Politechnika Wrocławska

Józef Rohleder

Fizyka chemiczna

Wrocław 1976

Opracowanie naukowe na potrzeby dydaktyki
Instytutu Chemii Organicznej i fizycznej
do przedmiotu: Fizyka chemiczna

Opiniodawca
Arkadiusz Jaśkiewicz

Redaktor
Danuta Sowińska

Korektor
Anna Cząstkiewicz

REDAKCJA WYDAWNICTW POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 — Wrocław

Nakład 1000 + 65 egz.	Oddano do drukarni w marcu 1976 r.
Ark. wyd. 10,4, druk. 10 7/8	Podpisano do druku w kwietniu 1976 r.
Papier III kl. offset., 70 g, B1	Druk ukończono w kwietniu 1976 r.

Wrocławska Drukarnia Naukowa — Zam. 2072/76 — A-14 — Cena zł 45,—

PRZEDMOWA

Fizykę chemiczną wprowadzono do programu nauczania na Wydziale Chemicznym Politechniki Wrocławskiej w 1964 r., zamiast wykładanej tradycyjnie fizyki. Zmiana nazwy przedmiotu oznaczała przyznanie wykładowcy prawa wyboru takich zagadnień i rozdziałów, które mogły mieć największe znaczenie i przydatność dla tego kierunku studiów, a jednocześnie mogły być przedstawione w określonym czasie.

Z biegiem lat program wykładu ulegał rozmaitym ewolucjom. Wpływały nań zarówno doświadczenia własne autora, wynikające z konfrontacji egzaminacyjnych ze studentami, jak również potrzeba wprowadzenia nowych poglądów i pojęć zamiast mniej aktualnych.Ten proces wymiany nie został zakończony - trwa on do dzisiaj. Nowy czynnik, mający wpływ na zakres poruszanych w wykładzie zagadnień, który pojawił się przed kilkoma laty, jest związany z reformą szkolnictwa średniego i postępującym za nią rozszerzeniem wiadomości abiturientów w zakresie fizyki. Spowodowało to na przykład w wykładzie mechaniki zogniskowanie uwagi na zagadnieniach dynamiki bryły sztywnej zamiast dynamiki punktu,usunięcie z elektrodynamiki prawa Ohma i jego bezpośrednich zastosowań, pominięcie elektrochemii, w optyce zaś zagadnień optyki geometrycznej.

Zmian takich jest więcej, ich ogólnym celem było zarówno wyeliminowanie z wykładu tych zagadnień, których lepszą czy gorszą znajomość powinien posiadać absolwent szkoły średniej, jak też przeniesienie niektórych problemów do innych przedmiotów, gdzie są omawiane szerzej (termodynamika, budowa atomu).

Opracowując wykład według przyjętego ostatnio programu autor korzystał z wielu podręczników i monografii, w celu znalezienia najbardziej trafnego lub interesującego sposobu przedstawienia poruszanych problemów; niekiedy udało się autorowi samemu coś wnieść w tej dziedzinie. Spis odpowiednich dzieł został zamieszczony na końcu skryptu. Z wymienionych tam pozycji można korzystać w celu rozszerzenia i pogłębienia indywidualnych zainteresowań Czytelników.

Autor nie unikał wprowadzania do wykładu zagadnień trudniejszych, uznając, iż zapoznanie się z nimi na wczesnym etapie studiów ułatwia

korzystanie z wykładów specjalistycznych, przeznaczonych dla bardziej zaawansowanego grona słuchaczy. Na zasadzie przykładu można tu wymienić dynamikę bryły sztywnej z potraktowaniem momentu bezwładności jako wielkości tensorowej, elementy teorii względności i związane z tym zagadnienie transformacji układu współrzędnych, anizotropii własności fizycznych ciał stałych w opisie tensorowym. Podawane niekiedy przykłady rachunkowe mają na celu zorientowanie Czytelnika w zastosowaniu formalizmu do konkretnych zagadnień i - być może - ułatwią zrozumienie zasad ogólnych.

Wiele zagadnień lub sposób ich przedstawienia omawiano w zespole pracowników naukowych, zajmujących się nauczaniem fizyki chemicznej. Wdzięczny jestem szczególnie drowi Bolesławowi Jakubowskiemu za jego gotowość do współpracy i cenne uwagi. Niezmierną cierpliwość i wyrozumiałość wykazała również moja Żona, przepisując mało czytelny rękopis; bez jej pomocy nie byłoby możliwe przygotowanie pracy do druku w tak krótkim terminie.

Autor

Wrocław, 21 lipca 1975 r.

DEFINICJE JEDNOSTEK PODSTAWOWYCH W UKŁADZIE SI

1. Metr jest długością równą 1 650 763,73 $\cdot\lambda_{Kr}$; λ_{Kr} jest długością fali w próżni prążka spektralnego, odpowiadającego przejściu emisyjnemu między poziomami $2p_{10}$ i $5d_5$ atomu kryptonu $^{86}_{30}Kr$.

2. Kilogram jest masą międzynarodowego wzorca tej jednostki, wykonanego ze stopu 90% Pt i 10% Ir i przechowywanego w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sèvres pod Paryżem.

Wtórnym wzorcem 1 kilograma jest masa 1,000028 dm^3 wody destylowanej w temperaturze 4 ^oC pod ciśnienieniem 1 Atmosfery.

3. Sekunda jest $(31\ 556\ 925,974\ 7)^{-1}$ częścią roku zwrotnikowego dla 1900 r. stycznia 0 o godzinie 12 czasu efemeryd.

4. Amper jest natężeniem prądu elektrycznego stałego, który płynąc w dwóch równoległych i nieskończenie długich przewodnikach o przekroju znikomo małym, umieszczonych w próżni w odległości wzajemnej jednego metra, wywołuje między tymi przewodnikami siłę $2\cdot10^{-7}$ niutona na każdy metr ich długości.

5. Kelvin jest jednostką temperatury skali termodynamicznej, w której temperatura punktu potrójnego wody jest dokładnie równa 273,16 K.

6. Kandela jest światłością, którą ma w kierunku prostopadłym element powierzchni ciała doskonale czarnego o wielkości $(6\cdot10^5)^{-1}$ m^2, promieniującego w temperaturze krzepnienia platyny pod ciśnieniem 1 atmosfery fizycznej.

OZNACZENIA I SYMBOLE

1. Oznaczenia ogólne

$\equiv$	"identyczne z ...",
$<>$	wartość średnia,
$\rightarrow$	"przechodzi w ...",
$\supset$	"pociąga, że ...",
$\underline{A}$, $\underline{B}$	wektory A, B; podkreślenie litery u dołu oznacza wektor,

$\underline{A}\cdot\underline{B}$	iloczyn skalarny wektorów $\underline{A}$ i $\underline{B}$,
$\underline{A}\times\underline{B}$	iloczyn wektorowy wektorów $\underline{A}$ i $\underline{B}$,
$\dot{x}$	kropka nad literą oznacza pochodną względem czasu; $\dot{x}$ jest więc składową prędkości wzdłuż osi x,
$\underline{\nabla}$	operator gradientu ("nabla"),
(A)	macierz A,
$(\tilde{A})$	macierz A przestawiona,
$[A]$	tensor A,
$A_{\mu\nu}$	składowe tensora (lub elementy macierzy) A.

2. Przestrzeń i czas

x,y,z x_1,x_2,x_3	współrzędne położenia,
$\underline{i},\underline{j},\underline{k}$ $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$	wektory jednostkowe wzdłuż osi współrzędnych,
$\underline{r}$	wektor wodzący punktu (w m),
r, R	promień okręgu (w m),
Δx	niewielki przyrost x,
L, s	droga (w m),
A, S	powierzchnia (w m^2),
V	objętość (w m^3)
α,β,γ θ,δ,φ	kąty płaskie (w rad),
λ	długość fali (w m),
σ	liczba falowa (w m^{-1}),
$\underline{k}$	wektor falowy (w m^{-1}),
t	czas (w s),
T	okres (w s),
ν	częstość liniowa (w s^{-1}),
ω	częstość kątowa (w s^{-1}),
$\underline{\omega}$	prędkość kątowa (w s^{-1}),
$\underline{\varepsilon}$	przyśpieszenie kątowe (w s^{-2}),
$\underline{v}$	prędkość liniowa (w m/s),
$\underline{a}$	przyśpieszenie liniowe (w m/s^2),
$\underline{a}_s$	składowa przyśpieszenia styczna do toru (w m/s^2),
$\underline{a}_n$	składowa przyśpieszenia normalna do toru (w m/s^2).

3. Dynamika

m	masa (w kg),
m_o	masa spoczynkowa (w kg),

ρ gęstość (w kg/m^3),
g przyspieszenie ziemskie,
$\underline{F}$ siła (w N),
$\underline{F}_p$ siła przyłożona (w N),
$\underline{F}_w$ siła wewnętrzna (w N),
G stała grawitacji (w Nm^2/kg),
T energia kinetyczna (w J),
U energia potencjalna (w J),
$W(A \rightarrow B)$ praca przesunięcia masy z punktu A do B (w J),
E energia całkowita (w J),
P moc (w W),
C współczynnik liniowej siły sprężystej (w N/m),
$\underline{p}$ pęd ciała (w kgm/s),
$\underline{J}$ kręt (moment pędu) punktu (w N·m),
$\underline{M}$ moment siły (N·m),
I moment bezwładności (w $kg \cdot m^2$),
$I_{\mu\nu}$ składowe tensora momentu bezwładności (w $kg \cdot m^2$),
c prędkość światła w próżni (w m/s),
$\beta \equiv \frac{v}{c}$ stosunek prędkości obiektu do prędkości światła,
$\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}$ czynnik transformacji Lorentza,
L długość pręta w ruchu (w m),
τ czas własny układu spoczywającego (w s),
ω_o częstość kątowa drgań harmonicznych (nie tłumionych),
T_o okres drgań harmonicznych (nie tłumionych),
ω aktualna częstość drgań,
T aktualny okres,
γ współczynnik siły tarcia,
τ czas relaksacji,
β stała tłumienia.

4. Elektrostatyka i elektrodynamika

q ładunek swobodny (w C),
$+q_o$ dodatni ładunek próbny (w C),
e ładunek elektronu (w C),
q_z ładunek związany w dielektryku (w C),
σ powierzchniowa gęstość ładunku (w C/m^2),
ρ objętościowa gęstość ładunku (C/m^3),
ε_o bezwzględna przenikalność dielektryczna próżni (w C^2/Nm^2),
ε względna przenikalność dielektryczna ośrodka (stała dielektryczna),

$\underline{E}_o$ natężenie pola elektrycznego w próżni (w V/m),
$\underline{E}$ natężenie pola elektrycznego w ośrodku (w V/m),
$\underline{p}$ moment dipolowy (w C·m),
N strumień wektora przez powierzchnię zamkniętą S (w V·m),
V potencjał pola (w V),
C pojemność elektrostatyczna, (w F),
G czynnik geometryczny kondensatora, (w m),
$\underline{D}$ wektor indukcji elektrostatycznej (w C/m^2),
$\underline{P}$ wektor polaryzacji dielektryka (w C/m^2),
$\underline{E}_z$ natężenie pola wytwarzane przez ładunki związane (w V/m),
δ grubość warstwy podwójnej w dielektryku (w m),
d odległość okładek kondensatora (w m),
S powierzchnia jednej okładki (w m^2),
U różnica potencjałów (w V),
T_C temperatura Curie (w K),
A powierzchnia przekroju przewodnika
i, I natężenie prądu (w A),
σ przewodnictwo właściwe elektryczne ($\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$),
ρ oporność właściwa (w Ω·m),
$\underline{j}$ gęstość prądu przewodzenia (w A/m^2),
u ruchliwość nośnika, (w m^2/Vs),
$\underline{v}$ szybkość unoszenia nośnika (w m/s),
n koncentracja nośników, (w m^{-3}),
d gęstość materiału (w kg/m^3)
R oporność przewodnika,
τ stała czasowa obwodu RC (w s),
k stała Boltzmanna (w J/K),
ΔE energia aktywacji (w J),
ε siła elektromotoryczna (ogniwa) (w V),
S powierzchnia (obwodu z prądem), (w m^2),
dS element powierzchni,
$\underline{p}_m$ moment magnetyczny (obwodu z prądem), (w $A\cdot m^2$),
$\underline{B}$ wektor indukcji magnetycznej (w Wb/m^2),
$\underline{H}$ natężenie pola magnetycznego (w A/m),
N_B strumień wektora B, (w Wb),
P moc prądu (w w),
μ_o bezwzględna przenikalność magnetyczna próżni (w Wb/(A·m),
μ względna przenikalność magnetyczna ośrodka,
$\underline{P}$ wektor namagnesowania (w A/m),
$\varkappa$ podatność magnetyczna jednostki objętości,
χ podatność magnetyczna 1 mola substancji,

L współczynnik samoindukcji (w H),
ω częstość kątowa prądu przemiennego (w s^{-1}),
φ kąt przesunięcia fazowego.

5. Fale

ν liniowa częstość drgań (w s^{-1}),
ω kątowa częstość drgań (w s^{-1}),
Δ różnica dróg dwóch ciągów falowych (w m),
λ długość fali (w m),
$\psi(x,t)$ wielkość przesunięcia punktu z położenia równowagi w miejscu x i w chwili t (w m),
$\underline{k}$ wektor falowy (w m^{-1}),
v prędkość fali (światła) w ośrodku materialnym (w m/s),
c prędkość światła w próżni (w m/s),
$\underline{E}$ natężenie pola elektrycznego (w V/m),
$\underline{D}$ wektor indukcji elektrostatycznej (w C/m^2),
$\underline{H}$ wektor natężenia pola magnetycznego (w A/m),
$\underline{B}$ wektor indukcji magnetycznej (w Wb/m^2),
$\underline{S}$ wektor Poyntinga (w w/m^2),
$\underline{l}$ wektor jednostkowy w kierunku normalnej do płaszczyzny stałej fazy,
n_{21} współczynnik załamania światła ośrodka 2 względem ośrodka 1
ε_{opt} optyczna stała dielektryczna,
k stała absorpcji (w m^{-1}),
D przepuszczalność (w %),
$\varkappa$ indeks absorpcji
R współczynnik odbicia,
R_e całkowita emisja energetyczna ciała doskonale czarnego (w w/m^2),
$r(\lambda)$ zdolność emisyjna,
$a(\lambda)$ zdolność absorpcyjna,
σ stała w prawie Stefana-Boltzmanna,
h stała Plancka,

6. Jądro atomowe i cząstki elementarne

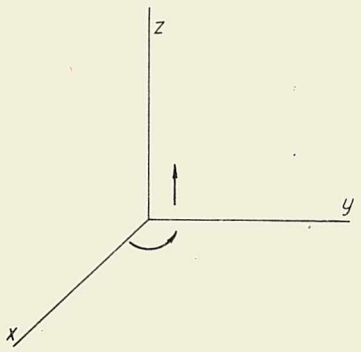
m_j masa jądra, (w kg),
Z liczba porządkowa jądra,
M masa atomowa jądra,
A liczba masowa,
m_e masa spoczynkowa elektronu, (w kg),

m_p masa spoczynkowa protonu (w kg),
m_n masa spoczynkowa neutronu (w kg),
ΔM defekt masy jądra,
N liczba jąder istniejących w danej chwili,
λ stała rozpadu (w s^{-1}),
τ czas połowicznego zaniku (w s),
α jądra helu (cząstki alfa),
β szybkie elektrony, emitowane przez jądro,
γ kwant promieniowania elektromagnetycznego,
R zasięg cząstki alfa,
σ przekrój czynny jądra,
p_f prawdopodobieństwo rozszczepienia,
k_∞ współczynnik rozmnożenia neutronów dla nieskończenie dużego kawałka materiału rozszczepialnego,
ν neutrino,
$\bar{\nu}$ antyneutrino; kreska nad symbolem cząstki oznacza antycząstkę,
π mezony pi (piony),
μ mezony mi (miony),
K mezony K
Λ hiperony lambda,
Σ hiperony sigma,
Ξ hiperony ksi.

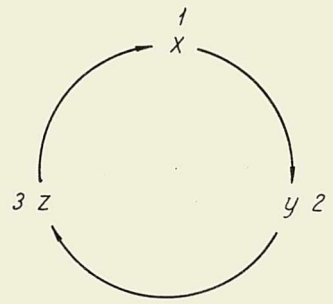
1. KINEMATYKA PUNKTU

W niniejszym rozdziale zajmiemy się opisem stanu ruchu obiektu fizycznego, pomijając przyczyny, powodujące taki czy inny sposób poruszania się tego obiektu. Wybór obiektu, czyli poruszającego się ciała, jest sprawą dość dowolną - najwygodniej będzie przyjąć, iż poruszającym się ciałem jest punkt geometryczny obdarzony masą, czyli tzw. punkt materialny. Położenie punktu określają dokładnie jego współrzędne x, y, z, podawane względem kartezjańskiego i prawoskrętnego układu współrzędnych. Przypisanie punktowi masy okaże się pożyteczne w rozdziale 2, w którym będziemy się zajmować przyczynami, wpływającymi na zmianę stanu ruchu naszego punktu.

Układ współrzędnych jest prawoskrętny, jeśli kolejność występowania osi odpowiada ruchowi śruby prawej - na przykład obrotowi od osi x do y o kąt mniejszy od π towarzyszy ruch postępowy śruby prawej w dodatnim kierunku osi z (rys. 1-1). Prawoskrętnemu układowi współ-



Rys. 1-1



Rys. 1-2

rzędnych odpowiada cykliczna kolejność występowania osi: xyz, yzx lub zxy (rys. 1-2). Zmiana kolejności w dowolnej parze współrzędnych zmienia układ na lewoskrętny (np. xzy lub yxz odpowiadają kolejności osi układu lewoskrętnego). Wprowadzenie zamiast literowych oznaczeń osi oznaczeń cyfrowych, $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 2$, $z \rightarrow 3$, ułatwia zapisywanie sumy przez wykorzystanie znaku $\sum$.

Ruch punktu powoduje, że wszystkie trzy współrzędne punktu zależą od czasu

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \qquad (1.1)$$

Inaczej mówiąc, równania (1.1) są parametrycznymi równaniami ruchu. Można je zapisać krócej, posługując się pojęciem wektora wodzącego $\underline{r}$ punktu. Jeśli położenie punktu materialnego będziemy opisywać za pomocą wektora r, którego początkiem jest (0,0,0) a końcem punkt materialny, to ruch tego punktu można wyrazić jedną zależnością

$$\underline{r} = \underline{r}(t)\ . \qquad (1.2)$$

1.1. Klasyfikacja wielkości fizycznych

Wielkości fizyczne, z jakimi będziemy się spotykać podczas kursu fizyki chemicznej, należą do jednej z trzech kategorii.

i. Wielkość skalarna; przykładem takiej wielkości jest masa m, temperatura T, objętość V. Wszystkie wielkości tego typu mają tylko jedną cechę: wartość liczbową, niekiedy dodatnią i ujemną.

ii. Wielkości wektorowe; przykładem takiej wielkości jest prędkość $\underline{v}$, przyspieszenie $\underline{a}$, siła $\underline{F}$, natężenie pola elektrycznego $\underline{E}$. Wielkości wektorowej odpowiada wartość liczbowa (długość wektora) kierunek i zwrot, a niekiedy jeszcze określony punkt zaczepienia. Główne przyczyny, z powodu których wprowadzamy w fizyce wektory, są następujące: zapis praw fizycznych za pomocą wektorów jest prosty i zwięzły, postać praw fizycznych zaś, wyrażonych za pomocą wektorów nie ulega zmianie wraz ze zmianą układu współrzędnych. Korzystając z zapisu wektorowego zakładamy, iż podstawowe działania na wektorach, takie jak dodawanie i odejmowanie, rozkład na składowe, iloczyn skalarny i wektorowy, są Czytelnikowi znane.

Warto zauważyć, że nie wszystkie wielkości, które mają wymienione cechy wektora, muszą być wektorami; przykładem jest obrót bryły sztywnej o skończony kąt. Pomimo iż taki obrót ma wartość liczbową (kąt obrotu), kierunek (oś obrotu) i zwrot nie jest wektorem, ponieważ do dwóch wykonanych kolejno obrotów nie stosuje się prawo dodawania. Widzimy więc, iż dodatkowym warunkiem zaliczenia jakiejś wielkości fizycznej do wielkości wektorowych jest ten, by spełniała ona prawo równoległoboku podczas dodawania. Zasadę tę spełnia na przykład wektor $\underline{E}$ natężenia pola elektrycznego: jeśli ładunek próbny q_0 znajduje się w polu elektrycznym, wytwarzanym przez dwa inne ładunki punktowe q_1 i q_2, to siła działająca na q_0 wynika z natężenia pola $\underline{E}$ jakie o-

trzymujemy, dodając wektorowo natężenie pola $\underline{E}_1$ i $\underline{E}_2$, wytwarzane przez oba ładunki q_1 i q_2.

iii. W liniowych związkach między wektorami, np.

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \underline{E},$$

gdzie $\underline{D}$ jest wektorem indukcji elektrycznej w dielektryku, $\underline{E}$ - natężeniem pola elektrycznego, bardzo często pojawiają się pewne stałe, zależne od własności materiału, czyli tzw. stałe materiałowe. W naszym przykładzie tą stałą jest ε, czyli względna przenikalność (stała dielektryczna) dielektryka. Charakter tych stałych zależy od własności interesującego nas dielektryka: ε może być jedną liczbą, jeśli materiał ma we wszystkich kierunkach takie same własności, ale na ogół ε jest tensorem o dziewięciu składowych, uszeregowanych w macierz o trzech wierszach i trzech kolumnach. Taka tablica nosi nazwę tensora drugiego rzędu; we wszystkich zagadnieniach, którymi będziemy się interesować w dalszym ciągu, występujące tensory będą rzędu drugiego.

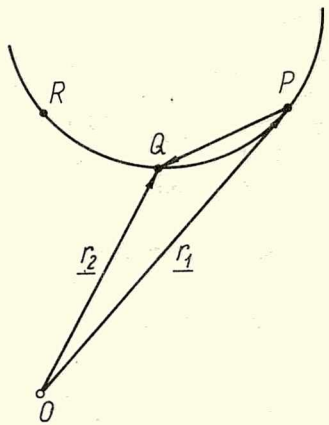
1.2. Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego

Przypuśćmy, że punkt materialny porusza się wzdłuż łuku PQR... (rys.1-3). Położenie tego punktu w chwili t_1 podaje wektor $\underline{r}_1$, w chwili t_2 wektor $\underline{r}_2$, przy czym oba wektory wodzące mają początek w dowolnym punkcie O. Mamy

$$\underline{r}_1 + \underline{PQ} = \underline{r}_2,$$

czyli

$$\underline{PQ} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 = \Delta \underline{r}.$$



Rys. 1-3

Średnią prędkością punktu materialnego między chwilą t_1 i t_2 nazywamy iloraz różnicowy

$$\langle \underline{v} \rangle = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}.$$

Wielkość ta ma w fizyce niewielkie znaczenie, ponieważ niedokładnie opisuje prędkość aktualną punktu materialnego w określonym punkcie łuku. Jeśli jednak t_2 zmierza do t_1, czyli $\Delta t \to 0$, to również $\Delta \underline{r} \to 0$, lecz iloraz różnicowy zmierza do określonej granicy, zwanej chwilową prędkością punktu materialnego

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}. \qquad (1.3)$$

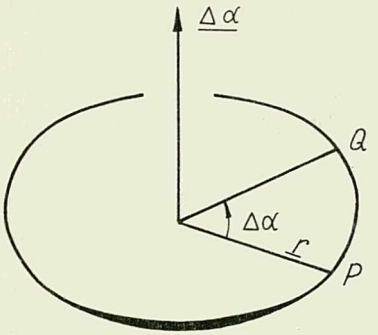
Widzimy również, iż prędkość $\underline{v}$ jest wektorem zawsze stycznym do toru punktu materialnego.

Rozumując analogicznie możemy określić chwilowe przyspieszenie punktu materialnego

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} . \tag{1.4}$$

Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, to pochodne względem czasu (ale tylko względem czasu) będziemy oznaczać dla skrócenia kropką, umieszczoną nad literą; na przykład $\underline{v} = \dot{\underline{r}}$, $a = \ddot{\underline{r}}$.

1.3. Prędkość i przyspieszenie kątowe Zasada dodawania



Rys. 1-4

Przyjmijmy, że punkt materialny porusza się po okręgu (rys.1-4). Zmianę położenia punktu określamy za pomocą kąta $\Delta\alpha$, zakreślonego przez promień wodzący $\underline{r}$ w czasie Δt. Jeśli $\Delta\alpha$ jest kątem bardzo małym, to możemy mu przypisać wektor prostopadły do płaszczyzny okręgu, przy czym długość wektora wynosi $\Delta\alpha$, a zwrot określa reguła śruby prawej (jeśli obracamy śrubę prawą w kierunku ruchu promienia wodzącego, to ruch postępowy śruby wskazuje kierunek $\underline{\Delta\alpha}$). Iloraz $\Delta\alpha / \Delta t$ jest miarą średniej prędkości kątowej, jaką ma punkt materialny między P i Q; dokładną wartością (chwilową) prędkości kątowej (w s^{-1}) jest granica tego wyrażenia, gdy Δt zmierza do zera

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\underline{\alpha}}{\Delta t} = \frac{d\underline{\alpha}}{dt} = \underline{\omega} . \tag{1.5}$$

Rozumując analogicznie możemy określić chwilowe przyśpieszenie kątowe jako przyrost prędkości kątowej na jednostkę czasu (w s^{-2})

$$\frac{d\underline{\omega}}{dt} = \frac{d^2\underline{\alpha}}{dt^2} = \underline{\varepsilon} . \tag{1.6}$$

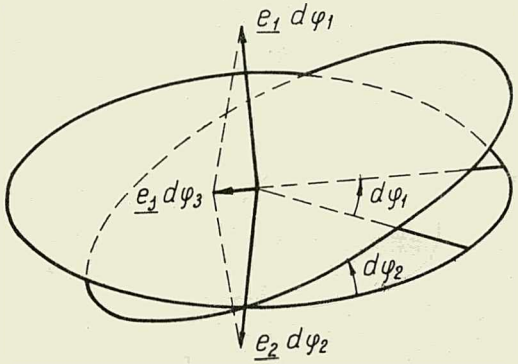
Widzimy, że zarówno prędkość kątowa $\underline{\omega}$ jak i przyśpieszenie kątowe $\underline{\varepsilon}$ są wektorami prostopadłymi do płaszczyzny ruchu punktu, a ich zwrot określony jest regułą śruby prawej.

Zatrzymajmy się jeszcze przy zagadnieniu obrotów o nieskończenie małe kąty. Niech $\underline{e}_1$ będzie wersorem wzdłuż pierwszej osi obrotu, wokół której obracamy układ współrzędnych o kąt $d\varphi_1$ (rys. 1-5). Podobnie niech $\underline{e}_2$ oznacza wersor wzdłuż drugiej osi obrotu, wokół której obracamy układ współrzędnych o kąt $d\varphi_2$. Każdemu kątowi obrotu możemy wówczas przypisać wektor

$$\underline{d\varphi}_i = \underline{e}_i \, d\varphi_i, \tag{1.7}$$

a prawo dodawania takich obrotów o nieskończenie małe kąty ma postać

$$\underline{e}_1 \cdot d\varphi_1 + \underline{e}_2 \cdot d\varphi_2 = \underline{e}_3 \cdot d\varphi_3. \tag{1.8}$$



Rys. 1-5

Oznacza to, że dwa obroty $d\underline{\varphi}_1$ i $d\underline{\varphi}_2$ możemy zastąpić jednym obrotem o kąt $d\underline{\varphi}_3$ wokół osi $\underline{e}_3$. Jeśli wszystkie obroty zachodzą w tym samym czasie dt, czyli osie obrotu $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ są osiami chwilowymi, to ponieważ

$$\underline{e}_i \cdot \frac{d\underline{\varphi}_i}{dt} = \underline{\omega}_i \tag{1.9}$$

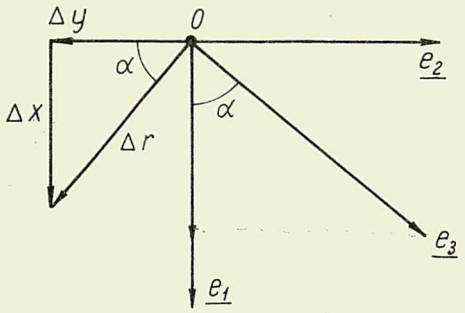
otrzymujemy

$$\underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_3. \tag{1.10}$$

(1.10) jest prawem dodawania prędkości kątowych wokół chwilowych osi obrotu. Wektor $\underline{e}_3 d\varphi_3 = \underline{\omega}_3 \, dt$ jest przekątną równoległoboku, skonstruowanego na wektorach składowych $\underline{\omega}_1 \, dt$ i $\underline{\omega}_2 \, dt$ (rys. 1-5).

P r z y k ł a d: Obracamy układ współrzędnych xyz wokół osi x o 3°, a następnie wokół y o 4°. Znaleźć zastępczy kąt obrotu wokół osi wypadkowej.

Niech wersorami w tym układzie będą $\underline{e}_1$ i $\underline{e}_2$, przy czym $\underline{e}_1 // x$, $\underline{e}_2 // y$. Kolejne obroty możemy zanotować według (1.8) w następujący sposób



Rys. 1-6

$$3\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2 = \underline{e}_3\, d\varphi_3,$$

przy czym $\underline{e}_3$ jest wersorem wzdłuż nowej osi obrotu, a $d\varphi_3$ wypadkowym kątem obrotu (rys. 1-6). Jeśli tę równość pomnożyć skalarnie przez nią samą, to otrzymamy

$$d\varphi_3 = (3^2 + 4^2)^{1/2} = 5^\circ,$$

co daje nam wielkość obrotu $d\varphi_3$. Kierunek nowej osi obrotu wyznacza wersor

$$\underline{e}_3 = \frac{3}{5}\,\underline{e}_1 + \frac{4}{5}\,\underline{e}_2 = 0{,}6\,\underline{e}_1 + 0{,}8\,\underline{e}_2.$$

Z rysunku 1-6 widać, że $\underline{e}_3$ który leży w płaszczyźnie x,y, tworzy z osią x kąt α taki, że

$$\alpha = \text{arc cos } 0{,}6 = 53{,}13^\circ.$$

W ten sposób uzyskaliśmy wartość kąta obrotu zastępczego i orientację nowej osi obrotu. Wyniki te możemy sprawdzić za pomocą rozważań trygonometrycznych. Rozważmy zmianę położenia punktu (0, 0, 1), leżącego na osi z w odległości jednostkowej od początku układu. Wskutek obrotu $\underline{e}_1\, d\varphi_1$ punkt przesunie się o $\Delta y = \sin 3^\circ$, a następny obrót przesunie ten punkt dodatkowo o odcinek $\Delta x = \sin 4^\circ$. Wypadkowym przesunięciem jest Δr, przy czym

$$\Delta r = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} = \sin \varphi_3,$$

zatem $\varphi_3 = 5{,}003^\circ$.

Ponadto

$$\cos \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta} = \cos 53{,}12^\circ.$$

Widzimy, że rachunek bezpośredni daje wartości bardzo dobrze zgodne z prawem addytywności (1.8). Zgodność ta będzie dobra tak długo, jak długo błąd przybliżenia $\sin \varphi \cong \varphi$ nie będzie zbyt duży.

1.4. Ruch krzywoliniowy

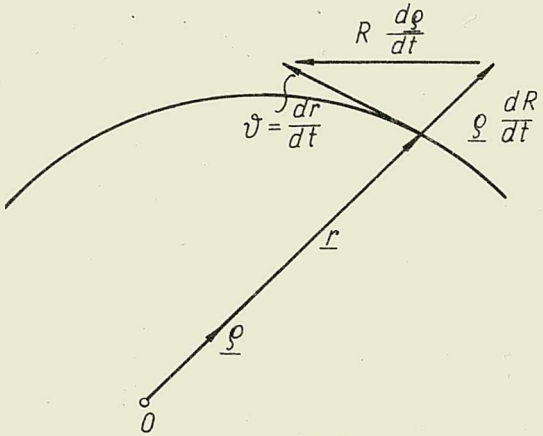
Niech $\underline{r}$ będzie wektorem wodzącym punktu materialnego względem dowolnego punktu O. Oznaczmy długość $\underline{r}$ przez R, zaś $\underline{\rho}$ niech oznacza wektor jednostkowy w kierunku $\underline{r}$. Mamy

$$\underline{r} = R \cdot \underline{\rho} \tag{1.11}$$

oraz

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v} = \underline{\rho}\,\frac{dR}{dt} + R\,\frac{d\underline{\rho}}{dt}. \tag{1.12}$$

Pierwszy składnik sumy z prawej strony (1.12) jest składową prędkości, wynikającą ze zmiany długości R. Kierunek tej składowej prędkości jest taki sam, jak kierunek $\underline{r}$. Druga składowa wynika ze zmiany kierunku $\underline{r}$ (rys. 1-7).



Rys. 1-7

Rozważmy wpierw sytuację gdy $d\rho/dt = 0$, czyli przesunięcie punktu materialnego zachodzi wzdłuż prostej o kierunku $\underline{r}$. Mamy wówczas

$$\underline{v} = \underline{\rho}\,\frac{dR}{dt}$$

oraz

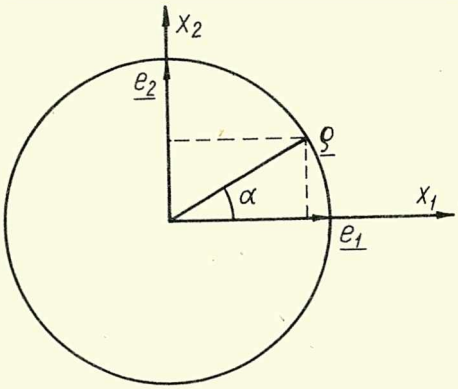
$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{\rho}\,\frac{d^2R}{dt^2} = \underline{a}_s. \tag{1.13}$$

Wyrażenie (1.13) jest składową styczną przyśpieszenia, którego skutkiem jest zmiana liczbowej wartości prędkości.

Przyjmijmy teraz z kolei, że R = const oraz że

$$\frac{d\underline{\rho}}{dt} = \underline{b} = \text{const}, \tag{1.14}$$

Z pierwszego z obu założeń wynika, że punkt materialny porusza się po okręgu. Aby zbadać co wynika z drugiego założenia, przyjmiemy układ współrzędnych x_1, x_2 w płaszczyźnie ruchu oraz wersory $\underline{e}_1 // x_1$ i $\underline{e}_2 // x_2$ (rys. 1-8). Możemy wówczas napisać



Rys. 1-8

$$\underline{\rho} = \underline{e}_1 \cos\alpha + \underline{e}_2 \sin\alpha$$

oraz

$$\frac{d\underline{\rho}}{dt} = \underline{b} = (-\underline{e}_1 \sin\alpha + \underline{e}_2 \cos\alpha)\frac{d\alpha}{dt}.$$

Na podstawie (1.14) mamy

$$\underline{b} \cdot \underline{b} = \text{const} = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \omega^2.$$

Widzimy więc, że założenie (1.14) jest równoważne stwierdzeniu, iż prędkość kątowa

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \text{const}, \tag{1.15}$$

czyli mamy do czynienia z ruchem jednostajnym po okręgu. Wobec tego

$$\alpha = \omega \cdot t \tag{1.16}$$

oraz

$$\underline{\rho} = \underline{e}_1 \cos\omega t + \underline{e}_2 \sin\omega t. \tag{1.17}$$

Każda ze składowych (1.17) przedstawia drganie harmoniczne proste o częstości kątowej ω. Dochodzimy więc do wniosku, że ruch po okręgu można rozłożyć na dwa drgania harmoniczne proste o tej samej częstości i amplitudzie, odbywające się w kierunkach wzajemnie do siebie prostopadłych.

Z (1.17) wynika jeszcze jeden ważny wniosek; z (1.12) i (1.17), po założeniu $R = \text{const}$, mamy

$$R \cdot \frac{d\underline{\rho}}{dt} = \underline{v} = R\omega(-\underline{e}_1 \sin\omega t + \underline{e}_2 \cos\omega t)$$

oraz

$$\underline{v} \cdot \underline{v} = v^2 = \omega^2 R^2,$$

czyli

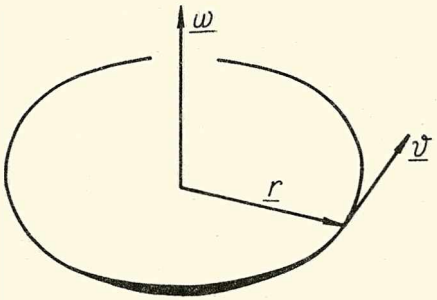
$$|v| = \omega R. \tag{1.18}$$

Jest to liczbowy związek między liniową i kątową prędkością punktu w ruchu po okręgu. Wszystkie trzy wielkości w (1.18) są wektorami

wzajemnie prostopadłymi; w szczególności $\underline{v} \perp \underline{\omega}$ i $\underline{v} \perp \underline{r}$. Na podstawie rysunku 1-9 widzimy, że

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}, \qquad (1.19)$$

czyli prędkość liniowa jest iloczynem wektorowym prędkości kątowej i promienia okręgu.



Rys. 1-9

Przyspieszenie w ruchu po okręgu otrzymamy różniczkując podane wyrażenie określające prędkość $\underline{v}$:

$$R \cdot \frac{d^2\underline{\rho}}{dt^2} = -\omega^2 R(\underline{e}_1 \cos \omega t + \underline{e}_2 \sin \omega t) =$$

$$= -\omega^2 R\, \underline{\rho} = -\omega^2 \underline{r}. \qquad (1.20)$$

W ruchu jednostajnym po okręgu występuje przyspieszenie o następujących własnościach:

i. jest proporcjonalne do promienia okręgu R,

ii. ma kierunek przeciwny do $\underline{\rho}$, czyli skierowane jest do środka okręgu.

Przyspieszenie o tych własnościach nazywamy przyspieszeniem normalnym $\underline{a}_n$. Liczbowa wartość tego przyspieszenia wynosi

$$(\underline{a}_n \cdot \underline{a}_n)^{1/2} = a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}. \qquad (1.21)$$

W dowolnym ruchu krzywoliniowym przyspieszenie chwilowe a możemy zatem rozłożyć na dwie składowe: przyspieszenie styczne

$$a_s = \frac{d\,|\underline{v}|}{dt},$$

i przyspieszenie normalne

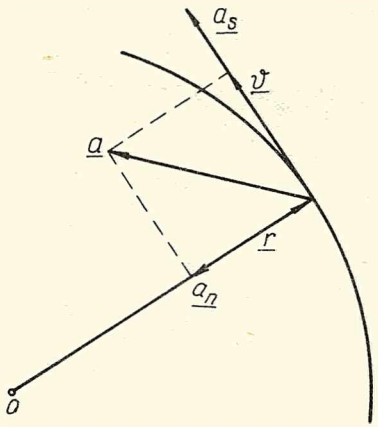
$$a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R},$$

przy czym R oznacza lokalny promień krzywizny toru. Ogólne przyspieszenie punktu (rys. 1-10)

$$\underline{a} = \underline{a}_s + \underline{a}_n \qquad (1.22)$$

lub

$$a = (a_s^2 + a_n^2)^{1/2} \qquad (1.23)$$



Rys. 1-10

zawiera ze styczną do toru (kierunek prędkości) kąt φ taki, że

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_n}{a_s} . \tag{1.24}$$

Zróżniczkowanie (1.19) dla przypadku ruchu po okręgu (R = const) prowadzi do związku między przyspieszeniem kątowym i liniowym w ruchu ze zmienną prędkością kątową:

$$\underline{a} = \underline{\varepsilon} \times \underline{r}. \tag{1.25}$$

2. ZASADY DYNAMIKI

W niniejszym rozdziale zajmiemy się bliższym sprecyzowaniem przyczyn, decydujących o charakterze ruchu punktu materialnego. Podstawowymi prawami są w tej dziedzinie trzy zasady ruchu, podane przez Newtona. W dalszym ciągu przypomnimy je w sposób zwięzły,zaopatrując jedynie krótkim komentarzem.

2.1. Zasady ruchu Newtona

I zasada (prawo bezwładności): Punkt materialny pozostaje w stanie spoczynku lub porusza się ruchem prostoliniowym ze stałą szybkością, jeśli nie działają nań żadne siły lub siły wzajemnie się równoważące.

Właściwość ciał, polegającą na zdolności zachowywania stanu ruchu,nazywamy bezwładnością lub inercją. Do obserwacji stanu ruchu potrzebujemy układu współrzędnych, względem którego odczytujemy położenie ciała. Z punktu widzenia I zasady każdy układ spoczywający lub poruszający się ruchem postępowym ze stałą szybkością jest jednakowo dobry (zasada względności Galileusza); układ taki nazywamy inercyjnym.

Bezwładny ruch ciał może być obserwowany tylko z inercyjnego układu współrzędnych. Gdybyśmy punkt materialny, poruszający się ze stałą prędkością wzdłuż prostej, obserwowali w nieinercyjnym układzie współrzędnych, wykonującym na przykład ruch obrotowy, wówczas według takich obserwacji ruch punktu byłby krzywoliniowy, a więc sprzeczny z I zasadą. Wobec tego układ współrzędnych, poruszający się ruchem obrotowym (np. układ sztywno związany z Ziemią) nie jest dobrym układem odniesienia z punktu widzenia I zasady Newtona.

Jednocześnie możemy stwierdzić, że ze względu na równoważność wszystkich układów inercyjnych, pojęcie prędkości bezwzględnej nie ma

sensu. Okazuje się, że owa równoważność inercyjnych układów odniesienia sięga jeszcze głębiej w strukturę podstawowych praw fizyki, co znajduje swój wyraz w zasadzie niezmienniczości Galileusza: Podstawowe prawa fizyki mają jednakową postać we wszystkich układach odniesienia, poruszających się względem siebie ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością.

II zasada (definicja siły). Z pierwszej zasady wynika, że wszelkie czynniki, powodujące zmianę stanu ruchu punktu materialnego muszą pochodzić z zewnątrz; nazywamy je siłami. Ponieważ wielkością podstawową, opisującą zmianę stanu ruchu jest przyspieszenie, definiujemy je jako wielkość proporcjonalną do siły $\underline{F}$ i odwrotnie proporcjonalną do masy m punktu materialnego. Zatem

$$\underline{F} = m \cdot \underline{a}. \tag{2.1}$$

Równość (2.1) jest definicją siły, jej jednostką jest 1 niuton: 1 N = 1 kg $\cdot (m/s^2)$. Siła jest wektorem, równoległym do przyspieszenia $\underline{a}$; jeśli na punkt materialny działa więcej niż jedna siła, wówczas (2.1) możemy uogólnić do postaci

$$m \cdot \underline{a} = \sum_{i=1}^{s} \underline{F}_i, \tag{2.2}$$

przy czym sumę po prawej stronie należy rozumieć jako dodawanie wektorowe, zaś siły $\underline{F}_i$ jako liniowo niezależne. Przyspieszenie punktu materialnego jest więc określone przez jego masę i sumę wektorową wszystkich sił, nań działających. Szczególnym przypadkiem działania tych sił jest $\underline{a} = 0$; z (2.2) wynika wówczas

$$\sum \underline{F}_i = 0. \tag{2.3}$$

Układ sił (2.3) nazywamy układem sił równoważących się wzajemnie; należy zwrócić uwagę, iż wszystkie $\underline{F}_i$ przyłożone są do tego samego punktu.

Druga zasada jest również słuszna tylko wtedy, gdy obserwacji dokonujemy w układzie odniesienia, nie mającym własnego przyspieszenia. Gdyby ktoś stanął na obwodzie poruszającej się karuzeli, to może stać spokojnie dopiero wówczas, gdy przechyli się tak, by składowa jego ciężaru wzdłuż średnicy karuzeli wynosiła akurat $m\omega^2 R$, a więc aby równoważyła siłę odśrodkową. Przebywanie w nieinercyjnym układzie odniesienia powoduje, że przyspieszenie jest różne od zera, mimo braku przyłożonej z zewnątrz siły; wynika ono bowiem z niejednostajnego cha-

rakteru ruchu samego układu. Innymi słowy, w układzie nieinercyjnym $\underline{F} \neq m\,\underline{a}$; oba wyrażenia różnią się o człon, wynikający z względnego przyspieszenia obu układów (nie będziemy się nim szerzej zajmowali). Przebywanie w nieinercyjnym układzie odniesienia może wywołać niekiedy znaczne skutki, jak tego przykładem jest ultrawirówka: na cząstkę zawieszoną w cieczy w zbiorniku wykonującym 1000 obrotów na sekundę ($\omega \cong 6 \cdot 10^3$ rad/s) działa w odległości $R = 10$ cm od osi obrotu przyspieszenie odśrodkowe $a = \omega^2 R = 4 \cdot 10^6$ m/s^2, czyli około 400 000 razy większe od przyspieszenia ziemskiego, $g = 9{,}81$ m/s^2.

Również Ziemia i związany z nią układ współrzędnych porusza się ruchem obrotowym i nie stanowi inercyjnego układu odniesienia. Związana z tym ruchem prędkość kątowa wynosi $\omega_o = (2\pi/86400)s^{-1} \cong 0{,}73 \cdot 10^{-4}$ rad$\cdot$s^{-1}. Ponieważ $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m, zatem $a_o = (0{,}73 \cdot 10^{-4})^2 \cdot (6{,}4 \cdot 10^6) \cong$ $\cong 3{,}4$ cm/s^2. O tę wartość przyspieszenie ziemskie powinno być większe na biegunie, niż na równiku. W rzeczywistości różnica ta jest nieco większa ze względu na spłaszczenie kuli ziemskiej i wynosi 5,2 cm/s^2.

Przyspieszenie ziemskie na biegunie północnym - 9,83245 m/s^2.

Przyspieszenie ziemskie na równiku - 9,780 m/s^2.

III zasada: Jeżeli ciało A działa na ciało B siłą F_{AB}, to ciało B działa również na ciało A siłą F_{BA} taką, że

$$F_{AB} + F_{BA} = 0. \tag{2.4}$$

Obie siły, F_{AB} i F_{BA}, zwane są siłami wewnętrznymi układu, złożonego z ciał A i B. Siły te przyłożone są do dwóch różnych ciał; jeżeli mogą się one poruszać, to obecność sił wewnętrznych (2.4) wpływa na stan ruchu każdego ciała

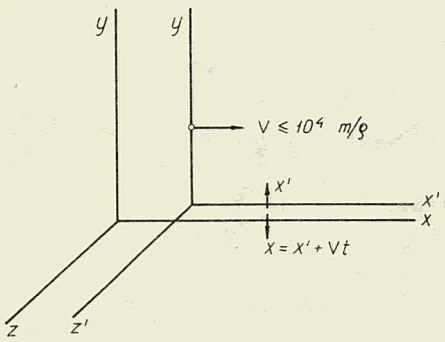
$$m_A \cdot a_A + m_B \cdot a_B = 0, \tag{2.5}$$

czyli ciała A i B udzielają sobie nawzajem przyspieszeń, odwrotnie proporcjonalnie do ich mas. Ze względu na własność (2.4) siły wewnętrzne nie mają jednak wpływu na prędkość i przyspieszenie układu, potraktowanego jako całość. Problemem tym zajmiemy się dalej, badając ruch środka masy.

2.2. Transformacja Galileusza

Stwierdzenie o równoważności dwóch układów inercyjnych ze względu na postać podstawowych praw fizyki, możemy sformułować analitycznie. Należy w tym celu odpowiedzieć na pytanie, jaki jest wzajemny związek między współrzędnymi przestrzeni i czasu x, y, z, t pierwszego układu (oznaczmy go przez S) i współrzędnymi x', y', z', t' drugiego u-

kładu (oznaczonego przez S'). Mając takie przekształcenie (transformację) $S(x,y,z,t) \rightarrow S'(x',y',z',t')$, możemy poszukiwać postaci praw fizycznych w poruszającym się układzie S', jeśli są nam one znane w nieruchomym układzie S. W celu uproszczenia założymy, że ruch względny obu układów odbywa się wzdłuż osi x z prędkością V, osie $y \parallel y'$ i $z \parallel z'$ pozostają równoległe (rys. 2-1). Rozważania ograniczymy ponadto do prędkości $V \leqslant 10^4$ m/s, znacznie mniejszych od prędkości światła w próżni: $c = 3.10^8$ m/s. Zagadnienie dużych prędkości, porównywalnych z c, stanowi osobny problem, którym zajmiemy się w rozdziale 5. Zauważmy jednak, iż prędkość $V = 10^4$ m/s wcale nie jest taka mała: porównywalna jest z drugą prędkością kosmiczną $v_2 = (2GM_Z/R)^{1/2} = 11{,}2$ km/s, gdzie G jest stałą grawitacji (por. 2.18), M_Z masą Ziemi, a R jej promieniem.



Rys. 2-1

Przy takich założeniach poszukiwane związki są bardzo proste i wynikają bezpośrednio z rys. 2-1.

$$t = t', \quad x = x' + V \cdot t, \quad y = y', \quad z = z'. \tag{2.6}$$

Układ równań (2.6) nosi nazwę transformacji Galileusza i obowiązuje dla prędkości $V \ll c$. Wynika z niej również prawo dodawania prędkości, ponieważ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V,$$

czyli

$$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{V}. \tag{2.7}$$

Widzimy więc, że prędkość punktu materialnego w układzie S', umownie przyjętym za poruszający się, równa jest prędkości tego samego punktu odczytanej w układzie S, umownie przyjętego za nieruchomy, pomniejszonej o względną prędkość obu układów.

Ponieważ $\underline{V} = \text{const}$, zatem

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d\underline{v}'}{dt},$$

czyli

$$\underline{a} = \underline{a}'. \tag{2.8}$$

Ze względu na $m = m'$ $(V \ll c)$, również

$$\underline{F} = \underline{F}', \tag{2.9}$$

czyli przyspieszenia i siły, mierzone w dwóch układach inercyjnych, są takie same.

2.3. Zasada zachowania pędu

Zobaczymy obecnie, jakie wynikają wnioski z przyjęcia słuszności transformacji Galileusza dla dwóch układów inercyjnych. Dla układów tych założymy ponadto, że w każdym z nich jest spełnione prawo zachowania masy i prawo zachowania energii.

Mamy dane dwie cząstki swobodne o masach odpowiednio m_1 i m_2; niech ich prędkości w układzie S wynoszą przed zderzeniem v_1 i v_2, a po zderzeniu w_1 i w_2. Zderzenie w ogólnym przypadku nie musi być sprężyste, a więc do energii kinetycznej po zderzeniu trzeba dodać człon $\Delta\varepsilon$, równy energii odkształcenia niesprężystego obu kul i ewentualnie innym rodzajom energii (ciepło, światło). Ze względu na sens fizyczny $\Delta\varepsilon$, człon ten jest taki sam w układzie S' jak i w S; dla zderzenia sprężystego $\Delta\varepsilon = 0$. Jeśli T jest energią kinetyczną obu cząstek, to w układzie S mamy

$$2T = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 + \Delta\varepsilon, \tag{2.10}$$

a w układzie S'

$$2T' = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 = m_1 w_1'^2 + m_2 w_2'^2 + \Delta\varepsilon. \tag{2.11}$$

Podstawiając obecnie

$$\begin{aligned} \underline{v}_i' &= \underline{v}_i - \underline{V}, \\ \underline{w}_i' &= \underline{w}_i - \underline{V} \end{aligned} \tag{2.12}$$

oraz korzystając z zasady zachowania energii, $T' = T$, mamy

$$\begin{aligned} &m_1 v_1^2 - 2m_1 \underline{v}_1 \cdot \underline{V} + m_1 V^2 + m_2 v_2^2 - 2m_2 \underline{v}_2 \underline{V} + m_2 V^2 = \\ &= m_1 w_1^2 - 2m_1 \underline{w}_1 \cdot \underline{V} + m_1 V^2 + m_2 w_2^2 - 2m_2 \underline{w}_2 \underline{V} + m_2 V^2 + \Delta\varepsilon. \end{aligned}$$

Po redukcji wyrazów i skorzystaniu z (2.10) otrzymujemy

$$(m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2) \cdot \underline{V} = (m_1 \underline{w}_1 + m_2 \underline{w}_2) \cdot \underline{V},$$

czyli

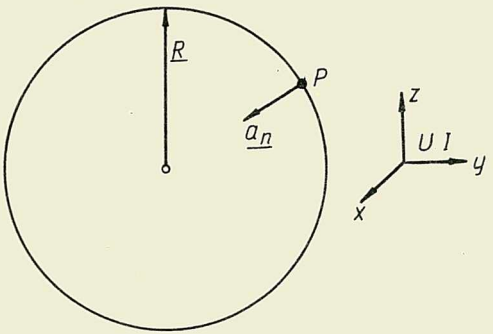
$$m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2 = m_1 \underline{w}_1 + m_2 \underline{w}_2. \tag{2.13}$$

Widzimy, że suma pędów obu kul przed zderzeniem jest równa sumie pędów tych kul po zderzeniu; stwierdzenie to stanowi zasadę zachowa-

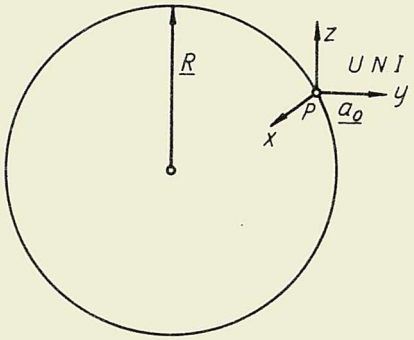
nia pędu. Można ją więc uważać jako naturalną konsekwencję słuszności transformacji Galileusza i zasady zachowania energii. Warto zwrócić uwagę, iż zasada zachowania pędu jest również spełniona w tym przypadku, gdy część energii kinetycznej, $\Delta\varepsilon$, zostaje przekształcona w zderzeniu na inne postacie energii. Innymi słowy, pęd zachowany jest również w zderzeniu niesprężystym. Nie można tego samego powiedzieć o energii i to w zasadzie z tego powodu, że nie potrafimy obliczyć $\Delta\varepsilon$ w przypadku ogólnym w sposób niezależny, tj. nie wiemy jaka część energii kinetycznej ulega przekształceniu w inne postaci energii.

2.4. Siła dośrodkowa i odśrodkowa

Przypuśćmy, że punkt materialny porusza się ze stałą prędkością kątową ω po okręgu koła o promieniu R (rys. 2-2). Z punktu widze-



Rys. 2-2



Rys. 2-3

dzenia obserwatora umieszczonego w układzie inercyjnym (UI), znajdującym się na zewnątrz okręgu, na punkt działa jedynie realne przyspieszenie dośrodkowe

$$\underline{a}_n = -\omega^2 \underline{R},$$

związane z zakrzywieniem toru. Przyspieszenie to wywołuje siła

$$\underline{F}_d = -m\omega^2 \underline{R} \qquad (2.14)$$

zwana siłą dośrodkową.

Na ten sam ruch możemy spojrzeć również z punktu widzenia układu nieinercyjnego (UNI), związanego z punktem P i poruszającego się wraz z nim po okręgu koła (rys. 2-3). Niech przyspieszenie UNI względem UI wynosi a_o; ogólne przyspieszenie punktu P względem układu nieinercyjnego wyniesie wówczas $\underline{a} = \underline{a}_o + \underline{a}_n$, a ogólną siłą, mierzoną w układzie nieinercyjnym będzie

$$\underline{F} = m \cdot \underline{a} = m \cdot \underline{a}_n + m \cdot \underline{a}_o. \qquad (2.15)$$

Zauważmy, że iloczyn $m \cdot a_o$ jest siłą tylko z formalnego punktu widzenia; jest to bowiem iloczyn masy punktu i przyspieszenia nieinercyjnego. Oznaczmy

$$m \underline{a}_o = \underline{F}_o \qquad (2.16)$$

i potraktujmy (2.16) jako siłę; trzeba jedynie pamiętać, że nie ma takiej siły, realnie przyłożonej do punktu P.

W naszym przypadku masa m jest nieruchoma względem nieinercyjnego układu współrzędnych, czyli $\underline{F} = 0$, oraz

$$\underline{F}_o = -m \underline{a}_n = +m \omega^2 \underline{R}. \qquad (2.17)$$

Pozorną siłę (2.17) zwiemy siłą odśrodkową; jest ona skierowana na zewnątrz okręgu i równa liczbowo sile dośrodkowej dla stacjonarnego ruchu po okręgu koła. Siłą dośrodkową w układzie rzeczywistym mogą być oddziaływania grawitacyjne (układy astronomiczne), elektrostatyczne (atom), sprężystość nici lub sprężyny (masa przyczepiona do nici lub sprężyny), siła adhezji (kropla cieczy na obwodzie koła). Są to wszystko siły rzeczywiste, mające określoną wartość, kierunek i punkt przyłożenia.

Jeśli znajdujemy się wewnątrz pojazdu, poruszającego się ze stałą prędkością kątową po okręgu koła, to doznajemy również działania siły, skierowanej na zewnątrz okręgu; nie jest to jednak ani siła przyłożona, ani nie wynika z obecności pola. Wynika ona jedynie z konserwatywnej własności masy, polegającej na tendencji do zachowania pędu (prędkości), rozumianego jako wektor. W celu zachowania równowagi mechanicznej w przykładzie z pojazdem poruszającym się po okręgu koła, musimy pochylić się w taki sposób, by radialna składowa naszego ciężaru równoważyła siłę odśrodkową. I to jest właściwy sens wprowadzenia siły odśrodkowej: uwzględniamy ją w tym celu, aby otrzymać zrównoważenie realnie działającej siły dośrodkowej, co w rezultacie pozwala uzyskać w układzie obracającym się (a więc nieinercyjnym) przyspieszenie równe zeru, czyli stan stacjonarny ruchu.

2.5. Prawo grawitacji Newtona

Dowolne dwie masy punktowe M_1 i M_2 przyciągają się wzajemnie siłą

$$\underline{F} = -G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{r}, \qquad (2.18)$$

przy czym $\underline{r}/r$ jest wektorem jednostkowym skierowanym umownie od M_1 do M_2, a G jest stałą grawitacyjną o wartości

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg.$$

Siła grawitacji jest siłą centralną, tj. leży wzdłuż linii łączącej masy punktowe M_1 i M_2. Masa M występująca w (2.18) jest masą grawitacyjną w odróżnieniu od masy m, występującej w II zasadzie Newtona $F = m \cdot a$ i zwanej masą bezwładną. Równość tych mas nie jest oczywista i została stwierdzona doświadczalnie. Jeśli więc przyjmiemy $M_1 = m$, gdzie m jest masą bezwładną dowolnego ciała, zaś $M_2 = M_z$ jest masą Ziemi oraz oznaczymy

$$G \frac{M_z}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{r} = -\underline{g}, \tag{2.19}$$

gdzie $\underline{g}$ jest wektorem przyspieszenia ziemskiego, to

$$\underline{F} = m \cdot \underline{g} \tag{2.20}$$

jest ciężarem ciała o masie m w polu ciężkości Ziemi.

2.6. Prawo Coulomba

Prawo to ma postać strukturalnie identyczną z prawem Newtona powszechnej grawitacji, co wynika z dużego podobieństwa pola grawitacyjnego do pola elektrostatycznego: oba są polami potencjalnymi. Bardziej szczegółowo zajmiemy się tą kwestią w rozdziale 6.

Siła działająca między dwoma ładunkami może być dodatnia, jeśli są one jednoimienne lub ujemna, jeśli mają znaki różne. Oznaczając dwa ładunki punktowe przez q_1 i q_2, zaś odległość między nimi przez $\underline{r}$ (również i tu promień jest skierowany umownie od q_1 do q_2), możemy zapisać siłę Coulomba w następującej postaci

$$\underline{F} = \pm k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{r},$$

przy czym znak (+) odpowiada sile odpychania, (-) sile przyciągania, a k jest współczynnikiem, zależnym od wyboru jednostek. Jeśli pracujemy w układzie jednostek cgSE, to możemy położyć $k = 1$; prawo Coulomba stanowi wówczas podstawę do określenia jednostki ładunku, ponieważ jednostki F i r zostały zdefiniowane uprzednio. W układzie jednostek SI, którym się posługujemy, jednostkę ładunku określa się na podstawie działań magnetycznych dwóch przewodników z prądem; jest nią 1 coulomb (1C). W takim razie nie można przyjąć k równego jedności

(podobnie, jak w prawie Newtona), lecz trzeba wyznaczyć je doświadczalnie

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}, \tag{2.21}$$

gdzie $\varepsilon_o = 8{,}85\cdot10^{-12}\ C^2/Nm^2$ jest przenikalnością dielektryczną próżni. Można przyjąć z wystarczającą dla nas dokładnością

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9{,}0\cdot10^{9}\ N\cdot m^2/C^2.$$

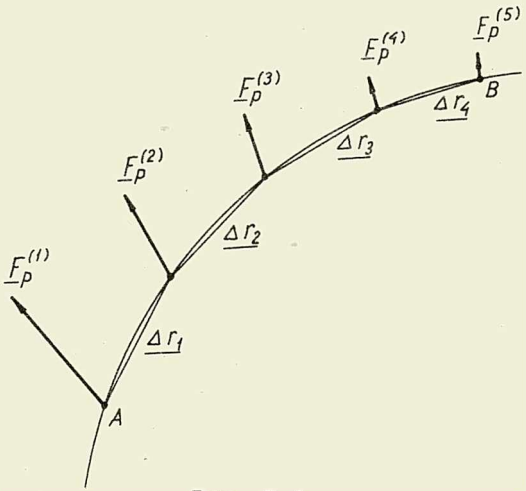
Druga cecha, odróżniająca siły elektrostatyczne od grawitacyjnych polega na tym, że siła Coulomba zależy od własności ośrodka, w którym umieszczone są oba ładunki; nie znamy takiej zależności dla siły działającej między dwiema masami. Okazuje się, że w każdym ośrodku materialnym siła Coulomba jest mniejsza, niż w próżni; decyduje o tym względna przenikalność ośrodka, oznaczana przez ε. Pełne prawo Coulomba ma zatem postać

$$\underline{F} = \pm\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2}\cdot\frac{\underline{r}}{r}. \tag{2.22}$$

2.7. Praca mechaniczna i moc

Pracę, wykonywaną przez przyłożoną siłę $\underline{F}_p$ na drodze $\underline{\Delta r}$ definiujemy jako iloczyn skalarny siły i przesunięcia

$$\Delta W = \underline{F}_p \cdot \underline{\Delta r} = F_p \cdot \Delta r \cdot \cos(\underline{F}_p, \underline{\Delta r}). \tag{2.23}$$



Rys. 2-4

Zakładamy przy tym, że siła $\underline{F}_p$ jest stała na całym odcinku $\underline{\Delta r}$. Wyrażenie (2.23) przedstawia pracę elementarną, określoną dla bardzo małego odcinka $\underline{\Delta r}$. Jeśli punkt materialny jest przesuwany na skończonej drodze od punktu A do B (rys. 2-4), to korzystając z (2.23), możemy zapisać pracę w następujący sposób

$$W\ (A \longrightarrow B) = W_{AB} \cong \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_p^{(i)} \cdot \underline{\Delta r}_i \ .$$

Prawa strona tej równości jest wyrażeniem przybliżonym, ponieważ wartość sumy zależy od wielkości przesunięć elementarnych $\underline{\Delta r}_i$, na które podzieliliśmy drogę AB. Dokładne wyrażenie otrzymamy przechodząc z $\underline{\Delta r}_i$ do przesunięć nieskończenie małych $\underline{dr}$

$$W_{AB} = \int_A^B \underline{F}_p \cdot \underline{dr}. \qquad (2.24)$$

Jednostką pracy jest 1 dżul: 1 J = 1 N·m.

Pracę wykonaną w jednostce czasu nazywamy mocą. Jeśli praca W_{AB} została wykonana w ciągu t sekund, to średnia moc $\langle P \rangle$ wynosi

$$\langle P \rangle = \frac{W}{t}\ , \qquad (2.25)$$

zaś moc chwilowa

$$P = \frac{dW}{dt}\ . \qquad (2.25)$$

Ze względu na definicję (2.23) moc chwilowa siły przyłożonej wynosi

$$\frac{dW}{dt} = \underline{F}_p \cdot \frac{\underline{dr}}{dt} = \underline{F}_p \cdot \underline{v} \qquad (2.27)$$

- jest więc iloczynem skalarnym siły przyłożonej i chwilowej prędkości punktu.

Jednostką mocy jest 1 wat: 1 w = 1 J/s.

2.8. Energia kinetyczna

Przypuśćmy, że punkt materialny o masie m porusza się ruchem bezwładnym wzdłuż osi x inercyjnego układu współrzędnych. W chwili t = 0 przykładamy doń stałą siłę F_p; rozważmy ruch punktu pod wpływem tej siły zewnętrznej.

W myśl II zasady przyspieszenie punktu wynosi

$$a = \ddot{x} = \frac{F_p}{m}$$

wobec tego po upływie czasu t prędkość $v(t)$ będzie wynosiła

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \frac{F_p}{m}\,dt = v_0 + \frac{F_p}{m}\cdot t,$$

przy czym v_0 jest prędkością początkową w chwili $t = 0$. Otrzymujemy z tego znane twierdzenie o popędzie siły

$$F_p \cdot t = m v - m v_0 . \tag{2.28}$$

Jeśli w chwili $t = 0$ masa m znajdowała się w punkcie x_0, to po upływie czasu t położeniem jej będzie $x(t)$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)\,dt = x_0 + v_0 t + \frac{F_p}{2m}\cdot t^2.$$

Eliminacja $t = (m v - m v_0)/F_p$ prowadzi nas do związku

$$x - x_0 = \frac{m}{F_p}(v v_0 - v_0^2) + \frac{m}{2F_p}(v^2 - 2v v_0 + v_0^2) =$$

$$= \frac{m}{2F_p}(v^2 - v_0^2)$$

lub

$$F_p(x - x_0) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} . \tag{2.29}$$

Zdefiniujmy obecnie energię kinetyczną punktu materialnego

$$T = \tfrac{1}{2} mv^2; \tag{2.30}$$

T jest zawsze tylko funkcją prędkości punktu: $T = T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Na podstawie (2.29) widzimy, że jeśli siła $\underline{F}_p$ działa na punkt materialny, który może się poruszać, to praca tej siły równa jest zmianie energii kinetycznej punktu

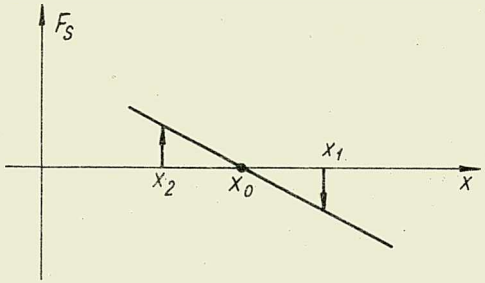
$$W_{AB} = \int_A^B \underline{F}_p\,\underline{dr} = \tfrac{1}{2} mv_B^2 - \tfrac{1}{2} mv_A^2. \tag{2.31}$$

2.9. Liniowa siła sprężysta

Jeśli na punkt materialny o masie m działa siła F_s o następujących właściwościach:

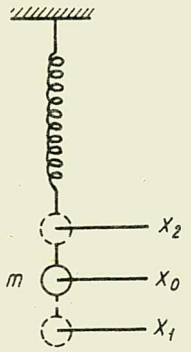
i. wielkość F_s jest proporcjonalna do wychylenia punktu z pewnego położenia równowagi x_0,

ii. zwrot F_s jest zawsze skierowany w stronę położenia równowagi,



Rys. 2-5

to mówimy, że na punkt działa liniowa siła sprężysta. Ilustracją takiej siły jest rys. 2-5, przy czym x_0 jest położeniem równowagi. Dla wychyleń $x_1 - x_0 > 0$ siła F_s jest ujemna, zaś dla wychyleń $x_2 - x_0 < 0$ dodatnia. W układach rzeczywistych, przy niezbyt dużych wychyleniach $x - x_0$, bezwzględna wielkość siły jest proporcjonalna do $(x - x_0)$ i nie zależy od znaku wychylenia. Przykładem układu, w którym powstaje liniowa siła sprężysta może być elektron w atomie lub atom w ciele stałym; najprostszym modelem jest masa m, zawieszona na sprężynie (rys.2-6).

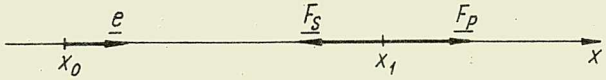


Rys. 2-6

Jeśli $\underline{e}$ jest wersorem wzdłuż osi x, to (rys. 2-7)

$$\underline{F}_s = -C(x - x_0)\underline{e}, \qquad (2.32)$$

gdzie C jest współczynnikiem liniowej siły sprężystej. Liczbowo C równe jest sile, powstającej przy przesunięciu punktu o jednostkę długości; wymiarem C jest 1 N/m.



Rys. 2-7

Obliczmy pracę wykonaną przez siłę przyłożoną

$$\underline{F}_p = +C(x - x_0)\underline{e} \qquad (2.33)$$

przy przesuwaniu punktu od x_0 do x_1. Mamy

$$W(x_0 \longrightarrow x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \underline{F}_p \, \underline{dr} = \int_{x_0}^{x_1} C(x - x_0)\underline{e} \, dx \, \underline{e} =$$

$$= \frac{1}{2} C(x_1^2 - x_0^2) - C(x_0 x_1 - x_0^2) =$$

$$= \frac{1}{2} C(x_1 - x_0)^2 = \frac{1}{2} C(\Delta x)^2, \qquad (2.34)$$

gdzie

$$\Delta x = x_1 - x_0 \qquad (2.35)$$

jest przesunięciem punktu z położenia równowagi. Widzimy, iż praca przesunięcia jest proporcjonalna do kwadratu wielkości przesunięcia. Wynik ten jest charakterystyczny dla pracy w ogóle przeciw siłom sprężystym.

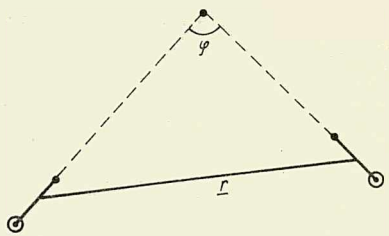
Jeśli wybierzemy $x_0 = 0$, $x_1 = x$, to wyrażenie (2.34) zyska postać

$$W(0 \longrightarrow x) = \frac{1}{2} C x^2. \qquad (2.36)$$

2.10. Siły zachowawcze

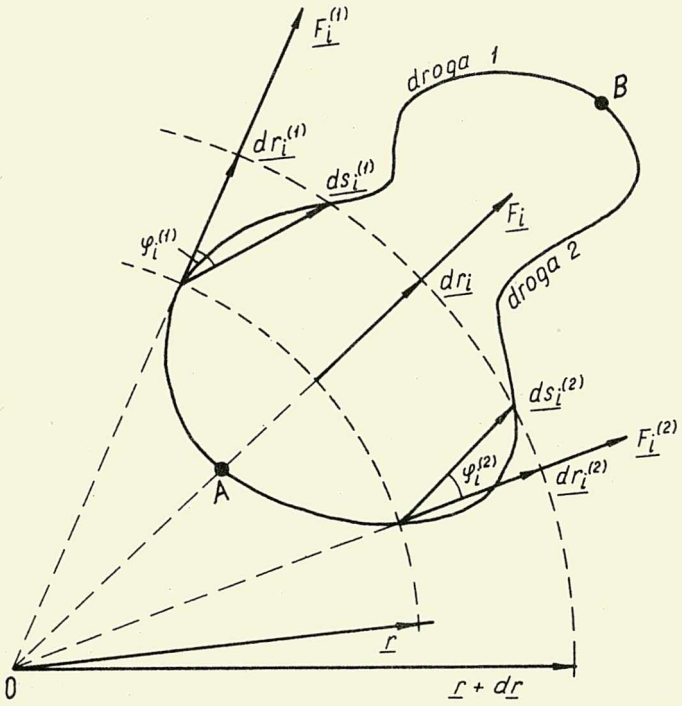
Siła jest zachowawcza, jeśli praca $W(A \longrightarrow B)$ przesunięcia cząstki z A do B wykonana przez tę siłę nie zależy od drogi, lecz jedynie od położenia punktów A i B. Zachowawcze są w szczególności siły centralne, zależne wyłącznie od odległości r a nie zależne od kierunku r. Do takich należą siły grawitacyjne (2.18) i elektrostatyczne (2.22); dla każdego punktu, leżącego na powierzchni kuli o promieniu r siła (2.18) lub (2.22) jest taka sama.

Innego typu jest siła, działająca np. między dwoma dipolami magnetycznymi (rys. 2-8). Zależy ona nie tylko od odległości r między środkami dipoli, ale także od kąta φ między ich kierunkami; zatem $F(r,\varphi)$. Praca przesuwania dipola zależy od r i jeszcze dodatkowo od sposobu poruszania się dipola - siły tu występujące nie są zachowawcze. Również siły tarcia są niezachowawcze, ponieważ praca siły przyłożonej przeciwko sile tarcia przechodzi w formy energii bezużyteczne w mechanice (ciepło).



Rys. 2-8

Wróćmy jednak do sił centralnych. Mamy udowodnić, że praca przesunięcia masy m z punktu A do punktu B jest niezależna od tego, czy



Rys. 2-9

z A do B idziemy po drodze 1, czy po drodze 2 (rys. 2-9). Podzielmy teraz przesunięcie z A do B za pomocą łuków koncentrycznych w O na przesunięcia elementarne $\underline{ds}_i^{(1)}$ i $\underline{ds}_i^{(2)}$, odpowiednio po drodze 1 i 2. Wybór punktu O jest zupełnie dowolny - w szczególności możemy go wybrać na jednej prostej z A i B. Elementy pracy $dW_i^{(1)}$ i $dW_i^{(2)}$ możemy obecnie wyrazić w następujący sposób

$$\begin{aligned} dW_i^{(1)} &= \underline{F}_i^{(1)}\,\underline{ds}_i^{(1)} = F_i^{(1)}\,ds_i^{(1)}\cos\varphi_i^{(1)} = \\ &= F_i^{(1)}\,dr^{(1)} = F_i\,dr_i = F_i^{(2)}\,dr_i^{(2)} = \\ &= F_i^{(2)}\,ds_i^{(2)}\cos\varphi_i^{(2)} = \underline{F}_i^{(2)}\,\underline{ds}_i^{(2)} = dW_i^{(2)}, \end{aligned} \tag{2.37}$$

ponieważ siła F_i jest siłą centralną i $F_i = F_i^{(1)} = F_i^{(2)}$. Wobec tego

$$\int_A^B \underline{F}^{(1)}\,\underline{ds}^{(1)} = \int_A^B \underline{F}\,\underline{dr} = \int_A^B \underline{F}^{(2)}\,\underline{ds}^{(2)}. \tag{2.38}$$

2.11. Energia potencjalna

Jeżeli siła przyłożona $\underline{F}_p$ wykonuje pracę w taki sposób, że nie zachodzi zmiana energii kinetycznej punktu materialnego ($dT = 0$), to skutkiem wykonanej pracy jest zmiana energii potencjalnej U punktu materialnego

$$W(A \longrightarrow B) = \int_A^B \underline{F}_p \cdot d\underline{r} = U(B) - U(A); \quad dT = 0. \tag{2.39}$$

Siła $\underline{F}_p$ jest zachowawcza, wobec tego energia potencjalna jest wyłącznie funkcją położenia punktu materialnego; ogólnie - jeśli w jakimś układzie działają tylko siły zachowawcze, to energia potencjalna U tego układu jest funkcją jedynie współrzędnych jego części (a nie np. prędkości): $U = U(x,y,z)$.

Równanie (2.39) wymaga pewnego komentarza. Siła przyłożona, $\underline{F}_p$, skierowana jest przeciwnie do siły wewnętrznej, działającej na punkt materialny, np. przeciwnie do liniowej siły sprężystej $\underline{F}_s$ (por.2.9). Dodatkowo wymagamy w (2.39), by praca $\underline{F}_p$ nie spowodowała zmiany energii kinetycznej punktu a to znaczy, że $\underline{F}_p$ może się różnić tylko nieznacznie od $\underline{F}_s$:

$$\underline{F}_p - \underline{F}_s \cong 0. \tag{2.40}$$

Taki proces (tu - przesuwanie punktu) odbywa się niesłychanie powoli; jego cechą charakterystyczną jest to, że

i. biegnie bardzo blisko stanu równowagi między siłami wewnętrznymi układu (tu $\underline{F}_s$) i siłami przyłożonymi z zewnątrz (tu $\underline{F}_p$),

ii. może zachodzić w jedną lub drugą stronę.

Jeśli $|\underline{F}_p| - |\underline{F}_s| > 0$, to pracę wykonuje siła zewnętrzna, jeśli zaś $|\underline{F}_p| - |\underline{F}_s| < 0$, to pracę wykonuje siła wewnętrzna układu. Proces o tych dwóch cechach nosi nazwę procesu quasi-statycznego i odgrywa dużą rolę zarówno w fizyce jak i w chemii fizycznej. Rzecz w tym, że spośród wszystkich możliwych sił, dokonujących przesunięcia punktu materialnego z A do B (ogólnie: powodujących zmianę stanu układu ze stanu A do stanu B), siła $\underline{F}_p$, odpowiadająca procesowi quasi-statycznemu, czyni to najoszczędniej. Ponadto proces quasi-statyczny umożliwia nam zastąpienie sił zewnętrznych, niekiedy nie znanych, siłami wewnętrznymi układu, a przez to wprowadzenie do obliczanej pracy informacji charakterystycznych dla układu. Bardziej szczegółowo może się Czytelnik zapoznać z zagadnieniem procesów quasi-statycznych w termodynamice, stanowiącej jeden z rozdziałów chemii fizycznej.

Zauważmy obecnie, że zgodnie z definicją (2.39) ściśle określona jest nie energia potencjalna, lecz jej różnica dla dwóch położeń punktu materialnego. Jeśli dla jednego punktu przyjmiemy dowolnie jakąś określoną wartość energii potencjalnej, to określona będzie również energia w drugim punkcie. Najczęściej przyjętym punktem odniesienia jest

$$A \longrightarrow \infty \supset U(A) \longrightarrow 0, \tag{2.41}$$

czyli energię potencjalną punktu materialnego w nieskończoności przyjmujemy za równą zeru. Jest to logiczne następstwo tego faktu, że energia potencjalna pojawia się zawsze wskutek występowania oddziaływań naszego punktu materialnego z innymi ciałami z otoczenia. Mogą to być ciała wywołujące działania grawitacyjne lub elektrostatyczne; może to być również sprężyna, przyczepiona jednym końcem do naszego punktu, a drugim do innego ciała, itd. Jeśli teraz punkt materialny znajduje się w nieskończoności, to nie oddziałuje z niczym, zatem jego energię potencjalną można przyjąć za równą zeru. Energia potencjalna punktu materialnego jest wówczas równa pracy przesunięcia punktu z nieskończoności do położenia określonego wektorem wodzącym $\underline{r}$

$$U(\underline{r}) = \int_{\infty}^{\underline{r}} \underline{F}_p \, d\underline{r} = -\int_{\infty}^{\underline{r}} \underline{F}_w \, d\underline{r} = W(\infty \longrightarrow \underline{r}). \tag{2.42}$$

We wzorze (2.42) siła $\underline{F}_w = -\underline{F}_p$ jest siłą wewnętrzną układu.

Posługując się pojęciem siły wewnętrznej możemy napisać (2.42) dla jednego wymiaru (wzdłuż osi x)

$$U(x) - U(A) = -\int_{A}^{x} F_w \, dx$$

lub

$$\frac{dU(x)}{dx} = -F_w. \tag{2.43}$$

Z (2.43) wynika, że pochodna energii potencjalnej względem współrzędnej równa jest ze znakiem przeciwnym działającej w tym kierunku sile wewnętrznej układu. Wynik ten możemy uogólnić w następujący sposób: jeśli $\underline{e}_i$ oznacza wersor w kierunku osi x_i, to

$$\left\{ \underline{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \underline{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \underline{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right\} U(x_1, x_2, x_3) = -\underline{F}_w.$$

Wyrażenie w klamrze jest tzw. operatorem; operator ten jest rozkazem obliczenia pochodnej cząstkowej funkcji energii potencjalnej

względem każdej współrzędnej i zaopatrzenia tej pochodnej w odpowiedni wersor. Operator ten jest bardzo często spotykany w fizyce i nosi nazwę gradientu; oznaczamy go symbolem $\underline{\nabla}$ (czytaj: "nabla").

$$\underline{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \underline{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \underline{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \underline{\nabla}. \tag{2.44}$$

Formalnie możemy traktować $\underline{\nabla}$ jako wektor, a wyrażenie $\underline{\nabla} U(x_1 x_2 x_3)$ jako iloczyn wektora gradientu i funkcji skalarnej; iloczyn taki jest oczywiście wektorem. Zatem

$$\underline{\nabla} U(x_1 x_2 x_3) = -\underline{F}_w . \tag{2.45}$$

Niech teraz F_w będzie siłą centralną, na przykład

$$F_w = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} ,$$

w takim razie

$$\int_A^B F_w \, dr = G \frac{m_1 m_2}{r_B} - G \frac{m_1 m_2}{r_A} = -\left\{ U(B) - U(A) \right\} .$$

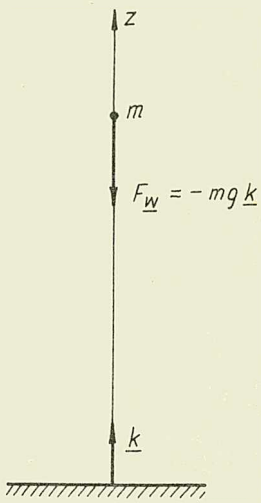
Jeśli dla $r_A \to \infty$ przyjmiemy $U(A) \to 0$ oraz $r_B = r$, $U(B) = U(r)$, to energię potencjalną masy m_2 względem masy m_1 przedstawia wyrażenie

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} . \tag{2.46}$$

Nad powierzchnią Ziemi (rys. 2-10) energię potencjalną masy m zapisuje się zwykle w następujący sposób (k jest wersorem wzdłuż osi z, prostopadłej do powierzchni)

$$U(0 \to z) = -\int_0^z \underline{F}_w \, d\underline{z} =$$

$$= \int_0^z mg\underline{k} \cdot dz\underline{k} = mgz. \tag{2.47}$$



Rys.2-10

2.12. Zasada zachowania energii

Rozważmy wpierw przypadek szczególny: masa m znajduje się w chwili t = 0 nieruchomo nad Ziemią na wysokości h, po czym zaczyna

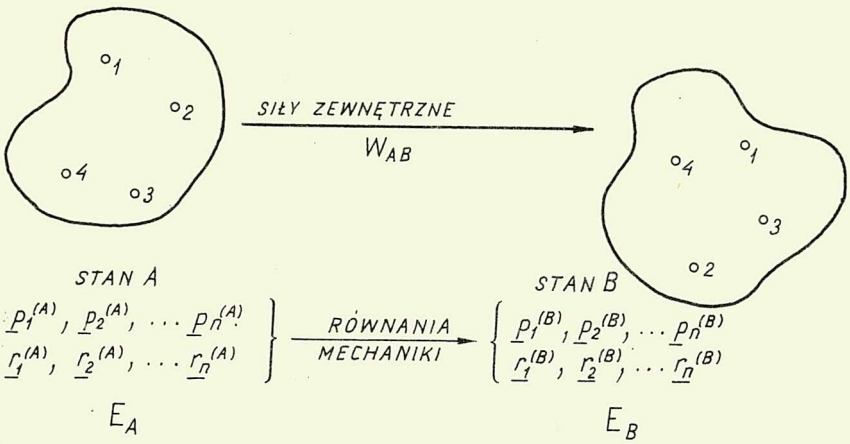
swobodnie spadać. W układzie masa-Ziemia jedyną siłą jest siła grawitacji; jest to siła centralna, a więc zachowawcza.

i. Na wysokości h energia potencjalna wynosi $U(h) = mgh$, kinetyczna $T(h) = 0$; suma $T + U = E$ jest zwana energią całkowitą, przy czym $E(h) = mgh$.

ii. Podczas swobodnego spadania energia potencjalna maleje, kinetyczna zaś rośnie. Obliczmy te wielkości dla wysokości $z < h$: $U(z) = mgz$, $T(z) = \frac{1}{2} mv_z^2 = \frac{1}{2} m \left\{\sqrt{2g(h - z)}\right\}^2 = mg(h - z)$. Wobec tego $E(z) = mgh$.

iii. W chwili zetknięcia z powierzchnią Ziemi $z = 0$ oraz $U(0) = 0$, $T(0) = \frac{1}{2} m(\sqrt{2gh})^2 = mgh$, zatem $E = mgh$.

Przykład ten stanowi ilustrację zasady zachowania energii; w układzie zamkniętym, tj. takim, w którym działają tylko siły wewnętrzne, całkowita energia układu jest wielkością stałą, jeśli siły wewnętrzne są zachowawcze. Ruch poszczególnych części układu pod wpływem sił wewnętrznych nie ma wpływu na wartość energii całkowitej.



Rys. 2-11

Rozszerzymy obecnie zasadę zachowania energii na układ otwarty, tj. taki, w którym działają również siły $\underline{F}_p$, przyłożone z zewnątrz (rys. 2-11). Skutkiem działania tych sił jest wykonanie pracy, wobec czego ulega zmianie stan układu. Przez stan układu rozumiemy w mechanice zbiór położeń $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_n$ i pędów $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \ldots, \underline{p}_n$ wszystkich n części układu. Przed działaniem sił zewnętrznych zbiór tych parametrów określa stan początkowy układu, np. stan A; energia całko-

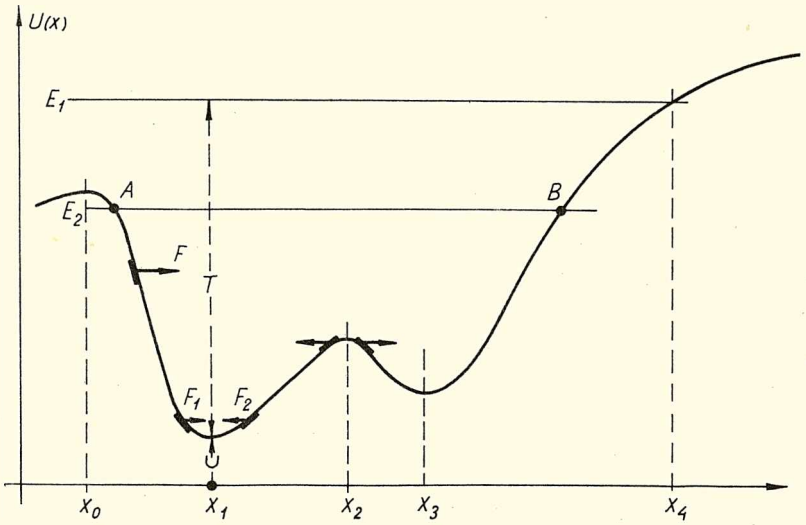
wita w tym stanie wynosi E_A. Pod wpływem sił zewnętrznych zostaje wykonana praca $W(A \longrightarrow B) = W_{AB}$, przez co ulegają zmianie poszczególne $\underline{r}_i$ oraz $\underline{p}_i$ części układu. Układ przechodzi do stanu B o energii E_B. Jeśli siły działające były zachowawcze, to zasada zachowania energii ma postać

$$E_B - E_A = W_{AB} = \sum_{i=1}^{n} \int_A^B \underline{F}_p^{(i)} \, \underline{dr}_i, \qquad (2.48)$$

czyli zmiana całkowitej energii układu równa jest pracy sił przyłożonych. Jeżeli w układzie czynne są siły niezachowawcze, to uzyskana zmiana układu energii jest mniejsza od pracy sił zewnętrznych.

2.13. Krzywa energii potencjalnej

Ruch punktu materialnego pod wpływem sił zewnętrznych możemy opisać w sposób analityczny, posługując się równaniami ruchu. Możemy tego dokonać również w sposób bardziej poglądowy za pomocą krzywej energii potencjalnej. Krzywa energii potencjalnej (lub powierzchnia energii potencjalnej) jest graficznym obrazem zależności $U(x,y,z)$, gdzie x, y, z są chwilowymi współrzędnymi poruszającej się masy m i całkowicie determinuje charakter ruchu. Dla uproszczenia przyjmiemy jednowymiarowy przypadek ruchu z krzywą $U(x)$, przedstawioną na rys.2-12.



Rys. 2-12

Przypuśćmy, że rozważamy ruch punktu materialnego o energii całkowitej E_1 o takim właśnie modelu krzywej potencjalnej. Na prawo od odciętej x_0 styczna do krzywej jest ujemna, czyli siła działająca na poruszający się punkt $F_x = -m(dU/dx)$ jest dodatnia. Wobec tego ruch punktu w zakresie $x_0 < x < x_1$ będzie przyspieszony (niekoniecznie jednostajnie), w zakresie $x_1 < x < x_2$ opóźniony, itd. Energia całkowita $E_1(x_1) = U(x_1) + T(x_1)$, przy czym $U(x_1)$ jest wyznaczone przez rzędną w punkcie x_1. W ten sposób w dowolnym punkcie osi x możemy wyznaczyć obie składowe energii. W szczególności $T(x_4) = 0$, czyli $E_1 = U(x_4)$; ruch na prawo od x_4 jest niemożliwy, bowiem energia kinetyczna w zakresie $x > x_4$ byłaby ujemna. Po osiągnięciu x_4 punkt materialny "odbije się" i zawróci w kierunku przeciwnym do pierwotnego. Dochodzimy zatem do wniosku, że ruch punktu materialnego o energii całkowitej, np. E_2, będzie ruchem periodycznym. Charakter tego ruchu zależy od analitycznej postaci funkcji U(x) między punktami powrotu A i B.

Przypuśćmy teraz, że ruch punktu materialnego odbywa się z niewielkim tarciem, jego energia E_2 maleje z biegiem czasu, a punkty powrotu A i B zbliżają się do siebie. Nie dzieje się nic szczególnego do chwili, gdy $U(x_2) = E_2$. Jeśli energia E maleje w dalszym ciągu, to punkt będzie się poruszał wokół minimum $U(x_1)$ lub $U(x_3)$, a po czasie dostatecznie długim $E = U(x_1)$ lub $E = U(x_3)$. Stany te są stanami równowagi trwałej, ponieważ siły F_1 i F_2, działające na punkt w otoczeniu minimum są skierowane w stronę ekstremum. Nie jest takim stanem $U(x_2)$, mimo iż $F_x = -(dU/dx)_{x2} = 0$, gdyż siły działające po obu stronach x_2 skierowane są na zewnątrz ekstremum. Równowaga możliwa dla $x = x_2$ jest metastabilna.

Rozważmy obecnie bardziej szczegółowo charakter ruchu punktu w pobliżu x_1 zakładając, że dla niewielkich amplitud ruchu "dno" krzywej energii potencjalnej można przybliżyć parabolą o równaniu

$$U(x) = \frac{1}{2} C x^2. \tag{2.49}$$

Ponieważ energia kinetyczna $T = (1/2)m \dot{x}^2$, zatem dla energii całkowitej możemy napisać wyrażenie

$$E = T + U = \frac{1}{2} C x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2. \tag{2.50}$$

Siły tu działające są zachowawcze, zatem

$$\frac{\partial E}{\partial t} = C x \dot{x} + m \dot{x} \ddot{x} = 0. \tag{2.51}$$

Po podzieleniu przez $\dot{x}$ otrzymujemy równanie ruchu Newtona

$$m\ddot{x} + Cx = 0 \tag{2.52}$$

lub

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{2.53}$$

gdzie

$$\omega_0^2 = C/m \tag{2.54}$$

oznacza pewną wielkość stałą. Oczywiście C jest współczynnikiem siły sprężystej, ponieważ

$$\frac{\partial U}{\partial x} = Cx = -F_x$$

jest liniową siłą sprężystą. Łatwo się przekonać za pomocą dwukrotnego różniczkowania, że rozwiązaniem (2.53) jest funkcja periodyczna typu

$$x(t) = A_0 \cdot \cos \omega_0 t$$

lub

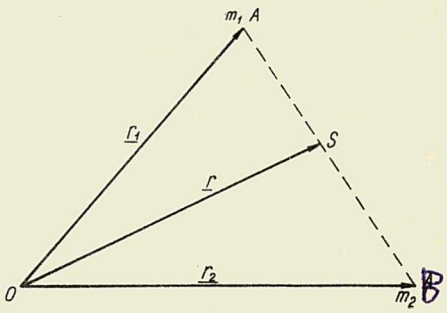
$$x(t) = A_0 \cdot \sin \omega_0 t, \tag{2.55}$$

przedstawiająca drganie harmoniczne proste; ω_0 jest częstością kątową tego ruchu.

W ten sposób otrzymaliśmy następujący ważny wniosek: jeśli krzywa energii potencjalnej ma kształt paraboli, to ruch punktu materialnego o stałej energii całkowitej jest drganiem harmonicznym prostym.

2.14. Środek masy i jego ruch

Na zakończenie tego rozdziału zajmiemy się krótko ruchem zbioru punktów materialnych i pokażemy, w jaki sposób skomplikowany opis ruchu wielu punktów można zastąpić prostym opisem ruchu jednego punktu, będącego dynamicznym odpowiednikiem zbioru. Takim odpowiednikiem jest środek masy, który zdefiniujemy wpierw dla dwóch punktów materialnych m_1 i m_2. Położenie tych punktów będziemy oznaczać za pomocą wektorów $\underline{r}_1$, wykreślonych z dowolnego punktu O (rys. 2-13), natomiast położenie środka masy S oznacza wektor $\underline{r}$. Definicja położenia S jest następująca: środkiem masy dwóch punktów materialnych nazywamy taki punkt, który dzieli odcinek łą-



Rys. 2-13

czący obie masy w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do wielkości tych mas.

Na podstawie rysunku 2-13 możemy napisać

$$\underline{r}_1 + \underline{AS} = \underline{r}, \qquad \underline{AS} = \underline{r} - \underline{r}_1,$$

$$\underline{r} + \underline{SB} = \underline{r}_2, \qquad \underline{SB} = \underline{r}_2 - \underline{r}.$$

Z definicji położenia środka masy otrzymujemy

$$m_1 \ \underline{AS} = m_2 \ \underline{SB},$$

czyli

$$m_1(\underline{r} - \underline{r}_1) = m_2(\underline{r}_2 - \underline{r}),$$

stąd

$$\underline{r} = \frac{m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{2.56}$$

jest wektorem, określającym położenie środka dwóch mas. Wyrażenie (2.56) możemy łatwo uogólnić na położenie środka masy dowolnej liczby mas $m_1, m_2, \ldots, m_n$

$$\underline{r} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}_i, \tag{2.57}$$

gdzie

$$M = \sum_i m_i \tag{2.58}$$

jest ogólną masą układu.

Położenie wszystkich mas ulega zmianie z biegiem czasu; zmienia się również położenie środka masy. Przez zróżniczkowanie (2.57) otrzymamy

$$M\dot{\underline{r}} = \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i. \tag{2.59}$$

Pęd środka masy jest równy sumie pędów poszczególnych punktów materialnych. Stwierdzenie to wyraża przydatność pojęcia środka masy jako dynamicznego odpowiednika zbioru mas. Jednocześnie widzimy, że dla otrzymania prędkości środka masy należy obliczyć sumę wektorową pędów poszczególnych punktów materialnych i podzielić ją przez ogólną masę układu. W praktyce dokonujemy sumowania dla każdej osi układu kartezjańskiego współrzędnych $x^{(1)}$ oddzielnie; na przykład (2.59) możemy rozpisać w następujący sposób

$$\dot{x}^{(1)} = \frac{1}{M} \sum_k m_k \dot{x}_k^{(1)}, \quad 1 = 1,2,3. \tag{2.60}$$

Przez powtórne zróżniczkowanie (2.59) otrzymujemy

$$\underline{a} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \underline{a}_i = \frac{1}{M} \sum_i \underline{F}_{iz}. \tag{2.61}$$

Symbol $\underline{F}_{iz}$ oznacza siłę zewnętrzną, przyłożoną do punktu masowego m_i; w sumie (2.61) można pominąć siły wewnętrzne, działające między poszczególnymi masami zbioru. Na mocy (2.4) mamy bowiem dla każdej pary punktów materialnych m_i, m_j

$$\underline{F}_{ij} + \underline{F}_{ji} = 0,$$

co oznacza, że suma wszystkich sił wewnętrznych jest równa zeru. W rezultacie siły te nie mają wpływu na ruch środka masy. Według (2.61) przyspieszenie środka masy jest takie jak punktu, w którym zgromadzona jest cała masa układu, a siła doń przyłożona jest wypadkową wszystkich sił zewnętrznych, działających na poszczególne punkty materialne.

Równanie (2.61) możemy zapisać jeszcze w następujący sposób

$$M\underline{a} = \sum_i \underline{F}_{iz} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \underline{v}_i \right). \tag{2.62}$$

Jeżeli założymy teraz, że $\sum_i \underline{F}_{iz} = 0$, to $d/dt(\sum_i m_i \underline{v}_i) = 0$ oraz $\sum_i m_i \underline{v}_i = \text{const}$. Widzimy więc, że jeśli na punkty masowe nie działają siły zewnętrzne lub ich wypadkowa względem środka masy równa jest zeru, to pęd układu punktów masowych, a zarazem i pęd środka masy, jest wielkością stałą. Stwierdzenie to jest zasadą zachowania pędu dla zbioru punktów materialnych.

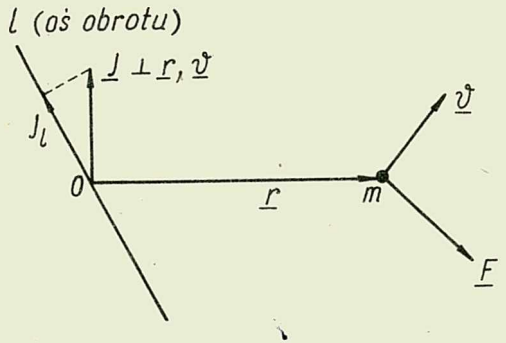
3. DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

3.1. Dynamika punktu

3.1.1. Moment pędu punktu masowego

Przypuśćmy, że punkt masowy porusza się dowolnym ruchem krzywoliniowym. Momentem pędu lub krętem tego punktu względem dowolnie obranego punktu O (rys. 3-1) nazywamy wyrażenie:

$$\underline{J} = \underline{r} \times \underline{p} = m \cdot \underline{r} \times \underline{v}, \ (kg \cdot m^2)/s. \qquad (3.1)$$



Rys. 3-1

Wektor $\underline{J}$ jest prostopadły do płaszczyzny $\underline{r}$, $\underline{v}$, a jego zwrot określa reguła śruby prawej: podczas obrotu od $\underline{r}$ do $\underline{v}$ o kąt mniejszy od 180° kierunek ruchu postępowego śruby wskazuje zwrot $\underline{J}$.

Składowa $\underline{J}$ wzdłuż prostej (oś obrotu) przechodzącej przez O jest nazywana momentem punktu względem tej osi (J_l).

Jeśli $\underline{F}$ jest siłą, działającą na punkt masowy, to moment tej siły względem tego samego punktu O wynosi:

$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}, \ N \cdot m. \qquad (3.2)$$

Zróżniczkujmy wyrażenie na $\underline{J}$ względem czasu:

$$\frac{d\underline{J}}{dt} = m \frac{d\underline{r}}{dt} \times \underline{v} + m \underline{r} \times \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{r} \times m\underline{a} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{M},$$

ponieważ $\underline{v} \times \underline{v} = 0$.

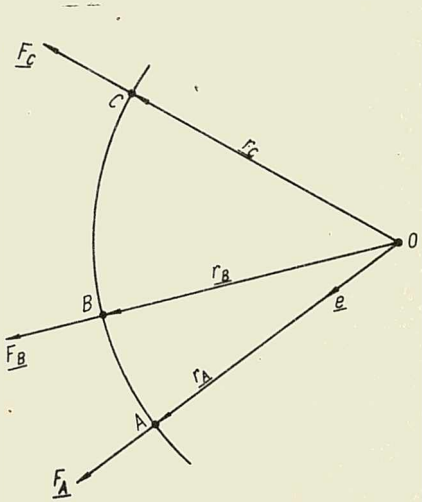
Zatem $d\underline{J}/dt = \underline{M}$, czyli szybkość zmiany krętu jest równa momentowi siły.

3.1.2. Prawo zachowania momentu pędu

Warunek $\underline{M} = 0$ powoduje, że

$$\underline{J} = \text{const.} \qquad (3.3)$$

Jeżeli zatem moment siły zewnętrznej jest równy zeru, to kręt punktu masowego jest wielkością stałą zarówno co do wartości jak i kierunku. Warto tu zauważyć, iż z warunku $\underline{M} = 0$ niekoniecznie wynika $\underline{F} = 0$ - może być także $\underline{r} = 0$. Kręt punktu masowego będzie więc stały i w tym przypadku, gdy działająca nań siła będzie leżeć w prostej, przechodzącej przez punkt O (ogólnie: przez oś obrotu).



Rys. 3-2

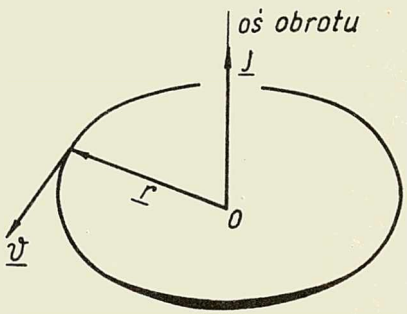
Zasada zachowania krętu prowadzi do ważnego wniosku w przypadku ruchów, odbywających się pod działaniem sił centralnych. Siła taka, którą ogólnie zapiszemy w postaci funkcji skalarnej $f(\underline{r})$, jest zawsze skierowana do lub od pewnego stałego punktu, niezależnie od aktualnego położenia punktu masowego (rys. 3-2). Niech $\underline{e}$ oznacza wektor jednostkowy wzdłuż $\underline{r}$, wówczas dla siły centralnej mamy:

$$\underline{F}(\underline{r}) = \underline{e} \cdot f(\underline{r}), \qquad (3.4)$$

oraz

$$\underline{r} \times \underline{F} = \underline{e} \cdot r \times \underline{e}\, f(\underline{r}) \equiv 0,$$

tzn. moment siły centralnej względem stałego punktu O jest zawsze równy zeru. Wynika z tego, że $d\underline{J}/dt = 0$, zatem ruch punktu masowego, zachodzący pod działaniem siły centralnej, musi się odbywać w jednej płaszczyźnie (rys. 3-3). Reguła ta ważna jest zarówno w astronomii (np. ruch planet), jak i w fizyce atomowej. Prosta ilustracja zasady zachowania krętu jest omówiona w pkcie 3.3.



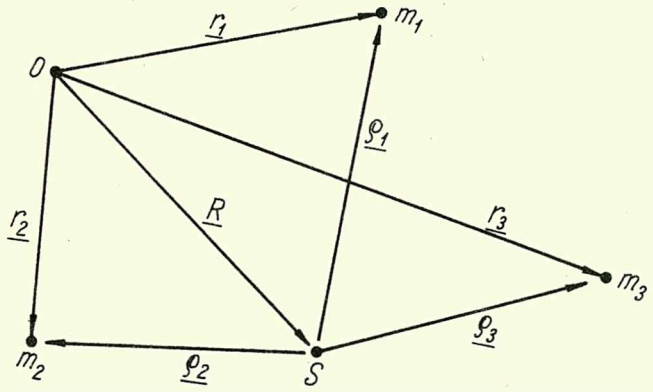
Rys. 3-3

3.1.3. Moment pędu układu punktów masowych

Całkowity moment pędu układu N punktów masowych względem wybranego punktu O wynosi:

$$\underline{J} = \sum_{n=1}^{N} m_n \cdot \underline{r}_n \times \underline{v}_n . \tag{3.5}$$

Oczywiście wartość sumy po prawej stronie, a więc wielkość $\underline{J}$, zależy od wyboru punktu O. W szczególności możemy wybrać O w środku masy układu, korzystając z jego szczególnych własności. Położenie środka masy S względem O podaje wektor $\underline{R}$, zaś $\underline{\rho}_i$ określają położenia mas względem S (rys. 3-4).



Rys. 3-4

$$\underline{R} + \underline{\rho}_i = \underline{r}_i ,$$

czyli

$$\underline{\rho}_i = \underline{r}_i - \underline{R} . \tag{3.6}$$

Wyrażenie

$$\underline{J}_S = \sum_i m_i \, \underline{\rho}_i \times \underline{v}_i \tag{3.7}$$

nazywamy momentem pędu układu punktów względem środka masy. Jest to wielkość dynamiczna, charakterystyczna dla zadanego układu punktów, ponieważ S zdefiniowany jest jednoznacznie. Po podstawieniu (3.6) do (3.7) otrzymujemy

$$\underline{J}_S = \sum_i m_i \underline{\rho}_i \times \underline{v}_i = \sum_i m_i(-\underline{R} + \underline{r}_i) \times \underline{v}_i =$$

$$= -\underline{R} \times \left(\sum_i m_i \underline{v}_i \right) + \sum_i m_i \underline{r}_i \times \underline{v}_i = -\underline{R} \times \underline{P} + \underline{J},$$

$$\underline{J} = \underline{J}_S + \underline{R} \times \underline{P}, \tag{3.8}$$

gdzie $\underline{P} = \sum_i m_i \underline{v}_i$ oznacza pęd całego układu. W rezultacie otrzymujemy wniosek, że krętukładu punktów względem dowolnego punktu O równy jest sumie krętu układu tych punktów względem środka masy i krętowi środka masy względem tego punktu.

Jeżeli siły wewnętrzne mają charakter sił newtonowskich, (a więc spełniają III zasadę), to $\sum_{i,j} (\underline{F}_{ij} + \underline{F}_{ji}) = 0$. Można pokazać, że również momenty tych sił względem O są równe zeru, tj.:

$$\sum \underline{M}_{wewn.} = 0.$$

W takim razie dla układu punktów masowych otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \underline{J} = \underline{M}_{zewn}, \tag{3.9}$$

przy czym kręt w tym równaniu jest określony przez (3.8). Wynika z tego wniosek, iż zmianę krętu całkowitego takiego układu może wywołać jedynie moment sił zewnętrznych.

3.2. Moment pędu bryły sztywnej

Bryłą sztywną nazywamy ciało, w którym odległość dowolnych dwóch punktów nie ulega zmianie pod działaniem sił zewnętrznych, przyłożonych do tych punktów.

Podzielmy całą bryłę na małe elementy masy Δm_i. Definiujemy kręt bryły sztywnej w następujący sposób:

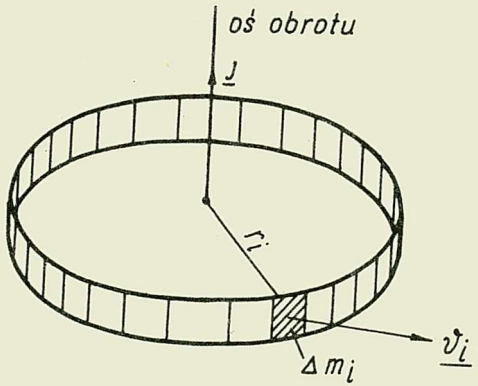
$$\underline{J} = \sum_i (\Delta m_i) \cdot \underline{r}_i \times \underline{v}_i. \tag{3.10}$$

Ponadto

$$\underline{M} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i \tag{3.11}$$

jest wypadkowym momentem siły, działającym na bryłę. W wyrażeniach tych $\underline{r}_i$ jest wektorem położenia elementu masy Δm_i, $\underline{v}_i$ jego prędkością, zaś $\underline{F}_i$ siłą zewnętrzną doń przyłożoną. $\underline{J}$ oraz $\underline{M}$ muszą być odniesione do jednego i tego samego punktu O, który często przyjmujemy w środku masy S bryły sztywnej.

Definicja (3.10) jest przybliżona, ponieważ wartość wyrażenia po prawej stronie zależy od wielkości elementów masy Δm_i, na jakie podzieliliśmy bryłę makroskopową. Dokładność tego przybliżenia zależy z jednej strony od dokładności określenia $\underline{r}_i$ dla elemenetów o skończonej rozciągłości, z drugiej zaś od dokładności, z jaką $\underline{v}_i$ można uważać za stałe wewnątrz elementu Δm_i. Niejednoznaczność tę można usunąć przez zastosowanie rachunku całkowego, o czym będzie mowa w pkcie 3.4.



Rys. 3-5

Niech w najprostszym przypadku bryłą sztywną będzie cienka obręcz o promieniu $\underline{r}$ = const, która obraca się dookoła osi prostopadłej do niej i przechodzącej przez środek okręgu o promieniu $\underline{r}$ (rys. 3-5). Krętobręczy wynosi:

$$\underline{J} = \sum_i \Delta m_i \, (\underline{r} \times \underline{v}) = M \cdot \underline{r} \times \underline{\omega} \times \underline{r} = M \underline{\omega} r^2 - M \underline{r} (\underline{r} \cdot \underline{\omega}) =$$

$$= Mr^2 \underline{\omega} = I \cdot \underline{\omega},$$

przy czym $M = \sum_i \Delta m_i$ oznacza masę całej obręczy (rys. 3-5).

W rozpisaniu potrójnego iloczynu wektorowego skorzystaliśmy z tożsamości

$$\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B} \cdot (\underline{A}\underline{C}) - \underline{C} \cdot (\underline{A}\underline{B}),$$

której wywód znajduje się w podręcznikach analizy wektorów.

W tym najprostszym przypadku mamy

$$\underline{J} = I \cdot \underline{\omega}, \qquad (3.12)$$

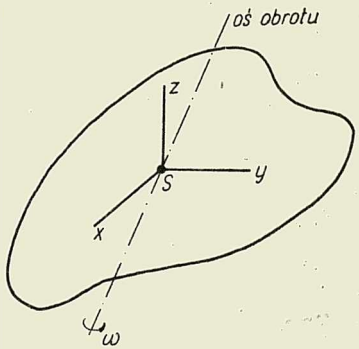
tj. wektor $\underline{J}$ jest równoległy do osi obrotu; zaś $I = Mr^2$ jest momentem bezwładności obręczy względem wybranej osi obrotu.

W ogólniejszym przypadku obrotu bryły sztywnej opis dynamiki zależy w istotny sposób od następujących czynników:

i. od wyboru osi obrotu. Do najważniejszych należą przypadki, w których oś obrotu przechodzi przez wnętrze bryły sztywnej, w dodatku przez jej środek masy S. Następuje wówczas obrót "gładki", bez uderów na oś obrotu.

ii. od wyboru układu współrzędnych, do którego odnosimy składowe wektorów, występujących w dynamice. Najczęściej przyjmuje się, iż początek układu współrzędnych jest umieszczony w środku masy S, co znakomicie upraszcza równania ruchu.

Dalszym uproszczeniem jest przyjęcie układu współrzędnych x, y, z inercyjnego, tj. nieruchomego lub poruszającego się ruchem jednostajnym wraz z całą bryłą. Ruch jednostajny nie wnosi jednak niczego nowego w naszym problemie; w dalszym ciągu zatem przyjmiemy, iż układ x,y,z o początku O pokrywającym się ze środkiem masy S bryły sztywnej jest nieruchomy (rys. 3-6), tj. oś z jest zawsze skierowana w górę, y w prawo, a x w przód rysunku*). Obrót następuje wokół osi ze stałą prędkością kątową ω. Przyjęcie nieinercyjnego układu współrzędnych, tj. obracającego się razem z bryłą wokół wspólnej osi obrotu wymaga uwzględnienia przyspieszenia własnego układu, co powiększa złożoność problemu; niekiedy wybór takiego układu współrzędnych jest potrzebny.



Rys. 3-6

Względem układu inercyjnego mamy:

$$\underline{v}_i = \underline{\omega} \times \underline{r}_i,$$

$$\underline{J} = \sum_i (\Delta m_i)\, \underline{r}_i \times \underline{v}_i = \sum_i \Delta m_i (\underline{r}_i \times \underline{\omega} \times \underline{r}_i) =$$

$$= \sum_i \Delta m_i \left[\underline{\omega} \cdot r_i^2 - \underline{r}_i (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_i)\right],$$

$$\underline{J} = \underline{\omega} \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 - \sum_i \Delta m_i\, \underline{r}_i (\underline{\omega}\, \underline{r}_i). \qquad (3.13)$$

---

* Jeśli wypadkowa sił zewnętrznych równa jest zeru, to zawsze istnieje taki układ inercyjny, w którym środek masy S pozostaje w spoczynku.

Rozpiszmy obecnie składową $\underline{J}$, np.: J_x:

$$J_x = \omega_x \sum_i \Delta m_i r_i^2 - \sum_i \Delta m_i x_i(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i) =$$

$$= \omega_x \left[\sum_i \Delta m_i(r_i^2 - x_i^2)\right] - \omega_y \sum_i \Delta m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i \Delta m_i x_i z_i.$$

Oznaczmy:

$$\begin{aligned} \sum_i \Delta m_i(r_i^2 - x_i^2) &= I_{xx}, \\ -\sum_i \Delta m_i x_i y_i &= I_{xy}, \\ -\sum_o \Delta m_i x_i z_i &= I_{xz}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Wyrażenia te nazywamy składowymi momentu bezwładności względem układu osi x y z. Na tej podstawie możemy zapisać składową J_x w postaci

$$J_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z.$$

Podobnie

$$J_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \tag{3.15}$$

oraz

$$J_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z.$$

Widzimy więc, że dla ciała o dowolnym kształcie i rozkładzie masy kręt $\underline{J}$ nie jest prostym iloczynem wielkości skalarnej I oraz prędkości kątowej $\underline{\omega}$; w ogólnym przypadku $\underline{J}$ nie ma kierunku $\underline{\omega}$.

Zbiór składowych $I_{\mu\nu}$ stanowi 9 liczb, które noszą nazwę składowych tensora momentu bezwładności względem wybranego układu współrzędnych. (3.14) jest definicją trzech spośród nich; pozostałe określone są w analogiczny sposób. Ponadto z (3.14) widać iż

$$I_{\mu\nu} = I_{\mu\nu}, \tag{3.16}$$

tj. tensor momentu bezwładności jest symetryczny. Ta własność redukuje liczbę niezależnych składowych tensora do sześciu.

Korzystając z tych definicji możemy zapisać podstawowe równanie dynamiki bryły sztywnej w następującej postaci:

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

lub

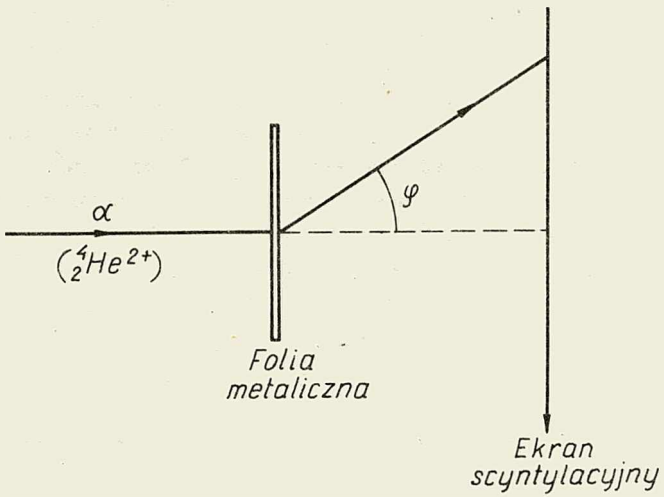
$$(J) = [I]\,(\omega). \tag{3.18}$$

Korzystając z (3.18) należy pamiętać, że w dowolnie wybranym, lecz inercyjnym układzie współrzędnych x,y,z moment bezwładności jest tensorem o sześciu różnych składowych, przy czym wartość tych składowych zależy od wyboru układu x,y,z.

Zmiana krętu bryły sztywnej pod wpływem momentu siły zewnętrznej zachodzi zgodnie z (3.9). Zauważmy, że zmiana krętu $\Delta \underline{J} = \underline{M} \cdot \Delta t$ nie ma kierunku zgodnego ani z $\underline{J}$ ani z $\underline{F}$, lecz jest prostopadła do płaszczyzny $\underline{r}$, $\underline{F}$, a jej zwrot określa reguła śruby prawej.

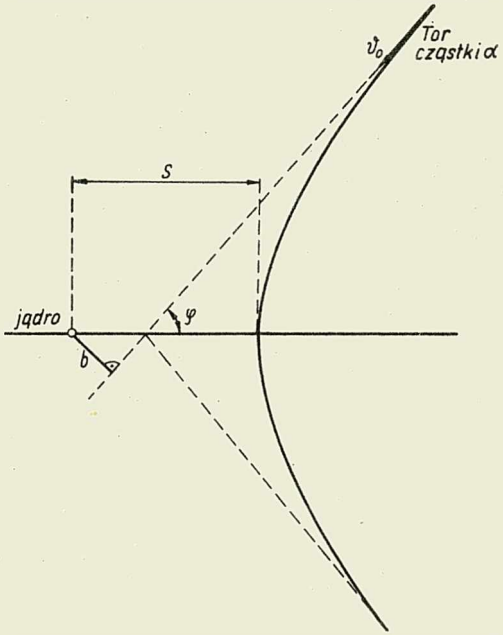
3.3. Przykład zasady zachowania krętu: rozpraszanie cząstek alfa przez ciężkie jądra (teoria E. Rutherforda)

Doświadczenia dotyczące rozpraszania cząstek alfa doprowadziły do ustalenia średnicy jądra atomowego, co miało decydujący wpływ na dalszy rozwój teorii atomu. Cząstka alfa substancji promieniotwórczej przechodząca w pobliżu jądra atomowego w ustawionej na jej drodze folii metalowej, zostaje odchylona w polu sił kulombowskich jądra (rys. 3-7). Kąt rozproszenia wynosi φ. Schemat rozproszenia jest przedsta-



Rys. 3-7

wiony na rys. 3-8. Cząstka alfa, poruszająca się z dala od jądra z prędkością v_o zbliża się doń na najmniejszą odległość s; zarówno s jak i b, odległość jądra od asymptoty toru, stanowi parametry rozproszenia.



Rys. 3-8

Przyjmujemy, że masa jądra atomu folii m_j jest nieskończenie duża; założymy ponadto, że prędkość początkowa jądra wynosi 0, a zatem po odrzuceniu cząstki prędkość pozostaje 0 (inaczej mówiąc nie uwzględniamy energii odrzutu). Masę cząstki alfa oznaczamy przez m_a.

Kręt cząstki względem jądra

$$J_o = m_a \cdot v_o \cdot b.$$

Kręt w odległości s największego zbliżenia:

$$J_s = m_a \cdot v_s \cdot s.$$

Ruch zachodzi w polu siły centralnej, czyli $J_o = J_s$, a stąd $v_s = v_o \cdot b/s$ jest prędkością cząstki w odległości s od jądra. Z zasady zachowania energii mamy:

$$\frac{m_a v_o^2}{2} = \frac{m_a v_s^2}{2} + U(s),$$

gdzie U(s) jest energią potencjalną cząstki alfa w punkcie s.

Ponieważ siła oddziaływania jest siłą Coulomba

$$F_w = + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{(Ze)(2e)}{r^2},$$

zatem

$$U(s) = \int_s^\infty F_w \, dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} 2Ze^2 \int_s^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{2Ze^2}{s}.$$

Mamy więc

$$\frac{m_a v_o^2}{2} = \frac{m_a v_s^2}{2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{2Ze^2}{s}.$$

Oznaczmy stały parametr $p = 1/(4\pi\varepsilon_o)\cdot(4Ze^2)/(m_a v_o^2)$, wówczas $v_s^2/v_o^2 + p/s = 1$, czyli $v_s^2/v_o^2 = 1 - p/s$.

Odległością największego zbliżenia cząstki alfa do jądra jest s. Najmniejsza możliwa wielkość s odpowiada zderzeniu centralnemu, gdy cząstka zostanie odrzucona pod kątem 180^o; w chwili największego zbliżenia $v_s = 0 \supset p = s$, dlatego

$$s_{min} = p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{4Ze^2}{m_a v_o^2}.$$

Doświadczenia nad rozpraszaniem cząstek alfa radonu na foliach różnych metali wykonali GEIGER i MARSDEN. Wyniki, np. dla Cu, są następujące:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9{,}0\cdot10^9 \frac{N\cdot m^2}{o^2}; \quad Z = 29 \text{ (Cu)},$$

$$e = 1{,}60\cdot10^{-19} \text{ C}, \quad m_a \cong 4\cdot m_H = 4\cdot1{,}67\cdot10^{-27} \text{ kg},$$

$$v_o = 1{,}6\cdot10^7 \text{ m/s}.$$

Zatem

$$s_{min} = 9{,}0\cdot10^9 \frac{29\cdot10^{-38}}{1{,}67\cdot10^{-27}\cdot10^{14}} = \frac{9\cdot29}{1{,}67}\cdot10^{-16} \text{ m} = 1{,}56\cdot10^{-12} \text{ cm}.$$

Z tych doświadczeń wynika, że średnica jądra atomowego jest rzędu 10^{-12} cm. Prawo Coulomba $(1/r^2)$ jest spełnione do odległości rzędu kilku średnic jądra.

3.4. Moment bezwładności

Praktycznych obliczeń momentu bezwładności dokonuje się za pomocą rachunku całkowego. Jeśli bowiem masę Δm_i elementu o skończonej objętości zastąpimy masą dm elementu o objętości dV, to położenie i prędkość takiego elementu znane są dokładnie, lecz suma w (3.10) musi być zastąpiona przez całkę.

Jeśli $\rho(r)$ jest gęstością w punkcie odległym o r od osi obrotu, to $dm = \rho(r)\, dV$. Mamy wówczas

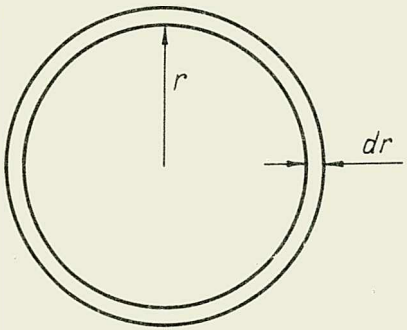
$$I_{xx} = \int (r^2 - x^2)\,dm = \int \rho\,(r)(r^2 - x^2)\,dV,$$
$$I_{xy} = -\int \rho(r)\,xy\,dV, \text{ etc.} \tag{3.19}$$

Suma wyrazów przekątniowych wynosi:

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \int \rho\,(r)\left[3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\right] dV =$$
$$= 2\int \rho\,(r)\,r^2\,dV \tag{3.20}$$

i nie zależy od wyboru układu współrzędnych x, y, z. Z tego wyniku skorzystamy w podanych dalej kilku przykładach obliczeń momentów bezwładności brył o często spotykanej symetrii.

i. Powłoka kulista: oś obrotu przechodzi przez środek geometryczny (rys. 3-9)



Rys. 3-9

Ze względu na symetrię kulistą jest $I_{\mu\nu} = 0$ dla $\mu \neq \nu$, oraz

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}\int \rho\,(r)\,r^2\,dV =$$
$$= \frac{2}{3}\,r^2 \int \rho\,(r)\,dV = \frac{2}{3}\,r^2 \int dm =$$
$$= \frac{2}{3}\,M\,r^2, \tag{3.21}$$

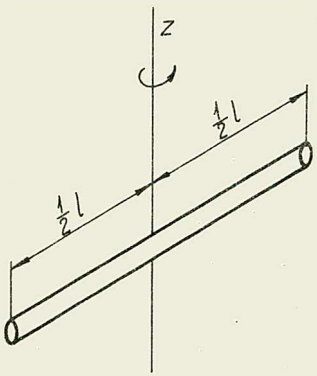
gdzie $M = 4\pi r^2 \rho\,dr$ jest masą powłoki kulistej o grubości dr.

ii. Kula o promieniu R; oś obrotu przechodzi przez środek geometryczny.

Mamy tu $dV = 4\pi r^2\,dr$ oraz

$$I = \frac{2}{3}\int_0^R 4\pi\,r^4 \rho\,dr = 4\pi\rho\,\frac{2}{3} \cdot \int_0^R r^4\,dr =$$
$$= 4\pi\rho\,\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}\,R^5 = \frac{2}{5}\,MR^2$$

gdzie $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ jest masą kuli.



Rys. 3-10

iii. Cienki pręt sztywny; oś obrotu z przechodzi przez środek pręta prostopadle do jego długości L (rys. 3-10).

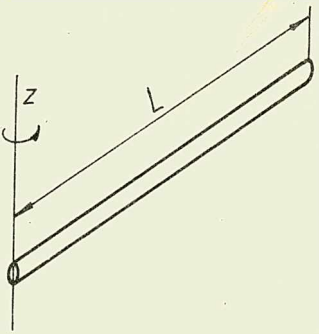
Mamy tu: $dV = A \cdot dr$, gdzie A jest powierzchnią przekroju pręta

$$I_{zz} = \int_{-L/2}^{L/2} \rho r^2 \, dV = \rho A \int_{-L/2}^{L/2} r^2 \, dr = \frac{1}{12} ML^2 ,$$

gdzie $M = \rho AL$ jest masą pręta.

iv. Cienki pręt sztywny; oś obrotu przechodzi przez początek pręta prostopadle do jego długości (rys. 3-11)

$$I_{zz} = \rho A \int_0^L r^2 \, dr = \frac{1}{3} ML^2 .$$



Rys. 3-11

3.5. Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu obrotowym

Energia kinetyczna zbioru elementów masowych Δm_i wynosi

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)^2 .$$

Do występującego tu iloczynu $(\underline{\omega} \times \underline{r}_i)^2 = (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)$ zastosujemy identyczność

$$(\underline{A} \times \underline{B}) \cdot (\underline{C} \times \underline{D}) = (\underline{AC})(\underline{BD}) - (\underline{AD})(\underline{BC}).$$

W naszym przypadku:

$$(\underline{\omega} \times \underline{r}_i)^2 = \omega^2 r_i^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_i)^2 = (\sum_{m=1}^{3} \omega_m^2)(r_i^2) - (\sum_{m=1}^{3} \omega_m r_{im})^2 =$$

$$= (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) \cdot r_i^2 - (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)^2 =$$

$$= \omega_x^2 (r_i^2 - x_i^2) + \omega_y^2 (r_i^2 - y_i^2) + \omega_z^2 (r_i^2 - z_i^2) -$$

$$- 2\omega_x \omega_y x_i y_i - 2\omega_x \omega_z x_i z_i - 2\omega_y \omega_z y_i z_i ,$$

zatem

$$2T = (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 + 2 I_{xy} \omega_x \omega_y +$$

$$+ 2 I_{xz} \omega_x \omega_z + 2 I_{yz} \omega_y \omega_z). \qquad (3.22)$$

Dla kuli o osi obrotu przechodzącej przez jej środek, czyli $I_{\mu\nu} = 0$ dla $\mu \neq \nu$, otrzymujemy znany wzór określający energię kinetyczną:

$$T = \frac{1}{2} I_{zz} (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2 .$$

Wyrażenie (3.22) możemy zapisać znacznie prościej za pomocą rachunku macierzowego:

$$2T = (\tilde{\omega})\,[I]\,(\omega). \tag{3.23}$$

We wzorze (3.23) $(\tilde{\omega})$ oznacza macierz przestawioną (ω) (transponowaną). Pełny zapis (3.23) będzie więc miał postać następującą:

$$2\,T = (\omega_x\ \omega_y\ \omega_z)\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

3.6. Osie główne momentu bezwładności

W dowolnym wyborze układu współrzędnych x, y, z, jak to czyniliśmy dotąd, związki między $\underline{J}$ i $\underline{\omega}$ oraz wyrażenia na energię kinetyczną T, są dość skomplikowane. W szczególności wyrażenie na T, prawdziwe w każdym układzie kartezjańskim, można tak uprościć przez wybór odpowiedniego układu współrzędnych, by doprowadzić do zniknięcia wyrazów mieszanych typu $\omega_\mu \omega_\nu$. Oznaczmy ten szczególny układ współrzędnych przez X, Y, Z. Mamy w tym układzie:

$$2\,I_{\mu\nu}\,\omega_\mu \omega_\nu = 0, \quad \text{czyli} \quad I_{\mu\nu} = 0 \quad \text{dla } \mu \neq \nu. \tag{3.24}$$

Układ współrzędnych X Y Z o własności (3.24) nazywamy osiami głównymi tensora momentu bezwładności. Dla skrócenia oznaczeń przyjmiemy że:

$$I_{XX} = I_1, \quad I_{YY} = I_2, \quad I_{ZZ} = I_3. \tag{3.25}$$

Mamy więc względem tego układu współrzędnych:

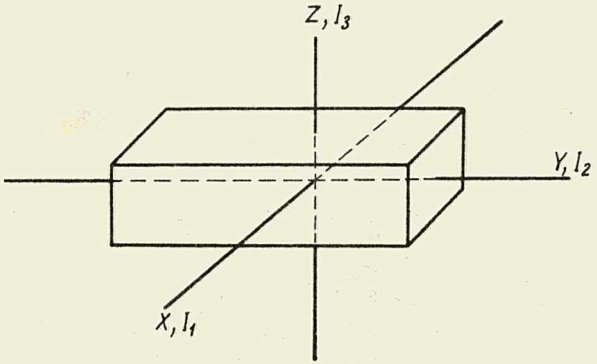
$$\left.\begin{aligned} 2T &= \sum_{k=1}^{3} I_k\,\omega_k^2, \\ J_m &= I_m \omega_m, \quad m = 1, 2, 3, \\ 2T &= \sum_{k=1}^{3} (J_k^2/I_k). \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Jak widać, wyrażenia na energię kinetyczną oraz kręt bryły sztywnej przybierają wówczas szczególnie prostą postać. Co więcej, jeśli bryła obraca się dookoła którejś z osi głównych, np. osi Z, to kręt bryły wynosi

$$J_3 = I_3 \omega_3,$$

a więc jest równoległy do ω.

Należy tu wyraźnie podkreślić, że inercyjność (lub nie) układu współrzędnych jest jego cechą fizyczną. Własność wyrażona w (3.24) lub związkami (3.26) jest natomiast cechą geometryczną wyróżnionego układu X Y Z. Osie X Y Z są w pewnym sensie osiami naturalnymi układu, gdyż związane są z jego symetrią; uwzględnienie jej prowadzi do szczególnie prostych zależności w dynamice ruchu obrotowego. Symetria układu ma ogromne znaczenie nie tylko w dynamice bryły sztywnej, lecz w ogóle w fizyce. Układ osi x, y, z jest wybrany natomiast dowolnie, z tym tylko warunkiem, by był inercyjny. Wybór takiego układu jest łatwy, ale prowadzi do zależności ogólnych, złożonych.



Rys. 3-12

Kierunki osi głównych układu możemy często odgadnąć na podstawie jego symetrii. Przykładem takiej dedukcji jest rys. 3-12. W bardziej złożonych przypadkach intuicyjne znalezienie układu X Y Z może nie być proste, lub niejednoznaczne. Posługujemy się wówczas metodami rachunkowymi, opartymi na definicji (3.24). W dużym skrócie metodę tę można streścić następująco: poszukujemy takiego przekształcenia T układu współrzędnych

$$(x, y, z) \xrightarrow{T} (X, Y, Z),$$

które doprowadzałoby tensor momentu bezwładności do postaci przekątniowej:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

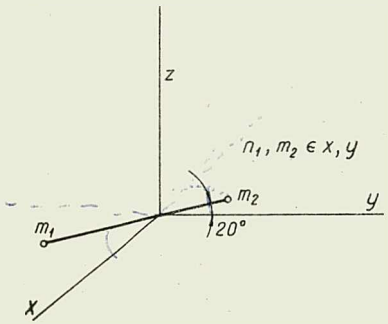
Szczegółowym omówieniem tego zagadnienia nie będziemy się tu zajmować.

3.7. Przykład ruchu bryły sztywnej

Dwa ciała o masach $m_1 = 200$ g i $m_2 = 300$ g są połączone sztywnym i nieważkim prętem o długości 50 cm. Środek masy układu jest początkiem układu współrzędnych. Pręt leży w płaszczyźnie x y i tworzy kąt 20° z osią y. Obliczyć składowe momentu bezwładności I_{xx} i I_{xy}. Przyjąwszy, że pręt obraca się z prędkością kątową ω wokół osi x, znaleźć orientację wektora $\underline{J}$.

Położenie środka masy względem m_1

$$r_s = \frac{200 \cdot 0 + 300 \cdot 50}{200 + 300} = 30 \text{ cm}.$$



Rys. 3-13

Wobec tego współrzędne mas są następujące (rys. 3-13):

$m_1(30 \cos 70^\circ, -30 \sin 70, 0) =$

$= (10{,}3; -28{,}2, 0)$ cm,

$m_2(-20 \sin 20, 20 \cos 20, 0) =$

$= (-6{,}8, 18{,}8, 0)$ cm.

Mając te dane możemy obliczyć składowe momentu bezwładności:

$$I_{xx} = \sum m_i(r_i^2 - x_i^2) = 200(30^2 - 10{,}3^2) + 300(20^2 - 6{,}8^2) =$$
$$= 2{,}65 \cdot 10^5 \text{ g} \cdot \text{cm}^2,$$

$$I_{xy} = -\sum m_i x_i y_i = 200 \cdot 10{,}3 \cdot 28{,}2 + 300 \cdot 6{,}8 \cdot 18{,}8 =$$
$$= 0{,}96 \cdot 10^5 \text{ g} \cdot \text{cm}^2.$$

Przypuśćmy teraz, że pręt obraca się z prędkością kątową dookoła osi x (rys. 3-14).

Jest zatem

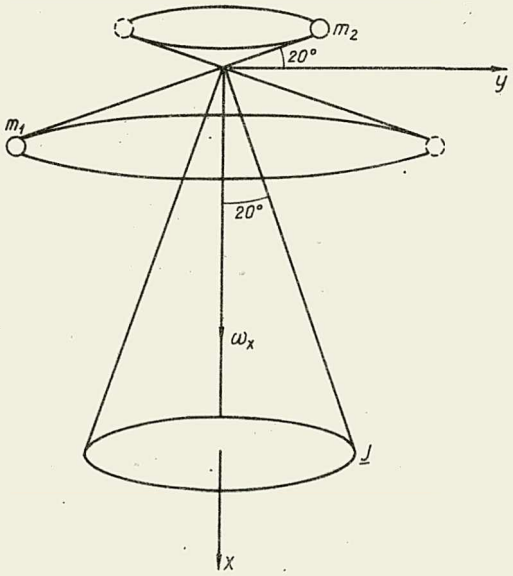
$$\omega = \omega_x, \quad \omega_y = \omega_z = 0$$

oraz

$$J_x = I_{xx} \cdot \omega_x,$$

$$J_y = I_{yx} \omega_x; \quad J_z = 0.$$

W takim razie $\frac{J_y}{J_x} = \frac{I_{yx}}{I_{xx}} = \frac{0{,}96}{2{,}65} = 0{,}363 = \operatorname{tg} 20^\circ,$



Rys. 3-14

zatem w chwili, gdy pręt leży w płaszczyźnie x y, wektor krętu tworzy z osią x kąt 20^0, tj. jest prostopadły do odcinka łączącego obie masy m_1 i m_2. J obraca się wokół x z prędkością kątową ω, lecz nie jest do niej równoległy.

4. OSCYLATOR

Oscylatorem może być każdy układ zdolny do wykonywania drgań o małym odchyleniu od położenia równowagi w chwili początkowej. Przykładami oscylatorów są: wahadło, masa zawieszona na sprężynie, obwód elektryczny złożony z pojemności i indukcyjności, elektron w atomie, atom lub fragment cząsteczki związany z innymi atomami, cząsteczka w sieci krystalicznej. Cechą tych wszystkich układów jest to, że element drgający jest związany z położeniem równowagi siłą sprężystą, która ma dwie ważne cechy:

i. jest zawsze skierowana w stronę położenia równowagi,

ii. wielkość jej jest proporcjonalna do przesunięcia oscylatora względem położenia równowagi.

Ta druga cecha siły sprężystej może być osiągnięta tylko dla drgań o amplitudzie dostatecznie małej. Oscylator, który spełnia ten warunek, zwany jest liniowym.

4.1. Oscylator harmoniczny

Oscylator harmoniczny stanowi ważny model w fizyce klasycznej i kwantowej, bowiem posługujemy się nim często w opisie zjawisk i własności materiałów. Oscylatorem harmonicznym nazywamy układ, którego wychylenie s względem położenia równowagi opisuje funkcja typu $s = A \sin(\omega t + \varphi)$, przy czym A jest amplitudą ruchu i nie zależy od czasu, zaś ω i φ oznaczają odpowiednio częstość kątową i fazę początkową ruchu.

Rozważmy obecnie kilka przykładów oscylatora.

4.1.1. Wahadło proste

Modelem jest masa m, zawieszona na sztywnej i nieważkiej nici. Rozważmy ruch wahadła ze względu na dynamikę bryły.

Ruch odbywa się w płaszczyźnie yz (rys. 4-1), a kierunek siły grawitacyjnej $F_z = -mg$ jest przeciwny do kierunku osi z. Mamy więc

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = -mg.$$

Działający w tym układzie moment siły wynosi

$$M_x = (\underline{r} \times \underline{F})_x = y F_z - z F_y =$$

$$= (l \sin\varphi)(-mg) = -mgl \sin\varphi .$$

Kręt wahadła wynosi

$$J_x = I \omega_x = ml^2 \dot{\varphi}.$$

Zgodnie z (3.9) pochodna krętu jest równa momentowi siły wewnętrznej

$$\frac{dJ_x}{dt} = M_x,$$

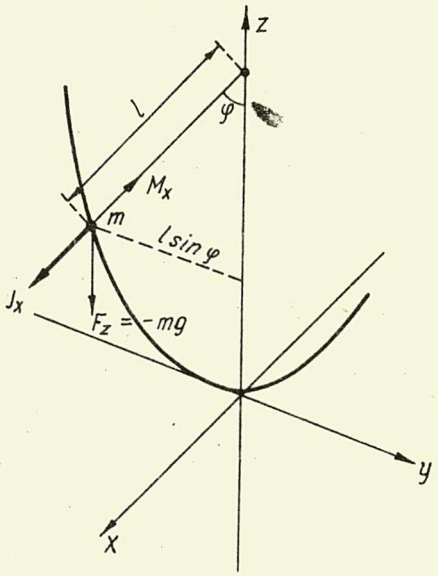
czyli

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin\varphi,$$

zatem

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0.$$

Dla małych odchyleń $\sin\varphi \cong \varphi$ (w radianach), wówczas



Rys. 4-1

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \qquad (4.1)$$

jest równaniem ruchu wahadła dla przybliżenia małych amplitud. Rozwiązaniem jest funkcja periodyczna czasu

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \delta_1) \qquad (4.2)$$

lub

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \delta_2),$$

określająca aktualne wychylenie wahadła w mierze kątowej. Oba rozwiązania są równoważne ponieważ δ, faza początkowa ruchu jest stałą dowolną i można uważać, że

$$\delta_2 - \delta_1 = \pi/2.$$

Podstawiając rozwiązanie (4.2) do równania (4.1) otrzymujemy

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \delta_1),$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \delta_1) = -\omega_0^2 \varphi,$$

czyli

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

zatem

$$\omega_o = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2}. \tag{4.3}$$

Kątowa częstość drgań wahadła jest więc odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka z jego długości. Dokłady pomiar częstości drgań, gdy długość jest znana, może być również podstawą pomiaru przyśpieszenia ziemskiego.

Rozwiązanie (4.2) jest funkcją periodyczną o okresie 2π. Jeśli zatem t wzrośnie o okres drgań T_o, to wychylenie osiągnie tę samą wartość i kierunek co w chwili t, zatem

$$\sin\left[\omega_o(t + T_o) + \delta\right] = \sin\left(\omega_o t + \delta\right),$$

jeśli będzie spełniony warunek

$$\omega_o T_o = 2\pi$$

lub

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o} = 2\pi\nu_o, \tag{4.4}$$

ν_o jest liniową częstością drgań oscylatora.

Interesujące własności ma przyspieszenie liniowe masy m

$$a = l \cdot \ddot{\varphi} = -\omega_o^2 l\varphi = -\omega_o^2 y.$$

Siła działająca na masę m wynosi zatem

$$F = m \cdot a = -m\omega_o^2 y = -K_1 y. \tag{4.5}$$

Zarówno przyspieszenie jak i siła są więc skierowane w stronę położenia równowagi i proporcjonalne do przesunięcia oscylatora, tj. spełniają obie cechy oscylatora liniowego. Słuszne jest to jednak z taką dokładnością, z jaką $\sin\varphi$ można przybliżyć przez φ.

Współczynnik K_1 w (4.5) nosi nazwę siły kierującej, lub krótko, stałej sprężystej oscylatora i jest związany z kątową częstością drgań zależnością

$$\omega_o^2 = \frac{K_1}{m}. \tag{4.6}$$

Liczbowo K_1 równy jest sile, działającej na masę przesuniętą względem położenia równowagi o jednostkę długości.

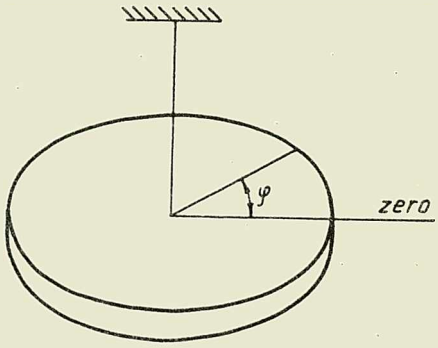
4.1.2. Wahadło torsyjne

Modelem takiego wahadła jest krążek zawieszony w środku masy na sprężystej i nieważkiej nici. Lekko popchnięty, krążek wykonuje drgania kątowe, przy czym aktualne położenie względem położenia równowagi (linia zerowa) oznaczamy przez kąt Φ (rys. 4-2).

Korzystając z (3.9) możemy napisać równanie ruchu wahadła torsyjnego:

$$\frac{d}{dt} J = \frac{d}{dt} (I\,\omega) = I \cdot \ddot{\varphi} = M,$$

gdzie $\ddot{\varphi}$ jest przyspieszeniem kątowym krążka, I jego momentem bezwładności dla wybranej osi, zaś M jest momentem siły wytwarzanym przez sprężystość skręconej aktualnie nici. Dla niewielkich odchyleń od położenia równowagi, wytworzony przez nić moment pary sił jest proporcjonalny do wychylenia i skierowany zawsze w stronę położenia równowagi



Rys. 4-2

$$M = -K_t \varphi, \qquad (4.7)$$

gdzie K_t jest tzw. stałą sprężystą nici. Liczbowo K_t równe jest momentowi pary sił powstającemu przy skręcaniu nici o kąt równy 1 radianowi. Równanie ruchu wahadła torsyjnego ma więc postać

$$I \cdot \ddot{\varphi} + K_t \varphi = 0. \qquad (4.8)$$

Jeśli oznaczymy

$$\omega_o^2 = K_t / I, \qquad (4.9)$$

to drganie wahadła opisuje funkcja

$$\varphi = \varphi_o \sin(\omega_o t + \delta_1)$$

lub (4.10)

$$\varphi = \varphi_o \cos(\omega_o t + \delta_2)$$

gdzie δ_i jest fazą początkową ruchu.

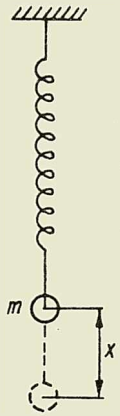
Rozwiązania (4.10) są identyczne z (4.2), a różnica występuje w (4.6) i (4.9).

4.1.3. Masa zawieszona na sprężynie

Jeżeli x oznacza przesunięcie masy m względem położenia równowagi, to

$$F_x = -C\,x$$

jest liniową siłą sprężystą, działającą po rozciągnięciu sprężyny (rys. 4.3).



Rys. 4-3

Równanie rachunku Newtona ma zatem postać:

$$ma = m\ddot{x} = -C\,x,$$

czyli

$$\ddot{x} + \left(\frac{C}{m}\right)x = 0. \qquad (4.11)$$

Równanie to ma strukturę taką samą, jak poprzednie, tak że:

$$\omega_o = \left(\frac{C}{m}\right)^{1/2}, \quad x = x_o \sin(\omega_o t + \delta). \qquad (4.12)$$

4.1.4. Średnia energia oscylatora

Energia całkowita oscylatora składa się z jego energii kinetycznej i potencjalnej. Dla przykładu 4.1.3 możemy napisać

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} C x^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m\left[\omega_o^2 x_o^2 \cos^2(\omega_o t + \delta) + \omega_o^2 x_o^2 \sin^2(\omega_o t + \delta)\right] = \langle E \rangle$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m \omega_o^2 x_o^2. \qquad (4.13)$$

Widzimy z tego, że energia całkowita nie zależy od czasu, jest więc równa energii średniej oscylatora. Energia ta jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy drgań.

4.2. Oscylator tłumiony

Oscylator rzeczywisty wykonuje drgania o amplitudzie systematycznie malejącej z biegiem czasu. Przyczyną tłumienia ruchu oscylatora jest istnienie siły tarcia. Kierunek takiej siły jest przeciwny do prędkości i zależy od prędkości

$$F_t = -\gamma \dot{x}^n. \qquad (4.14)$$

Dla niezbyt dużych prędkości $n = 1$; dla większych (aerodynamika) może być $n = 2$, a nawet 3.

4.2.1. Relaksacja prędkości

W najprostszym przypadku równanie ruchu cząstki, poruszającej się przy współdziałaniu sił tarcia ma postać:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0. \qquad (4.15)$$

Ponieważ $[\gamma\dot{x}] = 1$ N, zatem $[\gamma] = 1$ kg/s, czyli stała m/γ ma wymiar czasu.

W związku z tym definiujemy nową wielkość, zwaną czasem relaksacji

$$\tau = \frac{m}{\gamma} \tag{4.16}$$

tak, że mamy

$$\tau \ddot{x} + \dot{x} = 0$$

lub

$$\tau \dot{v} + v = 0, \tag{4.17}$$

stąd

$$\tau \frac{dv}{dt} = -v; \qquad \tau \int \frac{dv}{v} = -\int dt,$$

$$\tau \ln v = -t + \text{const.}$$

Jako warunek początkowy zakładamy, że $t = 0 \supset v = v_o$ (prędkość początkowa $\neq 0$), czyli $\text{const} = \tau \ln v_o$, zatem

$$\ln \frac{v}{v_o} = -\frac{t}{\tau}, \quad \text{czyli} \quad v = v_o \cdot e^{-t/\tau}. \tag{4.18}$$

W przypadku najczęściej spotykanej siły tłumienia, proporcjonalnej do prędkości, prędkość maleje wykładniczo z czasem.

Jeśli położymy $t = \tau$, to $v = v_o \cdot \frac{1}{e}$, czyli τ jest czasem, po którego upływie prędkość maleje do 1/e swej początkowej wartości.

Energia kinetyczna również maleje w czasie ruchu z tarciem

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_o^2 e^{-2t/\tau} = T_o e^{-2t/\tau}, \tag{4.19}$$

zatem

$$\dot{T} = -\frac{2}{\tau} T_o e^{-2t/\tau} = -\frac{2}{\tau} T.$$

Wynika stąd, że energia kinetyczna maleje z czasem relaksacji dwa razy krótszym niż prędkość:

$$\tau_T = \frac{1}{2} \tau_v. \tag{4.20}$$

Dobrym przykładem siły typu $F_t = -\gamma \dot{x}$ jest oporność omowa R w obwodzie drgającym; również ruchowi płytki w gazie w kierunku normalnym do jej powierzchni lub w cieczy stycznie do powierzchni towarzyszy pojawienie się takiej właśnie siły tarcia.

4.2.2. Równanie ruchu oscylatora tłumionego

Po wprowadzeniu siły tarcia możemy napisać równanie ruchu oscylatora tłumionego (oczywiście nie będzie to już oscylator harmoniczny):

$$m \ddot{x} = F_s + F_t,$$

przy czym F_s oznacza liniową siłę sprężystą, a F_t siłę tarcia.

Po podstawieniu znanych postaci tych sił otrzymujemy:

$$m\ddot{x} + Y\dot{x} + Cx = 0. \tag{4.21}$$

Po podzieleniu przez masę i wprowadzeniu stałych (4.21) przekształca się w równanie

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_o^2 x = 0,$$

ω_o oznacza - jak dotąd - część kątową oscylatora harmonicznego, tj. bez tłumienia. Rozwiązaniem ostatniego równania jest $x(t)$, czyli funkcja, przedstawiająca zależność wychylenia oscylatora od czasu. Funkcja ta musi maleć z biegiem czasu ze względu na tłumienie ruchu, ponadto powinna na ogół zawierać czynnik periodyczny.

Szukamy zatem rozwiązania (4.21) o postaci

$$x(t) = x_o\, e^{-t/2\tau} \cdot z(t),$$

gdzie $z(t)$ jest na razie nie znaną periodyczną funkcją czasu. Czynnik wykładniczy opisuje spadek amplitudy. Obliczamy pochodne $x(t)$:

$$\frac{1}{x_o}\dot{x} = -\frac{1}{2\tau} \cdot e^{-t/2\tau} z + \dot{z}\, e^{-t/2\tau},$$

$$\frac{1}{x_o}\ddot{x} = e^{-t/2\tau}\left\{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 \cdot z - \frac{1}{\tau}\dot{z} + \ddot{z}\right\}$$

i podstawiamy do równania różniczkowego. Po redukcji otrzymujemy:

$$\ddot{z} + \left(\omega_o^2 - \frac{1}{4\tau^2}\right) z = 0.$$

Czynnik $e^{-t/2\tau}$ został tu opuszczony, ponieważ nie zeruje się dla skończonego czasu t. Jeśli oznaczymy:

$$\omega^2 = \omega_o^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2, \tag{4.22}$$

przy czym

$$0 \leqslant \omega \leqslant \omega_o,$$

to rozwiązaniem równania różniczkowego dla z jest funkcja

$$z(t) = z_o \sin(\omega t + \delta).$$

Pełne rozwiązanie ma więc postać

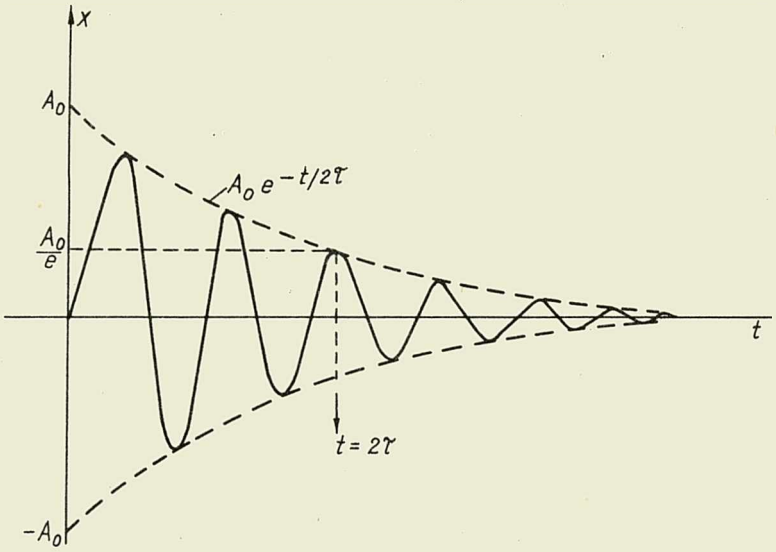
$$x(t) = A_o\, e^{-t/2\tau} \cdot \sin\omega t, \tag{4.23}$$

przy czym A_o jest amplitudą ruchu harmonicznego. Wybierając czynnik harmoniczny typu $\sin\omega t$ musimy założyć, że oscylator w chwili $t = 0$ ma zadaną prędkość początkową v_o:

$$\dot{x}(0) = \left[-\frac{1}{2\tau} \sin\omega t + \omega \cos\omega t \right]_{t=0}^{A_o} = \omega A_o,$$

ponieważ oscylator z tarciem "sam z siebie" nie ruszy z miejsca.

Gdybyśmy wybrali czynnik typu cos ωt, wówczas wystarczyłoby założyć, że w chwili początkowej oscylator ma wychylenie $x(0) = A_o$, tj. równe amplitudzie ruchu harmonicznego. Ponadto widzimy z (4.22), że częstość ruchu tłumionego jest zawsze mniejsza od częstości drgań oscylatora bez tłumienia.



Rys. 4-4

Wykres funkcji (4.23) jest przedstawiony na rys. 4-4; obwiednie krzywej, ilustrujące spadek amplitudy, mają równanie $x = A_o e^{-t/2\tau}$. Amplituda maleje do 1/2 swej wartości początkowej po upływie czasu $t = 2\tau$; czas relaksacji amplitudy jest więc 2-krotnie większy, niż prędkości.

Często wprowadza się, oprócz czasu relaksacji, tzw. stałą tłumienia, która jest jego odwrotnością

$$\beta = \frac{1}{2\tau} . \qquad (4.24)$$

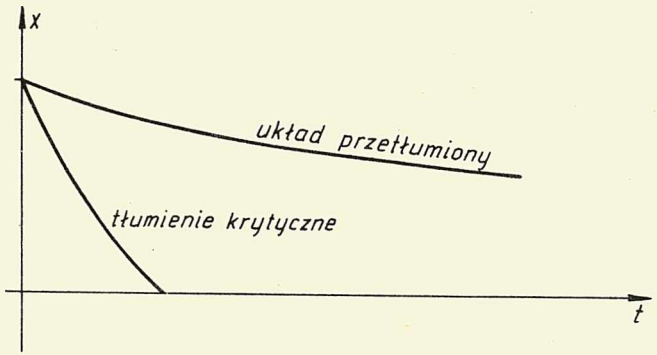
Rysunek 4-4 odpowiada dużemu okresowi czasu relaksacji, czyli małej stałej tłumienia. Najbardziej interesującym przypadkiem jest tzw. tłumienie krytyczne, określone warunkiem:

$$\omega^2 = \omega_o^2 - \beta_{kr}^2 = 0, \tag{4.25}$$

czyli

$$\beta_{kr} = \omega_o.$$

Odpowiada mu zerowa częstość oscylacji, tzn. układ wychylony ze stanu równowagi zmierza w jego kierunku aperiodycznie w czasie możliwie najkrótszym. Ma to znaczenie w doborze stałych tłumienia w miernikach, zawierających części ruchome; miernik tłumiony krytycznie pozwala na osiągnięcie wielkości mierzonej w czasie najkrótszym. Przy jeszcze większych stałych tłumienia częstość ruchu staje się urojona, a więc ruch dalej zachodzi aperiodycznie; powiada się, że układ powoli "pełznie" w kierunku położenia równowagi (rys. 4-5).



Rys. 4-5

4.2.3. Energia oscylatora słabo tłumionego

Słabe tłumienie oznacza małe β lub duży czas relaksacji τ, tak że w tym przypadku

$$\omega\tau \gg 1 \quad \text{oraz} \quad \omega \cong \omega_o, \tag{4.26}$$

wobec tego możemy napisać

$$x(t) = A_o \cdot e^{-t/2\tau} \sin \omega_o t. \tag{4.27}$$

Obliczmy średnią wartość energii całkowitej, $\langle E \rangle$, oscylatora tłumionego, przy czym średniowanie odnosić się będzie do 1. okresu. Jeżeli β jest małe, to amplituda ruchu $A_o\, e^{-t/2\tau}$ praktycznie nie zmieni się w ciągu tego czasu, czyli można ją uważać za stałą. Mamy więc:

$$\dot{x} = \left(-\frac{1}{2\tau} \sin \omega_o t + \omega_o \cos \omega_o t\right) \cdot A_o\, e^{-t/2\tau},$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{4\tau^2} \sin^2 \omega_o t + \omega_o^2 \cos^2 \omega_o t - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega_o}{\tau} \sin \omega_o t \cos \omega_o t\right) A_o^2 \cdot e^{-t/\tau}.$$

Ponieważ

$$\langle \sin^2 \omega_o t \rangle = \langle \cos^2 \omega_o t \rangle = \frac{1}{2} ,$$

$$\langle \sin \omega_o t \cos \omega_o t \rangle = \langle \frac{1}{2} \sin 2\omega_o t \rangle = 0$$

oraz

$$\frac{1}{4\tau^2} \ll \omega_o^2,$$

zatem

$$\langle T \rangle \cong \frac{1}{4} m \omega_o^2 A_o^2 e^{-t/\tau}$$

oraz

$$\langle U \rangle = \langle \frac{1}{2} C x^2 \rangle = \frac{1}{4} m \omega_o^2 A_o^2 e^{-t/\tau} = \langle T \rangle,$$

wobec tego

$$\langle E \rangle = 2\langle U \rangle = \frac{1}{2} m \omega_o^2 A_o^2 e^{-t/\tau}. \qquad (4.28)$$

Widzimy więc, że średnia moc, z jaką jest tracona energia w ciągu 1 cyklu wynosi

$$-\langle P \rangle = \frac{d}{dt} \langle E \rangle = -\frac{1}{\tau} \langle E \rangle,$$

czyli

$$\langle P \rangle = \frac{\langle E \rangle}{\tau} . \qquad (4.29)$$

Straty energii zachodzą z czasem relaksacji takim samym, jak spadek prędkości (dyssypacja, rozpraszanie energii).

Można przypuszczać, że ta strata energii ma związek z pracą siły tarcia F_t. Obliczmy moc, rozwijaną przez siłę tarcia:

$$\langle P_t \rangle = \langle F_t \cdot v \rangle = -\langle \gamma \dot{x}^2 \rangle = -\frac{m}{\tau} A_o^2 e^{-t/\tau} (\omega_o^2 \cdot \frac{1}{2}) = -\frac{1}{\tau} \cdot \langle E \rangle =$$

$$= -\langle P \rangle. \qquad (4.30)$$

Widzimy więc, że moc rozwijana przez siłę tarcia istotnie jest równa mocy strat energii całkowitej oscylatora tłumionego. Oznacza to, że przyczyną strat mocy jest właśnie występowanie sił tarcia.

4.3. Drgania wymuszone oscylatora

Drgania wymuszone zachodzą pod wpływem siły F_w, przyłożonej z zewnątrz. Jeśli siła ta ma wywołać drgania oscylatora, to musi mieć charakter siły periodycznej. Położymy zatem

$$F_w = F_o \cdot \sin \omega t, \qquad (4.31)$$

gdzie ω jest częstością siły wymuszającej, a F_o jej amplitudą. Uwzględnimy również siłę tarcia

$$F_t = -\gamma \dot{x}$$

tak, że równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{x} + \gamma \dot{x} + C x = F_0 \sin \omega t. \tag{4.32}$$

Stosując poprzednie oznaczenia oraz oznaczając $F_0/m = a_0$ - amplituda przyspieszenia, wywołanego przez siłę wymuszającą - mamy

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin \omega t.$$

W tym równaniu ω_0 jest częstością własną układu, tj. bez tłumienia i siły wymuszającej.

Pod wpływem F_w układ będzie wykonywał drgania. Pominiemy zjawiska przejściowe na początku; po pewnym czasie układ dojdzie do stanu równowagi, w wyniku czego drgania będą się odbywać z częstością siły wymuszającej ω, a nie z częstością własną ω_0.

Rozwiązanie tego równania musi mieć zatem postać

$$x = x_0 \cdot \sin (\omega t + \varphi), \tag{4.33}$$

a naszym zadaniem jest znalezienie x_0 oraz φ.

Mamy:

$$\dot{x} = \omega x_0 \cos (\omega t + \varphi),$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x_0 \sin (\omega t + \varphi).$$

Po podstawieniu do równania różniczkowego otrzymujemy:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) x_0 \sin (\omega t + \varphi) + \frac{\omega}{\tau} x_0 \cos (\omega t + \varphi) = a_0 \sin \omega t,$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) x_0 \left[\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi\right] + \frac{\omega}{\tau} x_0 \left[\cos \omega t \cos \varphi - \right.$$

$$\left. - \sin \omega t \sin \varphi\right] - a_0 \sin \omega t = 0.$$

Równość zeru ma zachodzić dla dowolnej chwili t, zatem współczynniki przy $\sin \omega t$ oraz $\cos \omega t$, muszą osobno znikać. Prowadzi to do dwóch warunków:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) x_0 \cos \varphi - \frac{\omega}{\tau} x_0 \sin \varphi = a_0,$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) x_0 \sin \varphi + \frac{\omega}{\tau} x_0 \cos \varphi = 0.$$

Drugie z równań daje:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega / \tau}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{4.34}$$

Eliminacja funkcji trygonometrycznych w obu równaniach prowadzi do związku

$$x_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 x_0^2 = a_0^2,$$

czyli

$$x_o(\omega) = \frac{a_o}{\left\{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2\right\}^{1/2}}. \qquad (4.35)$$

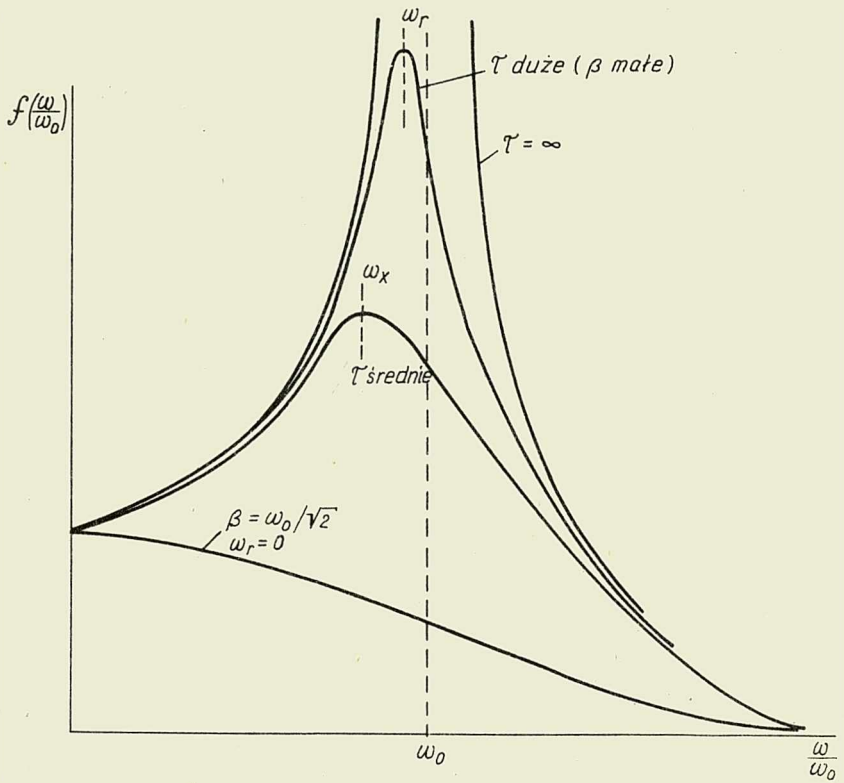
Równanie (4.35) przedstawia amplitudę drgań układu jako funkcję częstości siły wymuszającej. Następujące wnioski zasługują na uwagę:

i. między siłą wymuszającą a "odpowiedzią" układu istnieje przesunięcie fazowe, tj. maksymalne wartości siły i wychylenia przypadają w różnym czasie:

a) jeśli $\omega < \omega_o$, to $\operatorname{tg}\varphi < 0$ i $\varphi < 0$, to faza drgania opóźnia się wówczas o $\Delta t = \varphi T/2\pi$,

b) jeśli $\omega > \omega_o$, to $\operatorname{tg}\varphi > 0$ i $\varphi > 0$, zatem faza drgania wyprzedza fazę siły o $\Delta t = \varphi T/2\pi$.

ii. amplituda wymuszonych drgań układu x_o, jest proporcjonalna do amplitudy przyśpieszenia wytwarzanego przez siłę wymuszającą (a_o).



Rys. 4-6

iii. amplituda drgania zależy od częstości siły wymuszającej, ω, i dla pewnej wartości ω_r osiąga wartość maksymalną x_r. Zjawisko to nazywamy rezonansem. Wartość amplitudy w punkcie rezonansowym możemy obliczyć z warunku ekstremum funkcji $x_0(\omega)$:

$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2\right] = -4(\omega_0^2 - \omega^2)\,\omega + 2\left(\frac{\omega}{\tau}\right)\frac{1}{\tau} = 0,$$

$$\omega_0^2 - \omega_r^2 = \frac{1}{2\tau^2},$$

$$\omega_r = \left(\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}\right)^{1/2} = (\omega_0^2 - 2\beta^2)^{1/2}. \qquad (4.36)$$

Częstość rezonansowa jest więc mniejsza od ω_0 o wielkość zależną od czasu relaksacji.

Zależność $x_0(\omega)$ od ω można przedstawić w postaci uniwersalnej funkcji $f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

$$\frac{x_0}{a_0\,\omega_0^2} = \frac{1}{\left\{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{1}{\tau\omega_0}\right)^2\right\}^{1/2}} = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right). \qquad (4.37)$$

Obraz funkcji (4.37) jest przedstawiony na rys. 4-6.

5. ELEMENTY DYNAMIKI RELATYWISTYCZNEJ

Dynamika relatywistyczna jest działem fizyki traktującym o ruchu ciał przy dużych prędkościach. Jeśli $v/c \geq 0{,}01$, to przestaje obowiązywać dynamika Newtona; ruch ciał o takich prędkościach opisuje dynamika relatywistyczna, której podstawowe idee są oparte na szczególnej teorii względności. Prędkość światła w próżni, c, odgrywa w tych zagadnieniach podstawową rolę i nią wpierw się zajmiemy.

5.1. Pomiary c

Istnieje wiele metod pomiaru prędkości światła w próżni. Wymienimy tylko niektóre z nich.

i. metody astronomiczne (korzysta się z obserwacji zmiany położeń ciał niebieskich);

ii. metody mechaniczne: koło zębate (Fizeau) i wirujące zwierciadło; wykorzystuje się różnicę czasu (różnicę faz) sygnału dochodzącego wprost i z dalekiej odległości po odbiciu od tarczy (lustra).

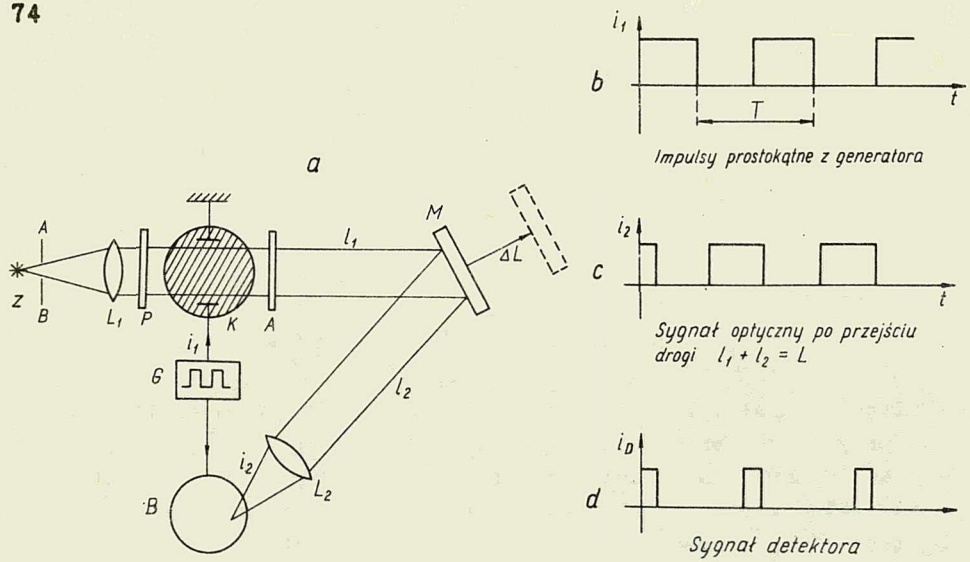
iii. rezonator wnękowy: pudło metalowe o dokładnie znanej długości l, w którym dla pewnej częstości (znanej) promieniowania mikrofalowego można wytworzyć stan fali stojącej, tj. na długości l mieści się dokładnie znana całkowita liczba n połówek długości fali. Mamy wówczas:

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} n c \frac{1}{\nu} . \qquad (5.1)$$

Na podstawie znanych n, ν i zmierzonego l można obliczyć c. We wnętrzu rezonatora powinna być próżnia.

iv. metoda modulacji natężenia światła i czułości detektora.

Aparatura, przedstawiona schematycznie na rys. 5-1 składa się z następujących elementów: źródła światła (Z), przesłony (B), dwóch soczewek (L_1, L_2), polaryzatora (P) i analizatora (A), płaskiego zwierciadła M, generatora części radiowej (G), detektora (D) i komórki Kerra (K). Polaryzator wytwarza światło liniowo spolaryzowane; jeśli P i A są skrzyżowane, a generator G nie dostarcza impulsów, to układ ten zatrzymuje promieniowanie i żaden sygnał optyczny do detek-



Rys. 5-1

tora nie dochodzi. Wysłanie sygnału elektrycznego do komórki Kerra wytwarza dwójłomność cieczy (nitrobenzen), zawartej między elektrodami komórki, wskutek czego układ PKA staje się przepuszczalny dla promieniowania. Dzieje się tak jedynie w przedziałach czasu, w których do komórki Kerra jest przyłożone napięcie podawanego z generatora sygnału elektrycznego (rys. 5-1b). Generator wywołuje zatem periodyczne zmiany natężenia wiązki, biegnącej wzdłuż l_1 i l_2 (łączna długość drogi około 10 km). Ten sam sygnał przyłożony jest na detektor, co powoduje periodyczną zmianę (modulację) jego czułości. Sygnał optyczny po przejściu drogi $l_1 + l_2$, na co potrzebuje czasu $t = (l_1 + l_2)/c$, jest przesunięty w fazie (rys. 5-1c) względem sygnału dochodzącego bezpośrednio do detektora (rys. 5-1b) o kąt $\Delta\varphi = 2\pi(l_1 + l_2)\cdot\nu/c$, gdzie ν jest częstością modulacji. Detektor reaguje tylko wtedy, gdy jest czuły i gdy nań pada światło (rys. 5-1d). Jeśli zatem doprowadzimy do przesunięcia fazowego $\Delta\varphi = \pi$, to nie uzyskamy sygnału, co jest właśnie warunkiem pomiaru. W tym stanie $1 = 2L\nu/c$, przy czym oznaczyliśmy $L = l_1 + l_2$. Powiększenie L o ΔL (przesunięcie zwierciadła M) zmienia różnicę faz: pojawia się sygnał. Można znaleźć nowe położenie ΔL takie, że $\Delta\varphi = 3\pi$, co powoduje ponowne zniknięcie sygnału. Mamy wówczas:

$$\frac{\pi}{\pi} = 1 = \frac{2L}{c}\nu$$

oraz

$$\frac{3\pi}{\pi} = 3 = \frac{2(L + 2\Delta L)}{c}\nu ,$$

czyli

$$2 = \frac{4\Delta L}{c}; \quad c = 2\Delta L\nu. \qquad (5.2)$$

Na podstawie znanej częstości modulacji i pomiaru przesunięcia można obliczyć c.

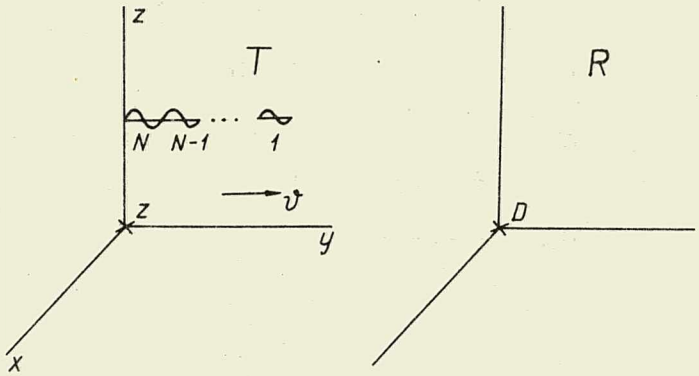
W ostatnim stuleciu wykonano setki pomiarów wartości c, używając opisanych tu metod i jeszcze innych. Dziś przyjęta wartość c wynosi

$$c = (2{,}997925 \pm 3\cdot10^{-6})\cdot10^{8}\ \mathrm{m/s}.$$

Sprawdzono również, że prędkość światła w próżni c jest dla wszystkich układów inercyjnych taka sama, tj. nie zależy od stanu ruchu bezwładnego lub spoczynku zarówno źródła światła jak i odbiornika. Innymi słowy, na podstawie doświadczeń można sądzić, że kulista powierzchnia falowa światła wysyłanego przez źródło punktowe w układzie inercyjnym jest również powierzchnią kulistą dla obserwatora umieszczonego w każdym innym układzie inercyjnym.

5.2. Efekt Dopplera

Częstość promieniowania, podobnie jak fali, np.głosowej, nie jest niezmiennikiem w stosunku do ruchu układu współrzędnych i od niego zależy. Efekt Dopplera polega na zależności częstości fali od prędkości źródła fali lub odbiornika. W obu przypadkach otrzymuje się trochę inne wzory na zmianę częstości. Zaczniemy od rozważenia źródła fali dźwiękowej, poruszającego się w ośrodku (gaz).



Rys. 5-2

W początku układu współrzędnych T znajduje się źródło dźwięku Z. Układ T porusza się w stronę układu R z prędkością v. Sam układ R, w którym spoczywa odbiornik, jest nieruchomy (rys. 5-2).

Prędkość fali V jest stała i nie zależy od ruchu układu T, lecz od mechanicznych własności ośrodka, zatem

$$\lambda_R \cdot \nu_R = V.$$

Nadajnik wysłał w kierunku +y ciąg N fal (tj. ciąg $N\lambda_T$) w ciągu czasu t.

W ciągu tego czasu pierwsza fala przebiegnie drogę V·t, ostatnia fala właśnie opuści nadajnik, zaś samo źródło Z przebiegnie drogę v·t. Odległość między początkiem i końcem ciągu wyniesie Vt - vt = = (V - v)t i na tej drodze znajdzie się N fal, zatem:

$$\lambda_R = \frac{(V - v)t}{N}, \quad \text{oraz } \nu_R = \frac{V}{\lambda_R} = \frac{N \cdot V}{(V - v)t}.$$

Jednocześnie dla nadajnika $\nu_T = N/t$. W takim razie

$$\nu_R = \frac{\nu_T}{(1 - \frac{v}{V})}. \tag{5.3}$$

Jeśli T zbliża się do R, to $v > 0$ i $\nu_R > \nu_T$, tj. częstość zbliżającego się źródła odbieramy jako wyższą. Gdy T natomiast oddala się od R wówczas, $v < 0$ i częstość oddalającego się źródła odbieramy jako niższą.

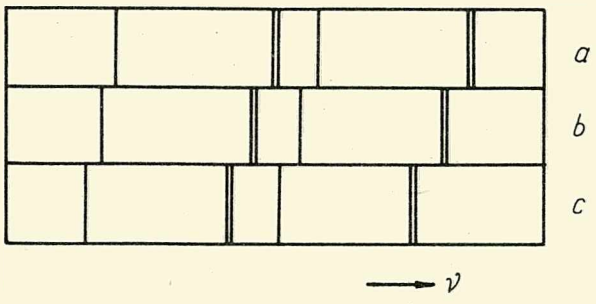
Jeśli źródło pozostaje nieruchome, a porusza się odbiornik (układ R), to

$$\nu_R = \nu_T(1 + \frac{v}{V}) \tag{5.4}$$

z tą samą konwencją znaków odnośnie v. Oba wzory stają się identyczne, jeśli

$$\frac{v}{V} \ll 1.$$

Wzory te są słuszne również dla częstości fal świetlnych, lecz jedynie w pierwszym przybliżeniu. Efekt Dopplera znany jest zarówno w dziedzinie akustyki (zbliżający się pojazd wydaje dźwięk wyższy, niż oddalający), jak i w dziedzinie optyki (linie spektralne obiektów niebieskich przesunięte są względem linii spektralnych tego samego pierwiastka, obserwowanych w warunkach ziemskich).



Rys. 5-3

Rysunek 5-3 przedstawia układ linii spektralnych hipotetycznego pierwiastka, obserwowanych w widmie emisyjnym. Jeśli obserwacja dokonywana jest w warunkach ziemskich, to położenia linii odpowiadają widmu przedstawionemu na rys. 5-3b. Dla obiektu astronomicznego zbliżającego się ($v > 0$) i wysyłającego linie tego samego pierwiastka widmo przesunięte jest w stronę "niebieską" (rys. 5-3a), natomiast oddalającego się ($v < 0$) w stronę "czerwieni" (rys. 5-3c). Przesunięcia zachodzą zgodnie z przybliżonym wyrażeniem:

$$\nu_R \cong \nu_T(1 + \frac{v}{c}),$$

czyli

$$\frac{\Delta\nu_R}{\nu_R} \cong \frac{v/c}{1 + v/c} \cong v/c,$$

dla prędkości obiektu v niezbyt dużych w porównaniu z prędkością c światła w próżni. Dla większych prędkości przesunięcie spektralne definiuje się w następujący sposób:

$$\frac{\nu_R}{\nu_T} = 1 + z,$$

gdzie z jest miarą prędkości v obiektu. Na podstawie pomiarów spektralnych, które należą do grupy najdokładniejszych pomiarów w fizyce znaleziono, iż odległe od nas obiekty gwiezdne (gwiazdy, mgławice) oddalają się z prędkościami wielu setek kilometrów na sekundę i to tym szybciej, im dalej od układu słonecznego się znajdują. Jeśli ich odległość oznaczyć przez r, to zależność tę można wyrazić wzorem

$$v = \alpha \cdot r,$$

przy czym $\alpha_{obs} = 3 \cdot 10^{-18}\ s^{-1}$. Odwrotność tej stałej, $1/\alpha \cong 3 \cdot 10^{17}\ s \cong 10^{10}$ lat, interpretuje się jako "początek" rozpoczęcia ucieczki mgławic, czyli "wiek" Wszechświata, wielkość $c/\alpha \cong 10^{28}$ uważa się natomiast za "promień" Wszechświata.

Interpretacja efektu Dopplera i wyniki uzyskane na tej podstawie w astronomii nie budziły wątpliwości do chwili odkrycia nowych obiektów quasi-gwiezdnych, zwanych kwazarami. Odkrycia takiego dokonano około 10 lat temu. Okazało się, że dla niektórych kwazarów $z = 1$, a nawet więcej, podczas gdy dla "zwykłych" obiektów gwiezdnych $z \leqslant 0{,}25$. Co więcej, udało się znaleźć bardzo nieliczne przypadki pewnego rodzaju "sprzężenia" kwazarów z mgławicą, z którą łączy go ramię obłoku gwiezdnego. Sugeruje to wspólne pochodzenie obiektów, podczas gdy liczby z dla obu bardzo się różnią. Zarówno obserwacja, jak i anomalnie duże wartości przesunięcia spektralnego dla niektórych kwazarów

stanowią trudny problem we współczesnej astronomii; mówi się o pewnym kryzysie, związanym z zastosowaniem efektu Dopplera w tej dziedzinie badań.

5.3. c jako prędkość graniczna

Doświadczalnie można rozstrzygnąć, czy jakiś obiekt o masie spoczynkowej m_0 (np. elektron) może przekroczyć prędkość światła. Cząstki naładowane możemy przyspieszać do bardzo dużych prędkości (energii) za pomocą odpowiednich przyspieszaczy.

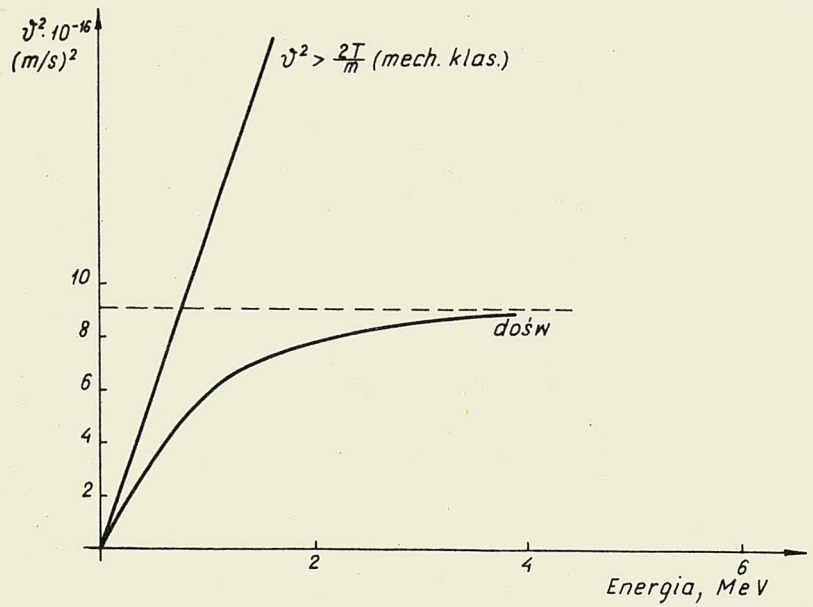
Jeżeli elektron o ładunku e przebiegnie różnicę potencjałów U to wykonana przez pole praca wynosi eU i zostaje zużyta na nadanie elektronowi energii kinetycznej

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = eU.$$

Duże energie mierzy się w megaelektronowoltach (10^6 eV). Według mechaniki klasycznej

$$v^2 = \frac{2T}{m} = \frac{2eU}{m},$$

czyli wykres v^2 w zależności od T (eV) powinien być linią prostą.



Rys. 5-4

Doświadczenie wskazuje (rys. 5-4), że jeżeli eU rośnie nieograniczenie, to v^2 zdąża do stałej wartości równej c^2. c nie może być zatem przekroczone w ruchu elektronu (także i innych cząstek materialnych), stanowi więc prędkość graniczną.

Omówione tu wyniki doświadczalne można streścić w następujących punktach:

1. c jest niezmienne w układach inercyjnych.

2. c jest maksymalną prędkością poruszania się ciała mającego masę spoczynkową oraz maksymalną prędkością rozchodzenia się sygnałów.

3. Zasada względności Galileusza nie jest spełniona dla dużych prędkości, ponieważ pomiary długości i energii kinetycznej muszą spełniać warunek 1.

4. Ponieważ dla dużych prędkości v^2 nie jest proporcjonalne do T więc przypuszczamy, że masa ciała zmienia się wraz z prędkością.

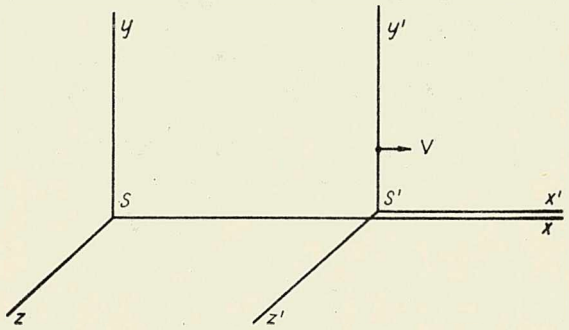
Przesłanki 1-4 bezpośrednio wiążą się z zagadnieniami poruszanymi w szczególnej teorii względności. Jej naczelnym postulatem jest:

Prędkość światła nie zależy od ruchu źródła światła lub odbiornika.

Transformacja Galileusza $x, y, z, t \longrightarrow x', y', z', t'$ nie jest więc słuszna. W zakresie dużych prędkości obowiązuje transformacja Lorentza, którą obecnie się zajmiemy.

5.4. Transformacja Lorentza

Mamy 2 układy odniesienia S i S', oba inercyjne (rys. 5-5).



Rys. 5-5

Niech S' porusza się względem S z prędkością V wzdłuż osi x. Współrzędna x odczytywana jest w układzie S' jako $x' = x - Vt$.

Przypuśćmy, że w układzie S znajduje się punktowe źródło światła, które zaczyna emitować falę w chwili t = 0. Równanie czoła fali będzie równaniem kuli o promieniu r, czyli

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = c^2 t^2. \tag{5.5}$$

Promień kuli wzrasta z prędkością c. Współrzędne w układzie S′ oznaczamy przez x′, y′, z′, t′; dla uproszczenia załóżmy, że początki układów pokrywają się w chwili t′ = 0. Wobec tego dla obserwatora w S′ równanie kulistego czoła fali będzie miało postać

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 = c^2 t'^2, \tag{5.6}$$

przy tym samym c. Na podstawie transformacji Galileusza mamy:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Po podstawieniu

$$x^2 - 2Vxt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

otrzymujemy wzór niezgodny z postulatem (5.5). Z transformacji Galileusza wynika bowiem, że w układzie S′ powinniśmy zaobserwować kulistą powierzchnię falową ze środkiem w punkcie układu S, podczas gdy w rzeczywistości obserwujemy kulistą powierzchnię ze środkiem O′ układu S′.

Szukamy zatem innej transformacji, która musi być liniowa względem x i t (y→y′, z→z′ bez zmian) ponieważ kula w S musi być też kulą w S′. Podstawienie np. $x' = \sqrt{xt}$ lub $x' = \sin x$ nie będzie zatem dobre.

Widać też, że nie da się utrzymać założenia, że t′ = t, jeśli mają zniknąć wyrazy $A(x, t) = -2Vxt + V^2t^2$.

Niech próbną transformacją będzie $x' = x - Vt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t + fx$, gdzie f jest nie znanym czynnikiem. Po podstawieniu

$$x^2 - 2Vxt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + 2c^2tfx + c^2f^2x^2,$$

czyli

$$x^2(1 - c^2f^2) - 2xt\,(V + c^2f) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right).$$

Widać, że zniknie wyraz z xt, jeżeli położymy $V + c^2f = 0$, czyli $f = -V/c^2$, wówczas $c^2f^2 = V^2c^2$ oraz

$$x^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right).$$

Wyrażenie to ma postać zbliżoną do (5.5); będzie z nim identyczne, jeżeli usuniemy czynnik zawarty w nawiasie. W tym celu oznaczymy

$$\frac{V}{c} = \beta \tag{5.7}$$

i zapiszemy transformację w następujący sposób:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{5.8}$$

Znaleźliśmy więc przekształcenie liniowe względem x i t, które nie zmienia postaci wyrażenia (5.5) po przejściu od układu S do S'. Nosi ono nazwę transformacji Lorentza. Zauważmy, że dla $V/c \to 0$ transformacja przechodzi w

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t,$$

tj. w transformację Galileusza.

Jeśli oznaczymy

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma, \tag{5.9}$$

to przekształcenie (5.8) można napisać w postaci standardowej

$$x' = (x - \beta\, ct)\gamma, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = (t - \beta\, x/c)\gamma \tag{5.10}$$

lub w zapisie macierzowym

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta c\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma/c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

Transformacja odwrotna ma postać:

$$x = (x' + \beta\, ct')\gamma, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = (t' + \beta x'/c)\gamma \tag{5.12}$$

lub

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta c\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma/c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

Przedstawimy obecnie dwie ważne konsekwencje, wynikające z przekształcenia Lorentza.

5.4.1. Zmiana długości pręta

Przypuśćmy, że mamy pręt o długości L_o leżący wzdłuż osi x w układzie S. Ponieważ pręt jest w spoczynku możemy więc napisać

$$L_o = x_2 - x_1,$$

gdzie x_1 i x_2 są współrzędnymi początku i końca pręta w S. Ten sam pręt obserwujemy teraz z układu S', który porusza się z prędkością V wzdłuż osi x. Długość pręta widzianą z S' wyznaczają współrzędne $x_2'(t')$ i $x_1'(t')$ w danej chwili t'. Mamy

$$x_2'(t') - x_1'(t') = L \quad \text{w układzie } S'.$$

Ponieważ według (5.12) $x_i = \gamma x_i' + \gamma\beta ct'$, zatem

$$x_2 - x_1 = L_o = \gamma(x_2' - x_1') = \gamma L.$$

Wobec tego

$$L = \frac{L_o}{\gamma} = L_o(1 - \beta^2)^{1/2}. \tag{5.14}$$

Widzimy, że pręt poruszający się wzdłuż swej długości z szybkością V ma długość mniejszą, niż w układzie spoczywającym. Efekt ten nazywa się skróceniem podłużnym Lorentza-Fitzgeralda.

5.4.2. Dylatacja czasu

Dylatacja czasu jest zjawiskiem polegającym na wydłużeniu odstępów czasu mierzonego przez zegar w ruchu. Czas mierzony w układzie, w którym zegar spoczywa, oznaczamy przez τ i nazywamy czasem własnym

$\tau_{(v=0)}$ = czas własny, mierzony w układzie spoczywającym.

Jeżeli zegar spoczywa w początku układu współrzędnych, x = 0, to czasowi τ odpowiada w układzie S' czas t' (5.10):

$$t' = \gamma \cdot \tau = \frac{\tau}{(1 - \beta^2)^{1/2}},$$

zatem

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{\Delta\tau}{(1 - \beta^2)^{1/2}}, \tag{5.15}$$

czyli odstęp czasu mierzony w układzie poruszającym się jest dłuższy od odstępu czasu w układzie S.

Potwierdzeniem wniosku co do dylatacji czasu w układzie poruszającym się, są obserwacje własności mezonów π^+. Mezon π^+ jest cząstką elementarną o ładunku dodatnim i o masie $\sim 273\, m_e$, gdzie m_e jest masą elektronu. Jest przy tym nietrwały, a czas życia własny

$$\Delta\tau = 2{,}5\cdot10^{-8}\ \text{s};\quad \beta \cong 0{,}90$$

tzn. mezon π^+ porusza się z szybkością wynoszącą 90% c.

Gdyby posługiwać się pojęciem czasu własnego $\Delta\tau$, wówczas droga przebyta przez mezon przed rozpadnięciem wynosiłaby

$$l = \beta c(\Delta\tau) = 0{,}90\cdot3\cdot10^{8}\cdot2{,}5\cdot10^{-8} \cong 6{,}8\ \text{m},$$

tymczasem w układzie S', związanym z mezonem i poruszającym się z nim z prędkością βc odstęp czasu upływający przez rozpadnięciem się wynosi

$$\Delta t' = \frac{\Delta\tau}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \frac{2{,}5\cdot10^{-8}}{(0{,}19)^{1/2}} = 5{,}7\cdot10^{-8}\ \text{s},$$

a rzeczywista droga przebyta przezeń wynosi:

$$l' = 0{,}90\cdot3\cdot10^{8}\cdot5{,}7\cdot10^{-8}\ \text{m} = 15{,}5\ \text{m}$$

i jest ponad dwa razy większa od wyniku nierelatywistycznego. Ten wniosek został w pełni potwierdzony doświadczalnie.

5.4.3. Pęd ciała materialnego

Za ciało (cząstkę) materialne będziemy uważać takie ciało, które posiada masę w stanie spoczynku; oznaczymy ją przez m_0.

Można udowodnić, że jeśli przyjmiemy definicję pędu w postaci

$$p = m_0 v$$

to zasada zachowania pędu napisana w układzie S nie jest spełniona w układzie S', zatem definicja ta nie jest niezmiennicza względem transformacji Lorentza. Należy poszukać nowej definicji pędu. Aby uniezależnić się od względnego ruchu obu układów (wzdłuż osi x), rozważmy składową pędu (prędkości) wzdłuż osi y:

$$\frac{\Delta y}{\Delta\tau}.$$

Prędkość "widziana" w układzie S jest ilorazem odcinka drogi Δy, tego samego co i w S' oraz czasu własnego $\Delta\tau$. W układzie S' czas ten będzie inny. Mamy

$$\frac{\Delta y}{\Delta\tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t'}\cdot\frac{\Delta t'}{\Delta\tau} = v_y\cdot\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}},$$

przeto pędem relatywistycznym będzie

$$p = \frac{m_0 v}{(1-\beta^2)^{1/2}} = m_0\, c\beta\gamma. \qquad (5.16)$$

Pęd zapisany w postaci relatywistycznej zachowany jest we wszelkich zderzeniach, co potwierdzono doświadczalnie.

Możemy to wyrażenie interpretować i w ten sposób, że masa w ruchu

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m_o \gamma \tag{5.17}$$

jest większa, niż w stanie spoczynku. W definicji pędu

$$p = m \cdot v \tag{5.18}$$

m oznacza wtedy masę relatywistyczną.

5.4.4. Energia relatywistyczna

Pęd relatywistyczny ma postać

$$p = m_o c \beta \gamma$$

zatem $p^2 = m_o^2 c^2 \beta^2 \gamma^2$ jest niezmiennikiem względem transformacji Lorentza.

Spełnione są ponadto następujące tożsamości:

$$1 = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2$$

$$m_o^2 c^4 = m_o^2 c^4 (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) = m_o^2 c^4 \gamma^2 - m_o^2 c^4 \beta^2 \gamma^2 = m_o^2 c^4 \gamma^2 - p^2 c^2.$$

Każda ze stron powyższych równości jest także niezmiennikiem względem transformacji Lorentza. Rozważmy własności członu

$$m_o c^2 \gamma = \frac{m_o c^2}{(1 - \beta^2)^{1/2}} .$$

W tym celu wyrażenie

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} = f(\beta)$$

należy rozwinąć w szereg:

$$f(\beta) = f(0) + f'(0) \frac{\beta}{1!} + f''(0) \frac{\beta^2}{2!} + \ldots,$$

przy czym $\beta << 1$. Po obliczeniu kolejnych pochodnych w punkcie zero otrzymujemy:

$$f(\beta) = 1 + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + \ldots,$$

$$m_o c^2 \gamma = m_o c^2 + \frac{1}{2} m_o v^2 + \frac{9}{24} m_o \frac{v^4}{c^2} + \ldots . \tag{5.19}$$

Drugi człon rozwinięcia (5.19) jest dobrze znanym wyrażeniem określającym energię kinetyczną masy spoczynkowej, poruszającej się z prędkością v. Człon trzeci i następne możemy interpretować jako człony energii kinetycznej "wyższych rzędów"; mają one znaczenie wówczas, gdy wartości β są duże. Człon pierwszy nie znika gdy $v = 0$, zatem jest energią E_0, równoważną masie spoczynkowej. Każde z wyrażeń:

$$E = m c^2 = m_0 c^2 \gamma \tag{5.20}$$

przedstawia całkowitą energię relatywistyczną masy, a wyrażenie

$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - m_0^2 c^4 = m_0^2 c^4 \beta^2 \gamma^2,$$

czyli

$$E^2 - (m_0 c^2)^2 = p^2 c^2 \tag{5.21}$$

określa energię ruchu.

Całkowita energia relatywstyczna masy $E = mc^2$ składa się więc z energii równoważnej masie spoczynkowej $E = m_0 c^2$ oraz energii ruchu $p \cdot c$. Teoretyczna możliwość przemiany masy spoczynkowej na energię była według Einsteina najważniejszym wynikiem jego teorii. Istnieje ścisły związek między zmianą masy i związaną z tym produkcją energii:

$$\Delta E = \Delta m c^2. \tag{5.22}$$

Świadczy to o tym, że w procesach, w których uwalnia się energia, klasyczne prawo zachowania masy nie jest ściśle spełnione. Naruszenie tego prawa nie dotyczy jednak zwykłych reakcji chemicznych, w których "defekt masy", związany z wydzielaniem się ciepła podczas reakcji nie może być sprawdzony pomiarami. Mamy bowiem:

$$\Delta E \cong \frac{100 \text{ kcal}}{0{,}24 \text{ kcal/kJ}} / 1 \text{ mol} = \frac{100}{0{,}24} \text{ kJ/mol} \cong 418 \text{ kJ/mol},$$

$$\Delta m = \frac{418 \text{ kJ/mol}}{9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}} = 4{,}65 \cdot 10^{-12} \text{ kg/1 mol} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ g/1 mol},$$

co jest poza zasięgiem pomiarowym. Podczas syntezy jądra atomowego natomiast z nukleonów wydzielają się ogromne ilości energii i w takich przypadkach związek Einsteina znajduje pełne potwierdzenie.

Z równania (5.21) wynika ważny i interesujący wniosek. Jeśli przyjmiemy, że dla pewnej cząstki $m_0 = 0$, to

$$E = pc. \tag{5.23}$$

Dla takiej cząstki, pozbawionej masy spoczynkowej, mamy:

$$p = m \cdot v = \frac{E}{c^2} \cdot v,$$

gdzie m jest masą relatywistyczną.

Wobec tego

$$E = pc = \frac{E \cdot v}{c},$$

czyli

$$v = c,$$

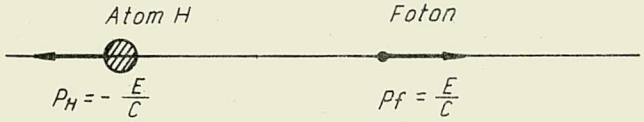
a więc cząstka o masie spoczynkowej równej zeru musi poruszać się z prędkością światła. Jest to ogólna cecha takich cząstek; należy do nich m.in. foton promieniowania monochromatycznego o energii

$$E = h \cdot \nu,$$

gdzie h jest stałą Plancka. Fotonowi o energii E odpowiada pęd:

$$p_f = \frac{E_f}{c}. \qquad (5.24)$$

W celu zilustrowania wyników teorii względności odnośnie do pędu i energii fotonu przytoczymy jeszcze następujące rozważanie.



Rys. 5-6

Przypuśćmy, że atom wodoru o masie m_H emituje kwant promieniowania $h\nu$, któremu odpowiada pęd E/c. Podczas emisji następuje odrzut atomu, który uzyskuje pęd $-E/c$ tak, by środek masy mógł zostać w spoczynku (rys. 5-6).

Dla prędkości środka masy otrzymujemy zatem:

$$\dot{R} = \frac{m_H \cdot \dot{r}_H + m_\gamma \cdot c}{m_H + m_\gamma} = 0,$$

czyli

$$-\frac{E}{c} + m_\gamma c = 0.$$

Widzimy, że $m_\gamma c^2 = E$ jest istotnie energią fotonu, zgodnie z wzorem (5.20).

6. POLE POTENCJALNE

6.1. Pojęcie pola

Przez pojęcie pola rozumiemy przestrzeń, otaczającą pewne obiekty fizyczne (masa, ładunek elektryczny, przewodnik z prądem) o takich własnościach, że w każdym punkcie pola określona jest siła działająca na analogiczny obiekt (odpowiednio masę, ładunek, przewodnik z prądem) tam umieszczony. W tym rozdziale będziemy się zajmować głównie polem elektrycznym; ma ono własności fizyczne analogiczne do pola grawitacyjnego, którego niektóre cechy poznaliśmy w rozdziale 2. W szczególności siła, działająca w próżni między dwoma ładunkami punktowymi jest określona przez prawo Coulomba, które zapisane w układzie jednostek SI przybiera postać

$$\underline{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q_1 q_2}{r^3} \underline{r}, \tag{6.1}$$

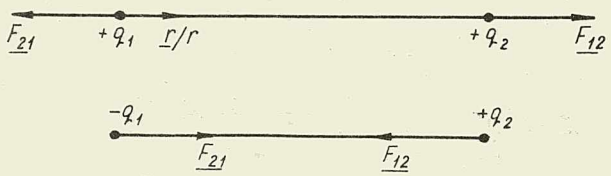
przy czym jednostkowy wektor $\underline{r}/r$, jest skierowany umownie od ładunku q_1 do q_2. Siła odpychania, działająca na q_2 ma wówczas ten sam zwrot, co $\underline{r}/r$, natomiast siła działająca na q_1 ma zwrot przeciwny do $\underline{r}/r$; obie skierowane są na zewnątrz odcinka łączącego q_1 i q_2. Siły przyciągania leżą wewnątrz odcinka $q_1 q_2$ (rys. 6-1). Liczbowa wartość stałego współczynnika wynosi:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cong 9{,}0 \cdot 10^9,$$

Prawo Coulomba ma postać analogiczną do prawa grawitacji Newtona

$$\underline{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \underline{r}$$

Obie siły są odwrotnie proporcjonalne do r^2, tzn. do kwadratu odległości oddziałujących ze sobą obiektów punktowych. Zasadnicze różnice są następujące:



Rys. 6-1

i. Stała grawitacji

$$G = 6{,}670 \cdot 10^{-11},$$

jest o 20 rzędów mniejsza, od stałej w prawie Coulomba, dlatego siły grawitacji należą do najsłabszych ze znanych oddziaływań.

ii. Ładunki elektryczne mogą być dodatnie lub ujemne, w związku z czym siły działające między nimi polegają na przyciąganiu (-) lub odpychaniu (+). Siły grawitacyjne są zawsze siłami przyciągania (-).

Pole jest potencjalne, jeśli w każdym jego punkcie określony jest potencjał lub równoważna mu energia potencjalna; obie wielkości są związane z pracą przemieszczania w polu obiektu fizycznego, tzn. masy lub ładunku elektrycznego (por. rozdział 2).

W dalszym ciągu będziemy uważać, że pole wytwarzane jest przez ładunek q, natomiast dodatni ładunek $+q_o$ traktujemy jako próbny, wykazujący istnienie siły $\underline{F}(xyz)$ po umieszczeniu go w punkcie xyz. Natężeniem pola $\underline{E}$ (xyz) w punkcie xyz nazywamy stosunek siły działającej na ładunek próbny $+q_o$, umieszczony w tym punkcie, do wielkości tego ładunku:

$$\underline{E}(xyz) = \frac{\underline{F}(xyz)}{+q_o}, \tag{6.2}$$

Wektor $\underline{E}$ jest określony w każdym punkcie jednoznacznie i stanowi jedną z podstawowych własności pola elektrycznego.

6.1.1. Natężenie pola wytwarzane przez ładunki punktowe

Niech ładunkiem wytwarzającym pole będzie q, zaś próbnym $+q_o$. Ze względu na działającą między nimi siłę (6.1), natężenie pola w odległości $\underline{r}$ od q będzie wynosiło

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{\underline{F}(r)}{+q_o} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{r^3}\,\underline{r}. \tag{6.3}$$

Widzimy, że natężenie pola, podobnie jak siła, maleje odwrotnie proporcjonalnie do r^2. Poza tym dla wszystkich kierunków $\underline{r}/r$ jest ono liczbowo takie samo; powiadamy, że pole ładunku punktowego jest izotropowe.

W ośrodku materialnym zarówno siła, jak i natężenie pola elektrycznego jest mniejsze, niż w próżni. Jeśli ε oznacza względną przenikalność dielektryczną ośrodka (definicja podana jest w 7.1), to

$$\underline{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\,\varepsilon_o} \frac{q_1 q_2}{r^3}\,\underline{r} \tag{6.4}$$

oraz

$$\underline{E} = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon\varepsilon_o} \frac{q}{r^3}\,\underline{r}. \tag{6.5}$$

Pola tego typu w przybliżeniu wytwarzają jony gazowe lub w roztworze.

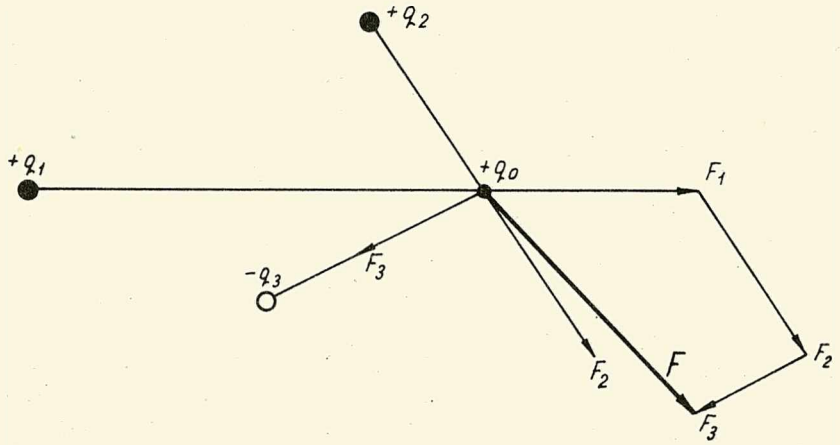
Jeśli pole jest wytwarzane przez zbiór ładunków $q_1, q_2, \ldots, q_m$, to na ładunek próbny $+q_o$ działają siły $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2, \ldots$ $\underline{F}_m$ (rys. 6-2). W celu otrzymania $\underline{E}$ należy je dodać zgodnie z zasadami dodawania wektorów:

$$\underline{F} = \sum_{m=1}^{K} \underline{F}_m = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o} \sum \frac{q_m q_o}{r_{mo}^3} \underline{r}_{mo} = \frac{q_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o} \sum_m \frac{q_m}{r_{mo}^3} \underline{r}_{mo},$$

czyli

$$\underline{E} = \sum_m \underline{E}_m. \qquad (6.6)$$

Wypadkowe natężenie pola jest więc sumą wektorową natężeń wytwarzanych przez poszczególne ładunki punktowe.



Rys. 6-2

6.1.2. Natężenie pola wytwarzane przez dipol

Według definicji formalnej dipolem nazywamy sztywny układ dwóch ładunków równych sobie, lecz o znakach przeciwnych. Jeśli $\underline{l}$ jest wektorem, skierowanym umownie od $-q$ do $+q$, to wielkość

$$\underline{p} = \underline{l} \cdot q, \quad C \cdot m \qquad (6.7)$$

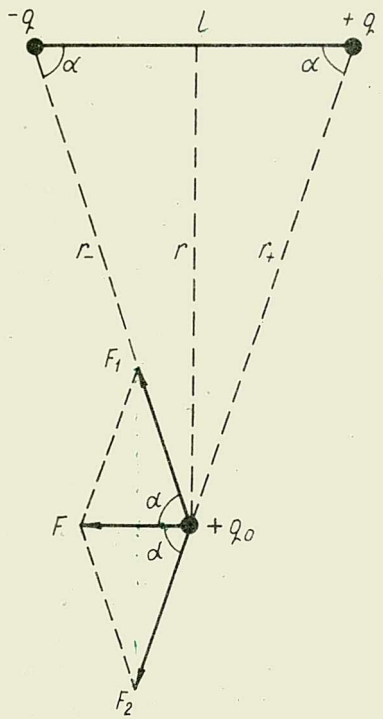
jest zwana momentem dipolowym dipola. W obrazie molekularnym za dipol uważa się cząsteczkę, w której geometryczny "środek ciężkości" ładunków dodatnich nie pokrywa się ze "środkiem ciężkości" ładunków ujemnych. Jeśli mamy na myśli cząsteczkę swobodną, to cząsteczki nie wszystkich związków chemicznych mają tzw. trwały moment dipolowy. Na przykład cząsteczka dwutlenku węgla, O = C = O jest liniowa i posiada centrum symetrii. Rozkład ładunku też musi posiadać centrum symetrii, co powoduje, że $p = 0$. Cząsteczka wody natomiast nie jest liniowa; symetria jej jest niższa i dopuszcza $p \neq 0$ w stanie swobodnym.

Podane dotąd definicje dipola i momentu dipolowego należy rozumieć jako przybliżone, ułatwiające zrozumienie pojęć pod względem jakościowym. Jest bowiem rzeczą jasną, że dipole odpowiadające (6.7), tj. złożone z dwóch ładunków punktowych, są w przyrodzie niezwykle rzadkimi przypadkami. Z reguły mamy w cząsteczkach do czynienia z rozkładem pewnej liczby elektronów wokół jąder o ładunku dodatnim. Dipol rzeczywisty składa się zatem w gruncie rzeczy z dużej liczby ładunków. Dokładną definicję momentu dipolowego podamy w paragrafie 6.3.2, gdzie omówiono potencjał, wytwarzany przez zbiór ładunków.

We wszystkich cząsteczkach dochodzi do przesunięcia ładunku w obecności pola elektrycznego. Ponieważ ładunki dodatnie (jądra) przesuwają się w stronę przeciwną niż ujemne (elektrony), pojawia się więc indukowany moment dipolowy o wartości proporcjonalnej do natężenia pola

$$\underline{p}_{ind} = \alpha \underline{E}. \qquad (6.8)$$

Współczynnik proporcjonalności nosi nazwę polaryzowalności cząsteczki i jest miarą jej zdolności do "odkształcania się" pod wpływem pola elektrycznego. Jak zobaczymy później α jest tensorem, ponieważ nie we wszystkich kierunkach cząsteczka jest jednakowo podatna na polaryzujące działanie pola.



Rys. 6-3

Jednostką momentu dipolowego w układzie SI jest 1 C·m; dla układów molekularnych często używa się jednostki zwanej debajem (D), zdefiniowanej w następujący sposób: jeżeli ładunek 1 elektronu przesuniemy względem takiego samego dodatniego ładunku na odległość 1 Å = 10^{-10} m, to wytworzonemu w ten sposób momentowi dipolowemu odpowiada 4,803 D, tj.

$$1\ e \cdot Å = 4{,}803\ D;$$

wobec tego przesunięcie ujemnego ładunku 1 kulomba, odpowiadającego

$$\frac{N_o}{F} = \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}}{96\ 487}$$

elektronom, względem takiego samego dodatniego na odległość 1 m, wytwarza moment dipolowy o wielkości

$$1\ C \cdot m = 3{,}00 \cdot 10^{19}\ D.$$

Rozważmy obecnie siły działające ze strony dipola na ładunek próbny $+q_0$, umieszczony symetrycznie w dużej odległości od niego, tak że $r_- = r_+ \cong r \gg l$ (rys. 6-3). Siła wypadkowa, działająca na q_0 wynosi

$$F = F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\alpha = 2\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_0 q}{r_+^2} \cdot \frac{l/2}{r_+} \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q_0\, \frac{p}{r^3},$$

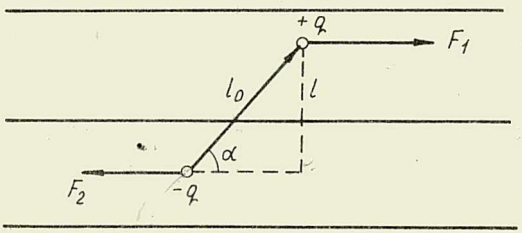
zatem

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{p}{r^3}. \qquad (6.9)$$

Wyrażenie (6.9) jest szczególnym przypadkiem ogólniejszej sytuacji, odpowiadającej dowolnej orientacji dipola. Pokażemy w rozdziale (6.4), jak można uogólnić (6.9) korzystając z potencjału dowolnego rozkładu ładunków. Na podstawie uzyskanego tu wyniku widzimy, że natężenie pola dipola maleje jak r^3, wraz ze wzrostem r.

6.1.3. Siły działające na dipol w polu jednorodnym

Pole jest jednorodne, jeżeli siła działająca na ładunek $+q_0$ ma ten sam kierunek, zwrot i wartość niezależnie od tego, w jakim punkcie



Rys. 6-4

pola umieścimy $+q_0$. Rysunek 6-4 przedstawia sytuację dipola w polu jednorodnym; siły F_1 i F_2 tworzą w takim polu parę sił o momencie M

$$M = F_1 \cdot l = F_1 l_0 \sin\alpha = q\, E l_0 \sin\alpha = p\, E \sin\alpha.$$

W zapisie wektorowym

$$\underline{M} = \underline{p} \times \underline{E} \qquad (6.10)$$

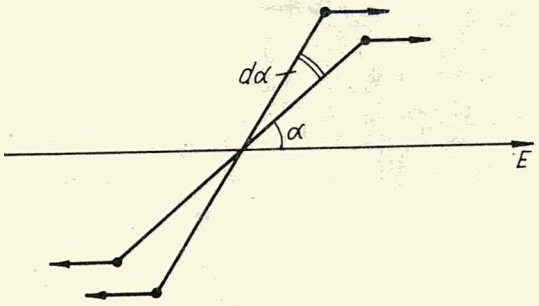
widać, że moment jest prostopadły do $\underline{p}$, $\underline{E}$, a jego zwrot określa reguła śruby prawej. $\underline{M}$ stara się ustawić $\underline{p}$ na kierunek $\underline{E}$, tj.

$$\underline{p} \parallel \underline{E} \supset \underline{M} = 0.$$

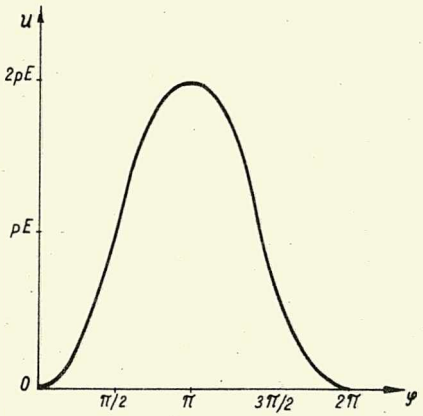
6.1.4. Energia potencjalna dipola

Praca dL obrotu dipola o kąt $d\alpha$ w stronę oddalającą kierunek $\underline{p}$ od $\underline{E}$ (rys. 6-5) powoduje powiększenie energii potencjalnej dipola o dU:

$$dL = dU = M \cdot d\alpha = pE \sin\alpha \, d\alpha ,$$



Rys. 6-5



Rys. 6-6

wobec tego

$$U = \int_0^{\varphi} pE \sin\alpha \, d\alpha =$$

$$= p E (1 - \cos\varphi). \qquad (6.11)$$

Wykres (6.11) jest przedstawiony na rys. 6-6. Największą energię potencjalną ma dipol ustawiony antyrównolegle względem E.

6.1.5. Siły działające na dipol w polu niejednorodnym

Przykładem pola niejednorodnego jest wytworzone przez ładunek punktowy (rys. 6-7): w tym przypadku $\underline{F}_1 \neq \underline{F}_2$. Ponieważ rozmiary dipoli molekularnych są bardzo małe, możemy więc dla nich przyjąć $\underline{F}_1 \parallel \underline{F}_2$, natomiast $|F_1| \neq |F_2|$. Obie siły możemy wówczas rozłożyć na parę sił, wywierającą znany już moment obrotowy (6.10) oraz siłę wypadkową, powodującą przesuwanie dipola. Ponieważ

$$F_1 = -q \cdot E_1, \qquad F_2 = +q \cdot E_2,$$

zatem siłą wypadkową jest

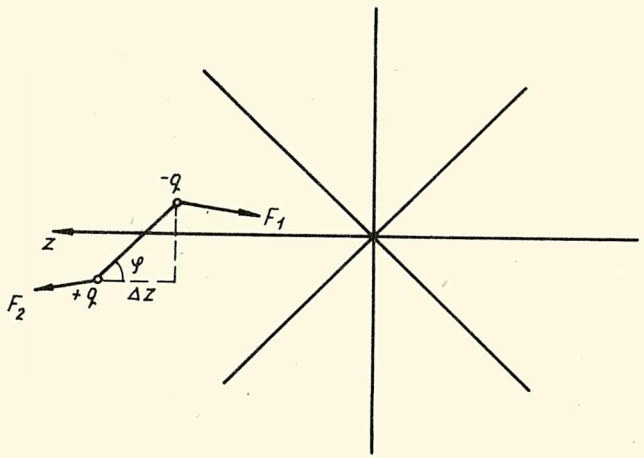
$$F = F_1 + F_2 = -q(E_1 - E_2) = -q \frac{\Delta E}{\Delta Z} \Delta Z,$$

czyli

$$F = -p \frac{dE}{dZ} \cos \varphi , \qquad (6.12)$$

gdzie φ jest kątem między $\underline{p}$ i $\underline{E}$, dE/dZ jest spadkiem natężenia pola w kierunku osi z i jest miarą jego niejednorodności w tym kierunku.

Na dipol działa więc siła zależna od niejednorodności pola; jej kierunek zależy od aktualnej orientacji dipola, ale najbardziej prawdopodobnym efektem jest wciąganie dipola w obszar o większym natężeniu.

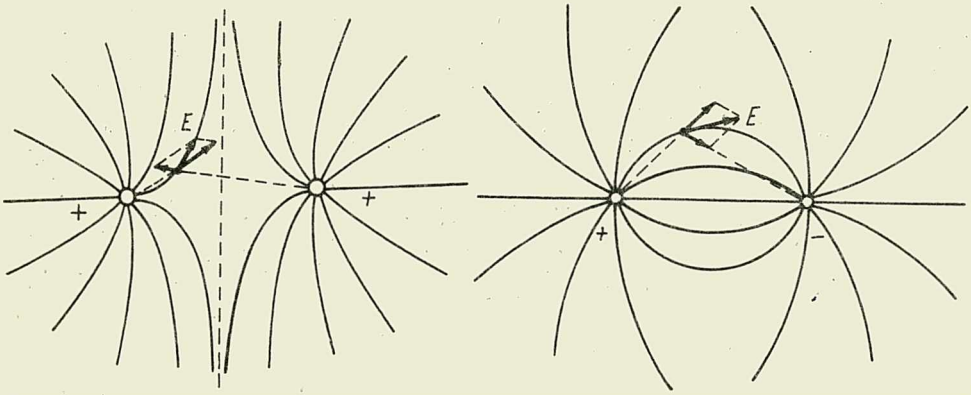


Rys. 6-7

6.2. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego

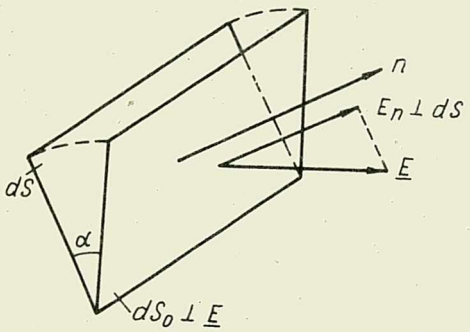
Wiele własności pola (nie tylko elektrycznego) możemy opisać za pomocą pojęcia linii pola. Linią pola elektrycznego nazywamy krzywą, po której porusza się ładunek dodatni pozbawiony bezwładności. Chodzi o to, by nie występowały siły wynikające z ruchu krzywoliniowego, które powodowałyby odstępstwa aktualnej trajektorii ładunku od linii pola. Równie dobrze moglibyśmy założyć, że ładunek o masie m porusza

się w ośrodku jednorodnym o dużej lepkości. Ruch zachodzi wtedy z bardzo małą prędkością, a przyspieszenia można zaniedbać.



Rys. 6-8

Zgodnie z tą definicją wektor natężenia pola elektrycznego $\underline{E}$ jest styczny do linii w każdym jej punkcie (rys. 6-8); ponieważ wektor $\underline{E}$ jest jednoznacznie określony w każdym punkcie pola, więc linie nie mogą się przecinać. Według umowy wychodzą z ładunków dodatnich, a wchodzą do ujemnych. Na podstawie tych własności możemy narysować układ linii pola, np. dla dwóch ładunków jedno- lub różnoimiennych (rys.6-8). W polu jednorodnym linie pola są do siebie równoległe.



Rys. 6-9

Określimy obecnie gęstość linii pola elektrycznego. Przyjmiemy, że na każdy metr kwadratowy powierzchni ustawionej prostopadle do $\underline{E}$ przypada ich tyle, ile wynosi liczbowa wartość $\underline{E}$ w danym miejscu pola. Jeśli zatem mamy płaski element powierzchni $dS_0 \perp \underline{E}$ (rys. 6-9), to zgodnie z tą definicją

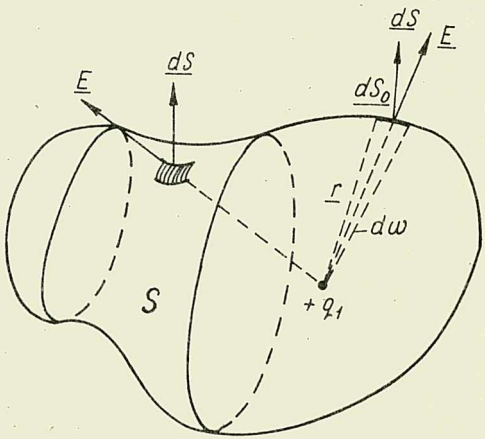
$$\frac{dN_0}{dS_0} \equiv |\underline{E}|. \qquad (6.13)$$

Wielkość $dN_0 = E \cdot dS_0$ nazywamy strumieniem wektora $\underline{E}$ przez element powierzchni dS_0. Ten sam element powierzchni dS, ustawiony pod kątem α względem $\underline{E}$ (rys. 6-9), obejmuje liczbę linii $dN < dN_0$. Mamy wówczas

$$dN = E\,dS \cdot \cos\alpha = E_n \cdot dS \qquad (6.14)$$

gdzie E_n jest rzutem $\underline{E}$ na normalną n do elementu dS. Zatem liczba linii pola, przechodzących przez dowolnie zorientowany element powierzchni dS, jest proporcjonalna do składowej wektora $\underline{E}$ normalnej do tego elementu.

Wyobraźmy sobie teraz powierzchnię zamkniętą S o dowolnym kształcie, obejmującą pewną liczbę ładunków $q_1, q_2 \ldots$ (rys. 6-10). Możemy ją podzielić na w przybliżeniu płaskie elementy powierzchni dS, przy czym każdemu elementowi można przypisać wektor $\underline{dS}$, skierowany na zewnątrz S i o wielkości $|dS| = dS$, tj.równej powierzchni elementu. Strumień wektora $\underline{E}$, przechodzący przez dS, wyraża się wówczas w następujący sposób



Rys. 6-10

$$dN = E_n\,dS = E\cos\alpha\,dS = \underline{E}\cdot\underline{dS}. \qquad (6.15)$$

Jeśli w obrębie S mamy tylko 1 ładunek q_1, to całkowity strumień N_E przez powierzchnię zamkniętą S wynosi

$$N_E = \int_{(S)} \underline{E}\,\underline{dS} = \int_{(S)} \underline{E}\,\underline{dS_o} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{(S)} \frac{dS_o}{r^2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{o}^{4\pi} d\omega = \frac{q_1}{\varepsilon_o},$$

przy czym r jest odległością od q_1 elementu dS_o, normalnego do $\underline{E}$, zaś $d\omega = dS_o/r^2$ jest elementem kąta bryłowego, odpowiadającego dS_o (rys. 6-10). Całka jest rozciągnięta na całą powierzchnię S. Analogicznie przedstawiają się udziały ładunków $q_2, \ldots, q_k$, tak że w rezultacie otrzymamy

$$N_E = \int_{(S)} \underline{E}\cdot\underline{dS} = \sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\varepsilon_o}. \qquad (6.16)$$

Wyrażenie (6.16) jest twierdzeniem Gaussa-Ostrogradskiego dla pola elektrostatycznego w próżni: całkowity strumień wektora $\underline{E}$, objęty dowolną powierzchnią zamkniętą S jest proporcjonalny do algebraicznej sumy wszystkich ładunków, objętych tą powierzchnią. Należy zwró-

cić uwagę, że ładunki wchodzą w (6.16) wraz ze znakami; jeśli zatem jakaś powierzchnia S obejmuje tyle samo ładunków dodatnich co ujemnych, to $\sum q_j = 0$ oraz $N_E = 0$.

Przedstawimy obecnie kilka przykładów, ilustrujących zastosowanie tego twierdzenia. Aby wywody uczynić ogólniejszymi, wprowadzimy pojęcie gęstości ładunku dla ładunków nie punktowych. I tak, jeśli ładunek zgromadzony jest wewnątrz jakiejś objętości V, to

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \tag{6.17}$$

jest objętościową (lokalną) gęstością ładunku (w C/m^3). Jeśli ładunek zgromadzony jest na jakiejś powierzchni S, to

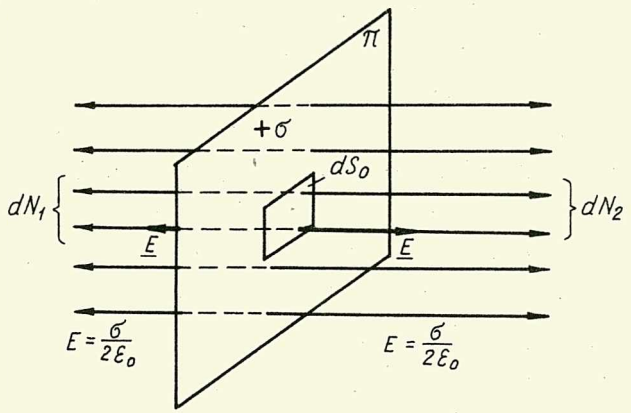
$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \tag{6.18}$$

jest (lokalną) powierzchniową gęstością ładunku, zatem

$$q = \int \rho dV \quad \text{lub} \quad q = \int \sigma dS.$$

6.2.1. Nieskończona płaszczyzna przewodząca

Sytuacja jest przedstawiona na rys. 6-11. Wektor $\underline{E}$ musi być prostopadły do elementu dS_o płaszczyzny π, gdyż inaczej ładunek musiałby płynąć pod działaniem składowej E stycznej do π. Jeśli dN_1 i dN_2 przedstawiają strumienie elementarne $\underline{E}$ po obu stronach π, to



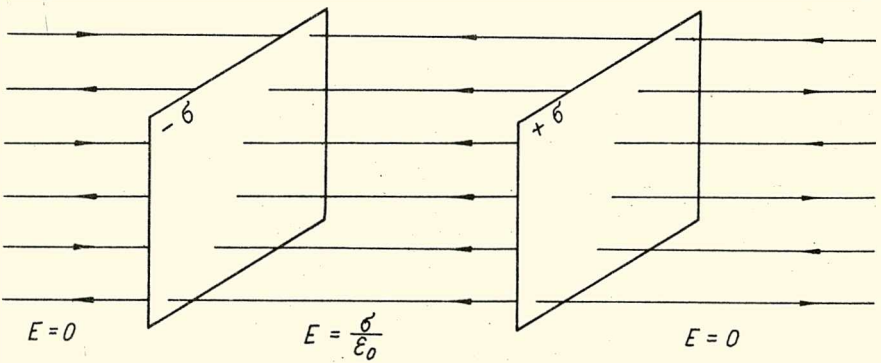
Rys. 6-11

$$dN = dN_1 + dN_2 = 2 E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_o} dq = \frac{1}{\varepsilon_o} \sigma dS,$$

wobec tego

$$E = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,. \qquad (6.19)$$

Po każdej stronie płaszczyzny, naładowanej z jednostajną gęstością ładunku σ, panuje pole elektryczne o natężeniu podanym (6.19).



Rys. 6-12

Łatwo się przekonać, że jeśli mamy dwie nieskończone płaszczyzny, z których jedna jest naładowana gęstością $+\sigma$, a druga $-\sigma$ (rys.6-12), to na zewnątrz nich $E = 0$, zaś między nimi panuje jednorodne pole elektryczne o natężeniu

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,, \qquad (6.20)$$

tj. dwa razy większym od (6.19),

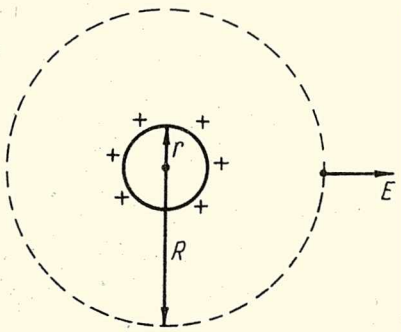
6.2.2. Równomiernie naładowana kula

Niech r będzie promieniem przewodzącej kuli równomiernie naładowanej o gęstości powierzchniowej ładunku $+\sigma$ (rys. 6-13). Ładunek kuli wynosi zatem:

$$q = 4\pi\, r^2 \cdot \sigma\,,$$

Otoczmy teraz współśrodkowo ową kulę drugą, o promieniu R, stanowiącą naszą powierzchnie zamkniętą S. Całkowity strumień $\underline{E}$ przez S wynosi:

$$N_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\, q = \frac{1}{\varepsilon_0}\, 4\pi r^2 \sigma\,,$$

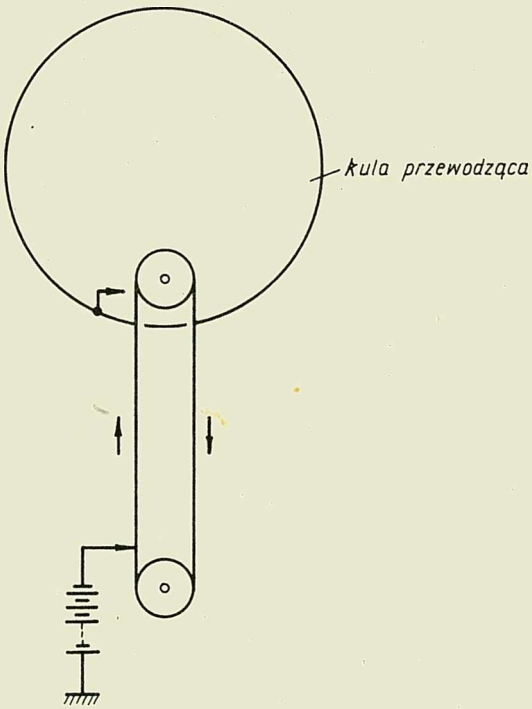


Rys. 6-13

zatem

$$E = \frac{N}{4\pi R^2} = \frac{1}{\varepsilon_o}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \sigma \,. \qquad (6.21)$$

Wzór (6.21) podaje sposób obliczenia natężenia pola naładowanej kuli w odległości (R - r) od jej powierzchni. Jeśli jest ona wydrążona, to w jej wnętrzu ($r' < r$) $q = 0$, zatem $E = 0$. Wobec tego we wnętrzu naładowanej kuli (w ogóle przewodnika) nie ma pola elektrycznego. Fakt ten jest podstawą zastosowania osłon metalowych (puszek, siatek) do ochrony objętych nimi obiektów przed wpływem zewnętrznego po-



Rys. 6-14

la elektrycznego. Służy również za podstawę konstrukcji generatora elektrostatycznego Van de Graaffa, umożliwiającego osiąganie potencjałów do 7 MV (rys. 6-14). Bateria elektryczna, uziemiona z jednej strony, jest połączona z ostrzem metalicznym. Wskutek dużej gęstości ładunku następuje jego wypływ z ostrza, a następnie transport za pomocą pasa transmisyjnego. Wewnątrz kuli przewodzącej jest umieszczone ostrze "zasysające" ładunek (wypływa przez nie ładunek przeciwnego

znaku). Ponieważ we wnętrzu kuli nie może być pola elektrycznego, więc ładunek wypływa na jej powierzchnię. Generatorów tego typu używa się we współczesnych laboratoriach fizyki jądrowej do wytwarzania strumienia cząstek naładowanych o dużych prędkościach, także w laboratoriach wysokich napięć, np. do badania wytrzymałości materiałów na przebicie.

Prawa Coulomba i Gaussa-Ostrogradskiego są sobie równoważne. Łatwo to zobaczyć w następujący sposób: jeśli ładunek $+q_o$ otoczymy powierzchnią kulistą o promieniu R tak, by ładunek znalazł się w jej środku, to całkowity strumień $\underline{E}$ przechodzący przez tę powierzchnię wynosi

$$N_E = \frac{1}{\varepsilon_o} q = \int_{(S)} \underline{E}\, \underline{dS} = E \cdot 4\pi R^2,$$

zatem

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{R^2}.$$

Na ładunek punktowy q_o umieszczony na powierzchni tej kuli działa siła

$$F = q_o \cdot E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q\, q_o}{R^2},$$

co jest właśnie siłą Coulomba. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego w odróżnieniu od prawa Coulomba pozwala w stosunkowo prosty sposób obliczyć natężenie pola elektrycznego dokoła ładunków, w tym także przestrzennie rozciągłych.

6.3. Potencjał

Przesuwanie ładunku $+q_o$ między dwoma punktami pola A i B jest związane z wykonaniem pracy L_{AB}. Jeśli punktowi A przypiszemy potencjał V_A, a punktowi B potencjał V_B, to wykonaną pracę możemy zapisać w następującej postaci:

$$L_{AB} = +q_o (V_B - V_A), \tag{6.22}$$

przy czym 1 J/C = 1 V. Ściśle określona jest w ten sposób różnica potencjałów, nie sam potencjał; jeśli jednak przyjmiemy umowę, że

$$A \longrightarrow \infty \supset V_A \longrightarrow 0, \tag{6.23}$$

czyli, że w nieskończoności potencjał (podobnie jak siła) znika, to

$$V_B = \frac{L_{\infty B}}{+q_o}. \tag{6.24}$$

Tak więc potencjał w danym punkcie pola jest pracą, potrzebną do przeniesienia ładunku dodatniego i jednostkowego z nieskończoności do danego punktu pola.

Jeśli pracę wykonuje siła przyłożona $\underline{F}_p = -q_o\underline{E}$, to mamy ponadto:

$$L_{AB} = \int_A^B \underline{F}_p \, \underline{dl} = -q_o \int_A^B \underline{E} \, \underline{dl} = q_o(V_B - V_A),$$

stąd

$$V_B - V_A = -\int_A^B \underline{E} \, \underline{dl}. \tag{6.25}$$

Równanie (6.25) stanowi bardzo ważny związek między różnicą potencjałów, a natężeniem pola. Ze względu na własności pracy L_{AB}, całka liniowa, występująca po prawej stronie (6.25) nie zależy od drogi całkowania, a jedynie od punktu początkowego (A) i końcowego (B), Wobec umowy (6.23) potencjał dowolnego punktu pola, określonego wektorem $\underline{r}$ (mierzonym względem początku układu współrzędnych) możemy wyrazić przez

$$V(r) = -\int_\infty^r \underline{E} \, \underline{dl}. \tag{6.26}$$

Jeśli pole jest jednorodne, E = const, to (6.25) upraszcza się do znanego wyrażenia

$$E = \frac{V_B - V_A}{l}. \tag{6.27}$$

Stąd właśnie w polu jednorodnym natężenie pola równe jest spadkowi potencjału na jednostkę długości.

6.3.1. Potencjał ładunku punktowego

Ponieważ dla ładunku punktowego +q

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r^2},$$

zatem potencjał takiego ładunku w odległości r od niego wynosi

$$V(r) = -\int_\infty^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r^2} \, dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r}. \tag{6.28}$$

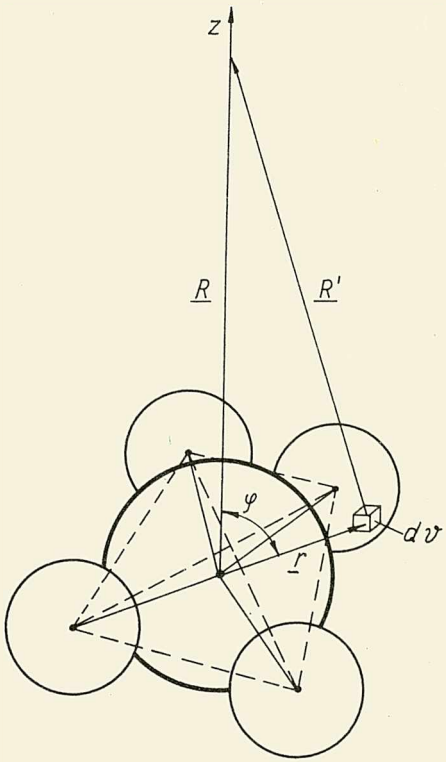
Warto zauważyć, że w tym przypadku potencjał maleje zgodnie z 1/r. Ładunek q w punkcie pola, określonym wektorem $\underline{r}$ ma energię potencjalną równą iloczynowi ładunku i potencjału w tym punkcie:

$$U(r) = q \cdot V(\underline{r}). \tag{6.29}$$

6.3.2. Potencjał rozkładu ładunków
Multipole

Przypuśćmy, że mamy zadany bardziej złożony rozkład ładunków dodatnich i ujemnych, odpowiadający np. cząsteczce metanu (rys. 6-15). Chcemy obliczyć przede wszystkim wytwarzany przez ten rozkład potencjał w punkcie A, dostatecznie odległym w porównaniu do liniowych rozmiarów cząsteczki. Podzielmy w tym celu interesujący nas obszar przestrzeni na elementy objętości dv na tyle małe, by gęstość ładunku $\rho(xyz)$ można było w ich obrębie uważać za stałą. Ładunek zawarty w takim elemencie wynosi $\rho(xyz)\,dv$ (może być dodatni lub ujemny), a wytwarzany przezeń przyczynek do potencjału w punkcie A wynosi

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\rho(x\,y\,z)\,dv\cdot\frac{1}{R'}.$$



Rys. 6-15

Przyczynki różnych elementów dv są addytywne oraz

$$R' = (r^2 + R^2 - 2\,r\,R\cos\varphi)^{1/2},$$

stąd

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\frac{\rho(x\,y\,z)}{(R^2 + r^2 - 2r\,R\cos\varphi)^{1/2}}\,dv. \qquad (6.30)$$

Ponieważ wektor r ma długość nie większą od liniowych rozmiarów cząsteczki, więc $r \ll R$ oraz $r/R = \delta \ll 1$.

Wyrażenie

$$(R^2 + r^2 - 2\,r\,R\cos\varphi)^{-1/2} = \frac{1}{R}\left\{1 + \delta(\delta - 2\cos\varphi)\right\}^{-1/2}$$

możemy rozwinąć w szereg względem

$$\varepsilon = \delta(\delta - 2\cos\varphi).$$

Otrzymujemy

$$(1+\varepsilon)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 - \frac{5}{16}\varepsilon^3 + \dots ,$$

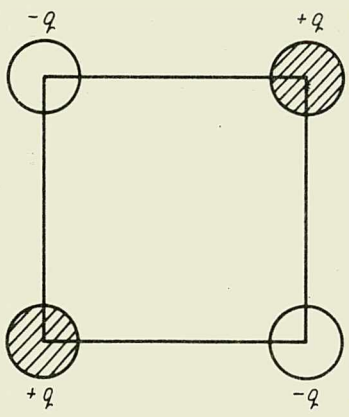
a po dwukrotnym dokonaniu podstawienia i uporządkowania wyrazów względem rosnących potęg r/R

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R}\int \rho\, dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^2}\int \rho\, r\cos\varphi\; dv + \\ + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\int \rho\, r^2 \frac{3\cos^2\varphi - 1}{2}\, dv + \\ + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^4}\int \rho\, r^3 \frac{\cos\varphi\,(5\cos^2\varphi - 3)}{2}\, dv + \dots \qquad (6.31)$$

We wzorze (6.31) R jest stałe i może być wyjęte przed znak całki, natomiast ρ, r i φ są zmienne na obszarze całkowania. Widzimy, iż potencjał w wybranym punkcie A można przedstawić za pomocą szeregu wyrazów, przedstawiających potencjały multipoli, odpowiadające rozkładowi ładunku w cząsteczce. I tak, w pierwszym wyrazie $\int \rho\, dv = q$ jest całkowitym ładunkiem cząsteczki; jest on różny od zera tylko wtedy, gdy cząsteczka jest jonem. Wyraz ten odpowiada wtedy potencjałowi ładunku punktowego. Jeśli $q \neq 0$, to człon ten ma największe znaczenie dla V_A, ponieważ najsłabiej maleje ze wzrostem R.

Całka w drugim wyrazie przedstawia moment dipolowy, a całe wyrażenie jest znanym nam już potencjałem dipola w dużej od niego odległości.

Następne człony, coraz szybciej malejące wraz ze wzrostem R odpowiadają momentowi kwadrupolowemu Q, oktupolowemu, itd.



Rys. 6-16

Przykłady rozkładu ładunków, posiadających moment kwadrupolowy, a nie posiadające ładunku ani momentu dipolowego, są pokazane na rys.6-16. (6.31) stanowi ścisłą definicję momentu multipolowego, ponieważ dipole punktowe, omawiane w 6.1.2, są tworami niezwykle rzadkimi. Najczęściej mamy do czynienia właśnie z przestrzennym rozkładem elektronów i jąder.

Zajmijmy się jeszcze wyrażeniem

$$V_A^{(d)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^2} \int \rho\, r \cos\varphi \, dv \qquad (6.32)$$

przedstawiającym potencjał dipola. Ponieważ $r \cos\varphi = \underline{k}\cdot\underline{r}$ jest rzutem $\underline{r}$ na oś Z (rys. 6-15), przy czym $\underline{k}$ jest wersorem wzdłuż tej osi, możemy więc (6.32) zapisać w postaci

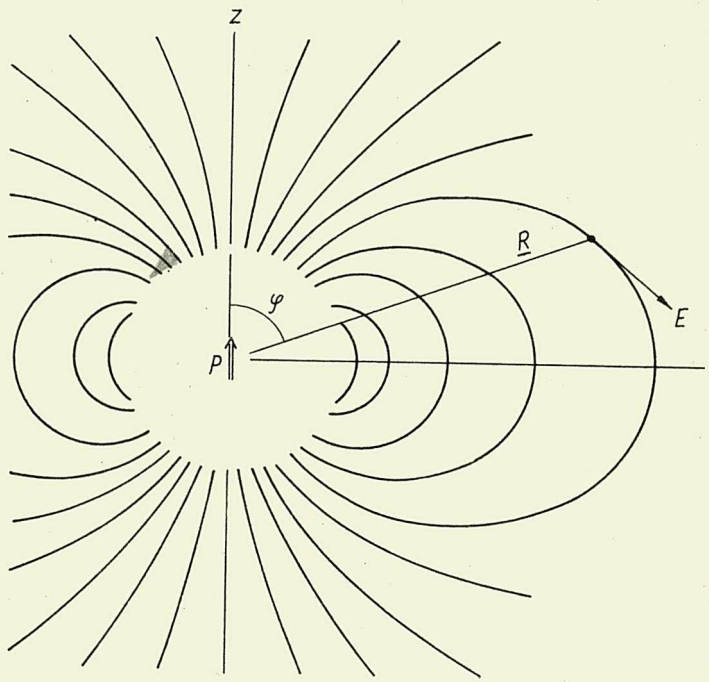
$$V_A^{(d)} = \frac{\underline{k}\cdot\underline{p}}{4\pi\varepsilon_o R^2}, \qquad (6.33)$$

gdzie $\underline{p} = \int \rho\, \underline{r}\, dv$ jest momentem dipolowym. Jeśli umieścimy dipol w środku układu współrzędnych wzdłuż osi Z (rys. 6-17), to

$$V(\underline{R}) = \frac{\underline{p}}{4\pi\varepsilon_o R^2}\cdot\frac{\underline{R}}{R} = \frac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_o R^2}.$$

W tym przypadku

$$\cos\varphi = z/(y^2 + z^2)^{1/2}$$



Rys. 6-17

oraz

$$V(R) = \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + z^2)^{3/2}} .$$

Składowe natężenia pola w płaszczyźnie yz wynoszą według (6.26):

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3\,p\,z\,y}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3\,p\,\sin\varphi\,\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^3} , \qquad (6.34)$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3\,z^2\,(y^2 + z^2)^{1/2} - (y^2 + z^2)^{3/2}}{(y^2 + z^2)^3}\right\} =$$

$$= \frac{p(3\cos^2\varphi - 1)}{4\pi\varepsilon_0 R^3} . \qquad (6.35)$$

Jeśli wybierzemy $\varphi = 90^\circ$, to natężenie pola wyraża się znanym nam już wzorem (6.9), $E = -p/(4\pi\varepsilon_0 R^3)$, ($\underline{E}$ ma kierunek przeciwny do $\underline{p}$).

6.3.3. Krzywa energii potencjalnej

Rozkład potencjału dookoła ładunku punktowego (np. jądra atomu) jest podany we wzorze (6.28). Wobec tego energia potencjalna ładunku $\pm q_0$, w takim polu wynosi

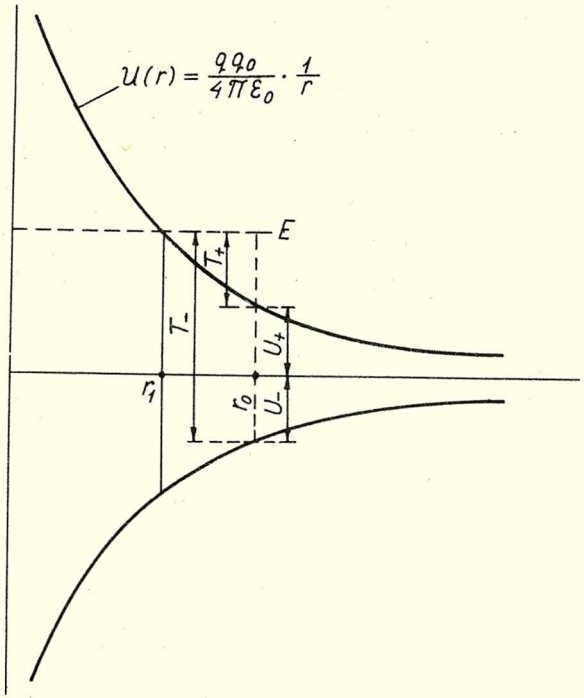
$$U(r) = \pm q_0 \cdot V(r) = \pm \frac{q\,q_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r} \qquad (6.36)$$

i przedstawiona jest na rys. 6-18. Krzywa nad osią odciętych odnosi się do sił odpychania (znak (+) w (6.36)), zaś krzywa pod osią do sił przyciągania (znak (-) w (6.36)). Jeśli oba ładunki znajdują się w odległości r_1 od siebie, to ich całkowita energia E występuje pod postacią energii potencjalnej $U(r_1)$. Konfiguracja trwała takiego układu możliwa jest tylko wtedy, gdy ładunki nie mogą się poruszać. Jeśli mają swobodę ruchu, wówczas część energii E występuje pod postacią energii kinetycznej T, i tak np. dla wzajemnej odległości jednoimiennych ładunków r_0 i całkowitej energii E energia kinetyczna wyniesie

$$T_+ = E - U_+(r_0). \qquad (6.37)$$

W miarę wzrostu r coraz większa część E występuje pod postacią energii kinetycznej kosztem pracy sił Coulomba, działających między q i q_0. Konfiguracja równowagowa obu ładunków nie jest możliwa.

Inaczej sprawa się ma, jeśli między oboma ładunkami działają siły przyciągania. Potrzebna do utrzymania równowagi energia kinetycz-



Rys. 6-18

na T_- jest wówczas większa od T_+, gdyż $U_-(r_0)$ jest ujemna. Równowaga dynamiczna utrzymuje się wówczas dzięki temu, że siła odśrodkowa działająca na q_0, równoważona jest siłą dośrodkową Coulomba:

$$\frac{mv^2}{r_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\, q_0}{r_0^2},$$

mamy wówczas

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q\, q_0}{r_0},$$

$$U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\, q_0}{r_0} = -2T,$$

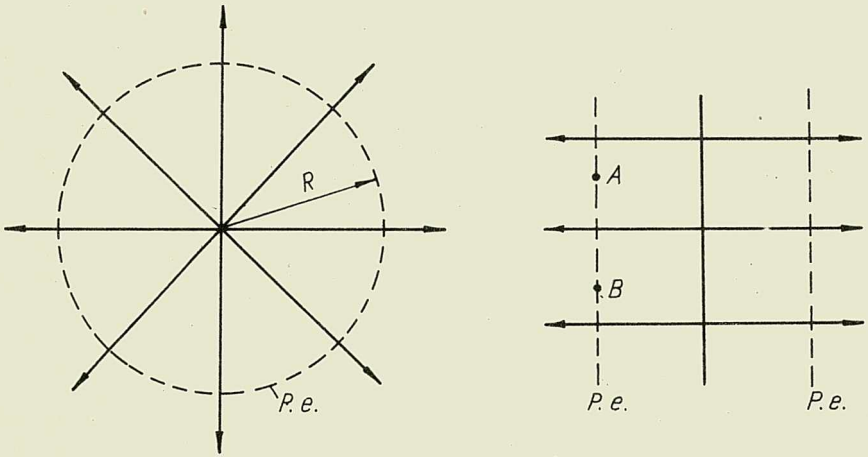
oraz

$$E = U + T = -T. \qquad (6.38)$$

Widzimy, że energia całkowita jest ujemna. Z taką sytuacją spotykamy się np. w teorii atomu wodoru.

6.3.4. Powierzchnia ekwipotencjalna

Powierzchnia ekwipotencjalna jest powierzchnią stałego potencjału, np. dla ładunku punktowego q ma ona kształt kuli o dowolnym promieniu R, zatoczonej wokół q (rys. 6-19), dla płaszczyzny naładowanej stałą gęstością σ jest również płaszczyzną do niej równoległą w dowolnej odległości (rys. 6-19).



Rys. 6-19

Powierzchnia ekwipotencjalna ma następujące własności:

i. Praca przesuwania ładunku q_o po powierzchni ekwipotencjalnej wynosi zero. Jeśli bowiem dwa punkty A i B leżą na takiej powierzchni, to $V_A - V_B = 0$ oraz $L_{AB} = q_o(V_A - V_B) = 0$.

ii. Wektor $\underline{E}$ jest normalny do powierzchni ekwipotencjalnej w każdym punkcie. Mamy bowiem elementarną pracę przesuwania q_o:

$$dL = \underline{F}\,\underline{dl} = -q_o\,\underline{E}\,\underline{dl} = 0, \quad \text{czyli} \quad \underline{E} \perp \underline{dl}.$$

6.4. Pojemność elektryczna

Zgromadzenie ładunku dq na powierzchni jakiegoś przewodnika powoduje, że potencjał tuż w pobliżu jego powierzchni (na samej powierzchni nie jest określony) wzrasta o wielkość proporcjonalną do dq:

$$dq = C \cdot dV. \tag{6.39}$$

Stałą C nazywamy pojemnością przewodnika; jednostką pojemności przewodnika jest farad: 1 F = 1 V/C, np. potencjał kuli o promieniu

r i ładunku q wynosi tuż w pobliżu jej powierzchni $V = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$, zatem jej pojemność $C = 4\pi\varepsilon_0 r$ jest proporcjonalna do promienia. W kondensatorze płaskim natomiast panuje natężenie pola

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

czyli różnica potencjałów wynosi

$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{C},$$

gdzie σ jest powierzchniową gęstością ładunku. Pojemność kondensatora płaskiego zatem

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d} \tag{6.40}$$

jest proporcjonalna do powierzchni jednej z jego okładek, a odwrotnie proporcjonalna do odstępu między okładkami. Ogólnie biorąc pojemność elektrostatyczną możemy przedstawić w postaci

$$C = \varepsilon_0 \cdot G, \tag{6.41}$$

gdzie G jest czynnikiem geometrycznym o wymiarze długości, zależnym od kształtu i rozmieszczenia okładek. Dla kondensatora płaskiego $G = S/d$, natomiast dla cylindrycznego $G = 2\pi l/\ln b/a$, przy czym b oznacza średnicę cylindra zewnętrznego, zaś a wewnętrznego $(b > a)$. Zauważmy, że $b \to a$ odpowiada $C \to \infty$; zatem - formalnie biorąc - przewodnikowi, stanowiącemu zwarty kondensator, odpowiada nieskończenie duża pojemność elektrostatyczna. To ostatnie stwierdzenie odnosi się do wnętrza przewodnika, a nie do jego powierzchni.

Przeniesieniu ładunku +dq z okładki ujemnej na dodatnią towarzyszy wzrost energii potencjalnej kosztem wykonanej pracy. Jeżeli $V_1 - V_2$ jest różnicą potencjałów między okładkami, to energia naładowanego kondensatora wynosi

$$U = \int_0^Q dq\,(V_1 - V_2) = \int \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2. \tag{6.42}$$

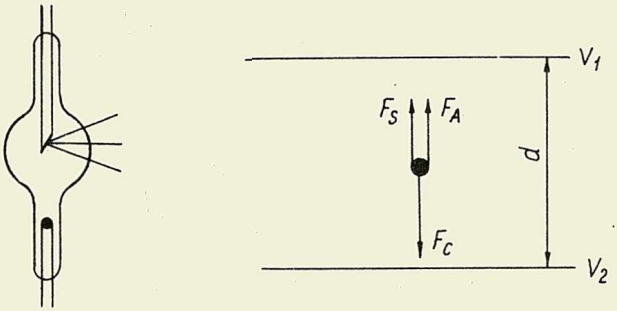
Energia ta jest zgromadzona w objętości $S \cdot d = (1/\varepsilon_0)C \cdot d^2$ tak że gęstość energii w pola elektrostatycznego wynosi

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{C \cdot (V_1 - V_2)^2}{C \cdot d^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2. \tag{6.43}$$

Widzimy z tego, że przestrzeni, w której panuje pole elektryczne odpowiada energia potencjalna o gęstości proporcjonalnej do kwadratu natężenia pola.

6.5. Pomiar ładunku elementarnego: metoda Millikana

Rozstrzygnięcie istnienia ładunku elementarnego i pomiar jego wielkości należały do podstawowych problemów fizyki. Rozwiązał to za-



Rys. 6-20

danie Millikan za pomocą bardzo prostej, lecz i bardzo pomysłowej metody. Między okładki kondensatora wprowadza się kropelki rozpylonej oliwy (rys. 6-20), których ruch obserwuje się w polu mikroskopu. Na kropelkę działa siła ciężkości, F_C, siła oporu Stokesa, F_S oraz siła wyporu Archimedesa, F_A. Pominąwszy fazę początkową ruchu, siły te w krótkim czasie dochodzą do równowagi

$$F_A + F_S - F_C = 0, \tag{6.44}$$

wobec czego kropelka opada z jednostajną prędkością v_o. Siła oporu F_S jest proporcjonalna do prędkości; dla przedmiotu w kształcie kuli ma postać:

$$F_S = 6\pi r \eta v_o, \tag{6.45}$$

gdzie η jest współczynnikiem lepkości powietrza, a r promieniem kulki. Jeśli przez ρ_c oznaczymy gęstość oleju, a przez ρ_p gęstość powietrza, to z warunku (6.44) można obliczyć nie znaną wielkość, jaką jest promień r kulki:

$$r = \left\{ \frac{9 \eta v_o}{2(\rho_c - \rho_p) \cdot g} \right\}^{1/2}, \tag{6.46}$$

przy czym g jest przyspieszeniem ziemskim.

Włączamy teraz pole elektryczne o natężeniu $E = (V_1 - V_2)/d$ i lampę rentgenowską (lub stosujemy inny czynnik jonizacyjny). Powstają w przestrzeni między okładkami kondensatora jony gazowe. Z chwilą, gdy

taki jon przyczepi się do kulki oleju, jej prędkość skokowo zmieni się na v_E, ponieważ pojawi się siła elektryczna $F_E = \pm qE$, gdzie q jest ładunkiem jonu. Zmieni się także F_S na F_S', tak że obecnie

$$F_A + F_S' \pm F_E - F_C = 0. \tag{6.47}$$

Odejmując (6.44) od (6.47) mamy

$$F_S' - F_S = \mp F_E,$$

czyli

$$6\pi r \eta (v_E - v_o) = \mp q \cdot E. \tag{6.48}$$

Znając promień r i pozostałe stałe można z (6.48) obliczyć $\pm q$. Okazało się, że zawsze

$$|q| = n \cdot |e|, \tag{6.49}$$

tj. ładunek kulki zmieniał się o całkowitą wielokrotność najmniejszego ładunku $|e|$, zwanego elementarnym.

Współcześnie przyjęta wartość $|e|$, odpowiadająca ładunkowi elektronu wynosi

$$|e| = (1{,}60210 \pm 0{,}00007) \cdot 10^{-19}\ \text{C}. \tag{6.50}$$

Towarzyszy mu masa m_e, odpowiadająca masie elektronu

$$m_e = (9{,}1091 \pm 0{,}0004) \cdot 10^{-31}\ \text{kg}. \tag{6.51}$$

7. POLE ELEKTRYCZNE W MATERII

7.1. Polaryzacja dielektryka

Zastąpienie próżni między okładkami kondensatora jakimś ośrodkiem materialnym (gaz, ciecz, ciało stałe) powoduje powiększenie jego pojemności elektrostatycznej. Jeśli przez C_o oznaczymy pojemność kondensatora próżniowego, a przez C pojemność tego samego kondensatora po napełnieniu przestrzeni między jego okładkami ośrodkiem materialnym, to stosunek

$$\frac{C}{C_o} = \varepsilon \,, \tag{7.1}$$

nazywamy względną przenikalnością dielektryczną (stałą dielektryczną) ośrodka. Do wyznaczenia ε jest więc potrzebny pomiar dwu pojemności; ważne jest, by kondensator miał ten sam czynnik geometryczny po wypełnieniu go dielektrykiem.

Względna przenikalność dielektryczna jest liczbą bezwymiarową. Dla gazów jest ona bliska 1 (np. dla powietrza wynosi 1,0006), dla cieczy, oprócz wody, wynosi kilka (dla benzenu 2,26), dla ciał stałych od kilku do kilkuset tysięcy (ferroelektryki). Wyjątkowo duża stała dielektryczna wody (81) jest cechą wśród cieczy wyjątkową; decyduje ona o dysocjacji elektrolitycznej wielu związków chemicznych w roztworze wodnym, ponieważ siły Coulomba między jonami są w wodzie znacznie mniejsze, niż w stanie stałym.

Jak wiemy, pojemność kondensatora próżniowego wynosi $C_o = \varepsilon_o \cdot G$. Po udzieleniu jego okładkom ładunku q panuje między nimi pole elektryczne o natężeniu

$$E_o = \frac{q}{C_o \cdot d} = \frac{q}{\varepsilon_o G \cdot d} \,. \tag{7.2}$$

Jeśli teraz, nie zmieniając czynnika geometrycznego G, ani ładunku q, wprowadzimy między okładki kondensatora dielektryk o stałej dielektrycznej ε, to natężenie pola wyniesie:

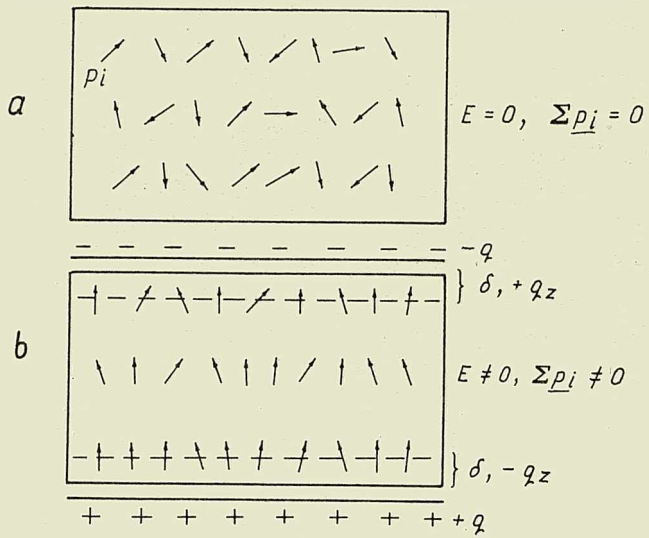
$$E = \frac{q}{C \cdot d} = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_o G d} = \frac{E_o}{\varepsilon} \,. \tag{7.3}$$

Jak widzimy, po wprowadzeniu dielektryka natężenie pola zmalało ε razy. Przyczyną tego zjawiska jest zmiana stanu dielektryka pod wpływem pola elektrycznego, nosząca nazwę polaryzacji.

Istnieją dwa mechanizmy polaryzacji.

i. Mechanizm orientacyjny. Występuje on tylko wtedy, gdy cząsteczki dielektryka posiadają własny, trwały moment dipolowy. W polu elektrycznym działa na dipol para sił, usiłująca ustawić go równolegle do kierunku pola. W gazach i cieczach przeszkodą w uzyskaniu pełnej orientacji dipoli są ruchy termiczne, stanowiące czynnik dezorganizujący porządek ustawienia. W ciałach stałych istnieje ograniczona możliwość obrotu dipola wskutek ciasnego wypełnienia przestrzeni przez cząsteczki. Niemniej jednak efekt orientacji jest dość spory; jeśli tylko występuje, ma decydujący udział w polaryzacji dielektryka.

ii. Mechanizm indukcyjny. Polega na polaryzacyjnym wpływie pola elektrycznego na cząsteczkę, w której indukuje się zgodnie z wzorem (6.8) moment dipolowy o wielkości proporcjonalnej do natężenia pola, $\underline{p}_{ind} = \alpha \cdot \underline{E}$. Moment indukowany jest znacznie mniejszy od spotykanych momentów trwałych, jednak efekt indukcyjny występuje zawsze. Jeśli w cząsteczce swobodnej rozkład ładunku ma symetrię kulistą, to wywołany moment ma zawsze kierunek linii pola.



Rys. 7-1

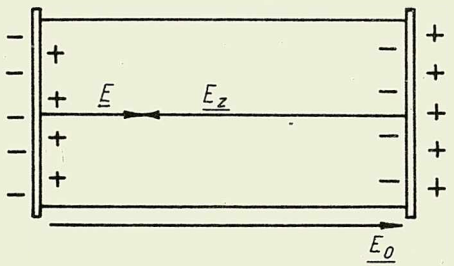
Orientacyjny wpływ pola elektrycznego jest przedstawiony na rys. 7-1. Gdybyśmy w sytuacji bez pola elektrycznego wybrali element ob-

jętości ΔV w dowolnym miejscu dielektryka, wówczas obliczona dla znajdujących się w jego wnętrzu momentów dipolowych $\underline{p}_i$ suma wektorowa byłaby równa zeru, zatem bez pola elektrycznego $\sum \underline{p}_i = 0$. Po przyłożeniu pola zachodzi orientacja dipoli; dzięki temu w cienkiej warstwie dielektryka o grubości δ, przylegającej do okładki naładowanej ładunkiem $-q$, gromadzą się dodatnie końce dipoli, a przy przeciwnej okładce - ujemne.

W tym przypadku dla elementu ΔV będziemy mieli $\sum \underline{p}_i \neq 0$. Moment elektryczny, przypadający na jednostkę objętości ma ważne znaczenie: równy jest liczbowej wartości wektora polaryzacji

$$\underline{P} = \frac{\sum \underline{p}_i}{\Delta V} . \tag{7.4}$$

Widzimy również, że w warstwach o grubości δ powstaje ładunek nieskompensowany; blisko górnej okładki $+q_z$, blisko dolnej $-q_z$. W przeciwieństwie do ładunku $\pm q$, który jest swobodny i może się przemieszczać po okładce metalicznej, ładunki $\pm q_z$ nie są swobodne: noszą nazwę ładunków związanych. Tak więc wynikiem polaryzacji jest pojawienie się ładunków związanych w cienkiej warstwie dielektryka, zwróconej w stronę elektrody.



Rys. 7-2

Oznaczmy przez $\underline{E}_0$ natężenie pola, wytwarzane przez ładunki swobodne, przez $\underline{E}_z$ natężenie pola wytwarzane przez ładunki związane, zaś $\underline{E}$ niech będzie wypadkowym natężeniem w dielektryku. Mamy (rys. 7-2)

wektorowo

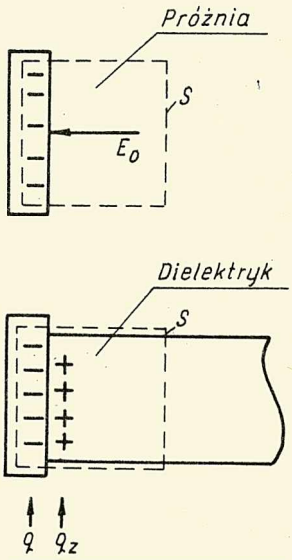
$$\underline{E} = \underline{E}_0 + \underline{E}_z ,$$

algebraicznie

$$E = E_0 - E_z ,$$

ponieważ pole E_z ma kierunek przeciwny do E_0.

Zastosujmy teraz twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego - wpierw do kondensatora, w którym między okładkami panuje próżnia (rys. 7-3). Dowolna powierzchnia zamknięta S może mieć kształt cylindra; obejmuje tylko ładunek swobodny q.



Rys. 7-3

$$N_{E_o} = \int_{(S)} E_o \, dS = E_o \cdot S = -\frac{1}{\varepsilon_o} q,$$

czyli

$$q = -\varepsilon_o E_o \cdot S, \qquad (7.5)$$

ponieważ S wybraliśmy w pobliżu okładki naładowanej ujemnie. W drugim przypadku powierzchnia S obejmuje ładunek swobodny -q i związany $+q_z$; mamy

$$N_E = E \cdot S = \frac{1}{\varepsilon_o} (-q + q_z),$$

stąd i z (7.5)

$$q_z = q + \varepsilon_o E S = \varepsilon_o S (E - E_o),$$

czyli

$$q_z = q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right). \qquad (7.6)$$

Wartość ładunku związanego zależy więc od przenikalności dielektrycznej ośrodka. Jeśli - jak przeciętnie - $\varepsilon = 5$, to $q_z = 0{,}8\ q$, czyli ładunek związany sięga 80% ładunku swobodnego. Tak duży ładunek związany znacznie neutralizuje pole okładek, w wyniku czego wypadkowe natężenie pola $\underline{E}$ jest znacznie mniejsze od pola okładek.

7.2. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego dla dielektryka

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego, napisane dla strumienia wektora $\underline{E}$ ma zatem w obecności dielektryka postać:

$$N_E = \int_{(S)} \underline{E} \, \underline{dS} = \frac{1}{\varepsilon_o} (q - q_z) = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_o},$$

jeśli zastąpimy q_z przez (7.6). Możemy temu wyrażeniu nadać prostszą postać, jeśli wprowadzimy definicję nowego wektora

$$\underline{D} = \varepsilon_o \varepsilon \underline{E}, \qquad (7.7)$$

wówczas strumień wektora D

$$N_D = \int_{(S)} D \, dS = \sum_i q_i \tag{7.8}$$

równy jest sumie wszystkich ładunków swobodnych, objętych powierzchnią S. Należy zwrócić uwagę, że ładunki związane nie mają udziału w N_D. Wektor $\underline{D}$ nosi nazwę wektora indukcji elektrostatycznej.

W kondensatorze płaskim z dielektrykiem

$$\int_{(S)} \underline{D} \, \underline{dS} = D \cdot S = q,$$

czyli

$$D = \frac{q}{S}. \tag{7.9}$$

Widzimy więc, że liczbowo wektor D równy jest gęstości ładunku swobodnego na okładkach kondensatora.

Wyrażenie (7.6) określające wielkość ładunku związanego możemy też przepisać w następującej postaci

$$q = q_z + \frac{q}{\varepsilon} = q_z + \varepsilon_o \left(\frac{q}{\varepsilon \varepsilon_o}\right),$$

a po podzieleniu przez powierzchnię okładek S

$$\frac{q}{S} = \frac{q_z}{S} + \varepsilon_o \left(\frac{q}{\varepsilon \varepsilon_o S}\right). \tag{7.10}$$

Interpretacja poszczególnych członów (7.10) jest następująca:

i. q/S jest gęstością ładunku swobodnego, czyli liczbową wartością D,

ii.

$$\frac{q_z}{S} = \frac{q_z \cdot \delta}{S \cdot \delta} = \frac{\sum p_i}{\Delta V} = P,$$

zatem drugie wyrażenie jest liczbową wartością wektora polaryzacji. Mamy tu nową interpretację wektora P: jest on liczbowo równy gęstości ładunków związanych.

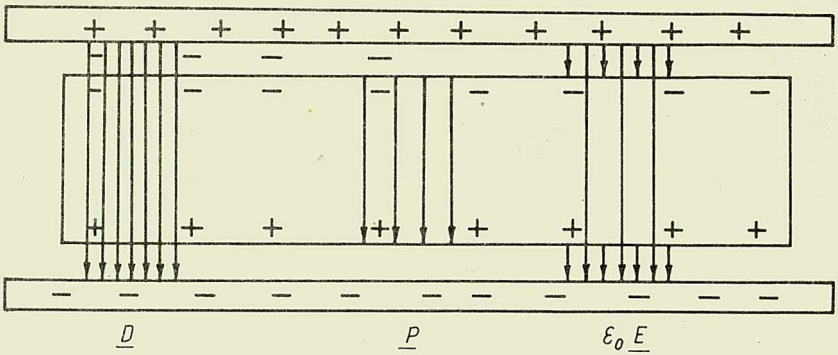
iii.

$$\frac{q}{\varepsilon \varepsilon_o S} = E,$$

przy czym E jest wypadkowym natężeniem pola w dielektryku. Uwzględniając punkty i-iii możemy (7.10) zapisać w postaci ważnego związku między trzema podstawowymi wektorami pola w dielektryku:

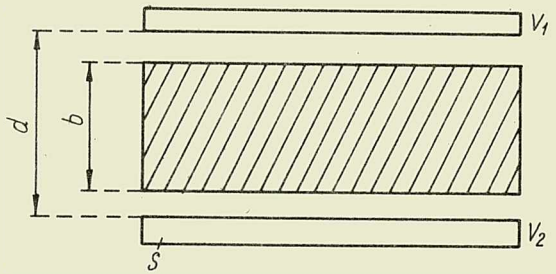
$$\underline{D} = \varepsilon_o \underline{E} + \underline{P}. \tag{7.11}$$

Zestawienie i fizyczny sens tych wektorów podane są na rys. 7-4.



Rys. 7-4

P r z y k ł a d: Kondensator płaski o powierzchni okładki S = = 100 cm^2 i odległości d = 1,0 cm został naładowany do różnicy potencjałów U_o = 100 V. Po odłączeniu baterii wsunięto między okładki płytę dielektryka o grubości 5 mm i stałej dielektrycznej ε = 7,0. Obliczyć E, D, P w szczelinie i dielektryku.



Rys. 7-5

W przykładzie mamy kondensator z dielektrykiem, częściowo wypełniającym przestrzeń między okładkami. Sytuacja jest przedstawiona na rys. 7-5; $\varepsilon_o = 8{,}9 \cdot 10^{-12}\ C^2/(Nm^2)$. Obliczamy kolejno potrzebne wielkości.

1. Pojemność kondensatora próżniowego

$$C_o = \varepsilon_o S/d = \frac{8{,}9\cdot 10^{-12}\left(\frac{C^2}{Nm^2}\right)\cdot 10^{-2}\ m^2}{10^{-2}\ m} = 8{,}9\ pF.$$

ii. Ładunek swobodny okładek

$$q = C_0 \cdot U_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12} \cdot 100\ C = 8{,}9 \cdot 10^{-10}\ C.$$

iii. Natężenie pola elektrycznego w próżni

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 S} = \frac{8{,}9 \cdot 10^{-10}\ C}{8{,}9 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}\ \frac{C^2}{N}} = 1{,}00 \cdot 10^4\ V/m.$$

Z drugiej strony

$$E_0 = \frac{U_0}{d} = \frac{10^2}{10^{-2}}\ V/m = 10^4\ V/m$$

daje wynik zgodny z poprzednim. Wyniki te wskazują, że wstawienie dielektryka nie ma wpływu na E_0.

iv. Natężenie pola w dielektryku

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0\, \varepsilon S} = \frac{1{,}00 \cdot 10^4}{7{,}0}\ V/m = 1{,}43 \cdot 10^3\ V/m,$$

z drugiej strony

$$E = \frac{U_0}{\varepsilon d} = \frac{10^4}{7{,}0}\ V/m = 1{,}43 \cdot 10^3\ V/m.$$

Wyniki te wskazują, że obecność szczeliny nie ma wpływu na E.

v. Różnica potencjałów na kondensatorze

$$U = -\int_0^d E\, dl = E_1 d_1 + E_2 d_2 = E_0\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right). \qquad (7.12)$$

Wyrażenie (7.12) ma postać trochę ogólniejszą i dotyczy sytuacji, gdy przestrzeń między okładkami kondensatora jest wypełniona dwiema warstwami o grubości d_1 i d_2 oraz o stałych dielektrycznych odpowiednio ε_1 i ε_2. W naszym przypadku

$$U = E_0 \left[\frac{b}{\varepsilon} + (d - b)\right] =$$

$$= 1{,}00 \cdot 10^4\ \frac{V}{m} \left[\frac{5}{7} + 5\right] \cdot 10^{-3}\ m = 57{,}14\ V.$$

vi. Pojemność kondensatora z dielektrykiem

$$C = \frac{q}{U} = \frac{8{,}9 \cdot 10^{-10}}{57{,}14} \cdot 10^{12}\ pF = 15{,}8\ pF.$$

Zauważmy, że pojemność wzrasta tylko o 1,8 raza ponieważ $b < d$.

Ogólniejsze wyrażenie na pojemność C ma na podstawie (7.12) postać

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2} . \qquad (7.13)$$

vii. Wektor D_0 ma liczbową wartość

$$D_0 = \varepsilon_0 \varepsilon E_0 = 8{,}9\cdot10^{-12}\cdot1\cdot1{,}00\cdot10^{4}\ \frac{C}{m^2} = 8{,}9\cdot10^{-8}\ \frac{C}{m^2} .$$

Z drugiej strony

$$D_0 = \frac{q}{S} = \frac{8{,}9\cdot10^{-10}}{10^{-2}}\ \frac{C}{m^2} = 8{,}9\cdot10^{-8}\ \frac{C}{m^2} .$$

viii. Wektor P dla szczeliny powietrznej ma wartość liczbową

$$P = D - \varepsilon_0 E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\, E, \qquad (7.14)$$

zatem w szczelinie P = 0 (próżnia nie ulega polaryzacji). Łącznie w szczelinie mamy

$$E_0 = 1{,}00\cdot10^{4}\ V/m, \quad D_0 = 8{,}9\cdot10^{-8}\ \frac{C}{m^2}, \quad P = 0.$$

ix. W dielektryku

$$P = 8{,}9\cdot10^{-12}\cdot6{,}0\cdot1{,}43\cdot10^{3}\ \frac{C}{m^2} = 7{,}65\cdot10^{-8}\ \frac{C}{m^2} .$$

Inaczej

$$P = \frac{q_z}{S} = \frac{q}{S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{8{,}9\cdot10^{-10}}{10^{-2}}\cdot\frac{6}{7}\ \frac{C}{m^2} = 7{,}65\cdot10^{-8}\ C/m^2.$$

$$D = 8{,}9\cdot10^{-12}\cdot7{,}0\cdot1{,}43\cdot10^{3}\ C/m^2 = 8{,}9\cdot10^{-8}\ C/m^2,$$

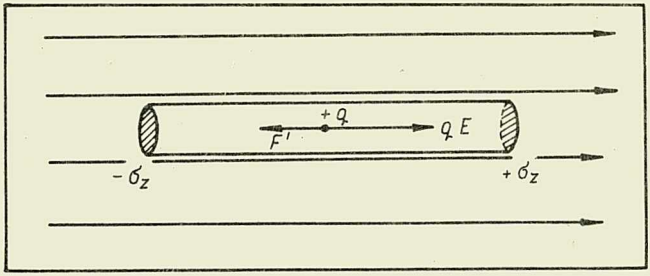
(to samo, co w szczelinie). Tak więc w dielektryku

$$E = 1{,}43\cdot10^{3}\ V/m, \quad D = 8{,}9\cdot10^{-8}\ C/m^2, \quad P = 7{,}65\cdot10^{-8}\ C/m^2$$

7.3. Fizyczny sens wektorów D i E

7.3.1. Szczelina podłużna

Wytnijmy we wnętrzu spolaryzowanego dielektryka szczelinę wzdłuż linii pola, której rozmiary poprzeczne są znacznie mniejsze niż długość, czyli tzw. kanał podłużny (rys. 7-6). Na dodatni ładunek +q umieszczony w środku szczeliny działa wówczas siła, pochodząca od natężenia pola E w dielektryku oraz siła F', pochodząca od wpływu ładunków związanych, których powierzchniowa gęstość na powierzchniach bocznych zamykających walec wynosi $\pm\sigma_z$. Wobec tego



Rys. 7-6

$$\underline{F}_1 = q\,\underline{E} + \underline{F}'. \tag{7.15}$$

Jeśli średnica szczeliny jest bardzo mała w stosunku do długości to $\underline{F}'$ można zaniedbać; wówczas

$$\underline{F}_1 = q \cdot \underline{E} \quad \text{oraz} \quad \underline{E} = \frac{\underline{F}_1}{q}. \tag{7.16}$$

Tak więc natężenie pola we wnętrzu dielektryka jest liczbowo równe sile, jaka działa na ładunek dodatni i jednostkowy umieszczony w kanale podłużnym, wydrążonym we wnętrzu dielektryka.

7.3.2. Szczelina poprzeczna

Zajmijmy się obecnie kanałem poprzecznym (rys. 7-7), w którym efekty wynikające z obecności ładunków związanych nie mogą być pominięte. Mamy

$$E_z = E_o - E = \frac{1}{\varepsilon_o}\frac{q}{S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_o}\sigma_z = \frac{1}{\varepsilon_o} P.$$

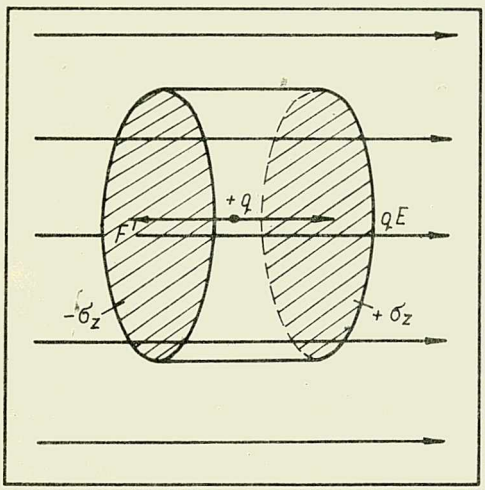
W takim razie

$$\underline{F}_t = q\left(\underline{E} + \frac{1}{\varepsilon_o}\underline{P}\right) = \frac{1}{\varepsilon_o} q\,\underline{D},$$

czyli

$$\underline{D} = \varepsilon_o \underline{F}_t / q. \tag{7.17}$$

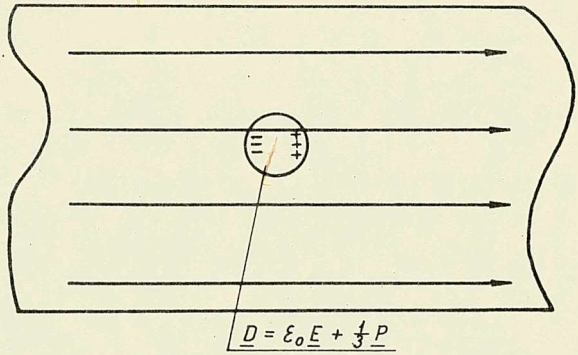
Wektor $\underline{D}$ możemy więc zmierzyć, mierząc siłę działającą na ładunek dodatni i jednostkowy w kanale poprzecznym.



Rys. 7-7

7.3.3. Szczelina mikroskopowa

Szczególnym i ważnym przypadkiem szczeliny jest małe kuliste wydrążenie o średnicy rzędu rozmiarów cząsteczki (rys. 7-8). Panujące w



Rys. 7-8

niej pole moglibyśmy otrzymać usuwając z pewnego miejsca w krysztale 1 cząsteczkę: jest to tzw. pole lokalne. Obliczenie pola lokalnego w przypadku ogólnym jest bardzo trudne i do dziś nie w pełni rozwiązane. Jeśli jednak założymy, że mamy do czynienia z dielektrykiem izotropowym, to sytuacja przypomina kanał poprzeczny z jedną różnicą: w obliczaniu $\underline{D}$ według (7.17) należy uwzględnić 1/3 wartości $\underline{P}$, ponieważ interesuje nas określony kierunek w przestrzeni, a wszystkie 3 kierunki są w przypadku izotropii jednakowo uprzywilejowane. Otrzymamy więc wyrażenie na siłę $\underline{F}_t$

$$\underline{F}_t = q(\underline{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\underline{P}) = \frac{1}{\varepsilon_0} q\,\underline{D},$$

czyli

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \frac{1}{3}\underline{P}, \tag{7.18}$$

z tego

$$\varepsilon \underline{E} = \underline{E}_0 = \underline{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\underline{P}$$

oraz

$$\underline{E} = \underline{E}_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0}\underline{P} = \underline{E}_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0}\left\{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\underline{E}\right\} = \underline{E}_0 - \frac{\varepsilon - 1}{3}\underline{E}.$$

Rozwiązując to równanie względem $\underline{E}$ otrzymamy

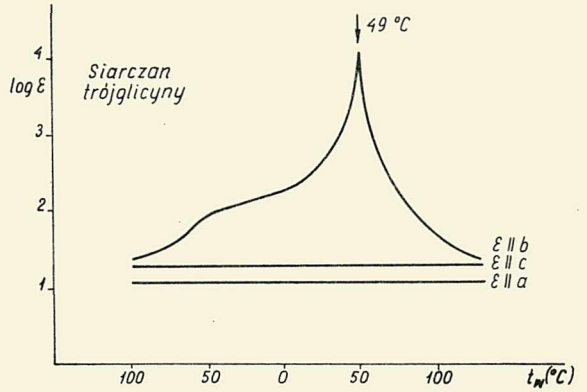
$$\underline{E} = \frac{3}{\varepsilon + 2}\underline{E}_0. \tag{7.19}$$

Jest to natężenie pola wewnątrz dielektryka wyrażone przez natężenie pola okładek. Na podstawie (7.19) otrzymujemy ważne wyrażenie na wektor polaryzacji $\underline{P}$ dielektryka

$$\underline{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1) \cdot \underline{E} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\underline{E}_0. \tag{7.20}$$

7.4. Ferroelektryki

W omawianych dotychczas przypadkach związki (7.7) i (7.14) mają charakter zależności proporcjonalnych: $\underline{D}$ oraz $\underline{P}$ są proporcjonalne do natężenia pola $\underline{E}$. Nie zawsze tak musi być; są dwa ważne przypadki, w których proste wzory (7.7) i (7.14) są niewystarczające. Pierwszy dotyczy grupy ciał stałych, zwanych ferroelektrykami, drugi - ciał polaryzujących się w sposób anizotropowy. Do ferroelektryków należą niektóre związki chemiczne, jak na przykład winian sodowo-potasowy, czyli tzw. sól Seignette'a, $(CHOH)_2(COO)_2KNa$; tytanian baru, $BaTiO_3$; kwaśny fosforan potasu, KH_2PO_4, a ze związków organicznych jedynym dotychczas poznanym ferroelektrykiem jest tiomocznik, $CS(NH_2)_2$.



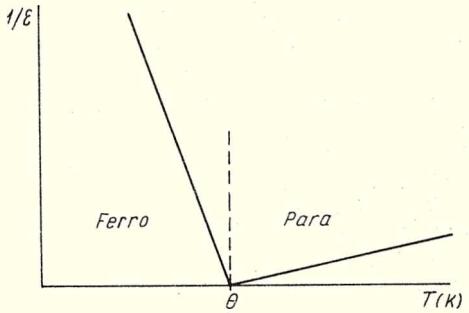
Rys. 7-9

Najważniejszą własnością ferroelektryka jest jego wysoka względna przenikalność dielektryczna, dochodząca niekiedy do kilkuset tysięcy. Własność ta występuje jednak poniżej pewnej temperatury, T_c, zwanej temperaturą Curie. Na rysunku 7-9 schematycznie przedstawiono wykres log ε od temperatury dla siarczanu trójglicyny, której odpowiada temperatura Curie T_c = 322 K. Poniżej tej temperatury związek występuje jako ferroelektryk, natomiast powyżej - jako zwykły dielektryk (tzw. paraelektryk). T_c jest więc temperaturą przejścia fazowego; w tej temperaturze pojawia się nieciągłość. Zauważmy, że nieciągłość ta występuje tylko dla stałej dielektrycznej mierzonej wzdłuż osi krystalograficznej b; dla pozostałych kierunków krystalograficznych (a i c) ε zmienia się niewiele i w sposób regularny. Wskazuje to na fakt, że mikroskopowy (molekularny) mechanizm przemiany fazowej ferroelektryk ⟷ paraelektryk wykazuje cechy anizotropowe.

Zależność stałej dielektrycznej ε od temperatury opisuje w najprostszym przypadku prawo Curie-Weissa

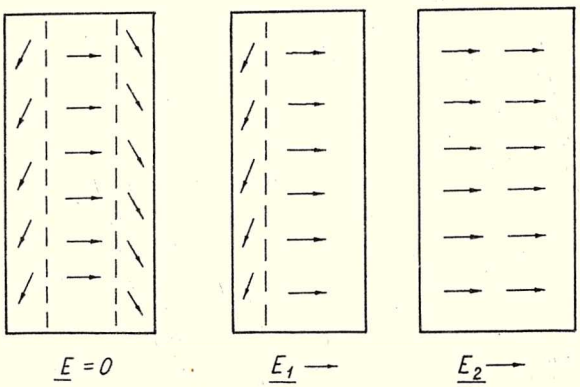
$$\varepsilon = \frac{C}{T - T_c} . \qquad (7.21)$$

Zgodnie z tym prawem odwrotność stałej dielektrycznej powinna być liniową funkcją temperatury, co istotnie, bardzo często jest spełnione (rys. 7-10). Dalszą cechą ferroelektryka jest jego struktura dome-



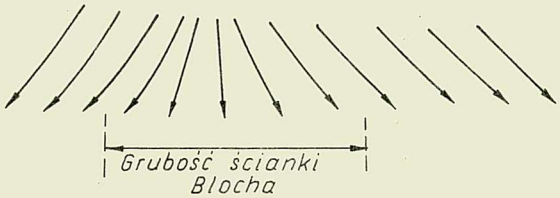
Rys. 7-10

nowa: kawałek ferroelektryka jest podzielony na makroskopowe obszary, zwane domenami. Można je obserwować na płasko oszlifowanej powierzchni materiału przez posypanie jej lekkim proszkiem dielektrycznym. Rozpad ferroelektryka na domeny jest zjawiskiem samorzutnym, ponieważ powoduje powiększenie jego trwałości termodynamicznej. Orientacja dipoli w obszarze domeny jest bliska idealnej, dlatego polaryzacja w obrębie domeny osiąga ogromne wartości - nosi nazwę polaryzacji spontanicznej (samorzutnej).



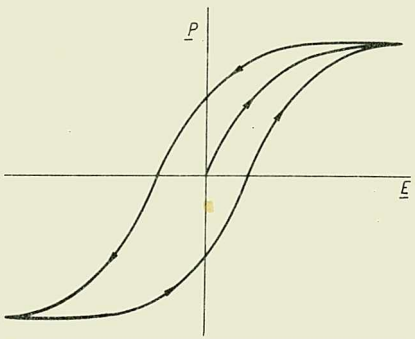
Rys. 7-11

Domeny nie są jednak czymś niezmiennym: ulegają one zmianie pod wpływem pola elektrycznego w tym sensie, że rosną te, dla których orientacja dipoli jest zbliżona do kierunku pola, a o innych orientacjach dipoli - maleją (rys. 7-11). W ten sposób, jeśli natężenia pola są dostatecznie duże, to można otrzymać ferroelektryk o tylko jednej domenie. Powierzchniami oddzielającymi domeny, czyli tzw. ściankami Blocha są warstwy dipoli o przejściowym uporządkowaniu (rys. 7-12). Mogą się one przesuwać pod wpływem pola elektrycznego.



Rys. 7-12

Polaryzacja dielektryka, który długi czas nie był w polu elektrycznym, jest bliska zeru; domeny są zorientowane rozmaicie i średnio biorąc moment elektryczny jednostki objętości wynosi zero. Po przyłożeniu pola E następuje wzrost P aż do osiągnięcia nasycenia (rys. 7-13). W tym stanie mamy tylko jedną domenę o orientacji dipoli zbliżonej do E i dalsze zwiększenie momentu elektrycznego jednostki objętości nie jest możliwe. Zmniejszenie E do zera prowadzi również do spadku P, lecz po innej drodze. W rezultacie, dla E = 0 otrzymamy P ≠ 0. Dalsze zmiany E pociągają za sobą zmiany P według krzywej przedstawionej na rys. 7-13, zwanej pętlą histerezy. Powtórzenie cyklu wywołuje zmiany P wzdłuż tej samej krzywej; początkową jej część obserwuje się tylko raz.



Rys. 7-13

Ferroelektryki oraz niektóre inne ciała krystaliczne (np. krystaliczny kwarc) wykazują własność, zwaną efektem piezoelektrycznym: przyłożenie na kryształ mechanicznego naprężenia (ściskanie lub rozciąganie) powoduje powstanie ładunków przeciwnego znaku na dwóch przeciwległych ścianach, czyli różnicy potencjałów. Kryształów takich używa

się do budowy przetworników piezoelektrycznych, zamieniających zmiany ciśnienia na sygnały elektryczne. Poza tym znajdują zastosowanie w wytwarzaniu ultradźwięków i stabilizacji drgań elektrycznych (zegary kwarcowe).

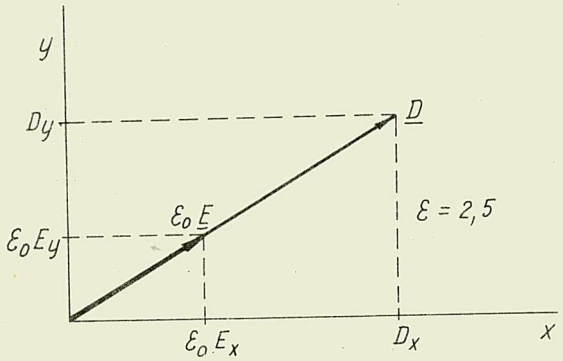
7.5. Anizotropia dielektryków

Drugim powodem, dla którego polaryzacja $\underline{P}$ nie jest proporcjonalna do $\underline{E}$, jest anizotropia dielektryków. Cecha ta dotyczy wyłącznie substancji w stanie krystalicznym i polega na zależności względnej przenikalności dielektrycznej od kierunku w krysztale, w którym ją mierzymy.

Jeśli interesujący nas kryształ jest izotropowy, tj. stała dielektryczna ma w każdym kierunku taką samą wartość ε, to (7.7) możemy rozpisać na składowe w prosty sposób

$$D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon E_1, \quad D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon E_2, \quad D_3 = \varepsilon_0 \varepsilon E_3,$$

przy czym $D_i \parallel x_i$, gdzie x_i jest wybranym dla kryształu ortogonalnym układem współrzędnych. Widzimy, że każda składowa D_i jest proporcjonalna do odpowiedniej składowej E_i z tym samym współczynni-



Rys. 7-14

kiem proporcjonalności. Powoduje to, że wektor $\underline{D}$ jest w takim krysztale zawsze równoległy do $\underline{E}$, jak to przedstawiono dla przypadku płaskiego ($E_3 = 0$) na rys. 7-14. Jeśli jednak dielektryk jest anizotropowy i np. $\varepsilon_x = 2$ a $\varepsilon_y = 3$, to równoległość $\underline{D}$ i $\underline{E}$ już nie zachodzi (rys. 7-15). Przy dowolnie zorientowanym układzie osi 1, 2, 3 (x y z) każda składowa wektora $\underline{D}$ zależy od wszystkich składowych wektora $\underline{E}$, przy czym zależności te mają charakter związków liniowych. Możemy więc napisać

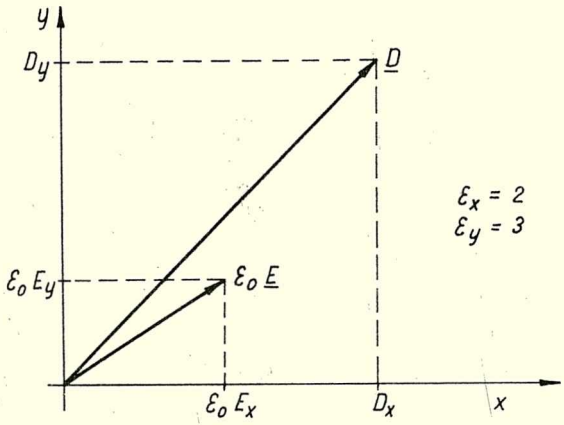
$$\frac{1}{\varepsilon_0} D_1 = \varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2 + \varepsilon_{13} E_3,$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} D_2 = \varepsilon_{21} E_1 + \varepsilon_{22} E_2 + \varepsilon_{23} E_3, \qquad (7.22)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} D_3 = \varepsilon_{31} E_1 + \varepsilon_{32} E_2 + \varepsilon_{33} E_3$$

lub ogólnie

$$\frac{1}{\varepsilon_0} D_m = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon_{mn} E_n, \quad m = 1, 2, 3. \qquad (7.23)$$



Rys. 7-15

Równania liniowe (7.22) w zapisie macierzowym mają postać

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \qquad (7.24)$$

Widzimy, że stała dielektryczna materiału anizotropowego jest tensorem, zawierającym w ogólnym przypadku 6 składowych niezależnych, ponieważ

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \qquad (7.25)$$

czyli tensor ε jest symetryczny.

P r z y k ł a d: Tensor stałej dielektrycznej pewnego kryształu ma składowe: $\varepsilon_{11} = 1{,}5$, $\varepsilon_{12} = 1{,}3$, $\varepsilon_{13} = 0$, $\varepsilon_{22} = 2{,}0$, $\varepsilon_{23} = 5{,}0$, $\varepsilon_{33} = 30{,}0$. Na próbkę tego materiału przyłożono natężenie pola $\underline{E}(2, 0, 5)$ V/m. Jaki jest kąt między wektorami $\underline{D}$ i $\underline{E}$?

Musimy obliczyć wpierw składowe $\underline{D}$:

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 1{,}3 & 0 \\ 1{,}3 & 2{,}0 & 5{,}0 \\ 0 & 5{,}0 & 30{,}0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}0 \\ 27{,}6 \\ 150{,}0 \end{pmatrix}$$

Korzystamy teraz z definicji iloczynu skalarnego

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\underline{D}\cdot\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i D_i E_i = \frac{1}{\varepsilon_0}|\underline{D}||\underline{E}|\cos\varphi,$$

stąd

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{\varepsilon_0}\sum D_i E_i}{\frac{1}{\varepsilon_0}|\underline{D}||\underline{E}|} = \frac{6{,}0 + 5\cdot 150{,}0}{(4+25)^{1/2}\cdot(9 + 761{,}8 + 22500)^{1/2}} = 0{,}920,$$

czyli

$$\varphi = 23^\circ.$$

8. ELEMENTY ELEKTRODYNAMIKI

8.1. Przepływ ładunku

Przepływ ładunku elektrycznego, podobnie jak transport innych wielkości fizycznych (masy w procesie dyfuzji, ciepła w procesie przewodzenia i pędu w przepływie cieczy) jest zależny od spadku pewnej wielkości wzdłuż drogi przepływu i od powierzchni A przekroju, w którego obrębie następuje przepływ. Wielkością, która powinna maleć wzdłuż drogi ładunku jest potencjał V: ładunek dodatni płynie samorzutnie od potencjału wyższego do niższego. Wobec tego wielkość ładunku dq, przepływającego w czasie dt w kierunku osi x wynosi

$$dq = -\sigma \frac{dV}{dx} A \, dt. \tag{8.1}$$

Stała σ nosi nazwę elektrycznego przewodnictwa właściwego; znak (-) pochodzi stąd, że $dV < 0$.

$$\frac{dq}{dt} \equiv i \tag{8.2}$$

nazywamy natężeniem prądu elektrycznego. Jednostką natężenia prądu jest 1 Amper = 1 C/s. Podstawą definicji tej jednostki są oddziaływania elektrodynamiczne dwóch równoległych przewodników, przez które płynie prąd; podamy je nieco później.

Korzystając z (8.2) możemy napisać (8.1) w postaci

$$i = -\sigma \frac{dV}{dx} A.$$

Podzielmy teraz obustronnie przez A: otrzymamy z lewej strony wyrażenie, zwane gęstością prądu przewodzenia (A/m^2)

$$j = \frac{i}{A}. \tag{8.3}$$

Gęstość prądu ma własności wektora, natomiast natężenie prądu i nie jest wektorem. Długość j wynosi i/A; w przewodniku izotropowym j jest prostopadły do A, które jest wówczas powierzchnią stałego potencjału, wreszcie j ma zwrot odpowiadający kierunkowi ruchu ładunku dodatniego.

Pojęcie spadku potencjału dV/dx możemy uogólnić na przypadek trójwymiarowy. Jeśli x_1, x_2, x_3 jest wybranym kartezjańskim układem osi, przy czym $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ są wersorami w kierunku tych osi, to ogólne wyrażenie na spadek potencjału ma postać:

$$\underline{e}_1 \cdot \frac{\partial V}{\partial x_1} + \underline{e}_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \underline{e}_3 \frac{\partial V}{\partial x_3} = \left\{ \sum_{i=1}^{3} \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot V = \underline{\nabla} \cdot V.$$

Symbolem ∇

$$\underline{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{8.4}$$

został oznaczony operator gradientu (por. rozdział 2.11). Gradient potencjału jest spadkiem potencjału na jednostkę długości drogi, mierzonym w kierunku największej wartości tego spadku.

Iloczyn operatora gradientu i potencjału ma znak przeciwny do wektora natężenia pola elektrycznego $\underline{E}$:

$$-\underline{\nabla} \cdot V = \underline{E}. \tag{8.5}$$

Wobec tego równanie dla przewodnictwa elektrycznego w zapisie wektorowym przyjmuje postać

$$\underline{j} = \sigma \cdot \underline{E}. \tag{8.6}$$

Elektryczne przewodnictwo właściwe σ jest tzw. stałą materiałową, czyli wielkością charakterystyczną dla przewodzącego materiału. Odwrotność σ jest opornością właściwą ρ materiału

$$\frac{1}{\sigma} = \rho, \tag{8.7}$$

czyli opornością kostki sześciennej o krawędzi 1 m, wykonanej z określonego materiału. Ponieważ oporność R przewodnika, mierzona w omach, zależy od jego cech geometrycznych, tj. przekroju A i długości l

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}, \tag{8.8}$$

więc wymiarem ρ jest $\Omega \cdot m$, a wymiarem przewodnictwa właściwego jest $\Omega^{-1}\ m^{-1}$.

Rozpisanie (8.6) dla przypadku jednowymiarowego, np. osi $x \parallel x_1$, prowadzi do wyrażenia

$$j \cdot A = i = \frac{1}{\rho} \frac{V_1 - V_2}{l/A} = \frac{V_1 - V_2}{R},$$

znanego pod nazwą prawa Ohma. (8.6) jest więc uogólnionym prawem Ohma, zapisanym w postaci wektorowej. Taki zapis prowadzi w prosty sposób

do wyrażenia gęstości prądu przewodzonego w materiałach anizotropowych. Jeżeli przewodnictwo właściwe materiału jest jedną tylko liczbą, tj. nie zależy od kierunku przepływu prądu, to (8.6) możemy rozpisać w następujący sposób

$$j_1 = \sigma E_1, \quad j_2 = \sigma E_2, \quad j_3 = \sigma E_3, \tag{8.9}$$

czyli ogólnie

$$j_m = \sigma E_m, \quad m = 1, 2, 3. \tag{8.10}$$

Wskaźnika $m = 1, 2, 3$ użyliśmy tu na oznaczenie składowych $\underline{j}$, odpowiednio wzdłuż kierunku osi x_m. Z postaci (8.9) wynika, że $\underline{j} // \underline{E}$. Do materiałów o takich własnościach należą przede wszystkim metale, krystalizujące w układzie regularnym, o wysokiej symetrii.

Istnieje jednak spora - jeżeli nie liczniejsza - grupa materiałów w postaci krystalicznej, dla których przewodnictwo σ zależy od kierunku pomiaru. Jeśli wybrany przez nas układ współrzędnych x_1, x_2, x_3 jest przypadkowy, tj. nie uwzględnia kierunków symetrii w krysztale, to każda składowa wektora $\underline{j}$ zależy od wszystkich składowych $\underline{E}$. W tym przypadku należy (8.9) napisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} j_1 &= \sigma_{11} E_1 + \sigma_{12} E_2 + \sigma_{13} E_3, \\ j_2 &= \sigma_{21} E_1 + \sigma_{22} E_2 + \sigma_{23} E_3, \\ j_3 &= \sigma_{31} E_1 + \sigma_{32} E_2 + \sigma_{33} E_3 \end{aligned} \tag{8.11}$$

lub ogólnie

$$j_m = \sum_{n=1}^{3} \sigma_{mn} E_n, \quad m = 1, 2, 3. \tag{8.12}$$

Przewodnictwo właściwe takiego materiału jest opisywane zbiorem 9 liczb

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \sigma_{ik} \tag{8.13}$$

noszącym nazwę tensora przewodnictwa elektrycznego. Spośród 9 liczb tylko 6 jest niezależnych, ponieważ

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \tag{8.14}$$

czyli tensor σ_{ik} jest symetryczny. W zapisie macierzowym (8.11) ma postać

$$\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \tag{8.15}$$

Oczywiście, jeżeli materiał anizotropowy występuje w postaci zlepka, czy spieku dużej liczby drobnych kryształków idealnie wymieszanych pod względem orientacji, to materiał taki również przewodzi w każdym kierunku tak samo. Można pokazać, że jego średnie przewodnictwo właściwe jest wówczas równe

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \tag{8.16}$$

a więc równe jest 1/3 sumy przekątniowych składowych tensora.

Przepływ prądu elektrycznego opisuje się często za pomocą pojęcia nośników prądu, poruszających się w materiale pod wpływem przyłożonego pola elektrycznego. Nośnikami mogą być jony (w roztworach elektrolitów lub w gazie), elektrony (w metalach i półprzewodnikach), a nawet tzw. dziury (w półprzewodnikach). Dziurą jest miejsce po usuniętym elektronie; może być zapełnione przez sąsiadujące elektrony, co jest równoważne samodzielnemu przepływowi dziury o masie takiej samej jak masa elektronu, lecz o ładunku dodatnim.

Podstawowymi własnościami nośnika są: ładunek $\pm q$, ruchliwość u oraz koncentracja nośników n. Ładunek nośnika jest równy ładunkowi elektronu ($\pm e$) lub jego niewielkiej wielokrotności. Ruchliwość jest pojęciem związanym z szybkością unoszenia (wędrowania) v nośnika w polu elektrycznym. Przypuśćmy, że nośnikiem jest jon w roztworze. Po przyłożeniu pola elektrycznego działają nań dwie siły: pola elektrycznego $F_E = \pm qE$ oraz siła oporu F_S. Jako tę drugą możemy w przybliżeniu przyjąć siłę Stokesa $F_S = 6\pi r \eta v$. Przybliżenie związane jest z tym, że zhydratyzowany w roztworze wodnym jon mało przypomina kulę, dla której słuszne jest podane wyrażenie dla F_S; w szczególności promień r tej "kuli" jest określony bardzo nieprecyzyjnie. Obie siły działają w kierunkach przeciwnych i równoważą się w krótkim czasie po przyłożeniu pola E

$$F_E - F_S = 0.$$

Siła oporu F_S jest właśnie tym czynnikiem, który ogranicza prędkość unoszenia jonu i sprawia, że w określonych warunkach jest ona stała

$$\pm q E = 6 \pi r \eta v,$$

czyli

$$v = \pm \frac{q}{6\pi r \eta} E = u \cdot E. \qquad (8.17)$$

Widzimy, że prędkość unoszenia jonu v (w m/s) jest proporcjonalna do natężenia pola E; współczynnik proporcjonalności u jest nazywany ruchliwością. Ruchliwość jest liczbowo równa szybkości unoszenia jonu w polu o natężeniu jednostkowym. Jednostką u jest [u] = 1 (m/s)/(V/m) = 1 m^2/Vs.

Koncentracja nośników n jest ich liczbą w jednostce objętości ; jednostką n jest m^{-3}.

Za pomocą tych trzech stałych: q, u, n możemy wyrazić w następujący sposób przepływ nośników określonego znaku

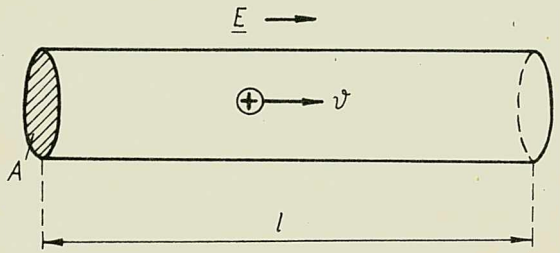
$$i = \frac{Q}{t} = \frac{n(A \cdot l)q}{l/v} = q.v.n.A,$$

gdzie A jest przekrojem, a l długością walca, w którego obrębie następuje przepływ nośników (rys. 8-1). W takim razie

$$j = q \cdot v \cdot n = q\, u\, n \cdot E \qquad (8.18)$$

oraz

$$\sigma = q\, u\, n. \qquad (8.19)$$



Rys. 8-1

Przewodnictwo właściwe jest iloczynem ładunku, ruchliwości i koncentracji nośników. Wyrażenie (8.19) przedstawia udział w przewodnictwie jonów określonego znaku; jeśli jest ich więcej, niż jeden typ,to każdy z nich wnosi swój niezależny udział, analogiczny do (8.19).

8.2. Informacje o przewodnictwie elektrycznym materiałów

8.2.1. Przewodnictwo metali

Metale odznaczają się bardzo dobrym przewodnictwem ciepła i elektryczności; ich elektryczne przewodnictwo właściwe wynosi około 10^7–$10^8\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$. Tak wysokie przewodnictwo zawdzięczają metale dużej koncentracji elektronów zdolnych do przewodzenia, która wynosi około $n \cong N_0/(A/d) \cong 10^{28}$ elektronów $\cdot\ m^{-3}$. N_0 jest tu liczbą Avogadry, A masą atomową, d gęstością metalu. Przewodnictwo elektryczne zależy od temperatury, co wyrażamy zwykle posługując się pojęciem oporności właściwej. W pierwszym przybliżeniu oporność właściwa jest liniową funkcją temperatury t (w $^\circ$C)

$$\rho_t = \rho_0(1 + \langle\alpha\rangle t), \tag{8.20}$$

gdzie ρ_0 jest opornością właściwą w temperaturze 0 $^\circ$C, zaś $\langle\alpha\rangle$ średnim współczynnikiem temperaturowym oporności w zakresie od 0 $^\circ$C do t $^\circ$C

$$\langle\alpha\rangle = \frac{\rho_t - \rho_0}{\rho_0 \cdot t}. \tag{8.21}$$

Przyczyną, z której powodu ρ metali rośnie wraz ze wzrostem temperatury może być zmiana z temperaturą czynników występujących po prawej stronie (8.19). Oczywiście, ładunek elektronu od temperatury nie zależy, w niewielkim również stopniu zależy od niej koncentracja nośników n. W takim razie, główna przyczyna wpływu temperatury tkwi w zależności u(T). Jakościowy obraz tej sytuacji jest następujący. Elektrony przewodnictwa tworzą w metalu gaz elektronowy, który ze względu na bardzo dużą koncentrację nie ma zwykłych własności gazu, w szczególności nie stosuje się do równania stanu Clapeyrona. Elektrony zajmują kolejne stany energetyczne, po dwa elektrony o przeciwnych spinach na każdym poziomie; odległości poziomów są rzędu n^{-1} eV. Wprawdzie w przewodnictwie mogą uczestniczyć tylko elektrony swobodne, zajmujące najwyżej położone stany energetyczne, ale odległości między stanami są tak małe, że stosowane zwykle pole elektryczne jest w stanie uruchomić znaczną część ogólnej koncentracji elektronów n.

Elektrony swobodne poruszają się w polu kulombowskim jonów dodatnich, tworzących sieć krystaliczną metalu. W każdej temperaturze jony wykonują małe drgania termiczne wokół położeń równowagi, przy czym amplituda tych drgań rośnie wraz ze wzrostem temperatury. Ruch termiczny ma charakter statystyczny, fluktuacyjny i stanowi przeszkodę w swobodzie poruszania się elektronów. Powiada się, że elektrony "swobodne" są rozpraszane na drganiach termicznych sieci, co limituje ich

średnią drogę swobodną, a zarazem ich ruchliwość. Tak więc ruch termiczny sieci powoduje w czystym metalu spadek przewodnictwa elektrycznego wraz ze wzrostem temperatury. W metalu stanowiącym stop, a więc zawierającym więcej, niż jeden składnik, w tym również w roztworze stałym, zawierającym niewielką domieszkę innego pierwiastka, może zachodzić dodatkowe rozpraszanie elektronów na atomach domieszki. Tym tłumaczy się duża oporność właściwa niektórych stopów (konstantan, manganin) oraz stosunkowo niewielkie jej zmiany pod wpływem zmian temperatury.

Zmiana oporności metali wraz z temperaturą ma ważne zastosowanie w tzw. termometrii oporowej, której zadaniem jest pomiar temperatury za pośrednictwem pomiaru oporności przewodnika sporządzonego z odpowiedniego materiału (np. bardzo czysty ołów w zakresie od -200 °C do temperatury pokojowej i bardzo czysta platyna w zakresie od temperatury pokojowej do 800 °C).

Wyrażenie (8.20) jest do tych celów za mało dokładne, w praktyce stosuje się wielomian wyższego stopnia:

$$R_t = R_o(1 + at + bt^2 + ct^3). \qquad (8.22)$$

R_t i R_o są opornościami przewodnika odpowiednio w temperaturze t °C i 0 °C, zaś a, b, c są stałymi empirycznymi. Wyznacza się je z pomiaru R_t w określonych i stałych temperaturach, tzw. punktach termometrycznych (np. temperatura topnienia lodu, wrzenia wody, topnienia Cd itd.).

W zakresie bardzo niskich temperatur, w tzw. temperaturach helowych, niektóre metale (np. Tl, Pb, Nb) wykazują osobliwość, zwaną nadprzewodnictwem. W pewnej, charakterystycznej dla metalu temperaturze, oporność spada do wielkości niemierzalnie małej; prąd indukowany w pętli nadprzewodnika może się w nim utrzymywać przez całe miesiące bez widocznych zmian w natężeniu. Dalszą cechą nadprzewodnika jest idealny diamagnetyzm: we wnętrzu metalu wektor indukcji magnetycznej $\underline{B} = 0$.

Mimo, iż wyjaśnienie mechanizmu nadprzewodnictwa natrafiało na wielkie trudności i podane zostało zupełnie niedawno, praktyczne jego zastosowania rozwinęły się o wiele wcześniej. Wykonuje się mianowicie elektromagnesy z uzwojeniem nadprzewodzącym, służące do wytwarzania pól magnetycznych o bardzo dużym natężeniu. W niedalekiej przyszłości przewiduje się wykorzystanie nadprzewodnika do przesyłania energii elektrycznej na duże odległości, ponieważ nie zachodzą w nim straty wywołane ciepłem Joule'a.

8.2.2. Półprzewodniki

Półprzewodniki stanowią obszerną klasę materiałów o przewodnictwie leżącym w szerokim zakresie: od 10^2 do 10^{-8} Ω^{-1} m^{-1}. Należą do nich zarówno pierwiastki: selen (Se), tellur (Te), german (Ge), krzem (Si) i inne, jak i związki: tlenek miedziawy (Cu_2O), siarczek miedziawy (Cu_2S), antymonek indu (InSb), arsenek cynku (Zn_3AS_2), siarczek cynku (ZnS) i inne. Najbardziej uderzającą ich cechą jest niezwykle silna zależność przewodnictwa właściwego od temperatury. Dla półprzewodników samoistnych, tj. będących materiałami niezwykle czystymi, bez śladów domieszek, zależność ta ma postać

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\Delta E/2kT}, \tag{8.23}$$

przy czym σ_0 jest pewną stałą (ale nie jest to przewodnictwo w OK), ΔE jest tzw. energią aktywacji, charakterystyczną dla półprzewodnika, k stałą Boltzmanna, a T temperaturą bezwzględną. Czynnik 2 bierze się stąd, że pojawieniu się elektronu przewodnictwa towarzyszy jednoczesne pojawienie się dziury, wnoszącej dodatkowy udział do przewodnictwa materiału. Energia aktywacji zawiera się w granicach od 0,1 do 2 eV; otrzymuje się ją w badaniach zależności σ od T. Jeśli na podstawie tych badań sporządzimy wykres zależności $\ln \sigma$ od 1/T, to z nachylenia odpowiadającej mu prostej możemy znaleźć $\Delta E/2k$. Im wyższe ΔE, tym silniejsza zależność $\sigma(T)$; przy $\Delta E \geq 0{,}5$ eV półprzewodnik w temperaturze 100 K i niższej praktycznie nie przewodzi prądu elektrycznego, jest więc izolatorem.

Należy tu podkreślić, że nawet bardzo niewielka ilość domieszki, rzędu 10^{-10} % molowych, może podwyższyć przewodnictwo 100 i więcej razy. Ilości takie są niewykrywalne nie tylko tradycyjnymi metodami analizy chemicznej, ale nawet metodami analizy śladowej (np. metodą spektrograficzną). Przewodnictwo elektryczne takich materiałów stanowi najbardziej czułe kryterium ich czystości.

Półprzewodniki są materiałami o niezwykle ważnych zastosowaniach. Można powiedzieć, iż właśnie wprowadzenie półprzewodników do współczesnej elektroniki spowodowało prawdziwą rewolucję w konstrukcji aparatury elektronicznej, rozszerzając niebywale możliwości w tym zakresie (maszyny matematyczne). Przyczyną tak dużego postępu jest między innymi duża niezawodność i miniaturowe rozmiary elementów elektronicznych, budowanych z półprzewodników. Do podstawowych elementów należą tu dioda krystaliczna, zastępująca diodę próżniową i tranzystor, zastępujący triodę próżniową. Dalszy postęp umożliwił konstrukcję układów wielofunkcyjnych, tzw. obwodów scalonych, zastępujących szereg diod i tranzystorów wraz z połączeniami między nimi.

Silna zależność przewodnictwa od temperatury jest wykorzystywana zarówno w termometrii jak i w konstrukcji termistorów. Są to elementy półprzewodnikowe o dużej oporności w stanie "zimnym"; ograniczają przez to uderzenie prądu we włączanej aparaturze. Po pewnym czasie nagrzewają się, ich oporność maleje, a natężenie prądu stopniowo osiąga wartość nominalną. Innym przykładem zastosowania półprzewodników jest konstrukcja ogniw termoelektrycznych; układy o dużej liczbie takich ogniw, połączonych w tzw. baterie słoneczne służą do bezpośredniej zamiany energii promieniowania Słońca na energię elektryczną (rakiety kosmiczne).

8.2.3. Elektrolity

Przewodnictwo jonowe wykazują zarówno ciała stałe (kryształy jonowe o podwyższonej temperaturze), ciecze (roztwory elektrolitów) jak i zjonizowane gazy. Przewodnictwo właściwe tych materiałów również zależy od temperatury, przy czym najsłabszą zależność obserwuje się w gazach. O przewodnictwie gazów będzie jeszcze mowa w rozdziale 8.6, w którym zajmiemy się energią jonizacji cząsteczki gazu.

W elektrolitach ciekłych koncentracja jonów może niekiedy zależeć od temperatury; poza tym ruchliwość jonów w myśl (8.17) rośnie wraz ze wzrostem temperatury dość szybko, ponieważ współczynnik lepkości η silnie maleje ze wzrostem temperatury. W rezultacie przewodnictwo roztworu elektrolitu jest większe w wyższej temperaturze.

Kryształy zbudowane z jonów (np. NaCl) są w temperaturze pokojowej dielektrykami. Wyraźne przewodnictwo jonowe zaczyna się w większości kryształów jonowych dopiero w temperaturze wyższej od 400 ^{o}C. W tej temperaturze amplituda drgań termicznych jonów osiąga na tyle duże rozmiary, że mogą powstawać tzw. defekty strukturalne, czyli odstępstwa od idealnej periodyczności sieci.

Szczegółowe omówienie mechanizmu ich powstawania, koncentracji i udziału w przewodnictwie przedstawiona będzie w innym przedmiocie (chemia fizyczna).

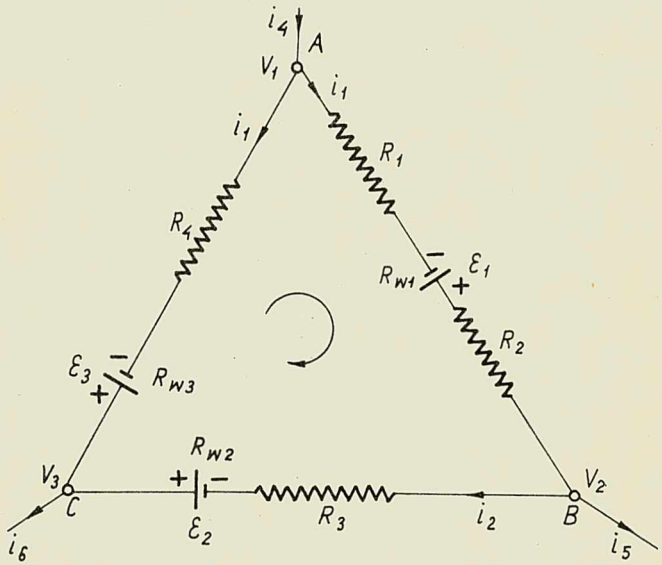
8.3. Prawa Kirchhoffa

Prawo Ohma, w dowolnym sformułowaniu, jest środkiem mało skutecznym w rozwiązywaniu bardziej złożonych obwodów, zawierających rozgałęzienia prądu. Rozwiązanie polega na tym, że zawarte w układzie oporności R_i oraz siły elektromotoryczne ε_i uważamy za znane, poszukujemy natomiast natężeń prądów i_k wraz z ich znakami. Do tego celu służą równania Kirchhoffa pierwszego i drugiego rodzaju, liniowe względem i_k i dlatego łatwe do rozwiązania, np. metodą wyznaczników.

Równania Kirchhoffa pierwszego rodzaju dotyczą węzłów układu, tj. punktów, w których spotykają się co najmniej 3 przewodniki. Ponieważ w stanie stacjonarnym potencjał węzła nie ulega zmianie z biegiem czasu, przeto suma ładunków wnoszonych do węzła przez poszczególne prądy jest równa zeru. Wobec tego

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0, \tag{8.24}$$

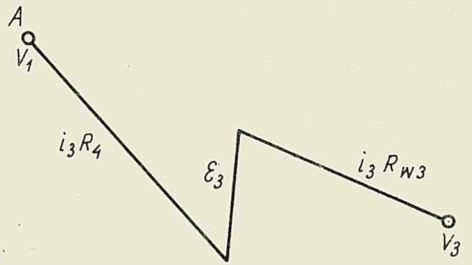
czyli suma natężeń prądów schodzących się w węźle jest równa zeru. Prądy wpływające do węzła uważamy umownie za dodatnie, prądy zeń wychodzące - za ujemne. Równań Kirchhoffa pierwszego rodzaju, (8.24), można napisać dla dowolnego obwodu o jedno mniej, niż wynosi liczba węzłów w obwodzie.



Rys. 8-2

Równania drugiego rodzaju można napisać tylko dla obwodu zamkniętego. Na rysunku 8-2 przedstawiono obwód zamknięty ABC, stanowiący fragment większej sieci elektrycznej. Zaznaczono oporności R_i, oporności wewnętrzne ogniw R_{wi} oraz ich siły elektromotoryczne ε_i wraz ze znakami. Wielkości te uważamy za znane. Nie znamy natomiast natężeń prądów i_k, a nawet nie wiemy, w którą stronę płyną poszczególne prądy. Wobec tego kierunki ich przepływów możemy zaznaczyć dowolnie ; jeśli w dalszym rachunku okaże się, że np. $i_3 < 0$, to w rzeczywistości i_3 płynie (w sensie konwencjonalnym, tzn. kierunek przepływu

prądu odpowiada kierunkowi ruchu ładunku dodatniego) w kierunku przeciwnym, niż zaznaczony na rysunku.



Rys. 8-3

Jeśli jednak już przyjęto kierunki i_k, jak na rys. 8-2, to oznacza to, że $V_1 > V_2$, $V_1 > V_3$ i $V_2 > V_3$. Prześledzimy teraz spadki potencjału wzdłuż drogi AC (rys. 8-3). Mamy tu spadek potencjału i_3R_4, następnie skokowy wzrost potencjału o ε_3 i ponownie spadek i_3R_{w3}. Według prawa Ohma:

$$V_1 - V_3 = i_3(R_4 + R_{w3}) - \varepsilon_3.$$

Analogicznie

$$V_1 - V_2 = i_1(R_1 + R_2 + R_{w1}) - \varepsilon_1$$

oraz

$$V_2 - V_3 = i_2(R_3 + R_{w2}) - \varepsilon_2.$$

Można teraz dodać te równania w taki sposób, by wyeliminować potencjały węzłów. Otrzymamy wówczas

$$i_1(R_1 + R_2 + R_{w1}) + i_2(R_3 + R_{w2}) - i_3(R_4 + R_{w3}) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Ten sam wynik możemy również otrzymać bez posługiwania się prawem Ohma, lecz stosując następującą konwencję:

i. Wybieramy określony kierunek obchodzenia obwodu zamkniętego, zaznaczając go na rysunku.

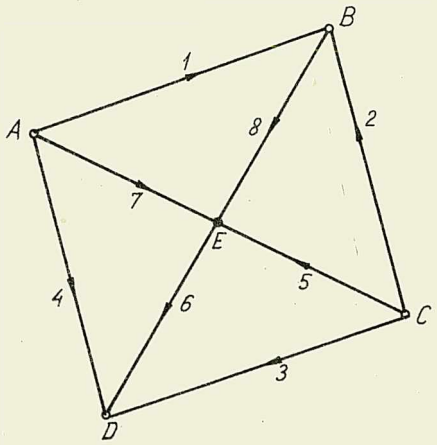
ii. Prądy płynące zgodnie z przyjętym kierunkiem obchodzenia obwodu uważamy za dodatnie (i_1, i_2), przeciwnie zaś - za ujemne (i_3).

iii. Siły elektromotoryczne, podwyższające potencjał w kierunku obchodzenia obwodu uważamy za dodatnie (ε_1, ε_2), obniżające zaś - za ujemne (ε_3).

Stosując tą konwencję możemy ogólnie sformułować prawo Kirchhoffa drugiego rodzaju w następujący sposób

$$\sum_{m=1}^{r} i_m R_m = \sum_{n=1}^{s} \varepsilon_n, \qquad (8.25)$$

czyli suma sił elektromotorycznych w obwodzie zamkniętym równa jest sumie spadków potencjału.



Rys. 8-4

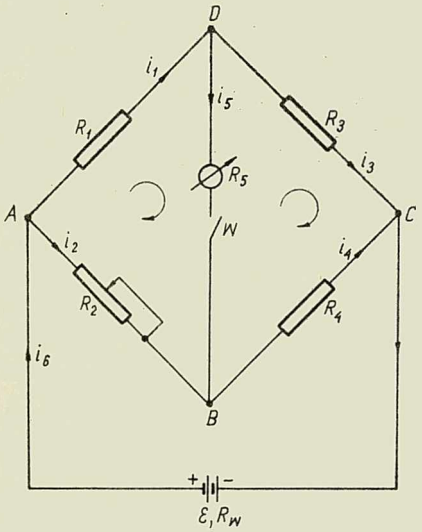
Równań Kirchhoffa drugiego rodzaju można napisać tyle, ile wynosi najmniejsza liczba figur geometrycznych, z których można jednoznacznie zbudować pełny obwód. Schematycznie obwód złożony jest przedstawiony na rys. 8-4. Można go zbudować jednoznacznie z czterech trójkątów ABE, BEC, CED, DEA; można go także zbudować z trzech trójkątów, np. ABD, CBD, ABE i z czworoboku ABCD. Każdy ze sposobów prowadzi do czterech równań liniowych drugiego rodzaju. Wykorzystanie węzłów prowadzi nas do dalszych czterech równań liniowych pierwszego rodzaju, co pozwala jednoznacznie obliczyć 8 natężeń prądów.

8.4. Niektóre metody pomiarowe w elektrodynamice

8.4.1. Niezrównoważony mostek oporowy Wheatstone'a

Pomiar oporności metodą mostka Wheatstone'a jest ogólnie znany - przypomnimy go tu jedynie krótko. Schemat układu jest przedstawiony na rys. 8-5. Mostek składa się z czterech oporników R_1-R_4, połączonych w czworobok; jedna z przekątnych zawiera galwanometr wraz z urządzeniami pomocniczymi (wyłącznik, boczniki do zmiany czułości), druga

jest zasilana z baterii akumulatorów o sile elektromotorycznej ε i oporności wewnętrznej R_w. Przypuśćmy, że mierzoną opornością jest R_1, natomiast R_2-R_4 są znane, przy tym R_2 może być zmieniana w znany sposób.



Rys. 8-5

W ogólnym przypadku, gdy zamknięcie wyłącznika W powoduje przepływ prądu i_5 przez galwanometr, prawa Kirchhoffa prowadzą do następującego układu równań:

$$\begin{aligned}
&\text{A:} && -i_1 - i_2 + i_6 = 0,\\
&\text{B:} && i_1 - i_3 - i_5 = 0,\\
&\text{D:} && i_2 - i_4 + i_5 = 0,\\
&\text{ABD:} && i_1R_1 + i_5R_5 - i_2R_2 = 0,\\
&\text{BCD:} && i_3R_3 - i_4R_4 - i_5R_5 = 0,\\
&\text{ADC}\varepsilon\text{:} && i_2R_2 + i_4R_4 + i_6R_w = \varepsilon .
\end{aligned} \qquad (8.26)$$

Układ ten można rozwiązać, tj. obliczyć i_1-i_6, np. metodą wyznaczników. W obecnej dyskusji zachowania się mostka niezrównoważonego nie jest to potrzebne. Zajmiemy się wpierw mostkiem zrównoważonym, tj. doprowadzonym do stanu $i_5 = 0$, za pomocą doboru odpowiedniej wartości R_2. Mamy wówczas $V_B = V_D$, oraz $i_1 = i_3$, $i_2 = i_4$, a z czwartego i piątego równania (8.26)

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} . \qquad (8.27)$$

(8.27) jest warunkiem równowagi mostka; jeśli cztery oporniki mostka R_1-R_4 spełniają taką proporcję, to $i_5 = 0$, czyli przez galwanometr nie płynie prąd po włączeniu W. Warto zauważyć, że wielkość ε nie ma wpływu na stan równowagi mostka, jeśli tylko prąd płynący przez R_1-R_4 nie powoduje zmiany ich oporności wskutek wydzielającego się ciepła Joule'a. Wielkość ε wpływa natomiast na czułość mostka, tj. dokładność, z jaką można określić stan równowagi.

W tym stanie mamy również

$$i_1R_1 - i_2R_2 = 0.$$

Przypuśćmy teraz, że z jakichkolwiek powodów oporność R_1 uległa niewielkiej zmianie: R_1 jest na przykład termometrem oporowym umieszczonym w przestrzeni, której temperatura nas interesuje, czyli

$$R_1 = R_{01}(1 + \alpha t), \tag{8.28}$$

gdzie R_{01} jest opornością zmierzoną w 0 °C, a α temperaturowym współczynnikiem zmian oporności. Jeśli mostek został zrównoważony w temperaturze 0 °C, to w temperaturze t °C przez galwanometr będzie płynął prąd, ponieważ

$$i_1 R_{01} + i_1 R_{01} \alpha t - i_2 R_2 + i_5 R_5 = 0,$$

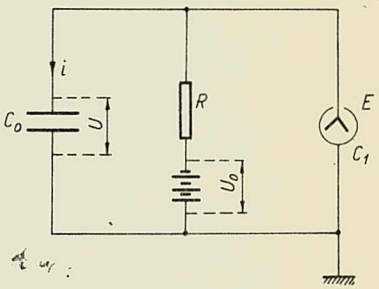
czyli

$$i_5 = -i_1 \frac{R_{01}}{R_5} \alpha t. \tag{8.29}$$

Widzimy, że prąd i_5 jest proporcjonalny do temperatury; w tym przypadku człony nieliniowe w (8.28) można zwykle pominąć. W ten sposób można mierzyć bezpośrednio temperaturę, lub np. indukcję pola magnetycznego, jeśli R_1 jest sondą bizmutową. Sonda bizmutowa jest opornikiem, nawiniętym na materiał izolacyjny przy użyciu drutu bizmutowego; zmiany oporności tego metalu są proporcjonalne do wielkości B indukcji pola magnetycznego. Widać również, że mostek niezrównoważony może być wykorzystany jako element automatycznej regulacji, ponieważ zmiana znaku temperatury powoduje zmianę kierunku przepływu prądu i_5.

8.4.2. Obwód RC

Mamy dany obwód złożony z pojemności C_0, oporności R i baterii o napięciu U_0, połączonych szeregowo (rys. 8-6). Kondensator nie przewodzi prądu stałego, dlatego przepływ następować może jedynie w okresie ładowania kondensatora. Jeśli opornik R jest duży, to proces biegnie wolno; aktualne napięcie U na kondensatorze i jego zmiany mogą być mierzone za pośrednictwem elektrometru ($C_1 \ll C_0$), a łączna pojemność wynosi $C = C_0 + C_1$. Prąd ładowania i możemy obliczyć na podstawie prawa Ohma: i zależy od aktualnej różnicy napięć U_0 i U, ponieważ oba napięcia skierowane są w strony przeciwne



Rys. 8-6

$$U_0 - U = iR = R \frac{dQ}{dt} = RC \frac{dU}{dt}, \tag{8.30}$$

stąd mamy

$$\frac{dU}{U_0 - U} = \frac{dt}{RC}$$

oraz

$$-\ln (U_o - U) = \frac{t}{RC} + \text{const.}$$

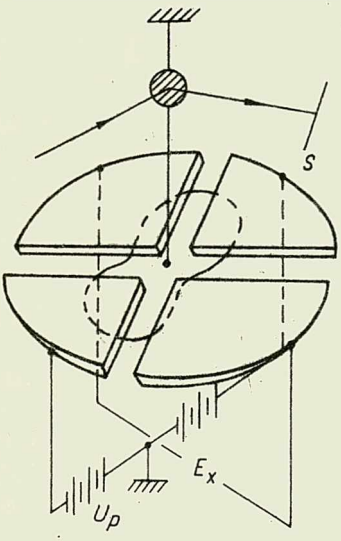
Wartość stałej w ostatnim równaniu wyznaczyć można z warunku początkowego: $t = 0 \supset U = 0$, czyli $\text{const} = -\ln U_o$. Wobec tego

$$\ln \frac{U_o}{U_o - U} = \frac{t}{RC}$$

lub

$$U = U_o(1 - e^{-t/RC}). \qquad (8.31)$$

Pojawiający się tu iloczyn $RC = \tau$ ma wymiar czasu i nosi nazwę stałej czasowej τ obwodu. τ równe jest odstępowi czasu, po którego upływie napięcie na kondensatorze wzrośnie do $(e - 1)/e$ części U_o. Prostszą definicję czasu τ można otrzymać dla obwodu podobnego do 8-6, lecz nie zawierającego baterii. Kondensator C_o trzeba wówczas naładować z zewnątrz do napięcia U_o, a po odłączeniu baterii obserwuje się spadek U do zera, wskutek rozładowania się kondensatora przez oporność R. Analizę tego przypadku pozostawiamy Czytelnikowi. Dla takiego obwodu τ równy jest odstępowi czasu, po którego upływie napięcie na kondensatorze maleje do 1/e swej początkowej wartości.



Rys. 8-7

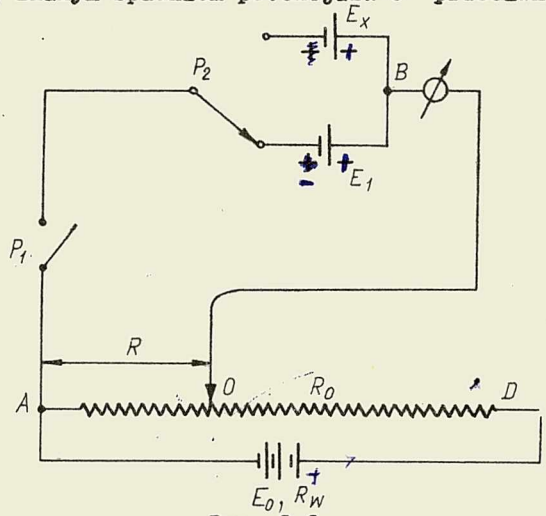
W układzie współrzędnych $\ln U_o/(U_o-U)$ względem t wykresem par liczbowych (t, U) jest linia prosta. Z jej nachylenia można otrzymać stałą czasową RC układu, a znając C można obliczyć R. Układ RC stanowi więc metodę pomiaru dużych oporności, praktycznie $R \geq 10^6\ \Omega$. Może się zdarzyć przypadek, gdy pary liczbowe (t, U) układają się na krzywej, nie na prostej. Odpowiada to nieliniowej oporności R(U), zależnej od napięcia. Oporność taka nie spełnia prawa Ohma $R = U/i$, bowiem R nie jest wielkością stałą.

Zauważyć trzeba ponadto, że elektrometr E nie powinien pobierać prądu. W tym celu oporność jego izolacji powinna być bardzo duża, a pojemność elektrostatyczna bardzo mała. Miernikiem o takich własnościach jest elektrometr kwadrantowy Doležalka, przedstawiony na rys. 8-7. Jest to puszka metalowa rozcięta na 4 kwadranty wzajemnie od siebie izolowane. Na parę przeciwległych kwadrantów przykłada się z baterii napię-

cie pomocnicze U_p, zaś na drugą parę mierzoną różnicę potencjałów E_x. W środku puszki znajduje się elektroda metalowa w kształcie "biszkopta", zawieszona na cienkiej nici metalicznej. Pod wpływem ładunków zgromadzonych na kwadrantach biszkopt doznaje działania pary sił; obrót obserwowany jest za pomocą przesunięcia promienia świetlnego na skali S. Przyrząd ten ma pewną swoją własną pojemność elektrostatyczną C_1, zwykle bardzo małą. Ponieważ zasada jego działania opiera się na występowaniu sił Coulomba, elektrometr nie pobiera prądu podczas pomiaru; może więc również znaleźć zastosowanie w pomiarze siły elektromotorycznej ogniwa.

8.4.3. Metoda kompensacyjna pomiaru SEM ogniwa

Najbardziej rozpowszechnioną metodą pomiaru siły elektromotorycznej jest metoda kompensacyjna, polegająca na zrównoważeniu siły elektromotorycznej znanym spadkiem potencjału o przeciwnej polaryzacji.



Rys. 8-8

Zasadniczy schemat tej metody jest przedstawiony na rys. 8-8. Bateria akumulatorów o sile elektromotorycznej ε_o i oporności wewnętrznej R_w powoduje przez opornicę AD przepływ prądu o natężeniu

$$i_o = \frac{\varepsilon_o}{R_o + R_w} .$$

Część spadku napięcia o wielkości $i_o \cdot R$ jest odgałęziona i przyłożona na jedno z ogniw ε_1 lub ε_x, zależnie od położenia przełącznika P_2. Przypuśćmy, że w pierwszej fazie pomiaru P_2 jest zamknięty jak na rys. 8-8, przy czym ε_1 oznacza ogniwo wzorcowe o dokładnie zna-

nej sile elektromotorycznej. Chwilowemu zamknięciu przełącznika P_1 towarzyszy na ogół przepływ prądu w obwodzie odgałęzionym, wskazywany przez galwanometr G. Metodą prób możemy tak dobrać oporność wzdłuż AC, by po zamknięciu P_1 w obwodzie ABCA nie płynął prąd. Jeśli nastąpiło to dla oporności R_1 wzdłuż AC, to:

$$i_o R_1 - \varepsilon_1 = R_1 \cdot \frac{\varepsilon_o}{R_o + R_w} - \varepsilon_1 = 0, \tag{8.32}$$

stąd

$$\varepsilon_1 = R_1 \cdot \frac{\varepsilon_o}{R_o + R_w}.$$

Zmieniamy obecnie za pomocą P_2 ogniwo ε_1 na ε_x i ponownie wyszukujemy taką wartość oporności wzdłuż AC - tym razem będzie to np. R_x - by galwanometr G nie wskazywał przepływu prądu. Mamy analogicznie

$$\varepsilon_x = R_x \cdot \frac{\varepsilon_o}{R_o + R_w}.$$

W takim razie podzielenie obu równań stronami daje proporcję:

$$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_1} = \frac{R_x}{R_1} \tag{8.33}$$

pozwalającą obliczyć ε_x ze znanego ε_1 i zmierzonych R_x, R_1. W (8.33) nie występują kłopotliwe stałe ε_o, R_w trudne do wyznaczenia.

Ogniwem wzorcowym, najbardziej rozpowszechnionym, jest ogniwo Westona o sile elektromotorycznej:

$$\varepsilon_w = 1{,}0183 \text{ V} \quad \text{w } 20\ ^\circ\text{C}.$$

Zależność ε_w od temperatury jest niewielka:

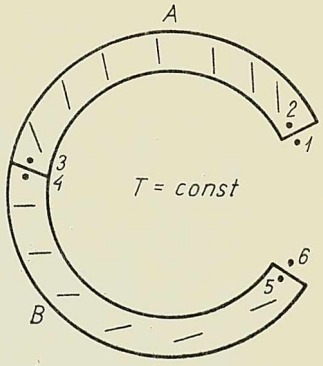
$$\frac{d\varepsilon_w}{dt} = -40\ \mu\text{V}/1\ ^\circ\text{C},$$

lecz w dokładnych pomiarach musi być uwzględniona. Opis konstrukcji ogniwa opuścimy.

8.5. Kontaktowa różnica potencjałów

Jeśli złączymy z sobą ściśle dwa różne metale A i B (rys. 8-9), to powstaje między nimi niewielka różnica potencjałów, rzędu kilkudziesięciu miliwoltów, zwana kontaktową różnicą potencjałów. Znacznie większą kontaktową różnicę potencjałów wykazuje granica faz metal/półprzewodnik. Zakładamy przy tym, iż zarówno oba metale jak i styk między nimi znajdują się w tej samej temperaturze.

Pojawienie się tej różnicy potencjałów jest związane z różnym potencjałem chemicznym elektronów w obu metalach. Nie będziemy tu bliżej objaśniać tego pojęcia; bardziej szczegółowo zapozna się z nim Czytelnik w kursie chemii fizycznej. Warto jednak wspomnieć o tym, iż dla dwu stykających się metali, pozostających w stanie równowagi, potencjał chemiczny elektronów w każdym z tych metali musi być taki sam; pewna liczba elektronów przepływa przez granicę faz z jednego metalu do drugiego, co powoduje powstanie różnicy potencjałów.



Rys. 8-9

Rozważmy bardziej szczegółowo skoki potencjałów dla punktów 1-6 (rys. 8-9), umieszczonych bardzo blisko granicy faz obu metali.

12 - skok potencjału próżnia/metal A, związany ze skokiem koncentracji elektronów na granicy faz,

23 - punkty ekwipotencjalne,

34 - skok potencjału metal A/metal B, czyli wewnętrzna kontaktowa różnica potencjałów; wielkość niemierzalna,

45 - punkty ekwipotencjalne,

56 - skok potencjału metal B/próżnia,

16 - zewnętrzna kontaktowa różnica potencjałów, U_{AB}.

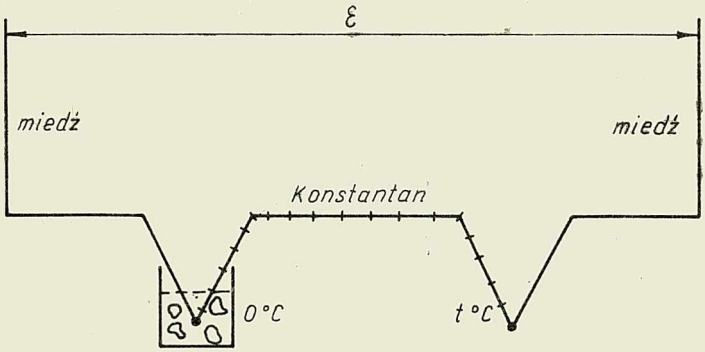
Korzystając z definicji potencjału przewodnika możemy napisać

$$U_{AB} = |V_B - V_A| = \frac{1}{e} |W_{A\infty} - W_{B\infty}|, \qquad (8.34)$$

gdzie $W_{A\infty}$ oznacza pracę usunięcia elektronu z powierzchni metalu A, czyli pracę wyjścia elektronu. Widzimy więc, że kontaktowa różnica potencjałów jest proporcjonalna do różnicy prac wyjścia elektronu z obu metali.

Można łatwo wykazać, że umieszczenie między dwoma metalami A i B trzeciego przewodnika, C, nie zmienia kontaktowej różnicy potencjałów U_{AB}. Zamknięcie obwodu (rys. 8-9) nie spowoduje przepływu prądu, ponieważ w obwodzie występować będą dwa skoki potencjałów o jednakowej wielkości i przeciwnym kierunku.

Sytuacja pod tym względem ulega zasadniczej zmianie jeżeli w obwodzie, zawierającym kilka styków różnych metali, jeden z nich ma temperaturę inną niż pozostałe. Przykład takiego obwodu, składającego się z dwóch różnych metali, jest pokazany na rys. 8-10. Przewodnikami ze-

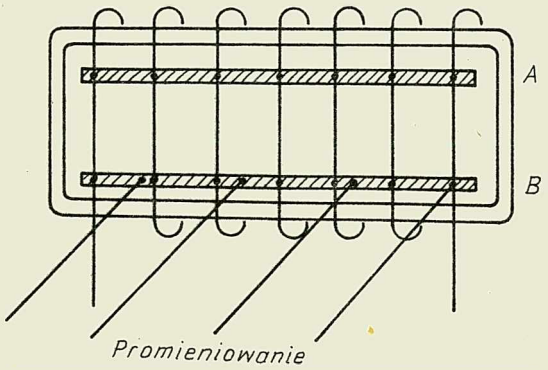


Rys. 8-10

wnętrznymi są najczęściej druty miedziane, środkowym odcinkiem może być konstantan. Powstają dwa styki zwane stykami termoelektrycznymi, przy czym często jeden z nich umieszcza się w kąpieli o temperaturze 0 °C. Układ nosi nazwę termopary; powstająca w nim siła elektromotoryczna (TSEM) zależy wówczas od temperatury styku "gorącego"

$$\varepsilon = a + bt + ct^2. \qquad (8.35)$$

Na podstawie znajomości stałych a, b, c (pomiar ε w kilku znanych temperaturach) oraz ε możemy dokonywać pomiaru temperatury w interesujących nas punktach. W przypadkach, gdy wystarczy mniejsza dokładność, odczytuje się t bezpośrednio na miliwoltomierzu (wycechowanym w °C); w pomiarach bardziej dokładnych mierzy się ε metodą kompensacji. W pierwszym przypadku wynik jest tym dokładniejszy, im większa jest oporność wewnętrzna miernika w porównaniu do oporności termopary. Siła elektromotoryczna termopary miedź/konstantan wynosi w przybliżeniu 50 μV/1 °C.



Rys. 8-11

Poszczególne termoogniwa można łączyć szeregowo w termostosy (rys. 8-11), których czułość jest tak duża, że znajdują zastosowanie w pomiarach natężenia promieniowania. Szereg styków termoelektrycznych B, przyklejonych do izolowanej oraz poczernionej od zewnątrz cienkiej folii metalicznej, tworzy układ styków gorących; analogiczny szereg styków A, chronionych przed promieniowaniem, jest zbiorem styków "zimnych". Powstająca w układzie TSEM jest ściśle proporcjonalna do gęstości mocy promieniowania, a dla promieniowania monochromatycznego nie zależy od długości fali tak długo, jak długo absorpcja w poczernionej folii metalicznej jest zupełna. Termostos może znaleźć również zastosowanie odwrotne, jako bezpośredni przetwornik energii promieniowania w energię elektryczną. Tego typu baterie słoneczne montuje się w pojazdach kosmicznych.

Odwróceniem efektu termoelektrycznego (dana różnica temperatur, powstaje różnica potencjałów) jest efekt Peltiera. Polega on na tym, że jeśli przez termoparę przepływa prąd elektryczny, to na każdym ze styków wytwarza się trochę inna ilość ciepła, powstaje więc różnica temperatur. Jeśli przez q oznaczymy ilość wydzielającego się ciepła Joule'a, na każdym ze styków taką samą, a przez q_p dodatkowy efekt cieplny wynikający ze zjawiska Peltiera, to na styku gorącym wydziela się ilość ciepła

$$Q_g = q + q_p,$$

a na zimnym

$$Q_z = q - q_p,$$

zatem

$$q_p = \frac{1}{2}(Q_g - Q_z) \qquad (8.36)$$

jest miarą efektu Peltiera; jednocześnie jest to ciepło przetransportowane w ciągu jednostki czasu od styku zimnego do styku gorącego. Termopara, pracująca w układzie odróconym, jest więc "pompą cieplną" i stanowi zasadę konstrukcji układów chłodzących (lodówki termoelektryczne).

8.6. Potencjał jonizacji cząsteczki gazu

Gazy również mogą przewodzić prąd elektryczny, jeśli zawierają jony. Powstają one pod działaniem czynników jonizacyjnych, do których należą: wysoka temperatura, promieniowanie nadfioletowe i rentgenowskie, cząstki emitowane przez substancje radioaktywne, wreszcie zderzenia z elektronami. W tym paragrafie będzie nas interesował wyłącznie mechanizm zderzeń cząsteczek gazu z elektronami.

Jeśli energia elektronu, poruszającego się w rozrzedzonym gazie jest niewielka (kilka eV), to w zderzeniu praktycznie nie zachodzi wymiana energii między elektronem a cząsteczką. Rozważmy takie zderzenie bardziej szczegółowo: niech m i M oznaczają masę elektronu i cząsteczki; v_1 jest prędkością elektronu przed zderzeniem, v_2 - po zderzeniu. Prędkość cząsteczki przed zderzeniem jest niewielka i możemy ją zaniedbać, natomiast prędkość po zderzeniu oznaczymy przez V. Zasady zachowania mają w tym przypadku postać

$$mv_1 = mv_2 + MV,$$

$$\frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} mv_2^2 + \frac{1}{2} MV^2.$$

Rozwiązanie tego układu równań prowadzi do obliczenia prędkości cząsteczki po zderzeniu

$$V = \frac{2\,mv_1}{m+M} \cong \frac{2\,mv_1}{M}, \tag{8.37}$$

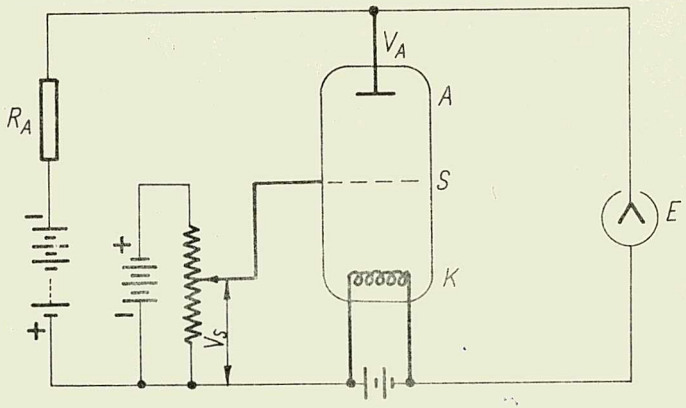
ponieważ $m \ll M$. Zysk energii kinetycznej ΔT cząsteczki jest taki sam jak jej strata dla elektronu wskutek zderzenia

$$\Delta T = \frac{1}{2} MV^2 \cong \frac{2\,m^2 v_1^2}{M} = \frac{4m}{M} T_o, \tag{8.38}$$

gdzie T_o oznacza energię kinetyczną elektronu przed zderzeniem. Widzimy z tego, że $\Delta T/T_o$ jest bardzo małe, ponieważ $m \ll M$. Na przykład dla elektronu i atomu helu $4m/M = (1,4)/(1840,4) \cong 5 \cdot 10^{-4}$; znaczy to, że tylko 0,05% energii wymienia elektron w jednym zderzeniu z atomem helu. Wynik ten ma ogólniejsze znaczenie i prowadzi do następującego wniosku: w zderzeniu sprężystym cząstki bardzo lekkiej z bardzo ciężką wymiana energii jest bardzo niewielka, czyli zderzenie takie jest nieskuteczne.

Niewiele zmienia się obraz zderzenia elektronu z cząsteczką w miarę wzrostu energii kinetycznej T_o elektronu, ale tylko do pewnej granicy, zwanej potencjałem jonizacji V_j.

Potencjał jonizacji atomu (cząsteczki) wyrażony w elektronowoltach, równy jest liczbowo pracy oderwania pierwszego elektronu od atomu (cząsteczki). Z chwilą osiągnięcia przez elektron energii $T_o = eV_j$ zderzenie z cząsteczką jest całkowicie niesprężyste, a strata energii kinetycznej jest równa T_o. Rozważania te stały się podstawą opracowania przez Francka i Hertza metody pomiaru potencjałów jonizacji, przedstawionej schematycznie na rys. 8-12. Bańka szklana, zawierająca badany gaz pod ciśnieniem kilku mm Hg zaopatrzona jest w trzy elektrody:



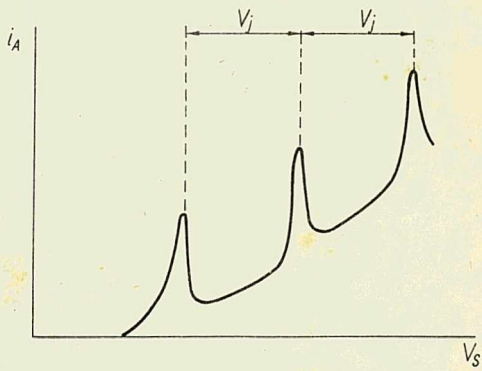
Rys. 8-12

i. Katodę K, wykonaną z cienkiego drutu wolframowego. Po rozgrzaniu prądem z baterii elektrycznej do wysokiej temperatury, katoda emituje elektrony.

ii. Siatkę S, stanowiącą spiralę z drutu i otaczającą katodę. Dodatni potencjał siatki V_s, przyłożony z układu potencjometrycznego, powoduje przyspieszenie elektronów.

iii. Anodę A, stanowiącą cylinder metaliczny, otaczający poprzednie dwie elektrody. Potencjał anody $|V_A| > |V_s|$ tak, iż elektrony przyspieszane przez siatkę nie docierają do anody, natomiast dochodzą do niej jony dodatnie, które mogą powstać drogą jonizacji przez zderzenie. Prąd anody mierzony jest pośrednio przez elektrometryczny pomiar potencjału V_A.

Jeśli $V_s < V_j$, elektrometr nie rejestruje przepływu prądu (rys. 8-13). Z chwilą, gdy siatka osiągnie potencjał jonizacji, prąd jonów dodatnich szybko rośnie; jony te powstają tuż w pobliżu siatki. Przy $V_s > V_j$ jonizacja następuje przed siatką, a jej dodatni potencjał wpływa hamująco na ruch jonów dodatnich; odpowiada to spadkowi natężenia prądu i_A. Ponowny wzrost obserwuje się dla $V_s = 2V_j$, ponieważ po pierwszej jonizacji w okolicy równej połowie odległości katoda-siatka elektron zdąży jeszcze u-

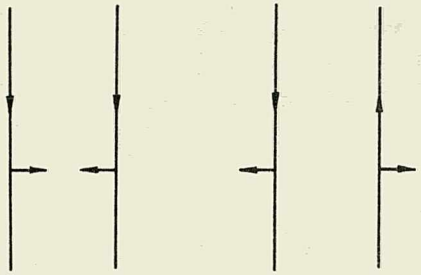


Rys. 8-13

zyskać energię wystarczającą do jonizacji atomów, znajdujących się w pobliżu siatki. Odstęp między kolejnymi maksimami i_A wynosi zatem V_j.

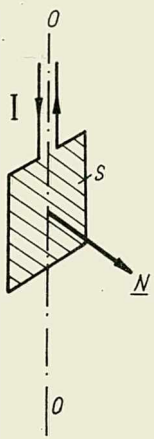
8.7. Pole magnetyczne przewodnika z prądem

Dookoła ładunków elektrycznych umieszczonych w próżni panuje pole elektryczne, przejawiające się działaniem sił wywieranych na ładunek próbny. Siły występują również wtedy, gdy ładunki się poruszają. Jednakże wzajemne oddziaływania ładunków w ruchu są bardziej złożone niż ładunków w spoczynku i nie mogą być wyjaśnione za pomocą jedynie praw elektrostatyki. Przykładem mogą tu być dwa przewodniki z prądem (rys. 8-14). Doświadczalnie stwierdzono, że gdy prądy płynące w obu przewodnikach mają kierunki zgodne, działają między nimi siły przyciągania; gdy prądy płyną w kierunkach przeciwnych, przewodniki działają na siebie siłami odpychania. Działania, występujące między przewodnikami z prądem tłumaczymy za pomocą pojęcia pola magnetycznego - uważamy, że przewodnik z prądem jest źródłem pola magnetycznego.



Rys. 8-14

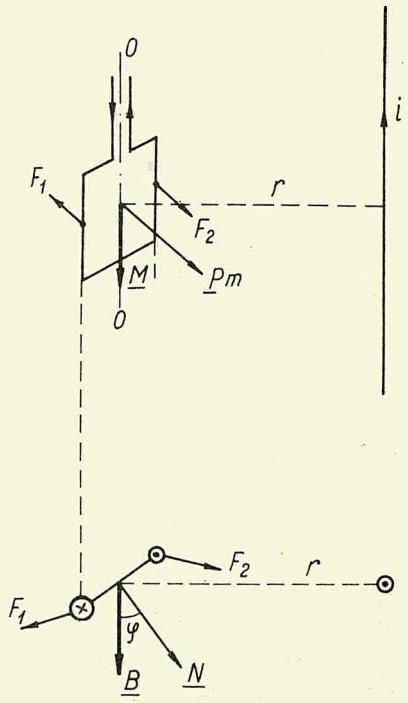
Do zbadania własności tego pola służy tzw. obwód próbny z prądem (rys. 8-15), który jest "detektorem" pola magnetycznego, podobnie jak ładunek jest "detektorem" obecności pola elektrostatycznego. Jest to płaska ramka z przewodnika o dowolnym kształcie, lecz bardzo małych rozmiarów. Przez ramkę płynie prąd o natężeniu I, ponadto może się ona obracać bez tarcia wokół jednej z jej osi, leżącej w płaszczyźnie obwodu. Iloczyn natężenia prądu I oraz powierzchni S objętej przewodnikiem nosi nazwę momentu magnetycznego p_m obwodu próbnego. Niech $\underline{N}$ będzie wektorem jednostkowym, skierowanym wzdłuż normalnej dodatniej do powierzchni obwodu; normalną dodatnią nazywamy prostą prostopadłą do powierzchni S o zwrocie odpowiadającym kierunkowi ruchu postępowego śruby prawej, obracającej się zgodnie z kierunkiem przepływu prądu w ramce. Moment magnetyczny $\underline{p}_m$ jest wektorem o kierunku $\underline{N}$



Rys. 8-15

$$\underline{p}_m = I \cdot S \cdot \underline{N}, \quad A \cdot m^2. \tag{8.39}$$

Jeśli umieścimy obwód próbny w pobliżu przewodnika z prądem (rys. 8-16), to na oba boki ramki równoległe do przewodnika działać będą siły $\underline{F}_1$ i $\underline{F}_2$, przeciwnie skierowane, ponieważ na bok bliższy przewodnikowi działa siła przyciągania, a na dalszy - siła odpychania. Przy odległości r obwodu od przewodnika znacznie większej od liniowych rozmiarów ramki, czyli w przypadku $r \gg S^{1/2}$, obie siły stanowią parę o momencie $\underline{M}$ zależnym od własności ramki ($\underline{p}_m$), przestrzeni otaczającej przewodnik z prądem ($\underline{B}$) oraz od orientacji $\underline{p}_m$



Rys. 8-16

$$\underline{M} = \underline{p}_m \times \underline{B} \qquad (8.40)$$

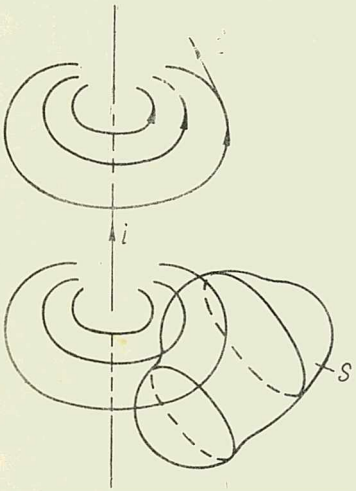
lub skalarnie

$$M = p_m \cdot B \cdot \sin\varphi . \qquad (8.41)$$

Moment siły $\underline{M}$ jest wektorem leżącym w osi obrotu OO ramki i skierowanym zgodnie z regułą śruby prawej (iloczyn wektorowy w 8.40). $\underline{B}$ jest wektorem charakterystycznym dla pola magnetycznego - nosi nazwę wektora indukcji magnetycznej. Wymiarem $\underline{B}$ jest

$$[B] = \frac{[M]}{[I]\ [S]} = 1\ \frac{N \cdot m}{A \cdot m^2} = 1\ \frac{V\,s}{m^2} = 1\ \frac{Wb}{m^2} .$$

1 Wb (weber) jest jednostką strumienia wektora $\underline{B}$; wprowadzimy ją przy końcu tego paragrafu. Kierunek $\underline{B}$ wynika z (8.40): jeśli $\underline{M} = 0$, to $\varphi = 0$ i $\underline{B} \parallel \underline{p}_m$, czyli wektor $\underline{B}$ ma kierunek normalnej dodatniej do obwodu próbnego z prądem zorientowanego w polu magnetycznym w taki sposób, by działający nań moment siły wynosił zero. Ten warunek pozwala nam na wyznaczenie orientacji wektora $\underline{B}$ w przestrzeni otaczającej przewodnik z prądem; jednocześnie badania takie prowadzą do wyznaczenia kształtu linii pola magnetycznego, ponieważ $\underline{B}$ jest zawsze styczny do linii pola. Tym sposobem można się przekonać, iż linie pola magnetycznego wokół przewodnika z prądem mają kształt okręgów, w których środku znajduje się przewodnik (rys. 8-17), są więc krzywymi zamkniętymi. Kierunek obiegu linii jest zgodny z regułą śruby prawej,



Rys. 8-17

a gęstość linii pola, tj. ich liczba przebijająca jednostkowy element powierzchni ustawiony prostopadle do linii równa jest liczbowej wartości $\underline{B}$ w danym miejscu pola. W takim razie mamy

$$B = \frac{dN}{dS_0} \qquad (8.42)$$

przy czym dS_0 jest elementem powierzchni prostopadłym do linii pola. Strumień elementarny wektora $\underline{B}$ przez dowolnie zorientowany element powierzchni dS wynosi zatem $dN_B = \underline{B} \cdot \underline{dS}$, a strumień przez dowolną powierzchnię zamkniętą S (rys. 8-17)

$$N_B = \int_{(S)} \underline{B} \cdot \underline{dS} = 0. \qquad (8.43)$$

(8.43) jest prawem Gaussa-Ostrogradskiego dla pola magnetycznego. W odróżnieniu od pola elektrostatycznego strumień ten zawsze wynosi zero, ponieważ linie pola magnetycznego są krzywymi zamkniętymi. Z tego powodu linia albo nie przebija powierzchni S (wówczas wchodzi w (8.43) z udziałem zero) lub przebija ją dwukrotnie; jeśli wejście linii liczymy dodatnio, to wyjście linii należy policzyć ujemnie.

W przyjętym przez nas układzie jednostek (SI) strumień N_B mierzy się w weberach

$$[N_B] = 1 \text{ Wb}.$$

Z tego powodu $[B] = 1 \text{ Wb/m}^2$.

8.8. Prawo Biota-Savarte'a-Laplace'a

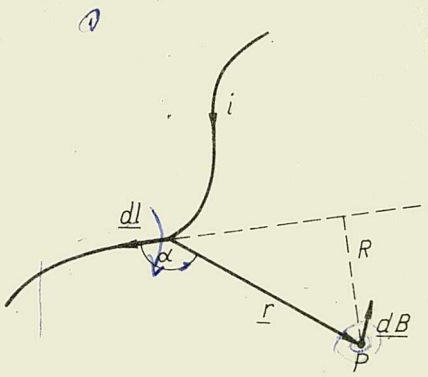
Prawo to pozwala obliczyć indukcję pola magnetycznego, wytwarzanego przez przewodnik o dowolnym kształcie i w dowolnej od niego odległości. Wybierzmy wzdłuż takiego przewodnika (rys. 8-18) element długości dl, który traktujemy jako wektor o zwrocie zgodnym z kierunkiem przepływu prądu. Wektor $\underline{r}$ podaje położenie dowolnego punktu P poza przewodnikiem względem elementu $\underline{dl}$; niech poza tym $\alpha = \sphericalangle \underline{dl}, \underline{r}$. Wektor $\underline{dB}$ generowany przez element przewodnika w punkcie P jest nieskończenie mały, a jego zwrot określa reguła śruby prawej, odnosząca się do kierunku obiegu linii pola otaczającego $\underline{dl}$. W sytuacji

przedstawionej na rys. 8-18 $\underline{dB}$ jest skierowany nad płaszczyznę rysunku i jest do niej prostopadły. Wielkość $\underline{dB}$ zależy od natężenia prądu i, od wielkości $\underline{r}$ oraz od wzajemnej orientacji $\underline{dl}$ i $\underline{r}$. W zapisie skalarnym prawo Biota-Savarte'a-Laplace'a ma postać

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{i\, dl \sin\alpha}{r^2}, \qquad (8.44)$$

przy czym

$$\frac{\mu_o}{4\pi} = 10^{-7}\ \frac{Wb}{A \cdot m} \qquad (8.45)$$



Rys. 8-18

jest stałym współczynnikiem, związanym z układem jednostek. Wielkość μ_o nosi nazwę bezwzględnej przenikalności magnetycznej próżni.

Korzystając z tego, że zwrot $\underline{dB}$ możemy otrzymać również za pomocą reguły śruby prawej z iloczynu wektorowego $\underline{dl} \times \underline{r}$ (obrót o kąt α następuje od $\underline{dl}$ do $\underline{r}$), można (8.44) zapisać w postaci związku wektorowego:

$$\underline{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{i\, \underline{dl} \times \underline{r}}{r^3}. \qquad (8.46)$$

Prawo Biota-Savarte'a-Laplace'a odnosi się do elementu przewodnika, ma więc postać różniczkową. Jeśli chcemy znać indukcję pola, wytwarzanego przez przewodnik skończonej długości, trzeba wykonać całkowanie (8.44) na całą interesującą nas długość przewodnika. Rachunek ten jest prosty w dwóch szczególnych przypadkach, którymi zajmiemy się kolejno.

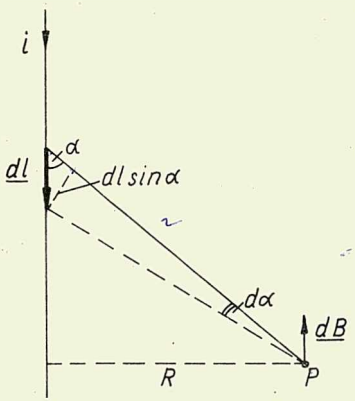
8.8.1. Nieskończenie długi przewodnik z prądem

W tym przypadku mamy (rys.8.19) $dl \sin\alpha / r = d\alpha$ oraz $R = r \sin\alpha$. Wobec tego z (8.44) otrzymujemy

$$\frac{1}{r}\ \frac{dl \sin\alpha}{r} = \frac{\sin\alpha}{R}\, d\alpha.$$

W takim razie całkowanie (8.44) względem długości w granicach $\pm\infty$ zamienia się na całkowanie względem kąta α w granicach od 0 do π

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi}\, i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl \sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi}\ \frac{i}{R} \int_0^{\pi} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_o}{4\pi}\ \frac{2i}{R},$$



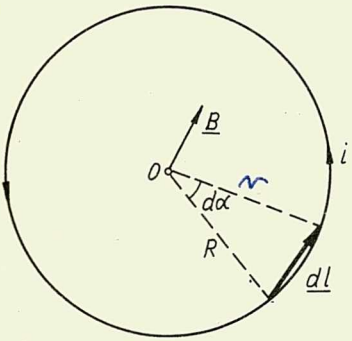
Rys. 8-19

czyli

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{2i}{R}. \qquad (8.47)$$

Widzimy, że indukcja pola magnetycznego, wytwarzanego przez nieskończenie długi przewodnik z prądem jest propocjonalna do natężenia prądu oraz odwrotnie proporcjonalna do odległości punktu od przewodnika. W odległości 1 m od przewodnika, przez który płynie prąd o natężeniu 1 A, indukcja wynosi $2\cdot10^{-7}$ Wb/m^2.

8.8.2. Przewodnik kołowy z prądem



Rys. 8-20

Jest to przypadek jeszcze prostszy niż 8.8.1, ponieważ tutaj (rys. 8-20) sin α = 1 oraz dl/R = dα. Mamy więc

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i}{R}\int_0^{2\pi} d\alpha,$$

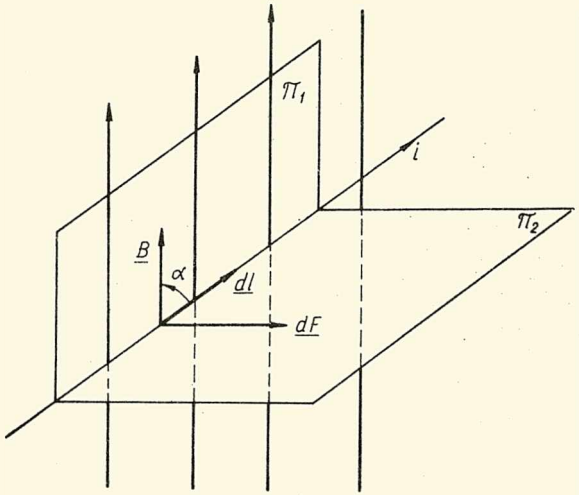
czyli

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{2\pi i}{R}. \qquad (8.48)$$

W środku przewodnika kołowego o promieniu 1 m, przez który płynie prąd o natężeniu 1 A, panuje pole magnetyczne o indukcji $6{,}28\cdot10^{-7}$ Wb/m^2.

8.9. Prawo Ampere'a

Prawo to określa siłę dF, działającą na nieskończenie mały element długości dl przewodnika z prądem po umieszczeniu go w polu magnetycznym o indukcji B. W ogólnym przypadku przewodnik nie musi być prostopadły do linii pola; przypuśćmy, że element dl zawiera kąt α z kierunkiem wektora B (rys. 8.21). Siła dF jest jednak zawsze prostopadła do płaszczyzny π_1, przechodzącej przez dl i B, ponadto jest proporcjonalna do długości elementu dl, do wielkości indukcji B oraz do natężenia prądu i płynącego przez przewodnik



Rys. 8-21

$$\underline{dF} = i\,\underline{dl} \times \underline{B}. \tag{8.49}$$

Do określenia kierunku działającej siły używa się często reguły lewej dłoni: jeśli palce są skierowane wzdłuż konwencjonalnego kierunku przepływu prądu, a linie wektora $\underline{B}$ przebijają dłoń, to odchylony kciuk wskazuje kierunek siły $\underline{dF}$.

8.10. Siła Lorentza

Siła ta występuje podczas działania pola elektrycznego i magnetycznego na poruszający się swobodny ładunek. W ogólnym przypadku oba pola mogą występować łącznie, dlatego siła Lorentza ma dwie składowe: elektryczną i magnetyczną.

8.10.1. Składowa elektryczna siły Lorentza

Jeśli swobodny ładunek (nośnik prądu) o wielkości q porusza się w polu o natężeniu $\underline{E}$, to działającą nań siłę $\underline{F}_E$ otrzymujemy bezpośrednio z definicji $\underline{E}$

$$\underline{F}_E = q \cdot \underline{E}.$$

8.10.2. Składowa magnetyczna siły Lorentza

Składową magnetyczną możemy otrzymać z prawa Ampere'a, jeśli zastąpimy przewodnik z prądem strumieniem nośników. Niech S będzie przekrojem strumienia nośników, poruszających się z prędkością v w ob-

szarze pola magnetycznego. Zatem $i = j \cdot S = nqvS$, gdzie j jest gęstością prądu, n koncentracją nośników. Mamy wówczas z (8.49)

$$\Delta F_B = n\,q\,v\,S\,\Delta l\,B\sin\alpha,$$

przy czym pole działa na odcinek strumienia o długości Δl. W takim razie $S\cdot\Delta l$ przedstawia objętość strumienia w obszarze pola, a $n\cdot S\,\Delta l$ jest ogólną liczbą nośników w tej objętości. Na jeden nośnik działa więc siła

$$F_B = q\,v\,B\sin\alpha,$$

a w zapisie wektorowym

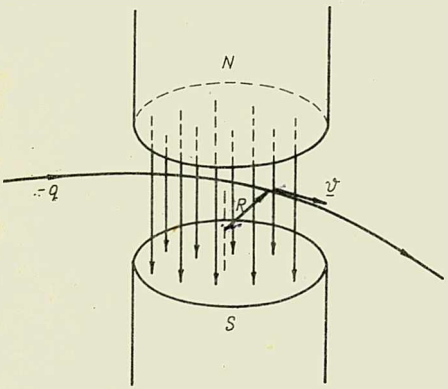
$$\underline{F}_B = q\,\underline{v}\times\underline{B}. \tag{8.50}$$

Ogólne wyrażenie dla siły Lorentza ma więc postać

$$\underline{F}_L = q(\underline{E} + \underline{v}\times\underline{B}). \tag{8.51}$$

8.10.3. Ruch ładunku w polu magnetycznym

Przypuśćmy, że w obszar jednorodnego pola magnetycznego wpada z prędkością $\underline{v} \perp \underline{B}$ cząstka naładowana o ładunku q (rys. 8-22). Ponieważ jest $\underline{v} \perp \underline{B}$, będzie również $\underline{F}_B \perp \underline{v}$, czyli składowa magnetyczna siły Lorentza (8.51) będzie siłą dośrodkową. Pod wpływem tej siły cząstka naładowana będzie się poruszała w obszarze pola po łuku o promieniu R, który wyznaczymy z warunku



Rys. 8-22

$$\frac{m\,v^2}{R} = q\,v\,B, \tag{8.52}$$

przy czym m oznacza masę cząstki. Prędkość v w tym związku jest wartością nie znaną; możemy ją wyrazić przez różnicę potencjałów $V_1 - V_2 = U$, która spowodowała przyśpieszenie jonu do prędkości v

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = q\cdot U. \tag{8.53}$$

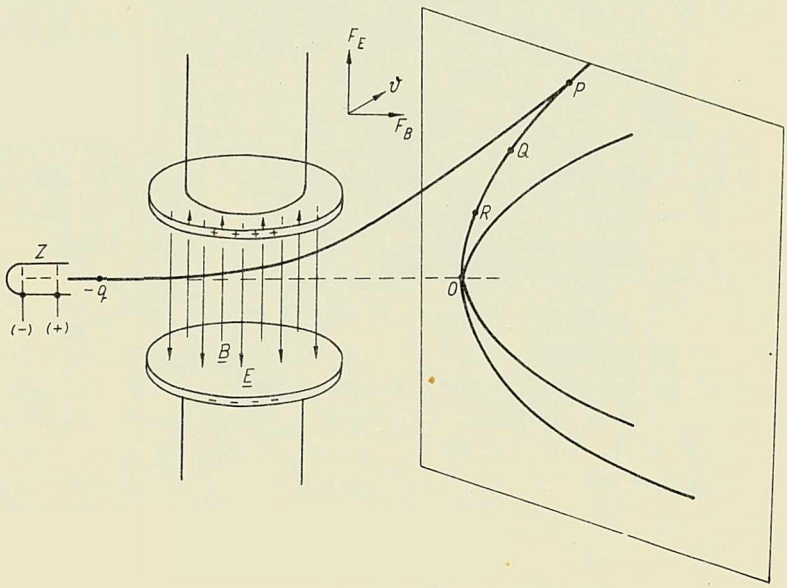
Z obu warunków (8.52) i (8.53) otrzymujemy

$$R\cdot\left(\frac{q}{m}\right)^{1/2} = \frac{1}{B}\,(2U)^{1/2}, \tag{8.54}$$

czyli iloczyn promienia krzywizny toru oraz pierwiastka ładunku właściwego jest dla danych B i U wielkością stałą. Widzimy tu, iż promień krzywizny toru może być wykorzystany do pomiaru ładunku właściwego q/m jonu. Ulepszoną wersję zastosowania odchylenia cząstki naładowanej do pomiaru q/m przedstawimy w następnym paragrafie. Warto jeszcze zwrócić uwagę na to, że cząstka wpadająca w obszar pola magnetycznego z prędkością $\underline{v}$ zawierającą kąt z wektorem $\underline{B}$ różny od 90° porusza się nie po łuku okręgu lecz po spirali. Czytelnikowi zostawiamy rozstrzygnięcie, od czego zależy skok między "zwojami" tej spirali.

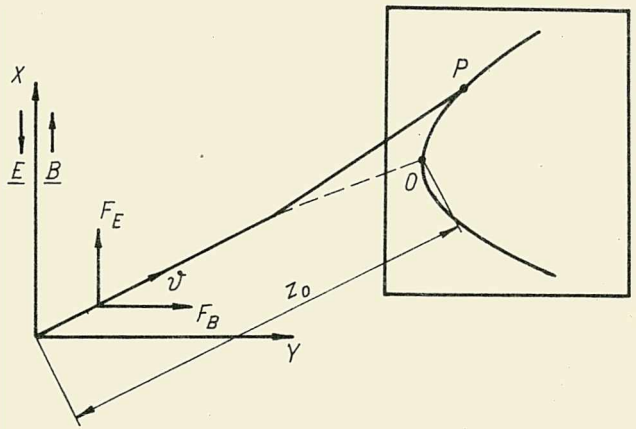
8.11. Spektrografia mas

Spektrografia mas stanowi ważny dla chemii zespół metod eksperymentalnych, których celem jest pomiar ładunku właściwego jonów z ich jednoczesnym rozdzieleniem za pomocą pola elektrycznego i magnetycznego. Dawniej spektrografią mas interesowali się przede wszystkim fizycy; doprowadziła ona do wyznaczenia zbioru izotopów prawie wszystkich pierwiastków chemicznych. Dziś spektrografia mas jest metodą rozpowszechnioną również w chemii, zwłaszcza organicznej. Stanowi tu jedną z ważnych metod analitycznych, umożliwiających dokładne określenie składu izotopowego mieszaniny pod względem jakościowym i ilościowym.



Rys. 8-23

Podstawą spektroskopii mas jest metoda parabol, opracowana przez Williama Thomsona (Lord Kelvin) - nią wyłącznie zajmiemy się w tym paragrafie. Thomson zastosował odchylenie cząstki naładowanej w skupionych w tej samej przestrzeni polach elektrycznym i magnetycznym o wektorach wzajemnie do siebie równoległych: $\underline{E} \parallel \underline{B}$ (rys. 8-23). Źródłem badanych jonów jest rura do wyładowań Z, której anoda jest zaopatrzona w niewielki otwór. Powstające w wyładowaniu jony ujemne rozpędzane są w polu elektrycznym i wydostają się przez otwór w obszar pól odchylających. Elektromagnes jest zaopatrzony w nasadki izolacyjne, umożliwiające przyłożenie pola elektrycznego. W układzie pól narysowanym na rys. 8-23 jon ujemny poruszający się w prawo jest odchylany w górę i przed płaszczyznę rysunku. Wiązka jonów o jednakowej prędkości



Rys. 8-24

trafia kliszę fotograficzną (KF) w punkcie P, natomiast wiązka nie odchylona - w punkcie O. Schemat sił działających na jon jest przedstawiony na rys. 8-24. W kierunku osi x działa na jon siła $F_E = qE$, wytwarzająca przyspieszenie $a_x = qE/M$, gdzie M jest masą jonu. Ruch w kierunku osi X jest jednostajnie przyspieszony. W czasie $\Delta t = z_o/v$, potrzebnym na osiągnięcie kliszy, odchylenie jonu wzrośnie do $X = \frac{1}{2} a_x(\Delta t)^2 = \frac{1}{2} (qE/M)\cdot(z_o/v)^2$. W kierunku osi Y działa składowa magnetyczna siły Lorentza $F_B = q\ v\ B$, wytwarzająca przyśpieszenie $a_y = (q\ v\ B)/M$. Również w kierunku Y ruch jest jednostajnie przyspieszony, a po czasie Δt odchylenie wyniesie

$$Y = \frac{1}{2} a_y(\Delta t)^2 = \frac{1}{2} (qvB/M)\cdot(z_o/v)^2 = \frac{1}{2} (qB/M)\cdot(z_o^2/v).$$

Związek między oboma wychyleniami jest równaniem śladu na kliszy, wzdłuż którego układają się jony. Otrzymamy je eliminując z obu wyrażeń nie znaną prędkość v:

$$\frac{Y^2}{X} = \frac{q}{M} \cdot \frac{B^2 z_o^2}{2E},$$

czyli

$$Y^2 = A \cdot \left(\frac{q}{M}\right) \cdot X, \qquad (8.55)$$

gdzie

$$A = \frac{B^2 z_o^2}{2E}$$

jest stałą aparaturową. Równanie (8.55) przedstawia parabolę (stąd nazwa metody), której parametrem jest określona wartość ładunku właściwego (q/M). Wszystkie jony zatem, które mają ten sam ładunek właściwy, a różnią się prędkością, układają się na wspólnej paraboli.

Dalsze udoskonalenia spektrografii polegały na przestrzennym rozdzieleniu pola elektrycznego i magnetycznego (metoda Astona), co poprawiło rozdzielczość spektrografu, a później wprowadzono metodę ogniskowania magnetycznego (metoda Dempstera). Nie będziemy się nimi zajmowali bardziej szczegółowo.

8.12. Pole magnetyczne w materii

Wielkością obecnie najczęściej używaną w magnetyzmie jest wektor indukcji magnetycznej $\underline{B}$. Prócz niego wygodnie jest posługiwać się również preferowanym dawniej pojęciem natężenia pola magnetycznego $\underline{H}$. Jest to wektor w próżni równoległy do $\underline{B}$ i różniący się od niego czynnikiem μ_o. W próżni

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_o} \underline{B}. \qquad (8.56)$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że $\underline{H}$ i $\underline{B}$ oznaczają różne wielkości, także wymiar $\underline{H}$:

$$[H] = 1 \ \frac{A \cdot m}{Wb} \cdot \frac{Wb}{m^2} = 1 \ \frac{A}{m}$$

jest inny, niż $[B] = 1\ Wb/m^2$. Natężenie pola możemy obliczyć dzieląc przez μ_o podane uprzednio dla różnych przypadków wyrażenia dla B. I tak na przykład, natężenie pola H wokół liniowego i nieskończonego przewodnika z prądem wynosi w próżni

$$H = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{R}. \qquad (8.57)$$

Zajmując się polem magnetycznym w materii traktujemy zwykle $\underline{H}$ w próżni jako pole zadane, czyli zewnętrzne, w którym znajduje się interesujący nas magnetyk. Ulega on namagnesowaniu (polaryzacji magnetycznej), wobec czego natężenie pola wewnątrz magnetyka różni się od $\underline{H}$. Różnicę tę określa wektor namagnesowania $\underline{P}$, równy momentowi magnetycznemu (trwałemu i wzbudzonemu) jednostki objętości materiału

$$\underline{P} = \frac{\sum \underline{p}_i}{\Delta V}. \tag{8.58}$$

Wymiar $\underline{P}$

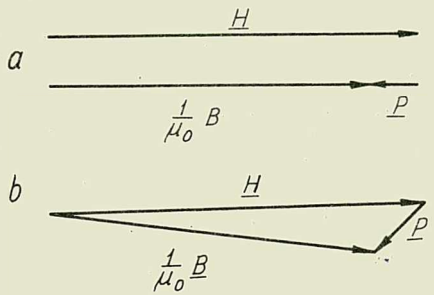
$$[P] = 1\ \frac{A \cdot m^2}{m^3} = 1\ A/m$$

jest taki sam, jak wektora $\underline{H}$. Wypadkowe natężenie pola w magnetyku wynosi więc

$$\underline{H} + \underline{P} = \frac{1}{\mu_o} \underline{B}. \tag{8.59}$$

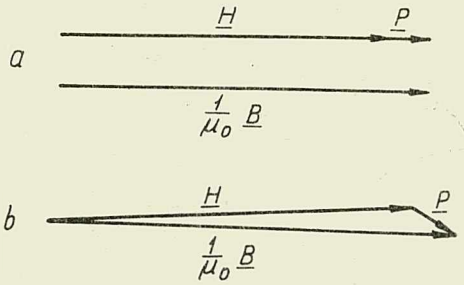
W zależności od tego, jakie własności mają elementy strukturalne (atomy, jony, cząsteczki), z których składa się magnetyk możemy podzielić magnetyki na trzy główne klasy.

1. Diamagnetyki. Elementy strukturalne diamagnetyka nie mają trwałych momentów magnetycznych. Pod wpływem $\underline{H}$ powstają w nich momenty indukowane, bardzo małe i o zwrocie przeciwnym do $\underline{H}$. Z tego względu namagnesowanie materiału jest liczbowo ujemne, $P < 0$, oraz $|P| \ll |H|$. W rezultacie w diamagnetyku izotropowym $\underline{P} \parallel \underline{H} \parallel \underline{B}$, lecz $(1/\mu_o)\underline{B}$ jest nieco mniejszy, niż $\underline{H}$ (rys. 8-25a). W diamagnetyku o własnościach



Rys. 8-25

zależnych od kierunku (anizotropia) kierunki H i P mogą się różnić (rys. 8-25b). Do diamagnetyków należą na przykład: wodór H_2, woda H_2O, miedź Cu, chlorek sodowy NaCl, bizmut Bi, benzen, ogólnie związki, których elementy strukturalne mają elektrony sparowane oraz niektóre metale.



Rys. 8-26

ii. Paramagnetyki. Elementy strukturalne mają własny, trwały moment magnetyczny $\underline{p}_m^{(t)}$, którego wartość znacznie przewyższa moment indukowany $\underline{p}_m$, jaki w nich również się pojawia pod wpływem $\underline{H}$. W rezultacie

$$\underline{P} = \frac{\sum \underline{p}_m^{(t)} + \sum \underline{p}_m^{(i)}}{\Delta V} \tag{8.60}$$

jest dla paramagnetyka izotropowego wektorem o kierunku i zwrocie zgodnym z H (rys. 8-26), natomiast w anizotropowym ich kierunki mogą się różnić. Do paramagnetyków należą między innymi: tlen O_2, tlenek azotu NO, glin Al, platyna Pt, ciekły tlen, a wśród związków organicznych tzw. wolne rodniki. Są to związki, których cząsteczki posiadają samotne elektrony o niesparowanych spinach.

Zarówno w dia- jak i w paramagnetykach wektor namagnesowania $\underline{P}$ jest proporcjonalny do natężenia pola magnesującego $\underline{H}$

$$\underline{P} = \varkappa \cdot \underline{H}, \tag{8.61}$$

aż do bardzo dużych wartości $\underline{H}$. Współczynnik proporcjonalności $\varkappa$ w (8.61) nosi nazwę podatności magnetycznej i jest stałą materiałową dodatnią (dla paramagnetyków) lub ujemną (dla diamagnetyków). Mimo, że jest liczbą bezwymiarową, wartość liczbowa $\varkappa$ odnosi się w (8.61) do jednostki objętości materiału, ponieważ $\underline{P}$ określone jest dla jednostki objętości. W fizyce chemicznej często używa się pojęcia molarnej podatności magnetycznej,

$$\chi = \varkappa \cdot v_m, \tag{8.62}$$

gdzie v_m oznacza objętość 1 mola substancji. Niezależnie od rodzaju substancji $[\varkappa]$ jest liczbą rzędu 10^{-5}, zatem $|\varkappa| << 1$. Powoduje to, że wypadkowe natężenie pola wewnątrz magnetyka, $\underline{H} + \underline{P}$, nieznacznie tylko różni się od pola magnesującego, $\underline{H}$.

Ze względu na (8.61) możemy napisać

$$\frac{1}{\mu_o}\underline{B} = \underline{H} + \underline{P} = (1 + \varkappa)\underline{H},$$

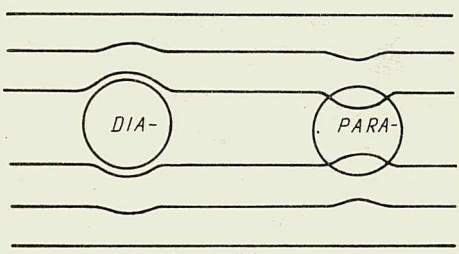
czyli

$$\underline{B} = \mu\mu_o\underline{H}, \tag{8.63}$$

gdzie

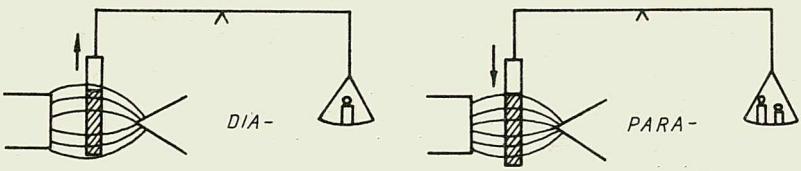
$$\mu = 1 + \varkappa \tag{8.64}$$

jest nową stałą materiałową, noszącą nazwę względnej przenikalności magnetycznej. Dla obu grup materiałów μ nieznacznie różni się od jedności. Oczywiście, dla próżni $\varkappa = 0$ oraz $\mu = 1$.



Rys. 8-27

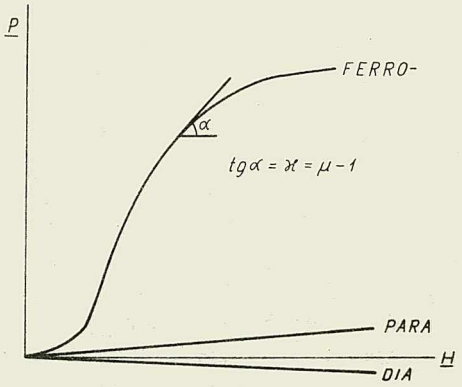
Ze względu na te własności kula wykonana z diamagnetyka jest "omijana" przez linie pola magnetycznego, natomiast w paramagnetyku gęstość linii jest trochę większa niż na zewnątrz niego (rys. 8-27). Powoduje to, iż diamagnetyk jest wypychany w niejednorodnym polu magnetycznym w obszar pola o mniejszej gęstości linii, natomiast paramagnetyk wciągany jest w obszar o większym natężeniu pola. Stanowi to podstawę metody pomiaru podatności magnetycznej materiałów za pomocą ważenia próbek zamkniętych w rurach szklanych w niejednorodnym polu magnetycznym i bez obecności pola (metoda Guya, rys. 8-28).



Rys. 8-28

iii. Ferromagnetyki. Do ferromagnetyków należą żelazo, nikiel, kobalt oraz wiele ich stopów. Podatność magnetyczna ferromagnetyka jest liczbą bardzo dużą: 10^3-10^4, wobec czego możemy zaniedbać jedność w (8.64), czyli $\mu \approx \varkappa$. Związek (8.63) obowiązuje nadal, jednak zarówno $\varkappa$ jak i μ nie są już stałymi materiałowymi, ponieważ ich wartości zależą od H (rys. 8-29). Ferromagnetyki, podobnie jak ferroelektryki, wykazują również strukturę domenową, tj. składają się z obszarów makroskopowych o idealnym uporządkowaniu dipoli magnetycznych. Również

pętla histerezy jest ich wspólną cechą: magnesując ferromagnetyk po raz pierwszy rozpoczynamy krzywą P(H) w punkcie (0,0) i dla dostatecznie dużych H osiągamy stan nasycenia. Powrót $H \to 0$ odbywa się po innej krzywej, w rezultacie czego otrzymujemy w punkcie H = 0 stan spolaryzowania ferromagnetyka, $P_s \neq 0$. Materiały o dużym P_s, czyli o dużej remanencji magnetycznej są używane do konstrukcji magnesów stałych (głośniki, słuchawki radiowe). Powierzchnia, objęta pętlą histerezy, przedstawia liczbową wartość pracy, związanej z przemagnesowywaniem materiału. Jeśli pętla jest wielokrotnie obiegana podczas jednej sekundy, jak np. w obwodach prądu przemiennego, wówczas pobór mocy na przemagnesowanie materiału może być duży; w końcu moc ta jest tracona w postaci ciepła, wytwarzanego w ferromagnetyku. Są to zjawiska niepożądane; dlatego w technice prądów przemiennych poszukuje się materiałów o możliwie małej powierzchni pętli histerezy.



Rys. 8-29

8.13. Indukcja elektromagnetyczna

8.13.1. Prawa indukcji

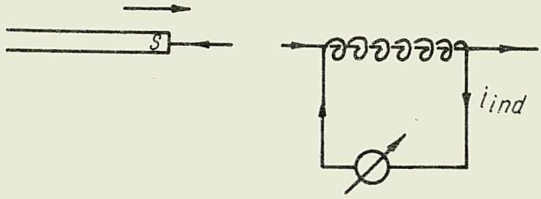
Przypomnimy obecnie podstawowe prawa, określające przyczynę, kierunek i wielkość prądu indukcyjnego, powstającego w obwodzie zamkniętym.

i. W każdym przewodniku, tworzącym obwód zamknięty, powstaje prąd indukcyjny podczas zmiany strumienia wektora indukcji magnetycznej, objętego tym obwodem.

Prawo to precyzuje przyczynę powstawania prądu indukcyjnego i poza zwróceniem uwagi, iż mowa w nim o zmianie strumienia wektora $\underline{B}$, a nie wektora $\underline{H}$, nie wymaga szerszego komentarza.

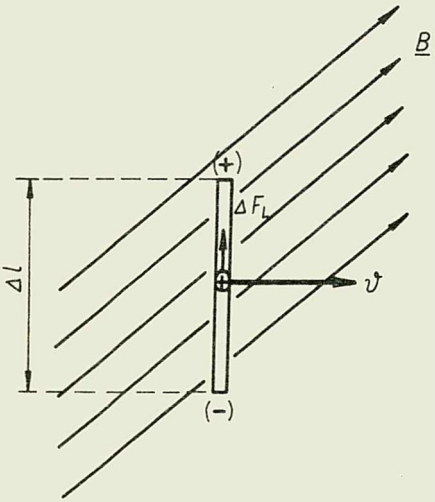
ii. Powstający w zamkniętym obwodzie prąd indukcyjny ma taki kierunek, że wytwarzany przezeń własny strumień indukcji magnetycznej kompensuje przyczynę, która go wywołała.

Prawo to określa zupełnie ogólnie kierunek prądu indukcyjnego i nosi nazwę reguły Lenza. Proste zilustrowanie tej reguły przedstawione jest na rys. 8-30: do zwojnicy zbliża się biegun S trwałego magnesu. Prąd indukcyjny ma taki kierunek, by w części zwojnicy zwróconej



Rys. 8-30

do S powstał również biegun S; linie pola muszą więc wchodzić do zwojnicy od tej strony. Podczas zmiany kierunku ruchu S zmieni się również kierunek wzbudzonego prądu indukcyjnego.



Rys. 8-31

iii. Trzecie prawo indukcji, odkryte wraz z pierwszym przez Faradaya, określa wartość indukowanej w przewodniku siły elektromotorycznej. Przypuśćmy, że odcinek przewodnika o długości Δl porusza się z prędkością $\underline{v}$ prostopadle do linii wektora $\underline{B}$ (rys. 8-31). Na każdy nośnik działa wówczas siła Lorentza (8.51), przy czym $\underline{E}$ jest w tym przypadku natężeniem pola elektrycznego powstającego na końcach przewodnika pod wpływem składowej magnetycznej $q\,\underline{v} \times \underline{B}$. Pole $\underline{E}$ przeciwstawia się dalszemu przemieszczeniu nośników o ładunku q, tak, że w stanie równowagi $\Delta \underline{F}_L = 0$ oraz

$$q\,E = -q\,v\,B.$$

Ponieważ $E = \varepsilon/\Delta l$, gdzie ε jest różnicą potencjałów między końcami przewodnika i zarazem indukowaną siłą elektromotoryczną oraz $v = ds/dt$, mamy

$$\varepsilon = -\Delta l\, B \frac{ds}{dt} = -\frac{d}{dt}(s \cdot \Delta l \cdot B),$$

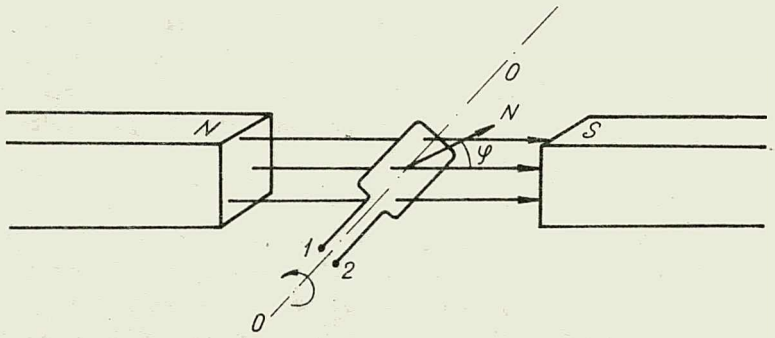
gdzie $s \cdot \Delta l \cdot B$ jest liczbą linii strumienia B przeciętych przez przewodnik podczas przesunięcia o odcinek $s = v \cdot t$. Wartość indukowanej siły elektromotorycznej jest więc równa szybkości zmian strumienia wektora B, towarzyszących ruchowi przewodnika:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{8.65}$$

Ponieważ $[\varepsilon] = 1\ V$, $[\Phi] = 1\ Wb$ oraz $[t] = 1\ s$ widzimy, że $1\ Wb = 1\ Vs$.

8.13.2. Przemienna siła elektromotoryczna

Przypuśćmy, że między biegunami (elektro)magnesu w jednorodnym polu magnetycznym obraca się ramka z przewodnika wokół osi OO z jednostajną prędkością kątową ω (rys. 8-32). Aktualne położenie normalnej



Rys. 8-32

N do ramki względem linii B określa wówczas kąt $\varphi = \omega \cdot t$, a objęty ramką strumień

$$\Phi = \Phi_m \cos\varphi = \Phi_m \cos \omega t$$

zmienia się periodycznie w czasie z prędkością kątową $\omega \cdot \Phi_m$ jest maksymalną wartością Φ dla $t = 0$. Wobec tego między punktami 1 i 2 powstaje siła elektromotoryczna o wielkości określonej prawem (8.65)

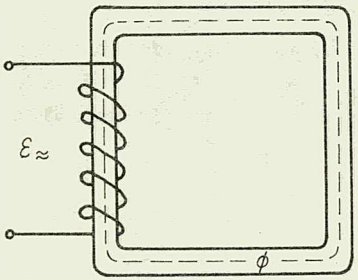
$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}(\Phi_m \cos \omega t) = \omega \Phi_m \sin \omega t = \varepsilon_m \sin \omega t. \tag{8.66}$$

Jest to przemienna siła elektromotoryczna; po połączeniu punktów 1 i 2 jakimś odbiornikiem (szczegóły techniczne tego połączenia pomijamy) popłynie przezeń prąd przemienny. Istnieją trzy zasadnicze typy odbiorników prądu przemiennego: oporność omowa, cewka indukcyjna oraz pojemność. Przypomnimy w dużym skrócie ich zasadnicze cechy.

1. Opornością omową nazywamy oporność dowolnego opornika zmierzoną w obwodzie prądu stałego. Na przykład liniowy przewodnik o długoś-

ci l i przekroju poprzecznym A ma oporność $R = (\rho \cdot l)/A$, która jest taka sama dla prądu stałego, jak i przemiennego. Po dołączeniu go między punkty 1 i 2 popłynie przezeń prąd przemienny

$$i = \frac{\varepsilon_m}{R} \sin \omega t = i_m \sin \omega t.$$



Rys. 8-33

ii. Zupełnie nowym typem oporności jest cewka indukcyjna, przedstawiona schematycznie na rys. 8-33. Jeżeli przez zwojnicę płynie dowolny rodzaj prądu o natężeniu i, to zgodnie z prawem Biota-Savarte'a-Laplace'a wektor indukcji $\underline{B}$ jest proporcjonalny do i. W takim razie możemy przyjąć, że strumień wektora $\underline{B}$ płynący w rdzeniu ferromagnetycznym jest również proporcjonalny do i

$$\Phi = L \cdot i, \tag{8.67}$$

przy czym L jest pewnym współczynnikiem, zależącym od geometrycznych cech zwojnicy (przekrój, rdzeń, liczba zwojów) i własności rdzenia (przenikalność magnetyczna). Jeśli teraz przez zwojnicę płynie prąd stały, to $\varepsilon = -d\Phi/dt = 0$, czyli w zwojnicy nie wytwarza się siła elektromotoryczna. Zupełnie inna sytuacja występuje wówczas, gdy zwojnicę zasilamy prądem przemiennym $i = i_m \sin \omega t$. Powstaje wówczas przemienny strumień magnetyczny, który wtórnie oddziałuje na znajdującą się w jego zasięgu zwojnicę. W tej ostatniej indukuje się siła elektromotoryczna ε_{ind}

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \cdot \frac{di}{dt} \tag{8.68}$$

o wartości zależnej od szybkości zmian natężenia prądu w zwojnicy. Zjawisko to nosi nazwę indukcji własnej, lub samoindukcji, zaś L jest współczynnikiem samoindukcji. W układzie jednostek SI jednostką L jest 1 henr:

$$L = 1 \frac{V}{A/s} = 1 \text{ H}.$$

Przewodnik ma współczynnik samoindukcji równy jednemu henrowi, jeśli zmiana natężenia prądu o 1 A podczas 1 s wywołuje na jego zaciskach powstanie siły elektromotorycznej o wartości 1 V.

iii. Jeśli między okładkami kondensatora znajduje się dielektryk idealny, tj. zupełnie nie przewodzący prądu, to kondensator przedsta-

wia w obwodzie prądu stałego oporność nieskończenie wielką. Przypuśćmy teraz, że przyłożyliśmy na kondensator napięcie $U = U_m \sin \omega t$, wobec czego jego ładunek chwilowy wynosi $Q = C \cdot U = C \cdot U_m \sin \omega t$. Z definicji $i = dQ/dt$, czyli

$$i = \frac{dQ}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t = i_m \cos \omega t$$

kondensatorowi o pojemności C odpowiada więc w obwodzie prądu przemiennego oporność

$$R_C = \frac{1}{\omega C} . \qquad (8.69)$$

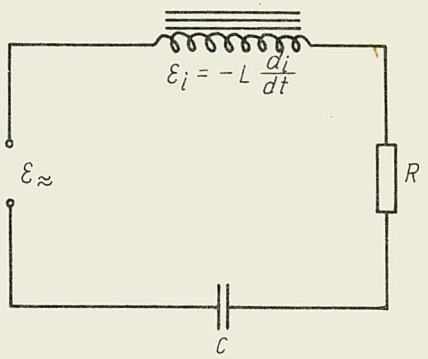
Płynący w tym przypadku prąd nie jest jednak prądem przewodzenia, lecz tzw. prądem przesunięcia. Przyczyną pojawienia się tego prądu są mikroskopowe przesunięcia elektronów i jąder cząsteczek, wchodzących w skład dielektryka, pod wpływem chwilowego pola elektrycznego. Przesunięcia te są wprawdzie bardzo małe, rzędu średnicy atomu, lecz liczba przesuwających się elementów jest bardzo duża. Następują one w jednej połowie okresu $\frac{1}{2} T = \pi/\omega$ w kierunku jednej okładki kondensatora, zaś w drugiej połowie w kierunku okładki przeciwległej. Z tego powodu również polaryzacja dielektryka ulega periodycznym zmianom.

8.13.3. Zawada

Rozważmy obecnie własności obwodu złożonego z R, L, C połączonych szeregowo i zasilanych ze źródła przemiennej siły elektromotorycznej $\varepsilon = \varepsilon_m \sin \omega t$ (rys. 8-34). Zakładamy, że L i C są elementami idealnymi, tj. dla prądu stałego $R_C = \infty$ i $R_L = 0$. Drugie prawo Kirchhoffa dla tego obwodu ma postać

$$\varepsilon_m \sin \omega t - L \frac{di}{dt} = iR + \frac{Q}{C} , \qquad (8.70)$$

gdzie $-L \frac{di}{dt}$ jest siłą elektromotoryczną samoindukcji, skierowaną przeciwnie do ε. Zauważmy, że podstawienie w (8.70) $i = dQ/dt$ prowadzi do równania różniczkowego



Rys. 8-33

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon_m \sin \omega t ,$$

analogicznego do równania ruchu drgań wymuszonych (4.32). Wielkością,

która ulega periodycznym zmianom jest w tym przypadku nie wychylenie, lecz ładunek. Sile oporu odpowiada człon $R(dQ/dt)$, proporcjonalny do oporności omowej R obwodu.

Przejdźmy obecnie do rozwiązania (8.70). Interesować nas będzie zależność $i(t)$, wobec czego w celu ujednolicenia zmiennych należy (8.70) zróżniczkować względem czasu. Otrzymamy równanie

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \omega \varepsilon_m \cos \omega t. \tag{8.71}$$

Ponieważ równanie (8.71) przedstawia zagadnienie analogiczne do drgań wymuszonych, rozwiązaniem (8.71) musi być funkcja $i(t)$ periodyczna i to o tym samym okresie $T = 2\pi/\omega$, co czynnik wymuszający. Położymy więc

$$i = i_m \cdot \sin(\omega t - \varphi), \tag{8.72}$$

gdzie φ jest kątem przesunięcia fazowego między natężeniem prądu a siłą elektromotoryczną. Znajdziemy obecnie warunki jakie muszą być spełnione, by (8.72) było rozwiązaniem (8.71). W tym celu należy obliczyć pochodne $i(t)$ i podstawić do (8.71).

$$\frac{di}{dt} = \omega i_m \cos(\omega t - \varphi),$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} = -\omega^2 i_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$\left(\frac{i_m}{C} - L\omega^2 i_m\right)\sin(\omega t - \varphi) + \omega R i_m \cos(\omega t - \varphi) = \omega \varepsilon_m \cos \omega t.$$

Podzielmy obecnie dwustronnie przez $\omega \cdot i_m$ i otwórzmy nawiasy w argumentach funkcji trygonometrycznych. Otrzymamy

$$-\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\left\{\sin\omega t \cos\varphi - \cos\omega t \sin\varphi\right\} +$$

$$+ R\left\{\cos\omega t \cos\varphi + \sin\omega t \sin\varphi\right\} - \frac{\varepsilon_m}{i_m}\cos\omega t = 0.$$

Równość ta powinna być spełniona dla dowolnej chwili t; w takim razie muszą znikać współczynniki osobno przy $\cos\omega t$ i przy $\sin\omega t$. Prowadzi nas to do dwóch warunków

$$-\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos\varphi + R\sin\varphi = 0, \tag{8.73}$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\sin\varphi + R\cos\varphi = \varepsilon_m/i_m.$$

Z pierwszego z nich otrzymujemy wyrażenie określające tangens przesunięcia fazowego

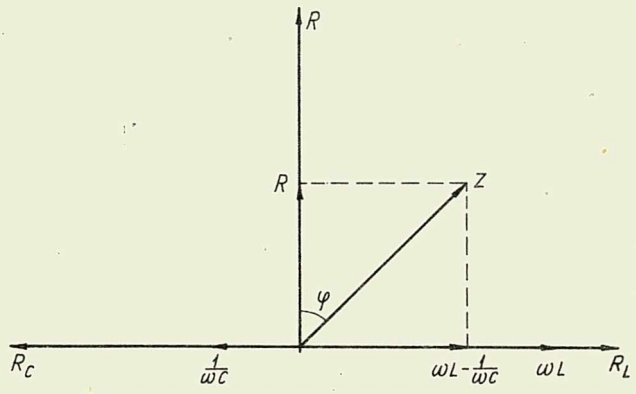
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} . \tag{8.74}$$

Wyrażenie to wskazuje, że kąt przesunięcia fazowego między przyłożoną siłą elektromotoryczną $\varepsilon_m \sin\omega t$, a płynącym w obwodzie prądem o natężeniu $i_m \sin(\omega t - \varphi)$ zależy od wielkości i rodzaju elementów, z których złożony jest obwód. Kąt φ może być dodatni, ujemny lub może równać się zeru. Szczegółowe przeanalizowanie poszczególnych przypadków pozostawiamy Czytelnikowi.

Podnosząc do kwadratu dwa warunki (8.73)i dodając stronami, możemy wyeliminować funkcję trygonometryczne kąta φ. Otrzymujemy wówczas wyrażenie

$$\left(\frac{\varepsilon_m}{i}\right) = Z = \left\{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2\right\}^{1/2} \tag{8.75}$$

przedstawiające ogólną oporność obwodu R, L, C, zwaną zawadą. Zawada Z składa się z oporności omowej R, z oporności równoważnej pojemności $R_C = 1/(\omega C)$ i oporności równoważnej indukcyjności $R_L = \omega L$. Postać wyrażenia (8.75) wskazuje nadto, że zawada ma cechę geometrycz-



Rys. 8-35

ną: jeżeli na osi odciętych odłożymy w prawo R_L, w lewo R_C, a na osi rzędnych odłożymy R, to Z jest przekątną prostokąta o bokach $R_L - R_C$ oraz R (rys. 8-35). Taki wykres wektorowy obwodu prądu przemiennego umożliwia również interpretację kąta przesunięcia fazowego φ: jest to kąt zawarty między wektorami R i Z.

8.13.4. Moc prądu przemiennego

Chwilowe wartości natężenia prądu i siły elektromotorycznej w obwodzie prądu przemiennego podane są wyrażeniami (8.72) i (8.66); ich iloczyn

$$P(t) = i_m \varepsilon_m \sin \omega t \cdot \sin (\omega t - \varphi)$$

przedstawia chwilową moc prądu przemiennego. Jest to wielkość mało interesująca, ponieważ ulega periodycznym zmianom w zależności od czasu. Wielkością najczęściej używaną jest moc średnia, $\langle P \rangle$, przy czym średniowanie odnosi się do czasu

$$\langle P \rangle = i_m \varepsilon_m \langle \sin \omega t \cdot \sin (\omega t - \varphi) \rangle =$$

$$= i_m \varepsilon_m \langle \sin^2 \omega t \, (\cos \varphi - \operatorname{ctg} \omega t \sin \varphi) \rangle =$$

$$= i_m \varepsilon_m \langle \sin^2 \omega t \rangle \cdot \langle \cos \varphi - \operatorname{ctg} \omega t \sin \varphi \rangle .$$

Ponieważ $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle \operatorname{ctg} \omega t \rangle = 0$, otrzymujemy

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} i_m \varepsilon_m \cos \varphi .$$

Wielkości i_m oraz ε_m są amplitudami, czyli maksymalnymi wartościami natężenia prądu i siły elektromotorycznej. Wprowadzimy obecnie tzw. wielkości efektywne (lub skuteczne) i_{sk}, ε_{sk} mniejsze $\sqrt{2}$ razy od wielkości amplitudowych

$$i_{sk} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} , \quad \varepsilon_{sk} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}} . \tag{8.76}$$

Wyrażenie określające moc średnią przyjmie wówczas postać

$$\langle P \rangle = i_{sk} \varepsilon_{sk} \cdot \cos \varphi , \tag{8.77}$$

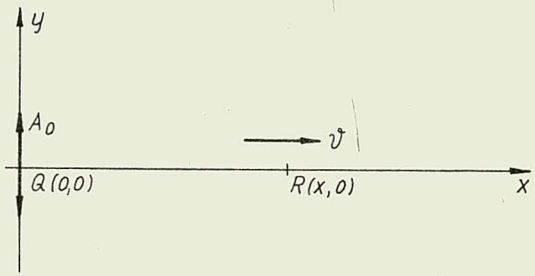
różniące się od wyrażenia dla prądu stałego czynnikiem $\cos \varphi$, zwanego czynnikiem mocy. Jeśli obwód prądu przemiennego składa się tylko z oporności omowej R, to $\cos \varphi = 1$, a wydzielane ciepło obliczone za pomocą wartości skutecznych jest takie samo, jak dla tej samej oporności i mocy w obwodzie prądu stałego. Widzimy więc, że wartości skuteczne przy obciążeniu "czysto omowym" są równoważne wartościom i, ε prądu stałego, wywołującym ten sam skutek cieplny.

9. FALE

9.1. Ruch falowy

Przypuśćmy, że punkt $Q(0,0)$ w ośrodku sprężystym wykonuje wzdłuż osi y ruch periodyczny o amplitudzie A_0 (rys. 9-1). Jeśli Δm oznacza element masy ośrodka otaczający Q, to równaniem ruchu Δm jest (por. 4.1)

$$\Delta m \cdot \ddot{y} + C \cdot y = 0.$$

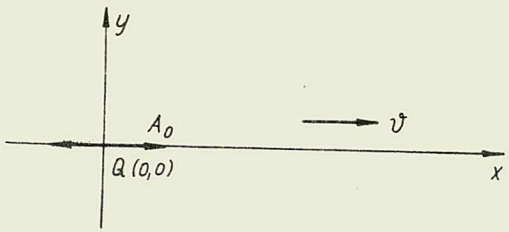


Rys. 9-1

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$y(t) = A_0 \cdot \cos \omega t,$$

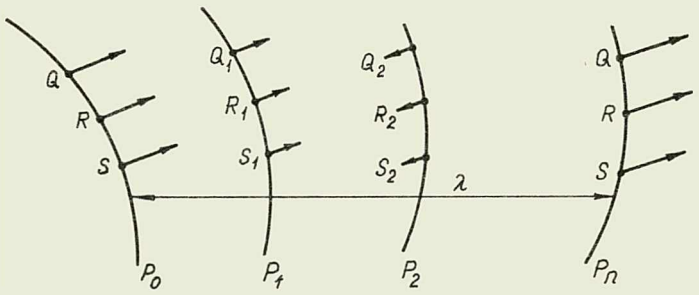
czyli Δm wykonuje drgania harmoniczne proste. Ponieważ ośrodek jest mechanicznie spójny, drganie to pociąga za sobą ruch punktów sąsiednich; taki właśnie ruch zaburzenia w ośrodku sprężystym nazywamy falą. W przykładzie zaburzenia zilustrowanego na rys. 9-1 kierunek ruchu punktu Q jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali (oś x); falę taką zwiemy poprzeczną. Fala poprzeczna może powstać w ośrodku, który wykazuje sprężystość postaci (powierzchnia swobodna cieczy, naprężona i nieskończenie długa struna, ciało stałe). Drugim podstawowym typem jest fala podłużna, w której kierunek drgań elementów masy ośrodka jest równoległy do kierunku rozprzestrzeniania się fali (rys. 9-2). Inną podstawą podziału fal są ich cechy geometryczne: możemy mieć falę kulistą (punktowe źródło drgań), lub płaską (dostatecznie mały wycinek fali kulistej). Warto może przypomnieć, iż cząstki



Rys. 9-2

ośrodka, uczestniczące w ruchu falowym, wykonują jedynie drgania wokół położeń równowagi, ale nie ulegają trwałym przemieszczeniom w sensie ruchu postępowego.

Miejsce geometryczne punktów, do których dochodzi zaburzenie po upływie określonego przedziału czasu, zwane jest czołem fali. Pojęcie to ma sens dla ciągu falowego, który zaczął się rozchodzić w określonej chwili; fala nieskończenie rozciągła w przestrzeni nie ma czoła.



Rys. 9-3

Powierzchnią falową P nazywamy zbiór punktów, których faza drgania w określonej chwili jest jednakowa. Inaczej mówiąc, punkty Q, R, S ... leżące na określonej powierzchni falowej P_0 mają tę samą wartość i kierunek wychylenia w danej chwili (rys. 9-3). Punkty Q_1, R_1, S_1, ... powierzchni falowej P_1 również drgają między sobą w jednakowej fazie ale innej, niż punkty leżące na P_0. Poruszając się w kierunku prostopadłym do powierzchni falowej z szybkością znacznie większą od szybkości rozprzestrzeniania się zaburzenia, co odpowiada oglądaniu "zamrożonego" stanu fali w określonej chwili znajdziemy następną (najbliższą) powierzchnię falową P_n, której punkty wykonują

drgania w jednakowej fazie z P_0. Odległość dwóch powierzchni falowych o tych własnościach jest długością fali λ. Jest jasne, że jeśli prędkość rozchodzenia się fali zależy od wybranego kierunku w ośrodku, czego powodem może być anizotropia jego własności sprężystych, to kształt powierzchni falowej P_1 będzie trochę inny, niż P_0. W takim razie długością fali jest odległość dwóch najbliższych powierzchni jednakowej fazy, mierzona w określonym kierunku normalnej do tych powierzchni. Bardziej ścisłą definicję λ, opartą na zastosowaniu rachunku różniczkowego, tutaj pominiemy.

Określona faza zaburzenia rozchodzi się w ośrodku sprężystym z szybkością v, zwaną prędkością fazową fali. Ze względu na skończoną wartość v określona faza zaburzenia w punkcie Q(0,0) znajdzie się w punkcie R(x,0) dopiero po upływie pewnego czasu $\tau = x/v$; o tę wartość faza w R jest opóźniona względem fazy w Q. Jeśli przez $\phi(x,t)$ oznaczymy wychylenie punktu R względem położenia równowagi, to można napisać

$$\phi(x,t) = A_0 \cos\omega(t-\tau) = A_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{9.1}$$

Według (9.1) wychylenie dowolnego punktu pola falowego jest więc periodyczną funkcją czasu i położenia tego punktu. Jeśli położymy $t = \text{const}$ (odpowiada to "fotografii" aktualnego stanu fali) i będziemy się poruszać w kierunku x to stwierdzimy, że wychylenia punktów są periodyczną funkcją x. W takim razie, korzystając z definicji długości fali λ, mamy

$$\phi(x,t) = \phi(x+\lambda, t), \tag{9.2}$$

czyli

$$A_0 \cos\omega\left(t - \frac{x+\lambda}{v}\right) = A_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

stąd

$$\frac{\omega\lambda}{v} = 2\pi$$

lub

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = v \cdot T. \tag{9.3}$$

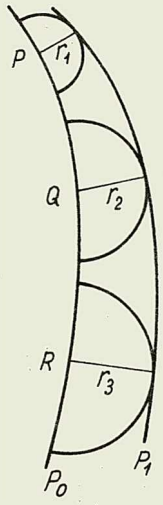
Wyrażenie (9.3) przedstawia związek między parametrami fali: długością fali λ, prędkością fazową v oraz częstością ν lub okresem drgań T. Związek ten ma charakter ogólny, tzn. spełniają go parametry fali dowolnego typu.

W spektroskopii, częściej niż długość fali, stosuje się liczbę falową

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{w } m^{-1}), \tag{9.4}$$

ponieważ wielkość ta jest proporcjonalna do energii (podobnie, jak częstość). W fizyce promieniowania używa się nadto wielkości proporporcjonalnej do σ, tzw. kątowej liczby falowej

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\mathrm{w\ m^{-1}}). \tag{9.5}$$



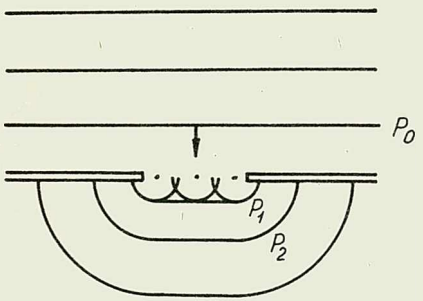
Rys. 9-4

Zobaczymy później, iż k ma własności wektora. Korzystając z tych oznaczeń możemy zapisać równanie fali biegnącej (9.1) w innej, również często spotykanej postaci

$$\psi(x,t) = A_0 \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) =$$

$$= A_0 \cos(\omega t - k x). \tag{9.6}$$

Fala, rozchodząca się w ośrodku sprężystym, często napotyka przeszkody, które powodują modyfikację czoła fali za przeszkodą. Pomocą w konstrukcji nowego czoła fali jest zasada Huygensa: każdy punkt ośrodka, do którego dochodzi czoło fali, możemy traktować jako źródło nowej fali, zwanej elementarną (cząstkową). Czoło fali wypadkowej w określonej chwili jest obwiednią wszystkich fal elementarnych. Ilustracją tej zasady jest rys. 9-4: z każdego punktu P, Q, R, ... czoła fali P_0 w chwili t_0 rysujemy półokrąg o promieniu $r_1 = v_1 \cdot \Delta t$, przy czym $\Delta t = t_1 - t_0$. Powierzchnia styczna do wszystkich półokręgów przedstawia wypadkowe czoło fali P_1 w chwili t_1. Na rysunku 9-5 przedstawiono konstrukcję czoła fali po przejściu przez otwór w przesłonie, którego rozmiary są porównywalne z długością fali λ.

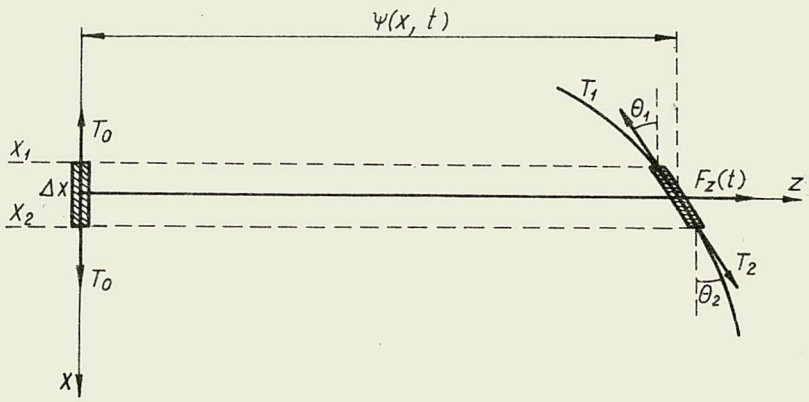


Rys. 9-5

9.2. Drgania struny

Drgania naprężonej struny stanowią ważny przypadek ruchu falowego. Analiza tego ruchu jest stosunkowo prosta, ponieważ jest to przypadek ośrodka "jednowymiarowego"; niemniej jednak uzyskane tu wyniki dają się łatwo uogólnić, co doprowadzi nas w końcu do ogólnego rów-

nania różniczkowego fali. Ponadto analiza postaci drgań, jakie mogą się wytworzyć w strunie o skończonej długości prowadzi do wyników bardzo interesujących ze względu na pewną analogię do własności układów kwantowych; zajmiemy się tym zagadnieniem w następnym paragrafie.



Rys. 9-6

Niech napięta struna będzie rozciągnięta w stanie bezwibracyjnym w kierunku osi x (rys. 9-6). Na oba końce małego elementu Δx struny działa siła T_0 o wartości jednakowej i o kierunku przeciwnym. W stanie drgającym siły T_1 i T_2 są różne; małe zakrzywienie elementu Δx pominiemy. Jeśli ρ_0 jest liniową gęstością struny (kg/m), to $\Delta m = \rho_0 \cdot \Delta x$ jest masą elementu Δx. Wychylenie Δx z położenia równowagi opisuje funkcja $\psi(x,t)$, zależna od czasu i położenia elementu Δx.

Siła wypadkowa, ciągnąca Δx w górę wynosi

$$F_z(t) = T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1,$$

przy czym kąty θ_1 spełniają warunki

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right]_{x=x_1}, \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right]_{x=x_2}.$$

Jeśli amplituda drgań jest niewielka, to składowe poziome sił T_1 i T_2 są bliskie siebie

$$T_1 \cos\theta_1 \cong T_2 \cos\theta_2 \cong T_0.$$

Mamy więc

$$F_z(t) = T_2 \sin\Theta_2 - T_1 \sin\Theta_1 = T_2 \operatorname{tg}\Theta_2 \cos\Theta_2 - T_1 \operatorname{tg}\Theta_1 \cos\Theta_1 =$$

$$\cong T_o \left\{ \operatorname{tg}\Theta_2 - \operatorname{tg}\Theta_1 \right\} = T_o \left\{ \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{x=x_2} - \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{x=x_1} \right\} =$$

$$= T_o \Delta x \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \rho_o \Delta x \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} .$$

Ostatnie wyrażenie jest rozwinięciem siły Newtona m.a. Opuszczając długość elementu Δx, możemy zapisać ostatnią równość w następującej postaci

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \left(\frac{T_o}{\rho_o}\right) \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} . \qquad (9.7)$$

Uzyskany związek (9.7) między przyspieszeniem elementu masy Δm struny a drugą pochodną wychylenia względem współrzędnej jest ważnym równaniem różniczkowym, noszącym nazwę klasycznego równania falowego. Równanie jest napisane dla jednego wymiaru, odpowiadającego przyjętemu modelowi ośrodka; taka postać zupełnie wystarcza na potrzeby tego rozdziału. Niewiadomą jest tu funkcja $\psi(x,t)$, podająca aktualne wychylenie elementu Δm struny, położonego w określonym miejscu osi x. Fala jest poprzeczna, ponieważ wychylenie ψ jest prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali, którym jest oś x. Wymiar ilorazu siły naprężającej i liniowej gęstości struny, T_o/ρ_o, jest następujący

$$\left[\frac{T_o}{\rho_o}\right] = \left[\frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m}{kg}\right] = \left[\frac{m}{s}\right]^2 .$$

Widzimy, iż jest to kwadrat wymiaru prędkości; łatwo pokazać, iż prędkością tą jest prędkość fazowa fali. (9.6) musi być rozwiązaniem równania (9.7), ponieważ (9.6) opisuje postać fali poprzecznej, rozchodzącej się w kierunku osi x. Obliczenie drugich pochodnych

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = -4\pi^2 \nu^2 \psi(x,t)$$

oraz

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \psi(x,t),$$

prowadzi nas do związku

$$4\pi^2 \nu^2 \psi(x,t) = \left(\frac{T_o}{\rho_o}\right) \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi(x,t),$$

stąd

$$\left(\frac{T_o}{\rho_o}\right) = (\lambda \cdot \nu)^2 = v^2,$$

wobec tego

$$v = \left(\frac{T_o}{\rho_o}\right)^{1/2} \tag{9.8}$$

jest istotnie prędkością fazową fali. Zależy ona od naprężenia struny oraz od jej gęstości liniowej. Korzystając z (9.8) możemy równanie falowe napisać w ogólniejszej postaci

$$\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2}. \tag{9.9}$$

Parametry odpowiadające strunie zastąpiliśmy parametrem ogólniejszym, jakim jest prędkość fazowa fali; może się ona rozchodzić w dowolnym ośrodku.

Związek (9.8) przedstawia dla struny zależność prędkości fazowej fali od liniowej gęstości struny i jej naprężenia; możemy go również napisać w postaci

$$\nu = \left(\frac{T_o}{\rho_o}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

lub

$$\omega = \left(\frac{T_o}{\rho_o}\right)^{1/2} \cdot k. \tag{9.10}$$

(9.10) jest zależnością kątowej częstości drgań elementu długości struny (ośrodek) od liczby falowej k (fala). Widzimy, że dla struny związek ten ma szczególnie prostą postać: ω jest proporcjonalne do k. Wyrażenie (9.10) jest przykładem ważnej w fizyce funkcji $\omega(k)$, zwłaszcza w optyce i fizyce kryształów, noszącej nazwę zależności dyspersyjnej lub związku dyspersyjnego. Na ogół związek ten ma znacznie bardziej złożony charakter, niż w (9.10).

Element masy Δm ośrodka materialnego, w którym rozchodzi się fala typu (9.6), wykonuje drgania o amplitudzie A_o, a jego aktualnym wychyleniem jest $\phi(x,t)$. W takim razie jego energia potencjalna i kinetyczna T wynosi

$$U = \frac{1}{2} C \left\{\phi(x,t)\right\}^2,$$

$$T = \frac{1}{2} \Delta m \left\{\dot{\phi}(x,t)\right\}^2,$$

gdzie $C = \Delta m \cdot \omega^2$ jest współczynnikiem liniowej siły sprężystej, a

$\dot{\phi}(x,t)$ chwilową prędkością Δm. Suma tych energii jest całkowitą energią E drgań elementu masy:

$$E = T + U = \frac{1}{2}\Delta m\,\omega^2 \cdot A_o^2 \cos^2(\omega t - kx) + \\ + \frac{1}{2}\Delta m\,\omega^2 \cdot A_o^2 \sin^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2}\Delta m\,\omega^2 \cdot A_o^2. \qquad (9.11)$$

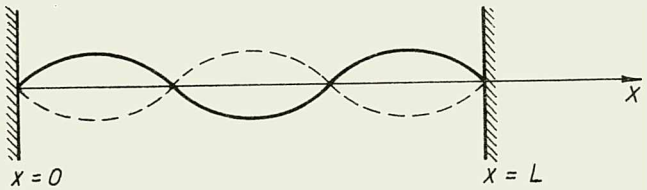
Widzimy, iż energia drgań jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy drgań. Jeżeli podstawimy wyrażenie $\Delta m = \rho_o \Delta V$, w którym ρ_o jest gęstością ośrodka, a ΔV elementem objętości, to możemy zapisać (9.11) w postaci

$$\frac{E}{\Delta V} = W = \frac{1}{2}\rho_o\,\omega^2 \cdot A_o^2. \qquad (9.12)$$

(9.12) jest gęstością energii, tj. energią jednostki objętości ośrodka, w którym rozchodzi się ruch falowy. Energia ośrodka wynika z przesunięcia i prędkości jego elementów masy.

9.3. Fala stojąca

Wyobraźmy sobie obecnie, że mamy rozciągniętą strunę o skończonej długości L, zamocowaną w punkcie $x = 0$ i $x = L$ (rys. 9-7). Fala bieg-



Rys. 9-7

nąca wzdłuż struny od $x = 0$ w prawo odbije się w punkcie $x = L$ z fazą przeciwną; otrzymamy stan fali stojącej. Każdy punkt struny wykonuje drgania harmoniczne proste, przy czym amplituda $A(x)$ tego drgania jest funkcją jedynie x, a nie zależy od czasu. Wobec tego w fali stojącej zależności od czasu i od współrzędnej przestrzeni występują rozłącznie; matematycznie wyrażamy to w ten sposób, że ogólne wychylenie $\phi(x,t)$ przedstawiamy jako iloczyn funkcji $f(x)$, zależnej tylko od współrzędnej i $g(t)$, zależnej tylko od czasu. Będziemy więc poszukiwać funkcji $\phi(x,t)$ takiej, że

$$\phi(x,t) = f(x) \cdot g(t). \qquad (9.13)$$

Po podstawieniu do (9.9) mamy

$$f(x) \cdot \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = v^2 \cdot g(t) \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

lub

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dt^2} = v^2 \cdot \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\omega^2. \qquad (9.14)$$

Lewa strona (9.14) zawiera czynniki zależące tylko od czasu, prawa tylko od x; ich równość oznacza, że zarówno lewa jak i prawa strona nie może zależeć ani od t ani od x, czyli każda z nich musi być równa tej samej stałej; stałą tą oznaczyliśmy przez $-\omega^2$. Równanie (9.14) jest więc równoważne dwom równaniom, z których pierwsze ma postać

$$g'' + \omega^2 g = 0. \qquad (9.15)$$

Równanie to opisuje proces periodyczny o częstości kątowej ω; rozwiązaniem jest więc funkcja

$$g(t) = A \cos(\omega t + \varphi_1). \qquad (9.16)$$

Drugie równanie

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 f = 0 \qquad (9.17)$$

jest analogiczne do poprzedniego; rozwiązaniem ogólnym będzie zatem funkcja

$$f(x) = B_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_1\right) + B_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_2\right). \qquad (9.18)$$

W (9.18) podstawiliśmy $\omega/v = \lambda$; φ_1 i φ_2 oznaczają na razie dowolne stałe fazowe, B_1 i B_2 dowolne amplitudy. Stacjonarny stan fali stojącej może się wytworzyć jednak tylko wtedy, gdy

$$\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0, \qquad (9.19)$$

tj. gdy na początku i końcu struny występują węzły w każdej chwili. Pierwszy z warunków powoduje, że $\varphi_2 = 0$, i $\varphi_1 = \pm\pi/2$, zatem

$$f(x) = B \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

oraz

$$\psi(x,t) = C \cos(\omega t + \varphi) \sin \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Zamiast dwóch stałych, A i B, wprowadziliśmy jedną, $C = A \cdot B$. Drugi z warunków (9.19) prowadzi do związku

$$\frac{2\pi L}{\lambda} = n \cdot \pi,$$

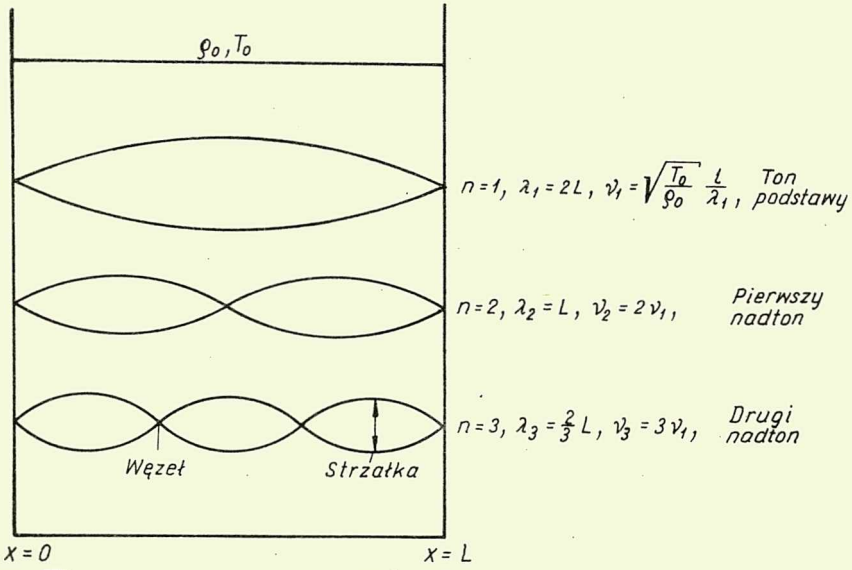
czyli

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (9.20)$$

Otrzymaliśmy bardzo interesujący wynik: na strunie o długości L może się pojawić stacjonarny stan fali stojącej tylko wtedy, gdy na jej długości mieści się całkowita liczba połówek długości fali. Liczba n, przyjmująca wartość kolejnych liczb naturalnych odgrywa tu taką samą rolę, jak liczba kwantowa w fizyce atomu.

Stan drgania (9.20) opisuje funkcja

$$\psi_n(x,t) = C \cos(\omega t + \varphi) \sin \frac{\pi n x}{L} . \qquad (9.21)$$



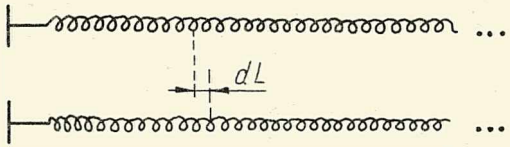
Rys. 9-8

Kilka początkowych stanów drgań struny przedstawiono na rys. 9-8. Gdy n = 1, wówczas stan nosi nazwę tonu podstawowego, a odpowiadająca mu częstość drgań jest częstością podstawową. Pozostałe stany są nadtonami; terminologia ta jest przyjęta również w spektroskopii oscylatora anharmonicznego.

9.4. Fala akustyczna

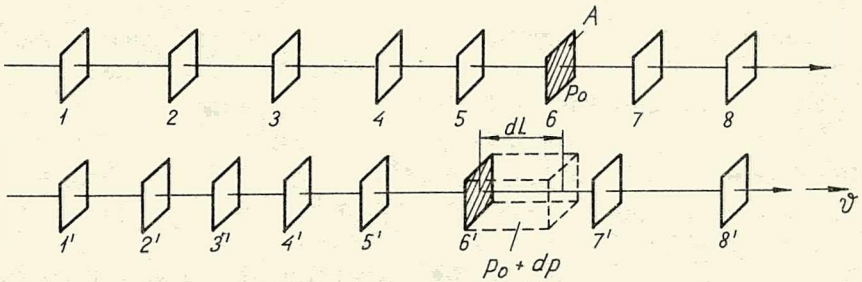
Fala akustyczna w ośrodku gazowym jest zawsze falą podłużną - odpowiada jej ruch zagęszczeń i rozrzedzeń w kierunku normalnym do czoła fali. Taka sama fala rozchodzi się również we wnętrzu cieczy. Inaczej jest w ciele stałym, które ma sprężystość postaci; w ciałach stałych mogą się rozchodzić 3 różne typy (modusy) fal akustycznych: 1 typ fali podłużnej i 2 typy fal poprzecznych. W tych ostatnich modusach drgania elementów objętości ośrodka zachodzą prostopadle do kierunku normalnej do czoła fali, a takich kierunków wzajemnie do siebie pro-

stopadłych, mamy dwa. W kryształach o wysokiej symetrii częstości drgań obu modusów poprzecznych mogą być jednakowe. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do fal w ośrodku gazowym.



Rys. 9-9

Przykład fali podłużnej, rozchodzącej się w ośrodku jednowymiarowym, jest przedstawiony na rys. 9-9. Określony zwój sprężyny jest przesunięty o ΔL w porównaniu do stanu bezwibracyjnego, wobec czego działa nań liniowa siła sprężysta $\Delta F = -C \cdot \Delta L$. Tego samego typu siła działa na element powierzchni A umieszczonej w gazie. Możemy sobie wyobrazić, iż wewnątrz gazu, znajdującego się w stanie spoczynku, elementy powierzchni 1, 2, 3,... są rozstawione z jednakową "gęstością" w pewnym kierunku (rys. 9-10). Fala akustyczna rozchodząca się w



Rys. 9-10

tym kierunku wywołuje lokalne zmiany ciśnienia, wobec czego gęstość rozstawienia elementów 1', 2', 3',... ulega zmianie. Niech przesunięcie, np. 6' względem 6 wynosi dL; na 6' działa siła $dF = A \cdot dp$, gdzie dp jest małą zmianą ciśnienia, dodatnią lub ujemną, w miejscu elementu 6'. Siłę tę możemy zapisać również w następujący sposób

$$dF = A \cdot \left(\frac{dp}{dV}\right)_o \cdot dV = A^2 \cdot \left(\frac{dp}{dV}\right)_o dL,$$

gdzie $dV = A\,dL$ jest małym elementem objętości, wewnątrz którego ciśnienie $(p_o + dp)$ można uważać za stałe. Znaczek zero przy pochodnej oznacza, że wartość jej wzięta jest w pobliżu p_o. Stąd współczynnik liniowej siły sprężystej wynosi dla gazu

$$C = -A^2 \left(\frac{dp}{dV}\right)_0 . \qquad (9.22)$$

Przypomnijmy, że siła napinająca strunę (lub sprężynę) o długości L_0 wynosi $T_0 = C \cdot L_0$, ponieważ C jest siłą działającą na jednostkę długości ośrodka. Na podstawie (9.8), uwzględniając (9.22), mielibyśmy zatem dla struny

$$v^2 = \frac{T_0}{\rho_0} = \frac{L_0}{\rho_0} C = -A^2 \left(\frac{dp}{dV}\right)_0 \frac{L_0}{\rho_0} ,$$

gdzie ρ_0 jest liniową gęstością struny. W tym wyrażeniu parametry liniowe struny należy zastąpić parametrami objętościowymi gazu; możemy to uczynić na podstawie związku

$$\rho_0^{(\text{liniowe})} \cdot L_0 = \rho_0^{(\text{objętościowe})} \cdot V_0 = \rho_0^{(\text{obj})} \cdot A \cdot L_0 ,$$

który jest równością ogólnej masy każdego z ośrodków.

Mamy więc dla gazu

$$v^2 = -A^2 \left(\frac{dp}{dV}\right)_0 \frac{1}{\rho_0^{(\text{obj})_A}} \cdot L_0 = -\frac{V_0}{\rho_0^{(\text{obj})}} \left(\frac{dp}{dV}\right)_0 . \qquad (9.23)$$

W dalszym ciągu będziemy uważać, że symbol ρ_0 oznacza objętościową gęstość gazu. W celu obliczenia prędkości dźwięku w ośrodku gazowym trzeba obliczyć pochodną $(dp/dV)_0$, a więc trzeba znać związek między ciśnieniem i objętością gazu. Newton, który pierwszy zajmował się tą sprawą przyjął, że zjawisko rozchodzenia się fali akustycznej w gazie zachodzi w warunkach izotermicznych, a więc można skorzystać z równania izotermy gazu doskonałego $pV = p_0 V_0$; stąd $(dp/dV)_0 = -p_0 V_0 / V_0^2 = -p_0/V_0 = RT\rho_0/MV_0$, gdzie M jest masą cząsteczkową gazu, R stałą gazową, a T temperaturą w stopniach Kelvina. Po podstawieniu pochodnej do (9.23) Newton otrzymał wyrażenie dla prędkości dźwięku w ośrodku gazowym

$$v = \left(\frac{RT}{M}\right)^{1/2} .$$

Jeśli podstawimy dla powietrza $R = 8{,}31$ J/K·mol, $T = 273$ K oraz $\langle M \rangle = 29 \cdot 10^{-3}$ kg/mol, otrzymamy $v = 280$ m/s. Wynik ten jest jednak o wiele za mały w porównaniu z wartością doświadczalną

$$v_d = 332 \text{ m/s},$$

co wskazuje, że w rozumowaniu Newtona był błąd. Błąd ten polegał mianowicie na przyjęciu, że proces rozchodzenia się dźwięku zachodzi w warunkach izotermicznych. Tymczasem lokalne zgęszczenia i rozrzedze-

nia gazu zachodzą tak szybko, że ciepło wytwarzane lub pochłaniane podczas tego procesu nie zdąży wymienić się z otoczeniem. Należy więc przyjąć, że fala dźwiękowa rozchodzi się w warunkach adiabatycznych, a poprawnym związkiem między ciśnieniem gazu i jego objętością jest równanie Poissona

$$pV^{\varkappa} = p_0 V_0^{\varkappa} = \text{const.}$$

$\varkappa = C_p/C_v$ jest stosunkiem ciepeł właściwych i dla danego gazu jest wielkością stałą; $\varkappa$ jest zawsze większe od jedności. Obecnie $(dp/dV)_0 = -\varkappa p_0/V_0$ oraz

$$v = \left(\frac{\varkappa R T}{M}\right)^{1/2}. \tag{9.24}$$

Podstawienie poprzednich danych dla powietrza oraz $\varkappa = 1{,}40$ prowadzi do wyniku

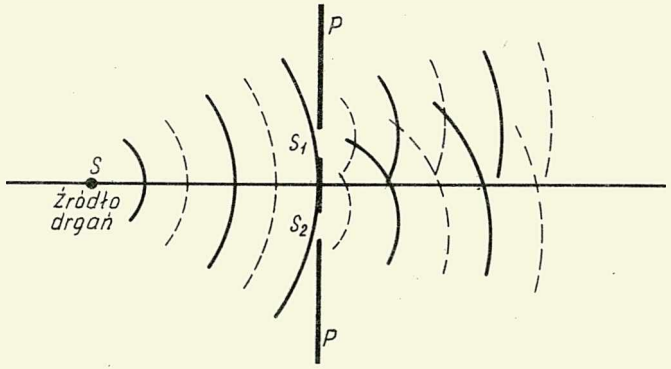
$$v = 331 \text{ m/s}$$

doskonale zgadzającego się z wynikiem doświadczalnym.

9.5. Interferencja fal

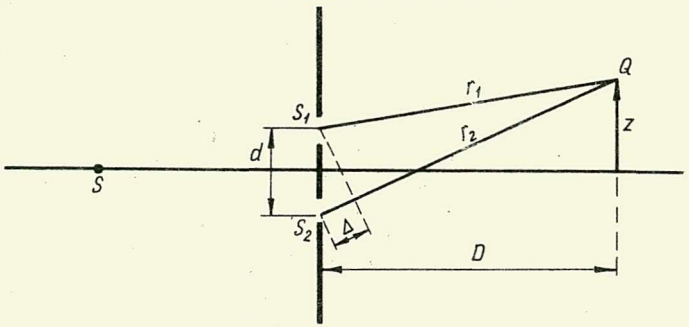
Interferencja fal jest zjawiskiem charakterystycznym dla ruchu falowego i polega na nakładaniu się dwóch lub więcej ciągów falowych, rozchodzących się jednocześnie w tym samym ośrodku. Interferencji ulegają fale niezależnie od ich typu, a więc mogą z sobą interferować dwa ciągi fal podłużnych akustycznych lub dwa ciągi fal elektromagnetycznych. Podstawowym warunkiem, który muszą spełniać ciągi falowe, by mogły ze sobą interferować, jest ich spójność (koherentność): wytworzona przez nie różnica faz w dowolnym punkcie obszaru nakładania się musi zależeć wyłącznie od położenia punktu, a nie może zależeć od czasu. Warunek spójności sprawia, że na ogół nie mogą interferować z sobą dwa niezależne ciągi falowe, np. generowane przez dwa niezależne źródła.

Przykład wytwarzania dwóch ciągów falowych spójnych jest przedstawiony na rys. 9-11; w optyce nosi on nazwę doświadczenia Younga. Punktowe źródło drgań S wytwarza falę kulistą, która dochodzi do dwóch szczelin S_1 i S_2 w przesłonie P. Zgodnie z zasadą Huygensa każdą ze szczelin możemy traktować jako źródło fali elementarnej, rozchodzącej się na prawo od P w postaci kolejno następujących grzbietów (linia ciągła) i dolin (linia przerywana). Widać, iż w niektórych punktach płaszczyzny rysunku spotyka się grzbiet (dolina) jednego ciągu falowego z grzbietem (doliną) ciągu drugiego; w tych punktach



Rys. 9-11

następuje dodawanie wychyleń (zgodnie z zasadą superpozycji). W punktach, gdzie spotykają się grzbiety z dolinami, następuje wygaszenie drgań punktów ośrodka. Należy zauważyć, iż wskutek spójności obu ciągów falowych obraz interferencji po prawej stronie P jest stacjonarny, tj. nie ulega zmianie z biegiem czasu.



Rys. 9-12

Sytuacja geometryczna tego doświadczenia jest przedstawiona na rys. 9-12; poniższa jej analiza jest słuszna zarówno dla akustycznych fal poprzecznych, jak i dla fal elektromagnetycznych. Wychylenia w środkach szczelin, odległych o d, zachodzą w kierunku y prostopadłym do płaszczyzny rysunku i wynoszą odpowiednio

$$Y_{01} = A_0 \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{SS_1}{\lambda}\right),$$

$$Y_{02} = A_0 \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{SS_2}{\lambda}\right).$$

Widzimy, że stan wychylenia w S_1 względem S_2 nie zmienia się z biegiem czasu, ciągi fal, wychodzące z S_1 i S_2 są spójne. Wobec $SS_1 = SS_2$ mamy również $Y_{o1} = Y_{o2}$. Wychylenia w dowolnym punkcie Q pola interferencyjnego wynoszą

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= Y_{o1} \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r_1}{\lambda}\right), \\ y_2 &= Y_{o2} \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r_2}{\lambda}\right), \end{aligned}\right\} \tag{9.25}$$

przy czym $r_1 = S_1Q$, $r_2 = S_2Q$ oznaczają odległości punktu Q od szczelin (rys. 9-12). Zgodnie z zasadą superpozycji, wypadkowym wychyleniem punktu Q będzie

$$y = y_1 + y_2 = Y_{o1}\left\{\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{r_1}{\lambda}\right) + \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{r_2}{\lambda}\right)\right\} =$$

$$= 2Y_{o1} \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \cdot \cos 2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right). \tag{9.26}$$

Wyrażenie (9.26) nie jest już falą, ponieważ zależność od czasu i przestrzeni została rozdzielona. Wyrażenie to opisuje drganie punktu Q, przy czym $2Y_{o1} \cos \pi\left(\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)$ jest jego amplitudą. Różnicę odległości Q od szczelin, $(r_1 - r_2)$, oznaczamy przez Δ

$$r_1 - r_2 = \Delta \tag{9.27}$$

i nazywamy różnicą dróg obu ciągów falowych w punkcie Q. Warunkiem całkowitego wygaszenia drgań w Q jest

$$2Y_{o1} \cdot \cos\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right) = 0,$$

czyli

$$\frac{\pi\,\Delta}{\lambda} = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

stąd

$$\Delta = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{9.28}$$

Dwa ciągi falowe dają zatem wygaszenie w punkcie Q pola interferencyjnego, jeśli spotykają się w nim z różnicą dróg równą nieparzystej wielokrotności połówki długości fali. Zupełnie analogiczne rozumowanie prowadzi do wniosku, że jeśli oba ciągi spotykają się w Q z różnicą dróg równą parzystej wielokrotności połowy długości fali:

$$\Delta = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}, \tag{9.29}$$

to następuje maksymalne wzmocnienie drgań. Przypuśćmy obecnie, że wykonujemy doświadczenie Younga według schematu przedstawionego na rys. 9-12. Przez punkt Q przechodzi wówczas prostopadle do x ekran, na którym obserwujemy układ prążków ciemnych i jasnych następujących na

przemian po sobie. Odległość z tych prążków od środka obrazu możemy uzyskać w następujący sposób. Ponieważ długość fali promieniowania elektromagnetycznego jest bardzo mała w porównaniu do odległości d obu szczelin, słuszne więc będzie następujące przybliżenie

$$D \cong r_1, \quad r_2 >> d, z. \tag{9.30}$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$r_1^2 = (z - \tfrac{d}{2})^2 + D^2,$$

$$r_2^2 = (z + \tfrac{d}{2})^2 + D^2,$$

stąd

$$(r_2^2 - r_1^2) = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2\,zd.$$

Wobec przybliżeń (9.30) mamy

$$\Delta \cdot 2D = 2\,zd,$$

czyli

$$\Delta = \frac{z \cdot d}{D}. \tag{9.31}$$

Wyznaczyliśmy w ten sposób związek między różnicą dróg a geometrią układu na rys. 9-12. Przez połączenie (9.31) z (9.28) lub (9.29) możemy uzyskać wzory na położenie prążków ciemnych (z_c) lub jasnych (z_j) względem geometrycznego środka obrazu.

$$\left.\begin{aligned} z_c &= (2k + 1) \cdot \frac{D}{d} \cdot \frac{\lambda}{2}, \\ z_j &= 2k \cdot \frac{D}{d} \cdot \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{9.32}$$

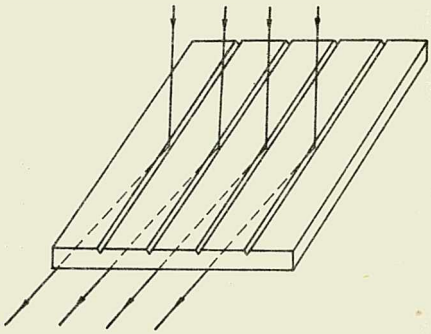
Łatwo się przekonać, że odległość dwóch sąsiednich prążków jasnych jest taka sama, jak dwóch sąsiednich prążków ciemnych i wynosi

$$z(k + 1) - z(k) = \frac{D}{d} \cdot \lambda. \tag{9.33}$$

Analiza obrazu interferencyjnego, wytwarzanego przez dwie szczeliny, daje nam zatem możliwość pomiaru długości fali promieniowania na podstawie pomiarów D, d, oraz z. Warto tu zauważyć, że:

1. W celu otrzymania wyraźnego obrazu interferencyjnego o dobrze widocznych i rozdzielonych prążkach, odległość szczelin d musi być bardzo mała, zaś odległość ekranu D duża. Przypuśćmy, że obserwujemy obraz dla promieniowania zielonego o długości fali $\lambda = 5000$ Å $= 5 \cdot 10^{-7}$ m, wybieramy $d = 0{,}5$ mm $= 5 \cdot 10^{-4}$ m, oraz $D = 1$ m. Odległość dwóch sąsiednich prążków wyniesie wówczas $z(k + 1) - z(k) = (5 \cdot 10^{-7} / 5 \cdot 10^{-4})$m $= 1$ mm, a więc bardzo niewiele; dla uzyskania dobrego obrazu należałoby wybrać $d = 0{,}1$–$0{,}2$ mm.

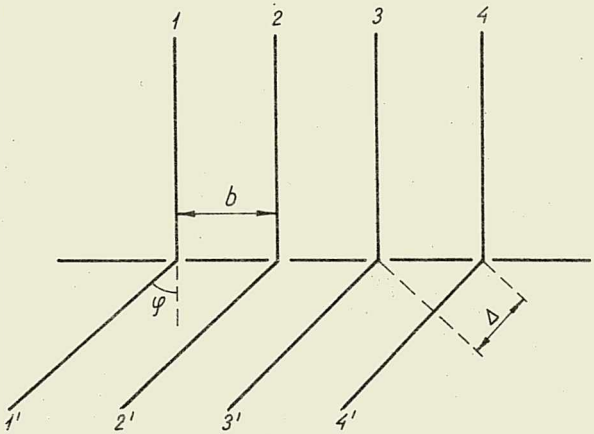
ii. Całkowite wygaszenie uzyskamy w obrazie interferencyjnym tylko dla promieniowania monochromatycznego. Gdybyśmy w doświadczeniu użyli promieniowania o widmie ciągłym, warunki wygaszenia lub wzmocnienia dla różnych długości fal zachodzić będą w różnych miejscach ekranu; wobec tego prążki "ciemne" i "jasne" okażą się prążkami zabarwionymi - wystąpi słabe rozdzielenie barw. Znacznie lepsze rozdzielenie barw można uzyskać wówczas, gdy dwie szczeliny w doświadczeniu (rys. 9-12) zastąpimy układem bardzo wielu szczelin, noszącym nazwę siatki dyfrakcyjnej.



Rys. 9-13

Siatka dyfrakcyjna jest zbiorem równoległych szczelin, naciętych na płaskorównoległej płytce szklanej (rys. 9-13).

Niekiedy sporządza się również siatki dyfrakcyjne na powierzchni wklęsłej - taka siatka działa również skupiająco. Dla promieniowania z zakresu widzialnego i nadfioletu dobre siatki zawierają do 2000 rys na milimetrze; ich zdolność rozdzielcza jest bardzo duża. Odstęp dwóch sąsiednich rys oznaczamy przez b; nosi on nazwę stałej siatki.



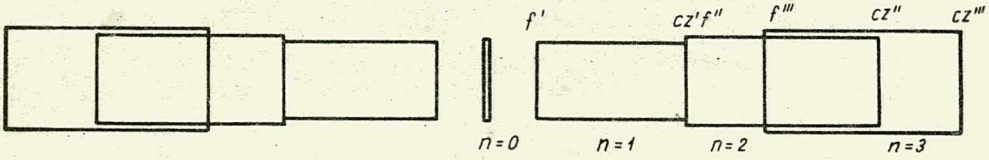
Rys. 9-14

Niech wiązka promieniowania monochromatycznego o długości fali λ pada normalnie na powierzchnię siatki (rys. 9-14). Każda szczelina wytwarza falę rozproszoną; fale pochodzące ze wszystkich szczelin (1', 2', 3', ...) wygaszają się jednak wzajemnie, z wyjątkiem takich kie-

runków, dla których różnica dróg dwóch promieni, pochodzących z sąsiednich szczelin jest parzystą wielokrotnością połówki długości fali

$$\Delta = b \sin\varphi = 2n \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \qquad (9.34)$$

W kierunkach określonych wzorem (9.34) następuje wzmocnienie fal rozproszonych. Dla $n = 0$ również $\varphi = 0$ i otrzymujemy prążek zerowego rzędu; $n = \pm 1$ odpowiada prążkowi rzędu pierwszego, który obserwuje się pod kątem $\sin\varphi = \pm \lambda/b$, itd. Jeśli na siatkę pada promieniowanie o widmie ciągłym, to następuje rozkład spektralny promieniowania, ponieważ kąt ugięcia φ jest funkcją λ. Dla $n = 0$ warunek $\lambda = 0$ jest spełniony niezależnie od λ - prążek zerowego rzędu jest zatem biały. Symetrycznie po jego obu stronach występuje widmo pierwszego rzędu (rys. 9-15), przy czym promienie fioletowe (f') ulegają słabszemu odchyleniu niż czerwone (cz').



Rys. 9-15

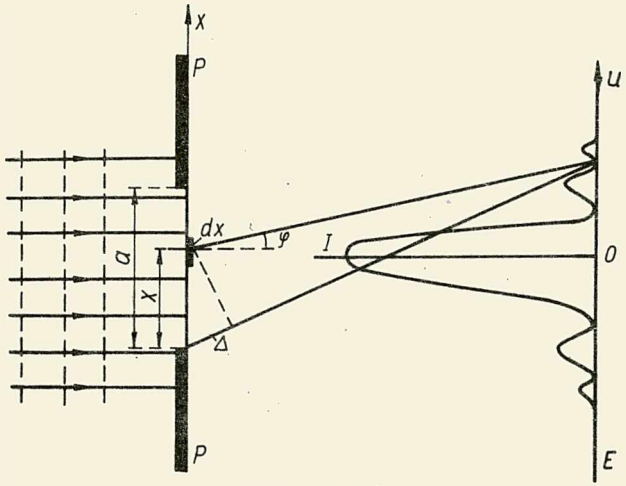
Widmo pierwszego rzędu jest najsilniejsze i ono bywa właśnie wykorzystywane w praktyce. Zauważmy, że zależność wartości odchylenia od długości fali jest przeciwna, niż dla pryzmatu, który promieniowanie czerwone odchyla najsłabiej.

Za widmem pierwszego rzędu następują widma rzędów wyższych, wprawdzie silniej rozdzielone, ale słabsze i często nakładające się na siebie. W związku z tym rzadko bywają wykorzystywane do celów praktycznych.

9.6. Dyfrakcja fal

Przedmioty oświetlane same stają się źródłem promieniowania. Wiązki promieniowania, wysyłane przez elementy powierzchni są spójne i mogą się wzajemnie nakładać, przez co powstają zjawiska interferencyjne, najlepiej widoczne w obszarze cienia geometrycznego. W pobliżu granicy cienia geometrycznego powstaje charakterystyczny, naprzemienny rozkład większych i mniejszych natężeń wiązek, przy czym ogólne natężenie promieniowania ugiętego maleje szybko wraz ze wzrostem kąta obserwacji. Obrazy dyfrakcyjne wytwarzają się zarówno w po-

bliżu konturów otworów, wyciętych w nieprzeźroczystych przesłonach, jak i w pobliżu krawędzi przedmiotów nieprzezroczystych. Zjawiska dyfrakcji stanowią odstępstwa od zasady prostoliniowego rozchodzenia się promieniowania i stanowią jeden z dowodów falowej natury światła.



Rys. 9-16

Rozważmy dla przykładu łatwą do zaobserwowania dyfrakcję fal na otworze okrągłym lub podłużnym, wyciętym w nieprzezroczystej przesłonie P. Rysunek 9-16 przedstawia przekrój szczeliny, której szerokość wynosi a. Z lewej strony pada równoległa wiązka fal, a wynik ugięcia na otworze obserwuje się na ekranie E. Oś x biegnie wzdłuż P i zaczyna się na dolnym brzegu otworu, zaś oś u biegnie wzdłuż ekranu E i zaczyna się w środku obrazu dyfrakcyjnego. Podzielmy szerokość otworu a na małe elementy dx - każdy z nich przyczynia się do natężenia wypadkowego I, obserwowanego w określonym miejscu ekranu. Amplituda fali, wysyłana przez element dx jest proporcjonalna do jego wielkości, jest zatem nieskończenie mała i wynosi $d\phi(x,t)$. Między wiązką wychodzącą z dx i wychodzącą z pobliża dolnej krawędzi otworu (rys. 9-16) istnieje różnica dróg $\Delta = x \sin\varphi$, przy czym φ jest kątem ugięcia mierzonym względem kierunku wiązki padającej. Różnica dróg Δ odpowiada różnicy faz $\alpha = 2\pi(\Delta/\lambda) = 2\pi(x/\lambda)\sin\varphi$; dlatego amplituda fali, wytwarzana na ekranie przez element dx wynosi

$$d\phi(x,t) = dx \cdot B \cos(\omega t - \alpha) = dx \cdot B \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin\varphi\right).$$

Przez B oznaczyliśmy współczynnik proporcjonalności. Ogólną amplitudę $\phi(x,t)$ fali w dowolnym miejscu ekranu, określonym kątem ugięcia φ otrzymamy, dodając amplitudy wiązek wysyłanych przez poszczególne elementy dx

$$\phi(x,t) = B \int_0^a \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin\varphi\right) dx. \tag{9.35}$$

Jeśli oznaczymy

$$\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin\varphi = y, \tag{9.36}$$

wówczas $dy = -(2\pi/\lambda) \sin\varphi \, dx$ oraz

$$\phi(x,t) = -\frac{B\lambda}{2\pi \sin\varphi} \int_0^a \cos y \, dy =$$

$$= \frac{B\lambda}{2\pi \sin\varphi} \left\{ \sin \omega t - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right) \right\}. \tag{9.37}$$

Wybierzmy obecnie nową zmienną

$$\frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda} = u. \tag{9.38}$$

Po niewielkich przekształceniach trygonometrycznych możemy (9.37) doprowadzić do postaci

$$\phi(x,t) = \frac{a \cdot B}{u} \sin u \cdot \cos(\omega t - u) = A \cos(\omega t - u),$$

w której

$$A = \frac{a B}{u} \sin u \tag{9.39}$$

jest amplitudą fali w punkcie u ekranu. Ponieważ natężenie fali I jest kwadratem aplitudy, więc mamy

$$I = (a B)^2 \cdot \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 = C \cdot \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2. \tag{9.40}$$

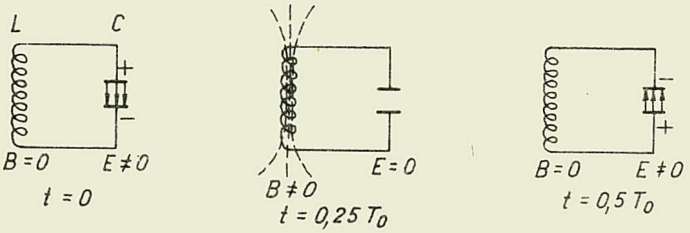
Wyrażenie (9.40) opisuje rozkład natężeń I w obrazie dyfrakcyjnym; jest ono periodyczną funkcją parametru u. Największe natężenie $I_o = C$ obserwuje się dla $u = 0$; wzór (9.40) możemy więc zapisać w postaci

$$I = I_o \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2. \tag{9.41}$$

Teoria dyfrakcji ma duże znaczenie w opisie sposobu rozchodzenia się światła widzialnego (podstawy działania przyrządów optycznych), fal radiowych (radiolokacja) oraz w opisie ugięcia promieniowania rentgenowskiego przez sieć krystaliczną (analiza strukturalna). Pewnymi poznawczymi aspektami dyfrakcji zajmiemy się jeszcze w rozdziale 11 (zasada Heisenberga).

9.7. Drgania i fale elektromagnetyczne

Wiadomo, że połączenie cewki samoindukcyjnej L i pojemności C w obwód zamknięty prowadzi do powstania tzw. obwodu drgającego. Jeżeli w chwili $t = 0$ naładujemy kondensator, co spowoduje przepływ prądu elektrycznego przez cewkę, to po upływie czasu $t = 0{,}25\ T_0$ cała energia obwodu będzie zmagazynowana pod postacią pola magnetycznego ($B \neq 0$, $E = 0$, rys. 9-17); T_0 jest okresem drgań obwodu. Wskutek inercyjnego



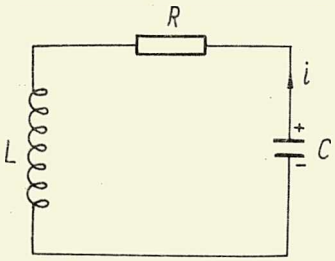
Rys. 9-17

działania samoindukcji prąd popłynie jednak dalej w tym samym kierunku, tak że w chwili $t = 0{,}5\ T_0$ cała energia obwodu będzie znów zmagazynowana pod postacią pola elektrycznego ($B = 0$, $E \neq 0$), z tym że kierunek $\underline{E}$ jest teraz przeciwny do kierunku $\underline{E}$ w chwili początkowej. Jeśli założymy, że elementy obwodu są idealne, to znaczy cewka samoindukcyjna nie ma oporności omowej, zaś oporność kondensatora dla prądu stałego jest nieskończenie duża, to po upływie czasu $t = T_0$ układ powróci do stanu początkowego. W ten sposób energia obwodu przechodzi periodycznie co 1/4 okresu z postaci elektrycznej w magnetyczną, a częstość tych zmian jest podana we wzorze Thomsona

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,. \tag{9.42}$$

Wzór ten możemy otrzymać łatwo z warunku (8.75) określającego częstość rezonansową dla $R = 0$.

W obwodzie rzeczywistym LC czynne są jednak zawsze oporności R, wynikające z niedoskonałości elementów obwodu i powodujące dyssypację energii w postaci ciepła. W konsekwencji amplituda drgań w obwodzie LC maleje; zanalizujmy obecnie ten proces. Schemat obwodu przedstawiony jest na rys. 9-18. Będziemy uważać, iż w chwili $t = 0$ kondensator został naładowany, po czym źródło napięcia odłączono, a w obwodzie płynie prąd o natężeniu $i(t)$ zależnym od czasu.



Rys. 9-18

Drugie prawo Kirchhoffa dla tego obwodu ma postać

$$iR + \frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt}, \qquad (9.43)$$

gdzie $-L(di/dt)$ jest jedyną czynną siłą elektromotoryczną.

W celu uzyskania równania (9.43) w zmiennych jednorodnych trzeba je różniczkować względem czasu; po podzieleniu przez L i zgromadzeniu wyrazów na jednej stronie otrzymamy

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0. \qquad (9.44)$$

Oznaczmy obecnie

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_o^2. \qquad (9.45)$$

Stała β jest wielkością opisującą szybkość zaniku amplitudy drgań - nazywamy ją stałą tłumienia. ω_o jest kątową częstością drgań obwodu bez tłumienia, czyli obwodu złożonego jedynie z L i C. Po podstawieniu nowych oznaczeń (9.44) przyjmie postać

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\beta\frac{di}{dt} + \omega_o^2 i = 0. \qquad (9.46)$$

Rozwiązaniem (9.46) powinna być funkcja i(t) periodyczna, której amplituda maleje z biegiem czasu; przyjmiemy, że zanik ten zachodzi według prawa wykładniczego

$$i = z(t)\cdot e^{-\beta t}, \qquad (9.47)$$

przy czym z(t) oznacza bliżej nam jeszcze nie znaną periodyczną funkcję czasu. Jeśli podstawimy (9.47) do (9.46)

$$\frac{di}{dt} = (\dot{z} - \beta z)\, e^{-\beta t},$$

$$\frac{d^2t}{dt^2} = (\ddot{z} - 2\beta\dot{z} + \beta^2 z)\, e^{-\beta t},$$

to po redukcji i po podzieleniu przez $\exp(-\beta t)$ otrzymamy równanie różniczkowe dla funkcji z(t)

$$\ddot{z} + (\omega_o^2 - \beta^2)z = 0. \qquad (9.48)$$

Rozwiązaniem (9.48) jest funkcja

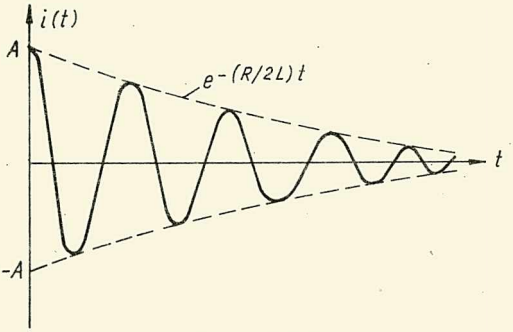
$$z(t) = a\,A\cos\omega t,$$

przy czym

$$\omega = (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2} \qquad (9.49)$$

oznacza częstość drgań tłumionych. Jak widzimy jest ona tym mniejsza, im większa jest stała tłumienia β. Pełne rozwiązanie $i(t)$ ma postać

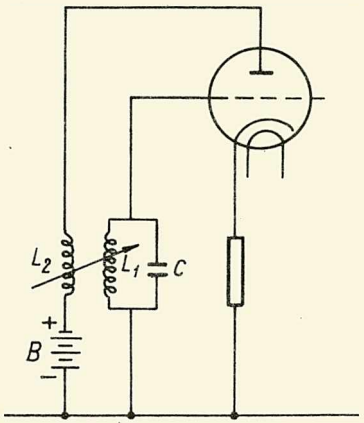
$$i(t) = A \cos\left[(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2} t\right] \cdot e^{-(R/2L)t}. \qquad (9.50)$$



Rys. 9-19

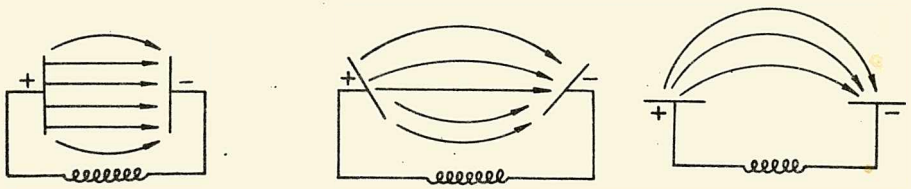
Zauważmy, że stała tłumienia β jest proporcjonalna do oporności omowej R w obwodzie. Wykres funkcji (9.50) jest przedstawiony na rys. 9-19.

W celu otrzymania drgań niegasnących trzeba wyrównać straty energii w obwodzie LC. Można go w tym celu sprzęgnąć na przykład z triodą (rys. 9-20). Cewka indukcyjna L_2 znajduje się w zasięgu pola magnetycznego cewki L_1 (sprzężenie indukcyjne); w ten sposób zmiany prądu anodowego triody odwzorowują się jako zmiany potencjału siatki. Sprzężenie indukcyjne podtrzymuje drgania kosztem energii elektrycznej, czerpanej z baterii anodowej B.



Rys. 9-20

Dopóki elementy L i C mają małą rozciągłość przestrzenną, dopóty pola magnetyczne i elektryczne są skupione w niewielkich objętościach. Przypuśćmy teraz, że odsuwamy od siebie okładki kondensatora tak, by o-



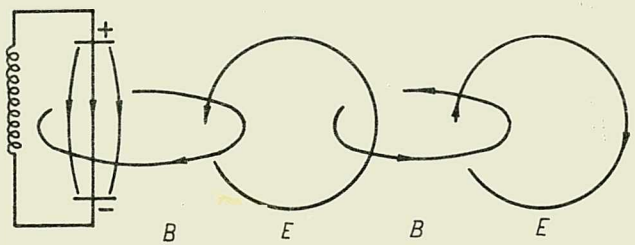
Rys. 9-21

bejmowały coraz większy obszar przestrzeni (rys. 9-21). Pominąwszy wynikającą stąd zmianę pojemności kondensatora C zauważmy jedynie, iż

w ten sposób wytwarzamy w sporej części przestrzeni szybkozmienne pole elektryczne $\underline{E} = \underline{E}_0 \cos \omega_0 t$, powodujące przepływ prądu szybkozmiennego między okładkami kondensatora. Nie jest to oczywiście prąd przewodzenia płynący w przewodniku, w którym mogą się poruszać swobodne nośniki prądu.

Prąd przepływający między okładkami kondensatora nosi nazwę prądu przesunięcia i stanowi kontynuację prądu przewodzenia. Gdy między okładkami kondensatora znajduje się dielektryk, wówczas dla części prądu przesunięcia możemy podać prostą interpretację: odpowiada on niewielkim przesunięciom elektronów i jąder (tylko przy dostatecznie małych częstościach) z ich położeń równowagi. Gdyby od okładki ujemnej kondensatora do dodatniej poruszał się swobodny elektron, wówczas miernik zarejestrowałby przepływ ładunku e. Ponieważ jednak elektron przemieszcza się tylko o niewielki odcinek $x \ll l$, w którym l jest odległością między okładkami, elektrometr zarejestruje więc przepływ ładunku $q = Ne\, x/l$. Wprawdzie x jest bardzo małe (ułamek średnicy atomu), ale liczba N przesuwających się elektronów jest bardzo duża; w rezultacie przepływający ładunek q może być dość spory, a wynikające stąd natężenie prądu przesunięcia równe jest natężeniu prądu przewodzenia w obwodzie LC. Prąd przesunięcia płynie również w próżni, aczkolwiek nie możemy podać prostego mechanizmu jego powstawania.

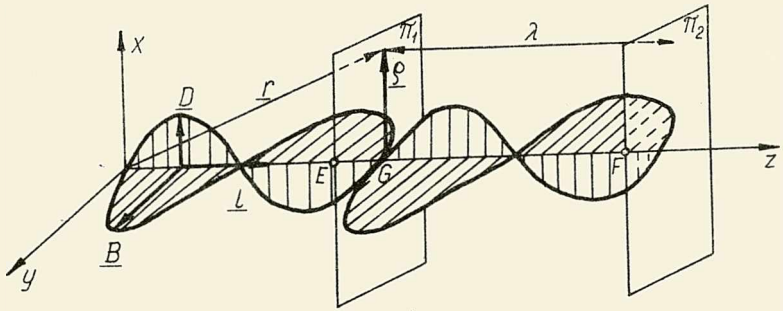
Niezależnie od sposobu powstawania prądu przesunięcia, należy przyjąć za Maxwellem, twórcą teorii fal elektromagnetycznych, że prąd przesunięcia powoduje powstanie linii wirowego pola magnetycznego, podobnie jak to się dzieje w prądzie przewodzenia w przewodniku. Linie wektora $\underline{B}$ mają kształt krzywych zamkniętych i otaczają strugę prądu przesunięcia (rys. 9-22). Kierunek obiegu linii $\underline{B}$ jest zgodny



Rys. 9-22

z regułą śruby prawej. Zmieniające się pole magnetyczne powoduje w myśl zasady indukcji Faradaya przepływ prądu w przewodniku, a więc powstanie pola elektrycznego. Według teorii Maxwella powstanie linii pola elektrycznego towarzyszy zmianom $\underline{B}$ także w próżni; w ten sposób

wytwarza się układ następujących po sobie pól elektrycznych i magnetycznych, o wektorach $\underline{B}$ i $\underline{E}$ wzajemnie do siebie prostopadłych.



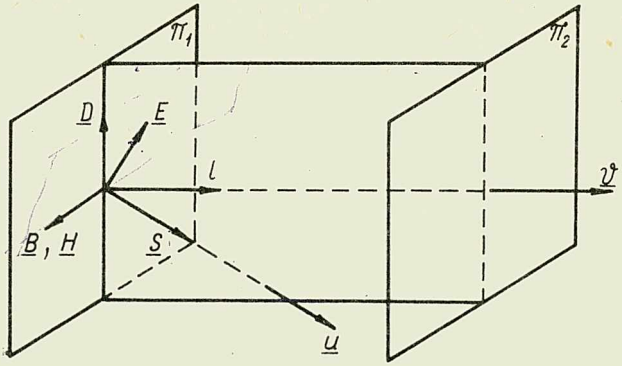
Rys. 9-23

Układ ten nosi nazwę fali elektromagnetycznej i rozchodzi się w próżni z szybkością c. Wzajemną relację między wektorami $\underline{D}$, $\underline{B}$ i $\underline{l}$ przedstawia rys. 9-23. Wektory $\underline{D}$ i $\underline{B}$ opisują własności fali, rozchodzącej się w ośrodku materialnym, gdzie prędkość fazowa v jest mniejsza, niż w próżni. $\underline{l}$ jest wektorem jednostkowym, prostopadłym do płaszczyzny stałej (określonej) fazy; $\underline{l}$ jest zarazem równoległy do $\underline{v}$. Dla fali przedstawionej na rys. 9-23 płaszczyzna drgań wektora $\underline{D}$ jest ustalona: jest nią płaszczyzna xz. Podobnie yz stanowi stałą płaszczyznę drgań wektora $\underline{B}$; obie są do siebie prostopadłe. Falę elektromagnetyczną, w której płaszczyzny drgań wektorów $\underline{B}$ i $\underline{D}$ są ustalone, nazywamy falą płasko spolaryzowaną. W zwykłym promieniowaniu elektromagnetycznym jest zawsze $\underline{B} \perp \underline{D}$, lecz chwilowe położenie płaszczyzn ich drgań jest różne i ulega przypadkowym zmianom - fala o tej własności nie jest spolaryzowana.

W ośrodku niemagnetycznym $\mu \cong 1$, wobec czego $\underline{B} = \mu_0 \underline{H}$; wektory $\underline{B}$ i $\underline{H}$ są więc równoległe. Wektory $\underline{D}$ i $\underline{E}$ natomiast nie muszą być równoległe, jeśli ośrodek wykazuje anizotropię własności optycznych. W takim ośrodku stała dielektryczna, a zarazem i współczynnik załamania światła i prędkość rozchodzenia się fali zależą od kierunku. Wzajemna orientacja czterech wektorów $\underline{B}$, $\underline{H}$ oraz $\underline{D}$, $\underline{E}$ przedstawiona jest osobno na rys. 9-24. Wektory $\underline{B}$, $\underline{H}$ i $\underline{D}$ leżą w jednej płaszczyźnie π_1, stanowiącej płaszczyznę określonej fazy drgań.

Ponieważ $\underline{l}$ jest prostopadły do tej płaszczyzny, są więc spełnione następujące relacje między wektorami

$$\underline{B} = \mu_0 \underline{H} = \frac{1}{v} (\underline{l} \times \underline{E}),$$
$$\underline{D} = -\frac{1}{v} (\underline{l} \times \underline{H}). \qquad (9.51)$$



Rys. 9-24

Relacje te wynikają z równań Maxwella; o ich słuszności można się przekonać podstawiając jednostki wielkości fizycznych oraz rozważając wzajemne relacje między kierunkami wektorów według rys. 9-24. Na tym rysunku widać, iż wektor $\underline{E}$ nie leży w π_1; razem z $\underline{B}$ tworzy on płaszczyznę, do której jest prostopadły wektor $\underline{S}$. W kierunku $\underline{S}$ przepływa strumień energii z szybkością u, zwaną szybkością grupową; u jest na ogół inne niż v - tylko w próżni obie szybkości są jednakowe.

Moc promieniowania, przenoszona przez powierzchnię 1 m^2 ustawioną prostopadle, wynosi w kierunku $\underline{S}$, w/m^2

$$\underline{S} = (\underline{E} \times \underline{H}), \tag{9.52}$$

$\underline{S}$ jest nazywany wektorem Poyntinga i przedstawia natężenie fali elektromagnetycznej. W kierunku $\underline{l}$ przemieszcza się zatem płaszczyzna określonej fazy z prędkością fazową v, natomiast w kierunku $\underline{S}$ przepływa energia z prędkością grupową u.

Wszystkie wektory, $\underline{D}$, $\underline{B}$, $\underline{E}$ i $\underline{H}$ wykonują drgania z częstością $\nu = \omega/2\pi$, równą częstości drgań fali elektromagnetycznej. Jeśli oznaczymy dowolny z tych wektorów ogólnie przez $\underline{A}$, to ze względu na periodyczność $\underline{A}$ od czasu i współrzędnych przestrzeni $\underline{A}$ spełnia związek odpowiadający fali płaskiej.

Niech punkt $\underline{r}(x,y,z)$ leży na płaszczyźnie stałej fazy π_1 (rys. 9-23). Odległość tej płaszczyzny od O wynosi $OG = z = \underline{r} \cdot \underline{l}$; jednocześnie zauważmy, iż $\underline{r} \cdot \underline{l} = const$, jest równaniem płaszczyzny stałej fazy π_1. Można to łatwo otrzymać z oczywistego związku między wektorami (rys. 9-23)

$$k\,\underline{l} + \underline{\rho} = \underline{r},$$

gdzie $k \cdot \underline{l} = \underline{OG}$. Mnożąc ostatnią równość skalarnie przez $\underline{l}$ otrzymu-

jemy $\underline{r}\cdot\underline{1} = k = \text{const}$. W takim razie zależność od współrzędnej przestrzeni możemy zastąpić w (9.6) wyrażeniem bardziej ogólnym

$$\frac{\omega z}{v} = \frac{\omega}{v}(\underline{r}\cdot\underline{1}) = \underline{r}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\underline{1}\right) = \underline{r}\cdot\underline{k}, \tag{9.53}$$

w którym $\underline{k}$ jest wektorem falowym o długości $2\pi/\lambda$ i kierunku $\underline{1}$. Równanie fali elektromagnetycznej można więc zapisać w następującej postaci

$$\underline{A} = \underline{A}_0 \cos(\omega t - \underline{k}\,\underline{r}) \tag{9.54}$$

lub w zapisie zespolonym

$$\underline{A} = \underline{A}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}\,\underline{r})}. \tag{9.55}$$

Zapis (9.55) ma na celu ułatwienie rachunków, ponieważ daleko łatwiej operować funkcjami wykładniczymi o wykładniku urojonym niż funkcjami trygonometrycznymi. Ponieważ fala jest rzeczywistym zjawiskiem fizycznym, w końcowych obliczeniach potrzebnych wielkości fizycznych należy korzystać z części rzeczywistej (9.55).

Zajmijmy się obecnie zagadnieniem prędkości fazowej fali. Pokazuje się w obszerniejszych podręcznikach elektrodynamiki, iż v zależy od przenikalności względnych i bezwzględnych ośrodka

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\mu\varepsilon_0\,\varepsilon}}, \tag{9.56}$$

gdzie ε, ε_0 oznacza przenikalności dielektryczne, zaś μ, μ_0 przenikalności magnetyczne. Ponieważ dla próżni $\varepsilon = \mu = 1$, mamy

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0}}, \tag{9.57}$$

wobec czego

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}. \tag{9.58}$$

Liczbową wartość c możemy obliczyć na podstawie znanych wartości przenikalności

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ \text{Wb/Am}, \qquad \varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2,$$

stąd

$$c = 2{,}998\cdot10^8\ \text{m/s}.$$

Dla ośrodka niemagnetycznego $\mu = 1$, wobec czego

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{opt}}} = \frac{c}{n}. \tag{9.59}$$

Na tej podstawie

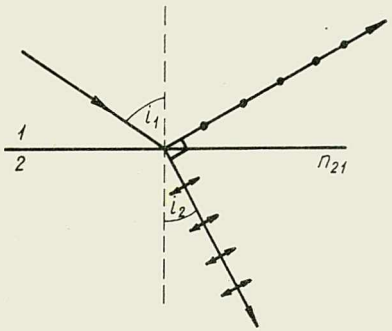
$$\varepsilon_{opt} = n^2. \tag{9.60}$$

W związkach (9.59) i (9.60) należy wziąć wartość stałej dielektrycznej dla częstości odpowiadającej częstości drgań fali elektromagnetycznej - takiej samej, przy której mierzono współczynnik załamania światła n. W odróżnieniu od statycznej stałej dielektrycznej ε, mierzonej w polu elektrostatycznym lub wolno zmiennym (do 100 kHz), nazywamy ε_{opt} w (9.60) optyczną stałą dielektryczną.

9.8. Światło spolaryzowane

Sama możliwość wytworzenia spolaryzowanej wiązki promieniowania elektromagnetycznego jest dowodem na to, iż promieniowanie jest falą i to falą poprzeczną. Nie można polaryzować fal podłużnych, ponieważ kierunek drgań jest dla nich równoległy do kierunku prędkości, wobec czego nie można uzyskać kierunku wyróżnionego prostopadle do kierunku propagacji.

Ze względu na duże znaczenie promieniowania spolaryzowanego w badaniach naukowych i w zastosowaniach praktycznych, zajmiemy się obecnie opisem metod otrzymywania fali spolaryzowanej.



Rys. 9-25

Częściowa polaryzacja promieniowania zawsze towarzyszy zjawisku odbicia promieniowania od gładkiej, wypolerowanej powierzchni dielektryka lub cieczy. Częściowo spolaryzowany jest zarówno promień odbity, jak i załamany, przy czym kierunki drgań D są w obu promieniach prostopadłe do siebie (rys. 9-25). Całkowita polaryzacja obu wiązek występuje wtedy, gdy promień załamany i odbity są do siebie prostopadłe; stwierdzenie to stanowi treść prawa Brewstera. Na podstawie definicji współczynnika załamania światła i rys. 9-25 mamy

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21}, \quad i_1 + i_2 = \pi/2,$$

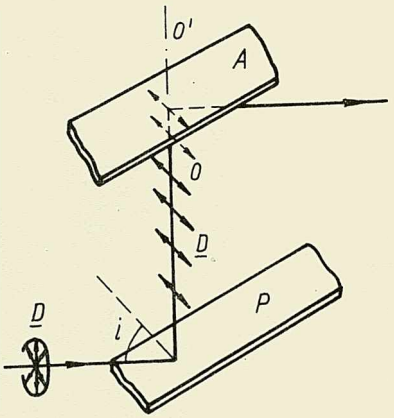
zatem

$$\operatorname{tg} i_1 = n_{21}. \tag{9.61}$$

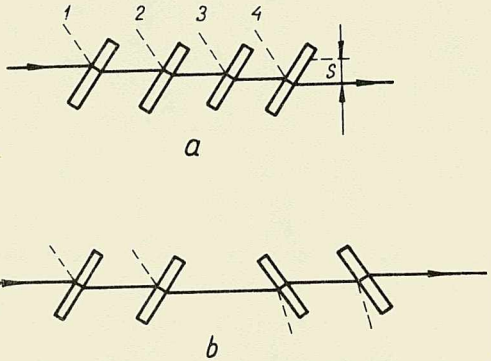
n_{21} oznacza współczynnik załamania światła ośrodka 2 (optycznie gęstszego) względem ośrodka 1 (optycznie rzadszego), i_1 jest kątem padania, zaś i_2 kątem załamania. Całkowita polaryzacja obu promieni na-

stępuje więc zgodnie z prawem Brewstera wtedy, gdy tangens kąta padania równy jest współczynnikowi załamania światła ośrodka optycznie gęstszego. W promieniu odbitym drgania wektora $\underline{D}$ zachodzą prostopadle do płaszczyzny padania (punkty na rys. 9-25), zaś załamanym - w płaszczyźnie załamania.

Prawo Brewstera może stanowić podstawę najprostszego ze sposobów otrzymywania promienia spolaryzowanego za pomocą dwóch płaskorównoległych płytek szklanych (rys. 9-26). Pierwsza z nich odgrywa rolę polaryzatora (P), druga analizatora (A): przy jej obrocie o kąt $\pi/2$ wokół kierunku promienia odbitego OO' jako osi wiązka odbita od A znika, ponieważ w wiązce odbitej wektor $\underline{D}$ musi być prostopadły do płaszczyzny odbicia, co w układzie "skrzyżowanym" płytek jest niemożliwe. Bezpośrednie zastosowanie układu płytek jako filtru polaryzacyjnego jest przedstawione na rys. 9-27. Niepożądane przesunięcie wiązki w układzie a) można skompensować odpowiednim układem płytek przedstawionym na rys. b). Zespoły płytek, wykonanych z NaCl lub AgCl, stosuje się do otrzymywania promieniowania spolaryzowanego w podczerwieni.

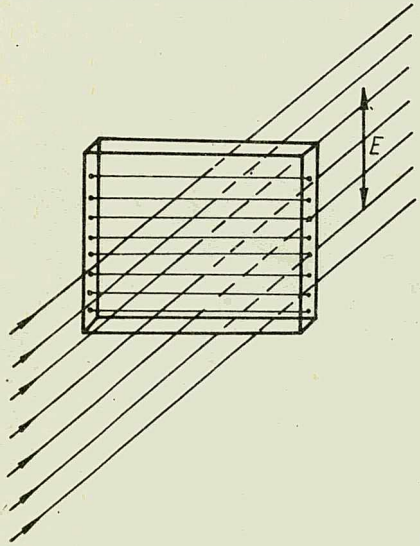


Rys. 9-26



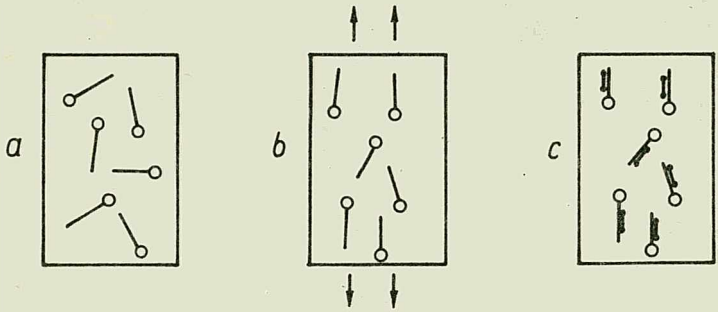
Rys. 9-27

Innym sposobem otrzymywania światła spolaryzowanego jest zastosowanie filtru polaryzacyjnego, lub polaroidu, skonstruowanego w 1938 r. przez E. H. Landa. Zasada działania takiego filtru dla mikrofalowego obszaru widma jest przedstawiona na rys. 9-28. Filtr składa się z



Rys. 9-28

cienkich drucików, równoległych do siebie i rozpiętych na ramce. Promieniowanie mikrofalowe o dowolnej orientacji wektora E pada prostopadle do powierzchni ramki, przy czym składowe E równoległe do kierunku drucików wzbudzają w nich ruch elektronów, zachodzący z częstością drgań fali, czyli przepływ szybkozmiennego prądu elektrycznego. Część mocy tego prądu zmienia się na ciepło, część zostaje wyemitowana we wszystkich kierunkach w postaci fali o tej samej częstości. Energia wypromieniowana w kierunku rozchodzenia się fali pierwotnej jest znikomo mała i można ją zaniedbać. Po przejściu przez układ drucików wektor E fali jest dokładnie prostopadły do ich długości.

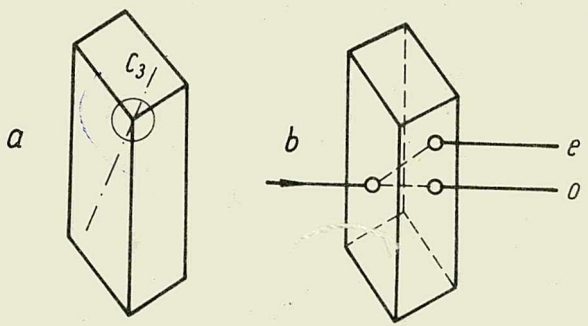


Rys. 9-29

Na tej zasadzie jest zbudowany filtr polaryzacyjny Landa z tym, że rolę drucików odgrywają cząsteczki alkoholu poliwinylowego (APW) z przyczepionymi do nich cząsteczkami jodu. Cząsteczki alkoholu poliwinylowego mają kształt wydłużony (łańcuch węglowodorowy), zakończony grupą polarną. W cienkiej folii APW cząsteczki ułożone są chaotycznie (rys. 9-29a), lecz po jej rozciągnięciu ułożenie ulega znacznemu uporządkowaniu (rys. 9-29b). Po zanurzeniu folii w alkoholowym roztworze jodu folia adsorbuje cząsteczki z roztworu w taki sposób, że osie cząsteczki J_2 są równoległe do osi cząsteczek APW (rys. 9-29c). W ten

sposób powstaje układ "drucików" absorbujących z padającej wiązki promieniowanie, którego wektor $\underline{E}$ ma składową równoległą do średniego kierunku osi cząsteczek J_2. Promieniowanie przechodzące jest spolaryzowane w dziewięćdziesięciu kilku procentach, przy czym wektor $\underline{E}$ promieniowania jest prostopadły do osi J_2.

Najbardziej jednak rozpowszechnione i najlepszej jakości są polaryzatory, wykonane z kryształów dwójłomnych. Należy do nich kalcyt, który jest jedną z odmian krystalicznych węglanu wapnia i występuje w przyrodzie pod postacią dużych romboedrów (rys. 9-30a). Kryształ kal-



Rys. 9-30

cytu ma wyróżniony kierunek, którym jest trzykrotna oś symetrii (C_3), tj. prosta przechodząca przez naroże utworzone przez trzy jednakowe kąty rozwarte: po obrocie kryształu wokół tej prostej o 120° powtarza się dowolny element kryształu, np. krawędź, ściana, a także jon CO_3^{2-} lub Ca^{2+} we wnętrzu kryształu. Również każda wielkość fizyczna, mierzona w kierunku prostopadłym do C_3 musi wykazać symetrię co najmniej C_3, tj. wynik pomiaru tej wielkości musi być identyczny po obrocie kryształu o 120°.

Jak wiadomo, wiele wielkości fizycznych wykazujących anizotropię, między innymi względna przenikalność dielektryczna (stała dielektryczna) zarówno statyczna jak i optyczna, może być przedstawionych za pomocą tensora drugiego rzędu. Cechą charakterystyczną wielkości tensorowych jest to, że mają trzy wzajemnie do siebie prostopadłe osie główne - zapoznaliśmy się z nimi bliżej omawiając moment bezwładności bryły sztywnej. Jedna z osi głównych tensora ε , na przykład ε_3, musi być dla kalcytu równoległa do C_3, ponieważ jest to jedyny wyróżniony w krysztale kierunek. Pozostałe osie, ε_1 i ε_2, są prostopadłe do C_3; każdy z kierunków, ε_1, ε_2 i ε_3 jest jednocześnie dwukrotną osią symetrii. Jedyny możliwy do przyjęcia sposób pogodzenia dwukrotnej osi

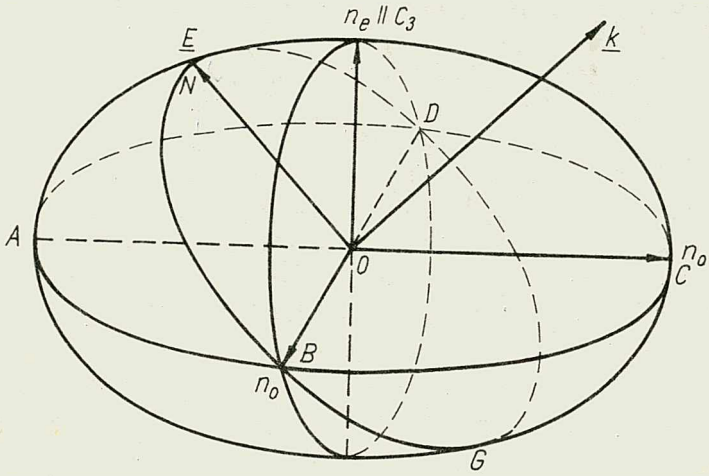
symetrii $C_2 \parallel \varepsilon_3$ tensora z osią trzykrotną $C_3 \parallel \varepsilon_3$ kryształu jest przyjęcie, że $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Oznacza to, że w każdym kierunku prostopadłym do C_3 wartość optycznej stałej dielektrycznej jest w krysztale kalcytu taka sama; innymi słowy, przekrój tensora prostopadle do C_3 jest w tym krysztale kołowy.

Wynika z tego, iż tensor optycznej stałej dielektrycznej możemy przedstawić za pośrednictwem powierzchni geometrycznej, zbudowanej na trzech wektorach wzajemnie prostopadłych. Powierzchnią tą jest elipsoida trójosiowa, a jej osiami głównymi są owe trzy wektory. Jest to ogólny i dlatego ważny sposób przedstawiania wielkości fizycznych, którym odpowiadają tensory drugiego rzędu. Nie można w równie poglądowy sposób zilustrować tensorów wyższych rzędów.

W optyce kryształów bardziej rozpowszechniła się jednak nie elipsoida optycznej stałej dielektrycznej, lecz powierzchnia zbudowana na odpowiadającym ε_i trzem głównym współczynnikom załamania światła n_i

$$(\varepsilon_i)^{1/2} = n_i, \quad i = 1,2,3. \tag{9.61}$$

Ma ona również kształt elipsoidy trójosiowej i nosi nazwę indykatrysy. Należy zwrócić uwagę, iż współczynnik załamania światła nie jest tensorem, choć może być przedstawiony powierzchnią analogiczną do ε, ponieważ nie spełnia wymagań nałożonych na wielkości tensorowe (nie spełnia prawa transformacji składowych podczas zmiany układu współrzędnych).

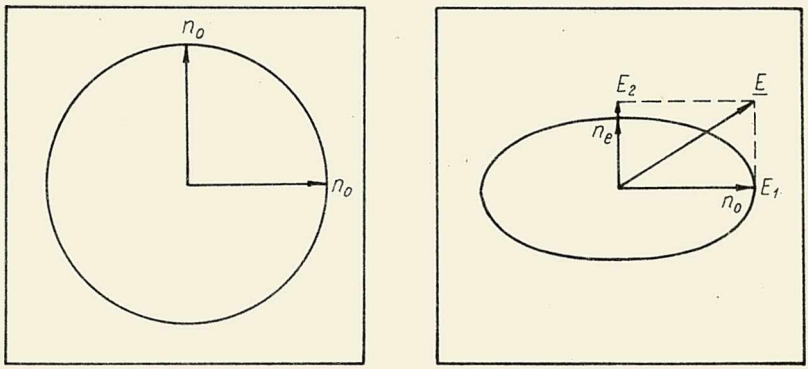


Rys. 9-31

Dochodzimy więc do wniosku, że dla kalcytu indykatryse ma kształt elipsoidy obrotowej, ponieważ $n_1 = n_2$. Przyjęto oznaczenia

$$n_3 = n_e, \quad n_1 = n_2 = n_o. \tag{9.62}$$

Każdy, z wyjątkiem jednego, przekrój centralny takiej bryły jest elipsą (rys. 9-31). Rozważmy na przykład przekrój EBGD; półosiami tej elipsy są OE i OB. Odpowiadają im współczynniki załamania światła N oraz n_o, przy czym $n_e \leqslant N \leqslant n_o$. Zauważmy, iż n_o musi być jedną z półosi każdego przekroju centralnego indykatrysy na rys. 9-31, ponieważ ma ona symetrię obrotową. Wobec tego płytka wycięta z kalcytu prostopadle do osi C_3 jest optycznie izotropowa (rys. 9-32a), natomiast



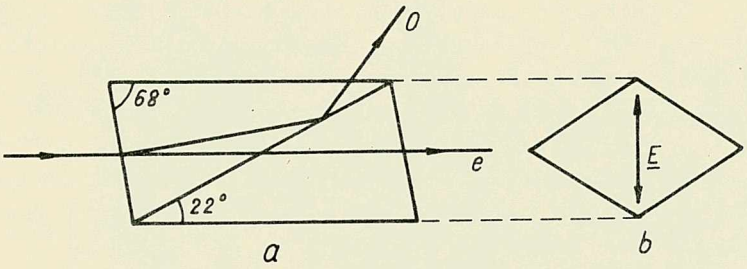
a *b*

Rys. 9-32

wycięta równolegle do C_3 wykazuje maksymalną anizotropię optyczną (rys. 9-32b). Obie osie każdego przekroju są jedynymi dopuszczalnymi kierunkami drgań wektora $\underline{E}$ fali elektromagnetycznej, której wektor falowy $\underline{k}$ jest skierowany wzdłuż normalnej do przekroju. Jeśli więc rozważamy przekrój EBGD, to w krysztale mogą się rozchodzić tylko dwie fale o wektorze falowym $\underline{k}$: dla jednej z nich wektor $\underline{E}$ musi być równoległy do OE, dla drugiej $\underline{E} \parallel$ OB. Przy innej orientacji wektora $\underline{E}$ fali padającej musi się ona rozszczepić wewnątrz kryształu na dwa promienie, których kierunki drgań spełniają ten warunek (rys. 9-30b). Z tego powodu kalcyt i inne kryształy, wykazujące optyczną anizotropię, są nazywane kryształami dwójłomnymi. Jedynie fala, której wektor $\underline{k} \parallel C_3$ nie ulega podwójnemu załamaniu, ponieważ przekrój prostopadły do C_3 jest kołowy; orientacja wektora $\underline{E}$ fali może być w tym przypadku dowolna.

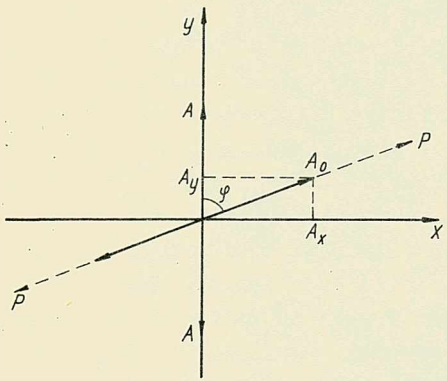
Jeden z dwu promieni w kalcycie ma szybkość stałą, c/n_o, niezależną od wyboru kierunku wektora $\underline{k}$ względem osi C_3; promień ten ozna-

cza się zwykle przez o i nazywa zwyczajnym (ordinaire). Prędkość drugiego promienia, c/N, zmienia się zależnie od nachylenia $\underline{k}$ względem C_3; oznacza się go literą e i nazywa nadzwyczajnym (extraordinaire).



Rys. 9-33

Kryształów kalcytu używa się do budowy pryzmatów, dostarczających promienia spolaryzowanego. Sposobów wykonania pryzmatu jest kilka, lecz cel stale ten sam: korzystając z dużej dwójłomności tego kryształu ($n_e = 1{,}486$, $n_o = 1{,}658$) dąży się do uzyskania dwóch wiązek spolaryzowanych, możliwie silnie rozdzielonych przestrzennie, a następnie usuwa się jedną z nich przez odbicie. Najprostszym rozwiązaniem jest pryzmat Nicole'a, zwany krótko nikolem (rys. 9-33a). Naturalny romboedr szlifuje się nieco i przecina wzdłuż jednej przekątnej tak, by uzyskać kąty podane na rys. 9-33a, a następnie skleja warstwą balsamu kanadyjskiego. Współczynnik załamania światła warstwy balsamu ma wartość pośrednią między n_e i n_o, wobec czego promień zwyczajny ulega całkowitemu odbiciu, promień nadzwyczajny zaś przechodzi przez pryzmat z niewielkim równoległym przesunięciem. Kierunek drgań $\underline{E}$ promienia opuszczającego pryzmat jest prostopadły do kierunku wiązki i leży w płaszczyźnie P połowiącej rozwarty kąt przekroju poprzecznego nikola (rys. 9-33b).



Rys. 9-34

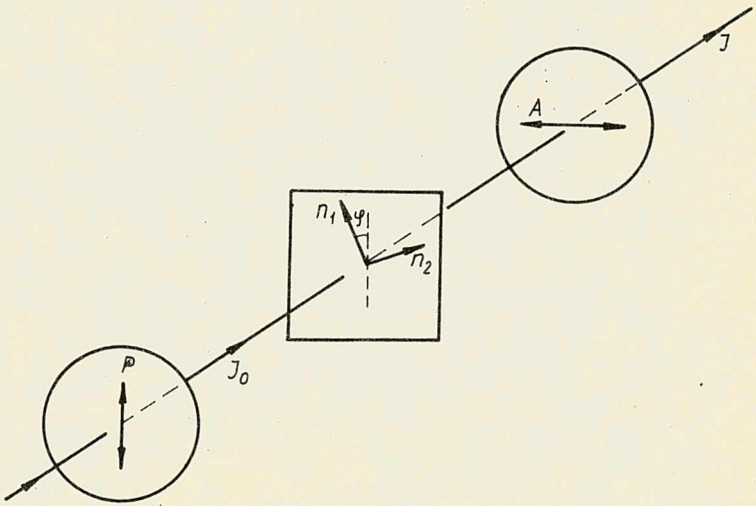
Przypuśmy teraz, że mamy dwa nikole ustawione jeden za drugim, przy czym kierunki drgań $\underline{E}$ przepuszczanego przez nie promieniowania tworzą ze sobą kąt φ (rys. 9-34). Promieniowanie niespolaryzowane biegnie prostopadle do płaszczyzny rysunku, a po przejściu przez pierwszy z nikoli, zwany polaryzatorem,

fala jest spolaryzowana: kierunek drgań $\underline{E}$ jest równoległy do PP, amplituda zaś niech wynosi A_o. Promieniowanie o takim kierunku polaryzacji nie może przejść przez drugi z nikoli, zwany analizatorem, ponieważ dopuszczalny przezeń kierunek drgań równoległy jest do AA. Amplitudę A_o możemy jednak rozłożyć na dwie składowe: A_y, równoległą do AA i A_x, prostopadłą do AA. Amplituda fali zatem, która przejdzie przez analizator wynosi $A_y = A_o \cos\varphi$ a jej natężenie

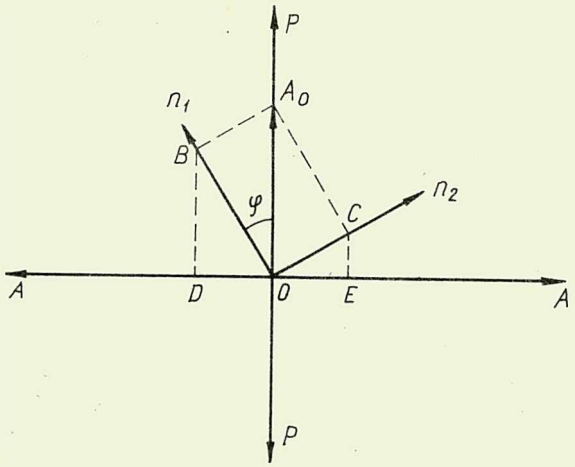
$$I = I_o \cos^2\varphi , \qquad (9.63)$$

jest proporcjonalne do kwadratu cosinusa kąta zawartego między kierunkami drgań obu nikoli. Związek (9.63) jest znany pod nazwą prawa Malusa; warto zauważyć, iż I_o jest natężeniem wiązki opuszczającej polaryzator - jest ono w przybliżeniu o połowę mniejsze od natężenia wiązki padającej. Ponadto, jeżeli $\varphi = 90^o$, to $I = 0$; taki układ nikoli nie przepuszcza promieniowania i jest nazywany układem skrzyżowanym. Ma on ważne zastosowania diagnostyczne, ponieważ pozwala odróżnić płytki wykonane z materiałów dwójłomnych od płytek izotropowych.

Niech między dwoma skrzyżowanymi nikolami znajduje się płytka z materiału dwójłomnego; n_1 i n_2 są dopuszczalnymi przez nią kierunkami drgań (rys. 9-35). Rozkład amplitud jest przedstawiony na rys.9-36. Amplituda A_o fali o kierunku drgań PP może rozchodzić się w krysz-



Rys. 9-35



Rys. 9-36

tale jako fala o kierunku drgań n_1 i amplitudzie $OB = A_0 \cos\varphi$. Analizator przepuszcza tylko składową równą $OD = OB \sin\varphi = A_0 \sin\varphi\cos\varphi$. Z drugiej strony wzdłuż kierunku n_2 przechodzi amplituda $OC = A_0 \sin\varphi$, z której analizator przepuszcza amplitudę $OE = OC \cos\varphi = A_0 \sin\varphi \cos\varphi$. Wobec tego, przez analizator przechodzi $OD + OC = 2A_0 \sin\varphi \cos\varphi = A_0 \sin 2\varphi$, czyli

$$I = I_0 \sin^2 2\varphi. \qquad (9.64)$$

Widzimy zatem, że ustawienie płytki z materiału dwójłomnego w taki sposób, by jeden z jej kierunków głównych (np. n_1) był równoległy do kierunku głównego polaryzatora ($\varphi = 0$), nie zmienia ciemnego pola widzenia dla układu skrzyżowanych nikoli. Znalezienie takiego położenia, zwanego kierunkiem ekstynkcji, jest ważne w badaniach optycznych własności płytek. Drugie takie położenie występuje gdy $\varphi = 90^\circ$. Obrotowi płytki wokół jej normalnej o kąt $\varphi = 45^\circ$ odpowiada maksymalne rozjaśnienie pola widzenia; położenia równoważne powtarzają się co 90°. W takim razie obrotowi płytki wokół jej normalnej o 360° towarzyszy czterokrotne maksymalne rozjaśnienie pola widzenia oraz czterokrotne jego zaciemnienie. W pośrednich położeniach płytki natężenie promieniowania przepuszczanego przez układ podaje wyrażenie (9.64). Jeżeli między skrzyżowane nikole wstawimy płytkę z materiału izotropowego, to pole widzenia zawsze będzie ciemne; omówione tu zjawiska są więc podstawą do rozróżnienia obu typów materiałów.

Rozjaśnienie pola widzenia występuje zgodnie z (9.64) niezależnie od wartości różnicy $(n_1 - n_2)$, zwanej dwójłomnością - pojawia się także wtedy, gdy dwójłomność materiału jest niewielka. Stanowi to podstawę do rozpoznania tzw. dwójłomności wymuszonej, pojawiającej się w przezroczystym i izotropowym materiale pod wpływem czynników zewnętrznych. Należą do nich wszelkiego rodzaju naprężenia, wytwarzane czy to przez działanie sił przyłożonych z zewnątrz, czy np. na skutek niejednorodności ostygania szklanych elementów aparatury. Układ "skrzyżowanych nikoli", umożliwiający obserwowanie występowania naprężeń w dużych elementach aparatury można wykonać z polaroidów o dużych rozmiarach.

9.9. Oddziaływanie promieniowania z materią

W rozdziale tym zajmiemy się opisem niektórych zjawisk fizycznych, towarzyszących przechodzeniu wiązki promieniowania elektromagnetycznego przez ciało materialne, przez które będziemy rozumieć jednorodną ciecz lub ciało stałe. Wiązka promieniowania monochromatycznego o długości fali λ i natężeniu I_i ulega częściowemu odbiciu od powierzchni ciała (natężenie I_r), częściowej absorpcji w jego wnętrzu (natężenie I_a) i częściowemu rozproszeniu (natężenie I_s). Jeśli przez I_t oznaczymy natężenie promieniowania przepuszczanego przez próbkę o skończonej grubości, to bilans energetyczny dla wiązki promieniowania przedstawia się następująco

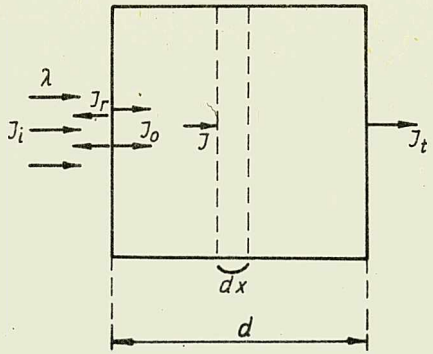
$$I_i - I_r = I_o = I_s + I_a + I_t. \tag{9.65}$$

Różnica między natężeniem wiązki padającej i odbitej odpowiada tej części wiązki, która wnika do wnętrza ciała - oznaczać ją będziemy przez I_o. Natężenie wiązki rozproszonej przez fazę chemicznie i fizycznie jednorodną ma znikomy, aczkolwiek bardzo ważny udział w (9.65); zjawiskami rozproszenia nie będziemy się tu jednak zajmowali. Opis ich można znaleźć w podręcznikach chemii fizycznej lub analizy instrumentalnej.

Absorpcja promieniowania monochromatycznego zachodzi w całej masie próbki i powoduje, że natężenie wiązki maleje w miarę przechodzenia przez substancję. Względna strata natężenia - dI/I po przejściu przez warstwę o grubości dx (rys. 9-37) jest proporcjonalna do grubości tej warstwy

$$-\frac{dI}{I} = k \cdot dx. \tag{9.66}$$

Wyrażenie (9.66) nosi nazwę prawa Lamberta i stanowi podstawę do ilościowego opisu zjawiska absorpcji. Jednostką stałej k jest m^{-1};



Rys. 9-37

wartość k zależy od długości fali λ użytego do pomiaru promieniowania.

Całka (9.66) ma postać

$$\ln I = -k \cdot x + \text{const},$$

przy czym wartość stałej całkowania wynika z warunków: $d = 0 \supset \ln I_o = \text{const}$. Jeżeli przez I_t oznaczymy natężenie promieniowania po przejściu przez warstwę materiału o grubości d, to otrzymamy prawo Lamberta w postaci

$$\ln \frac{I_t}{I_o} = -k \cdot d \tag{9.67}$$

lub

$$I_t = I_o e^{-kd}. \tag{9.68}$$

Zastępując w (9.67) logarytm naturalny dziesiętnym otrzymamy

$$2{,}303 \log \frac{I_t}{I_o} \equiv -kd.$$

Wielkość

$$\log \frac{I_t}{I_o} = E \tag{9.69}$$

nosi nazwę ekstynkcji, natomiast

$$\frac{I_t}{I_o} \cdot 100 \equiv D \tag{9.70}$$

zwana jest przepuszczalnością (w procentach) próbki. Obie wielkości są często spotykane w opisie własności próbek. Prócz stałej absorpcji k, używa się też wielkości bezwymiarowej $\varkappa$, zwanej indeksem absorpcji,

$$\varkappa = \frac{k \cdot \lambda}{4\pi} \tag{9.71}$$

spotykanej szczególnie często w fizyce metali.

Stała absorpcji k zależy od długości fali promieniowania. Każda substancja absorbuje w jakimś zakresie widma promieniowania elektromagnetycznego; jeśli jest bezbarwna w zakresie widzialnym, to z pewnością absorbuje w nadfiolecie i podczerwieni. Zależność $k(\lambda)$ stanowi ważną cechę indywidualną każdej substancji chemicznie i fizycznie jednorodnej, pozwalającą na jej zidentyfikowanie pod względem jakościowym i ilościowym. Postępowanie oparte na tej zasadzie nosi nazwę analizy spektrofotometrycznej i jest jednym z problemów silnie rozwiniętej dziś gałęzi analizy instrumentalnej, noszącej nazwę spektrofotometrii absorpcyjnej.

Natężenie promieniowania odbitego od zupełnie gładkiej powierzchni ciała zależy nie tylko od fizycznych własności materiału (współczynnik załamania światła, indeks absorpcji), lecz i od stanu polaryzacji padającej fali elektromagnetycznej. Pełny opis tych zjawisk podaje teoria Fresnela; obecnie zajmiemy się tylko najprostszym przypadkiem odbicia, gdy wiązka pada prostopadle. Wzory opisujące taki przypadek nie zawierają czynników trygonometrycznych.

Współczynnikiem odbicia nazywamy stosunek natężenia wiązki odbitej I_r, do natężenia wiązki padającej

$$R = \frac{I_r}{I_i} \tag{9.72}$$

wyrażany niekiedy w procentach. Jeśli materiał odbijający silnie pochłania promieniowanie, np. metal, wówczas współczynnik odbicia R_m granicy faz metal/próżnia (również metal/powietrze) wyraża się następującym wzorem

$$R_m = \frac{(n-1)^2 + \varkappa^2}{(n+1)^2 + \varkappa^2}. \tag{9.73}$$

Wartość współczynnika odbicia bardzo silnie zależy od udziału drugiego członu sumy w liczniku i mianowniku. Na przykład dla miedzi, jeśli długość fali $\lambda = 589$ nm mamy $n = 0{,}62$, $k = 5{,}61 \cdot 10^5$ cm^{-1}. Jest to przypadek silnej absorpcji, w związku z czym indeks absorpcji $\varkappa = 2{,}63$ jest również duży. Podstawienie tych danych do (9.73) prowadzi do współczynnika odbicia

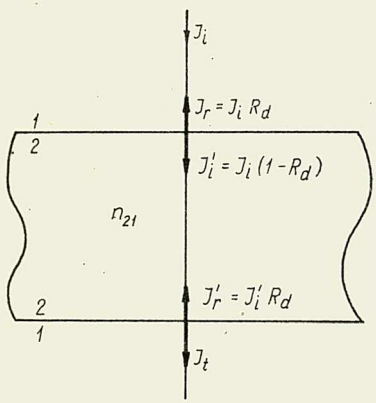
$$R_{Cu} = \frac{0{,}38^2 + 2{,}63^2}{1{,}62^2 + 2{,}63^2} = 0{,}741,$$

czyli wypolerowana powierzchnia miedzi odbija promieniowanie $\lambda = 589$ nm w 74,1%. Odbicie od powierzchni metalu jest więc dlatego tak silne, że metal silnie pochłania promieniowanie. W zakresie silnego pochłaniania współczynnik załamania światła może się wyrażać liczbą mniejszą od jedności.

Współczynnik odbicia materiałów nieprzewodzących, R_d, tym różni się od R_m, że zwykle $\varkappa$ możemy zaniedbać. Stała absorpcji dielektryków bezbarwnych, np. szkła lub wody jest niewielka: w zakresie długości fal od 300 nm (bliski nadfiolet) do 1000 nm (bliska podczerwień) stała absorpcji k nie przekracza wartości 10 cm^{-1}. Wobec tego średnia wartość $\langle\varkappa\rangle = (10 \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-5})/4\pi = 5{,}2 \cdot 10^{-5}$ może być zaniedbana wobec $(n-1)^2$. W takim razie dla dielektryka, bezbarwnego w interesującym nas zakresie spektralnym, współczynnik odbicia wyniesie

$$R_d = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}. \tag{9.74}$$

Dla granicy faz szkło/powietrze $n = 1{,}60$ oraz $R_d = 0{,}053$, czyli straty w natężeniu wiązki, ulegającej odbiciu, wynoszą w tym przypadku 5%. Straty te, niewielkie dla jednej granicy faz, ulegają zwielokrotnieniu jeśli w jakimś złożonym układzie optycznym występuje kilka elementów, z których każdy odbija promieniowanie. Prosta sytuacja dla płytki płaskorównoległej jest przedstawiona na rys. 9-38. Natężenie promienia odbitego od granicy faz 1/2 wynosi $I_R = I_i R_d$, wobec czego do wnętrza materiału wnika wiązka o natężeniu $I_i' = I_i(1 - R_d)$. Odbicie następuje również na granicy faz 2/1, przy czym dla niej współczynnik odbicia



Rys. 9-38

$$R_d' = \frac{\left(\frac{1}{n_{21}} - 1\right)^2}{\left(\frac{1}{n_{21}} + 1\right)^2} = \frac{(1 - n_{21})^2}{(1 + n_{21})^2} = R_d$$

jest taki sam, jak dla granicy faz 1/2. W obliczeniach użyliśmy współczynnika załamania dla przypadku przejścia promieniowania od ośrodka optycznie gęstszego do rzadszego: $n_{12} = 1/n_{21}$. W takim razie natężenie wiązki odbitej od drugiej granicy faz wyniesie $I_r' = I_i' \cdot R_d$, a natężenie wiązki przepuszczonej

$$I_t = I_i(1 - R_d)(1 - R_d) \cong I_i(1 - 2R_d). \tag{9.75}$$

Uwzględnienie odbicia od obu granic faz prowadzi do wniosku, że straty w natężeniu wiązki ulegają w przybliżeniu podwojeniu. W układach optycznych są to straty niepożądane, ponieważ zmniejszają ich jasność. W celu obniżenia strat pokrywa się powierzchnie szklane cień-

ką warstwą półprzewodnika (Si.Si-O) przez naparowanie jej w próżni ("niebieska optyka"); dla takiej warstwy współczynnik załamania światła, a więc i współczynnik odbicia, jest mniejszy niż w dielektryku.

Innym sposobem oddziaływania promieniowania z materią jest wzbudzenie drgań elektronów i jąder elementów strukturalnych ciała przezroczystego, przez które przechodzi fala elektromagnetyczna. Wymuszenie drgań prowadzi bezpośrednio do wyjaśnienia tej własności dielektryków, którą nazywamy dyspersją; dyspersja jest bowiem zależnością współczynnika załamania światła, $n(\lambda)$, od długości fali, przy której został zmierzony. Zajmiemy się przy tym tak zwaną klasyczną teorią dyspersji; nowsza teoria, kwantowa, daje bardziej ścisły opis zjawisk, ale jakościowe wyniki teorii klasycznej, znacznie prostszej, nie ulegają większym zmianom.

Przyjmiemy zatem następujący model dyspersji. Na ciało w przybliżeniu przezroczyste, tj. słabo absorbujące, pada monochromatyczna fala elektromagnetyczna, która niesie z sobą szybkozmienne pole elektryczne $\underline{E} = \underline{E}_o \sin \omega t$; ω jest częstością kątową zmian wektora $\underline{E}$. Pod wpływem zmiennego pola elektrycznego zachodzi wymuszenie drgań elektronów, przede wszystkim najsłabiej związanych z elementem strukturalnym, czyli tak zwanych elektronów optycznych. Przy małej częstości drgań fali można pobudzić do drgań jądra atomów, a przy jeszcze mniejszej - całe cząsteczki. Każdy element (elektron lub jądro) jest związany z położeniem równowagi za pomocą liniowej siły sprężystej, której współczynnik odpowiada sposobowi związania tego elementu z otoczeniem. W ten sposób możemy rozumieć ciało stałe jako zbiór oscylatorów, wykonujących drgania wymuszone pod wpływem padającej fali elektromagnetycznej. Zbiorowi oscylatorów odpowiada również pewien zbiór częstości drgań własnych; oznaczać je będziemy przez ω_{oi} dla oscylatorów "typu i", tj. dla wszystkich oscylatorów, posiadających tę samą stałą siłową k.

Poza tym niech x_i, m_i oraz e_i oznaczają odpowiednio wychylenie z położenia równowagi, masę oraz ładunek oscylatora. Przy tych oznaczeniach równanie ruchu oscylatora "i" ma postać

$$m_i \ddot{x}_i + k_i x_i = e_i E_o \sin \omega t + \frac{1}{3\varepsilon_o} e_i P_i. \qquad (9.76)$$

W równaniu tym są zawarte dwa uproszczenia:

i. zaniedbaliśmy tłumienie oscylatorów; można to uczynić wtedy, gdy absorpcja promieniowania w dielektryku jest bardzo niewielka. Jeśli jednak napiszemy równanie ruchu w postaci (9.76) należy od razu liczyć się z tym, że wartość amplitudy w punkcie rezonansowym będzie

nieskończenie duża. Jest to wynik fałszywy z fizycznego punktu widzenia - odpowiednią poprawkę uwzględnimy w końcowej fazie rachunku.

ii. drugi składnik prawej strony przedstawia siłę, wynikającą z polaryzacyjnego działania szczeliny mikroskopowej (por.rozdz. 7.3.3). Pisząc go w tej postaci przyjmujemy, że dielektryk ma własności izotropowe.

P_i jest udziałem oscylatorów "i" w ogólnej polaryzacji ośrodka. Ponieważ liczbowo P_i równe jest momentowi dipolowemu jednostki objętości, możemy więc napisać

$$P_i = N_i e_i x_i = N_i \alpha_i E, \tag{9.77}$$

przy czym N_i oznacza liczbę oscylatorów i w jednostce objętości, zaś $e_i x_i$ jest wymuszonym (wzbudzonym) momentem dipolowym oscylatora. Zgodnie z wzorem (6.8) wielkość indukowanego momentu dipolowego jest proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego, w tym przypadku pola E fali elektromagnetycznej; α_i jest polaryzowalnością (izotropową) oscylatora. Ogólny wektor polaryzacji ośrodka będzie równy $E \sum_i N_i \alpha_i$; w połączeniu z (7.20) otrzymamy

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_o} \sum_i N_i \alpha_i. \tag{9.78}$$

Wróćmy obecnie do równania różniczkowego (9.76). Podstawienie do niego wyrażenia (9.77) na P_i oraz skorzystanie z równości $k_i = m_i \omega_{oi}^2$ prowadzi do równania

$$\ddot{x}_i + \omega_{oi}^2 x_i = \frac{e_i}{m_i} E + \frac{e_i^2}{3\varepsilon_o m_i} N_i x_i. \tag{9.79}$$

Rozwiązania (9.79) będziemy poszukiwać w postaci

$$x_i = A_i \sin \omega t, \tag{9.80}$$

gdzie A_i oznacza amplitudę drgań wymuszonych oscylatora. Tym samym interesujemy się amplitudą ruchu o tej samej częstości, co częstość siły wymuszającej. Ponieważ założyliśmy brak tłumienia, możemy więc pominąć obecność stałej fazowej w (9.80); stała ta odpowiada przesunięciu fazowemu między siłą wymuszającą a "odpowiedzią" układu - jej uwzględnienie znacznie komplikuje rachunki.

Podstawienie rozwiązania (9.80) do (9.79) i uporządkowanie wyrazów prowadzi do wyrażenia na przesunięcie x_i oscylatora względem położenia równowagi

$$x_i = \frac{e_i/m_i}{\omega_{oi}^2 - \omega^2 - \frac{e_i^2 N_i}{3\varepsilon_o m_i}} E. \tag{9.81}$$

Widzimy, że częstość własna oscylatorów we wnętrzu ciała stałego, ω_i, jest inna, niż w próżni, ω_{oi}

$$\omega_i^2 = \omega_{oi}^2 - \frac{e_i^2 N_i}{3\varepsilon_o m_i} . \tag{9.82}$$

W szczególności, w ciele stałym częstość ta ulega obniżeniu, zależnemu od koncentracji N_i oscylatorów. Po uwzględnieniu (9.82) otrzymujemy

$$x_i = \frac{e_i/m_i}{\omega_i^2 - \omega^2} E,$$

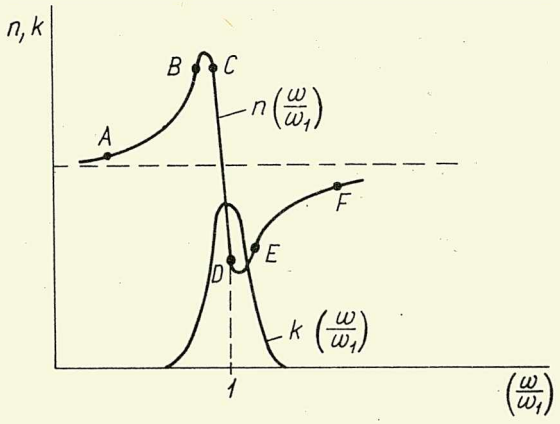
a na podstawie (9.78)

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_o} \sum_i \frac{N_i e_i^2/m_i}{\omega_i^2 - \omega^2} . \tag{9.83}$$

Wzór (9.83) stanowi podstawową zależność teorii dyspersji: opisuje on zmiany współczynnika załamania światła w zależności od częstości ω padającej fali elektromagnetycznej. Ze względu na poczynione uproszczenia w teorii, polegające na zaniedbaniu absorpcji i związanego z nią tłumienia oscylatorów, zgodności wzoru (9.83) z doświadczeniem możemy oczekiwać w obszarach spektralnych, dostatecznie oddalonych od częstości absorpcyjnych ω_i. Uwzględnienie absorpcji możliwe jest w sposób ścisły jedynie dla gazów; dla nich $n \cong 1$, $n^2 + 2 \cong 3$, $n^2 - 1 \cong 2(n - 1)$. Nie wchodząc w szczegóły rachunku podamy jedynie, że wzór (9.83) przybiera wówczas postać

$$n - 1 = \frac{1}{2\varepsilon_o} \sum_i \frac{N_i e_i^2}{m_i} \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} , \tag{9.84}$$

w której Γ jest współczynnikiem, związanym ze stałą tłumienia oscylatorów, a jednocześnie ze stałą absorpcji. Wykres funkcji (9.84) jest przedstawiony na rys. 9-39 dla jednego składnika sumy, odpowiadającego częstości absorpcji ω_1; przy tej częstości obserwuje się linię absorpcyjną, $k(\omega/\omega_1)$. Gdy częstość ω promieniowania wzrasta, rośnie też współczynnik załamania światła materiału - część AB krzywej (także EF) odpowiada zakresowi dyspersji normalnej materiału. Po przejściu przez maksimum, współczynnik załamania światła gwałtownie spada: część CD krzywej odpowiada zakresowi dyspersji anomalnej. Niezależnie od rodzaju materiału, dyspersja anomalna występuje zawsze na obszarze pasma absorpcyjnego. W uproszczonej teorii (równanie 9.83) otrzymujemy w tym miejscu nieciągłość krzywej dyspersji. Widzimy zatem, że zja-



Rys. 9-39

wiska absorpcji i dyspersji są zjawiskami sprzężonymi: pojawienie się jednego warunkuje wystąpienie drugiego.

Wróćmy obecnie do równania (9.83) i dokonajmy porównania z danymi doświadczalnymi dla np. kryształu chlorku sodowego. Kryształ NaCl posiada złożone pasmo absorpcyjne w dalekim nadfiolecie, przy czym środek pasma przypada gdy wartość λ_1 wynosi 1050 Å. W absorpcji uczestniczą cztery elektrony (po dwa na każdy rodzaj jonów) tak, że koncentracja oscylatorów wynosi $N_1 = (4\, N_0 \cdot \rho)/M = 8{,}90 \cdot 10^{28}\ m^{-3}$, gdzie N_0 jest liczbą Avogadry, ρ gęstością, a M masą cząsteczkową NaCl. Poza tym $e^2/m = 2{,}81 \cdot 10^{-8}\ C^2/kg$ dla elektronów. W wyniku podstawienia tych danych otrzymujemy funkcję

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{2{,}45}{8{,}122 - (0{,}3/\lambda)^2},$$

przy czym λ jest wyrażone w mikronach. Wyniki obliczeń przedstawiają się następująco

λ (w μ)	0,3	0,4	0,5	0,7	1	2	3
n obliczone	1,604	1,562	1,544	1,529	1,522	1,517	1,516
n doświadczalne	1,607	1,568	1,552	1,539	1,532	1,527	1,519

Widzimy, iż nawet przy daleko idących uproszczeniach uzyskujemy dobre wyniki, obarczone błędem nie większym od 0,5%. Można uzyskać jeszcze większą dokładność przez uwzględnienie dalszych członów dyspersyjnych. Taki sposób liczenia jest jednak dość pracochłonny i wymaga znajomości stałych, nieraz niedostępnych. Dlatego do analitycz-

nego przedstawienia krzywej dyspersji normalnej korzystamy w praktyce z funkcji $n(\lambda)$, zapisanej w postaci wielomianu. Możemy ją uzyskać w następujący sposób: $n^2 + 2$, a także $n + 1$, zmienia się znacznie słabiej z ω, niż $n - 1$. Wobec tego zamiast (9.83) możemy napisać

$$n = a_0 + \sum \frac{a_i}{1 - (\lambda_i/\lambda)^2},$$

gdzie a_i są pewnymi stałymi, λ_i długościami fal odpowiadającymi maksimom absorpcji. Ponieważ $\lambda_i/\lambda < 1$, możemy więc każdy człon dyspersyjny rozwinąć w szereg. Po wykonaniu rachunków otrzymamy

$$n(\lambda) = A_0 + \frac{A_1}{\lambda^2} + \frac{A_2}{\lambda^4} + \ldots . \qquad (9.85)$$

Funkcję (9.85) przybliżamy do wielomianu, zachowując liczbę wyrazów zależnie od potrzebnej dokładności; stałe A_i traktujemy jako empiryczne, tzn. aby je wyznaczyć trzeba znać odpowiednią liczbę par (λ, n). Wyrażenie (9.85) nosi nazwę wzoru Cauchy'ego.

Zauważmy w końcu, że jeśli w (9.83) ustalimy ω, czyli dokonamy pomiaru n dla określonej długości fali, to prawa strona jest wartością stałą. Wydziela się z niej zwykle gęstość substancji, wchodzącą w wyrażenie dla koncentracji oscylatorów; w takim razie wyrażenie

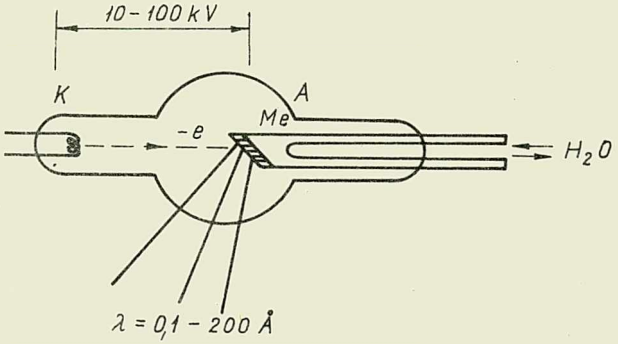
$$R \equiv \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{\rho} \qquad (9.86)$$

zwane refrakcją właściwą związku chemicznego jest wartością stałą. Wartość R nie zależy od temperatury, jeśli cząsteczki związku nie posiadają trwałego momentu dipolowego, nie zależy wówczas również od stanu skupienia. Refrakcja jest wielkością ważną dla chemii fizycznej i tam też zapozna się Czytelnik z dalszymi jej własnościami.

9.10. Promieniowanie rentgenowskie

Źródłem promieniowania rentgenowskiego jest lampa, przedstawiona na rys. 9-40. W bańce szklanej, bardzo starannie ewakuowanej, są umieszczone dwie elektrody: katoda i anoda. Katoda jest wykonana z drutu wolframowego i po rozgrzaniu prądem elektrycznym do około 2500 °C służy jako źródło elektronów. Anoda jest elektrodą masywną, ma nalutowaną nakładkę z badanego metalu oraz układ kanałów do przepływu wody chłodzącej. Między obie elektrody przykłada się różnicę potencjałów rzędu 10 do 100 kV; ponieważ przez lampę płynie prąd elektronowy o natężeniu rzędu kilkudziesięciu miliamperów, jej moc nominalna wynosi

około 1 kW. Z mocy tej tylko 1-2 procent zamienia się na użyteczne dla nas promieniowanie, reszta wydziela się w postaci ciepła, które musi być odprowadzone.



Rys. 9-40

Promieniowanie rentgenowskie wytwarza się w miejscu uderzenia wiązki szybkich elektronów w materiał anody. Mechanizm emisji może być dwojaki i dlatego wyróżnia się dwa typy promieniowania.

i. Jeżeli energia jest dostateczna, to niektóre z rozpędzonych elektronów wybijają z atomów metalu elektrony znajdujące się blisko jądra; mogą to być elektrony należące do warstwy K, L . Pojawiają się w ten sposób miejsca puste, które mogą być zapełnione elektronami z dalszych warstw atomu, w połączeniu z emisją promieniowania krótkofalowego. Przejścia elektronów z warstwy L do warstwy K oznacza się symbolem K_α, przejścia M → K symbolem K_β, przejścia M → L symbolem L_α, itd. Ze względu na dyskretny charakter energii poziomów atomu emisja ma charakter kwantowy i prowadzi do powstania niewielkiej liczby linii emisyjnych, z których linie K_α są najsilniejsze i mają największe znaczenie praktyczne. Zbiór tych linii nosi nazwę promieniowania charakterystycznego, ponieważ, zgodnie z prawem Moseleya, ich częstość zależy od liczby porządkowej Z pierwiastka, tworzącego anodę.

$$\sqrt{\nu} = a\,(Z - b). \tag{9.87}$$

ν jest częstością linii emisyjnej, zaś a i b są stałymi.

Jest jasne, że warunkiem pojawienia się linii promieniowania charakterystycznego, np. linii CuK_α, energia elektronu eU_o rozpędzonego napięciem U_o musi być co najmniej równa pracy W_K usunięcia elektronu z warstwy K; zatem

$$eU_o \geq W_K \tag{9.88}$$

U_o nosi nazwę napięcia wzbudzenia określonej linii promieniowania charakterystycznego, np. dla miedzi napięciem progowym dla linii K_α jest $U_o = 8{,}9$ kV.

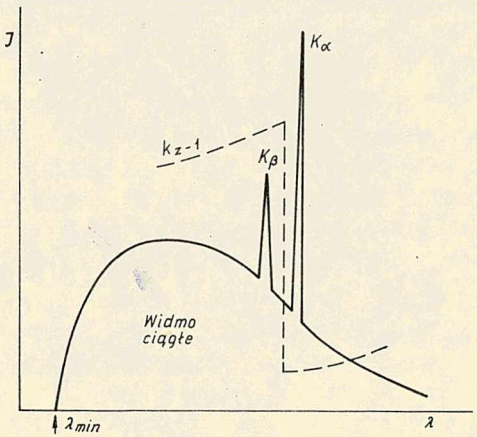
ii. Zderzenie większości elektronów z materiałem anody powoduje gwałtowne zmniejszenie ich prędkości. W myśl elektrodynamiki klasycznej, elektron poruszający się ruchem opóźnionym musi emitować promieniowanie elektromagnetyczne. W ten sposób powstaje drugi rodzaj emisji, który odpowiada promieniowaniu hamowania o widmie ciągłym. Przyczyną ciągłego charakteru emisji jest zarówno różna szybkość tracenia energii jak i to, że elektrony mogą mieć różne energie kinetyczne. Niemniej jednak istnieje pewna maksymalna wartość energii, jaką może posiadać elektron, zależna od wartości doprowadzonego do lampy napięcia U_m. Jeśli cała energia eU_m zostaje zużyta na emisję promieniowania, to powstającemu w takim procesie kwantowi odpowiada maksymalna częstość ν_{maks} lub minimalna długość fali λ_{min}

$$e\,U_m = h\nu_{maks} = \frac{hc}{\lambda_{min}} . \tag{9.89}$$

Po podstawieniu stałych otrzymamy

$$\lambda_{min}(\text{Å}) = \frac{12{,}4}{U_m(\text{kV})} . \tag{9.90}$$

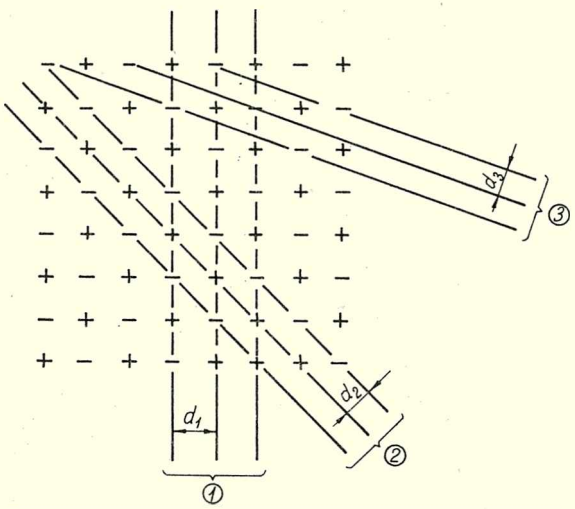
Widzimy z tego, że jeżeli różnica potencjałów wynosi na lampie 50 kV, to widmo ciągłe promieniowania musi mieć ostrą granicę krótkofalową przy długości fali $\lambda_{min} = 0{,}248$ Å, niezależnie od materiału anody; fale o długości $\lambda < \lambda_{min}$ nie mogą być emitowane. Te cechy wid-



Rys. 9-41

ma ciągłego oraz charakterystycznego są przedstawione schematycznie na rys. 9-41. Na tym samym rysunku został linią przerywaną naniesiony wykres stałej absorpcji $k_{Z-1}(\lambda)$ cienkiej folii metalowej, wykonanej z pierwiastka, którego liczba porządkowa jest o jedność mniejsza od liczby Z materiału anody. Cechą charakterystyczną takiego "filtru" jest to, że jego krawędź absorpcji przypada między liniami K_β i K_α pierwiastka emitującego. Wobec tego praktycznie całe natężenie linii K_β oraz bardzo znaczna część promieniowania ciągłego zostaje pochłonięta przez folię, a linia K_α zostaje przepuszczona, również z pewnym osłabieniem (do 50%). Jest to najprostszy sposób otrzymania promieniowania monochromatycznego.

Promieniowanie rentgenowskie jest falą elektromagnetyczną o długości fali leżącej (umownie) w zakresie 0,1 do 200 Å. Jednakże długi czas po odkryciu Röntgena brakowało bezpośredniego dowodu falowej natury promieniowania, ponieważ nie udało się doprowadzić do interferencji używając najlepszych nawet siatek dyfrakcyjnych. Jeśli przyjmiemy $\lambda = 2$ Å (o czym wówczas nie wiedziano), to kąt ugięcia dla maksimum pierwszego rzędu przy siatce, zawierającej 2000 linii na milimetr, wyniesie: $\sin\varphi = 2\cdot10^{-8}/5\cdot10^{-5} = 4\cdot10^{-4}$, $\varphi = 0{,}023^\circ = 1{,}4'$; nie można zaobserwować prążka przy tak małym kącie ugięcia.

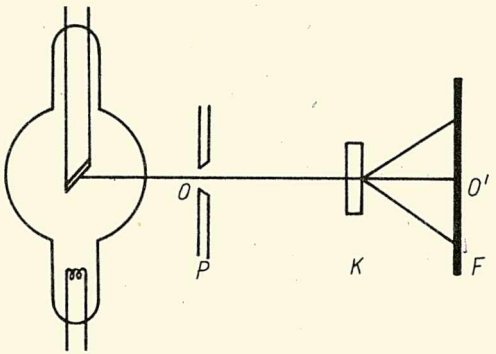


Rys. 9-42

Właściwą metodę wykazania interferencji zaproponował von Laue. Metoda ta jest oparta na wykorzystaniu regularnej budowy kryształów: atomy lub jony, tworzące periodyczną sieć przestrzenną kryształu, two-

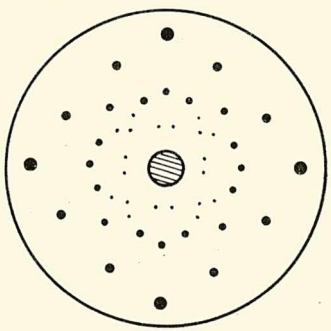
rzą tym samym określone zbiory płaszczyzn sieciowych. Odległość sąsiednich płaszczyzn, należących do jednego zbioru jest jednakowa i powinna odpowiadać warunkom potrzebnym do uzyskania obrazu interferencyjnego promieniowania rentgenowskiego.

Rozważmy płaszczyznę sieciową prostej struktury, jaką ma na przykład kryształ chlorku potasu (rys. 9-42). Występują w niej na przemian jony dodatnie i ujemne; możemy na tej płaszczyźnie wyróżnić kilka kierunków równoległych, stanowiących ślady przecięcia płaszczyzn sieciowych w strukturze trójwymiarowej. Zbiór prostych, oznaczonych liczbą 1, odpowiada płaszczyznom prostopadłym do płaszczyzny rysunku i obsadzonym jonami różnoimiennymi, d_1 jest odległością dwóch sąsiednich płaszczyzn. Zbiory prostych 2 i 3 odpowiadają płaszczyznom obsadzonym przez jony jednoimienne; ich odległości wynoszą odpowiednio d_2 i d_3 i różnią się od siebie. Widzimy więc, iż periodyczną strukturę kryształu możemy traktować jako zbiór przestrzennych siatek dyfrakcyjnych - na tym właśnie opierała się sugestia Lauego.



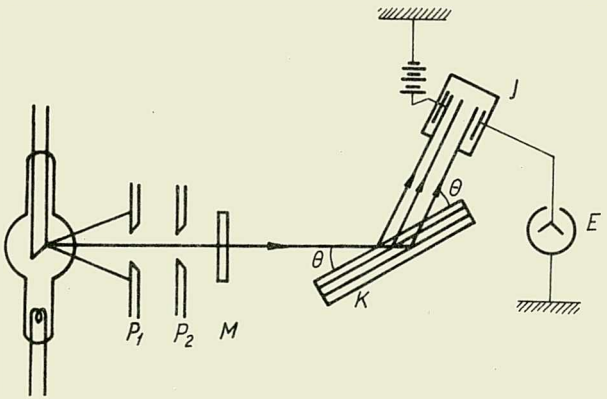
Rys. 9-43

Odpowiednie doświadczenie, przedstawione na rys. 9-43, wykonali Friedrich i Knipping. Promieniowanie lampy, zawierające składową ciągłą i charakterystyczną widma, przechodzi przez mały otworek w przesłonie P i pada na cienką płytkę krystaliczną K. Obraz dyfrakcyjny otrzymuje się na kliszy fotograficznej F: oprócz śladu wiązki pierwotnej OO', w późniejszych doświadczeniach zasłanianej przed kliszą, pojawia się wiele śladów wiązek ugiętych w postaci zaczernień, zwanych refleksami. Rozkład refleksów w płyt-



Rys. 9-44

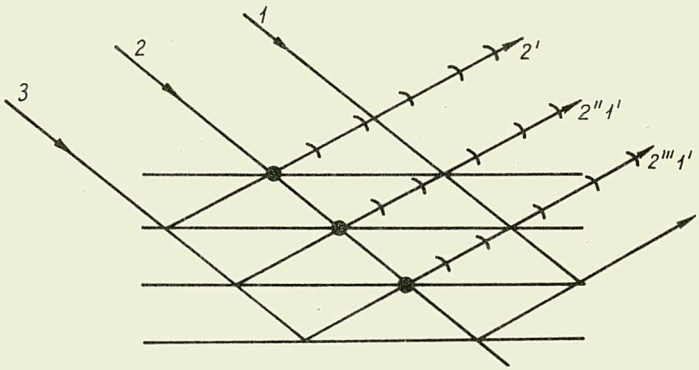
ce KCl jest pokazany schematycznie na rys. 9-44. Widzimy, iż symetria rozkładu zaczernień odpowiada czterokrotnej osi symetrii, prostopadłej do płaszczyzny rysunku, a jednocześnie prostopadłej do płytki krystalicznej. Jest to ogólna cecha tzw. metody Lauego: zdjęcie wykonuje się przy nieruchomym krysztale i promieniowaniu o widmie ciągłym. Uzyskany rentgenogram posiada symetrię, która zawiera dwie informacje: informację o symetrii kryształu i informację o orientacji płytki względem kierunku wiązki pierwotnej.



Rys. 9-45

Doświadczenie Friedricha i Knippinga było bezpośrednim dowodem słuszności hipotezy Lauego, lecz nie dawało możliwości pomiaru długości fali użytego promieniowania. Zasadniczą przeszkodą jest fakt, że do zdjęć tego typu używa się widma ciągłego. Niedostatki te zostały usunięte w doświadczeniu Braggów (L. Bragg i W. Bragg), którzy posłużyli się monochromatyczną wiązką promieniowania charakterystycznego. Schemat doświadczenia jest pokazany na rys. 9-45. Promieniowanie lampy przechodzi przez dwie przesłony P_1 i P_2 w celu otrzymania wiązki ściśle równoległej, a następnie przez filtr M, obcinający widmo ciągłe. Monochromatyczna wiązka pada na kryształ K, przedstawiony jako zbiór płaszczyzn równoległych, a po odbiciu wchodzi do detektora, którym jest komora jonizacyjna J. Z chwilą pojawienia się wiązki odbitej w komorze płynie prąd, wskazywany przez elektrometr E. Dla promieniowania rentgenowskiego kąt padania mierzy się inaczej, niż w optyce: jest to kąt zawarty między płaszczyzną próbki a kierunkiem wiązki pierwotnej.

Wiązka odbita powstaje w ten sposób, że padające promieniowanie ulega rozproszeniu we wszystkich kierunkach przez elektrony, wchodzące w skład elementów strukturalnych kryształu; jądra atomowe rozpraszają promieniowanie nadzwyczaj słabo. W wystarczającym dla nas uproszczeniu możemy stwierdzić zgodnie z zasadą Huygensa, iż każdy atom (jon) kryształu możemy traktować jako źródło fali cząstkowej, kulistej (rys. 9-46). Powstaniem wiązki odbitej rządzą dwa prawa Braggów:

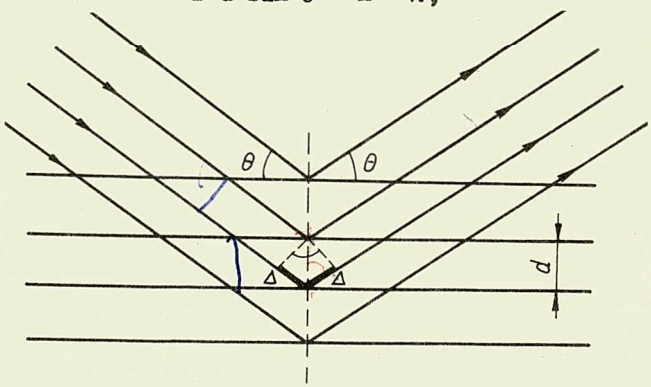


Rys. 9-46

i. Fale cząstkowe wygaszają się we wszystkich kierunkach, z wyjątkiem kierunku leżącego w płaszczyźnie odbicia, w którym mogą się wzmacniać.

ii. Wzmocnienie wiązki odbitej zachodzi wówczas, gdy różnica dróg promieni odbitych przez sąsiednie płaszczyzny sieciowe jest równa całkowitej wielokrotności długości fali. Na podstawie rysunku 9-47 mamy $\Delta = d \sin \Theta$, zatem

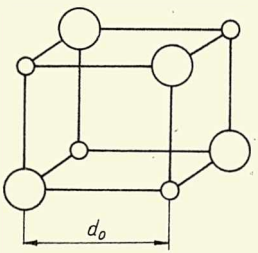
$$2\, d \sin \Theta = n \cdot \lambda, \qquad (9.91)$$



Rys. 9-47

Warunek (9.91) określa kąt Θ, zwany często kątem Bragga, dla którego możemy otrzymać wiązkę odbitą od zbioru płaszczyzn sieciowych, których wzajemna odległość wynosi d. Jednocześnie równanie to stanowi podstawę interpretacyjną powstawania refleksów.

W tym stanie rzeczy mamy związek między dwiema podstawowymi wielkościami, jednak obie są nam jeszcze nie znane. Okazuje się, że d dla prostego kryształu, np. KCl, można wyznaczyć niezależnie w sposób następujący. Sześcian elementarny kryształu KCl jest przedstawiony na rys. 9-48 - na każdym narożu znajduje się na przemian jon K^+ lub Cl^-. Sześcian zawiera zatem $4 \cdot \frac{1}{8} K^+ + 4 \cdot \frac{1}{8} Cl^- = \frac{1}{2}$ KCl cząsteczek i ma objętość $V = d_o^3$. Z drugiej strony 1 mol KCl zawiera N_o cząsteczek KCl, gdzie N_o jest liczbą Avogadra i ma objętość $V_{mol} = M_{KCl}/\rho$, gdzie M_{KCl} jest masą cząsteczkową KCl, zaś ρ gęstością kryształu. W takim razie



Rys. 9-48

$$2 d_o^3 \cdot N_o = V_{mol} = \frac{M_{KCl}}{\rho},$$

czyli

$$d_o = \left(\frac{M_{KCl}}{2 N_o \cdot \rho} \right)^{1/3}. \qquad (9.92)$$

Po podstawieniu znanych wartości otrzymujemy

$$d_o = 3{,}150 \text{ Å}.$$

Jest to odległość między sąsiednimi płaszczyznami typu 1 na rys. 9-42; odległość dwóch identycznych płaszczyzn $d = 2 d_o$. Jeżeli użyjemy promieniowania CuK_α, to pierwsze silne odbicie obserwuje się dla $\Theta = 7{,}02^\circ$, stąd $n = 1$ oraz

$$CuK_\alpha = 2d \sin \Theta = 1{,}540 \text{ Å}.$$

Monochromatyczne promieniowanie rentgenowskie o znanej długości fali może służyć do mierzenia nie znanych odległości między płaszczyznami w innych kryształach. Jest to jedno z zadań rentgenowskiej analizy strukturalnej, której celem jest poznanie wewnętrznej budowy (struktury) kryształów. Zadanie to jest realizowane w dwóch etapach:

1. Pomiar odległości między płaszczyznami kryształu oraz symetrii rozkładu refleksów umożliwia ustalenie rozmiarów i symetrii elementarnego równoległościanu, zwanego komórką elementarną; periodyczne powtarzanie komórki elementarnej w kierunku trzech jej różnych krawędzi umożliwia zbudowanie charakterystycznej dla kryształu sieci przestrzennej.

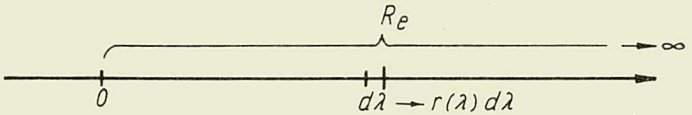
ii. Pomiar natężenia refleksów prowadzi do ustalenia rozkładu masy (położenia atomów) wewnątrz komórki elementarnej.

Wśród innych zastosowań promieniowania rentgenowskiego należy wymienić badania diagnostyczne w medycynie, pozwalające wykryć obecność niektórych schorzeń, ciał obcych lub złamań kostnych. Poza tym promieniowanie ma zastosowanie w defektoskopii, zajmującej się wykrywaniem wad materiałów technologicznych i elementów budowy maszyn (pęknięcia odlewów, pęcherzyki powietrza, etc.).

10. DUALIZM KORPUSKULARNO-FALOWY

10.1. Promieniowanie temperaturowe ciał Prawo Kirchhoffa

Wszystkie ciała, których temperatura jest wyższa od 0 K, tracą energię pod postacią emitowanego promieniowania elektromagnetycznego. Jednocześnie pobierają energię promieniowania, emitowaną przez ciała, znajdujące się w ich bezpośrednim otoczeniu. Zależnie od tego, czy temperatura otoczenia jest wyższa, czy niższa od wybranego przez nas do obserwacji ciała, przeważa proces zyskiwania energii nad utratą lub odwrotnie. Jeśli ciało otrzymuje od ciał sąsiadujących dokładnie taką samą ilość energii jaką traci wskutek promieniowania przez całą jego powierzchnię, to mówimy o promieniowaniu termicznie zrównoważonym. W takim przypadku własności emitowanego przez ciało promieniowania zależą od temperatury ciała, a nie zależą od sposobu dostarczania energii na wyrównanie strat. Takie promieniowanie nazywamy temperaturowym.



Rys. 10-1

Energia jest emitowana przez rozgrzane ciało w postaci tzw. widma ciągłego; oznacza to, że każda długość fali, teoretycznie od zera do nieskończoności, występuje w widmie promieniowania, choć z różnym natężeniem. Moc promieniowania emitowana przez jednostkę powierzchni ciała w pełnym zakresie długości fal będziemy nazywać emisją energetyczną ciała R_e, przy czym jednostką R_e jest w/m^2. Często interesuje nas moc, emitowana tylko w pewnym wąskim przedziale długości fal $d\lambda$; energię tę oznaczać będziemy przez $r(\lambda)\, d\lambda$. Mamy oczywiście (rys.10-1)

$$dR_e = r(\lambda)\, d\lambda. \qquad (10.1)$$

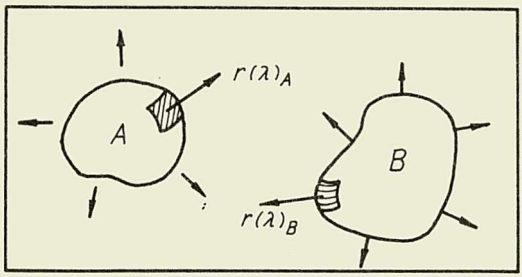
Wartość energii dR_e zależy od dwóch czynników: od szerokości przedziału $d\lambda$ i od jego położenia na skali długości fal. Zauważmy, że energia promieniowania o ściśle określonej długości fali, tj. promieniowania ściśle monochromatycznego wynosi zero, ponieważ dla takiego promieniowania $d\lambda = 0$. Dlatego dR_e określamy dla bardzo małego, ale różnego od zera przedziału długości fal; takie promieniowanie nie jest jednak ściśle monochromatyczne.

Ponieważ $[r(\lambda)] = J/(s \cdot m^3) = w/m^3$, wielkość $r(\lambda)$ jest gęstością mocy promieniowania ciała rozgrzanego przypadającą na jednostkowy przedział długości fal i nosi nazwę zdolności emisyjnej.

Z drugiej strony, jak wiemy, powierzchnia ciała absorbuje energię na nią padającą. Niech $dE^{(p)}(\lambda)$ oznacza energię padającą na element dS powierzchni ciała w zakresie długości fal od λ do $\lambda + d\lambda$. Część tej energii ulegnie odbiciu, część zostanie zaabsorbowana. Oznaczmy tę ostatnią wielkość przez $dE^{(a)}(\lambda)$; mamy oczywiście $dE^{(a)}(\lambda) \leqslant dE^{(p)}(\lambda)$ oraz

$$\frac{dE^{(a)}(\lambda)}{dE^{(p)}(\lambda)} = a(\lambda) \leqslant 1. \qquad (10.2)$$

Ułamek energii zaabsorbowanej względem energii padającej w tym samym przedziale długości fal λ, $\lambda + d\lambda$, jest oznaczany przez $a(\lambda)$ i nosi nazwę zdolności absorpcyjnej ciała. Zdolność absorpcyjna jest liczbą bezwymiarową, ale podobnie jak zdolność emisyjna jest funkcją długości fali λ.



$T_{OA} > T_{OB}$
$r(\lambda)_A > r(\lambda)_B$

Rys. 10-2

Obie stałe $r(\lambda)$ i $a(\lambda)$ nie są niezależne. Rozważmy następującą sytuację: mamy dwa ciała, A i B, umieszczone wewnątrz osłony nieprzezroczystej dla promieniowania (rys. 10-2). Niech na początku będzie

$T_{0A} > T_{0B}$, czyli początkowa temperatura A jest wyższa od temperatury początkowej B; przyjmujemy ponadto, że $r(\lambda)_A > r(\lambda)_B$. Ciało A wysyła zatem w przedziale λ, $\lambda + d\lambda$ większą moc promieniowania, niż B w tym samym przedziale. W takim razie A dostaje mniejszą porcję energii w ciągu 1 s niż samo wysyła; temperatura A musi maleć, zaś temperatura B rosnąć, Dzieje się to tak długo, aż zgodnie z prawami termodynamiki obie temperatury ulegną wyrównaniu. Ponieważ dalej obowiązuje $r(\lambda)_A > r(\lambda)_B$, więc dla zachowania stałości temperatur musi być też $a(\lambda)_A > a(\lambda)_B$. Wynik ten jest treścią prawa promieniowania temperaturowego, podanego przez Kirchhoffa: stosunek zdolności emisyjnej do absorpcyjnej nie zależy od natury ciała i dla wszystkich ciał jest taką samą funkcją długości fali i temperatury $f(\lambda,T)$

$$\left\{\frac{r(\lambda)}{a(\lambda)}\right\}_A = \left\{\frac{r(\lambda)}{a(\lambda)}\right\}_B = \ldots = f(\lambda,T). \qquad (10.3)$$

10.2. Prawa promieniowania ciała doskonale czarnego

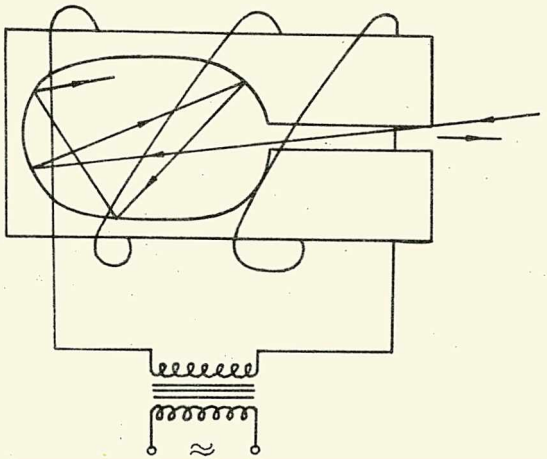
Spośród różnych obiektów emitujących promieniowanie na szczególne wyróżnienie zasługują takie, które całkowicie pochłaniają padające na nie promieniowanie. Ciała takie nazywamy doskonale czarnymi; dla nich $a(\lambda) = 1$ oraz

$$r(\lambda) = f(\lambda,T), \qquad (10.4)$$

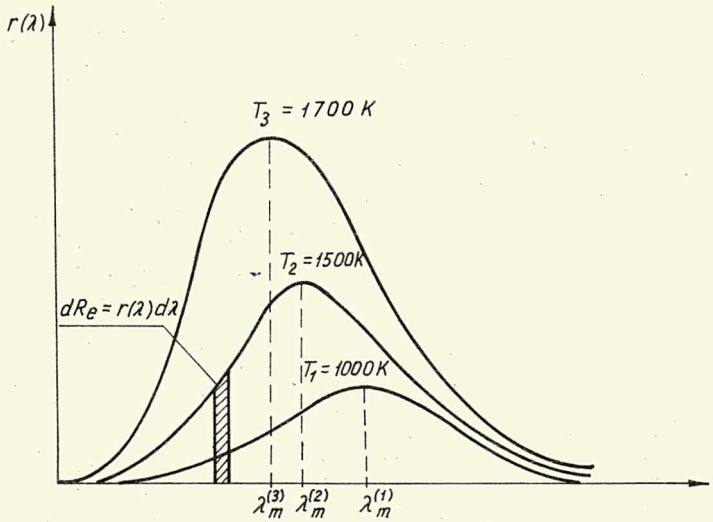
czyli zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego jest uniwersalną funkcją długości fali i temperatury. Każdy model eksperymentalny ciała doskonale czarnego będzie tu dobry, byle tylko spełniał warunek $a(\lambda) = 1$; jeden z takich modeli jest przedstawiony na rys. 10-3. Ciałem doskonale czarnym jest tu wnęka w dowolnym materiale, kontaktująca się z otoczeniem za pośrednictwem niewielkiego otworu. Blok materiału może być ogrzewany (elektrycznie) do potrzebnej temperatury T. Każdy promień przychodzący z zewnątrz ulega wielokrotnemu odbiciu, przy czym za każdym razem część energii zostaje pochłonięta tak, że w końcu cała energia padającego promienia zostanie zaabsorbowana. Otwór wysyła promieniowanie, zależne jedynie od temperatury T bloku.

Zależność $r(\lambda)$, uzyskana dla ciała doskonale czarnego eksperymentalnie, czyli rozkład spektralny zdolności emisyjnej, jest przedstawiony na rys. 10-4. Krzywa posiada dla każdej temperatury maksimum, którego położenie, czyli długość fali w maksimum λ_m, zależy od temperatury ciała. Całkowitą powierzchnię pod krzywą przedstawia wyrażenie

$$\int_0^\infty r(\lambda)\, d\lambda = R_e, \qquad (10.5)$$



Rys. 10-3



Rys. 10-4

czyli powierzchnia pod krzywą równa jest liczbowo całkowitej emisji energetycznej ciała doskonale czarnego w określonej temperaturze.

Prawa promieniowania ciała doskonale czarnego, poznane empirycznie, są następujące.

1. Prawo Stefana-Boltzmanna: całkowita emisja energetyczna R_e ciała doskonale czarnego jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury absolutnej ciała

$$R_e = \int_0^{\infty} r(\lambda)\, d\lambda = \sigma \cdot T^4. \qquad (10.6)$$

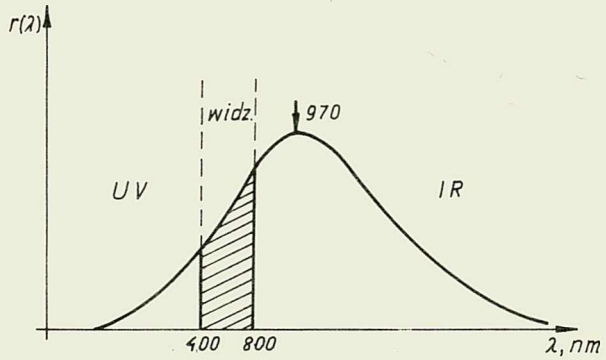
Liczbowa wartość stałej σ wynosi

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{J}{s\ m^2\ K^4}.$$

ii. Prawo przesunięć Wiena: długość fali λ_m, odpowiadająca maksimum zdolności emisyjnej $r(\lambda)$ jest odwrotnie proporcjonalna do temperatury absolutnej ciała doskonale czarnego

$$\lambda_m = \frac{c'}{T}, \qquad (10.7)$$

gdzie $c' = 2{,}898 \cdot 10^{-3}$ m.K.



Rys. 10-5

Drucik wolframowy o temperaturze 3000 K, świecący w zwykłej żarówce, wysyła promieniowanie, którego rozkład spektralny, przedstawiony na rys. 10-5, przypomina rozkład zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego. Maksimum tego rozkładu przypada na długość fali $\lambda_m = 2{,}898 \cdot 10^{-3}/3000$ m = 970 nm, a więc w zakresie podczerwieni. Niewielka, zakreskowana część powierzchni pod krzywą (rys. 10-5) obejmuje zakres widzialny promieniowania; również niewielka część powierzchni przypada na zakres nadfioletowy (UV), natomiast przeważająca część mocy jest emitowana pod postacią promieniowania podczerwonego (IR), powodującego ogrzewanie żarówki.

Podstawowym zagadnieniem teorii promieniowania ciała doskonale czarnego jest wyjaśnienie mechanizmu promieniowania, tj. znalezienie analitycznego opisu krzywej na rys. 10-4. Podejmowano w tym kierunku

wiele wysiłków, konstruując różne modele promieniowania; do czasu ogłoszenia przez Plancka teorii promieniowania wszystkie te modele były jednak nieudane. Przedstawimy dwie takie próby wyjaśnienia mechanizmu emisji, ponieważ stanowią one - jak zobaczymy - graniczne przybliżenia modelu Plancka.

Każda funkcja $r(\lambda,T)$ usiłująca analitycznie opisać krzywą z rys. 10-4, musi spełniać dwa postulaty:

i. Ponieważ w określonej temperaturze powierzchnia pod krzywą jest liczbowo równa R_e, a ta jest wielkością skończoną, przeto całka $r(\lambda,T)$ rozciągnięta na cały zakres spektralny musi być skończona; zaznaczymy to symbolicznie

$$R_e = \int_0^\infty r(\lambda)\, d\lambda < \infty . \tag{10.8}$$

ii. W temperaturze nieograniczenie rosnącej również R_e powinno rosnąć do nieskończoności

$$T \longrightarrow \infty \supset R_e \longrightarrow \infty . \tag{10.9}$$

Możemy obecnie przystąpić do przedstawienia trzech modeli promieniowania ciała doskonale czarnego.

10.2.1. Model Rayleigha-Jeansa

W tym modelu przyjmuje się, że emitujące ciało jest zbiorem oscylatorów wymieniających energię z polem elektromagnetycznym (emisja i absorpcja). Średnia energia całkowita każdego oscylatora jest taka sama. Dla oscylatora liniowego (atom w ciele stałym) mamy dwa stopnie swobody, przy czym jeden z nich odpowiada energii kinetycznej, drugi zaś potencjalnej. Łącznie, na każdy oscylator przypada średnia energia równa kT. Oscylatory mogą wymieniać z polem elektromagnetycznym energię w dowolnych porcjach, byle tylko średnia energia każdego oscylatora w dostatecznie długim przedziale czasu wynosiła kT. Model ten (termodynamiczny) prowadzi do funkcji o postaci

$$r(\lambda)\, d\lambda = \frac{8\pi c}{\lambda^4} kT\, d\lambda . \tag{10.10}$$

Funkcję (10.10) możemy przedstawić również jako funkcję częstości, ν; musi być przy tym spełniona równość

$$r(\lambda)\, d\lambda = r(\nu)\, d\nu = dR_e , \tag{10.11}$$

ponieważ dwa pierwsze wyrażenia (10.11) przedstawiają element całkowitej emisji energetycznej, którego wartość nie może zależeć od wyboru argumentu. Ponieważ $|d\lambda| = (c/\nu^2)\cdot|d\nu|$, zatem

$$r(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi}{c^2} kT\, \nu^2\, d\nu.$$

Łatwo teraz zauważyć, że wyrażenie

$$R_e = \int_0^\infty r(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi}{c^2} kT \int_0^\infty \nu^2\, d\nu$$

jest równe nieskończoności dla górnej granicy całkowania. Fakt ten nazwany został "nadfioletową katastrofą" i dowodzi, że funkcja Rayleigha-Jeansa może być porównywana z doświadczeniem jedynie w zakresie niskich częstości, tj. w zakresie długich fal.

10.2.2. Model Wiena

Przyjmuje się podobnie, jak w poprzednim modelu, że ciało stałe składa się z oscylatorów wymieniających energię z polem elektromagnetycznym. Energia oscylatorów nie jest jednak dla wszystkich taka sama; dla każdej temperatury jest określona funkcja (rozkład Maxwella-Boltzmanna) podająca, jaki ułamek liczby oscylatorów posiada energię w zadanym przedziale. Nie wchodząc bliżej w szczegóły rachunku, podamy postać funkcji $r(\nu)$ uzyskanej przez Wiena

$$r(\nu) = c_1\, \nu^3 \cdot e^{-c_2 \nu / T}. \qquad (10.12)$$

Teoria nie przewiduje możliwości obliczenia stałych c_1 i c_2 - muszą być znalezione empirycznie. Widać jednak, że funkcja (10.12) nie spełnia postulatu ii, ponieważ dla temperatury zdążającej do nieskończoności funkcja pozostaje skończona

$$T \longrightarrow \infty \supset r(\nu) \longrightarrow c_1 \nu^3.$$

10.2.3. Model Plancka

Jest to model, w którym przyjęto najbardziej radykalne założenie. W celu uzyskania prawidłowej interpretacji promieniowania ciała doskonale czarnego Planck musiał przyjąć, iż energia oscylatora nie może mieć dowolnej wartości, czyli nie może być ciągłą funkcją jakiegoś parametru; energia ta może przyjmować jedną z wartości określonych wzorem

$$E_n = n\, h\, \nu, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (10.13)$$

n jest liczbą całkowitą lub zerem i nosi nazwę liczby kwantowej, h jest pewną stałą, noszącą nazwę stałej Plancka, ν jest częstością

drgań oscylatora. Później okazało się, że wzór (10.13) jest niezupełnie dokładny; poprawne wyrażenie określające energię oscylatora ma postać

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\, h\nu \qquad (10.14)$$

Wartość stała, równa 1/2, jest związana z tym faktem, że energia oscylatora w najniższej temperaturze (0 K) nie może być równa zeru, lecz wynosi $1/2(h\nu)$.

Stała Plancka jest jedną z najważniejszych stałych przyrody - jej wartość liczbowa wynosi według współczesnych pomiarów $h = 6{,}6256 \cdot 10^{-34}$ J.s.

Oba wyrażenia, (10.13) lub (10.14) oznaczają, że jeśli energia oscylatora ulega zmianie, to zmiana ta nie może być dowolna; najmniejszą porcją energii, jaką oscylator może pochłonąć lub wyemitować jest $h\nu$ - i tę wielkość nazwano kwantem energii. Zwróćmy uwagę na to, iż teoria Plancka dotyczy kwantowego charakteru energii całkowitej oscylatora, zaś o naturze samego promieniowania orzeka pośrednio: by energia oscylatora mogła zmienić się skokowo o $h\nu$, promieniowanie elektromagnetyczne o częstości ν musi być strumieniem quasi-cząstek, zwanych fotonami, o energii fotonu równej $h\nu$.

Założenie (10.13) lub (10.14) prowadzi do funkcji $r(\nu)$ lub $r(\lambda)$ o następującej postaci

$$r(\nu) = \frac{8\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}, \qquad (10.15)$$

$$r(\lambda) = \frac{8\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}, \qquad (10.16)$$

doskonale zgadzającej się z danymi doświadczalnymi. Można również pokazać, iż podane uprzednio prawa Rayleigha-Jeansa i Wiena są aproksymacjami prawa Plancka dla odpowiedniego zakresu długości fal. Przedstawimy krótko otrzymanie tych przybliżeń i innych praw promieniowania ciała doskonale czarnego.

i. W zakresie fal długich, czyli dużych λ, mamy $hc/\lambda kT \ll 1$ oraz

$$e^{hc/\lambda kT} = 1 + \frac{hc}{\lambda kT} + \frac{1}{2}\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)^2 + \ldots$$

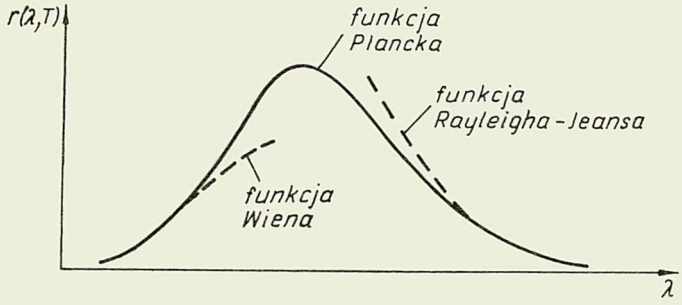
Ograniczając przybliżenie rozwinięcia do dwóch pierwszych wyrazów otrzymamy z (10,16)

$$r(\lambda,T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{\lambda kT}{hc} = \frac{8\pi c}{\lambda^4} kT,$$

czyli dokładnie prawo Rayleigha-Jeansa.

ii. W zakresie fal krótkich $e^{h\nu/kT} \gg 1$ oraz

$$r(\nu,T)\, d\nu = \frac{8\pi h}{c^2}\, \nu^3\, e^{-h\nu/kT}\, d\nu.$$



Rys. 10-6

W ten sposób otrzymujemy przybliżenie podane przez Wiena. Oba przybliżenia wraz z funkcją Plancka są przedstawione na rys. 10-6.

Z funkcji (10.16) wynikają również oba prawa promieniowania ciała doskonale czarnego, podane w rozdziale 10.2 jako prawa empiryczne, np. położenie maksimum rozkładu spektralnego (10.16) możemy znaleźć, przyrównując do zera pochodną funkcji $r(\lambda,t)$ względem długości fali

$$\frac{\partial r(\lambda,T)}{\partial \lambda} = -5\,\lambda^{-6}\,(e^{hc/\lambda kT} - 1) + \frac{hc}{\lambda^2 kT}\, e^{hc/\lambda kT} \cdot \lambda^{-5} = 0.$$

Mnożąc obie strony przez $\lambda^6\, e^{-hc/\lambda kT}$ i porządkując wyrazy

$$\frac{\lambda_m\, kT}{hc} = \frac{1}{5}\,(1 - e^{-hc/\lambda kT})^{-1} = 0{,}2014,$$

a stąd $\lambda_m \cdot T = 0{,}2898$ cm/K = c', czyli prawo przesunięć Wiena. Nieco bardziej skomplikowany jest wywód prawa Stefana-Boltzmanna (10.6); nie będziemy go tu omawiali.

W zakończeniu tego paragrafu kilka słów poświęcimy jeszcze ciałom niedoskonale czarnym. Dla nich $a(\lambda) < 1$, czyli ich zdolność emisyjna

$$r'(\lambda,T) = a(\lambda) \cdot r(\lambda,T) < r(\lambda,T)$$

jest mniejsza od zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego. Może się zdarzyć, że zdolność absorpcyjna jakiegoś ciała promieniującego nie zależy od długości fali. Własności takie w szerokim zakresie długości fal ma warstwa sadzy, używana jako warstwa absorbująca w detektorach i miernikach natężenia promieniowania. Ciała takie nazywamy

ciałami szarymi; rozkład spektralny $r'(\lambda,T)$ ich zdolności emisyjnej jest proporcjonalny do rozkładu $r(\lambda,T)$ ciała doskonale czarnego. Dla tych ciał jest spełnione również prawo Stefana-Boltzmanna, przy czym ma ono postać

$$R_e' = k \cdot \sigma \, T^4, \tag{10.17}$$

gdzie $k < 1$ jest współczynnikiem bezwymiarowym, zależnym od natury ciała szarego, np. dla rozgrzanej platyny $k = 0{,}15$, zaś dla tlenku żelaza $k = 0{,}89$.

10.3. Efekt fotoelektryczny

Bezpośrednim dowodem doświadczalnym kwantowej natury promieniowania jest efekt fotoelektryczny, odkryty jednocześnie przez Hallwachsa i Stoletowa, a wyjaśniony przez Einsteina. Zjawisko to, bardziej precyzyjnie nazywane zewnętrznym efektem fotoelektrycznym, polega na wybijaniu elektronów z powierzchni metalu, na którą pada promieniowanie elektromagnetyczne. Ze względu na bardzo krótki zasięg fotoelektronów w atmosferze gazowej, zjawisko to obserwuje się i bada w próżni. Natężenie promieniowania ma bezpośredni wpływ na liczbę emitowanych fotoelektronów, natomiast ich energia (prędkość) zależy od częstości promieniowania.

Właściwą interpretację tego zjawiska podał Einstein: kwant promieniowania monochromatycznego, wybijający z powierzchni metalu fotoelektron pokonuje pracę wyjścia W elektronu z powierzchni metalu oraz nadaje elektronowi energię kinetyczną $1/2\ m\ v^2$

$$h\nu = W + \frac{1}{2} mv^2. \tag{10.18}$$

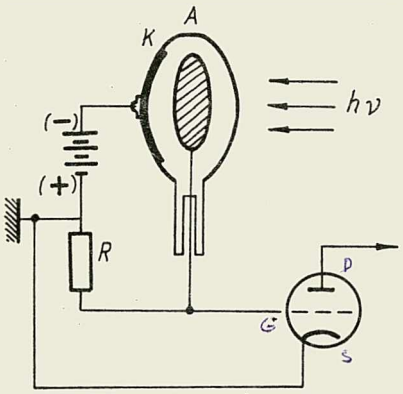
Praca wyjścia elektronu z powierzchni metalu jest wartością dla danego metalu stałą; wraz z malejącą częstością promieniowania maleje energia kinetyczna wyrzuconego elektronu. Wreszcie dla pewnej częstości ν_0 energia kwantu $h\nu_0$ wystarczy jedynie do pokonania pracy wyjścia W; wówczas $1/2\ mv^2 = 0$. Mamy zatem

$$W = h\nu_0 \tag{10.19}$$

oraz

$$h(\nu - \nu_0) = \frac{1}{2} mv^2. \tag{10.20}$$

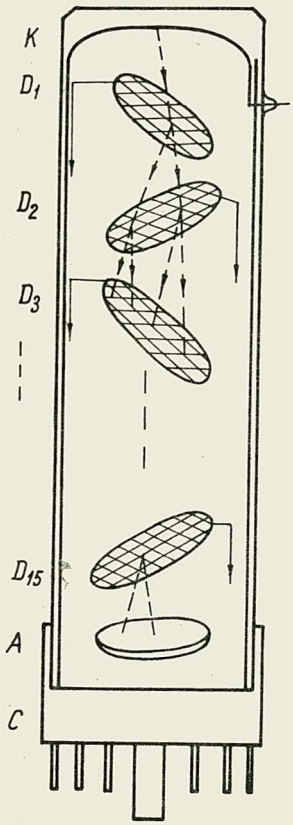
Najmniejszej częstości ν_0 odpowiada największa długość fali λ_0, przy której możliwy jest efekt fotoelektryczny. Dlatego λ_0 nosi nazwę czerwonej granicy zewnętrznego efektu fotoelektrycznego. Dla długości fal $\lambda > \lambda_0$ fotoefekt jest niemożliwy.



Rys. 10-7

Wykresem energii kinetycznej T fotoelektronów w zależności od częstości ν jest według (10.20) linia prosta; odcięta dla $T = 0$ wynosi $\nu_0 = c/\lambda_0$, zaś nachylenie tej prostej równe jest h. Badanie funkcji $T(\nu)$ jest jedną z metod wyznaczania h; wielkość ta musi być niezależna od rodzaju badanej powierzchni.

Efekt fotoelektryczny znalazł bezpośrednie zastosowanie w konstrukcji fotokomórek, stanowiących bardzo czułe detektory i mierniki natężenia promieniowania. Model fotokomórki próżniowej przedstawiony jest na rys. 10-7. Na wewnętrznej ścianie bańki próżniowej jest naniesiona cienka warstwa metalu, stanowiącego fotokatodę K. Najlepsze są do tych celów metale, posiadające małą pracę wyjścia W. Należy do nich cez (λ_0 = 660 nm) lub fotokatoda Cs/Cs-O, złożona z warstwy cezu i tlenku cezu utlenionego w sposób niepełny (λ_0 = 1100 nm). Naprzeciw fotokatody znajduje się anoda, wykonana z siatki metalicznej, przepuszczającej promieniowanie. W stanie zaciemnionym przez fotokomórkę płynie bardzo mały prąd i_0 ($\log i_0 \cong -14$), wynikający przede wszystkim z niedoskonałej izolacji elektrycznej. Oświetlenie promieniowaniem powoduje przepływ prądu fotoelektrycznego i_f ($-13 \leqslant \log i_f \leqslant -9$), jeżeli fotokatoda jest połączona z ujemnym biegunem baterii (rys.10-7). Wielkość i_f jest ściśle proporcjonalna do natężenia promieniowania. Zmiany natężenia i_f odwzorowują się na oporniku wysokoomowym R jako zmiany potencjału, dołączane zwykle do układu wzmacniającego.



Rys. 10-8

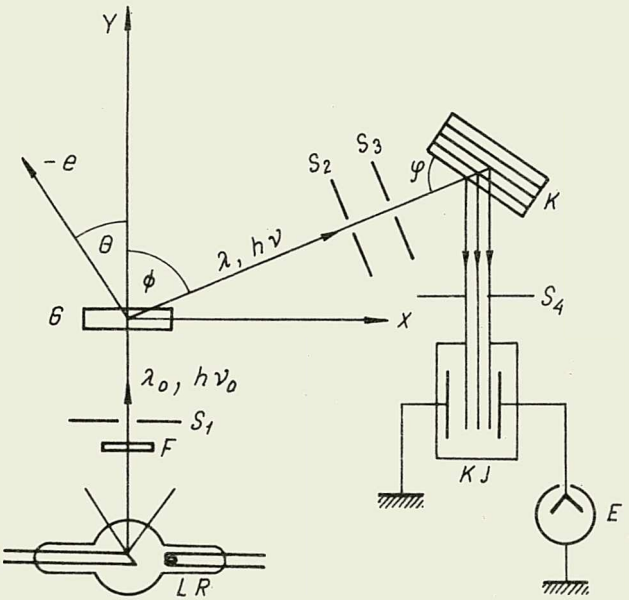
Detektorem promieniowania znacznie bardziej czułym od fotokomórki jest fotopowielacz (rys. 10-8). Oprócz fotokatody K są umieszczone wewnątrz bańki próżniowej dodatkowe elektrody D_1,

zwane dynodami, wykonane ze specjalnego stopu o dużym współczynniku powielenia. Fotoelektron, padający na pierwszą dynodę, wybija z niej średnio dwa elektrony w zjawisku emisji wtórnej; liczba ta nosi nazwę współczynnika powielenia. Dynod jest kilkanaście, przy czym potencjał każdej następnej jest wyższy od poprzedniej. Jeżeli dynod jest 15 a współczynnik powielenia wynosi 2, to otrzymujemy z każdego fotoelektronu (i_f) znaczną liczbę elektronów w mierzonym natężeniu prądu (i_m). Współczynnik wzmocnienia wynosi $i_m/i_f = 2^{15} = 3{,}3 \cdot 10^4$, a w najlepszych fotopowielaczach około miliona. Detektorów takich używa się do pomiarów bardzo małych natężeń promieniowania, np. w badaniach rozkładu spektralnego emisji luminescencji lub promieniowania gwiazd. W połączeniu z odpowiednimi przetwornikami, np. z kryształami scyntylacyjnymi, fotopowielacz może być detektorem innych rodzajów promieniowania, np. rentgenowskiego, beta, gamma.

10.4. Efekt Comptona

Eksperymenty przedstawione w paragrafach 10.2 i 10.3 dowodzą, że promieniowanie ma aspekt korpuskularny: wiązka promieniowania może być traktowana jak strumień fotonów. Efekt Comptona dowodzi ponadto, że kwant posiada pęd o wielkości $p_f = h\nu/c = h/\lambda$, odpowiadającej przewidywaniom teorii względności. Pod względem mikroskopowym efekt ten polega na zderzeniu fotonu z elektronem; zderzenie jest sprężyste, a więc jest spełniona zasada zachowania energii i zasada zachowania pędu. Schemat doświadczenia jest przedstawiony na rys. 10-9. Promieniowanie lampy rentgenowskiej (LR) przechodzi przez filtr (F) wydzielający monochromatyczną linię promieniowania charakterystycznego o długości fali λ_0 i energii kwantu $h\nu_0$; przesłona S_1 wydziela wąską wiązkę promieniowania. Do badania efektu Comptona moglibyśmy użyć w zasadzie również promieniowania nadfioletowego, lecz - jak zobaczymy później - dokładność pomiaru wielkości efektu jest znacznie większa w obszarze promieniowania rentgenowskiego.

Wiązka promieniowania pada na ciało stałe, zwykle grafit (G), z którego zostaje wyrzucony elektron - e. Energia odrzuconego kwantu $h\nu$ jest mniejsza od $h\nu_0$, wobec czego $\lambda > \lambda_0$. Ponieważ nie znamy λ, więc promieniowanie rozproszone po przejściu przesłon S_2 i S_3 pada na kryształ K, spełniający rolę analizatora długości fali. Odbicie pierwszego rzędu od płaszczyzn kryształu wystąpi dla takiego kąta φ, który spełnia warunek Braggów: $2d \sin \varphi = \lambda$; odstęp d między płaszczyznami uważamy za znany. Wskaźnikiem właściwego doboru φ jest komora jonizacyjna (KJ) - po uzyskaniu wiązki odbitej przez elektrometr E popłynie prąd.



Rys. 10-9

Niech Θ będzie kątem zawartym między prędkością wyrzuconego elektronu a osią Y, zaś Φ jest kątem między kierunkiem ruchu rozproszonego fotonu a osią Y. Jeśli uwzględnimy fakt, że energia kinetyczna i pęd elektronu w ciele stałym (G) są znikomo małe i można je zaniedbać, natomiast pęd elektronu odrzuconego jest bardzo duży i należy go potraktować relatywistycznie, to zasady zachowania będą miały postać:

zasada zachowania energii

$$m_o c^2 + \frac{hc}{\lambda_o} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{hc}{\lambda}, \qquad (10.21)$$

zasada zachowania pędu

$$0 = \frac{h}{\lambda} \sin\Phi - \frac{m_o v}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin\Theta \text{ dla osi X}, \qquad (10.22)$$

$$\frac{h}{\lambda_o} = \frac{h}{\lambda} \cos\Phi + \frac{m_o v}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos\Theta \text{ dla osi Y}. \qquad (10.23)$$

Zasadę zachowania pędu napisaliśmy osobno dla składowych na oś X i osobno dla Y, ponieważ pęd jest wektorem. Te trzy równania możemy zapisać również w postaci

$$hc\left(\frac{1}{\lambda_o}-\frac{1}{\lambda}\right)=m_oc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right),$$

$$h\left(\frac{1}{\lambda_o}-\frac{\cos\Phi}{\lambda}\right)=\frac{m_ov}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\Theta,$$

$$h\left(\frac{\sin\Phi}{\lambda}\right)=\frac{m_ov}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\Theta.$$

Dalszy rachunek zmierza do wyeliminowania nie interesującego nas kąta Θ rozproszenia elektronu - przedstawimy go jedynie skrótowo. Podnosimy drugie i trzecie równanie do kwadratu i dodajemy. Wynikiem jest

$$h^2\left(\frac{1}{\lambda_o^2}+\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2\cos\Phi}{\lambda\lambda_o}\right)=\frac{m_o^2v^2}{1-\beta^2}. \qquad (10.24)$$

Kwadrat pierwszego równania ma postać

$$h^2\left(\frac{1}{\lambda_o^2}+\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda\lambda_o}\right)=m_o^2c^2\left(\frac{1}{1-\beta^2}+1-\frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right). \qquad (10.25)$$

Różnica (10.24) i (10.25) wynosi

$$h^2\left\{\frac{2(1-\cos\Phi)}{\lambda\lambda_o}\right\}=\frac{m_o^2(v^2-c^2)-m_o^2c^2+m_o^2c^2\beta^2}{1-\beta^2}+\frac{2m_o^2c_o^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=$$

$$=2m_o^2c^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\beta^2-1}{1-\beta^2}\right\}=2m_oh\,c\left(\frac{1}{\lambda_o}-\frac{1}{\lambda}\right),$$

zatem

$$(\lambda-\lambda_o)\equiv\Delta\lambda=\frac{h}{m_oc}(1-\cos\Phi). \qquad (10.26)$$

Wynikiem rachunku jest wyrażenie określające różnicę długości fali promieniowania rozproszonego i padającego. Wynik ten jest najważniejszy w teorii efektu Comptona, ponieważ może być sprawdzony doświadczalnie. Jeśli podstawimy stałe uniwersalne: $h = 6{,}626\cdot10^{-34}$ J.s, $m_o = 0{,}9109\cdot10^{-30}$ kg, $c = 2{,}998\cdot10^{8}$ m/s, to

$$\frac{h}{m_oc}=0{,}0242\ \text{Å}$$

i jest również stałą uniwersalną - nosi nazwę comptonowskiej długości fali. Ze względu na uniwersalny charakter tej stałej efekt Comptona musi wystąpić dla promieniowania każdej długości fali, której odpowiada kwant o energii wyższej od pracy wyjścia elektronu. Zauważmy jed-

nak, że $\Delta\lambda$ jest wielkością bardzo małą; w porównaniu do długości fali promieniowania nadfioletowego, $\lambda_0 \cong 2000$ Å, efekt ten leży w granicy dokładności pomiarów spektroskopowych, natomiast w zakresie promieniowania rentgenowskiego, $\lambda_0 \cong 1$ Å, zmiana długości fali o $\Delta\lambda$ może być dokładnie zmierzona. Z (10.26) wynika, że największa zmiana długości fali ($\Delta\lambda = 0{,}0484$ Å) wystąpi wówczas, gdy kwanty są rozproszone wstecz ($\Phi = 180^\circ$), natomiast gdy wiązka przechodzi bez odchylenia ($\Phi = 0$) $\Delta\lambda = 0$.

10.5. Dualizm korpuskularno-falowy promieniowania

W poprzednich paragrafach poznaliśmy doświadczenia, których wyniki świadczą niewątpliwie o tym, że promieniowanie ma cechy korpuskularne. Są nimi emisja ciała doskonale czarnego, zjawisko fotoelektryczne, efekt Comptona. W rozdziale 9 natomiast omawialiśmy zjawiska takie jak: interferencja, dyfrakcja i polaryzacja, dowodzące falowej natury promieniowania. Można więc postawić sobie pytanie, czym promieniowanie jest "naprawdę"?

Nasz pogląd na naturę rzeczy i zjawisk wynika z przyzwyczajeń do otaczających nas przedmiotów i zjawisk świata makroskopowego. Pojęciem takim jest fala, nieskończenie rozciągła w czasie i przestrzeni, pojęciem takim jest również cząstka, posiadająca pęd, a więc i energię. Jeśli mamy stosować te pojęcia również w odniesieniu do fotonu, to pozorną sprzeczność zachowania się promieniowania w różnych doświadczeniach da się usunąć przez przyjęcie, iż promieniowanie ma jednocześnie cechy falowe i korpuskularne, tj. wykazuje dualizm korpuskularno-falowy.

Połączenie obu tych cech jest obecnie - jak się wydaje - niezupełnie jasne. Być może, iż postęp w teorii cząstek elementarnych będzie miał wpływ również na zrozumienie "natury" fotonu. Niemniej jednak wynik doświadczeń fizycznych jest zupełnie jasny i może być rozumiany w następujący sposób. Siatka dyfrakcyjna, czy też kryształ, jest swoistego rodzaju analizatorem lub typem "dyskryminatora" cech fizycznych, umożliwiającym ujawnienie spośród wszystkich możliwych cech tylko falowej natury zjawiska fizycznego, jakim jest promieniowanie.

Innym typem dyskryminatora fizycznego jest powierzchnia metalu lub fotokomórka, które z kolei ujawniają tylko cechy korpuskularne. Niestety, nie posiadamy w chwili obecnej takiego dyskryminatora, który pozwoliłby wykryć występowanie obu tych cech łącznie i to stanowi inną postać stwierdzenia faktu, że sposób połączenia w jednym obiekcie cech fali i cech cząstki jest nam obecnie nie znany.

10.6. Falowa natura cząstek

Falowa natura wiązki elektronów została przewidziana w 1924 r. przez Louisa de Broglie'a. Doszedł on do wniosku, że cząstka materialna, jaką jest poruszający się elektron, posiadający zatem pęd p, powinna ujawniać również cechy falowe, zgodne z równaniem

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{10.27}$$

omawianym uprzednio dla fotonu. Wielkość λ, występującą w (10.27), należy rozumieć jako długość fali "sprzężonej" z ruchem elektronu.

Spróbujmy oszacować λ dla elektronów w przybliżeniu nierelatywistycznym, tj. dla $v << c$. Przez v rozumieć będziemy prędkość poruszania się elektronu o masie spoczynkowej m_o. Mamy więc

$$\frac{1}{2} m_o v^2 = e U,$$

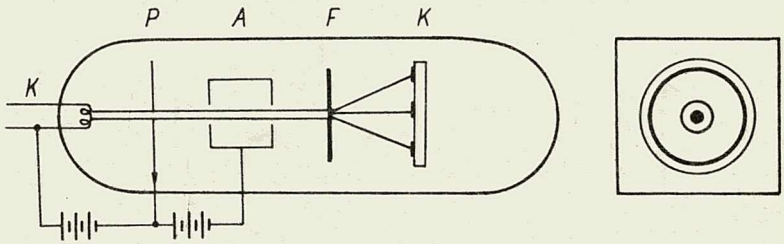
czyli

$$v = \left(\frac{2eU}{m_o}\right)^{1/2},$$

stąd

$$\lambda = \frac{h}{m_o v} = \frac{h}{(2em \cdot U)^{1/2}} = \frac{12{,}25}{\sqrt{U}} \text{ Å}. \tag{10.28}$$

Elektronom o energii 100 eV powinna zatem towarzyszyć fala o długości $\lambda = 1{,}225$ Å, ulegająca interferencji na kryształach.



Rys. 10-10

Znakomitym potwierdzeniem hipotezy de Broglie'a były wyniki doświadczeń Davissona i Germera. Schemat aparatury jest przedstawiony na rys. 10-10. W dokładnie odpompowanym naczyniu szklanym znajduje się katoda K, stanowiąca źródło elektronów. Elektrony przyspiesza się i ogniskuje w cienką wiązkę za pomocą elektrod P i A; F jest bardzo cienką folią, wykonaną ze złota. Wiązki ugięte dają na kliszy fotograficznej (K) obraz przedstawiony obok schematu aparatury, i zupeł-

nie przypominający wynik ugięcia promieniowania rentgenowskiego.W późniejszych doświadczeniach wykazano, że również strumień protonów ulega dyfrakcji w podobnych warunkach i zgodnie z równaniem (10.27).

Łatwo się jednak przekonać, że prędkość fali u, sprzężonej z ruchem cząstki mikroskopowej, musi przewyższać prędkość światła. Mamy bowiem

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{hu}{h\nu} = \frac{hu}{mc^2}.$$

Jednocześnie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv},$$

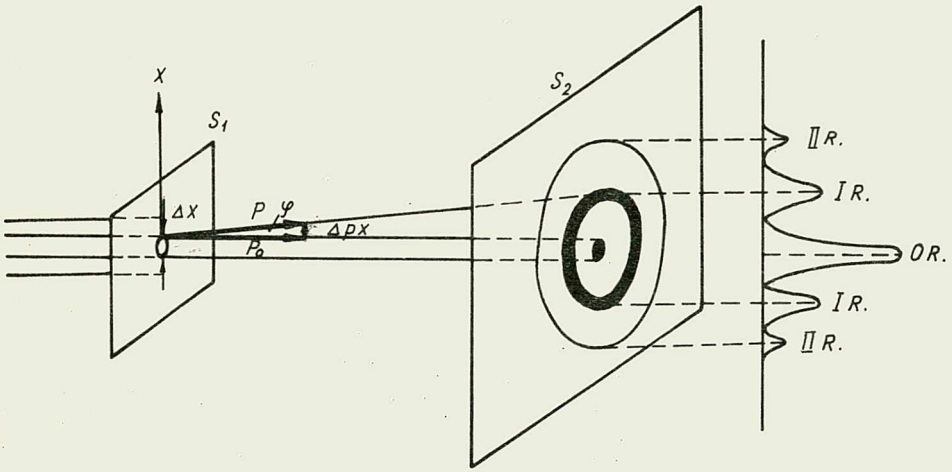
zatem

$$u \cdot v = c^2. \qquad (10.29)$$

Żadna energia nie może być przenoszona z prędkością $u > c$. Fala de Broglie'a jest więc falą fazową.

10.7. Relacje Heisenberga

Relacje Heisenberga, zwane niekiedy "zasadami nieokreśloności" Heisenberga, są pewnymi związkami między parametrami dynamicznymi, zapożyczonymi z fizyki klasycznej, którymi opisujemy ruch cząstki mikroskopowej, np. elektronu. Przypuśćmy, że z wiązki elektronów, poru-



Rys. 10-11

szającej się z lewa na prawo (rys. 10-11) wydzielamy wiązkę za pomocą otworka o średnicy Δx, wyciętego w przesłonie S_1. Falowe własności elektronów uwidocznią się w postaci obrazu dyfrakcyjnego na ekranie (lub kliszy fotograficznej S_2). Oprócz śladu wiązki centralnej (mak-

simum zerowego rzędu) zaobserwujemy pierścienie dyfrakcyjne, z których najważniejszą rolę odgrywa pierścień pierwszego rzędu. Ogromna większość elektronów trafi w jedno z tych dwóch miejsc ekranu; nie można jednak przewidzieć dla poszczególnych elektronów przed ekranem S_1, w które miejsce trafią po przejściu S_1. Wielkość Δx możemy więc uważać za niepewność znajomości położenia elektronów w kierunku osi x; niepewność ta zależy od rozmiarów wyciętego przez nas otworu w S_1. Fakt, że nie wiadomo, w które z dwóch maksimów (zerowego lub pierwszego rzędu) padnie obserwowany przez nas elektron równoważny jest stwierdzeniu, że także pęd elektronu (jako wektor) jest znany z pewną niepewnością $\underline{\Delta p_x}$:

$$\underline{p} = \underline{p_0} + \underline{\Delta p_x}.$$

Z teorii siatki dyfrakcyjnej (równanie 9.34) mamy dla $n = 1$

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{\Delta x},$$

przy czym rolę stałej siatki spełnia tu średnica otworu. Ponadto $\operatorname{tg} \varphi = \Delta p_x / p_0$; ponieważ $\operatorname{tg} \varphi \geqslant \sin \varphi$, więc

$$\frac{\Delta p_x}{p_0} \geqslant \frac{\lambda}{\Delta x}$$

oraz

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geqslant p_0 \cdot \lambda = h.$$

Opisując ruch cząstki mikroskopowej za pomocą pojęcia położenia i pędu stwierdzamy zatem, że opis ten może być dokonany z określoną dokładnością. Niepewność (błąd), z jakim możemy podać położenie elektronu oraz niepewność (błąd) z jakim jednocześnie podać możemy pęd elektronu, w iloczynie nie mogą dać wartości mniejszej od stałej Plancka

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geqslant h. \qquad (10.30)$$

Stwierdzenie to, wyrażone nierównością (10.30) stanowi relację Heisenberga i jest prawem przyrody; słuszność jego nie zależy od postępu w metodach pomiaru. Dla pozostałych kierunków osi y i z możemy napisać analogicznie

$$\Delta p_y \cdot \Delta y \geqslant h,$$

$$\Delta p_z \cdot \Delta z \geqslant h.$$

Łatwo się przekonać, że w zakresie zjawisk makroskopowych relacja (10.30) nie ma większego znaczenia. Jeżeli bowiem jako interesujący

nas obiekt wybierzemy masę $m = 1$ g, którego prędkość $v = 10^6$ m/s znamy z dokładnością 0,1%, czyli $\Delta p = 1$ kg m/s, to najmniejszy błąd, jaki zgodnie z (10.30) możemy popełnić, określając położenie tej masy, musi być równy $\Delta x = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ m. Warunek ten praktycznie nie limituje dokładności pomiarów położenia, która w rzeczywistości jest znacznie mniejsza.

Sytuacja zmienia się wyraźnie jeśli naszym obiektem będzie swobodny elektron. Niech również w tym przypadku będzie $v = (10^6 \pm 10^3)$ m/s. Ponieważ masa $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg, więc najmniejszy błąd, jaki musimy popełnić mierząc położenie elektronu $\Delta x = 7{,}3 \cdot 10^{-7}$ m = 730 nm. Błąd ten jest rzędu długości fali światła czerwonego, ale już wielokrotnie przekracza "rozmiary" samego obiektu.

Z jeszcze gorszą sytuacją spotykamy się w przypadku elektronu związanego w atomie. Ponieważ średnica atomu wynosi około 10^{-10} m, trzeba zażądać, by Δx wynosiło co najwyżej 10^{-11} m, inaczej położenie elektronu określone będzie za mało dokładnie. W takim razie minimalny błąd w określeniu prędkości musi wynosić $\Delta v_x = (6{,}6 \cdot 10^{-34})/(9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-11}) = 7{,}3 \cdot 10^7$ m/s. Ponieważ prędkość ruchu elektronu wynosi około 10^6 m/s, błąd w określeniu v kilkadziesiąt razy przewyższa samą wartość v. Praktyczny wniosek, jaki wynika z tego prostego rachunku w odniesieniu do ruchu elektronu wokół jądra w atomie jest następujący: jeśli chcemy zachować pojęcie pędu i położenia dla opisu ruchu elektronu wokół jądra, to musimy zrezygnować z pojęcia "toru" elektronu, które całkowicie traci sens.

Pęd oraz położenie elektronu są zmiennymi "sprzężonymi" w tym sensie, że iloczyn ich wymiarów jest wymiarem wielkości fizycznej zwanej działaniem. Taki sam wymiar ma stała Plancka - dlatego h nosi również nazwę "kwantu działania". Można znaleźć więcej par zmiennych, których iloczyn ma wymiar działania - należy do nich energia i czas; te zmienne również stanowią parę wielkości sprzężonych i można dla niej napisać relację Heisenberga w następującej postaci

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h. \qquad (10.31)$$

W odniesieniu do układu mikroskopowego Δt oznacza czas, w jakim przebywa on w stanie o energii E, ΔE jest zatem błędem, z jakim możemy poznać energię tego stanu. Izolowany atom może nieograniczenie długo przebywać w stanie podstawowym, tj. dla takiego stanu $t = \tau = \infty$, przy czym τ oznacza średni czas życia atomu w określonym stanie energetycznym. Wobec tego $\Delta E = 0$, czyli energię stanu podstawowego możemy znać dowolnie dokładnie. Inaczej jest ze stanami elektronowo wzbudzonymi: dla stanów dozwolonych regułami wyboru czas życia

$\tau = 10^{-8}-10^{-9}$ s. Oznacza to, że chwilę w której atom przejdzie ze stanu wzbudzonego do podstawowego, znamy z dokładnością $\Delta t = 10^{-8}-10^{-9}$ s. Fakt ten powoduje pewną "nieostrość" energii stanu wzbudzonego o wartość $\Delta E \geq (4{,}13 \cdot 10^{-15}$ eV·s$)/(10^{-9}-10^{-8}$ s$) = 4 \cdot 10^{-6}-4 \cdot 10^{-7}$ eV. W konsekwencji energia przejścia nie jest absolutnie dokładnie zadana, czyli odpowiadająca jej linia emisyjna ma pewną skończoną szerokość, zwaną szerokością "naturalną".

11. MECHANIKA FALOWA

Zjawiska i zasady, omówione w rozdziale 10, doprowadziły do zrozumienia, że podstawą opisu ruchu cząstek mikroskopowych nie mogą być prawa fizyki klasycznej, opisujące ruch ciał makroskopowych. Oczywiście, wprowadzone przez nas w rozdziale 1. pojęcie punktu materialnego nie stanowi najmniejszej podstawy do zastosowania praw ruchu tego punktu do opisu ruchu, np. elektronu. Mimo znikomych rozmiarów, punkt materialny jest w gruncie rzeczy obiektem makroskopowym.

Punktem wyjścia nowej mechaniki było stwierdzenie, że ruchowi cząstki makroskopowej towarzyszy ruch sprzężonej z nią fali, stąd nazwa tego rozdziału fizyki teoretycznej. Z biegiem czasu doprowadziło ono do odkrycia podstawowego równania mechaniki falowej, a mianowicie równania Schrödingera

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left\{ E - U(x,y,z) \right\} \psi = 0. \qquad (11.1)$$

Równanie to opisuje ruch cząstki mikroskopowej za pomocą funkcji falowej $\psi(x,y,z)$, w zapisie (11.1) zależnej tylko od współrzędnych. Taka postać równania Schrödingera, zwana równaniem amplitudowym determinuje rodzaj zagadnień, którymi będziemy się w dalszym ciągu zajmowali. Interesować nas będą mianowicie tylko problemy stacjonarne, tj. zależące od czasu w sposób periodyczny lub takie, w których czas nie odgrywa roli (np. w zagadnieniu przechodzenia cząstki przez barierę potencjalną). Część funkcji falowej zależną od czasu będziemy w dalszym ciągu opuszczać. Ponadto interesować nas będzie wyłącznie ruch jednej cząstki, najczęściej z jednym stopniem swobody, tj. zachodzący wzdłuż osi x. W takich zagadnieniach jednowymiarowych funkcja falowa zależy tylko od jednej zmiennej, $\psi(x)$, zaś równanie Schrödingera ma postać

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left\{ E - U(x) \right\} \psi(x) = 0. \qquad (11.2)$$

11.1. Cząstka swobodna

Rozważmy jako pierwszy przykład zastosowania równania Schrödingera nadzwyczaj prosty przypadek ruchu cząstki swobodnej, np. ruch elektronu. W całym obszarze, w jakim ta cząstka może się poruszać, nie oddziałuje ona z niczym, wobec tego jej energia potencjalna jest stała; dla uproszczenia możemy przyjąć, że $U(x) = 0$. Dla tego przypadku równanie (11.2) przybierze postać

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0, \tag{11.3}$$

przy czym

$$k^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \tag{11.4}$$

jest stałym parametrem o dowolnej, skończonej wartości. Wobec tego również energia całkowita $E = T > 0$ może być dowolna. Rozwiązaniem (11.4) jest funkcja

$$\psi(x) = A \cdot e^{\pm ikx}, \tag{11.5}$$

gdzie A oznacza dowolną stałą, zaś i jest jednostką urojoną. Ponieważ $2mE = p^2$, gdzie p jest pędem cząstki, zatem mamy z (11.4)

$$p^2 = \left(\frac{h}{2\pi} k\right)^2 = (\hbar k)^2.$$

Przez $\hbar$ oznaczyliśmy stałą Plancka, podzieloną przez 2π. Pęd jest wektorem, zatem i k musi być wektorem

$$\underline{p} = \hbar \underline{k}. \tag{11.6}$$

Ze związku de Broglie'a (10.27) widać, że

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{11.7}$$

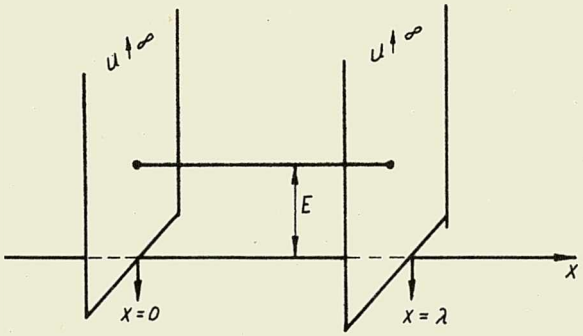
czyli $\underline{k}$ jest wektorem falowym fali de Broglie'a, sprzężonej z ruchem cząstki. Uogólnieniem (11.5) jest funkcja

$$\psi(\underline{r}) = A \cdot e^{\pm i\underline{k}\underline{r}} \tag{11.8}$$

opisująca tylko periodyczność przestrzenną fali.

11.2. Cząstka w prostokątnej jamie potencjału

Przypuśćmy, że w miejscu $x = 0$ osi x znajduje się nieskończenie wysoka prostopadła ściana potencjalna (rys. 11-1); podobna ściana



Rys. 11-1

występuje w punkcie x = a. Otrzymujemy w ten sposób "liniową" jamę potencjalną o długości a, wewnątrz której porusza się ruchem periodycznym cząstka mikroskopowa o stałej energii całkowitej E. Funkcja energii potencjalnej spełnia więc w tym przypadku warunki

$$\left.\begin{aligned} U(x) &= 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x < a, \\ U(x) &= \infty \quad \text{dla} \quad x \leqslant 0 \ \text{i} \ x \geqslant a. \end{aligned}\right\} \tag{11.9}$$

Równanie Schrödingera w obszarze studni ma postać (11.3), również rozwiązania szczególne są identyczne z (11.5); wobec tego rozwiązania ogólne możemy napisać jako kombinację obu typów rozwiązań szczególnych

$$\psi(x) = A\, e^{ikx} + B\, e^{-ikx}. \tag{11.10}$$

Ze względu na ograniczenia (11.9) prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w punktach x = 0 i x = a powinno wynosić zero, zatem

$$\psi(0) = \psi(a) = 0. \tag{11.11}$$

Podstawienie pierwszego warunku brzegowego do (11.10) prowadzi do wniosku, iż A = -B. W takim razie

$$\psi(x) = A\, e^{ikx} - A\, e^{-ikx} = 2Ai \sin kx = C \sin kx, \tag{11.12}$$

gdzie C jest na razie dowolną stałą, ewentualnie urojoną. Zastosowanie drugiego z warunków (11.11) prowadzi do ograniczenia możliwych wartości k:

$$\psi(a) = C \sin ka = 0,$$

stąd

$$ka = n \cdot \pi, \quad n = 1,2,3, \ldots \tag{11.13}$$

Podstawimy obecnie uzyskane wyrażenia określające k do (11.4); w rezultacie otrzymamy

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} E = \frac{n^2 \pi^2}{a^2},$$

czyli

$$E_n = n^2 \cdot \frac{h^2}{8 m a^2}. \qquad (11.14)$$

Widzimy, że cząstka mikroskopowa wewnątrz jamy potencjalnej typu przedstawionego na rys. 11-1 może przyjmować tylko niektóre wartości energii, inaczej mówiąc, energia cząstki wewnątrz jamy jest kwantowana. Jeśli oznaczymy $h^2/8ma^2 = E_1$, to możliwym kolejnym stanom energetycznym odpowiadają energie E_1, $4E_1$, $9E_1$, ... Jak widać, odstępy między tymi stanami rosną.

Pozostaje nam jeszcze znalezienie wartości C funkcji (11.12). Jak wiadomo, funkcja falowa powinna być znormalizowana do jedności, tzn. $\psi(x)$ powinna spełniać warunek

$$\int_0^\infty \psi(x)\, \psi^*(x)\, dx = 1.$$

W naszym przypadku całkowanie wystarczy rozciągnąć na obszar od 0 do π, ponieważ funkcja $\sin^2 x$ ma okres o połowę mniejszy, niż $\sin x$. W takim razie ma być

$$|C|^2 \int_0^\pi \sin^2 \frac{\pi n x}{a}\, dx = 1. \qquad (11.15)$$

Całkowanie przez części prowadzi do wyniku

$$|C| = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2}. \qquad (11.16)$$

Ostatecznie

$$\psi_n(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin \frac{\pi n x}{a}. \qquad (11.17)$$

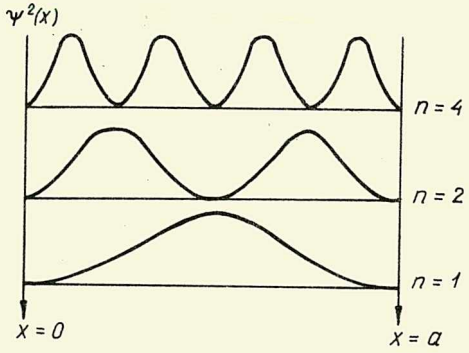
Przez rozwiązanie równania Schrödingera dotyczącego cząstki w jamie potencjalnej, zastosowania do funkcji falowej warunków brzegowych i warunku normalizacyjnego, uzyskaliśmy jednocześnie dwa rezultaty:

i. Zbiór dozwolonych stanów energetycznych (11.14) układu mikroskopowego.

ii. Zbiór funkcji falowych, odpowiadających tym stanom.

Zgodnie z interpretacją Borna iloczyn kwadratu modułu funkcji falowej przez objętość elementu przestrzeni jest prawdopodobieństwem

znalezienia cząstki w tym elemencie objętości. Rysunek 11-2 przedstawia rozkład gęstości prawdopodobieństwa $\psi_n^2(x)$ dla kilku pierwszych stanów.



Rys. 11-2

Zauważmy jeszcze, że odstępy między poszczególnymi stanami energetycznymi (11.14) są odwrotnie proporcjonalne do masy cząstki. W jamie potencjalnej protonu stany te będą leżeć około 2000 razy gęściej, niż w elektronie. Jeszcze silniej zależy odległość między sąsiednimi stanami od rozmiarów jamy potencjalnej

$$E_{n+1} - E_n = (2n + 1)\,\frac{h^2}{8m}\,\frac{1}{a^2}\,, \qquad (11.18)$$

a więc odległość dwóch najniższych stanów energetycznych elektronu w jamie potencjalnej wynosi $E_2 - E_1 = 1{,}125 \cdot 10^{-18}\ 1/a^2$ eV. Jeśli przyjmiemy, że elektron znajduje się w jamie o rozmiarach makroskopowych, np. a = 1 cm, to $E_2 - E_1 = 1{,}125 \cdot 10^{-14}$ eV; jest to odległość poziomów tak mała, że praktycznie możemy mówić o ciągłości energii elektronu w obszarze jamy. Jeśli jednak rozmiary jej są rzędu średnicy cząsteczki, np. a = 10 Å, to $E_2 - E_1 = 1{,}125$ eV; nieciągłość poziomów energetycznych jest w takim przypadku silnie zaznaczona.

11.3. Cząstka w trójwymiarowej jamie potencjału

Rozważania poprzedniego paragrafu możemy bez trudności uogólnić do przypadku trójwymiarowej jamy potencjału. Przyjmiemy, że cząstka mikroskopowa znajduje się wewnątrz prostopadłościanu o krawędziach a_1 wzdłuż osi x_1, a_2 wzdłuż osi x_2 i a_3 wzdłuż x_3. Energia potencjalna $U(x_1, x_2, x_3)$ wewnątrz jamy wynosi zero, natomiast na zewnątrz niej wzrasta do nieskończoności; $U(x_1, x_2, x_3)$ spełnia więc warunek analogiczny do (11.9). Równanie Schrödingera ma teraz postać:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E\psi = 0. \qquad (11.19)$$

Jest to równanie w pochodnych cząstkowych, ponieważ $\psi(x_1, x_2, x_3)$ jest funkcją trzech zmiennych. $\psi\psi^*\,dv$ określa prawdopodobieństwo znalezienia cząstki jednocześnie w zakresie współrzędnych $(x_1, x_1 + dx_1)$, $(x_2, x_2 + dx_2)$ oraz $(x_3, x_3 + dx_3)$. Prawdopodobieństwo zajścia trzech zdarzeń jednocześnie możemy przedstawić jako iloczyn prawdopodobieństw zajścia każdego z tych zdarzeń oddzielnie. Inaczej mówiąc, funkcję falową $\psi(x_1, x_2, x_3)$ możemy napisać jako iloczyn trzech funkcji falowych $\varphi_i(x_i)$, przy czym każda z nich zależy tylko od jednej zmiennej x_i

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) \cdot \varphi_3(x_3). \qquad (11.20)$$

Zmienne x_i określone są w przedziale

$$0 \leqslant x_i \leqslant a_i, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (11.21)$$

Podstawienie (11.20) do (11.19) i dwustronne podzielenie przez ψ prowadzi nas do równania w pochodnych zwyczajnych

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{\varphi_i} \frac{d^2\varphi_i(x_i)}{dx_i^2} \right) = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} E. \qquad (11.22)$$

Lewa strona składa się z sumy trzech wyrazów, z których pierwszy zależy tylko od x_1, drugi tylko od x_2, trzeci zaś od x_3. Suma ich jest jednak wielkością stałą; jest to możliwe tylko w takim przypadku, gdy każdy z wyrazów tej sumy równy jest stałej. Wielkość tej stałej wygodnie jest przyjąć

$$C_i = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E_i, \qquad (11.23)$$

ponieważ wówczas równanie (11.23) rozpada się na trzy równania typu

$$\frac{d^2\varphi_i(x_i)}{dx_i^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E_i \varphi_i(x_i) = 0, \quad i = 1,2,3, \qquad (11.24)$$

a ogólna energia cząstki w jamie potencjalnej jest sumą trzech energii

$$E = E_1 + E_2 + E_3. \qquad (11.25)$$

Każda energia E_i odpowiada jednemu z trzech stopni swobody ruchu.

Rozwiązania (11.24) są nam już znane:

$$E_i = n_i^2 \cdot \frac{h^2}{8\, m a_i^2},$$

$$\varphi_i^{(n)}(x_i) = \left(\frac{2}{a_i}\right)^{1/2} \sin \frac{\pi n_i x_i}{a_i}.$$

W takim razie pełne rozwiązania dotyczące jamy trójwymiarowej mają postać

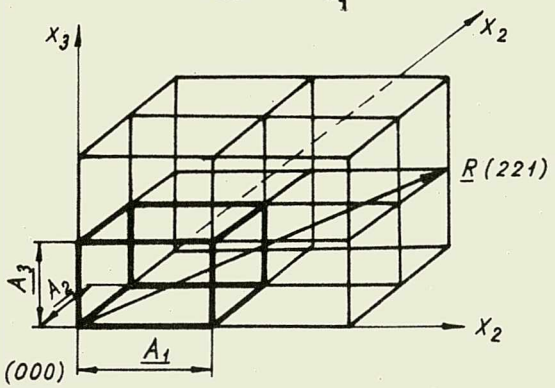
$$E = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2}\right) \tag{11.26}$$

oraz

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{8}{a_1 a_2 a_3}\right)^{1/2} \sin \frac{\pi n_1 x_1}{a_1} \sin \frac{\pi n_2 x_2}{a_2} \sin \frac{\pi n_3 x_3}{a_3}. \tag{11.27}$$

Zajmiemy się obecnie krótkim omówieniem energii cząstki (11.26). Możemy zbudować trójwymiarową, prostokątną i periodyczną sieć przestrzenną, której okresami w trzech różnych kierunkach będą wielkości

$$A_i = \left(\frac{h^2}{8m}\right)^{1/2} \frac{1}{a_i}. \tag{11.28}$$



Rys. 11-3

Fragment takiej sieci jest pokazany na rys. 11-3. Wektory $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$, $\underline{A}_3$ są jej bazą, a prostopadłościan na nich zbudowany jest jej komórką elementarną. Każdemu punktowi P (n_1, n_2, n_3) tej sieci odpowiada wektor

$$\underline{R} = n_1\underline{A}_1 + n_2\underline{A}_2 + n_3\underline{A}_3, \tag{11.29}$$

którego długość jest równa energii cząstki w jamie potencjalnej, odpowiadającej wartościom liczb kwantowych n_1, n_2, n_3

$$E(n_1, n_2, n_3) = \underline{R} \cdot \underline{R}. \tag{11.30}$$

Jeżeli $|A_1| \neq |A_2| \neq |A_3|$, to każdemu punktowi sieci odpowiada inna długość wektora $\underline{R}$, a zatem inna energia. Inaczej jest w przypadku, gdy wszystkie wymiary jamy potencjalnej są jednakowe, tj. gdy przybiera ona kształt sześcianu. Mamy wówczas $|A_1| = |A_2| = |A_3|$ oraz

$$E = \frac{h^2}{8ma^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \tag{11.31}$$

Całkowita energia cząstki zależy w tym przypadku od sumy kwadratów liczb kwantowych; jednakową wartość tej sumy możemy często zrealizować kilkoma sposobami. Stany energetyczne będziemy zapisywać w sposób skrócony przez umieszczenie trójki liczb w nawiasie. (112) oznacza na przykład stan z $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$. Stosując ten sposób zapisu łatwo zobaczyć, że stany (211), (121), (112) odpowiadają tej samej energii, choć ich funkcje falowe są różne; zatem stan $E = 6\,h^2/8ma^2$ jest trzykrotnie zwyrodniały. Współczynniki zwyrodnienia wyższych stanów energetycznych mogą być większe; np. stan o energii $E = 14\cdot(h^2/8ma^2)$ jest sześciokrotnie zwyrodniały.

11.4. Liniowy oscylator harmoniczny

Obecnie zajmiemy się zastosowaniem równania Schrödingera do rozwiązania problemu oscylatora harmonicznego. Rozważać będziemy oscylator jednowymiarowy, tj. przyjmiemy, że drgania cząstki o masie m zachodzą wokół położenia równowagi wzdłuż osi x. Przy tym amplituda drgań jest na tyle mała, że krzywą energii potencjalnej można przedstawić za pomocą równania paraboli

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 = 2\pi^2 m \nu_o^2 x^2. \tag{11.32}$$

W tym wzorze x jest wychyleniem z położenia równowagi, $k = m\cdot\omega_o^2$ współczynnikiem liniowej siły sprężystej, a ν_o częstością drgań oscylatora. Przy potencjale (11.32) równanie Schrödingera dla oscylatora ma postać

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left\{E - 2\pi^2 m \nu_o^2 x^2\right\}\psi = 0. \tag{11.33}$$

Jeśli wprowadzimy oznaczenia

oraz

$$\left.\begin{aligned} \frac{8\pi^2 m}{h^2}E &= \lambda \\ \frac{4\pi^2 m \nu_o}{h} &= \alpha, \end{aligned}\right\} \tag{11.34}$$

to równanie (11.33) możemy zapisać w prostszej postaci

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - \alpha^2 x^2)\,\psi = 0. \qquad (11.35)$$

Znalezienie rozwiązania tego równania nie jest rzeczą łatwą. Dlatego dokonamy wpierw pewnej próby, a mianowicie spróbujemy znaleźć rozwiązanie dla dużych wartości x, czyli tzw. rozwiązanie asymptotyczne. Jeśli x jest dostatecznie duże, to $\alpha^2 x^2 \gg \lambda$, wobec czego (11.35) możemy uprościć do

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2 x^2 \psi = 0.$$

Przybliżonym rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$\psi(x) \cong e^{\pm \alpha x^2/2}.$$

Mamy bowiem

$$\frac{d\psi}{dx} = \pm \alpha x\, e^{\pm \alpha x^2/2}$$

oraz

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \alpha^2 x^2\, e^{\pm \alpha x^2/2} \pm \alpha e^{\pm \alpha x^2/2}.$$

Jednakże drugi składnik wyrażenia $d^2\psi/dx^2$ jest mały w porównaniu z pierwszym; jeśli go opuścimy, to istotnie funkcję $\exp(\pm \alpha x^2/2)$ można uznać za przybliżone rozwiązanie równania dla dużych wartości x. Ze względu na warunek normalizacyjny, tj. całkowalność $\psi(x)$ z kwadratem, należy wziąć jako "dobre" rozwiązanie funkcję z wykładnikiem ujemnym.

Wróćmy teraz do równania pierwotnego (11.35). Dokładnego rozwiązania tego równania będziemy poszukiwali w postaci funkcji

$$\psi(x) = f(x) \cdot e^{-\alpha x^2/2}, \qquad (11.36)$$

gdzie f(x) jest na razie nie znaną nam funkcją zmiennej x. Spróbujemy ją znaleźć przez podstawienie (11.36) do równania (11.35). Obliczamy pochodne

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{df}{dx} e^{-\alpha x^2/2} - \alpha x f e^{-\alpha x^2/2},$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left\{\frac{d^2 f}{dx^2} - 2\alpha x \frac{df}{dx} + (\alpha^2 x^2 - \alpha) f\right\} e^{-\alpha x^2/2}$$

i podstawiamy otrzymane wyrażenie do (11.35) opuszczając czynnik wykładniczy, który nie zeruje się dla skończonych x. Po uporządkowaniu wyrazów otrzymamy równanie różniczkowe dla funkcji f(x)

$$\frac{d^2f}{dx^2} - 2\alpha x \frac{df}{dx} + (\lambda - \alpha)f = 0.$$

Wprowadzimy teraz zamiast x nową zmienną, bezwymiarową

$$\alpha x^2 = \xi^2, \quad \text{czyli} \quad \xi = \sqrt{\alpha}\cdot x. \tag{11.37}$$

Funkcja $f(x)$ przejdzie wówczas w nową funkcję $H(\xi)$; musimy również dokonać zmiany zmiennej w zapisie różniczkowania

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\alpha}\,\frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \alpha\,\frac{d^2}{d\xi^2}.$$

Nowe równanie różniczkowe będzie miało postać

$$\alpha\,\frac{d^2H(\xi)}{d\xi^2} - 2\alpha\,\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\alpha}\,\frac{dH(\xi)}{d\xi} + (\lambda - \alpha)\,H(\xi) = 0$$

lub

$$\frac{d^2H(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi\,\frac{dH(\xi)}{d\xi} + \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right)H(\xi) = 0. \tag{11.38}$$

Próbną funkcję $H(\xi)$ możemy założyć różnej postaci; najprościej jest wyrazić $H(\xi)$ za pomocą wielomianu

$$H(\xi) = a_k\,\xi^k + a_{k+1}\,\xi^{k+1} + \ldots = \sum_{r=k}^{s} a_r\,\xi^r. \tag{11.39}$$

Wielomian $H(\xi)$ nie może składać się z nieskończonej liczby wyrazów; w takim przypadku byłby szeregiem, a jego suma byłaby zbieżna do $\exp(\xi^2)$. Wobec (11.36) mielibyśmy

$$\psi(\xi) = H(\xi)\,e^{-\xi^2/2} = e^{+\xi^2/2},$$

a więc funkcję nie dającą się znormalizować. Na tej podstawie wnosimy, że $H(\xi)$ musi się składać ze skończonej liczby wyrazów, czyli musi być wielomianem.

Pierwszą i drugą pochodną $H(\xi)$

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} = k(k-1)\,a_k\,\xi^{k-2} + (k+1)\,ka_{k+1}\,\xi^{k-1} + (k+2)(k+1)a_{k+2}\xi^k + \ldots$$

podstawiamy do (11.38).

Otrzymamy równość

$$k(k-1)\,a_k\,\xi^{k-2} + (k+1)\,ka_{k+1}\,\xi^{k-1} + (k+2)(k+1)\,a_{k+2}\,\xi^k + \ldots = \left(2k - \frac{\lambda}{\alpha} + 1\right)a_k\,\xi^k + \ldots \tag{11.40}$$

Wielomiany po obu stronach tej równości mają być identyczne, tzn. muszą mieć jednakowe współczynniki przy tych samych potęgach ξ. Wobec tego możemy napisać dwie następujące równości

$$k(k-1) = 0, \quad (k+1)k = 0. \tag{11.41}$$

Pierwsza z nich prowadzi do wniosku, że

$$k = 0 \quad \text{lub} \quad k = 1. \tag{11.42}$$

Przypadek $k = -1$, wynikający z drugiej równości musi być odrzucony, ponieważ $\xi \to 0 \supset 1/\xi \to \infty$. Widzimy zatem, że wielomian (11.39) może się zaczynać od wyrazu stałego a_0 lub od wyrazu $a_1\xi$. Wyrażenie do obliczenia współczynników a_k wielomianu otrzymamy przez porównanie współczynników przy ξ^k równości (11.40)

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} = (2k + 1 - \frac{\lambda}{\alpha})a_k,$$

stąd

$$a_{k+2} = \frac{(2k + 1 - \lambda/\alpha)}{(k+2)(k+1)}\, a_k. \tag{11.43}$$

Wzór (11.43) umożliwia obliczenie współczynnika a_{k+2}, jeśli znamy a_k i nosi nazwę wzoru rekurencyjnego dla współczynników a_k. Z takiej postaci wzoru wynika, że będziemy mieć dwa typy wielomianów (11.39): jeden z nich zawiera tylko nieparzyste, a drugi tylko parzyste potęgi ξ.

Niezależnie od parzystości wyrazów wielomian $H(\xi)$ musi się kończyć na pewnym wyrazie $a_n \xi^n$. Warunkiem tego jest zerowanie się współczynnika a_{n+2}, czyli

$$2n + 1 - \frac{\lambda}{\alpha} = 0. \tag{11.44}$$

Po podstawieniu do (11.44) oznaczeń z (11.34):

$$E_n = h\nu(n + \tfrac{1}{2}). \tag{11.45}$$

Wzór (11.45) przedstawia energię zbioru dozwolonych stanów energetycznych oscylatora harmonicznego. n jest liczbą kwantową i może przybierać wartości $n = 0, 1, 2, \ldots$ Energia oscylatora jest więc kwantowana i nie znika nawet w najniższych temperaturach, gdy obsadzone są stany z $n = 0$. Najmniejsza energia oscylatora, zwana energią zerową, wynosi

$$E_0 = \tfrac{1}{2} h\nu. \tag{11.46}$$

Można pokazać, że wynika ona z zasady Heisenberga (por. rozdz. 10).

Funkcje falowe oscylatora harmonicznego mają postać

$$\psi_n(x) = N_n \cdot H_n(\xi) \cdot e^{-\xi^2/2}. \qquad (11.47)$$

N_n jest czynnikiem normalizacyjnym

$$N_n = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}\ n!\ 2^n} \right)^{1/2}. \qquad (11.48)$$

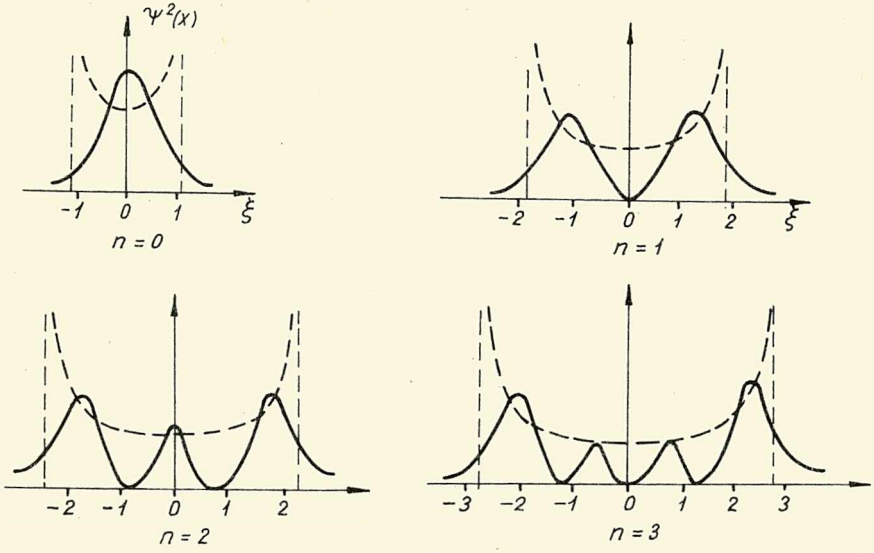
$H_n(\xi)$ jest wielomianem o współczynnikach (11.43); nosi on nazwę wielomianu Hermitte'a. Kilka pierwszych wielomianów (dla małych n) ma następującą postać

$$H_0(\xi) = 1,$$
$$H_1(\xi) = 2\xi,$$
$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2,$$
$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi,$$
$$H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12.$$

Funkcje falowe (11.47) dla poszczególnych n mają następujące postacie

$$\psi_0(\xi) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\xi^2/2},$$
$$\psi_1(\xi) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right)^{1/2} 2\xi\, e^{-\xi^2/2},$$
$$\psi_2(\xi) = \left(\frac{1}{8}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right)^{1/2} \left\{4\xi^2 - 2\right\} e^{-\xi^2/2},$$
$$\psi_3(\xi) = \left(\frac{1}{48}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right)^{1/2} \left\{8\xi^3 - 12\xi\right\} e^{-\xi^2/2},$$
$$\psi_4(\xi) = \left(\frac{1}{384}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right)^{1/2} \left\{16\xi^4 - 48\xi^2 + 12\right\} e^{-\xi^2/2}.$$

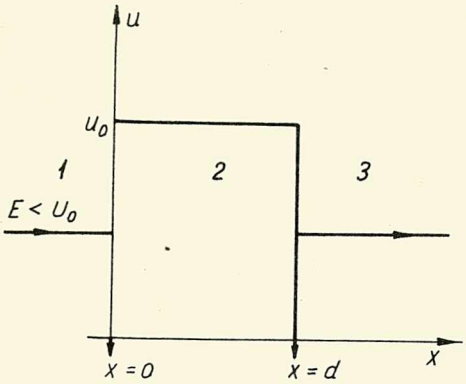
Wykresy kwadratu modułu funkcji falowej, $\psi^2(\xi)$, określającej gęstość prawdopodobieństwa położenia oscylatora, są przedstawione na rys. 11-4, dla stanów od n = 0 do n = 3. Na tych samych wykresach zaznaczono linią przerywaną analogiczną funkcję dla oscylatora makroskopowego, np. wahadła. Gęstość prawdopodobieństwa dla oscylatora makroskopowego rośnie do nieskończoności w punktach powrotu (przy wychyleniach równych amplitudzie drgań), ponieważ w tym punktach prędkość oscylatora osiąga wartość zero, natomiast $\psi^2(\xi)$ dla oscylatora kwantowego zależy od stanu oscylatora: dla n = 0 $\psi^2(\xi)$ osiąga maksimum dla ξ = 0, dla n = 1 wystąpują dwa maksima, itd. Warto też



Rys. 11-4

zauważyć, że $\psi^2(\xi)$ przyjmuje wartości różne od zera również dla wartości ξ większych od klasycznej amplitudy.

11.5. Bariera potencjalna



Rys. 11-5

Rozważmy obecnie zagadnienie prawdopodobieństwa przechodzenia cząstki mikroskopowej przez barierę potencjału, która w najprostszym przypadku ma kształt prostokątny (rys. 11-5). Bariera zaczyna się w punkcie x = 0 pionową ścianą potencjalną i taką ścianą kończy w punkcie x = d; d jest więc szerokością bariery, U_o jej wysokością. Cząstka o energii całkowitej $E < U_o$ uderza barierę z lewej strony, w obszarze 1, a problem polega na określeniu prawdopodobieństwa znalezienia się jej w obszarze 3 z tą samą energią E. Z punktu widzenia mechaniki klasycznej pojawienie się cząstki w obszarze 3 jest niemożliwe, ponieważ przedtem musiałaby pojawić się w obszarze 2, gdzie $(E - U_o) < 0$, a więc prędkość cząstki jest urojona.

Przyjmiemy, że energia potencjalna cząstki w obszarze 1,2,3 spełnia następujące warunki

$$\left.\begin{aligned} &\text{dla } x<0 \text{ i } x>d \quad U=0,\\ &\text{dla } 0\leqslant x\leqslant d \quad U_0=\text{const.}\end{aligned}\right\} \tag{11.49}$$

Równanie Schrödingera dla obszaru 1 i 3 ma postać

$$\frac{d^2\psi_{1,3}(x)}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}E\psi_{1,3}(x)=0,$$

zaś dla obszaru 2

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U_0)\psi_2(x)=0.$$

Jeśli oznaczymy wielkości stałe

oraz

$$\left.\begin{aligned} &\frac{8\pi^2 m}{h^2}E=k_1^2,\\ &\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U_0)=k_2^2,\end{aligned}\right\} \tag{11.50}$$

to rozwiązania możemy zapisać w następujący sposób

$$\begin{aligned} \psi_1(x)&=a_1 e^{ik_1x}+b_1 e^{-ik_1x},\\ \psi_2(x)&=a_2 e^{ik_2x}+b_2 e^{-ik_2x},\\ \psi_3(x)&=a_3 e^{ik_1x}. \end{aligned} \tag{11.51}$$

W rozwiązaniach (11.51) przyjęliśmy $b_3=0$, ponieważ nie ma sensu oczekiwać w obszarze 3 cząstki, poruszającej się w kierunku przeciwnym do zwrotu osi x.

Funkcje (11.51) opisują stale tę samą cząstkę, zatem powinny być ciągłe w punkcie $x=0$ i $x=d$. Ciągłe muszą być także ich pochodne, przy czym uzasadnienie pomijamy; łącznie warunki ciągłości przedstawiają się następująco

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(0)=\psi_2(0),\quad \psi_2(d)=\psi_3(d),\\ &\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0}=\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0},\quad \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=d}=\left(\frac{d\psi_3}{dx}\right)_{x=d}.\end{aligned}\right\} \tag{11.52}$$

Zastosowanie (11.52) do funkcji (11.51) prowadzi nas do czterech równań o pięciu niewiadomych

$$
\begin{aligned}
a_1 + b_1 &= a_2 + b_2, \\
a_2 e^{ik_2 d} + b_2 e^{-ik_2 d} &= a_3 e^{ik_1 d}, \\
k_1 a_1 - k_1 b_1 &= k_2 a_2 - k_2 b_2, \\
k_2 a_2 e^{ik_2 d} - k_2 b_2 e^{-ik_2 d} &= k_1 a_3 e^{ik_1 d}.
\end{aligned}
\tag{11.53}
$$

W celu zredukowania liczby niewiadomych przyjmiemy, że dla strumienia cząstek padających $a_1 = 1$. Założenie takie równoważne jest dwustronnemu podzieleniu każdego z równań przez a_1 i obliczaniu stosunków a_i/a_1 lub b_i/b_1. Zachowamy jednak dotychczasowe oznaczenia. Najbardziej interesujący jest współczynnik a_3, określający prawdopodobieństwo przeniknięcia cząstek przez barierę potencjalną. Rozwiązanie układu równań (11.53) prowadzi do wyrażenia

$$
a_3 = \frac{4 k_1 k_2 e^{ik_1 d}}{(k_1 + k_2)^2 e^{-ik_2 d} - (k_1 - k_2)^2 e^{ik_2 d}}.
$$

Przezroczystością D bariery potencjalnej nazywać będziemy kwadrat modułu a_3

$$
D \equiv a_3 \cdot a_3^* . \tag{11.54}
$$

Obliczając D zauważmy, że k_1 jest współczynnikiem rzeczywistym, zaś k_2 urojonym. Wobec tego

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{2\pi}{h} \sqrt{2 m E}, \\
k_2 &= \frac{2\pi i}{h} \sqrt{2m(U_0 - E)} = ik.
\end{aligned}
\tag{11.55}
$$

Obliczamy obecnie przezroczystość bariery

$$
\begin{aligned}
D = a_3 a_3^* &= \\
&= \frac{4 k_1 (ik) \cdot 4 k_1 (-ik)}{\left\{(k_1 + ik)^2 e^{kd} - (k_1 - ik)^2 e^{-kd}\right\}\left\{(k_1 - ik)^2 e^{kd} - (k_1 + ik)^2 e^{-kd}\right\}} = \\
&= \frac{(4 k_1 k)^2}{(k_1^2 + k^2) e^{2kd} - (k_1 + ik)^4 - (k_1 - ik)^4 + (k_1^2 + k_2^2)^2 e^{-2kd}}.
\end{aligned}
$$

Wyrażenie określające D w tej postaci jest mało użyteczne - trzeba je uprościć. Łatwo się przekonać, że

$$\frac{(k_1 + ik)^4 + (k_1 - ik)^4}{(4\,k_1 k)^2} = \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{k_1}{k}\right)^2 - \left(\frac{k}{k_1}\right)^2\right\} - \frac{3}{4}\,.$$

Ponieważ pierwszy z wyrazów po prawej stronie jest mniejszy od +1, czwarte potęgi dwumianów możemy w mianowniku opuścić. Człon w mianowniku zawierający exp (-2kd) jest znacznie mniejszy od pozostałego; w rezultacie wyrażenie przybliżone ma postać

$$D = C \exp(-2kd) = C \exp\left\{-\frac{4\pi d}{h}\sqrt{2m(U_0 - E)}\right\}, \qquad (11.56)$$

gdzie C jest stałą, rzędu jedności. Przezroczystość bariery potencjalnej zależy zatem od masy cząstki potencjalnej, od szerokości bariery d oraz od wielkości $(U_0 - E)$, zwanej głębokością penetracji.

Jeśli interesujemy się elektronem i głębokość penetracji oznaczymy przez V, to

$$(U_0 - E) = V\ \text{eV} = 1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot V\ \text{dżuli},$$

przy czym $0 \leqslant V \leqslant U_0$. Mamy wówczas

$$\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(U_0 - E)} = 1{,}02 \cdot 10^{10}\sqrt{V}\ \text{m}^{-1}$$

oraz

$$D = \exp\left(-1{,}02 \cdot 10^{10}\, d\sqrt{V}\right),$$

przy czym przyjęliśmy C = 1. Względna przepuszczalność barier różnej szerokości przy głębokości penetracji V = 1 eV jest następująca

V = 1 eV

d (w Å)	1	1,5	2,0	5	10
D (w %)	36	28,5	13	0,6	$3{,}7 \cdot 10^{-3}$

Barierę można uważać za względnie przezroczystą dla elektronu przy głębokości penetracji 1 eV, jeśli jej szerokość nie przekracza kilku angstremów.

12. JĄDRO ATOMOWE

Jądra atomów, oprócz wodoru, wykazują budowę złożoną. Niektóre z nich są nietrwałe i ulegają rozpadowi w sposób naturalny. Większość jąder atomów może być doprowadzona do stanu nietrwałości za pomocą bombardowania cząstkami o wysokiej energii. Zjawiska te stanowią przedmiot zainteresowań fizyki jądrowej i chemii jądrowej - gałęzi nauki, zmierzających do poznania budowy i znalezienia sposobów wyzwolenia oraz praktycznych zastosowań zasobów energii, tkwiących w jądrze atomowym. Mimo, iż dziś dalecy jesteśmy od stwierdzenia, że szczegóły budowy jądra są nam znane, istnieją liczne i ważne zastosowania uzyskanych dotychczas wyników badań naukowych.

Zajmiemy się w tym rozdziale opisem podstawowych faktów doświadczalnych i praw z dziedziny fizyki jądra atomowego. W końcowej części omówimy jeden z modeli jądrowych.

12.1. Defekt masy i energia wiązania jądra

Jak wiadomo, każdy atom składa się z jądra o masie m_j oraz z elektronów, z których każdy ma masę m_e. Jeśli Z jest liczbą porządkową jądra, to ogólna masa m elektrycznie obojętnego atomu wynosi

$$m = m_j + Z \cdot m_e. \tag{12.1}$$

W fizyce jądowej masy wyraża się zwykle w liczbach względnych, za pomocą tzw. masy atomowej M, przyjmując obecnie za jednostkę masy 1/12 masy jądra izotopu węgla ^{12}C.

$$1 \text{ j.m.at.} = \frac{12,0000}{6,02252} \cdot \frac{1}{12} \cdot 10^{-26} \text{ kg} = (1,66043 \pm 7 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

W takim razie

$$m = 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot M \text{ kg}. \tag{12.2}$$

Na podstawie związku $E = c^2 \cdot m$, jednostce masy atomowej odpowiada energia wyrażana najczęściej w megaelektronowoltach

$$E = 1 \text{ j.m.at. x } c^2 = 1,66043 \cdot 10^{-27} \text{ x } (2,998 \cdot 10^8)^2 \text{ dżuli} = 931,5 \text{ MeV}.$$

Oprócz masy atomowej M używa się jeszcze w fizyce jądra atomowego pojęcia liczby masowej A: jest to liczba całkowita najbliższa M.

Podstawowymi składnikami budowy jądra są protony i neutrony, noszące wspólną nazwę nukleonów; ich masy spoczynkowe są następujące

masa spoczynkowa protonu $m_p = 1{,}007271 \pm 1 \cdot 10^{-6}$ j.m.at.,

masa spoczynkowa neutronu $m_n = 1{,}008665 \pm 1 \cdot 10^{-6}$ j.m.at.,

masa spoczynkowa elektronu $m_e = (5{,}486 \pm 0{,}001) \cdot 10^{-4}$ j.m.at.

Jądro o liczbie porządkowej Z i liczbie masowej A zawiera więc Z protonów i (A - Z) neutronów. Masa atomowa takiego jądra powinna wynosić $Z \cdot m_p + (A - Z)m_n$. Okazuje się jednak, że masa jądra nie jest wielkością addytywną: rzeczywista masa atomowa jądra jest zawsze mniejsza od sumy mas wchodzących w jego skład nukleonów. Jeśli tę rzeczywistą masę oznaczymy przez ${}^{A}_{Z}M$, to różnica

$$Z\, m_p + (A - Z)m_n - {}^{A}_{Z}M = \Delta M \geqslant 0 \qquad (12.3)$$

nosi nazwę defektu masy i jest miarą trwałości jądra. Defekt masy równy jest energii, która wydzieliłaby się podczas syntezy jądra z nukleonów. Po podstawieniu znanych mas nukleonów możemy zapisać (12.3) w postaci

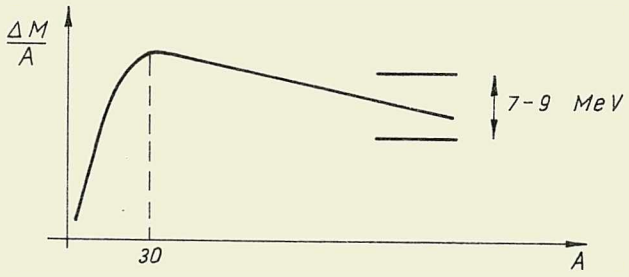
$$\Delta M = 931{,}5 \left\{ 1{,}007277\, Z + 1{,}008665\, (A - Z) - {}^{A}_{Z}M \right\} \text{MeV}. \qquad (12.4)$$

Korzystając z tabeli mas izotopów można obliczyć ΔM poszczególnych jąder, np. masa atomowa ${}^{7}_{3}Li$ wynosi 7,01572; po odjęciu masy trzech elektronów otrzymujemy rzeczywistą masę jądra 7,014074 j.m.at. Ponieważ suma mas trzech protonów i czterech neutronów wynosi 7,056491, zatem defekt masy jądra litu wynosi

$$M = 0{,}042417 \text{ j.m.at.} = 39{,}5 \text{ MeV}.$$

Podczas syntezy 1 mola ${}^{7}_{3}Li$ (7 g) z nukleonów uwolni się energia $\Delta E = \Delta M \cdot N_0 \cdot c^2$ J $= 3{,}81 \cdot 10^{12}$ J. Energia ta równa jest ciepłu, jakie wydzieli się podczas spalania $3{,}81 \cdot 10^{12} / 3{,}92 \cdot 10^{5} = 10^{7}$ moli węgla = = 120 t węgla (ciepło spalania $3{,}92 \cdot 10^{5}$ J/mol). Wydzielające się w takich procesach jądrowych ilości energii są tak znaczne, iż można było dokonać bezpośredniego sprawdzenia relacji Einsteina między masą i energią przez pomiary kalorymetryczne.

Jest oczywiste, iż wartość defektu masy zależy od liczby masowej A jądra: dla jąder cięższych jest on na ogół większy, niż dla lżejszych. Ogólny defekt masy ΔM nie jest dlatego dobrą wielkością, jeśli zależy nam na porównywaniu względnej trwałości różnych jąder. Właściwą miarą trwałości jądra jest iloraz $\Delta M/A$, zwany energią wiązania



Rys. 12-1

jednego nukleonu w jądrze. Funkcja $\Delta M/A$ w zależności od A jest przedstawiona na wykresie 12-1; powyżej A = 30 krzywa zmienia się niewiele, tak że możemy przyjąć, iż dla jąder cięższych od A = 30 energia wiązania jednego nukleonu w jądrze zmienia się w granicach 7-9 MeV. Jądra lżejsze są na ogół mniej trwałe; wyjątkami są

$$^{4}_{2}\mathrm{He}, \quad ^{12}_{6}\mathrm{C}, \quad ^{16}_{8}\mathrm{O},$$

które należą do najtrwalszych ze wszystkich jąder. Widocznie takie kombinacje nukleonów zapewniają jądrom pierwiastków dużą stabilność.

12.2. Naturalne przemiany promieniotwórcze

Odkrycie Becquerela (zaczernienie kliszy fotograficznej przez minerały zawierające uran), a następnie pionierskie prace Marii i Piotra Curie (wydzielenie nowych pierwiastków radu i polonu, 1898 r.) doprowadziły do stwierdzenia, że jądra niektórych atomów są nietrwałe i ulegają spontanicznemu rozpadowi. Procesom tym towarzyszy emisja cząstek α (jądra $^{4}_{2}\mathrm{He}$) lub β (szybkie elektrony) i zwykle promieniowania γ (promieniowanie elektromagnetyczne o długości fali krótszej od promieniowania rentgenowskiego). Ogólną teorię szybkości rozpadu promieniotwórczego sformułował w 1900 r. Rutherford.

W myśl tej teorii chwilowa szybkość rozpadu promieniotwórczego jest proporcjonalna do liczby jąder określonego nuklidu, istniejącej w danej chwili. Nuklidem nazywamy pierwiastek o określonych Z i A. Jeśli przez N oznaczymy liczbę jąder nuklidu istniejących w chwili t, to $-dN/dt$ oznacza liczbę jąder zanikających (znak -) w ciągu jednostki czasu, czyli chwilową szybkość rozpadu. W myśl prawa Rutherforda możemy napisać

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N. \qquad (12.5)$$

(12.5) jest równaniem różniczkowym szybkości rozpadu; możemy je łatwo scałkować poprzez rozdzielenie zmiennych

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt,$$

czyli

$$\ln N = -\lambda \cdot t + \text{const.}$$

Ponieważ $t = 0 \supset N = N_0$, czyli N_0 jest liczbą jąder istniejących na początku obserwacji, const = $\ln N_0$ oraz

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \qquad (12.6)$$

lub

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}. \qquad (12.7)$$

Stała λ ma wymiar odwrotności czasu i nosi nazwę stałej rozpadu promieniotwórczego. Prócz stałej rozpadu używa się często pojęcia czasu połowicznego zaniku (lub okresu połówkowego) τ, zdefiniowanego w następujący sposób: τ jest okresem czasu, po którego upływie początkowa liczba jąder maleje do połowy. Na tej podstawie możemy napisać

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda\tau},$$

czyli

$$\lambda \cdot \tau = \ln 2. \qquad (12.8)$$

Widzimy, że okres połówkowy jest odwrotnie proporcjonalny do stałej rozpadu.

Rozpad promieniotwórczy nuklidu A, z utworzeniem nuklidu B, biegnie często dalej, tj. B rozpada się z utworzeniem nuklidu C, itd. Mamy w tym przypadku do czynienia z szeregiem następczych reakcji rozpadu

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \ldots$$

Jeśli szybkość powstawania nuklidu B z A równa jest szybkości rozpadu B, to powiadamy, że B jest w równowadze z A. Ponieważ szybkość powstawania B jest równa szybkości zaniku A, mamy więc

$$\frac{d N_B}{dt} = \frac{d N_A}{dt} = -\lambda_A \cdot N_A.$$

Z drugiej strony, szybkość zaniku B zależy od stałej rozpadu λ_B

$$\frac{d N_B}{dt} = -\lambda_B \cdot N_B.$$

Porównanie obu szybkości prowadzi do warunku równowagi nuklidu B z A

$$\lambda_A \cdot N_A = \lambda_B \cdot N_B, \qquad (12.9)$$

a więc dwa nuklidy A i B są ze sobą w równowadze promieniotwórczej, jeśli w każdej chwili liczby ich jąder są odwrotnie proporcjonalne do ich stałych rozpadu.

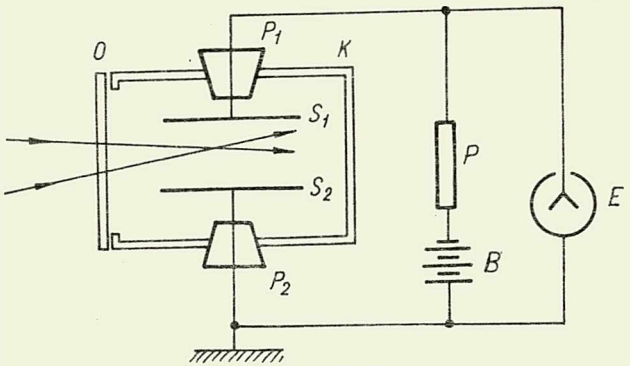
Do praw opisujących rozpad promieniotwórczy pod względem ilościowym, należą prócz (12.5) i (12.9) dwa prawa sformułowane przez Fajansa i Soddy'ego, określające metryki Z i A nuklidu po przemianie α oraz β. Są one powszechnie znane, dlatego nie będziemy się nimi tu zajmowali.

12.3. Metody detekcji cząstek jonizujących

Szybkie cząstki naładowane, emitowane przez naturalne pierwiastki promieniotwórcze lub w reakcji sztucznej promieniotwórczości, posiadają własność wytwarzania jonów: w czasie ich ruchu w ośrodku gazowym powstają wskutek oddziaływań elektrostatycznych wolne elektrony oraz jony dodatnie. Znanych jest obecnie wiele metod detekcji cząstek jonizujących, opartych zarówno na bezpośrednim wykorzystaniu efektów związanych z ruchem cząstki, jak też na wykorzystaniu efektów wtórnych.

12.3.1. Komora jonizacyjna

Metoda ta przedstawiona jest schematycznie na rys. 12-2. Zbiornik metalowy K, zaopatrzony w okienko O i dwa izolatory P_1 i P_2, stanowi



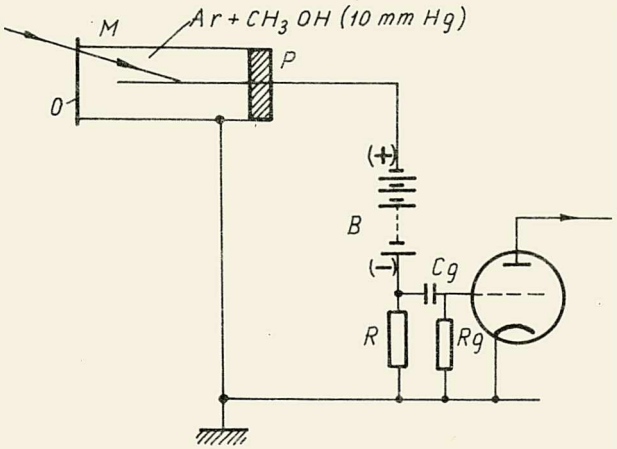
Rys. 12-2

w gruncie rzeczy osłonę elektrostatyczną kondensatora S_1S_2. Jedna z jego okładek jest uziemiona, druga połączona szeregowo z wysokoomowym opornikiem R i baterią B. Elektrometr E mierzy spadek napięcia na komorze w sposób elektrostatyczny ze względu na duże oporności, wy-

stępujące w tym obwodzie. Każda cząstka jonizująca, która wpadła przez okienko O, wytwarza jony; zasada wykorzystania komory jonizacyjnej opiera się na pomiarze zwiększonego przewodnictwa gazu w obecności jonów.

12.3.2. Licznik Geigera-Müllera

Jest to bez wątpienia najprostszy i najczęściej dziś stosowany detektor. Jego rozpowszechnienie wynika nie tylko z prostoty konstrukcji; zaletą jest również duża uniwersalność (zliczanie cząstek α, β i γ) oraz to, że pracuje metodą impulsową.



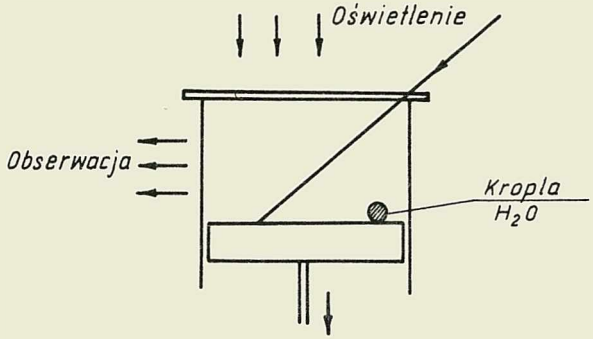
Rys. 12-3

W najprostszym wykonaniu jest to cylinder metalowy M (rys. 12-3), zamknięty z jednej strony cienką folią, stanowiącą okienko O, z drugiej izolatorem P. Wewnątrz cylindra znajduje się wypełnienie gazowe: najczęściej argon z niewielką domieszką par alkoholu metylowego pod łącznym ciśnieniem około 10 mm Hg. Osłona stanowi elektrodę ujemną, zaś dodatnią jest cienki drucik; bateria B dostarcza napięcia 1000-2000 V. Przy tych parametrach jony, powstające wzdłuż śladu cząstki jonizującej, są rozpędzane do dużych szybkości i wywołują wtórną jonizację; w rezultacie wytwarza się lawina jonów, powodująca przepływ sporego prądu przez opornik R. Impuls elektryczny jest przekazywany dalej poprzez C do układu elektronicznego i rejestrującego. Pojawienie się dużego prądu w liczniku tuż po wejściu cząstki odpowiada "zapaleniu się" licznika, tj. powstaniu wyładowania ciągłego między

jego elektrodami. W tym stanie licznik nie reaguje na następne cząstki wchodzące przez okienko, wobec czego stan ten należy przerwać.Służy do tego celu obecność par związku organicznego w niewielkim stężeniu, np. metanolu, którego cząsteczki przechwytują energię rozpędzonych elektronów i jonów za pośrednictwem zderzeń. Same ulegają przy tym dysocjacji na nieprzewodzące prądu rodniki, ale właśnie to powoduje przerwanie lawiny. Wyładowanie gaśnie,rodniki ulegają rekombinacji i licznik znów może zarejestrować następną cząstkę.Widać zarazem, że na przerwanie lawiny oraz powrót licznika do stanu podstawowego potrzebny jest pewien skończony przedział czasu - jest on ważnym parametrem licznika i nosi nazwę czasu rozdzielczego. Licznik zarejestruje dwie cząstki jako oddzielne zdarzenia, jeśli wejdą one do licznika w odstępie czasu nie krótszym, niż czas rozdzielczy. We współczesnych licznikach Geigera-Müllera czas rozdzielczy wynosi milisekundy.

12.3.3. Komora Wilsona

Komora, skonstruowana przez Wilsona jest jednym z najważniejszych urządzeń w badaniach należących do fizyki jądrowej. Komora pozwala prawie bezpośrednio "zobaczyć" ślad cząstki jonizującej,a ponadto można mierzyć jej prędkość, energię, zasięg, a także z wyglądu śladu odróżniać np. elektrony β od cząstek α.



Rys. 12-4

W cylindrze metalowym, zamkniętym u dołu tłokiem (rys.12-4), mamy w temperaturze pokojowej gaz z nasyconą parą wodną,co ilustruje obecność kropli wody. Po przesunięciu tłoka w dół na tyle szybko, by proces można w przybliżeniu traktować jak adiabatyczny, następuje obniżenie temperatury gazu zamkniętego w cylindrze, wobec czego para wodna staje się parą przesyconą. Jest to stan metastabilny i trwa bardzo krótko; w chwilę później pojawiają się kropelki wody na wszelkich

drobnych pyłkach - zwłaszcza na jonach, stanowiących doskonałe zarodki kondensacji kropelek.

Jeśli w ciągu krótkiego odstępu czasu między rozprężeniem, a samorzutną likwidacją stanu przesycenia wewnątrz komory znajdzie się cząstka, to kropelki wody będą ulegały kondensacji głównie wzdłuż jej śladu. Jednoczesne oświetlenie pozwala na sfotografowanie śladu cząstki wewnątrz komory. Współczesne układy elektroniczne pozwalają na synchronizację poszczególnych czynności, jak również na selekcję cząstek o pewnych zdeterminowanych własnościach. Można, na przykład, zająć się rejestracją cząstek o energii przewyższającej zadaną wartość progową lub rejestrować cząstki przychodzące z określonego kierunku. Ostatnie uwagi odnoszą się również do zastosowania liczników Geigera-Müllera w tzw. układach koincydencyjnych. Można również umieścić wewnątrz komory Wilsona preparat promieniotwórczy i zajmować się w różnych warunkach pomiarem zasięgu emitowanych przezeń cząstek.

Zasięg cząstek zależy między innymi od ich prędkości,lub energii. Dla cząstek bardzo szybkich bywa w ośrodku gazowym tak duży, że nie można obserwować całego śladu cząstki w komorze Wilsona o rozsądnych wymiarach. Dlatego skonstruowano cieczowy analog komory,znany pod nazwą komory pęcherzykowej, w której ośrodkiem wypełniającym jest ciekły wodór. W cieczy, jaką stanowi skroplony gaz, można również wytworzyć stan metastabilny przez nagłe obniżenie prężności pary nad cieczą. Wzdłuż śladu cząstki jonizującej pojawiają się wówczas drobne pęcherzyki pary, pozwalające na uzyskanie fotografii toru cząstki.

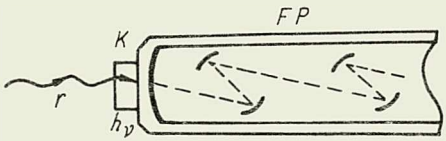
12.3.4. Blok emulsji fotograficznej

Do obserwacji ruchu cząstek o najwyższych energiach, stanowiących na przykład składniki promieniowania kosmicznego, używa się niekiedy bloków emulsji fotograficznej. Jest to prostopadłościan wykonany z halogenku srebra wraz z potrzebnymi dodatkami, zawieszonych w żelatynie. Po zarejestrowaniu śladu jednej (lub kilku) cząstki blok tnie się na cienkie warstwy, wywołuje, utrwala i suszy. Po złożeniu poszczególnych fragmentów bloku uzyskuje się przestrzenny obraz ruchu cząstki szczególnie interesujący wtedy, gdy jej ślad kończy się w obszarze bloku jakąś dezintegracją. Rozpoznanie powstających cząstek, pomiar zasięgu i kątów rozproszenia umożliwia niekiedy pełny opis wywołanego rozpadu.

12.3.5. Licznik scyntylacyjny

Jest to ostatnio coraz częściej stosowany detektor przede wszystkim promieniowania γ lub rentgenowskiego. Jego zasadniczą częścią

jest fotopowielacz, z przyklejonym do powierzchni czołowej kryształem scyntylacyjnym K (rys. 12-5). Jako scyntylatora używa się kryształu jodku sodu, zawierającego niewielką domieszkę jodku talawego (NaJ·TlJ); spośród związków organicznych dobrym scyntylatorem jest antracen. Kwan-



Rys. 12-5

ty γ absorbowane przez te kryształy, powodują wzbudzenie centrów luminescencji; powrót centrów do stanu podstawowego połączony jest z emisją promieniowania widzialnego, rejestrowanego przez fotopowielacz. Sprawność konwersji kwantów γ w kwanty promieniowania widzialnego wynosi kilka procent, natomiast dużą zaletą liczników scyntylacyjnych jest ich bardzo mały czas rozdzielczy: w większości przypadków jest on rzędu 10^{-9} s. Liczników scyntylacyjnych używa się również do detekcji elektronów β, cząstek α, a także powolnych neutronów.

12.4. Rozpad α

Cząstka α, opuszczająca jądro w procesie naturalnej przemiany promieniotwórczej, porusza się w dalszym ciągu w ośrodku, najczęściej gazowym. Wskutek strat energii związanych z produkcją jonów, cząstka zostaje wyhamowana do tzw. prędkości termicznej, odpowiadającej energii translacji 3/2 kT cząsteczki gazu. Odcinek drogi, przebyty przez cząstkę α w suchym azocie (lub powietrzu) w warunkach normalnych od miejsca jej wyrzucenia do zatrzymania, nazywamy zasięgiem R cząstki. Jest zdumiewające, że określony nuklid emituje cząstki α o ściśle określonym zasięgu; fluktuacje R zdarzają się nadzwyczaj rzadko.

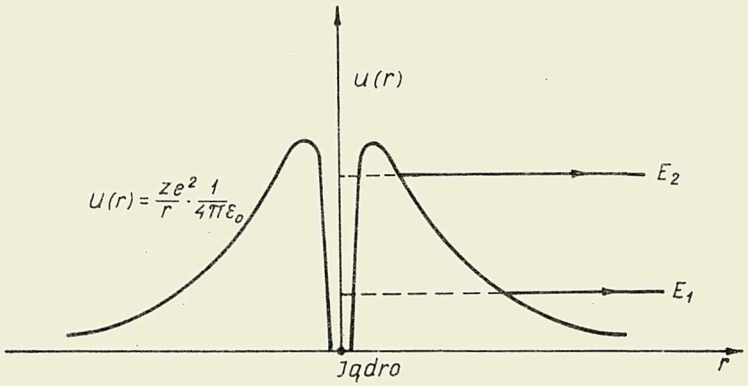
Ta cecha zasięgu pozwoliła na ustalenie związku między R a stałą rozpadu promieniotwórczego λ, znanego pod nazwą prawa Geigera-Nuttalla: logarytm zasięgu R cząstki α jest proporcjonalny do logarytmu stałej rozpadu

$$\ln R = a \ln \lambda + b, \qquad (12.10)$$

gdzie a i b są stałymi charakterystycznymi dla określonego nuklidu. Innymi słowy: im szybciej rozpada się pierwiastek promieniotwórczy, tym większy mają zasięg emitowane przezeń cząstki α.

Prawidłowość tę łatwo wyjaśnić jeśli przyjmiemy, że jądro jest otoczone barierą potencjalną. O istnieniu tej bariery wiadomo z dość-

wiadczeń nad bombardowaniem jąder cząstkami naładowanymi. Znaleziono mianowicie, że do jądra może wniknąć cząstka atakująca dopiero wówczas, gdy jej energia kinetyczna jest dostatecznie duża. Świadczy to niewątpliwie o istnieniu bariery potencjału, choć o jej szczegółowym kształcie w pobliżu jądra nie wiemy nic pewnego. Wiadomo jedynie, że w odległościach "dostatecznie" od jądra dalekich bariera ma kształt potencjału kulombowskiego, co wynika z doświadczeń Rutherforda dotyczących rozpraszania cząstek α przez jądra atomów (por. rozdz. 3.3). Za "dostatecznie" dużą można uważać odległość przewyższającą 10 średnic jądra. Model takiej bariery jest przedstawiony na rys.12-6; przyjmujemy, że jądro znajduje się w punkcie (0,0). Jeśli energia cząstki α wyrzuconej z jądra, a więc i jej zasięg są małe, to cząstka uderza



Rys. 12-6

w barierę na dole, gdzie prawdopodobieństwo przejścia jest małe. Dla takiej cząstki bowiem i szerokość bariery i głębokość penetracji są duże. Wobec małych szans na emisję, pierwiastek ma długi czas życia, czyli małą stałą rozpadu. Jeśli zaś cząstki α wyrzucane przez jakieś inne jądro mają energię dużą, prawdopodobieństwo przejścia przez barierę jest również duże, co odpowiada dużej stałej rozpadu.

12.5. Emisja γ i poziomy wzbudzone jąder

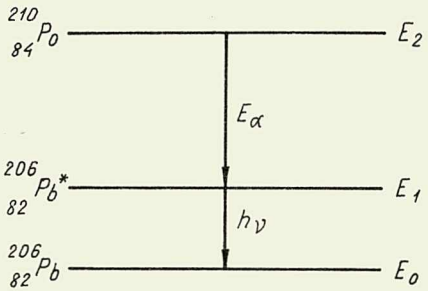
Emisja promieniowania γ jest zjawiskiem towarzyszącym emisji α, β: po wyrzuceniu cząstki jądro znajduje się w stanie wzbudzenia i powrót do stanu podstawowego jest połączony z emisją kwantu γ. Stanów wzbudzonych może być więcej niż jeden; stanowią one charakterystyczny dla każdego jądra układ stanów dyskretnych. Przykładem reakcji rozpadu, połączonej z emisją γ, może być rozpad polonu

$$^{210}_{84}Po \xrightarrow{\alpha} {}^{206}_{82}Pb^{*} \xrightarrow{\gamma} {}^{206}_{82}Pb$$

Gwiazdką zostało oznaczone jądro Pb w stanie wzbudzonym. Energetyczny schemat tej reakcji jest podany na rys. 12-7; mamy

$$E_2 - E_1 = E_\alpha, \quad E_1 - E_o = h\nu,$$

gdzie E_α oznacza energię cząstki α, zaś E_o energię stanu podstawowego. Jest to bardzo prosty schemat z jednym stanem wzbudzonym (E_1); często bywa ich więcej, np. jądro węgla $^{13}_{6}C$ ma co najmniej 5 stanów wzbudzonych.



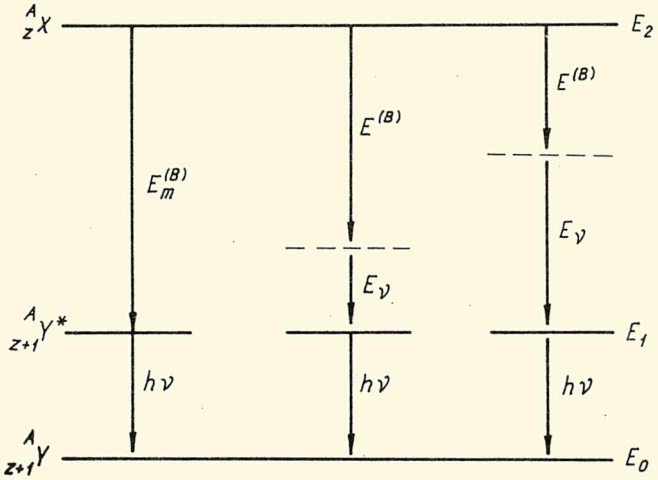
Rys. 12-7

Emisja promieniowania γ pochodzenia jądrowego powoduje wybicie z atomu elektronu z warstwy K lub L z wydajnością bliską 100%. Jest to przykład swoistego efektu fotoelektrycznego, noszącego nazwę konwersji wewnętrznej. Procesowi konwersji towarzyszy emisja promienia rentgenowskiego, co bardzo komplikuje obraz emisji promieniowania elektromagnetycznego przez jądro.

12.6. Rozpad β

Nie znany jest obecnie mechanizm powstawania elektronów w emisji β; wiadomo jednak, iż elektronów w jądrze nie ma - brak na to dostatecznie przekonywających przesłanek za równo teoretycznych, jak i doświadczalnych. Wiadomo również, iż widmo energetyczne elektronów β jest ciągłe, tj. określony nuklid, ulegający rozpadowi β, emituje elektrony o dowolnej energii z przedziału od zera do pewnej górnej granicy, którą oznaczymy E_m. Takie przesłanki doświadczalne w połączeniu z wymaganiami zasady zachowania energii i pędu doprowadziły Pauliego do postawienia w 1931 r. hipotezy, że emisji elektronów β o energii mniejszej od E_m towarzyszy emisja nowej, dotychczas nie znanej cząstki, a mianowicie neutrina.

Własności tej hipotetycznej cząstki oznaczanej literą ν, wydedukowane przez Pauliego były następujące: masa zmienna i znacznie mniejsza od masy elektronu, ładunek zero. Założenie, że neutrino istnieje, pozwoliło na wyjaśnienie rozpadu β według schematu pokazanego na rys. 12-8. Nuklid ${}^{A}_{Z}X$ po emisji elektronu β o maksymalnej energii $E_m^{(\beta)}$ przechodzi w nuklid ${}^{A}_{Z+1}Y^*$ w stanie wzbudzonym, ten emituje kwant $h\nu$ przechodząc do stanu podstawowego. Jądro ${}^{A}_{Z}X$ może jednak emitować elektrony β o energii $E^{(\beta)} < E_m^{(\beta)}$, wtedy dodatkowo jest wyrzucane neutrino o energii potrzebnej do osiągnięcia stanu E_1. Gdy energia elektronu jest mała, wówczas energia neutrina jest duża, i na odwrót.



Rys. 12-8

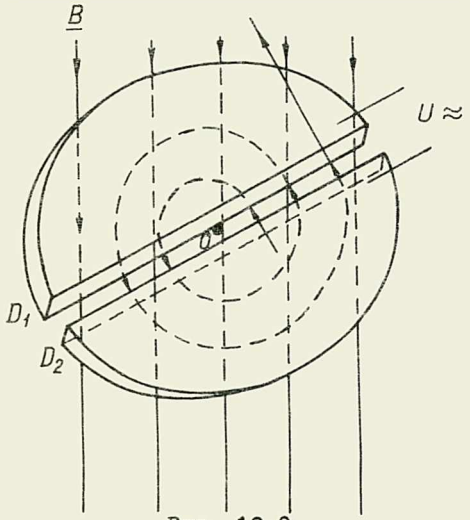
Doświadczalne wykrycie neutrina nie było łatwe z powodów, które podamy w rozdziale 13. Dlatego dopiero w 1956 r. Reines i Cowan donieśli o eksperymentalnym potwierdzeniu hipotezy Pauliego.

12.7. Akceleratory cząstek naładowanych

Istnienie wokół jąder bariery potencjału stanowi dość znaczną przeszkodę, utrudniającą zbliżenie się cząstki naładowanej i następnie wniknięcie jej do jądra. Pokonanie tej bariery możliwe jest tylko dla cząstek o dostatecznie dużej energii, dlatego jednym z ważnych zadań fizyki jądrowej jest przyspieszanie cząstek naładowanych do dużych prędkości za pomocą odpowiednich urządzeń, zwanych akceleratorami lub przyspieszaczami.

Jeden z najprostszych akceleratorów, generator Van De Graaffa, został opisany w rozdziale 6.2.2. Uzyskiwana metodą elektrostatyczną

różnica potencjałów o wielkości kilku megawoltów umożliwia rozpędzenie w rurze do wyładowań protonów lub cząstek α do energii rzędu kilku megaelektronowoltów.



Rys. 12-9

Do znacznie skuteczniej działających akceleratorów należą urządzenia, pracujące cyklicznie; cała ich rodzina zapoczątkowana została aparatem skonstruowanym przez Lawrence'a i nosząca nazwę cyklotronu. Schemat cyklotronu jest przedstawiony na rys. 12-9. Płaska "puszka" metalowa rozcięta jest na dwa duanty, D_1 i D_2 wzajemnie od siebie izolowane i starannie ewakuowane. W pobliżu środka O wpuszczamy wiązkę powolnych cząstek naładowanych, przykładamy różnicę potencjałów między duanty, a prostopadle do ich powierzchni pole magnetyczne o indukcji B. Cząstki przyspieszone w szczelinie między duantami poruszają się dalej w przestrzeni ekwipotencjalnej; obecność pola magnetycznego powoduje zakrzywienie ich toru w łuk okręgu o stałym promieniu.

W następnym przejściu przez szczelinę możemy również przyspieszyć cząstki, jeśli zmienimy znak przyłożonej różnicy potencjałów. Duanty powinny być zatem zasilane przemienną różnicą potencjałów $U \approx$, której częstość zmian łatwo wyznaczyć z następującego rozumowania. Z warunku (dla elektronów) $evB = mv^2/R$ możemy otrzymać promień toru elektronów: $R = v/\left\{\left(\frac{e}{m}\right)\cdot B\right\}$. Czas obiegu wynosi $\tau = 2\pi R/v = 2\pi/\left\{\left(\frac{e}{m}\right)\cdot B\right\}$, wobec czego potrzebna częstość kątowa $\omega = 2\pi/\tau = (e/m)\cdot B$. Po dokonaniu dającej się przewidzieć liczby przejść strumienia cząstek naładowanych między duantami można je wyprowadzić przez cienkie okienko na zewnątrz aparatu. Oczywiście, cyklotron pracuje metodą impulsową: po "wstrzyknięciu" porcji cząstek następuje proces ich przyspieszania - następną porcję można przyspieszać dopiero po wyprowadzeniu pierwszej na zewnątrz.

Po licznych ulepszeniach konstrukcyjnych cyklotron w Massachusets Institute of Technology (USA) o parametrach: $R_{max} = 48$ cm, $B = 1{,}8$ Wb/m^2 ($1{,}8 \cdot 10^4$ gausów) produkował deuterony o energii 18 MeV. Wartość ta jest prawdopodobnie górną granicą możliwości cyklotronu, ponieważ je-

go konstrukcja i obliczenia oparte są na niezależności masy od prędkości. Jeżeli prędkości są duże, to wyrażenie określające częstość ω_{rel} zmian pola elektrycznego po uwzględnieniu wyrażenia relatywistycznego określającego masę ma postać

$$\omega_{rel} = B\left(\frac{q}{m_o}\right)(1-\beta^2)^{1/2}. \qquad (12.11)$$

Widać, że częstość ta nie jest stała, lecz maleje w miarę zbliżania się przyspieszonych cząstek ku obwodowi duanta. Przy stałej częstości ω cząstki wypadają z synchronizmu zmian pola i to stanowi główne ograniczenie możliwości cyklotronu.

Ulepszenie konstrukcji cyklotronu może iść w dwóch kierunkach:

i. Można zmieniać częstość pola elektrycznego zgodnie z (12.11) (Weksler, McMillan). Metoda ta prowadzi do konstrukcji cyklotronu z modulowaną częstością, czyli tzw. synchrocyklotronu. Pierwszy synchrocyklotron uruchomiono na Uniwersytecie w Berkeley (California, USA); dostarczał deutrony o energii 200 MeV, cząstki α o energii 400 MeV. Potrzebny tu elektromagnes ma masę 4000 t i wytwarza pole magnetyczne o indukcji 1,5 Wb/m^2 (15000 gausów). Różnica potencjałów U = 15 kV zmienia się z częstością od 11,5 MHz (początek) do 9,8 MHz (koniec).

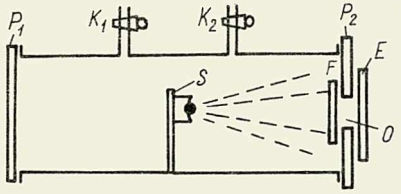
ii. Można dostrajać B, co prowadzi do konstrukcji synchrotronu (również Weksler, McMillan).

Maszyny dostarczające cząstek naładowanych o tak wysokich energiach służą w fizyce jądrowej do produkcji cząstek elementarnych; możliwości w tym zakresie, zależnie od masy spoczynkowej cząstki elementarnej, bardzo znacznie zależą od dużej prędkości cząstki produkującej. Do największych skonstruowanych dotychczas urządzeń należą kosmotron, wytwarzający cząstki o energii porównywalnej do obserwowanej w pierwotnym promieniowaniu kosmicznym i bewatron, dostarczający protonów o energii 6 GeV ($6 \cdot 10^9$ eV).

12.8. Sztuczna promieniotwórczość i przekroje czynne jąder

Rozpędzone do dużych prędkości cząstki naładowane mogą wnikać do jądra atomowego, przez co w pierwszej fazie reakcji powstaje tzw. jądro złożone; jego liczba porządkowa i masowa są równe sumie liczb porządkowych i masowych cząstki atakującej i nuklidu, stanowiącego "tarczę". Jądro złożone ulega w krótkim czasie rozpadowi z emisją z reguły jednej cząstki i utworzeniem jądro końcowego, w większości przypadków w stanie wzbudzonym. Prawdopodobieństwo trafienia jądra cząstką z zewnątrz jest na ogół bardzo małe - dyskusją czynników, od których ono zależy, zajmiemy się nieco później. Obecnie omówimy mecha-

nizm ważniejszych reakcji z dziedziny sztucznej promieniotwórczości - dotychczas poznano ich bardzo dużo.

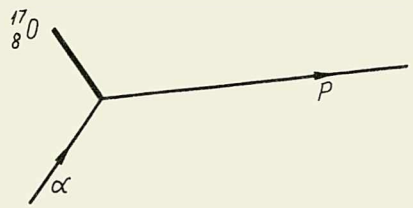


Rys. 12-10

Pierwszą taką reakcję, odkrytą przez Rutherforda, było "rozbicie" jądra azotu. Schemat doświadczenia jest przedstawiony na rys. 12-10. Niewielki odcinek rury, zaopatrzony w dwa krany K_1 i K_2 służące do wymiany wypełnienia gazowego, zamknięty jest z obu stron krążkami P_1 i P_2; drugi z nich posiada otwór O. Wewnątrz znajduje się podstawka S z niewielką porcją preparatu polonu, emitującego cząstki α. Otwór O zamknięty jest folią F wykonaną z glinu i o takiej grubości, by całkowicie zatrzymać cząstki α. Z zewnątrz otwór jest zamknięty ekranem, na którym obserwuje się błyski scyntylacyjne wywołane przez takie cząstki, które są zdolne przeniknąć przez F. Jeśli naczynie jest wypełnione na przykład dwutlenkiem węgla lub tlenem albo ewakuowane, to ekran E pozostaje zupełnie ciemny. Po wprowadzeniu do wnętrza rury azotu, obserwuje się na ekranie błyski scyntylacyjne, których pochodzenie musi być związane z reakcją jądrową, wywołaną przez cząstki α. Mechanizm tej reakcji, trafnie odgadnięty przez Rutherforda, jest następujący

$$^{14}_{7}N + ^{4}_{2}He \rightarrow (^{18}_{9}F) \rightarrow ^{17}_{8}O + ^{1}_{1}H.$$

W wyniku pochłonięcia cząstki α przez jądro azotu powstaje jądro złożone fluoru, którego rozpad połączony jest z emisją szybkiego protonu - jego zasięg w powietrzu wynosi około 40 cm. Reakcję tę można zapisać w skrócie N(α, p), kładąc na pierwszym miejscu w nawiasie cząstkę atakującą, na drugim zaś emitowaną. Szybki proton przebija aluminiową folię i wytwarza błysk scyntylacyjny na ekranie E. Można liczyć te błyski na określonym wycinku powierzchni za pomocą lupy; jeśli w podobny sposób zmierzymy liczbę cząstek α, emitowanych przez preparat Po w kierunku tego samego kąta bryłowego (po usunięciu folii F), możemy oszacować wydajność tej reakcji, Okazuje się, że jest ona bardzo mała: średnio jedna cząstka α na 50 000 powoduje rozbicie jądra azotu. Wynik ten oraz mechanizm reakcji zaproponowany przez Rut-



Rys. 12-11

herforda został później potwierdzony przy użyciu komory Wilsona. Typowy obraz rozbicia jądra azotu jest przedstawiony schematycznie na rys. 12-11. Reakcji typu X(α, p) ulega więcej pierwiastków: np. tarczą X może być bor, glin, krzem, siarka i inne.

Inną bardzo ważną reakcją jest bombardowanie berylu cząstkami α : badanie jej doprowadziło do odkrycia neutronów. Odkryto bowiem w 1930 roku, że beryl bombardowany cząstkami α emituje przenikliwe promieniowanie, nie wywołujące jednak jonizacji w komorze jonizacyjnej. Po przejściu tego promieniowania przez blok parafiny lub podobnej substancji organicznej pojawiło się słabe działanie jonizacyjne. Podejrzewano więc emisję protonów z parafiny pod wpływem "promieniowania γ", które miałoby powstawać podczas bombardowania berylu cząstkami α. Jeśli materiał parafiny oznaczymy dla krótkości przez X, to tę hipotezę możemy zapisać jako reakcję X(γ, p). Prócz parafiny, powiększenie działania jonizacyjnego powodowały także inne substancje, niekoniecznie organiczne, przy czym każda z nich czyniła to w sposób indywidualny. Wynika z tego, że reakcja X(γ,p) zachodzi dla bardzo wielu X, co czyni ją nieprawdopodobną zwłaszcza, że stwierdzono istnienie określonej zależności między energią emitowanych "protonów", a liczbą masową X.

Właściwe wyjaśnienie tej reakcji podał w 1932 r. Chadwick przyjmując, iż pod wpływem cząstek α beryl emituje strumień neutronów według reakcji

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow (^{13}_{6}\mathrm{C}) \rightarrow ^{12}_{6}\mathrm{C} + ^{1}_{0}\mathrm{n}.$$

Powstający tu szybki neutron jest bardzo przenikliwy i nie wywołuje praktycznie jonizacji, ponieważ brak ładunku i krótki czas przebywania w pobliżu atomu nie stwarza warunków potrzebnych do wytwarzania jonów. Przejście neutronu przez blok parafiny lub innej substancji X interpretował Chadwick jako proces spowolnienia, polegający na sprężystych zderzeniach neutronu z jądrami węgla lub wodoru podczas przechodzenia przez węglowodór. W każdym zderzeniu część energii neutronu zostaje przekazana uderzonemu jądru; dzieje się tak dopóty, dopóki energia kinetyczna neutronu nie zmaleje do wartości bliskiej 3/2 kT. Neutrony o takiej energii zwane są neutronami termicznymi. Zanim osiągną prędkość ruchu termicznego stają się one "powolne"; takie neutrony mają niewielką zdolność jonizacyjną.

Ze względu na duże znaczenie procesu spowalniania zajmiemy się obecnie bliżej jego analizą. Ponieważ zderzenia jąder atomów spowalniacza, zwanego też moderatorem, z neutronami są sprężyste, do elementarnego aktu zderzenia można zastosować prawo zachowania energii i pędu. Oznaczmy masę neutronu przez m_n, a masę jądra m_j i przyjmij-

my, że wobec małych prędkości ruchu termicznego energię kinetyczną jądra $1/2\ m_j v_j^2$ przed zderzeniem można zaniedbać. Jeśli prędkość neutronu przed zderzeniem wynosi v_n, a prędkość obu cząstek po zderzeniu odpowiednio V_n i V_j, to zasady zachowania mają postać

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} m_n v_n^2 &= \tfrac{1}{2} m_n V_n^2 + \tfrac{1}{2} m_j V_j^2, \\ m_n v_n &= m_n V_n + m_j V_j. \end{aligned}\right\} \tag{12.12}$$

Prowadzi to do dwóch równań liniowych

$$\left.\begin{aligned} -V_n + V_j &= v_n, \\ m_n V_n + m_j V_j &= m_n v_n, \end{aligned}\right\} \tag{12.13}$$

z których możemy otrzymać wyrażenie na interesującą nas prędkość V_n neutronu po zderzeniu

$$V_n = -v_n \cdot \frac{(m_j - m_n)}{(m_j + m_n)}. \tag{12.14}$$

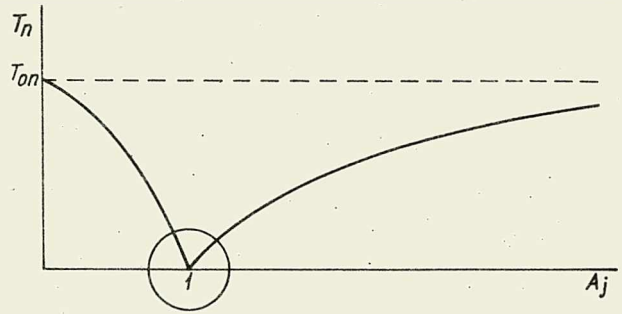
Jeśli energię kinetyczną neutronu po zderzeniu, $1/2\ m_n V_n^2$ oznaczymy przez T_n, a przed zderzeniem przez T_{on}, to z (12.14) otrzymamy związek

$$T_n = T_{on} \cdot \left(\frac{m_j - m_n}{m_j + m_n}\right)^2,$$

lub w przybliżeniu (po podzieleniu licznika i mianownika przez m_n^2)

$$T_n = T_{on} \cdot \left(\frac{A_j - 1}{A_j + 1}\right)^2. \tag{12.15}$$

Wzór (12.15) stanowi relację między energią kinetyczną przed i po zderzeniu z jądrem o liczbie masowej A_j. Widzimy, że jeśli $A_j \to \infty$, to $T_n \to T_{on}$. W takim razie zderzenia z jądrami ciężkimi są nieskuteczne: nie ma praktycznie wymiany energii między neutronem a jądrem. Podobnie rzecz się ma w zderzeniu neutronu z jądrem o $A_j < 1$, np. w zderzeniu z elektronem. Najbardziej skuteczne jest zderzenie z protonem; zachodzi wówczas całkowita wymiana energii. Wykres funkcji (12.15) w zależności od A_j jest przedstawiony na rys. 12-12; kółkiem oznaczono zakres A_j dla substancji, które ze względów praktycznych mogą mieć znaczenie jako moderatory. Należą do nich substancje, których liczby masowe atomów lub cząsteczek nie przekraczają $A_j = 30$. Do takich substancji należy na przykład grafit: dla węgla $A_j = 12$. Jak będzie przebiegał proces spowolnienia na takim moderatorze?



Rys. 12-12

Ponieważ

$$T_n^{(1)} = T_{on} \cdot \left(\frac{A_j - 1}{A_j + 1} \right)^2$$

oraz

$$T_n^{(2)} = T_n^{(1)} \cdot \left(\frac{A_j - 1}{A_j + 1} \right)^2 = T_{on} \cdot \left(\frac{A_j - 1}{A_j + 1} \right)^4$$

itd., zatem po k-tym zderzeniu z jądrem węgla energia neutronu wyniesie

$$T_n^{(k)} = T_{on} \cdot \left(\frac{A_j - 1}{A_j + 1} \right)^{2k}. \qquad (12.16)$$

Przypuśćmy, że T_{on} = 1 MeV - jest to zatem neutron "gorący". Jeśli chcemy otrzymać zeń neutron termiczny, któremu odpowiada energia $T_n^{(k)}$ = 0,02 eV, to potrzebna na to liczba zderzeń będzie równa

$$k = \frac{1}{2} \frac{\log (0{,}5 \cdot 10^8)}{\log (13/11)} \cong 53.$$

W jednym zderzeniu $(T_n/T_{on}) = (13/11)^{-2} = 0{,}716$ natomiast, czyli ΔT = 28,4%.

Skutkiem bombardowania berylu cząstkami α jest zatem powstawanie neutronów; nie jest to jedyna reakcja tego typu. W ogólnym modelu reakcji X(α, n) nuklidem X może być na przykład lit, bor i inne. Neutrony produkowane w tych reakcjach odznaczają się dużą energią; zwykle występuje kilka grup neutronów o różnych prędkościach, odpowiadających nieciągłemu widmu energii, np. neutrony w reakcji Be(α,n) mogą mieć energię 13,7; 12,0; 7,6; 6,2 lub 4,6 MeV. Istnienie nieciągłego widma energetycznego świadczy o tym, że jądro końcowe może się znaj-

dować w różnym stanie wzbudzonym. Reakcja z borem

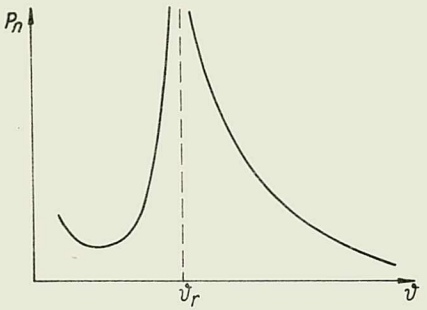
$$^{10}_{5}B + ^{1}_{0}n \longrightarrow (^{11}_{5}B) \longrightarrow ^{7}_{3}Li + \alpha$$

jest często wykorzystywana jako metoda detekcji neutronów: ściany komory jonizacyjnej wykłada się płytkami, zawierającymi związki boru. Wychwyt neutronów przez jądra boru powoduje emisję cząstek α, których obecność można stwierdzić zwykłymi metodami.

Ze względu na swą elektryczną obojętość neutrony, zwłaszcza powolne, są nadzwyczaj skutecznymi pociskami jądrowymi. Prawie każdy nuklid ulega przemianom podczas bombardowania neutronami. Reakcji takich wymieniliśmy dotychczas kilka, w następnym paragrafie zajmiemy się skutkami bombardowania neutronami jądra uranu. Obecnie warto jeszcze wspomnieć, iż ze względu na fizykę jądra atomowego interesująca jest reakcja

$$^{1}_{1}H + ^{1}_{0}n \rightleftarrows ^{2}_{1}D + h\nu$$

dowodząca bezpośrednio, iż jądro deuteru jest złożone z dwóch cząstek: neutronu i protonu. Pogląd ten potwierdza również fakt, że reakcja ta może biec w kierunku przeciwnym: pod wpływem krótkofalowego promieniowania γ zachodzi rozpad jądra deuteru, zwany fotoefektem jądrowym.

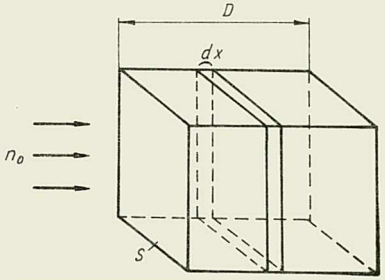


Rys. 12-13

Proces absorpcji neutronu przez określone jądro atomowe wybitnie zależy od prędkości neutronu. Typowy przykład zależności prawdopodobieństwa pochłonięcia neutronu P_n od jego prędkości v jest przedstawiony na rys. 12-13. Widzimy, że szczególnie silnie pochłaniane są neutrony o pewnej określonej prędkości v_r; zjawisko to nosi nazwę rezonansu jądrowego. Doświadczenia, które trzeba wykonać w celu uzyskania krzywej 12-13, mającej duże znaczenie praktyczne, nie są proste: trzeba dysponować wiązką neutronów o określonej prędkości, czyli tzw. neutronów "monochromatycznych". Uzyskuje się je między innymi za pomocą mechanicznych selektorów prędkości, pozwalających wybrać ze strumienia tylko te, dla których czas przelotu ustalonej odległości jest ściśle określony.

Ilościową miarą prawdopodobieństwa zajścia określonego procesu z określonym nuklidem jest przekrój czynny jądra. Procesem tym może być ogólnie absorpcja (a) dowolnej cząstki, rozpraszanie (s), reakcja jądrowa (r), rozszczepienie jądra (f), itd. Pojęcie przekroju czynnego wprowadza się dla dowolnego typu cząstki atakującej, lecz szczególnie często bywa ono używane w odniesieniu do neutronów.

Niech n_0 oznacza strumień cząstek padających na 1 cm^2 tarczy (płytka z badanego materiału) w ciągu 1 s. Tarcza ma ogólną grubość D i zawiera N_0 jąder w jednostce objętości; niech S będzie powierzchnią przekroju czołowego (rys. 12-14). Wydzielmy prostopadle do biegu wiązki cienką warstwę materiału o grubości dx - zawiera ona $N_0 \cdot S\,dx$ jąder. Dochodzący do niej strumień cząstek wynosi $n < n_0$, ponieważ pewna liczba cząstek zniknęła ze strumienia z powodów wymienionych uprzednio. Na warstwie dx zachodzi dalsza strata liczby cząstek, równa -dn i proporcjonalna do liczby jąder zawartych w dx dla S = 1 cm^2



Rys. 12-14

$$-dn = \sigma \cdot n\, N_0 dx. \qquad (12.17)$$

Przez całkowanie otrzymujemy

$$\ln n = -\sigma N_0 x + C.$$

Ponieważ $x = 0 \supset n = n_0$, zatem $C = \ln n_0$ oraz

$$n = n_0\, e^{-N_0 D \sigma}. \qquad (12.18)$$

Wyrażenie (12.18) przedstawia liczbę cząstek w strumieniu, który przeszedł przez warstwę materiału o grubości D. Współczynnik proporcjonalności σ jest mierzony w centymetrach kwadratowych, ponieważ $[N_0 \cdot D] = 1\ cm^{-2}$ i nosi nazwę przekroju czynnego jądra. Liczbowa wartość σ jest bardzo mała - podaje się ją zwykle w jednostkach zwanych barnami, przy czym

$$1\ \text{barn} = 10^{-24}\ cm^2.$$

Przekrój czynny, występujący w (12.18) jest tzw. ogólnym lub integralnym przekrojem czynnym. Opisuje on znikanie cząstek ze strumienia przechodzącego przez materię, niezależnie od procesu, jaki to znikanie powoduje. Procesy mogą tu być różne, zatem różne mogą też

być przekroje czynne: σ_a - przekrój czynny na absorpcję, σ_s - przekrój na rozpraszanie, σ_r - przekrój na określoną reakcję jądrową, i inne. Ze względu na postać funkcji (12.18) przekrój czynny ma własności addytywne, tzn. ogólny przekrój czynny σ jest sumą przekrojów na poszczególne procesy

$$\sigma = \sigma_a + \sigma_s + \sigma_r + \sigma_f + \ldots \qquad (12.19)$$

12.9. Rozszczepienie jądra uranu

Wśród różnych reakcji, spowodowanych wniknięciem neutronu do jądra atomowego, wyjątkowe znaczenie ma skutek bombardowania neutronami jąder uranu o liczbie masowej A = 235. Uran metaliczny, otrzymany z minerałów zawartych w skorupie ziemskiej, jest mieszaniną dwóch izotopów: $^{235}_{92}U$ w ilości 0,72% oraz $^{238}_{92}U$, stanowiącego resztę, tj. 99,28% zawartości. Oba jądra ulegają rozpadowi po pochłonięciu neutronu, lecz zupełnie odmienną drogą: $^{238}_{92}U$ rozpada się w zwykły, znany nam sposób, natomiast $^{235}_{92}U$ ulega tzw. reakcji rozszczepienia, dotychczas nie znanej. Zajmiemy się wpierw tą właśnie reakcją.

Została ona wykryta w Niemczech w latach 1936-1937 przez Hahna, Meitner i Strassmanna i polega na pęknięciu (rozszczepieniu) jądra uranu 235 na dwa duże fragmenty po pochłonięciu neutronu. Schemat tej reakcji jest następujący

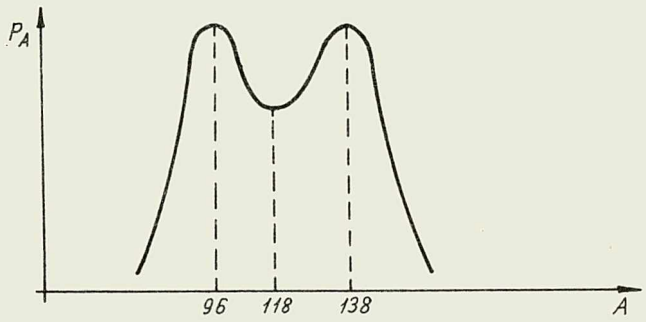
$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{139}_{54}Xe + ^{95}_{38}Sr + 2{,}5\ ^{1}_{0}n + 150\ \text{MeV}. \qquad (12.20)$$

W przeciwieństwie do dotychczas poznanych reakcji skutkiem jej nie jest wyrzucenie jednej cząstki z jądra złożonego, lecz pojawienie się dwóch dużych jąder oraz średnio 2,5 neutrona na jedno rozszczepienie. Uwalnia się przy tym spora energia, wynosząca 150 MeV na jedno jądro uranu.

Rys. 12-15

Bieg tego procesu możemy sobie przedstawić w następujący sposób. Jądro uranu zachowuje się pod pewnymi względami jak kropla cieczy, oczywiście o bardzo dużej gęstości. W stanie równowagi wszystkich sił jądrowych ciecz przybiera kształt kuli (rys. 12-15). Wpadnięcie neu-

tronu odpowiada ogrzaniu cieczy do bardzo wysokiej temperatury; przy tak dużej energii wzbudzenia pojawiają się oscylacje materii jądrowej, dochodzi do przewężenia i wreszcie pęknięcia jądra na dwa fragmenty. Oba fragmenty podziału znajdują się w stanie wzbudzonym i zawierają nadmiar neutronów; pozbywają się więc tego nadmiaru przez emisję swobodnych neutronów. Ten sposób tłumaczenia pozwala między innymi zrozumieć, że produktami rozszczepienia nie zawsze muszą być Xe i Sr według schematu (12.20). Mogą to być różne produkty, przy czym istnieje określony rozkład prawdopodobieństwa P_A powstania produktu o liczbie masowej A, przedstawiony na rys. 12-16. Okazuje się, iż krzywa ta ma dwa maksima, przypadające przy A = 96 i A = 138, co odpowiada schematowi (12.20): te pierwiastki pojawiają się w rozszczepieniu najczęściej, ale nie wyłącznie.



Rys. 12-16

Łatwo wykazać, że energia 150 MeV, przypadająca na jedno rozszczepienie jest pochodzenia elektrostatycznego i jest skutkiem pracy sił pola, potrzebnej do rozsunięcia jąder produktów rozszczepienia z odległości r_o, rzędu średnicy jądra, do nieskończoności. Przyjmując bowiem $r_o = 1{,}8 \cdot 10^{-12}$ cm, $Z_1 = 38$, $Z_2 = 54$ mamy

$$U = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \cdot \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_o} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{38 \cdot 54 \cdot 1{,}603 \cdot 10^{-19}}{1{,}8 \cdot 10^{-14}} = 164 \text{ MeV}.$$

Jak już wspominaliśmy, reakcja rozszczepienia należy do niezmiernie rzadko spotykanych. Spośród znanych dziś pierwiastków rozszczepieniu, prócz $^{235}_{92}U$, ulega jedynie pluton, $^{239}_{94}Pu$. Średnia liczba powstających w jednym rozszczepieniu neutronów oznaczana jest przez ν i stanowi ważny parametr tej reakcji

$$\nu(^{235}_{92}U) = 2{,}5 \pm 0{,}1; \qquad \nu(^{239}_{94}Pu) = 3{,}0 \pm 0{,}1.$$

Ze względu na to, iż dla obu pierwiastków $\nu > 1$, pojawia się po raz pierwszy możliwość prowadzenia tej reakcji jako reakcji łańcuchowej (samopodtrzymującej się). Możliwość ta zależy od współdziałania następujących czynników:

i. Produkcja neutronów, określona liczbą ν.

ii. Ucieczka neutronów poza obręb materiału rozszczepialnego, określona przekrojem czynnym na rozpraszanie σ_s, prędkością neutronów i rozmiarami próbki uranu. Uwzględnienie tych czynników jest dość trudne, dlatego uproszczone obliczenia wykonuje się dla tak dużej próbki uranu, by ucieczkę (a więc i σ_s) można było zaniedbać.

iii. Pochłanianie neutronów, określone przekrojami czynnymi σ_a pierwiastków, wchodzących oprócz rozszczepialnego izotopu uranu w skład mieszaniny (lub stopu). Neutrony pochłonięte przez te pierwiastki są tracone podczas procesu rozszczepienia, choć często mogą doprowadzić do powstania użytecznych produktów. Przykładem niech tu będzie zachowanie się jądra $^{238}_{92}U$ po pochłonięciu neutronu

$$^{238}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow (^{239}_{92}U) \xrightarrow{\beta} {}^{239}_{93}Np \xrightarrow{\beta} {}^{239}_{94}Pu$$

$$\tau = 2{,}33 \text{ dni} \qquad \tau = 24400 \text{ lat}$$

Powstawanie plutonu jest dla podtrzymywania procesu łańcuchowego nieprzydatne, ponieważ czas rozpadu Np jest za długi. Dlatego pochłonięte przez ^{238}U neutrony nie mogą dalej brać udziału w rozszczepieniu.

Dla bardziej szczegółowego rozważenia możliwości wywołania reakcji łańcuchowej przytoczymy obecnie wartości przekrojów czynnych dla uranu.

Neutronowe przekroje czynne (w barnach)

	σ_s	σ_a	σ_f
A Neutrony szybkie			
Uran naturalny	4,7	2	0,5
$^{235}_{92}U$	5,2	0	1,3
B. Neutrony powolne			
$^{238}_{92}U$	0	2,8	$5 \cdot 10^{-4}$
$^{235}_{92}U$	10	107	580

Wprowadźmy następnie pojęcie prawdopodobieństwa rozszczepienia jako stosunek przekroju na rozszczepienie do ogólnego przekroju czynnego jądra uranu 235. Jeśli - jak odtąd stale - obliczenia będziemy wykonywać dla bardzo dużego kawałka uranu, to σ_s można pominąć, wobec czego

$$p_f = \frac{\sigma_f}{\sigma_a + \sigma_f}. \qquad (12.21)$$

Jeśli ν jest średnią liczbą neutronów, przypadającą na jedno rozszczepienie, to $p_f \cdot \nu$ oznacza tzw. współczynnik rozmnożenia neutronów, k_∞ ; z definicji k_∞ jest stosunkiem liczby neutronów n_i w pewnej generacji do liczby neutronów n_{i-1} w generacji poprzedniej. Znak ∞ przy k odnosi się do zaniedbania σ_s. Mamy więc

$$\frac{n_i}{n_{i-1}} \equiv k_\infty = p_f \cdot \nu. \qquad (12.22)$$

Współczynnik rozmnożenia wraz z definicją (12.21) są podstawowymi wielkościami do określania możliwości wystąpienia reakcji łańcuchowej. Jeśli bowiem $k_\infty < 1$, to liczba neutronów stopniowo maleje - reakcja łańcuchowa nie może się rozwinąć. W przypadku $k_\infty < 1$ mamy $n_i > n_{i-1}$, czyli liczba neutronów wzrasta; ponieważ proces ten następuje lawinowo, warunek ten prowadzi do wybuchu (bomba atomowa). Najbardziej interesujący i ważny dla techniki jest przypadek trzeci: $k_\infty = 1$. Oznacza on stały poziom strumienia neutronów, czyli kontrolowaną reakcję jądrową. Oczywiście, poziom ten może być różny - ważne jest to, że nie ulega zmianie z biegiem czasu. Można go osiągnąć w stosie atomowym, którego zasadę działania omówimy przy końcu tego paragrafu.

Obecnie zajmiemy się rozważeniem możliwości poprowadzenia reakcji łańcuchowej w uranie, osobno za pomocą neutronów szybkich, powstających bezpośrednio w reakcji rozszczepienia oraz za pomocą neutronów powolnych, spowolnionych za pomocą moderatora. W dyskusji posługiwać się będziemy danymi liczbowymi, co ułatwi Czytelnikowi zrozumienie zastosowania pojęć p_f i k_∞.

12.9.1. Reakcja rozszczepienia za pomocą neutronów szybkich

Obliczamy wpierw prawdopodobieństwo rozszczepienia dla uranu naturalnego

$$p_f = \frac{0{,}5}{2 + 0{,}5} = 0{,}2.$$

Wynik ten oznacza, że 1/5 neutronów wytworzonych w jednym rozszczepieniu kontynuuje ten proces. Jeśli zatem w pierwszej generacji

mamy $n_1 = 10$ neutronów, to 8 zostaje pochłoniętych, a 2 powodują dalsze rozszczepienia. W drugiej generacji będziemy mieli $n_2 = 2 \cdot 2{,}5 = 5$ neutronów; z nich znowu 4 zostaną pochłonięte, a 1 spowoduje rozszczepienie. W trzeciej generacji będzie $n_3 = 2{,}5$ neutronów, oczywiście

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{n_2}{n_1} = p_f \cdot \nu = 0{,}5.$$

Widzimy na tym prostym przykładzie, że nie można zrealizować reakcji łańcuchowej w uranie naturalnym za pomocą szybkich neutronów.

Warto obecnie zastanowić się, czy proces ten można poprowadzić w uranie wzbogaconym w izotop lżejszy; myśl taką nasuwa fakt, że dla ^{235}U $\sigma_f = 1{,}3$ a $\sigma_a = 0$. Liczbę jąder izotopu ^{235}U w mieszaninie oznaczymy przez N_5, a ich przekroje czynne przez σ_5; odpowiednie oznaczenia dla izotopu ^{238}U będą N_8 i σ_8. Prawdopodobieństwo rozszczepienia dla mieszaniny wynosi

$$p_f = \frac{N_5 \sigma_{f5} + N_8 \sigma_{f8}}{N_5(\sigma_{f5} + \sigma_{a5}) + N_8(\sigma_{f8} + \sigma_{a8})}. \qquad (12.23)$$

Skład izotopowy mieszaniny chcemy tak dobrać, by dla niej było $k_\infty = 1$. Zatem

$$k_\infty = p_f \nu = \nu \frac{N_5 \sigma_{f5} + N_8 \sigma_{f8}}{N_5(\sigma_{f5} + \sigma_{a5}) + N_8(\sigma_{f8} + \sigma_{a8})} = 1.$$

W naszym przypadku

$$\frac{1{,}3\, N_5 + 0{,}5\, N_8}{1{,}3\, N_5 + 2{,}5\, N_8} = \frac{1}{2{,}5},$$

czyli

$$\frac{N_8}{N_5} = 1{,}56 \approx \frac{3}{2}.$$

Wniosek z tego jest taki, że dla osiągnięcia warunków krytycznych mieszanina musi zawierać 40% ^{235}U i 60% ^{238}U. Dla próbki uranu o skończonych rozmiarach zawartość izotopu lżejszego musi być trochę większa, ze względu na ucieczkę neutronów.

Wzbogacania uranu można dokonać różnymi metodami. Do stosunkowo prostych należy efuzja gazowego sześciofluorku uranu, UF_6, przez mały otwór w zbiorniku. Zgodnie z prawem Grahama szybkość wypływu jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka z masy cząsteczkowej. Różnica mas obu cząsteczek jest jednak niewielka i dla uzyskania zawartości 95% ^{235}U proces ten trzeba powtórzyć 4000 razy. Tą metodą pracowało

od 1945 r. laboratorium w Oak Ridge (USA), gdzie wyprodukowano dwa kawałki uranu stanowiące elementy składowe pierwszej bomby atomowej. Każdy z nich ma wielkość podkrytyczną; po dokładnym złączeniu przy użyciu pomocniczego ładunku wybuchowego (trzeba usunąć nieciągłość materiału, jaką jest szczelina powietrzna) otrzymuje się całość o rozmiarach grejpfruta, co odpowiada wartości nadkrytycznej.

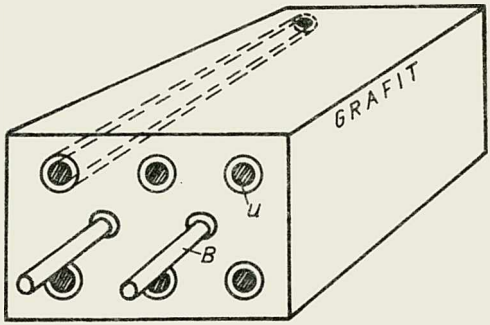
12.9.2. Reakcja rozszczepienia za pomocą neutronów powolnych

Zupełnie odmienne są własności uranu naturalnego podczas bombardowania neutronami powolnymi. Dla tego przypadku współczynnik rozmnażania ma wartość

$$k_\infty = \nu \cdot \frac{\sigma_{f5} + (N_8/N_5)\,\sigma_{f8}}{(\sigma_{f5} + \sigma_{a5}) + (N_8/N_5)(\sigma_{f8} + \sigma_{a8})} = 1{,}33,$$

co wskazuje, że możemy osiągnąć stan krytyczny bez potrzeby wzbogacania materiału w izotop rozszczepialny. Należy jednak wyprowadzić neutrony gorące z uranu do spowalniacza, a następnie wprowadzić z powrotem do metalu.

Stanowi to ideę budowy stosu atomowego, zrealizowaną po raz pierwszy w USA przez Fermiego i współpracowników w 1942 r. Stos składał się z cegieł z uranu metalicznego i cegieł grafitowych, kładzionych na przemian w blok (stąd nazwa "stos"). Wytwarzanie ciepła w stosie Fermiego osiągnęło moc 0,5 W, później podniesiono ją do 200 W. Schemat budowy trójelementowego stosu jest przedstawiony na rys. 12-17. W bloku bardzo czystego grafitu, w szczególności nie zawierającego domieszek o dużym przekroju czynnym na absorpcję neutronów, wywiercone są kanały podłużne. Część z nich zawiera pręty z uranu metalicznego, stanowiącego paliwo jądrowe; do niektórych kanałów wsunięto pręty z metalicznego boru lub żelaza, silnie pochłaniających neutrony. Obecność tych absorbentów pozwala osiągnąć pożądany poziom strumienia neutronów w stanie krytycznym.



Rys. 12-17

Budowane współcześnie na podstawie tej zasady duże reaktory atomowe są przede wszystkim źródłami mocy, bezpośrednio cieplnej, a po przetworzeniu elektrycznej. Pracujące różnych krajach bloki energetyczne mają moc kilkudziesięciu do kilkuset megawatów.

Poza tym buduje się reaktory atomowe specjalnie przeznaczone do produkcji izotopów, między innymi rozszczepialnego plutonu. Część strumienia neutronów, wytwarzanego podczas pracy stosu można wyprowadzić na zewnątrz i wykorzystać do badań naukowych. Budowa stosów atomowych pociąga za sobą konieczność zorganizowania dużego zaplecza przemysłowego, zajmującego się produkcją potrzebnych materiałów, a także przeróbką i dalszym wykorzystaniem zużytych prętów uranowych i berylowych. Należy przy tym pamiętać, iż wszystkie materiały wyjęte z reaktora są "gorące" - odznaczają się silną radioaktywnością. Dalsza ich obróbka wymaga przedsięwzięcia szczególnych środków ostrożności na dużą skalę, ze względu na konieczność ochrony środowiska naturalnego przed zanieczyszczeniami promieniotwórczymi.

12.10. Modele jądrowe

Mimo tak licznych i ważnych ze względu na zastosowania w przemyśle energii jądrowej, nie mamy obecnie szczegółowej teorii budowy jądra atomowego. Istniejąca od dawna potrzeba syntezy wiadomości o jądrze doprowadziła do konstrukcji tzw. modeli jądrowych, z których dwa są najbardziej rozpowszechnione.

i. Powłokowy model jądra: przyjmuje się, iż nukleony zgrupowane są w pewne zespoły, stanowiące powłoki - podobnie, jak zgrupowane są elektrony w atomie. Pozwala to wyjaśnić periodyczność niektórych własności jąder oraz ich nieciągłość w pobliżu określonych parzystych liczb neutronów lub protonów. Do osobliwych własności należy fakt, że szczególnie trwałe jądra powstają wtedy, gdy liczba protonów Z i liczba neutronów A-Z jest równa jednej z następujących liczb: 2, 8, 20, 50, 82, 126. Trudności w uzasadnieniu wartości tych liczb spowodowały, że nazwano je "magicznymi".

ii. Kroplowy model jądra: w odróżnieniu od modelu poprzedniego, akcentującego niezależność "powłok" nukleonów, model kroplowy ma charakter "kolektywny". Jądro traktuje się jako jedną całość, przy czym materia jądrowa o gęstości 10^{17} kg/m^3 ma wiele własności kropli cieczy. Na tym modelu opiera się teoria jądra złożonego, poza tym dobrze tłumaczy istnienie stanów wzbudzonych, oscylacji i rozszczepienia jądra, które można opisać jako proces odkształcenia i podziału kropli cieczy. Treścią tego modelu jest półempiryczny wzór określający energię wiązania jądra, uwzględniający odpowiedniki energetyczne różnych własności jądra. W dalszym ciągu zajmiemy się przedstawieniem tego wzoru za pośrednictwem kilku przesłanek, opisujących poszczególne udziały energetyczne.

i. Energia wiązania jednego nukleonu w jądrze dla $Z \geqslant 6$ jest w przybliżniu stała i wynosi średnio 8,6 MeV. Oznacza to, iż każdy nukleon oddziałuje tylko z najbliższymi sąsiadami, czyli siły jądrowe mają nadzwyczaj krótki zasięg. W wyniku tego udział defektu masy w energii wiązania jądra, E_d, jest proporcjonalny do A

$$E_d = -a\,A, \tag{12.24}$$

gdzie a = const (= 8,6 MeV).

Gdyby siły jądrowe miały zasięg duży, jak na przykład siły Coulomba, wówczas każdy nukleon musiałby oddziaływać z każdym innym, a energia E_d byłaby proporcjonalna do A^2.

ii. Gęstość materii jądrowej jest stała, innymi słowy promień jądra R rośnie regularnie wraz ze wzrostem A. W takim razie $A = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot k = R^3 \cdot k'$, a stąd

$$R = r_o\,A^{1/3}, \tag{12.25}$$

gdzie $r_o = 1{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm jest stałą empiryczną. Wzór (12.25) oznacza, że nie ma zagęszczenia upakowania nukleonów ze wzrostem A.

iii. Najtrwalsze są jądra, w których liczba protonów równa jest liczbie neutronów, czyli Z = A - Z. Odstępstwo od tej reguły, czyli $A = 2Z \neq 0$, obniża trwałość jądra. Odpowiedni dodatni udział energetyczny asymetrii składu jądra wynosi

$$E_{os} = +\,b\,\frac{(A-2Z)^2}{A}. \tag{12.26}$$

iv. Trwałość jądra zależy od parzystości liczb A, Z oraz A-Z w sposób poznany empirycznie. Związany z tym udział energii oznaczymy przez E_p.

v. Między protonami działają kulombowskie siły odpychania, co daje dodatni wkład do energii wiązania o średniej wielkości

$$E_k = +\frac{3}{5}\,\frac{e^2 Z\,(Z-1)}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{3}{5}\,\frac{e^2 Z\,(Z-1)}{4\pi\varepsilon_o r_o}\,A^{-1/3}. \tag{12.27}$$

vi. Kropli cieczy o promieniu R odpowiada istnienie "powierzchni swobodnej" $4\pi R^2$. Jeśli σ jest napięciem powierzchniowym, równym liczbowo energii potrzebnej do zwiększenia swobodnej powierzchni cieczy o jednostkę, to udział energii powierzchniowej wynosi

$$E_s = -4\pi r_o^2\,\sigma \cdot A^{2/3}. \tag{12.28}$$

Dodanie udziałów i-vi prowadzi do półempirycznego wzoru określającego energię wiązania jądra E_w

$$E_w = -aA + b\frac{(A-2Z)^2}{A} + 4a_c\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_s A^{2/3} + E_p. \quad (12.29)$$

W zapisaniu (12.29) zostały zmienione oznaczenia niektórych stałych tak, by uzyskać zgodność ze sposobem zapisu, spotykanym w monografiach.

Wartości stałych a, b, a_c, a_s i E_p są znane. Wzór (12.29) może służyć do oceny trwałości różnych jąder. Ponadto przez połączenie go z (12.3) otrzymujemy wyrażenie, zwane półempirycznym wzorem określającym masę jądra. Szczegółowe omówienie tych zagadnień jednak pominiemy.

13. CZĄSTKI ELEMENTARNE

13.1. Pojęcie cząstki elementarnej

Istnieje zupełnie zrozumiała tendencja w fizyce i chemii do wyjaśniania własności materii za pomocą możliwie małej liczby zasad, pojęć i niewielu prostych obiektów. Stąd tendencja do poszukiwania cząstek elementarnych.

Czym jest cząstka elementarna? Nie znamy dziś prostej odpowiedzi na to pytanie. W miarę rozwoju nauki coraz to nowe obiekty ujawniły złożoność swej struktury. Okazało się, że materia składa się z cząsteczek lub atomów, te ostatnie zaś złożone są z jądra i elektronów. Również jądra nie są tworami prostymi, lecz składają się z nukleonów. Proton i neutron są uważane za cząstki elementarne w tym sensie, iż nie mają struktury. Można to rozumieć również i w ten sposób, że własności nukleonów nie da się wyjaśnić przez przyjęcie, iż składają się z innych cząstek, mimo iż neutron jest cząstką nietrwałą. Tak więc za możliwą obecnie do przyjęcia, choć niedoskonałą, definicję cząstki elementarnej możemy przyjąć następujące określenie: cząstką elementarną nazywamy obiekt mikroskopowy, nie przejawiający w żadnym znanym eksperymencie natury złożonej i którego własności nie da się wyjaśnić przez przyjęcie, iż składa się z innych obiektów.

W tym sensie następujące cząstki należy uważać za elementarne

proton, neutron, elektron, foton.

Istnieje kilka powodów, dla których nie można uważać neutronu za cząstkę złożoną z protonu i elektronu. Jednym z nich jest to, że masa neutronu

$$m_n - (m_p + m_e) = 1{,}5\, m_e,$$

przewyższa sumę mas protonu i elektronu o $1{,}5\, m_e$. Inny argument przeciwko takiej hipotezie polega na tym, że spin każdej z cząstek: neutronu, protonu i elektronu wynosi 1/2, tymczasem według reguł mechaniki kwantowej nie można otrzymać spinu 1/2 z kombinacji dwóch spinów o wartości 1/2. Hipoteza ta jest nie do przyjęcia również ze względu na zasadę Heisenberga. Zgodnie z tą zasadą pęd elektronu "zawartego"

w neutronie powinien wynosić co najmniej $h/\Delta x$, przy czym $\Delta x = 2 \cdot 10^{-13}$ cm jest rzędu średnicy jądra atomowego. Otrzymany na tej podstawie pęd wynosi $3{,}3 \cdot 10^{-19}$ kgm/s, a odpowiadająca mu energia kinetyczna $p^2/2m = 0{,}60 \cdot 10^{-7}$ J = 300 GeV; przy tak dużej energii kinetycznej elektron musiałby natychmiast "wyparować".

Od roku 1933 fizycy odkryli dalszych 26 cząstek elementarnych; dziś przyjmuje się, iż cząstek elementarnych, łącznie z ich antycząstkami jest 30. Niektóre z nich są cząstkami nietrwałymi, zanikają (procesy anihilacji) lub przechodzą w cząstki o masie mniejszej. Pewnego rodzaju "ochronie" podlegają cząstki ciężkie, tj. proton i neutron. Istnieje mianowicie w fizyce jądra atomowego zasada zachowania cząstek ciężkich, następującej treści: w każdym układzie zamkniętym ogólna liczba protonów i neutronów pozostaje stała.

Oczywiście, neutrony lub protony mogą silnie oddziaływać w zderzeniach z jądrem atomowym, co niekiedy prowadzi do pozornego zwiększenia liczby tych cząstek (np. w reakcji rozszczepienia). Może także neutron przechodzić w proton i na odwrót. Zasada zachowania dotyczy jednak wszystkich cząstek ciężkich w układzie zamkniętym, a więc i swobodnych i związanych w jądrze; nie zauważono by liczba ta ulegała kiedykolwiek zmianie.

Łatwo zdać sobie sprawę z tego, jak ważne znaczenie ma ta prosta zasada. Gdyby nie była spełniona, wówczas cała materia zawarta we Wszechświecie uległaby w ciągu ułamka sekundy konwersji na elektrony i neutrina. Jest to konsekwencja tzw. "słabych oddziaływań" i stanowi swojego rodzaju "chorobę" atakującą wszystkie cząstki elementarne w jednakowy sposób, a której konsekwencją jest konwersja cząstek elementarnych na elektrony i neutrina.

Czym są słabe oddziaływania? Jest to termin odnoszący się do zjawisk, które mogą się zdarzyć podczas przechodzenia cząstki przez materię. Otóż gdy neutrino przechodzi przez materię, nie dzieje się "praktycznie" nic - oddziaływania są nadzwyczaj słabe. Neutrino ν jest cząstką o następujących parametrach:

$$q_\nu = 0, \quad m_{o\nu} = 0, \quad s_\nu = \frac{1}{2}, \quad E_\nu = pc,$$

a więc nie posiada ładunku i masy spoczynkowej. Od fotonu różni się tym, że spin neutrina wynosi 1/2. Gdybyśmy strumień 10^{12} neutrinów wystrzelili w kierunku Ziemi, to z całego strumienia zniknie tylko 1 cząstka, a pozostałe przelecą na wylot kulę ziemską. Świadczy to o tym, że oddziaływania neutrina na materię są niewyobrażanie słabe lub - inaczej mówiąc - przekroje czynne dla neutrina są bliskie zera.

Te właśnie słabe oddziaływania oraz neutrino odgrywają dużą rolę w fizyce cząstek elementarnych. W roku 1958 zaproponowano schemat rozpadu neutronu swobodnego na proton (p), elektron (e) i antyneutrino ($\bar{\nu}$) (kreską nad symbolem oznaczać będziemy antycząstki)

$$ {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e = {}^{0}_{0}\bar{\nu} + 0{,}8 \text{ MeV}; \qquad \tau = 12 \text{ min}. \tag{13.1} $$

Defekt masy

$$ \Delta m = m_n - m_p = 1{,}3 \text{ MeV} $$

równoważny jest energii 1,3 MeV. Z tej ilości 0,5 MeV potrzebna na kreację elektronu, zaś reszta, 0,8 MeV, jest dowolnie podzielona między energię kinetyczną elektronu i antyneutrina. Schemat ten pozwala nam zrozumieć rozpad β : gdyby nie istniało neutrino, elektron w rozpadzie β miałby zawsze energię 0,8 MeV; tymczasem - jak wiadomo - tę górną granicę obserwuje się rzadko. Wprowadzenie neutrina do fizyki cząstek elementarnych pozwala na jednoczesne uzgodnienie zasady zachowania energii, zachowania pędu i zachowania krętu.

Jak wynika z tych uwag, neutrino zostało wprowadzone drogą pośrednią na podstawie obserwacji własności elektronów w rozpadzie β. Fizycy szukali jednak bezpośrednich dowodów istnienia neutrina. Takim dowodem mogła być reakcja, zaproponowana przez Fermiego

$$ {}^{0}_{0}\bar{\nu} + {}^{1}_{1}p \longrightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{+1}e. $$

W celu sprawdzenia, czy ta reakcja jest możliwa, potrzeby był bardzo potężny strumień antyneutrinów ze względu na słabe oddziaływania. Dlatego jej potwierdzenie stało się możliwe dopiero w 1956 r., gdy uruchomiono w Los Alamos reaktor atomowy dużej mocy. W trakcie rozszczepień powstaje duża ilość β aktywnych produktów, a w związku z tym duży strumień neutrinów. Za pomocą odpowiednich liczników istotnie stwierdzono powstawanie ${}^{0}_{+1}e$.

Drugi z nukleonów, proton, jest cząstką trwałą, ponieważ nie ma cząstki elementarnej o masie trochę mniejszej od m_p, w którą proton mógłby przechodzić. Pojawia się jednak pytanie dlaczego neutron, rozpadający się w stanie swobodnym z okresem połówkowym $\tau = 12$ min (nawiasem mówiąc, w skali czasów charakterystycznych dla jądra atomowego jest to ogromnie duży odstęp czasu) trwały jest wewnątrz jądra atomowego? Jednym ze sposobów usunięcia tej trudności jest przyjęcie, że energia oddziaływań $m \longleftrightarrow p$ w jądrze powoduje zmniejszenie masy każdej z oddziałujących cząstek do wartości mniejszej od masy protonu.

13.2. Antymateria

Konieczność istnienia antycząstek została przewidziana teoretycznie przez Diraca, który zajmował się wprowadzeniem postulatów teorii względności do mechaniki kwantowej i zbudował nową teorię cząstek o spinie 1/2, stanowiącą część relatywistycznej teorii pola. Obrazowy - choć niezbyt ścisły - sposób przedstawienia jednego z wniosków teorii Diraca może być następujący: jeżeli z czterowymiarowej czasoprzestrzeni fizycznej "wyrwiemy" elektron, to w tym miejscu powstanie "dziura", która ma wszystkie atrybuty cząstki. Masa jej jest dokładnie równa masie elektronu, ładunek musi być znaku przeciwnego. Tą "dziurą" jest antyelektron, zwany pozytonem, ${}^{0}_{+1}e$. Ten niezbyt precyzyjny model powstawania antyelektronu pozwala jednak zrozumieć jedną z ważnych cech antycząstki: zderzenie z pierwszą lepszą cząstką powoduje "rekombinację", połączoną z wydzieleniem dużej ilości energii. Zasada zachowania pędu wymaga, by podczas takiej anihilacji powstały dwa kwanty

$$ {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{+1}e \longrightarrow 2\,h\nu . \qquad (13.2) $$

Również reakcja odwrotna wymaga na ogół koincydencji dwóch kwantów γ. Para elektron-pozyton może jednak powstawać również w polu sił jądrowych z udziałem jednego kwantu. Jeśli kwant γ o dostatecznie dużej energii przelatuje w pobliżu ciężkiego jądra, to powoduje często powstanie pary elektron-pozyton. Za pomocą takiej właśnie reakcji udowodnił Anderson hipotezę Diraca.

Zasada zachowania energii wymaga, by energia każdego kwantu w (13.2) była co najmniej równa $m_0c^2 = 0{,}511$ MeV, gdzie m_0 jest masą spoczynkową elektronu. W doświadczeniu Andersona energia kwantu musi wynosić $h\nu \geqslant 1{,}022$ MeV; jest to wartość progowa dla kreacji pary. Kwanty o energii większej powodują wytwarzanie cząstek o niezerowej energii kinetycznej.

Pozytony występują ponadto w reakcjach promieniotwórczych typu (α, n). Przykładem takiej reakcji jest skutek bombardowania boru cząstkami α, przebiegający dwustopniowo według następujących schematów

$$ {}^{10}_{5}B + {}^{4}_{2}He \longrightarrow ({}^{14}_{7}N) \longrightarrow {}^{13}_{7}N + {}^{1}_{0}n, $$

$$ {}^{13}_{7}N \longrightarrow {}^{13}_{6}C + {}^{0}_{+1}e, \qquad \tau = 11 \text{ min}. $$

Antycząstką protonu jest antyproton, $\bar{p}$. Został on odkryty za pomocą bewatronu, produkującego protony o energii 6,2 GeV. Według przewidywań teoretycznych bombardowanie jąder (symbol N_1) protonami o energii większej od 6 GeV prowadzi do reakcji

$$N_1 + p + p \longrightarrow N_2 + p + p + \bar{p} + \bar{p},$$

gdzie N_2 oznacza nowe jądro (końcowe).

Antyproton odkryto w 1955 r. W rok później, a więc w 1956 r., został odkryty antyneutron, ${}^{1}_{0}\bar{n}$. Ulega on anihilacji podczas spotkania z protonem lub neutronem, której towarzyszy kreacja mezonów

$$\bar{n} + n \longrightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- + \pi^- + \pi^0.$$

Przez odpowiedni dobór antycząstek możemy konstruować - przynajmniej myślowo - "antyatomy". Najprostszym "odwróconym" atomem jest atom antywodoru - powinien on mieć własności zupełnie takie same, jak atom wodoru. W szczególności ich widma emisyjne i absorpcyjne powinny być identyczne. Przez kombinowanie antyatomów dochodzimy do pojęcia antymaterii.

Jest zupełnie oczywiste, iż wszystkie ziemskie atomy wodoru są zbudowane z cząstek, a nie z antycząstek. Antymaterii nie ma w naszym układzie słonecznym, a nawet w galaktyce; gdyby była, wiedzielibyśmy o tym dość szybko. Procesy anihilacji, towarzyszące spotkaniu materii z antymaterią, przebiegają z wydajnością jeszcze 1000 razy większą od osiągalnej w bombie wodorowej.

Byłoby jednak dziwne, gdyby Wszechświat antymaterii nie zawierał. Ogólne zasady symetrii wskazują, że połowa atomów we Wszechświecie powinna być antymaterią. Trudno zrozumieć, dlaczego miałaby istnieć przewaga dodatniego ładunku nukleonów nad ujemnym. Przypuszcza się więc dzisiaj, że niektóre galaktyki Wszechświata mogą być zbudowane z antymaterii, choć dowodów na to brak.

Mamy obecnie 9 następujących cząstek elementarnych, przy czym masy ich są parami dokładnie równe, a ładunki mają znak przeciwny

$h\nu$	kwant energii (jest swoją własną antycząstką),
$\nu, \bar{\nu}$	neutrino i antyneutrino,
${}^{0}_{-1}e, {}^{0}_{+1}e$	elektron i pozyton,
$p, \bar{p}$	proton i antyproton,
$n, \bar{n}$	neutron i antyneutron.

Przypuśćmy obecnie, że w trakcie pewnego eksperymentu fizycznego wszystkie cząstki zmieniły się nagle w antycząstki. Czy eksperyment można kontynuować i czy uzyskany wynik będzie ten sam? Do roku 1957 fizycy sądzili, że antymateria podlega tym samym prawom, co materia. W zasadzie nie widać sposobu przekonania się o tym, czy jakiś obiekt fizyczny zbudowany jest z materii, czy z antymaterii. Ta podstawowa zasada nosi nazwę zasady symetrii cząstka-antycząstka. W fizyce teo-

retycznej nazywa się ją prawem niezmienniczości względem sprzężenia ładunkowego.

Sprzężenie ładunkowe jest operacją, która jedynie zamienia cząstkę w antycząstkę, pozostawiając wszystko inne bez zmian. Wynikiem sprzężenia ładunkowego wodoru jest antywodór. Zasada symetrii cząstka -antycząstka przewiduje na przykład, że widmo gazowego wodoru powinno być identyczne z widmem gazowego antywodoru. Ponieważ generacja antycząstek jest zadaniem nadzwyczaj trudnym (nie wytworzono np. dotychczas antywodoru - w czym można by go przechowywać?), wniosków wynikających z tej zasady nie da się obecnie sprawdzić doświadczalnie.

W roku 1957 okazało się, że zasadę symetrii materii i antymaterii obala fakt istnienia słabych oddziaływań. Zanim przedstawimy rzecz bliżej, zajmiemy się opisem własności pozostałych 21 cząstek elementarnych.

13.3. Mezony

Mezony są grupą cząstek elementarnych o masach pośrednich między masą elektronu i nukleonu. Znane są trzy typy mezonów: mezony μ (miony), mezony π (piony) i mezony K. Przedstawimy kolejno ich podstawowe własności.

13.3.1. Miony

Miony mają masę równą około 1/8 m_p lub równą 207 m_e. Istnieją miony dodatnie, μ^+, ujemne, μ^-, natomiast nie ma mionów obojętnych. Spin wszystkich wynosi 1/2, poza tym własności mają podobne do elektronów; μ^+ oraz μ^- tworzą parę cząstka-antycząstka. Ze względu na te podobieństwa można uważać miony za ciężkie elektrony. Jedną z zagadek fizyki cząstek elementarnych jest pytanie, dlaczego natura obdarzyła nas tylko dwoma typami elektronów. Mion rozpada się szybko na elektron i dwa neutrina.

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}, \qquad \tau = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}.$$

Trzy lekkie cząstki: μ, e, ν zalicza się do jednej klasy cząstek, zwanych leptonami.

13.3.2. Piony

Piony mają masę w przybliżeniu równą 1/7 m_p lub 273 m_e. Spin ich wynosi jednak 0, dlatego nie zalicza się ich do leptonów. Znane są 3 typy pionów: π^+, π^- i π^0; π^+ oraz π^- tworzą parę cząstka-antycząstka, natomiast mezon obojętny π^0, podobnie jak foton, jest swoją własną antycząstką.

Istnienie pionu zostało przewidziane w 1936 r. przez Yukawę: jest to cząstka potrzebna do wyjaśnienia natury oddziaływań nukleon-nukleon w jądrze. Oddziaływania, zwane niekiedy siłami jądrowymi, są oddziaływaniami silnymi i mają bardzo krótki zasięg. Duża energia wiązania neutron-proton jest realizowana za pośrednictwem periodycznej wymiany pionu między dwoma nukleonami; w ten sposób każda z cząstek staje się na przemian protonem i neutronem. Jest to trójcząstkowy model oddziaływań i do pewnego stopnia przypomina model oddziaływań w trójcząstkowym układzie jonu molekularnego wodoru H_2^+. Jedyny elektron "wymieniany" jest między oboma protonami, co zapewnia trwałość układu. Różnica polega na tym, że oba protony zachowują trwale swój stan cząstek elementarnych. Yukawa poprawnie przewidział w swej teorii sił jądrowych masę pionu; dodatkowym wnioskiem było to, że piony powinny silnie oddziaływać z nukleonami. Rzeczywiście, piony często powstają w zderzeniach dwóch nukleonów o energii rzędu 500 MeV

$$p + p \longrightarrow p + n + \pi^+$$
$$p + n \longrightarrow p + p + \pi^-$$
$$\gamma + p \longrightarrow p + \pi^0 \quad \text{itd.}$$

Po raz pierwszy odkryto piony w 1947 r. jako składniki promieniowania kosmicznego.

Piony rozpadają się za pośrednictwem słabych oddziaływań

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu$$
$$\pi^+ \longrightarrow e^+ + \nu \qquad \tau = 10^{-8}\ \text{s}$$

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}$$
$$\pi^- \longrightarrow e^- + \nu$$

$$\pi^0 \longrightarrow 2\gamma \qquad \tau = 10^{-16}\ \text{s}$$

13.3.3. Mezony K

Mezony K należą do najlepiej poznanych cząstek elementarnych. Masa ich równa jest 1/2 m_p lub 966 m_e, spin wszystkich mezonów K jest równy zeru. Znane są mezony dodatnie K^+ i obojętne K^0, ich antycząstkami są K^- i $\bar{K}^0$. Ze względu na dużą masę, mezon może się rozpadać na kilka sposobów według schematu słabych oddziaływań, np.

$$K^+ \longrightarrow \begin{cases} \pi^+ + \pi^o \\ \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \\ \pi^+ + \pi^o + \pi^o \\ \mu^+ + \nu \\ \mu^+ + \nu + \pi^o \\ e^+ + \nu + \pi^o \end{cases} \qquad \tau = 0{,}85 \cdot 10^{-8}\ \text{s}.$$

Obojętny K^o rozpada się według podobnych schematów, ale dla niego $\tau = 7{,}0 \cdot 10^{-11}$. Jednym z nie rozwiązanych problemów fizyki cząstek elementarnych jest pytanie, dlaczego okres rozpadu K^o jest o tyle krótszy od K^+?

13.4. Hiperony

Do tej grupy należą trzy najcięższe cząstki elementarne

Λ (lambda)	o masie równej	2182 m_e,
Σ (sigma)	o masie równej	2335 m_e,
Ξ (ksi)	o masie równej	2586 m_e.

Wszystkie rozpadają się na nukleony, zatem oddziaływania nukleon-hiperon należą do silnych. Łącznie do silnych zalicza się następujące oddziaływania nukleon-nukleon, mezon-nukleon, hiperon-nukleon. Jednym z przykładów oddziaływań silnych jest właśnie produkcja hiperonów i mezonów K

$$\pi^- + p \longrightarrow \Lambda + K^o. \qquad (13.3)$$

Hiperon w połączeniu z mezonem K powstaje zawsze w zderzeniach pionów z nukleonami. Z tych powodów hiperony i mezony K zostały nazwane cząstkami dziwnymi. Dziwność jest cechą cząstki elementarnej, poznaną empirycznie; wyrażamy ją liczbą całkowitą dodatnią, ujemną lub zerem. Odkryto, że wszystkie silne oddziaływania typu (13.3) spełniają pewne nowe prawo, zwane zasadą zachowania dziwności. Wrócimy do tej sprawy w następnym paragrafie.

Hiperon Λ ma masę o 37 MeV większą od sumy mas protonu i mionu. Jest obojętny i ma spin 1/2. Rozpada się według schematu

$$\Lambda \begin{cases} \longrightarrow p + \pi^- \\ \longrightarrow n + \pi^o \end{cases}$$

Hiperon Σ ma masę o 78 MeV większą od hiperonu Λ, spin 1/2 i może być dodatni Σ^+, ujemny Σ^- lub obojętny Σ^0. Rozpada się według schematów

$$\Sigma^+ \longrightarrow p + \pi^0$$
$$\Sigma^+ \longrightarrow n + \pi^+$$
$$\Sigma^- \longrightarrow n + \pi^-$$
$$\Sigma^0 \longrightarrow \Lambda + \gamma$$

Ogólnie biorąc, z wyjątkiem Σ^0, hiperony Λ i Σ rozpadają się według schematu

$$\Lambda, \Sigma \longrightarrow \pi + \text{nukleon}. \qquad (13.4)$$

Hiperon Ξ ma masę o 205 MeV większą od hiperonu Λ i może być ujemny Ξ^- lub obojętny Ξ^0.

Każdy hiperon powinien mieć antycząstkę o przeciwnym znaku. Dotychczas odkryto jedynie $\bar{\Lambda}$, $\bar{\Sigma}^+$, $\bar{\Sigma}^0$.

13.5. Systematyka cząstek elementarnych

Jeśli uporządkować poznane przez nas cząstki elementarne według wzrastającej masy, to otrzymamy następujący schemat

	Foton	γ
	Leptony	ν, e, μ
	Mezony	π, K
Bariony	Nukleony	p, n
	Hiperony	Λ, Σ, Ξ

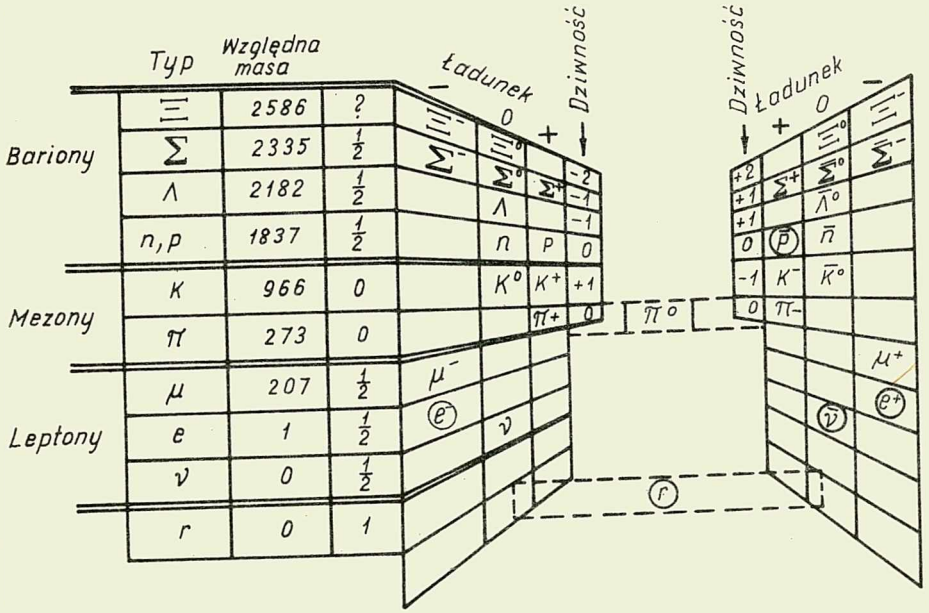
(13.5)

Po uwzględnieniu wszystkich znaków i antycząstek dostaniemy dokładnie 30 cząstek elementarnych. Pełna klasyfikacja cząstek przedstawiona jest na rys. 13-1. Cząstki znajdują się z lewej strony tablicy; część tablicy po stronie prawej stanowi "odbicie" poprzedniej i zawiera antycząstki. Cząstki trwałe są umieszczone w kółku.

Posługując się danymi tej tablicy możemy uczynić wiele interesujących spostrzeżeń, dotyczących zasad zachowania. Spróbujmy je prześledzić na reakcji (13.3)

	π^-	+	p	$\longrightarrow$	Λ	+	K^0	
1. Masa	273		1837		2182		966	
		2110				3148		x m_e
2. Spin	0		1/2		1/2		0	

3. Ładunek	-	+	0	0
4. Dziwność	0	0	-1	1
5. Liczba cząstek ciężkich		1	1	



Rys. 13-1

Widzimy, że ze względu na relację Einsteina masa nie jest cechą zachowywaną w reakcjach z udziałem cząstek elementarnych; jej miejsce zajmuje rozszerzona zasada zachowania energii oraz zasada zachowania pędu w sensie relatywistycznym. Spełnione są natomiast cztery dalsze zasady zachowania: spinu, ładunku, dziwności i liczby cząstek ciężkich.

13.6. Zasada parzystości i jej obalenie

Zasada zachowania parzystości jest matematycznym wyrazem zasady symetrii, noszącej nazwę niezmienniczości względem odbicia. Zasada niezmienniczości względem odbicia orzeka, że odbicie zwierciadlane każdego zjawiska fizycznego jest tak samo prawdziwe, jak samo zjawisko. Zgodnie z tą zasadą można powiedzieć, że gdyby ktoś obserwował dowolny eksperyment fizyczny w zwierciadle, a nie powiedziano by mu o tym, że patrzy w zwierciadło, wówczas nie będzie w stanie sam dojść do takiego wniosku na podstawie biegu eksperymentu i jego wyników.

Wniosek ten możemy sformułować jeszcze inaczej. W opisie eksperymentu fizycznego używamy układów współrzędnych, zwykle prawoskrętnego. Odbicie zwierciadlane zamienia ten układ na lewoskrętny, lecz nie zmienia biegu i wyniku eksperymentu. W takim razie możemy stwierdzić, że podstawowe prawa fizyki mają tę samą postać matematyczną niezależnie od tego, czy do opisu użyjemy lewo- czy prawoskrętnego układu współrzędnych. Jedną z konsekwencji zasady parzystości jest więc to, że roztargniony naukowiec nie może rozstrzygnąć na podstawie doświadczeń fizycznych, która jego ręka jest lewa, a która prawa. Mógłby wprawdzie rozwiązać ten dylemat przez ustalenie, po której stronie jest jego serce, ale to rozwiązanie byłoby nie uczciwe z fizycznego punktu widzenia.

Zasada parzystości nie jest ogólnie słuszna: wyraźnie nie obowiązuje na terenie przyrody ożywionej. Okazuje się, że w wielu przypadkach przyroda sama wytwarza asymetrię (serce po lewej stronie). Również białka, występujące w organizmach żywych zbudowane są z aminokwasów, z których wszystkie mają strukturę śruby lewoskrętnej; nie ma w przyrodzie aminokwasów o strukturze prawoskrętnej. Nie znaczy to, że ich utworzenie jest niemożliwe: w trakcie syntezy w laboratorium powstaje zawsze mieszanina 1 : 1 odmian lewo- i prawoskrętnych. Odmiany aminokwasów o przeciwnej skręcalności są jednak w przyrodzie czymś w rodzaju trucizn wzajemnie dla siebie. Przypuszcza się, iż przez ewolucję i eliminację przewagę uzyskać mogła tylko jedna z odmian, a tą była odmiana lewoskrętna.

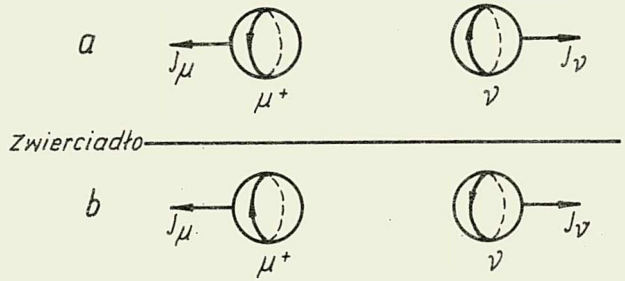
Okazuje się, że w pewnych przypadkach zasada parzystości nie jest słuszna również w fizyce, co spowodowało jej obalenie. Przyczyniły się do tego badania Lee i Yanga, dotyczące szczegółów rozpadu pionu π^+. Rozpad ten następuje według schematu

$$\begin{array}{lccccc} & \pi^+ & \longrightarrow & \mu^+ & + & \nu \\ \text{Spiny} & 0 & & +\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} \end{array} \qquad (13.6)$$

Rys. 13-2

Ponieważ spin pionu wynosi zero, więc połówkowe spiny mionu i neutrina muszą mieć znaki przeciwne. Własności spinowe cząstek, biorących udział w rozpadzie (13.5) będziemy wyrażali za pomocą symboli graficznych, przedstawionych na rys. 13-2. I tak, symbol 13-2a oznacza spin,

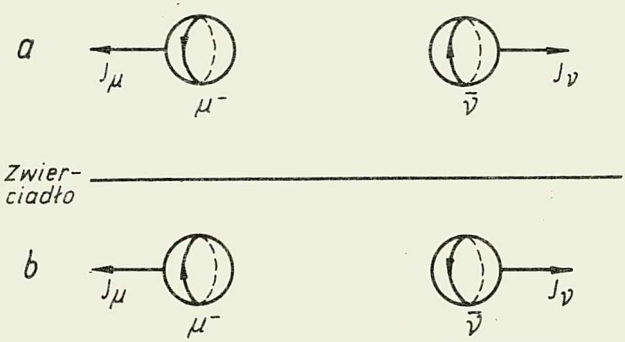
odpowiadający śrubie lewoskrętnej, ponieważ kierunek obiegu i zwrot wektora, przyczepionego do kuli, są powiązane wzajemnie relacją śruby lewoskrętnej. Symbol 13-2b oznacza spin, odpowiadający śrubie prawoskrętnej. Za pomocą tej symboliki możemy zilustrować wynik rozpadu (13.5): powstające cząstki muszą mieć tę samą skrętność spinu, np. lewo, zaś kierunek wektorów J_μ i J_ν musi być przeciwny (rys. 13-3a). Do-



Rys. 13-3

konajmy teraz odbicia w płaszczyźnie zwierciadlanej, prostopadłej do płaszczyzny rysunku: kierunek obiegu zmieni się na przeciwny, natomiast orientacja wektorów J nie ulegnie zmianie. Otrzymujemy więc dwa schematy tej samej reakcji, różniące się skrętnością układu współrzędnych; zgodnie z zasadą parzystości oba powinny występować jednakowo często w przyrodzie. Tymczasem wynik doświadczenia Lee i Yanga jest jednoznaczny: w doświadczeniu obserwuje się schemat a) na rys. 13-3, a nie obserwuje się schematu b), czyli neutrina pojawiają się zawsze jako "śruby lewoskrętne". Oznacza to, że przestrzeń ma wbudowaną preferencję lewoskrętności nad prawoskrętnością.

Nie koniec jednak na tym. Dokonajmy obecnie operacji sprzężenia ładunkowego, w wyniku czego otrzymamy antycząstki (rys. 13-4a) zgodnie ze schematem



Rys. 13-4

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu} \qquad (13.7)$$

Po odbiciu w płaszczyźnie zwierciadlanej otrzymamy schemat 13-4b. Okazuje się, że w eksperymencie antyneutrino występuje zawsze jako śruba prawoskrętna. Tak więc preferencja skrętności wbudowana jest w przestrzeń również dla antymaterii, co w sposób nie budzący wątpliwości obala słuszność zasady parzystości na terenie fizyki cząstek elementarnych.

Przedstawione tu w wielkim skrócie wyniki doświadczeń i teorii w zakresie badań cząstek elementarnych pozwalają sądzić, że postęp w tej dziedzinie jest coraz szybszy, aczkolwiek daleko jeszcze do pełnego rozwiązania tych tak ważnych dla fizyki problemów. W szczególności wydaje się, iż przyjęta obecnie liczba cząstek elementarnych jest zbyt duża. Być może, iż niektóre z nich są jakimiś stanami kwantowymi cząstek "naprawdę" elementarnych, których - według przypuszczeń - powinno być około 10. Od teorii oczekuje się również redukcji liczby fundamentalnych stałych fizyki: c, e, h, m_e, m_p, itd. przez znalezienie nie znanych obecnie relacji między nimi. Do nie rozwiązanych, a ważnych problemów należy również wyjaśnienie natury silnych i słabych oddziaływań. Są to wszystko pytania nurtujące fizykę współczesną, a odpowiedź na nie przyniesie niewątpliwie najbliższa przyszłość.

WYKAZ POMOCY DYDAKTYCZNYCH

1. Pięciotomowy podręcznik fizyki:
   - T I C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, Mechanika, PWN, Warszawa 1969.
   - T II E.M. Purcell, Elektryczność i magnetyzm, PWN, Warszawa 1971.
   - T III F.S. Crawford Jr., Fale, PWN, Warszawa 1973.
   - T IV E.H. Wichman, Fizyka kwantowa, PWN, Warszawa 1973.
   - T V F. Reif, Fizyka statystyczna, PWN, Warszawa 1972.
2. D. Halliday, R. Resnick, Fizyka t. I-II, PWN, Warszawa 1967.
3. S. Frisz, A. Timoriewa, Kurs fizyki, t. I-III, PWN, Warszawa 1962.
4. I. Kaplan, Fizyka jądrowa, PWN, Warszawa 1957.
5. R.W. Pohl, Optik und Atomphysik, Springer-Verlag, Berlin 1963.
6. J.F. Nye, Fizyczne własności kryształów, PWN, Warszawa 1962.

UZUPEŁNIENIA

Niniejsza część skryptu zawiera uzupełnienia wiadomości lub metod, omawianych w części podstawowej skryptu. Zagadnienia tu poruszane są przeznaczone dla interesujących się fizyką w szerszym zakresie, niż to przewiduje ramowy program studiów. Autor ma nadzieję, iż głębsze wniknięcie w pewne wybrane problemy umożliwi lepsze zbliżenie wiedzy studenta do niektórych zagadnień współczesnej fizyki, a przez to rozbudzi zainteresowania problematyką fizyczną i zachęci do jej kontynuacji. Materiał tej części będzie stopniowo powiększany w następnych wydaniach skryptu, jeśli ich przygotowanie okaże się celowe. Autor ma nadzieję, iż na wybór dołączonych w przyszłości nowych problemów będą mieć wpływ nie tylko jego własne poszukiwania, lecz także zainteresowania Czytelników.

U 1. ELEMENTY RACHUNKU BŁĘDÓW

Każdy pomiar wielkości fizycznej jest obarczony błędem. Aby się o tym przekonać, wystarczy zmierzyć kilkakrotnie tę samą wielkość fizyczną, np. długość sztywnego pręta; za każdym razem otrzymujemy trochę inny wynik pomiaru. Ze względu na przyczyny powodujące powstanie błędów możemy je podzielić na trzy klasy.

i. Błędy przypadkowe (losowe) są spowodowane zmiennością warunków zewnętrznych i predyspozycją obserwatora (np.zmienne oświetlenie, wahania napięcia zasilającego, zmęczenie obserwatora, itd.). Można je zmniejszyć przez wielokrotne wykonanie pomiaru tej samej wielkości i zastosowanie rachunku błędów, czym zajmiemy się w niniejszym paragrafie.

ii. Błędy systematyczne wynikają z zastosowania wadliwych przyrządów pomiarowych lub metod pomiarowych. Mogą być stałe (np. przesunięcie skali termometru, które powoduje, że wszystkie odczyty temperatury są albo zbyt wysokie albo zbyt niskie) lub zmienne (np. przekrój kapilary, zmieniający się systematycznie).Są one dość trudne do zauważenia,lecz mogą być wykryte i usunięte przez zastosowanie innych narzędzi pomiarowych (inny termometr) lub metod (zastosowanie termopary).

iii. Błędy grube (omyłki) zdarzają się jako zupełnie błędne policzenie kresek skali, pominięcie mnożnika itd. Są one zwykle łatwe do zauważenia w następnych pomiarach. Omyłek takich w ogóle nie bierze się pod uwagę podczas oceny wyniku końcowego.

Przypuśćmy, że wykonaliśmy n pomiarów jakiejś wielkości fizycznej S i otrzymaliśmy wyniki $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Niech $g_1, g_2, \ldots g_n$ oznaczają wagi statystyczne tych wyników. Waga statystyczna jest liczbowym wyrazem znaczenia, jakie przywiązujemy do poszczególnych wyników. Jest oczywiste, że wyniki bardziej dokładne powinny być silniej uwzględnione w rachunku, niż mniej dokładne; inaczej mówiąc,waga statystyczna tych pierwszych będzie większa, niż drugich. Nie rozstrzygamy na razie pytania, skąd znamy wartości g_i - jest to sprawa indywidualna dla metody pomiaru.

Wartością najbardziej zbliżoną do "prawdziwej" wartości S jest średnia arytmetyczna "ważona" poszczególnych wyników.

$$\langle s \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i s_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i} \qquad \text{(U1.1)}$$

"Prawdziwej" wartości S nie definiujemy, ponieważ jest nam ona nie znana i stanowi pewną idealizację. Średnia arytmetyczna $\langle s \rangle$ jest natomiast w określonym sensie "najlepszą" reprezentantką wyników pomiaru. Pokażemy nieco dalej, jak tę "najlepszość" należy rozumieć.

Jeśli wagi statystyczne pomiarów nie dadzą się ustalić, to przyjmujemy, że $g_1 = g_2 = \ldots = g_n = 1$. Wyrażenie (U1.1) przechodzi wówczas w zwykłą definicję średniej arytmetycznej

$$\langle s \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i. \qquad \text{(U1.2)}$$

Błąd bezwzględny poszczególnego pomiaru definiujemy jako różnicę względem średniej arytmetycznej

$$\delta_i = s_i - \langle s \rangle, \qquad \text{(U1.3)}$$

zaś błąd względny otrzymujemy po podzieleniu δ_i przez $\langle s \rangle$

$$\frac{\delta_i}{\langle s \rangle} = \frac{s_i - \langle s \rangle}{\langle s \rangle}. \qquad \text{(U1.4)}$$

Definicji (U1.3) nie można jednak użyć do obliczenia średniego błędu wartości średniej, ponieważ

$$\frac{1}{n} \sum_i \delta_i = \frac{1}{n} \left\{ \sum_i s_i - n \langle s \rangle \right\} = 0.$$

Na wynik ma wpływ fakt, że δ_i mogą być dodatnie lub ujemne. Ponieważ jest rzeczą nieprawdopodobną, by wartość średnia nie była obarczona błędem, więc w definicji średniego błędu wartości średniej używa się bezwzględnych wartości błędów δ_i

$$\langle \delta \rangle = \frac{1}{n} \sum_i |\delta_i| = \frac{1}{n} \sum_i |s_i - \langle s \rangle|. \qquad \text{(U1.5)}$$

Częściej używa się jednak średniego kwadratu odchylenia, σ^2, zwanego wariancją

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_i (s_i - \langle s \rangle)^2 \qquad (U1.6)$$

lub odchylenia standardowego

$$\sigma = \left\{ \frac{1}{n} \sum_i (s_i - \langle s \rangle)^2 \right\}^{1/2} \qquad (U1.7)$$

Średnie odchylenie standardowe wynosi

$$\sigma_m = \left\{ \frac{1}{n(n-1)} \sum_i (s_i - \langle s \rangle)^2 \right\}^{1/2} \qquad (U1.8)$$

i jest najczęściej używaną miarą dokładności wyniku końcowego, który zapisujemy w następujący sposób

$$\langle s \rangle \pm \sigma_m . \qquad (U1.9)$$

Zapis ten oznacza, że "prawdziwa" wartość s różni się od średniej $\langle s \rangle$ nie więcej, niż o σ_m, czyli

$$\langle s \rangle - \sigma_m \langle s \rangle \quad \langle s \rangle + \sigma_m .$$

Pokażemy obecnie, że średnia arytmetyczna jest taką wartością, dla której suma średnich kwadratów odchyleń osiąga wartość najmniejszą, czyli najmniejszą wartość wariancji. W takim właśnie sensie wartość $\langle s \rangle$ jest "najlepsza". Przyjmijmy na razie, iż s_o jest właśnie wartością tak dobieraną (wartość zmienna), by wariancja osiągnęła minimum, tj.

$$\sum_i (s_i - s_o)^2 = \text{Min},$$

lub

$$\frac{d}{ds_o} \left(\sum_i (s_i - s_o)^2 \right) = -2 \sum_i (s_i - s_o) = 0.$$

Z tego

$$\sum_i s_i = n s_o ,$$

lub

$$s_o = \frac{1}{n} \sum_i s_i = \langle s \rangle .$$

Określiliśmy dotychczas błędy przypadkowe i sposoby ich zmniejszenia dla jednej, określonej wielkości fizycznej. Często mamy jednak do czynienia z wielkościami złożonymi, zależnymi od kilku wielkości prostych. Na przykład, energia kinetyczna T punktu materialnego o ma-

sie m, poruszającego się z częstością kątową ω po okręgu koła o promieniu r wynosi

$$2T = I\omega^2 = m r^2 \omega^2.$$

Mierzymy m, r, ω z błędami średnimi odpowiednio Δm, Δr, $\Delta\omega$. Z jaką dokładnością znamy T? Możemy napisać

$$2(T + \Delta T) = (m + \Delta m)(r + \Delta r)^2 (\omega + \Delta\omega)^2.$$

Jeśli zachować tylko te wyrazy, które nie zawierają błędów lub zawierają je w potędze pierwszej, to wynik obliczeń jest następujący:

$$2(T + \Delta T) \cong mr^2 \omega^2 + r^2 \omega^2 \Delta m + 2 mr \omega^2 \Delta r + 2 mr^2 \omega\Delta\omega .$$

Z tego

$$2 \Delta T \cong r^2 \omega^2 \Delta m + 2 mr \omega^2 \Delta r + 2 mr^2 \omega\Delta\omega$$

oraz

$$\frac{\Delta T}{T} \cong \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta r}{r} + 2 \frac{\Delta\omega}{\omega} .$$

Widzimy, iż z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu względny błąd energii kinetycznej jest równy sumie względnych błędów poszczególnych wielkości z współczynnikami liczbowymi, zależnymi od potęg tych wielkości w wyrażeniu określającym T.

Ten sam wynik możemy otrzymać znacznie prościej przez zastosowanie rachunku różniczkowego. Jeśli P jest funkcją zmiennych x_1, x_2, ... x_n, to względny błąd $\Delta P/P$ można wyrazić ogólnie w następujący sposób

$$\frac{\Delta P}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right) \Delta x_i . \qquad (U1.10)$$

Obliczenie według (U1.10) znacznie się upraszcza, jeśli funkcję P przed różniczkowaniem zlogarytmujemy. W naszym przykładzie z energią kinetyczną punktu będziemy mieli

$$\ln 2 + \ln T = \ln m + 2 \ln r + 2 \ln \omega$$

oraz

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta r}{r} + 2 \frac{\Delta\omega}{\omega} ,$$

a więc w ten sposób znacznie szybciej można otrzymać wyrażenie, potrzebne do oceny błędu wielkości złożonej. Należy jednak pamiętać o tym, że błędy wielkości występujących w mianowniku również wchodzą z udziałem dodatnim w błąd wartości złożonej. Jeśli np. funkcja P ma postać

$$P = \frac{1}{2}\pi \frac{x_1^2 \cdot x_2}{x_3 + b\,x_4},$$

to

$$\frac{\Delta P}{P} = 2\frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_3 + b\Delta x_4 + \Delta x_4 \cdot b}{x_3 + b\,x_4}$$

lub

$$\frac{\Delta P}{P} = 2\frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_3 + b\Delta x_4}{x_3 + b\,x_4},$$

gdy parametr b jest znany dokładnie.

Przykłady

1. Zmierzono dziesięciokrotnie pewną długość i otrzymano następujące wyniki

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l_i, mm	102	105	102	99	101	98	103	102	100	105

stąd

$$\langle l \rangle = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} l_i = 101{,}70 \text{ mm},$$

$$\langle \delta \rangle = \frac{1}{10}\sum_i |l_i - \langle l \rangle| = 1{,}76 \text{ mm},$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{10}\sum_i (l_i - \langle l \rangle)^2 = 5{,}54 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = 2{,}35 \text{ mm},$$

$$\sigma_m = 0{,}78 \text{ mm}.$$

Wynik końcowy

$$l = (101{,}7 \pm 0{,}8) \text{ mm}.$$

2. W 293,2 K (ρ_{Hg} = 13,546 ± 0,001 g/cm^3) długość słupa rtęci w kapilarze wynosi 7,24 cm (pomiar wykonany suwmiarką), a masa rtęci m = 0,4936 g (pomiar na wadze analitycznej, Δ m = $2 \cdot 10^{-4}$ g). Obliczyć błąd z jakim znamy promień kapilary.

Mamy

$$m = \pi r^2 h \rho,$$

czyli

$$r = \left(\frac{m}{\pi h \rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{0{,}4936}{\pi \cdot 7{,}24 \cdot 13{,}546}\right)^{1/2} = 4{,}003 \cdot 10^{-2}\ \text{cm}.$$

Błąd względny r wynosi

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta \rho}{\rho}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{0{,}4936} + \frac{100}{7{,}24} + \frac{10}{13{,}546}\right\} \cdot 10^{-4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{4{,}05 + 13{,}81 + 0{,}74\right\} \cdot 10^{-4} =$$

$$= 9{,}3 \cdot 10^{-4} = 0{,}1\%.$$

Z tego błąd bezwzględny

$$\Delta r = r \cdot 9{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{cm} = 4 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}$$

czyli

$$r = (4{,}003 \pm 0{,}004) \cdot 10^{-2}\ \text{cm}.$$

Z tego rachunku widać, iż największy udział w błędzie względnym pochodzi od pomiaru długości kropli rtęci w kapilarze za pomocą suwmiarki. Gdyby nam zależało na dokładniejszym wyniku, wówczas należy przede wszystkim zwiększyć dokładność tego pomiaru.

Przykład ten został zaczerpnięty ze skryptu J. Demichowicz-Piginiowej, Obliczenia chemiczne, cz. I, Wrocław 1975 r.

Na zakończenie zajmiemy się jeszcze rachunkiem wyrównawczym dla zależności liniowej. Przypuśćmy, że między wielkościami fizycznymi X i Y istnieje związek liniowy w postaci

$$Y = a X + b. \qquad (U1.11)$$

Mierzymy pary liczbowe (X_i, Y_i), a chcemy obliczyć optymalne wartości stałych a i b. Przez wartości optymalne rozumieć będziemy takie, które spełniają postulat najmniejszej wartości wariancji. a i b dobieramy zatem tak (zmienne), by suma kwadratów błędów $(Y_i - a X_i - b)$ osiągała minimum

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - a X_i - b)^2 = \text{Min}. \qquad (U1.2)$$

Suma rozciągnięta jest na n par (X_i, Y_i). Mamy więc

$$\frac{\partial}{\partial a}\left\{\sum_i (Y_i - a X_i - b)^2\right\} = -2 \sum_i X_i (Y_i - a X_i - b) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left\{\sum_i (Y_i - a X_i - b)^2\right\} = -2 \sum_i (Y_i - a X_i - b) = 0.$$

Na tej podstawie można napisać dwa równania liniowe

$$\begin{aligned} a \Sigma X_i X_i + b \Sigma X_i &= \Sigma X_i Y_i, \\ a \Sigma X_i + b \cdot n &= \Sigma Y_i. \end{aligned} \qquad \text{(U1.13)}$$

Rozwiązanie ich daje wyrażenia potrzebne do obliczenia a i b.

$$a = \frac{n \Sigma X_i Y_i - \Sigma X_i \Sigma Y_i}{n \Sigma X_i X_i - \Sigma X_i \Sigma X_i}, \qquad \text{(U1.14)}$$

$$b = \frac{\Sigma Y_i \Sigma X_i X_i - \Sigma X_i \Sigma X_i Y_i}{n \Sigma X_i X_i - \Sigma X_i \Sigma X_i}. \qquad \text{(U1.15)}$$

Jeśli prosta definicyjnie przechodzi przez zero, tj. $b \equiv 0$, to analogiczny rachunek daje

$$a = \frac{\Sigma X_i Y_i}{\Sigma X_i X_i}. \qquad \text{(U1.16)}$$

Przedstawiony rachunek dla linii prostej jest spotykany w praktyce najczęściej, ponieważ wiele funkcji występujących w zagadnieniach fizycznych można przedstawić jako zależność prostoliniową. Można go również bez trudu uogólnić na przypadek zależności podanych w postaci wielomianów drugiego lub wyższych stopni. Jednak już w przypadku paraboli potrzebujemy dla jej pełnego opisu trzech parametrów, co prowadzi do trzech równań liniowych niejednorodnych. Dla wielomianów stopnia n liczba potrzebnych równań jest równa liczbie nie znanych nam współczynników.

3. Za pomocą dyfrakcji promieni rentgenowskich mierzono odstęp płaszczyzn sieciowych (020) kryształu NaCl w różnych temperaturach i uzyskano następujące wyniki

Lp.	1	2	3	4	5	6
temp (w °C)	51,76	57,68	74,57	94,32	111,63	128,50
Θ_t	329° 47,06'	329° 45,10'	329° 43,34'	329° 41,03'	329° 38,72'	329° 36,61'

przy czym Θ_t jest kątem dyfrakcji w temperaturze t °C. Obliczyć

współczynnik rozszerzalności kryształu metodą najmniejszych kwadratów wiedząc, że $d_{010} = 2{,}820$ Å oraz długość fali promieniowania Cu Kα = = 1,5405 Å.

Obliczeń dokonamy na podstawie prawa Braggów

$$2\,d\,\sin\Theta = n\cdot\lambda\,.$$

Wraz ze zmianą temperatury zmienia się zarówno odstęp d między płaszczyznami sieciowymi, jak i kąt rozpraszania

$$2\,\sin\Theta\,\Delta\,d + 2\,d\,\cos\,\Theta\cdot\Delta\Theta = 0,$$

czyli

$$\frac{\Delta d}{d\cdot\Delta t} \equiv \alpha = -\cot\Theta\cdot\frac{\Delta\Theta}{\Delta t}\,.$$

Do obliczenia współczynnika rozszerzalności termicznej α potrzebujemy więc znajomości nachylenia funkcji $\Theta(t)$ oraz wartości ctgΘ dla refleksu (020). Łatwo się przekonać (za pomocą wykresu),że zależność $\Theta(t)$ ma tu rzeczywiście charakter liniowy, co uzasadnia zastosowanie metody najmniejszych kwadratów dla prostej typu aX + b, ponieważ stała b jest tu różna od zera. Zatem

$$\Theta'_t = a\cdot t^{\circ}C + b,$$

gdzie Θ'_t wyrażone jest w minutach (liczbę pełnych stopni opuszczamy, co nie ma wpływu na wartość nachylenia; wpływa ona tylko na wartość b, która nas nie interesuje).

Wielkości występujące w (U1.14) wynoszą:

$$\Sigma X_i = 518{,}46,\quad \Sigma Y_i = 251{,}86,\quad \Sigma X_iY_i = 21165{,}70,\quad \Sigma X_iX_i = 49436{,}53,$$
$$n = 6.$$

Wobec tego

$$a = \frac{6\cdot 21165{,}70 - 518{,}46\cdot 251{,}86}{6\cdot 49436{,}53 - 518{,}46^2} = -128{,}88\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{min}}{\text{K}} =$$
$$= -37{,}489\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{rad}}{\text{K}}\,.$$

Ze wzoru Braggów

$$\sin\Theta = \frac{n\cdot\lambda}{2d} = \frac{2\cdot 1{,}5405}{2\cdot 2{,}820} = 0{,}5463,\quad \text{czyli}\quad \cot\Theta = 1{,}5333$$

Współczynnik rozszerzalności wynosi

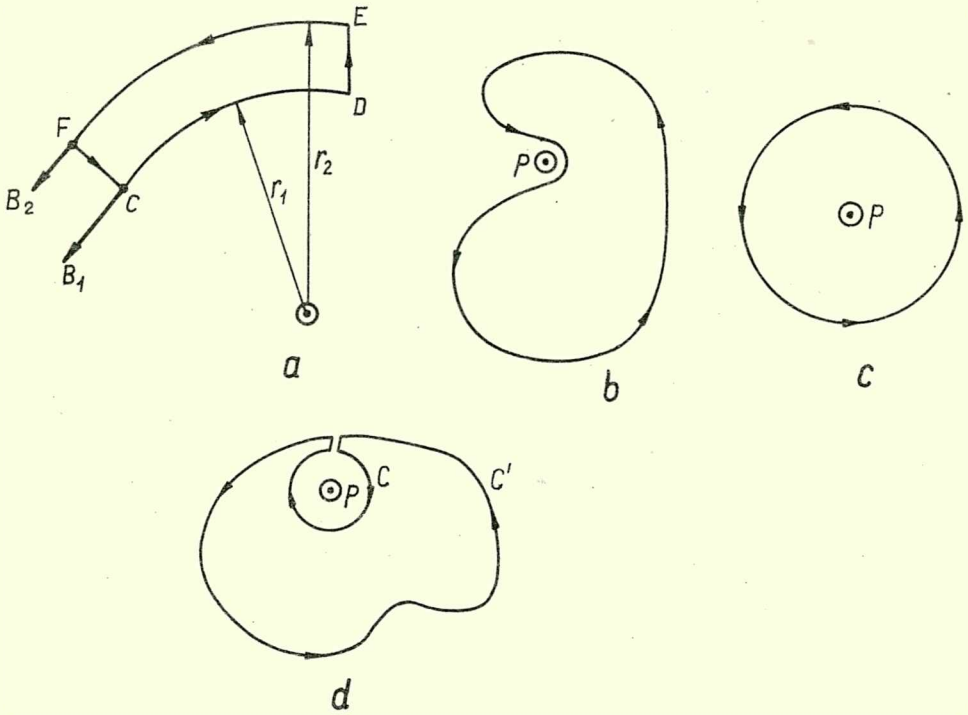
$$\alpha = 1{,}5333\cdot 37{,}489\cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1} = 57{,}48\cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1}$$

w zakresie temperatur od 50 do 120 $^{\circ}$C. Wartość liczbowa α jest znacznie mniejsza od tablicowej, równej $110\cdot 10^{-6}$ K^{-1}, lecz odnoszącej się

do zakresu temperatur od -79 °C do 0 °C. Współczynnik rozszerzalności cieplnej kryształów nie jest wielkością stałą lecz zależy od temperatury; ponadto jego wartość zależy również od obecności defektów strukturalnych w badanym krysztale.

U 2. SIŁA MAGNETOMOTORYCZNA

Wyrażenie określające siłę magnetomotoryczną jest analogiczne do prawa (6.25) w polu elektrostatycznym i w sposób skoncentrowany wyraża własności pola. Dotyczy ono całki krzywoliniowej po konturze zamkniętym w polu magnetycznym.



Rys. U2.1

Wyobraźmy sobie kontur CDEF (rys. U2-1a), leżący w płaszczyźnie prostopadłej do przewodnika z prądem P. Jaki będzie wynik obliczenia całki krzywoliniowej $\int_{CDEF} \underline{B} \cdot \underline{dl}$, jeśli $\underline{dl}$ jest elementem przesunięcia, $\underline{B}$ natomiast wektorem indukcji magnetycznej wytwarzanej przez P? Wzdłuż

odcinków FC i DE mamy $\underline{B}\cdot\underline{dl} = 0$, ponieważ w dowolnym ich punkcie $\underline{B} \perp FC$ lub $\underline{B} \perp ED$. Wybierzmy obecnie elementy przesunięcia $\underline{dl}_1$ wzdłuż CD i $\underline{dl}_2$ wzdłuż EF tak, by odpowiadały temu samemu kątowi środkowemu, tj. by

$$\frac{|dl_1|}{r_1} = \frac{|dl_2|}{r_2} = d\varphi.$$

W takim razie $\underline{dl}_2 = -(r_2/r_1)\underline{dl}_1$, ponieważ oba przesunięcia mają zwroty przeciwne. Na podstawie prawa Biota-Savarta-Laplace'a (8.47) mamy $\underline{B}_2 = \underline{B}_1 (r_1/r_2)$. Wobec tego

$$\underline{B}_2\cdot\underline{dl}_2 = -\underline{B}_1 \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \underline{dl}_1 \cdot \frac{r_2}{r_1} = -\underline{B}_1\cdot\underline{dl}_1 ,$$

a więc wynikiem całkowania będzie zero. Nietrudno pokazać, że wynik ten będzie słuszny także dla dowolnego konturu, nie obejmującego przewodnika (np. rys. U2-1b).

Dokonajmy obecnie całkowania po okręgu koła otaczającego koncentrycznie przewodnik P, przez który płynie prąd o natężeniu i (rys. U2-1e). Na podstawie prawa Biota-Savarta-Laplace'a zastosowanego do przewodnika liniowego (8.47) mamy $B = (\mu_0/4\pi)\cdot(2i/R)$, przy czym $\underline{B}$ jest wszędzie styczny do okręgu tak, że $\underline{B}\cdot\underline{dl} = B\cdot dl$. Wobec tego

$$\int_{\text{okrąg}} \underline{B}\cdot\underline{dl} = \int_{\text{okrąg}} B\cdot dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \int_{\text{okrąg}} dl = \mu_0 i. \qquad \text{(U2.1)}$$

Można łatwo wykazać, że taki wynik można otrzymać przy dowolnym kształcie konturu otaczającego przewodnik. Kontur CC' (rys.U2-1d) nie otacza przewodnika, wobec tego

$$\int_{CC'} \underline{B}\,\underline{dl} = 0 = \int_{C'} \underline{B}\,\underline{dl} - \int_{C} \underline{B}\,\underline{dl},$$

jeśli zamkniemy oba obwody C i C'. Pisząc całkę wzdłuż C należy zwrócić uwagę na kierunek obiegu konturu w stosunku do kierunku przepływu prądu. Ogólnie zatem całka krzywoliniowa po dowolnej krzywej zamkniętej w polu magnetycznym jest proporcjonalna do natężenia prądu, objętego tym konturem

$$\int_{C} \underline{B}\cdot\underline{dl} = \mu_0 i \qquad \text{(U2.2)}$$

lub w próżni

$$\int_{C} \underline{H}\,\underline{dl} = i. \qquad \text{(U2.3)}$$

Prawo wyrażone związkiem (U2.3) wymaga jeszcze pewnych uzupełnień.

i. Natężenie prądu i odnosi się w (U2.3) i w poprzednich równaniach do prądu przewodzenia w przewodniku. Jest to przypadek szczególny, gdzie gęstość prądu ma dużą wartość wewnątrz przewodnika i równa jest zeru wszędzie poza nim. W przypadku przestrzennego przypływu ładunków należy posługiwać się gęstością prądu $\underline{j}$. Jeśli S jest dowolną powierzchnią, rozpiętą na konturze C, $\underline{dS}$ natomiast elementem tej powierzchni, to $di = \underline{j}\,\underline{dS}$. Poza tym w przypadku ogólnym, oprócz prądu przewodzenia może również występować prąd przesunięcia, którego gęstość niech wynosi $\underline{j}_p$. W takim razie ogólniejszą postacią prawa (U2.3) będzie

$$\int_C \underline{H}\,\underline{dl} = \int_S (\underline{j} + \underline{j}_p)\,\underline{dS}. \qquad \text{(U2.4)}$$

Całka z lewej strony jest całką krzywoliniową wzdłuż konturu zamkniętego C, z prawej natomiast mamy całkę powierzchniową po powierzchni S, rozpiętej na C.

ii. Wyrażenie z lewej strony (U2.4)

$$F_m = \int_C \underline{H}\,\underline{dl}, \qquad \text{(U2.5)}$$

jest zwane siłą magnetomotoryczną. Jest to wielkość analogiczna do siły elektromotorycznej w obwodach elektrycznych i bywa stosowana do obliczeń technicznych obwodów magnetycznych. Między siłą magnetomotoryczną i strumieniem magnetycznym Φ istnieje związek analogiczny do prawa Ohma

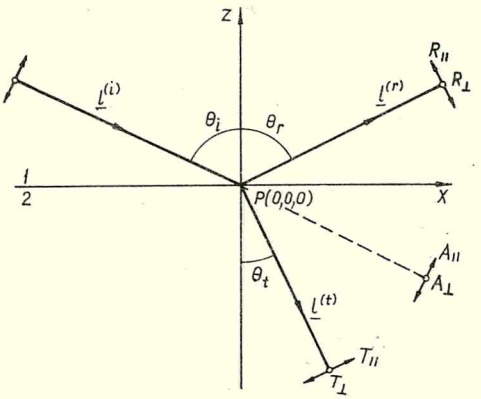
$$\Phi = \frac{F_m}{R_m}, \qquad \text{(U2.6)}$$

gdzie R_m jest oporem magnetycznym.

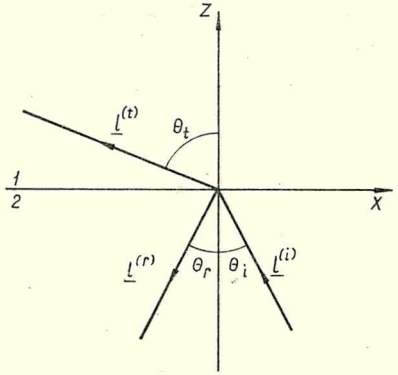
U 3. PRAWA ODBICIA I ZAŁAMANIA FALI ELEKTROMAGNETYCZNEJ

Jeśli na granicę rozdziału dwóch jednorodnych, lecz o różnych własnościach optycznych ośrodków, pada fala elektromagnetyczna, to musi ona ulec podziałowi na dwie fale: odbitą i załamaną. Pojawienie się dwóch fal jest koniecznością, wynikającą z zasady ciągłości składowych wektorów $\underline{E}$, $\underline{H}$, $\underline{D}$ i $\underline{B}$ podczas przechodzenia przez granicę rozdziału. Zasada ta, której słuszności nie będziemy tu dowodzili, brzmi następująco:

Podczas przechodzenia fali elektromagnetycznej przez granicę dwóch ośrodków nieprzewodzących jest zachowana ciągłość stycznych do granicy składowych wektorów $\underline{E}$ i $\underline{H}$ oraz ciągłość składowych normalnych $\underline{D}$ i $\underline{B}$. Zadada ta oznacza, że dla wiązki promieniowania nie ulega zmianie składowa styczna wektorów $\underline{E}$ i $\underline{H}$ podczas przechodzenia przez granicę faz; podobnie ciągłość zachowuje składowa normalna wektorów $\underline{D}$ i $\underline{B}$.



Rys. U3-1



Rys. U3-2

Przypuśćmy, że w ośrodku 1 rozchodzi się płaska fala elektromagnetyczna w kierunku wektora jednostkowego $\underline{l}^{(i)}$, normalnego do płaszczyzny jednakowej fazy; wskaźnik i oznacza falę padającą. Jeśli znamy wychylenie $\underline{A}(t)$ w określonym punkcie ośrodka, to wychylenie w innym punkcie, odległym od poprzedniego o $\underline{r}$ wynosi $\underline{A}\,(t - r \cdot l/v)$, gdzie v jest fazową prędkością fali w tym ośrodku (por. pkt 9.7). Wybierzmy interesujący nas punkt na granicy rozdziału dwóch ośrodków W tym punkcie fazy drgań fali padającej i, odbitej r, i załamanej t będą jednakowe, czyli

$$t - \frac{\underline{r}\cdot\underline{l}^{(i)}}{v_1} = t - \frac{\underline{r}\cdot\underline{l}^{(r)}}{v_1} = t - \frac{\underline{r}\cdot\underline{l}^{(t)}}{v_2}, \qquad \text{(U3.1)}$$

przy czym v_2 oznacza prędkość fazową fali w ośrodku 2.

Przy orientacji układu współrzędnych pokazanej na rys. U3.1 wektor $\underline{r}$ wybranego punktu ma składowe $\underline{r}\,(x,y,o)$, wobec czego (U3.1) możemy rozpisać w następujący sposób:

$$\frac{xl_x^{(i)} + yl_y^{(i)}}{v_1} = \frac{xl_x^{(r)} + yl_y^{(r)}}{v_1} = \frac{xl_x^{(t)} + yl_y^{(t)}}{v_2} \qquad \text{(U3.2)}$$

Równości (U3.2) mają być spełnione dla dowolnych x,y; możliwe jest to tylko wówczas, gdy

$$\frac{l_x^{(i)}}{v_1} = \frac{l_x^{(r)}}{v_1} = \frac{l_x^{(t)}}{v_2} \quad \text{oraz} \quad \frac{l_y^{(i)}}{v_1} = \frac{l_y^{(r)}}{v_1} = \frac{l_y^{(t)}}{v_2}. \tag{U3.3}$$

Płaszczyzna, przechodząca przez $\underline{l}^{(i)}$ oraz normalną do granicy faz, jest zwana płaszczyzną padania. Równości (U3.3) wskazują, że wektory $\underline{l}^{(r)}$ i $\underline{l}^{(t)}$, czyli promień odbity i załamany, również leżą w tej płaszczyźnie. Jeśli przez θ_i, θ_r i θ_t oznaczymy kąty padania, odbicia i załamania (rys. U3-1), przy czym wszystkie są mierzone względem normalnej do granicy obu ośrodków (oś z), wówczas składowe wektorów $\underline{l}$ możemy wyrazić w następujący sposób:

	x	y	z
$\underline{l}^{(i)}$	$\sin\theta_i$	0	$-\cos\theta_i$
$\underline{l}^{(r)}$	$\sin\theta_r$	0	$\cos\theta_r$
$\underline{l}^{(t)}$	$\sin\theta_t$	0	$-\cos\theta_t$

(U3.4)

dla fali biegnącej z ośrodka 1. do 2. Dla fali biegnącej odwrotnie, tj. z ośrodka 2. do 1., cosinusy kierunkowe wszystkich wektorów $\underline{l}$ zmieniają znak (rys. U3-2):

	x	y	z
$\underline{l}^{(i)}$	$-\sin\theta_i$	0	$\cos\theta_i$
$\underline{l}^{(r)}$	$-\sin\theta_r$	0	$-\cos\theta_r$
$\underline{l}^{(t)}$	$-\sin\theta_t$	0	$\cos\theta_t$

(U3.5)

Podstawienie (U3.4) do (U3.3) prowadzi do następującej równości

$$\frac{\sin\theta_i}{v_1} = \frac{\sin\theta_r}{v_1} = \frac{\sin\theta_t}{v_2}. \tag{U3.6}$$

Wynika z tego, iż

$$\theta_i = \theta_r \tag{U3.7}$$

oraz

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \tag{U3.8}$$

Wyrażenia (U3.7) oraz (U3.8) są znane jako prawa Snelliusa. n_1 i n_2 w (U3.8) oznaczają bezwzględne współczynniki załamania światła obu ośrodków (względem próżni), n_{21} zaś jest względnym współczynnikiem załamania światła ośrodka 2. względem 1. W drugiej części równania (U3.8) skorzystaliśmy ze wzoru (9.59). Jeśli $n_2 > n_1$, to ośrodek 2. jest optycznie gęstszy od ośrodka 1. Załamanie promienia zachodzi wówczas w kierunku ku prostopadłej padania, a ponieważ

$$\sin \theta_t = \frac{1}{n_{21}} \sin \theta_i < \sin \theta_i,$$

więc dla każdego kąta padania istnieje promień załamany.

Nie jest to słuszne, jeśli odwrócimy bieg wiązki. W tym przypadku współczynnik załamania światła n_{12}

$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n_{21}} < 1$$

jest mniejszy od jedności. Istnieje wobec tego kąt padania $\bar{\theta}_i$, zwany kątem krytycznym, taki że

$$\sin \bar{\theta}_i = n_{12}. \qquad \text{(U3.9)}$$

Jeśli $\theta_i = \bar{\theta}_i$, to $\theta_t = 90^\circ$, czyli promień załamany ślizga się wzdłuż powierzchni rozdziału obu ośrodków. Zjawisko to nosi nazwę całkowitego wewnętrznego odbicia. Przy kącie $\theta_i > \bar{\theta}_i$ promieniowanie nie wchodzi do ośrodka 1. Ściślej biorąc, natężenie pola elektromagnetycznego w ośrodku 1. jest wówczas różne od zera, nie przepływa jedynie strumień energii przez granicę faz. Aby to pokazać załóżmy, że dla $\theta_i > \bar{\theta}_i$

$$\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{n}, \quad \cos \theta_t = -i \left(\frac{\sin^2 \theta_i}{n^2} - 1\right)^{1/2}, \qquad \text{(U3.10)}$$

przy czym opuściliśmy wskaźniki przy n, z dwóch możliwych wartości cos θ_t wzięliśmy natomiast tylko ujemną, ponieważ dodatnia - jak zobaczymy - nie ma sensu fizycznego. Oczywiście dla $\theta_i > \bar{\theta}_i$ będzie $(\sin \theta_i / n) > 1$, co oznacza, iż z (U3.10) nie możemy obliczyć kąta załamania θ_t. Korzystając z (U3.10) możemy napisać równanie fali załamanej w postaci:

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{A}_0 e^{i\omega(t-\underline{r}\cdot\underline{l}/v)} = \qquad \text{(U3.11)}$$

$$= \underline{A}_0 e^{i\omega\{t-(x \sin \theta_i)/(nv_2)\}} \, e^{-(\omega z/v_2)\{(\sin^2 \theta_i/n^2)-1\}^{1/2}}$$

Wyrażenie (U3.11) przedstawia falę niejednorodną. Rozchodzi się ona bowiem w kierunku x, tj. stycznie do płaszczyzny rozdziału, lecz

jej amplituda maleje wykładniczo wraz z głębokością z w ośrodku optycznie rzadszym (1). Widać obecnie, iż dodatnia wartość $\cos\theta_t$ w (U3.10) nie ma sensu fizycznego, gdyż w tym przypadku amplituda fali wzrastałaby nieograniczenie w miarę wnikania w ośrodek 1. Ponieważ czynnik $\{(\sin^2\theta_i)/n^2 - 1\}^{1/2}$ jest rzędu jedności, efektywna głębokość wnikania fali do ośrodka 1 jest więc rzędu

$$z_{ef} = \frac{v_2}{\omega} = \frac{\lambda_2}{2\pi}, \qquad \text{(U3.11)}$$

czyli rzędu długości fali promieniowania w ośrodku 2.

U 4. WZORY FRESNELA

Zajmiemy się obecnie amplitudą fali odbitej i załamanej. Założymy przy tym, że oba ośrodki są nieprzewodzące i niemagnetyczne ($\mu_1 = \mu_2 \cong 1$). Amplituda fali padającej A zależy od fazy fali (rys. U3-1)

$$\varphi_i = \omega\left(t - \frac{\underline{r}\cdot\underline{l}^{(i)}}{v_1}\right) = \omega\left(t - \frac{x\sin\theta_i - z\cos\theta_i}{v_1}\right) \qquad \text{(U4.1)}$$

Rozłóżmy każdy z wektorów na składową leżącą w płaszczyźnie padania (wskaźnik $\parallel$) i składową do niej prostopadłą (wskaźnik $\perp$). Mamy więc dla fali padającej składowe amplitudy $A_\parallel$ i $A_\perp$; dla fali odbitej $R_\parallel$ i $R_\perp$, wreszcie dla fali załamanej $T_\parallel$ i $T_\perp$. Wobec tego składowe wektora $\underline{E}^{(i)}$ wynoszą:

$$E_x^{(i)} = A_\parallel \cos\theta_i\, e^{i\varphi_i}; \quad E_y^{(i)} = A_\perp e^{i\varphi_i}, \qquad E_z^{(i)} = A_\parallel \sin\theta_i\, e^{i\varphi_i}. \qquad \text{(U4.2)}$$

W celu znalezienia składowych $\underline{H}$ zauważmy, iż według (9.51)

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_o v}(\underline{l} \times \underline{E}).$$

Wobec tego

$$H_x^{(i)} = \frac{1}{\mu_o v_1}\left\{l_y^{(i)} E_z^{(i)} - l_z^{(i)} E_y^{(i)}\right\} = \frac{1}{\mu_o v_1} A_\perp \cos\theta_i\, e^{i\varphi_i},$$

$$H_y^{(i)} = \frac{1}{\mu_o v_1}\left\{l_z^{(i)} E_x^{(i)} - l_x^{(i)} E_z^{(i)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\mu_o v_1}\left\{-\cos\theta_i A_\parallel \cos\theta_i - \sin\theta_i A_\parallel \sin\theta_i\right\} e^{i\varphi_i} =$$

$$= -\frac{1}{\mu_o v_1} A_\parallel e^{i\varphi_i} \qquad \text{(U4.3)}$$

$$H_z^{(i)} = \frac{1}{\mu_o v_1}\left\{ l_x^{(i)} E_y^{(i)} - l_y^{(i)} E_x^{(i)} \right\} = \frac{1}{\mu_o v_1} A_\perp \sin\theta_i \, e^{i\varphi_i},$$

gdzie

$$\varphi_i = \omega\left(t - \frac{\underline{r}\cdot\underline{l}^{(i)}}{v_1}\right) = \omega\left(t - \frac{x\sin\theta_i - z\cos\theta_i}{v_1}\right). \qquad \text{(U4.4)}$$

W dalszym ciągu

$$E_x^{(r)} = -R_\parallel \cos\theta_r \, e^{i\varphi_r}, \quad E_y^{(r)} = R_\perp e^{i\varphi_r},$$

$$E_z^{(r)} = R_\parallel \sin\theta_r \, e^{i\varphi_r} \qquad \text{(U4.5)}$$

oraz

$$H_x^{(r)} = \frac{1}{\mu_o v_1}\left\{ l_y^{(r)} E_z^{(r)} - l_z^{(r)} E_y^{(r)} \right\} = -\frac{1}{\mu_o v_1} R_\perp \cos\theta_r \, e^{i\varphi_r},$$

$$H_y^{(r)} = \frac{1}{\mu_o v_1}\left\{ l_z^{(r)} E_x^{(r)} - l_x^{(r)} E_z^{(r)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\mu_o v_1}\left\{ -\cos\theta_r R_\parallel \cos\theta_r - \sin\theta_r R_\parallel \sin\theta_r \right\} e^{i\varphi_r} = \qquad \text{(U4.6)}$$

$$= -\frac{1}{\mu_o v_1} R_\parallel e^{i\varphi_r},$$

$$H_z^{(r)} = \frac{1}{\mu_o v_1}\left\{ l_x^{(r)} E_y^{(r)} - l_y^{(r)} E_x^{(r)} \right\} = \frac{1}{\mu_o v_1} R_\perp \sin\theta_r \, e^{i\varphi_r},$$

gdzie

$$\varphi_r = \omega\left(t - \frac{\underline{r}\cdot\underline{l}^{(r)}}{v_1}\right) = \left(t - \frac{x\sin\theta_r + z\cos\theta_r}{v_1}\right). \qquad \text{(U4.7)}$$

W końcu

$$E_x^{(t)} = T_\parallel \cos\theta_t \, e^{i\varphi_t}, \quad E_y^{(t)} = T_\perp e^{i\varphi_t},$$

$$E_z^{(t)} = T_\parallel \sin\theta_t \, e^{i\varphi_t} \qquad \text{(U4.8)}$$

oraz

$$H_x^{(t)} = \frac{1}{\mu_o v_2} T_\perp \cos\theta_t \, e^{i\varphi_t},$$

$$H_y^{(t)} = -\frac{1}{\mu_o v_2} T_\parallel e^{i\varphi_t}, \qquad \text{(U4.9)}$$

$$H_z^{(t)} = \frac{1}{\mu_o v_2} T_\perp \sin\theta_t \, e^{i\varphi_t},$$

gdzie

$$\varphi_t = \omega\left(t - \frac{\underline{r}\cdot\underline{l}^{(t)}}{v_2}\right) = \omega\left(t - \frac{x \sin\theta_t - z\cos\theta_t}{v_2}\right). \quad \text{(U4.10)}$$

Do obliczonych amplitud $\underline{E}$ i $\underline{H}$ zastosujemy obecnie warunki ciągłości w postaci

$$E_x^{(i)} + E_x^{(r)} = E_x^{(t)}, \quad E_y^{(i)} + E_y^{(r)} = E_y^{(t)}, \quad \text{(U4.11)}$$

$$H_x^{(i)} + H_x^{(r)} = H_x^{(t)}, \quad H_y^{(i)} + H_y^{(r)} = H_y^{(t)}, \quad \text{(U4.12)}$$

pamiętając, że dotyczą one składowych stycznych $\underline{E}$ i $\underline{H}$ w punkcie P(000). W tym punkcie wszystkie czynniki fazowe skracają się do $e^{i\omega t}$; ponieważ równości (U4.11) i (U4.12) są względem tych czynników jednorodne, możemy je opuścić. Liczba równań napisana na podstawie warunków ciągłości wynosi 4 - tyle akurat potrzeba do obliczenia czterech amplitud: $R_\parallel$, $R_\perp$, $T_\parallel$, i $T_\perp$, jeśli $A_\parallel$ i $A_\perp$ - jak zwykle - przyjmiemy za znane.

Równania te mają postać następującą

$$\begin{aligned} &\cos\theta_i(A_\parallel - R_\parallel) = \cos\theta_t\, T_\parallel \\ &n_1(A_\parallel + R_\parallel) = n_2\, T_\parallel \\ &A_\perp + R_\perp = T_\perp \\ &n_1\cos\theta_i(A_\perp - R_\perp) = n_2\cos\theta_t\, T_\perp \end{aligned} \quad \text{(U4.13)}$$

W zapisie równań (U4.13) skorzystaliśmy z następujących równości

$$\theta_i = \theta_r, \quad \frac{c}{v_i} = n_i.$$

Układ (U4.13) przedstawia cztery równania o czterech niewiadomych i może być rozwiązany jednoznacznie. Widać jednak, iż dwa równania zawierają jedynie składowe A, R, T, równoległe do płaszczyzny padania, a następne dwa składowe do niej prostopadłe. Fale obu tych typów są zatem od siebie niezależne. Można wobec tego układ (U4.13) rozbić na dwa układy o dwóch niewiadomych, których rozwiązanie nie przedstawia trudności. Wyniki rozwiązania są następujące

$$\begin{aligned} R_\parallel &= \frac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} A_\parallel; \quad R_\perp = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} A_\perp \\ T_\parallel &= \frac{2\, n_1\cos\theta_i}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} A_\parallel; \quad T_\perp = \frac{2\, n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} A_\perp \end{aligned} \quad \text{(U4.14)}$$

Równania (U4.14) noszą nazwę wzorów Fresnela i określają wielkość amplitudy monochromatycznej fali elektromagnetycznej odbitej (lub załamanej) w płaszczyźnie padania lub prostopadle do niej w zależności od współczynników załamania światła, kąta padania, kąta załamania i amplitudy fali padającej.

Oprócz (U4.14), równania Fresnela pisze się często w trochę innej postaci, otrzymanej z (U4.14), przy zastosowaniu prawa załamania światła (U3.8):

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)} A_{\parallel}, \qquad R_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{(\sin\theta_i + \theta_t)} A_{\perp},$$

$$T_{\parallel} = \frac{2 \sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} A_{\parallel}, \qquad T_{\perp} = \frac{2 \sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp}. \tag{U4.15}$$

Wzory Fresnela były jednym z pierwszych i ważniejszych historycznie dowodów elektromagnetycznej teorii światła. Okazało się później, iż wzorów tych nie można stosować wtedy, gdy zachodzi odbicie i załamanie wiązki promieniowania o bardzo dużym natężeniu. Wiązki takie są emitowane przez współczesne źródła laserowe.

Pole elektromagnetyczne osiąga w wiązce laserowej dużej mocy wartości porównywalne z polem wewnątrz atomu lub cząsteczki. Powoduje to, iż indukowany w atomie moment dipolowy jest nieliniową funkcją $\underline{E}$, wobec czego również równanie Maxwella, opisujące rozchodzenie się takiej fali w ośrodku staje się nieliniowe. W tych warunkach odbiciu i załamaniu światła towarzyszą nowe zjawiska, np. w obu graniczących z sobą ośrodkach powstają fale o częstościach harmonicznych (2ν, 3ν, ...) w stosunku do częstości fali padającej (ν).

Na zakończenie rozważmy jeszcze dwa proste przypadki zastosowania równań Fresnela.

1. Przypadek normalnego padania fali elektromagnetycznej na granicę rozdziału dwóch ośrodków niemagnetycznych i nieprzewodzących. Mamy w tym przypadku $\theta_i = 0$ i oczywiście $\theta_t = 0$ oraz:

$$R_{\parallel} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} A_{\parallel} = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}\right) A_{\parallel},$$

$$R_{\perp} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} A_{\perp} = -\left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}\right) A_{\perp}, \tag{U4.16}$$

$$T_{\parallel} = \frac{2\,n_1}{n_2 + n_1} A_{\parallel} = \left(\frac{2}{n_{21} + 1}\right) A_{\parallel}$$
$$T_{\perp} = \frac{2\,n_1}{n_1 + n_2} A_{\perp} = \left(\frac{2}{n_{21} + 1}\right) A_{\perp}. \qquad \text{(U4.16)}$$

Wzory te stanowią punkt wyjścia do obliczenia współczynników odbicia przy padaniu normalnym, podanych w pkcie 9.9. Zauważmy, iż gdyby fala padająca była spolaryzowana w ten sposób, np. że $A_{\parallel} = 0$, $A_{\perp} \neq 0$, czyli drgania wektora $\underline{E}$ następują prostopadle do płaszczyzny padania, wówczas również w fali odbitej i załamanej będzie $R_{\parallel} = 0$ i $R_{\perp} \neq 0$ oraz $T_{\parallel} = 0$ i $T_{\perp} \neq 0$. Oznacza to, że w zjawisku odbicia i załamania stan polaryzacji ulega zachowaniu.

2. Przypuśćmy obecnie, że fala padająca nie jest spolaryzowana, lecz że

$$\theta_i + \theta_t = 90^{\circ}, \qquad \text{(U4.17)}$$

tj. promień padający i załamany tworzą razem kąt prosty. Wówczas $\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t) = \infty$, $\sin(\theta_i + \theta_t) = 1$, a z (U4.15) wynika, że

$$R_{\parallel} = 0, \quad R_{\perp} = A_{\perp} \sin 2\theta_i \neq 0.$$

Oznacza to, iż w promieniu odbitym wektor $\underline{E}$ nie może mieć składowej leżącej w płaszczyźnie odbicia, czyli po odbiciu fala jest całkowicie spolaryzowana, a wektor $\underline{E}$ drga w kierunku prostopadłym do płaszczyzny padania. W tych warunkach prawo załamania światła prowadzi do znanego warunku Brewstera dla kąta padania, odpowiadającego całkowitej polaryzacji (por. 9.61).

SPIS RZECZY