DYNAMIQUE ANALYTIQUE.

37228 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

DYNAMIQUE ANALYTIQUE

PAR

M. ÉMILE MATHIEU,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1878

PRÉFACE.

Quand on a à résoudre un problème de Mécanique, on peut le faire en employant des considérations géométriques ou l'on peut se servir exclusivement de raisonnements analytiques. Le géomètre doit savoir démontrer toutes les propriétés élémentaires de la Mécanique à la fois des deux manières; mais, quand il s'agit de questions difficiles et qui exigent de longs calculs, il a presque toujours avantage à n'employer que l'Analyse. Cette méthode permet aussi, quand on ne peut résoudre une question exactement, de juger mieux ce que l'on néglige et d'obtenir toute la précision que l'on désire.

Les raisonnements géométriques et mécaniques ont souvent l'avantage d'être plus faciles pour les esprits qui ne sont pas très-familiarisés avec l'Analyse; ils sont aussi quelquefois pour tous plus intuitifs. Mais, pour ceux qui sont versés dans l'Analyse, il y a un certain intérêt à traiter toutes les questions d'une manière plus uniforme et en s'appuyant sur un nombre beaucoup moindre de principes.

Au reste, le Traité très-complet de Mécanique de M. Resal est conçu sur le premier plan; il m'a semblé utile de faire un Traité de Dynamique sur le second plan.

Quand la seconde édition de la *Mécanique analytique* de Lagrange parut au commencement de ce siècle, elle était une œuvre accomplie; mais Poisson, Hamilton, Jacobi et d'autres géomètres ont apporté depuis sur cette matière des travaux importants. A la vérité, M. Bertrand a mis au Traité de Lagrange d'excellentes Notes pour le mettre au niveau de la Science; mais ces découvertes étaient assez importantes pour qu'on désirât fondre les nouveaux résultats avec les anciens, et c'est ce qui m'a déterminé à composer l'Ouvrage actuel. On peut juger des résultats dont la Science s'est enrichie sur cette matière depuis Lagrange, par la seule Section II, consacrée à des travaux qui datent déjà de plusieurs années.

Le Livre que je publie, comme son titre l'indique, ne renferme pas la Statique, il ne renferme pas non plus l'Hydrodynamique; cette limitation du sujet a pour effet d'ajouter à l'uniformité de l'Ouvrage. Ces parties de la Mécanique se trouvaient dans le Traité de Lagrange; mais, d'autre part, les Sections II, V, VI, VIII, IX renferment des questions qui sont presque entièrement en dehors de la *Mécanique analytique;* la Section VII renferme aussi beaucoup de résultats qui ne se trouvent pas dans le même Ouvrage. Quant à ce qui m'appartient, cela importe peu au lecteur et, d'ailleurs, je l'ai indiqué dans le corps de ce Livre pour les choses principales.

DYNAMIQUE ANALYTIQUE.

SECTION I.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE DYNAMIQUE.

PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

1. Toute la science de l'équilibre est fondée sur le principe des vitesses virtuelles. Imaginons un système quelconque de points matériels, sollicités par des forces et assujettis à telles liaisons qu'on voudra; supposons qu'il éprouve un déplacement infiniment petit compatible avec ces liaisons; on nomme *vitesse virtuelle* d'un quelconque de ces points le déplacement de ce point dans ce mouvement, et *moment virtuel* de la force appliquée à ce point le produit de cette force par la projection de la vitesse virtuelle sur la force, ce moment étant pris positif ou négatif, suivant que la vitesse virtuelle a sa projection suivant la direction de la force ou suivant son prolongement. Cela posé, le principe des vitesses virtuelles, énoncé pour la première fois dans toute sa généralité par Jean Bernoulli, est celui-ci :

Si un système quelconque de points sollicités par des forces est en équilibre, et que l'on imagine un déplacement infiniment petit de ce système compatible avec les liaisons auxquelles ce système est assujetti, la somme des moments virtuels de toutes les forces est nulle. Réciproquement, si cette condition est remplie pour tous les déplacements virtuels, le système est en équilibre.

Suivant certains géomètres, ce principe doit être admis sans démonstration. Mais ce principe n'est pas évident par lui-même, et il paraît plus difficile encore de le regarder comme tel quand on songe qu'il ne s'est présenté à Jean Bernoulli que par induction et longtemps après qu'il eut été démontré dans plusieurs cas particuliers. D'ailleurs ce principe, dont la démonstration a occupé Lagrange, Laplace, Fourrier, Ampère, Poisson et Poinsot, est aujourd'hui prouvé rigoureusement dans plusieurs Traités de Mécanique, et, en tous cas, si l'on trouvait que sa démonstration laissât encore à désirer en quelque point, il vaudrait mieux accepter ce point comme axiome que le principe même des vitesses virtuelles.

Si donc nous ne donnons point ici cette démonstration, ce n'est pas parce que nous ne la jugeons pas nécessaire, mais parce que nous la supposons connue.

Remarquons que le moment virtuel de la résultante R de plusieurs forces F, appliquées à un point, est égal à la somme des moments virtuels de ces forces. En effet, il y a équilibre entre les forces F et la force R′ égale et contraire à R; donc la somme des moments virtuels des forces F et R′ est nulle, et, comme le moment de R′ est égal et de signe contraire à celui de R, le moment virtuel de R est égal à la somme de ceux des forces F. D'après cela, si nous désignons par mX, mY, mZ les composantes suivant trois axes rectangulaires de la force qui agit sur la masse m située au point (x, y, z), et que nous représentions par δx, δy, δz les variations de ses coordonnées, c'est-à-dire les composantes de la vitesse virtuelle de ce point, nous aurons pour le moment de cette force

$$m(\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z):$$

nous aurons donc pour l'équation des vitesses virtuelles

$$\Sigma m(\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z) = 0,$$

le signe sommatoire Σ s'étendant à toutes les masses m du système.

2. Supposons ensuite un système quelconque de points en mouvement et soumis à des liaisons quelconques. Soit mP la force totale qui agit sur un point m de ce système, et soit mR la force qui produit son mouvement à cause des liaisons; appliquons au point m la force mR et une force $m\mathrm{R}_1$ égale et contraire, ce qui ne changera rien au mouvement. Donc les forces mP et $m\mathrm{R}_1$ se font équilibre en vertu des liai-

sons, puisque, des effets des trois forces mP, mR, mR_1, il ne reste que celui de la force mR.

Donc *si, dans un système quelconque de points en mouvement et soumis à des liaisons, aux forces qui agissent réellement sur chaque point on ajoute des forces égales et contraires à celles qui produisent le mouvement, le système est en équilibre.*

Tel est le principe auquel on donne généralement le nom de *d'Alembert*, et qu'on peut présenter d'une seconde manière.

En effet, toutes les forces telles que mP et mR_1 se font équilibre. Soit mQ la résultante de mP et de mR_1; mP est la résultante de mR et mQ, et par conséquent, puisque mP est la force appliquée au point m et mR celle qui produit son mouvement, mQ peut être appelé la *force perdue* à cause des liaisons, et, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, toutes les forces mQ se font équilibre.

Il y a équilibre entre les forces actuelles et les forces, qui produiraient le mouvement, quand toutes les liaisons du système cesseraient.

On appelle *quantité de mouvement* d'un corps le produit de sa masse par sa vitesse, et la quantité de mouvement produite par une force dans un instant τ est de même direction que cette force et égale à cette force multipliée par τ. Nous arrivons donc à ce nouvel énoncé :

Il y a équilibre entre les quantités de mouvement perdues à chaque instant par tous les points du système, par suite des liaisons.

Remarquons que la force égale et contraire à mQ est la force qui équivaut aux liaisons qui agissent sur la masse m; remarquons aussi que la vitesse de m, qui aurait lieu sans les liaisons à la fin de l'instant τ, est la résultante de la vitesse a qui précède cet instant et de la vitesse $P\tau$ dirigée suivant la force P, et que la vitesse de m, qui a effectivement lieu à la fin de l'instant τ, se compose de la vitesse a et de la vitesse $R\tau$ dirigée suivant R.

Le second énoncé du principe qui précède est celui même qui a été donné par d'Alembert dans son *Traité de Dynamique*, publié en 1743; il est plus simple que le premier, mais il se prête moins facilement aux applications, et c'est pour cette raison qu'on a l'habitude d'adopter le premier énoncé. Il n'est pas sans intérêt de reproduire l'explication donnée par d'Alembert de son principe :

« Soient A, B, C, ... les masses qui composent le système, et supposons qu'on leur ait imprimé les vitesses a, b, c, ..., mais qu'à cause des liaisons elles prennent les vitesses a', b', c', ... Il est clair qu'on peut regarder la vitesse a imprimée au corps A comme composée de la vitesse a' et d'une autre α; de même, la vitesse b imprimée au corps B se compose de b' et d'une autre vitesse β, et ainsi pour les autres masses. Or, par hypothèse, les masses A, B, C, ... ont pris les vitesses a', b', c', ...; donc les vitesses α, β, ... ne produisent aucun mouvement, et, par suite, si elles agissaient seules respectivement sur A, B, C, ..., elles laisseraient le système en repos. »

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT.

3. Prenons un système d'axes de coordonnées rectangulaires, et désignons par mX, mY, mZ les composantes suivant ces trois axes de la force totale appliquée au point dont la masse est m et dont les coordonnées sont x, y, z. L'accélération du point m a pour composantes suivant ces trois axes $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, t étant le temps, et en multipliant ces expressions par la masse m du corps, on aura $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$ pour les composantes de la force qui sert à mouvoir le corps m. D'après le principe de d'Alembert, il doit y avoir équilibre entre les forces mX, mY, mZ et les forces $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$; si donc δx, δy, δz désignent les composantes du déplacement de m dans un mouvement infiniment petit du système compatible avec les liaisons, on a, d'après l'équation du n° 1,

$$(1)\qquad \sum\left[m\left(\mathrm{X}-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+m\left(\mathrm{Y}-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+m\left(\mathrm{Z}-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0,$$

le signe sommatoire Σ s'étendant à tous les points matériels du système. On peut encore écrire ainsi cette équation

$$(2)\qquad \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)=\sum m(\mathrm{X}\,\delta x+\mathrm{Y}\,\delta y+\mathrm{Z}\,\delta z).$$

Supposons que les liaisons s'expriment au moyen de r équations entre les coordonnées des corps

$$(3)\qquad f_1=0,\quad f_2=0,\quad \ldots,\quad f_r=0;$$

les variations δx, δy, δz satisferont aux équations linéaires suivantes, obtenues par la différentiation des précédentes :

$$\frac{df_1}{dx}\delta x + \frac{df_1}{dy}\delta y + \frac{df_1}{dz}\delta z + \frac{df_1}{dx_1}\delta x_1 + \frac{df_1}{dy_1}\delta y_1 + \ldots = 0,$$

$$\frac{df_2}{dx}\delta x + \frac{df_2}{dy}\delta y + \frac{df_2}{dz}\delta z + \frac{df_2}{dx_1}\delta x_1 + \frac{df_2}{dy_1}\delta y_1 + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

(x, y, z), (x_1, y_1, z_1), ... étant les coordonnées des masses m, m_1, ... du système.

Si l'on tire de ces r équations les valeurs de r des variations δx, δy, ... pour les porter dans l'équation (1), elle restera linéaire par rapport aux $3n - r$ variations restantes, et qui seront complétement arbitraires, n étant le nombre des points du système. L'équation obtenue devant donc avoir lieu quelles que soient ces variations, le coefficient de chacune d'elles sera nul séparément, ce qui fournira $3n - r$ équations. En les joignant aux équations (3), on aura autant d'équations que de coordonnées à déterminer.

Si nous multiplions par des quantités indéterminées $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ les équations de liaison différentiées, et que nous les ajoutions ensuite à l'équation (1), nous pourrons profiter de l'indétermination de ces multiplicateurs pour égaler à zéro les coefficients de r variations, ce qui déterminera ces multiplicateurs; et, comme les variations restantes sont arbitraires, on pourra aussi égaler à zéro les coefficients de ces variations. En égalant donc à zéro les coefficients de toutes les variations, on aura les $3n$ équations

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} + mX + \lambda_1\frac{df_1}{dx} + \lambda_2\frac{df_2}{dx} + \ldots = 0,$$

$$-m\frac{d^2y}{dt^2} + mY + \lambda_1\frac{df_1}{dy} + \lambda_2\frac{df_2}{dy} + \ldots = 0,$$

$$-m\frac{d^2z}{dt^2} + mZ + \lambda_1\frac{df_1}{dz} + \lambda_2\frac{df_2}{dz} + \ldots = 0,$$

$$-m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + m_1X_1 + \lambda_1\frac{df_1}{dx_1} + \lambda_2\frac{df_2}{dx_1} + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit donc que les équations du mouvement resteraient les mêmes si l'on supprimait l'équation de condition $f_1 = 0$ et qu'on ajoutât au point m une force dont les composantes sont $\lambda_1 \frac{df_1}{dx}$, $\lambda_1 \frac{df_1}{dy}$, $\lambda_1 \frac{df_1}{dz}$, au point m_1 une force dont les composantes sont $\lambda_1 \frac{df_1}{dx_1}$, $\lambda_1 \frac{df_1}{dy_1}$, $\lambda_1 \frac{df_1}{dz_1}$, et ainsi de suite. Donc ces forces sont la mesure des efforts produits sur les corps m, m_1, ... par la liaison exprimée par l'équation $f_1 = 0$, et l'on peut en dire autant des autres équations (3).

Si le système de points matériels est libre, en sorte qu'il n'existe pas d'équations de condition entre les coordonnées de ces points, les quantités δx, δy, δz, ... sont complétement indépendantes, et l'on a ces équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mX, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = mY, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = mZ,$$
$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1X_1, \quad m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} = m_1Y_1, \quad m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} = m_1Z_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots.$$

4. Examinons le cas où les forces qui agissent sur le système tendent vers des centres fixes. Soit P une de ces forces appliquée au point m et dirigée vers le point (a, b, c); enfin soit p la distance de ces deux points. Il est clair que le moment virtuel de P est $-P\delta p$, en sorte que l'on peut poser, en désignant par mX, mY, mZ les composantes de P,

$$(4) \qquad m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = -P\delta p.$$

D'après cela, si P, Q, ... sont des forces qui agissent sur les points m, m_1, m_2, ... du système et dirigées vers des centres fixes distants de p, q, ..., on a

$$\Sigma m(X\delta x + Y\delta Y + Z\delta z) = -P\delta p - Q\delta q - \ldots.$$

Il est d'ailleurs aisé d'obtenir l'équation (4) par un changement de variables. En effet, les composantes de la force P suivant les trois axes de coordonnées sont

$$mX = P\frac{a-x}{p}, \quad mY = P\frac{b-y}{p}, \quad mZ = P\frac{c-z}{p};$$

or on a

$$p^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2,$$

$$\frac{x-a}{p}=\frac{dp}{dx},\quad \frac{y-b}{p}=\frac{dp}{dy},\quad \frac{z-c}{p}=\frac{dp}{dz};$$

on a donc

$$mX=-P\frac{dp}{dx},\quad mY=-P\frac{dp}{dy},\quad mZ=-P\frac{dp}{dz},$$

et l'on en déduit par suite l'équation (4).

P étant une fonction de p, Q une fonction de q, etc., si l'on désigne par P′ une autre fonction de p, par Q′ une autre fonction de q, on peut poser

$$P=\frac{dP'}{dp},\quad Q=\frac{dQ'}{dq},\quad \ldots,$$

et il en résulte

$$mX=-\frac{dP'}{dx},\quad mY=-\frac{dP'}{dy},\quad mZ=-\frac{dP'}{dz}$$

et

$$\Sigma m(X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\,\delta z)=-\delta P'-\delta Q'-\ldots.$$

5. Supposons ensuite qu'il y ait des forces provenant d'attractions mutuelles entre les points du système. Il faudra d'abord nous servir du principe de la réaction égale et contraire à l'action, donné par Newton, et qui peut s'énoncer ainsi : *Si un point matériel m exerce une action sur un autre point m_1, elle sera dirigée suivant la droite qui les joint, et, de plus, le point m sera sollicité vers le point m_1 par une force égale et contraire à la première.*

Concevons d'après cela que les deux points m et m_1 soient sollicités l'un vers l'autre par la même force F et séparés par la distance f. Soient e, e_1 les projections des vitesses virtuelles de m et m_1 sur f; les moments virtuels des deux forces F sont Fe, Fe_1; or $e+e_1$ représente la diminution de la distance f; donc la somme des moments virtuels des deux forces F est $-F\,\delta f$.

On peut encore obtenir cette expression de la manière suivante. La force F, qui tire m vers m_1, a pour composantes

$$mX=F\frac{x_1-x}{f},\quad mY=F\frac{y_1-y}{f},\quad mZ=F\frac{z_1-z}{f}.$$

Or on a

$$f^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

$$\delta f = \frac{x - x_1}{f}(\delta x - \delta x_1) + \frac{y - y_1}{f}(\delta y - \delta y_1) + \frac{z - z_1}{f}(\delta z - \delta z_1),$$

et il en résulte l'équation

$$-\mathrm{F}\,\delta f = m\mathrm{X}(\delta x - \delta x_1) + m\mathrm{Y}(\delta y - \delta y_1) + m\mathrm{Z}(\delta z - \delta z_1),$$

où le second membre représente bien la somme des moments virtuels des deux forces F.

Si l'action entre les deux masses m et m_1, au lieu d'être attractive, était répulsive, il faudrait remplacer le moment $-\mathrm{F}\,\delta f$ par $+\mathrm{F}\,\delta f$.

Posons

$$\mathrm{F} = \frac{d\Phi}{df}; \quad \text{par suite,} \quad -\mathrm{F}\,\delta f = -\,\delta\Phi;$$

l'attraction mutuelle entre deux points quelconques du système donnant, dans le second membre de l'équation (2), de semblables termes $-\,\delta\Phi' - \delta\Phi'' - \ldots$, si l'on suppose que toutes les forces qui agissent sur le système proviennent d'attractions vers des centres fixes et d'attractions mutuelles, on aura pour cette équation

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) = -\,\delta\mathrm{P}' - \delta\mathrm{Q}' - \ldots - \delta\Phi - \delta\Phi' - \ldots.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{U} = -(\mathrm{P}' + \mathrm{Q}' + \ldots + \Phi + \Phi' + \ldots),$$

on aura

$$(5) \qquad \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) = \delta\mathrm{U}.$$

La quantité U s'appelle *fonction de forces* et, plus généralement, toutes les fois que le second membre de l'équation (2)

$$\Sigma m(\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z)$$

est une différentielle exacte $\delta\mathrm{U}$, on dit que U est la fonction de forces.

Si l'attraction entre les points m, m_1, m_2, ... a lieu en raison inverse du carré de la distance, on a, pour la force qui s'exerce entre m et m_1,

$F = \frac{mm_1}{f^2}$; il en résulte $-F\,\delta f = \delta\,\frac{mm_1}{f}$, et la partie de la fonction de forces relative aux attractions mutuelles sera $\sum \frac{mm_1}{f}$.

Si l'on suppose une force constante dont les composantes soient A, B, C, agissant sur le corps m dont les coordonnées sont x, y, z, la partie correspondante de la fonction de forces sera $Ax + By + Cz$. On a un exemple d'une telle force dans la pesanteur; car, si un corps se déplace à la surface de la Terre, le centre d'attraction étant très-éloigné, l'intensité de la pesanteur et sa direction peuvent ordinairement être regardées comme constantes sur ce corps.

Si le système est libre, toutes les variations δx, δy, δz sont indépendantes et l'équation (5) revient aux suivantes :

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx},\quad m\,\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU}{dy},\quad m\,\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dU}{dz},$$
$$m_1\,\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{dU}{dx_1},\quad \ldots.$$

PROPRIÉTÉS RELATIVES AU CENTRE DE GRAVITÉ.

6. Imaginons d'abord un système de points matériels entièrement libre. Nous aurons les équations du n° 3,

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = mX,\quad m\,\frac{d^2y}{dt^2} = mY,\quad m\,\frac{d^2z}{dt^2} = mZ,$$
$$m_1\,\frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1X_1,\quad \ldots.$$

En additionnant ces équations, on en conclut

$$(1)\qquad \sum m\,\frac{d^2x}{dt^2} = \sum mX,\quad \sum m\,\frac{d^2y}{dt^2} = \sum mY,\quad \sum m\,\frac{d^2z}{dt^2} = \sum mZ.$$

Posons

$$x = a + \xi,\quad y = b + \eta,\quad z = c + \zeta,$$

a, b, c étant les coordonnées du centre de gravité; nous aurons par les propriétés de ce centre

$$\Sigma mx = a\Sigma m,\quad \Sigma my = b\Sigma m,\quad \Sigma mz = c\Sigma m$$

ou

$$\Sigma m\xi = 0,\quad \Sigma m\eta = 0,\quad \Sigma m\zeta = 0;$$

nous avons donc aussi

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2a}{dt^2}\sum m,\quad \sum m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2b}{dt^2}\sum m,\quad \sum m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2c}{dt^2}\sum m,$$

et il en résulte, au lieu des équations (1),

$$\frac{d^2a}{dt^2}\sum m = \sum m\mathrm{X},\quad \frac{d^2b}{dt^2}\sum m = \sum m\mathrm{Y},\quad \frac{d^2c}{dt^2}\sum m = \sum m\mathrm{Z}.$$

Dans les seconds membres, les actions mutuelles disparaissent, puisqu'elles sont deux à deux égales et contraires; il ne reste donc que des forces provenant d'actions extérieures au système. Les trois équations précédentes donnent le théorème suivant :

Le mouvement du centre de gravité d'un système libre est le même que si les masses de tous les corps étaient réunies en ce point, et que toutes les forces qui agissent sur le système fussent transportées au même point.

Il faut remarquer que des chocs entre les corps du système ou des explosions ne changent pas le mouvement du centre de gravité; car, d'après le principe de la réaction égale et contraire à l'action, il n'en résultera que des forces égales et contraires qui se détruisent dans les trois équations du mouvement du centre de gravité.

Supposons ensuite que le système soit assujetti à des liaisons et qu'il existe une fonction de forces U. Nous aurons l'équation

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) = \delta\mathrm{U}.$$

Concevons que U et les équations de condition ne dépendent que des différences entre les coordonnées parallèles, de sorte que U et ces équations ne changent pas quand on augmente tous les x d'une même quantité α, et de même pour les y et les z. C'est ce qui aura lieu toutes les fois que U et ces équations ne renfermeront que les distances mutuelles des corps.

Nous pouvons donc prendre tous les δx égaux à α et les δy et δz

égaux à zéro, et alors l'équation précédente devient, en la divisant par α,

$$\sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum \frac{dU}{dx}.$$

Le second membre est nul; car, si nous faisons croître tous les x d'une même quantité h, l'accroissement de U est nul, et si h est infiniment petit, cet accroissement est $h \sum \frac{dU}{dx}$; on a donc

$$\sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

et de même

$$\sum m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \sum m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0;$$

a, b, c étant les coordonnées du centre de gravité, ces trois équations reviennent aux trois suivantes :

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 b}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 c}{dt^2} = 0;$$

donc, en désignant par p, q, p_1, q_1, p_2, q_2 des constantes arbitraires, on a

$$a = p + qt, \quad b = p_1 + q_1 t, \quad c = p_2 + q_2 t,$$

et, par conséquent, le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme.

Les trois équations précédentes peuvent s'écrire

$$\Sigma m x = p + qt, \quad \Sigma m y = p_1 + q_1 t, \quad \Sigma m z = p_2 + q_2 t,$$

et représentent trois intégrales des équations différentielles du mouvement.

PRINCIPE DES FORCES VIVES.

7. Prenons pour déplacement virtuel de tous les points d'un système le déplacement qui a effectivement lieu dans l'instant dt. Alors nous avons pour les variations de toutes les coordonnées

$$(1) \qquad \delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz.$$

Toutefois cette hypothèse n'est admissible qu'autant que les liaisons sont indépendantes du temps t; car, si $f = 0$ est une des équations de condition données, les déplacements virtuels satisfont à l'équation

$$\frac{df}{dx}\delta x + \frac{df}{dy}\delta y + \frac{df}{dz}\delta z + \frac{df}{dx_1}\delta x_1 + \ldots = 0,$$

que l'on obtient en faisant varier toutes les coordonnées des points, mais en supposant le temps constant s'il y est renfermé. Au contraire, l'équation $f = 0$ devant être satisfaite à tout instant du mouvement qu'effectue réellement le système, on devra pour ce mouvement différentier cette équation, en faisant varier t, et l'on aura

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz + \ldots + \frac{df}{dt}dt = 0.$$

Il est donc évident qu'on ne peut admettre les équations (1) qu'autant que les équations de liaison ne renferment pas le temps.

Introduisons les expressions (1) dans l'équation

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \sum m\,(\mathrm{X}\delta x + \mathrm{Y}\delta y + \mathrm{Z}\delta z),$$

et nous aurons

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = \sum m\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

Le premier membre est la différentielle de

$$\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

et, si l'on désigne en général par v la vitesse de la masse m, on a

$$\frac{1}{2}d\Sigma mv^2 = \Sigma m\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

Dans le cas où il existe une fonction de forces U qui ne renferme pas le temps, les équations (1) rendent δU égal à dU; le second membre de l'équation précédente est donc aussi égal à dU; cette équation s'intègre immédiatement et donne

$$\frac{1}{2}\Sigma m v^2 = \mathrm{U} + h,$$

h étant une constante arbitraire. Remarquons, en même temps, que l'équation

$$\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \mathrm{U} + h$$

est une intégrale première des équations différentielles du mouvement.

On appelle *force vive d'un point* le carré de sa vitesse multiplié par sa masse, et *force vive d'un système* la somme des forces vives de tous les points du système.

Donc, *dans un système assujetti à des liaisons indépendantes du temps, et pour lequel il y a une fonction de forces également indépendante du temps, la demi force vive du système est égale à la fonction de forces augmentée d'une constante.* C'est Daniel Bernoulli qui a énoncé le premier ce principe dans toute sa généralité.

Désignons par $\psi(x, y, z; x_1, y_1, z_1, \ldots)$ la fonction de forces U, par v_0 la valeur initiale de la vitesse de chaque masse m et par $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ les valeurs initiales de $x, y, z, x_1, y_1\, z_1, \ldots$; puis écrivons la formule ci-dessus pour deux instants du mouvement, et retranchons les deux équations l'une de l'autre, nous aurons

$$\frac{1}{2}(\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2) = \psi(x, y, z; x_1, y_1, z_1, \ldots) - \psi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$

et, par conséquent, la demi-variation de force vive d'un système à deux instants du mouvement est égale à la différence des valeurs de la fonction de forces à ces deux instants; donc, en particulier, si le mouvement d'un système en ramène au bout d'un certain temps tous les points à une position antérieure, la force vive n'aura pas changé dans cet intervalle de temps.

Si nous désignons par F l'action mutuelle qui s'exerce entre deux points matériels m, m_1 d'un système, et par f la distance qui les sépare, d'après ce que nous avons vu (n° 5), la partie correspondante de l'expression

$$\Sigma m(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz)$$

est égale à $-F\,df$, si l'action est attractive, et à $+F\,df$, si l'action est répulsive. Ainsi supposons le système sollicité seulement par des actions mutuelles et répulsives, et nous aurons

$$\frac{1}{2}(\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_1\,df_1 + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} F_2\,df_2 + \ldots,$$

en désignant par α_1, α_2, ... les distances mutuelles quand les vitesses sont représentées par v_0 et par β_1, β_2, ... les distances quand les vitesses sont représentées par v. Le second membre sera positif, si β_1, β_2, ... sont plus grands que α_1, α_2, ... D'après cela, puisqu'on sait que, dans un gaz, l'action qui s'exerce entre les molécules est répulsive, on en conclut que, suivant qu'une masse de gaz se dilate ou se condense, sa force vive augmente ou diminue.

8. Le principe des forces vives a également lieu lorsqu'on rapporte les mouvements des corps à leur centre de gravité. Soient a, b, c les coordonnées de ce centre et ξ, η, ζ les coordonnées parallèles aux premières de chaque masse m, prises par rapport à ce centre. Nous aurons

$$x = \xi + a, \quad y = \eta + b, \quad z = \zeta + c,$$

et, par suite,

$$\sum m\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) = \frac{da^2 + db^2 + dc^2}{dt^2}\sum m + 2\frac{da}{dt}\sum m\frac{d\xi}{dt} + 2\frac{db}{dt}\sum m\frac{d\eta}{dt}$$
$$+ 2\frac{dc}{dt}\sum m\frac{d\zeta}{dt} + \sum m\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2}.$$

Les deuxième, troisième et quatrième termes du second membre sont nuls, parce que, d'après les propriétés du centre de gravité, on a

$$\Sigma m\xi = 0, \quad \Sigma m\eta = 0, \quad \Sigma m\zeta = 0.$$

Si donc on différentie l'équation précédente, on a

$$\sum m\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = \frac{da\,d^2a + db\,d^2b + dc\,d^2c}{dt^2}\sum m$$
$$+ \sum m\frac{d\xi\,d^2\xi + d\eta\,d^2\eta + d\zeta\,d^2\zeta}{dt^2}.$$

Mais on a trouvé ci-dessus l'équation

$$(1) \qquad \sum m \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = \sum m(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz).$$

Retranchons ces deux équations, et remplaçons dx, dy, dz par $d\xi + da$, $d\eta + db$, $d\zeta + dc$, nous obtenons ainsi

$$\left(da\frac{d^2a}{dt^2} + db\frac{d^2b}{dt^2} + dc\frac{d^2c}{dt^2}\right)\sum m + \sum m\left(d\xi\frac{d^2\xi}{dt^2} + d\eta\frac{d^2\eta}{dt^2} + d\zeta\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)$$
$$= \Sigma m(\mathrm{X}\,d\xi + \mathrm{Y}\,d\eta + \mathrm{Z}\,d\zeta) + \Sigma m(\mathrm{X}\,da + \mathrm{Y}\,db + \mathrm{Z}\,dc),$$

et, comme on a (n° 6)

$$\frac{d^2a}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m\mathrm{X}, \quad \ldots,$$

il en résultera l'équation

$$\sum m\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d\eta}{dt}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) = \sum m(\mathrm{X}\,d\xi + \mathrm{Y}\,d\eta + \mathrm{Z}\,d\zeta),$$

qui est entièrement semblable à l'équation (1).

Si les forces proviennent d'attractions mutuelles et fonctions des distances, X, Y, Z sont les mêmes fonctions des ξ, η, ζ que des x, y, z; le second membre est une différentielle exacte et représente précisément $d\mathrm{U}$, U étant la fonction de forces; donc, en intégrant l'équation précédente, on a

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] = \mathrm{U} + h',$$

h' étant une constante arbitraire. Au reste, dans le cas actuel, faisons $x = \xi + a$, ... dans l'équation

$$\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \mathrm{U} + h,$$

et nous aurons

$$\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] = \mathrm{U} + h - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right]\sum m.$$

Or nous avons (n° 6)

$$\frac{da}{dt} = q, \quad \frac{db}{dt} = q_1, \quad \frac{dc}{dt} = q_2,$$

q, q_1, q_2 étant des constantes arbitraires; il en résulte

$$h' = h - \tfrac{1}{2}(q^2 + q_1^2 + q_2^2)\,\Sigma m.$$

9. Lorsque le système est libre et que la fonction de forces est une fonction homogène, ce qui a lieu dans le cas d'attractions mutuelles suivant la loi de la Nature, on peut déduire du principe des forces vives une formule qui mérite d'être remarquée.

En effet, si U est une fonction homogène des coordonnées du degré α, on a

$$(3) \qquad \sum\left(x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} + z\frac{dU}{dz}\right) = \alpha U,$$

le signe Σ s'étendant aux coordonnées x, y, z de tous les points du système. Soit r la distance de chaque point à l'origine des coordonnées, on a

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et l'on obtient ensuite

$$\frac{d^2(\Sigma mr^2)}{dt^2} = 2\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2}\right],$$

ou, en désignant par T la demi-force vive du système,

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(\Sigma mr^2)}{dt^2} - 2T = \sum m\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Or on a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU}{dy}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dU}{dz},$$

et, en se servant de l'équation (3),

$$\frac{d^2(\Sigma mr^2)}{dt^2} = 4T + 2\alpha U.$$

Ensuite on a, d'après le principe des forces vives,

$$T = U + h;$$

on arrive donc à cette formule

$$\frac{d^2(\Sigma mr^2)}{dt^2} = (4 + 2\alpha)\mathrm{U} + 4h.$$

Si l'on fait absolument le même calcul en plaçant l'origine des coordonnées au centre de gravité du système, supposé sollicité seulement par des attractions mutuelles, et qu'on se serve de l'équation (2), on trouve, en désignant par R la distance de chaque masse au centre de gravité,

$$\frac{d^2(\Sigma m\mathrm{R}^2)}{dt^2} = (4 + 2\alpha)\mathrm{U} + 4h'.$$

Remarques sur la stabilité d'un système libre.

10. Concevons un système sollicité par des actions mutuelles toutes attractives et s'exerçant en raison inverse du carré de la distance; on aura $\alpha = -1$, et, en faisant $\Sigma m\mathrm{R}^2 = \mathrm{S}$ dans la formule précédente, on obtiendra

$$\frac{d^2\mathrm{S}}{dt^2} = 2\mathrm{U} + 4h'.$$

Si le système est stable, c'est-à-dire si aucun corps ne doit s'éloigner indéfiniment du centre de gravité commun, la quantité S ne doit pas pouvoir croître indéfiniment. En intégrant cette équation entre zéro et t et désignant par S'_0 une constante, on a

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt} - \mathrm{S}'_0 = 2\int_0^t (\mathrm{U} + 2h')\,dt,$$

et, si u désigne la plus petite valeur de U entre zéro et t, on a

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt} - \mathrm{S}'_0 > (2u + 4h')\,t.$$

Intégrons de nouveau, et soit S_0 la valeur de S pour $t = 0$, nous aurons

$$\mathrm{S} > \mathrm{S}_0 + \mathrm{S}'_0\,t + (u + 2h')\,t^2.$$

Je dis que $2h'$ est négatif. En effet, u est essentiellement positif; si donc $2h'$ était positif, en faisant croître t, on obtiendrait des valeurs de S qui grandiraient indéfiniment, et la stabilité n'aurait pas lieu. Ainsi $2h'$ et même $u + 2h'$ sont négatifs.

En second lieu, $U + 2h'$ n'est pas constamment négatif, car autrement, en désignant par v sa plus petite valeur absolue, on aurait

$$S < S_0 + S'_0 t - v t^2,$$

et S prendrait des valeurs négatives indéfiniment croissantes, ce qui est absurde.

Puisque $u + 2h'$ est négatif, on voit que $U + 2h'$ est tantôt positif, tantôt négatif, et, de plus, il a été prouvé que $2h'$ est négatif. Or, en désignant par T' la demi-force vive du système prise par rapport au centre de gravité, on a, d'après la formule (2) du n° 8,

$$T' = U + h' \quad \text{ou} \quad 2T' - U = U + 2h';$$

donc, *dans un système libre sollicité par des attractions mutuelles suivant la raison inverse du carré de la distance, la force vive du système autour du centre de gravité est tantôt plus grande, tantôt plus petite que la fonction de forces, mais elle est toujours plus petite que deux fois cette fonction de forces.*

Il résulte de là que, pour que ce système soit stable, il faut que la force vive initiale autour du centre de gravité soit plus petite que le double de la valeur de la fonction de forces à l'origine du mouvement.

11. Si le Soleil agissait seul sur le mouvement des planètes, elles décriraient exactement des ellipses dont ce corps serait le foyer, et la cause principale de la stabilité du système planétaire provient de ce que ces orbites sont fermées. Or M. Bertrand a reconnu le premier que la loi d'attraction de la Nature, découverte par Newton, est la seule qui donne de pareilles orbites. Voici la démonstration qu'il en a donnée :

Il s'agit de prouver que, parmi toutes les attractions décroissant avec la distance, celle de la Nature est la seule pour laquelle un corps attiré vers un centre fixe et lancé dans une direction arbitraire, avec une vitesse qui ne dépasse pas une certaine limite, décrira nécessairement une courbe fermée autour de ce centre.

Désignons par r la distance du corps au centre d'attraction, par θ

l'angle de ce rayon avec une droite fixe, et par $\varphi(r)$ la force d'attraction exercée par ce centre sur le corps. Les deux équations différentielles du mouvement sont, en mettant ce centre à l'origine des coordonnées,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi(r)\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi(r)\frac{y}{r};$$

on en déduit

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

et, en intégrant,

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k,$$

k étant une constante arbitraire. Introduisant r et θ au lieu de x et y, on a

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = k.$$

On déduit des deux mêmes équations, ou par le principe des forces vives,

$$\frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{dt^2} = -2\int\varphi(r)\,dr,$$

et, en éliminant dt entre ces deux équations, on obtient facilement

$$\varphi(r) = \frac{k^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right);$$

si l'on pose

$$\frac{1}{r} = z, \quad r^2\varphi(r) = \psi(z),$$

il en résulte

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z - \frac{1}{k^2}\psi(z) = 0.$$

Multiplions par $2\,dz$, puis intégrons en posant

$$\varpi(z) = 2\int\psi(z)\,dz,$$

et nous aurons, en désignant par h une constante arbitraire,

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + z^2 - \frac{1}{k^2}\varpi(z) - h = 0;$$

on en déduit

$$d\theta = \pm \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}\varpi(z) - z^2}}.$$

Si la courbe donnée par l'équation qui a lieu entre z et θ est fermée, la valeur de r ou celle de z aura au moins un maximum et un minimum pour lesquels $\frac{dz}{d\theta}$ sera nul, et les rayons vecteurs correspondants seront des axes de symétrie de l'orbite; car, si l'on fait varier r ou z à partir de l'une de ces valeurs et que l'on compte l'angle θ à partir du rayon correspondant, la formule précédente donnera pour θ deux valeurs égales et de signes contraires. Or, quand une courbe a deux axes de symétrie, en pliant la figure autour d'un de ces axes, on obtient, par le rabattement du second, un troisième axe. En pliant ainsi la figure successivement autour de chaque axe, on en obtiendra une infinité, si l'angle que font les deux premiers axes n'est pas commensurable avec deux angles droits, ce qui ne peut avoir lieu pour aucune courbe fermée autre que le cercle. Si donc α et β représentent le minimum de z et le maximum qui le suit, on a l'équation

$$m\pi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}\varpi(z) - z^2}}, \tag{1}$$

où m est un nombre commensurable et π le rapport de la circonférence au diamètre.

Supposons que, la fonction $\varpi(z)$ étant donnée, on obtienne des orbites fermées, en faisant varier h et k^2 entre certaines limites. Quand h et k^2 ne seront plus tous deux entre ces limites, la courbe pourra n'être plus fermée, mais elle possédera encore la même équation et les mêmes axes de symétrie; de sorte que nous pourrons supposer alors h et k^2 susceptibles de toutes les valeurs réelles.

Puisque l'on a $\frac{dz}{d\theta} = 0$ pour $z = \alpha$ et $z = \beta$, il en résulte

$$h + \frac{1}{k^2}\varpi(\alpha) - \alpha^2 = 0, \qquad h + \frac{1}{k^2}\varpi(\beta) - \beta^2 = 0;$$

par suite,

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)}, \qquad h = \frac{\alpha^2\varpi(\beta) - \beta^2\varpi(\alpha)}{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)},$$

et l'équation (1) devient

$$(2)\quad m\pi = \int_\alpha^\beta \frac{dz\sqrt{\varpi(\beta)-\varpi(\alpha)}}{\sqrt{\alpha^2\varpi(\beta)-\beta^2\varpi(\alpha)+(\beta^2-\alpha^2)\varpi(z)-z^2[\varpi(\beta)-\varpi(\alpha)]}}.$$

La fonction $\varpi(z)$ doit être telle que cette équation ait lieu pour toutes les valeurs de h et k et, par suite, de α et β. Le nombre commensurable m doit être constant d'une orbite à l'autre; car, s'il changeait, une variation infiniment petite dans les conditions initiales apporterait un changement fini dans la disposition des axes de symétrie de la courbe.

Supposons α et β infiniment peu différents, et posons

$$\beta = \alpha + u,$$

u étant infiniment petit; comme z reste compris entre α et β, on a aussi

$$z = \alpha + y,$$

y étant infiniment petit.

En négligeant les infiniment petits du quatrième ordre et désignant par $\varpi'(\alpha)$, $\varpi''(\alpha)$ les dérivées première et seconde de $\varpi(\alpha)$, nous aurons, pour la quantité soumise au radical du dénominateur de (2),

$$[\varpi'(\alpha)-\alpha\varpi''(\alpha)](u^2y-uy^2),$$

et la formule (2) devient

$$m\pi = \sqrt{\frac{\varpi'(\alpha)}{\varpi'(\alpha)-\alpha\varpi''(\alpha)}}\int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy-y^2}},$$

$$m = \sqrt{\frac{\varpi'(\alpha)}{\varpi'(\alpha)-\alpha\varpi''(\alpha)}}$$

ou

$$\frac{\varpi''(\alpha)}{\varpi'(\alpha)} = \frac{m^2-1}{m^2\alpha}.$$

On en déduit, en désignant par A et B des constantes arbitraires,

$$\varpi'(\alpha) = A\alpha^{1-\frac{1}{m^2}},\qquad \varpi(\alpha) = \frac{A}{2-\frac{1}{m^2}}\alpha^{2-\frac{1}{m^2}} + B,$$

$$\psi(z) = \frac{A}{2}z^{1-\frac{1}{m^2}},\qquad \varphi(r) = \frac{A}{2}r^{\frac{1}{m^2}-3}.$$

Mais, dans ces formules, m n'est pas un nombre commensurable quelconque. En effet, la formule (2) devient

$$m\pi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz\sqrt{\beta^{2-\frac{1}{m^2}} - \alpha^{2-\frac{1}{m^2}}}}{\sqrt{\alpha^2\beta^{2-\frac{1}{m^2}} - \beta^2\alpha^{2-\frac{1}{m^2}} + (\beta^2-\alpha^2)z^{2-\frac{1}{m^2}} - \left(\beta^{2-\frac{1}{m^2}} - \alpha^{2-\frac{1}{m^2}}\right)z^2}}.$$

Supposons d'abord $2 - \frac{1}{m^2}$ positif. Laissant β quelconque, nous pouvons supposer α très-petit et, passant à la limite où α est nul, nous déduisons de cette formule

$$m\pi = \int_0^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{\beta^{\frac{1}{m^2}} z^{2-\frac{1}{m^2}} - z^2}} = m^2\pi,$$

et, par suite, $m = 1$. On en conclut

$$\varphi(r) = \frac{A}{2r^2},$$

et l'attraction a lieu en raison inverse du carré de la distance.

Supposons ensuite $2 - \frac{1}{m^2}$ négatif. Laissons α quelconque et faisons $\beta = 0$, nous aurons

$$m\pi = \int_{\alpha}^{0} \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2 - z^2}} = \frac{\pi}{2},$$

et il en résulte

$$m = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \varphi(r) = \frac{A}{2} r;$$

par conséquent, une attraction proportionnelle à la distance donne aussi des orbites fermées; elles ont deux axes de symétrie passant par le centre d'attraction. Ces deux attractions sont les seules qui satisfassent à la condition cherchée.

PRINCIPE DE LA CONSERVATION DES AIRES.

12. Imaginons un système de points matériels; rapportons-le à un système d'axes rectangulaires dont l'origine soit en un point O, et exprimons la fonction de forces U et les équations de liaison au moyen

des coordonnées relatives à ces axes. Si l'expression de U et les équations de liaison sont les mêmes, quels que soient les axes rectangulaires menés par le point O, il en résulte trois équations remarquables que nous allons obtenir.

Alors la fonction U et les équations de condition ne changent pas de forme par une rotation des axes de coordonnées autour du point O. Telle est, par exemple, l'équation

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = l^2,$$

qui exprimerait que la distance entre deux points du système est constante et égale à l.

Exprimons que la forme d'une fonction des coordonnées des points du système

$$f(x, y, z;\ x_1, y_1, z_1, \ldots)$$

ne change pas par une transformation autour de l'axe des z. Faisons tourner les axes des x, y dans leur plan d'un angle α, et désignons par x', y' les nouvelles coordonnées par rapport à Ox, Oy; nous aurons

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

et, si nous supposons α infiniment petit,

$$x = x' - \alpha y', \qquad y = y' + \alpha x'$$

et la fonction f devient

$$f(x', y', z';\ x'_1, y'_1, z'_1, \ldots) + \alpha \sum \left(x \frac{df}{dy} - y \frac{dx}{df} \right);$$

et, puisque la fonction f ne doit pas changer de forme,

$$\sum \left(x \frac{df}{dy} - y \frac{df}{dx} \right) = 0.$$

On pourra procéder de même par rapport aux axes Oy et Oz, et l'on aura

$$\sum \left(y \frac{df}{dz} - z \frac{df}{dy} \right) = 0,$$
$$\sum \left(z \frac{df}{dx} - x \frac{df}{dz} \right) = 0.$$

Comme toute rotation autour du point O peut se décomposer en trois rotations autour des axes des x, y, z, il est clair que les trois dernières équations expriment que la fonction f ne change pas de forme par une rotation quelconque des axes autour de l'origine.

Imaginons un déplacement virtuel autour de l'axe des z, lequel est compatible avec les liaisons, puisque les équations de liaison ne changent pas par les accroissements qui en résultent pour les coordonnées. Posons donc

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

en supposant r constant et φ variable, et nous aurons

$$\delta x = -r\sin\varphi\,\delta\varphi = -y\,\delta\varphi, \qquad \delta y = r\cos\varphi\,\delta\varphi = x\,\delta\varphi, \qquad \delta z = 0.$$

Par suite, l'équation

$$(a) \qquad \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \delta U$$

deviendra

$$\delta\varphi \sum m\left(-y\frac{d^2x}{dt^2} + x\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \delta\varphi \sum\left(-\frac{dU}{dx}y + \frac{dU}{dy}x\right).$$

Or, d'après ce qui a été prouvé ci-dessus, on a

$$\sum\left(x\frac{dU}{dy} - y\frac{dU}{dx}\right) = 0;$$

on a donc

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,$$

et, en intégrant,

$$(1) \qquad \sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = C,$$

C étant une constante arbitraire. On a de même, en désignant par A et B deux constantes arbitraires,

$$(2) \qquad \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = A,$$

$$(3) \qquad \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = B.$$

13. Pour arriver à ces trois équations, nous avons supposé qu'il existe une fonction de forces ; s'il n'en existe pas, on devra remplacer le second membre de l'équation (a) par

$$\Sigma m(\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z),$$

et, d'après le raisonnement précédent, on trouvera

$$(4)\qquad \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum m(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}),$$

si les liaisons permettent au système de tourner autour de l'axe des z, et en y ajoutant

$$(5)\qquad \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum m(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}),$$

$$(6)\qquad \sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \sum m(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}),$$

nous aurons trois équations qui auront lieu toutes les fois que le système est entièrement libre de tourner autour de l'origine O. Si le système n'est sollicité par aucune force extérieure ou s'il ne l'est que par des forces dirigées vers l'origine, on a

$$\Sigma m(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}) = 0,\quad \Sigma m(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}) = 0,\quad \Sigma m(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}) = 0,$$

et, par suite, on retrouve les équations (1), (2) et (3).

Observons que $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$ est l'aire décrite pendant l'instant dt par le rayon vecteur mené de l'origine à la projection du point m sur le plan des x, y : cette aire étant comptée positivement de l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs ; $\frac{x\,dy - y\,dx}{2\,dt}$ est appelée *la vitesse aréolaire de la projection de m*. Les équations (1), (2) et (3) expriment donc que la somme des masses multipliées par les vitesses aréolaires des projections de ces masses, sur chaque plan de coordonnées, est constante. Ce qui peut encore s'énoncer ainsi : *La somme des masses de chaque corps multipliées par les aires décrites par le rayon mené de l'origine à la projection de ce corps sur un des plans de coordonnées croît proportionnellement au temps*. C'est en cela que consiste le *principe de* *la conservation des aires*, et les équations (1), (2) et (3) sont appelées les *intégrales des aires*.

Il faut remarquer que, s'il arrive des chocs entre les corps du système ou s'il y survient des explosions, les équations (1), (2), (3) n'en seront pas modifiées, puisque ces phénomènes introduiront des forces égales et contraires, et qui disparaîtront des seconds membres des équations (4), (5) et (6).

Les trois intégrales (1), (2), (3) ont lieu pour un système de points libres qui s'attirent ou se repoussent mutuellement; mais elles ont lieu plus généralement lorsqu'il existe une fonction de forces, et que cette fonction de forces et les équations de liaison ne changent pas par un mouvement des axes de coordonnées autour de l'origine. Les liaisons satisfont effectivement à cette condition, quand les points sont liés entre eux et à l'origine, mais ne sont liés à rien qui soit situé en dehors de l'origine et du système de points. On a un exemple particulier de pareilles liaisons dans un corps solide entièrement libre de tourner autour de l'origine.

D'après le raisonnement qui a servi à obtenir l'équation (1), on aura cette équation toutes les fois que la fonction de forces ne change pas de forme par un mouvement des axes de coordonnées autour de celui des z, et que le système est libre de tourner autour de cet axe. Supposons un système sollicité par des centres fixes situés sur une même droite, en même temps que par des attractions mutuelles; supposons aussi que les liaisons laissent le système libre de tourner autour de cette droite. Prenons cette droite pour axe des z, les moments des forces dirigées vers les centres fixes, pris par rapport à Oz, seront nuls; on aura donc encore l'équation

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0,$$

et, par suite, l'équation (1).

14. Les trois intégrales des aires se rapportent à une origine des coordonnées immobile; on ne peut donc les appliquer immédiatement au système planétaire, puisqu'on ne peut assigner aucun point fixe dans l'espace; on a cependant encore trois équations analogues.

En effet, x, y, z étant les coordonnées d'un quelconque des corps m du système planétaire par rapport à des axes fixes, on a (n° 6)

$$\sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \sum m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \sum m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Soient α, β, γ les coordonnées d'un point ayant un mouvement rectiligne et uniforme, on a

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0.$$

Transportons l'origine des coordonnées en ce point, et faisons

$$x = \alpha + x', \quad y = \beta + y', \quad z = \gamma + z';$$

l'équation par rapport aux axes fixes

$$\sum m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0$$

deviendra

$$\sum m \left(x' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 x'}{dt^2} \right) + \frac{d^2\beta}{dt^2} \sum m x' - \frac{d^2\alpha}{dt^2} \sum m y'$$
$$+ \alpha \sum m \frac{d^2 x}{dt^2} - \beta \sum m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0,$$

et, au moyen des équations précédentes,

$$\sum m \left(x' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 x'}{dt^2} \right) = 0;$$

en l'intégrant, on aura

$$\sum m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) = \text{const.}$$

On aura de même les deux autres intégrales des aires. Le mouvement du centre de gravité du système planétaire étant rectiligne et uniforme, les équations (1), (2), (3) auront lieu si l'on prend ce centre pour origine des coordonnées. Par un calcul facile, on pourra ensuite transporter l'origine des coordonnées du centre de gravité du système au centre du Soleil.

15. Si nous avons les trois équations (1), (2), (3) par rapport aux axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, nous aurons trois autres équations entièrement semblables par rapport à trois autres axes rectangulaires menés par la même origine Ox', Oy', Oz',

$$\sum m\left(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}\right)=C',$$
$$\sum m\left(y'\frac{dz'}{dt}-z'\frac{dy'}{dt}\right)=A',$$
$$\sum m\left(z'\frac{dx'}{dt}-x'\frac{dz'}{dt}\right)=B',$$

A', B', C' étant de nouvelles constantes; proposons-nous de les exprimer au moyen des constantes A, B, C.

On passe du premier système de coordonnées au second, et réciproquement, par les formules suivantes :

$$x=ax'+by'+cz',\qquad x'=ax+a'y+a''z,$$
$$y=a'x'+b'y'+c'z',\qquad y'=bx+b'y+b''z,$$
$$z=a''x'+b''y'+c''z',\qquad z'=cx+c'y+c''z,$$

a, b, c étant les cosinus des angles de Ox avec Ox', Oy', Oz', etc.

On tire de ces formules

$$\begin{aligned}y'dz'-z'dy'=(b'c''-c'b'')(y\,dz-z\,dy)+(b''c-c''b)(z\,dx-x\,dz)\\+(bc'-cb')(x\,dy-y\,dx);\end{aligned}$$

or on a les formules connues

$$b'c''-c'b''=a,\qquad b''c-c''b=a',\qquad bc'-cb'=a'':$$

on a donc

$$y'dz'-z'dy'=a(y\,dz-z\,dy)+a'(z\,dx-x\,dz)+a''(x\,dy-y\,dx).$$

Multiplions cette équation par m, et faisons la somme de toutes les équations semblables pour chaque masse : nous aurons

$$\begin{aligned}\sum m\left(y'\frac{dz'}{dt}-z'\frac{dy'}{dt}\right)=a\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+a'\sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)\\+a''\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right),\end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$A' = aA + a'B + a''C,$$

et nous avons de même

$$B' = bA + b'B + b''C,$$
$$C' = cA + c'B + c''C.$$

On conclut de ces trois formules que, pour trouver les constantes des équations des aires pour un système d'axes rectangulaires menés d'une manière quelconque par l'origine des premiers, il suffit de prendre la résultante de A, B, C comme si A, B, C étaient des forces, et de projeter cette résultante sur les nouveaux axes.

Si l'on prend l'axe des z' suivant la direction de cette résultante, on aura les trois équations

$$\sum m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$
$$\sum m\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right) = 0,$$
$$\sum m\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right) = 0.$$

Le plan des x', y' est alors celui du maximum des aires, et il a reçu de Laplace, qui l'a considéré le premier, le nom de *plan invariable*. Ce plan ne changerait pas, d'après ce qui a été dit ci-dessus, par des chocs entre les corps du système ou par des explosions.

Menons une droite perpendiculaire au plan invariable, et, à partir du plan, portons sur cette droite une longueur égale à $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, en lui donnant la direction de la résultante de A, B, C; nous donnerons à cette longueur ainsi menée le nom d'*axe du plan invariable*.

Supposons deux corps attirés par un centre fixe, et qui s'attirent mutuellement. Le plan de l'orbite d'un de ces corps à chaque instant est celui qui passe par le centre fixe et par la tangente à la courbe décrite par ce corps; or il est aisé de prouver que l'intersection des plans mobiles des deux orbites de ces corps se meut dans le plan invariable. En effet, par le centre fixe menons des perpendiculaires aux plans des deux orbites, égales respectivement au double de la vitesse aréolaire de chaque corps multipliée par sa masse, et dans la direction voulue d'après le sens de cette vitesse; puis prenons la résultante de ces deux perpendiculaires, comme si elles étaient des forces : nous aurons l'axe du plan invariable. Ces trois droites étant dans un même plan, les trois plans perpendiculaires à ces droites, qui sont les plans des deux orbites et le plan invariable, se coupent suivant une même droite.

16. Remarquons ce théorème donné par Jacobi : *Si un système de corps est sollicité par des actions mutuelles, et de plus par des centres qui tournent autour d'un même axe avec la même vitesse angulaire, ni le principe des forces vives, ni aucune intégrale des aires n'ont lieu séparément; mais, si l'on prend pour axe des z l'axe de rotation, on a cette équation*

$$\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]-\omega\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\mathrm{U}+l,$$

en désignant par ω *la vitesse angulaire autour de l'axe de rotation, et par* l *une constante arbitraire.* Cette équation provient de la combinaison de l'équation des forces vives avec l'intégrale des aires relative au plan des x, y. Cependant, ce théorème étant sans application, nous n'en donnerons pas la démonstration, qui est d'ailleurs facile.

ÉQUATIONS HAMILTONIENNES.

17. Considérons un système de n points matériels rapporté à trois axes rectangulaires, et désignons par

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{F}_1=0,\quad \mathrm{F}_2=0,\quad \ldots,\quad \mathrm{F}_r=0$$

les équations, entre les coordonnées de ces points, qui expriment les liaisons auxquelles le système est assujetti. Supposons aussi qu'il existe une fonction de forces U; nous avons l'équation

$$\text{(2)} \qquad \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=\delta\mathrm{U}.$$

Posons

$$\frac{dx}{dt}=x',\quad \frac{dy}{dt}=y',\quad \frac{dz}{dt}=z';$$

nous aurons pour l'expression de la demi-force vive

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

en différentiant T selon δ, caractéristique qui se rapporte aux déplacements virtuels, on peut écrire ces deux formules

$$2\delta T = \delta \sum m\left(x'\frac{dx}{dt} + y'\frac{dy}{dt} + z'\frac{dz}{dt}\right),$$
$$\delta T = \sum m\left(x'\delta\frac{dx}{dt} + y'\delta\frac{dy}{dt} + z'\delta\frac{dz}{dt}\right);$$

changeons l'équation (2) de signe, puis ajoutons δT aux deux membres; nous pourrons la mettre sous cette forme

$$\delta \sum m\left(x'\frac{dx}{dt} + y'\frac{dy}{dt} + z'\frac{dz}{dt}\right) - \sum m\left(x'\delta\frac{dx}{dt} + y'\delta\frac{dy}{dt} + z'\delta\frac{dz}{dt}\right)$$
$$- \sum m\left(\frac{dx'}{dt}\delta x + \frac{dy'}{dt}\delta y + \frac{dz'}{dt}\delta z\right) = \delta T - \delta U.$$

Représentons la fonction T — U par H, et l'équation précédente deviendra

$$\delta \sum m\left(x'\frac{dx}{dt} + y'\frac{dy}{dt} + z'\frac{dz}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\sum m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) = \delta H.$$

Représentons les coordonnées x, y, z par la lettre Q affectée des indices 1, 2, 3, ..., $3n$, et les quantités mx', my', mz' correspondantes par la lettre P affectée des mêmes indices, de sorte que l'équation précédente deviendra

$$(3) \qquad \delta\left(P_1\frac{dQ_1}{dt} + P_2\frac{dQ_2}{dt} + \ldots\right) - \frac{d}{dt}(P_1\delta Q_1 + P_2\delta Q_2 + \ldots) = \delta H.$$

Au moyen des r équations de condition (1), on peut réduire le nombre des variables Q ou x, y, z à $3n - r$; mais plus généralement on peut exprimer les variables Q d'une infinité de manières au moyen de $3n - r$ nouvelles variables et de manière que leurs expressions satisfassent identiquement aux équations (1); désignons par q_1, q_2 ... ces $3n - r$ nouvelles variables, et choisissons des variables p_i en même nombre que les q_i, et qui satisfassent à l'équation

$$(4) \qquad p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \ldots + p_k \delta q_k = \mathrm{P}_1 \delta \mathrm{Q}_1 + \mathrm{P}_2 \delta \mathrm{Q}_2 + \ldots + \mathrm{P}_{3n} \delta \mathrm{Q}_{3n},$$

en posant $3n - r = k$. Si l'on prend les variations virtuelles égales à celles que subissent effectivement les variables q_i, Q_i dans l'instant dt, on déduit de l'équation précédente

$$(5) \qquad p_1 \frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_k \frac{dq_k}{dt} = \mathrm{P}_1 \frac{d\mathrm{Q}_1}{dt} + \ldots + \mathrm{P}_{3n} \frac{d\mathrm{Q}_{3n}}{dt},$$

et, par suite, l'équation (3) devient

$$\delta\left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_k \frac{dq_k}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1 \delta q_1 + \ldots + p_k \delta q_k) = \delta \mathrm{H},$$

ou encore

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{dq_1}{dt} \delta p_1 + \ldots + \frac{dq_k}{dt} \delta p_k - \frac{dp_1}{dt} \delta q_1 - \ldots - \frac{dp_k}{dt} \delta q_k = \delta \mathrm{H};$$

or il n'existe plus d'équations de condition entre les nouvelles variables; si donc on met à la place de $\delta\mathrm{H}$ sa valeur

$$\frac{d\mathrm{H}}{dq_1} \delta q_1 + \ldots + \frac{d\mathrm{H}}{dq_k} \delta q_k + \frac{d\mathrm{H}}{dp_1} \delta p_1 + \ldots + \frac{d\mathrm{H}}{dp_k} \delta p_k,$$

et qu'on égale dans les deux membres les coefficients des variations, on aura les équations

$$(\mathrm{B}) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dp_1}, & \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dp_2}, & \ldots, & \dfrac{dq_k}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dp_k}, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{dq_1}, & \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{dq_2}, & \ldots, & \dfrac{dp_k}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{dq_k}, \end{array} \right.$$

données par Hamilton.

18. Examinons les variables p; les variations δq sont indépendantes dans l'équation (4), et l'on en conclut, pour les valeurs de s égales à $1, 2, \ldots, k$,

$$(6) \qquad p_s = \mathrm{P}_1 \frac{d\mathrm{Q}_1}{dq_s} + \mathrm{P}_2 \frac{d\mathrm{Q}_2}{dq_s} + \ldots + \mathrm{P}_{3n} \frac{d\mathrm{Q}_{3n}}{dq_s}.$$

Telle est la formule qui permettra en général de passer des variables de l'équation (3) à celles de l'équation (A) et des équations (B); mais, en se rappelant ce que désignent les quantités Q, P, on peut obtenir de p_s une autre expression. On a alors, en effet,

$$p_s = \sum m\left(x' \frac{dx}{dq_s} + y' \frac{dy}{dq_s} + z' \frac{dz}{dq_s}\right);$$

or on a, en désignant par $q'_1, q'_2, \ldots$ les dérivées de $q_1, q_2, \ldots$ par rapport à t,

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dq_1} q'_1 + \frac{dx}{dq_2} q'_2 + \ldots. \tag{7}$$

On en conclut la première des trois équations

$$\frac{dx'}{dq'_s} = \frac{dx}{dq_s}, \quad \frac{dy'}{dq'_s} = \frac{dy}{dq_s}, \quad \frac{dz'}{dq'_s} = \frac{dz}{dq_s},$$

et les deux autres s'obtiennent de même; on a donc enfin

$$p_s = \sum m\left(x' \frac{dx'}{dq'_s} + y' \frac{dy'}{dq'_s} + z' \frac{dz'}{dq'_s}\right) = \frac{d\mathrm{T}}{dq'_s}. \tag{8}$$

D'après cela, on aura la quantité p_s en exprimant T en fonction des variables q et de leurs dérivées q' et en prenant la dérivée de T par rapport à q'_s. La formule (8), écrite pour $s = 1, 2, \ldots, k$, donne lieu à k équations linéaires par rapport à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$; tirons $q'_1, q'_2, \ldots$ de ces équations en fonction des variables q_i, p_i, et portons-les dans l'équation

$$p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots + p_k q'_k = 2\mathrm{T},$$

qui résulte de l'équation (5), nous aurons T exprimé au moyen des variables q_i, p_i, et nous pourrons former les équations (B).

J'ai donné la démonstration qui précède des équations de Hamilton dans le *Journal de Liouville*, 1874. Ce qui fait que la démonstration précédente de ces équations est plus simple que celles qu'on avait données jusqu'alors, c'est que l'on remplace l'équation (2) par l'équation (3), qui est d'une forme plus générale et qui renferme cependant les mêmes propriétés à démontrer. La généralisation a alors pour effet de forcer à aller au but par la voie la plus directe. Remarquons que, au contraire, l'équation

$$p_s = \frac{dT}{dq'_s}$$

est fondée sur la forme particulière des quantités Q, P. Nous allons toutefois démontrer que cette équation a lieu toutes les fois que la fonction H de l'équation (3) se compose d'une fonction $-$ U qui ne renferme que les variables Q et d'une fonction T homogène et du second degré par rapport aux variables P, qui contient les variables Q d'une manière quelconque.

19. En effet, T étant homogène et du second degré par rapport aux quantités P, on a

$$2T = P_1 \frac{dT}{dP_1} + \ldots + P_{3n} \frac{dT}{dP_{3n}};$$

l'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{dQ_1}{dt}\delta P_1 + \ldots + \frac{dQ_{3n}}{dt}\delta P_{3n} - \frac{dP_1}{dt}\delta Q_1 - \ldots - \frac{dP_{3n}}{dt}\delta Q_{3n} = \delta T - \delta U;$$

on suppose qu'il existe des relations entre les variables Q; mais, comme il n'en existe aucune entre les variables P, les variations δP sont indépendantes, et l'on en conclut, T étant fonction des Q_i, P_i,

$$\frac{dT}{dP_1} = Q'_1, \quad \frac{dT}{dP_2} = Q'_2, \quad \ldots, \quad \frac{dT}{dP_{3n}} = Q'_{3n};$$

on aura donc $2T = P_1 Q'_1 + P_2 Q'_2 + \ldots$, et, en vertu de l'équation (5), $2T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots + p_k q'_k$; nous en déduirons

$$2\delta T = p_1 \delta q'_1 + \ldots + p_k \delta q'_k + q'_1 \delta p_1 + \ldots + q'_k \delta p_k.$$

D'autre part, en vertu des premières équations (B), on a, en général,

$$q'_i = \frac{dH}{dp_i} = \frac{dT}{dp_i};$$

il en résulte

$$2\delta T = p_1 \delta q'_1 + \ldots + p_k \delta q'_k + \frac{dT}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{dT}{dp_k}\delta p_k.$$

Or on a, en supposant T exprimé au moyen des q_i, p_i,

$$\delta T = \frac{dT}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{dT}{dp_k}\delta p_k + \frac{dT}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dT}{dq_k}\delta q_k;$$

en retranchant cette équation de la précédente, on obtient

$$\delta T = p_1 \delta q'_1 + \ldots + p_k \delta q'_k - \frac{dT}{dq_1}\delta q_1 - \ldots - \frac{dT}{dq_k}\delta q_k.$$

Donc, T étant exprimé au moyen des quantités q_i, q'_i, on a, comme il fallait le démontrer,

$$\frac{dT}{dq'_s} = p_s.$$

20. L'équation (A) présente certains avantages sur les équations (B). En effet, l'équation (A) est encore applicable dans le cas où il n'y a pas de fonction de forces, tandis que les équations (B) ne le sont plus; il suffit alors de convenir que, dans $\delta H = \delta T - \delta U$, δU n'est pas une différentielle totale tant qu'on n'imagine pas toutes les variables exprimées en fonction de t, et de remplacer δU par

$$\Sigma m(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z),$$

X, Y, Z étant les composantes des forces; en remplaçant les variables Q ou x, y, z par q_1, q_2, ..., q_k, cette expression prendra cette forme

$$G_1\,\delta q_1 + G_2\,\delta q_2 + \ldots + G_k\,\delta q_k.$$

Substituons dans le second membre de l'équation (A) l'expression

$$\delta H = \frac{dT}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dT}{dq_k}\delta q_k + \frac{dT}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{dT}{dp_k}\delta p_k - G_1\,\delta q_1 - \ldots - G_k\,\delta q_k,$$

et ensuite égalons entre eux les coefficients des variations dans les deux membres; nous aurons, au lieu des équations (B),

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dT}{dp_1}, \qquad \frac{dq_2}{dt} = \frac{dT}{dp_2}, \qquad \ldots,$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{dT}{dq_1} + G_1, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{dT}{dq_2} + G_2, \quad \ldots.$$

Un autre avantage de l'équation (A) consiste en ce qu'elle peut encore être admise dans le cas où les variables q_i satisferaient à des équations de condition. En effet, considérons r' des équations (1)

$$(9) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_{r'} = 0,$$

r' étant $< r$ et pouvant se réduire à zéro; il est possible d'exprimer les variables Q à l'aide de $3n - r'$ variables que nous désignerons par q_1, q_2, ..., q_k, en faisant $k = 3n - r'$, et de telle sorte que ces expressions des variables Q satisfassent identiquement aux équations (9). En substituant ensuite ces expressions dans les $r - r'$ équations (1) qui n'ont pas encore été employées, nous aurons $r - r'$ équations de condition entre les variables q_i

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad \ldots.$$

Alors, en posant l'équation (4), on sera encore conduit à l'équation (A), mais dans laquelle les variations δq, δp ne seront plus indépendantes. Les variables p_s seront encore données par la formule

$$p_s = \frac{dT}{dq'_s}.$$

En effet, les variations δq n'étant plus indépendantes dans l'équation (4), l'équation (4) n'entraîne pas nécessairement l'équation (6); mais il sera permis de poser d'abord les k équations renfermées dans l'équation (6), ce qui entraînera l'équation (4). Enfin l'équation (6) conduit, comme ci-dessus, à l'équation (8).

Nous avons admis, dans ce qui précède, que les liaisons ne dépendent pas du temps t, auquel cas le principe des forces vives est applicable, si U ne dépend pas non plus de t, d'après ce que nous savons et comme on le voit aussi d'après l'équation (A) qui se réduit à

$$dH = 0 \quad \text{ou} \quad H = \text{const.},$$

quand on suppose que les variations virtuelles sont prises suivant les déplacements effectifs.

21. Il est aisé de modifier notre analyse pour la rendre applicable au cas où les équations contiennent le temps. Il faut remarquer qu'alors les variations virtuelles ne peuvent se confondre avec les déplacements effectifs, de sorte que l'équation (4) ne conduit plus à l'équation (5).

Les équations de liaison équivalent aux équations qui expriment les $3n$ variables Q_i au moyen des $3n-r$ variables q_i et qui renferment actuellement le temps t,

$$\begin{gathered}Q_1=\theta_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, t),\\ Q_2=\theta_2(q_1, q_2, \ldots, q_k, t),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{gathered}$$

et, si l'on éliminait $q_1, q_2, \ldots$ entre ces $3n$ équations, on aurait un système de r équations équivalent aux équations de liaison données.

Les variations $\delta Q_1, \delta Q_2, \ldots$ de l'équation (4) s'obtiennent en faisant varier $q_1, q_2, \ldots$, mais en supposant t constant, ainsi que cela résulte du principe des vitesses virtuelles; ainsi l'on a

$$\delta Q_i=\frac{d\theta_i}{dq_1}\delta q_1+\frac{d\theta_i}{dq_2}\delta q_2+\ldots+\frac{d\theta_i}{dq_k}\delta q_i.$$

Désignons par θ'_i la dérivée partielle de θ_i par rapport à t; nous aurons, pour la dérivée totale,

$$\frac{dQ_i}{dt}=\theta'_i+\frac{d\theta_i}{dq_1}q'_1+\ldots+\frac{d\theta_i}{dq_k}q'_k;$$

les variations δq étant arbitraires, on peut faire en particulier, et pour toutes les valeurs de $s=1, 2, \ldots, k$,

$$\delta q_s=q'_s\,dt,$$

et il en résulte

$$\delta Q_i=\left(\frac{dQ_i}{dt}-\theta'_i\right)dt.$$

L'équation (4) ne donnera donc plus l'équation (5), mais la suivante :

$$p_1\frac{dq_1}{dt}+\ldots+p_k\frac{dq_k}{dt}=P_1\frac{dQ_1}{dt}+\ldots+P_k\frac{dQ_k}{dt}-P_1\theta'_1-\ldots-P_k\theta'_k.$$

Par là l'équation (3) devient

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt}+\ldots+p_k\frac{dq_k}{dt}\right)-\frac{d}{dt}(p_1\delta q_1+\ldots+p_k\delta q_k)=\delta(H-P_1\theta'_1-P_2\theta'_2-\ldots).$$

Ainsi l'équation (A) subsiste, pourvu qu'on y change H en

$$\mathrm{H} - \mathrm{P}_1\theta'_1 - \mathrm{P}_2\theta'_2 - \ldots,$$

et les équations (B) subsisteront aussi avec le même changement. Les variables p continueront d'ailleurs à être données par les équations (8).

SUR UNE FORMULE QUI RENFERME TOUTES LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT.

22. Supposons que l'on donne la position d'un système à deux instants différents et déterminés; les équations différentielles du mouvement sont renfermées dans la formule

$$(a) \qquad \delta \int (\mathrm{T} + \mathrm{U})\, dt = 0,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'intervalle de temps compris entre les deux instants donnés.

En effet, si l'on pose

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z',$$

on a pour la demi-force vive

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

et l'on a ensuite

$$\begin{aligned}\delta \int \mathrm{T}\, dt &= \int \delta\mathrm{T}\, dt = \int \Sigma m(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z')\, dt \\ &= \int \sum m\left(x'\frac{d\delta x}{dt} + y'\frac{d\delta y}{dt} + z'\frac{d\delta z}{dt}\right) dt \\ &= \sum m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \int \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) dt.\end{aligned}$$

Puisque les positions de tous les points du système sont données à l'instant initial et à l'instant final, on a, pour toutes les masses m, $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$ à ces deux instants. Donc, si l'on prend les intégrales dans l'intervalle de ces deux instants, on a

$$\delta \int \mathrm{T}\, dt = -\int \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) dt.$$

L'équation (a) devient donc

$$\int\left[\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) - \delta \mathrm{U}\right] dt = 0;$$

le temps final étant quelconque, cette équation revient à celle-ci :

$$(b) \qquad \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) = \delta \mathrm{U},$$

qui renferme, comme on sait, toutes les équations différentielles du mouvement.

Équations différentielles de Lagrange.

23. Nous allons déduire de l'équation (a), donnée par Hamilton, les équations différentielles de Lagrange qui servent à exprimer le mouvement d'un système. Désignons par n le nombre des points du système, et soient $q_1, q_2, \ldots, q_k$ les k variables au moyen desquelles on peut exprimer les $3n$ coordonnées x, y, z, d'après les équations de condition supposées en nombre égal à $3n - k$. La demi-force vive T dépendra non-seulement des variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$, mais encore de leurs dérivées par rapport à t, que nous désignerons par $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$. Posons

$$\mathrm{T} + \mathrm{U} = \mathrm{P},$$

l'équation (a) deviendra

$$\delta \int \mathrm{P}\, dt = \int \delta \mathrm{P}\, dt = 0,$$

$$\int\left(\frac{d\mathrm{P}}{dq_1}\,\delta q_1 + \ldots + \frac{d\mathrm{P}}{dq_k}\,\delta q_k + \frac{d\mathrm{P}}{dq'_1}\,\delta q'_1 + \ldots + \frac{d\mathrm{P}}{dq'_k}\,\delta q'_k\right) dt = 0.$$

Or on a

$$\int \frac{d\mathrm{P}}{dq'}\,\delta q'\,dt = \int \frac{d\mathrm{P}}{dq'}\,\delta\, dq = \int \frac{d\mathrm{P}}{dq'}\, d\,\delta q = \frac{d\mathrm{P}}{dq'}\,\delta q - \int \frac{d\,\frac{d\mathrm{P}}{dq'}}{dt}\,\delta q\, dt,$$

et si l'on remarque, de plus, que toutes les variations δq sont nulles aux deux limites des intégrations de l'équation (a), cette équation, après ces transformations, devient

$$\int\left(\frac{d\mathrm{P}}{dq_1}\,\delta q_1 + \ldots + \frac{d\mathrm{P}}{dq_k}\,\delta q_k - \frac{d\,\frac{d\mathrm{P}}{dq'_1}}{dt}\,\delta q_1 - \ldots - \frac{d\,\frac{d\mathrm{P}}{dq'_k}}{dt}\,\delta q_k\right) dt = 0.$$

Comme il n'existe aucune équation de condition entre $q_1, q_2, \ldots,$ les variations $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$ sont indépendantes, et, par conséquent, leurs coefficients sont nuls séparément, et il en résulte k équations renfermées dans la suivante :

$$\frac{d\frac{dP}{dq'_i}}{dt} - \frac{dP}{dq_i} = 0,$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, k$. Remettons $T + U$ au lieu de P, en remarquant que U ne contient pas q'_i, et nous aurons les k équations de Lagrange renfermées dans celle-ci :

$$\frac{d\frac{dT}{dq'_i}}{dt} - \frac{dT}{dq_i} = \frac{dU}{dq_i}.$$

Lagrange a fait un emploi continuel de ces équations dans sa *Mécanique analytique;* ces équations ont ensuite servi à obtenir celles d'Hamilton; mais il est beaucoup plus simple et bien préférable d'obtenir ces dernières équations directement, ainsi que je l'ai fait au n° **17**, de sorte que maintenant les équations de Lagrange ont surtout un intérêt historique.

PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION.

24. Le principe de la moindre action suppose que le principe des forces vives a lieu. On a l'équation

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) = \delta U;$$

d'après le principe des forces vives, on a, en désignant par v la vitesse de chaque masse m et par h une constante arbitraire,

$$(\alpha) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 = U + h.$$

Supposons qu'aux liaisons données on en ajoute d'autres qui soient indépendantes du temps; l'équation des forces vives continuera à subsister, mais la constante h prendra, en général, une autre valeur, de sorte que, en différentiant cette équation selon δ, on aura

$$\Sigma m v\,\delta v = \delta U + \delta h.$$

Tirons δU de cette équation pour le porter dans la première, nous aurons

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt}\,\delta z - v\,\delta v\,dt\right) = -\,\delta h\,dt.$$

Or on a

$$\begin{aligned} d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z &= d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z) - \tfrac{1}{2}\delta(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z) - ds\,\delta\,ds, \end{aligned}$$

en désignant par ds l'élément de la courbe décrite par le corps m, et, comme on a $ds = v\,dt$, il en résulte

$$\sum m\left[\frac{d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt} - \delta(v\,ds)\right] = -\,\delta h\,dt.$$

(Remarquons que, dans l'expression de $v\,\delta v$, on peut remplacer le premier facteur par $\frac{ds}{dt}$, mais qu'on ne peut remplacer δv par $\frac{\delta\,ds}{dt}$, parce que $\delta\,dt$ ne doit pas être supposé nul.)

Intégrons cette dernière équation, et nous aurons

$$\sum m\,\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt} - \delta\int\sum mv\,ds = -\,t\,\delta h + \text{const.}$$

Si l'on suppose qu'à l'instant initial, pour lequel t est nul, toutes les positions des points du système soient données, on a à cet instant $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, et, en faisant commencer les intégrales à l'origine des courbes décrites, la constante du second membre sera nulle. Si l'on suppose, de plus, donnée la dernière position du système, on aura également $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$ pour cette dernière position, et il restera

$$\delta\int\Sigma mv\,ds = t\,\delta h.$$

Supposons, en outre, $\delta h = 0$; comme l'équation (α) peut s'écrire (n° 7)

$$\tfrac{1}{2}(\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2) = U - U_0,$$

v_0 et U_0 étant les valeurs initiales de v et U, cette supposition revient à regarder la force vive initiale comme donnée, et alors la force vive finale le sera aussi. D'après cela, on a cette équation

$$(c)\qquad \delta\int\Sigma mv\,ds = 0,$$

et l'on en conclut ce théorème général : *Dans le mouvement d'un système pour lequel on a une fonction de forces et le principe des forces vives, les courbes décrites par les différents corps et leurs vitesses sont telles, que la variation infiniment petite de l'intégrale*

$$(d) \qquad \int \Sigma mv\, ds$$

est nulle, quand on suppose des trajectoires infiniment voisines de celles qui sont décrites et compatibles avec les liaisons, pourvu que l'on suppose donnés les premiers et derniers points de chaque trajectoire, et que l'on suppose aussi donnée la force vive initiale.

C'est dans ce théorème que consiste ce que l'on appelle improprement le *principe de la moindre action;* mais on n'ajoute pas dans les Traités de Mécanique, et en particulier dans celui de Lagrange, que la force vive initiale est donnée, et, d'après le raisonnement qui précède, cette condition est indispensable. Si nous comparons l'équation (c) à l'équation (a) d'Hamilton (n° 22), nous voyons qu'elles supposent l'une et l'autre que l'on se donne les positions du système au premier et au dernier instant, mais pour la première on se donne le temps final aussi bien que le temps initial, et pour la seconde équation on se donne en compensation la force vive initiale.

25. Si nous remarquons que $ds = v\,dt$, l'intégrale (d) peut s'écrire

$$\int \sum m \frac{ds^2}{dt} \quad \text{ou} \quad \int \sum mv^2\, dt.$$

Or non-seulement on a l'équation

$$(e) \qquad \delta \int \sum m \frac{ds^2}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \int T\, dt = 0,$$

en imaginant données les positions extrêmes de chaque corps entre lesquelles se font les intégrations, et en supposant dt remplacé par sa valeur tirée de l'équation des forces vives, ce qui revient à supposer la force vive initiale donnée; mais, de plus, cette formule ainsi comprise renferme toutes les équations différentielles du mouvement.

En effet, on a l'équation des forces vives

$$T = U + h \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2} \Sigma m\, ds^2 = (U + h)\, dt^2,$$

et l'on en déduit

$$\delta\, dt = \frac{\Sigma m\, ds\, d\delta s - \delta U\, dt^2}{2(U+h)\,dt}.$$

Or on a

$$\delta \int \sum m \frac{ds^2}{dt} = \int \sum m \delta \frac{ds^2}{dt} = 2 \int \sum m \frac{ds}{dt}\, d\delta s - \int \sum m \frac{ds^2}{dt^2}\, d\delta t;$$

on a, pour la seconde intégrale du dernier membre,

$$\int \sum m \frac{ds^2}{dt^2}\, d\delta t = 2 \int T\, d\delta t = \int \sum m \frac{ds}{dt}\, d\delta s - \int \delta U\, dt;$$

il en résulte

$$\delta \int \sum m \frac{ds^2}{dt} = \int \sum m \frac{ds}{dt}\, d\delta s + \int \delta U\, dt.$$

Or on a

$$\begin{aligned}\int \sum m \frac{ds}{dt}\, d\delta s &= \int \sum m \left(\frac{dx}{dt}\, d\delta x + \frac{dy}{dt}\, d\delta y + \frac{dz}{dt}\, d\delta z \right) \\ &= - \int \sum m \left(\frac{d^2x}{dt^2}\, \delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\, \delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\, \delta z \right) dt;\end{aligned}$$

donc l'équation (e) devient

$$\int \left[\sum m \left(\frac{d^2x}{dt^2}\, \delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\, \delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\, \delta z \right) - \delta U \right] dt = 0,$$

elle renferme, par conséquent, toutes les équations différentielles du mouvement.

26. La quantité $\int \Sigma m v\, ds$ a une variation nulle dans les suppositions données ci-dessus. Si les deux positions initiale et finale du système sont très-rapprochées, cette intégrale sera en général minimum ; si, au contraire, ces deux positions extrêmes ne sont pas très-rapprochées, l'intégrale pourra ne pas être minimum, mais il est évident qu'elle n'est pas susceptible d'un maximum.

Dans le cas particulier où un point matériel se meut sur une surface fixe par la seule influence d'une vitesse initiale, la vitesse du point reste constante en vertu du principe des forces vives, et, d'après le principe de la moindre action, la variation de l'intégrale $\int ds$ ou de l'arc s décrit par le point est nulle ; on en déduit facilement que le plan osculateur de la courbe est en chaque point normal à la surface. Jacobi a examiné dans quel cas cette ligne est minimum entre deux points donnés; mais nous ne nous arrêterons pas à cette question qui appartient plus à la Géométrie qu'à la Mécanique.

Nous avons fait remarquer que Lagrange, dans l'énoncé du principe de la moindre action, a fait cette omission que la force vive initiale doit être supposée donnée. Jacobi, qui ne trouve pas l'énoncé de Lagrange satisfaisant, a présenté dans ses *Leçons sur la Dynamique* ce principe sous une forme différente, exacte, mais qui en ôte tout l'intérêt.

Maupertuis, le premier, employa le nom de *principe de la moindre action* pour désigner un cas très-particulier de ce qui a été appelé ainsi au n° 24; il en fit des applications aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière. Laplace se servit aussi de ce principe pour la loi de la double réfraction; mais ces applications, qui purent paraître très-ingénieuses aux époques où elles furent publiées, sont fondées sur la théorie de l'émission et doivent être rejetées de la science.

Théorème de Gauss.

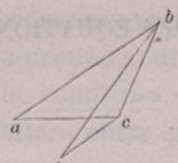
27. Nous venons de donner aux n^os 22 et 25 des théorèmes qui renferment toutes les équations différentielles du mouvement. Voici encore un théorème de Gauss qui remplit le même objet :

Le mouvement d'un système de points matériels, assujettis à des liaisons quelconques, se fait à chaque instant, de manière que l'expression $\Sigma m g^2$ *ait la plus petite valeur possible,* m *étant la masse de chaque point et* g *l'écartement au bout de l'instant* dt *entre la position qu'il occupe réellement et celle qu'il prendrait s'il était libre.*

Désignons par $m, m_1, m_2, \ldots$ les masses des corps, et soient $a, a_1, a_2, \ldots$ leurs positions au commencement de l'instant dt; $b, b_1, b_2, \ldots$ les positions qu'ils occuperaient à la fin de cet instant, en vertu des forces qui y sont appliquées et de la vitesse acquise; enfin, soient $c, c_1, c_2, \ldots$ leurs positions véritables à la fin de cet instant.

$\frac{1}{dt} m.ab$ est la quantité de mouvement imprimée à la masse m dans l'instant dt, $\frac{1}{dt} m.ac$ est la quantité de mouvement qu'elle possède à cause des liaisons, et $\frac{1}{dt}m.cb$ est la quantité de mouvement qu'elle perd par suite de ces liaisons. D'après le principe de d'Alembert (n° 2), les quantités de mouvement perdues à chaque instant par tous les points du système se font équilibre (*fig.* 1).

Fig. 1.



Soient donc $h, h_1, h_2, \ldots$ des positions infiniment voisines que les corps puissent prendre en partant des points $c, c_1, c_2, \ldots$ en vertu des liaisons du système; alors $ch, c_1h_1, \ldots$ seront les déplacements virtuels de ces corps, et en exprimant l'équilibre des quantités de mouvement perdues, on aura

$$\Sigma m.cb.ch.\cos bch = 0;$$

plus généralement cette quantité est nulle ou négative, s'il existe des obstacles qui permettent certains mouvements sans permettre les mouvements directement opposés.

On a ensuite

$$\overline{bh}^2 = \overline{cb}^2 + ch^2 - 2cb \times ch.\cos bch,$$

et, par suite,

$$\Sigma m.\overline{bh}^2 - \Sigma m.\overline{bc}^2 = \Sigma m.\overline{ch}^2 - 2\Sigma m.cb.ch.\cos bch = \Sigma m.\overline{ch}^2.$$

Le second membre est toujours positif dans le cas même où $\Sigma m.cb.ch.\cos bch$ serait négatif au lieu d'être nul; on a donc

$$\Sigma m.\overline{bh}^2 > \Sigma m.\overline{bc}^2,$$

et, par conséquent, $c, c_1, \ldots$ étant les positions que prennent $m, m_1, \ldots$ parmi toutes celles que permettent les liaisons, la somme $\Sigma m\overline{bc}^2$ est un minimum.

Dans le cas de l'équilibre, les points c coïncident avec les points a; ainsi, dans l'état de l'équilibre, la somme $\Sigma m.\overline{ab}^2$ est plus petite que $\Sigma m.\overline{bh}^2$, c'est-à-dire qu'elle est un minimum.

SECTION II.

SUR LES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE.

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

1. Avant de parler de l'emploi des équations aux différences partielles du premier ordre dans la Dynamique, nous allons rappeler quelques propriétés de ces équations qui nous seront indispensables.

Soit

$$L = 0 \tag{1}$$

une équation entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et une fonction z de ces variables, et supposons que cette équation renferme, en outre, n constantes α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$; je dis qu'on peut en déduire une équation aux différences partielles du premier ordre, dans laquelle les constantes sont éliminées. En effet, en différentiant l'équation donnée par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, j'obtiendrai n équations que je puis représenter par

$$\frac{dz}{dx_1} = z_1, \quad \frac{dz}{dx_2} = z_2, \quad \ldots, \quad \frac{dz}{dx_n} = z_n, \tag{2}$$

et en éliminant les n constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ entre ces n équations et l'équation (1), j'aurai une équation

$$\varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{dz}{dx_1}, \ldots, \frac{dz}{dx_n}\right) = 0 \tag{3}$$

entre $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ et les dérivées partielles $\frac{dz}{dx_1}, \frac{dz}{dx_2}, \ldots, \frac{dz}{dx_n}$.

L'équation (1) a été appelée par Lagrange l'*intégrale complète* de l'équation aux différences partielles (3); elle renferme n constantes arbitraires. Toutefois, comme nous verrons bientôt, une équation aux différences partielles du premier ordre possède une infinité d'intégrales complètes (*Œuvres de Lagrange*, t. IV, p. 62).

Définissons ensuite les intégrales singulières de l'équation (3). Réduisons, par exemple, le nombre n à deux. Les expressions de $\frac{dz}{dx_1}$, $\frac{dz}{dx_2}$ resteront les mêmes que précédemment, si l'on suppose encore z donné par l'équation (1), mais qu'on prenne pour α_1, α_2, au lieu de constantes, des fonctions de x_1, x_2, à la condition de choisir ces deux fonctions comme il suit. On a, en mettant entre parenthèses les dérivées partielles,

$$\frac{dz}{dx_1} = \left(\frac{dz}{dx_1}\right) + \frac{dz}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dx_1} + \frac{dz}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dx_1},$$

$$\frac{dz}{dx_2} = \left(\frac{dz}{dx_2}\right) + \frac{dz}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dx_2} + \frac{dz}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dx_2}.$$

La forme des équations (2) restera donc la même que précédemment, si l'on détermine α_1, α_2 par les deux équations

$$(4) \qquad \frac{dz}{d\alpha_1} = 0, \quad \frac{dz}{d\alpha_2} = 0.$$

Donc, en éliminant α_1 et α_2 entre les équations

$$L = 0, \quad \frac{dz}{dx_1} = z_1, \quad \frac{dz}{dx_2} = z_2,$$

on arrivera à la même équation (3) que lorsque α_1, α_2 sont supposés constants. L'équation $L = 0$ est alors appelée *solution singulière*.

Si nous regardons x_1, x_2, z comme trois coordonnées rectangulaires, l'équation $L = 0$, dans laquelle α_1, α_2 sont des constantes arbitraires, représente une infinité de surfaces et l'équation $L = 0$, dans laquelle α_1, α_2 sont des fonctions de x_1, x_2, z, tirées des équations (4), représente une surface unique qui est l'enveloppe des premières.

2. Parlons ensuite de la *solution générale*. Représentons une intégrale complète de l'équation (3) par

$$(5) \qquad z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

et cherchons quelles fonctions de x_1, x_2, ..., x_n, z il faudra prendre pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, afin que cette expression soit encore une solution de l'équation (3).

Regardons α_n comme une fonction arbitraire de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, et posons

$$\alpha_n = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}). \tag{6}$$

Si l'on considère $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ comme constants, on a

$$dz = \frac{dF}{dx_1}dx_1 + \frac{dF}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_n}dx_n;$$

mais, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont variables et fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a

$$\begin{aligned} dz = {} & \frac{dF}{dx_1}dx_1 + \frac{dF}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_n}dx_n \\ & + \left(\frac{dF}{d\alpha_1} + \frac{dF}{d\alpha_n}\frac{d\alpha_n}{d\alpha_1}\right)d\alpha_1 + \left(\frac{dF}{d\alpha_2} + \frac{dF}{d\alpha_n}\frac{d\alpha_n}{d\alpha_2}\right)d\alpha_2 + \ldots \end{aligned}$$

La différentielle dz conservera donc la même forme que dans le premier cas, si l'on a les équations

$$\frac{dF}{d\alpha_1} + \frac{dF}{d\alpha_n}\frac{d\alpha_n}{d\alpha_1} = 0, \quad \frac{dF}{d\alpha_2} + \frac{dF}{d\alpha_n}\frac{d\alpha_n}{d\alpha_2} = 0, \quad \ldots, \tag{7}$$

et, par conséquent, les dérivées partielles de z resteront aussi les mêmes.

Donc, si l'on tire $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des équations (6) et (7) pour les porter dans la formule (5), on aura une solution qui satisfera à l'équation aux différences partielles (3); elle porte le nom d'*intégrale générale*.

La solution générale deviendra une solution complète si l'on prend dans la formule (6), au lieu d'une fonction arbitraire, une fonction déterminée renfermant n nouvelles constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Si l'on prend pour la fonction φ une fonction déterminée renfermant un nombre de constantes arbitraires plus grand que n et égal à $n + r$, on dit que r de ces constantes sont *superflues*.

3. On peut encore obtenir une solution dépendant des fonctions arbitraires de la manière suivante.

Reprenons l'équation

$$(a) \qquad \varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{dz}{dx_1}, \frac{dz}{dx_2}, \ldots, \frac{dz}{dx_n}\right) = 0,$$

et supposons la solution complète

$$(b) \qquad z = \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Imaginons que les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ deviennent des fonctions arbitraires des quantités restantes $\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n$; puis substituons ces fonctions dans l'expression de z. Nous aurons, en différentiant z,

$$\begin{aligned} dz = {} & \frac{d\mathrm{F}}{dx_1}dx_1 + \frac{d\mathrm{F}}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{d\mathrm{F}}{dx_n}dx_n \\ & + \left[\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_{i+1}}\right) + \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{d\alpha_{i+1}} + \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{d\alpha_{i+1}} + \ldots + \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_i}\frac{d\alpha_i}{d\alpha_{i+1}}\right] d\alpha_{i+1} \\ & + \left[\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_{i+2}}\right) + \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{d\alpha_{i+2}} + \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{d\alpha_{i+2}} + \ldots + \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_i}\frac{d\alpha_i}{d\alpha_{i+2}}\right] d\alpha_{i+2} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

les dérivées entre parenthèses indiquant des dérivées partielles. La différentielle dz conservera la même forme que si $\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ sont des constantes, lorsque nous les déterminerons par les équations

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_{i+1}}\right) + \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{d\alpha_{i+1}} + \ldots + \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_n}\frac{d\alpha_n}{d\alpha_{i+1}} = 0, \\ & \left(\frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_{i+2}}\right) + \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{d\alpha_{i+2}} + \ldots + \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_n}\frac{d\alpha_n}{d\alpha_{i+2}} = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Au moyen de ces équations, tirons $\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ comme fonctions de x_1, $x_2, \ldots, x_n$; portons ces expressions dans celles de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$; enfin substituons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dans la formule (b), et nous aurons une solution de l'équation (a).

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ces solutions dépendant de fonctions arbitraires, d'autant plus que, dans ce qui suit, nous n'aurons à considérer que les solutions complètes.

ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES D'HAMILTON.

4. Nous avons vu (Section I, nº 22) que, lorsqu'il existe une fonction de forces, les équations différentielles du mouvement d'un système sont renfermées dans la formule

$$\delta \int (\mathrm{T}+\mathrm{U})\, dt = 0,$$

où l'on prend l'intégrale depuis une valeur donnée τ jusqu'à t et où l'on suppose nulles les variations des coordonnées à ces deux limites.

Supposons maintenant que les δq_i ne soient pas nuls pour les limites inférieure et supérieure τ et t de l'intégrale

$$\mathrm{V} = \int (\mathrm{T}+\mathrm{U})\, dt,$$

et posons

$$\mathrm{T}+\mathrm{U} = \mathrm{P}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{V} = \int \mathrm{P}\, dt;$$

nous aurons, après l'intégration par parties faite au nº 23 de la Section I,

$$\delta \mathrm{V} = \sum \frac{d\mathrm{P}}{dq'_i}\,\delta q_i - \sum \frac{d\mathrm{P}_0}{dq'^{0}_i}\,\delta q^0_i + \int \sum \left(\frac{d\mathrm{P}}{dq_i} - \frac{d\dfrac{d\mathrm{P}}{dq'_i}}{dt} \right) \delta q_i\, dt,$$

en indiquant par l'indice o les quantités relatives à la limite inférieure. Les coefficients des δq_i sous le signe $\int$ sont nuls et donnent, comme nous avons vu, les équations différentielles de Lagrange; il reste donc

$$\delta \mathrm{V} = \sum \frac{d\mathrm{P}}{dq'_i}\,\delta q_i - \sum \frac{d\mathrm{P}^0}{dq'^{0}_i}\,\delta q^0_i;$$

or on a

$$p_i = \frac{d\mathrm{T}}{dq'_i} = \frac{d\mathrm{P}}{dq'_i};$$

on a donc

$$\delta \mathrm{V} = \Sigma p_i\,\delta q_i - \Sigma p^0_i\,\delta q^0_i$$

ou

$$\delta \mathrm{V} = p_1\,\delta q_1 + p_2\,\delta q_2 + \ldots + p_k\,\delta q_k - p^0_1\,\delta q^0_1 - p^0_2\,\delta q^0_2 + \ldots - p^0_k\,\delta q^0_k.$$

Quand on suppose les variations δq nulles aux deux limites τ et t du temps, alors les constantes arbitraires introduites par les intégrations sont complétement déterminées par les deux positions extrêmes des points du système qui sont données; mais, au contraire, si ces positions extrêmes sont arbitraires, les q_i, p_i sont fonctions de t et de $2k$ constantes arbitraires, V est une fonction de t et de ces $2k$ constantes, et la dernière formule représente la variation de V qui provient des variations de ces constantes.

D'autre part, les équations intégrales, au nombre de $2k$, renferment les $2k$ quantités q_i, p_i, le temps t et les $2k$ constantes arbitraires. On peut remplacer ces $2k$ constantes par les valeurs initiales des quantités q_i, p_i, qui sont désignées par q_i^0, p_i^0; on a alors $2k$ équations entre les $2k$ quantités q_i, p_i, les q_i^0, p_i^0 et t. Les p_i, p_i^0 peuvent donc être exprimées au moyen des q_i, q_i^0 et de t; ainsi V peut être réduit à une fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_k$, de $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_k^0$ et de t. Si l'on fait varier cette expression de V, en laissant t invariable, on a

$$\delta V = \frac{dV}{dq_1}\delta q_1 + \frac{dV}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{dV}{dq_k}\delta q_k + \frac{dV}{dq_1^0}\delta q_1^0 + \frac{dV}{dq_2^0}\delta q_2^0 + \ldots + \frac{dV}{dq_k^0}\delta q_k^0.$$

Si l'on compare cette expression de δV à la précédente, on a

$$\frac{dV}{dq_i} = p_i, \quad \frac{dV}{dq_i^0} = -p_i^0,$$

pour $i = 1, 2, \ldots, k$. Or P est la dérivée totale de V par rapport à t; on a donc

$$P = \frac{dV}{dt} + \sum \frac{dV}{dq_i}\frac{dq_i}{dt} = \frac{dV}{dt} + \sum p_i q_i'$$

ou

$$\frac{dV}{dt} + \theta = 0,$$

en faisant

$$\theta = \Sigma p_i q_i' - P.$$

Cette expression de θ donne

$$\theta = \sum q_i' \frac{dT}{dq_i'} - (T + U) = 2T - (T + U) = T - U = H.$$

Or cette expression de θ ou de H peut s'exprimer par les seules quantités $t, q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k$ ou par $t, q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dV}{dq_1}, \ldots,$

$\frac{dV}{dq_k}$, en sorte qu'on a cette équation aux différences partielles du premier ordre

$$\frac{dV}{dt} + H\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \ldots, \frac{dV}{dq_k}\right) = 0,$$

qui a été trouvée par Hamilton. Cette équation est satisfaite par

$$V = \int (T + U)\, dt,$$

qui renferme les k constantes arbitraires $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_k^0$; si l'on augmente V d'une constante, il satisfera encore à cette équation; on aura donc une solution qui renferme $k+1$ constantes arbitraires, c'est-à-dire autant qu'il y a de variables : cette solution sera donc une intégrale complète.

Si l'on pouvait obtenir cette expression de V, on aurait, d'après ce que nous venons de voir, en vertu des équations différentielles du mouvement,

$$\frac{dV}{dq_i} = p_i, \quad \frac{dV}{dq_i^0} = -p_i^0,$$

et les secondes de ces équations, en nombre égal à k, seraient les intégrales du problème.

Analogie des équations du problème des isopérimètres et de celles de la Dynamique.

5. On peut étendre les résultats précédents au problème qui consiste à trouver le maximum ou le minimum d'une intégrale

$$V = \int P\, dt,$$

où P est une fonction de k variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$ et de leurs dérivées par rapport à t.

En égalant à zéro la variation de cette intégrale, on a, d'après le calcul du n° 23 (Section I), les k équations

$$(1) \qquad \frac{d\frac{dP}{dq'_i}}{dt} = \frac{dP}{dq_i},$$

i ayant les valeurs 1, 2, ..., k. Introduisons les variables

$$p_i = \frac{dP}{dq'_i}; \tag{2}$$

la formule (2) fournit k équations qui permettront de calculer les dérivées q'_i en fonction des q_i, p_i; introduisons ensuite la fonction

$$\theta = \Sigma p_i q'_i - P.$$

On aura

$$\delta\theta = \Sigma q'_i \delta p_i + \Sigma p_i \delta q'_i - \delta P,$$
$$\delta P = \sum \left(\frac{dP}{dq_i}\right) \delta q_i + \sum p_i \delta q'_i - \frac{dP}{dt} \delta t,$$

la dérivée mise entre parenthèses rappelant que P est considéré comme fonction des q_i et q'_i; on en déduit

$$\delta\theta = \sum q'_i \delta p_i - \sum \left(\frac{dP}{dq_i}\right) \delta q_i - \frac{dP}{dt} \delta t.$$

D'ailleurs, si θ est regardé comme fonction des q_i, p_i et de t, on a aussi

$$\delta\theta = \sum \frac{d\theta}{dp_i} \delta p_i + \sum \frac{d\theta}{dq_i} \delta q_i + \frac{d\theta}{dt} \delta t.$$

En comparant les deux valeurs de $\delta\theta$, on a

$$q'_i = \frac{d\theta}{dp_i}, \quad \left(\frac{dP}{dq_i}\right) = -\frac{d\theta}{dq_i}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}.$$

Les deux premières de ces équations, en ayant égard à (1) et (2), deviennent

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{d\theta}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{d\theta}{dq_i},$$

et, en y faisant $i = 1, 2, \ldots, k$, on obtient un système d'équations canoniques dont dépend le problème proposé.

Sur différentes manières d'exprimer la fonction V.

6. On a

$$V = \int_\tau^t (T + U)\, dt,$$

et, comme on a $T - U = h$, d'après le principe des forces vives, on peut donner à V les deux formes suivantes :

$$V = \int_\tau^t (2U + h)\,dt = 2\int_\tau^t U\,dt + ht, \quad V = 2\int_\tau^t T\,dt - ht.$$

Posons

$$W = 2\int_\tau^t T\,dt = 2\int_\tau^t U\,dt + 2ht;$$

il en résultera

$$V = W - ht.$$

Considérons un système libre, et supposons que la fonction de forces U soit une fonction homogène du degré g; on aura

$$gU = \sum\left(x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} + z\frac{dU}{dz}\right),$$

le signe Σ s'étendant à toutes les coordonnées x, y, z des masses m. On a donc

$$W = \frac{2}{g}\int_\tau^t \sum\left(x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} + z\frac{dU}{dz}\right)dt + 2ht.$$

Or on a

$$\frac{dU}{dx} = m\frac{dx'}{dt}, \quad \frac{dU}{dy} = m\frac{dy'}{dt}, \quad \frac{dU}{dz} = m\frac{dz'}{dt},$$

x', y', z' étant les dérivées de x, y, z par rapport à t, et il en résulte

$$W = \frac{2}{g}\sum m\int_\tau^t (x\,dx' + y\,dy' + z\,dz') + 2ht. \tag{1}$$

On a ensuite, par l'intégration par parties,

$$\left\{\begin{aligned}&\sum m\int_\tau^t (x\,dx' + y\,dy' + z\,dz')\\ &\quad = \sum m(xx' + yy' + zz') - \sum m(aa' + bb' + cc') - 2\int_\tau^t T\,dt,\end{aligned}\right. \tag{2}$$

a, b, c, a', b', c' étant les valeurs initiales de x, y, z, x', y', z'.

Comme on a

$$(3) \qquad 2\int_{\tau}^{t} \mathrm{T}\,dt = \mathrm{W},$$

en substituant (3) dans (2), puis (2) dans (1), on aura

$$\frac{2+g}{2}\mathrm{W} = ght + \Sigma m(xx' + yy' + zz') - \Sigma m(aa' + bb' + cc').$$

Dans le cas où l'attraction entre les différentes masses m a lieu suivant la raison inverse du carré de la distance, on a

$$\mathrm{U} = \sum \frac{mm_1}{r},$$

r étant la distance entre m et m_1; U étant une fonction homogène de degré -1, on a $g = -1$. Il en résulte

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{W} = -ht + \Sigma m(xx' + yy' + zz') - \Sigma m(aa' + bb' + cc').$$

— folgt auch aus Gl. 17 $\frac{d^2 \Sigma m r^2}{dt^2} = (4+2\lambda)\mathrm{U} + 4h'$

Dans le cas d'un seul point attiré vers un centre fixe, supposé à l'origine des coordonnées, si l'on pose

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad a^2 + b^2 + c^2 = r_0^2,$$

et qu'on désigne par r', r'_0 la dérivée de r et sa valeur initiale, on aura, en prenant pour unité l'attraction du point fixe sur le point mobile à l'unité de distance,

$$\mathrm{U} = \frac{1}{r}, \qquad \tfrac{1}{2}\mathrm{W} = -ht + rr' - r_0 r'_0.$$

SUR L'EMPLOI DE L'ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES D'HAMILTON POUR INTÉGRER LES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE.

7. Nous allons nous occuper du théorème suivant, dû à Jacobi :

Soit l'équation aux différences partielles du premier ordre

$$(1) \qquad \frac{d\mathrm{V}}{dt} + \mathrm{H}\left(t,\, q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_k,\, \frac{d\mathrm{V}}{dq_1},\, \frac{d\mathrm{V}}{dq_2},\, \ldots,\, \frac{d\mathrm{V}}{dq_k}\right) = 0,$$

qui ne contient pas V *explicitement et semblable à celle d'Hamilton. Supposons que nous ayons obtenu pour* V *une solution complète de cette équa-*

tion, c'est-à-dire une solution qui contienne, outre la constante liée à V *par addition, encore* k *constantes arbitraires* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. *Alors les équations*

$$(2) \qquad \frac{dV}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{dV}{d\alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{dV}{d\alpha_k} = \beta_k,$$

où $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ *désignent des constantes arbitraires, avec les équations*

$$(3) \qquad \frac{dV}{dq_1} = p_1, \quad \frac{dV}{dq_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{dV}{dq_k} = p_k,$$

forment les intégrales du système d'équations différentielles

$$(4) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i},$$

où i *a les valeurs* 1, 2, ..., k, *et où* H *représente la fonction*

$$H(t, q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2 \ldots, p_k).$$

Ce théorème, dans le cas particulier où les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ représentent les valeurs de $q_1, q_2, \ldots, q_k$ pour $t = 0$, appartient à Hamilton et a été donné au n° 4.

1° Démontrons que les équations (3) sont satisfaites en vertu des équations (4). Si nous différentions l'équation

$$\frac{dV}{dq_i} = p_i,$$

nous avons

$$\frac{d^2V}{dq_i\,dt} + \frac{d^2V}{dq_i\,dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{d^2V}{dq_i\,dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots - \frac{dp_i}{dt} = 0,$$

et, en vertu des équations (3) et (4),

$$\frac{d^2V}{dq_i\,dt} + \frac{dH}{dp_1}\frac{dp_1}{dq_i} + \frac{dH}{dp_2}\frac{dp_2}{dq_i} + \ldots + \frac{dH}{dq_i} = 0.$$

Or cette équation est satisfaite, car V satisfait à l'équation (1), et, en différentiant cette équation par rapport à q_i, on obtient l'équation précédente.

2° Démontrons que les équations (2) sont satisfaites en vertu des équations (4) et des équations (3) qui en sont la conséquence, d'après ce que nous venons de voir. Posons

$$\frac{dV}{d\alpha} = \beta,$$

α étant une quelconque des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, et démontrons que β est constant. Nous avons, en effet,

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{dt} &= \frac{d^2V}{d\alpha\, dt} + \frac{d^2V}{d\alpha\, dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{d^2V}{d\alpha\, dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots \\ &= \frac{d^2V}{d\alpha\, dt} + \frac{dp_1}{d\alpha}\frac{dH}{dp_1} + \frac{dp_2}{d\alpha}\frac{dH}{dp_2} + \ldots = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dV}{dt} + H\right) = 0.\end{aligned}$$

8. On peut encore démontrer ce théorème en prouvant de la manière suivante que des équations (2) et (3) on peut déduire les équations (4).

V est fonction des variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$, des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ et de t. Désignons en général par δ la caractéristique de la variation d'une fonction de ces quantités quand on fait varier toutes ces quantités excepté t. On a l'équation

$$\delta\left(\frac{dV}{dt}\right) = \left(\frac{d\,\delta V}{dt}\right),$$

les parenthèses étant mises pour représenter des dérivées totales. Or on a, en se servant des équations (3),

$$\begin{aligned}\left(\frac{dV}{dt}\right) &= \frac{dV}{dt} + \frac{dV}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{dV}{dq_k}\frac{dq_k}{dt} \\ &= -H + p_1\frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_k\frac{dq_k}{dt},\end{aligned}$$

et, par suite,

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned}\delta\left(\frac{dV}{dt}\right) = &-\frac{dH}{dq_1}\delta q_1 - \ldots - \frac{dH}{dq_k}\delta q_k - \frac{dH}{dp_1}\delta p_1 - \ldots - \frac{dH}{dp_k}\delta p_k \\ &+ \frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_k}{dt}\delta p_k + p_1\delta\frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_k\delta\frac{dq_k}{dt}.\end{aligned}\right.$$

D'autre part, en se servant des équations (2) et (3), on a

$$\begin{aligned}\delta V &= \frac{dV}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dV}{dq_k}\delta q_k + \frac{dV}{d\alpha_1}\delta\alpha_1 + \ldots + \frac{dV}{d\alpha_k}\delta\alpha_k \\ &= p_1\delta q_1 + \ldots + p_k\delta q_k + \beta_1\delta\alpha_1 + \ldots + \beta_k\delta\alpha_k,\end{aligned}$$

et, par suite,

$$(b) \qquad \left(\frac{d\delta V}{dt}\right) = \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \ldots + \frac{dp_k}{dt}\delta q_k + p_1\frac{d\delta q_1}{dt} + \ldots + p_k\frac{d\delta q_k}{dt}.$$

En égalant les expressions (a) et (b), on a l'équation

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_k}{dt}\delta p_k - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_k}{dt}\delta q_k = \delta H,$$

qui renferme toutes les équations (4), parce que les variations δq_i, δp_i sont indépendantes.

9. Nous venons de supposer que V est une solution complète de l'équation (1), renfermant k constantes arbitraires. Mais le raisonnement que nous avons fait pour prouver que les équations (2) sont des intégrales des équations (4) s'applique entièrement au cas où la solution V renfermerait $k+r$ constantes arbitraires, et par conséquent r constantes superflues; en sorte que, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+r}$ sont ces constantes, les équations

$$(c) \qquad \frac{dV}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{dV}{d\alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{dV}{d\alpha_{k+r}} = \beta_{k+r},$$

où $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k+r}$ désignent des constantes arbitraires, seront des solutions des équations (4). Or, comme ces équations doivent se réduire à k distinctes seulement, il doit exister r relations entre les quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k+r}$. C'est ce que l'on peut vérifier de la manière suivante.

Représentons l'équation (1) par

$$(d) \qquad \varphi\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dV}{dt}, \frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \ldots, \frac{dV}{dq_k}\right) = 0.$$

Supposons que α soit une constante arbitraire renfermée dans V, et posons

$$\frac{dV}{d\alpha} = \beta;$$

posons aussi

$$\frac{dV}{dt} = \varpi, \quad \frac{dV}{dq_i} = p_i.$$

En différentiant l'équation (d) par rapport à α, on a

$$\frac{d\varphi}{d\varpi}\frac{d\varpi}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{dp_1}\frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{dp_2}\frac{dp_2}{d\alpha} + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_k}\frac{dp_k}{d\alpha} = 0$$

ou

$$(e) \qquad \frac{d\varphi}{d\varpi}\frac{d\beta}{dt} + \frac{d\varphi}{dp_1}\frac{d\beta}{dq_1} + \frac{d\varphi}{dp_2}\frac{d\beta}{dq_2} + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_k}\frac{d\beta}{dq_k} = 0.$$

Les dérivées $\frac{d\varphi}{d\varpi}, \frac{d\varphi}{dp_1}, \ldots, \frac{d\varphi}{dp_k}$ sont des fonctions connues de $t, q_1, q_2, \ldots, q_k$, puisque l'expression de V qui entre dans la fonction φ est supposée connue, et l'on voit que les fonctions $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k+r}$ sont solutions de l'équation aux différences partielles (e) : or cette équation ne renferme que k solutions distinctes; donc il existe r relations entre les premiers membres des équations (c).

10. *Cas où l'équation aux différences partielles renferme une dérivée partielle par rapport à une variable, sans renfermer cette variable.* — Soit l'équation aux différences partielles du premier ordre

$$F\left(\frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \ldots, \frac{dV}{dq_n}, q_2, q_3, \ldots, q_n\right) = 0,$$

qui ne contient pas la variable q_1 explicitement, et dont on veut obtenir une solution complète. Pour cela, on posera

$$\frac{dV}{dq_1} = a,$$

a étant une constante arbitraire, et, par suite,

$$V = aq_1 + W,$$

W étant une fonction de $q_2, q_3, \ldots, q_n$, mais qui ne renferme plus q_1; il en résultera

$$F\left(a, \frac{dW}{dq_2}, \ldots, \frac{dW}{dq_n}, q_2, q_3, \ldots, q_n\right) = 0.$$

Supposons qu'on trouve pour W une solution complète de cette équation; elle renfermera $n-1$ constantes arbitraires, en comptant la constante additive; donc l'expression de V en renfermera n et représentera la solution complète de l'équation proposée.

On procéderait de la même manière pour les autres variables qui ne se présenteraient pas explicitement dans l'équation donnée.

11. Reprenons l'équation aux différences partielles d'Hamilton

$$\frac{dV}{dt}+H\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \ldots, \frac{dV}{dq_k}\right)=0,$$

dans laquelle nous supposons que t n'entre pas explicitement, en sorte que le principe des forces vives a lieu.

Posons, en désignant par h une constante,

$$(1) \qquad \frac{dV}{dt}=-h, \quad V=-ht+W,$$

W étant une fonction qui ne renferme plus t; nous aurons l'équation

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dW}{dq_1}, \frac{dW}{dq_2}, \ldots, \frac{dW}{dq_k}\right)=h.$$

Si l'on remarque que l'on a

$$(2) \qquad \frac{dW}{dq_1}=p_1, \quad \frac{dW}{dq_2}=p_2, \quad \ldots, \quad \frac{dW}{dq_k}=p_k,$$

on voit que cette équation n'est autre que celle des forces vives. Supposons que W représente la solution complète de cette équation; elle renfermera, outre h et la constante additive, un nombre $k-1$ de constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$. Les intégrales du premier ordre des équations différentielles de la Dynamique seront les équations (2), et leurs intégrales du second ordre seront

$$\frac{dV}{dh}=\tau, \quad \frac{dV}{da_1}=b_1, \quad \frac{dV}{da_2}=b_2, \quad \ldots, \quad \frac{dV}{da_{k-1}}=b_{k-1},$$

$\tau, b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ étant des constantes arbitraires; et ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{dW}{dh}=t+\tau, \quad \frac{dW}{da_1}=b_1, \quad \frac{dW}{da_2}=b_2, \quad \ldots, \quad \frac{dW}{da_{k-1}}=b_{k-1}.$$

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

12. Soit l'équation aux différences partielles

$$(1)\qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

dans laquelle on a

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q.$$

Lagrange a donné, pour traiter cette équation, une méthode par laquelle on cherche à déterminer p et q en fonction de x, y, z, pour les porter dans la formule

$$(2)\qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

qui devient alors intégrable (*Œuvres de Lagrange*, t. III, p. 549). Voici cette méthode avec les améliorations qui y ont été apportées depuis.

Si les valeurs de p, q étaient connues, en les substituant dans l'équation (1) on aurait une identité. On peut donc égaler à zéro les dérivées de l'équation (1) par rapport à x et z, et l'on obtient

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dp}\frac{dp}{dx} + \frac{dF}{dq}\frac{dq}{dx} = 0,$$
$$\frac{dF}{dz} + \frac{dF}{dp}\frac{dp}{dz} + \frac{dF}{dq}\frac{dq}{dz} = 0.$$

De plus, la condition d'intégrabilité de l'expression (2) donne

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz}q = \frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dz}p;$$

en éliminant $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dz}$ entre les trois équations, on a

$$(3)\qquad \frac{dF}{dp}\frac{dp}{dx} + \frac{dF}{dq}\frac{dp}{dy} + \left(p\frac{dF}{dp} + q\frac{dF}{dq}\right)\frac{dp}{dz} + \frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz} = 0.$$

Remplaçons, dans cette équation, q par sa valeur tirée de l'équation (1); alors on pourra déterminer p en fonction de x, y, z par une équation aux différences partielles, linéaire et du premier ordre; puis on aura q par l'équation (1). Enfin, en substituant ces valeurs dans l'équation

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \tag{4}$$

elle deviendra intégrable.

L'intégration de l'équation aux différences partielles (3) se déduit, comme on sait, de celle du système d'équations différentielles simultanées

$$\frac{dx}{\frac{dF}{dp}} = \frac{dy}{\frac{dF}{dq}} = \frac{dz}{p\frac{dF}{dp} + q\frac{dF}{dq}} = \frac{-dp}{\frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz}},$$

où q est remplacé d'après l'équation (1).

Soit

$$\theta(x, y, z, p) = a \tag{5}$$

une intégrale de ce système d'équations, a étant une constante arbitraire; cette équation satisfera aussi à l'équation (3). Les quantités p, q tirées de (1) et de (5) renfermeront la constante arbitraire a, et l'expression de z renfermera la constante a et une autre constante arbitraire; c'est donc l'intégrale complète de l'équation (1).

13. Considérons le cas particulier où z n'entre pas dans l'équation (1), en sorte qu'elle se réduise à

$$F(x, y, p, q) = 0;$$

alors p, q ne seront plus fonctions que de x et y.

Les équations linéaires précédentes deviendront

$$\frac{dx}{\frac{dF}{dp}} = \frac{dy}{\frac{dF}{dq}} = \frac{dz}{p\frac{dF}{dp} + q\frac{dF}{dq}} = \frac{-dp}{\frac{dF}{dx}} = \frac{-dq}{\frac{dF}{dy}},$$

le dernier rapport pouvant être ajouté par analogie. En supprimant le troisième rapport, on a

$$\frac{dx}{\frac{dF}{dp}} = \frac{dy}{\frac{dF}{dq}} = \frac{dp}{-\frac{dF}{dx}} = \frac{dq}{-\frac{dF}{dy}}. \tag{a}$$

Il en résulte le théorème suivant :

Soit l'équation aux différences partielles

$$F(x, y, p, q) = 0; \tag{b}$$

formons les équations différentielles (a). *Si l'on connaît, outre l'intégrale* $F = 0$ *de ces équations, une seconde intégrale*

$$\theta(x, y, p, q) = a, \tag{c}$$

il suffira, pour obtenir une intégrale complète de (b), *de tirer* p, q *des équations* (b), (c), *pour les porter dans la formule*

$$z = \int (p\,dx + q\,dy) \tag{d}$$

et de faire la quadrature.

14. Si l'on désigne par dt la valeur commune des rapports (a), on a ces équations canoniques

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dF}{dx},$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dq}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{dF}{dy}.$$

D'après ce qui a été démontré au n° 11, l'expression (d) de z étant une solution complète de l'équation aux différences partielles (b), si l'on pose

$$F = f(x, y, p, q) - h,$$

h étant une constante, les équations où τ et b sont des constantes arbitraires,

$$\frac{dz}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dz}{da} = b, \tag{e}$$

sont des intégrales des équations canoniques; en y ajoutant les deux intégrales

$$f(x, y, p, q) = h, \quad \theta(x, y, p, q) = a,$$

on aura toutes les intégrales des équations canoniques. En en supprimant la première des équations (e), on aura les intégrales du système (a).

On peut appliquer ce qui précède aux problèmes de Dynamique qui ne dépendent que de deux variables x, y. L'équation des forces vives

$$\mathrm{T} - \mathrm{U} = h,$$

dans laquelle on remplacera les variables conjuguées de x, y par p, q, tiendra lieu de l'équation (b) ou

$$f(x, y, p, q) = h.$$

On voit donc que, si l'on connaît, outre l'intégrale des forces vives, une seconde intégrale, on en pourra déduire les deux intégrales restantes.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE ET SUR LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ.

15. Soit l'équation

$$\mathrm{F}\left(\mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dq_1}, \frac{d\mathrm{V}}{dq_2}, \ldots, \frac{d\mathrm{V}}{dq_n}, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0, \tag{1}$$

qui contient la fonction V elle-même; on peut toujours lui substituer une autre équation qui ne renferme plus la fonction elle-même, à la condition d'avoir une variable indépendante de plus.

En effet, désignons par

$$\theta(q_1, q_2, \ldots, q_n, \mathrm{V}) = 0$$

l'intégrale de l'équation (1); en la différentiant par rapport à chacune des variables indépendantes, on a

$$\frac{d\theta}{dq_1} + \frac{d\theta}{d\mathrm{V}}\frac{d\mathrm{V}}{dq_1} = 0, \quad \frac{d\theta}{dq_2} + \frac{d\theta}{d\mathrm{V}}\frac{d\mathrm{V}}{dq_2} = 0, \quad \ldots,$$

ou

$$\frac{d\mathrm{V}}{dq_1} = -\frac{d\theta}{dq_1} : \frac{d\theta}{d\mathrm{V}}, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dq_2} = -\frac{d\theta}{dq_2} : \frac{d\theta}{d\mathrm{V}}, \quad \ldots,$$

et, en portant ces expressions dans l'équation (1), on aura

$$\mathrm{F}\left(\mathrm{V}, -\frac{d\theta}{dq_1} : \frac{d\theta}{d\mathrm{V}}, -\frac{d\theta}{dq_2} : \frac{d\theta}{d\mathrm{V}}, \ldots, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0.$$

On obtient ainsi une équation aux différences partielles du premier ordre, dans laquelle $q_1, q_2, \ldots, q_n$, V sont pris pour variables indépendantes et θ pour fonction; et cette équation ne renferme pas θ.

16. Il suit de là qu'on peut supposer que l'équation (1) ne contient pas la fonction V, et la représenter par

$$\varphi\left(\frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \ldots, \frac{dV}{dq_n}, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0. \tag{2}$$

Si nous posons, en général,

$$\frac{dV}{dq_i} = p_i,$$

elle deviendra

$$\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0. \tag{3}$$

Cherchons une solution complète de cette équation, qui renfermera $n-1$ constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

La différentielle de la fonction V est donnée par la formule

$$dV = p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \ldots + p_n\,dq_n. \tag{4}$$

Proposons-nous, d'après Jacobi, d'obtenir, outre l'équation (3), $n-1$ autres relations entre les n quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, de manière à pouvoir exprimer ces n quantités au moyen de ces variables.

Pour que l'expression (4) soit une différentielle totale exacte, il faut que les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition

$$\frac{dp_i}{dq_k} = \frac{dp_k}{dq_i}, \tag{5}$$

où i et k ont les valeurs 1, 2, 3, ..., n, soient remplies. Ce sont donc ces équations qui doivent déterminer $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, et alors on aura V en intégrant la formule

$$V = \int (p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \ldots + p_n\,dq_n).$$

Écrivons l'équation (3) sous cette forme

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a,$$

a étant une constante, et supposons que la fonction V soit connue; le système des n relations cherchées équivaut aux équations

$$(6)\qquad \frac{dV}{dq_1}=p_1,\quad \frac{dV}{dq_2}=p_2,\quad \ldots,\quad \frac{dV}{dq_n}=p_n.$$

Ces n équations renferment les $n-1$ constantes arbitraires a_1, a_2, ..., a_{n-1}, et de plus la constante a, et, si l'on résolvait ces équations par rapport à ces constantes, on aurait les équations

$$(7)\qquad H=a,\quad H_1=a_1,\quad \ldots,\quad H_{n-1}=a_{n-1},$$

dont la première ne serait autre que l'équation proposée. De plus, si l'on substituait les expressions (6) de p_1, p_2, ... dans les équations (7), elles seraient identiquement satisfaites.

17. Soient u, v deux fonctions quelconques des variables q_i, p_i, et posons généralement

$$[u,v]=\frac{du}{dq_1}\frac{dv}{dp_1}+\frac{du}{dq_2}\frac{dv}{dp_2}+\ldots+\frac{du}{dq_n}\frac{dv}{dp_n}$$
$$-\frac{du}{dp_1}\frac{dv}{dq_1}-\frac{du}{dp_2}\frac{dv}{dq_2}-\ldots-\frac{du}{dp_n}\frac{dv}{dq_n};$$

nous allons démontrer le théorème suivant :

Soient $\Phi=0$, $\Psi=0$ deux combinaisons des n équations (7) qui déterminent $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, de telle sorte que $p_1dq_1+p_2dq_2+\ldots+p_ndq_n$ soit une différentielle totale exacte, l'équation $[\Phi,\Psi]=0$ a lieu en vertu des mêmes équations.

Si l'on substitue les valeurs de p_1, p_2, ..., p_n tirées des équations (6) dans les équations $\Phi=0$, $\Psi=0$, elles seront identiquement satisfaites. Et, en différentiant ensuite une de ces équations par rapport à une des variables q_i, on aura encore une identité. En différentiant ainsi l'équation $\Phi=0$ par rapport à q_i, on aura

$$\frac{d\Phi}{dp_1}\frac{dp_1}{dq_i}+\frac{d\Phi}{dp_2}\frac{dp_2}{dq_i}+\ldots+\frac{d\Phi}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i}+\frac{d\Phi}{dq_i}=0$$

ou

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{d\Phi}{dp_k}\frac{dp_k}{dq_i}+\frac{d\Phi}{dq_i}=0.$$

En différentiant de même $\Psi = 0$ par rapport à q_k, on aura

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\Psi}{dp_i} \frac{dp_i}{dq_k} + \frac{d\Psi}{dq_k} = 0.$$

Multiplions la première de ces deux équations par $\frac{d\Psi}{dp_i}$, et sommons par rapport à i depuis 1 jusqu'à n; multiplions la seconde par $\frac{d\Phi}{dp_k}$, et sommons par rapport à k depuis 1 jusqu'à n; nous aurons ces deux équations

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Psi}{dp_i} \frac{d\Phi}{dp_k} \frac{dp_k}{dq_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\Psi}{dp_i} \frac{d\Phi}{dq_i} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\Psi}{dp_i} \frac{d\Phi}{dp_k} \frac{dp_i}{dq_k} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Phi}{dp_k} \frac{d\Psi}{dq_k} = 0.$$

En retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on a

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Psi}{dp_i} \frac{d\Phi}{dp_k} \left(\frac{dp_k}{dq_i} - \frac{dp_i}{dq_k} \right) + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\Psi}{dp_i} \frac{d\Phi}{dq_i} - \frac{d\Psi}{dq_i} \frac{d\Phi}{dp_i} \right) = 0.$$

Or on a l'équation

$$\frac{dp_k}{dq_i} - \frac{dp_i}{dq_k} = 0$$

pour toutes les valeurs de i et k; donc il reste

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\Psi}{dp_i} \frac{d\Phi}{dq_i} - \frac{d\Psi}{dq_i} \frac{d\Phi}{dp} \right) = 0$$

ou $[\Phi, \Psi] = 0$. Donc cette équation a lieu en vertu des équations (6) ou (7), c'est-à-dire qu'elle résulte de la combinaison de ces équations.

Prenons pour $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ deux des équations (7), $H_r = a_r$, $H_s = a_s$, nous aurons l'équation

$$[H_r, H_s] = 0;$$

cette équation ne renfermant aucune des constantes $a, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ne peut être qu'une identité. Il en résulte ce théorème :

Soient $H_r = a_r$, $H_s = a_s$ *deux des* n *équations, résolues par rapport* *aux constantes arbitraires, qui expriment que $p_1\,dq_1 + \ldots + p_n\,dq_n$ est une différentielle totale exacte, on a identiquement*

$$[\mathrm{H}_r, \mathrm{H}_s] = 0.$$

18. Occupons-nous de la proposition réciproque. Soient

$$(9) \qquad \mathrm{H} = a, \quad \mathrm{H}_1 = a_1, \quad \mathrm{H}_2 = a_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{H}_{n-1} = a_{n-1}$$

n équations, d'après lesquelles on peut considérer $p_1, p_2, \ldots, p_n$ comme des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, et supposons que toutes les équations

$$[\mathrm{H}_r, \mathrm{H}_s] = 0,$$

où r, s ont les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, soient satisfaites, je dis que $p_1\,dq_1 + \ldots + p_n\,dq_n$ est une différentielle totale exacte.

En traitant les deux équations $\mathrm{H}_r = a_r$, $\mathrm{H}_s = a_s$ comme nous avons fait ci-dessus pour $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, nous aurons l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\mathrm{H}_r}{dp_i} \frac{d\mathrm{H}_s}{dp_k} \left(\frac{dp_i}{dq_k} - \frac{dp_k}{dq_i} \right) + [\mathrm{H}_r, \mathrm{H}_s] = 0,$$

qu'on déduit de l'équation (8) en mettant H_r, H_s au lieu de Φ, Ψ. Les termes de la double somme, pour lesquels i est égal à k, sont nuls, et ceux pour lesquels i et k sont différents peuvent se grouper deux à deux, de manière à avoir le même facteur $\frac{dp_i}{dq_k} - \frac{dp_k}{dq_i}$, et l'on a

$$\sum_{i,k} \left(\frac{d\mathrm{H}_r}{dp_i} \frac{d\mathrm{H}_s}{dp_k} - \frac{d\mathrm{H}_r}{dp_k} \frac{d\mathrm{H}_s}{dp_i} \right) \left(\frac{dp_i}{dq_k} - \frac{dp_k}{dq_i} \right) + [\mathrm{H}_r, \mathrm{H}_s] = 0$$

en donnant dans la somme à i les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$, et à k les valeurs $i+1, i+2, \ldots, n$. En prenant pour H_r, H_s deux quelconques des fonctions $\mathrm{H}, \mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_{n-1}$, on conclut de cette formule $\frac{n(n-1)}{2}$ équations distinctes; elles renferment linéairement les $\frac{n(n-1)}{2}$ quantités

$$\frac{dp_i}{dq_k} - \frac{dp_k}{dq_i};$$

on en conclut que, si l'on a les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations

$$[H_r, H_s] = 0,$$

on a aussi les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations

$$\frac{dp_i}{dq_k} - \frac{dp_k}{dq_i} = 0,$$

qui prouvent que l'expression $p_1\,dq_1 + \ldots + p_n\,dq_n$ est une différentielle totale exacte.

Dans la démonstration précédente, nous avons admis implicitement que le déterminant des équations précédentes du premier degré n'est pas nul. Or on peut facilement démontrer que ce déterminant n'est pas nul, si les fonctions $H, H_1, \ldots, H_{n-1}$ sont indépendantes, et, par suite, si les n équations (9) sont distinctes, en sorte qu'on en puisse tirer $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

SUR LES INTÉGRALES SECONDES DES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE.

19. Supposons que nous soyons parvenu à déterminer les équations

$$(1) \qquad H = a, \quad H_1 = a_1, \quad \ldots, \quad H_{n-1} = a_{n-1},$$

qui expriment que $p_1\,dq_1 + \ldots + p_n\,dq_n$ est une différentielle totale exacte, et dont la première était donnée. Posons

$$V = \int (p_1\,dq_1 + \ldots + p_n\,dq_n),$$

nous avons une solution complète de l'équation

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \ldots, \frac{dV}{dq_n}\right) = a,$$

qui est l'équation $H = a$, dans laquelle on a fait

$$(2) \qquad p_1 = \frac{dV}{dq_1}, \quad p_2 = \frac{dV}{dq_2}, \quad \ldots;$$

d'après ce que nous avons vu (n° **11**), les équations

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{dH}{dp_1}, & \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{dH}{dp_2}, \quad \ldots, \quad \dfrac{dq_n}{dt} = \dfrac{dH}{dp_n}, \\[2ex] \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{dH}{dq_1}, & \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{dH}{dq_2}, \quad \ldots, \quad \dfrac{dp_n}{dt} = -\dfrac{dH}{dq_n} \end{cases}$$

ont pour intégrales les équations (1) qui reviennent aux équations (2), et, de plus, les équations

$$\frac{dV}{da} = t + b, \quad \frac{dV}{da_1} = b_1, \quad \ldots, \quad \frac{dV}{da_{n-1}} = b_{n-1},$$

où b_1, b_2, ..., b_n sont des constantes arbitraires, et qu'on peut écrire

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\left(\frac{dp_1}{da}\,dq_1 + \frac{dp_2}{da}\,dq_2 + \ldots + \frac{dp_n}{da}\,dq_n\right) = t + b, \\[2ex] \displaystyle\int\left(\frac{dp_1}{da_1}\,dq_1 + \frac{dp_2}{da_1}\,dq_2 + \ldots + \frac{dp_n}{da_1}\,dq_n\right) = b_1, \\[2ex] \displaystyle\int\left(\frac{dp_1}{da_2}\,dq_1 + \frac{dp_2}{da_2}\,dq_2 + \ldots + \frac{dp_n}{da_2}\,dq_n\right) = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il est d'ailleurs évident que, $p_1\,dq_1 + \ldots + p_n\,dq_n$ étant une différentielle exacte, sa dérivée par rapport à une des constantes a_1, a_2, ... l'est aussi et que les premiers membres peuvent s'intégrer.

On peut encore démontrer ces équations (4) comme il suit. Si l'on suppose qu'on remplace dans l'équation $H = a$ les p_i par leurs valeurs, l'équation sera identiquement satisfaite, et en la différentiant par rapport à a_i, on aura

$$\frac{dH}{dp_1}\,\frac{dp_1}{da_i} + \frac{dH}{dp_2}\,\frac{dp_2}{da_i} + \ldots + \frac{dH}{dp_n}\,\frac{dp_n}{da_i} = 0,$$

puis, d'après les équations (3),

$$\frac{dp_1}{da_i}\,dq_1 + \frac{dp_2}{da_i}\,dq_2 + \ldots + \frac{dp_n}{da_i}\,dq_n = 0;$$

en intégrant, on obtient toutes les équations (4), sauf la première.

p_1, p_2, ... peuvent être considérés aussi comme fonctions de a, et en différentiant l'équation $H = a$ par rapport à a, on aura

$$\frac{dH}{dp_1}\frac{dp_1}{da} + \frac{dH}{dp_2}\frac{dp_2}{da} + \ldots + \frac{dH}{dp_n}\frac{dp_n}{da} = 1;$$

en nous servant des équations différentielles, nous obtenons

$$\frac{dp_1}{da}\frac{dq_1}{dt} + \frac{dp_2}{da}\frac{dq_2}{dt} + \ldots = 1;$$

multiplions par dt et intégrons, nous aurons la première équation (4),

$$t + b = \int\left(\frac{dp_1}{da}dq_1 + \frac{dp_2}{da}dq_2 + \ldots\right).$$

20. Nous avons supposé, dans les considérations qui précèdent, que H est indépendant de t ou que le principe des forces vives est applicable; il suffit d'une légère modification pour les étendre au cas où H contient t.

Concevons donc que H contienne t, et qu'on ait obtenu les n intégrales

$$\varphi = a, \quad \varphi_1 = a_1, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1} = a_{n-1} \tag{5}$$

des équations (3), alors si les premiers membres de ces intégrales satisfont aux $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions $[\varphi_i, \varphi_s] = 0$, l'expression

$$dV = p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \ldots + p_n\,dq_n - H_1\,dt, \tag{6}$$

où H_1 est la valeur de H dans laquelle on a remplacé les p_i par leurs valeurs tirées des équations (5), est une différentielle totale exacte.

En effet, d'après ce qui a été prouvé ci-dessus (n° 18),

$$p_1\,dq_1 + \ldots + p_n\,dq_n$$

est une différentielle totale; il reste donc à démontrer que l'on a

$$\left(\frac{dp_i}{dt}\right) = -\frac{dH_1}{dq_i}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$, la parenthèse du premier membre indiquant une dérivée partielle. Or on a

$$\frac{dH_1}{dq_i} = \frac{dH}{dq_i} + \frac{dH}{dp_1}\frac{dp_1}{dq_i} + \ldots + \frac{dH}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i} = -\frac{dp_i}{dt} + \frac{dq_1}{dt}\frac{dp_1}{dq_i} + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\frac{dp_n}{dq_i},$$

et, d'après l'intégrabilité de $p_1\,dq_1 + \ldots + p_n dq_n$, il en résulte

$$\frac{dH_1}{dq_i} = -\frac{dp_i}{dt} + \frac{dp_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{dp_i}{dq_n}\frac{dq_n}{dt};$$

or on a

$$\frac{dp_i}{dt} = \left(\frac{dp_i}{dt}\right) + \frac{dp_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{dp_i}{dq_n}\frac{dq_n}{dt};$$

on a donc bien

$$\frac{dH_1}{dq_i} = -\left(\frac{dp_i}{dt}\right).$$

L'expression (6) étant une différentielle totale, on a

$$\frac{dV}{dq_1} = p_1, \quad \frac{dV}{dq_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{dV}{dq_n} = p_n, \quad \frac{dV}{dt} = -H_1 = -H.$$

Dans la dernière de ces équations, remplaçons $p_1, p_2, \ldots$ par leurs valeurs tirées des premières, nous aurons l'équation aux différences partielles

$$\frac{dV}{dt} + H\left(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n,\ \frac{dV}{dq_1},\ \ldots,\ \frac{dV}{dq_n}\right) = 0,$$

et l'expression obtenue pour V qui renferme les n constantes arbitraires $a, a_1, \ldots, a_{n-1}$, et la constante additive qui provient de la quadrature sera une solution complète. Donc, d'après ce qui a été démontré (n° 7), les dernières intégrales des équations canoniques sont

$$\frac{dV}{da} = b, \quad \frac{dV}{da_1} = b_1, \quad \ldots, \quad \frac{dV}{da_{n-1}} = b_{n-1}.$$

Ce théorème a été donné par M. Liouville en 1853; il est plus général que celui qui fait l'objet du numéro précédent, obtenu par Jacobi en 1843, mais publié seulement en 1866 dans son Ouvrage sur la Dynamique.

Sur un théorème de Jacobi.

21. *Soit* V *une fonction des quantités*

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n,$$

et posons

$$(1)\qquad \frac{dV}{dq_1}=p_1,\quad \frac{dV}{dq_2}=p_2,\quad \ldots,\quad \frac{dV}{dq_n}=p_n,$$

$$(2)\qquad \frac{dV}{da_1}=b_1,\quad \frac{dV}{da_2}=b_2,\quad \ldots,\quad \frac{dV}{da_n}=b_n.$$

Au moyen des équations (1) *et* (2), *on peut exprimer les* q_i, p_i *en fonction des* a_i, b_i, *et par conséquent former les dérivées des premières quantités par rapport aux secondes, ou on peut exprimer les* a_i, b_i *en fonction des* q_i, p_i, *et, par suite, former les dérivées des* a_i, b_i *par rapport aux* q_i, p_i. *Cela posé, on a les quatre équations*

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{db_k}{dq_i}=\frac{dp_i}{da_k}, && \frac{db_k}{dp_i}=-\frac{dq_i}{da_k},\\ &\frac{da_k}{dq_i}=-\frac{dp_i}{db_k}, && \frac{da_k}{dp_i}=\frac{dq_i}{db_k}, \end{aligned}\right.$$

pour i et k égaux à 1, 2, ..., *n*.

Différentions les équations (1) par rapport à q_i, en regardant a_1, a_2, ..., a_n comme fonctions de q_1, q_2, ..., q_n, et nous aurons

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2V}{dq_1\,dq_i}+\dfrac{d^2V}{dq_1\,da_1}\dfrac{da_1}{dq_i}+\dfrac{d^2V}{dq_1\,da_2}\dfrac{da_2}{dq_i}+\ldots=0,\\ \dfrac{d^2V}{dq_2\,dq_i}+\dfrac{d^2V}{dq_2\,da_1}\dfrac{da_1}{dq_i}+\dfrac{d^2V}{dq_2\,da_2}\dfrac{da_2}{dq_i}+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \dfrac{d^2V}{dq_n\,dq_i}+\dfrac{d^2V}{dq_n\,da_1}\dfrac{da_1}{dq_i}+\dfrac{d^2V}{dq_n\,da_2}\dfrac{da_2}{dq_i}+\ldots=0. \end{array}\right.$$

Différentions ensuite les équations (2) par rapport à a_k, en considérant q_1, q_2, ..., q_n comme fonctions de a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n, et nous aurons

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2V}{da_1\,da_k}+\dfrac{d^2V}{da_1\,dq_1}\dfrac{dq_1}{da_k}+\dfrac{d^2V}{da_1\,dq_2}\dfrac{dq_2}{da_k}+\ldots=0,\\ \dfrac{d^2V}{da_2\,da_k}+\dfrac{d^2V}{da_2\,dq_1}\dfrac{dq_1}{da_k}+\dfrac{d^2V}{da_2\,dq_2}\dfrac{dq_2}{da_k}+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \dfrac{d^2V}{da_n\,da_k}+\dfrac{d^2V}{da_n\,dq_1}\dfrac{dq_1}{da_k}+\dfrac{d^2V}{da_n\,dq_2}\dfrac{dq_2}{da_k}+\ldots=0. \end{array}\right.$$

Multiplions les équations (4) respectivement par $\frac{dq_1}{da_k}$, $\frac{dq_2}{da_k}$, $\dots$, $\frac{dq_n}{da_k}$, et ajoutons; nous aurons, d'après les équations (5),

$$\frac{d^2V}{dq_1\,dq_i}\frac{dq_1}{da_k}+\frac{d^2V}{dq_2\,dq_i}\frac{dq_2}{da_k}+\dots+\frac{d^2V}{dq_n\,dq_i}\frac{dq_n}{da_k}$$
$$-\frac{d^2V}{da_1\,da_k}\frac{da_1}{dq_i}-\frac{d^2V}{da_2\,da_k}\frac{da_2}{dq_i}-\dots-\frac{d^2V}{da_n\,da_k}\frac{da_n}{dq_i}=0;$$

ajoutons et retranchons au premier membre le terme $\frac{d^2V}{dq_i\,da_k}$, et nous voyons que cette équation peut s'écrire

$$\frac{dp_i}{da_k}=\frac{db_k}{dq_i},$$

ce qui est la première des équations (3).

En différentiant les équations (1) par rapport à p_i, les équations (2) par rapport à a_k, et opérant sur les deux systèmes d'équations obtenues comme sur les équations (4) et (5), on a

$$\frac{dq_i}{da_k}=-\frac{db_k}{dp_i}.$$

En différentiant les équations (1) par rapport à q_i, les équations (2) par rapport à b_k, et procédant comme ci-dessus, on a

$$\frac{dp_i}{db_k}=-\frac{da_k}{dq_i}.$$

Enfin, en différentiant les équations (1) par rapport à p_i, les équations (2) par rapport à b_k, on obtient

$$\frac{dq_i}{db_k}=\frac{da_k}{dp_i}.$$

Sur les intégrales des équations canoniques que l'on déduit d'une solution complète de l'équation aux différences partielles d'Hamilton.

22. Soit le système des équations différentielles canoniques

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{dH}{dp_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{dH}{dq_i},$$

où i est susceptible des valeurs 1, 2, ..., n. Si l'on obtient n intégrales de ces équations

$$(1) \qquad \varphi = a, \quad \varphi_1 = a_1, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1} = a_{n-1},$$

dont les premiers membres satisfont aux équations $[\varphi_i, \varphi_s] = 0$, alors, en tirant $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de ces intégrales pour les porter dans l'expression

$$p_1\,dq_1 + \ldots + p_n\,dq_n - \mathrm{H}\,dt,$$

cette expression sera une différentielle totale $d\mathrm{V}$ (n° 20); on aura donc

$$(2) \qquad \frac{d\mathrm{V}}{dq_1} = p_1, \quad \ldots, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dq_n} = p_n, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dt} = -\mathrm{H},$$

en sorte que l'expression de V satisfait à l'équation

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt} + \mathrm{H}\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{d\mathrm{V}}{dq_1}, \frac{d\mathrm{V}}{dq_2}, \ldots, \frac{d\mathrm{V}}{dq_n}\right) = 0$$

et en est une solution complète, et les intégrales des équations canoniques sont les équations (1) et les équations

$$(3) \qquad \frac{d\mathrm{V}}{da} = b, \quad \frac{d\mathrm{V}}{da_1} = b_1, \quad \frac{d\mathrm{V}}{da_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{d\mathrm{V}}{da_{n-1}} = b_{n-1},$$

$b, b_1, \ldots, b_{n-1}$ étant des constantes arbitraires.

Dans les premiers membres des équations (3), remplaçons les constantes $a, a_1, \ldots, a_{n-1}$, qui s'y trouvent, par les fonctions $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, et désignons ce que deviennent les premiers membres par φ'_1, $\varphi'_2, \ldots, \varphi'_{n-1}$, nous aurons, au lieu des équations (3),

$$\varphi' = b, \quad \varphi'_1 = b_1, \quad \ldots, \quad \varphi'_{n-1} = b_{n-1}.$$

Nous pouvons sans inconvénient représenter les fonctions qui forment les premiers membres des équations (1) par $a, a_1, \ldots, a_{n-1}$, et de même nous pouvons représenter par $b, b_1, \ldots, b_{n-1}$ les fonctions $\varphi', \varphi'_1, \ldots, \varphi'_{n-1}$. D'après les équations (2) et (3), les a_i, b_i sont fonctions des q_i,

p_i, et réciproquement, les q_i, p_i sont fonctions des a_i, b_i, et, d'après le numéro précédent, on a les formules

$$\frac{db_k}{dq_i}=\frac{dp_i}{da_k},\quad \frac{db_k}{dp_i}=-\frac{dq_i}{da_k},$$
$$\frac{da_k}{dq_i}=-\frac{dp_i}{db_k},\quad \frac{da_k}{dp_i}=\frac{dq_i}{db_k}.$$

Or on a

$$\frac{da_s}{da_k}=\sum_i\left(\frac{da_s}{dq_i}\frac{dq_i}{da_k}+\frac{da_s}{dp_i}\frac{dp_i}{da_k}\right),$$

$$\frac{da_s}{db_k}=\sum_i\left(\frac{da_s}{dq_i}\frac{dq_i}{db_k}+\frac{da_s}{dp_i}\frac{dp_i}{db_k}\right),$$

$$\frac{db_s}{da_k}=\sum_i\left(\frac{db_s}{dq_i}\frac{dq_i}{da_k}+\frac{db_s}{dp_i}\frac{dp_i}{da_k}\right),$$

$$\frac{db_s}{db_k}=\sum_i\left(\frac{db_s}{dq_i}\frac{dq_i}{db_k}+\frac{db_s}{dp_i}\frac{dp_i}{db_k}\right).$$

La première de ces quatre équations donne, d'après les formules précédentes,

$$\frac{da_s}{da_k}=\sum\left(-\frac{da_s}{dq_i}\frac{db_k}{dp_i}+\frac{da_s}{dp_i}\frac{db_k}{dq_i}\right)=[b_k,\ a_s],$$

et les trois autres donnent de même

$$\frac{da_s}{db_k}=[a_s,\ a_k],\quad \frac{db_s}{da_k}=[b_k,\ b_s],\quad \frac{db_s}{db_k}=[b_s,\ a_k];$$

les premiers membres sont nuls, excepté pour la première et la quatrième équation lorsque $s=k$; on a donc ces formules :

$$[a_s,\ a_k]=0,\quad [b_k,\ b_s]=0,\quad [b_s,\ a_k]=0,\quad [b_s,\ a_s]=1,$$

s devant être supposé différent de k dans la troisième. On peut encore écrire ainsi ces équations identiques :

$$[\varphi_s,\ \varphi_k]=0,\quad [\varphi'_k,\ \varphi'_s]=0,\quad [\varphi'_s,\ \varphi_k]=0,\quad [\varphi'_s,\ \varphi_s]=1.$$

SUR LA SOLUTION SIMUTANÉE DE DEUX ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES LINÉAIRES ET THÉORÈME DE POISSON.

23. Pour arriver à la démonstration du théorème de Poisson, considérons d'abord avec Jacobi les deux équations aux différences partielles linéaires

$$A_0 \frac{df}{dx_0} + A_1 \frac{df}{dx_1} + \ldots + A_n \frac{df}{dx_n} = 0,$$

$$B_0 \frac{df}{dx_0} + B_1 \frac{df}{dx_1} + \ldots + B_n \frac{df}{dx_n} = 0$$

ou

$$A(f) = 0, \quad B(f) = 0,$$

en posant

$$A(f) = \sum_{i=0}^{i=n} A_i \frac{df}{dx_i}, \quad B(f) = \sum_{i=0}^{i=n} B_i \frac{df}{dx_i}.$$

Nous avons

$$B[A(f)] = \sum_{k=0}^{k=n} B_k \frac{d}{dx_k} \sum_{i=0}^{i=n} A_i \frac{df}{dx_i}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{i=0}^{i=n} B_k A_i \frac{d^2 f}{dx_i \, dx_k} + \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{i=0}^{i=n} B_k \frac{dA_i}{dx_k} \frac{df}{dx_i}.$$

On obtiendrait de même $A[B(f)]$, et, en faisant la différence des deux expressions, on aura cette autre, que nous appellerons $E(f)$,

$$E(f) = B[A(f)] - A[B(f)] = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{df}{dx_i} \sum_{k=0}^{k=n} \left(B_k \frac{dA_i}{dx_k} - A_k \frac{dB_i}{dx_k} \right).$$

Posons

$$E_i = \sum_{k=0}^{k=n} \left(B_k \frac{dA_i}{dx_k} - A_k \frac{dB_i}{dx_k} \right):$$

nous voyons que, si l'on a les $n+1$ égalités

$$E_0 = 0, \quad E_1 = 0, \quad E_2 = 0, \quad \ldots, \quad E_n = 0.$$

on a $E(f) = 0$ ou

$$(1) \qquad B[A(f)] = A[B(f)],$$

c'est-à-dire que les deux opérations indiquées par les fonctions A et B peuvent être interverties. De cette équation on conclut immédiatement

$$B^r[A^s(f)] = A^s[B^r(f)],$$

en désignant par B^r l'opération B répétée r fois, et de même par A^s l'opération A répétée s fois.

Supposons qu'on ait l'équation (1); soit f_1 une solution de $A(f) = 0$; on aura

$$A(f_1) = 0, \quad B[A(f_1)] = 0, \quad A[B(f_1)] = 0.$$

D'après cela, $B(f_1)$ sera une solution de l'équation $A(f) = 0$. On voit de même que $B^2(f_1)$ sera solution de cette équation, et l'on obtiendra, en général, un certain nombre de solutions distinctes de $A(f) = 0$

$$f_1, \quad B(f_1), \quad B^2(f_1), \quad \ldots, \quad B^{m-1}(f_1),$$

en s'arrêtant lorsque $B^m(f_1)$ sera fonction des solutions précédentes. Si $m = n$, on a toutes les solutions de l'équation $A(f) = 0$; mais, si m est plus petit que n, on n'en obtiendra qu'une partie.

Dans le cas particulier où $B(f_1)$ est nul, f_1 est solution des deux équations

$$(2) \qquad A(f) = 0, \quad B(f) = 0.$$

Cherchons ensuite à déterminer, en général, une solution commune aux équations (2), en supposant les $n+1$ égalités

$$(3) \qquad E_0 = 0, \quad E_1 = 0, \quad \ldots, \quad E_n = 0$$

satisfaites. On commencera par déterminer la solution générale de $A(f) = 0$, qui est une fonction arbitraire de n solutions indépendantes $f_1, f_2, \ldots, f_n$, et il faut ensuite que cette solution satisfasse à l'équation $B(f) = 0$. Au lieu de $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, prenons pour variables $x_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$; si nous mettons entre parenthèses la nouvelle dérivée de f par rapport à x_0, nous aurons

$$\frac{df}{dx_0} = \left(\frac{df}{dx_0}\right) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{df}{df_i}\frac{df_i}{dx_0}, \quad \frac{df}{dx_s} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{df}{df_i}\frac{df_i}{dx_s}$$

et, par suite,

$$\mathrm{B}(f) = \mathrm{B}_0\left(\frac{df}{dx_0}\right) + \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{B}(f_i)\frac{df}{df_i},$$

et, comme f doit être fonction de $f_1, f_2, \ldots, f_n$ seulement, on a $\left(\frac{df}{dx_0}\right) = 0$, et l'équation $\mathrm{B}(f) = 0$ devient

$$(4) \qquad \mathrm{B}(f_1)\frac{df}{df_1} + \mathrm{B}(f_2)\frac{df}{df_2} + \ldots + \mathrm{B}(f_n)\frac{df}{df_n} = 0.$$

Or les équations (3) étant satisfaites et f_i étant une solution de $\mathrm{A}(f) = 0$, il s'ensuit que $\mathrm{B}(f_i)$ l'est aussi; donc $\mathrm{B}(f_1)$, $\mathrm{B}(f_2)$, ... sont des fonctions de $f_1, f_2, \ldots, f_n$, et f est entièrement défini par l'équation (4). Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ les $n-1$ solutions de cette équation; on aura pour la solution cherchée une fonction arbitraire de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$. Telle est la solution simultanée des équations (2), lorsque les égalités (3) sont satisfaites.

24. Dans ce qui précède, faisons $n + 1 = 2m$, et, au lieu de désigner les variables par $x_0, x_1, x_2, \ldots$, représentons-les par

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_m, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_m,$$

nous aurons

$$\mathrm{A}(f) = \mathrm{A}_1\frac{df}{dq_1} + \mathrm{A}_2\frac{df}{dq_2} + \ldots + \mathrm{A}_m\frac{df}{dq_m} + \mathrm{A}_{m+1}\frac{df}{dp_1} + \ldots + \mathrm{A}_{2m}\frac{df}{dp_m},$$

$$\mathrm{B}(f) = \mathrm{B}_1\frac{df}{dq_1} + \mathrm{B}_2\frac{df}{dq_2} + \ldots + \mathrm{B}_m\frac{df}{dq_m} + \mathrm{B}_{m+1}\frac{df}{dp_1} + \ldots + \mathrm{B}_{2m}\frac{df}{dp_m},$$

et prenons pour les A_i, B_i

$$\mathrm{A}_1 = -\frac{d\varphi}{dp_1}, \quad \mathrm{A}_2 = -\frac{d\varphi}{dp_2}, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_m = -\frac{d\varphi}{dp_m}, \quad \mathrm{A}_{m+1} = \frac{d\varphi}{dq_1}, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_{2m} = \frac{d\varphi}{dq_m},$$

$$\mathrm{B}_1 = -\frac{d\psi}{dp_1}, \quad \mathrm{B}_2 = -\frac{d\psi}{dp_2}, \quad \ldots, \quad \mathrm{B}_m = -\frac{d\psi}{dp_m}, \quad \mathrm{B}_{m+1} = \frac{d\psi}{dq_1}, \quad \ldots, \quad \mathrm{B}_{2m} = \frac{d\psi}{dq_m};$$

nous obtiendrons

$$\mathrm{A}(f)=\sum_i\left(\frac{d\varphi}{dq_i}\frac{df}{dp_i}-\frac{d\varphi}{dp_i}\frac{df}{dq_i}\right),\quad \mathrm{B}(f)=\sum_i\left(\frac{d\psi}{dq_i}\frac{df}{dp_i}-\frac{d\psi}{dp_i}\frac{df}{dq_i}\right),$$

ou, suivant la notation ordinaire,

$$\mathrm{A}(f)=[\varphi,f],\quad \mathrm{B}(f)=[\psi,f].$$

Ensuite, pour les valeurs de i égales à 1, 2, ..., m, on a

$$\mathrm{E}_i\ =\mathrm{B}(\mathrm{A}_i)\ -\mathrm{A}(\mathrm{B}_i)\ =-\left[\psi,\frac{d\varphi}{dp_i}\right]+\left[\varphi,\frac{d\psi}{dp_i}\right]=\ \frac{d[\varphi,\psi]}{dp_i},$$

$$\mathrm{E}_{m+i}=\mathrm{B}(\mathrm{A}_{m+i})-\mathrm{A}(\mathrm{B}_{m+i})=\ \left[\psi,\frac{d\varphi}{dq_i}\right]-\left[\varphi,\frac{d\psi}{dq_i}\right]=-\frac{d[\varphi,\psi]}{dq_i}.$$

Donc les $2m$ équations de condition

$$\mathrm{E}_1=0,\quad \mathrm{E}_2=0,\quad \ldots,\quad \mathrm{E}_{2m}=0$$

sont remplies si l'on a identiquement

$$[\varphi,\psi]=0,$$

c'est-à-dire si $f=\psi$ est solution de $\mathrm{A}(f)=[\varphi,f]=0$.

Ainsi donc, *si l'on a l'équation identique* $[\varphi,\psi]=0$, *il existe des solutions simultanées des deux équations* $\mathrm{A}(f)=0$, $\mathrm{B}(f)=0$ *ou*

$$[\varphi,f]=0,\quad [\psi,f]=0.$$

Nous avons vu ci-dessus que, si f_1 est solution de $\mathrm{A}(f)=0$ et que l'on ait $\mathrm{B}[\mathrm{A}(f)]=\mathrm{A}[\mathrm{B}(f)]$, $\mathrm{B}(f_1)$ est aussi solution de la même équation. En faisant

$$\mathrm{A}(f)=[\varphi,f],\quad \mathrm{B}(f)=[\psi,f],$$

on en conclut : *Si* f_1 *est solution de l'équation* $[\varphi,f]=0$ *et que l'on ait* $[\varphi,\psi]=0$, $f=[\psi,f_1]$ *est solution de la même équation.* Autrement dit, *si* $f=f_1$ *et* $f=\psi$ *sont solutions de l'équation* $[\varphi,f]=0$, *l'expression* $[\psi,f_1]$ *est aussi solution de cette équation.*

25. On a pour l'expression de $E(f)$

$$E(f) = \sum_{i=1}^{i=m}\left(E_i \frac{df}{dq_i} + E_{m+i}\frac{df}{dp_i}\right) = \sum_{i=1}^{i=m}\left[\frac{d[\varphi, \psi]}{dp_i}\frac{df}{dq_i} - \frac{d[\varphi, \psi]}{dq_i}\frac{df}{dp_i}\right] = [f, [\varphi, \psi]].$$

Donc l'équation

$$E(f) = B[A(f)] - A[B(f)]$$

devient

$$[f, [\varphi, \psi]] = [\psi, [\varphi, f]] - [\varphi, [\psi, f]]$$

ou

$$[f, [\varphi, \psi]] + [\varphi, [\psi, f]] + [\psi, [f, \varphi]] = 0.$$

On a donc ce théorème remarquable : *Soient f, φ, ψ trois fonctions quelconques des variables $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, on a la formule identique*

$$[f, [\varphi, \psi]] + [\varphi, [\psi, f]] + [\psi, [f, \varphi]] = 0. \tag{5}$$

Ce résultat permet de retrouver celui qui précède; car, si $f = f_1$ et $f = \psi$ sont solutions de $[\varphi, f] = 0$, on a $[\varphi, f_1] = 0$, $[\varphi, \psi] = 0$, et la formule précédente donne

$$[\varphi, [\psi, f_1]] = 0,$$

c'est-à-dire que $f = [\psi, f_1]$ est solution de la même équation.

Nous allons donner à ce théorème une autre forme. Pour cela, remarquons que, si nous avons l'équation aux différences partielles

$$[\varphi, f] = 0, \tag{a}$$

à laquelle satisfait la fonction f, et qui peut s'écrire

$$\frac{d\varphi}{dq_1}\frac{df}{dp_1} + \frac{d\varphi}{dq_2}\frac{df}{dp_2} + \ldots + \frac{d\varphi}{dq_n}\frac{df}{dp_n}$$
$$- \frac{d\varphi}{dp_1}\frac{df}{dq_1} - \frac{d\varphi}{dp_2}\frac{df}{dq_2} - \ldots - \frac{d\varphi}{dp_n}\frac{df}{dq_n} = 0,$$

on obtient toutes les fonctions f qui satisfont à cette équation en cherchant les intégrales du système d'équations différentielles

$$\frac{dp_1}{\frac{d\varphi}{dq_1}} = \frac{dp_2}{\frac{d\varphi}{dq_2}} = \ldots = \frac{dp_n}{\frac{d\varphi}{dq_n}} = \frac{dq_1}{-\frac{d\varphi}{dp_1}} = \frac{dq_2}{-\frac{d\varphi}{dp_2}} = \ldots = \frac{dq_n}{-\frac{d\varphi}{dp_n}}, \tag{b}$$

et, si $f=f_1$ est une solution de l'équation (a), $f_1=$ const. est une intégrale des équations (b), et réciproquement. D'après cela, on a le théorème suivant :

Soient $f=$ const., $\psi=$ const. *deux intégrales, qui ne renferment pas* t, *des équations* (b) *ou*

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{d\varphi}{dp_1},\quad \frac{dq_2}{dt}=\frac{d\varphi}{dp_2},\quad \ldots,\quad \frac{dq_n}{dt}=\frac{d\varphi}{dp_n},$$
$$\frac{dp_1}{dt}=-\frac{d\varphi}{dq_1},\quad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{d\varphi}{dq_2},\quad \ldots,\quad \frac{dp_n}{dt}=-\frac{d\varphi}{dq_n},$$

l'équation $[\psi,f]=$ const. *est aussi une intégrale de ces équations, à moins que son premier membre ne soit identiquement constant.*

Ce théorème porte le nom de Poisson, quoiqu'il n'ait été présenté ainsi que par Jacobi; nous indiquerons dans une autre Section la forme que Poisson lui avait donnée.

Dans le cas où $[\psi,f]$ serait une fonction de ψ et f, ce théorème ne donnerait pas une nouvelle intégrale. Il peut arriver aussi que $[\psi,f]$ soit identiquement constant, comme cela a lieu lorsque les deux premières intégrales ont été déduites de l'équation aux différences partielles d'Hamilton (n° 22). Mais, si les deux premières intégrales sont prises quelconques, en général $[\psi,f]=$ const. sera une nouvelle intégrale.

26. Dans la démonstration du théorème de Poisson, on a supposé que les intégrales ne renferment pas t; mais il peut facilement être étendu au cas où les intégrales contiennent le temps.

En effet, si $f=$ const. est une intégrale des équations canoniques, on doit avoir $\frac{df}{dt}=0$ en vertu de ces équations, et, par suite,

$$\left(\frac{df}{dt}\right)+\sum_i\left(\frac{df}{dq_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{df}{dp_i}\frac{dp_i}{dt}\right)=0,$$

la dérivée par rapport à t étant mise entre parenthèses pour indiquer une dérivée partielle; par suite, on a

$$\left(\frac{df}{dt}\right)+[f,\varphi]=0.$$

De même, si $\psi = \text{const.}$ est une intégrale des équations canoniques, on a, en continuant de mettre entre parenthèses les dérivées partielles par rapport à t,

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right) + [\psi, \varphi] = 0.$$

Donc la formule identique (5) devient

$$\left[f, \left(\frac{d\psi}{dt}\right)\right] + [\varphi, [\psi, f]] - \left[\psi, \left(\frac{df}{dt}\right)\right] = 0$$

ou

$$\left(\frac{d[\psi, f]}{dt}\right) + [[\psi, f], \varphi] = 0,$$

c'est-à-dire qu'en vertu des équations canoniques on a identiquement

$$\frac{d[\psi, f]}{dt} = 0;$$

donc $[\psi, f] = \text{const.}$ est bien une intégrale de ces équations.

SUR L'ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE PAR SUITE DE L'ÉQUATION DES FORCES VIVES OU DES INTÉGRALES DES AIRES.

27. Supposons un problème de Dynamique pour lequel ait lieu le principe des forces vives; l'ordre du système des équations différentielles

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i}, \tag{1}$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$, peut être abaissé de deux unités. En effet, alors H ne contient pas t, on peut éliminer immédiatement dt entre ces équations, et l'on n'a plus que $2n - 1$ équations différentielles du premier ordre; et comme l'équation des forces vives $H = \text{const.}$ est encore une intégrale, ce système d'équations peut être réduit à l'ordre $2n - 2$, c'est-à-dire qu'il peut être ramené à la résolution d'une équation différentielle de l'ordre $2n - 2$.

On peut encore abaisser de deux unités l'ordre du système des équations (1), toutes les fois qu'on peut, par un choix des variables, arriver à ne faire entrer l'une de ces variables que par sa différentielle.

En effet, supposons que la variable q_i n'entre pas dans H, on aura

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i} = 0,$$

et, par suite, l'intégrale

$$p_i = \text{const.}$$

Alors, H ne renfermant pas q_i et la variable p_i étant remplacée par sa valeur constante, on peut supprimer du système canonique l'équation

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i},$$

de sorte que l'ordre est abaissé de deux unités. Après l'intégration du système, q_i se déduira de cette équation par une quadrature.

Ce cas se présente quand une équation des aires est applicable. Supposons qu'elle ait lieu par rapport au plan des x, y; alors la fonction de forces U et les équations de condition ne changent pas de forme par une rotation du système des coordonnées autour de l'axe des z. Si donc, adoptant des coordonnées polaires, on pose

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

et qu'on désigne par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ ce que devient θ pour chaque point matériel, la fonction de forces U et les équations de condition ne contiendront les angles θ que par leurs différences

$$\theta_1 - \theta_s, \quad \theta_2 - \theta_s, \quad \ldots, \quad \theta_{s-1} - \theta_s,$$

que nous désignerons par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{s-1}$. Si l'on substitue aux variables $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ les variables $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{s-1}$ et θ_s, la variable θ_s n'entrera pas dans H qui contiendra seulement sa dérivée θ'_s; si l'on introduit les variables conjuguées p_i au lieu des dérivées, la variable θ_s continuera à ne pas se trouver dans H ou T — U; si donc on fait

$$p_s = \frac{dT}{d\theta'_s},$$

on aura, d'après ce qui a été dit ci-dessus, l'intégrale

$$p_s = \text{const.}$$

et l'ordre du système sera abaissé de deux unités. Il est aisé de vérifier que cette dernière intégrale est celle des aires; car on a

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left[r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

et, puisque $\theta_i = \gamma_i + \theta_s$,

$$p_s = \sum mr^2\theta' \frac{d\theta'}{d\theta'_s} = \sum mr^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

28. Si les intégrales des aires ont lieu par rapport à deux des plans de coordonnées rectangulaires, l'intégrale des aires a également lieu par rapport au troisième plan. En effet, faisant

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z',$$

supposons que l'on ait les équations des aires

$$\Sigma m(xy' - yx') = \text{const.},$$
$$\Sigma m(yz' - zy') = \text{const.};$$

désignons par φ, ψ les premiers membres de ces équations, nous aurons, d'après le théorème de Poisson, la troisième intégrale

$$[\varphi, \psi] = \text{const.}$$

ou

$$\sum\left[\frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d\psi}{d(mx')} + \frac{d\varphi}{dy}\,\frac{d\psi}{d(my')} + \frac{d\varphi}{dz}\,\frac{d\psi}{d(mz')} - \frac{d\varphi}{d(mx')}\,\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{d(my')}\,\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{d(mz')}\,\frac{d\psi}{dz}\right] = \text{const.}$$

ou

$$\Sigma m(x'z - xz') = \text{const.},$$

ce qui est la troisième intégrale des aires.

Cette démonstration suppose que le système est libre; mais, dans une autre section, nous montrerons que le théorème a également lieu si le système est assujetti à des liaisons.

Si les trois intégrales des aires ont lieu, on pourra employer l'intégrale relative au plan des x, y comme ci-dessus; puis, au moyen des deux autres, on pourra éliminer q_{s-1}, p_{s-1}. On abaissera ainsi l'ordre de quatre unités. Ensuite, au moyen de l'équation $\mathrm{H} = h$ et en éliminant dt, on pourra abaisser de nouveau l'ordre de deux unités; l'ordre sera ainsi abaissé de six unités.

La méthode qui précède peut servir à démontrer l'abaissement de l'ordre des équations, mais elle fait jouer un rôle particulier au plan des x, y et ne conviendrait nullement pour effectuer cette réduction: nous verrons dans une autre section comment il conviendrait de diriger le calcul.

SECTION III.

APPLICATIONS DES THÉORIES PRÉCÉDENTES AU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

MOUVEMENT D'UN POINT ATTIRÉ PAR UN CENTRE FIXE.

1. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point attiré par un centre situé à l'origine des coordonnées. On a, pour la force vive de ce point,

$$2\mathrm{T} = m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = m(x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

on a ensuite

$$\frac{d\mathrm{T}}{dx'} = mx', \quad \frac{d\mathrm{T}}{dy'} = my', \quad \frac{d\mathrm{T}}{dz'} = mz',$$

et, en remplaçant ces trois quantités par

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx}, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dy}, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dz}$$

dans l'expression de T, selon ce qui a été dit au n° 11 de la Section II, puis formant l'équation $\mathrm{T} - \mathrm{U} = h$, où h est une constante arbitraire, on a

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right)^2\right] = \mathrm{U} + h.$$

La fonction de forces U ne dépend que de la distance r du point au centre d'attraction, et si l'on pose $\mathrm{U} = f(r)$, la force d'attraction sera $-\dfrac{df(r)}{dr}$.

Prenons des coordonnées polaires, et faisons

$$z = r\cos\eta, \quad x = r\sin\eta\cos\theta, \quad y = r\sin\eta\sin\theta,$$

alors, en posant

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \quad \frac{d\theta}{dt} = \theta',$$

la force vive devient

$$2\mathrm{T} = m(r'^2 + r^2\eta'^2 + r^2\sin^2\eta\,.\,\theta'^2).$$

Les quantités conjuguées de r, η, θ, désignées selon les notations précédentes par p_1, p_2, p_3, sont

$$p_1 = \frac{d\mathrm{T}}{dr'} = r', \quad p_2 = \frac{d\mathrm{T}}{d\eta'} = r^2\eta', \quad p_3 = \frac{d\mathrm{T}}{d\theta'} = r^2\sin^2\eta\,\theta';$$

on doit les égaler aux dérivées de V par rapport à r, η, θ ; ce qui donne

$$r' = \frac{d\mathrm{V}}{dr}, \quad \eta' = \frac{1}{r^2}\frac{d\mathrm{V}}{d\eta}, \quad \theta' = \frac{1}{r^2\sin^2\eta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right)$$

et, par suite,

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\eta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\eta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right)^2\right].$$

On obtient donc l'équation aux différences partielles

$$(1) \qquad \left(\frac{d\mathrm{V}}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\eta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\eta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right)^2 = 2mf(r) + 2mh.$$

Comme la variable θ n'entre pas dans cette équation, en désignant par g une constante arbitraire, nous ferons (Section II, n° 10)

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\theta} = g, \quad \mathrm{V} = \mathrm{W} + g\theta,$$

W étant une fonction qui ne dépend pas de θ, et il restera l'équation

$$\left(\frac{d\mathrm{W}}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\mathrm{W}}{d\eta}\right)^2 + \frac{g^2}{r^2\sin^2\eta} = 2mf(r) + 2mh.$$

Faisons dans cette équation

$$\left(\frac{dW}{d\eta}\right)^2 + \frac{g^2}{\sin^2\eta} = b^2,$$

où b désigne une constante arbitraire, et il restera

$$\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 = 2mf(r) + 2mh - \frac{b^2}{r^2}.$$

On a, par conséquent, la solution

$$W = \int\sqrt{2mf(r) + 2mh - \frac{b^2}{r^2}}\,dr + \int\sqrt{b^2 - \frac{g^2}{\sin^2\eta}}\,d\eta,$$

et

$$V = W + g\theta$$

sera une intégrale complète de l'équation (1).

On obtient d'après cela pour intégrales du premier ordre des équations du mouvement

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dV}{dr}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{r^2}\frac{dV}{d\eta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2\sin^2\eta}\frac{dV}{d\theta} = \frac{g}{r^2\sin^2\eta},$$

et, pour intégrales du second ordre,

$$(2) \qquad \frac{dV}{db} = b', \quad \frac{dV}{dg} = g', \quad \frac{dV}{dh} = t + \tau,$$

b', g', τ étant des constantes arbitraires. Ces trois intégrales peuvent s'écrire

$$-\int\frac{b\,dr}{r^2\sqrt{2mf(r) + 2mh - \frac{b^2}{r^2}}} + b\int\frac{d\eta}{\sqrt{b^2 - \frac{g^2}{\sin^2\eta}}} = b',$$

$$-g\int\frac{d\eta}{\sin\eta\sqrt{b^2\sin^2\eta - g^2}} + \theta = g',$$

$$\int\frac{m\,dr}{\sqrt{2mf(r) + 2mh - \frac{b^2}{r^2}}} = t + \tau.$$

2. Supposons maintenant que l'attraction ait lieu en raison inverse

12

du carré de la distance, et faisons $f(r) = \frac{k^2}{r}$; alors les valeurs maximum et minimum de r, correspondant à $dr = 0$, seront données, d'après la dernière intégrale, par l'équation

$$2m\frac{k^2}{r} + 2mh - \frac{b^2}{r^2} = 0$$

ou

$$2mhr^2 + 2mk^2r - b^2 = 0.$$

Si l'on désigne par $2a$ et e le grand axe et l'excentricité de l'orbite elliptique, ces deux valeurs de r sont $a(1+e)$, $a(1-e)$, et l'on a

$$-\frac{k^2}{h} = 2a, \quad \frac{b^2}{mk^2} = a(1-e^2) = p,$$

en désignant par p le demi-paramètre; les deux constantes h et b sont déterminées par ces deux équations.

Prenons, pour limites inférieures des intégrales qui entrent dans V, des valeurs de r et η qui annulent les radicaux. Alors, en formant les équations (2), il faudra avoir égard à ce que les limites renferment b, g, h, ce qui introduira de nouveaux termes, mais qui s'annuleront, parce qu'ils renfermeront en facteur les valeurs des radicaux pour les limites de ces intégrales.

Nous pouvons donc écrire ainsi les trois intégrales

$$-\int_{a(1-e)}^{r} \frac{b\,dr}{r\sqrt{2mhr^2 + 2mk^2r - b^2}} + b\int \frac{\sin\eta\,d\eta}{\sqrt{b^2\sin^2\eta - g^2}} = b',$$

$$-g\int \frac{d\eta}{\sin\eta\sqrt{b^2\sin^2\eta - g^2}} = -\theta + g',$$

$$\int_{a(1-e)}^{r} \frac{mr\,dr}{\sqrt{2mhr^2 + 2mk^2r - b^2}} = t + \tau.$$

Si l'on fait $r = a(1-e)$ dans la dernière équation, on a $t = -\tau$; donc $-\tau$ représente le temps du passage de la planète au périhélie.

D'après la seconde équation, la plus petite valeur de η, laquelle est la limite inférieure des intégrales par rapport à η, est donnée par la formule

$$\sin^2\eta = \frac{g^2}{b^2};$$

or η est l'angle de r avec l'axe des z, il aura sa plus petite valeur quand r coïncidera avec la droite située dans ce plan et dont l'inclinaison sur le plan des x, y est la même que celle de l'orbite, et alors on a, en désignant par I cette inclinaison, $\eta = \frac{\pi}{2} - \mathrm{I}$; par suite

$$(3) \qquad \cos^2 \mathrm{I} = \frac{g^2}{b^2}, \quad g = b \cos \mathrm{I},$$

ce qui détermine la constante g.

Si l'on fait $\eta = \frac{\pi}{2} - \mathrm{I}$ dans la deuxième intégrale, il reste $\theta = g'$: donc g' est la longitude de la ligne de plus grande pente de l'orbite sur le plan des x, y; on a donc

g' = longitude du nœud de l'orbite, plus un angle droit.

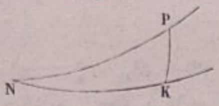
Faisons $r = a(1 - e)$ dans la première intégrale; en nous servant de l'équation (3), nous aurons

$$\int \frac{\sin \eta \, d\eta}{\sqrt{\sin^2 \mathrm{I} - \cos^2 \eta}} = \text{arc cos} \frac{\cos \eta}{\sin \mathrm{I}} = b',$$

$$(4) \qquad \frac{\cos \eta}{\sin \mathrm{I}} = \cos b', \quad \cos \eta = \sin \mathrm{I} \cos b'.$$

Imaginons une sphère dont le centre soit à l'origine, et représentons-nous les grands cercles NK, NP (*fig.* 2) déterminés par le plan

Fig. 2.



des x, y et par le plan de l'orbite. Soit N le nœud; du point P qui représente le périhélie, abaissons l'arc PK perpendiculaire sur NK, et considérons le triangle sphérique NPK; nous aurons

$$\sin \mathrm{PK} = \sin \mathrm{NP} \sin \mathrm{I};$$

or on a $\mathrm{PK} = \frac{\pi}{2} - \eta$: donc

$$\cos \eta = \sin \mathrm{NP} \sin \mathrm{I}.$$

En comparant cette équation avec l'équation (4), on a

$$b' = \frac{\pi}{2} - \text{NP}.$$

b' représente, par conséquent, le complément de la distance angulaire du périhélie au nœud.

Sur une seconde manière de résoudre le problème précédent.

3. Supposons encore un point attiré par un centre fixe, en raison inverse du carré de la distance, et cherchons à obtenir une nouvelle expression de la fonction V. Nous avons trouvé ci-dessus $h = -\frac{k^2}{2a}$, k^2 étant l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance et $2a$ le grand axe de l'orbite; V, comme nous savons, est donné par l'équation aux différences partielles

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = 2k^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right), \tag{1}$$

en prenant pour unité la masse du point attiré. Comme on sait que l'orbite est plane, il est évident que x, y, z peuvent être exprimés au moyen de deux coordonnées seulement relatives au plan de l'orbite.

Ayant désigné par r le rayon vecteur mené du centre d'attraction situé à l'origine au point attiré m, représentons par r_0 la valeur de r à l'instant initial et par (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du point (x, y, z) à cet instant; enfin, soit ρ la distance du point m à sa position initiale. La fonction V doit pouvoir s'exprimer au moyen des deux seules variables r et ρ. On a

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$
$$\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2;$$

on a, par suite,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dr}\frac{x}{r} + \frac{dV}{d\rho}\frac{x - x_0}{\rho},$$
$$\frac{dV}{dy} = \frac{dV}{dr}\frac{y}{r} + \frac{dV}{d\rho}\frac{y - y_0}{\rho},$$
$$\frac{dV}{dz} = \frac{dV}{dr}\frac{z}{r} + \frac{dV}{d\rho}\frac{z - z_0}{\rho},$$

$$2x(x - x_0) + 2y(y - y_0) + 2z(z - z_0) = \rho^2 + r^2 - r_0^2,$$

et l'équation (1) devient

$$(2) \qquad \left(\frac{dV}{dr}\right)^2 + \frac{\rho^2 + r^2 - r_0^2}{r\rho}\frac{dV}{dr}\frac{dV}{d\rho} + \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Posons

$$r + r_0 + \rho = \sigma,$$
$$r + r_0 - \rho = \sigma',$$

et prenons pour variables σ et σ'; nous aurons

$$\frac{dV}{dr} = \frac{dV}{d\sigma} + \frac{dV}{d\sigma'}, \qquad \frac{dV}{d\rho} = \frac{dV}{d\sigma} - \frac{dV}{d\sigma'},$$

et il en résulte l'équation

$$\frac{1}{r\rho}\left[\sigma(\sigma - 2r_0)\left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 + \sigma'(2r_0 - \sigma')\left(\frac{dV}{d\sigma'}\right)^2\right] = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

ou

$$\sigma(\sigma - 2r_0)\left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 + \sigma'(2r_0 - \sigma')\left(\frac{dV}{d\sigma'}\right)^2$$
$$= k^2(\sigma - \sigma') - \frac{k^2}{4a}(\sigma^2 - \sigma'^2) + \frac{k^2}{2a}r_0(\sigma - \sigma').$$

Essayons de satisfaire à cette équation en égalant séparément à zéro les termes multipliés par r_0 et ceux qui ne le sont pas, après avoir tout fait passer dans le premier membre; ce qui revient à supposer que V ne renferme pas r_0 en dehors de σ et σ'. Nous aurons les deux équations

$$\sigma^2\left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 - \sigma'^2\left(\frac{dV}{d\sigma'}\right)^2 = k^2(\sigma - \sigma') - \frac{k^2}{4a}(\sigma^2 - \sigma'^2),$$
$$\sigma\left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 - \sigma'\left(\frac{dV}{d\sigma'}\right)^2 = -\frac{k^2}{4a}(\sigma - \sigma'),$$

et, par suite,

$$\sigma\left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 = k^2\frac{4a - \sigma}{4a}, \qquad \sigma'\left(\frac{dV}{d\sigma'}\right)^2 = k^2\frac{4a - \sigma'}{4a};$$

il en résulte

$$\frac{dV}{d\sigma} = \pm k\sqrt{\frac{4a - \sigma}{4a\sigma}}, \qquad \frac{dV}{d\sigma'} = \pm k\sqrt{\frac{4a - \sigma'}{4a\sigma'}}.$$

En prenant, par exemple, ces deux expressions avec des signes opposés, on a

$$V = k\int\sqrt{\frac{4a-\sigma}{4a\sigma}}\,d\sigma - k\int\sqrt{\frac{4a-\sigma'}{4a\sigma'}}\,d\sigma',$$

ou, en négligeant une constante arbitraire qui s'ajouterait à l'expression de V,

$$V = k\int_{\sigma'}^{\sigma}\sqrt{\frac{4a-s}{4as}}\,ds.$$

Pour faire l'intégration, posons

$$\sin^2\alpha = \frac{s}{4a},$$

et nous aurons

$$\int\sqrt{\frac{4a-s}{4as}}\,ds = a^{\frac{1}{2}}(2\alpha + \sin 2\alpha);$$

désignons par ε, ε' les valeurs limites de 2α, et nous aurons

$$\sin^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sigma}{4a} = \frac{r+r_0+\rho}{4a},$$

$$\sin^2\frac{\varepsilon'}{2} = \frac{\sigma'}{4a} = \frac{r+r_0-\rho}{4a};$$

nous en déduisons, pour solution de l'équation (2),

$$V = ka^{\frac{1}{2}}(\varepsilon + \sin\varepsilon - \varepsilon' - \sin\varepsilon').$$

4. Cette expression ne renferme pas de constantes arbitraires autres que a; il lui manque donc deux constantes arbitraires pour être une intégrale complète de l'équation (2); mais, comme ρ renferme x_0, y_0, z_0, l'expression de V est au contraire une solution de l'équation (1), qui renferme une constante superflue (Section II, nº 2).

Nous avons, pour une des intégrales du mouvement,

$$\frac{dV}{dh} = t + \tau.$$

Or on a

$$\frac{dV}{dh} = \frac{dV}{da}\frac{da}{dh} = \frac{2a^2}{k^2}\frac{dV}{da},$$

$$\frac{dV}{da} = \tfrac{1}{2}ka^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon + \sin\varepsilon - \varepsilon' - \sin\varepsilon') + ka^{\frac{1}{2}}\left[(1+\cos\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{da} - (1+\cos\varepsilon')\frac{d\varepsilon'}{da}\right];$$

en différentiant les expressions de $\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$, $\sin^2\frac{\varepsilon'}{2}$, on obtient

$$\frac{d\varepsilon}{da} = \frac{-2}{a}\tang\frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{d\varepsilon'}{da} = -\frac{2}{a}\tang\frac{\varepsilon'}{2},$$

et il en résulte facilement

$$\frac{dV}{dh} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}(\varepsilon - \sin\varepsilon - \varepsilon' + \sin\varepsilon'),$$

et l'intégrale précédente devient la formule de Lambert

$$t + \tau = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}(\varepsilon - \sin\varepsilon - \varepsilon' + \sin\varepsilon').$$

Quand la fonction V est exprimée au moyen d'un système de variables $q_1, q_2, \ldots$ et de leurs valeurs initiales $q_1^0, q_2^0, \ldots$, les intégrales du premier ordre sont données par la formule

$$\frac{dV}{dq_i} = p_i,$$

et les intégrales du second ordre par

$$\frac{dV}{dq_i^0} = -p_i^0,$$

p_i^0 étant la valeur initiale de p_i (*voir* Section II, n° 4). D'après cela, dans la question actuelle, nous avons pour intégrales du premier ordre

$$(3) \qquad \frac{dV}{dx} = x', \quad \frac{dV}{dy} = y', \quad \frac{dV}{dz} = z',$$

x', y', z' étant les dérivées de x, y, z par rapport à t, et pour intégrales du second ordre

$$(4) \qquad \frac{dV}{dx_0} = -x'_0, \quad \frac{dV}{dy_0} = -y'_0, \quad \frac{dV}{dz_0} = -z'_0,$$

x'_0, y'_0, z'_0 étant les valeurs initiales de x', y', z'.

Calculons ces équations; nous avons

$$\frac{dV}{dx} = ka^{\frac{1}{2}}\left[(1+\cos\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{dx} - (1+\cos\varepsilon')\frac{d\varepsilon'}{dx}\right],$$

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{1}{2a\sin\varepsilon}\left(\frac{x}{r} + \frac{x-x_0}{\rho}\right), \quad \frac{d\varepsilon'}{dx} = \frac{1}{2a\sin\varepsilon'}\left(\frac{x}{r} - \frac{x-x_0}{\rho}\right),$$

et, par suite, après quelques réductions,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{ka^{\frac{1}{2}}}{2a\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\varepsilon'}{2}}\left(\frac{x-x_0}{\rho}\sin\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2} - \frac{x}{r}\sin\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}\right).$$

Désignons par 2μ l'angle de r et r_0, nous aurons

$$\cos 2\mu = \frac{xx_0 + yy_0 + zz_0}{rr_0}, \quad \cos^2\mu = \frac{(r+r_0)^2 - \rho^2}{4rr_0}, \quad \cos\mu = \frac{2a\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\varepsilon'}{2}}{\sqrt{rr_0}};$$

posons aussi

$$\lambda = \frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}, \quad \nu = \frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2},$$

et nous aurons

$$\frac{dV}{dx} = \frac{ka^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{rr_0}\cos\mu}\left(\frac{x-x_0}{\rho}\sin\lambda - \frac{x}{r}\sin\nu\right);$$

on en conclut, pour la première des équations (3),

$$x' = \frac{ka^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{rr_0}\cos\mu}\left(\frac{x-x_0}{\rho}\sin\lambda - \frac{x}{r}\sin\nu\right),$$

et les deux autres s'en déduisent par une permutation sur les lettres x, y, z. La fonction V restant la même quand on échange les lettres x, y, z

avec x_0, y_0, z_0, on aura, pour les intégrales finies (4),

$$\frac{ka^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{rr_0}\cos\mu}\left(\frac{x_0 - x}{\rho}\sin\lambda - \frac{x_0}{r_0}\sin\nu\right) = -x'_0,$$

. . . .

DU MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE COURBE DONNÉE.

5. Supposons un point assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée dont les équations sont

$$(a) \qquad x = f(z), \quad y = f_1(z),$$

et admettons que le point n'éprouve aucun frottement, de sorte que l'action de la courbe se réduise à une réaction normale. Désignons par X, Y, Z les composantes, suivant les trois axes, des forces extérieures qui agissent sur le point m, par N la réaction normale, et par λ, μ, ν les angles qu'elle fait avec les trois axes.

En prenant la masse du point pour unité, on aura les trois équations

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu.$$

Ensuite on a

$$(b) \qquad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

et, comme N est normal à la courbe,

$$(c) \qquad \cos\lambda\,dx + \cos\mu\,dy + \cos\nu\,dz = 0.$$

S'il existe une fonction de forces, en sorte que

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

soit une différentielle exacte dU, on déduira des équations (1)

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = dU,$$

et, en intégrant et désignant par C une constante arbitraire,

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} = U + C.$$

L'équation précédente devient, d'après les équations de la courbe,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 [1 + f'(z)^2 + f_1'(z)^2] = U_1 + C,$$

en désignant par U_1 ce que devient U quand on y remplace x et y en fonction de z. De cette équation on pourra tirer dt en fonction de z; on aura donc t au moyen de z à l'aide d'une quadrature. On pourra donc réciproquement calculer z en fonction de t et, par suite, obtenir x, y d'après les équations de la courbe.

Nous venons d'admettre l'existence d'une fonction de forces; s'il n'y en a pas, on opérera ainsi.

En différentiant les équations de la courbe, on a

$$dx = f'(z)\,dz, \qquad dy = f_1'(z)\,dz,$$

et ensuite, pour l'élément de la courbe,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + f'(z)^2 + f_1'(z)^2}\,dz;$$

par une quadrature, on aura s en fonction de z; puis on tirera z en fonction de s; par suite, on aura aussi x et y en fonction de s d'après les équations de la courbe. Des équations (1) on déduit

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = ds\frac{d^2s}{dt^2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

En exprimant le dernier membre en fonction de s, il en résultera

$$(2) \qquad ds\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi(s)\,ds;$$

en intégrant et désignant par C une constante, on aura

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\int\varphi(s)\,ds + C,$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2\int\varphi(s)\,ds + C}},$$

et, par conséquent, on pourra obtenir s en fonction de t.

6. Supposons enfin que la courbe exerce un frottement F sur le point mobile; le frottement s'exerçant suivant la tangente à la courbe et en sens inverse du mouvement, on a, au lieu des équations (1), les suivantes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda - F\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu - F\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu - F\frac{dz}{ds},$$

et l'on aura encore les équations (a), (b), (c). Le problème contient en plus l'inconnue F; mais, en supposant que F soit proportionnel à la réaction normale, comme on l'admet généralement, on aura

$$F = fN,$$

f étant une quantité constante. Cependant la solution du problème devient beaucoup plus difficile; en effet, au lieu de l'équation (2), on a

$$ds\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi(s)\,ds - F\,ds$$

ou

(3) $$\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi(s) - fN,$$

équation dans laquelle N est une fonction inconnue de s.

Si la vitesse est nulle et que le frottement surpasse la composante tangentielle de la force accélératrice, le mouvement s'arrêtera. Donc, pour trouver si le mobile s'arrêtera, il faudra chercher un point de la courbe pour lequel la vitesse sera nulle, et examiner si en ce point le frottement est plus grand que la composante tangentielle de la force accélératrice.

Si l'on regarde le frottement du mobile sur la courbe comme négligeable, mais que l'on tienne compte de la résistance du milieu dans lequel il se meut, il faudra introduire dans l'équation (3) cette résistance au lieu de fN; cette résistance est une fonction $\psi\left(\frac{ds}{dt}\right)$ de la vitesse du mobile, et l'on aura cette équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \varphi(s) - \psi\left(\frac{ds}{dt}\right);$$

on en déduira s en fonction de t, et l'on en pourra ensuite tirer x, y, z.

MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE SURFACE DONNÉE.

7. Prenons pour déterminer le mouvement d'un point sur une surface un système de coordonnées q_1, q_2, q_3, tel que l'équation de la surface se réduise à

$$(1) \qquad q_3 = \text{const.};$$

alors un point de cette surface n'aura plus que deux coordonnées variables q_1, q_2.

Soit ds l'élément d'une ligne tracée sur la surface; on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

et, comme x, y, z sont fonctions de q_1, q_2, on obtient

$$(2) \qquad ds^2 = A\,dq_1^2 + 2B\,dq_1\,dq_2 + C\,dq_2^2,$$

A, B, C étant fonctions de q_1, q_2.

Si nous désignons par q'_1, q'_2 les dérivées de q_1, q_2, nous aurons

$$2T = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = A q_1'^2 + 2B q'_1 q'_2 + C q_2'^2,$$

$$p_1 = \frac{dT}{dq'_1} = A q'_1 + B q'_2,$$

$$p_2 = \frac{dT}{dq'_2} = B q'_1 + C q'_2,$$

et, par suite,

$$q'_1 = \frac{Cp_1 - Bp_2}{AC - B^2}, \quad q'_2 = \frac{-Bp_1 + Ap_2}{AC - B^2}.$$

On a donc

$$2T = \frac{Cp_1^2 - 2Bp_1p_2 + Ap_2^2}{AC - B^2},$$

et l'équation $T - U = h$ devient

$$Cp_1^2 - 2Bp_1p_2 + Ap_2^2 = 2(AC - B^2)(U + h).$$

$q_1 = \text{const.}$ joint à l'équation (1) donne un système de lignes tracées sur la surface donnée; de même $q_2 = \text{const.}$ joint à l'équation (1) donne un second système de lignes tracées sur cette surface. Si l'on choisit ces deux systèmes de lignes rectangulaires entre eux, on aura $B = 0$. En effet, soit ds_1 un élément d'une ligne du premier système mené par un point, ds_2 un élément d'une ligne du second système mené par le même point; on aura, d'après l'équation (2), en faisant $dq_1 = 0$, $dq_2 = 0$,

$$ds_1^2 = Cdq_2^2, \qquad ds_2^2 = Adq_1^2;$$

et l'élément ds qui joint les extrémités de ds_1, ds_2 sera donné par la formule

$$ds^2 = Adq_1^2 + Cdq_2^2,$$

si les deux éléments ds_1, ds_2 sont rectangulaires entre eux, et, par conséquent, B sera nul.

En faisant

$$p_1 = \frac{dV}{dq_1}, \quad p_2 = \frac{dV}{dq_2},$$

le problème revient à la recherche d'une solution complète de l'équation

$$C\left(\frac{dV}{dq_1}\right)^2 - 2B\frac{dV}{dq_1}\frac{dV}{dq_2} + A\left(\frac{dV}{dq_2}\right)^2 = 2(AC - B^2)(U + h),$$

qui pour $B = 0$ devient

$$\frac{1}{A}\left(\frac{dV}{dq_1}\right)^2 + \frac{1}{C}\left(\frac{dV}{dq_2}\right)^2 = 2(U + h).$$

Si nous supposons que le point ne soit sollicité par aucune force, mais qu'il se meuve en vertu d'une impulsion initiale, l'équation précédente deviendra

$$(3) \qquad \frac{1}{A}\left(\frac{dV}{dq_1}\right)^2 + \frac{1}{C}\left(\frac{dV}{dq_2}\right)^2 = 2h,$$

et le point décrira en général sur la surface la ligne la plus courte entre un quelconque de ses points et un point suffisamment rapproché (Section I, n° 26).

8. Comme exemple, cherchons la ligne la plus courte sur l'ellipsoïde. Prenons pour son équation

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$

où ρ, b, c sont constants, $c>b$ et $\rho>c$. Adoptons les coordonnées elliptiques de Lamé, et considérons les hyperboloïdes à une et à deux nappes, homofocaux avec l'ellipsoïde et fournis par les deux équations

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1,\\ &\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=\quad, \end{aligned}\right.$$

où μ et ν sont des paramètres variables et où l'on suppose

$$c>\mu>b,\quad \nu<b.$$

Ces hyperboloïdes tracent, comme on sait, sur l'ellipsoïde ses lignes de courbure. En résolvant ces trois équations par rapport à x^2, y^2, z^2, on a

$$x^2=\frac{\rho^2\mu^2\nu^2}{b^2c^2},$$

$$y^2=\frac{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)},$$

$$z^2=\frac{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}.$$

Dans le système de coordonnées où l'on adopte les quantités ρ, μ, ν pour déterminer la position d'un point, l'équation $\rho=$ const. représente l'ellipsoïde. Prenons les logarithmes des deux membres des équations précédentes, puis différentions en supposant le point (x, y, z)

situé sur l'ellipsoïde, et nous aurons

$$dx = \frac{x\mu}{\mu^2} d\mu + \frac{x\nu}{\nu^2} d\nu,$$

$$dy = \frac{y\mu}{\mu^2 - b^2} d\mu + \frac{y\nu}{\nu^2 - b^2} d\nu,$$

$$dz = \frac{z\mu}{\mu^2 - c^2} d\mu + \frac{z\nu}{\nu^2 - c^2} d\nu.$$

Ajoutons les carrés des dernières équations en remarquant que, si l'on retranche l'une de l'autre les équations (a), on a

$$\frac{x^2}{\mu^2\nu^2} + \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)} + \frac{z^2}{(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)} = 0,$$

et il en résulte

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left[\frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2 - c^2)^2}\right] \mu^2 d\mu^2$$
$$+ \left[\frac{x^2}{\nu^4} + \frac{y^2}{(\nu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\nu^2 - c^2)^2}\right] \nu^2 d\nu^2.$$

Remplaçons x^2, y^2, z^2 par les valeurs trouvées ci-dessus, et nous aurons pour le carré de l'élément d'une courbe menée sur la surface

$$ds^2 = \frac{(\mu^2 - \nu^2)(\mu^2 - \rho^2)}{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} d\mu^2 + \frac{(\nu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \mu^2)}{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)} d\nu^2.$$

Nous en concluons pour A et C les valeurs

$$A = \frac{(\mu^2 - \nu^2)(\mu^2 - \rho^2)}{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}, \quad C = \frac{(\nu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \mu^2)}{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)},$$

et nous avons par suite pour l'équation (3),

$$\frac{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}{\mu^2 - \rho^2}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 - \frac{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)}{\nu^2 - \rho^2}\left(\frac{dV}{d\nu}\right)^2 = 2h(\mu^2 - \nu^2).$$

Pour intégrer cette équation, on peut, en désignant par g^2 une constante arbitraire, la décomposer en les deux suivantes :

$$\frac{(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}{\mu^2-\rho^2}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2=2h(\mu^2-g^2),$$

$$\frac{(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}{\nu^2-\rho^2}\left(\frac{dV}{d\nu}\right)^2=2h(\nu^2-g^2),$$

dont la première renferme seulement μ et la seconde seulement ν. On aura donc pour V

$$V=\sqrt{2h}\left[\int\sqrt{\frac{(\rho^2-\mu^2)(\mu^2-g^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}\,d\mu+\int\sqrt{\frac{(\rho^2-\nu^2)(g^2-\nu^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}\,d\nu\right].$$

Les deux intégrales, relatives au mouvement d'un point qui se meut sur l'ellipsoïde par une impulsion initiale, sont

$$\frac{dV}{dg}=\beta,\quad t+\tau=\frac{dV}{dh}=\frac{1}{2h}V,$$

β, τ étant des constantes arbitraires ; et comme, d'après le principe des forces vives, on a

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2h,$$

on en conclut $ds=\sqrt{2h}\,dt$, et la formule

$$s=\sqrt{2h}\,(t+\tau)=V\frac{1}{\sqrt{2h}}$$

donnera la rectification de la ligne la plus courte tracée sur la surface. Les deux constantes g, β se détermineront par la position du point et la direction de sa vitesse à l'instant initial.

OSCILLATIONS DU PENDULE SIMPLE.

9. Prenons des axes rectangulaires dont l'axe des z soit vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur, et supposons le point de suspension du pendule situé à l'origine des coordonnées. Le problème des oscillations du pendule revient à celui du mouvement d'un point pesant sur une sphère dont le rayon est égal à la longueur du pendule.

Désignons par ψ l'inclinaison du pendule sur la verticale, et par φ l'angle formé par un plan vertical passant par le pendule avec un autre plan vertical fixe mené par le point de suspension; désignons aussi par r la longueur constante du pendule.

x, y, z étant les coordonnées du point pesant, on a

$$x = r\sin\psi\cos\varphi, \quad y = r\sin\psi\sin\varphi, \quad z = r\cos\psi,$$

et l'expression de la force vive est

$$2\mathrm{T} = r^2\left[\sin^2\psi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right],$$

la masse du point pesant étant prise pour unité; enfin on a pour la fonction de forces, en désignant par g l'accélération due à la pesanteur,

$$\mathrm{U} = gz = gr\cos\psi.$$

De l'expression de T on déduit, en désignant par φ', ψ' les dérivées de φ, ψ,

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\varphi'} = r^2\sin^2\psi.\varphi', \quad \frac{d\mathrm{T}}{d\psi'} = r^2\psi',$$

et, par suite,

$$\varphi' = \frac{1}{r^2\sin^2\psi}\frac{d\mathrm{T}}{d\varphi'}, \quad \psi' = \frac{1}{r^2}\frac{d\mathrm{T}}{d\psi'}.$$

L'équation des forces vives $\mathrm{T} - \mathrm{U} = h$ devient

$$\frac{1}{r^2\sin^2\psi}\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\varphi'}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\psi'}\right)^2 = 2h + 2gr\cos\psi;$$

en y faisant

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\varphi'} = \frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}, \quad \frac{d\mathrm{T}}{d\psi'} = \frac{d\mathrm{V}}{d\psi},$$

on obtient l'équation aux différences partielles

$$\frac{1}{r^2\sin^2\psi}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}\right)^2 = 2h + 2gr\cos\psi.$$

Comme φ n'entre pas explicitement dans cette équation, posons

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi} = \mathrm{D},$$

D étant une constante arbitraire, et nous aurons

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{dV}{d\psi}\right)^2 = 2h + 2gr\cos\psi - \frac{D^2}{r^2\sin^2\psi}.$$

Il en résulte

$$\frac{dV}{d\psi} = \frac{\sqrt{2r^2(h+gr\cos\psi)\sin^2\psi - D^2}}{\sin\psi},$$

et, par suite, on a la solution complète

$$V = D\varphi + \int \frac{\sqrt{2r^2(h+gr\cos\psi)\sin^2\psi - D^2}}{\sin\psi}\,d\psi.$$

Alors les deux équations intégrales du mouvement du pendule sont

$$\frac{dV}{dD} = E, \quad \frac{dV}{dh} = t + \tau,$$

E, τ étant des constantes arbitraires, et elles peuvent s'écrire

$$\varphi - E = \int \frac{D\,d\psi}{\sin\psi\sqrt{2r^2(h+gr\cos\psi)\sin^2\psi - D^2}},$$

$$t + \tau = \int \frac{r^2\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{2r^2(h+gr\cos\psi)\sin^2\psi - D^2}}.$$

On pouvait encore arriver à ces deux équations en appliquant l'équation des forces vives

$$\frac{r^2}{2}\left[\sin^2\psi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] = gr\cos\psi + h,$$

et l'équation des aires qui a lieu autour de l'axe des z, parce que la fonction de forces ne change pas par la rotation du système de coordonnées autour de l'axe des z (Section I, n° **12**),

$$r^2\sin^2\psi\,\frac{d\varphi}{dt} = D.$$

En résolvant ces deux équations par rapport à $d\varphi$ et dt, puis intégrant, on retrouve les deux équations qui donnent φ et t.

10. Nous allons chercher à exprimer φ et ψ ou z en fonction de t au moyen des fonctions elliptiques. Si nous remplaçons la variable ψ par z dans l'expression de $t+\tau$, nous avons

$$t+\tau = \frac{r}{\sqrt{2g}} \int \frac{-dz}{\sqrt{(r^2-z^2)\left(z+\frac{h}{g}\right)-\frac{D^2}{2g}}}.$$

En égalant à zéro la quantité soumise au radical, nous avons l'équation du troisième degré

$$(a) \qquad (r^2-z^2)\left(z+\frac{h}{g}\right)-\frac{D^2}{2g}=0;$$

si l'on substitue la valeur initiale z_0 de z dans le premier membre de cette équation, le résultat est positif, puisque l'expression de $t+\tau$ doit être réelle; on en conclut facilement que cette équation a trois racines réelles : une comprise entre r et z_0, la deuxième entre z_0 et $-r$, et la troisième plus petite que $-r$. Désignons ces racines respectivement par a, b, $-c$; la valeur de z variera entre a et b, et l'expression de $t+\tau$ deviendra

$$t+\tau = \frac{r}{\sqrt{2g}} \int_a^z \frac{-dz}{\sqrt{(a-z)(z-b)(c+z)}},$$

en prenant pour limite inférieure la plus grande valeur de z.

z étant compris entre a et b, on peut poser

$$z = a\cos^2\sigma + b\sin^2\sigma;$$

si de plus on fait

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}} = u, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}} = \mathrm{K},$$

on a

$$\operatorname{am} u = \sigma$$

et

$$a-z=(a-b)\sin^2\sigma=(a-b)\sin^2\operatorname{am}u,$$
$$z-b=(a-b)\cos^2\operatorname{am}u;$$

enfin, si l'on prend pour k

$$k=\sqrt{\frac{a-b}{a+c}},$$

on a

$$c+z=(c+a)(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u)=(c+a)\Delta^2\mathrm{am}\,u.$$

Comme d'ailleurs on a

$$d\sin\mathrm{am}\,u=\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u\,du,$$

il en résulte

$$t+\tau=\frac{2r}{\sqrt{2g(a+c)}}u;$$

si nous désignons par T le temps qui s'écoule quand z varie de a à b, nous en déduisons

$$\mathrm{T}=\frac{2r}{\sqrt{2g(a+c)}}\mathrm{K},$$

et, en divisant ces deux égalités entre elles,

$$u=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{T}}(t+\tau).$$

On a ces deux formules

$$z=a\cos^2\mathrm{am}\,u+b\sin^2\mathrm{am}\,u,$$

$$z=a\cos^2\mathrm{am}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{T}}(t+\tau)+b\sin^2\mathrm{am}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{T}}(t+\tau);$$

donc z, considéré comme fonction de u, a pour période $2\mathrm{K}$, et, considéré comme fonction de t, il a pour période $2\mathrm{T}$; de plus, z prend la même valeur pour $t=-\tau-j$ et $t=-\tau+j$, quel que soit j, et la quantité $-\tau$ indique le temps du passage du pendule au point le plus bas.

Donc la montée et la descente du pendule s'effectuent d'une manière périodique; l'oscillation entière a lieu dans une période de temps égale à $2\mathrm{T}$, et le mouvement du pendule se fait de la même manière en montée et en descente, c'est-à-dire qu'il prend des vitesses, suivant la verticale, égales et contraires à la même hauteur.

Dans le cas où le pendule oscille dans un plan vertical, on a $\mathrm{D}=0$; les trois racines de l'équation (a) sont

$$a=r,\quad b=-\frac{h}{g},\quad -c=-r,$$

et les formules précédentes restent encore applicables.

11. Déterminons ensuite l'angle φ. Partons de l'équation des aires

$$(r^2 - z^2)\frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{D};$$

comme nous avons

$$r^2 - z^2 = [r - a + (a-b)\sin^2 \mathrm{am}\, u][r + a - (a-b)\sin^2\mathrm{am}\, u],$$

$$dt = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{K}}\, du = \frac{2r}{\sqrt{2g(a+c)}}\, du,$$

il en résulte

$$d\varphi = \frac{2r\mathrm{D}}{\sqrt{2g(a+c)}}\, \frac{du}{[r-a+(a-b)\sin^2\mathrm{am}\, u][r+a-(a-b)\sin^2\mathrm{am}\, u]}.$$

Décomposons la fonction du second membre en deux fractions simples et intégrons ; nous aurons

$$\varphi - \mathrm{E} = \frac{\mathrm{D}}{\sqrt{2g(a+c)}}\left[\frac{1}{r+a}\int_0^u \frac{du}{1 - \frac{a-b}{r+a}\sin^2\mathrm{am}\, u} + \frac{1}{r-a}\int_0^u \frac{du}{1+\frac{a-b}{r-a}\sin^2\mathrm{am}\, u}\right].$$

En adoptant la notation de Jacobi (*Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*, § 51), posons

$$\Pi(u,\alpha) = \int_0^u \frac{k^2 \sin\mathrm{am}\,\alpha \cos\mathrm{am}\,\alpha\, \Delta\mathrm{am}\,\alpha \sin^2\mathrm{am}\, u\, du}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha\sin^2\mathrm{am}\, u},$$

et cherchons à exprimer l'angle φ au moyen de ce genre de fonctions. Occupons-nous d'abord de la première intégrale qui se trouve dans l'expression de φ, et posons

$$\frac{a-b}{r+a} = k^2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha,$$

il en résultera

$$(\alpha) \qquad \sin^2\mathrm{am}\,\alpha = \frac{a+c}{r+a}$$

et

$$\int_0^u \frac{du}{1-\frac{a-b}{r+a}\sin^2\mathrm{am}\, u} = u + \int_0^u \frac{k^2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha\sin^2\mathrm{am}\, u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha\sin^2\mathrm{am}\, u}\, du$$

$$= u + \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha}{\cos\mathrm{am}\,\alpha.\Delta\mathrm{am}\,\alpha}\,\Pi(u,\alpha).$$

Nous pouvons prendre, d'après la formule (α), en faisant $i=\sqrt{-1}$,

$$\sin\operatorname{am}\alpha=\sqrt{\frac{a+c}{r+a}},\quad \cos\operatorname{am}\alpha=-i\sqrt{\frac{c-r}{r+a}},\quad \Delta\operatorname{am}\alpha=\sqrt{\frac{r+b}{r+a}},$$

et, par suite,

$$\frac{\sin\operatorname{am}\alpha}{\cos\operatorname{am}\alpha\,\Delta\operatorname{am}\alpha}=i(r+a)\sqrt{\frac{a+c}{(r+a)(r+b)(c-r)}};$$

or a, b, $-c$ étant les racines de l'équation (a), on a

$$(b)\qquad (r^2-z^2)\left(z+\frac{h}{g}\right)-\frac{D^2}{2g}=(a-z)(z-b)(z+c),$$

et, en faisant $z=-r$ dans cette identité, on obtient

$$\frac{D^2}{2g}=(a+r)(r+b)(-r+c).$$

Il en résulte

$$\frac{\sin\operatorname{am}\alpha}{\cos\operatorname{am}\alpha\,\Delta\operatorname{am}\alpha}=i(r+a)\frac{\sqrt{2g(a+c)}}{D}$$

et

$$\int_0^u\frac{du}{1-\dfrac{a-b}{r+a}\sin^2\operatorname{am}u}=u+i(r+a)\frac{\sqrt{2g(a+c)}}{D}\,\Pi(u,\alpha).$$

Calculons de même la seconde intégrale renfermée dans l'expression de φ. Posons

$$-\frac{a-b}{r-a}=k^2\sin^2\operatorname{am}\beta,$$

il en résultera

$$\sin\operatorname{am}\beta=i\sqrt{\frac{a+c}{r-a}},\quad \cos\operatorname{am}\beta=\sqrt{\frac{r+c}{r-a}},\quad \Delta\operatorname{am}\beta=\sqrt{\frac{r-b}{r-a}},$$

et l'expression de la seconde intégrale se déduisant de celle de la première par le changement de r en $-r$, on a

$$\int_0^u\frac{du}{1+\dfrac{a-b}{r-a}\sin^2\operatorname{am}u}=u+i(-r+a)\frac{\sqrt{2g(a+c)}}{D}\,\Pi(u,\beta).$$

En portant ces deux intégrales dans l'expression qui donne φ, on obtient

$$\varphi - \mathrm{E} = \frac{2\mathrm{D}r}{(r^2 - a^2)\sqrt{2g(a+c)}}\, u + i[\Pi(u, \alpha) - \Pi(u, \beta)].$$

Les quantités α et β sont imaginaires, parce que $\cos\operatorname{am}\alpha$ et $\sin\operatorname{am}\beta$ sont imaginaires et renferment le facteur $i = \sqrt{-1}$; mais, si l'on fait

$$\alpha = i\varepsilon + \mathrm{K}, \quad \beta = i\eta,$$

il est aisé de voir que ε et η seront réels, et nous aurons

$$\varphi - \mathrm{E} = \frac{2\mathrm{D}r}{(r^2 - a^2)\sqrt{2g(a+c)}}\, u + i[\Pi(u, i\varepsilon + \mathrm{K}) - \Pi(u, i\eta)].$$

Posons avec Jacobi

$$\mathrm{K}' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\sigma}}, \quad q = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}};$$

la fonction jacobienne $\Theta\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right)$ a pour valeur (*Fundamenta*, § 63)

$$\Theta\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x - \ldots,$$

et comme on a (*Fundamenta*, § 52)

$$\Pi(u, a) = u\,\frac{d\log\Theta(a)}{da} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)},$$

si l'on pose

$$(c)\quad \begin{cases} \mathrm{L} = \dfrac{2\mathrm{D}r}{(r^2 - a^2)\sqrt{2g(a+c)}} + \dfrac{d\log\Theta(i\varepsilon+\mathrm{K})}{d\varepsilon} - \dfrac{d\log\Theta(i\eta)}{d\eta}, \\[2ex] \Phi = \dfrac{i}{2}\log\dfrac{\Theta(u - i\varepsilon - \mathrm{K})\,\Theta(u + i\eta)}{\Theta(u + i\varepsilon + \mathrm{K})\,\Theta(u - i\eta)}, \end{cases}$$

on obtiendra

$$\varphi - \mathrm{E} = \mathrm{L}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{T}}(t + \tau) + \Phi.$$

La fonction Φ ne change pas quand on augmente u de $2\mathrm{K}$ ou t de $2\mathrm{T}$.

Donc l'angle φ se compose d'une partie qui croît proportionnellement au temps, et d'une seconde partie qui est périodique et qui a pour période $2T$.

Remarquons encore que Φ change de signe seulement, si l'on y remplace u par $-u$; donc aussi Φ prend deux valeurs égales et de signe contraire pour $t+\tau=j$ et $t+\tau=-j$.

D'après cela, imaginons un plan vertical passant par l'axe des z, et tournant autour de cet axe uniformément et avec une vitesse angulaire égale à $\frac{LK}{T}$; supposons de plus que ce plan vertical ait passé par le pendule à un instant où sa masse était le plus bas. Alors le pendule oscillera symétriquement de part et d'autre de ce plan et reprendra exactement le même mouvement au bout d'un temps égal à $2T$; sa masse traversera ce plan mobile aux points le plus haut et le plus bas à un intervalle de temps égal à T.

12. Examinons maintenant le cas où les oscillations du pendule sont très-petites. La durée du passage du point le plus haut au point le plus bas est

$$T=\frac{2r}{\sqrt{2g(a+c)}}K.$$

Faisons

$$a=r\cos f,\quad b=r\cos f_1,$$

et supposons très-petits f et f_1, qui sont la plus petite et la plus grande valeur de l'angle ψ. En négligeant les quantités du quatrième ordre, on a

$$a=r\left(1-\frac{f^2}{2}\right),\quad b=r\left(1-\frac{f_1^2}{2}\right);$$

a, b, $-c$ étant les racines de l'équation (a), on en conclut

$$(d)\qquad ab-ac-bc=-r^2,$$

et l'on en déduit $c=r$ en négligeant les quantités très-petites du quatrième ordre; si l'on négligeait seulement celles du sixième ordre, on aurait

$$c=r\left(1+\frac{f^2f_1^2}{8}\right).$$

On a donc

$$k^2 = \frac{a-b}{a+c} = \frac{f_1^2 - f^2}{4},$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{k^2}{2}\sin^2\sigma\right) d\sigma = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right),$$

et l'on en conclut pour la durée des petites oscillations du pendule

$$2T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left(1 + \frac{f^2 + f_1^2}{16}\right).$$

Calculons ensuite la valeur de z. Nous avons (*Fundamenta*, § 41),

$$4\left(\frac{kK}{\pi}\right)^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = A - 8\left(\frac{q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2\cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3\cos 6x}{1-q^6} + \ldots\right),$$

$$4\left(\frac{kK}{\pi}\right)^2 \cos^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = B + 8\left(\frac{q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2\cos 4x}{1-q^4} + \ldots\right),$$

en posant

$$A = 8\left[\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{q^5}{(1-q^5)^2} + \ldots\right],$$

$$B = 8\left[\frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} + \ldots\right];$$

par suite la valeur z du n° **10** devient

$$z = \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2 \left[aB + bA + 8(a-b)\left(\frac{q\cos\frac{\pi}{K}u}{1-q^2} + \frac{2q^2\cos\frac{2\pi}{K}u}{1-q^4} + \ldots\right)\right].$$

Si $a-b$ est très-petit, k le sera aussi, ainsi que q, et cette série sera très-convergente; simplifions cette formule, en supposant que les quantités très-petites du quatrième ordre sont négligeables. Nous ferons

$$q = \frac{k^2}{16}\left(1 + \frac{k^2}{2}\right), \quad \frac{2K}{\pi} = 1 + 4q = 1 + \frac{k^2}{4},$$

$$A = \frac{k^2}{2}\left(1 + \frac{5k^2}{8}\right), \quad B = \frac{k^2}{2}\left(1 + \frac{3k^2}{8}\right),$$

et nous aurons

$$z = r - r\frac{f^2+f_1^2}{4} - r\frac{f^2-f_1^2}{4}\cos 2\sqrt{\frac{g}{r}}(t+\tau).$$

Comme z peut être remplacé par $r\left(1-\frac{\psi^2}{2}\right)$, on en déduit aussi

$$\psi^2 = \frac{f^2+f_1^2}{2} + \frac{f^2-f_1^2}{2}\cos 2\sqrt{\frac{g}{r}}(t+\tau)$$

ou

$$(\alpha)\qquad \psi^2 = f^2\cos^2\sqrt{\frac{g}{r}}(t+\tau) + f_1^2\sin^2\sqrt{\frac{g}{r}}(t+\tau).$$

13. L'angle dont tourne le plan vertical du pendule quand il passe du point le plus bas au point le plus haut est égal à LK. Il est très-aisé de simplifier les deux premiers termes de l'expression (c) de L, en négligeant les quantités du quatrième ordre; mais, comme le troisième terme présente de l'embarras, nous procéderons autrement pour calculer cet angle.

D'après le n° **11**, nous avons

$$dt = \frac{2r}{\sqrt{2g(a+c)}}du = \frac{2r}{\sqrt{2g(a+c)}}\frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}},$$

$$d\varphi = \frac{D\,dt}{r^2-z^2} = \frac{D\,dt}{r^2(1-\cos^2\psi)};$$

il en résultera

$$d\varphi = \frac{2D}{r\sqrt{2g(a+c)}}\frac{1}{1-\cos^2\psi}\frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}},$$

expression qu'on peut décomposer ainsi en deux parties

$$d\varphi = \frac{D}{r\sqrt{2g(a+c)}}\frac{1}{1+\cos\psi}\frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}} + \frac{D}{r\sqrt{2g(a+c)}}\frac{1}{1-\cos\psi}\frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}}.$$

$a = r\cos f$ et $b = r\cos f_1$ étant racines de l'équation

$$(r^2-z^2)\left(z+\frac{h}{g}\right) - \frac{D^2}{2g} = 0,$$

nous avons

$$\frac{D^2}{2g} = r^2 \sin^2 f \left(r \cos f + \frac{h}{g} \right),$$

$$\frac{D^2}{2g} = r^2 \sin^2 f_1 \left(r \cos f_1 + \frac{h}{g} \right);$$

éliminons h entre ces deux équations, nous obtenons

$$\frac{D^2}{2g} (\sin^2 f_1 - \sin^2 f) = r^3 \sin^2 f \sin^2 f_1 (\cos f - \cos f_1);$$

nous en déduisons

$$\frac{D^2}{2g} = \frac{r^3 \sin^2 f \sin^2 f_1}{\cos f + \cos f_1} = \frac{r^3 f^2 f_1^2}{2} \left(1 - \frac{f^2 + f_1^2}{12} \right),$$

$$\frac{D}{\sqrt{2g}} = \frac{r^{\frac{3}{2}} f f_1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{f^2 + f_1^2}{24} \right).$$

On a, d'autre part,

$$\frac{1}{\sqrt{a + c}} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \left(1 + \frac{f^2}{8} \right)$$

et, par suite,

$$\frac{D}{r\sqrt{2g(a + c)}} = \frac{f f_1}{2} \left(1 + \frac{2f^2 - f_1^2}{24} \right).$$

Examinons successivement le premier et le second terme de $d\varphi$ que nous aurons à intégrer par rapport à σ de o à $\frac{\pi}{2}$: puisque σ prend les valeurs o, $\frac{\pi}{2}$ pour la position la plus basse et la plus élevée de la masse du pendule.

On a pour le premier terme de $d\varphi$, en négligeant le quatrième ordre,

$$\frac{f f_1}{4} d\sigma.$$

Le second terme de $d\varphi$ est beaucoup plus long à calculer, parce que $1 - \cos\psi$ qui y entre en diviseur est lui-même une quantité très-petite du second ordre. On a

$$1 - \cos\psi = 1 - \cos f \cos^2 \sigma - \cos f_1 \sin^2 \sigma = p + q \cos 2\sigma,$$

en posant

$$p = 1 - \frac{\cos f + \cos f_1}{2}, \quad q = \frac{\cos f_1 - \cos f}{2}.$$

Il en résulte

$$\frac{1}{1-\cos\psi}\frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}} = \frac{1+\frac{k^2}{4}-\frac{k^2}{4}\cos 2\sigma}{p+q\cos 2\sigma}\,d\sigma$$

$$= -\frac{k^2}{4q} + \left(1+\frac{k^2}{4}+\frac{k^2 p}{4q}\right)\frac{1}{p+q\cos 2\sigma}\,d\sigma.$$

Or on a

$$\int\frac{d\sigma}{p+q\cos 2\sigma} = \frac{1}{\sqrt{p^2-q^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{(p-q)\operatorname{tang}\sigma}{\sqrt{p^2-q^2}};$$

il en résulte, en désignant par E une constante arbitraire,

$$\varphi - \mathrm{E} = \frac{ff_1}{4}\sigma + \frac{ff_1}{2}\left(1+\frac{2f^2-f_1^2}{24}\right)$$

$$\times\left[-\frac{k^2}{4q}\sigma + \left(1+\frac{k^2}{4}+\frac{k^2 p}{4q}\right)\frac{1}{\sqrt{p^2-q^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{(p-q)\operatorname{tang}\sigma}{\sqrt{p^2-q^2}}\right].$$

On fera

$$k^2 = \frac{f_1^2-f^2}{4}, \quad q = \frac{\cos f_1 - \cos f}{2} = \frac{f^2-f_1^2}{4} + \frac{f_1^4-f^4}{48},$$

$$p = 1 - \frac{\cos f + \cos f_1}{2} = \frac{f^2+f_1^2}{4} - \frac{f^4+f_1^4}{48},$$

$$1 + \frac{k^2}{4} + \frac{k^2 p}{4q} = 1 - \frac{f^2}{8}.$$

Il faut calculer $p^2 - q^2$ jusqu'au sixième ordre, ce qui donne

$$p^2 - q^2 = 1 - \cos f - \cos f_1 + \cos f\cos f_1$$

$$= (1-\cos f)(1-\cos f_1) = \frac{f^2 f_1^2}{4}\left(1 - \frac{f^2+f_1^2}{12}\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{p^2-q^2}} = \frac{2}{ff_1}\left(1+\frac{f^2+f_1^2}{24}\right),$$

$$\frac{p-q}{\sqrt{p^2-q^2}} = \frac{f_1}{f}\left(1+\frac{f^2-f_1^2}{24}\right).$$

En substituant ces quantités dans l'expression de $\varphi - \mathrm{E}$, on obtient facilement

$$\varphi - \mathrm{E} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{f_1}{f}\operatorname{tang}\sigma\right) + \frac{3ff_1}{8}\sigma + ff_1\frac{f^2-f_1^2}{24}\,\frac{\sin\sigma\cos\sigma}{f^2\cos^2\sigma + f_1^2\sin^2\sigma}.$$

Faisons $\sigma = \frac{\pi}{2}$ dans le second membre de cette formule, et nous obtiendrons

$$\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{3ff_1}{8}\right)$$

pour l'angle dont tourne le plan vertical du pendule dans le temps qu'il va du point le plus bas au point le plus haut.

14. Si l'on néglige les quantités très-petites du second ordre, on a

$$t + \tau = \sqrt{\frac{r}{g}}\,u = \sqrt{\frac{r}{g}}\,\sigma \quad \text{ou} \quad \sigma = \sqrt{\frac{g}{r}}\,(t+\tau),$$

et la formule (α) devient

$$(\beta) \qquad \psi^2 = f^2\cos^2\sigma + f_1^2\sin^2\sigma.$$

D'autre part, en négligeant les quantités du second ordre et faisant $\mathrm{E} = 0$, on a

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{f_1}{f}\operatorname{tang}\sigma\right),$$

$$(\gamma) \qquad \operatorname{tang}\sigma = \frac{f}{f_1}\operatorname{tang}\varphi.$$

Éliminons σ entre (β) et (γ), nous aurons

$$\psi^2 = \frac{f^2 f_1^2}{f^2\sin^2\varphi + f_1^2\cos^2\varphi};$$

$r\psi$ peut être considéré comme le rayon de la projection de la trajectoire sur un plan horizontal, et l'on en conclut que cette projection est une ellipse.

Lorsque le pendule ne fait qu'une révolution autour de la verticale, on peut considérer la courbe décrite par l'extrémité du pendule comme une ellipse; mais, si l'on considère un certain nombre de révolutions du plan vertical du pendule, il faudra avoir égard à ce que l'angle φ, mesuré entre le point le plus bas et le point le plus haut suivant, n'est pas $\frac{\pi}{2}$, mais $\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{3ff_1}{8}\right)$. On pourra donc se représenter le mouvement en imaginant que, tandis que l'extrémité du pendule décrit une ellipse, cette courbe tourne dans le même sens avec une vitesse angulaire égale à

$$\frac{1}{T}\pi\frac{3ff_1}{16} = \frac{3ff_1}{8}\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

15. Ainsi l'angle φ_1, dont tourne le plan vertical du pendule en allant du point le plus bas au point le plus haut, est plus grand qu'un angle droit quand les oscillations sont très-petites. Nous allons démontrer que la même propriété a lieu, quelle que soit la grandeur des oscillations, ainsi que l'a remarqué M. Puiseux.

On a

$$d\varphi = \frac{D\,dt}{r^2 - z^2} = \frac{Dr}{\sqrt{2g}}\frac{dz}{(r^2 - z^2)\sqrt{(a-z)(z-b)(c+z)}},$$

$$\varphi_1 = \frac{Dr}{\sqrt{2g}}\int_b^a \frac{dz}{(r^2 - z^2)\sqrt{(a-z)(z-b)(c+z)}};$$

la plus grande valeur de z étant a, on a

$$\varphi_1 > \frac{Dr}{\sqrt{2g(a+c)}}\int_b^a \frac{dz}{(r^2 - z^2)\sqrt{(a-z)(z-b)}}.$$

De l'équation (b) on déduit

$$\frac{D^2}{2g} = (a+r)(r+b)(c-r),$$

$$\frac{D^2}{2g} = (r-a)(r-b)(r+c);$$

multiplions ces deux formules et extrayons la racine carrée, nous aurons

$$\frac{D^2}{2g} = \sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)(c^2 - r^2)},$$

et comme on a, d'après (d),

$$c = \frac{r^2 + ab}{a+b},$$

il en résulte

$$\frac{D^2}{2g} = \frac{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}{a + b},$$

et, par suite,

$$\frac{D}{\sqrt{2g(a+c)}} = \frac{\sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}}{\sqrt{r^2 + 2ab + a^2}}.$$

On a ensuite

$$\int \frac{dz}{(r^2 - z^2)\sqrt{(a-z)(z-b)}} = \frac{1}{r\sqrt{(r-a)(r-b)}} \operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{\frac{(r-a)(z-b)}{(r-b)(a-z)}}\right]$$

$$+ \frac{1}{r\sqrt{(r+a)(r+b)}} \operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{\frac{(r+a)(z-b)}{(r+b)(a-z)}}\right];$$

par conséquent,

$$\int_b^a \frac{dz}{(r^2 - z^2)\sqrt{(a-z)(z-b)}} = \frac{\pi}{2r}\left[\frac{1}{\sqrt{(r-a)(r-b)}} + \frac{1}{\sqrt{(r+a)(r+b)}}\right];$$

on a donc

$$\varphi_1 > \frac{\pi}{2}\left[\frac{\sqrt{(r+a)(r+b)} + \sqrt{(r-a)(r-b)}}{\sqrt{r^2 + 2ab + a^2}}\right].$$

Il est aisé de voir que le second facteur est plus grand que l'unité; donc φ_1 est plus grand que $\frac{\pi}{2}$.

SECTION IV.

SUR LE MOUVEMENT DE ROTATION D'UN CORPS SOLIDE.

1. Si l'on a à étudier le mouvement de corps de petites dimensions, on peut souvent, en les supposant réduits à des points, obtenir avec une grande approximation leur mouvement de translation. Mais tous les corps de la Nature ayant une certaine étendue, il est clair qu'on ne peut traiter rigoureusement de leur mouvement qu'en ayant égard à leurs dimensions; c'est donc un des problèmes les plus simples de la Dynamique que la recherche du mouvement, autour d'un point fixe, d'un corps solide sollicité par des forces données; et pour examiner d'abord le cas le plus facile de ce problème, nous commencerons par supposer que le corps ne soit sollicité par aucune force extérieure.

SUR LE MOUVEMENT AUTOUR D'UN POINT FIXE D'UN CORPS QUI N'EST SOLLICITÉ PAR AUCUNE FORCE EXTÉRIEURE.

2. Soient OX, OY, OZ trois axes de coordonnées rectangulaires et immobiles, passant par un point fixe O autour duquel le corps solide peut seulement tourner; puis, imaginons un second système de coordonnées rectangulaires qui ait la même origine et formé par les axes principaux d'inertie du corps relatifs à ce point. Désignons par A, B, C les moments d'inertie du corps par rapport à ces trois axes et par x, y, z les coordonnées d'un élément dm de ce corps relatives aux mêmes axes; nous aurons

$$A=\int(y^2+z^2)\,dm,\quad B=\int(z^2+x^2)\,dm,\quad C=\int(x^2+y^2)\,dm,$$
$$\int yz\,dm=0,\quad \int zx\,dm=0,\quad \int xy\,dm=0,$$

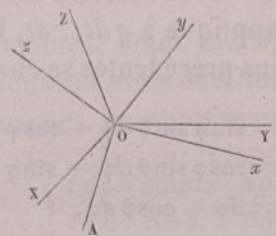
les intégrales s'étendant à toute la masse du corps.

On passe du premier système de cordonnées au second par les formules

$$X = a\,x + b\,y + c\,z,$$
$$Y = a'x + b'y + c'z,$$
$$Z = a''x + b''y + c''z,$$

a, b, c étant les cosinus des angles de l'axe des X avec ceux des x, y, z, etc. Désignons : 1° par ψ l'angle compris entre l'axe des X et la trace

Fig. 3.



OA du plan des x, y sur celui des X, Y; 2° par φ l'angle de cette trace avec l'axe des x; 3° par θ l'inclinaison du plan des x, y sur celui des X, Y. Nous supposons les deux systèmes de coordonnées superposables et nous concevons que l'angle θ formé de OZ et Oz varie de zéro à π, tandis que ψ et φ sont regardés comme variant de zéro à 2π. Enfin l'angle ψ est compté de OX vers OY et l'angle φ dans le sens de Ox vers Oy.

Nous aurons alors les formules connues

$$a = -\cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi,$$
$$b = -\cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi,$$
$$c = \sin\theta \sin\psi;$$
$$a' = \cos\theta \cos\psi \sin\varphi + \sin\psi \cos\varphi,$$
$$b' = \cos\theta \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi,$$
$$c' = -\sin\theta \cos\psi;$$
$$a'' = \sin\theta \sin\varphi, \quad b'' = \sin\theta \cos\varphi, \quad c'' = \cos\theta.$$

Posons

$$c\,db + c'\,db' + c''\,db'' = p\,dt,$$
$$a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' = q\,dt,$$
$$b\,da + b'\,da' + b''\,da'' = r\,dt;$$

il est aisé de reconnaître que $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ sont les rotations instantanées du corps autour des axes principaux Ox, Oy, Oz. En effet, désignons par Ox_1, Oy_1, Oz_1 les positions que prennent ces axes après un temps infiniment petit dt; en négligeant les infiniment petits du second ordre, on a, pour la rotation qui a lieu pendant ce temps autour de Ox,

$$\begin{aligned}\sin(yOy_1) = \cos(y_1Oz) &= (b+db)\,c + (b'+db')\,c' + (b''+db'')\,c''\\ &= c\,db + c'\,db' + c''\,db'',\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que $p\,dt$ est la rotation instantanée autour de Ox: le même raisonnement s'applique à $q\,dt$, $r\,dt$. D'après les valeurs de a, b, c, ..., les trois équations précédentes se changent en les suivantes:

$$\begin{aligned}p\,dt &= \sin\varphi\sin\theta\,d\psi + \cos\varphi\,d\theta,\\ q\,dt &= \cos\varphi\sin\theta\,d\psi - \sin\varphi\,d\theta,\\ r\,dt &= d\varphi + \cos\theta\,d\psi.\end{aligned}$$

Des deux premières on déduit

$$\sin\theta\,d\psi = \sin\varphi\,.\,p\,dt + \cos\varphi\,.\,q\,dt. \tag{1}$$

Désignons par u, v, w les projections de la vitesse du point (x, y, z) sur les trois axes principaux, en sorte que l'on a

$$\begin{aligned}u &= a\frac{dX}{dt} + a'\frac{dY}{dt} + a''\frac{dZ}{dt},\\ v &= b\frac{dX}{dt} + b'\frac{dY}{dt} + b''\frac{dZ}{dt},\\ w &= c\frac{dX}{dt} + c'\frac{dY}{dt} + c''\frac{dZ}{dt}.\end{aligned}$$

Or de la différentiation des expressions de X, Y, Z il résulte

$$\begin{aligned}dX &= x\,da + y\,db + z\,dc,\\ dY &= x\,da' + y\,db' + z\,dc',\\ dZ &= x\,da'' + y\,db'' + z\,dc'';\end{aligned}$$

et, en substituant dans les expressions précédentes, on obtient

$$u = qz - ry,\quad v = rx - pz,\quad w = py - qx.$$

3. Maintenant prenons pour plan des X, Y le plan invariable; car, dans le problème actuel, les trois intégrales des aires ont lieu (Section I, n° **13**), et projetons l'axe l du plan invariable, qui est dirigé suivant l'axe des Z, sur les axes des x, y, z; si nous désignons alors par θ_1, φ_1, ψ_1 ce que deviennent les angles θ, φ, ψ, nous aurons, pour ces projections,

$$\begin{aligned} l \sin\theta_1 \sin\varphi_1 &= \int (y w - z v)\, dm, \\ l \sin\theta_1 \cos\varphi_1 &= \int (z u - x w)\, dm, \\ l \cos\theta_1 &= \int (x v - y u)\, dm, \end{aligned}$$

puisque les seconds membres, étant multipliés par dt, représentent évidemment les projections des aires décrites, dans cet instant, sur les plans mobiles de coordonnées. En remplaçant u, v, w par leurs expressions, on a

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} l \sin\theta_1 \sin\varphi_1 &= \mathrm{A}p, \\ l \sin\theta_1 \cos\varphi_1 &= \mathrm{B}q, \\ l \cos\theta_1 &= \mathrm{C}r. \end{aligned} \right.$$

D'après le principe des forces vives, on a

$$\int (u^2 + v^2 + w^2)\, dm = 2h,$$

en désignant par h une constante arbitraire, ou

$$\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 = 2h;$$

d'ailleurs, en faisant la somme des carrés des équations (2), on a cette autre équation entre p, q, r

$$\mathrm{A}^2 p^2 + \mathrm{B}^2 q^2 + \mathrm{C}^2 r^2 = l^2.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par $l \sin\theta$, et nous aurons

$$l \sin^2\theta_1\, d\psi_1 = (\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2)\, dt,$$

$$d\psi_1 = \frac{\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2}{l^2 - l^2 \cos^2\theta_1}\, l\, dt,$$

$$(3) \qquad d\psi_1 = \frac{\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2}{\mathrm{A}^2 p^2 + \mathrm{B}^2 q^2}\, l\, dt.$$

4. Différentions l'expression de la force vive

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

par rapport à φ'_1, θ'_1, ψ'_1, dérivées de φ_1, θ_1, ψ_1 par rapport à t, et nous aurons

$$\frac{dT}{d\varphi'_1} = \frac{dT}{dr}\frac{dr}{d\varphi'_1} = Cr,$$

$$\begin{aligned}\frac{dT}{d\theta'_1} &= Ap\frac{dp}{d\theta'_1} + Bq\frac{dq}{d\theta'_1} + Cr\frac{dr}{d\theta'_1}\\ &= Ap\cos\varphi_1 - Bq\sin\varphi_1 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dT}{d\psi'_1} &= Ap\frac{dp}{d\psi'_1} + Bq\frac{dp}{d\psi'_1} + Cr\frac{dr}{d\psi'_1}\\ &= Ap\sin\varphi_1\sin\theta_1 + Bq\cos\varphi_1\sin\theta_1 + Cr\cos\theta_1 = l.\end{aligned}$$

Portons les deux premières expressions (2) dans l'équation du principe des forces vives, et nous aurons

$$(4)\qquad Cr^2 + \left(\frac{1}{A}\sin^2\varphi_1 + \frac{1}{B}\cos^2\varphi_1\right)(l^2 - C^2r^2) = 2h.$$

Remarquons que Cr est conjugué de φ_1 et l de ψ_1; on aura donc l'équation aux différences partielles en V qui donne la solution du problème en faisant dans l'équation précédente

$$Cr = \frac{dV}{d\varphi_1},\quad l = \frac{dV}{d\psi_1},$$

et il en résulte

$$\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\sin^2\varphi_1 - \frac{1}{B}\cos^2\varphi_1\right)\left(\frac{dV}{d\varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{\sin^2\varphi_1}{A} + \frac{\cos^2\varphi_1}{B}\right)\left(\frac{dV}{d\psi_1}\right)^2 = 2h.$$

Faisons

$$V = W + l\psi_1,$$

W étant indépendant de ψ_1, et l'on déduira de la formule précédente

$$V = \int\sqrt{\frac{2h - l^2\left(\dfrac{\sin^2\varphi_1}{A} + \dfrac{\cos^2\varphi_1}{B}\right)}{\dfrac{1}{C} - \dfrac{\sin^2\varphi_1}{A} - \dfrac{\cos^2\varphi_1}{B}}}\,d\varphi_1 + l\psi_1.$$

On en conclut, pour les deux intégrales finies du mouvement,

$$\frac{dV}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dV}{dl} = g,$$

τ et g étant deux constantes arbitraires, ou

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} t + \tau &= \int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{2h - l^2\left(\frac{\sin^2\varphi_1}{A} + \frac{\cos^2\varphi_1}{B}\right)}\sqrt{\frac{1}{C} - \frac{\sin^2\varphi_1}{A} - \frac{\cos^2\varphi_1}{B}}}, \\ \psi_1 - g &= \int \frac{l\left(\frac{\sin^2\varphi_1}{A} + \frac{\cos^2\varphi_1}{B}\right)d\varphi_1}{\sqrt{2h - l^2\left(\frac{\sin^2\varphi_1}{A} + \frac{\cos^2\varphi_1}{B}\right)}\sqrt{\frac{1}{C} - \frac{\sin^2\varphi_1}{A} - \frac{\cos^2\varphi_1}{B}}}. \end{aligned} \right.$$

En remplaçant Cr par $l\cos\theta_1$ dans la formule (4), on a

$$(6) \quad \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2\varphi_1}{A} - \frac{\cos^2\varphi_1}{B}\right) l^2\cos^2\theta_1 = 2h - l^2\left(\frac{\sin^2\varphi_1}{A} + \frac{\cos^2\varphi_1}{B}\right),$$

et de la formule (3) on déduit

$$(7) \quad d\psi_1 = \frac{2h - \frac{l^2}{C}\cos^2\theta_1}{l\sin^2\theta_1}\,dt.$$

Au moyen des équations (5), (6), (7) on pourra calculer φ_1, θ_1, ψ_1 en fonction de t; on aura ensuite p, q, r par l'emploi des formules (2).

5. Le système des variables précédentes dépend de la position du plan invariable; revenons maintenant au système plus général de variables que nous avons d'abord examiné. Pour cela, concevons une sphère dont le centre soit au point fixe, c'est-à-dire à l'origine des coordonnées, et considérons le triangle sphérique intercepté sur la sphère par le plan fixe des X, Y, par le plan invariable et par le plan des x, y qui passe par deux axes principaux d'inertie et que nous appellerons l'*équateur*. L'angle ψ représente la longitude du nœud de l'équateur avec le grand cercle déterminé par le plan des X, Y; désignons par α la longitude du nœud du plan invariable avec le même plan, en sorte que $\psi - \alpha$ est un côté du triangle. Les angles φ_1 et φ sont ceux que fait l'axe principal A avec l'intersection du plan de l'équateur par le plan

invariable et par le plan des x, y; donc $\varphi_1 - \varphi$ est le côté du triangle sphérique situé sur l'équateur. Enfin, en convenant de compter l'angle ψ_1 à partir du nœud du plan invariable, nous aurons ψ_1 pour le troisième côté du triangle sphérique. Alors, si nous désignons par γ l'inclinaison du plan invariable sur le plan des X, Y, les angles γ, θ_1, $\pi - \theta$ seront respectivement opposés aux trois côtés $\varphi_1 - \varphi$, $\psi - \alpha$, ψ_1, et, d'après les formules de la Trigonométrie sphérique, nous aurons

$$\cos\theta = \cos\gamma\cos\theta_1 - \sin\gamma\sin\theta_1\cos\psi_1,$$

$$\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi)}{\sin\gamma} = \frac{\sin\psi_1}{\sin\theta} = \frac{\sin(\psi - \alpha)}{\sin\theta_1}.$$

Au moyen de ces trois équations, on pourra calculer les trois angles θ, φ, ψ, quand on aura déterminé les valeurs de θ_1, φ_1, ψ_1.

6. Le problème devient beaucoup plus simple dans les deux cas particuliers suivants :

1° Dans le cas où B est égal à A, la première formule (5) devient

$$t + \tau = \frac{\varphi_1}{\sqrt{\left(2h - \frac{l^2}{A}\right)\frac{A - C}{AC}}},$$

et l'on a les formules suivantes :

$$\varphi_1 = \frac{1}{A}\sqrt{(2hA - l^2)\frac{A - C}{C}}(t + \tau),$$

$$\psi_1 - g = \frac{l}{A}(t + \tau),$$

$$\cos^2\theta_1 = \frac{(2hA - l^2)C}{A - C}.$$

Le cas où A est égal à B offre un intérêt particulier, parce qu'il se présente pour le globe terrestre. Pour que B soit égal à A, il n'est pas nécessaire, comme on sait, que le corps soit de révolution autour du troisième axe principal. Or c'est ce qui a lieu pour la Terre, qui est loin de pouvoir être considérée comme un solide de révolution autour de la ligne des pôles; mais, d'après ce que j'ai démontré (*Journal de Liouville*, t. II, 1876), la différence entre les deux axes A et B perpendiculaires à la ligne des pôles est si petite, que toutes les observations astronomiques sont les mêmes que si B était égal à A, et que la quantité $\frac{B-A}{B}$ est plus petite qu'elle ne le serait pour un ellipsoïde de même dimension que la Terre, et dont les demi-axes de l'équateur différeraient seulement de 2 mètres.

2° Supposant que l'on a $C > B > A$, remarquons que nous avons les deux équations

$$l^2 - 2Ah = B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2,$$
$$l^2 - 2Ch = A(A-C)p^2 + B(B-C)q^2,$$

et qu'il en résulte

$$l^2 - 2Ah > 0, \quad l^2 - 2Ch < 0;$$

mais il peut arriver que $l^2 - 2Bh$ soit nul, et l'on reconnaîtra aisément que, dans ce cas, les intégrations peuvent encore s'effectuer sans l'emploi des fonctions elliptiques.

Sur l'emploi des fonctions elliptiques dans le problème précédent.

7. L'angle φ_1 peut s'exprimer au moyen de θ_1 d'après la formule (6), et, si l'on introduit θ_1 au lieu de φ_1 dans la première formule (5), on trouve facilement

$$dt = \frac{C\sqrt{AB}\, l \sin\theta_1\, d\theta_1}{\sqrt{(2hC - l^2)B - l^2(C-B)\sin^2\theta_1}\,\sqrt{l^2(C-A)\sin^2\theta_1 - (2hC-l^2)A}}.$$

Supposons $C > B > A$; d'après ce que nous avons vu au numéro précédent, la quantité $2hC - l^2$ est positive, et, afin que l'expression de dt soit réelle, il faut que l'on ait

$$\sin^2\theta_1 < \frac{(2hC-l^2)B}{l^2(C-B)}, \quad \sin^2\theta_1 > \frac{(2hC-l^2)A}{l^2(C-A)}.$$

Posons

$$\frac{(2hC-l^2)B}{l^2(C-B)} = f, \quad \frac{(2hC-l^2)A}{l^2(C-A)} = s;$$

$\sin^2\theta_1$ étant compris entre f et s, on peut poser

$$\sin^2\theta_1 = f\sin^2\mu + s\cos^2\mu,$$

en désignant par μ une nouvelle variable. On en déduit

$$(2hC - l^2)B - l^2(C-B)\sin^2\theta_1 = l^2(C-B)(f-s)\cos^2\mu,$$
$$l^2(C-A)\sin^2\theta_1 - (2hC - l^2)A = l^2(C-A)(f-s)\sin^2\mu,$$
$$\sin\theta_1\cos\theta_1\,d\theta_1 = (f-s)\sin\mu\cos\mu\,d\mu,$$
$$\sin\theta_1\,d\theta_1 = \frac{(f-s)\sin\mu\cos\mu\,d\mu}{\sqrt{1-s-(f-s)\sin^2\mu}}.$$

On en conclut, pour l'expression de dt,

$$dt = \frac{C\sqrt{AB}\,d\mu}{l\sqrt{(C-A)(C-B)}\sqrt{1-s-(f-s)\sin^2\mu}}.$$

On a

$$1-s = \frac{C(l^2-2hA)}{l^2(C-A)},\quad f-s = \frac{(2hC-l^2)C(B-A)}{l^2(C-A)(C-B)};$$

donc, si l'on pose

$$\frac{f-s}{1-s} = k^2,$$

il en résulte

$$k^2 = \frac{(B-A)(2Ch-l^2)}{(C-B)(l^2-2Ah)}.$$

Nous avons ainsi

$$dt = \frac{\sqrt{ABC}\,d\mu}{\sqrt{(C-B)(l^2-2Ah)}\sqrt{1-k^2\sin^2\mu}}.$$

En désignant par u une nouvelle variable, posons

$$\int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{1-k^2\sin^2\mu}} = u,$$

nous aurons $\mu = \operatorname{am} u$ et

$$t+\tau = \frac{\sqrt{ABC}}{\sqrt{(C-B)(l^2-2Ah)}}\,u,$$

la constante $-\tau$ indiquant l'époque pour laquelle $u=0$. Nous avons ensuite

$$\cos^2\theta_1 = (1-s)(1-k^2\sin^2\mu) = \frac{C(l^2-2Ah)}{l^2(C-A)}\Delta^2 \operatorname{am} u,$$

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{C(l^2-2Ah)}{C-A}}\Delta \operatorname{am} u,$$

$$r = \frac{l}{C}\cos\theta_1 = \sqrt{\frac{l^2-2Ah}{C(C-A)}}\Delta \operatorname{am} u.$$

Comme $\cos\theta_1$ ne peut s'annuler, on peut supposer $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$ et compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$; on peut donc prendre le radical précédent avec le signe $+$.

L'équation (6) du n° 4 peut s'écrire sous cette forme

$$\frac{B-A}{AB} l^2 \sin^2\varphi_1 \sin^2\theta_1 = 2h - \frac{l^2}{B} - \frac{l^2(B-C)}{BC}\cos^2\theta_1;$$

et, en remplaçant $\cos^2\theta_1$, on trouve

$$\frac{1}{A} l^2 \sin^2\varphi_1 \sin^2\theta_1 = \frac{2hC-l^2}{C-A}\cos^2\mu.$$

On aura, par suite,

$$p = \frac{l}{A}\sin\varphi_1\sin\theta_1 = \pm\sqrt{\frac{2hC-l^2}{A(C-A)}}\cos\operatorname{am} u;$$

$\sin\theta_1$ est toujours positif; on prendra donc le signe $+$ ou $-$, selon que, pour $u=0$ ou $t=-\tau$, $\sin\varphi_1$ sera positif ou négatif.

On passe de l'expression de p, vitesse de rotation autour de l'axe principal Ox, à l'expression de q, qui est la vitesse de rotation autour de Oy, en changeant A en B, B en A et φ_1 en $\frac{\pi}{2}+\varphi_1$, ce qui change μ en $\mu+\frac{\pi}{2}$ et $\cos\operatorname{am} u$ en $-\sin\operatorname{am} u$. On a donc

$$q = \frac{l}{B}\cos\varphi_1\sin\theta_1 = \mp\sqrt{\frac{2hC-l^2}{B(C-B)}}\sin\operatorname{am} u.$$

8. Reste à calculer l'angle ψ_1 donné par la formule (3) du n° 3

$$d\psi_1 = \frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\, l\, dt.$$

D'après les valeurs précédentes de p, q, on a

$$A^2p^2 + B^2q^2 = (2Ch - l^2)\left(\frac{A\cos^2\operatorname{am} u}{C-A} + \frac{B\sin^2\operatorname{am} u}{C-B}\right)$$
$$= \frac{A(2Ch-l^2)}{C-A}\left[1 + \frac{C(B-A)}{A(C-B)}\sin^2\operatorname{am} u\right],$$

et l'on a ensuite

$$\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2} = \frac{1}{A} - \frac{B-A}{A}\,\frac{Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}$$
$$= \frac{1}{A} - \frac{(B-A)(C-A)}{A^2(C-B)}\,\frac{\sin^2\operatorname{am} u}{1+\dfrac{C(B-A)}{A(C-B)}\sin^2\operatorname{am} u}.$$

Donc, en désignant par g une constante arbitraire, on obtient la formule

$$\psi_1 - g = l\sqrt{\frac{BC}{A(C-B)(l^2-2Ah)}}\left[u - \frac{(B-A)(C-A)}{A(C-B)}\int_0^u \frac{\sin^2\operatorname{am} u\,du}{1+\dfrac{C(B-A)}{A(C-B)}\sin^2\operatorname{am} u}\right].$$

Afin de comparer cette expression à la fonction déjà employée (Section III, n° 11) $\Pi(u,a)$ ou

$$\int_0^u \frac{k^2\sin\operatorname{am} a\cos\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a\sin^2\operatorname{am} u\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} a\sin^2\operatorname{am} u} = \frac{d\log\Theta(a)}{da}u + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)},$$

posons, en introduisant la quantité α,

$$\frac{C(B-A)}{A(C-B)} = -k^2\sin^2\operatorname{am}(i\alpha),$$

il en résultera, en choisissant les signes et faisant $i=\sqrt{-1}$,

$$\sin\operatorname{am}(i\alpha) = i\sqrt{\frac{C(l^2-2Ah)}{A(2hC-l^2)}},$$
$$\cos\operatorname{am}(i\alpha) = l\sqrt{\frac{C-A}{A(2hC-l^2)}},$$
$$\Delta\operatorname{am}(i\alpha) = \sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-B)}},$$
$$k^2\sin\operatorname{am}(i\alpha)\cos\operatorname{am}(i\alpha)\Delta\operatorname{am}(i\alpha) = \frac{il(B-A)(C-A)}{A(C-B)}\sqrt{\frac{BC}{A(C-B)(l^2-2Ah)}}.$$

Posons

$$m = l\sqrt{\frac{BC}{A(C-B)(l^2-2Ah)}} = i\frac{C}{C-A}\frac{\cos\operatorname{am}(i\alpha)\Delta\operatorname{am}(i\alpha)}{\sin\operatorname{am}(i\alpha)},$$

et nous aurons

$$\psi_1 - g = mu + i\int_0^u \frac{k^2\sin\operatorname{am}(i\alpha)\cos\operatorname{am}(i\alpha)\Delta\operatorname{am}(i\alpha)\sin^2\operatorname{am}u\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(i\alpha)\sin^2\operatorname{am}u}$$

ou

$$\psi_1 - g = \left[m + \frac{d\log\Theta(i\alpha)}{d\alpha}\right]u + \tfrac{1}{2}i\log\left[\frac{\Theta(u-i\alpha)}{\Theta(u+i\alpha)}\right].$$

En faisant

$$\sqrt{\frac{(C-B)(l^2-2Ah)}{ABC}} = n, \quad m + \frac{d\log\Theta(i\alpha)}{d\alpha} = n',$$

on a

$$u = n(t+\tau), \quad \psi_1 - g = n'u + \tfrac{1}{2}i\log\frac{\Theta(u-i\alpha)}{\Theta(u+i\alpha)}.$$

9. Si l'on augmente u de $4K$ et, par suite, t de $\frac{4K}{n}$, les valeurs de p, q, r et, par suite, celles de θ_1, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ resteront les mêmes; donc θ_1, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ sont des fonctions périodiques du temps dont la période est

$$2T = \frac{4K}{n}.$$

Ensuite, si l'on augmente u de $2K$, la fonction $\Theta(u \pm i\alpha)$ ne change pas; donc l'angle ψ_1 se compose d'une partie qui croît proportionnellement au temps t et d'une partie périodique par rapport à t et qui a T pour période.

D'après cela, imaginons que les axes des X, Y tournent dans leur plan autour du point fixe avec une vitesse angulaire égale à nn' (cette vitesse étant comptée dans le même sens que l'angle ψ_1), alors le mouvement du corps redeviendra exactement le même au bout d'un temps égal à $2T = \frac{4K}{n}$ par rapport au système d'axes de coordonnées formé des deux axes mobiles et de l'axe du plan invariable.

Si nous posons

$$\Psi = \frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u - i\alpha)}{\Theta(u + i\alpha)},$$

nous aurons

$$\psi_1 = g + n'u + \Psi.$$

Il en résultera aussi

$$e^{-\Psi i} = \sqrt{\frac{\Theta(u - i\alpha)}{\Theta(u + i\alpha)}};$$

posons

$$\Theta(u + i\alpha)\Theta(u - i\alpha) = \mathrm{P},$$

et nous aurons

$$\cos\Psi = \frac{\Theta(u + i\alpha) + \Theta(u - i\alpha)}{2\sqrt{\mathrm{P}}}, \quad \sin\Psi = \frac{\Theta(u + i\alpha) - \Theta(u - i\alpha)}{2i\sqrt{\mathrm{P}}}.$$

Il est aisé de calculer ces deux expressions. En effet, d'après les formules de Jacobi (*Fundamenta*, § 63), nous avons, en faisant $q_1 = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}$,

$$\Theta\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right) = 1 - 2q_1\cos 2x + 2q_1^4\cos 4x - 2q_1^9\cos 6x - \ldots$$

(nous mettons un indice à la lettre q, cette lettre q représentant une quantité précédente), et, en posant $\varepsilon = \frac{\alpha}{\mathrm{K}'}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}[\Theta(u + i\alpha) + \Theta(u - i\alpha)] \\
&\quad = 1 - q_1^{1-\varepsilon}(1 + q_1^{2\varepsilon})\cos\frac{\pi u}{\mathrm{K}} + q_1^{4-2\varepsilon}(1 + q_1^{4\varepsilon})\cos\frac{2\pi u}{\mathrm{K}} - \ldots, \\
&\frac{1}{2i}[\Theta(u + i\alpha) - \Theta(u - i\alpha)] \\
&\quad = q_1^{1-\varepsilon}(1 - q_1^{2\varepsilon})\sin\frac{\pi u}{\mathrm{K}} - q_1^{4-2\varepsilon}(1 - q_1^{4\varepsilon})\sin\frac{2\pi u}{\mathrm{K}} + \ldots.
\end{aligned}$$

Les formules qui précèdent suffisent entièrement pour déterminer la position du corps solide. Cependant Jacobi a donné les formules les plus simples qui représentent au moyen des fonctions elliptiques les neuf cosinus des angles des axes principaux avec le système mobile d'axes dont il a été parlé ci-dessus (*Sur la rotation d'un corps*, t. II de ses *Mémoires*).

De la stabilité du mouvement d'un corps solide autour des axes principaux d'inertie.

10. Il est aisé de démontrer que les axes principaux d'inertie peuvent servir constamment d'axes de rotation à un corps solide qui n'est sollicité par aucune force extérieure, mais que la stabilité n'a lieu qu'autour des axes du plus grand et du plus petit moment d'inertie.

Supposons, en effet, que l'on ait $p = 0$, $q = 0$ à un certain instant; d'après les valeurs de p, q exprimées au moyen de $\operatorname{am} u$ (n° 7), il faut que l'on ait $2hC - l^2 = 0$ et, par conséquent, p, q resteront constamment nuls, c'est-à-dire que, si le corps tourne d'abord autour d'un axe principal, il continuera indéfiniment à tourner autour de cet axe.

Supposons ensuite, comme précédemment, que B soit l'axe moyen entre A et C. Si p et q sont très-petits à un certain instant, en sorte que l'axe instantané de rotation s'écarte très-peu de l'axe C, alors, d'après les valeurs de p, q, on voit que $2hC - l^2$ est très-petit; or, d'après la supposition qui a été faite, le module k des fonctions elliptiques est réel et plus petit que l'unité, et même il est très-petit; il s'ensuit que $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$ sont compris de zéro à 1; donc p, q resteront toujours très-petits.

C'est au reste ce que l'on voit immédiatement d'après la formule

$$2hC - l^2 = A(C - A)p^2 + B(C - B)q^2,$$

dont le premier membre est de même signe que les deux termes du second, en sorte que l'on a toujours

$$p^2 < \frac{2hC - l^2}{A(C - A)}, \quad q^2 < \frac{2hC - l^2}{B(C - B)}.$$

11. Bien que les formules qui donnent p, q, r (n° 7) en fonction de $\operatorname{am} u$ aient été calculées en vue que B soit moyen entre A et C, elles sont encore admissibles si l'on prend C pour cet axe moyen; seulement les facteurs qui composent p, q ne sont plus tous réels.

Supposons donc $A > C > B$, et admettons que, à un certain instant, p, q soient très-petits, on en conclura encore que $2hC - l^2$ est très-petit. Remarquons ensuite que, l'expression de $2Ah - l^2$ étant positive, la valeur de u en fonction de t doit s'écrire

$$u = \sqrt{\frac{(C-B)(2Ah-l^2)}{ABC}}\, i(t+\tau).$$

Faisons donc

$$u = vi, \quad v = \sqrt{\frac{(C-B)(2Ah-l^2)}{ABC}}\,(t+\tau);$$

nous avons

$$l^2 - 2Ah < 0, \quad l^2 - 2Bh > 0,$$

mais $l^2 - 2Ch$ peut être positif ou négatif.

Supposons $l^2 - 2Ch > 0$, nous aurons

$$p = \pm\sqrt{\frac{l^2-2Ch}{A(A-C)}}\cos\operatorname{am}(vi), \quad q = \mp\sqrt{\frac{l^2-2Ch}{B(C-B)}}\, i\sin\operatorname{am}(vi),$$

$$r = \sqrt{\frac{2Ah-l^2}{C(A-C)}}\,\Delta\operatorname{am}(vi).$$

$l^2 - 2Ch$ étant très-petit, les quantités k et q_1 seront des quantités imaginaires très-petites et les fonctions $\sin\operatorname{am}(vi)$, $\cos\operatorname{am}(vi)$ se calculeront aisément par les formules où $k' = \sqrt{1-k^2}$

$$\sin\operatorname{am}(vi) = \frac{2}{\sqrt{k}}\,\frac{q_1^{\frac{1}{4}}\sin\dfrac{\pi vi}{2K} - q_1^{\frac{9}{4}}\sin\dfrac{3\pi vi}{2K} + q_1^{\frac{25}{4}}\sin\dfrac{5\pi vi}{2K} - \ldots}{1 - 2q_1\cos\dfrac{\pi vi}{K} + 2q_1^4\cos\dfrac{4\pi vi}{K} - 2q_1^9\cos\dfrac{6\pi vi}{K} + \ldots},$$

$$\cos\operatorname{am}(vi) = 2\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{q_1^{\frac{1}{4}}\cos\dfrac{\pi vi}{2K} + q_1^{\frac{9}{4}}\cos\dfrac{3\pi vi}{2K} + \ldots}{1 - 2q_1\cos\dfrac{\pi vi}{K} + 2q_1^4\cos\dfrac{4\pi vi}{K} - \ldots},$$

dans lesquelles on remplacera les sinus et cosinus d'arcs imaginaires par des exponentielles. On voit aussi, d'après ces formules, que $\sin\operatorname{am}(vi)$ et $\cos\operatorname{am}(vi)$ peuvent devenir très-grands pour une grande valeur de t et que, par conséquent, si p, q sont d'abord très-petits, il ne s'ensuit pas qu'ils restent très-petits. Ainsi l'axe moyen d'inertie n'est pas un axe stable de rotation.

Si $l^2 - 2Ch$ était négatif, il suffirait de désigner le plus petit axe par A et, par suite, le plus grand par B, pour que les mêmes formules et les mêmes conclusions sur la stabilité fussent applicables; car on a alors les inégalités

$$A < C < B, \quad l^2 - 2Ch < 0,$$
$$l^2 - 2Ah > 0, \quad l^2 - 2Bh < 0.$$

SUR LE MOUVEMENT AUTOUR D'UN POINT FIXE D'UN CORPS SOLIDE SOLLICITÉ PAR DES FORCES QUELCONQUES.

12. Supposons, pour plus de généralité, que, par le point fixe autour duquel le corps peut tourner, on mène d'une manière quelconque trois axes rectangulaires fixés à ce corps, Ox, Oy, Oz. Adoptant les mêmes notations qu'au n° **2**, posons

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta', \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \quad \frac{d\psi}{dt} = \psi',$$

et les expressions de p, q, r deviendront

$$p = \sin\varphi \sin\theta.\psi' + \cos\varphi.\theta',$$
$$q = \cos\varphi \sin\theta.\psi' - \sin\varphi.\theta',$$
$$r = \varphi' + \cos\theta.\psi'.$$

En désignant par u, v, w les composantes de la vitesse par rapport aux trois axes, on a, pour l'expression de la force vive,

$$2T = \int (u^2 + v^2 + w^2)\, dm,$$

avec

$$u = qz - ry, \quad v = rx - pz, \quad w = py - qx,$$

et, en posant

$$A = \int (y^2 + z^2)\, dm, \quad B = \int (z^2 + x^2)\, dm, \quad C = \int (x^2 + y^2)\, dm,$$
$$D = \int yz\, dm, \quad E = \int zx\, dm, \quad F = \int xy\, dm,$$

on a

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq.$$

On a ensuite

$$\delta T = \frac{dT}{dp}\delta p + \frac{dT}{dq}\delta q + \frac{dT}{dr}\delta r$$

ou

$$\delta T = \left(\frac{dT}{dp}q - \frac{dT}{dq}p\right)\delta\varphi + \left(\frac{dT}{dp}\sin\varphi\cos\theta + \frac{dT}{dq}\cos\varphi\cos\theta - \frac{dT}{dr}\sin\theta\right)\psi'\delta\theta$$
$$+ \frac{dT}{dr}\delta\varphi' + \left(\frac{dT}{dp}\sin\varphi\sin\theta + \frac{dT}{dq}\cos\varphi\sin\theta + \frac{dT}{dr}\cos\theta\right)\delta\psi'$$
$$+ \left(\frac{dT}{dp}\cos\varphi - \frac{dT}{dq}\sin\varphi\right)\delta\theta'.$$

Appliquons l'équation de Lagrange (Section I, n° 23)

$$\frac{d\dfrac{dT}{dq'_i}}{dt} - \frac{dT}{dq_i} - \frac{dU}{dq_i} = 0,$$

en prenant φ, θ, ψ pour les variables q_i, et nous aurons

$$\frac{d\dfrac{dT}{dr}}{dt} - \frac{dT}{dp}q + \frac{dT}{dq}p - \frac{dU}{d\varphi} = 0,$$

$$\frac{d\left(\dfrac{dT}{dp}\sin\varphi\sin\theta + \dfrac{dT}{dq}\cos\varphi\sin\theta + \dfrac{dT}{dr}\cos\theta\right)}{dt} - \frac{dU}{d\psi} = 0,$$

$$\frac{d\left(\dfrac{dT}{dp}\cos\varphi - \dfrac{dT}{dq}\sin\varphi\right)}{dt} - \left(\frac{dT}{dp}\sin\varphi\cos\theta + \frac{dT}{dq}\cos\varphi\cos\theta - \frac{dT}{dr}\sin\theta\right)\frac{d\psi}{dt} - \frac{dU}{d\theta} = 0.$$

Ces équations ont été employées par Lagrange dans ses *Recherches sur la libration de la Lune.*

Examinons la première de ces trois équations. Nous pouvons poser

$$U = \int v\,dm,$$

v étant fonction des coordonnées X, Y, Z de l'élément de masse dm du corps solide, et l'intégrale s'étendant à toute la masse du corps; or on a les formules

$$(a)\qquad \begin{cases} X = ax + by + cz, \\ Y = a'x + b'y + c'z, \\ Z = a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

où x, y, z restent constants quand t varie; v et U varient donc seulement avec les cosinus a, b, c, a', ... Ainsi l'on a

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{dU}{da}(-\cos\theta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi) + \frac{dU}{db}(\cos\theta\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\varphi)$$
$$+ \frac{dU}{da'}(\cos\theta\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi) + \frac{dU}{db'}(-\cos\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi)$$
$$+ \frac{dU}{da''}\sin\theta\cos\varphi - \frac{dU}{db''}\sin\theta\sin\varphi.$$

Pour comprendre les dérivées de U et v par rapport à a, b, c, ..., il faut se représenter U et v comme des fonctions de X, Y, Z dans lesquelles ces coordonnées sont remplacées par les expressions (a), sans qu'on ait égard aux relations qui existent entre les neuf cosinus, car autrement ces dérivées n'auraient pas de sens déterminé.

La formule précédente peut s'écrire plus simplement

$$\frac{dU}{d\varphi} = b\frac{dU}{da} + b'\frac{dU}{da'} + b''\frac{dU}{da''} - a\frac{dU}{db} - a'\frac{dU}{db'} - a''\frac{dU}{db''}$$
$$= \int\left(b\frac{dv}{da} + b'\frac{dv}{da'} + b''\frac{dv}{da''} - a\frac{dv}{db} - a'\frac{dv}{db'} - a''\frac{dv}{db''}\right)dm.$$

Or on a

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dX}\frac{dX}{dx} + \frac{dv}{dY}\frac{dY}{dx} + \frac{dv}{dZ}\frac{dZ}{dx} = \frac{dv}{y\,db}a + \frac{dv}{y\,db'}a' + \frac{dv}{y\,db''}a'',$$

et de même

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{x\,da}b + \frac{dv}{x\,da'}b' + \frac{dv}{x\,da''}b'';$$

il en résulte donc

$$\frac{dU}{d\varphi} = \int\left(x\frac{dv}{dy} - y\frac{dv}{dx}\right)dm.$$

13. S'il n'existe pas de fonction de forces, il suffira de remplacer $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$ par les composantes, suivant les axes des x et y, de la force appliquée au point (x, y, z) (Section I, n° 20), et l'expression de $\frac{dU}{d\varphi}$ sera remplacée par la somme des moments des forces autour de l'axe des z. Désignons par N cette somme, et nous aurons l'équation

$$\frac{d\frac{dT}{dr}}{dt} - \frac{dT}{dp} q + \frac{dT}{dq} p = N;$$

nous en déduisons par analogie, au moyen d'une permutation des lettres p, q, r, les deux autres équations

$$\frac{d\frac{dT}{dp}}{dt} - \frac{dT}{dq} r + \frac{dT}{dr} q = L,$$

$$\frac{d\frac{dT}{dq}}{dt} - \frac{dT}{dr} p + \frac{dT}{dp} r = M,$$

L et M étant les sommes des moments des forces autour des axes des x et des y.

Bien qu'il puisse être utile, pour certains problèmes particuliers, de ne point faire coïncider les axes des x, y, z avec les axes principaux d'inertie, il sera, en général, plus commode d'établir cette coïncidence afin de simplifier les formules. Alors on aura $D = E = F = 0$, et l'on obtiendra les trois équations données pour la première fois par Euler :

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A) qp = N,$$

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B) rq = L,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C) pr = M.$$

14. On peut encore démontrer les équations du numéro précédent par la méthode suivante, donnée par Lagrange :

Désignons par dP, dQ, dR les trois quantités $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$, bien qu'elles ne soient pas des différentielles exactes, et par δP, δQ, δR ce que deviennent ces trois quantités quand on y remplace les différentielles selon d par les variations selon δ. Nous aurons

$$dP = c\,db + c'\,db' + c''\,db'',$$

$$\delta P = c\,\delta b + c'\,\delta b' + c''\,\delta b'';$$

en différentiant la première des deux formules selon δ et la seconde selon d, on a

$$\delta d\mathrm{P} = c\,\delta db + c'\,\delta db' + c''\,\delta db'' + \delta c\,db + \delta c'\,db' + \delta c''\,db'',$$
$$d\delta\mathrm{P} = c\,d\delta b + c'\,d\delta b' + c''\,d\delta b'' + dc\,\delta b + dc'\,\delta b' + dc''\,\delta b''$$

et, par suite,

$$\delta d\mathrm{P} - d\delta\mathrm{P} = \delta c\,db + \delta c'\,db' + \delta c''\,db'' - dc\,\delta b - dc'\,\delta b' - dc''\,\delta b''.$$

Or des équations

$$a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' = d\mathrm{Q},$$
$$-b\,dc - b'\,dc' - b''\,dc'' = d\mathrm{P},$$
$$c\,dc + c'\,dc' + c''\,dc'' = 0$$

on tire

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{array}{lll} dc = a\,d\mathrm{Q} - b\,d\mathrm{P}, & \text{par suite,} & \delta c = a\,\delta\mathrm{Q} - b\,\delta\mathrm{P}, \\ dc' = a'\,d\mathrm{Q} - b'\,d\mathrm{P}, & \text{»} & \delta c' = a'\,\delta\mathrm{Q} - b'\,\delta\mathrm{P}, \\ dc'' = a''\,d\mathrm{Q} - b''\,d\mathrm{P}, & \text{»} & \delta c'' = a''\,\delta\mathrm{Q} - b''\,\delta\mathrm{P}. \end{array}\right.$$

On a, par analogie,

$$\begin{array}{ll} db = c\,d\mathrm{P} - a\,d\mathrm{R}, & \delta b = c\,\delta\mathrm{P} - a\,\delta\mathrm{R}, \\ db' = c'\,d\mathrm{P} - a'\,d\mathrm{R}, & \delta b' = c'\,\delta\mathrm{P} - a'\,\delta\mathrm{R}, \\ db'' = c''\,d\mathrm{P} - a''\,d\mathrm{R}, & \delta b'' = c''\,\delta\mathrm{P} - a''\,\delta\mathrm{R}; \end{array}$$

on en conclut la première des trois équations suivantes :

$$\delta d\mathrm{P} - d\delta\mathrm{P} = -d\mathrm{R}\,\delta\mathrm{Q} + \delta\mathrm{R}\,d\mathrm{Q},$$
$$\delta d\mathrm{Q} - d\delta\mathrm{Q} = -d\mathrm{P}\,\delta\mathrm{R} + \delta\mathrm{P}\,d\mathrm{R},$$
$$\delta d\mathrm{R} - d\delta\mathrm{R} = -d\mathrm{Q}\,\delta\mathrm{P} + \delta\mathrm{Q}\,d\mathrm{P},$$

les deux autres s'en déduisant par analogie; ces formules montrent que, dans les expressions $d\,\delta\mathrm{P}$, $d\,\delta\mathrm{Q}$, $d\,\delta\mathrm{R}$, les signes d et δ ne peuvent être intervertis.

On a d'ailleurs

$$\delta\mathrm{T} = \frac{d\mathrm{T}}{dp}\,\frac{\delta d\mathrm{P}}{dt} + \frac{d\mathrm{T}}{dq}\,\frac{\delta d\mathrm{Q}}{dt} + \frac{d\mathrm{T}}{dr}\,\frac{\delta d\mathrm{R}}{dt},$$

et, en se servant des trois équations qui précèdent,

$$(\beta)\qquad \left\{\begin{array}{l} \delta\mathrm{T} = \dfrac{d\mathrm{T}}{dp}\left(\dfrac{d\,\delta\mathrm{P}}{dt} + q\,\delta\mathrm{R} - r\,\delta\mathrm{Q}\right) \\ \qquad + \dfrac{d\mathrm{T}}{dq}\left(\dfrac{d\,\delta\mathrm{Q}}{dt} + r\,\delta\mathrm{P} - p\,\delta\mathrm{R}\right) + \dfrac{d\mathrm{T}}{dr}\left(\dfrac{d\,\delta\mathrm{R}}{dt} + p\,\delta\mathrm{Q} - q\,\delta\mathrm{P}\right). \end{array}\right.$$

Appliquons l'équation (Section I, n° 22)

$$(\gamma) \qquad \int (\partial T + \partial U)\, dt = 0;$$

nous avons

$$\int \frac{dT}{dp}\, d\partial P = \frac{dT}{dp}\, \partial P - \int \frac{d\frac{dT}{dp}}{dt}\, \partial P\, dt;$$

donc, en faisant

$$\partial U = U_1\, \partial P + U_2\, \partial Q + U_3\, \partial R,$$

l'équation (γ) deviendra

$$\begin{aligned} 0 = \int dt \Bigg[& - \frac{d\frac{dT}{dp}}{dt}\, \partial P + (q\, \partial R - r\partial Q)\frac{dT}{dp} \\ & - \frac{d\frac{dT}{dq}}{dt}\, \partial Q + (r\, \partial P - p\, \partial R)\frac{dT}{dq} \\ & - \frac{d\frac{dT}{dr}}{dt}\, \partial R + (p\, \partial Q - q\, \partial P)\frac{dT}{dr} + U_1\, \partial P + U_2\, \partial Q + U_3\, \partial R \Bigg]. \end{aligned}$$

En égalant à zéro les coefficients de ∂R, ∂P, ∂Q, on a les trois équations

$$\frac{d\frac{dT}{dr}}{dt} - q\frac{dT}{dp} + p\frac{dT}{dq} = U_3,$$

. . . .

Je n'ai pas voulu appliquer immédiatement à la formule (β) les équations de Lagrange, parce que, dP, dQ, dR n'étant pas de véritables différentielles, il était bon de reprendre dans ce cas particulier le raisonnement qui a fourni en général ces équations.

On a ensuite

$$\begin{aligned} \partial U = {} & \frac{dU}{da}\, \partial a + \frac{dU}{db}\, \partial b + \frac{dU}{dc}\, \partial c \\ & + \frac{dU}{da'}\, \partial a' + \frac{dU}{db'}\, \partial b' + \frac{dU}{dc'}\, \partial c' + \frac{dU}{da''}\, \partial a'' + \frac{dU}{db''}\, \partial b'' + \frac{dU}{dc''}\, \partial c'' \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\delta U = & \frac{dU}{da}(b\,\delta R - c\,\delta Q) + \frac{dU}{db}(c\,\delta P - a\,\delta R) + \frac{dU}{dc}(a\,\delta Q - b\,\delta P)\\ & + \frac{dU}{da'}(b'\,\delta R - c'\,\delta Q) + \frac{dU}{db'}(c'\,\delta P - a'\,\delta R) + \frac{dU}{dc'}(a'\,\delta Q - b'\,\delta P)\\ & + \frac{dU}{da''}(b''\,\delta R - c''\,\delta Q) + \frac{dU}{db''}(c''\,\delta P - a''\,\delta R) + \frac{dU}{dc''}(a''\,\delta Q - b''\,\delta P).\end{aligned}$$

Il en résulte

$$U_3 = \frac{dU}{da}\,b + \frac{dU}{da'}\,b' + \frac{dU}{da''}\,b'' - \frac{dU}{db}\,a - \frac{dU}{db'}\,a' - \frac{dU}{db''}\,a'',$$

et, d'après ce que nous avons vu à la fin du n° 12, U_3 représente la somme des moments des forces par rapport à l'axe des z : nous retrouvons donc bien les équations du n° 13.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE ENTIÈREMENT LIBRE.

15. Considérons un corps solide absolument libre; désignons par α, β, γ les coordonnées de son centre de gravité par rapport à trois axes rectangulaires et fixes, et par $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ les composantes de la force accélératrice qui agit sur l'élément dm du corps. Nous savons que les trois équations différentielles du mouvement de ce centre sont

$$m\,\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \int \mathfrak{X}\,dm,$$

$$m\,\frac{d^2\beta}{dt^2} = \int \mathfrak{Y}\,dm,$$

$$m\,\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \int \mathfrak{Z}\,dm.$$

Si l'on désigne ensuite par X, Y, Z les coordonnées rectangles de chaque élément dm, prises par rapport à trois axes parallèles aux premiers et menés par le centre de gravité, on aura ces trois autres équations

$$\int\left(X\frac{d^2Y}{dt^2}-Y\frac{d^2X}{dt^2}\right)dm=\int(X\mathfrak{Y}-Y\mathfrak{X})\,dm,$$

$$\int\left(Y\frac{d^2Z}{dt^2}-Z\frac{d^2Y}{dt^2}\right)dm=\int(Y\mathfrak{Z}-Z\mathfrak{Y})\,dm,$$

$$\int\left(Z\frac{d^2X}{dt^2}-X\frac{d^2Z}{dt^2}\right)dm=\int(Z\mathfrak{X}-X\mathfrak{Z})\,dm.$$

Ces trois équations conviennent également au mouvement d'un corps solide autour d'un de ces points supposé fixe et placé à l'origine des coordonnées X, Y, Z. On a, d'autre part,

$$X=ax+by+cz,$$

$$Y=a'x+b'y+c'z,$$

$$Z=a''x+b''y+c''z,$$

x, y, z étant des coordonnées rectangulaires par rapport à trois axes fixés dans le corps, qui sont donc invariables avec t; ensuite $a, b, c, a', \ldots$ ne dépendent que des angles φ, θ, ψ qui déterminent entièrement la position du corps (n° 2). Ces trois quantités peuvent être déterminées par les trois équations différentielles précédentes, qui sont les mêmes que si le centre de gravité était fixe.

Ainsi le mouvement d'un corps libre, par rapport à trois axes rectangulaires de direction invariable et menés par le centre de gravité, est le même que si ce point était fixe et que toutes les forces qui sollicitent les différents points du corps fussent appliquées de la même manière. Ce mouvement de rotation sera, par conséquent, donné par les formules des nos 12 et 13.

16. Il ne faut pas croire cependant que l'on puisse calculer séparément, du moins en général, le mouvement de translation du centre de gravité et le mouvement de rotation autour de ce centre. En effet, les forces motrices, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, appliquées aux différents points du corps, dépendent des coordonnées de ces points et, par suite, des trois angles φ, θ, ψ; les trois équations du mouvement de translation dépendent donc de ces trois angles. D'un autre côté, les mêmes forces dépendent

des coordonnées ξ, η, ζ des points du corps par rapport aux axes fixes; et comme l'on a

$$\xi = \alpha + X, \quad \eta = \beta + Y, \quad \zeta = \gamma + Z,$$

on voit que les équations du mouvement de rotation dépendent des coordonnées du centre de gravité. Ces deux mouvements sont toutefois indépendants l'un de l'autre dans les deux cas particuliers que nous allons indiquer.

Si le corps mobile n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur, le mouvement de translation du centre de gravité du corps s'effectuera sur une parabole et la résultante de toutes les actions de la pesanteur passant par le centre de gravité, le mouvement de rotation ne sera dû qu'aux impulsions initiales.

Si le corps est une sphère composée de couches concentriques et homogènes dont toutes les parties sont attirées par divers centres en raison inverse du carré de la distance, chacune de ces actions et, par suite, leur résultante passeront par le centre de gravité. Donc ce centre se mouvra comme un point de même masse que le corps, et sollicité par toutes les forces appliquées à ce corps et transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point. Quant au mouvement de rotation, il sera indépendant de ces forces et il ne résultera que des circonstances initiales.

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS PESANT SUSPENDU PAR UN POINT FIXE.

17. Supposons un corps suspendu par un point fixe autour duquel il peut tourner en tout sens. Prenons ce point O pour origine des coordonnées fixes et l'axe des Z de ces coordonnées suivant la verticale qui passe par le point de suspension; puis mettons l'origine des coordonnées mobiles x, y, z au même point et l'axe des z de ces coordonnées suivant la droite OG qui joint le point O au centre de gravité G. Si nous désignons par γ la distance OG, nous aurons

$$\int x\,dm = 0, \quad \int y\,dm = 0, \quad \int z\,dm = m\gamma,$$

$$Z = a''x + b''y + c''z,$$

a'', b'', c'' étant les cosinus de l'axe des Z avec ceux des x, y, z. Nous aurons pour la fonction de forces

$$U = \int g Z\, dm = + g a'' \int x\, dm + g b'' \int y\, dm + g c'' \int z\, dm = + m g \gamma c''.$$

Appliquons les équations du n° 13, en nous rappelant que l'on a en général (n° 12)

$$L = c \frac{dU}{db} + c' \frac{dU}{db'} + c'' \frac{dU}{db''} - b \frac{dU}{dc} - b' \frac{dU}{dc'} - b'' \frac{dU}{dc''},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et nous avons

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d \frac{dT}{dp}}{dt} + q \frac{dT}{dr} - r \frac{dT}{dq} + m g \gamma b'' = 0, \\ &\frac{d \frac{dT}{dq}}{dt} + r \frac{dT}{dp} - p \frac{dT}{dr} - m g \gamma a'' = 0, \\ &\frac{d \frac{dT}{dr}}{dt} + p \frac{dT}{dq} - q \frac{dT}{dp} = 0, \end{aligned} \right.$$

en faisant

$$2T = A p^2 + B q^2 + C r^2 - 2 D q r - 2 E r p - 2 F p q.$$

Nous ne faisons pas $D = E = F = 0$; car nous restreindrions la généralité de la question, en supposant que la droite qui joint le point de suspension au centre de gravité est un axe principal d'inertie.

Multiplions ces trois équations par p, q, r, et nous aurons en ajoutant

$$p d \frac{dT}{dp} + q d \frac{dT}{dq} + r d \frac{dT}{dr} + m g \gamma (b'' p - a'' q)\, dt = 0.$$

Or la troisième des équations (α) du n° 14 nous donne

$$(a) \qquad dc'' = -(b'' p - a'' q)\, dt,$$

et il en résulte

$$p d \frac{dT}{dp} + q d \frac{dT}{dq} + r d \frac{dT}{dr} - m g \gamma\, dc'' = 0,$$

ou en intégrant

$$\text{(B)} \qquad p\frac{dT}{dp} + q\frac{dT}{dq} + r\frac{dT}{dr} - T - mg\gamma c'' = h,$$

h étant une constante arbitraire.

Multiplions les trois mêmes équations par a'', b'', c'', nous aurons

$$a''\,d\frac{dT}{dp} + b''\,d\frac{dT}{dq} + c''\,d\frac{dT}{dr} + \frac{dT}{dp}(b''r - c''q)\,dt$$
$$+ \frac{dT}{dq}(c''p - a''r)\,dt + \frac{dT}{dr}(a''q - b''p)\,dt = 0,$$

et, à cause des deux équations analogues à (a),

$$da'' = -(c''q - b''r)\,dt, \quad db'' = -(a''r - c''p)\,dt,$$

nous avons

$$a''\,d\frac{dT}{dp} + b''\,d\frac{dT}{dq} + c''\,d\frac{dT}{dr} + \frac{dT}{dp}\,da'' + \frac{dT}{dq}\,db'' + \frac{dT}{dr}\,dc'' = 0,$$

et en intégrant

$$\text{(C)} \qquad a''\frac{dT}{dp} + b''\frac{dT}{dq} + c''\frac{dT}{dr} = l,$$

l étant une constante arbitraire.

18. On pourra intégrer complétement les équations du problème dans le cas où la droite qui passe par le centre de suspension et le centre de gravité est un axe principal d'inertie et où les deux moments d'inertie par rapport aux deux axes des x et des y sont égaux. Alors, en effet, on a

$$D = E = F = 0, \quad A = B,$$
$$2T = Ap^2 + Aq^2 + Cr^2,$$

et la troisième des équations (A) devient

$$C\frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad r = \omega,$$

ω étant une constante arbitraire.

Si l'on remplace a'', b'', c'' par leurs valeurs dans les équations (B) et (C), on a

$$A(p^2+q^2)+Cr^2-2mg\gamma\cos\theta=2h,$$
$$A(p\sin\theta\sin\varphi+q\sin\theta\cos\varphi)+C\omega\cos\theta=l.$$

Or des expressions de p, q, r (n° 2) on déduit

$$p\sin\theta\sin\varphi+q\sin\theta\cos\varphi=\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt},$$
$$p^2+q^2=\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$
$$r=\frac{d\varphi}{dt}+\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt},$$

et, en substituant les valeurs des premiers membres des deux premières équations dans les deux précédentes, on a les trois équations

$$A\left[\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]+C\omega^2-2gm\gamma\cos\theta=2h,$$
$$A\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt}+C\omega\cos\theta=l,$$
$$\frac{d\varphi}{dt}+\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}=\omega.$$

On tire de la deuxième

$$d\psi=\frac{l-C\omega\cos\theta}{A\sin^2\theta}\,dt,$$

et en portant cette valeur dans la première

$$dt=\frac{A\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{(2h-C\omega^2+2gm\gamma\cos\theta)A\sin^2\theta-(l-C\omega\cos\theta)^2}};$$

puis on aura

$$d\psi=\frac{(l-C\omega\cos\theta)\,d\theta}{\sin\theta\sqrt{(2h-C\omega^2+2gm\gamma\cos\theta)A\sin^2\theta-(l-C\omega\cos\theta)^2}},$$
$$d\varphi=\frac{[A\omega-l\cos\theta+(C-A)\,\omega\cos^2\theta]\,d\theta}{\sin\theta\sqrt{(2h-C\omega^2+2gm\gamma\cos\theta)A\sin^2\theta-(l-C\omega\cos\theta)^2}},$$

et le problème est ainsi ramené à des quadratures.

FORMULES POUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS PESANT DE RÉVOLUTION ET SUSPENDU PAR UN POINT DE SON AXE.

19. Nous allons des formules précédentes tirer θ, ψ et φ en fonction de t. Si nous désignons par z la distance du centre de gravité au plan horizontal qui passe par le point de suspension, nous aurons

$$z = \gamma \cos\theta,$$

$$dt = \frac{A\,dz}{\sqrt{(2h - C\omega^2 + 2gmz)A(\gamma^2 - z^2) - (\gamma l - C\omega z)^2}}.$$

Désignons par z_0 la valeur initiale de z, et posons l'équation en z,

$$(a) \qquad A(2h - C\omega^2 + 2gmz)(\gamma^2 - z^2) - (\gamma l - C\omega z)^2 = 0;$$

si l'on fait $z = z_0$ dans le premier membre, il sera positif, parce que dt est réel. Si donc on fait dans le premier membre de cette équation successivement

$$z = \gamma, \quad z = z_0, \quad z = -\gamma, \quad z = -\infty,$$

on obtient respectivement les signes

$$- \qquad + \qquad - \qquad +$$

et l'on en conclut que les trois racines de l'équation sont réelles : une comprise entre γ et z_0, la seconde entre z_0 et $-\gamma$ et la troisième au delà de $-\gamma$. Désignons ces trois racines respectivement par a, b, $-c$. La valeur de dt étant réelle, z ne pourra varier qu'entre a et b, et l'expression de $t + \tau$ deviendra

$$t + \tau = \sqrt{\frac{A}{2mg}} \int_a^z \frac{-dz}{\sqrt{(a - z)(z - b)(c + z)}},$$

en prenant pour limite inférieure la plus grande valeur de z et désignant par τ une constante arbitraire. On obtient ainsi une formule toute semblable à celle que nous avons obtenue pour le pendule simple (Section III, n° 10).

z étant compris entre a et b, on peut poser

$$z = a\cos^2\sigma + b\sin^2\sigma;$$

si de plus on fait

$$k = \sqrt{\frac{a-b}{a+c}}, \quad \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}} = u, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}} = \mathrm{K},$$

on a $\operatorname{am} u = \sigma$, et l'on trouve

$$t + \tau = \sqrt{\frac{2\mathrm{A}}{mg(a+c)}}\, u.$$

Si l'on désigne par T le temps qui s'écoule quand z varie depuis a jusqu'à b, on en déduit

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{2\mathrm{A}}{mg(a+c)}}\,\mathrm{K}$$

et, en divisant ces deux égalités entre elles,

$$u = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{T}}(t+\tau).$$

Il en résulte donc pour z

$$z = a\cos^2\operatorname{am}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{T}}(t+\tau) + b\sin^2\operatorname{am}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{T}}(t+\tau).$$

20. Calculons ensuite l'angle ψ. Nous avons l'équation du n° 18

$$\mathrm{A}\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} = l - \mathrm{C}\omega\cos\theta,$$

qui peut s'écrire

$$\mathrm{A}(\gamma^2 - z^2)\frac{d\psi}{dt} = l\gamma^2 - \mathrm{C}\omega\gamma z,$$

et, d'après la valeur de dt,

$$d\psi = \frac{2\gamma}{\sqrt{(a+c)\,2mg\mathrm{A}}}\,\frac{l\gamma - \mathrm{C}\omega z}{\gamma^2 - z^2}\,du.$$

Comme on a

$$z = a - (a-b)\sin^2\sigma,$$

il en résulte

$$\frac{l\gamma - C\omega z}{\gamma^2 - z^2} = \frac{l\gamma - C\omega a + C\omega(a-b)\sin^2\sigma}{[\gamma - a + (a-b)\sin^2\sigma][\gamma + a - (a-b)\sin^2\sigma]},$$

et si l'on pose d'après cela

$$\frac{l\gamma - C\omega z}{\gamma^2 - z^2} = M + \frac{N\sin^2\sigma}{\gamma - a + (a-b)\sin^2\sigma} + \frac{P\sin^2\sigma}{\gamma + a - (a-b)\sin^2\sigma},$$

on aura

$$M = \frac{l\gamma - C\omega a}{\gamma^2 - a^2}, \quad N = \frac{(C\omega - l)(a-b)}{2(\gamma - a)}, \quad P = \frac{(C\omega + l)(a-b)}{2(\gamma + a)}.$$

On aura donc, en désignant par E une constante arbitraire,

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} \psi - E = {} & \frac{2\gamma}{\sqrt{2mgA(a+c)}} Mu + \frac{\gamma(C\omega - l)(a-b)}{(\gamma-a)^2\sqrt{2mgA(a+c)}}\int_0^u \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u\, du}{1 + \dfrac{a-b}{\gamma-a}\sin^2\mathrm{am}\, u} \\ & + \frac{\gamma(C\omega + l)(a-b)}{(\gamma+a)^2\sqrt{2mgA(a+c)}}\int_0^u \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u\, du}{1 - \dfrac{a-b}{\gamma+a}\sin^2\mathrm{am}\, u}. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$\frac{a-b}{\gamma+a} = k^2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha, \quad \text{d'où} \quad \sin^2\mathrm{am}\,\alpha = \frac{a+c}{\gamma+a},$$

et prenons, en faisant $i = \sqrt{-1}$,

$$\sin\mathrm{am}\,\alpha = \sqrt{\frac{a+c}{\gamma+a}}, \quad \cos\mathrm{am}\,\alpha = -i\sqrt{\frac{c-\gamma}{\gamma+a}}, \quad \Delta\mathrm{am}\,\alpha = \sqrt{\frac{\gamma+b}{\gamma+a}},$$

il en résultera, comme au n° 11 de la Section III,

$$\begin{aligned} \int_0^u \frac{\sin^2\mathrm{am}\, u\, du}{1 - \dfrac{a-b}{\gamma+a}\sin^2\mathrm{am}\, u} &= \frac{1}{k^2 \sin\mathrm{am}\,\alpha\cos\mathrm{am}\,\alpha\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha}\,\Pi(u,\alpha) \\ &= \frac{i(\gamma+a)^2\sqrt{a+c}}{(a-b)\sqrt{(\gamma+a)(\gamma+b)(c-\gamma)}}\,\Pi(u,\alpha). \end{aligned}$$

Or a, b, $-c$ étant racines de l'équation (a), on a

$$(c)\quad A(2h - C\omega^2 + 2mgz)(\gamma^2 - z^2) - (\gamma l - C\omega z)^2 = 2mg(a-z)(z-b)(z+c)A,$$

et, en faisant $z = -\gamma$ dans cette identité, on obtient

$$-\gamma^2(l+C\omega)^2 = 2mgA(a+\gamma)(\gamma+b)(\gamma-c),$$

$$\sqrt{(\gamma+a)(\gamma+b)(c-\gamma)} = \frac{\gamma(l+C\omega)}{\sqrt{2mgA}}.$$

On trouve ainsi que le troisième terme de l'expression de $\psi - E$ se réduit à

$$i\Pi(u, \alpha).$$

Posons ensuite

$$\frac{a-b}{\gamma-a} = -k^2 \sin^2\mathrm{am}\,\beta, \quad \text{d'où} \quad \sin^2\mathrm{am}\,\beta = \frac{a+c}{-\gamma+a},$$

et prenons

$$\sin\mathrm{am}\,\beta = i\sqrt{\frac{a+c}{\gamma-a}}, \quad \cos\mathrm{am}\,\beta = \sqrt{\frac{\gamma+c}{\gamma-a}}, \quad \Delta\mathrm{am}\,\beta = \sqrt{\frac{\gamma-b}{\gamma-a}};$$

il en résultera

$$\int_0^u \frac{\sin^2\mathrm{am}\,u\,du}{1+\dfrac{a-b}{\gamma-a}\sin^2\mathrm{am}\,u} = \frac{-i(\gamma-a)^2\sqrt{a+c}}{(a-b)\sqrt{(\gamma-a)(\gamma-b)(\gamma+c)}},$$

et, en faisant $z = \gamma$ dans (c), nous obtenons

$$\sqrt{(\gamma-a)(\gamma-b)(\gamma+c)} = \frac{\gamma(l-C\omega)}{\sqrt{2mgA}};$$

on trouve donc, pour le deuxième terme du second membre de (b),

$$-i\Pi(u, \beta).$$

Il en résulte

$$(d) \qquad \psi - E = \frac{2\gamma}{\sqrt{2mgA(a+c)}}Mu + i[\Pi(u,\alpha) - \Pi(u,\beta)].$$

Si l'on pose, en faisant $i = \sqrt{-1}$,

$$\alpha = i\varepsilon + K, \quad \beta = i\eta,$$

ε et η seront réels. Faisons

$$L = \frac{2\gamma}{\sqrt{(a+c)\,2mgA}} M + \left[\frac{d\log\Theta(i\varepsilon+K)}{d\varepsilon} - \frac{d\log\Theta(i\eta)}{d\eta}\right],$$

$$\Phi = \frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u-i\varepsilon-K)\,\Theta(u+i\eta)}{\Theta(u+i\varepsilon+K)\,\Theta(u-i\eta)},$$

et nous aurons

$$\psi - E = L\frac{K}{T}(t+\tau) + \Phi.$$

Les valeurs obtenues pour z et ψ sont entièrement semblables à celles des mêmes quantités que nous avons trouvées pour le pendule simple (Section III, n^{os} **10**, **11**).

21. Calculons ensuite l'angle φ au moyen de la formule

$$d\varphi = \omega\,dt - \cos\theta\,d\psi.$$

On a

$$\cos\theta = \frac{z}{\gamma} = \frac{a}{\gamma} - \frac{a-b}{\gamma}\sin^2\sigma;$$

d'après le numéro précédent, on a aussi

$$d\psi = \frac{2\gamma}{\sqrt{(a+c)\,2gmA}}\,\frac{l\gamma - C\omega a + C\omega(a-b)\sin^2\sigma}{[\gamma-a+(a-b)\sin^2\sigma]\,[\gamma+a-(a-b)\sin^2\sigma]}\,du,$$

et il en résulte

$$\cos\theta\,d\psi = \frac{2}{\sqrt{(a+c)\,2gmA}}\left[C\omega - \gamma\frac{C\omega\gamma - al + l(a-b)\sin^2\sigma}{[\gamma-a+(a-b)\sin^2\sigma]\,[\gamma+a-(a-b)\sin^2\sigma]}\right]du.$$

Si nous posons

$$\begin{aligned}&\frac{C\omega\gamma - al + l(a-b)\sin^2\sigma}{[\gamma-a+(a-b)\sin^2\sigma]\,[\gamma+a-(a-b)\sin^2\sigma]}\\ &\qquad = M' + \frac{N'\sin^2\sigma}{\gamma-a+(a-b)\sin^2\sigma} + \frac{P'\sin^2\sigma}{\gamma+a-(a-b)\sin^2\sigma},\end{aligned}$$

il est aisé de voir que M′, N′, P′ se déduisent des valeurs de M, N, P du numéro précédent en permutant l et $C\omega$, ce qui donne

$$M' = \frac{C\omega\gamma - la}{\gamma^2 - a^2}, \quad N' = \frac{-(C\omega - l)(a-b)}{2(\gamma - a)} = -N, \quad P' = \frac{(C\omega + l)(a-b)}{2(\gamma + a)} = P.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\cos\theta\, d\psi = & \frac{2}{\sqrt{(a+c)\,2gmA}}(C\omega - \gamma M')\,du \\ & + \frac{2\gamma}{\sqrt{(a+c)\,2gmA}}\left[\frac{N\sin^2\sigma}{\gamma - a + (a-b)\sin^2\sigma} + \frac{P\sin^2\sigma}{\gamma + a - (a-b)\sin^2\sigma}\right]du,\end{aligned}$$

et, par suite, en désignant par G une constante arbitraire, on trouve

$$\varphi - G = \frac{2}{\sqrt{(a+c)\,2gmA}}[(A-C)\omega + \gamma M']\,u + i[\Pi(u,\alpha) + \Pi(u,\beta)].$$

Faisons

$$L' = \frac{2}{\sqrt{(a+c)\,2gmA}}[(A-C)\omega + \gamma M'] + \left[\frac{d\log\Theta(i\varepsilon + K)}{d\varepsilon} + \frac{d\log\Theta(i\eta)}{d\eta}\right],$$

$$\Phi' = \frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u - i\varepsilon - K)\,\Theta(u - i\eta)}{\Theta(u + i\varepsilon + K)\,\Theta(u + i\eta)},$$

et nous aurons

$$\varphi - G = \frac{L'K}{T}(t + \tau) + \Phi'.$$

D'après cela, pour nous représenter le mouvement du corps, concevons d'abord le mouvement donné par les formules

$$z = a\cos^2 \mathrm{am}\, u + b\sin^2 \mathrm{am}\, u, \quad \psi = E + \Phi, \quad \varphi = G + \Phi';$$

le corps reprendra périodiquement le même mouvement par rapport aux axes fixes de coordonnées, et la période de ce mouvement sera

$$2T = 4\sqrt{\frac{A}{2mg(a+c)}}\,K.$$

Supposons ensuite que les axes des X, Y tracés dans le plan horizontal qui passe par le point de suspension tournent dans ce plan avec une vitesse angulaire constante et égale à $\frac{LK}{T}$, et que le corps tourne autour de son axe de révolution avec une autre vitesse angulaire constante égale à $\frac{L'K}{T}$. L'ensemble de ces mouvements donnera le mouvement total du corps pesant.

22. *Remarques relatives au cas où le corps a un mouvement très-rapide de rotation autour de son axe de révolution.* — Supposons que la vitesse de rotation ω soit très-grande, et revenons aux formules du n° **18**; alors, dans l'équation

$$A(p^2+q^2)+C\omega^2-2mg\gamma\cos\theta=2h,$$

il n'y aura de très-grand au premier membre que $C\omega^2$; donc $2h-C\omega^2$ ne sera pas très-grand; d'autre part, l'équation

$$A\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}+C\omega\cos\theta=l$$

montre que l est très-grand. Donc, pour que le radical

$$\sqrt{(2h-C\omega^2+2mg\gamma\cos\theta)A\sin^2\theta-(l-C\omega\cos\theta)^2},$$

qui entre dans l'expression de dt soit réel, il faut que $(l-C\omega\cos\theta)^2$ soit très-petit par rapport à l et $C\omega$; donc on aura toujours à très-peu près

$$\cos\theta=\frac{l}{C\omega},$$

et l'angle θ sera à très-peu près constant.

θ et, par suite, la coordonnée z du centre de gravité variant très-peu, $a-b$ est très-petit, et la formule (b) du n° **20**, qui peut s'écrire

$$\psi-E=\frac{2\gamma}{\sqrt{(a+c)2mgA}}Mu+(a-b)S,$$

S étant du même ordre de grandeur que M, montre que ψ croîtra à très-peu près proportionnellement à t. Enfin de la formule

$$\varphi=\omega t-\int\cos\theta\,d\psi,$$

on tire à très-peu près

$$\varphi=\omega t-\frac{l}{C\omega}\psi.$$

Petites oscillations d'un pendule de révolution.

23. La formule qui donne la durée des oscillations du pendule, c'est-à-dire le temps que met son centre de gravité pour revenir au point le plus haut ou au point le plus bas est

$$2T = 4\sqrt{\frac{A}{2mg(a+c)}}\,K.$$

Si l'on pose

$$a = \gamma \cos f, \quad b = \gamma \cos f_1,$$

f et f_1 seront très-petits; et, d'après le calcul du n° 12 de la Section III, on a

$$2T = \pi\sqrt{\frac{A}{mg\gamma}}\left(1 + \frac{f^2 + f_1^2}{16}\right).$$

24. Calculons l'angle dont tourne le plan vertical du pendule dans une demi-oscillation, en supposant le pendule très-allongé, en sorte que le moment d'inertie C soit très-petit en comparaison de A. Nous avons à faire un calcul tout semblable à celui du n° 13 de la Section citée.

Nous avons

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{l - C\omega\cos\theta}{A(1 - \cos^2\theta)}$$

ou

$$d\psi = \frac{2}{\sqrt{2mgA(a+c)}}\,\frac{l - C\omega\cos\theta}{1 - \cos^2\theta}\,\frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\sigma}},$$

$$d\psi = \frac{1}{\sqrt{2mgA(a+c)}}\left(\frac{l + C\omega}{1 + \cos\theta} + \frac{l - C\omega}{1 - \cos\theta}\right)\frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\sigma}}.$$

$\gamma\cos f$ et $\gamma\cos f_1$ sont racines de l'équation en z

$$(\gamma l - C\omega z)^2 = A(2h - C\omega^2 + 2mgz)(\gamma^2 - z^2);$$

nous avons donc

$$(l - C\omega\cos f)^2 = (2h - C\omega^2 + 2mg\gamma\cos f)\,A\sin^2 f,$$
$$(l - C\omega\cos f_1)^2 = (2h - C\omega^2 + 2mg\gamma\cos f_1)\,A\sin^2 f_1,$$

et, par suite, en éliminant h,

$$(l - C\omega\cos f)^2\sin^2 f_1 - (l - C\omega\cos f_1)^2\sin^2 f = 2mgA\gamma\sin^2 f\sin^2 f_1(\cos f - \cos f_1).$$

Cette équation peut s'écrire

$$\left(l - C\omega + C\omega\frac{f^2}{2}\right)^2\sin^2 f_1 - \left(l - C\omega + C\omega\frac{f_1^2}{2}\right)^2\sin^2 f$$
$$= 2mgA\gamma\sin^2 f\sin^2 f_1(\cos f - \cos f_1);$$

on en conclut facilement que $l - C\omega$ est une quantité du second ordre, et, en négligeant les termes du huitième ordre et regardant C comme du second ordre par rapport à A, on a

$$(l - C\omega)^2 = 2mgA\gamma\frac{\sin^2 f\sin^2 f_1}{\cos f + \cos f_1} = mgA\gamma f^2 f_1^2\left(1 - \frac{f^2 + f_1^2}{12}\right);$$

on en conclut

$$l - C\omega = \sqrt{mgA\gamma}\, ff_1\left(1 - \frac{f^2 + f_1^2}{24}\right),$$

en négligeant les quantités du sixième ordre.

On obtient pour la première partie de $d\psi$, en négligeant ce qui est du quatrième ordre,

$$\left(\frac{ff_1}{4} + \frac{C\omega}{2\sqrt{mg\gamma A}}\right)d\sigma,$$

et en l'intégrant de zéro à $\frac{\pi}{2}$,

$$(e) \qquad \left(\frac{ff_1}{8} + \frac{C\omega}{4\sqrt{mg\gamma A}}\right)\pi.$$

On a ensuite, d'après le calcul du n° **13** de la Section III,

$$\frac{l - C\omega}{\sqrt{2mgA(a+c)}} = \frac{ff_1}{2}\left(1 + \frac{2f^2 - f_1^2}{24}\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \cos\theta}\frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\sigma}} = \frac{\pi}{ff_1}\left(1 + \frac{ff_1}{8} - \frac{2f^2 - f_1^2}{24}\right);$$

donc l'intégrale du second terme de $d\psi$ est

$$(f) \qquad \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{ff_1}{8}\right).$$

Ajoutons (e) et (f), et nous aurons

$$\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3\,ff_1}{8}+\frac{C\omega}{2\sqrt{mg\gamma A}}\right),$$

pour l'angle dont tourne le plan vertical du pendule dans le temps T.

DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE PESANT QUI S'APPUIE SUR UN PLAN.

25. Supposons un corps solide convexe qui ne puisse toucher un plan qu'en un seul point; ce corps, placé sur le plan, est sollicité par la pesanteur et par la réaction N provenant du plan, et que nous supposons normale à ce plan, en négligeant le frottement.

Désignons par C le point de contact du corps avec la surface du plan et par G son centre de gravité. Représentons par λ, μ, ν les angles de la réaction N avec trois axes fixes de coordonnées rectangulaires OX, OY, OZ, dont le dernier est vertical et mené de bas en haut; enfin, soient α, β, γ les coordonnées du centre de gravité : nous aurons, pour les équations de ce centre,

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} M\frac{d^2\alpha}{dt^2} &= N\cos\lambda,\\ M\frac{d^2\beta}{dt^2} &= N\cos\mu,\\ M\frac{d^2\gamma}{dt^2} &= N\cos\nu - Mg,\end{aligned}\right.$$

M étant la masse du corps et g l'accélération due à la pesanteur.

Établissons ensuite les équations du mouvement de rotation autour du point G; la résultante des actions de la pesanteur passe par ce point : elle est donc sans influence sur ce mouvement (n° 15). Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées du point de contact C, par rapport aux axes principaux d'inertie $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ qui passent par G, et par λ', μ', ν' les angles de N avec ces axes principaux. Nous aurons les trois équations suivantes (n° 13) :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr=N(\eta\cos\nu'-\zeta\cos\mu'),\\ &B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp=N(\zeta\cos\lambda'-\xi\cos\nu'),\\ &C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq=N(\xi\cos\mu'-\eta\cos\lambda').\end{aligned}\right.$$

Nous avons ensuite les équations (n° 2)

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} p\,dt&=\sin\varphi\sin\theta\,d\psi+\cos\varphi\,d\theta,\\ q\,dt&=\cos\varphi\sin\theta\,d\psi-\sin\varphi\,d\theta,\\ r\,dt&=d\varphi+\cos\theta\,d\psi.\end{aligned}\right.$$

Les équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\lambda'&=a\cos\lambda+a'\cos\mu+a''\cos\nu,\\ \cos\mu'&=b\cos\lambda+b'\cos\mu+b''\cos\nu,\\ \cos\nu'&=c\cos\lambda+c'\cos\mu+c''\cos\nu\end{aligned}\right.$$

déterminent λ', μ', ν' au moyen des quantités constantes λ, μ, ν et des neuf cosinus a, b, c, ... ou des angles φ, θ, ψ.

Soit

$$(5)\qquad F(\xi,\eta,\zeta)=0$$

l'équation de la surface convexe du mobile rapportée aux trois axes principaux $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$; on aura ces trois équations qui se réduisent à deux

$$(6)\qquad \cos\lambda'=\frac{1}{V}\frac{dF}{d\xi},\quad \cos\mu'=\frac{1}{V}\frac{dF}{d\eta},\quad \cos\nu'=\frac{1}{V}\frac{dF}{d\zeta},$$

avec

$$V=\sqrt{\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2+\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2},$$

le signe du radical devant être pris de manière que la direction de N soit menée vers l'intérieur de la surface.

L'équation du plan sur lequel repose le corps sera

$$x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu=\delta,$$

δ étant une quantité constante et donnée. Cherchons l'équation de ce plan par rapport aux axes principaux; nous avons

$$\begin{aligned} x &= \alpha + a\xi + b\eta + c\zeta, \\ y &= \beta + a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z &= \gamma + a''\xi + b''\eta + c''\zeta, \end{aligned}$$

et l'on en déduit que le point (ξ, η, ζ) situé sur ce plan satisfait à l'équation

$$(7) \qquad \xi\cos\lambda' + \eta\cos\mu' + \zeta\cos\nu' + \alpha\cos\lambda + \beta\cos\mu + \gamma\cos\nu = \delta.$$

Si le corps est terminé par une pointe comme une toupie et que cette pointe soit constamment sur le plan donné, le point (ξ, η, ζ) sera toujours le même point du corps et ξ, η, ζ seront constants et connus; mais les équations (6) n'auront plus lieu.

Nous avons donc, en général, seize équations pour déterminer les seize quantités N, α, β, γ, p, q, r, φ, θ, ψ, λ', μ', ν', ξ, η, ζ. Mais dans le cas où le corps repose sur une pointe, ξ, η, ζ ne sont plus des inconnues, et l'on a en moins les équations (5) et (6) qui se réduisent à trois.

26. Supposons que le plan, sur lequel repose le corps, soit horizontal, et prenons-le pour plan des x, y; nous aurons

$$\cos\lambda = 0, \quad \cos\mu = 0, \quad \cos\nu = 1,$$

et, par suite,

$$\cos\lambda' = a'', \quad \cos\mu' = b'', \quad \cos\nu' = c''.$$

D'après les équations (1) le mouvement horizontal de G est rectiligne et uniforme; la troisième donne

$$N = M\left(\frac{d^2\gamma}{dt^2} + g\right).$$

On a donc, au lieu des équations (2),

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr &= M\left(\frac{d^2\gamma}{dt^2} + g\right)(\eta c'' - \zeta b''), \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp &= M\left(\frac{d^2\gamma}{dt^2} + g\right)(\zeta a'' - \xi c''), \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq &= M\left(\frac{d^2\gamma}{dt^2} + g\right)(\xi b'' - \eta a''), \end{aligned} \right.$$

et, au lieu de (7),

$$(b) \qquad \gamma + a''\xi + b''\eta + c''\zeta = 0.$$

A ces équations on joindra les équations (3) et, dans le cas où le point de contact C varie à la surface du corps, les équations (5) et (6).

On peut obtenir deux intégrales des équations précédentes, comme au n° **17**.

Multiplions les équations (a) par a'', b'', c'' et ajoutons-les ; simplifions l'équation obtenue et intégrons, nous aurons

$$(c) \qquad \mathrm{A}a''p + \mathrm{B}b''q + \mathrm{C}c''r = l,$$

l étant une constante arbitraire. En second lieu, multiplions ces équations par p, q, r et ajoutons ; nous aurons

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}p\,dp + \mathrm{B}q\,dq + \mathrm{C}r\,dr \\ &\quad = \left(\mathrm{M}\frac{d^2\gamma}{dt^2} + g\right)[\xi(b''r - c''q) + \eta(c''p - a''r) + \gamma(a''q - b''p)]\,dt, \end{aligned}$$

$$\mathrm{A}p\,dp + \mathrm{B}q\,dq + \mathrm{C}r\,dr = \left(\mathrm{M}\frac{d^2\gamma}{dt^2} + g\right)(\xi\,da'' + \eta\,db'' + \zeta\,dc'').$$

En différentiant (b), on a

$$d\gamma + \xi\,da'' + \eta\,db'' + \zeta\,dc'' = -(a''\,d\xi + b''\,d\eta + c''\,d\zeta);$$

or le second membre est nul si ξ, η, ζ sont constants ; il l'est aussi si le point C est variable sur la surface ; car on aura

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\xi}\,d\xi + \frac{d\mathrm{F}}{d\eta}\,d\eta + \frac{d\mathrm{F}}{d\zeta}\,d\zeta = 0,$$

et, par suite, en vertu des équations (6),

$$a''\,d\xi + b''\,d\eta + c''\,d\zeta = 0;$$

on a donc

$$\xi\,da'' + \eta\,db'' + \zeta\,dc'' = -\,d\gamma,$$

et il en résulte

$$\mathrm{A}p\,dp + \mathrm{B}q\,dq + \mathrm{C}r\,dr + \mathrm{M}\left(\frac{d^2\gamma}{dt^2} + g\right)d\gamma = 0,$$

puis en intégrant, on a

$$(d)\qquad A p^2 + B q^2 + C r^2 + M\left[\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 + 2g\gamma\right] = h,$$

h étant une constante arbitraire.

27. *Mouvement d'un solide de révolution terminé par une pointe qui s'appuie sur un plan horizontal.* — Ce mouvement est celui de la toupie; la pointe (ξ, η, ζ) étant sur l'axe principal d'inertie $G\zeta$, on a

$$B = A, \quad \xi = 0, \quad \eta = 0,$$

et ζ est constant. L'équation (b) devient, puisque $c'' = \cos\theta$,

$$\gamma = -\zeta\cos\theta.$$

La troisième équation (a) donne

$$r = \omega,$$

ω étant une constante arbitraire.

Des équations (3) on déduit

$$a'' p + b'' q = \sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt},$$

$$p^2 + q^2 = \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

et il en résulte pour les deux intégrales (c) et (d),

$$(e)\qquad A\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} + C\omega\cos\theta = l,$$

$$(f)\qquad A\left[\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + M\left[\zeta^2\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2g\zeta\cos\theta\right] = h',$$

h' étant une constante égale à $h - C\omega^2$. A ces deux équations il faut joindre la troisième équation (3),

$$(g)\qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega - \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}.$$

Ces trois formules permettent d'obtenir t, ψ, φ en fonction de θ à l'aide de quadratures; on pourrait encore, comme aux n$^{\text{os}}$ 19, 20 et 21, exprimer θ, ψ, φ en fonction de t par l'emploi des fonctions elliptiques.

De l'équation (e) on déduit

$$d\psi = \frac{l - C\omega\cos\theta}{A\sin^2\theta}\,dt,$$

et en substituant dans l'équation (f), on obtient

$$dt = \frac{\sqrt{A}\sin\theta\sqrt{A + M\zeta^2\sin^2\theta}}{\sqrt{(h' + 2Mg\zeta\cos\theta)A\sin^2\theta - (l - C\omega\cos\theta)^2}}.$$

Si ω est très-grand, l le sera aussi, et comme la quantité

$$(h' + 2Mg\zeta\cos\theta)A\sin^2\theta$$

n'est pas très-grande, il faut, pour que dt soit réel, que l'on ait à très-peu près

$$\cos\theta = \frac{l}{C\omega};$$

donc, si l'on a donné à la toupie une vitesse très-grande autour de son axe, et que le frottement de sa pointe sur le plan soit négligeable, l'inclinaison de l'axe de la toupie sur la verticale variera très-peu.

28. *Mouvement d'un corps pesant de révolution roulant sur un plan horizontal.* — On a $B = A$, et, comme la réaction normale N rencontre l'axe de révolution, on a $\xi b'' - \eta a'' = 0$; donc on a

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad r = \omega,$$

ω étant constant.

Exprimons γ en fonction de θ; soit

$$(h) \qquad F(\zeta, \rho) = 0$$

l'équation du méridien, ζ étant la distance de chaque point au plan des ξ, η, et ρ le rayon du parallèle.

Par le point de contact C et l'axe de révolution, faisons passer un plan qui coupe la surface suivant un méridien et le plan suivant une tangente à ce méridien; désignons par u l'angle que fait cette tangente avec le plan du parallèle qui passe par le point C : nous aurons

$$\tang u = -\frac{dF}{d\rho} : \frac{dF}{d\zeta};$$

or on a $\theta = \pi - u$; on a donc

$$(i) \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{dF}{d\rho} : \frac{dF}{d\zeta}.$$

Des deux équations (h) et (i) on pourra tirer ζ et ρ en fonction de θ. On reconnaît facilement que l'on a

$$\gamma = -\zeta\cos\theta + \rho\sin\theta,$$

de sorte que γ peut aussi être considéré comme une fonction connue de θ, $f(\theta)$.

On obtient, comme dans le problème de la toupie, les équations (e) et (g), et de la formule (d) on déduit la troisième équation

$$\mathrm{A}\left[\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \mathrm{M}\left[\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2gf(\theta)\right] = h',$$

en faisant $h' = h - \mathrm{C}\omega^2$.

On pourra, comme dans le problème précédent, au moyen de ces trois équations, obtenir t, ψ, φ en fonction de θ par des quadratures; mais on ne pourra plus calculer θ, φ, ψ en fonction de t au moyen des fonctions elliptiques.

SECTION V.

SUR LA THÉORIE DES MOUVEMENTS RELATIFS.

---

1. On peut calculer les mouvements relatifs comme des mouvements absolus, en ajoutant aux forces appliquées aux points du système des forces fictives auxquelles on donne le nom de *forces d'entraînement* et de *forces centrifuges composées*. Mais, si l'on déduit immédiatement de cette manière les équations différentielles du mouvement, non-seulement on est obligé à des considérations géométriques assez compliquées, mais on obtient des équations beaucoup plus difficiles à traiter que celles qui se déduisent de la méthode suivante.

MOUVEMENT RELATIF D'UN SYSTÈME LIBRE.

2. Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées rectangulaires mobiles dont on suppose le mouvement donné et auxquels on rapporte le mouvement d'un système de points libres. Désignons par l, n, s les projections sur ces axes de l'accélération d'un point de ce système dont la masse est m et les coordonnées x, y, z, et soit U la fonction de forces. Nous aurons

$$ml = \frac{dU}{dx_1}, \quad mn = \frac{dU}{dy_1}, \quad ms = \frac{dU}{dz_1},$$

en désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de m estimées par rapport aux axes Ox, Oy, Oz supposés fixes pendant tout l'instant dt, et il est aisé de voir que l'on a $\frac{dU}{dx_1} = \frac{dU}{dx}$, mais qu'au contraire l, qui est égal à $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, n'est pas égal à $\frac{d^2x}{dt^2}$; nous avons donc

$$(1)\qquad ml = \frac{dU}{dx}, \quad mn = \frac{dU}{dy}, \quad ms = \frac{dU}{dz}.$$

Soient ensuite O′X, O′Y, O′Z trois axes fixes de coordonnées rectangulaires, X, Y, Z et X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées de m et de l'origine O par rapport à ces axes; on a les formules de transformation de coordonnées suivantes :

$$(2)\qquad \begin{cases} X = X_0 + ax + by + cz, \\ Y = Y_0 + a'x + b'y + c'z, \\ Z = Z_0 + a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

a, b, c étant les cosinus des angles de O′X avec Ox, Oy, Oz, etc.

En différentiant ces équations, on a

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dX_0}{dt} + x\dfrac{da}{dt} + y\dfrac{db}{dt} + z\dfrac{dc}{dt} + a\dfrac{dx}{dt} + b\dfrac{dy}{dt} + c\dfrac{dz}{dt}, \\ \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{dY_0}{dt} + x\dfrac{da'}{dt} + \ldots, \\ \dfrac{dZ}{dt} = \dfrac{dZ_0}{dt} + x\dfrac{da''}{dt} + \ldots. \end{cases}$$

Désignons par u, v, w et u_0, v_0, w_0 les composantes de la vitesse absolue du point m et de celle du point O par rapport aux axes mobiles, nous aurons

$$(4)\qquad \begin{cases} u = a\dfrac{dX}{dt} + a'\dfrac{dY}{dt} + a''\dfrac{dZ}{dt}, \\ v = b\dfrac{dX}{dt} + b'\dfrac{dY}{dt} + b''\dfrac{dZ}{dt}, \\ w = c\dfrac{dX}{dt} + c'\dfrac{dY}{dt} + c''\dfrac{dZ}{dt}, \end{cases}$$

et de même

$$u_0 = a\frac{dX_0}{dt} + a'\frac{dY_0}{dt} + a''\frac{dZ_0}{dt}, \quad \text{etc.}$$

Substituons les expressions (3) dans les formules (4), et, en posant

$$\begin{gathered} c\,db + c'\,db' + c''\,db'' = p\,dt, \\ a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' = q\,dt, \\ b\,da + b'\,da' + b''\,da'' = r\,dt, \end{gathered}$$

p, q, r seront les composantes de la vitesse de rotation du système d'axes Ox, Oy, Oz autour de chacun de ces axes, et nous aurons

$$(5)\quad \begin{cases} u - u_0 = \dfrac{dx}{dt} + qz - ry, \\ v - v_0 = \dfrac{dy}{dt} + rx - pz, \\ w - w_0 = \dfrac{dz}{dt} + py - qx. \end{cases}$$

Désignons par ξ, η, ζ ces expressions, et posons

$$\xi = \frac{dx}{dt} + qz - ry,$$

$$\eta = \frac{dy}{dt} + rx - pz,$$

$$\zeta = \frac{dz}{dt} + py - qx;$$

puis tirons $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ de ces trois équations pour les porter dans les équations (3); en remarquant que l'on a (Section IV, n° 14)

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \quad \frac{db}{dt} = cp - ar, \quad \frac{dc}{dt} = aq - bp,$$

nous obtiendrons

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dX_0}{dt} + a\xi + b\eta + c\zeta, \\ \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{dY_0}{dt} + a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ \dfrac{dZ}{dt} = \dfrac{dZ_0}{dt} + a''\xi + b''\eta + c''\zeta. \end{cases}$$

Désignons par l_0, n_0, s_0 les composantes de l'accélération de l'origine O par rapport à Ox, Oy, Oz. Les quantités $l - l_0$, $n - n_0$, $s - s_0$ relatives au point m se composent au moyen de $u - u_0 = \xi$, $v - v_0 = \eta$, $w - w_0 = \zeta$, comme $u - u_0$, $v - v_0$, $w - w_0$ se composent au moyen de x, y, z, et l'on a ainsi les équations suivantes, analogues aux formules (5)

$$l - l_0 = \frac{d\xi}{dt} + q\zeta - r\eta,$$

$$n - n_0 = \frac{d\eta}{dt} + r\xi - p\zeta,$$

$$s - s_0 = \frac{d\zeta}{dt} + p\eta - q\xi.$$

En ayant donc égard aux équations (1), nous aurons

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} m\dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dx} - ml_0 - m(q\zeta - r\eta), \\ m\dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dy} - mn_0 - m(r\xi - p\zeta), \\ m\dfrac{d\zeta}{dt} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dz} - ms_0 - m(p\eta - q\xi); \end{cases}$$

joignons-y les équations

$$(\mathrm{B}) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \xi - qz + ry, \\ \dfrac{dy}{dt} = \eta - rx + pz, \\ \dfrac{dz}{dt} = \zeta - py + qx; \end{cases}$$

les formules (A) et (B) appliquées à chacun des points donnent les équations du mouvement du système.

3. La force vive apparente est

$$2\mathrm{T} = \sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

et, d'après les équations (B), on a

$$\begin{aligned} 2\mathrm{T} = {} & \Sigma m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \\ & + 2\Sigma m[(ry - qz)\xi + (pz - rx)\eta + (qx - py)\zeta] \\ & + \Sigma m[(ry - qz)^2 + (pz - rx)^2 + (qx - py)^2]; \end{aligned}$$

il en résulte que les équations (B) peuvent s'écrire

$$(7)\qquad \frac{dx}{dt}=\frac{d\mathrm{T}}{d(m\xi)},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{d\mathrm{T}}{d(m\eta)},\quad \frac{dz}{dt}=\frac{d\mathrm{T}}{d(m\zeta)}.$$

Posons

$$\mathrm{E}=-l_0\Sigma mx-n_0\Sigma my-s_0\Sigma mz,$$
$$\mathrm{F}=\tfrac{1}{2}\Sigma m[(ry-qz)^2+(pz-rx)^2+(qx-py)^2],$$
$$\mathrm{U}+\mathrm{E}+\mathrm{F}=\mathrm{U}_1,\qquad \mathrm{T}-\mathrm{U}_1=\mathrm{H}.$$

Les quantités l_0, n_0, s_0, p, q, r, qui appartiennent au mouvement d'entraînement, sont, par hypothèse, des fonctions connues du temps t; elles sont donc indépendantes des coordonnées x, y, z, et la première équation (A) peut s'écrire

$$\frac{d(m\xi)}{dt}=-\frac{d\mathrm{H}}{dx}.$$

D'ailleurs, U_1 étant indépendant de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ et, par suite, de ξ, η, ζ, on peut, dans les équations (7), remplacer T par H. Les équations différentielles du mouvement relatif sont donc ramenées à la forme canonique suivante, donnée par Bour (*Journal de M. Liouville*, t. VIII, 2e série) :

$$(\mathrm{C})\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d\mathrm{H}}{d(m\xi)}, & \dfrac{d(m\xi)}{dt}=-\dfrac{d\mathrm{H}}{dx},\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d\mathrm{H}}{d(m\eta)}, & \dfrac{d(m\eta)}{dt}=-\dfrac{d\mathrm{H}}{dy},\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=\dfrac{d\mathrm{H}}{d(m\zeta)}, & \dfrac{d(m\zeta)}{dt}=-\dfrac{d\mathrm{H}}{dz}. \end{cases}$$

MOUVEMENT RELATIF D'UN SYSTÈME ASSUJETTI A DES LIAISONS.

4. Désignons les variables x, y, z par la seule lettre Q affectée de différents indices, et les variables correspondantes $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$ par la lettre P affectée des mêmes indices. Alors les équations (C), qui expriment le mouvement relatif d'un système libre, pourront s'écrire

$$(a)\qquad \frac{d\mathrm{Q}_i}{dt}=\frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{P}_i},\quad \frac{d\mathrm{P}_i}{dt}=-\frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{Q}_i},$$

i étant susceptible des valeurs 1, 2, ..., $3n$, si n est le nombre des points matériels. Elles sont renfermées dans la seule équation

$$(b)\qquad \frac{dQ_1}{dt}\,\delta P_1+\ldots+\frac{dQ_{3n}}{dt}\,\delta P_{3n}-\frac{dP_1}{dt}\,\delta Q_1-\ldots-\frac{dP_{3n}}{dt}\,\delta Q_{3n}=\delta H,$$

où les variations δQ, δP sont toutes indépendantes entre elles.

Si les variables Q_1, Q_2, ... sont assujetties à r équations de condition

$$(c)\qquad F_1(Q_1, Q_2, \ldots, Q_{3n})=0, \quad \ldots, \quad F_r(Q_1, Q_2, \ldots, Q_{3n})=0,$$

les équations (a) ne subsisteront plus, mais l'équation (b) aura encore lieu (Section I, n° 20), les variables δQ_1, δQ_2, ... satisfaisant aux équations qu'on obtient en différentiant les équations (c).

L'équation (b) peut s'écrire

$$\delta\left(P_1\frac{dQ_1}{dt}+\ldots+P_{3n}\frac{dQ_{3n}}{dt}\right)-\frac{d}{dt}(P_1\,\delta Q_1+\ldots+P_{3n}\,\delta Q_{3n})=\delta H.$$

Posons $3n-r=k$; d'après les équations (c), les variables Q_i peuvent s'exprimer au moyen de k variables seulement q_1, q_2, ..., q_k et, si nous supposons k variables p_1, p_2, ..., p_k, telles que l'on ait

$$(d)\qquad p_1\,\delta q_1+\ldots+p_k\,\delta q_k=P_1\,\delta Q_1+\ldots+P_{3n}\,\delta Q_{3n},$$

on aura aussi

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt}+\ldots+p_k\frac{dq_k}{dt}\right)-\frac{d}{dt}(p_1\,\delta q_1+\ldots+p_k\,\delta q_k)=\delta H$$

et, par suite, les $2k$ équations renfermées dans les deux suivantes :

$$(e)\qquad \frac{dq_i}{dt}=\frac{dH}{dp_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{dH}{dq_i},$$

où i est susceptible des valeurs 1, 2, ..., k.

De la formule (d) on déduit

$$p_s=P_1\frac{dQ_1}{dq_s}+\ldots+P_{3n}\frac{dQ_{3n}}{dq_s},$$

et en remettant, au lieu des variables P, Q, les quantités qu'elles représentent, on a

$$p_s = \sum m\left(\xi\frac{dx}{dq_s} + \eta\frac{dy}{dq_s} + \zeta\frac{dz}{dq_s}\right).$$

Si l'on fait

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dq_s}{dt} = q'_s,$$

on a

$$x' = \frac{dx}{dq_1}q'_1 + \frac{dx}{dq_2}q'_2 + \ldots$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{dq_s} = \frac{dx'}{dq'_s};$$

or on a

$$\xi = x' + qz - ry,$$

et, comme dans le second membre x' seul dépend de q'_s, on a

$$\frac{dx'}{dq'_s} = \frac{d\xi}{dq'_s} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dq_s} = \frac{d\xi}{dq'_s}.$$

Ainsi l'on a

$$p_s = \sum m\left(\xi\frac{d\xi}{dq'_s} + \eta\frac{d\eta}{dq'_s} + \zeta\frac{d\zeta}{dq'_s}\right),$$

et, si l'on pose

$$(f)\quad \begin{cases} T_1 = \frac{1}{2}\Sigma m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \\ \quad = \frac{1}{2}\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ \quad + \Sigma m[(qz - ry)x' + (rx - pz)y' + (py - qx)z'] + F, \end{cases}$$

on obtient

$$(g)\qquad p_s = \frac{dT_1}{dq'_s}.$$

Bour a donné aussi cette équation et les équations (e), mais au moyen d'un calcul qu'on peut regarder comme très-compliqué, surtout si on le compare au précédent.

SUR LE MOUVEMENT DE ROTATION D'UN CORPS SOLIDE PESANT AUTOUR D'UN POINT, EN AYANT ÉGARD A LA ROTATION DE LA TERRE.

5. Supposons un corps libre de tourner autour d'un de ces points O que nous prenons pour origine des coordonnées x, y, z; prenons l'axe des z vertical et dans le sens de la pesanteur, Ox tangent au méridien et dirigé vers l'équateur, Oy tangent au parallèle et dirigé de l'ouest à l'est.

Désignons par ω la vitesse de rotation de la Terre et par λ la latitude du lieu; nous aurons, pour les composantes de cette vitesse, suivant les axes précédents :

$$p = \omega \cos\lambda, \quad q = 0, \quad r = \omega \sin\lambda.$$

Si nous représentons par P, Q, R les composantes de la vitesse angulaire instantanée du corps suivant les trois axes principaux Ox_1, Oy_1, Oz_1 menés par le point O de suspension, nous avons (Section IV, n° 2)

$$\begin{aligned} P &= \sin\varphi \sin\theta . \psi' + \cos\varphi . \theta', \\ Q &= \cos\varphi \sin\theta . \psi' - \sin\varphi . \theta', \\ R &= \varphi' + \cos\theta . \psi'. \end{aligned}$$

On obtient donc par la formule (f)

$$\begin{aligned} T_1 = {} & \tfrac{1}{2}\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ & + \omega \sin\lambda \, \Sigma m(xy' - yx') + \omega \cos\lambda \, \Sigma m(yz' - zy') + F, \end{aligned}$$

$$F = \frac{\omega^2}{2} \Sigma m[y^2 + (\cos\lambda . z - \sin\lambda . x)^2].$$

Désignons par u_1, v_1, w_1 les composantes de la vitesse relative suivant les trois axes principaux; nous aurons (Section IV, n° 3)

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ &= \tfrac{1}{2}\Sigma m(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) = \tfrac{1}{2}(AP^2 + BQ^2 + CR^2), \end{aligned}$$

A, B, C étant les moments d'inertie principaux du corps.

Écrivons, pour les formules de transformation de coordonnées du système des x, y, z dans celles du système des x_1, y_1, z_1,

$$\begin{aligned} x &= \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1, \\ y &= \alpha' x_1 + \beta' y_1 + \gamma' z_1, \\ z &= \alpha'' x_1 + \beta'' y_1 + \gamma'' z_1, \end{aligned}$$

nous aurons aussi

$$\begin{aligned} x' &= \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1, \\ y' &= \alpha' u_1 + \beta' v_1 + \gamma' w_1, \\ z' &= \alpha'' u_1 + \beta'' v_1 + \gamma'' w_1, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \Sigma m(xy' - yx') &= (\beta\gamma' - \gamma\beta')\,\Sigma m(w y_1 - v z_1) \\ &\quad + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')\,\Sigma m(u z_1 - w x_1) + (\alpha\beta' - \beta\alpha')\,\Sigma m(v x_1 - u y_1) \\ &= \alpha''\,\Sigma m(w y_1 - v z_1) + \beta''\,\Sigma m(u z_1 - w x_1) + \gamma''\,\Sigma m(v x_1 - u y_1) \\ &= \mathrm{AP}\alpha'' + \mathrm{BQ}\beta'' + \mathrm{CR}\gamma''. \end{aligned}$$

On a de même

$$\Sigma m(yz' - zy') = \mathrm{AP}\alpha + \mathrm{BQ}\beta + \mathrm{CR}\gamma.$$

Dans l'expression de F remplaçons les coordonnées x, y, z par les coordonnées x_1, y_1, z_1, et faisons usage des formules

$$\Sigma m x_1^2 = \frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}, \quad \Sigma m y_1^2 = \frac{\mathrm{C}+\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}, \quad \Sigma m z_1^2 = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2},$$

nous aurons

$$\mathrm{F} = \frac{\omega^2}{2}\left[\mathrm{A}(\alpha''\sin\lambda + \alpha\cos\lambda)^2 + \mathrm{B}(\beta''\sin\lambda + \beta\cos\lambda)^2 + \mathrm{C}(\gamma''\sin\lambda + \gamma\cos\lambda)^2\right].$$

En appliquant la formule (g), on a

$$p_1 = \frac{d\mathrm{T}_1}{d\varphi'} = \mathrm{CR} + \mathrm{C}\gamma''\omega\sin\lambda + \mathrm{C}\gamma\omega\cos\lambda,$$

$$\begin{aligned} p_2 = \frac{d\mathrm{T}_1}{d\theta'} &= \mathrm{AP}\cos\varphi - \mathrm{BQ}\sin\varphi + (\mathrm{A}\alpha''\cos\varphi - \mathrm{B}\beta''\sin\varphi)\,\omega\sin\lambda \\ &\quad + (\mathrm{A}\alpha\cos\varphi - \mathrm{B}\beta\sin\varphi)\,\omega\cos\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 = \frac{d\mathrm{T}_1}{d\psi'} &= \mathrm{AP}\alpha'' + \mathrm{BQ}\beta'' + \mathrm{CR}\gamma'' + (\mathrm{A}\alpha''^2 + \mathrm{B}\beta''^2 + \mathrm{C}\gamma''^2)\,\omega\sin\lambda \\ &\quad + (\mathrm{A}\alpha\alpha'' + \mathrm{B}\beta\beta'' + \mathrm{C}\gamma\gamma'')\,\omega\cos\lambda. \end{aligned}$$

Les neuf cosinus $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots$ s'expriment au moyen de φ, θ, ψ par les formules qui donnent $a, b, c, a', \ldots$ (Section IV, n° 2). En résolvant les trois équations précédentes par rapport à AP, BQ, CR, on a

$$CR = p_1 - C\omega(\cos\theta\sin\lambda + \sin\theta\sin\psi\cos\lambda),$$

$$\begin{aligned} AP = {} & \frac{p_3 - p_1\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi + p_2\cos\varphi \\ & - A\sin\theta\sin\varphi\,\omega\sin\lambda + A(\cos\theta\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi)\,\omega\cos\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BQ = {} & \frac{p_3 - p_1\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi - p_2\sin\varphi \\ & - B\sin\theta\cos\varphi\,\omega\sin\lambda + B(\cos\theta\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)\,\omega\cos\lambda. \end{aligned}$$

On passe de AP à BQ en changeant A en B et φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Exprimons la quantité

$$T = \tfrac{1}{2}(AP^2 + BQ^2 + CR^2)$$

en fonction de $\varphi, \theta, \psi, p_1, p_2, p_3$ et posons

$$T = T' + \omega L + \omega^2 S,$$

en partageant T en trois parties des degrés 0, 1 et 2 par rapport à ω; nous aurons

$$\begin{aligned} T' = {} & \frac{1}{2A}\left[\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(p_3 - p_1\cos\theta) + p_2\cos\varphi\right]^2 \\ & + \frac{1}{2B}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}(p_3 - p_1\cos\theta) - p_2\sin\varphi\right]^2 + \frac{1}{2C}p_1^2, \end{aligned}$$

$$L = -p_1\cos\lambda\frac{\sin\psi}{\sin\theta} - p_2\cos\lambda\cos\psi + p_3\left(\cos\lambda\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\psi - \sin\lambda\right),$$

$$\omega^2 S = F.$$

Nous avons par suite

$$T - F = T' + \omega L.$$

Nous avons pour la fonction des forces

$$\begin{aligned} U = g\Sigma m \int dz &= g\Sigma m(\alpha'' x_1 + \beta'' y_1 + \gamma'' z_1) \\ &= g\alpha''\Sigma m x_1 + g\beta''\Sigma m y_1 + g\gamma''\Sigma m z_1, \end{aligned}$$

g étant l'accélération de la gravité, due à la seule attraction de la Terre, c'est-à-dire en faisant abstraction de l'accélération centrifuge. L'accélération de l'origine des coordonnées est l'accélération centripète, provenant de la rotation de la Terre; donc, si l'on désigne par ρ le rayon de la Terre, on a

$$l_0 = -\omega^2\rho\cos\lambda\sin\lambda,\quad n_0 = 0,\quad s_0 = \omega^2\rho\cos^2\lambda,$$
$$E = \omega^2\rho\cos\lambda(\sin\lambda\Sigma m x - \cos\lambda\Sigma m z);$$

on a ensuite

$$H = T - F - U - E = T' + \omega L - U - E.$$

Si donc on a obtenu une solution approchée du mouvement du corps en négligeaut la rotation de la Terre, on pourra ensuite avoir égard à cette rotation en observant que U doit être changé en $U - \omega L + E$.

6. *Sur le mouvement d'un corps suspendu par son centre de gravité.* — Pour appliquer les formules du numéro précédent à ce cas particulier, il n'y a qu'à y faire $U = 0$; mais il faut remarquer que, dans le cas actuel, il n'y a plus aucune raison pour choisir l'axe des z vertical, puisque nous n'avons plus à tenir compte de la pesanteur. Pour simplifier l'expression de la fonction L, prenons donc l'axe des z parallèle à la ligne des pôles de la Terre et dirigé vers le pôle boréal; quant aux axes des x et y, qui sont dans un plan perpendiculaire, prenons-les, par exemple, suivant le prolongement du rayon du parallèle et suivant la tangente au parallèle et dans le sens de la rotation de la Terre.

Nous aurons alors

$$p = 0,\quad q = 0,\quad r = \omega;$$

il faudra donc faire dans les formules ci-dessus $\lambda = \frac{\pi}{2}$, et comme on a $U = 0$, $E = 0$, il en résultera

$$L = -p_3,\quad H = T' - \omega p_3.$$

Les équations différentielles canoniques du problème sont donc

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dT'}{dp_1},\qquad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{dT'}{d\varphi},$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dT'}{dp_2},\qquad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{dT'}{d\theta},$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{dT'}{dp_3} - \omega,\quad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{dT'}{d\psi} = 0.$$

T′ ne renferme pas ψ; donc l'angle ψ n'entre que dans la cinquième équation et l'on passe du cas où ω est nul à celui où il ne l'est pas, en changeant simplement ψ en $\psi + \omega t$.

Nous avons obtenu aux nos 4, 5 de la Section IV les intégrales du problème lorsque ω est nul, en introduisant trois angles auxiliaires φ_1, θ_1, ψ_1; prenons les trois équations qui déterminent ces trois variables, et ajoutons-y les équations

$$\cos\theta = \cos\gamma\cos\theta_1 - \sin\gamma\sin\theta_1\cos\psi_1,$$

$$\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi)}{\sin\gamma} = \frac{\sin\psi_1}{\sin\theta} = \frac{\sin(\psi + \omega t - \alpha)}{\sin\theta_1},$$

obtenues en changeant ψ en $\psi + \omega t$ dans les équations du n° 5 de la Section citée, et nous aurons les intégrales du problème actuel.

7. *Influence de la rotation de la Terre sur le mouvement du pendule simple.* — Appliquons les formules du n° 5 au pendule simple. En prenant l'axe des z_1 suivant la longueur du pendule, désignant par l cette longueur et par M la masse qui la termine, et dont les coordonnées sont x, y, z, on a

$$A = B = Ml^2, \quad C = 0, \quad p_1 = 0, \quad U = Mgl\cos\theta,$$

$$T' = \frac{1}{2A}\left(p_2^2 + \frac{p_3^2}{\sin^2\theta}\right),$$

$$\begin{aligned} E &= \omega^2\rho\cos\lambda(Mx\sin\lambda - Mz\cos\lambda) \\ &= Ml\omega^2\rho\cos\lambda(\sin\theta\sin\psi\sin\lambda - \cos\theta\cos\lambda). \end{aligned}$$

L'équation de la force vive

$$H = h \quad \text{ou} \quad T' + \omega L - U - E = h,$$

où h est une constante, devient, en négligeant les termes multipliés par ω^2,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2A}\left(p_2^2 + \frac{p_3^2}{\sin^2\theta}\right) \\ &\quad + \omega(-p_2\cos\lambda\cos\psi - p_3\sin\lambda + p_3\cos\lambda\cot\theta\sin\psi) - Mgl\cos\theta = h \end{aligned}$$

et nous avons les équations différentielles canoniques

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{dH}{dp_3} = \frac{p_3}{A\sin^2\theta} + \omega(-\sin\lambda + \cos\lambda\cot\theta\sin\psi),$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\frac{dH}{d\psi} = -\omega p_2\cos\lambda\sin\psi - \omega p_3\cos\lambda\cot\theta\cos\psi,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dH}{dp_2} = \frac{p_2}{A} - \omega\cos\lambda\cos\psi,$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{dH}{d\theta} = \frac{p_3^2\cos\theta}{A\sin^3\theta} - Mgl\sin\theta + \frac{\omega p_3\cos\lambda}{\sin^2\theta}\sin\psi.$$

Si l'on suppose que l'angle θ dont le pendule s'écarte de la verticale reste très-petit, on sait que, en négligeant ω, l'extrémité du pendule décrit sensiblement une ellipse horizontale dont le centre est sur la verticale du point de supension et qui tourne dans son plan d'une très-petite quantité angulaire que nous avons calculée (Section III, n° 14); négligeons d'abord ω, nous aurons, en désignant par D une constante arbitraire,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{D}{A\sin^2\theta}, \quad dt = \frac{A\sin^2\theta}{D}d\psi.$$

Multiplions les trois dernières équations canoniques par dt et remplaçons, dans les termes multipliés par ω, dt par la valeur précédente, ces termes deviendront des fonctions périodiques de ψ qui ne feront que changer de signe quand on y remplacera ψ par $\psi + \pi$ et les intégrales de ces termes seront négligeables. Mais, au contraire, le terme $-\omega\sin\lambda$ qui se trouve dans la première équation par l'intégration sera multiplié par t, et cette équation donne sensiblement

$$\psi + \omega t\sin\lambda = \frac{D}{A\sin^2\theta}.$$

Ainsi, par l'introduction des termes en ω, θ ne change pas et ψ est changé en $\psi + \omega t\sin\lambda$. On voit donc que l'ellipse décrite par l'extrémité du pendule tourne, par l'effet de la rotation de la Terre, avec une vitesse angulaire égale à $\omega\sin\lambda$ de l'est à l'ouest.

8. *Sur le gyroscope.* — Le gyroscope est un solide de révolution qui tourne très-rapidement autour de son axe dont le milieu est fixe et re-

présente le centre de gravité et cet axe est assujetti à rester sur un plan fixe par rapport à la Terre.

Soit O le centre du gyroscope que nous prenons pour origine des coordonnées; prenons le plan du gyroscope pour plan des x, y et menons le plan des z, x parallèle à la ligne des pôles, enfin menons l'axe des y, en sorte que le mouvement de l'axe des x vers l'axe des y s'effectue dans le sens de la rotation de la Terre.

L'axe des z_1, dirigé suivant celui du gyroscope, étant dans le plan des x, y, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$; l'angle ψ est égal à l'angle de l'axe des x avec la trace de l'équateur sur le plan des x, y et, si l'on désigne par υ l'angle $z_1 O x$, on a $\upsilon = \psi - \frac{\pi}{2}$.

Désignons par λ l'angle de la ligne des pôles avec le plan du gyroscope, nous aurons

$$p = \omega \cos\lambda, \quad q = 0, \quad r = \omega \sin\lambda,$$

et, bien que λ n'ait plus la même signification qu'au n° 5, on pourra appliquer les formules du commencement de ce numéro, en y faisant simplement $\theta = \frac{\pi}{2}$, et $B = A$.

Nous aurons ainsi

$$P = \psi' \sin\varphi, \quad Q = \psi' \cos\varphi, \quad R = \varphi'$$

et

$$T_1 = T + \omega J + F,$$

en faisant

$$\begin{aligned}
T &= \tfrac{1}{2}(A\psi'^2 + C\varphi'^2),\\
\omega J &= \omega \sin\lambda . A(P\alpha'' + Q\beta'') + \omega\cos\lambda(AP\alpha + AQ\beta + CR\gamma)\\
&= \omega\sin\lambda . A\psi' + \omega\cos\lambda . C\varphi' \sin\psi,\\
F &= \frac{\omega^2}{2}[A\sin^2\lambda + (A\cos^2\psi + C\sin^2\psi)\cos^2\lambda].
\end{aligned}$$

Nous aurons donc

$$p_1 = \frac{dT_1}{d\varphi'} = C\varphi' + \omega C \cos\lambda \sin\psi,$$

$$p_3 = \frac{dT_1}{d\psi'} = A\psi' + \omega A \sin\lambda.$$

Nous en tirons

$$\varphi' = \frac{p_1}{C} - \omega \cos\lambda \sin\psi,$$

$$\psi' = \frac{p_3}{A} - \omega \sin\lambda$$

et, en portant ces valeurs dans l'expression de T,

$$T = \frac{p_3^2}{2A} + \frac{p_1^2}{2C} - \omega(p_1 \cos\lambda \sin\psi + p_3 \sin\lambda) + \frac{\omega^2}{2}(A \sin^2\lambda + C \cos^2\lambda \sin^2\psi),$$

$$T - F = \frac{p_3^2}{2A} + \frac{p_1^2}{2C} - \omega(p_1 \cos\lambda \sin\psi + p_3 \sin\lambda) - \frac{\omega^2}{2} A \cos^2\lambda \cos^2\psi.$$

On a $H = T - F$ et l'équation

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{dH}{d\varphi} = 0;$$

donc, en appliquant l'équation de la force vive, désignant par α, h deux constantes arbitraires et négligeant ω^2, on a les deux intégrales

$$p_1 = \alpha,$$

$$\frac{p_3^2}{A} = 2h - \frac{\alpha^2}{C} + 2\omega(p_3 \sin\lambda + \alpha \cos\lambda \sin\psi).$$

En continuant à négliger ω^2, si nous posons

$$A\left(2h - \frac{\alpha^2}{C}\right) + 2\omega A \sin\lambda \sqrt{A\left(2h - \frac{\alpha^2}{C}\right)} = l,$$

nous aurons

$$p_3 = \sqrt{l + 2\omega A \alpha \cos\lambda \sin\psi}.$$

Posons (Section II, n° 19)

$$V = \alpha\varphi + \int p_3 \, d\psi,$$

et, en prenant les dérivées de V par rapport aux deux constantes α et h, nous aurons les deux intégrales

$$\varphi + \int \frac{dp_3}{d\alpha} d\psi = a, \quad \int \frac{dp_3}{dh} d\psi = t + \tau,$$

où a et τ représentent deux constantes arbitraires. La seconde donne d'abord ψ et la première ensuite φ. Si l'on remplace ψ par $\frac{\pi}{2} + \upsilon$ et qu'on désigne par e une constante, en posant

$$\frac{1}{2}\frac{dl}{dh} = e,$$

la seconde intégrale peut s'écrire

$$\int \frac{e\,d\upsilon}{\sqrt{l + 2\omega \mathrm{A} \cos\lambda \cos\upsilon}} = t + \tau;$$

c'est la formule du pendule simple qui oscille dans un plan vertical, υ étant l'écartement de la verticale. Désignons par φ'_0 la vitesse angulaire initiale qu'on donne au gyroscope et supposons que l'angle ψ soit d'abord nul, d'après la formule qui donne p_1, nous aurons, pour la constante α,

$$\alpha = \mathrm{C}\varphi'_0.$$

SECTION VI.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA DYNAMIQUE.

DE LA TRANSFORMATION DE CES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

1. Si l'on désigne en général par $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ un système de $2n$ variables conjuguées d'un problème de Dynamique, par t le temps et H une fonction de ces variables, on a $2n$ équations renfermées dans les deux suivantes :

$$(1) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dq_i},$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$. La difficulté de l'intégration de ces équations dépend entièrement de la forme de la fonction H; il est donc utile de chercher à transformer un système canonique dans un autre par un changement de variables qui donne seulement une nouvelle forme à cette fonction.

Les équations différentielles (1) sont renfermées dans la seule équation

$$(2) \qquad \frac{dq_1}{dt}\,\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\,\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\,\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\,\delta q_n = \delta\mathrm{H},$$

où les variations $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta p_1, \delta p_2, \ldots$ sont indépendantes, et cette équation a même encore lieu quand les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ du problème sont assujetties à des équations de condition, en sorte que les équations (1) n'ont plus lieu et que les variations $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ satisfont à des équations linéaires qu'on obtient en différentiant les équations de condition. Nous avons déjà mis précédemment l'équation (2) sous cette forme

$$(3) \qquad \delta\left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1 \delta q_1 + \ldots + p_n \delta q_n) = \delta\mathrm{H},$$

et, quoique le passage de la forme (2) à la forme (3) soit extrêmement simple, cette dernière m'a permis d'obtenir très-facilement plusieurs théorèmes.

Transformation d'un système canonique d'équations différentielles dans un pareil système.

2. Supposons un système de variables q_i, p_i satisfaisant aux équations (1) et remplaçons ces $2n$ équations par la seule équation (3); choisissons des variables Q_i, P_i en même nombre et satisfaisant à l'équation

$$(4) \qquad \mathrm{P}_1 \delta \mathrm{Q}_1 + \ldots + \mathrm{P}_n \delta \mathrm{Q}_n = p_1 \delta q_1 + \ldots + p_n \delta q_n,$$

il en résultera aussi

$$\mathrm{P}_1 \frac{d\mathrm{Q}_1}{dt} + \ldots + \mathrm{P}_n \frac{d\mathrm{Q}_n}{dt} = p_1 \frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{dt},$$

en prenant pour les variations δq_1, δq_2, ..., $\delta \mathrm{Q}_1$, $\delta \mathrm{Q}_2$, ... les accroissements de q_1, q_2, ..., Q_1, Q_2, ... dans l'instant dt, et nous aurons l'équation

$$\delta\left(\mathrm{P}_1 \frac{d\mathrm{Q}_1}{dt} + \ldots + \mathrm{P}_n \frac{d\mathrm{Q}_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(\mathrm{P}_1 \delta \mathrm{Q}_1 + \ldots + \mathrm{P}_n \delta \mathrm{Q}_n) = \delta\mathrm{H},$$

entièrement semblable à l'équation (3) et où les lettres p, q sont seulement remplacées par P, Q; elle équivaut donc aux $2n$ équations renfermées dans les deux suivantes :

$$\frac{d\mathrm{Q}_i}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{P}_i}, \quad \frac{d\mathrm{P}_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{Q}_i}.$$

Nous n'avons plus maintenant qu'à examiner comment nous satisferons à l'équation (4); or elle revient aux $2n$ équations comprises dans celles-ci

$$(5) \qquad \mathrm{P}_i = p_1 \frac{dq_1}{d\mathrm{Q}_i} + p_2 \frac{dq_2}{d\mathrm{Q}_i} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{d\mathrm{Q}_i},$$

$$(6) \qquad \mathrm{o} = p_1 \frac{dq_1}{d\mathrm{P}_i} + p_2 \frac{dq_2}{d\mathrm{P}_i} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{d\mathrm{P}_i},$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$.

Si des n équations (6) on élimine $p_1, p_2, \ldots, p_n$, on en conclut que le déterminant

$$\sum \pm \frac{dq_1}{d\mathrm{P}_1} \frac{dq_2}{d\mathrm{P}_2} \cdots \frac{dq_n}{d\mathrm{P}_n}$$

est nul, et, d'après un théorème connu, il en résulte qu'il existe entre les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, qui sont fonctions des variables Q_i, P_i, une relation qui ne renferme pas $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$; cette relation peut donc s'écrire

$$(7) \qquad \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, \quad \mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \ldots, \mathrm{Q}_n) = \mathrm{o},$$

ψ désignant une fonction arbitraire. En différentiant cette équation successivement par rapport à Q_i et à P_i, on a

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} -\frac{d\psi}{d\mathrm{Q}_i} &= \frac{d\psi}{dq_1}\frac{dq_1}{d\mathrm{Q}_i} + \frac{d\psi}{dq_2}\frac{dq_2}{d\mathrm{Q}_i} + \ldots + \frac{d\psi}{dq_n}\frac{dq_n}{d\mathrm{Q}_i}, \\ \mathrm{o} &= \frac{d\psi}{dq_1}\frac{dq_1}{d\mathrm{P}_i} + \frac{d\psi}{dq_2}\frac{dq_2}{d\mathrm{P}_i} + \ldots + \frac{d\psi}{dq_n}\frac{dq_n}{d\mathrm{P}_i}. \end{aligned} \right.$$

En comparant les n équations renfermées dans cette dernière avec les n équations (6), on a

$$(9) \qquad \frac{d\psi}{dq_1} = \mu p_1, \quad \frac{d\psi}{dq_2} = \mu p_2, \quad \ldots, \quad \frac{d\psi}{dq_n} + \mu p_n,$$

μ étant une fonction indéterminée et, en comparant (5) avec (8), on a

$$\mathrm{P}_i = -\frac{1}{\mu}\frac{d\psi}{d\mathrm{Q}_i},$$

ou les n équations

$$(10) \qquad \frac{d\psi}{d\mathrm{Q}_1} = -\mu \mathrm{P}_1, \quad \frac{d\psi}{d\mathrm{Q}_2} - \mu \mathrm{P}_2, \quad \ldots, \quad \frac{d\psi}{dq_n} = -\mu \mathrm{P}_n.$$

Des équations (7) et (9) on peut tirer μ, Q_1, Q_2, ..., Q_n, puis des équations (10) tirer P_1, P_2, ..., P_n.

Remarquons le cas particulier où l'on prend pour les variables q_i des fonctions seulement de Q_1, Q_2, ..., Q_n; alors les n équations (6) sont satisfaites d'elles-mêmes et les variables P_i sont immédiatement déterminées par les équations (5).

La résolution des équations (1) peut, comme on sait, être remplacée par celle d'une équation aux différences partielles (Section II, n° 7); H étant une fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$,

$$\mathrm{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

faisons-y

$$p_1 = \frac{d\mathrm{V}}{dq_1}, \quad p_2 = \frac{d\mathrm{V}}{dq_1}, \quad \ldots,$$

il suffira de trouver une solution complète de l'équation aux différences partielles

$$\mathrm{H}\left(\frac{d\mathrm{V}}{dq_1}, \frac{d\mathrm{V}}{dq_2}, \ldots, q_1, q_2, \ldots\right) = h, \tag{11}$$

où h est une constante arbitraire. A la transformation des équations canoniques correspond une transformation de l'équation (11) et la formule

$$\mathrm{P}_1\,\delta\mathrm{Q}_1 + \mathrm{P}_2\,\delta\mathrm{Q}_2 + \ldots = p_1\,\delta q_1 + p_2\,\delta q_2 + \ldots$$

montre que la fonction V est la même dans l'équation (11) et dans celle en laquelle elle se transforme.

3. Comparons la règle que je viens de donner pour passer d'un système canonique à un système semblable avec celle qui a été donnée par Jacobi pour résoudre le même problème. Voici cette règle :

« Supposons $2n$ variables q_i, p_i, données par les équations hamiltoniennes

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dq_i}; \tag{a}$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$; soit, de plus,

$$\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, \mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \ldots, \mathrm{Q}_n)$$

une fonction arbitraire des n variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et de n nouvelles variables $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$; déterminons $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ et d'autres variables $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en fonction des premières variables au moyen des équations

$$(b) \qquad \frac{d\psi}{dq_1} = p_1, \quad \frac{d\psi}{dq_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{d\psi}{dq_n} = p_n,$$

$$(c) \qquad \frac{d\psi}{dQ_1} = -P_1, \quad \frac{d\psi}{dQ_2} = -P_2, \quad \ldots, \quad \frac{d\psi}{dQ_n} = -P_n;$$

les variables Q_i, P_i satisferont aux équations

$$(d) \qquad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{dH}{dP_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{dH}{dQ_i}. \text{ »}$$

On voit que la règle que j'ai donnée ci-dessus a une certaine analogie avec celle de Jacobi; les équations (9) et (10) sont identiques aux équations (b) et (c), si l'on y fait $\mu = 1$. La solution de Jacobi renferme l'inconnue μ en moins, et, par compensation, elle renferme une équation de moins qui est

$$\psi = 0.$$

Le système des équations (a) peut être remplacé par la suivante :

$$(12) \qquad \delta\left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1 \delta q_1 + \ldots + p_n \delta q_n) = \delta H.$$

Or on a, d'après les équations (b),

$$\begin{aligned}
&\delta\left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1 \delta q_1 + \ldots + p_n \delta q_n) \\
&\quad = \delta\left(\frac{d\psi}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{d\psi}{dq_n}\frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{d\psi}{dq_n}\delta q_n\right) \\
&\quad = \delta\left(-\frac{d\psi}{dQ_1}\frac{dQ_1}{dt} - \ldots - \frac{d\psi}{dQ_n}\frac{dQ_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(-\frac{d\psi}{dQ_1}\delta Q_1 - \ldots - \frac{d\psi}{dQ_n}\delta Q_n\right);
\end{aligned}$$

car l'égalité des deux derniers membres revient à

$$\delta \frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt}\delta\psi.$$

En ayant égard aux équations (c), on voit donc que le premier membre de l'équation (12) est égal à l'expression

$$\delta\left(P_1\frac{dQ_1}{dt}+\ldots+P_n\frac{dQ_n}{dt}\right)-\frac{d}{dt}(P_1\delta Q_1+\ldots+P_n\delta Q_n),$$

qui est ainsi égale à δH, et l'on en conclut les équations (d).

4. Il existe beaucoup d'autres moyens pour passer d'un système canonique à un autre semblable. Nous allons en indiquer quelques autres.

Le système des équations canoniques est renfermé dans une seule équation

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1+\ldots+\frac{dq_n}{dt}\delta p_n-\frac{dp_1}{dt}\delta q_1-\ldots-\frac{dp_n}{dt}\delta q_n=\delta H,$$

et celle-ci peut se mettre sous ces deux formes :

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt}+\ldots+p_n\frac{dq_n}{dt}\right)-\frac{d}{dt}(p_1\delta q_1+\ldots+p_n\delta q_n)=\delta H,$$

$$-\delta\left(q_1\frac{dp_1}{dt}+\ldots+q_n\frac{dp_n}{dt}\right)+\frac{d}{dt}(q_1\delta p_1+q_n\delta p_n)=\delta H;$$

en les ajoutant, on a

$$\begin{aligned}&\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt}-q_1\frac{dp_1}{dt}+p_2\frac{dq_2}{dt}-q_2\frac{dp_2}{dt}+\ldots\right)\\&\quad-\frac{d}{dt}(p_1\delta q_1-q_1\delta p_1+p_2\delta q_2+q_2\delta p_2+\ldots)=2\delta H.\end{aligned}$$

On en conclut aisément que les variables $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ satisferont à un système canonique semblable, si elles satisfont à l'équation

$$\text{(A)}\qquad \left\{\begin{aligned}&P_1\delta Q_1-Q_1\delta P_1+\ldots+P_n\delta Q_n-Q_n\delta P_n,\\&=p_1\delta q_1-q_1\delta p_1+\ldots+p_n\delta q_n-q_n\delta p_n,\end{aligned}\right.$$

qui équivaut, comme on sait, à $2n$ équations.

Remarquons encore la transformation indiquée par l'équation

$$2(P_1\delta Q_1+\ldots+P_n\delta Q_n)=p_1\delta q_1-q_1\delta p_1+\ldots+p_n\delta q_n-q_n\delta p_n,$$

et celle qui en résulte par l'échange des grandes lettres avec les petites.

On peut voir, par ce qui précède, qu'il s'est glissé une inadvertance dans le premier Mémoire de Jacobi qui suit ses leçons sur la *Dynamique* (p. 453), où il est dit qu'on vient de donner toutes les transformations possibles d'un système canonique dans un autre. Cette inadvertance s'explique d'ailleurs très-aisément dans une œuvre posthume.

Revenons sur la transformation renfermée dans la formule (A). Posons généralement

$$\text{(13)} \qquad P_i = R_i \cos\Theta_i, \quad Q_i = R_i \sin\Theta_i,$$

$$\text{(14)} \qquad p_i = r_i \cos\theta, \quad q_i = r_i \sin\theta_i,$$

i étant susceptible des valeurs de 1, 2, ..., n. La formule (A) deviendra

$$\text{(B)} \qquad R_1^2\,\delta\Theta_1 + \ldots + R_n^2\,\delta\Theta_n = r_1^2\,\delta\theta_1 + \ldots + r_n^2\,\delta\theta_n.$$

Si l'on prend pour les θ des fonctions déterminées des Θ, réciproquement les Θ pourront s'exprimer au moyen des θ et les R seront donnés par la formule

$$R_i^2 = r_1^2\,\frac{d\theta_1}{d\Theta_i} + r_2^2\,\frac{d\theta_2}{d\Theta_i} + \ldots + r_n^2\,\frac{d\theta_n}{d\Theta_i}.$$

Plus généralement on pourrait raisonner sur l'équation (B), ainsi qu'on l'a fait, au n° **2**, sur l'équation

$$P_1\,\delta Q_1 + \ldots + P_n\,\delta Q_n = p_1\,\delta q_1 + \ldots + p_n\,\delta q_n,$$

et déterminer ainsi les variables r_i, θ_i en fonction des R_i, Θ_i, et, par suite, les q_i, p_i en fonction des Q_i, P_i.

On pourrait encore, après avoir mis l'équation (12) sous la forme

$$\delta\left(r_1^2\,\frac{d\theta_1}{dt} + r_2^2\,\frac{d\theta_2}{dt} + \ldots\right) - \frac{d}{dt}(r_1^2\,\delta\theta_1 + r_2^2\,\delta\theta_2 + \ldots) = 2\,\delta H,$$

raisonner comme au n° 3 et démontrer que, si

$$\psi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$$

est une fonction quelconque des variables θ_1, θ_2, ..., Θ_1, Θ_2, ... et qu'on exprime les quantités r_i, θ_i en fonction des R_i, Θ_i au moyen des équations

$$\frac{d\psi}{d\theta_1} = r_1^2, \quad \frac{d\psi}{d\theta_2} = r_2^2, \quad \ldots,$$

$$\frac{d\psi}{d\Theta_1} = -\mathrm{R}_1^2, \quad \frac{d\psi}{d\Theta_2} = -\mathrm{R}_2^2, \quad \ldots,$$

puis qu'on applique les équations (13) et (14), on obtiendra la transformation d'un système canonique dans un autre.

Transformation d'un certain système d'équations dans un système canonique.

5. Supposons encore que les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ satisfassent à l'équation

$$(1) \qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta \mathrm{H};$$

mais supposons, en outre, que ces variables soient liées par $2r$ équations de condition

$$(2) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_{2r} = 0,$$

qui renferment également les variables q_i et p_i; nous considérons ainsi un système plus général que celui qu'on rencontre en Mécanique.

Je vais démontrer que ces $2n$ variables peuvent être remplacées par un système de $2n - 2r$ variables $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \ldots, \mathrm{Q}_{n-r}, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_{n-r}$ qui satisfont aux $2n - 2r$ équations canoniques

$$(3) \qquad \frac{d\mathrm{Q}_i}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{P}_i}, \quad \frac{d\mathrm{P}_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{Q}_i},$$

i étant susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n - r$.

Mettons encore l'équation (1) sous cette forme

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n\frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1\delta q_1 + \ldots + p_n\delta q_n) = \delta \mathrm{H};$$

si nous choisissons de nouvelles variables qui satisfassent à l'équation

$$(4) \qquad p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \ldots + p_n\delta q_n = \mathrm{P}_1\delta \mathrm{Q}_1 + \ldots + \mathrm{P}_{n-r}\delta \mathrm{Q}_{n-r},$$

nous aurons

$$\delta\left(P_1\frac{dQ_1}{dt}+\ldots+P_{n-r}\frac{dQ_{n-r}}{dt}\right)-\frac{d}{dt}(P_1\,\delta Q_1+\ldots+P_{n-r}\,\delta Q_{n-r})=\delta H,$$

et, comme les variations δQ_1, δQ_2, ..., δP_1, δP_2, ... seront indépendantes, on en conclura les équations (3).

Montrons comment on pourra satisfaire à l'équation (4). En différentiant les équations (2) selon la caractéristique δ, on aura

$$\begin{aligned}
&\frac{df_1}{dq_1}\delta q_1+\ldots+\frac{df_1}{dq_{n-r}}\delta q_{n-r}+\frac{df_1}{dp_1}\delta p_1+\ldots+\frac{df_1}{dp_{n-r}}\delta p_{n-r}\\
&\quad=-\frac{df_1}{dq_{n-r+1}}\delta q_{n-r+1}-\ldots-\frac{df_1}{dq_n}\delta q_n-\frac{df_1}{dp_{n-r+1}}\delta p_{n-r+1}-\ldots-\frac{df_1}{dp_n}\delta p_n,\\
&\frac{df_2}{dq_1}\delta q_1+\ldots+\frac{df_2}{dq_{n-r}}\delta q_{n-r}+\frac{df_2}{dp_1}\delta p_1+\ldots+\frac{df_2}{dp_{n-r}}\delta p_{n-r}\\
&\quad=-\frac{df_2}{dq_{n-r+1}}\delta q_{n-r+1}-\ldots-\frac{df_2}{dq_n}\delta q_n-\frac{df_2}{dp_{n-r+1}}\delta p_{n-r+1}-\ldots-\frac{df_2}{dp_n}\delta p_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

De ces $2r$ équations on peut tirer les $2r$ variations δq_{n-r+1}, ..., δq_n, δp_{n-r+1}, ..., δp_n, et, en les portant dans l'équation (4), on aura une équation de cette forme

$$\begin{aligned}
&G_1\,\delta q_1+G_2\,\delta q_2+\ldots+G_{n-r}\,\delta q_{n-r}+L_1\,\delta p_1+L_2\,\delta p_2+\ldots+L_{n-r}\,\delta p_{n-r}\\
&\quad=P_1\,\delta Q_1+P_2\,\delta Q_2+\ldots+P_{n-r}\,\delta Q_{n-r},
\end{aligned}$$

G_1, G_2, ..., L_1, L_2, ... pouvant, d'après les équations (2), être réduits à ne contenir que les variables q_1, q_2, ..., q_{n-r}, p_1, p_2, ..., p_{n-r}.

La question est donc ramenée à transformer l'expression différentielle du premier membre en une autre qui renferme moitié moins de différentielles des variables. Ce problème est connu sous le nom de *problème de Pfaff*, et l'on sait qu'il est toujours possible.

6. Le problème de Pfaff ne peut se résoudre, en général, que par des opérations de Calcul intégral très-compliquées; mais nous sommes arrivé à ce point important, que le système des équations (1) et (2) peut être réduit à un système canonique. Il faut remarquer aussi que l'application du problème de Pfaff peut souvent être évitée dans la

question actuelle, comme je l'ai démontré (*Journal de M. Liouville*, t. XIX, p. 281; 1874); mais j'examinerai ici seulement le cas qui se présente fréquemment dans la Dynamique, où, outre l'équation (1), on a r équations de condition

$$(5) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_r = 0,$$

qui renferment seulement les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

En différentiant une quelconque de ces équations, on aura

$$\frac{df_s}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{df_s}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots = 0;$$

mais, dans le cas actuel, l'équation (1) donne

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dH}{dp_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{dH}{dp_2}, \quad \ldots;$$

par suite, on a l'équation

$$\frac{df_s}{dq_1}\frac{dH}{dp_1} + \frac{df_s}{dq_2}\frac{dH}{dp_2} + \ldots = 0,$$

qu'on peut écrire, d'après une notation déjà employée,

$$[f_s, H] = 0.$$

Ainsi l'on a r équations entre les variables q_i, p_i,

$$(a) \qquad [f_1, H] = 0, \quad [f_2, H] = 0, \quad \ldots, \quad [f_r, H] = 0:$$

le problème actuel est donc un cas particulier de celui qui a été posé au commencement du numéro précédent, et il s'en déduit en faisant

$$f_{r+1} = [f_1, H], \quad f_{r+2} = [f_2, H], \quad \ldots, \quad f_{2r} = [f_r, H].$$

Mais l'application de la formule

$$(6) \qquad P_1 \delta Q_1 + \ldots + P_{n-r}\delta Q_{n-r} = p_1 \delta q_1 + \ldots + p_n \delta q_n$$

devient ici beaucoup plus facile. En effet, on peut exprimer les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ au moyen de $n-r$ nouvelles variables $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-r}$, de telle sorte que les expressions obtenues satisfassent identiquement aux équations (5). Les variables q_i ne dépendant que des variables Q_i, l'équation (6) équivaut aux $n-r$ suivantes :

$$
\begin{aligned}
P_1 &= p_1 \frac{dq_1}{dQ_1} + p_2 \frac{dq_2}{dQ_1} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{dQ_1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
P_{n-r} &= p_1 \frac{dq_1}{dQ_{n-r}} + p_2 \frac{dq_2}{dQ_{n-r}} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{dQ_{n-r}}.
\end{aligned}
$$

Nous avons déjà fait l'application de ce calcul dans le n° 17 de la Section I et dans le n° 4 de la Section V.

En différentiant les équations (5), nous aurons

$$
\begin{aligned}
&\frac{df_1}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_1}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_1}{dq_n}\delta q_n = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\frac{df_r}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_r}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_r}{dq_n}\delta q_n = 0;
\end{aligned}
$$

multiplions ces équations par des fonctions inconnues $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, et retranchons-les de l'équation (6); nous aurons, en égalant les coefficients des variations δq_1, δq_2, ... dans les deux membres,

$$
(7) \quad \left\{
\begin{aligned}
&P_1 \frac{dQ_1}{dq_1} + P_2 \frac{dQ_2}{dq_1} + \ldots + P_{n-r}\frac{dQ_{n-r}}{dq_1} = p_1 + \mu_1 \frac{df_1}{dq_1} + \ldots + \mu_r \frac{df_r}{dq_1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&P_1 \frac{dQ_1}{dq_n} + P_2 \frac{dQ_2}{dq_n} + \ldots + P_{n-r}\frac{dQ_{n-r}}{dq_n} = p_n + \mu_1 \frac{df_1}{dq_n} + \ldots + \mu_r \frac{df_r}{dq_n}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont des fonctions déterminées de Q_1, $Q_2, \ldots, Q_{n-r}$; les variables $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-r}$ sont au contraire fonctions des variables q_i d'une infinité de manières, et l'on obtiendra une quelconque de ces manières en résolvant, par rapport à $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-r}$, $n-r$ combinaisons des n équations qui expriment les q_i au moyen des Q_i. Ayant obtenu un système d'expressions des Q_i en fonction des q_i, on les portera dans les équations (7).

Au moyen des n équations (7) et des r équations (a), on calculera $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ en fonction des variables P_i, q_i et, par suite, en fonction des variables P_i, Q_i.

THÉORIE DES DÉRIVÉES PRINCIPALES.

7. Je vais maintenant exposer une théorie qui non-seulement m'a permis de démontrer plus facilement certaines formules de la Mécanique analytique, mais qui m'a fait aussi découvrir des résultats nouveaux.

Des différents groupes de dérivées d'une fonction de plusieurs variables qui ne sont pas indépendantes.

8. Considérons une fonction φ d'un nombre pair de variables que nous désignerons par $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, et supposons que, entre ces variables, il existe k équations

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_k = 0,$$

k étant $< 2n$. Ainsi φ est une fonction donnée des variables q_i, p_i; mais, à cause des équations (1), φ peut aussi être considéré comme fonction des mêmes variables d'une infinité d'autres manières.

Nous désignerons sous le nom de dérivées *immédiates* de la fonction φ les dérivées par rapport aux quantités q_i, p_i de la fonction donnée pour φ; mais, à cause des équations qui lient entre elles ces variables, la fonction φ peut être mise sous différentes formes renfermées dans la formule

$$\Phi = \varphi + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ étant des fonctions des mêmes variables qui ne deviennent pas infinies dans les limites où l'on fait varier ces variables. Les dérivées de Φ sont renfermées dans les deux formules

$$\frac{d\Phi}{dq_i} = \frac{d\varphi}{dq_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dq_i} + \lambda_2 \frac{df_2}{dq_i} + \ldots + \lambda_k \frac{df_k}{dq_i} + \frac{d\lambda_1}{dq_i} f_1 + \frac{d\lambda_2}{dq_i} f_2 + \ldots + \frac{d\lambda_k}{dq_i} f_k,$$
$$\frac{d\Phi}{dp_i} = \frac{d\varphi}{dp_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dp_i} + \lambda_2 \frac{df_2}{dp_i} + \ldots + \lambda_k \frac{df_k}{dp_i} + \frac{d\lambda_1}{dp_i} f_1 + \frac{d\lambda_2}{dp_i} f_2 + \ldots + \frac{d\lambda_k}{dp_i} f_k,$$

où l'on doit donner à i les valeurs $1, 2, \ldots, n$; mais, en nous appuyant sur les équations (1), nous pouvons réduire ces dérivées aux expressions

$$\frac{d\varphi}{dq_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dq_i} + \ldots + \lambda_k \frac{df_k}{dq_i}, \qquad \frac{d\varphi}{dp_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dp_i} + \ldots + \lambda_k \frac{df_k}{dp_i};$$

nous désignerons ces expressions sous le nom de dérivées *virtuelles* de la fonction φ, et chaque groupe de dérivées virtuelles variera avec les fonctions adoptées pour les multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

On peut encore définir les dérivées virtuelles de φ d'une autre manière. Faisons varier, dans la fonction donnée pour φ, les variables q_i, p_i de quantités infiniment petites indiquées par la caractéristique δ; la variation de φ sera

$$\delta\varphi = \frac{d\varphi}{dq_1}\delta q_1 + \frac{d\varphi}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{d\varphi}{dq_n}\delta q_n + \frac{d\varphi}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n}\delta p_n,$$

et, en différentiant les équations qui lient entre elles les variables q_i, p_i, nous aurons

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{df_1}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_1}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_1}{dq_n}\delta q_n + \frac{df_1}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_1}{dp_n}\delta p_n,\\
0 &= \frac{df_2}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_2}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_2}{dq_n}\delta q_n + \frac{df_2}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_2}{dp_n}\delta p_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Multiplions ces équations respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et ajoutons-les à la formule qui donne $\delta\varphi$; nous obtiendrons ainsi $\delta\varphi$ sous différentes formes, et les coefficients des variations des variables dans chacune des formes de $\delta\varphi$ donnent un groupe de dérivées virtuelles.

Dérivées principales d'une fonction.

9. Pour distinguer les dérivées virtuelles des dérivées immédiates, nous placerons les premières entre parenthèses, et nous aurons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\left(\frac{d\varphi}{dq_1}\right) &= \frac{d\varphi}{dq_1} + \lambda_1\frac{df_1}{dq_1} + \lambda_2\frac{df_2}{dq_1} + \ldots + \lambda_k\frac{df_k}{dq_1},\\
\left(\frac{d\varphi}{dq_2}\right) &= \frac{d\varphi}{dq_2} + \lambda_1\frac{df_1}{dq_2} + \lambda_2\frac{df_2}{dq_2} + \ldots + \lambda_k\frac{df_k}{dq_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\left(\frac{d\varphi}{dp_1}\right) &= \frac{d\varphi}{dp_1} + \lambda_1\frac{df_1}{dp_1} + \lambda_2\frac{df_2}{dp_1} + \ldots + \lambda_k\frac{df_k}{dp_1},\\
\left(\frac{d\varphi}{dp_2}\right) &= \frac{d\varphi}{dp_2} + \lambda_1\frac{df_1}{dp_2} + \lambda_2\frac{df_2}{dp_2} + \ldots + \lambda_k\frac{df_k}{dp_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Suivant la notation habituelle, posons, u et v étant deux fonctions quelconques des variables,

$$[u, v] = \frac{du}{dq_1}\frac{dv}{dp_1} + \frac{du}{dq_2}\frac{dv}{dp_2} + \ldots + \frac{du}{dq_n}\frac{dv}{dp_n}$$
$$- \frac{du}{dp_1}\frac{dv}{dq_1} - \frac{du}{dp_2}\frac{dv}{dq_2} - \ldots - \frac{du}{dp_n}\frac{dv}{dq_n};$$

si nous multiplions les équations (2) respectivement par $\frac{df_i}{dp_1}, \frac{df_i}{dp_2}, \ldots$ et les équations (3) par $\frac{df_i}{dq_1}, \frac{df_i}{dq_2}, \ldots,$ et que nous retranchions la somme des secondes de celle des premières, nous aurons

$$\left(\frac{d\varphi}{dq_1}\right)\frac{df_i}{dp_1} + \left(\frac{d\varphi}{dq_2}\right)\frac{df_i}{dp_2} + \ldots + \left(\frac{d\varphi}{dq_n}\right)\frac{df_i}{dp_n}$$
$$- \left(\frac{d\varphi}{dp_1}\right)\frac{df_i}{dq_1} - \left(\frac{d\varphi}{dp_2}\right)\frac{df_i}{dq_2} - \ldots - \left(\frac{d\varphi}{dp_n}\right)\frac{df_i}{dq_n}$$
$$= [\varphi, f_i] + [f_1, f_i]\lambda_1 + [f_2, f_i]\lambda_2 + \ldots + [f_k, f_i]\lambda_k;$$

et, i étant susceptible des valeurs 1, 2, ..., k, cette équation en renferme k distinctes.

Jusqu'à présent, nous avons laissé absolument arbitraires les expressions des multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$; adoptons maintenant pour ces fonctions celles qui rendent nul le second membre de l'équation précédente, et qui sont les solutions des k équations

$$(4)\quad \begin{cases} \quad * \quad + [f_2, f_1]\lambda_2 + [f_3, f_1]\lambda_3 + \ldots + [f_k, f_1]\lambda_k = [f_1, \varphi], \\ [f_1, f_2]\lambda_1 + \quad * \quad + [f_3, f_2]\lambda_3 + \ldots + [f_k, f_2]\lambda_k = [f_2, \varphi], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [f_1, f_k]\lambda_1 + [f_2, f_k]\lambda_2 + [f_3, f_k]\lambda_3 + \ldots + \quad * \quad = [f_k, \varphi]. \end{cases}$$

Il en résulte que les dérivées virtuelles de la fonction φ satisfont aux k équations renfermées dans la suivante :

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{df_i}{dp_1}\left(\dfrac{d\varphi}{dq_1}\right) + \dfrac{df_i}{dp_2}\left(\dfrac{d\varphi}{dq_2}\right) + \ldots + \dfrac{df_i}{dp_n}\left(\dfrac{d\varphi}{dq_n}\right) \\ - \dfrac{df_i}{dq_1}\left(\dfrac{d\varphi}{dp_1}\right) - \dfrac{df_i}{dq_2}\left(\dfrac{d\varphi}{dp_2}\right) - \ldots - \dfrac{df_i}{dq_n}\left(\dfrac{d\varphi}{dp_n}\right) = 0, \end{cases}$$

où i est susceptible des valeurs 1, 2, ..., k.

Quand les quantités λ auront les valeurs déterminées par les équations (4), nous donnerons aux dérivées virtuelles de φ le nom de *dérivées principales*, et nous désignerons de plus l'expression

$$\Phi = \varphi + \lambda f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k$$

sous le nom de *forme principale* de la fonction φ. D'après l'équation (5), on voit que cette forme principale satisfait aux équations

$$[f_1, \Phi] = 0, \quad [f_2, \Phi] = 0, \quad \ldots, \quad [f_{2r}, \Phi] = 0.$$

Comme on a

$$[f_2, f_1] = -[f_1, f_2], \quad [f_3, f_1] = -[f_1, f_3], \quad \ldots,$$

le déterminant des équations (4) est gauche, et l'on sait qu'un tel déterminant est nul si le nombre des équations est impair; nous supposerons donc désormais k pair.

10. Réciproquement, si les dérivées virtuelles de φ satisfont aux équations (5) supposées en nombre pair, les quantités λ satisferont aux équations (4). Nous avons donc ce théorème :

Théorème I. — *φ étant une fonction des $2n$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, liées entre elles par un nombre pair d'équations*

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_k = 0,$$

il existe un groupe de dérivées virtuelles de la fonction φ, et il en existe un seul qui satisfait aux équations linéaires (5). Ce groupe de dérivées, dites principales, *s'obtient en prenant pour les multiplicateurs λ les valeurs fournies par les équations (4).*

De ce théorème on peut déduire comme corollaire le suivant :

Théorème II. — *Le groupe des dérivées principales de la fonction φ ne dépend pas de la forme sous laquelle φ a été donné.*

En effet, supposons qu'on parte d'une autre forme φ_1 donnée à φ; les différents groupes de dérivées virtuelles resteront les mêmes. Le groupe des dérivées principales satisfera encore aux k équations (5), et comme, parmi le nombre infini de groupes de dérivées virtuelles, il n'y en a qu'un qui satisfasse à ces équations d'après le théorème précédent, le groupe des dérivées principales qu'on obtient en partant de la forme φ_1 est le même que celui que l'on obtient en partant de la forme donnée d'abord.

On peut déjà comprendre par ce dernier théorème l'utilité qu'il peut y avoir à distinguer le groupe des dérivées principales d'entre tous les autres groupes de dérivées.

Théorème III. — *Chaque dérivée principale de la somme de deux fonctions par rapport à une des variables q_i ou p_i est égale à la somme des dérivées principales de ces deux fonctions par rapport à la même variable.*

Si l'on résout les équations (4), on aura pour les quantités λ des expressions de forme suivante :

$$\lambda_u = L_{u,1}[f_1, \varphi] + L_{u,2}[f_2, \varphi] + \ldots + L_{u,k}[f_k, \varphi] = \Sigma_s L_{u,s}[f_s, \varphi],$$

le signe de sommation s'étendant aux valeurs de s égales à 1, 2, ..., k, et l'on a, en général,

$$L_{u,s} = - L_{s,u}, \quad L_{u,u} = 0.$$

On aura pour la dérivée principale de φ par rapport à q_i :

$$\left(\frac{d\varphi}{dq_i}\right) = \frac{d\varphi}{dq_i} + \sum_u \lambda_u \frac{df_u}{dq_i} = \frac{d\varphi}{dq_i} + \sum_u \sum_s L_{u,s} \frac{df_u}{dq_i}[f_s, \varphi],$$

le signe de sommation relatif à u s'étendant aussi aux valeurs 1, 2, ..., k.

Nous aurons les dérivées principales d'une autre fonction φ_1 et de $\varphi + \varphi_1$, en remplaçant, dans celle de φ, φ par φ_1 et $\varphi + \varphi_1$; et comme on a

$$[f_s, \varphi] + [f_s, \varphi_1] = [f_s, \varphi + \varphi_1],$$

on en conclut

$$\left(\frac{d(\varphi + \varphi_1)}{dq_i}\right) = \left(\frac{d\varphi}{dq_i}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dq_i}\right),$$

les dérivées entre parenthèses désignant des dérivées principales.

Propriété remarquable des dérivées principales.

11. Considérons $2n - 2r$ fonctions des $2n$ variables q_i, p_i que nous désignerons par la lettre β :

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \beta_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),\\
\beta_2 &= \beta_2(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\beta_{2(n-r)} &= \beta_{2(n-r)}(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),
\end{aligned}$$

où les variables q_i, p_i sont supposées satisfaire aux $2r$ équations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{2r} = 0,$$

Au moyen de ces $2n$ équations, on peut exprimer les $2n$ variables q_i, p_i en fonction des quantités β et d'une manière unique; et si l'on se donne une fonction φ des quantités q_i, p_i, cette fonction pourra elle-même s'exprimer au moyen des quantités β et d'une seule manière.

Si, après avoir exprimé φ au moyen des quantités β, nous en prenons la variation, nous aurons

$$\delta\varphi = \frac{d\varphi}{d\beta_1}\delta\beta_1 + \frac{d\varphi}{d\beta_2}\delta\beta_2 + \ldots + \frac{d\varphi}{d\beta_{2(n-r)}}\delta\beta_{2(n-r)} = \sum_\beta \frac{d\varphi}{d\beta}\delta\beta,$$

ou encore

$$\delta\varphi = \sum_\beta \frac{d\varphi}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_1}\delta q_1 + \frac{d\beta}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{d\beta}{dq_n}\delta q_n + \frac{d\beta}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{d\beta}{dp_n}\delta p_n\right).$$

On a ensuite, en différentiant les équations qui relient entre elles les variables,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{df_1}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_1}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_1}{dq_n}\delta q_n + \frac{df_1}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_1}{dp_n}\delta p_n,\\
0 &= \frac{df_2}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_2}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_2}{dq_n}\delta q_n + \frac{df_2}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_2}{dp_n}\delta p_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Désignons par

$$\mu_1(\beta_1), \quad \mu_2(\beta_1), \quad \ldots, \quad \mu_{2r}(\beta_1)$$

des fonctions des variables q_i, p_i que nous considérons comme correspondant à β_1, par

$$\mu_1(\beta_2),\quad \mu_2(\beta_2),\quad \ldots,\quad \mu_{2r}(\beta_2)$$

d'autres fonctions des mêmes variables et correspondant à β_2, etc., et posons généralement

$$\frac{d\varphi}{d\beta_1}\mu_i(\beta_1)+\frac{d\varphi}{d\beta_2}\mu_i(\beta_2)+\ldots+\frac{d\varphi}{d\beta_{2r}}\mu_i(\beta_{2r})=\sum\nolimits_\beta \frac{d\varphi}{d\beta}\mu_i(\beta),$$

i étant susceptible des valeurs 1, 2, ..., $2r$; puis, après avoir multiplié les $2r$ équations précédentes respectivement par

$$\sum\nolimits_\beta \frac{d\varphi}{d\beta}\mu_1(\beta),\quad \sum\nolimits_\beta \frac{d\varphi}{d\beta}\mu_2(\beta),\quad \ldots,$$

ajoutons-les à la variation de φ; nous aurons

$$\begin{aligned}\delta\varphi=\sum\nolimits_\beta \frac{d\varphi}{d\beta}\Big\{&\left[\frac{d\beta}{dq_1}+\mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_1}+\mu_2(\beta)\frac{df_2}{dq_1}+\ldots\right]\delta q_1+\ldots\\&+\left[\frac{d\beta}{dq_i}+\mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_i}+\mu_2(\beta)\frac{df_2}{dq_i}+\ldots\right]\delta q_i+\ldots\\&+\left[\frac{d\beta}{dp_i}+\mu_1(\beta)\frac{df_1}{dp_i}+\mu_2(\beta)\frac{df_2}{dp_i}+\ldots\right]\delta p_i+\ldots\Big\}.\end{aligned}$$

Les coefficients des variations des quantités q_i, p_i forment un groupe de dérivées virtuelles de la fonction φ (n° 8), et ces dérivées sont données par les deux formules

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}\left(\frac{d\varphi}{dq_i}\right)&=\sum\nolimits_\beta \frac{d\varphi}{d\beta}\left[\frac{d\beta}{dq_i}+\mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_i}+\ldots+\mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dq_i}\right],\\\left(\frac{d\varphi}{dp_i}\right)&=\sum\nolimits_\beta \frac{d\varphi}{d\beta}\left[\frac{d\beta}{dp_i}+\mu_1(\beta)\frac{df_1}{dp_i}+\ldots+\mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dp_i}\right],\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles i est susceptible des valeurs 1, 2, ..., n.

Les quantités renfermées entre parenthèses dans les seconds membres sont les dérivées virtuelles de β. Prenons pour les multiplicateurs $\mu_1(\beta)$, $\mu_2(\beta)$, ... les quantités qui satisfont aux $2r$ équations

$$(7)\quad\left\{\begin{array}{l}\quad\star\quad+[f_2,f_1]\mu_2(\beta)+[f_3,f_1]\mu_3(\beta)+\ldots+[f_{2r},f_1]\mu_{2r}(\beta)=[f_1,\beta],\\ [f_1,f_2]\mu_1(\beta)+\quad\star\quad+[f_3,f_2]\mu_3(\beta)+\ldots+[f_{2r},f_2]\mu_{2r}(\beta)=[f_2,\beta],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{array}\right.$$

alors le groupe des dérivées virtuelles de chaque fonction β deviendra celui des dérivées principales. Désignons, pour abréger, ces dérivées principales par

$$\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right), \left(\frac{d\beta}{dp_i}\right),$$

et les dérivées virtuelles de φ deviendront

$$\left(\frac{d\varphi}{dq_i}\right)=\sum_\beta \frac{d\varphi}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right), \quad \left(\frac{d\varphi}{dp_i}\right)=\sum_\beta \frac{d\varphi}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right), \tag{8}$$

Or je dis que ces dernières dérivées de φ sont principales. En effet, les dérivées principales de β satisfont aux $2r$ équations renfermées dans la suivante :

$$\begin{gathered}\frac{df_i}{dp_1}\left(\frac{d\beta}{dq_1}\right)+\frac{df_i}{dp_2}\left(\frac{d\beta}{dq_2}\right)+\ldots+\frac{df_i}{dp_n}\left(\frac{d\beta}{dq_n}\right)\\ -\frac{df_i}{dq_1}\left(\frac{d\beta}{dp_1}\right)-\frac{df_i}{dq_2}\left(\frac{d\beta}{dp_2}\right)-\ldots-\frac{df_i}{dq_n}\left(\frac{d\beta}{dp_n}\right)=0,\end{gathered}$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, 2r$ (n° 9). On en conclut immédiatement que les expressions (8) satisfont aux mêmes équations dans lesquelles la lettre β est remplacée par la lettre φ, et, par suite, les expressions (8) sont bien les dérivées principales de φ.

Ainsi les dérivées principales de la fonction φ peuvent se représenter, d'une part, par

$$\begin{gathered}\frac{d\varphi}{dq_i}+\lambda_1\frac{df_1}{dq_i}+\lambda_2\frac{df_2}{dq_i}+\ldots+\lambda_{2r}\frac{df_{2r}}{dq_i},\\ \frac{d\varphi}{dp_i}+\lambda_1\frac{df_1}{dp_i}+\lambda_2\frac{df_2}{dp_i}+\ldots+\lambda_{2r}\frac{df_{2r}}{dp_i},\end{gathered}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ayant pour valeurs les solutions des équations (4) du n° 9, où k est égal à $2r$; et, d'autre part, elles peuvent se mettre sous la forme (6), en prenant pour les fonctions $\mu(\beta)$ celles qui satisfont aux équations (7). En égalant ces deux genres d'expressions, on obtient le théorème suivant :

Théorème IV. — *On imagine $2n - 2r$ fonctions, désignées généralement par β, des variables $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, et l'on suppose entre ces variables les $2r$ équations*

$$f_1=0, \quad f_2=0, \quad \ldots, \quad f_{2r}=0;$$

alors, en désignant par φ une fonction quelconque de ces variables, on aura les deux formules

$$\frac{d\varphi}{dq_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dq_i} + \ldots + \lambda_{2r} \frac{df_{2r}}{dq_i} = \sum_\beta \frac{d\varphi}{d\beta}\left[\frac{d\beta}{dq_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_i} + \ldots + \mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dq_i}\right],$$

$$\frac{d\varphi}{dp_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dp_i} + \ldots + \lambda_{2r} \frac{df_{2r}}{dp_i} = \sum_\beta \frac{d\varphi}{d\beta}\left[\frac{d\beta}{dp_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dp_i} + \ldots + \mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dp_i}\right],$$

les quantités $\mu_1(\beta)$, $\mu_2(\beta)$, ... étant les solutions des équations (7) et les quantités λ_1, λ_2, ... étant les solutions des mêmes équations dans lesquelles les seconds membres sont remplacés par

$$[f_1, \varphi], \quad [f_2, \varphi], \quad \ldots, \quad [f_{2r}, \varphi].$$

Nous ne considérerons plus désormais de dérivées virtuelles que celles qui sont principales; nous pouvons donc convenir maintenant que les dérivées placées entre parenthèses représenteront les dérivées principales, et le théorème précédent sera renfermé d'une manière concise et très-élégante dans les deux formules (8), qui montrent que le théorème élémentaire relatif à la dérivée d'une fonction composée peut être étendu aux dérivées principales d'une fonction composée, renfermant plusieurs variables qui ne sont pas indépendantes.

12. Examinons le cas particulier où le nombre des équations qui lient les variables q_i, p_i se réduit à deux

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0;$$

le nombre des fonctions β est $2n - 2$, et nous avons la formule

$$\left(\frac{d\varphi}{dq_i}\right) = \sum_\beta \frac{d\varphi}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right)$$

avec

$$\left(\frac{d\varphi}{dq_i}\right) = \frac{d\varphi}{dq_i} + \frac{[f_2, \varphi]}{[f_1, f_2]}\frac{df_1}{dq_i} - \frac{[f_1, \varphi]}{[f_1, f_2]}\frac{df_2}{dq_i},$$

$$\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right) = \frac{d\beta}{dq_i} + \frac{[f_2, \beta]}{[f_1, f_2]}\frac{df_1}{dq_i} - \frac{[f_1, \beta]}{[f_1, f_2]}\frac{df_2}{dq_i};$$

si l'on donne à φ la valeur particulière p_s p ise parmi les variables p_i,

$p_2, \ldots, p_n$, cette formule devient

$$\sum_\beta \frac{dp_s}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right) = \frac{1}{[f_1, f_2]}\left(\frac{df_2}{dq_s}\frac{df_1}{dq_i} - \frac{df_1}{dq_s}\frac{df_2}{dq_i}\right).$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA DYNAMIQUE DANS LE CAS D'ÉQUATIONS DE CONDITION ENTRE LES VARIABLES.

13. Désignons par $q_1, q_2, \ldots, q_n$ des variables propres à déterminer la position d'un système de points matériels en mouvement et sollicités par des forces ; supposons, de plus, que les liaisons du système soient exprimées par r équations de condition entre les variables q_i :

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_r = 0. \tag{1}$$

Alors $p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant n variables auxiliaires, on a une équation de cette forme

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \frac{dq_2}{dt}\delta p_2 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta \mathrm{H}, \tag{2}$$

H étant une fonction des variables q_i, p_i.

En différentiant les équations (1), nous avons

$$\begin{gathered}
\frac{df_1}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_1}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_1}{dq_n}\delta q_n = 0, \\
\frac{df_2}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_2}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_2}{dq_n}\delta q_n = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

Multiplions les équations précédentes respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et ajoutons-les à l'équation (2) ; alors, si l'on dispose convenablement de ces multiplicateurs, les coefficients des variations δq_i seront égaux dans les deux membres de l'équation résultante, et l'on aura

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_n}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_n}, \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= -\frac{d\mathrm{H}}{dq_1} - \lambda_1\frac{df_1}{dq_1} - \lambda_2\frac{df_2}{dq_1} - \ldots - \lambda_r\frac{df_r}{dq_1}, \\
\frac{dp_2}{dt} &= -\frac{d\mathrm{H}}{dq_2} - \lambda_1\frac{df_1}{dq_2} - \lambda_2\frac{df_2}{dq_2} - \ldots - \lambda_r\frac{df_r}{dq_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
\frac{dp_n}{dt} &= -\frac{d\mathrm{H}}{dq_n} - \lambda_1\frac{df_1}{dq_n} - \lambda_2\frac{df_2}{dq_n} - \ldots - \lambda_r\frac{df_r}{dq_n}.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Si l'on différentie une des équations (1), $f_i = 0$, on a

$$\frac{df_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{df_i}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots = 0,$$

ou

$$\frac{df_i}{dq_1}\frac{dH}{dp_1} + \frac{df_i}{dq_2}\frac{dH}{dp_2} + \ldots = 0,$$

ou encore

$$[f_i, H] = 0;$$

désignons, pour abréger, cette équation par $F_i = 0$, et nous aurons les r équations

$$(5) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_r = 0,$$

auxquelles satisfont les quantités q_i, p_i.

Différentions les équations (5), puis appliquons les équations (3) et (4), et nous aurons les équations

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} [F_1, H] = [f_1, F_1]\lambda_1 + [f_2, F_1]\lambda_2 + \ldots + [f_r, F_1]\lambda_r, \\ [F_2, H] = [f_1, F_2]\lambda_1 + [f_2, F_2]\lambda_2 + \ldots + [f_r, F_2]\lambda_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

desquelles on pourra tirer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ pour les porter dans les équations (4).

On peut remarquer entre les coefficients les égalités faciles à démontrer :

$$[f_1, F_2] = [f_2, F_1], \quad \ldots, \quad [f_u, F_v] = [f_v, F_u], \quad \ldots,$$

Généralisation du problème du numéro précédent.

14. Supposons encore que les $2n$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ satisfassent à l'équation

$$(7) \qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \frac{dq_2}{dt}\delta p_2 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta H,$$

où H est fonction des variables q_i, p_i; mais supposons de plus que les variables q_i, p_i satisfassent à un nombre pair d'équations

$$(8) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{2r} = 0.$$

En introduisant des multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2r}$ comme dans la question précédente, on déduit des équations (7) et (8) les $2n$ équations suivantes :

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dp_1} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dp_1} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dp_1} + \ldots + \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dp_1}, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dp_2} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dp_2} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dp_2} + \ldots + \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dp_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{dq_1} - \lambda_1 \dfrac{df_1}{dq_1} - \lambda_2 \dfrac{df_2}{dq_1} - \ldots - \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dq_1}, \\ \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{dq_2} - \lambda_1 \dfrac{df_1}{dq_2} - \lambda_2 \dfrac{df_2}{dq_2} - \ldots - \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dq_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

En différentiant une des équations (8), $f_i = 0$, on a

$$\frac{df_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{df_i}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{df_i}{dp_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{df_i}{dp_2}\frac{dp_2}{dt} + \ldots = 0,$$

et, en remplaçant les dérivées des q_i, p_i d'après les équations (A) et (B), on a

$$[f_i, \mathrm{H}] + \lambda_1 [f_i, f_1] + \lambda_2 [f_i, f_2] + \ldots = 0;$$

les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2r}$ satisfont donc aux $2r$ équations suivantes :

$$\begin{array}{l} \quad\star \qquad + [f_2, f_1]\lambda_2 \quad + [f_3, f_1]\lambda_3 + \ldots + [f_r, f_1]\lambda_r \\ + [f_{r+1}, f_1]\lambda_{r+1} + [f_{r+2}, f_1]\lambda_{r+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + [f_{2r}, f_1]\lambda_{2r} = [f_1, \mathrm{H}], \\ \quad [f_1, f_2]\lambda_1 \qquad \star \qquad + [f_3, f_2]\lambda_3 + \ldots + [f_r, f_2]\lambda_r \\ + [f_{r+1}, f_2]\lambda_{r+1} + [f_{r+2}, f_2]\lambda_{r+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + [f_{2r}, f_2]\lambda_{2r} = [f_2, \mathrm{H}], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad [f_1, f_{2r}]\lambda_1 \quad + [f_2, f_{2r}]\lambda_2 \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots + [f_r, f_{2r}]\lambda_r \\ + [f_{r+1}, f_{2r}]\lambda_{r+1} + [f_{r+2}, f_{2r}]\lambda_{r+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \quad \star \quad = [f_{2r}, \mathrm{H}], \end{array}$$

et on pourra les tirer de ces équations pour les porter dans (A) et (B). Si l'on compare ces équations aux équations (4) du n° 9, on voit que les seconds membres des équations (A) et (B) représentent les dérivées principales de H; les équations (A) et (B) peuvent donc s'écrire, d'après la notation adoptée ci-dessus pour les dérivées principales,

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \left(\dfrac{dH}{dp_1}\right), & \dfrac{dq_2}{dt} = \left(\dfrac{dH}{dp_2}\right), & \ldots, & \dfrac{dq_n}{dt} = \left(\dfrac{dH}{dp_n}\right), \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\left(\dfrac{dH}{dq_1}\right), & \dfrac{dp_2}{dt} = -\left(\dfrac{dH}{dq_2}\right), & \ldots, & \dfrac{dp_n}{dt} = -\left(\dfrac{dH}{dq_n}\right). \end{cases}$$

La question du numéro précédent se déduit de celle-ci, en faisant, comme il a été dit au n° 6,

$$f_{r+1} = F_1 = [f_1, H], \quad f_{r+2} = F_2 = [f_2, H], \quad \ldots.$$

Examinons ce que deviennent alors les équations en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Les r premières de ces équations ont leurs seconds membres nuls, et dans leurs premiers membres les coefficients de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont nuls; on en conclut que les valeurs de $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_{2r}$ s'annulent. Ensuite les r équations suivantes fourniront $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ et coïncideront avec les équations (6) du numéro précédent.

Ainsi les équations (3) et (4) sont aussi de la forme (C), et l'on doit remarquer que les dérivées principales de H par rapport aux p_i coïncident alors avec les dérivées immédiates.

C'est dans la Section suivante que nous ferons des applications de la théorie des dérivées principales.

SECTION VII.

THÉORIE DES PERTURBATIONS.

1. En général dans les sciences physiques, on peut calculer sans beaucoup de peine les phénomènes qui dépendent d'une seule cause; mais, si deux causes agissent sur un phénomène, les calculs présentent presque toujours une difficulté beaucoup plus grande et quelquefois même insurmontable. Cependant il arrive souvent que l'on a à examiner avec une action principale une ou plusieurs actions secondaires, et la solution devient alors moins embarrassante. On résout d'abord la question par approximation en ne s'attachant qu'à l'action principale et l'on cherche ensuite de quelle manière on doit modifier les résultats obtenus pour tenir compte des autres actions et arriver à la précision que l'on désire.

Dans les problèmes de Mécanique, on obtient ordinairement une première approximation, en tenant compte seulement d'une ou de plusieurs forces principales qui agissent sur le système matériel; ensuite on a égard aux autres forces que l'on appelle *perturbatrices*. La solution par première approximation donne lieu à des intégrations qui introduisent un certain nombre de constantes arbitraires et l'on conserve ensuite la forme de la solution obtenue d'abord, en supposant seulement que ces constantes se changent en des variables qui varient très-peu. La théorie des perturbations peut être appliquée avec utilité à beaucoup de problèmes de Mécanique, mais on en fait surtout usage dans l'Astronomie pour laquelle on a imaginé pour la première fois de faire varier les constantes arbitraires.

THÉORÈME SUR LES VARIATIONS DES CONSTANTES ARBITRAIRES.

2. Les équations différentielles de la Dynamique sont renfermées dans la formule

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta \mathrm{H}, \tag{1}$$

et si nous n'avons entre les variables aucune équation de condition, ces équations différentielles sont les suivantes :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dq_i}, \tag{2}$$

i étant susceptible des valeurs 1, 2, ..., n.

Concevons que l'on ait obtenu les valeurs des q_i, p_i qui dépendront de $2n$ constantes arbitraires et de t, et faisons précéder les quantités q_i, p_i et la fonction H de la caractéristique D pour désigner leurs accroissements quand ces constantes subissent de certaines variations.

Multiplions les équations (2) par $\mathrm{D}p_i$ et $-\mathrm{D}q_i$, ajoutons-les et sommons par rapport à i; nous aurons l'équation

$$\Sigma_i (dq_i \mathrm{D}p_i - dp_i \mathrm{D}q_i) = \mathrm{DH}\, dt, \tag{3}$$

qui est entièrement analogue à l'équation (1).

Désignons par Δ une caractéristique qui se rapporte à d'autres variations des constantes arbitraires, et différentions l'équation précédente selon Δ; nous aurons

$$\Sigma_i (d\Delta q_i \mathrm{D}p_i + dq_i \Delta \mathrm{D}p_i - d\Delta p_i \mathrm{D}q_i - dp_i \Delta \mathrm{D}q_i) = \Delta \mathrm{DH}\, dt.$$

Nous obtenons une équation également vraie en permutant les caractéristiques D et Δ

$$\Sigma_i (d\mathrm{D}q_i \Delta p_i + dq_i \mathrm{D}\Delta p_i - d\mathrm{D}p_i \Delta q_i - dp_i \mathrm{D}\Delta q_i) = \mathrm{D}\Delta \mathrm{H}\, dt.$$

Retranchons ces deux équations l'une de l'autre, en remarquant que les deux signes $\mathrm{D}\Delta$ et $\Delta\mathrm{D}$ sont équivalents, et nous obtenons

$$\Sigma_i\, d(\Delta q_i \mathrm{D}p_i - \mathrm{D}q_i \Delta p_i) = 0;$$

nous en concluons que l'expression

$$(4) \qquad \Sigma_i(\Delta q_i\, \mathrm{D}p_i - \mathrm{D}q_i\, \Delta p_i)$$

est indépendante du temps. C'est l'important théorème donné par Lagrange (*Mécanique analytique*, 2e Partie, Section V, § 1).

Si les variations selon Δ se rapportent à l'accroissement infiniment petit $\Delta\alpha$ d'une seule constante α et les variations selon D à l'accroissement $\mathrm{D}\beta$ d'une autre constante β, le théorème de Lagrange exprime que la formule

$$\sum\left(\frac{dq_i}{d\alpha}\frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dq_i}{d\beta}\frac{dp_i}{d\alpha}\right)$$

est indépendante du temps.

3. On peut généraliser le théorème précédent en supposant que les variables q_i, p_i satisfont à l'équation (1) et que les variables q_i satisfont aussi à des équations de condition; on obtient ainsi un système d'équations qui se rencontrent aussi dans la Dynamique; mais, pour généraliser davantage, supposons des équations de condition qui renferment non-seulement les variables q_i, mais encore les variables p_i,

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{2r} = 0.$$

D'après ce que nous avons vu au nº 14 de la Section VI, nous aurons, au lieu des équations (2), les suivantes :

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{d\mathrm{H}}{dp_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_i}\right),$$

dont les seconds membres représentent les dérivées principales de la fonction H. Remarquons ensuite que l'expression

$$\left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_1}\right)\mathrm{D}q_1 + \ldots + \left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_n}\right)\mathrm{D}q_n + \left(\frac{d\mathrm{H}}{dp_1}\right)\mathrm{D}p_1 + \ldots + \left(\frac{d\mathrm{H}}{dp_n}\right)\mathrm{D}p_n$$

est égale à la même expression dans laquelle on supprimerait les parenthèses des dérivées, c'est-à-dire à DH; nous obtiendrons donc encore l'équation (3), et, en suivant les calculs faits ci-dessus, nous trouverons de nouveau que l'expression (4) est indépendante du temps.

FORMULES DE PERTURBATION.

4. Si nous supposons $2n$ variables q_i, p_i satisfaisant aux équations différentielles canoniques

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i}, \tag{1}$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$, les valeurs de ces variables en fonction de t contiennent $2n$ constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$; représentons-les par

$$\left\{\begin{array}{l} q_i = \varphi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}), \\ p_i = \psi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}). \end{array}\right. \tag{2}$$

Supposons qu'après avoir obtenu ces intégrales on se propose de résoudre le même problème où H est remplacé par $H + \Omega$, Ω étant en général très-petit en comparaison de H; Ω est désigné sous le nom de *fonction perturbatrice*.

On adopte encore les expressions (2) pour formes des nouvelles solutions, mais en considérant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ comme des fonctions de t qu'il s'agit de déterminer. D'après cela, les dérivées partielles des quantités q_i, p_i prises par rapport à t, en considérant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ comme constants, satisfont encore aux équations (1); mais les dérivées totales des expressions (2) par rapport à t seront égales aux seconds membres des équations (1) dans lesquelles H est remplacé par $H + \Omega$, et l'on aura

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dq_i}{dt} + \dfrac{dq_i}{d\alpha_1}\dfrac{d\alpha_1}{dt} + \dfrac{dq_i}{d\alpha_2}\dfrac{d\alpha_2}{dt} + \ldots = \dfrac{dH}{dp_i} + \dfrac{d\Omega}{dp_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dt} + \dfrac{dp_i}{d\alpha_1}\dfrac{d\alpha_1}{dt} + \dfrac{dp_i}{d\alpha_2}\dfrac{d\alpha_2}{dt} + \ldots = -\dfrac{dH}{dq_i} - \dfrac{d\Omega}{dq_i}. \end{array}\right. \tag{a}$$

En retranchant les équations (1) des deux dernières, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dq_i}{d\alpha_1}d\alpha_1 + \dfrac{dq_i}{d\alpha_2}d\alpha_2 + \ldots = \dfrac{d\Omega}{dp_i}dt, \\ \dfrac{dp_i}{d\alpha_1}d\alpha_1 + \dfrac{dp_i}{d\alpha_2}d\alpha_2 + \ldots = -\dfrac{d\Omega}{dq_i}dt. \end{array}\right. \tag{b}$$

Multiplions ces équations par δp_i, $-\delta q_i$; ajoutons-les et sommons l'équation résultante par rapport à i, qui est susceptible des valeurs 1, 2, ..., n; nous aurons

$$(3) \quad \delta\Omega = \sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha_1}\delta p_i - \frac{dp_i}{d\alpha_1}\delta q_i\right)\frac{d\alpha_1}{dt} + \sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha_2}\delta p_i - \frac{dp_i}{d\alpha_2}\delta q_i\right)\frac{d\alpha_2}{dt} + \ldots$$

Les quantités q_i, p_i étant données par les équations (2), leurs variations proviennent de celles des constantes devenues variables α_1, α_2, ..., et l'on a

$$\delta q_i = \frac{dq_i}{d\alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{dq_i}{d\alpha_2}\delta\alpha_2 + \ldots, \quad \delta p_i = \frac{dp_i}{d\alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{dp_i}{d\alpha_2}\delta\alpha_2 + \ldots;$$

d'ailleurs les variations de α_1, α_2, ... sont indépendantes; on aura donc, en égalant dans les deux membres de l'équation (3) les coefficients de la variation d'une même quantité α que nous désignerons par β,

$$\frac{d\Omega}{d\beta} = \sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha_1}\frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dp_i}{d\alpha_1}\frac{dq_i}{d\beta}\right)\frac{d\alpha_1}{dt} + \sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha_2}\frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dp_i}{d\alpha_2}\frac{dq_i}{d\beta}\right)\frac{d\alpha_2}{dt} + \ldots$$

Si l'on pose généralement

$$\sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha}\frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dp_i}{d\alpha}\frac{dq_i}{d\beta}\right) = (\alpha, \beta),$$

cette formule deviendra

$$\frac{d\Omega}{d\beta} = (\alpha_1, \beta)\frac{d\alpha_1}{dt} + (\alpha_2, \beta)\frac{d\alpha_2}{dt} + \ldots$$

ou

$$(4) \quad \frac{d\Omega}{d\beta} = \sum_{s=1}^{s=2n} (\alpha_s, \beta)\frac{d\alpha_s}{dt}.$$

C'est la formule de perturbation donnée par Lagrange (*Œuvres de Lagrange*, t. VI, p. 713). Les coefficients (α_s, β) y sont indépendants du temps, d'après ce que nous avons vu au numéro précédent. En faisant dans cette formule successivement $\beta = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$, on aura $2n$ équations pour déterminer les dérivées de ces $2n$ quantités par rapport à t.

5. Dans ce qui précède, on a supposé que les forces perturbatrices donnent lieu à une fonction de forces Ω; s'il n'en est pas ainsi et que la fonction perturbatrice Ω n'existe plus, nous représenterons encore par $\delta\Omega$ l'expression

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

X, Y, Z étant les composantes de chaque force perturbatrice suivant trois axes de coordonnées rectangulaires (Section I, n° 20); transformons cette expression dans les variables q_i, p_i; les dérivées $\frac{d\Omega}{dq_i}$, $\frac{d\Omega}{dp_i}$ du numéro précédent devront être remplacées par les coefficients de δq_i, δp_i dans la nouvelle expression de $\delta\Omega$, et l'on arrivera de la même manière à l'équation (3). On remplacera dans cette expression de $\delta\Omega$ les δq_i, δp_i par

$$\frac{dq_i}{d\alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{dq_i}{d\alpha_2}\delta\alpha_2 + \ldots, \quad \frac{dp_i}{d\alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{dp_i}{da_2}\delta\alpha_2 + \ldots;$$

la dérivée $\frac{d\Omega}{d\alpha_i}$ dans le calcul du numéro précédent devra être remplacée par le coefficient de $\delta\alpha_i$ dans $\delta\Omega$; on arrivera donc à une formule semblable à la formule (4), dans laquelle $\frac{d\Omega}{d\beta}$ sera seulement remplacé par le coefficient de $\delta\beta$ dans $\delta\Omega$.

6. On peut généraliser la formule (4). En effet, supposons que l'on ait la formule

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta H$$

avec les $2r$ équations de condition

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{2r} = 0.$$

Les valeurs des quantités q_i, p_i en fonction de t ne renfermeront plus que $2(n-r)$ constantes arbitraires α_1, α_2, ..., $\alpha_{2(n-r)}$, et l'on aura, au lieu des équations (2),

$$q_i = \varphi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2(n-r)}),$$
$$p_i = \psi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2(n-r)}).$$

Pour appliquer le raisonnement précédent, il n'y aura qu'à remplacer, dans les seconds membres des équations (a) et (b), les dérivées qui y entrent par des dérivées principales, et l'on arrivera de même à l'équation

$$(5) \qquad \frac{d\Omega}{d\beta} = \sum_{s=1}^{s=2(n-r)} (\alpha_s, \beta) \frac{d\alpha_s}{dt}.$$

Si les fonctions α peuvent se partager en deux groupes de $n-r$ quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-r}$, qui satisfont aux équations

$$(\alpha_i, \alpha_k) = 0, \quad (\beta_i, \beta_k) = 0, \quad (\alpha_i, \beta_k) = 0, \quad (\alpha_i, \beta_i) = 1,$$

où i et k sont susceptibles des valeurs $1, 2, \ldots, n-r$, et assujettis seulement à être différents entre eux, l'équation (3) devient

$$\delta\Omega = -\frac{d\beta_1}{dt}\delta\alpha_1 - \frac{d\beta_2}{dt}\delta\alpha_2 - \ldots - \frac{d\beta_{n-r}}{dt}\delta\alpha_{n-r}$$
$$+\frac{d\alpha_1}{dt}\delta\beta_1 + \frac{d\alpha_2}{dt}\delta\beta_2 + \ldots + \frac{d\alpha_{n-r}}{dt}\delta\beta_{n-r}.$$

et fournit les $2(n-r)$ équations suivantes, renfermées d'ailleurs dans l'équation (5) :

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{d\Omega}{d\beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\alpha_i},$$

i étant susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n \quad r$.

7. Proposons-nous ensuite de trouver des formules de perturbation qui donnent explicitement les dérivées des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ par rapport au temps; ces formules fourniront par conséquent la résolution des équations (4) ou (5) par rapport à ces dérivées.

Supposons encore entre les $2n$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ les $2r$ équations finies

$$(6) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{2r} = 0,$$

et les équations différentielles

$$(7) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_i}\right),$$

dans lesquelles i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$, et où H peut renfermer t outre les variables q_i, p_i.

Concevons que l'on ait intégré ces équations et que l'on ait trouvé pour intégrales les $2n - 2r$ équations

$$(8)\quad \begin{cases} \beta_1 = \psi_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t), \\ \beta_2 = \psi_2(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_{2(n-r)} = \psi_{2(n-r)}(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t), \end{cases}$$

dans lesquelles $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2(n-r)}$ désignent des constantes arbitraires qui n'entrent pas dans les seconds membres.

S'il s'agit d'un problème de Mécanique et que la fonction de forces ne dépende pas de t, H en est aussi indépendant, et alors on peut supposer que t ne se présente que dans une des équations (8) et additivement à la constante qui y entre.

Imaginons ensuite que l'on ait à résoudre le même problème, dans lequel la fonction H est seulement remplacée par $H + \Omega$, la fonction perturbatrice Ω étant en général une très-petite quantité. Les équations (6) subsistent donc encore, mais les équations (7) sont remplacées par

$$(9)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{d(H+\Omega)}{dp_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{d(H+\Omega)}{dq_i}\right).$$

Alors les fonctions des q_i, p_i qui forment les seconds membres des équations (8) n'ont plus de valeurs constantes; mais leurs dérivées sont en général de très-petites quantités qu'il s'agit de déterminer. Ces fonctions, que nous désignerons par la lettre β, sont définies par les équations (8) qui, jointes aux équations (6), pourraient servir à exprimer les $2n$ variables q_i, p_i, au moyen des quantités β et de t, et d'une seule manière.

Désignons par $\alpha = \psi$ une intégrale du problème *sans perturbations*, c'est-à-dire une des équations (8), dans laquelle α est la constante arbitraire. En différentiant cette équation, on a

$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\psi}{dq_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{d\psi}{dp_i}\frac{dp_i}{dt}\right) + \frac{d\psi}{dt},$$

et le dernier terme est nul, si t ne se présente pas explicitement dans ψ; comme $\psi = \alpha$ est une intégrale des équations (7), si l'on tire $\frac{dq_i}{dt}$, $\frac{dp_i}{dt}$ de ces équations pour les porter dans la dernière, on aura identiquement

$$(10) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{d\psi}{dq_i} \left(\frac{dH}{dp_i} \right) - \frac{d\psi}{dp_i} \left(\frac{dH}{dq_i} \right) \right] + \frac{d\psi}{dt}.$$

Passons ensuite au problème *avec perturbations*. Nous devrons alors regarder, dans l'équation $\alpha = \psi$, α comme une fonction de t, et, en la différentiant, nous aurons

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\psi}{dq_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{d\psi}{dp_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{d\psi}{dt},$$

les dérivées des variables q_i, p_i étant fournies par les équations (9), et il en résulte

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ \frac{d\psi}{dq_i} \left(\frac{d(H+\Omega)}{dp_i} \right) - \frac{d\psi}{dp_i} \left(\frac{d(H+\Omega)}{dq_i} \right) \right\} + \frac{d\psi}{dt}.$$

Retranchons l'équation (10) de cette dernière et dans le résultat mettons la lettre α au lieu de ψ, ce qui ne peut plus maintenant entraîner de confusion, et nous aurons

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{d\alpha}{dq_i} \left(\frac{d\Omega}{dp_i} \right) - \frac{d\alpha}{dp_i} \left(\frac{d\Omega}{dq_i} \right) \right].$$

La fonction Ω peut s'exprimer au moyen des quantités β et de t, et d'une seule manière, et, d'après une propriété démontrée sur les dérivées principales (Section VI, n° 11), les dérivées principales de Ω par rapport aux variables q_i, p_i sont données par les formules

$$\left(\frac{d\Omega}{dq_i} \right) = \sum_\beta \frac{d\Omega}{d\beta} \left(\frac{d\beta}{dq_i} \right), \quad \left(\frac{d\Omega}{dp_i} \right) = \sum_\beta \frac{d\Omega}{d\beta} \left(\frac{d\beta}{dp_i} \right);$$

on a donc

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_\beta \frac{d\Omega}{d\beta} \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{d\alpha}{dq_i} \left(\frac{d\beta}{dp_i} \right) - \frac{d\alpha}{dp_i} \left(\frac{d\beta}{dq_i} \right) \right].$$

On a d'ailleurs

$$\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right)=\frac{d\beta}{dq_i}+\mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_i}+\mu_2(\beta)\frac{df_2}{dq_i}+\ldots+\mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dq_i},$$

$$\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right)=\frac{d\beta}{dp_i}+\mu_1(\beta)\frac{df_1}{dp_i}+\mu_2(\beta)\frac{df_2}{dp_i}+\ldots+\mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dp_i},$$

en prenant pour $\mu_1(\beta)$, $\mu_2(\beta)$, ... les quantités qui satisfont aux $2r$ équations

$$\begin{array}{l} \quad\star\quad +[f_2,f_1]\,\mu_2(\beta)+[f_3,f_1]\,\mu_3(\beta)+\ldots+[f_{2r},f_1]\,\mu_{2r}(\beta)=[f_1,\beta],\\ [f_1,f_2]\,\mu_1(\beta)+\quad\star\quad+[f_3,f_2]\,\mu_3(\beta)+\ldots+[f_{2r},f_2]\,\mu_{2r}(\beta)=[f_2,\beta],\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}$$

En remplaçant les dérivées principales des quantités β par les expressions ci-dessus, on a enfin

$$\frac{d\alpha}{dt}=\sum_\beta\frac{d\Omega}{d\beta}\left([\alpha,\beta]+\mu_1(\beta)[\alpha,f_1]+\mu_2(\beta)[\alpha,f_2]+\ldots+\mu_{2r}(\beta)[\alpha,f_{2r}]\right),$$

qui est la formule cherchée et que j'ai donnée dans le *Journal de M. Liouville*, p. 298, t. XIX; 1874.

Cette dernière formule peut être considérée comme provenant de la résolution des équations (5) par rapport aux dérivées des éléments troublés; donc, puisque les quantités (α_s, β) sont indépendantes du temps t, il en est de même de l'expression

$$[\alpha,\beta]+\mu_1(\beta)[\alpha,f_1]+\mu_2(\beta)[\alpha,f_2]+\ldots.$$

La formule de perturbation qui vient d'être obtenue est évidemment exacte, quelles que soient les limites entre lesquelles Ω puisse varier; mais, si Ω reste toujours très-petit, ainsi que ses dérivées, les quantités $\frac{d\alpha}{dt}$ seront elles-mêmes très-petites, les quantités α varieront très-peu, et l'on aura une valeur approchée d'une des quantités α par une quadrature, en regardant le coefficient de $\frac{d\Omega}{d\beta}$ comme constant, et en ne regardant comme variable, dans Ω qui est fonction des α et de t, que la quantité t.

8. Si l'on suppose qu'il n'existe aucune équation de condition entre les variables q_i, p_i, on obtient la formule de perturbation donnée par Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XV, p. 288)

$$\frac{d\alpha}{dt}=\sum_\beta \frac{d\Omega}{d\beta}[\alpha,\beta]; \tag{11}$$

mais cette formule se simplifie encore souvent beaucoup.

Concevons, en effet, qu'on ait obtenu la moitié des intégrales d'un système d'équations canoniques

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{dH_1}{dp_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{dH_1}{dq_i}, \tag{12}$$

i étant susceptible des valeurs 1, 2, ..., n et H_1 indépendant de t. Désignons ces intégrales par

$$H_1=\alpha_1,\quad H_2=\alpha_2,\quad \ldots,\quad H_n=\alpha_n, \tag{a}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des constantes arbitraires, et supposons que les premiers membres satisfassent aux équations

$$[H_u, H_s]=0, \tag{b}$$

u et s étant deux quelconques des nombres 1, 2, ..., n; alors, en tirant $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des équations (a) pour les porter dans l'expression

$$p_1dq_1+p_2dq_2+\ldots+p_ndq_n,$$

elle deviendra la différentielle totale d'une fonction V (Section II, n°19) et, si l'on fait $H_1=H_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, V est une solution complète de l'équation

$$H_1\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \ldots, \frac{dV}{dq_n}\right)=\alpha_1;$$

et les intégrales restantes seront

$$\frac{dV}{d\alpha_1}=t+\beta_1,\quad \frac{dV}{d\alpha_2}=\beta_2,\quad \ldots,\quad \frac{dV}{d\alpha_n}=\beta_n,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots$ étant des constantes arbitraires. Désignons par $L_1, L_2, \ldots, L_n$ ce que deviennent les premiers membres de ces intégrales, quand on y remplace $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ d'après les équations (a), nous aurons les intégrales

$$(c) \qquad L_1 = t + \beta_1, \quad L_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad L_n = \beta_n.$$

D'après ce que nous avons vu (Section II, n° 22), on a les équations

$$(d) \qquad [L_u, L_s] = 0, \quad [H_u, H_s] = 0, \quad [H_u, L_u] = -1,$$

u, s étant deux quelconques des nombres $1, 2, \ldots, n$, mais différents entre eux.

Dans le problème des perturbations, les quantités α_u, β_s cessent d'être des constantes pour devenir des fonctions représentées par les premiers membres des équations (a) et (c), et l'on peut écrire, au lieu des équations (b) et (d),

$$(e) \qquad [\alpha_u, \alpha_s] = 0, \quad [\beta_u, \beta_s] = 0, \quad [\alpha_u, \beta_s] = 0, \quad [\alpha_u, \beta_u] = -1;$$

donc les équations de perturbation de Poisson deviennent

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{d\Omega}{d\alpha_i}.$$

Les formules (4) de Lagrange (n° 4) devant se réduire aux mêmes équations, on en conclut que l'on a

$$(f) \qquad (\alpha_u, \alpha_s) = 0, \quad (\beta_u, \beta_s) = 0, \quad (\alpha_u, \beta_s) = 0, \quad (\alpha_u, \beta_s) = -1.$$

C'est ce qu'il est aisé de démontrer directement. En effet, on a obtenu (Section II, n° 21) les quatre équations

$$\frac{d\beta_i}{dq_s} = \frac{dp_s}{d\alpha_i}, \quad \frac{d\alpha_i}{dq_s} = -\frac{dp_s}{d\beta_i},$$

$$\frac{d\beta_i}{dp_s} = -\frac{dq_s}{d\alpha_i}, \quad \frac{d\alpha_i}{dp_s} = \frac{dq_s}{d\beta_i},$$

u et s étant deux quelconques des nombres $1, 2, \ldots, n$. D'après cela, on a

$$(\alpha_u, \alpha_s) = \sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha_u}\frac{dp_i}{d\alpha_s} - \frac{dp_i}{d\alpha_u}\frac{dq_i}{d\alpha_s} \right)$$

$$= \sum_i \left(-\frac{d\beta_u}{dp_i}\frac{d\beta_s}{dq_i} + \frac{d\beta_u}{dq_i}\frac{d\beta_s}{dp_i} \right) = [\beta_u, \beta_s].$$

et l'on trouve de même

$$(\alpha_s, \beta_u) = [\alpha_u, \beta_s], \quad (\beta_u, \beta_s) = [\alpha_u, \alpha_s].$$

Les équations (e) reviennent donc aux équations (f).

9. Nous avons vu que l'expression $[\alpha, \beta]$ de la formule (11), qui est fonction des q_i, p_i et de t, ne dépend pas de t; elle ne change donc pas si l'on y fait $t = 0$ et que l'on y remplace les variables q_i, p_i par les valeurs a_i, b_i qu'elles prennent pour $t = 0$; or, si l'on pose

$$\alpha = \theta(q_1, q_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots, t),$$

cette fonction α, qui est constante en vertu des équations (12), a aussi pour valeur

$$\alpha = \theta(a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, 0);$$

ainsi α et de même β sont des fonctions de $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, et, en faisant $t = 0$ dans le second membre de

$$[\alpha, \beta] = \sum_i \left(\frac{d\alpha}{dq_i}\frac{d\beta}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i}\frac{d\beta}{dq_i}\right),$$

on a

$$(g) \qquad [\alpha, \beta] = \sum_i \left(\frac{d\alpha}{da_i}\frac{d\beta}{db_i} - \frac{d\beta}{da_i}\frac{d\alpha}{db_i}\right).$$

Il suit encore de là que, si l'on prend pour α, β les quantités a_i, b_i, on aura

$$[a_u, a_s] = 0, \quad [b_u, b_s] = 0, \quad [a_u, b_s] = 0, \quad [a_u, b_u] = +1,$$

u, s étant deux quelconques des nombres 1, 2, ..., n et différents entre eux, et la formule (11) fournira les équations

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{d\Omega}{db_i}, \quad \frac{db_i}{dt} = -\frac{d\Omega}{da_i},$$

entièrement semblables aux équations (12).

Remarquons aussi que, si l'on fait dans la formule (g) $\beta = b_i$ et $\beta = a_i$, on a

$$[\alpha, b_i] = \frac{d\alpha}{da_i}, \quad [\alpha, a_i] = -\frac{d\alpha}{db_i}.$$

Théorème relatif à l'intégration d'un certain système d'équations différentielles.

10. Nous venons de voir (nos 7, 8) que le coefficient de $\frac{d\Omega}{d\beta}$ dans la formule

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_\beta \frac{d\Omega}{d\beta}[\alpha, \beta] \tag{1}$$

est indépendant de t; autrement dit, $[\alpha, \beta]$ est une fonction des q_i, p_i et de t, et, lorsqu'on y remplacera les variables q_i, p_i en fonction des constantes de l'intégration et de t, le temps t en disparaîtra. On voit, d'après cela, que l'expression $[\alpha, \beta]$ est une fonction des seconds membres des intégrales (8) des équations

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i}; \tag{2}$$

on retrouve donc ce théorème démontré précédemment (Section II, n° 25) : *Si* $\alpha =$ const. *et* $\beta =$ const. *sont deux intégrales d'un système d'équations canoniques, la formule*

$$[\alpha, \beta] = \text{const.}$$

est aussi une intégrale de ces équations, à moins que le premier membre ne soit identiquement constant.

Ce théorème s'est d'abord présenté à Poisson, qui démontra que le coefficient $[\alpha, \beta]$ de la formule (1) est indépendant du temps, et à Lagrange, qui prouve ensuite la même chose dans sa *Mécanique analytique;* Jacobi est cependant le premier qui ait énoncé ce théorème sous la forme précédente et comme une proposition de Calcul intégral.

Le théorème précédent peut être étendu à un système d'équations plus général. Supposons, en effet, entre les $2n$ variables q_i, p_i, l'équation

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta H \tag{a}$$

et les équations de condition

$$(b) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{2r} = 0,$$

nous avons vu, à la fin du n° 7, que l'expression

$$[\alpha, \beta] + \mu_1(\beta)[\alpha, f_1] + \mu_2(\beta)[\alpha, f_2] + \ldots$$

est indépendante de t et l'on en conclut, comme ci-dessus, ce théorème :

Si $\alpha =$ const. *et* $\beta =$ const. *sont deux intégrales des équations* (a) *et* (b), *l'équation*

$$[\alpha, \beta] + \mu_1(\beta)[\alpha, f_1] + \mu_2(\beta)[\alpha, f_2] + \ldots = \text{const.}$$

est une intégrale des mêmes équations, à moins que le premier membre ne soit identiquement constant.

Propriétés de l'expression $[\alpha, \beta]$.

11. Nous avons démontré (Section VI, n° 5) qu'on peut remplacer les $2n$ variables q_i, p_i qui satisfont aux équations (a) et (b) par $2n - 2r$ variables $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-r}, P_1, P_2, \ldots, P_{n-r}$ qui ne sont reliées par aucune équation de condition, et qui satisfont aux $2n - 2r$ équations différentielles canoniques renfermées dans les deux suivantes :

$$(1) \qquad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{dH}{dP_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{dH}{dQ_i},$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n - r$.

La quantité que nous avons désignée précédemment par $[\alpha, \beta]$ est formée avec les dérivées de α et β par rapport aux variables q_i, p_i; formons une quantité qui se compose de la même manière au moyen des dérivées de α et β par rapport aux variables Q_i, P_i, et posons

$$\begin{aligned}[\alpha, \beta]' = {} & \frac{d\alpha}{dQ_1}\frac{d\beta}{dP_1} + \frac{d\alpha}{dQ_2}\frac{d\beta}{dP_2} + \ldots + \frac{d\alpha}{dQ_{n-r}}\frac{d\beta}{dP_{n-r}} \\ & - \frac{d\alpha}{dP_1}\frac{d\beta}{dQ_1} - \frac{d\alpha}{dP_2}\frac{d\beta}{dQ_2} - \ldots - \frac{d\alpha}{dP_{n-r}}\frac{d\beta}{dQ_{n-r}}.\end{aligned}$$

Comme il n'existe pas d'équation de condition entre les variables Q_i,

P_i, la formule de perturbation par l'emploi de ces variables se change en la suivante :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_\beta \frac{d\Omega}{d\beta}[\alpha, \beta]'.$$

On a aussi (n° 7)

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_\beta \frac{d\Omega}{d\beta}([\alpha, \beta] + \mu_1(\beta)[\alpha, f_1] + \mu_2(\beta)[\alpha, f_2] + \ldots),$$

et comme les coefficients des dérivées de Ω doivent être égaux dans les deux formules, on en conclut cette formule remarquable

$$(2) \quad [\alpha, \beta]' = [\alpha, \beta] + \mu_1(\beta)[\alpha, f_1] + \mu_2(\beta)[\alpha, f_2] + \ldots + \mu_{2r}(\beta)[\alpha, f_{2r}],$$

qui, dans le cas particulier où les variables q_i, p_i ne sont elles-mêmes assujetties à aucune équation de condition, se réduit à

$$[\alpha, \beta]' = [\alpha, \beta].$$

Dans ce qui précède, les fonctions α et β ne sont pas quelconques; car

$$(3) \qquad \alpha = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}$$

sont deux des intégrales des équations (1), et en différentiant les équations (3), puis ayant égard aux équations (1), on a les deux équations

$$(4) \qquad [\alpha, \mathrm{H}]' + \frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad [\beta, \mathrm{H}]' + \frac{d\beta}{dt} = 0,$$

auxquelles satisfont ces deux fonctions. Cependant on peut démontrer qu'en prenant pour α, β deux fonctions quelconques des variables q_i, p_i, on a encore l'équation (2). En effet, concevons que l'on ait obtenu la formule qui détermine l'expression $[\alpha, \beta]'$ au moyen des variables q_i, p_i, lorsque α et β sont deux fonctions quelconques. Les variables q_i, p_i sont des fonctions des variables Q_i, P_i qui ne dépendent pas de la fonction H, ni de t, ainsi qu'on a vu (Section VI, n° 5); pareillement la formule (2) qui donne $[\alpha, \beta]'$ est indépendante de H. D'après cela, si l'on suppose ensuite que, dans cette formule, α et β satisfassent aux équations (4), il ne s'ensuivra aucune réduction; donc, réciproquement, la formule (2), trouvée dans la supposition que les équations (4) sont satisfaites, peut être étendue à deux fonctions quelconques.

12. Le théorème renfermé dans la formule (2) a été démontré par Jacobi, dans le cas très-particulier où les équations de condition ne renferment que les variables q_i, au moyen de calculs extrêmement laborieux; il se propose de découvrir la formule relative à ce cas (*Nova methodus*, etc., § 38, t. III de ses Mémoires) : *Quum propter rei utilitatem, tum propter egregiam ejus difficultatem, tum quia accurate examinare juvat quæcunque spectant ad expressionem* $[\alpha, \beta]$ *tantis proprietatibus gaudentem*. Alors cette formule prend une forme différente et plus compliquée. Dans ce cas, en effet, en désignant, comme au n° 14 de la Section VI, par

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_r = 0$$

les équations de condition données, il faut faire dans la formule (2)

$$f_{r+1} = [f_1, \mathrm{H}], \quad f_{r+2} = [f_2, \mathrm{H}], \quad \ldots, \quad f_{2r} = [f_r, \mathrm{H}].$$

Il convient aussi de faire remarquer que la formule que Jacobi a démontrée s'appuie sur une transformation particulière des variables q_i, p_i en les variables Q_i, P_i, ce qui l'oblige à donner deux pages entières à l'énoncé de son problème. Dans mon théorème, au contraire, la transformation des q_i, p_i en les Q_i, P_i se faisant dans un système canonique quelconque, son énoncé est très-simple.

13. Au lieu de la fonction donnée pour α, mettons dans la formule (2) l'expression

$$(\alpha) = \alpha + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_{2r} f_{2r},$$

en choisissant pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ les multiplicateurs qui donnent à α sa forme principale. D'après ce que nous avons vu au n° 9 (Section VI), on a

$$[(\alpha), f_1] = 0, \quad [(\alpha), f_2] = 0, \quad \ldots, \quad [(\alpha), f_{2r}] = 0.$$

Donc tous les termes qui suivent le premier dans le second membre de la formule (2) s'annulent, et l'on a

$$(5) \qquad [\alpha, \beta]' = [\alpha + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{2r} f_{2r}, \beta].$$

Il est évident que nous n'avons pas eu à mettre (α) au lieu de α dans le premier membre ; car α, dans ce premier membre, est exprimé au moyen des variables Q_i, P_i, ce qui ne peut avoir lieu que d'une seule manière.

De même, si β a sa forme principale, on a

$$\mu_1(\beta) = 0, \quad \mu_2(\beta) = 0, \quad \ldots, \quad \mu_{2r}(\beta) = 0,$$

et l'on conclut encore de la formule (2)

$$[\alpha, \beta]' = [\alpha, (\beta)]$$

ou

$$(6) \qquad [\alpha, \beta]' = [\alpha, \beta + \mu_1(\beta) f_1 + \mu_2(\beta) f_2 + \ldots + \mu_{2r}(\beta) f_{2r}].$$

Aux formules (5) et (6) on peut évidemment ajouter cette autre

$$[\alpha, \beta]' = [(\alpha), (\beta)] = [\alpha + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots, \ \beta + \mu_1 f + \mu_2 f + \ldots]$$

et cette dernière revient encore à la suivante, qui est formée au moyen des dérivées principales de α et β :

$$[\alpha, \beta]' = \left(\frac{d\alpha}{dq_1}\right)\left(\frac{d\beta}{dp_1}\right) + \left(\frac{d\alpha}{dq_2}\right)\left(\frac{d\beta}{dp_2}\right) + \ldots$$
$$- \left(\frac{d\alpha}{dp_1}\right)\left(\frac{d\beta}{dq_1}\right) - \left(\frac{d\alpha}{dp_2}\right)\left(\frac{d\beta}{dq_2}\right) - \ldots.$$

Les formules précédentes montrent que l'on peut choisir les formes des fonctions α, β, d'après les équations de condition, de manière à rendre l'expression $[\alpha, \beta]$ indépendante du choix des variables q_i, p_i.

Remarquons, enfin, une propriété de l'expression (α, β) analogue à celles que nous venons d'obtenir pour l'expression $[\alpha, \beta]$. Nous avons trouvé au n° 6 la formule de perturbation

$$\frac{d\Omega}{d\beta} = \sum_{s=1}^{s=2(n-r)} (\alpha_s, \beta) \frac{d\alpha_s}{dt},$$

en posant

$$(\alpha_s, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{dq_i}{d\alpha_s} \frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dp_i}{d\alpha_s} \frac{dq_i}{d\beta} \right).$$

Si l'on suppose que les variables q_i, p_i soient transformées en les variables Q_i, P_i qui satisfont aux équations (1), on doit remplacer l'expression du coefficient de $\frac{d\alpha_s}{dt}$ dans cette formule par cette autre

$$(\alpha_s, \beta)' = \sum_{i=1}^{i=(n-r)} \left(\frac{dQ_i}{d\alpha_s} \frac{dP_i}{d\beta} - \frac{dP_i}{d\alpha_s} \frac{dQ_i}{d\beta} \right).$$

On en conclut que ces deux expressions sont égales et qu'on a

$$(\alpha_s, \beta)' = (\alpha_s, \beta).$$

FORMULES DE PERTURBATION RELATIVES AU MOUVEMENT D'UNE PLANÈTE.

14. Imaginons généralement un système matériel soumis à des forces données et dont on ait formé les équations différentielles et les équations intégrales du mouvement. Si à un instant du mouvement des forces d'impulsion viennent à agir sur le système, après cet instant les équations différentielles du mouvement seront encore les mêmes, et il n'y aura de changées dans les intégrales que les valeurs des constantes provenant des intégrations. Pour obtenir les valeurs nouvelles des constantes, il faudra calculer les vitesses de chaque point provenant des impulsions, et, d'après les positions de ces points à l'instant du choc et leurs vitesses modifiées par les impulsions, on pourra calculer les valeurs nouvelles des constantes arbitraires.

Si un système matériel est sollicité par des forces perturbatrices, on peut imaginer qu'on remplace ces forces par des impulsions infiniment petites, agissant pendant chaque instant. Au commencement de chaque instant, les positions des points seront les mêmes que s'il n'y avait pas d'impulsions pendant cet instant, les vitesses seront aussi les mêmes, les accélérations seront seulement changées. Les constantes arbitraires varient de quantités infiniment petites à la fin de chaque instant et par conséquent deviennent des quantités tout à fait variables.

D'où l'on conclut que les formules qui donneront les positions des points matériels et les composantes de leurs vitesses resteront les mêmes que s'il n'y avait pas de forces perturbatrices, les constantes arbitraires qui sont renfermées dans ces formules se changeant seulement en quantités variables. On retrouve ainsi sous une forme géométrique les considérations qui ont servi précédemment de point de départ à la théorie des perturbations (nº 4), en regardant la fonction perturbatrice Ω comme indépendante des quantités p_i.

Supposons ensuite qu'il s'agisse du problème d'un point attiré par un centre fixe, et concevons qu'à la force provenant de ce centre on ajoute d'autres forces perturbatrices. Les éléments de l'orbite qui formaient les constantes arbitraires du problème deviennent variables. A chaque instant l'ellipse variable aura pour foyer le centre d'attraction, passera par le point attiré et sera tangente à la trajectoire du point.

Équations différentielles canoniques du mouvement troublé.

15. Si l'on désigne par V la solution complète trouvée (Section III, nº 1) de l'équation aux différences partielles relatives à l'attraction d'un point vers un centre fixe, et qu'on représente, en changeant les notations, par h, β, k les trois constantes renfermées dans V, on a pour les intégrales du mouvement les trois équations

$$\frac{dV}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dV}{d\beta} = \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \frac{dV}{dk} = \frac{\pi}{2} - g,$$

τ, α, g étant trois autres constantes arbitraires.

D'après ce que l'on a vu (Section III, nº 2), h est la constante de l'équation des forces vives, k l'axe du plan invariable, β sa projection sur la normale à un plan fixe sur lequel on compte les longitudes ; $-\tau$ représente le temps du passage de la planète au périhélie, α la longitude du nœud, g la distance angulaire du périhélie au nœud.

Ces six constantes s'appellent les *éléments de l'orbite*. Si l'on suppose que le corps soit non-seulement sollicité par le centre, mais encore par d'autres actions, et que la fonction de force soit augmentée de $-\Omega$, alors on adoptera encore les formules du mouvement elliptique pour celles du mouvement de la planète, mais on y regardera comme variables les six éléments h, β, k, τ, α, g, et, d'après le n° 8, les valeurs de ces quantités seront fournies par ces six équations

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\Omega}{dh},$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\alpha}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\Omega}{d\beta},$$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d\Omega}{dg}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{d\Omega}{dk}.$$

Autre forme des équations du mouvement troublé.

16. D'après ce que nous avons vu (n° 6), au lieu des six équations précédentes, on peut mettre la suivante :

$$(1) \qquad \delta\Omega = -\frac{dh}{dt}\delta\tau - \frac{d\beta}{dt}\delta\alpha + \frac{dk}{dt}\delta g + \frac{d\tau}{dt}\delta h + \frac{d\alpha}{dt}\delta\beta - \frac{dg}{dt}\delta k.$$

En désignant par m la masse de la planète et par l^2 l'attraction du centre fixe sur l'unité de masse à l'unité de distance, par $2a$ le grand axe de l'orbite, par e son excentricité et par i son inclinaison sur le plan fixe, on a (Section III, n° 2)

$$h = -\frac{l^2}{2a}, \quad k = l\sqrt{ma(1-e^2)}, \quad \beta = k\cos i.$$

Nous allons aux quantités h, β, k substituer a, e, i. En différentiant ces trois formules, on a

$$dh = \frac{l^2}{2a^2}da, \quad dk = \frac{ml^2}{2k}[(1-e^2)da - 2ae\,de],$$

$$d\beta = \frac{ml^2}{2k}[(1-e^2)\cos i\,da - 2ae\cos i\,de] - k\sin i\,di,$$

et l'on en déduit trois autres en remplaçant la caractéristique d par δ. Substituons dh, dk, $d\beta$, δh, δk, $\delta\beta$, tirés de ces équations, dans l'équation (1), et nous aurons

$$\frac{d\Omega}{da}\delta a+\frac{d\Omega}{de}\delta e+\frac{d\Omega}{di}\delta i+\frac{d\Omega}{d\tau}\delta\tau+\frac{d\Omega}{d\alpha}\delta\alpha+\frac{d\Omega}{dg}\delta g$$

$$=-\frac{l^2}{2a^2}\frac{da}{dt}\delta\tau+\left[-\frac{ml^2}{2k}(1-e^2)\cos i\frac{da}{dt}+\frac{ml^2ae}{k}\cos i\frac{de}{dt}+k\sin i\frac{di}{dt}\right]\delta\alpha$$

$$+\left[\frac{ml^2(1-e^2)}{2k}\frac{da}{dt}-\frac{ml^2ae}{k}\frac{de}{dt}\right]\delta g$$

$$+\frac{l^2}{2a^2}\frac{d\tau}{dt}\delta a+\frac{d\alpha}{dt}\left[\frac{ml^2}{2k}(1-e^2)\cos i\,\delta a-\frac{ml^2ae}{k}\cos i\,\delta e-k\sin i\,\delta i\right]$$

$$-\frac{dg}{dt}\frac{ml^2}{2k}[(1-e^2)\delta a-2ae\,\delta e].$$

Les coefficients des variations δa, δe, ... doivent être égaux dans les deux membres, et l'on en déduit facilement les six équations suivantes:

$$\frac{da}{dt}=\frac{-2a^2}{l^2}\frac{d\Omega}{d\tau},$$

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{-1}{l\sqrt{ma(1-e^2)}\sin i}\frac{d\Omega}{di},$$

$$\frac{de}{dt}=\frac{-a(1-e^2)}{l^2e}\frac{d\Omega}{d\tau}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{ma}\,le}\frac{d\Omega}{dg},$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{1}{l\sqrt{ma(1-e^2)}\sin i}\frac{d\Omega}{d\alpha}-\frac{\cos i}{l\sin i\sqrt{ma(1-e^2)}}\frac{d\Omega}{dg},$$

$$\frac{d\tau}{dt}=\frac{2a^2}{l^2}\frac{d\Omega}{da}+\frac{a(1-e^2)}{l^2e}\frac{d\Omega}{de},$$

$$\frac{dg}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{ma}\,le}\frac{d\Omega}{de}-\frac{\cos i}{l\sin i\sqrt{ma(1-e^2)}}\frac{d\Omega}{di}.$$

Les éléments a, e, i, τ, α, g étant supposés varier très-peu, si on les regarde comme constants dans les seconds membres de ces équations et t qui se trouve dans Ω comme seule variable, on pourra calculer ces quantités avec une grande approximation pendant un temps assez considérable à l'aide des quadratures indiquées par les formules précédentes.

17. A la cinquième de ces équations, qui donne τ, il sera utile d'en substituer une autre. A cet effet, au lieu d'examiner la valeur de τ, nous considérerons celle de l'anomalie moyenne

$$\lambda = n(t+\tau),$$

où l'on a $n = la^{-\frac{3}{2}}$.

τ n'entre dans Ω que par λ qui le renferme; on a donc

$$(2) \qquad \frac{da}{dt} = -\frac{2a^2}{l^2}\frac{d\Omega}{d\tau} = -\frac{2a^2 n}{l^2}\frac{d\Omega}{d\lambda}.$$

Si l'on désigne par $\left(\frac{d\Omega}{da}\right)$ la dérivée de Ω prise par rapport à a, en supposant constant λ, qui renferme a, on a

$$(3) \qquad \frac{d\tau}{dt} = \frac{2a^2}{l^2}\left(\frac{d\Omega}{da}\right) + \frac{2a^2}{l^2}\frac{d\Omega}{d\lambda}(t+\tau)\frac{dn}{da} + \frac{a(1-e^2)}{l^2 e}\frac{d\Omega}{de}.$$

D'ailleurs, la différentiation de λ donne

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + n\frac{d\tau}{dt} + (t+\tau)\frac{dn}{da}\frac{da}{dt},$$

et, en y substituant les formules (2) et (3), on a

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{2a^{\frac{1}{2}}}{l}\left(\frac{d\Omega}{da}\right) + \frac{1-e^2}{l\sqrt{a}\,e}\frac{d\Omega}{de}.$$

Équations différentielles du mouvement relatif, de corps qui s'attirent, autour de l'un d'entre eux.

18. Soit M, m_1, m_2, ... les masses de corps qui s'attirent en raison inverse du carré des distances, et il s'agit de trouver le mouvement relatif des corps m_1, m_2, ... autour du premier M, qui sera le Soleil s'il s'agit du système planétaire. Désignons par r_1, r_2, ... les distances de m_1, m_2, ... au corps M et, en général, par $r_{i,s}$ la distance de m_i à m_s. Soient (X, Y, Z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... les coordonnées de M, m_1, m_2, ... par rapport à un système fixe d'axes rectangulaires de coordonnées.

Si nous posons, en général,

$$x_i = X + \xi_i, \quad y_i = Y + \eta_i, \quad z_i = Z + \zeta_i,$$

ξ_i, η_i, ζ_i seront les coordonnées de la masse m_i par rapport à trois axes rectangulaires mobiles menés par M et parallèles aux axes fixes. Le corps M étant attiré par m_i, il en résulte une force accélératrice dont la composante suivant l'axe des x est $\frac{m_i \xi}{r_i^3}$, et l'on en conclut l'équation

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \sum \frac{m\xi}{r^3};$$

on a de même

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = \sum \frac{m\eta}{r^3},$$
$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \sum \frac{m\zeta}{r^3}.$$

Examinons ensuite les trois équations relatives à m_i; la masse m_i est attirée par M avec une force accélératrice dont la composante suivant l'axe des x est $-\frac{M\xi_i}{r_i^3}$; elle subit ensuite de la part des corps $m_1, m_2, \ldots$ des forces dont la résultante a pour composante, suivant l'axe des x, $\frac{1}{m_i}\frac{dV}{d\xi_i}$, en posant

$$V = \sum \frac{m_i m_s}{r_{i,s}},$$

(Section I, n° 5); on a donc

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{M\xi_i}{r_i^3} + \frac{1}{m_i}\frac{dV}{d\xi_i},$$

et puisqu'on a

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} + \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} + \sum \frac{m\xi}{r^3},$$

il en résulte la première des trois équations semblables

$$\frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = -\frac{M\xi_i}{r_i^3} - \sum \frac{m\xi}{r^3} + \frac{1}{m_i}\frac{dV}{d\xi_i},$$
$$\frac{d^2 \eta_i}{dt^2} = -\frac{M\eta_i}{r_i^3} - \sum \frac{m\eta}{r^3} + \frac{1}{m_i}\frac{dV}{d\eta_i},$$
$$\frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} = -\frac{M\zeta_i}{r_i^3} - \sum \frac{m\zeta}{r^3} + \frac{1}{m_i}\frac{dV}{d\zeta_i}.$$

Posons

$$\Omega = \frac{-1}{m_i} \mathrm{V} + \sum_s \frac{m_s(\xi_i\xi_s + \eta_i\eta_s + \zeta_i\zeta_s)}{r_s^3},$$

le signe sommatoire Σ s'étendant à toutes les masses $m_1, m_2, \ldots,$ excepté à la masse m_i, et il en résultera, en faisant $\mathrm{M} + m_i = \mu$, les trois équations

$$\frac{d^2\xi_i}{dt^2} = -\frac{\mu\xi_i}{r_i^3} - \frac{d\Omega}{d\xi_i},$$

$$\frac{d^2\eta_i}{dt^2} = -\frac{\mu\eta_i}{r_i^3} - \frac{d\Omega}{d\eta_i},$$

$$\frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = -\frac{\mu\zeta_i}{r_i^3} - \frac{d\Omega}{d\zeta_i}.$$

Si l'on néglige d'abord les termes qui dépendent de Ω, on obtient un mouvement elliptique pour celui du corps m_i autour de M; on prendra ensuite Ω pour la fonction perturbatrice, et l'on voit que cette fonction change d'un corps à l'autre.

Sur la forme des termes de la fonction perturbatrice.

19. Cherchons la fonction perturbatrice pour le corps m_1; en ne considérant que la partie qui provient du corps m_2, on a

$$\Omega = -\frac{m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)}{r_2^3},$$

si l'on désigne maintenant par (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées de m_1, m_2 par rapport au centre du Soleil.

On a

$$r_{1,2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2),$$

et si l'on désigne par a, a_1 les demi-grands axes des orbites de m_1, m_2, par e, e_1 les excentricités, par $-\tau$, $-\tau_1$ les temps des passages des corps à leurs périhélies, et par n, n_1 leurs vitesses angulaires, on a, d'après les formules du mouvement elliptique,

$$(a)\qquad \begin{cases} \dfrac{r_1}{a} = 1 - e\cos n(t+\tau) - \dfrac{e^2}{2}\left[\cos 2n(t+\tau) - 1\right] + \ldots, \\ \dfrac{r_2}{a_1} = 1 - e_1\cos n_1(t+\tau_1) - \dfrac{e_1^2}{2}\left[\cos 2n_1(t+\tau_1) - 1\right] + \ldots. \end{cases}$$

en faisant

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad n_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{a_1^3}},$$

avec

$$\mu = \mathrm{M} + m_1, \quad \mu_1 = \mathrm{M} + m_2.$$

Soient α la longitude du nœud de l'orbite du corps m sur le plan des x, y; i l'inclinaison de l'orbite sur ce plan, et g la distance angulaire du périhélie à la ligne des nœuds.

Par le centre du Soleil, menons dans le plan de l'orbite deux axes rectangulaires, dont l'un passe par le périhélie, et désignons par X, Y les coordonnées du corps m_1, situé sur l'orbite, par rapport à ces deux axes. Alors, en appliquant les formules du n° 2 de la Section IV, et désignant par Φ la distance angulaire de la planète m au périhélie, puis par p, p', p'' les cosinus de l'angle de l'axe des X avec ceux des x, y, z, et par q, q', q'' les cosinus de l'angle de l'axe des Y avec les mêmes axes, on aura, en comptant la longitude α à partir de l'axe des x,

$$\begin{aligned} x_1 &= p\mathrm{X} + q\mathrm{Y} = r_1(p\cos\Phi + q\sin\Phi), \\ y_1 &= p'\mathrm{X} + q'\mathrm{Y} = r_1(p'\cos\Phi + q'\sin\Phi), \\ z_1 &= p''\mathrm{X} + q''\mathrm{Y} = r_1(p''\cos\Phi + q''\sin\Phi), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} p &= -\cos i\sin\alpha\sin g + \cos\alpha\cos g, \\ q &= -\cos i\sin\alpha\cos g - \cos\alpha\sin g, \\ p' &= \cos i\cos\alpha\sin g + \sin\alpha\cos g, \\ q' &= \cos i\cos\alpha\cos g - \sin\alpha\sin g, \\ p'' &= \sin i\sin g, \\ q'' &= \sin i\cos g. \end{aligned}$$

L'anomalie Φ, d'après les formules du mouvement elliptique, a pour développement

$$\Phi = n(t+\tau) + 2e\sin n(t+\tau) + \frac{5}{4}e^2\sin 2n(t+\tau) + \ldots,$$

qu'on peut écrire, pour abréger,

$$(b) \qquad \Phi = n(t+\tau) + \mathrm{L},$$

et l'on aura

$$\sin\Phi = \sin n(t+\tau)\cos\mathrm{L} + \cos n(t+\tau)\sin\mathrm{L},$$
$$\cos\Phi = \cos n(t+\tau)\cos\mathrm{L} - \sin n(t+\tau)\sin\mathrm{L},$$

$\sin\mathrm{L}$ et $\cos\mathrm{L}$ pouvant être développés suivant les puissances de e.

Représentons par les mêmes lettres que pour le corps m_1 les quantités relatives au corps m_2, mais affectées de l'indice 1. Nous aurons

$$\begin{aligned} x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = r_1r_2\big[& (pp_1 + p'p'_1 + p''p''_1)\cos\Phi\cos\Phi_1 \\ & + (pq_1 + p'q'_1 + p''q''_1)\cos\Phi\sin\Phi_1 \\ & + (p_1q + p'_1q' + p''_1q'')\cos\Phi_1\sin\Phi \\ & + (qq_1 + q'q'_1 + q''q''_1)\sin\Phi\sin\Phi_1\big]. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{1,2} = & (pp_1 + p'p'_1 + p''p''_1)\cos n(t+\tau)\cos n_1(t+\tau_1) \\ & + (pq_1 + p'q'_1 + p''q''_1)\cos n(t+\tau)\sin n_1(t+\tau_1) \\ & + (p_1q + p'_1q' + p''_1q'')\cos n_1(t+\tau_1)\sin n(t+\tau) \\ & + (qq_1 + q'q'_1 + q''q''_1)\sin n(t+\tau)\sin n_1(t+\tau_1); \end{aligned}$$

supposons $a_1 > a$; l'expression de $\frac{-m_2}{r_{1,2}}$, renfermée dans Ω, contient cette première partie

$$-m_2a_1^{-1}\left(1 - \frac{2a}{a_1}\mathrm{T}_{1,2} + \frac{a^2}{a_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

que je désigne par Θ. Si l'on fait, d'après les formules (a) et (b),

$$r_1 = a(1+u), \qquad r_2 = a_1(1+u_1),$$
$$\Phi = n(t+\tau) + \mathrm{L}, \quad \Phi_1 = n_1(t+\tau_1) + \mathrm{L}_1,$$

on aura

$$\begin{aligned} -\frac{m_2}{r_{1,2}} = \Theta &+ au\frac{d\Theta}{da} + a_1 u_1 \frac{d\Theta}{da_1} \\ &+ \mathrm{L}\frac{d\Theta}{n\,d\tau} + \mathrm{L}_1\frac{d\Theta}{n_1\,d\tau_1} \\ &+ \frac{a^2u^2}{2}\frac{d^2\Theta}{da^2} + aa_1uu_1\frac{d^2\Theta}{da\,da_1} + \frac{a_1u_1^2}{2}\frac{d^2\Theta}{da_1^2} \\ &+ \frac{\mathrm{L}^2}{2}\frac{d^2\Theta}{n^2d\tau^2} + \mathrm{LL}_1\frac{d^2\Theta}{nn_1\,d\tau\,d\tau_1} + \frac{\mathrm{L}_1^2}{2}\frac{d^2\Theta}{n_1d\tau_1^2} + \ldots. \end{aligned}$$

Θ pourra être développé en série convergente dont tous les termes sont de la forme

$$(\alpha) \qquad \mathrm{A}\cos(\mathrm{N}t + l),$$

A, l étant constants et N de la forme

$$in + i_1 n_1,$$

dans laquelle i, i_1 sont des nombres entiers; les dérivées de Θ peuvent être développées de la même manière; enfin on en peut dire autant de u^2, uu_1, u_1^2, L^2, LL_1, L_1^2. Donc la quantité $\frac{-m_2}{r_{1,2}}$ peut être développée en une série dont tous les termes sont de la forme (α).

On voit aisément que $\frac{m_2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)}{r_2^3}$ peut aussi être développé en une série de termes de la forme (α); donc tous les termes de Ω sont de cette forme.

Sur la variation du grand axe de l'orbite d'une planète.

20. Les actions mutuelles des planètes font varier les éléments de eur mouvement elliptique, et les variations de ces éléments se composent de différents termes qu'on distingue en *inégalités périodiques* et en *inégalités séculaires*. Ces dernières inégalités altèrent peu à peu les figures des orbites et leurs positions et peuvent être considérées pendant plusieurs siècles comme proportionnelles au temps.

Pour déterminer les variations séculaires, il faut prendre dans Ω les termes non périodiques, c'est-à-dire les termes (α) du numéro précédent, pour lesquels N et, par suite, i, i_1 sont nuls, et substituer cette partie de Ω à la place de cette fonction même dans les formules de perturbation du n° 16.

La constante τ n'entre dans le terme

$$A \cos(Nt + l)$$

que parce qu'elle est ajoutée à t dans la partie *int* de l'argument; τ disparaît donc des termes constants. Or nous avons, d'après le n° 16,

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2}{\mu}\frac{d\Omega}{d\tau},$$

et, si l'on met à la place de Ω les termes constants de cette fonction, le second membre s'annule; donc le grand axe n'est assujetti à aucune inégalité séculaire.

En première approximation, on considère dans les seconds membres des formules de perturbation les éléments des orbites des planètes comme constants; mais, pour passer à une seconde approximation, on a ensuite égard aux variations de ces éléments, et l'on introduit ainsi dans Ω des termes qui sont du second degré par rapport aux masses perturbatrices. Dans une troisième approximation, on aurait égard aux termes du troisième degré par rapport aux masses; mais on pousse rarement l'approximation jusqu'aux termes du second ordre, et à plus forte raison on néglige les termes du troisième ordre.

Poisson a démontré (*Journal de l'École Polytechnique*, XV^e cahier) que le grand axe de l'orbite d'une planète n'est assujetti à aucune inégalité séculaire, même quand on a égard aux termes de la fonction perturbatrice, qui sont du second ordre par rapport aux masses; dans le *Journal de M. Borchardt* (t. 80), j'ai démontré que ce théorème est encore vrai quand on a égard aux termes de la fonction perturbatrice du troisième ordre.

SECTION VIII.

SUR LES PROBLÈMES DE LA DYNAMIQUE POUR LESQUELS ONT LIEU LES TROIS ÉQUATIONS DE LA CONSERVATION DES AIRES.

1. Nous allons nous occuper dans cette Section des problèmes pour lesquels ont lieu le principe des forces vives et les trois intégrales des aires. Nous avons vu (Section I, n° 13) que ces équations ont lieu toutes les fois que la fonction de forces et que les équations relatives aux liaisons ne changent pas de forme par le mouvement des axes de coordonnées autour de leur origine, et les liaisons satisfont évidemment à cette condition toutes les fois que le système n'est lié à aucun point situé en dehors de l'origine. On sait aussi que ces équations ont lieu pour le système planétaire, si l'on prend pour origine des coordonnées le centre de gravité qui a un mouvement rectiligne et uniforme.

Quoique la position relative des points du système varie, on peut se représenter à chaque instant ce système comme s'il était solide, et les trois axes principaux d'inertie qui y sont relatifs et qui passent par l'origine des coordonnées. La considération du plan qui passe par deux de ces axes principaux nous conduira à différents résultats importants. Puis nous obtiendrons des formules de perturbation très-curieuses; ces formules renferment celles qui ont été données précédemment pour un point attiré par un centre fixe; elles fournissent aussi celles que Poisson a obtenues pour le mouvement d'un corps solide qui n'est sollicité que par des forces perturbatrices. Et, de la sorte, j'explique, ainsi que je l'ai fait (*Journal de M. Liouville*, 1874), la parfaite analogie de deux systèmes de formules qui avaient été trouvées d'abord par des calculs différents.

FORMULE QUI DONNE LA TRACE DE L'ÉQUATEUR, D'UN SYSTÈME DE POINTS EN MOUVEMENT, SUR LE PLAN INVARIABLE.

2. Étant donné un système de points matériels, représentons-nous, à chaque instant, les trois axes principaux d'inertie qui y sont relatifs et qui passent par le point O origine des coordonnées; désignons ensuite sous le nom d'*équateur* un plan mené par deux des trois axes principaux. Nous supposons que le principe des forces vives et les trois équations des aires ont lieu; par conséquent, il existe un plan invariable, c'est-à-dire un plan du maximum des aires qui est fixe.

Outre un système fixe d'axes rectangulaires des X, Y, Z, qui a son origine au point O, imaginons un second système rectangulaire des x, y, z, le plan de l'équateur étant pris pour celui des x, y et l'axe des z étant l'axe d'inertie perpendiculaire à ce plan. Quant à l'axe des x, il est mené d'une manière quelconque dans le plan de l'équateur.

Désignons généralement par m la masse du point dont les coordonnées sont X, Y, Z dans le premier système et x, y, z dans le second; l'axe des z étant un axe principal d'inertie, on a les deux équations

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma m zx = 0,$$

le signe sommatoire Σ se rapportant à toutes les masses m, et l'on passe du premier système de coordonnées au second par les formules

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

a, b, c, ... étant les cosinus des angles des axes des X, Y, Z avec ceux des x, y, z. Désignons : 1° par σ l'angle compris entre l'axe des X et la trace du plan des x, y sur celui des X, Y; 2° par φ l'angle de cette trace avec l'axe des x; 3° par θ l'inclinaison du plan des x, y sur celui des X, Y. Les cosinus a, b, c, ... s'expriment au moyen des trois angles φ, θ, ψ d'après les formules du n° 2 de la Section IV, et si nous posons, comme dans ce numéro,

$$c\,db + c'\,db' + c''\,db'' = \mathrm{P}\,dt,$$
$$a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' = \mathrm{Q}\,dt,$$
$$b\,da + b'\,da' + b''\,da'' = \mathrm{R}\,dt,$$

ces trois quantités représentent les rotations instantanées de l'angle trièdre formé des axes des x, y, z autour de chacun de ces axes, et nous avons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{P} &= \sin\varphi\sin\theta.\sigma' + \cos\varphi.\theta',\\ \mathrm{Q} &= \cos\varphi\sin\theta.\sigma' - \sin\varphi.\theta',\\ \mathrm{R} &= \varphi' + \cos\theta.\sigma'\end{aligned}\right.$$

en désignant par φ', θ', σ' les dérivées de φ, θ, σ par rapport à t.

Enfin, en représentant par u, v, w les composantes de la vitesse absolue du point x, y, z par rapport aux axes principaux, on a

$$u = a\frac{d\mathrm{X}}{dt} + a'\frac{d\mathrm{Y}}{dt} + a''\frac{d\mathrm{Z}}{dt},$$
$$v = b\frac{d\mathrm{X}}{dt} + b'\frac{d\mathrm{Y}}{dt} + b''\frac{d\mathrm{Z}}{dt},$$
$$w = c\frac{d\mathrm{X}}{dt} + c'\frac{d\mathrm{Y}}{dt} + c''\frac{d\mathrm{Z}}{dt}.$$

3. Prenons maintenant pour plan des X, Y le plan invariable; si nous remarquons que l'on a

$$a'' = \sin\theta\sin\varphi,\quad b'' = \sin\theta\cos\varphi,\quad c'' = \cos\theta,$$

en projetant l'axe k du plan invariable, qui est dirigé suivant l'axe des Z, sur les axes des x, y, z, nous aurons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma m(yw - zv) &= k\sin\theta\sin\varphi,\\ \Sigma m(zu - xw) &= k\sin\theta\cos\varphi,\\ \Sigma m(xv - yu) &= k\cos\theta,\end{aligned}\right.$$

car, par exemple, $(xv - yu)\,dt$ représente l'aire, infiniment petite, décrite par la projection de la masse m dans le plan des x, y et autour du point O pendant l'instant dt.

Des équations (1) on déduit

$$\sin^2\theta\, d\sigma = \sin\varphi \sin\theta\,.\,\mathrm{P}\,dt + \cos\varphi \sin\theta\,.\,\mathrm{Q}\,dt, \tag{3}$$

et de la troisième équation (2),

$$\sin^2\theta = \frac{1}{k^2}\left[k^2 - \Sigma m\,(xv - yu)^2\right].$$

Posons

$$\Sigma m\,(xv - yu) = \mathcal{A},$$

$\mathcal{A}$ indiquera deux fois la somme des masses multipliées par la vitesse aréolaire de leurs projections sur le plan de l'équateur, et l'on déduit de l'équation (3) la formule

$$d\sigma = \frac{\mathrm{P}k \sin\varphi \sin\theta + \mathrm{Q}k \cos\varphi \sin\theta}{k^2 - \mathcal{A}^2}\, k\,dt, \tag{4}$$

qui donne le mouvement de la trace de l'équateur sur le plan invariable.

Nous allons donner une autre forme au numérateur de cette formule. Nous avons les deux équations

$$\Sigma m\, yz = 0, \quad \Sigma m\, zx = 0$$

à tout instant du mouvement, et, par conséquent, en les différentiant,

$$\sum my\frac{dz}{dt} + \sum mz\frac{dy}{dt} = 0, \quad \sum mz\frac{dx}{dt} + \sum mx\frac{dz}{dt} = 0. \tag{5}$$

Formons les dérivées de X, Y, Z pour les porter dans les expressions de u, v, w, et nous aurons facilement

$$u = \mathrm{Q}z - \mathrm{R}y + \frac{dx}{dt},$$

$$v = \mathrm{R}x - \mathrm{P}z + \frac{dy}{dt},$$

$$w = \mathrm{P}y - \mathrm{Q}x + \frac{dz}{dt}.$$

On a donc

$$\sum m(yw - zv) = \sum m\left(Py^2 - Qxy + y\frac{dz}{dt} - Rxz + Pz^2 - z\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= P\sum m(z^2 + y^2) + \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) - Q\sum mxy;$$

on a de même

$$\sum m(zu - xw) = Q\sum m(x^2 + z^2) + \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) - P\sum mxy.$$

On déduit des formules (2)

$$k\sin\theta\sin\varphi = AP + \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) - Q\sum mxy,$$

$$k\sin\theta\cos\varphi = BQ + \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) - P\sum mxy,$$

en posant

$$\Sigma m(z^2 + y^2) = A, \quad \Sigma m(x^2 + z^2) = B.$$

En substituant ces expressions dans la formule (4) et en ayant égard aux équations (5), on a la formule

$$d\sigma = \frac{AP^2 + BQ^2 + 2\Sigma m(Py - Qx)\dfrac{dz}{dt} - 2PQ\Sigma mxy}{k^2 - \mathcal{A}^2}\,k\,dt, \tag{6}$$

qui détermine le mouvement de la ligne des nœuds du plan de l'équateur sur le plan invariable.

Nous avons laissé arbitraire l'axe des x. Si nous prenons pour axes des x et des y les deux axes principaux d'inertie situés dans le plan de l'équateur, comme lorsqu'il s'est agi du mouvement d'un corps solide (Section IV, n° 2), nous aurons $\Sigma mxy = 0$, et le dernier terme de la formule (6) s'évanouira. On peut encore simplifier davantage cette formule en prenant pour axe des x l'intersection du plan de l'équateur avec la position infiniment voisine qu'il occupe après l'instant dt, car alors la rotation autour de l'axe des y devient nulle; on a $Q = 0$, par suite,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{AP^2 + 2P\sum my\dfrac{dz}{dt}}{k^2 - \mathcal{A}^2}\,k.$$

DE L'ORDRE DU SYSTÈME DES ÉQUATIONS.

4. Continuons à prendre les deux mêmes systèmes d'axes de coordonnées, par conséquent, le plan invariable pour le plan fixe des X, Y et le plan de l'équateur pour le plan mobile des x, y. Nous avons, pour l'expression de la force vive,

$$2\mathrm{T} = \Sigma m(u^2 + v^2 + w^2),$$

et, d'après les expressions de u, v, w du numéro précédent, nous en concluons

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{P}} = \Sigma m(yw - zv), \quad \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{Q}} = \Sigma m(zu - xw), \quad \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{R}} = \Sigma m(xv - yu),$$

ou, d'après les formules (2),

$$(a) \qquad \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{P}} = k \sin\theta \sin\varphi, \quad \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{Q}} = k \sin\theta \cos\varphi, \quad \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{R}} = k \cos\theta.$$

D'après les équations (1), on peut, aux variables P, Q, R, substituer θ, θ' et σ', et l'on a

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\theta'} = \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{P}} \cos\varphi - \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{Q}} \sin\varphi,$$

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\theta} = \left(\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{P}} \sin\varphi \cos\theta + \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{Q}} \cos\varphi \cos\theta - \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{R}} \sin\theta\right) \sigma',$$

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\sigma'} = \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{P}} \sin\varphi \sin\theta + \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{Q}} \cos\varphi \sin\theta + \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{R}} \cos\theta,$$

puis, en employant les trois équations (a), on a ces trois autres

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\theta'} = 0, \quad \frac{d\mathrm{T}}{d\theta} = 0, \quad \frac{d\mathrm{T}}{d\sigma'} = k,$$

qui, comme les trois premières, sont équivalentes aux équations de la conservation des aires. Ces trois équations remarquables ont été données par M. Radau (*Journal de M. Liouville*, p. 195; 1869).

5. Supposons maintenant que l'on prenne pour axe des x la trace de l'équateur sur le plan des X, Y, en sorte que l'angle φ est nul. Les positions de tous les points du système seront déterminées par leur coordonnées x, y, z par rapport aux axes variables, et par les angles θ et σ, qui déterminent la position de l'angle trièdre des axes des x, y, z. On a d'ailleurs les deux équations

$$(b) \qquad \Sigma mxz = 0, \quad \Sigma myz = 0,$$

qui permettent d'éliminer deux de ces coordonnées.

Le système peut être assujetti à des liaisons; mais, les trois équations de la conservation des aires ayant lieu, nous savons que les équations qui expriment ces liaisons, aussi bien que la fonction de forces U, ne changent pas de forme par un mouvement des axes de coordonnées autour de l'origine. D'après cela, la fonction U et les équations des liaisons étant exprimées au moyen des coordonnées X, Y, Z, si l'on y remplace simplement les lettres X, Y, Z par les lettres x, y, z, on aura une expression exacte de U et des équations équivalentes aux équations de condition données et, par conséquent, la fonction U et ces équations sont indépendantes des angles θ et σ.

Désignons donc par $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ des coordonnées du système matériel par rapport aux axes des x, y, z, réduites au moindre nombre possible d'après ces équations de condition et les équations (b). En se reportant aux expressions de u, v, w, on voit que T est une fonction homogène et du second degré des dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ et de P, Q, R; donc, d'après les expressions de P, Q, R, si l'on pose, en général,

$$\frac{dq_i}{dt} = q'_i,$$

T est une fonction homogène et du second degré de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_\mu$, θ' et σ', qui renferme en outre $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ et θ. Mais, puisque l'on a les deux équations

$$\frac{dT}{d\theta} = 0, \quad \frac{dT}{d\theta'} = 0,$$

qui permettent d'éliminer θ et θ', T peut être considéré comme fonction seulement de $q_1, q_2, \ldots, q_\mu, q'_1, q'_2, \ldots, q'_\mu$ et σ'. Posons

$$\frac{dT}{dq'_1} = p_1, \quad \frac{dT}{dq'_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{dT}{dq'_\mu} = p_\mu,$$

et à ces équations ajoutons

$$\frac{dT}{d\sigma'} = k;$$

au moyen de ces équations nous pourrons exprimer $q'_1, q'_2, \ldots, q'_\mu, \sigma'$ en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_\mu, p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ et k; nous pourrons donc aussi obtenir T en fonction de ces quantités. Nous avons ainsi (Section I, n° 18) ces équations hamiltoniennes, où $H = T - U$,

$$\begin{gathered}
\frac{dq_1}{dt} = \frac{dH}{dp_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{dH}{dq_1}, \\
\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{dq_\mu}{dt} = \frac{dH}{dp_\mu}, \quad \frac{dp_\mu}{dt} = -\frac{dH}{dq_\mu}, \\
\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dH}{dk}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{dH}{d\sigma} = 0.
\end{gathered}$$

Comme H est indépendant de σ et que k est constant, on a un système d'équations de l'ordre 2μ seulement; et, après l'avoir intégré, on aura σ au moyen de l'équation

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dH}{dk},$$

qui indique une quadrature; cette équation doit revenir à l'équation (6) du n° 3.

L'ordre du système peut encore être abaissé de deux unités, en remarquant que $H = \text{const.}$ est une intégrale et que l'élément dt s'élimine immédiatement; l'ordre est donc $2(\mu - 1)$.

Si le système est libre et composé de n corps, on a $\mu = 3n - 2$, à cause des équations (b) et l'ordre des équations est $6n - 6$. Si, de plus, la conservation du mouvement du centre de gravité a lieu, l'ordre peut être abaissé à $6n - 12$; ainsi, dans le problème des trois corps, l'ordre est égal à 6.

6. On peut établir l'équation

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dH}{dk}$$

plus rapidement et sans faire aucun choix des variables, pourvu seulement que σ soit une de ces variables. En effet, après avoir remarqué que U est la même fonction des coordonnées x, y, z que des X, Y, Z et que les équations de liaison s'expriment au moyen des premières coordonnées comme au moyen des secondes, on observera que

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m\,(u^2 + v^2 + w^2),$$

d'après les expressions de P, Q, R, dépend de σ' sans renfermer σ. Ainsi $H = T - U$ est indépendant de σ et, en faisant

$$\frac{dT}{d\sigma'} = k,$$

puis exprimant H au moyen des variables adoptées, de leurs conjuguées et de k, puisque σ et k sont conjugués, on aura, parmi les équations canoniques de la question, les deux suivantes :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dH}{dk}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{dH}{d\sigma} = 0.$$

Ensuite, l'équation aux différences partielles en V (Section II, n° 11) ne renfermant pas σ, elle est de la forme

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_\mu, \frac{dV}{dq_1}, \ldots, \frac{dV}{dq_\mu}, \frac{dV}{d\sigma}\right) = h,$$

et l'on en a une solution complète en faisant

$$V = W + k\sigma,$$

W étant indépendant de σ, et une solution complète de l'équation

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_\mu, \frac{dW}{dq_1}, \ldots, \frac{dW}{dq_\mu}, k\right) = h;$$

ainsi l'on aura pour une des intégrales finies

$$\frac{dV}{dk} = g \quad \text{ou} \quad \frac{dW}{dk} + \sigma = g,$$

g étant une constante arbitraire.

SUR LES INTÉGRALES DES AIRES.

7. Désignons généralement par x_i, y_i, z_i les coordonnées d'un point dont la masse est m_i, par rapport à trois axes rectangulaires et fixes, et par x'_i, y'_i, z'_i leurs dérivées par rapport à t; nous aurons, pour les trois équations des aires,

$$\begin{aligned}
\Sigma m_i(y_i z_i - z_i y'_i) &= \text{const.},\\
\Sigma m_i(z_i x'_i - x_i z'_i) &= \text{const.},\\
\Sigma m_i(x_i y'_i - y_i x'_i) &= \text{const.},
\end{aligned}$$

dont nous représenterons les premiers membres par φ_1, φ_2, φ_3. On a, pour la force vive,

$$2T = \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2);$$

$m_i x'_i$, $m_i y'_i$, $m_i z'_i$ sont les variables conjuguées de x_i, y_i, z_i; désignons par q_s une quelconque des coordonnées et par p_s sa conjuguée, s étant susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, 3n$ si n est le nombre des points; enfin posons, suivant la notation habituelle,

$$[u, v] = \sum_{i=1}^{i=3n} \left(\frac{du}{dq_i} \frac{dv}{dp_i} - \frac{du}{dp_i} \frac{dv}{dq_i} \right),$$

u, v étant deux fonctions quelconques des coordonnées et de leurs dérivées. Alors on obtient facilement les équations

$$[\varphi_2, \varphi_3] = \varphi_1, \quad [\varphi_3, \varphi_1] = \varphi_2, \quad [\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_3.$$

Supposons qu'il existe entre les coordonnées les r équations de condition

(1) $$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_r = 0,$$

qui expriment des liaisons entre les points du système matériel, et posons

$$f_{r+1}=[f_1, \mathrm{H}], \quad f_{r+2}=[f_2, \mathrm{H}], \quad \ldots, \quad f_{2r}=[f_r, \mathrm{H}];$$

les coordonnées peuvent s'exprimer au moyen de $3n-r$ variables seulement $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \ldots, \mathrm{Q}_{3n-r}$, et T peut s'exprimer au moyen de ces mêmes variables et de leurs dérivées $\mathrm{Q}'_1, \mathrm{Q}'_2, \ldots$.

Posons, en général,

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{Q}'_i}=\mathrm{P}_i;$$

les fonctions u, v peuvent s'exprimer au moyen des variables Q_i, P_i, et l'on peut former l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=3n-r}\left(\frac{du}{d\mathrm{Q}_i}\frac{dv}{d\mathrm{P}_i}-\frac{du}{d\mathrm{P}_i}\frac{dv}{d\mathrm{Q}_i}\right),$$

que nous représenterons en général par $[u, v]'$.

Imaginons qu'on exprime les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 au moyen des variables Q_i, P_i, et examinons les trois expressions

$$[\varphi_2, \varphi_3]', \quad [\varphi_3, \varphi_1]', \quad [\varphi_1, \varphi_2]'.$$

Désignons par ψ une fonction quelconque des variables q_i, p_i, et nous aurons, d'après une formule donnée précédemment (Section VII, n° 13),

$$[\psi, \varphi_3]'=[\psi, \varphi_3+\mu_1 f_1+\mu_2 f_2+\ldots+\mu_{2r} f_{2r}], \tag{2}$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2r}$ étant donnés par les $2r$ équations renfermées dans celle-ci :

$$[f_1, f_s]\mu_1+[f_2, f_s]\mu_2+\ldots+[f_{2r}, f_s]\mu_{2r}=[f_s, \varphi_3], \tag{3}$$

où s est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, 2r$.

Si s n'est pas plus grand que r, la fonction f_s désigne le premier membre d'une des équations (1); elle ne dépend que des variables q_i ou x_i, y_i, z_i, et l'on trouve facilement

$$[f_s, \varphi_3]=\sum_i\left(x_i\frac{df_s}{dy_i}-y_i\frac{df_s}{dx_i}\right).$$

Or, par hypothèse, l'équation $f_s = 0$ ne doit pas changer par le mouvement de rotation du système de coordonnées autour de l'axe des z, et il en résulte

$$\sum\left(x_i \frac{df_s}{dy_i} - y_i \frac{df_s}{dx_i}\right) = 0;$$

on a donc, si s n'est pas plus grand que r,

$$(4) \qquad [f_s, \varphi_3] = 0.$$

Je dis ensuite que cette équation a également lieu si s est $> r$. En effet, on a l'identité connue et facile à vérifier (Section II, n° 25)

$$[[\mathrm{H}, f_s], \varphi_3] + [[\varphi_3, \mathrm{H}], f_s] + [[f_s, \varphi_3], \mathrm{H}] = 0.$$

Si s est supposé n'être pas plus grand que r, on a l'équation (4); et, puisque $\varphi_3 =$ const. est une intégrale du problème, on a $[\mathrm{H}, \varphi_3] = 0$; donc le deuxième et le troisième terme de l'identité sont nuls, et elle se réduit à

$$[f_{r+s}, \varphi_3] = 0.$$

On a donc enfin l'équation (4) pour $s = 1, 2, \ldots, 2r$.

Il résulte de là que les seconds membres des équations (3) sont nuls; donc on satisfera à ces équations en prenant $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2r}$ tous égaux à zéro, et l'équation (2) se réduit à

$$[\psi, \varphi_3]' = [\psi, \varphi_3];$$

on obtient deux autres équations en remplaçant dans la dernière φ_3 par φ_1 et φ_2. On aura, en particulier, les trois formules

$$[\varphi_2, \varphi_3]' = [\varphi_2, \varphi_3], \quad [\varphi_3, \varphi_1]' = [\varphi_3, \varphi_1], \quad [\varphi_1, \varphi_2]' = [\varphi_1, \varphi_2];$$

et, par suite, on aura aussi les formules suivantes:

$$[\varphi_2, \varphi_3]' = \varphi_1, \quad [\varphi_3, \varphi_1]' = \varphi_2, \quad [\varphi_1, \varphi_2]' = \varphi_3,$$

que Jacobi a données (*Nova methodus*, etc., § 51, t. III de ses *Mémoires*, p. 234).

ANALOGIE ENTRE DEUX PROBLÈMES.

8. Désignons par $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les coordonnées du système matériel réduites au moindre nombre possible, d'après les équations de condition, et par $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les variables conjuguées. Soit

$$H = T - U = h$$

l'équation des forces vives, h étant une constante arbitraire, et soient, comme ci-dessus,

$$\varphi_1 = \beta_1, \quad \varphi_2 = \beta_2, \quad \varphi_3 = \beta$$

les trois équations des aires, β, β_1, β_2 étant aussi des constantes arbitraires.

D'après ce que nous avons vu à la fin du numéro précédent, on a les trois équations

$$(1) \qquad [\varphi_2, \varphi_3] = \varphi_1, \quad [\varphi_3, \varphi_1] = \varphi_2, \quad [\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_3.$$

Posons

$$L = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2},$$

nous aurons les trois équations

$$(2) \qquad [H, \varphi_3] = 0, \quad [H, L] = 0, \quad [\varphi_3, L] = 0,$$

les deux premières ayant lieu parce que

$$\varphi_3 = \text{const.}, \quad L = \text{const.}$$

sont deux intégrales, et la troisième étant une conséquence des équations (1). Posons les trois équations

$$(3) \qquad H = h, \quad \varphi_3 = \beta, \quad L = k,$$

où h, β, k sont des constantes arbitraires. Par l'origine menons une normale au plan invariable et portons, à partir de ce point, sur cette droite une longueur égale à k, qui est l'*axe du plan invariable;* la constante β désignera la projection de cet axe sur l'axe des z (Section I, n° 15).

Il y a deux problèmes qui ne dépendent que de trois variables q_1, q_2, q_3, et pour lesquels ont lieu le principe des forces vives et les équations des aires : c'est celui d'un point attiré par un centre fixe et celui du mouvement, autour d'un point fixe, d'un corps solide qui n'est sollicité par aucune force extérieure. On peut alors tirer p_1, p_2, p_3 des équations (3) en fonction de q_1, q_2, q_3, et, si l'on pose

$$V = \int (p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + p_3\,dq_3),$$

d'après un théorème connu (Section II, n° 19), les intégrales finies seront

$$\frac{dV}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dV}{d\beta} = l_1, \quad \frac{dV}{dk} = l_2,$$

τ, l_1, l_2 étant trois nouvelles constantes arbitraires.

Il est intéressant de montrer que ces deux problèmes peuvent être traités suivant la même marche de calcul; mais, pour le second problème, qui se rapporte au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, on serait conduit par cette marche à des opérations beaucoup plus compliquées que ne le nécessite la question en elle-même.

SUR DES RELATIONS EXISTANT ENTRE SIX ÉLÉMENTS DES INTÉGRALES.

9. Supposons ensuite que le problème de Dynamique dépende de plus de trois variables. On peut aux trois intégrales (3) ajouter $n-3$ autres intégrales, de manière à former le système d'équations

$$(4) \qquad H = h, \quad H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad \ldots, \quad H_{n-1} = h_{n-1},$$

résolues par rapport aux constantes arbitraires et satisfaisant aux $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions renfermées dans la formule

$$[H_i, H_s] = 0,$$

où i, s désignent deux quelconques des nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$. La première intégrale est celle des forces vives, la deuxième l'équation des aires pour le plan des x, y, en sorte que la constante h_1 est égale à β, la troisième l'équation $L = k$, en sorte que h_2 est égal à k. Alors, si l'on tire des n équations (4) les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et qu'on les substitue dans l'expression

$$V = \int (p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \ldots + p_n\, dq_n),$$

on aura les intégrales finies

$$(5) \qquad \frac{dV}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dV}{dh_1} = l_1, \quad \frac{dV}{dh_2} = l_2, \quad \ldots, \quad \frac{dV}{dh_{n-1}} = l_{n-1},$$

et les quantités

$$(6) \qquad \begin{cases} h, & h_1 = \beta, & h_2 = k, & \ldots, & h_{n-1}, \\ l_0 = \tau, & l_1, & l_2, & \ldots, & l_{n-1} \end{cases}$$

forment un système d'éléments canoniques, c'est-à-dire satisfaisant aux équations

$$[h_i, h_s] = 0, \quad [l_i, l_s] = 0, \quad [h_i, l_s] = 0, \quad [l_i, h_i] = 1,$$

i, s étant susceptibles des valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, mais différents entre eux (Section II, n° 22). Ainsi l'on aura en particulier

$$[h, \beta] = 0, \quad [h, k] = 0, \quad [\beta, k] = 0,$$

ce qui n'est autre chose que les équations (2), et ensuite

$$[\tau, h] = 1, \quad [\beta, \tau] = 0, \quad [k, \tau] = 0.$$

Prouvons ensuite que l'élément l_1 peut être supposé égal à α, α étant la longitude du nœud du plan invariable sur le plan fixe des x, y. Pour cela, établissons les équations

$$(7) \qquad [h, \alpha] = 0, \quad [\alpha, \beta] = 1, \quad [k, \alpha] = 0, \quad [\tau, \alpha] = 0.$$

Supposons l'axe des x mené suivant l'origine des longitudes et l'axe des y suivant la longitude $\frac{\pi}{2}$; désignons par γ l'inclinaison du plan invariable sur celui des x, y, nous aurons

$$\beta_1 = k \sin\gamma \sin\alpha, \quad \beta_2 = -k \sin\gamma \cos\alpha$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad d\alpha = \frac{\beta_1\, d\beta_2 - \beta_2\, d\beta_1}{\beta_1^2 + \beta_2^2};$$

il en résulte

$$[h, \alpha] = \frac{\beta_1}{\beta_1^2 + \beta_2^2}[h, \beta_2] - \frac{\beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}[h, \beta_1] = 0;$$

car on a $[h, \beta_2] = 0$, $[h, \beta_1] = 0$, de même qu'on a $[h, \beta] = 0$.

2° On a

$$[\beta, \alpha] = \frac{\beta_1}{\beta_1^2 + \beta_2^2}[\beta, \beta_2] - \frac{\beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}[\beta, \beta_1];$$

or, d'après les équations (1),

$$[\beta, \beta_2] = -\beta_1, \quad [\beta, \beta_1] = \beta_2;$$

il en résulte

$$[\beta, \alpha] = -1.$$

3° On a

$$[k, \alpha] = \frac{1}{\beta_1^2 + \beta_2^2}(\beta_1[k, \beta_2] - \beta_2[k, \beta_1]);$$

or, de même qu'on a $[k, \beta] = 0$, on a aussi $[k, \beta_1] = 0$, $[k, \beta_2] = 0$; donc

$$[k, \alpha] = 0.$$

4° Enfin, puisque l'on a $[\tau, \beta] = 0$, quel que soit d'ailleurs le choix que l'on ait fait des variables q_i, p_i, on a de même

$$[\tau, \beta_1] = 0, \quad [\tau, \beta_2] = 0;$$

et, comme on a $\tang \alpha = -\frac{\beta_1}{\beta_2}$, il en résultera

$$[\tau, \alpha] = 0.$$

Ainsi, toutes les équations (7) sont démontrées; or elles reviennent, comme on sait (Section VII, n° 9), aux suivantes :

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dl_1} = 1, \quad \frac{d\alpha}{dl_2} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dh} = 0;$$

on a donc

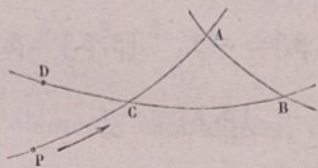
$$\alpha = l_1 + \text{fonct.}(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, l_3, l_4, \ldots, l_{n-1});$$

la fonction du second membre est arbitraire; on peut la prendre égale à zéro, et alors on a $l_1 = \alpha$.

10. Je vais maintenant démontrer que l'élément l_2 du système (6) d'éléments canoniques peut être pris égal à la constante $-g$, qui s'ajoute à l'angle σ obtenu par une quadrature (n° 4).

Imaginons une sphère dont le centre soit à l'origine des coordonnées; elle est coupée par le plan des x, y suivant le grand cercle DB, par le plan invariable suivant le grand cercle CA; enfin, par l'équateur suivant le grand cercle AB (*fig.* 4).

Fig. 4.



Convenons de compter l'arc σ à partir du point C, alors on aura $CA = \sigma$; si D est le point à partir duquel on compte les longitudes, on a $DC = \alpha$. Désignons l'arc CB par χ; enfin, sur le grand cercle CA, prenons, à partir du point C, CP égal à g.

L'angle aigu ACB représente l'inclinaison γ; supposons les longitudes comptées positivement de C vers B, alors sur la figure α est positif. Comptons positivement les arcs sur le grand cercle CA dans le sens de la flèche; alors, en ayant égard au signe, il faudra faire $CP = -g$, g étant négatif, et l'on aura

$$PA = \sigma - g.$$

Supposons que le plan des x, y tourne autour de la ligne des nœuds, jusqu'à ce qu'il vienne coïncider avec le plan invariable; à la limite, l'inclinaison γ sera nulle et $\beta = k\cos\gamma$ deviendra égal à k; l'arc CB ou χ deviendra égal à CA ou σ, et, si l'on suppose qu'à la limite PC est égal à DC, ce qui est permis, on aura aussi à la limite $g = -\alpha$; or β, α sont constamment deux éléments conjugués : donc k, $-g$ sont également deux éléments conjugués à la limite; par conséquent, l'élément l_2 du tableau (6) peut être pris égal à $-g$, pour cette limite.

Ainsi l'on a $l_2 = -g$, quand le plan des x, y est venu coïncider avec le plan invariable, et je dis maintenant que l_2 peut être pris égal à $-g$, quelle que soit la position du plan des x, y mené par l'origine.

Les éléments h_i, l_i du tableau (6) forment un système d'éléments canoniques, dont les six premiers sont

$$h_0 = h, \quad h_1 = \beta, \quad h_2 = k,$$
$$l_0 = \tau, \quad l_1 = \alpha, \quad l_2.$$

Désignons par h'_i, l'_i ce que deviennent les éléments h_i, l_i, quand le plan des x, y, après avoir tourné autour de la ligne des nœuds, vient à coïncider avec le plan invariable; nous aurons

$$h'_0 = h, \qquad h'_2 = k,$$
$$l'_0 = \tau, \qquad l'_2 = -g,$$

les éléments h'_i, l'_i s'étant confondus avec h'_2, l'_2.

Les deux quantités β, α sont suffisantes pour déterminer la position du plan invariable, qui passe par l'origine, par rapport aux axes de coordonnées. Donc on peut regarder h_2, l_2, h_3, l_3, ... comme indépendants de la position du plan invariable par rapport à ces axes, et, par suite, lorsque le plan des x, y, après avoir tourné autour de la ligne des nœuds, aura coïncidé avec le plan invariable, on peut supposer que h_2, l_2, h_3, l_3, ... restent les mêmes ou qu'on a

$$h'_2 = h_2, \qquad h'_3 = h_3, \quad \ldots,$$
$$l'_2 = l_2, \qquad l'_3 = l_3, \quad \ldots;$$

donc, réciproquement, si l'on a d'abord calculé les éléments h'_2, l'_2, h'_3, l'_3, ..., on pourra les prendre pour les éléments h_2, l_2, h_3, l_3, ..., et, en particulier, puisque l'on a $l'_2 = -g$, on a également $l_2 = -g$.

On peut arriver plus rapidement à ce résultat de la manière suivante :

Continuons à désigner par σ l'arc CA, et représentons par σ_1 l'arc PA qui a été désigné par σ au n° 6; on a, d'après ce numéro, pour une des intégrales du problème,

$$\frac{dV}{dk} = E \quad \text{ou} \quad \frac{dW}{dk} + \sigma_1 = E,$$

— E étant la constante qui s'ajoute à σ_1; cette équation représentera la troisième des intégrales (5); on a donc $l_2 = E$.

Or on peut supposer que $\sigma_1 - E$ représente l'arc AC; il suffira, pour cela, d'ajouter à W une constante convenable qui renferme k en facteur, ce qui est permis ; alors E sera égal à $\mathrm{PC} = -g$; on aura donc bien $l_2 = -g$.

11. On a donc, enfin, le théorème suivant :

Supposons un problème de Dynamique pour lequel le principe des forces vives et les trois intégrales des aires aient lieu. Désignons par h la constante du principe des forces vives, par k la grandeur de l'axe du plan invariable, par α la longitude de la trace C du plan invariable sur un plan fixe, par β la projection de k sur la normale à ce plan fixe, par τ la constante qui s'ajoute au temps t par l'intégration, enfin par g la distance angulaire du nœud C à un point fixe du grand cercle déterminé par le plan invariable sur la sphère dont le centre est à l'origine. Alors les six quantités

$$\begin{array}{ccc} h, & \beta, & k, \\ \tau, & +\alpha, & -g \end{array}$$

forment trois couples d'éléments canoniques conjugués, c'est-à-dire qu'ils satisfont aux quinze équations suivantes :

$$[\tau, h] = 1, \quad [\beta, -\alpha] = 1, \quad [k, g] = 1,$$
$$[h, \beta] = 0, \quad [h, \alpha] = 0, \quad [h, k] = 0, \quad [h, g] = 0,$$
$$[\tau, \beta] = 0, \quad [\tau, \alpha] = 0, \quad [\tau, k] = 0, \quad [\tau, g] = 0,$$
$$[\beta, k] = 0, \quad [\beta, g] = 0, \quad [\alpha, k] = 0, \quad [\alpha, g] = 0.$$

SUR DES FORMULES DE PERTURBATION.

12. Supposons que l'on soit parvenu à intégrer les équations différentielles d'un problème de Mécanique, dans lequel ont lieu le principe des forces vives et les trois intégrales des aires. Concevons ensuite que l'on ajoute aux forces de ce problème des forces perturbatrices : désignons par $+\Omega$ la fonction perturbatrice ; alors on passe des équations différentielles canoniques du problème précédent,

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dH}{dp_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{dH}{dp_2}, \quad \ldots,$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{dH}{dq_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{dH}{dq_2}, \quad \ldots,$$

à celles du problème actuel, en y changeant U en U — Ω ou H en H + Ω; Ω est une fonction des quantités q_i, p_i, et, en remplaçant les q_i, p_i par leurs valeurs résultant des intégrations, on aura Ω exprimé au moyen de t et des constantes

$$(1) \quad \begin{cases} h, & \beta, & k, & h_3, & h_4, & \ldots, & h_{n-1}, \\ \tau, & +\alpha, & -g, & l_3, & l_4, & \ldots, & l_{n-1}. \end{cases}$$

Dans le second problème, on conserve la même forme aux expressions des q_i, p_i que dans le premier, mais les constantes (1) qui y sont renfermées sont alors considérées comme des éléments variables, et, d'après un théorème connu (Section VII, n° 8), ces éléments satisfont à un système d'équations différentielles canoniques, dont je ne marque que les six premières

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\tau}, & \dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{d\Omega}{dh}, \\ \dfrac{d\beta}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\alpha}, & \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{d\Omega}{d\beta}, \\ \dfrac{dk}{dt} = \dfrac{d\Omega}{dg}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{dk}. \end{cases}$$

Ces six équations ne permettent pas, en général, de déterminer les six quantités

$$(3) \quad \begin{cases} h, & \beta, & k, \\ \tau, & +\alpha, & -g, \end{cases}$$

parce que Ω renferme, outre ces quantités, encore $6n - 6$ éléments variables

$$(4) \quad \begin{cases} h_3, & h_4, & \ldots, & h_{n-1}, \\ l_3, & l_4, & \ldots, & l_{n-1}. \end{cases}$$

Toutefois, si toutes ces quantités varient très-lentement, on pourra calculer les éléments (3) avec une grande approximation, pendant un temps assez considérable, à l'aide de quadratures.

On n'a plus que les six éléments (3) dans le cas d'un point attiré par un centre fixe et dans celui d'un corps solide qui tourne autour d'un point fixe et qui n'est sollicité que par des forces perturbatrices; ils sont, par conséquent, complétement déterminés dans ces deux cas par les équations (2). Pour le premier problème, le plan invariable devient celui de l'orbite, et l'on retrouve les formules de perturbation qui ont été obtenues (Section VII, n° 15) ; la quantité g, il est vrai, peut paraître avoir une autre signification, mais nous reviendrons plus loin sur la signification de cette quantité. Pour le second problème, ces formules de perturbation reviennent à celles que Poisson a données (*Journal de l'École Polytechnique*, XV^e cahier, p. 336).

Il n'est pas indispensable que les $6n-6$ constantes qu'il faut ajouter aux six constantes (3), pour obtenir toutes les constantes arbitraires des intégrales, forment un système d'éléments canoniques; il suffit évidemment, pour appliquer les équations (2), que Ω soit exprimé au moyen des six éléments (3) et de $6n-6$ autres éléments qui soient fonctions des éléments (4), sans être fonctions des éléments (3). En désignant donc par s un quelconque de ces nouveaux éléments, il devra satisfaire à ces six équations

$$[h, s]=0, \quad [\tau, s]=0, \quad [\beta, s]=0, \quad [\alpha, s]=0, \quad [k, s]=0, \quad [g, s]=0;$$

car ces équations (Section VII, n° 9) reviennent aux suivantes :

$$\frac{ds}{d\tau}=0, \quad \frac{ds}{dh}=0, \quad \frac{ds}{d\alpha}=0, \quad \frac{ds}{d\beta}=0, \quad \frac{ds}{dg}=0, \quad \frac{ds}{dk}=0.$$

13. L'élément τ ne se trouve dans Ω que par $t+\tau$, et, sans que l'on soit obligé à aucune attention pour la détermination des constantes, elles seront indépendantes de τ, de sorte que l'on aura la première des équations (2)

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{d\Omega}{d\tau}, \tag{5}$$

quel que soit le choix que l'on ait fait des éléments, outre h et τ.

Si l'on examine le mouvement du système par rapport au plan invariable, les $2n-2$ constantes que l'on obtiendra par les intégrations seront indépendantes de β, α; on en peut encore conclure la deuxième ligne des formules (2)

$$\frac{d\beta}{dt}=-\frac{d\Omega}{d\alpha}, \quad \frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\Omega}{d\beta}, \tag{6}$$

sans être obligé de choisir les autres éléments.

Si l'on introduit, selon ce qui a été dit au n° **10**, σ parmi les variables du problème où la fonction de forces est U seulement, σ s'obtient, après toutes les autres variables, au moyen d'une quadrature, et g est la constante ajoutée à cette quadrature. Il est donc évident que toutes les constantes obtenues dans les intégrations qui ont précédé sont indépendantes de g, et l'on aura la cinquième des équations (2)

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d\Omega}{dg}, \tag{7}$$

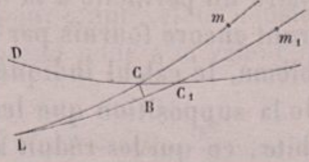
pour déterminer la variation de k dans la perturbation du système.

Pour indiquer une application des formules précédentes, supposons, par exemple, qu'un corps, en s'approchant de notre système planétaire, vienne à le troubler; alors on prendra pour origine des coordonnées le centre de gravité du système dont le mouvement est rectiligne et uniforme, et l'on sait que le principe des forces vives et les trois intégrales des aires auront lieu (Section I, n° **14**). Les formules (6) et (7) permettront de calculer le déplacement du plan invariable. En effet, au moyen de ces formules, on peut calculer la variation de la longitude α du plan invariable et les variations de k et β; par suite, on peut calculer aussi la variation de l'inclinaison γ du plan invariable donnée par la formule

$$\cos\gamma = \frac{\beta}{k}.$$

14. Calculons la rotation élémentaire du plan invariable autour de son axe, que nous désignerons par dg'. Si le nœud du plan invariable sur le plan fixe était immobile, on aurait évidemment $dg' = dg$; mais, ce nœud étant mobile, on peut considérer, dans le problème du

Fig. 5.



mouvement troublé, le plan invariable comme ayant, dans l'instant dt, un premier mouvement de rotation autour de son intersection avec sa position infiniment voisine et un second mouvement autour de l'axe de ce plan, que nous avons désigné par dg'.

Ainsi, soit L (*fig.* 5) l'intersection du cercle Cm qui représente le plan invariable et de $C_1 m_1$ la position de ce cercle après l'instant dt, et soit DC le grand cercle sur lequel sont comptées les longitudes; supposons que le point m du cercle Cm, par suite de la rotation dg', soit venu en m_1. Nous aurons

$$dg' = Lm_1 - Lm,$$
$$dg = C_1 m_1 - Cm,$$
$$d\alpha \cos\gamma = LC_1 - LC;$$

et, par suite,

$$dg' = dg + \cos\gamma \, d\alpha.$$

D'après les équations (2), on a

$$dg = -\frac{d\Omega}{dk}\,dt, \quad d\alpha = \frac{d\Omega}{d\beta}\,dt;$$

on en conclut donc, pour la vitesse angulaire du plan invariable autour de son axe, due à la perturbation,

$$\frac{dg'}{dt} = -\frac{d\Omega}{dk} + \cos\gamma\,\frac{d\Omega}{d\beta}.$$

15. Revenons au problème d'un corps attiré par un centre fixe; le plan invariable devient celui de l'orbite, l'équateur un plan quelconque, passant par le rayon vecteur mené du corps au centre fixe; la quantité que j'ai désignée (n° **10**) par σ représente l'angle compris entre la ligne des nœuds et le rayon vecteur; g est la distance angulaire au nœud d'un point fixe quelconque de l'orbite, lequel est ensuite censé se mouvoir en vertu de la perturbation. Mais je dis que l'on peut aussi prendre pour g la distance angulaire du périhélie à la ligne des nœuds et que les éléments troublés seront encore fournis par les équations (2).

Faisons, pour ce problème, le calcul indiqué au n° **8**, avec la simplification qui résulte de la supposition que les coordonnées se rapportent au plan de l'orbite, ce qui les réduit à deux seulement.

Formons les deux équations de ce numéro

$$H = h, \quad L = k;$$

en désignant par r le rayon vecteur mené du centre au corps, et prenant la masse du corps égale à l'unité, nous trouverons facilement qu'elles se réduisent aux deux suivantes :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 - 2\mathrm{U} = 2h, \quad r^2\frac{d\sigma}{dt} = k.$$

En représentant par r' et σ' les dérivées de r et σ par rapport à t, on a

$$p_1 = \frac{d\mathrm{T}}{dr'} = r', \quad p_2 = \frac{d\mathrm{T}}{d\sigma'} = r^2\sigma',$$

et ces deux équations deviennent

$$p_1^2 + \frac{1}{r^2}p_2^2 = 2\mathrm{U} + 2h, \quad p_2 = k;$$

l'expression $\mathrm{V} = \int(p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2)$ devient

$$\mathrm{V} = k\sigma + \int_\rho^r \sqrt{2\mathrm{U} + 2h - \frac{k^2}{r^2}}\,dr,$$

ρ étant une constante, et l'on aura les deux intégrales finies

$$(a) \qquad \frac{d\mathrm{V}}{dh} = t + \tau, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dk} = g,$$

qui peuvent s'écrire

$$(b) \qquad \begin{cases} t + \tau = \displaystyle\int_\rho^r \frac{r\,dr}{\sqrt{2\mathrm{U}r^2 + 2hr^2 - k^2}}, \\ \sigma - g = \displaystyle\int_\rho^r \frac{k\,dr}{r\sqrt{2\mathrm{U}r^2 + 2hr^2 - k^2}}. \end{cases}$$

Si, au lieu de prendre pour ρ une valeur constante déterminée et indépendante de h, k, on prend pour ρ la valeur minimum de r, laquelle satisfait à l'équation

$$(c) \qquad 2\mathrm{U} + 2h - \frac{k^2}{r^2} = 0,$$

où U est fonction de r, les deux équations (a) se confondront encore avec les équations (b). En effet, quand on prend pour ρ une quantité dépendant de h, k, les seconds membres des équations (b) doivent, en général, être augmentés de nouveaux termes; mais ces termes ont pour facteur

$$\sqrt{2U_1 + 2h - \frac{k^2}{\rho^2}},$$

U_1 étant le résultat de la substitution de ρ à la place de r dans U, et, par conséquent, ils s'annulent si ρ est racine de l'équation (c).

En faisant $r = \rho$ dans les deux équations (b), on a

$$\sigma = g, \quad t = -\tau,$$

c'est-à-dire que g représente la distance angulaire du périhélie au nœud et $-\tau$ le temps du passage du corps au périhélie.

Nous voyons donc que les intégrales sont exactement les mêmes quand on prend pour g la distance angulaire du nœud, ou à un point fixe du plan de l'orbite ou au périhélie. Il est évident qu'il en sera de même pour un système plus général de coordonnées où l'on aura trois intégrales

$$(d) \qquad \frac{dV}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dV}{d\beta} = -\alpha, \quad \frac{dV}{dk} = g,$$

au lieu de deux seulement.

Donc, enfin, les six équations canoniques (2) du n° **12**, relatives au mouvement troublé, qui se déduisent des trois équations (d), subsistent encore, en prenant pour g la distance du nœud au périhélie, et pour $-\tau$ le temps du passage du corps à ce point. Ainsi l'on voit que le périhélie a le même mouvement angulaire qu'un point du plan de l'orbite, regardé comme fixe dans le mouvement non troublé.

SUR LES FORMULES DE PERTURBATION RELATIVES A UN SYSTÈME DE POINTS POUR LEQUEL ONT LIEU LE PRINCIPE DES FORCES VIVES ET UNE INTÉGRALE DES AIRES.

16. Supposons un système de points pour lequel l'équation des forces vives

$$H = h$$

soit applicable, ainsi que l'équation des aires par rapport à un plan que nous choisissons pour plan des x, y. Soit

$$H_1 = h_1$$

cette seconde équation.

Nous avons examiné ce système de points (Section II, n° 27), et, adoptant des coordonnées polaires, nous avons posé

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

en désignant par θ_1, θ_2, ..., θ_s ce que devient θ pour chaque point matériel; nous avons vu alors que, si l'on substitue aux variables θ_1, θ_2, ..., θ_s les variables

$$\gamma_1 = \theta_1 - \theta_s, \quad \gamma_2 = \theta_2 - \theta_s, \quad \ldots, \quad \gamma_{s-1} = \theta_{s-1} - \theta_s \quad \text{et} \quad \theta_s,$$

la variable θ_s n'entrera pas dans H, qui contiendra seulement sa dérivée θ'_s, et que

$$\frac{dT}{d\theta'_s} = \text{const.} = h_1$$

représente l'intégrale des aires.

Si nous formons l'équation aux différences partielles en V, après avoir réduit les variables au moindre nombre possible au moyen des équations de condition, nous aurons une équation

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_\mu, \frac{dV}{dq_1}, \ldots, \frac{dV}{dq_\mu}, \frac{dV}{d\theta_s}\right) = h,$$

qui ne renferme pas la variable θ_s, et l'on pourra prendre pour solution complète

$$V = W + h_1 \theta_s,$$

W étant une fonction indépendante de θ_s.

Donc, parmi les intégrales du mouvement, on a les deux équations

$$\frac{dV}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dV}{dh_1} = l,$$

τ et l étant deux constantes arbitraires, et ces deux équations peuvent s'écrire

$$(a) \qquad \frac{dW}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dW}{dh_1} + \theta_s = l;$$

donc θ_s n'entre dans les intégrales du mouvement qu'ajouté à la constante $-l$.

Si l'on suppose ensuite que la fonction H soit changée en $H + \Omega$, on aura parmi les formules de perturbation les quatre suivantes :

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\Omega}{dh},$$

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{d\Omega}{dl}, \quad \frac{dl}{dt} = \frac{d\Omega}{dh_1},$$

h_1 étant le double de la vitesse aréolaire autour de l'axe des z, et $-l$, comme nous avons dit, la constante qui s'ajoute à θ_s.

Dans le cas du pendule simple, le nombre des coordonnées se réduit à deux, qui sont l'angle du pendule avec la verticale et l'angle que fait le plan vertical qui passe par le pendule avec un plan vertical fixe; le dernier de ces deux angles se substitue ici à l'angle θ_s. Donc les quatre dernières formules suffisent pour déterminer les perturbations du pendule simple.

Sur le mouvement du pendule simple dans l'air.

17. D'après les notations adoptées dans la théorie du pendule simple (Section III, n° 9), nous devons faire $h_1 = D$, $l = E$ dans le numéro précédent, et nous avons pour les formules de perturbation du pendule simple

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\frac{d\Omega}{d\tau}, & \frac{d\tau}{dt} &= \frac{d\Omega}{dh}, \\ \frac{dD}{dt} &= -\frac{d\Omega}{dE}, & \frac{dE}{dt} &= \frac{d\Omega}{dD}. \end{aligned} \right.$$

Nous voulons calculer les variations des quantités h, τ, D, E, provenant de la résistance de l'air. Alors la fonction perturbatrice Ω n'existe réellement plus; mais nous considérons une expression différentielle que nous représentons par $\delta\Omega$, dans laquelle nous prendrons les coefficients de δh, $\delta\tau$, δD, δE comme des dérivées de Ω, pour former les équations précédentes (Section VII, n° 5). D'après ce que nous avons vu, nous devons poser

$$-\delta\Omega = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

X, Y, Z étant les composantes de la résistance; cette résistance agit en sens contraire du chemin parcouru par la masse du pendule; comme elle s'annule en même temps que la vitesse v de cette masse, il est naturel de la supposer de la forme $\lambda v + \mu v^2$, λ et μ étant des constantes, lorsque la vitesse v n'est pas considérable. Donc, en désignant par ds l'élément de la trajectoire, on aura

$$-\delta\Omega = (\lambda v + \mu v^2)\left(-\frac{dx}{ds}\delta x - \frac{dy}{ds}\delta y - \frac{dz}{ds}\delta z\right),$$

$$\delta\Omega = (\lambda + \mu v)\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right).$$

Or on a

$$x = r\sin\psi\cos\varphi, \quad y = r\sin\psi\sin\varphi, \quad z = r\cos\psi,$$

et l'on en conclut, par une transformation facile,

$$\delta\Omega = (\lambda + \mu v)(r^2\psi'\delta\psi + r^2\sin^2\psi.\varphi'\delta\varphi), \tag{2}$$

les accents indiquant les dérivées des quantités par rapport à t.

Au reste, cette transformation peut se faire d'après une formule générale qu'il est bon d'indiquer. Soient q_1, q_2, q_3 les nouvelles variables que l'on substitue à x, y, z; x, y, z sont des fonctions de q_1, q_2, q_3, et, en les différentiant, nous aurons

$$\begin{aligned} dx &= A\,dq_1 + B\,dq_2 + C\,dq_3, \\ dy &= A'dq_1 + B'dq_2 + C'dq_3, \\ dz &= A''dq_1 + B''dq_2 + C''dq_3. \end{aligned}$$

Remplaçons dans ces formules d par δ, puis formons la quantité $dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z$; elle sera de la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z = L\,dq_1\delta q_1 &+ M(dq_1\delta q_2 + dq_2\delta q_1) \\ &+ N(dq_1\delta q_3 + dq_3\delta q_1) + \ldots \end{aligned}\right. \tag{3}$$

On peut dans cette formule remplacer δ par d, et l'on a cette autre équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = L\,dq_1^2 + 2M\,dq_1\,dq_2 + 2N\,dq_1\,dq_3 + \ldots$$

Le premier membre est égal à $2\,T\,dt^2$, T étant la demi-force vive; on a donc

$$L\,dq_1 + M\,dq_2 + N\,dq_3 = \frac{dT}{dq'_1}\,dt,$$

q'_1, q'_2, q'_3 étant les dérivées de q_1, q_2, q_3 par rapport à t. On obtient ainsi le coefficient de δq_1 dans le second membre de (3), et l'on en conclut

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = \left(\frac{dT}{dq'_1}\delta q_1 + \frac{dT}{dq'_2}\delta q_2 + \frac{dT}{dq'_3}\delta q_3\right)dt.$$

Si nous revenons au pendule simple, nous avons

$$T = \frac{r^2}{2}(\sin^2\psi.\varphi'^2 + \psi'^2),$$

et nous retrouvons la formule (2).

18. Pour continuer les calculs, supposons les oscillations très-petites. Nous avons trouvé (Section III, n^{os} **12** et **13**), en posant

$$\sqrt{\frac{g}{r}}(t+\tau) = \sigma,$$

les formules

$$\psi^2 = f^2\cos^2\sigma + f_1^2\sin^2\sigma,$$

$$\varphi - E = \text{arc tang}\left(\frac{f_1}{f}\,\text{tang}\,\sigma\right) + \frac{3ff_1}{8}\sigma + ff_1\frac{f^2 - f_1^2}{24}\,\frac{\sin\sigma\cos\sigma}{f^2\cos^2\sigma + f_1^2\sin^2\sigma}.$$

En différentiant ψ et φ par rapport aux constantes devenues variables, et négligeant dans la seconde équation les termes du second ordre par rapport à f et f_1, nous aurons

$$\psi\,\delta\psi = f\,\delta f\cos^2\sigma + f_1\,\delta f_1\sin^2\sigma + (f_1^2 - f^2)\sqrt{\frac{g}{r}}\sin\sigma\cos\sigma\,\delta\tau,$$

$$\delta\varphi = \delta E + \frac{f\,\delta f_1 - f_1\,\delta f}{f^2\cos^2\sigma + f_1^2\sin^2\sigma}\sin\sigma\cos\sigma.$$

On en déduit, d'après la formule (2),

$$(4)\left\{\begin{aligned} \delta\Omega = {} & (\lambda+\mu\nu)\frac{r^2\psi'}{\psi}\left[f\,\delta f\cos^2\sigma + f_1\,\delta f_1\sin^2\sigma + \sqrt{\frac{g}{r}}(f_1^2 - f^2)\sin\sigma\cos\sigma\,\delta\tau\right] \\ & + (\lambda+\mu\nu)\,r^2\sin^2\psi.\varphi'\left(\delta E + \frac{f\,\delta f_1 - f_1\,\delta f}{f^2\cos^2\sigma + f_1^2\sin^2\sigma}\sin\sigma\cos\sigma\right). \end{aligned}\right.$$

Les quatre équations (1) peuvent être remplacées par la suivante :

$$(5) \qquad -\frac{dh}{dt}\,\delta\tau - \frac{d\mathrm{D}}{dt}\,\delta\mathrm{E} + \frac{d\tau}{dt}\,\delta h + \frac{d\mathrm{E}}{dt}\,\delta\mathrm{D} = \delta\Omega.$$

Or les quantités

$$a = r\cos f = r\left(1 - \frac{f^2}{2}\right), \quad b = r\cos f_1 = r\left(1 - \frac{f_1^2}{2}\right), \quad -c = -r$$

étant racines de l'équation

$$(r^2 - z^2)\left(z + \frac{h}{g}\right) - \frac{\mathrm{D}^2}{2g} = 0$$

(Section III, n° 10), on a

$$(6) \qquad r\left(1 - \frac{f^2 + f_1^2}{2}\right) = -\frac{h}{g};$$

on a aussi, d'après le n° 13 de la même Section,

$$\mathrm{D} = \sqrt{g}\,r^{\frac{3}{2}} f f_1.$$

En différentiant ces deux équations, on a

$$dh = gr(f\,df + f_1\,df_1), \quad d\mathrm{D} = \sqrt{g}\,r^{\frac{3}{2}}(f_1\,df + f\,df_1).$$

On peut donc mettre l'équation (5) sous cette forme

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} &-gr\left(f\frac{df}{dt} + f_1\frac{df_1}{dt}\right)\delta\tau - \sqrt{g}\,r^{\frac{3}{2}}\left(f_1\frac{df}{dt} + f\frac{df_1}{dt}\right)\delta\mathrm{E} \\ &+ gr\frac{d\tau}{dt}(f\,\delta f + f_1\,\delta f_1) + \sqrt{g}\,r^{\frac{3}{2}}\frac{d\mathrm{E}}{dt}(f_1\,\delta f + f\,\delta f_1) = \delta\Omega. \end{aligned}\right.$$

Exprimons $\delta\Omega$ au moyen de σ seulement.

D'après l'équation de la force vive, nous avons

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{r^2}{2}(\psi'^2 + \psi^2\varphi'^2) = gr\cos\psi + h,$$

$$v^2 = -gr\psi^2 + 2(gr + h);$$

or, d'après l'équation (6), on a

$$2(gr + h) = gr(f^2 + f_1^2),$$

et il en résulte

$$(a)\qquad \begin{cases} v^2 = -gr(f^2\cos^2\sigma + f_1^2\sin^2\sigma) + gr(f^2+f_1^2) \\ v = f_1\sqrt{gr}\sqrt{1-\dfrac{f_1^2-f^2}{f_1^2}\sin^2\sigma}. \end{cases}$$

D'après l'équation des aires, on a

$$(b)\qquad \psi^2\varphi' = \frac{D}{r^2} = \sqrt{\frac{g}{r}}ff_1.$$

De l'équation (a) on déduit

$$r^2(\psi'^2+\psi^2\varphi'^2) = grf_1^2 - gr(f_1^2-f^2)\sin^2\sigma,$$

$$\psi'^2 = -\frac{1}{\psi^2}(\psi^2\varphi')^2 + \frac{g}{r}f_1^2 - \frac{g}{r}(f_1^2-f^2)\sin^2\sigma,$$

et en ayant égard à l'équation (b), puis simplifiant et extrayant les racines carrées des deux membres, on obtient

$$(c)\qquad \psi' = \sqrt{\frac{g}{r}}\,\frac{(f_1^2-f^2)\sin\sigma\cos\sigma}{\sqrt{f^2+(f_1^2-f^2)\sin^2\sigma}}.$$

D'après les équations (a), (b), (c), si l'on pose

$$\Delta = \sqrt{1-\frac{f_1^2-f^2}{f_1^2}\sin^2\sigma},$$

$$A = (\lambda+\mu f_1\sqrt{gr}\,\Delta)\sqrt{gr^3}\,\frac{(f_1^2-f^2)\sin\sigma\cos\sigma}{f^2+(f_1^2-f^2)\sin^2\sigma},$$

$$B = (\lambda+\mu f_1\sqrt{gr}\,\Delta)\sqrt{gr^3}\,ff_1,$$

on aura, au lieu de l'équation (4),

$$\delta\Omega = A\left(f\cos^2\sigma\,\delta f + f_1\sin^2\sigma\,\delta f_1 + \sqrt{\frac{g}{r}}(f_1^2-f^2)\sin\sigma\cos\sigma\,\delta\tau\right)$$
$$+ B\left(\delta E + \frac{f\,\delta f_1 - f_1\,\delta f}{f^2+(f_1^2-f^2)\sin^2\sigma}\sin\sigma\cos\sigma\right).$$

Si nous égalons ensuite les coefficients des variations $\delta\tau$, δE, δf, δf_1, pris dans chaque membre de l'équation (7), nous obtenons les quatre équations suivantes :

$$f\frac{df}{dt}+f_1\frac{df_1}{dt}=-\frac{A}{g^{\frac{1}{2}}r^{\frac{3}{2}}}(f_1^2-f^2)\sin\sigma\cos\sigma,$$

$$f_1\frac{df}{dt}+f\frac{df_1}{dt}=-\frac{B}{g^{\frac{1}{2}}r^{\frac{3}{2}}},$$

$$grf\frac{d\tau}{dt}+\sqrt{gr^3}f_1\frac{dE}{dt}=Af\cos^2\sigma-\frac{Bf_1\sin\sigma\cos\sigma}{f^2+(f_1^2-f^2)\sin^2\sigma},$$

$$grf_1\frac{d\tau}{dt}+\sqrt{gr^3}f\frac{dE}{dt}=Af_1\sin^2\sigma+\frac{Bf\sin\sigma\cos\sigma}{f^2+(f_1^2-f^2)\sin^2\sigma}.$$

Résolvons ces quatre équations par rapport aux dérivées de f, f_1, τ et E; puis remplaçons A et B par leurs valeurs, et nous trouverons facilement

$$\frac{df_1}{dt}=(\lambda+\mu f_1\sqrt{gr}\Delta)\left[f_1(f^2-f_1^2)\frac{\sin^2\sigma\cos^2\sigma}{f^2+(f_1^2-f^2)\sin^2\sigma}+\frac{f^2f_1}{f_1^2-f^2}\right],$$

$$\frac{df}{dt}=(\lambda+\mu f_1\sqrt{gr}\Delta)\left[f(f_1^2-f^2)\frac{\sin^2\sigma\cos^2\sigma}{f^2+(f_1^2-f^2)\sin^2\sigma}+\frac{ff_1^2}{f^2-f_1^2}\right],$$

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{2ff_1}{f_1^2-f^2}\sin\sigma\cos\sigma(\lambda+\mu f_1\sqrt{gr}\Delta),$$

$$\frac{d\tau}{dt}=\sqrt{\frac{r}{g}}\frac{f^2+f_1^2}{f_1^2-f^2}\sin\sigma\cos\sigma(\lambda+\mu f_1\sqrt{gr}\Delta).$$

Regardons t ou

$$\sigma=\sqrt{\frac{g}{r}}(t+\tau)$$

comme seul variable dans les seconds membres de ces formules, et elles permettront de déterminer f, f_1, E, τ à l'aide de quadratures. Les deux premières formules exigent l'emploi des intégrales elliptiques, mais les deux autres donnent

$$E=-\frac{2ff_1}{f_1^2-f^2}\sqrt{\frac{r}{g}}\left[\frac{\lambda}{4}(1-\cos2\sigma)+\frac{\mu\sqrt{gr}f_1^3}{3(f_1^2-f^2)}(1-\Delta^3)\right],$$

$$\tau=\frac{f^2+f_1^2}{f_1^2-f^2}\frac{r}{g}\left[\frac{\lambda}{4}(1-\cos2\sigma)+\frac{\mu\sqrt{gr}f_1^3}{3(f_1^2-f^2)}(1-\Delta^3)\right].$$

19. Le calcul de f et f_1 déterminera les variations des demi-axes de l'ellipse décrite par l'extrémité du pendule. Pour $t = -\tau$, on a $\varphi = \mathrm{E}$, $\psi = f$; ce qui correspond au petit axe de l'ellipse; donc la formule qui donne E exprime la variation de l'azimut de cet axe; mais on doit remarquer que, pour $\sigma = \pi$, la quantité E est nulle comme pour $\sigma = 0$; ainsi, après avoir tourné de deux angles droits, le plan vertical du pendule occupe la même position que s'il n'y avait pas de perturbations.

On voit donc qu'une oscillation s'accomplit quand $\varphi - \mathrm{E}$ s'accroît de π; d'après l'équation

$$\varphi - \mathrm{E} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{f_1}{f}\operatorname{tang}\sigma\right),$$

σ s'accroît aussi de π; d'ailleurs τ reste le même; il en résulte, d'après la formule

$$\sigma = \sqrt{\frac{g}{r}}(t+\tau),$$

que la durée d'une oscillation est $\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, comme s'il n'y avait pas de perturbation. En ajoutant le terme complémentaire trouvé (Section III, n° 12), on a

$$2\mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left(1 + \frac{f^2+f_1^2}{16}\right)$$

pour la durée des oscillations du pendule qui se meut dans l'air aussi bien que dans le vide.

20. Le problème se simplifie beaucoup dans le cas où le pendule oscille dans un plan vertical. On a alors

$$\psi = f_1 \sin\sigma, \quad \varphi = 0,$$

et, en désignant par la caractéristique δ les accroissements provenant de la variation des constantes, on a

$$\delta\psi = \delta f_1 \sin\sigma + f_1\sqrt{\frac{g}{r}}\cos\sigma\,\delta\tau.$$

On a ensuite

$$\delta f_1 = -\frac{\lambda f_1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\sin 2\sigma\right) - \frac{\mu r}{4} f_1^2\left(\frac{\sin 3\sigma}{3} + 3\sin\sigma\right),$$

$$\delta\tau = \frac{\lambda r}{4g}\cos 2\sigma - \frac{\mu f_1 r}{4}\sqrt{\frac{r}{g}}\left(\frac{\cos 3\sigma}{3} + \cos\sigma\right),$$

on en conclut

$$\delta\psi = -\frac{\lambda f_1 t}{2}\sin\sigma - \frac{\lambda f_1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\cos\sigma + \frac{\mu r f_1^2}{6}(\cos 2\sigma + 2\cos\sigma),$$

et l'on obtient, enfin,

$$\psi = f_1 e^{-\frac{\lambda t}{2}}\left(\sin\sigma - \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\cos\sigma\right) + \tfrac{1}{6}\mu r f_1^2(\cos 2\sigma + 2\cos\sigma)$$

pour la formule qui exprime le mouvement du pendule, en y faisant

$$\sigma = t\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

SECTION IX.

SUR LE MOUVEMENT DES PROJECTILES.

DE LA NATURE DE LA RÉSISTANCE ÉPROUVÉE DANS L'AIR PAR UN PROJECTILE.

1. Suivant Newton, la résistance sur un élément plan, qui s'avance dans la direction de la normale à cet élément, éprouve dans l'air une résistance normale proportionnelle au carré de sa vitesse v. Ainsi, en désignant par $d\sigma$ la grandeur de cet élément plan, cette résistance serait représentée par $\mathrm{A}v^2 d\sigma$ et, d'après la théorie de Newton, le coefficient A serait aussi déterminé ; mais on sait maintenant que cette formule ne peut être admise. Cette résistance étant fonction de la vitesse, représentons-la donc par

$$f(v)\,d\sigma. \tag{a}$$

D'après la même théorie, la résistance sur un élément plan, qui se meut dans une direction qui fait un angle aigu i avec la normale, sera encore normale à cet élément, et l'on obtiendra son expression en remplaçant dans l'expression (a) la vitesse v par la composante normale de cette vitesse, $v\cos i$; par conséquent, on obtient pour la composante de la résistance dans la direction du mouvement

$$f(v\cos i)\cos i\,d\sigma.$$

Imaginons ensuite un corps en mouvement dans l'air, et supposons que sa surface soit convexe; on peut distinguer cette surface en deux parties, l'une antérieure, l'autre postérieure, séparées par la courbe de contact d'un cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à la direction de la vitesse. On admet généralement que les éléments de la partie antérieure résisteraient, comme nous avons dit pour un élément plan, et que les éléments de la partie postérieure n'éprouveraient aucune action de la part de l'air.

Ces deux parties de la surface en lesquelles on la divise et qui varient à chaque instant sont une grande difficulté pour l'application de l'analyse; il est évident, en effet, que le problème serait beaucoup plus simple, si l'on pouvait supposer tous les éléments de la surface du corps assujettis à la même loi de résistance. D'ailleurs, l'hypothèse que l'on a faite sur les deux parties de la surface ne peut être qu'une approximation; car, bien que la partie antérieure du corps ait certainement la plus grande influence sur la résistance au mouvement, il n'est pas vraisemblable que la partie postérieure n'en ait aucune.

D'après ce qui vient d'être dit, on admet que les résistances, au moins pour de grandes vitesses, se réduisent à des réactions normales; mais cette hypothèse ne peut être encore qu'une approximation, et, si elle est suffisamment exacte pour les corps sphériques homogènes lancés sans mouvement de rotation, elle ne doit pas l'être pour la partie cylindrique des projectiles oblongs, et, de plus, le frottement sur ces corps doit changer leur orientation et doit tendre à rapprocher leur axe de la direction du mouvement.

Pour trouver théoriquement la loi de la résistance de l'air, il faudrait étudier simultanément le mouvement du projectile et la propagation du mouvement dans l'air à partir des différentes positions du corps. Un problème de ce genre a été résolu par Poisson dans le cas de très-petites oscillations d'un pendule sphérique dans l'air [*Mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant* (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* t. XI, 1832)]. Mais les calculs que Poisson a dû employer dans cette question relativement si simple et les hypothèses qu'il a pu faire et qui ne seraient plus applicables dans le mouvement d'un projectile ne peuvent servir, pour la question dont nous parlons, qu'à en montrer la difficulté. Il est donc indispensable de considérer la loi de la résistance comme une donnée de l'expérience.

Dans cette Section, j'expose une théorie rigoureuse du mouvement des projectiles oblongs; j'établis les équations différentielles de ce mouvement, et je montre comment on peut les intégrer, sans faire aucune hypothèse particulière sur la loi de la résistance de l'air, qui est ainsi laissée au choix du calculateur.

PREMIÈRE SOLUTION DU MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS L'AIR.

2. Concevons un point matériel pesant qui se meuve sous l'influence de la résistance de l'air dirigée en sens contraire de sa vitesse, et déterminons les formules relatives à son mouvement. Ces formules conviendront aussi au mouvement du centre d'une sphère homogène lancée dans l'air sans mouvement de rotation (Section IV, n° 16), puisque la résistance de l'air sur ce corps sera évidemment directement opposée à son mouvement.

Le point mobile restera pendant tout son mouvement dans le plan vertical mené suivant la direction de la vitesse initiale. Prenons dans ce plan un axe des z vertical mené de bas en haut et un axe des x horizontal. Si nous représentons par v la vitesse et par α l'angle qu'elle fait avec l'axe des x, nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha, \quad \frac{dz}{dt} = v\sin\alpha; \tag{1}$$

d'après cela, désignons par R la résistance de l'air divisée par la masse du corps et par g l'accélération due à la pesanteur, nous aurons ces deux équations

$$\frac{d(v\cos\alpha)}{dt} = -R\cos\alpha, \tag{2}$$

$$\frac{d(v\sin\alpha)}{dt} = -g - R\sin\alpha.$$

Multiplions les deux dernières équations respectivement par $\sin\alpha$, $-\cos\alpha$, et ajoutons-les; R s'éliminera, et l'on aura

$$v\frac{d\alpha}{dt} = -g\cos\alpha. \tag{3}$$

Éliminons dt entre (2) et (3), nous aurons

$$\frac{d(v\cos\alpha)}{dt} = \frac{R}{g}v. \tag{4}$$

La résistance ne doit varier qu'avec la vitesse; afin que l'expression de cette résistance se prête facilement au calcul, posons

$$(5)\qquad \frac{R}{g} = a + bv^n;$$

alors l'équation (4) devient

$$\frac{dv}{d\alpha} - \frac{a + \sin\alpha}{\cos\alpha} v = \frac{bv^{n+1}}{\cos\alpha}.$$

Si l'on fait

$$v^{-n} = w,$$

on obtient l'équation linéaire et du premier ordre

$$\frac{dw}{d\alpha} + n\frac{a + \sin\alpha}{\cos\alpha} w = \frac{-bn}{\cos\alpha}.$$

En résolvant cette équation, on obtient

$$w = -bn\cos^n\alpha \operatorname{tang}^{na}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\left[\int \frac{d\alpha}{\cos^{n+1}\alpha \operatorname{tang}^{na}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} + \text{const.}\right];$$

remplaçons w par v^{-n} et indiquons par α_0, v_0 les valeurs initiales de α, v; nous aurons

$$\frac{1}{v^n\cos^n\alpha} - \frac{1}{v_0^n\cos^n\alpha_0} = -bn\operatorname{tang}^{na}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos^{n+1}\alpha \operatorname{tang}^{na}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Représentons, pour abréger, par $-$U le second membre de cette équation, nous aurons

$$\frac{1}{v^n\cos^n\alpha} - \frac{1}{v_0^n\cos^n\alpha_0} = -\mathrm{U}$$

et, par suite,

$$v = \frac{v_0\cos\alpha_0}{\cos\alpha\sqrt[n]{1 - \mathrm{U}v_0^n\cos^n\alpha_0}}.$$

Cette équation déterminera v en fonction de α, et comme, d'après les équations (3) et (1), on a

$$dt = -\frac{1}{g}\frac{v\,d\alpha}{\cos\alpha},$$

$$dx = -\frac{v^2}{g}\,d\alpha,$$

$$dz = -\frac{v^2}{g}\,\operatorname{tang}\alpha\,d\alpha,$$

on aura, par trois nouvelles quadratures, les quantités t, x, z en fonction de α.

Si l'on suppose dans les formules précédentes $a = 0$, on a la solution donnée par Jean Bernoulli. L'expression qui vient d'être prise pour l'expression de la résistance n'est pas admissible pour toutes les valeurs de la vitesse, puisqu'elle doit s'annuler avec cette vitesse. Mais il pourra arriver que, dans l'étendue où v doive varier, la résistance soit représentée avec toute l'approximation désirable par la formule (5). Toutefois, la solution précédente conduirait, dans la pratique, à des calculs d'une extrême complication, et, de plus, il est impossible de la modifier pour la rendre applicable au mouvement des projectiles différents de la sphère.

MOUVEMENT D'UN PROJECTILE SPHÉRIQUE.

3. Concevons un projectile sphérique, homogène, lancé sans mouvement de rotation; nous allons développer les coordonnées du projectile par rapport aux puissances de t; ce calcul est sans difficulté, mais nous l'exposons, parce qu'il nous sera nécessaire pour la détermination rigoureuse du mouvement d'un projectile oblong. Prenons dans le plan de la trajectoire décrite par le centre du corps deux axes de coordonnées rectangulaires, l'axe des x horizontal, l'axe des z vertical et mené de bas en haut; désignons par g l'accélération de la gravité, par μ la masse du corps, par R la résistance, par ds l'élément de la courbe, nous aurons les équations

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{R}\frac{dx}{ds}, \quad \mu\frac{d^2z}{dt^2} = -\mu g - \mathrm{R}\frac{dz}{ds}.$$

Représentons la vitesse par v, remplaçons ds par $v\,dt$ et posons

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \mathrm{A}, \quad \frac{dz}{dt} + gt = \mathrm{C},$$

nous aurons les équations

$$\mu \frac{d\mathrm{A}}{dt} = -\frac{\mathrm{R}}{v}\mathrm{A}, \quad \mu \frac{d\mathrm{C}}{dt} = -\frac{\mathrm{R}}{v}(\mathrm{C} - gt), \quad v^2 = \mathrm{A}^2 + (\mathrm{C} - gt)^2.$$

R n'étant fonction que de v et s'annulant avec cette quantité, prenons pour R une expression de la forme

$$\alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3,$$

où α, β, γ sont des constantes.

4. En concevant A et C développés suivant les puissances de t, posons

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathrm{A} = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 t + \mathrm{A}_2 t^2 + \mathrm{A}_3 t^3 + \ldots, \\ \mathrm{C} = \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 t + \mathrm{C}_2 t^2 + \mathrm{C}_3 t^3 + \ldots, \end{cases}$$

et nous aurons

$$\begin{aligned} v^2 = {} & \mathrm{A}_0^2 + 2\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 t + (\mathrm{A}_1^2 + 2\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2)t^2 + 2(\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2)t^3 + (2\mathrm{A}_0\mathrm{A}_4 + 2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_2^2)t^4 + \ldots \\ & + \mathrm{C}_0^2 + 2\mathrm{C}_0\mathrm{C}_1 t + (\mathrm{C}_1^2 + 2\mathrm{C}_0\mathrm{C}_2)t^2 + 2(\mathrm{C}_0\mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2)t^3 + (2\mathrm{C}_0\mathrm{C}_4 + 2\mathrm{C}_1\mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_2^2)t^4 + \ldots \\ & - 2gt(\mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 t + \mathrm{C}_2 t^2 + \mathrm{C}_3 t^3 + \ldots) + g^2 t^2, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} v^2 = {} & \mathrm{A}_0^2 + \mathrm{C}_0^2 + 2(\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{C}_0\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_0 g)t + (\mathrm{A}_1^2 + 2\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2 + \mathrm{C}_1^2 + 2\mathrm{C}_0\mathrm{C}_2 - 2\mathrm{C}_1 g + g^2)t^2 \\ & + (2\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3 + 2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + 2\mathrm{C}_0\mathrm{C}_3 + 2\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2 - 2\mathrm{C}_2 g)t^2 \\ & + (2\mathrm{A}_0\mathrm{A}_4 + 2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_2^2 + 2\mathrm{C}_0\mathrm{C}_4 + 2\mathrm{C}_1\mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_2^2 - 2\mathrm{C}_3 g)t^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'on a, en général, à extraire la racine carrée d'une série de la forme $n_0 + n_1 t + n_2 t^2 + \ldots$, et qu'on pose

$$(n_0 + n_1 t + n_2 t^2 + n_3 t^3 + \ldots)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{N}_0 + \mathrm{N}_1 t + \mathrm{N}_2 t^2 + \mathrm{N}_3 t^3 + \ldots,$$

on pourra calculer successivement les coefficients N_0, N_1, N_2, ...

d'après les égalités suivantes :

$$N_0 = n_0^{\frac{1}{2}}, \quad 2N_0N_1 = n_1, \quad 2N_0N_2 + N_1^2 = n_2,$$
$$2N_0N_3 + 2N_1N_2 = n_3, \quad 2N_0N_4 + 2N_1N_3 + N_2^2 = n_4, \quad \text{etc.}$$

D'après cela on aura

$$(3) \qquad v = N_0 + N_1 t + N_2 t^2 + N_3 t^3 + \ldots,$$

en calculant N_0, N_1, N_2, ... d'après les formules précédentes et en prenant pour n_0, n_1, n_2, ... les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
n_0 &= A_0^2 + C_0^2,\\
n_1 &= 2A_0A_1 + 2C_0(C_1 - g),\\
n_2 &= A_1^2 + 2A_0A_2 + (C_1 - g)^2 + 2C_0C_2,\\
n_3 &= 2A_0A_3 + 2A_1A_2 + 2C_0C_3 + 2C_2(C_1 - g),\\
n_4 &= 2A_0A_4 + 2A_1A_3 + A_2^2 + 2C_0C_4 + 2(C_1 - g)C_3 + C_2^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les deux équations qui donnent A et C sont

$$\mu \frac{dA}{dt} = -(\alpha + \beta v + \gamma v^2)A,$$
$$(C - gt)\,dA = A\,dC.$$

Substituons les expressions (2) et (3) dans ces équations et égalons dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de t. Nous déduirons de la première équation les formules suivantes, qui donnent les coefficients A_1, A_2, A_3, ... :

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{\alpha}{\mu}A_0 - \frac{\beta}{\mu}A_0N_0 - \frac{\gamma}{\mu}A_0n_0,\\
2A_2 &= -\frac{\alpha}{\mu}A_1 - \frac{\beta}{\mu}(A_0N_1 + A_1N_0) - \frac{\gamma}{\mu}(A_0n_1 + A_1n_0),\\
3A_3 &= -\frac{\alpha}{\mu}A_2 - \frac{\beta}{\mu}(A_0N_2 + A_1N_1 + A_2N_0) - \frac{\gamma}{\mu}(A_0n_2 + A_1n_1 + A_2n_0),\\
4A_4 &= -\frac{\alpha}{\mu}A_3 - \frac{\beta}{\mu}(A_0N_3 + A_1N_2 + A_2N_1 + A_3N_0) - \frac{\gamma}{\mu}(A_0n_3 + A_1n_2 + A_2n_1 + A_3n_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ensuite de l'équation entre A et C nous concluons les valeurs de C_1, C_2, C_3, ..., d'après les formules

$$
\begin{aligned}
&A_0C_1 - A_1C_0 = 0,\\
&2A_0C_2 - 2A_2C_0 = -A_1 g,\\
&3A_0C_3 - 3A_3C_0 = A_2C_1 - A_1C_2 - 2A_2 g,\\
&4A_0C_4 - 4A_4C_0 = 2A_3C_1 - 2A_1C_3 - 3A_3 g,\\
&5A_0C_5 - 5A_5C_0 = 3A_4C_1 - 3A_1C_4 + A_3C_2 - A_2C_3 - 4A_4 g,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Lorsque les développements de A, C seront obtenus, on aura, d'après les équations (1),

$$z = D' - g\frac{t^2}{2} + C_0 t + C_1\frac{t^2}{2} + C_2\frac{t^3}{3} + \dots,$$

$$x = D + A_0 t + A_1\frac{t^2}{2} + A_2\frac{t^3}{3} + \dots,$$

D, D' étant deux constantes arbitraires.

5. Il peut arriver que les formules que nous venons d'obtenir ne soient pas convergentes pour toutes les valeurs de t qui se rapportent à la trajectoire parcourue par le mobile; mais on pourra toujours diviser la trajectoire en parties assez petites pour que ces formules soient très-convergentes, lorsqu'on les appliquera à un de ces arcs de la courbe, en prenant pour temps initial le temps où le mobile passe au commencement de cet arc; on aura ainsi des formules différentes pour représenter le mouvement sur chacune des parties de la courbe en lesquelles on l'a divisée.

Lorsque les formules précédentes seront applicables tout le long de la trajectoire, on pourra déterminer l'instant où le corps passe au point le plus haut en résolvant l'équation $C - gt = 0$, ou

$$C_0 + (C_1 - g)t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \dots = 0.$$

Pour résoudre cette équation, posons

$$t = L_0 C_0 + L_1 C_0^2 + L_2 C_0^3 + \dots$$

Substituons dans l'équation et égalons à zéro les différentes puissances de C_0; alors L_0, L_1, L_2, ... seront déterminés par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&(C_1-g)L_0+1=0,\\
&(C_1-g)L_1+C_2L_0^2=0,\\
&(C_1-g)L_2+2C_2L_0L_1+C_3L_0^3=0,\\
&(C_1-g)L_3+C_2(2L_0L_2+L_1^2)+3C_3L_0^2L_1+C_4L_0^4=0,\\
&(C_1-g)L_4+C_2(2L_0L_3+2L_1L_2)+C_3(3L_0^2L_2+3L_0L_1^2)+4C_4L_0^3L_1+C_5L_0^5=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

6. *Exemple.* — Déterminons le mouvement d'une bombe dont le rayon est $r=0^{\mathrm{m}},1355$, le poids $50^{\mathrm{kg}},60$, et qui est lancée sous une inclinaison de $19^\circ 58'30''$, avec une vitesse de $120^{\mathrm{m}},14$ par seconde.

Nous prendrons pour la résistance sur ce projectile sphérique l'expression

$$\pi r^2 0,027 v^2(1+0,0023 v),$$

donnée dans la *Balistique* de M. Didion, en supposant le poids d'un litre d'air égal à $1^{\mathrm{gr}},208$; car la résistance peut être considérée comme variant proportionnellement à la densité de l'air.

Nous obtiendrons

$$\log\frac{\beta}{\mu}=\bar{4},47986,\quad \log\frac{\gamma}{\mu}=\bar{7},84159.$$

Nous calculerons ensuite les coefficients des séries

$$\begin{aligned}
A&=A_0+A_1t+A_2t^2+\ldots,\\
C&=C_0+C_1t+C_2t^2+\ldots,\\
v&=N_0+N_1t+N_2t^2+\ldots,
\end{aligned}$$

et nous trouverons successivement

$$\begin{array}{llll}
A_0=112,91, & C_0=41,042, & n_0=14432,4, & N_0=120,14,\\
A_1=-5,2266, & C_1=-1,8999, & n_1=-2141,46, & N_1=-8,9124,\\
A_2=0,35681, & C_2=0,35673, & n_2=274,283, & N_2=0,81087,\\
A_3=-0,029165, & C_3=-0,027763, & n_3=-20,9488, & N_3=-0,027036,\\
A_4=0,0019199, & C_4=0,0022009. & &
\end{array}$$

On obtient ensuite pour le temps que met la bombe pour arriver au point le plus haut $3^s,86$, et la vitesse en ce point est $96^m,71$.

Autre solution du mouvement d'un projectile sphérique.

7. Concevons encore un projectile sphérique lancé sans mouvement de rotation. Si nous négligeons d'abord la résistance de l'air, nous aurons pour l'équation de la force vive, en prenant les mêmes axes de coordonnées que ci-dessus,

$$\frac{\mu}{2}(x'^2 + z'^2) + \mu g z = h.$$

Pour former l'équation aux différences partielles d'Hamilton, nous devons faire (Section II, n° 4)

$$\frac{dT}{dx'} = \mu x' = \frac{dV}{dx}, \quad \frac{dT}{dz'} = \mu z' = \frac{dV}{dz},$$

et il en résulte l'équation

$$\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] + 2\mu g z = 2h;$$

on y satisfait en posant ces deux autres, où a représente une constante arbitraire,

$$\frac{dV}{dx} = \mu a, \quad \frac{dV}{dz} = \mu\sqrt{\frac{2h}{\mu} - a^2 - 2gz};$$

et l'on en déduit l'intégrale complète

$$V = \mu a x - \frac{\mu}{3g}\left(\frac{2h}{\mu} - a^2 - 2gz\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Donc, en désignant par τ, m deux nouvelles constantes arbitraires, on a, pour intégrales finies,

(1) $$\frac{dV}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dV}{da} = m$$

(Section II, n° 7) ou

$$-\frac{1}{g}\left(\frac{2h}{\mu}-a^2-2gz\right)^{\frac{1}{2}}=t+\tau,$$

$$\mu x+\frac{\mu a}{g}\left(\frac{2h}{\mu}-a^2-2gz\right)^{\frac{1}{2}}=m,$$

et ces équations peuvent s'écrire

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{m}{\mu}+a(t+\tau),\\ z&=\frac{2h-\mu a^2}{2\mu g}-\frac{g}{2}(t+\tau)^2.\end{aligned}\right.$$

Pour tenir compte ensuite de la résistance de l'air, nous devrons, suivant ce qui a été dit au n° 5 de la Section VII, introduire l'expression

$$\delta\Omega=(\alpha+\beta v+\gamma v^2)(x'\delta x+z'\delta z),$$

et nous avons

$$x'=a,\quad z'=-g(t+\tau),\quad v=\sqrt{a^2+g^2(t+\tau)^2},$$

$$\delta x=\frac{\delta m}{\mu}+(t+\tau)\delta a+a\delta\tau,$$

$$\delta z=\frac{\delta h-\mu a\delta a}{\mu g}-g(t+\tau)\delta\tau.$$

Il en résulte

$$(3)\quad \delta\Omega=(\alpha+\beta v+\gamma v^2)\left\{[a^2+g^2(t+\tau)^2]\delta\tau-(t+\tau)\frac{\delta h}{\mu}+\frac{a}{\mu}\delta m+2a(t+\tau)\delta a\right\}.$$

Les quantités h, τ, a, m, qui d'abord étaient constantes dans les formules (2), sont devenues variables et satisfont, d'après les formules (1), aux équations

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{d\Omega}{d\tau},\quad \frac{d\tau}{dt}=\frac{d\Omega}{dh},$$

$$\frac{da}{dt}=-\frac{d\Omega}{dm},\quad \frac{dm}{dt}=\frac{d\Omega}{da},$$

dans lesquelles on ne doit pas considérer les seconds membres comme les véritables dérivées d'une fonction Ω, mais comme les coefficients de $\delta\tau$, δh, δm, δa dans la formule (3). On obtient donc

$$\frac{dh}{dt} = -(\alpha + \beta v + \gamma v^2)(a^2 + g^2(t+\tau)^2),$$

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{\mu}(\alpha + \beta v + \gamma v^2)(t+\tau),$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{\mu}(\alpha + \beta v + \gamma v^2)a,$$

$$\frac{dm}{dt} = 2a(t+\tau)(\alpha + \beta v + \gamma v^2),$$

et l'on peut remplacer ces équations par les suivantes :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a}{\mu}\left[\alpha + \beta\sqrt{a^2 + g^2(t+\tau)^2} + \gamma(a^2 + g^2(t+\tau)^2)\right],$$

$$a\,d\tau = (t+\tau)\,da,$$

$$dm = -2\mu(t+\tau)\,da,$$

$$dh = \frac{\mu}{a}(a^2 + g^2(t+\tau^2))\,da.$$

8. Les quantités a, τ, m, h peuvent être considérées comme fonctions de la seule quantité $t+\tau$, où τ est lui-même fonction de t. Posons donc

$$t + \tau = \mathrm{T},$$

et nous aurons

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{d\mathrm{T}}\left(1 + \frac{d\tau}{d\mathrm{T}}\right).$$

Nous aurons de même

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{d\mathrm{T}}\left(1 + \frac{d\tau}{dt}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{\frac{d\tau}{d\mathrm{T}}}{1 - \frac{d\tau}{d\mathrm{T}}},$$

et il en résulte

$$\frac{da}{dt} = \frac{\frac{da}{d\mathrm{T}}}{1 - \frac{d\tau}{a\mathrm{T}}}.$$

Donc les quatre équations qui déterminent a, τ, m, h deviennent

$$\frac{da}{dT} = -\frac{a}{\mu}\left[\alpha + \beta\sqrt{a^2+g^2T^2} + \gamma(a^2+g^2T^2)\right]\left(1 - \frac{d\tau}{dT}\right),$$

$$(a)\qquad a\frac{d\tau}{dT} = T\frac{da}{dT},$$

$$(b)\qquad \frac{dm}{dT} = -2\mu T\frac{da}{dT},$$

$$(c)\qquad \frac{dh}{dT} = \frac{\mu}{a}(a^2+g^2T^2)\frac{da}{dT}.$$

En éliminant τ de la première au moyen de la deuxième, on obtient

$$(d)\qquad \frac{da}{dT} = -\frac{1}{\mu}\left[\alpha + \beta\sqrt{a^2+g^2T^2} + \gamma(a^2+g^2T^2)\right]\left(a - T\frac{da}{dT}\right).$$

Cette équation du premier ordre permettra de calculer a en fonction de T, et l'on pourra développer cette quantité en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de T

$$(4)\qquad a = a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + \ldots.$$

On pourra ensuite calculer τ sous la forme d'une série semblable

$$(5)\qquad \tau = \tau_0 + \tau_1T + \tau_2T^2 + \tau_3T^3 + \ldots,$$

au moyen de l'équation (a).

Ensuite de l'équation (b) on tirera, en désignant par m_0 une constante arbitraire,

$$(6)\qquad m = m_0 - 2\mu\left(\tfrac{1}{2}a_1T^2 + \tfrac{2}{3}a_2T^3 + \tfrac{3}{4}a_3T^4 + \ldots\right).$$

Enfin on déduira de l'équation (c)

$$\frac{1}{\mu}\frac{dh}{dT} = a\frac{da}{dT} + g^2T\frac{d\tau}{dT} = a\frac{da}{dT} + g^2(\tau_1T + 2\tau_2T^2 + 3\tau_3T^3 + \ldots),$$

et, par suite, en désignant par h_0 une constante arbitraire,

$$(7)\qquad \frac{1}{\mu}(h - h_0) = \tfrac{1}{2}(a^2 - a_0^2) + g^2\left(\tfrac{1}{2}\tau_1T^2 + \tfrac{2}{3}\tau_2T^3 + \tfrac{3}{4}\tau_3T^4 + \tfrac{4}{5}\tau_4T^5 + \ldots\right).$$

Si l'on déterminait ensuite T en fonction de t au moyen de l'équation

$$T - t = \tau_0 + \tau_1T + \tau_2T^2 + \ldots,$$

on aurait les valeurs des quantités a, τ, m, h en fonction de t. Mais il n'est pas commode d'exprimer T en fonction de t, et il vaudra mieux faire varier T par degrés très-petits et calculer les valeurs correspondantes de t d'après la formule

$$t = T - \tau_0 - \tau_1 T - \tau_2 T^2 - \tau_3 T^3 - \ldots.$$

9. Calculons maintenant les deux séries (4), (5) au moyen des équations (d) et (a). Nous avons

$$a^2 + g^2T^2 = a_0^2 + 2a_0a_1T + (a_1^2 + 2a_0a_2 + g^2)T^2 + (2a_0a_3 + 2a_1a_2)T^3 + (a_2^2 + 2a_1a_3 + 2a_0a_4)T^4 + \ldots;$$

posons

$$p_0 = a_0^2,\quad p_1 = 2a_0a_1,\quad p_2 = a_1^2 + 2a_0a_2 + g^2,$$
$$p_3 = 2a_0a_3 + 2a_1a_2,\qquad p_4 = a_2^2 + 2a_1a_3 + 2a_0a_4,\quad \ldots,$$

et nous aurons

$$\sqrt{a^2 + g^2T^2} = (p_0 + p_1T + p_2T^2 + \ldots)^{\frac{1}{2}} = P_0 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3 + \ldots,$$

en calculant P_0, P_1, P_2, ... d'après les formules

$$P_0 = p_0^{\frac{1}{2}} = a_0,\quad 2P_0P_1 = p_1,\quad 2P_0P_2 + P_1^2 = p_2,\quad \text{etc.}$$

En substituant donc la série (4) dans l'équation (d) et égalant dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de t, on obtient

$$a_1 = -a_0\left(\frac{\alpha}{\mu} + \frac{\beta}{\mu}P_0 + \frac{\gamma}{\mu}p_0\right),$$
$$2a_2 = -a_0\left(\frac{\beta}{\mu}P_1 + \frac{\gamma}{\mu}p_1\right),$$
$$3a_3 = \frac{\alpha}{\mu}a_2 + \frac{\beta}{\mu}(-a_0P_2 + a_2P_0) + \frac{\gamma}{\mu}(-a_0p_2 + a_2p_0),$$
$$4a_4 = \frac{\alpha}{\mu}2a_3 + \frac{\beta}{\mu}(-a_0P_3 + a_2P_1 + 2a_3P_0) + \frac{\gamma}{\mu}(-a_0p_3 + a_2p_1 + 2a_3p_0),$$
$$5a_5 = \frac{\alpha}{\mu}3a_4 + \frac{\beta}{\mu}(-a_0P_4 + a_2P_2 + 2a_3P_1 + 3a_4P_0)$$
$$+ \frac{\gamma}{\mu}(-a_0p_4 + a_2p_2 + 2a_3p_1 + 3a_4p_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En substituant ensuite les deux séries (4) et (5) dans l'équation (a), on obtient les égalités suivantes pour déterminer $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$:

$$\begin{aligned}
&\tau_1 = 0, \quad 2\tau_2 a_0 = a_1, \quad 3\tau_3 a_0 + 2\tau_2 a_1 = 2a_2,\\
&4\tau_4 a_0 + 3\tau_3 a_1 + 2\tau_2 a_2 = 3a_3,\\
&5\tau_5 a_0 + 4\tau_4 a_1 + 3\tau_3 a_2 + 2\tau_2 a_3 = 4a_4,\\
&6\tau_6 a_0 + 5\tau_5 a_1 + 4\tau_4 a_2 + 3\tau_3 a_4 + 2\tau_2 a_4 = 5a_5,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

10. *Détermination des constantes arbitraires.* — Nous allons déterminer les constantes arbitraires, d'après les conditions initiales. Non-seulement les expressions de x, z sont identiques pour les mouvements troublé et non troublé, mais il en est de même de leurs dérivées x', z'. Ainsi l'on a (n° 7)

$$x' = a, \qquad z' = -gT,$$
$$x = \frac{m}{\mu} + aT, \quad z = \frac{2h - \mu a^2}{2\mu g} - \frac{g}{2}T^2.$$

Supposons que l'on ait, pour $t = 0$,

$$x = 0, \quad z = 0, \quad x' = x'_0, \quad z' = z'_0,$$

x'_0, z'_0 étant des quantités données. Désignons par l la valeur de τ ou de T pour $t = 0$, nous aurons pour ces quatre conditions, en ayant égard aux formules (6) et (7),

$$\text{(A)} \qquad x'_0 = a_0 + a_1 l + a_2 l^2 + \ldots,$$

$$\text{(B)} \qquad z'_0 = -gl,$$

$$\text{(C)} \qquad 0 = \frac{m_0}{\mu} - 2\left(\tfrac{1}{2}a_1 l^2 + \tfrac{2}{3}a_2 l^3 + \tfrac{3}{4}a_3 l^4 + \ldots\right) + l x'_0.$$

$$\text{(D)} \qquad 0 = \frac{h_0}{\mu} - \frac{a_0^2 + z'^2_0}{2} + g^2 l^3\left(\tfrac{2}{3}\tau_2 + \tfrac{3}{4}\tau_3 l + \tfrac{4}{5}\tau_4 l^2 + \ldots\right).$$

L'équation (B) donne

$$l = -\frac{z'_0}{g};$$

dans l'équation (A), les coefficients a_1, a_2, ... sont fonctions de a_0:

on pourra donc calculer a_0 au moyen de cette équation. Enfin on aura m_0 et h_0, d'après les équations (C) et (D).

Reste à déterminer τ_0. Au point le plus haut de la trajectoire, on a $z' = 0$ ou $T = 0$, et comme on a

$$\tau = \tau_0 + \tau_2 T^2 + \tau_3 T^3 + \tau_4 T^4 + \ldots,$$

$-\tau_0$ représente le temps du passage du mobile au point le plus élevé. Faisons $t = 0$ dans cette équation : T et τ deviennent égaux à l, et nous avons

$$\tau_0 = l - \tau_2 l^2 - \tau_3 l^3 - \tau_4 l^4 - \ldots,$$

pour calculer τ_0.

11. *De la formation de Tables pour le calcul du mouvement des projectiles.* — La courbe décrite par un projectile sphérique donné est complétement déterminée de forme, quand on connaît sa vitesse a_0 au point le plus haut. En faisant varier cette vitesse, on obtiendra toutes les trajectoires que peut décrire le mobile ; on ne peut toutefois considérer que des longueurs de ces trajectoires, dans l'étendue desquelles les séries

$$a = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + \ldots$$
$$\tau = \tau_0 + \tau_2 T^2 + \tau_3 T^3 + \ldots$$

sont suffisamment convergentes. Pour étudier le mouvement en dehors de cette étendue, il faudrait avoir recours aux formules des nos 3 et 4.

Dans les formules des numéros précédents, supposons $t = 0$ au point le plus haut, c'est-à-dire lorsque T est nul; nous aurons alors aussi $\tau = 0$ en ce point, et par suite

$$\tau_0 = 0;$$

ainsi l'expression de τ se réduira à

$$\tau = \tau_2 T^2 + \tau_3 T^3 + \tau_4 T^4 + \ldots.$$

Nous avons ensuite

$$x' = a, \quad z' = -gT,$$

et si, dans les équations

$$x = \frac{m}{\mu} + aT, \quad z = \frac{h}{\mu g} - \frac{a^2}{2g} - \frac{g}{2} T^2,$$

nous remplaçons m, h par leurs valeurs (6), (7), en ayant égard aux valeurs des constantes, nous aurons

$$x = a_0 T - \tfrac{1}{3} a_2 T^3 - \tfrac{2}{4} a_3 T^4 - \tfrac{3}{5} a_4 T^5 - \tfrac{4}{6} a_5 T^6 - \ldots,$$

$$z = -\frac{g}{2} T^2 + g\left(\tfrac{2}{3}\tau_2 T^3 + \tfrac{3}{4}\tau_3 T^4 + \tfrac{4}{5}\tau_4 T^5 + \ldots\right).$$

Dans le cas actuel, il est beaucoup plus facile que dans le cas général, examiné au n° 8, d'exprimer T en fonction de t. En effet, dans la formule

$$T - t = \tau_2 T^2 + \tau_3 T^3 + \tau_4 T^4 + \ldots,$$

faisons

$$T = l_1 t + l_2 t^2 + l_3 t^3 + l_4 t^4 + \ldots,$$

et nous trouverons

$$l_1 = 1, \quad l_2 = \tau_2, \quad l_3 = 2\tau_2^2 + \tau_3, \quad l_4 = 5\tau_2^3 + 5\tau_2\tau_3 + \tau_4,$$
$$l_5 = 14\tau_2^4 + 21\tau_2^2\tau_3 + 6\tau_2\tau_4 + 3\tau_3^2 + \tau_5, \quad \text{etc.},$$

On peut, pour une valeur de a_0, qui représente la vitesse au point le plus haut, calculer pour de petits accroissements de t les valeurs de x', z', x, z, d'après les formules précédentes. Concevons que l'on ait calculé de même une suite de trajectoires pour des valeurs de a_0 croissant par petits degrés. Alors, pour avoir la trajectoire décrite par le mobile lancé avec une vitesse dont les composantes sont x'_0, z'_0, il n'y aura qu'à examiner quelle est la trajectoire calculée sur laquelle les composantes de la vitesse prennent ces valeurs ou des valeurs qui s'en rapprochent le plus.

12. *Exemple.* — Proposons-nous de trouver le mouvement d'une bombe dont le rayon est $0^{\text{m}},1355$, le poids $50^{\text{kg}},60$, et dont la vitesse au point le plus haut est $96^{\text{m}},71$.

Dans la formule qui donne la vitesse

$$a = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + \ldots,$$

nous connaissons le premier terme 96,71 et, en calculant les coefficients suivants d'après les formules du n° 9, nous avons

$$a_0 = 96{,}71, \qquad a_1 = -\,3{,}45166, \quad a_2 = -\,0{,}072804,$$
$$a_3 = 0{,}007419, \quad a_4 = -\,0{,}00020270, \quad \text{etc.},$$

En calculant ensuite les termes de la série

$$\tau = \tau_2 T^2 + \tau_3 T^3 + \tau_4 T^4 + \tau_5 T^5 + \ldots,$$

on trouve

$$\tau_2 = -0{,}017845, \quad \tau_3 = \quad 0{,}00007731,$$
$$\tau_4 = -0{,}00004875, \quad \tau_5 = -0{,}000003651, \text{ etc.}$$

La trajectoire qui nous occupe est celle qui a été déjà examinée au n° 6, mais les séries actuelles sont beaucoup plus convergentes que celles de ce numéro pour la branche descendante de la courbe.

Pour retrouver les mêmes résultats, examinons le point d'où le mobile part avec une vitesse dont la composante verticale est

$$z' = 41^{\mathrm{m}},042;$$

la valeur de T correspondante sera

$$l = -\frac{z'}{g} = -4,1842;$$

on obtiendra pour la composante horizontale de la vitesse

$$x' = a_0 + a_1 l + a_2 l^2 + a_3 l^3 + \ldots = 112^{\mathrm{m}},907,$$

pour la vitesse elle-même

$$v = \sqrt{x'^2 + z'^2} = 120^{\mathrm{m}},14,$$

et pour le temps que mettra la bombe pour aller du point considéré au point le plus haut

$$t = l - \tau_2 l^2 - \tau_3 l^3 - \tau_4 l^4 - \tau_5 l^5 - \ldots = -3^{\mathrm{s}},856.$$

Comment on peut avoir égard à la variation de la densité de l'air traversé par le projectile.

13. Dans ce qui précède, nous n'avons pas tenu compte du changement de densité de l'air avec la hauteur du projectile; montrons comment on peut y avoir égard.

Désignons par Π la pression de l'atmosphère, par ρ sa densité, par r la distance du projectile au centre de la Terre pour $t = 0$, par g l'accélération de la pesanteur à cette distance. Si la distance verticale z du projectile à sa position initiale varie de dz, la pression Π subit la diminution

$$d\Pi = -\rho g \frac{r^2}{(r+z)^2} dz.$$

En désignant par α le coefficient de dilatation de l'air, par θ la température et par k une certaine constante, on a

$$\Pi = k\rho(1+\alpha\theta), \quad \rho = \frac{\Pi}{k(1+\alpha\theta)};$$

il en résulte

$$d\Pi = -\frac{\Pi g}{k(1+\alpha\theta)} \frac{r^2}{(r+z)^2} dz.$$

En négligeant le facteur $\frac{r^2}{(r+z)^2}$, on a

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = \frac{-g}{k(1+\alpha\theta)} dz;$$

donc, en appelant Π_0 la valeur de Π pour $z = 0$,

$$\Pi = \Pi_0 e^{\frac{-gz}{k(1+\alpha\theta)}}.$$

Pour déterminer la constante k, supposons dans la formule

$$\Pi = k\rho(1+\alpha\theta),$$

$\theta = 0$ et la pression de 760 millimètres de mercure; Π représente la pression d'une hauteur de 10,334 mètres d'eau sur 1 mètre carré; ce qui fait 10334 kilogrammes; $g\rho$ est le poids d'un mètre cube d'air ou $1^{kg},293$. On a donc

$$10334 = 1,293\frac{k}{g}, \quad \frac{k}{g} = 7992.$$

Posons

$$\frac{1}{7992(1+\alpha\theta)} = n,$$

nous aurons

$$\Pi = \Pi_0 e^{-nz} \quad \text{et, par suite,} \quad \rho = \frac{\Pi_0}{k(1+\alpha\theta)} e^{-nz}.$$

Or la résistance de l'atmosphère doit varier proportionnellement à sa densité; donc, au lieu de supposer l'expression de la résistance de la forme $\alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3$, nous devons la prendre de la forme

$$(\alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3)e^{-nz}.$$

D'après cela, l'expression de $\delta\Omega$ du n° 7 sera seulement multipliée par e^{-nz}, et l'on aura

$$\delta\Omega = (\alpha + \beta v + \gamma v^2)e^{-nz}[(a^2 + g^2(t+\tau)^2)\delta\tau - (t+\tau)\delta h - a\delta m + 2a(t+\tau)\delta a],$$

et les formules qui donnent a, τ, m, h seront

$$\frac{da}{dT} = -\frac{e^{-nz}}{\mu}[\alpha + \beta\sqrt{a^2 + g^2T^2} + \gamma(a^2 + g^2T^2)]\left(a - T\frac{da}{dT}\right),$$

$$a\frac{d\tau}{dT} = T\frac{da}{dT},$$

$$\frac{dm}{dT} = -2\mu T\frac{da}{dT},$$

$$\frac{dh}{dT} = \frac{\mu}{a}(a^2 + g^2T^2)\frac{da}{dT}.$$

Les trois dernières restent les mêmes, la première seule est changée; nz sera en général assez petit pour qu'on puisse remplacer e^{-nz} par

$$1 - nz = 1 - n\frac{2h - \mu a^2}{2g\mu} + \frac{ng}{2}T^2.$$

Après avoir calculé a, τ, m, h, en supposant $n = 0$, on modifiera facilement les valeurs obtenues pour tenir compte des termes multipliés par n.

Sur l'influence du mouvement de rotation de la Terre.

14. Si l'on veut tenir compte de l'influence du mouvement de rotation de la Terre sur le mouvement d'un projectile, on pourra faire usage des formules du mouvement relatif (Section V, n^os 2, 3). Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires, l'axe des z vertical, mené de bas en haut, l'axe des x tangent au méridien et dirigé vers l'équateur et l'axe des y tangent au parallèle et dirigé de l'ouest à l'est.

Nous désignerons par x, y, z les coordonnées du centre du corps par rapport à ces axes, et par ξ, η, ζ les quantités représentées par ces lettres dans la Section citée. En représentant par ω la vitesse de rotation de la Terre, par λ la latitude du lieu, et par ρ le rayon du parallèle, nous devrons faire aux numéros cités

$$l_0 = -\omega^2\rho\sin\lambda, \quad n_0 = 0, \quad s_0 = -\omega^2\rho\cos\lambda,$$

$$E = \mu\omega^2\rho(x\sin\lambda + z\cos\lambda),$$

$$p = -\omega\cos\lambda, \quad q = 0, \quad r = \omega\sin\lambda,$$

$$T - F = \frac{\mu}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \mu\omega[y\xi\sin\lambda - (z\cos\lambda + x\sin\lambda)\eta + y\zeta\cos\lambda],$$

et, si l'on supposait le corps sollicité par des forces qui donnassent lieu à une fonction de forces U, on aurait

$$H = T - F - U - \mu\omega^2\rho(x\sin\lambda + z\cos\lambda).$$

Il faut remarquer que ξ, η, ζ sont les variables conjuguées de x, y, z, et l'on passera du cas où l'on néglige la rotation de la Terre à celui où l'on y a égard, en changeant la fonction de forces U en

$$U - \mu\omega[y\xi\sin\lambda - (z\cos\lambda + x\sin\lambda)\eta + y\zeta\cos\lambda] + \mu\omega^2\rho(x\sin\lambda + z\cos\lambda).$$

En désignant par m, n, h, a, b, τ des constantes arbitraires, les formules du mouvement parabolique, produit par la pesanteur, sont

$$x = \frac{m}{\mu} + a(t+\tau), \qquad \xi = a,$$

$$y = \frac{n}{\mu} + b(t+\tau), \qquad \eta = b,$$

$$z = \frac{2h - \mu(a^2+b^2)}{2g\mu} - \frac{g}{2}(t+\tau)^2; \qquad \zeta = -g(t+\tau):$$

et l'on a, comme au n° 7, les formules de perturbation

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\tau}, & \dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{d\Omega}{dh}, \\[2ex] \dfrac{da}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{dm}, & \dfrac{dm}{dt} = \dfrac{d\Omega}{da}, \\[2ex] \dfrac{db}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{dn}, & \dfrac{dn}{dt} = \dfrac{d\Omega}{db}. \end{cases}$$

La résistance opposée par l'air au mouvement n'est pas fonction de la vitesse vraie du mobile, mais bien fonction de la vitesse relative $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$, et l'on aura, d'après le calcul du n° 7, pour la partie de $\partial\Omega$ qui provient de la résistance de l'air,

$$\begin{aligned}\partial\Omega' = (\alpha+\beta v+\gamma v^2)\Big[&(a^2+b^2+g^2(t+\tau)^2)\,\partial\tau - \frac{t+\tau}{\mu}\,\partial h\\ &+\frac{a}{\mu}\,\partial m+\frac{b}{\mu}\,\partial n+2a(t+\tau)\,\partial a+2b(t+\tau)\,\partial b\Big],\end{aligned}$$

avec

$$v^2 = x'^2+y'^2+z'^2 = (\xi+\omega y\sin\lambda)^2+[\eta-\omega(x\sin\lambda+z\cos\lambda)]^2+(\zeta+\omega y\cos\lambda)^2.$$

Enfin, pour tenir compte de la rotation de la Terre, il faudra, en négligeant les termes en ω^2, ajouter à $\partial\Omega'$ la variation $\partial\Omega''$ de l'expression

$$\begin{aligned}\Omega'' &= \mu\omega[y\xi\sin\lambda-(z\cos\lambda+x\sin\lambda)\eta+y\zeta\cos\lambda]\\ &= \omega\left[(na-mb)\sin\lambda-\frac{2h-\mu(a^2+b^2)}{2g}\,b\cos\lambda-ng(t+\tau)\cos\lambda+\mu bg(t+\tau)^2\cos\lambda\right].\end{aligned}$$

On résoudra les équations (α) d'après les calculs des n^{os} 8, 9, en faisant d'abord $\omega=0$; puis on tiendra ensuite facilement compte des termes qui renferment ω en facteur, et qui sont très-petits.

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS DE RÉVOLUTION LANCÉ SUIVANT SON AXE AVEC UNE GRANDE VITESSE DE ROTATION.

Équations différentielles du mouvement.

15. Imaginons un corps de révolution lancé suivant son axe avec une rotation très-rapide autour de cet axe et supposons que le centre de gravité coïncide avec le centre de figure; très-peu de temps après l'instant initial, l'axe de rotation sera incliné sur la tangente à la trajectoire décrite par le centre de gravité. Pour se donner une première idée du mouvement du corps autour de ce centre, on observera qu'il est sollicité par une résistance inclinée sur l'axe; si alors on regarde cette résistance comme constante pendant un certain temps, le corps ayant un

mouvement très-rapide autour de cet axe et étant sollicité par une force constante inclinée sur l'axe, son mouvement de rotation autour du centre de gravité pourra être assimilé à celui d'une toupie dont l'axe serait incliné sur la verticale, la résistance prenant la place de la réaction du plan horizontal sur lequel est posée la pointe de la toupie; car, si sa vitesse de rotation est très-grande, cette réaction est à très-peu près constante (Section IV, n° 27).

On voit donc que l'axe doit sortir du plan vertical initial. Quant au mouvement de translation, il est dû : 1° à la vitesse acquise, 2° à la pesanteur, 3° à la résistance. Si la résistance était directement opposée à la vitesse, la vitesse au bout d'un instant dt resterait dans le même plan vertical, et il n'y aurait pas de *dérivation* du corps. Mais l'axe du corps n'étant pas dans le plan vertical mené par la tangente à la trajectoire, la résistance ne sera pas située exactement dans ce plan et le centre de gravité du corps sortira du plan vertical du tir.

La grandeur de la résultante des résistances qui s'opèrent sur toute la surface du mobile dépend évidemment de la vitesse du corps; elle ne dépendra en outre que de l'angle j formé par l'axe du corps et la direction du mouvement; donc, en supposant que l'angle j reste très-petit, cette résistance peut être représentée par la formule

$$R = \alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3 + j(\alpha' v + \beta' v^2 + \gamma' v^3). \tag{1}$$

Nous aurons, en outre, à nous occuper de la direction de la résistance, afin d'obtenir ces trois composantes par rapport à des axes fixes.

Nous prendrons des axes fixes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, passant par la position initiale O du corps, l'axe des z étant dirigé suivant la verticale, l'axe Ox mené suivant la projection de la vitesse initiale sur l'horizon et Oy à la droite d'un observateur placé suivant Oz et regardant le projectile. Nous imaginerons, en outre, un système mobile d'axes de coordonnées Gx_1, Gy_1, Gz_1, passant par le centre de gravité G du corps, dont l'axe des z_1 coïncide avec l'axe du corps. Soient a, b, c les cosinus des angles de l'axe des x avec ceux des x_1, y_1, z_1; soient a', b', c' et a'', b'', c'' les mêmes quantités pour l'axe des y et celui des z.

D'après la loi élémentaire admise pour la résistance, on pourra calculer non-seulement l'expression (1), mais encore l'angle ε que la direction opposée à la résistance fait avec la vitesse v; cet angle ne dépendra que de v et j et, comme ε doit s'annuler pour $j = 0$, nous ferons

$$\varepsilon = (k_1 v + k_2 v^2 + k_3 v^3) j.$$

Représentons les cosinus des angles de la direction opposée à la résistance avec les axes fixes de coordonnées par

$$(2) \qquad \frac{dx}{ds} + m, \quad \frac{dy}{ds} + n, \quad \frac{dz}{ds} + p,$$

cette direction est évidemment située dans le plan z_1GV, mené par Gz_1 et une parallèle GV à la vitesse v; l'angle ε de cette droite avec la tangente étant très-petit, m, n, p sont de très-petites quantités. Le plan z_1GV s'écartant très-peu du plan vertical initial, on peut calculer m, p, en supposant que la direction qui nous occupe est située dans ce plan.

D'après cela, désignons par I l'inclinaison sur l'axe des x de la direction opposée à la résistance et supposons l'angle ε compté en allant de la tangente à la trajectoire vers la direction opposée à la résistance: alors nous aurons à très-peu près

$$\tang \mathrm{I} = \frac{\dfrac{dz}{dx} + \tang \varepsilon}{1 - \dfrac{dz}{dx} \tang \varepsilon} = \frac{\dfrac{dz}{ds} + \varepsilon \dfrac{dx}{ds}}{\dfrac{dx}{ds} - \varepsilon \dfrac{dz}{ds}}.$$

Comme dans la dernière fraction la somme des carrés des deux termes est égale à l'unité, pourvu que l'on néglige le carré de ε^2, ces deux termes peuvent être pris pour cos I et sin I, ou pour le premier et le troisième des cosinus (2); on a donc

$$m = -\varepsilon \frac{dz}{ds}, \quad p = \varepsilon \frac{dx}{ds}.$$

D'après le degré d'approximation avec lequel m, p sont calculés, on devrait faire $n = 0$; mais alors il n'existerait pas de dérivation et la trajectoire resterait dans un plan vertical. Pour avoir égard à la dérivation, remarquons que la résistance est située dans le plan des deux droites Gz_1, GV, qui sont parallèles aux droites qui ont pour équations

$$\frac{X}{c} = \frac{Y}{c'} = \frac{Z}{c''}, \quad \frac{X}{dx} = \frac{Y}{dy} = \frac{Z}{dz},$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes, il en résulte

$$(c'\,dz - c''\,dy)\left(\frac{dx}{ds} + m\right) + (c''\,dx - c\,dz)\left(\frac{dy}{ds} + n\right) + (c\,dy - c'\,dx)\left(\frac{dz}{ds} + p\right) = 0$$

ou

$$(c'\,dz - c''\,dy)\,m + (c''\,dx - c\,dz)\,n + (c\,dy - c'\,dx)\,p = 0,$$

et, en remplaçant m, p par leurs valeurs,

$$n = \varepsilon\,\frac{c'\,\dfrac{dx^2 + dz^2}{ds} - \dfrac{1}{v}\,\dfrac{dy}{dt}\,(c''\,dz + c\,dx)}{c''\,dx - c\,dz}.$$

Or, en projetant la vitesse v sur Gz_1 et sur une perpendiculaire à Gz_1, menée dans le plan z_1GV, qui s'écarte très-peu du plan des X, Z, on a

$$v\cos j = c\,\frac{dx}{dt} + c''\,\frac{dz}{dt},$$

$$v\sin j = c''\,\frac{dx}{dt} - c\,\frac{dz}{dt},$$

et il en résulte

$$n = \frac{\varepsilon\,c'}{\sin j} - \frac{\varepsilon}{v}\,\frac{dy}{dt}\cot j. \tag{3}$$

D'après cela, en désignant par μ la masse du corps, nous aurons pour les équations du mouvement du centre de gravité

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{R}{\mu}\left(\frac{dx}{ds} - \varepsilon\,\frac{dz}{ds}\right),\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{R}{\mu}\left(\frac{dy}{ds} + n\right),\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g - \frac{R}{\mu}\left(\frac{dz}{ds} + \varepsilon\,\frac{dx}{ds}\right). \end{aligned}\right.$$

Si l'on réduisait n au second terme de la formule (3), il est aisé de voir que, y et $\frac{dy}{dt}$ étant nuls pour $t = 0$, y serait constamment nul, et il n'y aurait pas de dérivation; et comme d'ailleurs ce terme est très-petit en comparaison de $\frac{dy}{ds}$, nous pourrons réduire dans la deuxième équation (3) n à

$$n = -\frac{\varepsilon c'}{\sin j} = -(k_1 v + k_2 v^2 + k_3 v^3)\, c'.$$

16. Pour déterminer le mouvement de rotation du corps, nous supposerons que l'on ait d'abord calculé x, z au moyen des équations (4), en réduisant R à $\alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3$ et en négligeant les termes qui dépendent de ε et qui proviennent de ce que la résistance n'est pas directement opposée à la vitesse; ce calcul se fera d'après le n° 4.

Les résistances sur la surface du corps étant symétriques par rapport au plan z_1GV, elles ne pourront que faire tourner le corps autour d'un axe perpendiculaire à ce plan.

Désignons par $\mathfrak{M}$ la somme des moments des résistances élémentaires par rapport à un axe mené par le point G perpendiculairement au plan z_1GV et par $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ la somme des moments de ces résistances par rapport à Gx_1, Gy_1. Représentons aussi par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ les moments d'inertie par rapport à Gx_1, Gz_1 et par p, q, r les composantes de la vitesse de rotation suivant les axes mobiles, nous aurons

$$\mathfrak{C}\frac{dr}{dt} = 0,$$

$$\mathfrak{A}\frac{dp}{dt} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\,qr = \mathfrak{M}_1,$$

$$\mathfrak{A}\frac{dq}{dt} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\,pr = \mathfrak{M}_2,$$

pour les équations du mouvement de rotation (Section IV, n° 13) et l'on déduit de la première

$$r = \omega,$$

ω étant constant.

On pourra calculer la grandeur du moment $\mathfrak{M}$ d'après la loi élémentaire de la résistance, et, comme $\mathfrak{M}$ est nul si j est nul, posons

$$\mathfrak{M} = j(l_1 v + l_2 v^2 + l_3 v^3).$$

Désignons par GV′ la projection de GV sur le plan $x_1 G y_1$, en projetant l'axe du moment $\mathfrak{M}$ sur les axes Gx_1 et Gy_1, nous aurons

$$\mathfrak{M}_1 = -\mathfrak{M}\cos(\mathrm{V'G}y_1) = -\frac{\mathfrak{M}\cos(\mathrm{VG}y_1)}{\cos(\mathrm{VGV'})},$$

$$\mathfrak{M}_2 = \quad \mathfrak{M}\cos(\mathrm{V'G}x_1) = \quad \frac{\mathfrak{M}\cos(\mathrm{VG}x_1)}{\cos(\mathrm{VGV'})}.$$

Comme j est supposé très-petit, on a

$$j = \sin(z_1 \mathrm{GV}) = \cos(\mathrm{VGV'}),$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$\mathrm{L} = l_1 + l_2 v + l_3 v^2,$$

on obtiendra

$$\mathfrak{M}_1 = -\mathrm{L}\cos(\mathrm{VG}y_1) = -\mathrm{L}\left(b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\mathfrak{M}_2 = \quad \mathrm{L}\cos(\mathrm{VG}x_1) = \quad \mathrm{L}\left(a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt}\right).$$

On a donc, pour les équations du mouvement de rotation,

$$\mathcal{A}\frac{dp}{dt} + (\mathcal{C} - \mathcal{A})q\omega = -\mathrm{L}\left(b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\mathcal{A}\frac{dq}{dt} + (\mathcal{A} - \mathcal{C})p\omega = \quad \mathrm{L}\left(a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt}\right).$$

Calcul du mouvement de rotation du projectile autour de son centre de gravité.

17. A l'origine du mouvement, le mobile tourne autour de son axe de révolution ; le plan du maximum des aires coïncide donc avec celui de l'équateur. Posons

$$\mathcal{A}^2(p^2 + q^2) + \mathcal{C}^2 r^2 = h^2,$$

en sorte que k est la grandeur de l'axe du plan mobile du maximum des aires. Comme r a une valeur constante ω et que p, q, d'abord nuls, deviennent de très-petites quantités, la quantité k subit un accroissement.

Le plan fixe des x, y, celui de l'équateur et le plan invariable déterminent, sur une sphère qui a pour centre le centre de gravité du corps, un triangle sphérique. Adoptant les notations du n° 5 de la Section IV, nous voyons que les côtés du triangle situés sur ces trois plans seront désignés respectivement par $\psi - \alpha$, $\varphi_1 - \varphi$, ψ_1 et les angles opposés à ces côtés par θ_1, γ, $\pi - \theta$, et nous aurons ces formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\cos\theta = \cos\gamma\cos\theta_1 - \sin\gamma\sin\theta_1\cos\psi_1,\\ &\sin(\psi-\alpha) = \frac{\sin\theta_1\sin\psi_1}{\sin\theta},\quad \sin(\varphi_1-\varphi) = \frac{\sin\gamma\sin\psi_1}{\sin\theta}.\end{aligned}\right.$$

Des deux formules du n° 3 de la même Section,

$$k\sin\theta_1\sin\varphi_1 = \mathcal{A}p,\quad k\sin\theta_1\cos\varphi_1 = \mathcal{A}q,$$

on conclut, pour θ_1, l'angle du plan invariable avec l'équateur, la formule

$$\sin\theta_1 = \frac{\mathcal{A}\sqrt{p^2+q^2}}{k},$$

dans laquelle k diffère très-peu de $\mathcal{C}\omega$, et, comme ω est très-grand, on reconnaît que l'angle θ_1, qui est d'abord nul, reste toujours très-petit.

Comme le corps tourne d'un mouvement uniforme autour de son axe de révolution, son mouvement autour de son centre de gravité sera parfaitement déterminé quand on aura calculé la position de cet axe. Or la direction de l'axe du corps est fixée par l'angle θ qu'il fait avec la verticale et par l'angle υ de sa projection sur le plan horizontal des x, y avec l'axe des x, et l'on a

$$\upsilon = \psi - \frac{\pi}{2},$$

puisque ψ est l'angle de Ox avec la trace du plan des x_1, y_1 sur celui des x, y.

Si l'on fait d'abord $\theta_1 = 0$ dans les formules (1), on a

$$\theta = \gamma, \quad \psi = \alpha, \quad \varphi = \varphi_1 - \psi_1,$$

et si θ_1 n'est pas nul, mais très-petit, on aura

$$\theta = \gamma - \sin\theta_1 \cos\psi_1,$$
$$\psi = \alpha + \frac{\sin\theta_1 \sin\psi_1}{\sin\gamma},$$

et les parties principales de θ, ψ sont les quantités γ, α qui désignent l'angle du plan invariable avec le plan des x, y et la longitude du nœud du plan invariable sur ce plan des x, y.

18. Quand un corps de révolution n'est sollicité par aucune force extérieure, les formules qui donnent θ_1, φ_1, ψ_1 sont (Section IV, n° 6)

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{1}{\mathcal{A}} \sqrt{(2h\mathcal{A} - k^2)\dfrac{\mathcal{A} - \mathcal{C}}{\mathcal{C}}}\,(t + \tau), \\[2ex] \psi_1 - \mathrm{G} = \dfrac{k}{\mathcal{A}}(t + \tau), \\[2ex] \cos^2\theta_1 = \dfrac{(2h\mathcal{A} - k^2)\mathcal{C}}{\mathcal{A} - \mathcal{C}}. \end{cases}$$

Mais, si l'on suppose le même corps sollicité par des forces perturbatrices, on doit regarder h, τ, α, β, k, G non comme des constantes, mais comme des quantités variables données par les formules

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\Omega}{dh},$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\Omega}{d\beta}, \quad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\alpha},$$
$$\frac{dk}{dt} = \frac{d\Omega}{d\mathrm{G}}, \quad \frac{d\mathrm{G}}{dt} = -\frac{d\Omega}{dk},$$

(*voir* Section VIII, n° 12) ou par la seule

$$\delta\Omega = -\frac{dh}{dt}\delta\tau + \frac{d\alpha}{dt}\delta\beta + \frac{dk}{dt}\delta\mathrm{G} + \frac{d\tau}{dt}\delta h - \frac{d\beta}{dt}\delta\alpha - \frac{d\mathrm{G}}{dt}\delta k.$$

β est la projection de l'axe k du plan invariable sur l'axe des z; introduisant donc γ au lieu de β, nous aurons

$$\beta = k\cos\gamma, \quad \delta\beta = \delta k\cos\gamma - k\sin\gamma\,\delta\gamma,$$

et la formule précédente deviendra

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\Omega}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\Omega}{d\gamma}\delta\gamma + \frac{d\Omega}{dh}\delta h + \frac{d\Omega}{d\tau}\delta\tau + \frac{d\Omega}{dk}\delta k + \frac{d\Omega}{dG}\delta G \\ &\quad = -\frac{dh}{dt}\delta\tau + \frac{d\alpha}{dt}(\delta k\cos\gamma - k\sin\gamma\,\delta\gamma) + \frac{dk}{dt}\delta G \\ &\qquad + \frac{d\tau}{dt}\delta h - \left(\frac{dk}{dt}\cos\gamma - k\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt}\right)\delta\alpha - \frac{dG}{dt}\delta k. \end{aligned}\right.$$

Cette formule équivaut aux six équations que l'on obtient en égalant dans les deux membres les coefficients des mêmes variations; on a donc ces trois équations

$$k\sin\gamma\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\gamma},$$

$$\frac{dk}{dt}\cos\gamma - k\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\alpha}, \quad \frac{dk}{dt} = \frac{d\Omega}{dG},$$

et l'on en tire les formules

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{1}{k\sin\gamma}\frac{d\Omega}{d\gamma}, \\ k\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{d\Omega}{d\alpha} + \frac{d\Omega}{dG}\cos\gamma, \end{aligned}\right.$$

qui serviront à calculer α, γ.

19. La quantité $\delta\Omega$ n'est pas, comme nous savons, une différentielle exacte, en sorte que l'on doit supposer dans les formules précédentes les dérivées de Ω par rapport à α, γ, G, remplacées par les coefficients de $\delta\alpha$, $\delta\gamma$, δG dans $\delta\Omega$.

D'après les notations du n° 14 de la Section IV, posons

$$\delta Q = \quad a\,\delta c + a'\,\delta c' + a''\,\delta c'',$$

$$\delta P = -b\,\delta c - b'\,\delta c' - b''\,\delta c'',$$

multiplions les équations du mouvement de rotation respectivement par ∂P, ∂Q et ajoutons; nous aurons

$$\left(\mathcal{A}\frac{dp}{dt}+(\mathcal{C}-\mathcal{A})q\omega\right)\delta P+\left(\mathcal{A}\frac{dq}{dt}+(\mathcal{A}-\mathcal{C})p\omega\right)\delta Q$$
$$=-L\left(b\frac{dx}{dt}+b'\frac{dy}{dt}+b''\frac{dz}{dt}\right)\delta P+L\left(a\frac{dx}{dt}+a'\frac{dy}{dt}+a''\frac{dz}{dt}\right)\delta Q,$$

et, d'après les considérations de l'endroit cité de la Section IV, le second membre de cette équation représente $-\delta\Omega$. On a donc, en supprimant les termes multipliés par $\frac{dy}{dt}$, puisque nous supposons la trajectoire plane pour calculer le mouvement de rotation,

$$-\delta\Omega=L[(a^2+b^2)\delta c+(aa'+bb')\delta c'+(aa''+bb'')\delta c'']\frac{dx}{dt}$$
$$+L[(aa''+bb'')\delta c+(aa'+bb')\delta c'+(a''^2+b''^2)\delta c'']\frac{dz}{dt}$$

ou

$$\delta\Omega=L[(-1+c^2)\delta c+cc'\delta c'+cc''\delta c'']\frac{dx}{dt}$$
$$+L[cc''\delta c+c'c''\delta c'+(c''^2-1)\delta c'']\frac{dz}{dt}.$$

Or, en différentiant l'équation $c^2+c'^2+c''^2=1$, on a

$$c\delta c+c'\delta c'+c''\delta c''=0,$$

et il en résulte la formule très-simple

$$\delta\Omega=-L\left(\frac{dx}{dt}\delta c+\frac{dz}{dt}\delta c''\right).$$

On a ensuite

$$c=\sin\theta\sin\psi,\quad c'=-\sin\theta\cos\psi,\quad c''=\cos\theta,$$

par conséquent

$$\delta c=-c'\delta\psi+c''\sin\psi\,\delta\theta,$$
$$\delta c''=-\sin\theta\,\delta\theta;$$

on en conclut

$$\delta\Omega=Lc'\frac{dx}{dt}\delta\psi+L\left(-\sin\psi\cos\theta\frac{dx}{dt}+\sin\theta\frac{dz}{dt}\right)\delta\theta.$$

Or, en négligeant les termes multipliés par θ_1, on a

$$\delta\psi = \delta\alpha, \quad \delta\theta = \delta\gamma, \quad \delta\varphi = -\delta G + M_1\,\delta\tau + M_2\,\delta h + M_3\,\delta k;$$

donc, si l'on applique les équations (4), on devra y faire

$$\frac{d\Omega}{dG} = 0,$$

et l'on aura les formules

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{-L}{k\sin\gamma}\left(-\sin\psi\cos\theta\,\frac{dx}{dt} + \sin\theta\,\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{k\sin\gamma}\,c'\,\frac{dx}{dt}.$$

Si nous y faisons $\theta = \gamma$, $\psi = \alpha$, $c' = -\sin\theta\cos\psi$, ces équations deviendront

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{L}{k}\sin\alpha\cot\gamma\,\frac{dx}{dt} - \frac{L}{k}\,\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{L}{k}\cos\alpha\,\frac{dx}{dt}.$$

Faisons dans ces deux formules

$$\alpha = \upsilon + \frac{\pi}{2},$$

et nous aurons

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\upsilon}{dt} &= \frac{L}{k}\cos\upsilon\cot\gamma\,\frac{dx}{dt} - \frac{L}{k}\,\frac{dz}{dt},\\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{L}{k}\sin\upsilon\,\frac{dx}{dt}.\end{aligned}\right.$$

20. Pour résoudre les deux équations (5), faisons $k = C\omega$, et posons

$$\upsilon = \upsilon_0 + \upsilon_1 t + \upsilon_2 t^2 + \ldots,$$

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \ldots;$$

de plus, υ étant très-petit, nous pourrons remplacer $\cos\upsilon$ par $1 - \frac{\upsilon^2}{2}$

ou même par l'unité. Faisons

$$\frac{L}{C\omega}\frac{dx}{dt} = P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \ldots,$$

$$\frac{L}{C\omega}\frac{dz}{dt} = R_0 + R_1 t + R_2 t^2 + \ldots;$$

en substituant dans les équations (5), nous aurons

$$\begin{gathered}
\upsilon_1 + 2\upsilon_2 t + 3\upsilon_3 t^2 + \ldots = (P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \ldots)\left(\cot\gamma_0 - \frac{\gamma_1}{\sin^2\gamma_0} t + \ldots\right) \\
- R_0 - R_1 t - R_2 t^2 - \ldots, \\
\gamma_1 + 2\gamma_2 t + 3\gamma_3 t^2 + \ldots = (P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \ldots)(\upsilon_0 + \upsilon_1 t + \upsilon_2 t^2 + \ldots).
\end{gathered}$$

Si le temps t est compté de l'instant où sort le projectile de la bouche à feu, on aura $\upsilon_0 = 0$. D'autre part, on aura aussi (n° 4)

$$C_0 = A_0 \cot\gamma_0, \quad C_1 = A_1 \frac{C_0}{A_0} = A_1 \cot\gamma_0,$$

et, d'après la manière dont se déduisent P_0, P_1, .. , on en conclut facilement

$$P_0 \cot\gamma_0 - R_0 = 0, \quad P_1 \cot\gamma_0 - R_1 = 0.$$

Ensuite des deux équations ci-dessus, on conclut successivement

$$1^\circ\ \upsilon_1 = 0, \quad 2^\circ\ \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad 3^\circ\ \upsilon_2 = 0, \quad 4^\circ\ \gamma_3 = 0;$$

ainsi υ et γ se réduiront aux formes suivantes :

$$\upsilon = \upsilon_3 t^3 + \upsilon_4 t^4 + \upsilon_5 t^5 + \ldots,$$

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_4 t^4 + \gamma_5 t^5 + \ldots.$$

D'après le n° 17, nous avons, pour calculer les deux angles θ, υ qui déterminent la position de l'axe du corps, les deux formules

$$\theta = \gamma - \sin\theta_1 \cos\psi_1,$$

$$\upsilon = \alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{\sin\theta_1 \sin\psi_1}{\sin\gamma}.$$

Nous venons d'apprendre à calculer θ, υ, en négligeant les derniers termes qui sont effectivement très-petits et négligeables. Cependant, si l'on voulait y avoir égard, il faudrait calculer θ_1, ψ_1 d'après les formules (2), en y regardant les quantités G, k, τ, h qui y entrent comme des quantités variables données par les équations renfermées dans la formule (3).

Calcul du mouvement de translation du centre de gravité.

21. Nous avons déjà calculé les valeurs des coordonnées x, z du centre de gravité, en supposant que l'axe du corps soit constamment dirigé suivant la tangente à la trajectoire; calculons ensuite la valeur de la dérivation y et les corrections à apporter aux valeurs de x, z.

Posons

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{A}, \quad \frac{dz}{dt} = \mathrm{C} - gt, \quad \frac{dy}{dt} = \mathrm{B},$$

nous aurons les trois équations

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu \frac{d\mathrm{A}}{dt} &= -\frac{\mathrm{R}}{v}\mathrm{A} + \frac{\mathrm{R}}{v}(\mathrm{C} - gt)\varepsilon, \\ \mu \frac{d\mathrm{C}}{dt} &= -\frac{\mathrm{R}}{v}(\mathrm{C} - gt) - \frac{\mathrm{R}}{v}\mathrm{A}\varepsilon, \\ \mu \frac{d\mathrm{B}}{dt} &= -\frac{\mathrm{R}}{v}\mathrm{B} + \mathrm{R}\frac{\varepsilon c'}{\sin j}. \end{aligned} \right.$$

On a

$$c' = -\sin\theta\cos\psi,$$

ou à très-peu près

$$c' = \sin\gamma\sin\upsilon = \upsilon\sin\gamma.$$

Exprimons dans la troisième équation (α) les quantités autres que B en fonction de t, et nous pourrons la mettre sous la forme

$$\frac{d\mathrm{B}}{dt} = (\mathrm{S}_0 + \mathrm{S}_1 t + \mathrm{S}_2 t^2 + \ldots)\mathrm{B} + \mathrm{L}_1 t + \mathrm{L}_2 t^2 + \mathrm{L}_3 t^3 + \ldots :$$

nous ferons ensuite

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{B} = \mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 t + \mathrm{B}_2 t^2 + \ldots,$$

et nous pourrons calculer les coefficients B_0, B_1, ... d'après cette équation. Si le temps t est compté de l'instant du départ du projectile, on verra facilement que l'on a $B_0 = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, $B_3 = 0$.

On exprimera ensuite en fonction de t les parties de $\frac{dA}{dt}$, $\frac{dC}{dt}$ que l'on avait d'abord négligées, et, en les intégrant, on aura les corrections à apporter aux valeurs de A, C calculées précédemment.

CALCUL DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION.

22. Supposons d'abord un corps de révolution qui se meuve suivant son axe. Désignons par λ l'angle de la normale avec le plan du parallèle; si nous représentons par $f(v)$ la résistance de l'air sur une surface plane égale à l'unité, qui se meut suivant la normale, on aura (n° 1) pour la résistance normale sur l'élément $d\sigma$

$$f(v \sin\lambda)\, d\sigma$$

et pour ses deux composantes parallèle et perpendiculaire à l'axe

$$f(v \sin\lambda)\, d\sigma \sin\lambda, \quad f(v \sin\lambda)\, d\sigma \cos\lambda.$$

Les secondes composantes se détruisent entre elles, et, pour calculer la résultante des premières, on remarquera que la surface engendrée par la rotation de l'arc ds du méridien autour de l'axe est $2\pi y\, ds$, et l'on en conclut pour la résistance

$$2\pi \int f(v \sin\lambda) \sin\lambda\, y\, ds = 2\pi \int f\left(v \frac{dy}{ds}\right) y\, dy,$$

l'intégrale s'étendant aux valeurs de y qui correspondent à la partie antérieure du projectile.

23. Supposons ensuite que l'axe du projectile fasse un angle avec la direction de la vitesse. Imaginons un cylindre circonscrit à la surface du corps et parallèle à la direction de la vitesse; la courbe de contact partagera la surface en deux parties : l'une qui éprouve une résistance, et l'autre qui n'en éprouve pas.

Soit Oz l'axe de révolution; par cet axe menons un plan parallèle à la vitesse que nous prendrons pour le plan des z, y. Soient $d\sigma$ un élément de la surface, χ l'angle de la normale extérieure à cet élément avec la vitesse et j l'angle de la vitesse avec la direction de l'axe de révolution. Nous aurons sur l'élément $d\sigma$ la résistance normale

$$f(v\cos\chi)\,d\sigma,$$

et si l'on désigne par λ l'angle de la normale avec le plan des x, y et par φ la longitude à partir du plan des z, y, on a pour les trois composantes suivant les axes des x, y, z

$$f(v\cos\chi)\cos\lambda\sin\varphi\,d\sigma,\quad f(v\cos\chi)\cos\lambda\cos\varphi\,d\sigma,\quad f(v\cos\chi)\sin\lambda\,d\sigma.$$

Prenons pour $d\sigma$ l'élément de surface compris entre deux parallèles et deux méridiens infiniment voisins; soient ρ le rayon de courbure du méridien sur cet élément et y sa distance à l'axe : nous aurons

$$d\sigma = y\rho\,d\lambda\,d\varphi.$$

Les composantes suivant l'axe des x des résistances sur deux éléments symétriques par rapport au plan des z, y se détruisent; les composantes suivant les axes des y et des z s'ajoutent pour ces mêmes éléments et donnent les expressions

$$\eta = 2y\rho f(v\cos\chi)\cos\lambda\cos\varphi\,d\lambda\,d\varphi,\quad \zeta = 2y\rho f(v\cos\chi)\sin\lambda\,d\lambda\,d\varphi.$$

Il en résulte par rapport à l'axe des x le moment élémentaire

$$\zeta y\cos\varphi - \eta z.$$

Si donc nous désignons par Y, Z les composantes de la résistance totale et par $\mathfrak{M}$ son moment nous aurons

$$\begin{aligned}
Y &= 2\int\!\!\int y\rho f(v\cos\chi)\cos\lambda\cos\varphi\,d\lambda\,d\varphi,\\
Z &= 2\int\!\!\int y\rho f(v\cos\chi)\sin\lambda\,d\lambda\,d\varphi,\\
\mathfrak{M} &= 2\int\!\!\int y\rho f(v\cos\chi)(y\sin\lambda - z\cos\lambda)\cos\varphi\,d\lambda\,d\varphi,
\end{aligned}$$

les intégrales s'étendant aux valeurs de λ, φ, qui se rapportent à la partie antérieure du corps, située d'un même côté du plan des z, y.

Quand l'angle χ de la normale et de la vitesse est aigu, l'élément éprouve une résistance; quand cet angle est obtus, l'élément n'en éprouve pas : donc la courbe qui sépare la partie de la surface qui subit une résistance de l'autre partie a pour équation

$$\cos\chi = 0.$$

Menons par un même point trois parallèles à l'axe des z, à la normale sur l'élément $d\sigma$ et à la vitesse v, il en résultera un angle trièdre dont on déduira

$$\cos\chi = \sin\lambda\cos j + \cos\lambda\sin j\cos\varphi.$$

Pour déterminer les points où la courbe de séparation rencontre le plan des z, y, faisons $\varphi = 0$ ou π dans cette équation en même temps que $\cos\chi = 0$, et nous aurons

$$\operatorname{tang} j = \mp \operatorname{tang}\lambda \quad \text{ou} \quad \lambda = \mp j.$$

D'après cela, nous distinguerons la surface résistante en deux parties : 1° celle pour laquelle λ est $> j$; pour cette partie, il faudra faire varier dans les intégrales doubles λ de j à $\frac{\pi}{2}$ et φ de zéro à π; 2° celle pour laquelle λ varie de $-j$ à $+j$; pour cette partie de la surface, il faudra faire varier, dans les intégrales doubles, λ depuis $-j$ jusqu'à $+j$ et φ depuis zéro jusqu'à la valeur de $\varphi = l$, fournie par l'équation

$$\sin\lambda\cos j + \cos\lambda\sin j\cos l = 0 \quad \text{ou} \quad \cos l = -\frac{\operatorname{tang}\lambda}{\operatorname{tang} j}.$$

Résistance de l'air sur la surface d'un tronc de cône qui s'avance la petite base en avant.

24. La latitude λ de tous les points du tronc de cône est la même et égale à la moitié de l'angle au sommet du cône.

Soient r, r' les rayons de la grande et de la petite base, et h la hauteur; nous aurons

$$\sin\lambda = \frac{r - r'}{\sqrt{h^2 + (r - r')^2}}, \quad \cos\lambda = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (r - r')^2}},$$

$$\cos\chi = \frac{(r - r')\cos j + h\sin j\cos\varphi}{\sqrt{h^2 + (r - r')^2}}.$$

Reprenons les deux formules relatives à la résistance sur deux éléments symétriques, par rapport au plan des yz,

$$\eta = 2f(v\cos\chi)\cos\lambda\cos\varphi\, d\sigma, \quad \zeta = 2f(v\cos\chi)\sin\lambda\, d\sigma.$$

Comme λ reste le même le long d'une génératrice, on a, en prenant pour $d\sigma$ la partie de la surface latérale renfermée entre deux génératrices infiniment voisines,

$$d\sigma = \tfrac{1}{2}(r+r')\sqrt{h^2+(r-r')^2}\, d\varphi.$$

Remplaçons $d\sigma$ par sa valeur dans η et ζ, puis faisons la somme de toutes ces composantes élémentaires; nous aurons

$$\begin{aligned} \mathrm{Y} &= h(r+r')\int f(v\cos\chi)\cos\varphi\, d\varphi, \\ \mathrm{Z} &= (r^2-r'^2)\int f(v\cos\chi)\, d\varphi, \end{aligned}$$

et il n'y a plus qu'à indiquer les limites de ces intégrales.

Si j est $<\lambda$, tous les points de la surface latérale du tronc de cône subiront une résistance, et il faudra intégrer par rapport à φ de zéro à π. Si j est $>\lambda$, la partie de la surface latérale qui subira une résistance aura sa longitude φ comprise de zéro à $\pm\, l$, en posant

$$\cos l = -\frac{\operatorname{tang}\lambda}{\operatorname{tang} j} = -\frac{r-r'}{h\operatorname{tang} j};$$

il faudra donc intégrer par rapport à φ de zéro à l.

Pour déterminer la résistance éprouvée par la petite base, remarquons que la composante de la vitesse suivant la normale à cette surface est $v\cos j$; on aura donc, pour les composantes de cette résistance,

$$\mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = \pi r^2 f(v\cos j).$$

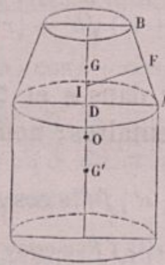
25. Cherchons le point où la résultante des résistances sur la surface latérale rencontre l'axe.

Comme la résistance est uniforme tout le long de l'élément renfermé entre deux génératrices infiniment voisines, le point d'application de la résistance totale sur l'élément sera au centre de gravité F de cet élément, qu'on obtiendra en prenant sur la génératrice une longueur

$$AF = \frac{(r + 2r') \times AB}{3(r + r')}.$$

Élevons la normale FI (*fig.* 6) à la surface, les résistances sur tous les éléments semblables rencontrent l'axe au point I; donc il en sera de

Fig. 6.



même de la résultante, et l'on trouve facilement

$$ID = \frac{(r + 2r')h^2 - 2(r^3 - r'^3)}{3h(r + r')}.$$

Soit G le centre de gravité du tronc de cône, on a

$$GD = \frac{h(r^2 + 3r'^2 + 2rr')}{4(r^2 + r'^2 + rr')};$$

on connaît donc GI, et l'on a, pour le moment de la résistance par rapport à ce centre,

$$\mathfrak{M} = Y \times GI.$$

26. Supposons la fonction $f(v)$ de la forme

$$\beta v^2 + \gamma v^3,$$

nous aurons, pour les composantes de la résistance sur la surface latérale,

$$(a)\quad \begin{cases} Y = \beta v^2 h(r + r') \int \cos^2\chi \cos\varphi \, d\varphi + \gamma v^3 h(r + r') \int \cos^3\chi \cos\varphi \, d\varphi, \\ Z = \beta v^2 (r^2 - r'^2) \int \cos^2\chi \, d\varphi + \gamma v^3 (r^2 - r'^2) \int \cos^3\chi \, d\varphi, \end{cases}$$

en remplaçant dans ces expressions $\cos\chi$ par sa valeur donnée au nº **24**.

Dans le cas où j est $< \lambda$, les intégrales devront être prises depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$, et l'on aura

$$Y = \frac{h(r+r')}{2}\pi\left[\tfrac{1}{2}\beta v^2 \sin 2j \sin 2\lambda + 3\gamma v^3(\sin^2\lambda\cos\lambda\sin j\cos^2 j + \tfrac{1}{2}\cos^3\lambda\sin^3 j)\right],$$

$$Z = \pi\beta v^2(r^2 - r'^2)(\sin^2\lambda\cos^2 j + \tfrac{1}{2}\cos^2\lambda\sin^2 j)$$
$$+ \pi\gamma v^3(r^2 - r'^2)(\sin^3\lambda\cos^3 j + \tfrac{3}{2}\sin\lambda\cos^2\lambda\cos j\sin^2 j).$$

On aura de plus, pour les composantes de la résistance sur la petite base,

$$Y = 0, \quad Z = \pi r'^2(\beta v^2\cos^2 j + \gamma v^3\cos^3 j).$$

Pour obtenir les composantes de la résistance sur la surface latérale d'un cylindre, il faudra faire, dans les expressions (a), $\lambda = 0$, $r' = r$ et intégrer depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{\pi}{2}$: ce qui donnera

$$Y = \tfrac{4}{3}\beta v^2 hr\sin^2 j + \tfrac{3}{8}\pi\gamma v^3 hr\sin^3 j, \quad Z = 0.$$

Résistance sur un projectile formé d'un cylindre surmonté d'un tronc de cône.

27. Le cylindre et le tronc de cône ont le même axe, et le rayon du cylindre est égal à celui de la grande base du tronc de cône; désignons par H la hauteur du cylindre. Réunissons les résistances qui proviennent de la surface latérale du tronc, de sa base et de la surface latérale du cylindre, et nous obtiendrons, en supposant $j < \lambda$, pour leurs composantes

$$Y = \frac{\pi}{4}\beta h(r+r')v^2\sin 2\lambda\sin 2j$$
$$+ \frac{3\pi}{2}\gamma h(r+r')v^3(\sin^2\lambda\cos\lambda\sin j\cos^2 j + \tfrac{1}{2}\cos^3\lambda\sin^3 j)$$
$$+ \tfrac{4}{3}\beta H r v^2\sin^2 j + \tfrac{3}{8}\pi\gamma H r v^3\sin^3 j,$$

$$Z = \pi\beta(r^2 - r'^2)v^2(\sin^2\lambda\cos^2 j + \tfrac{1}{2}\cos^2\lambda\sin^2 j)$$
$$+ \pi\gamma(r^2 - r'^2)v^3(\sin^3\lambda\cos^3 j + \tfrac{3}{2}\sin\lambda\cos^2\lambda\cos j\sin^2 j)$$
$$+ \pi r'^2(\beta v^2\cos^2 j + \gamma v^3\cos^3 j).$$

Supposons que le projectile soit plein et homogène, et désignons par O son centre de gravité, on trouve facilement

$$\mathrm{DO} = \frac{\dfrac{r^2\mathrm{H}^2}{2} - \dfrac{h^2}{12}(r^2 + 3r'^2 + 2rr')}{r^2\mathrm{H} + \dfrac{h}{3}(r^2 + rr' + r'^2)}.$$

Décomposons la quantité Y en deux parties : l'une Y′ provenant des résistances qui ont lieu sur la surface du tronc de cône, l'autre Y″ provenant des résistances sur la surface du cylindre, nous aurons

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}' = {} & h(r + r')\frac{\pi}{4}\beta v^2 \sin 2j \sin 2\lambda \\
& + \frac{3\pi}{2} h(r + r')\gamma v^3(\sin^2\lambda\cos\lambda\sin j\cos^2 j + \tfrac{1}{2}\cos^3\lambda\sin^3 j), \\
\mathrm{Y}'' = {} & \tfrac{4}{3}\beta\mathrm{H}\,rv^2\sin^2 j + \tfrac{3}{8}\pi\gamma\mathrm{H}\,rv^3\sin^3 j,
\end{aligned}$$

et nous obtiendrons pour le moment des résistances par rapport à une droite menée par le centre de gravité O, perpendiculairement au plan des z, y,

$$\mathfrak{M} = \mathrm{Y}' \times \mathrm{OI} - \mathrm{Y}'' \times \mathrm{OG}',$$

G′ étant le centre de gravité du cylindre, ou

$$\mathfrak{M} = \mathrm{Y}' \times (\mathrm{OD} + \mathrm{ID}) - \mathrm{Y}'' \times \left(\frac{\mathrm{H}}{2} - \mathrm{OD}\right),$$

OD et ID étant deux longueurs constantes que nous avons calculées.

Exemple de mouvement d'un projectile oblong.

28. Supposons un projectile ayant la forme d'un cylindre surmonté d'un tronc de cône de même base inférieure, et adoptons pour les rayons des bases, pour la hauteur du tronc et pour celle du cylindre, les dimensions suivantes :

$$r = 0^{\mathrm{m}},08, \quad r' = 0^{\mathrm{m}},035, \quad h = 0^{\mathrm{m}},095, \quad \mathrm{H} = 0,19.$$

Prenons son poids égal à 28 kilogrammes. Quoique le projectile ait une partie creuse, on supposera que les centres de gravité du tronc, du cylindre et du corps entier soient les mêmes que si le projectile était plein et homogène. Pour calculer le moment d'inertie $\mathfrak{C}$ autour de l'axe du corps, il faudrait connaître la forme de la cavité intérieure; prenons $\mathfrak{C} = 0,0090$; enfin supposons le corps lancé suivant son axe avec une vitesse de 400 mètres sous une inclinaison de 6 degrés. Si le pas de l'hélice suivie dans la pièce par le projectile est de 4 mètres, la vitesse de rotation sera

$$\frac{2\pi}{4} 400 = 628,31852.$$

Pour déterminer le signe de cette rotation, nous remarquerons que, au n° 15, l'axe Oy a été mené à droite du plan de tir pour un observateur situé suivant Oz et regardant Ox; le système d'axes Gx_1, y_1, z_1 est superposable avec Ox, y, z. D'après cela, si l'on suppose que la rotation ait lieu de Oz vers Oy, ou de Gy_1 vers Gx_1, la vitesse de rotation sera négative et l'on fera

$$\omega = -628,31852.$$

Représentons la loi de la résistance sur l'élément $d\sigma$ supposé normal à la vitesse par

$$(\beta_1 v^2 + \gamma_1 v^3)\, d\sigma,$$

et, pour calculer β_1, γ_1, admettons comme au n° 6, pour la résistance sur la surface d'une sphère de rayon r, la formule

$$\pi r^2 (\beta' v^2 + \gamma' v^3) \quad \text{avec} \quad \beta' = 0,027, \quad \gamma' = 0,0000621.$$

En appliquant la formule du n° 22, on trouve aussi pour cette résistance

$$2\pi r^2 \left(\frac{\beta_1 v^2}{4} + \frac{\gamma_1 v^3}{5} \right);$$

et, en égalant ces deux expressions, on obtient

$$\beta_1 = 2\beta', \quad \gamma_1 = \frac{5}{2}\gamma'.$$

La grandeur de la résistance est $\sqrt{Z^2 + Y^2}$, en prenant pour Z, Y les expressions du n° 26; si l'on néglige les termes multipliés par j^2, cette résistance se réduit à l'expression de Z, qui elle-même se réduit à

$$[\pi\beta_1(r^2-r'^2)\sin^2\lambda+\pi r'^2\beta_1]v^2+[\pi\gamma_1(r^2-r'^2)\sin^3\lambda+\pi r'^2\gamma_1]v^3,$$

et, en la représentant par $\beta v^2+\gamma v^3$, on a

$$\beta=\pi\beta_1(r^2-r'^2)\sin^2\lambda+\pi r'^2\beta_1,$$
$$\gamma=\pi\gamma_1(r^2-r'^2)\sin^3\lambda+\pi r'^2\gamma_1.$$

Nous avons ensuite

$$\sin^2\lambda=\frac{(r-r')^2}{h^2+(r-r')^2}=0,18326,\quad \log\sin\lambda=\bar{1},63153;$$

$$\beta=0,00036870,\qquad \gamma=0,00000079548,$$
$$\log\frac{\beta}{\mu}=\bar{4},11115,\qquad \log\frac{\gamma}{\mu}=\bar{7},44512.$$

Calculons, d'après le n° 4, les coefficients des séries

$$A=A_0+A_1t+A_2t^2+\ldots,$$
$$C=C_0+C_1t+C_2t^2+\ldots,$$
$$v^2=n_0+n_1t+n_2t^2+\ldots,$$
$$v=N_0+N_1t+N_2t^2+\ldots,$$

et nous avons

$$\log A_0=2,59967,\qquad \log C_0=1,62129,$$
$$\log n_0=5,20412,\qquad \log N_0=2,60206,$$
$$\log-A_1=1,58310,\qquad \log-C_1=0,60472,$$
$$\log-n_1=4,49999,\qquad \log-N_1=1,59690,$$
$$\log A_2=0,66382,\qquad \log C_2=\bar{1},98081,$$
$$\log n_2=3,73291,\qquad \log N_2=0,68160,$$
$$\log-A_3=\bar{1},78368,\qquad \log-C_3=\bar{1},09527,$$
$$\log-n_3=2,94027,\qquad \log-N_3=\bar{1},78866,$$
$$\log A_4=\bar{2},92342,\qquad \log C_4=\bar{2},23376,$$
$$\log n_4=2,14709,\qquad \log N_4=\bar{2},93344,$$
$$\log-A_5=\bar{2},06923,\qquad \log-C_5=\bar{3},38195,$$
$$\log-n_5=1,34772,\qquad \log-N_5=\bar{2},07838,$$
$$\log A_6=\bar{3},22566,\qquad \log C_6=\bar{4},59263,$$
$$\log n_6=0,54728,\qquad \log N_6=\bar{3},23583,$$
$$\log-A_7=\bar{4},38710,\qquad \log-C_7=\bar{5},71978,$$
$$\log-n_7=\bar{1},74569,\qquad \log-N_7=\bar{4},39831.$$

On a ainsi

$$A = 397,81 - 38,291\,t + 4,6112\,t^2 - 0,60768\,t^3 + 0,083833\,t^4 - 0,011728\,t^5 + 0,0016813\,t^6 - 0,00024384\,t^7 + \ldots,$$

$$C = 41,811 - 4,0245\,t + 0,95678\,t^2 - 0,12453\,t^3 + 0,017130\,t^4 - 0,0024096\,t^5 + 0,00039141\,t^6 - 0,000052453\,t^7,$$

$$x = 397,81\,t - 19,145\,t^2 + 1,5371\,t^3 - 0,15192\,t^4 + 0,016767\,t^5 - 0,001954\,t^6 + 0,0002402\,t^7 - 0,00003048\,t^8,$$

$$z = 41,811\,t - 6,9166\,t^2 + 0,31893\,t^3 - 0,03113\,t^4 + 0,003426\,t^5 - 0,0004016\,t^6 + 0,00005592\,t^7 - 0,000006557\,t^8.$$

29. Occupons-nous ensuite du mouvement de rotation. En négligeant les termes multipliés par j^2, on a (n° 27), en ayant égard au signe du moment,

$$\mathfrak{M} = -Y' \times (OD + DI),$$

$$(a) \qquad Y' = \frac{\pi}{2} h\,(r + r')\,\beta \sin 2\lambda . v^2 \sin j + \frac{3\pi}{2} h\,(r + r')\,\gamma \sin^2\lambda \cos\lambda . v^3 \sin j.$$

D'après les formules qui donnent DI, DO (n$^{\text{os}}$ 25, 27), on a

$$DI = 0,012677, \quad DO = 0,066964, \quad \log(OD + DI) = \bar{2},90114,$$

et en faisant comme au n° 16

$$\mathfrak{M} = (l_2 v^2 + l_3 v^3)\,j, \quad L = l_2 v + l_3 v^2,$$

il en résulte

$$\log - l_2 = \bar{5},75667, \quad \log - l_3 = \bar{7},02293.$$

En remplaçant $\cos\upsilon$ par 1 dans les formules du mouvement de rotation, parce que υ est très-petit, on a (n° 19)

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{L}{\Theta\omega} \cot\gamma \frac{dx}{dt} - \frac{L}{\Theta\omega} \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{\Theta\omega}\,\upsilon \frac{dx}{dt}.$$

Posons

$$\frac{l_2}{\Theta\omega} = f, \quad \frac{l_3}{\Theta\omega} = k,$$

nous aurons

$$\log f = \bar{5},00423, \quad \log k = \bar{8},27049,$$

et comme on a

$$v = N_0 + N_1 t + N_2 t^2 + \ldots, \quad v^2 = n_0 + n_1 t + \ldots, \quad \frac{dx}{dt} = A_0 + A_1 t + \ldots,$$

il en résulte

$$\frac{L}{\mathfrak{C}\omega}\frac{dx}{dt} = (fv + kv^2)\frac{dx}{dt} = P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \ldots,$$

en posant

$$P_0 = (fN_0 + kn_0)A_0, \quad P_1 = (fN_0 + kn_0)A_1 + (fN_1 + kn_1)A_0,$$
$$P_2 = (fN_0 + kn_0)A_2 + (fN_1 + kn_1)A_1 + (fN_2 + kn_2)A_0, \quad \text{etc.}$$

On a de même

$$\frac{L}{\mathfrak{C}\omega}\frac{dz}{dt} = (fv + kv^2)\frac{dz}{dt} = R_0 + R_1 t + R_2 t^2 + \ldots$$

en posant

$$R_0 = (fN_0 + kn_0)C_0, \quad R_1 = (fN_0 + kn_0)C_1 + (fN_1 + kn_1)C_0,$$
$$R_2 = (fN_0 + kn_0)C_2 + (fN_1 + kn_1)C_1 + (fN_2 + kn_2)C_0, \quad \text{etc.}$$

On calculera d'abord les quantités

$$\log(\ \ fN_0 + kn_0) = \bar{3},84645, \qquad \log(\ \ fN_4 + kn_4) = \bar{6},54182,$$
$$\log(-fN_1 - kn_1) = \bar{4},99505, \qquad \log(-fN_5 - kn_5) = \bar{7},72925,$$
$$\log(\ \ fN_2 + kn_2) = \bar{4},17403, \qquad \log(\ \ fN_6 + kn_6) = \bar{8},91966,$$
$$\log(-fN_3 - kn_3) = \bar{5},35128, \qquad \log(-fN_7 - kn_7) = \bar{8},11032,$$

et l'on aura ensuite

$$\log P_0 = 0,44612, \qquad \log P_4 = \bar{3},61518,$$
$$\log - P_1 = \bar{1},82097, \qquad \log - P_5 = \bar{4},84887,$$
$$\log P_2 = \bar{1},11267, \qquad \log P_6 = \bar{4},07632,$$
$$\log - P_3 = \bar{2},37062, \qquad \log - P_7 = \bar{5},29912;$$

$$R_0 = 0,29359, \qquad R_4 = 0,00062218,$$
$$R_1 = -0,069597, \qquad R_5 = -0,000110359,$$
$$R_2 = 0,0169487, \qquad R_6 = 0,0000194481,$$
$$R_3 = -0,00335997, \qquad R_7 = -0,0000332032.$$

Calculons d'après cela les coefficients des deux séries

$$v = v_3 t^3 + v_4 t^4 + v_5 t^5 + \ldots, \quad \gamma = \gamma_0 + \gamma_4 t^4 + \gamma_5 t^5 + \gamma_6 t^6 + \ldots;$$

nous avons

$$\cot\gamma = \cot\gamma_0 - \frac{\gamma_4}{\sin^2\gamma_0} t^4 - \frac{\gamma_5}{\sin^2\gamma_0} t^5 - \frac{\gamma_6}{\sin^2\gamma_0} t^6 - \frac{\gamma_7}{\sin^2\gamma_0} t^7$$
$$- \left(\frac{\gamma_8}{\sin^2\gamma_0} - \frac{\cot\gamma_0}{3\sin^2\gamma_0}\gamma_4^2\right) t^8 + \ldots;$$

γ_4^2 étant très-petit, le coefficient de t^8 peut être réduit à $-\frac{\gamma_8}{\sin^2\gamma_0}$, et l'on peut faire une semblable remarque sur les coefficients suivants.

D'après le n° 20, on obtient

$$3v_3 = P_2\cot\gamma_0 - R_2, \qquad 4\gamma_4 = P_0 v_3,$$
$$4v_4 = P_3\cot\gamma_0 - R_3, \qquad 5\gamma_5 = P_0 v_4 + P_1 v_3,$$
$$5v_5 = -P_0\frac{\gamma_4}{\sin^2\gamma_0} + P_4\cot\gamma_0 - R_4, \qquad 6\gamma_6 = P_0 v_5 + P_1 v_4 + P_2 v_3,$$
$$6v_6 = -P_0\frac{\gamma_5}{\sin^2\gamma_0} - P_1\frac{\gamma_4}{\sin^2\gamma_0} + P_5\cot\gamma_0 - R_5.$$

Par ces formules, on trouve ces logarithmes, dont nous aurons besoin plus loin,

$$\log - v_3 = \bar{3},04477, \qquad \log - v_7 = \bar{5},20330,$$
$$\log v_4 = \bar{4},34850, \qquad \log v_8 = \bar{5},65123,$$
$$\log v_5 = \bar{4},60150, \qquad \log - v_9 = \bar{5},16360;$$
$$\log - v_6 = \bar{4},31834,$$

et nous avons les deux séries

$$v = -0,0011086\,t^3 + 0,0002231\,t^4 + 0,00039949\,t^5 - 0,00020813\,t^6$$
$$- 0,00001597\,t^7 + 0,000044795\,t^8 - 0,000014574\,t^9 + \ldots,$$

$$\gamma = 84^\circ - 0,00077415\,t^4 + 0,00027145\,t^5 + 0,0001374\,t^6 - 0,00011299\,t^7$$
$$+ 0,0001690\,t^8 + 0,000011227\,t^9 - 0,0000066204\,t^{10} + \ldots$$

30. Calculons la dérivation d'après la formule du n° 21, en y faisant $c' = v\sin\gamma_0$; elle devient

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{R}{\mu v}B + \frac{R}{\mu}\cdot\frac{\varepsilon}{\sin j}\,v\sin\gamma_0$$

On compte l'angle ε en allant de la direction de la vitesse vers la direction opposée à la résistance (nº 15); désignons par β l'angle de cette dernière direction avec le plan des x_1, y_1, nous aurons

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\operatorname{tang}\beta - \cot j}{1 + \operatorname{tang}\beta \cot j}, \quad \operatorname{tang}\beta = \frac{Z}{Y},$$

et, en négligeant j^2, nous obtenons

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{Z \sin j - Y}{Z}.$$

Négligeant donc les termes multipliés par j dans Z et ceux qui sont multipliés par j^2 dans Y, on a

$$Z = \beta v^2 + \gamma v^3, \quad Y = (G v^2 + G_1 v^3) \sin j,$$

β, γ ayant les valeurs données au nº 28 et G, G_1, d'après la formule (a) du nº 29, ayant pour logarithmes

$$\log G = \bar{4},85553, \quad \log G_1 = \bar{6},12179.$$

Il en résulte

$$\varepsilon = \sin j \left(1 - \frac{G + G_1 v}{\beta + \gamma v}\right).$$

Changeons la forme de cette expression, en posant

$$1 - \frac{G + G_1 v}{\beta + \gamma v} = \frac{k_{-1} + k_0 v}{v},$$

et calculons k_{-1}, k_0 par interpolation; pour cela, faisons dans cette équation $v = 400$, $v = 350$ et nous aurons

$$k_{-1} = -25,924, \quad k_0 = -0,74988.$$

Ainsi l'on a

$$\varepsilon = \sin j \frac{k_{-1} + k_0 v}{v}, \tag{b}$$

et l'équation en B devient

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{R}{\mu v} B + \frac{R}{\mu v}(k_{-1} + k_0 v) v \sin\gamma_0.$$

En posant

$$\frac{R}{\mu v} = \frac{\beta}{\mu} v + \frac{\gamma}{\mu} v^2 = \frac{\beta}{\mu}(N_0 + N_1 t + N_2 t^2 + \ldots) + \frac{\gamma}{\mu}(n_0 + n_1 t + n_2 t^2 + \ldots)$$
$$= -S_0 - S_1 t - S_2 t^2 - \ldots,$$

on a

$$\begin{aligned} S_0 &= -0{,}096257, & S_4 &= -0{,}000050184,\\ S_1 &= 0{,}0139184, & S_5 &= 0{,}0000077536,\\ S_2 &= -0{,}0021272, & S_6 &= -0{,}00000120497.\\ S_3 &= 0{,}00032228, \end{aligned}$$

On aura ensuite

$$\frac{R}{\mu v}(k_{-1} + k_0 v)\sin\gamma_0 = (-S_0 - S_1 t - S_2 t^2 - S_3 t^3 - \ldots)$$
$$\times (k_{-1} + k_0 N_0 + k_0 N_1 t + k_0 N_2 t^2 + \ldots)\sin\gamma_0$$
$$= F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + \ldots,$$

avec

$$\begin{aligned} F_0 &= -2874{,}0, & F_4 &= -4{,}46455,\\ F_1 &= 699{,}33, & F_5 &= 0{,}76745,\\ F_2 &= -139{,}032, & F_6 &= -0{,}12999;\\ F_3 &= 25{,}2924, \end{aligned}$$

puis on posera

$$\frac{R}{\mu v}(k_{-1} + k_0 v)\upsilon\sin\gamma_0 = (F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + \ldots)(\upsilon_3 t^3 + \upsilon_4 t^4 + \ldots)$$
$$= L_3 t^3 + L_4 t^4 + L_5 t^5 + \ldots,$$

avec

$$\begin{aligned} L_3 &= 3{,}1862, & L_6 &= 0{,}81849,\\ L_4 &= -1{,}41642, & L_7 &= -0{,}14454.\\ L_5 &= -0{,}8379, \end{aligned}$$

Reste à résoudre l'équation

$$\frac{dB}{dt} = (S_0 + S_1 t^2 + S_2 t^2 + \ldots)B + L_3 t^3 + L_4 t^4 + \ldots;$$

en posant

$$B = B_4 t^4 + B_5 t^5 + B_6 t^6 + \ldots,$$

on a

$$4\,B_4 = L_3,\quad 5\,B_5 = S_0\,B_4 + L_4,\quad 6\,B_6 = S_0\,B_5 + S_1\,B_4 + L_5,\quad \ldots,$$

et en calculant, on obtient

$$\begin{aligned} B_4 &= 1,0621, & B_7 &= 0,11780,\\ B_5 &= -0,30373, & B_8 &= -0,01959.\\ B_6 &= -0,1309, \end{aligned}$$

On a donc enfin

$$\frac{dy}{dt} = B = 1,0621\,t^4 - 0,30373\,t^5 - 0,1309\,t^6 + 0,11780\,t^7 - 0,01959\,t^8,$$
$$y = 0,2124\,t^5 - 0,05062\,t^6 - 0,0187\,t^7 + 0,01472\,t^8 - 0,00218\,t^9.$$

31. Calculons ensuite les corrections de A, C, x, z. On a

$$v \sin j = c'' \frac{dx}{dt} - c\,\frac{dz}{dt};$$

or on a

$$c'' = \cos\theta = \cos\gamma,\quad c = \sin\theta \sin\psi = \sin\gamma \cos\upsilon,$$

et, comme υ est très-petit, il en résulte

$$(c)\qquad v \sin j = \cos\gamma\,\frac{dx}{dt} - \sin\gamma\,\frac{dz}{dt},$$

formule qui permettrait de calculer j. D'après le n° **21**, on a pour les corrections de $\frac{dA}{dt}$, $\frac{dC}{dt}$

$$\frac{R}{\mu v}(C - gt)\,\varepsilon,\quad -\frac{R}{\mu v}\,A\,\varepsilon;$$

ou, d'après l'expression (b) de ε,

$$\mathfrak{M}(C - gt)\,v \sin j,\quad -\mathfrak{M}A\,v\sin j,$$

en posant

$$\mathfrak{M} = \left(\frac{\beta}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu}\,v\right)\frac{k_{-1} + k_0\,v}{v}.$$

Remplaçons $\mathfrak{N}$ par une quantité constante, en y faisant $v = 350$; nous aurons

$$\log - \mathfrak{N} = \bar{4},52612.$$

D'après la formule (c), on a

$$\begin{aligned} v \sin j &= (A_2 \cos\gamma - C_2 \sin\gamma)t^2 + (A_3 \cos\gamma - C_3 \sin\gamma)t^3 + \ldots \\ &= 0,46952\,t^2 - 0,06033\,t^3 - 0,008273\,t^4 - 0,0011705\,t^5 - 0,0002135\,2t^6. \end{aligned}$$

On en conclut

$$\begin{aligned} &\text{Correction de } \frac{dA}{dt} = 0,0065928\,t^2 - 0,0013343\,t^3 - 0,00001327\,t^4 \\ &\qquad - 0,000022252\,t^5 + \ldots, \\ &\text{Correction de } \frac{dC}{dt} = - 0,06275\,t^2 - 0,0020218\,t^3 - 0,0010565\,t^4 \\ &\qquad - 0,00004758\,t^5 + \ldots; \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} &\text{Correction de } A = 0,0021976\,t^3 - 0,0003336\,t^4 - 0,000002654\,t^5 \\ &\qquad - 0,000003709\,t^6 + \ldots, \\ &\text{Correction de } C = - 0,02092\,t^3 - 0,0005055\,t^4 - 0,0002113\,t^5 \\ &\qquad - 0,00000793\,t^6, \\ &\text{Correction de } x = 0,0005494\,t^4 - 0,0000667\,t^5 - 0,000000442\,t^6 \\ &\qquad - 0,000000529\,t^7, \\ &\text{Correction de } z = - 0,00523\,t^4 - 0,0001011\,t^5 - 0,0000352\,t^6 \\ &\qquad - 0,00000113\,t^7. \end{aligned}$$

On doit remarquer que A, C, x, z, sont donnés (n° 28) par des séries assez convergentes; on pourrait, par exemple, les employer jusqu'à $t = 3$ secondes et, par un calcul semblable, on pourrait obtenir les développements de ces mêmes quantités depuis le commencement de la quatrième seconde jusqu'au point où le projectile revient au niveau du point de départ. Mais les séries qui donnent y, υ, γ sont beaucoup moins convergentes; celles que nous avons trouvées (n° 29) pour υ, γ ne doivent pas être employées au delà de $t = 1$ seconde. En posant $t = 1 + t'$ et partant des valeurs de A, C, n, N, υ, γ pour $t = 1$,

$$A = 363,598, \quad C = 38,6132, \quad n = 133034, \quad N = 364,736,$$
$$\upsilon = -0,0006799 = -2'20'', \quad \gamma = 84^\circ - 0,00045678 = 83^\circ 58' 26''.$$

on pourra développer v, γ par rapport aux puissances de t' et ces développements pourront être employés pendant la durée de la deuxième seconde; il sera ainsi possible de calculer successivement les valeurs de v, γ.

On voit que les calculs que j'obtiens pour le mouvement d'un projectile oblong, sont fort compliqués; mais la solution précédente est, je crois, la seule rigoureuse qui ait été donnée jusqu'à présent.

Dans la théorie des nos 15-21, j'ai laissé arbitraire la loi de la résistance de l'air; dans l'application j'ai supposé que la résistance de l'air sur un projectile sphérique ou oblong ne résulte que de pressions normales et, d'après la résistance qui a lieu sur un projectile sphérique, j'en ai conclu celle qui s'exerce sur le corps que j'ai examiné. Mais, comme l'hypothèse dont je suis parti n'est pas exacte, l'application précédente n'a été donnée que pour mieux faire comprendre comment mes formules peuvent être employées.

Remarque sur la théorie précédente.

32. On doit observer que le problème du mouvement d'un projectile de révolution se décompose en plusieurs autres : 1° il exige la détermination par l'expérience de la résistance de l'air sur une surface plane qui se meut dans ce milieu ; cette question difficile n'est pas encore résolue; 2° il exige la détermination géométrique, d'après cette loi, de la résistance de l'air sur le projectile donné dont l'axe de révolution fait un angle j avec la direction du mouvement; cette résistance est située dans le plan mené par l'axe du corps et une parallèle à la vitesse; on aura à déterminer en fonction de la vitesse v et de j la grandeur de la résistance, sa direction dans ce plan et son moment par rapport au centre de gravité; 3° on aura ensuite à résoudre les équations différentielles des mouvements de translation et de rotation (nos 19 et 21).

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

SECTION I.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE DYNAMIQUE.

SECTION II.

SUR LES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE.

SECTION III.

APPLICATIONS DES THÉORIES PRÉCÉDENTES AU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

SECTION IV.

SUR LE MOUVEMENT DE ROTATION D'UN CORPS SOLIDE.

SECTION V.

SUR LA THÉORIE DES MOUVEMENTS RELATIFS.

SECTION VI.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA DYNAMIQUE.

SECTION VII.

THÉORIE DES PERTURBATIONS.

SECTION VIII.

SUR LES PROBLÈMES DE LA DYNAMIQUE POUR LESQUELS ONT LIEU LES TROIS ÉQUATIONS DE LA CONSERVATION DES AIRES.

SECTION IX.

SUR LE MOUVEMENT DES PROJECTILES.

ERRATA.

Page 150, douzième ligne, ajouter au second membre le facteur $\Pi(u, \beta)$.
Page 264, dernière ligne, remplacer la parenthèse

$$\left(\frac{\cos 3\sigma}{3} + \cos\sigma\right) \quad \text{par} \quad \left(\frac{\cos 3\sigma}{3} + \cos\sigma - \frac{4}{3}\right).$$

3722 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.