird die Summe gröfser als D werden (*Annahme* 5.). Es sei daher AC mehrfach genommen gleich AH, und ein wie Vielfaches von AC die Linie AH ist, ein so Vielfaches sei FG von EG.

$$\begin{array}{rl} \text{Also ist} & AH : AC = FG : GE \\ \text{oder} & GE : FG = AC : AH \\ \text{Nun ist} & AH > D;\ \text{d. h. } AH > BC \\ \text{mithin ist} & AC : AH < AC : BC \\ \text{folglich} & EF : FG < AB : BC\ (\alpha) \\ \text{oder} & EF : FG < AB : D \end{array}$$

Es sind also zwei ungleiche gerade Linien der erwähnten Bedingung gemäfs gefunden, d. h. die gröfsere steht zur kleineren in einem kleineren Verhältnisse, als die gröfsere Gröfse zur kleineren.

Satz 4.

Wenn zwei ungleiche Gröfsen und ein Kreis gegeben sind, so läfst sich ein Vieleck in dem Kreise, und ein anderes um denselben dergestalt beschreiben, dafs die Seite des äufsern

---

(S. 3. α) Weil $AC : AH < AC : BC$ und $AC : AH = GE : FG$,

so ist $GE : FG < AC : BC$, d. h. $\frac{GE}{FG} < \frac{AC}{BC}$

mithin $\frac{GE + FG}{FG} < \frac{AC + BC}{BC}$, oder $\frac{EF}{FG} < \frac{AB}{BC}$

d. h. $EF : FG < AB : BC$

Vielecks zu der Seite des innern in einem kleinern Verhältnisse steht, als die gröſsere Gröſse zu der kleineren.

F. 54. Die beiden Gröſsen A, B sollen gegeben sein samt dem vorausgesetzten Kreise. Ich behaupte, daſs der Foderung genügt werden könne.

Man suche zwei gerade Linien H und KL, deren gröſsere H sein soll; so daſs $H : KL < A : B$ (S. 3.). Dann werde an den Punkt L der Linie KL eine Linie LM rechtwinklig angelegt, und von K aus ziehe man $KM = H$, was möglich ist. (α) Demnächst ziehe man in dem Kreise zwei Durchmesser CE und DF rechtwinklig zu einander. Theilt man nun den Winkel DGC in Hälften, die Hälfte wiederum, und so fortan, so kommt man auf einen Winkel, der kleiner ist, als das Doppelte des Winkels LKM. Dieser Winkel sei NGC, und man ziehe NC, so ist NC die Seite eines gleichseitigen Vielecks. Denn weil der Winkel NGC den rechten Winkel genau miſst, so miſst auch der Bogen NC den Bogen CD, den vierten Theil der Kreislinie, mithin miſst er auch die ganze Kreislinie. Also ist augenscheinlich NC die Seite eines gleichseitigen Vielecks.

Man theile ferner den Winkel NGC in Hälften durch GO, ziehe durch O die Berührungslinie POQ des Kreises, und verlängere GN, GC bis Q, P. Dann ist PQ die Seite eines äuſsern gleichseitigen Vielecks, ähnlich offenbar dem innern, dessen Seite NC ist.

$$\begin{array}{rl} \text{Weil nun} & NGC < 2\,LKM \\ \text{und} & NGC = 2\,TGC \\ \hline \text{so ist} & TGC < LKM \end{array}$$

Ferner sind bei L und bei T rechte Winkel, also ist

$$\begin{array}{rl} & MK : LK > CG : GT \ (\beta) \\ \text{Weil aber} & CG = GO \\ \hline \text{so ist} & GO : GT < MK : LK \\ \text{d. h.} & QP : NC < MK : LK \\ \text{Nun war} & MK : LK < A : B \\ \hline \text{also ist} & QP : NC < A : B \end{array}$$

und weil QP die Seite eines äuſsern, NC aber die Seite eines innern Vielecks ist, so ist das Aufgegebene gefunden.

Satz 5.

Es gebe wiederum zwei ungleiche Gröſsen und einen Kreisausschnitt; so läſst sich um den Ausschnitt ein Vieleck verzeichnen, und ein anderes darin, so daſs die Seite des äuſsern zur Seite des inneren in einem kleineren Verhältnisse steht, als die gröſsere zur kleineren Gröſse.

F. 55. Die beiden ungleichen Gröſsen mögen E und F sein, E die gröſsere, und ein Kreis

---

(S. 4. α) Weil eben $H > KL$ ist.

(β) Macht man nämlich $LKI = TGC$, so muſs I zwischen L und M fallen; dann ist $\triangle LKI \sim \triangle TGC$, also

$$KI : LK = CG : GT$$

Nun ist $KI < MK$, folglich $MK : LK > CG : GT$

ABC mit dem Mittelpunkte D, woran der Ausschnitt ADB stehe. Nun soll man zu dem Ausschnitt ABD sowohl ein äufseres als ein inneres Vieleck mit gleichen Seiten, ausgenommen AD, BD, dergestalt beschreiben, dafs der Foderung genüget werde.

Man finde zwei ungleiche gerade Linien H und KL, deren gröfsere H sein soll, so dafs $H : KL > E : F$; was allerdings möglich ist (S. 3.). Zugleich ziehe man durch den Punkt L die Linie LM rechtwinklig an KL und lege daran die Hypotenuse $KM = H$. Diefs ist thunlich, weil $H > KL$. Wird nun ADB in Hälften getheilt, die Hälfte wiederum in Hälften, und so fortan, so kommt man auf einen Winkel, welcher kleiner ist, als 2 LKM. Dieser Winkel sei ADG; also ist AG die Seite eines in dem Ausschnitte beschriebenen Vielecks. Halbtheilt man dann ADG durch DN, und zieht durch N die Berührungslinie PNO, so wird diefs die Seite eines um den Ausschnitt beschriebenen Vielecks sein, ähnlich dem eben erwähnten. Ganz so demnach, wie vorhin, ist $PO : AG < E : F$.

Satz 6.

Ein Kreis und zwei ungleiche Gröfsen sollen gegeben sein; dann läfst sich ein Vieleck um den Kreis und ein anderes darin beschreiben, so dafs das äufsere zu dem innern in einem kleineren Verhältnisse steht, als die gröfsere zur kleineren Gröfse.

Der Kreis sei A, und die beiden ungleichen Gröfsen E, F; die gröfsere E. Nun soll ein inneres und ein äufseres Vieleck dergestalt verzeichnet werden, dafs das Gefoderte geleistet werde. F. 56.

Ich setze zwei ungleiche gerade Linien C, D, deren gröfsere C sein soll, so dafs $C : D < E : F$ (S. 3.). Ist ferner G zur mittleren Proportionale zwischen C, D, gemacht, so ist $C > G$. Man beschreibe nun um und in den Kreis ein Vieleck, so dafs die Seite des äufsern zur Seite des innern ein kleineres Verhältnifs habe, als $C : G$, wie wir gelehrt haben (S. 4.). Dann ist also auch das zwiefache Verhältnifs kleiner als das zwiefache. Es ist aber das zwiefache Verhältnifs der einen Seite zu der andern das Verhältnifs des einen Vielecks zu dem andern, denn diese sind ähnlich. Auch ist

$$C^2 : G^2 = C : D \ (\alpha), \text{ folglich}$$

$$\textit{äufs. Vieleck} : \textit{inn. Vieleck} < C : D$$

und hiernach um desto mehr

$$\textit{äufs. Vieleck} : \textit{inn. Vieleck} < E : F.$$

Folgerung 1. Auf ähnliche Weise wird man zeigen können, wenn zwei ungleiche Gröfsen und ein Ausschnitt gegeben sind, dafs es möglich sei, ein Vieleck darum und ein anderes ähnliches darin zu beschreiben, so dafs das äufsere zu dem innern in kleinerem Verhältnisse stehe, als die gröfsere zur kleineren Gröfse.

Folgerung 2. Auch erhellet, wenn ein Kreis oder ein Ausschnitt und irgend ein Flächenraum gegeben sind, dafs man im Stande sei, in den Kreis oder den Ausschnitt, und

---

(S. 6. α) Weil nämlich angenommen worden, dafs

$$C : G = G : D, \text{ also } G^2 = CD$$

so ist $C^2 : G^2 = G^2 : D^2 = C \cdot D : D^2 = C : D.$

so fort in die umher übrigbleibenden Abschnitte, gleichseitige Vielecke (β) einzuzeichnen; so dafs die von dem Kreise oder Ausschnitte zurückbleibenden Abschnitte weniger betragen, als der vorgelegte Flächenraum. Denn diefs mufs schon beim ersten Unterrichte dargethan sein. (γ)

Satz 7.

Man mufs aber nachweisen, dafs es gleichfalls möglich sei, wenn ein Kreis oder Ausschnitt und ein Flächenraum gegeben sind, ein Vieleck um den Kreis oder Ausschnitt dergestalt zu beschreiben, dafs die übrigbleibenden Abschnitte der Umzeichnung kleiner sind, als der gegebene Flächenraum.

Wenn diefs vom Kreise erwiesen ist, so mag es verstattet sein, einen ähnlichen Schlufs auf den Ausschnitt zu machen.

F. 57. Gegeben sei der Kreis A und irgend ein Flächenraum B; so ist allerdings möglich, um den Kreis ein Vieleck so zu beschreiben, dafs die zwischen dem Kreise und Vieleck übrigbleibenden Abschnitte kleiner sind, als B; denn weil hier zwei ungleiche Gröfsen vorhanden sind, nämlich die Summe des Flächenraums und des Kreises als gröfsere, der Kreis aber als kleinere, so beschreibe man um den Kreis ein Vieleck, und ein anderes darin, so dafs

das *äufsere Vieleck* : *innern Vieleck* $<$ (A + B) : A (S. 6.)

dieses äufsere Vieleck ist nun eben dasjenige, dessen umliegende Reste kleiner sein werden, als der Flächenraum B.

Wenn nämlich

das äufsere Vieleck : *innern Vieleck* $<$ (A + B) : A

wenn ferner A $>$ *das innere Vieleck*; so ist um desto mehr

das äufsere Vieleck : A $<$ (A + B) : A; mithin auch

(*äufs. Vieleck* − A) : A $<$ B : A (α)

also sind die äufsern Abschnitte kleiner als der Flächenraum B.

Oder so: Weil sich verhält

das äufs. Vieleck : A $<$ (A + B) : A,

so ist gewifs *das äufsere Vieleck* $<$ A + B; demnach aber werden auch die übrigbleibenden Abschnitte kleiner sein, als der Flächenraum B. Aehnlich beim Ausschnitte.

Satz

(β) Gleichseitig werden die Vielecke nur bei ganzen Kreisen, nicht bei Ausschnitten. Archimedes nimt aber auf die vom Mittelpunkte des Kreises ausgehenden Seiten keine Rücksicht, was in S. 5 ausdrücklich bemerkt wurde.

(γ) z. B. in Eukl. XII, 2.

(S. 7. α) Denn wenn zwischen vier Gröfsen a, b, c, d, folgendes Verhältnifs Statt hat.

$$a : b < c : d, \text{ d. h. } \frac{a}{b} < \frac{c}{d},$$

so ist auch $$\frac{a-b}{b} < \frac{c-d}{d}, \text{ d. h. } (a-b) : b < (c-d) : d$$

Satz 8.

Wenn in einem gleichschenkligen Kegel eine Pyramide mit gleichseitiger Grundfläche beschrieben ist, so ist deren Oberfläche, ohne die Grundfläche, einem Dreieck gleich, dessen Grundlinie so groſs als der Umfang der Grundfläche, dessen Höhe aber die von der Spitze auf eine Seite der Grundfläche gefällte senkrechte Linie ist.

Es soll ein gleichschenkliger Kegel gegeben sein, dessen Grundfläche der Kreis ABC ist; in demselben werde eine Pyramide beschrieben, deren gleichseitige Grundfläche das △ABC ist. Ich behaupte, daſs die Oberfläche derselben ohne die Grundfläche dem erwähnten Dreieck gleich sei. F. 58.

Denn weil der Kegel gleichschenklig, und die Grundfläche der Pyramide gleichseitig ist, so sind die Höhen der die Pyramide begränzenden Dreiecke unter sich gleich. Zur Grundlinie haben diese Dreiecke die Linien AB, BC, AC, und dabei die angegebene Höhe. Demnach sind diese Dreiecke zusammen gleich einem Dreieck, dessen Grundlinie $= AB + BC + AC$, dessen Höhe aber die gedachte gerade Linie ist. Dieſs aber macht eben die Oberfläche der Pyramide ohne die Grundfläche.

Deutlicher ist ein anderer Beweis:

Gegeben sei ein gleichschenkliger Kegel, dessen Grundfläche der Kreis ABC, und dessen Spitze der Punkt D ist; auch sei in dem Kegel eine Pyramide beschrieben, die zur gleichseitigen Grundfläche das △ABC hat, und es sei DA, DC, DB gezogen. F. 59.

Ich behaupte, daſs die Dreiecke $ADB + ADC + BDC$ zusammen einem Dreieck gleich sind, dessen Grundlinie dem Umfange des △ABC, dessen Höhe aber der senkrechten Linie von D auf BC gleich ist.

Denn man fälle die senkrechten DK, DL, DM, so sind diese unter sich gleich; auch sei ein Dreieck EFG angenommen, dessen Grundlinie EF dem Umfange des △ABC, dessen Höhe GH aber der senkrechten DL gleich ist. Weil nun

Rechteck $BC \times DK = 2\triangle DBC$
- $AB \times DL = 2\triangle ABD$
- $AC \times DM = 2\triangle ADC$

so ist das Rechteck unter dem Umfange des △ABC und der senkrechten DL, d. h. $EF \times GH = 2(\triangle ADB + \triangle BDC + \triangle ADC)$. Es ist aber auch $EF \times GH = 2\triangle EFG$; also $\triangle EFG = \triangle ADB + \triangle BDC + \triangle ADC$.

Satz 9.

Wenn um einen gleichschenkligen Kegel eine Pyramide beschrieben wird, so ist die Oberfläche derselben, ohne die Grundfläche, einem Dreieck gleich, dessen Grundlinie gleich dem Umfange der Grundfläche, und dessen Höhe die Seite des Kegels ist.

Es sei ein Kegel gegeben, dessen Grundfläche der Kreis ABC ist, und eine Pyramide so darum beschrieben, daſs die Grundfläche derselben, d. h. das Vieleck DEF ein äuſseres zu dem Kreise ABC sei. Ich behaupte, daſs die Oberfläche der Pyramide, ohne die Grundfläche, dem erwähnten Dreieck gleich sei. F. 60.

Denn weil die Axe des Kegels senkrecht steht auf der Grundfläche, d. i. auf dem

Kreise A B C, und die Halbmesser des Kreises nach den Berührungspunkten senkrecht stehen auf den Berührungslinien, so werden auch die Verbindungslinien der Spitze mit den Berührungspunkten senkrecht auf DE, FE, FD stehen. (α) Diese gedachten senkrechten Linien GA, GB, GC sind demnach unter sich gleich als Seiten des Kegels. Nun werde das ΔHKL angenommen, so daſs HK dem Umfange des ΔDEF, die senkrechte LM aber der Linie GA gleich sei. Weil nun

$$\begin{array}{ll} \textit{Rechteck} & DE \times AG = 2\,\Delta EDG \\ \text{-} & DF \times BG = 2\,\Delta DFG \\ \text{-} & EF \times CG = 2\,\Delta EGF \end{array}$$

so ist auch das Rechteck $HK \times AG$, d. h. $HK \times LM = 2\,(\Delta EDG + \Delta DFG + \Delta EGF)$.

Zugleich ist $HK \times LM = 2\,\Delta LKH$; also ist die Oberfläche der Pyramide, ohne die Grundfläche, einem Dreieck gleich, das zur Grundfläche den Umfang des ΔDEF, zur Höhe aber die Seite des Kegels hat. (β)

Satz 10.

Wenn man in einem Kreise, der die Grundfläche eines gleichschenkligen Kegels ist, eine Sehne zieht, und von deren Endpunkten gerade Linien an die Spitze des Kegels, so wird das durch die Sehne und die zur Spitze geführten geraden Linien eingeschlossene Dreieck kleiner sein, als der Theil des Kegelmantels, welcher zwischen den an die Spitze gezogenen Linien liegt.

F. 61. Die Grundfläche eines gleichschenkligen Kegels sei der Kreis A B C, die Spitze der Punkt D. Eine Sehne A C soll im Kreise gezogen, und die Spitze mit den Punkten A, C durch die geraden Linien AD, DC verbunden sein. Ich behaupte, daſs das ΔADC kleiner sei, als der Theil des Kegelmantels zwischen AD, DC.

Man theile den Bogen ABC bei B in Hälften und ziehe die Verbindungslinien AB, BC, BD, dann wird gewiſs $\Delta ABD + \Delta BDC > \Delta ADC$ sein. (α) Demnach sei

---

(S. 9. α) Geom. II. §. 113, 1.

(β) Es ist zu bemerken, daſs Arch. im vorigen Satze ausdrücklich ein gleichseitiges Vieleck als Grundfläche bedingt, hier aber nicht; weil ein solches wohl dort, nicht aber hier erfoderlich ist.

F. 61. u. 61. a. (S. 10. α) Man ziehe DG senkrecht auf AC aus D, so ist

$$\begin{array}{rl} & ADC = 2\,ADG, \\ \text{ferner ist} & ADB + BDC > ADC \text{ (Enkl. XI, 20.)} \\ & BDC = ADB \\ \hline & 2\,ADB > ADC, \text{ d. h. } ADB > ADG \\ \text{auch ist} & ADB + ADG < 2R \text{ (Enkl. XI, 21.)} \end{array}$$

Man lege demnach die beiden Winkel ADB, ADG in einerlei Ebene an einander mit dem gemeinschaftlichen Schenkel DA, so daſs $ADB = adb$, $ADG = adn$ wird, beschreibe aus d mit da den Bogen ban, ziehe ba und fälle aus a das Perpendikel ag auf dn, so ist $\Delta ADB \cong \Delta adb$, und $\Delta ADG \cong \Delta adg$, auch ist $adb + adn < 2R$. Zieht man nun bg, so ist

$$\begin{array}{c} \Delta bdk : \Delta kdg = bk : kg \\ \Delta bka : \Delta akg = bk : kg \\ \hline \Delta adb : \Delta adg = bk : kg \end{array}$$

$\Delta ABD + \Delta BCD - \Delta ADC = H$. Es ist nun H entweder kleiner als die Summe der Kreisabschnitte $AEB + BFC$, oder nicht.

1) Es sei H nicht kleiner. Weil es hier nun zwei Flächen giebt, nämlich das Stück des Kegelmantels zwischen AD, DB samt dem Kreisabschnitte AEB, und die Fläche des ΔADB, welche beide den Umfang des ΔADB zu gemeinschaftlicher Gränze haben; so ist die umschliefsende gröfser als die umschlossene (*Annahme* 3.). Demnach ist der zwischen AD, DB befindliche Theil des Kegelmantels mit dem Abschnitte AEB zusammen gröfser, als ΔABD. Eben so ist auch der zwischen BD, DC befindliche Theil mit dem Abschnitte BFC zusammen gröfser, als ΔBDC. Also ist der ganze zwischen AD, DC liegende Theil des Kegelmantels mit dem Flächenraume H zusammen gröfser, als die genannten Dreiecke.

Es ist aber $\Delta ADB + \Delta BDC = \Delta ADC + H$ (β)

Nimmt man auf beiden Seiten H weg, so ergiebt sich folglich:

der Kegelmantel zwischen AD, DC $> \Delta ADC$.

2) Es sei H kleiner, als die Abschnitte $AEB + BFC$. Durch Halbtheilung der Bogen AB, BC, und durch fortgesetzte Halbtheilung ihrer Hälften bleiben Abschnitte zurück, deren Summe kleiner ist, als der Flächenraum H (S. 6. Folg. 2.). Es mögen diefs die Abschnitte über den geraden Linien AE, EB, BF, FC sein, und man ziehe DE, DF. Dann ist wiederum eben so der Kegelmantel zwischen AD, DE, mit dem Abschnitte über AE zusammen, gröfser als ΔADE; der Theil zwischen ED, DB, mit dem Abschnitte über EB zusammen, gröfser als ΔEDB; also auch der Mantel zwischen AD, DB, mit den Abschnitten über AE, EB, zusammen, gröfser als $\Delta ADE + \Delta EBD$.

Da nun bewiesen ist, dafs $\Delta AED + \Delta DEB > \Delta ABD$,

so ist um desto mehr *der Mantel zwischen* AD, DB + *Absch.* AE + *Absch.* EB $> \Delta ADB$.

Aus denselben Gründen ist folglich auch

der Mantel zwischen BD, DC + *Absch.* BF + *Absch.* FC $> \Delta BDC$

folglich: *der Mant. zwischen* AD, DC + *Abs.* AE + *Abs.* EB + *Abs.* BF + *Abs.* FC $> \Delta ADB + \Delta BDC$

Es ist aber $\Delta ADB + \Delta BDC = \Delta ADC + H$

und *Absch* AE + *Abs.* EB + *Abs.* BF + *Abs.* FC $< H$

mithin ist der übrigbleibende Mantel zwischen AD, DC $> \Delta ADC$.

Satz II.

Wenn an einen Kreis, der die Grundfläche eines Kegels ist, in einerlei Ebene mit dem Kreise Berührungslinien gezogen werden, die sich treffen, aus den Berührungspunkten und den

---

Halbtheilt man hierauf bdn, so trifft die theilende Linie zwischen db und da, weil $bda > adn$; sie sei daher dp, dann ist $bp : pg = db : dg$ (Eukl. VI, 3.)

Da nun $db > dg$, so ist auch $bp > pg$, mithin um desto mehr $bk > kg$, folglich auch $\Delta adb > \Delta adg$, d. h.

$$\Delta ADB > \Delta ADG$$

Eben so findet man $\Delta BDC > \Delta GDC$

mithin $\Delta ADB + \Delta BDC > \Delta ADC$

(β) Mithin auch *der Kegelmantel zwischen* AD, DC, + H $> \Delta ADC + H$

Durchschnittspunkten aber gerade Linien nach der Spitze des Kegels; so ist die Summe der Dreiecke, welche durch die berührenden und durch die nach der Spitze des Kegels geführten geraden Linien begränzt werden, gröſser als der Theil des Kegelmantels zwischen letzteren.

Es sei ein Kegel gegeben, dessen Grundfläche der Kreis ABC, dessen Spitze der Punkt E ist; man ziehe in der Ebene des Kreises die Berührungslinien AD, DC an ihn, und von dem Punkte E, als dem Scheitel des Kegels, führe man nach A, D, C die Linien EA, ED, EC; so behaupte ich, daſs die Summe der Dreiecke $ADE + DEC$ gröſser sei, als der Theil des Kegelmantels zwischen den geraden Linien AE, CE und dem Bogen ABC. Man ziehe die Berührungslinie GBF, welche zugleich der Linie AC parallel ist, indem der Bogen ABC in B gehalbtheilt worden. (α) Von G, F, ziehe man die Verbindungslinien GE, FE nach E.

$$\begin{array}{rl} \text{Weil nun} & DG + DF > GF \\ & GA + FC = GA + FC \\ \hline \text{so ist} & AD + DC > GF + GA + FC \end{array}$$

Auch sind AE, EB, EC, Seiten des Kegels, also gleich, da der Kegel gleichschenklig ist. Sie sind zugleich Perpendikel, wie in einem Lehnsatze bewiesen worden. (β)

Es ist aber $\Delta AED + \Delta DCE > \Delta AGE + \Delta GEF + \Delta FEC$

denn es ist $AG + GF + FC < CD + DA$, und die Höhen sind gleich; (es fält nämlich in die Augen, daſs eine vom Scheitel des geraden Kegels bis zum Berührungspunkte gezogene gerade Linie auf der berührenden senkrecht steht.)

Es sei demnach $\Delta AED + \Delta DCE - H = \Delta AEG + \Delta GEF + \Delta FEC$, wo denn der Flächenraum H entweder kleiner ist, als die äuſsern Abschnitte $AGB + BFC$, oder nicht kleiner.

1) Es sei H nicht kleiner. Weil hier zusammenhangende Oberflächen vorhanden sind, die eine nämlich die Oberfläche der Pyramide, deren Grundfläche das Trapezium GACF, und deren Spitze der Punkt E ist, die andere der zwischen AE, EC befindliche Theil des Kegelmantels samt dem Abschnitt ABC, und beide den Umfang des ΔAEC zur gemeinschaftlichen Gränze haben; so erhellet, daſs die Oberfläche der Pyramide ohne das ΔAEC gröſser ist, als jener Theil des Kegelmantels samt dem Abschnitt ABC (*Annahme* 4.). Man nehme den gemeinschaftlichen Abschnitt ABC weg, so sind die Reste, nämlich

$$\Delta AGE + \Delta GEF + \Delta FEC + \textit{Absch. } AGB + \textit{Absch. } BFC > \textit{Mantel zwischen } AE, EC.$$

Es ist aber der Flächenraum H nicht kleiner, als die äuſsern Abschnitte $AGB + BFC$; also ist um desto mehr

$$\Delta AGE + \Delta GEF + \Delta FEC + H > \textit{Kegelmantel zwischen } AE, EC.$$

Man hat aber

$$\Delta AGE + \Delta GEF + \Delta FEC + H = \Delta AED + \Delta DEC,$$

folglich $$\Delta AED + \Delta DEC > \textit{Kegelmantel zwischen } AE, EC.$$

2) Es sei H kleiner als die Summe der äuſsern Abschnitte. Beschreibt man dann fortwährend Vielecke um die Kreisabschnitte, indem man auf einerlei Weise die

---

(S. 11. α) Vgl. Geom. I. §. 239.

(β) Dieser Lehnsatz ist in dem Beweise zu S. 9. enthalten.

neu erhaltenen Bogen halbtheilt, und Berührungslinien zieht, so wird man auf äufsere Abschnitte kommen, deren Summe kleiner ist, als H. Diefs sei geschehen, so dafs

$$AMK + KNB + BOL + LPC < H,$$

und man ziehe die Verbindungslinien nach E, so ist wiederum einleuchtend, dafs

$$\Delta AGE + \Delta GFE + \Delta FCE > \Delta AEM + \Delta MEN + \Delta NEO + \Delta OEP + \Delta PEC;$$

denn die Grundlinien betragen bei jenen Dreiecken mehr, als bei diesen, die Höhe aber ist gleich. Ferner ist eben so die Oberfläche der Pyramide, deren Grundfläche das Vieleck AMNOPC, und deren Spitze E ist, nach Abzug des Dreiecks AEC gröfser, als die Summe des Kegelmantels zwischen AE, EC, und des Kreisabschnitts ABC. Wird also von beiden der gemeinschaftliche Abschnitt ABC abgezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{l}\Delta AEM + \Delta MEN + \Delta NEO + \Delta OEP + \Delta PEC \\ + \textit{Absch.}\ AMK + \textit{A.}\ KNB + \textit{A.}\ BOL + \textit{A.}\ LPC\end{array}\right\} > \textit{Kegelmantel zwischen}\ AE,\ EC.$$

der Flächenraum H aber ist gröfser, als die gedachten äufsern Abschnitte, und es ward bewiesen, dafs

$$\Delta AEM + \Delta MEN + \Delta NEO + \Delta OEP + \Delta PEC < \Delta AEG + \Delta GFE + FCE;$$

also ist um desto mehr

$$\Delta AEG + \Delta GFE + \Delta FCE + H = \Delta AED + \Delta EDC > \textit{Kegelmantel zwischen}\ AE,\ EC.$$

Satz 12.

Wenn in dem Mantel eines geraden Cylinders zwei gerade Linien sich befinden, so ist der zwischen diesen liegende Theil des Mantels gröfser, als das Parallelogramm, welches von den in dem Mantel befindlichen geraden Linien und von den Verbindungslinien ihrer Endpunkte begränzt wird.

Es sei ein gerader Cylinder gegeben, dessen eine Grundfläche der Kreis AB, die andere aber der Kreis CD ist, und man ziehe AC, BD. Ich behaupte, dafs der durch die geraden Linien AC, BD abgeschnittene Theil des Kegelmantels gröfser ist, als das Parallelogramm ACDB. F. 63.

Denn man halbtheile jeden der beiden Bogen AB, CD in den Punkten E, F, und ziehe die Verbindungslinien AE, EB, CF, FD. Weil nun AE + EB > AB, und weil die hierauf stehenden Parallelogramme gleiche Höhe haben, so ist

$$AF + BF > ABDC$$

der Unterschied soll durch den Flächenraum G angegeben werden; dann ist G entweder kleiner als die ebenen Abschnitte AE + EB + CF + FD, oder nicht.

1) Es sei G nicht kleiner. Der von AC, BD abgeschnittene Theil des Mantels nebst den Abschnitten AEB + CFD hat zur Gränze das ebene Parallelogramm ABDC; aber auch die Oberfläche, welche aus den Parallelogrammen auf AE, EB, als Grundlinien, bei gleicher Höhe mit dem Cylinder, und aus den Dreiecken AEB, CFD, zusammengesetzt ist, hat dasselbe Parallelogramm ABDC zur Gränze; auch umfafst die eine die andere, und beide sind nach einerlei Seite hohl: folglich ist jener Cylindermantel zwischen AC, BD, nebst den ebenen Abschnitten AEB + CFD, gröfser als die Oberfläche, welche aus den Parallelogrammen

AF + BF und aus den Dreiecken AEB + CFD gebildet wird (*Annahme* 4.). Nimt man die gemeinschaftlichen Dreiecke AEB + CFD. fort, so ist der Rest, nämlich

der Mantel zwischen AC, BD, + *Absch.* AE + *A.* EC + *A.* CF + *A.* FD > AF + BF

Es ist aber AF + BF = ABDC + G;

mithin ist der übrigbleibende Theil des Cylindermantels zwischen AC, BD, gröſser als das Parallelogramm ABDC.

2) Es sei G kleiner, als die Summe der Abschnitte AE + EB + CF + FD. Man halbtheile jeden der Bogen AE, EB, CF, FD in den Punkten H, K, L, M, und ziehe AH, HE, EK, KB, CL, LF, FM, MD. Dadurch wird von der Summe der ebenen Kreisabschnitte AE + EB + CF + FD die Summe der Dreiecke AHE + EKB + CLF + FMD weggenommen, welche nicht kleiner ist, als die Hälfte der Abschnitte. (α) Setzt man dieſs Verfahren immer fort, so kommt man auf Abschnitte, deren Summe kleiner ist als G. Diese Abschnitte sollen durch AH, HE, EK, KB, CL, LF, FM, MD, vorgestellt sein. Dann zeigt man auf dieselbe Weise, daſs die Summe der Parallelogramme auf den Grundlinien AH, HE, EK, KB, und von einerlei Höhe mit dem Cylinder, gröſser ist, als die Summe der Parallelogramme auf den Grundlinien AE, EB, von der Höhe des Cylinders. Weil nun der Theil des Cylindermantels zwischen AC, BD, nebst den Kreisabschnitten AEB + CFD durch das ebene Parallelogramm ACDB begränzt wird, und eben so die Oberfläche, welche aus den Parallelogrammen auf AH, HE, EK, KB, als Grundlinien, bei gleicher Höhe mit dem Cylinder, und aus den geradlinigen Figuren AHEKB + CLFMD zusammengesetzt ist; so ist nach Wegnahme der gemeinschaftlichen Figuren AHEKB + CLFMD der übrigbleibende Cylindermantel zwischen AC, BD, nebst den ebenen Kreisabschnitten AH + HE + EK + KB + CL + LF + FM + MD, gröſser als die Oberfläche, welche aus den Parallelogrammen auf den Grundlinien AH, HE, EK, KB, und von der Höhe des Cylinders, gebildet wird. Die Summe dieser Parallelogramme auf den Grundlinien AH, HE, EK, KB, und von der Höhe des Cylinders, ist aber gröſser als die Summe der Parallelogramme auf den Grundlinien AE, EB, von der Höhe des Cylinders. Demnach ist der Theil des Cylindermantels zwischen AC, BD, nebst den Abschnitten AH + HE + EK + KB + CL + LF + FM + MD gröſser als die Summe der Parallelogramme auf den Grundlinien AE, EB, und von der Höhe des Cylinders. Die Summe der letztern ist aber gleich ABCD + G; also ist:

$$\left.\begin{array}{l}\textit{der Cylindermantel zwischen } AC,\ BD, \textit{ nebst den Abschnitten}\\ AH + HE + EK + KB + CL + LF + FM + MD\end{array}\right\} > ABCD + G$$

Wird hievon abgezogen die Summe der Abschnitte

AH + HE + EK + KB + CL + LF + FM + MD < G,

so ist der übrigbleibende Cylindermantel zwischen AC, BD, gröſser als das Parallelogramm ACDB.

Satz 13.

Wenn in dem Mantel eines geraden Cylinders zwei gerade Linien liegen, und aus den Endpunkten derselben an die Kreise, welche dem Cylinder zu Grundflächen dienen, in deren

---

F. 63a. (S. 12. α) Es ist nämlich △AHE = ½ AQ, wenn AQ ein auf AE errichtetes Rechteck von der Höhe des △AHE bezeichnet; nun beträgt der Abschnitt AHE weniger als AQ, mithin ist ½ AQ gröſser als die Hälfte des Abschnitts AHE; d. h. △AHE > ½ *Absch.* AHE, u. s. w.

Ebenen Berührungslinien gezogen werden, die sich treffen, so sind die Parallelogramme unter den berührenden und den Seiten des Cylinders gröfser, als der Theil des Cylindermantels zwischen den in ihm befindlichen geraden Linien.

Der Kreis ABC soll die Grundfläche eines geraden Cylinders sein, in dessen Mantel F. 64. zwei gerade Linien mit den Endpunkten A, C, sich befinden. Aus diesen Punkten A, C, aber sollen Berührungslinien in der Ebene des Kreises an diesen gezogen sein, die sich in G treffen. Auch denke man sich in der andern Grundfläche des Cylinders aus den Endpunkten der in dem Mantel liegenden geraden Linien die Berührungslinien des Kreises gezogen. Dann ist zu erweisen, dafs die Summe der Parallelogramme unter den berührenden und den Seiten des Cylinders gröfser sei, als der dem Bogen ABC angehörige Theil des Cylindermantels.

Man ziehe die berührende EF, so dafs der Bogen ABC in B gehalbtheilt werde, und aus den Punkten E, F Parallelen mit der Axe des Cylinders bis an die andere Grundfläche. Nun sind die Parallelogramme unter den Linien AG, GC, und den Seiten des Cylinders zusammen gröfser, als die Summe der Parallelogramme unter AE, EF, FC, und den Seiten des Cylinders. Weil nämlich

$$
\begin{array}{ll}
 & EG + GF > EF \\
\text{und} & AE + FC = AE + FC \\
\hline
\text{so ist} & AG + GC > AE + EF + FC
\end{array}
$$

den Unterschied jener Summen von Parallelogrammen soll der Flächenraum K angeben: dann ist $\frac{1}{2}$K entweder gröfser, als die Figuren, welche von den geraden Linien AE, EF, FC und den Bogen AB, BC, begränzt werden, oder nicht.

1) Es sei $\frac{1}{2}$K gröfser. Nun hat die Oberfläche, welche aus den Parallelogrammen auf AE, EF, FC, aus dem Trapezium AEFC, und aus dem gegenüber in der andern Grundfläche des Cylinders liegenden zusammengesetzt ist, den Umfang des Parallelogramms auf AC zur Gränze; und derselbe Umfang begränzt die Oberfläche, welche aus dem Cylindermantel auf dem Bogen ABC, aus dem Abschnitte ABC und dem gegenüberliegenden bestehet; also haben die gedachten Oberflächen einerlei Begränzung in einer Ebene, sind beide nach einerlei Seite hohl, und umschliefsen einander einestheils, anderntheils aber fallen sie zusammen: demnach ist die umschlossene kleiner (*Annahme* 4.). Wird also das Gemeinschaftliche weggenommen, nämlich der Abschnitt ABC und der ihm gegenüberliegende, so ist der Cylindermantel auf dem Bogen ABC kleiner als die Oberfläche, welche aus den Parallelogrammen auf AE, EF, FC, aus den Figuren AEB, BFC, und aus den ihnen gegenüberliegenden zusammengesetzt ist. Die Summe der erwähnten Parallelogramme und der erwähnten Figuren ist aber kleiner, als die Summe der Parallelogramme auf AG, GC; denn die Summe der ersteren Parallelogramme nebst K, welches gröfser ist, als die Figuren, war der letzteren Summe gleich. Es erhellet demnach, dafs die Summe der Parallelogramme, welche von AG, GC, und von den Seiten des Cylinders umschlossen werden, gröfser ist, als der Cylindermantel auf dem Bogen ABC.

2) Wenn aber $\frac{1}{2}$K nicht gröfser ist, als die erwähnten Figuren, so wird man gerade Berührungslinien dergestalt an den Kreisabschnitt ziehen, dafs die äufsern Figuren zusammen kleiner werden, als $\frac{1}{2}$K (S. 7.); alles übrige wird dann wie zuvor gezeigt.

Nachdem dieses dargethan, so ist aus dem oben Gesagten Folgendes einleuchtend:

Folgerung 1. Wenn in einem gleichschenkligen Kegel eine Pyramide beschrieben wird, so ist die Oberfläche derselben, ohne die Grundfläche, kleiner als der Mantel des Kegels.

Denn jedes der die Pyramide umschließsenden Dreiecke ist kleiner, als der Theil des Kegelmantels zwischen den Seiten des Dreiecks (S. 10.). Daher ist auch die ganze Oberfläche der Pyramide, ohne die Grundfläche, kleiner als die Oberfläche des Kegels ohne dessen Grundfläche.

Folgerung 2. Wenn um einen gleichschenkligen Kegel eine Pyramide beschrieben wird, so ist die Oberfläche derselben, ohne die Grundfläche, gröſser als die Oberfläche des eingeschlossenen Kegels ohne die Grundfläche. (S. 11.)

Folgerung 3. Wenn in einem geraden Cylinder ein Prisma verzeichnet wird, so ist dessen aus Parallelogrammen bestehender Mantel kleiner als die Oberfläche des Cylinders ohne die Grundflächen.

Denn jedes Parallelogramm des Prisma ist kleiner, als der dazu gehörende Theil des Cylindermantels (S. 12.).

Folgerung 4. Wenn um einen geraden Cylinder ein Prisma beschrieben wird, so ist dessen zus Parallelogrammen zusammengesetzter Mantel gröſser, als die Oberfläche des Cylinders ohne die Grundflächen (S. 13.).

Satz 14.

Der Mantel eines geraden Cylinders ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser die mittlere Proportionale zwischen der Seite und dem Durchmesser der Grundfläche des Cylinders ist.

F. 65. Der Kreis A sei die Grundfläche eines geraden Cylinders. Der Durchmesser des Kreises A sei gleich CD, die Seite des Cylinders gleich EF. Die mittlere Proportionale zwischen DC, EF, sei G, und man nehme einen Kreis B an, dessen Halbmesser = G ist. Dann muſs gezeigt werden, daſs der Kreis B dem Mantel des Cylinders gleich ist.

Wofern er ihm nicht gleich ist, so ist er entweder gröſser oder kleiner.

1) Der Kreis sei also kleiner, wenn dieſs möglich ist. Weil hier nun zwei ungleiche Gröſsen, der Cylindermantel und der Kreis, vorhanden sind, so ist es möglich, in dem Kreise B ein gleichseitiges Vieleck zu beschreiben, und ein anderes darum, so daſs das äuſsere zu dem inneren ein kleineres Verhältniſs hat, als der Cylindermantel zum Kreise B (S. 6.). Man denke sich diese Vielecke beschrieben, verzeichne um den Kreis A ein Vieleck, ähnlich dem, welches um B beschrieben worden, (α) und errichte auf demselben ein Prisma, so wird dieses um den Cylinder beschrieben sein. Es sei ferner der Umfang des um den Kreis A beschriebenen Vielecks = KD = LF; auch sei $\frac{1}{2}$ CD = CT. Dann wird ΔKDT dem um A beschriebenen Vieleck gleich sein, da die Grundlinie des Dreiecks dem Umfange des Vielecks, und seine Höhe dem Halbmesser des Kreises A gleich ist; das Parallelogramm EL aber wird dem

(S. 14. α) Dieſs geht an, weil jede zwei Kreise sich als koncentrische ansehen lassen, wenn man sie gehörig auf ein ander legt.

dem Mantel des um den Cylinder verzeichneten Prisma gleich sein, weil jenes unter der Seite des Cylinders und einer dem Umfange der Grundfläche des Prisma gleichen geraden Linie enthalten ist. Man mache $ER = EF$, so ist $\Delta FRL = EL$, mithin auch dem Mantel des Prisma gleich; und weil die um A und B verzeichneten Vielecke ähnlich sind, so verhalten sie sich, wie die Quadrate der Halbmesser ihrer Kreise. Demnach verhält sich

$$\Delta KDT : \textit{Vieleck um } B = TD^2 : G^2$$

denn die Linien TD, G sind den Halbmessern gleich. Es ist aber

$$TD^2 : G^2 = TD : RF \ (\beta)$$

weil G die mittlere Proportionale zwischen CD, EF, also auch zwischen TD, RF, ist (weſshalb? weil $TD = TC$ und $RE = EF$, also $CD = 2TD$ und $RF = 2EF$; mithin $CD : TD = RF : EF$, d. h. $CD \times EF = TD \times RF$. Es ist aber $G^2 = CD \times TD = TD \times RF$; mithin $TD : G = G : RF$; also auch $TD : RF = TD^2 : G^2$; denn wenn drei gerade Linien proportionirt sind, so verhält sich die erste zur dritten, wie eine Figur auf der ersten zu einer ähnlichen und ähnlich liegenden auf der zweiten. (γ)) Auch verhält sich

$$TD : RF = \Delta KDT : \Delta RLF, \text{ weil } KD = LF.$$

Demnach ist $\Delta KDT : \textit{Vieleck um } B = \Delta KDT : \Delta RLF$

mithin auch *das Vieleck um* $B = \Delta RLF$,

woraus folgt, daſs der Mantel des um den Cylinder auf A beschriebenen Prisma gleich ist dem Vieleck um B. Weil nun

$$\textit{Vieleck um } B : \textit{Vieleck in } B < \textit{Mantel des Cyl. auf } A : B$$

so ist $\textit{Mantel des Prisma um den Cyl.} : \textit{Vieleck in } B < \textit{Mant. des Cyl.} : B$;

oder $\textit{Mant. d. Prisma} : \textit{Mant. d. Cyl.} < \textit{Vieleck in } B : B \ (\delta)$

Dieſs ist aber unmöglich; (ε) denn es ward erwiesen, daſs der Mantel des um den Cylinder beschriebenen Prisma gröſser sei, als der Mantel des Cylinders (S. 13.), wogegen das Vieleck in dem Kreise B kleiner ist, als der Kreis selbst (S. 1.). Folglich ist der Kreis B nicht kleiner, als der Mantel des Cylinders.

2) Der Kreis sei demnach gröſser, wenn dieſs möglich ist. Man stelle sich wiederum vor, es sei in dem Kreise B ein geradliniges Vieleck, und um denselben ein anderes dergestalt beschrieben, daſs das Verhältniſs des äuſsern Vielecks zu dem innern kleiner ist, als das Verhältniſs des Kreises B zu dem Mantel des Cylinders (S. 6.); auch beschreibe man in dem Kreise A ein Vieleck, ähnlich dem, was in B beschrieben ist, (α) und errichte auf dem Vieleck in A ein Prisma. Ferner sei der Umfang des in A beschriebenen Vielecks $= KD = FL$, dann wird ΔKTD gröſser sein, als das Vieleck in A, weil das Dreieck zwar den Um-

(β) Es ist $G^2 = CD \times EF$; weil aber $CD = 2TD$ und $EF = \frac{1}{2} RF$, so ist auch $G^2 = TD \times RF$; mithin $TD^2 : G^2 = TD^2 : TD \times RF = TD : RF$

Hiedurch wird die lange Erläuterung des Arch. überflüſsig gemacht, weſshalb sie eingeklammert worden ist.

(γ) Eukl. VI, 20 Zusatz 2.

(δ) Denn wenn man hat $a : b < c : d$, d. h. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so ist auch $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$, d. h. $a : c < b : d$.

(ε) Setzt man nämlich den Mantel des Cylinders $= M$, den Mantel des Prisma $= M'$, das Vieleck in $B = B'$, so müſste sein $\frac{M'}{M} < \frac{B'}{B}$; es ist aber $\frac{M'}{M}$ ein unächter, $\frac{B'}{B}$ dagegen ein ächter Bruch.

fang des Vielecks zur Grundlinie hat, jedoch eine gröſsere Höhe, als eine vom Mittelpunkt auf eine Seite des Vielecks gefällte senkrechte Linie. Das Parallelogramm EL aber ist dem aus Parallelogrammen gebildeten Mantel des Prisma gleich, weil es unter der Seite des Cylinders und einer dem Umfange der Grundfläche des Prisma gleichen geraden Linie enthalten ist. Also ist auch Δ RLF dem Mantel des Prisma gleich. Weil nun die in den Kreisen A, B, beschriebenen Vielecke ähnlich sind, so verhalten sie sich, wie die Quadrate der Halbmesser ihrer Kreise. Aber die Dreiecke KTD, FRL verhalten sich ebenfalls, wie die Quadrate der Halbmesser jener Kreise. (ζ)

Also ist *Vieleck in* A : *Vieleck in* B $= \Delta KTD : \Delta FRL$.
Nun ist *Vieleck in* A $< \Delta KTD$
mithin auch *Vieleck in* B $< \Delta FRL$

folglich ist das Vieleck in B auch kleiner, als der Mantel des Prisma im Cylinder. Dieſs aber ist unmöglich. Weil nämlich

Vieleck um B : *Vieleck in* B $<$ B : *Mantel des Cylinders*,
oder *Vieleck um* B : B $<$ *Vieleck in* B : *Mantel des Cylinders*;
und weil *Vieleck um* B $>$ B,
also auch *Vieleck in* B $>$ *Mantel des Cylinders*; (η)

so muſs das Vieleck in B gröſser sein, als der Mantel des Prisma. (S. 13. Folg. 3.). Demnach ist der Kreis B nicht gröſser, als der Cylindermantel; es ist aber schon bewiesen, daſs er auch nicht kleiner sei: folglich ist er ihm gleich.

Satz 15.

Der Mantel eines jeden gleichschenkligen Kegels ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser die mittlere Proportionale zwischen der Seite des Kegels und dem Halbmesser der Grundfläche desselben ist.

F. 66. Ein gleichschenkliger Kegel stehe auf dem Kreise A, dessen Halbmesser $=$ C sein soll. Die Linie D sei der Seite des Kegels gleich, und E sei die mittlere Proportionale zwischen C und D; der Halbmesser des Kreises B sei $=$ E. Ich behaupte, daſs der Kreis B dem Mantel des Kegels gleich sei.

Denn wofern er ihm nicht gleich ist, so ist er entweder gröſser oder kleiner.

1) Der Kreis B sei also kleiner, als der Mantel des Kegels. Es giebt hier nun zwei ungleiche Gröſsen, den Kegelmantel und den Kreis B, jenen gröſser als diesen, folglich läſst sich ein gleichseitiges Vieleck in dem Kreise B, und ein anderes ähnliches um den Kreis dergestalt verzeichnen, daſs das Verhältniſs des äuſsern zu dem innern kleiner ist, als das Verhältniſs des Kegelmantels zum Kreise B (S. 6.). Man denke sich ferner auch um den Kreis A ein Vieleck beschrieben, ähnlich dem um B, und stelle auf das um den Kreis A ver-

---

(ζ) Denn es verhält sich $\Delta KTD : \Delta FRL = TD : RF = TD^2 : G^2$ (S. Anm. β.)

(η) Denn wenn etwa $a : b < c : d$,
und wenn $a > b$ ist,
so muſs auch $c > d$ sein; indem schon $\frac{a}{b}$ ein unächter Bruch ist, um desto mehr also $\frac{c}{d}$ ein solcher sein muſs.

zeichnete Vieleck eine Pyramide, welche einerlei Spitze mit dem Kegel hat. Weil nun die äufsern Vielecke der Kreise A, B, ähnlich sind, so verhalten sie sich zu einander, wie die Quadrate der Halbmesser ihrer Kreise, d. h.

$$\textit{Vieleck um } A : \textit{Vieleck um } B = C^2 : E^2 = C : D \ (\alpha)$$

Es ist aber

$$C : D = \textit{Vieleck um } A : \textit{Mant. d. Pyram. um den Kegel};$$

denn es ist C gleich der senkrechten aus dem Mittelpunkte auf eine Seite des Vielecks, D aber ist gleich der Seite des Kegels; und der Umfang des Vielecks ist die gemeinschaftliche Höhe zu dem Doppelten jener Figuren. (β) Demnach verhält sich

$$\textit{Vieleck um } A : \textit{Vieleck um } B = \textit{Vieleck um } A : \textit{Mant. d. Pyram. um den Kegel};$$

also ist der Mantel der Pyramide dem Vieleck um B gleich. Weil nun

$$\textit{Vieleck um } B : \textit{Vieleck in } B < \textit{Mantel des Kegels} : B$$

so ist

$$\textit{Mant. d. Pyram.} : \textit{Vieleck in } B < \textit{Mantel des Kegels} : B$$

und diefs ist unmöglich; denn es ward erwiesen, dafs der Mantel der Pyramide gröfser sei, als der Mantel des Kegels (S. 13. Folg. 2.), und das Vieleck in B ist kleiner als B selbst. (γ) Folglich ist der Kreis B nicht kleiner, als der Kegelmantel. — Ich behaupte nun, er sei auch nicht gröfser.

2) Es sei nämlich B gröfser, wenn diefs möglich ist. Man stelle sich wiederum vor, es sei ein Vieleck in dem Kreise B, und ein anderes um denselben so verzeichnet, dafs das Verhältnifs des äufsern zu dem innern kleiner ist, als das Verhältnifs des Kreises B zu dem Kegelmantel. Auch denke man sich in dem Kreise A ein Vieleck beschrieben, ähnlich dem in B verzeichneten (δ), und auf ersterem eine Pyramide, welche mit dem Kegel einerlei Spitze hat. Weil nun die Vielecke in A und B ähnlich sind, so werden sie sich zu einander verhalten, wie die Quadrate der Halbmesser ihrer Kreise, d. h.

$$\textit{Vieleck in } A : \textit{Vieleck in } B = C : D \ (\epsilon)$$

Es ist aber

$$C : D > \textit{Vieleck in } A : \textit{Mant. d. Pyram. im Kegel}; \ (\zeta)$$

(S. 15. α) Denn es ist $E^2 = CD$.

(β) d. h. Wenn C, D, die Grundlinien zweier Rechtecke sind, deren gemeinschaftliche Höhe der Umfang des Vielecks um A ist, so geben diese Rechtecke den doppelten Inhalt des Vielecks und des Mantels an. Deutlicher erhellt die Sache so: wenn P den Umfang des Vielecks um A bezeichnet, so ist

$$\textit{der Inhalt des Vielecks} = \tfrac{1}{2}\, CP$$
$$\textit{der Inhalt des Mantels} = \tfrac{1}{2}\, DP$$

mithin $C : D = \textit{Vieleck} : \textit{Mantel}.$

(γ) Der Mantel des Kegels sei $= M$, der Mantel der Pyramide $= M'$, das Vieleck in $B = B'$, so ist

$$M' : B' < M : B$$

oder $M' : M < B' : B$ (S. 14. Anm. δ)

Weil nun $M' > M$, und $B' < B$, so ist $\frac{M'}{M}$ ein unächter, $\frac{B'}{B}$ ein ächter Bruch, woraus sich der Widerspruch ergiebt.

(δ) Vgl. S. 14. Anm. α.

(ε) Weil $C : D = C^2 : E^2$, denn es ist $E^2 = C \cdot D$.

(ζ) Das △KFH stelle das Vieleck im Kreise A vor. Die gemeinschaftliche Spitze des Kegels und der Pyramide auf F. 66a.

denn das Verhältnifs des Halbmessers des Kreises A zur Seite des Kegels ist gröfser, als das Verhältnifs eines Perpendikels aus dem Mittelpunkte des Kreises auf eine Seite des Vielecks zu dem Perpendikel von der Spitze des Kegels auf die Seite des Vielecks. Demnach ist

$$\textit{Vieleck in } A : \textit{Vieleck in } B > \textit{Vieleck in } A : \textit{Mant. d. Pyram.}$$

also ist der Mantel der Pyramide gröfser, als das Vieleck in B. Aber man hat

$$\textit{Vieleck um } B : \textit{Vieleck in } B < B : \textit{Mant. des Kegels};$$

um desto mehr also ist

$$\textit{Vieleck um } B : \textit{Mant. d. Pyr.} < B : \textit{Mant. des Kegels};$$

und diefs ist unmöglich; (*) denn das Vieleck um B ist gröfser als B (S. 2.), der Mantel der Pyramide aber ist kleiner, als der Kegelmantel (S. 13. Folg. 1.); der Kreis B ist folglich auch nicht gröfser, als der Mantel des Kegels. Dafs er nicht kleiner sei, ward schon bewiesen; also ist er ihm gleich.

Satz 16.

Der Mantel eines jeden gleichschenkligen Kegels verhält sich zur Grundfläche, wie die Seite des Kegels zum Halbmesser der Grundfläche.

F. 66. Ein gleichschenkliger Kegel habe zur Grundfläche den Kreis A, dessen Halbmesser = C sein soll; die Linie D sei der Seite des Kegels gleich: so mufs bewiesen werden, dafs

$$\textit{Kegelmantel} : A = D : C$$

Man nehme E als mittlere Proportionale zwischen C, D, und einen Kreis B, dessen Halbmesser = E ist. Dann ist B dem Mantel des Kegels gleich, wie im vorigen Satze erwiesen worden. Auch ist gezeigt, dafs

$$B : A = D : C, \ (\alpha)$$

denn jedes dieser Verhältnisse ist dem Verhältnifs $E^2 : C^2$ gleich, weil Kreise sich verhalten, wie die Quadrate ihrer Durchmesser, also auch wie die Quadrate ihrer Halbmesser; denn das Verhältnifs der Durchmesser ist auch das Verhältnifs ihrer Hälften, d. i. der Halbmesser, und den Halbmessern sind die Linien C, E, gleich. Folglich erhellet, dafs

$$\textit{Kegelmantel} : A = D : C$$

---

dem Kreise und Vieleck sei L, mithin ist LA die Axe, und ML die Seite des Kegels = D; auch ist AM = C, und AG sei das Perpendikel auf eine Seite des Vielecks in A. Zieht man dann GN ‡ ML und die Verbindungslinie GL, so ist GL das Perpendikel von der Spitze L auf die Seite des Vielecks. Nun ist

$$C : D = AG : GN, \text{ und weil } GL > GN,$$

so ist $C : D > AG : GL$

zugleich ist $\textit{Vieleck in } A : \textit{Mant. d. Pyr.} = AG : GL$, denn sowohl das Vieleck als der Mantel lassen sich durch Dreiecke bezeichnen, wozu der Umfang des Vielecks die Grundlinie ist, während AG, GL die Höhen angeben.

Nun folgt sofort $C : D > \textit{Vieleck in } A : \textit{Mant. d. Pyramide.}$

(*) Der Mantel des Kegels sei = M, der Mantel der Pyramide = M′, das Vieleck um B = B′; so ist

$$B' : M' < B : M$$

also auch $B' : B < M' : M$

Nun ist $B' > B$, mithin $\frac{B'}{B}$ ein unächter Bruch; aber $M' < M$, also $\frac{M'}{M}$ ein ächter Bruch, woraus der Widerspruch erhellet.

(S. 16. α) Man hat $B : A = E^2 : C^2 = D : C$, weil $E^2 = D \cdot C$ ist.

Lehnsatz. Es sei OBAG ein Parallelogramm, (α) und BG dessen Diagonale. Die F. 67.
Seite BA werde willkührlich in D getheilt und durch D die Linie $DH \parallel AG$, durch F aber $KL \parallel BA$ gezogen. Ich behaupte, es sei

$$BA \times AG = BD \times DF + DA\ (DF + AG)$$

Es ist nämlich $BA \times AG = AO$, ferner $BD \times DF = DK$, und $DA\ (DF + AG) = MNX$; denn $DA \times AG = KG$, weil $KH = DL$; ferner $DA \times DF = DL$; mithin $AO = BA \times AG = BD \times DF + MNX$, und $MNX = DA\ (AG + DF)$.

Satz 17.

Wenn ein gleichschenkliger Kegel von einer der Grundfläche parallelen Ebene geschnitten wird, so ist der zwischen den parallelen Ebenen liegende Theil des Kegelmantels einem Kreise gleich, dessen Halbmesser die mittlere Proportionale ist zwischen dem durch die parallelen Ebenen abgeschnittenen Theile der Seite des Kegels und der Summe aus den beiden Halbmessern der Kreise in den parallelen Ebenen.

Es sei ein Kegel gegeben, dessen durch die Axe gehendes Dreieck dem ΔABC gleich F. 68.
sei. Er werde von einer der Grundfläche parallelen Ebene geschnitten, wodurch der Schnitt DE entstehe; die Axe des Kegels sei BG. Auch werde ein Kreis angenommen, dessen Halbmesser die mittlere Proportionale zwischen AD und $(DF + GA)$ ist; dieser Kreis sei H. Ich behaupte, dafs der Kreis H dem Theile des Kegelmantels zwischen DE, AC gleich ist.

Denn man nehme die Kreise L und K dergestalt an, dafs das Quadrat des Halbmessers von K dem Rechteck $BD \times DF$, das Quadrat des Halbmessers von L aber dem Rechteck $BA \times AG$ gleich ist. Demnach ist der Kreis L dem Mantel des Kegels ABC, der Kreis K aber dem Mantel des Kegels BDE gleich (S. 15.).

Man hat nun $BA \times AG = BD \times DF + AD\ (DF + AG)$ (S. 16. Lehnsatz.) indem $DF \parallel AG$;

Es ist aber $BA \times AG =$ *dem Quadrate des Halbmessers von* L,
$BD \times DF =$ *dem Quadrate des Halbmessers von* K,
$AD\ (DF + AG) =$ *dem Quadrate des Halbmessers von* H;

also ist das Quadrat des Halbmessers von L gleich der Summe der Quadrate der Halbmesser von K und H; folglich ist auch

$$L = K + H \ (\alpha)$$

Zugleich ist aber $L =$ *dem Mantel des Kegels* BAC
und $K =$ *dem Mantel des Kegels* BDE

Zieht man diese von einander ab, so bleibt der Theil des Kegelmantels zwischen den parallelen Ebenen DE, AC, dem Kreise H gleich.

(S. 16. Lehns. α) Das Parallelogramm mufs entweder ein Rechteck sein, oder man mufs unter BA nicht sowohl eine Seite, als vielmehr die Höhe des Parallelogramms verstehen. In diesem Sinne wendet auch Archimedes selbst im folgenden Satze den Lehnsatz an.

(S. 17. α) Die Halbmesser der Kreise L, K, H, sollen R, r, ρ, heifsen, so ist
$R^2 = r^2 + \rho^2$, also auch $\pi R^2 = \pi r^2 + \pi \rho^2$, d. h. $L = K + H$.

Lehnsätze.

1) Kegel von gleicher Höhe verhalten sich, wie ihre Grundflächen; und Kegel von gleichen Grundflächen verhalten sich, wie ihre Höhen.

2) Wenn ein Cylinder von einer Ebene parallel der Grundfläche geschnitten wird, so verhält sich ein Cylinder zum andern, wie eine Axe zur andern.

3) Cylinder verhalten sich, wie Kegel, welche gleiche Grundflächen und Höhen mit den Cylindern haben.

4) Bei gleichen Kegeln sind die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt; und wenn die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt sind, so sind die Kegel gleich.

5) Kegel, deren Durchmesser der Grundflächen sich verhalten, wie die Axen, d. h. wie die Höhen, stehen zu einander im kubischen Verhältnisse der Durchmesser ihrer Grundflächen.

Alle diese Sätze sind schon vor mir erwiesen. (*)

Satz 18.

Wenn von zwei gleichschenkligen Kegeln der Mantel des einen gleich der Grundfläche des andern, das Perpendikel aber vom Mittelpunkte der Grundfläche des ersteren Kegels auf seine Seite gleich ist der Höhe des andern, so sind beide gleich.

F. 69. Es sollen ABC, DEF zwei gleichschenklige Kegel sein; die Grundfläche von ABC sei dem Mantel von DEF, die Höhe AG aber einem Perpendikel HK aus der Mitte H der Grundfläche auf eine Seite des Kegels, etwa auf DE, gleich. Ich behaupte, die Kegel sind gleich.

Weil nämlich die Grundfläche von ABC dem Mantel von DEF gleich ist, und weil gleiche Größen zu einerlei Größe in einerlei Verhältnisse stehen, so ist

Grundfläche ABC : *Grundfläche* DEF = *Mantel* DEF : *Grundfl.* DEF

Es verhält sich aber

Mantel DEF : *Grundfläche* DEF = DH : HK;

denn es ist bewiesen worden, daß eines jeden gleichschenkligen Kegels Mantel zur Grundfläche sich verhalte, wie die Seite zum Halbmesser der Grundfläche, d. h. wie DE : EH (S. 16.)

Es ist aber DE : EH = DH : HK; denn die Dreiecke sind gleichwinklig.

Zugleich ist HK = AG; also verhält sich

Grundfl. ABC : *Grundfl.* DEF = *Höhe von* DEF : *Höhe von* ABC

Also sind in ABC, DEF, die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt, folglich ist der Kegel ABC dem Kegel DEF gleich (S. 17. Lehnsatz 4.).

Satz 19.

Einer jeden aus gleichschenkligen Kegeln bestehenden Raute ist ein Kegel gleich, des-

(S. 17. Lehns. *) Vgl. Euklid. XII, 11. 12. 13. 14. 15.

sen Grundfläche dem Mantel des einen der Kegel, welche die Raute bilden, dessen Höhe aber einer senkrechten Linie gleich ist, die von der Spitze des andern Kegels gegen eine Seite des ersteren gezogen worden.

Es soll ABCD die aus gleichschenkligen Kegeln zusammengesetzte Raute, der Kreis um den Durchmesser BC deren Grundfläche, und AD deren Höhe sein. Auch werde ein anderer Kegel HGK angenommen, dessen Grundfläche dem Mantel des Kegels ABC, und dessen Höhe dem Perpendikel von dem Punkte D auf AB oder deren Verlängerung gleich ist. Dieses Perpendikel sei DF, die Höhe des Kegels GHK sei HL = DF. Ich behaupte, der Kegel ist der Raute gleich. F. 70.

Denn es werde ein anderer Kegel MNX gesetzt, dessen Grundfläche der Grundfläche des Kegels ABC, dessen Höhe aber AD gleich ist. Diese Höhe sei NO. Weil nun NO = AD,

so ist $NO : DE = AD : DE$

Es ist aber $AD : DE = \textit{Raute}\ ABCD : \textit{Keg.}\ BCD$ (α)

und wegen gleicher Grundflächen $NO : DE = \textit{Keg.}\ MNX : \textit{Keg.}\ BCD$

Also $\textit{Keg.}\ MNX : \textit{Keg.}\ BCD = \textit{R.}\ ABCD : \textit{Keg.}\ BCD$

mithin $\textit{Keg.}\ MNX = \textit{Raute}\ ABCD.$

Weil ferner der Mantel von ABC gleich ist der Grundfläche von GHK, so ist

$$\textit{Mant.}\ ABC : \textit{Gdfl.}\ ABC = \textit{Gdfl.}\ GHK : \textit{Gdfl.}\ MNX;$$

denn die Grundfläche von ABC ist der Grundfläche von MNX gleich. Ferner ist

$$\textit{Mant.}\ ABC : \textit{Gdfl.}\ ABC = AB : BE = AD : DF$$

weil $\Delta ADF \sim \Delta ABC$. Folglich ist

$$\textit{Gdfl.}\ GHK : \textit{Gdfl.}\ MNX = AD : DF$$

Nun ist nach der Annahme $AD = NO$ und $DF = HL$, mithin

$$\textit{Gdfl.}\ GHK : \textit{Gdfl.}\ MNX = NO : HL.$$

Also sind die Grundflächen der Kegel GHK, MNX, den Höhen umgekehrt proportionirt, folglich sind die Kegel gleich. Nun ward gezeigt, daſs der Kegel MNX gleich sei der Raute ABCD, also ist auch der Kegel GHK dieser Raute gleich.

Satz 20.

Wenn ein gleichschenkliger Kegel von einer Ebene parallel der Grundfläche geschnitten, auf dem dadurch entstehenden Kreise ein Kegel, dessen Spitze der Mittelpunkt der Grundfläche ist, beschrieben, und die hiedurch gebildete Raute von dem ganzen Kegel abgezogen wird; so ist dem Reste ein Kegel gleich, dessen Grundfläche so groſs ist, als der zwischen den parallelen Ebenen liegende Theil des Kegelmantels, dessen Höhe aber einer senkrechten Linie aus dem Mittelpunkte der Grundfläche auf eine Seite des Kegels gleich ist.

Es sei ABC ein gleichschenkliger Kegel, welcher von einer mit der Grundfläche parallelen Ebene in DE geschnitten werde. Der Mittelpunkt der Grundfläche sei F, und auf F. 71.

(S. 19. α) Denn es ist $AE : DE = \textit{Keg.}\ ABC : \textit{Keg.}\ BCD$ (S. 17, Lehnsatz I.)

folglich $(AE + DE) : DE = (\textit{Keg.}\ ABC + \textit{Keg.}\ BCD) : \textit{Keg.}\ BCD$

d. h. $AD : DE = \textit{Raute}\ ABCD : \textit{Keg.}\ BCD.$

dem Kreise des Durchmessers DE werde ein Kegel beschrieben, dessen Spitze F ist. Dann wird die Raute BDFE aus gleichschenkligen Kegeln zusammengesetzt sein. Ferner setze man einen Kegel HKL, dessen Grundfläche so grofs, wie der Kegelmantel zwischen DE, AC, dessen Höhe aber gleich FG ist, wenn man aus dem Punkte F die Linie FG senkrecht auf AB gezogen hat. Ich behaupte nun, wenn man von dem Kegel ABC die Raute BDFE abgezogen denkt, so ist dem Reste der Kegel KHL gleich.

Denn man setze zwei Kegel MNX, OPR, dergestalt: die Grundfläche von MNX sei so grofs, als der Mantel von ABC, die Höhe aber gleich FG, folglich der Kegel MNX dem Kegel ABC gleich; (denn wenn von zwei gleichschenkligen Kegeln der Mantel des einen so grofs ist, als die Grundfläche des andern, und wenn das Perpendikel aus der Mitte der Grundfläche des erstern auf eine Seite gleich ist der Höhe des andern, so werden beide Kegel gleich sein. S. 18.). Ferner die Grundfläche des Kegels OPR sei dem Mantel des Kegels DBE, die Höhe aber der Linie FG gleich; so ist nach dem oben Erwiesenen der Kegel OPR gleich der Raute BDFE (S. 19.). Da nun

der Mantel von ABC = *dem Mant. von* DBE + *Mant. zwischen* DE, AC,
und weil *der Mantel von* ABC = *Grundfläche von* MNX
der Mantel von DBE = *Grundfläche von* OPR
der Mant. zwischen DE, AC = *Grundfläche von* HKL,

so ist die Grundfläche von MNX gleich der Summe der Grundflächen von HKL und OPR; auch haben die Kegel einerlei Höhe. Demnach ist

Keg. MNX = *Keg.* HKL + *Keg.* OPR.
Es ist aber *Keg.* MNX = *Keg.* ABC
und *Keg.* OPR = *Raute* BDFE

demnach ist der übrigbleibende Kegel HKL dem Reste vom Kegel ABC gleich.

Satz 21.

Wenn in einer aus gleichschenkligen Kegeln zusammengesetzten Raute der eine Kegel von einer mit der Grundfläche parallelen Ebene geschnitten, auf dem dadurch entstehenden Kreise ein Kegel, dessen Spitze zugleich die des andern Kegels ist, errichtet, und die hiedurch gebildete Raute von der ganzen Raute abgezogen wird; so ist der Rest so grofs, als ein Kegel, dessen Grundfläche dem zwischen der parallelen Ebene befindlichen Theil des Kegelmantels, und dessen Höhe dem Perpendikel gleich ist, das von der Spitze des andern Kegels auf die Seite des erstern gefällt ist.

F. 72. Es sei ABCD eine aus gleichschenkligen Kegeln zusammengesetzte Raute, worin der eine Kegel von einer Ebene, der Grundfläche parallel, in EF geschnitten werde. Auf dem Kreise um den Durchmesser EF sei ein Kegel mit der Spitze im Punkte D errichtet; so wird die Raute EBFD entstehen, welche man von der ganzen Raute weggenommen denke. Man nehme nun einen Kegel HKL an, dessen Grundfläche so grofs ist, wie der zwischen AC, EF befindliche Theil des Kegelmantels, dessen Höhe aber dem von D auf BA oder deren Verlängerung gefällten Perpendikel gleich ist. Ich behaupte, der Kegel HKL sei dem genannten Reste gleich.

Denn man nehme zwei Kegel MNX, OPR an. Die Grundfläche des Kegels MNX soll dem Mantel von ABC, die Höhe aber DG gleich sein; dann ist, wie zuvor gezeigt, der Kegel

gel ABC gleich der Raute ABCD (S. 19.). Die Grundfläche des Kegels OPR sei dem Mantel von EBF, die Höhe aber DG gleich; so ist nach demselben Satze der Kegel OPR der Raute EBFD gleich. Weil nun eben so wie zuvor

der Mantel von ABC = *dem Mant. von* EBF + *Mant. zwischen* EF, AC,

und weil *der Mantel von* ABC = *Grundfläche von* MNX

der Mantel von EBF = *Grundfläche von* OPR

der Mant. zwischen EF, AC = *Grundfläche von* HKL,

so ist die Grundfläche von MNX gleich der Summe der Grundflächen von OPR und HKL; auch haben die Kegel einerlei Höhe. Demnach ist

Keg. MNX = *Keg.* OPR + *Keg.* HKL

Es ist aber *Keg.* MNX = *Raute* ABCD

und *Keg.* OPR = *Raute* EBFD,

folglich ist der übrigbleibende Kegel HKL dem Reste von ABCD gleich.

Satz 22.

Wenn ein gleichseitiges Vieleck von gerader Seitenzahl in einen Kreis eingetragen wird, und wenn man Diagonalen des Vielecks dergestalt zieht, daſs sie mit irgend einer von ihnen, welche über zwei Seiten des Vielecks gespannt ist, parallel sind, so verhält sich die Summe aller dieser Diagonalen zum Durchmesser des Kreises, wie eine Diagonale, welche über die halbe Anzahl der Seiten weniger eine gespannt ist, zur Seite des Vielecks.

Der Kreis sei ABCD, in ihm das Vieleck FN beschrieben, und die Diagonalen EK, F. 73.
FL, BD, GN, HM gezogen, welche offenbar einer Diagonale, die über zwei Seiten des Vielecks gespannt ist, parallel sind. (α) Ich behaupte, daſs

die Summe der gedachten Diagonalen: AC = CE : EA

denn man ziehe FK, BL, GD, HN; so ist EA ‡ FK ‡ BL ‡ GD ‡ HN ‡ CM; (β) und weil nun EA ‡ FK ist, auch die Linien EK, AO, zwei Verbindungslinien sind, so ist EX : XA = KX : XO = FP : PO = LP : PR = BS : RS = DS : ST = GY : TY = NY : QY = HZ : ZQ = MZ : ZC; also die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, wie die Glieder eines Verhältnisses, d. h.

$$EX : XA = (EK + FL + BD + GN + HM) : AC$$

Zugleich ist $EX : XA = CE : EA$

also auch $CE : EA = (EK + FL + BD + GN + HM) : AC$

Satz 23.

Wenn in einen Kreisabschnitt ein Vieleck eingeschrieben wird, dessen Seiten, ohne die Grundlinie, gleich und in gerader Anzahl vorhanden sind, und wenn man parallel der Grundlinie Diagonalen des Vielecks zieht; so verhält sich die Summe dieser Diagonalen und

---

(S. 22. α) Nämlich der Diagonale EK; denn weil *Bog.* EF = *Bog.* KL, so ist auch EKF = KFL, folglich EK ‡ FL u. s. w.

(β) Weil *Bog.* AK = *Bog.* EF, so ist AEK = EKF, mithin EA ‡ FK u. s. w.

der halben Grundlinie zur Höhe des Abschnitts, wie eine vom Durchmesser des Kreises an die Seite des Vielecks gezogene gerade Linie zur Seite des Vielecks.

F. 74. In dem Kreise ABC sei eine Sehne AC gezogen und über AC in dem Abschnitte ABC ein Vieleck von gerader Anzahl gleicher Seiten, mit Ausnahme der Grundlinie, eingetragen, auch sollen die Diagonalen FG, EH, welche der Grundlinie des Abschnitts parallel sind, gezogen sein. Ich behaupte, daſs

$$(FG + EH + AX) : BX = DF : BF.$$

Denn man ziehe wieder GE, HA, so sind diese parallel BF; deſshalb ist

$$FK : KB = GK : KL = EM : ML = HM : MN = AX : XN,$$

also auch die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, wie die Glieder eines Verhältnisses, d. h.

$$(FG + EH + AX) : BX = FK : KB$$

Zugleich ist $FK : KB = DF : BF$

folglich $DF : BF = (FG + EH + AX) : BX$

Satz 24.

F. 75. Es sei ABCD der Normalkreis einer Kugel, und in demselben ein gleichseitiges Vieleck beschrieben, dessen Seitenzahl durch vier meſsbar ist. (*a*) Die Linien AC, BD sollen zu einander senkrechte Durchmesser sein. Wenn nun bei unveränderter Lage des Durchmessers AC, der Kreis ABCD, welcher das Vieleck umschlieſst, sich umwälzt; so ist klar, daſs sein Umring in der Sphäre herumgeführt wird, daſs aber die Scheitel der Polygonwinkel, ausgenommen die bei den Punkten A, C, in Umringen von Kreisen auf der Sphäre sich bewegen werden, welche auf dem Kreise ABCD senkrecht stehen, und deren Durchmesser die mit BD parallelen Diagonalen des Vielecks sein werden. Die Seiten des Vielecks aber werden sich in gewissen Kegelmänteln bewegen, nämlich AF, AN, in dem Mantel eines Kegels, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser FN, und dessen Spitze der Punkt A ist; die Seiten FG, NM, in einem Kegelmantel, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser GM, und dessen Spitze der Punkt ist, wo die Verlängerungen von GF, MN, mit einander und mit AC zusammentreffen; die Seiten BG, DM in einem Kegelmantel, dessen Grundfläche der auf ABCD senkrechte Kreis um den Durchmesser BD, und dessen Spitze der Punkt ist, in welchem die Verlängerungen von BG, DM, mit sich selbst und mit AC zusammentreffen. Auf dieselbe Weise werden auch in dem andern Halbkreise die Seiten in ähnlichen Kegelmänteln sich bewegen. Es wird also in die Kugel eine gewisse von den angegebenen Kegelmänteln umschlossene körperliche Figur eingeschrieben sein, deren Oberfläche kleiner ist, als die Sphäre.

Denn indem die Kugel von der senkrecht auf ABCD durch BD gehenden Ebene getheilt wird, so hat die Oberfläche der einen Halbkugel mit der Oberfläche der darin beschriebenen körperlichen Figur einerlei Begränzung in einerlei Ebene; indem die Gränze beider Ober-

(S. 24. *a*) Der Grund ist, weil alsdann die auf einander senkrechten Durchmesser AC, BD wirklich Winkelspitzen des eingeschriebenen Vielecks treffen, und die durch Umwälzung entstehenden Flächen sämtlich als Kegelmäntel erscheinen, nicht etwa als Cylindermäntel.

flächen der Umfang des auf ABCD senkrechten Kreises um den Durchmesser BD ist; auch sind beide nach einerlei Seite hohl, und es wird die eine derselben umschlossen von der andern und von derjenigen Ebene, die mit ihr selbst einerlei Begränzung hat. (β) Eben so ist auch die Oberfläche der körperlichen Figur in der andern Halbkugel kleiner als die Halbsphäre. Folglich ist die ganze Oberfläche der körperlichen Figur in der Kugel gleichfalls kleiner, als die Sphäre.

Satz 25.

Die Oberfläche der in eine Kugel eingeschriebenen körperlichen Figur (α) ist einem Kreise gleich, dessen Quadrat des Halbmessers so grofs ist, als das Rechteck unter der Seite der körperlichen Figur und einer Linie, welche der Summe aller Diagonalen des Vielecks gleich ist, die mit derjenigen Diagonale parallel laufen, welche über zwei Seiten des Vielecks gespannt ist.

Es sei ABCD der Normalkreis einer Kugel, und in derselben ein gleichseitiges Vieleck F. 76.
beschrieben, dessen Seitenzahl durch vier gemessen wird. Man denke sich nun durch das eingetragene Vieleck eine körperliche Figur in der Kugel beschrieben, und ziehe EF, GH, CD, KL, MN, welche mit der über zwei Seiten gespannten Diagonale parallel sind. Ferner sei ein Kreis X angenommen, dessen Quadrat des Halbmessers so grofs ist, als das Rechteck $AE \times (EF + GH + CD + KL + MN)$. Ich behaupte, dafs dieser Kreis so grofs sei, als die Oberfläche der in die Kugel eingeschriebenen körperlichen Figur.

Denn man nehme die Kreise O, P, R, S, T, Y an, und es sei

das Quadrat des Halbmessers von $O = EA \times \frac{1}{2} EF$
- - - - - $P = EA \times \frac{1}{2}(EF + GH)$
- - - - - $R = EA \times \frac{1}{2}(GH + CD)$
- - - - - $S = EA \times \frac{1}{2}(CD + KL)$
- - - - - $T = EA \times \frac{1}{2}(KL + MN)$
- - - - - $Y = EA \times \frac{1}{2} MN$;

Dann ist *der Kreis* O = *Kegelmantel* AEF (S. 15.)

$$\left.\begin{array}{l} - \; - \; P = \textit{Kegelmantel zwischen } EF, GH \\ - \; - \; R = \; - \; - \; GH, CD \\ - \; - \; S = \; - \; - \; CD, KL \\ - \; - \; T = \; - \; - \; KL, MN \end{array}\right\} \text{S. 17.}$$

- - Y = - MBN. (S. 15.)

Folglich ist die Summe aller dieser Kreise der Oberfläche der eingeschriebenen körperlichen Figur gleich; auch erhellet, dafs die Summe der Quadrate der Halbmesser von O, P, R, S, T, Y, so grofs ist, als das Rechteck unter EA und $2 \times (\frac{1}{2} EF + \frac{1}{2} GH + \frac{1}{2} CD + \frac{1}{2} KL + \frac{1}{2} MN)$ d. h. $= EA \times (EF + GH + CD + KL + MN)$. Es ist aber auch das Quadrat

---

(β) Den Schlufs hieraus zu ziehen, dafs die Oberfläche des umschlossenen Körpers kleiner sei als die Halbsphäre (Annahme 4), überläfst Arch. dem Leser gegen seine sonstige Gewohnheit. Vgl. S. 29. am Ende.

(S. 25. α) Nämlich auf die bisherige Weise, was Arch. hier und in der Folge öfter voraussetzt.

des Halbmessers von $X = EA \times (EF + GH + CD + KL + MN)$, mithin ist das Quadrat des Halbmessers von X gleich der Summe der Quadrate der Halbmesser von O, P, R, S, T, Y, folglich ist $X = O + P + R + S + T + Y$. Nun ward gezeigt, daſs $O + P + R + S + T + Y$ gleich sei der Oberfläche der erwähnten körperlichen Figur; also wird der Kreis X so groſs sein, als die Oberfläche der körperlichen Figur.

Satz 26.

F. 77. Die Oberfläche der in der Kugel beschriebenen und von Kegelmänteln begränzten körperlichen Figur ist kleiner als das Vierfache des Normalkreises der Kugel.

Es sei ABCD der Normalkreis einer Kugel, und darin ein gleichwinkliges und gleichseitiges Vieleck beschrieben, dessen Seitenzahl sich durch vier messen läſst; auch denke man sich darüber die von Kegelmänteln gebildete Oberfläche. Ich behaupte, daſs die Oberfläche der eingeschriebenen körperlichen Figur kleiner ist, als das Vierfache des Normalkreises der Kugel.

Denn man ziehe die über zwei Seiten gespannten Diagonalen EI und HM, samt den mit ihnen parallelen FK, BD, GL, und nehme einen Kreis P an, von welchem das Quadrat des Halbmessers gleich ist dem Rechteck $AE \times (EI + FK + BD + GL + HM)$; so ist nach dem eben Erwiesenen (S. 25) der Kreis so groſs, als die Oberfläche der gedachten körperlichen Figur. Weil ferner bewiesen, daſs

$$(EI + FK + BD + GL + HM) : AC = CE : EA \text{ (S. 22.)}$$

so ist $EA \times (EI + FK + BD + GL + HM) = AC \times CE$

d. h. *das Quadr. des Halbmessers von* $P = AC \times CE$.

Es ist aber $AC \times CE < AC^2$,

also *das Quadr. des Halbmessers von* $P < AC^2$

mithin *der Halbmesser von* $P < AC$

und folglich *der Durchmesser von* $P < 2\,AC$

also *das Quadr. des Durchmessers von* $P < 4\,AC^2$;

Es ist aber $4\,AC^2$: *Quadr. d. Durchmessers von* $P = 4\,ABCD : P$

mithin $4\,ABCD > P$, d. h. der Kreis P ist kleiner als das Vierfache des Normalkreises. Es ward aber gezeigt, daſs der Kreis P gleich sei der erwähnten Oberfläche der körperlichen Figur; folglich ist die Oberfläche der körperlichen Figur kleiner, als das Vierfache des Normalkreises der Kugel.

Satz 27.

Der in die Kugel eingeschriebenen, von Kegelmänteln umschlossenen körperlichen Figur ist ein Kegel gleich, dessen Grundfläche ein der Oberfläche der in die Kugel eingetragenen körperlichen Figur gleicher Kreis, und dessen Höhe ein Perpendikel vom Mittelpunkte der Kugel auf eine Seite des Vielecks ist.

F. 78. Es sei ABCD der Normalkreis einer gegebenen Kugel, und alles Uebrige wie zuvor; auch sei P ein gerader Kegel, dessen Grundfläche so groſs ist, als die Oberfläche der in die Kugel eingeschriebenen körperlichen Figur, und dessen Höhe gleich ist einem vom Mittelpunkte der Kugel auf eine Seite des Vielecks gefällten Perpendikel: so muſs bewiesen werden, daſs der Kegel P gleich ist der in die Kugel eingetragenen körperlichen Figur.

Man beschreibe auf den Kreisen, deren Durchmesser die Linien FN, GM, BD, HL, IK, sind, Kegel, deren Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist. Dann wird eine körperliche Raute gebildet werden durch den Kegel, dessen Grundfläche der Kreis um FN, und dessen Spitze der Punkt A ist, und durch den Kegel, dessen Grundfläche derselbe Kreis, dessen Spitze aber der Punkt X ist. Diese Raute ist so grofs, als ein Kegel, dessen Grundfläche dem Mantel von NAF, dessen Höhe aber dem Perpendikel von X auf AF gleich ist. (S. 19.). Ferner ist das Stück einer Raute, welches begränzt wird von dem Theil eines Kegelmantels zwischen den parallelen Ebenen FN, GM, und von den Mänteln der Kegel FNX, GMX, so grofs als ein Kegel, dessen Grundfläche dem Kegelmantel zwischen den parallelen Ebenen FN, GM, und dessen Höhe dem Perpendikel von X auf FG gleich ist; denn diefs ist bewiesen (S. 21.). Demnächst wird auch das Kegelstück, welches von dem Theil eines Kegelmantels zwischen den parallelen Ebenen GM, BD, von dem Mantel des Kegels GMX, und von dem Kreise um den Durchmesser BD begränzt wird, so grofs sein, als ein Kegel, dessen Grundfläche dem Theil des Kegelmantels zwischen den Ebenen GM, BD, dessen Höhe aber dem Perpendikel von X auf GB gleich ist (S. 20.). Gleicherweise werden auch in der andern Halbkugel die Raute XKCI und die Kegelstücke eben so vielen und eben so grofsen Kugeln gleich sein, als die vorhin erwähnten waren. Offenbar ist also die ganze eingeschriebene körperliche Figur der Summe der gedachten Kegel gleich; diese Summe aber ist dem Kegel P gleich, weil die Höhe des Kegels P der Höhe eines jeden der genannten Kegel, seine Grundfläche aber der Summe aller ihrer Grundflächen gleich ist. Daraus geht hervor, dafs die in die Kugel eingeschriebene körperliche Figur dem angenommenen Kegel gleich ist.

Satz 28.

Die in einer Kugel beschriebene körperliche Figur, welche von Kegelmänteln umschlossen wird, ist kleiner, als das Vierfache eines Kegels, dessen Grundfläche dem Normalkreise, und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

Denn es sei P ein der eingeschriebenen körperlichen Figur gleicher Kegel, dessen Grundfläche so grofs, wie die Oberfläche der eingetragenen körperlichen Figur, dessen Höhe aber dem Perpendikel aus dem Mittelpunkte der Kugel auf eine Seite des eingeschriebenen Vielecks gleich ist. Dagegen sei X ein Kegel, dessen Grundfläche dem Kreise ABCD, und dessen Höhe dem Halbmesser dieses Kreises gleich ist. F. 79.

Weil nun die Grundfläche des Kegels P so grofs, wie die Oberfläche des in die Kugel eingeschriebenen Körpers, die Höhe aber dem Perpendikel aus Q auf AF gleich, und nach dem geführten Beweise (S. 26.) die Oberfläche des eingeschriebenen Körpers kleiner ist, als das Vierfache des Normalkreises, so ist die Grundfläche des Kegels P kleiner als das Vierfache der Grundfläche von X. Es ist aber auch die Höhe von P kleiner, als die Höhe von X. Weil nun des Kegels P Grundfläche kleiner, als das Vierfache der Grundfläche von X, die Höhe von jenem aber kleiner ist, als die Höhe von diesem; so erhellet, dafs auch P selbst kleiner ist, als das Vierfache von X. Der Kegel P aber ist der eingeschriebenen körperlichen Figur gleich; mithin ist die eingeschriebene körperliche Figur kleiner, als das Vierfache des Kegels X.

Satz 29.

F. 80. Es sei ABCD der Normalkreis einer Kugel, und um ABCD sei ein gleichseitiges und gleichwinkliges Vieleck beschrieben, dessen Seitenzahl durch vier meſsbar ist. Das um den Kreis beschriebene Vieleck sei ferner eingeschlossen durch einen umschriebenen, mit ABCD koncentrischen Kreis, und während nun EG seine Lage behält, werde die Ebene EFGH umgewälzt, worin sich das Vieleck samt dem Kreise befindet. Dann ist klar, daſs der Umfang von ABCD in einer Sphäre sich bewegen werde, und der Umfang von EFGH in einer andern Sphäre, die mit der kleineren koncentrisch ist. Die Berührungspunkte der Seiten aber beschreiben senkrecht auf ABCD stehende Kreise in der kleineren Sphäre, und die Winkelspitzen des Vielecks, mit Ausnahme der bei E und G, werden sich nach Kreisen in der gröſseren Sphäre senkrecht auf EFGH bewegen; die Seiten des Vielecks endlich werden sich in Kegelmänteln bewegen, wie in den vorigen Sätzen. Es wird also der von Kegelmänteln umschlossene Körper zu der kleineren Kugel ein umschriebener, zu der gröſseren aber ein eingeschriebener sein. Daſs nun die Oberfläche des umschriebenen Körpers gröſser sei, als die Sphäre, läſst sich auf folgende Weise zeigen:

Es sei KD der Durchmesser eines Kreises in der kleineren Kugel, so daſs K, D, die Punkte sind, in denen zwei Seiten des umschriebenen Vielecks den Kreis ABCD berühren. Indem nun die Sphäre von der auf ABCD senkrechten Ebene durch KD getheilt wird, so wird auch die Oberfläche der um die Kugel beschriebenen körperlichen Figur von dieser Ebene getheilt, und es ist augenscheinlich, daſs sie einerlei Gränzen in der Ebene haben; denn die Gränze beider Oberflächen ist der Umring des auf ABCD senkrechten Kreises um den Durchmesser KD; auch sind beide nach einerlei Seite hohl, und die eine wird von der andern und von der Ebene umschlossen, welche mit dieser einerlei Gränzen hat. Hiernach ist die eingeschlossene Oberfläche des Kugelabschnitts kleiner als die Oberfläche des darum beschriebenen Körpers (*Annahme* 4.); gleicherweise ist auch die Oberfläche des andern Kugelabschnitts kleiner, als die Oberfläche des darum beschriebenen Körpers: woraus erhellet, daſs die ganze Sphäre kleiner ist, als die Oberfläche des umschriebenen Körpers.

Satz 30.

Die Oberfläche eines um die Kugel beschriebenen Körpers ist einem Kreise gleich, dessen Quadrat des Halbmessers so groſs ist, wie das Rechteck unter einer Seite des Vielecks und unter der Summe aller Diagonalen desselben, die mit irgend einer über zwei Seiten des Vielecks gespannten parallel sind.

Denn der um die kleinere Kugel beschriebene Körper ist zu der gröſseren ein eingeschriebener. Es ward aber gezeigt, daſs die Oberfläche eines in die Kugel eingeschriebenen und von Kegelmänteln begränzten Körpers einem Kreise gleich sei, dessen Quadrat des Halbmessers so groſs ist, wie das Rechteck unter einer Seite des Vielecks und der Summe aller derjenigen Diagonalen desselben, die mit irgend einer über zwei Seiten des Vielecks gespannten parallel sind (S. 25); woraus das Ausgesprochene hervorgeht.

Satz 31.

Die Oberfläche der um die Kugel beschriebenen körperlichen Figur beträgt mehr als das Vierfache des Normalkreises der Kugel.

Denn es sei die Kugel, der Kreis, und alles Uebrige wie vorhin angenommen, und der Kreis L sei so grofs, wie die Oberfläche des nach der Annahme um die kleinere Kugel beschriebenen Körpers. F. 81.

Weil nun in den Kreis EFGH ein gleichseitiges Vieleck von gerader Winkelzahl eingetragen ist, so verhält sich

die Summe aller mit FH *parallelen Diagonalen* : FH = KH : KF

mithin ist das Rechteck unter einer Seite des Vielecks und der Summe aller dieser Diagonalen gleich dem Rechteck FH $\times$ KH. Defshalb ist

das Quadrat des Halbmessers von L = FH $\times$ KH. (α)

Es ist aber KH dem Durchmesser von ABCD gleich; denn es ist KH = 2 XS, und XS ist der Halbmesser von ABCD (β); mithin leuchtet ein, dafs der Kreis L, d. h. die Oberfläche der um die kleinere Kugel beschriebenen körperlichen Figur, gröfser ist, als der vierfache Normalkreis der Kugel. (γ)

Satz 32.

Dem um die kleinere Kugel beschriebenen Körper ist ein Kegel gleich, dessen Grundfläche ein Kreis von der Gröfse der Oberfläche des Körpers und dessen Höhe der Halbmesser der Kugel ist.

Denn die um die kleinere Kugel beschriebene körperliche Figur ist zu der gröfsern eine eingeschriebene. Es ward aber bewiesen, dafs die in eine Kugel eingeschriebene, von Kegelflächen umschlossene körperliche Figur so grofs sei, wie ein Kegel, der zur Grundfläche einen Kreis von der Gröfse der Oberfläche der körperlichen Figur, zur Höhe aber das Perpendikel vom Mittelpunkte der Kugel auf eine Seite der körperlichen Figur habe (S. 19.). Dieses Perpendikel ist aber dem Halbmesser der kleineren Kugel gleich, mithin ist die Behauptung erwiesen.

Satz 33.

Hieraus erhellet, dafs die um die kleinere Kugel beschriebene körperliche Figur gröfser

---

(S. 31. α) Denn da L so grofs ist, wie die Oberfläche des Körpers, so ist nach S. 25 das Quadrat des Halbmessers von L so grofs, wie das Rechteck unter einer Seite und der Summe der Diagonalen:

(β) Weil nämlich FKH = R, als Winkel im Halbkreise FEH, und FSX = R, als Winkel des Halbmessers mit der berührenden, so ist KH $\parallel$ SX, mithin KH : SX = FH : FX; nun ist FH = 2FX; folglich KH = 2SX = 2BX = BD.

(γ) Es ist nämlich so zu schliefsen:

das Quadrat des Halbmessers von L = FH $\times$ KH;

nun ist FH > 2BX und KH = 2BX, also

das Quadrat des Halbmessers von L > $4BX^2$; folglich L > $4\pi BX^2$

sei, als das Vierfache eines Kegels, der zur Grundfläche den Normalkreis, und zur Höhe den Halbmesser der Kugel hat.

Weil nämlich die körperliche Figur so grofs ist, wie ein Kegel, dessen Grundfläche jener Oberfläche, dessen Höhe aber einem Perpendikel aus dem Mittelpunkte der Kugel auf eine Seite des Vielecks, d. h. dem Halbmesser der kleineren Kugel gleich ist (S. 32.), und weil die Oberfläche des umschriebenen Körpers mehr als das Vierfache des Normalkreises der Kugel beträgt (S. 31.); so wird der um die Kugel beschriebene Körper gröfser sein, als das Vierfache eines Kegels, der zur Grundfläche den Normalkreis, zur Höhe aber den Halbmesser der Kugel hat; weil nämlich ein dem Körper selbst gleicher Kegel mehr als das Vierfache des erwähnten Kegels beträgt, denn die Grundfläche eines solchen ist mehr als viermal gröfser, und die Höhe gleich (S. 17. Lehnsatz 1.)

Satz 34.

Wenn eine körperliche Figur in einer Kugel, und eine andere darum durch ähnliche Vielecke nach der Weise der bisherigen Konstruktionen beschrieben ist, so steht die Oberfläche der umschriebenen zur Oberfläche der eingeschriebenen im zwiefachen Verhältnisse der Seite des um den Normalkreis verzeichneten Vielecks zur Seite des in demselben Kreise beschriebenen; die umschriebene körperliche Figur selbst aber steht zur eingeschriebenen im dreifachen Verhältnisse derselben Seiten.

F. 82. Es sei ABCD ein Normalkreis der Kugel, und ein gleichseitiges Vieleck darin beschrieben, dessen Seitenzahl durch vier theilbar sein soll. Ein anderes dem eingeschriebenen ähnliches Vieleck werde darum beschrieben, so dafs die Seiten des umschriebenen Vielecks den Kreis in den Mitten der Bogen berühren, welche durch die Seiten des eingeschriebenen Vielecks abgeschnitten werden. Die Linien EG, FH sollen rechtwinklig auf einander gestellte Durchmesser eines das umschriebene Vieleck einschliefsenden Kreises sein, und mit den Durchmessern AC, BD, der Lage nach übereinstimmen, auch denke man sich zwischen den entgegenstehenden Winkeln Diagonalen, die sowohl unter sich, als mit FBDH parallel sind. Wenn nun der Durchmesser EG in seiner Lage bleibt, die Umringe der Vielecke aber sich um den Durchmesser des Kreises herumwälzen, so wird die eine körperliche Figur eine in der Kugel beschriebene, die andere eine umschriebene sein. Es ist nun also zu zeigen, dafs

$$\textit{Oberfl. d. äufs. Körp.} : \textit{Oberfl. d. inn. Körp.} = EL^2 : AK^2$$

und

$$\textit{äufs. Körp.} : \textit{inn. Körp.} = EL^3 : AK^3$$

1) Es sei nun der Kreis M so grofs, als die Oberfläche des äufsern Körpers, N aber gleich der des innern; dann ist also das Quadrat des Halbmessers von M dem Rechteck unter EL und der Summe sämtlicher Diagonalen des umschriebenen Vielecks (S. 30.), das Quadrat des Halbmessers von N aber dem Rechteck unter AK und der Summe sämtlicher Diagonalen des eingeschriebenen Vielecks gleich (S. 25); und wegen Aehnlichkeit der Vielecke sind ja auch die Rechtecke unter den genannten Linien, d. h. unter den Summen von Diagonalen und den

Seiten

Seiten der Vielecke ähnlich; (α) mithin verhalten sie sich zu einander, wie die Quadrate der Polygonseiten. Die genannten Rechtecke verhalten sich aber auch, wie die Quadrate der Halbmesser der Kreise M, N, mithin ist

$$\textit{Durchmesser von } M : \textit{Durchmesser von } N = EL : AK$$

Diese Kreise verhalten sich aber zu einander, wie die Quadrate ihrer Durchmesser, und sind den Oberflächen des äufsern und innern Körpers gleich; also erhellet, dafs

$$\textit{Oberfl. d. äufs. Körp.} : \textit{Oberfl. d. inn. Körp.} = EL^2 : AK^2$$

2) Man nehme hierauf zwei Kegel X, O, an. Die Grundfläche von X sei dem Kreise M, die von O dem Kreise N gleich; die Höhe des Kegels X sei der Halbmesser SP der Kugel, die Höhe von O dagegen sei das Perpendikel SQ vom Mittelpunkte auf AK; dann ist der Kegel X der um den Kreis beschriebenen körperlichen Figur, der Kegel O dagegen der eingeschriebenen körperlichen Figur gleich, wie bewiesen wurde (S. 32. 27.). Wegen Aehnlichkeit der Vielecke ist nun

$$EL : AK = SQ : SP$$

also $\textit{Höhe von } X : \textit{Höhe von } O = EL : AK.$

Zugl. ist $\textit{Durchmesser von } M : \textit{Durchmesser von } N = EL : AK$

Mithin sind die Durchmesser der Grundflächen der Kegel X, O, ihren Höhen proportionirt; folglich sind die Kegel ähnlich, und eben defshalb ist das Verhältnifs des Kegels X zum Kegel O das dreifache Verhältnifs des Durchmessers von M zum Durchmesser von N (S. 17. Lehnsatz 5.). Daraus erhellet, dafs auch

$$\textit{äufs. Körper} : \textit{inn. Körper} = EL^3 : AK^3$$

Satz 35.

Jede Sphäre ist viermal so grofs, als der Normalkreis ihrer Kugel.

Es sei nämlich eine Kugel und ein Kreis A gegeben, welcher viermal so grofs ist, als der Normalkreis. Ich behaupte, der Kreis A sei der Sphäre gleich. Denn wo nicht, so ist er entweder gröfser oder kleiner. F. 83.

1) Die Sphäre sei gröfser als der Kreis. Hier sind nun zwei ungleiche Gröfsen, die Sphäre und der Kreis A; es lassen sich also zwei ungleiche gerade Linien so annehmen, dafs die gröfsere zu der kleineren ein kleineres Verhältnifs habe, als die Sphäre zu dem Kreise (S. 31.). Man nehme demnach B, C, als diese Linien an, und D sei die mittlere Proportionale zu B, C. Ferner stelle man sich vor, die Kugel sei von einer Ebene durch den Mittelpunkt nach dem Kreise EFGH geschnitten, und es sei sowohl in dem Kreise als um denselben ein Vieleck beschrieben, dergestalt, dafs das äufsere dem innern ähnlich und das Verhältnifs der Seite des äufsern zur Seite des innern kleiner ist, als das Verhältnifs von B zu D (S. 4.). Also ist auch das zwiefache Verhältnifs jener Seiten kleiner, als das zwiefache Verhältnifs dieser Linien; ferner ist

---

(S. 34. α) Weil nämlich beide Vielecke ähnlich sind, so verhält sich jede Diagonale des äufsern zur gleichliegenden des innern, wie EL : AK; mithin die Summe der Diagonalen des äufsern zur Summe der Diagonalen des inneren gleichfalls wie EL : AK; folglich haben beide Rechtecke proportionirte Seiten, sind also ähnlich.

$$B^2 : D^2 = B : C \ (\alpha)$$

und das zwiefache Verhältniſs der Seite des äuſsern zur Seite des innern Vielecks ist eben das Verhältniſs der Oberflächen des umschriebenen Körpers und des eingeschriebenen (S. 34.). Also ist

Oberfl. des äuſs. Körp. : *Oberfl. d. inn. Körp.* $<$ *Sphäre* : A,

was aber widersinnig ist; denn die Oberfläche des äuſsern Körpers ist gröſser als die Sphäre (S. 29.), die Oberfläche des innern dagegen ist kleiner als der Kreis A; indem erwiesen wurde, daſs die Oberfläche eines eingeschriebenen Körpers kleiner sei, als das Vierfache des Normalkreises der Kugel (S. 26.), und weil das Vierfache des Normalkreises dem Kreise A gleich ist. (β) Mithin ist die Sphäre nicht gröſser als der Kreis. Ich behaupte nun, sie sei auch nicht kleiner.

2) Die Sphäre mag nämlich, wo möglich, kleiner sein. Man bestimme gleichfalls die geraden Linien B, C, so daſs

B : C $<$ A : *Sphäre*;

auch sei B : D $=$ D : DC

und man beschreibe wieder ein inneres und ein äuſseres Vieleck, so daſs

Seite des äuſsern : *Seite des innern* $<$ B : D,

mithin ist auch das zwiefache erstere Verhältniſs kleiner als das zwiefache zweite. Also ist

Oberfl. des äuſs. Körp. : *Oberfl. d. inn. Körp.* $<$ A : *Sphäre*,

was ungereimt ist; denn die Oberfläche des umschriebenen Körpers ist gröſser, als der Kreis A (S. 31), die des eingeschriebenen aber ist kleiner als die Sphäre; mithin ist die Sphäre auch nicht kleiner als der Kreis A. (γ) Es ward schon gezeigt, daſs sie nicht gröſser sei, folglich ist die Sphäre dem Kreise A gleich, d. h. dem Vierfachen des Normalkreises.

(S. 35. α) Weil $D^2 = BC$ ist.

(β) Die Uebersicht ist deutlicher so: Es sei die Sphäre $=$ S, die Seite des äuſsern Vielecks $=$ L, des innern $=$ l, die Oberfläche des äuſsern Körpers $=$ F, des innern $=$ f; auſserdem der Kreis A und die Linien B, C, D gegeben, wie im Texte vorgeschrieben. Dann hat man

$$\left.\begin{matrix} B : C < S : A \\ L : l < B : D \end{matrix}\right\} \text{nach der Konstruktion}$$

$$\begin{array}{ll} \text{also auch} & L^2 : l^2 < B^2 : D^2 \\ \text{ferner ist} & B^2 : D^2 = B : C \\ \text{und} & L^2 : l^2 = F : f \ (\text{S. } 34.) \\ \hline \text{also ist} & F : f < B^2 : D^2 \text{ oder } F : f < B : C \\ \text{folgl. um so mehr} & F : f < S : A \\ \text{mithin auch} & F : S < f : A \end{array}$$

Nun ist $F > S$ und $f < A$, also $\frac{F}{S}$ ein unächter und $\frac{f}{A}$ ein ächter Bruch, was ungereimt ist.

(γ) Die Uebersicht ist ganz wie in Anmerkung β, wenn man bei derselben Bezeichnung von der Proportion B : C $<$ A : S ausgeht, wodurch man auf die Proportion F : A $<$ f : S kommt, welche ungereimt ist, weil jetzt $\frac{F}{A}$ ein unächter, $\frac{f}{S}$ ein ächter Bruch sein muſs.

Satz 36.

Jede Kugel ist viermal so grofs, als ein Kegel, dessen Grundfläche dem Normalkreise, und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

Es sei eine Kugel, und in ihr ein Normalkreis ABCD. Wofern nun die Kugel nicht F. 84.
gleich ist dem Vierfachen des erwähnten Kegels —

1) so sei sie, wo möglich gröfser als das Vierfache. Es sei nun X ein Kegel, dessen Grundfläche viermal so grofs, als der Kreis ABCD, dessen Höhe aber dem Halbmesser der Kugel gleich ist. Die Kugel ist mithin gröfser, als der Kegel X. Man wird also zwei ungleiche Gröfsen haben, die Kugel und den Kegel, so dafs es möglich ist, zwei ungleiche gerade Linien dergestalt anzunehmen, dafs die gröfsere zur kleineren in kleinerem Verhältnisse stehe, als die Kugel zum Kegel X (S. 3.). Diese Linien sollen K, G, sein, und man nehme ferner I, H, so an, dafs $K - I = I - H = H - G$ sei. (α) Demnächst denke man sich in dem Kreise ABCD ein Vieleck, dessen Seitenzahl durch vier getheilt wird, und ein anderes ähnliches darum beschrieben, wie in den vorigen Sätzen; auch sei

$$\textit{Seite des äufs. Vielecks} : \textit{Seite des inn. Vielecks} < K : I \text{ (S. 4.)}$$

auch sollen AC, BD, senkrechte Durchmesser sein. Wenn nun, bei unveränderter Lage des Durchmessers AC, die Ebene, worin die Vielecke sind, sich umwälzt, so wird die eine körperliche Figur eine innere in der Kugel, die andere eine äufsere sein, und es wird die äufsere zur innern im dreifachen Verhältnisse der Seite des umschriebenen Vielecks zur Seite des in dem Kreise ABCD beschriebenen stehen (S. 34.). Nun ist aber

$$\textit{die eine Seite} : \textit{der andern} < K : I,$$

also auch

$$\textit{die äufs. Figur} : \textit{der inneren} < K^3 : I^3$$

Es ist aber zugleich

$$K : G > K^3 : I^3$$

(wie aus Lehnsätzen erhellet). (β) Um desto mehr ist also

$$\textit{äufs. Körp.} : \textit{inn. Körp.} < K : G < \textit{Kugel} : X$$

oder

$$\textit{äufs. Körp.} : \textit{Kugel} < \textit{inn. Körp.} : X,$$

was unmöglich ist; denn die äufsere körperliche Figur ist gröfser als die Kugel, die innere aber kleiner, als der Kegel X; weil dieser viermal so grofs ist, als ein Kegel, der zur Grundfläche den Kreis ABCD, zur Höhe aber den Halbmesser der Kugel hat, und weil die eingeschriebene körperliche Figur weniger als das Vierfache des letzteren Kegels beträgt (S. 28.). Folglich ist die Kugel nicht gröfser, als das Vierfache des Kegels X.

(S. 36. α) d. h. man mache $I = \frac{1}{3}(2K + G)$ und $H = \frac{1}{3}(2G + K)$.

(β) Ein Lehnsatz dieser Art kommt bei Archimedes nicht vor; er hätte etwa so lauten müssen: Wenn vier Gröfsen eine steigende arithmetische Progression bilden, so ist das (geometrische) Verhältnifs der vierten zur ersten gröfser, als das dreifache Verhältnifs der vierten zur dritten. Gegenwärtig bilden nun die vier Linien G, H, I, K, eine steigende arithmetische Progression, daher sei $G = a$, $H = a + d$, $I = a + 2d$, $K = a + 3d$; dann wird behauptet, es sei $K : G > K^3 : I^3$. Nun ist gewifs

$$K : G = K^3 : GK^2$$
$$GK^2 = a(a + 3d)^2 = a^3 + 6a^2d + 9ad^2$$
$$I^3 = (a + 2d)^3 = a^3 + 6a^2d + 12ad^2 + 8d^3$$
$$I^3 = GK^2 + 3ad^2 + 8d^3$$

mithin $I^3 > GK^2$, folglich $K : G > K^3 : I^3$

2) Sie sei nun, wenn es möglich ist, kleiner als das Vierfache. Man nehme die geraden Linien K, G, so an, dafs $K > G$, und dafs

$$K : G < X : \textit{Kugel}.$$

Ferner setze man I, H, wie zuvor, denke sich in dem Kreise ABCD ein Vieleck, und ein anderes darum so beschrieben, dafs

$$\textit{Seite des äufsern} : \textit{Seite des innern} < K : I \text{ (S. 4.)}$$

und alles Uebrige wie vorhin konstruirt. Dann wird also der umschriebene Körper zu dem eingeschriebenen im dreifachen Verhältnisse der Seiten des um und in ABCD beschriebenen Vielecks stehen (S. 34.). Es ist aber

$$\textit{Seite des einen Vielecks} : \textit{Seit. d. and.} < K : I$$

also auch $\quad \textit{äufs. Körp.} : \textit{inn. Körp.} < K^3 : I^3$

ferner ist $\quad K : G > K^3 : I^3,$

folglich $\quad \textit{äufs. Körp.} : \textit{inn. Körper} < K : G < X : \textit{Kugel},$ (γ)

was unmöglich ist; denn die eingezeichnete körperliche Figur ist kleiner als die Kugel, die umschriebene aber gröfser als der Kegel X. Demnach ist die Kugel auch nicht kleiner, als das Vierfache eines Kegels, dessen Grundfläche dem Kreise ABCD, und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist; dafs sie nicht gröfser sei, ward schon gezeigt: folglich ist sie so grofs, als das Vierfache.

Satz 37.

Nachdem dieses erwiesen, so ist einleuchtend, dafs jeder Cylinder, welcher zur Grundfläche den Normalkreis einer Kugel, und eine Höhe hat, die dem Durchmesser der Kugel gleich ist, anderthalbmal so viel beträgt, als die Kugel; und sein Mantel samt den Grundflächen anderthalbmal so viel, als die Sphäre.

Denn der gedachte Cylinder ist das Sechsfache eines Kegels auf derselben Grundfläche, dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist; (α) die Kugel aber beträgt nach dem Beweise (S. 36) das Vierfache eben dieses Kegels, folglich beträgt der Cylinder anderthalbmal so viel als die Kugel. (β)

Weil ferner gezeigt worden, dafs der Mantel eines Cylinders einem Kreise gleich sei, dessen Halbmesser die mittlere Proportionale zwischen der Seite des Cylinders und dem Durchmesser seiner Grundfläche ist (S. 14.), und weil die Seite des erwähnten, die Kugel umschliefsenden Cylinders dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist; so ist folglich die mittlere Proportionale der letzteren Linien ebenfalls dem Durchmesser der Grundfläche gleich. Ein Kreis aber, dessen Halbmesser so grofs ist, wie der Durchmesser der Grundfläche, beträgt viermal so viel, als die Grundfläche, d. h. als der Normalkreis. Demnach wird der Cylindermantel viermal so grofs sein, als der Normalkreis. Die ganze Oberfläche des Cylinders, nämlich der Mantel samt den Grundflächen, wird also das Sechsfache des Normalkeises betragen.

(γ) Also auch $\quad \textit{äufs. Körp.} : X < \textit{inn. Körp.} : \textit{Kugel}.$

(S. 37. α) Hätte der Cylinder den Halbmesser der Kugel zur Höhe, so betrüge er das Dreifache des Kegels (Eukl. XII, 10), jetzt also das Sechsfache (S. 17. Lehnsatz 3.).

(β) Der Cylinder sei $= C$, der Kegel $= K$, die Kugel $= G$, so ist $\frac{1}{6} C = K$ und $\frac{1}{4} G = K$, folglich $\frac{1}{6} C = \frac{1}{4} G$, d. h. $\frac{3}{2} G = C$.

Die Sphäre aber ist dem Vierfachen des Normalkreises gleich; folglich beträgt die ganze Oberfläche des Cylinders anderthalbmal so viel, als die Sphäre.

Satz 38.

Die Oberfläche eines in einen Kugelabschnitt eingeschriebenen Körpers ist so grofs, als ein Kreis, dessen Quadrat des Halbmessers dem Rechteck unter einer Seite des in den Abschnitt des Normalkreises eingeschriebenen Vielecks, und unter der Summe aus sämtlichen mit der Grundlinie des Kreisabschnitts parallelen Diagonalen samt der halben Grundlinie des Abschnitts gleich ist.

Es sei eine Kugel und in ihr ein Abschnitt vorhanden, dessen Grundfläche der Kreis um AG ist. Man beschreibe darin einen Körper, wie angegeben ist (S. 23), der von Kegelmänteln umschlossen wird; auch sei AGH ein Normalkreis, und das Vieleck AF habe eine gerade Anzahl gleicher Seiten, die Seite AG ungerechnet. Ferner werde ein Kreis L angenommen, dessen Quadrat des Halbmessers dem Rechteck $AC \times (EF + CD + AK)$ gleich ist. Man soll also zeigen, dafs der Kreis L so grofs sei, als die Oberfläche des Körpers. F. 85.

Es sei demnach ein Kreis M angenommen, dessen Quadrat des Halbmessers dem Rechteck $EH \times \frac{1}{2} EF$ gleich ist; dann ist M gleich dem Mantel eines Kegels, dessen Grundfläche der Kreis um EF, dessen Spitze aber der Punkt H ist (S. 15). Ferner werde ein anderer Kreis N angenommen, dessen Quadrat des Halbmessers dem Rechteck $EC \times \frac{1}{2}(EF + CD)$ gleich ist; dann wird dieser Kreis dem Kegelmantel zwischen den parallelen Ebenen durch EF, CD, gleich sein (S. 17.). Noch ein anderer Kreis X werde gleichfalls angenommen, dessen Quadrat des Halbmessers dem Rechteck $AC \times \frac{1}{2}(CD + AG)$ gleich ist; er selbst also ist dem Kegelmantel zwischen den parallelen Ebenen durch AG, CD, gleich (S. 17.). Die Summe der Kreise wird hiernach der ganzen Oberfläche des Körpers, und die Summe der Quadrate ihrer Halbmesser wird dem Rechtecke $AC \times (EF + CD + AK)$ gleich sein. Es war aber auch das Quadrat des Halbmessers vom Kreise L eben diesem Rechtecke gleich; also wird der Kreis $L = M + N + X$, (α) mithin auch so grofs sein, wie die Oberfläche des eingeschriebenen Körpers.

Satz 39.

Eine Kugel werde aufserhalb des Mittelpunktes von einer Ebene geschnitten, und in ihr der Normalkreis AEF, welcher die schneidende Ebene senkrecht trifft; auch sei in dem Kreisabschnitte ABC ein gleichseitiges Vieleck von gerader Seitenzahl beschrieben, die Grundlinie AB ungerechnet. Ganz wie früher also, wenn, bei unverrückter Lage von CF, die Figur sich umwälzt, werden die Winkelscheitel D, E, A, B, nach Kreisen sich bewegen, deren Durchmesser DE, AB, sind, die Seiten der Figur aber nach Kegelmänteln, (α) und es wird F. 86.

(S. 38. α) Es sei $L = \pi a^2$, $M = \pi b^2$, $N = \pi c^2$, $X = \pi d^2$; ist nun $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$, so mufs auch $\pi a^2 = \pi b^2 + \pi c^2 + \pi d^2$, d. h. $L = M + N + X$ sein.

(S. 39. α) Hiebei ist nicht beachtet, dafs ein Seitenpaar der Figur sich auch in einem Cylindermantel bewegen könne, und sonderbar genug giebt die beigezeichnete Figur das Bild eines solchen Falles, welcher eintritt, wenn der Bogen ACB zwei Drittheile des Kreisumfangs beträgt, und das eingeschriebene Vieleck vier gleiche Seiten ohne die Grundlinie hat. Vielleicht dachte sich Archimedes den Abschnitt kleiner als die Halbkugel, wogedie entstehende körperliche Figur, umschlossen von Kegelmänteln, zur Grundfläche den Kreis um den Durchmesser AB, zur Spitze aber den Punkt C haben. Aus denselben Gründen wie zuvor wird dann ihre Oberfläche kleiner sein, als die Oberfläche des umschliefsenden Kugelabschnitts (S. 24.).

Denn sowohl der Kugelabschnitt, als die körperliche Figur haben zur gemeinschaftlichen Gränze den Umfang des Kreises um den Durchmesser AB, auch sind beide Oberflächen nach einerlei Seite hohl, und werden von einander umschlossen (Annahme 4.)

Satz 40.

Die Oberfläche der in einen Kugelabschnitt eingeschriebenen körperlichen Figur ist kleiner, als ein Kreis, dessen Halbmesser einer von dem Pole des Abschnitts an den Umfang des Grundkreises gezogenen Sehne gleich ist.

F. 87. Es sei eine Kugel vorhanden, in ihr der Normalkreis ABFE, in der Kugel ein Abschnitt, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser AB ist, in den Abschnitt sei die erwähnte Figur eingetragen; und alles Uebrige sei wie oben, also HL der Durchmesser der Kugel, und die Linien LE, HA, gezogen. Auch soll M ein Kreis mit dem Halbmesser $=$ HA sein. Man wird zeigen müssen, dafs der Kreis M gröfser sei, als die Oberfläche der körperlichen Figur.

Es ward bewiesen, dafs die Oberfläche derselben so grofs sei, als ein Kreis, dessen Quadrat des Halbmessers dem Rechteck $EH \times (EF + CD + AK)$ gleich ist (S. 38.). Ferner ward erwiesen, dafs $EH \times (EF + CD + AK) = EL \times KH$ sei (S. 23.). Nun ist $EL \times KH < AH^2$; denn $EL \times KH < HL \times KH = AH^2$. Demnach ist einleuchtend, dafs der Halbmesser eines Kreises, welcher der Oberfläche der körperlichen Figur gleich ist, kleiner sei, als der Halbmesser von M (α) woraus hervorgeht, dafs M gröfser ist, als die Oberfläche der körperlichen Figur.

Satz 41.

Die in einen Kugelabschnitt, welcher kleiner ist, als die Halbkugel, eingeschriebene, von Kegelmänteln umschlossene körperliche Figur beträgt zusammengenommen mit dem Kegel, dessen Grundfläche eben die des Abschnitts, dessen Spitze aber der Mittelpunkt der Kugel ist,

---

gen zwar die Gestalt der Figur streitet, was man jedoch trotz dem annehmen kann. Indessen läfst sich der Beweis auch für den Fall ergänzen, wo AD einen Cylindermantel beschreibt. Man wird nämlich nur zu zeigen haben dafs dieser Cylindermantel AD kleiner sei, als die Zone AD.

Fügt man nun zu beiden den Kreis DE, so entstehen zwei Oberflächen, nämlich *der Cylindermantel* AD + *Kreis* DE, und *die Zone* AD + *Kreis* DE. Beide Oberflächen haben zur gemeinschaftlichen Gränze den Kreis AB, sind nach einerlei Seite hohl und umschliefsen einander einestheils, anderentheils fallen sie zusammen in dem Kreise DE; also ist die umschliefsende gröfser, als die umschlossene, d. h.

Zone + *Kr.* DE > *Cylindermantel* + *Kr.* DE

folglich ist auch nach Wegnahme des Kreises DE die Zone gröfser, als der Cylindermantel.

(S. 40. α) Denn setzt man den Halbmesser jenes Kreises $= r$, so ist $r^2 = EL \times KH$, mithin $r^2 < AH^2$, also auch $r < AH$.

so viel wie ein Kegel, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche der körperlichen Figur, dessen Höhe aber das Perpendikel aus dem Mittelpunkte der Kugel auf eine Seite des Vielecks ist.

Es sei nämlich eine Kugel vorhanden, in ihr ein Normalkreis mit einem Abschnitte, F. 88. der kleiner als der Halbkreis ABC ist, und E sei der Mittelpunkt. In dem Abschnitte ABC werde ein Vieleck von gerader Anzahl gleicher Seiten, AC ungerechnet, eben so wie früher eingetragen, auch bilde bei ungeänderter Lage von BE die Kugel durch Umwälzung einen von Kegelmänteln umschlossenen Körper, und auf dem Kreise um den Durchmesser AC werde ein Kegel errichtet mit der Spitze im Mittelpunkte. Ferner sei der Kegel K angenommen, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche des Körpers, dessen Höhe aber gleich ist dem Perpendikel aus dem Mittelpunkte E auf eine Seite des Vielecks. Dann soll gezeigt werden, daſs der Kegel K so groſs sei, wie der erwähnte Körper nebst dem Kegel AEC.

Man errichte also Kegel auf den Kreisen um die Durchmesser GH, FL, mit den Spitzen in E. Dann ist die körperliche Raute GBHE einem Kegel gleich, dessen Grundfläche dem Kegelmantel GBH, und dessen Höhe dem Perpendikel von E auf GB gleich ist (S. 19.).

Das Stück einer Raute ferner, welches von dem Theil eines Kegelmantels zwischen den parallelen Ebenen durch GH, FL, und von den Kegelmänteln FEL, GEH, begränzt wird, ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche so groſs wie der Theil des Kegelmantels zwischen den parallelen Ebenen durch GH, FL, und dessen Höhe so groſs ist, wie das Perpendikel aus E auf FG (S. 21.). Das Stück einer Raute endlich, welches von dem Theil eines Kegelmantels zwischen den parallelen Ebenen durch FL, AC, und von den Kegelmänteln AEC, FEL umschlossen wird, ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche dem Theil eines Kegelmantels zwischen den parallelen Ebenen durch FL, AC, und dessen Höhe der senkrechten von E auf FA gleich ist. Die Summe der erwähnten Kegel wird nun so viel betragen, als die Summe der eingeschriebenen körperlichen Figur und des Kegels AEC. Die Höhe dieser Kegel ist gleich dem Perpendikel von E auf eine Seite des Vielecks, die Summe ihrer Grundflächen aber beträgt so viel, als die Oberfläche des Körpers AFGBHLC; es hat indessen auch der Kegel K dieselbe Höhe und eine der Grundfläche des eingeschriebenen Körpers gleiche Grundfläche: also ist dieser Kegel so groſs, wie die Summe der genannten Kegel; diese war aber, wie nachgewiesen ist, der eingeschriebenen körperlichen Figur nebst dem Kegel AEC gleich: demnach ist der Kegel K so groſs, wie die körperliche Figur mit dem Kegel EAC.

Folgerung. Hiedurch ist einleuchtend, daſs ein Kegel, welcher zur Grundfläche einen Kreis, dessen Halbmesser so groſs ist, wie eine Sehne vom Pole des Abschnitts bis an den Umring des Grundkreises des Abschnitts, zur Höhe aber den Halbmesser der Kugel hat, gröſser sei, als die eingeschriebene körperliche Figur samt dem Kegel.

Denn der vorgedachte Kegel ist gröſser, als ein Kegel, welcher dem Körper nebst dem Kegel gleich ist, der zur Grundfläche die Grundfläche des Abschnitts, zur Spitze aber den Mittelpunkt hat, d. h. als derjenige Kegel, dessen Grundfläche der Oberfläche des Körpers, dessen Höhe aber dem Perpendikel aus dem Mittelpunkte auf eine Seite des Vielecks gleich ist. Jene Grundfläche ist nämlich nach dem Beweise (S. 40.) gröſser, als diese, und jene Höhe gröſser, als diese.

Satz 42.

F. 89. Es sei eine Kugel mit dem Normalkreise ABC vorhanden, wovon durch AB weniger als ein Halbkreis abgeschnitten werde. Der Mittelpunkt sei D, und von ihm seien nach A, B, die Halbmesser DA, DB, gezogen. Um den dadurch entstehenden Ausschnitt werde ein Vieleck beschrieben, und um dieses ein Kreis, welcher mit dem Kreise ABC einerlei Mittelpunkt haben wird. Wenn nun, bei ungeänderter Lage von EK, das Vieleck sich umwälzt, bis es seine erste Lage wieder eingenommen, so wird der umschriebene Kreis nach einer Sphäre sich bewegen, und die Winkelspitzen des Vielecks werden Kreise beschreiben, deren Durchmesser mit AB parallele Diagonalen des Vielecks sind. Die Berührungspunkte der Seiten des Vielecks und des kleineren Kreises beschreiben in der kleineren Kugel Kreise, deren Durchmesser mit AB parallele Sehnen zwischen den Berührungspunkten sind; die Seiten selbst aber werden sich nach Kegelmänteln bewegen. Es wird dann einen umschriebenen, von Kegelmänteln umschlossenen Körper geben, dessen Grundfläche der Kreis um FG ist. Die Oberfläche des genannten Körpers ist aber gröſser, als die Oberfläche des kleineren Kugelabschnitts auf dem Grundkreise um AB.

Denn man ziehe die berührenden AM, BN; sie werden sich dann nach einem Kegelmantel bewegen, und die körperliche Figur, welche durch das Vieleck AMHELNB entsteht, wird gröſser sein, als die Oberfläche des Kugelabschnitts auf dem Grundkreise um AB, weil beide zur gemeinschaftlichen Gränze in einerlei Ebene den Kreis um AB haben, und der Abschnitt von der Figur eingeschlossen wird. Aber der durch FM, GN, entstandene Kegelmantel ist gröſser, als der durch AM, BN entstandene; denn als Hypotenuse ist FM gröſser als AM, und GN gröſser als BN; und in solchem Falle ist eben die eine Oberfläche gröſser als die andere. Dieſs ist nämlich erwiesen. (α) Es erhellet mithin, daſs auch die Oberfläche der umschriebenen körperlichen Figur gröſser ist, als die Oberfläche des Abschnitts der kleineren Kugel.

Satz 43.

Nun erhellet auch, daſs die Oberfläche der um einen Kugelausschnitt beschriebenen körperlichen Figur so groſs ist, wie ein Kreis, dessen Quadrat des Halbmessers dem Rechteck unter einer Seite des Vielecks und unter der Summe aller Diagonalen samt der halben Grundlinie des Vielecks gleich ist.

Denn die um den Kugelausschnitt beschriebene körperliche Figur ist eine eingeschriebene zu dem Abschnitte der gröſseren Kugel; daher folgt dieſs aus der obigen Darstellung (S. 38.).

Satz 44.

Die Oberfläche des um einen Kugelausschnitt beschriebenen Körpers ist gröſser, als ein Kreis,

---

(S. 42. α) Der Beweis ist aus den vorhergegangenen Sätzen leicht zu führen, indem sich sowohl der Kegelmantel FM, als auch der Kegelmantel AM durch Kreise ausdrucken lassen. Der Halbmesser des ersteren Kreises sei r, des letzteren ϱ, so ist $r^2 = FM \times \frac{1}{2} (FG + MN)$ und $\varrho^2 = AM \times \frac{1}{2} (AB + MN)$ (S. 17.). Nun ist $FM > AM$ und $FG > AB$, mithin $r^2 > \varrho^2$, folglich der erstere Kreis gröſser als der letztere.

Kreis, dessen Halbmesser der Sehne vom Pole des Kugelabschnitts bis an dem Umring des Grundkreises des Abschnitts gleich ist.

Es sei eine Kugel vorhanden, wozu der Normalkreis ADBC, der Mittelpunkt E ist. Um den Ausschnitt ADBE beschreibe man das Vieleck LFK, und um dieses einen Kreis; auch werde daraus wie zuvor eine körperliche Figur gebildet. Dann gebe es einen Kreis N, dessen Quadrat des Halbmessers so grofs ist, wie das Rechteck unter einer Seite des Vielecks und der Summe aller Diagonalen nebst $\frac{1}{2}$ KL. Dieses Rechteck ist gleich dem Rechteck unter MH und FG, welches die Höhe des Abschnitts der gröfsern Kugel ist. Diefs wurde nämlich zuvor erwiesen (S. 23.). Folglich ist

das Quadrat des Halbmessers von N $=$ MH $\times$ FG,

allein es ist FG $>$ DX; denn ziehen wir KF, so ist KF $\ddagger$ AD, zugleich ist AB $\ddagger$ KL und FE ist gemeinschaftlich, mithin ΔFKG $\sim$ ΔDAX; nun ist FK $>$ AD, also auch FG $>$ DX. Ferner ist MH $=$ CD; denn zieht man die Verbindungslinie EO, so ist MO $=$ OF und HE $=$ EF, mithin EO $\ddagger$ MH; also MH $=$ 2 EO; zugleich ist CD $=$ 2 EO, folglich MH $=$ CD. (α) Endlich ist CD $\times$ DX $=$ AD^2; (β) also ist die Oberfläche der körperlichen Figur KFL gröfser, als ein Kreis, dessen Halbmesser der Sehne vom Pole des Kugelabschnitts bis an den Umfang des Kreises um AB, d. h. des Grundkreises für den Abschnitt, gleich ist; denn der Kreis N ist so grofs, wie die Oberfläche der um den Ausschnitt beschriebenen körperlichen Figur (S. 43.).

Satz 45.

Nun ist auch die um einen Kugelausschnitt beschriebene körperliche Figur samt dem Kegel auf dem Grundkreise um den Durchmesser KL, mit der Spitze im Mittelpunkte, so grofs, wie ein Kegel, dessen Grundfläche der Oberfläche der körperlichen Figur, dessen Höhe aber dem Perpendikel aus dem Mittelpunkte auf die Seite, d. h. dem Halbmesser der Kugel gleich ist. F. 90.

Denn die um den Ausschnitt beschriebene körperliche Figur ist eine eingeschriebene zu dem Abschnitte der gröfsern koncentrischen Kugel. Demnach erhellet das Behauptete aus der früheren Darstellung (S. 41.).

Satz 46.

Hieraus erhellet, dafs die umschriebene körperliche Figur nebst dem Kegel gröfser ist, als ein Kegel, der zur Grundfläche einen Kreis, dessen Halbmesser einer Sehne vom Pole des Abschnitts der kleineren Kugel an den Umring des Grundkreises dieses Abschnitts gleich ist, zur Höhe aber den Halbmesser hat.

Denn ein dieser körperlichen Figur samt dem Kegel gleicher Kegel (S. 45.) wird eine gröfsere Grundfläche haben, als den erwähnten Kreis (S. 44.), eine Höhe aber, welche dem Halbmesser der kleineren Kugel gleich ist.

(S. 44. α) Also auch MH$\times$FG $>$ CD$\times$DX, d. h. *das Quadr. des Halbmessers von* N $>$ CD$\times$DX.

(β) Folglich auch *das Quadrat des Halbmessers von* N $>$ AD^2, mithin ist der Kreis N gröfser als ein Kreis um den Halbmesser AD.

Satz 47.

F. 91. Es sei eine Kugel vorhanden, darin ein Normalkreis, und hierin der Abschnitt ABC, kleiner als der Halbkreis, und D sei der Mittelpunkt. In dem Ausschnitte ABCD werde ein Vieleck von gerader Winkelzahl beschrieben, dann ein ihm ähnliches darum, so dafs die Seiten einander parallel sind, und um das äufsere Vieleck ein Kreis. Endlich bilde man durch Umwälzung der Kreise um die in ihrer Lage beharrende BG, wie zuvor, von Kegelmänteln umschlossene körperliche Figuren. Es soll nun gezeigt werden, dafs die Oberfläche der äussern zur Oberfläche der innern körperlichen Figur im zwiefachen Verhältnisse der Seite des äufsern zur Seite des innern Vielecks stehe, die Summe der körperlichen Figur und ihres Kegels aber im dreifachen Verhältnisse der Seiten.

1) Es sei nämlich ein Kreis M vorhanden, dessen Quadrat des Halbmessers dem Rechteck unter einer Seite des äufsern Vielecks und der Summe aller Diagonalen samt $\frac{1}{2}$ EF gleich ist; so wird dieser Kreis der Oberfläche des äufsern Körpers gleich sein (S. 43). Dann werde noch ein Kreis N angenommen, dessen Quadrat des Halbmessers so grofs ist, wie ein Rechteck unter einer Seite des innern Körpers und der Summe aller Diagonalen nebst $\frac{1}{2}$ AC, so wird ebenfalls dieser Kreis der Oberfläche des inneren Körpers gleich sein (S. 38.).

Die erwähnten Rechtecke verhalten sich aber zu einander, wie $EK^2 : AL^2$, folglich das eine Vieleck zu dem andern, wie M : N, (α) woraus erhellet, dafs auch
Oberfl. d. äufs. Körp. : *Oberfl. d. inn. Körp.* $= EK^2 : AL^2 =$ *äufs. Vieleck* : *inn. Vieleck.*

2) Ferner sei ein Kegel X vorhanden, dessen Grundfläche dem Kreise M, dessen Höhe aber dem Halbmesser der kleinern Kugel gleich ist; so ist dieser Kegel gleich der umschriebenen körperlichen Figur nebst dem Kegel, dessen Grundfläche der Kreis um EF, und dessen Spitze D ist. Noch sei ein anderer Kegel O vorhanden, dessen Grundfläche N, und dessen Höhe einer senkrechten aus D auf AL gleich ist; so wird er ebenfalls der eingeschriebenen körperlichen Figur nebst dem Kegel, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser AC, und dessen Spitze D ist, gleich sein, wie dieses alles zuvor dargelegt ist (S. 45. 41.). Es verhält sich aber

EK : *Halbmess. d. klein. Kug.* = AL : *Perpendikel aus* D *auf* AL (β)

(S. 47. α) Das erstere Rechteck sei = P, das andere = p, die Summe der Diagonalen des äufsern Vielecks sei = S, die Summe der Diagonalen des innern sei = s, die Vielecke selbst = V und = v, so ist $P = EK \times (S + \frac{1}{2} EF)$ und $p = AL \times (s + \frac{1}{2} AC)$, mithin

$$P : p = EK\,(S + \tfrac{1}{2} EF) : AL\,(s + \tfrac{1}{2} AC)$$

Nun sind die Vielecke ähnlich, also verhält sich jede Diagonale des äufsern zur ähnlich liegenden des innern, wie EK : AL, mithin auch $S : s = EK : AL$,
ferner ist auch $\frac{1}{2} EF : \frac{1}{2} AC = EK : AL$,
mithin $(S + \frac{1}{2} EF) : (s + \frac{1}{2} AC) = EK : AL$,
folglich $P : p = EK^2 : AL^2$,
auch ist $V : v = EK^2 : AL^2$
und $M : N = P : p$

also $V : v = M : N$

β) Denn man ziehe DI senkrecht auf EK, so ist sofort EK : ID = AL : QD.

und es ist bewiesen, dafs

EK : AL = *Halbmess. von* M : *Halbmess. von* N
= *Durchmess. von* M : *Durchmess. von* N, folglich

Durchmess. d. Grundfl. von X : *Durchmess. d. Gdfl. von* O = *Höhe von* X : *Höhe von* O.

mithin sind die Kegel ähnlich, also steht der Kegel X zum Kegel O im dreifachen Verhältnisse des einen Durchmessers zum andern (S. 17. Lehnsatz 15.) : woraus erhellet, dafs auch

(*äufs. Körp.* + *Kegel*) : (*inn. Körp.* + *Keg.*) = $EK^3 : AL^3$.

Satz 48.

Die Oberfläche eines jeden Kugelabschnitts, der kleiner ist, als die Halbkugel, ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser so grofs ist, wie eine vom Pole des Abschnitts an den Umfang des Grundkreises gezogene Sehne.

Es sei eine Kugel, in ihr der Normalkreis ABC und ein Kugelabschnitt, kleiner als F. 92. die Halbkugel, vorhanden, dessen Grundfläche der Kreis um AC, senkrecht auf dem Kreise ABC stehend, sein soll; auch werde ein Kreis F angenommen, dessen Halbmesser = AB ist. Dann ist zu zeigen, dafs die Oberfläche des Abschnitts ABC dem Kreise F gleich sei.

1) Denn wo nicht, so sei die Oberfläche gröfser, als der Kreis F. Man nehme D als den Mittelpunkt an, ziehe aus D die Halbmesser DA, DC, und verlängere sie. Da hier nun zwei ungleiche Gröfsen vorhanden sind, die Oberfläche des Abschnitts und der Kreis F, so beschreibe man in dem Ausschnitt ABC ein gleichseitiges Vieleck von gerader Winkelzahl, und ein anderes ihm ähnliches darum, so dafs das umschriebene Vieleck zu dem eingeschriebenen ein kleineres Verhältnifs hat, als die Oberfläche des Kugelabschnitts zum Kreise F (S. 6.). Wird nun der Normalkreis umgewälzt, wie früher, so werden zwei von Kegelmänteln umschlossene körperliche Figuren entstehen, eine äufsere und eine innere, und es wird sich verhalten

Oberfl. d. äufs. Vielecks : *Oberfl. d. inn. Vielecks* = *äufs. Vieleck* : *inn. Vieleck*;

denn jedes dieser Verhältnisse ist das zwiefache des Verhältnisses der Seite des äufsern zur Seite des innern Vielecks (S. 47.). Es war aber

äufs. Vieleck : *inn. Vieleck* $\lessdot$ *Oberfl. d. Kugelabschnitts* : F,

auch ist die Oberfläche der äufsern körperlichen Figur gröfser, als die Oberfläche des Kugelabschnitts (S. 42.), mithin ist die Oberfläche der innern körperlichen Figur auch gröfser, als der Kreis F, was aber unmöglich ist, (α) denn es ward erwiesen, dafs eben diese Oberfläche kleiner sei, als ein Kreis von solcher Gröfse (S. 40.).

(γ) Vorhin war nämlich (Anmerkung α)

$$M : N = V : v = EK^2 : AL^2$$

also auch $EK^2 : AL^2$ = *Quadr. d. Halbmess. v.* M : *Quadr. d. Halbmess. v.* N

mithin EK : AL = *Halbmess. v.* M : *Halbmess. v.* N

(S. 48. α) Das äufsere Vieleck sei = V, das innere = v, die Oberfläche des äufsern Körpers = P, des innern = p, des Kugelabschnitts = S, so ist

$$V : v \lessdot S : F \quad \text{(Annahme.)}$$

ferner ist $P : p = V : v$

$$P : p \lessdot S : F$$

2) Nun sei der Kreis gröfser, als die Oberfläche. Dann beschreibe man auf dieselbe Weise ähnliche äufsere und innere Vielecke, so dafs

äufs. Vieleck : *inn. Vieleck* $\prec$ F : *Oberfläche des Abschnitts* (β)

demnach ist die Oberfläche nicht kleiner, als der Kreis F. Dafs sie nicht gröfser sei, ist schon gezeigt, folglich ist sie ihm gleich.

Satz 49.

Wenn ein Abschnitt gröfser ist, als die Halbkugel, so ist gleichfalls die Oberfläche desselben einem Kreise gleich, dessen Halbmesser der Sehne vom Pole des Abschnitts bis an den Umring des Grundkreises gleich ist.

F. 93. Denn es sei eine Kugel samt dem Normalkreise in ihr vorhanden, und man stelle sie sich von einer senkrechten Ebene nach AD geschnitten vor, so dafs ABD kleiner ist, als die Halbkugel; auch stehe der Durchmesser BC senkrecht auf AD, und man ziehe von BC nach A die Sehnen BA, CA. Ferner sei E ein Kreis, dessen Halbmesser = AB, dann F ein Kreis, dessen Halbmesser = AC, und G ein Kreis, dessen Halbmesser = CB. Demnach ist G = E + F. (α) Nun ist aber der Kreis G der ganzen Sphäre gleich, weil jener sowohl als dieser viermal so grofs ist, als der Kreis um den Durchmesser BC; ferner ist der Kreis E so grofs, wie die Oberfläche des Abschnitts ABD, was eben für den Abschnitt bewiesen wurde, der kleiner als die Halbkugel ist (S. 48.). Folglich ist der zum Reste bleibende Kreis F der Oberfläche des Abschnitts ACD gleich, welcher gröfser ist, als die Halbkugel.

Satz 50.

Jeder Kugelausschnitt ist so grofs, wie ein Kegel, dessen Grundfläche der Oberfläche des zu dem Ausschnitte gehörigen Kugelabschnitts, dessen Höhe aber dem Kugelhalbmesser gleich ist.

F. 94. Es sei eine Kugel mit ihrem Normalkreise ABD und ihrem Mittelpunkte C vorhanden, ferner ein Kegel, der einen Kreis, gleich der durch den Bogen ABD bestimmten Oberfläche, zur Grundfläche hat, und dessen Höhe = BC ist. Es soll erwiesen werden, dafs der Ausschnitt ABDC dem erwähnten Kegel gleich sei.

1) Denn wo nicht, so sei der Ausschnitt gröfser, als der Kegel, und es sei H als der bezeichnete Kegel angenommen. Da hier nun zwei ungleiche Gröfsen vorhanden sind, der Ausschnitt und der Kegel, so bestimme man zwei Linien L, E, und zwar L $\succ$ E, so dafs L : E $\prec$ *Ausschnitt* : *Kegel* (S. 3.)

---

oder $$P : S \prec p : F, \text{ d. h. } \frac{P}{S} \prec \frac{p}{S}$$

Da nun P $\succ$ S, so müfste auch p $\succ$ F sein, was eben unmöglich ist (S. 40.).

(β) Archimedes führt den Beweis nicht aus, sondern giebt nur die Proportion an, von welcher man ausgehen mufs. Nach der Bezeichnung in Anmerkung α ist jetzt nämlich

$$V : v \prec F : S$$

Dann kommt man auf $$P : F \prec p : S, \text{ d. h. } \frac{P}{F} \prec \frac{p}{S};$$

nun ist aber gegenwärtig P $\succ$ F (S. 44.), also müfste auch p $\succ$ S sein, was wieder unmöglich ist (S. 39.).

(S. 49. α) Weil $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

ferner nehme man zwei Linien F, G, dergestalt an, dafs L-F = F-G = G-E ist, (α) beschreibe um den ebenen Kreisausschnitt ein gleichseitiges Vieleck von gerader Winkelzahl, und ein ihm ähnliches darin, so dafs die Seite des äufsern Vielecks zur Seite des innern in kleinerem Verhältnisse steht, als L zu F (S. 6.), und bilde endlich, durch eine ähnliche Umwälzung des Kreises wie bisher, zwei von Kegelmänteln umschlossene Körper. Dann wird die Summe des umschriebenen und des Kegels, der seine Spitze in C hat, zur Summe des eingeschriebenen und seines Kegels im dreifachen Verhältnisse der Seite des äufsern zur Seite des innern Vielecks stehen (S. 47.). Nun ist aber

Seite des äufs. Vielecks : *Seite des innern* $\lessdot$ L : F

folglich *die eine körperl. Fig.* : *der anderen* $\lessdot$ $L^3 : F^3$

Es ist aber L : E $\gtrdot$ $L^3 : F^3$ (β)

also *Körp. um den Ausschnitt* : *Körp. in dem Aussch.* $\lessdot$ L : E

Man hat indessen L : E $\lessdot$ *Kugelausschnitt* : *Kegel* H

folgl. *Körp. um den Aussch.* : *Körp. in demselben* $\lessdot$ *Ausschnitt* : H

oder *Körp. um den Aussch.* : *Ausschnitt* $\lessdot$ *Körp. im Aussch.* : H

Es ist aber die umschriebene körperliche Figur gröfser, als der Kugelausschnitt, folglich ist auch die in den Ausschnitt eingeschriebene körperliche Figur gröfser, als der Kegel H, was unmöglich ist; denn es ward oben erwiesen (S. 41.), dafs sie kleiner sei, als ein Kegel von solcher Gröfse, d. h. welcher zur Grundfläche einen Kreis hat, dessen Halbmesser gleich ist der Sehne vom Pole des Abschnitts bis an den Umring des Grundkreises des Abschnitts, zur Höhe aber den Halbmesser der Kugel; und diefs ist gerade der erwähnte Kegel, indem er einen der Oberfläche des Abschnitts gleichen, also den gedachten (S. 48.) Kreis zur Grundfläche, zur Höhe aber den Halbmesser der Kugel hat. Demnach ist der körperliche Ausschnitt nicht gröfser, als der Kegel H.

2) So sei denn umgekehrt der Kegel H gröfser, als der körperliche Ausschnitt. Wiederum sei L $\gtrdot$ E, und

L : E $\lessdot$ *Kegel* : *Ausschnitt*,

auch nehme man F, G, auf dieselbe Weise an, so dafs die Ueberschüsse gleich sind, und es stehe die Seite des um den ebenen Ausschnitt beschriebenen Vielecks von gerader Winkelzahl zu der des eingeschriebenen in kleinerem Verhältnisse, als L zu F; auch lasse man die körperlichen Figuren zu dem Kugelausschnitte entstehen; dann wird man auf dieselbe Weise zeigen, dafs

äufs. Körp. um den Ausschnitt : *inn. Körp.* $\lessdot$ L : E

und *äufs. Körp.* : *inn. Körp.* $\lessdot$ *Kegel* H : *Ausschnitt*.

folglich auch *Ausschnitt* : *Kegel* $\lessdot$ *inn. Körp.* : *äufs. Körp.*

Es ist aber der Ausschnitt gröfser, als die in ihm beschriebene körperliche Figur, folglich ist auch der Kegel H gröfser, als die umschriebene körperliche Figur; was unmöglich ist; denn es ward gezeigt, dafs ein Kegel von solcher Gröfse kleiner sei, als der um den Ausschnitt beschriebene Körper (S. 46.). Demnach ist der Ausschnitt dem Kegel H gleich.

(S. 50. α) Also F = $\frac{1}{3}$ (2 L + E) und G = $\frac{1}{3}$ (2 E + L)

(β) Vgl. S. 36, Anmerkung β.

Von der Kugel und dem Cylinder.

Zweites Buch.

Archimedes grüfst den Dositheus.

Du hast mich vorlängst aufgefodert, die Ausführungen derjenigen Aufgaben aufzusetzen, welche ich als blofse Sätze dem Konon übersendet hatte; nun trifft es sich, dafs sie gröfstentheils durch Hülfe derjenigen Lehrsätze sich ausführen lassen, deren Beweise ich dir bereits zugeschickt habe, z. B.

dafs jede Sphäre viermal so grofs ist, als der Normalkreis der Kugel; (α)

ferner, dafs die Oberfläche eines jeden Kugelabschnitts einem Kreise gleich ist, dessen Halbmesser der Sehne vom Pole des Abschnitts bis an den Umfang des Grundkreises gleich kommt; (β)

ferner, dafs ein Cylinder, welcher zur Grundfläche den Normalkreis irgend einer Kugel, zur Höhe aber den Durchmesser dieser Kugel hat, seinem Inhalte nach anderthalbmal so grofs ist, als die Kugel, seine Oberfläche aber anderthalbmal so grofs, als die Sphäre; (γ)

endlich, dafs jeder körperliche Ausschnitt einem Kegel gleich ist, dessen Grundkreis der Oberfläche des Kugelabschnitts in dem Ausschnitte, dessen Höhe aber dem Halbmesser der Kugel gleich ist. (δ)

So viele nun von jenen Lehrsätzen und Aufgaben durch diese Lehrsätze sich entwikkeln lassen, übermache ich dir ausgeführt in diesem Buche; diejenigen aber, welche durch ei-

(Vorrede. α) Der Satz ist I S. 35.

(β) Die Sätze sind I S. 48. 49.

(γ) Der Satz ist I S. 37.

(δ) Der Satz ist I S. 50.

ne anderweitige Untersuchung sich ergeben, nämlich die über die Schneckenlinien und Konoiden, werde ich baldigst zu senden suchen.

Die erste jener Aufgaben war nun folgende:

Satz 1.

Wenn eine Kugel gegeben ist, den ebenen Raum zu finden, welcher ihrer Sphäre gleich ist.

Diefs ist offenbar eine Folge aus den vorerwähnten Lehrsätzen, indem das Vierfache des Normalkreises der Kugel ein ebener Raum, und der Sphäre gleich ist (I S. 35.).

Die zweite Aufgabe war:

Satz 2.

Wenn ein Kegel oder Cylinder gegeben ist, eine Kugel zu finden, welche dem Kegel oder Cylinder gleich ist.

Der gegebene Kegel oder Cylinder sei A, und die Kugel B dem A gleich; auch nehme man einen Cylinder CFD, anderthalbmal so grofs, als den Kegel oder Cylinder A an; F.95. imgleichen einen Cylinder, anderthalbmal so grofs, als die Kugel B, der zur Grundfläche den Kreis um den Durchmesser GH, und zur Axe KL, den Durchmesser der Kugel B hat. Demnach ist *Cyl.* E = *Cyl.* K. Bei gleichen Cylindern verhalten sich aber die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen (I. S. 17 *Lehnsatz* 3. 4.). Also ist

$$\textit{Kreis}\ E : \textit{Kreis}\ K = CD^2 : GH^2 = KL : EF$$

Es ist aber KL = GH, denn die Axe des Cylinders, welcher anderthalbmal so grofs ist, als die Kugel, ist dem Kugeldurchmesser gleich, und der Kreis K ist der Normalkreis der Kugel (I. S. 37.). Also ist

$$CD^2 : GH^2 = GH : EF$$

Nun sei $GH^2 = CD \times MN$

folglich $CD : MN = CD^2 : GH^2 = GH : EF$

oder $CD : GH = GH : MN = MN : EF$ (α)

Die beiden Linien CD, EF, sind aber gegeben, (β) also sind GH, MN, zwei mittlere Proportionalen zwischen zwei gegebenen CD, EF; mithin ist jede der beiden GH, MN, gegeben. (γ)

(S. 2. α) Aus $GH^2 = CD \times MN$ folgt nämlich $CD : GH = GH : MN$, und aus $CD : MN = GH : EF$ folgt $CD : GH = MN : EF$.

(β) Weil der ganze Cylinder A gegeben ist.

(γ) Wie diese beiden mittleren Proportionalen gefunden werden, sagt Archimedes nicht. Durch alleinige Hülfe der Elementargeometrie lassen sie sich nicht finden. Eutocius führt mehrere von alten Geometern aufgefundene Methoden ausführlich an, welche ich hier nicht mittheile, um nicht den Zusammenhang allzu sehr zu unterbrechen, und weil ich beabsichtige. alles was sich hierüber bei Alten und Neueren findet, künftig einmal zur bequemen Uebersicht zusammenzustellen.

Die Aufgabe wird also folgendermafsen konstruirt: der gegebene Kegel oder Cylinder sei A; man soll eine dem Kegel oder Cylinder A gleiche Kugel finden.

Der Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser CD, und dessen Axe EF ist, sei anderthalbmal so grofs, als der Kegel oder Cylinder A. Man nehme zwischen CD, EF, zwei mittlere Proportionalen GH, MN, so dafs

$$CD : GH = GH : MN = MN : EF$$

und man denke sich einen Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser GH, dessen Axe aber KL, gleich dem Durchmesser GH sei. Ich behaupte nun, dafs *Cyl.* E = *Cyl.* K. Weil nämlich

$$CD : GH = MN : EF$$

oder $CD : MN = GH : EF$ und $GH = KL$,

so ist $CD : MN = CD^2 : GH^2 = \textit{Kreis}\ E : \textit{Kreis}\ K$

also auch $\textit{Kreis}\ E : \textit{Kreis}\ K = KL : EF$

folglich sind die Grundflächen und Höhen der Cylinder E, K, einander umgekehrt proportionirt; demnach ist *Cyl.* E = *Cyl.* K. Es ist aber der Cylinder K anderthalbmal so grofs, als die Kugel, deren Durchmesser GH ist; mithin ist auch die Kugel, deren Durchmesser = GH, d. h. B, dem Kegel oder Cylinder A gleich.

Satz 3.

Jedem Kugelabschnitte ist ein Kegel gleich, der einerlei Grundfläche mit dem Abschnitte, zur Höhe aber eine gerade Linie hat, welche zur Höhe des Abschnitts sich verhält, wie die Summe des Kugelhalbmessers und der Höhe des andern Abschnitts zu der Höhe dieses andern Abschnitts.

F. 96. Es sei eine Kugel vorhanden, deren Normalkreis den Durchmesser AC habe.

Die Kugel werde von einer auf AC senkrechten Ebene durch BF geschnitten, und H sei der Mittelpunkt. Man mache nun, dafs sich verhalte

$$(HA + AE) : AE = DE : CE$$

und ferner $(HC + CE) : CE = KE : AE$

und errichte auf dem Kreise um den Durchmesser BF Kegel, deren Spitzen die Punkte K und D sind. Ich behaupte, dafs nun der Kegel BDF dem Kugelabschnitte an C, der Kegel BKF aber dem an A gleich sei.

Man ziehe nämlich BH, HF, und denke sich einen Kegel, welcher zur Grundfläche den Kreis um BF, zur Spitze aber den Punkt H hat. Auch sei ein Kegel M vorhanden, dessen Grundfläche so grofs, wie die Oberfläche des Kugelabschnitts BCF, deren Halbmesser also = BC ist, der aber zur Höhe den Halbmesser der Kugel hat; dann ist der Kegel M gleich dem körperlichen Abschnitte BCFH, denn diefs wurde im ersten Buche erwiesen (I. S. 50.).

Weil

Weil nun $DE : EC = (HA + AE) : AE$
so ist auch $DC : EC = HA : AE = HC : AE$ (α)
aber $DC : HC = EC : AE$
und $HD : HC = CA : AE = CB^2 : BE^2$ (β)
mithin $HD : HC = CB^2 : BE^2$
Es ist aber CB = *Halbmesser des Kreises* M
BE = *Halbmesser des Kreises um* BF
also $HD : HC$ = *Kreis* M : *Kreis um* BF
Ferner ist HC = *Axe des Kegels* M
also HD : *Axe des Keg.* M = *Kreis* M : *Kreis um* BF

Folglich ist ein Kegel, welcher zur Grundfläche den Kreis M, zur Höhe aber den Halbmesser der Kugel hat, der körperlichen Raute BDFH gleich. Diefs wird nämlich in den Lehnsätzen des ersten Buchs nachgewiesen (I. S. 17 *Lehnsatz* 4.). So nämlich: Weil sich verhält HD : *Höhe des Keg.* M = *Kreis* M : *Kreis um* BF,
so ist der Kegel M einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser BF, und dessen Höhe HD ist; denn ihre Grundflächen und Höhen sind umgekehrt proportionirt. Der Kegel aber, welcher zur Grundfläche den Kreis um den Durchmesser BF, und zur Höhe HD hat, ist der körperlichen Raute BDFH gleich; (γ) also ist der Kegel M gleich der körperlichen Raute BDFH. Aber der Kegel M ist auch dem körperlichen Ausschnitt BCFH, und folglich der körperliche Ausschnitt BCFH der körperlichen Raute gleich. Nimt man den gemeinschaftlichen Kegel weg, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser BF und dessen Höhe EH ist, so folgt, dafs die Reste, nämlich der Kegel BDF und der Kugelabschnitt BFC gleich sind.

Auf dieselbe Weise wird man darthun, dafs auch der Kegel BKF dem Kugelabschnitte BAF gleich sei. Denn weil
$$(HC + CE) : CE = KE : AE$$
so ist $HC : CE = KA : AE$
Es ist aber $HC = HA$, folglich $KA : HA = AE : CE$
mithin $KH : HA = AC : CE = BA^2 : BE^2$

Man nehme demnach wiederum einen Kreis N mit einem Halbmesser = AB an, so wird der Kreis N der Oberfläche des Abschnitts BAF gleich sein. Auch stelle man sich einen Kegel N vor, (δ) dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel, und der folglich selbst dem körperlichen Ausschnitte BHFA (ε) gleich ist, wie dieses im ersten Buche nachgewiesen wurde (I. S. 49. 50.). Weil nun bewiesen, dafs

(S 3. α) Es ist nämlich $DE - EC = DC$

(β) Denn $DC + HC = HD$ und $EC + AE = CA$, ferner $CB^2 = CE \times CA$ und $BE^2 = CE \times AE$.

(γ) Weil die körperliche Raute aus den beiden Kegeln BDF, BHF zusammengesetzt ist, welche einerlei Grundfläche unter sich nicht nur, sondern auch mit dem Kegel haben, dessen Höhe HD ist. (Vgl. Beweis zu I. S. 19.)

(δ) Dessen Grundfläche der Kreis N, d. h. ein Kreis um den Durchmesser AB ist.

(ε) Der Satz 50 des ersten Buchs bezieht sich zwar nur auf Ausschnitte, welche kleiner sind, als die Halbkugel, allein der Beweis läſst sich leicht auf den gröſsern Abschnitt erweitern. Man setze nämlich einen Kegel H, des-

$KH : HA = BA^2 : BE^2$, d. h.
$=$ *Quadr. d. Halbmess. v.* N : *Quadr. d. Halbm. des Kreises um* BF
$=$ *Kreis* N : *Kreis um* BF
und weil HA $=$ *Höhe des Kegels* N
so ist KH : *Höhe des Keg.* N $=$ *Kreis* N : *Kreis um* BF.
Folglich ist der Kegel N, d. h. der Ausschnitt BHFA gleich der körperlichen Figur BHFK. (ς)

Also auch

Ausschnitt BHFA $+$ *Keg.* BHF $=$ körp. *Fig.* BHFK $+$ *Keg.* BHF
mithin folgt *Abschnitt* ABF $=$ *Kegel* BFK
was bewiesen werden sollte.

Folgerung. Demnach erhellet, dafs allgemein ein Kugelabschnitt zu dem Kegel, welcher einerlei Grundfläche und gleiche Höhe mit ihm hat, sich verhalte, wie die Summe des Kugelhalbmessers und der Höhe des zweiten Abschnitts zu dieser Höhe des zweiten Abschnitts; Denn es ist

DE : EC $=$ *Keg.* DFB (d. h. *Absch.* BCF) : *Keg.* BCF (η)

Anhang. Aus eben dieser Annahme wollen wir noch einmal beweisen, dafs der Kegel KBF dem Kugelabschnitte AFB gleich sei.

Es sei nämlich N ein Kegel, dessen Grundfläche der Sphäre, dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist, so ist dieser Kegel der Kugel gleich. Denn es ward erwiesen, dafs die Kugel viermal so grofs sei, als ein Kegel auf dem Normalkreise als Grundfläche, und dessen Höhe der Halbmesser der Kugel ist (I. S. 36.); es beträgt aber auch der Kegel N das Vierfache eben dieses Kegels, da die Grundfläche des einen das Vierfache der Grundfläche des andern, nämlich die Sphäre das Vierfache ihres Normalkreises ausmacht. Weil nun

$(HA + AE) : AE = DE : EC$ (ϑ)
also auch $HC : CD = AE : EC$
ferner weil $KE : AE = (HC + EC) : EC$ (ι)

---

sen Grundfläche der Kalotte BCF, ferner einen Kegel H′, dessen Grundfläche der Kalotte BAF, endlich einen Kegel H″, dessen Grundfläche der ganzen Sphäre gleich ist; auch mögen alle drei Kegel den Halbmesser der Kugel zur Höhe haben; dann ist

H″ $=$ *der Kugel selbst* (I. S. 36.)
H $=$ *dem körperlichen Ausschnitte* BHFC (I. S. 50.)

H″ $-$ H $=$ *dem körperlichen Ausschnitte* BHFA

Es ist aber H″ $-$ H einem Kegel von derselben Höhe gleich, welcher den Unterschied ihrer Grundflächen zur Grundfläche hat, d. h. dem Kegel H′, also ist

H′ $=$ *dem körperlichen Ausschnitte* BHFA.

(ς) Der Kegel N ist nach der letzten Proportion einem Kegel gleich, welcher den Kreis um BF zur Grundfläche und KH zur Höhe hat. Fügt man zu letzterem den Kegel BHF, so ist diese Summe dem Kegel BKF gleich, weil alle drei einerlei Grundfläche haben. Also auch

Keg. N $+$ *Keg.* BHF $=$ *Keg.* BKF $=$ *Keg.* BHF $+$ *Körp.* BHFK
folglich *Kegel* N $=$ *Körp.* BHFK.

(η) Also auch *Absch.* BCF : *Keg.* BCF $=$ (HA $+$ AE) : AE.

(ϑ) Folglich auch HA : AE $=$ (DE $-$ EC) : EC $=$ CD : EC.

(ι) Mithin auch (KE $-$ AE) : AE $=$ HC : EC $=$ KA : AE.

also auch	$KA : HC$ (d. h. HA) $= AE : EC = HC : CD$
mithin	$KH : HC = HD : CD$ (weil $HC = HA$)
und	$KD : HD = HD : CD = KH : HA$
so folgt	$HD \times HK = KD \times HA$.
Ferner weil	$KH : HC = HD : CD$
oder	$KH : HD = HC : CD$
und weil	$HC : CD = AE : EC$ (nach dem Beweise)
so folgt	$KH : HD = AE : EC$
mithin	$KD^2 : KH \times HD = AC^2 : AE \times EC$ (×)
Es war aber	$KH \times HD = KD \times HA$ (nach dem Beweise)
folglich	$KD^2 : KD \times HA = KD : HA = AC^2 : AE \times EC = AC^2 : EB^2$
Nun ist	$AC =$ *Halbmesser des Kreises* N
also	*Quadr. d. Halbm. v.* $N : EB^2 =$ *Kreis* N : *Kreis um* BF
	$= KD : HA = KD$: *Höhe des Keg.* N.
Demnach ist	*Keg.* N = *Kugel* = *körperl. Raute* BDFK

So nämlich: es verhält sich also

Kreis N : *Kreis um* BF = KD : *Höhe des Keg.* N

folglich ist der Kegel N einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der Kreis um BF, und dessen Höhe KD ist, indem ihre Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt sind. Der letztere Kegel aber ist der körperlichen Raute BKFD gleich; folglich ist der Kegel N, d. i. die Kugel, gleich der aus den beiden Kegeln BDF, BKF, zusammengesetzten körperlichen Raute, wobei nachgewiesen ist, dafs der Kegel BDF dem Kugelabschnitte BCF gleich sei. Der übrig bleibende Kegel BKF also ist dem Kugelabschnitte BAF gleich. (λ)

Die dritte Aufgabe war folgende:

Satz 4.

Eine gegebene Kugel durch eine Ebene dergestalt zu schneiden, dafs die Oberflächen der Abschnitte in einem gegebenen Verhältnifse zu einander stehen.

Diefs sei geschehen: und es sei ADBE ein Normalkreis der Kugel, AB aber deren Durchmesser. Man erweitere eine auf AB senkrechte Ebene, welche den Kreis ADBE nach DE schneide, und ziehe AD, BD. F. 97.

Weil also das Verhältnifs der Oberfläche des Abschnitts DAE zur Oberfläche des Abschnitts DBE gegeben, der Oberfläche des Abschnitts DAE aber ein Kreis gleich ist, dessen Halbmesser = AD (I S. 49.), und der Oberfläche des Abschnitts DBE ein Kreis, dessen

(×) Hat man nämlich die Proportion

$$a : b = c : d$$

so folgt	$(a + b) : b = (c + d) : d$
und	$(a + b)^2 : b^2 = (c + d)^2 : d^2$
und	$(a + b)^2 : acb^2 = (c + d)^2 : acd^2$
also auch	$(a + b)^2 : ab = (c + d)^2 : cd$, weil $bc = ad$ ist.

(λ) Ueber den ganzen Lehrsatz vgl. Geom. II. §. 259.

Halbmesser $= DB$ (I S. 48); weil ferner diese Kreise sich zu einander verhalten, wie AD^2 zu DB^2, d. h. wie AC zu CB, (α) so ist das Verhältnifs $AC : CB$ das gegebene, und also der Punkt C ein gegebener. Auch steht AB senkrecht auf DE, also ist auch die durch DE gelegte Ebene der Lage nach gegeben.

Die Konstruktion ist nun folgende: Es sei eine Kugel vorhanden, deren Normalkreis ADBE, Durchmesser AB. Das gegebene Verhältnifs sei $F : G$, und es werde AB in C so geschnitten, dafs

$$AC : CB = F : G.$$

Dann werde die Kugel von einer Ebene durch C, senkrecht auf AB geschnitten, die Durchschnittslinie sei DE, und man ziehe AD, DB. Auch nehme man zwei Kreise H, K, an; der Halbmesser von H sei $= AD$, der von K sei $= DB$, so ist H = *der Oberfläche des Abschnitts* DAE, und K = *der Oberfläche des Abschnitts* DBE, denn diefs wurde im ersten Buche erwiesen (I S. 49. 48.). Weil nun der Winkel ADB ein rechter und DC senkrecht ist, so verhält sich $AC : CB = F : G = AD^2 : DB^2 =$ *Quadr. d. Halbm. v.* H : *Quadr. d. Halbm. v.* K = H : K = *Oberfläche des Absch.* DAE : *Oberfl. d. Absch.* DBE.

Satz 5.

Eine gegebene Kugel so zu schneiden, dafs die Kugelabschnitte zu einander in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

F. 98. Die gegebene Kugel sei ABCD. Man soll sie also durch eine Ebene dergestalt schneiden, dafs die Abschnitte ein gegebenes Verhältnifs zu einander haben. Sie werde durch eine Ebene nach AC geschnitten; dann ist mithin das Verhältnifs des Kugelabschnitts ADC zu dem Abschnitte ABC ein gegebenes. Die Kugel werde auch durch den Mittelpunkt geschnitten, und der Schnitt sei der Normalkreis ABCD, der Mittelpunkt K, der Durchmesser BD, und man mache, dafs sich verhalte

$$(KD + DX) : DX = PX : XB$$

und

$$(KB + BX) : BX = LX : XD$$

und ziehe AL, LC, AP, PC; dann ist der Kegel ALC dem Kugelabschnitte ADC, und der Kegel APC dem Abschnitte ABC gleich; folglich ist das Verhältnifs des Kegels ALC zum Kegel APC ebenfalls gegeben. Es verhält sich aber der eine Kegel zu dem andern, wie $LX : XP$, weil beide einerlei Grundfläche, den Kreis um den Durchmesser AC, haben; also ist auch das Verhältnifs $LX : XP$ gegeben. Auf dieselbe Weise, wie zuvor, findet sich nun durch die Konstruktion (S. 3.).

$$LD : KD = KB : BP = DX : XB \quad (\alpha)$$

Weil nun $BP : BK = KD : LD$

so ist $PK : KB = KL : LD$ (und $KB = KD$)

folglich $PL : KL = KL : LD$, mithin $PL \times LD = KL^2$

also $PL : LD = KL^2 : LD^2$

(S. 4. α) Es ist nämlich $AD^2 = AB \times AC$, und $DB^2 = AB \times BC$.

(S. 5. α) Denn es ist

Weil ferner $LD : DK = DX : XB$
so ist auch $KL : LD = BD : DX$
mithin $KL^2 : LD^2 = BD^2 : DX^2$
weil ferner $LX : DX = (KB + BX) : BX$
so ist $LD : DX = KB : BX$
Man nehme nun $KB = BF$; wo augenscheinlich BF über P hinausreichen wird. (β) Man wird demnach haben:

$$LD : DX = FB : BX$$

folglich $LD : LX = FB : FX$
Weil nun das Verhältnifs $LD : LX$ gegeben ist, (γ) und eben so das Verhältnifs $PL : LX$, so ist auch das Verhältnifs $PL : DL$ gegeben. (δ) Weil ferner das Verhältnifs $PL : LX$ aus den beiden $PL : LD$ und $LD : LX$ zusammengesetzt ist, und weil

$$PL : LD = BD^2 : DX^2 \ (\varepsilon)$$

imgleichen $LD : LX = BF : FX$
so ist das Verhältnifs $PL : LX$ aus den beiden $BD^2 : DX^2$ und $BF : FX$ zusammengesetzt.

Man mache nun $PL : LX = BF : FH$
weil also $PL : LX$ gegeben, so ist auch das Verhältnifs $BF : FH$ gegeben. Es ist aber auch BF, gleich dem Halbmesser, gegeben, mithin auch FH gegeben. Demnach ist das Verhältnifs $BF : FH$ zusammengesetzt aus den beiden $BD^2 : DX^2$ und $BF : FX$. Aber das Verhältnifs $BF : FH$ ist auch zusammengesetzt aus den beiden $BF : FX$ und $FX : FH$; nach Wegnahme des gemeinschaftlichen $BF : FX$ erhält man folglich

$$BD^2 : DX^2 = FX : FH,$$

$LX : XD = (KB + BX) : BX$
also $LD : KB = XD : BX$
ferner ist $(KD + DX) : DX = PX : BX$
folgl. $KD : BP = XD : BX.$

(β) Weil $KB : BP = DX : XB$, und weil $DX > XB$, so ist auch $KB > BP$.

(γ) Es war die Proportion angenommen

$$(KB + BX) : BX = LX : XD,$$

worin KB, BX, XD als ursprünglich bekannte Gröfsen anzusehen sind, folglich ist $LX : XD$ ein gegebenes Verhältnifs. Es sei $LX : XD = a : b$,
wo a, b, bekannte Gröfsen sind, so folgt sofort

$$LD : LX = (a - b) : a$$

also ist $LD : LX$ ebenfalls gegeben.

(δ) Das Verhältnifs $PX : LX$ ist nach der Annahme in dem Beweise gegeben, es sei daher $PX : LX = \alpha : \beta$, wo α, β bekannte Gröfsen sind, dann folgt

$$PL : LX = (\alpha + \beta) : \beta$$

mithin ist auch das Verhältnifs $PL : LX$ ein gegebenes.
Ist nun $LD : LX = m : n$
und $LX : PL = r : p$
wo m, n, r, p, bekannte Gröfsen bezeichnen, so folgt sofort

$$LD : PL = mr : np.$$

(ε) Es war nämlich oben $PL : LD = KL^2 : LD^2 = BD^2 : DX^2$.

wo BD^2 und FH gegeben sind; auch ist die gerade Linie FD gegeben. Demnach muſs man die gegebene Linie FD dergestalt in X schneiden, daſs

$$FX : FH = BD^2 : DX^2,$$

wobei FH und BD^2 gegeben sind. Dieſs so allgemein ausgesprochen leidet eine Beschränkung; setzt man aber zu dem Vorgegebenen noch hinzu, was hier Statt hat, nämlich daſs $DB = 2\,BF$ und daſs $BF > FH$, wie in unserer Auflösung, so fält die Beschränkung weg; (ζ) und die Aufgabe wird also lauten: Wenn zwei gerade Linien DB, BF gegeben sind, so daſs $DB = 2\,BF$ ist und der Punkt H auf der Linie BF liegt, die Linie DB dergestalt in X zu schneiden, daſs $BD^2 : DX^2 = FX : FH$. Dieses beides (η) nun soll am Ende seine Auflösung und Konstruktion finden. (ϑ)

Die Aufgabe wird demnach also konstruirt werden: das gegebene Verhältniſs sei wie $Q : S$, das gröſsere zum kleineren. Auch sei eine Kugel gegeben und von einer Ebene durch den Mittelpunkt geschnitten; der Schnitt sei der Kreis $ABCD$, der Durchmesser BD, der Mittelpunkt K. Man nehme $BF = KB$ und schneide BF so in H, daſs

$$FH : BH = Q : S,$$

ferner schneide man BD in X dergestalt, daſs

$$FX : HF = BD^2 : DX^2$$

und lege durch X eine Ebene senkrecht zu BD. Ich behaupte, diese Ebene schneide die Kugel so, daſs der gröſsere Abschnitt zu dem kleineren sich verhält, wie $Q : S$; denn man mache

$$(KB + BX) : BX = LX : DX$$

und

$$(KD : DX) : DX = PX : BX$$

und ziehe AL, LC, AP, PC. Dann wird nach der Konstruktion, wie in der Auflösung nachgewiesen ist, $PL \times LD = LK^2$ sein; ferner

---

(ζ) d. h. Betrachtet man die Foderung als eine allgemeine, so können Fälle eintreten, in denen ihre Erfüllung unmöglich wird; so etwas findet aber in dem gegenwärtigen Falle nicht Statt.

(η) Nämlich 1) daſs eine allgemeine Auflösung gegeben werden kann, welche zugleich unmögliche Fälle einschlieſst, und 2) daſs in dem gegenwärtigen Falle die Auflösung möglich ist.

(ϑ) Die versprochene Auflösung fand schon Dionysodorus (wahrscheinlich ein Zeitgenosse Jul. Cäsars) nicht mehr vor, weſshalb er auf einem andern Wege den Beweis des fünften Archimedischen Satzes ausführte, ohne die Hülfsaufgabe anzuwenden. Nach ihm versuchte Diokles (etwa 500 nach Chr. S. *Montucla hist. d. m. I. p.* 339 *ed. sec.*) dasselbe nicht ohne Geschick, indem er vermuthete, Archimedes selbst habe den verheiſsenen Beweis niemals gegeben. Endlich fand Eutocius nach vielem Suchen in einem alten Exemplare den Beweis des Hülfsatzes, zwar wegen vielfacher Schreibfehler sehr dunkel, jedoch in der dem Archimedes gewöhnlichen dorischen Mundart und mit den älteren bis auf Apollonius gebräuchlichen Benennungen der Kegelschnitte, weſshalb er nicht ohne Grund vermuthete, er habe den ächten Archimedischen Beweis vor sich. Er theilt ihn hierauf in einer deutlichen Bearbeitung mit, und ich füge ihn als Anhang dem Lehrsatze selbst bei, weil wenigstens seine Grundlage vom Archimedes herrührt. Neuerlich hat Poinsot in einer Anmerkung zu Peyrards Uebersetzung die gewiſs grundlose Vermuthung aufgestellt, Archimedes habe den Beweis gar nicht gefunden, sondern ihn nur verheiſsen in der Hoffnung, er werde ihn noch finden. Dergleichen ist einestheils von einem so genauen Manne, wie Archimedes war, durchaus nicht ohne Beweis anzunehmen, und anderestheils geht aus der Art, wie Archimedes sich über die allgemeine Auflösung der Hülfsaufgabe äuſsert, unverkennbar hervor, daſs er mit ihrem Beweise völlig vertraut gewesen. Das Weitere über diesen Gegenstand verspare ich für eine andere Gelegenheit.

$KL : LD = BD : DX$

$KL^2 : LD^2 = BD^2 : DX^2$

und weil $PL \times LD = LK^2$

und $PL : LD = LK^2 : LD^2$

so folgt $PL : LD = BD^2 : DX^2 = FX : FH$

Weil ferner $(KB + BX) : BX = LX : DX$, und $KB = BF$

so ist $FX : BX = LX : DX$

und $FX : FB = LX : LD$

oder $LD : LX = BF : FX$

Weil demnächst $PL : LD = FX : FH$

und $LD : LX = BF : FX$

so ist $PL : LX = BF : FH$

mithin auch $LX : PX = FH : BH$

Es ist aber $FH : BH = Q : S$

Folglich $LX : PX =$ *Keg.* ACL : *Keg.* ACP = *Absch.* ADC : *Absch.* $ABC = Q : S$.

Hülfsaufgabe,

(Nach Eutocius Bearbeitung.)

Wenn eine gerade Linie AB, eine andere AC und ein Flächenraum D gegeben sind, F. 99. so soll auf AB ein Punkt E dergestalt genommen werden, dafs

$$AE : AC = D : EB^2.$$

1) diefs sei geschehen, und es sei AC senkrecht auf AB. Man ziehe CE, verlängere sie bis F, und ziehe durch C die Linie $CG \ddagger AB$, durch B die Linie $FBG \ddagger AC$, welche sowohl CE als CG trifft. Auch vollende man das Parallelogramm GH, und ziehe durch E die Linie KEL parallel sowohl mit CH, als mit GF. Ferner sei $D = CG \times GM$. Weil nun

$AE : AC = D : EB^2$

und $AE : AC = CG : GF = CG^2 : CG \times GF$

so ist $CG^2 : CG \times GF = D : EB^2 = D : KF^2$

oder $CG^2 : D = CG^2 : CG \times GM = CG \times GF : KF^2$

Es ist aber $CG^2 : CG \times GM = CG : GM$

folglich $CG : GM = CG \times GF : KF^2$

Auch ist $CG : GM = CG \times GF : GM \times GF$

mithin $CG \times GF : GM \times GF = CG \times GF : KF^2$

folglich ist $GM \times GF = KF^2$

Wenn also um die Axe FG durch G eine Parabel mit dem Parameter GM beschrieben wird, so wird diese durch K gehen und der Lage nach gegeben sein; weil GM, welche mit der gegebenen GC den gegebenen Flächenraum D bestimmt, der Gröſse nach gegeben ist. Also liegt K in einer der Lage nach gegebenen Parabel; diese sei daher beschrieben, wie angegeben ist, und sei eben GK.

Weil nun $HL = CB$, d. h. $HK \times KL = AB \times BG$, so wird eine durch B zu den Asymptoten HC, CG, beschriebene Hyperbel durch K gehen (*Apollon. Kegelsch. II*, 12 *umgekehrt.*), und der Lage nach gegeben sein, weil jede der beiden HC, CG, sowohl als auch B der Lage nach gegeben sind. Sie sei also beschrieben, wie angegeben, und sei BK. Also liegt der Punkt K in der ihrer Lage nach gegebenen Hyperbel; er lag aber auch in der ihrer Lage nach gegebenen Parabel; folglich ist K gegeben. Auch ist KE senkrecht von hier auf die der Lage nach gegebene AB, mithin ist E gegeben.

Weil nun $AE : AC = D : EB^2$, wo AC und D gegeben sind, so sind an den Körpern $EB^2 \times AE$ und $D \times AC$ die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt, folglich sind die Körper gleich (*Eukl. XI.* 34), d. h. $EB^2 \times AE = D \times AC$. Es ist aber $EB^2 \times AE$ unter allen aus BA auf ähnliche Art bestimmten Körpern dann am gröſsten, wenn $EB = 2\,AE$, wie gezeigt werden soll. Mithin darf der durch den gegebenen Flächenraum und die gegebene Linie bestimmte Körper nicht gröſser sein, als $EB^2 \times AE$. (α)

F. 100. Die Konstruktion ist folgende: Die gegebene gerade Linie sei AB, eine andere gegebene sei AC und D der gegebene Flächenraum. Es sei aufgegeben, AB so zu schneiden, daſs

der eine Abschnitt : $AC = D$: *Quadrat des and. Abschnitts.*

Man nehme $\frac{1}{3}\,AB = AE$. (β) Dann ist $D \times AC$ entweder gröſser als $EB^2 \times AE$, oder ihm gleich, oder kleiner. Wofern es nun gröſser ist, so findet keine Konstruktion Statt, wie in der Auflösung gezeigt worden; wenn es ihm aber gleich ist, so genügt der Punkt E der Aufgabe: denn da die Körper gleich sind, so verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen, d. h. $AE : AC = D : EB^2$. Wenn endlich $D \times AC < EB^2 \times AE$, so ist die Konstruktion folgende:

Es sei AC rechtwinklig zu AB, durch C ziehe man $CF \ddagger AB$, durch B aber $BF \ddagger AC$, und es treffe BF verlängert mit CE in G zusammen. Man vollende das Parallelogramm FH und ziehe $KEL \ddagger FG$ durch E. Weil nun $D \times AC < EB^2 \times AE$, so sei

$$AE : AC = D : GM^2$$

wo dann $GM^2 < GK^2$, d. h. $GM^2 < EB^2$ ist; auch sei $D = CF \times FN$.

(Hülfsaufg. α) Wenn $EB = 2\,AE$.

(β) Dann ist also $EB = 2\,AE$.

Weil

Weil demnach $AE : AC = CF \times FN : GM^2$
und weil $AE : AC = CF : FG = CF^2 : CF \times FG$

so folgt $CF^2 : CF \times FG = CF \times FN : GM^2$
oder $CF^2 : CF \times FN = CF \times FG : GM^2$
Es ist aber $CF^2 : CF \times FN = CF : FN = CF \times FG : FN \times FG$

folglich $CF \times FG : FN \times FG = CF \times FG : GM^2$
mithin ist $FN \times FG = GM^2$

Wenn wir also durch F um die Axe FG eine Parabel mit dem Parameter FN beschreiben, so wird diese durch M gehen. Sie sei beschrieben, und sei FXM. Weil ferner $HL = AF$, d. h. $HK \times KL = AB \times BF$, so wird eine durch B zu den Asymptoten HC, CF, beschriebene Hyperbel durch K gehen (*Apollon. Kegelsch. II.* 12, *umgekehrt*). Sie sei beschrieben und sei BXK, die Parabel in X schneidend. Aus X ziehe man XOQ senkrecht zu AB, und durch X die PXS ‡ AB. Weil nun BXK eine Hyperbel, HC, CF, die Asymptoten, und PX, XQ, den Linien AB, BF, parallel sind, so ist $PX \times XQ = AB \times BF$, d. h. $PO = OF$; eine Diagonale von C nach S geht daher durch O. Sie sei gezogen und sei COS. Weil nun

$OA : AC = OB : BS = CF : FS = CF \times FN : FS \times FN$
und weil $CF \times FN = D$ und $FS \times FN = SX^2 = BO^2$ wegen der Parabel,
so ist $OA : AC = D : BO^2$
also ist der Punkt O dergestalt genommen, daſs er der Aufgabe genügt.

Daſs aber, wenn $BE = 2\,AE$ ist, $BE^2 \times AE$ unter allen auf ähnliche Art aus AB bestimmten Körpern am gröſsten sei, läſst sich so darthun: Es sei wiederum, wie in der Auflösung, die gegebene gerade Linie AC senkrecht zu AB, und CE treffe verlängert die Parallele durch B zu AC in F. Durch C, F, ziehe man parallel mit AB die Linien HF, CG, verlängere CA bis H, ziehe mit ihr parallel KEL durch E, und mache, daſs sich verhalte F.101.

$$AE : AC = CG \times GM : BE^2$$

dann ist folglich $BE^2 \times AE = CG \times GM \times AC$. Ich behaupte nun, daſs $CG \times GM \times AC$ unter allen aus AB auf ähnliche Art bestimmten Körpern am gröſsten sei.

Denn man beschreibe durch G um die Axe GF eine Parabel mit dem Parameter GM. Sie wird durch K gehen, wie in der Auflösung gezeigt ist, und wird verlängert die der Axe parallele Linie CH treffen (*Apollon. Kegelsch. I.* 26.); dieſs sei in N geschehen. Dann werde durch B zu den Asymptoten NC, CG eine Hyperbel beschrieben, welche folglich durch K geht, wie in der Auflösung angeführt ist, sie sei BK. Ferner sei FG so verlängert, daſs $GX = GF$ ist, auch sei XK gezogen und nach O verlängert, so berührt offenbar diese die Parabel (*Apollon. Keg. I.* 33.). Weil nun nach der Voraussetzung $BE = 2\,AE$, d. h. $FK = 2\,KH$ und $\Delta OHK \sim \Delta XFK$, so ist $XK = 2\,KO$. Ferner ist $XK = 2\,KQ$, weil $XF = 2\,XG$ und QG ‡ KF; mithin ist $KO = KQ$; demnach wird OKQ, als Berührungslinie der Parabel zwischen den Asymptoten, in K gehalbtheilt und berührt folglich die Hyperbel (*Apollon. Keg. II.* 3. *umgehehrt.*). Sie berührte aber in eben dem Punkte K die Parabel, folglich berühren Parabel und Hyperbel einander in K.

Man denke sich nun die Hyperbel verlängert bis P, nehme auf AB einen willkührlichen Punkt S, ziehe durch S zu KL die Parallele TSY, welche in T die Hyperbel treffe, und durch T zu CG die Parallele ITW. Da nun wegen der Hyperbel und der Asymptoten $IY = CB$, so ist nach Wegnahme des gemeinschaftlichen AY nunmehr auch $SI = SG$; also geht eine von C nach W gezogene Diagonale durch S. Sie sei gezogen und sei CSW. Weil nun $WR^2 = GW \times GM$, wegen der Parabel, so ist $WT^2 < GW \times GM$; man mache daher $WT^2 = GW \times GZ$. Da nun

$$SA : AC = CG : GW = CG \times GZ : GW \times GZ = CG \times GZ : WT^2 = CG \times GZ : SB^2$$

so ist $$SB^2 \times SA = CG \times GZ \times AC$$

Es ist aber $CG \times GZ \times AC < CG \times GM \times AC$, folglich $SB^2 \times SA < BE^2 \times AE$. Auf dieselbe Weise wird man es auch von allen zwischen E, B, angenommenen Punkten darthun.

Man nehme deſshalb einen Punkt S′ zwischen E, A. Ich behaupte, daſs auch so $BE^2 \times AE > S'B^2 \times S'A$ sei. Denn bei derselben Konstruktion ziehe man durch S′ zu KL die Parallele Y′S′P, welche die Hyperbel in P treffe, was irgendwo geschehen wird, weil jene Linie der Asymptote parallel ist; ferner ziehe man durch P zu AB die Parallele R′PV, welche mit der verlängerten GF in V zusammentreffe. Weil nun wieder, vermöge der Hyperbel, $UY' = AG$, so wird eine Diagonale zwischen C, V, durch S′ gehen. Sie sei gezogen und sei CS′V. Weil ferner, wegen der Parabel, $R'V^2 = VG \times GM$, so ist $PV^2 < VG \times GM$; man mache daher $PV^2 = VG \times GZ$. Weil nun

$$S'A : AC = CG : GV = CG \times GZ : GV \times GZ = CG \times GZ : PV^2 = CG \times GZ : S'B^2,$$

so ist $$S'B^2 \times S'A = CG \times GZ \times AC.$$

Nun ist $CG \times GM \times AC > CG \times GZ \times AC$, folglich auch $BE^2 \times AE > S'B^2 \times S'A$.

Eben so wird es sich von allen zwischen E, A, angenommenen Punkten erweisen lassen, und von den Punkten zwischen E, B, ward es schon erwiesen: folglich ist unter allen auf ähnliche Art aus AB bestimmten Körpern $BE^2 \times AE$ am gröſsten, wenn $BE = 2\,AE$ ist.

Man muſs nun noch etwas einsehen, was sich bei der angeführten Konstruktion ergiebt. Da nämlich bewiesen ist, daſs sowohl $SB^2 \times AS$, als auch $S'B^2 \times AS'$ kleiner sei als $BE^2 \times AE$, so ist es möglich, in dem Falle, wo der durch den gegebenen Flächenraum und die gegebene Linie bestimmte Körper kleiner ist, als $BE^2 \times AE$, der ursprünglichen Aufgabe durch eine zwiefache Theilung der Linie AB zu genügen. Dieses geschieht, wenn wir uns eine um die Axe GW mit dem Parameter GZ beschriebene Parabel vorstellen. Eine solche Parabel geht gewiſs durch den Punkt T, und da sie nothwendig CN, eine Parallele der Axe, treffen muſs, so ist einleuchtend, daſs sie die Hyperbel noch in einem andern Punkte über K hinaus, wie hier in P, schneide. Dann schneidet ein Perpendikel aus P auf AB, wie hier PS′, die Linie AB in S′, so daſs der Punkt S′ der Aufgabe genügt, und daſs $SB^2 \times AS = S'B^2 \times AS'$ wird, wie aus den vorigen Beweisen erhellet. Indem also auf AB zwei Punkte genommen werden können, welche das Gefoderte leisten, so darf man, welchen man will, von ihnen nehmen, entweder den zwischen E, B, oder den zwischen E, A. Will man etwa den zwischen E, B, so wird eine nach angegebener Weise durch G, T, beschriebene Parabel die Hyperbel in zwei Punkten schneiden, und der nähere an G, d. h. näher an der Axe der Parabel liegende Punkt wird den Punkt zwischen E, B, angeben, wie hier T den Punkt S angiebt, der entferntere aber wird den Punkt zwischen E, A, wie hier P den Punkt S′ angeben.

2) So also ward die Aufgabe allgemein aufgelöset und konstruirt. Um sie aber auf die Worte des Archimedes zu beziehen, erinnere man sich, dafs in der dazu gehörigen Figur DB der Durchmesser der Kugel, BF der Halbmesser und FH die gegebene Linie war. Wir waren dann, sagt er, so weit gekommen, dafs DF in X dergestalt geschnitten werden mufste, dafs sich FX zur gegebenen Linie verhalte, wie der gegebene Raum zu DX^2; und diefs, allgemein ausgesprochen, leidet eine Beschränkung. Wenn nämlich der durch den gegebenen Raum und die gegebene Linie bestimmte Körper gröfser war, als $DX^2 \times FX$, so ward etwas Unmögliches gefodert, wie erwiesen ist; wenn aber jener Körper gleich $DX^2 \times FX$ ist, so genügt der Punkt B der Aufgabe, allein diefs diente gar nicht zur ursprünglichen Foderung des Archimedes, denn die Kugel wurde dann nicht nach dem gegebenen Verhältnisse geschnitten; daher leidet der Satz als ein allgemein ausgedrukter eine Beschränkung. Fügt man aber hinzu, was hier Statt findet, dafs nämlich $DB = 2BF$ und dafs $BF > FH$, so hat er keine Einschränkung; denn es ist alsdann $DB^2 \times FH < DB^2 \times BF$; und dafs in solchem Falle die Lösung der Aufgabe möglich sei, und wie sie geschehe, haben wir nachgewiesen. F. 98.

Archimedes selbst stellt nun die vorher allgemein ausgesprochene Aufgabe in einer einschränkenden Form dergestalt auf: Wenn zwei gerade Linien DB, BF gegeben sind, so dafs $DB = 2BF$ ist, und der Punkt H auf der Linie BF liegt, die Linie DB in X zu schneiden, nicht etwa (wie vorher, DF, sondern eben DB nennend, weil er bemerkte, dafs zwei Punkte auf DF der Aufgabe genügen, wie wir zuvor gezeigt haben, der eine zwischen D, B, der andere zwischen B, F, von denen nur der zwischen D, B, für die ursprüngliche Aufgabe brauchbar war.

Satz 6.

Einen Kugelabschnitt zu bilden, der einem gegebenen ähnlich und einem anderen gegebenen gleich ist. F. 102.

Die beiden gegebenen Kugelabschnitte sollen ABC, EFG sein. Die Grundfläche des Abschnitts ABC sei der Kreis um den Durchmesser AB, sein Pol aber der Punkt C; des Abschnitts EFG Grundfläche sei der Kreis um den Durchmesser EF, der Pol sei G. Es soll also ein Kugelabschnitt gefunden werden, welcher gleich dem Abschnitte ABC, ähnlich aber dem EFG ist.

Er sei gefunden und sei HKL. Die Grundfläche desselben sei der Kreis um den Durchmesser HK, der Pol aber der Punkt L. Normalkreise der Kugeln seien ANBC, HMKL, EOFG, ihre Durchmesser CN, LM, GO, senkrecht auf den Grundflächen der Abschnitte, und ihre Mittelpunkte Q, P, S. Man mache, dafs sich verhalte

$$(QN + NT) : NT = XT : TC$$
$$\text{und} \quad (PM + MY) : MY = IY : YL$$
$$\text{und} \quad (SO + OU) : OU = ZU : UG$$

ferner denke man sich Kegel, deren Grundflächen die Kreise um die Durchmesser AB, HK, EF, und deren Spitzen die Punkte X, I, Z, sind. Nun ist, wie bewiesen, der Kegel $ABX =$ dem Kugelabschnitte ABC, der Kegel $HKI =$ dem Abschnitte HKL und der Kegel $EFZ =$ dem Abschnitte EFG (S. 3.). Weil ferner der Kugelabschnitt $ABC =$ Absch. HKL, so ist auch Keg. ABX = Keg. HKI. Bei gleichen Kegeln verhalten sich aber die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen, mithin verhält sich

$$\text{Kreis um } AB : \text{Kr. um } HK = YI : XT$$

Es ist aber $\text{Kreis um } AB : \text{Kr. um } HK = AB^2 : HK^2$

folglich $AB^2 : HK^2 = YI : XT.$

Weil nun der Abschnitt EFG dem Abschnitte HKL ähnlich ist, so ist auch der Kegel EFZ dem Kegel HKI ähnlich. (α) Mithin ist

$$ZU : EF = IY : HK.$$

Nun ist das Verhältniſs $ZU : EF$ gegeben, (β) mithin auch $IY : HK$.

Also sei $IY : HK = XT : D$, wo XT gegeben ist, mithin auch D.

Weil ferner $IY : XT = AB^2 : HK^2 = HK : D$

so nehme man $HK^2 = AB \times V$,

Dann ist $AB^2 : HK^2 = AB : V$

Nun war $AB^2 : HK^2 = HK : D$

also $AB : HK = V : D$

ferner $AB : HK = HK : V$, weil $HK^2 = AB \times V$

folglich $AB : HK = HK : V = V : D$

Demnach sind HK, V, zwei mittlere Proportionalen zwischen den beiden gegebenen AB, D.

Die Konstruktion der Aufgabe wird hiernach folgende sein. Es sei ABC der Abschnitt, welchem der zu bildende gleich, und EFG der, dem er ähnlich sein soll. Normalkreise der Kugeln seien ANBC, GEOF, deren Durchmesser CN, GO, und die Mittelpunkte Q, S. Man mache daſs sich verhalte $(QN + NT) : NT = XT : TC$

und $(SO + OU) : OU = ZU : UG$

dann ist folglich der Kegel XAB = dem Kugelabschnitte ABC und der Kegel ZEF = dem Abschnitte EFG. Man mache nun, daſs sich verhalte

$$ZU : EF = XT : D$$

und nehme zwischen den beiden gegebenen AB, D, zwei mittlere Proportionalen HK, V, so daſs $AB : HK = HK : V = V : D$

Ueber HK beschreibe man einen Kreisabschnitt HKL, ähnlich dem Kreisabschnitte EFG; (γ)

(S. 6. α) Aus der Aehnlichkeit der Kugelabschnitte folgt die Aehnlichkeit der Kreisabschnitte EFG, HKL, und hieraus ergiebt sich

$$SO : OU = PM : MY$$

also $(SO + OU) : OU = (PM + MY) : MY$

folglich $ZU : UG = IY : YL$, nach den Voraussetzungen,

oder $UG : YL = ZU : IG$

Es ist aber $UG : YL = EF : HK$

mithin $ZU : IG = EF : HK$, also sind die Kegel ähnlich.

(β) Das Verhältniſs $ZU : EF$ ist zusammengesetzt aus den beiden $ZU : UG$ und $UG : EF$. Beide sind gegeben, ersteres nach der Voraussetzung, letzteres weil der Kugelabschnitt EFG selbst nach Inhalt und Form gegeben ist; mithin ist auch das zusammengesetzte Verhältniſs gegeben.

(γ) Nach Eukl. III. 33.

und vollende den Kreis, dessen Durchmesser LM sei. Dann stelle man sich eine Kugel vor, deren Normalkreis LHMK, und deren Mittelpunkt P ist, und breite durch HK eine auf LM senkrechte Ebene aus. Dann wird der Kugelabschnitt an der Seite L dem Kugelabschnitte EFG ähnlich sein, weil auch die Kreisabschnitte ähnlich waren. Ich behaupte aber, er sei auch gleich dem Kugelabschnitte ABC. Man mache nämlich, dafs

$$(PM + MY) : MY = IY : YL$$

dann ist folglich *der Kegel* IHK = *dem Kugelabschnitte* HKL (S. 3.). Weil nun der Kegel IHK dem Kegel ZEF ähnlich ist, so verhält sich

$$ZU : EF = XT : D = IY : HK.$$

oder $\quad IY : XT = HK : D$

Weil ferner $\quad AB : HK = HK : V = V : D$

so ist auch $\quad AB^2 : HK^2 = HK : D$

Es ist aber $\quad HK : D = IY : XT$

folgl. $\quad AB^2 : HK^2 =$ *Kreis um* AB : *Kr. um* HK $= IY : XT$.

Demnach ist der Kegel XAB dem Kegel IHK, also auch der Kugelabschnitt ABC dem Kugelabschnitte HKL gleich. Es ist folglich ein Abschnitt HKL dem gegebenen ABC gleich und einem andern gegebenen EFG ähnlich gebildet worden.

Satz 7.

Wenn zwei Kugelabschnitte gegeben sind, sei es nun von derselben Kugel oder nicht, einen Kugelabschnitt zu finden, welcher dem einen der gegebenen ähnlich, und dessen Oberfläche der Oberfläche des andern Abschnitts gleich ist.

Es mögen die Kugelabschnitte zu den Bogen ABC, DEF gegeben sein, und zwar sei F.103.
der zum Bogen ABC gehörige der, welchem der zu findende ähnlich, der zum Bogen DEF gehörende aber derjenige, dessen Oberfläche die Oberfläche des zu findenden gleich sein soll. Er sei nun gefunden, und zwar sei der Kugelabschnitt KLM ähnlich dem Abschnitte ABC, und habe eine der Oberfläche des Abschnitts DEF gleiche Oberfläche. Man denke sich demnächst die Mittelpunkte der Kugeln und durch sie senkrecht auf die Grundflächen der Abschnitte Ebenen ausgebreitet, deren Durchschnitte der Kugeln ABCH, EFGD, der Grundflächen der Abschnitte aber die geraden Linien KM, AC, DF, sein sollen. Die auf KM, AC, DF senkrechten Durchmesser der Kugeln seien LN, BH, EG, und man ziehe LM, BC, EF.

Weil nun die Oberfläche des Kugelabschnitts KLM der Oberfläche des Abschnitts DEF gleich ist, so ist auch ein Kreis um den Halbmesser ML einem Kreise um den Halbmesser EF gleich; denn es ist bewiesen worden, dafs die Oberflächen der erwähnten Abschnitte Kreisen gleich sind, deren Halbmesser den geraden Linien von den Polen der Abschnitte an die Umfänge der Grundflächen gleich sind. (I. S. 48. 49.).

Demnach ist auch $\quad ML = EF$. Weil nun *Absch.* KLM ∾ *Absch.* ABC,

so ist $\quad PL : PN = BQ : QH$

folglich $\quad NL : LP = HB : BQ$

Es ist aber auch $\quad PL : LM = BQ : CB$, wegen Aehnlichkeit der Dreiecke.

folglich $\quad NL : LM = NL : EF = HB : CB,$

oder $\quad NL : HB = EF : CB.$

Nun ist das Verhältnifs $EF : CB$ gegeben, weil jede der beiden Linien gegeben ist, (α) mithin ist auch $NL : HB$ gegeben. Es ist ferner HB gegeben, folglich auch NL, und somit auch die Kugel.

Die Konstruktion wird diese sein: die beiden gegebenen Kugelabschnitte seien ABC, DEF, und zwar ABC derjenige, welchem er ähnlich, DEF aber derjenige, dessen Oberfläche die seinige gleich sein soll. Man konstruire nun alles der Auflösung gemäfs, und mache dafs sich verhalte:

$$BC : EF = BH : LN$$

und beschreibe einen Kreis um den Durchmesser LN. Dann denke man sich die Kugel, deren Normalkreis $LKNM$ sein soll, und schneide NL in P dergestalt, dafs

$$HQ : BQ = NP : LP.$$

Durch P werde die Oberfläche von einer auf NL senkrechten Ebene geschnitten und LM gezogen. Dann sind die Kreisabschnitte über den geraden Linien KM, AC, ähnlich, mithin auch die Kugelabschnitte;

und weil	$HB : BQ = NL : LP$ (vermöge der Durchschneidung.) (β)
ferner weil	$BQ : BC = LP : LM$
so folgt	$HB : NL = BC : LM$
Es war aber	$HB : NL = BC : EF$
also ist	$EF = LM$

Mithin ist auch ein Kreis um den Halbmesser EF einem Kreise um den Halbmesser LM gleich. Nun ist ein Kreis um den Halbmesser EF der Oberfläche des Abschnitts DEF, ein Kreis aber um den Halbmesser LM der Oberfläche des Abschnitts KLM gleich, wie im ersten Buche gezeigt wurde (I S. 48. 49.), folglich ist die Oberfläche des Kugelabschnitts KLM gleich der Oberfläche des Abschnitts DEF, auch ist KLM dem Abschnitte ABC ähnlich.

Satz 8.

Von einer gegebenen Kugel einen Abschnitt durch eine Ebene dergestalt abzuschneiden, dafs der Abschnitt zu einem Kegel, welcher einerlei Grundfläche und gleiche Höhe mit ihm hat, in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

F. 104. Es soll die gegebene Kugel den Normalkreis $ABCD$ und den Durchmesser BD haben; dann soll die Kugel von einer Ebene durch AC so geschnitten werden, dafs der Kugelabschnitt ABC zu dem Kegel ABC in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

Diefs sei geschehen, und der Mittelpunkt der Kugel sei E, auch verhalte sich

$$(ED + DF) : DF = GF : FB$$

(S. 7. α) Da die Abschnitte ABC, DEF, gegeben sind, so sind AC, QB, und DF, IE, also auch QC, IF, gegeben, mithin sind wegen der rechten Winkel bei Q, I, auch BC, EF, gegeben.

(β) Weil LN so geschnitten ist, dafs sich verhält

$$HQ : BQ = NP : LP$$

so folgt $(HQ + BQ) : BQ = (NP + LP) : LP$ u. s. w.

also ist der Kegel ACG dem Abschnitte ABC gleich (S. 3.); folglich ist auch das Verhältnifs des Kegels ACG zu dem Kegel ABC gegeben, mithin ist auch das Verhältnifs $GF : FB$ gegeben. Nun war

$$GF : FB = (ED + DF) : DF$$

folglich ist auch das Verhältnifs $(ED + DF) : DF$ gegeben, mithin ist das Verhältnifs $ED : DF$ und folglich DF, und gleicherweise AC gegeben.

Weil nun $(ED + DF) : DF > (ED + DB) : DB$ (α)
und $(ED + DB) = 3\,ED$ und $DB = 2\,ED$

so ist $(ED + DF) : DF > 3 : 2.$

Es ist aber das Verhältnifs $(ED + DF) : DF$ dem gegebenen gleich, mithin mufs das gegebene Verhältnifs Behufs der Konstruktion gröfser sein, als das Verhältnifs $3 : 2$.

Die Aufgabe wird nun so konstruirt werden: Es sei eine Kugel gegeben, deren Normalkreis ABCD, der Durchmesser BD, der Mittelpunkt E; das gegebene Verhältnifs sei $KH : KL$, gröfser als $3 : 2$.

Nun ist $(ED + DB) : DB = 3 : 2$
also $HK : KL > (ED + DB) : DB$
mithin $HL : KL > ED : DB$

Man mache, dafs sich verhalte

$$HL : KL = ED : DF$$

und ziehe durch F senkrecht auf BD die Linie AFC, und lege durch AC eine auf BD senkrechte Ebene. Ich behaupte, dafs

Kugelabsch. ABC : *Kegel* ABC = HK : KL

Man mache nämlich, dafs sich verhalte

$$(ED + DF) : DF = GF : BF$$

Dann ist der Kegel CAG dem Kugelabschnitte ABC gleich (S. 3.). Weil nun
HK : KL = (ED + DF) : DF = GF : BF = Keg. ACG : Keg. ABC (I. S. 17. *Lehns.* 1.)
und weil *Keg.* AGC = *Kugelabsch.* ABC
so ist folgl. *Absch.* ABC : *Keg.* ABC = HK : KL

Satz 9.

Wenn eine Kugel von einer nicht durch den Mittelpunkt gehenden Ebene geschnitten wird, so steht der gröfsere Abschnitt zum kleineren in einem Verhältnisse, was kleiner ist, als das zwiefache des Verhältnisses der Oberfläche des Gröfsern zur Oberfläche des kleinern Abschnitts, gröfser aber, als das anderthalbfache Verhältnifs. (α)

Es sei eine Kugel vorhanden mit dem Normalkreise ABCD und dem Durchmesser BD; sie werde von einer auf ABCD senkrechten Ebene durch AC geschnitten, und zwar sei F. 105.

(S. 8. α) Weil $DF < DB$, so ist $\frac{ED}{DF} > \frac{ED}{DB}$, mithin $\frac{ED + DF}{DF} > \frac{ED + DB}{DB}$.

(S. 9. α) D. h. wenn der gröfsere Abschnitt A, der kleinere B, ihre Oberflächen a, b, sind, so wird behauptet

1) $A : B < a^2 : b^2$

2) $A : B > a^{\frac{3}{2}} : b^{\frac{3}{2}}$

ABC der gröſsere Abschnitt der Kugel. Ich behaupte, daſs der Abschnitt ABC zu ADC in kleinerem Verhältnisse stehe, als in dem zwiefachen der Oberfläche des gröſseren zur Oberfläche des kleineren Abschnitts; in einem gröſseren aber, als in dem anderthalbfachen.

Denn man ziehe BA, AD, und E sei der Mittelpunkt, auch mache man, daſs sich verhalte $(ED + DF) : DF = HF : FB$

und $(EB + BF) : BF = GF : FD$

und denke sich Kegel, welche den Kreis um den Durchmesser AC zur Grundfläche, zu Spitzen aber die Punkte H, G, haben. Dann wird der Kegel AHC dem Kugelabschnitte ABC, der Kegel AGC aber dem Abschnitte ADC gleich sein (S. 3.). Auch ist

$BA^2 : AD^2 =$ *Oberfl. des Absch.* ABC : *Oberfl. d. Absch.* ADC

wie zuvor erwiesen ward (I. S. 48. 49.).

1) Nun ist zu zeigen, daſs der gröſsere Abschnitt zum kleineren in kleinerem Verhältnisse stehe, als im zwiefachen der Oberfläche des gröſsern zur Oberfläche des kleinern Abschnitts. Ich behaupte also, daſs das Verhältniſs des Kegels $AHC : AGC$, d. h. $FH : FG$ kleiner sei, als das zwiefache Verhältniſs von $BA^2 : AD^2$, d. h. von $BF : FD$. (β) Weil nun

$(ED + DF) : DF = HF : FB$

und $(EB + BF) : BF = GF : FD$

so folgt $BF : FD = HB : BE$ (γ) (Denn es ist $BE = ED$)

wie oben mitbewiesen wurde (S. 3.). Wiederum weil

$(EB + BF) : BF = GF : FD$,

so sei $BE = BK$, wo denn offenbar $HB > BE$, weil $BF > FD$ ist. (δ)

Dann folgt $KF : BF = GF : FD$

Es war aber $BF : FD = HB : BE$ (und $BE = BK$)

folglich $HB : BK = KF : GF$

Weil nun $HF : KF < HB : BK$ (ε)

und so eben $HB : BK = KF : GF$

so folgt $HF : KF < KF : GF$, also $HF \times GF < KF^2$

mithin $HF \times GF : GF^2$ (d. h. $HF : GF$) $< KF^2 : GF^2$

(Es ist aber das Verhältniſs $KF^2 : GF^2$ das zwiefache von $KF : GF$, folglich ist $HF : GF$ kleiner als das zwiefache Verhältniſs $KF : GF$)

und weil $KF : GF = BF : FD$

so folgt $HF : GF < BF^2 : FD^2$

und dieſs eben suchten wir.

2) Weil

(β) Weil $BA^2 = BD \times BF$ und $AD^2 = BD \times DF$, so ist

$BA^2 : AD^2 = BF : FD$

es wird also behauptet, daſs $FH : FG < BF^2 : FD^2$

(γ) Es ist nämlich $ED : DF = (HF - FB) : FB$, oder weil $ED = BE$, so folgt

$BE : DF = HB : FB$

(δ) In der Proportion $BF : FD = HB : BE$, ist $BF > FD$, folglich auch $HB > BE$.

(ε) Denn es ist $KF > BK$, folglich $\frac{HK}{FK} < \frac{HK}{BK}$ mithin $\frac{HK + KF}{KF} < \frac{HK + BK}{BK}$ d. h. $\frac{HF}{KF} < \frac{HB}{BK}$.

2) Weil ferner $BE = ED$, so ist $BF \times FD < BE \times ED$ (η)

mithin $BF : BE < ED : DF = HB : BF$ (ϑ)

folglich ist $BF^2 < HB \times BE$, d. h. $BF^2 < HB \times BK$.

Nun sei $BN^2 = HB \times BK$, dann ist

$$HB : BK = HN^2 : NK^2 \ (\iota)$$

Es ist aber $HF^2 : FK^2 > HN^2 : NK^2$ (κ)

folglich auch $HF^2 : FK^2 > HB : BK = HB : BE = FK : GF$

mithin $HF : GF > KF^{\frac{3}{2}} : GF^{\frac{3}{2}}$ (λ)

und diefs eben ist unser Ziel.

Es ist nunmehr

$HF : FG =$ *Keg.* AHC : *Keg.* AGC = *Absch.* ABC : *Absch.* ADC

und $KF : FG = BF : DF = BA^2 : AD^2$ = *Oberfl. d. Absch.* ABC : *Oberfl. d. Absch.* ADC

demnach steht der gröfsere Abschnitt zu dem kleineren in einem kleineren Verhältnisse, als in dem zwiefachen der Oberfläche des gröfsern Abschnitts zur Oberfläche des kleinern Abschnitts; und in einem gröfsern, als dem anderthalbfachen dieses Verhältnisses.

Anderer Beweis. Es sei eine Kugel vorhanden mit dem Normalkreise $ABCD$, F. 106. dem Durchmesser AC und dem Mittelpunkte E; sie werde von einer auf AC senkrechten Ebe-

---

(ζ) Die eingeklammerten Worte sind zwar ächt, machen aber den Schlufs des Beweises ohne Noth weitläuftig.

(η) Denn $BF \times FD = AF^2$ und $BE \times ED = ED^2$; es ist aber $AF < ED$, weil E der Mittelpunkt ist, also auch $AF^2 < ED^2$ u. s. w.

(ϑ) Weil $(ED + DF) : DF = HF : BF$, so folgt $ED : DF = (HF - BF) : BF$.

(ι) Weil $HB : BN = BN : BK$, so folgt

$$HB : BN = (HB + BN) : (BN + BK) = HN : NK$$

und $HB^2 : BN^2 = HN^2 : NK^2$

Nun war $BN^2 = HB \times BK$

folgl. $HB : BK = HN^2 : NK^2$

(κ) Es ist nämlich $FK < NK$, folglich

$HK : FK > HK : NK$, d. h. $(HK + FK) : FK > (HK + NK) : NK$

folglich $HF : FK > HN : NK$, also $HF^2 : FK^2 > HN^2 : NK^2$

(λ) Denn man nehme drei Gröfsen a, b, c, dergestalt an, dafs $a^2 : b^2 > b : c$, so läfst sich nachweisen, dafs $a : c > b^{\frac{3}{2}} : c^{\frac{3}{2}}$

Es sei nämlich m eine mittlere Proportionale zwischen b, c, das heifst:

$b : m = m : c$, mithin $b : c = b^2 : m^2$;

Weil nun $a^2 : b^2 > b : c$

so folgt $a : b > b : m$

Ferner sei n die vierte Proportionale zu c, m, b, also $c : m = b : n$, so bilden die Gröfsen $\div n : b : m : c$ eine geometrische Progression, und man hat folglich

$$n : c = b^3 : m^3 \text{ und } b : m = b^{\frac{1}{2}} : c^{\frac{1}{2}}$$

mithin $n : c = b^3 : m^3 = b^{\frac{3}{2}} : c^{\frac{3}{2}}$.

die Anwendung hievon ist leicht, wenn man $a = HF$, $b = FK$, $c = GF$ setzt.

ne durch BD geschnitten. Ich behaupte, dafs der gröfsere Abschnitt BAD zu dem kleineren BCD in kleinerem Verhältnisse stehe, als dem zwiefachen der Oberfläche des Abschnitts BAD zur Oberfläche des Abschnitts BCD; in einem gröfsern aber, als dem anderthalbfachen.

1) Denn man ziehe AB, BC; dann verhält sich

d. eine Oberfläche : *der andern* = *Kreis um d. Halbm.* AB : *Kr. um d. Halbm.* BC = AH : HC

Man setze den Halbmesser des Kreises = AF = CG. Das Verhältnifs des Abschnitts BAD zu dem Abschnitte BCD ist zusammengesetzt aus dem Verhältnisse des Abschnitts BAD zu dem Kegel BDA, aus dem Verhältnisse desselben Kegels BDA zu dem Kegel BDC, und aus dem Verhältnisse dieses Kegels zu dem Abschnitte BCD. Es ist aber

Absch. BAD : *Keg.* BDA = GH : HC (S. 3. *Folgerung.*)
Keg. BDA : *Keg.* BDC = AH : HC (I. S. 17. *Lehnsatz* 1.)
Keg. BDC : *Absch.* BCD = AH : HF (S. 3. *Folgerung.*)

Es ist aber das aus GH : HC und AH : HC zusammengesetzte Verhältnifs dem Verhältnisse $GH \times AH : HC^2$ gleich, und das aus $GH \times AH : HC^2$ und $AH \times HF$ zusammengesetzte ist dem Verhältnisse $GH \times AH \times AH : HC^2 \times HF$ gleich, welches wiederum einerlei ist mit dem Verhältnisse $AH^2 \times HG : HC^2 \times HF$. (μ) Es ist aber

$$GH \times AH^2 : HC^2 \times GH = AH^2 : HC^2$$

und es ist eben zu zeigen, dafs

$$AH^2 \times GH : HC^2 \times FH < AH^2 : HC^2 \text{ (ν)}$$

also dafs $AH^2 \times GH : HC^2 \times FH < AH^2 \times GH : HC^2 \times GH$

mithin dafs $HC^2 \times FH > HC^2 \times GH$

d. h. dafs $FH > GH$ (ξ)

2) Ich behaupte hiernächst, dafs das Verhältnifs des gröfsern zum kleinern Abschnitte gröfser sei, als das anderthalbfache Verhältnifs der Oberflächen.

Es ward bewiesen, dafs die Abschnitte sich verhalten, wie $AH^2 \times GH : HC^2 \times FH$. Das anderthalbfache Verhältnifs der Oberflächen ist aber das Verhältnifs $AB^3 : BC^3$. (ο) Meine Behauptung ist also, dafs sich verhalte

$$AH^2 \times GH : HC^2 \times FH > AB^3 : BC^3 = AH^3 : BH^3 \text{ (π)}$$

d. h. es ist $AH^2 \times GH : HC^2 \times FH$ gröfser als ein aus $AH^2 : BH^2$ und aus $AH : BH$ zu-

---

(μ) Folglich ist *Abschnitt* BAD : *Absch.* BCD = $AH^2 \times GH : HC^2 \times FH$.

(ν) Es soll nämlich bewiesen werden, dafs

Abschnitt BAD : *Absch.* BCD < $AH^2 : HC^2$.

(ξ) Den leicht hinzuzudenkenden Schlufs läfst Archimedes aus: „Es ist aber wirklich FH > GH, weil nach der Voraussetzung *Absch.* BAD > *Absch.* BCD, mithin AH > HC, und weil AF = CG ist; also ist die zu erweisende Proportion wirklich erwiesen.

(ο) Man setze die Oberfläche BAD = S, die Oberfläche BCD = s, so ist

$$S : s = AB^2 : BC^2$$
$$S^{\frac{1}{2}} : s^{\frac{1}{2}} = AB : BC$$
$$S^{\frac{3}{2}} : s^{\frac{3}{2}} = AB^3 : BC^3.$$

(π) Weil AB : BC = AH : BH.

sammengesetztes Verhältnifs. Dieses ist aber dem Verhältnisse $AH^2 : HC \times BH$, (ρ) und dieses wieder dem Verhältnisse $AH^2 \times HG : HC \times BH \times HG$ gleich. Demnach behaupte ich, dafs

$$AH^2 \times GH : HC^2 \times FH > AH^2 : HC \times BH = AH^2 \times GH : HC \times BH \times GH.$$

Es ist also zu zeigen, dafs $HC^2 \times FH < HC \times BH \times GH$,
was eben so viel ist, als zu zeigen, dafs

$$HC^2 : BH \times HC < GH : FH$$

oder zu beweisen, dafs $GH : FH > HC : BH$ sei.

Man errichte in E auf EC die senkrechte EK, und fälle auf diese aus B das Perpendikel BL, so bleibt uns zu zeigen dafs

$$GH : FH > HC : BH$$

Es ist aber $FH = AH + KE$

Also mufs gezeigt werden, dafs

$$GH : (AH + KE) > HC : BH$$

und wenn man folglich HC von GH, und $EL = BH$ von KE wegnimmt, so wird zu erweisen sein, dafs $CG : (AH + KL) > HC : BH = BH : AH = EL : AH$
oder dafs $KE : EL > (AH + KL) : AH$
oder dafs $KL : EL > KL : AH$
also dafs $EL < AH$ (σ)

(ρ) Es ist $AH : BH = BH : HC$
und $AH^2 : BH^2 = AH^2 : BH^2$
folgl. $AH^3 : BH^3 = AH^2 : BH \times HC$

(σ) Hier läfst Arch. wieder den von selbst hervorgehenden Schlufs aus: „Es ist aber wirklich $EL < AH$, weil EL kleiner und AH gröfser als der Halbmesser ist; folglich ist die zu beweisende Proportion richtig.“

Der ganze Satz des Archimedes läfst sich durch Hülfe der Algebra kurz erweisen. Es ist nämlich, F.106.
wenn man den Halbmesser der Kugel $= r$ setzt:

Abschnitt $BAD = \frac{1}{3}\pi \times AH^2 (3r - AH)$
Abschnitt $BCD = \frac{1}{3}\pi \times CH^2 (3r - CH)$ } Geom. II. §. 259.

Oberfl. d. Absch. $BAD = 2\pi r \times AH$
Oberfl. d. Absch. $BCD = 2\pi r \times CH$ } Geom. II. §. 272.

Nun behauptet Archimedes:

I. dafs $\frac{AH^2 (3r - AH)}{CH^2 (3r - CH)} < \frac{AH^2}{CH^2}$ d. h. dafs $\frac{3r - AH}{3r - CH} < 1$ sei.

Weil nun $AH > CH$, also $3r - AH > 3r - CH$, so ist $\frac{3r - AH}{3r - CH}$ ein ächter Bruch, mithin die Behauptung richtig.

II. dafs $\frac{AH^2 (3r - AH)}{CH^2 (3r - CH)} > \frac{AH^{\frac{3}{2}}}{CH^{\frac{3}{2}}}$, d. h. dafs $\frac{3r - AH}{3r - CH} > \frac{CH^{\frac{1}{2}}}{AH^{\frac{1}{2}}}$

oder dafs $(3r - AH)\, AH^{\frac{1}{2}} > (3r - CH)\, CH^{\frac{1}{2}}$,
oder dafs $(3r - AH)^2\, AH > (3r - CH)^2\, CH$ sei.

Um diese Behauptung zu prüfen, setze man $AE = x$, so ist $AH = r + x$ und $CH = r - x$, und die Behauptung verwandelt sich in folgende:

$$(2r - x)^2 . (r + x) > (2r + x)^2 . (r - x)$$

Satz 10.

Von den Kugelabschnitten, welche unter gleichen Oberflächen enthalten sind, ist die Halbkugel die gröfste.

F. 107. In einer Kugel sei ABCD der Normalkreis, AC der Durchmesser, und zu einer andern Kugel sei EFGH der Normalkreis, EG der Durchmesser. Jede der beiden Kugeln werde von einer Ebene geschnitten, die eine durch den Mittelpunkt, die andere nicht dadurch; die Durchschnittsebenen sollen senkrecht auf den Durchmessern AC, EG, stehen, und nach den Linien DB, FH, geführt sein. Der Kugelabschnitt zu dem Bogen FEH sei die Halbkugel; von den Kugelabschnitten zu dem Bogen BAD sei der in der Figur S gröfser, der aber in der anderen kleiner als die Halbkugel; auch sollen die Oberflächen der gedachten Abschnitte gleich sein. Ich behaupte nun, dafs die zu dem Bogen FEH gehörende Halbkugel gröfser sei, als der Abschnitt zu dem Bogen BAD.

Denn weil die Oberflächen der erwähnten Abschnitte gleich sind, so erhellt, dafs $BA = EF$, indem bewiesen worden, dafs eines jeden Abschnitts Oberfläche einem Kreise gleich ist, der zum Halbmesser die gerade Linie vom Pole des Abschnitts bis an den Umring des Grundkreises desselben hat (I. S. 48. 49.). Weil ferner der Bogen BAD in der Figur S gröfser ist, als der Halbkreis, so leuchtet ein, dafs $BA^2 < 2AK^2$ (α) und dafs BA^2 gröfser ist als das zweifache Quadrat des Halbmessers. (β) (In der andern Figur aber findet gerade das Gegentheil Statt. Man setze daher $\frac{1}{2} BA^2 = \frac{1}{2} EF^2 = AP^2$; dann folgt $AP = EL$, und AP kommt näher an den Mittelpunkt O als AK.) (γ) Ferner sei CI gleich dem Halbmesser des Kreises ABD, und $CI : CK = MA : AK$
Auf dem Kreise um den Durchmesser BD stehe ein Kegel, dessen Spitze der Punkt M ist. Dieser ist mithin gleich dem Kugelabschnitte zu dem Bogen BAD. (δ) Auch sei $EL = EN$, und auf dem Kreise um den Durchmesser FH stehe ein Kegel, dessen Spitze der Punkt N ist, dann ist auch dieser gleich der Halbkugel zu dem Bogen HEF. (ε)

Man setze demnach

$$(2r - x)^2 . (r + x) = (2r + x)^2 . (r - x) + Y.$$

Ist nun die obige Behauptung richtig, so mufs Y einen positiven Werth haben, sonst aber entweder $= 0$, oder negativ werden. Wird die Gleichung aufgelöset, so erhält man nach gehöriger Reduktion $Y = 2x^3$, woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellet.

(S. 10. α) Denn es ist $BA^2 = AK^2 + AK \times KC$ und nach der Voraussetzung ist $KC < AK$.

(β) Denn zieht man BO, so ist BOA ein stumpfer Winkel, also $BA^2 = 2AO^2 + 2AO \times OK$ (Eukl. II. 12), mithin $BA^2 > AO^2$.

(γ) Die eingeklammerten Worte sind zwar nicht vom Archimedes, sondern erst nach Rivaults und Sturms Vorgange in den Text gesetzt; sie sind aber für den Zusammenhang des Beweises unentbehrlich. (Man sehe darüber die krit. Anmerkungen.)

(δ) Denn weil $CI : CK = MA : AK$
so ist $IK : CK = MK : AK$ (Vgl. S. 3.)

(ε) Weil nämlich $NL = 2EL$, so ist *Keg.* $FHN = 2$ *Keg.* FEH (I. S. 17. *Lehnsatz* 1.)
Zugleich ist *Halbkugel* $FHE = 2$ *Keg.* FEH (I. S. 36.)

mithin *Kegel* FHN = *Halbkug.* FHE

Es ist nun *Rechteck* $AP \times PC > AK \times KC$, weil die kleinere Seite des ersten grössser ist, als die kleinere Seite des zweiten. (ζ)

Aber $AP^2 = AK \times CI = \frac{1}{2} AB^2$ (η)
folglich $AP \times PC + AP^2 > AK \times KC + AK \times CI$
also $CA \times AP > IK \times AK$. Weil aber $IK \times AK = MK \times KC$, (θ)
so ist $CA \times AP > MK \times KC$
Also $CA : KC > MK : AP$
Es ist aber $CA : KC = AB^2 : BK^2$ (ι)
folglich $\frac{1}{2} AB^2 : BK^2 > MK : 2\,AP$
d. h. $AP^2 : BK^2 > MK : LN$
Mithin *Kreis um d. Dchmesser* FH : *Kr. um d. Dchm.* BD $>$ MK : LN

folglich ist der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis um FH und dessen Spitze N ist, grösser als der Kegel, welcher zur Grundfläche den Kreis um BD, und zur Spitze M hat. Also erhellet, dass auch die zu dem Bogen EFH gehörige Halbkugel grösser ist, als der Abschnitt zu dem Bogen BAD.

(ζ) Nach Eukl. II. 5 ist $OC^2 = AP \times PC + OP^2$
und $OC^2 = AK \times KC + OK^2$

Weil nun $OP < OK$, so ist $AP \times PC > AK \times KC$, d. h. wenn eine gerade Linie AC an zwei verschiedenen Punkten P, K, in ungleiche Theile getheilt wird, so ist das Rechteck unter den beiden Abschnitten AP, PC, deren Trennungspunkt der Mitte der ganzen Linie zunächst liegt, grösser als das Rechteck unter den beiden andern Abschnitten AK, KC. Diess ist aber eben so viel, als wenn man mit Archimedes sagt: die kleinere Seite des ersteren Rechtecks sei grösser, als die kleinere des andern; denn je kleiner jene ist, um desto weiter ist ihr Trennungspunkt vom Mittelpunkte entfernt.

(η) Weil $AC \times AK = AB^2$, folglich $\frac{1}{2} AC \times AK = CI \times AK = \frac{1}{2} AB^2$.

(θ) S. Anmkg. 3.

(ι) Denn $AB^2 = AC \times AK$ und $BK^2 = KC \times AK$, folglich
$AB^2 : BK^2 = AC : KC$.

Kreismessung.

Satz 1.

Jeder Kreis ist einem rechtwinkligen Dreieck gleich, dessen eine Kathete dem Halbmesser, und dessen andere dem Umfange des Kreises gleich ist.

F. 108. Es sei der Kreis ABCD, samt dem Dreieck E der Voraussetzung gemäſs gegeben, ich behaupte, jener sei diesem gleich.

1) Wofern es nämlich möglich ist, so sei der Kreis gröſser: dann verzeichne man das Quadrat AC in dem Kreise, und theile die Bogen in je zwei Hälften, bis die Abschnitte weniger betragen, als der Ueberschuſs des Kreises über das Dreieck; so ist folglich die geradlinige Figur gröſser, als das Dreieck (*Kug. u. Cyl. I. S. 6. Folg.* 2.). Als Mittelpunkt sei N angenommen und NX sei senkrecht, so ist NX kleiner als die eine Seite des Dreiecks; zugleich ist der Umfang der geradlinigen Figur kleiner, als der Umfang des Kreises (*Kug. u. Cyl. I. S.* 1.); folglich wäre die geradlinige Figur kleiner als das Dreieck E, welches ungereimt ist. (*a*)

2) Daher sei, wenn dieſs möglich ist, der Kreis kleiner als das Dreieck E: dann beschreibe man ein äuſseres Quadrat, theile die Bogen in Hälften, und lege durch die Theilungspunkte Berührungslinien. Es ist also OAP ein rechter Winkel, folglich $OP > PM$, weil $PM = AP$ ist; und es ist ΔGOP gröſser als die Hälfte der Figur OFAM. Man lasse nun die Abschnitte wie GFA zusammen kleiner werden, als den Unterschied des Dreiecks E

(S. 1. *a*) Es sei das Vieleck im Kreise $= P$, dessen Umfang $= p$, das Perpendikel $NX = h$, der Umfang des Kreises $= c$, dessen Halbmesser $= r$, das Dreieck $= E$, so ist

$$P = \tfrac{1}{2}\,ph \text{ und } E = \tfrac{1}{2}\,cr$$

Nun ist $p < c$ und $h < r$, folglich $\tfrac{1}{2}\,ph < \tfrac{1}{2}\,cr$, d. h. $P < E$. Zuvor aber ward gezeigt, daſs $P > E$ sein müsse, mithin findet eine Ungereimtheit Statt.

von dem Kreise ABCD. Dann müfste die umschriebene geradlinige Figur kleiner sein, als das Dreieck, welches ungereimt ist; denn sie ist gröfser, weil zwar NA gleich ist der einen Kathete des Dreiecks, der Umfang der Figur aber gröfser als die andere Kathete des Dreiecks, (β)

Also ist der Kreis dem Dreieck E gleich.

Satz 2.

Der Kreis verhält sich zum Quadrate seines Durchmessers sehr nahe wie 11 : 14.

Es sei ein Kreis mit dem Durchmesser AB gegeben und das Quadrat CG darum beschrieben, auch sei $DE = 2\,CD$ und $EF = \frac{1}{7}\,CD$. Nun ist F.109.

$$\Delta ACE : \Delta ACD = 21 : 7$$
$$\Delta AEF : \Delta ACD = 1 : 7$$

folglich $\Delta ACF : \Delta ACD = 22 : 7$

Es ist aber $CG = 4\,\Delta ACD$

mithin $\Delta ACF : CG = 22 : 28 = 11 : 14$

Nun ist indessen das Dreieck ACF dem Kreise AB gleich, weil die Kathete AC dem Halbmesser gleich ist, die Grundlinie CF aber dem Kreisumfange, denn dieser beträgt so viel, als das dreifache des Durchmessers und fast noch $\frac{1}{7}$tel darüber, wie gezeigt werden wird (S. 3.) Also verhält sich der Kreis zu dem Quadrate CG sehr nahe wie 11 : 14.

Satz 3.

Der Umfang eines jeden Kreises übertrifft das Dreifache des Durchmessers um weniger als $\frac{1}{7}$tel, aber nun mehr als $\frac{10}{71}$tel des Durchmessers. (α)

(β) Behält man die vorige Bezeichnung auch für das äufsere Vieleck bei, so ist jetzt

$$P = \tfrac{1}{2}\,pr \text{ und } E = \tfrac{1}{2}\,cr$$

Weil aber $p > c$, so ist nunmehr $P > E$, es müfste aber $P < E$ sein.

(S. 3. α) Die folgende Rechnung des Archimedes bedarf ihrer Kürze wegen mehrere Erläuterungen, welche ich lieber in eine zusammenhangende Darstellung bringen, als stückweise den einzelnen Stellen beifügen will.

Setzt man in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse $= 2a$, die eine Kathete $= a$, und die andere $= x$, so ist $x^2 = 3a^2$, $x = a\sqrt{3}$. Es kam nun dem Archimedes darauf an, zuerst das Verhältnifs $x : a$ annähernd so auszudrucken, dafs die für x angenommene Verhältnifszahl etwas zu klein sei, damit das Verhältnifs $x : a$ etwas gröfser sei, als das in Ziffern ausgedruckte. Er nahm defshalb a so, dafs $3a^2$ so nahe als möglich eine Quadratzahl sei; und wenn er drei Ziffern in der Verhältnifszahl haben wollte, so konnte er keine kleinere Zahl für a annehmen, als 153. (Vgl. Klügels Math. Wörtbch. Art. Cyklotechnie.) Dann war $3a^2 = 70227 = 70225 + 2 = 265^2 + 2$.

Nun ist $IEC = \frac{1}{3}R$, mithin IN die halbe Seite eines Sechsecks im Kreise, d. h. $IN = \frac{1}{2}EI$, also auch $FC = \frac{1}{2}EF$, d. h. F.110.

$$FE : FC = 2 : 1 = 306 : 153$$
$$FE^2 : FC^2 = 93636 : 23409$$
$$(FE^2 - FC^2) : FC^2 = (93636 - 23409) : 23409$$

d. h. $EC^2 : FC^2 = 70227 : 23409$

folgl. $EC^2 : FC^2 > 265^2 : 153^2$; denn $265^2 = 70225$.

F. 110. 1) Es sei ein Kreis mit dem Durchmesser AC, dem Mittelpunkte E und der Berührungslinie CF gegeben, und es sei $FEC = \frac{1}{3} R$; also ist

EF

mithin 1) $EC : FC > 265 : 153$

Es war aber $FE : FC = 306 : 153$

also $(EC + FE) : FC > 571 : 153$

F. 55. Nun ist $FE : EC = FG : GC$, nach Eukl. VI. 3.

also $(EC + FE) : (GC + FG) = EC : GC = (EC + FE) : FC$

mithin 2) $EC : GC > 571 : 153$

$EC^2 : GC^2 > 326041 : 23409$

$(EC^2 + GC^2) : GC^2 > (326041 + 23409) : 23409$

d. h. $EG^2 : GC^2 > 349450 : 23409$

folglich $EG : GC > 591\frac{1}{8} : 153$; denn $(591\frac{1}{8})^2 = 349428\frac{49}{64}$.

und weil $EC : GC > 571 : 153$

so ist $(EG + EC) : GC > 1162\frac{1}{8} : 153$

Es ist aber $EG : EC = GH : HC$

also $(EG + EC) : (GH + HC) = EC : HC = (EG + EC) : GC$

mithin 3) $EC : HC > 1162\frac{1}{8} : 153$

$EC^2 : HC^2 > 1350534\frac{33}{64} : 23409$

$(EC^2 + HC)^2 : HC^2 > 1373943\frac{33}{64} : 23409$

folglich $HE : HC > 1172\frac{1}{8} : 153$; denn $(1172\frac{1}{8})^2 = 1373877\frac{1}{64}$

und weil $EC : HC > 1162\frac{1}{8} : 153$,

so folgt $(HE + EC) : HC > 2334\frac{1}{4} : 153$

Es ist aber $HE : EC = HK : KC$

also $(HE + EC) : (HK + KC) = EC : KC = (HE + EC) : HC$.

mithin 4) $EC : KC > 2334\frac{1}{4} : 153$

$EC^2 : KC^2 > 5448723\frac{1}{16} : 23409$

$(EC^2 + KC^2) : KC^2 > 5472132\frac{1}{16} : 23409$

folgl. $KE : KC > 2339\frac{1}{4} : 153$; denn $(2339\frac{1}{4})^2 = 5472090\frac{9}{16}$

und weil $EC : KC > 2334\frac{1}{4} : 153$

so ist $(KE + EC) : KC > 4673\frac{1}{2} : 153$

Es ist aber $KE : EC = KL : LC$

folgl. $(KE + EC) : (KL + LC) = EC : LC = (KE + EC) : KC$

mithin 5) $EC : LC > 4673\frac{1}{2} : 153$

Es kam zweitens darauf an, das Verhältniſs $x : a$ so auszudrucken, daſs die für x sich ergebende Verhältniſszahl etwas zu groſs sei, damit das Verhältniſs $x : a$ um etwas gröſser werde, als das der Verhältniſszahlen dieser Linien. Archimedes nahm deſshalb a so an, daſs $3a^2$ um so wenig wie möglich kleiner sei, als eine Quadratzahl, und setzte $a = 780$; dann ist $3a^2 = 1825200 = 1825201 - 1 = 1351^2 - 1$. Genauer konnte er die Zahl nicht wählen, wenn er keine gröſsere anwenden wollte.

Nun ist BC die halbe Seite eines regelmäſsigen Sechsecks im Kreise,

folglich $AC : BC = 2 : 1 = 1560 : 780$

$AC^2 : BC^2 = 2433600 : 608400$

$(AC^2 - BC^2) : BC^2 = (2433600 - 608400) : 608400$

$AB^2 : BC^2 = 1825200 : 608400$

mithin 1) $AB : BC < 1351 : 780$; denn $1351^2 = 1825201$

vorhin war $AC : BC = 1560 : 780$

folgl. $(AB + AC) : BC < 2911 : 780$

Es

$$EF : FC = 306 : 153$$

und $$EC : FC > 265 : 153$$

Nun werde der Winkel FEC durch EG in Hälften getheilt, dann ist

$$EF : EC = FG : GC$$

und $$(EF + EC) : FC = EC : GC$$

---

also $$EC : GC > 571 : 153$$

mithin $$EG^2 : GC^2 > 349450 : 23409$$

folglich $$EG : GC > 591\tfrac{1}{8} : 153$$

Eben so werde GEC durch EH getheilt. Durch dieselben Schlüsse hat man

$$EC : CH > 1162\tfrac{1}{8} : 153$$

also $$HE : CH > 1172\tfrac{1}{8} : 153$$

Ferner werde GEC durch EK gehalbtheilt; dann ist

$$EC : CK > 2334\tfrac{1}{4} : 153$$

also $$EK : CK > 2339\tfrac{1}{4} : 153$$

Weiter werde KEC durch LE gehalbtheilt; so ist

$$EC : CL > 4673\tfrac{1}{2} : 153$$

Weil nun $FEC = \frac{1}{3}R$ viermal in Hälften getheilt ist, so ist $LEC = \frac{1}{48}R$. Hieran werde nun in dem Punkte E der Winkel $CEM = LEC$, gelegt und FC bis M verlängert.

Es ist aber $$AB : AC = BF : CF$$

mithin $$(AB + AC) : BC = AC : CF = AG : GC, \text{ weil } \triangle AGC \sim \triangle FGC$$

folgl. $$AG : GC < 2911 : 780$$

$$AG^2 : GC^2 < 8473921 : 608400$$

$$(AG^2 + GC^2) : GC^2 < 9082321 : 608400$$

mithin 2) $$AC : GC < 3013\tfrac{3}{4} : 780; \text{ denn } (3013\tfrac{3}{4})^2 = 9082689\tfrac{1}{16}$$

und weil $$AG : GC < 2911 : 780$$

---

so folgt $$(AC + AG) : GC < 5924\tfrac{3}{4} : 780 = 1823 : 240$$

Es ist aber durch ähnliche Schlüsse wie bisher

$$(AC + AG) : GC = AH : HC$$

folglich $$AH : HC < 1823 : 240$$

$$AH^2 : HC^2 < 3323329 : 57600$$

$$(AH^2 + HC^2) : HC^2 < 3380929 : 57600$$

mithin 3) $$AC : HC < 1838\tfrac{9}{11} : 240; \text{ denn } (1838\tfrac{9}{11})^2 = 3381252\tfrac{37}{121}$$

und weil $$AH : HC < 1823 : 240$$

---

so ist $$(AC + AH) : HC < 3661\tfrac{9}{11} : 240 = 1007 : 66$$

$$(AC + AH) : HC = AK : KC < 1007 : 66$$

$$AK^2 : KC^2 < 1014049 : 4356$$

$$(AK^2 + KC^2) : KC^2 < 1018405 : 4356$$

mithin 4) $$AC : KC < 1009\tfrac{1}{6} : 66; \text{ denn } (1009\tfrac{1}{6})^2 = 1018417\tfrac{13}{36}$$

und weil $$AK : KC < 1007 : 66$$

---

so folgt $$(AC + AK) : KC < 2016\tfrac{1}{6} : 66$$

$$(AC + AK) : KC = AL : LC < 2016\tfrac{1}{6} : 66$$

$$AL^2 : LC^2 < 4064928\tfrac{1}{36} : 4356$$

$$(AL^2 + LC^2) : LC^2 < 4069284\tfrac{1}{36} : 4356$$

mithin 5) $$AC : LC < 2017\tfrac{1}{4} : 66; \text{ denn } (2017\tfrac{1}{4})^2 = 4069297\tfrac{9}{16}.$$

Dann ist $LEM = \frac{1}{24} R$, und die gerade Linie LM ist die Seite eines um den Kreis beschriebenen 96 Ecks. Da nun bewiesen, daſs

$$EC : CL > 4673\tfrac{1}{2} : 153,$$

und weil $2\,EC = AC$ und $2\,CL = LM$ ist,

so ist auch $AC : LM > 4673\frac{1}{2} : 153$.

Also steht AC zum Umfange des 96 Ecks in gröſserem Verhältnisse, als $4673\frac{1}{2} : 14688$. Mithin steht umgekehrt der Umfang des Vielecks zum Durchmesser in kleinerem Verhältnisse, als $14688 : 4673\frac{1}{2}$. Jene Zahl übertrifft das Dreifache dieser noch um $667\frac{1}{2}$, d. i. um weniger als den siebenten Theil von $4673\frac{1}{2}$. Es ist folglich der Umfang des umschriebenen Vielecks das Dreifache des Durchmessers und noch um weniger als den siebenten Theil desselben gröſser. Um desto mehr also ist der Umfang des Kreises kleiner als $3\frac{1}{7}$ tel des Durchmessers.

F. 111. 2) Es sei ein Kreis gegeben mit dem Durchmesser AC, und es sei $BAC = \frac{1}{3}R$. Dann ist

$$AB : BC < 1351 : 780$$
$$AC : BC = 1560 : 780$$

Nun werde BAC durch AG in Hälften getheilt. Weil dann

$$BAG = GCB$$

und $BAG = GAC$

so ist $GCB = GAC$

ferner ist $AGC = AGC = R$

also auch $GFC = ACG$

Mithin ist $\triangle AGC$ gleichwinklig mit $\triangle CGF$, folglich

$$AG : GC = GC : GF = AC : CF$$

Es ist aber $AC : CF = (AC + AB) : BC$

$$(AC + AB) : BC = AG : GC$$

mithin $AG : GC < 2911 : 780$

und $AC : GC < 3013\frac{3}{4} : 780$

Dann werde CAG durch AH in zwei gleiche Theile getheilt. Nach denselben Schlüssen ist also $AH : HC < 5924\frac{3}{4} : 780$

oder $AH : HC < 1823 : 240$

Denn diese Zahlen sind $\frac{4}{13}$ tel der ersteren; also

$$AC : HC < 1838\tfrac{9}{11} : 240$$

Ferner werde HAC getheilt durch KA; so ist

$$KA : KC < 3661\tfrac{9}{11} : 240$$

oder $KA : KC < 1007 : 66$

denn die ersteren Zahlen sind $\frac{11}{40}$ der letztern; also

$$AC : KC < 1009\tfrac{1}{6} : 66$$

Endlich werde KAC gehalbtheilt durch LA; dann ist

$$LA : LC < 2016\tfrac{1}{6} : 66$$

und $AC : LC < 2017\frac{1}{4} : 66$

Mithin umgekehrt $LC : AC > 66 : 2017\frac{1}{4}$

und der Umfang des Vielecks steht also zu dem Durchmesser in gröſserem Verhältnisse, als 6336 : $2017\frac{1}{4}$. Jene Zahl übertrifft das Dreifache von $2017\frac{1}{4}$ um mehr als das Dreifache und das $\frac{10}{71}$ fache. Also ist der Umfang des 96 Ecks im Kreise gröſser, als das Dreifache des Durchmessers und noch $\frac{10}{71}$tel desselben. Um so mehr ist folglich der Umfang des Kreises gröſser als $3\frac{10}{71}$mal der Durchmesser.

Mithin ist der Umfang eines Kreises das Dreifache des Durchmessers und noch darüber weniger als $\frac{1}{7}$tel, mehr aber als $\frac{10}{71}$ desselben.

Von den Schneckenlinien.

Archimedes grüfst den Dositheus.

Die Beweise der an Konon gesendeten Lehrsätze, zu deren Abfassung du mich fortwährend auffoderst, hast du gröfstentheils bereits in dem durch Heraklides dir überbrachten Aufsatze, einige derselben aber sende ich in gegenwärtiger Schrift. Wenn ich mir längere Zeit nahm, die Beweise dazu herauszugeben, so lafs dich das nicht wundern; diefs geschah nämlich, weil ich sie zuvor denen überlassen wollte, welche in der Mathematik bewandert sind und dergleichen gern selbst aufsuchen. Denn wie manche Lehrsätze giebt es in der Geometrie, welche anfänglich ganz unzugänglich scheinen, und doch mit der Zeit ihre Durcharbeitung erlangen? Konon freilich hatte zur Erforschung dieser Beweise noch nicht hinlänglich Zeit gewonnen, als er aus dem Leben schied, ohne sie klar gemacht zu haben, und doch würde er bei Auffindung dieser Beweise gar manches Andere entdeckt und die Geometrie noch mehr erweitert haben; denn wir wissen, dafs dieser Mann eine nicht gemeine Kenntnifs der Mathematik und eine ausgezeichnete Arbeitsamkeit besessen habe. Nach Konons Tode aber sind viele Jahre vergangen, ohne dafs irgend Jemand mit einer dieser Aufgaben sich befafst hätte.

Ich will nun jede derselben einzeln aufführen; denn unter jenen Sätzen haben auch zwei eine Stelle erhalten, welche die Probe nicht bestehen; um eben solche Leute, die da alles zu finden behaupten, und doch nie einen Beweis vorbringen, zu überführen, dafs sie auch einmal etwas Unmögliches zu finden verheifsen hätten. Ich werde dir nun angeben, was für welche diefs seien unter jenen Aufgaben, ferner zu welchen du die Beweise bereits überschickt erhalten, und von was für welchen ich dir dieselben jetzt nach meiner Billigung übersende.

1. Die erste Aufgabe war: Wenn eine Kugel gegeben ist, den ebenen Raum zu finden, welcher ihrer Sphäre gleich ist.

Diese war denn auch zuerst im Klaren, nachdem die Schrift über die Kugel herausgegeben worden; denn weil erwiesen war, dafs jede Sphäre das Vierfache eines Normalkreises der Kugel beträgt, so erhellt die Möglichkeit, einen ebenen Raum von der Gröfse der Sphäre zu finden.

2. Wenn ein Kegel oder ein Cylinder gegeben ist, eine dem Kegel oder Cylinder gleiche Kugel zu finden.

3. Eine gegebene Kugel durch eine Ebene dergestalt zu schneiden, dafs die Abschnitte derselben ein vorgeschriebenes Verhältnifs zu einander haben.

4. Eine gegebene Kugel mittelst einer Ebene dergestalt zu schneiden, dafs die Abschnitte der Sphäre ein vorgeschriebenes Verhältnifs zu einander haben.

5. Einen gegebenen Kugelabschnitt einem gegebenen Kugelabschnitte ähnlich zu machen.

6. Wenn zwei Kugelabschnitte gegeben sind, sei es von derselben oder von verschiedenen Kugeln, einen Kugelabschnitt zu finden, welcher dem einen jener Abschnitte ähnlich sein, und eine der Oberfläche des andern Abschnitts gleiche Oberfläche haben soll.

7. Von einer gegebenen Kugel einen Abschnitt durch eine Ebene dergestalt abzuschneiden, dafs der Abschnitt zu einem Kegel auf derselben Grundfläche und von gleicher Höhe mit ihm ein vorgeschriebenes Verhältnifs habe, welches gröfser ist, als 3 : 2.

Zu diesen angeführten Sätzen hat Heraklides die Beweise überbracht. (α) Was aber zunächst darauf hingestellt ist, war falsch. Nämlich

1. Wenn eine Kugel durch eine Ebene in ungleiche Theile getheilt wird, so steht der gröfsere Abschnitt zu dem kleineren im zwiefachen Verhältnisse der gröfsern Oberfläche zur kleineren.

Dafs diefs falsch sei, erhellt aus dem zuvor Uebersandten; denn darin steht Folgendes:

Wenn eine Kugel in ungleiche Theile senkrecht gegen irgend einen Durchmesser der Kugel geschnitten wird, so steht der gröfsere Abschnitt der Kugel zu dem kleineren in einem kleineren als dem zwiefachen Verhältnisse der gröfsern Oberfläche zur kleineren, in einem gröfseren aber, als dem anderthalbfachen. (β)

Aber auch der letzte Satz, welcher unter jenen Aufgaben eine Stelle hat, war falsch; nämlich:

2. Wenn der Durchmesser einer Kugel so geschnitten wird, dafs das Quadrat seines gröfsern Abschnitts dreimal so grofs ist, als das Quadrat des kleinern Abschnitts, und wenn eine durch den Durchschnittspunkt senkrecht gegen den Durchmesser gelegte Ebene die Kugel schneidet; so ist eine Figur von der Gestalt des gröfseren Kugelabschnitts die gröfste unter allen übrigen Kugelabschnitten von gleicher Oberfläche.

Dafs diefs falsch sei, ist aus dem zuvor Uebersandten ersichtlich; denn dort ward bewiesen:

Dafs die Halbkugel von allen unter gleichen Oberflächen enthaltenen Kugelabschnitten am gröfsten sei. (γ)

(Vorr. α) Die Sätze 1, 2, 5, 4, 6, 7, 8 im zweiten Buche v. d. Kug. und Cyl. sind nach der Ordnung diejenigen, auf welche Arch. sich beruft.

(β) Kug. u. Cyl. II. S. 9.

(γ) Kug. u. Cyl. II. S. 10.

Hiernächst war Folgendes in Beziehung auf den Kegel vorgelegt:

1. Wenn eine Parabel bei unveränderter Lage des Durchmessers sich umwälzt, so daſs der Durchmesser die Axe wird, so soll die durch die Parabel beschriebene Figur ein Konoid heiſsen.

2. Wenn eine Ebene das Konoid berührt, und eine andere Ebene, parallel der berührenden, einen Abschnitt des Konoids abtrennt, so soll die abschneidende Ebene die Grundfläche des abgetrennten Abschnitts genannt werden, dessen Scheitel aber der Punkt, in welchem die andere Ebene das Konoid berührt.

3. Wenn diese erwähnte Figur von einer zur Axe senkrechten Ebene geschnitten wird, so muſs der Schnitt augenscheinlich ein Kreis werden. — Es soll aber gezeigt werden, daſs der abgetrennte Abschnitt anderthalbmal so groſs sein werde, als ein Kegel von einerlei Grundfläche und gleicher Höhe mit dem Abschnitte.

4. Wenn von einem Konoid zwei Abschnitte durch willkührlich geführte Ebenen abgetrennt werden, so ist einleuchtend, daſs die Schnitte Ellipsen sein müssen, wofern nämlich die schneidenden Ebenen nicht senkrecht zur Axe sind. Dann soll aber bewiesen werden, daſs die Abschnitte sich zu einander verhalten werden, wie die Quadrate der aus ihren Scheiteln parallel der Axe bis an die schneidenden Ebenen gezogenen geraden Linien.

Die Beweise hiezu werden dir jetzt noch nicht übermacht. — Hierauf war über die Schneckenlinie Folgendes vorgelegt: (diese Aufgaben von ganz anderer Art haben mit den erwähnten nichts gemein, und ihre Beweise habe ich eben in der gegenwärtigen Schrift für dich aufgesetzt.) Folgendes also:

Ueber die Schneckenlinien.

1. Wenn eine gerade Linie in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte, welcher unbeweglich bleibt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegt, bis sie wieder dahin gelangt, von wo die Bewegung ausging, und wenn zugleich in der bewegten Linie ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit, von dem unbewegten Endpunkte anfangend, sich bewegt, so beschreibt dieser Punkt eine Schneckenlinie in der Ebene. — Ich behaupte nun, daſs der von der Schneckenlinie und der geraden zum Orte der anfänglichen Bewegung zurückgekehrten Linie eingeschlossene Flächenraum den dritten Theil des Kreises betrage, dessen Mittelpunkt jener unbewegte Punkt, und dessen Halbmesser der von dem bewegten Punkte nach einem Umlaufe der geraden Linie zurückgelegte Theil derselben ist. (δ)

2. Wenn eine gerade Linie die Schneckenlinie an deren äuſserem Endpunkte berührt, und wenn eine andere gerade Linie senkrecht auf der bewegten und wieder zurückgekehrten in dem unbeweglichen Punkte errichtet wird, so daſs sie also die berührende trifft; so behaupte ich, daſs diese zuletzt gezogene Linie dem Kreisumringe gleich sei. (ε)

3. Wenn die herumgeführte Linie samt dem Punkte, der sich in ihr bewegt hat, mehrere Umläufe machen, und wieder an dem Orte innehalten, von welchem die Bewegung

(δ) Vgl. S. 24. (ε) Vgl. S. 18.

ausging; so behaupte ich, dafs von dem durch die Schneckenlinie beim zweiten Umlauf umschlossenen Raume der Raum des dritten Umlaufs das Zweifache, der des vierten Umlaufs das Dreifache, des fünften das Vierfache, und so immer die Räume der folgenden Umläufe nach der Zahlenreihe Vielfache von dem Raume des zweiten Umlaufs sein werden; dafs aber der beim ersten Umlaufe eingeschlossene Raum den sechsten Theil des beim zweiten Umlaufe eingeschlossenen betrage. (7)

4. Wenn man in einer Schneckenlinie, die durch einen Umlauf beschrieben ist, zwei Punkte annimt, von ihnen gerade Linien zu dem unbeweglichen Endpunkte der bewegten Linie zieht, dann zwei Kreise beschreibt, deren Mittelpunkt der unbewegliche Punkt, deren Halbmesser aber jene an diesen Endpunkt gezogenen Linien sind, und die kleinere dieser Linien verlängert; so behaupte ich, dafs der Flächenraum, welcher von dem Bogen des gröfseren Kreises zwischen diesen geraden Linien an der Seite der Schneckenlinie, ferner von der Schneckenlinie und von der verlängerten geraden eingeschlossen wird, zu dem Flächenraume, welcher von dem Bogen des kleineren Kreises, von derselben Schneckenlinie, und von der die Endpunkte verbindenden geraden umschlossen wird, sich so verhalten werde, wie der Halbmesser des kleineren Kreises nebst zwei Drittheilen des Unterschiedes der Halbmesser des gröfsern und des kleinern Kreises zu dem Halbmesser des kleinern Kreises nebst einem Drittheile des genannten Unterschiedes. (8)

Hiezu nun und zu noch einigen andern Sätzen über die Schneckenlinie habe ich die Beweise in dieser Schrift dargestellt. Voran setze ich, wie auch bei andern geometrischen Untersuchungen geschieht, dasjenige, was zum Beweise derselben erfoderlich ist. Von den in früher herausgegebenen Schriften aufgestellten Lehnsätzen nehme ich auch hier folgenden an:

Wenn Linien oder Flächen ungleich sind, so ist es möglich, dafs der Ueberschufs des Gröfseren über das Kleinere zu sich selber hinzugesetzt gröfser werde, als jede vorgelegte damit verglichene Gröfse. (9)

Satz 1.

Wenn ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit in irgend einer Linie sich bewegt, und man in dieser zwei Linien annimt, so werden die angenommenen sich zu einander verhalten, wie die Zeiten, in denen der Punkt sie durchläuft.

Denn es bewege sich ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Linie AB, F.112. und man nehme in dieser die beiden Linien CD, DE, an. Die Zeit, worin der Punkt durch CD läuft, sei FG, die aber, worin durch DE, sei GH. Es soll gezeigt werden, dafs

Linie CD : *Linie* DE = *Zeit* FG : *Zeit* GH

Man setze zu dem Ende aus den Linien CD, DE, durch willkührliche Wiederholung die Linien AD, DB so zusammen, dafs AD gröfser ist, als DB. So vielmal nun die Linie CD in AD zusammengesetzt ist, eben so vielmal sei die Zeit FG in der Zeit LG zusammengesetzt, und so vielmal die Linie DE in DB, eben so vielmal sei die Zeit GH in der Zeit

(7) Vgl. S. 27. (8) Vgl. S. 28.

(9) Vgl. Quadr. d. Parabel. Vorrede.

KG zusammengesetzt. Weil nun vermöge der Voraussetzung der Punkt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Linie AB bewegt, so ist klar, daſs er in eben so vieler Zeit, worin er CD durchläuft, auch jede mit CD gleiche Linie durchlaufe. Also leuchtet ein, daſs er auch die zusammengesetzte Linie AD in eben so vieler Zeit durchlaufe, wie die Zeit LG beträgt, weil eben die Linie CD in AB eben so vielmal zusammengesetzt ist, wie die Zeit FG in der Zeit LG. Aus denselben Gründen durchläuft der Punkt die Linie BD in eben so vieler Zeit, als die Zeit KG beträgt. Weil nun die Linie AD gröſser ist, als BD, so ist klar, daſs der Punkt in mehr Zeit die Linie DA als BD durchläuft; also ist die Zeit LG gröſser, als die Zeit KG. Eben so läſst sich beweisen, wenn aus den Zeiten FG, GH, durch willkührliche Wiederholung Zeiten zusammengesetzt werden, so daſs die eine gröſser ist, als die andere, daſs dann gleichfalls von den aus den Linien CD, DE, durch dieselbe Wiederholung zusammengesetzten Linien diejenige gröſser sein werde, welche der gröſseren Zeit entspricht. Demnach folgt, daſs CB : DE = *Zeit* FG : *Zeit* GH. (α)

Satz 2.

Wenn zwei Punkte in zwei verschiedenen Linien sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen, und wenn in jeder von beiden zwei Linien angenommen werden, so daſs sowohl das erste, als auch das zweite Paar in gleichen Zeiten von den Punkten zurückgelegt wird, so werden die angenommenen Linien einander proportionirt sein.

F. 113. Ein Punkt bewege sich in AB mit gleichförmiger Geschwindigkeit, und ein anderer in KL. In AB nehme man die beiden Linien CD, DE, und in KL die beiden FG, GH, an. Der in AB sich bewegende Punkt durchlaufe CD in eben der Zeit, worin der andere in KL sich bewegende Punkt FG zurücklegt, und eben so durchlaufe der erstere die Linie DE in derselben Zeit, worin der andere GH durchläuft. Es soll gezeigt werden, daſs

$$CD : DE = FG : GH.$$

So sei denn MN die Zeit, in welcher der Punkt durch CD geht; dann geht der andere Punkt in derselben Zeit durch FG. Ferner sei NI die Zeit, in welcher der erstere Punkt die Linie DE durchläuft, so durchläuft der andere Punkt in eben dieser Zeit die Linie GH. Also wird sich verhalten

$$\begin{array}{ll} & CD : DE = \textit{Zeit}\ MN : \textit{Zeit}\ NI \\ \text{und} & FG : GH = \textit{Zeit}\ MN : \textit{Zeit}\ NI \\ \hline \text{folglich auch} & CD : DE = FG : GH \end{array}$$

Satz 3.

Wenn eine willkührliche Menge von Kreisen gegeben ist, so ist es möglich, eine gerade Linie, gröſser als die sämtlichen Kreisumringe, anzunehmen.

Wird nämlich um jeden Kreis ein Vieleck beschrieben, so erhellet, daſs eine aus der Summe aller Umfänge dieser Vielecke zusammengesetzte gerade Linie gröſser sein müsse, als die sämtlichen Kreisumringe. (α)

Satz 4.

(S. 1. α) Nach Eukl. V. Erkl. 5. 6.

(S. 3. α) Vgl. Kug. u. Cyl. I, S. 1.

Satz 4.

Wenn zwei ungleiche Linien gegeben sind, eine gerade und ein Kreisbogen, so ist es möglich, eine gerade Linie, kleiner als die gröſsere der gegebenen Linien, und gröſser als die kleinere, anzunehmen.

Denn wenn eben so oft, als der Ueberschuſs der gröſseren Linie über die kleinere zusammengesetzt werden muſs, um die gerade Linie zu übertreffen, auch diese in gleiche Theile getheilt wird, so wird einer dieser Theile kleiner als jener Ueberschuſs sein. Wenn nun etwa der Kreisbogen gröſser ist, als die gerade Linie, und man zu der letzteren einen jener Theile hinzusetzt, so erhellt, daſs diese dadurch gröſser werden wird, als die kleinere der gegebenen Linien, kleiner jedoch, als die gröſsere, denn das Hinzugekommene ist kleiner als der Ueberschuſs. (α)

Satz 5.

Wenn ein Kreis gegeben ist, den eine gerade Linie berührt, so kann man aus dem Mittelpunkte gegen die berührende eine gerade Linie dergestalt führen, daſs der Theil derselben, welcher zwischen der berührenden und dem Kreisumfange liegt, zu dem Halbmesser in kleinerem Verhältnisse stehet, als der zwischen dem Berührungspunkt und der gezogenen Linie befindliche Kreisbogen zu irgend einem gegebenen Kreisbogen.

Der Kreis ABC sei gegeben, sein Mittelpunkt K, und DF berühre den Kreis in B; F. 114.
auch sei irgend ein willkührlicher Kreisbogen gegeben. Man kann nun eine gerade Linie, gröſser als den angegebenen Kreisbogen, annehmen, und eine solche sei die gerade Linie E. Man ziehe durch den Mittelpunkt AG ‡ DF, und nehme GH = E, so daſs sie gegen B gerichtet ist. (α) Aus dem Mittelpunkte K aber ziehe man eine Linie nach H, und verlängere sie.

(S. 4. α) Den umgekehrten Fall, wo die gerade Linie gröſser ist als der Kreisbogen, läſst Arch. aus, weil Jeder ihn leicht von selbst ergänzen kann.

(S. 5. α) Archimedes giebt nicht an, auf welche Weise die Linie E so gelegt werden könne, daſs sie wirklich den äuſsern Abschnitt der Linie BF bilde. — Es kommt hier eigentlich darauf an, folgende Aufgabe zu lösen:

Wenn der Kreis ABC und ein willkührlicher Punkt des Umfangs, etwa B, gegeben sind, eine gerade Linie F. 114a
aus B gegen irgend eine durch den Mittelpunkt K gehende Linie AG dergestalt zu ziehen, daſs der äuſsere Abschnitt HG eine gegebene Gröſse hat.

Man setze
$$AK = r \qquad BH = x$$
$$HG = a \qquad KG = t$$
$$BI = b \qquad KL = u$$
$$KI = c \qquad HL = y$$

so ist $HG : CG = AG : BG$

d. h. $a : (t - r) = (t + r) : (x + a)$, folglich I, $x = \frac{t^2 - r^2 - a^2}{a}$.

ferner $BG : IG = HG : LG$

d. h. $(x + a) : (c + t) = a : (t - u)$, folglich II, $x = \frac{ac + au}{t - u}$

ferner $AL : HL = HL : LC$

d. h. $(r + u) : y = y : (r - u)$, folglich III., $y^2 = r^2 - u^2$

endlich $HL^2 = HG^2 - LG^2$, folglich IV., $y^2 = a^2 - (t - u)^2$;

Dann ist $HF : HK = BH : HG$ (β)

also ist $HF : HK <$ *Bog.* BH : *gegeb. Bogen,*

weil eben die gerade Linie BH kleiner ist, als der Bogen BH, und HG gröfser als der gegebene Bogen. Demnach steht auch FH zum Halbmesser in kleinerem Verhältnisse, als der Bogen BH zu dem gegebenen Bogen.

Satz 6.

Wenn ein Kreis gegeben ist, und in demselben eine Sehne, kleiner als der Durchmesser, so ist es möglich, einen Halbmesser des Kreises zu ziehen, welcher die in letzterem gegebene Sehne dergestalt schneidet, dafs der Abschnitt des Halbmessers zwischen dem Kreisumfange und der gegebenen Sehne zu derjenigen Sehne, welche vom Endpunkte des Halbmessers nach dem einen Endpunkte der im Kreise gegebenen Sehne gezogen ist, in einem vorgeschriebenen Verhältnisse stehe; wofern nur das gegebene Verhältnifs kleiner ist, als das der halben in dem Kreise gegebenen Sehne zu dem Perpendikel vom Mittelpunkte auf sie.

F. 115. Der Kreis ABC sei gegeben, sein Mittelpunkt K, und in ihm sei die Sehne AC, kleiner als der Durchmesser, gegeben; auch sei das Verhältnifs $F : G$ kleiner, als das Verhältnifs $CH : KH$, wo KH ein Perpendikel ist. Man ziehe durch den Mittelpunkt $KN \ddagger AC$ und CL senkrecht zu KC. Demnach ist $\Delta CHK \sim \Delta CKL$, mithin

$$CH : HK = KC : CL$$

also $F : G < KC : CL$,

demnach sei $F : G = KC : BN$,

Demnach aus I und II, $(t^2 - r^2 - a^2)(t - u) = a^2 c + a^2 u$

oder $$\frac{(t^2 - r^2 - a^2)\, t - a^2 c}{t^2 - r^2} = u$$

und aus III und IV., $r^2 = a^2 - t^2 + 2\, tu$

oder $$\frac{t^2 + r^2 - a^2}{2t} = u$$

mithin $$2\, t^2 (t^2 - r^2 - a^2) - 2 a^2 ct = (t^2 + r^2 - a^2)(t^2 - r^2)$$

diese Gleichung für t ist vom vierten Grade und enthält die Potenzen $t,^4$ $t,^2$ t; nimt man aber an, dafs B in der Mitte des Halbkreises ABC liege, wie dem Archimedischen Satze gemäfs ist, so wird $c = 0$, und man erhält eine Gleichung, die nur t^4, t^2 enthält. Setzt man dann vorläufig $t^2 = p$, so ergiebt sich

$$2\, p\, (p - r^2 - a^2) = (p + r^2 - a^2)(p - r^2)$$

und hieraus $$p - r^2 - \frac{a^2}{2} = \pm \frac{a}{2} \sqrt{(8 r^2 + a^2)}$$

d. h. $$x = \frac{t^2 - r^2 - a^2}{a} = - \frac{a}{2} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(8 r^2 + a^2)}$$

Man vergleiche Kästners Geom. Abhdl. I. Nr. 8. S. 43., wo die Aufgabe aus einem andern Gesichtspunkte aufgefafst ist.

Mir ist übrigens wahrscheinlich, dafs Archimedes die Auflösung dieser Hülfsaufgabe niemals vorgenommen habe, sondern dafs er sich damit begnügte, die Auflösung darum als möglich anzunehmen, weil die geraden Linien, welche von B aus gegen AG gezogen werden, von dem Punkte C an, wo der äufsere Abschnitt $= 0$ ist, immer gröfsere Abschnitte aufserhalb des Kreises haben, bis sie endlich bei einer mit AG parallelen Lage unendlich grofs werden, so dafs irgend einmal ein Abschnitt die gehörige Gröfse haben mufs.

(β) Weil $\Delta BHF \sim \Delta KHG$ ist.

wo BN > CL sein soll; auch liege BN zwischen dem Kreisumringe und der durch C gehenden geraden Linie (α). Dafs sie aber so einschneide, ist möglich, und sie wird der Linie CL nach aufsen fallen, weil sie gröfser ist, als CL. (β) Weil nun

$$BK : BN = F : G$$

so ist auch
$$EB : BC = F : G.$$

Satz 7.

Wenn ebendasselbe gegeben, und die Sehne verlängert ist, so läfst sich aus dem Mittelpunkte an jene verlängerte Linie eine gerade dergestalt ziehen, dafs der Abschnitt derselben zwischen dem Kreisumfange und der verlängerten Sehne zu der Verbindungslinie zwischen dem Endpunkte der Sehne und dem Durchschnittspunkte des Kreises mit der hinausgezogenen Linie ein vorgeschriebenes Verhältnifs habe; wofern nur diefs Verhältnifs gröfser ist, als das der halben Sehne zu dem Perpendikel vom Mittelpunkte auf sie.

Es sei alles wie vorhin gegeben und die Sehne verlängert. Das gegebene Verhältnifs sei = F : G, gröfser als CH : HK, mithin auch gröfser als KC : CL. Also wird sich verhalten F.116.

$$F : G = KC : IN,$$

wo IN kleiner als CL und gegen C gerichtet ist; dafs sie aber so einschneide, ist möglich, und sie wird der Linie CL nach innen fallen, weil sie kleiner als CL ist. (α)

Weil nun
$$KC : IN = F : G$$

so folgt
$$EI : IC = F : G \ (\beta)$$

Satz 8.

Wenn ein Kreis gegeben ist, in demselben eine Sehne, kleiner als der Durchmesser, und noch eine Berührungslinie an dem Endpunkte der Sehne, so läfst sich aus dem Mittelpunkte des Kreises eine gerade Linie dergestalt ziehen, dafs ihr zwischen dem Kreisumfange und der Sehne befindlicher Abschnitt zu dem durch diesen abgeschnittenen Theil der Berüh-

---

(S. 6. α) d. h. CL; der Sinn ist: es soll die neue Linie BN nicht etwa von C anfangen, sondern von B, d. h. sie soll mit einem Theile schon in dem Kreise liegen.

(β) Archimedes will sagen: Jede Linie, die gröfser ist, als CL, läfst sich so durch C legen, dafs sie von einem zweiten Punkte des Kreisumfangs, etwa B, ausgehend bis an die Linie KL, hier also bis N reicht, so dafs der Theil CN dieser Linie über CL hinaus trifft. Der Beweis hiezu beruhet im Grunde ganz auf denselben Schlüssen, wie bei Anmerkung α im vorigen Satze. Indessen hat Archimedes wahrscheinlich so gefolgert:

Wenn man durch C eine willkührliche Linie legt und so weit verlängert, bis sie von B nach N reicht, so ist schon CN, um desto mehr also BN gröfser als CL. Drehet man nun BN um C herum, so dafs der Punkt B gegen A sich bewegt, so wird sowohl BC als CN, mithin auch BN stetig gröfser, und wird unendlich grofs, sobald B in A trifft, d. h. sobald BN ∦ KL geworden ist. Drehet sich dagegen BN um C so, dafs B gegen C sich bewegt, so wird sowohl BC, als CN stetig kleiner, bis B in C selbst trifft, wo BN = CL wird. Eine Linie also, welche gröfser als CL ist, findet irgendwo eine solche Lage, dafs sie durch C gehend, von einem Punkte B bis N reicht und dieser Punkt B liegt in dem Bogen ABC.

(S. 7. α) Vgl. S. 5. Anmerkung α.

(β) Denn es ist KC : IN = KI : IN = EI : IC, weil $\triangle CIE \sim \triangle KIN$ ist.

rungslinie ein vorgeschriebenes Verhältnifs habe; wofern das gegebene Verhältnifs kleiner ist, als das der halben Sehne zu dem Perpendikel aus dem Mittelpunkte auf sie.

F. 117. Der gegebene Kreis sei ABCD, und in demselben sei die Sehne AC kleiner als der Durchmesser gegeben; auch berühre OL den Kreis in C und es sei

$$F : G < CH : HK$$

so ist auch $F : G < CK : CL$,

wenn $KL \ddagger HC$ gezogen worden. Es sei daher

$$KC : CO = F : G,$$

wo also $CO > CL$ ist. Man beschreibe einen Kreisbogen durch K, L, O. Da nun $CO > CL$ und KC, OL senkrecht zu einander, so ist es möglich, eine der Linie MC gleiche andere Linie NI so zu legen, dafs sie gegen K gerichtet ist. (α) Demnach verhält sich

$$
\begin{array}{ll}
 & OI \times IL : KE \times IL = OI : KE \\
\text{und} & KI \times IN : KI \times CL = IN : CL \\
\hline
\text{folglich} & IN : CL = OI : KE \ (\beta) \\
\text{und} & CM : CL = OC : KC \ (\gamma) \\
 & = OC : KB \\
 & = OI : KE \ (\delta) \\
\text{also auch} & IC : BE = OC : KC = G : F \ (\varepsilon)
\end{array}
$$

(S. 8. α) Wie diefs geschehe, sagt Archimedes nicht. Es kommt darauf an, den Werth von KI zu bestimmen, wenn $NI = MC$ gesetzt wird. Nun sind KC, CL, CO, gegebene Linien, mithin ist auch MC gegeben. Setzt man demnach $MC = NI = a$, $KC = r$, $CL = b$, $CO = c$, $KI = x$, $CI = y$, so hat man

$$IN \times KI = LI \times IO, \text{ d. h. I., } ax = (b + y)(c - y)$$

und $$KI^2 = KC^2 + IC^2, \text{ d. h. II., } x^2 = r^2 + y^2$$

Woraus sich x durch eine Gleichung vom 4ten Grade ergiebt, welche jedoch Arch. schwerlich aufgelöset, sondern sich von der Richtigkeit seiner Annahme wahrscheinlich auf einem andern Wege überzeugt hat; vielleicht auf folgende Weise:

F. 117 a Es möge KM die Sehne OL senkrecht in C durchschneiden und dadurch in ungleiche Theile LC, CO, theilen, so geht KM nicht durch den Mittelpunkt des Kreises. Man ziehe den Durchmesser KP und die Linie PM, so ist $PM \ddagger SC$, folglich

$$KC : KS = CM : SP$$

da aber $KC < KS$, so ist auch $CM < PS$. Zieht man ferner von K aus Sehnen nach irgend einem Punkte des Bogens PM, so werden die zwischen diesem Bogen und der Sehne OL befindlichen Abschnitte derselben sämtlich gröfser als MC sein. Zieht man dagegen die Sehne KN so, dafs $PKN = PKM$ wird, und zieht hiernächst PN, so ist $\triangle PKM \cong \triangle PKN$, also

$$
\begin{array}{ll}
 & NK = MK \\
\text{Zugleich ist} & IK > CK \\
\hline
\text{folglich} & IN < MC
\end{array}
$$

Zieht man nun von K aus Sehnen nach irgend einem Punkte des Bogens PN, so werden deren zwischen dem Bogen und der Sehne OL befindliche Abschnitte sämtlich gröfser als IN, jedoch kleiner als PS sein, auch an Gröfse stetig zunehmen, je mehr die zugehörige Sehne sich dem Durchmesser nähert. Es mufs demnach irgend eine Sehne so liegen, dafs ihr zwischen NP und OL befindlicher Abschnitt $= MC$ wird.

Vorausgesetzt ist dabei ausdrücklich, dafs OL durch KM in ungleiche Theile getheilt worden, weil sonst KM Durchmesser sein, und es keinen der Foderung entsprechenden zweiten Abschnitt geben würde.

(β) Denn I., $OI \times IL = KI \times IN$ (Eukl. III. 35.), und weil $EC \ddagger KL$, so ist

$$KI : KE = IL : CL, \text{ d. h. II., } KE \times IL = KI \times CL$$

(γ) Nach Eukl. III. 35. (δ) Weil $IN = CM$

(ε) Aus $OC : KB = OI : KE$ folgt

$$(OC - OI) : (KB - KE) = OC : KB, \text{ d. h. } IC : BE = OC : KC$$

Es traf also KN die Berührungslinie, und es hat der zwischen dem Kreisumfange und der Sehne befindliche Abschnitt BE zu dem durch sie abgeschnittenen Theil der Berührungslinie dasselbe Verhältnifs, wie F : G.

Satz 9.

Wenn ebendasselbe gegeben, und die gegebene Sehne verlängert ist, so ist es möglich, einen Halbmesser des Kreises bis an jene verlängerte Linie dergestalt hinzuziehen, dafs dessen zwischen dem Kreisumfange und der verlängerten befindlicher Abschnitt zu dem durch ihn gegen den Berührungspunkt abgeschnittenen Theil der Berührungslinie in einem bestimmten Verhältnifs stehe; wofern das gegebene Verhältnifs gröfser war, als das der halben Sehne zu dem Perpendikel vom Mittelpunkte auf sie.

Gegeben sei der Kreis ABCD, in ihm sei die Sehne CA, kleiner als der Durchmesser gezogen, und OC berühre den Kreis in C; auch sei F. 118.

$$F : G > CH : HK$$

folgl. $F : G > KC : CL$

defshalb sei $KC : CO = F : G$,

dann ist also $CO < CL$. Wiederum beschreibe man einen Kreis durch die Punkte O, K, L. Weil nun $CO < CL$ und die Linien KM, OC, senkrecht zu einander, so läfst sich eine der CM gleiche Linie IN so legen, dafs sie gegen K gerichtet ist. (α) Weil nun

$$OI \times IL : IL \times KE = OI : KE$$

und $OI \times IL = KI \times IN$; und $IL \times KE = KI \times CL$,

weil $KE : IK = CL : IL$ (β), so folgt

$$OI : KE = KI \times IN : KI \times CL = IN : CL = CM : CL$$

Es ist aber $CM : CL = OC : KC = OC : KB$

folglich $OI : KE = OC : KB$

also auch $IC : BE = OC : CK$ (γ)

Es ist aber $OC : CK = G : F$.

Mithin traf KE die verlängerte Sehne, und es verhält sich der zwischen dieser und dem Kreisumfange befindliche Abschnitt BE zu dem hiedurch abgeschnittenen Theile CI der Berührungslinie, wie F : G.

Satz 10.

Wenn man eine willkührliche Anzahl von Linien annimt, die nach der Reihe gleiche Unterschiede haben, so dafs die kleinste dem Unterschiede selbst gleich ist; und wenn eine eben so grofse Anzahl anderer Linien angenommen wird, welche einzeln der gröfsten von je-

---

(S. 9. α) Vgl. S. 8. Anmerkung α.

(β) Weil $\triangle KIL \sim \triangle CIE$, so ist $IK : IL = IE : IC$

folglich $(IK + IE) : (IL + IC) = IK : IL$

d. h. $KE : CL = IK : IL$

(γ) Aus $OI : KE = OC : KB$ folgt

$(OI - OC) : (KE - KB) = OC : KB$, d. h. $IC : BE = OC : KC$.

nen gleich sind: so wird die Summe aller Quadrate von denen, welche der gröſsten gleich sind, nebst dem Quadrate der gröſsten selbst und dem Rechtecke unter der kleinsten und einer Linie, welche so groſs ist, als die Summe aller um gleiche Unterschiede verschiedenen, dreimal so viel betragen, als die Summe aller Quadrate der um gleiche Unterschiede verschiedenen Linien. (α)

F. 119. Die Linien in willkührlicher Menge, welche sich um gleiche Unterschiede übertreffen, mögen nach der Reihe A, B, C, D, E, F, G, H, und H selbst dem Unterschiede gleich sein. Man füge zu B die Linie $I = H$, zu C die Linie $K = G$, zu D die Linie $L = F$, zu E die Linie $M = E$, zu F die Linie $N = D$, zu G die Linie $O = C$, und zu H die Linie $P = B$; so werden die entstehenden Linien unter sich und der gröſsten gleich sein. Es ist nun zu beweisen, daſs die Summe der Quadrate von allen, d. h. von A und von den neu entstandenen, nebst dem Quadrate von A und dem Rechteck $H \times (A + B + C + D + E + F + G + H)$ dreimal so viel betrage, als die Summe aller Quadrate von A, B, C, D, E, F, G, H.

Nun ist
$$(B + I)^2 = B^2 + I^2 + 2\,B \times I$$
$$(C + K)^2 = C^2 + K^2 + 2\,K \times C$$
und eben so ist jedes Quadrat der andern der Linie A gleichen Linien gleich der Summe der Quadrate ihrer Abschnitte nebst zweien Rechtecken unter den Abschnitten. Dann ist erstens

---

(S. 10. α) Dieser Satz läſst sich algebraisch ohne Schwierigkeit darthun. Man nehme folgende zwei Reihen an:

I. d, 2d, 3d, 4d . . . . . . rd

II. rd, rd, rd, rd . . . . . rd

so ist die Summe der Quadrate aller Glieder der zweiten Reihe $= r^3 d^2$; nimt man dazu das Quadrat des gröſsten Gliedes der ersten Reihe, so erhält man $r^3 d^2 + r^2 d^2$; und kommt hiezu noch das Produkt $d\,(d + 2d + 3d + 4d + \ldots\ldots rd) = \frac{r^2 + r}{2} d^2$, so erhält man
$$\frac{2r^3 + 3r^2 + r}{2} d^2 = A$$
dagegen ist die Summe der Quadrate aller Glieder der ersten Reihe
$$d^2\,(1 + 4 + 9 + 16 + \ldots\ldots r^2) = \frac{2r^3 + 3r^2 + r}{6} d^2 = B$$ (Klügel M. W. I. S. 302.)

Mithin $A = 3B$. Auch lassen sich hieraus die beiden ersten Folgerungen, welche diesem Satze angehängt sind, sofort ableiten.

In Folg. 1 wird nämlich behauptet, es sei
$$r^2 d^2 + r^2 d^2 + \ldots\ldots\ldots r^2 d^2 < 3\,(d^2 + 4d^2 + 9d^2 + \ldots\ldots r^2 d^2)$$
d. h. $$r^3 d^2 < 3\,\frac{2r^3 + 3r^2 + r}{6} d^2$$
oder $$r^2 < r^2 + \frac{3r + 1}{6},$$ was sofort einleuchtend ist.

In Folg. 2 wird dagegen behauptet, es sei
$$r^3 d^2 > 3\left(\frac{2r^3 + 3r^2 + r}{6} d^2 - r^2 d^2\right)$$
d. h. $$r^3 d^2 > \frac{2r^3 - 3r^2 + r}{2} d^2$$
oder $$2r^2 > 2r^2 - 3r + 1;\ \text{d. h. } 3r > 1,$$
was sofort einleuchtet, da r eine ganze Zahl ist.

$$\left.\begin{array}{l} A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2+G^2+H^2 \\ +I^2+K^2+L^2+M^2+N^2+O^2+P^2+A^2 \end{array}\right\} = 2(A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2+G^2+H^2)\ (\beta)$$

und ferner werden wir zeigen, dafs die doppelte Summe der unter den Abschnitten jeder der Linie A gleichen Linie nebst dem Rechteck $H \times (A+B+C+D+E+F+G+H)$ gleich sei der Summe $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 + G^2 + H^2$. ($\gamma$)

Weil nämlich
$$\begin{aligned} 2B \times I &= 2B \times H \\ 2C \times K &= 4C \times H, \text{ weil } K = 2H, \\ 2D \times L &= 6D \times H, \text{ weil } L = 3H, \end{aligned}$$

und weil eben so die andern doppelten Rechtecke unter den Abschnitten gleich sind einem Rechteck unter H und einem Vielfachen nach den auf einander folgenden geraden Zahlen von den auf einander folgenden Linien; so beträgt die Summe aller dieser Rechtecke nebst dem Rechteck $H \times (A + B + C + D + E + F + G + H)$ so viel als das Rechteck unter H und der Summe $A + 3B + 5C$ nebst den Vielfachen der folgenden Linien nach der ungeraden Zahlenreihe. (δ) Es ist aber auch die Summe $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 + G^2 + H^2$ dem Rechtecke unter ebendenselben Linien gleich. Das Quadrat nämlich von A ist so grofs wie das Rechteck unter H und einer Summe aus A und aus allen den übrigen Linien, deren jede gleich A ist. Denn die Linie H mifst A eben so oft, wie A diejenige Linie, welche ihr selbst, samt allen ihr gleichen Linien gleich ist. Demnach ist $A^2 = H \times (A + 2(B + C + D + E + F + G + H))$, da die Summe aller der A gleichen Linien, ohne A

(β) Weil $B = P$, $C = O$, $D = N$, $E = M$, $F = L$, $G = K$, $H = I$ ist.

(γ) Der Gang des Beweises läſst sich besser so übersehen:

$$\begin{aligned} \text{Es ist } BI^2 &= B^2 + I^2 + 2B \times I \\ CK &= C^2 + K^2 + 2K \times C \\ &\vdots \\ A^2 + A^2 &= A_2 + A_2 \end{aligned}$$

$$A^2 + BI^2 + CK^2 + \ldots + A^2 = 2(A_2 + B^2 + C^2 + \ldots + H_2) + 2(B.I + C.K + \ldots + H.P)$$

Addirt man auf beiden Seiten $H(A + B + C + D + E + F + G + H)$, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} A^2 + BI^2 + CK^2 + DL^2 + EM^2 + FN^2 + GO^2 + PH^2 \\ + A^2 \\ + H.(A + B + C + D + E + F + G + H) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 2(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 + G^2 + H^2) \\ + 2(B.I + C.K + D.L + E.M + F.N + G.O + H.P) \\ + H.(A + B + C + D + E + F + H) \end{array}\right.$$

und Arch. will nun im Folgenden zeigen, dafs die beiden letzten Glieder rechts vom Gleichheitszeichen so viel betragen, wie $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 + G^2 + H^2$, woraus denn allerdings hervorgehen wird, dafs der Theil der Gleichung, welcher dem Gleichheitszeichen zur Linken steht, dreimal so grofs sei, als diese eben genannte Summe von Quadraten.

(δ) Deutlicher so: Es ist
$$\begin{aligned} 2B \times I &= 2B \times H \\ 2C \times K &= 4C \times H \\ 2D \times L &= 6D \times H \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\text{und } (A + B + C + D + \ldots\ldots) \times H = (A + B + C + D + E + \ldots) \times H$$

$$\left.\begin{array}{l} 2(B.I + C.K + D.L + \ldots.) \\ + (A + B + C + D + E + \ldots) \times H \end{array}\right\} = (A + 3B + 5C + 7D + \ldots\ldots) \times H$$

selbst, so viel beträgt, wie $2(B + C + D + E + F + G + H)$. Auf dieselbe Weise ist auch

$$B^2 = H \times (B + 2(C + D + E + F + G + H))$$

und

$$C^2 = H \times (C + 2(D + E + F + G + H))$$

und eben so sind die Quadrate der anderen Linien Rechtecken gleich unter H und der Summe aus sich selbst und der doppelten Summe der folgenden Linien. Es erhellt demnach, daſs die Summe der Quadrate sämmtlicher Linien so viel beträgt, wie das Rechteck unter H und der Summe $A + 3B + 5C$ nebst dem Vielfachen der folgenden Linien nach der ungeraden Zahlenreihe. (ε)

Folgerungen. Hieraus erhellt:

1. daſs die Summe aller Quadrate der Linien, welche der gröſsten gleich sind, kleiner sei, als die dreifache Summe der Quadrate der um gleiche Unterschiede verschiedenen Linien, weil jene erst nach Hinzufügung von Etwas dieser dreifachen Summe gleich ist —

2. daſs die erste Summe aber gröſser sei, als das dreifache der letzten ohne das Quadrat der gröſsten Linie. Denn das, was zu der ersten Summe hinzugefügt wird, (ζ) beträgt weniger als das dreifache Quadrat der gröſsten Linie. (η)

3. Wenn demnach ähnliche Figuren auf allen Linien beschrieben werden, sowohl auf denen, deren Unterschiede gleich sind, als auf denen, welche der gröſsten gleich sind, so wird die Summe der Figuren, welche auf den der gröſsten gleichen Linien beschrieben sind, kleiner sein, als das dreifache der Summe der auf den Linien mit gleichen Unterschieden beschriebenen Figuren; dagegen wird die erstere Summe gröſser sein, als das dreifache der letztern, wenn von dieser die Figur auf der gröſsten Seite weggenommen ist. Denn als ähnliche Figuren werden sie sich wie die Quadrate verhalten.

Satz II.

(ε) Deutlicher so: Weil $H : A = 1 : 8$, so ist

$$A^2 = 8A \times H = H.(A + 7A)$$

Nun ist

$$7A = \left\{\begin{matrix} B + C + D + E + F + G + H \\ + P + O + N + M + L + K + I \end{matrix}\right\} = 2(B + C + D + E + F + G + H)$$

mithin $A^2 = H.(A + 2(B + C + D + E + F + G + H))$

imgleichen $B^2 = H.(B + 2(C + D + E + F + G + H))$

$$C^2 = H.(C + 2(D + E + F + G + H))$$

$$\vdots$$

$$H = H.H$$

$$A^2 + B^2 + C^2 \ldots + H^2 = H.(A + 3B + 5C + 7D + 9E + 11F + 13G + 15H)$$

woraus denn hervorgeht, was zu etzt bewiesen werden sollte, daſs

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 + G^2 + H^2 = \left\{\begin{matrix} 2(B.I + C.K + D.L + E.M + F.N + G.O + H.P) \\ + (A + B + C + D + E + F + G + H).H \end{matrix}\right.$$

(ζ) Nämlich in dem Lehrsatze selbst.

(η) D. h. $A^2 + (A + B + C + D + E + F + G + H) \times H < 3A$; denn oben ward bewiesen, daſs

$$(A + 2(B + C + D + E + F + G + H)) \times H = A^2$$

folglich ist $A^2 + 2(A + 2(B + C + D + E + F + G + H)) \times H = 3A^2$; nun ist gewiſs

$$2(A + 2(B + C + D + E + F + G + H)).H > (A + B + C + D + E + F + G + H).H$$

also auch $A^2 + (A + B + C + D + E + F + G + H).H < 3A^2$

Satz II.

Wenn man eine willkührliche Anzahl von Linien mit gleichen Unterschieden nach der Reihe, und eine um eins geringere Anzahl anderer Linien annimmt, deren jede an Gröſse gleich kommt der gröſsten von jenen; so stehet die Summe der Quadrate sämtlicher Linien, welche der gröſsten gleich sind, zur Summe der Quadrate aller um etwas Gleiches unterschiedenen Linien, ohne das der kleinsten, in einem kleineren Verhältnisse, als das Quadrat der gröſsten zu der Summe des Rechtecks unter der gröſsten und der kleinsten Linie, nebst dem dritten Theile des Quadrats des Unterschiedes zwischen der gröſsten und kleinsten Linie; aber zur Summe der Quadrate aller um etwas Gleiches verschiedenen Linien, ohne das Quadrat der gröſsten, in einem gröſseren Verhältnisse, als eben jenes zweite ist. (α)

(S. II. α) Auch dieser Satz läſst sich algebraisch darstellen. Es sei $ON = a$, $A'L = d$, die Anzahl der ungleichen Glieder sei $r + 1$, also $AV = rd$ und $AB = a + rd$, und man habe folgende zwei Gröſsenreihen:

I. $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots\ldots\ldots\ldots a + rd,$

II. $a + rd, a + rd, a + rd, \ldots\ldots\ldots a + rd,$

die Summe der Quadrate der ersten Reihe sei S, die der zweiten sei S', so ist:

$$S = \left\{\begin{array}{l} a^2 = a^2 \\ (a+d)^2 = a^2 + 2ad + d^2 \\ (a+2d)^2 = a^2 + 4ad + 4d^2 \\ (a+3d)^2 = a^2 + 6ad + 9d^2 \\ \vdots \\ (a+rd)^2 = a^2 + 2rad + r^2d^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a^2 + ra^2 \\ + 2ad\,(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (r-1) + r) \\ + d^2\,(1 + 4 + 9 + \ldots\ldots + (r-1)^2 + r^2) \end{array}\right.$$

Nun ist $\quad 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + r = \frac{r(r+1)}{2}$

und $\quad 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots\ldots + r^2 = \frac{2r^3 + 3r^2 + r}{6}$

folglich $S - a^2 = ra^2 + r(r+1)\,ad + \frac{2r^3 + 3r^2 + r}{6}\,d^2 = \frac{r}{6}(6a^2 + 6rad + 6ad + 2r^2d^2 + 3rd^2 + d^2)$

und $S - (a+rd)^2 = ra^2 + 2ad\,(1 + 2 + 3 + \ldots + (r-1)) + d^2\,(1 + 4 + 9 + \ldots\ldots + (r-1)^2)$

oder weil $\quad 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (r-1) = \frac{r(r-1)}{2}$

und $\quad 1 + 4 + 9 + \ldots + (r-1)^2 = \frac{2r^3 - 3r^2 + r}{6}$

so folgt $S - (a+rd)^2 = ra^2 + r(r-1)\,ad + \frac{2r^3 - 3r^2 + r}{6}\,d^2 = \frac{r}{6}(6a^2 + 6rad - 6ad + 2r^2d^2 - 3rd^2 + d^2)$

dagegen ist $S' = r(a + rd)^2$

Archimedes behauptet nun, es sei

$$1)\ \frac{S'}{S - a^2} < \frac{(a+rd)^2}{(a+rd)a + \frac{1}{3}r^2d^2}$$

$$\text{und } 2)\ \frac{S'}{S - (a+rd)^2} > \frac{(a+rd)^2}{(a+rd)a + \frac{1}{3}r^2d^2}$$

Substituirt man die obigen Werthe, so erhält man für diese Behauptungen folgende Ausdrücke:

$$1)\ \frac{r(a+rd)^2}{\frac{r}{6}(6a^2 + 6rad + 6ad + 2r^2d^2 + 3rd^2 + d^2)} < \frac{(a+rd)^2}{\frac{1}{3}(3a^2 + 3rad + r^2d^2)}$$

$$\text{oder } \frac{1}{6a^2 + 6rad + 6ad + 2r^2d^2 + 3rd^2 + d^2} < \frac{1}{6a^2 + 6rad + 2r^2d^2}$$

F. 120. Die Linien in willkührlicher Anzahl, welche sich um gleiche Unterschiede übertreffen, mögen nach der Reihe hingestellt sein, nämlich AB übertreffend die CD; CD die EF; EF die GH; GH die IK; IK die LM; und LM die NO. Man füge nun zu CD die Linie CO, gleich dem Unterschiede einmal, zu EF die EQ, gleich dem Unterschiede zweimal, zu GH die GK, gleich dem Unterschiede dreimal, und so weiter zu den andern. Die dadurch entstehenden Linien werden dann unter sich und jede der gröfsten gleich sein. Nun ist also zu zeigen, dafs die Summe der Quadrate aller um etwas Gleiches verschiedenen ohne NO^2 in einem kleineren Verhältnisse stehe, als

$$AB^2 : (AB \times NO + \tfrac{1}{3} NU^2);$$

dagegen zu der Summe der Quadrate derselben Linien ohne AB^2 in einem gröfseren Verhältnisse, als eben jenes zweite ist.

Man nehme von jeder der um gleiche Unterschiede verschiedenen Linien den Unterschied weg (β); dann verhält sich

$$AB^2 : (AB \times BV + \tfrac{1}{3} AV^2) = PD^2 : (PD \times DW + \tfrac{1}{3} PW^2)$$
$$= QF^2 : (QF \times FX + \tfrac{1}{3} QX^2)$$

und so weiter wie die Quadrate der übrigen zu den ähnlich bestimmten Räumen; also verhält sich die Summe $PD^2 + QF^2 + RH^2 + SK^2 + TM^2 + UO^2$ zu sämtlichen Rechtecken unter NO und allen den genannten Linien (γ), nebst $\tfrac{1}{3}(PW^2 + QX^2 + RY^2 + SZ^2 + TA'^2 + UN^2)$, wie AB^2 zu $(AB \times BV + \tfrac{1}{3} AV^2)$. Wenn also nachgewiesen werden kann, dafs $NO \times (PD + QF + RH + SK + TM + UO) + \tfrac{1}{3}(PW^2 + QX^2 + RY^2 + SZ^2 + TA'^2 + UN^2)$ zusammen kleiner sei, als $AB^2 + CD^2 + EF^2 + GH^2 + IK^2 + LM^2$; gröfser dagegen als $CD^2 + EF^2 + GH^2 + IK^2 + LM^2 + NO^2$, so wird der vorgelegte Satz erwiesen sein.

Nun ist

$$\left.\begin{array}{l} NO \times (PD + QF + RH + SK + TM + UO) \\ + \tfrac{1}{3}(PW^2 + QX^2 + RY^2 + SZ^2 + TA'^2 + UN^2) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} DW^2 + FX^2 + HY^2 + KZ^2 + MA'^2 + ON^2 \\ + NO \times (PW + QX + RY + SZ + TA' + UN) \\ + \tfrac{1}{3}(PW^2 + QX^2 + RY^2 + SZ^2 + TA'^2 + UN^2) \end{array}\right.$$

Dagegen ist

$$AB^2 + CD^2 + EF^2 + GH^2 + IK^2 + LM^2 = \left\{\begin{array}{l} BV^2 + DW^2 + FX^2 + HY^2 + KZ^2 + MA'^2 \\ + AV^2 + CW^2 + EX^2 + GY^2 + IZ^2 + LA'^2 \\ + BV \times 2\,(AV + CW + EX + GY + IZ + LA') \end{array}\right.$$

---

oder $6a^2 + 6rad + 6ad + 2r^2d^2 + 3rd^2 + d^2 > 6a^2 + 6rad + 2r^2d^2$

d. h. $6a + 3rd + d > 0$

was allerdings richtig ist.

2) $$\frac{r(a + rd)^2}{\frac{r}{6}(6a^2 + 6rad - 6ad + 2r^2d^2 - 3rd^2 + d^2)} > \frac{(a + rd)^2}{\frac{1}{3}(3a^2 + 3rad + r^2d^2)}$$

oder $6a^2 + 6rad - 6ad + 2r^2d^2 - 3rd^2 + d^2 < 6a^2 + 6rad + 2r^2d^2$

d. h. $d < 6a + 3rd$

was ebenfalls richtig ist, weil r eine ganze positive Zahl sein mufs.

(β) d. h. die Linie NO; denn Arch. setzt hier stillschweigend voraus, dafs $NO = A'L$, d. i. dafs die kleinste Linie dem Unterschiede selbst gleich sei, was indessen für die allgemeine Beweisführung gar nicht nöthig ist, wie Anmkg. a zeigt. Auch macht Arch. in der Folge bei der Anwendung dieses Hülfssatzes von dieser einschränkenden Voraussetzung nicht Gebrauch.

(γ) Also $NO \times (PD + QF + RH + SK + TM + UO)$

Beiden Gleichungen sind die Quadrate von den der NO gleichen Linien gemeinschaftlich; auch ist
$NO \times (PW + QX + RY + SZ + TA' + UN) < BV \times 2 (AV + CW + EX + GY + IZ + LA')$,
weil die zuletzt genannten Linien den Linien $PC + QE + RG + SI + TL + UN$ gleich, gröſser aber als die übrig bleibenden sind. (δ) Endlich ist
$AV^2 + CW^2 + EX^2 + GY^2 + IZ^2 + LA'^2 > \frac{1}{3} (PW^2 + QX^2 + RY^2 + SZ^2 + TA'^2 + UN^2)$,
wie oben bewiesen wurde (S. 10. Folg. 1.). Demnach ist die Summe der genannten Flächenräume kleiner, als $AB^2 + CD^2 + EF^2 + GH^2 + IK^2 + LM^2$.

Wir werden also nun noch zeigen, daſs jene Summe gröſser sei als $CD^2 + EF^2 + GH^2 + IK^2 + LM^2 + NO^2$. Es ist nämlich wiederum

$$CD^2 + EF^2 + GH^2 + IK^2 + LM^2 + NO^2 = \begin{cases} CW^2 + EX^2 + GY^2 + IZ^2 + LA'^2 \\ + DW^2 + FX^2 + HY^2 + KZ^2 + MA'^2 + ON^2 \\ + NO \times 2 (CW + EX + GY + IZ + LA') \end{cases}$$

Hier ist gemeinschaftlich die Summe $DW^2 + FX^2 + HY^2 + KZ^2 + MA'^2 + ON^2$; dagegen ist
$NO \times (PW + QX + RY + SZ + TA' + UN) > NO \times 2 (CW + EX + GY + IZ + LA')$ (ε)
Auch ist
$PW^2 + QX^2 + RY^2 + SZ^2 + TA'^2 + UN^2 > 3 (CW^2 + EX^2 + GY^2 + IZ^2 + LA'^2)$,
wie gleichfalls erwiesen worden ist (S. 10. Folg. 2.). Mithin sind die genannten Flächenräume zusammen gröſser, als $CD^2 + EF^2 + GH^2 + IK^2 + LM^2 + NO^2$.

Folgerung.

Deſshalb, wenn auf allen diesen Linien, sowohl denen, welche um gleiche Unterschiede verschieden, als denen, welche der gröſsten gleich sind, ähnliche Figuren beschrieben werden; so wird die Summe der auf sämtlichen, der gröſsten Linie gleichen Linien beschriebenen Figuren zur Summe der Figuren auf den um etwas Gleiches verschiedenen Linien, ohne die Figur auf der kleinsten, in kleinerem Verhältnisse stehen, als das Quadrat der gröſsten zu der Summe des Rechtecks unter der gröſsten und kleinsten Linie nebst dem dritten Theile des Quadrats des Unterschiedes zwischen der gröſsten und kleinsten Linie; aber zur Summe der Figuren auf den um etwas Gleiches verschiedenen Linien, ohne die Figur auf der gröſsten, in einem gröſseren Verhältnisse, als eben jenes ist; denn als ähnliche Figuren werden sie sich wie die Quadrate verhalten.

Erklärungen:

1) Wenn eine in einer Ebene gezogene gerade Linie, während der eine Endpunkt derselben an seinem Orte beharrt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit herumgeführt wird, bis sie wieder dort anhält, von wo sie ausgegangen; und wenn zugleich mit der Herumführung dieser

---

(δ) d. h. Es ist:

$$PW + QX + RY + SZ + TA' + UN = \begin{cases} PC + QE + RG + SI + TL + UN \\ + CW + EX + GY + IZ + LA' \end{cases}$$

und es ist $AV + CW + EX + GY + IZ + LA'$ einmal genommen den Linien $PC + QE + RG + SI + TL + UN$ gleich; zum zweitenmal genommen aber gröſser als $CW + EX + GY + IZ + LA'$.

(ε) Denn es ist $PW + QX + RY + SZ + TA' = 2 (CW + EX + GY + IZ + LA')$

Linie ein Punkt in derselben, anfangend von dem festen Endpunkte, mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegt, so wird dieser Punkt eine Schneckenlinie in der Ebene beschreiben.

2) Der Endpunkt der geraden Linie, welcher in Ruhe beharrt, während sie sich herumbewegt, soll demnach der Anfangspunkt der Schneckenlinie heifsen.

3) Die Lage der geraden Linie, aus welcher ihre Bewegung begonnen, soll der Anfang des Umlaufs heifsen.

4) Die gerade Linie, welche der geradlinig sich bewegende Punkt während des ersten Umlaufs zurücklegt, soll die erste, die aber, welche derselbe während des zweiten Umlaufs zurücklegt, die zweite heifsen; und so sollen die andern ebenfalls gleichmäfsig nach den Umläufen benannt werden.

5) Die Fläche, welche von der im ersten Umlauf beschriebenen Schneckenlinie und von der ersten geraden umschlossen wird, soll die erste heifsen; die aber von der im zweiten Umlauf beschriebenen Schneckenlinie und von der zweiten geraden umschlossene die zweite, und so weiter nach der Reihe.

6) Wenn aus dem Anfangspunkte der Schneckenlinie irgend eine gerade Linie gezogen ist, so soll dasjenige, was an der Seite dieser Linie sich befindet, wohin der Umlauf geschieht, das Vordere heifsen, was aber an der andern ist, das Hintere.

7) Der Kreis, dessen Mittelpunkt der Anfang der Schneckenlinie, dessen Halbmesser aber die erste gerade ist, soll der erste, der aber, dessen Mittelpunkt ebenderselbe Anfangspunkt, dessen Halbmesser dagegen die zwiefache gerade ist, soll der zweite, und die folgenden nach der Reihe auf dieselbe Weise genannt sein.

Satz 12.

Wenn aus dem Anfangspunkte einer durch einen Umlauf beschriebenen Schneckenlinie gerade Linien in willkührlicher Menge in diese einfallen, so dafs sie mit einander gleiche Winkel bilden, so haben sie unter sich gleiche Unterschiede.

F. 121. Es sei eine Schneckenlinie, worin die geraden Linien AB, AC, AD, AE, AF gleiche Winkel mit einander bilden. Es ist zu beweisen, dafs die Unterschiede AC - AB, AD - AC u. s. w. gleich sind.

In eben der Zeit, worin die umgeführte Linie von AB bis AC gelangt, legt der in der geraden Linie sich bewegende Punkt den Unterschied zurück, um welchen AC die AB übertrifft. Die umgeführte Linie gelangt aber in gleicher Zeit von AB nach AC, und von AC nach AD, weil die Winkel gleich sind; mithin legt auch auch der in der geraden Linie sich bewegende Punkt den Unterschied zwischen AC und AB, und zwischen AD und AC in gleicher Zeit zurück. Also übertrifft AC die AB um eben so viel, wie AD die AC, und so weiter. (S. 1.)

Satz 13.

Wenn eine gerade Linie die Schneckenlinie berührt, so wird sie dieselbe nur in einem Punkte berühren.

Es sei eine Schneckenlinie, worin ABCD; ihr Anfang sei der Punkt A, der Anfang des Umlaufs sei die gerade AD, und irgend eine gerade FE berühre die Schneckenlinie; so behaupte ich, dafs sie dieselbe nur in einem Punkte berühre. F. 122.

Denn sie berühre dieselbe, wenn es möglich ist, in den beiden Punkten C, G, so ziehe man AC, AG, und halbtheile den von CA, AG eingeschlossenen Winkel. Der Punkt, wo nun die halbtheilende Linie in die Schneckenlinie fält, sei H. Dann ist

$$AG - AH = AH - AC,$$

weil gegenseitig gleiche Winkel gebildet sind; also ist $AG + AC = 2\,AH$; aber in dem Dreiecke, dessen Winkel durch AH gehalbtheilt wird, ist $AG + AC > 2\,AH$; (α) mithin erhellet, dafs der Punkt, in welchem die gerade Linie CG mit AH zusammentrifft, zwischen den Punkten H, A liegen müsse; also schneidet EF die Schneckenlinie, indem unter den Punkten in CG einer der Schneckenlinie nach innen liegt. Vorausgesetzt ward aber eine berührende Linie: folglich berührt EF die Schneckenlinie nur in einem Punkte.

Satz 14.

Wenn aus dem Anfangspunkte einer durch den ersten Umlauf beschriebenen Schneckenlinie zwei gerade Linien in diese einfallen, und bis an den Umring des ersten Kreises verlängert werden, so werden sich die in die Schneckenlinie einfallenden Linien zu einander verhalten, wie die Bogen des Kreises zwischen dem Endpunkte der Schneckenlinie und den im Kreisumfange befindlichen Endpunkten der verlängerten Linie — die Bogen vom Endpunkte der Schneckenlinie vorwärts gerechnet.

Es sei ABCDEH eine im ersten Umlaufe beschriebene Schneckenlinie; ihr Anfang sei der Punkt A, der Anfang des Umlaufs sei die gerade Linie AH, und HKG sei der erste Kreis. Aus dem Punkte A mögen die geraden Linien AE, AD in die Schneckenlinie einfallen, und darüber hinaus in den Punkten F, G, den Kreisumfang treffen. Es soll bewiesen werden, dafs sich verhalte $AE : AD = HKF : HKG.$ F. 123.

Denn indem die Linie AH herumgeführt wird, bewegt sich offenbar mit gleichförmiger Geschwindigkeit der Punkt H in dem Umfange des Kreises HKG, der Punkt A aber durchläuft die Linie AH; auch bewegt sich der Punkt H, welcher in dem Kreisumfange umläuft, durch den Bogen HKF, und A durch die gerade Linie AE; ferner A durch die Linie

---

(S. 13. α) Weil EF eine berührende sein soll, so ist CHG als eine gerade Linie anzusehen, und es bleibt demnach allgemein zu erweisen, dafs in einem jeden Dreiecke die Summe zweier Seiten mehr betrage, als die gerade Linie, welche den von jenen gebildeten Winkel halbtheilt.

Ist das Dreieck gleichschenklig, etwa $\triangle CAK$, so steht die halbtheilende Linie AI senkrecht auf der Grundlinie CK, mithin ist gewifs $AC + AK > 2\,AI$. Demnach sei das $\triangle ACG$ das gegebene, und $AG > AC$. Man mache $AK = AC$ und ziehe CK, ferner halbtheile man den Winkel CAG durch AH und ziehe $KL \mathbin{\#} AH$ durch K, so ist CLK ein spitzer, mithin KLG ein stumpfer Winkel, folglich ist $KG > KL$. Zugleich ist $KL = 2\,IH$, weil I die Mitte von CK sein mufs; man hat also F. 122.

$$\begin{array}{rl} & KG > 2\,IH \\ \text{und} & AC + AK > 2\,AI \\ \hline \text{also} & AC + AK + KG > 2\,(AI + IH) \\ \text{d. h.} & AC + AG > 2\,AH \end{array}$$

AD, und H durch den Bogen HKG, beidemal mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Daraus erhellet, dafs sich verhalte

$$AE : AD = HKF : HKG,$$

denn diefs ward vorweg in den ersten Sätzen erwiesen (S. 2.).

Auf dieselbe Weise wird bewiesen, dafs eben dasselbe zutreffe, wenn eine von beiden in die Schneckenlinie treffenden Linien an das Ende derselben gelangt sein sollte.

Satz 15.

Wenn aus dem Anfangspunkte einer im zweiten Umlaufe beschriebenen Schneckenlinie gerade Linien in diese einfallen, so werden sie zu einander sich verhalten, wie die genannten Kreisbogen samt dem ganzen Kreisumfange.

F. 124. Es sei eine Schneckenlinie, worin ABCDHELM, und ABCDH im ersten Umlaufe beschrieben, HELM aber im zweiten, und in diese mögen die geraden Linien AE, AL, eintreffen; es mufs gezeigt werden, dafs sich verhalte

$$AL : AE = (HKF + \textit{Umfang des Kr.}) : (HKG + \textit{Umf. d. Kr.})$$

In eben so vieler Zeit nämlich, als worin der Punkt A, welcher in der geraden Linie sich bewegt, die Linie AL durchläuft, legt auch der im Kreisumfange sich bewegende Punkt H den ganzen Kreisumring und noch den Bogen HKF zurück, und eben so durchläuft der Punkt A die gerade AE, und der Punkt H den ganzen Kreisumfang samt dem Bogen HKG, beidemal mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Demnach erhellet, dafs sich verhalte

$$AL : AE = (HKF + \textit{Umf. d. Kr.}) : (HKG + \textit{Umf. d. Kr.})$$

Folgerung.

Auf dieselbe Weise kann bewiesen werden, wenn auch in die beim dritten Umlaufe beschriebene Schneckenlinie gerade Linien einfallen, dafs sie zu einander sich verhalten werden, wie die genannten Bogen samt den zweimal genommenen ganzen Kreisumringen. Und ganz ähnlich zeigt man, dafs gerade Linien, wenn sie in die anderen Schneckenlinien einfallen, sich eben so verhalten, wie die erwähnten Bogen nebst den ganzen Kreisumfängen, einmal weniger genommen, als die Zahl der Umläufe; selbst dann, wenn eine der einfallenden Linien das Ende der Schneckenlinie treffen sollte.

Satz 16.

Wenn eine gerade Linie die im ersten Umlaufe beschriebene Schneckenlinie berührt, und von dem Berührungspunkte eine gerade Verbindungslinie zu dem Anfangspunkte der Schneckenlinie gezogen ist, so werden die Winkel, welche die berührende mit der verbindenden bildet, ungleich, und zwar der im vorderen Theile stumpf, der im hinteren aber spitz sein.

F. 125. Es sei eine Schneckenlinie, worin ABCDH im ersten Umlaufe beschrieben. Der Punkt A sei ihr Anfang, die gerade AH aber der Anfang des Umlaufs, und HKG der erste Kreis. Eine gerade Linie DEG berühre die Schneckenlinie in D, und von D sei die Verbindungslinie DA nach A gezogen. Es ist zu zeigen, dafs der Winkel FDA stumpf sei.

Man beschreibe den Kreis DTN aus dem Mittelpunkte A mit dem Halbmesser AD. Nothwendig mufs dann der beim vordern Theile der Schneckenlinie befindliche Bogen dieses

Kreises ihr nach innen, der im hintern Theile aber ihr nach aufsen fallen, weil unter den von A aus in die Schneckenlinie einfallenden geraden Linien die im vordern Theile gröfser als AD, die im hintern Theile aber kleiner sind. Dafs also der Winkel ADF wenigstens kein spitzer sei, ist einleuchtend, indem er gröfser ist, als der Winkel des Halbkreises. (α) Dafs er aber auch kein rechter sei, ist so zu beweisen. Er sei nämlich, wenn diefs möglich, ein rechter. Dann ist EDF eine Berührungslinie des Kreises DTN; und es läfst sich aus dem Punkte A eine gerade Linie dergestalt an die berührende ziehen, dafs ihr zwischen dem Kreisumfange und der berührenden befindlicher Theil zu dem Halbmesser in einem kleineren Verhältnisse steht, als der zwischen dem Berührungspunkte und der gezogenen Linie befindliche Bogen zu einem gegebenen Bogen (S. 5.)

Es sei daher AI gezogen, so wird sie in L die Schneckenlinie, in P aber den Kreisumfang schneiden, und es soll sich verhalten

$$PI : AP < DP : DNT$$

mithin auch $AI : AP < PDNT : DNT = MGKH : GKH$

Es ist aber $MGKH : GKH = AL : AD$, wie bewiesen ward (S. 14.)

mithin $AI : AP < AL : AD$,

was unmöglich ist, da $AP = AD$. (β) Der Winkel ADF ist folglich nicht ein rechter; dafs er aber nicht spitz sei, wurde schon gezeigt; also ist er stumpf. Mithin ist der andere spitz. Eben so wird man beweisen, dafs dasselbe zutreffe, wenn die berührende die Schneckenlinie an deren Ende berühren sollte.

Satz 17.

Auch wenn eine gerade Linie die im zweiten Umlaufe beschriebene Schneckenlinie berührt, wird dasselbe zutreffen.

Denn es berühre die gerade EF die beim zweiten Umlaufe beschriebene Schneckenlinie F.126. in D, und alles übrige sei wie zuvor konstruirt. Dann wird gleichfalls der beim vordern Theile der Schneckenlinie befindliche Bogen des Kreisumfangs DPN nach innen, der aber beim hintern Theile nach aufsen fallen; also ist der Winkel ADF kein rechter, sondern ein stumpfer; denn er sei ein rechter, wenn diefs möglich ist, so wird EF den Kreis DPN in dem Punkte

---

(S. 16. α) Euklides nennt den Winkel, welchen der Durchmesser mit dem Halbkreise macht, den Winkel des Halbkreises, und beweiset, dafs derselbe gröfser sei, als irgend ein spitzer Winkel (Eukl. III. 16.). Die neueren Geometer verwerfen mit Recht den Begriff eines solchen Winkels, indessen steht dennoch die Wahrheit des Satzes fest, dafs der Durchmesser mit der Berührenden einen rechten Winkel, mithin einen gröfseren, als irgend ein spitzer ist, bildet. Nun liegt in dem gegenwärtigen Falle der Kreisbogen DPT durchaus zwischen den Schenkeln DF und DA, mithin ist ADF wenigstens nicht kleiner, als der Winkel des Halbmessers AD mit einer Berührungslinie des Kreises für den Punkt D, folglich ist er gewifs nicht spitz. Wenn Archimedes sagt, der Winkel ADF sei gröfser als der Winkel des Halbkreises, so will er damit in der That nur sagen, er sei nicht kleiner, als ein solcher, da er die Frage, ob etwa jener Winkel einem rechten gleich sein könne, noch besonders beantwortet, was gar nicht nöthig gewesen wäre, wenn es schon für sich einleuchtete, dafs ADF gröfser sei, als der sogenannte Winkel des Halbkreises.

(β) Mithin müfste $AI < AL$ sein, folglich EDF die Schneckenlinie schneiden.

D berühren. Man ziehe wiederum AI an die berührende, und schneide dadurch die Schneckenlinie in O, den Kreisumfang DPN aber in P, auch sei

$$PI : PA < DP : (\textit{Kreisumfang}\ DPN + \textit{Bogen}\ DNT)$$

denn dafs diefs möglich sei, ist erwiesen (S. 5.). Demnach ist

$$IA : PA < (DPNT + \textit{Kreisumfang}) : (DNT + \textit{Kreisumfang})$$

Es ist aber

$$(PDNT + \textit{Kreisumf.}\ DNTP) : (DNT + \textit{Kreisumf.}\ DNTP) = (MGKH + \textit{Kreisumf.}\ HMGK) : (GKH + \textit{Kreisumf.}\ HMGK)$$

und die zuletzt genannten Bogen verhalten sich wie $AO : AD$, wie bewiesen ist (S. 15.). Demnach ist

$$IA : PA < AO : AD,$$

was unmöglich ist, indem $PA = AD$, und $IA > AO$ ist. Also erhellet, dafs ADF ein stumpfer Winkel, mithin der andere ein spitzer ist. Dasselbe wird zutreffen, wenn auch die berührende das Ende der Schneckenlinie berührt.

Folgerung.

Auf ähnliche Weise wird der Beweis geführt, wenn eine gerade Linie die bei irgend einem willkührlichen Umlaufe beschriebene Schneckenlinie berührt, und sollte diefs auch am Endpunkte derselben sein; dafs jene mit einer vom Berührungspunkte bis zum Anfange der Schneckenlinie gezogenen geraden ungleiche Winkel bilden werde, und zwar den im vordern Theile stumpf, den im hintern aber spitz.

Satz 18.

Wenn eine gerade Linie die beim ersten Umlaufe beschriebene Schneckenlinie an deren Endpunkte berührt, in dem Anfangspunkte derselben aber eine gerade Linie senkrecht auf derjenigen geraden errichtet ist, welche den Anfang des Umlaufs angiebt, so wird die gezogene Linie mit der berührenden zusammentreffen, und ihr zwischen der berührenden und dem Anfange der Schneckenlinie befindlicher Theil wird dem Umringe des ersten Kreises gleich sein.

F.127. ABCD sei die Schneckenlinie, A sei ihr Anfangspunkt, die Linie HA der Anfang des Umlaufs, und HGK der erste Kreis. Die Linie HF berühre die Schneckenlinie in H, und aus A ziehe man senkrecht auf AH die Linie AL, so wird sie mit HF zusammentreffen, weil FHA ein spitzer Winkel ist (S. 16.); diefs möge in F geschehen, so ist zu beweisen, dafs FA dem Umfange des Kreises HGK gleich sei.

Denn wo nicht, so ist sie entweder gröfser oder kleiner.

1) sie sei also, wo möglich, gröfser. Ich nehme dann irgend eine gerade Linie LA, kleiner als FA, doch gröfser als den Kreisumfang HGK. Nun ist HGK ein Kreis, in demselben eine Sehne HG, kleiner als der Durchmesser, auch ist das Verhältnifs von HA zu AL gröfser als das Verhältnifs von $\frac{1}{2}$ GH zu dem Perpendikel von A auf HG, weil jenes Verhältnifs gröfser ist, als das von $AH : AF$. (α) Es ist folglich möglich, aus A die Linie AN

(S. 18. α) Fällt man das Perpendikel AI auf HG, so ist

$$AH : AL > AH : AF, \text{ weil } AL < AF \text{ ist,}$$

ferner ist $\underline{AH : AF = HI : AI = \frac{1}{2} HG : AI}$

$$AH : AL > \tfrac{1}{2} HG : AI$$

AN an die verlängerte Sehne so zu ziehen, daſs der zwischen dem Kreisumfange und der verlängerten Sehne befindliche Theil NP zu der geraden Linie HP sich verhalte, wie AH zu AL (S. 7.). Also wird sich verhalten

$$NP : PA = HP : AL \ (\beta).$$

Es ist aber $HP : AL < \textit{Bog.}\ HP : \textit{Kreisumfang}\ HGK$,

denn die gerade Linie HP ist kleiner als der Bogen HP, die gerade Linie AL dagegen gröſser als der Kreisumfang HGK. Demnach wird sein

$$NP : PA < \textit{Bog.}\ HP : \textit{Kreisumfang}\ HGK$$

mithin $NA : PA < (\textit{Bog.}\ HP + \textit{Kreisumf.}) : \textit{Kreisumf.}\ HGK$

Es ist aber $(\textit{Bog.}\ HP + \textit{Kreisumf.}\ HGK) : \textit{Kreisumf.}\ HGK = AO : AH$

wie bewiesen wurde (S. 15.). Folglich ist

$$NA : PA < AO : AH$$

was unmöglich ist; denn es ist $NA > AO$ und $PA = AH$; mithin ist AF nicht gröſser als der Umfang des Kreises HGK.

2) Also sei, wo möglich, AF kleiner, als der Umfang des Kreises HGK. F. 128.
Ich nehme dann irgend eine gerade Linie AL, gröſser als AF, doch kleiner als den Umfang des Kreises HGK, und ziehe durch H die $HM \ddagger AF$. Nun ist wieder GHK ein Kreis, in demselben eine Sehne HG, kleiner als der Durchmesser, und eine andere den Kreis in H berührende Linie; auch ist das Verhältniſs $AH : AL$ kleiner als daſs Verhältniſs von $\frac{1}{2}$ HG zu einem Perpendikel aus A auf sie, weil jenes Verhältniſs auch kleiner ist, als das Verhältniſs $AH : AF$. (γ) Es ist demnach möglich, aus A die Linie AQ an die Berührungslinie (δ) so zu ziehen, daſs die Linie PN, welche zwischen der Sehne und dem Kreisumfange liegt, zu HQ, d. h. zu dem Abschnitte der berührenden sich verhalte, wie $HA : AL$.

Es wird nun AQ den Kreis in P, die Schneckenlinie aber in O schneiden, und es wird sich also auch verhalten

$$NP : PA = HQ : AL$$

Es ist aber $HQ : AL > \textit{Bog.}\ HP : \textit{Kreisumfang}\ HGK$

Denn die gerade Linie HQ ist gröſser als der Bogen HP, (ϵ) aber AL ist kleiner als der Kreisumfang HGK. Folglich ist

$$NP : AP > \textit{Bog.}\ HP : \textit{Kreisumfang}\ HGK$$

Folglich auch $AP : AN > \textit{Kreisumfang}\ HGK : \textit{Bog.}\ HKP$ (ζ)

(β) Unter HP ist die Sehne, nicht der Bogen zu verstehen.

(γ) Fällt man wieder das Perpendikel AI auf HG, so ist

$$AH : AL < AH : AF, \text{ weil } AF < AL,$$

$$\text{ferner ist } \underline{AH : AF = HI : AI = \tfrac{1}{2}\, HG : AI}$$

$$AH : AL < \tfrac{1}{2}\, HG : AI$$

(δ) Die Berührungslinie HM des Kreises ist gemeint, nicht die der Schneckenlinie.

(ϵ) Weil die Tangente gröſser ist, als ihr Bogen.

(ζ) Man setze den Kreisumfang $= c$, den Bogen $HP = a$, so ist

$$\frac{NP}{AP} > \frac{a}{c}; \text{ also auch } 1 - \frac{NP}{AP} < 1 - \frac{a}{c}$$

$$\text{mithin } \frac{AP - NP}{AP} < \frac{c - a}{c} \text{ oder } \frac{AP}{AN} > \frac{c}{c - a}$$

Es ist aber nach dem Beweise (S. 14.)

$$\textit{Kreisumf.}\ HGK : \textit{Bog.}\ HKP = AH : AO$$

Folglich $AP : AN > AH : AO$,

und diefs ist unmöglich. Auch ist AF weder gröfser noch kleiner, als der Umfang des Kreises HGK, mithin ihm gleich.

Satz 19.

Wenn dagegen eine gerade Linie die beim zweiten Umlaufe beschriebene Schneckenlinie an deren Endpunkte berührt, und wenn man in dem Anfangspunkte der Schneckenlinie eine senkrechte auf der Anfangslinie des Umlaufs errichtet, so wird dieselbe mit der berührenden zusammentreffen, und die gerade Linie zwischen der berührenden und dem Anfange der Schneckenlinie wird zweimal so grofs sein, als der Umfang des zweiten Kreises.

F. 129. Es sei ABCH die im ersten Umlauf, HET aber die im zweiten beschriebene Schneckenlinie, HKG der erste Kreis, TMN der zweite. Ferner berühre eine gerade Linie TF die Schneckenlinie in T, und senkrecht an TA sei AF gezogen. Diese wird mit TF zusammentreffen, weil bewiesen worden, dafs der Winkel ATF ein spitzer ist (S. 17.). Es soll gezeigt werden, dafs die gerade Linie AF zweimal so grofs sei, als der Umfang des Kreises TMN.

Denn wofern sie nicht zweimal so grofs ist, so ist sie entweder gröfser oder kleiner.

1. Sie sei daher, wo möglich, gröfser, als der zweimalige Kreisumfang. Man nehme dann eine gerade Linie AL an, kleiner zwar als AF, doch gröfser als den zweimaligen Umfang des Kreises TMN. Demnach befindet sich hier ein Kreis TMN, und in ihm eine Sehne TN, kleiner als der Durchmesser, auch ist

$$TA : AL > \tfrac{1}{2} TN : \textit{Perpend. aus A auf}\ TN\ (\alpha)$$

Also läfst sich aus A eine Linie AS dergestalt an die verlängerte Sehne TN hinanziehen, dafs sich verhält

$$PS : TP = TA : AL\ (S. 7.)$$

Es wird daher AS den Kreis in P, die Schneckenlinie aber in O schneiden, mithin verhält sich auch $PS : TA = TP : AL$

Es ist aber $TP : AL < \textit{Bog.}\ TP : 2 \times \textit{Kreisumf.}\ TMN$

denn die gerade Linie TP ist kleiner als der Bogen TP, und AL dagegen ist gröfser als der zweimalige Kreisumfang TMN.

Folglich ist $PS : AP < \textit{Bog.}\ TP : 2 \times \textit{Kreisumf.}\ TMN$

mithin auch $AS : AP < (\textit{Bog.}\ TP + 2 \times \textit{Kreisumf.}\ TMN) : 2 \times \textit{Kreisumf.}\ TMN$

Das Verhältnifs dieser genannten Bogen aber ist dem Verhältnisse AO : AT gleich, wie bewiesen wurde (S. 15.). (β) Also ist

---

(S. 19. α) Fällt man das Perpendikel aus A auf TN, und bezeichnet es durch p, so ist

$$\begin{array}{c} TA : AL > TA : AF \\ TA : AF = \tfrac{1}{2} TN : p \\ \hline TA : AL > \tfrac{1}{2} TN : p \end{array}$$

(β) Archimedes druckt zwar in S. 14 und 15 das Verhältnifs der vom Mittelpunkte ausgehenden Linien nur durch Bogen des ersten Kreises aus, und hier dagegen durch Bogen des zweiten; indessen kann diefs keinen Anstofs geben, da das eine Verhältnifs dem andern gleich ist wegen der Aehnlichkeit der Bogen.

$$AS : AP < AO : AT,$$

was unmöglich ist. Mithin ist die gerade Linie AF nicht gröſser, als der zweimalige Umring des Kreises TMN. Auf ähnliche Art kann der Beweis geführt werden, daſs sie auch nicht kleiner sei; woraus erhellt, daſs sie dem zweimaligen Umringe gleich sei.

Folgerung.

Auf dieselbe Weise ist zu zeigen, wenn eine gerade Linie die bei irgend einem Umlaufe beschriebene Schneckenlinie an deren Endpunkte berührt, und wenn eine in deren Anfangspunkte auf der Anfangslinie des Umlaufs errichtete senkrechte mit jener zusammentrifft, daſs die senkrechte ein Vielfaches von dem Umfange desjenigen Kreises sei, welcher nach der Zahl der Umläufe mit dem Vielfachen selbst durch einerlei Zahl benannt wird.

Satz 20.

Wenn eine gerade Linie die beim ersten Umlaufe beschriebene Schneckenlinie nicht an deren Endpunkte berührt, wenn ferner aus dem Berührungspunkte zu dem Anfange der Schneckenlinie eine Verbindungslinie gezogen, mit dieser als einem Halbmesser aus dem Anfangspunkte ein Kreis beschrieben, und in dem Anfangspunkte der Schneckenlinie auf jener Verbindungslinie eine senkrechte errichtet wird; so wird letztere mit der berührenden zusammentreffen, und der Theil derselben zwischen dem Durchschnittspunkte und dem Anfange der Schneckenlinie wird gleich sein dem Bogen des beschriebenen Kreises zwischen dem Berührungspunkte und dem Durchschnittspunkte des Kreises mit dem Anfange des Umlaufs; den Bogen vorwärts genommen von dem im Anfange des Umlaufs liegenden Punkte.

Es sei eine Schneckenlinie, worin ABCD beim ersten Umlaufe beschrieben; eine gerade Linie EDF berühre sie in D, man ziehe aus D zu dem Anfange der Schneckenlinie die verbindende AD, und aus dem Mittelpunkte A beschreibe man einen Kreis DMN mit dem Halbmesser AD. Dieser schneide den Anfang des Umlaufs in K, und man ziehe senkrecht zu AD die AF. Dann ist einleuchtend, daſs sie mit jener zusammentreffen werde; daſs aber auch AF = Bog. KMND, ist zu beweisen. F.130.

Wofern nämlich nicht, so ist sie entweder gröſser oder kleiner.

1. Sie sei, wo möglich, gröſser. Man nehme eine Linie AL, kleiner zwar als AF, doch gröſser als den Bogen KMND. Hier ist nun wieder ein Kreis KMN, und in demselben eine Sehne DN, kleiner als der Durchmesser; auch ist

$$DA : AL > \tfrac{1}{2} DN : \textit{Perpend. aus A auf sie}$$

Also läſst sich aus A die gerade Linie AE dergestalt an die Verlängerung von ND hinanziehen, daſs sich verhält $EP : DP = DA : AL$

Die Möglichkeit ist nachgewiesen (S. 7.). Also wird auch sein

$$EP : AP = DP : AL$$

Es ist aber $DP : AL < \textit{Bog. } DP : \textit{Bog. } KMD$

weil DP kleiner als der Bogen DP, und AL dagegen gröſser als der Bogen KMD ist. Daher ist $EP : AP < \textit{Bog. } DP : \textit{Bog. } KMD$

folglich auch $AE : AP < \textit{Bog. } KMP : \textit{Bog. } KMD$

Es ist aber $\textit{Bog. } KMP : \textit{Bog. } KMD = AO : AD$ (S. 14.)

also $AE : AP < AO : AD,$

was unmöglich ist. Demnach ist die Linie AF nicht gröfser, als der Bogen KMD. Eben so aber, wie zuvor läfst sich zeigen, dafs sie auch nicht kleiner ist. Also ist sie ihm gleich.

Folgerung.

Auf dieselbe Weise kann gezeigt werden, wenn eine gerade Linie die beim zweiten Umlauf beschriebene Schneckenlinie nicht an deren Endpunkte berührt, und alles Uebrige wie zuvor konstruirt wird; dafs von der geraden Linie, welche mit der berührenden zusammenfält, der zwischenliegende Theil, vom Anfange der Schneckenlinie an, gleich sei dem ganzen Umfange des beschriebenen Kreises nebst dem zwischen den angeführten Punkten liegenden Bogen, wenn der Bogen wieder eben so genommen wird. Wenn ferner eine gerade Linie die bei irgend einem Umlauf beschriebene Schneckenlinie nicht an deren Endpunkte berührt, und alles Uebrige eben so konstruirt wird, dafs dann die zwischen den gedachten Punkten liegende gerade Linie ein Vielfaches vom Umfange des beschriebenen Kreises nach einer um eins kleineren Zahl ist, als die, welche die Anzahl der Umläufe angiebt, nebst dem Bogen zwischen den bezeichneten Punkten, den Bogen wieder eben so genommen.

Satz 21.

Wenn die Fläche, welche von einer beim ersten Umlaufe beschriebenen Schneckenlinie und von der ersten geraden Anfangslinie umschlossen wird, (α) angenommen ist, so läfst sich um dieselbe eine ebene aus ähnlichen Ausschnitten bestehende Figur, und eine andere darin beschreiben, so dafs die äufsere Figur die innere um weniger übertrifft, als irgend ein vorgelegter Flächenraum beträgt.

F.131. Es sei eine Schneckenlinie, worin ABCD im ersten Umlaufe beschrieben. Ihr Anfang sei der Punkt H, der Anfang des Umlaufs HA, der erste Kreis FGIA, und die Durchmesser desselben AG, FI, senkrecht zu einander. Wird nun fortwährend ein rechter Winkel und der ihn enthaltende Ausschnitt gehalbtheilt, so wird man endlich auf einen Ausschnitt kommen, welcher kleiner ist, als der vorgelegte Flächenraum.

Nun sei der hiedurch entstehende Ausschnitt AHK kleiner als der gegebene Raum, und man theile die vier rechten Winkel in lauter solche Winkel, welche AHK gleich sind, auch verlängere man die geraden Theilungslinien, bis sie in die Schneckenlinie einfallen. Der Punkt, wo dann die HK die Schneckenlinie schneidet, sei L, und aus dem Mittelpunkte H sei mit dem Halbmesser HL ein Kreis beschrieben, so wird sein vorwärtsliegender Bogen der Schneckenlinie nach innen, der hinterwärts liegende aber nach aufsen fallen. Es sei also sein Bogen OM so weit beschrieben, bis er mit HA in O zusammentrifft, und mit der zunächst hinter HK gegen die Schneckenlinie gezogenen geraden in M. Ferner sei N der Punkt, wo die Linie HM die Schneckenlinie schneidet, und aus dem Mittelpunkte H sei mit dem Halbmesser

---

F.140. (S. 21. α) Diesen Flächenraum werde ich künftig kürzer die Fläche der ersten Schneckenlinie nennen, und dem gemäfs auch von einer Fläche der zweiten, dritten u. s. w. Schneckenlinie reden. Dieser Ausdruck ist aber nicht zu verwechseln mit der Benennung: erste, zweite, dritte u. s. w. Schneckenfläche, deren Erklärung Archimedes selbst (Erklär. 5) giebt. Der Raum K + L ist z. B. die Fläche der zweiten Schneckenlinie, der Raum L allein aber ist die zweite Schneckenfläche. Nur bei der Schneckenlinie des ersten Umlaufs sind beide Bezeichnungen gleichbedeutend.

HN ein Kreis so weit beschrieben, bis der Bogen desselben mit HK sowohl als mit der zunächst hinter HM in die Schneckenlinie einfallenden Linie zusammentrifft. Auf ähnliche Weise beschreibe man durch alle andern Punkte, in denen die Schneckenlinie von den Linien geschnitten wird, welche gleiche Winkel bilden, Kreisbogen aus dem Mittelpunkte H, so dafs jeder einzelne Bogen die vorangehende und nachfolgende gerade Linie trifft. Dann wird also um die angenommene Schneckenfläche eine aus ähnlichen Ausschnitten bestehende Figur, und eine andere darin beschrieben sein, und es soll nun gezeigt werden, dafs die umschriebene die eingeschriebene um weniger als den vorgelegten Flächenraum übertreffe.

Es ist nämlich *Ausschnitt* HLO = HML
- HNQ = HNP
- HXS = HXT

und so ist jeder der übrigen Ausschnitte in der innern Figur demjenigen Ausschnitte in der äufsern gleich, mit welchem er eine gemeinschaftliche Seite hat; woraus hervorgeht, dafs die Summe der ersteren der Summe der letzteren Ausschnitte gleich sein werde. Mithin ist die ganze eingeschriebene Figur gleich der umschriebenen nach Abzug des Ausschnitts HAK, denn dieser bleibt allein übrig unter den Ausschnitten der äufsern Figur. Daraus erhellt, dafs die äufsere Figur um die Gröfse des Ausschnitts AKH, welcher wieder kleiner ist, als der vorgelegte Flächenraum, gröfser sei, als der innere.

Folgerung.

Hieraus erhellet, dafs es möglich sei, um die erwähnte Fläche eine solche Figur, wie die beschriebene, so zu verzeichnen, dafs die äufsere Figur jene Schneckenfläche um weniger als einen gegebenen Raum übertreffe; ferner eine andere darin so zu beschreiben, dafs die Schneckenfläche gleichfalls die eingeschriebene Figur um weniger übertreffe, als irgend ein vorgelegter Flächenraum beträgt.

Satz 22.

Wenn eine Fläche der zweiten Schneckenlinie angenommen ist, so läfst sich eine ebene aus ähnlichen Ausschnitten bestehende Figur, und eine andere darin beschreiben, so dafs die äufsere die innere um weniger als irgend einen vorgelegten Flächenraum übertrifft.

Es sei eine Schneckenlinie, worin ABCDE beim zweiten Umlauf beschrieben. Der F. 132.
Punkt H sei der Anfang der Schneckenlinie, die Linie AH der Anfang des Umlaufs, und EA die zweite gerade Anfangslinie; auch sei AFG der zweite Kreis, und die Durchmesser AG, FI, senkrecht zu einander. Wenn daher wiederum ein rechter Winkel und der ihn enthaltende Ausschnitt fortwährend gehalbtheilt wird, so wird man auf einen Ausschnitt kommen, welcher kleiner ist, als der vorgelegte Flächenraum. Demnach sei der hiedurch entstehende Ausschnitt KHA kleiner als der vorgelegte Flächenraum. Wenn nun die rechten Winkel in lauter Winkel von der Gröfse des Winkels KHA getheilt sind, und alles Uebrige wie zuvor konstruirt ist, so wird die umschriebene Figur die eingeschriebene um weniger als um den Ausschnitt KHA übertreffen; denn jene wird diese um den Ueberschufs des Ausschnitts KHA über HEP übertreffen. (α)

(S. 22. α) Die äufsere Figur sowohl, als die innere bestehen aus gegenseitig gleichen Kreisausschnitten; nur blei- F. 132

Folgerung.

1) Hieraus erhellet die Möglichkeit, dafs die äufsere Figur die angenommene Schneckenfläche um weniger übertreffe, als um irgend einen vorgelegten Flächenraum; und wiederum, dafs die angenommene Schneckenfläche die innere Figur um weniger als um irgend einen vorgelegten Raum übertreffe.

2) Auf dieselbe Weise ist einleuchtend, dafs es möglich sei, wenn man eine Fläche annimt, die von einer bei irgend welchem Umlaufe beschriebenen Schneckenlinie und von einer mit der Zahl der Umläufe gleichbenannten geraden Anfangslinie umschlossen wird, um dieselbe eine ebene Figur von der angegebenen Art dergestalt zu beschreiben, dafs diese äufsere Figur die angenommene Schneckenfläche um weniger übertrifft, als um irgend einen vorgelegten Raum; und wiederum eine andere so darin zu verzeichnen, dafs die angenommene Schneckenfläche um weniger die innere Figur übertrifft, als um irgend einen vorgelegten Raum.

Satz 23.

Wenn man eine Fläche annimt, welche von einer Schneckenlinie, die kleiner als die erste, auch nicht durch den Anfangspunkt der Schneckenlinie begränzt ist, und von den geraden Linien aus den Gränzpunkten derselben umschlossen wird, so läfst sich eine aus ähnlichen Abschnitten bestehende ebene Figur darum und eine andere darin verzeichnen, so dafs der Unterschied der äufsern und innern Figur kleiner ist, als irgend ein vorgelegter Raum.

F. 133. Es sei eine Schneckenlinie, worin ABCDE, und ihre Gränzen seien A, E, der Anfang derselben sei H. Man ziehe AH, HE, und beschreibe einen Kreis aus H mit dem Halbmesser HA, welcher in F mit HE zusammentreffe. Theilt man nun den Winkel bei H und den Ausschnitt HAF fortwährend in Hälften, so wird man auf einen Rest kommen, der kleiner ist, als der vorgelegte Raum, und es sei daher der Ausschnitt HAK kleiner als dieser. Wie zuvor beschreibe man nun durch die Punkte, in welchen die bei H gleiche Winkel bildenden geraden Linien die Schneckenlinie schneiden, Kreisbogen, so dafs diese jedesmal mit der vorangehenden und nachfolgenden geraden Linie zusammentreffen. Dann wird also um die Schneckenfläche ABCDEA eine ebene aus ähnlichen Ausschnitten bestehende Figur, und eine andere darin beschrieben sein; auch wird die äufsere die innere um weniger als den vorgelegten Raum übertreffen; denn der Ausschnitt HAK beträgt weniger als dieser.

Folgerung.

Hieraus erhellet, dafs es möglich sei, um die gedachte Schneckenfläche eine ebene Figur, wie angegeben zu beschreiben, so dafs die äufsere Figur um weniger als um irgend einen vorgelegten Raum jene Fläche übertrifft; und wiederum eine andere darin zu beschreiben, so dafs die Fläche um weniger als irgend einen vorgelegten Raum die innere Figur übertrifft.

---

ben bei dieser Vergleichung die Ausschnitte KHA und EHP zurück, so dafs der Unterschied derselben den Unterschied der beiden Figuren selbst ausmacht. Man mufs daher also fortfahren: Es ist aber schon der Ausschnitt KHA kleiner als der vorgelegte Flächenraum, mithin ist um desto mehr KHA - EHP kleiner als derselbe.

Satz 24.

Die Fläche der ersten Schneckenlinie ist dem dritten Theile des ersten Kreises gleich.

Es sei eine Schneckenlinie, worin ABCDEH im ersten Umlaufe beschrieben. Der F.134. Punkt H sei ihr Anfang, die gerade HA die erste Anfangslinie des Umlaufs, HKFGI der erste Kreis, dessen dritter Theil der Kreis Y sein soll. Es ist zu zeigen, dafs die erwähnte Fläche dem Kreise Y gleich sei.

Denn wo nicht, so ist sie entweder gröfser oder kleiner.

1) Sie sei, wo möglich, kleiner. Nun ist es möglich, um die Schneckenfläche ABCDEHA eine ebene aus ähnlichen Ausschnitten bestehende Figur dergestalt zu beschreiben, dafs die äufsere Figur die Schneckenfläche selbst um weniger übertrifft, als um den Unterschied zwischen dem Kreise Y und der gedachten Fläche (S. 21.) Sie sei also beschrieben, und unter den Ausschnitten, woraus diese Figur besteht, sei HAK der gröfste, HEO der kleinste. Es ist demnach einleuchtend, dafs die umschriebene Figur kleiner ist, als der Kreis Y.

Man verlängere die bei H gleiche Winkel bildenden geraden Linien, bis sie den Umfang des Kreises treffen. Hier befinden sich also mehrere Linien, die von H ausgehend so in die Schneckenlinie fallen, dafs sie einander um gleiche Unterschiede übertreffen (S. 12.). Die gröfsere derselben ist HA, die kleinere HE, und die kleinste ist dem Unterschiede selbst gleich. Ferner befinden sich hier noch andere Linien in gleicher Anzahl, die von H bis an den Umfang des Kreises ausgehen, und deren jede an Gröfse der gröfsten gleich ist; auch sind ähnliche Ausschnitte zu ihnen allen beschrieben, sowohl zu denen mit gleichen Unterschieden, als zu denen, die unter sich und jede der gröfsten gleich sind. Also sind die Ausschnitte für die Linien, welche der gröfsten gleich sind, zusammen kleiner als das Dreifache derjenigen, welche zu den Linien mit gleichen Unterschieden beschrieben sind. Denn diefs ist bewiesen (S. 10. Folg. 3.). Es sind aber die Ausschnitte für die der gröfsten und unter sich gleichen Linien dem Kreise AFGI, die Ausschnitte dagegen für die Linien mit gleichen Unterschieden der umschriebenen Figur gleich. Folglich ist der Kreis AFGIK kleiner als das Dreifache der umschriebenen Figur, gleich aber dem dreifachen Kreise Y; mithin ist der Kreis Y kleiner als die umschriebene Figur. Und doch ist er nicht kleiner, sondern gröfser. Folglich ist die Schneckenfläche ABCDEHA nicht kleiner als der Kreis Y.

2) Sie ist aber auch nicht gröfser. Denn sie sei, wo möglich gröfser. F.135. Dann ist wiederum möglich, in die Schneckenfläche ABCDEHA eine Figur einzuschreiben, so dafs die gedachte Fläche die innere Figur um weniger übertrifft, als um den Unterschied der genannten Fläche und des Kreises Y (S. 21.). Sie sei demnach eingeschrieben, und unter den Ausschnitten, aus denen diese innere Figur besteht, sei der gröfste HPL, der kleinste aber HEO. Dann erhellet, dafs die eingeschriebene Figur gröfser ist, als der Kreis Y.

Man verlängere die bei H gleiche Winkel bildenden Linien, bis sie den Umfang des Kreises treffen. Nun befinden sich hier wieder mehrere Linien mit gleichen Unterschieden, welche von H ausgehend in die Schneckenlinie einfallen (S. 12.). Die gröfste derselben ist HA, die kleinste HE, und die kleinste ist dem Unterschiede selbst gleich. Auch befinden sich hier noch andere Linien in derselben Anzahl, welche von H ausgehend bis an den Umfang des Kreises reichen, und deren jede so grofs ist, wie die gröfste. Auch sind ähnliche Ausschnitte zu allen beschrieben, sowohl zu den unter sich und der größten gleichen, als zu denen mit gleichen Unterschieden. Folglich betragen die Ausschnitte für die Linien, welche der größten gleich sind, mehr als das Dreifache der Ausschnitte für die Linien mit gleichen Unterschieden, nach Abzug deſsen für die gröſste. Denn dieses ward bewiesen (S. 10. Folg. 3.). Nun sind aber die Ausschnitte für die Linien, welche der gröſsten gleich sind, zusammen dem Kreise AFGI, die aber für die Linien mit gleichen Unterschieden, nach Abzug dessen für die gröſste, der innern Figur gleich. Demnach ist der Kreis AFGI gröſser, als das Dreifache der innern Figur, gleich aber dem dreifachen Kreise Y, folglich ist der Kreis Y gröſser, als die innere Figur. Er ist aber nicht gröſser, sondern kleiner. Folglich ist die Schneckenfläche ABCDEHA auch nicht gröſser, als der Kreis Y. Sie ist also gleich demselben.

Satz 25.

Die Fläche der zweiten Schneckenlinie verhält sich zu dem zweiten Kreise, wie 7 : 12; und eben so verhält sich auch das Rechteck unter den Halbmessern des ersten und zweiten Kreises, nebst einem Drittheile vom Quadrate des Unterschiedes beider Halbmesser zu dem Quadrate des Halbmessers des zweiten Kreises.

F. 136. Es sei eine Schneckenlinie, worin ABCDE beim zweiten Umlaufe beschrieben; der Anfangspunkt sei H, die gerade Linie HE sei die erste Anfangslinie des Umlaufs, AE die zweite. AFGI sei der zweite Kreis, und AG, IF senkrechte Durchmesser zu einander. Es ist zu beweisen, daſs

$$\textit{Schneckenfläche}\ ABCDEA : \textit{Kr.}\ AFGI = 7 : 12$$

Es sei daher S ein Kreis, dessen Quadrat des Halbmessers $= AH \times HE + \frac{1}{3} AE^2$. Dann wird sich verhalten

$$S : AFGI = 7 : 12,$$

weil auch das Quadrat des Halbmessers von S zum Quadrate des Halbmessers von AFGI sich so verhält. (α) Es wird sich nun beweisen lassen, daſs der Kreis S der Schneckenfläche ABCDEA gleich sei.

Denn wo nicht, so ist er entweder gröſser oder kleiner.

1) Er sei gröſser, wenn es möglich ist. Dann läſst sich um die Schneckenfläche eine aus ähnlichen Ausschnitten bestehende Figur so verzeichnen, daſs sie jene Fläche um weniger als den Unterschied zwischen dem Kreise S und der Fläche übertrifft (S. 22.). Sie sei verzeichnet, und zwar sei unter den Ausschnitten, aus denen die äuſsere Figur besteht, HAK der gröſste, HOL der kleinste. Dann leuchtet ein, daſs die äuſsere Figur kleiner sei, als der Kreis S.

Man verlängere nun die geraden, bei H gleiche Winkel bildenden Linien, bis sie in den Umfang des zweiten Kreises einfallen. Nun befinden sich hier mehrere Linien mit gleichen Unterschieden, die nämlich, welche von H bis an die Schneckenlinie reichen (S. 12.); deren

---

(S. 25. α) Der Halbmesser von AFGI sei $r = HA = 2\,HE$; der Halbmesser von S sei $= \varrho$, so ist $r^2 = 4\,HE^2$, und $\varrho^2 = AH \times HE + \frac{1}{3} AE^2 = 2\,HE^2 + \frac{1}{3} HE^2 = \frac{7}{3} HE^2$, weil $AE = HE$ ist; daraus folgt

$$\varrho^2 : r^2 = \tfrac{7}{3} HE^2 : 4\,HE^2 = 7 : 12.$$

deren gröfste AH, und deren kleinste HE ist. Ferner sind hier noch andere von H ausgehende und bis an den Umfang des Kreises AFGI reichende Linien, der Anzahl nach um eins geringer, als jene, der Gröfse nach aber unter sich und der gröfsten gleich. Auch sind ähnliche Ausschnitte sowohl zu den unter einander gleichen Linien beschrieben, als zu denen mit gleichen Unterschieden, mit Ausnahme der kleinsten. Demnach stehen die für die Linien, welche der gröfsten gleich sind, beschriebenen Ausschnitte zu den Ausschnitten, deren Linien gleiche Unterschiede haben, nach Abzug des Ausschnitts für die kleinste in kleinerem Verhältnisse als $HA^2 : (AH \times HE + \frac{1}{3} AE^2)$. Denn diefs wurde bewiesen (S. 11. Folg.). Es sind aber die Ausschnitte für die Linien, welche unter sich und der gröfsten gleich sind, zusammen dem Kreise AFGI, und die Ausschnitte für die Linien mit gleichen Unterschieden ohne den für die kleinste, zusammen der umschriebenen Figur gleich. Demnach ist

$$\text{Kr. } AFGI : \text{äufs. Fig.} < AH^2 : (AH \times HE + \tfrac{1}{3} AE^2)$$

Es ist aber $AH^2 : (AH \times HE + \frac{1}{3} AE^2) = \text{Kr. } AFGI : S$

folglich $\text{Kr. } AFGI : \text{äufs. Fig.} < \text{Kr. } AFGI : S$

Mithin ist der Kreis S kleiner als die äufsere Figur. Er ist aber nicht kleiner, sondern gröfser, folglich ist auch der Kreis S nicht gröfser als die Schneckenfläche ABCDEA.

2) Er ist aber auch nicht kleiner. Denn er sei kleiner, wenn es möglich ist. Dann läfst sich wieder in die Schneckenfläche ABCDEA eine ebene Figur, bestehend aus ähnlichen Ausschnitten so eintragen, dafs eben diese Schneckenfläche die eingetragene Figur um weniger übertrifft, als um den Unterschied zwischen der Fläche selbst und dem Kreise S. (S. 22.). Sie sei also eingetragen, und zwar sei unter den Ausschnitten, welche diese innere Figur bilden, HKP die gröfste, HEO die kleinste; so ist klar, dafs die innere Figur gröfser ist, als der Kreis S. F.137.

Man verlängere nun die bei H gleiche Winkel bildenden Linien, bis sie in den Kreisumfang eintreffen; dann befinden sich hier wieder mehrere Linien mit gleichen Unterschieden, nämlich die aus H bis an die Schneckenlinie reichenden, deren gröfste HA, und deren kleinste HE ist. Auch befinden sich hier andere Linien, nämlich die aus H bis an den Kreisumfang reichenden, deren Anzahl um eins geringer, deren Gröfse aber unter sich und der Gröfse der gröfsten gleich ist. Ferner sind ähnliche Ausschnitte sowohl für die Linien mit gleichen Unterschieden beschrieben, als auch für die Linien, welche der gröfsten gleich sind. Folglich ist das Verhältnifs der Ausschnitte für die Linien, welche der gröfsten gleich sind, zu den Ausschnitten, deren Linien gleiche Unterschiede haben, nach Abzug dessen für die gröfste, gröfser als das Verhältnifs $AH^2 : (AH \times HE + \frac{1}{3} AE^2)$ (S. 11. Folg.) Es betragen aber die Ausschnitte für die Linien mit gleichen Unterschieden, nach Abzug dessen für die gröfste, so viel, wie die in die Oberfläche eingetragene Figur, die andern dagegen so viel, wie der Kreis. Mithin ist $\text{Kr. } AFGI : \text{eingeschr. Fig.} > AH^2 : (AH \times HE + \frac{1}{3} AE^2)$

und letzteres Verhältnifs ist das des Kreises AFGI zu dem Kreise S; folglich ist der Kreis S gröfser als die eingeschriebene Figur; was unmöglich ist, denn er war kleiner. Mithin ist der Kreis S auch nicht kleiner, als die Schneckenfläche ABCDEA; folglich ihr gleich.

Folgerung.

Auf dieselbe Weise wird sich erweisen lassen, dafs auch die Fläche einer durch irgend welchen Umlauf beschriebenen Schneckenlinie zu dem mit der Zahl der Umläufe gleichbenannten Kreise sich so verhalte, wie das Rechteck unter dem Halbmesser des nach derselben Zahl benannten Kreises und unter dem Halbmesser des Kreises, welcher nach einer um eins kleineren Zahl benannt wird, als die der Umläufe ist, nebst dem dritten Theile des Quadrats von dem Unterschiede zwischen dem Halbmesser des gröfseren und des kleineren der genannten Kreise zu dem Quadrate des Halbmessers des gröfsern der gedachten Kreise. (β)

Satz 26.

Eine Schneckenfläche, deren Schneckenlinie kleiner als die in einem Umlaufe beschriebene, und nicht durch den Anfang der Schneckenlinie begränzt ist, und deren gerade Linien von den Gränzpunkten der Schneckenlinie an deren Umfang gehen, steht zu dem Ausschnitte, welcher zum Halbmesser die gröfsere von jenen aus den Gränzpunkten nach dem Anfangspunkte gezogenen Linien, zum Bogen aber den Bogen zwischen den erwähnten Linien an der Seite der Schneckenlinie selbst hat, in eben dem Verhältnisse, wie das Rechteck unter den beiden von den Gränzpunkten nach dem Anfange gezogenen Linien nebst dem dritten Theile des Quadrats des Unterschiedes dieser beiden Linien zu dem Quadrate der gröfseren eben dieser von den Gränzen nach dem Anfange geführten Linien.

F.138 Es sei eine Schneckenlinie, worin ABCDE kleiner als die in einem Umlaufe beschriebene; ihre Gränzen sollen A, E, der Anfang der Schneckenlinie soll H, und aus H soll mit dem Halbmesser HA ein Kreis beschrieben sein, mit dessen Bogen die gerade Linie HE in F zusammentreffen mag. Es ist zu beweisen, dafs

$$\textit{Schneckenfl.}\ ABCDEA : \textit{Aussch.}\ AHF = (AH \times HE + \tfrac{1}{3} EF^2) : AH^2$$

Es sei nun X ein Kreis, dessen Quadrat des Halbmessers $= (AH \times HE + \frac{1}{3} EF^2)$, und an seinem Mittelpunkte sei ein Winkel dem bei H gleich. (α) Dann ist

$$\textit{Ausschnitt}\ X : \textit{Aussch.}\ HAF = (AH \times HE + \tfrac{1}{3} EF^2) : AH^2$$

denn so verhalten sich die Quadrate der Halbmesser. Es kann nun erwiesen werden, dafs der Ausschnitt X gleich sei der Schneckenfläche ABCDEA.

Denn wo nicht, so ist er entweder gröfser oder kleiner.

1) Er sei gröfser, wenn es möglich ist. Dann läfst sich um die gedachte Fläche eine aus ähnlichen Ausschnitten bestehende ebene Figur verzeichnen, so dafs diese Figur jene Fläche um weniger übertrifft, als um den Unterschied zwischen dem Ausschnitte X und der erwähnten Figur (S. 23.). Sie sei daher beschrieben, und unter den Ausschnitten, aus denen die umschriebene Figur besteht, sei HAG der gröfsere, HOD der kleinere; so ist klar, dafs die umschriebene Figur kleiner ist, als der Ausschnitt X.

Man ziehe nun die bei H gleiche Winkel bildenden geraden Linien so weit hinaus, bis sie den Bogen des Ausschnitts HAF treffen; dann giebt es hier mehrere gerade Linien mit

---

F.140. (β) Die Fläche der dritten Schneckenlinie verhält sich demnach zum dritten Kreise, wie $(HC \times HB + \frac{1}{3} BC^2) : HC^2$; es ist aber $HC = 3\,BC$, $HB = 2\,BC$, mithin verwandelt sich das angegebene Verhältnifs in $(6\,BC^2 + \frac{1}{3} BC^2) : 9\,BC^2 = 19 : 27$; und eben so findet man das Verhältnifs der Fläche der vierten Schneckenlinie zum vierten Kreise, wie 37 : 48. u. s. w.

(S. 26. α) D. h. der Winkel X soll dem Winkel AHF gleich sein.

gleichen Unterschieden, nämlich die von H bis an die Schneckenfläche ausgehenden, deren gröfste HA, und deren kleinste HE ist; ferner giebt es hier noch andere gerade Linien, um eins weniger der Zahl nach, als jene, an Gröfse aber unter einander und der gröfsten gleich, nämlich die von H bis an den Bogen des Ausschnitts gehenden, FH nicht mitgezählt. Auch sind ähnliche Ausschnitte für alle beschrieben, sowohl für die, welche unter einander und der gröfsten gleich sind, als für die mit gleichen Unterschieden, nur ist für HE kein Ausschnitt beschrieben. Demnach ist das Verhältnifs der sämtlichen Ausschnitte, deren Linien unter einander und der gröfsten gleich sind, zu den Ausschnitten, deren Linien gleiche Unterschiede haben, ohne den Ausschnitt für die kleinste Linie, kleiner als das Verhältnifs $AH^2 : (AH \times HE + \frac{1}{3} EF^2)$ (S. 11. Folg.). Es betragen indessen die sämtlichen Ausschnitte für die Linien, welche unter sich und der gröfsten gleich sind, so viel, wie der Ausschnitt HAF; jene aber für die Linien mit gleichen Unterschieden betragen so viel, wie die äufsere Figur. Demnach ist

$$\textit{Aussch. } HAF : \textit{äufs. Fig.} < AH^2 : (AH \times HE + \tfrac{1}{3} EF^2)$$

Es ist aber $AH^2 : (AH \times HE + \frac{1}{3} EF^2) = \textit{Aussch. } HAF : \textit{Aussch. } X$.

Also ist der Ausschnitt X kleiner als die äufsere Figur. Allein er ist nicht kleiner, sondern gröfser, folglich wird der Ausschnitt X nicht gröfser sein, als die Schneckenfläche ABCDEA.

2) Er ist indessen auch nicht kleiner. Denn er sei, wo möglich, klei- F. 139. ner — und alles Uebrige sei eben so konstruirt. Dann läfst sich wiederum eine ebene aus ähnlichen Ausschnitten bestehende Figur in die Schneckenfläche dergestalt eintragen, dafs die gedachte Fläche die eingeschriebene um weniger als den Unterschied der Fläche und des Ausschnitts X übertrifft. (S. 23.). Sie sei also eingeschrieben, und unter den Ausschnitten, woraus sie besteht, sei HBG der gröfsere, OHE der kleinere, so ist einleuchtend, dafs die eingeschriebene Figur gröfser ist, als der Ausschnitt X.

Nun sind hier wieder mehrere Linien mit gleichen Unterschieden, nämlich die von H aus in die Schneckenlinie eintreffenden, deren gröfste HA, und deren kleinste HE ist; ferner sind hier noch andere Linien, nämlich die von H bis an den Bogen des Ausschnitts HAF reichenden; ihre Anzahl ist, HA ungezählt, um eins kleiner, als die der Linien mit gleichen Unterschieden, an Gröfse aber sind sie einander und der gröfsten gleich. Auch sind ähnliche Ausschnitte für alle beschrieben, mit Ausnahme der gröfsten unter den um gleiche Unterschiede verschiedenen, wozu kein Ausschnitt beschrieben worden. Daher stehen die sämtlichen Ausschnitte für die der gröfsten und unter sich gleichen Linien zu den Ausschnitten für die Linien mit gleichen Unterschieden in einem gröfseren Verhältnifse, als $AH^2 : (AH \times HE + \frac{1}{3} EF^2)$ (S. 11. Folg.). Also ist auch,

$$\textit{Aussch. } HAF : \textit{eingeschr. Fig.} > \textit{Aussch. } HAF : \textit{Aussch. } X$$

Mithin ist der Ausschnitt X gröfser als die eingeschriebene Figur. Er ist aber nicht gröfser, sondern kleiner; folglich ist der Ausschnitt X auch nicht kleiner als die Schneckenfläche ABCDEA, mithin ihr gleich.

Satz 27.

Die dritte Schneckenfläche (Erklär. 5.) ist das Zweifache der zweiten, die vierte das

Dreifache, die fünfte das Vierfache, und so fort jede ein Vielfaches nach der Zahlenreihe von der zweiten Fläche; die erste aber ist der sechste Theil der zweiten.

F. 140. Es sei eine im ersten, zweiten, und so weiter in den folgenden Umläufen nach willkührlicher Angabe beschriebene Schneckenlinie gegeben. Der Anfang derselben sei der Punkt H, die gerade HE aber der Anfang des Umlaufs. Unter den Schneckenflächen sei K die erste, L die zweite, M die dritte, N die vierte, O die fünfte. Es muſs gezeigt werden, daſs K der sechste Theil der folgenden Fläche sei, und daſs $M = 2L$, $N = 3L$, und so fortan jede folgende Fläche immer ein Vielfaches von L nach der Zahlenreihe.

1) Daſs nun $K = \frac{1}{6}L$, wird so gezeigt. Weil ja bewiesen wurde, daſs

$$(K + L) : \textit{zweit. Kreis} = 7 : 12 \text{ (S. 25.)}$$

und weil $\quad \textit{d. zweit. Kr.} : \textit{erst. Kr.} = 12 : 3$ (was einleuchtet. (α))

ferner $\quad \textit{d. erst. Kr.} : K = 3 : 1$ (S. 24.)

so folgt $\quad K = \frac{1}{6}L$ (β)

2) Ferner ist erwiesen, daſs

$$(K + L + M) : \textit{dritt. Kr.} = (CH \times HB + \tfrac{1}{3}CB^2) : CH^2 \text{ (S. 25.)}$$

Es ist aber $\quad \textit{d. dritt. Kr.} : \textit{zweit. Kr.} = CH^2 : HB^2$

und $\quad \textit{d. zweit. Kr.} : (K + L) = HB^2 : (HB \times HA + \frac{1}{3}AB^2)$ (S. 25.)

folglich $\quad (K + L + M) : (K + L) = (CH \times HB + \frac{1}{3}CB^2) : (HB \times HA + \frac{1}{3}AB^2)$

Letzteres Verhältniſs ist $= 19 : 7$ (γ)

Mithin $\quad (K + L + M) : (K + L) = 19 : 7$

folgl. $\quad M : (K + L) = 12 : 7$

Es ist aber $\quad (K + L) : L = 7 : 6$

also folgt $\quad M = 2L$

3) Daſs aber die folgenden sich nach der Zahlenreihe verhalten, soll gezeigt werden. Es verhält sich

$$(K + L + M + N + O) : \textit{Kr. um d. Halbm. } HE = (EH \times HD + \tfrac{1}{3}DE^2) : HE^2 \text{ (S. 25.)}$$

$$\textit{Kr. um } HE : \textit{Kr. um } HD = HE^2 : HD^2$$

$$\textit{Kr. um } HD : (K + L + M + N) = HD^2 : (HD \times HC + \tfrac{1}{3}DC^2) \text{ (S. 25.)}$$

folgl. $\quad (K + L + M + N + O) : (K + L + M + N) = (EH \times HD + \frac{1}{3}DE^2) : (HD \times HC + \frac{1}{3}DE^2)$

also auch $\quad O : (K + L + M + N) = \left\{\begin{matrix} EH \times HD + \frac{1}{3}DE^2 \\ - HD \times HC - \frac{1}{3}DC^2 \end{matrix}\right\} : (HD \times HC + \frac{1}{3}DE^2)$

Es ist aber $EH \times HD + \frac{1}{3}DE^2 - HD \times HC - \frac{1}{3}DC^2 = EH \times HD - HD \times HC = HD \times CE$, folgl.

$$O : (K + L + M + N) = HD \times CE : (HD \times HC + \tfrac{1}{3}DC^2)$$

(S. 27. α) Weil $HB = 2HA$, mithin

$$\textit{d. erst. Kr.} : \textit{zweit. Kr.} = HB^2 : HA^2 = 4 : 1 = 12 : 3.$$

(β) Aus den drei Proportionen folgt

$$(K + L) : K = 7 : 1$$

mithin $\quad L : K = 6 : 1$

(γ) Es ist $CH = 3HA$, $HB = 2HA$, $CB = HA = AB$, also

$$(CH \times HB + \tfrac{1}{3}CB^2) : (HB \times HA + \tfrac{1}{3}AB^2) = (6HA^2 + \tfrac{1}{3}HA^2) : (2HA^2 + \tfrac{1}{3}HA^2) = 14 : 7$$

Auf dieselbe Weise läſst sich auch zeigen, daſs sich verhält

$$N : (K + L + M) = HC \times BD : (HC \times HB + \tfrac{1}{3} CB^2)$$

also $N : (K + L + M + N) = HC \times BD : (HC \times HB + \tfrac{1}{3} CB^2 + HC \times BD)$

oder $(K + L + M + N) : N = (HC \times HB + \tfrac{1}{3} CB^2 + HC \times BD) : HC \times BD$

Jene Summe aber beträgt so viel, wie $HD \times HC + \tfrac{1}{3} DC^2$.

Weil nun $O : (K + L + M + N) = HD \times CE : (HD \times HC + \tfrac{1}{3} DC^2)$

und $(K + L + M + N) : N = (HD \times HC + \tfrac{1}{3} DC^2) : HC \times BD$

so folgt auch $O : N = HD \times CE : HC \times BD$

Es ist aber $HD \times CE : HC \times BD = HD : HC$, weil $CE = BD$,

Folglich ist auch $O : N = HD : HC$

Eben so läſst sich zeigen, daſs auch

$$N : M = HC : HB$$

und $M : L = HB : HA$

Die geraden EH, DH, CH, BH, AH, aber haben das Verhältniſs der auf einander folgenden Zahlen. (δ)

Satz 28.

Wenn in der durch einen Umlauf beschriebenen Schneckenlinie zwei Punkte, doch nicht die Endpunkte, angenommen sind; wenn dann aus den angenommenen Punkten gerade Verbindungslinien nach dem Anfange der Schneckenlinie gezogen, und aus dem Anfangspunkte mit diesen geraden Linien als Halbmessern Kreise beschrieben werden: so hat der von dem Bogen des gröſseren Kreises zwischen den geraden Linien, und von der Verlängerung der geraden umschlossene Flächenraum zu dem von dem Bogen des kleineren Kreises, von derselben Schneckenlinie und von der die Endpunkte beider verbindenden geraden eingeschlossene Flächenraum dasselbe Verhältniſs, wie der Halbmesser des kleineren Kreises nebst zwei Drittheilen des Unterschiedes der Halbmesser beider Kreise zu dem Halbmesser des kleineren Kreises nebst einem Drittheile desselben Unterschiedes.

Es sei eine Schneckenlinie, worin ABCD im ersten Umlaufe beschrieben; man nehme in derselben die zwei Punkte A, C, an, auch sei der Punkt H der Anfang der Schneckenlinie. Aus A, C, ziehe man gerade Linien nach H, und beschreibe Kreise aus dem Mittelpunkte H mit den Halbmessern HA, HC. Es muſs gezeigt werden, daſs F. 141.

$$O : Q = (HA + \tfrac{2}{3} GA) : (HA + \tfrac{1}{3} GA)$$

Es ward nämlich erwiesen, daſs

$$(N + Q) : \textit{Aussch.}\ GCH = (GH \times AH + \tfrac{1}{3} AG^2) : GH^2 \text{ (S. 26.)}$$

Mithin $O : (N + Q) = (AH \times AG + \tfrac{2}{3} AG^2) : (AH \times HG + \tfrac{1}{3} AG^2)$ (α)

(δ) Also verhält sich $L : M : N : O = AH : BH : CH : DH = 1 : 2 : 3 : 4$.

(S. 28. α) Aus der letzten Proportion hat man

$(\textit{Aussch.}\ GCH - N - Q) : (N + Q) = (GH^2 - GH \times AH - \tfrac{1}{3} AG^2) : (GH \times AH + \tfrac{1}{3} AG^2)$

d. h. $O : (N + Q) = ((GH - AG) . GH - \tfrac{1}{3} AG^2) : (GH \times AH + \tfrac{1}{3} AG^2)$

$= (AG . (AG + AH) - \tfrac{1}{3} AG^2) : (GH \times AH + \tfrac{1}{3} AG^2)$

$= (\tfrac{2}{3} AG^2 + AH \times AG) : (GH \times AH + \tfrac{1}{3} AG^2$

$$
\begin{array}{llll}
\text{Und weil} & (N+Q):(N+Q+O) & = & (AH \times HG + \tfrac{1}{3}AG^2) : HG^2 \\
\text{und} & (N+Q+O):N & = & HG^2 : AH^2 \\
\hline
\text{so folgt} & (N+Q):N & = & (AH \times HG + \tfrac{1}{3}AG^2) : AH^2 \\
\text{mithin} & (N+Q):Q & = & (AH \times HG + \tfrac{1}{3}AG^2) : (AG \times AH + \tfrac{1}{3}AG^2) \quad (\beta) \\
\text{Weil nun} & O:(N+Q) & = & (AH \times AG + \tfrac{2}{3}AG^2) : (AH \times HG + \tfrac{1}{3}AG^2) \\
\text{und} & (N+Q):Q & = & (AH \times HG + \tfrac{1}{3}AG^2) : (AG \times AH + \tfrac{1}{3}AG^2) \\
\hline
\text{so folgt} & O:Q & = & (AH \times AG + \tfrac{2}{3}AG^2) : (AG \times AH + \tfrac{1}{3}AG^2)
\end{array}
$$

Es ist aber

$$(AH \times AG + \tfrac{2}{3}AG^2) : (AG \times AH + \tfrac{1}{3}AG^2) = (AH + \tfrac{2}{3}AG) : (AH + \tfrac{1}{3}AG)$$

also folgt $O : Q = (AH + \tfrac{2}{3}AG) : (AH + \tfrac{1}{3}AG)$

(β) Aus der vorigen Proportion folgt

$$
\begin{array}{lrl}
 & Q : N & = (AH \times HG + \tfrac{1}{3}AG^2 - AH^2) : AH^2 \\
\text{also} & (N+Q) : Q & = (AH \times HG + \tfrac{1}{3}AG^2) : (AH \times HG + \tfrac{1}{3}AG^2 - AH^2) \\
 & & = (AH \times HG + \tfrac{1}{3}AG^2) : (AH \times AG + \tfrac{1}{3}AG^2)
\end{array}
$$

Von

den Konoiden und Sphäroiden.

Archimedes grüfst den Dositheus.

Ich übersende Dir in dieser Abhandlung sowohl zu den rückständigen Lehrsätzen die Darstellung der Beweise, welche Du in den früheren Mittheilungen noch nicht besafsest, als auch zu einigen andern späterhin entdeckten, die ich zwar schon vorlängst durchzudenken versuchte, welche mir aber einige Schwierigkeit darboten, und deren Ergründung mich in Verlegenheit setzte; und eben defshalb sind diese Sätze nicht zugleich mit den übrigen vorgelegt worden. Späterhin jedoch liefs mich gröfsere Sorgfalt das Unzugängliche auffinden. Die früher noch übrig gebliebenen Lehrsätze waren aufgegeben in Beziehung auf das parabolische Konoid; die jetzigen Entdeckungen betreffen sowohl das hyperbolische Konoid, als auch die sphäroidischen Körper, welche ich theils längliche, theils geplattete nenne.

I. Ueber das parabolische Konoid war Folgendes vorausgesetzt: (α)

1) Wenn eine um ihren unbewegten Durchmesser herumgeführte Parabel dort wieder inne hält, von wo ihre Bewegung ausging, so wird die durch sie umfafste körperliche Figur ein parabolisches Konoid, der unbewegte Durchmesser desselben die Axe, und der Punkt, wo die Axe mit dem Mantel zusammentrifft, der Scheitel genannt.

2) Wenn eine Ebene das parabolische Konoid berührt, und eine andere Ebene, parallel jener gelegt, einen Abschnitt des Konoids abtrennt, so wird der von dem Schnitt des Konoids umfafste Theil der schneidenden Ebene die Grundfläche, der Punkt aber, in welchem die andere Ebene das Konoid berührt, der Scheitel, und der in dem Abschnitt befindliche Theil einer durch den Scheitel des Konoids parallel mit dessen Axe gezogenen geraden Linie die Axe des Abschnitts genannt.

(Vorr. α) Vgl. Schneckenl. Vorrede. Die Beweise selbst stehen in gegenwärtiger Abhandlung S. 23 u. 26.

II. Zur Untersuchung ward aber Folgendes vorgelegt:

1) Wenn mittelst einer zu der Axe senkrechten Ebene ein Abschnitt des parabolischen Konoids abgetrennt worden ist; warum derselbe anderthalbmal so viel betrage, wie ein Kegel, welcher einerlei Grundfläche und Axe mit dem Abschnitt hat?

2) Wenn von einem parabolischen Konoid durch Ebenen in willkührlicher Lage zwei Abschnitte abgetrennt worden; warum diese zu einander im zwiefachen Verhältnifse ihrer Axen stehen?

III. In Beziehung auf das hyperbolische Konoid habe ich Folgendes vorausgesetzt:

1) Wenn eine Hyperbel samt ihrem Durchmesser und ihren Asymptoten sich in einer Ebene befinden, welche um den unbewegten Durchmesser herumgeführt wird, bis sie wieder an dem Orte innehält, von wo die Bewegung ausging, so werden augenscheinlich die Asymptoten einen gleichschenkligen Kegel beschreiben, dessen Scheitel der Durchschnittspunkt der Asymptoten, und dessen Axe der unbewegte Durchmesser sein wird; der aber unter der Hyperbel enthaltene Körper wird ein hyperbolisches Konoid, der unbewegte Durchmesser dessen Axe, und der Punkt, wo die Axe den Mantel des Konoids trifft, der Scheitel genannt. Auch heifst der unter den Asymptoten enthaltene Kegel der umspannende Kegel des Konoids, und die gerade Linie zwischen den Scheiteln des Konoids und des umspannenden Kegels der Ansatz der Axe.

2) Wenn eine Ebene das hyperbolische Konoid berührt, und eine andere mit ihr parallel geführte Ebene einen Abschnitt des Konoids abtrennt; so heifst der von dem Schnitt des Konoids umfafste Theil der schneidenden Ebene die Grundfläche, der Punkt aber, in welchem die berührende Ebene das Konoid trifft, der Scheitel, der in dem Abschnitte befindliche Theil einer durch den Scheitel des Konoids und des umspannenden Kegels gelegten geraden Linie die Axe, und die gerade Linie zwischen den erwähnten Scheiteln der Ansatz der Axe des Abschnitts.

3) Alle parabolischen Konoiden sind einander ähnlich; unter den hyperbolischen sollen aber diejenigen ähnlich heifsen, deren umspannende Kegel ähnlich sind. (β)

IV. Zur Untersuchung wird Folgendes vorgelegt. (γ)

1) Wenn mittelst einer zu der Axe senkrechten Ebene ein Abschnitt des hyperbolischen Konoids abgetrennt worden ist; warum dann der Abschnitt zu einem Kegel von derselben Grundfläche und Axe sich verhalte, wie die Axe des Abschnitts nebst dem Dreifachen des Ansatzes der Axe zu der Axe des Abschnitts nebst dem Zweifachen des Ansatzes.

2) Wenn durch eine zu der Axe nicht senkrechte Ebene ein Abschnitt des hyperbolischen Konoids abgetrennt wird; warum dann der Abschnitt zu dem Körper, welcher mit dem Abschnitte dieselbe Grundfläche und Axe hat, und ein Kegelabschnitt sein wird, sich so verhalten werde, wie die Axe des Abschnitts nebst dem Dreifachen des Ansatzes der Axe zu der Axe des Abschnitts nebst dem Zweifachen des Ansatzes.

V. In Beziehung auf die sphäroidischen Figuren haben wir Folgendes vorausgesetzt:

1)

(β) Die parabolischen Konoiden sind defshalb sämtlich ähnlich, weil alle Parabeln ähnlich sind.

(γ) Die Beweise hiezu stehen in S. 27 und 28.

1) Wenn eine um ihre grofse Axe bei ungeänderter Lage derselben herumgeführte Ellipse an dem Orte wieder inne hält, von welchem die Bewegung anhub, so wird der von der Ellipse beschriebene Körper ein längliches Sphäroid genannt. Wenn dagegen die kleine Axe unbewegt bleibt, und die Ellipse um diese bis an den Ort des Anfangs der Bewegung herumgeführt wird, so nennt man den von der Ellipse beschriebenen Körper ein geplattetetes Sphäroid. Bei beiden Sphäroiden wird der ruhende Durchmesser die Axe, der Punkt, wo die Axe in die Oberfläche trifft, der Scheitel, die Mitte der Axe der Mittelpunkt, und eine senkrechte zu der Axe durch den Mittelpunkt der Durchmesser genannt.

2) Wenn parallele Ebenen das eine oder das andere dieser Sphäroiden berühren, ohne zu schneiden, und wenn eine andere das Sphäroid schneidende Ebene mit den berührenden parallel geführt wird, so nennt man den von dem Schnitt des Sphäroids umfafsten Theil der schneidenden Ebene die Grundfläche, die Berührungspunkte des Sphäroids und jener parallelen Ebenen die Scheitel, und die in den Abschnitten befindlichen Theile der geraden Linie, welche die Scheitel verbindet, die Axen der entstandenen Abschnitte.

Dafs aber sowohl die das Sphäroid berührenden Ebenen nur in einem Punkte die Oberfläche treffen, als auch, dafs die gerade Verbindungslinie der Berührungspunkte durch den Mittelpunkt des Sphäroids gehe, werden wir nachweisen. (3)

3) Aehnlich werden diejenigen Sphäroiden genannt, deren Axen sich verhalten, wie die Durchmesser. — Sphäroidische und konoidische Abschnitte aber heifsen ähnlich, wenn sie von ähnlichen Körpern genommen sind, ähnliche Grundflächen haben, und ihre Axen, entweder senkrecht auf den Grundflächen stehend, oder gleiche Winkel mit den gleichliegenden Durchmessern der Grundflächen bildend, sich zu einander verhalten, wie die gleichliegenden Durchmesser der Grundflächen.

VI. Zur Untersuchung wird nun Folgendes über die Sphäroiden vorgelegt. (4)

1) Wenn irgend einer der sphäroidischen Körper von einer senkrecht zu der Axe durch den Mittelpunkt gelegten Ebene geschnitten worden ist; warum dann jeder der beiden entstehenden Abschnitte zweimal so grofs sein werde, als der Kegel, welcher einerlei Grundfläche mit dem Abschnitte und dieselbe Axe hat.

2) Wenn dagegen der Schnitt zwar senkrecht zu der Axe ist, nicht aber durch den Mittelpunkt geht; warum dann der gröfsere der entstehenden Abschnitte zu dem Kegel, welcher einerlei Grundfläche mit dem Abschnitte und dieselbe Axe hat, sich verhalten werde, wie die halbe Axe des Sphäroids nebst der Axe des kleineren Abschnitts zu der Axe des kleineren Abschnitts: der kleinere Abschnitt aber zu dem Kegel, welcher einerlei Grundfläche und Axe mit ihm hat, wie die Axe des Sphäroids nebst der Axe des gröfseren Abschnitts.

3) Wenn ferner eins der Sphäroiden von einer Ebene durch den Mittelpunkt, nicht senkrecht zu dem Durchmesser, geschnitten wird; warum dann jeder der beiden entstehenden Abschnitte zweimal so grofs sein werde, als der Körper, welcher einerlei Grundfläche und Axe mit dem Abschnitte hat, und eben ein Kegelabschnitt ist.

---

(3) Diefs geschieht in S. 17 und 18.

(4) Die Beweise dazu findet man in S. 29, 31, 30, 34, 32.

4) Wenn endlich das Sphäroid weder durch den Mittelpunkt noch senkrecht gegen den Durchmesser von einer Ebene geschnitten ist; so wird der gröſsere der gebildeten Abschnitte zu dem Körper auf derselben Grundfläche und mit derselben Axe sich verhalten, wie die halbe Verbindungslinie der Scheitelpunkte der Abschnitte nebst der Axe des kleineren Abschnitts zur Axe des kleineren Abschnitts; der kleinere Abschnitt aber wird sich zu dem Körper auf derselben Grundfläche und mit derselben Axe verhalten, wie die halbe Verbindungslinie der Scheitelpunkte der Abschnitte nebst der Axe des gröſseren Abschnitts zu der Axe des gröſseren Abschnitts. Der Körper aber wird auch in diesen Fällen ein Kegelabschnitt sein.

VII. Wenn die aufgeführten Lehrsätze erwiesen sind, so wird man durch sie manche Lehrsätze und Aufgaben finden können, z. B. folgenden: (ꝣ)

1) Daſs ähnliche Sphäroiden und ähnliche Abschnitte sphäroidischer und konoidischer Körper zu einander im dreifachen Verhältniſse der Axen stehen.

Ferner diesen:

2) In gleichen Sphäroiden verhalten sich die Quadrate der Durchmesser umgekehrt wie die Axen; und wenn in Sphäroiden die Quadrate der Durchmesser sich umgekehrt wie die Axen verhalten, so sind die Sphäroiden gleich.

Eben so etwa folgende Aufgabe:

3) Von einem gegebenen sphäroidischen oder konoidischen Abschnitte durch eine parallel einer gegebenen Ebene geführte Ebene einen Abschnitt dergestalt abzutrennen, daſs der Abschnitt einem gegebenen Kegel oder Cylinder oder einer gegebenen Kugel gleich sei.

VIII. Ich werde nun einige zu den Beweisen erfoderliche Lehrsätze und Bedingungen voranstellen, und hierauf das Vorgelegte Dir aus einander setzen. Lebe wohl!

Vorbemerkungen.

1) Wenn ein Kegel von einer Ebene geschnitten wird, die alle seine Seiten trifft, so wird der Schnitt entweder ein Kreis oder eine Ellipse sein. Ist er ein Kreis, so erhellt, daſs der auf der Seite der Spitze des Kegels liegende Abschnitt selbst ein Kegel sein werde; ist aber der Schnitt eine Ellipse, so soll die von dem Kegel an der Seite seines Scheitels abgetrennte Figur ein Kegelabschnitt heiſsen. Grundfläche des Abschnitts soll die von der Ellipse umschlossene Ebene, Scheitel aber der Punkt, welcher auch Scheitel des Kegels ist, und Axe die gerade Verbindungslinie vom Scheitel des Kegels zu dem Mittelpunkte der Ellipse genannt werden.

(ꝣ) Die drei folgenden Sätze erweiset Arch. nicht, sondern stellt sie ohne Beweise eben so auf, wie er früher alle die in den Vorreden zu Kug. u. Cyl. II., zu Schneckenl. und gegenwärtig aufgeführten aufgestellt hatte. Die Beweise selbst sollen der Abhandlung angehängt werden.

2) Wenn ein Cylinder von zwei parallelen Ebenen geschnitten wird, welche sämtliche Seiten des Cylinders treffen, so werden die Schnitte entweder Kreise oder Ellipsen, gleich und ähnlich einander, sein. Wofern nun die Schnitte Kreise sind, so wird offenbar die von dem Cylinder zwischen den parallelen Ebenen abgetrennte Figur selbst ein Cylinder sein. Wenn aber die Schnitte Ellipsen sind, so soll die von dem Cylinder zwischen den parallelen Ebenen abgetrennte Figur ein Cylinderstück heifsen. Grundflächen desselben sollen die von den Ellipsen eingeschlossenen Ebenen, und Axe die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte der Ellipsen genannt werden. Diese wird aber mit der Axe des Cylinders in ebenderselben geraden Linie liegen.

Satz 1.

Wenn es eine willkührliche Menge Gröfsen mit gleichen Unterschieden giebt, wobei der Unterschied der kleinsten selbst gleich sei; ferner andere Gröfsen in gleicher Anzahl, und jede der gröfsten gleich; so wird die Summe der Gröfsen, deren jede der gröfsten gleich ist, kleiner sein, als das Zweifache der Summe der Gröfsen mit gleichen Unterschieden, gröfser jedoch, als nach Abzug der gröfsten die doppelte Summe der übrigen.

Der Beweis fält in die Augen. (α)

Satz 2.

Wenn Gröfsen in willkührlicher Anzahl andern eben so geordneten und in gleicher Anzahl vorhandenen Gröfsen paarweise proportionirt sind; wenn ferner jene ersten, entweder sämtlich oder nur einige von ihnen, nach irgend welchen Verhältnifsen mit noch andern Gröfsen, und jene zweiten wieder mit andern homologen Gröfsen nach denselben Verhältnifsen verglichen werden: so verhält sich die Summe der ersten zur Summe der mit ihnen verglichenen eben so, wie die Summe der zweiten zur Summe der mit ihnen verglichenen. (α)

Es gebe eine Anzahl Gröfsen A, B, C, D, E, F, und eine gleiche Anzahl anderer Gröfsen G, H, I, K, L, M, paarweise in gleichem Verhältnifse, d. h. F. 142.

$$A : B = G : H$$

$$B : C = H : I, \text{ und so weiter.}$$

(S. 1. α) Es gebe folgende zwei Gröfsenreihen von gleicher Gliederanzahl:

$$\text{I. } a + 2a + 3a + 4a + \ldots + na = S$$

$$\text{II. } na + na + na + na + \ldots + na = S'$$

so ist $2S = na + n^2a$ und $2(S - na) = n^2a - na$, auch $S' = n^2a$,

also $S' < 2S$ und $S' > 2(S - na)$

(S. 2. α) Es gebe zwei Reihen paarweise proportionirter Glieder von gleicher Anzahl

$$\text{I. } a, b, c, d, \ldots = S \text{ und II. } ae, be, ce, de \ldots = S'$$

so ist $a : b = ae : be$, u. s. w.

Dann gebe es zwei andere Reihen von derselben Gliederzahl unter folgender Form:

III. $na, pb, qc, rd \ldots = s$ und IV. $nae, pbe, qce, rde \ldots = s'$ so behauptet Archimedes, es verhalte sich $S : S' = s : s'$,

was augenscheinlich richtig ist, denn man hat sofort

$$(a + b + c \ldots) : (a + b + c \ldots)e = (na + pb + qc \ldots) : (na + pb + qc \ldots)e$$

Es seien dann die Gröſsen A, B, C, D, E, F, mit anderen Gröſsen N, O, P, Q, R, S, nach irgend welchen Verhältniſsen verglichen, und die Gröſsen G, H, I, K, L, M, mit anderen homologen T, U, V, W, X, Z, nach denselben Verhältniſsen, so daſs sich verhalte

$$A : N = G : T$$
$$B : O = H : U, \text{ u. s. w.}$$

Dann muſs gezeigt werden, daſs sich verhalte

$$(A+B+C+D+E+F) : (N+O+P+Q+R+S) = (G+H+I+K+L+M) : (T+U+V+W+X+Z)$$

Weil nämlich

$$N : A = T : G$$
$$A : B = G : H$$
$$B : O = H : U$$

so folgt $N : O = T : U$

Durch dieselben Schlüſse folgt aber auch

$$O : P = U : V, \text{ u. s. w.}$$

Auch verhält sich

$$(A+B+C+D+E+F) : A = (G+H+I+K+L+M) : G$$

Es ist aber $A : N = G : T$, und

$$N : (N+O+P+Q+R+S) = T : (T+U+V+W+X+Z)$$

Folglich $(A+B+C+D+E+F) : (N+O+P+Q+R+S)$
$= (G+H+I+K+L+M) : (T+U+V+W+X+Z)$

Zusatz. Auch ist einleuchtend, wenn von den Gröſsen A, B, C, D, E, F, nur die A, B, C, D, E, mit N, O, P, Q, R, verglichen werden, ohne F zu vergleichen; wenn ferner von den Gröſsen G, H, I, K, L, M, nur die G, H, I, K, L, mit T, U, V, W, X, in gleicher Anordnung verglichen werden, ohne M zu vergleichen: daſs dann ganz eben so sich verhalten werde

$$(A+B+C+D+E+F) : (N+O+P+Q+R) = (G+H+I+K+L+M) : (T+U+V+W+X) \; (\beta)$$

Satz 3.

Wenn es eine willkührliche Menge unter sich gleicher Linien giebt, und an jede derselben ein Rechteck mit einem überragenden Quadrate herangelegt worden; wenn ferner die Seiten dieser überragenden Quadrate um einen gleichen Unterschied sich übertreffen, dieser Unterschied selbst aber der kleinsten Quadratseite gleich ist; wenn endlich eine eben so groſse Anzahl von Rechtecken, jedes dem gröſsten von jenen gleich, vorhanden ist: so steht die Summe derselben zur Summe jener in einem kleineren Verhältniſse, als die Seite des kleinsten überragenden Quadrats nebst einer der gleichen Linien zu dem dritten Theile der Seite des gröſsten überragenden Quadrats nebst der Hälfte von einer dergleichen Linien; dagegen zu der Summe der letztern Rechtecke ohne das gröſste in einem gröſseren Verhältniſse, als eben dieses ist. (α)

(β) Dieſs ergiebt sich von selbst aus der vorigen Darstellung.

(S. 3. α) Folgende algebraische Darstellung ist bequemer zu übersehen, als die geometrische des Archimedes.

Die willkührliche Menge gleicher Linien sei durch die Buchstaben A bezeichnet, und an jede derselben ein Rechteck mit einem überragenden Quadrate angelegt. Die Seiten dieser Ueberstände, nämlich B, C, D, E, F, G, sollen einander um einen gleichen Unterschied übertreffen, auch der Unterschied selbst gleich der kleinsten sein. Die gröſste sei B, die kleinste G. Die andern Rechtecke, in deren jedem die Buchstaben HIKL stehen, sollen in derselben Anzahl vorhanden und einzeln dem gröſsten, nämlich dem an AB angelegten gleich sein. Auch sei die Linie HI = A, KL = B, ferner jede Linie HI = 2 I, jede Linie KL = 3 K. Dann ist zu beweisen, daſs F.143.

Rchtke HIKL : (*Rchtke* AB + AC + AD + AE + AF + AG) < *Lin.* HIKL : *Lin.* IK

und daſs

Rchtke HIKL : (*Rchtke* AC + AD + AE + AF + AG) > *Lin.* HIKL : *Lin.* IK.

Es befinden sich hier nämlich mehrere Rechtecke mit der Bezeichnung A, welche sich um gleiche Unterschiede übertreffen, so daſs der Unterschied selbst dem kleinsten gleich ist, indem ja die Breiten der angelegten Rechtecke gleiche Unterschiede haben; ferner giebt es eine gleiche Anzahl anderer Rechtecke mit der Bezeichnung HI, jedes dem gröſsten gleich. Dem-

---

Jede der ursprünglich gleichen Linien sei $= a$, ihre Anzahl $= n$, die Seite des kleinsten Quadrats $= q$, die Summe der einander gleichen Rechtecke $= S$, die Summe der einander gleichen Rechtecke $= S$, die Summe der ungleichen Rechtecke $= S'$; so ist $AG = a + q$; $AF = a + 2q$; $AE = a + 3q$ u. s. w.; also die gröſste dieser Linien $= a + nq = HIKL$, und das gröſste Rechteck $AB = HIKL = (a + nq)\, nq$. Nun behauptet Archimedes, es sei

I. $S : S' < (a + nq) : (\tfrac{1}{3} nq + \tfrac{1}{2} a)$

II. $S : (S' - (a + nq)\, nq) > (a + nq) : (\tfrac{1}{3} nq + \tfrac{1}{2} a)$

Nun ist $S = (a + nq)\, n^2 q$

und
$$S' = (a + q)q + (a + 2q)\,2q + (a + 3q)\,3q + \ldots + (a + nq)\,nq$$
$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + n)\,aq + (1 + 4 + 9 + \ldots + n^2)\,q^2$$
$$= \frac{1 + n}{2}\,naq + \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\,q^2 \text{ (Vgl. Klügel M. W. I. 302.)}$$
$$= \frac{nq}{6}\left(3a + 3na + 2n^2q + 3nq + q\right)$$

also $S' - (a + nq)\,nq = \dfrac{nq}{6}(-3a + 3na + 2n^2q - 3nq + q)$

Hiernach erhält die erste Behauptung folgende Gestalt:

$$\frac{(a + nq)\,n^2q}{\frac{nq}{6}\left(3a + 3na + 2n^2q + 3nq + q\right)} < \frac{a + nq}{\frac{1}{6}(2nq + 3a)}, \text{ das heiſst:}$$

$$\frac{n}{3a + 3na + 2n^2q + 3nq + q} < \frac{1}{2nq + 3a}, \text{ oder}$$
$$3a + 3na + 2n^2q + 3nq + q > 2n^2q + 3na,$$
$$\text{oder } 3a + 3nq + q > 0$$

was freilich richtig ist, indem alle Gröſsen positiv sind.

Die zweite Behauptung erscheint unter folgender Form:

$$\frac{(a + nq)\,n^2q}{\frac{nq}{6}\left(-3a + 3na + 2n^2q - 3nq + q\right)} > \frac{a + nq}{\frac{1}{6}(2nq + 3a)}, \text{ das heiſst:}$$
$$-3a + 3na + 2n^2q - 3nq + q < 2n^2q + 3na$$
$$\text{oder } q < 3a + 3nq$$

was wiederum einleuchtend ist.

nach ist die Summe der Rechtecke HI kleiner als das Zweifache der Summe der Rechtecke A; gröſser jedoch, als das Zweifache der Summe der letzteren ohne das gröſste (S. 1.). Daher ist die Summe der Rechtecke I kleiner als die Summe der Rechtecke A, gröſser aber, als letztere Summe ohne das gröſste. Auſserdem sind hier mehrere gerade Linien B, C, D, E, F, G, mit gleichen Unterschieden, und die kleinste dem Unterschiede selbst gleich; ferner eben so viele andere Linien KL, deren jede der gröſsten gleich ist. Also ist die Summe der Quadrate auf den Linien, welche unter einander und der gröſsten gleich sind, kleiner als das Dreifache der Summe der Quadrate auf den Linien mit gleichen Unterschieden; gröſser jedoch, als das Dreifache dieser Summe ohne das Quadrat auf der gröſsten Linie. Denn dieſs ward in der Abhandlung über die Schneckenlinien erwiesen. (*Schneckenl. S.* 10 *Folg.* 1. 2.). Folglich ist die Summe der Rechtecke K kleiner als die Summe der Quadrate $B + C + D + E + F + G$; gröſser hingegen, als die Summe $C + D + E + F + G$. Daher ist denn die Summe der Rechtecke IK kleiner, als die Summe der Rechtecke $AB + AC + AD + AE + AF + AG$; gröſser aber als die Summe $AC + AD + AE + AF + AG$; woraus hervorgeht, daſs

$$\textit{Rechtecke } HIKL : (\textit{Rechtecke } AB + AC + AD + AE + AF + AG) < HL : IK$$

daſs aber

ersteres Verhältniſs ohne das Rechteck AB gröſser sei, als letzteres.

Satz 4. A.

Wenn gerade aus einerlei Punkt ausgehende Linien irgend einen Kegelschnitt berühren, und parallel mit ihnen andere gerade Linien in dem Kegelschnitte gezogen sind, die sich einander schneiden; so verhalten sich die Rechtecke unter den Abschnitten zu einander, wie die Quadrate der berührenden, wobei das Rechteck unter den Abschnitten der einen Linie dem Quadrate der mit ihr parallelen Berührungslinie entspricht.

Dieſs ist in den Anfangsgründen der Kegelschnitte nachgewiesen. (α)

Satz 4. B.

Wenn von einerlei Parabel zwei willkührliche Abschnitte mit gleichen Durchmessern abgeschnitten werden; so werden sowohl die Abschnitte selbst gleich sein, als auch die darin beschriebenen Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie und Höhe wie die Abschnitte haben. — Durchmesser nenne ich aber bei jedem Abschnitte diejenige Linie, welche alle der Grundlinie parallel gezogenen geraden halbtheilt.

F. 144. Es sei ABC eine Parabel, von welcher zwei Abschnitte ADE und HBC abgetrennt sein sollen. DF sei Durchmesser des Abschnitts ADE, und BG des Abschnitts HBC, auch sei $DF = BG$. Es muſs gezeigt werden, daſs die Abschnitte ADE, HBC, gleich sind, und eben so die auf angegebene Weise darin beschriebenen Dreiecke.

Zuerst sei die den einen Abschnitt abtrennende Linie HC senkrecht auf der Axe der Parabel selbst. Man nehme dann die mit M bezeichnete Linie zum Parameter, (d. i. die doppelte Entfernung des Kegelscheitels von der Parabelaxe) (α) und fälle aus A das Perpendikel

---

(S. 4. A. α) Den Beweis giebt Apollonius, Kegelsch. III. 17. 18.

(S. 4. B. α) Die eingeklammerten Worte beziehen sich darauf, daſs die alten Geometer vor Apollonius die Pa-

AK auf DF. Weil nun DF der Durchmesser des Abschnitts ist, und AE in F gehalbtheilt wird, weil ferner DF parallel dem Durchmesser der Parabel, denn nur unter dieser Bedingung halbtheilt sie alle Parallelen zu AE; (β) so verhalte sich

$$AF^2 : AK^2 = N : M.$$

Dann sind die Quadrate der mit AE parallel auf DF gezogenen Ordinaten den Rechtecken aus dem Parameter N und aus den Abscissen auf DF vom Anfangspunkte D gleich; denn diefs ist in den Kegelschnitten bewiesen. (γ) Demnach ist auch $AF^2 = N \times DF$. Zugleich ist $GH^2 = M \times BG$, weil HG senkrecht zu dem Durchmesser ist. Also verhält sich

$$AF^2 : HG^2 = N : M, \text{ weil } DF = BG$$

Es verhält sich aber $AF^2 : AK^2 = N : M$;

mithin ist $HG = AK$. Auch ist $BG = DF$, folglich $HG \times BG = AK \times DF$, und hiernach

---

rabel als den mit einer Kegelseite parallelen Schnitt eines geraden rechtwinkligen Kegels betrachteten. Es sei nämlich ABC der Durchschnitt durch die Axe irgend eines Kegels, und GDH ein durch D parallel mit der Seite AC geführter Schnitt, so wird letzterer eine Parabel sein. Aus dem willkührlichen Punkte I der Parabel ziehe man die Ordinate IK rechtwinklig auf die Parabelaxe DF, durch K die Linie LM ‡ BC, und durch D die Linie DE ‡ BC; der Parameter sei p, so ist

$$IK^2 = p.\,DK, \text{ und zugleich } IK^2 = LK \times KM = LK \times DE$$

also $p.\,DK = LK \times DE$

d. h. $DK : LK = DE : p$

Es ist aber $DK : LK = AD : DE$, weil $\triangle DLK \simeq \triangle ADE$, und weil $AD = AE$ ist.

folglich $DE : p = AD : DE$, d. h. $p.\,AD = DE^2$

Ist nun $A = 90°$, so ist $DE^2 = 2AD^2$, folglich $p.\,AD = 2AD^2$, Also $p = 2AD$.

Ist aber $A \lesseqgtr 90°$, so ist $DE^2 \lesseqgtr 2AD^2$, (Euklides II. 12. 13) also $p \lesseqgtr 2AD$.

Mithin ist die von Archimedes angegebene Eigenschaft des Parameters keine allgemeine, sondern gilt nur für den Fall, da man die Parabel als den Schnitt eines rechtwinkligen Kegels ansieht. Indessen giebt ein solcher Kegel allerdings allein schon alle möglichen Parabeln. Dieselbe Ansicht findet sich in der Abhandlung von schwimmenden Körpern II. S. 2, und öfter.

(β) Diefs folgt als Umkehrung aus Apollon. Kegelsch. I. 46.

(γ) Es sei BDA eine Parabel, BG deren Axe, DT eine Berührungslinie für den Punkt D, DK ein Durchmesser, F 144 b
die Linien BL, ID, AG, rechtwinklig zu der Axe, und irgend eine gerade Linie S dergestalt genommen, dafs

$$DQ : DL = S : 2\,DT;$$

dann beweiset Apollonius (Kegelsch. I. 49), es sei S der Parameter der Parabel für den Durchmesser DF, d. h. es sei $AF^2 = S \times DF$. Archimedes nun bezeichnet mit M den Parameter für die Axe, also

ist $M = \frac{DI^2}{BI} = \frac{DI^2}{\frac{1}{2}TI} = \frac{2DI^2}{TI}$ indem $BI = BT$ ist (Klügel Math. W. Art. Parabel 13).

Vorhin war $S = \frac{2DT \times DQ}{DL}$; es ist aber $DQ = \frac{1}{2}DT$ und $DL = BI = \frac{1}{2}TI$,

also $S = \frac{2DT^2}{TI}$, mithin verhält sich

$$M : S = DI^2 : DT^2$$

Nun ist $\triangle DTI \sim \triangle AFK$, also $DI : DT = AK : AF$

mithin $M : S = AK^2 : AF^2$

Archimedes fodert aber, es solle sich verhalten

$$M : N = AK^2 : AF^2$$

mithin ist $N = S$, d. h. N ist der Parameter für den Durchmesser DF.

$\Delta HGB = \Delta DAF$, mithin ist auch das Doppelte der Dreiecke gleich. Es ist aber *Absch.* $ADE = \frac{4}{3}\Delta\ ADE$ und *Absch.* $HBC = \frac{4}{3}\Delta HBC$; (δ) mithin erhellet, daſs sowohl die Abschnitte als die darin beschriebenen Dreiecke gleich sind.

Wenn hiernächst keine der beiden die Abschnitte bildenden geraden Linien senkrecht auf dem Durchmesser der Parabel steht, so trage man von diesem Durchmesser eine dem Durchmesser des einen Abschnitts gleiche Linie ab, und lege durch deren Endpunkt eine Linie senkrecht zu dem Durchmesser; so wird der entstehende Abschnitt jedem der beiden ersten Abschnitte gleich sein. Mithin erhellet das Behauptete.

Satz 5.

Jede von einer Ellipse umschlossene Fläche steht zu dem Kreise, dessen Durchmesser die groſse Axe der Ellipse ist, in demselben Verhältniſse, wie die kleine Axe zur groſsen, d. h. wie jene zum Durchmesser des Kreises.

F. 145. Es sei ABCD eine Ellipse, AC deren groſse Axe, BD die kleine; und um den Durchmesser AC gebe es einen Kreis. Es soll bewiesen werden, daſs

$$\textit{Ellipse} : \textit{Kreis} = BD : AC = BD : EF.$$

Es verhalte sich $BD : EF = \textit{Kreis}\ Z : \textit{Kreis}\ AECF$,

so behaupte ich, daſs der Kreis Z gleich sei der Ellipse:

1. Denn wofern er ihr nicht gleich ist, so sei er, wo möglich, gröſser. Dann läſst sich in dem Kreise Z ein Vieleck von gerader Winkelzahl (α) beschreiben, was gröſser ist, als die Fläche ABCD. Man denke dasselbe beschrieben, und verzeichne ferner in dem Kreise AECF ein jenem ähnliches Vieleck. Dann fälle man aus den Winkeln dieses Vielecks Perpendikel auf den Durchmesser AC, une verbinde die Punkte, in welchen die Ellipse von diesen Perpendikeln geschnitten wird, durch gerade Linien, so wird in der Ellipse ein Vieleck beschrieben sein, was sich zu dem in dem Kreise AECF beschriebenen verhalten wird, wie BD zu EF. Denn weil die senkrechten EH, KL, in den Punkten B, M, nach einerlei Verhältniſse geschnitten werden, so verhält sich

$$\textit{Trapez.}\ LE : \textit{Trap.}\ HM = HE : BH \ (\beta)$$

Zu-

(δ) Nach Quadr. d. Parab. S. 17.

(S. 5. α) Eigentlich ein Vieleck, dessen Seitenzahl durch 4 theilbar ist.

(β) Allgemein verhalten sich die Ordinaten der Ellipse, wie die zu denselben Abscissen gehörenden Ordinaten eines Kreises um die groſse Axe als Durchmesser. Denn es sei $AH = a$, $BH = b$, $HG = u$, $HL = u'$,

so ist $NG^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}u^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^3)$ und $ML^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}u'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u'^2)$

ferner $PG^2 = a^2 - u^2$ und $KL^2 = a^2 - u'^2$, folglich

$$NG^2 : ML^2 = (a^2 - u^2) : (a^2 - u'^2) = PG^2 : KL^2$$

also $NG : ML = PG : KL$

und da dieſs allgemein gilt, so hat man auch

$$ML : BH = KL : EH$$

folglich $EH : BH = (KL + EH) : (ML + BH)$

Nun ist $\textit{Trap.}\ LE = (KL + EH) \times \frac{1}{2} LH$

und $\textit{Trap.}\ HM = (ML + BH) \times \frac{1}{2} LH$

folglich $LE : HM = (KL + EH) : (ML + BH) = EH : BH$

Zugleich verhält sich jedes der übrigen Trapezien in dem Kreise zu dem zugehörigen in der Ellipse, wie $HE : BH$; auch stehen die Dreiecke bei A und C in dem Kreise zu denen in der Ellipse in demselben Verhältnifse. mithin wird sich auch verhalten

$$\textit{Vieleck in } AECF : \textit{Vieleck in d. Ellipse} = EF : BD$$

Eben so verhält sich aber auch das erstere Vieleck zu dem Vieleck in dem Kreise Z, weil die Kreise selbst sich also verhielten. Mithin ist das Vieleck in Z dem Vielecke in der Ellipse gleich, was doch unmöglich ist; denn jenes Vieleck war gröfser, als die ganze Fläche der Ellipse.

2. So sei der Kreis wo möglich kleiner. Dann läfst sich wiederum in der Ellipse ein Vieleck von gerader Seitenzahl (α) beschreiben, was gröfser ist, als der Kreis Z. (γ) Es sei beschrieben, und die aus den Winkeln desselben auf AC gefällten Perpendikel bis an den Umfang des Kreises verlängert. Dann wird also wiederum in dem Kreise AECF ein Vieleck verzeichnet sein, was sich zu dem in der Ellipse beschriebenen verhalten wird, wie EF zu BD. Ist nun auch in dem Kreise Z ein ähnliches Vieleck beschrieben, so wird man beweisen, dafs das Vieleck in Z dem Vielecke in der Ellipse gleich sei, was doch unmöglich ist. Mithin ist der Kreis Z auch nicht kleiner als die Fläche der Ellipse. Daraus geht hervor, dafs die erwähnte Fläche zu dem Kreise AECF sich verhalte, wie BD zu EF.

Satz 6.

Jeder von einer Ellipse umschlossene Flächenraum verhält sich zu einem Kreise, wie das Rechteck unter den Axen der Ellipse zu dem Quadrate des Kreisdurchmessers.

Die Fläche der Ellipse sei X, deren Axen AC, BD, und AC die grofse; auch sei Z ein Kreis mit dem Durchmesser EF. Es soll gezeigt werden, dafs sich verhalte F. 146.

$$X : Z = AC \times BD : EF^2$$

Man beschreibe einen Kreis um den Durchmesser AC; dann verhält sich

$$X : \textit{Kreis um } AC = AC \times BD : AC^2$$

Denn es ward bewiesen, dafs sich verhalte $X : \textit{Kr. um } AC = BD : AC$ (S. 5)

Es verhält sich aber

$$\textit{Kreis um } AC : \textit{Kr. um } EF = AC^2 : EF^2$$

Folglich $$X : \textit{Kreis um } EF = AC \times BD : EF^2$$

Satz 7.

Die Flächen der Ellipsen verhalten sich zu einander, wie die Rechtecke unter ihren Axen.

Es seien die Rechtecke unter den Axen der Ellipsen A, B, vorhanden, und zwar sei F. 147. das Rechteck CD unter den Axen der Ellipse A, das Rechteck EF aber unter den Axen der anderen Ellipse enthalten. Zu zeigen ist, dafs sich verhalte

$$\textit{Fläche } A : \textit{Fl. } B = CD : EF$$

(γ) Die Möglichkeit erkennt man leicht auf demselben Wege, auf welchem man nach Euklid. XII. 2 das Aehnliche für den Kreis darthut.

Man nehme irgend einen Kreis Z; das Quadrat seines Durchmessers sei KL, so ist

$$A : Z = CD : KL$$
$$Z : B = KL : EF$$

Folglich $A : B = CD : EF$

Folgerung. Hieraus erhellet, daſs die Flächen ähnlicher Ellipsen sich zu einander verhalten, wie die Quadrate ihrer entsprechenden Axen. (α)

Satz 8.

Wenn eine Ellipse gegeben, und im Mittelpunkte derselben auf ihrer Ebene eine Linie senkrecht errichtet ist; so ist es möglich, einen Kegel zu finden, dessen Spitze im Endpunkte des errichteten Perpendikels liegt, und in dessen Mantel die gegebene Ellipse sich befindet.

F. 148. Es sei irgend eine Ellipse gegeben, und in ihrem Mittelpunkte auf ihrer Ebene eine senkrechte Linie errichtet; auch sei durch die errichtete Linie und durch die kleine Axe eine Ebene gelegt. Diese kleine Axe sei AB, der Mittelpunkt der Ellipse sei D, das im Mittelpunkte errichtete Perpendikel sei CD, dessen Endpunkt C. Man denke sich die Ellipse um AB als Axe in einer zu CD senkrechten Ebene beschrieben; so soll man also einen Kegel finden, dessen Spitze der Punkt C ist, und in dessen Mantel die Ellipse liegen soll.

Aus C ziehe man gerade Linien nach A, B, und verlängere sie. Dann ziehe man aus A die Linie AF so, daſs sich verhält

$$AE \times EF : EC^2 = \textit{Quadr. d. halben grofsen Axe} : DC^2.$$

Möglich ist dieſs, weil dieſs Verhältniſs gröſser ist, als das Verhältniſs $AD \times DB : DC^2$. (α)

(S. 7. α) Die beiden Ellipsen A, B, mögen ähnlich sein, so verhält sich

$$DG : CG = FH : EH; \text{ also } DG \times CG : CG^2 = EH \times FH : EH^2$$

oder $DG \times CG : EH \times FH = CG^2 : EH^2 = DG^2 : FH^2$

Also ist $A : B = DG \times CG : EH \times FH = CG^2 : EH^2 = DG^2 : FH^2$

(S. 8. α) Archimedes behauptet, die Möglichkeit der Darstellung dieser Proportion sei abhängig von dem Umstande, daſs $AE \times EF : EC^2 > AD \times DB : DC^2$

d. i. daſs $AE \times EF : EC^2 > QE \times EP : EC^2$;

denn es ist $AD : DC = QE : EC$

und $DB : DC = EP : EC$

folglich $AD \times DB : DC^2 = QE \times EP : EC^2$.

Seine Bedingung ist mithin eigentlich die, daſs $AE \times EF > QE \times EP$ sei. Daſs nun wirklich die Konstruktion jener Proportion nur unter dieser Bedingung möglich sei, erhellet so:

1) Man nehme an, es sei $AE \times EF = QE \times EP$, d. h. es sei

$$AE : QE = EP : EF.$$

Dann wäre $\triangle AEQ \sim \triangle PEF$, also der Winkel $QAE = EFP$, woraus hervorgeht, daſs entweder CA ‡ CF sein müſste, da doch beide Linien sich in C schneiden; oder daſs AB, QP und AF nicht drei verschiedene Linien, sondern nur eine einzige, nämlich AB selbst wären, denn in diesem Falle verwandelt sich die Bedingung in folgende: $AD : AD = AD : AD$

F 148 a 2. Man nehme also an, es sei $AE \times EF < QE \times EP$, d. h. es sei

$$AE : QE < EP : EF$$

Nun lege man durch AF eine Ebene senkrecht gegen die Ebene; worin AC, AF sich befinden; beschreibe in dieser Ebene einen Kreis um den Durchmesser AF, und stelle hierauf einen Kegel, dessen Spitze der Punkt C ist; so wird man beweisen können, daſs die Ellipse in dem Mantel dieses Kegels liege.

Denn wofern sie nicht in dem Mantel des Kegels liegt, so muſs es nothwendig einen Punkt der Ellipse geben, der nicht in dem Mantel des Kegels sich befindet. Man stelle sich also vor, es sei ein Punkt H der Ellipse dergestalt angenommen, daſs er nicht in dem Kegelmantel liegt, und ziehe aus H die Linie HK senkrecht auf AB, so wird sie zugleich senkrecht

---

Dann verlängere man EF dergestalt, daſs sich verhält

$$AE : QE = EP : EV$$

und ziehe PV, woraus die Aehnlichkeit der Dreiecke AEQ, EPV, und die Gleichheit der Winkel QAE, EVP, mithin die parallele Lage der Linien CQ, PV, hervorgehen würde. Es müſste also $CAV + PVA = 2R$ sein. Nun ist gewiſs $CAV + CFA < 2R$; man erhielte folglich $CFA < PVA$, was gewiſs falsch ist. Mithin ist auch unter dieser Bedingung die Proportion nicht zu konstruiren.

3. Man nehme dagegen an, es sei $AE \times EF > QE \times EP$, d. h. es sei

$$AE : QE > EP : EF,$$

und verkürze EF so, daſs sich verhält

$$AE : QE = EP : EZ$$

und ziehe PZ; dann folgt auf ähnliche Weise, es müſse $PZ \parallel CQ$, mithin $CAZ + PZA = 2R$ sein. Nun ist wirklich $CAZ + PFZ < 2R$, es kann folglich allerdings $CAZ + PZA = 2R$ sein, da $PFZ < PZA$ ist.

Soll demnach AF eine von AB verschiedene Linie sein, so ist die obige Proportion nur unter der letzten Bedingung möglich.

Es ist übrigens das Verhältniſs $AD \times DB : DC^2$ kein anderes, als $AD^2 : DC^2$, und die Bedingung, von welcher Archimedes ausgeht, ist daher keine andere als die, daſs das Quadrat der halben groſsen Axe gröſser sei, als das Quadrat der halben kleinen, was freilich richtig ist, so lange die Ellipse noch kein Kreis ist.

Die verlangte Konstruktion hat Archimedes nirgend wirklich angestellt, sondern sich mit der Angabe der Möglichkeit im Allgemeinen begnügt. Folgende Darstellung wird befriedigen können.

Man setze die halbe groſse Axe $= a$, die halbe kleine $= AD = BD = b$, das Perpendikel $CD = c$, F 148.b
ferner $AF = u$, $AE = x$, $CE = y$, und ziehe $DI \parallel AF$ durch D.; so ergeben sich folgende Gleichungen:

1) Aus der gegebenen Proportion

$$AE \times EF : CE^2 = a^2 : DC^2$$

d. i. $\quad x(u-x) : y^2 = a^2 : c^2$, also $\quad a^2 y^2 = c^2 x (u-x)$

2) Ferner ist $AE^2 = AD^2 + DE^2$, also $\quad x^2 = b^2 + (y-c)^2$

3) Endlich ist $EF : DI = CE : CD$

d. h. $(u-x) : \frac{1}{2}u = y : c$, also $\quad 2c(u-x) = uy$

Woraus man nach gehöriger Rechnung erhält:

$$u^4 - \frac{8a^2(2a^2 + c^2 - b^2)}{b^2 + c^2} u^2 = -16a^4, \text{ mithin}$$

$$u^2 = \frac{4a^2}{b^2 + c^2}\left(2a^2 + c^2 - b^2 \pm 2\sqrt{(a^2 + c^2)(a^2 - b^2)}\right), \text{ folglich}$$

$$u = \pm \frac{2a}{\sqrt{b^2 + c^2}}\left(\sqrt{a^2 + c^2} \pm \sqrt{a^2 - b^2}\right)$$

Ist nun $a = b$, so ist $u = \pm 2a = \pm 2b$, d. h. AF fällt in AB, und die Ellipse um AB ist in diesem Falle ein Kreis.

Ist aber $a < b$; so ist $\sqrt{a^2 - b^2}$ unmöglich, mithin sind die Werthe von u auch unmöglich.

Ist endlich $a > b$, so hat u vier mögliche Werthe, unter denen der erste der Foderung entspricht. (Vgl. *Apollon. eb. Oerter, übs. v. Camerer. Anhang 2. Aufg. 4.*)

auf der Ebene CAF stehen. (β) Aus C ziehe man CK, und verlängere sie so, dafs sie mit AF in L zusammentrifft, ziehe dann aus L die Linie LM senkrecht zu AF in dem Kreise um AF, und stelle sich vor, M liege oberhalb in dem Umfange dieses Kreises; endlich ziehe man parallel zu AB durch L die SO, und durch E die PQ. Weil nun

$$AE \times EF : EC^2 = \textit{Quadr. d. halb. grofs. Axe} : DC^2$$

und

$$EC^2 : EQ \times EP = DC^2 : AD \times DB$$

so ist

$$AE \times EF : EQ \times EP = \textit{Quadr. d. halb. gr. Axe} : AD \times DB$$

Es ist aber

$$AE \times EF : EQ \times EP = AL \times LF : LS \times LO \ (\gamma)$$

und

$$\textit{Quadr. d. h. g. Axe} : AD \times DB = HK^2 : AK \times KB \ (\delta)$$

Folglich

$$AL + LF : LS \times LO = HK^2 : AK \times KB.$$

Ferner ist

$$LS \times LO : CL^2 = AK \times KB : CK^2$$

Folglich

$$AL \times LF : CL^2 = HK^2 : CK^2$$

Nun ist $AL \times LF = LM^2$; denn LM ist senkrecht in dem Halbkreise um AF; also ist

$$LM^2 : CL^2 = HK^2 : CK^2 \ (\varepsilon)$$

Mithin liegen die Punkte C, H, M, in einer geraden Linie. Es befindet sich aber CM in dem Mantel des Kegels; also erhellet, dafs auch der Punkt H in dem Kegelmantel sein werde. Es ward jedoch vorausgesetzt, dafs er nicht dort sei; folglich giebt es gar keinen Punkt in der Ellipse, der sich in dem Mantel des erwähnten Kegels nicht befindet. Daher liegt die ganze Ellipse in dem Mantel eben dieses Kegels.

Satz 9.

Wenn eine Ellipse gegeben, und im Mittelpunkte derselben eine gerade Linie nicht senkrecht auf ihrer Ebene in derjenigen Ebene errichtet ist, welche durch eine der beiden Axen senkrecht zu der Ebene der Ellipse gelegt ist; so ist es möglich, einen Kegel zu finden, dessen Spitze der Endpunkt jener errichteten geraden Linie ist, und in dessen Mantel die gegebene Ellipse sich befindet.

(β) Denn H liegt in der Ebene der Ellipse, und diese ist senkrecht zu der Ebene CAF.

(γ) Es ist nämlich

$$AE : EQ = AL : LS$$
$$EF : EP = LF : LO$$
$$AE \times EF : EQ \times EP = AL \times LF : LS \times LO$$

(δ) Man setze die halbe grofse Axe der Ellipse $= a$, die halbe kleine Axe $= b = AD = BD$, so ist zu beweisen, dafs sich verhalte

$$a^2 : b^2 = HK^2 : AK \times KB$$

Nun ist $HK = y$ die Ordinate der Ellipse zu der kleinen Axe, also für die Abscissen u vom Mittelpunkte $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - u^2)$, das heifst

$$a^2 : b^2 = y^2 : (b^2 - u^2) = y^2 : (b + u) \,.\, (b - u)$$

Oder weil hier $DK = u$, folglich $AK = b + u$ und $KB = b - u$ ist,

$$a^2 : b^2 = HK^2 : AK \times KB.$$

(ε) Also auch

$$LM : CL = HK : CK.$$

Es sei also AB eine Axe der Ellipse, D der Mittelpunkt, und DC die im Mittelpunkte der Angabe gemäſs errichtete Linie. Die Ellipse selbst denke man sich um die Axe AB in einer Ebene, welche zu derjenigen, worin die Linien AB, CD sich befinden, senkrecht ist. Man soll also einen Kegel finden, der zur Spitze den Punkt C hat, und in dessen Mantel die Ellipse liegen soll. F.149.

Es sind demnach die Linien AC, CB, ungleich, weil CD nicht senkrecht auf der Ebene der Ellipse steht. Darum sei $EC = CB$, ferner sei N gleich der Hälfte der andern Axe, d. i. der konjugirten zu A, und durch D sei $FG \ddagger EB$ gezogen. Durch EB lege man eine Ebene senkrecht zu der Ebene, worin AC, CB ist, und beschreibe in dieser um den Durchmesser EB einen Kreis oder eine Ellipse. Einen Kreis nämlich, wenn $N^2 = FD \times DG$ ist; (α) wenn dieſs aber nicht, eine solche Ellipse, worin sich verhält

$$\textit{Quadr. d. einen Axe} : EB^2 = N^2 : FD \times DG \quad (\beta)$$

Dann bilde man einen Kegel mit der Spitze C, in dessen Mantel der Kreis oder die Ellipse um den Durchmesser EB sich befindet. Dieſs ist ausführbar, weil eine aus C nach der Mitte der Linie EB geführte Linie senkrecht auf der Ebene durch EB steht (S. 8.).

In diesem Kegelmantel nun befindet sich auch die Ellipse um AB. Denn wofern das nicht ist, so wird es irgend einen Punkt der Ellipse geben, welcher nicht in dem Kegelmantel liegt. Man nehme daher irgend einen Punkt H an, welcher nicht in dem Kegelmantel liegt, und ziehe aus H die senkrechte HK auf AB; ferner ziehe man CK, verlängere sie, und laſse sie mit EB in L zusammentreffen. Durch L ziehe man senkrecht auf EB in der durch EB gehenden senkrechten Ebene eine Linie LM, und denke sich den Punkt M oberhalb in dem Kegelmantel liegend; endlich ziehe man $QP \ddagger AB$ durch L. Nun verhält sich

$$N^2 : FD \times DG = LM^2 : EL \times LB \quad (\gamma)$$

und $FD \times DG : AD \times DB = EL \times LB : QL \times LP \quad (\delta)$

folglich $N^2 : AD \times DB = LM^2 : QL \times LP$

Auch ist $N^2 : AD \times DB = HK^2 : AK \times KB$,

(S. 9. α) In diesem Falle wird auf dem beschriebenen Kreise ein Kegel errichtet, dessen Spitze C ist, wodurch die Aufgabe selbst schon gelöset sein wird.

(β) Wenn $N^2 \gtrless FD \times DG$ ist, so läſst sich N als Ordinate einer Ellipse ansehen, wozu FG die eine Axe ist. Setzt man die Abscissen vom Mittelpunkte $= v$, die zweite Axe $= 2\beta$, so ist für diese Ellipse

$$N^2 = \frac{4\beta^2}{FG^2}\left(\tfrac{1}{4} FG^2 - v^2\right), \text{ das heiſst}$$

$$N^2 : \left(\tfrac{1}{2} FG + v\right)\left(\tfrac{1}{2} FG - v\right) = 4\beta^2 : FG^2$$

oder $N^2 : FD \times DG = 4\beta^2 : FG^2$

Nun soll die Ellipse um EB, deren zweite Axe $= 2b$ sein mag, so beschaffen sein, daſs sich verhält

$$N^2 : FD \times DG = 4b^2 : EB^2$$

d. h. es soll sein $\beta^2 : FG^2 = b^2 : EB^2$, oder $\beta : b = FG : EB$;

beide Ellipsen sollen also ähnlich sein.

(γ) Vorausgesetzt war nach der Bezeichnung in der vorigen Anmerkung

$$N^2 : FD \times DG = 4b^2 : EB^2 = b^2 : \left(\tfrac{1}{2} EB\right)^2$$

Es ist aber LM eine Ordinate der Ellipse um EB, mithin ist

$$LM^2 = \frac{b^2}{\left(\tfrac{1}{2} EB\right)^2} \cdot EL \times LB, \text{ d. h. } \quad b^2 : \left(\tfrac{1}{2} EB\right)^2 = LM^2 : EL \times LB$$

folglich $N^2 : FD \times DG = LM^2 : EL \times LB$

(δ) Denn es ist $\triangle ADF \sim \triangle QLE$ und $\triangle BDG \sim \triangle PLB$, mithin weil in einerlei Ellipse senkrechte Ordinaten zu der Axe AB gezogen sind. Demnach verhält sich

$$LM^2 : QL \times LP = HK^2 : AK \times KB$$

Es ist aber

$$QL \times LP : CL^2 = AK \times KB : KC^2$$

folglich

$$LM^2 : CL^2 = HK^2 : KC^2$$

Mithin befinden sich die Punkte C, H, M, in einer geraden Linie. Es liegt aber CM in dem Kegelmantel, folglich ist auch der Punkt H in dem Mantel dieses Kegels. Vorausgesetzt ward aber, er sei nicht darin; also erhellet das, was erwiesen werden sollte.

Satz 10.

Wenn eine Ellipse gegeben, und aus ihrem Mittelpunkte eine gerade Linie nicht senkrecht auf ihrer Ebene in derjenigen Ebene errichtet ist, welche durch die eine Axe der Ellipse senkrecht zu deren Ebene gestellet ist; so ist es möglich, einen Cylinder zu finden, dessen Axe mit der errichteten Linie in einerlei geraden Linie liegt, und in dessen Mantel die gegebene Ellipse sich befindet.

F. 150. Die eine Axe der gegebenen Ellipse sei AB, der Mittelpunkt aber D. Die Linie CD sei der Angabe gemäfs aus dem Mittelpunkte errichtet. Die Ellipse selbst denke man sich um die Axe AB in einer Ebene, die zu derjenigen senkrecht ist, worin AB, CD, liegen. Dann soll man einen Cylinder finden, dessen Axe mit CD in gerader Linie liegt, und in dessen Mantel die Ellipse sich befindet.

Durch die Punkte A, B, ziehe man AF, BG, parallel mit CD. Die zweite Axe der Ellipse ist nun entweder gleich dem Abstande zwischen AF, BG, oder gröfser oder kleiner.

1) Sie sei zuerst gleich FG, wobei FG senkrecht zu CD sein soll. Ueber FG werde eine Ebene senkrecht zu CD errichtet, in dieser Ebene ein Kreis um den Durchmesser FG beschrieben, und auf diesem Kreise gebe es einen Cylinder mit der Axe CD: dann liegt die Ellipse in dem Mantel eben dieses Cylinders. Denn wo nicht, so wird es einen Punkt der Ellipse geben, der nicht in dem Cylindermantel ist. Man denke sich also einen Punkt H in der Ellipse so angenommen, dafs er sich nicht in dem Cylindermantel befindet, und ziehe aus H das Perpendikel HK auf AB, so wird dafselbe zugleich senkrecht auf der Ebene stehen, worin AB, CD, sind. Aus K ziehe man KL ‡ CD, und errichte in L das Perpendikel LM auf FG in dem Kreise um FG, (α) auch denke man sich den Punkt M oberhalb in dem Umfange des Halbkreises um FG. Dann verhält sich

$$HK^2 : AK \times KB = FC^2 : AD \times DB$$

$$FD : AD = EL : QL$$
$$DG : DB = LB : LP$$

$$FD \times DG : AD \times DB = EL \times LB : QL \times LP$$

(S. 10. α) Dann ist zugleich LM senkrecht auf der Ebene ABC, mithin HK ‡ ML.

weil FG der zweiten Axe gleich ist. (β) Auch ist

$$FL \times LG : AK \times KB = FC^2 : AD^2 \quad (\gamma)$$

Demnach ist $FL \times LG = HK^2$. Diefs Rechteck ist aber auch gleich LM^2, folglich sind die Perpendikel HK, LM einander gleich, mithin ist $LK \ddagger MH$, also wird auch $DC \ddagger MH$ sein, und somit liegt HM in dem Mantel des Cylinders, weil diese Linie durch den im Cylindermantel liegenden Punkt M parallel der Axe gezogen ist. Daraus geht hervor, dafs auch H in dem Mantel sich befinde. Man setzte jedoch voraus, jener Punkt befinde sich dort nicht; mithin erhellet, was zu beweisen war.

Noch ist einleuchtend, dafs der Cylinder, welcher die Ellipse enthält, ein gerader sein müfse, sobald die zweite Axe gleich ist dem Abstande der beiden Linien, welche aus den Endpunkten der ersten Axe parallel der errichteten geraden Linie gezogen sind.

2) Nunmehr sei die zweite Axe gröfser als FG; demnach sei FQ dieser F.151.
zweiten Axe gleich. Durch FQ werde senkrecht zu derjenigen Ebene, worin AB, CD, liegen, eine Ebene gestellt, darin ein Kreis um den Durchmesser FQ beschrieben, und auf diesem Kreise gebe es einen Cylinder mit der Axe DP. Dann läfst sich durch dieselben Schlüsse beweisen, dafs die Ellipse sich in dem Mantel dieses Cylinders befinden werde.

3) Endlich sei die zweite Axe kleiner als FG. Dann betrage CI^2 so viel, F.152.
wie der Ueberschufs von FC^2 über das Quadrat der halben zweiten Axe. Man errichte nun in I zu derjenigen Ebene, worin AB, CD, sind, das Perpendikel IN, gleich der halben zweiten Axe; den Punkt N denke man oberhalb. Dann ist folglich $CN = CF$. (δ) Hierauf beschreibe man in der Ebene, worin FG, CN, liegen, um den Durchmesser FG einen Kreis, welcher folglich durch N gehen wird; und auf diesem Kreise gebe es einen Cylinder mit der Axe CD. Dann wird in dem Mantel dieses Cylinders die Ellipse sich befinden. Denn wo nicht, so mufs es irgend einen Punkt derselben geben, welcher nicht in dem Cylindermantel liegt. Man nehme daher H als einen solchen Punkt derselben an, ziehe HK senkrecht auf AB, und $KL \ddagger CD$ durch K; auch ziehe man aus L senkrecht auf FG die Linie LM in dem Halbkreise um den Durchmesser FG, stelle sich dabei M in dem Halbkreise um FG vor, und ziehe aus M senkrecht auf die Verlängerung von KL die Linie MO, so wird diese senkrecht zu der Ebene sein, worin AB, CD, liegen, weil KL senkrecht auf FG ist. Nun verhält sich

---

(β) Nach der bisherigen Bezeichnung, wenn die Ordinaten y, die Abscissen vom Mittelpunkte u. genannt werden, ist für die Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^2), \text{ d. h. } \quad y^2 : (a + u)(a - u) = b^2 : a^2$$

Nun ist hier $y = HK$, $a + u = AK$, $a - u = KB$, $b = \frac{1}{2} FG = FC$, $a = AD = DB$, folglich

$$HK^2 : AK \times AB = FC^2 : AD = FC^2 : AD \times DB.$$

(γ) Weil nämlich $AF \ddagger DC \ddagger KL \ddagger BG$, so ist

$$\begin{array}{rl} & FL : AK = FC : AD \\ \text{und} & LG : KB = FC : AD \\ \hline & FL \times LG : AK \times KB = FC^2 : AD^2 \end{array}$$

(δ) Weil nämlich nach der Annahme $CI^2 = FC^2 - NI^2$, also $FC^2 = CI^2 + NI^2$, und weil zugleich $NC^2 = CI^2 + NI^2$, so folgt $FC^2 = NI^2$.

$$MO^2 : ML^2 = IN^2 : NC^2 \ (\varepsilon)$$
$$ML^2 : AK \times KB = NC^2 : AD^2, \text{ weil } ML^2 = LF \times LG \text{ u. } NC^2 = CF^2 \text{ ist. } (\zeta)$$

Dann folgt $MO^2 : AK \times KB = IN^2 : AD^2$

Ferner ist $KH^2 : AK \times KB = IN^2 : AD^2$,

weil IN gleich ist der Hälfte der zweiten Axe. Mithin erhellet, dafs $MO = HK$, folglich auch $KO = HM$. Weil aber MH parallel der Axe des Cylinders, und der Punkt M in dessen Mantel liegt, so mufs nothwendig MH, und daher auch H in diesem Cylindermantel sein. Diefs war aber nicht der Fall. Es leuchtet also ein, dafs die Ellipse sich in dem Cylindermantel befinde.

Satz 11.

Dafs jede zwei Kegel im zusammengesetzten Verhältnifse ihrer Grundflächen und Höhen stehen, ist schon vor unserer Zeit bewiesen. (α) Eben dieselbe Beweisart zeigt auch, dafs jede zwei Kegelabschnitte im zusammengesetzten Verhältnifse ihrer Grundflächen und Höhen stehen. Dafs ferner jedes Cylinderstück dreimal so grofs sei, als ein Kegelabschnitt von derselben Grundfläche und gleicher Höhe, wird gerade so bewiesen, wie, dafs der Cylinder dreimal so grofs ist, als ein Kegel auf der Grundfläche des Cylinders und von gleicher Höhe mit ihm. (β)

Satz 12. (α)

1) Wenn ein parabolisches Konoid von einer Ebene durch die Axe, oder parallel mit derselben geschnitten wird, so wird der Schnitt eine Parabel sein, und zwar dieselbe, unter welcher der Körper enthalten ist. Ihr Durchmesser wird der Durchschnitt der schneidenden Ebene selbst mit einer Ebene sein, welche senkrecht zu ihr durch die Axe gelegt ist. (β) — Wenn

---

(ε) Weil $ML \ddagger NC$, $LO \ddagger CI$ und $MO \ddagger NI$, folglich $\triangle MLO \sim \triangle NCI$, so ergiebt sich $MO : ML = IN : NC$

(ζ) Also $ML^2 : NC^2 = FL \times LG : FC^2 = AK \times KB : AD^2$

(S. 11. α) Diefs folgt leicht aus Kug. u. Cyl. I. S. 17. Lehnsatz I.

(β) Nach Euklid. XII. 10.

(S. 12. α) Da die Beweise zu mehreren der hier aufgeführten Sätze nicht sofort einleuchten, so haben Commandin, Rivault und Torelli dieselben deutlich darzustellen gesucht. Ich folge hier im Wesentlichen dem Letzteren. Im allgemeinen ist sofort einleuchtend, dafs jeder Schnitt eines Konoids oder Sphäroids durch dessen Axe die Figur selbst geben müfse, unter welcher der Körper enthalten ist; und dafs ein gegen die Axe senkrecht geführter Schnitt einen Kreis liefere, dessen Mittelpunkt in der Axe sich befindet. Es wird demnach nur von einem parallel mit der Axe, oder, beim hyperbolischen Konoid, noch von einem durch die Spitze des umspannenden Kegels gelegten Schnitte geredet werden dürfen.

F152.a (β) Es sei ABC der Schnitt durch die Axe BD eines parabolischen Konoids; man ziehe irgendwo $IN \ddagger BD$, und lege durch IN eine Ebene senkrecht zu ABC, so wird das Konoid parallel der Axe geschnitten, und die Figur des Schnitts sei IMO. Ich behaupte, dafs IMO eine der ABC gleiche Parabel sei, wozu IN die Axe ist.

Man fälle aus den willkührlich genommenen Punkten M, O, die Perpendikel MF, ON auf IN, so werden diese zugleich senkrecht auf ABC stehen. Dann ziehe man durch F und N die Parabelsehnen EH, AC, senkrecht

Wenn dagegen die schneidende Ebene senkrecht zu der Axe geführt ist, so wird der Schnitt ein Kreis sein, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt.

2) Wenn ein hyperbolisches Konoid von einer Ebene durch die Axe, oder parallel derselben, oder durch die Spitze des umspannenden Kegels geschnitten wird; so wird der Schnitt eine Hyperbel sein: und zwar, wenn durch die Axe, eben die Hyperbel, unter welcher der Körper enthalten ist; wenn parallel der Axe, eine ähnliche; (γ) wenn aber durch den

---

recht zu den Axen, und lege durch EH, FM, und durch AC, NO, Ebenen, welche das Konoid senkrecht zu der Axe schneiden werden, so daſs diese Schnitte selbst Kreise sind, deren Mittelpunkte G, D, in der Axe des Konoids liegen. Daher ist

$$MF^2 = EF \times FH \text{ und } ON^2 = AN \times NC$$

Man ziehe IL ‡ EH durch I, so ist vermöge der Eigenschaft der Parabel

$$IL^2 : EG^2 = BL : BG$$

$$(EG^2 - IL^2) : IL^2 = (BG - BL) : BL = IF : BL$$

Nun ist $EG^2 - IL^2 = EG^2 - FG^2 = (EG + FG)(EG - FG) = FH \times FE = MF^2$

also $MF^2 : IL^2 = IF : BL.$ Auf dieselbe Weise folgt

$$ON^2 : IL^2 = IN : BL$$

Mithin $MF^2 : ON^2 = IF : IN$

Daher ist IMO eine Parabel mit der Axe IN.

Nun sei BP der Parameter zu ABC, d. h. man setze $IL^2 = BP \times BL$, so folgt nach dem Obigen

$$MF^2 : BP \times BL = IF : BL$$

d. h. $MF^2 = BP \times IF$; es ist mithin BP zugleich der Parameter der Parabel IMO. Folglich sind beide Parabeln nicht verschieden.

(γ) Es sei ABC der Schnitt durch die Axe BD des hyperbolischen Konoids; BR sei die groſse Axe der Hyperbel F.152b
ABC, und BQ = QR. Man ziehe irgendwo IN ‡ BD, und lege dadurch senkrecht zu ABC eine Ebene, deren Durchschnittsfigur in der Oberfläche des Konoids IMO sein soll. Ich behaupte, IMO sei eine der ABC ähnliche Hyperbel.

Man fälle aus den willkührlichen Punkten M, O, die Perpendikel MF, ON, auf IN, so stehen diese senkrecht auf ABC; dann ziehe man die Hyperbelsehnen EH, AC, durch F, N, senkrecht auf BD, und lege durch EH, FM, und durch AC, NO, Ebenen, welche mithin senkrecht zu BD stehen und Kreise mit den Mittelpunkten G, D, sein werden. Daher ist

$$MF^2 = EF \times FH \text{ und } ON^2 = AN \times NC$$

Man ziehe ferner IL ‡ EH, so ist vermöge der Eigenschaft der Hyperbel

$$EG^2 : IL^2 = RG \times GB : RL \times LB \text{ (Apollon. Keg. I. 21.)}$$

also $(EG^2 - IL^2) : IL^2 = (RG \times GB - RL \times LB) : RL \times LB$

Es ist aber $EG^2 - IL^2 = EG^2 - FG^2 = MF^2$; folglich

$$MF^2 : IL^2 = (RG \times GB - RL \times LB) : RL \times LB$$

Eben so ist $ON^2 : IL^2 = (RD \times DB - RL \times LB) : RL \times LB$

$$MF^2 : ON^2 = (RG \times GB - RL \times LB) : (RD \times DB - RL \times LB)$$

Es ist aber $RG \times GB = (GQ + RQ)(GQ - RQ) = GQ^2 - RQ^2$; und eben so ist $RL \times LB = LQ^2 - RQ^2$; ferner $RD \times DB = DQ^2 - RQ^2$; also

$$MF^2 : ON^2 = (GQ^2 - LQ^2) : (DQ^2 - LQ^2)$$

Man errichte in Q das Perpendikel QS auf BR, und verlängere NI bis T dergestalt, daſs SI = ST wird, d. h., bis die Verlängerung an die entgegengesetzte Hyperbel reicht; so ist $GQ^2 - LQ^2 = FS^2 - IS^2 = FT \times IF$, und $DQ^2 - LQ^2 = NS^2 - IS^2 = NT \times IN$, folglich

$$MF^2 : ON^2 = FT \times IF : NT \times IN$$

Demnach ist IMO eine Hyperbel, deren groſse Axe IT, deren Axenlinie mithin IN ist.

Scheitel des umspannenden Kegels, eine nicht ähnliche. (3) Der Durchmesser der Hyperbel wird der Durchschnitt der schneidenden Ebene selbst mit einer senkrecht zu ihr durch die Axe geführten Ebene sein. — Wenn die schneidende Ebene senkrecht zu der Axe ist, so wird der Schnitt ein Kreis sein, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt.

3) Wenn ein Sphäroid der einen oder der andern Art von einer Ebene durch die Axe, oder parallel derselben geschnitten wird; so wird der Schnitt eine Ellipse sein: und zwar, wenn durch die Axe, die Ellipse selbst, unter welcher der Körper enthalten ist; wenn aber

---

Nun sei BP der Parameter zu ABC und VI der Parameter zu IMO.
Nach dem Obigen war $MF^2 : IL^2 = FT \times IF : RL \times LB$
und vermöge der Eigenschaft der Hyperbel hat man

$$MF^2 = \frac{VI}{IT} . FT \times IF, \text{ und } IL^2 = \frac{BP}{BR} . RL \times LB$$

also $$MF^2 : IL^2 = \frac{VI}{IT} . FT \times IF : \frac{BP}{BR} . RL \times LB$$

folglich $\frac{VI}{IT} = \frac{BP}{BR}$; d. h. $VI : BP = IT : BR$
mithin sind die Hyperbeln ähnlich.

F.152.c (3) Wenn alles wie zuvor konstruirt ist, so gehe der Schnitt nunmehr durch die Spitze Q des umspannenden Kegels. Seine Figur sei IMO; dann ist zu beweisen, daſs IMO eine Hyperbel sei, jedoch nicht ähnlich ABC selbst.

Man ziehe durch B, I, die Berührungslinien BK, IK, und durch F, N, die Hyperbelsehnen PX, VS, beide parallel zu IK, verlängere auch NQ bis T dergestalt, daſs $QT = IQ$ wird, daſs also T an die entgegengesetzte Hyperbel trifft. Dann verhält sich

$$\left.\begin{array}{ll} & BK^2 : IK^2 = EF \times FH : PF \times FX \\ \text{und} & BK^2 : IK^2 = AN \times NC : VN \times NS \end{array}\right\} \text{S. 4. A.}$$

$$EF \times FH : PF \times FX = AN \times NC : VN \times NS$$

Es ist aber $EF \times FH = MF^2$, und $AN \times NC = ON^2$;
ferner $PF \times FX = PF^2$, und $VN \times NS = VN^2$, weil IN die Sehnen PX, VS, halbtheilt (Apollon. Keg. I, 47.); folglich ist

$$MF^2 : ON^2 = PF^2 : VN^2$$

Es ist aber $PF^2 : VN^2 = TF \times FI : TN \times NI$ (Apollon. Keg. I. 21 und 51, Zusatz)

$$MF^2 : ON^2 = TF \times FI : TN \times NI$$

Demnach ist IMO eine Hyperbel mit dem Durchmesser IN.

Wäre nun $IMO \sim ABC$, so stelle man sich einen neuen Schnitt IYZ parallel zu der Axe BD geführt vor; dann ist $IYZ \sim ABC$, also müſste auch $IMO \sim IYZ$ sein. Errichtet man dann das Perpendikel Qq in Q auf BR und verlängert den Durchmesser IW der Hyperbel IYZ bis q, so ist

$$IF : IU = IQ : Iq$$

d. h. die Abscissen beider Hyperbeln verhalten sich hier, wie deren groſse Axen. Sollen daher die Hyperbeln ähnlich sein, so müſsen auch die zugehörigen Ordinaten in diesem Verhältniſse stehen, (*Euler introd. in anal. infin. II.* 18.), also muſs sich verhalten

$$FM : UY = IF : IU,$$

was aber unmöglich ist; denn weil $IF > IU$, so müſste auch $FM > UY$ sein; allein man hat

$$FM^2 = EF \times FH = EG^2 - GF^2$$

und $$UY^2 = EU \times UH = EG^2 - GU^2$$

Da nun offenbar $GF^2 > GU^2$, so ist auch $FM^2 < UY^2$, folglich $FM < UY$; also sind beide Hyperbeln nicht ähnlich.

parallel der Axe, eine ähnliche. Der Durchmesser der Ellipse wird der Durchschnitt der schneidenden Ebene und einer senkrecht gegen sie durch die Axe geführten Ebene sein. (ε) — Wenn dagegen die schneidende Ebene zu der Axe senkrecht ist, so wird der Schnitt ein Kreis sein, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt.

4) Wenn irgend eine der erwähnten Figuren von einer Ebene durch die Axe geschnitten wird, so werden alle die Perpendikel, welche aus den Punkten der Oberfläche, die nicht in der schneidenden Ebene selbst liegen, auf die schneidende Ebene gefället werden, innerhalb des Schnittes der Figur fallen.

Die Beweise zu diesem allen sind bekannt.

Satz 13.

Wenn ein parabolisches Konoid von einer Ebene geschnitten wird, die weder durch die Axe geht, noch parallel derselben, noch senkrecht zu ihr ist, so wird der Schnitt eine Ellipse, und deren grofse Axe diejenige Sehne des Konoids sein, in welcher die den Körper schneidende Ebene selbst und eine senkrecht zu ihr durch die Axe des Konoids gelegte sich durchschneiden; die kleine Axe aber wird gleich sein der Entfernung derjenigen geraden Linien, welche man aus den Endpunkten der grofsen Axe parallel der Axe des Konoids zieht.

Das parabolische Konoid sei der Angabe gemäfs von einer Ebene geschnitten. Wird F.153.

(ε) Es sei RBTD der Schnitt durch die Axe irgend eines Sphäroids, BD die erste Axe, RC die halbe zweite. F.152.d Man ziehe irgendwo IK ‡ BD, und lege durch IK eine Ebene senkrecht zu RBTD. Die Figur dieses Schnittes sei IMOK, es wird behauptet, diese Figur sei eine Ellipse, ähnlich der Ellipse RBTD, und IK sei die erste Axe derselben.

Es werde alles wie bisher konstruirt; dann ist

$$SV^2 : IL^2 = DV \times VB : DL \times LB$$

$$(SV^2 - IL^2) : IL^2 = (DV \times VB - DL \times LB) : DL \times LB$$

Nun ist $SV^2 - IL^2 = SV^2 - NV^2 = SN \times NT = ON^2$

ferner $DV \times VB = (DC + CV)(BC - CV) = (BC + CV) \times (BC - CV) = BC^2 - CV^2$

und $DL \times LB = (BC + CL)(BC - CL) = BC^2 - CL^2$

mithin $ON^2 : IL^2 = (CL^2 - CV^2) : DL \times LB$

oder $ON^2 : IL^2 = (IP^2 - NP^2) : DL \times LB$

Eben so ist $MF^2 : IL^2 = (IP^2 - FP^2) : DL \times LB$

$$ON^2 : MF^2 = (IP^2 - NP^2) : (IP^2 - FP^2)$$

Man hat aber $IP^2 - NP^2 = (IP + PN) \times (IP - PN) = KN \times IN$

und $IP^2 - FP^2 = (IP + FP) \times (IP - FP) = KF \times IF$

also $ON^2 : MF^2 = KN \times IN : KF \times IF$

Daher ist die Linie IMOK eine Ellipse mit der ersten Axe IK.

Man errichte nun in P das Perpendikel PQ auf IK, so wird PQ die halbe zweite Axe der Ellipse IMOK sein. Dann läfst sich wie zuvor zeigen, dafs

$$PQ^2 : IL^2 = PI^2 : DL \times LB$$

Auch ist $IL^2 : RC^2 = DL \times LB : DC \times BC$

$$PQ^2 : RC^2 = PI^2 : BC^2$$

oder $PQ : RC = PI : BC$

mithin sind beide Ellipsen ähnlich.

es dann noch von einer andern Ebene durch die Axe, senkrecht zu jener schneidenden Ebene geschnitten, so sei ABC der Schnitt des Konoids, die gerade Linie AC aber der Durchschnitt jener der Körper schneidenden Ebene. Die Axe des Konoids und der Durchmesser des Schnittes desselben sei BD. Man soll zeigen, daſs der Schnitt des Konoids vermittelst der Ebene durch AC eine Ellipse, und deren groſse Axe AC selbst, die kleine aber gleich AL sei, wenn nämlich CL ‡ BD, und AL senkrecht auf CL ist.

Man nehme irgend einen Punkt K in dem Schnitte an, und ziehe aus K die Linie KH senkrecht auf AC; dann wird mithin KH senkrecht auf der Ebene der Parabel ABC sein, weil auch die schneidende Ebene senkrecht zu eben derselben Ebene ist. Durch H ziehe man EF senkrecht zu BD, und lege durch die geraden Linien EF, KH, eine Ebene, welche senkrecht zu BD sein wird. Es wird also das Konoid von einer zu der Axe senkrechten Ebene geschnitten, mithin wird der Schnitt ein Kreis mit dem Mittelpunkte D, und daher $KH^2 = FH \times HE$ sein. (Denn die Figur um EF ist ein Halbkreis, und KH ist als Perpendikel die mittlere Proportionale für das Rechteck $EH \times HF$.) Man ziehe die Berührungslinie MN der Parabel, parallel mit AC, und ihr Berührungspunkt sei N; auch ziehe man BT ‡ EF; (α) dann verhält sich

$$AH \times HC : EH \times HF = NT^2 : BT^2$$

wie gezeigt ist (S. 4, A.). Es ist aber $NT = TM$, weil auch $BP = BM$ ist; (β) also verhält sich: $AH \times HC : KH^2 = TM^2 : BT^2$

mithin $KH^2 : AH \times HC = BT^2 : TM^2$.

Weil nun $\Delta CAL \sim \Delta TMB$, so verhält sich

$$KH^2 : AH \times HC = AL^2 : AC^2.$$

Eben so wird gezeigt, daſs auch die Quadrate der andern Perpendikel von dem Schnitte auf AC zu den Rechtecken unter den Abschnitten der Linie AC sich verhalten, wie $AL^2 : AC^2$. Mithin erhellet, daſs der Schnitt eine Ellipse, und daſs AC deren groſse Axe, die kleine aber der Linie AL gleich sei.

Satz 14.

Wenn ein hyperbolisches Konoid von einer Ebene geschnitten wird, welche alle Seiten des umspannenden Kegels trifft, und nicht senkrecht auf der Axe ist, so wird der Schnitt eine Ellipse, und deren groſse Axe diejenige Sehne des Konoids sein, in welcher die den Körper schneidende Ebene und eine senkrecht zu ihr durch die Axe des Konoids geführte sich durchschneiden.

F. 154. Das hyperbolische Konoid sei der Angabe gemäſs geschnitten. Wird es denn von einer andern Ebene durch die Axe, senkrecht zu jener schneidenden Ebene geschnitten, so mag die Hyperbel ABC der Schnitt des Konoids, die gerade Linie AC dagegen der Durchschnitt jener den Körper schneidenden Ebene sein. Die Axe des Konoids und der Durchmesser ihres Schnittes sei BD.

Man nehme nun in dem Schnitte irgend einen Punkt K an, und ziehe von K die Li-

---

(S. 13. α) Dann berührt BT die Parabel in B.

(β) Vgl. Klügel M. W. Art. Parabel 13.

nie KH auf AC senkrecht; dann wird sie senkrecht auf der Ebene der Hyperbel ABC stehen. Durch H aber ziehe man EF senkrecht auf BD, und führe durch EF, KH, eine das Konoid schneidende Ebene; dann wird dasselbe von einer zu der Axe senkrechten Ebene geschnitten, mithin wird der Schnitt ein Kreis mit dem Mittelpunkte D, also $KH^2 = EH \times HF$ sein. Man ziehe wiederum die Berührungslinie MN der Hyperbel, parallel mit AC, und ihr Berührungspunkt sei N, ferner BT ‡ EF; (α) also verhält sich

$$EH \times HF : AH \times HC = BT^2 : TN^2 \text{ (S. 4, A.)}$$

Mithin $$KH^2 : AH \times HC = BT^2 : TN^2$$

Eben so wird man zeigen, dafs auch die Quadrate der andern Perpendikel von dem Schnitte gegen AC zu den Rechtecken unter den Abschnitten auf AC, welche die Perpendikel bilden, sich verhalten, wie $BT^2 : TN^2$. Auch ist $BT < TN$, weil ja $MT < TN$, indem $MB < BP$ ist, wenn in der Hyperbel NP senkrecht auf BP stehet: denn diefs ist eine Eigenschaft der Hyperbeln. (β) Mithin erhellet, dafs der Schnitt eine Ellipse, und dessen grofse Axe AC sein wird. (γ)

Satz 15.

1) Wenn das längliche Sphäroid von einer gegen die Axe nicht senkrechten Ebene geschnitten ist, so wird der Schnitt eine Ellipse, deren grofse Axe aber diejenige Sehne des Sphäroids sein, in welcher die den Körper schneidende Ebene und eine senkrecht zu ihr durch die Axe gelegte sich durchschneiden.

Einleuchtend ist diefs, wofern der Schnitt durch die Axe selbst, oder parallel derselben geht. Die schneidende Ebene sei daher eine andere. Wird nun das Sphäroid noch von einer Ebene durch die Axe, senkrecht zu jener schneidenden geschnitten, so sei die Ellipse ABCD der Schnitt des Sphäroids, die gerade Linie CA hingegen der Durchschnitt mit jener schneidenden Ebene. Die Axe des Sphäroids und zugleich der Ellipse sei BD, und X der Mittelpunkt; auch sei PQ die kleine Axe. Man ziehe BT senkrecht zu BD und die Berüh- F.155.

(S. 14. α) Dann ist BT auch eine berührende; man ziehe ferner NP senkrecht auf BD in der Ebene der Hyperbel.

(β) Es sei BNC eine Hyperbel, BR deren grofse Axe, $BQ = QR = a$, die Linie NM eine berührende, NP senkrecht auf BD, und $BP = x$, so ist F154a

$$QP : BP = QB : MB \text{ (Klügel M. W. Art. Hyperbel 40.)}$$

also $(a + x) : x = a : MB$, folglich $MB = \frac{ax}{a + x}$ und $2\,MB = \frac{2ax}{a + x}$

ferner $QB : MB = RP : MP$, (Klügel, a. a. O.)

also $a : \frac{ax}{a + x} = (2a + x) : MP$, folglich $MP = \frac{2ax + x^2}{a + x}$

Nun ist $\frac{2ax}{a + x} < \frac{2ax + x^2}{a + x}$, folglich $2\,MB < MP$, mithin $MB < BP$;

daraus folgt $MT < TN$, und weil $BT < MT$, so ergiebt sich $BT < TN$.

(γ) Es sei eine gerade Linie Z dergestalt angenommen, dafs sich verhält

$$BT : TN = Z : AC,$$

wo $Z < AC$ sein mufs, weil $BT < TN$ ist, so hat man

$$KH^2 : AH \times HC = Z^2 : AC^2$$

dann liegt K in einer Ellipse, deren Axen Z und AC sind; mithin ist AC die grofse.

rungslinie $GN \ddagger AC$ für den Berührungspunkt N der Ellipse. Ferner ziehe man $ML \ddagger AC$ durch X. Ganz wie zuvor wird man nun beweisen, daſs die Quadrate der Perpendikel von dem Schnitte auf AC zu den Rechtecken unter den Abschnitten der Linie AC sich so verhalten, wie $BT^2 : TN^2$; woraus denn hervorgeht, daſs der Schnitt eine Ellipse und CA deren Axe ist. (α) Daſs diese Linie aber die groſse Axe sei, muſs erwiesen werden. Es verhält sich nämlich

$$QX \times XP : MX \times XL = BT^2 : TN^2 \text{ (S. 4, A.)}$$

weil die Linien QP, ML, den berührenden parallel sind. Es ist aber $QX \times XP < MX \times XL$, (β) weil auch $QX < XL$; daher ist $BT^2 < TN^2$. Folglich sind auch die Quadrate der Perpendikel von dem Schnitte auf AC kleiner als die Rechtecke unter den Abschnitten der Linie AC; mithin ist einleuchtend, daſs AC die groſse Axe sei.

2) Wenn das geplattete Sphäroid von einer Ebene geschnitten ist, dann wird alles Uebrige eben so, jedoch unter den Axen jetzt die kleine die Sehne des Sphäroids sein.

Folgerung. Hieraus erhellet für alle diese Körper, daſs sie, von parallelen Ebenen geschnitten, ähnliche Schnitte geben werden. Denn die Quadrate der Perpendikel stehen zu den Rechtecken unter den Abschnitten in einerlei Verhältniſse. (γ)

Satz 16.

1) Wenn in einem parabolischen Konoid aus jedem willkührlichen Punkte seiner Oberfläche gerade Linien der Axe parallel gezogen werden; so werden die, welche an der erhabenen Seite des Konoids gezogen sind, demselben nach auſsen, die aber an der andern werden nach innen fallen.

Denn wenn eine Ebene durch die Axe und durch den Punkt gelegt wird, aus welchem die Parallele zur Axe gezogen ist, so wird der Schnitt eine Parabel, und deren Durchmesser die Axe des Konoids sein. Wenn aber in einer Parabel aus jedem Punkte derselben gerade Linien parallel dem Durchmesser gezogen werden; so fallen die, welche an der erhabenen Seite derselben gezogen sind, der Parabel nach auſsen, die dagegen an der andern nach innen. Daher ist das Behauptete einleuchtend.

2) Wenn in einem hyperbolischen Konoid aus jedem Punkte seiner Oberfläche gerade Linien parallel mit einer durch den Scheitel des umspannenden Kegels gehenden Linie gezogen sind; so werden die, welche an der erhabenen Seite gezogen sind, dem Konoid nach auſsen, die aber an der andern nach innen fallen.

Denn wenn durch eine gerade Linie, die in dem Konoid gezogen durch den Scheitel

---

(S. 15. α) Vgl. Anmkg. γ zum vorigen Satze; nur bleibt noch unentschieden, ob AC die groſse Axe sei.

(β) Also $QX^2 < MX^2$.

(γ) Nämlich immer wie $BT^2 : TN^2$. Es mögen daher y, y' zwei rechtwinklige Ordinaten, u, u' deren Abscissen vom Mittelpunkte, a, a', und b, b', die halben Axen bezeichnen, so hat man immer

$$\begin{array}{ll} & y^2 : (b^2 - u^2) = b^2 : a^2 = BT^2 : TN^2 \\ & y'^2 : (b'^2 - u'^2) = b'^2 : a'^2 = BT^2 : TN^2 \\ \hline \text{folglich} & b : a = b' : a', \text{ also die Ellipsen ähnlich.} \end{array}$$

des umspannenden Kegels geht, und durch den Punkt eine Ebene gelegt wird, aus welchem die Parallele gezogen ist; so wird der Schnitt eine Hyperbel, und deren Durchmesser die aus dem Scheitel des Kegels in dem Konoid gezogene gerade Linie sein. Wenn aber in einer Hyperbel aus irgend einem in dieser Linie selbst befindlichen Punkte Parallelen zu der angedeuteten Linie gezogen werden; so fallen die an der erhabenen Seite gezogenen nach aufsen, die dagegen an der andern nach innen.

3) Wenn eine Ebene irgend ein Konoid berührt, ohne es zu schneiden, so wird sie dasselbe nur in einem Punkte berühren, und eine durch den Berührungspunkt und durch die Axe gelegte Ebene wird senkrecht auf der berührenden sein.

Denn die Ebene berühre das Konoid, wenn es möglich ist, in mehreren Punkten. Man nehme zwei Punkte an, in denen die berührende Ebene das Konoid berührt, ziehe aus beiden gerade Linien parallel der Axe, und lege durch diese Parallelen eine Ebene; so wird sie entweder durch die Axe oder parallel derselben geführt sein. Ihr Schnitt wird demnach einen Kegelschnitt bilden, in welchem jene Punkte sich befinden werden, weil diese in der Oberfläche und zugleich in der Ebene sind. Daher wird die gerade Linie zwischen jenen Punkten innerhalb des Kegelschnitts und mithin auch innerhalb der Oberfläche des Konoids liegen. Diese gerade Linie befindet sich aber auch in der berührenden Ebene, weil ja die Punkte darin sind; mithin wird etwas von der berührenden Ebene innerhalb des Konoids liegen; was doch unmöglich ist, weil angenommen ward, sie solle nicht schneiden. Daher wird Berührung nur in einem Punkte Statt finden.

Dafs indessen auch die durch den Berührungspunkt und durch die Axe gelegte Ebene zu der berührenden senkrecht sein werde, wenn die Berührung im Scheitel des Konoids geschieht, ist einleuchtend. Denn legt man zwei Ebenen durch die Axe, so werden die Schnitte des Konoids Kegelschnitte sein, welche die Axe zum Durchmesser haben. Die geraden Berührungslinien dieser Kegelschnitte aber für das Ende des Durchmessers in der berührenden Ebene werden rechte Winkel mit dem Durchmesser bilden; daher wird es in der berührenden Ebene zwei gerade zu der Axe senkrechte Linien geben, die Ebene selbst also senkrecht gegen die Axe und daher auch senkrecht gegen eine Ebene durch die Axe sein.

Nun gehe aber die berührende Ebene nicht durch den Scheitel des Konoids. Dann F.156.
lege man eine Ebene durch den Berührungspunkt und durch die Axe; der Schnitt des Konoids sei der Kegelschnitt ABC, die Axe des Konoids und der Durchmesser des Schnittes sei BD, der Durchschnitt der berührenden Ebene sei die gerade Linie EHF, welche den Kegelschnitt in H berühren mag. Aus H fälle man das Perpendikel HK auf BD, und errichte darüber eine gegen die Axe senkrechte Ebene, deren Schnitt ein Kreis mit dem Mittelpunkte K sein wird. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der berührenden wird eine Berührungslinie des Kreises sein, (α) folglich rechte Winkel mit HK bilden, also auch senkrecht zu der Ebene sein, worin KH, BD, liegen. Es erhellet also, dafs auch die berührende Ebene gegen eben diese Ebene senkrecht sein werde, weil ja auch die Linien in dieser senkrecht sind. (β)

(S. 16. α) Weil der Kreis zwar den Punkt H, aber keinen andern, mit der berührenden Ebene gemein hat.

(β) Nämlich HK und HE sind senkrecht zu der Berührungslinie des Kreises.

Satz 17.

1) Wenn ein Sphäroid der einen oder der andern Art von einer Ebene berührt, jedoch nicht geschnitten wird; so wird dafselbe nur in einem Punkte berührt; und eine durch den Berührungspunkt und die Axe gelegte Ebene wird senkrecht zu der berührenden sein.

Die Berührung geschehe nämlich in mehreren Punkten. Man nehme zwei Punkte an, in welchen die Ebene das Sphäroid berührt, ziehe aus jedem von beiden gerade Linien parallel der Axe, und lege durch diese gezogenen Linien eine Ebene, so wird der Schnitt eine Ellipse sein, und die Punkte werden in derselben liegen. Demnach wird die gerade Linie zwischen diesen Punkten innerhalb der Ellipse, mithin auch innerhalb der Oberfläche des Konoids sein. Die gerade Linie aber befindet sich in der berührenden Ebene, weil auch die Punkte darin sind; mithin wird etwas von der berührenden Ebene innerhalb des Sphäroids liegen. So ist es aber nicht, denn es ward vorausgesetzt, die Ebene solle nicht schneiden. Daher ergiebt sich, dafs Berührung nur in einem Punkte Statt haben werde.

Dafs aber die durch den Berührungspunkt und die Axe gelegte Ebene zu der berührenden senkrecht sein werde, wird man eben so wie bei den Konoiden zeigen.

2) Wenn ein Konoid oder Sphäroid der einen oder der andern Art von einer Ebene durch die Axe geschnitten, zu dem entstandenen Schnitte eine gerade Berührungslinie gezogen, und auf der Berührungslinie eine Ebene senkrecht gegen die schneidende errichtet wird; so wird diese den Körper in demselben Punkte berühren, worin die Berührungslinie den Kegelschnitt berührt.

Sie wird nämlich dessen Oberfläche nicht in einem andern Punkte berühren; denn wo nicht, so würde das von diesem Punkte auf die schneidende Ebene gefällte Perpendikel dem Kegelschnitte nach aufsen fallen, nämlich auf die Berührungslinie selbst, weil die Ebenen senkrecht zu einander stehen. Das ist aber unmöglich; denn es ward erwiesen, dafs sie nach innen fallen werde. (S. 12, 4.).

Satz 18.

Wenn zwei parallele Ebenen irgend ein Sphäroid berühren, so wird eine die Berührungspunkte verbindende gerade Linie durch den Mittelpunkt des Sphäroids gehen.

Wenn die Ebenen senkrecht zu der Axe stehen, ist das einleuchtend; Daher sollen sie nicht senkrecht sein. Dann wird eine durch die Axe und durch den einen der beiden Berührungspunkte gelegte Ebene senkrecht zu der berührenden Ebene sein (S. 17, 1.), mithin auch zu deren Parallelebene. Nothwendig geht also einerlei Ebene durch die Axe und durch den einen samt dem andern Berührungspunkt; denn wo nicht, so würden zwei Ebenen senkrecht sein gegen einerlei Ebene durch einerlei gerade Linie, die nicht senkrecht zu dieser Ebene ist; indem vorausgesetzt ward, dafs die Axe nicht senkrecht zu den parallelen Ebenen sei. Daher werden die Axe und die Berührungspunkte in derselben Ebene liegen, und das Sphäroid wird durch die Axe geschnitten, der Schnitt folglich eine Ellipse und die Durchschnitte der parallelen Ebenen werden diejenigen Parallelen sein, welche die Ellipse in den Berührungspunkpunkten der Ebenen berühren. Wenn aber zwei parallele Linien eine Ellipse berühren, so liegt der Mittelpunkt der Ellipse mit den Berührungspunkten in gerader Linie. (*a*)

Satz 19.

Wenn zu einem Sphäroid der einen oder andern Art zwei parallele Berührungsebenen geführt sind, und parallel mit ihnen durch den Mittelpunkt des Sphäroids eine Ebene gelegt ist; so werden diejenigen geraden Linien, welche man durch den entstehenden Schnitt parallel der Verbindungslinie der Berührungspunkte zieht, dem Sphäroid nach aufsen fallen.

Das Erwähnte vorausgesetzt, nehme man in dem entstehenden Schnitte irgend einen F.157.
Punkt an; durch ihn aber und durch die Verbindungslinie der Berührungspunkte lege man eine Ebene; so wird sie das Sphäroid und die parallele Ebene schneiden. Es soll daher der Schnitt des Sphäroids die Ellipse ABCD, die Durchschnitte der parallelen Ebenen aber sollen die geraden Linien EF, GH, der angenommene Punkt soll A, und die Verbindungslinie der Berührungspunkte soll BD sein; so wird diese durch den Mittelpunkt gehen. Auch sei CA der Durchschnitt der mit den berührenden parallelen Ebene; so wird diese durch den Mittelpunkt gelegt sein, weil so die Ebene selbst liegt. Weil demnach ABCD entweder ein Kreis oder eine Ellipse ist, und von den beiden geraden Linien EF, GH, berührt wird, durch den Mittelpunkt aber AC mit jenen parallel gezogen ist, so erhellet, dafs die durch die Punkte A, C, parallel mit BD gezogenen Linien den Schnitt berühren, (*a*) und dem Sphäroid nach aufsen fallen werden.

Zusatz. Wenn indessen die mit den berührenden parallele Ebene auch nicht durch den Mittelpunkt geführt ist, wie etwa KL, so ist doch klar, dafs unter den von dem entstandenen Schnitte ausgehenden geraden Linien diejenigen, welche an der Seite des kleineren Abschnittes sich befinden, dem Sphäroid nach aufsen, die aber an der andern Seite nach innen fallen werden.

Satz 20.

Jedes von einer Ebene durch den Mittelpunkt geschnittene Sphäroid wird von der Ebene selbst gehalbtheilt, und seine Oberfläche gleichfalls.

Das Sphäroid sei von einer Ebene durch den Mittelpunkt geschnitten; dann wird es entweder durch die Axe, oder auch senkrecht oder nicht senkrecht zur Axe geschnitten sein. Wofern es nun durch die Axe, oder senkrecht zur Axe geschnitten ist; so ist einleuchtend,

---

(S. 18. *a*) Es sei BEHF eine Ellipse, AD und GK zwei Berührungslinien derselben für die Punkte B und H. Man ziehe die verbindende Linie BH, so geht diese entweder durch den Mittelpunkt der Ellipse, oder nicht. F.156a
Gesetzt sie gehe nicht dadurch, so sei P der Mittelpunkt, und man ziehe EF ‡ AD durch P, ferner BN durch P, und endlich LM ‡ EF durch N; dann müfste LM eine Berührungslinie der Ellipse sein. (Vgl. Klügel M. W. Art. Ellipse 29.) Weil aber N in dem Raume zwischen den Parallelen AD, GK liegen mufs, so wird LM die Ellipse schneiden; mithin kann P nicht der Mittelpunkt sein, sondern dieser mufs da liegen, wo EF, BH sich durchschneiden, also in C.

(S. 19. *a*) Nach Apollon. Kegelsch. II, 6.

dafs es sowohl selber, als auch dessen Oberfläche gehalbtheilt wird. Denn augenscheinlich pafst der eine Theil desselben in den andern, und die Oberfläche des einen in die des andern.

F. 158. Defshalb sei es nicht durch die Axe, auch nicht senkrecht zur Axe geschnitten. Dann sei der Durchschnitt des Sphäroids vermittelst einer Ebene durch die Axe und senkrecht zu jener schneidenden, die Ellipse ABCD; deren Durchmesser und die Axe des Sphäroids sei BD, und D der Mittelpunkt; der Durchschnitt der Ebene aber, welche das Sphäroid durch den Mittelpunkt schneidet, sei die gerade Linie AC. Es werde ferner noch ein anderes Sphäroid angenommen, jenem gleich und ähnlich; und der Durchschnitt desselben vermittelst einer Ebene durch die Axe sei die Ellipse EFGN, deren Durchmesser und die Axe des Sphäroids sei EG, der Mittelpunkt K. Auch werde durch K die Linie FN unter einem Winkel K = H gelegt, und auf FN eine Ebene senkrecht zu derjenigen errichtet, worin der Schnitt EFGN sich befindet. Dann sind die Ellipsen ABCD, EFGN, einander gleich und ähnlich. Auf einander gelegt pafst dann EG auf BD, und FN auf AC; es pafst zugleich die Ebene durch NF in die Ebene durch AC, weil beide von einerlei Linie auf einerlei Ebene senkrecht errichtet sind. Defshalb pafst auch der von der Ebene durch FN an der Seite des Punktes E abgetrennte Abschnitt des Sphäroids, in den von dem andern Sphäroid vermittelst der Ebene durch AC auf der Seite des Punktes B abgetrennten Abschnitt; und eben so pafst der zweite Abschnitt in den zweiten, und die Oberflächen der Abschnitte pafsen in einander. Legt man aber wiederum EG auf BD so, dafs E in D, und G in B trifft, und die Linie zwischen den Punkten N, F, in die Linie zwischen den Punkten A, C; so werden offenbar die Ellipsen auf einander pafsen, F wird in C fallen, und N in A. Gleicherweise wird auch die Ebene durch FN auf die Ebene durch AC pafsen, und von den mittelst der Ebene durch FN abgetrennten Abschnitten wird der auf der Seite des Punktes G befindliche in den Abschnitt pafsen, welcher mittelst der Ebene durch AC auf der Seite des Punktes B abgetrennt wird; der dagegen auf der Seite E in den auf der Seite D. Weil demnach einerlei Abschnitt in jeden der beiden Abschnitte pafst, so ist einleuchtend, dafs die Abschnitte gleich sind, und eben so die Oberflächen.

Satz 21

Wenn der von einer zur Axe senkrechten Ebene abgetrennte Abschnitt eines Konoids der einen oder der andern Art, oder der eben so abgetrennte Abschnitt eines Sphäroids der einen oder andern Art, nur dafs dieser nicht gröfser sei, als die Hälfte des Sphäroids, gegeben ist; so wird es möglich sein, einen aus Cylindern von gleicher Höhe bestehenden Körper darin, und einen andern darum so zu beschreiben, dafs der umschriebene den eingeschriebenen Körper um weniger übertrifft, als um jede vorgelegte körperliche Gröfse.

F. 159. Es sei ein Abschnitt, etwa ABC, gegeben. Wird er von einer Ebene durch die Axe geschnitten, so sei der Kegelschnitt ABC der Durchschnitt desselben, die gerade Linie AC aber der Durchschnitt der den Abschnitt abtrennenden Ebene. Die Axe des Abschnitts, und der Durchmesser seines Schnittes sei BD. Weil nun vorausgesetzt wird, dafs die trennende Ebene zur Axe senkrecht sei, so ist deren Schnitt ein Kreis mit dem Durchmesser AC. Auf diesem Kreise gebe es einen Cylinder mit der Axe BD. Der Mantel desselben wird aufserhalb des Abschnitts fallen, weil dieser entweder ein konoidischer oder ein sphäroidischer ist, nicht gröſser als das halbe Sphäroid (S. 16, 1. 2 und S. 19.). Wird nun dieser Cylinder von einer zu der Axe senkrechten Ebene fortwährend in Hälften getheilt; so wird man einmal auf einen Theil kommen, welcher kleiner ist, als die vorgelegte Körpergröſse. Ein solcher übrigbleibende Theil desselben, kleiner als die vorgelegte Körpergröſse, sei der Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser AC, und dessen Axe ED ist. Nun theile man BD in den Punkten P, O, Q, S, in Theile, welche ED gleich sind, ziehe durch die Theilungspunkte gerade Linien parallel AC bis an den Kegelschnitt, und errichte Ebenen auf ihnen senkrecht zu BD; dann werden die Schnitte Kreise sein, deren Mittelpunkte auf BD liegen. Auf jedem dieser Kreise errichte man zwei Cylinder, jeden mit einer Axe = ED, den einen auf der Seite des Cylinders, wo der Punkt D ist, den andern auf der Seite des Punktes B. Hiedurch wird ein aus denjenigen Cylindern, welche auf der Seite D errichtet wird, zusammengesetzter Körper in dem Abschnitte, um ihn aber ein anderer beschrieben sein, welcher aus den auf der Seite B errichteten Cylindern zusammengesetzt ist.

Es bleibt zu zeigen, daſs der äuſsere den innern Körper um weniger übertreffe, als um die vorgelegte körperliche Gröſse. Nun ist jeder der Cylinder in dem eingeschriebenen Körper gleich dem auf demselben Kreise an der Seite B errichteten Cylinder, also HG = HI, KL = KM, und so weiter; mithin ist die Summe der ersteren der Summe der andern gleich. Folglich übertrifft offenbar der umschriebene Körper den eingeschriebenen um den Cylinder, welcher zur Grundfläche den Kreis um den Durchmesser AC, zur Axe aber ED hat. Dieser jedoch ist kleiner, als die vorgelegte Körpergröſse.

Satz 22.

Wenn der von einer zur Axe nicht senkrechten Ebene abgetrennte Abschnitt eines Konoids der einen oder andern Art, oder auch der auf ähnliche Weise abgetrennte Abschnitt eines Sphäroids der einen oder der andern Art, nur nicht gröſser als die Hälfte des Sphäroids, gegeben ist; so ist es möglich, sowohl in als um denselben einen aus Cylinderstücken von gleicher Höhe zusammengesetzten Körper so zu verzeichnen, daſs der äuſsere den inneren um weniger übertrifft, als um jede vorgelegte Körpergröſse.

Der Abschnitt sei gegeben, wie er angedeutet ist. Wird nun dieser Körper von einer andern Ebene durch die Axe, senkrecht gegen die den gegebenen Abschnitt abtrennende Ebene geschnitten, so sei der Kegelschnitt ABC der Schnitt des Körpers, die gerade Linie AC aber der Durchschnitt der trennenden Ebene. Deſshalb, weil vorausgesetzt ist, die den Abschnitt abtrennende Ebene stehe nicht senkrecht gegen die Axe, so wird der Durchschnitt eine Ellipse, ihre Axe aber AC sein (S. 13. 14. 15.). Die gerade Linie VY sei parallel AC, und berühre den Kegelschnitt in B, und über VY sei eine Ebene parallel mit der Ebene durch AC errichtet; so wird diese den Körper in B berühren (S. 17, 2.), und wenn etwa der Abschnitt des Konoids ein parabolischer ist, so ziehe man durch B parallel mit der Axe die Linie BD; wenn aber ein hyperbolischer, so ziehe man aus der Spitze des umspannenden Kegels eine Linie nach B und deren Verlängerung BD; wenn endlich ein sphäroidischer, so schneide man von einer aus dem Mittelpunkte nach B gezogenen geraden Linie den Theil BD ab: dann erhellet, F. 160.

dafs BD die AC halbtheilt, (a) folglich ist B der Scheitel des Abschnitts, und die gerade Linie BD dessen Axe.

Es giebt hier demnach eine Ellipse um die Axe AC, und eine gerade Linie BD, die aus dem Mittelpunkte in einer Ebene gezogen ist, welche senkrecht zu der Ebene der Ellipse durch die eine der beiden Axen geht. Mithin ist es möglich, einen Cylinder mit der Axe BD zu finden, in dessen Mantel die Ellipse um die Axe AC liegt (S. 10.). Der Mantel desselben wird aber aufserhalb des Abschnitts fallen, weil dieser entweder konoidisch oder sphäroidisch, und dann nicht gröfser ist, als die Hälfte des Sphäroids (S. 16, 1. 2 und S. 19.). Auch wird hier ein Cylinderstück entstehen, welches zur Grundfläche die Ellipse um die Axe AC, zur Axe aber BD hat. Wird nun dieses Stück durch Ebenen, welche der Ebene durch AC parallel sind, fortwährend gehalbtheilt, so wird man auf einen Theil kommen, welcher kleiner ist, als die vorgelegte körperliche Gröfse. Es sei das Stück, welches zur Grundfläche die Ellipse um die Axe AC, zur Axe aber ED hat, kleiner als die vorgelegte Körpergröfse; man theile daher DB in lauter Theile von der Gröfse der Linie ED, ziehe durch die Theilungspunkte gerade Linien parallel zu AC bis an den Kegelschnitt, und errichte auf diesen Linien Ebenen parallel mit der Ebene durch AC. Diese werden die Oberfläche des Ausschnitts in Ellipsen schneiden, die der Ellipse um die Axe AC ähnlich sind, weil die Ebenen parallel liegen. (S. 15. Folg.). Man errichte daher auf jeder dieser Ellipsen zwei Cylinderstücke, das eine auf der Seite der Ellipse, wo D liegt, das andere auf der Seite von B, jeden mit einer Axe = DE. Dadurch werden mithin Körper in und um den Abschnitt entstehen, welche aus Cylinderstücken von gleicher Höhe zusammengesetzt sind.

Es bleibt nun zu zeigen, dafs der äufsere Körper den innern um weniger übertreffe, als um die vorgelegte Körpergröfse. Man wird aber auf ähnliche Weise wie zuvor darthun, dafs der äufsere Körper den innern um das Cylinderstück übertreffe, welches zur Grundfläche die Ellipse um die Axe AC, zur Axe aber ED hat; dieses jedoch ist kleiner als die vorgelegte körperliche Gröfse.

Nach diesen Vorbereitungen werden wir das beweisen, was über die Körper selbst vorgelegt ward.

Satz 23.

Jeder parabolische Abschnitt, welcher abgetrennt ist durch eine zu der Axe senkrecht stehende Ebene, ist anderthalbmal so grofs, als ein Kegel von gleicher Grundfläche und Axe mit dem Abschnitte.

F. 161. Es sei ein parabolischer Abschnitt durch eine Ebene senkrecht zu der Axe abgetrennt. Wird derselbe ferner von einer andern Ebene durch die Axe geschnitten; so sei der Durchschnitt seiner Oberfläche die Parabel ABC, der Durchschnitt der den Abschnitt abtrennenden Ebene aber die gerade Linie AC, die Axe des Abschnitts sei BD. Auch gebe es einen Kegel von derselben Grundfläche und Axe mit dem Abschnitt, und B sei der Scheitel. Zu beweisen ist, dafs der Abschnitt des Konoids anderthalbmal so grofs sei, als der Kegel.

(S. 22. a) Weil in jedem dieser Fälle BD alle diejenigen Sehnen halbtheilt, welche der berührenden VY parallel sind.

Man setze, der Kegel Z sei anderthalbmal so grofs, als der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser AC, und dessen Axe BD ist; auch gebe es einen Cylinder auf dem Kreise um AC als Grundfläche mit der Axe BD; dann wird der Kegel Z halb so grofs sein, als der ganze Cylinder, weil Z anderthalbmal so grofs ist, als jener Kegel. (α) Ich behaupte, dafs der Abschnitt des Konoids dem Kegel Z gleich sei. Denn wofern er ihm nicht gleich ist, so ist er entweder gröfser oder kleiner.

1) Er sei gröfser, wenn diefs möglich ist. Man beschreibe in dem Abschnitte einen aus Cylindern von gleicher Höhe bestehenden Körper, und einen andern um denselben, so dafs der äufsere Körper den innern um weniger übertrifft, als um wie viel der Abschnitt des Konoids den Kegel Z übertrifft. Auch sei der gröfste unter den Cylindern, aus welchen der umschriebene Körper bestehet, derjenige, welcher den Kreis um den Durchmesser AC zur Grundfläche, die Linie ED aber zur Axe hat; der kleinste dagegen derjenige, welcher zur Grundfläche den Kreis um den Durchmesser ST, zur Axe aber BG hat. Unter den Cylindern dagegen, aus welchen der eingeschriebene Körper zusammengesetzt ist, sei der gröfste der, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser KL, und dessen Axe DE ist, der kleinste aber der, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser ST, und dessen Axe GI ist. Man erweitere die Ebenen aller dieser Cylinder bis an den Mantel des Cylinders, welcher den Kreis um den Durchmesser AC zur Grundfläche, und BD zur Axe hat. Dann wird der ganze Cylinder in so viele andere, als die Zahl der Cylinder in dem äufsern Körper ausmacht, zerlegt, und jeder derselben wird dem gröfsten gleich sein. Weil nun der um den Abschnitt beschriebene Körper den eingeschriebenen um weniger übertrifft, als der Abschnitt den Kegel; so erhellet, dafs auch der in dem Abschnitte beschriebene Körper gröfser ist, als der Kegel Z. (β)

Nun verhält sich der erste Cylinder in dem ganzen, nämlich der mit der Axe DE, zu dem ersten in dem innern Körper, also zu dem mit der Axe DE, wie DA^2 zu KE^2; es ist aber
$$DA^2 : KE^2 = BD : BE \; (\gamma) = DA : EO$$
Auf dieselbe Weise wird nachgewiesen, dafs auch der zweite Cylinder in dem ganzen, nämlich der mit der Axe EF, zu dem zweiten Cylinder in dem innern Körper sich verhalte, wie QE, das ist, wie DA zu FW. Auch wird unter den übrigen Cylindern jeder einzelne in dem ganzen, der eine Axe = DE hat, zu jedem einzelnen in dem innern Körper sich verhalten, wie der halbe Durchmesser der Grundfläche zu dem Theile desselben, der jedesmal zwischen den geraden Linien AB, BD, liegt. Daher wird die Summe der Cylinder in demjenigen Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser AC, und dessen Axe DB ist, zu

---

(S. 23. α) Der Kegel auf dem Kreise um AC sei = A, der Cylinder auf derselben Grundfläche sei K, so ist $Z = \frac{3}{2} A$; $3A = K$; also $Z = \frac{1}{2} K$.

(β) Es ist nämlich
$$\textit{Aeufs. Körper} - \textit{Inn. Körp.} < \textit{Abschnitt} - \textit{Keg. Z.}$$
Nun ist der Abschnitt kleiner als der äufsere Körper, um desto mehr also
$$\textit{Abschnitt} - \textit{Inn. Körp.} < \textit{Abschnitt} - \textit{Keg. Z.}$$
folglich ist der innere Körper gröfser als der Kegel Z.

(γ) Indem DA, KE, Ordinaten der Parabel für die Abscissen BD, BE sind.

der Summe der Cylinder in dem eingeschriebenen Körper sich so verhalten, wie die Summe der Halbmesser der Kreise, welche die Grundflächen der erwähnten Cylinder sind, zur Summe der Theile derselben zwischen den geraden Linien AB, BD. Die Summe jener Linien beträgt aber mehr als das Doppelte der Summe dieser ohne AD (S. 1.). Also beträgt auch die Summe der Cylinder in dem ganzen, dessen Axe DB ist, mehr als das Doppelte des eingeschriebenen Körpers. Demnach ist auch der ganze Cylinder, dessen Axe DB ist, gröſser als das Doppelte des innern Körpers. Jener betrug aber doppelt so viel, als der Kegel Z; mithin ist der innere Körper kleiner als der Kegel Z, (3) was doch unmöglich ist, da er als gröſser nachgewiesen ward. Demnach ist das Konoid nicht gröſser als der Kegel Z.

2) Eben so ist es auch nicht kleiner. Denn man beschreibe wiederum einen innern und äuſsern Körper dergestalt, daſs der eine den andern um weniger als um den Unterschied des Kegels Z und des Konoids übertrifft, auch sei alles Uebrige wie zuvor konstruirt. Weil nun der eine Körper kleiner ist, als der Abschnitt, und der Unterschied zwischen dem innern und äuſsern Körper kleiner als der zwischen dem Abschnitte und dem Kegel Z, so erhellet, daſs der äuſsere Körper kleiner ist als der Kegel Z. (4)

Nun verhält sich wieder der erste Cylinder in dem ganzen, nämlich der mit der Axe DE, zu dem ersten Cylinder in dem äuſsern Körper, also zu dem mit derselben Axe DE, wie AD^2 zu sich selber. Der zweite Cylinder aber in dem ganzen, nämlich der mit der Axe EF verhält sich zu dem zweiten in dem äuſsern Körper, also zu dem mit der Axe EF, wie DA^2 zu KE^2. Es ist aber

$$DA^2 : KE^2 = BD : BE = DA : EO.$$

Auch wird unter den andern Cylindern jeder in dem ganzen, nämlich dessen Axe = DE ist, zu jedem einzelnen in dem äuſsern Körper, also zu jedem mit derselben Axe, sich so verhalten, wie der Halbmesser der Grundfläche zu dem Theile desselben zwischen den geraden Linien AB, BD. Daher wird die Summe der Cylinder in dem Cylinder, dessen Axe BD ist, zur Summe der Cylinder in dem äuſsern Körper sich so verhalten, wie die Summe der ersteren geraden Linien zur Summe der letztern. Die Summe der Halbmesser der Kreise, welche

---

(3) Der ganze Cylinder sei K; er sei durch die parallelen Ebenen in n Cylinder getheilt, deren jeder = C sein soll; also K = nC. Der innere Körper sei K′; es befinden sich in ihm n − 1 Cylinder, alle von verschiedener Gröſse: der gröſste sei c, und die folgenden nach der Reihe c′, c″, c‴ etc. Dann verhält sich

$$C : c = DA : EO,$$
$$C : c' = DA : FW, \text{ u. s. w.}$$
$$\overline{(n-1)\,C : K' = (n-1)\,DA : (EO + FW + \ldots)}$$

Nun haben die Linien DA, EO, FW etc. gleiche Unterschiede, und der Unterschied ist der Kleinsten gleich, weil BD in lauter gleiche Theile zerlegt worden; auch ist DA die gröſste dieser Linien; daher ist (nach S. 1.)

$$(n-1)\,DA > 2\,(EO + FW + \ldots)$$

mithin auch $(n-1)\,C > 2\,K'$;

und um desto mehr $K > 2\,K'$. Es war aber $K = 2\,Z$, mithin ist $Z > K'$.

(4) Man hat nämlich

Aeuſs. Körper — Inn. Körp. < *Keg. Z — Abschnitt*

Und weil der innere Körper kleiner ist, als der Abschnitt, so ist um desto mehr

Aeuſs. Körp. — Absch. < *Keg. Z — Absch.*

folglich ist der äuſsere Körper gröſser als der Kegel Z.

die Grundflächen der Cylinder sind, ist aber kleiner, als das Zweifache der Summe jener geradlinigen Theile von ihnen nebst der Linie AD (S. 1.); mithin ist auch die Summe der Cylinder in dem ganzen kleiner, als das Zweifache der Cylinder in dem äufsern Körper. Daher ist der Cylinder, welcher zur Grundfläche den Kreis um den Durchmesser AC, zur Axe aber BD hat, kleiner als das Zweifache des äufsern Körpers. Er ist aber nicht kleiner, sondern gröfser als das Zweifache; denn er ist dem Zweifachen des Kegels Z gleich; auch ward bewiesen, dafs der äufsere Körper kleiner sei, als der Kegel Z. (ζ) Demnach ist der Abschnitt des Konoids auch nicht kleiner als der Kegel Z. Dafs er nicht gröfser sei, ist bereits gezeigt; folglich beträgt er anderthalbmal so viel, als ein Kegel von derselben Grundfläche und Axe mit dem Abschnitte.

Satz 24.

Auch wenn der Abschnitt eines parabolischen Konoids durch eine zur Axe nicht senkrechte Ebene abgetrennt ist; so wird er gleichfalls anderthalbmal so grofs sein, als ein Kegelabschnitt von derselben Grundfläche und Axe, wie der Abschnitt.

Es sei der Angabe gemäfs ein Abschnitt des parabolischen Konoids abgetrennt. Wird F.162.
derselbe dann vermittelst einer Ebene durch die Axe, senkrecht zu der den Körper abtrennenden geschnitten; so sei der Durchschnitt des Körpers selbst die Parabel ABC, der abtrennenden Ebene aber die gerade Linie AC. Mit AC parallel werde die Linie VY, welche die Parabel in B berühre, und mit der Axe parallel die Linie BD gezogen, welche demnach die Linie AC halbtheilt. Ueber VY errichte man eine Ebene parallel mit der durch AD, so wird diese das Konoid in B berühren (S. 17, 2.), auch wird B der Scheitel des Abschnitts, und BD deren Axe sein. Weil nun die Ebene durch AC nicht senkrecht zur Axe das Konoid geschnitten hat, so wird der Schnitt eine Ellipse, und AC deren grofse Axe sein (S. 13.). Da hier demnach eine Ellipse um die Axe AC, und eine gerade Linie BD, aus dem Mittelpunkte der Ellipse in einer durch deren Axe senkrecht zu der Ebene der Ellipse errichteten Ebene, vorhanden ist; so ist es möglich, einen Cylinder zu finden, dessen Axe auf der geraden Linie BD liegt, und in dessen Mantel die Ellipse sich befindet (S. 10.). Auch ist es möglich, einen Kegel zu finden, dessen Scheitel in B ist, und in dessen Mantel die Ellipse liegen soll (S. 9.). Also wird irgend ein Cylinderstück vorhanden sein, das zur Grundfläche die Ellipse um die Axe AC, zur Axe aber BD hat; imgleichen ein Kegelabschnitt, welcher mit jenem Cylinderstücke und Abschnitte einerlei Grundfläche und einerlei Axe hat. Man soll zeigen, dafs der Abschnitt des Konoids anderthalbmal so viel betrage, als der des Kegels.

(ζ) Der ganze Cylinder sei K, und sei in n Cylinder getheilt, deren jeder = C sein soll, also K = nC; der äufsere Körper in K'. Dann befinden sich in diesem n Cylinder, deren gröfster C selbst ist, die andern mögen C', C'', C''' etc. sein. Nun verhält sich

$$\begin{aligned} C : C &= DA : DA \\ C : C' &= DA : EO \\ C : C'' &= DA : FW, \text{ u. s. w.} \\ \hline K : K' &= n.DA : (DA + EO + FW + \ldots) \end{aligned}$$

Nach S. 1 ist aber $n.DA < 2\,(DA + EO + FW + \ldots.)$ folglich auch $K < 2K'$. Nun ist $K = 2\,Z$, mithin müfste $Z < K'$ sein, was doch unmöglich ist, weil bewiesen worden, dafs $Z > K'$ sei.

Es sei daher der Kegel Z anderthalbmal so grofs, wie der Kegelabschnitt; dann wird das Cylinderstück, von derselben Grundfläche und Axe wie der Abschnitt, zweimal so grofs sein, als der Kegel Z; denn dieser beträgt anderthalbmal so viel, als der Kegelabschnitt, welcher mit dem Abschnitte des Konoids einerlei Grundfläche und Axe hat; der gedachte Kegelabschnitt aber ist der dritte Theil des Cylinderstücks, was die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat (S. 11.). Nothwendig aber ist der Abschnitt des Konoids dem Kegel Z gleich; denn wofern er ihm nicht gleich ist, so ist er entweder gröfser oder kleiner.

1) Er sei also wo möglich gröfser. Dann verzeichne man in dem Abschnitte einen aus Cylinderstücken von gleicher Höhe bestehenden Körper, und einen andern darum; so dafs der äufsere Körper den innern um weniger übertrifft, als um wie viel der Abschnitt des Konoids den Kegel Z übertrifft; auch sollen die Ebenen der Cylinderstücke bis an den Mantel desjenigen Stückes reichen, was mit dem Abschnitte einerlei Grundfläche und Axe hat.

Nun verhält sich wiederum das erste unter den Cylinderstücken in dem ganzen, nämlich das mit der Axe DE, zu dem ersten Stücke in dem innern Körper, also zu dem mit der Axe DE, wie AD^2 zu KE^2; denn Cylinderstücke von gleicher Höhe verhalten sich zu einander, wie ihre Grundflächen; diese Grundflächen aber, als ähnliche Ellipsen (S. 15. Folg.) verhalten sich, wie die Quadrate ihrer entsprechenden Axen. Nun sind die Linien AD, KE, die Hälften der entsprechenden Axen, und es verhält sich

$$AD^2 : KE^2 = BD : BE,$$

weil BD parallel dem Durchmesser, AD, KE, aber parallel der Berührungslinie sind; ferner verhält sich

$$BD : BE = AD : EO$$

Daher denn verhält sich das erste unter den Cylinderstücken in dem ganzen zu dem ersten in dem innern Körper, wie $AD : EO$; und unter den übrigen Cylinderstücken in dem ganzen verhält sich jedes, was eine Axe = DE hat, zu jedem mit derselben Axe in dem innern Körper, wie die Hälfte des Durchmessers seiner Grundfläche zu dem zwischen AB, BD, liegenden Theile desselben. Es läfst sich daher eben so wie zuvor beweisen, dafs der innere Körper gröfser sei, als der Kegel Z; und dafs das Cylinderstück, welches mit dem Abschnitte einerlei Grundfläche und Axe hat, gröfser sei, als das Doppelte des innern Körpers; mithin auch gröfser als das Doppelte des Kegels Z. Er ist aber nicht gröfser, sondern gleich dem Doppelten; daher ist der Abschnitt des Konoids nicht gröfser als der Kegel Z. (α)

2) Auf dieselbe Weise wird man darthun, dafs er auch nicht kleiner sei; mithin ist er ihm gleich; und folglich beträgt der Abschnitt des Konoids anderthalbmal so viel, als der Kegelabschnitt, welcher dieselbe Grundfläche und Axe hat, wie der Abschnitt.

Satz 25.

Wenn von einem parabolischen Konoid zwei Abschnitte durch zwei Ebenen abgetrennt sind, deren eine senkrecht zur Axe ist, die andere aber nicht senkrecht; und wenn die Axen beider Abschnitte gleich sind, so werden die Abschnitte gleich sein.

Von

(S. 24. α) Das ganze Cylinderstück sei K, der innere Körper sei K'; so folgt aus dem Vorhergegangenen, dafs $K' > Z$ und dafs $K > 2K'$, um desto mehr also $K > 2Z$; was unmöglich ist, weil $K = 2Z$ angenommen ward.

Von einem parabolischen Konoid sollen zwei Abschnitte der Angabe gemäfs abgetrennt F.163. sein. Wird dann das Konoid von einer Ebene durch die Axe, von einer andern senkrecht zur Axe, und noch von einer andern nicht senkrecht zur Axe geschnitten, so soll die Parabel ABC der Schnitt des Konoids, BD der Durchmesser, die geraden Linien AF, EC, aber sollen die Durchschnitte der Ebenen sein, und zwar EC für die zur Axe senkrechte, AF für die nicht senkrechte. Die einander gleichen Axen der Abschnitte sollen BH, KL, und die Scheitel B, L, sein. Zu beweisen ist, dafs der Abschnitt des Konoids mit dem Scheitel B gleich sei dem Abschnitte des Konoids mit dem Scheitel L.

Weil nämlich von einerlei Parabel zwei Abschnitte, ALF, EBC, mit den gleichen Durchmessern KL, HB, abgetrennt sind, so ist $\Delta ALK = \Delta EHB$; denn es ward bewiesen, dafs $\Delta ALF = \Delta EBC$ sei (S. 4. B.). Man fälle das Perpendikel AX auf die Verlängerung von LK. Weil nun $BH = LK$, so ist auch $EH = AX$. (α) Man beschreibe demnach in dem Abschnitte, dessen Scheitel B ist, einen Kegel auf derselben Grundfläche und mit derselben Axe des Abschnitts, und in dem Abschnitte, dessen Scheitel L ist, einen Kegelabschnitt auf der Grundfläche und mit der Axe dieses Abschnitts; auch ziehe man aus L auf DF die senkrechte LM; so wird sie die Höhe des Kegelabschnitts mit dem Scheitel L sein. Der Kegelabschnitt aber, dessen Scheitel L, und der Kegel, dessen Scheitel B ist, stehen im zusammengesetzten Verhältnifse ihrer Grundflächen und Höhen (S. 11.); ihr Verhältnifs ist folglich zusammengesetzt aus dem des Flächeninhalts der Ellipse um die Axe AF zu dem Kreise um den Durchmesser EC, und aus dem der Linie LM zu BH. Es verhält sich aber der Inhalt der Ellipse zu eben diesem Kreise, wie das Rechteck unter ihren Axen zu EC^2 (S. 6.); mithin ist das Verhältnifs des Kegelabschnitts mit dem Scheitel L zu dem Kegel mit dem Scheitel B zusammengesetzt aus den Verhältnifsen $KA : EH$ und $LM : BH$. Denn KA ist die Hälfte des Durchmessers der Grundfläche des Kegelabschnitts mit dem Scheitel L, und EH ist die Hälfte des Durchmessers der Grundfläche des Kegels; (β) die Linien LM, BH, aber sind die Höhen derselben. Es verhält sich aber

$$LM : BH = LM : KL, \text{ weil } BH = KL,$$

auch ist

$$LM : KL = XA : AK \ (\gamma)$$

Mithin ist das Verhältnifs des Kegelabschnitts zum Kegel zusammengesetzt aus den Verhältnifsen $AK : AX$, (denn es ist $AX = EH$) und aus $LM : BH$. Man hat aber

$$AK : AX = LK : LM;$$

mithin steht der Kegelabschnitt zu dem Kegel in einem aus den Verhältnifsen $LK : LM$ und $LM : BH$ zusammengesetzten Verhältnifse. Es ist jedoch $LK = BH$, mithin erhellet, dafs der

---

(S. 25. α) Nach dem Beweise zu S. 4, B.

(β) Man ziehe FG ‡ CE durch F und AG ‡ BH durch A, so ist FG die kleine Axe der Ellipse um die grofse Axe AF (S. 13.) Nun hat man

$$FN : NG = FK : KA$$

also $FN = NG = AX = EH$, mithin $FG = CE$. Es verhält sich daher

$$\textit{Inhalt d. Ellipse um } AF : \textit{Kreis um } EC = AF \times EC : EC^2 \text{ (S. 6.)}$$

Zugleich ist $AF \times EC : EC^2 = AF : EC = AK : EH$; folglich

$$\textit{Inhalt d. Ellipse} : \textit{Kreis} = AK : EH.$$

(γ) Weil $\Delta LKM \sim \Delta AKX$ ist.

Kegelabschnitt, dessen Scheitel L ist, gleich sei dem Kegel, dessen Scheitel B ist; und daraus ist klar, daſs auch die Abschnitte gleich sind; indem der eine anderthalbmal so groſs, als der Kegel, (S. 23.) der andere aber anderthalbmal so groſs als der Kegelabschnitt ist (S. 24.), und diese gleich sind.

Satz 26.

Wenn von einem parabolischen Konoid zwei Abschnitte durch Ebenen in willkührlicher Lage abgetrennt werden, so werden die Abschnitte sich zu einander verhalten, wie die Quadrate ihrer Axen.

F.164. Man trenne von einem parabolischen Konoid zwei willkührliche Abschnitte ab; die Axe des einen sei gleich K, die Axe des andern gleich L: so ist zu zeigen, daſs die Abschnitte sich zu einander verhalten, wie $K^2 : L^2$.

Wird nun das Konoid von einer Ebene durch die Axe des Abschnitts geschnitten; so sei der Schnitt die Parabel ABC, die Axe aber BD. Man nehme $BD = K$, und lege durch D eine Ebene senkrecht zur Axe. Dann ist der Abschnitt des Konoids, welcher zur Grundfläche den Kreis um AC, zur Axe aber BD hat, gleich dem Abschnitte, dessen Axe gleich K ist (S. 25.).

Wenn nun auch $K = L$, so werden augenscheinlich die Abschnitte gleichfalls einander gleich sein; indem jeder von beiden einem und demselben gleich ist; imgleichen ist alsdann $K^2 = L^2$, folglich verhalten sich die Abschnitte, wie die Quadrate der Axen.

Wenn aber K nicht gleich L ist, so sei $L = BH$, und man führe durch H eine Ebene senkrecht zu der Axe; so ist der Abschnitt, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser EF, und dessen Axe BH ist, gleich dem Abschnitte mit der Axe L (S. 25.). Man beschreibe nun zwei Kegel auf den Kreisen um die Durchmesser AC, EF, als Grundflächen, und mit dem Scheitel B. Der Kegel mit der Axe BD steht aber zu dem Kegel mit der Axe BH in einem aus den Verhältniſsen $AD^2 : EH^2$ und $BD : BH$ zusammengesetzten Verhältniſse, und es verhält sich

$$AD^2 : EH^2 = BD : BH;$$

also stehet der Kegel, dessen Axe BD, zu dem Kegel, dessen Axe BH ist, in einem aus den Verhältniſsen $BD : BH$ und $BD : BH$ zusammengesetzten Verhältniſse, das heiſst in dem Verhältniſse $BD^2 : BH^2$. Wie sich aber der Kegel mit der Axe BD zu dem Kegel mit der Axe BH verhält, so verhält sich auch der konoidische Abschnitt mit der Axe BD zu dem mit der Axe BH; denn jeder von diesen ist anderthalbmal so groſs, als jene. Auch ist dem Abschnitte mit der Axe BD der Abschnitt des Konoids gleich, dessen Axe K ist; und dem Abschnitte mit der Axe BH der Abschnitt des Konoids, dessen Axe gleich L ist; auch ist $BD = K$ und $HB = L$, folglich erhellet, daſs der Abschnitt des Konoids mit der Axe K sich eben so verhält zu dem Abschnitte mit der Axe L, wie $K^2 : L^2$.

Satz 27.

Jeder Abschnitt eines hyperbolischen Konoids, welcher mittelst einer zur Axe senkrechten Ebene abgetrennt worden ist, verhält sich zu demjenigen Kegel, welcher einerlei Grundfläche und Höhe mit dem Abschnitte hat, wie die Axe des Abschnitts nebst dem Dreifachen des Ansatzes der Axe zu der Axe des Abschnitts nebst dem Doppelten des Ansatzes der Axe.

Es sei der Abschnitt eines hyperbolischen Konoids durch eine Ebene senkrecht zur Axe F.165.
abgetrennt. Wird derselbe dann noch von einer andern Ebene durch die Axe geschnitten; so sei der Schnitt des Konoids die Hyperbel ABC, der abtrennenden Ebene aber die gerade Linie AC. Die Axe des Abschnitts sei BD, der Ansatz der Axe sei $BH = FH = FG$. Zu beweisen ist, daſs der Abschnitt zu dem Kegel, welcher dieselbe Grundfläche wie der Abschnitt, und dieselbe Axe hat, sich verhalte, wie $GD : FD$.

Es gebe nun einen Cylinder, welcher dieselbe Grundfläche und Axe hat, wie der Abschnitt, und VA, CY mögen dessen Seiten sein. Auch gebe es einen Kegel Z, welcher zu dem Kegel auf der Grundfläche des Abschnitts und mit der Axe BD sich verhalten soll, wie $GD : FD$; dann behaupte ich, der Abschnitt des Konoids sei dem Kegel Z gleich. Denn wofern er ihm nicht gleich ist, so ist er entweder gröſser oder kleiner.

1) Er sei wo möglich gröſser. Man beschreibe aus Cylindern von gleicher Höhe einen Körper in dem Abschnitte, und einen andern darum, so daſs der umschriebene den eingeschriebenen um weniger übertrifft, als um wie viel der Abschnitt den Kegel Z übertrifft (S. 21.); auch erweitere man die Ebenen aller dieser Cylinder bis an den Mantel des Cylinders, welcher den Kreis um den Durchmesser AC zur Grundfläche, BD aber zur Axe hat. Dann wird der ganze Cylinder in Cylinder zerlegt sein, deren Anzahl mit der Zahl der Cylinder des umschriebenen Körpers, deren Gröſse aber mit der Gröſse des gröſsten unter jenen übereinkommt. Weil nun der äuſsere Körper den innern um weniger übertrifft, als der Abschnitt den Kegel Z, und weil der äuſsere Körper gröſser ist, als der Abschnitt; so erhellt, daſs auch der innere Körper gröſser sei, als der Kegel Z.

Es sei demnach $\frac{1}{3}\,BD = BP$, so wird $GD = 3\,HP$ sein; und weil der Cylinder auf dem Kreise um den Durchmesser AC und mit der Axe BD zu dem Kegel auf derselben Grundfläche und mit derselben Axe sich verhält, wie $GD : HP$; weil ferner der gedachte Kegel zu dem Kegel Z sich verhält, wie $FD : GD$; so wird sich der erwähnte Cylinder zu dem Kegel Z verhalten, wie $FD : HP$.

Ferner gebe es hier so viele mit X bezeichnete Linien, wie es Abschnitte der Linie BD giebt, und jede sei FB gleich; auch sei an jede derselben ein Rechteck mit einem überragenden Quadrate angelegt, unter denen das gröſste dem Rechtecke $FD \times DB$, das kleinste aber $FO \times OB$ gleich sei. Die Seiten der überragenden Quadrate übertreffen sich um gleiche Unterschiede, weil eben diese Seiten den Abschnitten auf BD gleich sind, welche gleiche Unterschiede haben. Die Seite M, gleich der Linie BD, sei die Seite des gröſsten überragenden Quadrats, die kleinste aber sei gleich BO. Ferner gebe es noch andere Rechtecke mit der Bezeichnung W, an Menge den vorigen gleich, an Gröſse aber jedes dem gröſsten, nämlich $FD \times DB$ gleich.

Nun verhält sich der Cylinder, welcher den Kreis um den Durchmesser AC zur Grundfläche, zur Axe aber DE hat, zu dem Cylinder, welcher zur Grundfläche den Kreis um den Durchmesser KL, zur Axe aber DE hat, wie $DA^2 : KE^2$, das heiſst wie $FD \times DB : FE \times EB$; denn dieſs ist eine Eigenschaft jeder Hyperbel, indem das Doppelte des Ansatzes der Axe, d. i. der aus dem Mittelpunkte gezogenen Linie, die grofse Axe der Hyperbel selbst ist. (α) Auch ist $FD \times BD$ gleich dem Rechtecke XM, und $FE \times BE$ gleich dem Rechtecke XN; denn es ist $X = FB$, und $N = BE$, und $M = BD$. Daher verhält sich der Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser AC, und dessen Axe DE ist, zu dem Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser KL, und dessen Axe DE ist, wie das Rechteck W zu dem Rechtecke XN. Auf dieselbe Weise zeigt man, dafs auch unter den andern Cylindern jeder in dem ganzen mit einer Axe $= DE$, zu einem in dem innern Körper mit derselben Axe sich verhalte, wie das Rechteck W zu dem entsprechenden Rechtecke unter denen, welche samt dem überragenden Quadrate an die Linie X angelegt sind.

Es giebt hier also gewisse Gröfsen, nämlich die Cylinder in dem ganzen Cylinder, deren jeder eine Axe $= DE$ hat; ferner andere Gröfsen in gleicher Anzahl, nämlich die Rechtecke W, welche paarweise in gleichem Verhältnisse stehen, indem sowohl die Cylinder unter sich, als auch die Rechtecke W unter sich gleich sind. Von diesen Cylindern aber werden einige mit andern Cylindern des eingeschriebenen Körpers verglichen, der letzte jedoch wird gar nicht verglichen; auch werden unter den Rechtecken W einige mit andern Rechtecken, welche samt ihren überragenden Quadraten an die Linien X angelegt sind, in gleicher Folge nach einerlei Verhältnisse verglichen, das letzte aber wird nicht verglichen. Daraus geht hervor, dafs auch die Summe der Cylinder in dem ganzen zur Summe der Cylinder in dem eingeschriebenen Körper sich verhalten werde, wie die Summe der Rechtecke W zur Summe der angelegten Rechtecke ohne das gröfste. (β) Es ward aber bewiesen, dafs die Summe der Rechtecke W zur Summe der angelegten Rechtecke ohne das gröfste, in einem gröfseren Verhältnisse stehe, als $(M + X) : (\frac{1}{2} X + \frac{1}{3} M)$ (S. 3.). Daher ist auch

$$\textit{d. ganze Cyl.} : \textit{inn. Körp.} > FD : HP \quad (\gamma)$$

Es ist aber nach dem Beweise $\quad FD : HP = \textit{d. g. Cyl.} : \textit{Keg. } Z$

folglich $\quad \textit{d. ganze Cyl.} : \textit{inn. Körp.} > \textit{d. g. Cyl.} : \textit{Keg. } Z.$

Mithin ist der Kegel Z gröfser als der eingeschriebene Körper; was doch unmöglich ist; denn nach dem Beweise war der eingeschriebene Körper gröfser als der Kegel Z. Mithin ist der Abschnitt des Konoids nicht gröfser als der Kegel Z.

(S. 27. α) Nach Apollon. Kegelsch. I. 21.

(β) Bezeichnet man die fünf Cylinder des ganzen von unten herauf durch A, B, C, D, E, die entsprechenden des innern Körpers durch a, b, c, d, die gleichen Rechtecke sämtlich durch W, die ungleichen durch α, β, γ, δ, ε, so dafs $\alpha = W$ ist; so hat man

$$\begin{aligned} 1)\ & A : B = W : W \\ & B : C = W : W, \text{ u. s. w.} \\ 2)\ & A : a = W : \beta \\ & B : b = W : \gamma \\ & C : c = W : \delta \\ & D : d = W : \varepsilon \end{aligned}$$

Für E giebt es keinen entsprechenden Cylinder des innern Körpers, und eben so wenig für das letzte W ein entsprechendes Rechteck. Dann verhält sich (S. 2. Zusatz)

$$(A + B + C + D + E) : (a + b + c + d) = (W + W + W + W + W) : (\beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$$

(γ) Weil $FD = FB + BD = X + M$

und $HP = HB + BP = \frac{1}{2} FB + \frac{1}{3} BD = \frac{1}{2} X + \frac{1}{3} M$

2) Er ist aber auch nicht kleiner; denn er sei wo möglich kleiner. Wiederum beschreibe man aus Cylindern von gleicher Höhe einen Körper in dem Abschnitte, und einen andern darum, so daſs der äuſsere den innern um weniger übertrifft, als um den Ueberschuſs des Kegels über den Abschnitt, auch sei alles Uebrige wie zuvor konstruirt. Da nun der innere Körper kleiner ist, als der Abschnitt, und der Ueberschuſs des Aeuſsern über den innern Körper kleiner ist, als der des Kegels über den Abschnitt; so folgt, daſs der äuſsere Körper kleiner sei, als der Kegel Z.

Wiederum verhält sich der erste Cylinder in dem ganzen, nämlich der mit der Axe DE, zu dem ersten Cylinder in dem äuſsern Körper, also zu dem mit der Axe DE, wie das Rechteck W zu dem Rechtecke XM, denn beide sind gleich. Und unter den übrigen Cylindern verhält sich jeder, dessen Axe $=$ DE ist, in dem ganzen zu einem zugehörigen mit derselben Axe in dem äuſsern Körper, wie das Rechteck W zu dem gleichvielten Rechtecke unter den an X angelegten nebst dem überragenden Theile, weil eben alle äuſseren ohne den gröſsten einzeln gleich sind den einzelnen innern mit dem gröſsten. (δ) Daher wird sich auch der ganze Cylinder zu dem äuſsern Körper verhalten, wie die Summe der Rechtecke W zur Summe der angelegten nebst ihren überragenden Theilen.

Es ist jedoch wiederum erwiesen, daſs die Summe der Rechtecke W zur Summe der übrigen in kleinerem Verhältniſse stehe, als $(X + M) : (\frac{1}{2} X + \frac{1}{3} M)$ (S. 3.); daher verhält sich

$$\begin{array}{ll} & \textit{d. ganze Cyl.} : \textit{äuſs. Körp.} < FD : HP \\ \text{Es ist aber} & FD : HP = \textit{d. g. Cyl.} : \textit{Keg. Z} \\ \hline \text{folglich} & \textit{d. ganze Cyl.} : \textit{äuſs. Körp.} < \textit{d. g. Cyl.} : \textit{Keg. Z} \end{array}$$

mithin ist der äuſsere Körper gröſser, als der Kegel Z; was doch unmöglich ist, indem bewiesen ward, der äuſsere Körper sei kleiner, als der Kegel Z. Demnach ist der Abschnitt des Konoids nicht kleiner als der Kegel Z. Da er also weder gröſser noch kleiner ist, so ist die Behauptung erwiesen.

Satz 28.

Wenn auch der Abschnitt eines hyperbolischen Konoids durch eine zur Axe nicht senkrechte Ebene abgetrennt ist; so wird er sich doch zu einem Kegelschnitte auf der Grundfläche und mit der Axe des Abschnitts verhalten, wie die Axe des Abschnitts nebst dem Dreifachen des Ansatzes der Axe zu der Axe nebst dem Doppelten des Ansatzes der Axe.

Es sei der Abschnitt eines hyperbolischen Konoids der Angabe gemäſs abgetrennt. Wird dann dieser Körper noch von einer andern Ebene durch die Axe senkrecht zu der den Abschnitt abscheidenden geschnitten, so sei der Schnitt des Körpers die Hyperbel ABC, der Durchschnitt der trennenden Ebene aber die gerade Linie AC. Der Scheitel des umspannen- F. 166.

(δ) Wenn in Anmkg. β durch die Buchstaben a, b, c, d, die Cylinder des innern Körpers bezeichnet wurden, so ist jetzt a der zweite Cylinder des äuſsern Körpers, b der dritte etc., indem A selbst der erste ist. Man hat also jetzt folgende Proportionen nach der vorigen Bezeichnung

$$A : A = W : \alpha$$
$$B : a = W : \beta$$
$$C : b = W : \gamma, \text{ u. s. w.}$$

den Kegels sei der Punkt H. Man ziehe durch B die Berührungslinie VY der Hyperbel, parallel mit AC, ihr Berührungspunkt sei B; auch ziehe man die Verbindungslinie HB und verlängere sie, so wird diese die Linie AC halbtheilen, und es wird B der Scheitel des Abschnitts, BD aber dessen Axe, und BH der Ansatz der Axe sein. Es sei ferner BH = HF = FG, und man errichte über VY eine Ebene parallel der durch AC; so wird sie das Konoid in B berühren. Weil nun die Ebene durch AC das Konoid nicht senkrecht zur Axe schneidet, so wird der Schnitt eine Ellipse, und deren grofse Axe CA sein (S. 14.). Da hier mithin eine Ellipse um die Axe AC und eine aus deren Mittelpunkt errichtete Linie BD in einer Ebene vorhanden ist, welche selbst durch eine Axe senkrecht zu der Ebene der Ellipse liegt; so ist es möglich, einen Cylinder zu finden, dessen Axe auf der geraden Linie BD, und in dessen Mantel die Ellipse um die Axe AC sich befindet (S. 10.). Ist dieser gefunden, so wird es also ein Cylinderstück geben, welches einerlei Grundfläche mit dem Abschnitte und dieselbe Axe hat; die zweite Grundfläche desselben aber wird die Ebene durch VY sein. Ferner ist es möglich, einen Kegel zu finden, dessen Scheitel der Punkt B ist, und in dessen Mantel die Ellipse um die Axe AC sich befindet (S. 9.). Ist derselbe gefunden, so wird es hier einen Kegelabschnitt geben, welcher mit dem Cylinderstücke sowohl, als mit dem Abschnitte selbst einerlei Grundfläche und Axe hat. Zu zeigen ist nun, dafs der Abschnitt des Konoids zu dem gedachten Kegelabschnitte sich verhalte, wie GD : DF.

Es sei nämlich GD : DF = *Keg.* Z : *Kegelabschnitt*;

dann behaupte ich, der Abschnitt des Konoids sei gleich dem Kegel Z. Wofern nämlich der Kegelabschnitt dem Kegel nicht gleich ist, so sei er

1) gröfser, wenn diefs möglich ist. Man beschreibe dann einen aus Cylinderstücken von gleicher Höhe bestehenden Körper in dem Abschnitte des Konoids, und einen andern darum; so dafs der äufsere Körper den innern um weniger übertrifft, als um den Unterschied des Abschnitts und des Kegels Z. Weil nun der äufsere Körper gröfser ist, als der Abschnitt, und den innern um weniger übertrifft, als der Abschnitt den Kegel; so erhellet, dafs der innere Körper gröfser ist, als der Kegel Z.

Man erweitere die Ebenen sämtlicher Cylinderstücke in dem eingeschriebenen Körper bis an den Mantel des ganzen, welcher einerlei Grundfläche und Axe mit dem Abschnitte hat; auch sei BP = $\frac{1}{3}$ BD und alles Uebrige wie zuvor konstruirt. Dann verhält sich gleichfalls das erste Cylinderstück in dem ganzen, nämlich das mit der Axe DE, zu dem ersten des eingeschriebenen Körpers mit derselben Axe DE, wie $AD^2 : KE^2$; denn als Cylinderstücke von gleicher Höhe verhalten sie sich zu einander wie ihre Grundflächen (S. 11.); ihre Grundflächen aber, da sie ähnliche Ellipsen sind (S. 15, Folg.), verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der gleichliegenden Axen. Es ist aber

$$AD^2 : KE^2 = FD \times DB : FE \times EB,$$

weil BD durch den Punkt H, wo auch die Asymptoten zusammentreffen, gezogen ist, und weil AD, KE, der Berührungslinie durch B parallel sind. Es ist jedoch FD × DB dem Rechtecke W, und FE × EB dem Rechtecke XN gleich. Daher verhält sich das erste Cylinderstück in dem ganzen, nämlich das mit der Axe DE, zu dem ersten des innern Körpers, also zu dem mit der Axe DE, wie das Rechteck W zu dem Rechtecke XN; und unter den übrigen Cylinderstücken verhält sich jedes in dem ganzen, d. h. jedes, dessen Axe gleich DE ist, wie das Rechteck W zu dem entsprechenden Rechtecke unter denen, die mit ihren überragenden Quadraten an X gelegt sind.

Es giebt hier demnach wieder eine Anzahl Gröſsen, nämlich die Cylinderstücke in dem ganzen; und noch andere Gröſsen in derselben Anzahl, nämlich die Rechtecke W, welche paarweise in demselben Verhältniſse stehen, wie jene. (α) Auch werden jene Cylinderstücke mit andern, nämlich mit denen des eingeschriebenen Körpers verglichen, mit Ausnahme des letzten, was nicht verglichen wird; endlich werden die Rechtecke W mit andern Rechtecken, die an X angelegt sind und überragende Quadrate haben, in gleicher Reihenfolge nach denselben Verhältnisſen verglichen, das letzte jedoch nicht. Es erhellet folglich, daſs die Summe der ersteren Cylinderstücke zur Summe der letztern sich verhalten werde, wie die Summe der Rechtecke W zur Summe der angelegten Rechtecke ohne das gröſste. (β). Allein die Summe der Rechtecke W steht zur Summe der angelegten Rechtecke ohne das gröſste in einem gröſseren Verhältniſse, als die Linie $(M + X) : (\frac{1}{2} X + \frac{1}{3} M)$ (S. 3.). Daher verhält sich

$$d.\ ganze\ Cylinderstück : inn.\ Körp. > (M + X) : (\tfrac{1}{2} X + \tfrac{1}{3} M)$$

also auch $\quad d.\ g.\ Cylinderstück : inn.\ Körp. > FD : HP$

mithin $\quad d.\ g.\ Cylinderstück : inn.\ Körp. > d.\ g.\ Cylinderst. : Keg.\ Z.$

was doch unmöglich ist; denn es ward bewiesen, daſs der innere Körper gröſser sei, als der Kegel Z. Daher ist der Abschnitt des Konoids nicht gröſser als der Kegel Z.

2) Wenn dagegen der Abschnitt des Konoids kleiner ist, als der Kegel Z, so beschreibe man einen aus Cylinderstücken von gleicher Höhe bestehenden Körper in dem Abschnitte, und einen andern darum; so daſs der äuſsere den innern um weniger übertrifft, als um wieviel der Kegel Z den Abschnitt übertrifft; dann läſst sich auf gleiche Weise wieder zeigen, daſs der äuſsere Körper kleiner sei, als der Kegel Z, und daſs ein Cylinderstück, welches dieselbe Grundfläche und Axe wie der Abschnitt hat, zu dem äuſseren Körper in kleinerem Verhältniſse stehe, als zu dem Kegel Z; was doch unmöglich ist. Daher ist der Abschnitt des Konoids auch nicht kleiner als der Kegel Z; und so erhellet das Behauptete.

Satz 29.

Wenn irgend ein Sphäroid von einer zur Axe senkrechten Ebene durch den Mittelpunkt geschnitten wird; so ist die Hälfte des Sphäroids zweimal so groſs, als ein Kegel von derselben Grundfläche und Axe mit dem Abschnitte selbst.

Es sei ein Sphäroid von einer zur Axe senkrechten Ebene durch den Mittelpunkt geschnitten. Wird daſselbe dann von einer andern Ebene, und zwar durch die Axe geschnitten, so sei der Durchschnitt des Körpers die Ellipse ABCD, ihre Axe, und zugleich die Axe des Sphäroids sei BD, der Mittelpunkt aber H. (Es macht keinen Unterschied, ob BD die groſse oder die kleine Axe der Ellipse ist.) Der Durchschnitt der den Körper abtrennenden Ebene sei die gerade Linie CA; so wird diese durch H gehen und rechte Winkel bei H bilden, weil die Ebene nach der Voraussetzung durch den Mittelpunkt und senkrecht zur Axe gelegt ist. F. 167.

(S. 28. α) Denn die Cylinderstücke sind unter sich gleich, und eben so die Rechtecke W.

(β) Siehe Anm. β zum vorigen Satze.

Es soll gezeigt werden, dafs das halbe Sphäroid, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser A C, und dessen Scheitel B ist, zweimal so grofs sei, als der Kegel, welcher dieselbe Grundfläche und dieselbe Axe wie der Abschnitt hat.

Es gebe nämlich einen Kegel mit der Bezeichnung Z, zweimal so grofs, als den Kegel, welcher einerlei Grundfläche mit dem Abschnitte und einerlei Axe, nämlich HB hat. Ich behaupte, die Hälfte des Sphäroids sei dem Kegel Z gleich. Denn wofern das Halbsphäroid dem Kegel Z nicht gleich ist, so sei dafselbe

1) wo möglich gröfser. Man beschreibe einen aus Cylindern von gleicher Höhe bestehenden Körper in dem halben Sphäroid, und einen andern darum, so dafs der äufsere Körper den innern um weniger übertrifft, als um den Unterschied des halben Sphäroids und des Kegels Z. Weil also der äufsere Körper gröfser ist, als das Halbsphäroid, und den innern Körper um weniger übertrifft, als das Halbsphäroid den Kegel Z; so ist einleuchtend, dafs der in dem Halbsphäroid beschriebene Körper gröfser sei, als der Kegel Z.

Es gebe ferner einen Cylinder auf dem Kreise um den Durchmesser AC als Grundfläche und mit der Axe BH. Weil nun dieser Cylinder dreimal so grofs ist, als ein Kegel, welcher einerlei Grundfläche und Axe mit dem Abschnitte hat, der Kegel Z aber zweimal so grofs, als ebenderselbe Kegel; so erhellet, dafs der Cylinder anderthalbmal so viel beträgt, als der Kegel Z. (α) Man erweitere hierauf die Ebenen aller Cylinder, aus denen der innere Körper gebildet ist, bis an den Mantel des Cylinders, welcher die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat; so wird der ganze Cylinder in so viele Cylinder zerlegt, als es Cylinder in dem äufsern Körper giebt, und jeder wird dem gröfsten derselben gleich sein.

Es gebe nun so viele Linien mit der Bezeichnung X, als es Abschnitte der geraden Linie BH giebt, jede gleich BH, und auf jeder sei ein Quadrat beschrieben. Von dem letzten Quadrate nehme man ein Gnomon weg, dessen Breite gleich BI ist, was demnach dem Rechteck $BI \times ID$ gleich sein wird. (β) Von dem nächsten Quadrate nehme man ein Gnomon weg, dessen Breite gleich 2 BI ist, so wird dieses dem Rechteck $BO \times OD$ gleich sein: und wenn man von jedem folgenden Quadrate ein Gnomon wegnimmt, dessen Breite immer um einen Abschnitt gröfser ist, als die Breite des eben vorher weggenommenen Gnomons; so wird jedes einem Rechtecke unter solchen Abschnitten der Linie BD gleich sein, deren einer der Breite des Gnomons gleich ist. Daher wird dann der Rest des zweiten Quadrats ein Quadrat mit der Seite HE sein. (γ) Nun verhält sich der erste Cylinder in dem ganzen, nämlich der mit der Axe HE, zu dem ersten Cylinder in dem innern Körper, d. h. zu dem mit derselben Axe HE, wie $HA^2 ; KE^2$, also auch wie $BH \times HD : BE \times ED$. Es verhält sich also

(S. 29. α) Der ganze Cylinder sei K, ein Kegel auf derselben Grundfläche und mit derselben Axe sei A, so ist $K = 3A$, $Z = 2A$, mithin $K = \frac{3}{2} Z$.

F. 167 u. 167,a (β) Es sei $ag = BH$, $gc = BH^2$, $gh = cf = BI$; man ziehe hb ‡ ag durch h nnd $fd = ac$ durch f, so ist haf ein Gnomon, dessen Breite $= BI$ ist.

Es ist aber $haf = gb + bf = ag \times gh + bc \times cf = (ag + bc) \times gh$

oder $haf = (BH + IH) \times BI = ID \times BI$

(γ) Dieses zweite Quadrat ist nämlich $= BH^2$; davon wird weggenommen das Rechteck $BE \times ED$, also ist der Rest $= BH^2 - BE \times ED = BH^2 - (BH - HE) \times (BH + HE) = BH^2 - (BH^2 - HE^2) = HE^2$

also der eine Cylinder zu dem andern, wie das erste Quadrat zu dem von dem zweiten weggenommenen Gnomon. Auf gleiche Weise wird sich jeder der übrigen Cylinder, dessen Axe $= HE$ ist, zu einem mit derselben Axe in dem innern Körper verhalten, wie das ihm entsprechende Quadrat zu dem Gnomon, welches von dem darauf folgenden Quadrate weggenommen ist.

Es giebt hier folglich eine Anzahl Gröſsen, nämlich die Cylinder in dem ganzen; und wieder andere in derselben Menge und paarweise proportionirt, nämlich die Quadrate der Linien X. (3) Es werden ferner die Cylinder mit andern Gröſsen verglichen, nämlich mit den Cylindern des eingeschriebenen Körpers, wobei jedoch der letzte gar nicht verglichen wird; und die Quadrate werden wieder mit andern Gröſsen, nämlich mit den von den Quadraten weggenommenen Gnomonen der Reihe nach in denselben Verhältniſsen verglichen, mit Ausnahme des letzten Quadrats, was gar nicht verglichen wird. Daher wird sich die Summe der Cylinder in dem ganzen zur Summe der übrigen Cylinder verhalten, wie die Summe der Quadrate zur Summe der von ihnen weggenommenen Gnomone (S. 3.). Also verhält sich der ganze Cylinder mit der Grundfläche und Axe des Abschnitts zu dem innern Körper, wie die Summe der Quadrate zur Summe der von ihnen weggenommenen Gnomone. Die Summe der Quadrate beträgt aber mehr als anderthalbmal so viel, als die Summe der weggenommenen Gnomone. Denn es giebt hier gewisse Linien XP, XS, XT, XY, XV, deren Unterschiede unter sich und der kleinsten Linie gleich sind; auch giebt es eben so viele andere Linien mit der Bezeichnung XX, deren jede der gröſsten unter jenen gleich ist. Die Summe der Quadrate der Linien also, welche der gröſsten gleich sind, beträgt weniger, als die dreifache Summe der Quadrate der Linien mit gleichen Unterschieden, mehr jedoch, als das Dreifache der Summe jener Quadrate nach Abzug des Quadrats der gröſsten Linie. Dieſs nämlich ist in der Schrift über die Schneckenlinien bewiesen (*Schneckenl. S.* 10. *Folg.* 1. 2.). Weil nun die Summe jener Quadrate kleiner ist, als die dreifache Summe der von jenen weggenommenen Quadrate; so erhellt, daſs sie mehr beträgt, als das anderthalbmalige des Unterschieds beider Summen, d. h. mehr als das Anderthalbmalige der Gnomone. (4) Demnach beträgt auch der Cylinder, welcher die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat, mehr als das Anderthalbmalige des innern Körpers; was doch unmöglich ist: denn er beträgt anderthalbmal so viel, wie der Kegel Z, und es ward bewiesen, daſs der innere Körper gröſser sei, als der Kegel Z. Es ist folglich das Halbsphäroid nicht gröſser, als der Kegel Z. — Aber auch nicht kleiner; denn es sei

2) wo möglich kleiner. Man beschreibe wieder einen aus gleich hohen Cylindern bestehenden Körper in dem Halbsphäroid, und einen andern darum, so daſs der äuſsere Körper den innern um weniger als um den Unterschied des Kegels und Halbsphäroids übertrifft, und alles Uebrige werde wie zuvor konstruirt. Weil nun der innere Körper kleiner ist, als der

(3) Denn die Quadrate sind unter sich gleich, und die Cylinder ebenfalls.

(4) Die Summe der groſsen Quadrate sei S, die Summe der weggenommenen Gnomone sei G, die Summe der übrigbleibenden Quadrate sei s, so ist $S - s = G$; auch hat man $S < 3s$, oder $\frac{1}{3} S < s$; und zieht man die letztere Gleichung von $S = S$ ab, so ergiebt sich $\frac{2}{3} S > S - s$, also $S > \frac{3}{2}(S - s)$, oder $S > \frac{3}{2} G$.

Abschnitt, so ist offenbar auch der äufsere Körper kleiner als der Kegel Z. Es verhält sich nun wieder der erste Cylinder in dem ganzen, nämlich der mit der Axe HE, zu dem ersten Cylinder des umschriebenen Körpers, nämlich zu dem mit der Axe HE, wie das erste Quadrat zu sich selbst. Der zweite aber unter den Cylindern in dem ganzen, also der mit der Axe EQ, verhält sich zu dem zweiten des äufsern Körpers, also zu dem mit der Axe EQ, wie das zweite Quadrat zu dem von ihm weggenommenen Gnomon: (ζ) und unter den übrigen Cylindern verhält sich jeder in dem ganzen, also jeder, defsen Axe = HE ist, zu dem entsprechenden Cylinder mit derselben Axe in dem äufsern Körper, wie das jenem entsprechende Quadrat zu dem von ihm weggenommenen Gnomon. Daher wird die Summe der Cylinder in dem ganzen zur Summe der Cylinder in dem äufsern Körper sich verhalten, wie die Summe der Quadrate zu einer Summe aus dem ersten Quadrate, nebst den von den übrigen Quadraten weggenommenen Gnomonen. Nun ist die Summe der Quadrate kleiner, als das Anderthalbmalige der Summe aus dem ersten Quadrate und aus den von den übrigen weggenommenen Gnomonen; weil die erstere Summe mehr beträgt, als das Dreifache der Quadrate der Linien mit gleichen Unterschieden ohne das Quadrat der gröfsten. (η) Defshalb beträgt der Cylinder, welcher die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat, weniger als das Anderthalbmalige des äufsern Körpers; und eben diefs ist unmöglich, denn jener Cylinder beträgt anderthalbmal so viel, als der Kegel Z, und es ward bewiesen, der äufsere Körper sei kleiner, als der Kegel Z. Folglich ist das Halbsphäroid nicht kleiner als der Kegel Z. Weil dasselbe nun weder gröfser noch kleiner ist, so ist es ihm gleich.

Satz 30.

Wenn auch das Sphäroid von einer Ebene durch den Mittelpunkt nicht senkrecht zur Axe geschnitten wird; so wird gleichfalls das Halbsphäroid zweimal so grofs sein, als ein Kegel, welcher die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat.

F. 168. Das Sphäroid sei geschnitten. Wird dasselbe noch von einer andern Ebene durch die Axe senkrecht gegen jene schneidende Ebene geschnitten, so sei der Durchschnitt des Körpers die Ellipse ABCD, und H deren Mittelpunkt, der Durchschnitt der trennenden Ebene aber sei die gerade Linie AC, welche durch H gehen wird, weil jene Ebene nach der Voraussezzung durch den Mittelpunkt geführt ist. Es wird hier mithin eine Ellipse um die Axe AC geben, weil vorausgesetzt wurde, dafs die schneidende Ebene nicht senkrecht gegen die Axe gelegt sei. Man ziehe parallel zu AC die Berührungslinien KL, MN, der Ellipse für die Punkte B, D, und errichte auf KL, MN, Ebenen parallel mit der durch AC, so werden diese die Ellipse in B, D, berühren (S. 17, 2), und eine Verbindungslinie zwischen B, D, wird durch H gehen (S. 18.); die Scheitelpunkte der Abschnitte werden B, D, sein, die Axen aber BH, HD. Dann läfst sich ein Cylinder mit der Axe BH finden, in dessen Mantel die Ellipse um die Axe AC liegen wird. (S. 10). Ist dieser gefunden, so wird es ein Cylinderstück geben, was

---

(ζ) Denn das vom zweiten Quadrate weggenommene Gnomon ist dem Rechtecke BE × ED gleich.

(η) Behält man die in Anmerk. ε gewählte Bezeichnung bei, und setzt $XP^2 = q$, so ist (Schneckenl. S. 10 Folg. 2.) $S > 3\,(s-q)$; oder $\frac{1}{3}S > s-q$; zieht man diese Gleichung von $S = S$ ab, so erhält man $\frac{2}{3}S < S-s+q$, oder $S < \frac{3}{2}(S-s+q)$, oder $S < \frac{3}{2}(G+q)$.

die Grundfläche und Axe des Halbsphäroids hat; auch läſst sich ein Kegel mit dem Scheitel B finden, in dessen Mantel die Ellipse um die Axe A C liegen wird (S. 9.); und ist dieser gefunden, so wird es einen Kegelabschnitt geben, welcher die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat. Ich behaupte demnach, daſs die Hälfte des Sphäroids zweimal so groſs sei, als dieser Kegelabschnitt. Es sei nämlich der Kegel Z zweimal so groſs als jener Kegelabschnitt; wofern dann das Halbsphäroid dem Kegel Z nicht gleich ist, so sei es

1) wo möglich gröſser. Man beschreibe aus gleich hohen Cylinderstücken einen Körper in dem Halbsphäroid, und einen andern um dasselbe, dergestalt daſs der Unterschied des äuſsern und innern Körpers gröſser ist, als der des Halbsphäroids und des Kegels Z. Auf ähnliche Weise wie zuvor wird man nun zeigen, daſs der in dem Halbsphäroid beschriebene Körper gröſser sei, als der Kegel Z; daſs ferner das Cylinderstück mit der Grundfläche und Axe des Abschnitts so viel betrage, als das Anderthalbmalige des Kegels Z, mehr aber als das Anderthalbmalige des in dem Halbsphäroid beschriebenen Körpers. Und eben dieſs ist unmöglich; daher wird das Halbsphäroid nicht gröſser sein, als der Kegel Z.

2) Wenn es aber kleiner ist, so beschreibe man aus Cylinderstücken von gleicher Höhe einen Körper in dem Halbsphäroid, und einen andern darum, dergestalt daſs der Unterschied des äuſsern und innern Körpers kleiner ist, als der Unterschied des Kegels und des Halbsphäroids. Dann wird man wiederum wie zuvor zeigen, daſs der äuſsere Körper kleiner sei, als der Kegel Z; daſs ferner das Cylinderstück mit der Grundfläche und Axe des Abschnitts so groſs sei, wie das Anderthalbmalige des Kegels Z, kleiner aber, als das Anderthalbmalige des äuſsern Körpers; was doch unmöglich ist. Daher wird denn das Halbsphäroid auch nicht kleiner sein, als der Kegel Z; mithin ist es demselben gleich, da es weder gröſser noch kleiner ist; und somit erhellet, was bewiesen werden sollte.

Satz 31.

Wenn ein Sphäroid von einer Ebene nicht durch den Mittelpunkt, doch senkrecht zur Axe geschnitten wird, so verhält sich der kleinere Abschnitt zu dem Kegel auf der Grundfläche und mit der Axe des Abschnitts, wie die halbe Axe des Sphäroids nebst der Axe des gröſsern Abschnitts zu der Axe des gröſsern Abschnitts.

Ein Abschnitt eines Sphäroids sei mittelst einer zur Axe senkrechten Ebene, nicht durch F.169. den Mittelpunkt, abgetrennt. Wird derselbe noch von einer andern Ebene durch die Axe geschnitten; so sei der Schnitt des Körpers die Ellipse ABC; die Axe des Schnitts und des Sphäroids sei BF, der Mittelpunkt sei H; der Durchschnitt der abtrennenden Ebene sei die gerade Linie AC, welche mit BF rechte Winkel bilden wird, da die Ebene nach der Voraussetzung senkrecht zur Axe steht. Der abgetrennte Abschnitt, dessen Scheitel B ist, sei kleiner als das Halbsphäroid, und es sei $BH = FG$. Zu beweisen ist, daſs der Abschnitt, dessen Scheitel B ist, zu einem Kegel auf der Grundfläche des Abschnitts und mit dessen Axe sich verhalte, wie $DG : DF$.

Es gebe einen Cylinder, welcher dieselbe Grundfläche und Axe hat, wie der kleinere Abschnitt; auch gebe es einen Kegel mit der Bezeichnung Z, welcher zu dem Kegel auf der Grundfläche und mit der Axe des Abschnitts sich verhält, wie $DG : DF$. Ich behaupte nun, dafs der Kegel Z gleich sei dem Abschnitte mit dem Scheitel B; denn wofern er ihm nicht gleich ist, so sei er

1) wo möglich kleiner. Man beschreibe einen aus Cylindern von gleicher Höhe bestehenden Körper in dem Abschnitte, und einen andern darum, so dafs der umschriebene den eingeschriebenen um weniger übertrifft, als um den Ueberschufs des Abschnitts über den Kegel Z (S. 21.). Da also der äufsere Körper, gröfser als der Abschnitt, den innern um weniger übertrifft, als der Abschnitt den Kegel; so erhellt, dafs der innere Körper gröfser ist, als der Kegel Z.

Es sei nun $BP = \frac{1}{3} BD$; weil dann $BG = 3\,BH$, so wird auch $DG = 3\,HP$ sein. (α) Demnach verhält sich ein Cylinder, welcher die Grundfläche des Abschnitts und die Axe BD hat, zu einem Kegel von derselben Grundfläche und Axe, wie $DG : HP$; der gedachte Kegel aber verhält sich zu dem Kegel Z, wie $DF : DG$; folglich wird sich der Cylinder, welcher die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat, zu dem Kegel Z verhalten, wie $DF : HP$.

Man setze nun so viele gerade Linien mit der Bezeichnung XN, als es Abschnitte der Linie BD giebt, und jede $= FD$; auch setze man jede der Linien $XO = BD$, so wird jede der Linien $NO = 2\,HD$ sein. (β) An jede dieser Linien lege man ein Rechteck, dessen Breite $= BD$ ist, so dafs also jedes derselben ein Quadrat der Axe des Abschnitts enthält. Man nehme dann von dem ersten ein Gnomon weg, dessen Breite $= BQ$, und auf dieselbe Weise von jedem folgenden Rechtecke ein Gnomon, deren Breite um einen Abschnitt kleiner ist, als die Breite des von dem vorhergehenden weggenommenen Gnomons. Dann wird das vom ersten Rechtecke genommene Gnomon dem Rechtecke $BE \times EF$ gleich sein, und das übrigbleibende neben NO liegende Rechteck wird ein überragendes Quadrat haben, dessen Seite $= DE$ ist; (γ) das vom zweiten Rechtecke weggenommene Gnomon aber wird $= FQ \times QB$ sein, und das übrigbleibende neben NO liegende Rechteck ein überragendes Quadrat haben, und so weiter. Zugleich erweitere man die Ebenen aller Cylinder, aus denen der in dem Abschnitte beschriebene Körper besteht, bis an den Mantel des Cylinders, welcher einerlei Grundfläche und Axe mit dem Abschnitt hat. Dann wird der ganze Cylinder in eben so viele Cylinder zerlegt sein, wie der äufsere Körper, und jeder ist dem gröfsten gleich. Es verhält sich aber der erste Cylinder in dem ganzen, also der mit der Axe DE, zu dem ersten Cylinder des innern Körpers, also zu dem mit der Axe DE, wie $DC^2 : KE^2$, also wie $BD \times DF : BE \times EF$. Demnach verhält sich der eine Cylinder zu dem andern, wie das erste Rechteck zu dem davon weggenommenen Gnomon; und eben so verhält sich unter den andern Cylindern jeder,

---

F. 169. u. 169 a

(S. 31. α) Man hat nämlich $3\,HP = 3\,BH - 3\,BP = BG - BD = DG$

(β) Denn es ist $NO = XN - XO = FD - BD = BH + HD - BD = BD + 2\,HD - BD = 2\,HD$

(γ) Es sei am ein Rechteck, $ad = FD$, $ak = BD$, $cd = ek = BE$. Man ziehe $eg \ddagger ad$, und verlängere eg bis h, ferner $cg \ddagger ak$; so ist dme ein Gnomon, und man hat

$$dme = dg + hk = cd \times dh + ek \times km = cd\,.\,(dh + km) = cd\,.\,(ae + ad)$$

Nun ist $ae = ak - ek = BD - BE = DE$, und $ad = FD$,
mithin $dme = BE \times (DE + FD) = BE \times EF$.

Macht man dann $bd = ak = BD$, und zieht $bl \ddagger ak$, so ist $ag = af + bg$, und $bg = bc \times cg$; allein man hat $bc = bd - cd = BD - BE = DE$, und $cg = ae = DE$, mithin $ag = DE^2$.

dessen Axe $=$ DE ist, in dem ganzen zu dem entsprechenden Cylinder mit derselben Axe in dem innern Körper, wie das eben so vielte Rechteck zu dem davon weggenommenen Gnomon.

Es giebt hier folglich eine Anzahl Gröfsen, nämlich die Cylinder in dem ganzen, und eben so viele andere Gröfsen, nämlich die an XN angelegten Rechtecke, deren Breite $=$ BD ist, und welche paarweise wie jene sich verhalten. Die Cylinder aber werden mit andern Cylindern, nämlich denen des innern Körpers verglichen, mit Ausnahme des letzten, was nicht verglichen wird; ferner die Rechtecke mit andern Flächenräumen, die von ihnen weggenommen sind, und zwar die entsprechenden nach gleichen Verhältnifsen, mit Ausnahme des letzten gar nicht verglichenen Rechtecks. Mithin erhellet, dafs auch die Summe der ersteren Cylinder zur Summe der letzteren sich verhalten werde, wie die Summe der Rechtecke zur Summe der Gnomone (S. 2.). Folglich wird sich der Cylinder mit der Grundfläche und Axe des Abschnitts zu dem in dem Abschnitte beschriebenen Körper verhalten, wie die Summe der Rechtecke zur Summe der Gnomone.

Weil hier ferner eine Anzahl gleicher Linien mit der Bezeichnung NO vorhanden ist, und an jeder ein Rechteck mit einem überragenden Quadrate liegt, auch die Seiten dieser überragenden Quadrate unter sich gleiche Unterschiede haben, der Unterschied selbst aber der kleinsten Linie gleich ist; und weil noch eben so viele andere Rechtecke an XO angelegt sind, deren Breite $=$ BD, und deren jedes dem gröfsten gleich ist: (3) so folgt, dafs die Summe der Rechtecke, deren jedes dem gröfsten gleich ist, zur Summe der andern Rechtecke in kleinerem Verhältnifse stehen werde, als XN : $(\frac{1}{2}$ NO $+ \frac{1}{3}$ XO$)$ (S. 3.). Daraus geht hervor, dafs die Summe jener Rechtecke zur Summe der Gnomone in gröfserem Verhältnifse stehen werde, als XN : $(\frac{1}{2}$ NO $+ \frac{2}{3}$ XO$)$; (4) mithin steht der Cylinder mit der Grundfläche und Axe des Abschnitts zu dem innern Körper in einem gröfseren Verhältnifse, als XN : $(\frac{1}{2}$ NO $+ \frac{2}{3}$ XO$)$. Es ist aber XN $=$ DF, und $\frac{1}{2}$ NO $=$ DH, und $\frac{2}{3}$ XO $=$ DP; daher ist

$$\textit{Cyl. : eingeschr. Körp.} > \mathrm{DF : HP}$$

Es ward aber bewiesen, dafs sich verhalte

$$\underline{\mathrm{DF : HP} = \textit{Cyl. : Keg. Z}}$$

$$\text{folglich} \quad \textit{Cyl. : eingeschr. Körp.} > \textit{Cyl. : Keg. Z.}$$

und diefs ist unmöglich, da man bewiesen hat, dafs der eingeschriebene Körper gröfser sei, als der Kegel Z. Demnach ist der Abschnitt des Sphäroids nicht gröfser als der Kegel Z.

2) Daher sei denn, wo möglich, der Abschnitt kleiner als der Kegel Z. Man beschreibe wieder einen aus gleich hohen Cylindern bestehenden Körper in dem

---

(3) Unter diesen Rechtecken sind die Rechtecke NX verstanden.

(4) Die Summe der Rechtecke NX sei S, die Summe der an NO angelegten Rechtecke mit ihren überragenden Quadraten sei s, die Summe der weggenommenen Gnomone sei G; ferner sei die Linie NX $=$ a und $\frac{1}{2}$ NO $+ \frac{2}{3}$ XO $=$ b; so ist s $=$ S $-$ G, und man hat

$$S : s < a : b;\ \text{oder}\ \frac{S}{S-G} < \frac{a}{b},$$

$$\text{folglich}\ \frac{G}{S-G} < \frac{a-b}{b},\quad \text{oder}\ \frac{S-G}{G} > \frac{b}{a-b},\ \text{mithin}\ \frac{S}{G} > \frac{a}{a-b}$$

Nun ist a $=$ NO $+$ XO, und a $-$ b $=$ NO $+$ XO $- \frac{1}{2}$ NO $- \frac{2}{3}$ XO $= \frac{1}{2}$ NO $+ \frac{1}{3}$ XO, folglich

$$S : G > NX : (\tfrac{1}{2}\,NO + \tfrac{1}{3}\,XO)$$

Abschnitte, und einen andern darum, so dafs der Unterschied des äufsern und innern Körpers geringer ist, als der des Kegels Z und des Abschnitts; auch sei alles Uebrige wie zuvor konstruirt. Weil demnach der innere Körper kleiner als der Abschnitt ist, der äufsere aber den innern um weniger übertrifft, als der Kegel den Abschnitt; so folgt, dafs auch der äufsere Körper kleiner sei, als der Kegel Z.

Wiederum verhält sich nun der erste Cylinder mit der Axe DE in dem ganzen zu dem ersten Cylinder mit derselben Axe in dem äufsern Körper, wie das letzte Rechteck, was an XN angelegt ist, und eine Breite = BD hat, zu sich selber, denn beidemal ist eins dem andern gleich. Der zweite Cylinder aber, dessen Axe = DE ist, in dem ganzen, verhält sich zu dem zugehörigen des äufsern Körpers, wie das erste der an XN angelegten Rechtecke, dessen Breite = BD ist, zu dem davon weggenommenen Gnomon; und unter den andern Cylindern verhält sich jeder, dessen Axe = DE ist, in dem ganzen, zu dem zugehörigen des äufsern Körpers, wie das entsprechende unter den an XN angelegten Rechtecken zu dem Gnomon, welches von dem unmittelbar vorhergehenden weggenommen ist. Daher wird aus denselben Gründen wie zuvor, die Summe der Cylinder in dem ganzen zur Summe der Cylinder in dem äufsern Körper sich verhalten, wie die Summe der an XN angelegten Rechtecke zur Summe des letzten Rechtecks und sämtlicher von den übrigen weggenommenen Gnomone. Weil nun bewiesen ist, dafs die Summe der an XN angelegten Rechtecke zur Summe der mit ihren überragenden Quadraten an NO angelegten Rechtecke, ohne das gröfste, in einem gröfseren Verhältnifse stehe, als $XN : (\frac{1}{2} NO + \frac{1}{3} XO)$ (S. 3.); so erhellet, dafs jene Summe zu dem Reste, das heifst zu dem letzten Rechtecke nebst den von den übrigen weggenommenen Gnomonen in kleinerem Verhältnifse stehe, als $XN : (\frac{1}{2} NO + \frac{2}{3} XO)$. (ζ) Daraus geht hervor, dafs auch der Cylinder, welcher die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat, zu dem äufsern Körper in kleinerem Verhältnifse sei, als FD : HP. Es ist aber

$$FD : HP = \textit{Cyl.} : \textit{Keg. } Z,$$

folgl. $\textit{Cyl.} : \textit{äufs. Körp.} < \textit{Cyl.} : \textit{Keg. } Z;$

und diefs ist unmöglich, weil gezeigt worden, der äufsere Körper sei kleiner als der Kegel Z. Daher ist der Abschnitt des Sphäroids nicht kleiner, als der Kegel Z; und weil er also weder gröfser noch kleiner ist, so ist er ihm gleich.

Satz 32.

Wenn hiernächst ein Sphäroid von einer Ebene weder senkrecht zur Axe, noch durch den Mittelpunkt geschnitten wird; so wird der kleinere Abschnitt desselben zu einem Kegelabschnitte auf der Grundfläche und mit der Axe des Abschnitts sich verhalten, wie die halbe Verbindungslinie der Scheitelpunkte der entstandenen Abschnitte nebst der Axe des gröfseren Abschnitts zur Axe des gröfseren Abschnitts.

(ζ) Man behalte die Bezeichnung in der letzten Anmerkung bei, und setze noch das Rechteck NX = A; so ward bewiesen, dafs $S : (s - A) > a : b$; also $\frac{S}{S-(G+A)} > \frac{a}{b}$,

mithin $\frac{G+A}{S-(G+A)} > \frac{a-b}{b}$, oder $\frac{S-(G+A)}{G+A} < \frac{b}{a-b}$; folgl. $\frac{S}{G+A} < \frac{a}{a-b}$.

woraus folgt $S : (G + A) < NX : (\frac{1}{2} NO + \frac{2}{3} XO)$

Ein Sphäroid sei der Angabe gemäfs geschnitten. Wird dafselbe noch von einer andern Ebene durch die Axe senkrecht zu jener trennenden Ebene geschnitten; so sei der Schnitt des Körpers die Ellipse ABC, der Schnitt der trennenden Ebene aber sei die gerade Linie AC. Man ziehe parallel mit AC die Berührungslinien der Ellipse QP, ST, für die Punkte P, F, und errichte auf ihnen Ebenen parallel der durch AC; so werden sie das Sphäroid in den Punkten B, F, berühren, und B, F, werden die Scheitel der Abschnitte sein. Man ziehe die Verbindungslinie, welche BF sein mag, und durch den Mittelpunkt gehen wird (S. 18.); der Mittelpunkt des Sphäroids und der Ellipse sei H. Weil nun der Körper nach der Voraussetzung von einer Ebene nicht senkrecht zur Axe geschnitten wird, so ist der Schnitt eine Ellipse und AC deren Axe (S. 15.). Man nehme nun einen Cylinder an, dessen Axe in der geraden Linie BD liegt, und in dessen Mantel die Ellipse um die Axe AC sich befinden soll (S. 10); ferner einen Kegel mit dem Scheitel B, in dessen Mantel gleichfalls die Ellipse um die Axe AC liegen soll (S. 9.); dann wird es ein Cylinderstück geben, welches die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat, und einen Kegelabschnitt, der ebenfalls die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat. Zu beweisen ist, dafs der Abschnitt des Sphäroids, dessen Scheitel B ist, zu dem Kegelabschnitte, welcher mit dem Abschnitte selbst einerlei Grundfläche und Axe hat, sich verhalten werde, wie DG : DF, wo nämlich FG = HF sein soll. F.170.

Man setze einen Kegel mit der Bezeichnung Z, welcher zu dem Kegelabschnitte, der die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat, sich verhält, wie DG : DF. Wenn alsdann der Abschnitt des Sphäroids dem Kegel Z nicht gleich ist, so sei er

1) wo möglich gröfser. Man beschreibe aus gleich hohen Cylinderstücken einen Körper in dem Abschnitte des Sphäroids, und einen andern darum, so dafs der Unterschied des äufsern und innern Körpers kleiner ist, als der des Abschnitts und des Kegels Z. Auf ähnliche Art wie vorhin zeigt man nunmehr, dafs der innere Körper gröfser sei, als der Kegel Z; und dafs das Cylinderstück, welches die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat, zu dem innern Körper in gröfserem Verhältnifse stehe, als zu dem Kegel Z; was demnach unmöglich ist. Daher wird der Abschnitt des Sphäroids nicht gröfser sein, als der Kegel Z.

2) Er sei also wo möglich kleiner. Wiederum sei ein Körper aus gleich hohen Cylinderstücken in dem Abschnitte beschrieben, und ein anderer darum, dergestalt, dafs der äufsere den innern Körper um weniger übertrifft, als um den Unterschied zwischen dem Kegel Z und dem Abschnitte. Durch dieselben Schlüfse wie zuvor wird dann gezeigt werden, dafs der äufsere Körper gröfser sei, als der Kegel Z: und dafs das Cylinderstück, welches die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat, zu dem äufsern Körper in kleinerem Verhältnifse stehe, als zu dem Kegel Z; was doch unmöglich ist. Daher wird der Abschnitt auch nicht kleiner sein, als der Kegel; und so erhellet, was zu beweisen war.

Satz 33.

Wenn irgend ein Sphäroid von einer zur Axe senkrechten Ebene nicht durch den Mittelpunkt geschnitten wird, so verhält sich der gröfsere Abschnitt zu einem Kegel, welcher die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat, wie die halbe Axe des Sphäroids nebst der Axe des kleinern Abschnitts zu der Axe des kleinern Abschnitts.

Ein Sphäroid sei geschnitten, wie angegeben ist. Wird dafselbe noch von einer an- F.171.

dern Ebene durch die Axe senkrecht zu jener schneidenden Ebene geschnitten; so sei der Schnitt des Körpers die Ellipse ABC; deren Axe und die Axe des Körpers sei BD; der Durchschnitt der trennenden Ebene aber sei die gerade Linie CA,, welche demnach senkrecht zu BD sein wird. Der gröſsere Abschnitt habe den Scheitel B, und H sei der Mittelpunkt des Sphäroids. Man mache die Ansätze $DG = DH$ und $BF = DH$. Zu beweisen ist, daſs der Abschnitt des Sphäroids mit dem Scheitel B zu einem Kegel auf der Grundfläche des Abschnitts und mit der Axe desselben sich verhalte, wie $EG : ED$.

Es sei demnach das Sphäroid von einer Ebene durch den Mittelpunkt senkrecht zur Axe geschnitten, und auf dem dadurch entstandenen Kreise stehe ein Kegel, dessen Scheitel in D liegt; dann ist also das ganze Sphäroid zweimal so groſs, als der Abschnitt, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser KL, und dessen Scheitel der Punkt D ist; eben dieser Abschnitt aber beträgt zweimal so viel, als der Kegel auf eben der Grundfläche und mit eben der Axe, wie bewiesen worden ist (S. 29.). Daher beträgt das ganze Sphäroid viermal so viel, wie der gedachte Kegel. Nun stehet aber dieser Kegel zu demjenigen Kegel, welcher den Kreis um den Durchmesser AC zur Grundfläche, und den Punkt D zum Scheitel hat, in einem Verhältniſse, das aus den Verhältniſsen $HD : ED$ und $KH^2 : EH^2$ zusammengesetzt ist: und es ist

$$KH^2 : EA^2 = BH \times HD : BE \times ED$$

Zugleich verhalte sich $HD : ED = XD : HD$

also auch $XD \times BH : BH \times HD = HD : ED.$

Ein aus den Verhältniſsen $XD \times BH : BH \times HD$ und $BH \times HD : BE \times ED$ zusammengesetztes Verhältniſs ist aber daſselbe, wie $XD \times BH : BE \times ED$. Daher verhält sich der Kegel, welcher zur Grundfläche den Kreis um den Durchmesser KL, und zum Scheitel den Punkt D hat, zu dem Kegel, welcher den Kreis um den Durchmesser AC zur Grundfläche und D zum Scheitel hat, eben so, wie $XD \times BH : BE \times ED$.

Der Kegel aber, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser AC, und dessen Scheitel der Punkt D ist, verhält sich zu dem Abschnitte des Sphäroids, welcher einerlei Grundfläche und Axe mit ihm hat, wie $BE \times ED : FE \times ED$, das heiſst wie $BE : EF$; denn es ist bewiesen worden, daſs ein kleinerer Abschnitt, als das Halbsphäroid, zu einem Kegel, welcher einerlei Grundfläche und Axe mit dem Abschnitte hat, sich verhalte, wie die halbe Axe des Sphäroids nebst der Axe des gröſsern Abschnitts zu der Axe des gröſsern Abschnitts (S. 32.); und dieses Verhältniſs ist eben wie $FE : BE$. Folglich verhält sich der Kegel in dem Halbsphäroid zu dem Abschnitte des Sphäroids, welcher kleiner ist, als das Halbsphäroid, wie $XD \times BH : FE \times ED$.

Weil ferner das ganze Sphäroid zu dem Kegel im Halbsphäroid sich verhält, wie $FG \times XD : BH \times XD$; (denn beidemal ist das erste das Vierfache des andern) und weil der Kegel in dem Halbsphäroid zu dem Abschnitte, welcher kleiner ist, als das Halbsphäroid, sich verhält, wie $XD \times BH : FE \times ED$; so muſs auch das ganze Sphäroid zu dem kleineren Abschnitte sich verhalten, wie $FG \times XD : FE \times ED$. Dann verhält sich auch

gröſs.

$$\textit{gröfs. Absch.} : \textit{klein. Absch.} = (FG \times XD - FE \times ED) : FE \times ED$$

Es ist aber $FG \times XD - FE \times ED = XD \times EG + FE \times XE$, ($\alpha$)
mithin verhält sich

$$\textit{gröfs. Absch.} : \textit{klein. Absch.} = (XD \times EG + FE \times XE) : FE \times ED.$$

Es verhält sich aber

$$\textit{klein. Absch.} : \textit{Keg. von derselb. Gdfl. u. Axe} = FE \times ED : BE \times ED;$$

denn so verhält sich $FE : BE$. Ferner verhält sich

$$\textit{Keg. in d. kl. Absch.} : \textit{Keg. in d. gr. Absch.} = BE \times ED : BE^2;$$

denn diese Kegel verhalten sich wie ihre Höhen, da sie einerlei Grundfläche haben. Daher verhält sich auch

$$\textit{gröfs. Absch.} : \textit{Keg. in d. gr. Absch.} = (XD \times EG + FE \times XE) : BE^2$$

Diefs Verhältnifs ist aber dasselbe, wie $EG : ED$; denn es ist

$$XD \times EG : XD \times ED = EG : ED$$

und $FE \times XE : FE \times HE = EG : ED$;

weil nämlich $XE : HE = EG : ED$,

indem die Linien XD, HD, ED proportionirt sind und $HD = GD$ ist. (β) Daher ist denn

$$(XD \times EG + FE \times XE) : (XD \times ED + FE \times HE) = EG : ED$$

Es ist aber $BE^2 = XD \times ED + FE \times HE$; denn es ist $BH^2 = XD \times ED$ und $BE^2 - BH^2 = FE \times HE$, weil $BH = BF$ ist. (γ)

Daraus geht denn hervor, dafs der gröfsere Abschnitt des Sphäroids zu dem Kegel, welcher mit ihm einerlei Grundfläche und Axe hat, sich verhält, wie $EG : ED$.

Satz 34.

Wenn aber auch das Sphäroid von einer zur Axe nicht senkrechten Ebene und nicht durch den Mittelpunkt geschnitten wird; so wird sich doch der gröfsere Abschnitt desselben zu dem Abschnitte eines Kegels auf der Grundfläche des Abschnitts und mit dessen Axe so verhalten, wie die halbe Verbindungslinie der Scheitelpunkte der entstehenden Abschnitte nebst der Axe des kleinern Abschnitts zu der Axe des kleinern Abschnitts.

Ein Sphäroid sei von einer Ebene geschnitten, wie angegeben wurde. Wird dasselbe F.172. noch von einer andern Ebene durch die Axe senkrecht gegen jene schneidende geschnitten; so sei der Schnitt des Körpers die Ellipse $ABCD$, der den Körper trennenden Ebene aber die

---

(S. 33. α) Denn es ist $FG \times XD - FE \times ED = (FE + EG) \,.\, XD - (XD - XE) \,.\, FE = FE \times XD + EG \times XD - FE \times XD + FE \times XE = EG \times XD + FE \times XE$.

(β) Angenommen war oben $HD : ED = XD : HD$
also $(HD - ED) : (XD - HD) = ED : HD$
oder $HE : HX = ED : HD$
mithin $(HE + HX) : HE = (ED + HD) : ED = (ED + GD) : ED$
oder $XE : HE = EG : ED$
folglich auch $FE \times XE : FE \times HE = EG : ED$

(γ) Man hat nämlich $BE^2 - BH^2 = (BE + BH)(BE - BH) = (BE + BF)(BE - BH) = FE \times HE$; mithin $BE^2 = BH^2 + FE \times HE = XD \times ED + FE \times HE$.

gerade Linie AC. Man ziehe parallel mit AC die Berührungslinien der Ellipse, QP, ST, für die Punkte D, B, und errichte auf ihnen Ebenen parallel mit der durch AC. Diese werden das Sphäroid in B, D, berühren, und B, D, werden die Scheitel der Abschnitte sein. Man ziehe die Verbindungslinie BD zwischen den Scheiteln der entsprechenden Abschnitte; sie wird durch den Mittelpunkt gehen (S. 18), und H sei der Mittelpunkt. Der Abschnitt mit dem Scheitel B sei gröſser als das Halbsphäroid. Man mache die Ansätze $DG = DH$ und $BF = DH$. Zu beweisen ist, daſs der gröſsere Abschnitt des Sphäroids zu dem Abschnitte des Kegels, welcher die Grundfläche und Axe des Abschnitts hat, sich verhalte, wie $EG : ED$.

Das Sphäroid sei von einer Ebene durch den Mittelpunkt, parallel der durch AC, geschnitten; in dem Halbsphäroid sei ein Kegelabschnitt beschrieben, dessen Scheitel in D liegt, und es verhalte sich

$$DH : ED = XD : DH.$$

Dann wird man wie zuvor zeigen, daſs der in dem Halbsphäroid beschriebene Kegelabschnitt zu dem in dem kleineren Abschnitte beschriebenen Kegelabschnitte sich verhalte, wie $XD \times BH : BE \times ED$; und der Kegelabschnitt in dem kleineren Abschnitte zu dem Abschnitte selbst, worin er beschrieben ist, wie $BE \times ED : FE \times ED$; also wird der Kegelabschnitt in dem Halbsphäroid zu dem kleineren Abschnitte des Sphäroids sich verhalten, wie $XD \times BH : FE \times ED$.

Weil nun das ganze Sphäroid zu dem Kegelabschnitte in dem Halbsphäroid sich verhält, wie $FG \times XD : BH \times XD$; (denn beidemal ist das erste das Vierfache des andern) und weil der erwähnte Kegelabschnitt zu dem kleineren Abschnitte des Sphäroids sich verhält, wie $XD \times BH : FE \times ED$; so wird das ganze Sphäroid zu dem kleineren Abschnitte des Sphäroids selber sich verhalten, wie $FG \times XD : FE \times ED$. Es verhält sich daher

$$\textit{gröſs. Absch.} : \textit{klein. Absch.} = (FG \times XD - FE \times ED) : FE \times ED.$$

und $\textit{klein. Absch.} : \textit{Kegelabsch. in ihm} = FE \times ED : BE \times ED;$

denn es ward bewiesen, daſs beide sich verhalten, wie $FE : BE$. Es verhält sich aber

$$\textit{Kegelabsch. in d. kl. Absch.} : \textit{Kegelabsch. in d. gr. Absch.} = BE \times ED : BE^2;$$

denn die genannten Kegelabschnitte stehen im Verhältniſse ihrer Höhen, weil sie einerlei Grundfläche haben. Ihre Höhen aber verhalten sich, wie $ED : BE$. So verhält sich denn auch

$$\textit{gröſs. Absch.} : \textit{Kegelabsch. in ihm} = (FG \times XD - FE \times ED) : BE^2,$$

und man wird wie vorhin erweisen, daſs dieſs Verhältniſs dasselbe sei, wie $EG : ED$.

Anhang
zu dieser Abhandlung.
(Nach Rivault und Sturm.)

Satz 1. (Konoid. Vorrede VII, 1.)

Aehnliche Sphäroiden, und ähnliche Abschnitte sphäroidischer und konoidischer Körper stehen zu einander im dreifachen Verhältnifse ihrer Axen.

1) Es sollen ABGC, abgc, ferner DEHF, dehf, ähnliche Sphäroiden vorstellen, F172.a welche im ersten Falle durch einen senkrechten, im zweiten durch einen schiefen Schnitt in ähnliche Halbsphäroiden ABC, abc, und DEF, def, zerlegt sind. Dann soll erwiesen werden, dafs in beiden Fällen die Halbsphäroiden sich verhalten, wie $AI^3 : ai^3$, oder wie $DK^3 : dk^3$.

Man beschreibe über den Durchschnitten BC, bc die Kegel ABC, abc, und über EF, ef, die Kegelabschnitte DEF, def, so dafs die Kegel und Kegelabschnitte mit ihren Halbsphäroiden von gleicher Höhe sind, und dieselbe Grundfläche haben. Dann ist wegen der Aehnlichkeit der Sphäroiden und ihrer Hälften

$$\left.\begin{array}{r} AI : ai = BI : bi \\ \text{und}\quad DK : dk = EK : ek \end{array}\right\} \text{Konoid. Vorr. V, 3.}$$

mithin ist *Keg.* ABC ∼ *Keg.* abc, und *Kegelabsch.* DEF ∼ *Kegelabsch.* def (nach Eukl. XI. Erkl. 24, und Konoid. S. 11.). Es ist aber

$$\left.\begin{array}{r} \textit{Keg. } ABC : \textit{Keg. } abc = AI^3 : ai^3 \\ \text{und}\quad \textit{Kegelabsch. } DEF : \textit{Kegelabsch. } def = DK^3 : dk^3 \end{array}\right\} \text{Konoid. S. 11.}$$

Ferner ist *Keg.* ABC : *Keg.* abc = *Halbsphär.* ABC : *Halbsph.* abc (Konoid. S. 29.)

mithin *Halbsph.* ABC : *Halbsph.* abc = $AI^3 : ai^3$

Auch ist *Kegelabsch.* DEF : *Kegelabsch.* def = *Halbsph.* DEF : *Halbsph.* def (Konoid. S. 30.)

also *Halbsph.* DEF : *Halbsph.* def = $DK^3 : dk^3$

2) Hieraus erhellet sofort, daſs sich die ganzen Sphäroiden gleichfalls wie $AI^3 : ai^3$, oder wie $DK^3 : dk^3$, mithin auch wie $AG^3 : ag^3$, oder wie $DH^3 : dh^3$ verhalten.

3) Hiernächst sollen ABLMC, ablmc, ähnliche sphäroidische Abschnitte, gröſser als die Halbsphäroiden und mit senkrechten Axen vorstellen; dann ist zu erweisen, daſs sich verhalte

$$\textit{Absch.}\ ABLMC : \textit{Absch.}\ ablmc = AN^3 : an^3$$

Man beschreibe wie vorhin Kegel auf den Grundflächen, so ist

$$AN : an = LN : ln$$

mithin sind die Kegel ähnlich, und man hat

$$\textit{Keg.}\ ALM : \textit{Keg.}\ alm = AN^3 : an^3$$

Es ist aber nach S. 33

$$\textit{Absch.}\ ABLMC : \textit{Keg.}\ ALM = (IG + GN) : GN$$
$$\textit{Absch.}\ ablmc : \textit{Keg.}\ alm = (ig + gn) : gn$$

Weil nun $\left.\begin{aligned} BI^2 : LN^2 &= AI^2 : AN \times GN \\ bi^2 : ln^2 &= ai^2 : an \times gn \end{aligned}\right\}$ Apollon. Kegelsch. I. 21.

und weil $BI : AI = bi : ai$

mithin $BI^2 : AI^2 = bi^2 : ai^2$,

so folgt $LN^2 : ln^2 = AN \times GN : an \times gn$.

Zugleich ist $LN^2 : ln^2 = AN^2 : an^2$

also $GN : gn = AN : an$

und $(GN + AN) : (gn + an) = GN : gn$

folglich $IG : ig = GN : gn$

und $(IG + GN) : GN = (ig + gn) : gn$

mithin $\textit{Absch.}\ ABLMC : \textit{Keg.}\ ALM = \textit{Absch.}\ ablmc : \textit{Keg.}\ alm$

also $\textit{Absch.}\ ABLMC : \textit{Absch.}\ ablmc = AN^3 : an^3$

4) Auf dieselbe Weise läſst sich mit Anwendung des S. 34 für den Fall, wo die Axe nicht senkrecht steht, erweisen, daſs sich verhalte

$$\textit{Absch.}\ DOQ : \textit{Absch.}\ doq = DP^3 : dp^3$$

und durch Anwendung der Sätze 31, 32, wird sich das Aehnliche auch für Abschnitte darthun lassen, die kleiner sind, als das Halbsphäroid.

5) Eben diese Beweisart führt auch dahin, den Lehrsatz für die ähnlichen Abschnitte konoidischer Figuren zu erweisen, wobei die Sätze 23, 24, 27, 28, zur Anwendung kommen.

Satz 2. (Konoid. Vorr. VII. 2.)

In gleichen Sphäroiden verhalten sich die Quadrate der Durchmesser umgekehrt wie die Axen; und wenn in Sphäroiden die Quadrate der Durchmesser sich umgekehrt wie die Axen verhalten, so sind die Sphäroiden gleich.

F172.b 1) Die Sphäroiden ABCI und DEFK mögen gleich, und durch den senkrechten Schnitt AC, DF, in je zwei Hälften getheilt, auch mögen BI, EK, die Axen, und AC, DF, die Durchmesser (kleinen Axen) sein; dann soll man erweisen, daſs

$$AC^2 : DF^2 = EK : BI$$

Man beschreibe auf den Grundflächen AC, DF, die Kegel AHC, DGF, so daſs die Höhe

HL = BI, und die Höhe GM = EK ist: dann hat man nach S. 29

$$\textit{Sphäroid}\ ABCI = \textit{Keg.}\ AHC, \text{ und } \textit{Sphäroid}\ DEFK = \textit{Keg.}\ DGF,$$

mithin $$\textit{Keg.}\ AHC = \textit{Keg.}\ DGF, \text{ folglich nach Eukl. XII, 15}$$

$$\textit{Kreis}\ AC : \textit{Kreis}\ DF = GM : HL;$$

also auch $$AC^2 : DF^2 = EK : BI$$

2) Wenn dagegen sich verhält

$$AC^2 : DF^2 = EK : BI,$$

so bilde man dieselben Kegel, wie vorhin, dann ergiebt sich

$$\textit{Kreis}\ AC : \textit{Kreis}\ DF = GM : HL,$$

mithin sind die Kegel einander gleich, und deſshalb auch die Sphäroiden.

Satz 3. (Konoid. Vorr. VII. 3.)

Von einem gegebenen sphäroidischen oder konoidischen Abschnitte durch eine parallel einer gegebenen Ebene geführte Ebene einen Abschnitt dergestalt abzutrennen, daſs der Abschnitt einem gegebenen Kegel oder Cylinder oder einer gegebenen Kugel gleich sei.

Bevor ich zur Auflösung dieser Aufgabe schreite, gebe ich die Auflösung folgender

Hülfsaufgabe.

Einen Kegel zu konstruiren, welcher auf der Grundfläche eines gegebenen sphäroidischen oder konoidischen Abschnitts stehen, und demselben gleich sein solle.

1) Es sei ABCD ein Sphäroid, und ABC dessen gegebener Abschnitt, BD sei die Axe, K der Mittelpunkt, und man nehme an, daſs die Grundfläche AC senkrecht zur Axe stehe. Der gesuchte Kegel sei APC, auch konstruire man den Kegel ABC, so hat man nach S. 31 oder S. 33. F. 172. c

$$\textit{Keg.}\ ABC : \textit{Absch.}\ ABC = DX : (KD + DX)$$

auch ist $$\textit{Keg.}\ ABC : \textit{Keg.}\ APC = BX : PX$$

Da nun $\textit{Absch.}\ ABC = \textit{Keg.}\ APC$ sein soll, so muſs sich verhalten

$$DX : (KD + DX) = BX : PX,$$

mithin kann PX gefunden werden, wodurch die Aufgabe gelöset wird.

Stände die Grundfläche nicht senkrecht zur Axe, so würde man nach S. 32 oder S. 34 auf dieselbe Weise einen Kegelabschnitt finden können, welcher dem sphäroidischen Abschnitte gleich ist, und auf derselben Grundfläche steht.

2) Es sei ABC der gegebene Abschnitt eines parabolischen Konoids, BD die Axe, und die Grundfläche AC stehe senkrecht zur Axe. Der gesuchte Kegel sei AMC, auch sei der Kegel ABC konstruirt, dann ist nach S. 23. F. 172. d

$$\textit{Keg.}\ ABC : \textit{Absch.}\ ABC = 2 : 3$$

zugleich ist $$\textit{Keg.}\ ABC : \textit{Keg.}\ AMC = BD : MD;$$

Da nun $\textit{Absch.}\ ABC = \textit{Keg.}\ AMC$ sein soll, so verhält sich:

$$2 : 3 = BD : MD, \text{ also ist } MD = \tfrac{3}{2}\ BD.$$

Wäre die Grundfläche nicht senkrecht zur Axe, so käme S. 24 zur Anwendung, um einen entsprechenden Kegelabschnitt zu finden.

F172.e 3) Es sei ABC der gegebene Abschnitt eines hyperbolischen Konoids, BD die Axe, BH der Ansatz der Axe, und die Grundfläche AC stehe senkrecht zur Axe. Der gesuchte Kegel sei AMC, auch sei der Kegel ABC gebildet; dann ist nach S. 27.

$$\textit{Keg. } ABC : \textit{Absch. } ABC = (BD + 2\,BH) : (BD + 3\,BH)$$

Auch ist $\textit{Keg. } ABC : \textit{Keg. } AMC = BD : MD,$

und weil $\textit{Absch. } ABC = \textit{Keg. } AMC$ gesetzt wird, so ist

$$(BD + 2\,BH) : (BD + 3\,BH) = BD : MD.$$

Es läſst sich demnach MD finden, wodurch die Aufgabe gelöset wird.

Wäre die Grundfläche nicht senkrecht zur Axe, so könnte man nach S. 28 einen entsprechenden Kegelabschnitt finden.

Nunmehr zerlege ich die Aufgabe selbst in die folgenden:

A.

Von einem gegebenen Sphäroid durch eine Ebene, die einer gegebenen Ebene parallel ist, einen Abschnitt dergestalt abzutrennen, daſs der Abschnitt einem gegebenen Kegel (oder überhaupt einer gegebenen Gröſse, die sich doch immer als ein Kegel darstellen läſst) gleich sei.

F172.c 1) Es sei ABCD ein gegebenes Sphäroid, YZ eine gegebene Ebene, und ein gegebener Kegel heiſse S. Dann soll von dem Sphäroid ein Stück abgeschnitten werden, dessen Grundfläche parallel YZ, und welches selbst dem Kegel S gleich ist. Die gegebene Ebene YZ sei senkrecht zu der Axe BD.

Man konstruire einen Kegel Q, welcher dem Sphäroid gleich ist (nach S. 29.), hievon ziehe man den gegebenen Kegel S ab, und bilde einen Kegel T = Q - S (nach Eukl. XII, 14.). Nun theile man das Sphäroid durch AC ‡ YZ dergestalt in zwei Abschnitte ABC und ADC, daſs sich verhält

$$\textit{Absch. } ADC : \textit{Absch. } ABC = T : S$$

Diese Theilung läſst sich gerade so ausführen, wie die Theilung einer Kugel nach einem gegebenen Verhältniſse (Kug. u. Cyl. II. S. 5.). Dann hat man

$$(\textit{Absch. } ADC + \textit{Absch. } ABC) : \textit{Absch. } ABC = (T + S) : S$$

oder $ABCD : \textit{Absch. } ABC = Q : S$

Da nun $ABCD = Q$, so ist auch $\textit{Absch. } ABC = S$

2) Ist YZ nicht senkrecht zu der Axe; so suche man den Berührungspunkt des Sphäroids mit einer zu YZ parallelen Ebene, ziehe demnächst die neue Axe, und bilde die gehörigen Kegelabschnitte S, T, wie zuvor (nach S. 30 und S. 11.). Dann läſst sich wiederum das Sphäroid durch eine zu YZ parallele Ebene nach dem gegebenen Verhältniſse T : S theilen.

3) Ist nur ein sphäroidischer Abschnitt unmittelbar gegeben, so wird man zuerst das ganze Sphäroid darstellen, wozu der Abschnitt gehört, und dann wie vorhin verfahren.

B.

Von einem gegebenen parabolischen Konoid vermittelst einer Ebene, die einer gegebenen parallel ist, einen Abschnitt dergestalt abzutrennen, daſs derselbe einem gegebenen Kegel (einer gegebenen Gröſse) gleich sei.

1) Es sei ABC der gegebene Abschnitt eines parabolischen Konoids, BD dessen Axe, F. 172. d
senkrecht zur Grundfläche, YZ die gegebene Ebene, welche der Grundfläche parallel sein mag. Von diesem Abschnitte soll nun durch einen mit YZ parallelen Schnitt ein Stück abgetrennt werden, welches einem gegebenen Kegel N gleich ist.

Man mache *Keg.* ABC = *Absch.* ABC (Hülfsaufg.)
und es sei *Keg.* AMC : *Keg.* N = E : G
ferner $E : F = F : G$; mithin $F^2 = EG$;
auch sei $E : F = BD : BH$

und durch den Punkt H lege man parallel der Grundfläche den Schnitt IK, so wird der *Abschnitt* IBK = *Keg.* N sein, oder wenn man *Keg.* ILK = *Absch.* IBK macht, so wird *Keg.* ILK = *Keg.* N sein. Denn man hat

$$AD^2 : IH^2 := BD : BH = E : F$$

ferner ist $MD = \frac{3}{4} BD$, und $LH = \frac{3}{4} BH$ (Hülfsaufg.)
also $MD : LH = BD : BH = E : F$
folglich $AD^2 : IH^2 = MD : LH$

Nun ist *Keg.* AMC : *Keg.* ILK = $AD^2 \times MD : IH^2 \times LH$
oder *Keg.* AMC : *Keg.* ILK = $MD^2 : LH^2 = E^2 : F^2 = E : G$
Vorhin war *Keg.* AMC : *Keg.* N = E : G

folglich ist *Keg.* ILK = *Keg.* N

und dieſs sollte erwiesen werden.

2) Es sei alles wie zuvor, nur sei die Ebene YZ nicht parallel der Grundfläche des Abschnitts ABC; dann ziehe man aus dem willkührlichen Punkte N der gegebenen Ebene YZ die Linie NS $\ddagger$ BD, mache QS = BD, und lege durch S den Schnitt OP $\ddagger$ YZ, so ist der Abschnitt ABC dem Abschnitte OPQ gleich (S. 25.). Hiernächst kann man wie vorhin verfahren, nur daſs die Körper OMC und ILK jetzt Kegelabschnitte sein werden.

3) Ist die Grundfläche des gegebenen Abschnitts nicht senkrecht zur Axe, so kommt es nur darauf an, den Abschnitt in einen solchen zu verwandeln, dessen Grundfläche mit der gegebenen Ebene parallel ist, was nach S. 25 geschehen kann.

C.

Von einem gegebenen hyperbolischen Konoid durch eine Ebene, die einer gegebenen parallel ist, einen Abschnitt dergestalt abzutrennen, daſs der Abschnitt einem gegebenen Kegel (einer gegebenen Gröſse) gleich sei.

Die oben genannten Erklärer berühren diese Aufgabe gar nicht; auch ist es mir nicht gelungen, durch eine den bisherigen ähnliche Konstruktion zu ihrer Auflösung zu gelangen. Der Grund liegt darin, daſs in der That eine kubische Gleichung konstruirt werden muſs, und es wäre allerdings interessant, denjenigen Hülfssatz zu kennen, durch dessen Anwendung Archimedes seiner Aufgabe genügt haben mag. (Vgl. Kug. u. Cyl. II. S. 5.)

Dafs man auf eine Gleichung vom dritten Grade geführt wird, wenn man die Auflösung dieser Aufgabe versucht, läfst sich schon an dem einfachsten Falle darthun.

F172.c Es sei nämlich ABC der gegebene Abschnitt, dessen Grundfläche AC senkrecht zu der Axe steht, und es werde gefodert, von ihm einen Abschnitt abzutrennen, dessen Grundfläche ebenfalls senkrecht zur Axe ist, und dessen Inhalt zu dem des gegebenen Abschnitts in einem gegebenen Verhältnifse stehet, etwa in dem Verhältnifse m : n.

Der gesuchte Abschnitt sei IBK, und H sei der Mittelpunkt der erzeugenden Hyperbel, so ist BH der Ansatz der Axe. Man setze $HB = a$, $HD = b$, $HL = u$, und mache *Absch.* ABC = *Keg.* AMC, und *Absch.* IBK = *Keg.* INK (Hülfsaufg.). Dann ist

$$\textit{Keg. } AMC : \textit{Keg. } INK = m : n = AD^2 \times DM : IL^2 \times LN,$$

Auch ist vermöge der Eigenschaft der Hyperbel

$$AD^2 : IL^2 = (b^2 - a^2) : (u^2 - a^2)$$

folglich $$m : n = (b^2 - a^2)\, DM : (u^2 - a^2)\, LN$$

Es ist aber nach der Hülfsaufgabe

$$DM = \frac{BD\,(BD - 3\,BH)}{BD + 2\,BH} = \frac{(b - a)\,(b + 2\,a)}{b + a}$$

$$\text{und } LN = \frac{BL\,(BL + 3\,BH)}{BL + 2\,BH} = \frac{(u - a)\,(u + 2\,a)}{u + a}$$

mithin $$m : n = (b - a)^2\,(b + 2\,a) : (u - a)^2\,(u + 2\,a)$$

und hieraus erhält man nach gehöriger Rechnung

$$u^3 - 3\,a^2\,u + \frac{2\,m\,a^3 - n\,(b - a)^2\,(b + 2\,a)}{m} = 0$$

Es würde mich hier zu weit führen, die interessanten Resultate dieser Gleichung weiter zu verfolgen.

Saudes-

Sandeszahl.

§. 1.

Manche Leute glauben, König Gelon, die Zahl des Sandes sei von unbegränzter Gröfse. Ich meine nicht des um Syrakus und sonst noch in Sizilien befindlichen, sondern auch dessen auf dem ganzen festen Lande, dem bewohnten und unbewohnten. Andere giebt es wieder, welche diese Zahl zwar nicht für unbegränzt annehmen; sondern nur, dafs noch keine so grofse Zahl jemals genannt sei, welche seine Menge übertreffe. Wenn sich nun eben diese einen so grofsen Sandhaufen dächten, wie die Masse der ganzen Erde; dabei sämtliche Meere ausgefüllt, und alle Vertiefungen der Erde so hoch, wie die höchsten Berge, so würden sie gewifs um so mehr glauben, dafs keine Zahl zur Hand sei, die Menge desselben noch zu überbieten. — Ich aber will mittelst geometrischer Beweise, denen du beipflichten wirst, zu zeigen versuchen, dafs unter den von mir benannten Zahlen, welche sich in meiner Schrift an den Zeuxippos befinden, einige nicht nur die Zahl eines Sandhaufens übertreffen, dessen Gröfse der Erde gleich kommt, wenn sie nach meiner Erklärung ausgefüllt ist, sondern auch die eines solchen, dessen Gröfse dem Weltall gleich ist.

Es ist dir ja bekannt, dafs die meisten Sternkundigen unter dem Ausdruck Welt eine Kugel verstehen, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Erde, und deren Halbmesser gleich ist der geraden Linie zwischen den Mittelpunkten der Sonne und der Erde. Dieses sucht nun Aristarchos von Samos in seiner Schrift wider die Sternkundigen zu widerlegen, wo er zu dem Ende gewisse Annahmen aufgestellt hat, aus deren Bedingungen hervorgeht, die Welt sei ein Vielfaches der eben bezeichneten. Er nimmt nämlich an, die Fixsterne samt der Sonne wären unbeweglich, die Erde aber werde in einer Kreislinie um die Sonne, welche inmitten der Bahn stehe, herumgeführt. Die Kugel der Fixsterne nun, mit der Sonne um einerlei Mittelpunkt liegend, habe eine solche Gröfse, dafs der Kreis, in welchem er die Erde sich bewegen läfst, zur Entfernung der Fixsterne sich gerade so verhalte, wie der Mittelpunkt der Kugel zur Oberfläche. Das ist aber offenbar unmöglich: denn da der Mittelpunkt einer Kugel keine Gröfse hat, so mufs auch angenommen werden, dafs er gar kein Verhältnifs zu ihrer Oberfläche habe. Es ist defshalb anzunehmen, Aristarchos habe sagen wollen — indem wir die Erde ja gleichsam als den Mittelpunkt der Welt betrachten — es verhalte sich die Erde zu dem, was ich Welt genannt habe, wie die Kugel, zu welcher der Kreis gehört, den nach seiner Annahme die Erde beschreibt, zur Kugel der Fixsterne. (α) — Denn werden

---

(α) Durch den Ausdruck Sphäre eines Himmelskörpers soll im Folgenden die Kugeloberfläche bezeichnet werden, in deren Normalkreise derselbe sich wirklich oder scheinbar bewegt.

Man darf nicht meinen, Archimedes tadle und verwerfe die ganze Ansicht des Aristarch, ich finde vielmehr in Archimedes Aeuſserungen nur die Rüge eines ungenauen Ausdrucks derjenigen Proportion, durch welche Aristarch nach Archimedes Meinung die Gröſse der Welt deutlich zu machen suchte, samt der Erklärung dieses Ausdrucks. Ob Aristarch in seiner Behauptung, daſs die Erde sich um die Sonne bewege, Recht habe oder nicht, läſst Archimedes völlig unentschieden, als etwas nicht hieher Gehöriges — er will nur einem möglichen Miſsverständnisse vorbeugen, und druckt sich deſshalb dem Sinne nach etwa so aus:

„Es ist freilich unrichtig, von dem Verhältnisse des Mittelpunkts einer Kugel zu deren Umfange selbst zu „reden, aber Aristarch hat sich nur dem gewöhnlichen Sprachgebrauche bequemt, nach welchem wir „die Erde gleichsam als den Mittelpunkt der Welt ansehen; und dieser Punkt also, d. h. die Erde „selbst, verhält sich nach Aristarch zur Erdsphäre, (oder sonst so genannten Welt) wie die Erd-„sphäre zur Fixsternsphäre."

Es bleibt indessen noch zu untersuchen, ob Archimedes den Aristarch richtig verstanden habe, d. h. ob Aristarch wirklich ein so bestimmtes endliches Verhältniſs habe ausdrucken wollen, wie ihn hiedurch Archimedes behaupten läſst. Die Schrift des Aristarch selbst ist nicht mehr vorhanden, wohl aber eine andere Περὶ μεγέθων καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης, und hier heiſst gleich anfangs die zweite Annahme: Τὴν γῆν σημείου τε καὶ κέντρου λόγον ἔχειν πρὸς τὴν τῆς σελήνης σφαῖραν, (die Erde stehe zur Sphäre des Mondes in dem Verhältnisse eines Punktes, nämlich des Mittelpunktes) was keinen andern Sinn hat, als: die Gröſse der Erde kann gegen die Gröſse der Sphäre des Mondes vernachläſsigt werden, und verschwindet dagegen, so wie ein Punkt gegen die Kugel verschwindet; denn daſs an sich zwischen dem Mittelpunkte einer Kugel und ihr selbst gar kein Verhältniſs obwalte, wuſste Aristarch so gut wie Archimedes.

Eben diesen Sinn aber finde ich in unserer von Archimedes angezogenen Stelle, keineswegs die Feststellung einer Proportion, aus deren drei ersten Gliedern das vierte (die Gröſse der Welt) sich berechnen lasse. Archimedes aber konnte diese Hypothese, so wie er sie erklärt, brauchen, um eine recht groſse Kugel zu erhalten, und dieſs allein bezweckt er hier. Ohne sich daher über die Richtigkeit des Satzes selbst auszusprechen, macht er am Schluſs der Abhandlung die beabsichtigte Anwendung.

Das Resultat ist demnach: Aristarch behauptet in der That ein unendliches Verhältniſs, und Archimedes erklärt dasselbe mit Unrecht so, als sei ein endliches gemeint, um die Gröſse seiner Weltkugel ja gegen alle Anfechtungen selbst solcher Leute zu sichern, denen genügende Kenntniſs der Mathematik abging. Es war ihm nur darum zu thun, für seine Kugel ein recht groſses Maaſs zu erhalten, gleichviel ob das richtige oder nicht; und so entlehnte er ein solches daher, wo es dem Anschein nach am gröſsten sich darbot.

Ueber diese Stelle ist nachzusehen Montucla hist. d. math. I. IV, 4. Bossut Versuch einer allg. Geschichte d. Math., übs. v. Reimer I. S. 233. und ganz besonders Schaubach Gesch. d. griech. Astron. bis auf Eratosthenes S. 468 ff.

Zufolge der Schaubachschen mit Angabe aller Quellen angestellten Untersuchung soll Archimedes den Aristarch wirklich richtig verstanden, letzterer also ein endliches Verhältniſs der Sonnensphäre zur Fixsternsphäre behauptet und sich nur dunkel ausgedruckt haben. Auch spricht Schaubach dem Aristarch die Meinung bestimmt ab, daſs die Sonne ruhe, und die Erde sich um jene bewege, und versichert, dieſs könne nur eine bloſse Annahme, ein vorausgesetzter Fall, nicht aber eine wirkliche Hypothese des Aristarch gewesen sein, der überhaupt nur die bisherigen Vorstellungen der Philosophen über die Gröſse der Welt habe berichtigen wollen.

Nun begreife ich aber keineswegs, wie man aus einer ganz willkührlichen Annahme, die man selbst nicht einmal für wahr ausgiebt, ein Resultat herleiten kann, das für wahr gelten soll, wofern man nicht zugleich ein die Verhältnisse der Himmelskörper also angenommen, so passen seine Erklärungen, und insbesondere sieht man, daſs er die Gröſse der Kugel, in welcher er die Erde sich bewegen läſst, demjenigen gleich setzt, was wir Welt genannt haben.

Mittel nachweiset, hinterher die Wahrheit oder Unwahrheit der Annahme zu prüfen. Wenn wir also aus Mangel an vollständiger Kunde einstweilen auch zugeben wollen, daſs Aristarch seine erste Behauptung, die Erde bewege sich um die Sonne, ohne hinlängliche Gründe hingestellt habe, ja wenn wir dieſs sogar mit einiger Sicherheit aus der von Menage (*ad Diog. Laert. VIII.* 85) beigebrachten Angabe des Plutarch schlieſsen dürfen, wo es heiſst: Aristarch habe die Behauptung als Hypothese hingestellt, ein Anderer aber, Seleukus, sie deutlich nachgewiesen; (Ἀρίσαρχος καὶ Σέλευκος ἀπεδείκνυσαν· ὁ μὲν, ὑποτιθέμενος μόνον, ὁ δὲ Σέλεύκος, καὶ ἀποφαινόμενος.) so erhellt doch so viel, daſs Aristarch selber seine eigene Annahme über die Ruhe der Sonne im Mittelpunkte des Weltalls für wahr gehalten haben muſs, um daraus auf irgend eine Weise einen Schluſs auf die Gröſse der Welt zu ziehen. Ja hätte Aristarch bloſs eine luftige Annahme machen wollen, so sieht man gar nicht ein, warum er von dem bisher allgemein Angenommenen abwich, warum er nicht ausdrücklich die Erde fest stehen, und die Sonne um sie gehen lieſs, und dann sagte: die Fixsternsphäre habe ihren Mittelpunkt im Mittelpunkte der Erde, und sei von der Gröſse, daſs der Kreis, worin die Sonne laufe, sich zur Fixsternsphäre verhalte, wie der Mittelpunkt zum Umfange. Denn die Annahme, daſs Aristarch die Sonne und nicht die Erde in die Mitte des Weltalls deſshalb gesetzt habe, „um das Verhältniſs, welches er darstellen wollte, nicht allzugroſs zu machen“ (Schaubach S. 472.) enthält eine petitio principii, indem zuvor erwiesen werden muſs, daſs Aristarch wirklich nur ein endliches, nicht ein unendliches Verhältniſs habe darstellen wollen. Schaubach scheint demnach nicht scharf genug die Auslegung des Archimedes von dem eigentlichen Sinn der Worte Aristarchs zu unterscheiden.

Nehmen wir demnach an, daſs Aristarch selbst die Annahme, von welcher er ausging, für richtig hielt, so war er genöthigt, jenes unendliche Verhältniſs zwischen der Gröſse der Erdsphäre und Fixsternsphäre aufzustellen, um seine Hypothese von der Umwälzung der Erde um die Sonne gegen den erwarteten oder wirklich gemachten Einwurf zu sichern, daſs die Bewegung der Erde sich durch eine sichtbare Veränderung ihrer Lage gegen die Fixsterne erkennlich machen müsse, was doch der Erfahrung widerspreche.

Ich setze noch Peyrards Anmerkung zu dieser Stelle hieher, die mit den Ansichten älterer Mathematiker, z. B. Rivaults (in seiner Ausgabe des Arch.) und Wallis (Opp. II. p. 22) völlig übereinstimmt.

> Il est évident, qu' Aristarque considère le centre d'une sphère comme étant une surface infiniment petite; et qu' en employant cette analogie, il ne se propose de faire entendre autre chose, sinon que l'orbite de la terre est infiniment petite, par rapport à la distance des étoiles au soleil. On auroit tort, d'être surpris qu' Aristarque ait connu cette immense distance des étoiles: de cela seul, que la hauteur méridienne des étoiles est toujours la même pendant une révolution de la terre autour du soleil, il lui étoit facile de conclure que, dans la supposition de l'immobilité dès étoiles et du soleil, l'orbite de la terre devoit être infiniment petite par rapport à la distance des étoiles.

Wenn endlich Schaubach behauptet, (S. 473.) daſs von einem Punkt in mathematischer Bedeutung bei frühern Astronomen und auch bei Aristarch nie die Rede sei, so ist das letztere wenigstens ein Irthum, der durch die oben angeführte Stelle des Aristarch περὶ μεγέθων etc. berichtigt werden kann, wo dieser nicht bloſs das Wort κέντρον braucht, sondern durch das vorangehende σημεῖον auſser Zweifel setzt, daſs er dort wirklich von einem unendlichen Verhältnisse rede, bei dessen Annahme er freilich gar sehr irrte. Die übrigen von Schaubach angeführten Stellen verlieren aber auch ihre Beweiskraft, wenn man bemerkt, daſs an jenen Orten nicht ein bestimmtes Verhältniſs, sondern nur ein ungefähres, dem gewöhnlichen Sprachgebrauche gemäſs, angedeutet werden soll. In diesem Sinne braucht ja Archimedes selbst das Wort κέντρον einige Zeilen weiter in dem Zwischensatze: ἐπειδὴ τὰν γᾶν ὑπολαμβάνομεν ὥσπερ μὲν τὸ κέντρον τῶ κόσμω. Uebrigens bedient sich Kopernikus ganz ähnlicher Ausdrücke, um ein unendliches Verhältniſs anzudeuten. Er sagt De revolut. orb. I, VI. *Hoc nimirum argumento satis apparet . . . . . sensus aestimatione terram eſse respectu coeli, ut punctum ad corpus.*

Ich behaupte nun, wenn es auch eine Sandkugel gäbe von der Gröfse, wie sie Aristarchos für die Fixsternsphäre annimmt, dennoch auch so unter den in den Grundzügen benannten Zahlen einige nachweisen zu wollen, deren Gröfse selbst die Menge der Sandkörner in der gedachten Kugel übersteigt.

§. 2.

Folgendes wird nämlich vorausgesetzt:

1) Der Umkreis der Erde beträgt etwa drei Millionen Stadien, und nicht mehr.

Da nämlich Einige zu erweisen versucht haben, wie dir wohl bekannt ist; er betrage ungefähr 300000 Stadien, so nehme ich, sie überbietend, indem ich die Gröfse der Erde dem Zehnfachen dessen gleich setze, was die Vorgänger geschätzt haben, etwa drei Millionen Stadien an, und nicht mehr.

2) Der Durchmesser der Erde ist gröfser, als der des Mondes, und der Sonnendurchmesser ist gröfser, als der Erddurchmesser.

In dieser Annahme stimme ich mit den meisten früheren Sternkundigen überein.

3) Der Sonnendurchmesser ist etwa das dreifsigfache des Monddurchmessers, und nicht gröfser.

Da nämlich unter den frühern Sternkundigen Eudoxos behauptet, der Sonnendurchmesser sei etwa das Neunfache des Monddurchmessers; Phidias, der Sohn des Akupater, er sei etwa das Zwölffache; Aristarchos aber zu zeigen versucht hat, er sei gröfser, als das Achtzehnfache, kleiner indessen, als das Zwanzigfache, so will ich, selbst diesen noch überbietend, damit meine Darstellung keinem Widerspruch unterliege, annehmen, der Sonnendurchmesser sei etwa das Dreifsigfache des Monddurchmessers, und nicht gröfser. Endlich

4) der Sonnendurchmesser ist gröfser, als die Seite eines Tausendecks, das in dem gröfsten Kreise der Weltkugel beschrieben ist.

Diefs nehme ich nämlich nach der Angabe des Aristarchos an, nach welchem die Sonne wie der 720ste Theil des Thierkreises erscheint; um es jedoch selbst zu erforschen, habe ich auf folgende Weise versucht, durch Instrumente den Winkel aufzunehmen, unter welchem die Sonne erscheint. Diefs freilich mit Schärfe zu thun, ist nicht so leicht, weil weder das Auge, noch die Hände, noch die Mefsinstrumente zuverläfsig genug sind, eine genaue Beobachtung zu geben. Doch hierüber wortreich zu sein, ist jetzt nicht pafslich, zumal auch sonst schon öfter dergleichen angemerkt ist. Für mich genügt, um meinen Beweis zu führen, einen Winkel aufgenommen zu haben, der nicht gröfser ist, als der Winkel, unter welchem die Sonne erscheint, und noch einen andern, der nicht kleiner ist, als dieser Winkel.

§. 3.

Ich legte daher ein langes Lineal auf eine wagrechte Ebene an einem Orte, wo das Aufgehen der Sonne beobachtet werden konnte, und stellte gleich beim Aufgange der Sonne einen kleinen abgedrehten Cylinder aufrecht auf das Lineal. Darauf, als sie in dem Horizonte sich befand, und von allen Seiten gesehen werden konnte, ward das Lineal gegen die Sonne gewendet und das Auge an dessen Ende gebracht. Der Cylinder aber mitten inne zwischen Sonne und Auge gestellt, verfinsterte die Sonne. Nun ward der Cylinder vom Auge fortgeschoben, und sobald die Sonne anfing, zu beiden Seiten des Cylinders ein Weniges sichtbar zu werden, ward dieser angehalten. Wenn nun das Auge nur aus einem Punkte sähe, und man zöge vom Ende des Lineals, wo das Auge sich befand, Berührungslinien an den Cylinder, so würde ja der von diesen Linien gebildete Winkel kleiner sein, als der Winkel, unter welchem die Sonne erscheint, weil eben zu beiden Seiten des Cylinders noch etwas von der Sonne gesehen wird. Da aber die Augen nicht aus einem Punkte sehen, sondern aus einem Orte, der eine gewisse Gröfse hat, so ward ein abgerundeter Körper, nicht kleiner als der Augenstern, genommen und an das Ende des Lineals dahin gestellt, wo das Auge sich befunden hatte, dann wurden zwei gemeinschaftliche Berührungslinien dieses Körpers und des Cylinders gezogen: so war denn der Winkel, welchen diese Linien bildeten, kleiner als der Winkel, unter welchem die Sonne erscheint. Die körperliche Gröfse aber, welche nicht kleiner sein soll, als der Augenstern, findet man folgendermafsen. Man nimt zwei dünne Cylinder von gleicher Dicke, den einen weifs, den andern nicht, und bringt beide vor das Auge, den weifsen davon entfernt, den andern so dicht als möglich an das Auge, so dafs selbst das Gesicht berührt wird. Würden nun die Cylinder schmaler genommen sein, als der Augenstern, so wird der nähere Cylinder von dem Augenstern umfafst und der weifse von ihm erblickt, und zwar ganz, wenn sie sehr viel dünner sind; wenn aber eben nicht sehr viel, so werden doch einige Theile des weifsen zu beiden Seiten dessen gesehen werden, der dem Auge zunächst ist. Nimt man demnach die Cylinder gehörig, so dafs sie durch ihre Dicke einander selbst und nichts weiter bedecken, so ist eine körperliche Gröfse von der Dicke der also beschaffenen Cylinder wenigstens nicht schmaler, als der Augenstern.

§. 4.

Ein nicht kleinerer Winkel aber, als der, unter welchem die Sonne erscheint, ward so aufgenommen: der Cylinder ward auf das Lineal so weit von dem Auge gestellt, dafs er die Sonne ganz bedeckte, und dann wurden aus dem Ende des Lineals, wo das Auge sich befand, Berührungslinien an den Cylinder gezogen: der durch diese Linien eingeschlossene Winkel ist nicht kleiner, als der, unter welchem die Sonne erscheint.

Als die so aufgenommenen Winkel mit einem rechten verglichen wurden, fand sich der gröfsere kleiner, als der 164ste Theil des rechten, der kleinere aber gröfser, als der 200ste Theil des rechten. Offenbar ist also der Winkel, unter welchem die Sonne erscheint, kleiner als $\frac{1}{164}R$, gröfser aber, als $\frac{1}{200}R$.

§. 5.

Nachdem dieses nun glaubhaft gemacht ist, so läfst sich zeigen, dafs der Sonnendurchmesser gröfser sei, als die Seite eines Tausendecks, das in einen gröfsten Kreis der Weltkugel eingeschrieben ist. Denn man denke sich eine Ebene gelegt durch den Mittelpunkt der Erde und der Sonne und durch das Auge, wenn die Sonne ein weniges über dem Horizonte steht. Diese Ebene schneide die Weltkugel in dem Kreise AKBC, die Erde in dem Kreise DEZ, die Sonne in dem Kreise um SH; der Mittelpunkt der Erde sei G und der Sonne K, F. 173.

das Auge sei in D. Man ziehe die Berührungslinien des Kreises um SH, nämlich von D die geraden Linien DL, DQ, an die Punkte N und T; von G aber die Berührungslinien GM, GO, an die Punkte P und X. Eben diese Linien GM, GO sollen den Kreis AKBC in A und B schneiden.

Nun ist GK $>$ DK, weil angenommen ist, die Sonne stehe schon über dem Horizonte; folglich ist der Winkel LDQ $>$ MGO. Es ist aber der Winkel LDQ $> \frac{1}{200}$R und LDQ $< \frac{1}{164}$R, denn er ist dem Winkel gleich, unter welchem die Sonne erscheint. Also ist MGO $< \frac{1}{164}$R und die gerade Linie AB ist kleiner als die Sehne eines Bogens, der $\frac{1}{656}$ vom Umfange des Kreises ABC enthält.

Der Umfang des genannten Vielecks steht nun zu dem Halbmesser des Kreises ABC in einem kleineren Verhältnisse, als 44 : 7, weil der Umfang eines jeden in einem Kreise beschriebenen Vielecks zum Halbmesser in einem kleineren Verhältnisse steht, als 44 : 7. Du weifst nämlich, dafs ich bewiesen habe, der Umfang eines ganzen Kreises sei um weniger als $\frac{1}{7}$, aber um mehr als $\frac{10}{71}$ des Durchmessers gröfser, als der dreifache Durchmesser, mithin ist AB : GK $<$ 11 : 1148, und folglich ist AB $< \frac{1}{100}$GK. Es ist aber AB $=$ SH, weil $\frac{1}{2}$ AB $=$ AF $=$ KP ist; es ist nämlich GK $=$ GA, und von den Endpunkten dieser Linien sind Perpendikel gefällt, welche demselben Winkel gegenüberstehen. Es erhellt folglich, dafs SH $<$ $\frac{1}{100}$ GK ist.

Ferner ist EY $<$ SH, denn es ist DEZ kleiner als der Kreis um SH; (Voraussetzung 2.) folglich ist auch GY $+$ KS $< \frac{1}{100}$GK, und es ist GK : YS $<$ 100 : 99. Weil hiernächst GK nicht kleiner ist, als GP, aber SY $<$ DT, (β) so ist GP : DT $<$ 100 : 99.

Demnächst sind in den rechtwinkligen Dreiecken GKP und DKT die Seiten KP $=$ KT und GP $>$ DT, also ist

$$\text{KDT} : \text{KGP} > \text{GK} : \text{DK}$$

und

$$\text{KDT} : \text{KGP} < \text{GP} : \text{DT};$$

denn wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken je zwei Katheten gleich sind, die zwei andern aber ungleich, so steht der gröfsere Winkel von denen, welche an den ungleichen Katheten liegen, zu dem kleineren in einem gröfseren Verhältnisse, als die gröfsere Hypotenuse zur kleineren; in einem kleineren Verhältnisse aber, als die gröfsere Kathete zur kleineren. (γ)

F173.a (β). Denn von allen geraden Linien zwischen einem Punkte des einen und einem Punkte des andern Kreisumfangs ist diejenige die kleinste, deren Verlängerung durch die Mittelpunkte beider Kreise geht, und welche zwischen zwei einander zugekehrten Bogen liegt.

Eine solche gerade Linie sei CD. Jede andere ist entweder ihr parallel oder nicht. Werden nun in C und D die Berührungslinien CL, DM gezogen, so liegt nichts von beiden Kreisen zwischen diesen Linien; jede gerade Linie aber, welche zwei Punkte der Kreisumfänge verbinden soll, mufs diese beiden Berührungslinien schneiden, wie EF oder IK. Nun sei EF $\nparallel$ CD, dann ist schon LM $=$ CD, mithin gewifs EF $>$ CD. Wenn ferner IK nicht parallel CD ist, so ist gewifs schon GH $>$ CD, um desto mehr folglich IK $>$ CD.

F173.b (γ) Dieser Lehnsatz behauptet, wenn $\alpha > \beta$, so sei $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{AC}{AD}$, und zugleich $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{BC}{BD}$. Nun ist bekanntlich

$$AC : AD = \sin\alpha : \sin\beta; \text{ also } \frac{AC}{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Also ist	$LDQ : MGO < GP : DT$
und weil schon	$GP : DT < 100 : 99$
so ist	$LDQ : MGO \leq 100 : 99$

Und weil $LDQ > \frac{1}{200}R$, so wird $MGO > \frac{99}{20000}R$ sein, also auch $MGO > \frac{1}{203}R$; folglich ist AB gröſser als die Sehne eines Bogens des Kreises AKBC, wenn dieser in 812 Theile getheilt wird. Die Seite AB aber ist dem Sonnendurchmesser gleich; mithin ist dieser gewiſs gröſser, als die Seite des Tausendecks. (δ)

$$\text{ferner } AB : BD = \tan\alpha : 1$$
$$BC : AB = 1 : \tan\beta$$

also $BC : BD = \tan\alpha : \tan\beta$; d. h. $\frac{BC}{BD} = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$

mithin wird in dem gegenwärtigen Falle behauptet, es sei

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \text{ und } \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan\alpha}{\tan\beta},$$

was richtig ist. (Vgl. Geom. II. §. 49.)

(δ) Der Gang des Beweises läſst sich bequemer so übersehen: Weil die Sonne schon über dem Horizonte steht, so ist $KDG > R$, also auch:

$$GK > DK$$
ferner ist
$$KX = KT$$
$$X = T = R$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$KGX < KDT$$

Nun ist $KGX = \frac{1}{2} MGO$
und $KDT = \frac{1}{2} LDQ$ } also $MGO < LDQ$

Es ist aber $LDQ > \frac{1}{200}R$ und $LDQ < \frac{1}{164}R$; folglich $MGO < \frac{1}{164}R$ oder $MGO < \frac{4}{656}R$; mithin AB kleiner als die Seite eines 656 Ecks im Kreise AKBC.

Nun sei der Umfang eines 656 Ecks in diesem Kreise $= p$
der Umfang des Kreises selbst sei $= p'$
der Halbmesser $GK = GA = GB = r$

so hat man	$p' : r < 44 : 7$ (nach Kreismessung S. 3.)
also auch	$p : r < 44 : 7$, denn es ist $p < p'$
mithin	$\frac{p}{656} : r < \frac{44}{656} : 7$; d. h. $AB : r < 11 : 1148$,
oder	$AB < \frac{11}{1148} \cdot r$, folglich gewiſs $AB < \frac{1}{100} GK$.
Weil nun	$GK = GA$
	$KPG = AFG = R$
	$AGK = AGK$
so ist	$\triangle KPG \cong \triangle AFG$, mithin $KP = AF = \frac{1}{2} AB$
also	$SH = 2KP = AB$ und $SH < \frac{1}{100} GK$
Es ist ferner	$GY < SK$ (nach der 2ten Voraussetzung)
	$GY + SK < 2SK$, d. h. $GY + SK < SH$
also	$GY + SK < \frac{1}{100} GK$
da aber	$SY = GK - (GY + SK)$
so ist	$SY > GK - \frac{1}{100} GK$, d. h. $SY > \frac{99}{100} GK$
Nun ist	$GK > GP$, also $SY > \frac{99}{100} GP$
Auch ist	$SY < DT$ (Anmkg. β.) folglich $DT > \frac{99}{100} GP$, also $\frac{DT}{GP} > \frac{99}{100}$

§. 6.

Nach diesen Voraussetzungen läſst sich nunmehr zeigen, daſs der Durchmesser der Welt kleiner sei, als 10000 Erddurchmesser, und so auch kleiner als 10000 Millionen Stadien.

Weil nämlich angenommen ist, der Sonnendurchmesser sei nicht gröſser, als das dreiſsigfache des Monddurchmessers, der Erddurchmesser aber sei gröſser, als der Monddurchmesser; so folgt, daſs der Sonnendurchmesser kleiner sei, als 30 Erddurchmesser. Weil ferner gezeigt ward, daſs der Sonnendurchmesser gröſser sei, als die Seite eines dem gröſsten Kreise der Welt eingeschriebenen Tausendecks, so folgt offenbar, daſs der Umfang des gedachten Tausendecks kleiner sei, als 1000 Sonnendurchmesser. Der Sonnendurchmesser ist aber kleiner als 30 Erddurchmesser, also ist der Umfang des Tausendecks kleiner als 30000 Erddurchmesser. Weil nun der Umfang des Tausendecks kleiner als 30000 Erddurchmesser und zugleich gröſser ist als der dreifache Weltdurchmesser; (denn es ist dir bekannt, daſs der Durchmesser eines jeden Kreises kleiner ist, als der dritte Theil vom Umfange eines Vielecks im Kreise, wofern dieses nur gleichseitig und mehr als sechsseitig ist) so ist auch der Weltdurchmesser kleiner als 10000 Erddurchmesser. Daſs aber der Weltdurchmesser, welcher kleiner ist, als 10000 Erddurchmesser, kleiner ist, als 10000 Millionen Stadien, das erhellt so: Es ist vorausgesetzt, daſs der Umfang der Erde nicht gröſser sei, als 3 Millionen Stadien, jedoch gröſser, als der dreifache Durchmesser; weil eines jeden Kreises Umfang gröſser ist, als dessen dreifacher Durchmesser; mithin erhellt, daſs der Erddurchmesser kleiner sei, als 1000000 Stadien. Weil nun der Weltdurchmesser kleiner ist, als 10000 Erddurchmesser, so ist klar; daſs der Weltdurchmesser kleiner sei, als 10000 Millionen Stadien. (ε)

---

§. 7.

In den bei T und X rechtwinkligen Dreiecken DKT und GKX ist ferner

$$KT = KX$$
$$DK < GK$$

also $DT < GX$, folglich

$$\frac{KDT}{KGX} > \frac{GK}{DK} \text{ und } \frac{KDT}{KGX} < \frac{GX}{DT} \text{ (Anmkg. } \gamma.)$$

also auch $\frac{LDQ}{MGO} < \frac{GX}{DT}$, oder $\frac{MGO}{LDQ} > \frac{DT}{GX}$

Vorhin war $\frac{DT}{GP} > \frac{99}{100}$; also ist $\frac{DT}{GX} > \frac{99}{100}$, da $GP = GX$;

folglich $\frac{MGO}{LDQ} > \frac{99}{100}$; und weil $LDQ > \frac{1}{200} R$,

so ist $\frac{MGO}{\frac{1}{200} R} > \frac{99}{100}$; d. h. $MGO > \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{200} R$,

also $MGO > \frac{99}{20000} R$, oder $MGO > \frac{1}{203} R$,

d. h. $MGO > \frac{4}{812} R$, mithin AB gröſser, als die Sehne eines Bogens des Kreises AKBC, wenn dieser in 812 gleiche Theile getheilt wird.

(ε) Die Rechnung läſst sich leichter so übersehen:

Es sei der Weltdurchmesser $= d$
der Sonnendurchmesser $= d'$
der Erddurchmesser $= d''$
der Monddurchmesser $= d'''$

§. 7.

So viel setze ich voraus von den Gröfsen und Entfernungen; von dem Sande aber Folgendes: Wenn man einen Körper von Sand bildete, nicht gröfser als ein Mohnkorn, so ist die Zahl der Sandkörner darin nicht gröfser, als 10000; auch ist der Durchmesser eines Mohnkorns nicht kleiner als $\frac{1}{40}$ Zoll. Diese Annahme beruht auf folgender Untersuchung. Es wurden auf ein glattes Lineal, eins bei eins in gerader Linie, Mohnkörner gelegt, unmittelbar neben ein ander; und da nahmen schon 25 Körner einen vollen Zoll Raum ein. Ich nehme indessen den Durchmesser des Mohns noch kleiner an, indem ich ihn $\frac{1}{40}$ Zoll, und nicht kleiner, setze, weil ich auch hier meine Beweisführung gegen allen Widerspruch sichern mögte. So weit meine Voraussetzungen. Doch dünkt es mich zweckdienlich zu sein, noch über die Benennung der Zahlen zu sprechen, damit von den andern Leuten sich diejenigen nicht irren, welchen mein Buch an den Zeuxippos nicht in die Hände gekommen ist, wenn sie hier nichts darüber vorbemerkt finden.

§. 8.

Nun besitzen wir die Namen der Zahlen bis 10000 durch Ueberlieferung, und kennen auch die über 10000 hinlänglich, indem wir die Myriaden bis zu 10000 Myriaden zählen. Die eben genannten Zahlen nun bis zu 10000 Myriaden mögen Zahlen der ersten Ordnung heifsen. Von diesen Zahlen der ersten Ordnung mögen 10000 Myriaden die Einheit der zweiten Ordnung heifsen, und man zähle von diesen Zahlen der zweiten Ordnung die Einer, Zehner, Hunderter, Tausender und Myriaden bis 10000 Myriaden. Diese 10000 Myriaden der zweiten Ordnung sollen wieder die Einheit der dritten Ordnung heifsen; wovon man gleichfalls die Einer, Zehner, Hunderter, Tausender und Myriaden zähle bis zu 10000 Myriaden. Gleicherweise sollen nun 10000 Myriaden der dritten Ordnung die Einheit der vierten Ordnung, ferner 10000 Myriaden der vierten Ordnung die Einheit der fünften Ordnung heifsen; und immer so weiter sollen die Zahlen benannt werden bis zu 10000 Myriaden von der 10000 mal 10000sten Ordnung. Die durch so grofse Benennungen erkannten Zahlen sind zwar völlig ausreichend, indessen darf man noch weiter gehen.

$$\begin{array}{lcl} \text{die Seite des 1000 Ecks} & = & a \\ \text{dessen Umfang} & = & p \\ \text{der Erdumfang} & = & p' \end{array}$$

$$\text{so hat man} \quad \left.\begin{array}{l} d' \leqq 30\, d''' \\ d''' < d'' \end{array}\right\} \text{Voraussetzung 2 und 3.}$$

$$\text{also} \quad d' < 30\, d''$$

Nach Anmkg. 3 ist $a < d'$, folglich $1000\, a < 1000\, d'$, d. h. $p < 30000\, d''$.

Weil ferner $3\, d < p$, so ist $d < 10000\, d''$;

$$\text{Auch ist} \quad \begin{array}{l} p' \leqq 3000000 \text{ Stadien (Voraussetzung 1.)} \\ p' > 3\, d'' \end{array}$$

$$\text{also} \quad d'' < 1000000 \text{ Stadien, und weil } d < 10000\, d'',$$

$$\text{so folgt} \quad d < 10000000000 \text{ Stadien.}$$

Alle bis jetzt angeführten Zahlen sollen Zahlen der ersten Periode heifsen. Die letzte Zahl der ersten Periode heifse eine Einheit der ersten Ordnung zweiter Periode. Ferner sollen 10000 Myriaden der ersten Ordnung zweiter Periode eine Einheit der zweiten Ordnung zweiter Periode, und deren letzte Zahl die Einheit der dritten Ordnung zweiter Periode heifsen; und immer so fortfahrend sind die Zahlen der zweiten Periode zu benennen bis zu 10000 Myriaden der 10000mal 10000sten Ordnung zweiter Periode. Dann wieder sei die letzte Zahl der zweiten Periode die Einheit der ersten Ordnung dritter Periode, und so fahre man beständig fort bis zu 10000 Myriaden der 10000mal 10000sten Ordnung in der 10000mal 10000sten Periode. (3)

§. 9.

Wenn nun etwa, nach Feststellung dieser Benennungen, Zahlen von der Einheit an in stetiger Progression stehen, und die nächste nach der Einheit ein Zehner ist, so werden die acht ersten, die Einheit eingeschlossen, die Zahlen der ersten Ordnung enthalten, die acht darauf folgenden aber die Zahlen der zweiten Ordnung; und eben so werden die übrigen je acht und acht die Zahlen derjenigen Oktade enthalten, welche bezeichnet wird durch die Stellenzahl der Oktade von der ersten an gerechnet. Demnach ist die achte Zahl der ersten Zah-

---

(3) Uebersicht der Archimedischen Darstellung.

Erste Periode.

1ste Ordnung $= 10000 \,.\, 10000 = 10^{8\cdot 1} = 10^8$
2te — $= (10000 \,.\, 10000)^2 = 10^{8\cdot 2} = 10^{16}$
3te — $= (10000 \,.\, 10000)^3 = 10^{8\cdot 3} = 10^{24}$
⋮
10^8te — $= (10000 \,.\, 10000)^{10^8} = 10^{8\cdot 10^8} = P$

Zweite Periode.

1ste Ordnung $= P.\, 10^{8\cdot 1} = P.\, 10^8$
2te — $= P.\, 10^{8\cdot 2} = P.\, 10^{16}$
3te — $= P.\, 10^{8\cdot 3} = P.\, 10^{24}$
⋮
10^8te — $= P.\, 10^{8\cdot 10^8} = P^2$

Dritte Periode.

⋮
10^8te Ordnung $= P.^2\, 10^{8\cdot 10^8} = P^3$

10^8te Periode.

⋮
10^8te Ordnung $= P^{10^7} .\, 10^{8\cdot 10^8} = P^{10^8}$

Nun ist $P^{10^8} = (10^{8\cdot 10^8})^{10^8} = 10^{8\cdot 10^{16}}$, d. h. eine Eins mit 80000 Billionen Nullen hinter sich.

(Vgl. Delambre über die Arithmetik d. Griechen, übs. v. I. I. I. Hoffmann, Mainz 1817, 4. Das Original ist der Peyrardschen Uebersetzung zugefügt. Ferner Wallisii Algebr. Cap. VI. Opp. II, 20.)

lenoktade ein Tausendmal-Zehntausender; die erste Zahl der zweiten Oktade, weil sie das Zehnfache der nächst vorhergegangenen ist, wird ein 10000 mal 10000 der sein. Diese Zahl ist die Einheit der zweiten Ordnung. Wiederum wird also die erste Zahl dieser dritten Oktade, oder das Zehnfache der nächst vorhergegangenen, ein 10000 mal 10000 der zweiter Ordnung sein, und das ist die Einheit dritter Ordnung. Es leuchtet ein, daſs wie gesagt, noch viele Oktaden folgen.

§. 10.

Auch ist dienlich, noch Folgendes zu bemerken. Wenn etwa Zahlen von der Einheit an in Progression stehen, und einige von ihnen mit einander multiplicirt werden, so gehört das Produkt in dieselbe Progression, und steht von dem gröſsern Faktor so weit ab, als der kleinere von der Einheit nach dem Gesetze der Progression entfernt ist. Von der Einheit aber steht das Produkt um Eins weniger ab, als die Summe der beiden Zahlen beträgt, um welche die Faktoren von der Einheit abstehen. Es mögen nämlich folgende Zahlen von der Einheit an in Progression stehen:

$$\div\ \alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon : \zeta : \eta : \vartheta : \iota : \varkappa : \lambda;$$

α selbst sei die Einheit und es werde δ mit ϑ multiplicirt; das Produkt sei χ. Man nehme nun aus jener Progression das Glied λ, welches von ϑ so weit absteht, wie δ von der Einheit, so ist zu zeigen, daſs $\chi = \lambda$. Da nun in der Progression δ von α gerade so weit absteht, wie λ von ϑ, so verhält sich

$$\delta : \alpha = \lambda : \vartheta$$

Es ist aber δ das δfache von α; mithin ist auch λ das δfache von ϑ, also ist $\lambda = \chi$. Offenbar gehört das Produkt in dieselbe Progression, und steht von dem gröſseren Faktor eben so weit ab, als der kleinere von der Einheit. Auch erhellt, daſs das Produkt von der Einheit um Eins weniger entfernt ist, als um die Summe der Entfernungen beider Faktoren von der Einheit; denn die $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta$, sind gerade so viele Zahlen, wie ϑ von der Einheit absteht, $\iota, \varkappa, \lambda$, aber sind um Eins weniger, als δ von der Einheit entfernt ist; nämlich mit ϑ selbst sind es erst eben so viele. (η)

§. 11.

Auf den Grund dieser theils vorausgesetzten, theils bewiesenen Sätze wird sich der Beweis des Vorliegenden führen lassen. Weil nämlich vorausgesetzt wird, daſs der Durchmesser des Mohnkorns nicht kleiner ist als $\frac{1}{40}$ Zoll, so kann offenbar eine Kugel von 1 Zoll Durchmesser nicht mehr als 64000 Mohnkörner in sich fassen; denn sie ist ein Vielfaches nach

---

(η) Die Wahrheit des Behaupteten erhellet sofort ganz allgemein, wenn man die Progression ihrer Entstehung gemäſs darstellt:

$$\div\ 1 : e : e^2 : \ldots \overset{n+1}{e^n} : e^{n+1} : \ldots \overset{m+1}{e^m} : e^{m+1} : \ldots \overset{n+m+1}{e^{n+m}} : \ldots$$

denn wird hier das (n + 1)ste Glied mit dem (m + 1)sten Gliede multiplicirt, so entsteht $e^n . e^m = e^{n+m}$, welches das (n + m + 1)ste Glied der ganzen Progression ist. Auch ist die Anwendung auf Produkte mehrerer Faktoren leicht. Da Archimedes nur von ganzen Zahlen redet, so ist $e^m > e^n$.

der genannten Zahl von einer Kugel, deren Durchmesser $\frac{1}{40}$ Zoll beträgt; indem ja bereits erwiesen ist, dafs Kugeln zu einander im dreifachen Verhältnisse ihrer Durchmesser stehen. Weil aber ferner vorausgesetzt wird, dafs die Zahl des Sandes, der auf die Gröfse eines Mohnkorns kommt, nicht gröfser sei, als 10000, so ergiebt sich, dafs die Zahl des Sandes in einer Kugel von 1 Zoll Durchmesser nicht gröfser sei, als 10000 mal 64000. Diese Zahl aber enthält 6 Einer der zweiten Ordnung und 4000 Myriaden der ersten Ordnung, ist mithin kleiner als 10 Einer der zweiten Ordnuug.

§. 12.

Eine Kugel von 100 Zoll Durchmesser ist ein 100 Myriadenfaches jener, deren Durchmesser 1 Zoll ist, wegen des dreifachen Verhältnisses der Durchmesser der Kugeln. Macht man also eine Sandkugel von 100 Zoll Durchmesser, so wird augenscheinlich die Zahl der Sandkörner weniger betragen, als 100 Myriaden mal 10 Einer der zweiten Ordnung. Weil nun ein Zehner der zweiten Ordnung das 10te Glied ist in einer von der Einheit anfangenden dekadischen Progression, und weil 100 Myriaden das 7te Glied in derselben Progression ist, so mufs das Produkt beider das 16te Glied derselben Progression sein. Denn es ist erwiesen, dafs dieses Glied um 1 weniger von der Einheit absteht, als um die Summe der Entfernungen beider Faktoren von der Einheit. Von diesen 16 Gliedern gehören die 8 ersten mit der Einheit zu den Zahlen der ersten Ordnung, die 8 folgenden zur zweiten Ordnung, und das letzte von ihnen beträgt 1000 Myriaden der zweiten Ordnung. Also erhellt, dafs die Menge Sandes von der Gröfse einer Kugel von 100 Zoll im Durchmesser weniger beträgt, als 1000 Myriaden zweiter Ordnung.

§. 13.

Ferner ist eine Kugel von 10000 Zoll Durchmesser ein Vielfaches nach 100 Myriaden von jener, die 100 Zoll Durchmesser hatte. Macht man also eine Sandkugel von 10000 Zoll im Durchmesser, so wird gewifs die Zahl des Sandes kleiner sein, als das Produkt von 1000 Myriaden der zweiten Ordnung mit 100 Myriaden. Weil nun 1000 Myriaden zweiter Ordnung das 16te Glied der Progression von der Einheit an ist, und 100 Myriaden das 7te Glied derselben Progression, so mufs das Produkt das 22ste Glied der Progression sein. Von diesen 22 Gliedern bilden die 8 ersten, die Einheit eingeschlossen, die Zahlen der ersten Ordnung, die 8 darauf folgenden die Zahlen der zweiten Ordnung, und die übrigen 6 gehören zur dritten Ordnung, so dafs das letzte 10 Myriaden der dritten Ordnung beträgt. Es erhellt mithin, dafs die Menge Sandkörner in einer Kugel von 10000 Zoll im Durchmesser weniger beträgt, als 10 Myriaden dritter Ordnung. — Weil aber eine Kugel, die zum Durchmesser ein Stadium hat, kleiner ist, als eine Kugel von 10000 Zoll Durchmesser, so erhellt, dafs die Menge Sandes von der Gröfse einer Kugel, deren Durchmesser ein Stadium beträgt, geringer ist, als 10 Myriaden dritter Ordnung.

§. 14.

Weiter ist eine Kugel von 100 Stadien Durchmesser das 100 Myriadenfache einer Kugel, deren Durchmesser ein Stadium ist. Eine Sandkugel folglich von 100 Stadien im Durchmesser wird eine geringere Menge Sandkörner enthalten, als die Zahl, welche ein Produkt ist aus 10 Myriaden dritter Ordnung mit 100 Myriaden. Weil aber 10 Myriaden der dritten Ordnung das 22ste Glied von der Einheit an ist, und 100 Myriaden das 7te in derselben Progression, so erhellt, dafs die entstehende Zahl das 28ste Glied in derselben Progression sein werde. Von diesen 28 Gliedern bilden die 8 ersten mit Einschlufs der Einheit die Zahlen erster Ordnung, die darauf folgenden 8 die Zahlen zweiter Ordnung, die dann folgenden die Zahlen dritter Ordnung, und die vier noch übrigen gehören zu den Zahlen vierter Ordnung, so dafs das letzte Glied 1000 Einheiten der vierten Ordnung beträgt. Also ist klar, dafs die Menge Sandes von der Gröfse einer Kugel, deren Durchmesser 100 Stadien beträgt, geringer ist, als 1000 Einheiten der vierten Ordnung.

§. 15.

Ferner ist eine Kugel von 10000 Stadien Durchmesser das 100 Myriadenfache einer Kugel von 100 Stadien im Durchmesser. Hätte man also eine Sandkugel von 10000 Stadien Durchmesser, so würde diese Sandmenge offenbar kleiner sein, als die Zahl, welche das Produkt ist aus 1000 Einheiten der vierten Ordnung mit 100 Myriaden. Nun sind 1000 Einheiten vierter Ordnung das 28ste Glied von der Einheit an, 100 Myriaden aber das 7te, folglich wird das Produkt beider das 34ste Glied in derselben Progression sein. Von diesen 34 Gliedern gehören die 8 ersten mit Einschlufs der Einheit zur ersten Ordnung, die 8 darauf folgenden zur zweiten, die dann folgenden 8 zur dritten, die darauf folgenden 8 zur vierten und die 2 noch übrigen zur fünften Ordnung. Das letzte Glied beträgt also 10 Einheiten der fünften Ordnung. Mithin ist deutlich, dafs die Menge Sandes in einer Kugel von 10000 Stadien Durchmesser weniger beträgt, als 10 Einheiten der fünften Ordnung.

§. 16.

Hiernächst ist eine Kugel von 100 Myriaden Stadien im Durchmesser das Vielfache nach 100 Myriaden von einer Kugel, deren Durchmesser 10000 Stadien grofs ist. Machte man demnach eine Sandkugel von 100 Myriaden Stadien Durchmesser, so würde offenbar diese Sandmenge geringer sein, als das Produkt aus 10 Einheiten der fünften Ordnung mit 100 Myriaden. Weil nun 10 Einheiten der fünften Ordnung das 34ste, 100 Myriaden aber das 7te Glied geben, so ist klar, dafs die entstehende Zahl das 40ste Glied derselben Progression sein wird. Von diesen 40 Gliedern gehören 8 zur ersten, die nächsten 8 zur zweiten, dann 8 zur dritten, ferner 8 zur 4ten und endlich 8 zur fünften Ordnung, so dafs das letzte Glied 1000 Myriaden der fünften Ordnung beträgt. Also ist die Menge Sandes in einer Kugel von 100 Myriaden Stadien Durchmesser kleiner als 1000 Myriaden der fünften Ordnung.

§. 17.

Eine Kugel von 10000 Myriaden Stadien im Durchmesser ist ein Vielfaches nach 100 Myriaden von jener, deren Durchmesser 100 Myriaden Stadien betrug. Folglich würde eine Sandkugel von 10000 Myriaden Stadien Durchmesser augenscheinlich eine geringere Menge Sandes enthalten, als die Zahl, welche durch Multiplikation von 1000 Myriaden der fünften

Ordnung mit 100 Myriaden entsteht. Da nun 1000 Myriaden der fünften Ordnung das 40ste Progressionsglied bilden, 100 Myriaden aber das 7te, so erhellt, dafs das Produkt das 46ste Glied von der Einheit an sein müsse. Von diesen 46 Gliedern gehören die 8 ersten mit Inbegriff der Einheit zu den Zahlen der ersten Ordnung, die darauf folgenden 8 zur zweiten, die nächsten 8 zur dritten, die folgenden 8 zur vierten, die hiernächst folgenden 8 zur fünften und die übrigen 6 zur sechsten Ordnung, und das letzte von ihnen beträgt 10 Myriaden der sechsten Ordnung; woraus sich ergiebt, dafs die Menge Sandes von der Gröfse einer Kugel von 10000 × 10000 Stadien im Durchmesser, kleiner ist, als 10 Myriaden der sechsten Ordnung.

§. 18.

Eine Kugel aber von 100 mal 10000 Myriaden Stadien im Durchmesser ist das 100 Myriadenfache einer Kugel, deren Durchmesser 10000 Myriaden Stadien beträgt. Mithin würde eine Kugel Sandes von 10000 Millionen Stadien Durchmesser gewifs eine geringere Sandmenge enthalten, als eine Zahl, welche das Produkt ist von 10 Myriaden der sechsten Ordnung mit 100 Myriaden. Nun sind aber 10 Myriaden sechster Ordnung das 46ste Progressionsglied und 100 Myriaden das 7te, also mufs die entstehende Zahl das 52ste Glied in derselben Progression sein. Von diesen 52 Gliedern gehören die 48 ersten mit der Einheit zur ersten, zweiten, dritten, vierten, fünften und sechsten Ordnung, die vier übrigen aber zur siebenten Ordnung; also ist deutlich, dafs die Menge Sandes von der Gröfse einer Kugel, deren Durchmesser 10000 Millionen Stadien grofs ist, weniger ausmacht, als 1000 Einheiten der 7ten Ordnung.

§. 19.

Da nun gezeigt worden, dafs der Weltdurchmesser kleiner ist, als 10000 Millionen Stadien, so folgt, dafs auch eine Menge Sandes von der Gröfse der Welt kleiner sei, als 1000 Einheiten der siebenten Ordnung. Also ist erwiesen, dafs eine Sandmenge von solcher Gröfse, wie die meisten Sternkundigen die Welt annehmen, kleiner sei, als 1000 Einheiten der siebenten Ordnung.

Dafs aber auch eine Sandmenge von der Gröfse einer solchen Kugel, wie Aristarchos die Fixsternkugel annimt, kleiner sei, als 1000 Myriaden der achten Ordnung, wird sich zeigen lassen. Da nämlich vorausgesetzt ist, dafs die Erde zu dem, was wir Welt nennen, sich eben so verhalte, wie die gedachte Welt zur Fixsternkugel des Aristarchos; und da die Durchmesser dieser Kugeln unter sich ebenfalls stetig proportionirt sind; da endlich der Weltdurchmesser nach dem Beweise weniger beträgt, als 10000 Erddurchmesser; so ist klar, dafs auch der Durchmesser der Fixsternkugel kleiner ist, als 10000 Weltdurchmesser. Weil aber Kugeln in dreifachem Verhältnisse ihrer Durchmesser zu einander stehen, so leuchtet ein, dafs die Fixsternkugel, wie sie Aristarchos annimt, kleiner ist, als das Billionfache der Welt.

Es ward aber bewiesen, dafs eine Sandmenge von der Gröfse der Welt kleiner sei, als 1000 Einheiten der siebenten Ordnung. Also ergiebt sich, dafs wenn es eine Sandkugel gäbe, so grofs, als nach Aristarchos die Fixsternkugel sein soll, doch die Zahl des Sandes geringer sein würde als das Produkt aus 1000 Einheiten der siebenten Ordnung mit einer Billion. Weil nun 1000 Einheiten der siebenten Ordnung das 52ste Glied von der Einheit an ist, 1 Billion aber das 13te in derselben Progression, so ergiebt sich, dafs die entstehende Zahl das 64ste Glied von der Einheit an in derselben Progression ist. Das ist aber die achte Zahl achter Ordnung — d. h. 1000 Myriaden der achten Ordnung. Also ist klar, dafs eine Menge Sandes von der Gröfse der Aristarchischen Fixsternkugel geringer ist, als 1000 Myriaden der achten Ordnung.

§. 20.

Diefs nun, König Gelon, wird vermuthlich dem grofsen Haufen und denen, welche der Mathematik unkundig sind, unglaublich scheinen; aber denen, welche diese Kenntnifse besitzen, und über die Entfernungen und Gröfsen der Erde, der Sonne, des Mondes und des ganzen Weltgebäudes nachgedacht haben, wird es es wegen der Beweise für gewifs gelten. Defshalb habe ich geglaubt, es sei nicht unangemessen, dafs Jemand diefs genauer untersuche.

Von
schwimmenden Körpern.

Erstes Buch.

Annahme I.

Man setze als wesentliche Eigenschaft einer Flüssigkeit voraus, daſs bei gleichförmiger und lückenloser Lage ihrer Theile der minder gedrückte durch den mehr gedrückten in die Höhe getrieben werde. Jeder Theil derselben aber wird von der nach senkrechter Richtung über ihm befindlichen Flüssigkeit gedrückt, wenn diese im Sinken begriffen ist, oder doch von einer andern gedrückt wird.

Satz 1.

Wenn irgend eine Oberfläche beständig durch einerlei Punkt von einer Ebene geschnitten wird, und wenn der Schnitt ein Kreisumfang ist, der zum Mittelpunkte jenen Punkt hat, durch welchen sie von der Ebene geschnitten wird: so muſs die Oberfläche eine Sphäre sein.

F. 174. Eine Oberfläche werde von einer Ebene durch den Punkt K geschnitten, auch sei der Schnitt immer ein Kreisumfang um den Mittelpunkt K; so behaupte ich, die Oberfläche sei eine Sphäre.

Denn wo nicht, so werden die geraden Linien, welche aus K nach dem Umfange gezogen werden, nicht sämtlich gleich sein. Es mögen demnach A, B, Punkte in der Oberfläche, und die Linien AK, KB, ungleich sein; man führe durch AK, KB eine Ebene, deren Schnitt in der Oberfläche die Linien DABC bilde. Dann ist, nach der Annahme der Oberfläche, DABC ein Kreisumfang mit dem Mittelpunkte K; mithin sind die Linien AK, KB, einander gleich, und doch auch ungleich, was unmöglich ist. Daraus erhellet, daſs die Oberfläche eine Sphäre sei.

Satz 2.

Satz 2.

Die Oberfläche einer jeden zusammenhangenden Flüssigkeit im Zustande der Ruhe ist sphärisch, und der Mittelpunkt ihrer Kugel ist einerlei mit dem Mittelpunkte der Erde.

Man denke sich eine zusammenhangende Flüssigkeit in Ruhe, und schneide deren Oberfläche mittelst einer durch den Mittelpunkt der Erde geführten Ebene. Der Mittelpunkt der Erde sei K, und die Linie ABCD sei der Schnitt der Oberfläche. Ich behaupte, die Linie ABCD sei ein Kreisumfang um den Mittelpunkt K. F. 175.

Denn wo nicht, so werden die geraden aus K an ABCD gezogenen Linien ungleich sein. Man nehme eine gerade Linie, welche gröfser als einige der aus K an ABCD gezogenen, kleiner aber, als andere derselben ist, und beschreibe mit ihr als Halbmesser einen Kreis aus dem Mittelpunkte K: dann wird der Umfang desselben theils aufserhalb, theils innerhalb der Linie ABCD fallen, weil eben der Halbmesser gröfser als einige, und kleiner als andere der von K an sie ausgehenden Linien ist. Der Umfang des beschriebenen Kreises sei daher FHB, man ziehe eine Linie aus B nach K, und die Linien FK, KHE, welche mit jener gleiche Winkel machen sollen. Ferner beschreibe man aus dem Mittelpunkte K einen Kreisbogen XOP in der Ebene und in der Flüssigkeit; dann werden die Theile der Flüssigkeit, welche in dem Bogen XOP liegen, gleichförmig und unter sich lückenlos liegen, auch werden die Theile in dem Bogen XO von der Flüssigkeit unter dem Orte AB, die aber in dem Bogen OP von der Flüssigkeit unter BE gedrückt, mithin leiden die Theile der Flüssigkeit in den Bogen XO und OP einen ungleichen Druck, defshalb müfsen die minder gedrückten von den mehr gedrückten gehoben werden (*Annahme* 1.), also bleibt die Flüssigkeit nicht in demselben Zusammenhange. Es ward aber vorausgesetzt, sie solle zusammenhangen und in Ruhe sein: daher mufs nothwendig die Linie ABCD ein Kreisumfang sein, dessen Mittelpunkt K ist.

Eben so wird sich zeigen lassen, wie auch sonst noch die Oberfläche der Flüssigkeit von einer durch den Mittelpunkt der Erde geführten Ebene geschnitten werden mag, dafs der Schnitt eine Kreislinie, und deren Mittelpunkt zugleich der Mittelpunkt der Erde sei: woraus hervorgeht, dafs die Oberfläche einer zusammenhängenden Flüssigkeit im Zustande der Ruhe sphärisch, und der Mittelpunkt ihrer Kugel einerlei sei mit dem der Erde; indem nämlich diese Oberfläche von der Art ist, dafs sie, immer durch denselben Punkt geschnitten, als Schnitt eine Kreislinie giebt, deren Mittelpunkt eben der Punkt ist, durch den jene von der Ebene geschnitten wird.

Satz 3.

Feste Körper, welche bei gleichem Raumesinhalte einerlei Gewicht mit einer Flüssigkeit haben, (α) sinken, in diese eingetaucht, so weit, dafs nichts von ihnen aus der Oberfläche der Flüssigkeit hervorragt; tiefer aber sinken sie nicht.

Es habe ein Körper einerlei Gewicht mit einer Flüssigkeit, und rage, wenn diefs möglich ist, eingetaucht in sie aus ihrer Oberfläche hervor. Die Flüssigkeit sei zusammen- F. 176.

(S. 3. α) D. h. welche einerlei spezifisches Gewicht mit der Flüfsigkeit haben.

hangend und in Ruhe, auch denke man sich eine Ebene durch den Mittelpunkt der Erde und der Flüssigkeit, und durch den festen Körper gelegt, so daſs ABCD der Schnitt der Oberfläche der Flüssigkeit, EHTF aber der Schnitt des eingetauchten Körpers und K der Mittelpunkt der Erde sei. Ferner sei BHTC der in der Flüssigkeit, und BEFC der auſserhalb derselben befindliche Theil des festen Körpers. Man denke sich ferner den festen Körper umfaſst von einer Pyramide, deren Grundfläche ein Parallelogramm (β) in der Oberfläche der Flüssigkeit, und deren Scheitel der Mittelpunkt der Erde ist; der Durchschnitt der Ebene, worin der Bogen ABCD liegt, mit den Seitenflächen der Pyramide sei KL, KM; man beschreibe eine andere Sphäre XOP um den Mittelpunkt K in der Flüssigkeit unter EFHT, so daſs XOP selbst der Schnitt dieser Oberfläche mit der Ebene sein mag. Man nehme auſserdem eine andere Pyramide an, gleich und ähnlich jener, welche den festen Körper umfaſst, auch mit ihr lückenlos verbunden, und der Durchschnitt ihrer Seitenflächen sei KM, KN. Dann denke man sich in der Flüssigkeit eine Gröſse RSQY, gebildet aus der Flüssigkeit selbst, und dem Körper BHTC, welcher ein Theil des in die Flüssigkeit getauchten Körpers ist, gleich und ähnlich. Nun sind die Theile der Flüssigkeit, nämlich der, welcher in der ersten Pyramide unter der Fläche XO enthalten ist, mit dem in der andern unter PO enthaltenen in gleichförmiger, lückenloser Lage; sie erleiden aber nicht denselben Druck. Denn der unter XO enthaltene Theil wird von dem festen Körper EHTF, und von der zwischen den Flächen XO, LM, und den Seitenflächen der Pyramide befindlichen Flüssigkeit gedrückt; der unter PO enthaltene Theil aber von dem festen Körper RSQY und von der zwischen den Flächen OP, MN, und den Seitenflächen der Pyramide enthaltenen Flüssigkeit. Es ist aber das Gewicht der Flüssigkeit zwischen MN, OP, geringer, als das der zwischen LM, XO; denn der feste Körper RSQY ist kleiner, als der Körper EHTF, weil jener gleich BHTC ist, indem nach der Voraussetzung der feste Körper und die Flüssigkeit bei gleicher Gröſse auch gleiches Gewicht haben; daher bleiben nach Abzug dieser Körper ungleiche Reste. (γ) Es erhellet folglich, daſs der unter der Oberfläche OP enthaltene Theil von dem gehoben werde, welcher unter XO enthalten ist, und daſs die Flüssigkeit nicht in demselben Zusammenhange bleibe (S. 1.). Sie sollte aber nach der Voraussetzung im Zusammenhange und in Ruhe sein; mithin ragt von dem festen Körper nichts aus der Flüssigkeit hervor.

Der eingetauchte Körper sinkt aber auch nicht tiefer; denn die gleichliegenden Theile der Flüssigkeit leiden überall denselben Druck, da Körper und Flüssigkeit einerlei Gewicht haben.

Satz 4.

Jeder feste Körper, der, leichter (α) als eine Flüssigkeit, in diese getaucht wird, sinkt nicht ganz unter, sondern ein Theil desselben wird aus ihrer Oberfläche hervorragen.

(β) Eigentlich ein sphärisches Viereck.

(γ) Deutlicher so: Es ward vorausgesetzt, daſs vor Einsenkung des überragenden Körpers ET Gleichgewicht Statt finde. Nun ist BT = RQ; werden diese Körper von den ganzen Massen rechts und links abgezogen, so bleibt auf beiden Seiten eine gleiche Menge Flüſsigkeit, und auſserdem noch auf der einen der überragende Theil BEFC, mithin ungleiche Reste.

(S. 4. α) Nämlich spezifisch leichter. Diese Bemerkung ist in der Folge noch oft zu machen, daher stehe sie hier ein für allemal.

Es sei ein fester Körper leichter, als die Flüssigkeit, und sinke völlig unter, wenn diefs möglich ist, so dafs kein Theil desselben aus ihrer Oberfläche hervorrage. Die Flüssigkeit sei zusammenhangend und in Ruhe; auch denke man durch den Mittelpunkt der Erde, durch die Flüssigkeit und durch den festen Körper eine Ebene geführt, von welcher die Oberfläche der Flüssigkeit nach dem Bogen ABC, der feste Körper aber nach der Figur R geschnitten werde, und K sei der Mittelpunkt der Erde. Auch nehme man eine den Körper R umfassende Pyramide an, wie zuvor, welche den Punkt K zum Scheitel haben soll, und deren Seitenflächen von der Ebene ABC in AK, KB, geschnitten werden. Ferner stelle man sich eine andere Pyramide, der vorigen gleich und ähnlich vor, deren Seitenflächen von der Ebene ABC in BK, KC, geschnitten werden. Hiernächst beschreibe man eine andere Sphäre in der Flüssigkeit um den Mittelpunkt K unter dem festen Körper, und sie werde von derselben Ebene in XOP geschnitten. Endlich denke man in der letzteren Pyramide einen andern Körper H, welcher aus der Flüssigkeit bestehen, und dem festen Körper R gleich sein soll. Die Theile der Flüssigkeit folglich, sowohl der in der ersten Pyramide unter der Oberfläche XO, als der in der zweiten unter der Oberfläche OP enthaltene liegen gleichförmig und lückenlos unter sich; erleiden jedoch nicht einerlei Druck; denn der Theil in der ersten Pyramide wird von dem festen Körper R, und von der denselben umgebenden Flüssigkeit gedrückt, die sich an dem Orte ABOX der Pyramide befindet; der Theil dagegen in der andern Pyramide wird von der körperlichen Gröfse H, und von der dieselbe umgebenden Flüssigkeit an dem Orte POBC der Pyramide gedrückt. Allein das Gewicht des festen Körpers R ist kleiner, als das der Flüssigkeit H, weil jene zwar eben so grofs, jedoch leichter als die Flüssigkeit vorausgesetzt ward: und das Gewicht der die Gröfsen R, H, umgebenden Flüssigkeit ist in beiden Fällen gleich, da die Pyramiden gleich sind. Demnach leidet der Theil der Flüssigkeit unter der Oberfläche OP einen stärkeren Druck, wird folglich den minder gedrückten Theil hervorheben, die Flüssigkeit bleibt also nicht in Ruhe (S. 1.). Es ward aber vorausgesetzt, sie bleibe in Ruhe. Daher wird der Körper nicht gänzlich untersinken, sondern ein Theil desselben wird aus der Oberfläche der Flüssigkeit hervorragen. F. 177.

Satz 5.

Jeder feste Körper, welcher, leichter als eine Flüssigkeit, in diese eingetaucht wird, sinkt so tief, dafs die Masse der Flüssigkeit, welche so grofs ist als der eingesunkene Theil, eben so viel wiegt, wie der ganze Körper.

Man mache dieselbe Konstruktion wie zuvor, auch sei die Flüssigkeit in Ruhe, und der Körper EHTF leichter als die Flüssigkeit. Wenn demnach diese in Ruhe ist, so werden ihre gleichliegenden Theile gleichmäfsig gedrückt, also wird die Flüssigkeit unter den Oberflächen XO, OP, gleichmäfsig gedrückt, und mithin sind die drückenden Gewichte gleich. Es ist aber das Gewicht der Flüssigkeit in der ersten Pyramide ohne den Körper BHTC gleich dem Gewichte der Flüssigkeit in der andern Pyramide ohne die Flüssigkeit RSQY; daher ist offenbar das Gewicht des Körpers EHTF gleich dem Gewichte der Flüssigkeit RSQY, und hieraus erhellet, dafs eine Masse der Flüssigkeit von der Gröfse des eingesunkenen Theils des eingetauchten Körpers einerlei Gewicht mit diesem ganzen Körper habe. F. 176.

Satz 6.

Wenn Körper, die leichter sind, als eine Flüssigkeit, in diese eingetaucht werden, so erheben sie sich wieder mit einer so grofsen Kraft, wie eine Masse Flüssigkeit von der Gröfse des Körpers schwerer ist, als der Körper selbst.

F. 178. Es sei nämlich ein Körper A leichter als eine Flüssigkeit, B sei das Gewicht des Körpers A, und BC sei das Gewicht einer Masse Flüssigkeit von der Gröfse des Körpers A. Dann ist zu erweisen, dafs der Körper A, eingetaucht in die Flüssigkeit, mit einer dem Gewichte C gleichen Kraft sich wieder erhebe.

Man nehme einen Körper D an, dessen Gewicht gleich C ist, dann ist ein aus den beiden Körpern A, D, zusammengesetzter Körper leichter als die Flüssigkeit; denn das Gewicht des aus A und D zusammengesetzten Körpers ist BC. Allein das Gewicht einer Masse Flüssigkeit von der Gröfse jener Körper ist gröfser als BC, weil BC das Gewicht einer Masse Flüssigkeit von der Gröfse A ist. Wird demnach der aus A, D, zusammengesetzte Körper in die Flüssigkeit getaucht, so wird er so weit einsinken, dafs eine Masse Flüssigkeit von der Gröfse des eingesunkenen Körpers einerlei Gewicht hat mit dem ganzen Körper; wie schon bewiesen wurde (S. 5.).

Nun stelle der Bogen EFGH die Oberfläche einer Flüssigkeit vor. Weil dann eine Masse Flüssigkeit von der Gröfse des Körpers A eben so viel Gewicht hat, wie die Körper A, D; so erhellet, dafs der Körper A der eingesunkene Theil sein, der übrige Theil D aber ganz aus der Oberfläche der Flüssigkeit hervorragen werde. Daraus geht hervor, dafs der Körper A mit eben der Kraft in die Höhe gehoben werde, mit welcher er, da sie über ihm befindlich, hinabgedrückt wird, d. h. mit der Kraft D; indem jetzt die eine durch die andere aufgehoben wird. (α) Aber D drückt hinab mit dem Gewichte C, denn das Gewicht des Körpers D ward gleich C gesetzt. Demnach erhellet, was zu beweisen war.

Satz 7.

Feste Körper, welche, schwerer als eine Flüssigkeit, in diese eingetaucht werden, sinken, so lange sie noch tiefer kommen können, und werden in der Flüssigkeit um so viel leichter, als das Gewicht einer Masse Flüssigkeit von der Gröfse der eingetauchten Körper beträgt.

F. 179. Dafs feste Körper, welche schwerer sind als eine Flüssigkeit, eingetaucht in diese, so lange sinken, als sie noch tiefer kommen können, ist einleuchtend; denn die darunter liegenden Theile der Flüssigkeit werden stärker gedrückt, als die gleichförmig anliegenden Theile, weil der feste Körper schwerer als die Flüssigkeit angenommen wird. Dafs aber die Körper um das Angegebene leichter werden, wird so bewiesen:

Ein Körper A sei schwerer als die Flüssigkeit, und BC bezeichne das Gewicht des Körpers A, das Gewicht einer Masse Flüssigkeit von der Gröfse A sei aber B: dann ist zu beweisen, dafs der Körper A im Wasser selbst das Gewicht C habe.

(S. 6. α) Gegenwärtig drückt D den Körper A hinab, und zerstört eben dadurch die Kraft, womit A steigen würde, wenn D nicht vorhanden wäre, gänzlich.

Man nehme einen andern Körper D an, leichter als die Flüssigkeit, dessen Gewicht gleich B sei; BC aber sei das Gewicht einer Masse Flüssigkeit von der Gröfse des Körpers D: dann wird ein aus A, D; zusammengesetzter Körper so schwer sein, als die Flüssigkeit selbst; denn das Gewicht der beiden Körper beträgt so viel, wie die beiden Gewichte BC und B, und das Gewicht einer Masse Flüssigkeit von der Gröfse der beiden Körper ist ebenfalls diesen beiden Gewichten gleich. Senkt man daher die Körper in die Flüssigkeit hinab, und taucht sie ein, so haben sie einerlei Gewicht mit dieser, und werden weder aufwärts noch abwärts getrieben, weil ja der Körper A, schwerer als die Flüssigkeit, abwärts, der Körper D aber mit derselben Kraft aufwärts getrieben wird. Allein der Körper D, leichter als die Flüssigkeit, wird mit einer dem Gewichte C gleichen Kraft aufwärts getrieben; denn es ward erwiesen, dafs feste Körper, die, leichter als die Flüssigkeit, in diese eingetaucht sind, mit einer so grofsen Kraft aufwärts getrieben werden, wie eine Masse Flüssigkeit von der Gröfse der Körper schwerer ist, als diese. Nun ist eine Masse Flüssigkeit von der Gröfse D um das Gewicht C schwerer als D selbst: demnach erhellet, dafs der Körper A mit einer dem Gewichte C gleichen Kraft abwärts getrieben werde; was man erweisen wollte.

Annahme 2.

Man nehme an, dafs jeder Körper, welcher in einer Flüssigkeit aufwärts steigt, hiebei dem durch den Schwerpunkt des Körpers geführten Perpendikel folge.

Satz 8.

Wenn ein fester Körper, welcher leichter als eine Flüssigkeit ist, und die Gestalt eines Kugelabschnitts hat, so in die Flüssigkeit getaucht wird, dafs die Grundfläche des Abschnitts die Flüssigkeit nicht berührt, so wird der Abschnitt senkrecht schwimmen, dergestalt nämlich, dafs die Axe desselben senkrecht steht. Und wenn der Abschnitt auf irgend eine Weise so geneigt wird, dafs seine Grundfläche die Flüssigkeit berührt, so bleibt er nicht also, nachdem er eingetaucht ist, sondern nimt wieder die senkrechte Lage ein.

(*) „Man denke sich einen Körper von der angegebenen Art in die Flüssigkeit getaucht, F.180. „und führe eine Ebene durch die Axe des Abschnitts und den Mittelpunkt der Erde, so dafs „der Bogen ABCD der Schnitt der Oberfläche der Flüssigkeit sein mag; auch sei der Bogen „EFH der Schnitt des Abschnitts, die Linie EH sei eine gerade, und FT sei die Axe des „Abschnitts. Wenn nun der Abschnitt so geneigt wird, dafs die Axe FT desselben nicht „senkrecht steht, so ist zu erweisen, dafs er nicht in dieser Lage bleibe, sondern sich wieder „senkrecht stelle.“

„Es liegt also der Mittelpunkt der Kugel in der Linie FT, wo denn zuvörderst der „Abschnitt gröfser als die Halbkugel sein soll; und es sei T der Mittelpunkt der Kugel bei der „Halbkugel, P bei dem kleineren, K bei dem gröfseren Abschnitte; man ziehe durch K und „durch den Erdmittelpunkt L eine gerade Linie KL, welche den Bogen EFH in N schneidet. „Weil nun die Axe eines jeden Kugelabschnitts in derjenigen geraden Linie liegt, die vom

---

(S. 8. *) Der Beweis dieses Satzes ist von F. Commandinus gegeben, da der archimedische fehlt.

„Mittelpunkte der Kugel senkrecht gegen die Grundfläche gezogen wird, und weil in dieser „Axe der Schwerpunkt liegt, so liegt die Axe des eingesunkenen aus zwei Kugelabschnitten „bestehenden Theils des ganzen Abschnitts in dem durch K gehenden Perpendikel KL, (β) mit- „hin liegt der Schwerpunkt dieses Theils in der Linie NK; er sei demnach R. Allein der „Schwerpunkt des ganzen Abschnitts liegt in der Linie FT zwischen K und F, etwa in X. „Dann wird der Schwerpunkt des ausserhalb der Flüssigkeit befindlichen Theils des Körpers in „der nach X gezogenen Linie RX liegen, nämlich da wo diese so weit verlängert ist, dass die „Verlängerung sich zu RX verhält, wie das Gewicht des eingesunkenen Theils zu dem Ge- „wichte des noch ausserhalb der Flüssigkeit befindlichen. (γ) Es sei aber S der Schwerpunkt „des letztern Theils, und man ziehe durch S die senkrechte SL. Dann drückt das Gewicht „des ausserhalb der Flüssigkeit befindlichen Körpers abwärts nach der geraden Linie RL (*An- „nahme* 2.); folglich bleibt der Abschnitt nicht in Ruhe, sondern die bei E befindlichen Thei- „le streben abwärts, die bei H dagegen aufwärts, und diess geschieht fortwährend, bis die „Linie FT in senkrechter Lage ist. Auf dieselbe Weise zeigt man dasselbe auch bei den an- „dern Abschnitten."

Satz 9.

Wenn der Abschnitt, leichter als die Flüssigkeit, in diese so getaucht wird, dass die Grundfläche ganz in der Flüssigkeit ist, so wird er senkrecht schwimmen, so nämlich, dass die Axe desselben eine senkrechte Lage annimt.

F. 181. Man denke sich einen Körper von der bezeichneten Art in die Flüssigkeit getaucht, denke ferner eine Ebene durch die Axe des Abschnitts und durch den Mittelpunkt der Erde geführt. Der Bogen ABCD sei der Schnitt der Oberfläche der Flüssigkeit, der Bogen EFH aber sei der Schnitt des Körpers; EH sei eine gerade Linie, und FT die Axe des Abschnitts. Wenn es nun möglich ist, so sei FT nicht senkrecht; dann ist zu erweisen, der Abschnitt bleibe nicht in Ruhe, sondern nehme die senkrechte Lage wieder ein.

Der Mittelpunkt der Kugel liegt in der Linie FT, auch sei zuvörderst wieder der Abschnitt grösser als die Halbkugel, und es sei T der Mittelpunkt der Kugel bei der Halbkugel, P bei dem kleineren, K bei dem grössern Abschnitte; auch ziehe man durch K und durch den Mittelpunkt L der Erde die Linie KL. Dann liegt die Axe des ausserhalb der Flüssigkeit befindlichen Theils in einem durch K gehenden Perpendikel, und nach dem vorher gesagten liegt der Schwerpunkt dieses Theils in der geraden Linie NK, (α) er liege also in R; der Schwerpunkt des ganzen Abschnitts aber liegt in FT, zwischen K und F, etwa in X.

(β) Denn man ziehe KB, KC, LB, LC, so ist KB = KC, LB = LC, KL = KL, folglich BLK = CLK, mithin auch BR = CR und BRL = CRL = R; folglich werden auch alle Parallelen der Linie BC in den Abschnitten BMC, BNC, senkrecht in Hälften getheilt; und deshalb liegt die Axe des eingesunkenen Theils in der geraden Linie KE.

(γ) Vgl. Gleichgew. d. Eb. I. S. 8.

(S. 9. α) Weil der ausserhalb der Flüssigkeit befindliche Theil die Differenz zweier Kugelabschnitte ist, auf deren Grundfläche NK senkrecht steht. — Das worauf Arch. sich bezieht, muss in dem verlornen Beweise des vorigen Satzes gestanden haben. Man sehe die Anm. β zum vorigen Satze.

Dann liegt der Schwerpunkt des übrigen Theils, d. h. des in der Flüssigkeit befindlichen, in der geraden, nach X gezogenen Linie RX, da nämlich, wo diese so weit verlängert ist, dafs die Verlängerung sich zu XR verhält, wie das Gewicht des aufserhalb der Flüssigkeit befindlichen Theils zum Gewichte des in derselben liegenden. (β) Es sei aber O der Schwerpunkt dieses letztern Theils, und durch O ziehe man das Perpendikel OL; dann wird das Gewicht des aufserhalb der Flüssigkeit befindlichen Theils nach der geraden Linie RL abwärts, das Gewicht des andern Theils aber in der Flüssigkeit nach der geraden Linie OL aufwärts streben (*Annahme* 2.). Der Körper bleibt daher nicht in Ruhe, sondern die Theile bei H streben abwärts, die bei E aufwärts, und diefs bleibt fortwährend, bis FT die senkrechte Lage eingenommen hat.

(β) Vgl. Gleichgew. d. Eb. I. 8.

Von

schwimmenden Körpern.

Zweites Buch.

Satz 1.

Wenn ein Körper, leichter als eine Flüssigkeit, in diese getaucht wird; so verhält sich sein Gewicht zu dem einer gleich grofsen Masse Flüssigkeit, wie der eingesunkene Theil des Körpers zu dem ganzen Körper.

F. 182. Es werde nämlich irgend ein Körper FA, der leichter ist, als eine Flüssigkeit, in diese getaucht, und der eingesunkene Theil desselben sei A, der hervorragende aber F; so ist zu beweisen, dafs das Gewicht des Körpers FA zu dem einer gleichen Masse Flüssigkeit sich verhalte, wie A zu FA.

Man nehme an, es sei NI eine Masse Flüssigkeit von der Gröfse des Körpers FA, auch sei F = N, und A = I. Das Gewicht der Gröfse FA sei B, das der Gröfse NI sei OR, und das der Gröfse I sei R; dann verhält sich

$$\textit{Gewicht}\ FA : \textit{Gewicht}\ NI = B : OR.$$

Weil aber der eingetauchte Körper FA leichter ist, als die Flüssigkeit, so erhellt, dafs eine Menge Flüssigkeit von der Gröfse des eingesunkenen Theils gleiches Gewicht habe mit dem Körper FA; denn diefs wurde oben dargethan (I. S. 5.). Dem Körper A entspricht aber die Flüssigkeit I, deren Gewicht R ist, während B das Gewicht von FA. Demnach ist B, oder das Gewicht eines solchen Körpers, der einerlei Gewicht mit dem ganzen Körper FA hat, gleich dem Gewichte der Flüssigkeit I, d. h. dem Gewichte R selbst; und weil sich verhält

$$\textit{Gewicht}\ FA : \textit{Gewicht}\ NI = B : OR$$

weil ferner $B = R$, und $R : OR = I : NI = A : FA$;

so folgt, dafs das Gewicht von FA zu dem Gewichte einer Menge Flüssigkeit von derselben Gröfse sich verhalte, wie A zu FA, was zu erweisen war.

Satz 2.

Satz 2.

Wenn die Axe des geraden Abschnitts (α) eines parabolischen Konoids nicht gröfser ist, als drei Viertheile des Parameters, (β) und wenn dieser Abschnitt, bei willkührlichem Gewichte im Verhältnifse zu einer Flüssigkeit, dergestalt in diese getaucht wird, dafs seine Grundfläche die Flüssigkeit selbst nicht berührt, doch aber geneigt ist; so wird er nicht geneigt bleiben, sondern seine senkrechte Lage wieder einnehmen. Ich sage aber, der Abschnitt sei in senkrechter Lage, wenn die Ebene, welche ihn abgetrennt hat, mit der Oberfläche der Flüssigkeit parallel ist.

Es gebe einen geraden Abschnitt eines parabolischen Konoids, wie beschrieben, und er liege geneigt; dann ist zu erweisen, dafs er nicht so bleibe, sondern sich senkrecht stelle. F. 183.

Man lege eine Ebene durch die Axe des Abschnitts senkrecht zu der ebenen Oberfläche der Flüssigkeit; (γ) der Durchschnitt des Abschnitts sei die Parabel APOL, die Axe des Abschnitts, oder der Durchmesser der Parabel, sei NO, und der Durchschnitt der Oberfläche der Flüssigkeit sei IS. Woferne nun der Abschnitt nicht senkrecht steht, so kann AL der Linie IS nicht parallel sein, und es wird NO mit IS nicht rechte Winkel machen. Man ziehe demnach die Berührungslinie KZ des Kegelschnitts für den Punkt P, [„ (δ) so dafs KZ ‡ IS „ist; aus P ziehe man PF ‡ ON bis an IS. Diese Linie wird Durchmesser der Parabel „IPOS, und Axe des in die Flüssigkeit eingesunkenen Theils sein. Man nehme hierauf die „Schwerpunkte (ε), und zwar sei R der Schwerpunkt des Körpers APOL, B der des Körpers IPOS; dann verlängere man die Verbindungslinie BR nach G, welches der Schwerpunkt des übrigen Körpers ISLA sein mag. (ζ) Weil nun $NO = \frac{3}{2} RO$, und weil NO nicht „gröfser ist, als drei Viertheile des Parameters; so ist RO nicht gröfser als der halbe Para-

---

(S. 2. α) Unter dem geraden Abschnitte eines Konoids ist ein solcher zu verstehen, dessen Axe senkrecht zur Grundfläche stehet.

(β) Vgl. Konoid. und Sphäroid. S. 4, B. Anm. α. Archimedes nennt hier in der Urschrift den halben Parameter wieder die Entfernung des Kegelscheitels von der Parabelaxe.

(γ) Im ersten Buche betrachtete Arch. die Oberfläche der Flüssigkeit beständig als Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Erde war: gegenwärtig aber schlechthin als eine Ebene.

(δ) Das Eingeklammerte hat F. Commandinus ergänzt, da die eigenen Worte des Archimedes verloren sind.

(ε) F. Commandinus (*De centro gravitatis solidorum liber. Bonon.* 1565. 4. prop. 29.) und Lucas Valerius (*De centro gravitatis solidorum libri III, Romae* 1603. 4. l. II. prop. 41.) beweisen, dafs der Schwerpunkt eines parabolischen Konoids in dessen Axe da liege, wo diese so getheilt wird, dafs der Abschnitt am Scheitel zweimal so grofs ist, wie der an der Grundfläche.

Es ist zu bedauern, dass nicht der vollständige Beweis des archimedischen Satzes auf uns gekommen ist, weil sich nun nicht entscheiden läfst, ob Archim. den von Commandinus und Valerius erwiesenen Satz etwa in einem Anhange besonders dargethan, oder stillschweigend als bekannt vorausgesetzt habe. Im letztern Falle ist zu vermuthen, dafs Archim. selbst, da er in einem eigenen Werke über den Schwerpunkt der Parabel redet, eine besondere Arbeit über den Schwerpunkt des parabolischen Konoids verfafst habe. Diese Vermuthung gewinnt an Wahrscheinlichkeit durch den Umstand, dafs kein Werk eines andern griechischen Mathematikers über diesen Gegenstand bekannt ist.

(ζ) Dieser Punkt G liegt so, dafs sich RG zu RB verhält, wie das Gewicht des Körpers IPOS zu dem Gewichte des Körpers AISL (Gleichgew. d. Eb. I. S. 8.)

„meter. Demnach ist RPZ ein spitzer Winkel, (ν) das Perpendikel RT aus R auf KZ muſs „nothwendig zwischen die Punkte P, Z, fallen, und wird eben deſshalb mit der Linie FP erst „auſserhalb der Parabel zusammentreffen. Zieht man daher durch B, G, gerade Linien par- „allel mit RT, so werden diese die Oberfläche der Flüssigkeit senkrecht treffen; der Theil, „welcher in der Flüssigkeit ist, wird aufwärts nach der Richtung des Perpendikels durch B, „parallel mit RT getrieben werden (I. *Annahme* 2.); der auſserhalb der Flüssigkeit befindliche „Theil aber abwärts nach dem Perpendikel durch G. Deſshalb wird der Körper APOL nicht „in Ruhe beharren, sondern, was bei A liegt, wird aufwärts steigen, und was bei L, wird „abwärts sinken, bis NO die senkrechte Lage eingenommen hat.“ (ϑ)]

Satz 3.

Wenn die Axe des geraden Abschnitts eines parabolischen Konoids nicht gröſser ist, als drei Viertheile des Parameters, und wenn bei willkührlichem Verhältniſse seines Gewichts zu dem einer Flüssigkeit, der Abschnitt dergestalt in diese getaucht wird, daſs die Grundfläche gänzlich in ihr sich befindet, doch aber geneigt ist; so wird der Abschnitt nicht in Ruhe bleiben, sondern sich wieder so stellen, daſs seine Axe senkrecht liegt. (α)

F. 184. Es werde nämlich irgend ein Abschnitt, wie der beschriebene, in eine Flüssigkeit getaucht; seine Grundfläche sei in der Flüssigkeit, und die Parabel APOL sei der Schnitt desselben nach der Axe vermittelst einer zur Oberfläche der Flüssigkeit senkrechten Ebene; die Axe des Abschnitts und der Durchmesser der Parabel sei PF, der Durchschnitt der Oberfläche der Flüssigkeit aber sei IS. Woferne nun der Abschnitt geneigt liegt, so wird seine Axe nicht senkrecht sein; mithin macht PF mit IS nicht rechte Winkel. Man ziehe die Linie KZ ‡ IS, wodurch die Parabel APOL in O berührt werde; der Schwerpunkt des Körpers APOL sei R, der des Körpers IPOS aber sei B; man verbinde B, R, verlängere diese Linie,

---

F183.a (ν) Es bezeichne p den Parameter der Parabel, und es sei:

1) $RO = \frac{1}{2}p$. Man errichte in O das Perpendikel OV auf NO, verlängere FP bis V, ziehe die Verbindungslinie RV, fälle aus P das Perpendikel PX auf NO, und errichte in P das Perpendikel PY auf KZ, so ist YX die Subnormale, und als solche dem halben Parameter gleich (Apollon. Kegelsch. V. S. 13. Klügels M. W. Art. Normale. Th. III. S. 688.), mithin $YX = \frac{1}{2}p = RO$; es ist ferner $PX = VO$, und bei X, O, sind rechte Winkel, mithin ist $\triangle YPX \cong \triangle RVO$, folglich YP ‡ RV. Weil nun YP senkrecht auf KZ steht, so trifft auch RV die Linie KZ senkrecht, mithin ist RPZ ein spitzer Winkel.

F183.b 2) Es sei $RO < \frac{1}{2}p$. Man mache $RH = \frac{1}{2}p$, errichte in H das Perpendikel HV auf NH, und konstruire alles übrige wie zuvor, so erweiset man durch dieselben Schlüsse, daſs $\triangle YPX \cong \triangle RVH$, also auch RPZ ein spitzer Winkel sein müſse.

Den ersten Fall hat Command. nicht beachtet, und eben so wenig Robertson in seinem *Appendix* zur Ausgabe Torellis.

(ϑ) Denn sobald die Schwerpunkte sowohl des innerhalb, als des auſserhalb der Flüssigkeit befindlichen Theils des Konoids in dessen Axe NO liegen, strebt der erstere Theil mit derselben Kraft aufwärts, womit der letztere abwärts drückt; beide Kräfte zerstören sich alsdann, und der Körper bleibt in Ruhe (I. S. 6.).

(S. 3. α) Auch hier, wie im vorigen Satze, wird stillschweigend vorausgesetzt, daſs der Körper spezifisch leichter sei, als die Flüssigkeit.

und G sei der Schwerpunkt des übrigbleibenden Körpers ISLA. (β) Dann wird man auf ähnliche Weise, wie zuvor darthun, daſs ROK ein spitzer Winkel sei, und daſs ein Perpendikel aus R auf KZ zwischen K und O fallen müſse, wie etwa RT. Werden dann aus den Punkten G, B, Parallelen mit RT gezogen; so wird der in der Flüssigkeit befindliche Theil des Körpers aufwärts nach dem Perpendikel durch G gehoben (I. *Annahme* 2.), der aber auſserhalb der Flüssigkeit liegende Theil abwärts nach dem Perpendikel durch B gedruckt werden. Demnach wird der so in der Flüssigkeit liegende Körper APOL nicht in Ruhe bleiben, sondern was bei A ist, wird aufwärts, was aber bei L, wird abwärts streben, bis PF in die senkrechte Lage gekommen ist.

Satz 4.

Wenn der gerade Abschnitt eines parabolischen Konoids leichter als eine Flüssigkeit, und seine Axe gröſser als drei Viertheile des Parameters ist; wenn ferner das Verhältniſs seines Gewichts zu dem einer gleich groſsen Menge der Flüssigkeit nicht kleiner ist, als das Verhältniſs des Quadrats vom Ueberschuſse der Axe über drei Viertheile des Parameters zu dem Quadrate der Axe selbst, (α) und wenn dieser Abschnitt so in die Flüssigkeit getaucht wird, daſs seine Grundfläche die Flüssigkeit nicht berührt, doch aber geneigt ist: so wird er nicht in der Neigung bleiben, sondern sich wieder senkrecht herstellen.

Es gebe einen Abschnitt eines parabolischen Konoids, wie beschrieben ist, und, in die Flüssigkeit eingetaucht, sei er, wenn das möglich ist, nicht senkrecht sondern geneigt. Man lege eine gegen die Oberfläche der Flüssigkeit senkrechte Ebene durch seine Axe, und es sei die Parabel APOL der Durchschnitt des Abschnitts, NO die Axe desselben und der Durchmesser der Parabel, IS der Schnitt der Oberfläche der Flüssigkeit. Wenn dann der Abschnitt nicht senkrecht steht, so wird NO mit IS nicht rechte Winkel bilden. Man ziehe parallel mit IS die Linie KZ, welche in P die Parabel berühren soll, und aus P ziehe man PF ⟂ ON. Dann nehme man die Schwerpunkte; und zwar sei R der Schwerpunkt des Körpers APOL und B der des eingesunkenen Theils. Man verlängere die Verbindungslinie BR nach G, so daſs G der Schwerpunkt des hervorragenden Körpers ist. F. 185.

Weil nun $NO = \frac{3}{2}$ RO und weil NO gröſser als drei Viertheile des Parameters ist, so erhellet, daſs RO gröſser sei, als der halbe Parameter. Es sei RH dem halben Parameter gleich, und OH = 2 HM. Weil nun $NO = \frac{3}{2}$ RO, imgleichen $MO = \frac{3}{2}$ OH, so folgt $NM = \frac{3}{2}$ RH. (β) Also ist die Axe um die Gröſse der Linie MO gröſser als drei Viertheile des Parameters. (γ) Es ward aber vorausgesetzt, daſs das Verhältniſs des Gewichts des Abschnitts zu dem einer gleich groſsen Menge der Flüssigkeit nicht kleiner sei, als das Verhältniſs des Quadrats vom Ueberschuſse der Axe über drei Viertheile des Parameters zu dem Qua-

---

(β) Man mache also, daſs RG zu RB sich verhalte, wie das Gewicht des Körpers IPOS zu dem Gewichte des Körpers AISL (Gleichgew. d. Eb. I. S. 8.).

(S. 4. α) Es bezeichne a die Axe, p den Parameter, so ist dieſs Verhältniſs $= (a - \frac{3}{4} p)^2 : a^2$.

(β) Es ist nämlich $NM = NO - MO = \frac{3}{2} (RO - OH) = \frac{3}{2} RH$.

(γ) Es ist $NO - NM = MO = NO - \frac{3}{4} p$, da $RH = \frac{1}{2} p$ ist.

drate der Axe selbst: daher erhellet, daſs das Verhältniſs des Gewichts des Abschnitts zu dem der Flüssigkeit nicht kleiner sei, als das Verhältniſs $MO^2 : NO^2$.

Es verhält sich aber nach dem obigen Beweise (S. 1.) das Gewicht des Abschnitts zu dem der Flüssigkeit, wie der eingesunkene Theil zu dem ganzen Abschnitte; und wie sich der eingesunkene Theil zu dem ganzen Abschnitte verhält, so verhält sich $PF^2 : NO^2$; denn es ward ja in der Abhandlung über die Konoiden und Sphäroiden dargethan, wenn von einem parabolischen Konoid zwei Abschnitte durch willkührlich geführte Ebenen abgetrennt werden, daſs dann die Abschnitte sich verhalten, wie die Quadrate ihrer Axen (*Konoid u. Sphäroid. S.* 26.). Es ist also das Verhältniſs $PF^2 : NO^2$ nicht kleiner als $MO^2 : NO^2$, mithin ist PF nicht kleiner als MO, und BP nicht kleiner als HO. (δ) Wenn also in H ein Perpendikel auf NO errichtet wird, so muſs dieses mit BP zusammentreffen und zwischen B, P, fallen, (ε) etwa nach T.

Da nun PF dem Durchmesser parallel, HT aber senkrecht zum Durchmesser, und RH dem halben Parameter gleich ist; so wird eine aus R nach T gezogene und verlängerte Linie rechte Winkel mit der die Parabel in P berührenden Linie, (ζ) also auch mit IS und mit der durch IS gehenden Oberfläche der Flüssigkeit bilden. Zieht man daher durch B, G, Parallelen mit RT, so werden diese mit der Oberfläche der Flüssigkeit rechte Winkel machen, und der in der Flüssigkeit befindliche Theil des Konoids wird aufwärts nach der durch B zu RT gezogenen Parallele gehoben, der aber auſserhalb der Flüssigkeit befindliche Theil wird nach der Parallele durch G abwärts gedrückt: und dieſs so lange bis das Konoid senkrecht stehet.

Satz 5.

Wenn der gerade Abschnitt eines parabolischen Konoids leichter als eine Flüssigkeit und seine Axe gröſser als drei Viertheile des Parameters ist; wenn ferner das Verhältniſs seines Gewichts zu dem der Flüssigkeit nicht gröſser ist, als das Verhältniſs des Ueberschuſses des Quadrats der Axe über das Quadrat des Unterschiedes der Axe und dreier Viertheile des Parameters zum Quadrate der Axe selbst; (a) und wenn dieser Abschnitt dergestalt in die Flüssigkeit getaucht wird, daſs seine Grundfläche gänzlich in derselben, doch aber geneigt ist: so wird er nicht geneigt bleiben, sondern sich wieder so stellen, daſs seine Axe senkrecht stehet.

(δ) Denn es ist $PF = \frac{2}{3} BP$ und $MO = \frac{2}{3} HO$; wenn also $PF \geqq MO$ ist, so folgt $BP \geqq HO$.

(ε) Man denke sich eine Berührungslinie der Parabel für den Punkt O, so muſs BP über die Parabel hinaus verlängert werden, um die berührende Linie zu treffen. Wäre nun BP samt seiner Verlängerung gleich HO, so würde das in H errichtete Perpendikel die Linie BP in B selbst treffen, denn die berührende Linie bildet mit NO und mit BP rechte Winkel, aber es ist BP allein schon nicht kleiner als HO, mithin ist BP samt der Verlängerung gröſser als HO, und deſshalb trifft das in H errichtete Perpendikel zwischen B und P.

(ζ) Man errichte in P auf KZ das Perpendikel PV, und fälle aus P das Perpendikel PX auf NO, so ist VX die Subnormale, mithin $VX = RH$, $PX = TH$ und $PXV = THR = R$, folglich $\triangle PXV \cong \triangle THR$, also $VP \ddagger RT$. Nun ist VP senkrecht auf KZ, mithin ist auch die verlängerte RT senkrecht auf KZ.

(S. 5. a) Es bezeichne a die Axe, p den Parameter, so ist dieses Verhältniſs $= (a^2 - (a - \frac{3}{4}p)^2) : a^2$.

Man tauche in die Flüssigkeit einen Abschnitt, wie er beschrieben ist, und seine Grundfläche sei gänzlich in demselben. Wird er selbst mittelt einer Ebene durch die Axe senkrecht gegen die Oberfläche der Flüssigkeit geschnitten, so wird der Schnitt eine Parabel: etwa APOL sein; die Axe des Abschnitts und der Durchmesser der Parabel sei NO, der Durchschnitt der Oberfläche der Flüssigkeit sei IS. Weil nun die Axe nicht senkrecht steht, so macht NO mit IS nicht rechte Winkel. Man ziehe KZ, welche die Parabel APOL in P berühre und mit IS parallel sei, durch P aber ziehe man PF $\parallel$ NO, und nehme die Schwerpunkte, nämlich R als den des Körpers APOL, und B als den des Körpers aufserhalb der Flüssigkeit; auch verlängere man die Verbindungslinie BR nach G, so dafs dieser Punkt der Schwerpunkt des eingesunkenen Theils sei. Man setze ferner RH dem halben Parameter gleich, und OH = 2 HM; alles Uebrige sei wie zuvor. F.186.

Da nun angenommen ward, dafs das Verhältnifs des Gewichts des Abschnitts zur Flüssigkeit nicht gröfser sei, als $(NO^2 - MO^2) : NO^2$, (β) und da das Gewicht des Abschnitts zu dem einer gleich grofsen Menge Flüssigkeit sich verhält, wie die Gröfse des eingesunkenen Theils zur Gröfse des ganzen Abschnitts, was im ersten Satze bewiesen wurde; so wird das Verhältnifs des eingesunkenen Theils zum ganzen Abschnitte nicht gröfser sein, als jenes genannte. Demnach ist das Verhältnifs des ganzen Abschnitts zu dem Theile aufserhalb der Flüssigkeit nicht gröfser, als $NO^2 : MO^2$. (γ) Es verhält sich aber der ganze Abschnitt zu dem aufserhalb der Flüssigkeit befindlichen Theile, wie $NO^2 : PF^2$. (δ) Daher stehet NO^2 zu PF^2 nicht in gröfserem Verhältnifse, als zu MO^2, woraus hervorgeht, dafs PF nicht kleiner sei, als MO, und PB nicht kleiner als HO. (ε) Ein aus H auf NO errichtetes Perpendikel trifft defshalb BP zwischen P und B, etwa in T. (ζ) Weil nun in der Parabel die Linie PF dem Durchmesser NO parallel, HT aber zu dem Durchmesser senkrecht und RH dem halben Parameter gleich ist; so ergiebt sich, dafs die Verlängerung von RT rechte Winkel mit KZ bilden werde, (η) folglich auch mit IS. Demnach stehet RT senkrecht auf der Oberfläche der Flüssigkeit; und wenn durch B, G, Parallelen zu RT gezogen sind, so werden diese senkrecht auf der Oberfläche der Flüssigkeit stehen. Daher wird der Theil, welcher aufserhalb der Flüssigkeit sich befindet, in diese hinab nach dem durch B geführten Perpendi-

---

(β) Man hat angenommen, das bezeichnete Verhältnifs sei nicht gröfser, als $(NO^2 - (NO - \frac{3}{2} RH)^2) : NO^2$. Es ist aber $HO = RO - RH = \frac{2}{3} NO - RH$, also $\frac{3}{2} HO = NO - \frac{3}{2} RH$; ferner ist $HO = 2 HM$, folglich $\frac{3}{2} HO = 3 HM = MO$, mithin

$$(NO^2 - (NO - \tfrac{3}{2} RH)^2) : NO^2 = (NO^2 - MO^2) : NO^2.$$

(γ) Der ganze Abschnitt sei A, der eingesunkene Theil sei B, der andere sei $C = A - B$; so hatte man

$$B : A \leqq (NO^2 - MO^2) : NO^2, \text{ oder } \frac{B}{A} \leqq \frac{NO^2 - MO^2}{NO^2}$$

$$\text{folglich } \frac{A - B}{A} \geqq \frac{MO^2}{NO^2}, \text{ oder } A : C \leqq NO^2 : MO^2$$

(δ) Nach Konoid. und Sphäroid. S. 26.

(ε) Es ist $NO^2 : PF^2 \leqq NO^2 : MO^2$, mithin $PF \geqq MO$, und weil PF $\frac{3}{2}$ PB, und $MO = \frac{3}{2} HO$; so folgt $PB \geqq HO$.

(ζ) Vgl. Anmerk. ε zum vorigen Satze.

(η) Vgl. Anmerk. ζ zum vorigen Satze.

kel gedrückt, der innerhalb der Flüssigkeit befindliche Theil aber nach dem Perpendikel durch G aufwärts gehoben werden, und der körperliche Abschnitt APOL wird nicht in Ruhe beharren, sondern innerhalb der Flüssigkeit sich so lange bewegen, bis NO selbst in senkrechter Lage ist.

Satz 6.

Wenn der gerade Abschnitt eines parabolischen Konoids leichter als eine Flüssigkeit, und seine Axe zwar gröfser ist, als drei Viertheile des Parameters, kleiner jedoch, als dafs sie sich zu dem halben Parameter verhielte, wie funfzehn zu vier; und wenn dieser Abschnitt dergestalt in die Flüssigkeit getaucht wird, dafs seine Grundfläche die Flüssigkeit berührt: so wird er nie in einer solchen Neigung beharren, dafs die Grundfläche in irgend einem Punkte die Flüssigkeit berühre.

F. 187. Es gebe einen Abschnitt, wie er beschrieben ist, und er sei auf angegebene Weise in die Flüssigkeit getaucht, so dafs seine Grundfläche die Flüssigkeit in einem Punkte berührt. Dann ist zu beweisen, der Abschnitt bleibe nicht in Ruhe, sondern wälze sich so weit zurück, dafs seine Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit gar nicht berührt.

Der Abschnitt sei durch die Axe vermittelst einer zur Oberfläche der Flüssigkeit senkrechten Ebene geschnitten, der Schnitt seiner Oberfläche sei die Parabel APOL, der Schnitt der Oberfläche der Flüssigkeit sei AS; die Axe des Abschnitts und der Durchmesser der Parabel sei NO, und sei in F dergestalt getheilt, dafs $OF = 2\,FN$, in Z aber so, dafs sich verhalte

$$NO : FZ = 15 : 4$$

und auf NO sei das Perpendikel ZK errichtet.

Weil nun NO zu FZ in gröfserem Verhältnifse stehet, als zu dem halben Parameter, so sei FB dem halben Parameter gleich, und man ziehe parallel mit AS die Linie PC, welche die Parabel APOL in P berühre, ferner PI ‡ NO, und zuvörderst schneide PI die Linie KZ selbst in H.

Da nun in dem von einer geraden Linie und einer Parabel gebildeten Abschnitte APOL die Linie KZ ‡ AL, die Linie PI parallel dem Durchmesser ist, und von KZ selbst in H geschnitten wird, auch AS parallel ist der Berührungslinie für den Punkt P, so verhält sich nothwendig $PI : PH \geqq NZ : ZO$;
denn diefs ist sonst schon erwiesen. (α) Es ist aber $NZ = \frac{1}{2}\,ZO$, (β) also ist $PI \geqq \frac{1}{2}\,HP$,

---

(S. 6. α) Weder vom Archimedes, noch von irgend einem alten Geometer besitzen wir den Beweis eines solchen Lehnsatzes, wefshalb schon Commandinus ihn lieferte. Einen kürzeren hat Robertson in seinem Anhange zur Ausgabe Torellis gegeben, welches hier folgt.

F187.a Man behalte die bisherige Konstruktion bei; die beiden Linien KZ, PC, mögen sich in B treffen, und durch B ziehe man an die Parabel eine Berührungslinie BV.

1) Zuvörderst soll diese Berührungslinie die Parabel in dem Punkte A selbst, die Durchmesser IP, NQ, aber in E, V, treffen. Die geraden Linien DP, AI, sollen den Durchmesser NV in C, Q, treffen, und man ziehe parallel mit AL durch P, I, die geraden Linien PR, IW, welche den Durchmesser NO in R, W, treffen sollen. Endlich ziehe man AP, welche NV in M treffe. Dann hat man $IP = PE$, $NO = OV$ und $RO = OC$ (Apollon. Kegelsch. I. 35 und 51 Folgerung.). Weil indessen EH ‡ VZ, so ist

$$EP : VC = BP : BC = PH : CW,$$

mithin $PH \leqq 2\,HI$. Es sei demnach $PT = 2\,TI$, so ist T der Schwerpunkt des in der Flüssigkeit befindlichen Theils; auch errichte man in dem Punkte B das Perpendikel BR auf NO. Weil nun PI dem Durchmesser NO parallel, BR aber senkrecht zu dem Durchmesser, und FB dem halben Parameter gleich ist; so erhellet, daſs die Verlängerung von FR rechte Winkel mit der die Parabel APOL in P berührenden Linie bilde, also auch mit AS und mit der Oberfläche der Flüssigkeit. Zieht man daher durch T, G, Parallelen mit FR, so werden diese ebenfalls senkrecht zu der Oberfläche der Flüssigkeit sein, und der Theil des Körpers APOL, welcher innerhalb der Flüssigkeit ist, wird aufwärts nach dem Perpendikel durch T gehoben, der aber auſserhalb der Flüssigkeit befindliche Theil abwärts nach dem Perpendikel durch G gedrückt werden; also wird der Körper APOL sich zurückwälzen, und seine Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit gar nicht berühren.

Wenn aber PI die Linie KZ nicht schneidet, wie in der zweiten Figur; so erhellet, daſs der Punkt T, oder der Schwerpunkt des eingesunkenen Theils, zwischen P und I falle: und alles Uebrige wird auf ähnliche Weise sich darthun lassen.

---

und weil $EP = PI$, so ist vermöge der Konstruktion $VM = MQ$. Ferner ist $RW = PI = EP$, mithin

$$RW : VC = PH : CW$$

und weil $VC = RN$, und $PH = RZ$, so ist

$$RW : RN = RZ : CW,$$

also auch $RW : (RN - RW) = RZ : (CW - RZ)$

d. h. $RW : WN = RZ : CR$

Man hat aber $IP : CM = AP : PM = AX : XN = AX : IW = IX : QW = WN : QW$, und weil $IP = RW$, so folgt

$$RW : CM = WN : QW$$

oder $RW : WN = CM : QW$

folglich $RZ : CR = CM : QW.$

Weil aber $IW = PR$, und $IW \ddagger PR$, auch $IQ \ddagger PC$, so folgt $QW = CR$, mithin auch $MC = RZ = PH$.

Es ist ferner $AV : BV = VN : VZ = VQ : VC$

also auch $VO : VZ = VM : VC$, weil $VO = \frac{1}{2} VN$, und $VM = \frac{1}{2} VQ$;

mithin $VO : (VZ - VO) = VM : (VC - VM)$

oder $NO : OZ = QM : MC$;

daher $(NO - OZ) : OZ = (QM - MC) : MC$

oder $NZ : OZ = QC : MC = PI : PH.$

2) Hiernächst soll BV die Parabel nicht in A selbst, sondern in T berühren. Man ziehe $TR \ddagger AI \ddagger BC$, F187.b ferner $TF \ddagger AN \ddagger KZ$, verlängere IA, bis die Berührungslinie BT in G getroffen wird, und ziehe $GD \ddagger AN$. Dann verhält sich

$$DZ : FZ = BG : BT = PI : PR,$$

und wie oben erweiset man, daſs

$$\underline{FZ : OZ = PR : PH}$$

mithin $DZ : OZ = PI : PH$

Es ist aber $DZ : OZ > NZ : OZ$

folglich auch $PI : PH > NZ : OZ$

(β) Denn es ist $FO = 2\,FN$, mithin $NF : NO = 1 : 3 = 5 : 15$

und weil $FZ : NO = 4 : 15$

so folgt $(NF + FZ) : NO = NZ : NO = 9 : 15$

also $NZ : (NO - NZ) = NZ : OZ = 9 : 6 = 3 : 2$

folglich $NZ = \frac{3}{2} OZ.$

Satz 7.

Wenn der gerade Abschnitt eines parabolischen Konoids leichter als eine Flüssigkeit, seine Axe aber gröfser ist, als drei Viertheile des Parameters, kleiner jedoch, als dafs sie sich zu dem halben Parameter verhielte, wie funfzehn zu vier; und wenn dieser Abschnitt so in die Flüssigkeit getaucht wird, dafs seine Grundfläche gänzlich in derselben sich befindet: so wird er niemals in solcher Lage ruhen, wobei die Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit berührt; sondern nur so, dafs die Grundfläche ganz unter der Flüssigkeit liegt, und die Oberfläche derselben gar nicht berührt.

F. 188. Es gebe einen Abschnitt, wie er beschrieben ist, man tauche ihn auf angegebene Art in die Flüssigkeit, so dafs seine Grundfläche in einem Punkte die Oberfläche derselben berührt; dann ist zu beweisen, dafs er nicht in Ruhe bleibe, sondern sich dergestalt zurückwälze, dafs die Grundfläche gar nicht mehr die Flüssigkeit berührt.

Der Abschnitt sei von einer Ebene durch die Axe senkrecht gegen die Oberfläche der Flüssigkeit geschnitten, der Schnitt sei die Parabel APOL, der Schnitt der Oberfläche der Flüssigkeit sei SL, die Axe des Abschnitts, und der Durchmesser der Parabel sei PF. Man schneide PF dergestalt in R, dafs $RP = 2\,RF$, und in Z so, dafs sich verhält

$$PF : RZ = 15 : 4$$

auch sei ZK rechtwinklig zu PF gezogen. Dann wird RZ kleiner sein, als der halbe Parameter. Man setze daher RH dem halben Parameter gleich, und ziehe für den Punkt O der Parabel die Berührungslinie $CO \mathrel{+\!\!\!\!\parallel} SL$, auch sei $NO = PF$, und zuvörderst schneide NO die Linie KZ in dem Punkte I.

Auf ähnliche Weise wie zuvor, läfst sich dann zeigen, dafs entweder $NO = \frac{3}{2}\,OI$, oder dafs $NO > \frac{3}{2}\,OI$. Es sei daher $OI < 2\,IN$, und $OB = 2\,BN$, auch sei das übrige wie oben konstruirt. Dann beweiset man auf ähnliche Weise, dafs die Linie RT, wenn sie gezogen wird, rechte Winkel mit CO und mit der Oberfläche der Flüssigkeit bilde; daher werden Parallelen mit RT aus den Punkten B, G, ebenfalls senkrecht zu der Oberfläche der Flüssigkeit sein. Demnach wird der aufserhalb der Flüssigkeit befindliche Theil abwärts nach dem Perpendikel durch B gedrückt, der in der Flüssigkeit liegende Theil dagegen nach dem Perpendikel durch G aufwärts gehoben werden; woraus hervorgeht, der Körper wälze sich so zurück, dafs seine Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit gar nicht berührt, indem er schon jetzt bei der Berührung in einem Punkte an dem Theile bei L abwärts gedrückt wird.

Wenn aber NO die Linie KZ nicht geschnitten hat, so läfst sich nichts desto weniger dafselbe darthun.

Satz 8.

Wenn die Axe des geraden Abschnitts eines parabolischen Konoids zwar gröfser ist, als drei Viertheile des Parameters, kleiner jedoch, als dafs sie zu dem halben Parameter sich verhielte, wie funfzehn zu vier; wenn ferner das Gewicht des Abschnitts zu dem der Flüssigkeit in kleinerem Verhältnifse stehet, als in dem des Quadrats vom Ueberschusse der Axe über drei Viertheile des Parameters zum Quadrate der Axe selbst; und wenn der Abschnitt dergestalt in die Flüssigkeit getaucht wird, dafs seine Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit nicht

nicht berührt: so wird derselbe sich weder senkrecht stellen, noch in einer andern Neigung verharren, als in der, wobei die Axe mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen Winkel bildet, dessen Gröfse weiterhin angegeben werden soll.

Man habe den beschriebenen Abschnitt, BD sei der Axe gleich, $BK = 2\,KD$, und F. 189. RK dem halben Parameter gleich, auch sei $CB = \frac{3}{2}\,BR$; dann ist auch $CD = \frac{3}{2}\,KR$. (α) Es verhalte sich

Gewicht des Absch. : *Gew. der Flüssigk.* $= (F + Q)^2 : DB^2$

und es sei $F = 2\,Q$. Dann ist einleuchtend, dafs sich verhalte

$$(F + Q) : DB < CB : DB;$$

denn CB ist der Ueberschufs der Axe über drei Viertheile des Parameters, (β) mithin ist $F + Q < CB$, und daher $F < BR$. Es sei $F = RV$, man errichte auf BD das Perpendikel VE, so dafs $VE^2 = \frac{1}{2}\,KR \times VB$, und ziehe die Verbindungslinie BE. Dann soll erwiesen werden, dafs der Abschnitt, wenn er auf angegebene Art in die Flüssigkeit eingetaucht worden, in solcher Neigung ruhe, wobei seine Axe mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen Winkel von der Gröfse des Winkels EBV bildet.

Man tauche nämlich den Abschnitt so in die Flüssigkeit, dafs seine Grundfläche die Oberfläche derselben nicht berührt, und es mache, wenn diefs möglich ist, die Axe mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen Winkel nicht von der Gröfse des Winkels EBV, sondern

1) zuvörderst einen gröfseren. Die Parabel APOL sei der Durchschnitt des Abschnitts nach der Axe vermittelst einer gegen die Oberfläche der Flüssigkeit senkrechten Ebene, der Durchschnitt der Oberfläche sei XS, die Axe des Abschnitts und der Durchmesser der Parabel sei NO, und man ziehe parallel mit XS die Berührungslinie PY der Parabel APOL für den Punkt P, ferner PM ‡ NO, und PI senkrecht zu NO; auch sei $BR = OZ$, imgleichen $RK = TZ$, und ZH senkrecht zu der Axe. Weil nun vorausgesetzt wird, die Axe des Abschnitts mache mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen gröfseren Winkel als B; so wird $PYI > B$ sein. Folglich ist

$$PI^2 : YI^2 > EV^2 : VB^2 \;(\gamma)$$

(S. 8. α) Denn man hat $CD = BD - BC$

$$BD = \tfrac{3}{2}\,BK;\; BC = \tfrac{3}{2}\,BR$$

also $$CD = \tfrac{3}{2}\,(BK - BR) = \tfrac{3}{2}\,RK.$$

(β) Denn weil $CD = \frac{3}{2}\,KR$, so ist $CB = BD - \frac{3}{2}\,KR = BD - \frac{3}{4}\,p$ wenn der Parameter durch $p = 2\,KR$ bezeichnet wird. Nun ist nach der Voraussetzung

Gewicht d. Abschnitts : *Gew. d. Flüss.* $< CB^2 : BD^2$

mithin auch $(F + Q)^2 : DB^2 < CB^2 : BD^2$

woraus folgt $(F + Q) : DB < CB : BD.$

(γ) Es sei △ABD bei A rechtwinklig, man bilde darin ein anderes △EFA, so dafs $EFA > DBA$ ist, ziehe BC ‡ F 189. a FE durch B, und verlängere AD bis C; dann ist gewifs

$$AC : AB > AD : AB$$

und weil $$AC : AB = AE : AF$$

so folgt $$AE : AF > AD : AB$$

wovon sich auf den gegenwärtigen Fall leicht die Anwendung machen läfst.

Oder so: Weil $\frac{PI}{IY} = tang\ Y$, und $\frac{EV}{VB} = tang\ B$, weil ferner $Y > B$, mithin $tang\ Y > tang\ B$, F. 189.

so ergiebt sich $$PI : IY > EV : VB.$$

Es ist aber $PI^2 : YI^2 = KR : YI$ (δ)
und $EV^2 : VB^2 = \frac{1}{2} KR : VB$ (ε)

also $KR : YI > \frac{1}{2} KR : VB$.

mithin ist $YI < 2\,VB$. Es ist aber $YI = 2\,OI$, mithin $OI < VB$ und $IZ > VR$; (ζ) allein es ist $VR = F$, folglich $IZ > F$, und weil vorausgesetzt wird, es verhalte sich

Gewicht des Absch. : *Gew. d. Flüss.* $= (F + Q)^2 : BD^2$

weil ferner *Gewicht d. Absch.* : *Gew. d. Flüss.* = *d. eingesunk. Theil* : *ganz. Absch.* (S. 1.)

und *d. eingesunk. Theil* : *ganz. Absch.* $= PM^2 : ON^2$ (η)

so folgt $PM^2 : ON^2 = (F + Q)^2 : BD^2$;

mithin ist $F + Q = PM$. Allein es ist bewiesen, dafs $PH > F$ sei, daher ist $PM < \frac{3}{2} PH$, folglich $PH > 2\,HM$ (θ); darum sei $PW = 2\,WM$. Nun wird T der Schwerpunkt des ganzen Abschnitts, W der des eingesunkenen Theiles sein, und der Schwerpunkt des übrigen Theils wird in der Linie WT liegen, wenn sie bis G verlängert ist. Dann beweiset man wieder wie sonst, (ι) dafs TH senkrecht zu der Oberfläche der Flüssigkeit sei. Der eingesunkene Theil wird nach dem durch W auf die Oberfläche der Flüssigkeit gefällten Perpendikel aus der Flüssigkeit heraus gehoben, der aufserhalb befindliche Theil aber nach dem Perpendikel durch G in sie hinein gedrückt werden. Der Abschnitt bleibt also nicht in der angenommenen Neigung, nimt aber auch nicht die senkrechte Lage an, weil unter den durch W, G, geführten Perpendikeln das durch W nach der Seite L, das durch G aber nach der Seite A trifft; woraus folgt, dafs der Schwerpunkt W aufwärts, der Schwerpunkt G hingegen abwärts getrieben werde. Daher werden die Theile des ganzen Körpers, welche bei A sind, abwärts, die aber bei L aufwärts getrieben.

F. 190. 2) Es sei alles wie zuvor, nur mache die Axe des Abschnitts mit der Oberfläche der Flüssigkeit jetzt einen kleineren Winkel, als den bei B. Dann ist

$$PI^2 : IY^2 < EV^2 : VB^2$$

mithin $KR : IY < \frac{1}{2} KR : VB$,

folglich ist $IY > 2\,VB$. Es ist aber $IY = 2\,OI$, mithin $OI > VB$; allein man hat $OZ = RB$, folglich $IZ < VR$, mithin auch $PH < F$. Da nun $MP = F + Q$, so erhellet, dafs $PM > \frac{3}{2} PH$ und $PH < 2\,HM$. Daher sei $PW = 2\,WM$; dann wird wieder T der Schwerpunkt des ganzen Körpers, W aber des in der Flüssigkeit befindlichen Theils sein, und in der Verlängerung

---

(δ) Denn weil PY die Berührungslinie ist, so hat man $IY = 2\,OI$; nun ist vermöge der Eigenschaft der Parabel $PI^2 = 2\,KR \times OI = KR \times IY$, mithin

$$PI^2 : IY^2 = KR \times IY : IY^2 = KR : IY.$$

(ε) Weil nach der Voraussetzung $EV^2 = \frac{1}{2} KR \times VB$, so ist $EV^2 : VB^2 = \frac{1}{2} KR \times VB : VB^2 = \frac{1}{2} KR : VB$.

(ζ) Vorausgesetzt ward $BR = OZ$
nun ist $VB > OI$

mithin $BR - VB < OZ - OI$, d. h. $VR < IZ$.

(η) Nach Konoid. u. Sphäroid. S. 26.

(θ) Es ist nämlich $PM = F + Q = \frac{3}{2} F$; wenn also $PH > F$, so folgt $PM < \frac{3}{2} PH$, oder $PH + HM < \frac{3}{2} PH$, oder $HM < \frac{1}{2} PH$.

(ι) Vergl. S. 4. Anmerkung ζ.

der Verbindungslinie WT suche man den Schwerpunkt des aufserhalb der Flüssigkeit liegenden Theils, er sei G. Fället man daher durch W, G, Perpendikel auf die Oberfläche der Flüssigkeit, so folgt, weil diese mit TH parallel sind, dafs der Abschnitt selbst nicht in Ruhe bleibe, sondern sich dergestalt zurückwälze, dafs seine Axe mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen gröfseren Winkel macht, als sie jetzt bildet.

Weil nun bei der vorigen Annahme, dafs die Axe einen gröfseren Winkel als B mache, der Abschnitt gleichfalls nicht in Ruhe blieb; so ist einleuchtend, dafs er in Ruhe sein werde, wenn jene einen Winkel von der Gröfse des Winkels B bildet. Dann nämlich wird $IO = VB$, imgleichen $IZ = VR$, und $PH = F$ sein. Daher wird $MP = \frac{2}{3} PH$ und $PH = 2 HM$ sein. Weil dann H der Schwerpunkt des in der Flüssigkeit befindlichen Theils ist, so wird nach eben diesem Perpendikel selbst dieser Theil aufwärts, und der aufserhalb befindliche abwärts streben. Also wird der Abschnitt in Ruhe bleiben, weil kein Theil von dem andern fortgedrängt wird.

Satz 9.

Wenn der gerade Abschnitt eines parabolischen Konoids zwar eine gröfsere Axe hat, als drei Viertheile des Parameters, eine kleinere jedoch, als dafs sie zu dem halben Parameter sich verhielte, wie funfzehn zu vier; wenn ferner das Verhältnifs des Gewichts desselben zu dem der Flüssigkeit gröfser ist, als das Verhältnifs des Ueberschufses des Quadrats der Axe über das Quadrat des Unterschiedes der Axe und dreier Viertheile des Parameters zum Quadrate der Axe selbst; und wenn der Abschnitt dergestalt in die Flüssigkeit getaucht worden, dafs seine Grundfläche gänzlich in ihr sich befindet, doch aber geneigt ist: so wird der Abschnitt weder bis zur senkrechten Lage sich umwälzen, noch in Ruhe bleiben, woferne nicht die Axe mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen Winkel von der Gröfse des vorher angenommenen bildet.

Es gebe einen Abschnitt, wie er beschrieben ist; man setze DB seiner Axe gleich, F.191.
$BK = 2 KD$, ferner KR gleich dem halben Parameter und $CB = \frac{3}{2} BR$, auch verhalte sich

$$\textit{Gewicht d. Absch.} : \textit{Gew. d. Flüss.} = (BD^2 - (F + Q)^2) : BD^2;$$

und es sei $F = 2 Q$. Dann erhellet, dafs

$$(BD^2 - BC^2) : BD^2 < (BD^2 - (F + Q)^2) : BD^2;$$

denn BC ist der Ueberschufs der Axe des Abschnitts über drei Viertheile des Parameters. (α) Daher ist $BD^2 - (F + Q)^2 > BD^2 - BC^2$, und eben defshalb $F + Q < BC$, imgleichen $F < BR$. Es sei $F = RV$, man errichte das Perpendikel VE auf BD, so dafs $VE^2 = \frac{1}{2} KR \times VB$, und ziehe die verbindende Linie BE. Dann behaupte ich, wenn der Abschnitt so in die Flüssigkeit getaucht wird, dafs seine Grundfläche gänzlich in derselben liegt, dafs er in einer solchen Lage ruhe, wobei seine Axe mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen Winkel von der Gröfse des Winkels B macht.

Man tauche nämlich den Abschnitt auf angegebene Weise in die Flüssigkeit, und die Axe bilde mit der Oberfläche derselben einen Winkel nicht gleich B, sondern

(S. 9. α) Vgl. Anm. β zum vorigen Satze.

1) zuvörderst einen gröfseren. Wird dann der Abschnitt von einer gegen die Oberfläche der Flüssigkeit senkrechten Ebene durch die Axe geschnitten, so sei der Schnitt die Parabel APOL, der Schnitt der Oberfläche der Flüssigkeit sei CI, die Axe des Abschnitts, und der Durchmesser der Parabel sei die Linie NO, welche wie oben in den Punkten Z, T, geschnitten sein mag; auch ziehe man parallel mit CI die Berührungslinie YP der Parabel für den Punkt P, ferner $MP \ddagger NO$ und PS gegen die Axe senkrecht. Weil nun die Axe des Abschnitts mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen gröfseren Winkel als B macht, so wird auch $SYP > B$ sein; folglich

$$PS^2 : SY^2 > VE^2 : VB^2$$

mithin $$KR : SY > \tfrac{1}{2} KR : VB$$

also $SY \leq 2VB$, und $SO < VB$, folglich $SZ > RV$ (β) und $PH > F$. Weil nun

$$\textit{Gew. d. Absch.} : \textit{Gew. d. Flüss.} = (BD^2 - (F + Q)^2) : BD^2$$

und $$\textit{Gew. d. Absch.} : \textit{Gew. d. Flüss.} = \textit{d. eingesunk. Theil} : \textit{ganz. Absch.} \text{ (S. 1.)}$$

mithin $$\textit{d. eingesunk. Th.} : \textit{ganz. Absch.} = (BD^2 - (F + Q)^2) : BD^2$$

Daher wird sich verhalten

$$\textit{d. ganz. Absch.} : \textit{Theil aufs. d. Flüss.} = BD^2 : (F + Q)^2 \text{ (γ)}$$

Allein es verhält sich

$$\textit{d. ganz. Absch.} : \textit{Theil aufs. d. Flüss.} = NO^2 : PM^2 \text{ (δ)}$$

folglich wird $PM = F + Q$ sein. Es ward jedoch bewiesen, dafs $PH > F$ sei, mithin ist $MH < Q$ und $PH > 2HM$; (ε) defshalb sei $PW = 2WM$; man verbinde WT, und verlängere diese Linie bis G, so wird der Schwerpunkt des ganzen Abschnitts in T, der des aufserhalb der Flüssigkeit befindlichen Theiles in W, und der des übrigen in der Flüssigkeit liegenden Theils in der Verlängerung der Linie WT sein, etwa in G. Dann wird man wie vorhin darthun, dafs TH senkrecht zu der Oberfläche der Flüssigkeit sei, (ζ) und dafs Parallelen mit TH durch W, G, ebenfalls senkrecht zu jener stehen. Demnach wird der aufserhalb der Flüssigkeit befindliche Theil abwärts nach dem durch W gehenden Perpendikel gedrückt; der innerhalb liegende Theil aber nach dem Perpendikel durch G aufwärts gehoben werden. Der Abschnitt verharrt also nicht in seiner Neigung, wird aber auch nicht so sich wälzen, dafs seine Axe senkrecht gegen die Oberfläche der Flüssigkeit stehet; weil die Theile bei L abwärts, die bei A dagegen aufwärts getrieben werden, wie aus dem schon nachgewiesenen hervorgeht.

2) Wenn dagegen die Axe mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen kleineren Winkel als B macht, so erweiset man auf ähnliche Art, der Abschnitt bleibe nicht in Ruhe, sondern neige sich so lange, bis die Axe mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen Winkel von der Gröfse des Winkels B bildet.

(β) Vgl. Anm. γ, δ, ε, ζ zum vorigen Satze.

(γ) Der ganze Abschnitt sei = A, der eingesunkene Theil = B, der aufserhalb liegende = C, also $A - B = C$.
Nun war $$A : B = BD^2 : (BD^2 - (F + Q)^2)$$
mithin $$(A - B) : A = C : A = (F + Q)^2 : BD^2$$

(δ) Nach Konoid. und Sphäroid. S. 26.

(ε) Vgl. Anm. ϑ zum vorigen Satze.

(ζ) Vgl. Anm. ζ zu S. 4.

Satz 10.

Wenn der gerade Abschnitt eines parabolischen Konoids leichter als eine Flüssigkeit, und seine Axe gröfser ist, als dafs sie sich zu dem halben Parameter verhielte, wie funfzehn zu vier; und wenn der Abschnitt dergestalt in die Flüssigkeit getaucht wird, dafs seine Grundfläche die Oberfläche derselben nicht berührt: so wird er bald die senkrechte Lage einnehmen, bald aber eine geneigte; nämlich zuweilen eine solche Neigung, wobei seine Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit in einem Punkte trifft, und zwar in zweien Lagen; (α) zuweilen eine solche, wobei sie gar nicht die Oberfläche der Flüssigkeit berührt: alles nach dem Verhältnifse seines Gewichts zu dem der Flüssigkeit. Die angezeigten Fälle sollen unten einzeln erwiesen werden.

Es gebe einen Abschnitt, wie er beschrieben ist; die Parabel APOL sei der Durchschnitt desselben nach der Axe vermittelst einer gegen die Oberfläche der Flüssigkeit senkrechten Ebene; die Axe des Abschnitts, und der Durchmesser der Parabel sei BD, und es werde BD in dem Punkte K so geschnitten, dafs $BK = 2\,KD$ ist, in C aber so, dafs sich verhält F. 192.

$$BD : KC = 15 : 4.$$

Dann erhellet, dafs KC gröfser als der halbe Parameter ist. Es sei KR dem halben Parameter gleich, und $DS = \frac{3}{2}\,KR$; dann ist auch $SB = \frac{3}{2}\,BR$. (β) Man ziehe die Verbindungslinie AB, errichte auf BD in C das Perpendikel CE, welches AB in E schneide, und führe durch E die Linie $EZ \ddagger BD$. Ferner halbtheile man AB in T, ziehe dadurch $TH \ddagger BD$ und denke sich zwei Parabeln beschrieben, nämlich AEI um den Durchmesser EZ; ATD aber um den Durchmesser TH, so dafs beide der Parabel ABL ähnlich sind. (γ) Dann wird die Parabel AEI durch den Punkt K gehen, (δ) und ein in R auf BD errichtetes Perpendikel wird AEI selbst schneiden; (ε) diefs geschehe in G, Y, und durch beide Punkte ziehe man parallel mit BD die Linien PYQ, OGN, welche ATD in F, X, schneiden mögen. Man ziehe endlich auch die Berührungslinien Pf, OU, der Parabel für die Punkte P, O. Weil hier demnach drei von geraden Linien und von ähnlichen aber ungleichen, über einer gemeinschaftlichen

---

(S. 10. α) Je nachdem nämlich die Grundfläche ganz unter oder ganz über der Flüssigkeit liegt. Nur die erstere Lage berücksichtigt Arch. in diesem Satze.

(β) Denn man hat $SB = BD - DS$; nun ist $BD = \frac{3}{2}\,BK$ und $DS = \frac{3}{2}\,KR$,
mithin $SB = \frac{3}{2}\,(BK - KR) = \frac{3}{2}\,BR$.

(γ) Vgl. Gleichgew. d. Eb. II. S. 3. Anm. α.

(δ) Weil $BK = 2\,KD$, so ist $BC + CK = 2\,(CD - CK)$, mithin $CK = \frac{1}{3}\,(2\,CD - BC)$. Nnn ist angenommen

$$BD : KC = 15 : 4$$

oder $(BD + CD) : \frac{1}{3}\,(2\,CD + BC) = 15 : 4$

also $4\,BC + 4\,CD = 10\,CD - 5\,BC$, oder $3\,BC = 2\,CD$

folglich $BC : CD = 2 : 3$

Zugleich ist $BC : CD = BE : AE = DZ : ZA$

mithin $DZ : ZA = 2 : 3$

Es ist aber $BK : DB = 2 : 3$

folglich $DZ : ZA = BK : DB$,

also liegt K in der Parabel AEI (Quadr. d. Par. S. 4, umgekehrt.)

(ε) Weil $DR < DC$ ist.

Grundlinie sich berührenden Parabeln gebildete Abschnitte APOL, AEI, ATD, vorhanden sind, aus dem Punkte N aber die senkrechte Linie NXGO, und aus Q die Linie QFYP errichtet ist; so wird das Verhältnifs OG : GX aus den Verhältnifsen IL : LA und AD : DI zusammengesetzt sein. (ζ) Es ist aber

$$IL : LA = 2 : 5;$$

denn es ist CB : BD = 6 : 15 = 2 : 5, (κ) ferner CB : BD = EB : BA = DZ : DA, und 2 DZ = LI, (ϑ) 2 DA = LA.

Auch ist $$AD : DI = 5 : 1 \text{ (ι)}$$

Ein aus den Verhältnifsen 2 : 5 und 5 : 1 zusammengesetztes Verhältnifs ist aber dafselbe wie 2 : 1, und 2 ist das Doppelte von 1; mithin ist OG = 2 GX. Auf dieselbe Weise zeigt man auch, dafs PY = 2 YF. Weil nun DS = $\frac{3}{2}$ KR, so ist BS der Ueberschufs der Axe über drei Viertheile des Parameters.

I.

Wenn demnach sich verhält

Gewicht des Abschnitts : *Gewicht d. Flüssigk.* $\overline{\geq}$ $BS^2 : BD^2$,

---

Fig. 2. a (ζ) Es berühre AW die Parabel APOL in A, und schneide die Linien DB, NO, ZE, HT, in den Punkten W, C, V, M; dann hat man wegen der Aehnlichkeit aller Parabeln

$$BD : EZ = AD : AZ = DW : ZV.$$

Es ist aber DW = 2 BD, mithin ZV = 2 EZ, folglich ist AW auch eine Berührungslinie der Parabel AEI, und auf dieselbe Weise ergiebt sich, dafs AW auch eine Berührungslinie der Parabel ATD sein müfse. Defshalb ist nach Quadr. d. Par. S. 5.

$$LN : AN = NO : CO$$

mithin $$(LN + AN) : AN = (NO + CO) : CO$$

d. h. $$AL : AN = NC : CO, \text{ folglich } CO = \frac{AN \times NC}{AL}$$

und eben so $$IA : AN = NC : CG, \text{ folglich } CG = \frac{AN \times NC}{IA}$$

und $$AD : AN = NC : CX, \text{ folglich } CX = \frac{AN \times NC}{AD}$$

Nun ist $$OG = CG - CO = \frac{AN \times NC}{IA} - \frac{AN \times NC}{AL} = \frac{AN \times NC\,(AL - IA)}{IA \times AL}$$

und $$GX = CX - CG = \frac{AN \times NC\,(IA - AD)}{AD \times IA}$$

folglich $$OG : GX = \frac{AL - IA}{AL} : \frac{IA - AD}{AD} = \frac{IL}{AL} : \frac{ID}{AD} = IL \times AD : AL \times ID.$$

(κ) Weil nämlich BD : KC = 15 : 4, und weil KC = $\frac{2}{3}$ CD - $\frac{1}{3}$ BC = $\frac{2}{3}$ BC (3), so ist

$$BD : \tfrac{2}{3} BC = 15 : 4, \text{ d. h. } BD : BC = 15 : 6 = 5 : 2.$$

(ϑ) Denn man hat $$LI = AL - AI = 2\,(AD - AZ)$$

und $$DZ = AD - AZ$$

folglich $$LI = 2\,DZ$$

(ι) Weil $$BC : BD = 2 : 5, \text{ so ist } DC : BD = 3 : 5,$$

also $$DC : \tfrac{1}{2} BD = 6 : 5,$$

nun ist DC = EZ und $\frac{1}{2}$ BD = HT, mithin EZ : HT = 6 : 5

Zugleich ist wegen Aehnlichkeit aller Parabeln

$$EZ : HT = AI : AD = 6 : 5$$

folglich $$(AI - AD) : AD = ID : AD = 1 : 5.$$

und wenn der Abschnitt dergestalt in die Flüssigkeit eingetaucht wird, daſs seine Grundfläche diese nicht berührt; so wird der Abschnitt sich senkrecht stellen. Denn es ward oben dargethan (S. 4.), daſs ein in die Flüssigkeit auf angegebene Art eingetauchter Abschnitt sich senkrecht stelle, wenn seine Axe gröſser ist, als drei Viertheile des Parameters, und wenn das Verhältniſs seines Gewichts zu dem der Flüssigkeit nicht kleiner ist, als das Verhältniſs des Quadrats vom Ueberschuſs der Axe über drei Viertheile des Parameters zu dem Quadrate der Axe selbst.

II.

Wenn *Gewicht d. Absch.* : *Gew. d. Flüss.* $\lessdot BS^2 : BD^2$,
und zugleich *Gewicht d. Absch.* : *Gew. d. Flüss.* $\gtrdot XO^2 : BD^2$, (κ)
und wenn der Abschnitt in die Flüssigkeit getaucht und so geneigt wird, daſs seine Grundfläche die Flüssigkeit nicht berührt; so wird er in einer solchen Neigung stehen bleiben, daſs seine Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit gar nicht berührt, und daſs seine Axe mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen gröſseren Winkel bildet, als den Winkel U.

III.

Wenn *Gewicht d. Absch.* : *Gew. d. Flüssigk.* $= XO^2 : BD^2$,
und wenn der in die Flüssigkeit getauchte Abschnitt so geneigt worden, daſs seine Grundfläche die Flüssigkeit nicht berührt, so wird er eine solche Lage einnehmen und darin verharren, daſs seine Grundfläche in einem Punkte die Oberfläche der Flüssigkeit berührt, und daſs seine Axe mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen Winkel von der Gröſse des Winkels U bildet.

Wenn aber *Gewicht d. Absch.* : *Gew. d. Flüssigk.* $= PF^2 : BD^2$
und wenn dem in die Flüssigkeit getauchten Abschnitte eine solche Neigung gegeben ist, daſs seine Grundfläche die Flüssigkeit nicht berührt; so wird derselbe in derjenigen Lage ruhen, bei welcher seine Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit in einem Punkte berührt, und wobei die Axe mit letzterer einen Winkel gleich f bildet.

IV.

Wenn zwar *Gewicht d. Absch.* : *Gew. d. Fl.* $\gtrdot FP^2 : BD^2$,
jedoch *Gewicht d. Absch.* : *Gew. d. Fl.* $\lessdot XO^2 : BD^2$, (λ)
und wenn der Abschnitt in solcher Neigung, daſs seine Grundfläche die Flüssigkeit nicht berührt, in diese getaucht worden ist; so wird er eine solche Neigung annehmen und darin beharren, wobei die Grundfläche mehr in die Flüssigkeit eingesunken ist. (μ)

V.

Wenn *Gew. d. Absch.* : *Gew. d. Fl.* $\lessdot FP^2 : BD^2$
und wenn der Abschnitt mit solcher Neigung in die Flüssigkeit getaucht worden, daſs seine

---

(κ) Daſs $BS \gtrdot XO$ sei, erhellet so: Es ist $BS = \frac{2}{3} BR$, und $OG = 2\,GX$, folglich $OX = \frac{2}{3} OG$, nun ist $BR \gtrdot OG$, mithin $BS \gtrdot OX$.

(λ) Es ist $PY = 2\,YF$, also $PF = \frac{3}{2} PY$, zugleich ist $OX = \frac{2}{3} OG$ und $PY \gtrdot OG$, also $PF \lessdot OX$.

(μ) D. h. die Grundfläche wird gar keinen Punkt in der Oberfläche der Flüssigkeit haben.

Grundfläche dieselbe nicht berührt, so wird er in diejenige Neigung sich stellen, wobei seine Axe mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen Winkel bildet, der kleiner ist, als f, und wobei die Grundfläche die Oberfläche gar nicht berührt.

Dieses alles wird nach der Reihe dargethan werden. (ν)

Beweis zu II.

F. 193. Es sei also zuerst das Verhältniſs der Gewichte des Abschnitts und der Flüssigkeit zwar gröſser als das Verhältniſs $XO^2 : BD^2$, jedoch kleiner als das Verhältniſs des Quadrats vom Ueberschuſse der Axe über drei Viertheile des Parameters zu BD^2; und es verhalte sich

$$\textit{Gewicht d. Absch.} : \textit{Gew. d. Flüss.} = a^2 : BD^2$$

dann wird a zwar gröſser sein, als XO, jedoch nicht kleiner als der Ueberschuſs der Axe über drei Viertheile des Parameters. Man passe nun eine Linie MN = a zwischen die Parabeln AMQL, AXD, mitten inne; sie schneide die dritte Parabel in H, die gerade Linie RG in V. Dann läſst sich beweisen, daſs MH = 2 HN, so wie bewiesen wurde, daſs OG = 2 GX sei; (ξ) ferner ziehe man an die Parabel AMQL die Berührungslinie MY für den Punkt M, und fälle das Perpendikel MC auf BD. Wird hierauf AN gezogen und bis Q verlängert, so ist AN = NQ: denn weil in den ähnlichen Parabeln AMQL, AXD, von den Grundlinien an die Parabeln selbst die Linien AQ, AN, gezogen sind, welche mit den Grundlinien gleiche Winkel bilden, so verhält sich

$$AQ : AN = AL : AD \ (o)$$

folglich ist AN = NQ, und AQ = MY. (π) Man soll beweisen, wenn der Abschnitt in die Flüssigkeit getaucht und so geneigt worden, daſs seine Grundfläche die Flüssigkeit nicht berührt: daſs er alsdann in solcher Neigung ruhe, wobei die Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit gar nicht trifft, und wobei die Axe mit dieser einen Winkel, gröſser als U, (ρ) bilde.

Der Abschnitt sei in die Flüssigkeit getaucht, und stehe so, daſs seine Grundfläche in einem Punkte die Oberfläche berührt. Wird dann der Abschnitt durch die Axe von einer zur Oberfläche der Flüssigkeit senkrechten Ebene geschnitten, so sei die Parabel APOL der Durch-

---

(ν) Der Theil I bedarf keines Beweises, sondern nur der Verweisung auf S. 4

(ξ) Man sehe oben den Eingang dieses Satzes.

F 912.a (o) Man hat nach Quadr. d. Parab. S. 5

$$LN : NA = NO : OC, \text{ mithin } LA : NA = NC : OC$$

ferner nach demselben Satze

$$DN : NA = NX : XC, \text{ mithin } DA : NA = NC : XC$$

daraus folgt

$$LA : AD = XC : OC$$

Verlängert man nun AX bis Q, so hat man wiederum nach demselben Satze

$$QX : XA = XO : OC, \text{ mithin } AQ : AX = XC : OC$$

folglich

$$LA : AD = AQ : AX$$

wovon sich leicht die Anwendung auf die Figur des Textes machen läſst.

(π) Denn MY ist eine Berührungslinie, MN ist dem Durchmesser parallel, und AQ wird durch MN in Hälften getheilt.

(ρ) Man sehe Fig. 192.

Durchschnitt des Abschnitts, AO der Schnitt der Oberfläche der Flüssigkeit, BD die Axe des Abschnitts und der Durchmesser der Parabel; ferner sei BD in den Punkten K, R, so geschnitten, wie angegeben, man ziehe PG ‡ AO, wodurch die Parabel APOL in P berührt werde, endlich PS senkrecht auf BD. Weil nun

Gewicht d. Absch. : *Gew. d. Flüssigk.* $= a^2 : BD^2$

ferner *Gewicht d. Absch.* : *Gew. d. Flüssigk.* = *d. eingesunk. Theil* : *ganz. Absch.* (S. 1.)

und *d. eingesunk. Th.* : *ganz. Absch.* $= TP^2 : BD^2$ (σ)

so wird $a = TP$ sein, mithin auch $MN = TP$, imgleichen *Absch.* AMQ = *Absch.* APO.

Weil nun in den gleichen und ähnlichen Abschnitten APOL, AMQL von den Enden ihrer Grundflächen die Linien AO, AQ, dergestalt gezogen sind, dafs die abgetrennten Abschnitte unter gleichen Winkeln zur ihren Axen stehen, so werden die Winkel bei Y, G, imgleichen die Linien YB, GB, und BC, BS, unter sich gleich sein; folglich ist auch $CR = SR$, $MV = PZ$ und $VN = ZT$. Weil also $MV < 2VN$, so folgt $PZ < 2ZT$. Es sei $PW = 2WT$, man ziehe WK und verlängere sie bis E. Dann wird K der Schwerpunkt des ganzen Abschnitts, W der des eingesunkenen Theils sein, und der Schwerpunkt des aufserhalb der Flüssigkeit befindlichen Theiles wird in der Linie KE liegen, etwa in E; die Linie KZ aber wird senkrecht gegen die Oberfläche der Flüssigkeit stehen, mithin auch die Linien, welche durch E, W, parallel mit KZ gezogen werden. Der Abschnitt wird folglich nicht in Ruhe bleiben, sondern sich so zurückwälzen, dafs seine Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit gar nicht berührt, weil er jetzt bei der Berührung in einem Punkte an dem Theile A gehoben wird. Offenbar wird demnach der Abschnitt in einer Lage ruhen, wobei dessen Axe mit der Oberfläche einen Winkel, gröfser als U, bildet.

Beweis zu III.

Es verhalte sich hiernächst F. 194.

Gew. d. Absch. : *Gew. d. Flüss.* $= XO^2 : BD^2$,

und man tauche den Abschnitt mit solcher Neigung in die Flüssigkeit, dafs dessen Grundfläche diese nicht berührt. Wird derselbe dann von einer gegen die Oberfläche der Flüssigkeit senkrechten Ebene durch die Axe geschnitten, so sei die Parabel APML der Schnitt des Körpers, IM der Schnitt der Oberfläche der Flüssigkeit, BD die Axe des Abschnitts, und der Durchmesser der Parabel. BD werde wie zuvor geschnitten, man ziehe für den Punkt P die Berührungslinie PN ‡ IM, ferner PT ‡ BD, und PS senkrecht auf BD. Dann ist zu beweisen, der Abschnitt beharre nicht so, sondern neige sich so lange um, bis die Grundfläche in einem Punkte die Oberfläche der Flüssigkeit berührt.

Es bleibe nämlich Alles, wie in der vorigen Figur, man ziehe OC senkrecht auf BD, ferner AX, und verlängere diese bis Q; dann ist $AX = XQ$; auch ziehe man OU ‡ AQ. Weil nun vorausgesetzt wird, es verhalte sich

Gewicht d. Absch. : *Gew. d. Flüss.* $= XO^2 : BD^2$

weil ferner

Gew. d. Absch. : *Gew. d. Fl.* = *d. eingesunk. Theil* : *ganz. Absch.* $= TP^2 : BD^2$,

---

(σ) Vgl. Konoid. u. Sphäroid. S. 26.

so folgt $TP = XO$: und weil die Axen der Abschnitte IPM, AOQ, gleich sind, so werden auch die Abschnitte selbst gleich sein. Weil ferner in den gleichen und ähnlichen Abschnitten AOQL, APML, die geraden Linien AQ, IM, gezogen sind, welche gleiche Abschnitte abtrennen, und zwar erstere vom Ende der Grundfläche, letztere aber nicht vom Ende, so erhellet, dafs der spitze Winkel, den die vom Ende der Grundfläche gezogene Linie mit der Axe des ganzen Abschnitts bildet, der kleinere sei. (τ) Weil nun der Winkel bei U kleiner ist, als der bei N, so folgt $BC > BS$ und $CR < SR$, (υ) folglich auch $OG < PZ$ und $GX > ZT$, mithin $PZ > 2\,ZT$, indem $OG = 2\,GX$ ist. Es sei $PH = 2\,HT$, man ziehe die verbindende Linie HK und verlängere sie nach W; dann wird der Schwerpunkt des ganzen Abschnitts in K, der des Theils innerhalb der Flüssigkeit in H, und der des ausserhalb der Flüssigkeit befindlichen Theils in der Linie KW, etwa in W, liegen. Nun wird man auf gleiche Weise darthun, dafs sowohl KZ, als auch die Parallelen mit KZ durch die Punkte H, W, senkrecht zu der Oberfläche der Flüssigkeit stehen. Der Abschnitt wird also nicht in Ruhe bleiben, sondern so lange sich umneigen, bis seine Grundfläche in einem Punkte die Oberfläche der Flüssigkeit berührt, und so wird er ruhen: denn alsdann sind in den gleichen Abschnitten AOQL, APML, von den Enden der Grundflächen die Linien AQ, AM, gezogen, welche gleiche Abschnitte abtrennen; da man wie oben erweisen wird, dafs $AOQ = APM$ ist. Es sind also die von AQ, AM, mit den Axen der Abschnitte gebildeten spitzen Winkel gleich, weil $U = N$. (φ) Wird daher HK gezogen und bis W verlängert, so wird der Schwerpunkt des ganzen Abschnitts in K, der des Theils in der Flüssigkeit in H, der aber des Theils aufserhalb der Flüssigkeit in der Linie HK, etwa in W, liegen, und HK wird senkrecht zu der Oberfläche der Flüssigkeit stehen. Nach einerlei geraden Linien also wird, was innerhalb der Flüssigkeit ist, aufwärts, und was aufserhalb derselben, abwärts streben: defshalb wird der Abschnitt in Ruhe bleiben, wenn defsen Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit in einem Punkte berührt, und seine Axe wird mit jener einen Winkel gleich U machen.

Auf ähnliche Art beweiset man, dafs ein Abschnitt, dessen Gewicht zu dem Gewichte der Flüssigkeit sich verhalten mag, wie $PF^2 : BD^2$, wenn er dergestalt in die Flüssigkeit eingetaucht ist, dafs seine Grundfläche die Flüssigkeit nicht berührt, in einer solchen Neigung ruhe, wobei die Grundfläche in einem Punkte die Oberfläche der Flüssigkeit trifft, und wobei die Axe mit ihr einen Winkel gleich f bildet.

Beweis zu IV.

F. 195. Ferner verhalte sich *Gew. d. Absch.* : *Gew. d. Fl.* $> FP^2 : BD^2$,
zugleich aber *Gew. d. Absch.* : *Gew. d. Fl.* $< XO^2 : BD^2$,
und es sei *Gew. d. Absch.* : *Gew. d. Fl.* $= a^2 : BD^2$;

(τ) Diefs erhellet so: Man ziehe AM, welche die Axe BD in E schneiden mag, dann ist $AED < IFD$. Zugleich ist *Absch.* APM $>$ *Absch.* IPM, also auch *Absch.* APM $>$ *Absch.* AOQ. Sollte nun der Abschnitt APM dem Abschnitte AOQ gleich werden, so müfste die Linie AM sich um den festen Punkt A gegen B bewegen, wodurch der spitze Winkel, den diese Linie mit der Axe bildet, noch kleiner werden würde; folglich bildet die aus A gezogene Linie mit der Axe einen kleineren spitzen Winkel, als die aus I gezogene.

(υ) Denn es ist $BC = BU$, und $BS = BN$. Je kleiner aber der Winkel U wird; desto mehr entfernt sich der Punkt U von dem Punkte B. Wenn daher $U < N$ ist, so folgt $BU > BN$, oder $BC > BS$; also auch $BR - BC < BR - BS$, d. h. $CR < SR$.

(φ) Vgl. Beweis zu II.

dann wird $a > FP$, und $a < XO$ sein. Man paſse daher eine gerade Linie $IV = a$, parallel mit BD selbst, zwischen die Parabeln AVQL, AXD, ein, welche der andern Parabel in Y begegne; dann kann wieder bewiesen werden, daſs $VY = 2\,YI$, wie man bewiesen hat, daſs $OG = 2\,GX$ sei. Aus V aber werde die Linie VW gezogen, welche die Parabel AVQL in V berühren soll, auch ziehe man die Verbindungslinie AI, und verlängere sie bis Q. Auf dieselbe Weise wird man alsdann zeigen, daſs $AI = IQ$ und $AQ \ddagger VW$ sei. Zu beweisen ist nun, der in die Flüssigkeit getauchte und dergestalt geneigte Abschnitt, daſs seine Grundfläche die letztere nicht berührt, nehme eine solche Stellung an, wobei seine Grundfläche tiefer einsinkt, als daſs sie in einem Punkte die Oberfläche berührt.

Der Abschnitt werde nämlich in die Flüssigkeit eingetaucht, wie angegeben ist, und liege zuvörderst in solcher Neigung, daſs seine Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit gar nicht berührt. Wird nun der Abschnitt von einer gegen die Oberfläche der Flüssigkeit senkrechten Ebene durch die Axe geschnitten; so sei die Parabel ANZG der Schnitt des Abschnitts, EZ der Schnitt der Oberfläche der Flüssigkeit, BD die Axe des Abschnitts und der Durchmesser der Parabel. Man schneide BD wie zuvor in K, R, und ziehe $NL \ddagger EZ$, wodurch die Parabel ANZG in N berührt werde, ferner $NT \ddagger BD$ und NS senkrecht auf BD. Weil demnach

$$\textit{Gewicht d. Absch.} : \textit{Gew. d. Flüssigk.} = a^2 : BD^2$$

so folgt $a = NT$, was man wie oben darthun wird; mithin ist auch $NT = VI$. Die Abschnitte AVQ, ENZ, sind also unter sich gleich; und weil in den gleichen und ähnlichen Abschnitten AVQL, ANZG, die geraden Linien AQ, EZ, gezogen sind, welche gleiche Abschnitte abtrennen, erstere aber von dem Ende der Grundfläche, letztere nicht vom Ende; so ist der spitze Winkel, den die vom Ende der Grundfläche gezogene Linie mit der Axe des Abschnitts bildet, die kleinere. (χ) In den Dreiecken NLS, VWC, ist also $L > W$, folglich ist $BS < BC$ und $SR > CR$, (ψ) mithin auch $NU > VH$ und $UT < HI$. Weil nun $VY = 2\,YI$, so folgt $NU > 2\,UT$. Es sei $NM = 2\,MT$; dann erhellet aus dem Gesagten, der Abschnitt bleibe nicht in Ruhe, sondern neige sich so weit um, bis seine Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit berührt. (ω)

Die Grundfläche berühre daher die Oberfläche in einem Punkte, wie in der Figur sichtlich ist, und das Uebrige sei wie sonst konstruirt, dann beweisen wir wieder, daſs $NT = VI$, und daſs *Absch.* $AVQ =$ *Absch.* ANZ sei. Weil dann in den gleichen und ähnlichen Abschnitten AVQL, ANZG die geraden Linien AQ, AZ, gezogen sind, welche gleiche Abschnitte abtrennen; so werden sie mit den Axen der Abschnitte gleiche Winkel bilden; daher sind in den Dreiecken NLS, VWC, die Winkel bei L, W, gleich, ferner $BS = BC$, $SR = CR$, $NU = VH$ und $UT = HI$. Weil nun $VY = 2\,YI$, so wird $NU > 2\,UT$ sein. Es sei daher $NM = 2\,MT$, dann erhellet wiederum hieraus, daſs der Abschnitt nicht in Ruhe

(χ) Vgl. Anmkg. τ.

(ψ) Vgl. Anmkg. υ.

(ω) Richtiger: wenigstens so weit u. s. w.

verharre, sondern bei A sich herabneige. Nach der Voraussetzung aber berührte der Abschnitt die Oberfläche der Flüssigkeit in einem Punkte; mithin muſs nothwendig die Grundfläche desselben noch tiefer in die Flüssigkeit einsinken.

Beweis zu V.

F. 196. Es sei endlich *Gew. d. Absch.* : *Gew. d. Fl.* $\lessdot FP^2 : BD^2$,

und *Gew. d. Absch.* : *Gew. d. Fl.* $= a^2 : BD^2$;

dann ist $a \lessdot FP$. Man paſse wiederum eine gerade Linie $VI = a$ parallel mit BD selbst, zwischen die Parabeln AVQL, AXD, ein, welche die mittlere Parabel in dem Punkte H, und die gerade Linie RY in y schneiden mag. Man wird zeigen, daſs $VH = 2\,HI$, so wie gezeigt ward, daſs $GO = 2\,GX$ sei. Hierauf ziehe man die Berührungslinie VW der Parabel AVQL für den Punkt V, und VC senkrecht auf BD, ferner die Verbindungslinie AI, und verlängere sie nach Q. Dann wird folglich $AI = IQ$ und $AQ \ddagger VW$ sein, und es ist zu erweisen; der in solcher Neigung in die Flüssigkeit getauchte Abschnitt, daſs seine Grundfläche die Oberfläche nicht berührt, werde sich in eine solche Lage stellen, wobei seine Axe mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen kleineren Winkel bildet, als den Winkel f, und daſs die Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit gar nicht berührt.

Man tauche ihn nämlich in die Flüssigkeit, und er stehe so, daſs seine Grundfläche in einem Punkte die Oberfläche der Flüssigkeit trifft. Wird er nun von einer gegen die Oberfläche der Flüssigkeit senkrechten Ebene durch die Axe geschnitten, so sei die Parabel ANZL der Schnitt des Abschnitts selbst, AZ der Schnitt der Oberfläche, BD aber die Axe des Abschnitts und der Durchmesser der Parabel, auch sei BD in K, R, geschnitten wie oben angegeben ist. Man ziehe $NF \ddagger AZ$, wodurch die Parabel in N berührt werde, ferner $NT \ddagger BD$ und NS senkrecht auf BD. Weil nun nach dem Angeführten

Gewicht d. Absch. : *Gew. d. Flüss.* $= a^2 : BD^2$,

und *Gewicht d. Absch.* : *Gew. d. Flüss.* $= NT^2 : BD^2$,

so folgt $NT = a$, also auch *Absch.* ANZ = *Absch.* AVQ, und weil in den gleichen und ähnlichen Abschnitten AVQL, ANZL, von den Enden der Grundflächen die geraden Linien AQ, AZ, gezogen sind, welche gleiche Abschnitte abtrennen; so erhellet, daſs sie mit den Axen der Abschnitte gleiche Winkel bilden; daſs also in den Dreiecken NFS, VWC, die Winkel bei F, W, gleich sind, imgleichen $SB = CB$, $SR = CR$, mithin auch $NU = Vy$, und $UT = yI$; und weil $VH = 2\,HI$, so folgt $NU \lessdot 2\,UT$. Es sei daher $NM = 2\,MT$, man verbinde MK, und verlängere diese Linie bis E; dann wird der Schwerpunkt des ganzen Abschnitts in K, der des Theils innerhalb der Flüssigkeit in M, der des Theils auſserhalb der Flüssigkeit aber in der verlängerten Linie, etwa in E liegen. Aus dem vorher Erwiesenen erhellet demnach, der Abschnitt bleibe nicht in Ruhe, sondern neige sich dergestalt, daſs seine Grundfläche gar nicht mehr die Oberfläche der Flüssigkeit berührt.

Daſs aber der Abschnitt eine solche Lage einnehme, wobei die Axe mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen kleineren Winkel als f bildet, wird so bewiesen.

Er nehme nämlich wo möglich eine solche Lage ein, wobei die Axe einen Winkel bildet, der nicht kleiner ist, als f, und alles Uebrige sei wie zuvor eingerichtet nach der Darstellung in der zugehörigen Figur. Man wird dann auf dieselbe Weise darthun, daſs NT = a, also auch NT = VI sei. Weil nun in den Dreiecken PfC, NFS, der Winkel F nicht kleiner als f ist, so wird BS nicht gröſser als BC sein, mithin SR nicht kleiner als CR, und NU nicht kleiner als PY. Weil aber PF $\triangleright$ NT, und PF = $\frac{3}{2}$ PY, so folgt NT $\triangleleft$ $\frac{3}{2}$ NU und deshalb NU $\triangleright$ 2 UT. Er sei NM = 2 MT, man verbinde MK und verlängere die Linie; dann erhellt aus dem bisher Gesagten, der Abschnitt bleibe nicht in Ruhe, sondern wälze sich dergestalt zurück, daſs seine Axe mit der Oberfläche der Flüssigkeit einen Winkel, kleiner als f, bildet.

Wahlsätze.

Satz 1.

F. 197. Wenn zwei Kreise AEB, CED in E sich berühren, deren Durchmesser AB, CD, parallel sind, und wenn die beiden Punkte B, D, nebst dem Berührungspunkte E durch die Linien DE, verbunden werden, so wird BE eine gerade Linie sein.

Die beiden Mittelpunkte mögen G, F, sein, man ziehe die Verbindungslinie FG, verlängere sie bis E, (α) und ziehe DH ‡ GF. Weil nun HF = GD, und GD = EG; so bleiben von den gleichen Linien FB, FE, die gleichen Reste GF oder DH und HB; also ist auch HDB = HBD. Weil ferner EGD = EFB und EGD = DHB; so werden die beiden Winkel GED, GDE, welche unter sich gleich sind, auch den beiden Winkeln HDB, HBD, gleich sein. Also ist EDG = DBF. Fügt man daher zu beiden den gemeinschaftlichen Winkel GDB hinzu, so werden die beiden Winkel GDB + DBF (welche zusammen zwei rechte betragen) den beiden Winkeln GDB + EDG gleich sein; mithin betragen auch diese zusammen zwei rechte. Demnach ist EDB eine gerade Linie, was wir eben zeigen wollten. (β)

Satz 2.

F. 198. Es sei CBA ein Halbkreis, den die geraden Linien DC, DB, berühren sollen, auch sei BE senkrecht auf AC, und man ziehe die Verbindungslinie AD: dann wird BF = FE sein.

(S. 1. α) Vgl. Euklid. III. 12.

F197a. (β) In diesem Beweise wird nur der Fall berücksichtigt, wo zwei Kreise sich von innen berühren; allein der Satz ist auch bei der Berührung von außen gültig, und in dieser Allgemeinheit hat ihn Pappus' (Math. Samml. VII. 110.). Man verbinde nämlich die Mittelpunkte G, F, durch eine gerade Linie, so geht GF durch den Berührungspunkt E (Eukl. III, 11.), und es ist DGE = EFB; auch sind die Dreiecke DGE, EFB, gleichschenklig; mithin GDE = GED, und FEB = FBE; also auch GED = FEB, und folglich ist DEB eine gerade Linie (Geom. I §. 40.).

Man ziehe die Verbindungslinie AB, verlängere sie, bis sie die Verlängerung der Linie CD in G trifft, und ziehe die Verbindungslinie CB. Weil nun CBA = R als Winkel im Halbkreise, so ist auch CBG = R, und DBEC ein Rechteck. Demnach ist in dem rechtwinkligen Dreiecke GBC aus B ein Perpendikel BD auf die Grundlinie gefällt, auch ist BD = DC, weil beide den Kreis berühren, folglich ist DC = DG, wie wir in den über die Dreiecke ausgemittelten Sätzen erwiesen haben. (α) Weil nun in ΔGAC die Linie BE der Grundfläche parallel, und aus dem Halbirungspunkte D der Grundlinie die Linie DA gezogen ist, welche jene Parallele in F schneidet; so wird BF = FE sein; und diefs wollten wir zeigen. (β)

Satz 3.

Es sei CA ein Kreisabschnitt, (α) B ein willkührlicher Punkt desselben, BD senkrecht auf AC, der Abschnitt DE = AD, und der Bogen BF gleich dem Bogen BA; so wird die Verbindungslinie CF = CE sein. F.199.

Man ziehe die Linien AB, BF, FE, EB. Weil nun *Bog.* BA = *Bog.* BF, so ist *Sehne* BA = *Sehne* BF. Weil ferner AD = DE, die beiden Winkel bei D aber rechte, und BD gemeinschaftlich; so folgt AB = BE, mithin BF = BE und BFE = BEF. Weil hiernächst CFBA ein Viereck im Kreise ist, so folgt

$$\begin{array}{ll} & CFB + CAB = 2R = CFB + BEA; \\ \text{zugleich ist} & CEB + BEA = 2R \\ \hline \text{mithin} & CFB = CEB, \text{ also auch } CFE = CEF, \end{array}$$

folglich CE = CF, was wir zeigen wollten.

Satz 4.

Es sei ABC ein Halbkreis; man bilde über dem Durchmesser AC zwei Halbkreise, deren einer AD, der andere DC sei, und errichte das Perpendikel DB. Die dadurch entste- F.200.

(S. 2. α) Es ist nämlich GDB + DBC = R = BGC + GCB = BGC + DBC, mithin GBD = BGC, also GD = BD = DC.

(β) Denn es ist BF : GD = AF : AD = FE : DC
Da nun GD : DC, so ist auch BF = FE
Nach Borellis richtiger Bemerkung ist der ganze Beweis dieses Satzes dem Satze selbst gar nicht angemessen, nach welchem keineswegs vorausgesetzt zu werden braucht, dafs BD, DC, sich rechtwinklig treffen, und doch genügt der Beweis nur für diese Annahme. Defshalb hat Torelli folgenden allgemeinen Beweis geliefert.

Es mögen BD, DC, zwei Berührungslinien des Halbkreises ABC, und G dessen Mittelpunkt sein. Man fälle das Perpendikel BE auf AC, ziehe AD, welche BE in F schneidet, so wird BF = FE sein. F198a.

Denn man ziehe AB, und verlängere sie, bis sie die Verlängerung von CD in I trifft; ferner ziehe man BG, endlich BH ‡ AC. Weil nun EBH = R = GBD, so ist nach Wegnahme des gemeinschaftlichen EBD, jetzt auch DBH = GBE. Es ist aber IBH = IAC = ABG; folglich auch IBD = DBH + IBH = GBE + ABG = ABE. Auch ist BID = ABE, mithin IBD = BID; also BD = ID, und weil BD = DC, so ist ID = DC, weil endlich

ID : DC = BF : FE, so folgt BF = FE.

(S. 3. α) Entweder kleiner oder gröfser als der Halbkreis, oder diesem gleich.

hende Figur, welche Archimedes Arbelos nennt, d. i. die vom Bogen des grösseren Halbkreises und von den beiden Bogen der kleineren Halbkreise umschlossene Fläche, ist einem Kreise gleich, dessen Durchmesser die senkrechte Linie BD ist.

Weil BD die mittlere Proportionale zwischen AD, DC, ist, so wird sein

$$AD \times DC = BD^2$$

Man setze $$AD \times DC + AD^2 + DC^2 = AD \times DC + AD^2 + DC^2$$

so folgt $$2\,AD \times DC + AD^2 + DC^2 = AC^2 = 2\,BD^2 + AD^2 + DC^2$$

Nun verhalten sich die Kreise, wie die Quadrate, daher ist

$$\textit{Kr. um } AC = 2\,\textit{Kr. um } DB + \textit{Kr. um } AD + \textit{Kr. um } DC$$

also $$\textit{Halbkr. } AC = \textit{Kr. um } DB + \textit{Halbkr. } AD + \textit{Halbkr. } DC$$

Nimt man die beiden Halbkreise AD, DC, gemeinschaftlich weg, so bleibt die von den Halbkreisen AC, AD, DC, eingeschlossene Figur, und es ist also der Arbelos des Archimedes einem Kreise gleich, dessen Durchmesser BD ist; und diess wollten wir zeigen.

Satz 5.

F. 201. Es sei AB ein Halbkreis, und C ein willkührlicher Punkt in dessen Durchmesser. Man bilde über dem Durchmesser zwei Halbkreise AC, CB, errichte aus C das Perpendikel CD auf AB, und beschreibe zu beiden Seiten desselben zwei Kreise, welche das Perpendikel und die Halbkreise berühren; dann sind allemal diese beiden Kreise gleich.

Der eine dieser Kreise berühre DC in E, den Halbkreis AB in F, und den Halbkreis AC in G. Man ziehe den Durchmesser HE, so wird er parallel AB sein, weil die beiden Winkel HEC, ACE, rechte sind. Man ziehe die Verbindungslinien FH, HA, so ist AF eine gerade Linie (S. 1.), und es werden sich AF, CE, in D treffen, weil $HAC + ACE < 2\,R$ sind. Auch verbinde man FE, EB, so ist FB gleichfalls eine gerade Linie, wie gesagt, und senkrecht auf AD, weil AFB als Winkel im Halbkreise ein rechter ist. Man verbinde ferner HG, GC, so ist auch HC eine gerade Linie, und man verbinde EG, GA, so ist EA eine gerade Linie, die man bis I verlängere. Dann verbinde man BI, so ist auch diese senkrecht zu AI, und noch verbinde man DI. Weil nun AD, AB, zwei gerade Linien sind, aus D das Perpendikel DC auf AB, und aus B das Perpendikel BF auf DA gefällt ist, welche sich gegenseitig in E schneiden, und weil die nach I verlängerte Linie AE senkrecht auf BI steht; so bilden BI, ID eine gerade Linie, wie wir in den Sätzen gezeigt haben, die von uns in der Abhandlung über die rechtwinkligen Dreiecke erwiesen sind. (α) Weil ferner die beiden Winkel AGC, AIB, rechte sind, so ist $BD \mathrel{\not\parallel} CG$, und man hat

$$AD : DH = AC : HE = AB : BC.$$

folglich ist $AC \times BC = AB \times HE.$

Auf

(S. 5. α) Die Abhandlung, worauf der Verf. sich beruft, ist gänzlich unbekannt. Der arabische Scholiast Almochtasso ergänzt den Beweis, indem er den Hülfssatz vorausschickt, dass in einem spitzwinkligen Dreiecke die drei Perpendikel aus den Winkelspitzen auf die gegenüberstehenden Seiten sich in einem Punkte treffen. Sein Beweis ist indessen auch auf das stumpfwinklige Dreieck anwendbar, und von dem rechtwinkligen leuchtet die Wahrheit von selbst ein.

Auf dieselbe Weise zeigt man für den Kreis LMN, daſs das Rechteck $AC \times CB$ gleich sei dem Rechtecke unter AB und dem Durchmesser jenes Kreises; wodurch erwiesen wird, daſs die Durchmesser der beiden Kreise EFG, LMN, gleich sind; folglich sind diese beiden Kreise selbst gleich; und das eben wollten wir zeigen. (β)

---

1) Es sei △ABD spitzwinklig; man fälle auf BD, AB, die Perpendikel AI, BF, welche sich in E schneiden, ziehe die Verbindungslinie DE, und verlängere sie bis C; so ist auch DC senkrecht auf AB. Denn ein Kreis um den Durchmesser DE muſs durch F, I, gehen, wegen der hier befindlichen rechten Winkel, und ein Kreis um den Durchmesser AB muſs aus demselben Grunde gleichfalls durch F, I, gehen. Man ziehe FI, dann ist $FDE = FIE$, weil beide auf demselben Bogen FE stehen; auch ist $FIA = FBA$, weil beide auf dem Bogen AF stehen; also ist $FDE = EBC$; zugleich ist $FED = BEC$, mithin $\triangle DEF \sim \triangle BEC$, folglich $DFE = BCE$; der erstere Winkel ist aber ein rechter, folglich auch der letztere, und demnach steht DC senkrecht auf AB. F.201a

2) Nunmehr sei △ABD stumpfwinklig in B. Man fälle auf AD und auf die Verlängerung von DB die Perpendikel BF, AI, welche nach gehöriger Verlängerung sich in E treffen; dann verbinde man DE und verlängere AB bis C. Werden nun sowohl um DE, als um AB, Kreise beschrieben, so gehen beide durch die Punkte F, I, wegen der hier gebildeten rechten Winkel. Zieht man dann FI, so ist $IDE = IFE = BAI$; zugleich ist $DBC = ABI$, mithin $\triangle DBC \sim \triangle ABI$, folglich $BCD = AIB = R$, also steht DC senkrecht auf der Verlängerung von AB. F.201b

Man nehme nun an, es sei DC senkrecht zu AB, ferner BF senkrecht zu AD, und AI senkrecht zu BI, ziehe dann DI, so ist DIB eine gerade Linie; denn wo nicht, so sei DKB (oder DK′B) eine gerade Linie: dann wäre AKB (oder $AK'B$) $= R = AIB$, was widersinnig ist; daher ist DIB eine gerade Linie. F.201c

(β) Ein anderer arabischer Scholiast Alkauhi fügt zu diesem Satze noch folgende zwei Zusätze:

1) Wenn die beiden Halbkreise sich gegenseitig nicht berühren, sondern schneiden, und wenn die senkrechte Linie durch den Durchschnittspunkt derselben geht, so findet dasselbe statt. F.201d

ABC, ADE, FDC, sollen Halbkreise sein, die beiden letztern in D sich schneiden und BG senkrecht auf AC stehen. Der Kreis IHL berühre den Kreis ABC in H, den Kreis ADE in L, und das Perpendikel in I. Ich behaupte, er sei dem Kreise an der andern Seite des Perpendikels gleich.

Man ziehe $IM \ddagger AC$, so geht die Verbindungslinie AH durch M (S. 1.); man verlängere sie, bis sie das Perpendikel NG in N trifft, ziehe die Verbindungslinie IA, welche durch L gehen wird, und verlängere sie bis O, ziehe dann CO, ON, welche in gerader Linie liegen werden; man ziehe ferner ME, welche durch L gehen wird, und eben so CH, welche durch I gehen wird. Dann ist $CON \ddagger EM$, und man hat

$$AN : NM = AG : IM = CA : CE$$

mithin
$$AG \times CE = CA \times IM$$

und weil GD in den beiden Halbkreisen CDF, EDA, auf den Durchmessern CF, EA, senkrecht steht, so folgt
$$CG \times GF = GD^2 = AG \times GE$$

mithin
$$CG : AG = EG : GF$$

oder
$$(CE - EG) : (AG - GF) = CG : AG = CE : AF$$

mithin
$$CG \times AF = AG \times CE = CA \times IM$$

Auf dieselbe Weise zeigen wir, daſs bei einem Kreise an der andern Seite das Rechteck unter CA und dem Durchmesser jenes Kreises gleich sei dem Rechteck $CG \times AF$, woraus folgt, daſs die beiden Durchmesser dieser zwei Kreise gleich sein müſsen.

2) Wenn die beiden Halbkreise sich weder berühren noch schneiden, sondern getrennt sind, und wenn die senkrechte Linie in dem Punkte errichtet ist, wo zwei gleiche Berührungslinien der Kreise sich treffen, so findet dasselbe Statt.

ABC, ADE, FGC, mögen die angegebenen Halbkreise sein, und die beiden Linien NG, ND, jene Kreise in G, D, berühren und gleich sein, auch sich in N treffen, und die durch N gehende Linie BN möge senk-

Satz 6.

F. 202. Es sei ABC ein Halbkreis, und in dessen Durchmesser ein Punkt D so angenommen, dafs $AD = \frac{3}{2} DC$ ist; über AD, DC, beschreibe man zwei Halbkreise, nehme zwischen den drei Halbkreisen einen sie berührenden Kreis EF an, und ziehe in diesem den Durchmesser EF ‡ AC; so soll das Verhältnifs der Durchmesser AC : EF gefunden werden.

Man ziehe die beiden Verbindungslinien AE, EB, und die beiden CF, FB, so werden CB, AB, gerade Linien sein, wie im ersten Satze erwiesen ist. Auch ziehe man die Verbindungslinien FGA, EHC, so wird man zeigen, dafs diese Linien gerade sind, und eben so die Linien DE, DF. Ferner verbinde man DI, DL, und EM, FN, und verlängere die letzteren bis O, P. Weil nun in ΔAED die Linie AG senkrecht auf ED, und weil DI ebenfalls senkrecht auf AE steht, auch beide sich in M schneiden, so ist auch EMO senkrecht auf AD, wie wir in unserer Untersuchung über die Eigenschaften der Dreiecke dargethan haben, und wovon der Beweis schon beim vorhergehenden Satze vorausgesetzt ward. (α) Eben so wird FP senkrecht auf CA stehen, und weil die beiden Winkel bei L und B rechte sind, so wird DL ‡ AB, und auf dieselbe Weise DI ‡ CB sein, mithin

$$AD : DC = AM : FM = AO : OP$$

und $$CD : DA = CN : NE = CP : PO$$

Nun war $AD = \frac{3}{2} DC$, also ist $AO = \frac{3}{2} OP$ und $OP = \frac{3}{2} CP$, und mithin sind die drei Linien AO, OP, PC, proportionirt, und nach demselben Maafse, wornach $PC = 4$ ist, wird $OP = 6$, $AO = 9$, und $CA = 19$ sein. Weil aber $PO = EF$, so folgt

$$AC : EF = 19 : 6$$

mithin haben wir das gesuchte Verhältnifs gefunden.

Auch wenn das Verhältnifs AD : DC irgend ein anderes ist, also etwa $AD = \frac{4}{3} DC$, oder $AD = \frac{5}{4} DC$, u. s. w., so wird doch die Weise der Untersuchung eben die angegebene sein, und dahin eben wollten wir. (β)

---

recht auf AC stehen; ferner berühre der Kreis sie in I, den Kreis ABC in H und den Kreis ADE in L; man ziehe den Durchmesser IM ‡ AC, die Verbindungslinie CH, welche durch I, die Verbindungslinie ME, welche durch L, und die verbindende AI, welche durch L gehen wird, und verlängere diese bis P; auch ziehe man die Verbindungslinie CO, welche durch P gehen und parallel EM sein wird. Dann folgt

$$AO : OM = AN : MI = AC : CE$$

mithin $$AN \times CE = AC \times IM$$

Eben so wird gezeigt, dafs das Rechteck $CN \times FA$ gleich sei dem Rechtecke unter AC und dem Durchmesser des Kreises an der andern Seite.

Weil nun $$CN \times NF = GN^2 = DN^2 = AN \times NE$$

so folgt $$CN : AN = NE : NF = CE : AF$$

mithin $$AN \times CE = CN \times FA$$

Nun ward schon gezeigt, dafs $AN \times CE = AC \times IM$, und dafs $CN \times FA$ dem Rechtecke unter AC und dem Durchmesser des andern Kreises gleich sei; folglich sind die zwei Durchmesser, also auch die zwei Kreise gleich, und diefs ward behauptet.

(S. 6. α) Vgl. S. 5. Anmkg. α.

(β) Mit Recht rügt hier Borelli bei dem Erweise eines allgemeinen Satzes den Gebrauch der Zifern, welcher von Arch. selbst gewifs nicht herrührt, sondern auf Rechnung des arabischen Bearbeiters zu setzen ist. Der ganze Satz stimmt wesentlich mit einem bei Pappus (Math. Samml. IV, 16.) überein.

Satz 7.

Wenn ein Kreis um ein Quadrat beschrieben ist, und ein anderer darin, so beträgt der äufsere doppelt so viel, als der innere. F.203.

Der Kreis AB sei um das Quadrat AB, und der Kreis CD darin beschrieben. Die Diagonale des Quadrats sei AB, so wird sie zugleich der Durchmesser des umschriebenen Kreises sein. Man ziehe den Durchmesser CD des innern Kreises parallel AE, so sind beide Linien gleich; und weil $AB^2 = 2\,AE^2 = 2\,DC^2$, auch das Verhältnifs der Quadrate der Kreisdurchmesser dem Verhältnifse der Kreise selbst gleich ist; so folgt, dafs der Kreis AB doppelt so grofs sei, als der Kreis CD, was wir eben zeigen wollten.

Satz 8.

Wenn eine willkührliche Sehne AB eines Kreises verlängert, und die Verlängerung BC dem Halbmesser gleich gemacht, hiernächst C mit dem Mittelpunkte D des Kreises verbunden und die Verbindungslinie bis E verlängert wird, so wird der Bogen AE dreimal so grofs sein, als der Bogen BF. F.204.

Man ziehe EG ‡ AB und die Verbindungslinien DB, DG; weil nun $DEG = DGE$, so ist $GDC = 2\,DEG$; und weil $BDC = BCD$, ferner $CEG = ACE$, so ist $GDC = 2\,CDB$, und $BDG = 3\,BDC$; also ist auch der Bogen BG, welcher dem Bogen AE gleich ist, dreimal so grofs, als der Bogen BF; und das war es, was wir zeigen wollten.

Satz 9.

Wenn zwei gerade Linien AB, CD, in einem Kreise sich unter rechten Winkeln schneiden (doch nicht im Mittelpunkte), so sind allemal die beiden Bogen $AD + CB$ den beiden Bogen $AC + DB$ gleich. F.205.

Man ziehe den Durchmesser EF ‡ AB, welcher CD in G halbtheilen mag, so wird $EC = ED$ sein; weil nun sowohl der Bogen EDF, als der Bogen ECF ein Halbkreis, und $ED = EA + AD$ ist, so wird $CF + EA + AD$ dem Halbkreise gleich sein; es ist aber $EA = BF$, mithin $CB + AD$ dem Halbkreise gleich; folglich sind die vom ganzen übrig bleibenden Bogen $EC + EA$, d. h. AC nebst dem Bogen DB dem Halbkreise gleich, und das wollten wir zeigen.

Satz 10.

Es sei ABC ein Kreis, DA eine berührende, DB eine schneidende, und DC gleichfalls eine berührende Linie. Man ziehe CE ‡ BD, und die Verbindungslinie EA, welche DB in F schneidet; ferner sei das Perpendikel FG aus F auf CE gefällt; so wird dasselbe allemal die letztere in G halbtheilen. F.206.

Man ziehe AC; weil dann AD eine berührende und AC eine Sehne ist, so wird DAC dem Winkel im entgegengesetzten Abschnitte AC, nämlich dem Winkel AEC gleich sein; dieser aber ist gleich AFD, weil CE ‡ BD ist; mithin ist $DAC = AFD$, und in den beiden Dreiecken DAF, AHD, sind zwei Winkel AFD, HAD, gleich, und der Winkel D gemeinschaftlich, mithin ist $FD \times DH = DA^2 = DC^2$. Weil also $FD : DC = DC : DH$, und der Winkel D gemeinschaftlich, so folgt $\Delta DFC \sim \Delta DCH$, und $DFC = DCH = DAH = AFD$; auch ist $DFC = FCE$, und es war $DFA = AEC$; mithin hat das Dreieck EFC zwei gleiche Winkel C, E, und die beiden Winkel bei G sind rechte, auch die Seite GF gemeinschaftlich; folglich wird $CG = GE$ sein, und mithin wird CE in G gehalbtheilt, was wir eben zeigen wollten.

Satz 11.

F. 207. Wenn in einem Kreise zwei Linien AB, CD, sich unter rechten Winkeln in einem Punkte E schneiden, welcher nicht der Mittelpunkt ist, so ist die Summe der Quadrate $AE^2 + BE^2 + EC^2 + ED^2$ dem Quadrate des Durchmessers gleich.

Man ziehe den Durchmesser AF und die Verbindungslinien AC, AD, CF, DB. Weil nun $AED = R = ACF$, und $ADC = AFC$, indem beide auf demselben Bogen AC stehen; so sind in den beiden Dreiecken ADE, AFC, die beiden übrigen Winkel CAF, DAE, ebenfalls gleich, also auch die beiden Bogen CF, DB, und deren Sehnen. Nun ist $DE^2 + EB^2 = BD^2 = CF^2$, ferner $AE^2 + EC^2 = CA^2$, und $CF^2 + CA^2 = FA^2$, mithin ist die Summe $AE^2 + EB^2 + CE^2 + ED^2$ dem Quadrate des Durchmessers gleich, was wir eben zeigen wollten.

Satz 12.

F. 208. Wenn über dem Durchmesser AB ein Halbkreis beschrieben ist, wenn ferner aus einem Punkte C zwei denselben in D, E, berührende Linien samt den Verbindungslinien EA, DB, welche sich in F schneiden, gezogen sind, wenn endlich CF gezogen und nach G verlängert ist; so wird CG senkrecht auf AB stehen.

Man ziehe DA, EB. Weil dann $BDA = R$, so ist $DAB + DBA = R = AEB$, also ist nach Hinzufügung des gemeinschaftlichen Winkels FBE die Summe $DAB + ABE = FBE + FEB = DFE$. Weil ferner CD des Kreises Berührungslinie und DB desselben Sehne ist, so folgt $CDB = DAB$, und eben so $CEF = EBA$, mithin $CEF + CDF = DFE$. Nun geht aus unserer Abhandlung über die Vierecke hervor, wenn zwischen zwei gleichen Linien, welche sich treffen, wie CD, CE, zwei sich schneidende Linien DF, EF, gezogen sind, und wenn der durch letztere gebildete Winkel F der Summe der beiden Winkel $E + D$ gleich ist; daſs alsdann die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte CF gleich ist einer jeden der Linien CD, CE; (*a*) daher ist also $CF = CD$, mithin $CFD =$

(S. 12. *a*) Die Abhandlung, worauf der Verf. sich beruft, ist nicht vorhanden, den Satz selbst aber beweiset Borelli so:

F208.a In dem Viereck ABDC sei $AB = AC$, und $BDC = ABD + ACD$, so wird behauptet, es sei $AB = AD$. Man verlängere AC bis E, so daſs $AE = AC$ wird, und ziehe EB; dann ist $AEB = ABE$, mithin $BDC + AEB = ACD + ABD + ABE = ACD + EBD$. Da nun die vier Winkel des Vierecks EBDC vier rechte betragen, so ist

$$BDC + CEB = ECD + EBD = 2R$$

mithin läſst sich um dieses Viereck EBDC ein Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt A sein muſs, weil $AE = AC = AB$ ist. Demnach ist auch AD ein Halbmesser dieses Kreises, folglich $AD = AB = AC$.

$CDF = DAG$. Es ist aber $CFD + DFG = 2R$, folglich $DAG + DFG = 2R$, also sind in dem Vierecke $ADFG$ die beiden Winkel $ADF + AGF = 2R$; allein es ist $ADB = R$, mithin auch $AGC = R$, und CG senkrecht auf AB, was wir eben zeigen wollten.

Satz 13.

Wenn in einem Kreise zwei gerade Linien AB, CD, sich schneiden, deren eine AB F.209.
der Durchmesser ist, die andere CD aber nicht; wenn ferner aus den beiden Punkten A, B, zwei Perpendikel AE, BF, auf CD gefällt werden; so schneiden sie auf letzterer allemal gleiche Stücke CF, DE, ab.

Man ziehe EB, fälle aus dem Mittelpunkte I das Perpendikel IG auf CD, und verlängere es bis zu H in der Linie EB. Weil nun IG senkrecht auf CD aus dem Mittelpunkte steht, so halbtheilt sie diese Linie in G; weil ferner IG, AE, zwei Perpendikel auf CD sind, so werden sie parallel sein, und weil $BI = IA$, so ist $BH = HE$; deſshalb und weil $BF \parallel HG$, so ist $FG = GE$, also bleibt nach Abzug dieser Linien von $GC = GD$ nunmehr $FC = ED$, und dieſs eben wollten wir zeigen.

Satz 14.

Wenn AB ein Halbkreis ist, von dessen Durchmesser AB die gleichen Linien AC, F.210.
BD, abgeschnitten, und wenn über den Linien AC, CD, DB, Halbkreise beschrieben sind; wenn ferner E der Mittelpunkt der beiden Halbkreise AB, CD, wenn EF senkrecht auf AB und bis G verlängert ist; so ist allemal ein Kreis um den Durchmesser FG gleich der Figur, welche von dem gröſseren Halbkreise, von den beiden Halbkreisen in ihm und von dem mittlern Halbkreise, welcher auſser jenem liegt, umschloſsen wird, und welche Archimedes ein Salinon nennt.

Weil DC in E gehalbtheilt wird, so wird, wenn CA hinzugefügt ist, $AD^2 + CA^2 = 2(DE^2 + EA^2)$ sein. (α) Es ist aber $FG = DA$, mithin $FG^2 + AC^2 = 2(DE^2 + EA^2)$; und weil $AB = 2AE$, und $CD = 2DE$, so folgt $AB^2 + DC^2 = 4(DE^2 + EA^2) = 2(GF^2 + AC^2)$. Eben so ist die Summe der Kreise um die Durchmesser AB, DC, doppelt so groſs, als die Summe der Kreise um die Durchmesser GF, AC; also ist die Summe der Halbkreise um AB, DC, so groſs, als die Summe der beiden Kreise um GF, AC. Allein ein Kreis um den Durchmesser AC ist gleich den beiden Halbkreisen AC, BD. Nimt man also die beiden gemeinschaftlichen Halbkreise AC, BD, von jenen hinweg, so ist die übrigbleibende, von den vier Halbkreisen AB, CD, DB, AC, gebildete Figur (welche eben Archimedes ein Salinon nennt) gleich dem Kreise, dessen Durchmesser FG ist, was wir eben zeigen wollten.

(S. 14. α) Es ist nämlich $AD = 2DE + AC$, mithin $AD^2 = 4DE^2 + 4DE \times AC + AC^2$, folglich $AD^2 + CA^2 = 2(2DE^2 + 2DE \times CA + CA^2)$; ferner ist $EA = ED + CA$, mithin $EA^2 = ED^2 + 2DE \times CA + CA^2$, also $DE^2 + EA^2 = 2DE^2 + 2DE \times CA + CA^2$, folglich $AD^2 + CA^2 = 2(DE^2 + EA^2)$

Satz 15.

F. 211. Es sei AB ein Halbkreis, AC die Seite eines Fünfecks, der Bogen AD die Hälfte des Bogens AC, man verbinde CD, verlängere sie bis E, verbinde DB, welche CA in F schneiden mag, und ziehe FG senkrecht auf AB aus F; so wird die Linie EG dem Halbmesser des Kreises gleich sein.

Man ziehe die Verbindungslinie CB, der Mittelpunkt des Kreises sei H, und man verbinde HD, DG, AD. Weil nun der Winkel $ABC = \frac{2}{5}R$, indem er die Seite des Fünfecks umspannt, so ist $CBD = DBA = \frac{1}{5}R$; und weil $DHA = 2\,DBH$, so ist $DHA = \frac{2}{5}R$. Weil ferner in den beiden Dreiecken CBF, GBF, die beiden Winkel bei B gleich, und die Winkel bei G, C, rechte sind, auch die Seite FB gemeinschaftlich ist, so wird $BC = BG$ sein; und weil in den beiden Dreiecken CBD, GBD, die Seite $CB = BG$, ferner die Winkel bei B gleich und die Seite BD gemeinschaftlich, so wird $BCD = BGD = \frac{6}{5}R$ sein, und jeder dieser Winkel ist dem Winkel DAE, d. h. dem äufsern Winkel des im Kreise befindlichen Vierecks $BADC$ gleich. (α) Daher folgt $DAB = DGA$, also $DA = DG$. Weil hiernächst $DHG = \frac{2}{5}R$ und $DGH = \frac{6}{5}R$, so ist $HDG = \frac{2}{5}R$, mithin $DG = GH$. Weil ferner ADE ein äufserer Winkel des im Kreise beschriebenen Vierecks $ADCB$ ist, so ist $ADE = ABC = \frac{2}{5}R = GDH$. Da also in den beiden Dreiecken EDA, HDG, sowohl die beiden Winkel EDA, HDG, als auch die beiden DAE, DGH, und die beiden Seiten DA, DG, gleich sind, so ist auch $EA = HG$; und wird AG zu beiden hinzugefügt, so folgt $EG = AH$, was wir eben zeigen wollten.

Folgerung 1. Hieraus folgt auch, dafs DE dem Halbmesser des Kreises gleich ist; denn weil $DAE = DGH$, so ist $DH = DE$.

Folgerung 2. Auch behaupte ich, dafs EC nach mittlerem und äufserem Verhältnifse in D getheilt, (β) und dafs DE der gröfsere Abschnitt sei; letzteres weil ED die Seite des Sechsecks, DC die des Zehnecks ist. Diefs ist schon in den Elementen erwiesen, und wird eben jetzt wieder behauptet.

(S. 15. α) Denn es ist $BCD + BAD = 2R = DAE + BAD$, also $BCD = DAE$, mithin auch $BGD = DAE$.

(β) D. h. es verhält sich die ganze Linie CE zu dem gröfseren Abschnitte DE, wie eben dieser zu dem andern DC (Eukl. VI. Erkl. 3.). Zieht man nämlich CG, so ist $\triangle DGC$ gleichschenklig. Nun ist

$ADC = 2R - ABC = 2R - \frac{2}{5}R = \frac{8}{5}R$

und $GDC = ADC - ADG = \frac{8}{5}R - ADG$

$ADG = DAE - DGA = DAE - DAG = \frac{6}{5}R - \frac{4}{5}R = \frac{2}{5}R$

also $GDC = \frac{8}{5}R - \frac{2}{5}R = \frac{6}{5}R$

folglich $DCG = \frac{2}{5}R = EDA$, mithin $DA \parallel CG$;

auch war $DA = DG = DC$,

ferner ist $EDG = EDA + ADG = \frac{4}{5}R = EGD$

mithin $ED = EG$.

Endlich ist $ECG = \frac{2}{5}R = CEG$, folglich $EG = CG = ED$,

also $EC : ED = CG : DA = ED : DC$.

Kritische Anmerkungen.

Vom Gleichgewichte der Ebenen. I.

Seite 5. Z. 15 v. u. καὶ τὰ μέσα αὐτῶν. Torelli vermuthet, es sei hier zu lesen καὶ τὰ μέσα αὐτῶν, καὶ ἐφ' ἑκάτερα τῶν μέσων, wodurch allerdings die Deutlichkeit gewinnen würde; doch halte ich den Zusatz nicht geradezu für nothwendig, indem unter τὰ μέσα überhaupt die von der Mitte gleich weit entfernten Gröfsen gar wohl verstanden werden können.

Schon Barrow stimmt für die Beifügung dieser Worte, und macht auf die ähnliche Stelle S. 9. Z. 3 aufmerksam. Auch Peyrard hat den Torellischen Zusatz in seine Uebersetzung aufgenommen. Vielleicht könnte man lesen πάντα τὰ μέσα.

S. 6. Z. 8. Διπλασία. Um den Begriff des Vielfachen auszudrucken, bedienen sich die griechischen Mathematiker dreier Wortformen, nämlich διπλόος, τριπλόος, ... διπλάσιος, τριπλάσιος, ... διπλασίων, τριπλασίων, ... Bei Archimedes findet sich die erstere Form auf . . . . πλόος nur dreimal, nämlich S. 46. Z. 21 τριπλᾶ (Ein Druckfehler für τριπλᾶ), S. 205. Z. 29 und S. 207. Z. 3. διπλῆ. Dagegen kommen die Formen . . . . πλάσιος und . . . . πλασίων beinahe dreihundertmal vor. Zwar hat der Torellische Text auch noch einmal den Genitivus δεκαπλῶν auf S. 327. Z. 6 v. u., allein diese Lesart ist erst durch Wallis hineingebracht, und mufs der ursprünglichen wieder weichen, wie an seinem Orte gezeigt werden soll. Ich glaube hiernach nicht zu irren, wenn ich die Form . . . . πλόος dem Archimedes ganz abspreche, und eine der beiden andern für jene drei Stellen vorziehe. Von diesen Formen . . . . πλάσιος und . . . . πλασίων kommt nun allerdings die erstere häufiger vor, als die letztere, doch läfst sich ein genaues Zahlenverhältnifs für ihren Gebrauch defshalb nicht angeben, weil das Neutrum singul. beider Formen gleichlautend ist. Zu bemerken bleibt jedoch, dafs die Form . . . . πλασίων sich nur dreimal im Plural findet, nämlich einmal S. 33. Z. 8 τετραπλασίονα, wo jedoch die Grammatik den Singular τετραπλάσιον nicht nur ebenfalls gutheifst, sondern vielleicht gar fodert. Ferner steht der Plural διπλασίονα zweimal S. 263. Z. 6 v. u. und 4 v. u.; allein eben weil diese Ausnahmen die einzigen sind, so bin ich geneigt, auch hier διπλάσια für die ächte Lesart zu halten. In allen bisher erwähnten Fällen ist nicht auf die Verbindung der Formen . . . . πλάσιος oder . . . . πλασίων mit dem Worte λόγος (ratio, Verhältnifs) Rücksicht genommen. Nun versteht man unter einem **zwiefachen, dreifachen** .... Verhältnisse zweierlei; entweder den Zustand, wo eine Gröfse das doppelte, dreifache ... einer andern ist, also einen Zustand, der durch $A : B = n : 1$ bezeichnet werden kann; oder man versteht darunter den Zustand, wo zwei Gröfsen sich wie die algebraischen zweiten, dritten .... Potenzen zweier Zahlen verhalten, was man jetzt durch die Form $A : B = a^n : b^n$ anzudeuten pflegt. Bei Archimedes findet sich

die Form .... πλάσιος λόγος		die Form .... πλασίων λόγος	
in der Bedeutung $A : B = n : 1$	in der Bedeutung $A : B = a^n : b^n$	in der Bedeutung $A : B = n : 1$	in der Bedeutung $A : B = a^n : b^n$
gar nicht.	S. 75. dreimal.	S. 32. einmal.	S. 18. zweimal.
	— 113. viermal — auch steht hier einmal τὰ διπλάσια kurz für οἱ διπλάσιοι λόγοι.	— 33. einmal.	— 96. einmal.
	— 114. einmal.	— 34. einmal.	— 110. viermal.
	— 115. zweimal.		— 111. zweimal.
	— 126. einmal.		— 112. zweimal.
	— 128. zweimal.		— 114. zweimal.
	— 184. einmal, wo der Druckfehler διπλάσον zu verbessern ist.		— 115. einmal.
	— 185. zweimal.		— 124. dreimal.
	— 186. einmal.		— 125. zweimal.
	— 187. einmal.		— 128. einmal.
	— 218. einmal.		— 185. einmal.
	— 258. einmal.		— 186. dreimal.
	— 327. zweimal.		— 218. einmal.
	also 22 Mal.		— 260. einmal.
			also 26 Mal.

Die Variantensammlung bei Torelli giebt hier nur für S. 218 die Abweichung διπλασίονα statt διπλάσιον an; mithin ergiebt sich für Archimedes wohl mit Sicherheit der willkührliche Gebrauch beider Formen. Die genaue Untersuchung war nöthig, weil Wallis behauptet, die alten Mathematiker hätten die Form .... πλασίων allemal für das Verhältnifs $a^n : b^n$, die Form .... πλάσιος dagegen für das Verhältnifs $n : 1$ gebraucht, und weil er hiernach auch beim Archimedes Textesänderungen verlangt. (Vgl. *Wallis. adversus M. Meibomii de proportionibus dialogum. Opp. I. p.* 262. 273.) Wenn aber Wallis jene Verhältnisse selbst unterschieden, und z. B. das Verhältnifs $2 : 1$ durch *ratio dupla*, das Verhältnifs $a^2 : b^2$ durch *ratio duplicata* im lateinischen angedeutet wissen will, so wird man ihm beistimmen, und Torelli tadeln müssen, der diesen Unterschied nicht bezeichnet. (Vgl. *Kästners Anfangsgründe der Arithmetik, Kp. VI.* 7, und über diesen Gegenstand überhaupt *Joach. Camerarius de graecis latinisque numerorum notis etc.*) Ich habe nicht untersuchen mögen, ob Wallis Meinung sich beim Euklides und den übrigen griechischen Mathematikern durchführen lasse, zweifle aber daran.

S. 10. Z. 25.

S. 10. Z. 5. Ὁμοίως δὲ . . . . . ὁμολόγοις πλευραῖς. Diese Worte sind gewiſs ein fremdes Einschiebsel, indem sie nichts als eine Wiederholung der sechsten Voraussetzung enthalten. Derselben Meinung ist Rec., und schon Barrow hat die Worte nicht übersetzt.

S. 10. Z. 25. ὥστε ἴσας ποιησᾶντι γωνίας. Peyrard scheint hier eine Lücke im Texte vorauszusetzen, indem er übersetzt: *c' est à dire, que les droites menées des centres de gravité aux angles égaux et correspondans forment des angles égaux*; und freilich bilden nicht Punkte, sondern Linien Winkel: allein Archimedes druckt sich öfter so aus, z. B. S. 11. Z. 19. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ πάντα ὁμοίως κεῖται τὰ Θ, N σαμεῖα ποτὶ ὁμολόγως πλευρὰς, καὶ ἴσας γωνίας ποιεῖ; ferner S. 13. Z. 16 v. u. Ὁμοίως γὰρ ἐντὶ κείμενα τὰ σαμεῖα . . . . ., ἐπειδήπερ ποτὶ τὰς ὁμολόγως πλευρὰς ἴσας ποιῶντι γωνίας. An beiden Orten läſst Peyrard die hier entsprechenden Zusätze ganz unübersetzt, und dasselbe thut Torelli an dem letztern Orte — wahrscheinlich aus Versehen.

S. 11. Z. 21. καὶ ἴσας. Das καὶ ist gewiſs unächt, auch fehlt es in mehreren Handschriften. Man wird lesen müssen ἴσας γὰρ γωνίας.

Quadratur der Parabel.

S. 17. Z. 9. τᾶς ὅλω τῶ κώνω τομᾶς. Ohne Zweifel soll dadurch die Ellipse angedeutet werden, und man könnte deſshalb die Verbesserung des Rec. wohl aufnehmen: τᾶς ὀξυγωνίω κώνω τομᾶς, zumal da der ὅλος κῶνος keinen Gegensatz mit dem folgenden ὀρθογώνιος macht.

S. 20. Z. 13. v. u. καὶ τᾶς AB γραμμᾶς. Ich lese διὰ τᾶς, weil der Genitivus von dem vorhergehenden ἐπὶ nicht mehr abhangen kann. Rec. will καὶ διὰ τᾶς lesen.

S. 21. Z. 3. ἐόντι. Nach Torellis Vorschlage ist ἔχοντι zu lesen, wie sonst gewöhnlich, z. B. S. 21. Z. 6 v. u. S. 22. Z. 10 und öfter.

S. 21. Z. 14 v. u. τὰν ἴσαν ἐῦσαν. Ich lese τὰν ΒΓ, ἴσαν ἐῦσαν, weil Archimedes auch S. 20. Z. 5 v. u. die entsprechende Linie mit Buchstaben benennt.

S. 21. Z. 3. v. u. χωρίον ἐκ τῶ Λ. Ich lese χωρίον τὸ Λ ἐκ τῶ Α, weil sonst nirgend gesagt würde, daſs die angehängte Figur eben Λ sein soll. Vgl. S. 20. Z. 1 v. u.

S. 22. Z. 19 v. u. ἔχον muſs augenscheinlich ἔχει heiſsen. Rec.

S. 25. Z. 11. ἐς τὰ τμάματα ὁπόσα ὗν τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ. Ich lese ἐς τὰ τμάματα ἴσα ὁπόσα . . . . und setze am Ende das offenbar fehlende ΙΓ hinzu, nach Anleitung des ganz ähnlichen Falles S. 27, Z. 5. (ὗν für ὄν, sonst ἐόν.)

S. 26. Z. 15 v. u. τῶ ΑΓΔ τριγώνω. Muſs offenbar heiſsen τῶ ΒΓΔ τριγώνω, doch ist der Fehler in Torellis und Peyrards Uebersetzung übergegangen.

S. 27. Z. 2. ποτὶ τό. Man muſs ἀπὸ τῶ lesen, wie unmittelbar vorher und nachher. Die Baseler Ausgabe hat τῷ, eine Handschrift lieset τὸ und eine giebt ποτὶ τό.

S. 29. Z. 23. τμᾶμα περιεχόμενον. Nach Anleitung der ähnlichen Fälle lese ich τμᾶμα τὸ ΒΘΓ, περιεχόμενον. Vgl. S. 25. Z. 5. S. 26. Z. 5 v. u. S. 27. Z. 4 v. u. S. 30. Z. 14 v. u. etc.

S. 29. Z. 15. καὶ ἁ ΒΓ. Vielleicht ist ἐπεὶ für καὶ zu setzen, da der Grund angegeben werden soll, weſshalb ΘΕ die Linie ΒΓ halbtheilt. Peyrard und Torelli übersetzen demgemäſs, und ein Pariser Codex hat hier eine Lücke.

S. 30. Z. 5 v. u. ἔχοντι. Man lese ἔχει Rec.

S. 32. Z. 22. τετραπλάσιον τὸ ἔστω τὸ Ζ τῦ Η· καὶ ἔστω. Nach Anleitung aller Handschriften ist zu lesen τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ἡγέμενον τῦ ἑπομένυ· μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἔστω. Torelli hat das τῦ Η wahrscheinlich ohne Autorität in den Text gebracht, da es in der Baseler Ausgabe fehlt; Peyrard folgt ihm, nicht aber Sturm, welcher die richtige Lesart vor sich gehabt haben muſs. Es müſste auffallen, wenn Arch. bei seiner groſsen Genauigkeit bloſs das Verhältniſs von Ζ zu Η, nicht aber das Verhältniſs aller Gröſsen angedeutet haben sollte. Vgl. S. 33. Z. 7.

S. 34. Z. 16 v. u. καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ Ι. Ich läse gern καὶ ἔστω ἔσχατον τὸ Ι, wie Peyrard übersetzt hat: *que cette dernière surface soit I;* wage es aber doch nicht, weil ἔλασσον sich erklären läſst.

S. 33. Z. 8. τετραπλασίονα. Man lese τετραπλάσιον. Vgl. Anmkg. zu S. 6. Z. 8.

Vom Gleichgewichte der Ebenen. II.

S. 35. Z. 2. ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν. Alle mir bekannten Uebersetzer haben den Sinn dieser Worte verfehlt, indem sie etwa so übertragen: *„welche wir an eine gegebene gerade Linie anlegen können“*, ohne zu beachten, daſs Arch. die Wörter παρὰ und παραβάλλειν durchweg dann braucht, wenn er eine parallele Lage bezeichnet. Er will hier andeuten, es sei möglich, den parabolischen Abschnitt in ein Parallelogramm (oder Rechteck) mit gegebener Seite zu verwandeln, was ihm allerdings möglich ist, nachdem er die Quadratur der Parabel in einem eigenen Buche gelehrt hat, dessen Abfassung der Zeit nach dem gegenwärtigen Buche vorangeht. Eutocius hat die Stelle richtig verstanden, weil er aber die eigenen Worte des Arch. braucht, so hat man auch seinen Wink gemiſsdeutet.

S. 36. Z. 4. Ἔστω καὶ. Man lese nach Anleitung der Florent. Handschrift Ἔστω ἄρα καὶ.

S. 36. Z. 7. περιβεβλήσθω δὴ παρὰ. Nach mehreren Handschriften ist παραβεβλήσθω δὴ παρὰ zu lesen.

S. 36. Z. 20. καὶ τῦ. Man lese ὥστε καὶ τῦ nach mehreren Handschriften. Auch hat so die Baseler Ausgabe.

S. 36. Z. 22. Αἴκα εἰς τμᾶμα. Der Florentiner Codex beginnt hier einen neuen Abschnitt und verbindet damit unmittelbar den zweiten Satz. Auch Eutocius betrachtet diese Worte als Einleitung zum zweiten Satze; denn er beginnt seine Erläuterung des letzteren so: τῦ δευτέρυ θεωρήματος προλέγει τινὰ δηλῦντα . . . ., und in seiner Erläuterung des dritten Satzes nennt er dieses einleitende Vorwort ein λῆμμα; deſshalb habe ich ihm die Ueberschrift Lehnsatz gegeben.

S. 36. Z. 9 v. u. εἰς τῦτο τῶν. Ich behalte die Lesart der Baseler Ausgabe εἰς τὰς τῶν, bei, von welcher Torelli mit Unrecht abweicht und dadurch unverständlich wird. Der Florentiner Codex hat εἰς τυτων ἑξῆς. Eutocius wiederholt die Worte ganz richtig am Ende seiner Anmkg. zum zweiten, und Arch. selbst in dem Beweise zum dritten Satze.

S. 36. Z. 7 v. u. ἐν ταῖς τάξεσιν. Peyrard läſst diese Worte in seiner Uebersetzung aus, sie sind indessen schwerlich unächt, da Eutocius sie in seiner Erläuterung des zweiten

Lehrsatzes wiederholt. Nur bleibt ungewifs, was für eine Abhandlung darunter verstanden werden müsse.

S. 37. Z. 10. Εἰ δὲ καί. Wahrscheinlich ist Αἴκα εἰς τμᾶμα zu lesen, wie sonst in ähnlichen Fällen; auch deuten mehrere Handschriften dahin, indem sie εἶκα lesen.

S. 40. Z. 6. ἐπὶ τάν. Das Wort ἐπὶ ist zu streichen nach der Analogie des Vordersazzes, indem auch hier διαιρεῖ zu verstehen ist.

S. 40. Z. 5. v. u. εὐθύγραμμον. Ich lese mit den meisten Handschriften ἄρα εὐθύγραμμον.

S. 42. Z. 3. εἴη ΚΑ. Diese Lesart giebt gar keinen Sinn; man setze dafür εἴη καί. Der Florent. Codex hat εἴηκα und zwei Pariser κα.

S. 42. Z. 6. τὸ τμᾶμα. Ich lese τὸ ΑΒΓ τμᾶμα, wie immer.

S. 42. Z. 8. τῶν τμαμάτων . . . . . διαμέτρων. Man lese τῶν ΑΧΒ, ΒΛΓ τμαμάτων . . . . . διάμετρος.

S. 42. Z. 10. εὐθύγραμμον γνωρίμως, τῶ ὅλω . . . . . εὐθυγράμμω. Ich lese τρίγωνον γνωρίμως, τῶ . . . . . τριγώνω, mit Weglassung des Worts ὅλω; denn der Zusammenhang lehrt, dafs Arch. gar nicht von dem ganzen Abschnitte ΑΒΓ rede, sondern nur von ΑΚΒ; und die in diesem Abschnitte beschriebene Figur nennt er in der Folge beständig nicht εὐθύγραμμον, sondern τρίγωνον, wie er auch mufste, da in dem vorigen Satze nur von einem Dreiecke gesprochen war.

S. 42. Z. 21 v. u. ΑΒΓ κέντρον. Nach den Handschriften ist zu lesen ΑΒΓ τριγώνω κέντρον.

S. 44. Z. 15. ποτὶ περιλειπόμενα. Nach den meisten Handschriften ist zu lesen ποτὶ τὰ περιλειπόμενα.

S. 44. Z. 17. Ἐπειδὴ . . . . . . τό ἐστι Θ. Man lese Ἐπεὶ δὴ . . . . ἐστὶ τὸ Θ.

S. 44. Z. 24. τᾶς γὰρ διὰ τῶ Η ἀχθεῖσα, παρὰ τὰν ΑΓ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐσσῶντι τῷ τμάματι. Diese offenbar verdorbene Stelle hoffe ich so hergestellt zu haben: τᾶς γὰρ διὰ τῶ Η ἀχθείσας, παρὰ . . . . . ἐσσῶντι τὰ τμάματα Vgl. S. 12. Z. 19 v. u. und S. 41. Z. 9.

S. 44. Z. 26. δῆλον ὅτι. Torelli vermuthet mit Recht δῆλον ἐν ὅτι.

S. 45. Z. 21. ὧ κέντρον. Man lese ὧ τὸ κέντρον. Dieselbe Aenderung mufs Z. 2. v. u. eintreten.

S. 46. Z. 5. τμαμάτων Mit allen Handschriften ist τῶν τμαμάτων zu lesen.

S. 46. Z. 12. τῶτο γὰρ ἐπὶ τέλει δείκνυται, ὧ σαμεῖον τὸ Θ. Der Beweis, auf welchen Arch. sich hier bezieht, findet sich nirgend. Eutocius liefert ihn, ohne jedoch zu bemerken, dafs er sich bei Arch. gar nicht finde, sondern nur, um ihn hier sofort zu geben. So oft nun Eutocius einen fehlenden Beweis aus den uns bekannten Schriften des Arch. nachweiset, unterläfst er nicht, auch die Stelle deutlich anzugeben, wo derselbe angetroffen wird, wie er das schon in einer gleich folgenden Anmerkung zu diesem Satze thut; ich schliefse daraus, dafs Eutocius selbst keinen hieher gehörigen archimedischen Beweis gekannt habe; am wenigsten kann sich derselbe am Ende dieser Abhandlung (ἐπὶ τέλει) befunden haben. Ich streiche defshalb die Worte ἐπὶ τέλει ὧ σαμεῖον τὸ Θ sämtlich fort, und halte sie für eine Notiz, welche irgend ein Leser für sich machte, als er den fehlenden Beweis am Ende ergänzte, und dessen Stelle durch das Zeichen der Sonne ⊙ kenntlich machte; so dafs von Archimedes selbst nur die Worte τῶτο γὰρ δείκνυται herrühren, in denen er vielleicht nur auf einen sonst schon bekannten Beweis aufmerksam machen wollte, so wie er einige Zeilen weiter sagt: καὶ γὰρ τῶτο δείκνυται. Der Venet. Codex hat an unserer Stelle οὕτως σαμεῖον ὁ ἥλιος, der Florentiner οὗ σαμεῖον ὁ ἥλιος und alle vier Pariser ὁ ἥλῖος; lauter Lesarten, welche meine Vermuthung bestätigen. Indessen müssen die falschen Worte schon früh in den Text gekommen sein, da Eutocius sie wiederholt.

S. 46. Z. 21. τριπλᾶ. Man lese τριπλασία. Vgl. Anmkg. zu S. 6. Z. 8.

S. 47. Z. 5 v. u. διπλασίᾳ. Die in diesem Satze häufig vorkommenden Zahlworte sind im Texte bald mit Worten, bald mit Zahlzeichen angegeben, was gewifs falsch ist. Entweder lauter Worte, oder lauter Zahlzeichen! ich stimme für die wörtliche Bezeichnung, weil Archimedes diese in den ähnlichen Sätzen gebraucht.

S. 49. Z. 16. v. u. ΓΒ, ΓΑ. Diese Lesart ist von Torelli in den Text gebracht. Die Baseler Ausgabe hat ΓΔ, ΓΑ, und alle Handschriften haben ΓΒ, ΒΑ. Die Lesart Torellis giebt in der That einen Rechnungsfehler, den selbst Peyrard nicht bemerkt hat. Die Lesart der Baseler Ausgabe giebt zwar ein richtiges, nicht aber ein hieher gehöriges Verhältnifs. Die Lesart der Handschriften aber giebt das rechte, und ist daher aufzunehmen, um so mehr, da auch Eutocius sie ganz richtig wiederholt (S. 53. Z. 25.); und hier hat Torelli nicht geändert.

S. 57. Z. 15. αὐτᾶς. Man lese αὐτᾶν. Die Baseler Ausgabe hat αὐτήν. Rec.

Von der Kugel und dem Cylinder I.

S. 63. Z. 3. v. u. ταῦτα μὲν τῇ φύσει προυπῆρχεν, περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα· οὐ μέντοι γέγονεν ὑπὸ τῶν. Der Florentiner Codex lieset so: ταῦτα δὲ τὰ συμπτώματα ἀυτῇ φύσει προϋπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα· ἠγνόειτο δὲ —— πρὸ ὑμῶν etc. (Der Strich bezeichnet eine Lücke.) Der Pariser Codex B, welcher mit jenem wahrscheinlich aus einer Quelle geflossen ist, (S. *Praefat. ad edit. Torell. pag. iii.*) stimmt damit ziemlich überein, und hat so: Ταῦτα —— τῇ φύσει προϋπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα —— γνοει —— etc. Ich halte defshalb dafür, es sei so zu lesen: ταῦτα μὲν τὰ συμπτώματα αὐτῇ τῇ φύσει προϋπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, ἠγνοεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν etc. Die einzige Schwierigkeit macht hiebei das Wort συμπτώματα, welches sonst nicht sowohl Eigenschaften eines Gegenstandes, als vielmehr bedenkliche Zustände desselben, Unglücksfälle, bedeutet, indessen würde das sonst eben nicht gewöhnliche Wort wohl schwerlich in das Manuskript gekommen sein, wenn es nicht ächt wäre, also jene Bedeutung ihm allerdings zukäme. Dazu kommt, dafs diefs Wort noch einmal in derselben Bedeutung vorkommt, nämlich *Konoid. u. Sphäroid. Satz* 14. (Seite 277 Z. 5. v. u.) Zwar lesen die Baseler und die Torellische Ausgabe dort συμπίπτοντι, was aber ganz sinnlos ist, wogegen alle Handschriften das Wort σύμπτωμα richtig haben.

S. 64. Z. 9. καὶ γὰρ προυπαρχόντων. Ich lese nach Anleitung des Florentiner und des Pariser Cod. B: καὶ γὰρ τούτων προϋπαρχόντων.

S. 64. Z. 14. v. u. ἔχουσιν. Die Vermuthung Barrows, man müsse ἔχουσαι lesen, wird durch zwei Pariser Codd. bestätigt.

S. 64. Z. 6. v. κατ' αὐτῶν. Man lese κατ' αὐτῆς. Rec.

S. 72. Z. 2. πλευρὰ ἰσοπλεύρου. Eutocius wiederholt die Worte mit dem Zusatz καὶ ἀρτιοπλεύρου, man würde aber irren, wenn man sich dadurch verleiten liefse, die Worte in den Text zu setzen; denn Archimedes braucht diese sonst ganz richtige Bestimmung nicht zu seiner Beweisführung, beweiset auch nicht ihre Wahrheit, was er doch in Beziehung auf die gleichen Seiten des Vielecks thut. Eutocius aber hat in seinem Exemplare den Zusatz wahrscheinlich gehabt, wefshalb er ihn als richtig nachweiset.

S. 74. Z. 10. καὶ ἀγάγωμεν. Das καὶ mufs gestrichen werden, da es keinen Sinn giebt. Es fehlt überdiefs in allen Manuskripten, aufser dem Pariser A.

S. 75. Z. 4. πλευρὰν, διπλάσιός ἐστι. Das Komma mufs gestrichen werden, weil der Sinn sonst wäre, die beiden Seiten ständen im zwiefachen Verhältnisse der Vielecke, da vielmehr umgekehrt die Vielecke im zwiefachen Verhältnisse der Seiten stehen. Torelli übersetzt unrichtig: *Ac rationis quidem lateris ad latus dupla est ratio polygoni ad polygonum.* Es mufs heifsen: *Ac ratio quidem duplicata lateris ad latus est ratio polygoni ad polygonum.*

S. 75. Z. 21. ταῦτα γὰρ ἐν τῇ Στοιχειώσει παραδέδωται. Ich lese τ. γ. ε. τ. στοιχειώσει παραδεδῶται. Die Uebersetzer haben immer Στοιχείωσις mit Στοιχεῖα verwechselt, und hier ein Citat des Archimedes vermuthet, was keineswegs vorhanden ist. Es braucht zwar Eutocius (*ad prop. XI*) das Wort στοιχείωσις zur Bezeichnung der (Euklidischen?) Elemente, indessen kann diefs für den Sprachgebrauch des Archimedes nicht entscheidend sein, der nichts anderes darunter versteht, als im Allgemeinen den elementaren Unterricht, welchen er bei seinen Lesern voraussetzt.

S. 76. Z. 13. v. u. ἰσόπλευρον ἔχουσα τρίγωνον. Die Basl. Ausg. hat: ἰσόπλ. ἔχ. βάσιν τῷ ΑΒΓ; der Florentiner Codex βασιν τω; der Pariser A hat βάσιν τὸ, die drei anderen, βάσιν τῶ, defshalb lese ich: ἰσόπλ. ἔχ. βάσιν τὸ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ. Oder man müfste lesen: βάσιν μὲν ἔχουσα ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, wie in dem zweiten Beweise des Satzes.

S. 76. Z. 7. v. u. ὕψη τῶν περιεχόντων. Ich lese ὕψη τῶν τριγώνων τῶν περιεχόντων, da Arch. gewifs nicht vergessen hat, die Art der begränzenden Figuren anzugeben. Die Nothwendigkeit dieses Zusatzes haben die Uebersetzer gefühlt.

S. 78. Z. 30. τοῦ ΔΕΖ, ich setze hinzu τριγώνου, wie sonst immer, Vgl. Satz 8 an vielen Stellen.

S. 79. Z. 8. ἐκπεσούσης. Man lese ἐμπεσούσης nach Anleitung des vorhergehenden ἐμπέσῃ; auch ist in dem Pariser Cod. B schon von anderer Hand ἐμπεσούσης beigeschrieben.

S. 80. Z. 14. ἐπὶ τῶν ΒΖ, ΖΓ, μείζων. Ich lese ἐπὶ τῶν ΒΖ, ΖΓ τμημάτων, μείζων, wie bisher immer.

S. 80. Z. 19. ὧν τὰ εἰρημένα. Das ὧν giebt gar keinen Sinn; vielleicht ist ὡς zu lesen.

S. 81. Z. 25. ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι. Hauber hält diese Worte für unächt, weil sich kein solcher Lehnsatz vorfinde, und weil Eutocius eine Erläuterung zu dieser Stelle gebe, ohne diese Worte anzuführen. Letzteres ist unrichtig, indem Eutocius über diese Stelle gar nicht redet. Ersteres ist aber in so fern richtig, als es keinen abgesonderten Lehnsatz dieses Inhalts giebt; indessen führt Arch. den Beweis allerdings selbst beiläufig im Beweise zu S. 9; daher halte ich die Worte für ächt; zum wenigsten müfste ὡς ἐδείχθη stehen bleiben.

S. 81. Z. 19. ff. v. u. φανερὸν γὰρ . . . . . ἐφαπτομένην. Ich halte dieses alles für eine

Glosse, weil Archimedes kurz zuvor diese Behauptung selbst (als Lehnsatz) citirt; auch nennt er den Kegel sonst nicht ὀρθὸς in dieser Abhandlung, sondern immer ἰσοσκελής. Ich habe die Uebersetzung defshalb eingeklammert.

S. 83. Z. 14. v. u. τῆς AB μείζυς. Die Baseler Ausgabe hat τῆς AB διαμέτρυς μέιζυς, und alle übrigen Manuskripte haben τῆς AB διαμέτρυ μείζυς. Die letztere Lesart ist ohne Zweifel die richtige.

S. 85. Z. 21. αἱ εἰσὶ βάσεις. Ich lese οἵ εἰσι βάσεις nach Anleitung der meisten Handschriften.

S. 85. Z. 14. v. u. Ἤχθω γὰρ ἡ EZ ἐπιψαύυσα. Hier ist eine Lücke, indem nicht gesagt wird, durch welchen Punkt des Bogens ΑΒΓ die Berührungslinie gezogen werden soll. An der ähnlichen Stelle in Satz 11, wird diesem Punkte die Mitte des Bogens ΑΒΓ angewiesen, defshalb ist vielleicht auch hier zu lesen: Ἤχθω γ. ἡ EZ ἐπιψ., διχὰ τμηθείσης τῆς ΑΒΓ περιφερείας κατὰ τὸ B, καὶ . . . Hauber hat diesen Zusatz in seiner Uebersetzung ebenfalls für nöthig erachtet. Für den Beweis ist zwar nicht erfoderlich, dafs B gerade in der Mitte liege, allein irgend ein Ort mufste doch dafür angegeben sein.

S. 86. Z. 18. v. u. τῦ κύκλυ σχήματος. Ich lese τοῦ τμήματος weil Arch. das Wort σχῆμα hier immer von den äufseren Abschnitten braucht, nicht von den Kreisabschnitten selbst, und weil das Wort κύκλυ in mehreren Handschriften fehlt; daher ich vermuthe, es sei erst in den Text gekommen, nachdem τμήματος in σχήματος verwandelt war.

In der zu diesem Satz 13 gehörigen Figur fehlen übrigens die Buchstaben Δ, Θ, welche der Florentiner Codex giebt. Sie sind nicht überflüfsig, weil durch sie die Lage der nicht wirklich gezogenen Berührungslinien angedeutet wird, deren am Ende Erwähnung geschieht, und weil ohne sie die alphabetische Folge der Buchstaben unterbrochen wird, welche Arch. selten verläfst.

S. 88. Z. 14. τὰ εὐθύγραμμα. Torelli will diese Worte mit Recht streichen.

S. 88. Z. 21. πῶς δὲ τῦτο; vielleicht sind diese Worte unächt, denn sie entsprechen keineswegs der gewöhnlichen Beweisform des Vfs.

S. 89. Z. 22. μίαν. Ich lese μιαν, wie sonst immer,

S. 91. Z. 11. v. u. τὰ ἡμίση. Ich lese τὰ διπλάσια nach Haubers Vorschlage. Archimedes druckt sich auffallend kurz aus, so dafs man überhaupt eine Lücke argwöhnen mögte, die jedoch kein Manuskript andeutet. So wie die Worte jetzt lauten, druckt τὰ ἡμίση wirklich das Gegentheil von dem aus, was gesagt werden mufs; denn diese Stelle ist zum Glück von der Art, dafs über den wahren Sinn gar kein Zweifel obwalten kann. Die Uebersetzer haben sich vielen Zwang angethan, den nie verfehlten wahren Sinn mit den griechischen Worten in Uebereinstimmung zu bringen.

S. 91. Z. 7. v. u. πυραμίδος περιγεγραμμένης. Ich lese π. τῆς περιγ. mit mehreren Handschriften.

S. 92. Z. 18. τοῖς A, B. Mit mehreren Handschriften lese ich τοῖς A, B κύκλοις.

S. 94. ΛΗΜΜΑ. Hauber hält mit Unrecht diesen Lehnsatz für unächt; denn Archimedes braucht ihn wirklich im folgenden Satze.

S. 96. Z. 8. τὰς αὐτὰς βάσεις τοῖς κυλίνδροις. Ich setze hinzu καὶ ὕψος ἴσον; wie schon Peyrard und Hauber angeben. Arch. will unstreitig dasselbe von den Cylindern aussagen, was er in Lehnsatz 1 von den Kegeln behauptet hat.

S. 96. Z. 14. ἀλλήλας. Man lese ἀλλήλους mit den meisten Handschriften.

S. 102. Z. 2. διάμετροι ἔσωσαν. Ich lese δ. ἔσωσαν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, denn die Angabe dieser Lage wird erfodert. Vergl. die ähnlichen Stellen S. 110, Z. 15 v. u. und S. 114. Z. 27. Am ersteren Orte ist ἀλλήλοις ein Druckfehler.

S. 103. Z. 14. ὡς τετράπλευρας γίνεσθαι. Diese von Torelli in den Text gesetzten Worte geben gar keinen Sinn. Die Baseler Ausgabe hat bloſs (τετρακπλεύρῳ) und die Handschriften haben τετραγώνους, alles freilich gleichfalls ohne Sinn. Rec. schlägt vor πολυγώνου τετρακώλου (eines viergliedrigen oder viertheiligen Vielecks) zu lesen. Diese Aenderung ist zwar sinnreich, aber doch nicht annehmbar. In Satz 24 nämlich giebt Archimedes an, auf welche Weise das innere Vieleck konstruirt werden solle, was er zur Erzeugung der innern Figur braucht, und dort stehet die Bestimmung, daſs die Seitenzahl durch vier theilbar sein müsse. In den folgenden Lehrsätzen setzt er diese Bestimmung immer schon voraus, wenn er seine jedesmalige Behauptung bloſs mit Worten, ohne Beziehung auf eine Figur ausspricht, und erst hinterher, bei Angabe der Konstruktion der bezeichneten Figur, sich auf das Einzelne einläſst. Eben so wird in Satz 29 die Konstruktion des Vielecks um den Kreis, woraus eine äuſsere Figur zu der Kugel entstehen soll, vollständig angegeben, hernach aber werden in den folgenden Lehrsätzen selbst die einzelnen Bestimmungen nicht wiederholt, sondern es wird nur bei der Beweisführung darauf hingedeutet, vgl. Satz 30 und 34. Demnach schlieſse ich, daſs auch hier der ganze Zusatz ὡς τετρ. γ. καὶ gestrichen werden, und so gelesen werden müsse: πολυγώνου, παραλλήλοις οὔσαις etc. Der letztere Dativus statt des Akkusativus der Ausgaben und Handschriften ist augenscheinlich nothwendig. Vgl. Satz 30.

S. 104. Z. 24. ἀρτιογώνιον. Dieſs Wort ist gewiſs falsch, da Archimedes sofort angiebt, die Seitenzahl solle sich durch vier theilen lassen. Ich lese deſshab ἰσογώνιόν τε καὶ ἰσόπλευρον, wie in Satz 29. Peyrard hat schon nach dieser Aenderung übersetzt. Ein Anderes ist es in Satz 31; wo nur eine gerade Anzahl von Seiten oder Winkeln erfodert wird.

S. 106. Z. 6. v. u. κέντρου ΑΒΓΔ κύκλου. Man lese κέντρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.

S. 107. Die Figur zu Satz 28 ist wahrscheinlich in so fern verzeichnet, als das Perpendikel auf eine Seite des Vielecks aus dem Mittelpunkte nach der Seite ΑΖ gezogen werden muſs, wie Arch. S. 106. Z. 3. v. u. selbst angiebt.

S. 107. Z. 12. ὡς. Vielleicht ὅτι?

S. 107. Z. 2. v. u. ἐπὶ τοῦ πρώτου. Ich lese ἐπὶ τῶν πρὸ τούτου, was mit der Baseler Ausgabe am meisten übereinstimmt, welche ἐπὶ τῶν πρὸ τοῦ hat. Der Pluralis τῶν wird erfodert, weil die Voraussetzung schon in mehreren Sätzen gemacht ist. Man könnte auch lesen ἐπὶ τῶν πρότερον, wie in Satz 36.

S. 110. Z. 16. ὁ κῶνος ἴσος. Man lese ὁ κῶνος ὁ ἴσος mit den meisten Handschriften.

S. 110. Z. 21. κατεσκευασμένοις. Rec. schlägt vor, hier κατεσκευασμένα zu lesen, wozu ich keinen Grund finde, da die gewöhnliche Lesart einen paſslichen Sinn giebt.

S. 110. Z. 29. κύκλος. Ich lese μέγιστος κύκλος, obgleich kein Manuskript diese Lesart hat; doch haben Torelli und Peyrard darnach übersetzt.

S. 110. Z. 10. v. u. καὶ τῇ ΒΖ, ΘΔ παράλληλοι. Man muſs entweder ΖΘ oder ΖΒΔΘ (ohne zwischengesetztes Komma) lesen, da Archimedes nur eine Linie durch den Singular τῇ andeutet.

S. 110. Z. 8. v. u. περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. Torelli übersetzt: actis in orbem ambitibus. Sollte die Uebersetzung richtig sein, so müfste man περὶ mit κατὰ vertauschen. Ueberdiefs beschreiben die Umfänge der Vielecke keineswegs Kreise, und Arch. druckt sich in den ähnlichen Stellen viel genauer aus. (Vgl. Satz 14. 29.) Ich rathe defshalb περὶ τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον zu lesen.

S. 110. Z. 7. v. u. περιγεγραμμένον . . . . . ἐγγεγραμμένον. Beide Worte müssen ihre Stellen verwechseln (Vgl. Satz 36.).

S. 113. Z. 10. τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάττονα λόγον. Stände hier blofs τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον, so würde man die nicht völlig genaue Angabe der beiden ersten Glieder der Proportion sich gefallen lassen können. So steht S. 124. Z. 18. τὸ δὲ σχῆμα, σὺν τῷ κώνῳ, τριπλασίονα λόγον ἔχει . . . . u. Z. 3. v. u. τὸν δὲ αὐτὸν, (sc. λόγον ἔχει) ὃν καὶ τὸ πολύγωνον, ferner S. 128. Z. 7. v. u. Ἐλάσσονα λόγον ἔξει . . . . τὸ εἰρημένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τῆς Δ πρὸς Ζ. In diesen Fällen findet nämlich nur eine allgemeine Andeutung der beiden Glieder Statt, die ein Verhältnifs bilden sollen, und diese Bezeichnungsform schliefst sich an eine andere dem Archimedes ganz gewöhnliche, wie S. 124. Z. 10. v. u. τὰ χωρία ἐστὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὸ . . . πρὸς τὸ . . . . oder noch genauer Z. 8. v. u. ὡς τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, ferner S. 125. Z. 14. ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον, u. dgl. Sobald indessen das erste Glied des Verhältnisses mit einer Nebenbestimmung angegeben worden, (wie hier τοῦ περιγεγραμμένου sc. πολυγώνου) unterläfst Archimedes nicht, auch das zweite Glied mit seiner entsprechenden Bestimmung anzugeben, wozu die Beispiele auf jeder Seite vorliegen. Defshalb mufs auch hier eine Lücke ergänzt und so gelesen werden: . . . πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον. Dieselbe Ergänzung ist Z. 8. v. u. zu machen, wo ich lese: τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα, endlich auch S. 114. Z. 7. v. u., wo zu lesen ist: περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τόν. Wegen der häufigen Wiederholung derselben Worte ist ihre Auslassung wohl erklärlich, und man darf sich nicht daran stofsen, dafs dieselbe Auslassung kurz hinter einander dreimal vorkommt, da sie sonst nicht eintritt, obschon die ähnlichen Formen der Darstellung so sehr häufig sind. Alle Uebersetzer haben übrigens die Lücken ergänzt.

S. 113. Z. 17. περιγεγραμμένου. Ich lese τοῦ περιγεγρ. mit der Baseler Ausgabe.

S. 114. Z. 1. v. u. τοῦτο γὰρ φανερὸν διὰ λημμάτων. Hauber hält dieses ganze Citat für unächt, weil ein solcher Lehrsatz, oder gar eine Sammlung von Lehnsätzen, nicht vorhanden ist, auf welche sich Archimedes hier berufen könnte. Dazu kommt, dafs in Satz 50 kein solches Citat sich findet, obgleich dieselbe Schlufsreihe dort gemacht wird. Eutocius ergänzt den mangelnden Beweis, und es ist allerdings möglich, dafs erst nach ihm, oder durch ihn selbst diese Worte als Notiz an den Rand gesetzt worden sind, und sich späterhin in den Text eingefügt haben. (Vgl. S. 46. Z. 12. u. die Anmerkung dazu.) Ich habe die Worte defshalb eingeklammert.

S. 117. Z. 9. ἀρτιόπλευρον. Der Beweis fodert nicht nur ein Vieleck von gerader Seitenzahl, sondern auch von gleichen Seiten, defshalb dürfte wohl ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον zu lesen sein. Zwar beruft sich Archimedes auf die frühere Konstruktion (Satz 23); allein da er eine

eine wesentliche Eigenschaft derselben ausdrücklich anführt, so ist kein Grund vorhanden, warum er die andere eben so wesentliche ausgelassen haben sollte. (Vgl. S. 118. Z. 7.). Eben so wird man S. 119. Z. 19. v. u. statt ἀρτιόπλευρον lesen müssen ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον. Torelli übersetzt hier falsch aequilaterum statt parilaterum.

S. 118. ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'. Eutocius führt bei diesem Satze den Satz 23 als solchen nach der Zahl an, woraus hervorgeht, dafs die Sätze von Torelli wenigstens bis dahin richtig gezählt sind.

S. 119. Z. 17. τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι. Hier ist offenbar nur von einem Abschnitte, welcher kleiner ist, als die Halbkugel, die Rede, weil nur unter dieser Bedingung die eingeschriebene Figur nebst dem Kegel ΑΕΓ eine Summe bilden; auch wird im Anfange des Beweises die Entstehung der Figur dieser Annahme gemäfs angegeben. Ich schliefse defshalb auf eine Lücke im Texte und setze zu obigen Worten hinzu: ἐλάσσονι ἡμισφαιρίῳ. Hauber hat diesen Zusatz eingeklammert. (Vgl. S. 126. Z. 14.)

S. 119. Z. 21. ὕψος δὲ τὴν, mufs heifsen ὕψος δὲ τῷ. Dieselbe Aenderung mufs Z. 9. v. u. vorgenommen werden.

S. 119. Z. 4. v. u. περιεχομένῳ. Man wird wohl εἰρημένῳ oder besser προειρημένῳ lesen müssen.

S. 120. Z. 21. ἴσης. Ich lese ἴσας mit den meisten Handschriften.

S. 121. Z. 13. v. u. ταῦτα γὰρ δέδεικται ἐν τοῖς λήμμασι. Hauber hält auch dieses Citat für unächt. Indessen dürften blofs die Worte ἐν τοῖς λήμμασι zu streichen sein, weil der Beweis sich aus dem Vorhergegangenen wirklich führen läfst. (Vgl. S. 122. Z. 5. v. u.)

S. 122. Z. 17. τοῦτο δὲ δῆλον. Ich lese τοῦτο δὴ δῆλον, weil τοῦτο sich auf den Lehrsatz selbst, nicht auf die letzten unmittelbar vorhergegangenen Worte bezieht. In einem ähnlichen Falle S. 123. Z. 9. v. u. heifst es noch genauer δῆλον οὖν τὸ λεγόμενόν ἐστιν ἐκ etc.

S. 122. Z. 22. v. u. περὶ τὸν τομέα. Ich lese περὶ τὸν ΑΔΒΕ τομέα, wie sonst gewöhnlich.

S. 122. Z. 2. v. u. ἥ ἐστιν ὕψος τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. Diese Worte sind sicher ein unächtes Einschiebsel, das sich aus dem Vorhergegangenen ἡ δή ἐστιν ὕψος τοῦ τμήματος τῆς μείζονος σφαίρας gebildet hat. Dort aber war ein solcher Zusatz nöthig, um Satz 23 anwendbar zu machen, wogegen jetzt der Zusatz als völlig müfsig erscheint. Ueberdiefs würde Archimedes selbst unstreitig geschrieben haben ὕψος τοῦ τμήματος τῆς ἐλάσσονος σφαίρας; ich streiche daher jene Worte gänzlich.

S. 124. Die zu Satz 47 gehörende Figur ist im Original verzeichnet, indem die Kegel Χ und Ο keineswegs einerlei Grundfläche haben, wie man aus der Zeichnung schliefsen sollte. Die Seiten müssen begreiflich parallel, auch mufs Μ gröfser als Ν gezeichnet sein.

S. 124. Z. 8. ἀρτιόγωνον. Ich lese ἀρτιογώνιον, wie sonst beständig in dieser Abhandlung.

S. 125. Z. 11. οὕτως ἐδείχθη. Hier ist οὕτως zu streichen, was sofort augenscheinlich ist. Das Wort ist wegen seiner mehrmaligen Wiederholung in den nächsten Zeilen auch hieher gerathen.

S. 126. Z. 9. v. u. πρὸς τὸν κύκλον. Man mufs lesen π. τὸν Ζ κύκλον, wie die meisten Mskte.

S. 127. Z. 14. σχήματος. Ich lese τμήματος. Da beide Worte häufig wiederkehren, so war leicht eine Verwechselung möglich. Die hier ausgesprochne Verhältnifsbeziehung ist umgekehrt schon früher da gewesen Z. 1 ff., wo richtig τμήματος steht.

S. 127. Z. 14. 15. Οὐκ ἄρα μείζων . . . . . ἐλάσσων. Beide Worte müssen verwechselt werden. Torelli übersetzt richtig.

S. 129. Z. 6. τοῦ τμήματος. Es ist τοῦ τομέως zu lesen; auch übersetzt Torelli richtig Maior est sectore. Archimedes nennt beständig den Abschnitt τμῆμα, den Ausschnitt τομεύς.

S. 129. Z. 22. δύο πλευρὰς. Für diese Worte ist ὑπεροχὰς zu lesen, wie schon Hauber richtig bemerkt. (Vgl. Quadr. d. Par. Satz 16.)

S. 129. Z. 13. v. u. τμήματι muſs τομεῖ heiſsen, was schon aus dem bisherigen Gebrauche, insbesondere aber aus den folgenden Worten hervorgeht: Μείζων δέ ἐστιν ὁ τομεὺς etc.

Von der Kugel und dem Cylinder. II.

S. 131. Z. 1. ἀπέστειλάς μοι. Torelli will mit Recht ἐπέστειλάς μοι lesen, da ἀποστέλλειν beständig in der Bedeutung fortsenden vorkommt. Durch die häufige Wiederholung des letztern Worts in der Zuschrift ist es auch an diese Stelle gerathen.

S. 150. Z. 9. τῶν ΒΖ. Eine Pariser Handschrift hat τὴν ΒΖ, was gewiſs falsch ist; allein sollte τῶν richtig sein, so müſste es wenigstens τῶν Β, Ζ heiſsen; ich halte dafür, man müsse τῆς ΒΓ lesen. Vgl. S. 157. Z. 7.

S. 150. Z. 13. v. u. οὕτω. Ich lese οὕτως, wie sonst immer.

S. 151. Z. 4. τοῦτο γὰρ etc. Hauber hält dieses Citat mit Unrecht für unächt, da Arch. dasselbe wirklich braucht und gleich darauf zeigt, in wie fern es anwendbar sei.

S. 151. Z. 5. Ἢ οὕτως. Ich mögte Ἦ οὕτως (ita sane) lesen, weil Arch. nicht etwa einen neuen Beweis vorbringt, sondern nur erläutert, in wie fern sein letzter Schluſs wirklich richtig sei. Dieselbe Bemerkung gilt für S. 153. Z. 3, nicht aber für S. 76. Z. 8 wo ganz richtig Ἢ οὕτως gelesen wird, weil hier eine neue Beweisform vorgetragen ist.

S. 151. Z. 8. ἴσος ἄρα ὁ Μ κῶνος. Ich lese mit den meisten Handschriften ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Μ κῶνος.

S. 153. Z. 10. v. u. πρὸς τὴν ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθόν. Ich rathe die Worte so umzustellen ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΒ.

S. 156. Z. 21. δοθεῖσα. Mit Hauber lese ich dafür ὀρθή, weil nur dann der Schluſs richtig ist, daſs $\mathrm{A\Gamma} : \mathrm{\Gamma B} = \mathrm{A\Delta}^2 : \mathrm{\Delta B}^2$; auch nennt Eutocius in der Anmerkung zu diesem Satze das Dreieck ΑΔΒ ganz richtig ein rechtwinkliges.

S. 157. Z. 2. v. u. ff. Ἐπεὶ δὲ λόγος etc. Hauber will hier ohne Grund die alte Lesart der Baseler Ausgabe mit einer kleinen Aenderung herstellen, da doch die Torellische als unbedenklich richtig durch Eutocius bestätigt wird.

S. 166. Z. 1. v. u. διὰ τὴν ἀντιστροφὴν etc. Eutocius citirt hier die Umkehrung des Apollonischen Satzes, allein der Beweis beruht auf dem direkten Satze selbst.

S. 167. Z. 11. δίχα τέμνεται. Ich setze hinzu κατὰ τὸ K, was erfodert wird, und worauf die gleich folgenden Worte κατὰ τὸ αὐτὸ K führen.

S. 168. Z. 9. τὸ ὑπὸ ΓΗΜ τῷ ὑπὸ ΓΗΩ. Ich lese τὸ ὑπὸ ΓΗΜ ἐπὶ τὴν ΑΓ τῷ ὑπὸ ΓΗΩ ἐπὶ τὴν ΑΓ, entsprechend S. 167. Z. 13. v. u.

S. 168. Z. 20. τὴν ΑΒ τεμνομένην. Ich möchte lesen τῆς ΑΒ τεμνομένης; indem hier die Genit. conseq. erwartet werden. Torelli hat dem gemäfs übersetzt.

S. 169. Z. 6. εἶχον. Man lese εἶχεν mit den meisten Handschriften.

S. 177. Z. 24. καὶ κύκλοι. Ich lese καὶ μέγιστοι κύκλοι, was der Sinn erfodert. Vgl. S. 178. Z. 22. v. u.

S. 178. Z. 6. τοῦτο γὰρ δειχθήσεται. Hauber hält diese Worte mit Recht für unächt, da Eutocius sie nicht anführt, obwohl er die Stelle erläutert, welche übrigens nur einer so kurzen Erläuterung bedarf, dafs Archimedes sie schwerlich einer besondern Berücksichtigung hinterher gewürdiget haben wird.

S. 178. Z. 5. v. u. Ἔστι δή. Ich lese Ἔσται δὴ mit zwei Handschriften.

S. 178. Z. 2. v. u. πεποιείσθω ὡς. Ich lese πεποιείσθω γὰρ ὡς, da Arch. dieses γὰρ sonst nicht auszulassen pflegt.

S. 181. Z. 7. οὐ δὲ τόν. Man mufs lesen οὐ δὲ τήν. Wahrscheinlich ist τὸν nur ein Druckfehler.

S. 186. Z. 19. v. u. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει. Man hält diese Worte gewöhnlich für eine Hinweisung des Arch. auf einen am Ende zu liefernden Beweis. Es mufs aber auffallen, dafs er diesen Beweis jetzt aussetzt, wo er bereits wirklich am Ende seiner Demonstration sich befindet; überdiefs sucht man einen solchen Beweis vergebens, und Hauber fand sich dadurch veranlafst, die Worte für unächt zu erklären. Allein wie, wenn die Baseler Ausgabe in der Lesart ἐπιτελεῖ das Richtige darböte? die ganze Beweisführung zerfält in zwei Theile. Das Ende des ersten Theils bezeichnet Archimedes durch die Worte τοῦτο δὲ ἐζητοῦμεν, und beginnt hierauf sofort den zweiten, ohne das eigentliche Thema dieses Theils zu wiederholen, was er sonst wohl thut. Sobald er nun die Demonstration dem Wesentlichen nach geendigt hat, setzt er hinzu τοῦτο γὰρ ἐπιτελεῖ (id quod rem conficit.). Dann darf auch nicht befremden, dafs Eutocius die Worte nicht wiederholt, was er gewifs mit ähnlichen Bemerkungen, wie bei Satz 5 gethan haben würde, wenn er hier ein Citat des Arch. zu erkennen geglaubt hätte.

S. 186. Z. 16. v. u. τὸ ἀπὸ ΒΔ. mufs heifsen τὸ ἀπὸ ΒΑ. Ich würde die erstere Lesart für einen blofsen Druckfehler halten, wenn nicht die richtige ausdrücklich als Variante angegeben wäre, und wenn nicht sowohl Torelli als Peyrard das falsche ΒΔ in ihren Uebersetzungen beibehalten hätten.

S. 186. Z. 13. v. u. Ἄλλοτε oder nach der Baseler Ausg. Ἀλλ' ὅτε ist beides falsch. Hauber setzt dafür Ὥστε, was nicht verwerflich scheint. Lieber noch mögte ich Ὥστε ἄρα lesen.

S. 187. Z. 15. v. u. Ὅτι ἄρα. Man wird Δεικτέον ἄρα ὅτι oder Φημὶ δὲ, ὅτι ἄρα, oder etwas Aehnliches dafür setzen müssen, wie auf der folgenden Seite so oft vorkommt.

S. 188. Z. 8. δὲ mufs gestrichen werden.

S. 188. Z. 14. v. u. διότι. Ich lese ὅτι, wie immer, und setze in der folgenden Zeile ein Kolon hinter ΘΒ.

S. 197. Der Mittelpunkt der beiden Kreise ΑΔΓΒ ist mit Ο zu bezeichnen, wie aus der ersten Anmerkung des Eutocius zu diesem Satze erhellt.

S. 197. Z. 11. Ἔςι. Man muſs offenbar Ἔςω lesen, dem vorhergehenden ἴςω und dem nachfolgenden ἴςωσαν gemäſs.

S. 197. Z. 13. τομῶν. Ich lese τμημάτων, was durch das folgende μεῖζον und ἔλασσον, so wie durch das ebenfalls gleich folgende εἰρημένων τμημάτων gerechtfertigt wird.

S. 198. Z. 1. τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων ἢ διπλασίων δυνάμει. Torelli will mit Unrecht diese Worte zu einem Einschiebsel machen. Dagegen hat er nicht angemerkt, daſs hinter diesen Worten augenscheinlich eine Lücke vorhanden ist. Man vermiſst zweierlei, nämlich

1) die Berücksichtigung der zweiten Figur — und

2) die Bestimmung der Gröſse von ΑΡ, welche im Fortgange des Beweises als bekannt vorausgesetzt wird, da doch nichts hierüber gesagt worden ist.

Rivault und Sturm haben in ihren Uebersetzungen die Ergänzung dem Sinne nach richtig gegeben, und Hauber ist ihnen gefolgt. Bis nun ein Codex Hülfe bringt, schlage ich vor, hinter δυνάμει folgende Worte, jedoch zur Auszeichnung eingeklammert, in den Text zu setzen: (ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ σχήματι τἀναντία τούτοις. Κείσθω τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ ΑΒ, τουτέςι τοῦ ἀπὸ ΕΖ ἴσον τὸ ἀπὸ ΑΡ· ἔςαι ἄρα τῇ ΕΛ ἴση ἡ ΑΡ, καὶ τῆς ΑΚ ἡ ΑΡ ἐγγυτέρω τῆς διχοτομίας τῆς ἐν τῷ Ο σημείῳ.)

Kreismessung.

S. 203. Z. 4. κύκλος. Die Handschriften lesen sämtlich κύκλος τριγώνῳ τῷ Ε; weſshalb ich κύκλος σὺν τριγώνῳ τῷ Ε für die ächte Lesart halte; denn es ist klar, daſs beide Figuren vorausgesetzt werden, nicht bloſs der Kreis. Lieset man bloſs κύκλος, so haben die folgenden Worte, ὡς ὑπόκειται gar keinen Sinn, da nicht der Kreis von einer gewissen Beschaffenheit sein soll, sondern das Dreieck. Wollte man die Wiederholung der Worte τριγώνῳ τῷ Ε anstöſsig finden, so könnte man vielleicht lesen: Ἐχέτω ὁ ΑΒΓΔ κύκλος· λέγω ὅτι ἴσος ἐςὶ τριγώνῳ τῷ Ε, ὡς ὑπόκειται.

S. 203. Z. 8. v. u. ἴςων. Man lese ἴςω, wie die Baseler Ausg. hat.

S. 205. Z. 21. v. u. διπλῆ. Die Baseler Ausgabe hat διπλῆ. Man muſs aber διπλασία lesen, auch ist das Komma hinter διπλῆ zu streichen. Vgl. Anm. zu S. 6. Z. 8.

S. 205. Z. 19. v. u. ΓΗΔ. Man lese ΓΗ, wie es nachher noch dreimal in diesem Satze vorkommt, und wie mehrere Manuskripte haben.

S. 205. Z. 3. v. u. ις'. Man lese ιδ'. Ich bemerke diesen Druckfehler nur, weil er eine Zahl betrifft.

S. 206. Z. 6. v. u. λεγ'. Ein offenbarer Schreibfehler für ΛΕΓ.

S. 207. Z. 3. διπλῆ. Man lese διπλασίων, weil diese Form unmittelbar darauf folgt.

S. 207. Z. 12. Ὡς τε, τὸ πολύγωνον etc. Man muſs lesen Ὥςτε ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, τοῦ περὶ τὸν κύκλον, τῆς διαμέτρου ἐςὶ τριπλασίων, καὶ ἔλαττον ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μείζων. Vgl. S. 208. Z. 13. f.

S. 207. Z. 7. v. u. ΒΑΓ. Man lese ΒΑ, ΑΓ.

S. 208. Z. 13. περίμετρος. Es muſs heiſsen ἡ περίμετρος.

S. 208. ff. (*zu dem Kommentare des Eutocius*) Eutocius hat in seinen Anmerkungen die Schemata der Multiplikationen gegeben, welche in der Abhandlung selbst vorkommen. Diese Angaben sind höchst schätzbar, weil sie zu den wenigen Resten gehören, welche uns von ausgeführten Zifernrechnungen der Griechen übrig geblieben sind. Wallis (*Opp. Vol. III. Oxon.* 1699) hat sich um diese Schemata das groſse Verdienst erworben, sie von der unglaublichen Menge von Fehlern zu reinigen, welche durch Unwissenheit und Sorglosigkeit der Abschreiber in sie gekommen waren. Auch enthält seine Ausgabe nur einen einzigen Druckfehler in diesen Schematen. In der dritten Multiplikationstabelle auf S. 557. Z. 6. fehlt nämlich hinter dem δ ein ς. Derselbe Fehler ist in die Ausgabe Torellis übergegangen und an andern Stellen mit andern vermehrt.

Ueber die Zahlenbezeichnung selbst ist nachzusehen *Delambre über die Arithmetik der Griechen, übs. v. J. J. J. Hoffmann. Mainz* 1817. 4. (Das franz. Original befindet sich hinter Peyrards Uebersetzung des Archimedes und in *Delambre histoire de l'Astronomie ancienne Tom. II. Paris* 1817.). Allein diese kleine Schrift ist durch eine Menge von Druckfehlern über die Gebür entstellt. Deſshalb, und weil auch hier nur wenige Rechnungsbeispiele aus Eutocius gegeben sind, habe ich die vollständigen Schemata hier beigefügt, und zwar nach der Delambreschen Bezeichnungsart, mit Weglassung des Akutus am Ende einer Zahlenreihe von lauter ganzen Zahlen. Wallis bemerkt zwar (*a. a. O. S.* 529 *und S.* 571), daſs in den Manuskripten die Kardinalzahlen durch eine Querlinie oben bezeichnet würden, die Ordnungszahlen aber durch den Akutus; er hat aber selbst den Querstrich in den Schematen gröſstentheils weggelassen, des leichtern Drucks wegen, und er ist hier auch völlig unnöthig. Dagegen müssen die Brüche durchaus von den ganzen Zahlen durch einen kleinen Raum getrennt werden. In den hier gegebenen Schematen sind die Nenner der Brüche am Ende mit dem Akutus bezeichnet. (*S. Delambre a. a. O. S.* 12.) Der Bruch $\frac{1}{2}$ wird durch ein besonderes Zeichen 𐅵 (nicht K) angedeutet. Alle bei Eutocius mehrmals vorkommenden Rechnungen sind nur einmal aufgeführt.

1)	τϛ	306
p. 209.	τϛ	306
	$\overset{\vartheta}{\mathrm{M}}$ ͵αω	91800
	͵αωλϛ	1836
	$\overset{\vartheta}{\mathrm{M}}$ ͵γχλϛ	93636

2)	ρνγ	153
	ρνγ	153
	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ ͵ετ	15300
	͵ζχν	7650
	υνθ	459
	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γυθ	23409

3)	σξε	265
	σξε	265
		40000
	$\overset{\delta}{\mathrm{M}}\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ ͵β͵α	12000
		1000
	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ ͵β͵γχτ	12000
		3600
	͵ατκε	300
		1325
	$\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ σκε	70225

4)	φοα	571
p. 210.	φοα	571
		250000
	$\overset{\kappa\epsilon}{\mathrm{M}}\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$ ͵εφ	35500
		35000
	$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$ ͵ε͵δϡο	4970
	φοα	571
	$\overset{\lambda\beta}{\mathrm{M}}$ ͵ϛμα	326041

5)	φϟα η'	591 $\frac{1}{8}$
	φϟα η'	591 $\frac{1}{8}$
		250000
	$\overset{\kappa\epsilon}{\mathrm{M}}\overset{\delta}{\mathrm{M}}$ ͵εφξβ𐅵	45562 $\frac{1}{2}$
		45000
	$\overset{\delta}{\mathrm{M}}$ ͵ε͵ηρϟια δ'	8190
		11 $\frac{1}{4}$
	φϟα η'	591 $\frac{1}{8}$
	ξβ𐅵 ια δ'η' ξδ'	62 $\frac{1}{2}$
		11 $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}$
	$\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$ ͵θυκη𐅵 δ' ξδ'	349428 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64}$
		od. 349428 $\frac{49}{64}$

6)	͵αρξβ η'	1162 $\frac{1}{8}$
	͵αρξβ η'	1162 $\frac{1}{8}$
		1162125
	$\overset{\rho}{\mathrm{M}}\overset{\iota}{\mathrm{M}}\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}$ ͵βρκε	116212 $\frac{1}{2}$
		66000
	$\overset{\iota}{\mathrm{M}}\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ ͵ϛσιβ𐅵	3600
		127 $\frac{1}{2}$
	$\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}$ ͵ϛ͵γχρκζ𐅵	2200
	͵βσρκδ δ'	124 $\frac{1}{4}$
		145 $\frac{1}{4} + \frac{1}{64}$
	ρμε δ' ξδ'	1350534 $\frac{1}{2} + \frac{1}{64}$
	$\overset{\rho\lambda\epsilon}{\mathrm{M}}$ φλδ𐅵 ξδ'	od. 1350534 $\frac{33}{64}$

7)	͵αροβ η'	1172 $\frac{1}{8}$
	͵αροβ η'	1172 $\frac{1}{8}$
		1172125
	$\overset{\rho}{\mathrm{M}}\overset{\iota}{\mathrm{M}}\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ ͵βρκε	117212 $\frac{1}{2}$
		77000
	$\overset{\iota}{\mathrm{M}}\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ ͵ζσιβ𐅵	4900
	$\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ ͵ζ͵δϡρμη𐅵 δ'	148 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
		2200
	͵βσρμδ δ'	144 $\frac{1}{4}$
	ρμϛ𐅵 ξδ'	146 $\frac{1}{2} + \frac{1}{64}$
		1373877 $\frac{1}{64}$
	$\overset{\rho\lambda\zeta}{\mathrm{M}}$ ͵γωοζ ξδ'	

8)	͵βτλδ δ'	2334 $\frac{1}{4}$
p. 211.	͵βτλδ δ'	2334 $\frac{1}{4}$
		4668500
		699000
	$\overset{\upsilon}{\mathrm{M}}\overset{\xi}{\mathrm{M}}\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}$ ͵ηφ	1275
		69900
	$\overset{\xi}{\mathrm{M}}\overset{\vartheta}{\mathrm{M}}$ ͵θ͵ασοε	127 $\frac{1}{2}$
		8000
	$\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}$ ͵θϡρκζ𐅵	1200
		120
	͵η͵ασρκιϛα	16
	φπγ𐅵 ιϛ'	1
		583 $\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$
	$\overset{\phi\mu\delta}{\mathrm{M}}$ ͵ηψκγ ιϛ'	5448723 $\frac{1}{16}$

9)

͵βτλθ δʹ	$2339\frac{1}{4}$
͵βτλθ δʹ	$2339\frac{1}{4}$
	4660000
υ ξ ϛ α ΜΜΜΜ ͵ηφ	18500 699000
ξ θ ΜΜ ͵θ͵βψοε	2775 69900
ϛ Μ ͵θϡσοζ∠ʹ	$277\frac{1}{2}$ 18000
α Μ ͵η͵βψσοπαβ δʹ	2700 270 81
φπδ∠ʹ δʹ ιϛʹ	$2\frac{1}{4}$ $584\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$
φμζ Μ ͵βϟ∠ʹ ιϛʹ	$5472090\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ $5472090\frac{9}{16}$

10)

͵αφξ	1560
p. 213. ͵αφξ	1560
ρ ν ϛ ΜΜΜ	1560000 500000
ν κε γ ΜΜΜ	250000 30000
ϛ γ ΜΜ ͵γχ	60000 33600
σμγ Μ ͵γχ	2433600

11)

ψπ	780
ψπ	780
μθ ε ΜΜ ͵ϛ	490000 56000
ε Μ ͵ϛ͵ϛυ	56000 6400
ξ Μ ͵ηυ	608400

12)

͵ατνα	1351
͵ατνα	1351
ρ λ ε ΜΜΜ ͵α	1351000 390000
λ θ α ΜΜΜ ͵ετ	15300 50000
ε α ΜΜ ͵ε͵βφν	15000 2550
͵ατνα	1351
ρπβ Μ ͵εσα	1825201

13)

͵βϡια	2911
͵βϡια	2911
υ ρπ β ΜΜΜ ͵β	4000000 1822000
ρπ πα ΜΜ ͵θϡ	1800000 819900
β Μ ͵θρι	29110
͵βϡια	2911
ωμζ Μ ͵γϡκα	8473921

14)

͵γιγ∠ʹ δʹ	$3013\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
͵γιγ∠ʹ δʹ	$3013\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
ϡ γ ΜΜ ͵θ͵αφψν	939000 1500 750
γ Μ ρλεβ∠ʹ	30135 $2\frac{1}{2}$
͵θλθα∠ʹ∠ʹ δʹ	9039 $1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
͵αφϛ∠ʹ δʹ ηʹ	$1506\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
ψνγ δʹ ηʹ ιϛʹ	$753\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$
ϡη Μ ͵βχπθ ιϛʹ	$9082689\frac{1}{16}$

15)

͵αωκγ	1823
p. 214. ͵αωκγ	1823
ρ π β ΜΜΜ ͵γ	1823000 800000
π ξδ α ΜΜΜ ͵ϛ͵βυ	640000 16000 2400
β α ΜΜ ͵ϛυξ	20000 16460
͵γ͵βυξθ	3000 2469
τλβ Μ ͵γτκθ	3323329

16)

σμ	240
σμ	240
δ Μ ͵η	48000 8000
͵η͵αχ	1600
ε Μ ͵ζχ	57600

17)

͵αωλη $\theta^{\iota\alpha'}$	$1838\frac{9}{11}$
͵αωλη $\theta^{\iota\alpha'}$	$1838\frac{9}{11}$
$\overset{\rho}{M}\overset{\pi}{M}\overset{\gamma}{M}$ ͵ηωιη $\beta^{\iota\alpha'}$	$1838818\frac{2}{11}$
$\overset{\pi}{M}\overset{\xi\delta}{M}\overset{\beta}{M}$ ͵δϛυχνδ $\varsigma^{\iota\alpha'}$	800000
$\overset{\gamma}{M}\overset{\beta}{M}$ ͵δϡσμκδ $\varsigma^{\iota\alpha'}$	640000
ψϛυσμξδϛ $\varsigma^{\iota\alpha'}$	24000
ωιη $\beta^{\iota\alpha'}$	6400
χνδ $\varsigma^{\iota\alpha'}$	$654\frac{6}{11}$
κδ $\varsigma^{\iota\alpha'}$	30000
ϛ $\varsigma^{\iota\alpha'}$ $\pi\alpha^{\rho\kappa\alpha'}$	24900
$\overset{\tau\lambda\eta}{M}$ ͵ασνα $\zeta^{\iota\alpha'}$ $\pi\alpha^{\rho\kappa\alpha'}$	240
oder	$24\frac{6}{11}$
$\overset{\tau\lambda\eta}{M}$ ͵ασνβ $\lambda\zeta^{\rho\kappa\alpha'}$	8000
	6400
	240
	64
	$6\frac{6}{11}$
	$818\frac{2}{11}$
	$654\frac{6}{11}$
	$24\frac{6}{11}$
	$6\frac{6}{11}+\frac{81}{121}$
	$3381251\frac{7}{11}+\frac{81}{121}$
	oder
	$3381252\frac{37}{121}$

18) p. 215.

͵αζ	1007
͵αζ	1007
$\overset{\rho}{M}$ ͵ζ	1007000
͵ζμθ	7049
$\overset{\rho\alpha}{M}$ ͵δμθ	1014049

19)

ξϛ	66
ξϛ	66
͵γχτξ	3600
τξλϛ	360
͵δτνϛ	360
	36
	4356

20)

͵αθ ϛʹ	$1009\frac{1}{6}$
͵αθ ϛʹ	$1009\frac{1}{6}$
$\overset{\rho}{M}$ ͵θρξϛ∠ ϛʹ	$1009116\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$
͵θπα α∠	9081
ρξϛ∠ ϛʹ α∠ λϛʹ	$1\frac{1}{2}$
$\overset{\rho\alpha}{M}$ ͵ηυιζ γʹ λϛʹ	$166\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$
	$1\frac{1}{2}+\frac{1}{36}$
	$1018417\frac{1}{3}+\frac{1}{36}$
	oder
	$1018417\frac{13}{36}$

21)

͵βιϛ ϛʹ	
͵βιϛ ϛʹ	$2016\frac{1}{6}$
	$2016\frac{1}{6}$
$\overset{\upsilon}{M}\overset{\beta}{M}\overset{\alpha}{M}$ ͵βτλγ γʹ	4020000
	$12333\frac{1}{3}$
$\overset{\beta}{M}$ ρξα∠ ϛʹ	$20161\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$
	12060
$\overset{\alpha}{M}$ ͵βξλϛα	36
	1
τλγ γʹ	$333\frac{1}{3}$
α∠ ϛʹ	$1\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$
α λϛʹ	$1\frac{1}{36}$
$\overset{\upsilon\varsigma}{M}$ ͵δϡκη λϛʹ	$4064928\frac{1}{36}$

22)

͵βιζ δʹ	$2017\frac{1}{4}$
͵βιζ δʹ	$2017\frac{1}{4}$
$\overset{\upsilon}{M}\overset{\beta}{M}\overset{\alpha}{M}$ ͵δφ	4020000
	14500
	$20172\frac{1}{2}$
$\overset{\beta}{M}$ ροβ∠	14070
	49
$\overset{\alpha}{M}$ ͵δομθ α∠ δʹ	$1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
	$502\frac{1}{2}$
φβ∠	$1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$
α∠ δʹ ιϛʹ	$4069297\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$
	oder
$\overset{\upsilon\varsigma}{M}$ ͵θσϟζ∠ ιϛʹ	$4069297\frac{9}{16}$

Von den Schneckenlinien.

S. 217. Z. 1. τῶν ποτὶ Κώνωνα ἀποσταλέντων θεωρημάτων. Man behauptet gewöhnlich, daſs Konon von Samos der erste Entdecker der Schneckenlinie sei, daſs aber Archimedes die Eigenschaften derselben näher untersucht habe. Ja man geht noch weiter, und behauptet, auch die in gegenwärtiger Abhandlung erwiesenen Lehrsätze verdankten ihren Ursprung dem Konon, nur habe Archimedes die Beweise derselben nachgeliefert. Daſs aber wenigstens die letztere Meinung irrig sei, scheint aus Folgendem hervorzugehen:

1) Archimedes spricht an unserer Stelle von den Sätzen dieser Abhandlung ausdrücklich wie von solchen, die er dem Konon ohne Beweise zugesendet, nicht aber umgekehrt von ihm erhalten habe; (ποτὶ, nicht ἀπὸ) und setzt gleich darauf hinzu, Konon sei mit der Beweisführung nicht zu Stande gekommen, weil er zu früh gestorben. Hätte Konon die Sätze selbst aufgestellt, so muſste er die Beweise derselben schon vorher selbst gefunden haben, denn dergleichen Sätze, wie diese, greift man nicht auf das Gerathewohl aus der Luft, um sie hinterher zu beweisen.

2) In der Abhandlung über die Konoiden und Sphäroiden liefert Archimedes die bis dahin noch fehlenden Beweise samt denen für einige andere hinterher aufgefundene Sätze, und zeigt dieſs gleich zu Anfange in der Vorrede an, ohne im Mindesten anzudeuten, daſs diese letzteren demnach völlig sein Eigenthum, jene ersteren aber zum Theil das Eigenthum des Konon wären. Im Gegentheil sagt er mit dürren Worten, er sei zu der Zeit, wo er die genannten Lehrsätze an Konon gesendet, mit den Beweisen der jetzt nachträglich folgenden noch nicht zu Stande gewesen, und habe sie deſshalb mit den andern Aufgaben (προβεβλημένα, nicht etwa ἀποδείξεις) nicht gleichzeitig bekannt machen können. Denn daſs er die Beweise der andern Sätze schon vor ihrer Uebersendung an Konon fertig haben muſste, versteht sich von selbst.

3) Diese Sätze sind offenbar gleichzeitig mit denen aufgestellt, welche in dem Buche v. d. Kugel und d. Cylinder II. bewiesen worden. Dort aber erklärt Archimedes in der Vorrede unverhohlen, er selbst habe diese ehemals an Konon gesendet, nicht etwa umgekehrt von ihm erhalten.

S. 217. Z. 4. v. u. ἐξευρών. Zwei Handschriften haben ἐξεῦρεν, weſshalb ich ἐξεῦρεν ἂν vorschlage. Man bemerke dabei den Unterschied zwischen εὑρίσκειν und ἐξευρίσκειν; indem hier jenes das Auffinden der Beweise zu gegebenen Sätzen, dieses das Entdecken neuer Wahrheiten andeutet.

S. 218. Z. 4. καὶ γὰρ συμβάινει . . . . ἀποτευξομένα (l. ἀποτευξόμενα). Die Stelle ist erst von Torelli in ihre jetzige Form gebracht, jedoch nach meiner Ansicht noch keineswegs berichtiget. Zuvörderst verstehe ich ἐν αὐτῷ nicht, und lese dafür ἐν αὐτοῖς; da Archimedes gar nicht von einer vollständigen Schrift an den Konon redet, sondern nur von Sätzen, welche er diesem mitgetheilt habe, und welche er beständig im Plural anführt. Vielleicht ist hieraus der Irthum entstanden, als wären die beiden falschen Sätze vom Konon aufgestellt, da sie doch vom Archimedes selbst herrühren, welcher sie, wie er zu verstehen giebt, als Prüfstein für gewisse Leute brauchen wollte. Hierauf folgen in der Baseler Ausgabe die Worte μὲν κεχωρισμένα· τέλως δὲ ποτ᾽ ἔσσομεν, womit die Handschriften übereinstimmen. Barrow verbessert . . . . εἶναι κεχωρισμένα· τέλως δὲ ποτθήσομεν (für προςθήσομεν); allein dann fehlt die wesentliche Bemerkung, dafs eben diese Sätze falsch seien. Das hat Torelli allerdings gefühlt, aber sich zu weit vom gegebenen Texte entfernt. Ich mögte defshalb lesen τέλως δὲ ἀποισσόμενα, oder auch τέλος οὐδέποθ' ἑξόμενα, und habe hiernach übersetzt. Die Verwandlung des Barrowschen εἶναι in εἶμεν ist zu billigen.

S. 218. Z. 21. v. u. μὴ μείζονα. Das μὴ mufs augenscheinlich gestrichen werden; wefshalb Rivault richtig übersetzt *rationem habeat non minorem ea etc.* Die Sache selbst erhellet deutlich aus *Kug. u. Cyl. II. S.* 8.

S. 218. Z. 13. v. u. Κεχώρισται γὰρ . . . . . Diese Stelle hat den Auslegern grofse Noth gemacht, und Torelli erklärt sie für die einzige, mit welcher er nicht habe aufs Reine kommen können; da Arch. vorher nur von zwei falschen Sätzen spreche und man hier doch deren drei finde. Dafs indessen wirklich nur von den zwei falschen Sätzen, welche in meiner Uebersetzung als solche aufgeführt sind, die Rede sei, hat bereits Rec. gezeigt, nur geht dieser davon aus, dafs die Sätze vom Konon herrühren und dafs defshalb Archimedes eine doppelte Auslegung des ersten Satzes mache, hinterher nachweisend, derselbe sei in beiden Fällen falsch. Allein nicht Konon, sondern Archimedes selbst ist der Urheber der beiden Sätze, mithin kann von einer doppelten Auslegung des ersten gar nicht die Rede sein. Ich halte dafür, dafs Torelli (Vgl. *dessen Vorrede S. XIV.*) ganz richtig geahnet habe, es befinde sich hier ein fremdes Einschiebsel, und lese defshalb so: κεχώρισται γὰρ ἐν αὐτοῖς τόδε· αἴκα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ εἰς ἄνισα ποτ' ὀρθὰς διαμέτρῳ τινὶ τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ, τὸ μεῖζον τμᾶμα τᾶς σφαίρας ποτὶ τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλάσιον λόγον etc., so dafs folgende Worte weggeworfen werden: ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν bis τὸ γὰρ μεῖζον τμᾶμα. Die Einschiebung dieser Worte ist leicht genug zu erklären, da sie vorher und nachher wieder vorkommen. Falsch übersetzt Torelli die Worte κεχώρισται γὰρ ἐν αὐτοῖς τόδε durch *Atque hoc etiam in illis seiunctum erat.* Richtiger hat schon Rivault: *Distinguebatur enim et hoc in ipsis.* Man mufs übrigens χωρίζειν hier von χῶρος ableiten, nicht von χωρίς.

Noch ist nicht zu übersehen, dafs Archimedes in *Kug. u. Cyl. II.* alle seine dem Konon über diese Materie mitgetheilten Sätze befriedigend erweiset, mit Ausnahme dieser beiden falschen, deren er gar nicht erwähnt, sondern statt ihrer zwei andere Sätze aufstellt und darthut, nämlich den 9ten und 10ten, aus welchen jetzt die Falschheit der von ihm mit einer gewissen Schalkheit hingeworfenen beiden Sätze klar hervorgeht. Absichtlich erwähnt er diese falschen Sätze erst jetzt, um dem Dositheus und Anderen Zeit zu lassen, das Sachverhältnifs von selbst aufzufinden, was indessen nicht geschehen zu sein scheint.

S. 219. Z. 24. ὀξυγωνίων κώνων. Eine Handschrift hat ὀξυγωνίου κώνου, was wohl aufzunehmen ist, da hier nicht von den Schnitten mehrerer Kegel, sondern eines Kegels überhaupt gesprochen wird. Der Pluralis konnte leicht aus dem Pluralis ἐσσοῦνται τομαὶ entstehen.

S. 219. Z. 22. v. u. ὄντω. Die alte Lesart war οὖ τω. Man lese οὔπω.

S. 219. Z. 10. v. u. ὑπὸ τᾶς. Ich lese ὑπό τε τᾶς mit den meisten Handschriften.

S. 220. Z. 20. καὶ ἐλάσσων. Ich lese mit einigen Manuskripten καὶ ἁ ἐλάσσων.

S. 220. Z. 19. v. προόκεινται. Man lese πρόκειται.

S. 220. Z. 16. v. u. λήμματα τάδε. Es mufs heifsen λημμάτων τόδε, weil nur ein Lehnsatz hier angeführt wird.

S. 223. Z. 9. v. u. τεμεῖν· καὶ πεσεῖται ἐκτὸς, Ich lese τέμνειν· καὶ πεσεῖται ἐκτὸς τᾶς ΓΛ, wie im folgenden Satze S. 224. Z. 17.

S. 223. Z. 3. v. u. ποτιβαλεῖν ποτὶ. Nach Torellis Vorschlage ist zu lesen ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν ποτὶ. Vgl. oben Z. 12.

S. 226. Z. 20. ἔσω. Ich lese ἔσωσαν mit einer Handschrift und eben so S. 228. Z. 22. v. u. mit allen Handschriften.

S. 226. Z. 27. δὲ. Ich lese δὴ wie S. 228. Z. 15. v. u.

S. 227. Z. 11. εἶμεν. Mit allen Manuskripten ist zu lesen εἶμεν τᾶς Θ.

S. 228. Z. 18. v. u. δὴ. Hier ist δὲ zu lesen, wie in dem ähnlichen Fall S. 226. Z. 22. ganz richtig steht.

S. 229. Z. 18. ἐκδείχθη. Ich lese καταδείχθη, wie eine Pariser Handschrift; andere haben κατδείχθη und καδείχθη. Die Baseler Ausgabe hat ΚΑδείχθη. Torelli schlägt ἀποδείχθη vor, ohne jedoch jene Handschriften zu kennen.

S. 229. Z. 22. v. u. ἴσον. Ich lese ἴσα mit den meisten Handschriften.

S. 231. Z. 11. ὁποιακιῶν. Ohne Zweifel muſs ὁποσακιῶν gelesen werden, was auch mehrere Handschriften haben. Die Verwechselung von ποσὸς und ποιὸς ist häufig.

S. 233. Z. 21. v. u. τὸν αὐτὸν. Man lese ὅτι τὸν αὐτὸν.

S. 234. Z. 20. δεικτέον ὅν. Mit den meisten Handschriften lese ich δεικτέον οὕτως.

S. 234. Z. 10. v. u. Ἴσα γὰρ ἁ ΡΑ τᾷ ΑΔ. Torelli vermuthet, man müsse hinzusetzen μείζων δὲ ἁ ΙΑ τᾶς ΑΛ, und diese Vermuthung gewinnt an Wahrscheinlichkeit durch die ganz ähnliche Form auf S. 235. Z. 17. v. u.

S. 235. Z. 22. περιφέρειαν. Man lese περιφερείας mit allen Manuskripten.

S. 236. Z. 21. v. u. ποτὶ ΘΡ. Ich läse gern ποτὶ τὰν ΘΡ εὐθεῖαν, wenn nicht in den folgenden Sätzen dieselbe Auslassung vorkäme. Vgl. S. 238. Z. 25. und S. 239. Z. 6. v. u. Torelli hat in seiner Uebersetzung das fehlende εὐθεῖαν zugesetzt, und zwei Zeilen weiter fügt Arch. selbst diese Bestimmung hinzu, wo sie schon eher hätte fehlen können.

S. 237. Z. 7. v. u. Ἐι δὲ κατὰ τᾶς. Ich halte dafür, κατὰ müsse gestrichen werden, weil Archimedes ἐπιψαύειν sonst immer mit dem bloſsen Genit. konstruirt.

S. 238. Z. 6. τὰ αὐτὰ. Man lese bloſs αὐτὰ, wie S. 236. Z. 13.

S. 239. Z. 9. πολλαπλασία. Man lese ὅτι πολλαπλασία.

S. 239. Z. 19. ἐπιζευχθεῖσα συμπεσεῖται αὐτᾷ. Man lese ἐπιζευχθεῖσα· συμπεσεῖται αὐτᾷ.

S. 239. Z. 23. v. u. ΔΕΖ. Man setze ΕΔΖ.

S. 240. Z. 13. ἁ ΧΑ περιφέρεια. Das Wort περιφέρεια muſs offenbar gestrichen werden.

S. 240. Z. 16. v. u. κατὰ τὸν ἐλάσσονα. Nach Torellis Vermuthung lese ich κατὰ τὸν ἑνὶ ἐλάσσονα.

S. 240. Z. 8. v. u. καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ἐξ ὁμοίων τομῶν συγκείμενον. Die Worte müssen umgestellt, auch τομῶν in τομέων verwandelt werden, wie in den beiden folgenden ganz ähnlichen Säzzen, und späterhin öfters. Man lese daher ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι.

S. 241. Z. 8. v. u. λέλαπται. Wäre das Wort ächt, so müſste man wenigstens οὐ λέλαπται lesen, da der in Rede stehende Kreisausschnitt wirklich nicht mit einem andern ihm gleichen korrespondirt. Ich nehme daher die Lesart λέλειπται an, welche eine Pariser Handschrift darbietet.

S. 242. Z. 22. πάλιν ἓν δίχα. Nach Torellis annehmlichem Vorschlage muſs man lesen πάλιν ἓν ἀεὶ δίχα.

S. 242. Z. 12. v. u. σχήματος παντός. Man muſs mit einigen Handschriften durchaus lesen σχήματος ἐλάσσονι παντός.

S. 242. Z. 10. v. u. διότι. Man setze ὅτι.

S. 243. Z. 4. τοῦ περάτος. Ich lese τῶν περάτων nach Anleitung mehrerer Mskte.

S. 244. Z. 15. τοῦ κύκλου. Nach mehreren Mskten. setze ich τοῦ ϛ κύκλου. Vgl. S. 245. Z. 3.

S. 244. Z. 18. v. u. οἱ τομέες. Nach den Handschriften ist zu lesen οἱ μὲν τομέες. Vgl. S. 245. Z. 26.

S. 245. Z. 22. μεγίστᾳ. Καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, οἱ. Die Interpunktion ist unerträglich; man muſs hinter μεγίστᾳ ein Komma, und hinter ὑπερεχουσᾶν einen Punkt setzen. Vgl. S. 244. Z. 31.

S. 246. Z. 30. γεγράψαι. Man lese περιγεγράψαι mit allen Handschriften.

S. 246. Z. 16. v. u. τοῦ κύκλου. Ich lese τοῦ ϛ κύκλου. Vgl. S. 247. Z. 9. v. u.

S. 248. Z. 22. διότι. Man setze ὅτι.

S. 249. Z. 15. v. u. ἐλάσσων ἐστὶ, muſs heiſsen ἐλασσόν ἐστι nach den meisten Handschriften, deren Ansehen hier nicht einmal nöthig ist.

S. 249. Z. 13. v. u. ἐς τὰν, muſs heiſsen ἐς τ' ἄν.

S. 251. Z. 14. v. u. ᾧ δεδείκνυται. Ich lese ὧδε δείκνυται. Die Baseler Ausgabe hat ὦ δὲ δείκνυται und mehrere Handschriften ὡς δὲ δείκνυται.

S. 251. Z. 13. v. u. Ἐπειδή. Man lese Ἐπεὶ δή.

S. 253. Z. 21. v. u. ὁποιᾳοῦν. Man muſs nothwendig μιᾷ lesen, denn nur für diesen Fall führt Archimedes den Beweis, auch hat er in der Vorrede nichts weiter versprochen; und hätte er wirklich dem Satze Allgemeinheit geben wollen, so würde er nach seiner sonstigen Gewohnheit erst den besondern Fall angekündigt, und das Allgemeine an den Schluſs verwiesen haben. Dazu kommt, daſs er in dem Beweise selbst auf Satz 26 sich beruft, welcher nur den besondern, nicht den allgemeinen Fall berücksichtigt, so daſs in der That noch ein neuer Hülfssatz erfoderlich sein würde, um das hier Behauptete allgemein darzuthun.

S. 254. Z. 9. ἔχειν. Da einige Handschriften ἔχων haben, so dürfte ἔχον die wahre Lesart sein.

Von den Konoiden und Sphäroiden.

S. 258. Z. 5 und Z. 8. v. u. τμάματα. An beiden Stellen muſs man τμᾶμα lesen, wie es S. 259. Z. 1. richtig steht, indem nur von einem Abschnitte die Rede sein kann.

S. 258. Z. 12 und S. 259. Z. 9. ὑπετιθέμεθα. Vielleicht ist zu lesen ὑπεθέμεθα.

S. 259. Z. 17. ἐπιπλατιὰν mufs heifsen ἐπίπλατυ. Vgl. S. 257. Z. 16. v. u. wo übrigens auch ein Accentfehler zu verbessern, und ἐπιπλάτεα zu lesen ist. Ferner S. 278. Z. 6. v. u.

S. 260. Z. 1. τὰν αὐτὰν. Man lese τὸν τὰν αὐτὰν mit den meisten Mskten.

S. 260. Z. 18. v. u. ἰσοσφαιροειδέων. Mit vier Handschriften lese man ἴσων σφαιροειδέων, dem gewöhnlichen Sprachgebrauche gemäfs.

S. 260. Z. 13. v. u. τμάματος. Wahrscheinlich ist hier σχήματος zu lesen, obgleich kein Manuskript darauf hinführt, und die alte Lesart sich zur Noth ertragen läfst; allein nach der vorgeschlagenen Aenderung korrespondirt die Aufgabe besser mit der in *Kug. u. Cyl. II. S.* 5. Uebrigens mufs das Komma hinter τμάματος gestrichen werden.

S. 260. Z. 6. v. u. προβλήματα. Zwei Handschriften haben dafür προκείμενα, was ich für richtig halte, da nicht blofs Aufgaben vorgelegt sind. Ein Anderes wäre es, wenn im Texte προβεβλημένα stände.

S. 263. Z. 3. ταῖς . . . . . πλευραῖς. Mufs nothwendig heifsen τᾷ . . . . πλευρᾷ.

S. 263. In der Figur sind die Buchstaben Θ, I, verwechselt.

S. 263. Z. 10. v. u. ἐπεῖτε τὰ παραβλήματα. Wahrscheinlich ist zu lesen ἐπεὶ τῶν παραβλημάτων. Es könnten nämlich τὰ παραβλήματα hier nichts anderes bedeuten, als die Räume A selbst, und dafs diese sich um gleiche Unterschiede übertreffen, geht eben erst aus den gleichen Unterschieden ihrer Breite hervor. Nach dieser Verbesserung bedeuten dann παραβλημάτων die ganzen Rechtecke AH, AZ etc. wie sonst immer.

S. 263. Z. 6 v. u. und Z. 4. v. u. διπλασίονα. Man lese jedesmal διπλάσια. Vgl. Anm. zu S. 6. Z. 8.

S. 264. Z. 21. Αἴκα κώνυ τομᾶς. In den Ausgaben ist dieser von mir mit A bezeichnete Satz dem dritten ohne besondere Ueberschrift angehängt; er enthält aber keineswegs eine Folgerung aus demselben, sondern besteht für sich, und sollte defshalb eigentlich eine eigene Zahl erhalten. Um die Zahlenfolge indessen nicht zu stören, habe ich ihn durch einerlei Hauptzahl mit dem folgenden verbunden, mit welchem er nähere Verwandtschaft hat.

S. 267. Z. 20. γάρ τε. Nach Anleitung der Handschriften ist γάρ τι zu lesen.

S. 270. Z. 12. v. u. Οὐ δὲ, mufs heifsen Οὐ δῆ.

S. 270. Z. 1. v. u. ἔλλειψις. Diese Benennung findet sich hier zum ersten Male. Aufserdem kommt sie nur noch zweimal vor, nämlich S. 272. Z. 3. v. u. und S. 273. Z. 10. Allein an der Stelle S. 272. Z. 3. v. u. sind die Worte τᾶς ἐλλείψεως wahrscheinlich ganz zu streichen; denn wären sie ächt, so müfste es unmittelbar zuvor auch heifsen ἀπὸ τᾶς ZΓ τῶ κύκλω. Mithin bleiben uns nur die beiden übrigen Stellen. Nun mufs es schon auffallen, dafs Archimedes eine so bequeme Benennung der Ellipse nicht öfter, ja nicht beständig anwendet, da er doch unzählige Male diese Linie auf die bekannte Weise durch die Worte τῶ ὀξυγωνίω κώνω τομὰ andeutet. Es ist ferner schwer zu erklären, wefshalb Archimedes gegen seine sonstige Gewohnheit eine an sich unverständliche Benennung ohne vorhergegangene Worterklärung gebraucht haben sollte. Endlich ist die Benennung ἔλλειψις von der Art, dafs mit ihr zugleich auch die entsprechenden Benennungen der beiden andern Kegelschnitte nothwendig erfunden werden mufsten; allein der Ausdruck παραβολή oder ὑπερβολή findet sich nirgend. Aus diesen Gründen scheint es mehr als wahrscheinlich zu sein, dafs die Einführung des Worts ἔλλειψις in den Archimedischen Text einer späteren Zeit angehört und so verbessere ich S. 270. Z. 1. v. u. ὀξυγωνίυ κώνυ τομᾶ, und S. 273. Z. 10. τᾶ ὀξυγωνίυ κώνυ τομᾶν.

S. 274. Z. 17. v. u. διότι. Man lese ὅτι.

S. 276. Z. 4. δὲ. Man lese δή. Vgl. S. 277. Z. 16.

S. 276. Z. 9 ff. Ἡμικύκλιον γὰρ . . . . . περιεχομένῳ. Ich halte diese Worte für ein fremdes Einschiebsel; denn

1) Archimedes hat in den vorhergegangenen Sätzen dieser Abhandlung von diesem bekannten Elementarsatze mehrmals Gebrauch gemacht, ohne ihn je namentlich ins Gedächtnifs zurückzurufen.

2) Der letzte Theil des Satzes ist nicht einmal richtig ausgedruckt, indem er so lauten müfste . . . . μέσα γίνεται ἀνάλογον τᾶν ΕΘ, ΘΖ (oder τᾶς ΕΘ, καὶ τᾶς ΘΖ) Vgl. S. 116. Z. 17. (wo der Druckfehler μέσαι in μέση zu verbessern ist) ferner S. 88. Z. 20. S. 87. Z. 12. Z. 17.

3) In der ganz ähnlichen Beweisführung des folgenden Satzes finden diese Worte sich nicht.

In der Uebersetzung ist die Glosse eingeklammert, und so ausgedruckt, dafs sich zur Noth der Sinn ergiebt.

S. 276. Z. 13. v. u. δειχθήσονται. Der gewöhnliche Sprachgebrauch fodert δειχθήσεται, was auch ein Pariser Codex hat. Gleicherweise mufs S. 277. Z. 13 v. u. und S. 278. Z. 26. das Wort δειχθησεῦντι oder wie am letztern Orte steht, δειχθητεῦντι in δειχθήσεται verwandelt werden.

S. 277. Z. 20. δή. Man lese δὲ Vgl. S. 276. Z. 14.

S. 277. Z. 5 v. u. συμπίπτοντι. Alle Handschriften lesen σύμπτωμα, was allein Sinn giebt. *Vgl. die krit. Anmkg. zu S. 63. Z. 3 v. u.*

S. 277. Z. 4 v. u. Δῆλον ὦν etc. Peyrard bemerkt ganz richtig, dafs dieser ganze Schlufs des Beweises völlig sinnlos sei und defshalb verbessert werden müsse, wozu er einen Vorschlag hinzufügt, durch welchen er jedoch das Rechte nicht getroffen hat. Zuvörderst hat er sich geirret, indem er die am Schlufs des Beweises bezeichnete Linie ΓΛ nennt, und hiebei die Bemerkung macht, es gebe in der Figur gar keine Linie ΓΛ; denn im Texte steht nicht ΓΛ, sondern ΓΑ: indessen sind wir dadurch um nichts besser daran, da auch so der Satz sinnlos bleibt. Peyrard will nun die Figur ändern, indem er die Punkte B, N durch eine gerade Linie verbindet, dann durch Γ eine Linie ΓΛ ǂ NB, und hierauf ΛΑ dergestalt zieht, dafs ΛΑ, wenn sie verlängert würde, mit BΔ rechte Winkel bildete. Endlich will er nun den Schlufs also lesen: Δῆλον ὦν, ... ἐστὶν ἁ ΑΓ· ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐντὶ τᾷ ΛΑ, τᾶς μὲν ΓΛ παρὰ τὰν BN ἐύσας, τᾶς δὲ ΑΛ καθέτυ ἐπὶ τὰν BΔ, wobei er sich auf den Schlufs des vorigen Satzes beruft. Allein wenn gleich Archimedes in dem vorigen Satze sowohl die grofse, als die kleine Axe der Ellipse angegeben hatte, so thut er das letztere doch weder in dem gegenwärtigen, noch in dem folgenden, sondern läfst in beiden die Gröfse der kleineren Axe ganz unerörtert; wahrscheinlich defshalb, weil ihre Gröfse sich nur durch eine höchst schwerfällige Umschreibung mit Worten angeben läfst. Wollte man nun Peyrards Ergänzung in dem

Beweise für richtig annehmen, so wäre man genöthigt, auch schon oben bei der wörtlichen Angabe des Lehrsatzes eine gewaltsame Einschiebung anzubringen, und zwar nicht bloſs bei diesem, sondern auch bei dem ganz ähnlichen folgenden Satze. Dazu ist aber nicht der mindeste Grund vorhanden, sondern es scheint im Gegentheil gewiſs, daſs Archimedes mit Fleiſs die kleine Axe unberücksichtigt lieſs, weil er sie nicht brauchte, und durch Angabe ihrer Gröſse in undienliche Weitläuftigkeit gerathen wäre. Deſshalb nun erscheint Peyrards Veränderung als durchaus unhaltbar. Ich wage einen anderen Vorschlag, und lasse dahin gestellet sein, ob ich glücklicher sein werde.

Nach meiner Ansicht beginnt der Fehler schon einige Zeilen vorher, nämlich hinter den Worten ἐλάσσων τᾶς BP. Man vermiſst hier die Angabe der Lage des Punktes P, welche durch das Perpendikel NP gegeben wird. Deſshalb nehme ich eine ursprüngliche Verwirrung der Zeilen beim Abschreiben an, und fahre nach jenen Worten so fort: καθέτου οὔσας τᾶς NP ἐν τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ ἐπὶ τὰν BΔ. Τοῦτο γάρ ἐστιν ἐν ταῖς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομαῖς σύμπτωμα· Δῆλον οὖν ὅτι ἁ τομά ἐστιν ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ διάμετρος αὐτᾶς μείζων ἁ ΑΓ. Torellis Uebersetzung übrigens ist eben so unverständlich, wie der griechische Text, obgleich er das Wort ἀμβλυγωνίου in der vorletzten Zeile in ὀξυγωνίου verwandelt zu haben scheint.

S. 278. Z. 1. καὶ. Dieſs Wort halte ich für unächt, entstanden etwa aus der letzten Sylbe des vorhergehenden ἅικα.

S. 279. Z. 27. ἁ ἐς αὐτὰ. Man wird lesen müssen ἁ παῤ αὐτὰν; wenigstens weiſs ich in die alte Lesart keinen Sinn zu bringen.

S. 279. Z. 4. v. u. Ἐπεὶ οὖν. Ich streiche das οὖν sowohl, als den Punkt vor ἐπεὶ; denn die Worte ἐπεὶ ἐν τᾷ etc. geben den Grund an, weſshalb die beiden angenommenen Punkte sich in dem Kegelschnitte befinden. Vielleicht könnte man lesen ἐπεὶ καὶ ἐν etc. Vgl. S. 280. Z. 18. v. u.

S. 280. Z. 5. καὶ διὰ τᾶς. Zwei Handschriften haben καὶ τὸ διὰ τᾶς, was man aufnehmen kann. Vgl. S. 280. Z. 1 v. u.

S. 280. Z. 15 v. u. ἅψηται. Eine Handschrift hat ἅψεται, was richtig zu sein scheint. Vgl. S. 279. Z. 15 v. u. S. 280. Z. 1 v. u. S. 281. Z. 8. Z. 10.

S. 280. Z. 12 v. u. τῶν σαμείων, muſs heiſsen δύο σαμείων Vgl. S. 279. Z. 11. v. u.

S. 281. Z. 19. Ὅτι μὲν οὖν. Ich lese Ἐι μὲν οὖν, oder auch Ὅτι μὲν οὖν εἰ, weil das εἰ nicht fehlen darf. Vgl. S. 278. Z. 8.

S. 281. Z. 25. ἁφᾶν. Mehrere Manuskripte haben τᾶν ἁφᾶν, was nicht zu verwerfen ist.

S. 281. Z. 7 v. u. ἀγόμεναι. Einige Manuskripte haben die unverwerfliche Lesart ἀγόμεναι εὐθεῖαι.

S. 281. Z. 3 v. u. καὶ διὰ τοῦ γενομένου. Das Wort γενομένου halte ich für unächt, wahrscheinlich ist es aus dem vorhergehenden γενομένας entstanden; ferner hat eine Handschrift διὰ δὲ τοῦ, was wohl richtig ist.

S. 281. Z. 1 v. u. τέμνει δὲ. Vielleicht ist τέμνει δὴ zu lesen.

S. 282. Z. 5. τὸ δὴ λαφθὲν. Es wird δὲ zu lesen sein.

S. 282. Z. 7. πεσεῖται. Vielleicht πορεύσεται.

S. 282. Z. 11. Ἐσσεῖται δὲ. Man muſs δὴ lesen.

S. 282. Z. 21. τᾶν γενομέναν. Ich lese τᾶς γενομένας.

S. 283. Z. 9. ποτὶ τὸ αὐτό. Wahrscheinlich muſs man lesen ὀρθὰ ποτὶ τὸ αὐτό.

S. 283. Z. 12. τὸ ἐπὶ τᾶς. Diese Worte geben gar keinen Sinn, und sind ganz zu streichen.

S. 283. Z. 2 v. u. τόν. Man lese τάν.

S. 284. Z. 27. Λοιπὸν δὲ δεῖξαι. Nach den meisten Handschriften ist zu lesen Λοιπὸν δέ ἐστι δεῖξαι. Vgl. S. 286. Z. 11.

S. 285. Z. 2. ΑΒΓΔ. Ich lese ΑΒΓ nach der gewöhnlichen Bezeichnung.

S. 285. Z. 11 v. u. τῶ μὲν τόμω δίχα. Wahrscheinlich ist zu lesen τῶ δὴ τόμω ἀεὶ δίχα Vgl. S. 284. Z. 1.

S. 286. Z. 24. καὶ ἄξονα. Ich setze hinzu τὸν αὐτόν, wie S. 288. Z. 4 v. u. S. 289. Z. 2. S. 290. Z. 5 v. u.

S. 286. Z. 18 v. u. ὁ περί. Ich lese ὁ κύκλος ὁ περὶ Vgl. die folgende Zeile, samt den übrigen ähnlichen Stellen in diesem Satze.

S. 287. Z. 19 v. u. ἄξονα ἐχόντων. Hinter diesen Worten ist eine bedeutende Lücke unverkennbar, welche ich nach S. 288. Z. 24 und S. 290. Z. 21 v. u. so ergänze: ἴσον τᾷ ΔΕ, ποτὶ ἕκαστον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἄξονα ἐχόντων.

S. 287. Z. 17 v. u. βάσεως αὐτᾶς. Muſs heiſsen βάσεως αὐτῶ Vgl. S. 288. Z. 27.

S. 288. Z. 26. ἡμίσεια τᾶς βάσεως. Muſs nothwendig heiſsen ἡμίσεια τᾶς διαμέτρω τᾶς βάσεως Vgl. S. 287. Z. 17 v. u. und S. 290. Z. 19 v. u.

S. 288. Z. 23 v. u. ὧν, muſs ὧ heiſsen.

S. 288. Z. 9 v. u. διπλάσιον. Man lese διπλασίων mit allen Pariser Handschriften.

S. 290. Z. 18 v. u. τῶν βάσιων. Man lese τᾶς βάσεως. Vgl. S. 288. Z. 27.

S. 291. Z. 3. καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα. Hinter diesen Worten vermuthe ich eine Lücke, die ich so ergänze: καὶ ἄλλῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα.

S. 292. Z. 6 v. u. καὶ τῷ αὐτῷ. Nach allen Handschriften lese man ἴσον τῷ αὐτῷ.

S. 294. Z. 10 v. u. Ἔστω. Man lese Ἔστωσαν mit den meisten Handschriften.

S. 294. Z. 3 v. u. ὑπερέχοντων. Ich lese ὑπερέχοντι, weil im Folgenden der Grund angegeben wird, weſshalb die Unterschiede der Linien gleich sind, mithin die Annahme der gleichen Unterschiede keine willkührliche ist. Auch übersetzt Torelli richtig *excedunt*.

S. 295. Z. 28. τὰν ΝΞ. Man lese τὰν Ξ. Torelli übersetzt schon nach dieser Verbesserung, und Peyrard ist ihm mit Recht gefolgt. Vgl. Z. 14 v. u.

S. 295. Z. 12 v. u. ἐν τοῖς λόγοις. Man muſs lesen ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις Vgl. S. 261. Z. 9 v. u. S. 301. Z. 10 v. u. Dieselbe Verbesserung muſs S. 299. Z. 4 vorgenommen werden.

S. 298. Z. 1. γῶν. Zwei Handschriften haben γάρ, was vorzuziehen ist, weil Arch. gewöhnlich so verbindet.

S. 300. Z. 15 v. u. ἔλασσον. Man lese ἐλάσσονι, wie immer.

S. 301. Z. 3. Ἔστω. Mit den meisten Handschriften muſs man Ἔστωσαν lesen.

S. 301. Z. 8. δὲ ἔτος. Man lese δὴ ὥτος Vgl. Z. 11. Z. 15.

S. 301. Z. 11 v. u. τῆς ἀπὸ τῶν. Vielleicht ist zu lesen τῆς γνώμονας, τῆς ἀπὸ τῶν.

S. 302. Z. 9 v. u. ὃν τοῦτον ἔχει λόγον ὁμοίως τεταγμένῳ. Ich lese τοῦτον ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὁμοίως τεταγμένον. Vgl. S. 301. Z. 20. v. u.

S. 303. Z. 27. Ἄχθω. Man lese Ἄχθωσαν mit zwei Handschriften.

S. 303. Z. 6 v. u. τοῦ κώνου τούτου. Man muſs offenbar lesen τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου τούτου. Vgl. oben Z. 16.

S. 305. Z. 9. τὰν αὐτὰν. Hinter diesen Worten ist eine Lücke nicht zu verkennen, welche so zu ergänzen ist τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν. Peyrard hat die Lücke nur halb ergänzt, indem er übersetzt *qui a la même base et le même axe.*

S. 305. Z. 13. 14. Ἐνέγραψα — περιέγραψα. Man lese Ἐγγεγράφθω — περιγεγράφθω nach der gewöhnlichen Redeform des Arch.

S. 305. Z. 19. ἔλασσον, muſs heiſsen ἐλάσσονι.

S. 308. Z. 3 v. u. ΑΒΓΔ. Man lese ΑΒΓ. Vgl. S. 304. Z. 7 v. u. S. 310. Z. 20.

S. 309. Z. 2. ἐπίπεδον παράλληλον. Ohne Zweifel muſs man lesen ἐπίπεδα παράλληλα. Vgl. S. 303. Z. 30. S. 313. Z. 21.

S. 309. Z. 4. τμαμάτων ἐπιζευχθεῖσαι, καὶ ἔσω ἁ ΒΖ. Πεσεῖται. Diese Stelle ist ohne Nachhülfe nicht zu verstehen. Vergleicht man damit die ganz ähnliche auf S. 313. Z. 27 v. u., so wird man veranlaſst, auf eine Lücke zu schlieſsen, und so zu ergänzen τμαμάτων τὰ Β, Δ. Ἄχθω οὖν ἁ τὰς κορυφὰς ἐπιζευχθεῖσα, καὶ ἔσω ἁ ΒΖ· πεσεῖται etc.

S. 309. Z. 16 v. u. und 15 v. u. Ἐνέγραψα — περιέγραψα. Nach dem durch unzählige Fälle bestätigten Sprachgebrauche des Arch. lese ich auch hier Ἐγγεγράφθω — περιγεγράφθω.

S. 310. Z. 3. ἔλασσον. Nach Anleitung mehrerer Handschriften ist zu lesen σχῆμα ἔλασσον.

S. 311. Z. 5. v. u. ἔχοι. Eine Handschrift hat ἔχει, und diese gewöhnliche Form ist vorzuziehen; denn was soll die schwankende Form des Optativs, wo ein bündiger Schluſs gemacht wird? Eben deſshalb muſs S. 312. Z. 19. ἔχοι ἂν in ἔχει οὖν verwandelt werden. Diese beiden Stellen sind die einzigen in allen Schriften des Archimedes, wo ein solcher Optativ vorkommt.

S. 311. Z. 4 v. u. αὐτοῦ. Daſs der Abschnitt kleiner sei, als das ganze Sphäroid, versteht sich von selbst; es ist aber der Abschnitt gemeint, welcher kleiner ist, als das Halbsphäroid. Man muſs daher entweder αὐτοῦ ganz streichen, oder man muſs lesen ἢ τὸ ἡμίσεον αὐτοῦ; ich stimme für das erstere.

S. 312. Z. 16 v. u. τᾶν. muſs heiſsen τὰν. Ich würde den Fehler zu den vielfältigen Druckfehlern rechnen, wenn nicht unter dem Texte die richtige Lesart als Variante angegeben wäre.

Sandeszahl.

S. 319. Z. 10. πᾶς. Man lese τᾶς. Wallis.

S. 319. Z. 15 v. u. ἐνδιδομένων. Nach Wallis Vorschlage ist ἐκδιδομένων zu lesen, was ich billige.

S. 320. Z. 18. σφαίραν. Man lese σφαῖραν. Wallis. Der ähnliche Fehler findet sich öfter.

S. 320. Z. 24 v. u. περίμετρον. Nach allen Manuskripten ist zu lesen τὰν περίμετρον.

S. 320. Z. 9 v. u. ἐννεαπλάσιον. Diese Endung ist sicher falsch. Nach Wallis Vorschlage ist entweder ἐννεαπλασίαν oder ἐννεαπλασίονα zu lesen. Wegen des mit einem α anfangenden folgenden Wortes ist vielleicht die letztere Form die ursprüngliche.

S. 321. Z. 26. ὀψὶς. Man lese ὄψις. Wallis.

S. 321. Z. 29. ἄρξατο. Nach Wallis ist ἤρξατο zu lesen.

S. 321. Z. 9 v. u. ἐχούσας. Man lese ἔχουσαν, wie sonst immer in dieser Verbindung. Wallis.

S. 321. Z. 5 v. u. προστίθενται. Nach Wallis Vorschlage ist προτίθεται zu lesen.

S. 321. Z. 3 v. u. ὥς ἐστιν ἐγγυτάτω. Die Baseler Ausgabe hat ὅς ἐστι, allein mehrere Handschriften scheinen das richtige ὅσον ἐστὶ ἐγγυτάτω darzubieten.

S. 322. Z. 20. ἃ ἐν στίγῳ. Schon Wallis bemerkt, daſs das Wort στίγος oder στίγον nirgend vorkomme, hält es aber doch für ächt, und für verwandt mit στίζω, στιγμὴ, στιγεὺς, ein Zeichen am Rande des Lineals bedeutend. Zugleich aber giebt er die sich von selbst darbietende Verbesserung ἃ μὲν μείζων, welche ich unbedenklich annehme, weil Archimedes streng auf die Gegensätze hält, und weil nicht bloſs der gröſsere Winkel, welcher hier unläugbar gemeint ist, sondern auch der kleinere durch ein Zeichen bemerkt werden muſste.

S. 323. Z. 11. μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. Dieser von Rivault herrührende Zusatz scheint Wallis unnöthig, und mit Recht; auch geben ihn die später verglichenen Codices nicht; man wird ihn deſshalb wenigstens einklammern müssen, was in der Übs. noch nicht geschehen ist. Uebrigens enthält das letzte Wort bei Torelli zwei Druckfehler. Vgl. S. 325. Z. 11. ff.

S. 325. Z. 13. δῆλον. Nach allen Handschriften muſs δῆλον ὡς gelesen werden. Vgl. Z. 16.

S. 325. Z. 20. μάκωνος. (*Papaver somniferum L.*) Wirklich füllen 25 Mohnkörner beinahe einen Zoll aus. Wallis vermuthet, es sei statt κέ zu lesen λέ (35), weil Archimedes sonst schon durch die Annahme der runden Zahl 30 ein Uebriges gethan haben würde. Allein die Handschriften stimmen sämtlich überein, und wir sehen, daſs Archimedes an mehreren Stellen in seiner Annahme das vorher Ausgemittelte gern weit überschreitet, um gewiſs gegen Widerspruch gesichert zu sein. Daher darf auch die Annahme der 1000 Sandkörner für den Inhalt eines so kleinen Samenkorns nicht irren. (Vgl. *Kästner Geschichte d. Math. B. 2. S. 746.*)

S. 325. Z. 24. Ἔτεθεν. Rivaults Aenderung Ἐτέθεντο wird durch ein Manuskript bestätigt, und andere haben hier wenigstens Abweichungen.

S. 325. Z. 18 v. u. περιπεπτωκότες τῷ. Die Baseler Ausgabe hat die sinnlose Lesart περιτευχατ' ἐς τὸ, wofür Wallis vorschlägt περιζητεύοντες τῷ. Weder diese noch die Torellische Lesart können angenommen werden; allein was man dafür zu setzen habe, ist schwer auszumitteln, da keine Handschrift Hülfe bringt. Der vorhandenen Spur scheint περιτετευχότες τῷ wenigstens näher zu kommen, giebt auch denselben Sinn, wie Torellis Vorschlag; und der Sinn kann kein anderer sein, als entweder, *qui in librum illum non inciderunt*, oder, *qui illum librum non propius inspexerunt* oder dergleichen.

S. 325. Z. 12 v. u. Ἔστω. Man lese Ἔστω, wie S. 326. Z. 8, und Z. 5 v. u. Wallis.

S. 326. Z. 13 v. u. ἐώντων. Man lese ἐόντων. Wallis.

S. 327. Z. 6 v. u. ἐν τῷ τῶν δεκαπλῶν ὅρων ἀναλογίᾳ. Die ursprüngliche Lesart der Baseler Ausgabe ist ἔντε τῶν δέκα πλευρῶν ὁρῶν ἀνάλογον. Rivault setzt dafür ἔν τε τῶν δεκαπλευρῶν ὁρῶν ἀνάλογον, und die Torellische Lesart ist von Wallis in den Text gebracht, der sie übersetzt: *in terminorum decuplorum analogia.* Rivault übersetzt: *in proportionalitate decuplorum laterum,* und Torelli: *in decuplorum terminorum proportione.* Der Sinn kann nicht zweifelhaft sein, indem Archimedes von einer geometrischen Progression redet, deren erstes Glied = 1, deren Exponent = 10, deren sämtliche Glieder folglich auf einander folgende Potenzen der Zahl 10 sind. Nun heiſst sowohl der Faktor eines Produktes, als die Wurzel einer Potenz πλευρὰ (*Eukl. VII. Erkl.* 16. 17. *VIII. S.* 11. 12.), die Glieder einer geometrischen Proportion aber, so wie die einer solchen Progression werden ὅροι genannt. (Vgl. *Joach. Camerarius de graecis latinisque numerorum notis.* Das Buch hat keine Seitenzahlen. Hieher gehört folgende Stelle aus dem Abschnitte *de rationibus et proportionibus: Cum autem, quorum respectus sit aliquis, duo esse oporteat, sequitur ut analogia quatuor necessario comprehendat. Horum collatio* ὅρων *habet nomen, qui sunt termini.*) Demnach ist in der Progression

$$\div\, 1 : a : a^2 : a^3 : a^4 : \ldots$$

die Gröſse a die πλευρὰ τῶν ὅρων. Ist dabei die Gröſse a = 2, 3, 4, ... so heiſsen die Glieder ὅροι δίπλευροι, τρίπλευροι, τετράπλευροι, u. s. w.; im gegenwärtigen Falle haben wir daher ὅροι δεκάπλευροι, so daſs Wallis Aenderung dieses Wortes verworfen werden muſs. Eben so wenig Grund sehe ich, das τε in τῷ zu verwandeln, besonders da zwei Pariser Handschriften die Variante ἐν δὲ haben, deren Aufnahme freilich unstatthaft ist. Dagegen muſs ἀνάλογον allerdings in ἀναλογίᾳ verändert werden. Ich lese daher ἔν τε τῶν δεκαπλεύρων ὅρων ἀναλογίᾳ, und würde übersetzen: *scilicet in progressione dignitatum numeri decem;* denn eine Uebersetzung wie etwa *scilicet in terminorum decemlateralium progressione* dürfte doch noch unverständlich sein.

S. 328. Z. 14. μυριάδων. Nach den meisten Handschriften, und vor allem des Sinnes wegen ist Rivaults Lesart μυρίων beizubehalten, die Wallis zwar gebilligt, aber doch nicht aufgenommen hat.

S. 329. Z. 18 v. u. ἅλικα. Mit den Handschriften ist Rivaults Lesart τὸ μέγεθος, ἅλικα beizubehalten.

Von schwimmenden Körpern. I.

Ueber das Werk selbst sehe man Fabricii bibl. gr. IV. p. 177 ed. Harl. Kästner Gesch. d. Math. II. S. 201. Murhard Litteratur d. math. Wissenschaften III. S. 60.

S. 335. Z. 19 v. u. *solida magnitudine H.* Ich denke *solida* müsse gestrichen werden, da sonst in diesem Satze immer nur die Gröſse R eine *magnitudo solida* genannt wird.

S. 336. Z. 19. *neutra ab altera.* Man wird ohne Zweifel lesen müſsen *altera ab altera;* denn es wird ja eben die eine Kraft durch die andere vernichtet.

Von schwimmenden Körpern. II.

S. 339. Z. 7 v. u. *molem aequalem.* Diese Lesart giebt einen ganz falschen Sinn, nämlich den: Es sei B das Gewicht eines Körpers von der Gröfse des ganzen Körpers FA. Daher lese ich *gravitatem aequalem*.

S. 340. Z. 16. *minor quam*. Nach Archimedes eigenen Worten im Lehrsatze selbst mufs es heifsen *non major quam*, und eben so in der folgenden Zeile.

S. 340. Z. 18. *Quare angulus . . . . . cadat necesse est.* Da Commandinus nicht beachtet hat, es könne RO dem halben Parameter auch gleich sein, so rathe ich, diese ganze Stelle so zu ändern: *Quare angulus RPΩ acutus erit, quae a puncto R ad KΩ perpendicularis ducitur, videlicet RT, inter P et Ω cadat necesse est, et propterea cum linea FP extra sectionem conveniet.*

S. 343. Z. 27. *ducatur ipsi NO ducatur BR.* Das wiederholte Wort ist das erste Mal zu streichen.

S. 343. Z. 17 v. u. *quae et intra*. Das Wort *et* ist zu streichen.

S. 345. Z. 3. *aliqua portio*. Ich lese blofs *portio*. Vgl. S. 346. Z. 3 v. u. Es ist nämlich nicht von irgend einem, sondern eben von dem gegebenen Abschnitte die Rede.

S. 346. Z. 8 v. u. *continetur*. Ich setze ein Komma, und füge hinzu: *et jungatur BE*. Vgl. S. 344. Z. 1 v. u.

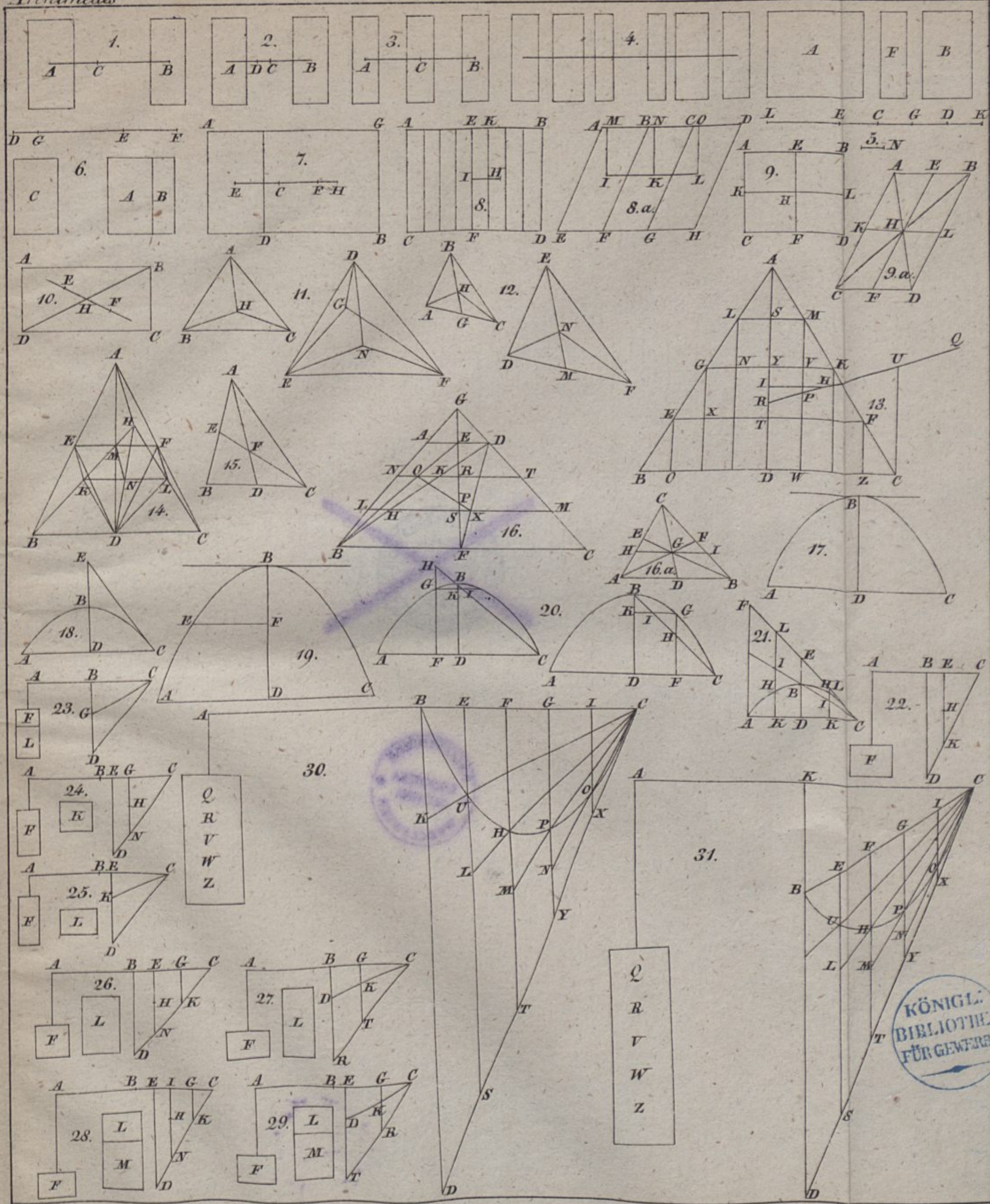
S. 349. Z. 13. *ac media*. Diese Worte mögte ich streichen, da sie völlig überflüfsig sind, und an den entsprechenden Stellen S. 351. Z. 21 v. u. und S. 352. Z. 8 v. u. nicht gefunden werden.

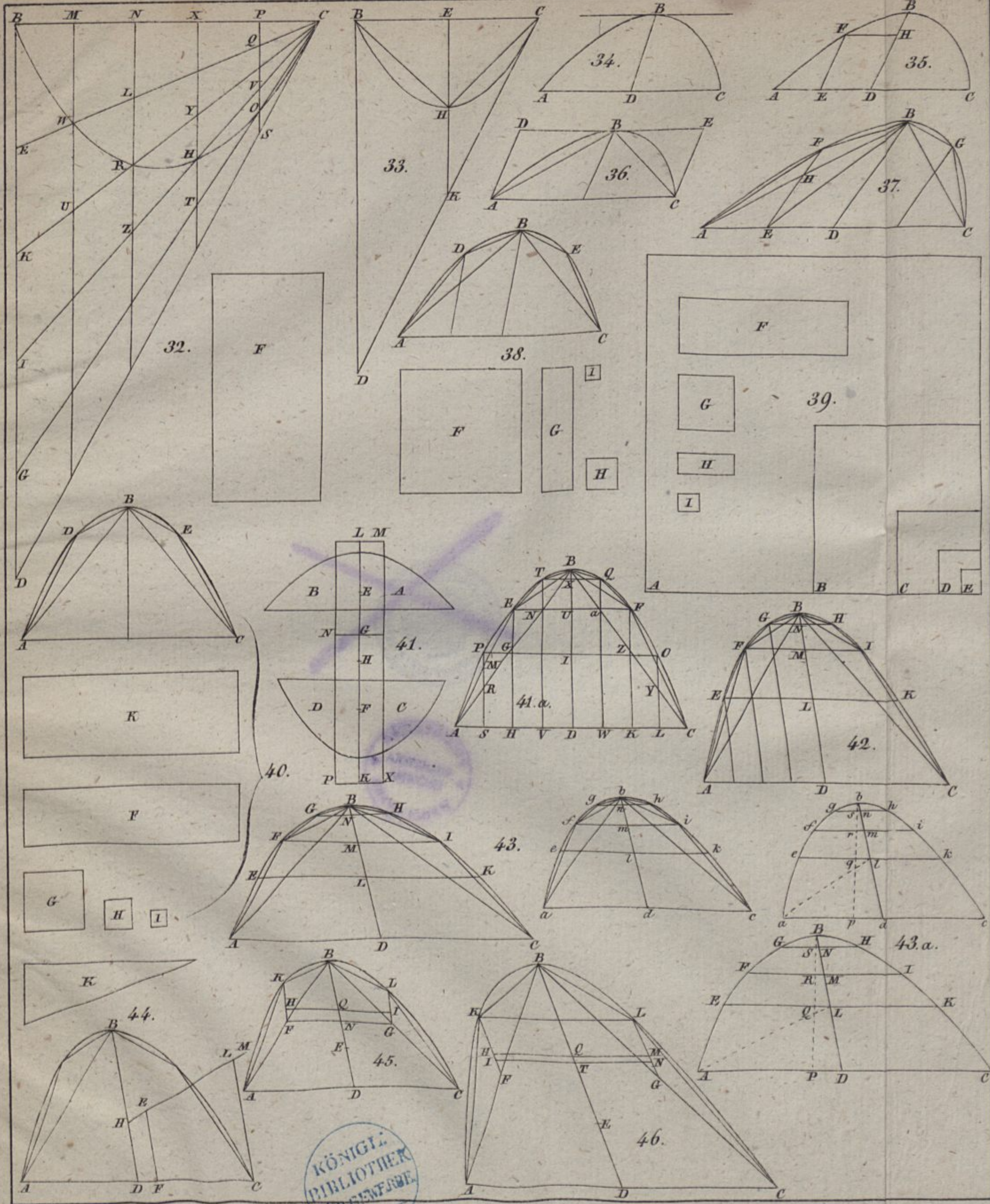
S. 349. Z. 20. *portionibus . . . . portiones*. Man mufs sowohl hier, als auch S. 351. Z. 21 v. u., das Wort *portio* mit *sectio* vertauschen, weil von den Parabeln selbst, nicht von den Abschnitten des Konoids die Rede ist.

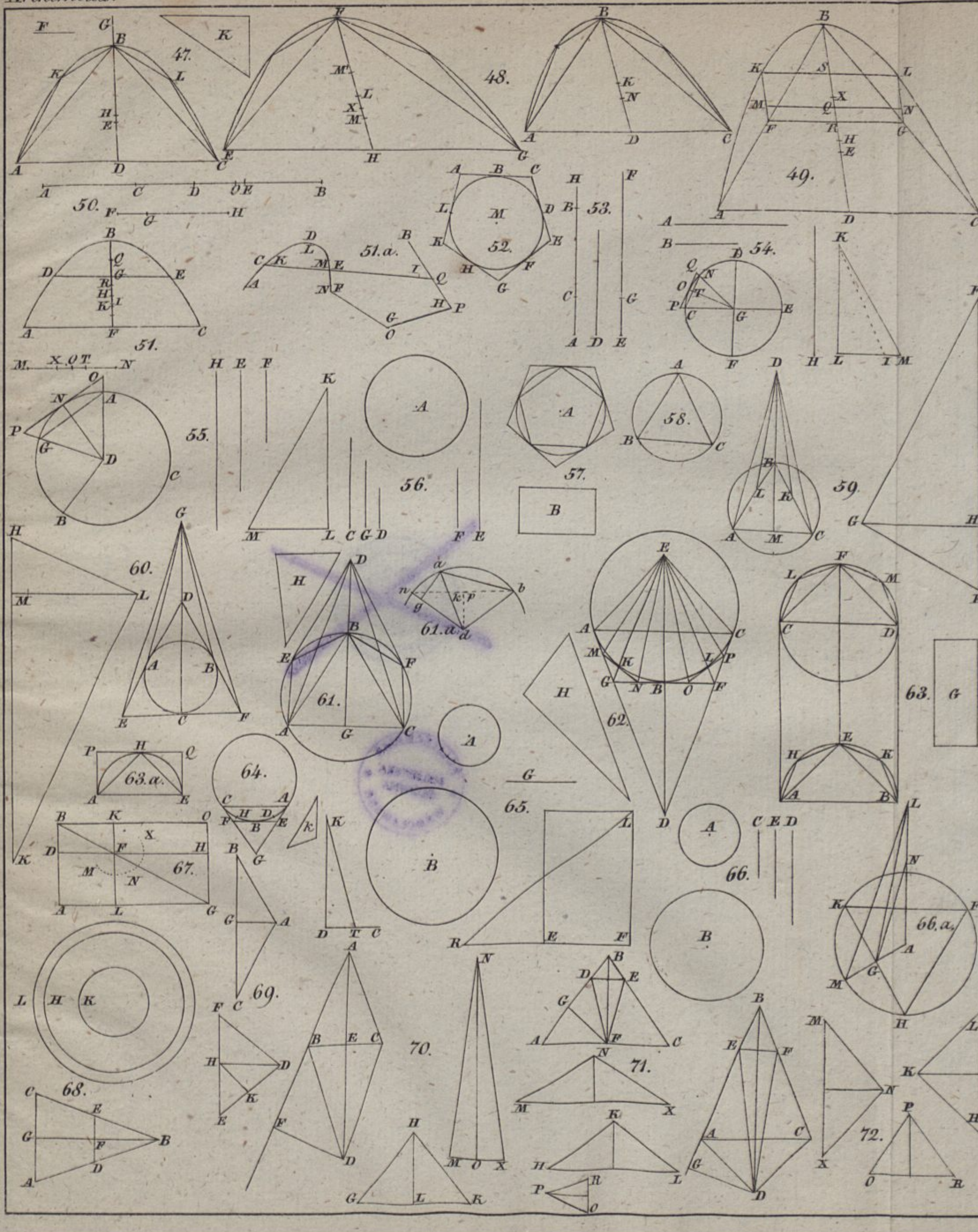
S. 350. Z. 21 v. u. *diametri*. Ich halte dafür, man müfse *Axes* lesen, weil Archimedes (Konoid. und Sphäroid. Vorr. I. 2.) eine genaue Worterklärung der Axe eines Abschnitts giebt, und sich in allen früheren Sätzen nach dieser Worterklärung genau richtet. Die Verwechselung in dem gegenwärtigen Satze kommt defshalb wahrscheinlich auf Rechnung des lateinischen Uebersetzers. Sie kommt mehrmals vor, nämlich S. 350, Z. 11 v. u., S. 352, Z. 8 und Z. 29., S. 353. Z. 29; und S. 351. Z. 3, wo ich statt *diametris basium* lesen zu müfsen glaube *axibus portionum*.

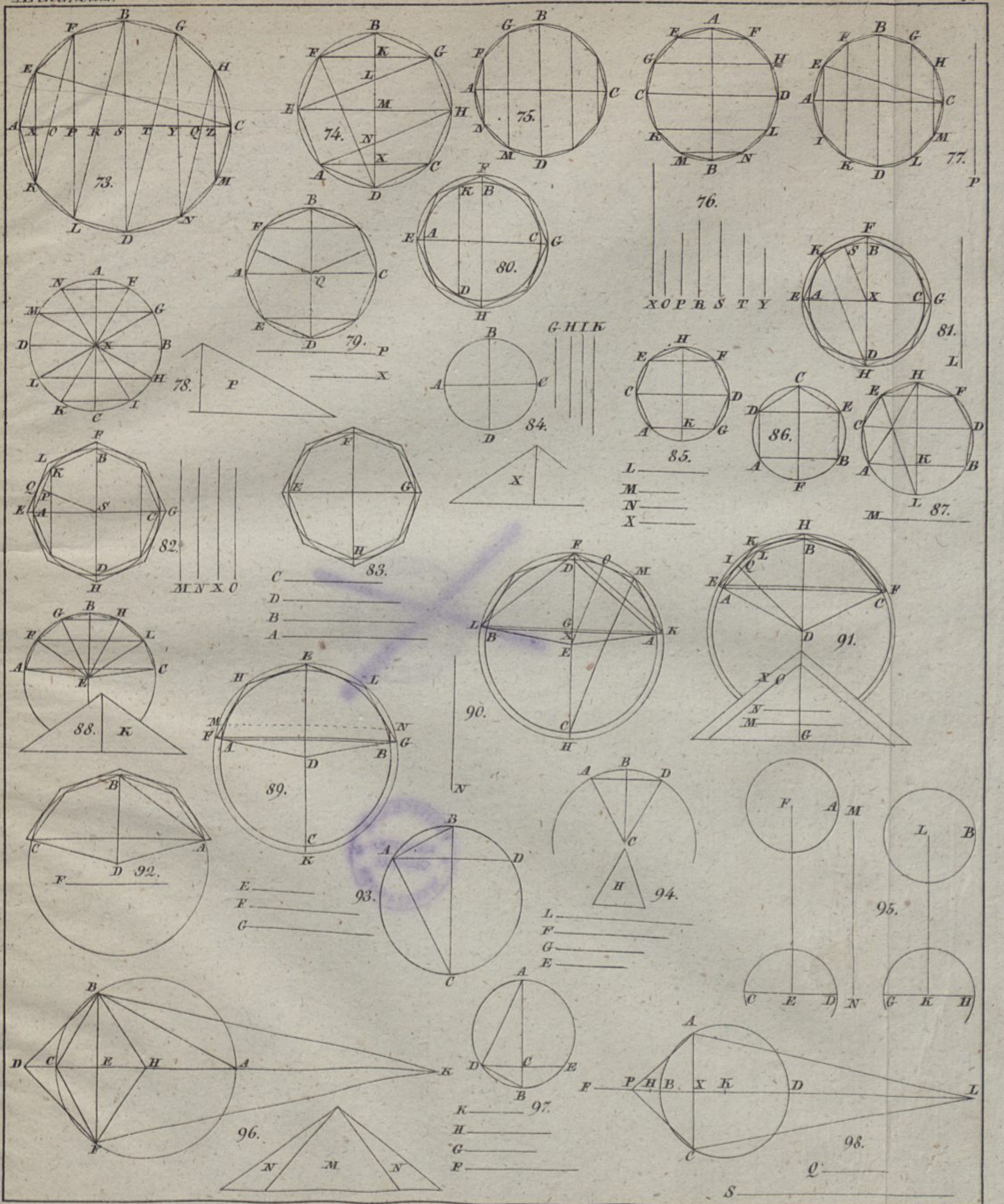
S. 352. Z. 1 v. u. statt GC lese man VC. Diese Verwechselung der Buchstaben G und V tritt auf der folgenden Seite noch siebenmal ein, nämlich Z. 1, Z. 26, Z. 28, Z. 30, Z. 31. (zweimal) und Z. 2 v. u.

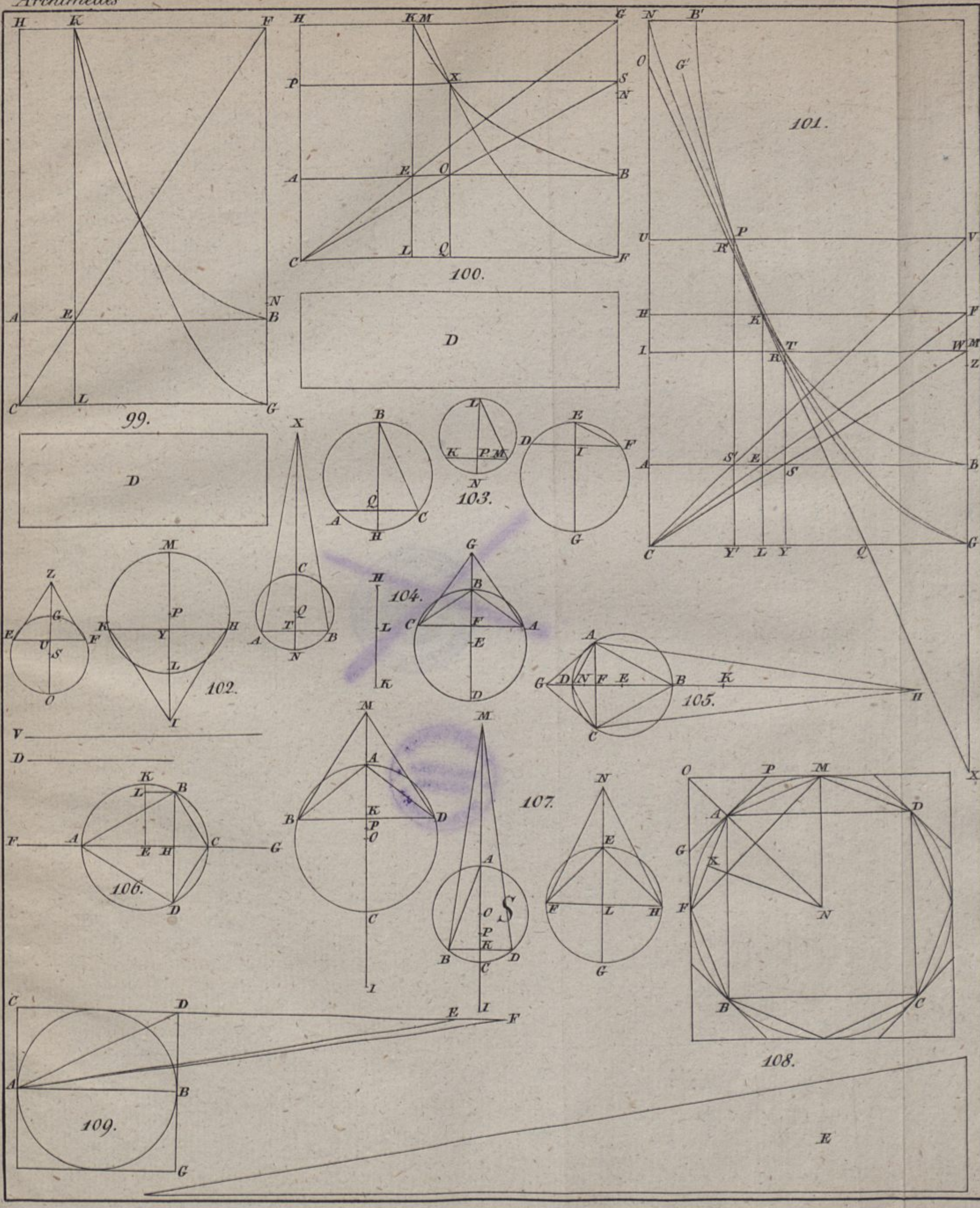
S. 352. In der zu dem Beweise des fünften Theils gehörigen Figur fehlt der Buchstabe Y zwischen V und H, denn soll der Beweis mit der Figur übereinstimmen, so mufs Y zweimal gesetzt werden. Ferner fehlt das Perpendikel aus P auf BD, dessen Endpunkt ebenfalls mit C zu bezeichnen ist, wie der des Perpendikels VC; endlich mufs eine Berührungslinie für den Punkt P gezogen werden, welche BΩ in Φ trifft. Um Verwechselung der zweimal vorkommenden Buchstaben Y und C zu vermeiden, könnte man das eine mal die gleichlautenden Buchstaben des kleinen Alphabetes anwenden.

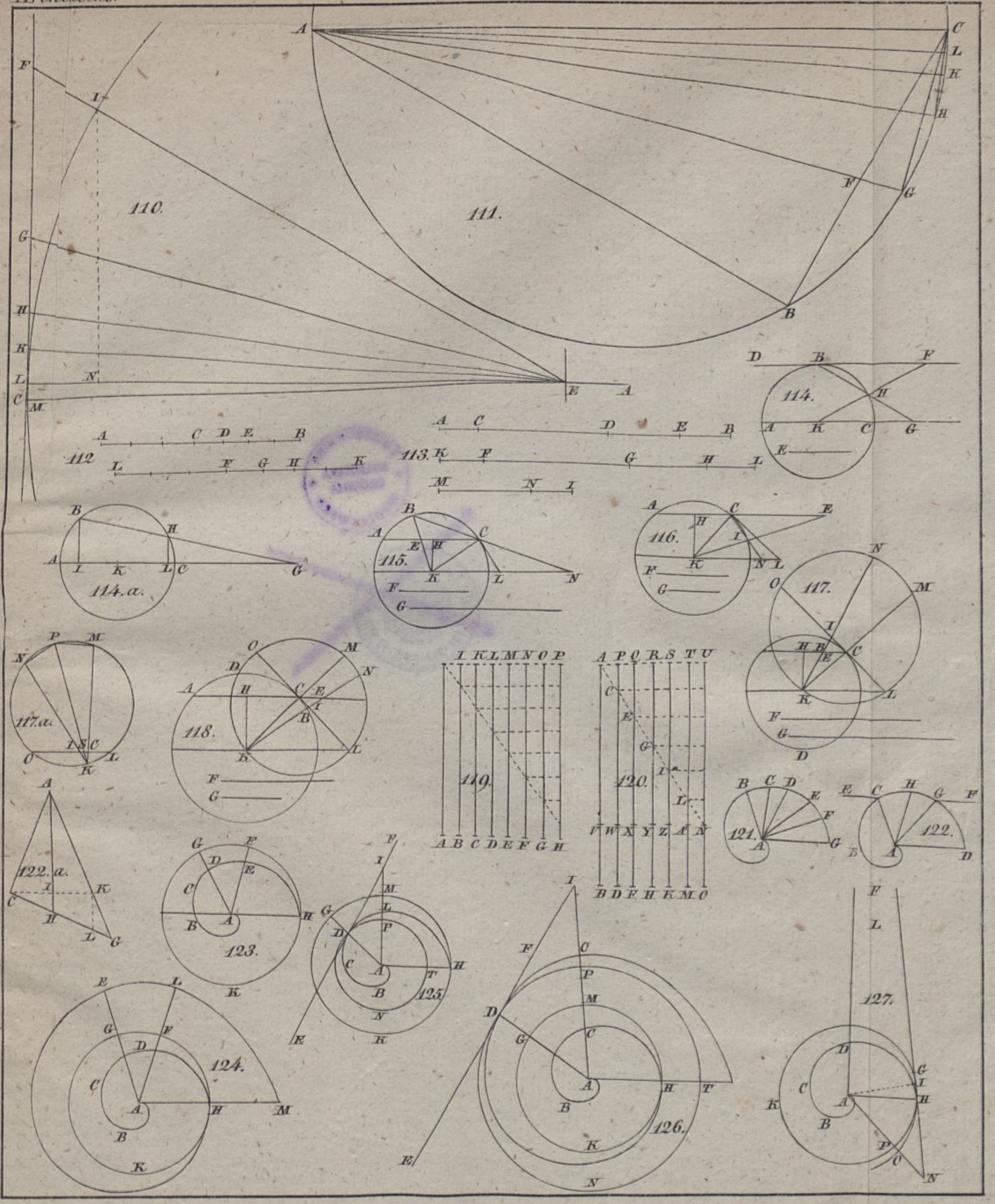

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
8.a.
9.
9.a.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
16.a.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
Q R V W Z
Q R V W Z

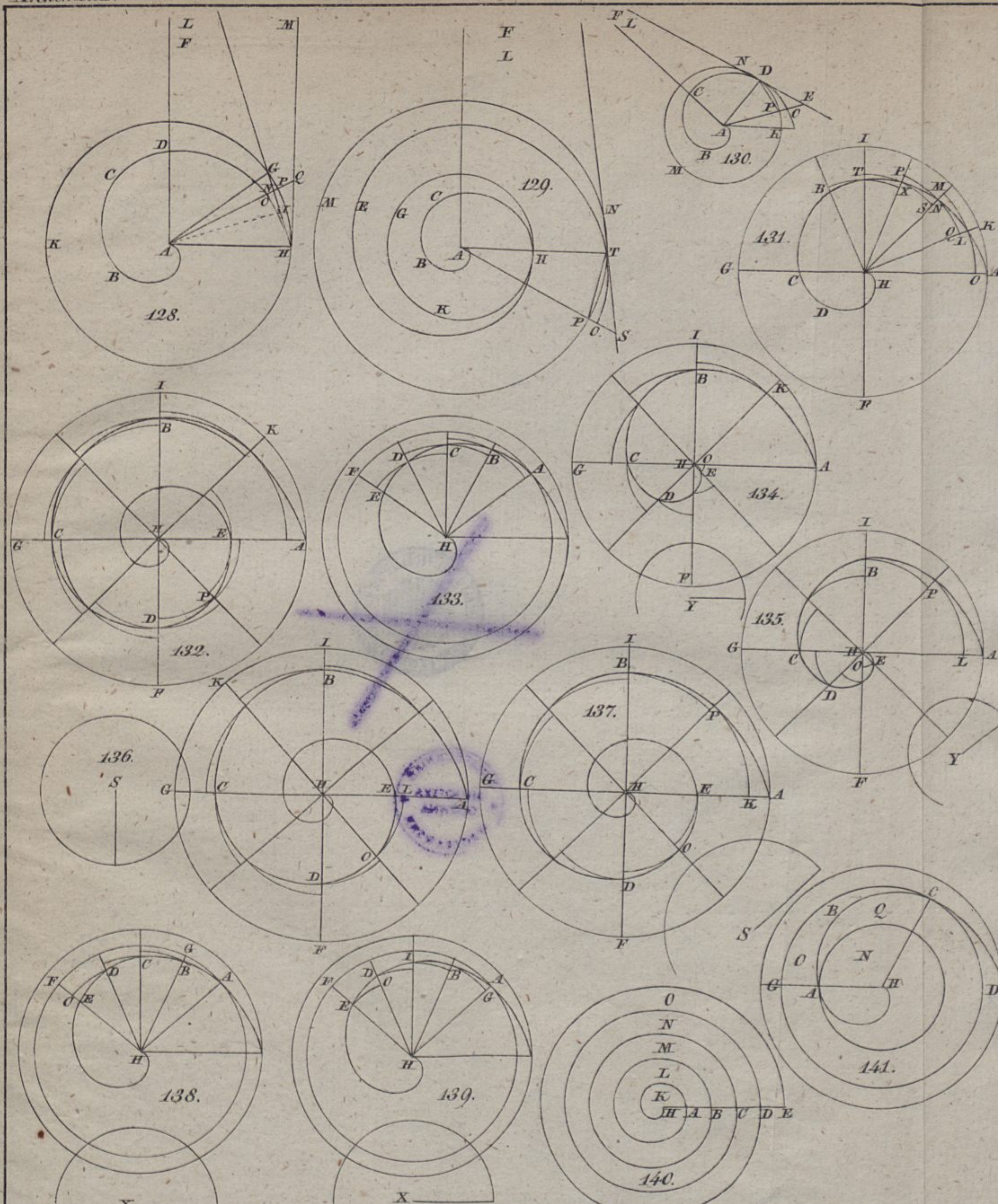

32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
41.a.
42.
43.
43.a.
44.
45.
46.

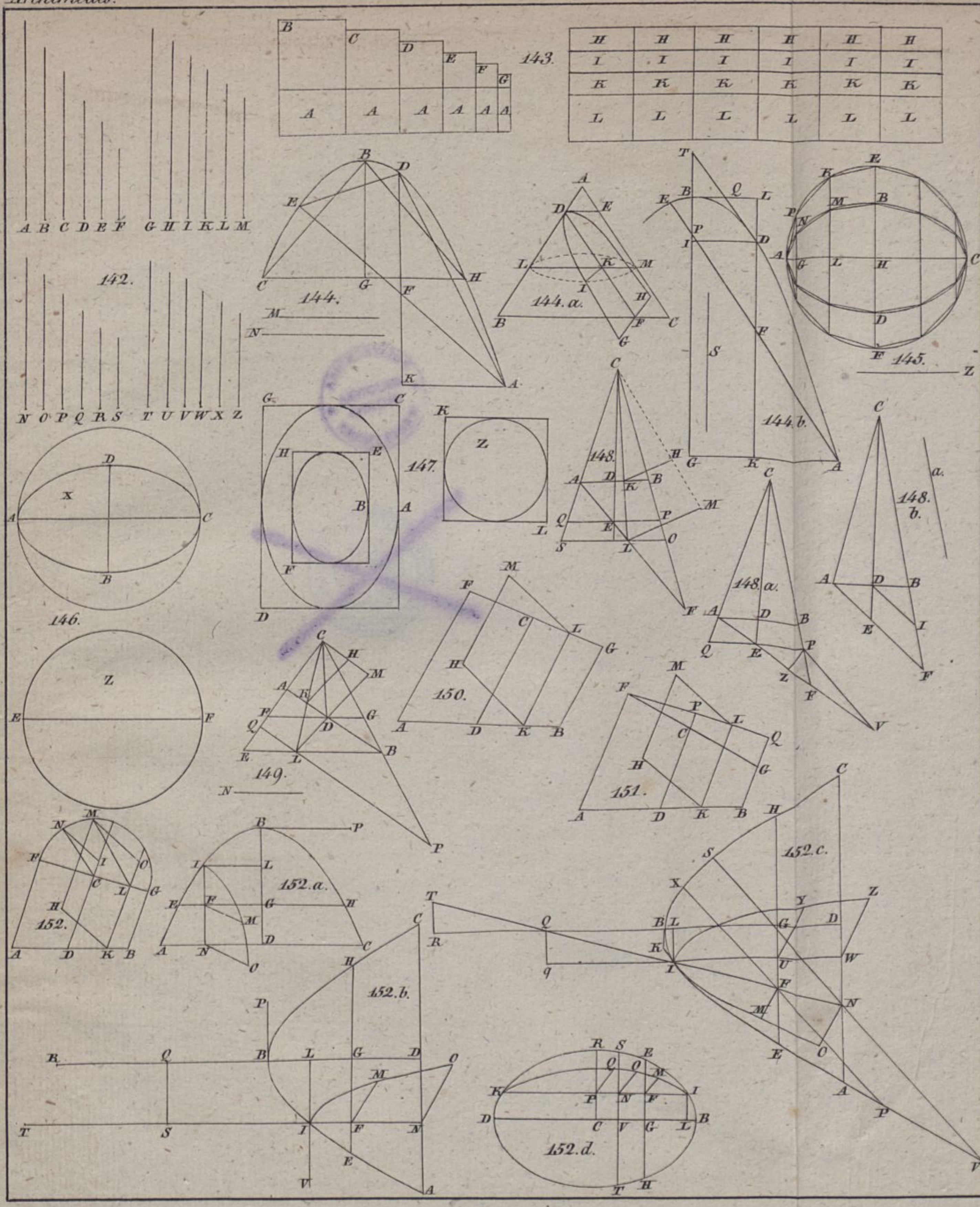

47.
48.
49.
50.
51.
51.a.
52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
61.a.
62.
63.
63.a.
64.
65.
66.
66.a.
67.
68.
69.
70.
71.
72.

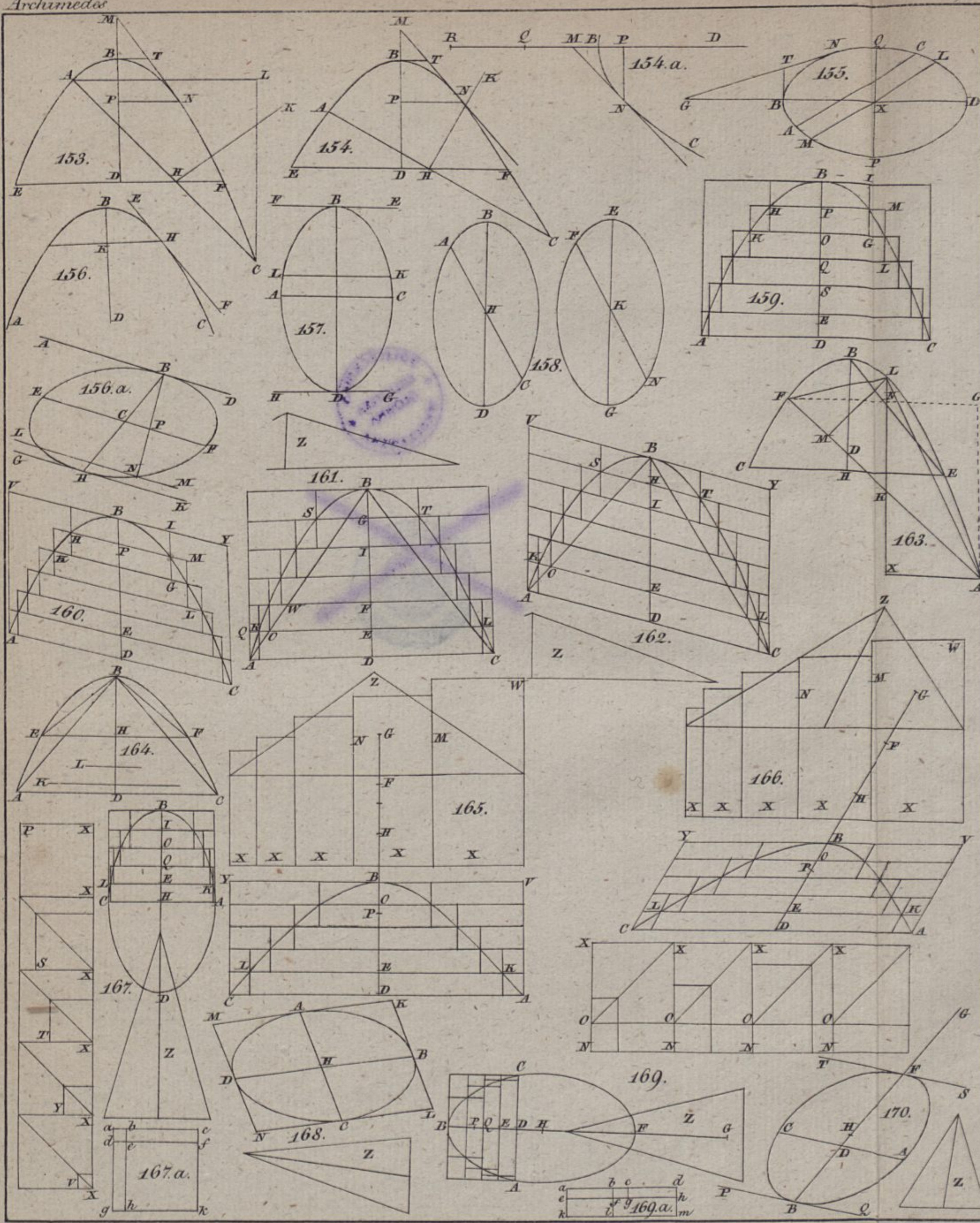

73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.

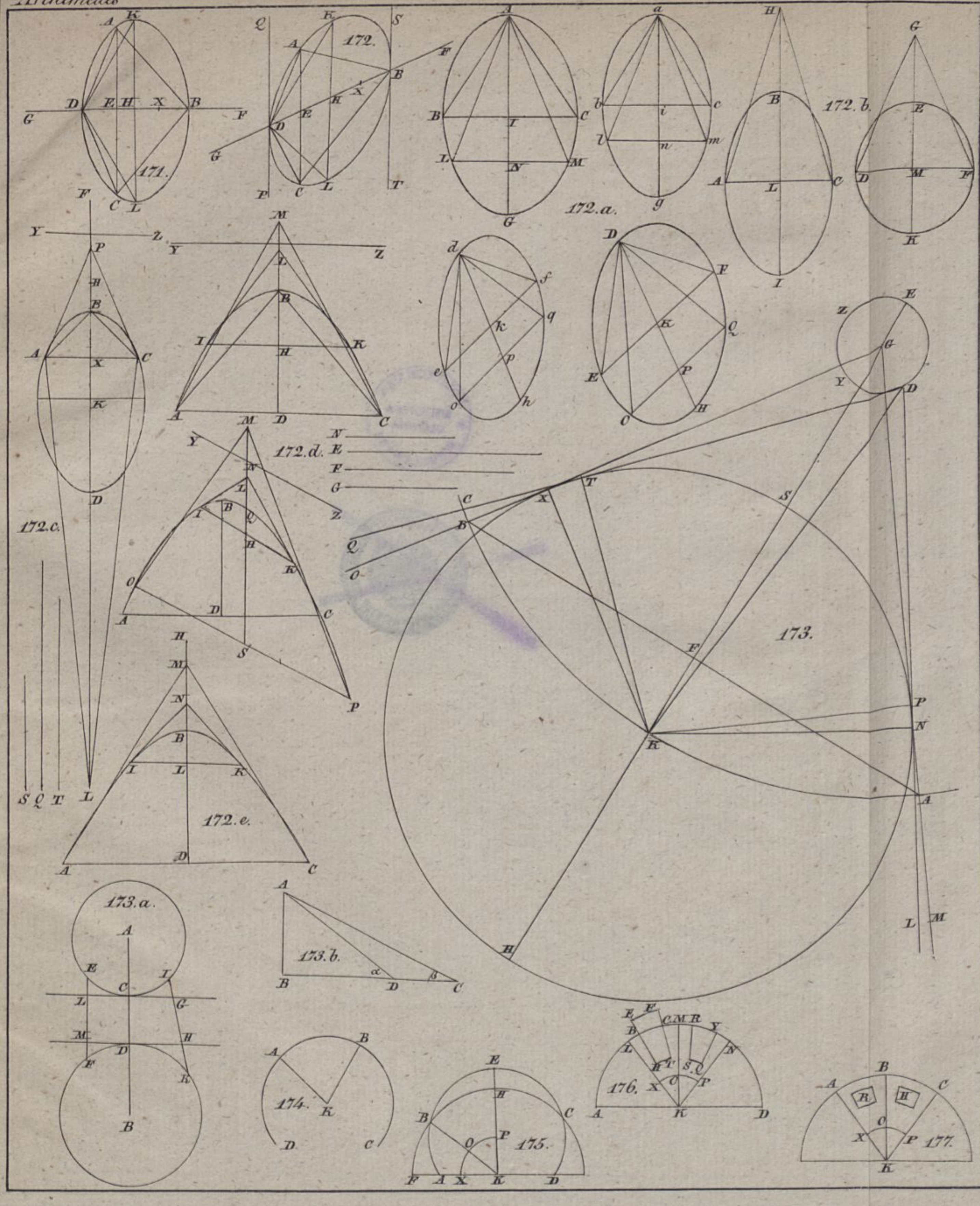

99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.
106.
107.
108.
109.

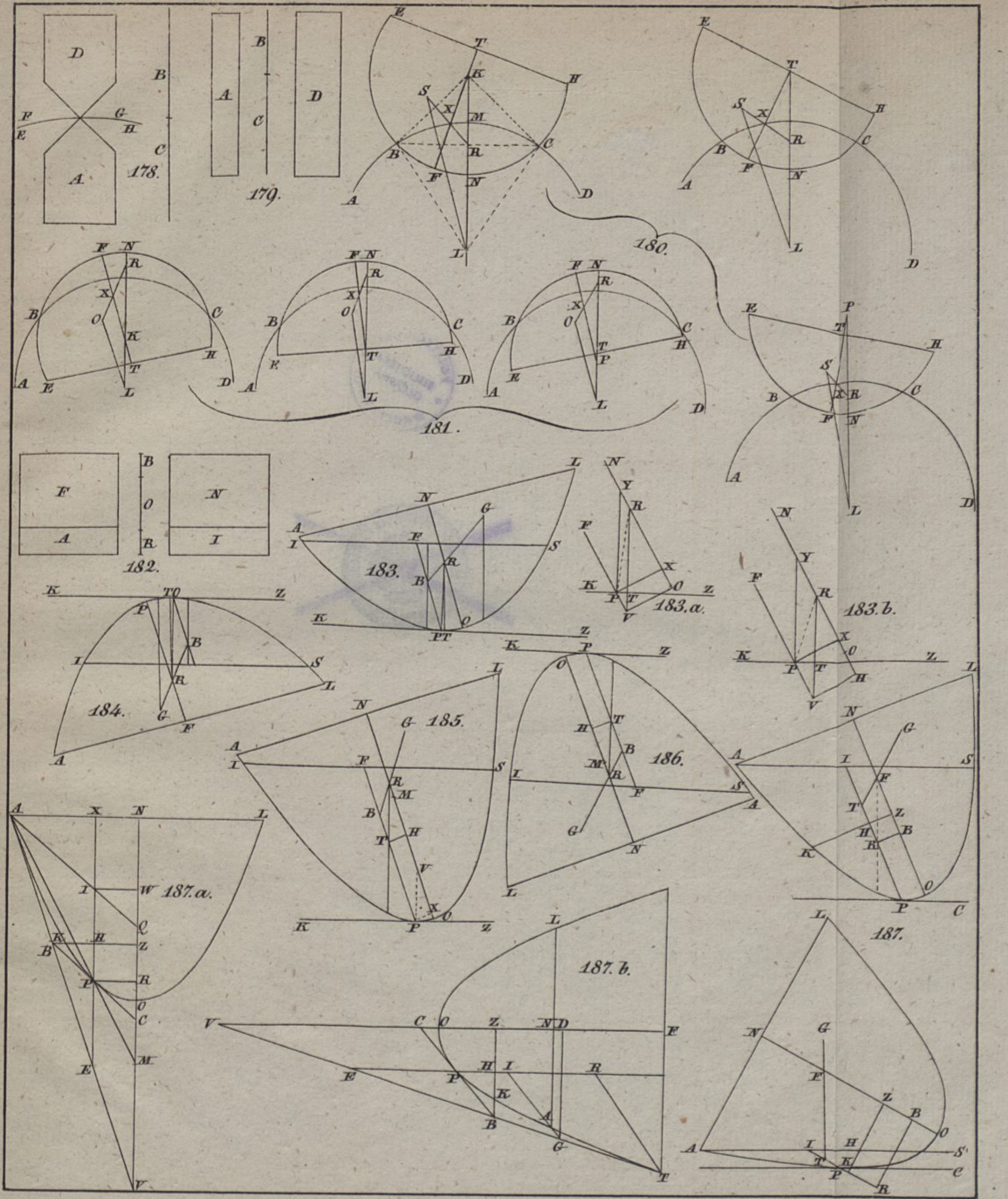

110.
111.
112
113.
114.
114. a.
115.
116.
117.
117. a.
118.
119.
120.
121.
122.
122. a.
123.
124.
125.
126.
127.

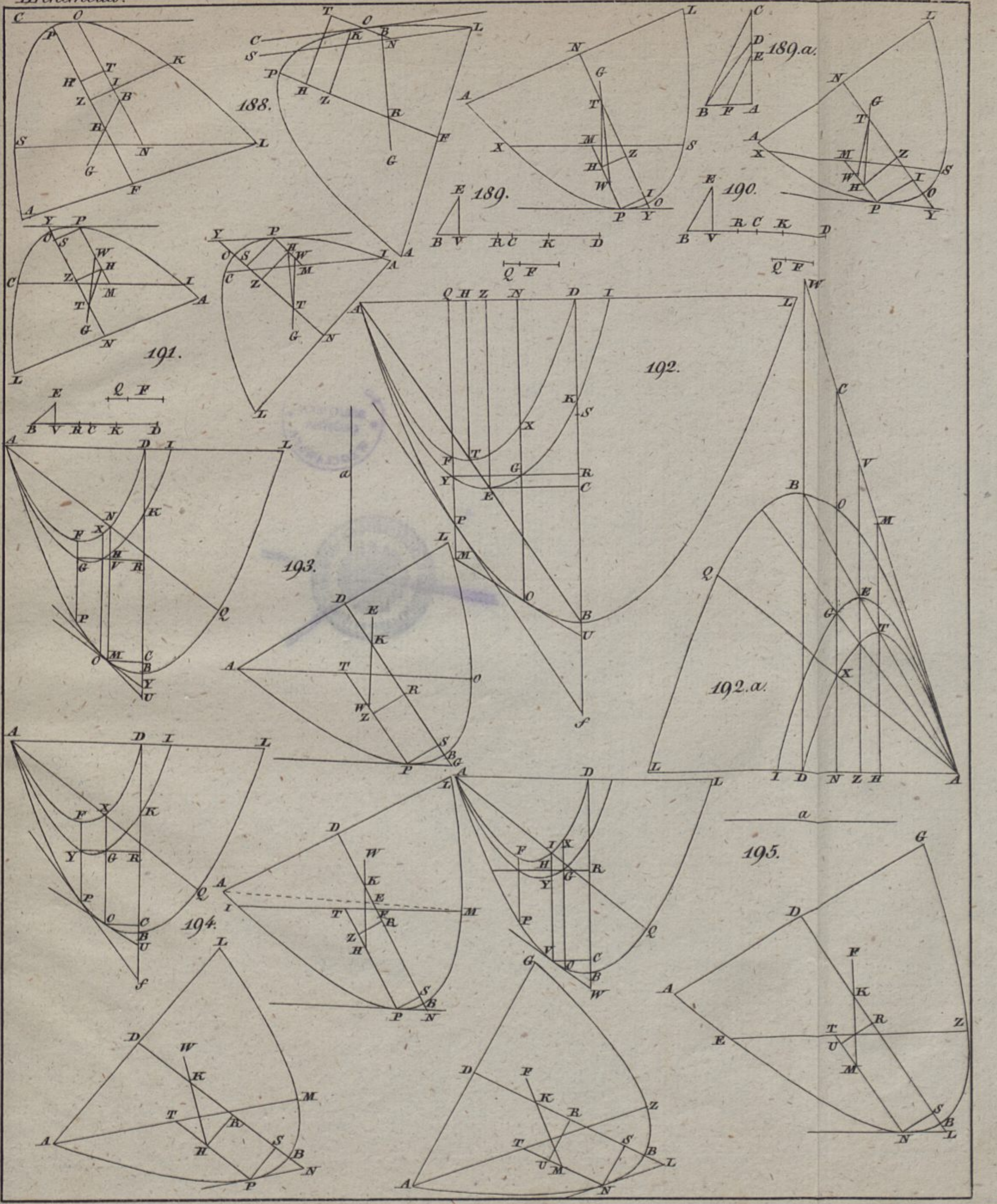

128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.
139.
140.
141.

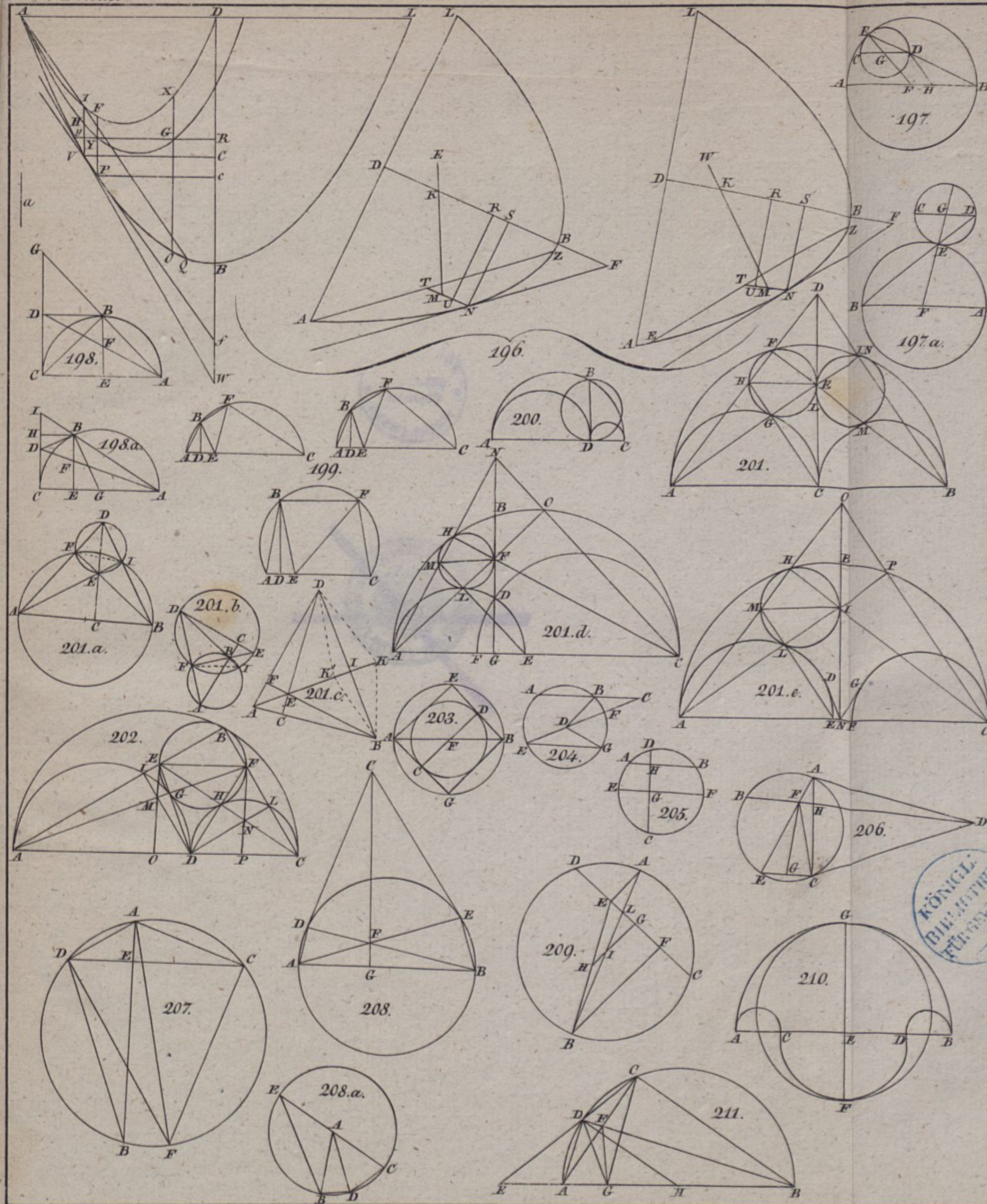

142.
143.
144.
144. a.
144. b.
145.
146.
147.
148.
148. a.
148. b.
149.
150.
151.
152.
152. a.
152. b.
152. c.
152. d.


153.
154.
154.a.
155.
156.
157.
158.
159.
156.a.
161.
163.
160.
162.
164.
165.
166.
167.
167.a.
168.
169.
169.a.
170.


171.
172.
172. a.
172. b.
172. c.
172. d.
172. e.
173.
173. a.
173. b.
174.
175.
176.
177.


178.
179.
180.
181.
182.
183.
183. a.
183. b.
184.
185.
186.
187. a.
187. b.
187.


188.
189.
189.a.
190.
191.
192.
192.a.
193.
194.
195.


196.
197.
197.a.
198.
198.a.
199.
200.
201.
201.a.
201.b.
201.c.
201.d.
201.e.
202.
203.
204.
205.
206.
207.
208.
208.a.
209.
210.
211.