POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

XV·2

WITOLD WIERZBICKI

O geometrycznych metodach badania konstrukcji prętowych

WARSZAWA 1955

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

ZAWIERAJĄ PRACE BADAWCZE Z ZAKRESU TEORII SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMODYNAMIKI ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW KONSTRUKCJI

Adres Redakcji
WARSZAWA, ul. Śniadeckich 8, I p.

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

WITOLD WIERZBICKI

O GEOMETRYCZNYCH METODACH BADANIA KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XV•2

WARSZAWA 1955
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE (XV·2)

Nakład 1500+146 nadb. Papier druk. sat. kl. III 70 g. 70x100/16, Arkuszy wydawn. 4,5. Arkuszy druk. 4.
Oddano do składania dn. 5.III 1955 r. Druk ukończ. w lipcu 1955. Zam. 98. B-6-51108 Cena zł. 9.—

Stoł. Zakł. Graf., Drukarnia Naukowa. Warszawa, Śniadeckich 8.

I. ISTOTA ZAGADNIENIA

Mechanikę budowli można oprzeć — poza prawem Hooke'a lub innym założeniem zastępującym to prawo — na jednej z dwóch podstawowych zasad mechaniki ogólnej — na zasadzie prac wirtualnych lub na regule równoległoboku sił.

Pierwszej z tych zasad brak niewątpliwie sugestywności, cechuje ją za to całkowita ogólność, druga natomiast jest bardzo przekonywająca swoją prostotą, przejrzystością i oczywistością, ogólność jej jest jednak mniej wyraźna. Aby uznać regułę równoległoboku sił za możliwy punkt wyjścia wszystkich poczynań mechaniki budowli, należy zdać sobie sprawę z tego, że na równoległoboku sił oparta jest teoria wieloboku sznurowego, z której wywodzą się z kolei wszystkie nieomal wchodzące tu w grę twierdzenia mechaniki ciał sztywnych, a więc reguła momentów, równanie krzywej sznurowej itd.

Zasada prac wirtualnych prowadzi bezpośrednio do metod analitycznych, reguła równoległoboku sił — do geometrycznych sposobów obliczeń. W dalszym rozwoju metod mechaniki budowli podobny podział staje się już mniej wyraźny.

Celem niniejszej pracy jest wykazać, w jaki sposób główne zadania mechaniki budowli mogą być rozwiązywane za pomocą metod wywodzących się z reguły równoległoboku sił.

W układach prętowych w znacznie większym stopniu niż w układach pełnych występują różnice w stosowaniu metod opartych na zasadzie prac wirtualnych i w stosowaniu geometrycznych sposobów badania konstrukcji. Stąd w pracy niniejszej omawiane są właśnie konstrukcje prętowe.

Spośród czynników obliczeniowych dotyczących konstrukcji wykonanych z materiałów sprężystych główne miejsce w mechanice budowli zajmują obliczenia odkształceń i wielkości statycznie niewyznaczalnych. Toteż o nich tu przede wszystkim będzie mowa. W związku z tym dalej omówione zostaną, z jednej strony, przesunięcia węzłów kratownicy i odkształcenia belek i ram, z drugiej zaś, wyznaczenie wielkości nadliczbowych w belkach i ramach. Wyznaczenie wielkości nadliczbowych w kratownicach nie jest poruszane wobec tego, że odbywa się ono często na podstawie wzoru Maxwella i Mohra, do którego w ten sam sposób

doprowadza traktowanie zagadnień mechaniki budowli z punktu widzenia zasady prac wirtualnych, jak i z punktu widzenia reguły równoległoboku sił. Przedstawione jest tu natomiast zastosowanie wyników otrzymanych przy badaniu odkształceń kratownic do wyprowadzenia równań energii sprężystej używanych w mechanice budowli.

Rozprawa niniejsza oparta jest w znacznym stopniu na następujących publikacjach autora:

(1) *Geometryczne uzasadnienie wzoru na przesunięcia węzłów kratownic*, Przegląd Techniczny, Warszawa 1930,

(2) *Obliczenie ramownicy czteroprzęsłowej o końcach przesuwnych*, Przegląd Techniczny, Warszawa 1930,

(3) *Rozwiązanie ramy wielobocznej przy zastosowaniu równań różnicowych*, *Czasopismo Techniczne*, Lwów 1932,

(4) *O zastosowaniu teorii kraty do wyprowadzenia równań energii sprężystej*, Lwów 1932,

(5) *W sprawie wyznaczania ugięć wspornika sposobem momentów wtórnych*, Prace Warsz. Tow. Pol., 1933,

(6) *Zagadnienie zmienności przekrojów w konstrukcjach żelbetowych*, Cement, Warszawa 1933.

Przed zastosowaniem tych publikacji do dalszych wywodów zostały one zanalizowane z punktu widzenia dzisiejszych potrzeb budownictwa.

II. UKŁADY PRĘTÓW ROZCIĄGANO-ŚCISKANYCH

1. Uzasadnienie wzoru Maxwella i Mohra dla kratownic

Przesunięcia węzłów kratownic przegubowych znajdujących się pod działaniem pewnych sił zewnętrznych bywają wyznaczane bądź bezpośrednio jednym ze sposobów wykreślnych (najczęściej sposobem Williota), bądź też ze wzoru Maxwella i Mohra

$$v_m = \sum_1^r \frac{SZl}{EA}, \tag{1}$$

w którym v_m oznacza przesunięcie węzła m w pewnym kierunku, S siły w poszczególnych prętach kratownicy, Z siły, które działałyby w tych prętach, gdyby w węźle m była zaczepiona siła równa 1 i mająca kierunek przesunięcia v_m, wreszcie EA iloczyn współczynnika sprężystości przez pole przekroju pręta i l długość pręta. Suma dotyczy wszystkich prętów kratownicy.

Wzór (1) zostanie niżej uzasadniony na podstawie rozważań o charakterze geometrycznym. Ogólny bieg postępowania będzie następujący.

Zakładamy, że jeden tylko z prętów kratownicy (pręt $i\,j$) uległ zmianie długości, i twierdzimy, że wówczas przesunięcie węzła m wyraża się wzorem

$$v_m = Z_{ij}\,\Delta l_{ij}\,, \tag{2}$$

gdzie przez Δl_{ij} oznaczamy przyrost długości pręta $i\,j$ nie robiąc przy tym żadnych założeń co do natury tego przyrostu.

Przyjmujemy taki układ współrzędnych, aby jedna z osi była równoległa do poszukiwanego przesunięcia v_m i ustawiamy dwa następujące układy równań liniowych: układ równań

$$\left.\begin{aligned} f_{12}(\Delta x,\ \Delta y\ldots) &= 0\,,\\ f_{23}(\Delta x,\ \Delta y\ldots) &= 0\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\,, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wyrażający zależność między przyrostami współrzędnych węzłów kratownicy, obejmujących poszczególne pręty 12, 23 itd., oraz układ

$$\left.\begin{aligned} F_1(Z_{12},\ Z_{23}\ldots) &= 0\,,\\ F_2(Z_{12},\ Z_{23}\ldots) &= 0\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\,, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wyrażający warunki równowagi poszczególnych węzłów.

Rozwiązując układ równań (3) względem v_m, równego w przyjętym układzie współrzędnych jednemu z przyrostów Δx lub Δy, oraz rozwiązując układ (4) względem siły Z_{ij} działającej w pręcie $i\,j$ znajdujemy z dyskusji obu rozwiązań, że

$$\frac{v_m}{\Delta l_{ij}} = Z_{ij}, \qquad \text{czyli} \qquad v_m = Z_{ij}\,\Delta l_{ij}\,. \tag{5}$$

Ponieważ zmiana długości każdego z prętów kratownicy wywoła podobne przesunięcie węzła m, dochodzimy do wzoru

$$v_m = \sum_1^r Z\,\Delta l \tag{6}$$

lub przyjmując, że wydłużenia Δl są to wydłużenia sprężyste kratownicy równe $\Delta l = Sl/EA$, do wzoru (1).

Przystępując do obliczeń zauważamy przede wszystkim, że zależność między współrzędnymi węzłów kratownicy a długością pręta wyraża się znanym wzorem geometrii

$$l_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \tag{7}$$

lub też wzorem

$$f_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - l_{ij}^2 = 0\,. \tag{8}$$

Pochodne cząstkowe funkcyj f_{ij} względem współrzędnych przybierają postać

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} &= 2(x_i - x_j), & \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} &= -2(x_i - x_j), \\ \frac{\partial f_{ij}}{\partial y_i} &= 2(y_i - y_j), & \frac{\partial f_{ij}}{\partial y_j} &= -2(y_i - y_j). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

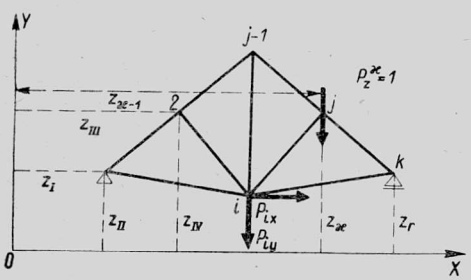
Wyznaczając przyrost Δl_{ij} z równania (7) i pomijając wyrazy 2 rzędu dochodzimy do równania

$$l_{ij}\,\Delta l_{ij} = (x_i - x_j)\,\Delta x_i - (x_i - x_j)\,\Delta x_j + (y_i - y_j)\,\Delta y_i - (y_i - y_j)\,\Delta y_j. \tag{10}$$

Po uwzględnieniu zależności (9) otrzymujemy

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j}\Delta x_j + \frac{\partial f_{ij}}{\partial y_i}\Delta y_i + \frac{\partial f_{ij}}{\partial y_j}\Delta y_j = 2\,l_{ij}\,\Delta l_{ij}. \tag{11}$$

Liczba równań typu (11) równa się liczbie prętów kratownicy r, która wynosi dla kratownicy statycznie wyznaczalnej o k węzłach $2k - 3$. Liczba niewiadomych przyrostów współrzędnych wynosi również $2k - 3$, gdyż wprawdzie całkowita liczba przyrostów równa się podwójnej liczbie węzłów, jednak dwa przyrosty odpowiadające przegubowo-nieprzesuwnej podporze kratownicy i jeden odpowiadający jej podporze przegubowo-przesuwnej równe są stale 0, niezależnie od układu współrzędnych.



Rys. 1.

Aby móc korzystać przy dyskutowaniu równań (11) z ogólnej teorii równań liniowych, nadajemy im postać ogólną. W tym celu wprowadzamy do każdego z nich wszystkie niewiadome przyrosty Δx_i, Δy_i, Δx_j, Δy_j oznaczając je niezależnie od ich kierunku przez Δz z odpowiednim numerem porządkowym I, II, ..., $\varkappa$, ..., r, przy czym z z właściwym znaczkiem wyrażać będzie współrzędne x_i, y_i, x_j, y_j odpowiednich węzłów, tzn. że np. przesunięcie $\Delta z_\varkappa$ odpowiadać będzie współrzędnej $z_\varkappa$ (rys. 1).

Współczynnikami przy niewiadomych $\Delta z_\varkappa$ przekształconych w ten sposób równań będą pochodne $\partial f_{ij}/\partial z_\varkappa$, które, jak to wynika ze wzorów (9), będą różne od zera jedynie dla przyrostów Δz współrzędnych węzłów i i j obejmujących dany pręt ij.

Możemy więc nadać równaniom (11) postać

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\mathrm{I}}}\frac{\Delta z_{\mathrm{I}}}{2l_{ij}}+\frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\mathrm{II}}}\frac{\Delta z_{\mathrm{II}}}{2l_{ij}}+\cdots+\frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\varkappa}}\frac{\Delta z_{\varkappa}}{2l_{ij}}+\cdots+\frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{r}}\frac{\Delta z_{r}}{2l_{ij}}=\Delta l_{ij}. \tag{12}$$

Przypuśćmy w dalszym ciągu, że do poszczególnych węzłów i kratownicy zaczepione zostały siły zewnętrzne P_{ix} i P_{iy} skierowane równolegle do osi współrzędnych i wywołujące w prętach ij siły S_{ij} (rys. 1).

Z warunków równowagi węzła i otrzymamy w ten sposób równania

$$\left.\begin{aligned} P_{ix}+\Sigma S_{ijx}&=0,\\ P_{iy}+\Sigma S_{ijy}&=0,\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

gdzie symbol S_{ij} ze znaczkiem x, y lub ogólnie z wyraża rzut siły działającej w danym pręcie na kierunek jednej z osi współrzędnych, a sumy dotyczą sił we wszystkich prętach S_{ij} zbiegających się w danym węźle i.

Mając na widoku zależności

$$S_{ijx}=S_{ij}\frac{x_i-x_j}{l_{ij}},\qquad S_{ijy}=S_{ij}\frac{y_i-y_j}{l_{ij}} \tag{14}$$

jako rezultaty rzutowania sił S na osi współrzędnych oraz rozważania przytoczone przy wyprowadzeniu równania (12), nadajemy równaniom (13) postać

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\varkappa}}\frac{S_{12}}{2l_{12}}+\frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\varkappa}}\frac{S_{23}}{2l_{23}}+\cdots+\frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\varkappa}}\frac{S_{ij}}{2l_{ij}}+ \tag{15}$$

$$+\cdots+\frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\varkappa}}\frac{S_{r-1,r}}{2l_{r-1,r}}=P_z^{\varkappa},$$

gdzie symbol $P_z^{\varkappa}$ oznacza siłę zewnętrzną mającą kierunek przesunięcia $v_m=\Delta z_{\varkappa}$ i zaczepioną do węzła, który tego przesunięcia doznał.

Liczba równań typu (15) równa się tak samo, jak liczba równań typu (12) liczbie r prętów kratownicy.

Przystępując do rozwiązania układu (12) r równań z r niewiadomymi typu $\Delta z_{\varkappa}/2l_{ij}$ oraz układu (15) r równań z r niewiadomymi typu $S_{ij}/2l_{ij}$ wprowadzamy następujące symbole dla wyznaczników tych równań:

$$D_z=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\varkappa}} & \cdots & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{r}} \\ \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\varkappa}} & \cdots & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\varkappa}} & \cdots & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\varkappa}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{r}} \end{vmatrix}, \tag{16}$$

$$D_s = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \cdots & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \cdots \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{I}}} \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{II}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\varkappa}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\varkappa}} & \cdots & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\varkappa}} & \cdots \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\varkappa}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial z_r} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_r} & \cdots & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_r} & \cdots \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_r} \end{vmatrix}, \tag{17}$$

$$D_z^{\varkappa} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\varkappa-1}} & \Delta l_{12} & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\varkappa+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_r} \\ \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\varkappa-1}} & \Delta l_{23} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\varkappa+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\varkappa-1}} & \Delta l_{ij} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\varkappa+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\varkappa-1}} & \Delta l_{r-1,r} & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\varkappa+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_r} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

$$D_s^{ij} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & P_z' & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{I}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \frac{\partial f_{i-1,r}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & P_z'' & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{II}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\varkappa}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\varkappa}} & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_{\varkappa}} & P_z^{\varkappa} & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_{\varkappa}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\varkappa}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial z_r} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_r} & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_r} & P_z^r & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_r} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_r} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Wobec przyjętych oznaczeń otrzymujemy na podstawie teorii równań liniowych rozwiązania następujące:

$$\frac{\Delta z_{\varkappa}}{2 l_{ij}} = \frac{D_z^{\varkappa}}{D_z}, \tag{20}$$

$$\frac{S_{ij}}{2 l_{ij}} = \frac{D_s^{ij}}{D_s}. \tag{21}$$

Rozpatrzmy obecnie otrzymane rozwiązania w założeniu:

(1) że w omawianej kratownicy jedynie długość pręta l_{ij} ulega zmianie, że więc przyrosty Δl dla pozostałych prętów równe są zeru,

(2) że do kratownicy zaczepiona została jedna tylko siła równa 1 i zaczepiona w kierunku przesunięcia $\Delta z_\varkappa$,

(3) że zmiana długości pręta l_{ij} powstała nie na skutek działania siły 1, lecz niezależnie od niej, w sposób zresztą zupełnie dowolny.

W związku z powyższymi założeniami w wyznaczniku (18) wszystkie wyrazy kolumny zawierającej przyrosty Δl równe są zeru z wyjątkiem wyrazu Δl_{ij}. Podobnie w wyznaczniku (19) w kolumnie zawierającej siły P_z jedynie $P_z^\varkappa = 1$ różni się od zera. Mając to na widoku przestawiamy w wyznaczniku (18) kolumnę zawierającą Δl na miejsce pierwsze, a w wyznaczniku (19) przestawiamy w ten sam sposób kolumnę zawierającą siły P_z. Tego rodzaju przestawienie wywołuje, jak wiadomo, zmianę znaków w wyznacznikach. Otrzymujemy więc

$$D_z^\varkappa = (-1)^\varkappa \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\varkappa-1}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\varkappa+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_r} \\ 0 & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\varkappa-1}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\varkappa+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta l_{ij} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\varkappa-1}} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{\varkappa+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\varkappa-1}} & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\varkappa+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_r} \end{vmatrix}, \tag{22}$$

$$D_s^{ij} = (-1)^{\varkappa+s} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \cdots & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{I}}} \\ 0 & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{II}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_\varkappa} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_\varkappa} & \cdots & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_\varkappa} & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_\varkappa} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_\varkappa} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_r} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_r} & \cdots & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_r} & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_r} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_r} \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Wyznaczniki (22) i (23) obliczamy według ogólnego wzoru

$$D = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} a_k A_k, \tag{24}$$

w którym a_k oznacza kolejne wyrazy pierwszej kolumny wyznacznika, A_k zaś odpowiednie podwyznaczniki, przy czym znak sumy dotyczy wszystkich wyrazów pierwszej kolumny wyznacznika. Mamy więc

$$D_z^x = (-1)\,\Delta l_{ij} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{x-1}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{x+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{12}}{\partial z_r} \\ \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{x-1}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{x+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_{x-1}} & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_{x+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_r} \\ \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_{x-1}} & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_{x+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{x-1}} & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{x+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_r} \end{vmatrix}, \tag{25}$$

$$D_s^{ij} = (-1) \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \cdots & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_{\mathrm{I}}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{I}}} \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_{\mathrm{II}}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{\mathrm{II}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{x-1}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{x-1}} & \cdots & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_{x-1}} & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_{x-1}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{x-1}} \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial z_{x+1}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_{x+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_{x+1}} & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_{x+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_{x+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial z_r} & \frac{\partial f_{23}}{\partial z_r} & \cdots & \frac{\partial f_{i-1,j}}{\partial z_r} & \frac{\partial f_{i+1,j}}{\partial z_r} & \cdots & \frac{\partial f_{r-1,r}}{\partial z_r} \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Porównując ze sobą wyznaczniki (16) i (17) zauważamy, że kolumny pierwszego z nich odpowiadają wierszom drugiego i na odwrót, wobec czego

$$D_z = D_s. \tag{27}$$

To samo dotyczy wyznaczników (25) i (26), czyli że

$$\frac{D_z^{\varkappa}}{\Delta l_{ij}} = D_s^{ij}. \tag{28}$$

Ogólne rozwiązania (20) i (21) układów równań (12) i (15) przybierają wobec tego postać (tu będzie $S_{ij} = Z_{ij}$)

$$\frac{\Delta z_{\varkappa}}{2 l_{ij}} = \frac{D_z^{\varkappa}}{D_z}, \tag{29}$$

$$\frac{Z_{ij}}{2 l_{ij}} = \frac{D_z^{\varkappa}}{\Delta l_{ij} D_z}, \tag{30}$$

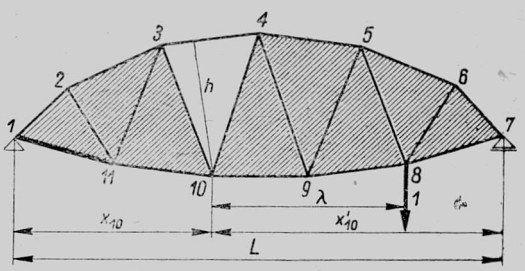
skąd mamy

$$\Delta z_{\varkappa} = v_m = Z_{ij} \Delta l_{ij}, \tag{31}$$

co było do dowiedzenia. Przejście od wzoru (31) do wzoru (1) było już omówione wyżej.

W wielu przypadkach szczególnych, mających znaczenie praktyczne dla budowy mostów i budynków, łatwo można uzasadnić wzór (31) również bez nadawania równaniom przesunięć oraz równaniom równowagi postaci ogólnych (12) i (15).

Ponieważ większość kratownic mostowych składa się z dwóch pasów i kraty, więc damy tu uzasadnienie wzoru (31) w przypadku zmiany długości jednego z prętów w pasie kratownicy tego rodzaju (rys. 2).



Rys. 2

Przypuśćmy, że skrótu Δl doznał pręt 34 górnego pasa i że chodzi o wyznaczenie pionowego przesunięcia węzła 8.

Zaczepiamy w węźle 8 pionową siłę 1 i wyznaczamy wywołaną przez nią siłę Z_{34} sposobem momentów (R i t t e r a):

$$Z_{34} = -\frac{M_{10}}{h}, \tag{32}$$

gdzie M_{10} oznacza moment zginający w punkcie 10, a h odległość punktu 10 od pręta 34.

Przyjmujemy na razie, że pręt 1, 11 przylegający do podpory nieprzesuwnej nie ulega obrotowi. W związku z tym założeniem uważamy za nieruchomą również część kratownicy 1, 2, 3, 10, 11, której pręty żadnych zmian długości nie doznały.

Na skutek skrócenia się pręta 34 o Δl część kratownicy 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 dozna obrotu względem punktu 10, przy czym węzeł 7 uniesie się nad odpowiednią podporą. Kąt tego obrotu wynosi

$$\Theta \approx \operatorname{tg}\Theta = \frac{\Delta l_{34}}{h}, \tag{33}$$

wobec czego przesunięcie pionowe węzła 7 będzie równe

$$v_7' = \Theta x_{10}'. \tag{34}$$

Jednocześnie węzeł 8 dozna przesunięcia pionowego

$$v_8' = \Theta \lambda. \tag{35}$$

Ponieważ węzeł 7 w rzeczywistości nie może unieść się nad podporą i pręt 1, 11 ulega wobec tego obrotowi, należy więc od przesunięcia v_8' odjąć przesunięcie wywołane przez obrót kratownicy względem punktu 1 o kąt

$$\omega = \frac{v_7'}{L}. \tag{36}$$

Nowe przesunięcie węzła 8 wyniesie

$$v_8'' = \omega (x_{10} + \lambda), \tag{37}$$

a więc całkowite jego przesunięcie będzie równe

$$v_8 = v_8' - v_8'' = \frac{\Delta l_{34}}{h}\lambda - \frac{\Delta l_{34} x_{10}'}{hL}(x_{10} + \lambda) = \tag{38}$$

$$= \frac{\Delta l_{34}}{h}\left(\lambda - x_{10}' \frac{x_{10} + \lambda}{L}\right) = -\frac{M_{10}}{h}\Delta l_{34}.$$

Porównując ze sobą wzory (32) i (38) otrzymujemy wreszcie

$$v_8 = Z_{34} \cdot \Delta l_{34}. \tag{39}$$

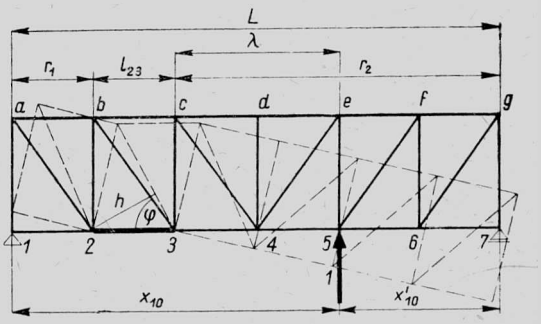
Rozpatrzymy w dalszym ciągu przypadek mający duże znaczenie w budownictwie, mianowicie przypadek belki kratowej o pasach równoległych (rys. 3). Przypuśćmy, iż wydłużeniu uległ tu krzyżulec 3 b i że chodzi o wyznaczenie pionowego przesunięcia węzła 5.

Zaczepiwszy w węźle 5 pionową siłę równą 1, skierowaną ku górze, wyznaczamy odpowiednią siłę w pręcie 3 b ze wzoru

$$Z_{3b} = -\frac{x'_{10}}{L \sin \varphi}. \tag{40}$$

Za nieruchomy przyjmujemy na razie pręt 23 dolnego pasa, co pociąga za sobą obrót części 1 ab 2 kratownicy względem węzła 2 i części 3 cg 7 względem węzła 3 o kąty równe

$$\Theta = \frac{\Delta l_{3b}}{h'} = \frac{\Delta l_{3b}}{l_{23} \sin \varphi} \tag{41}$$



Rys. 3

oraz wywołuje przesunięcia pionowe v'_1 oraz v'_7 węzłów 1 i 7 względem odpowiednich podpór.

Na podstawie rys. 3 znajdujemy, że

$$v'_1 = \Theta r_1, \qquad v'_7 = \Theta r_2. \tag{42}$$

Aby kratownica, którą myślowo oddzieliliśmy od podpór, z powrotem znalazła się na podporach, należy ją jako całość przesunąć w kierunku pionowym o v'_1 i obrócić względem punktu 1 o kąt

$$\omega = \frac{v'_1 + v'_7}{L} = \frac{\Theta (r_1 + r_2)}{L} = \frac{\Delta l_{3b} (r_1 + r_2)}{L l_{23} \sin \varphi}. \tag{43}$$

Węzeł 5 dozna wskutek obrotu części kratownicy 3 cg 7 względem węzła 3 przesunięcia w kierunku ku dołowi równego

$$v'_5 = \Theta \lambda. \tag{44}$$

Przesunięcie pionowe całej kratownicy o v'_1 wywołuje równe v'_1 przesunięcie węzła 5 ku dołowi. Wreszcie, obrót całej kratownicy o kąt ω względem podpory 1 powoduje przesunięcie węzła 5 ku górze równe

$$v''_5 = \omega x_{10}. \tag{45}$$

Całkowite pionowe przesunięcie węzła 5 wynosi wobec tego

$$v_5 = v'_5 + v'_1 - v''_5 = \Theta \lambda + \Theta r_1 - \omega x_{10} = \tag{46}$$

$$= \frac{\Delta l_{3b}}{l_{23} \sin \varphi} (\lambda + r_1) - \frac{\Delta l_{3b} x_{10} (r_1 + r_2)}{L l_{23} \sin \varphi} =$$

$$= \frac{\Delta l_{3b}}{l_{23} \sin \varphi} \left[(\lambda + r_1) - \frac{x_{10}}{L} (r_1 + r_2) \right] = \frac{\Delta l_{3b}}{l_{23} \sin \varphi} \left(\frac{x'_{10} r_1}{L} + \lambda - \frac{x_{10} r_2}{L} \right).$$

Ponieważ

$$\frac{x_{10} r_2}{L} - \lambda = \frac{x'_{10}(r_1 + l_{23})}{L}, \tag{47}$$

więc równanie (46) przybiera postać

$$v_5 = -\frac{x'_{10}}{L \sin \varphi} \Delta l_{3b}, \tag{48}$$

skąd porównując wzór ten ze wzorem (40) dochodzimy do zależności

$$v_5 = Z_{3b} \Delta l_{3b}. \tag{49}$$

W podobny sposób może być wyprowadzony wzór (49) i dla innych typów kratownic o pasach równoległych.

2. Ogólne równanie kraty

Geometryczne i kinematyczne własności kraty ujmuje w sposób najbardziej ogólny i zwięzły następujące równanie:

$$\sum_1^k Pv - \sum_1^r S \Delta l = 0; \tag{50}$$

tu v oznacza rzuty przesunięć poszczególnych węzłów kratownicy od I-go do k-go na kierunki sił P zaczepionych do tych węzłów, S siły w poszczególnych prętach kratownicy od I-go do r-go, a Δl zmiany długości odpowiednich prętów.

Uzasadnienie równania (50) oparte jest na wzorze (6), który dla poszczególnych węzłów daje wyrażenia następujące:

$$\left.\begin{aligned}
v_{\mathrm{I}} &= Z_1^{\mathrm{I}} \Delta l_1 + Z_2^{\mathrm{I}} \Delta l_2 + \cdots + Z_i^{\mathrm{I}} \Delta l_i + \cdots + Z_r^{\mathrm{I}} \Delta l_r, \\
v_{\mathrm{II}} &= Z_1^{\mathrm{II}} \Delta l_1 + Z_2^{\mathrm{II}} \Delta l_2 + \cdots + Z_i^{\mathrm{II}} \Delta l_i + \cdots + Z_r^{\mathrm{II}} \Delta l_r, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_e &= Z_1^e \Delta l_1 + Z_2^e \Delta l_2 + \cdots + Z_i^e \Delta l_i + \cdots + Z_r^e \Delta l_r, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_k &= Z_1^k \Delta l_1 + Z_2^k \Delta l_2 + \cdots + Z_i^k \Delta l_i + \cdots + Z_r^k \Delta l_r.
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Wyrażenia te mnożymy kolejno przez siły $P_{\mathrm{I}}, P_{\mathrm{II}}, \ldots, P_e, \ldots, P_k$ zaczepione odpowiednio w węzłach I, II, ..., e, ..., k i dodajemy je do siebie kolumnami:

$$\left.\begin{aligned} & P_{\mathrm{I}} v_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} v_{\mathrm{II}} + \cdots + P_e v_e + \cdots + P_k v_k = \\ & = (Z_1^{\mathrm{I}} P_{\mathrm{I}} + Z_1^{\mathrm{II}} P_{\mathrm{II}} + \cdots + Z_1^e P_e + \cdots + Z_1^k P_k) \Delta l_1 + \\ & + (Z_2^{\mathrm{I}} P_{\mathrm{I}} + Z_2^{\mathrm{II}} P_{\mathrm{II}} + \cdots + Z_2^e P_e + \cdots + Z_2^k P_k) \Delta l_2 + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (Z_i^{\mathrm{I}} P_{\mathrm{I}} + Z_i^{\mathrm{II}} P_{\mathrm{II}} + \cdots + Z_i^e P_e + \cdots + Z_i^k P_k) \Delta l_i + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (Z_r^{\mathrm{I}} P_{\mathrm{I}} + Z_r^{\mathrm{II}} P_{\mathrm{II}} + \cdots + Z_r^e P_e + \cdots + Z_r^k P_k) \Delta l_r . \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Sumy zawarte tu w nawiasach wyrażają siły w prętach kratownicy 1, 2, ..., i, ..., r (por. p. 2 tego rozdziału), a więc

$$\left.\begin{aligned} & Z_1^{\mathrm{I}} P_{\mathrm{I}} + Z_1^{\mathrm{II}} P_{\mathrm{II}} + \cdots + Z_1^e P_e + \cdots + Z_1^k P_k = S_1 , \\ & Z_2^{\mathrm{I}} P_{\mathrm{I}} + Z_2^{\mathrm{II}} P_{\mathrm{II}} + \cdots + Z_2^e P_e + \cdots + Z_2^k P_k = S_2 , \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

W ten sposób wyrażenie (52) przybiera postać

$$\sum_1^k P v = P_{\mathrm{I}} v_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} v_{\mathrm{II}} + \cdots + P_e v_e + \cdots + P_k v_k = \tag{54}$$

$$= S_1 \Delta l_1 + S_2 \Delta l_2 + \cdots + S_i \Delta l_i + \cdots + S_r \Delta l_r = \sum_1^r S \Delta l ,$$

czyli postać poszukiwanego równania (50), które w mechanice ogólnej odpowiada równaniu prac wirtualnych.

Podkreślić należy, że w równaniu tym ani wielkości Δl, ani wielkości v nie są w ogólnym wypadku zależne od sił P lub S; wielkości Δl mogą więc np. mieć charakter termiczny, sprężysty lub też mogą wyrażać różnicę długości dwóch prętów, z których jeden zastąpił drugi w układzie kratowym. Natomiast siły P i S tworzą tu układy sił od siebie zależne, a również przesunięcia v i Δl są od siebie wzajemnie uzależnione.

W pierwszej sumie równania (50) zwroty sił P odpowiadają zwrotom przesunięć v, a w drugiej, podobnie jak we wzorze (6) poprzedniego paragrafu, siły rozciągające odpowiadają wydłużeniom Δl, a siły ściskające skróceniom.

III. UKŁADY PRĘTÓW ZGINANYCH

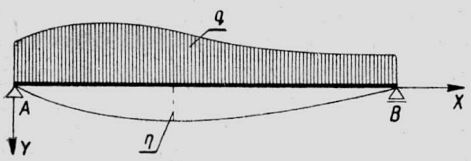
1. Metoda momentów wtórnych

Wywodząca się z reguły równoległoboku sił teoria wieloboku sznurowego doprowadza do równania różniczkowego krzywej sznurowej

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{q}{H}, \tag{55}$$

gdzie H oznacza odległość biegunową wieloboku sił odpowiadającego krzywej sznurowej.

Krzywą sznurową, szczególny przypadek wieloboku sznurowego, traktujemy w danym razie jako krzywą zamkniętą, gdyż belka pod działaniem obciążenia q i reakcji podpór znajduje się w równowadze. Jeżeli za prostą zamykającą będziemy uważali oś belki, to otrzymamy układ przedstawiony na rys. 4, gdzie q oznacza obciążenie jednostkowe w dowolnym punkcie belki, η rzędną krzywej sznurowej. Odcinek η w pewnym przekroju $\alpha\alpha$ belki pomnożony przez H wyraża moment sił zaczepionych do belki na przestrzeni $A\alpha$, czyli moment zginający M_α; a więc



Rys. 4

$$M_\alpha = \eta H. \tag{56}$$

Gdybyśmy wykresowi obciążeń jednostkowych q nadali kształt wykresu momentów zginających M podzielonych przez 1 cm^2, a odległości biegunowej H wartość EJ podzieloną również przez 1 cm^2, co odpowiadałoby wymiarom wielkości q i M, wówczas równanie (55) otrzymałoby postać

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}, \tag{57}$$

czyli byłoby identyczne z równaniem różniczkowym osi odkształconej belki w założeniu, że η wyraża ugięcia belki w poszczególnych przekrojach, czyli że $\eta = y$. Stąd wynika, że stosując wzór (56) do krzywej wyrażonej równaniem różniczkowym (57), a więc do obciążenia $q = M/1$ cm^2 znajdujemy

$$M'_\alpha = y\frac{EJ}{1\text{ cm}^2} \tag{58}$$

lub

$$\mathfrak{M}_\alpha = y\,EJ, \tag{59}$$

gdzie $\mathfrak{M}_\alpha = M'_\alpha \cdot 1$ cm^2 nazywamy *momentem wtórnym*.

Ze wzoru (59) wypływa bezpośrednio wzór na ugięcia belki

$$y = \frac{\mathfrak{M}}{EJ}. \tag{60}$$

Różniczkując wzór ten względem x znajdujemy, że

$$y' = \frac{1}{EJ}\frac{d\mathfrak{M}}{dx}, \tag{61}$$

skąd wynika, że kąt obrotu przekroju poprzecznego belki odpowiadającego ugięciu y, czyli kąt $\varphi = \infty \operatorname{tg} \varphi = y'$ równa się

$$\varphi = \frac{\mathfrak{T}}{EJ}, \tag{62}$$

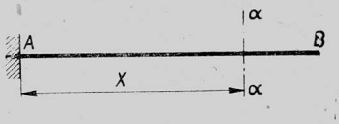
gdzie $\mathfrak{T}$ oznacza siłę poprzeczną w pewnym przekroju poprzecznym belki pomnożoną przez 1 cm^2 i nosi nazwę siły poprzecznej wtórnej. Dla ujednostajnienia sposobu wyrażania się nazywamy moment zginający M obciążeniem wtórnym i oznaczamy to obciążenie literą $\mathfrak{q}$ (dla uniknięcia nieporozumień niżej stosujemy tu symbol $\overline{q}$.

Metodę momentów wtórnych, nie używając zresztą tej nazwy, zastosował do belek w dwóch punktach swobodnie podpartych pierwszy O. Mohr. Wzory (60) i (62) zawodzą jednak, gdy chodzi o wspornik, tzn. o belkę w jednym końcu utwierdzoną, a w drugim swobodną (rys. 5). W tych wypadkach wzory (60) i (62) powinny być zastąpione przez wzory

$$y = \frac{\mathfrak{M}'}{EJ}, \tag{63}$$

$$\varphi = \frac{\mathfrak{T}'}{EJ}, \tag{64}$$

gdzie $\mathfrak{M}'$ oznacza moment statyczny obciążenia wtórnego zawartego między podporą A a danym przekrojem aa względem środka tego przekroju, a $\mathfrak{T}'$ — wypadkową tegoż obciążenia.



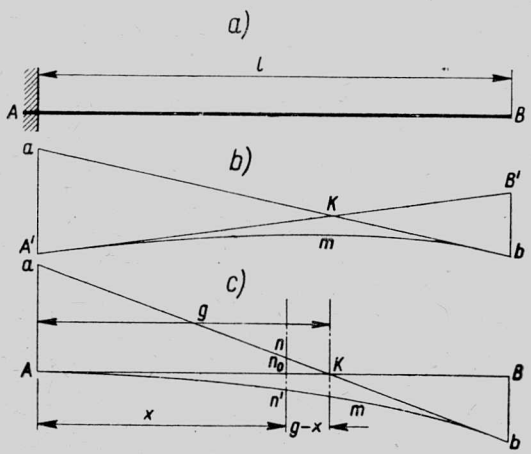
Rys. 5

Podajemy niżej uzasadnienie wzorów (63) i (64) dla dowolnego obciążenia wspornika.

Przypuśćmy, że dla belki przedstawionej na rys. 6a, w dowolny sposób obciążonej, został sporządzony wykres momentów zginających i że uważając ten wykres za wykres obciążenia sporządziliśmy dla odległości biegunowej EJ krzywą sznurową $A'mb$ (rys. 6b), której rzędne η liczone są od prostej ab, stycznej do tej krzywej w punkcie b.

Rzędne tej samej krzywej liczone od prostej $A'B'$, stycznej w punkcie A', oznaczamy przez y.

O ile krzywa $A'mb$ ma wyrażać ugięcia belki, musi być ona umieszczona w ten sposób, aby styczna $A'B'$ pokryła się z nieodkształconą osią belki (rys. 6c); rzędne y byłyby wówczas rzędnymi osi odkształconej.



Rys. 6

Ponieważ możemy przyjąć, że $\cos \sphericalangle AKa = 1$, więc

$$\operatorname{tg} \sphericalangle AKa = -\eta'_A$$

i

$$\eta_A = -g\eta'_A, \tag{65}$$

gdzie η'_A oznacza wartość pochodnej funkcji η w punkcie A.

W tych warunkach dla pewnego punktu n (rys. 6c) będzie

$$\eta - y = nn_0 = -(g - x)\eta'_A. \tag{66}$$

Mnożąc wszystkie wyrazy równania (66) przez EJ mamy

$$\eta EJ - yEJ = \eta_A EJ + x\eta'_A EJ. \tag{67}$$

Ponieważ η jest odcinkiem zawartym między skrajnymi bokami wieloboku sznurowego zbudowanego dla danej belki i dla obciążenia $q = M$ przy odległości biegunowej EJ, będzie więc iloczyn ηEJ równał się momentowi zginającemu od tego obciążenia, a więc momentowi wtórnemu $\mathfrak{M}_x$:

$$\eta EJ = \mathfrak{M}_x \qquad \text{i} \qquad \eta_A EJ = \mathfrak{M}_A. \tag{68}$$

Stąd wynika, że

$$\eta' EJ = \frac{d\mathfrak{M}_x}{dx} = \mathfrak{T}_x \qquad \text{i} \qquad \eta'_A EJ = \mathfrak{A}, \tag{69}$$

gdzie $\mathfrak{T}_x$ oznacza siłę poprzeczną i $\mathfrak{A}$ reakcję podpory A od obciążenia wtórnego $q = M$.

W ten sposób równanie (67) przybiera postać

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_A + \mathfrak{A}x + yEJ. \tag{70}$$

Z drugiej strony, wyrażenie dla momentu zginającego w dowolnym przekroju nn' belki AB od obciążenia $\bar{q}$ przybiera postać

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_A + \mathfrak{A}\, x + \mathfrak{M}'_x, \tag{71}$$

gdzię $\mathfrak{M}'_x$ oznacza moment statyczny obciążenia wtórnego zawartego między podporą A a danym przekrojem, względem środka tego przekroju.

Zestawiając ze sobą wzory (70) i (71) znajdujemy, że

$$y = \frac{\mathfrak{M}'_x}{EJ}, \tag{72}$$

co było do dowiedzenia.

Różniczkując wyrażenie (72) względem x znajdujemy

$$\varphi = \frac{\mathfrak{T}'_x}{EJ}, \tag{73}$$

gdzie $\mathfrak{T}'_x$ oznacza wypadkową obciążenia wtórnego $\bar{q}$ znajdującego się między danym przekrojem a przekrojem utwierdzenia.

Sposób momentów wtórnych można zastosować i bezpośrednio do wykreślenia odkształconej; powiązanie z regułą równoległoboku jest w tym wypadku już całkowicie bezpośrednie.

Metoda momentów wtórnych może być wyzyskana nieraz do wyciągnięcia pewnych wniosków ogólnych z obliczeń statycznych. Wyzyskamy tu tę metodę do oceny wpływu zmienności przekroju poprzecznego belek statycznie niewyznaczalnych na wielkości nadliczbowe. Chodzi o belki mało odbiegające od kształtu pryzmatycznego.

Mówiąc o belkach o kształcie zbliżonym do pryzmatycznego mamy na widoku bądź belki o przekroju stałym, przystosowanym do momentów zginających przez odpowiednie uzbrojenie, bądź belki mające w widoku kształt prostokąta z poszerzeniami na podporach, powstałymi przez nachylenie dolnej krawędzi belki do poziomu pod kątem nie większym od arc tg $\cdot$ 1/3.

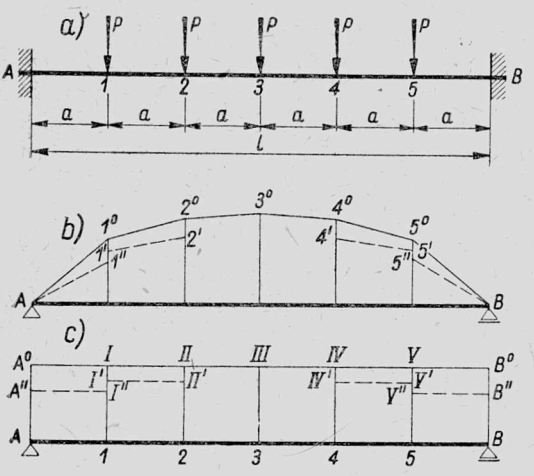
Zbadamy teraz wpływ zmienności przekroju w takich belkach na wielkości statycznie niewyznaczalne. Spośród różnych konstrukcji tego rodzaju zatrzymamy się na belce jednoprzęsłowej, jako na przypadku pozwalającym przy różnym stopniu sprężystości utwierdzenia na wyciągnięcie wniosków najbardziej ogólnych.

Niech będzie rozpiętość belki $AB = l$ i niech obciążenie belki składa się z 5 sił równych P i zaczepionych w odległościach $a = l/6$ jedna od drugiej (rys. 7*a*).

Momenty bezwładności zwiększają się w belkach utwierdzonych zwykle od środka ku końcom. Zmiana momentu bezwładności następuje tu w spo-

sób dość szybki, lecz mniej więcej ciągły; ponieważ jednak uwzględnienie tej ciągłości natrafiałoby przy obliczaniu odkształceń na trudności bardzo poważne, zakładamy, że belka podzielona jest na odcinki o stałej długości, lecz o różnych momentach bezwładności. Tego rodzaju założenie nie może spowodować znaczniejszych błędów, w każdym razie błędów większych niż te, na które decydujemy się w różnych działach statyki budowli zastępując ciągłą zmienność funkcji przez zmienność nieciągłą, np. przy stosowaniu równań różnicowych lub przy wyznaczaniu odkształceń łuków sposobem Bresse'a.

Przypuśćmy, że na odcinku 23 iloczyn momentu bezwładności przez współczynnik sprężystości równa się $EJ = i_3$, a na odcinkach 12 i $A1$ odpowiednio $i_1 = i_3/k_1$ oraz $i_2 = i_3/k_2$ i że w części belki $3B$ wielkości i zmieniają się w sposób symetryczny względem środka belki.



Rys. 7.

Celem obliczeń statycznych jest tu wykazanie, w jakim stopniu powiększenie przekrojów poprzecznych belki około podpór wpływa na momenty podporowe $M_A = M_B$.

Przyjmujemy za statycznie wyznaczalny schemat zastępczy belkę w dwóch punktach swobodnie podpartą (rys. 7b i 7c). Wykres momentów zginających od obciążenia P ma kształt linii łamanej $A1^0\,2^0\,3^0\,4^0\,5^0\,B$, przy czym momenty zginające w poszczególnych punktach belki równają się odpowiednio:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= 11^0 = 2{,}5\,Pa, \\ M_2 &= 22^0 = 4{,}0\,Pa, \\ M_3 &= 33^0 = 4{,}5\,Pa. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Jest to więc wykres obciążeń wtórnych $\bar{q}$.

Kąt obrotu przekroju A belki swobodnie podpartej AB wynosiłby przy stałym momencie bezwładności

$$\varphi_A = \frac{\mathfrak{A}}{i_3}, \tag{75}$$

gdzie $\mathfrak{A}$ oznacza reakcję podpory A belki od obciążenia wtórnego. Wobec tego, że momenty bezwładności belki nie są stałe, należy rzędne wykresu

obciążeń wtórnych zmienić odpowiednio do momentów bezwładności w danym odcinku, skąd dojdziemy do rzędnych:

$$\left.\begin{aligned} 11'' &= k_1 \cdot 11^0 = k_1 \cdot 2{,}5\,Pa, \\ 11' &= k_2 \cdot 11^0 = k_2 \cdot 2{,}5\,Pa, \\ 22' &= k_2 \cdot 22^0 = k_2 \cdot 4\,Pa. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

W związku z tym otrzymamy dla reakcji $\mathfrak{A}^P$ od obciążenia wtórnego wyrażonego polem $A\,1''\,1'\,2'\,2^0\,3^0\,3$ wzór

$$\mathfrak{A}^P = (1{,}25\,k_1 + 3{,}25\,k_2 + 4{,}25)\,Pa^2. \tag{77}$$

Stąd

$$\varphi_A^P = \frac{\mathfrak{A}^P}{i_3}. \tag{78}$$

Zaczepiamy w dalszym ciągu do belki swobodnie podpartej momenty M_A do jej końców. Odpowiedni wykres momentów zginających przedstawiony jest na rys. 7*c* za pomocą prostokąta $A\,A^0\,B^0\,B$, którego rzędne powinny być zmienione ze względu na zmienność momentów bezwładności przekrojów, podobnie jak rzędne wykresu na rys. 7*b*. Zmienione rzędne wykresu równe są odpowiednio:

$$\left.\begin{aligned} A\,A'' &= k_1 \cdot AA^0 = k_1\,M_A, \\ 1\,I'' &= k_1 \cdot 1\,I = k_1\,M_A, \\ 1\,I' &= k_2 \cdot 1\,I = k_2\,M_A, \\ 2\,II' &= k_2 \cdot 2\,II = k_2\,M_A, \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

a kąt obrotu końcowych przekrojów spowodowany przez moment M_A wynosi

$$\varphi_A^M = \frac{\mathfrak{A}^M}{i_3}, \tag{80}$$

gdzie $\mathfrak{A}^M$ oznacza pole $A\,A''\,I''\,I'\,II'\,II\;III\;3$, tzn. że

$$\mathfrak{A}^M = (k_1\,M_A + k_2\,M_A + M_A)\,a. \tag{81}$$

W drodze przyrównania odkształceń otrzymujemy równanie

$$\varphi_A^P = \varphi_A^M, \tag{82}$$

z którego wyznaczamy moment podporowy M_A:

$$\frac{1{,}25\,k_1 + 3{,}25\,k_2 + 4{,}25}{i_3}\,Pa^2 = M_A\,\frac{k_1 + k_2 + 1}{i_3}\,a, \tag{83}$$

$$M_A = \frac{1{,}25\,k_1 + 3{,}25\,k_2 + 4{,}25}{k_1 + k_2 + 1}\,Pa. \tag{84}$$

Wstawiając w wyrażenie (84) wartości k_1 i k_2 odpowiadające różnym momentom bezwładności przekroju na różnych odcinkach belki ustalamy wpływ zmienności przekroju na wielkość momentu podporowego M_A. Uwzględniamy tu wahania stosunku momentów bezwładności w środku i na końcu belki w granicach od 1 : 1 do 1 : 3, co uzasadnia się praktyką budowlaną. Stąd otrzymujemy tablicę 1.

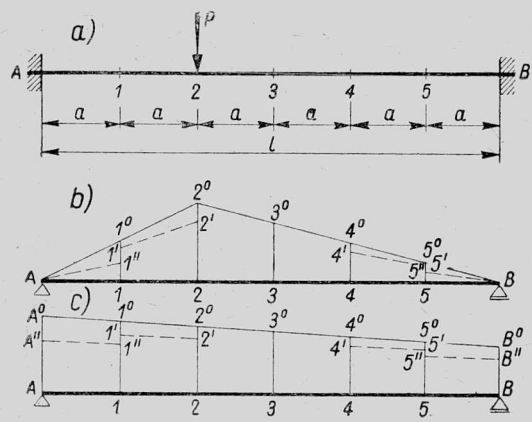
Tablica 1

i_1	i_2	i_3	k_1	k_2	$k_1 + k_2 + 1$	$1{,}25\,k_1 + 3{,}25\,k_2 + 4{,}25$	M_A
1	1	1	1	1	3	8,75	2,92 Pa
2	1	1	0,50	1	2,5	8,12	3,25 Pa
2	2	1	0,50	0,50	2	6,50	3,25 Pa
3	1	1	0,33	1	2,33	7,92	3,40 Pa
3	2	1	0,33	0,50	1,83	6,30	3,45 Pa
3	3	1	0,33	0,33	1,66	5,75	3,47 Pa

Z tablicy 1 widać, że wahania w momencie M_A dochodzą do blisko 20%, przy czym zmienność przekrojów wpływa na powiększenie momentu podporowego.

Jeżeli porównać ze sobą momenty zginające w środku belki przy momencie M_A odpowiadającym stałemu momentowi bezwładności na całej długości belki i przy największym z momentów M_A tablicy 1, to znajdziemy, że w pierwszym przypadku

$$M_{śr} = (2{,}5 \cdot 3 - 2{,}92 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2)\,Pa = 1{,}58\,Pa, \tag{85}$$



Rys. 8

w drugim zaś

$$M_{śr} = (2{,}5 \cdot 3 - 3{,}47 - 3)Pa = 1{,}03\,Pa, \tag{86}$$

co daje różnicę wynoszącą z górą 50%.

Aby zorientować się, jakim wahaniom podlega w belce o zmiennym przekroju moment M_A w razie niesymetrycznego obciążenia, weźmy pod uwagę belkę obciążoną jedną siłą P zaczepioną w odległości $2a = l/3$ od lewej podpory (rys. 8 a). Wykres momentów zginających wywołanych siłą P ma kształt trójkąta $A\,2^0\,B$ (rys. 8 b). Aby uwzględnić w obliczeniu momentów pod-

porowych zmienność przekroju belki, zastępujemy wymieniony wykres przez wielobok $A\,1''\,1'\,2'\,2^0\,3^0\,4^0\,4'\,5'\,5''\,B$, którego rzędne równają się (rys. 8 b):

$$\left.\begin{aligned} 11'' &= \frac{2}{3} Pak_1, & 44' &= \frac{2}{3} Pak_2, \\ 11' &= \frac{4}{3} Pak_2, & 55'' &= \frac{2}{3} Pak_2, \\ 22' &= Pak_2, & 55' &= \frac{1}{3} Pak_1. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Wielkości $\mathfrak{M}^P$ i $\mathfrak{V}^P$ reakcji obciążenia wtórnego wyrażonego przez wielobok $A\,1''\,1'\,2'\,2^0\,3^0\,4^0\,4'\,5'\,5''\,B$ znajdujemy z równań

$$\mathfrak{M}^P + \mathfrak{V}^P = \text{pole } A\,1''\,1'\,2'\,2^0\,3^0\,4^0\,4'\,5'\,5''\,B, \tag{88}$$

$$\mathfrak{M}^P l = \mathfrak{M}^P \cdot 6a = \Sigma\, \mathfrak{p} \cdot r, \tag{89}$$

gdzie $\mathfrak{p}$ oznacza pola trapezów $A\,1''\,1, 11'\,2'\,2, 22^0\,3^0\,3$ itd., składających się na pole $A\,1''\,1\,2'\,2^0\,3^0\,4^0\,4'\,5'\,5''\,B$, a r odległości środków ciężkości tych trapezów od podpory B. Z równań tych znajdujemy

$$\mathfrak{M}^P = (0{,}317\,k_1 + 0{,}870\,k_2 + 1{,}045)\,Pa^3, \tag{90}$$

$$\mathfrak{V}^P = (0{,}192\,k_1 + 0{,}630\,k_2 + 0{,}955)\,Pa^3. \tag{91}$$

Wykres momentów zginających wywołanych w belce przez momenty podporowe M_A i M_B ma kształt trapezu $A\,A^0\,B^0\,B$ (rys. 8 c). Wobec różnicy w momentach bezwładności przekrojów na poszczególnych odcinkach belki trapez ten zastępujemy przez wielobok $AA''\,1''\,1'\,2'\,2^0\,3^0\,4^0\,4'\,5'\,5''\,B$ w ten sposób, że poszczególne rzędne wynoszą:

$$\left.\begin{aligned} AA'' &= M_A k_1, \\ 11'' &= \frac{1}{6}(5\,M_A + M_B)\,k_1, & 44' &= \frac{1}{6}(2\,M_A + 4\,M_B)\,k_2, \\ 11' &= \frac{1}{6}(5\,M_A + M_B)\,k_2, & 55' &= \frac{1}{6}(M_A + 5\,M_B)\,k_1, \\ 22' &= \frac{1}{6}(4\,M_A + 2\,M_B)\,k_2, & 55'' &= \frac{1}{6}(M_A + 5\,M_B)\,k_2, \\ 33^0 &= \frac{1}{6}(3\,M_A + M_B), & BB'' &= M_B \cdot k_1. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Korzystając w dalszym ciągu ze wzorów analogicznych do wzorów (88) i (89) znajdujemy dla reakcji podpór belki AB od obciążenia wtórnego $AA''\ 1''\ 1'\ 2'\ 2^0\ 3^0\ 4^0\ 4'\ 5'\ 5''\ B$ wyrażenia następujące:

$$\mathfrak{A}^M = \frac{a^2}{36}[M_A(30{,}673\,k_1 + 22{,}671\,k_2 + 18{,}760) + \tag{93}$$
$$+ M_B(5{,}334\,k_1 + 13{,}836\,k_2 + 17{,}337)],$$

$$\mathfrak{B}^M = \frac{a^2}{36}[M_A(5{,}327\,k_1 + 13{,}329\,k_2 + 17{,}330) + \tag{94}$$
$$+ M_B(30{,}666\,k_1 + 22{,}164\,k_2 + 18{,}663)].$$

Równania analogiczne do równania (82)

$$\varphi_A^P = \varphi_A^M, \qquad \varphi_B^P = \varphi_B^M \tag{95}$$

przybierają w danym razie postać

$$\mathfrak{A}^P = \mathfrak{A}^M, \qquad \mathfrak{B}^P = \mathfrak{B}^M, \tag{96}$$

czyli postać

$$\left.\begin{aligned} m\,M_A + n\,M_B &= s, \\ m_1\,M_A + n_1\,M_B &= s_1, \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} m &= 30{,}673\,k_1 + 22{,}671\,k_2 + 18{,}670, \\ n &= 5{,}334\,k_1 + 13{,}836\,k_2 + 17{,}337, \\ s &= (11{,}412\,k_1 + 31{,}320\,k_2 + 37{,}620)\,Pa, \\ m_1 &= 5{,}327\,k_1 + 13{,}329\,k_2 + 17{,}330, \\ n_1 &= 30{,}666\,k_1 + 22{,}164\,k_2 + 18{,}663, \\ s_1 &= (6{,}912\,k_1 + 22{,}680\,k_2 + 34{,}380)\,Pa \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

i skąd

$$M_A = \frac{s\,n_1 - s_1\,n}{m\,n_1 - m_1\,n}. \tag{99}$$

Dla momentów bezwładności przekrojów wahających się w granicach omówionych wyżej współczynniki (98) przybierają wartości zawarte w tablicach 2 i 3.

Tablice 2 i 3 dowodzą, że w razie niesymetrycznego obciążenia belki wpływ zmienności przekroju na wartość momentu podporowego może dosięgnąć w przyjętych granicach zmienności 44%.

W przypadku belki utwierdzonej na końcach w sposób sprężysty, względnie belki poziomej w ramownicy, wpływ zmienności przekroju na wielkość momentów podporowych ulega pewnemu zmniejszeniu. Wynika to między innymi bezpośrednio z równania (83), które musi być w tym wypadku uzupełnione przez wstawienie do prawej jego części dodajnika $\varphi = M/\varkappa$ wyrażającego kąt obrotu sprężyście utwierdzonego końca belki.

Tablica 2

Przypadek	i_1	i_2	i_3	k_1	k_2	m	n	s/Pa
I	1	1	1	1	1	72,014	36,507	80,352
II	2	1	1	0,500	0,333	56,777	33,840	74,646
III	2	2	1	0,500	0,500	45,341	26,922	58,986
IV	3	1	1	0,333	1	51,555	32,949	72,940
V	3	2	1	0,333	0,500	40,219	26,031	56,080
VI	3	3	1	0,333	0,333	36,433	23,721	51,850

Tablica 3

Przypadek	i_1	i_2	i_3	k_1	k_2	m_1	n_1	s_1/Pa	M_A
I	1	1	1	1	1	35,986	71,493	63,972	0,148 *Pl*
II	2	1	1	0,500	0,333	51,979	108,990	90,108	0,191 *Pl*
III	2	2	1	0,500	0,500	45,315	97,908	78,768	0,189 *Pl*
IV	3	1	1	0,333	1	51,089	103,869	88,954	0,211 *Pl*
V	3	2	1	0,333	0,500	44,425	92,787	77,614	0,206 *Pl*
VI	3	3	1	0,333	0,333	42,198	89,086	73,826	0,213 *Pl*

Z przytoczonych obliczeń wynika, że wpływ zmienności przekrojów belek na wielkości nadliczbowe może być bardzo znaczny i że całkowite pomijanie go w obliczeniach nie jest właściwe. Widać stąd również, jak poważną rolę przy badaniu pracy konstrukcji odegrać może sposób momentów wtórnych.

2. Geometryczne dodawanie odkształceń

Równaniu (82), z którego korzystaliśmy w p. poprzednim do wyznaczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych, możemy nadać postać

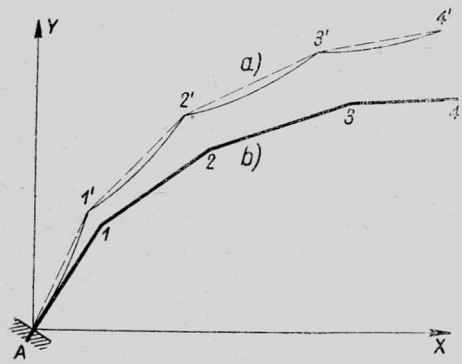
$$\varphi_A^P - \varphi_A^M = 0 \tag{100}$$

lub postać

$$\eta - f = 0, \tag{101}$$

gdzie η oznacza odkształcenie w pewnym punkcie układu danego (w przypadku przedstawionym w p. poprzednim równe 0), a f odkształcenie schematu zastępczego (w przypadku omówionym wyżej wynoszące $\varphi_A^P - \varphi_A^M$).

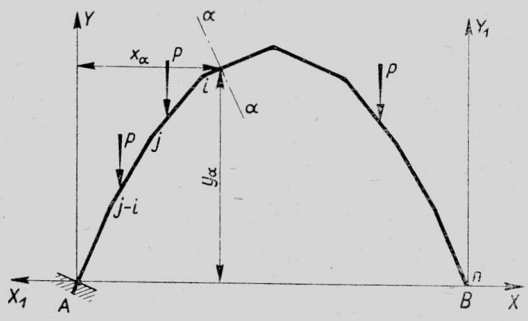
Równania typu (101) są w tych warunkach wyrazem dodawania odkształceń lub przyrównania odkształceń. Równania te mogą być ustawione w przypadkach belek prostych za pomocą sposobu momentów wtórnych, w przypadku jednak ogólnym, gdy w płaszczyźnie działania sił układ stanowi linię łamaną, dodawanie odkształceń w równaniach typu (101) musi mieć charakter dodawania geometrycznego. Chodzi więc przede wszystkim o geometryczne dodawanie odkształceń układów ramowych płaskich.



Rys. 9

Poszczególne pręty każdej ramy znajdującej się pod działaniem sił zewnętrznych doznają odkształceń w postaci ugięć i obrotów przekrojów poprzecznych. Odkształcenie ramy jako całości możemy wyznaczyć drogą geometrycznego dodawania do siebie odkształceń jej poszczególnych prętów. Z kinematycznego punktu widzenia zadanie sprowadza się do nadania takich obrotów i przesunięć poszczególnym prętom ramy w jej postaci niedokształconej (rys. 9b), aby ta postać mogła się pokryć z odkształconą postacią ramy rys. 9a).

Weźmy pod uwagę fragment ramy przedstawionej na rys. 10. Niech j—1, j, ..., i, ..., n oznaczają kolejne węzły ramy, a pewna cyfra j niech odpowiada również prętowi zawartemu między węzłami $j-1$ a j.

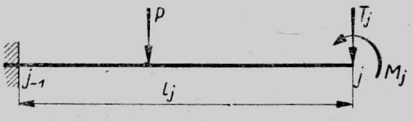


Rys. 10

Robimy w węźle j przekrój poprzeczny prostopadły do pręta $j-1, j$ i zastępujemy oddziaływanie części jn na część Aj ramy przez siłę T_j i moment M_j. Wpływ siły N_j na odkształcenia pomijamy, gdyż obliczenie odkształceń stanowi w teorii ram przeważnie tylko etap pośredni do wyznaczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych, a wówczas siły podłużne nie są zwykle brane pod uwagę.

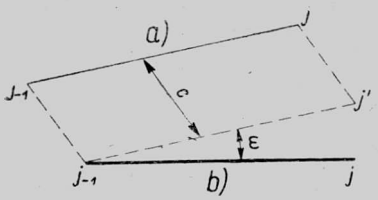
Każdy pręt $j-1, j$ możemy tu uważać za pręt utwierdzony w przekroju $j-1$, swobodny w przekroju j i obciążony siłą T_j i momentem M_j (rys. 11). Oznaczamy przez y_j przesunięcie punktu j takiego pręta prostopadłe do nieodkształconej jego osi, a przez φ_j obrót przekroju poprzecznego w j i uważamy za dodatnie wielkości y_j i φ_j spowodowane przez dodatni moment M_j. Wówczas będzie

$$\left.\begin{aligned} y_j &= -\frac{T_j l_j^3}{3EJ} + \frac{M_j l_j^2}{2EJ} - y_j^0, \\ \varphi_j &= -\frac{T_j l_j^2}{2EJ} + \frac{M_j l_j}{EJ} - \varphi_j^0, \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$



Rys. 11

gdzie y_j^0 i φ_j^0 oznaczają odpowiednio ugięcie i kąt obrotu w punkcie j wywołane przez siły P zaczepione do pręta $j-1$ między jego końcami.



Rys. 12

Aby pręt $j-1, j$ ramy, a właściwie jego cięciwa (rys. 12, położenie a), mógł zająć pewne położenie b, należy mu nadać obrót o pewien kąt ω i pewne przesunięcie c. Wobec tego geometryczne dodawanie odkształceń ramy przeprowadzamy w etapach następujących:

(1) ustalamy obroty ω poszczególnych prętów,

(2) znajdujemy przesunięcia poszczególnych węzłów ramy, wywołane obrotami prętów o kąty ω,

(3) znajdujemy przesunięcia węzłów, spowodowane ugięciami poszczególnych prętów,

(4) dodajemy przesunięcia wymienione pod (2) i (3).

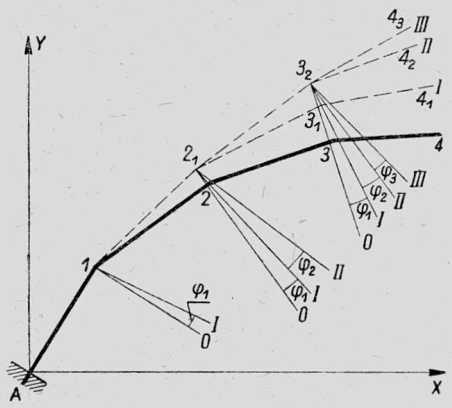
Zakładamy na razie, że odkształcenie ramy przedstawionej na rys. 10 odbywa się w ten sposób, że każdy z prętów $j-1, j$ pozostaje prosty i tylko końcowy przekrój j ulega obrotowi.

Przypuśćmy, że linia łamana $A\,1\,2\,3\,4$ (rys. 13) przedstawia (w skażeniu) część ramy pokazanej na rys. 10, przylegającą do podpory A.

Płaszczyzna przekroju poprzecznego pręta $A1$ w punkcie 1 przed odkształceniem zajmuje położenie oznaczone przez 0. Pod działaniem siły T_1 i momentu M_1 oraz odpowiednich sił P przekrój poprzeczny w punkcie 1 doznaje obrotu o kąt φ, w związku z czym i cała część ramy położona na rysunku na prawo od przekroju 1 obraca się również o kąt φ_1 (kąt 01I) i zajmuje położenie $1\,2_1\,3_1\,4_1$.

Nowe położenia przekrojów poprzecznych w punktach 1, 2 i 3 oznaczone są na rysunku znaczkiem I.

Z kolei siła T_2 i moment M_2 oraz odpowiednie siły P wywołują obrót końcowego przekroju poprzecznego 2 pręta 1 2 o kąt φ_2 (już w położeniu $1\,2_1$), co pociąga za sobą odpowiedni obrót części ramy położonej na prawo od punktu 2_1 względem tego punktu i zajęcie przez nią położenia $2_1\,3_2\,4_2$.



Rys. 13

Odpowiednie położenie przekroju poprzecznego w punkcie 2 oznaczone jest przez II, a przez 0 oznaczamy tu położenie płaszczyzny przechodzącej przez punkt 2_2 i prostopadłej do pierwotnego położenia pręta 1 2.

A więc kąt między płaszczyznami 0 i II równa się

$$\omega_2 = \varphi_1 + \varphi_2 . \tag{103}$$

W podobny sposób siła T_3 i moment M_3 oraz odpowiednie siły P wywołują obrót końcowego przekroju poprzecznego 3 pręta 2 3 o kąt φ_3 (już w położeniu $2_1\,3_2$), czemu będzie odpowiadało położenie $3_2\,4_3$ części ramy położonej na prawo od punktu 3. Prosta oznaczona przez 0 wyobraża położenie końcowego przekroju pręta 2 3 przed odkształceniem ramy, prosta I położenie tegoż przekroju po odkształceniu pręta 01, prosta II po odkształceniu pręta 1 2, a prosta III po odkształceniu pręta 2 3.

W tych warunkach mamy

$$\omega_3 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 . \tag{104}$$

Rozumując w podobny sposób w dalszym ciągu znajdujemy dla kątów nachylenia ω_i przekrojów poprzecznych poszczególnych prętów względem ich położenia pierwotnego wyrażenie następujące:

$$\text{(I)} \qquad \omega_i = \sum_A^i \varphi_j . \tag{105}$$

Gdyby przekrój poprzeczny w punkcie A obrócił się o kąt ω_A^0, wówczas wyrażenie (105) przybrałoby postać

$$\omega_i = \sum_A^i \varphi_j + \omega_A^0 , \tag{106}$$

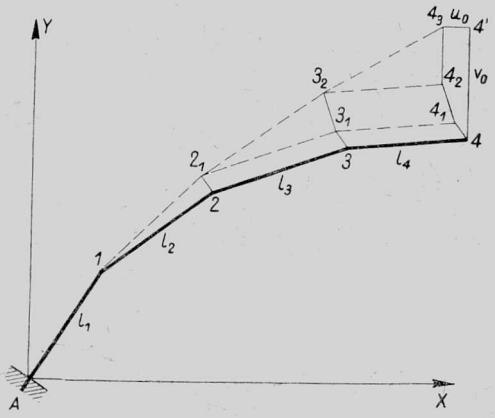
gdyż wówczas wszystkie przekroje poprzeczne ramy uległyby obrotow o kąt ω_A^0.

Obrót przekroju poprzecznego w punkcie 1 o kąt $\omega_1 = \varphi_1$ wywołuje obrót o ten sam kąt pręta 1 2 (ściślej jego cięciwy). Wskutek tego obrotu punkt 2 doznaje przesunięcia $2\,2_1 = \omega_1 l_2$ (rys. 14), które uważamy za prostopadłe do osi pręta 1 2 wobec tego, że kąt 2 1 2 jest bardzo mały.

Z powodu przesunięcia $2\,2_1$ część ramy położona na prawo od węzła 2 zajmuje położenie $2_1 3_1 4_1$ w ten sposób, że jest $2_1 2 \| 3_1 3 \| 4_1 4$ oraz $2_1 3_1 \| 2\,3$ i $3_1 4_1 \| 3\,4$.

Wskutek obrotu pręta 2 3 o kąt ω_2 węzeł 3 doznaje przesunięcia $3_1 3_2 = \omega_2 l_3$ prostopadłego do nowego położenia tego pręta $2_1 3_1$. Odpowiednio do tego część ramy położona na rysunku na prawo od węzła 3 zajmie położenie $3_2 4_2$, gdzie $4_1 4_2 \| 3_1 3_2$, a $3_2 4_2 \| 3_1 4_1$.

Odcinek $4_2 4_3$ prostopadły do $3_2 4_2$ oznacza przesunięcie punktu 4 spowodowane obrotem pręta 3 4 i równe $\omega_3 l_4$.



Rys. 14

W ten sposób na skutek przesunięć typu $\omega_{j-1} l_j$ punkt 4 ramy zajmie położenie 4_3, czyli że punkt ten dozna przesunięcia v_0 w kierunku osi Y-ów i przesunięcia u_0 w kierunku równoległym do osi X-ów, lecz o zwrocie ujemnym.

Z wieloboku $4\,4_1\,4_2\,4_3\,4'$ mamy

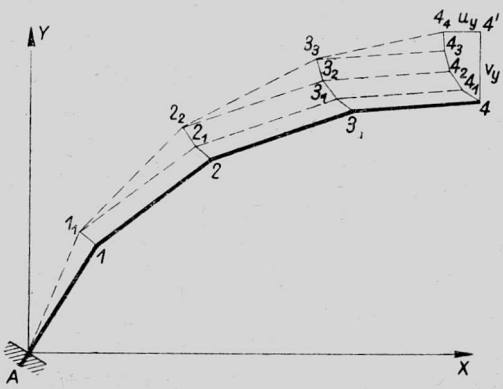
$$\left.\begin{aligned} u_0 &= -(\overline{\omega_1 l_2}) - (\overline{\omega_2 l_3}) - (\overline{\omega_3 l_4}), \\ v_0 &= (\omega_1 l_2)' + (\omega_2 l_3)' + (\omega_3 l_4)', \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

gdzie kreski poziome oznaczają rzuty przesunięć na oś X-ów, a kreski pionowe na oś Y-ów. Uogólniając wzory (107) znajdujemy

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= -\sum_A^i (\overline{\omega_{j-1} l_j}), \\ v_0 &= \sum_A^i (\omega_{j-1} l_j)'. \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

Zauważyć należy, że zarówno na rys. 13, jak i na rys. 14 przedstawione są położenia węzłów ramy wywołane obrotami poszczególnych prętów, a więc w rzeczywistości oba rysunki powinny by być identyczne. Różnica w położeniu poszczególnych węzłów na obydwóch rysunkach pochodzi

stąd, że przesunięcia $\omega_{j-1} l_j$ można uważać za prostopadłe do osi prętów $j-1, j$ tylko wówczas, gdy są one bardzo małe, natomiast na rys. 14 przesunięcia te są z konieczności skażone.



Rys. 15

Ugięcia y_j poszczególnych prętów pod działaniem sił T_j i momentów M_j oraz odpowiednich sił P dodajemy do siebie w podobny sposób jak przesunięcia $\omega_{j-1} l_j$. Dodawanie to przedstawione jest na rys. 15, na którym

$$1\,1_1 = y_1, \qquad 2_1\,2_2 = y_2,$$
$$3_2\,3_3 = y_3, \qquad 4_3\,4_4 = y_4.$$

Z wieloboku $4\,4_1\,4_2\,4_3\,4_4\,4'$ znajdujemy, podobnie jak na rys. 14, że przesunięcia u_v i v_y punktu 4 (rys. 15) w kierunkach równoległych do osi współrzędnych odpowiednio wynoszą

$$\left.\begin{aligned} u_y &= -\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y}_3 - \bar{y}_4, \\ v_y &= y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4, \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

gdzie kreski poziome i pionowe mają takie samo znaczenie jak we wzorach (107). Uogólnienie wzorów (109) daje

$$\left.\begin{aligned} u_y &= -\sum_A^i \bar{y}_j, \\ v_y &= \sum_A^i y'_j. \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

W wyniku dodawania do siebie dla danego węzła i przesunięć wywołanych zarówno obrotami (przesunięcia u_0 i v_0), jak i ugięciami (przesunięcia u_y i v_y) prętów $j-1, j$ w punktach j dochodzimy do wzorów następujących:

$$\left.\begin{aligned} \text{(II)} \qquad u_i &= -\sum_A^i \overline{(\omega_{j-1} l_j)} - \sum_A^i \bar{y}_j, \\ \text{(III)} \qquad v_i &= \sum_A^i (\omega_{j-1} l_j)' + \sum_A^i y'_j. \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

O ile pręt jest całkowicie utwierdzony w punkcie A, wówczas należy we wzorach (111) korzystać dla kątów ω z wyrażenia (105) przyjmując,

że $i = j - 1$; o ile zaś możliwy jest obrót przekroju A, wówczas należy korzystać z wyrażenia (106).

W przypadku prętów zakrzywionych rozumowania podobne do poprzednich doprowadzają do tzw. wzorów B r e s s e ' a, służących do obliczeń statycznych łuków.

Ponieważ belkę prostą możemy uważać za przypadek szczególny pręta o kształcie linii łamanej, więc wzory (111) mogą być i w tym wypadku zastosowane.

Dla belki przedstawionej na rys. 16 drugi ze wzorów (111) przybiera postać

$$v_C = \varphi_B l_{BC} + y_B + y_C, \tag{112}$$

skąd wobec

$$T_C = P_2, \quad M_C = 0, \quad T_B = P_1 + P_2, \quad M_B = -P_2 l_{BC} \tag{113}$$

mamy

$$\left.\begin{aligned} y_B &= -\frac{(P_1 + P_2) l_{AB}^3}{3EJ} + \frac{(-P_2 l_{BC}) l_{AB}^2}{2EJ}, \\ y_C &= -\frac{P_2 l_{BC}^3}{3EJ}, \\ \varphi_B &= -\frac{(P_1 + P_2) l_{AB}^2}{2EJ} + \frac{(-P_2 l_{BC}) l_{AB}}{EJ}, \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

gdzie EJ jest w obydwóch częściach belki stałe.

Przesunięcie $v_C = y_C$ prostopadłe do osi belki wynosi więc ostatecznie

$$v_C = -\frac{P_1 l_{AB}^3}{3EJ} - \frac{P_1 l_{AB}^2 l_{BC}}{2EJ} - \frac{P_2 (l_{AB} + l_{BC})^3}{3EJ}. \tag{115}$$

Rys. 16

Wzory I, II i III na geometryczne dodawanie odkształceń znajdują przede wszystkim zastosowanie dla trzech następujących rodzajów ram:

(1) dla jednoprzęsłowych ram prostokątnych,

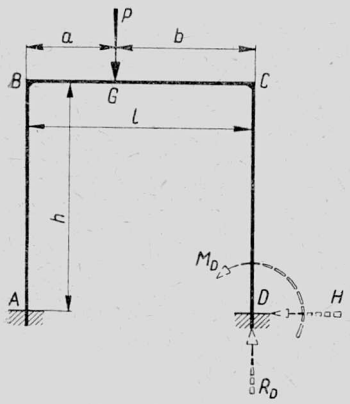
(2) dla jednoprzęsłowych ram wielobocznych,

(3) dla ram wieloprzęsłowych.

Omówimy te trzy przypadki na przykładach.

Bierzemy pod uwagę ramę prostokątną bezprzegubową obciążoną pionową siłą skupioną P (rys. 17). Rama ta jest trzykrotnie statycznie nie-

wyznaczalna, gdyż dwom płaskim podporom A i D odpowiada tu liczba składowych reakcji sześć przy trzech równaniach równowagi.



Rys. 17

Za schemat zastępczy statycznie wyznaczalny przyjmujemy w tym wypadku pręt o kształcie linii łamanej $ABCD$, utwierdzony całkowicie w punkcie A i obciążony poza siłą P niewiadomymi siłami H, R_D i M_D równymi składowym reakcji odrzuconej płaskiej podpory D (na rys. 17 strzałki przerywane).

Wielkości nadliczbowe zadania wyznaczamy z równań oznaczonych wyżej liczbami, mianowicie:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(I)} && \omega_D = 0\,, \\ &\text{(II)} && u_D = 0\,, \\ &\text{(III)} && v_D = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (116)$$

Równania te wyrażają równość składowych przesunięcia punktu D w schemacie danym i w schemacie zastępczym.

Za wielkości nadliczbowe zadania przyjmujemy składowe reakcji podpory A mianowicie M_A, R_A i H_A, które związane są z siłami M_D, R_D i H_D za pomocą równań równowagi.

Kąty nachylenia φ poszczególnych prętów ciągu $ABCD$ wynoszą

$$\begin{aligned} &\text{dla pręta } AB && \varphi = 90^\circ\,, \\ &\qquad\quad BC && \varphi = 0\,, \\ &\qquad\quad CD && \varphi = -90^\circ\,, \end{aligned}$$

wobec czego wzory I, II i III przybierają postać

$$\left.\begin{aligned} &\text{(I)} && \omega_D = \varphi_B + \varphi_C + \varphi_D\,, \\ &\text{(II)} && u_D = \omega_C h - y_B + y_D\,, \\ &\text{(III)} && v_D = \omega_B l + y_C\,, \end{aligned}\right\} \qquad (117)$$

przy czym

$$\omega_C = \varphi_B + \varphi_C \quad \text{i} \quad \omega_B = \varphi_B\,,$$

gdzie kąty φ_B i φ_C obliczamy z drugiego ze wzorów (102).

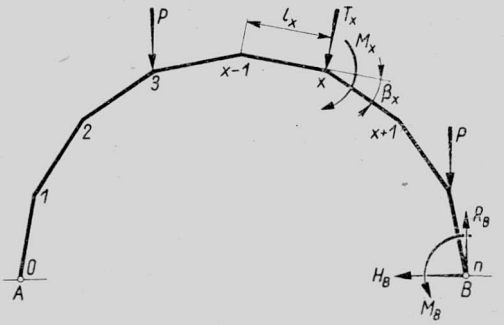
Wielkości y_C^0 i φ_C^0 wynoszą tu

$$y_C^0 = \frac{P(l-b)^2(2l+b)}{6EJ_b}\,, \qquad \varphi_C^0 = \frac{P(l-b)^2}{2EJ_b}\,. \qquad (118)$$

Po wstawieniu uogólnionych przesunięć (117) w równania (116) znajdujemy stąd wielkości nadliczbowe zadania.

Ogólny schemat rozwiązania ramy wielobocznej (rys. 18) przy pominięciu wpływu sił podłużnych na wielkości statycznie niewyznaczalne jest następujący.

Odrzucamy utwierdzenie jednego z końców ramy np. B i zaczepiamy tu dwie niewiadome siły H_B (poziomą), R_B (pionową) oraz moment M_B, które uważamy za wielkości statycznie nadliczbowe.



Rys. 18

Na podstawie wymienionych sił oraz sił bezpośrednio do ramy zaczepionych obliczamy przesunięcia y_x punktów x względem punktów $x-1$ w kierunku prostopadłym do $x-1, x$ oraz obroty φ_x przekrojów normalnych x ramy względem przekrojów normalnych $x-1$.

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$\omega_x = \sum_0^x \varphi_x, \qquad \omega_{x-1} = \sum_0^{x-1} \varphi_x, \tag{119}$$

to otrzymamy w ten sposób zależność

$$\omega_x - \omega_{x-1} = \varphi_x. \tag{120}$$

Wyobrażamy sobie w dalszym ciągu, że poszczególne odcinki ramy $x-1, x$ są sobie równe i że zmiana kątów β, które tworzą osie kolejnych odcinków $x-1, x$ oraz $x, x+1$ między sobą, podlegają pewnej regule, są więc znanymi funkcjami wielkości x określającej położenie danego odcinka w ramie.

Wielkości momentów zginających M_x w danym punkcie ramy oraz odpowiednich sił poprzecznych T_x (normalnych do odcinka ramy $x-1, x$) zależą od położenia danego węzła ramy, wobec czego kąty φ_x, wyrażające się wzorem

$$\varphi_x = \frac{T_x l^2}{2EJ} + \frac{M_x l}{EJ}, \tag{121}$$

gdzie E, J i l oznaczają odpowiednio współczynnik sprężystości materiału ramy, moment bezwładności jej przekroju poprzecznego oraz długość przedziału, są funkcjami x, czyli że

$$\varphi_x = F(x). \tag{122}$$

W ten sposób równanie (120) przybiera postać

$$\omega_x - \omega_{x-1} = F(x), \tag{123}$$

a więc dochodzimy do równania różnicowego pierwszego rzędu.

Po scałkowaniu równania (123) dojdziemy do wyrażenia typu

$$\omega_x = F_1(x). \tag{124}$$

Wstawiając tu $x=n$, co odpowiada zwolnionemu końcowi ramy, przedstawiamy kąt obrotu tego przekroju w zależności od wielkości H_B, R_B i M_B

$$\omega_n = \omega_B = F_2(H_B, R_B, M_B). \tag{125}$$

Zależność

$$\omega_B = 0, \qquad \text{czyli} \qquad F_2(H_B, R_B, M_B) = 0 \tag{126}$$

da nam pierwsze równanie do wyznaczenia wielkości nadliczbowych zadania.

Dla znalezienia poziomych (tj. równoległych do kierunku AB) przesunięć poszczególnych węzłów ramownicy uciekamy się do wzoru

$$u_x = \sum_1^x (\overline{\omega_{x-1} l}) + \sum_1^x \bar{y}_x, \tag{127}$$

gdzie $\bar{y}_x$ oznacza poziome składowe przesunięć y_x równych

$$y_x = \frac{T_x l^3}{3EJ} + \frac{M_x l^2}{2EJ}, \tag{128}$$

a iloczyn $(\overline{\omega_{x-1} l})$ oznacza poziome składowe przesunięć węzłów x, wywołanych obrotami przekrojów $x-1$ ramy o kąty ω_{x-1}.

Przy $x=n$ dochodzimy do drugiego równania służącego do wyznaczenia wielkości nadliczbowych:

$$u_B = 0, \qquad \text{czyli} \qquad F_3(H_B, R_B, M_B) = 0. \tag{129}$$

Wreszcie w sposób analogiczny do wyrażeń (127) i (129) znajdujemy

$$v_x = \sum_1^x (\omega_{x-1} l)' + \sum_1^x y'_x, \tag{130}$$

$$v_B = 0, \quad \text{czyli} \quad F_4(H_B, R_B, M_B) = 0, \tag{131}$$

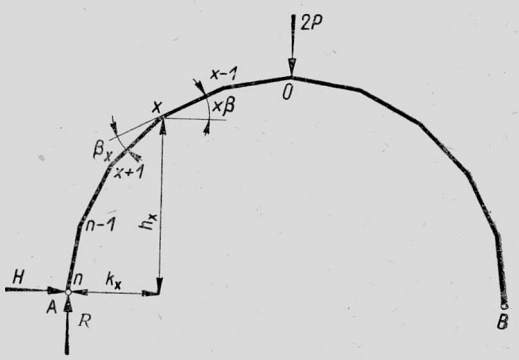
gdzie v_x oznacza pionowe przesunięcie węzła x, a wielkości $(\omega_{x-1} l)'$ i y'_x oznaczają pionowe składowe odpowiednich przesunięć całkowitych.

Równania (126), (129) i (131) łącznie rozwiązują zadanie.

Zastosujemy przytoczony wyżej schemat ogólny do obliczenia ramy wielobocznej przegubowej obciążonej symetrycznie.

Przypuśćmy, że rama posiada kształt wieloboku wpisanego w odcinek koła i jest obciążona w środku siłą $2P$ (rys. 19).

Wobec tego, że rama jest symetryczna i symetrycznie obciążona względem punktu środkowego O, możemy rozpatrywać równowagę tylko jej połowy AO przyjmując, że jest ona w punkcie O utwierdzona, a w punkcie A swobodna i obciążona znaną siłą $R = P$ i nieznaną H. Numerację węzłów będziemy prowadzili od środka ramy do punktu A, czyli od O do n. Długość l poszczególnych przęseł ramy $x-1, x$ jest, jak wyżej, wielkością stałą. W danym razie również i $\beta_x = \beta = \text{const}$. Poszczególne przęsła $x-1, x$ ramy będą nachylone względem poziomego kierunku AB pod kątem $x\beta$.



Rys. 19

Siłę poprzeczną w węźle x znajdziemy drogą rzutowania sił H i R na kierunek normalny do osi przedziału $x-1, x$:

$$T_x = H \sin x\beta - P \cos x\beta. \tag{132}$$

Moment zginający w punkcie x wynosi

$$M_x = H h_x - P k_x, \tag{133}$$

gdzie h_x i k_x (rys. 19) oznaczają odpowiednio ramiona momentów sił H i $R = P$.

Ponieważ h_x równa się sumie rzutów na kierunek pionowy poszczególnych przedziałów ramy zawartych między węzłem x i n, więc mamy

$$h_x = l\,[\sin(x+1)\beta + \sin(x+2)\beta + \cdots + \sin n\beta] = \tag{134}$$

$$= l \sin\left[(x+1)\beta + \frac{n-x-1}{2}\beta\right] \sin\frac{n-x}{2}\beta \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{l}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left(\cos x\beta\cos\frac{\beta}{2} - \sin x\beta\sin\frac{\beta}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\beta\right).$$

Odpowiednio dla k_x otrzymujemy

$$k_x = l\,[\cos(x+1)\beta + \cos(x+2)\beta + \cdots + \cos n\beta] = \tag{135}$$

$$= l\cos\left[(x+1)\beta + \frac{n-x-1}{2}\beta\right] \sin\frac{n-x}{2}\beta \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{l}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left(\sin x\beta\cos\frac{\beta}{2} + \cos x\beta\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{2n+1}{2}\beta\right).$$

Wyrażenie (121) przybiera wobec tego postać

$$\varphi_x = f\,l\,H\sin x\beta - f\,l\,P\cos x\beta - \tag{136}$$

$$- \frac{f\,l\,H}{\sin\frac{\beta}{2}}\left(\cos x\beta\cos\frac{\beta}{2} - \sin x\beta\sin\frac{\beta}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\beta\right) +$$

$$+ \frac{f\,l\,P}{\sin\frac{\beta}{2}}\left(\sin x\beta\cos\frac{\beta}{2} + \cos x\beta\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{2n+1}{2}\beta\right) =$$

$$= a\sin x\beta + b\cos x\beta + c,$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{l}{2EJ}, \qquad c = -\frac{f\,l}{\sin\frac{\beta}{2}}\left(H\cos\frac{2n+1}{2}\beta + P\sin\frac{2n+1}{2}\beta\right), \\ a &= f\,l\,P\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}, \qquad b = f\,l\,H\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

Dochodzimy w ten sposób do równania różnicowego

$$\omega_x - \omega_{x-1} = a\sin x\beta + b\cos x\beta + c. \tag{138}$$

Dyskusję tego równania pomimo jego prostoty przeprowadzimy niżej w sposób ogólny.

Całka równania (138) przedstawia sumę

$$\omega_x = z_x^0 + z_x, \tag{139}$$

gdzie z_x^0 oznacza pewne dowolne rozwiązanie szczególne, z_x zaś rozwiązanie odpowiedniego równania bez wyrazu wolnego.

Równanie charakterystyczne równania różnicowego (138) bez wyrazu wolnego, czyli równania

$$\omega_x - \omega_{x-1} = 0 \tag{140}$$

ma postać

$$r^x - r^{x-1} = 0, \qquad r - 1 = 0, \tag{141}$$

skąd $r = 1$ i

$$z_x = D \cdot 1^x = D, \tag{142}$$

gdzie D jest dowolną wielkością stałą.

Całki szczególnej z_x^0 równania (138) poszukujemy w postaci

$$z_x^0 = A \sin x\beta + B \cos x\beta + Cx, \tag{143}$$

gdzie A, B, C są to stałe całkowania. Ostatni wyraz wzoru (143) ma właściwie postać $Cx \cdot 1^x$, co oznacza, że cała funkcja poprzedzająca 1^x posiada potęgę o 1 wyższą od potęgi odpowiedniej funkcji przy wyrazie c równania (138). Tłumaczy się to tym, że 1 jest w danym razie pierwiastkiem równania charakterystycznego (141), co nie ma miejsca w zastosowaniu do dwóch pozostałych wyrazów całki (143).

Wstawiając wyrażenie (143) w równanie (138) znajdujemy

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= A \sin x\beta + B \cos x\beta + Cx, \\ \omega_{x-1} &= A \sin (x-1)\beta + B \cos (x-1)\beta + C(x-1), \\ \sin x\beta\,(A - A\cos\beta - B\sin\beta) &+ \cos x\beta\,(B + A\sin\beta - B\cos\beta) + C = \\ &= a \sin x\beta + b \cos x\beta + c, \end{aligned}\right\} \tag{144}$$

skąd przez przyrównanie współczynników przy tych samych funkcjach trygonometrycznych znajdujemy

$$A = \frac{fl\,P}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \frac{fl\,H}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}, \tag{145}$$

$$B = \frac{fl\,H}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} - \frac{fl\,P}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}, \tag{146}$$

$$C = c = -\frac{fl}{\sin \dfrac{\beta}{2}} \left(H \cos \frac{2n+1}{2}\beta + P \sin \frac{2n+1}{2}\beta \right). \tag{147}$$

Ostatecznie otrzymujemy następujące rozwiązanie równania (138):

$$\omega_x = A \sin x\beta + B \cos x\beta + Cx + D. \tag{148}$$

Warunki brzegowe wskazują, że przy $x = 0$, $\omega_x = 0$, a więc $0 = B + D$, $D = -B$; wynika to stąd, że wobec symetrii ramy przekrój 0 nie ulega obrotowi przy odkształceniu się ramy.

Ponieważ mamy do czynienia z ramą dwuprzegubową, więc wielkość statycznie niewyznaczalną zadania, siłę H, otrzymujemy z równania (129), przy czym u_B wyrażamy za pomocą wzoru (127). Pierwsza część otrzymanego w ten sposób wyrażenia przybiera postać

$$\left.\begin{aligned}
\sum_2^n (\overline{\omega_{x-1}}\, l) = \sum_1^{n-1} \omega_x l \sin(x+1)\beta = \sum_1^{n-1} (A \sin x\beta + B \cos x\beta + \\
+ Cx - B)(\sin x\beta \cos\beta + \cos x\beta \sin\beta) = \frac{A}{2} \cos\beta \sum_1^{n-1} (1 - \cos 2x\beta) + \\
+ \frac{B}{2} \cos\beta \sum_1^{n-1} \sin 2x\beta + \frac{A}{2} \sin\beta \sum_1^{n-1} \sin 2x\beta + \\
+ \frac{B \sin\beta}{2} \sum_1^{n-1} (1 + \cos 2x\beta) + C \cos\beta \sum_1^{n-1} x \sin x\beta + \\
+ C \sin\beta \sum_1^{n-1} x \cos x\beta - B \sin(x+1)\beta.
\end{aligned}\right\} \tag{149}$$

Występujące tu sumy równają się odpowiednio:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_1^{n-1} 1 = n - 1, \\
&\sum_1^{n-1} \cos 2x\beta = \cos(n-1)\beta \sin n\beta \frac{1}{\sin\beta} - 1, \\
&\sum_1^{n-1} \sin 2x\beta = \sin(n-1)\beta \sin n\beta \frac{1}{\sin\beta}, \\
&\sum_1^{n-1} x \cos x\beta = \frac{1}{2(1-\cos\beta)} [n \cos(n-1)\beta - (n-1)\cos n\beta - 1], \\
&\sum_1^{n-1} x \sin x\beta = \frac{1}{2(1-\cos\beta)} [\sin(n-1)\beta - (n-1)\sin n\beta], \\
&\sum_1^{n-1} \sin(x+1)\beta = \sin\left(\beta + \frac{n-2}{2}\beta\right) \sin\frac{(n-1)\beta}{2} \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{150}$$

Drugi wyraz wzoru (127) przybiera postać

$$\sum_{1}^{n} \overline{y}_x = \sum_{1}^{n} y_x \sin x\beta, \tag{151}$$

gdzie

$$y_x = \frac{T_x l^3}{3EJ} + \frac{M_x l^2}{2EJ} = \frac{2}{3} fl^2 T_x + flM_x. \tag{152}$$

Wobec zależności (132)-(135) wyrażenie (152) przekształca się w następujące:

$$y_x = \frac{2}{3} flH \sin x\beta - \frac{2}{3} fl \cos x\beta + \tag{153}$$

$$+ \frac{flH}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \left(\cos x\beta \cos \frac{\beta}{2} - \sin x\beta \sin \beta - \cos \frac{2n+1}{2} \beta\right) +$$

$$+ \frac{flP}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \left(\sin x\beta \cos \frac{\beta}{2} + \cos x\beta \sin \frac{\beta}{2} - \sin \frac{2n+1}{2} \beta\right) =$$

$$= F \sin x\beta + G \cos x\beta + K,$$

gdzie

$$F = 0{,}167\, flH + 0{,}500\, flP \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}, \tag{154}$$

$$G = -0{,}167\, flP + 0{,}500\, flH \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}, \tag{155}$$

$$K = -\frac{fl}{2 \cos \frac{\beta}{2}} \left(H \cos \frac{2n+1}{2} \beta + P \sin \frac{2n+1}{2} \beta\right). \tag{156}$$

Wreszcie

$$\sum_{1}^{n} y_x = \sum_{1}^{n} y_x \sin x\beta = \sum_{1}^{n} (F \sin x\beta + G \cos x\beta + K) \sin x\beta = \tag{157}$$

$$= \frac{F}{2} \sum_{1}^{n} (1 - \cos 2x\beta) + \frac{G}{2} \sum_{1}^{n} \sin 2x\beta + K \sum_{1}^{n} \sin x\beta.$$

Sumy wchodzące w wyrażenie (157) obliczamy ze wzorów (150) wstawiając w nie zamiast n wielkość $n+1$, co odpowiada zmianie granic sumowania.

Za pomocą wyrażeń (145)-(147) dla współczynników A, B, C oraz wyrażeń (154)-(156) dla współczynników F, G, K moglibyśmy nadać równaniu $u_\beta = 0$, czyli

$$\sum_{1}^{n-1} \omega_x l \sin(x+1)\beta + \sum_{1}^{n} y_x \sin x\beta = 0 \tag{158}$$

postać bardziej zwartą, nie byłoby to jednak celowe, gdyż wprowadzałoby funkcje trygonometryczne nowych kątów i nowe wielkości do obliczenia. Należy więc zalecić korzystanie z wyrażeń (149) i (157) bezpośrednio obliczając je za pomocą wzorów (150) i wstawiając otrzymane wielkości w równanie (158), z którego zostanie wyznaczona wielkość nadliczbowa zadania.

Dla przykładu zakładamy $\beta = 9^\circ$ i $n = 10$, po czym obliczamy sumy (150):

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{1}^{n-1} 1 = 9{,}000, && \\
&\sum_{1}^{n-1} \sin 2x\beta = 6{,}320, && \sum_{1}^{n-1} \cos 2x\beta = 0, \\
&\sum_{1}^{n-1} x \sin x\beta = 35{,}700, && \sum_{1}^{n-1} x \cos x\beta = 22{,}910, \\
&\sum_{1}^{n} \cos 2x\beta = -1, && \sum_{1}^{n-1} \sin(x+1)\beta = 6{,}721, \\
&\sum_{1}^{n} \sin x\beta = 6{,}741, && \sum_{1}^{n} \sin 2x\beta = 6{,}314.
\end{aligned}\right\} \tag{159}$$

Współczynniki A, B, C, F, G, K otrzymają tu wartości następujące:

$$\left.\begin{aligned}
A &= 80{,}650\, f l H + 6{,}353\, f l P, \\
B &= 6{,}353\, f l H - 80{,}650\, f l P, \\
C &= 1{,}000\, f l H - 12{,}706\, f l P, \\
F &= 0{,}167\, f l H + 6{,}353\, f l P, \\
G &= 6{,}353\, f l H - 0{,}167\, f l P, \\
K &= -0{,}039\, f l H + 0{,}500\, f l P.
\end{aligned}\right\} \tag{160}$$

Suma (149) równa się więc

$$\sum_{1}^{n-1} \omega_x l \sin(x+1)\beta = 605{,}1\, f l H - 457{,}4\, f l P, \tag{161}$$

a suma (157)

$$\sum_{1}^{x} y_x \sin x\beta = 20{,}71\, f\, l\, H + 32{,}08\, f\, l\, P. \tag{162}$$

Równanie (158), a więc także (129), przybiera wobec tego postać

$$625{,}7\, f\, l\, H - 425{,}3\, f\, l\, P = 0\,, \tag{163}$$

skąd

$$H = 0{,}682\, P. \tag{164}$$

Zauważyć należy, że dla łuku kolistego w ten sam sposób obciążonego co rozpatrzona rama i opisanego dookoła tej ramy otrzymalibyśmy

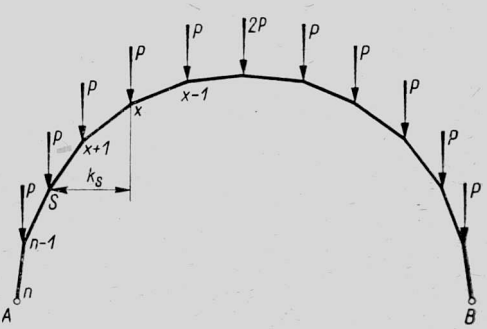
$$H = 0{,}636\, P\,, \tag{165}$$

tj. parcie poziome mniejsze.

Przypuśćmy dalej, że do omawianej wyżej ramy zaczepiono w poszczególnych węzłach x równe sobie siły P. W związku z takim obciążeniem należy uzupełnić wzory (132) i (133).

Siła poprzeczna w przęśle $x-1, x$ w zależności od samych tylko sił P wyrazi się wzorem (rys. 20)

$$T_x^1 = (n - x)\, P \cos x\beta. \tag{166}$$



Rys. 20

Niech będzie P_s siłą zaczepioną do jednego z węzłów zawartych między węzłami x i n, a k ramieniem momentu tej siły względem punktu x; w tych warunkach część momentu zginającego M_x zależna od sił P_s będzie równa

$$M'_x = \sum_{x+1}^{n-1} P_s\, k_s = P \sum_{x+1}^{n-1} k_s\,, \tag{167}$$

gdzie dla k_s możemy skorzystać ze wzoru (135) przyjmując $n = s$:

$$k_s = \frac{l}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \left(\sin x\beta \cos \frac{\beta}{2} + \cos x\beta \sin \frac{\beta}{2} - \sin \frac{2s+1}{2} \beta \right). \tag{168}$$

Aby obliczyć sumę (167), należy pierwsze dwa wyrazy ujęte w nawias we wzorze (168) powtórzyć $(n - 1 - x - 1 + 1)$, czyli $(n - x - 1)$

razy; wyraz ostatni będzie tu przedstawiał sumę, w której s zmienia się od $x + 1$ do $n - 1$, tzn.

$$\sum_{x+1}^{n-1} \sin \frac{2s+1}{2}\beta = \sin\left[\left(\frac{1}{2} + x\right)\beta + \beta\right] + \sin\left[\left(\frac{1}{2} + x\right)\beta + 2\beta\right] + \ldots \quad (169)$$

Do wyznaczenia sumy (169) możemy korzystać ze wzoru (134).

Łatwo stąd wysnuć wniosek, że moment M'_x będzie miał postać

$$M'_x = a_1 x \sin x\beta + b_1 x \cos x\beta + c_1 \sin x\beta + d_1 \cos x\beta + e_1. \quad (170)$$

Wyrażenia dla sił poprzecznych i momentów zginających otrzymamy dodając do wyrażeń (132) i (133) wyrażenia (166) i (170), wobec czego zamiast równania różnicowego typu (138) otrzymamy przy danym obciążeniu ramy równanie typu

$$\omega_x - \omega_{x-1} = a x \sin x\beta + b x \cos x\beta + c \sin x\beta + d \cos x\beta + e. \quad (171)$$

Całkowanie równania (171) odbywa się według tego samego schematu co w zadaniu poprzednim.

Ponieważ lewe strony równań (138) i (171) są w obydwóch wypadkach te same, rozwiązanie z_x równania bez wyrazu wolnego jest również w obydwóch wypadkach to samo.

Rozwiązanie szczególne równania (171) znajdziemy tu w postaci

$$z_x^0 = Ax \sin x\beta + Bx \cos x\beta + C \sin x\beta + D \cos x\beta + Ex, \quad (172)$$

gdzie wielkości A, B, C, D, E zostaną wyznaczone przez przyrównanie do siebie współczynników równania (171) przy tych samych funkcjach zmiennej x po obydwóch stronach równania.

Warunki brzegowe zadania są tu te same co w zadaniu poprzednim.

Gdy kąt β nie jest wielkością stałą, lecz pewną funkcją zmiennej x, lub gdy siły P nie są sobie równe, słowem gdy prawa strona równania (123) bądź jest bardzo złożoną funkcją x, bądź też nie daje się przedstawić bezpośrednio jako funkcja x, musimy uciec się do przybliżonego rozwiązania wspomnianego równania drogą zastąpienia prawej jego części przez pewną funkcję całkowitą wymierną.

Prawa część równania (123) przedstawia wyrażenie

$$\varphi_x = \frac{T_x l^2}{2EJ} + \frac{M_x l}{EJ}, \quad (173)$$

w którym T_x oraz M_x zależą zarówno od nieznanego parcia poziomego H, jak i od danych sił P. Niech będzie wobec tego

$$T_x = T_1 + T_2, \quad (174)$$

$$M_x = M_1 + M_2, \tag{175}$$

$$\varphi_x = \frac{T_1 l^2}{2EJ} + \frac{M_1 l}{EJ} + \frac{T_2 l^2}{2EJ} + \frac{M_2 l}{EJ} = HF_1 + F_2, \tag{176}$$

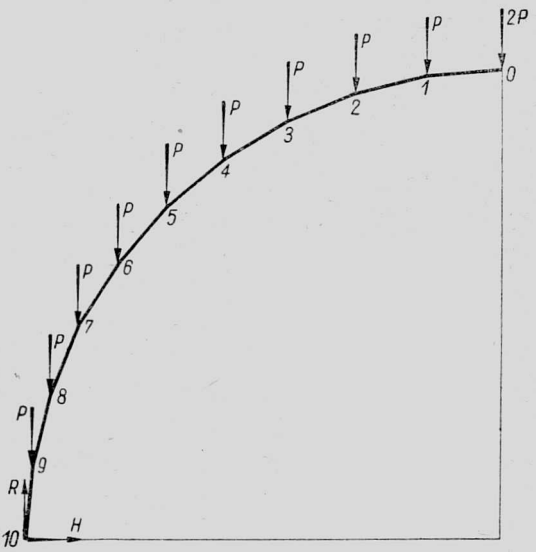
gdzie wielkości T_1 i M_1 są proporcjonalnie do H, a T_2 i M_2 zależą od P.

Funkcje

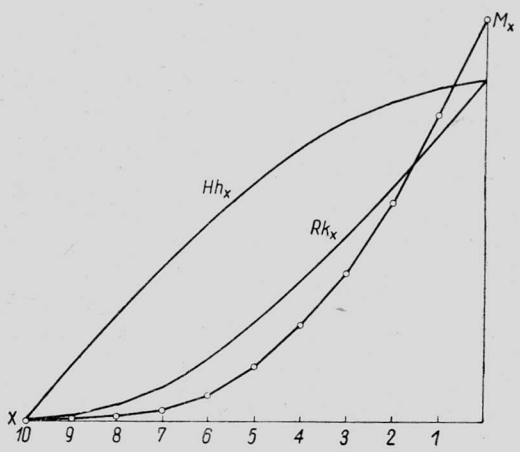
$$F_1 = \frac{T_1}{H}\frac{l^2}{2EJ} + \frac{M_1}{H}\frac{l}{EJ}, \tag{177}$$

$$F_2 = \frac{T_2 l^2}{2EJ} + \frac{M_2 l}{EJ} \tag{178}$$

możemy przedstawić na wykresie za pomocą wzorów (132) i (133); dla przykładu na rys. 22 przytoczone są krzywe wyrażające momenty Hh_x, Rk_x oraz momenty M_x zależne wyłącznie od obciążenia P dla ramy, której połowa przedstawiona jest na rys. 21. Otrzymane w ten sposób krzywe zastępujemy przez krzywe interpolacyjne drugiego, trzeciego i wyższych stopni w zależności od kształtu wykresów i od pożądanej dokładności obliczenia. Krzywe te zawierają odpowiednio trzy, cztery i więcej niewiadomych współczynników.



Rys. 21



Rys. 22

Wybieramy na wykresie szereg punktów charakterystycznych i wyznaczamy nieznane współczynniki wzorów interpolacyjnych w ten sposób, aby te wzory czyniły zadość wartościom współrzędnych dla obranych trzech, czterech lub odpowiednio większej liczby punktów wykresu. Otrzymane tą drogą przybliżone funkcje F_1 i F_2 nakładamy rysunkowo na funkcje bezpośrednio otrzymane i sprawdzamy, czy oba rodzaje krzywych pokrywają się z dostateczną dokład-

nością, przy czym dokładność 2-3% może tu być uważana za wystarczającą.

Przedstawiamy więc np. w następujący sposób funkcje F_1 i F_2:

$$F_1 = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 , \tag{179}$$

$$F_2 = a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 , \tag{180}$$

skąd dla funkcji φ_x dochodzimy do wyrażenia typu

$$\varphi_x = a x^3 + b x^2 + c x + d , \tag{181}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} a &= H a_1 + a_2 , & b &= H b_1 + b_2 , \\ c &= H c_1 + c_2 , & d &= H d_1 + d_2 . \end{aligned}\right\} \tag{182}$$

Równanie (123) przybiera w tym przypadku postać

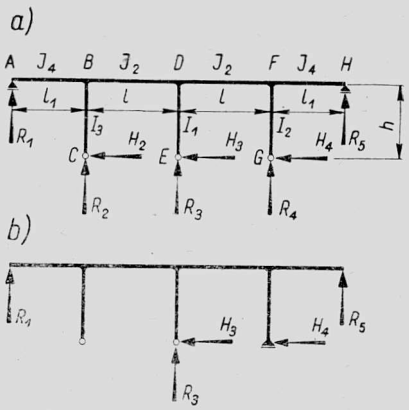
$$\omega_x - \omega_{x-1} = a x^3 + b x^2 + c x + d . \tag{183}$$

Rozwiązanie tego równania jako równania bez wyrazu wolnego podaje omówiony wyżej wzór (142). Gdy chodzi zaś o całkę szczególną równania całkowitego (183), to powinniśmy jej poszukiwać w postaci

$$z_x^0 = (A x^4 + B x^3 + C x^2 + D x) \cdot 1^x . \tag{184}$$

Funkcja całkowita wymierna stanowiąca poszukiwane rozwiązanie posiada stopień o jedność wyższy niż funkcja przedstawiająca ostatni wyraz równania (183), gdyż 1 jest w danym razie jednokrotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego.

Dalsze obliczenie ramy wielobocznej odbywa się według schematu podanego wyżej i sprowadza się do sumowania szeregów Σx^4, Σx^3, Σx^2, Σx.

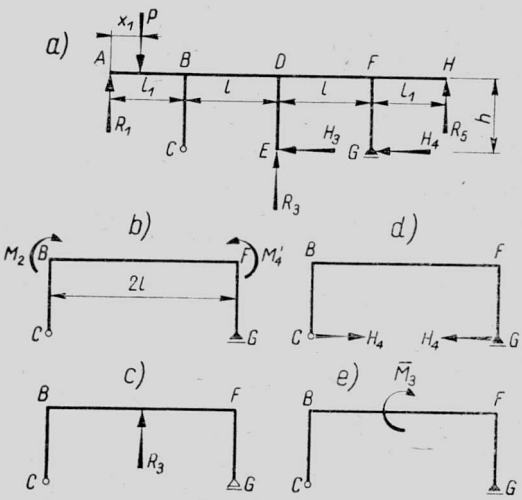


Rys. 23

Weźmy wreszcie pod uwagę czteroprzęsłową ramę prostokątną (rys. 23*a*). Obliczając ją drogą dodawania odkształceń przyjmujemy za

wielkości statycznie niewyznaczalne 5 składowych reakcji R_1, R_3, H_3, H_4 i R_5 (rys. 23*b*), wobec czego zastępczym schematem statycznie wyznaczalnym staje się rama dwusłupowa *CBFG* (rys. 24*a*) o jednej podporze przegubowej, a drugiej przegubowo-przesuwnej.

Jeżeli wynikiem obliczenia mają być linie wpływowe dla momentów zginających w ramie, jak to zwykle bywa w przypadkach prostokątnych ram wieloprzęsłowych, umieszczamy w przedziale *AB* siłę $P = 1$ w odległości zmiennej x od punktu *A*, następnie zaś przenosimy ją na przęsło *BD* ustawiając w zmiennej odległości x od punktu *B*. W przęsłach *DF* i *FH* otrzymamy rzędne linii wpływowych na podstawie symetrii ramownicy biorąc pod uwagę, że siła *P* ustawiona w przęśle *DF* lub *FH* wywołuje reakcje R_1, R_2, R_3, H_2, H_3 równe odpowiednio reakcjom R_5, R_4, $-H_4$, $-H_3$ wywołanym przez siłę *P* ustawioną symetrycznie w przęśle *BD* lub *AB*.



Rys. 24

Przesunięcia punktów odrzuconych podpór nadliczbowych, a więc punktów zaczepienia sił R_1, R_3, H_3, H_4 i R_5 w kierunku ich działania, oznaczamy odpowiednio przez v_1, v_3, v_5, u_3, u_4. Wielkości tych przesunięć jako funkcje wielkości statycznie nadliczbowych wyznaczamy rozpatrując odkształcenie ramy dwusłupowej przedstawionej na rys. 24*b*, kolejno pod działaniem poszczególnych sił obciążających ramę zgodnie ze schematami uwidocznionymi na rysunkach 24*b*-24*d*. Na rysunkach tych przez M_2, M_4' i $\bar{M}_3$ oznaczone zostały, dla uproszczenia obliczeń, momenty sił niewiadomych zaczepione w odpowiednich węzłach, tak że np. $\bar{M}_3 = H_3 h$.

Dla danego położenia siły *P* oraz dla 5 wielkości nadliczbowych wyznaczamy przesunięcia v_1, v_3, v_5, u_3 i u_4 sposobem momentów wtórnych.

W ten sposób otrzymujemy każde z przesunięć v_1, v_3, v_5, u_3 i u_4 jako inną funkcję tych samych wielkości x, M_2, M_4', $\bar{M}_3$, R_3, H_4 dla obliczenia zaś pięciu wielkości statycznie niewyznaczalnych ustawiamy pięć równań:

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0, \quad v_5 = 0, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = 0, \tag{185}$$

z których wyznaczamy wartości rzędnych linii wpływowych poszczególnych wielkości statycznie niewyznaczalnych.

Równania te dla siły P zaczepionej np. w przęśle AB przybierają postać następującą:

$$\left.\begin{aligned}
&3R_1 l_1 - 3P(l_1 - x_1) + 3R_5 l_1 - 2R_3 l - 6H_4 h - 3H_3 h = 0,\\
&2\frac{J_2}{J_3} h^2 (H_3 + 2H_4) - 3l[2R_5 l_1 + 2R_1 l_1 - \\
&\qquad - 2P(l_1 - x_1) - R_3 l - 2H_3 h - 4H_4 h] = 0,\\
&4\frac{J_2}{J_3} h^2 (H_3 + H_4) + 4\frac{J_2}{J_1} h^2 H_3 - 3l[R_5 l_1 + \\
&\qquad + 3R_1 l_1 - 3P(l_1 - x_1) - 3H_3 h - H_3 h - R_3 l - 4H_4 h] = 0,\\
&2\frac{J_2}{J_4}[2R_1 l_1^3 - 2P(l_1 - x_1)^3 - 3Px_1(l_1 - x_1)^2] + l_1 l[4R_5 l_1 + \\
&\qquad + 8R_1 l_1 - 8P(l_1 - x_1) - 8H_3 h - 3R_3 l - 12H_4 h - H_3 h] = 0,\\
&4\frac{J_2}{J_4} R_5 l_1^2 + l[4R_1 l_1 - 4P(l_1 - x_1) - 4H_3 h + \\
&\qquad + 8R_5 l_1 - 3R_3 l - 12H_4 h + H_3 h] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (186)$$

Podobne układy równań otrzymujemy dla siły P zaczepionej w przęśle BD oraz dla wahań temperatury.

Układy te rozwiązujemy drogą kolejnego rugowania niewiadomych, po czym rozwiązania dla wielkości statycznie niewyznaczalnych mogą być przedstawione jako funkcje odciętych punktu zaczepienia siły P.

IV. O RÓWNANIACH ENERGII SPRĘŻYSTEJ

1. Rozważania ogólne

Zastosowanie geometrycznych sposobów badania konstrukcji prętowych, omówione w rozdziałach II i III dla przypadków prętów rozciąganościskanych i zginanych, znajduje uogólnienie w omówieniu równań energii sprężystej. Chodzi tu w szczególności o wykazanie możliwości stosowania do układów pełnych twierdzeń wyprowadzonych dla belek kratowych.

Mówiąc o równaniach energii sprężystej mamy na widoku równania wyrażające zależność między następującymi trzema rodzajami wielkości lub przynajmniej między dwiema spośród nich, a więc

(1) między uogólnionymi siłami Q wzrastającymi w sposób ciągły i nieskończenie powolny,

(2) między uogólnionymi przesunięciami (współrzędnymi) q punktów zaczepienia sił Q i

(3) między energią sprężystą V nagromadzoną w danej konstrukcji w czasie wzrastania sił Q od zera do ich wartości ostatecznej.

Równania dotyczące energii sprężystej są użytecznym środkiem przy rozwiązywaniu szeregu zagadnień statyki budowli i stanowią ulubioną metodę pracy wielu uczonych, przede wszystkim statyków niemieckich. Sprecyzujemy przeznaczenie tych równań.

Do obliczenia energii sprężystej nagromadzonej w danym ciele korzystamy z równania Clapeyrona

$$V = \frac{1}{2} \Sigma Q \eta . \tag{187}$$

Równanie to doprowadza w sposób prosty do przedstawienia energii potencjalnej ciała sprężystego w postaci jednorodnej funkcji sił drugiego stopnia

$$V = \Sigma m_i \cdot Q_i^2 + \Sigma m_{ij} Q_i Q_j , \tag{188}$$

gdzie współczynniki m_i i m_{ij} nie są zależne od sił.

Z drugiej strony, ilość energii sprężystej nagromadzonej w danej konstrukcji wyrazić można za pomocą wzoru

$$V = \int V' \, dx \, dy \, dz, \tag{189}$$

gdzie V' wyraża ilość energii nagromadzonej w sześcianie o krawędzi równej 1, wyjętym z ciała odkształcanego, a wielkości dx, dy, dz wyrażają długości krawędzi nieskończenie małego prostopadłościanu.

Równanie (189) wypływa bezpośrednio z określenia energii sprężystej jednostkowej i z przyjętego na ogół w statyce, a omówionego wyżej sposobu wzrastania sił Q i wobec tego właściwie nie należy do grupy omawianych tu równań. Łącznie jednak z równaniem Clapeyrona przez zestawienie dwóch różnych wyrażeń dla energii sprężystej daje ono możność łatwego obliczenia odkształceń w razie, gdy mamy do wyznaczenia przesunięcie w punkcie zaczepienia i w kierunku działania siły skupionej, lub gdy mamy do wyznaczenia obrót w punkcie zaczepienia momentu. Zestawienie dwóch wspomnianych wyrażeń dla energii sprężystej przedstawia właściwie tylko odmienną formę równania Clapeyrona.

Do wyznaczenia odkształceń służy najczęściej twierdzenie Castigliano.

$$\frac{\partial V}{\partial Q} = \eta . \tag{190}$$

Do wyznaczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych korzystamy z twierdzenia Menabrei

$$\frac{\partial V}{\partial Q} = 0 \tag{191}$$

lub też z twierdzenia Bettiego zwanego twierdzeniem o wzajemności przesunięć

$$\Sigma Q' q_{II} = \Sigma Q'' q_{I} , \tag{192}$$

gdzie wielkości Q' i q_I odpowiadają jednemu, a Q'' i q_{II} drugiemu układowi sił zaczepionych do tej samej konstrukcji.

Szczególny przypadek twierdzenia Bettiego przy jednej sile Q nazywamy twierdzeniem Maxwella.

Wzory (187) - (192) dotyczą w równej mierze układów pełnych jak kratowych.

Nie wdając się w historię powstawania omawianych równań zauważyć jednak należy, że niektóre z nich zostały pierwotnie ustawione dla układów kratowych, następnie zaś rozpowszechnione i na układy pełne (np. twierdzenie Menabrei, inne zaś, na odwrót, udowadniane były z początku dla układów pełnych, później zaś dopiero były zastosowane i do układów kratowych (np. twierdzenie Clapeyrona).

Uzasadnienie twierdzeń dotyczących energii sprężystej w przypadku ciał pełnych opiera się w zasadzie na równaniach ogólnych teorii sprężystości, wyprowadzenie zaś tych równań dla kratownic odbywa się na podstawie wzoru (1), czyli wzoru Maxwella i Mohra.

Wyprowadzenie równań energii sprężystej dla ciał pełnych jest znacznie bardziej złożone niż uzasadnienie tych samych równań dla układów kratowych. Wobec tego zmierzając do uproszczenia wykładu równań energii sprężystej dla ciał pełnych, autorowie współczesnych podręczników statyki idą w dwóch kierunkach. Jedni, mianowicie, upraszczają bezpośrednio uzasadnienie pierwotne odrzucając pewne subtelności w rozumowaniu i dbając raczej o algebraiczną poprawność dowodzenia, drudzy korzystają również i w danym wypadku z wywodów przeznaczonych dla układów kratowych.

Pierwsi nie odbiegają wprawdzie, lub przynajmniej nie odbiegają pozornie, od schematu statycznego ciała pełnego, zmuszeni jednak do koniecznej w podręcznikach zwięzłości decydują się nieraz na pewne niejasności wykładu.

Drudzy idąc za przykładem Mohra i wyrzekając się przy wyprowadzaniu równań energii sprężystej schematu ciała pełnego na korzyść kratownicy, uogólniają następnie swe wywody drogą twierdzenia, że każde ciało pełne może być uważane za kratownicę przestrzenną o nie-

skończenie wielkiej liczbie prętów nadliczbowych i że wobec tego równania energii sprężystej wyprowadzone dla kratownicy mogą być bez dalszych dowodów rozpowszechnione i na konstrukcje pełne.

To ostatnie twierdzenie oparte jest na przedstawieniu ciała sprężystego jako zbioru punktów materialnych, między którymi działają siły proporcjonalne do wzajemnych przesunięć tych punktów i skierowane wzdłuż łączących je prostych. W ten sposób pomyślany schemat ciała sprężystego nie przeczy wprawdzie prawu H o o k e ' a, nie spełnia jednak charakterystycznego dla pracy sprężystego ciała pełnego warunku, mianowicie nie odpowiada mu co do liczby stałych sprężystości.

Chodzi o to, że w razie przyjęcia dla ciała sprężystego schematu kratownicy mamy do czynienia z jedną tylko stałą sprężystości, ze współczynnikiem E, w danym razie charakteryzującym zależność między przesuwaniem się węzłów kratownicy a siłami działającymi między nimi. W przeciwieństwie do tego w ciele sprężystym jednorodnym pełnym, uważanym za sprężyste continuum, mamy do czynienia w układzie płaskim z dwiema niezależnymi od siebie wielkościami stałymi, a więc poza współczynnikiem E jeszcze ze współczynnikiem P o i s s o n a μ.

Pogląd na ciało sprężyste jako na zbiór punktów materialnych, a więc pogląd doprowadzający do schematu kratownicy, czyli do tak zwanego modelu N a v i e r a, jest obecnie poglądem przestarzałym, gdyż wszystkie nowoczesne badania naukowe w zakresie teorii sprężystości oparte są na założeniu sprężystego continuum, czyli modelu C a u c h y ' e g o.

Stąd wypływa nie dający się w zasadzie odeprzeć zarzut niewspółczesności, jaki można by postawić sposobom wyprowadzenia równań energii sprężystej, opartej na teorii kraty. Nie wydawałoby się też słusznym odpieranie tego zarzutu przez powoływanie się na najnowsze badania z zakresu budowy materii, gdyż badania te stoją jeszcze dość daleko od potrzeb praktycznej teorii sprężystości.

Z drugiej strony, proste a jednak ścisłe i pozbawione niedomówień uzasadnienie wzorów (187) - (192), tak nieraz użytecznych w pracy inżyniera, jest rzeczą konieczną.

Z tego powodu należy się zastanowić nad tym, czy nie można by w ten sposób praktycznie ograniczyć obszaru stosowalności równań dotyczących energii sprężystej, aby w tym obszarze wyprowadzenie ich na podstawie teorii kraty było zgodne z ogólnie przyjętymi założeniami mechaniki budowli i dotyczyło w równej mierze układów pełnych jak kratowych.

Ograniczenia, o których mowa, dotyczą po pierwsze typu odkształceń, po wtóre rodzaju naprężeń i po trzecie sposobu zaczepienia sił zewnętrznych.

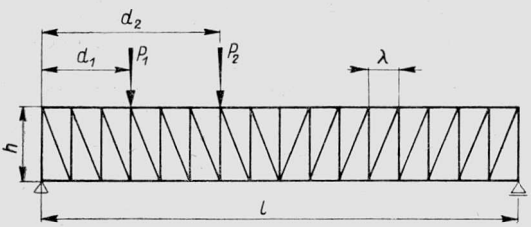
Zestawiając przypadki, w których równania energii sprężystej znajdują zastosowanie, z rodzajami konstrukcji pełnych, dla których to zastoso-

wanie jest korzystne, łatwo spostrzegamy, że wchodzą tu w grę przede wszystkim przypadki zginania zarówno elementów konstrukcyjnych prostoliniowych, jak i krzywoliniowych. Mamy tu więc przede wszystkim na widoku belki proste, na które żadne siły podłużne nie działają, następnie ramy, w których obliczeniu statycznym rzadko tylko siły podłużne brane są pod uwagę, wreszcie łuki, w których obliczeniu wprawdzie siły podłużne zwykle uwzględniamy, w których jednak wpływ decydujący na naprężenia mają zwykle momenty zginające. W przypadkach samego tylko rozciągania lub ściskania wyprowadzenie równań energii sprężystej nie nastręcza żadnych trudności.

Dalej należy stwierdzić, że w wyjątkowych tylko przypadkach przy wyznaczeniu odkształceń konstrukcyj budowlanych lub też wielkości statycznie niewyznaczalnych uwzględniamy wpływ naprężeń stycznych na obliczane wielkości, czyli liczymy się z przesuwaniem wewnątrz ciał odkształcanych.

Wreszcie ogromną większość konstrukcyj budowlanych i wszystkie nieomal konstrukcje mostowe rozkładamy zwykle w obliczeniu statycznym na elementy płaskie. W obliczeniach zaś dotyczących konstrukcyj przestrzennych zwykle wymagania co do ścisłości bywają niezbyt surowe.

Twierdzić można z całą śmiałością, że poza ograniczonym w ten sposób zakresem pozostaje już tylko bardzo niewiele praktycznych zagadnień statyki konstrukcyj pełnych, zagadnienia zaś o charakterze badawczym nie bywają na ogół rozwiązywane za pomocą równań energii sprężystej. Dla takiego zakresu konstrukcyj, jak to zostanie omówione niżej, równania energii sprężystej mogą być wyprowadzone na podstawie teorii kraty już bez żadnych zastrzeżeń.



Rys. 25

Ponieważ ograniczyliśmy rozważania do układów płaskich, nie ma potrzeby trwać tu przy opisanym wyżej modelu ciała sprężystego jako kratownicy przestrzennej, lecz możemy przejść do prostszego schematu kratownicy płaskiej, co znacznie ułatwia rozumowania.

Dla uproszczenia przeróbek matematycznych, nie wzbudzających zresztą w danym zadaniu większego zainteresowania, obszerniej omawiamy tu tylko najprostszy, lecz zarazem i najważniejszy schemat kratownicy o pasach równoległych, przedstawiający niejako model pełnościennej belki pryzmatycznej w dwóch punktach swobodnie podpartej. Kratownicę tę będziemy uważali w dalszym ciągu za statycznie wyznaczalną, posia-

dającą np. kratę w rodzaju przedstawionej na rys. 25, choć bardzo gęstą. Przez podobne przyjęcie oddalamy się jeszcze bardziej od modelu N a - v i e r a, w którym każdy węzeł powinien być połączony ze wszystkimi innymi węzłami; powstający w ten sposób nowy model lub schemat statyczny, aczkolwiek bardziej ograniczony co do swej ogólności, nadaje się jednak z powodzeniem do obliczenia ugięć belki pełnościennej.

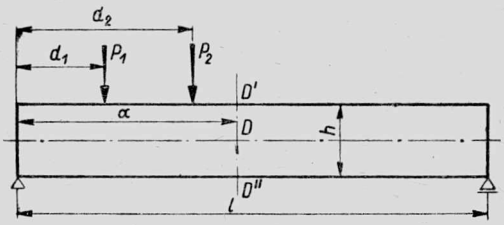
Stosując dalsze rozważania do belki w dwóch punktach swobodnie podpartej lub belki utwierdzonej w jednym końcu i swobodnej w drugim zauważamy przede wszystkim, że wszystkie równania energii sprężystej można ująć w jedno równanie symboliczne

$$F(Q, q, V) = O, \tag{193}$$

w którym zresztą wielkość V nie zawsze występuje w sposób wyraźny.

Aby uzasadnić stosowanie kratownicy jako modelu statycznego belki pełnościennej, ustalamy (przede wszystkim) warunki, którym odpowiadać powinna kratownica przedstawiona na rys. 25, aby te same wartości Q, q i V czyniły zadość równaniu (193) zarówno dla kratownicy, jak i dla belki pełnościennej o tej samej rozpiętości i o tym samym sposobie podparcia (rys. 26). Zakładamy tu oczywiście, że funkcja F zachowuje ten sam kształt w obydwóch wypadkach.

Kratownicę przedstawioną na rys. 25 uważamy za przegubową oraz odpowiadającą wszystkim założeniom teorii kraty i zaczepiamy do niej, np. do jej górnych węzłów, szereg sił P działających prostopadle do osi pasów i oddalonych od lewej podpory belki o d. Z drugiej strony, na górnej powierzchni belki pełnościennej przedstawionej na rys. 26 i wykonanej z tego samego materiału ustawiamy siły równe omówionym siłom P i ustawione od lewej podpory belki w tych samych odległościach d co i tamte. Tego rodzaju obciążenia obydwóch belek możemy uważać za identyczne, gdyż zarówno wykresy momentów zginających, jak i wykresy sił poprzecznych w obydwóch wypadkach są te same. Ma to miejsce w danym wypadku niezależnie od kształtu i wymiarów poprzecznych obydwóch belek. Przy pominięciu wpływu naprężeń stycznych na zginanie, kształt przekroju poprzecznego belki pełnościennej pozostaje bez znaczenia dla dalszych rozważań.



Rys. 26

W myśl zasady zesztywnienia ani w obliczeniu statycznym kratownic, ani też w obliczeniu belek pełnościennych nie bierzemy pod uwagę wpływu odkształceń poprzecznych na naprężenia normalne, nie mamy więc

powodu uwzględniać go też i przy obliczaniu energii sprężystej nagromadzonej w tych konstrukcjach; pomijając zaś te odkształcenia przyjmujemy tym samym, że współczynnik Poissona równa się 0 w obydwóch wypadkach. Ma to miejsce w belkach o małej szerokości i nie dotyczy płyt.

2. Obliczenia porównawcze

Obliczenie ugięcia belki pełnościennej w pewnym punkcie D (rys. 26), czyli prostopadłego do osi belki przesunięcia punktu D (przesunięcia $\eta = v_D$) leżącego na osi belki odbywa się w zasadzie na podstawie równania różniczkowego osi odkształconej.

Wyprowadzenie ogólnego równania tej osi

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M \tag{194}$$

opiera się między innymi na dwóch założeniach następujących:

(1) na założeniu, że równoległe do siebie warstwy belki pełnej nie wywierają wzajemnie na siebie nacisku w kierunku prostopadłym do osi belki,

(2) na założeniu, że warstwy te nie przesuwają się względem siebie, co odpowiada tak zwanemu założeniu płaskich przekrojów; wobec tego, że między naprężeniami stycznymi a przesunięciami jednostkowymi istnieje zależność

$$\tau = G\beta, \tag{195}$$

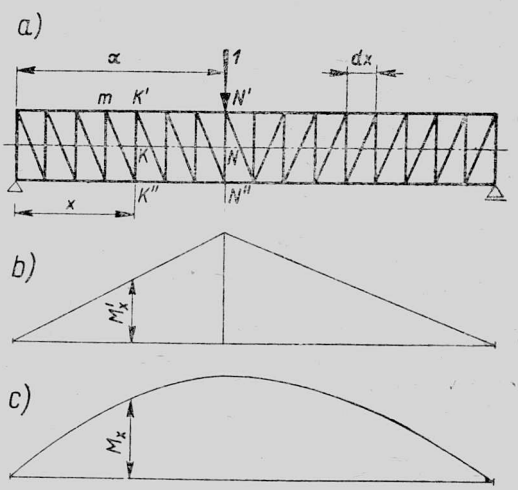
gdzie G oznacza współczynnik sprężystości przy przesuwaniu, a β przesunięcie jednostkowe, założenie to odpowiada przyjęciu, że stała sprężystości G równa się nieskończoności ($G = \infty$).

W konsekwencji powyższych założeń uważamy, że punkt D' na górnej i punkt D'' na dolnej powierzchni belki, leżące na prostej prostopadłej do osi belki i przechodzącej przez punkt D nie odsuną się po odkształceniu belki od tego punktu ani w kierunku równoległym do stycznej do osi, ani w kierunku prostej $D'D''$. Mamy więc

$$v_{D'} = v_{D''} = v_D. \tag{196}$$

W belce kratowej (rys. 27*a*) rolę punktów D', D'' i D odgrywają: punkt N położony w środku wysokości kratownicy oraz węzły N' i N'', których odległości od lewej podpory belki odpowiadają odległościom punktów D. Powstaje pytanie, jakim warunkom odpowiadać powinna belka kratowa, aby wzajemna nieprzesuwalność węzłów N' i N'' odpowiadająca nieprzesuwalności punktów D' i D'' belki pełnościennej była zabezpieczona.

Otóż założenie nieprzesuwalności punktów D' i D'' w kierunku normalnej do osi odkształconej może być zastąpione w sposób dostateczny przez warunek nieodkształcalności prętów kraty, który jest równoznaczny z pozbawieniem węzłów N' i N'' możności przesuwania się względem siebie. Przyjęcie, iż stała sprężystość G równa się nieskończoności jest równoznaczne z odrzuceniem wpływu sił poprzecznych na wyginanie się belek pełnościennych, natomiast w przypadku kratownicy pominięcie wpływu sił poprzecznych na przesuwanie się węzłów może być wyrażone przez przyjęcie nieodkształcalności podłużnej prętów kraty poza prętami pasów. Tłumaczy się to w ten sposób, że w kratownicy o pasach równoległych siły w prętach kraty są wprost proporcjonalne do sił poprzecznych, a więc przyjmując, że pręty te nie ulegają wydłużeniu ani skróceniu, czyli że ich współczynnik sprężystości równa się $E_{krzyż} = \infty$, odrzucamy tym samym wpływ sił poprzecznych na wyginanie się belek kratowych.



Rys. 27

Innymi słowami, założenie nieodkształcalności prętów kraty przy jednoczesnym założeniu, że oba pasy kratownicy mają te same wymiary i są wykonane z tego samego materiału, całkowicie zabezpiecza wzajemną nieprzesuwalność węzłów N' i N'' w kierunku normalnej do osi belki oraz w kierunku równoległym do stycznej do osi belki i odgrywa rolę założenia $G = \infty$ przy obliczeniu ugięć belki pełnościennej.

Przy obliczeniu odkształceń porównywanych belek, pełnościennej i kratowej, przyjmujemy w myśl powiedzianego wyżej:

(1) że siły zewnętrzne P są w obydwóch wypadkach zaczepione jednakowo,

(2) że współczynnik Poissona $\mu = 0$,

(3) że siły poprzeczne w obydwóch wypadkach nie mają wpływu na odkształcenia, czyli że $G = \infty$ lub $E_{krzyż} = \infty$.

Stosując do wyznaczenia ugięcia belki pełnościennej w punkcie D sposób momentów wtórnych otrzymujemy według wzoru (60)

$$v_D = \frac{\mathfrak{M}_D}{EJ}, \tag{197}$$

gdzie $\mathfrak{M}_D$ wyraża moment wtórny w przekroju D belki, a EJ oznacza iloczyn współczynnika sprężystości przez moment bezwładności przekroju poprzecznego belki.

Z drugiej strony, obliczając dla belki kratowej przesunięcie punktu D w kierunku prostopadłym do osi belki równe przesunięciu punktów N' i N'' otrzymujemy ze wzoru Maxwella i Mohra, że

$$v_N = \sum \frac{Z S \lambda}{E A}, \tag{198}$$

gdzie S oznacza siły w poszczególnych prętach kratownicy, Z siły, które działałyby w tych prętach, gdyby w węźle N' była zaczepiona siła 1 mająca kierunek przesunięcia v_N, wreszcie λ długość jednego przedziału pasa. Wobec tego, że słupy i krzyżulce kratownicy uważamy za nieskończenie sztywne, czyli za nieodkształcalne, sumowanie dotyczy tylko samych pasów obejmujących wszystkie przedziały belki kratowej.

Oznaczamy przez M_x momenty zginające wywołane przez rzeczywiste obciążenie zewnętrzne w poszczególnych węzłach kratownicy k'' oddalonych od lewej podpory o x i przedstawiamy na rys. 27c wykres tych momentów. Odpowiednio siły podłużne powstające w położonych naprzeciwko węzłów k'' poszczególnych przedziałach $m\,k'$ pasów belki kratowej będą się wyrażały za pomocą wzoru

$$S = \frac{M_x}{h}. \tag{199}$$

Ciężar równy 1 t zaczepiony nad punktem N, którego przesunięcie wyznaczamy, wywołuje zarówno w rozpatrywanej belce kratowej, jak i w odpowiedniej belce pełnościennej momenty zginające, zmieniające się według wykresu momentów przedstawionego na rys. 27b.

Oznaczając przez M'_x rzędne wykresu 27b w punktach oddalonych o x od lewej podpory belki kratowej otrzymujemy następującą wartość siły wywołanej w przedziale $m\,k'$ pasa przez siłę 1 zaczepioną w węźle N:

$$Z_m = \frac{M'_x}{h}. \tag{200}$$

W związku z tym wzór (198) przybiera postać

$$v_N = 2 \sum \frac{M_x}{h} \frac{M'_x}{h} \frac{\lambda}{E A}. \tag{201}$$

Sumowanie dotyczy, jak wyżej, dwóch pasów kratownicy, każdy o długości l.

Przyjmujemy dalej, że przedziały belki kratowej maleją w sposób nieograniczony, czyli że $\lambda = dx$. W związku z tym suma (201) przekształca się w całkę

$$v_N = 2 \int \frac{M_x}{h} \frac{M'_x}{h} \frac{dx}{EA}. \tag{202}$$

Wracając do wykresu 27*b* obliczamy rzędną jego dla punktu N. Ponieważ ciężar 1 wywołuje reakcję belki równe $1 - a/l$ oraz a/l, więc moment zginający, wywołany przez ten ciężar w punkcie N, wynosi

$$\eta_N = \left(1 - \frac{a}{l}\right) a. \tag{203}$$

Wyrażenie dla η_N, jak widać, przedstawia rzędną linii wpływowej momentu zginającego w punkcie N dla belki w dwóch punktach swobodnie podpartej.

Wobec tego, że wykres 27*b* jest linią wpływową momentu zginającego w punkcie D (o rzędnych $\eta = M'_x$) i wobec tego, że wykres 27*c* dla momentów M_x uważać możemy za wykres obciążenia wtórnego $\bar{q} = M_x$, powinniśmy dla wyznaczenia momentu wtórnego $\mathfrak{M}$ w punkcie N wykonać całkowanie

$$\mathfrak{M}_D = \mathfrak{M}_N = \int_0^l \bar{q}_x M'_x \, dx = \int_0^l M_x M'_x \, dx. \tag{204}$$

Ze wzorów (202) i (204) otrzymujemy więc

$$v_N = 2 \frac{\mathfrak{M}_N}{h^2 EA} = \frac{\mathfrak{M}_N}{2\left(\frac{h}{2}\right)^2 EA}. \tag{205}$$

Iloczyn $2(h/2)^2 A$ wyraża moment bezwładności belki kratowej, której cały materiał został skupiony na osiach pasów.

Z zestawienia wzorów (197) i (205) wynika, że na to, aby belka kratowa o tej samej rozpiętości, obciążeniu i sposobie podparcia co pewna belka pełnościenna dawała przy wszystkich poczynionych wyżej zastrzeżeniach te same ugięcia, potrzeba, aby czyniła ona zadość następującym warunkom:

(1) cały materiał belki skupiony być musi na osiach pasów, przy czym momenty bezwładności belki kratowej i belki pełnościennej mają być sobie równe, tj.

$$2\left(\frac{h}{2}\right)^2 A = J, \tag{206}$$

z tym że pominięte są momenty bezwładności pasów względem własnej osi,

(2) przedziały belki kratowej powinny być nieskończenie małe,

(3) krzyżulce i słupy kraty nie mogą ulegać odkształceniu podłużnemu.

Ugięcie belki pełnościennej w pewnym punkcie D na osi belki równa się więc odpowiedniemu przesunięciu węzła kratownicy, odpowiadającej wymienionym wyżej warunkom, i położonego w tej samej odległości od początku belki co punkt D.

Poczynione wyżej założenia upraszczające mają ten sam sens fizyczny dla belki kratowej co i dla pełnościennej, w jednakowym więc, na ogół dopuszczalnym stopniu, wpływają one na dokładność obliczeń statycznych.

Ponieważ przedziały belki kratowej uważamy za nieskończenie małe, możemy więc siły zewnętrzne zaczepiać we wszystkich punktach długości belki nie będąc przez to w sprzeczności z teorią kraty i mogąc dzięki temu rozpowszechniać wszystko, co powiedzieliśmy wyżej również na obciążenia ciągłe. Nie mamy potrzeby robić żadnych zastrzeżeń co do obciążenia momentowego, gdyż co do kształtu wykresu na rys. 27c nie wprowadzaliśmy żadnych ograniczeń.

Przechodząc do obliczenia obrotów sprężystych poszczególnych przekrojów belki pełnościennej ustawiamy dla obrotu jej pewnego przekroju D wzór

$$\varphi_D = \frac{\mathfrak{T}_D}{EJ}, \tag{207}$$

gdzie $\mathfrak{T}_D$ oznacza siłę poprzeczną w przekroju D, wywołaną obciążeniem wtórnym $\overline{q}_x = M_x$ (rys. 26).

Wyznaczenie obrotu przekroju D belki kratowej wykonujemy na podstawie wzoru M a x w e l l a i M o h r a

$$\varphi_N = 2 \sum_0^l \frac{ZS\lambda}{EA}, \tag{208}$$

w którym S, λ i EA ma to samo znaczenie co we wzorze (198), a Z oznacza siły powstające w poszczególnych prętach pasów kratownicy pod działaniem momentu równego 1 i zaczepionego w przekroju D, którego obrót obliczamy (rys. 28).

Moment równy 1 zaczepiony w przekroju N belki wywołuje momenty zginające M''_x, których wykres przedstawiony jest na rys. 28b. W związ-

ku z tym siły Z powstające w poszczególnych przedziałach pasa kratownicy wyrażają się wzorem

$$Z = \frac{M_x''}{h} \tag{209}$$

analogicznym do wzoru (200), siły zaś S za pomocą wzoru (199).

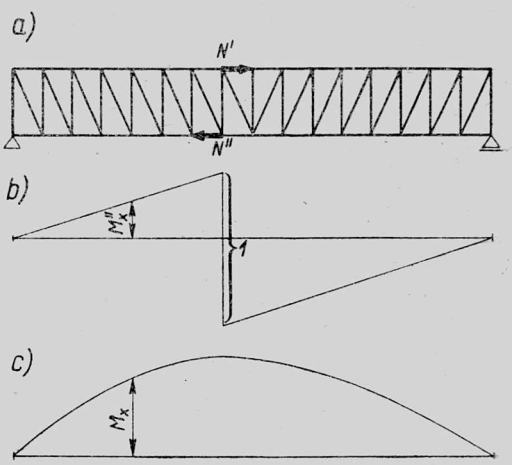
Wykres na rys. 28b przedstawia, jak widać, również linię wpływową dla siły poprzecznej w przekroju N belki swobodnie podpartej. Wobec tego możemy dokonać przekształcenia wzoru (208) analogicznego do wyżej omówionego przekształcenia wzoru (198). Siła poprzeczna $\mathfrak{T}_D = \mathfrak{T}_N$ od obciążenia wtórnego w punkcie N będzie wówczas równa

$$\mathfrak{T}_N = \int_0^l \bar{q}\, M_x''\, dx = \int_0^l M_x\, M_x''\, dx, \tag{210}$$

a więc dla kąta obrotu φ_N otrzymamy

$$\varphi_N = \frac{\mathfrak{T}_N}{2\left(\frac{h}{2}\right)^2 EA}. \tag{211}$$

Porównując wzory (207) i (211) możemy twierdzić, że w tych samych przypadkach, kiedy wyznaczenie ugięć belek pełnościennych może być zastąpione przez obliczenie przesunięć odpowiednich węzłów belek kratowych, również i obroty poszczególnych przekrojów belek mogą być w podobny sposób obliczone.



Rys. 28

Inaczej mówiąc wzór M a x w e l l a i M o h r a wyprowadzony w rozdziale II dla układów kratowych może być zastosowany i do układów pełnych; przybiera on wówczas postać

$$\eta = \int \frac{M\,\mathrm{M}}{EJ}\, dx, \tag{212}$$

gdzie η oznacza uogólnione przesunięcie belki zginanej, M moment zginający wywołany w poszczególnych przekrojach belki przez dane obciążenia, a M moment zginający w tych samych punktach, spowodowany bądź przez siłę równą 1 działającą wzdłuż poszukiwanego przesunięcia, bądź przez moment rów-

ny 1, odpowiadający poszukiwanemu obrotowi przekroju poprzecznego belki.

W sposób równie prosty jak poprzednio można wykazać, że energia sprężysta, nagromadzona przy zginaniu belki pełnościennej, wyraża się za pomocą tego samego wzoru co energia sprężysta, nagromadzona w kratownicy odpowiadającej warunkom omówionym wyżej.

Dla belek pełnych o dowolnym sposobie podparcia energia sprężysta wyraża się wzorem

$$V = \int_0^l \frac{M^2 \, dx}{2EJ}. \tag{213}$$

Dla odpowiedniej belki kratowej mamy wzór następujący:

$$V = 2 \int_0^l \frac{S^2 \, dx}{2EA}, \tag{214}$$

gdzie $dx = \lambda$ oznacza długość przedziału pasa kratownicy.

Wobec tego, że siły S w poszczególnych prętach pasa wyrażają się, w zależności od momentu zginającego wzorem

$$S = \frac{M_x}{h}, \tag{215}$$

wzór (214) przybiera postać

$$V = 2 \int_0^l \left(\frac{M}{h}\right)^2 \frac{dx}{EA} = \int_0^l \frac{M^2 \, dx}{2\left(\frac{h}{2}\right)^2 EA} = \int_0^l \frac{M^2 \, dx}{2EJ}, \tag{216}$$

to znaczy postać (213).

Wszystko, co powiedzieliśmy o odkształceniu belki w dwóch punktach swobodnie podpartych, może być zastosowane bez żadnych zastrzeżeń i do innych układów złożonych z prostych elementów zginanych, a więc do konstrukcyj ramowych i łukowych przede wszystkim.

Ponieważ zostało tu dowiedzione, że dla belek pełnościennych odkształcenia i nagromadzona w czasie tych odkształceń energia sprężysta mogą być obliczone według tej samej metody co dla belek kratowych, możemy twierdzić, że o ile równania (187) - (192) zostaną wyprowadzone dla pewnej konstrukcji kratowej, to pozostaną one słuszne w tym samym stopniu i dla konstrukcji pełnej.

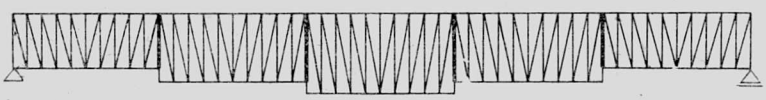
Stosowanie schematu kratownicy płaskiej do wyprowadzenia równań (187) - (192) dla układów płaskich nie może być uważane za nawrót do

dawnych poglądów na budowę ciał sprężystych przede wszystkim dlatego, że przy tym wyprowadzeniu brane są pod uwagę w sposób pośredni lub bezpośredni obie niezależne od siebie stałe sprężystości E i μ, tak jak wchodzą one we wszystkie zadania płaskie mechaniki budowli.

Omawiana wyżej kratownica płaska odgrywa w danym razie rolę przybliżonego schematu, służącego do obliczenia tak złożonego układu statycznie niewyznaczalnego, jakim jest pod względem rozkładu naprężeń każda belka pełnościenna choćby podparta w sposób statycznie wyznaczalny, a którego innym uproszczeniem, ogólnie przyjętym, jest belka odpowiadająca założeniu płaskich przekrojów. Wyżej zostało wykazane, że oba te schematy upraszczające zapewniają ten sam stopień dokładności obliczeń.

Uzasadnienie słuszności stosowania schematu belki kratowej przy wyprowadzeniu równań energii sprężystej i wzajemności przesunięć dla płaskich belek pełnościennych może być z łatwością rozpowszechnione i na układy złożone z elementów zginanych o przekroju zmieniającym się w sposób ciągły i powolny.

Przechodząc do belek o przekroju zmieniającym się w sposób nieciągły (rys. 29) wyobrażamy sobie, że odcinki belki o różnych momentach bezwładności przekroju poprzecznego stykają się podług pewnych nieodkształcalnych płaszczyzn normalnych do osi belki. Nic nie stoi w danym wypadku na przeszkodzie, aby zastąpić odcinki pełnościenne o zmiennym przekroju przez odpowiednie odcinki kratowe (rys. 29) odpowiadające omówionym wyżej warunkom (1) - (3).



Rys. 29

Zakrzywione pręty zginane mogą być rozpatrywane jako złożone z nieskończenie małych elementów prostych, a więc również ich dotyczą wszystkie przytoczone wyżej rozważania.

Pozostaje jeszcze podkreślić, że energia sprężysta nagromadzona w elementach konstrukcyjnych zginano-ściskanych, obliczanych na podstawie równań energii sprężystej, nieomal zawsze bywa wyznaczana ze wzoru

$$V = \int \left(\frac{M^2}{2EJ} + \frac{N^2}{2EA} \right) dx, \tag{217}$$

gdzie części jej wywołane przez zginanie i przez ściskanie mogą być obliczone niezależnie od siebie, a więc na podstawie omówionych wzorów (213) i (214).

Możemy ostatecznie stwierdzić, że zastosowanie do wyprowadzenia równań energii sprężystej (187) - (192), dotyczących belki pełnej, schematu kratownicy płaskiej o tym samym momencie bezwładności należy uważać, przy zachowaniu zwykłej dokładności obliczeń statycznych, za słuszne dla wszystkich układów sprężystych mogących uchodzić za płaskie. Dla przykładu przytoczymy wyprowadzenie wzoru C l a p e y r o n a, czyli wzoru (187).

Stosujemy tu ogólne równanie kraty (50).

Ponieważ mamy w danym razie do czynienia z kratownicą sprężystą odpowiadającą prawu H o o k e' a, jest więc

$$\Delta l = \frac{Sl}{EA}, \tag{218}$$

gdzie S oznacza siły powstające w prętach pod działaniem zewnętrznych sił P, wzrastających w sposób ciągły i nieskończenie powolny. W ten sposób równanie (50) przybiera postać

$$\sum_1^k Pv - \sum_1^r S\frac{Sl}{EA} = 0 \tag{219}$$

lub też postać

$$\frac{1}{2}\sum_1^k Pv - \sum_1^r \frac{S^2 l}{2EA} = 0. \tag{220}$$

Ponieważ drugi składnik lewej strony równania (220) wyraża w myśl równania (214) energię sprężystą nagromadzoną w kratownicy, mamy więc

$$V = \frac{1}{2}\sum Pv. \tag{221}$$

Prawa strona równania (221) wyraża pracę sił zewnętrznych P przy ciągłym i nieskończenie powolnym wzrastaniu ich od 0 do wartości ostatecznej. Jeżeli wielkość tę oznaczymy przez T_C, wówczas znajdujemy, że

$$V = T_C. \tag{222}$$

Równanie (221) możemy rozszerzyć na uogólnione siły i na uogólnione przesunięcia.

V. WNIOSEK

Możność zastosowania metod mechaniki budowli opartych na regule równoległoboku sił w teorii układów prętów rozciągano-ściskanych i zginanych oraz w teorii energii sprężystej doprowadza do wniosku, że reguła równoległoboku sił i wypływające z niej metody geometrycznego badania odkształceń pozwalają na wykonanie wszelkich technicznie ważnych obliczeń statycznych.

Р е з ю м е

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Фундаментом строительной механики, кроме закона Гука или другого положения, которое замещает этот закон, можно принять один из двух принципов общей механики — принцип возможных перемещений или правило параллелограмма сил.

Целью настоящей работы является показать, каким образом главные задачи строительной механики могут быть решены при помощи методов, исходящих из правила параллелограмма сил (глава I).

Глава II работы содержит геометрическое обоснование формулы Максвелла и Мора для перемещений узлов фермы и составление общего уравнения решетки.

В главе III приводится обоснование формулы для прогиба консоли методом вторичных моментов, не прибегая к предположению, что консоль защемлена на свободном конце. Представляется влияние переменного сечения балок на статически неопределимые величины; рассматриваются формулы для геометрического сложения деформаций и применены к расчету рамочных систем; решается многоугольная рама путем применения метода конечных разностей.

В главе IV доказывается, что формулы на применение понятия упругой энергии к решению вопросов строительной механики, выведенные на основании теории решетки, могут применяться и к полным системам.

Рассуждения, приведенные в работе, ведут к заключению, что правило параллелограмма сил и, вытекающие из него, методы геометрического исследования деформаций позволяют производить всякого рода технически важные статические расчеты.

Summary

GEOMETRICAL METHODS OF INVESTIGATION OF LATTICE STRUCTURES

Structural mechanics can be based, beside Hooke's law or any other assumption replacing that law, on one of two fundamental principles of theoretical mechanics: the principle of virtual work and that of the parallelepiped of forces. The object of this paper is to indicate how the principal problems of structural mechanics can be solved by methods based on the principle of the parallelepiped of forces (Sec. I).

Sec. II of the paper contains a geometrical proof of the Maxwell-Mohr equation, determining the displacements of lattice knots and a derivation of the general equation of a lattice.

In Sec. III the formula for the deflection of a cantilever beam is demonstrated by the method of «secondary moments», without having recourse to the assumption of a fastening at the free end; the influence of variability of cross-section on the statically indeterminate quantities is shown; equations for geometrical addition of deformations are discussed and used for frame computation; a solution of the problem of a polygonal frame, using the method of finite differences is given.

In Sec. IV it is shown, that the equations, in which the notion of elastic energy is used to solve problems of structural mechanics, and which are derived on the basis of the theory of lattices, can be used also for solid systems.

The considerations of the present paper lead to the conclusion that the principle of the parallelepiped and the resulting methods of geometrical investigation of the deformations, can be used in all technically important statical computations.

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 października 1954 r.

SPIS TREŚCI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

UKAZAŁY SIĘ

Tom I obejmuje oddzielne zeszyty I - XV·2

I. F. Szelągowski, Rozwiązanie zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych — O pewnych szczególnych przypadkach wytrzymałości tarczy nieograniczonej z odmiennym ośrodkiem zarysu eliptycznego

II. J. Naleszkiewicz i A. Szaniawski, Drgania i stateczność masztów oraz iglic

III. Z. Klębowski, Podstawy uwzględniania wzmocnień obwodowych w wytrzymałościowym obliczaniu rury poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia

IV. M. Życzkowski, Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem siły krytycznej

V. E. Szczepaniak, Nowa metoda rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach bez wykonywania przecięć

VI. W. Olszak, Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych (Plastyczne wyczerpanie nośności)

VII. A. Lisowski, Płyty na sprężystym podłożu

VIII. J. Nowiński, Wyznaczenie przybliżonej wielkości ugięcia płyt na podstawie metody Ritza

IX. W. Fiszdon, O pewnej metodzie obliczania amplitud drgań

X. Z. Wasiutyński, O kształtach pęknięć powierzchniowych

XI. W. Wierzbicki, Dźwigary załamane w planie

XII. W. Wierzbicki, O powstawaniu wyboczenia prętów prostych

XIII. W. Wierzbicki, Kierunki możliwych usprawnień w obliczeniach łuków

XIV. W. Żenczykowski, Podstawy wytrzymałościowe obliczeń statycznych konstrukcji murowanych z cegły

XV·1. W. Wierzbicki, Zastosowanie różnic skończonych w przypadkach dwukierunkowych stanów naprężeń w budowlach

XV·2. W. Wierzbicki, O geometrycznych metodach badania konstrukcji prętowych

Tom II zeszyt 1

XVI. I. Malecki, Metody zastosowania rachunku tensorowego w technice

XVII. J. Nowiński, Podstawy teorii plastyczności (I). Siedem wykładów

XVIII. W. Nowacki, Statyka rusztów płaskich

Tom II zeszyt 2

XIX. W. Bogusz, Z teorii płyt ortotropowych

XX. J. Szmelter, Rozwiązanie zagadnienia błony metodą różnic skończonych z użyciem specjalnego liczydła

XXI. M. Sokołowski, Dwustopniowy sposób obliczania pewnego typu płyt ortotropowych

XXII. M. Życzkowski, Wyboczenie sprężysto-plastyczne niektórych prętów pryzmatycznych

Cena zł 9.—

Tom III zeszyt 1

XXIII. M. P. Wołarowicz, Badania nad własnościami reologicznych układów rozproszonych
XXIV. W. Pogány, O pewnych zagadnieniach mechaniki gruntów
XXV. J. Nowiński, Szlakami teorii sprężystości
XXVI. K. Wolski, Metoda punktów kinetycznych
XXVII. J. T. Pindera, Technika elastooptycznych badań płaskiego stanu naprężenia

Tom III zeszyt 2

XXVIII. W. Olszak i A. Sawczuk, Teoria nośności granicznej płyt w świetle weryfikacji doświadczalnej (I)
XXIX. A. Sawczuk, Zagadnienia nośności granicznej elementów rozciąganych i zginanych w zastosowaniu do teorii zbiorników prostokątnych
XXX. M. Życzkowski, Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym

Tom III zeszyt 3

XXXI. M. Bieniek, Metody teorii stateczności ruchu
XXXII. W. Prosnak, Struktura płaskiej fali uderzeniowej
XXXIII. W. Wierzbicki, Analiza schematów statycznych konstrukcji drewnianych

W DRUKU

XXXIV. J. Klott, J. Naleszkiewicz, J. Rutecki i K. Wituszyński, Studia wstępne z dziedziny skręcania kadłuba na fali skośnej
XXXV. Z. Szymański, Równanie Boltzmanna i jego znaczenie w teorii gazów
XXXVI. W. Wierzbicki, Zagadnienia dynamiczne w obliczeniach statycznych budowli

---

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ ukazuje się jako kwartalnik i kosztuje w prenumeracie rocznej 60 zł.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE ukazywały się początkowo jako wydawnictwo seryjne. Zeszyty od I do XV·2 są do nabycia w księgarniach naukowych Domu Książki. Zamówienia za zaliczeniem przyjmuje Księgarnia Naukowa, Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7.

Poczynając od III kwartału 1954 r. ROZPRAWY INŻYNIERSKIE ukazują się jako kwartalnik i kosztują w prenumeracie rocznej 80 zł.

Sprzedaż bieżących numerów odbywa się w księgarniach naukowych Domu Książki i w placówkach «Ruchu».