

Stanisław Żukowski

**Ocena bezpieczeństwa płaskich
konstrukcji prętowych
w aspekcie teorii przystosowania**



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2006

Recenzenci

Nina JUZWA

Wanda ŚLIWIŃSKA-ŁADZIŃSKA

Opracowanie redakcyjne

Maria IZBICKA

Korekta

Alina KACZAK

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2006

OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISBN 83-7085-917-8

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr /2006.

*plaskie układy prętowe,
teoria przystosowania,
bezpieczeństwo konstrukcji*

Stanisław ŻUKOWSKI*

Ocena bezpieczeństwa płaskich konstrukcji prętowych w aspekcie teorii przystosowania

W pracy przedstawiono algorytm probabilistycznej oceny bezpieczeństwa płaskich konstrukcji prętowych wykonanych z materiałów sprężysto idealnie plastycznych. Algorytm obejmuje dwa zasadnicze zagadnienia: określanie warunków granicznych na podstawie teorii przystosowania i ocenę bezpieczeństwa konstrukcji z wykorzystaniem teorii niezawodności. Algorytm uwzględnia obciążenia statyczne stałe i zmienne, w tym zmiany temperatury w granicach, w których można przyjąć, że nie powodują zmian właściwości fizycznych materiału. Przedstawione związki zachowują swą ważność także w przypadku działania obciążeń dynamicznych.

Na podstawie najistotniejszych pozycji literatury przedstawiono rys historyczny teorii przystosowania oraz wyniki badań doświadczalnych uzasadniające wybór tej teorii jako podstawy oceny bezpieczeństwa konstrukcji wykonanych z materiałów sprężysto idealnie plastycznych. Przedstawiono też podstawowe założenia i twierdzenia tej teorii. Wskazano na niespójności klasycznych sformułowań kinematycznych ze sformułowaniami statycznymi teorii przystosowania i zaproponowano sposób ich eliminacji. Zaproponowano algorytm formułowania warunków granicznych wykorzystujący analogie między sformułowaniami pierwotnymi i dualnymi programowania liniowego oraz między sformułowaniami statycznymi i kinematycznymi teorii przystosowania. Algorytm ten obejmuje formułowanie liniowych statycznych warunków przystosowania konstrukcji, formułowanie liniowych układów równań z ograniczeń pierwotnych i dualnych układów równań, których rozwiązania pozwalają na wyznaczanie warunków granicznych jako funkcji zmiennych wyjściowych określających konstrukcję i jej obciążenia. Otrzymywane tak warunki graniczne mogą być traktowane jak ograniczenia kinematyczne generujące, wraz z odpowiadającymi im sformułowaniami statycznymi (pierwotnymi), rozwiązania zupełne. Przedstawiono liniowe warunki przystosowania wyrażone poprzez siły przekrojowe, dla przekrojów bisymetrycznych w przypadku zginania, w przypadku zginania z udziałem siły podłużnej oraz w przypadku zginania z udziałem siły podłużnej i poprzecznej. Wskazano na nieścisłość istniejącego twierdzenia statycznego dla zginanych elementów o przekroju monosymetrycznym i wyprowadzono, wyrażone poprzez siły przekrojowe, zlinearyzowane warunki przystosowania w przypadku zginania oraz zginania z udziałem siły podłużnej.

Podobnie jak w przypadku teorii przystosowania, na podstawie literatury przedstawiono rys historyczny rozwoju teorii niezawodności. Uwzględniono istniejące prace z zakresu oceny niezawodności w aspekcie teorii przystosowania. Scharakteryzowano podstawowe miary i metody ich określania stosowane w teorii niezawodności. Zaproponowano iteracyjny algorytm wyznaczania wskaźnika niezawodności Hasofe-

* Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław.

ra-Linda. Omówiono podstawowe systemy niezawodnościowe i przedstawiono modelowanie nimi konstrukcji w kontekście oceny bezpieczeństwa na podstawie teorii przystosowania.

Przedstawiono szczegółowe związki umożliwiające ocenę bezpieczeństwa płaskich konstrukcji prętowych o przekrojach jednorodnych i hybrydowych wykonanych z materiałów sprężysto idealnie plastycznych. Proponowany algorytm może też być łatwo adaptowany do oceny bezpieczeństwa także innych konstrukcji, na przykład żelbetowych i uwzględniania także innych stanów konstrukcji uznawanych za awaryjne, na przykład utraty stateczności.

Zilustrowano zastosowanie proponowanej koncepcji oceny bezpieczeństwa konstrukcji dwoma przykładami. Przedstawiono wyniki kilku rozwiązań tych przykładów ilustrujące różne elementy proponowanego algorytmu.

Podstawowe oznaczenia

Przyjmując oznaczenia, kierowano się następującymi zasadami:

- 1) litera o normalnej grubości czcionki oznacza stałą, zmienną lub funkcję,
- 2) litera pogrubiona oznacza wektor lub macierz,
- 3) w oznaczeniach dwuliterowych druga litera doprecyzowuje oznaczenie zasadnicze, jakim jest pierwsza litera (wyjątek stanowi symbol Δ , który oznacza przyrost lub amplitudę wielkości oznaczonej drugą literą),
- 4) indeks górny określa przyczynę, której skutkiem jest dana wielkość lub stan układu (wyjątek stanowi tu indeks T , który może oznaczać wpływ temperatury lub transpozycję wektora lub macierzy),
- 5) indeks dolny pierwszy oznacza miejsce występowania danej wielkości lub jej numer,
- 6) indeks dolny drugi doprecyzowuje to miejsce.

Duże litery łacińskie

A	– pole przekroju pręta,
A	– zbiór zdarzeń określających stan niebezpieczny (awaryjny) systemu,
A_v	– pole części przekroju czynnej przy ścinaniu,
\mathbf{A}	– macierz współczynników reprezentujących pola naprężeń resztkowych samorzównoważonych w przekrojach,
\mathbf{A}_α	– macierz współczynników reprezentujących pola naprężeń resztkowych samorzównoważonych w przekrojach,
\mathbf{A}_Y	– macierz współczynników reprezentujących pole resztkowych sił przekrojowych pozostających w równowadze z obciążeniem zerowym,
\mathbf{A}_α^*	– macierz \mathbf{A}_α zredukowana do współczynników występujących w ograniczeniach aktywnych,
\mathbf{A}_Y^*	– macierz \mathbf{A}_Y zredukowana do współczynników występujących w ograniczeniach aktywnych,
B	– zbiór zdarzeń określających bezpieczeństwo systemu,

- B** – macierz współczynników reprezentujących pole naprężeń resztkowych,
- C** – macierz współczynników reprezentujących pole naprężeń resztkowych,
- C_X** – macierz kowariancji zmiennych **X**,
- D** – macierz podatności,
- E_{ijkl} – współczynniki sprężystości materiału,
- E – moduł sprężystości Younga,
- $E[X]$ – wartość oczekiwana zmiennej losowej X ,
- F – obciążenie,
- $F_X[X]$ – dystrybuanta zmiennej losowej X ,
- $G(\mathbf{Y})$ – funkcja graniczna w przestrzeni standaryzowanych normalnych zmiennych losowych,
- K** – macierz sztywności,
- K⁰** – macierz deterministyczna, której elementami są wartości oczekiwane poszczególnych elementów tej macierzy,
- $\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_0$ – macierz losowych fluktuacji macierzy **K**, których wartości oczekiwane są równe zeru,
- I – moment bezwładności przekroju pręta,
- I** – macierz jednostkowa,
- L – długość, rozpiętość,
- M^e – moment zginający w przekroju pręta w układzie sprężystym,
- M^r – moment resztkowy w przekroju pręta,
- M_o – graniczny moment plastyczny przekroju pręta.
- Me – graniczny moment sprężysty przekroju pręta.
- Ms – maksymalny moment, przy którym możliwe jest obciążenie w zakresie sprężystym momentem z przeciwnym zwrotem o wartości $2Me$,
- M^* – moment odpowiadający osiągnięciu przez strefę uplastycznioną osi geometrycznej przekroju przy obciążaniu od zera do M^* ,
- \bar{M}_i^j – moment zginający w i -tym przekroju wywołany jednostkową siłą hiperstatyczną $Y_j = 1$,
- $\Delta\mathbf{M}^e$ – wektor amplitud sprężystych zmian momentów w przekrojach,
- N^e – siła osiowa w przekroju pręta w układzie sprężystym,
- N^r – siła osiowa resztkowa w przekroju pręta,
- N_o – graniczna plastyczna siła osiowa w przekroju pręta.
- Ne – graniczna sprężysta siła osiowa w przekroju pręta.
- \bar{N}_i^j – siła osiowa w i -tym przekroju wywołana jednostkową siłą hiperstatyczną $Y_j = 1$,

$P[Z]$	– prawdopodobieństwo zdarzenia Z ,
Q	– dowolna siła przekrojowa,
\mathbf{Q}	– wektor współczynników układu ograniczeń statycznych na przystosowanie reprezentujących obciążenie,
\mathbf{Q}^*	– wektor \mathbf{Q} zredukowany do współczynników występujących w ograniczeniach czynnych,
R	– moc dyssypacji układu,
S	– moc obciążenia,
\mathbf{U}	– wektor przemieszczeń,
V^e	– siła tnąca w przekroju pręta w układzie sprężystym,
V^r	– siła tnąca resztkowa w przekroju pręta,
V_e	– graniczna sprężysta siła tnąca w przekroju pręta,
V_o	– graniczna plastyczna siła tnąca w przekroju pręta,
V_X	– współczynnik zmienności zmiennej X ,
\bar{V}_i^j	– siła tnąca w i -tym przekroju wywołana jednostkową siłą hiperstatyczną $Y_j = 1$,
We	– sprężysty wskaźnik zginania przekroju pręta,
Wo	– plastyczny wskaźnik zginania przekroju pręta,
Ws	– wskaźnik zginania przekroju pręta na przystosowanie (dla przekroju bisymetrycznego $Ws = Wo$),
$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$	– wektor bazowych zmiennych losowych, to jest zmiennych wyjściowych stanowiących parametry geometryczne i fizyczne konstrukcji oraz parametry obciążenia,
$\mathbf{X}_R = (X_{R_1}, \dots, X_{R_r})^T \in \mathbf{X}$	– wektor zmiennych losowych określających nośność konstrukcji,
$\mathbf{X}_S = (X_{S_1}, \dots, X_{S_s})^T \in \mathbf{X}$	– wektor zmiennych losowych określający obciążenie,
\mathbf{Y}	– wektor standaryzowanych zmiennych losowych,
$\mathbf{Y}^r = (Y_1^r, \dots, Y_{nh}^r)^T$	– wektor zmiennych niezależnych określających pola resztkowych sił przekrojowych,
$Z(\mathbf{X})$	– zapas bezpieczeństwa (funkcja bazowych zmiennych losowych).

Małe litery łacińskie

b	– szerokość przekroju,
$f_X(X)$	– funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X ,
h	– wysokość przekroju,
n_h	– stopień statycznej niewyznaczalności układu,
n_k	– liczba przekrojów krytycznych,
p_f	– prawdopodobieństwo awarii,

- $p_r = 1 - p_f$ – niezawodność (prawdopodobieństwo niewystąpienia awarii),
 t_f – grubość stopki przekroju dwuteowego i teowego,
 t_w – grubość środka przekroju dwuteowego i teowego,
 \mathbf{x} – wektor współrzędnych geometrycznych poszczególnych punktów ciała,
 $s_{ij}^r(\mathbf{x})$ – pole naprężeń resztkowych samozrównoważonych w przekroju pręta,
 \mathbf{y}^* – punkt obliczeniowy w przestrzeni standaryzowanych zmiennych losowych.

Duże litery greckie

- $\Delta\beta(X_i)$ – przyrost (ujemny) wskaźnika β wynikający z uwzględnienia losowego charakteru zmiennej X_i ,
 $\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_0$ – macierz losowych fluktuacji macierzy \mathbf{K} , których wartości oczekiwane są równe zeru,
 $\Delta\phi$ – wektor prędkości odkształceń naprzemiennych,
 $\Delta\mathbf{M}^e$ – wektor amplitud sprężystych zmian momentów w przekrojach,
 $\Phi(\sigma_{ij})$ – funkcja plastyczności,
 $\Phi[X]$ – dystrybuanta rozkładu normalnego zmiennej losowej X ,
 $\Phi_0[X]$ – dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego zmiennej losowej X ,
 $\Phi^{-1}[X]$ – funkcja odwrotna do dystrybuanty rozkładu normalnego.

Małe litery greckie

- α – wektor kosinusów kierunkowych,
 α, β – macierze współczynników określających pola naprężeń resztkowych samozrównoważonych w przekrojach,
 β – wskaźnik (indeks) niezawodności Hasofera–Linda przy zmiennych normalnych standaryzowanych,
 β_{HL} – wskaźnik niezawodności Hasofera–Linda,
 β_C – wskaźnik niezawodności Cornella,
 β_{FORM} – wskaźnik niezawodności wyznaczony metodą FORM,
 β_{SORM} – wskaźnik niezawodności wyznaczony metodą SORM,
 β_{RE} – wskaźnik niezawodności Roseblutha–Estevy,
 $\Delta\beta(X_i)$ – przyrost (ujemny) wskaźnika β wynikający z uwzględnienia losowego charakteru zmiennej X_i ,
 δ_{ij} – delta Diraca,
 $\gamma(\mathbf{X})$ – współczynnik bezpieczeństwa,
 γ – odkształcenie,

ε^e	– odkształcenie sprężyste,
ε^p	– odkształcenie plastyczne,
ε^T	– odkształcenie termiczne,
$\mathbf{\varepsilon}^T$	– wektor odkształceń transponowany,
$\dot{\varepsilon}$	– prędkość odkształcenia,
ε_{ij}	– składowa tensora odkształceń,
$\mathbf{\varepsilon}$	– wektor zmiennych dualnych (prędkości odkształceń plastycznych),
$\mathbf{\varepsilon}^*$	– wektor zmiennych dualnych bez składowych zerowych,
κ_i	– krzywizny główne powierzchni aproksymującej,
μ	– współczynnik intensywności obciążenia (mnożnik granic zmienności obciążeń),
ν	– współczynnik Poissona,
ξ	– współrzędna przekroju krytycznego w przęśle pręta,
$\rho[R,S]$	– współczynnik korelacji zmiennych R oraz S ,
σ	– naprężenie normalne w jednoosiowym stanie naprężenia,
σ_0	– granica plastyczności materiału,
σ_{ij}	– składowa tensora naprężeń,
σ_Z	– odchylenie standardowe zmiennej losowej Z ,
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	– składowe normalne tensora naprężenia w układzie współrzędnych x, y, z ,
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	– składowe styczne tensora naprężeń,
φ_i^+ i φ_i^-	– prędkości zmian kątów w przegubach plastycznych zginanych,
φ	– funkcja gęstości prawdopodobieństwa,
φ_n	– n -wymiarowa normalna gęstość prawdopodobieństwa standaryzowanych zmiennych losowych,
$\Delta\boldsymbol{\varphi}$	– wektor prędkości odkształceń naprzemiennych.

1. Cel i zakres pracy

1.1. Cel pracy

Celem pracy jest opracowanie algorytmu probabilistycznej oceny bezpieczeństwa płaskich konstrukcji prętowych wykonanych z materiałów, dla których dopuszczalne jest przyjęcie modelu sprężysto idealnie plastycznego. Algorytm uwzględnia obciążenia statyczne stałe i zmienne, w tym zmiany temperatury w granicach, w których można przyjąć, że nie powodują zmian właściwości fizycznych materiału. Przedstawione związki zachowują swą ważność także w przypadku działania obciążeń dynamicznych.

Podstawę oceny bezpieczeństwa stanowią warunki graniczne, których spełnienie oznacza osiągnięcie przez obciążenie, o określonym programie działania, poziomu uznawanego za zagrażający bezpieczeństwu. Przy przyjętych założeniach (konstrukcja sprężysto idealnie plastyczna poddana działaniu obciążeń stałych i zmiennych) podstawowymi zagrożeniami bezpieczeństwa są: możliwość przekształcenia się konstrukcji w mechanizm w wyniku uplastycznienia materiału, występowanie odkształceń plastycznych przeciwnych znaków, mogące prowadzić do zmęczenia niskocyklowego, lub możliwości utraty stateczności.

Ocena bezpieczeństwa konstrukcji, w ujęciu probabilistycznym, obejmuje dwa zasadnicze zagadnienia: formułowanie warunków granicznych i obliczanie, na ich podstawie, wartości współczynników stanowiących miary bezpieczeństwa. Warunki graniczne określane są z wykorzystaniem metod analizy konstrukcji przyjmowanych stosownie do typu konstrukcji, działających obciążeń i rodzaju materiału, z którego wykonana jest konstrukcja. Oceną bezpieczeństwa konstrukcji, gdy znane są jej teoretyczne modele z określonymi warunkami granicznymi, zajmuje się teoria niezawodności wykorzystująca metody rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Aktualnie zastosowanie teorii niezawodności w praktyce inżynierskiej ogranicza się do tworzenia wzorów normowych i kalibrowania ich współczynników, oceny niezawodności konstrukcji specjalnych, takich jak wieże wiertnicze oraz w działalności eksperckiej.

W pracy przedstawione zostaną szczegółowe związki umożliwiające ocenę bezpieczeństwa płaskich konstrukcji prętowych o przekrojach jednorodnych i hybrydowych wykonanych z materiałów sprężysto idealnie plastycznych. Mogą to być na przykład konstrukcje stalowe lub ze stopów aluminiowych. Proponowany algorytm może też być

łatwo adaptowany do oceny bezpieczeństwa także innych konstrukcji, na przykład żelbetowych i uwzględniania innych stanów konstrukcji uznawanych za awaryjne, na przykład utraty stateczności.

Uwzględniając, że do podstawowych obciążeń konstrukcji budowlanych należą obciążenia zmienne, warunki graniczne będą określone na podstawie teorii przystosowania, która, jak wykazują badania doświadczalne, dostarcza bezpiecznych warunków granicznych w przypadku działania takich obciążeń. Szczególnym przypadkiem takich obciążeń są obciążenia stałe, które mogą być traktowane jak obciążenia zmienne o dolnej i górnej granicy ich zmienności równych sobie. W rozważaniach zostanie pominięta teoria nośności granicznej jako oddzielna metoda, która dostarcza bezpiecznych warunków granicznych tylko w przypadku działania obciążeń stałych, które po ewentualnym narastaniu w jednym cyklu do wartości końcowych nie ulegają zmianie. W przypadku obciążeń zmiennych nośność graniczna określona według teorii nośności granicznej może znacznie przewyższać rzeczywistą nośność konstrukcji. Teoria nośności granicznej jest szczególnym przypadkiem teorii przystosowania odpowiadającym obciążeniom stałym, jej pominięcie w rozważaniach jako oddzielnej metody nie zawęży zakresu rozważanych zagadnień.

1.2. Zakres pracy

Na treść pracy składa się siedem rozdziałów. W rozdziale pierwszym sformułowano cel i omówiono zakres pracy, który obejmuje dwa zasadnicze zagadnienia: określanie warunków granicznych na podstawie teorii przystosowania i ocenę bezpieczeństwa konstrukcji z wykorzystaniem teorii niezawodności.

W rozdziale drugim przedstawiono rys historyczny rozwoju teorii przystosowania z uwzględnieniem najistotniejszych pozycji literatury dotyczących tej teorii i jej zastosowań w zakresie odpowiadającym niniejszej pracy. Przedstawiono wyniki badań doświadczalnych uzasadniające wybór teorii przystosowania jako najlepiej określającej nośność konstrukcji wykonanych z materiału sprężysto idealnie plastycznego. Przedstawiono też podstawowe założenia i twierdzenia tej teorii.

W rozdziale trzecim wskazano na niespójności klasycznych sformułowań kinematycznych ze sformułowaniami statycznymi teorii przystosowania i zaproponowano sposób ich eliminacji. Wykorzystując znane analogie między sformułowaniami pierwotnymi i dualnymi programowania liniowego oraz między sformułowaniami statycznymi i kinematycznymi teorii przystosowania, zaproponowano algorytm przedstawiania warunków granicznych dla konstrukcji jako funkcji parametrów określających konstrukcję i obciążenie. Algorytm ten obejmuje formułowanie liniowych (zlinearyzowanych) statycznych warunków przystosowania konstrukcji, formułowanie liniowych układów równań z ograniczeń pierwotnych i dualnych układów równań, których rozwiązaniami są zmienne dualne jako funkcje zmiennych bazowych rozumianych tu jako parametry

wyjściowe określające bezpośrednio konstrukcję i obciążenia. To pozwala na wyznaczanie warunków granicznych i zapasów bezpieczeństwa jako funkcji zmiennych bazowych. Otrzymywane tak warunki graniczne mogą być traktowane jak ograniczenia kinematyczne generujące, wraz z odpowiadającymi im sformułowaniami statycznymi (pierwotnymi), rozwiązania zupełne. Wyprowadzono też, wyrażone poprzez siły przekrojowe, zlinearyzowane warunki przystosowania dla przekrojów bisymetrycznych w przypadku zginania z udziałem siły podłużnej oraz podłużnej i poprzecznej. Wskazano na nieścisłość istniejącego twierdzenia statycznego dla zginanych elementów o przekroju monosymetrycznym i wyprowadzono, wyrażone poprzez siły przekrojowe, zlinearyzowane warunki przystosowania w przypadku zginania oraz zginania z udziałem siły podłużnej.

W rozdziale czwartym przedstawiono rys historyczny rozwoju teorii niezawodności z uwzględnieniem najważniejszych pozycji literatury. Uwzględniono też prace z zakresu oceny niezawodności w aspekcie teorii przystosowania, w tym istotniejsze prace autora niniejszej pracy. Scharakteryzowano podstawowe miary i metody ich określania stosowane w teorii niezawodności. Zaproponowano iteracyjny algorytm wyznaczania wskaźnika niezawodności Hasofera–Linda.

W rozdziale piątym omówiono podstawowe propozycje oszacowań niezawodności konstrukcji jako systemów niezawodnościowych. Proponowana w rozdziale trzecim koncepcja wyznaczania warunków granicznych pozwala na określanie szeregowego modelu systemu niezawodnościowego konstrukcji.

W rozdziale szóstym zilustrowano zastosowanie proponowanej koncepcji oceny bezpieczeństwa konstrukcji dwoma przykładami. Przedstawiono wyniki kilku rozwiązań tych przykładów ilustrujące różne elementy proponowanego algorytmu.

W rozdziale siódmym przedstawiono posumowanie rozważań zawartych w pracy.

2. Podstawy teorii przystosowania układów prętowych

2.1. Wstęp

Za prekursora teorii przystosowania uważa się Grüninga [56], który na przykładzie kratownicy wykazał niebezpieczeństwo zniszczenia konstrukcji sprężysto-plastycznej w wyniku uplastycznienia materiału pod działaniem obciążeń zmiennych.

Warunki przystosowania belek o przekroju idealnie dwuteowym wyrażone poprzez momenty zginające przedstawił Bleich [14]. Analizował on też przystosowanie kratownic.

Ogólne twierdzenia dotyczące przystosowania kontinuum sprężysto idealnie plastycznego i sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem przedstawił Melan [107, 108, 109, 110].

Problemy przystosowania kratownic rozważali też Prager [141] i Neal [123], którzy zwrócili uwagę, że w tym przypadku należy się liczyć z możliwością utraty stateczności prętów ściskanych przed ich uplastycznieniem.

Rozróżnienia plastyczności przyrostowej i naprzemiennej dokonali Horne [70] oraz Neal i Symonds [124], którzy wyprowadzili warunek zmęczeniowy dla przypadku zginania wykazując, że dla zginanych przekrojów innych niż dwuteowe bez środka do przystosowania się potrzebne jest spełnienie warunków przedstawionych przez Bleicha i warunków chroniących przed plastycznością naprzemiennej. Warunki te łącznie stanowią podstawę twierdzenia zwanego twierdzeniem Bleicha–Melana.

Wychodząc z warunków Bleicha traktowanych jako warunki przyrostowe dla przekrojów dwuteowych, Neal [121, 122] sformułował twierdzenia kinematyczne dotyczące przystosowania i nieprzystosowania przyrostowego belek i ram, wyrażone poprzez momenty zginające.

Koiter [80] pokazał, że warunki na przystosowanie wyrażone poprzez momenty zginające są prawdziwe tylko dla przekrojów bisymetrycznych. Nie zapewniają natomiast przystosowania przekrojów monosymetrycznych i ewentualne ich stosowanie na przykład w przypadku przekrojów teowych prowadzi do oszacowań przybliżonych od góry. W tym zakresie Konieczny [82] przedstawił ogólne warunki na przystosowanie belek, obejmujące także przystosowanie belek o przekrojach monosymetrycznych.

Ogólne twierdzenie kinematyczne o przystosowaniu i nieprzystosowaniu kontinuum materialnego sformułował Koiter [79, 80]. Uogólnienie tego twierdzenia na obciążenia termiczne przedstawił Rozenblum [150]. Gokhfeld [54] i Sawczuk [156] zapoczątko-

wali stosowanie twierdzenia Koitera w analizie przystosowania dla odcinkowo liniowych warunków granicznych. Pham [135], Pham i Stumpf [137] zaproponowali „zredukowaną” postać twierdzenia Koitera, która nie wymaga wykonywania całkowania cykli obciążeń względem czasu. Wersję szczególną tego podejścia dla kratownic i ram wyrażoną poprzez naprężenia przedstawił Pham [136].

Ogólne twierdzenia o przystosowaniu (wyprowadzone z twierdzenia Melana) i nieprzystosowaniu (wyprowadzone z twierdzenia Koitera) wyrażone poprzez siły przekrojowe przedstawił König [87, 89, 90]. Tam też użył on pojęcia powierzchni sprężystej jako obszaru w przestrzeni sił przekrojowych, w obrębie którego zmiany tych sił nie powodują uplastycznienia w żadnym punkcie przekroju. Wykazał też własności tych powierzchni ułatwiające ich dobieranie.

Problemy przystosowania dla materiałów ze wzmocnieniem rozpatrywali Templin i Sturm [184], Maier [102], König [89] i inni.

Zagadnienie przystosowania w przypadku obciążeń termicznych rozważali: Parkes [133, 134], który pokazał, że zmiany temperatury mogą powodować zniszczenie przyrostowe lub naprzemienne, na przykładzie skrzydeł samolotów, Prager [142] i Rozenblum [151], którzy wykazali, że wspomniane powyżej warunki na przystosowanie są prawdziwe także w przypadku termicznych obciążeń zmiennych dla zmian temperatury w granicach niepowodujących zmian właściwości materiału. König [88] rozpatrywał twierdzenie Melana, w przypadku gdy warunek graniczny i moduł sprężystości materiału zależą od temperatury.

Ceradini [22, 23], Hwa Shan Ho [72], Corradi i Maier [32], Capurso [21], wykazali, że twierdzenie Melana jest prawdziwe także w przypadku obciążeń dynamicznych.

Opis zagadnienia przystosowania w ujęciu programowania liniowego stosowali Hodge [66], Heyman [62], Gavarini [53], Cyras [34], Corradi i Zavelani [33] oraz inni. Ogólnie problem przystosowania w ujęciu programowania matematycznego został sformułowany przez Maiera [102, 103], Kamenjarzha i Weicherta [75] oraz innych. Warto wspomnieć, że programowanie matematyczne należy do podstawowych metod optymalizacji, która jest ważnym zagadnieniem w analizie konstrukcji, ściśle związanym z oceną ich niezawodności. W tym zakresie przykładowo można wymienić pracę Jendy i Putreszy [73].

Wiele prac dotyczy algorytmizacji numerycznej analizy przystosowania. Można tu przykładowo wymienić pracę Borkowskiego i Kleibera [18], w której autorzy zastosowali przyrostową analizę numeryczną, prace Orkisha i współautorów [128–132], w których rozpatrywano problem wyznaczania naprężeń resztkowych, proponując różne algorytmy numeryczne oparte na nierówności Martina [105], dotyczącej całkowitej pracy uzupełniającej. Wielu autorów proponuje algorytmy wykorzystujące metodę elementów skończonych (MES). Przykładowo wymienić można pracę Zwolińskiego i Bielawskiego [200], w której przedstawiono algorytm doboru naprężeń resztkowych w analizie przystosowania i nośności granicznej, Cichonia i Waszczyszyna [25, 26] oraz Cichonia [27], w których przedstawiono algorytmy MES do analizy przystosowania łu-

ków oraz prace Nguyen Dang Hunga i Königa [126], Weicherta i Gross-Weege'a [188], Yana i Nguyen Dang Hunga [195], Hachemi i Weicherta [57], Heitzera i Staata [61]. Pycko i Mróz [145] zaproponowali metodę iteracyjną analizy przystosowania konstrukcji, opartą na warunkach statycznych, a polegającą na wyznaczeniu mnożnika określającego moduł plastyczny materiału niezbędny do przeniesienia obciążeń o określonym programie. W całości metodom numerycznym poświęcony został europejski temat badawczy „LISA FEM-Based Limit and Shakedown Analysis for Design and Integrity Assessment in European Industry”, z którego sprawozdanie pt. „Numerical Methods for Limit and Shakedown Analysis” przedstawili w internecie Staat i Heitzer w 2003 roku. Poza szerokim wykazem literatury przedstawiono tam propozycje postępowania w przypadku projektowania na przystosowanie. Przedstawiono też podstawowe założenia normy europejskiej („Basic Pressure Vessel Design in New European Code prEN 13445-3:1999”) projektowania zbiorników, opartego na teorii przystosowania.

Literatura dotycząca zagadnień przystosowania zawiera też prace przedstawiające wyniki badań doświadczalnych. Massonet [106] przedstawił wyniki badań belek dwuprzęsłowych obciążonych dwiema siłami w środkach rozpiętości pręseł jedną stałą i jedną zmienną. Nośności wyznaczone doświadczalnie przewyższają nośności określone na podstawie obliczeń w granicach do 5%, a nośność graniczna przewyższa nośność na przystosowanie o około 19%. Bertero i Popov poddali badaniu na zmęczenie niskocyklowe belki wspornikowe wykonane z dwuteowników stalowych normalnych o wysokości 120 mm. Badania [20] wykonano na serii belek, dobierając naprzemienne obciążenie końca wspornika tak, by w włóknach skrajnych w przekroju przypodporowym w każdym cyklu powstawały te same odkształcenia naprzemienne wynoszące od $\pm 1\%$ do $\pm 2,5\%$. Obserwowano zniszczenie w wyniku zmęczenia niskocyklowego po kilkudziesięciu cyklach zmian obciążenia. Fukumoto [50] przedstawił wyniki badań belek stalowych o przekroju dwuteowym lub prostokątnym jednoprzęsłowych, jednym końcem utwierdzonych, a drugim przegubowo podpartych. Badano belki pod obciążeniem ruchomym oraz pod działaniem sił o zmiennych wartościach o ustalonym położeniu. Uzyskano wyniki zgodne z teoretycznymi w zakresie nośności i przemieszczeń obliczanych według przedstawionej tam procedury. Przytoczone w pracy [91] wyniki badań Derby'go, dotyczące dwuteowych belek ciągłych od dwu do pięcioprzęsłowych obciążonych przetaczanym wielokrotnie walcem po górnym pasie wykazują dużą zgodność z wynikami obliczeń w zakresie nośności i nieco mniejszą w zakresie przemieszczeń. Biegus i współautorzy [12, 40] badali belki stalowe o przekroju prostokątnym 20×10 mm, dwuprzęsłowe, obciążone dwiema siłami w środkach rozpiętości pręseł jedną stałą i jedną zmienną. Uzyskano nośność mniejszą od teoretycznej o około 3%. Neal i Symonds [125] przedstawili wyniki badań modelowych ramy parterowej jednonawowej wykonanej z prętów stalowych o przekroju kwadratowym ($1/4 \times 1/4$ cala) obciążonej dwiema siłami zmienianymi zgodnie z założonym programem. Z badań otrzymano nieznacznie większą nośność niż z obliczeń i mniejsze przemieszczenia trwałe niż obliczone. Popov i McCarthy [140] badali ramy parterowe jednonawowe o jednakowej wysokości słu-

pów i o różnej wysokości słupów, wykonane z prętów stalowych o przekroju dwuteowym z uźebrowanymi węzłami obciążonymi dwiema siłami zmieniającymi zgodnie z założonym programem. Wykonano badania nośności granicznej na przystosowanie przyrostowe i na zmęczenie niskocyklowe. Z badań otrzymano nośności większe o kilka procent niż z obliczeń. Gdy w obliczeniach uwzględniono fakt, że uplastycznienie następowało nie w przekrojach na przecięciu osi rygli i słupów, lecz w przekrojach na przecięciu osi rygli i krawędzi słupów, uzyskano wyniki obliczeń znacznie bliższe wynikom uzyskanym z badań. W pracy [63] przedstawiono wyniki badań otrzymane przez Goodella i Minera dla ram piętrowych wykonanych z aluminiowych prętów kwadratowych o przekroju $1/4 \times 1/4$ cala o słupach zamocowanych w fundamentach sztywno lub przegubowo. Ramy były obciążone stałą siłą pionową w środku rygla dolnego i dwiema poziomymi siłami zmiennymi w linii rygli. Nośności z pomiarów nieznacznie przewyższały nośności teoretyczne zarówno dla nośności granicznej, jak i na przystosowanie.

Publikowane są też prace przedstawiające wyniki badań, które wykazują znaczne rozbieżności z wynikami obliczeń teoretycznych. Na przykład: Eyre i Galambos [46] przedstawili wyniki badań belek stalowych dwuprzęsłowych o przekroju prostokątnym lub dwuteowym poddanych działaniu jednej lub dwu sił ruchomych. Nośności uzyskane z badań znacznie przewyższają nośności teoretyczne. Analogiczne badania dotyczące belek dwu- i trójprzęsłowych przedstawił Grundy [55]. Badane belki o przekroju dwuteowym obciążone były dwiema siłami poruszającymi się po pasie dolnym na rolkach. Otrzymano nośności o ponad 10% mniejsze niż z obliczeń. Wyniki te w porównaniu z innymi i z sobą nawzajem wskazują na pominięcie jakichś istotnych elementów w badaniach lub w obliczeniach teoretycznych, na przykład pominięcie w obliczeniach wpływu zginania stopki dwuteownika w płaszczyźnie poprzecznej.

Generalnie nośności określane na podstawie badań doświadczalnych raczej przekraczają nośności określone na podstawie obliczeń według teorii przystosowania do kilku procent, przemieszczenia pomierzone są zwykle nieco mniejsze niż obliczone, czego podstawową przyczyną wydaje się być pomijanie w obliczeniach wzmocnienia materiału. Różnice między nośnością dla obciążeń stałych i zmiennych uzyskiwane z badań (nawet tych budzących wątpliwości) są bardzo bliskie analogicznym różnicom uzyskiwanym z obliczeń według teorii nośności granicznej i według teorii przystosowania. Zależnie od złożoności układu i programu obciążeń zmiennych różnice te wynoszą od kilkunastu nawet do kilkudziesięciu procent. Oznacza to, że teoria przystosowania pozwala na bezpieczne szacowanie nośności konstrukcji, a zastosowanie teorii nośności granicznej w przypadku obciążeń zmiennych może prowadzić do znacznego przeszacowania rzeczywistej nośności konstrukcji. Jako przykład można tu przytoczyć opisaną przez Heymana i innych [63] konstrukcję stycznikowni na wybrzeżu morskim Walii narażonej między innymi na znaczne zmienne obciążenia wiatrem. Konstrukcja w pierwszej wersji została zaprojektowana na podstawie teorii nośności granicznej przy założeniu współczynnika bezpieczeństwa o wartości 1,525. Po wykonaniu obliczeń według teorii przystosowania okazało się, że współczynnik bezpieczeństwa wynosi tylko 1,04.

Konstrukcję przeprojektowano tak, że współczynnik bezpieczeństwa według teorii przystosowania wyniósł 1,3, co według teorii nośności granicznej dało współczynnik bezpieczeństwa równy 1,76.

Zasadnicza różnica między wynikami badań doświadczalnych a wynikami obliczeń polega na tym, że teoretycznie przystosowanie powinno następować zwykle po jednym, ewentualnie dwóch cyklach zmian obciążeń, a w praktyce potrzeba na to kilku cykli.

W praktyce projektowej teoria przystosowania znajduje jeszcze małe zastosowanie, mimo że w Polsce od 1976 roku dopuszczalne jest wykorzystanie rezerwy plastycznej materiału w projektowaniu konstrukcji stalowych. Norma PN-76/B-03200 „Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie” oraz jej edycja z 1980 r. dopuszczają wykorzystanie w projektowaniu rezerwy plastycznej materiału dla obciążeń statycznych pod warunkiem zapewnienia przystosowania do pracy sprężystej. W edycji tej normy z 1990 roku dopuszczono wykorzystanie rezerwy plastycznej materiału według teorii nośności granicznej dla belek i ram płaskich obciążonych przeważająco statycznie, jednak zamieszczono tam tablice do projektowania belek opracowane na podstawie teorii przystosowania (Łubiński i współautorzy [99]).

2.2. Założenia podstawowe

Przyjmuje się izotropowy, sprężysto idealnie plastyczny model materiału według Prandtla [143], przy założeniu małych odkształceń. Odkształcenia ε_{ij} i prędkości odkształceń $\dot{\varepsilon}_{ij}$ oraz naprężenia σ_{ij} mogą być przedstawione w postaci sum części sprężystej i części plastycznej [92]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (2.2.1)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (2.2.2)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^p. \quad (2.2.3)$$

W przypadku występowania zmian temperatury po prawej stronie wzorów (2.2.1) do (2.2.3) należy dodać, odpowiednio, składniki ε_{ij}^T , $\dot{\varepsilon}_{ij}^T$, σ_{ij}^T uwzględniające wpływ tych zmian [92].

W zakresie sprężystym związku między odkształceniami i naprężeniami określa prawo Hooke'a [92]

$$\sigma_{ij}^e = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e, \quad (2.2.4)$$

$$\varepsilon_{ij}^e = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^e, \quad (2.2.5)$$

gdzie E_{ijkl} – stałe współczynniki charakteryzujące właściwości sprężyste materiału.

Dla materiału izotropowego parametry te określone są przez moduł sprężystości podłużnej Younga E i współczynnik odkształcalności poprzecznej Poissona ν związkami

$$E_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \quad (2.2.6)$$

$$E_{ijkl}^{-1} = \frac{1}{E} \left((1+\nu) \delta_{ik} \delta_{jl} - \nu \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \quad (2.2.7)$$

gdzie $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$ – delta Diraca.

W zakresie plastycznego płynięcia materiał jest idealnie plastyczny i spełnia warunki neutralnej stateczności według Drückera [41, 168]

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^o) \cdot d\varepsilon_{ij}^p \geq 0, \quad (2.2.8)$$

$$d\sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^p = 0. \quad (2.2.9)$$

Z warunków (2.2.8) i (2.2.9) wynika, że powierzchnia neutralna w statecznym materiale plastycznym nie jest wklęsła, a wektor prędkości odkształcenia plastycznego jest do niej prostopadły i zwrócony na zewnątrz. Przyjmuje się, że istnieje w przestrzeni naprężeń funkcja plastyczności $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$ identyczna z funkcją potencjału plastycznego Misesa [115]. Wynika stąd, stowarzyszone z funkcją plastyczności $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$, prawo plastycznego płynięcia [157, 168]

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (2.2.10)$$

Dla idealnej plastyczności cząstka materiału może znajdować się w stanie plastycznego płynięcia (stan czynny) lub w jednym z dwu stanów, gdy plastyczne płynięcie nie występuje, to jest w stanie neutralnym lub w stanie biernym zaliczanym do stanu sprężystego

$$\dot{\lambda} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{cases} \text{ i } \frac{\partial \Phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \begin{cases} = 0 & \text{stan czynny (obciążenie),} \\ = 0 & \text{stan neutralny,} \\ < 0 & \text{stan bierny (odciążenie).} \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Przyjmuje się też, że istnieje taka funkcja $\varphi(\sigma_{ij})$ i taki parametr k charakteryzujący materiał, że zachodzi związek $\Phi(\sigma_{ij}) = \varphi(\sigma_{ij}) - k$. Równość $\varphi(\sigma_{ij}) = k$ stanowi warunek idealnej plastyczności. Jako warunki plastyczności przyjmowane są hipotezy

wyświetlenia. Przykład może stanowić, dobrze odpowiadająca stanowi rzeczywistości w konstrukcjach metalowych [10, 99], hipoteza Hubera–Misesa–Hencky’ego [71, 115]

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \sigma_0^2, \quad (2.2.12)$$

gdzie: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ – składowe tensora naprężeń w układzie współrzędnych x, y, z ,

σ_0 – granica plastyczności materiału.

W szczególnych przypadkach warunek ten ma postać:

- płaski stan naprężenia w układzie współrzędnych x, y

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2, \quad (2.2.13)$$

- płaski stan naprężenia w punkcie przekroju pręta ($\sigma_x = \sigma, \tau_{xy} = \tau$)

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_0^2, \quad (2.2.14)$$

- jednoosiowy stan naprężenia

$$\sigma^2 = \sigma_0^2, \quad (2.2.15)$$

- czyste ścinanie na płaszczyźnie

$$3\tau^2 = \sigma_0^2. \quad (2.2.16)$$

2.3. Istota i kryteria teorii przystosowania

Do podstawowych obciążeń konstrukcji budowlanych należą obciążenia stałe i zmienne. Zależnie od intensywności ekstremalnych wartości obciążeń można wyróżnić pięć zasadniczych sytuacji [92]:

1. Naprężenia w żadnym punkcie nie osiągają wartości powodujących uplastycznienie – zmiany odkształceń następują w zakresie sprężystym (rys. 2.3.1a).
2. Obciążenie w jednym cyklu osiąga konfigurację i intensywność graniczną według Pragera [143], co przekształca układ w mechanizm i prowadzi do teoretycznie nieograniczonego narastania odkształceń plastycznych (nieograniczonego narastania energii dyssypowanej w wyniku odkształceń plastycznych) bez zmiany obciążenia – konstrukcja ulega zniszczeniu w wyniku osiągnięcia nośności granicznej w jednym cyklu narastania obciążenia (rys. 2.3.1b, 2.3.2 – poziom μ_{ng} , 2.3.3 – krzywa zewnętrzna, 2.3.4 – linia ng).
3. Obciążenie w różnych cyklach jego zmian osiąga konfigurację i intensywność powodującą występowanie odkształceń plastycznych, które po kilku (niekoniecznie kolejnych) cyklach takich zmian zanikają we wszystkich punktach (energia dyssypowana w wyniku odkształceń plastycznych w czasie $t \rightarrow \infty$ jest skończona): – kon-

strukcja przystosowała się, co oznacza, że wszelkie dalsze zmiany obciążenia (zgodne z programem do, którego nastąpiło przystosowanie) nie będą powodowały odkształceń plastycznych (rys. 2.3.1e, 2.3.3 – obszary ograniczone liniami przerywanymi, 2.3.4 – linie *pn* i *pp*).

4. Obciążenie w różnych cyklach osiąga konfigurację i intensywność powodującą występowanie odkształceń plastycznych takich, że prowadzi do (teoretycznie nieograniczonego) narastania odkształceń i przemieszczeń (energia dyssypowana w wyniku odkształceń plastycznych w czasie $t \rightarrow \infty$ rośnie nieograniczenie) – konstrukcji grozi zniszczenie w wyniku narastania odkształceń plastycznych w różnych cyklach, co określa się jako zniszczenie przyrostowe (rys. 2.3.1d, 2.3.2 – poziom μ_p , 2.3.4 – linie *np*).
5. Obciążenie w różnych cyklach osiąga konfigurację i intensywność powodującą występowanie w niektórych punktach odkształceń plastycznych przeciwnych znaków (plastyczność naprzemienna), co może prowadzić po stosunkowo nie dużej liczbie cykli do utraty ciągłości materiału, mimo że odkształcenia mogą pozostawać „małe” – konstrukcji grozi zniszczenie w wyniku zmęczenia niskocyklowego (rys. 2.3.1c, 2.3.4 – linia *nn*).

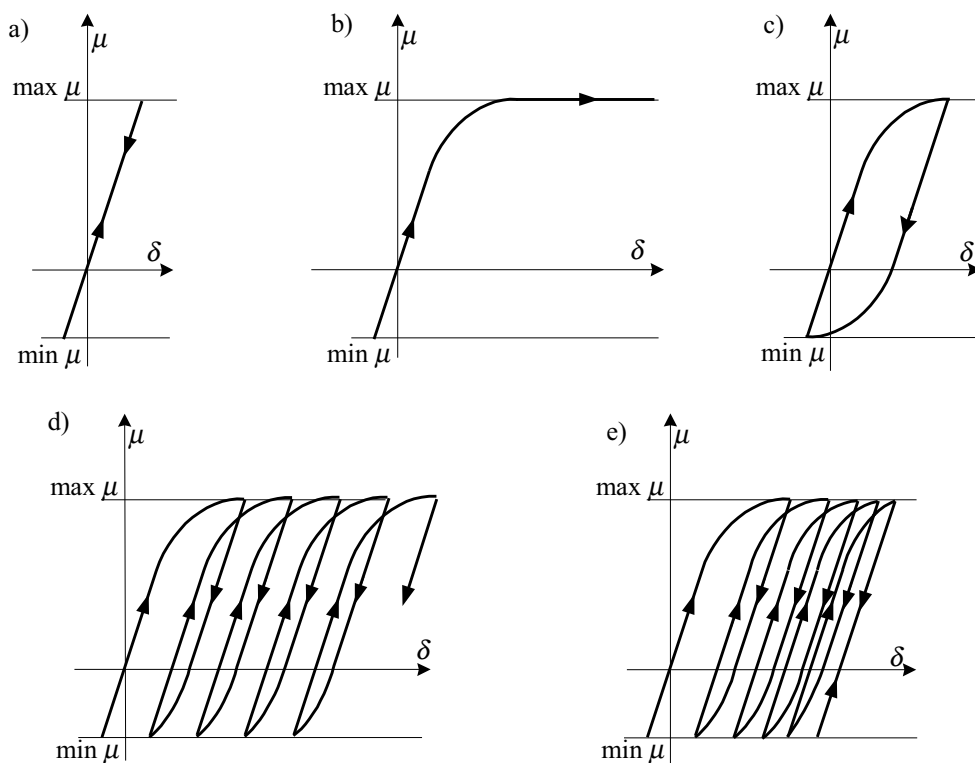
Należy podkreślić, że zachowania konstrukcji po osiągnięciu stanu granicznego w jednym cyklu (nośność graniczna według teorii nośności granicznej) i w wyniku narastania odkształceń plastycznych w różnych cyklach (nośność graniczna przyrostowa według teorii przystosowania) są analogiczne w tym sensie, że charakteryzują się narastaniem odkształceń plastycznych bez zmiany ekstremalnej intensywności obciążeń. Różnica polega jednak na tym, że w pierwszym przypadku to narastanie odkształceń odbywa się w sposób ciągły w jednym cyklu, a w drugim przypadku składa się ze skończonych przyrostów następujących w różnych, nie koniecznie kolejnych, cyklach (rys. 2.3.2). Intensywność graniczna według teorii przystosowania jest nie mniejsza niż intensywność graniczna ze względu na nośność sprężystą i nie większa niż nośność graniczna według teorii nośności granicznej. Obszary dopuszczalnych zmian obciążeń ze względu na przystosowanie zależą od programu obciążeń i w ogólności są obszarami powstającymi w wyniku przesunięcia i ewentualnie zawężenia obszaru nośności sprężystej, co ilustruje rys. 2.3.3.

Kryterium przystosowania przyjmuje się w postaci warunku skończoności energii dyssypowanej W_p w wyniku odkształceń plastycznych. König [86] zaproponował to kryterium w postaci warunku (2.3.1), który musi być spełniony dla każdego punktu ciała

$$W_p = \int_0^t \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^p(\mathbf{x}, t) \cdot dt < \infty, \quad (2.3.1)$$

gdzie: $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ – składowe tensora naprężeń,

$\dot{\epsilon}_{ij}^p(\mathbf{x}, t)$ – składowe tensora prędkości odkształceń plastycznych,

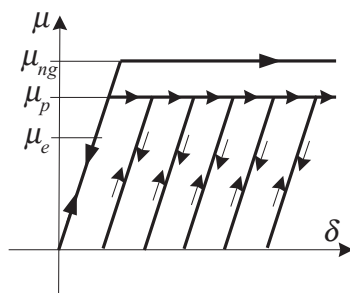


Rys. 2.3.1. Przykładowe zależności przemieszczeń δ od intensywności μ obciążeń zmiennych:

- a) zakres sprężysty, b) nośność graniczna, c) plastyczność naprzemienna,
d) nieprzystosowanie przyrostowe, e) przystosowanie

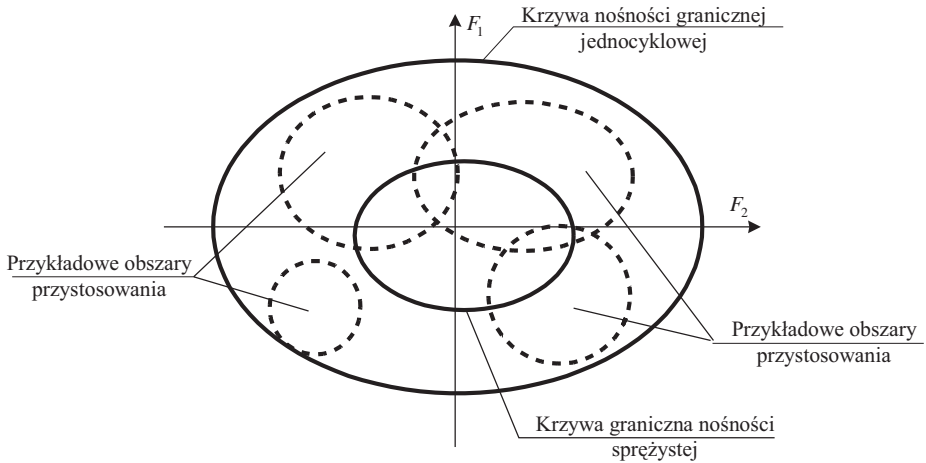
Fig. 2.3.1. Example relations of the displacements δ versus live loads intensity μ

- a) elastic range, b) limit analysis, c) alternating plasticity,
d) incremental collapse, e) shakedown

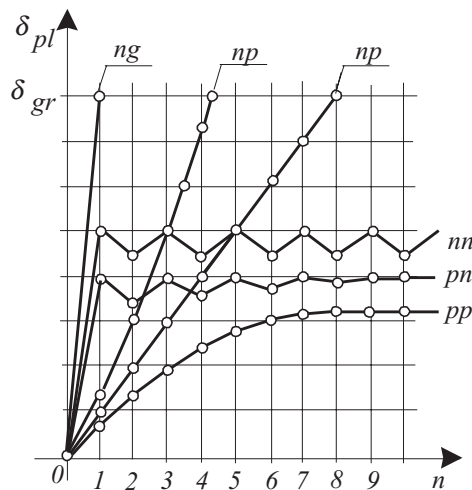


Rys. 2.3.2. Schematyczne porównanie granicznych intensywności obciążeń: μ_e – sprężysta nośność graniczna, μ_p – nośność graniczna przystosowania, μ_{ng} – nośność graniczna jednocyklowa

Fig. 2.3.2. Schematical compare of the limit loads intensities: μ_e – elastic limit load capacity, μ_p – shakedown limit load capacity, μ_{ng} – instantaneous limit load capacity



Rys. 2.3.3. Przykładowe obszary dopuszczalnych zmian obciążeń według teorii nośności sprężystej, granicznej i przystosowania
 Fig. 2.3.3. Example admissible range of the load changes with respect to the elastic theory, limit analysis and shakedown



Rys. 2.3.4. Przykładowe wykresy zależności przemieszczeń plastycznych od liczby cykli zmian obciążeń:
 ng – przekroczenie odkształcalności materiału w jednym cyklu, np – przyrostowe przekroczenie odkształcalności materiału, nn – niezanikająca plastyczność naprzemienna, pn – zanikająca plastyczność naprzemienna (przystosowanie), pp – zanikająca plastyczność przyrostowa (przystosowanie)

Fig. 2.3.4. Example diagrams of the plastic displacements relation versus the number of load change cycles:
 ng – instantaneous upcrossing of the material deformability, np – incremental upcrossing of the material deformability, nn – unvanishing alternating plasticity, pn – vanished alternating plasticity (shakedown), pp – vanished incremental plasticity (shakedown)

$t \rightarrow \infty$ – czas,

\mathbf{x} – wektor współrzędnych geometrycznych poszczególnych punktów ciała.

Rychlewski zaproponował to kryterium (na konferencji, z której nie publikowano materiałów) w postaci [92]

$$W_p = \frac{1}{V} \int_V \int_0^t \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \dot{\varepsilon}_{ij}^p(\mathbf{x}, t) dt dV < \infty, \quad (2.3.2)$$

gdzie V – objętość ciała.

Maier [103] zaproponował kryterium równoważne do (2.3.1) w postaci

$$\max_{\mathbf{x}} \max_{i,j} \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}, t) \right| = \left| \varepsilon_{\infty}^p(\mathbf{x}) \right| < \infty, \quad (2.3.3)$$

gdzie ε_{∞}^p – ekstremalne odkształcenie plastyczne.

Fizycznie przystosowanie się konstrukcji, zwane też przystosowaniem sprężystym, związane jest z istnieniem stałego pola naprężeń resztkowych ($\sigma_{ij}^r = \text{const}$), powstałego w wyniku odkształceń plastycznych wywoływanych przez zmieniające się obciążenie w okresie przystosowywania się konstrukcji. Po okresie przystosowywania się konstrukcji zmianom obciążeń nie towarzyszy występowanie odkształceń plastycznych w żadnym punkcie.

Jedyna merytoryczna różnica między teorią przystosowania a teorią nośności granicznej tkwi w wymogu stawianym przez tę pierwszą, by pole naprężeń resztkowych powstające w wyniku odkształceń plastycznych było niezmienne. Założenie to nie jest istotne w przypadku działania tylko obciążeń stałych, gdyż żadne naprężenia nie ulegają wtedy zmianie i obydwie teorie, przy identycznej dokładności analizy, prowadzą do identycznych wyników.

Teoria nośności granicznej jest szczególnym przypadkiem teorii przystosowania, gdyż obciążenie stałe jest szczególnym przypadkiem obciążenia zmiennego, którego dolna i górna granica zmienności jest identyczna. W teorii nośności granicznej przyjmuje się wprawdzie, że obciążenia narastają w jednym cyklu do poziomu granicznego, jednak teoria ta nie uwzględnia ewentualnych zmian obciążenia po osiągnięciu tego poziomu, co oznacza, że nośność graniczna wyznaczona według teorii nośności granicznej dotyczy w istocie obciążenia stałego. Według teorii przystosowania cykl dochodzenia poziomu obciążenia stałego do poziomu granicznego jest cyklem przystosowywania się konstrukcji do przenoszenia takiego obciążenia bez występowania odkształceń plastycznych w okresie, w którym obciążenie to nie ulegnie zmianie. W przypadku obciążeń zmiennych można wyznaczać, na podstawie tej teorii, poziom graniczny różnych konfiguracji tych obciążeń traktowanych niezależnie od innych możliwych konfiguracji tych obciążeń, jednak takie rozwiązania nie uwzględniają skutków występowania odkształceń plastycznych podczas przechodzenia od jednej konfiguracji obciążenia do innej.

Teoria przystosowania dostarcza zaś narzędzi umożliwiających określanie poziomu granicznego obciążeń zarówno o jednoznacznie sprecyzowanym programie zmian, jak i o dowolnej zmienności w określonych granicach, którego nieprzekroczenie zapewnia sprężystą pracę konstrukcji poza cyklami, w których następuje przystosowanie (powstanie odpowiedniego pola naprężeń resztkowych). W przypadku powierzchni granicznych wypukłych na wyniki rozwiązania nie wpływa sposób zmiany obciążenia, lecz tylko granice jego zmienności [87].

2.4. Twierdzenia statyczne o przystosowaniu

2.4.1. Twierdzenie Melana dla kontinuum materialnego

Styczne kryterium przystosowania kontinuum materialnego pierwszy sformułował Melan [107, 108]. Twierdzenie to można sformułować następująco:

Konstrukcja sprężysto-plastyczna przystosuje się do określonego programu obciążeń (lub znajdzie się w stanie granicznym ze względu na przystosowanie), jeśli istnieje samorzównoważone, niezależne od czasu pole naprężeń resztkowych $\sigma_{ij}^r(\mathbf{x})$ takie, że suma tych naprężeń i pozostających w równowadze z obciążeniem naprężeń „sprężystych” $\sigma_{ij}^e(\mathbf{x}, t)$ spełnia w każdym punkcie warunek

$$\varphi(\sigma_{ij}^r(\mathbf{x}) + \sigma_{ij}^e(\mathbf{x}, t)) \leq k(\mathbf{x}), \quad (2.4.1)$$

przy czym warunek $\varphi(\sigma_{ij}^r(\mathbf{x}) + \sigma_{ij}^e(\mathbf{x}, t)) = k(\mathbf{x})$ jest warunkiem plastyczności.

Wykazano [86], że przyjęcie warunku (2.4.1) w postaci

$$\varphi(\sigma_{ij}^r(\mathbf{x}) + \sigma_{ij}^e(\mathbf{x}, t)) \leq \frac{k(\mathbf{x})}{s}, \quad (2.4.2)$$

gdzie $s > 1$, zapewnia przystosowanie się konstrukcji w sensie kryterium (2.3.2). Dla $s \rightarrow 1$, $W_p \rightarrow \infty$, co oznacza, że spełnienie warunku (2.4.1) równościowo w określonej liczbie punktów może oznaczać nieograniczoną dyssypację energii w wyniku odkształceń plastycznych, czyli nieprzystosowanie. Wynika stąd, w kontekście analizy bezpieczeństwa konstrukcji, że stan graniczny określony na podstawie warunków (2.4.1) należy zaliczyć do obszaru niebezpiecznego. Należy też podkreślić, że dla wypukłych warunków plastyczności za $\sigma_{ij}^e(\mathbf{x}, t)$ w związku (2.4.1) lub (2.4.2) wystarczy brać pod uwagę wartości ekstremalne $\max_t \sigma_{ij}^e(\mathbf{x}, t)$ i $\min_t \sigma_{ij}^e(\mathbf{x}, t)$ [87]. Twierdzenie Melana (2.4.1) dostarcza dolnego oszacowania nośności ze względu na przystosowanie i stanowi uogólnienie statycznego twierdzenia teorii nośności granicznej na przypadek obciążeń zmiennych.

W przypadku gdy wszystkie składowe obciążenia mogą być przedstawione w postaci

$$F_j = \mu \cdot F_j^o, \quad (2.4.3)$$

problem wyznaczania granicznego poziomu obciążenia ze względu na przystosowanie może być przedstawiony w ujęciu programowania matematycznego [92]

znaleźć $\max \mu$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad \varphi(\sigma_{ij}^r(\mathbf{x}) + \mu \cdot \sigma_{ij}^{oe}(\mathbf{x}, t)) \leq k(\mathbf{x}), \quad (2.4.4)$$

które muszą być spełnione w każdym punkcie,

gdzie $\sigma_{ij}^{oe}(\mathbf{x}, t)$ – składowe tensora naprężeń wywołanych w układzie sprężystym obciążeniami F_j^o .

2.4.2. Twierdzenie o przystosowaniu wyrażone poprzez siły przekrojowe

W układach prętowych, a także powierzchniowych wygodnie i efektywnie (ze względu na znaczną redukcję liczby ograniczeń) jest posługiwać się siłami przekrojowymi. Ogólne twierdzenie o przystosowaniu wyrażone poprzez siły przekrojowe sformułował König [87, 89]. Przedstawiając naprężenia resztkowe w przekroju $\sigma_{ij}^r(\mathbf{x})$ w postaci sumy naprężeń samorzównoważonych w przekroju $s_{ij}^r(\mathbf{x})$ i naprężeń o rozkładzie „sprężystym” w przekroju $s_{ij}^e = \sum Q_n^r(\mathbf{x}) \cdot \alpha_{ij}^n(\mathbf{x})$, pozostających w równowadze z samorzównoważonymi resztkowymi siłami przekrojowymi $Q_n^r(\mathbf{x})$

$$\sigma_{ij}^r(\mathbf{x}) = s_{ij}^r(\mathbf{x}) + \sum_n Q_n^r(\mathbf{x}) \cdot \alpha_{ij}^n(\mathbf{x}), \quad (2.4.5)$$

twierdzenie to można przedstawić w postaci:

Konstrukcja sprężysto-plastyczna przystosuje się do określonego programu obciążeń (lub znajdzie się w stanie granicznym), jeśli istnieje samorzównoważone, niezależne od czasu pole sił przekrojowych $Q_n^r(\mathbf{x})$ i niezależne od czasu samorzównoważone w każdym przekroju pole naprężeń resztkowych $s_{ij}^r(\mathbf{x})$ takie, że wyrażenie $s_{ij}^r(\mathbf{x}) + \sum_n (Q_n^r(\mathbf{x}) + Q_n^e(\mathbf{x}, t)) \alpha_{ij}^n(\mathbf{x})$ nie narusza w żadnym przekroju warunku plastyczności

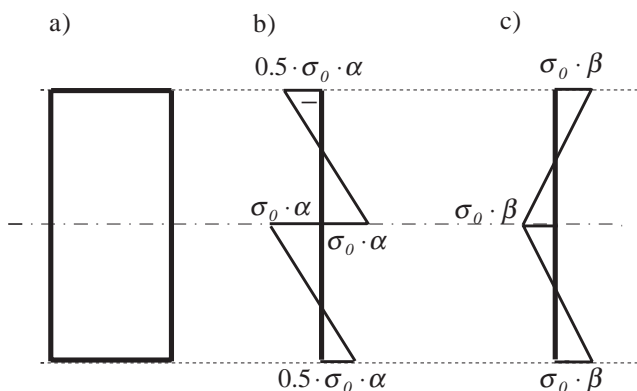
$$s_{ij}^r(\mathbf{x}) + \sum_n (Q_n^r(\mathbf{x}) + Q_n^e(\mathbf{x}, t)) \cdot \alpha_{ij}^n(\mathbf{x}) \leq k(\mathbf{x}), \quad (2.4.6)$$

gdzie: $Q_n^e(\mathbf{x}, t)$ – siły przekrojowe będące wynikiem rozwiązania układu od danego obciążenia przy założeniu, że jest on wykonany z materiału sprężystego,

$\alpha_{ij}^n(\mathbf{x})$ – wyrażenie definiujące składową naprężenia wywołanego przez siłę przekrojową $Q_n^e(\mathbf{x})$ w punkcie przekroju.

Na postawie warunków (2.4.6) można w przestrzeni sił przekrojowych wyznaczyć odpowiadający danemu przekrojowi obszar określający granice dopuszczalnych zmian sił przekrojowych zwany powierzchnią sprężystą [89].

Przedstawione twierdzenie daje podstawę do formułowania warunków na przystosowanie wyrażonych poprzez siły przekrojowe. Jednak problem stanowi tu dobór pól naprężeń resztkowych w przekrojach określających powierzchnie sprężyste tak, by otrzymane warunki na przystosowanie były dostatecznie dokładne i pozwalały na efektywną analizę rozpatrywanego zagadnienia. König [92] przedstawił propozycję rozkładów naprężeń resztkowych dla przypadku równoczesnego działania momentów zginających i sił osiowych w przekrojach prostokątnych. Przyjmując dwa rozkłady samozrównoważonych w przekroju naprężeń resztkowych, jak na rys. 2.4.1 b i c, otrzymał dwie odcinkowo liniowe rodziny powierzchni sprężystych.



Rys. 2.4.1. Proponowane przez Königa [92] rozkłady naprężeń resztkowych (b i c) w przekroju prostokątnym (a)

Fig. 2.4.1. Distributions of the residual stresses in the rectangular cross section proposed by König [92]

2.4.3. Twierdzenie Bleicha i Bleicha–Melana

Bleich [14] sformułował warunki przystosowania belek o przekroju idealnie dwuteowym.

Konstrukcja sprężysto-plastyczna przystosuje się do określonego programu obciążeń reprezentowanych przez pozostające w równowadze z tymi obciążeniami ekstremalne momenty „sprężyste” $\max M_i^e$, $\min M_i^e$ (lub znajdzie się w stanie granicznym ze względu na przystosowanie), jeśli istnieje samozrównoważone, niezależne od czasu pole momentów resztkowych M_i^r takie, że w każdym przekroju spełnione są ograniczenia

$$\begin{aligned} M_i^r + \max M_i^e &\leq M_o_i, \\ -M_i^r - \min M_i^e &\leq M_o_i, \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

gdzie: $\min M_i^e$, $\max M_i^e$ – ekstremalne momenty zginające w przekrojach krytycznych wyznaczone przy założeniu, że materiał jest sprężysty,

M_i^r – momenty resztkowe w przekrojach krytycznych wywołane odkształceniami plastycznymi pozostające w równowadze z obciążeniem zerowym (samozrównoważone),

Mo_i – graniczna nośność plastyczna przekroju na zginanie.

Uwzględniając warunki Melana (2.4.1) dla układów zginanych, złożonych z elementów o przekroju bisymetrycznym, Horne [70] oraz Neal i Symonds [124] wykazali, że przystosowanie tych układów zapewnia spełnienie warunków Bleicha (2.4.7) i warunku zmęczeniowego. Twierdzenie zwane twierdzeniem Bleicha–Melana dotyczące układów o przekrojach bisymetrycznych może być sformułowane następująco:

Konstrukcja sprężysto-plastyczna przystosuje się do określonego programu obciążeń reprezentowanych przez pozostające w równowadze z tymi obciążeniami ekstremalne momenty „sprężyste” $\max M_i^e$, $\min M_i^e$ (lub znajdzie się w stanie granicznym ze względu na przystosowanie), jeśli istnieje samozrównoważone, niezależne od czasu pole momentów resztkowych M_i^r takie, że w każdym przekroju spełnione są ograniczenia

$$\begin{aligned} M_i^r + \max M_i^e &\leq Mo_i, \\ -M_i^r - \min M_i^e &\leq Mo_i, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

$$\max M_i^e - \min M_i^e \leq 2Me_i,$$

gdzie Me_i – graniczna nośność sprężysta przekroju na zginanie.

Twierdzenie Bleicha–Melana dostarcza dolnego oszacowania nośności ze względu na przystosowanie. Dwa pierwsze warunki, czyli warunki według twierdzenia Bleicha, uważane są [92, 125] nie w pełni słusznie (co zostanie pokazane w punkcie 3.1) za warunki przystosowania przyrostowego, a warunek trzeci za chroniący przed odkształceniami plastycznymi przeciwnych znaków, czyli przed zniszczeniem w wyniku zmęczenia niskocyklowego.

2.4.4. Przystosowanie układów prętowych o przekrojach monosymetrycznych

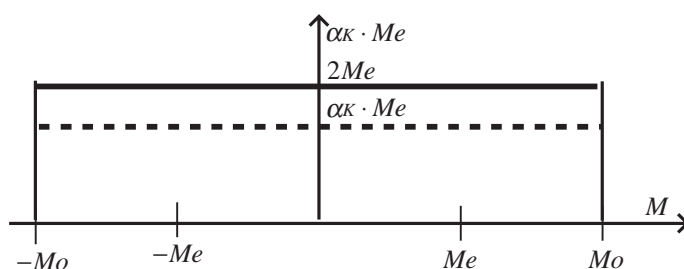
Konieczny [82] przedstawił dowód (nie w pełni przekonujący), że twierdzenie o przystosowaniu Bleicha–Melana jest, po modyfikacji warunku zmęczeniowego, słuszne dla układów o przekrojach monosymetrycznych. Zaproponowany przez niego warunek zmęczeniowy ma postać

$$\max M_i^e - \min M_i^e \leq \alpha_{\kappa_i} Me_i, \quad (2.4.9)$$

gdzie: $\alpha_{\kappa_i} = 2 \left(1 - \frac{Mo_i - M_i^*}{Me_i} \right)$,

M^* – moment zginający, któremu odpowiada taki rozkład naprężeń w przekroju, że granica strefy uplastycznienia styka się ze środkową osią geometryczną przekroju (rys. 3.3.3 c).

Wyrażenie $\alpha_K \cdot Me_i$ w związku (2.4.9) przyjmuje dla określonego przekroju wartość stałą z przedziału $(0, 2Me_i)$, co pokazano na rys 2.4.2. Na rysunku tym linią ciągłą oznaczono poziom $2Me$ a linią przerywaną poziom $\alpha_K \cdot Me$ według Koniecznego. Wartość ta nie zależy od wartości ekstremalnych momentów obciążających przekrój, co budzi wątpliwości. Wiadomo bowiem, że dla obciążeń niewychodzących poza zakres sprężysty dopuszczalna amplituda zmian momentów w przekroju wynosi $2Me$, a dla obciążeń o poziomie Mo nie jest możliwa żadna zmiana obciążenia bez wywoływania odkształceń plastycznych, co świadczy, że warunki według Koniecznego są zbyt ostre w zakresie obciążeń sprężystych i nie zapewniają przystosowania dla poziomów obciążeń bliskich granicznym.



Rys. 2.4.2. Dopuszczalny przedział zmian wartości momentu obciążającego przekrój monosymetryczny wg Koniecznego [82] w zależności od ekstremalnej wartości tego momentu

Fig. 2.4.2. Admissible range of the value changes of a moment loaded the monosymmetrical cross section with respect to the extremal value of such a moment proposed by Konieczny [82]

2.5. Twierdzenia kinematyczne o nieprzystosowaniu

2.5.1. Twierdzenie kinematyczne dla kontinuum materialnego

Kinematyczne kryterium nieprzystosowania dla kontinuum materialnego sformułował Koiter [79, 80, 81].

Konstrukcja sprężysto-plastyczna może ulec zniszczeniu w wyniku nieprzystosowania, jeśli istnieje taki kinematycznie dopuszczalny cykl prędkości odkształceń i przemieszczeń plastycznych $\dot{\epsilon}_{ij}(x,t)$, $\dot{u}_j(x,t)$ i taki cykl zmian obciążeń $p_j(x,t)$, że moc rozpraszana w czasie $t \in (t_1, t_2)$ w układzie nie przewyższa mocy obciążeń zewnętrznych

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_A p_j(x,t) \dot{u}_j(x,t) dA dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}(x,t) \dot{\epsilon}_{ij}^p(x,t) dV dt, \quad (2.5.1)$$

gdzie: A – powierzchnia obciążenia,
 V – objętość ciała.

Bezpośrednie wykorzystanie tego twierdzenia jest kłopotliwe ze względu na konieczność obliczania całek względem współrzędnych geometrycznych po obszarach, w których następuje uplastycznienie i względem czasu odpowiadającego cykлом obciążeń.

2.5.2. Twierdzenie kinematyczne o nieprzystosowaniu wyrażone przez siły przekrojowe

Kinematyczne kryterium nieprzystosowania wyrażone przez siły przekrojowe sformułował König [89].

Konstrukcja sprężysto-plastyczna może ulec zniszczeniu w wyniku nieprzystosowania, jeśli istnieje taki kinematycznie dopuszczalny cykl prędkości uogólnionych odkształceń plastycznych $\dot{q}_j^p(\mathbf{x}, t)$ i taki cykl obciążeń, że zachodzi nierówność

$$\int \int_A \sum_j Q_j^e(\mathbf{x}, t) \dot{q}_j^p(\mathbf{x}, t) dA dt \geq \int_A \sum_j Q_j^*(\mathbf{x}) \Delta q_j^p(\mathbf{x}) dA, \quad (2.5.2)$$

gdzie: $Q_j^e(\mathbf{x}, t)$ – siły przekrojowe wyznaczone przy założeniu materiału sprężystego,

$Q_j^*(\mathbf{x})$ – siły przekrojowe takie, że w każdym przekroju krytycznym spełniają warunek plastyczności $\phi(Q_j^*(\mathbf{x})) = k$,

A – pole wszystkich przekrojów krytycznych konstrukcji,

$$\Delta q_j^p(\mathbf{x}) = \lambda \frac{\partial \phi(Q_j^*(\mathbf{x}))}{\partial Q_j^*(\mathbf{x})}.$$

2.5.3. Twierdzenie kinematyczne Neala

Wychodząc z warunków Bleicha, traktowanych jako warunki przyrostowe, Neal [121, 122] przedstawił kinematyczne twierdzenie o nieprzystosowaniu przyrostowym dla płaskich, zginanych układów prętowych.

Konstrukcja sprężysto-plastyczna może ulec zniszczeniu w wyniku nieprzystosowania w sensie przyrostowym, jeśli istnieje taki kinematycznie dopuszczalny mechanizm, że odpowiadający mu cykl prędkości odkształceń plastycznych określony przez prędkości odkształceń w przegubach plastycznych φ_i^+ , φ_i^- oraz taki cykl obciążeń, że moc rozpraszana w układzie nie przewyższa mocy obciążeń zewnętrznych

$$\sum_{i=1}^{n_k} (\max M_i^e \cdot \varphi_i^+ - \min M_i^e \cdot \varphi_i^-) \geq \sum_{i=1}^{n_k} (M_{o_i} \cdot (\varphi_i^+ + \varphi_i^-)), \quad (2.5.3)$$

gdzie: φ_i^+ i φ_i^- odpowiadają mechanizmom ($\varphi_i = \varphi_i^+ - \varphi_i^-$, $\varphi_i^+ = \varphi_i$ i $\varphi_i^- = 0$, gdy $\varphi_i \geq 0$, $\varphi_i^+ = 0$ i $\varphi_i^- = -\varphi_i = |\varphi_i|$, gdy $\varphi_i \leq 0$),

n_k – liczba przekrojów krytycznych.

3. Wyznaczanie warunków granicznych dla konstrukcji

3.1. Wstęp

W teorii przystosowania możliwe jest stosowanie metod (oszacowań) statycznych i kinematycznych.

Metody statyczne bazują na warunkach dla punktów (elementów, przekrojów), a ich stosowanie nie stanowi istotnego problemu, gdy chodzi o wyznaczenie rozwiązania deterministycznie ekstremalnego, natomiast stwarza problem w zakresie generowania zbioru warunków granicznych określających system niezawodnościowy konstrukcji umożliwiającą ocenę jej bezpieczeństwa bez odwoływania się do kinematycznie dopuszczalnych postaci awarii.

Metody kinematyczne bazują na warunkach dla konstrukcji odpowiadających określonym formom zniszczenia konstrukcji, jednak wymagają przewidywania kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształceń, co nie następuje trudności jedynie w przypadku uwzględniania tylko zginania lub tylko sił osiowych w kratownicach. Istotne jest tu też to, co zostanie pokazane poniżej, że kresy dolne rozwiązań kinematycznych nie muszą być styczne do obszarów bezpiecznych określanych przez kresy górne rozwiązań statycznych.

Jak wynika z twierdzeń statycznych, kres górny oszacowań statycznych określa brzeg obszaru oszacowań bezpiecznych, przy czym brzeg ten należy już do obszaru oszacowań niebezpiecznych. Ze względu na to, że powierzchnie graniczne są powierzchniami ograniczającymi obszar bezpieczny ze wszystkich stron, sformułowania statyczne są ograniczeniami zabezpieczającymi zarówno przed narastaniem odkształceń (ograniczenia



Rys. 3.1.1. Kresy oszacowań statycznych i kinematycznych
Fig. 3.1.1. Limits of the static and kinematic estimations

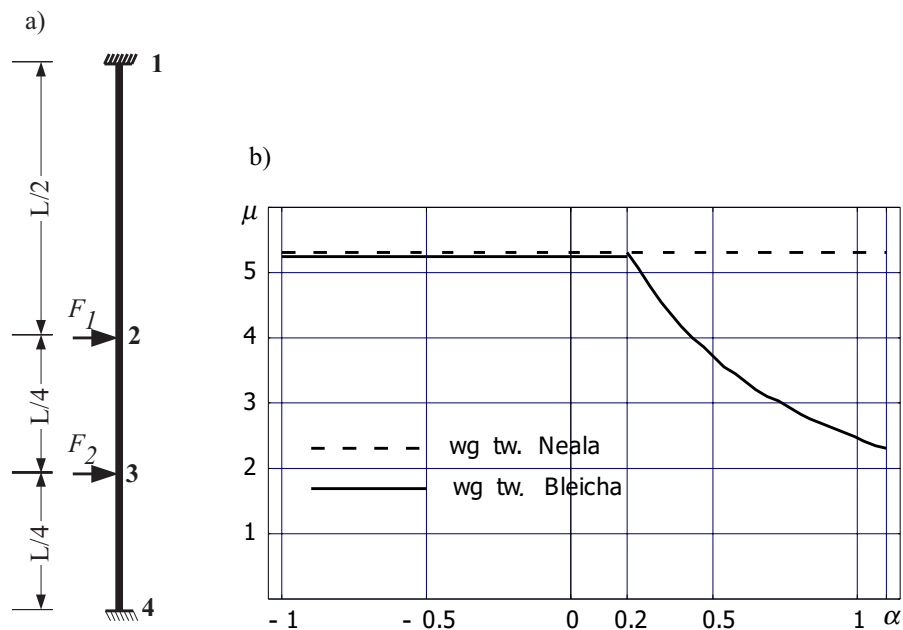
przyrostowe), jak i przed plastycznością naprzemienną (zabezpieczenie przed zmęczeniem niskocyklowym).

Kres dolny oszacowań kinematycznych ograniczonych do prędkości odkształceń plastycznych odpowiadających mechanizmom stanowi brzeg obszaru oszacowań niebezpiecznych, ale tylko ze względu na zagrożenie zniszczenia przyrostowego. Oszacowania te nie stanowią, w ogólności, z odpowiednimi oszacowaniami statycznymi par oszacowań ekstremalnych, określających rozwiązania zupełne, co ilustruje rysunek 3.1.1 oraz przedstawiony poniżej przykład (rys. 3.1.2).

Weźmy układ jak na rys. 3.1.2a. Niech program obciążeń będzie określony ograniczeniami (3.1.1)

$$-\alpha \cdot \frac{Mo}{L} \cdot \mu \leq F_1 \leq \frac{Mo}{L} \cdot \mu, \quad -3\alpha \cdot \frac{Mo}{L} \cdot \mu \leq F_2 \leq \frac{Mo}{L} \cdot \mu. \quad (3.1.1)$$

Jak widać na wykresie (rys. 3.1.2b), dla wartości parametru $\alpha > 0,2$, kres dolny mnożnika μ granic zmienności obciążenia wyznaczonego na podstawie twierdzenia Neala (2.5.3) różni się od kresu górnego tego mnożnika wyznaczonego na podstawie twierdzenia Bleicha (2.4.7), co oznacza sytuację zilustrowaną na rys. 3.1.1 i wskazuje, że warunki Bleicha niesłusznie uważane są za warunki przyrostowe [92, 125]. Oznacza to



Rys. 3.1.2. a) schemat statyczny i oznaczenia przekrojów krytycznych, b) zależność granicznego mnożnika obciążenia μ od parametru α określającego program zmienności obciążeń

Fig. 3.1.2. a) static scheme and designations of the critical cross sections, b) dependence of the limit load multiplier μ on the parameter α which determines the domain of load variations

też, że w ogólności twierdzenia odwrotne do twierdzeń kinematycznych nie muszą określać warunków zapewniających bezpieczeństwo ze względu na przystosowanie.

Aby twierdzenia kinematyczne pozwalały na generowanie warunków granicznych określających brzeg obszaru bezpiecznego, muszą być tak sformułowane, by wraz z odpowiadającymi im twierdzeniami statycznymi tworzyły pary twierdzeń ekstremalnych, określających w swoich kresach rozwiązania zupełne (rys. 3.1.3).



Rys. 3.1.3. Kresy oszacowań statycznych i kinematycznych określających rozwiązania zupełne

Fig. 3.1.3. Limits of the static and kinematic estimations determining complete solution

Dla ścisłości należy dodać, że możliwe jest formułowanie warunków statycznych przyrostowych, które tworzyłyby pary z odpowiednimi przyrostowymi twierdzeniami kinematycznymi, jednak musiałyby to być warunki jednostronne. Na przykład, jeśli w przedstawionym powyżej przykładzie dla $\alpha \leq 1/3$ pozostawić tylko ograniczenia dla maksimum w przekrojach 2 i 3, a dla minimum w przekrojach 1 i 4, zaś dla $\alpha \geq 1/3$ pozostawić tylko ograniczenia dla maksimum w przekrojach 1 i 4, a dla minimum w przekrojach 2 i 3, to otrzyma się rozwiązanie statyczne przyrostowe identyczne z rozwiązaniem według ograniczeń Neala.

W dalszych rozważaniach pominięto zagadnienie formułowania przyrostowych warunków statycznych i ograniczono zainteresowanie do warunków zapewniających przystosowanie zarówno przyrostowe, jak i naprzemienne, gdyż tylko takie warunki mogą być podstawą oceny bezpieczeństwa.

Podstawę oceny bezpieczeństwa z wykorzystaniem metod teorii niezawodności stanowią warunki graniczne postaci

$$Z(\mathbf{X}) = 0, \quad (3.1.2)$$

gdzie $Z(\mathbf{X})$ – zapas (margines) bezpieczeństwa (*safety margin*),

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ – wektor bazowych zmiennych losowych, to jest zmiennych wyjściowych stanowiących parametry geometryczne i fizyczne konstrukcji oraz parametry obciążenia,

indeks górny T w symbolu $(\dots)^T$ oznacza operację transpozycji.

Należy jednak uwzględnić, że zapas bezpieczeństwa definiowany jest tak, że:

$$Z(\mathbf{X}) \leq 0 \text{ oznacza stany niebezpieczne,} \quad (3.1.3)$$

$$Z(\mathbf{X}) > 0 \text{ oznacza stany bezpieczne.} \quad (3.1.4)$$

Oznacza to, że określanie zapasu bezpieczeństwa na podstawie warunków granicznych według teorii plastyczności wiąże się ze zmianą znaku tych ostatnich.

3.2. Wykorzystanie programowania liniowego do określania warunków granicznych dla konstrukcji

Programowanie liniowe [52] było wykorzystywane w analizie przystosowania w wielu pracach [34, 53, 62, 66]. W punktach 3.3, 3.4 i 3.5 zostaną przedstawione liniowe statyczne i wynikające z nich kinematyczne warunki teorii przystosowania dla płaskich konstrukcji prętowych. Warunki statyczne mogą być przedstawione w ujęciu programowania liniowego w postaci:

- sformułowanie pierwotne (statyczne)

znaleźć
$$\mu = \max \left[\mathbf{0}^T, \quad \mathbf{0}^T, \quad 1 \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{Y}^r \\ \mu \end{bmatrix}$$

przy ograniczeniach
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha, & \mathbf{A}_Y, & \mathbf{Q}_{\max} \\ -\mathbf{A}_\alpha, & -\mathbf{A}_Y, & -\mathbf{Q}_{\min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{Y}^r \\ \mu \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad \mu \geq 0, \quad (3.2.1)$$

- gdzie: \mathbf{A}_α – macierz reprezentująca samozrównoważone w przekrojach pola naprężeń resztkowych,
 \mathbf{A}_Y – macierz reprezentująca samozrównoważone w układzie resztkowe siły przekrojowe,
 $\mathbf{Q}_{\max}, \mathbf{Q}_{\min}$ – wektory reprezentujący ekstremalne kombinacje obciążeń w przekrojach krytycznych,
 \mathbf{R} – wektor nośności przekrojów krytycznych,
 $\boldsymbol{\alpha}$ – wektor niezależnych szukanych współczynników określających pola samozrównoważone w przekrojach naprężeń resztkowych,,
 \mathbf{Y}^r – wektor zmiennych niezależnych określających samozrównoważone w układzie pola sił resztkowych,
 μ – współczynnik (mnożnik granic zmienności obciążenia) określający intensywność obciążenia,

- sformułowanie dualne (kinematyczne) ma postać

znaleźć
$$\mu = \min \left[\mathbf{R}^T, \quad \mathbf{R}^T \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix}$$

przy ograniczeniach
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T & -\mathbf{A}_a^T \\ \mathbf{A}_Y^T & -\mathbf{A}_Y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.2.2)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\max}^T & -\mathbf{Q}_{\min}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix} \geq 1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^+ \geq 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^- \geq 0,$$

gdzie poszczególne macierze współczynników przy niewiadomych są macierzami transponowanymi do odpowiednich macierzy sformułowania (3.2.1), $\boldsymbol{\varepsilon}^+$, $\boldsymbol{\varepsilon}^-$ są wektorami zmiennych dualnych, które mogą być interpretowane jako prędkości odkształceń plastycznych.

Na mocy twierdzenia o rozwiązaniach dualnych sformułowanie (3.2.2) daje identyczną wartość funkcji celu jak sformułowanie (3.2.1).

Zauważmy, że w rozwiązaniu zadania dualnego minimalizowane jest wyrażenie

$$\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix}, \quad (3.2.3)$$

przy takim unormowaniu zmiennych dualnych $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ i $\boldsymbol{\varepsilon}^-$, że zachodzi równość

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\max}^T & -\mathbf{Q}_{\min}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix} = 1, \quad (3.2.4)$$

która odpowiada minimalnej wartości funkcji celu, co jest równoważne minimalizacji wyrażenia

$$\mu = \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\max}^T & -\mathbf{Q}_{\min}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix}}. \quad (3.2.5)$$

Związek (3.2.5) może być zapisany w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\max}^T & -\mathbf{Q}_{\min}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix} \mu = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix}, \quad (3.2.6)$$

gdzie lewa strona równości reprezentuje obciążenie i może być interpretowana jako moc

obciążenia $S = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\max}^T & -\mathbf{Q}_{\min}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix}$ pomnożona przez współczynnik bezpieczeństwa

stwa μ , a prawa strona reprezentuje nośność i może być interpretowana jako moc dys-

$$\text{sypacji układu } R = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix}.$$

Stąd zapas bezpieczeństwa układu względem postaci awarii określonej przez zmienne dualne $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ i $\boldsymbol{\varepsilon}^-$ może być przedstawiony w postaci

$$Z = R - S = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\max}^T & -\mathbf{Q}_{\min}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix}. \quad (3.2.7)$$

Warto zwrócić uwagę, że moc obciążeń S , ze względu na liniową zależność sił przekrojowych od obciążeń, może być przedstawiona w postaci sumy składników pochodzących od obciążeń składowych $S = \sum_p S_p$. Jeśli postacią awarii jest mechanizm i wszystkie rzędne sił przekrojowych od określonego obciążenia F_p wchodzące w skład wyrażenia S_p pochodzą od jednej konfiguracji tego obciążenia (co zawsze ma miejsce w przypadku obciążeń stałych), to na mocy zasady prac wirtualnych zachodzi równość

$$S_p = \sum_j \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{eks}}^T \end{bmatrix}_{jp} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j \cdot \delta_j = \sum_j F_{jp} \cdot \delta_j, \quad (3.2.8)$$

gdzie: F_{jp} – składowa o numerze j obciążenia F_p ,

δ_j – składowa prędkości przemieszczenia w miejscu i kierunku odciążenia F_{jp} .

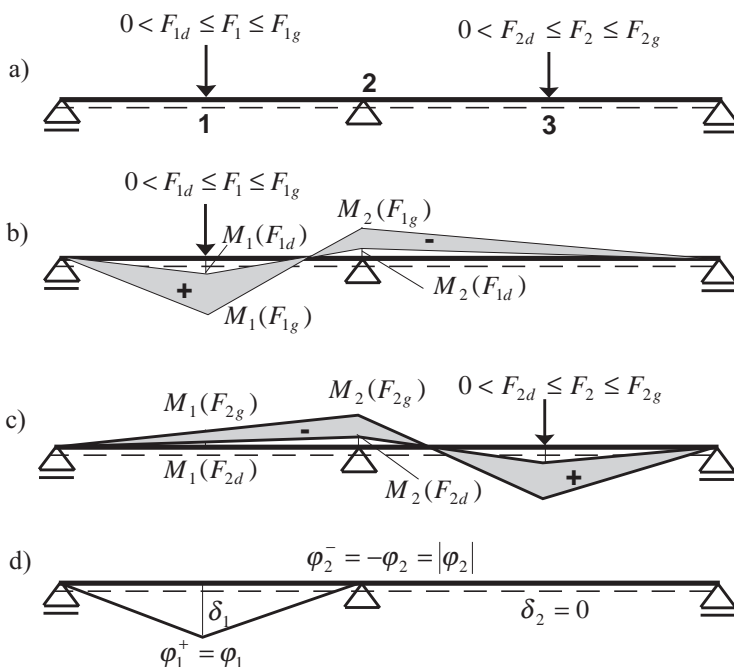
Wynika z tego istotny wniosek, że w tych przypadkach składniki S_p nie zależą od elementów macierzy sztywności czy podatności, a tym bardziej od ich losowego charakteru, i mogą być wyznaczone przy numerycznych macierzach sztywności lub podatności. W tych przypadkach jedynie wyrazy wolne układu równań muszą być przedstawione w postaci funkcji parametrów obciążenia i długości elementów, co zdecydowanie upraszcza przekształcenia. Składniki te mogą też być określone bezpośrednio na podstawie związku (3.2.8), co sprowadza je do postaci takiej samej jak według teorii nośności granicznej. Przedstawione spostrzeżenie zilustrowano na przykładzie belki pokazanej na rys. 3.2.1

$$\text{Moment maksymalny w przekroju 1} \quad \max M_1^e = M_1(F_{1g}) + M_1(F_{2d}).$$

$$\text{Moment minimalny w przekroju 2} \quad \min M_2^e = M_2(F_{1g}) + M_2(F_{2g}).$$

Moc obciążenia

$$\begin{aligned} S &= \max M_1^e \cdot \varphi_1^+ - \min M_2^e \cdot \varphi_2^- \\ &= \left(M_1(F_{1g}) \cdot \varphi_1^+ - M_2(F_{1g}) \cdot \varphi_2^- \right) + \left(M_1(F_{2d}) \cdot \varphi_1^+ - M_2(F_{2g}) \cdot \varphi_2^- \right) \\ &= F_{1g} \cdot \delta_1 + \left(M_1(F_{2d}) \cdot \varphi_1^+ - M_2(F_{2g}) \cdot \varphi_2^- \right) = S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$



Rys. 3.2.1. Przykład ilustrujący możliwości wykorzystania związku (3.2.8): a) belka z obciążeniem, b) obwiednia momentów zginających dla obciążenia F_1 , c) obwiednia momentów zginających dla obciążenia F_2 , d) wykres prędkości przemieszczeń dla przykładowo przyjętego mechanizmu.
 Fig. 3.2.1. An example illustrating the possibilities of using expression (3.2.8): a) beam with load, b) bending moments envelope due to the load F_1 , c) bending moments envelope due to the load F_2 , d) diagram of displacement velocity for some chosen mechanism

Składnik $S_1 = M_1(F_{1g}) \cdot \varphi_1^+ - M_2(F_{1g}) \cdot \varphi_2^- = F_{1g} \cdot \delta_1$ określony jest przez konfigurację obciążenia $F_1 = F_{1g}$ i $F_2 = 0$, z którą pozostają w równowadze momenty $M_1(F_{1g})$ i $M_2(F_{1g})$, zaś składnik $S_2 = M_1(F_{2d}) \cdot \varphi_1^+ - M_2(F_{2g}) \cdot \varphi_2^-$ określony jest przez dwie konfiguracje obciążeń. W tym składniku moment maksymalny w przekroju 1 pochodzi od konfiguracji obciążeń $F_1 = 0$ i $F_2 = F_{2d}$, a moment minimalny w przekroju 2 pochodzi od konfiguracji obciążeń $F_1 = 0$, $F_2 = F_{2g}$, co oznacza, że momenty te razem nie znajdują się w równowadze z żadną z tych konfiguracji obciążeń i nie zachodzi tu związek (3.2.8).

Istotą proponowanego sposobu określania zapasów bezpieczeństwa (3.2.7) względem możliwych postaci utraty zdolności konstrukcji do przenoszenia obciążeń jest zastosowanie sformułowań dualnych (3.2.2). Procedury rozwiązywania zadań programowania liniowego są jednak procedurami numerycznymi i pozwalają na numeryczne wyznaczanie wartości zmiennych dualnych. W celu uproszczenia określania zapasów bezpieczeństwa dla różnych postaci awarii wykorzystamy, że rozwiązaniu zadania (3.2.1) odpowiada część ograniczeń spełnionych równościowo (ograniczenia czynne, aktyw-

ne) i część ograniczeń spełnionych nierównościami (ograniczenia bierne, nieaktywne), które nie wpływają na rozwiązanie i mogą być pominięte, gdyż ograniczeniom nieaktywnym odpowiadają zerowe wartości zmiennych dualnych. Ograniczenia aktywne tworzą układ równań, który może być przedstawiony w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha^* & \mathbf{A}_Y^* & \mathbf{Q}_{\text{eks}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{Y}^r \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^*. \quad (3.2.10)$$

Układowi równań (3.2.10) odpowiada dualny układ równań

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha^{*T} \\ \mathbf{A}_Y^{*T} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{Q}_{\text{eks}}^{*T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* = 1 \quad (3.2.11)$$

identyczny z układem równań wynikającym z ograniczeń (3.2.2) przez usunięcie kolumn, którym odpowiadają zerowe wartości zmiennych dualnych.

Stąd zapas bezpieczeństwa przyjmuje postać

$$Z = \mathbf{R}^{*T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* - \mathbf{Q}_{\text{eks}}^{*T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*, \quad (3.2.12)$$

która wynika też z (3.2.8) po wyeliminowaniu składników zerowych.

Jeśli uwzględnić, że ograniczenia aktywne tworzą układ równań, procedurę numeryczną rozwiązania zadania (3.2.1) dla wartości średnich parametrów można wykorzystać tylko do wybrania ograniczeń aktywnych odpowiadających określonym postaciom awarii. To pozwala na sformułowanie analitycznych układów równań (3.2.10) i (3.2.11). Z rozwiązania układu (3.2.11) można otrzymać zmienne dualne jako funkcje zmiennych bazowych $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{X})$, a na podstawie związku (3.2.12) można otrzymać zapasy bezpieczeństwa jako funkcje zmiennych bazowych $Z(\mathbf{X})$. Analogicznie można wyznaczać inne postaci osiągnięcia stanu granicznego układu.

Uwzględniając, że do przekształcenia układu w mechanizm w wyniku uplastycznienia wystarczy powstanie $n_h + 1$ przegubów plastycznych, układy równań odpowiadające wszystkim mechanizmom można otrzymać automatycznie, rozwiązując kolejno układy ograniczeń złożone z ograniczeń dla $n_h + 1$ przekrojów we wszystkich kombinacjach. Liczba takich kombinacji wynosi

$$\binom{n_k}{n_h + 1} = \frac{n_k!}{(n_h + 1)!(n_k - n_h - 1)!}, \quad (3.2.13)$$

gdzie: n_h – stopień statycznej niewyznaczalności,
 n_k – liczba przekrojów krytycznych.

Niektóre otrzymane układy równań mogą odpowiadać tym samym mechanizmom, gdy występują mechanizmy lokalne (o mniejszej liczbie przegubów niż $n_h + 1$), co oznacza, że liczba przyrostowych postaci awarii jest nie większa niż liczba kombinacji określona związkiem (3.2.13). Należy tu wspomnieć, że ze względu na zmienność obciążeń moc obciążenia może być dodatnia dla mechanizmów o przegubach plastycznych w tych samych przekrojach a różniących się tylko znakami prędkości odkształceń plastycznych. Jednak takie pary mechanizmów są zdarzeniami wykluczającymi się wzajemnie, co oznacza, że w analizie należy uwzględniać tylko niekorzystniejszy z nich. W przyjętym algorytmie wybór ten dokonywany jest automatycznie.

Ograniczenia (3.2.1) charakteryzują się specyfiką polegającą na tym, że ograniczenia dotyczące poszczególnych przekrojów zawierają parami identyczne człony, lecz z przeciwnym znakiem. Po zsumowaniu tych ograniczeń parami otrzymuje się ograniczenia dotyczące plastyczności naprzemiennej

$$[\mathbf{Q}_{\max} - \mathbf{Q}_{\min}] \cdot \boldsymbol{\mu} \leq 2\mathbf{R}. \quad (3.2.14)$$

Wynika stąd, że dopuszczalnymi rozwiązaniami ograniczeń (3.2.1) są też rozwiązania, którym odpowiadają tylko dwa ograniczenia aktywne dotyczące jednego przekroju. Rozwiązania te i odpowiadające im równania (aktywne ograniczenia) można otrzymać rozwiązując układy ograniczeń (3.2.1) lub (3.2.14) dotyczące kolejno pojedynczych przekrojów. Prowadzi to do n_k zapasów bezpieczeństwa względem wystąpienia naprzemiennych odkształceń plastycznych

$$Z = 2R_i - (Q_{i,\max} - Q_{i,\min}). \quad (3.2.15)$$

Łączną liczbę postaci awarii układów prętowych w aspekcie teorii przystosowania oszacowuje zależność

$$n_a \leq \binom{n_k}{n_h + 1} + n_k = \frac{n_k!}{(n_h + 1)!(n_k - n_h - 1)!} + n_k. \quad (3.2.16)$$

Zapasy bezpieczeństwa odpowiadające wszystkim tym postaciom można wyznaczyć na podstawie sformułowań statycznych teorii przystosowania w ujęciu programowania liniowego w sposób omówiony powyżej. W praktycznej ocenie bezpieczeństwa konstrukcji wystarczy uwzględnianie tylko postaci awarii, których prawdopodobieństwo wystąpienia nie jest mniejsze od największego o dwa do trzech rzędów, zależnie od ich liczby.

Oddzielny problem stanowi określenie położenia przekrojów krytycznych w przęsłach, gdy działają obciążenia rozłożone lub skupione zmieniające położenie. W tym przypadku macierze występujące w sformułowaniach (3.2.1) do (3.2.12) oraz (3.2.14) i (3.2.15) są funkcjami współrzędnych geometrycznych $\boldsymbol{\xi}$, które określają położenia przekrojów krytycznych w przęsłach i które jako funkcje zmiennych bazowych $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X})$, są zmiennymi

losowymi zależnymi od nich. Współrzędne te są zmiennymi, które minimalizują różnice między prawymi i lewymi stronami sformułowań statycznych (3.2.1), a formalnie określone są przez warunek

$$\min_{\xi} (\max \mu(\xi)). \quad (3.2.17)$$

Zadanie takie nie jest możliwe do rozwiązania analitycznego, natomiast jest stosunkowo łatwe do rozwiązania numerycznego na drodze iteracyjnej. Określenie ograniczeń aktywnych odpowiadających każdej postaci awarii może więc być wykonane iteracyjnie, a w dalszych przekształceniach parametry ξ mogą być traktowane jak pozostałe zmienne. Prowadzi to do zapasu bezpieczeństwa $Z(\mathbf{X}, \xi)$ jako funkcji zmiennych bazowych \mathbf{X} i współrzędnych geometrycznych ξ , które określają położenia przekrojów krytycznych w przeszłach. W takim sformułowaniu wskaźnik niezawodności jest funkcją parametrów ξ , a jego miarodajna wartość może być wyznaczona iteracyjnie jako

$$\beta = \min_{\xi} \beta(\xi). \quad (3.2.18)$$

Obliczenia numeryczne wskazują, że wartość ta jest bliska wartości wskaźnika niezawodności wyznaczonej po przyjęciu parametrów ξ jako stałych obliczonych na podstawie związku (3.2.17) i stanowi jego oszacowanie od dołu.

Należy tu podkreślić, że wyznaczanie współrzędnych ξ na podstawie sformułowań statycznych z wykorzystaniem warunku (3.2.17) nie może być zastąpione wyznaczaniem tych współrzędnych na podstawie sformułowań dualnych (kinematycznych) z wykorzystaniem warunku $\min_{\xi} (\min \mu(\xi))$. Wynika to z faktu, że w sformułowaniach statycznych występują sumy kombinacji ekstremalnych sprężystych sił przekrojowych i sił reszkowych, a w sformułowaniach kinematycznych takie sumy nie występują. Obliczenia numeryczne wskazują, że wyznaczanie parametrów ξ na podstawie sformułowań dualnych może prowadzić do znaczących błędów.

Wykorzystanie przedstawionych powyżej związków w algorytmie oceny bezpieczeństwa wymaga sformułowania warunków statycznych teorii przystosowania w ujęciu programowania liniowego, co sprawia, że w ogólności będą to warunki przybliżone. Należy jednak brać pod uwagę, że w analizie niezawodności prętowych konstrukcji budowlanych, gdy uwzględniany jest losowy charakter parametrów konstrukcji i złożony stan naprężenia, złożoność zadań jest tak duża, że uzyskanie rozwiązań dokładnych nie jest możliwe. Stosowane są różne uproszczenia bądź procedury numeryczne, które prowadzą do oszacowań trudnych do oceny nawet jakościowej w sensie czy są to oszacowania bezpieczne czy niebezpieczne. Natomiast linearyzacja statycznych warunków przystosowania może być tak dokonana, by prowadziła do oszacowań bezpiecznych. Zlinearyzowane statyczne warunki przystosowania przedstawiono w punktach 3.3, 3.4 i 3.5.

3.3. Warunki przystosowania w ujęciu programowania liniowego w przypadku uwzględniania zginania

3.3.1. Układy prętowe o przekrojach idealnie dwuteowych

Warunki statyczne według twierdzenia Bleicha [14] mogą być przedstawione w ujęciu programowania liniowego następująco:

znaleźć
$$\mu = \max \left[\mathbf{0}^T, 1 \right] \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^r \\ \mu \end{bmatrix}$$

przy ograniczeniach
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}, & \max \mathbf{M}^e \\ -\mathbf{M}, & -\min \mathbf{M}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^r \\ \mu \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{M}\mathbf{o} \\ \mathbf{M}\mathbf{o} \end{bmatrix}, \mu \geq 0, \quad (3.3.1)$$

gdzie: $\mathbf{0}^T$ – zerowy wiersz o n_h elementach,

$\max \mathbf{M}^e = [\max M_1^e, \dots, \max M_k^e]^T$, $\min \mathbf{M}^e = [\min M_1^e, \dots, \min M_k^e]^T$ – wektory ekstremalnych momentów „sprężystych” w przekrojach krytycznych,

$\mathbf{Y}^r = [Y_1^r, \dots, Y_{n_h}^r]^T$ – wektor niewiadomych resztkowych sił hiperstatycznych,

$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1^1, \dots, M_1^{n_h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n_k}^1, \dots, M_{n_k}^{n_h} \end{bmatrix}$ – macierz momentów wywołanych w przekrojach krytycznych jednostkowymi siłami hiperstatycznymi, w izostatycznym układzie podstawowym,

$\mathbf{M}\mathbf{o} = [M_{o_1}, \dots, M_{o_k}]^T$ – wektor momentów granicznych w przekrojach krytycznych,

n_h – stopień statycznej niewyznaczalności,

n_k – liczba przekrojów krytycznych,

μ – mnożnik granic zmienności parametrów obciążenia.

Sformułowanie dualne do sformułowania (3.3.1) ma postać:

znaleźć
$$\mu = \min \left[\mathbf{M}\mathbf{o}^T, \mathbf{M}\mathbf{o}^T \right] \begin{bmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^- \end{bmatrix}$$

przy ograniczeniach
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^T, & -\mathbf{M}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^- \end{bmatrix} = 0, \quad (3.3.2)$$

$$\left[(\max \mathbf{M}^e)^T, -(\min \mathbf{M}^e)^T \right] \begin{bmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{bmatrix} \geq 1,$$

$$\varphi^+ \geq 0, \quad \varphi^- \geq 0, \quad \mu \geq 0,$$

gdzie: poszczególne macierze współczynników przy niewiadomych są macierzami transponowanymi do odpowiednich macierzy sformułowania (3.3.1),

$\boldsymbol{\varphi}^+ = [\varphi_1^+, \dots, \varphi_k^+]^T$ i $\boldsymbol{\varphi}^- = [\varphi_1^-, \dots, \varphi_k^-]^T$ są wektorami zmiennych dualnych.

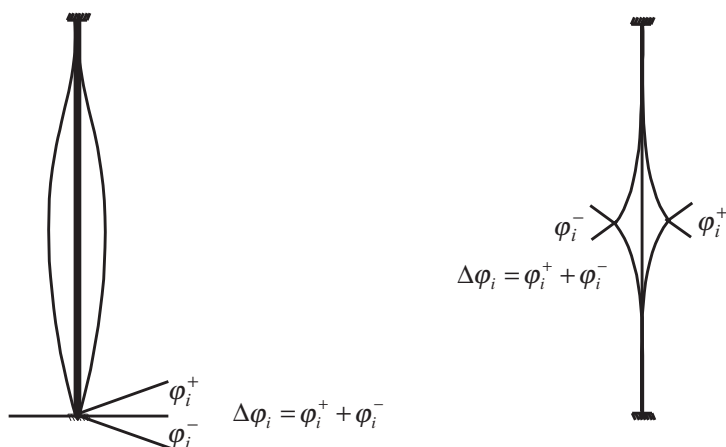
Stąd zapas bezpieczeństwa ma postać

$$Z = \left[\mathbf{M}\mathbf{o}^T, \mathbf{M}\mathbf{o}^T \right] \begin{bmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{bmatrix} - \left[(\max \mathbf{M}^e)^T, -(\min \mathbf{M}^e)^T \right] \begin{bmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{bmatrix}, \quad (3.3.3)$$

a warunek nieprzystosowania ma postać taką samą jak według twierdzenia Neala (2.5.3).

Różnica między rozwiązaniem dualnym a rozwiązaniem przyrostowym według twierdzenia Neala występuje wtedy, gdy rozwiązanie statyczne determinowane jest przez ograniczenie wynikające ze zsumowania warunków dla przekroju według Bleicha ($\max M_i^e - \min M_i^e \leq 2M\sigma_i$), które ogranicza amplitudy zmian obciążeń. Zmienne dualne przyjmują wtedy, dla tego przekroju, wartości $\varphi_i^+ = \varphi_i^- > 0$, a dla pozostałych $\varphi_i^+ = \varphi_i^- = 0$, co zilustrowano na rysunku 3.3.1.

Takie prędkości nie odpowiadają mechanizmom, lecz oznaczają występowanie odkształceń plastycznych przeciwnych znaków w przekroju. Aby kres dolny rozwiązań według twierdzenia Neala był zawsze identyczny z kresem górnym rozwiązań według twierdzenia Bleicha (2.4.7) wystarczy zatem uwzględnić, w sformułowaniach kinema-



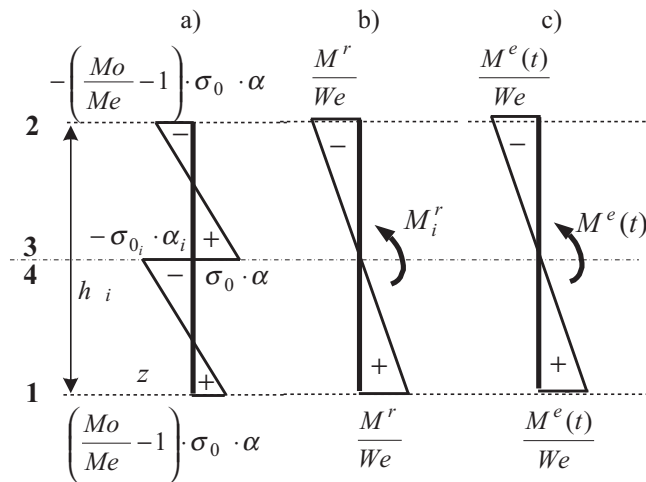
Rys. 3.3.1. Naprzemienne prędkości odkształceń plastycznych

Fig. 3.3.1. Alternating velocities of plastic deformations

tycznych, poza prędkościami odpowiadającymi mechanizmom również prędkości odkształceń przeciwnych znaków w kolejnych przekrojach $\varphi_i^+ = \varphi_i^- > 0$ (naprzemiennie). Należy podkreślić, że rozwiązania dualne dają automatycznie zarówno rozwiązania odpowiadające mechanizmom, jak i odkształceniom naprzemiennym.

3.3.2. Układy prętowe o przekrojach bisymetrycznych

Warunki przystosowania według twierdzenia Bleicha–Melana [121] mogą być wyprowadzone po przyjęciu naprężeń w przekroju bisymetrycznym w postaci sumy naprężeń pokazanych na rysunku 3.3.2 i założeniu spełnienia warunków według twierdzenia Melana (2.4.1) w punktach 1, 2, 3 i 4 (rys. 3.3.2).



Rys. 3.3.2. Naprężenia w bisymetrycznym przekroju zginanym: a) naprężenia resztkowe samorzównoważone w przekroju, b) naprężenia od momentów resztkowych pozostających w równowadze z obciążeniem zerowym, c) naprężenia od obciążenia

Fig. 3.3.2. Stresses in the bisymmetrical bending a cross section: a) self-equilibrated residual stresses in the cross section, b) stresses due to residual moments being in the equilibrium with the zero load, c) stresses due to the load

Warunki według twierdzenia Bleicha–Melana, które nie ma odpowiednika kinematycznego mogą być przedstawione w ujęciu programowania liniowego w postaci

znaleźć
$$\mu = \max \left[\mathbf{0}^T, 1 \right] \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^r \\ \mu \end{bmatrix}$$

przy ograniczeniach
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}, & \max \mathbf{M}^e \\ -\mathbf{M}, & -\min \mathbf{M}^e \\ \mathbf{0}, & \Delta \mathbf{M}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^r \\ \mu \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}_0 \\ 2\mathbf{M}_e \end{bmatrix}, \quad \mu \geq 0. \quad (3.3.4)$$

Sformułowanie dualne

znaleźć
$$\mu = \min[\mathbf{M}\mathbf{o}^T, \mathbf{M}\mathbf{o}^T, 2\mathbf{M}\mathbf{e}^T] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^+ \\ \boldsymbol{\varphi}^- \\ \Delta\boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix}$$

przy ograniczeniach
$$[\mathbf{M}^T, -\mathbf{M}^T] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^+ \\ \boldsymbol{\varphi}^- \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.3.5)$$

$$\left[(\max \mathbf{M}^e)^T, -(\min \mathbf{M}^e)^T, \Delta \mathbf{M}^e \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^+ \\ \boldsymbol{\varphi}^- \\ \Delta \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} \geq 1,$$

$$\boldsymbol{\varphi}^+ \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varphi}^- \geq \mathbf{0}, \quad \Delta \boldsymbol{\varphi} \geq \mathbf{0}, \quad \mu \geq 0,$$

gdzie: $\mathbf{M}\mathbf{e} = [Me_1, \dots, Me_k]^T$ – wektor „sprężystych” momentów granicznych,

$\Delta\boldsymbol{\varphi} = [\Delta\varphi_1, \dots, \Delta\varphi_k]^T$ – wektor zmiennych dualnych odpowiadających prędkościom naprzeniennym,

$$\Delta \mathbf{M}^e = \max \mathbf{M}^e - \min \mathbf{M}^e,$$

pozostałe oznaczenia jak we wzorach w punkcie 3.3.1.

Stąd wynika warunek nieprzystosowania (uogólnienie twierdzenia Neala na przypadek uwzględniający plastyczność naprzenienną)

$$\left[\mathbf{M}\mathbf{o}^T, \mathbf{M}\mathbf{o}^T, 2\mathbf{M}\mathbf{e} \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^+ \\ \boldsymbol{\varphi}^- \\ \Delta\boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} \leq \left[(\max \mathbf{M}^e)^T, -(\min \mathbf{M}^e)^T, (\Delta \mathbf{M}^e)^T \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^+ \\ \boldsymbol{\varphi}^- \\ \Delta\boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (3.3.6)$$

Zapas bezpieczeństwa w tym przypadku ma postać

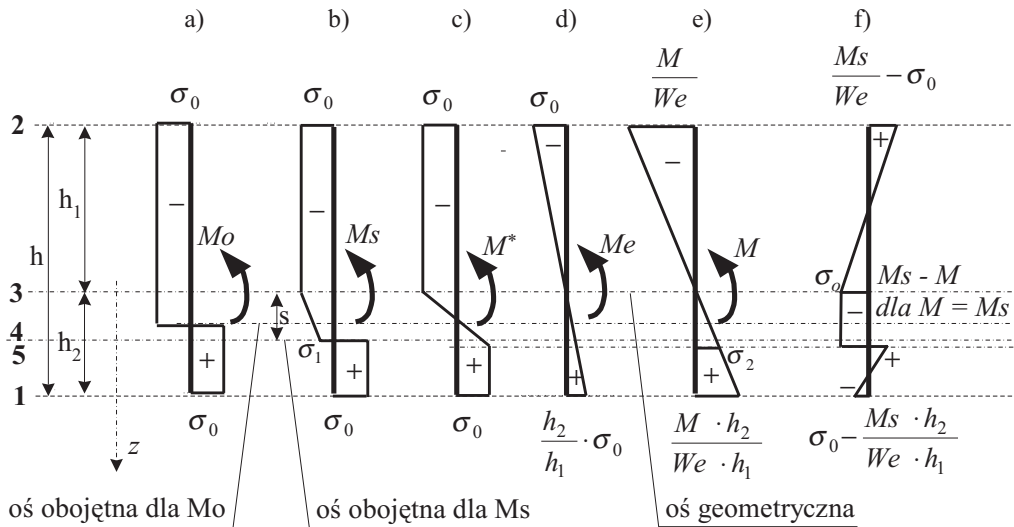
$$Z = \left[\mathbf{M}\mathbf{o}^T, \mathbf{M}\mathbf{o}^T, 2\mathbf{M}\mathbf{e} \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^+ \\ \boldsymbol{\varphi}^- \\ \Delta\boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} - \left[(\max \mathbf{M}^e)^T, -(\min \mathbf{M}^e)^T, (\Delta \mathbf{M}^e)^T \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^+ \\ \boldsymbol{\varphi}^- \\ \Delta\boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (3.3.7)$$

3.3.3. Układy prętowe o przekrojach monosymetrycznych

Jak już wspomniano, warunki przystosowania zaproponowane przez Koniecznego [82] nie zapewniają spełnienia założenia o niezmienności w czasie naprężeń resztkowych. Mogą być traktowane jako warunki przybliżone, jednak w niektórych obszarach niezapewniające przystosowania. W celu sformułowania warunków zapewniających przystosowanie dla dowolnych programów obciążeń wykorzystane zostanie twierdzenie Melana (2.4.1). Na rysunku 3.3.3 przedstawiono naprężenia w przekroju monosymetrycznym zginanym w zakresie sprężysto-plastycznym względem osi nie będącej osią symetrii:

- naprężenia odpowiadające plastycznemu momentowi granicznemu M_0 ,
- naprężenia odpowiadające maksymalnemu momentowi M_s , przy którym możliwe jest obciążenie w zakresie sprężystym momentem z przeciwnym znakiem o wartości $2 M_e$,
- naprężenia odpowiadające momentowi M^* powodującemu uplastycznienie we wszystkich punktach po jednej stronie osi geometrycznej,
- naprężenia odpowiadające granicznemu momentowi sprężystemu M_e ,
- naprężenia odpowiadające dowolnemu momentowi M przy nieograniczonym zakresie sprężystym,
- naprężenia resztkowe samozrównoważone w przekroju pozostające po obciążeniu momentem M_s i odciążeniu, to jest obciążeniu momentem M ze zwrotem przeciwnym o wartości M_s .

Najogólniejszym rozkładem naprężeń spośród przedstawionych jest rozkład odpowiadający momentowi M_s , gdyż pozostałe są jego szczególnymi przypadkami.



Rys. 3.3.3. Naprężenia w monosymetrycznym przekroju zginanym względem osi niebędącej osią symetrii
 Fig. 3.3.3. Stresses in the mono-symmetrical bending cross section about an axis which is not a symmetry axis

Jeśli obciążyć przekrój momentem Ms o rozkładzie naprężeń pokazanym na rys. 3.3.3b, a następnie przyłożyć sprężysty moment M (rys. 3.3.3e) z przeciwnym zwrotem, to naprężenia nie naruszają warunku plastyczności w żadnym punkcie przekroju, gdy nie naruszają go w punktach 1, 2 i 4, co prowadzi do układu warunków

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{M}{Me} \cdot \frac{h_2}{h_1}\right) \cdot \sigma_0 &\leq \sigma_0, \\ \left(\frac{M}{Me} - 1\right) \cdot \sigma_0 &\leq \sigma_0, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

$$|\sigma_1| + |\sigma_2| \leq \left(|\sigma_1| + \frac{M}{Me} \cdot \frac{s}{h_1} \cdot \sigma_0 \right) \leq \sigma_0.$$

Z pierwszego warunku (3.3.8) wynika $M \geq 0$, z drugiego $M \leq 2Me$, a z trzeciego

$|\sigma_1| \leq \left(1 - \frac{M}{Me} \cdot \frac{s}{h_1}\right) \cdot \sigma_0$ i $M \leq \frac{h_1}{s} \cdot \left(1 - \frac{|\sigma_1|}{\sigma_0}\right) \cdot Me$. Z drugiego warunku wynika więc, że niemożliwa jest sprężysta zmiana momentu w zakresie większym niż $2Me$. Z trzeciego warunku wynika, że aby taka zmiana była możliwa w zakresie $2Me$, to

$|\sigma_1| \leq \left(1 - 2 \cdot \frac{s}{h_1}\right) \cdot \sigma_0$. Jeśli ten warunek nie jest spełniony, to M zależy od $|\sigma_1|$, a $|\sigma_1|$ zależy od Ms , czyli M zależy od Ms . Jeśli na przykład $Ms = Mo$, to $|\sigma_1| = \sigma_0$ i $M = 0$.

Oznaczając symbolem Ms graniczną wartość momentu obciążającego o rozkładzie naprężeń jak na rys. 3.3.3b, przy której można przyłożyć moment ze zwrotem przeciwnym o wartości $2Me$ bez naruszania warunku plastyczności w żadnym punkcie przekroju otrzymujemy, że dla momentów obciążających przekrój z przedziałów (Me, Ms) oraz $(-Ms, -Me)$ możliwe jest sprężyste obciążenie z przeciwnym zwrotem momentem $2Me$. Dla momentów obciążających z przedziałów (Ms, Mo) oraz $(-Mo, -Ms)$ zakres sprężystego obciążenia z przeciwnym zwrotem zależy od momentu obciążającego i wynosi $2Me$ dla ekstremalnej wartości obciążenia Ms i $-Ms$ oraz zero dla ekstremalnej wartości obciążenia Mo i $-Mo$.

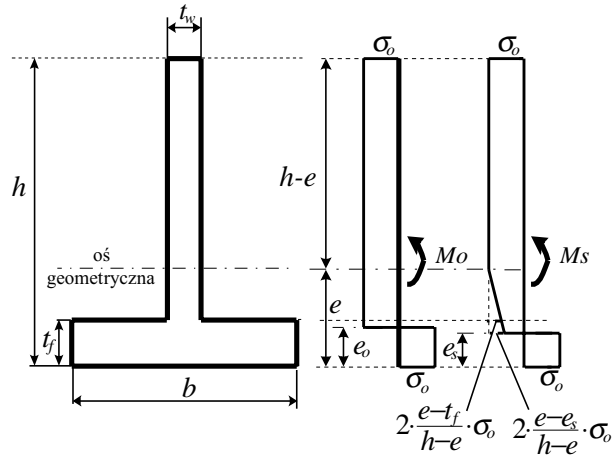
Przykładowo dla przekroju jak na rys. 3.3.4 charakterystyki odpowiednio wynoszą:

– pole przekroju

$$A = h \cdot t_w + (b - t_w) \cdot t_f, \quad (3.3.9)$$

– moment bezwładności względem osi geometrycznej

$$I = \frac{h^3 t_w}{12} + \frac{(b - t_w) t_f^3}{12} + h t_w \left(\frac{h}{2} - e\right)^2 + (b - t_w) t_f \left(e - \frac{t_f}{2}\right)^2, \quad (3.3.10)$$



Rys. 3.3.4. Przekrój teowy i naprężenia odpowiadające momentowi M_o i M_s
 Fig. 3.3.4. T-bar and the stresses corresponding to the moments M_o and M_s

- sprężysty wskaźnik wytrzymałości na zginanie

$$W_e = \frac{I}{h - e}, \quad (3.3.11)$$

- plastyczny wskaźnik zginania

$$W_o = t_w \left(\frac{h^2}{2} - h e_{o1} + e_{o1}^2 \right) + t_f (b - t_w) \left(e_{o1} - \frac{t_f}{2} \right), \quad (3.3.12)$$

gdy $e_o = e_{o1} \geq t_f$,

$$W_o = 0,5 \left(t_w (h - e_{o2})^2 + b e_{o2}^2 + (t_f - e_{o2})^2 (b - t_w) \right), \quad (3.3.13)$$

gdy $e_o = e_{o2} \leq t_f$,

- wskaźnik wytrzymałości na zginanie na podstawie warunku przystosowania

$$W_s = 0,5 t_w \left((h - e_{s1})^2 + (e_{s1} - t_f)^2 - \frac{(e - e_{s1})^3}{h - e} \right) + b t_f \left(e_s - \frac{t_f}{2} \right), \quad (3.3.14)$$

gdy $e_o = e_{o1} \geq t_f$,

$$W_s = 0,5 \left((h - e_{S2})^2 t_w + (t_f - e_{S2})^2 (b - t_w) + b e_{S2}^2 \right) - \frac{(e - e_{S2})^3 \frac{t_w}{3} + (b - t_w)(t_f - e_{S2})^2 \left(e - 2 \frac{t_f}{3} - \frac{e_{S2}}{3} \right)}{h - e}, \quad (3.3.15)$$

gdzie $e_s = e_{S2} \leq t_f$,

gdzie:
$$S = \frac{h^2 \cdot t_w}{2} + \frac{(b - t_w) \cdot t_f^2}{2}, \quad e = \frac{S}{A},$$

$$e_{01} = \frac{(h + t_f)}{2} - \frac{b \cdot t_f}{2 \cdot t_w}, \quad e_{02} = \frac{(h - t_f) \cdot t_w}{2 \cdot b} + \frac{t_f}{2},$$

$$e_{S1} = \sqrt{2 \cdot h^2 - 5 \cdot h \cdot e + 3 \cdot e^2 - t_f \cdot (h - e)(b/t_w - 1) - h + 2 \cdot e},$$

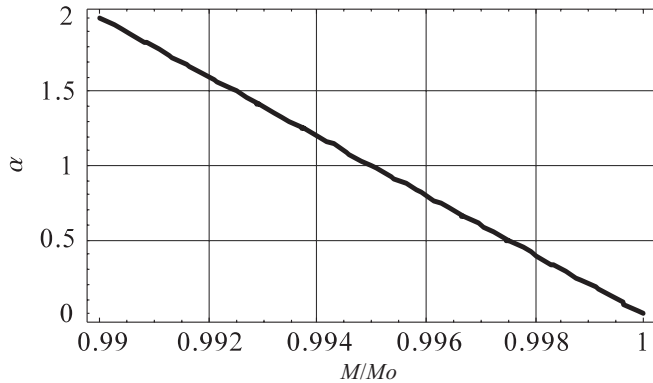
$$e_{S2} = \sqrt{\frac{((h - e) \cdot (h - t_f) - (e - t_f)^2) \cdot t_w}{b} + (h + t_f - 3 \cdot e) \cdot t_f + (h - 2 \cdot e)^2 - h + 2 \cdot e}.$$

Przedstawiając dopuszczalny zakres sprężystego odciażania (dopuszczalną amplitudę sprężystych zmian momentu w przekroju) w postaci takiej jak w związkach Koniecznego ($\alpha \cdot Me$) można numerycznie wyznaczyć zależność parametru α od momentu obciążającego. Poniżej zilustrowano wyniki obliczeń dla przekroju jak na rys. 3.3.4 dla danych $t_w = t_f = 0,1b$, $h = b + t_f$. Dla tych danych $Me/Mo = 0,5523$, $Ms/Mo = 0,9908$. Na

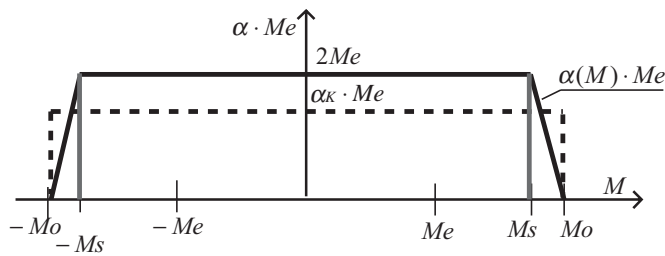
rysunku 3.3.5 przedstawiono zależność $\alpha \left(\frac{M}{Mo} \right)$ dla obciążenia przekroju momentem $M \in (Ms, Mo)$. Maksymalna odchyłka względna tego wykresu od linii prostej opisanej związkiem $\alpha(M) = 2 \cdot \left(1 - \frac{M}{Mo} \right) / \left(1 - \frac{Ms}{Mo} \right)$ wynosi 0,000081, co wskazuje, że zależność liniowa bardzo dobrze aproksymuje tu zależność dokładną.

Po uwzględnieniu, że $\alpha(M) = \alpha(-M)$ oraz że dla $M \in (-Ms, Ms)$ $\alpha = 2$, otrzymuje się zależność parametru α dla dowolnego poziomego obciążenia przedstawioną wykresem na rys. 3.3.6 (linia ciągła). Według Koniecznego dla rozpatrywanego przypadku $\alpha = 1,88$ (linia przerywana na rys. 3.3.6).

Z obliczeń wykonanych dla walcowanych przekrojów teowych i połówek dwuteowników wynika, że dla tych przekrojów różnica $Mo - Ms$ nie przekracza 1% wartości Mo , a zależność współczynnika $\alpha(M)$ dla $M \in (Ms, Mo)$ i $M \in (-Ms, -Mo)$ jest prawie



Rys. 3.3.5. Zależność współczynnika przedziału sprężystego odciążania (oś pionowa) od względnych wartości M/M_o momentu obciążającego M z przedziału (M_s, M_o)
 Fig. 3.3.5. Dependence of the elastic relief interval coefficient (vertical axis) on the relative values of the M/M_o loading moment M within the interval (M_s, M_o)



Rys. 3.3.6. Zależność przedziału sprężystego odciążania Me od poziomu obciążenia M
 Fig. 3.3.6. Dependence of the elastic relief interval on the level of the load

liniowa (z dokładnością do tysięcznych części procenta). Dla niesymetrycznych dwuteowników różnice te są jeszcze mniejsze.

Z tego wynika, że warunki na przystosowanie i -tego przekroju monosymetrycznego można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
 M_i^r + \max M_i^e &\leq M_o_i, \\
 -M_i^r - \min M_i^e &\leq M_o_i, \\
 \max M_i^e - \min M_i^e &\leq \alpha_i \cdot M_{e_i},
 \end{aligned}
 \tag{3.3.16}$$

gdzie $\alpha_i = 2 \begin{cases} 1 & \text{gdy } M_i \leq M_{s_i}, \\ \left(1 - \frac{M_i}{M_o_i}\right) / \left(1 - \frac{M_{s_i}}{M_o_i}\right) & \text{gdy } M_{s_i} < M_i \leq M_o_i, \end{cases}$

$$M_i = \max[(M_i^r + \max M_i^e), (-M_i^r - \min M_i^e)].$$

Jeśli uwzględnimy, że dla przekrojów stosowanych w praktyce różnica $M_o - M_s$ nie przekracza 1% wartości M_o , to warunki te z nieznaczną rezerwą mogą być przyjęte dla praktycznych zastosowań w postaci analogicznej do postaci jak dla przekrojów bisymetrycznych (uogólnienie twierdzenia Bleicha–Melana)

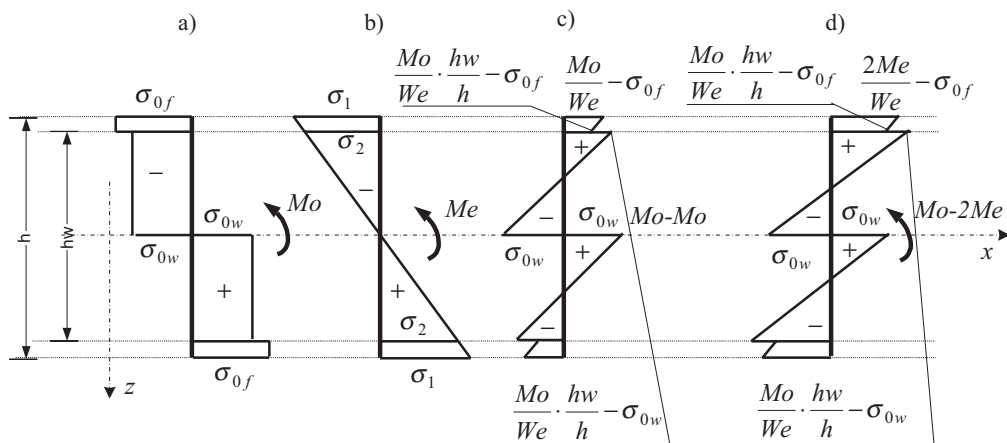
$$\begin{aligned} M_i^r + \max M_i^e &\leq Ms_i, \\ -M_i^r - \min M_i^e &\leq Ms_i, \\ \max M_i^e - \min M_i^e &\leq 2Me_i, \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

W tym przypadku sformułowania w ujęciu programowania liniowego oraz zapas bezpieczeństwa są takie same jak dla przekrojów bisymetrycznych (jedynie M_o należy zastąpić przez M_s).

3.3.4. Układy prętowe o przekrojach hybrydowych

Na rysunku 3.3.7 przedstawiono naprężenia w hybrydowym przekroju symetrycznym obciążonym momentem zginającym o różnych wartościach:

- naprężenia odpowiadające plastycznemu momentowi granicznemu M_o ,
- naprężenia odpowiadające sprężystemu momentowi granicznemu Me ($\sigma_1 = \sigma_{0f}$ lub $\sigma_2 = \sigma_{0w}$),
- pole naprężeń resztkowych pozostające po obciążeniu przekroju momentem M_o (rys. 3.3.7 a) i odciążeniu go to jest dodaniu momentu $-M_o$ o liniowym rozkładzie naprężeń,
- naprężenia odpowiadające momentowi $M_o - 2Me$.



Rys. 3.3.7. Naprężenia w hybrydowym przekroju zginanym
Fig. 3.3.7. Stresses in the hybrid bending cross section

Naprężenia σ_1 i σ_2 (rys. 3.3.7b) wynoszą

$$\sigma_1 = \begin{cases} \frac{h}{hw} \cdot \sigma_{0w} & \text{gdy } \sigma_{0f} \geq \frac{h}{hw} \cdot \sigma_{0w}, \\ \sigma_{0f} & \text{gdy } \sigma_{0f} \leq \frac{h}{hw} \cdot \sigma_{0w}, \end{cases} \quad (3.3.18)$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} \sigma_{0w} & \text{gdy } \sigma_{0f} \geq \frac{h}{hw} \cdot \sigma_{0w}, \\ \frac{hw}{h} \cdot \sigma_{0f} & \text{gdy } \sigma_{0f} \leq \frac{h}{hw} \cdot \sigma_{0w}, \end{cases}$$

przy czym przynajmniej jedna z tych wartości musi być równa odpowiedniej granicy plastyczności ($\sigma_1 = \sigma_{0f}$ lub $\sigma_2 = \sigma_{0w}$),

gdzie: σ_{0w} – granica plastyczności materiału środka,

σ_{0f} – granica plastyczności materiału półek,

h – wysokość przekroju,

h_w – wysokość środka.

Sprężysty moment graniczny

$$Me = \min(Me_w, Me_f), \quad (3.3.19)$$

gdzie: $Me_w = \frac{2I\sigma_{0w}}{hw} = \frac{h}{hw} \cdot We \cdot \sigma_{0w}$, $Me_f = \frac{2I\sigma_{0f}}{h} = We \cdot \sigma_{0f}$, $We = \frac{2I}{h}$,

I – moment bezwładności przekroju względem osi geometrycznej.

Naprężenia ekstremalne w stopce i w środku dla obciążenia $Mo - 2Me$ odpowiednio wynoszą

$$\left(\frac{2Me}{We} - \sigma_{0f} \right) = \begin{cases} \left(2 \frac{h}{hw} \sigma_{0w} - \sigma_{0f} \right) \leq \sigma_{0f} & \text{gdy } \sigma_{0f} \geq \frac{h}{hw} \cdot \sigma_{0w}, \\ \sigma_{0f} & \text{gdy } \sigma_{0f} \leq \frac{h}{hw} \cdot \sigma_{0w}, \end{cases} \quad (3.3.20)$$

$$\left(\frac{2Me}{We} \cdot \frac{hw}{h} - \sigma_{0w} \right) = \begin{cases} \sigma_{0w} & \text{gdy } \sigma_{0f} \geq \frac{h}{hw} \cdot \sigma_{0w}, \\ \left(2 \frac{hw}{h} \cdot \sigma_{0f} - \sigma_{0w} \right) \leq \sigma_{0w} & \text{gdy } \sigma_{0f} \leq \frac{h}{hw} \cdot \sigma_{0w}. \end{cases}$$

Z faktu, że przynajmniej jedno z nich równe jest odpowiedniej granicy plastyczności i żadne z nich nie przekracza odpowiedniej granicy plastyczności wynika, że po obciążeniu momentem Mo możliwe jest obciążenie sprężyste z przeciwnym znakiem, momentem z przedziału $(0, 2Me)$. Oznacza to, że dla przekrojów hybrydowych warunki na przystosowanie są takie same jak dla przekrojów bisymetrycznych. Jednak, gdy uwzględnia się losowy charakter parametrów należy brać pod uwagę, że w rozpatrywanym przypadku środniki i stopki wykonane są z różnych elementów, co oznacza, że ich charakterystyki geometryczne i fizyczne są zmiennymi losowymi wzajemnie niezależnymi, a w szczególności σ_{0f} jest zmienna losową niezależną od σ_{0w} . Nie można więc w tym przypadku wyznaczyć momentu Me na podstawie związku (3.3.19) i aby uwzględnić zarówno realizacje zmiennych losowych, dla których zachodzi przypadek $Me_w > Me_f$ jak i przypadek $Me_f > Me_w$ warunek nie występowania odkształceń plastycznych naprzemiennych w przekroju przyjmie postać ograniczeń

$$\max M_i^e - \min M_i^e \leq 2Me_w, \quad (3.3.21)$$

$$\max M_i^e - \min M_i^e \leq 2Me_f.$$

W tym przypadku sformułowanie warunków statycznych w ujęciu programowania liniowego ma postać

znaleźć
$$\mu = \max[\mathbf{0}^T, 1] \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^r \\ \mu \end{bmatrix}$$

przy ograniczeniach
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}, & \max \mathbf{M}^e \\ -\mathbf{M}, & -\min \mathbf{M}^e \\ \mathbf{0}, & \Delta \mathbf{M}^e \\ \mathbf{0}, & \Delta \mathbf{M}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^r \\ \mu \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{Mo} \\ \mathbf{Mo} \\ 2\mathbf{Me}_w \\ 2\mathbf{Me}_f \end{bmatrix}, \quad \mu \geq 0. \quad (3.3.22)$$

Sformułowanie dualne

znaleźć
$$\mu = \min \left[\mathbf{Mo}^T, \mathbf{Mo}^T, 2\mathbf{Me}_w^T, 2\mathbf{Me}_f^T \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^+ \\ \boldsymbol{\varphi}^- \\ \Delta \boldsymbol{\varphi}_w \\ \Delta \boldsymbol{\varphi}_f \end{bmatrix}$$

przy ograniczeniach
$$[\mathbf{M}^T, -\mathbf{M}^T] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^+ \\ \boldsymbol{\varphi}^- \end{bmatrix} = 0, \quad (3.3.23)$$

$$\left[(\max \mathbf{M}^e)^T, -(\min \mathbf{M}^e)^T, (\Delta \mathbf{M}^e)^T, (\Delta \mathbf{M}^e)^T \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^+ \\ \boldsymbol{\varphi}^- \\ \Delta \boldsymbol{\varphi}_w \\ \Delta \boldsymbol{\varphi}_f \end{bmatrix} \geq 1,$$

$$\boldsymbol{\varphi}^+ \geq 0, \boldsymbol{\varphi}^- \geq 0, \Delta \boldsymbol{\varphi}_w \geq 0, \Delta \boldsymbol{\varphi}_f \geq 0, \mu \geq 0,$$

gdzie $\Delta \boldsymbol{\varphi}_w, \Delta \boldsymbol{\varphi}_f$ – plastyczne odkształcenia naprzemienne odpowiednio w środku lub w stopkach.

Zapas bezpieczeństwa ma w tym przypadku ma postać

$$Z = \left[\mathbf{M}\mathbf{o}^T, \mathbf{M}\mathbf{o}^T, 2\mathbf{M}\mathbf{e}_w^T, 2\mathbf{M}\mathbf{e}_f^T \right] \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^+ \\ \boldsymbol{\varphi}^- \\ \Delta \boldsymbol{\varphi}_w \\ \Delta \boldsymbol{\varphi}_f \end{bmatrix} - \left[(\max \mathbf{M}^e)^T, -(\min \mathbf{M}^e)^T, (\Delta \mathbf{M}^e)^T, (\Delta \mathbf{M}^e)^T \right] \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^+ \\ \boldsymbol{\varphi}^- \\ \Delta \boldsymbol{\varphi}_w \\ \Delta \boldsymbol{\varphi}_f \end{bmatrix}. \quad (3.3.24)$$

3.4. Warunki przystosowania w ujęciu programowania liniowego w przypadku uwzględniania zginania z udziałem sił podłużnych

3.4.1. Układy prętowe o przekrojach bisymetrycznych

Proponowane przez Königa [92] podejście oparte na wykorzystaniu powierzchni sprężystych generowanych na podstawie założonych rozkładów naprężeń resztkowych nie jest zbyt wygodne, gdyż wymaga dwuetapowego rozpatrywania zagadnienia (formułowanie odcinkowo liniowych powierzchni sprężystych, a następnie warunków przystosowania).

W celu sformułowania warunków na przystosowanie wyrażonych poprzez siły przekrojowe wykorzystano tu bezpośrednio twierdzenie Melana (2.4.1) i założone pola naprężeń resztkowych. Przyjęto dwuparametrowe pole samozrównoważonych w przekroju

naprężeń resztkowych w postaci sumy zmodyfikowanych pól proponowanych przez Königa naprężeń resztkowych dla przekrojów prostokątnych.

Na rysunku 3.4.1 przedstawiono naprężenia w bisymetrycznym przekroju pręta zginanego i rozciąganego w stanie sprężysto-plastycznym odpowiadające różnym składowym przypadkom obciążenia:

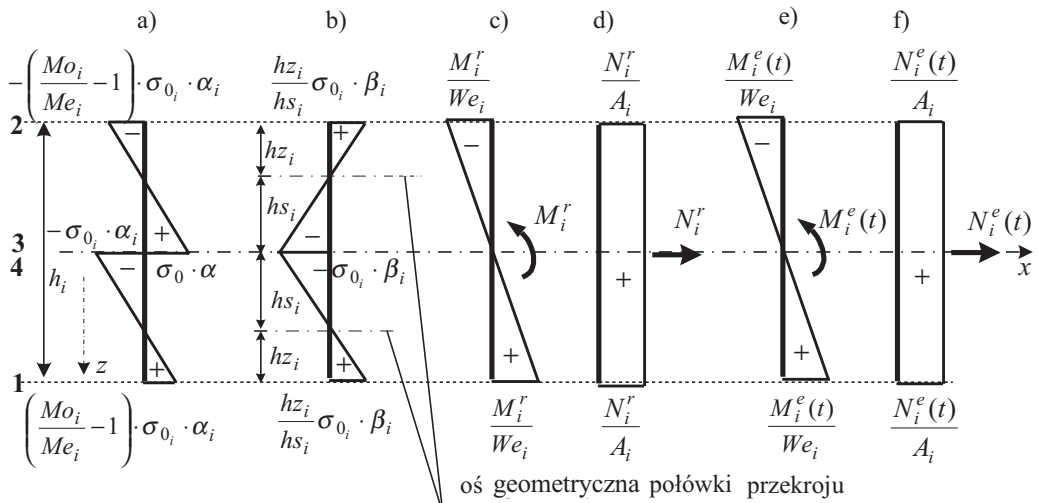
- naprężenia samozrównoważone w przekroju odpowiadające obciążeniu momentem Mo_i i odciążeniu,
- symetryczne pole naprężeń samozrównoważonych w przekroju,
- naprężenia odpowiadające momentowi resztkowemu M_i^r ,
- naprężenia odpowiadające resztkowej sile osiowej N_i^r ,
- naprężenia odpowiadające momentowi od obciążenia $M_i^e(t)$,
- naprężenia odpowiadające sile osiowej od obciążenia $N_i^e(t)$.

Pola resztkowych sił przekrojowych (momentów M_i^r , sił osiowych N_i^r , a także sił tnących V_i^r) są łącznie samozrównoważone (pozostają w równowadze z obciążeniem zerowym).

Przyjmując naprężenia resztkowe (rys. 3.4.1 a, b, c, d) w przekroju w postaci sumy

$$\sigma_i^r(z) = s_i^r(z) + \frac{M_i^r \cdot z}{I_{y_i}} + \frac{N_i^r}{A_i}, \quad (3.4.1)$$

gdzie: $s_i^r(z)$ – naprężenia resztkowe samozrównoważone w przekroju (suma naprężeń, rys. 3.4.1 a i b),



Rys. 3.4.1. Naprężenia w przekroju bisymetrycznym pręta zginanego i rozciąganego
Fig. 3.4.1. Stresses in the bisymmetrical cross section of the bending and tensioning bar

M_i^r, N_i^r – siły przekrojowe resztkowe samozrównoważone w układzie,
 We_i, A_i – wskaźnik zginania i pole przekroju,
i uwzględniając naprężenia sprężyste od obciążeń (rys. 3.4.1e, f)

$$\sigma_i^e(z, t) = \frac{M_i^r(t) \cdot z}{Iy_i} + \frac{N_i^r(t)}{A_i} \quad (3.4.2)$$

można warunek Melana na przystosowanie w dowolnym punkcie przekroju przedstawić w postaci

$$s_i^r(z) + \frac{M_i^r \cdot z}{Iy_i} + \frac{N_i^r}{A_i} + \max_t \left(\frac{M_i^r(t) \cdot z}{Iy_i} + \frac{N_i^r(t)}{A_i} \right) \leq \sigma_{0i}, \quad (3.4.3)$$

$$-\left(s_i^r(z) + \frac{M_i^r \cdot z}{Iy_i} + \frac{N_i^r}{A_i} \right) - \min_t \left(\frac{M_i^r(t) \cdot z}{Iy_i} + \frac{N_i^r(t)}{A_i} \right) \leq \sigma_{0i},$$

przy czym warunki te muszą być spełnione w każdym punkcie każdego przekroju.

Ze względu na odcinkowo liniowe rozkłady naprężeń dla spełnienia twierdzenia Melana w każdym punkcie wystarczy, by było ono spełnione w punktach 1, 2, 3, 4.

Wynikają stąd warunki na przystosowanie, które mogą być przedstawione w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}, & \mathbf{B}, & \mathbf{C}, & \mathbf{Q}_{\max} \\ -\mathbf{A}, & -\mathbf{B}, & -\mathbf{C}, & -\mathbf{Q}_{\min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{Y}^r \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (3.4.4)$$

gdzie: $\mathbf{A} = \text{diag}[\mathbf{A}r_i]$, $\mathbf{B} = \text{diag}[\mathbf{B}_i]$, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_k \end{bmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1^r \\ \vdots \\ Y_{n_h}^r \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{Q}_{\max} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,\max} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{k,\max} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{\min} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,\min} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{k,\min} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}r_i = \begin{bmatrix} (W_{0i} - We_i) \cdot \sigma_{0i} \\ (W_{0i} - We_i) \cdot \sigma_{0i} \\ Ne_i \\ -Ne_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{hz_i}{hs_i} \cdot We_i \cdot \sigma_{0i} \\ \frac{hz_i}{hs_i} \cdot We_i \cdot \sigma_{0i} \\ -We_i \cdot \sigma_{0i} \\ -We_i \cdot \sigma_{0i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \overline{M}_i^{-1} + \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i}, & \dots, & \overline{M}_i^{n_h} + \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} \\ \overline{M}_i^{-1} - \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i}, & \dots, & \overline{M}_i^{n_h} - \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} \\ \overline{N}_i^{-1}, & \dots, & \overline{N}_i^{n_h} \\ \overline{N}_i^{-1}, & \dots, & \overline{N}_i^{n_h} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{i,\max} = \begin{bmatrix} \max \left(M_i^e + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \max \left(M_i^e - N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \max N_i^e \\ \max N_i^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{i,\min} = \begin{bmatrix} \min \left(M_i^e + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \min \left(M_i^e - N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \min N_i^e \\ \min N_i^e \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} Me_i \\ Me_i \\ Ne_i \\ Ne_i \end{bmatrix},$$

- $W_{0i} = \frac{M_{0i}}{\sigma_{0i}}$ – plastyczny wskaźnik zginania przekroju,
 We_i – sprężysty wskaźnik zginania przekroju,
 A_i – pole przekroju,
 σ_{0i} – granica plastyczności materiału,
 $Me_i = We_i \cdot \sigma_{0i}$ – graniczny moment sprężysty przekroju,
 $Ne_i = No_i = A_i \cdot \sigma_{0i}$ – graniczna sprężysta i plastyczna siła podłużna przekroju,
 α_i, β_i – parametry pola naprężeń reszktowych samozrównoważonych w przekroju,
 $\overline{M}_i^j, \overline{N}_i^j$ – moment zginający i siła osiowa w przekroju wywołane jednostkową siłą hiperstatyczną $Y_j^r = 1$ w izostatycznym układzie podstawowym,
 n_h – stopień statycznej niewyznaczalności układu,
 k – liczba przekrojów krytycznych.

W związkach (3.4.4) wykorzystano, że momenty reszkowe M_i^r i siły osiowe reszkowe N_i^r mogą być wyrażone przez hiperstatyczne siły reszkowe Y_j^r ($j = 1, 2, \dots, n_h$)

$$M_i^r = \sum_{j=1}^{n_h} \overline{M}_i^j \cdot Y_j^r, \quad N_i^r = \sum_{j=1}^{n_h} \overline{N}_i^j \cdot Y_j^r. \quad (3.4.5)$$

W ujęciu programowania liniowego:

- sformułowanie pierwotne (statyczne)

znaleźć
$$\mu = \max \left[\mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T, 1 \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{Y}^r \\ \mu \end{bmatrix}$$

przy ograniczeniach
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}, & \mathbf{B}, & \mathbf{C}, & \mathbf{Q}_{\max} \\ -\mathbf{A}, & -\mathbf{B}, & -\mathbf{C}, & -\mathbf{Q}_{\min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{Y}^r \\ \mu \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad \mu \geq 0, \quad (3.4.6)$$

- sformułowanie dualne

znaleźć
$$\mu = \min \left[\mathbf{R}^T, \mathbf{R}^T \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix}$$

przy ograniczeniach
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T, & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T, & -\mathbf{B}^T \\ \mathbf{C}^T, & -\mathbf{C}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix} = 0, \quad (3.4.7)$$

$$\left[(\mathbf{Q}_{\max})^T, -(\mathbf{Q}_{\min})^T \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix} \geq 1,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^+ \geq 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^- \geq 0, \quad \mu \geq 0,$$

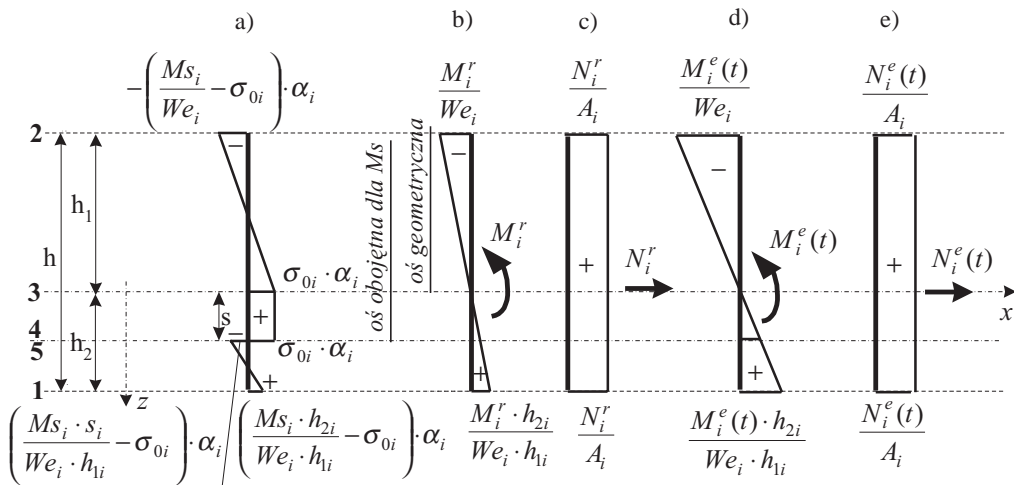
gdzie poszczególne macierze mają znaczenie jak w warunkach (3.4.4), $\boldsymbol{\varepsilon}^+ = [\varepsilon_1^+, \dots, \varepsilon_k^+]^T$ i $\boldsymbol{\varepsilon}^- = [\varepsilon_1^-, \dots, \varepsilon_k^-]^T$ – wektory zmiennych dualnych, które mogą być interpretowane jako prędkości odkształceń plastycznych i wyznaczone jako rozwiązanie zadania (3.4.7).

Zapas bezpieczeństwa ma więc postać

$$Z = [\mathbf{R}^T, \mathbf{R}^T] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix} - [(\mathbf{Q}_{\max})^T, -(\mathbf{Q}_{\min})^T] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix}. \quad (3.4.8)$$

3.4.2. Układy prętowe o przekrojach monosymetrycznych

Na rysunku 3.4.2 przedstawiono naprężenia w monosymetrycznym przekroju pręta zginanego i rozciąganego w stanie sprężysto-plastycznym odpowiadające różnym składowym przypadkom obciążenia. Wykorzystano tu omówione w punkcie 3.3.3 pole samorzównoważonych w przekroju naprężeń resztkowych (rys. 3.4.2 a). Sens pozostałych naprężeń przedstawionych na rys. 3.4.2 jest analogiczny do naprężeń przedstawionych na rys. 3.4.1.



Rys. 3.4.2. Naprężenia w monosymetrycznym przekroju pręta zginanego i rozciąganego
Fig. 3.4.2. Stresses in the mono-symmetrical cross section of the bending and tensioning bar

Uwzględniając, że spełnienie warunków Melana (2.4.1) w każdym punkcie przekroju jest zapewnione przez ich spełnienie w punktach 1, 2, 3, 4 i 5 i postępując analogicznie jak dla przekrojów bisymetrycznych, otrzymano warunki na przystosowanie w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}, & \mathbf{C}, & \mathbf{Q}_{\max} \\ -\mathbf{A}, & -\mathbf{C}, & -\mathbf{Q}_{\min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{Y}^r \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (3.4.9)$$

gdzie $\mathbf{A} = \text{diag}[\mathbf{A}r_i]$, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_k \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} Y_1^r \\ \vdots \\ Y_{n_h}^r \end{bmatrix}$, $\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} Me_i \\ Me_i \\ Me_i \\ Ne_i \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{Q}_{\max} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,\max} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{k,\max} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{\min} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,\min} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{k,\min} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}r_i = \begin{bmatrix} \left(\frac{h_{2i}}{h_{1i}} \cdot Ws_i - We_i \right) \cdot \sigma_{0i} \\ \left(\frac{s_i}{h_{1i}} \cdot Ws_i - We_i \right) \cdot \sigma_{0i} \\ We_i \cdot \sigma_{0i} \\ -(Ws_i - We_i) \cdot \sigma_{0i} \\ Ne_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \frac{h_{2i}}{h_{1i}} \cdot \overline{M}_i^{-1} + \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i}, & \dots, & \frac{h_{2i}}{h_{1i}} \cdot \overline{M}_i^{n_h} + \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} \\ \frac{s_i}{h_{1i}} \cdot \overline{M}_i^{-1} + \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i}, & \dots, & \frac{s_i}{h_{1i}} \cdot \overline{M}_i^{n_h} + \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} \\ \frac{s_i}{h_{1i}} \cdot \overline{M}_i^{-1} + \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i}, & \dots, & \frac{s_i}{h_{1i}} \cdot \overline{M}_i^{n_h} + \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} \\ \overline{M}_i^{-1} - \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i}, & \dots, & \overline{M}_i^{n_h} - \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} \\ \overline{N}_i^{-1}, & \dots, & \overline{N}_i^{n_h} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_k \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{i,\max} = \begin{bmatrix} \max \left(\frac{h_{2i}}{h_{1i}} \cdot M_i^e + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \max \left(\frac{s_i}{h_{1i}} \cdot M_i^e + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \max \left(\frac{s_i}{h_{1i}} \cdot M_i^e + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \max \left(M_i^e - N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \max N_i^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{i,\min} = \begin{bmatrix} \min \left(\frac{h_{2i}}{h_{1i}} \cdot M_i^e + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \min \left(\frac{s_i}{h_{1i}} \cdot M_i^e + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \min \left(\frac{s_i}{h_{1i}} \cdot M_i^e + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \min \left(M_i^e - N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \min N_i^e \end{bmatrix},$$

s_i – odległość osi obojętnej odpowiadającej obciążeniu przekroju momentem M_{S_i} od osi geometrycznej,

h_{1i}, h_{2i} – odległości włókien skrajnych przekroju od osi geometrycznej przekroju ($h_{1i} \geq h_{2i}$),

pozostałe oznaczenia przyjęto podobnie jak dla przekroju symetrycznego.

W ujęciu programowania liniowego:

- sformułowanie pierwotne (statyczne)

znaleźć
$$\mu = \max \left[\mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T, 1 \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{Y}^r \\ \mu \end{bmatrix}$$

przy ograniczeniach
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}, & \mathbf{C}, & \mathbf{Q}_{\max} \\ -\mathbf{A}, & -\mathbf{C}, & -\mathbf{Q}_{\min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{Y}^r \\ \mu \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad \mu \geq 0, \quad (3.4.10)$$

- sformułowanie dualne

znaleźć
$$\mu = \min \left[\mathbf{R}^T, \mathbf{R}^T \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{C}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.4.11)$$

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_{\max})^T & -(\mathbf{Q}_{\min})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- \end{bmatrix} \geq 1,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^+ \geq 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^- \geq 0, \quad \mu \geq 0.$$

Zapas bezpieczeństwa ma postać (3.4.8).

3.5. Warunki przystosowania w ujęciu programowania liniowego w przypadku uwzględniania naprężeń normalnych i tnących

3.5.1. Wprowadzenie

Przyjęto warunek graniczny w punkcie przekroju pręta na podstawie hipotezy Hubera–Misesa–Hencky’ego [71]

$$\sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sigma_0, \quad (3.5.1)$$

gdzie: σ – naprężenia normalne,
 τ – naprężenia styczne,
 σ_0 – granica plastyczności.

Aby móc wykorzystywać w analizie narzędzia i twierdzenia programowania liniowego, lewą stronę związku (3.5.1) przedstawiono w postaci quasi-liniowej

$$\sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = |\sigma| + \eta \cdot |\tau| = \begin{cases} \sigma + \eta \cdot \tau, & \text{gdy } \sigma \geq 0 \text{ i } \tau \geq 0, \\ -\sigma - \eta \cdot \tau, & \text{gdy } \sigma \leq 0 \text{ i } \tau \leq 0, \\ \sigma - \eta \cdot \tau, & \text{gdy } \sigma \geq 0 \text{ i } \tau \leq 0, \\ -\sigma + \eta \cdot \tau, & \text{gdy } \sigma \leq 0 \text{ i } \tau \geq 0, \end{cases} \quad (3.5.2)$$

gdzie $\eta = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^2 + 3} - \left|\frac{\sigma}{\tau}\right| \geq 0$.

Wartości współczynnika η w zależności od stosunku σ/τ zestawiono w tabeli 3.5.1.

Tabela 3.5.1. Wartości współczynnika η w zależności od stosunku σ/τ
 Table. 3.5.1. Values of the coefficient η versus the proportion σ/τ

σ	τ	σ/τ	η		σ	τ	σ/τ	η
1	0	∞	0		1	1	1	1
1	0,1	10	0,14889		0,9	1	0,9	1,05192
1	0,2	5	0,2915		0,8	1	0,8	1,10788
1	0,3	3,33333	0,42314		0,7	1	0,7	1,16815
1	0,4	2,5	0,54138		0,6	1	0,6	1,23303
1	0,5	2	0,64575		0,5	1	0,5	1,30278
1	0,6	1,66667	0,73703		0,4	1	0,4	1,37764
1	0,7	1,42857	0,8166		0,3	1	0,3	1,45784
1	0,8	1,25	0,886		0,2	1	0,2	1,54356
1	0,9	1,11111	0,9467		0,1	1	0,1	1,63494
1	1	1	1		0	1	0	1,73205

Warunki na przystosowanie według twierdzenia Melana (2.4.1) po wykorzystaniu związków (3.5.1) i (3.5.2) mogą być dla punktu przedstawione w postaci

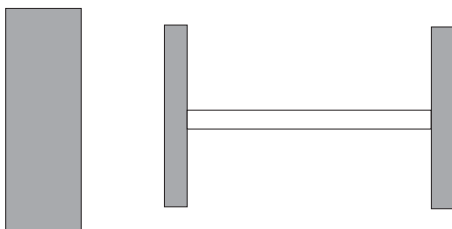
$$\begin{aligned}
 \sigma^r + \eta \cdot \tau^r + \sigma^e(t) + \eta \cdot \tau^e(t) &\leq \sigma_0, \\
 -\sigma^r - \eta \cdot \tau^r - \sigma^e(t) - \eta \cdot \tau^e(t) &\leq \sigma_0, \\
 \sigma^r - \eta \cdot \tau^r + \sigma^e(t) - \eta \cdot \tau^e(t) &\leq \sigma_0, \\
 -\sigma^r + \eta \cdot \tau^r - \sigma^e(t) + \eta \cdot \tau^e(t) &\leq \sigma_0.
 \end{aligned}
 \tag{3.5.3}$$

W rozważaniach teoretycznych proponowane są różne uproszczone rozkłady naprężeń tnących w przekroju, prowadzące często do zbliżonych wyników [10, 116]. W celu sformułowania możliwie prostych i jednocześnie bezpiecznych warunków na przystosowanie przyjęto prostokątny rozkład naprężeń tnących w przekroju przy założeniu, że elementy przekroju usytuowane poprzecznie w stosunku do kierunku działania obciążeń nie uczestniczą w przenoszeniu ścinania [10]. Dalsze rozważania ograniczymy do dwóch typów przekrojów: przekrojów typu prostokątnego nie posiadających elementów poprzecznych na krawędziach górnej i dolnej i przekrojów typu dwuteowego posiadających takie elementy. Na rysunkach 3.5.1 i 3.5.2 przedstawiono przykładowo przekroje obydwu typów. Zacieniowano części czynnie uczestniczące w przenoszeniu ścinania.

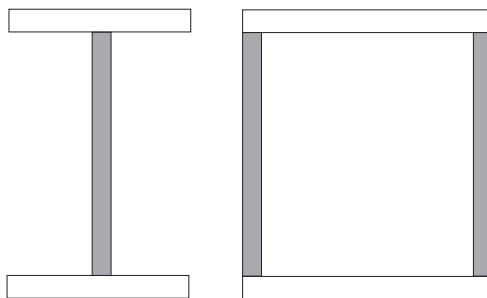
Naprężenia tnące w części czynnej przekroju na ścinanie określa zależność

$$\tau(t) = \tau^r + \tau^e(t) = \frac{V^r}{A_v} + \frac{V^e(t)}{A_v},
 \tag{3.5.4}$$

w której: A_y – część pola przekroju czynna przy ścinaniu,
 V^r – reszkowa siła tnąca w przekroju,
 $V^e(t)$ – sprężysta siła tnąca w przekroju wywołana obciążeniem.



Rys. 3.5.1. Przekroje typu prostokątnego
 Fig. 3.5.1. Cross sections of rectangular type



Rys. 3.5.2. Przekroje typu dwuteowego
 Fig. 3.5.2. Cross sections of the I-section type

3.5.2. Przekroje typu prostokątnego

3.5.2.1. Zginanie i ścinanie

Na rysunku 3.5.3 przedstawiono naprężenia w przekroju typu prostokątnego (rys. 3.5.1) pręta zginanego i ścinanego w stanie sprężysto-plastycznym odpowiadające różnym składowym przypadkom obciążenia.

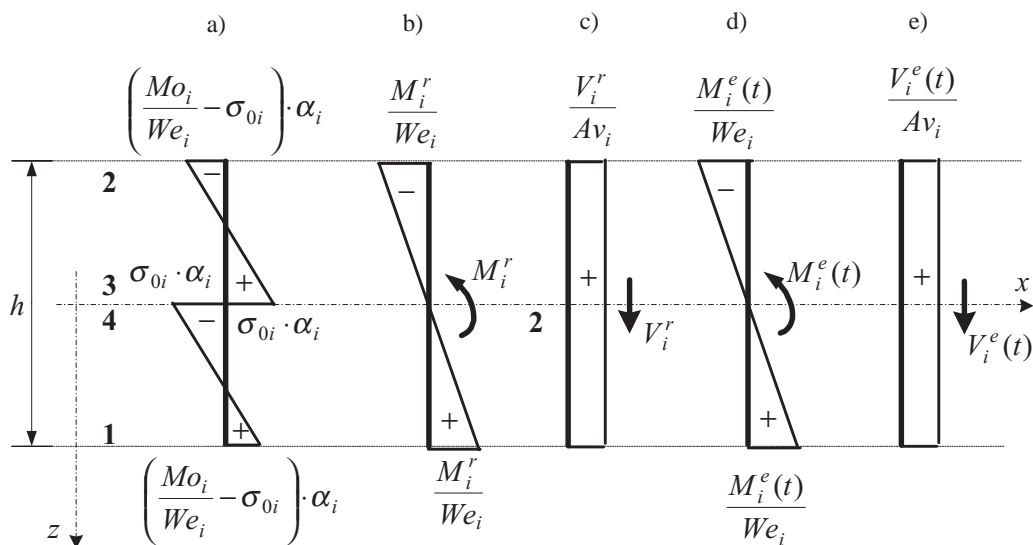
Naprężenia reszkowe w przekroju określają związki

$$\sigma_i^r(z) = s_i^r(z) + \frac{M_i^r \cdot z}{I_{y_i}}, \quad \tau_i^r(z) = \frac{V_i^r}{A v_i}, \quad (3.5.5)$$

w których: $s_i^r(z)$ – naprężenia reszkowe normalne samorzównoważone w przekroju,

M_i^r, V_i^r – siły przekrojowe reszkowe samorzównoważone w układzie,

I_{y_i} – moment bezwładności przekroju.



Rys. 3.5.3. Naprężenia w przekroju typu prostokątnego (rys. 3.5.1) pręta zginanego i ścinanego
 Fig. 3.5.3. Stresses in the rectangular cross sections (Fig. 3.5.1) of the bending and shearing bars

Naprężenia sprężyste w przekroju pozostające w równowadze z obciążeniem określają związek

$$\sigma_i^e(z) = \frac{M_i^e(t) \cdot z}{I_{y_i}}, \quad \tau_i^e = \frac{V_i^e(t)}{A_{v_i}}. \quad (3.5.6)$$

Po uwzględnieniu związków (3.5.5) i (3.5.6), warunki (3.5.3) przyjmują postać

$$\begin{aligned} s_i^r(z) + \frac{M_i^r \cdot z}{I_{y_i}} + \eta_i(z) \cdot \frac{V_i^r}{A_{v_i}} + \max_t \left(\frac{M_i^r(t) \cdot z}{I_{y_i}} + \eta_i(z) \cdot \frac{V_i^e(t)}{A_{v_i}} \right) &\leq \sigma_{0i}, \\ -s_i^r(z) - \frac{M_i^r \cdot z}{I_{y_i}} - \eta_i(z) \cdot \frac{V_i^r}{A_{v_i}} - \min_t \left(\frac{M_i^r(t) \cdot z}{I_{y_i}} + \eta_i(z) \cdot \frac{V_i^e(t)}{A_{v_i}} \right) &\leq \sigma_{0i}, \\ s_i^r(z) + \frac{M_i^r \cdot z}{I_{y_i}} - \eta_i(z) \cdot \frac{V_i^r}{A_{v_i}} + \max_t \left(\frac{M_i^r(t) \cdot z}{I_{y_i}} - \eta_i(z) \cdot \frac{V_i^e(t)}{A_{v_i}} \right) &\leq \sigma_{0i}, \\ -s_i^r(z) - \frac{M_i^r \cdot z}{I_{y_i}} + \eta_i(z) \cdot \frac{V_i^r}{A_{v_i}} - \min_t \left(\frac{M_i^r(t) \cdot z}{I_{y_i}} - \eta_i(z) \cdot \frac{V_i^e(t)}{A_{v_i}} \right) &\leq \sigma_{0i}. \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

Jeśli uwzględni się, że dla spełnienia warunków (3.5.7) w każdym punkcie przekroju wystarczy ich spełnienie w punktach 1, 2, 3 i 4 (rys. 3.5.3), warunki Melana na przystosowanie układu o przekrojach typu prostokątnego można przedstawić w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}, & \mathbf{C}, & \mathbf{Q}_{\max} \\ -\mathbf{A}, & -\mathbf{C}, & -\mathbf{Q}_{\min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{Y}^r \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (3.5.8)$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{A} = \text{diag}[\mathbf{A}r_i], \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1^r \\ \vdots \\ Y_{n_h}^r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{\max} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,\max} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{k,\max} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{\min} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,\min} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{k,\min} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} Me_i \\ Me_i \\ Vo_i \\ Vo_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}r_i = \begin{bmatrix} (Mo_i - Me_i) \\ (Mo_i - Me_i) \\ Vo_i \\ -Vo_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \overline{M}_i^{-1} + \eta_{li} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{Av_i}, & \dots, & \overline{M}_i^{n_h} + \eta_{li} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{Av_i} \\ \overline{M}_i^{-1} - \eta_{li} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{Av_i}, & \dots, & \overline{M}_i^{n_h} - \eta_{li} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{Av_i} \\ \frac{\eta_{3i}}{\sqrt{3}} \cdot \overline{V}_i^{-1}, & \dots, & \frac{\eta_{3i}}{\sqrt{3}} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \\ \frac{\eta_{3i}}{\sqrt{3}} \cdot \overline{V}_i^{-1}, & \dots, & \frac{\eta_{3i}}{\sqrt{3}} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{i,\max} = \begin{bmatrix} \max \left(M_i^e + \eta_{li} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(M_i^e - \eta_{li} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(\frac{\eta_{3i}}{\sqrt{3}} \cdot V_i^e \right) \\ \max \left(\frac{\eta_{3i}}{\sqrt{3}} \cdot V_i^e \right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{i,\min} = \begin{bmatrix} \min \left(M_i^e + \eta_{li} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(M_i^e - \eta_{li} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(\frac{\eta_{3i}}{\sqrt{3}} \cdot V_i^e \right) \\ \min \left(\frac{\eta_{3i}}{\sqrt{3}} \cdot V_i^e \right) \end{bmatrix}.$$

Mo_i – plastyczny moment graniczny przekroju,

Me_i – sprężysty moment graniczny przekroju,

Av_i – pole czynne przekroju przy ścinaniu,

α_i – parametr pola naprężeń resztkowych samorzównoważonych w przekroju,

M_i^r, V_i^r – moment resztkowy i siła tnąca resztkowa pozostające w równowadze z obciążeniem zerowym,

$$\eta_{li} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{li}}{\tau_i} \right)^2 + 3} - \left| \frac{\sigma_{li}}{\tau_i} \right| \geq 0, \quad \eta_{3i} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{3i}}{\tau_i} \right)^2 + 3} - \left| \frac{\sigma_{3i}}{\tau_i} \right| \geq 0,$$

$$\frac{\sigma_{li}}{\tau_i} = \frac{(Mo_i - Me_i) \cdot \alpha_i + M_i^r + M_i^e(t)}{V_i^r + V_i^e(t)} \cdot \frac{Av_i}{We_i}, \quad \frac{\sigma_{3i}}{\tau_i} = \frac{Vo_i \cdot \sqrt{3} \cdot \alpha_i}{V_i^r + V_i^e(t)},$$

$i = 1, 2, \dots, k$.

W związkach (3.5.8) wykorzystano, że momenty resztkowe i siły tnące resztkowe mogą być wyrażone przez resztkowe siły hiperstatyczne Y_j^r ($j = 1, 2, \dots, n_h$)

$$M_i^r = \sum_{j=1}^{n_h} \bar{M}_i^j \cdot Y_j^r, \quad V_i^r = \sum_{j=1}^{n_h} \bar{V}_i^j \cdot Y_j^r, \quad (3.5.9)$$

gdzie: Y_j^r – siły hiperstatyczne określające pola resztkowych sił przekrojowych,

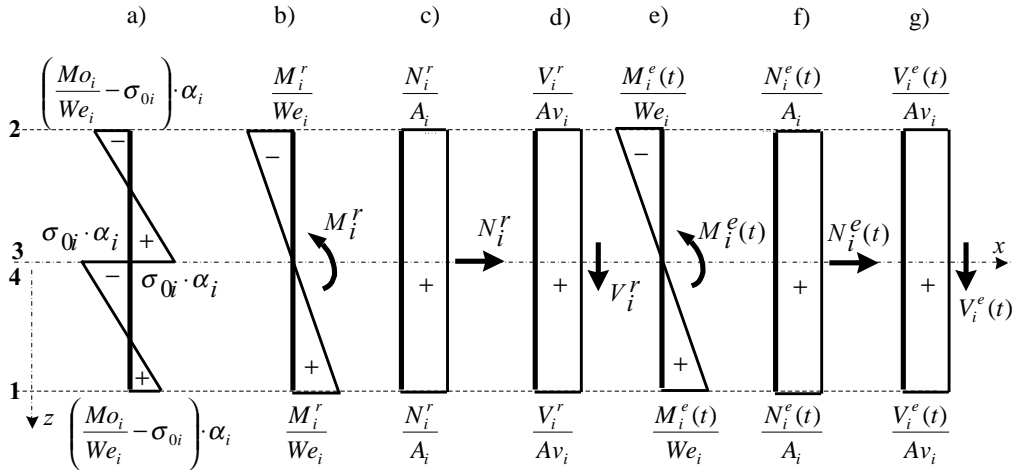
\bar{M}_i^j, \bar{V}_i^j – moment zginający i siła tnąca w przekroju wywołane jednostkową siłą hiperstatyczną $Y_j^r = 1$ w izostatycznym układzie podstawowym,

n_h – stopień statycznej niewyznaczalności układu.

Sformułowania ograniczeń (3.5.8) w ujęciu programowania liniowego mają postać (3.4.10) i (3.4.11), a zapas bezpieczeństwa postać (3.4.8).

3.5.2.2. Zginanie, rozciąganie i ścinanie

Na rysunku 3.5.4 przedstawiono składowe naprężenia w przekroju pręta zginanego, rozciąganego i ścinanego w stanie sprężysto-plastycznym.



Rys. 3.5.4. Naprężenia w przekroju typu prostokątnego pręta zginanego, rozciąganego i ścinanego
Fig. 3.5.4. Stresses in the rectangular cross section of the bending, tensioning and shearing bar

Naprężenia resztkowe w przekroju (rys. 3.5.4a, b, c, d) określone są związkami

$$\sigma_i^r(z) = s_i^r(z) + \frac{M_i^r \cdot z}{I_{y_i}} + \frac{N_i^r}{A_i}, \quad \tau_i^r = \frac{V_i^r}{A_{v_i}}, \quad (3.5.10)$$

gdzie: $s_i^r(z)$ – naprężenia resztkowe samorzównoważone w przekroju,

M_i^r, N_i^r – siły przekrojowe resztkowe samorzównoważone w układzie,

I_{y_i}, A_{v_i} – moment bezwładności i pole przekroju

Naprężenia sprężyste (rys. 3.5.4e, f, g) pozostające w równowadze z obciążeniem określone są związkami

$$\sigma_i^e(z, t) = \frac{M_i^e(t) \cdot z}{I_i} + \frac{N_i^e(t)}{A_i}, \quad \tau_i^e = \frac{V_i^e(t)}{A_{v_i}}. \quad (3.5.11)$$

Stąd warunek Melana na przystosowanie punktu przekroju przyjmuje postać

$$s_i^r(z) + \frac{M_i^r \cdot z}{I_i} + \frac{N_i^r}{A_i} + \eta_i \cdot \frac{V_i^r}{A_{v_i}} + \max_t \left(\frac{M_i^e(t) \cdot z}{I_i} + \frac{N_i^e(t)}{A_i} + \eta_i \cdot \frac{V_i^e(t)}{A_{v_i}} \right) \leq \sigma_{0i},$$

$$\begin{aligned}
& -s_i^r(z) - \frac{M_i^r \cdot z}{I_i} - \frac{N_i^r}{A_i} - \eta_i \cdot \frac{V_i^r}{Av_i} - \min_t \left(\frac{M_i^r(t) \cdot z}{I_i} + \frac{N_i^e(t)}{A_i} + \eta_i \cdot \frac{V_i^e(t)}{Av_i} \right) \leq \sigma_{0i}, \\
& s_i^r(z) + \frac{M_i^r \cdot z}{I_i} + \frac{N_i^r}{A_i} - \eta_i \cdot \frac{V_i^r}{Av_i} + \max_t \left(\frac{M_i^r(t) \cdot z}{I_i} + \frac{N_i^e(t)}{A_i} - \eta_i \cdot \frac{V_i^e(t)}{Av_i} \right) \leq \sigma_{0i}, \\
& -s_i^r(z) - \frac{M_i^r \cdot z}{I_i} - \frac{N_i^r}{A_i} + \eta_i \cdot \frac{V_i^r}{Av_i} - \min_t \left(\frac{M_i^r(t) \cdot z}{I_i} + \frac{N_i^e(t)}{A_i} - \eta_i \cdot \frac{V_i^e(t)}{Av_i} \right) \leq \sigma_{0i}.
\end{aligned} \tag{3.5.12}$$

Jak widać na rysunku 3.5.4 spełnienie tych warunków w każdym punkcie przekroju jest zapewnione przez ich spełnienie w punktach 1, 2, 3 i 4. Stąd warunki na przystosowanie układu mogą być przedstawione w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}, & \mathbf{C}, & \mathbf{Q}_{\max} \\ -\mathbf{A}, & -\mathbf{C}, & -\mathbf{Q}_{\min} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{Y}^r \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}, \tag{3.5.13}$$

gdzie: $\mathbf{A} = \text{diag}[\mathbf{A}_i]$, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_k \end{bmatrix}$, $\mathbf{Y}^r = \begin{bmatrix} Y_1^r \\ \vdots \\ Y_{n_h}^r \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q}_{\max} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,\max} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{k,\max} \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{Q}_{\min} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,\min} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{k,\min} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} Mo_i - Me_i \\ Mo_i - Me_i \\ Mo_i - Me_i \\ Mo_i - Me_i \\ No_i \\ No_i \\ -No_i \\ -No_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} Me_i \\ Me_i \\ Me_i \\ Me_i \\ No_i \\ No_i \\ No_i \\ No_i \end{bmatrix},$$

$$C_i = \begin{bmatrix} \overline{M}_i^{-1} + \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{1i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{Av_i}, & \dots, & \overline{M}_i^{n_h} + \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{1i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{Av_i} \\ \overline{M}_i^{-1} + \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{1i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{Av_i}, & \dots, & \overline{M}_i^{n_h} + \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{1i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{Av_i} \\ \overline{M}_i^{-1} - \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{2i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{Av_i}, & \dots, & \overline{M}_i^{n_h} - \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{2i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{Av_i} \\ \overline{M}_i^{-1} - \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{2i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{Av_i}, & \dots, & \overline{M}_i^{n_h} - \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{2i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{Av_i} \\ \overline{N}_i^{-1} + \eta_{3i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{A_i}{Av_i}, & \dots, & \overline{N}_i^{n_h} + \eta_{3i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{A_i}{Av_i} \\ \overline{N}_i^{-1} - \eta_{3i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{A_i}{Av_i}, & \dots, & \overline{N}_i^{n_h} - \eta_{3i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{A_i}{Av_i} \\ \overline{N}_i^{-1} + \eta_{4i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{A_i}{Av_i}, & \dots, & \overline{N}_i^{n_h} + \eta_{4i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{A_i}{Av_i} \\ \overline{N}_i^{-1} - \eta_{4i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{A_i}{Av_i}, & \dots, & \overline{N}_i^{n_h} - \eta_{4i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{A_i}{Av_i} \end{bmatrix},$$

$$Q_{i,\max} = \begin{bmatrix} \max \left(M_i^e + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{1i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(M_i^e + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{1i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(M_i^e - N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{2i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(M_i^e - N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{2i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{3i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{3i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{4i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{4i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \end{bmatrix},$$

$$Q_{i,\min} = \left[\begin{array}{l} \min \left(M_i^e + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{li} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(M_i^e + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{li} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(M_i^e - N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{li} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(M_i^e - N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{li} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{3i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{3i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{4i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{4i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \end{array} \right],$$

- Mo_i – plastyczny moment graniczny przekroju,
 Me_i – sprężysty moment graniczny przekroju,
 Ne_i – graniczna sprężysta siła podłużna przekroju,
 Av_i – pole czynne przekroju przy ścinaniu,
 A_i – pole przekroju,
 σ_{0i} – granica plastyczności materiału,
 α_i – parametr pola naprężeń resztkowych samozrównoważonych w przekroju,
 M_i^r, N_i^r, V_i^r – moment resztkowy, siła osiowa resztkowa i siła tnąca resztkowa pozostające w równowadze z obciążeniem zerowym,

$$\eta_{ji} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ji}}{\tau_i}\right)^2 + 3} - \left|\frac{\sigma_{ji}}{\tau_i}\right|,$$

$$\frac{\sigma_{li}}{\tau_i} = \frac{(Mo_i - Me_i) \cdot \alpha_i + M_i^r + N_i^r \cdot \frac{We_i}{A_i} + M_i^e(t) + N_i^e(t) \cdot \frac{We_i}{A_i}}{V_i^r + V_i^e(t)} \cdot \frac{Av_i}{We_i},$$

$$\frac{\sigma_{2i}}{\tau_i} = \frac{-(M_{o_i} - M_{e_i}) \cdot \alpha_i - M_i^r + N_i^r \cdot \frac{W_{e_i}}{A_i} - M_i^e(t) + N_i^e(t) \cdot \frac{W_{e_i}}{A_i}}{V_i^r + V_i^e(t)} \cdot \frac{A v_i}{W_{e_i}},$$

$$\frac{\sigma_{3i}}{\tau_i} = \frac{N_{o_i} \cdot \alpha_i + N_i^r + N_i^e(t)}{V_i^r + V_i^e(t)} \cdot \frac{A v_i}{A_i}, \quad \frac{\sigma_{4i}}{\tau_i} = \frac{-N_{o_i} \cdot \alpha_i + N_i^r + N_i^e(t)}{V_i^r + V_i^e(t)} \cdot \frac{A v_i}{A_i},$$

$i = 1, 2, \dots, k.$

W związkach (3.5.13) wykorzystano, że momenty resztkowe, siły tnące resztkowe i siły osiowe resztkowe mogą być wyrażone przez resztkowe siły hiperstatyczne Y_j^r ($j = 1, 2, \dots, n_h$)

$$M_i^r = \sum_{j=1}^{n_h} \bar{M}_i^j \cdot Y_j^r, \quad N_i^r = \sum_{j=1}^{n_h} \bar{N}_i^j \cdot Y_j^r, \quad V_i^r = \sum_{j=1}^{n_h} \bar{V}_i^j \cdot Y_j^r, \quad (3.5.14)$$

gdzie: Y_j^r – siły hiperstatyczne określające pola resztkowych sił przekrojowych,

$\bar{M}_i^j, \bar{V}_i^j, \bar{N}_i^j$ – moment zginający, siła tnąca i siła osiowa w przekroju wywołane jednostkową siłą hiperstatyczną $Y_j^r = 1$ w izostatycznym układzie podstawowym,

n_h – stopień statycznej niewyznaczalności układu.

Sformułowania ograniczeń (3.5.13) w ujęciu programowania liniowego mają postać (3.4.10) i (3.4.11), a zapas bezpieczeństwa postać (3.4.8).

3.5.3. Przekroje typu dwuteowego

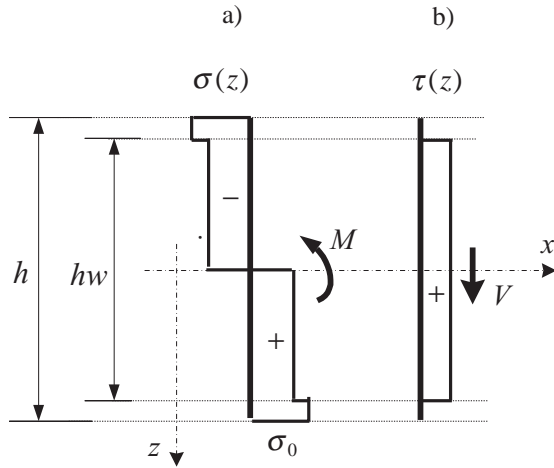
3.5.3.1. Zginanie i ścinanie

Uwzględniając w stanie granicznym przekroju typu dwuteowego pręta zginanego i ścinanego naprężenia przedstawione na rys. 3.5.5 (w każdym punkcie przekroju $\sigma^2(z) + 3 \cdot \tau^2(z) = \sigma_0^2$), określono dwuparametrowe pole naprężeń resztkowych samorzównoważonych w przekroju pokazane na rys. 3.5.6 a, b.

Naprężenia składowe w przekroju typu dwuteowego pręta zginanego i ścinanego w stanie sprężysto-plastycznym przedstawiono na rys. 3.5.6.

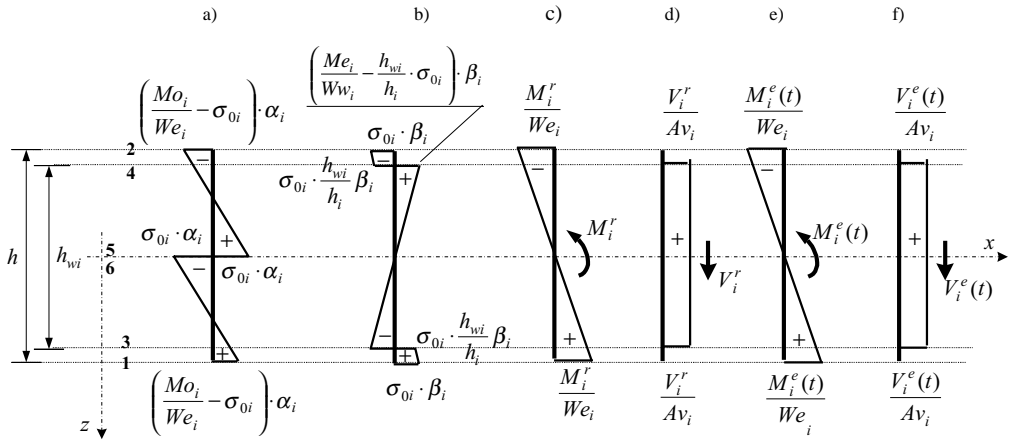
Jeśli uwzględni się, że dla spełnienia warunków w postaci (3.5.7) w każdym punkcie przekroju wystarczy ich spełnienie w punktach 1, 2, 3, 4, 5 i 6 (rys. 3.5.6), warunki Melana na przystosowanie układu o przekrojach typu dwuteowego można przedstawić w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}, & \mathbf{B}, & \mathbf{C}, & \mathbf{Q}_{\max} \\ -\mathbf{A}, & -\mathbf{B}, & -\mathbf{C}, & -\mathbf{Q}_{\min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{Y}^r \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (3.5.15)$$



Rys. 3.5.5. Naprężenia w stanie granicznym ($\sigma^2(z) + 3 \cdot \tau^2(z) = \sigma_0^2$) w przekroju typu dwuteowego (rys. 3.5.2) pręta zginanego i ścinanego

Fig. 3.5.5. Stresses in the limit state ($\sigma^2(z) + 3 \cdot \tau^2(z) = \sigma_0^2$) in the I-section (Fig. 3.5.2) of the bending and shearing bar



Rys. 3.5.6. Naprężenia w przekroju typu dwuteowego pręta zginanego i ścinanego

Fig. 3.5.6. Stresses in the I-section of the bending and shearing bar

gdzie: $\mathbf{A} = \text{diag}[\mathbf{A}_r], \mathbf{B} = \text{diag}[\mathbf{B}_i], \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_k \end{bmatrix}, \mathbf{Y}^r = \begin{bmatrix} Y_1^r \\ \vdots \\ Y_{n_h}^r \end{bmatrix},$

$$\mathbf{Q}_{\max} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,\max} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{k,\max} \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{\min} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,\min} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{k,\min} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_k \end{bmatrix}, \mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} Me_i \\ Me_i \\ Me_i \\ Vo_i \\ Vo_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} Mo_i - Me_i \\ Mo_i \cdot \frac{hw_i}{h_i} - Me_i \\ Mo_i \cdot \frac{hw_i}{h_i} - Me_i \\ Vo_i \\ Vo_i \end{bmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} Me_i \\ -\left(\frac{We_i}{Ww_i} - \frac{hw_i}{h_i}\right) \cdot Me_i \\ -\left(\frac{We_i}{Ww_i} - \frac{hw_i}{h_i}\right) \cdot Me_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \bar{M}_i^{-1}, & \dots, & \bar{M}_i^{n_h} \\ \bar{M}_i^{-1} \cdot \frac{hw_i}{h_i} + \eta_{3i} \cdot \bar{V}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{Av_i}, & \dots, & \bar{M}_i^{n_h} \cdot \frac{hw_i}{h_i} + \eta_{3i} \cdot \bar{V}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{Av_i} \\ \bar{M}_i^{-1} \cdot \frac{hw_i}{h_i} - \eta_{3i} \cdot \bar{V}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{Av_i}, & \dots, & \bar{M}_i^{n_h} \cdot \frac{hw_i}{h_i} - \eta_{3i} \cdot \bar{V}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{Av_i} \\ \frac{\eta_{5i}}{\sqrt{3}} \cdot \bar{V}_i^{-1}, & \dots, & \frac{\eta_{5i}}{\sqrt{3}} \cdot \bar{V}_i^{n_h} \\ \frac{\eta_{5i}}{\sqrt{3}} \cdot \bar{V}_i^{-1}, & \dots, & \frac{\eta_{5i}}{\sqrt{3}} \cdot \bar{V}_i^{n_h} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{i,\max} = \begin{bmatrix} \max M_i^e \\ \max \left(M_i^e \cdot \frac{hw_i}{h_i} + \eta_{3i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(M_i^e \cdot \frac{hw_i}{h_i} - \eta_{3i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(\frac{\eta_{5i}}{\sqrt{3}} \cdot V_i^e \right) \\ \max \left(\frac{\eta_{5i}}{\sqrt{3}} \cdot V_i^e \right) \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{i,\min} = \begin{bmatrix} \min M_i^e \\ \min \left(M_i^e \cdot \frac{hw_i}{h_i} + \eta_{3i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(M_i^e \cdot \frac{hw_i}{h_i} - \eta_{3i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(\frac{\eta_{5i}}{\sqrt{3}} \cdot V_i^e \right) \\ \min \left(\frac{\eta_{5i}}{\sqrt{3}} \cdot V_i^e \right) \end{bmatrix},$$

- Mo_i – plastyczny moment graniczny przekroju,
 Me_i – sprężysty moment graniczny przekroju,
 Ww_i – wskaźnik wytrzymałości na zginanie środnika,
 Av_i – pole czynne przekroju przy ścinaniu,
 α_i, β_i – parametry pól naprężeń reszkowych samozrównoważonych w przekroju,
 M_i^r, V_i^r – moment reszkowy i siła tnąca reszkowa pozostające w równowadze z obciążeniem zerowym,

$$\eta_{ji} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ji}}{\tau_i}\right)^2 + 3} - \left|\frac{\sigma_{ji}}{\tau_i}\right|, \quad \frac{\sigma_{5i}}{\tau_i} = \frac{Vo_i \cdot \sqrt{3} \cdot \alpha_i}{V_i^r + V_i^e(t)},$$

$$\frac{\sigma_{3i}}{\tau_i} = \frac{\left(Mo_i \cdot \frac{hw_i}{h_i} - Me_i\right) \cdot \alpha_i + \left(\frac{We_i}{Ww_i} - \frac{hw_i}{h_i}\right) \cdot Me_i \cdot \beta_i + M_i^r \cdot \frac{hw_i}{h_i} + M_i^e(t) \cdot \frac{hw_i}{h_i}}{V_i^r + V_i^e(t)} \cdot \frac{Av_i}{We_i},$$

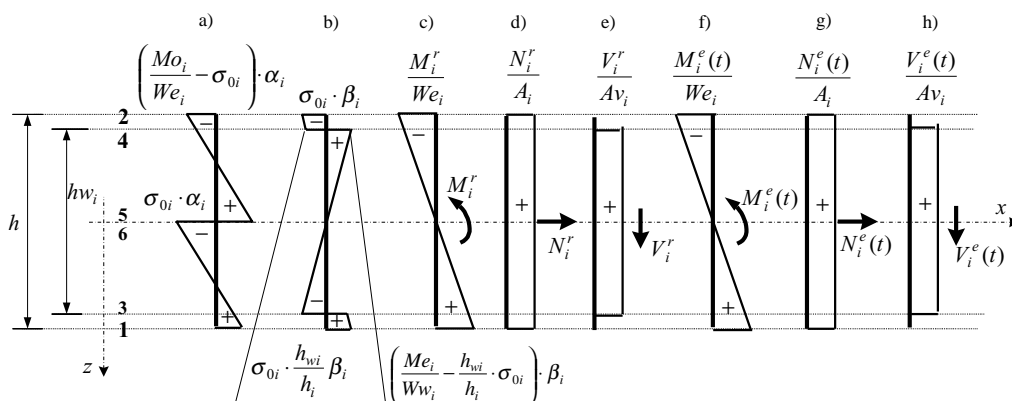
$$i = 1, 2, \dots, k.$$

Sformułowania ograniczeń (3.5.15) w ujęciu programowania liniowego mają postać (3.4.6) i (3.4.7), a zapas bezpieczeństwa postać (3.4.8).

3.5.3.2. Zginanie, rozciąganie i ścinanie

Naprężenia składowe w przekroju typu dwuteowego pręta zginanego, rozciąganego i ścinanego w stanie sprężysto-plastycznym przedstawiono na rys. 3.5.7.

Jeśli uwzględni się, że dla spełnienia warunków postaci (3.5.12) w każdym punkcie przekroju wystarczy ich spełnienie w punktach 1, 2, 3, 4, 5 i 6 (rys. 3.5.6), to warunki



Rys. 3.5.7. Naprężeń w przekroju typu dwuteowego pręta zginanego, rozciąganego i ścinanego

Fig. 3.5.7. Stresses in the I-section of the bending, tensioning and shearing bar

Melana na przystosowanie układu o przekrojach typu dwuteowego można przedstawić w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}, & \mathbf{B}, & \mathbf{C}, & \mathbf{Q}_{\max} \\ -\mathbf{A}, & -\mathbf{B}, & -\mathbf{C}, & -\mathbf{Q}_{\min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{Y}^r \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (3.5.16)$$

gdzie: $\mathbf{A} = \text{diag}[\mathbf{A}_i]$, $\mathbf{B} = \text{diag}[\mathbf{B}_i]$, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_k \end{bmatrix}$, $\mathbf{Y}^r = \begin{bmatrix} Y_1^r \\ \vdots \\ Y_{n_h}^r \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_k \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{\max} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,\max} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{k,\max} \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{\min} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,\min} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{k,\min} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_k \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} Me_i \\ Me_i \\ Me_i \\ Me_i \\ Me_i \\ Me_i \\ No_i \\ No_i \\ No_i \\ No_i \end{bmatrix}, \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} Mo_i - Me_i \\ Mo_i - Me_i \\ Mo_i \cdot \frac{hw_i}{h_i} - Me_i \\ Mo_i \cdot \frac{hw_i}{h_i} - Me_i \\ Mo_i \cdot \frac{hw_i}{h_i} - Me_i \\ Mo_i \cdot \frac{hw_i}{h_i} - Me_i \\ Mo_i \cdot \frac{hw_i}{h_i} - Me_i \\ No_i \\ No_i \\ -No_i \\ -No_i \end{bmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} Me_i \\ Me_i \\ -\left(\frac{We_i}{Ww_i} - \frac{hw_i}{h_i}\right) \cdot Me_i \\ -\left(\frac{We_i}{Ww_i} - \frac{hw_i}{h_i}\right) \cdot Me_i \\ -\left(\frac{We_i}{Ww_i} - \frac{hw_i}{h_i}\right) \cdot Me_i \\ -\left(\frac{We_i}{Ww_i} - \frac{hw_i}{h_i}\right) \cdot Me_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_i = \begin{bmatrix} \overline{M}_i^{-1} + \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i}, \dots, \overline{M}_i^{n_h} + \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} \\ \overline{M}_i^{-1} - \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i}, \dots, \overline{M}_i^{n_h} - \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} \\ \overline{M}_i^{-1} \cdot \frac{hw_i}{h_i} + \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{3i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{Av_i}, \dots, \overline{M}_i^{n_h} \cdot \frac{hw_i}{h_i} + \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{3i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{Av_i} \\ \overline{M}_i^{-1} \cdot \frac{hw_i}{h_i} + \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{3i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{Av_i}, \dots, \overline{M}_i^{n_h} \cdot \frac{hw_i}{h_i} + \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{3i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{Av_i} \\ \overline{M}_i^{-1} \cdot \frac{hw_i}{h_i} - \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{4i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{Av_i}, \dots, \overline{M}_i^{n_h} \cdot \frac{hw_i}{h_i} - \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{4i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{Av_i} \\ \overline{M}_i^{-1} \cdot \frac{hw_i}{h_i} - \overline{N}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{4i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{We_i}{Av_i}, \dots, \overline{M}_i^{n_h} \cdot \frac{hw_i}{h_i} - \overline{N}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{4i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{We_i}{Av_i} \\ \overline{N}_i^{-1} + \eta_{5i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{A_i}{Av_i}, \dots, \overline{N}_i^{n_h} + \eta_{5i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{A_i}{Av_i} \\ \overline{N}_i^{-1} - \eta_{5i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{A_i}{Av_i}, \dots, \overline{N}_i^{n_h} - \eta_{5i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{A_i}{Av_i} \\ \overline{N}_i^{-1} + \eta_{6i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{A_i}{Av_i}, \dots, \overline{N}_i^{n_h} + \eta_{6i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{A_i}{Av_i} \\ \overline{N}_i^{-1} - \eta_{6i} \cdot \overline{V}_i^{-1} \cdot \frac{A_i}{Av_i}, \dots, \overline{N}_i^{n_h} - \eta_{6i} \cdot \overline{V}_i^{n_h} \cdot \frac{A_i}{Av_i} \end{bmatrix},$$

$$Q_{i,\max} = \begin{bmatrix} \max \left(M_i^e + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \max \left(M_i^e - N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \max \left(M_i^e \cdot \frac{hw_i}{h_i} + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{3i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(M_i^e \cdot \frac{hw_i}{h_i} + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{3i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(M_i^e \cdot \frac{hw_i}{h_i} - N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{4i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(M_i^e \cdot \frac{hw_i}{h_i} - N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{4i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{5i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{5i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{6i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \max \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{6i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \end{bmatrix},$$

$$Q_{i,\min} = \left[\begin{array}{c} \min \left(M_i^e + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \min \left(M_i^e - N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} \right) \\ \min \left(M_i^e \cdot \frac{hw_i}{h_i} + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{3i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(M_i^e \cdot \frac{hw_i}{h_i} + N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{3i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(M_i^e \cdot \frac{hw_i}{h_i} - N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{4i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(M_i^e \cdot \frac{hw_i}{h_i} - N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{4i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{5i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{5i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} + \eta_{6i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \\ \min \left(N_i^e \cdot \frac{We_i}{A_i} - \eta_{6i} \cdot V_i^e \cdot \frac{We_i}{Av_i} \right) \end{array} \right],$$

Mo_i – plastyczny moment graniczny przekroju,

Me_i – sprężysty moment graniczny przekroju,

Ww_i – wskaźnik wytrzymałości na zginanie środkiem,

Av_i – pole czynne przekroju przy ścinaniu,

α_i, β_i – parametry pól naprężeń resztkowych samorzównoważonych w przekroju,

M_i^r, V_i^r – moment resztkowy i siła tnąca resztkowa pozostające w równowadze z obciążeniem zerowym,

$$\eta_{ji} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ji}}{\tau_i} \right)^2 + 3} - \left| \frac{\sigma_{ji}}{\tau_i} \right|, \quad \frac{\sigma_{5i}}{\tau_i} = \frac{No_i \cdot \alpha_i + N_i^r + N_i^e(t)}{V_i^r + V_i^e(t)} \cdot \frac{Av_i}{A_i},$$

$$\frac{\sigma_{6i}}{\tau_i} = \frac{-No_i \cdot \alpha_i + N_i^r + N_i^e(t)}{V_i^r + V_i^e(t)} \cdot \frac{Av_i}{A_i},$$

$$\frac{\sigma_{3i}}{\tau_i} = \frac{\left(Mo_i \cdot \frac{hw_i}{h_i} - Me_i \right) \cdot \alpha_i - \left(\frac{We_i}{Ww_i} - \frac{hw_i}{h_i} \right) \cdot Me_i \cdot \beta_i + M_i^r \cdot \frac{hw_i}{h_i} + M_i^e(t) \cdot \frac{hw_i}{h_i}}{V_i^r + V_i^e(t)} \cdot \frac{Av_i}{We_i},$$

$$+ \frac{N_i^r + N_i^e(t)}{V_i^r + V_i^e(t)} \cdot \frac{Av_i}{A_i},$$

$$\frac{\sigma_{4i}}{\tau_i} = \frac{- \left(Mo_i \cdot \frac{hw_i}{h_i} - Me_i \right) \cdot \alpha_i + \left(\frac{We_i}{Ww_i} - \frac{hw_i}{h_i} \right) \cdot Me_i \cdot \beta_i - M_i^r \cdot \frac{hw_i}{h_i} - M_i^e(t) \cdot \frac{hw_i}{h_i}}{V_i^r + V_i^e(t)} \cdot \frac{Av_i}{We_i}$$

$$+ \frac{N_i^r + N_i^e(t)}{V_i^r + V_i^e(t)} \cdot \frac{Av_i}{A_i},$$

$$i = 1, 2, \dots, k.$$

Sformułowania ograniczeń (3.5.16) w ujęciu programowania liniowego mają postać (3.4.6) i (3.4.7), a zapas bezpieczeństwa postać (3.4.8).

3.5.4. Quasi-linearyzacja warunku plastyczności na poziomie przekroju

Zdecydowanie prostsze warunki na przystosowanie przekrojów zginanych z uwzględnieniem wpływu ścinania, jednak mniej dokładne, można otrzymać dokonując quasi-linearyzacji na poziomie przekroju. Warunek graniczny dla przekroju może być przedstawiony w postaci [116]

$$\left(\frac{M_i}{Mo_i} \right)^2 + \left(\frac{V_i}{Vo_i} \right)^2 - \lambda_i \cdot \left(\frac{M_i}{Mo_i} \right)^2 \cdot \left(\frac{V_i}{Vo_i} \right)^2 = 1, \quad (3.5.17)$$

gdzie: $M_i = M_i^e + M_i^r$ – aktualny moment zginający w przekroju,

$V_i = V_i^e + V_i^r$ – aktualna siła tnąca w przekroju,

Mo_i – graniczny moment plastyczny przekroju w przypadku czystego zginania,

Vo_i – graniczna plastyczna siła tnąca w przypadku czystego ścinania,

λ_i – współczynnik zależny od kształtu przekroju.

Dla przekroju prostokątnego $\lambda_i = 0$, dla przekroju dwuteowego

$$\lambda_i = \frac{2,9 - 2,7 \beta_i}{3 \left(1 - \frac{\beta_i}{3}\right)^2}, \quad \beta_i = \frac{1}{1 + 4 \cdot \frac{A_f}{A_w} \cdot \left(1 + \frac{t_f}{h_w}\right)}, \quad (3.5.18)$$

gdzie: A_f – pole przekroju stopki,
 A_w – pole przekroju środka,
 t_w – średnia grubość środka,
 h_w – wysokość środka.

Warunek (3.5.17) może być przedstawiony w dwóch postaciach równoważnych

$$M_i^2 = \frac{1 - \left(\frac{M_i}{M_{o_i}}\right)^2}{1 - \lambda_i \cdot \left(\frac{M_i}{M_{o_i}}\right)^2} \cdot (M_{o_i})^2, \quad V_i^2 = \frac{1 - \left(\frac{V_i}{V_{o_i}}\right)^2}{1 - \lambda_i \cdot \left(\frac{V_i}{V_{o_i}}\right)^2} \cdot (V_{o_i})^2, \quad (3.5.19)$$

skąd wynika zredukowana wpływem ścinania wartość granicznego momentu plastycznego oraz zredukowana wpływem zginania wartość granicznej plastycznej siły poprzecznej dla przekroju

$$M_{ov_i} = v_i(t) \cdot M_{o_i}, \quad V_{om_i} = m_i(t) \cdot V_{o_i}, \quad (3.5.20)$$

gdzie

$$v_i(t) = \frac{1 - \left(\frac{V_i^r + V_i^e(t)}{V_{o_i}}\right)^2}{1 - \lambda_i \cdot \left(\frac{V_i^r + V_i^e(t)}{V_{o_i}}\right)^2}, \quad m_i(t) = \frac{1 - \left(\frac{M_i^r + M_i^e(t)}{M_{o_i}}\right)^2}{1 - \lambda_i \cdot \left(\frac{M_i^r + M_i^e(t)}{M_{o_i}}\right)^2}.$$

Wykorzystując związki (3.4.20), można warunki na przystosowanie przekroju przedstawić w postaci quasi-liniowej:

– dla przekrojów o przeważającym wpływie zginania

$$\begin{aligned} M_i^r + \max M_i^e &\leq v_i(\max M_i^e) \cdot M_{o_i}, \\ -M_i^r - \min M_i^e &\leq v_i(\min M_i^e) \cdot M_{o_i}, \\ \max M_i^e - \min M_i^e &\leq \left(v_i(\max M_i^e) + v_i(\min M_i^e)\right) \cdot M_{e_i}, \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

– dla przekrojów o przeważającym wpływie ścinania

$$\begin{aligned} V_i^r + \max V_i^e &\leq m_i(\max V_i^e) \cdot V_{O_i}, \\ -V_i^r - \min V_i^e &\leq m_i(\min V_i^e) \cdot V_{O_i}, \\ \max V_i^e - \min V_i^e &\leq (m_i(\max V_i^e) + m_i(\min V_i^e)) \cdot V_{e_i}, \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

gdzie: $v_i(\max M_i^e)$, $v_i(\min M_i^e)$ – współczynniki obliczone dla wartości V_i^e sprzężonych odpowiednio z $\max M_i^e$ lub $\min M_i^e$,

$m_i(\max V_i^e)$, $m_i(\min V_i^e)$ – współczynniki obliczone dla wartości M_i^e sprzężonych odpowiednio z $\max V_i^e$ lub $\min V_i^e$,

$$V_{e_i} = \frac{Av_i \cdot \sigma_0}{\sqrt{3}},$$

Av_i – część pola przekroju przenosząca naprężenia tnące.

Sformułowania ograniczeń (3.5.21) względnie (3.5.22) w ujęciu programowania liniowego mogą być przedstawione w postaci (3.4.10) i (3.4.11), a zapas bezpieczeństwa w postaci (3.4.8).

3.6. Algorytm określania zapasu bezpieczeństwa

W punktach 3.3, 3.4 i 3.5 przedstawiono bezpieczne linearyzacje statycznych warunków przystosowania oraz sformułowania tych warunków w ujęciu programowania liniowego. Wszystkie przedstawione sformułowania mogą być zapisane w postaci (3.2.1). Wykorzystując te sformułowania można, jak pokazano w punkcie 3.2, wyznaczać zapasy bezpieczeństwa względem określonych postaci utraty zdolności konstrukcji do przenoszenia obciążeń umożliwiające oszacowania bezpieczeństwa konstrukcji. Sformułowania te zawierają macierze reprezentujące cztery grupy składników: naprężenia resztkowe samorzównoważone w przekrojach \mathbf{A}_a , resztkowe siły przekrojowe pozostające w równowadze z obciążeniem zerowym \mathbf{A}_y , obciążenie \mathbf{Q}_{\max} , \mathbf{Q}_{\min} i nośność \mathbf{R} . Elementy tych macierzy określane są na podstawie odpowiednich wzorów przedstawionych w punktach 3.3, 3.4 lub 3.5, zależnych od rozpatrywanego przypadku. Gdy nie jest uwzględniany wpływ naprężeń tnących, współczynniki ograniczeń określane są bezpośrednio lub iteracyjnie względem współrzędnych określających położenia przekrojów krytycznych w przęsłach prętów. Gdy uwzględniany jest wpływ naprężeń tnących, współczynniki ograniczeń określane są iteracyjnie względem stosunków naprężeń normalnych do statycznych. W praktyce wpływ naprężeń tnących może być istotny w konstrukcjach szczególnych, na przykład. w przypadku dużych sił skupionych działających w pobliżu podpór, w przypadku belek wysokich (o stosunku wysokości do rozpiętości większej od 1/10) itp.

Elementy macierzy \mathbf{A}_a i \mathbf{R} określone są bezpośrednio przez zmienne wyjściowe. W celu wyznaczenia elementów macierzy \mathbf{A}_Y (w punktach 3.4 i 3.5 oznaczono je symbolem \mathbf{C}) niezbędne jest wyrażenie reszkowych sił przekrojowych w przekrojach krytycznych przez zmienne niezależne, co można wykonać na podstawie rozwiązań statycznie wyznaczalnego modelu układu od jednostkowych sił hiperstatycznych $Y_j = 1$.

Najbardziej pracochłonne jest określanie wektorów \mathbf{Q}_{\max} , \mathbf{Q}_{\min} . Niezbędne jest wykonanie symbolicznych rozwiązań układu od jednostkowych składowych obciążeń i następnie, w drodze odpowiednich superpozycji tych rozwiązań, określenie współczynników tych wektorów jako funkcji parametrów charakteryzujących konstrukcję i obciążenie. Można tu zastosować dowolną metodę rozwiązywania układów hiperstatycznych jak metodę sił, metodę przemieszczeń, metodę mieszaną, metodę elementów skończonych i inne. Jest to zadanie wykonalne dla dużej klasy praktycznie ważnych płaskich konstrukcji prętowych takich jak belki ciągłe, kratownice i ramy przy użyciu narzędzi komputerowych umożliwiających obliczenia symboliczne.

Stosując na przykład metodę sił do określania wektorów \mathbf{Q}_{\max} , \mathbf{Q}_{\min} jako funkcji zmiennych bazowych $X = (k_1, \dots, k_n, F_1, \dots, F_m)$ należy siły przekrojowe w statycznie wyznaczalnym modelu układu od jednostkowych sił hiperstatycznych $Y_j = 1$ i od jednostkowych obciążeń zewnętrznych $F_j = 1$ przedstawić w postaci funkcji parametrów określających konstrukcję k_i . Układ równań metody sił przyjmuje postać

$$\begin{aligned} & \mathbf{D}(k_1, \dots, k_n) \cdot \left[\mathbf{Y}^1(k_1, \dots, k_n) \cdot F_1, \dots, \mathbf{Y}^m(k_1, \dots, k_n) \cdot F_m \right] \\ & + \left[\mathbf{D}^1(k_1, \dots, k_n) \cdot F_1, \dots, \mathbf{D}^m(k_1, \dots, k_n) \cdot F_m \right] = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

gdzie: $\mathbf{D}(k_1, \dots, k_n)$ – macierz podatności,

$[\mathbf{Y}^1(k_1, \dots, k_n), \dots, \mathbf{Y}^m(k_1, \dots, k_n)]$ – macierz niewiadomych złożona z wektorów odpowiadających poszczególnym parametrom obciążenia $F_p = 1$,

$[\mathbf{D}^1(k_1, \dots, k_n), \dots, \mathbf{D}^m(k_1, \dots, k_n)]$ – macierz wyrazów wolnych złożona z wektorów odpowiadających poszczególnym parametrom obciążenia $F_p = 1$.

Korzystając ze wzorów Kramera siły hiperstatyczne można przedstawić w postaci

$$[\mathbf{Y}^1(k_1, \dots, k_n), \dots, \mathbf{Y}^m(k_1, \dots, k_n)] = - \frac{[\mathbf{W}^1(k_1, \dots, k_n), \dots, \mathbf{W}^m(k_1, \dots, k_n)]}{W(k_1, \dots, k_n)}. \quad (3.6.2)$$

gdzie: $W(k_1, \dots, k_n) = \det[\mathbf{D}(k_1, \dots, k_n)]$ – wyznacznik macierzy podatności,

$$\mathbf{W}^p(k_1, \dots, k_n) = \begin{bmatrix} W_1^p(k_1, \dots, k_n) \\ \vdots \\ W_{n_p}^p(k_1, \dots, k_n) \end{bmatrix},$$

$W_i^p(k_1, \dots, k_n)$ – wyznacznik macierzy podatności z zastąpioną i -tą kolumną przez wektor $\mathbf{D}^p(k_1, \dots, k_n)$.

Siły w przekrojach krytycznych wywołane obciążeniem F_p ($p = 1, \dots, m$) można przedstawić w postaci funkcji

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^p(k_1, \dots, k_n, F_p) &= \left(\bar{\mathbf{S}}(k_1, \dots, k_n) \cdot \mathbf{Y}^p(k_1, \dots, k_n) + \mathbf{S}^{op}(k_1, \dots, k_n) \right) F_p \\ &= \frac{\left(-\bar{\mathbf{S}}(k_1, \dots, k_n) \cdot \mathbf{W}^p(k_1, \dots, k_n) + \mathbf{S}^{op}(k_1, \dots, k_n) \cdot W(k_1, \dots, k_n) \right)}{W(k_1, \dots, k_n)} F_p \\ &= \frac{\mathbf{U}^p(k_1, \dots, k_n)}{W(k_1, \dots, k_n)} F_p, \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

gdzie: $\bar{\mathbf{S}}(k_1, \dots, k_n)$ – macierz sił przekrojowych w przekrojach krytycznych wywołanych jednostkowymi siłami hiperstatycznymi,

$\mathbf{S}^{op}(k_1, \dots, k_n)$ – wektor sił przekrojowych w układzie podstawowym w przekrojach krytycznych wywołanych obciążeniem $F_p = 1$.

Zależnie od analizowanego przypadku, wykorzystując związki przedstawione w punktach 3.3, 3.4 lub 3.5 i związki przedstawione w punkcie 3.2 otrzymuje się zapas bezpieczeństwa w postaci funkcji zmiennych bazowych

$$Z = \sum_{p=1}^m Z^j(k_1, \dots, k_n) \cdot F_p. \quad (3.6.4)$$

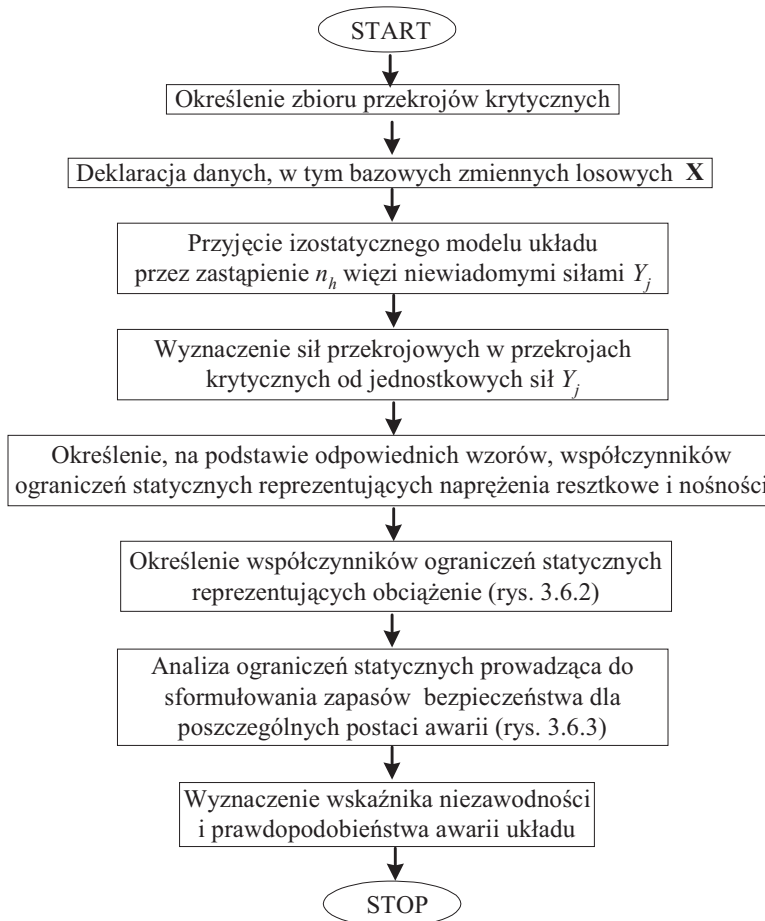
Na rysunku 3.6.1 przedstawiono schemat blokowy algorytmu oceny bezpieczeństwa konstrukcji. Zasadniczymi elementami tego algorytmu są: określanie elementów ograniczeń statycznych teorii przystosowania w ujęciu programowania liniowego, określanie zapasów bezpieczeństwa względem poszczególnych postaci awarii i określanie wskaźników bezpieczeństwa. Jako procedury wydzielono określanie elementów macierzy reprezentujących obciążenie w ograniczeniach statycznych przystosowania (schemat blokowy na rys. 3.6.2), określanie zapasów bezpieczeństwa względem poszczególnych postaci awarii (schemat blokowy na rys. 3.6.3) i wyznaczanie wskaźników niezawodności, które może być wykonane przy użyciu algorytmów FORM lub SORM lub też z zastosowaniem algorytmu iteracyjnego zaproponowanego w punkcie 4.9.

Jest oczywiste, że przedstawiony algorytm może być wykorzystywany jako procedura numerycznego generowania zapasu bezpieczeństwa czy określania charakterystyk probabilistycznych parametrów odpowiedzi konstrukcji z zastosowaniem na przykład metod symulacyjnych, powierzchni odpowiedzi, czy metod linearyzacyjnych.

Algorytm może też być wykorzystywany w wersjach uproszczonych polegających na pomijaniu losowego charakteru niektórych parametrów na wszystkich etapach obliczeń lub na niektórych etapach obliczeń. Na przykład jak wynika z obliczeń wykona-

nych przez autora, wpływ losowego charakteru zmiennych dualnych może być pominięty. Istotne uproszczenie analizy można by uzyskać, pomijając wpływ losowego charakteru parametrów charakteryzujących konstrukcję na etapie wyznaczania „sprężystych” sił przekrojowych od obciążeń. Wpływ ten wydaje się w niektórych przypadkach pomijalny, zwłaszcza wpływ losowego charakteru parametrów charakteryzujących przekroje, a w mniejszym stopniu wpływ długości elementów. Wpływy te zależą od parametrów rozrzutu zmiennych bazowych i w przypadku ich pomijania musi być dokonywana ocena pomijanego wpływu, gdyż pomijanie losowego charakteru zmiennych prowadzi do oszacowań niebezpiecznych.

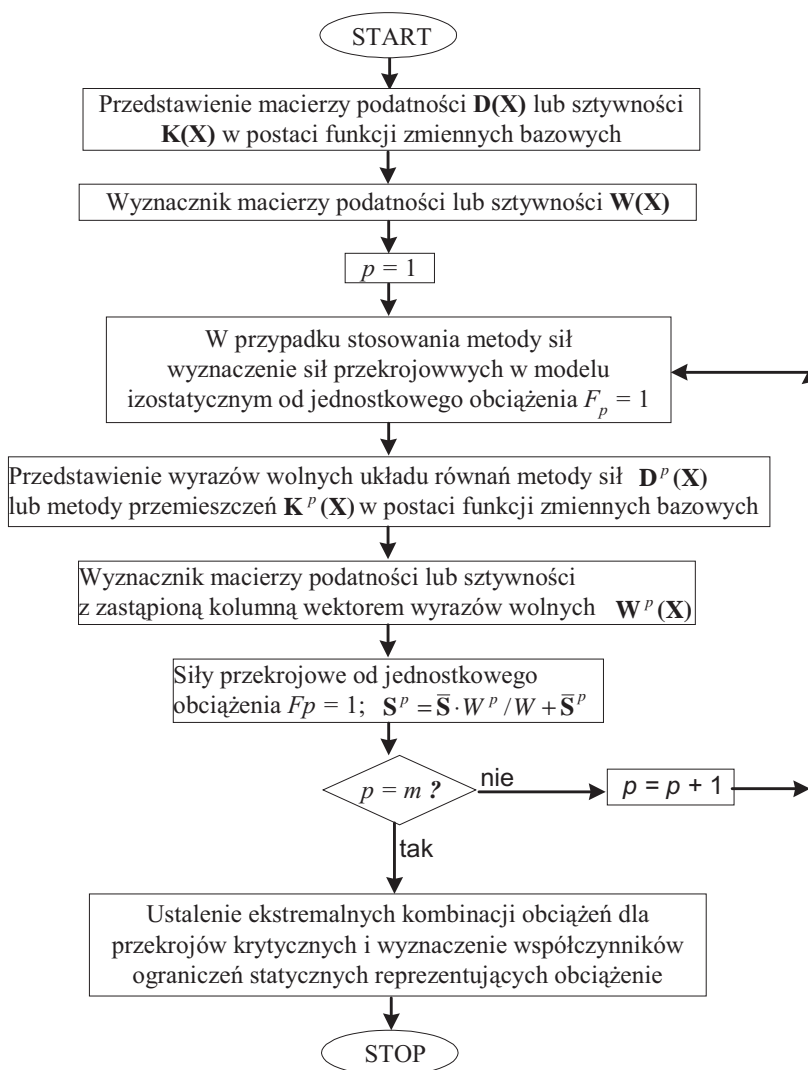
W razie dużych trudności z uzyskaniem macierzy reprezentujących obciążenie w postaci funkcji zmiennych bazowych może być stosowane podejście iteracyjne,



Rys. 3.6.1. Schemat blokowy algorytmu oceny bezpieczeństwa

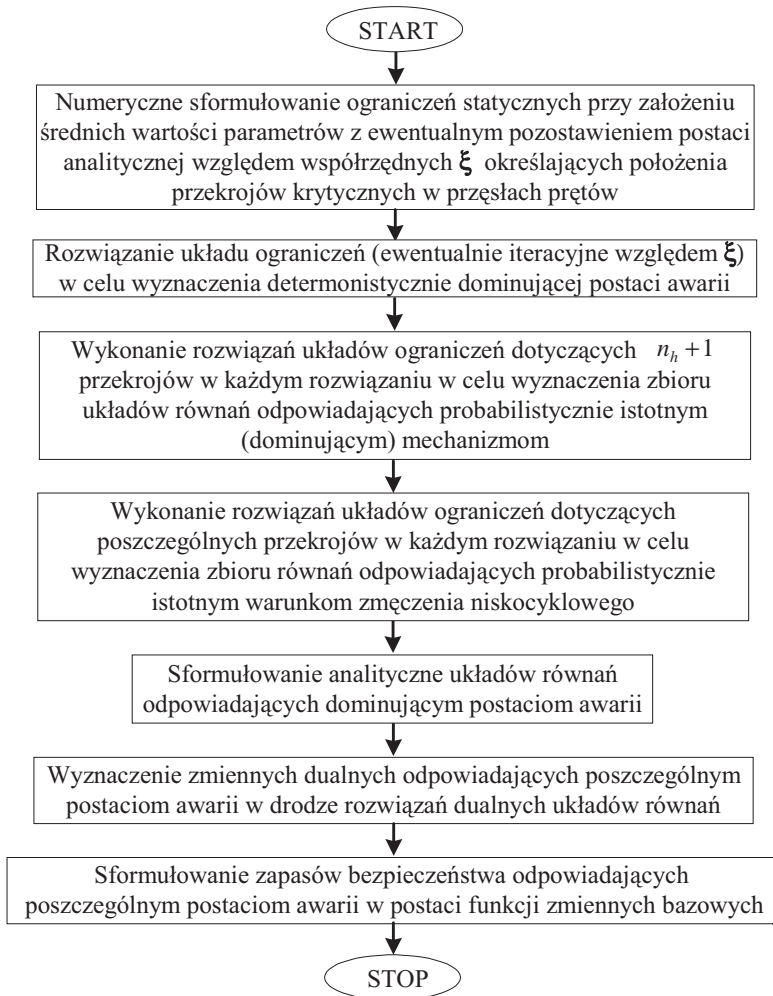
Fig. 3.6.1. Flowchart of the safety estimation algorithm

uwzględniające w każdym cyklu losowy charakter tylko niektórych zmiennych (często bardzo niewielu) w połączeniu z iteracyjnym określaniem wskaźnika niezawodności. Propozycja takiego wyznaczania wskaźnika niezawodności została przedstawiona w punkcie 4.9.



Rys. 3.6.2. Schemat blokowy algorytmu wyznaczania współczynników ograniczeń statycznych reprezentujących obciążenie

Fig. 3.6.2. Flowchart of the algorithm for determining the coefficients of static constraints representing load



Rys. 3.6.3. Schemat blokowy określania zapasu bezpieczeństwa na podstawie sformułowania ograniczeń statycznych teorii przystosowania w ujęciu programowania liniowego

Fig. 3.6.3. Flowchart of the safety margin determination based on the formulation of the static constraints of the shakedown in terms of linear programming

4. Podstawowe miary i metody oceny bezpieczeństwa

4.1. Wstęp

Literatura dotycząca oceny niezawodności konstrukcji jest bogata. Pierwsze prace z zakresu bezpieczeństwa konstrukcji wykorzystujące rachunek prawdopodobieństwa pojawiły się kilkadziesiąt lat temu. W Polsce pionierem w tym zakresie był Wierzbicki [189, 190]. Pierwsze propozycje procedur obliczeniowych służących obliczeniom współczynników bezpieczeństwa, a w szczególności podejście linearyzacyjne przedstawili Rżanicyn [153, 154, 155] i Levi [94, 95, 96]. Rżanicyn proponował linearyzację zapasu bezpieczeństwa poprzez rozwinięcie tej funkcji w szereg Taylora wokół wartości oczekiwanych, a Levi wokół punktu na hiperpowierzchni granicznej.

Miarami niezawodności i algorytmami ich obliczania zajmowali się Freudenthal [51], który wykorzystywał linearyzację proponowane przez Rżanicyna i Leviego, Cornell [28, 29, 30] oraz Ang i Cornell [2], którzy jako miarę niezawodności proponują wskaźnik niezawodności obliczany na podstawie wartości oczekiwanych i wariancji zmiennych losowych, i przedstawiają procedury jego obliczania wykorzystujące linearyzację proponowaną przez Rżanicyna.

Fundamentalne znaczenie w zakresie rozwoju miar niezawodności ma praca Hasofera i Linda [59] oraz prace Linda [97, 98], w których zaproponowano niezmienniczy wskaźnik niezawodności wykorzystujący linearyzację Leviego i podano sposoby jego obliczania.

Zastosowanie przez Rackwita i Fiesslera [147] transformacji Rosenblatta [148] dowolnych zmiennych losowych na normalne standaryzowane zmienne losowe umożliwiło powiązanie wskaźnika niezawodności Hasofera–Linda z prawdopodobieństwem awarii.

Prace Ditlevsena [36, 37], Fiesslera, Neumanna i Rackwita [48], Chena i Linda [24], Breitunga [19], Hohenbichlera i współautorów [67, 68, 69], Abdo i Rackwita [1], Sindla i współautorów [167] doprowadziły do opracowania metod FORM (First Order Reliability Method) i SORM (Second Order Reliability Method), które w powiązaniu z transformacją zmiennych losowych na zmienne normalne standaryzowane są obecnie najpopularniejszymi numerycznymi metodami szacowania wartości wskaźnika Hasofera–Linda (i prawdopodobieństwa awarii). Należy podkreślić, że zastosowanie metod FORM i SORM wymaga znajomości warunku (względnie warunków) granicznego w postaci funkcji zmiennych bazowych. Metody te realizują ostatni etap analizy bez-

pieczeństwa, to jest wyznaczanie wskaźnika niezawodności, gdy znana jest funkcja graniczna.

Oddzielny problem stanowi wyznaczanie funkcji granicznych. Stosowane są różne podejścia, na ogół numeryczne. Metoda powierzchni odpowiedzi (Myers [119], Myers i Montgomery [120]) pozwala na aproksymację funkcji granicznej funkcją analityczną, gdy znany jest zbiór wartości powierzchni granicznej. Stosowane tu mogą być różne metody aproksymacyjne, w tym regresja liniowa lub regresja nieliniowa. Metoda powierzchni odpowiedzi z wykorzystaniem statycznych warunków teorii przystosowania i regresji liniowej została dość szczegółowo przedstawiona w pracy Knabela [78]. Stosowane też są metody oparte na metodzie elementów skończonych i wykorzystujące metody symulacyjne, realizujące cały proces analizy w jednym etapie, dając w wyniku prawdopodobieństwo awarii. Może też być stosowane podejście polegające na analitycznej aproksymacji funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zapasu bezpieczeństwa i na wyznaczaniu na tej podstawie prawdopodobieństwa awarii (Puła [144]).

Inne podejście stanowią metody, w których stosuje się rozwijanie macierzy sztywności (podatności) i wyrazów wolnych w szeregi pozwalające na określanie momentów probabilistycznych odpowiedzi konstrukcji, a następnie na wyznaczanie wskaźników niewymagających znajomości rozkładów zmiennych na przykład wskaźnik Cornella. Jest to metoda perturbacyjna (Hisada i Nakagiri [64, 65]) i metoda wykorzystująca rozwinięcie macierzy sztywności lub podatności w szereg Neumanna (Yamazaki i współautorzy [194]).

Z opracowań monograficznych dotyczących oceny niezawodności można przykładowo wymienić prace: Ben Haima [9], Biegusa [11], Bołotina [16, 17], Ditlevsena [37], Ditlevsena i Madsena [39], Eimera [43], Elishakoffa [44], Madsena, Krenka i Linda [100], Murzewskiego [117, 118], Melchersa [113], Nowaka i Collinsa [127], Toft-Christensena i Bakera [186], Toft-Christensena i Murotsu [187], Śniadego [170], Wolińskiego i Wróbla [191] i pracę zbiorową pod redakcją Sundarajana [169].

Większość z wymienionych prac, poza rozdziałami poświęconymi teorii niezawodności, zawiera też rozdziały dotyczące oceny bezpieczeństwa konstrukcji w aspekcie teorii nośności granicznej. W tym zakresie na uwagę zasługują też prace: Kowala i Zubrzyckiego [85], gdzie przedstawiono związki pozwalające na obliczanie prawdopodobieństwa awarii dla różnych konstrukcji, jednak przy założeniu niezależności probabilistycznej zmiennych opisujących nośności graniczne elementów, Kowala [84], Kopycińskiego i Kowala [83] oraz Dziubdzieli i współautorów [42] gdzie zakładając, że nośności wszystkich elementów są zmiennymi normalnymi, niezależnymi przedstawiono propozycję oszacowań bezpieczeństwa konstrukcji odpowiednio w przypadku systemu równoległego oraz gdy dwa lub trzy przeguby plastyczne są wspólne dla różnych mechanizmów.

W przeciwieństwie do teorii nośności granicznej, teoria przystosowania nie jest popularnym narzędziem wykorzystywanym w ocenie bezpieczeństwa konstrukcji. Pierwszymi pracami na ten temat były prace Augustiego i współautorów [3, 4, 5]. Wykorzystanie programowania liniowego oraz symulacji w ocenie niezawodności ram rozpatry-

wali Corotis i Nafday [31]. Kilka prac Heitzera i Staata [60, 61] dotyczy algorytmów numerycznych oceny niezawodności konstrukcji wykorzystujących metodę elementów skończonych. Wymienić tu też należy pracę Knabela [78], w której zastosowano metodę powierzchni odpowiedzi z wykorzystaniem statycznych warunków teorii przystosowania. Można też wymienić kilkanaście prac [159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 171, 172, 174, 175, 178, 180, 181, 182, 193] dotyczących oceny bezpieczeństwa w aspekcie teorii przystosowania, których jestem współautorem. Przedstawiono w nich algorytmy wyznaczania wskaźnika niezawodności Cornella, wskaźnika niezawodności Hasofer–Linda i prawdopodobieństwa awarii. Stosowano metodę symulacyjną Monte Carlo, metody FORM i SORM oraz wyznaczanie prawdopodobieństwa awarii w drodze wyznaczania funkcji gęstości prawdopodobieństwa zapasu bezpieczeństwa i jej całkowania. Rozważania dotyczyły belek, ram i kratownic obciążonych statycznie oraz belek, rusztów belkowych, kominów z odciągami i szyn obciążonych dynamicznie.

4.2. Prawdopodobieństwo awarii

Często stosowaną probabilistyczną miarą bezpieczeństwa jest prawdopodobieństwo wystąpienia awarii zwane też zawodnością lub awaryjnością

$$p_f = P[Z(\mathbf{X}) \leq 0] = 1 - P[Z(\mathbf{X}) > 0] = 1 - p_r = \int_{-\infty}^0 f_Z(z) \cdot dz, \quad (4.2.1)$$

gdzie: $P[Z(\mathbf{X}) \leq 0]$ – prawdopodobieństwo wystąpienia stanów niebezpiecznych,
 $f_Z(z)$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu zapasu bezpieczeństwa.

Bezpośrednie obliczanie prawdopodobieństwa awarii na podstawie związku (4.2.1) jest możliwe tylko dla małych zadań, gdyż wymaga wyznaczenia funkcji $f_Z(z)$, co analitycznie jest trudne, a numerycznie utrudnione przez fakt, że wymaga stosowania dużych dokładności obliczeń, gdyż o prawdopodobieństwie awarii decydują tzw. ogony rozkładów prawdopodobieństwa, czyli bardzo małe wartości.

W ocenie niezawodności zamiast prawdopodobieństwa awarii stosowany jest często jako miara niezawodności wskaźnik niezawodności β związany z prawdopodobieństwem awarii zależnością $\beta = -\Phi_0(p_f)$. Stąd prawdopodobieństwo awarii może być wyznaczone, po obliczeniu wskaźnika β , na podstawie zależności odwrotnej $p_f = -\Phi_0(-\beta)$ (gdzie $\Phi_0(\cdot)$ – dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego). Maksymalne dopuszczalne prawdopodobieństwa awarii i odpowiadające im minimalne wartości wskaźników β zależą od skutków ewentualnej awarii obiektu (w tym zagrożenia życia ludzi) i względnych kosztów zapewnienia niezawodności. Norma PN-ISO 2394:2000 „Ogólne zasady niezawodności konstrukcji budowlanych” sugeruje przyjmowanie jako minimalnych następujących wartości wskaźników β :

- w stanach granicznych użyteczności $\beta = 0$ dla stanów odwracalnych,
 $\beta = 1,5$ dla stanów nieodwracalnych,
- w stanach granicznych zmęczenia $\beta = 2,3$ do $3,1$ zależnie o możliwości kontroli,
- w stanach granicznych nośności $\beta = 3,1$ do $4,3$ (tabela 4.2.1).

Tabela 4.2.1. Sugerowane przez PN-ISO 2394:2000 minimalne wartości wskaźnika niezawodności β dla stanów granicznych nośności

Table. 4.2.1. Minimal values of the reliability index β for the limit states of the load capacity suggested by the PN-ISO 2394:2000 standard

Relatywny koszt zapewnienia bezpieczeństwa	Skutki zniszczenia			
	małe	odczuwalne	umiarkowane	wielkie
wysoki				3,1
umiarkowany			3,1	3,8
niski		3,1	3,8	4,3

W tabeli 4.2.2 podano prawdopodobieństwa awarii odpowiadające poszczególnym wartościom wskaźników niezawodności.

Tablica 4.2.2. Prawdopodobieństwa awarii odpowiadające określonym wskaźnikom β

Table. 4.2.2. Probability of failure occurring corresponding to the given reliability indices β

β	0	1,3	1,5	2,3	3,1	3,8	4,3
p_f	0,5	$0,968 \cdot 10^{-1}$	$0,668 \cdot 10^{-1}$	$1,071 \cdot 10^{-2}$	$0,968 \cdot 10^{-3}$	$0,724 \cdot 10^{-4}$	$0,854 \cdot 10^{-5}$

4.3. Współczynnik bezpieczeństwa

Jeśli zapas bezpieczeństwa można przedstawić w postaci

$$Z(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}_R) - S(\mathbf{X}_S), \quad (4.3.1)$$

gdzie: $\mathbf{X}_R = (X_{R_1}, \dots, X_{R_r})^T \in \mathbf{X}$ – wektor zmiennych losowych określających nośność konstrukcji,

$\mathbf{X}_S = (X_{S_1}, \dots, X_{S_s})^T \in \mathbf{X}$ – wektor zmiennych losowych określający obciążenie,
 $s + r \geq n, n$ – łączna liczba zmiennych bazowych,

to losowy współczynnik bezpieczeństwa określony jest zależnością

$$\gamma(\mathbf{X}) = \frac{R(\mathbf{X}_R)}{S(\mathbf{X}_S)}. \quad (4.3.2)$$

Ponieważ jest on zmienną losową, więc miarą bezpieczeństwa może być prawdopodobieństwo awarii

$$p_f = P[\gamma(\mathbf{X}) \leq 1]. \quad (4.3.3)$$

W praktyce współczynnik bezpieczeństwa jest stosowany jako miara bezpieczeństwa w metodach deterministycznych i półprobabilistycznych, gdzie licznik i mianownik związku (4.3.2) są liczbami rozumianymi jako określone kwantyle.

4.4. Wskaźniki niezawodności

4.4.1. Wskaźnik niezawodności Cornella

Cornell [29, 30] zaproponował jako miarę niezawodności wskaźnik niezawodności β_C równy odwrotności współczynnika zmienności zapasu bezpieczeństwa

$$\beta_C = \frac{1}{V_Z} = \frac{E[Z]}{\sigma_Z}, \quad (4.4.1)$$

gdzie: $E[Z]$ – wartość oczekiwana zapasu bezpieczeństwa,
 σ_Z – odchylenie standardowe zapasu bezpieczeństwa,
 V_Z – współczynnik zmienności.

Przedstawiając zapas bezpieczeństwa według (4.3.1), wskaźnik Cornella można przedstawić w postaci

$$\beta_C = \frac{E[R] - E[S]}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho(R, S) \cdot \sigma_R \cdot \sigma_S}}, \quad (4.4.2)$$

gdzie: $E[R]$, $E[S]$ – wartości oczekiwane zmiennych R i S ,
 σ_R i σ_S – odchylenia standardowe tych zmiennych,
 $\sigma[R, S]$ – współczynnik korelacji tych zmiennych.

Stosunkowo prosto można obliczyć przedstawiony wskaźnik w przypadku, gdy zapas bezpieczeństwa jest funkcją liniową. Gdy funkcja ta nie jest liniowa, wówczas Cornell proponuje rozwinięcie w szereg Taylora wokół wartości oczekiwanych $E[X] = (E[X_1], \dots, E[X_n])$ w przestrzeni bazowych zmiennych losowych z dokładnością do wyrazów liniowych (linearyzacja wg Rżanicyna)

$$Z(X) = Z(E[X]) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial Z(X_1, \dots, X_n)}{\partial X_i} \right|_{X_i=E[X_i]} (X_i - E[X_i]). \quad (4.4.3)$$

Stąd wartość oczekiwana zapasu bezpieczeństwa

$$E[Z(X)] = E[Z(X_1, \dots, X_n)] = Z(E[X_1], \dots, E[X_n]) = Z(E[X]) \quad (4.4.4)$$

oraz wariancja

$$\text{var}[Z] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial Z(X_1, \dots, X_n)}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial Z(X_1, \dots, X_n)}{\partial X_j} \Bigg|_{X_i=E[X_i]; X_j=E[X_j]} \cdot \text{cov}[X_i, X_j] \quad (4.4.5)$$

gdzie $\text{cov}[X_i, X_j]$ – kowariancja zmiennych X_i oraz X_j .

Określenia wskaźnika niezawodności Cornella dotyczą prace [160, 172, 176, 177, 180, 181], których jestem współautorem.

4.4.2. Wskaźnik niezawodności Rosenblutha–Esteve

Jeśli współczynnik bezpieczeństwa przedstawić w postaci logarytmicznej

$$\ln(\gamma(\mathbf{X})) = \ln\left(\frac{R(\mathbf{X}\mathbf{R})}{S(\mathbf{X}\mathbf{S})}\right), \quad (4.4.6)$$

to warunek graniczny może być przedstawiony w postaci

$$\ln(\gamma(\mathbf{X})) = \ln\left(\frac{R(\mathbf{X}\mathbf{R})}{S(\mathbf{X}\mathbf{S})}\right) = \ln(R(\mathbf{X}\mathbf{R})) - \ln(S(\mathbf{X}\mathbf{S})) = \ln(1) = 0. \quad (4.4.7)$$

Wskaźnik niezawodności Cornella przyjmuje postać zaproponowaną przez Rosenblutha i Esteve [149]:

$$\beta_{RE} = \frac{E\left[\ln\left(\frac{R}{S}\right)\right]}{\sqrt{\text{var}\left[\ln\left(\frac{R}{S}\right)\right]}} = \frac{E[\ln(R)] - E[\ln(S)]}{\sqrt{\text{var}[\ln(R)] + \text{var}[\ln(S)] - 2\text{cov}[\ln(R), \ln(S)]}}. \quad (4.4.8)$$

Po zlinearyzowaniu funkcji $\ln\left(\frac{R(\mathbf{X}\mathbf{R})}{S(\mathbf{X}\mathbf{S})}\right)$ wokół wartości oczekiwanych $E[R(\mathbf{X}\mathbf{R})]$ i $E[S(\mathbf{X}\mathbf{S})]$ i podstawieniu do (4.4.8) wskaźnik Rosenblutha–Esteve przyjmuje postać

$$\beta_{RE} = \frac{\ln(E[R]) - \ln(E[S])}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}}, \quad (4.4.9)$$

gdzie $V_R = \frac{\sigma_R}{E[R]}$ i $V_S = \frac{\sigma_S}{E[S]}$ współczynniki zmienności zmiennych R i S .

4.4.3. Wskaźnik niezawodności Hasofera–Linda

Do spełnienia postulatu niezmienniczości wskaźnika niezawodności potrzeba, aby punkt, w którym dokonywana jest linearyzacja, znajdował się na powierzchni stanu granicznego. Linearyzację taką zaproponował Levi [94, 95], a twierdzenie to udowodnili i zaproponowali algorytm wyznaczania wskaźnika niezawodności Hasofer i Lind [59].

Mając macierz \mathbf{C}_X kowariancji zmiennych bazowych \mathbf{X}

$$\mathbf{C}_X = \text{cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}] = E\left[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]) \cdot (\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T\right], \quad (4.4.10)$$

można wyznaczyć macierz \mathbf{A} transformacji zmiennych bazowych w zmienne nieskorelowane na podstawie związku

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_X \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}. \quad (4.4.11)$$

Transformacja

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]) \quad (4.4.12)$$

przekształca zmienne bazowe \mathbf{X} w zmienne nieskorelowane \mathbf{Y} o wartości oczekiwanej $E[\mathbf{Y}] = 0$. Transformacja odwrotna do (4.4.12) ma postać

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Y} + E[\mathbf{X}]. \quad (4.4.13)$$

Warunek graniczny $Z(\mathbf{X}) = 0$ po uwzględnieniu transformacji zmiennych przyjmuje postać

$$G(\mathbf{Y}) = Z(\mathbf{X}(\mathbf{Y})) = Z(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Y} + E[\mathbf{X}]) = 0. \quad (4.4.14)$$

Wskaźnik Hasofera–Linda określony jest zależnością

$$\beta_{HL} = \min_{\mathbf{y} \in (G(\mathbf{y})=0)} \sqrt{\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{y}}. \quad (4.4.15)$$

Punkt \mathbf{y}^* realizujący minimum w związku (4.4.15) nazywany jest punktem projektowym lub obliczeniowym.

Jeśli dokonać transformacji zmiennych bazowych \mathbf{X} w zmienne \mathbf{Y} tak, by zmienne \mathbf{Y} były standaryzowanymi zmiennymi normalnymi, to wskaźnik Hasofera–Linda jest równy najmniejszej odległości powierzchni granicznej (odległości punktu projektowego) od początku układu współrzędnych. Jeśli dodatkowo powierzchnia graniczna jest hiperpłaszczyzną, to prawdopodobieństwo awarii wyraża się poprzez wskaźnik niezawodności zależnością

$$p_f = \Phi_0(-\beta) = 0,5 \cdot \left(1 + \text{erf}\left(\frac{-\beta}{\sqrt{2}}\right)\right), \quad (4.4.16)$$

Podstawowym zagadnieniem w poszukiwaniu wskaźnika Hasofer–Linda β jest wyznaczenie położenia punktu projektowego \mathbf{y}^* realizującego minimum odległości hiperpowierzchni granicznej od początku układu współrzędnych.

W metodzie FORM powierzchnia graniczna $Z_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) = 0$ aproksymowana jest przez hiperpłaszczyznę, określoną równaniem

$$K(\mathbf{Y}) = \beta - \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{Y}, \quad (4.5.4)$$

styczną do powierzchni granicznej w punkcie projektowym \mathbf{y}^* ,

gdzie $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$ jest wektorem kosinusów kierunkowych wektora prostopadłego do powierzchni $Z(\mathbf{X}) = 0$ w punkcie obliczeniowym

$$\alpha_i = - \frac{\left. \frac{\partial Z_{\mathbf{Y}}(y)}{\partial y_i} \right|_{y=\mathbf{y}^*}}{\sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial Z_{\mathbf{Y}}(y)}{\partial y_i} \right|_{y=\mathbf{y}^*} \right)^2}. \quad (4.5.5)$$

Aproksymacja (4.5.4) prowadzi do przybliżonego wzoru (4.4.16) na prawdopodobieństwo awarii.

Do poszukiwania położenia punktu projektowego stosowane jest podejście iteracyjne oparte na zależności zaproponowanej przez Hasofer i Linda [59]

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^{(k+1)} = \frac{\nabla Z(\mathbf{y}^{(k)})}{\|\nabla Z(\mathbf{y}^{(k)})\|^2} \cdot (\nabla Z^T(\mathbf{y}^{(k)}) \cdot \mathbf{y}^{(k)} - Z^T(\mathbf{y}^{(k)})) \quad (4.5.6)$$

kontynuowane do spełnienia warunków

$$\left| y_i^{(k+1)} - y_i^{(k)} \right| \leq \varepsilon \text{ dla wszystkich } i \quad \text{oraz} \quad Z(\mathbf{x}^*) \leq \varepsilon, \quad (4.5.7)$$

gdzie: ε – założona dokładność wyznaczenia punktu projektowego,

$$\mathbf{x}^* = A^{-1}(\mathbf{y}^*).$$

Przedstawiony algorytm jest efektywny, gdy powierzchnia graniczna jest niezbyt odległa od hiperpłaszczyzny. W przypadku silnej nieliniowości powierzchni granicznej algorytm jest słabo zbieżny lub może być niezbieżny. Tę wadę procedury częściowo usuwa zaproponowana przez Abdo i Rakwitz [1] redukcja długości kroku.

Istotą metody SORM jest aproksymacja powierzchni granicznej w punkcie projektowym hiperparaboloidą. Wykorzystuje się tu punkt projektowy \mathbf{y}^* wyznaczony według FORM. Po dwukrotnej transformacji zmiennych i aproksymacji parabolicznej otrzymuje się warunek graniczny w postaci

$$Z_{\mathbf{W}}(\mathbf{W}) = -\beta + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i \cdot w_i^2 = 0, \quad (4.5.8)$$

gdzie \mathbf{W} – wektor zmiennych losowych \mathbf{Y} po dwukrotnej transformacji,
 κ_i – krzywizny główne powierzchni aproksymującej.

Oszacowanie prawdopodobieństwa awarii dla dużych β wynika z udowodnionej przez Breitunga [19] zależności

$$p_f = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \Phi_0(-\beta) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \beta \cdot \kappa_i)^{-1/2}. \quad (4.5.9)$$

Dokładniejszą formułę podali Hochenbichler i Rackwitz [69]

$$p_f \approx \Phi_0(-\beta) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\varphi_0(-\beta)}{\Phi_0(-\beta)} \cdot \kappa_i \right), \quad (4.5.10)$$

gdzie $\Phi_0(-\beta)$, $\varphi_0(-\beta)$ – dystrybuanta i funkcja gęstości prawdopodobieństwa standaryzowanego rozkładu normalnego.

Modyfikacja prawdopodobieństwa awarii pociąga za sobą zmianę wskaźnika niezawodności, który wyznacza się na podstawie wzoru

$$\beta_{\text{SORM}} = -\Phi_0^{-1}(p_f). \quad (4.5.11)$$

Oszacowania (4.5.9) i (4.5.10) są zadowalające, gdy β jest duże ($\beta > 3$). Nie stanowi to istotnego mankamentu w ocenie bezpieczeństwa, gdyż zalecane w tym zakresie wartości wskaźników niezawodności nie są mniejsze od 3.1 (tabela 4.2.1).

4.6. Metody symulacyjne

4.6.1. Metoda Monte Carlo

Podstawę obliczania wartości miar niezawodności metodami symulacyjnymi stanowi metoda Monte Carlo [152, 199], która polega na „próbkowaniu” przez komputer wektorów z rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego \mathbf{X} za pomocą numerycznego generatora liczb pseudolosowych i obliczaniu przybliżonej wartości prawdopodobieństwa awarii według estymatora J_1

$$p_f \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I(Z(x_j) \leq 0) = J_1, \quad (4.6.1)$$

gdzie $I[Z(\mathbf{X}) < 0]$ – funkcja charakterystyczna dwupunktowa określona wzorem

$$I[Z(\mathbf{X}) \leq 0] = \begin{cases} 1, & \text{gdy } Z(\mathbf{X}) \leq 0, \\ 0, & \text{gdy } Z(\mathbf{X}) > 0. \end{cases} \quad (4.6.2)$$

Wariancja estymatora prawdopodobieństwa awarii określona jest zależnością

$$\text{var}[J_1] = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^N \text{var}[I(Z(x_j) \leq 0)] = \frac{p_f \cdot (1 - p_f)}{N}. \quad (4.6.3)$$

Wskaźnik niezawodności β odpowiadający prawdopodobieństwu awarii p_f określony jest zależnością (4.4.17).

Dokładność wyniku można oszacować na podstawie wzoru

$$P[J_1 - p_f \geq \varepsilon] < \delta, \quad (4.6.4)$$

w którym: $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$,

J_1 – estymator p_f odpowiadający $N = N_0 = 2^{j_0-1}$ [138],
 j_0 – najmniejsza liczba spełniająca zależności

$$\varepsilon^{-2} \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{2j}{2^{2j}} < \delta \quad \text{i} \quad \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{2j}{2^{2j}} = \frac{8}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^{j_0} (3j_0 + 1).$$

Ogólnie metoda Monte Carlo wymaga bardzo dużego nakładu obliczeniowego i jest czasochłonna nawet dla bardzo sprawnych komputerów.

4.6.2. Metoda symulacji ważonej

Zwiększenie zbieżności metody Monte Carlo można uzyskać w drodze jej modyfikacji w taki sposób, by uzyskać redukcję wariancji estymatora J_1 .

Jednym ze stosowanych podejść jest symulacja ważona (*importance sampling technique*). Technika ta zaproponowana przez Kahna i Marshalla [74] polega na wprowadzeniu nowego wektora losowego \mathbf{W} o gęstości prawdopodobieństwa $k_{\mathbf{W}}(\mathbf{w})$ tak dobranego, by wariancja prawdopodobieństwa awarii uległa stosownej redukcji. Estymator prawdopodobieństwa awarii określony jest tu zależnością

$$p_f \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [I(Z(\mathbf{w}_j) \leq 0)] \cdot \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{w}_j)}{k_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}_j)} = J_2. \quad (4.6.5)$$

Wariancję tego estymatora określa zależność

$$\text{var}[J_2] = \frac{1}{N} \left(\int \left(I(Z(\mathbf{w}_j) \leq 0) \cdot \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{w}_j)}{k_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}_j)} \right)^2 \cdot k_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}) \cdot d\mathbf{w} - p_f^2 \right). \quad (4.6.6)$$

Technika ta daje bardzo dobre efekty w połączeniu z metodą FORM lub SORM. Korzystając z rozwiązania uzyskanego tą metodą, przyjmuje się gęstość prawdopodobieństwa $k_{\mathbf{w}}(\mathbf{w})$ w postaci skoncentrowanej wokół punktu projektowego \mathbf{y}^* . Melchers [111, 112, 113] zauważył, że dokonując transformacji zmiennych bazowych w standaryzowane zmienne normalne, wzór (4.6.5) można przedstawić w postaci

$$p_f \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I(G(\mathbf{Y}_j) \leq 0) \cdot \frac{\varphi_n(\mathbf{Y}_j)}{k_{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}_j)} = J_3, \quad (4.6.7)$$

gdzie: φ_n – n -wymiarowa normalna gęstość prawdopodobieństwa standaryzowanych zmiennych losowych,

\mathbf{Y} – wektor standaryzowanych zmiennych losowych nieskorelowanych,

$G(\mathbf{Y}_j)$ – funkcja graniczna w przestrzeni standaryzowanych normalnych zmiennych losowych.

Proponuje on przyjmowanie jako $k_{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}_j)$ n -wymiarowej gęstości rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej w punkcie obliczeniowym \mathbf{y}^* .

Hohenbichler i Rackwitz [69] oraz Fujita i Rackwitz [49] zaproponowali natomiast wykorzystanie symulacji do wyznaczenia współczynnika (mnożnika) C poprawiającego dokładność wyników uzyskanych metodą FORM lub SORM

$$C = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\Phi_0(-\lambda(\mathbf{y}_j)) \cdot \varphi_{n-1}(\mathbf{y}_j)}{p_f \cdot \psi_{n-1}(\mathbf{y}_j)}, \quad (4.6.8)$$

gdzie: \mathbf{y}_j – punkt wygenerowany z rozkładu o gęstości ψ_{n-1} ,

ψ_{n-1} – $(n-1)$ -wymiarowa gęstość rozkładu normalnego stosowana jako gęstość próbkowania,

φ_{n-1} – $(n-1)$ -wymiarowa gęstość standaryzowanego rozkładu normalnego,

Φ_0 – dystrybuanta jednowymiarowego standaryzowanego rozkładu normalnego,

p_f – prawdopodobieństwo awarii wg FORM lub SORM,

$\lambda(\mathbf{y}_j)$ – odległość rzutu punktu \mathbf{y}_j na powierzchnię stanu granicznego w kierunku prostopadłym do hiperpłaszczyzny stycznej w punkcie projektowym \mathbf{y}^* od hiperpłaszczyzny równoległej do hiperpłaszczyzny stycznej i przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

4.6.3. Metoda warunkowej wartości oczekiwanej

Istotnym elementem metody warunkowej wartości oczekiwanej jest podział zmiennych bazowych $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ na dwie grupy: zmienne próbkowane w procesie symulacji $\mathbf{X}' = (X'_1, X'_2, \dots, X'_n)$ i zmienne pozostałe $\mathbf{X}'' = (X''_1, X''_2, \dots, X''_n)$ tak, że $\mathbf{X} = (\mathbf{X}', \mathbf{X}'')$, $k + l = n$. Podział ten musi być dokonany w taki sposób, aby uprościć oszacowanie prawdopodobieństwa awarii i jednocześnie istotnie zredukować wymiar zadania.

Metodę tę zaadaptowali do obliczeń niezawodności konstrukcji Ayyub i współautorzy [6, 7]), Karamachandani i Cornell [77].

Prawdopodobieństwo awarii w tym przypadku może być zapisane w postaci

$$p_f = \int \left(\int_{\mathbf{x}'' : Z(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \leq 0} f_{\mathbf{X}'' | \mathbf{X}' = \mathbf{x}'}(\mathbf{x}'') d\mathbf{x}'' \right) \cdot f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (4.6.9)$$

gdzie $f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}')$ – gęstość rozkładu wektora losowego \mathbf{X}' ,

$f_{\mathbf{X}'' | \mathbf{X}' = \mathbf{x}'}$ – gęstość warunkowa rozkładu wektora losowego \mathbf{X}'' pod warunkiem $\mathbf{X}' = \mathbf{x}'$.

Uwzględniając, że

$$\int_{\mathbf{x}'' : Z(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \leq 0} f_{\mathbf{X}'' | \mathbf{X}' = \mathbf{x}'}(\mathbf{x}'') d\mathbf{x}'' = p_f |_{\mathbf{X}' = \mathbf{x}'}, \quad (4.6.10)$$

wzór (4.6.9) można przedstawić w postaci

$$p_f = \int p_f |_{\mathbf{X}' = \mathbf{x}'} \cdot f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (4.6.11)$$

Estymator prawdopodobieństwa awarii ma postać

$$p_f \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_f |_{\mathbf{X}' = \mathbf{x}'} = J_4, \quad (4.6.12)$$

gdzie wektory \mathbf{x}' są generowane z rozkładu o gęstości $f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}')$, a prawdopodobieństwo warunkowe $p_f |_{\mathbf{X}' = \mathbf{x}'}$ musi być oszacowane inną metodą, na przykład FORM lub SORM.

4.6.4. Metoda adaptowanej warunkowej wartości oczekiwanej

Metoda adaptowanej warunkowej wartości oczekiwanej jest połączeniem metody warunkowej wartości oczekiwanej i metody symulacji ważonej. Karamachandani i współautorzy [76, 77] zaproponowali metodę redukcji wariancji wychodząc ze związku

$$p_f = \int \left(p_f |_{\mathbf{X}' = \mathbf{x}'} \cdot \frac{f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}')}{k_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}')} \right) d\mathbf{x}', \quad (4.6.13)$$

któremu odpowiada nieobciążony estymator prawdopodobieństwa awarii

$$p_f \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_f |_{\mathbf{X}' = \mathbf{x}'} \cdot \frac{f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}'_i)}{f_{\mathbf{W}'}(\mathbf{x}'_i)}. \quad (4.6.14)$$

Za gęstość próbkowania przyjmuje się gęstość wektora zmiennych generowanych z rozkładu $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}')$ przesuniętego do punktu, w którym wyrażenie $p_{f|\mathbf{X}'=\mathbf{x}'} \cdot f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}')$ osiąga maksymalną wartość. Dobór gęstości próbkowania $k_{\mathbf{W}}$ dokonywany jest iteracyjnie podczas procesu symulacji poprzez dostosowywanie jej, co pewną określoną liczbę realizacji procesu symulacyjnego. Polega to na wyszukaniu, z uwzględnieniem wszystkich poprzednich realizacji procesu symulacyjnego, punktu, w którym wyrażenie $p_{f|\mathbf{X}'=\mathbf{x}'} \cdot f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}')$ osiąga maksimum i przesunięciu początkowej gęstości $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}')$ do tego punktu. W tym przypadku nieobciążony estymator prawdopodobieństwa awarii (4.6.14) może być zapisany w postaci

$$p_f \approx \frac{1}{N} \sum_{j=N_{j-1}+1}^M p_{f|\mathbf{X}'=\mathbf{x}'_{ij}} \frac{f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}'_{ij})}{f_{\mathbf{W}'}(\mathbf{x}'_{ij})} = J_5, \quad (4.6.15)$$

gdzie: N – liczba realizacji w procesie symulacyjnym,

j – numer funkcji gęstości próbkowania,

M – liczba adaptacji gęstości próbkowania.

Wariancję estymatora J_5 oszacowuje zależność

$$\text{var}[J_4] \approx \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=N_{j-1}+1}^M \left(p_{f|\mathbf{X}'=\mathbf{x}'_{ij}} \frac{f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}'_{ij})}{k_{\mathbf{X}'}^j(\mathbf{x}'_{ij})} \right) - J_5 \right)^2, \quad (4.6.16)$$

gdzie N_j – liczba realizacji w procesie symulacyjnym dla j -tej funkcji gęstości próbkowania.

4.6.5. Metoda symulacji kierunkowej

Metoda ta oparta jest na próbkowaniu z rozkładu jednostajnego n -wymiarowego [35] i na zależności [13, 38, 112]

$$p_f = \int_{Z(\mathbf{y}) \leq 0} \varphi_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{S^n} \int_r^\infty f_{\chi_n^2}(r^2) \cdot dr^2 \cdot d\lambda(\boldsymbol{\alpha}) = \int_{S^n} \left(1 - F_{\chi_n^2}(r^2(\boldsymbol{\alpha})) \right) d\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \quad (4.6.17)$$

gdzie: \mathbf{y} – wektor standaryzowanych normalnych niezależnych zmiennych losowych,

$f_{\chi_n^2}, F_{\chi_n^2}$ – gęstość prawdopodobieństwa i dystrybuanta rozkładu chi-kwadrat o n stopniach swobody,

S^n – sfera jednostkowa,

$\lambda(\boldsymbol{\alpha})$ – jednostajna miara probabilistyczna,

$r(\boldsymbol{\alpha})$ – odległość od początku układu współrzędnych do powierzchni granicznej $Z(\mathbf{y}) = 0$ w kierunku jednostkowego wektora $\boldsymbol{\alpha}$.

Ze związków (4.6.17) wynika nieobciążony estymator prawdopodobieństwa awarii

$$p_f \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(1 - F_{\chi_n^2}(r^2(\mathbf{a}_i)) \right) = J_6. \quad (4.6.18)$$

4.7. Metody aproksymacyjne

4.7.1. Metoda powierzchni odpowiedzi

Metoda ta została szczegółowo przedstawiona w monografiach Myersa [119] i Myersa i Montgomery'ego [120]. Do analizy niezawodności konstrukcji metodę tę adaptowali Rackwitz [146], Wong [192], Faravelli [47] i inni. Ideę wykorzystania metody powierzchni odpowiedzi w analizie niezawodności konstrukcji według teorii przystosowania przedstawili Siemaszko, Bielawski i Knabel [158]. Polega ona na aproksymacji funkcji określonych zmiennych, gdy znany jest zbiór wartości tej funkcji wyznaczony na przykład w wyniku obliczeń. Możliwe jest wykorzystywanie różnych funkcji aproksymujących. Tu przykładowo przedstawiona zostanie aproksymacja zapasu bezpieczeństwa z wykorzystaniem funkcji regresji

$$E[Z(\mathbf{X})] = h(\mathbf{X}, \mathbf{B}) + \varepsilon, \quad (4.7.1)$$

gdzie: $h(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ – określona funkcja, której postać przyjmuje się jako założenie,
 $E[Z(\mathbf{X})]$ – wartość oczekiwana odpowiedzi,
 \mathbf{X} – wektor zmiennych bazowych o m elementach,
 \mathbf{B} – wektor szukanych parametrów funkcji regresji o k elementach,
 ε – zmienna losowa opisująca błąd estymacji funkcji $Z(\mathbf{X})$ o zerowej wartości oczekiwanej.

Mając zbiór danych $(Z_i, X_{il}), i = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, m$, zagadnienie aproksymacji sprowadza się do wyznaczenia wartości składowych wektora parametrów \mathbf{B} minimalizujących sumę kwadratów różnic wartości danych funkcji Z_i i wynikających z przyjętej aproksymacji Z_i

$$\Psi = \sum_i^n \left(Z_i - \hat{Z}_i \right)^2. \quad (4.7.2)$$

Odchylenie standardowe zmiennej losowej ε jest równe

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{\Psi_{\min}}{n - k}}. \quad (4.7.3)$$

Najbardziej rozpowszechnionymi metodami wyznaczania minimum funkcji Ψ są: metoda linearyzacji oraz metoda najszybszego spadku [104], które jednak wykazują wolną zbieżność. Efektywniejszy jest zaproponowany w pracach [45, 146] sposób polegający na aproksymacji warunku granicznego funkcją $h(\mathbf{X}, \mathbf{B}(\mathbf{X}))$ wokół punktu obliczeniowego. W tym przypadku dobre wyniki mogą być uzyskiwane po przyjęciu aproksymacji z wykorzystaniem regresji liniowej, co szczegółowo zostało przedstawione w pracy [78].

4.7.2. Aproksymacja gęstości prawdopodobieństwa zapasu bezpieczeństwa wielomianami ortogonalnymi

Aproksymacja funkcji gęstości prawdopodobieństwa zapasu bezpieczeństwa wielomianami ortogonalnymi może być przedstawiona w postaci [144]

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^n c_k \cdot \phi_k(z), \quad (4.7.4)$$

gdzie: c_k – współczynniki Fouriera,

$f_0(x)$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa skoncentrowana w przedziale $[-1, 1]$.

Przykładowo w przypadku stosowania wielomianów ortonormalnych Legendre'a

$$\phi_k(z) = \sqrt{k+0,5} \cdot P_k(z), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.7.5)$$

gdzie $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$, $P_{k+1}(z) = \frac{2 \cdot k + 1}{k + 1} \cdot z \cdot P_k(z) - \frac{k}{k + 1} \cdot P_{k-1}(z)$.

Współczynniki Fouriera mają postać

$$c_k = \sqrt{k+0,5} \cdot \sum_{i=0}^k a_i \cdot \int_{-1}^1 z^i f_0(z) dz, \quad (4.7.6)$$

gdzie a_i – współczynniki k -tego wielomianu Legendre'a określone rekurencyjnie

dla $k = 0 \rightarrow a_0 = 1$,

dla $k = 1 \rightarrow a_0 = 0, a_1 = 1$,

dla $k = 2 \rightarrow a_0 = -1/2, a_1 = 0, a_2 = 3/2$,

dla $k = 3 \rightarrow a_0 = 0, a_1 = -3/2, a_2 = 0, a_3 = 5/2$.

Czynniki

$$\int_{-1}^1 z^i \cdot f_0(z) \cdot dz \quad (4.7.7)$$

są momentami statystycznymi względem gęstości prawdopodobieństwa $f_0(z)$ i mogą być oszacowane metodami symulacyjnymi. Mogą być stosowane aproksymacje także innymi wielomianami ortogonalnymi na przykład wielomianami Czebyszewa [144].

4.8. Metody numerycznego obliczania momentów probabilistycznych

Gdy procedura generowania funkcji stanu granicznego jest procedurą numeryczną i nie daje możliwości uzyskania funkcji stanu granicznego w postaci funkcji parametrów bazowych, ocena bezpieczeństwa konstrukcji się komplikuje. Do wyznaczania momentów probabilistycznych odpowiedzi konstrukcji mogą być stosowane metody wykorzystujące rozwinięcia funkcji w szereg. Wymienić tu można metodę perturbacyjną i metodę wykorzystującą rozwinięcie macierzy sztywności w szereg Neumanna.

4.8.1. Metoda perturbacyjna

Metoda perturbacyjna do określania momentów probabilistycznych w analizie metodą elementów skończonych została zaproponowana w pracach [7, 64, 65] i innych. Wykorzystuje ona rozwinięcia elementów równań opisujących problem w szereg potęgowy względem fluktuacji jej parametrów. Dany jest układ równań metody przemieszczeń

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (4.8.1)$$

gdzie: \mathbf{K} – macierz sztywności,
 \mathbf{U} – wektor przemieszczeń,
 \mathbf{F} – wektor obciążeń.

Macierz sztywności jest funkcją wektora zmiennych losowych $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$. Rozwinięcie macierzy sztywności w szereg Taylora w otoczeniu wartości średnich względem fluktuacji $\Delta \mathbf{X} = (\Delta X_1, \dots, \Delta X_k)$ wektora \mathbf{X} ma postać

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^0 + \sum_{i=1}^k \mathbf{K}_i^1 \cdot \Delta X_i + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \mathbf{K}_{ij}^2 \cdot \Delta X_i \cdot \Delta X_j + \dots, \quad (4.8.2)$$

gdzie:

$$\mathbf{K}^0 = \mathbf{K}(E[X_1], \dots, E[X_k]), \quad \mathbf{K}_i^1 = \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \Delta X_i} \right|_{\Delta \mathbf{X}=0}, \quad \mathbf{K}_{ij}^2 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial \Delta X_i \cdot \partial \Delta X_j} \right|_{\Delta \mathbf{X}=0}. \quad (4.8.3)$$

Rozwinięcia wektorów przemieszczeń \mathbf{U} i obciążeń \mathbf{F} , które są dodatkowo funkcjami parametrów obciążeń $\mathbf{X} = (X_{k+1}, \dots, X_n)$ mają postaci analogiczne do (4.8.2)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^1 \cdot \Delta X_i + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij}^2 \cdot \Delta X_i \cdot \Delta X_j + \dots, \quad (4.8.4)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i^1 \cdot \Delta X_i + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{U}_{ij}^2 \cdot \Delta X_i \cdot \Delta X_j + \dots, \quad (4.8.5)$$

gdzie:

$$\mathbf{F}^0 = \mathbf{F}(E[X_1], \dots, E[X_n]), \quad \mathbf{F}_i^1 = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Delta X_i} \right|_{\Delta \mathbf{X}=0}, \quad \mathbf{F}_{ij}^2 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \Delta X_i \cdot \partial \Delta X_j} \right|_{\Delta \mathbf{X}=0}, \quad (4.8.6)$$

$$\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}(E[X_1], \dots, E[X_n]), \quad \mathbf{U}_i^1 = \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Delta X_i} \right|_{\Delta \mathbf{X}=0}, \quad \mathbf{U}_{ij}^2 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \Delta X_i \cdot \partial \Delta X_j} \right|_{\Delta \mathbf{X}=0}. \quad (4.8.7)$$

Po podstawieniu tych rozwinięć do (4.8.1) i porównaniu odpowiednich wyrazów rozwinięcia otrzymuje się rekurencyjny układ wzorów określających poszczególne współczynniki rozwinięcia wektora przemieszczeń

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^0 &= (\mathbf{K}^0)^{-1} \cdot \mathbf{F}^0, \\ \mathbf{U}_i^1 &= (\mathbf{K}^0)^{-1} \cdot (\mathbf{F}_i^1 - \mathbf{K}_i^1 \cdot \mathbf{U}^0), \\ \mathbf{U}_{ij}^2 &= (\mathbf{K}^0)^{-1} \cdot (\mathbf{F}_{ij}^2 - \mathbf{K}_i^1 \cdot \mathbf{U}_j^1 - \mathbf{K}_j^1 \cdot \mathbf{U}_i^1 - \mathbf{K}_{ij}^2 \cdot \mathbf{U}^0) \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.8.8)$$

W przypadku perturbacji pierwszego rzędu (metoda linearyzacji) zachowuje się tylko składniki liniowe, co daje wartość oczekiwaną przemieszczenia w postaci

$$E[\mathbf{U}]^1 = \mathbf{U}^0 \quad (4.8.9)$$

i macierz kowariancji w postaci

$$\text{cov}(\mathbf{U}, \mathbf{U})^1 = [c_{pq}^{\mathbf{U}}], \quad c_{pq}^{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ip}^1 \cdot c_{ij}^{\mathbf{X}} \cdot u_{jq}^1, \quad (4.8.10)$$

gdzie

$$c_{ij}^{\mathbf{X}} = E[\Delta X_i \cdot \Delta X_j] \quad (4.8.11)$$

są danymi współczynnikami macierzy kowariancji $\mathbf{C}_{\mathbf{X}} = [c_{ij}^{\mathbf{X}}]$ zmiennych bazowych \mathbf{X} , u_{ip}^1 i u_{jq}^1 są elementami wektorów \mathbf{U}_i^1 i \mathbf{U}_j^1 .

W zakresie wykorzystania metody linearyzacji w analizie probabilistycznej konstrukcji i ocenie bezpieczeństwa wymienić można kilka prac, których jestem współautorem [160, 172, 176, 177, 180, 181].

W przypadku perturbacji drugiego rzędu zachowuje się trzy pierwsze składniki rozwinięcia, co daje wartość oczekiwaną przemieszczenia w postaci

$$E[\mathbf{U}]^2 = \mathbf{U}^0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_{ij}^1 \cdot c_{ij}^{\mathbf{X}} \quad (4.8.12)$$

i macierz kowariancji w postaci

$$\text{cov}(\mathbf{U}, \mathbf{U})^2 = \text{cov}(\mathbf{U}, \mathbf{U})^1 + \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \mathbf{U}_{ij}^2 \cdot (\mathbf{U}_{kl}^2)^T \cdot (c_{il}^{\mathbf{X}} \cdot c_{jk}^{\mathbf{X}} + c_{ik}^{\mathbf{X}} \cdot c_{jl}^{\mathbf{X}}). \quad (4.8.13)$$

Możliwe jest także oszacowanie wyższych momentów statystycznych zmiennych \mathbf{U} (w przedstawionym przypadku przemieszczeń). Jednak uzyskanie zadowalającej dokładności ich oszacowania wymaga uwzględnienia kolejnych wyrazów rozwinięcia w szeregu.

Zeitoun, Baker, Uzan [198] uważają, że perturbacja pierwszego rzędu daje zadowalające wyniki przy niezbyt dużych fluktuacjach, to jest przy współczynniku zmienności nie większym niż 15%.

4.8.2. Wykorzystanie rozwinięcia Neumanna

Metoda zaproponowana przez Yamazaki, Shinozuka, Dasgupta [194] różni się od metody perturbacyjnej tym, że rozwinięciu w szereg podlega macierz odwrotna do macierzy sztywności. Po pomnożeniu lewostronnie równania (4.8.1) przez macierz $\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1}$ odwrotną do macierzy sztywności otrzymuje się

$$\mathbf{U} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}. \quad (4.8.14)$$

Macierz sztywności zostaje przedstawiona w postaci sumy macierzy deterministycznej (określonej dla wartości średnich parametrów) i losowej fluktuacji o zerowych wartościach oczekiwanych

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^0 + \Delta\mathbf{K}, \quad (4.8.15)$$

gdzie: \mathbf{K}^0 – macierz deterministyczna, której elementami są wartości oczekiwane poszczególnych elementów tej macierzy,

$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K} - \mathbf{K}^0$ – macierz losowych fluktuacji macierzy \mathbf{K} , których wartości oczekiwane są równe zero.

Rozwinięcie macierzy $\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1}$ odwrotnej do macierzy sztywności w szereg Neumanna ma postać

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1} = (\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K})^{-1} = \mathbf{D}_0 + \Delta\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + (-\mathbf{P} + \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}^3 + \dots) \cdot \mathbf{D}_0, \quad (4.8.16)$$

gdzie: $\mathbf{D}_0 = (\mathbf{K}_0)^{-1}$, $\mathbf{P} = -\mathbf{D}_0 \cdot \Delta \mathbf{K}$,
 indeksy górne przy \mathbf{P} oznaczają kolejne potęgi w sensie iloczynu macierzowego.
 Po podstawieniu związków (4.8.16) do (4.8.14) otrzymuje się

$$\mathbf{U}_0 + \Delta \mathbf{U} = \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \dots) \cdot \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{F}. \quad (4.8.17)$$

Stąd

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{F}_0, \quad (4.8.18)$$

$$\Delta \mathbf{U} = (\mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \dots) \cdot \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{F} = -\Delta \mathbf{U}_1 + \Delta \mathbf{U}_2 - \Delta \mathbf{U}_3 + \dots, \quad (4.8.19)$$

gdzie $\Delta \mathbf{U}_i = \mathbf{P}^i \cdot \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{F} = -\mathbf{P} \cdot \Delta \mathbf{U}_{i-1}$.

4.9. Metoda iteracyjna wyznaczania wskaźnika niezawodności Hasofera–Linda

Losowy charakter różnych zmiennych ma różny wpływ na wartość wskaźnika niezawodności i prawdopodobieństwo awarii. Zwykle losowy charakter parametrów obciążenia ma większy wpływ na niezawodność niż parametrów konstrukcji, co wynika ze zdecydowanie większych współczynników rozrzutu zmiennych charakteryzujących obciążenie. Nasuwa to pomysł (stosowany zresztą w metodzie symulacyjnej według funkcji ważności) podziału zmiennych bazowych na dwie grupy: zmienne dominujące, których losowy charakter ma największy wpływ na wartość wskaźnika β , i zmienne pozostałe o mniejszym wpływie na wartość wskaźnika β . Podział taki umożliwi zastosowanie do wyznaczania wskaźnika β następującej formuły iteracyjnej

$$\beta \approx \beta(X_1, \dots, X_d) - \sum_{i=d+1}^n \Delta \beta(X_i), \quad (4.9.1)$$

w której: $\Delta \beta(X_i) = \beta(X_1, \dots, X_d) - \beta(X_1, \dots, X_d, X_i)$,
 X_1, \dots, X_d – zmienne bazowe dominujące,
 X_{d+1}, \dots, X_n – zmienne bazowe pozostałe,
 $\beta(X_1, \dots, X_d)$ – wskaźnik niezawodności wyznaczony z uwzględnieniem losowego charakteru zmiennych dominujących,
 $\beta(X_1, \dots, X_d, X_i)$ – wskaźnik niezawodności wyznaczony z uwzględnieniem losowego charakteru zmiennych dominujących i zmiennej X_i .

Gdy zmienne pozostałe są wzajemnie zależne w grupach, wówczas może być stosowana formuła iteracyjna w postaci

$$\beta \approx \beta(X_1, \dots, X_d) - \sum_{j=1}^k \Delta\beta_j(X_{ij}, X_{lj}, \dots), \quad (4.9.2)$$

w której: $\Delta\beta_j(X_{ij}, X_{lj}, \dots) = \beta(X_1, \dots, X_d) - \beta(X_1, \dots, X_d, X_{ij}, X_{lj}, \dots)$,
 X_{ij}, X_{lj}, \dots – zmienne bazowe pozostałe X_i, X_l, \dots zaliczone do j -tej grupy,
 k – liczba grup zmiennych pozostałych,
 $\beta(X_1, \dots, X_d, X_{ij}, X_{lj}, \dots)$ – wskaźnik niezawodności wyznaczony z uwzględnieniem losowego charakteru zmiennych dominujących i zmiennych X_i, X_l, \dots zaliczonych do j -tej grupy.

Proponowana formuła (4.9.1) i (4.9.2) ma tę istotną zaletę, że pozwala redukować liczbę zmiennych traktowanych w poszczególnych etapach obliczeń jako zmienne losowe i równocześnie pozwala na uwzględnienie losowego charakteru wszystkich zmiennych bazowych. Należy tu podkreślić, że zmienne, których losowy charakter jest w określonym cyklu pomijany, traktowane są na tym etapie jak parametry deterministyczne o wartościach równych wartościom średnim odpowiednich zmiennych.

Problem badania zbieżności proponowanego procesu iteracyjnego ogranicza się do oceny, ile zmiennych należy zaliczyć do grupy zmiennych dominujących generujących punkt startowy iteracji, jeśli do tej grupy zaliczyć wszystkie zmienne, to otrzyma się wynik, który jest oczekiwanym punktem zbieżności. Przy ocenie czy liczba zmiennych zaliczona do grupy dominujących jest wystarczająca, niezbędne jest przynajmniej dwukrotne rozwiązanie zadania z zaliczeniem do zmiennych dominujących w drugim rozwiązaniu o przynajmniej jedną zmienną więcej niż w poprzednim. Jeśli wyniki uzyskane z takich dwóch rozwiązań będą dostatecznie bliskie sobie, to taki wynik można przyjąć jako oszacowanie wskaźnika niezawodności.

Gdy do grupy zmiennych dominujących zalicza się małą ich liczbę, zaproponowana procedura umożliwi rozwiązanie zadania stosunkowo prostymi środkami. Transformacja zmiennych w zmienne normalne standaryzowane i wyznaczenie odległości krzywej granicznej od środka układu współrzędnych mogą być wykonane z zastosowaniem na przykład systemu Mathematica, a nawet z zastosowaniem arkusza kalkulacyjnego Excel.

Zaproponowana procedura pozwala też na stosunkowo proste szacowanie wpływu losowego charakteru poszczególnych zmiennych na wskaźnik niezawodności i szacowanie błędów popełnianych w przypadku pomija losowego charakteru niektórych zmiennych. Procedura zostanie zilustrowana na przykładach w rozdziale 6.

5. Niezawodność konstrukcji

5.1. Modele niezawodnościowe konstrukcji

Aby zapewnić bezpieczeństwo konstrukcji, należy spełnić wiele warunków dotyczących punktów, przekrojów, elementów, zbiorów elementów bądź całej konstrukcji. Model matematyczny konstrukcji zawierający zbiór informacji o elementach, w tym o ich stanie oraz warunki umożliwiające określenie stanu konstrukcji na podstawie stanu elementów nazywany jest systemem [15]. Strukturę systemu można przedstawić za pomocą: grafu o dwóch końcach, tablicy, funkcji logicznej lub funkcji analitycznej.

W analizie bezpieczeństwa konstrukcji w aspekcie teorii nośności granicznej system bywa też rozumiany jako konstrukcja zastępcza (model fizyczny) obciążona na końcach, której elementami są przekroje krytyczne zwane też elementami sprawczymi [11]. Struktura takiej konstrukcji jest identyczna ze strukturą modelu matematycznego określoną przez odpowiedni graf. Elementom tak rozumianego systemu przypisuje się nośności odpowiednich przekrojów krytycznych skorygowane współczynnikami wagowymi, które są funkcjami parametrów opisujących nośności przekrojów i obciążenie konstrukcji [11, 84]. Przy tych samych założeniach obydwie podejścia w zakresie prawdopodobieństw awarii i niezawodności oraz wskaźnika Hasofer–Linda prowadzą do identycznych wyników, w zakresie wskaźników niezawodności, które nie są niezmiennicze jak na przykład wskaźnik Cornella, mogą dawać różne wyniki.

W dalszych rozważaniach jako system niezawodności rozumiemy model matematyczny zawierający informacje niezbędne do oceny bezpieczeństwa konstrukcji. Struktura systemu może być szeregową, równoległą lub mieszaną (kombinacja struktury równoległej i szeregowej). Szczególnymi przypadkami struktury mieszanej są: struktura szeregowo-równoległa (systemy równoległe łączone szeregowo) i struktura równoległo-szeregową (systemy szeregowe łączone równoległe). Stan systemu wynika ze stanu jego elementów i może być wyrażony przez funkcje charakteryzujące stany elementów, to jest zapasy bezpieczeństwa elementów.

Warunek bezpieczeństwa elementu wyrażony przez funkcję określającą jego zapas bezpieczeństwa ma postać

$$Z_j(\mathbf{X}) > 0. \quad (5.1.1)$$

Bezpieczeństwo elementu jest zagrożone, gdy jego zapas bezpieczeństwa spełnia warunek

$$Z_j(\mathbf{X}) \leq 0. \quad (5.1.2)$$

System szeregowy charakteryzuje się tym, że jego bezpieczeństwo B jest zapewnione wtedy, gdy każdy z jego elementów spełnia kryterium bezpieczeństwa (5.1.1), co określa koniunkcja (iloczyn) zdarzeń

$$B = \bigcap_{j=1}^n (Z_j(\mathbf{X}) > 0), \quad (5.1.3)$$

a jako stan awaryjny A traktuje się niespełnienie kryterium bezpieczeństwa, to jest spełnienie warunku (5.1.2) dla przynajmniej jednego elementu, co określa alternatywa (suma) zdarzeń

$$A = \bigcup_{j=1}^n (Z_j(\mathbf{X}) \leq 0). \quad (5.1.4)$$

System równoległy charakteryzuje się tym, że jego bezpieczeństwo B jest zapewnione wtedy, gdy przynajmniej jeden z jego elementów spełnia kryterium bezpieczeństwa (5.1.1), co określa alternatywa zdarzeń

$$B = \bigcup_{j=1}^n (Z_j(\mathbf{X}) > 0), \quad (5.1.5)$$

a jako stan awaryjny A traktuje się niespełnienie kryterium bezpieczeństwa, to jest spełnienie warunku (5.1.2) dla wszystkich jego elementów, co określa koniunkcja zdarzeń

$$A = \bigcap_{j=1}^n (Z_j(\mathbf{X}) \leq 0). \quad (5.1.6)$$

Warunek bezpieczeństwa systemu mieszane zależy od struktury systemu i jest odpowiednią kombinacją warunków dla systemów składowych. Przykładowo dla systemu szeregowo-równoległego bezpieczeństwo określone jest zależnością

$$B = \bigcap_j \bigcup_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) > 0), \quad (5.1.7)$$

a awarię definiuje zależność

$$A = \bigcup_j \bigcap_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) \leq 0), \quad (5.1.8)$$

w której $Z_{ij}(\mathbf{X})$ jest zapasem bezpieczeństwa i -tego elementu j -tego systemu równoległego.

Analogiczne związki dla systemu równoległo-szeregowego mają postać

$$B = \bigcup_j \bigcap_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) > 0), \quad (5.1.9)$$

$$A = \bigcap_j \bigcup_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) \leq 0), \quad (5.1.10)$$

gdzie $Z_{ij}(\mathbf{X})$ jest zapasem bezpieczeństwa i -tego elementu j -tego systemu szeregowego.

Jeśli można określić zapas bezpieczeństwa $Z_j(\mathbf{X})$ taki, że

$$Z_j(\mathbf{X}) > 0 = \bigcup_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) > 0) \text{ i } Z_j(\mathbf{X}) \leq 0 = \bigcap_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) \leq 0), \quad (5.1.11)$$

to bezpieczeństwo i awarię systemu szeregowo-równoległego określają zależności

$$B = \bigcap_j \bigcup_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) > 0) = \bigcap_j (Z_j(\mathbf{X}) > 0), \quad (5.1.12)$$

$$A = \bigcup_j \bigcap_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) \leq 0) = \bigcup_j (Z_j(\mathbf{X}) \leq 0). \quad (5.1.13)$$

Jeśli zaś określony jest zapas bezpieczeństwa $Z_j(\mathbf{X})$ taki, że

$$Z_j(\mathbf{X}) > 0 = \bigcap_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) > 0) \text{ i } Z_j(\mathbf{X}) \leq 0 = \bigcup_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) \leq 0), \quad (5.1.14)$$

to bezpieczeństwo i awarię systemu równoległo-szeregowego określają zależności

$$B = \bigcup_j \bigcap_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) > 0) = \bigcup_j (Z_j(\mathbf{X}) > 0), \quad (5.1.15)$$

$$A = \bigcap_j \bigcup_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) \leq 0) = \bigcap_j (Z_j(\mathbf{X}) \leq 0). \quad (5.1.16)$$

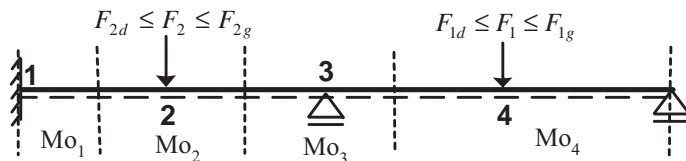
Związki (5.1.11)–(5.1.16) ilustrują możliwości przekształcania systemów złożonych w prostsze i odwrotnie, zależnie od potrzeb i możliwości zdefiniowania funkcji określających stany systemów składowych.

Struktura systemu niezawodnościowego zależy od stopnia niezbędnej jego identyfikacji dla osiągnięcia celu, jakim jest ocena bezpieczeństwa konstrukcji. Uwzględniając, że proponowany algorytm wykorzystujący sformułowania dualne programowania liniowego warunków teorii przystosowania dostarcza warunków chroniących przed narastaniem odkształceń plastycznych, które może być interpretowane jako przekształcenie układu w mechanizm, i przed wystąpieniem odkształceń plastycznych naprzemiennych, które mogłyby prowadzić do utraty ciągłości materiału w wyniku zmęczenia niskocyklowego, jako funkcje określające stany konstrukcji przyjęto zapasy bezpieczeństwa sprzężone z tymi formami utraty zdolności do przenoszenia obciążeń. Podejście takie stosowane jest w ocenie bezpieczeństwa według teorii nośności granicznej [39,

186], która uwzględnia tylko możliwość zniszczenia w wyniku powstania mechanizmu. Bezpieczeństwo konstrukcji jest zapewnione, gdy zapasy bezpieczeństwa $Z_j(\mathbf{X})$ względem wszystkich możliwych form utraty zdolności do przenoszenia obciążeń spełniają warunek (5.1.3), a do uznania stanu za awaryjny wystarczy, by choć jeden z wymienionych zapasów nie spełniał warunku bezpieczeństwa, co określa warunek (5.1.4). Propozowany algorytm prowadzi więc do układu warunków, które pozwalają na identyfikację konstrukcji na poziomie globalnym jako systemu szeregowego, którego elementy i sprzężone z nimi zapasy bezpieczeństwa reprezentują poszczególne formy zniszczenia w wyniku uplastycznienia.

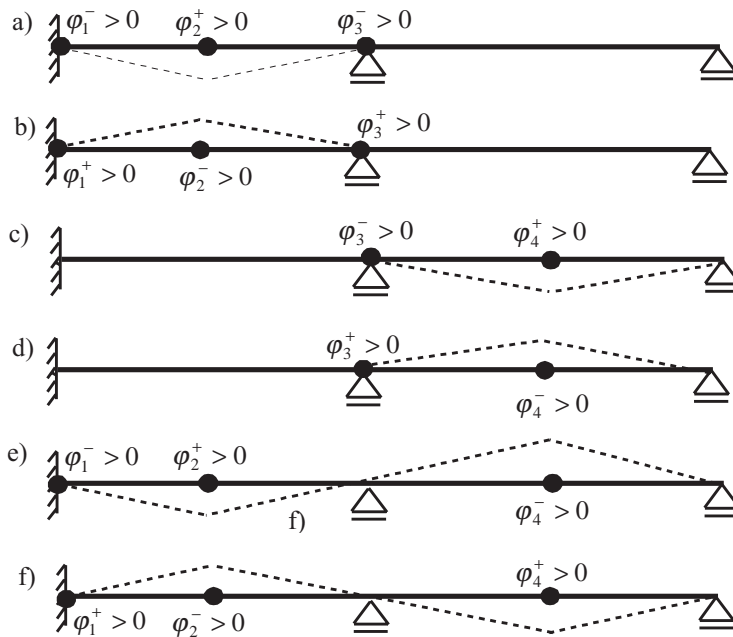
Może być oczywiście dokonana bardziej szczegółowa identyfikacja systemu. Jeśli jako poziom dokładności identyfikacji przyjąć przekrój krytyczny, to uwzględniając, że do przekształcenia konstrukcji w mechanizm niezbędne jest uplastycznienie w $n_m \leq n_h + 1$ (n_h – stopień statycznej niewyznaczalności) przekrojach krytycznych, każdemu mechanizmowi odpowiada system równoległy o n_m elementach, którymi są przekroje ze sprzężonymi z nimi zapasami bezpieczeństwa. Jeśli poszczególne mechanizmy zawierają wspólne przekroje [11], to systemy równoległe odpowiadające tym mechanizmom mają wspólne elementy odpowiadające tym przekrojom. W zakresie plastyczności naprzemiennej, identyfikacja na poziomie konstrukcji i przekroju jest taka sama, gdyż stanem awaryjnym konstrukcji jest wystąpienie plastyczności naprzemiennej w choć jednym przekroju. Przy tym poziomie dokładności identyfikacji otrzymuje się więc system szeregowo-równoległy. Zagadnienie określania systemu niezawodnościowego zilustrowano na przykładzie belki przedstawionej na rys. 5.1.1. Na rysunku 5.1.2 przedstawiono prędkości przemieszczeń odpowiadające trzem parom wykluczających się mechanizmów (rys. 5.1.2 a–b, c–d i e–f). Na rysunku 5.1.3 przedstawiono prędkości przemieszczeń odpowiadające odkształceniom naprzemiennym w kolejnych przekrojach krytycznych. Na rys. 5.1.4 przedstawiono grafy systemu niezawodnościowego odpowiadające szczegółowości identyfikacji na poziomie przekroju (rys. 5.1.4a) i na poziomie konstrukcji (rys. 5.1.4b).

Można też jako poziom szczegółowości identyfikacji przyjąć punkt krytyczny należący do przekroju krytycznego, to jest punkty których zbiór dostarcza wystarczającej liczby warunków do określenia stanu przekroju krytycznego. Przekrój krytyczny, jako element mechanizmu, jest systemem równoległym, którego elementami są jego punkty krytyczne, gdyż dla uplastycznienia przekroju musi nastąpić uplastycznienie we wszy-

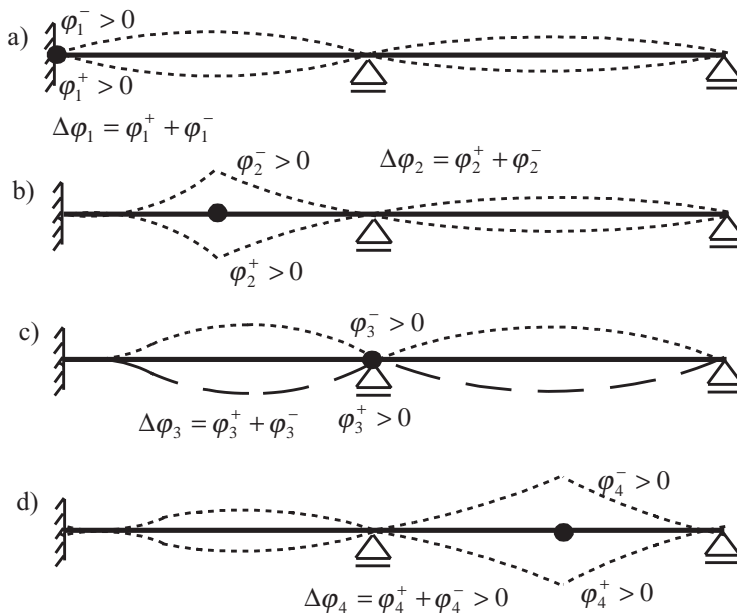


Rys. 5.1.1. Schemat belki wraz z obciążeniem

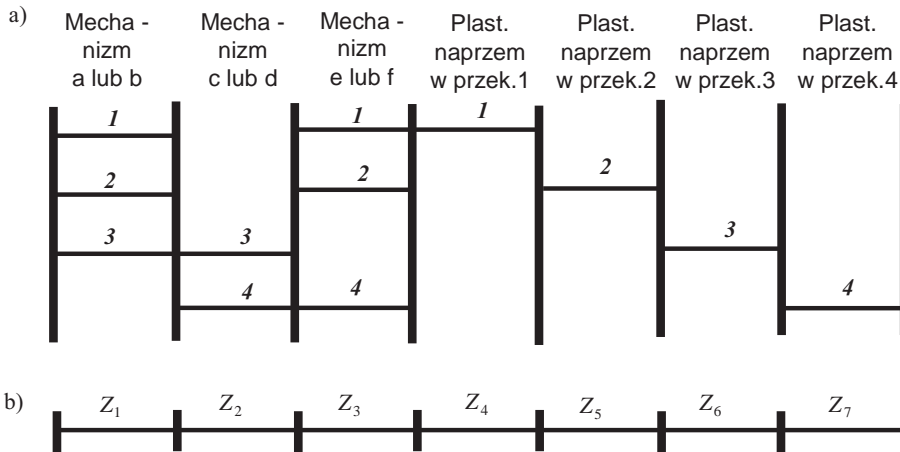
Fig. 5.1.1. Scheme of the beam with load



Rys. 5.1.2. Wykresy prędkości przemieszczeń odpowiadające mechanizmom
 Fig. 5.1.2. Diagrams of the displacement velocities corresponding to the mechanisms



Rys. 5.1.3. Wykresy prędkości przemieszczeń odpowiadające plastyczności naprzemiennej
 w przekrojach krytycznych
 Fig. 5.1.3. Diagrams of the displacement velocities corresponding to the alternating plasticity
 in the critical cross sections



Rys. 5.1.4. Graf systemu niezawodnościowego układu jak na rys. 5.1.1

a) identyfikacja na poziomie przekroju, b) identyfikacja na poziomie konstrukcji.

Fig. 5.1.4. Graphs of the reliability system of the structure as shown in Fig. 5.1.1

a) identification on the level of the cross section, b) identification on the level of the structure

stkich jego punktach. Bezpieczeństwo przekroju względem plastyczności naprzemiennej jest zapewnione, gdy takie bezpieczeństwo jest zapewnione w każdym jego punkcie, co oznacza, że przekrój jest pod tym względem systemem szeregowym. Przy tym poziomie dokładności identyfikacji otrzymuje się więc złożony system szeregowo-równoległy, którego elementy wchodzące w skład systemów szeregowych są systemami szeregowymi, a elementy wchodzące w skład systemów równoległych są systemami równoległymi.

Zależnie od poziomu szczegółowości niezbędnej identyfikacji, element może być systemem, jeśli uwzględnia się jego strukturę, i odwrotnie, system, gdy określony jest jego stan, może być traktowany jak element.

5.2. Niezawodność systemu

Prawdopodobieństwa awarii systemów określają zależności:

– systemu szeregowego

$$p_f = P[A] = P\left[\bigcup_{i=1}^n (Z_i(\mathbf{X}) \leq 0)\right] = P\left[\sum_{i=1}^n (Z_i(\mathbf{X}) \leq 0)\right], \quad (5.2.1)$$

– systemu równoległego

$$p_f = P[A] = P\left[\bigcap_{i=1}^n (Z_i(\mathbf{X}) \leq 0)\right], \quad (5.2.2)$$

– systemu równoległo-szeregowego

$$p_f = P[A] = P\left[\bigcup_j \bigcap_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) \leq 0)\right] = P\left[\bigcup_j (Z_j(\mathbf{X}) \leq 0)\right] = P\left[\sum_{i=1}^n (Z_j(\mathbf{X}) \leq 0)\right], \quad (5.2.3)$$

– systemu szeregowo-równoległego

$$p_f = P[A] = P\left[\bigcap_j \bigcup_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) \leq 0)\right] = P\left[\bigcap_j (Z_j(\mathbf{X}) \leq 0)\right]. \quad (5.2.4)$$

Niezawodność systemów określają zależności:

– systemu szeregowego

$$p_r = 1 - p_f = P[B] = P\left[\bigcap_{j=1}^n (Z_j(\mathbf{X}) > 0)\right], \quad (5.2.5)$$

– systemu równoległego

$$p_r = 1 - p_f = P[B] = \bigcup_{j=1}^n (Z_j(\mathbf{X}) > 0) = P\left[\sum_{i=1}^n (Z_j(\mathbf{X}) > 0)\right], \quad (5.2.6)$$

– systemu równoległo-szeregowego

$$p_r = 1 - p_f = P[B] = P\left[\bigcap_j \bigcup_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) > 0)\right] = P\left[\bigcap_j (Z_j(\mathbf{X}) > 0)\right], \quad (5.2.7)$$

– systemu szeregowo-równoległego

$$\begin{aligned} p_r = 1 - p_f = P[B] &= P\left[\bigcup_j \bigcap_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) > 0)\right] \\ &= P\left[\bigcup_j (Z_j(\mathbf{X}) > 0)\right] = P\left[\sum_{i=1}^n (Z_j(\mathbf{X}) > 0)\right]. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Gdy elementy systemu, którymi są zapasy bezpieczeństwa, nie są skorelowane, prawdopodobieństwa awarii poszczególnych systemów określają następujące zależności:

– szeregowego

$$p_f = P[A] = \sum_{i=1}^n P[Z_i(\mathbf{X}) \leq 0], \quad (5.2.9)$$

– równoległego

$$p_f = P[A] = \prod_{i=1}^n P[Z_i(\mathbf{X}) \leq 0], \quad (5.2.10)$$

– równoległo-szeregowego

$$p_f = P[A] = P\left[\bigcup_j \bigcap_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) \leq 0)\right] = \sum_{i=1}^n P[Z_i(\mathbf{X}) \leq 0], \quad (5.2.11)$$

– szeregowo-równoległego

$$p_f = P[A] = P\left[\bigcap_j \bigcup_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) \leq 0)\right] = \bigcap_j P[Z_j(\mathbf{X}) \leq 0]. \quad (5.2.12)$$

Niezawodność systemów o elementach nieskorelowanych mierzona prawdopodobieństwem niewystąpienia awarii wynosi odpowiednio:

– systemu równoległego

$$p_r = 1 - p_f = P[B] = P\left[\bigcap_{j=1}^n P[Z_j(\mathbf{X}) > 0]\right], \quad (5.2.13)$$

– systemu szeregowego

$$p_r = 1 - p_f = P[B] = \sum_j P[Z_j(\mathbf{X}) > 0], \quad (5.2.14)$$

– systemu równoległo-szeregowego

$$p_r = 1 - p_f = P[B] = P\left[\bigcap_j \bigcup_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) > 0)\right] = \bigcap_j P[Z_j(\mathbf{X}) > 0], \quad (5.2.15)$$

– systemu szeregowo-równoległego

$$p_r = 1 - p_f = P[B] = P\left[\bigcup_j \bigcap_i (Z_{ij}(\mathbf{X}) > 0)\right] = \sum_j P[Z_j(\mathbf{X}) > 0]. \quad (5.2.16)$$

5.3. Oszacowanie sumy i iloczynu zdarzeń zależnych

W sytuacji, gdy rozpatrywane zdarzenia $F_j = (Z_j(\mathbf{X}) \leq 0)$ nie są rozłączne, prawdopodobieństwo awarii można tylko oszacować. Cornell dla systemów szeregowych proponuje następujące oszacowania prawdopodobieństwa awarii

$$\max_j P[Z_j \leq 0] \leq p_f \leq \sum_j P[Z_j \leq 0]. \quad (5.3.1)$$

Korzystając ze związków między prawdopodobieństwem awarii a wskaźnikiem niezawodności β Hasofera–Linda, związek (5.3.1) można przedstawić w postaci

$$\max_j \Phi_0(-\beta_j) \leq p_f \leq \sum_j \Phi_0(-\beta_j). \quad (5.3.2)$$

Ditlevsen [36] proponuje oszacowanie dokładniejsze

$$P_f = \begin{cases} \leq \sum_{i=1}^q P[F_i] - \sum_{i=2}^q \max_{j<i} \{P[F_i \cap F_j]\} \leq \sum_{i=1}^q P[F_i] \leq 1, \\ \geq \sum_{i=1}^q P[F_i] + \sum_{i=2}^q \max_{j<i} \left\{ 0, P[F_i] - \sum_{j=1}^{i-1} P[F_i \cap F_j] \right\} \geq \max_{i=1}^q P[F_i] \geq 0, \end{cases} \quad (5.3.3)$$

gdzie $F_i = (Z_i(\mathbf{X}) \leq 0)$.

Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń $P[F_i \cap F_j]$ w związku (5.3.3) może być oszacowane na podstawie zależności

$$P[F_i \cap F_j] \begin{cases} \geq \max\{\Phi_0(-\beta_i) \cdot \Phi_0(-\beta_{j|i}), \Phi_0(-\beta_j) \cdot \Phi_0(-\beta_{i|j})\}, & \text{gdzie } \rho_{ij} > 0, \\ \leq \Phi_0(-\beta_i) \cdot \Phi_0(-\beta_{j|i}) + \Phi_0(-\beta_j) \cdot \Phi_0(-\beta_{i|j}), & \text{gdzie } \rho_{ij} > 0, \\ \leq \min\{\Phi_0(-\beta_i) \cdot \Phi_0(-\beta_{j|i}), \Phi_0(-\beta_j) \cdot \Phi_0(-\beta_{i|j})\}, & \text{gdzie } \rho_{ij} < 0, \end{cases} \quad (5.3.4)$$

gdzie ρ_{ij} – współczynnik korelacji pomiędzy zdarzeniami F_i oraz F_j określony zależnością

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(F_i, F_j)}{\sigma_{F_i} \cdot \sigma_{F_j}}, \quad (5.3.5)$$

$\text{cov}(F_i, F_j)$ – kowariancja zdarzeń F_i i F_j ,

$\sigma_{F_i}, \sigma_{F_j}$ – odchylenia standardowe zdarzeń F_i i F_j ,

$\Phi_0(\dots)$ – dystrybuenta jednowymiarowego standaryzowanego rozkładu normalnego,

β_i, β_j – wskaźniki niezawodności elementów systemu i -tego oraz j -tego wyznaczone na podstawie warunków granicznych $Z_i(\mathbf{X}) = 0$ oraz $Z_j(\mathbf{X}) = 0$,

$\beta_{i|j}, \beta_{j|i}$ – warunkowe wskaźniki niezawodności określone zależnościami

$$\beta_{i|j} = \frac{\beta_j - \rho_{ij} \cdot \beta_i}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}, \quad \beta_{j|i} = \frac{\beta_i - \rho_{ij} \cdot \beta_j}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}. \quad (5.3.6)$$

W celu oszacowania prawdopodobieństwa iloczynu zdarzeń w pracy [67] proponowane jest wykonanie transformacji zmiennych w standaryzowane zmienne normalne i wyznaczenie punktu projektowego \mathbf{y}^* realizującego minimum wskaźnika β dla iloczynu zdarzeń

$$\beta = \min \|\mathbf{y}\| \quad \text{dla} \quad \mathbf{y} : \bigcap_{j=1}^m \{Z_j(\mathbf{y}) \leq 0\}. \quad (5.3.7)$$

Następnie prawdopodobieństwo awarii szacowane jest na podstawie wzoru

$$P \left[\bigcap_{j=1}^m F_j \right] \approx \Phi_k(-\boldsymbol{\beta}; \mathbf{R}) \cdot C_{\text{SORM}}, \quad (5.3.8)$$

który jest prawdziwy przy założeniu, że zachodzi $Z_i(\mathbf{y}^*) = 0$ dla przynajmniej jednej powierzchni granicznej, przy czym Φ_k jest dystrybuantą k -wymiarowego standaryzowanego rozkładu normalnego określoną zależnością

$$\Phi_k(-\boldsymbol{\beta}; \mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{-\beta} \phi_k(u) \cdot du, \quad (5.3.9)$$

gdzie: $\phi_k(u) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \det(\mathbf{R})^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(u^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot u)\right)$,

$\mathbf{R} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j$ – macierz współczynników korelacji,

$\boldsymbol{\beta}$ – wektor o współrzędnych $\beta_j = \mathbf{a}_j^T \cdot \mathbf{y}^*$,

C_{SORM} – współczynnik korekcyjny uwzględniający krzywizny aktywnych powierzchni granicznych.

Gdy $Z_j(\mathbf{y}^*) = 0$ dla $j = 1, 2, \dots, k$ oraz $Z_j(\mathbf{y}^*) > 0$ dla $j = k + 1, \dots, m$

$$C_{\text{SORM}} = \|\det(\mathbf{D})\|^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.3.10)$$

gdzie: $\mathbf{D} = \left[\delta_{ij} - \sum_{s=1}^k \gamma_s \frac{\partial^2 Z_s(\mathbf{y}^*)}{\partial y_i \partial y_j}; \quad i, j = k + 1, \dots, n \right]$,

δ_{ij} – delta Kroneckera,

γ_s – współczynniki stanowiące rozwiązanie układu równań liniowych

$$\mathbf{y}^* = \sum_{i=1}^k \gamma_i \cdot \mathbf{a}_i.$$

6. Przykłady ilustrujące zastosowanie proponowanego algorytmu

6.1. Przykład 1

Dana jest belka dwuprzęsłowa jak na rysunku 6.1.1 wykonana z dwu dźwigarów dwuteowych połączonych nad podporą środkową, tak by nośność połączenia nie była mniejsza niż nośności przekrojów dźwigarów składowych.

Symbolami 1₁, 1₂, 2, 3, 4, 5 oznaczono przekroje krytyczne. Parametry ξ_1 i ξ_2 określają położenie przekrojów krytycznych w przęsłach.

Losowymi zmiennymi bazowymi (traktowanymi jako zmienne niezależne) są:

q_1, q_2 – górne granice obciążeń zmiennych (rozkład Gumbela),

g_1, g_2 – obciążenie stałe (rozkład normalny),

$\Delta T_1 = T_{1d} - T_{1g}, \Delta T_2 = T_{2d} - T_{2g}$ – różnice temperatur we włóknach dolnych i górnych (rozkład normalny),

L_1, L_2 – rozpiętości przęseł belki (rozkład normalny),

h_1, h_2 – wysokości przekrojów dwuteowych (rozkład normalny),

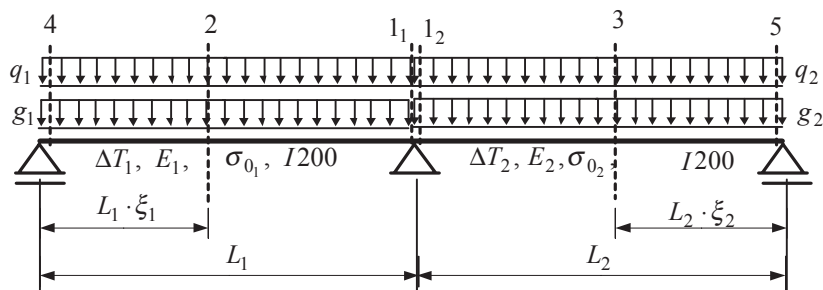
b_1, b_2 – szerokości stopek przekrojów (rozkład normalny),

t_{w1}, t_{w2} – grubości środników przekrojów (rozkład normalny),

t_{f1}, t_{f2} – grubości stopek przekrojów (rozkład normalny),

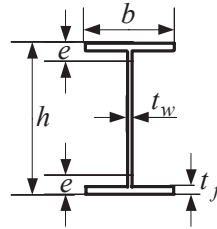
E_1, E_2 – moduły sprężystości materiału prętów (rozkład normalny),

σ_{01}, σ_{02} – granice plastyczności materiału prętów (rozkład normalny).



Rys. 6.1.1. Schemat belki

Fig. 6.1.1. Scheme of the beam



Rys. 6.1.2. Przekrój uproszczony
Fig. 6.1.2. Simplified cross section

Aby charakterystyki geometryczne przekrojów przedstawić w postaci funkcji ich wymiarów (h , b , t_f , t_w) traktowanych jako zmienne bazowe, przyjęto model uproszczonego przekroju jak na rysunku 6.1.2.

Przyjęty model powinien być równoważny przekrojowi nominalnemu w zakresie jego podstawowych charakterystyk geometrycznych. Niestety charakterystyki obliczone dla modelu różnią się nieco (na ogół są nieco większe) od odpowiednich charakterystyk podanych w tabelach dwuteowników. Wprowadzono więc odpowiednie współczynniki korekcyjne

$$k_A = \frac{A_n}{h_n \cdot t_{wn} + 2 \cdot (b_n - t_{wn}) \cdot t_{fn}}, \quad (6.1.1)$$

$$k_{We} = \frac{We_n}{\frac{h_n^2 \cdot t_{wn}}{6} + (b_n - t_{wn}) \cdot t_{fn} \cdot \left(h_n - 2 \cdot t_{fn} + \frac{4 \cdot t_{fn}^2}{3 \cdot h_n} \right)}, \quad (6.1.2)$$

$$k_I = \frac{I_n}{\frac{h_n^3 \cdot t_{wn}}{12} + (b_n - t_{wn}) \cdot t_{fn} \cdot \left(\frac{h_n^2}{2} - h_n \cdot t_{fn} + \frac{2 \cdot t_{fn}^2}{3} \right)}, \quad (6.1.3)$$

$$k_{Wo} = \frac{Wo_n}{h_n^2 \cdot \frac{t_{wn}}{4} + (b_n - t_{wn}) \cdot t_{fn} \cdot (h_n - t_{fn})}, \quad (6.1.4)$$

gdzie: $Wo_n = A_n \left(\frac{h_n}{2} - e_n \right)$,

h_n , b_n , t_{fn} , t_{wn} , e_n , A_n , We_n , I_n – wartości według tabel,
 e_n – współrzędna środka ciężkości połówki dwuteownika (według tabel).

Dla I200 współczynniki te mają wartości:

$$k_A = 0,9969, k_I = k_{We} = 0,98994, k_{Wo} = 0,99345.$$

Po uwzględnieniu współczynników korekcyjnych charakterystyki uproszczonego przekroju równoważnego wyrażają się, jako funkcje wymiarów przekroju, następująco:

– pole przekroju

$$A = (ht_w + 2(b - t_w)t_f)k_A, \quad (6.1.5)$$

– plastyczny wskaźnik zginania

$$W_o = \left(h^2 \frac{t_w}{4} + (b - t_w)t_f (h - t_f) \right) k_{W_o}, \quad (6.1.6)$$

– sprężysty wskaźnik zginania

$$W_e = \left(\frac{h^2 t_w}{6} + (b - t_w)t_f \left(h - 2t_f + \frac{4t_f^2}{3h} \right) \right) k_{W_e}, \quad (6.1.7)$$

– moment bezwładności

$$I = \left(\frac{h^3 t_w}{12} + (b - t_w)t_f \left(\frac{h^2}{2} - ht_f + \frac{2t_f^2}{3} \right) \right) k_I. \quad (6.1.8)$$

W celu otrzymania funkcji granicznych:

- wykonano symboliczne rozwiązania układu od składowych obciążeń,
- zbudowano funkcje określające ekstremalne siły przekrojowe w przekrojach krytycznych,
- zbudowano pierwotne ograniczenia na przystosowanie w ujęciu programowania liniowego i rozwiązano je dla wartości średnich parametrów, dobierając iteracyjnie wartości parametrów ξ_1 i ξ_2 tak, by minimalizowały funkcje celu $\min_{\xi_1, \xi_2}(\max \mu)$, co pozwoliło określić układy równań odpowiadające poszczególnym formom zniszczenia,
- zbudowano dualne układy równań w postaci symbolicznej, z których rozwiązań otrzymano zmienne dualne jako funkcje zmiennych bazowych i parametrów ξ_1 i ξ_2 ,
- wyznaczono zapasy bezpieczeństwa jako funkcje zmiennych bazowych i parametrów ξ_1 i ξ_2 ,

Zadanie rozwiązano w kilku wariantach dla danych zestawionych w tabeli 6.1.1.

Rozwiązanie 1

W przypadku uwzględniania tylko zginania, wyznaczono wskaźniki niezawodności b_M , wykorzystując system STRUREL metodami FORM i SORM oraz symulację Monte

Tabela 6.1.1. Dane charakterystyki zmiennych bazowych
Table 6.1.1. Given characteristics of base variables

Zmienna	q_1	q_2	g_1	g_2	ΔT_1	ΔT_2	α_1	α_2	L_1	L_2	E_1
Rozkład	G	G	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Jednostki	kN/m	kN/m	kN/m	m	°C	°C	1 / °C	1 / °C	m	m	GPa
$E [Xi]$	7	7	7	7	30	30	0,000012	0,000012	6	6	205
V_{Xi}	0,05	0,05	0,03	0,030	0,050	0,050	0,01	0,01	0,005	0,005	0,010
σ_{Xi}	0,350	0,350	0,210	0,210	1,500	1,500	0,00000012	0,00000012	0,030	0,030	2,050

Zmienna	h_1	h_2	b_1	b_2	tf_1	tf_2	tw_1	tw_2	σ_{01}	σ_{02}	E_2
Rozkład	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Jednostki	m	m	m	m	m	m	m	m	MPa	MPa	GPa
$E [Xi]$	0,2	0,2	0,09	0,09	0,0113	0,0113	0,0075	0,0075	235	235	205
V_{Xi}	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,010
σ_{Xi}	0,002	0,002	0,0009	0,0009	0,000113	0,000113	0,000075	0,000075	2,350	2,350	2,050

N – rozkład normalny, G – rozkład Gumbela

Carlo i symulację adaptowaną. W celu uzyskania możliwie dokładnej wartości wskaźnika niezawodności dla porównania z nią wartości uzyskanych z rozwiązań iteracyjnych wykonywano obliczenia symulacyjne do momentu, gdy zwiększanie liczby próbkowań nie powodowało zmiany wyniku. W celu określenia wpływu ścinania obliczono też wskaźnik b_{MV} metodami FORM i SORM. W rozpatrywanym przypadku wpływ ten nie przekracza 1%. Uzyskane wyniki zestawiono w tabeli 6.1.2.

Tabela 6.1.2. Wartości wskaźnika niezawodności β obliczone różnymi metodami z uwzględnieniem losowego charakteru wszystkich zmiennych bazowych
Table 6.1.2. Values of the reliability index β calculated by different methods taking into account the random nature of all base variables

FORM	$\beta_M = 3,387$	$\beta_{MV} = 3,364$	$\beta_M/\beta_{MV} - 1 = 0,0068$	
SORM	$\beta_M = \mathbf{3,3535}$	$\beta_{MV} = 3,3313$	$\beta_M/\beta_{MV} - 1 = 0,0067$	
Symulacja Monte Carlo				
Liczna próbkowań	500 000	1 000 000	1 500 000	2 000 000
$\beta_M =$	3,342	3,357	3,356	3,357
Symulacja adaptowana				
Liczna próbkowań	500 000	1 000 000	1 500 000	2 000 000
$\beta_M =$	3,349	3,355	3,354	3,354

Wszystkie wyniki (z wyjątkiem FORM) są bliskie sobie. Uwzględniając, że najbardziej wiarygodna wydaje się symulacja Monte Carlo, gdyż nie jest obciążona modyfikacjami przyspieszającymi zbieżność, jako wskaźnik najbliższy dokładnego można uznać $\beta = 3,356$.

Rozwiązanie 2

W celu oceny wpływu zmian temperatury na bezpieczeństwo konstrukcji wykonano rozwiązanie z pominięciem zmian temperatury. Otrzymano: $\beta_{\text{FORM}} = 4,268$, $\beta_{\text{SORM}} = 4,2254$. Wpływ zmian temperatury, w rozpatrywanym przypadku, wynosi $4,2254/3,3535 - 1 = 0,26 = 26\%$, co oznacza, że jest on istotny w analizie bezpieczeństwa konstrukcji.

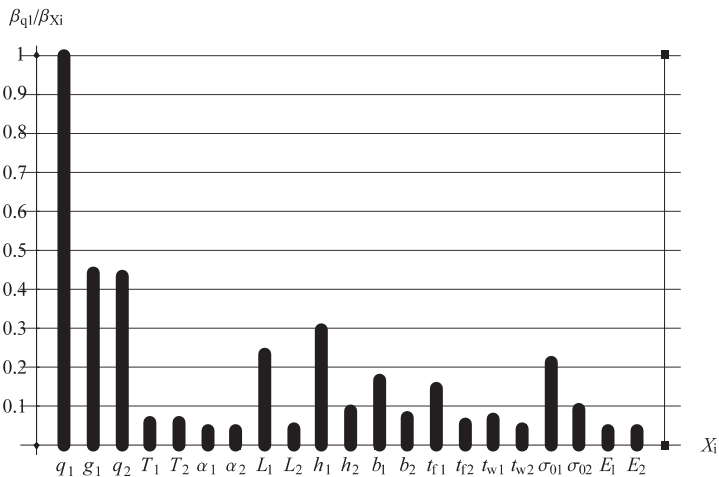
Rozwiązanie 3

W celu przetestowania iteracyjnego sposobu wyznaczania wskaźnika niezawodności:

- a) Korzystając z systemu Mathematica dokonano standaryzacji zmiennych X_i w warunkach granicznych na podstawie zależności: dla zmiennych o rozkładzie normalnym $X_i = Y_i \cdot \sigma_{X_i} + E[X_i]$ i dla zmiennych o rozkładzie Gumbela $X_i = a_G - b_G \cdot \ln(-\ln(\Phi(Y_i)))$, gdzie Y_i – zmienne losowe standaryzowane, $E[X_i]$, σ_{X_i} – war-

tość oczekiwana i odchylenie standardowe zmiennej X_i , $b_G = \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma_{X_i}}{\pi}$, $\alpha_G = E[X_i] - b_G \cdot C$, $C = 0,5772156649015329\dots$ – stała Eulera. Otrzymano w ten sposób funkcje graniczne wyrażone poprzez zmienne standaryzowane $Z_Y(\mathbf{Y}) = 0$.

- b) W celu oceny wpływu losowego charakteru poszczególnych zmiennych na wartość wskaźnika niezawodności rozwiązano, korzystając z systemu Mathematica, ciąg zadań, przyjmując w każdym rozwiązaniu, że losowa jest tylko jedna zmienna. Obliczenie wskaźników niezawodności nie stanowi tu problemu, gdyż $\beta_i = \min(\text{abs}(y_i^*))$, gdzie y_i^* jest wartością zmiennej standaryzowanej, najbliższą zero, spełniającą równanie ($Z_Y(E[Y_1], \dots, E[Y_n]) = 0$). Wyniki zestawiono w tabeli 6.1.3 oraz zilustrowano na wykresie (rys. 6.1.3), na którym dla zwiększenia poglądowości odłożono odwrotności wskaźników (gdyż większe wartości wskaźników odpowiadają mniejszym wpływom) unormowane do przedziału (0, 1). Trzeba wspomnieć, że procedury numeryczne systemu Strurela nie radzą sobie z takim zadaniem.
- c) Do grupy zmiennych dominujących zaliczono tylko jedną zmienną q_1 i aby obliczyć ilościowe wpływy losowego charakteru poszczególnych zmiennych (określone wzorem $\Delta\beta(x_i) = \beta(q_1) - \beta(q_1, x_i)$) na wskaźnik β rozwiązano ciąg zadań, przyjmując w każdym rozwiązaniu, że losowe są dwie zmienne q_1 i X_i (X_i – w każdym rozwiązaniu inna spośród zmiennych pozostałych). Wyniki zestawiono w tabeli 6.1.4 oraz zilustrowano na wykresie (rys. 6.1.4), na którym linia pozioma odpowiada obliczonej symulacyjnie wartości wskaźnika β .



Rys. 6.1.3. Wpływ losowego charakteru parametrów na wskaźnik β (rozwiązanie 3b)

Fig. 6.1.3. Influence of the random nature of the parameters on the reliability index β (solution 3b)

Tabela 6.1.3. Wyniki rozwiązania 3b
Table 6.1.3. Results of the solution 3b

W każdym rozwiązaniu losowa jest tylko jedna zmienna

Zmienna	q_1	g_1	q_2	ΔT_1	ΔT_2	α_1	α_2	L_1	L_2	h_1	h_2
$\beta(x_i)$	3,635	8,223	8,384	63,275	63,275	98,162	98,162	15,558	88,585	12,374	41,179
$\beta(q_1)/\beta(x_i)$	1,000	0,442	0,434	0,057	0,057	0,037	0,037	0,234	0,041	0,294	0,088

Zmienna	b_1	b_2	tf_1	tf_2	tw_1	tw_2	σ_{01}	σ_{02}	E_1	E_2
$\beta(x_i)$	21,973	52,109	25,118	66,032	54,280	86,321	17,099	39,340	99,240	99,240
$\beta(q_1)/\beta(x_i)$	0,165	0,070	0,145	0,055	0,067	0,042	0,213	0,092	0,037	0,037

Tabela 6.1.4. Wyniki rozwiązania 3c
Table 6.1.4. Results of the solution 3c

W pierwszym rozwiązaniu losowy jest parametr q_1 , w pozostałych q_1 i jedna dodatkowa zmienna

Zmienna	q_1	g_1	q_2	ΔT_1	ΔT_2	α_1	α_2	L_1	L_2	h_1	h_2
$\beta(q_1, x_i)$	3,6350	3,5581	3,6241	3,6336	3,6336	3,6350	3,6350	3,5907	3,6346	3,5742	3,6308
$\Delta\beta(x_i)$		0,0769	0,0109	0,0014	0,0014	0,0000	0,0000	0,0443	0,0004	0,0608	0,0042
β	3,6350	3,5581	3,5472	3,5458	3,5444	3,5444	3,5444	3,5001	3,4997	3,4389	3,4347

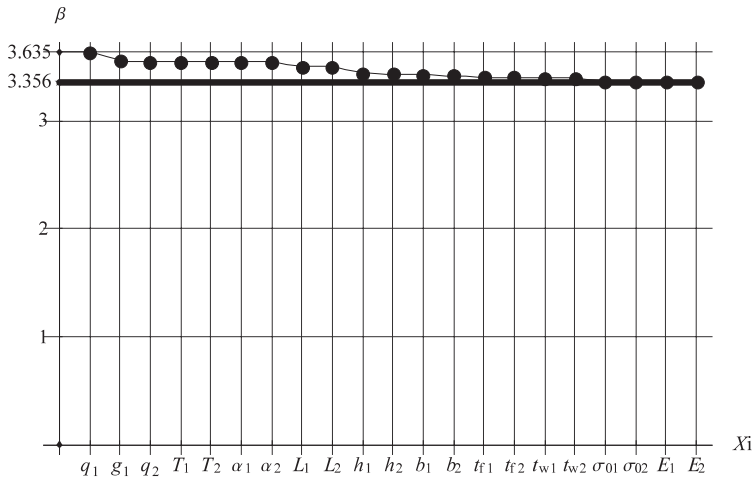
Zmienna	b_1	b_2	tf_1	tf_2	tw_1	tw_2	σ_{01}	σ_{02}	E_1	E_2	Błąd
$\beta(q_1, x_i)$	3,6167	3,6333	3,6214	3,6337	3,6334	3,6349	3,6047	3,6294	3,6350	3,6350	
$\Delta\beta(x_i)$	0,0183	0,0017	0,0136	0,0013	0,0016	0,0001	0,0303	0,0056	0,0000	0,0000	
β	3,4164	3,4147	3,4011	3,3998	3,3982	3,3981	3,3678	3,3622	3,3622	3,3622	0,0018

Tabela 6.1.5. Wyniki rozwiązania 3d
Table. 6.1.5. Results of the solution 3d

W pierwszym rozwiązaniu losowe są parametry q_1 i g_1 , w pozostałych q_1 i g_1 i jedna dodatkowa zmienna

Zmienna	q_1, g_1	q_2	ΔT_1	ΔT_2	α_1	α_2	L_1	L_2	h_1	h_2
$\beta(q_1, g_1, x_i)$	3,5581	3,5471	3,5566	3,5566	3,5581	3,5581	3,5129	3,5577	3,4962	3,5538
$\Delta\beta(x_i)$		0,0110	0,0015	0,0015	0,0000	0,0000	0,0452	0,0004	0,0619	0,0043
β	3,5581	3,5471	3,5456	3,5441	3,5441	3,5441	3,4989	3,4985	3,4366	3,4323

Zmienna	b_1	b_2	tf_1	tf_2	tw_1	tw_2	σ_{01}	σ_{02}	E_1	E_2	Błąd
$\beta(q_1, g_1, x_i)$	3,5395	3,5563	3,5443	3,5567	3,5564	3,5579	3,5272	3,5523	3,5581	3,5581	
$\Delta\beta(x_i)$	0,0186	0,0018	0,0138	0,0014	0,0017	0,0002	0,0309	0,0058	0,0000	0,0000	
β	3,4137	3,4119	3,3981	3,3967	3,3950	3,3948	3,3639	3,3581	3,3581	3,3581	0,0006

Rys. 6.1.4. Ilustracja iteracyjnego wyznaczania wskaźnika β (rozwiązanie 3c)Fig. 6.1.4. Illustration of the iterative determination of the system reliability index β (solution 3c)

- d) Do grupy zmiennych dominujących zaliczono dwie zmienne q_1 i g_1 i aby obliczyć ilościowe wpływy losowości poszczególnych zmiennych (określone teraz wzorem $\Delta\beta(x_i) = \beta(q_1, g_1) - \beta(q_1, g_1, x_i)$) na wskaźnik β , rozwiązano ciąg zadań przyjmując w każdym rozwiązaniu, że losowe są trzy zmienne q_1 , g_1 i X_i . Wyniki zestawiono w tabeli 6.1.5. Nie przedstawiono oddzielnej ilustracji na wykresie, gdyż wyniki są prawie takie same jak dla rozwiązania c).

Rozwiązanie 4

W celu oceny bezpieczeństwa układu jako systemu wykonano rozwiązania dla trzech form osiągnięcia stanu granicznego odpowiadających trzem kolejnym najniższym wartościom wskaźnika niezawodności (trzem pierwszym ogniwo łańcucha systemu szeregowego). Wyniki zestawiono w tabeli 6.1.6.

Tabela 6.1.6. Oszacowanie wskaźnika niezawodności systemu (rozwiązanie 4)

Table 6.1.6. Estimation of the system reliability index (solution 4)

Element systemu	β_j	p_{fj}	$p_f = \sum p_{fj}$	β
1	3,3535	0,000399	0,0003990	3,3535
2	3,3535	0,000399	0,0007980	3,1566
3	6,8211	4,5173E-12	0,0007980	3,1566

$$3,1566 \leq \beta \leq 3,3535$$

Rozwiązanie 5

W celu porównania wpływu losowego charakteru różnych grup zmiennych wykonano obliczenia (bez obciążeń zmianami temperatury), pomijając wpływ losowego charakteru określonych grup zmiennych. Obliczenia wykonano dla danych zestawionych w tabeli 6.1.1 i dla podwojonych współczynników zmienności. Wyniki zestawiono w tabeli 6.1.7.

W otrzymanych wynikach zwraca uwagę stosunkowo mały wpływ na wskaźnik niezawodności losowego charakteru zmiennych określających sztywności i podatności elementów, to jest modułów sprężystości i momentów bezwładności przekrojów i długości elementów na etapie układów równań służących wyznaczaniu sił przekrojowych.

Tabela 6.1.7. Wpływ pomijania losowego charakteru niektórych parametrów (rozwiązanie 5)
Table 6.1.7. Effect of neglecting random nature of some parameters (solution 5)

Przypadek	Według tab. 6.1.1		Podwojone wsp. zmienności	
	β_{SORM}	Błąd	β_{SORM}	Błąd
Wszystkie zmienne losowe	4,2254		2,7523	
Pominięto losowy charakter parametrów określających sztywności przekrojów (E i I)	4,2335	0,0019	2,7644	0,0044
Pominięto losowy charakter rozpiętości pręseł (L) w układzie równań	4,2290	0,0009	2,7580	0,0021
Pominięto losowy charakter rozpiętości pręseł L	4,2588	0,0079	2,8112	0,0169
Pominięto losowy charakter parametrów określających nośności przekrojów (σ_o i W_o)	4,3409	0,0273	2,9243	0,0625
Uwzględniono losowy charakter tylko obciążeń	4,3841	0,0376	2,9870	0,0853

Rozwiązanie 6

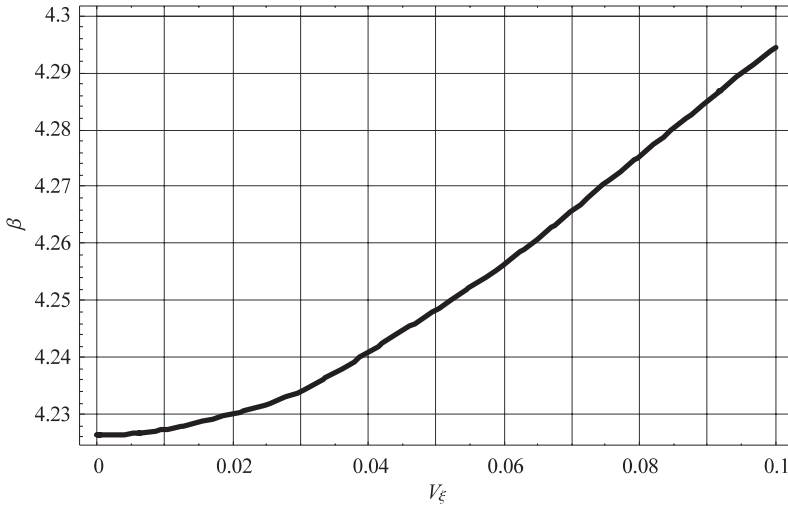
W celu zilustrowania wpływu losowego charakteru współrzędnych określających położenia przekrojów krytycznych w pręsełach wykonano obliczenia dla różnych wartości ξ z otoczenia $\xi = 0,436$ określonego dla wartości średnich zmiennych bazowych oraz traktując ξ jako zmienną losową o rozkładzie normalnym o wartości średniej 0,436 dla różnych współczynników zmienności. Wyniki zestawiono w tabelach 6.1.8 i 6.1.9 oraz na wykresach (rys. 6.1.5 i 6.1.6).

Otrzymane wyniki wskazują na małą wrażliwość wskaźnika niezawodności na zmiany współrzędnej określającej położenie przekroju krytycznego w pręśle w dość dużym zakresie. Odchyłce ξ o ok. 5% od średniej odpowiada błąd wskaźnika β rzędu 0,5%,

Tabela 6.1.8. Zależność wskaźnika niezawodności β od współczynnika zmienności współrzędnej ξ (rozwiązanie 6)Table 6.1.8. Dependence of the reliability index β on the coefficient of variation of the coordinate ξ (solution 6)

V_ξ	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
β	4,225	4,226	4,229	4,233	4,239	4,247	4,255	4,264	4,274	4,284	4,293
	0	0,000	0,001	0,002	0,003	0,005	0,007	0,009	0,012	0,014	0,016

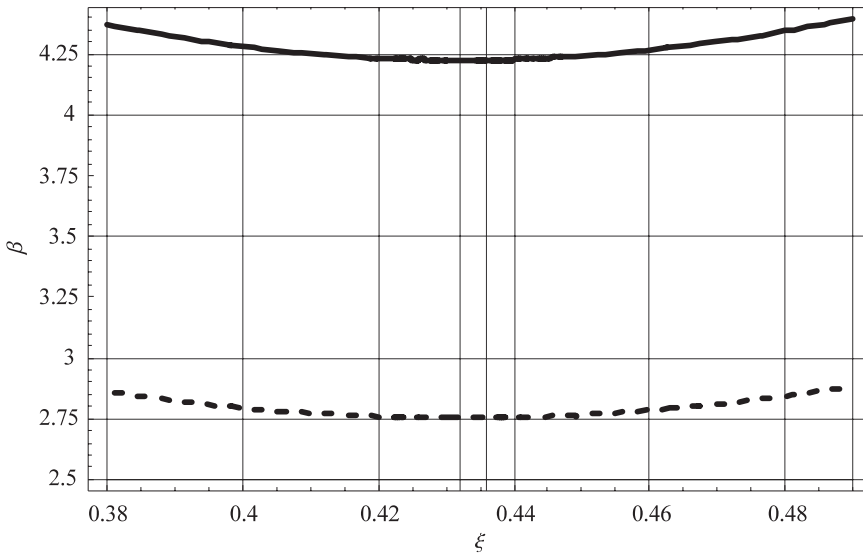
Ostatni wiersz zawiera odchyłki β w zależności od wsp. zmienności zmiennej ξ

Rys. 6.1.5. Zależność β od współczynnika zmienności współrzędnej ξ (rozwiązanie 6)Fig. 6.1.5. Dependence of the reliability index β on the coordinate ξ (solution 6)

a odchyłce ξ o ok. 7% odpowiada błąd wskaźnika β rzędu 1%. Wyniki te wykazują też, że przyjęcie współrzędnej $\xi = 0,48$ jako wartości minimalizującej mnożnik obciążenia w sformułowaniu dualnym dla wartości średnich zmiennych bazowych prowadzić może do znacznych błędów (w przykładzie otrzymano odchyłki wskaźnika o 2.82% i 3.27%). Natomiast przyjęcie $\xi = 0,436$ jako wartości minimalizującej mnożnik obciążenia sformułowania statycznego (pierwotnego) prowadzi do wyników bliskich przyjęciu $\xi = 0,432$ minimalizujących wskaźnik β (oszacowanie wskaźnika β ze względu na współrzędne ξ). W przykładzie dla obydwu tych oszacowań otrzymano identyczne wyniki.

Tabela 6.1.9. Zależność β od współrzędnej względnej ξ (rozwiązanie 6)
 Table 6.1.9. Dependence of the reliability index β on the relative coordinate ξ (solution 6)

ξ	Ochylka ξ od		β	Błąd	β	Błąd
	średniej	min. β				
0,402	0,0846	0,0746	4,272	0,0111	2,789	0,0131
0,404	0,0792	0,0693	4,266	0,0098	2,784	0,0113
0,406	0,0739	0,0640	4,261	0,0084	2,780	0,0098
0,408	0,0686	0,0588	4,255	0,0070	2,776	0,0084
0,410	0,0634	0,0537	4,250	0,0059	2,772	0,0069
0,412	0,0583	0,0485	4,245	0,0048	2,769	0,0058
0,414	0,0531	0,0435	4,241	0,0039	2,766	0,0047
0,416	0,0481	0,0385	4,237	0,0030	2,763	0,0036
0,418	0,0431	0,0335	4,235	0,0023	2,761	0,0029
0,420	0,0381	0,0286	4,232	0,0016	2,759	0,0022
0,422	0,0332	0,0237	4,230	0,0011	2,757	0,0015
0,424	0,0283	0,0189	4,229	0,0009	2,756	0,0011
0,426	0,0235	0,0141	4,227	0,0005	2,755	0,0007
0,428	0,0187	0,0093	4,226	0,0002	2,754	0,0004
0,430	0,0140	0,0047	4,225	0,0000	2,753	0,0000
0,432	0,0093	0,0000	4,225	0,0000	2,753	0,0000
0,434	0,0046	0,0046	4,225	0,0000	2,753	0,0000
0,436	0,0000	0,0093	4,225	0,0000	2,753	0,0000
0,438	0,0046	0,0139	4,226	0,0002	2,754	0,0004
0,440	0,0092	0,0185	4,227	0,0005	2,755	0,0007
0,442	0,0138	0,0231	4,230	0,0011	2,756	0,0011
0,444	0,0183	0,0278	4,233	0,0018	2,758	0,0018
0,446	0,0229	0,0324	4,236	0,0025	2,760	0,0025
0,448	0,0275	0,0370	4,238	0,0032	2,763	0,0036
0,450	0,0321	0,0417	4,242	0,0041	2,766	0,0047
0,452	0,0367	0,0463	4,246	0,0050	2,769	0,0058
0,454	0,0413	0,0509	4,250	0,0059	2,772	0,0069
0,456	0,0459	0,0556	4,255	0,0070	2,776	0,0084
0,458	0,0505	0,0602	4,261	0,0084	2,780	0,0098
0,460	0,0550	0,0648	4,266	0,0098	2,784	0,0113
0,462	0,0596	0,0694	4,272	0,0111	2,789	0,0131
0,464	0,0642	0,0741	4,279	0,0127	2,794	0,0149
0,466	0,0688	0,0787	4,286	0,0143	2,799	0,0167
0,468	0,0734	0,0833	4,292	0,0159	2,804	0,0185
0,470	0,0780	0,0880	4,300	0,0177	2,810	0,0207
0,472	0,0826	0,0926	4,308	0,0196	2,816	0,0229
0,474	0,0872	0,0972	4,316	0,0216	2,822	0,0251
0,476	0,0917	0,1019	4,325	0,0236	2,829	0,0276
0,478	0,0963	0,1065	4,335	0,0259	2,836	0,0301
0,480	0,1009	0,1111	4,344	0,0282	2,843	0,0327

Rys. 6.1.6. Zależność β od współrzędnej względnej ξ (rozwiązanie 6)Fig. 6.1.6. Dependence of the reliability index β on the relative coordinate ξ (solution 6)

6.2. Przykład 2

Dana jest rama jak na rysunku 6.2.1 wykonana z trzech dźwigarów dwuteowych o nośności węzłów nie mniejszej niż nośności przekrojów dźwigarów składowych.

Cyframi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 oznaczono przekroje krytyczne. Parametry ξ_1 , ξ_2 i ξ_3 określają położenie przekrojów krytycznych w przęsłach, a ich wartości będą określane iteracyjnie jako odpowiadające minimalnemu zapasowi bezpieczeństwa.

Losowymi zmiennymi bazowymi (traktowanymi jako zmienne niezależne) są:

s – obciążenie śniegiem (rozkład Gumbela),

$w = w_P \cup w_L$ – obciążenie wiatrem (rozkład Gumbela),

g – obciążenie stałe (rozkład normalny),

h_1, h_2, h_3 – wysokości przekrojów (rozkład normalny),

t_{w1}, t_{w2}, t_{w3} – grubości środników (rozkład normalny),

b_{f1}, b_{f2}, b_{f3} – szerokości stopek (rozkład normalny),

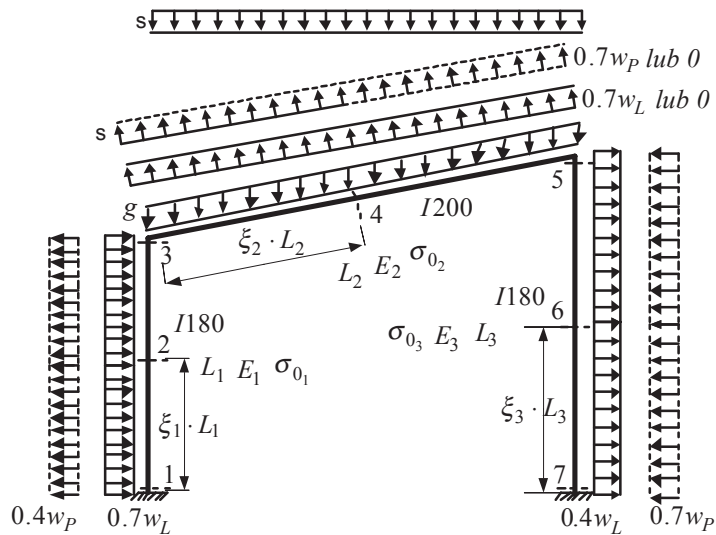
t_{f1}, t_{f2}, t_{f3} – grubości stopek (rozkład normalny),

L_1, L_2, L_3 – długości prętów (rozkład normalny),

E_1, E_2, E_3 – moduły sprężystości materiału prętów (rozkład normalny),

$\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{03}$ – granice plastyczności materiału prętów (rozkład Normalny).

W obliczeniach wykorzystano modele uproszczone przekrojów jak na rys. 6.1.2.



Rys. 6.2.1. Szkic ramy

Fig. 6.2.1. Scheme of the frame

Tabela 6.2.1. Współczynniki korekcyjne przekrojów
Table 6.2.1. Coefficients adjusting the cross sections

Prze- krój	h	t_w	b_f	t_f	$k_I = k_{We}$	k_{W0}	k_A
	mm	mm	mm	mm			
I 180	180	6,9	82	10,4	0,99312	0,99414	0,99498
I 200	200	7,5	90	11,3	0,98994	0,99345	0,99569

Współczynniki korekcyjne tych modeli zestawiono w tabeli 6.2.1.

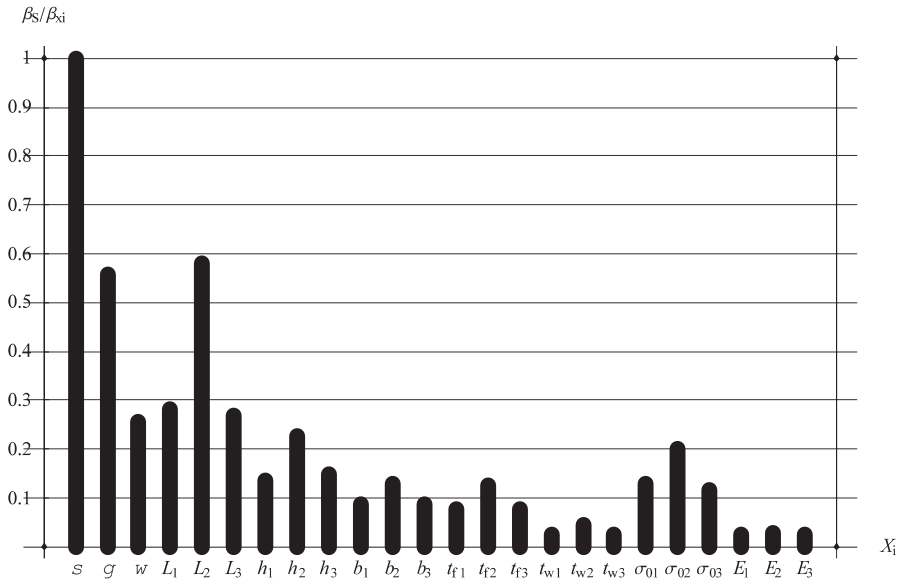
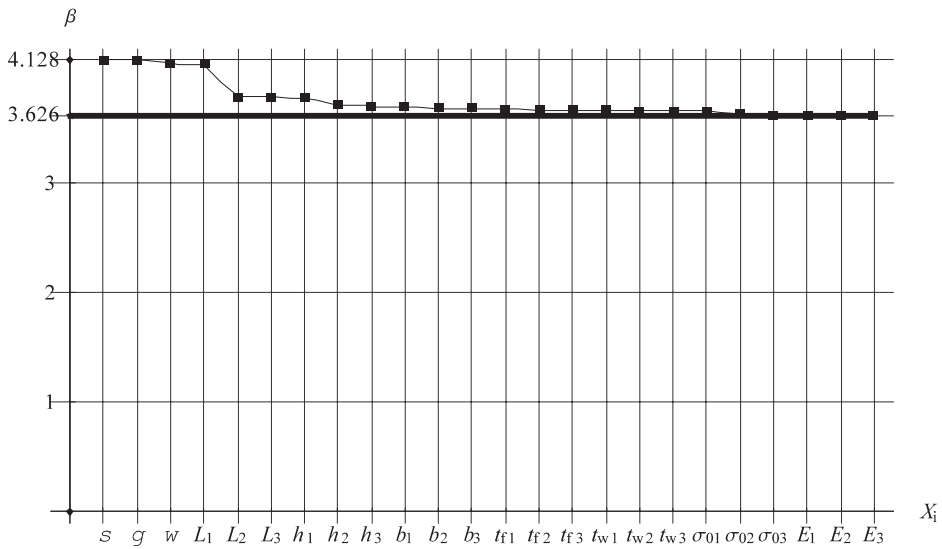
Potrzebne charakterystyki przekrojów wyrażone są wzorami (6.1.5)–(6.1.8).

Obliczenia wykonano przyjmując dane zestawione w tabeli 6.2.2. Wykonano podobne rozwiązania jak w przykładzie 1. Wyniki rozwiązań dominujących otrzymane metodami FORM i SORM z uwzględnieniem i pominięciem wpływu sił osiowych zestawiono w tabeli 6.2.3. W tej tabeli przedstawiono też wyniki rozwiązań dominujących otrzymane metodami symulacyjnymi. Uwzględniając, że wyniki rozwiązań symulacyjnych są prawie identyczne i uznając metodę Monte Carlo za bardziej wiarygodną, przyjęto do porównań $\beta = 3,626$.

Wyniki określające wpływ losowego charakteru poszczególnych zmiennych ilustruje wykres (rys. 6.2.2). Wykonano też trzy rozwiązania iteracyjne, za każdym razem zaliczając do grupy zmiennych dominujących jedną tylko zmienną. W pierwszym przypadku za zmienną startową iteracji przyjęto zmienną dominującą, to jest obciążenie śniegiem s (rys. 6.2.3). W drugim przypadku za zmienną startową iteracji przyjęto zmienną,

Tabela 6.2.2. Dane charakterystyki zmiennych bazowych
Table. 6.2.2. Characteristics of base variables

Zmienna	s	g	w	L_1	L_2	L_3	h_1	h_2	h_3	b_1	b_2	b_3
Rozkład	G	N	G	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Jednostki	kN/m	kN/m	kN/m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
$E[X_i]$	3,2	2,1	2,75	6	10,198	8	0,18	0,2	0,18	0,082	0,09	0,082
V_{X_i}	0,04	0,02	0,03	0,005	0,005	0,005	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
σ_{X_i}	0,128	0,042	0,083	0,030	0,05099	0,040	0,0018	0,0020	0,0018	0,00082	0,00090	0,00082
Zmienna	tf_1	tf_2	tf_3	tw_1	tw_2	tw_3	σ_{01}	σ_{02}	σ_{03}	E_1	E_2	E_3
Rozkład	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Jednostki	m	m	m	m	m	m	MPa	MPa	MPa	GPa	GPa	GPa
$E[X_i]$	0,0104	0,0113	0,0104	0,0069	0,0075	0,0069	235	235	235	205	205	205
V_{X_i}	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
σ_{X_i}	0,000104	0,000113	0,000104	0,000069	0,000075	0,000069	2,35	2,35	2,35	2,05	2,05	2,05

Rys. 6.2.2. Wpływ losowego charakteru parametrów na wskaźnik β Fig. 6.2.2. Influence of the random nature of parameters on the reliability index β Rys. 6.2.3. Ilustracja iteracyjnego wyznaczenia wskaźnika β

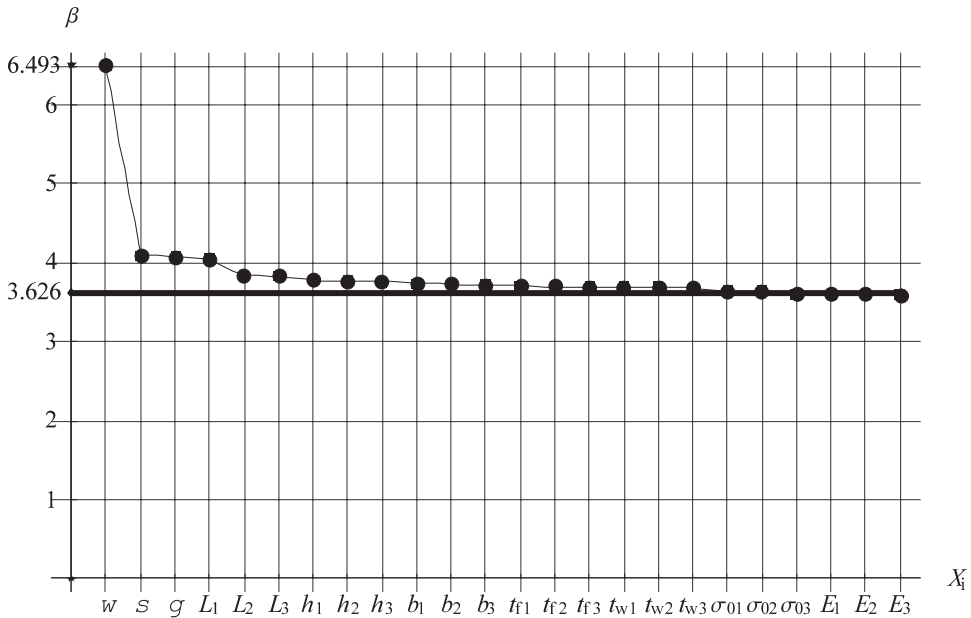
(wskaźnik początkowy iteracji $\beta_p = \beta_s = 4,128$, wskaźnik końcowy iteracji $\beta_k = 3,631$, wskaźnik „dokładny” $\beta = 3,626$, odchylenie punktu początkowego $\beta_p/\beta_k - 1 = 0,14$, błąd $\beta_k/\beta - 1 = 0,0013$)

Fig. 6.2.3. Illustration of the iterative determination of the reliability index β

(initial index of iteration $\beta_p = \beta_s = 4,128$, (final index of iteration $\beta_k = 3,631$, “exact” index $\beta = 3,626$, deviation of the initial iteration point $\beta_p/\beta_k - 1 = 0,14$, error $\beta_k/\beta - 1 = 0,0013$)

Tabela 6.2.3. Wartości wskaźnika niezawodności β obliczone różnymi metodami z uwzględnieniem losowego charakteru wszystkich zmiennych bazowych
 Table. 6.2.3. Values of the reliability index β calculated by different methods taking into account the random nature of all base variables

FORM	$\beta_{MN} = 3,651$	$\beta_M = 3,826$	$\beta_M/\beta_{MN} - 1 = 0,048$	
SORM	$\beta_{MN} = \mathbf{3,6242}$	$\beta_M = 3,7982$	$\beta_M/\beta_{MN} - 1 = 0,048$	
Symulacja Monte Carlo				
Liczna próbkowań	500 000	1 000 000	1 500 000	2 000 000
β_{MN}	3,612	3,628	3,626	3,626
Symulacja adaptowana				
Liczna próbkowań	500 000	1 000 000	1 500 000	2 000 000
β_{MN}	3,618	3,626	3,625	3,625



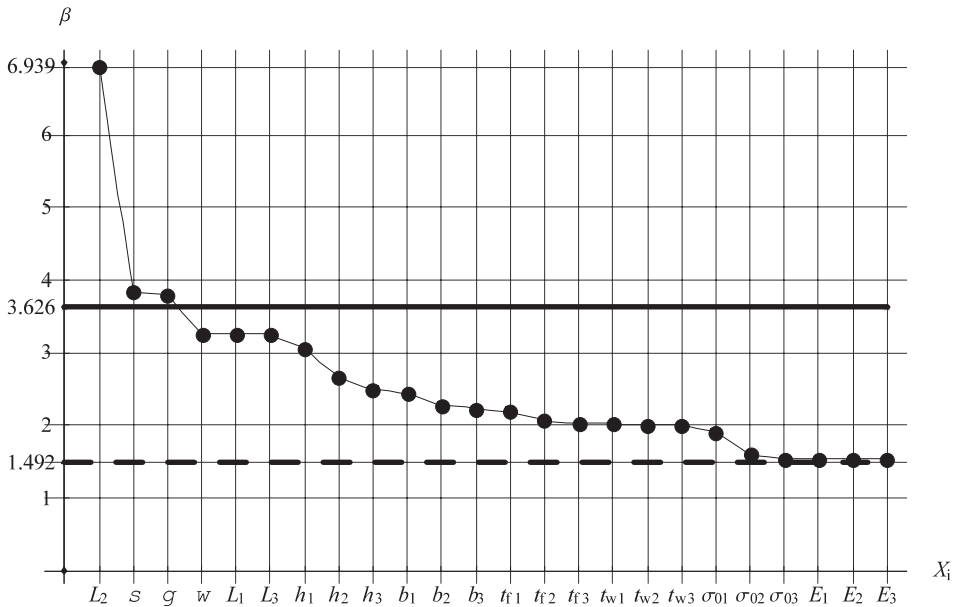
Rys. 6.2.4. Ilustracja iteracyjnego wyznaczania wskaźnika β

($\beta_p = \beta_w = 6,493$, $\beta_k = 3,596$, $\beta = 3,626$, $\beta_p/\beta - 1 = 0,79$, $\beta_k/\beta - 1 = 0,0083$)

Fig. 6.2.4. Illustration of the iterative determination of the reliability index β

($\beta_p = \beta_w = 6,493$, $\beta_k = 3,596$, $\beta = 3,626$, $\beta_p/\beta - 1 = 0,79$, $\beta_k/\beta - 1 = 0,0083$)

która nie jest dominująca, to jest obciążenie wiatrem w , i wynik iteracji także okazał się pomyślny (rys. 6.2.4). W trzecim przypadku za zmienną startową iteracji przyjęto zmienną L_2 . Tu wynik iteracji nie okazał się pomyślny (rys. 6.2.5), co nie umniejsza walorów proponowanego podejścia iteracyjnego jako podejścia umożliwiającego znaczną redukcję

Rys. 6.2.5. Ilustracja iteracyjnego wyznaczania wskaźnika β ($\beta_p = \beta_{L_2}$)Fig. 6.2.5. Illustration of the iterative determination of the reliability index β ($\beta_p = \beta_{L_2}$)

liczby zmiennych, których losowy charakter jest uwzględniany na poszczególnych etapach obliczeń. Oznacza to jednak, że jako startowe należy przyjmować zmienne dominujące.

W celu oceny bezpieczeństwa układu jako systemu wykonano rozwiązania dla pięciu form osiągnięcia stanu granicznego, odpowiadających pięciu kolejnym najniższym wartościom wskaźnika niezawodności (pięciu pierwszym ogniom łańcucha systemu szeregowego). Wyniki zestawiono w tabeli 6.2.4.

Tabela 6.2.4. Oszacowanie wskaźnika niezawodności systemu
Table 6.2.4. Estimation of the system reliability index

Element systemu	β_j	p_{fj}	$p_f = \sum p_{fj}$	β
1	3,4242	0,0003083	0,0003083	3,4242
2	3,8158	0,00006767	0,0003760	3,3699
3	4,8211	7,138E-07	0,0003767	3,3694
4	4,8696	5,591E-07	0,0003772	3,3690
5	5,8252	2,8522E-09	0,0003772	3,3690

$$3,3690 \leq \beta \leq 3,4242$$

7. Podsumowanie

Celem autora pracy było opracowanie algorytmu probabilistycznej oceny bezpieczeństwa płaskich konstrukcji prętowych wykonanych z materiałów sprężysto idealnie plastycznych poddanych działaniu obciążeń stałych i zmiennych.

Do oceny nośności konstrukcji zastosowano teorię przystosowania. Utrudnienie analizy bezpieczeństwa układów prętowych stanowi stosunkowo duża liczba parametrów, które są zmiennymi losowymi, charakteryzujących te układy. Ułatwienie analizy może stanowić możliwość redukcji liczby warunków granicznych przez wyrażenie ich poprzez siły przekrojowe.

Uwzględniając fakt, że istnieją obecnie narzędzia komputerowe, takie jak np. MATHEMATICA, MATLAB, SCILAB, MAPLE, GNU OCTAVE (licencja GPL), które umożliwiają dokonywanie złożonych przekształceń analitycznych i opracowywanie programów realizujących te przekształcenia, przedstawiono algorytm analitycznego generowania warunków granicznych stanowiących podstawę oceny bezpieczeństwa konstrukcji. Algorytm może być oczywiście wykorzystywany jako procedura obliczeń numerycznych.

Aby zrealizować założony cel, niezbędne było przyjęcie założeń upraszczających. Podstawowym założeniem było przyjęcie linearyzacji warunków granicznych dla przekrojów z uwzględnieniem podziału naprężeń na zmienną część „sprężystą” pochodzącą od obciążeń i stałe samozrównoważone naprężenia resztkowe pochodzące od odkształceń plastycznych. Pozwoliło to na wykorzystanie algorytmów programowania liniowego do generowania warunków granicznych (zapasów bezpieczeństwa) dla konstrukcji zależnych od parametrów określających konstrukcję i obciążenie. Przyjętych uproszczeń dokonano tak, by prowadziły do bezpiecznych oszacowań wskaźnika niezawodności.

Proponowany algorytm obejmuje dwa zasadnicze etapy analizy: generowanie funkcji granicznych dla konstrukcji i wyznaczanie wskaźnika niezawodności i prawdopodobieństwa awarii. Etap formułowania warunków granicznych obejmuje:

- a) rozwiązania analityczne (symboliczne) analizowanego układu od obciążeń jednostkowych, z zastosowaniem dowolnej metody analizy (metody sił, metody przemieszczeń, metody mieszanej lub metody elementów skończonych),
- b) symboliczne sformułowanie problemu przystosowania układu w ujęciu programowania liniowego,

- c) rozwiązanie zadania programowania liniowego (sformułowania statycznego) przy przyjęciu wartości średnich parametrów w celu wyznaczenia ograniczeń aktywnych odpowiadających określonym formom awarii,
- d) sformułowanie dualnych układów równań odpowiadających aktywnym ograniczeniom statycznym dla poszczególnych postaci awarii,
- e) rozwiązanie symboliczne dualnych układów równań,
- f) przedstawienie zapasów bezpieczeństwa jako funkcji zmiennych bazowych.

W zakresie algorytmu generowania warunków granicznych:

- przedstawiono szczegółowe zlinearyzowanie warunków teorii przystosowania płaskich układów prętowych złożonych z elementów o dowolnych przekrojach bisymetrycznych w przypadku uwzględniania zginania i sił podłużnych oraz dla przypadku uwzględniania naprężeń normalnych i tnących,
- przedstawiono szczegółowe zlinearyzowanie warunków teorii przystosowania płaskich układów prętowych złożonych z elementów o dowolnych przekrojach monosymetrycznych w przypadku uwzględniania zginania oraz zginania z udziałem sił podłużnych,
- wskazano też na niespójności klasycznych sformułowań kinematycznych ze sformułowaniami statycznymi teorii przystosowania i przedstawiono propozycje sformułowań kinematycznych spójnych ze sformułowaniami statycznymi.

Do określania wskaźnika niezawodności Hasofer–Linda i prawdopodobieństwa awarii mogą być wykorzystane dowolne procedury numeryczne, na przykład zawarte w systemie STRUDEL metody symulacyjne lub FORM i SORM.

W pracy zaproponowano procedurę iteracyjną, która umożliwia uwzględnianie w każdym cyklu iteracji losowego charakteru tylko niektórych zmiennych. Proponowana procedura jest szczególnie efektywna, gdy iteracja jest zbieżna przy uwzględnianiu w poszczególnych cyklach iteracji losowego charakteru tylko dwóch lub trzech zmiennych bazowych, gdyż punkt projektowy minimalizujący odległość od początku układu współrzędnych może być wyznaczony w każdym kroku iteracji w drodze systematycznego przeszukiwania funkcji granicznej. W tym przypadku łatwo jest też ominąć ewentualne minima lokalne.

Przedstawione w pracy przykłady miały na celu przetestowanie zaproponowanego algorytmu. W celu ich rozwiązania zaprogramowano odpowiednie procedury realizujące przekształcenia analityczne (obliczenia symboliczne) w systemie Mathematica. Dla porównania różnych metod obliczeń wykorzystywano też system STRUREL do wyznaczania wskaźników niezawodności Hasofer–Linda w przypadku uwzględniania losowego charakteru dużej liczby zmiennych losowych w jednym cyklu obliczeniowym (w szczególności do wyznaczania rozwiązań najbardziej wiarygodnych z wykorzystaniem symulacji).

Uzyskane wyniki, ze względu na ich ograniczony zakres, nie dają podstawy do wyciągania daleko idących wniosków, jednak wskazują, gdzie można szukać uproszczeń i jakie elementy nie mogą być pomijane. Na ich podstawie można stwierdzić, że zmiany temperatury mogą w sposób istotny wpływać na wskaźnik niezawodności oraz że uwzględnianie (bądź nieuwzględnianie) losowego charakteru parametrów fizycznych i geometrycznych, na etapie wyznaczania sił przekrojowych, ma zdecydowanie mniejszy wpływ na wskaźnik niezawodności niż uwzględnianie losowego charakteru tych zmiennych na pozostałych etapach obliczeń. Wskazuje to, że na etapie wyznaczania sił przekrojowych możliwe są uproszczenia polegające na pomijaniu losowego charakteru niektórych zmiennych lub uwzględnianiu tej losowości w sposób przybliżony, co jest o tyle istotne, że ten etap analizy jest pracochłonny. Współrzędne określające położenie przekrojów krytycznych w przęsłach prętów są zmiennymi losowymi zależnymi, a wyznaczenie analitycznych zależności tych zmiennych od zmiennych pozostałych jest w ogólności niemożliwe. Jednak wpływ losowego charakteru tych zmiennych na wskaźnik niezawodności wydaje się stosunkowo mały, i – co ważniejsze – pomijanie losowego charakteru tych zmiennych prowadzi do oszacowań wskaźnika niezawodności bliższych oszacowaniom od dołu uzyskiwanym w drodze jego minimalizacji ze względu na współrzędne określające położenie przekrojów krytycznych w przęsłach prętów.

Wykonane obliczenia wskazują na możliwości pomijania losowego charakteru niektórych parametrów na określonych etapach obliczeń, co wskazuje, że niezbędnym rozwinięciem pracy powinny być analizy numeryczne dla wybranych klas konstrukcji pozwalające na szczegółowe określenie możliwości tych uproszczeń.

Przedstawiony algorytm może być bezpośrednio wykorzystywany w ocenie bezpieczeństwa rusztów belkowych, których elementy są zginane w jednej płaszczyźnie. Stosunkowo łatwo może być rozszerzone jego wykorzystanie na ruszty (zginanie i skręcanie), dźwigary zginane w dwóch płaszczyznach oraz ocenę bezpieczeństwa z uwzględnieniem możliwości utraty stateczności, co może być istotne w szczególności w analizie kratownic. Możliwość utraty stateczności może być uwzględniana na dwa sposoby. Pierwszym i zdecydowanie prostszym a przy tym prowadzącym do oszacowań bezpiecznych jest pominięcie pokrytycznej pracy konstrukcji, to jest przyjęcie, że utrata stateczności elementu, części konstrukcji lub konstrukcji oznacza awarię. Podejście to wymaga wprowadzenia dodatkowych ograniczeń dotyczących elementów ściskanych. Drugi sposób, uwzględniający pokrytyczną pracę konstrukcji może być realizowany przez ograniczenia dotyczące elementów ściskanych uwzględniające nośności elementów w zależności od poziomu obciążenia. W tym przypadku możliwa jest iteracyjna analiza ograniczeń.

Dalszym rozszerzeniem zakresu oceny bezpieczeństwa konstrukcji w aspekcie teorii przystosowania mogą być układy płytowe, płytowo belkowe i konstrukcje żelbetowe, a także wybrane konstrukcje przestrzenne.

Cenna byłaby, zdaniem autora, efektywna algorytmizacja oceny bezpieczeństwa, w aspekcie teorii przystosowania, wybranych konstrukcji poddanych działaniu obciążeń dynamicznych zarówno o określonym usytuowaniu (konstrukcje obciążone maszynami), jak i zmieniających swoje położenie (konstrukcje mostowe, belki podsuwnicowe).

Planowany zakres dalszych prac naukowych autora obejmuje:

- uwzględnienie w ocenie bezpieczeństwa konstrukcji według teorii przystosowania możliwości utraty stateczności (w szczególności kratownic płaskich i przestrzennych),
- wykonanie analiz wpływu losowego charakteru parametrów konstrukcji na określonych etapach obliczeń w celu określenia możliwych uproszczeń analizy dla wybranych typów konstrukcji,
- wykorzystanie teorii przystosowania w ocenie bezpieczeństwa wybranych konstrukcji żelbetowych,
- wykorzystanie teorii przystosowania w ocenie bezpieczeństwa wybranych konstrukcji przestrzennych,
- wykorzystanie teorii przystosowania w ocenie bezpieczeństwa wybranych konstrukcji poddanych działaniu obciążeń dynamicznych,
- poszukiwanie efektywnych algorytmów numerycznych i numeryczno-analitycznych oceny bezpieczeństwa w aspekcie teorii przystosowania konstrukcji złożonych i z wykorzystaniem programowania nieliniowego.

Literatura

- [1] Abdo T., Rackwitz R., *A New Beta-Point Algorithm for Large Time-Invariant and Time-Variant Reliability Problems*. 3rd IFIP Working Conf., Berkeley 1990.
- [2] Ang A., H-S, Cornell C.A., *Reliability Basis of Structural Design and Safety*. J. Struct. Eng., ASCE, 100, ST9, 1974.
- [3] Augusti G., Baratta A., *Limit and shakedown analysis of structures with stochastic strengths*, 2nd Conf. Struct. Mech. in Reaktor Tech., Berlin 1973, 5, M7/8.
- [4] Augusti G., Baratta A., *Plastic shakedown of structures with stochastic local strengths*, IABS Symp. Lisboa 1973, 287–292.
- [5] Augusti G., Baratta A., Casciati F., *Probabilistic Methods in Structural Engineering*, Chapman and Hall, London 1984.
- [6] Ayyub B.M., Haldar A., *Practical structural reliability techniques*. J. Struct. Eng., ASCE, 110(8), 1984, 1707–1724.
- [7] Ayyub B.M., Lai K-L., *Selective sampling in simulation-based reliability assessment*. Int. J. Pres. Ves & Piping, 46, 1991, 229–249.
- [8] Baecher G. B., Ingra T.S., *Stochastic FEM in settlement predictions*, J. Geotech. Eng Div. ASCE, 107(GT4), 1981, 449–463.
- [9] Ben Haim, *Robust Reliability in the Mechanical Sciences*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1996.
- [10] Biegus A., *Nośność graniczna stalowych konstrukcji prętowych*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Wrocław 1997.
- [11] Biegus A., *Probabilistyczna analiza konstrukcji stalowych*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Wrocław 1999.
- [12] Biegus A., Kowal Z., Seidel W., *Badania doświadczalne przystosowania konstrukcji*, Pol. Wroc., Raport I-2/7/77.
- [13] Bjerager P., *Probability integration by directional simulation*. Journ. Eng. Mech. Div., ASCE, 114, 1988, 1285–1302.
- [14] Bleich H., *Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter der Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes*, Bauingenieur 13, 1932, 261–267.
- [15] Bobrowski D., *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności*, WNT, Warszawa 1985.
- [16] Bołotin W. M., *Metody statystyczne w mechanice budowli*. Arkady, Warszawa 1968.
- [17] Bołotin W. M., *Primienienije metodow teorii werojatnostiej i teorii nadzieznosti w rascziotach soorużenii*. Strojizdat, Moskwa 1971.
- [18] Borkowski A., Kleiber M., *On a numerical approach to shakedown analysis of structures*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 22, 1980, 101–119.
- [19] Breitung, K., *Asymptotic approximation for multinormal integrals*. J. Eng. Mech. ASCE. 110 (3), 1984, 357–366.

- [20] Brzeziński R., König, J.A., *Ocena maksymalnych ugięć ram sprężysto-plastycznych*, Prace IPPT 60/1971.
- [21] Capurso M., *Extended Displacement Bound Theorems for Continua Subjected to Dynamic Loading*, J. Mech. Phys. Solids, 23, 1975, 113–122.
- [22] Ceradini G., *Sull' adattamento dei corpi elasto-plastici soggetti ad azioni dinamiche*, Giorn. Genio Civile 106, 4/5, 1969, 239–250.
- [23] Ceradini G., *Dynamic Shakedown in Elastic-Plastic Bodies*, J. Eng. Mech. Div., ASCE, EM3, 1980, 481–499.
- [24] Chen X., Lind N.C., *Fast probability integration by three-parameter normal tail approximation*. Struct. Saf., 1, 1983, 269–276.
- [25] Cichoń Cz., Waszczyszyn Z., *Obliczanie przystosowania luków sprężysto-plastycznych do obciążeń ruchomych*. XX Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1974, 53–61.
- [26] Cichoń Cz., Waszczyszyn Z., *The shakedown of an elastic-plastic arch under moving load*. J.Struct.Mech., 3(3), 1974/75, 283–300.
- [27] Cichoń Cz., *The shakedown of circular arches for movable loads*. Rozpr. Inż., 23(4), 1975, 641–656.
- [28] Cornell C.A., *Bounds on the Reliability of Structural Systems*. Journal of the Struct. Div., ASCE, vol.93, ST1, 1967, 117–200.
- [29] Cornell C.A., *A first-order reliability theory for Structural design. Study 3, Struct. Reliab. and Codified Design*. University of Waterloo, Ontario 1969.
- [30] Cornell C.A., *A probability-based Structural Code*. AGI Journal, 66(12), 1969, 974–985.
- [31] Corotis R.B., Nafday A.M., *Structural systems reliability using linear programming and simulation*, J. Struct. Eng. ASCE 124, 1989, 966–973
- [32] Corradi L., Maier G., *Dynamic non-shakedown theorem for elastic perfectly plastic continua*, J. Mech. Phys. Solids, 22, 1974, 401–413.
- [33] Corradi L., Zavelani A., *A Linear Programming Approach to Shakedown Analysis of Structures*, Comp. Appl. Mech. Eng., 3(37) 1974, 401–413.
- [34] Cyras A., *Metody linijnogo programirovaniya pri raschete uprugoplasticheskikh sistem*, Izd. Lit. Stroit., Leningrad 1969
- [35] Deak I., *Three digit accurate multiple normal probabilities*. Numer. Maths., vol. 35, 1985, 369–380.
- [36] Ditlevsen O., *Narrow reliability bounds for structural systems*. Journal of Structural Mechanics. 7(4), 1979, 453–472.
- [37] Ditlevsen O., *Uncertainty modeling*. McGraw-Hill, New York 1981.
- [38] Ditlevsen O., *Clipped Normal FBC Load Combination by Deak simulation*. DCAMM Reports, Technical Univ. of Denmark, Lyngby 1985.
- [39] Ditlevsen O., Madsen H.O., *Structural Reliability Methods*. John Wiley & Sons, Chichester 1996.
- [40] Dorosz, S., König, J. A., Sawczuk, A., Biegus, A., Kowal, Z., Seidel, W., *Deflections of elastic-plastic hyperstatic beams under cyclic loading*, Arch. Mech Stos. 33, 1981, 611–624.
- [41] Drücker D., *A definition of stable inelastic material*, J. Appl. Mech. 26, 1959, 101–106.
- [42] Dziubdziela W: Kopociński B, Kowal Z., *Losowa nośność graniczna konstrukcji o trzech minimalnych krytycznych zbiorach elementów mających elementy wspólne*, Arch. Inż. Łąd. 1, 1974, s. 123–134.
- [43] Eimer Cz., *Podstawy teorii bezpieczeństwa konstrukcji*. Rozp. Inż.. t. II. z. 1, 1963.
- [44] Elishakoff I., *Probabilistic Methods in the Theory of Structures*, Wiley, New York 1983.
- [45] Engelund S., Rackwitz R., *Experiences with Experimental Design Schemes for Failure Surface Estimation and Reliability*, Proc. 6th Speciality Conf. Probab. Mech. and Struct. and Geotech. Reliab., Denver, 1992, 252–255.

- [46] Eyre D.G., Galambos T.V., *Shakedown tests on steel bars and beams*, J. Struct. Div. 96, 1970, 1284–1304.
- [47] Faravelli L.A., *A response surface approach for reliability analysis*. J. Eng. Div., ASCE. 115(12), 1989, 2763–2781.
- [48] Fiessler B., Neumann H-J., Rackwitz R., *Quadratic Limit States in Structural Reliability*. J. Eng. Mech. Div., ASCE, vol.105. No EM4, 1979, 661–676.
- [49] Fujita M., Rackwitz R., *Updating first- and second-order reliability estimates by importance sampling*. Struc. Eng. Earthquake Eng., Japan Society of Civil Eng., 5(1), 1988, 53–59.
- [50] Fukumoto Y., Yoshida H., *Deflections stability of beams under repeated loads*, J. Struct. Div. 95, 1969, 1443–1458.
- [51] Freudental A.M., *Safety and the probability of Structural failure*. Proc. American Society of Civil Eng. (ASCE), vol. 80, 1954, 468/1–46.
- [52] Gass S.I., *Programowanie liniowe*, PWN, Warszawa 1973.
- [53] Gavarini C., *Plastic analysis of structures and duality in linear programming*, Meccanica 1, 1966.
- [54] Gokhfeld D.A., *Nekotorye zadachi teorii prispoblyayemosti plastin i obolochek*, In: Trudy VI Vsesoyuznoj Konf. Plastin i Obolochek, Baku 1966, Izd. Nauka, Moskwa 1966, 284–291.
- [55] Grundy P., *Shakedown under moving loads*. Civil Eng. Trans. CE 13, 1971, 31–34.
- [56] Grüning M., *Die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung*, Springer, Berlin 1926.
- [57] Hachemi A., Weichert D., *Numerical shakedown analysis of damaged structures*. Comp. Met. Appl. Mech. Eng.. 160, 1998, 57–70.
- [58] Handa K., Andersson K., *Application of finite element methods in the statistical analysis of structures*, Proc. 3rd ICOSSAR 1981, 409–417.
- [59] Hasofer A.M., Lind N.C., *An Exact and Invariant First-Order Reliability Format*, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, 100(EM1), 1974, 111–121.
- [60] Heitzer M., Staat M., *Structural Reliability Analysis of Elasto-Plastic Structures*. A.A.Balkema, Rotterdam, Brookfield, 1999, 513–518.
- [61] Heitzer M., Staat M., *Direct FEM limit and Shakedown analysis with uncertain data*, ECOMAS 2000, Barcelona, CD-ROM, dok. 483, 13 stron.
- [62] Heyman J., *Automatic analysis of steel-framed structures under fixed and varying loads*, Proc. Inst. Civ. Eng., 12, 1959, 39–48.
- [63] Heyman J., Johnson R.P., Fowler P.P., Gillson I.P., *Shakedown analysis, the design of 275 kV switch-house*, Struct. Eng. 46, 1968, 97–106.
- [64] Hisada, T. Nakagiri, S., *Stochastic finite element developed for structural safety and reliability*, Proc. 4th ICOSSAR, 1981, 395–408
- [65] Hisada T., Nakagiri S., *Role of the Stochastic Finite Element Method in Structural Safety and Reliability*, Proc. 4th ICOSSAR, Kobe, Japan 1985, s. 385–394.
- [66] Hodge P.G., *Plastic Analysis of Structures*, McGraw-Hill, New York 1959.
- [67] Hohenbichler M., Gollwitzer S., Kruse W., Rackwitz R., *New light on first and second-order reliability methods*. Struct. Saf., 4, 1987, 267–284.
- [68] Hohenbichler M., Rackwitz R., *Non-normal dependent Vectors in Structural Safety*. J. Eng. Mech. Div., ASCE. Vol. 107, No EM6, 1981, 1227–1237.
- [69] Hohenbichler M., Rackwitz R., *Improvement of the second-order reliability estimates by importance sampling*. J. Eng. Mech., ASCE, 114,12, 1988, 2195–2199.
- [70] Horne M.R., *Effect of variable repeated loads in the plastic theory of structures*, In: *Engineering Structures*, Academic Press, New York 1949, 141–151.

- [71] Huber M.T., *Stereomechanika techniczna*, PZWS, Warszawa 1951.
- [72] Hwa Shan Ho, *Shakedown in Elastic-Plastic Systems under Dynamic Loadings*, J. Appl. Mech. Div., 39, 1972, 416–421.
- [73] Jendo S., Putresza J., *Multicriterion reliability-based optimization of bar structure by stochastic programming*, Arch. Civ. Eng. 42, 1996, 3–18.
- [74] Kahn M., Marshall W., *Methods of reducing sample size in Monte Carlo computations*. Oper.Res., 1, 1953, 1953, 263–278.
- [75] Kamenjarzh J., Weichert D., *On Kinematic upper bounds for the safety factor in shakedown theory*, Int. J. of Plast. 8, 1992, 827–837.
- [76] Karamachandani A., Bjerager P., Cornell C., *Adaptive importance sampling*, Proc., 5th ICOSSAR 1989. s.855- 862. 13.
- [77] Karamachandani A., Cornell C., *Adaptive hybrid conditional expectation approaches for reliability estimation*, Struct. Saf., 11, 1991, 59–74.
- [78] Knabel J., *Analiza niezawodności konstrukcji sprężysto-plastycznych przy użyciu powierzchni odpowiedzi*, Prace IPPT PAN, 6, 2004.
- [79] Koiter W.T., *Some remarks on plastic shakedown theorems*, Proc. 8th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech., Istanbul 1952, 220–230.
- [80] Koiter W.T., *A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures*, Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet. B 59, 1956, 24–34.
- [81] Koiter W.T., *General theorems for elastic-plastic solids*, In: *Progress in Solid Mechanics*, North Holland, Amsterdam 1960, 165–221.
- [82] Konieczny L., *Teoria przystosowania się belek*, Mech. Teoret. i Stos. 8, 1970, 259–276.
- [83] Kopociński B., Kowal Z., *Losowa nośność graniczna konstrukcji o dwóch minimalnych krytycznych zbiorach elementów mających elementy wspólne*, Arch. Inż. Łąd. 1, 1972, s. 103–115
- [84] Kowal Z., *Nośność graniczna konstrukcji złożonych z elementów równolegle połączonych z punktu widzenia teorii niezawodności*, Arch. Inż. Łąd. 4, 1971, s. 611–619.
- [85] Kowal Z., Zubrzycki S., *O bezpieczeństwie ustrojów prętowych*, Arch. Inż. Łąd. 1, 1970, s. 213–221
- [86] König J.A., *Zagadnienia teorii dostosowywania się konstrukcji sprężysto-plastycznych*, IPPT PAN, Warszawa 1965.
- [87] König J.A., *Theory of shakedown of elastic-plastic structures*, Arch. Mech. Stos. 18, 1966, 227–238.
- [88] König J.A., *A shakedown theorem for temperature dependent elastic moduli*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech. 17, 1969, 161–165.
- [89] König J.A., *Podstawowe twierdzenia z zakresu teorii dostosowywania się konstrukcji sprężysto-plastycznych do obciążeń zmiennych w czasie*, Mech. Teoret. i Stos. 8, 1970, 149–158.
- [90] König J.A., *A method of shakedown analysis of frames and arches*, Internat. J. Solids and Struct. 7, 1971, 327–344.
- [91] König J.A., *Projektowanie konstrukcji sprężysto-plastycznych przy obciążeniach zmiennych*, IPPT PAN. 24, 1974.
- [92] König J.A., *Shakedown of elastic-plastic structures*, PWM, Warszawa, Elsevier, Amsterdam–Oxford–New York–Tokyo 1987.
- [93] König J.A., Sawczuk A., Paprocka-Grabczyńska W., *Obliczanie ram i belek na przystosowanie*, Zeszyty Problemowe Mostostal nr 5, Warszawa 1974.
- [94] Levi R., *Calculs probabilistes de la sécurité des constructions*, Ann. Ponts et Chaussées. 119(4), 1949, 493–539.
- [95] Levi R., *L'application de la théorie des probabilistes aux calculs de résistance*. Annales des Travaux Publics de Belgique. 54, 1953, 175–206.

- [96] Levi R., *Les calculs de securite en matiere de fondations*. Annales de l'Institut Technique du Bati-ment et des Travaux Publics. 11, 1958, 541–544.
- [97] Lind N.C., *Formulation of probabilistic design*. J. Eng. Mech. Div., ASCE. 103, No. EM2, 1977, 273–284.
- [98] Lind N.C., *Optimal reliability analysis by fast convolution*. J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 105, No. EM3, 1979, 447–452.
- [99] Łubiński M., Filipowicz A., Żółtowski W., *Konstrukcje metalowe, cz. I*, Arkady, Warszawa 2005.
- [100] Madsen H.O., Krenk S., Lind N.C., *Methods of Structural Safety*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey 1986.
- [101] Maier G., *Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and non-associated flow-laws*, Meccanica 6, 1969, 250–260.
- [102] Maier G., *A matrix structural theory of piecewise-linear plasticity with interacting yield planes*, Meccanica 7, 1970, 51–66.
- [103] Maier G., *A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric ef-fects*, Proc. Symp. Foundations of Plasticity, Warszawa 1972, 417–433.
- [104] Marquardt D.W., *An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters*, J. Soc. In-dust. Appl. Math, 11(2), 1963.
- [105] Martin J.B., *Plasticity, Fundamentals and General Results*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London 1975.
- [106] Massonet C., *Essais d'adaptation et de stabilisation plastique sur des poutrelles lamineés*. Proc. IABSE 13, 1953, 239–282.
- [107] Melan E., *Theorie statisch unbestimmter Systeme*, Proc. Second Congr. IABSE, Berlin 1936, 43–64.
- [108] Melan E., *Die Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal plastischem Baustoff*, Sitber. Akad. Wiss. Wien IIa 145, 1936, 195–218.
- [109] Melan E., *Der Spannungszustand eines Mises-Henckyschen Kontinuums bei veränderlicher Belastung*, Sitber. Akad. Wiss. Wien IIa 147, 1938, 73–87.
- [110] Melan E., *Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums*, Ing. Archiv 8, 1938, 116–126.
- [111] Melchers R.E., *Efficient Monte Carlo Probability Integration*, Res. Rep. Monash University No. 7, 1984.
- [112] Melchers R.E., *Simulation in time-invariant and time-variant reliability problems*. W: Proc. 4th IFIP WG 7.5 Conf. On Reliability and Optimization of Structural Systems, Munich, Germany, Sept. 11–13, 1991, 39–82.
- [113] Melchers R.E., *Structural Reliability Analysis and Prediction*, Wiley & Sons, Baffins Lane, Chi-chester 1999.
- [114] Mendera Z., *Metoda stanów granicznych i probabilistyczny model obciążeń konstrukcji*, Arch. Inż. Łąd., 25, 1979, 43–65.
- [115] Mises R., *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, ZAMM 8(3), 1928, 161–183.
- [116] Mrazik A., Skaloud M., Tochacek M., *Rasczet i projektowanie stalnych konstrukcji s ucetom pla-sticznych deformacji*, Stroizdat, Moskwa 1986.
- [117] Murzewski J., *Bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych*. Arkady, Warszawa 1970.
- [118] Murzewski J., *Niezawodność konstrukcji inżynierskich*. Arkady, Warszawa 1989.
- [119] Myers, R.H., *Response Surface Methodology*, Boston, Allyn and Bacon, Inc., 2002.
- [120] Myers R.H., Montgomery D.C., *Response Surface Methodology Process and Product Optimisation Using Design Experiments*. John Wiley and Sons, 1995.

- [121] Neal B.G., *Plastic collapse and shakedown theorems for structures of strain-hardening material*, J. Aero. Sci. 17, 1950, 297–306.
- [122] Neal B.G., *The behaviour of framed structures under repeated loading*, Quart. J. Appl. Math. 4, 1951, 78–94.
- [123] Neal B.G., *The Plastic Methods of Structural Analysis*, Chapman and Hall, London 1963.
- [124] Neal B.G., Symonds P.S., *A method for calculating the failure load for a framed structure subjected to fluctuating loads*, J. Inst. Civ. Eng. 35, 1950–51, 186–197.
- [125] Neal B.G., Symonds P.S., *Cyclic loading of portal frames, theory and tests*, Pub. IABSE 18, 1958, 171–199.
- [126] Nguyen Dang Hung, König J.A., *A finite element formulation for shakedown problems using a yield criterion of the mean*. Com. Meth. Appl. Mech. Eng. 8, 1976, 179–192.
- [127] Nowak A.S., Collins K.R., *Reliability of Structures*, MC Graw Hill 2000.
- [128] Orkisz J., *Analiza naprężeń resztkowych w szynach kolejowych wywołanych obciążeniem eksploatacyjnym – model obliczeniowy*, VII Konf. Met. Komp. w Mech., Gdynia 1985, 1347–1356.
- [129] Orkisz J., *Koncepcja obliczania aktualnych naprężeń resztkowych przy dyskretyzacji metodą hybridowych elementów skończonych*, VIII Konf. Met. Komp. w Mech., Jadwisin 1987, 137–144.
- [130] Orkisz J., Paznowski M., *Obliczanie aktualnych naprężeń resztkowych MRS w ciałach pryzmatycznych poddanych obciążeniom cyklicznie zmiennym*, VIII Konf. Met. Komp. w Mech., Jadwisin 1987, 145–153.
- [131] Orkisz J., Orringer O., Holowiński M., Pazdanowski M., Cecot W., *Discrete Analysis of Actual Residual Stresses Resulting from Cyclic Loadings*, Comp. and Struct., 35, 1990, 397–412.
- [132] Orkisz J., *Concept of analysis of residual stresses based on enhanced data obtained from destructive measurement techniques*, Proc. XI Polish Conf. on Comp. Meth in Mech., Kielce-Cedzyna 1993, 667–674.
- [133] Parkes E.W., *Wings under repeated thermal stress*, Aircraft Eng. 26, 1954, 402–411.
- [134] Parkes E.W., *Incremental collapse due to thermal stress*, Aircraft Eng. 28, 1956, 395–402.
- [135] Pham D.C., *Shakedown of bars subjected to cycles of loads and temperature*, Int. J. Solid. Struct., 30, 1993, 1173–1179.
- [136] Pham D.C., *Shakedown Analysis for Trusses and Frames*, J. Appl. Mech., 64, 1997, 415–419.
- [137] Pham D.C., Stumph H., *Kinematical approach to shakedown analysis of some structures*, Q. Appl. Mech., 52, 1994, 707–719.
- [138] Polizzotto C., *A unified treatment of shakedown theory and related bounding techniques*, S. M. Arch. 7, 1982, 19–75.
- [139] Ponter A.R.S., *Deformation, displacement and work bounds for structures in a state of creep and subjected to variable loading*. Trans. ASME, ser. E, J. Appl. Mech. 39, 1972, 953–963.
- [140] Popov E.P., McCarthy R.E., *Deflection stability of frames under repeated loads*, J. Eng. Mech. Div. 86, 1960, 61–78.
- [141] Prager W., *Problem types in the theory of perfectly plastic materials*, J. Aero. Sci. 15, 1948, 337–341.
- [142] Prager W., *Shakedown in elastic-plastic media subjected to cycles of load and temperature*, Proc. Symp. Plasticita nelle Scienza Scienza delle Costruzioni, Bologna 1956, 239–244.
- [143] Prandtl L., *Ein Gedenkenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper*, ZAMM, 8, 1928, 85–106.
- [144] Puła W., *Zastosowania teorii niezawodności konstrukcji w ocenie bezpieczeństwa fundamentów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej 2004.
- [145] Pycko S., Mróz Z., *Alternative approach to shakedown as a solution of min max problem*, Acta Mechanica 93, 1992, 205–222.

- [146] Rackwitz R., *Response surfaces in structural reliability*. Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, Heft 67, 1982, LKI, Technische Universität München 1982.
- [147] Rackwitz R., Fiessler B., *Structural reliability under combined random loads sequences*. Computers and Structures, No. 9, 1978, 489–494.
- [148] Rosenblatt M., *Remarks on a multivariate transformation*. Annals of Mathematical Statistics 23, 1952, 470–472.
- [149] Rosenbluth E., Esteva L., *Reliability Bases of Some Mexican Codes*. ACI Publications, SP-31, 1–41. Detroit, Michigan, American Concrete Institute, 1972.
- [150] Rozenblum V.I., *O prispoblyaemosti neravnomierno nagretykh uprugo-plasticheskikh tel*, Izv. Akad. Nauk SSSR. OTN, Mekh. Mash. 7, 1957, 136–138.
- [151] Rozenblum V. I., *K analizu prispoblyaemosti neravnomerno nagretykh uprugo-plasticheskikh tel*, Prikl. Mat. Tkh. Fiz. 5, 1965, 98–101.
- [152] Rubinstein R., *Simulation and the Monte Carlo Method*. J. Wiley, New York 1981.
- [153] Rżanicyn A.R., *O priedelenie zapasa procznosti sooruzhenii*, Stroit. Prom. 8, 1947.
- [154] Rżanicyn A.R., *Statsticeskoje obosnowanije rasczotnykh koefficientow. Materialy k teorii rasczota po predielnomu sostojaniju*. Strojizdat, Moskwa 1949.
- [155] Rżanicyn A.R., *K problemie rasczotow sooruzhenij na bezopasnost*. W: *Woprosy bezopasnosti i procznosti stroitelnykh konstrukcij*, Strojizdat, Moskwa 1952.
- [156] Sawczuk A., *On incremental collapse of shells under cyclic loading*, IUTAM Symp Theory of Thin Shells, Copenhagen 1967, Springer Verlag, Berlin 1969, 328–340.
- [157] Sawczuk A., *Wprowadzenie do mechaniki konstrukcji plastycznych*. PWN, Warszawa 1982.
- [158] Siemaszko A., Bielawski B., Knabel J., *Shakedown and Limit Reliability-Based design*. Struct. Mech. In Reactor Technol. Washington 2001, CD.
- [159] Sieniawska R., Wysocka A., Żukowski S., *Niezawodność belek stalowych ze względu na przystosowanie*. XXXVI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB Krynica 1990. T. 1, 1990, 71–76.
- [160] Sieniawska R., Wysocka A., Żukowski S., *Niezawodność belek w zakresie sprężysto-plastycznym*. XLII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB Krynica 1996. T. 2. Kraków 1996, 161–168
- [161] Sieniawska R., Wysocka A., Żukowski S., *Reliability of Girders due to Loads, which Change their Location*. Z. Angew. Math. Mech. 78(3), 1998, 1077–1078.
- [162] Sieniawska R., Wysocka A., Żukowski S., *Reliability and Sensitivity Analysis of Trusses*. Z. Angew. Math. Mech. 80(2), 2000, 457–458.
- [163] Sieniawska R., Wysocka A., Żukowski S., *Reliability of Elastic-Elastic Bar Systems Loaded Dynamically*. Z. Angew. Math. Mech., 81(3) 2001, 643–644.
- [164] Sieniawska R., Wysocka A., Żukowski S., *Reliability Analysis of Elastic-Plastic Frames under Wind Load*, Proc. Appl. Math. Mech., 1, 2002, 177–178.
- [165] Sieniawska R., Wysocka A., Żukowski S., *Reliability of a Rail with Respect to the Shakedown*, Proc. Appl. Math. Mech., 3, 2003, 503–504.
- [166] Sieniawska R., Żukowski S., *Topics in reliability of the elastic-plastic structures. A case study of wind loaded chimney*. Proc. IFIP Working Conference, Ann Arbor, Michigan, USA, 2000, 217–224.
- [167] Sindel R., Gollwitzer S., Rackwitz R., *Problems and Solutions Strategies in Reliability Updating*. Proc. 15th OMAE, Florence 16–20. 06.1996. ASME, Vol. 2, 1996, 111–118.
- [168] Skrzypek J., *Plastyczność i pełzanie. Teoria, zastosowania, zadania*, PWN, Warszawa 1986.
- [169] Sundarajan S.R. i inni (praca zbiorowa), *Probabilistic Structural Mechanics Handbook*. Chapman & Hall, New York 1995.
- [170] Śniady P., *Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.

- [171] Śniady P., El-Meligy M., Żukowski S., *Structural Design Sensitivity in SFEM Formulation*, Proc. IFIP, Takamatsu, Kagawa Japan 1993, North-Holland, Amsterdam 1993, 245- 251.
- [172] Śniady P., Sieniawska R., Żukowski S., *Reliability of corrugated sheets with respect to the shakedown*, Int. Conf. on Light. Struct. Warsaw, 1995, 651–655.
- [173] Śniady P., Sieniawska R., Żukowski S., *Reliability of bridge beams with hybrid cross-sections*, Arch. Civ. Mech. Eng., 3(1), 2003, 13–23.
- [174] Śniady P., Sieniawska R., Żukowski S., *Reliability of a concrete bridge with respect to the reinforcement chloride corrosion*, Arch. Civ. Eng., 3, 2004, 381–399.
- [175] Śniady P., Sieniawska R., Żukowski S., *Reliability of elastic-plastic beams taking into account bending and shearing*, ICOSSAR 2005, Millpress Rotterdam 2005, 831–835.
- [176] Śniady P., Żukowski S., *Stateczność konstrukcji prętowych w ujęciu probabilistycznym*. VIII Konf. Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, Jadwisin 1987. T. 2, 1987, 379–386.
- [177] Śniady P., Żukowski S., *Probabilistyczna analiza statyczna kratownic*. Arch. Inż. Łąd. 1988, T. 34(2) 1988, 175–189.
- [178] Śniady P., Żukowski S., *Niezawodność konstrukcji prętowych w aspekcie teorii przystosowania*. IX Konf. Metody komputerowe w mechanice. Kraków-Rytro 1989. T. 3, 1989, 1001–1008.
- [179] Śniady P., Żukowski S., *Ocena bezpieczeństwa konstrukcji prętowych z uwagi na możliwość utraty stateczności*. Arch. Inż. Łąd. 1991 37(2), 165–177.
- [180] Śniady P., Żukowski S., *The reliability of bar structures in the light of the shakedown theory*. Proc. 4th IFIP Conference. Munich 1991. Springer Verlag Berlin 1992, 351–362.
- [181] Śniady P., Żukowski S., *The reliability and sensitivity of space truss structures under time-variable loads*. Conference on Space Structures, Guildford, UK, 1993. London, Thomas Telford 1993, 442–451.
- [182] Śniady P., Żukowski S., *The reliability of elastic-plastic structures under time-dependent load*. Proc. 6th ICOSSAR 93 International Conference, Innsbruck 1993. Vol. 2. Rotterdam; Brookfield, A.A.Balkema 1994, 1407–1410.
- [183] Śniady P., Żukowski S., *Design sensitivity of spatial structures with random parameters*, Proc. IASS Int. Symp., Milano 1995, 1, 111- 118.
- [184] Templin R. L., Sturm R.G., *Some stress-strain studies of metals*. J. Aero. Sci. 7, 1940, 189–198.
- [185] Timoshenko S.P., *Strength of materials*, Van Nostrand Comp., New York 1955–1956.
- [186] Toft-Christensen P., Baker M.J., *Structural Reliability Theory and Its Applications*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1982.
- [187] Toft-Christensen P., Murotsu Y., *Application of Structural System Reliability Theory*. Springer-Verlag, Berlin 1886.
- [188] Weichert D., Gross-Weege J., *The numerical assessment of elastic-plastic sheets under variable mechanical and thermal loads using a simplified two-surface yield condition*. Int. J. of Mech. Sci. 30, 1988, 757–767.
- [189] Wierzbicki W., *W sprawie bezpieczeństwa pręta wyciąganego osiowo*. Czasopismo Techniczne. 55(16), 1937, 273–277.
- [190] Wierzbicki W., *Bezpieczeństwo budowy jako zagadnienie prawdopodobieństwa*. Przegląd Techniczny, 690, 1956.
- [191] Woliński Sz., Wróbel K., *Niezawodność konstrukcji budowlanych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2001.
- [192] Wong F.S., *Slope Reliability and Response Surface Method*, J. Geotech. Eng., ASCE, 111(1), 1985, 32–53.
- [193] Wysocka A., Żukowski S., *The reliability of bar structures in view of shakedown*. X Polish Conf. On Computer Methods in Mechanics. Świnoujście 1991, 2. 1991, 793–800.

-
- [194] Yamazaki F., Shinozuka M., Dasgupta G., *Neumann expansion for stochastic finite element analysis*, J. Eng. Mech., ASCE, 114(8), 1988, 1335–1354.
- [195] Yan A.M., Nguyen Dang Hung, *Shakedown of structures by improved Koiter's theorem*. Proc. Nat. Cong. on Theor. and Appl. Mech. 1997, 449–452.
- [196] Yan A.M., Nguyen Dang Hung, *Limit analysis of cracked structures by mathematical programming and finite element technique*, Comp. Mech. 24, 1999, 319–333.
- [197] Zarka J., Casier C., *Elastic-plastic response of a structure to cyclic loading, Practical rules*, Mechanics Today, Pergamon Press 6, 1979, 1663–1669.
- [198] Zeitoun D.G., Baker R., Uzan J., *Application of random plasticity to soil mechanics*. Structural Safety, 1988, 79–93.
- [199] Zieliński R., *Generatory liczb losowych*. WNT, Warszawa 1970.
- [200] Zwoliński J., Bielawski G., *Optymalny dobór naprężeń resztkowych dla wyznaczenia nośności granicznej i przystosowania się konstrukcji*, VIII Konf. Metod. Komp. w Mech. Konstr., Jadwisin 1987, 459–458.
- [201] Żukowski S., *Przystosowanie a nośność graniczna w przypadku obciążeń zmiennych*, II Konf. Nauk. Bad. Noś. Gran. Konstr. Met., Wrocław–Karpacz 2001, 233–240.

Safety estimation of the plane bar structures based on the shakedown theory point of view

In the dissertation an algorithm for the probabilistic safety estimation of the plane bar structures made of elastic perfectly plastic materials is presented. The approach concerns two fundamental problems: determining the limit conditions on the basis of the shakedown theory and estimating the structure safety applying the reliability theory. The algorithm takes into account the static live and dead loads including temperature changes over the ranges in which it can be assumed that they do not change the material properties. The relationships presented apply also to the case of dynamic loads.

Based on the related literature a historical review of the shakedown theory is made and the results of experimental investigations which justify the fact of choosing this theory as a basis for estimation of the safety of structures made of elastic perfectly plastic materials are given. The basic assumptions and theorems of this theory are presented, too. An inconsistency between classical kinematic and static formulations of shakedown has been pointed out and an approach to its elimination has been proposed. For formulating the limit conditions an algorithm which uses the analogy between the primary and dual tasks of linear programming and between the static and kinematic formulations of the shakedown theory has been proposed. The algorithm includes setting up the systems of linear equations which describe the structure shakedown, building systems of linear equations from the primary constraints and dual systems of equations, the solutions of which allow limit boundaries to be determined as functions of variables describing the structure and its load. The limit conditions obtained may be treated as the kinematic constraints which, together with corresponding statical formulations, generate the closed solutions. The linear shakedown conditions expressed through the cross-sectional forces for the bisymmetric cross-sections for the case of bending, the bending with axial force and for the bending with the axial and shear forces are presented in detail. The inexactness of the existing static theorem for bended elements with mono-symmetric cross-section is pointed out. The linearized shakedown conditions for the bending and for the bending with the axial force expressed through the cross-sectional forces are derived. The shakedown conditions appropriate for the safety assessment of elements with hybrid cross-sections are presented.

Like for the shakedown case, a historical review of the development of the reliability theory based on the related literature is presented. Scarce publications about the reliability assessment from the shakedown theory point of view are taken into account. Basic measures and methods of determining them applied to the reliability theory are described. An iterative algorithm for computing to the Hasofer–Lind reliability coefficient is proposed. The fundamental reliability systems and their usage for the structure modeling are discussed in the context of safety assessment based on the shakedown theory.

The algorithm introduced in this publication may be easily adopted to the assessment of structures with different cross-sections than shown above (e.g., concrete ones) and to take into account other structure states which are regarded as failure, for example, loss of stability.

The application of the idea of the structure safety assessment proposed is illustrated by two examples. Some solutions of these examples, showing different elements of the algorithm considered are presented.

Spis treści

Podstawowe oznaczenia.....	4
1. Cel i zakres pracy	9
1.1. Cel pracy	9
1.2. Zakres pracy	10
2. Podstawy teorii przystosowania układów prętowych	12
2.1. Wstęp	12
2.2. Założenia podstawowe	16
2.3. Istota i kryteria teorii przystosowania	18
2.4. Twierdzenia statyczne o przystosowaniu	23
2.4.1. Twierdzenie Melana dla kontinuum materialnego	23
2.4.2. Twierdzenie o przystosowaniu wyrażone poprzez siły przekrojowe	24
2.4.3. Twierdzenie Bleicha i Bleicha–Melana	25
2.4.4. Przystosowanie układów prętowych o przekrojach monosymetrycznych	26
2.5. Twierdzenia kinematyczne o nieprzystosowaniu	27
2.5.1. Twierdzenie kinematyczne dla kontinuum materialnego	27
2.5.2. Twierdzenie kinematyczne o nieprzystosowaniu wyrażone przez siły przekrojowe ..	28
2.5.3. Twierdzenie kinematyczne Neala	28
3. Wyznaczanie warunków granicznych dla konstrukcji	29
3.1. Wstęp	29
3.2. Wykorzystanie programowania liniowego do określania warunków granicznych dla konstrukcji	32
3.3. Warunki przystosowania w ujęciu programowania liniowego w przypadku uwzględniania zginania	39
3.3.1. Układy prętowe o przekrojach idealnie dwuteowych	39
3.3.2. Układy prętowe o przekrojach bisymetrycznych	41
3.3.3. Układy prętowe o przekrojach monosymetrycznych	43
3.3.4. Układy prętowe o przekrojach hybrydowych	48
3.4. Warunki przystosowania w ujęciu programowania liniowego w przypadku uwzględniania zginania z udziałem sił podłużnych	51
3.4.1. Układy prętowe o przekrojach bisymetrycznych	51
3.4.2. Układy prętowe o przekrojach monosymetrycznych	56
3.5. Warunki przystosowania w ujęciu programowania liniowego w przypadku uwzględniania naprężeń normalnych i tnących	59
3.5.1. Wprowadzenie	59
3.5.2. Przekroje typu prostokątnego	61
3.5.2.1. Zginanie i ścinanie	61
3.5.2.2. Zginanie, rozciąganie i ścinanie	65
3.5.3. Przekroje typu dwuteowego	69
3.5.3.1. Zginanie i ścinanie	69
3.5.3.2. Zginanie, rozciąganie i ścinanie	72

3.5.4. Quasi-linearyzacja warunku plastyczności na poziomie przekroju	76
3.6. Algorytm określania zapasu bezpieczeństwa	78
4. Podstawowe miary i metody oceny bezpieczeństwa	84
4.1. Wstęp	84
4.2. Prawdopodobieństwo awarii	86
4.3. Współczynnik bezpieczeństwa	87
4.4. Wskaźniki niezawodności	88
4.4.1. Wskaźnik niezawodności Cornella	88
4.4.2. Wskaźnik niezawodności Rosenblutha–Esteve	89
4.4.3. Wskaźnik niezawodności Hasofer–Linda	90
4.5. Metody FORM i SORM	91
4.6. Metody symulacyjne	93
4.6.1. Metoda Monte Carlo	93
4.6.2. Metoda symulacji ważonej	94
4.6.3. Metoda warunkowej wartości oczekiwanej	95
4.6.4. Metoda adaptowanej warunkowej wartości oczekiwanej	96
4.6.5. Metoda symulacji kierunkowej	97
4.7. Metody aproksymacyjne	98
4.7.1. Metoda powierzchni odpowiedzi	98
4.7.2. Aproksymacja gęstości prawdopodobieństwa zapasu bezpieczeństwa wielomianami ortogonalnymi	99
4.8. Metody numerycznego obliczania momentów probabilistycznych	100
4.8.1. Metoda perturbacyjna	100
4.8.2. Wykorzystanie rozwinięcia Neumanna	102
4.9. Metoda iteracyjna wyznaczania wskaźnika niezawodności Hasofer–Linda	103
5. Niezawodność konstrukcji	105
5.1. Modele niezawodnościowe konstrukcji	105
5.2. Niezawodność systemu	110
5.3. Oszacowanie sumy i iloczynu zdarzeń zależnych	112
6. Przykłady ilustrujące zastosowanie proponowanego algorytmu	115
6.1. Przykład 1	115
6.2. Przykład 2	127
7. Podsumowanie	133
Literatura	137

Contents

List of notations	4
1. Objective and scope of the dissertation	9
1.1. Objective of the dissertation	9
1.2. Scope of the dissertation	10
2. Basics of the shakedown theory of the bar structures	12
2.1. Introduction	12
2.2. Basic assumptions	16
2.3. Essence and criteria of the shakedown theory	18
2.4. Static theorems of the shakedown	23
2.4.1. Melan theorem of the material continuum	23
2.4.2. Shakedown theorem in terms of the internal forces	24
2.4.3. Bleich and Bleich–Melan theorem	25
2.4.4. Shakedown of the bar structures of mono-symmetrical cross-sections	26
2.5. Kinematic theorem of the unshakedown	27
2.5.1. Kinematic theorem of the material continuum	27
2.5.2. Kinematic theorem of the unshakedown in terms of the internal forces	28
2.5.3. Neal kinematic theorem	28
3. Formulation of the structure limit conditions	29
3.1. Introduction	29
3.2. Application of the linear programming to formulation of the structures limit conditions	32
3.3. Shakedown conditions in terms of linear programming in the case of bending	39
3.3.1. Bar structures of the ideal I-sections	39
3.3.2. Bar structures of the bisymmetrical cross sections	41
3.3.3. Bar structures of the mono-symmetrical cross sections	43
3.3.4. Bar structures of the hybrid cross sections	48
3.4. Shakedown conditions in terms of linear programming in the case of bending and longitudinal forces	51
3.4.1. Bar structures of the bisymmetrical cross sections	51
3.4.2. Bar structures of the mono-symmetrical cross sections	56
3.5. Shakedown conditions in terms of linear programming in the case of normal and shear stresses	59
3.5.1. Introduction	59
3.5.2. Cross sections of the rectangular type	61
3.5.2.1. Bending and shearing	61
3.5.2.2. Bending, tension and shearing	65
3.5.3. Cross sections of the I-section type	69
3.5.3.1. Bending and shearing	69
3.5.3.2. Bending, tension and shearing	72

3.5.4. Quasi-linearization of the plastic condition on the cross sections level	76
3.6. Algorithm for determining the safety margin	78
4. Basic measures and methods for the safety estimation	84
4.1. Introduction	84
4.2. Probability of failure occurring	86
4.3. Safety factor	87
4.4. Safety indices	88
4.4.1. Cornell safety index	88
4.4.2. Rosenbluth–Esteva safety index	89
4.4.3. Hasofer–Lind safety index	90
4.5. FORM and SORM methods	91
4.6. Simulation methods	93
4.6.1. Monte Carlo method	93
4.6.2. Importance sampling method	94
4.6.3. Conditional expectation method	95
4.6.4. Adaptive conditional expectation method	96
4.6.5. Directional simulation method	97
4.7. Approximation methods	98
4.7.1. Response surface method	98
4.7.2. Approximation of the safety margin probability density by the orthogonal polynomials	99
4.8. Methods of the numerical calculations of the probabilistic moments	100
4.8.1. Perturbation method	100
4.8.2. Use of the Neumann expansion	102
4.9. Iterative method for the Hasofer–Lind reliability index determination	103
5. Structure reliability	105
5.1. Structure reliability models	105
5.2. Reliability system	110
5.3. Estimation of the sum and product of the dependent events	112
6. Examples which illustrate application of the algorithm proposed	115
6.1. Example 1	115
6.2. Example 2	127
7. Recapitulation	133
References	137