

A 1904 I

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTITUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

t.1

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

XIII

WITOLD WIERZBICKI

Kierunki możliwych usprawnień w obliczeniach łuków

W A R S Z A W A

1 9 5 5

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

ZAWIERAJĄ PRACE BADAWCZE Z ZAKRESU TEORII SPRĘŻYSTOŚCI
I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMODYNAMIKI
ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW KONSTRUKCJI

R A D A R E D A K C Y J N A
WITOLD NOWACKI — PRZEWODNICZĄCY
JULIAN BONDER WACŁAW OLSZAK
BOHDAN STEFANOWSKI STANISŁAW TURSKI
WITOLD WIERZBICKI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y
JERZY NOWIŃSKI — REDAKTOR
TADEUSZ IWIŃSKI JÓZEF JANICZEK

Adres Redakcji
WARSZAWA, ul. Śniadeckich 8, I p.

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

WITOLD WIERZBICKI

KIERUNKI MOŻLIWYCH USPRAWNIEN W OBLICZENIACH ŁUKÓW



ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XIII

W A R S Z A W A 1955

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE (XIII)

Copyright 1954 by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa (Poland). Printed in Poland.

All rights reserved

No part of this book may be translated or reproduced
in any form, by mimeograph or any other means,
without permission in writing from, publishers.

Nakład 1530+160 nadb. Papier druk. sat, 70x100/16, 70 g. Arkuszy wydawn. 3,75. Arkuszy drukarskich 3,5
Oddano do składania dn. 5.X 1954 r. Druk ukończ. styczeń 1955. Zam. 459 B-6-50048 Cena zł. 7,50,—

Stoł. Zakł. Graf., Drukarnia Naukowa. Warszawa, Śniadeckich 8.

PRZEDMOWA

Obliczenie statyczne łuków nastęrcza na ogół większe trudności niż obliczenie ram lub statycznie niewyznaczalnych układów kratowych. Przyczyną tego jest okoliczność, że łuki muszą być w obliczeniach statycznych bardziej indywidualizowane niż ramy i kraty, dla których łatwiej jest ułożyć wzory ogólne ze względu na prostoliniowy kształt ich elementów.

Stąd pochodzi zrozumiała tendencja do możliwych usprawnień w obliczeniach łuków sprężystych.

Usprawnienia te mogą pójść w trzech różnych kierunkach, a więc przede wszystkim w kierunku poszukiwania prostych sposobów całkowania wyrażeń wchodzących jako współczynniki do równań łuku sprężystego, następnie w kierunku badań nad możliwością pomijania pewnych okoliczności pracy łuku bez narażania obliczeń na praktyczne zmniejszenie dokładności, wreszcie w kierunku przedstawiania za pomocą tablic i wykresów pośrednich etapów obliczeń.

Zagadnienie całkowalności współczynników równań liniowych łuku posiada szczególnie ważne znaczenie w łukach parabolicznych, gdyż przy innych kształtach łuków uciekać się musimy najczęściej do zastępowania nieskończenie małych odcinków osi przez skończone i w ten sposób całkowanie tu często odpada.

Przy obliczaniu wyniosłych łuków eliptycznych odgrywających rolę schematów statycznych dla sklepień przepustów powstaje zagadnienie, w jakim stopniu należy uwzględniać okoliczność, że łuki eliptyczne są łukami o dużej krzywiznie; toteż w tym wypadku szczególnie jaskrawo występuje kwestia możliwości pomijania w obliczeniach łuków pewnych okoliczności ich pracy.

Łuki koliste ze względu na swą stałą krzywiznę dają w wielu przypadkach możność obliczania ich za pomocą tablic i wykresów, co prowadzi nieraz do daleko posuniętego usprawnienia obliczeń.

Rozpatrując przedstawioną specyfikę obliczeń statycznych poszczególnych rodzajów łuków na tle tych dróg, którymi zmierzamy do usprawnienia obliczeń, dochodzimy do wniosku, że trzy różne kierunki możliwych usprawnień w obliczeniach łuków odpowiadają z grubsza trzem wymienionym

tu różnym kształtom łuków. Stąd pracę niniejszą dzielimy na trzy rozdziały poświęcone odpowiednio łukom parabolicznym, eliptycznym i kolistym z tym, że w poszczególnych rozdziałach będziemy w miarę potrzeby zaha-
czać o wszystkie mogące tu w grę wchodzić kierunki usprawnień.

Rozprawa niniejsza oparta jest przede wszystkim na pięciu następujących moich publikacjach:

- (1) *Badania nad wytrzymałością przepustów sklepionych*, Przegląd Techniczny, Warszawa 1930,
- (2) *Możliwe uproszczenia w obliczaniu statycznym łuku*, Przegląd Techniczny, Warszawa 1934,
- (3) *Parabola sześcienna jako oś łuku*, Czasopismo Techniczne, Lwów 1934,
- (4) *Application de la méthode des moindres carrés au calcul des arcs*, Association Internationale des Ponts et Charpentes, Mémoires, Zurych 1938,
- (5) *Przyczynek do obliczenia statycznego sprężystych łuków kolistych*, Inżynier Kolejowy, Warszawa 1938,

oraz na doświadczeniach zdobytych przy stosowaniu wyników tych publikacji w praktyce.

AUTOR

I. ŁUKI PARABOLICZNE

1. Łuki o kształcie paraboli 2 stopnia

Wyznaczenie wielkości statycznie niewyznaczalnych w łukach sprężystych opiera się na wzorach na odkształcenia prętów zakrzywionych. Składowe przesunięcia punktu K pręta zakrzywionego AK , utwierdzonego w przekroju poprzecznym A i swobodnego w punkcie K (rys. 1), wyrażają się za pomocą tzw. wzorów Bresse'a, które przybierają w tym wypadku postać:

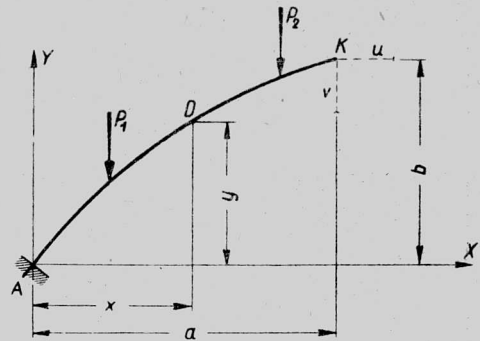
$$u = - \int_0^s \Delta ds \cos \varphi - \int_0^s (b-y) \Delta d\varphi \pm \int_0^a \varepsilon_t t dx + \int_0^b \beta dy - \omega_0 b, \quad (1)$$

$$v = - \int_0^s \Delta ds \sin \varphi + \int_0^s (a-x) \Delta d\varphi \pm \int_0^b \varepsilon_t t dy - \int_0^a \beta dx + \omega_0 a, \quad (2)$$

$$\omega = \omega_0 + \int_0^s \Delta d\varphi, \quad (3)$$

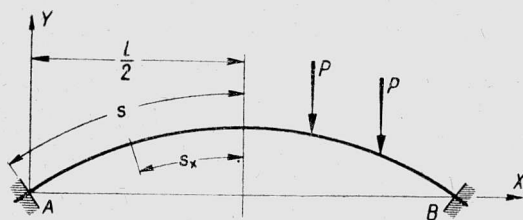
gdzie

- s długość odcinka osi łuku,
- ds długość nieskończenie małego odcinka pręta zakrzywionego,
- Δds przyrost długości ds spowodowany odkształceniem pręta,
- $d\varphi$ kąt nachylenia względem siebie dwóch przekrojów poprzecznych pręta znajdujących się od siebie w odległości ds ,
- $\Delta d\varphi$ przyrost kąta $d\varphi$ spowodowany odkształceniem pręta,
- ω obrót przekroju poprzecznego K ,
- φ kąt nachylenia pewnego przekroju poprzecznego łuku do płaszczyzny pionowej,



Rys. 1

- ω_0 skończony obrót przekroju A ,
 εt wydłużenie jednostkowe przy różnicy temperatur t ,
 β przesuwanie jednostkowe.



Rys. 2

Wyznaczenie wielkości nadliczbowych w łuku AB (rys. 2) odbywa się, jak wiadomo, w ten sposób, że wielkości u_B , v_B i ω_B wyrażające odpowiednio przesunięcie punktu B w kierunku równoległym do osi X -ów, przesunięcie w kierunku równoległym do osi Y -ów oraz obrót

przekroju poprzecznego w B przedstawiamy sobie jako funkcje f_1 , f_2 i f_3 nieznanego momentu M_A , parcia poziomego H i reakcji R_A w punkcie A i ustawiamy równania:

$$f_1(M_A, R_A, H) = 0, \quad f_2(M_A, R_A, H) = 0, \quad f_3(M_A, R_A, H) = 0, \quad (4)$$

z których wyznaczamy wymienione wielkości nadliczbowe M_A , H i R_A .

W przypadku łuku dwuprzegubowego mamy do rozwiązania tylko pierwsze z równań (4), a mianowicie równanie

$$u_B = 0 \quad \text{lub} \quad f(H) = 0. \quad (5)$$

W równaniach typu (4) możemy przyjmować we wszystkich przypadkach łuków sprężystych, z wyjątkiem przypadków bardzo wyniosłych przepustów, że

$$\Delta ds = \frac{N ds}{EA}, \quad \Delta d\varphi = \frac{M ds}{EJ}, \quad \beta = \frac{T}{GA}, \quad (6)$$

gdzie N i T oznaczają odpowiednio siłę podłużną i siłę poprzeczną w danym przekroju poprzecznym łuku, a M moment zginający w tym przekroju.

Po uwzględnieniu wzorów (6) na wielkości Δds , $\Delta d\varphi$ i β nadajemy równaniom (4) za pomocą wzorów (1)-(3) postać układu trzech równań liniowych

$$\left. \begin{aligned} a_1 M_A + b_1 R_A + c_1 H + d_1 &= 0, \\ a_2 M_A + b_2 R_A + c_2 H + d_2 &= 0, \\ a_3 M_A + b_3 R_A + c_3 H + d_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

W równaniach tych współczynniki a , b , c i d przedstawiają pewne całki oznaczone, przy których obliczeniu poważną niedogodność nastrocza oko-

liczność, że różniczkę ds trudno jest przedstawić w postaci nadającej się do wygodnego całkowania.

W szczególnym wypadku, gdy łuk bezprzegubowy jest mało wyniosły i gdy można przyjąć, że $\cos \varphi = 1$, a $\sin \varphi = 0$, znajdujemy

$$H = - \frac{\int_0^s \frac{\mathfrak{M} y' ds}{J}}{\int_0^s \frac{y'^2 ds}{J}}, \quad R_A = \frac{\int_0^s \frac{\mathfrak{M} x' ds}{J}}{\int_0^s \frac{x'^2 ds}{J}}, \quad M_A^0 = \frac{\int_0^s \frac{\mathfrak{M} ds}{J}}{\int_0^s \frac{ds}{J}}, \quad (8)$$

gdzie $M_A^0 = M_A + R_A l/2 - H y_0$ oraz

$$y_0 = \frac{\int_0^s \frac{y ds}{J}}{\int_0^s \frac{ds}{J}} \quad (9)$$

i gdzie x' i y' oznaczają współrzędne pewnego punktu osi łuku w układzie współrzędnych $X_1 O Y_1$ (rys. 3), a $\mathfrak{M}$ moment sił zewnętrznych działających na łuk na lewo od przekroju aa względem środka ciężkości tego przekroju.

Momenty $\mathfrak{M}$ przedstawiają w przypadku ciężarów skupionych funkcję liniową x , a w przypadku obciążenia ciągłego i równomiernego funkcję drugiego stopnia x . Ogólnie

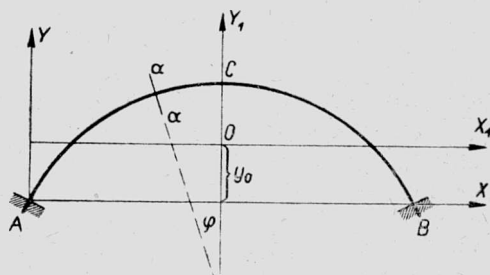
$$\mathfrak{M} = \sum a x^i, \quad (10)$$

gdzie i jest to pewna liczba cała i dodatnia, a współczynniki a od x nie zależą.

Odpowiednio dla łuku dwuprzegubowego zakładamy, że w punktach A i B (rys. 2) są przeguby, wobec czego mamy

$$H = \frac{\int_0^s \frac{M_{0a} y ds}{J}}{\int_0^s \frac{y^2 ds}{J}}, \quad (11)$$

gdzie M_{0a} wyraża się za pomocą funkcji typu (10).



Rys. 3

W przypadku łuku symetrycznego o kształcie parabolicznym, osi łuku w układzie współrzędnych XAY (rys. 3) odpowiada równanie

$$y = x(l-x) \frac{4f}{l^2}, \quad (12)$$

gdzie l jest to rozpiętość łuku, a f jego strzałka.

Dla osi łuku wyrażającej się równaniem (12) całki (8) przybierają postać

$$S = \int_0^l (\Sigma a x^k) ds, \quad (13)$$

gdzie a nie zależy od x , a k jest pewną liczbą całkowitą i dodatnią.

Środkiem do ułatwienia sobie obliczenia całek typu (13) jest wyzyskanie metody najmniejszych kwadratów, dzięki której możemy przedstawić różniczkę ds w postaci funkcji wymiernej x , a więc w postaci funkcji typu

$$\eta = \Sigma m \xi^k, \quad (14)$$

gdzie m nie jest od x zależne i gdzie ξ oznacza stosunek x/l .

W tym celu nadajemy przede wszystkim równaniu (12) postać

$$y = \xi(1-\xi) \cdot 4f. \quad (15)$$

Dla różniczki osi łuku ds mamy znany wzór

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (16)$$

Ponieważ ze wzoru (15) wynika, że

$$dy = (1-2\xi) \cdot 4f \cdot d\xi, \quad (17)$$

więc

$$ds = \sqrt{1 + 16\xi^2(1-2\xi)^2} dx, \quad (18)$$

gdzie ζ oznacza stosunek f/l . Równaniu (18) można też nadać postać

$$ds = \sqrt{a\xi^2 + b\xi + c} \cdot dx, \quad (19)$$

gdzie

$$a = 64\zeta^2, \quad b = -64\zeta^2, \quad c = 1 + 16\zeta^2$$

lub też ogólnie postać

$$ds = F_2(\xi) dx. \quad (20)$$

Poszukując wygodnego do całkowania kształtu funkcji

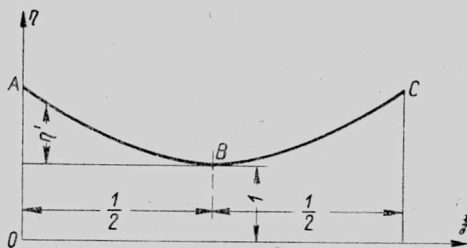
$$\eta = F_2(\xi) \quad (21)$$

przedstawiamy η jako iloraz

$$\eta = \frac{ds}{dx} \quad (22)$$

i budujemy wykres η odkładając na osi odciętych $O\xi$ kolejno wartości $\xi = 0,05$, $\xi = 0,10$, $\xi = 0,15$ itd., a na osi rzędnych $O\eta$ wartości η otrzymane ze wzorów (22) i (19). Wykres ten dla pewnej wyniosłości łuku ζ otrzyma kształt krzywej ABC przedstawionej na rys. 4.

Na wykresie funkcji (21) przedstawionej na rys. 4 wartości zmiennej niezależnej $\xi = 0,00$ i $\xi = 1,00$ odpowiadają końcom łuku, a wartość $\xi = 0,50$ jego środkowi. W środku łuku wartość funkcji $F_2(\xi)$ jest $\eta = 1$ niezależnie od wyniosłości łuku ζ .



Rys. 4

Uzyskana liczba 21 punktów krzywej $\eta = F_2(\xi)$ dobrze określa kształt samej zależności, nie daje jednak podstawy do przedstawienia funkcji $F_2(\xi)$ w postaci wygodnej do całkowania, w szczególności w postaci (14).

Aby zastąpić funkcję $F_2(\xi)$ przez funkcję typu (14), zwracamy przede wszystkim uwagę na fakt, że krzywa ABC na rys. 4 zbliżona jest kształtem do paraboli, wobec czego narzuca się tu myśl zastąpienia tej krzywej przez parabolę.

Na rysunku 5 przedstawiona jest łącznie krzywa ABC z rys. 4 i parabola aBc , która odniesiona do osi współrzędnych $\xi_1 B\eta_1$ wyraża się równaniem

$$\eta_1 = g \xi_1^2. \quad (23)$$

Między współrzędnymi układów $\xi O\eta$ i $\xi_1 B\eta_1$ istnieją zależności (rys. 5)

$$\xi + \xi_1 = \frac{1}{2}, \quad \eta - \eta_1 = 1, \quad (24)$$

a g przedstawia największą rzędną krzywej aBc .

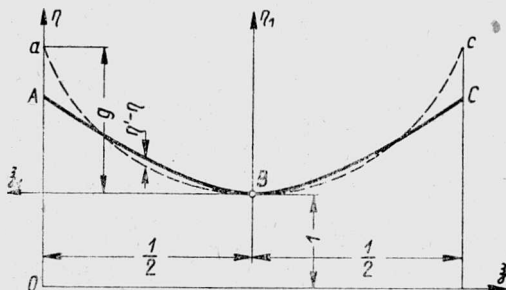
Wybór parametru g jest uzależniony od tych postulatów, którym będziemy chcieli podporządkować krzywą aBc i jej stosunek do krzywej ABC .

Bierzemy tu pod uwagę trzy możliwe postulaty następujące:

(1) algebraiczna suma różnic między rzędnymi krzywej ABC a rzędnymi krzywej aBc równa się 0;

(2) suma kwadratów różnic między rzędnymi krzywej ABC a rzędnymi krzywej aBc odpowiada warunkowi minimum;

(3) rzędne krzywej ABC stanowią średnie arytmetyczne rzędnych krzywych aBc obliczonych w myśl postulatów (1) i (2).



Rys. 5

Oznaczając przez η' rzędne krzywej ABC odniesionej do układu $\xi_1 B \eta_1$ badamy dla danego ξ sumę

$$D_1 = \Sigma (\eta' - \eta_1), \quad (25)$$

gdzie $\eta' - \eta_1$ wyraża różnicę między odpowiadającymi danej odciętej ξ , rzędnymi krzywymi ABC i aBc (rys. 5) i gdzie liczba różnic $\eta' - \eta_1$ tworzących sumę odpowiada liczbie punktów krzywej

ABC , których rzędne zostały obliczone ze wzorów (18), (21) i (22). Różnice $\eta' - \eta_1$ dotyczą właśnie tych punktów, dla których obliczyliśmy rzędne η' .

Warunki matematyczne odpowiadające trzem wymienionym postulatów w stosunku do rzędnych η_1 powinny być tego rodzaju, aby, z jednej strony, były zagwarantowane jak najlepsze wyniki obliczenia łuków, z drugiej zaś, aby obliczenie nie było zbyt kłopotliwe.

W związku z równaniem (23) wyrażenie (25) przybiera postać

$$D_1 = \Sigma (\eta' - g \xi_1^2). \quad (26)$$

Wyrazem matematycznym pierwszego z wymienionych postulatów będzie wobec tego równanie

$$\Sigma (\eta' - g \xi_1^2) = 0, \quad (27)$$

skąd

$$g = \frac{\Sigma \eta'}{\Sigma \xi_1^2}. \quad (28)$$

W dalszym ciągu tworzymy sumę

$$D_2 = \Sigma (\eta' - g \xi_1^2)^2, \quad (29)$$

wobec czego wyrazem matematycznym postulatu (2) będzie równanie

$$\frac{\partial D_2}{\partial g} = 0, \quad (30)$$

które doprowadza do następującego wyrażenia na g :

$$g = \frac{\sum \eta' \xi_1^2}{\sum \xi_1^4}. \quad (31)$$

Gdybyśmy zamiast sumy (29) utworzyli sumę

$$D_n = \sum (\eta' - g \xi_1^2)^n, \quad (32)$$

gdzie $n \geq 3$, wówczas wyrażenie na g wypływające z warunku minimum tej sumy na podstawie równania

$$\frac{\partial D_n}{\partial g} = 0 \quad (33)$$

nastęczałoby tak duże trudności rachunkowe w użyciu, że unicestwiłyby one korzyści wynikające z nadania funkcji podcałkowej w wyrażeniach (8) i (11) postaci (14). Musimy się więc tu ograniczyć do $n = 2$.

Warunek, że funkcja D_2 ma uzyskać wartość minimum, doprowadza więc do metody najmniejszych kwadratów. Aby to wykazać, nadajemy sposobowi postępowania zmierzającemu do wyznaczenia parametru g utarty schemat metody najmniejszych kwadratów.

Zastępujemy wzór (29) przez wyrażenie

$$D_2 = \sum \xi_1^4 \left(\frac{\eta'}{\xi_1^2} - g \right)^2, \quad (34)$$

w którym g uważamy za nieznaną wartość ścisłą parametru równania (23).

Wprowadzamy dalej oznaczenia $g_i = \eta' / \xi_1^2$ jako znaną wartość przybliżoną parametru g oraz $p_i = \xi_1^4$ jako wagę poszczególnych wartości g , czyli że

$$D_2 = \sum p_i (g_i - g)^2. \quad (35)$$

Gdyby krzywe ABC i aBc były identyczne, mielibyśmy $\eta' = \eta_1$ i błąd (odchylenie) $g_i - g$ byłby równy zero. Przyrost wag p_i odpowiada tu przyrostowi współrzędnych η_1 . Z postulatu średniej arytmetycznej wynika

$$g = \frac{\sum p_i g_i}{\sum p_i}. \quad (36)$$

Wyrażenie to możemy otrzymać również i z warunku minimum funkcji (35). Jest ono identyczne z wyrażeniem (31).

Jeżeli przez g_1 i g_2 oznaczymy wielkości parametrów g otrzymane odpowiednio ze wzorów (28) i (31), wówczas postulatowi wymienionemu pod (3) będzie czyniła zadość krzywa aBc o parametrze g równym

$$g_3 = \frac{g_1 + g_2}{2} \quad (37)$$

Oznaczamy przez ε największą, wyrażoną w procentach różnicę między rzędnymi krzywej ABC , z jednej strony, a rzędnymi krzywej aBc , z drugiej. Dla poszczególnych parametrów g_1 , g_2 , g_3 i dla różnych ζ wielkości ε_1 , ε_2 , ε_3 przybierają odpowiednie wartości zawarte w tablicy 1.

Jak wynika z przytoczonej tablicy, spośród błędów ε_1 , ε_2 , ε_3 błędy ε_2 są na ogół najmniejsze, błędy zaś ε_3 różnią się od nich przeważnie niewiele. Gdy porównamy ze sobą we wszystkich trzech wypadkach przewidzianych w tablicy położenie tych punktów $\xi_1 = 0,1, 0,2, 0,3 \dots$, dla których mają miejsce błędy największe, to zauważymy, że największe błędy ε_1 występują na końcach łuku, podczas gdy największe błędy ε_2 i ε_3 mają miejsce około środka każdej połowy łuku, przy czym przy stosowaniu paraboli o parametrze g_3 błędy są na ogół rozłożone najbardziej równomiernie na całym łuku.

Oznaczamy w dalszym ciągu przez ϑ_1 , ϑ_2 i ϑ_3 błędy przeciętne odpowiadające błędom największym ε_1 , ε_2 , ε_3 i układamy tablicę tych błędów (tablica 2).

Tablica 1

ζ	$\varepsilon_1 \%$	$\varepsilon_2 \%$	$\varepsilon_3 \%$
0,100	0,3	0,3	0,3
0,125	0,3	0,3	0,3
0,150	0,4	0,3	0,3
0,175	1,0	0,6	0,6
0,200	1,2	0,8	1,0
0,225	1,2	1,0	1,0
0,250	1,8	1,4	1,2
0,275	2,4	1,5	1,8
0,300	2,9	1,7	2,3

Tablica 2

ζ	$\vartheta_1 \%$	$\vartheta_2 \%$	$\vartheta_3 \%$
0,100	0,2	0,2	0,2
0,125	0,2	0,2	0,2
0,150	0,3	0,3	0,2
0,175	0,4	0,4	0,3
0,200	0,4	0,4	0,4
0,225	0,4	0,4	0,4
0,250	0,7	0,8	0,6
0,275	0,9	0,8	0,8
0,300	1,0	1,1	1,0

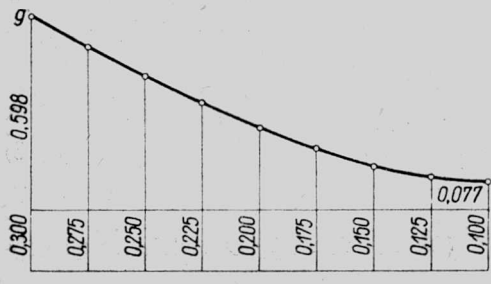
Obliczenie średniego błędu nie jest w danym razie potrzebne, gdyż znane są nam błędy największe.

W równaniach (4), z których obliczamy wielkości statycznie niewyznaczalne w łuku, wyrazami największymi co do wartości bezwzględnej są zawsze wyrazy typu $\int_0^s \mu y ds/EJ$ i $\int_0^s y^2 ds/EJ$, gdzie μ oznacza

bądź M_a — moment zginający w danym przekroju aa łuku, bądź też M_a — moment sił działających między podporą a przekrojem aa względem środka tego przekroju.

Jeżeli początek współrzędnych odniesiony jest do środka podpory (rys. 2), wówczas funkcje μy^2 oraz y^2 maleją w kierunku ku końcom łuku. W tym wypadku zastosowanie, zamiast funkcji $\eta = ds/dx$, paraboli o parametrze g_1 , dające największe błędy w przekrojach zbliżonych do końców łuku byłoby najwłaściwsze. Jeżeli jednak początek współrzędnych przyjęty jest na przechodzącej przez zwornik osi symetrii łuku, wówczas właściwsze staje się zastosowanie paraboli o parametrze g_2 lub g_3 . Ponieważ trudno jest stale pamiętać o właściwościach błędów ϵ , więc należy uważać za najwłaściwsze stosowanie tej ostatniej paraboli w każdym wypadku. Odpowiednie parametry podane są w tablicy 3.

Zależność parametru g od stosunku ζ daje się wyrazić za pomocą wykresu na rys. 6, z którego wynika, że dla pośrednich wielkości ζ można otrzymać parametry g drogą interpolacji liniowej.



Rys. 6

Błąd, który powstał przy obliczeniu całek typu $\int_0^s \frac{\mu y^2 ds}{EJ}$ oraz $\int_0^s \frac{y^2 ds}{EJ}$ z powodu zastąpienia wielkości ścisłej $\eta = ds/dx$ przez wielkości przybliżone η_1 , musi być ze względu na charakter funkcji μy^2 oraz y^2 mniejszy od błędu przeciętnego θ odpowiadającego danej wielkości ζ .

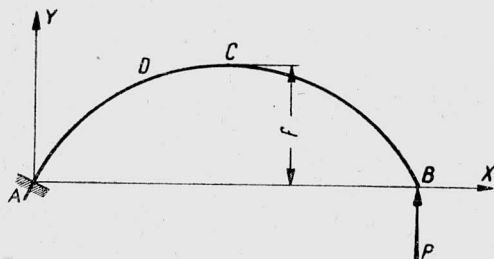
Zdecydowawszy się na korzystanie z parametru g obranego na podstawie postulatu 2 nadajemy równaniu (23) w układzie współrzędnych ξ 0 η postać

$$\eta = 1 + g(1 - 4\xi + 4\xi^2), \quad (38)$$

skąd, o ile funkcję (38) będziemy w dalszym ciągu oznaczali jako funkcję Φ , otrzymamy na podstawie wzoru (22)

$$ds = \Phi dx. \quad (39)$$

Jako przykład zastosowania funkcji Φ i parametru g do obliczenia łuków rozpatrzmy przypadek wyznaczenia pionowego przesunięcia v końca B łuku AB utwierdzonego w przekroju A , posiadającego kształt paraboliczny i obciążonego jedną siłą P (rys. 7).



Rys. 7

Moment zginający M_a w pewnym przekroju aa równa się

$$M_a = Pl(1 - \xi). \quad (40)$$

Zależność między różniczkami ds a dx przyjmujemy zgodnie ze wzorem (39)

$$ds = \Phi l d\xi, \quad (41)$$

a równaniu osi pręta nadajemy w przedstawionym na rysunku układzie współrzędnych XAY postać

$$y = \xi(1 - \xi) \cdot 4f. \quad (42)$$

Korzystamy w dalszym ciągu ze wzoru (2), pomijamy jednak wpływ na pionowe przesunięcie punktu B sił podłużnych i sił poprzecznych. Przyjmując $\Delta d\varphi = Mds/EJ$ znajdujemy, że

$$v_B = \int_0^s (l - x) \frac{M ds}{EJ}. \quad (43)$$

Uwzględniając tu wyrażenia (41) i (38) na funkcję Φ i dokonując całkowania dla całej rozpiętości łuku znajdujemy

$$v_B = \frac{Pl^3}{EJ} \int_0^1 (1 - \xi)^2 \Phi d\xi = \frac{Pl^3}{EJ} \cdot \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{5} g \right). \quad (44)$$

Ścisła ocena błędów wynikających z zastąpienia we wzorach na obliczenie łuków różniczek ds przez wyrażenie (41) wymaga analizy wyników poszczególnych działań. Na podstawie jednak szeregu obliczeń przeprowadzonych dla różnych wyniosłości łuku można ocenić rząd wielkości tych błędów. Błąd ten dla wzorów typu (8) dojść może do $4\vartheta/3$, gdzie pod ϑ rozumiemy błąd przeciętny spowodowany zastąpieniem rzędnych η' przez rzędne krzywej η_1 . Błąd zawarty w samych licznikach wzorów (8) waha się około $2\vartheta/3$. Porównamy tu dla przykładu liczniki wzoru (11) na parcie poziome łuku dwuprzegubowego obciążonego w sposób ciągły i równo-

mierny obliczone, z jednej strony, ściśle, z drugiej zaś, przez wprowadzenie funkcji Φ . Otóż w pierwszym wypadku otrzymujemy wynik

$$\int_0^s \frac{M y ds}{EJ} = 0,0358 \frac{2 q \zeta l^4}{EJ}, \quad (45)$$

a w drugim wynik

$$\int_0^s \frac{M y ds}{EJ} = (0,0333 + 0,0053g) \frac{2 q \zeta l^4}{EJ}. \quad (46)$$

Przy $\zeta = 0,250$ mamy $g = 0,430$ i różnica między wynikami (45) i (46) wynosi $0,56\%$, czyli około $2/3$ błędu ϑ_2 podanego w tablicy 2.

W przypadku sił skupionych funkcja $M_{0\alpha}$ zachowuje tę własność, że wartości jej są mniejsze w okolicy podpór łuku niż w okolicach środka, wobec czego wartości całki

$$\int_0^s \frac{M_{0\alpha} y ds}{EJ},$$

obliczone według wzorów ścisłego i przybliżonego, będą wykazywały różnice mniejsze od wielkości zawartych w tablicy 2.

Dla łuku bezprzegubowego funkcja $\mathfrak{M}$, która zastąpi tu funkcję $M_{0\alpha}$, będzie tak samo jak i ta ostatnia malała w kierunku ku podporom łuku, a więc i w tym wypadku wartości całki

$$\int_0^s \frac{M_{0\alpha} y ds}{EJ},$$

obliczone według wzoru ścisłego i przybliżonego, będą wykazywały różnice mniejsze od wielkości zawartych w tablicy 2.

Wobec tego, że inne całki wchodzące w wyrażenia dla wielkości statycznie niewyznaczalnych w łukach bądź posiadają te same własności co całki omówione, bądź też odgrywają w tych wyrażeniach mniejszą rolę, twierdzić można, że stosując dla ds wzór (38) otrzymamy przy parametrach g wziętych z tablicy 3 błędy nie większe od zawartych w tablicy 2.

W przypadkach gdy nie można przyjąć, że $\cos \varphi = 1$ a $\sin \varphi = 0$, należy przy wyznaczeniu współczynników a, b, c, d we wzorach (7) rozłożyć cosinusy i sinusy w szeregi algebraiczne.

Trudności podobne do tych, jakie mamy z różniczką ds przy całkowaniu współczynników równań (4), występują również i przy uwzględnieniu zmienności momentów bezwładności łuku J .

Łuki stalowe posiadają zwykle na całej swej rozpiętości stały przekrój poprzeczny. Łuki betonowe i kamienne mają natomiast przeważnie przekroje poprzeczne zmienne, nie powoduje to bowiem w tych wypadkach trudności konstrukcyjnych, pozwala zaś na pewną oszczędność na materiale. Wreszcie wchodzi tu również w grę i względy estetyczne. W podobnych warunkach znajdują się i łuki żelbetowe.

Dla ułatwienia sobie wyznaczenia współczynników równań liniowych łuku sprężystego niektórzy autorowie doradzają przyjmowanie w obliczeniach statycznych przy obliczaniu całek oznaczonych zamiast rzeczywistego przekroju zmiennego, przekrój o stałym momencie bezwładności równym średniej arytmetycznej momentów bezwładności w węzłowiach i w zworniku:

$$J = \frac{1}{2} (J_w + J_z). \quad (47)$$

Podobny sposób postępowania jest źródłem znacznych błędów, których granice zależne są od prawa zmienności przekrojów poprzecznych w łuku, wyniosłości łuku itd. i wobec tego nie może być uważany za uzasadniony.

Znaczne ułatwienie w całkowaniu współczynników równań (8) sprowadza przyjęcie, że moment bezwładności w dowolnym przekroju łuku uzależniony jest od momentu bezwładności w zworniku za pomocą prawa

$$J_s = \frac{J_z}{\cos \varphi}, \quad (48)$$

gdyż w tym wypadku iloraz

$$\frac{ds}{J} = \frac{\cos \varphi}{J_z} \frac{dx}{\cos \varphi} = \frac{dx}{J_z} \quad (49)$$

Spośród reguł zmienności przekrojów prostokątnych o wysokości zmiennej h łuku na ogół najlepiej wyrównują naprężenia w łuku przekroje zmieniające się według wzorów

$$h = \frac{h_x}{\cos \varphi}, \quad (50)$$

$$h = h_z + \frac{h_w - h_z}{s} s_x, \quad (51)$$

gdzie s_x oznacza długość odcinka osi łuku między pewnym przekrojem a węzłowiem, s całkowitą długość osi łuku, h_z wysokość przekroju poprzecznego w zworniku, h_w wysokość przekroju poprzecznego w węzłowiu; pierwszy ze wzorów (50)-(51) może być stosowany tylko do łuków o małej wyniosłości, drugi zaś wyraża liniową zmienność przekrojów.

Jednoczesne stosowanie dla łuku zależności (48) i (50) ułatwia wprowadzić obliczenia, nie jest jednak niczym uzasadnione.

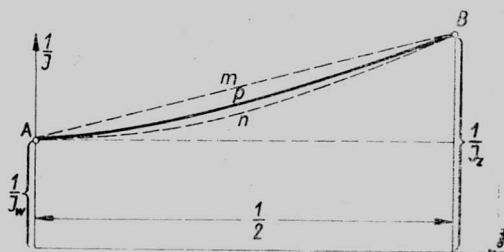
W przypadku ogólnym istotne uproszczenie w obliczeniach całek oznaczonych równań łuku sprężystego, z punktu widzenia zmienności przekrojów, polegać może na przedstawieniu stosunku $1/J$ w postaci możliwie najprostszej funkcji algebraicznej, a więc przede wszystkim w postaci

$$\frac{1}{J} = \sum a_m \xi^m. \quad (52)$$

Funkcji takiej poszukujemy tu sposobem analogicznym do przedstawionego wyżej dla różniczki ds , przy czym mamy na uwadze, że regularności przekrojów nie wpływa zbyt silnie na wartość wielkości statycznie niewyznaczalnych.

Przyjmujemy więc dla zmienności przekroju równanie (51), a dla stosunku h_w/h_z liczby w granicach 1,25 - 1,75 i obliczamy dla różnych wartości ξ i przekrojów łuku oddalonych od siebie co 0,1 s momenty bezwładności poszczególnych przekrojów oraz ich odwrotności. W ten sposób dochodzimy do wykresów typu przedstawionego na rys. 8, na których krzywe

$$\frac{1}{J} = F(\xi) \quad (53)$$



Rys. 8

zawarte są między prostymi AmB a parabolami AnB .

Przy $J_w/J_z = 1,25$ krzywe ApB zbliżone są do prostych w ten sposób, że przeciętna różnica rzędnych wynosi tu około 3%, a przy $J_w/J_z = 1,75$ krzywe te zbliżone są do parabol, przy czym przeciętna różnica rzędnych wynosi około 4%.

Mając na widoku takie granice błędu możemy przyjąć, że przy wartościach stosunku J_w/J_z zawartych między 1,25 i 1,75 rzędne krzywych (53) będą stanowiły średnie arytmetyczne rzędnych krzywych AmB i AnB . Stąd dochodzimy do równania

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J_w} + \left(\frac{1}{J_z} - \frac{1}{J_w} \right) [n \xi_1^2 + (1-n) \xi_1], \quad (54)$$

gdzie wielkości n otrzymujemy drogą interpolacji liniowej w granicach 0 - 1 dla wielkości 1,25 - 1,75 i gdzie $\xi_1 = x/(l/2)$.

Dla odciętych $\xi = x/l$ równanie (54) przybiera postać

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J_w} + 2 \left(\frac{1}{J_z} - \frac{1}{J_w} \right) [2n\xi^2 + (1-n)\xi] \quad (55)$$

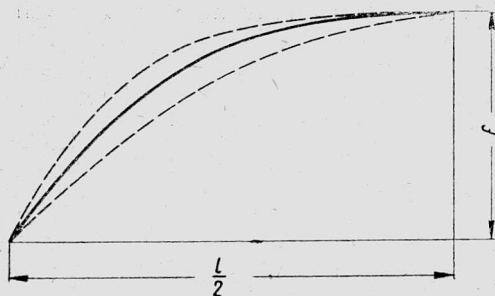
dla części łuku od $x=0$ do $x=1/2$ oraz postać:

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J_w} + 2 \left(\frac{1}{J_z} - \frac{1}{J_w} \right) [2n(1-\xi)^2 + (1-n)(1-\xi)] \quad (56)$$

dla drugiej połowy łuku.

2. Łuki o kształcie paraboli 3 stopnia

Większość obecnie projektowanych łuków bezprzegubowych posiada osie o kształcie krzywej, której rzędne stanowią średnie arytmetyczne między rzędnymi paraboli 2 a rzędnymi paraboli 4 stopia. Tego rodzaju krzywe są bardzo zbliżone do paraboli 3 stopnia. Widać to z rys. 9, na którym liniami przerywanymi przedstawiona jest parabola 4 stopnia (na rysunku górna) i parabola 2 stopnia (na rysunku dolna), a linią pełną parabola 3 stopnia.



Rys. 9

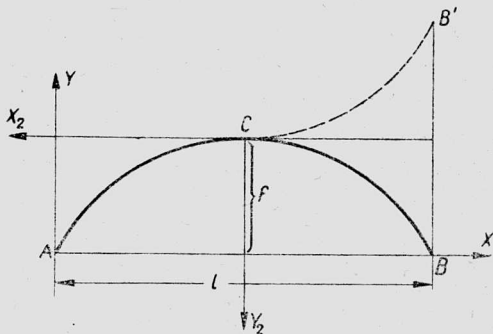
Obliczenie statyczne łuków posiadających kształt paraboli 3 stopnia nastrocza pewne trudności wynikające z własności geometrycznych tej krzywej.

Parabola sześcienna wyraża się, mianowicie, w układzie współrzędnych X_2CY_2 odniesionych do środka zwornika C łuku ACB (rys. 10) równaniem

$$y_2 = \frac{8f}{l^3} x_2^3, \quad (57)$$

gdzie l i f oznaczają odpowiednio rozpiętość i strzałkę łuku.

Przy odciętych dodatnich (tj. przy $x_2 > 0$) równanie (57) daje gałąź AC przedstawiającą połowę osi łuku. Przy odciętych ujemnych (a więc przy $x_2 < 0$) gałąź CB' krzywej (57) nie może odegrać roli osi łuku na odcin-



Rys. 10

ku CB , rolę tę natomiast odegrać może odpowiednia gałąź paraboli 3 stopnia

$$y_2 = -\frac{8f}{l^3} x_2^3. \quad (58)$$

Brak możliwości przedstawienia osi łuku za pomocą jednego równania stanowi pierwszą trudność przy obliczeniu całek wchodzących w wyrażenia dla wielkości statycznie niewyznaczalnych w łuku o kształcie paraboli 3 stopnia.

Drugą trudność przy wyzyskaniu paraboli sześcienniej jako osi łuku przedstawia okoliczność, że funkcja $\eta = ds/dx$, tzn. stosunek nieskończenie małego odcinka osi łuku do jego rzutu na cięciwę ma kształt bardzo złożony, nie pozwalający na łatwe całkowanie.

Oś o kształcie paraboli 3 stopnia nadaje się bardziej dla łuków wynioślejszych niż dla łuków bardzo płaskich, którym lepiej odpowiada parabola drugiego stopnia. W przypadku łuków wynioślejszych, np. powyżej wartości 0,08 dla stosunku $\zeta = f/l$ wpływ sił osiowych (podłużnych) na wielkości statycznie niewyznaczalne w łuku może być pominięty. W tych wypadkach służą nam do obliczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych w łukach bezprzegubowych wzory (8) i (9) podane w paragrafie poprzednim.

Przyglądając się wzorom (8)-(9) spostrzegamy, że rzędne osi łuku wchodzi tylko we dwa spośród nich. Ponadto we wzorze (9) wobec symetrii łuku całkowanie zarówno w liczniku, jak i mianowniku należy wykonać tylko w granicach od 0 do $s/2$. Stąd jedynie we wzorze na H całkowanie od 0 do s trzeba zastąpić przez kolejne całkowanie od 0 do $s/2$ i od $s/2$ do s , przy czym w pierwszym wypadku należy brać pod uwagę jako oś łuku krzywą (57), a w drugim krzywą (58). Można więc przyjąć symbolicznie, że

$$\int_0^s = \int_0^{s/2} + \int_{s/2}^s. \quad (59)$$

Podobny sposób ujęcia dotyczyć musi tylko licznika wzoru na H , gdyż jego mianownik zawiera rzędną y' w kwadracie.

Oś łuku przedstawia się w układzie współrzędnych XAY (rys. 10) przy $\xi = x/l$ pod postacią

$$y = 2f(2\xi - 6\xi^2 + 4\xi^3) \quad (60)$$

dla lewej części łuku (AC) i pod postacią

$$y = 2f(1 - 3\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3) \quad (61)$$

dla jej prawej części (CB).

Usunięcie więc trudności wynikających stąd, że wykładnik potęgi w paraboli sześcienniej jest nieparzysty, jest stosunkowo łatwe, o ile dadzą się

opanować trudności wynikające z przedstawienia różniczki łuku ds jako funkcji współrzędnej x , względnie ξ .

Dla ułatwienia sobie wyznaczenia całek wchodzących w wyrażenia (8)-(9) dążyć musimy, podobnie jak w przypadku osi łuku w kształcie paraboli 2 stopnia, do przedstawienia stosunku $\eta = ds/dx$ pod postacią

$$\eta = \frac{ds}{dx} = \sum a x^m. \quad (62)$$

W tym celu uciekamy się tu do metody analogicznej do metody zastosowanej w paragrafie poprzednim.

Wstawiając w wyrażenie (16) dla różniczki łuku ds zamiast różniczki dy jej wartość obliczoną z równań (60) i (61) i mając na uwadze, że $dx = l d\xi$ znajdujemy

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + 36 \zeta^2 (1 - 4\xi + 4\xi^2)^2}, \quad (63)$$

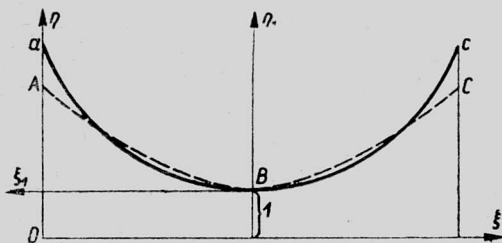
co doprowadza do wzoru

$$ds = F_3(\xi) dx \quad (64)$$

analogicznego do wzoru (20) paragrafu poprzedniego lub do wzoru

$$\eta = F_3(\xi). \quad (65)$$

Wstawiając dla poszczególnych wartości ζ w wyrażenie (63) kolejno $\xi = 0,05, 0,10, 0,15, \dots$ znajdujemy szereg wykresów typu przedstawionego



Rys. 11

na rys. 11, na którym krzywa ABC przedstawia funkcję (63).

Jeżeli umieścimy na wykresie rys. 11 poza krzywą ABC gałąź paraboli sześcienniej aB odpowiadającą w lewej części wykresu w układzie współrzędnych $\xi_1 B \eta_1$ równaniu paraboli sześcienniej

$$\eta_1 = g \xi_1^3, \quad (66)$$

a w prawej gałąź Bc odpowiadającą równaniu

$$\eta_1 = -g \xi_1^3, \quad (67)$$

wówczas zauważymy, iż przy należytych wyborze parametru g rzędne krzywych (66) i (67) mało różnią się od rzędnych krzywej (63).

Opierając się na rozważaniach dotyczących łuków o kształcie paraboli 2 stopnia uciekamy się tu przy wyznaczaniu parametru g w równaniach

(66) i (67) do metody najmniejszych kwadratów, która w naszym wypadku sprowadza się do postulatu, aby suma różnic między rzędnymi krzywej AB a rzędnymi krzywej aB odpowiadała warunkowi minimum, czyli aby

$$\frac{\partial D_3}{\partial g} = 0, \quad (68)$$

gdzie (rys. 11)

$$D_3 = \sum (\eta_2 - \eta_1)^2 = \sum (\eta_2 - g \xi_1^3)^2. \quad (69)$$

Równanie (68) doprowadza do następującego wzoru dla parametru g :

$$g = \frac{\sum \eta_1 \xi_1^3}{\sum \xi_1^6}. \quad (70)$$

Największe wyrażone w procentach błędy ε między rzędnymi krzywych AB i aB , odpowiadające poszczególnym wartościom ξ ujęte są w tabelicę 4.

Błędy przeciętne ϑ powstałe wskutek zastąpienia krzywych AB przez krzywe aB podane są w tablicy 5.

W odniesieniu do układu $\xi O \eta$ (rys. 11) przybierają krzywe (66) i (67) postać następującą:

$$\eta = \frac{ds}{dx} = 1 + g \left(\frac{1}{2} - \xi \right)^3 \quad (71)$$

na odcinku od $\xi = 0$ do $\xi = 1/2$ i postać

$$\eta = \frac{ds}{dx} = 1 - g \left(\frac{1}{2} - \xi \right)^3 \quad (72)$$

na odcinku od $\xi = 1/2$ do $\xi = 1$.

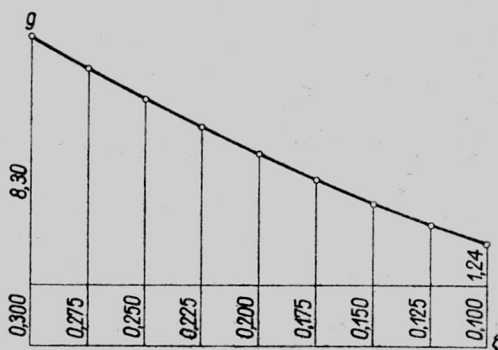
Funkcje (71) i (72) będziemy oznaczali jako funkcje Φ_1 i Φ_2 , tak iż na odcinku łuku między $x = 0$ a $x = l/2$ będzie

$$ds = \Phi_1 dx, \quad (73)$$

a na odcinku między $x = l/2$ a $x = l$ będzie

$$ds = \Phi_2 dx. \quad (74)$$

Parametry g obliczone dla poszczególnych wartości ξ ze wzoru (70) dają się ująć w tabelicę 6.



Rys. 12

Tablica 4

ξ	$\varepsilon\%$	ξ	$\varepsilon\%$
0,100	1,2	0,225	2,4
0,125	2,0	0,250	2,5
0,150	2,1	0,275	2,6
0,175	2,2	0,300	2,8
0,200	2,4		

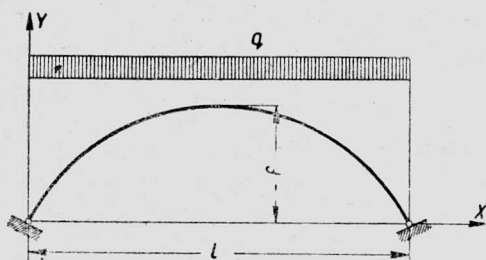
Tablica 5

ξ	$\vartheta\%$	ξ	$\vartheta\%$
0,100	0,5	0,225	1,2
0,125	0,8	0,250	1,2
0,150	0,9	0,275	1,3
0,175	1,0	0,300	1,4
0,200	1,1		

Tablica 6

ξ	g	ξ	g
0,100	1,24	0,225	5,20
0,125	1,81	0,250	6,21
0,150	2,68	0,275	7,27
0,175	3,45	0,300	8,30
0,200	4,30		

Zależność parametru g od stosunku ξ wyraża się za pomocą wykresu na rys. 12, z którego wynika, że dla pośrednich wartości ξ można otrzymywać parametry g drogą interpolacji liniowej.



Rys. 13

Gdy chodzi o błędy, jakie może spowodować w obliczeniu statycznym łuków o kształcie paraboli 3 stopnia wprowadzenie dla różniczek ds wyrażen (73) i (74), znajdują tu zastosowanie uwagi podane w paragrafie poprzednim dla łuków o kształcie paraboli 2 stopnia.

Jako przykład zastosowania wzorów (73) i (74) na różniczkę ds , a więc zastosowania funkcji Φ_1 i Φ_2 oraz parametru g do obliczenia łuków, bierzemy pod uwagę łuk symetryczny dwuprzegubowy obciążony w sposób ciągły i równomierny i posiadający kształt paraboli 3 stopnia (rys. 13).

Moment zginający wyraża się tu wzorem

$$M_{0\alpha} = \frac{ql^2}{2} \xi(1 - \xi), \quad (75)$$

gdzie q jest to obciążenie jednostkowe.

Stosując tu wzór (11) oraz funkcje Φ_1 i Φ_2 znajdujemy

$$\begin{aligned} \int_0^s M_{0\alpha} y ds = \int_0^{l/2} \frac{ql^2}{2} \xi(1 - \xi) \cdot 2f(3\xi - 6\xi^2 + 4\xi^3) \Phi_1 l d\xi + \\ + \int_{l/2}^l \frac{ql^2}{2} \xi(1 - \xi) \cdot 2f(1 - 3\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3) \Phi_2 l d\xi, \end{aligned} \quad (76)$$

$$\int_0^s y^2 ds = \int_0^{l/2} 4f^2 (3\xi - 6\xi^2 + 4\xi^3)^2 \Phi_1 l d\xi + \quad (77)$$

$$+ \int_{l/2}^l 4f^2 (1 - 3\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3)^2 \Phi_2 l d\xi,$$

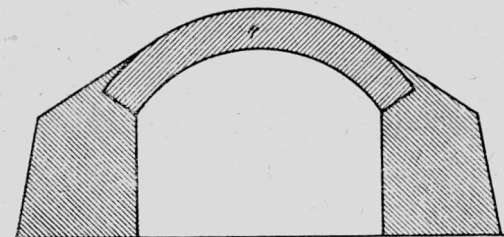
skąd dla wartości $\zeta = 0,175$ wziętej z tablicy 6 znajdujemy $H = 0,1128 ql^2/f$.

II. ŁUKI ELIPTYCZNE

Łuki eliptyczne o pionowej większej osi elipsy występują jako konstrukcje budowlane przede wszystkim w postaci sklepień przepustów kolejowych i drogowych.

Zasadniczą różnicą między sklepieniem mostem a sklepieniem przepustem, z punktu widzenia statyki budowli, stanowi grubość warstwy nadsypki nad sklepieniem. Grubość ta wynosi dla mostów zaledwie kilkadziesiąt centymetrów, dla przepustów zaś dochodzić może do kilkunastu metrów. Przy małych grubościach warstwy nadsypki możemy nie liczyć się z jej parciem poziomym na sklepienie, co nie może jednak mieć miejsca przy grubej warstwie nadsypki.

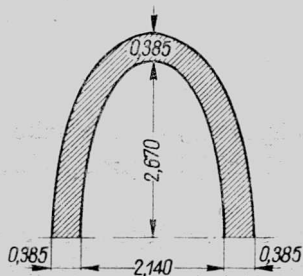
W zależności od zagłębienia sklepienia pod torem kolejowym lub drogą znajduje się długość sklepienia liczona w kierunku równoległym do jego tworzącej. Długość ta niewiele różni się od szerokości drogi, gdy chodzi o mosty, i o wiele przekracza tę szerokość, gdy chodzi o przepusty pod wysokimi nasypami. Wobec znacznej długości sklepień przepustów grubość ma większy wpływ na ogólny koszt przepustu niż grubość sklepienia mostowego na całkowity koszt mostu. Tym też tłumaczy się usilne dążenie w technice budowlanej do jak największego ograniczenia grubości sklepień przepustów.



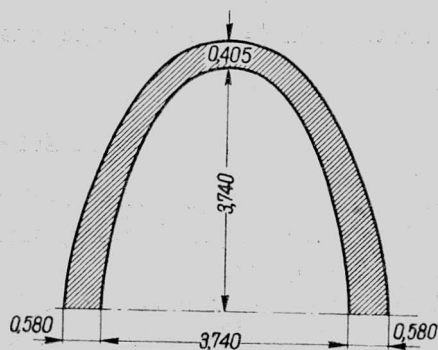
Rys. 14

Największą oszczędność w murze przepustów osiągnąć można drogą nadania osi sklepienia kształtu odpowiedniej linii sznurowej, co prowadzi do zastąpienia przekroju poprzecznego przepustu typu przedstawionego na rys. 14 o wyrażeniu zaakcentowanych przyczółkach przez przekroje podane na rys. 15 (typ I), 16 (typ II) lub 17 (typ III). Teoretyczny kształt osi przepustów przedstawionych na tych rysunkach powinien odpowiadać

przy wysokich nasypach elipsie, przy wyznaczeniu jednak takiego kształtu sklepienia grubość jego uważać musimy za nieskończenie małą. Ponieważ w rzeczywistości sklepienie przepustu posiada pewną grubość skończoną, powstają w nim momenty zginające, wywołujące nieraz naprężenie rozciągające, dla przepustów kamiennych na ogół niebezpieczne.

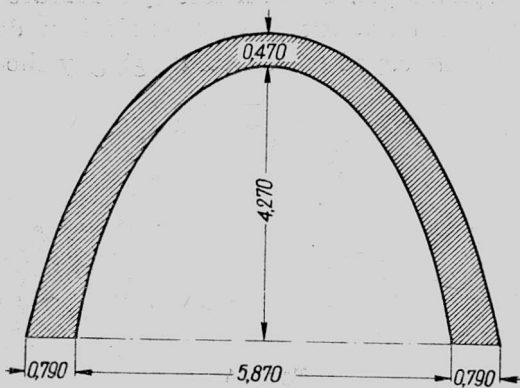


Rys. 15



Rys. 16

Przy wyznaczaniu naprężeń w sklepieniach o kształcie połowy elipsy należy mieć na uwadze, że oś tych sklepień ma w pewnych swych częściach znaczną bardzo krzywiznę charakteryzującą się stosunkiem promienia krzywizny osi sklepienia na danym odcinku do grubości sklepienia w tym samym miejscu.



Rys. 17

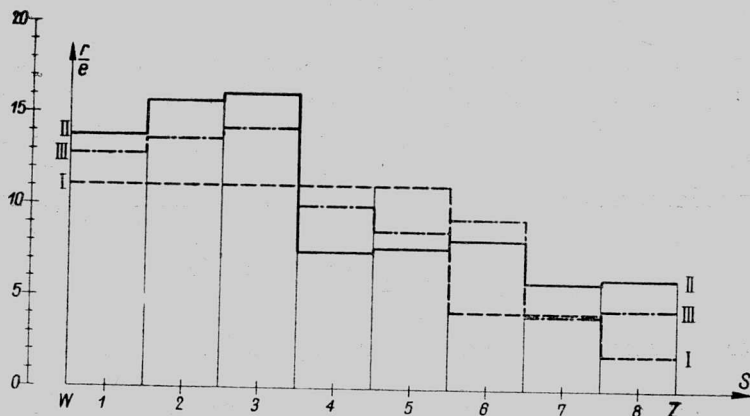
Na rys. 18 przedstawione jest, w jaki sposób stosunek promienia krzywizny do grubości sklepienia, tj. stosunek $r : e$, zmienia się wzdłuż osi sklepienia. Punkty 1, 2, 3, ... 8 na osi odciętych wykresu odpowiadają środkom długości klinów, na które dzielimy połowę sklepienia między wezłowiem a zwornikiem

(punkty w i z). Szerokość słupków wykresu odpowiada tu długości klinów, a wzdłuż osi rzędnych odczytujemy wartości poszukiwanych stosunków $r : e$, przy czym linie przerywane dotyczą tu typu I przepustu (rys. 15), linie pełne typu II (rys. 16), a linie przerywano-punktowe typu III (rys. 17).

Ponieważ z wykresu wynika, że stosunek $r : e$ spaść może nawet do 2, powstaje pytanie, czy dopuszczalny jest tu sposób obliczenia statycznego

sklepienia przepustu stosowany w przypadku łuków mostowych, a więc schemat obliczenia prętów o krzywiznie małej, który w praktyce inżynierskiej przeważnie bywa stosowany.

Odpowiedź na to pytanie oparta być może tylko na porównaniu ze sobą wyniku obliczeń przeprowadzonych, z jednej strony, dla prętów o dużej krzywiznie, a z drugiej, dla prętów o małej krzywiznie. Porównanie wykonamy dla trzech przedstawionych na rys. 15, 16 i 17 typach przepustów.



Rys. 18

Przystępując do porównania obliczeń sklepienia przepustu eliptycznego, jako pręta o małej i o dużej krzywiznie, zauważamy przede wszystkim, że geometryczne dodawanie odkształceń łuku, jako podstawa do wyznaczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych zadania, doprowadzająca do tzw. wzorów B r e s s e' a, odbywa się w obydwóch wypadkach jednakowo i że zasadniczą różnicą obydwóch obliczeń jest tylko sposób wyznaczenia odkształceń nieskończenie małego odcinka (klina) łuku sprężystego. Chodzi tu, mianowicie, o przyrost Δds (ściślej skrót) długości ds tego odcinka i o przyrost $\Delta d\varphi$ kąta $d\varphi$ między dwiema ograniczającymi go płaszczyznami.

Przy rozpatrywaniu łuku sprężystego, jako pręta o dużej krzywiznie, wzory na Δds oraz $\Delta d\varphi$ przybierają postać następującą:

$$\Delta ds = \frac{N}{EA} ds + \frac{M}{rEA} ds, \quad (78)$$

$$\Delta d\varphi = \frac{M}{EY} ds + \frac{N}{rEA} ds + \frac{M}{r^2EA} ds, \quad (79)$$

czemu odpowiada wzór na naprężenia w danym przekroju łuku

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{rA} + \frac{Mz}{Y} \cdot \frac{r}{r+z}. \quad (80)$$

We wzorze tym symbole M i N oznaczają moment zginający i siłę podłużną w danym przekroju łuku, A i r odpowiednio pole przekroju i promień krzywizny osi łuku, wreszcie Y całkę

$$Y = \int_A z^2 \frac{r}{r+z} dA, \quad (81)$$

gdzie z jest to odległość pewnego punktu przekroju od osi łuku.

Wzory (78)-(80) wyprowadzone są na podstawie założenia płaskich przekrojów, nie doprowadzają jednak, jak widać, do liniowego rozkładu naprężeń.

W przypadku łuków sprężystych o małej krzywiznie przyjmujemy, że

$$\frac{1}{r} = 0, \quad \frac{r}{r+z} = 1, \quad Y = J, \quad (82)$$

wobec czego wzory (78)-(80) zostają zastąpione przez wzory

$$\Delta ds = \frac{N}{EA} ds, \quad \Delta d\varphi = \frac{M}{EJ} ds, \quad (83)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Mz}{J}. \quad (84)$$

Spośród odkształceń skończonego odcinka łuku (rys. 19) interesuje tu nas przede wszystkim poziome (tj. równoległe do osi AX) przesunięcie u_k punktu K (o współrzędnych a i b) oraz obrót ω_k przekroju poprzecznego sklepienia w tym punkcie.

Odkształcenia te wyznaczamy ze wzorów B r e s s e' a, które w danym razie przybierają postać

$$u_k = - \int_0^{s/2} \Delta ds \cos \varphi - \int_0^{s/2} (b-y) \Delta d\varphi, \quad (85)$$

$$\omega_k = \int_0^{s/2} \Delta d\varphi, \quad (86)$$

gdzie x i y oznaczają współrzędne poszczególnych punktów D osi łuku, a φ — kąty nachylenia względem pionowej osi symetrii łuku przekroju poprzecznego w tych punktach.

Ograniczając się do rozpatrywania równowagi przepustów przy obciążeniu symetrycznym względem ich osi pionowej i przyjmując za punkt K środek przekroju zwornikowego otrzymujemy z warunków symetrii, że

$$u_k = 0 \quad \text{i} \quad \omega_k = 0, \quad (87)$$

gdzie u_k i ω_k są funkcjami M i N .

Uważając łuk eliptyczny za pręt sprężysty o dużej krzywiznie wstawiamy w równania (85) i (86) wartości Δds i $\Delta d\varphi$ ze wzorów (78) i (79), w których M i N dla danego punktu osi łuku wyrażone są odpowiednio dla obciążenia pionowego (litery kreskowane pionowo) i dla poziomego parcia ziemi (litery kreskowane poziomo), za pomocą wzorów następujących:

$$N' = R'_A \sin \varphi + H' \cos \varphi - \mathfrak{N}', \quad (88)$$

$$M' = M'_A + R'_A x - H' y - \mathfrak{M}', \quad (89)$$

$$\bar{N} = \bar{H} \cos \varphi - \bar{\mathfrak{N}}, \quad (90)$$

$$\bar{M} = \bar{M}_A + \bar{H} y - \bar{\mathfrak{M}}. \quad (91)$$

We wzorach (88)-(91) R_A i M_A oznaczają odpowiednio pionową składową reakcji podpory A równą w danym wypadku połowie obciążenia oraz moment podporowy, H parcie poziome w łuku, $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{M}$ odpowiednio sumę rzutów na styczną do osi łuku sił działających na łuk z jednej strony danego przekroju oraz moment tych sił względem środka przekroju.

W poszczególnych przekrojach łuku będzie więc

$$N = N' + \bar{N}, \quad (92)$$

$$M = M' + \bar{M}. \quad (93)$$

Wpływ sił poprzecznych na odkształcenie się łuku, a również wpływ wahań temperatury pomijamy tu we wszystkich obliczeniach porównawczych.

Równania (87) w związku ze wzorami (88)-(91) przybierają w ten sposób postać dwu równań liniowych:

$$\left. \begin{aligned} M_A a_1 + H b_1 + (R_A c_1 + d_1) &= 0, \\ M_A a_2 + H b_2 + (R_A c_2 + d_2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

o współczynnikach wyrażonych za pomocą wzorów

$$a_1 = \sum \frac{y}{J} + \sum \frac{y}{rA} - \sum \frac{\cos \varphi}{rA}, \quad (95)$$

$$b_1 = - \sum \frac{y^2}{J} + \sum \frac{y \cos \varphi}{rA} - \sum \frac{y^2}{r^2 A} - \sum \frac{\cos^2 \varphi}{A} + \sum \frac{y \cos \varphi}{rA}, \quad (96)$$

$$c_1 = \sum \frac{x y}{J} + \sum \frac{y \sin \varphi}{rA} + \sum \frac{x y}{r^2 A} - \sum \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{A} - \sum \frac{x \cos \varphi}{rA}, \quad (97)$$

$$d_1 = - \sum \frac{\mathfrak{M} y}{J} - \sum \frac{\mathfrak{M} y}{rA} - \sum \frac{\mathfrak{M} y}{r^2 A} + \sum \frac{\mathfrak{M} \cos \varphi}{A} + \sum \frac{\mathfrak{M} \cos \varphi}{rA}, \quad (98)$$

$$a_2 = \sum \frac{1}{J} + \sum \frac{1}{r^2 A}, \quad (99)$$

$$b_2 = - \sum \frac{y}{J} + \sum \frac{\cos \varphi}{rA} - \sum \frac{y}{r^2 A}, \quad (100)$$

$$c_2 = \sum \frac{x}{J} + \sum \frac{\sin \varphi}{rA} + \sum \frac{x}{r^2 A}, \quad (101)$$

$$d_2 = - \sum \frac{\mathfrak{M}}{J} - \sum \frac{\mathfrak{M}}{rA} - \sum \frac{\mathfrak{M}}{r^2 A}. \quad (102)$$

We wzorach tych sumy zastępują całki wzorów (85) i (86); nieskończone małe odcinki ds osi łuku po zastąpieniu ich przez odcinki skończone Δs , jako wchodzące w jednakowy sposób we wszystkie składniki równań (94) ulegają tu redukcji. Sumy dotyczą w danym razie połowy łuku.

Wyznaczenie sum Σ powinno na ogół odbywać się za pomocą wzoru S i m p s o n a lub C o t e s a, jednak próbne obliczenie sum z jednej strony według sposobu S i m p s o n a i z drugiej drogą zwykłego dodawania wykazało małą tylko różnicę w naprężeniach decydujących o wytrzymałości przepustu.

We wzorach (95)-(102) zostało przyjęte wreszcie, że $Y = J$, gdyż różnica między tymi wielkościami nie przekracza dla przepustów, jak to wynika z omówionych dalej obliczeń porównawczych, nawet jednego procentu.

Wielkości $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{M}$ zależą w sposób wyraźny od obciążenia sklepienia, wobec czego oddzielnie powinny być wyznaczane dla sił pionowych i oddzielnie dla poziomego parcia ziemi. W związku z tym dla każdego z wymienionych rodzajów obciążeń w równaniach (88)-(91) współczynniki (95)-(102) zawierające $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{M}$ są inne.

Obciążenie pionowe sklepienia w omawianych obliczeniach porównawczych wyznacza się w ten sposób, iż oś sklepienia zostaje podzielona

na 8 równych części dla każdej połowy łuku, a ciężar każdego z otrzymanych w ten sposób klinów sklepienia wraz z ciężarem przypadającego na ten klin słupa nadsypki i sprowadzonego do ciężaru ziemi obciążenia ruchomego zostaje zaczepiony do środka długości klina i uważany jest za siłę P skupioną w tym punkcie (rys. 20 i 21). Wobec tego

$$\mathfrak{N}' = \sum_1^i P' \sin \varphi, \quad (103)$$

gdzie suma zawiera rzuty na styczną do osi sklepienia w środku klina sił pionowych P' zaczepionych w środku klinów zawartych między tym klinem a lewym węzłowiem łuku.

Przy obliczaniu sił $\mathfrak{N}$ od parcia poziomego, siły P uważamy za siły poziome, przy czym przyjmujemy, że

$$\bar{P} = c \gamma (h + h') \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\psi}{2} \right), \quad (104)$$

gdzie γ jest to ciężar jednostkowy ziemi, h zagłębienie środka danego klina pod nadsypką, c rzut osi klina na oś pionową, a h' wysokość obciążenia nasypu sprowadzona do ciężaru jednostkowego ziemi; $\mathfrak{N}$ równa się w tym wypadku

$$\bar{\mathfrak{N}}_i = - \sum_1^i \bar{P} \cos \varphi. \quad (105)$$

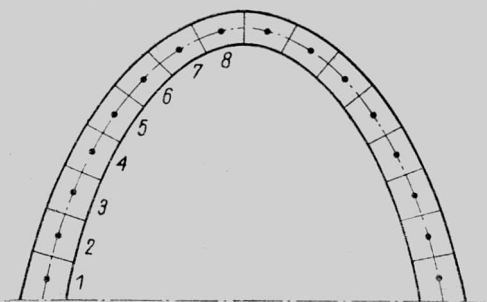
Odpowiednio do tego

$$\mathfrak{M}'_i = \sum_1^i P_j g_i, \quad \bar{\mathfrak{M}}_i = \sum_1^i \bar{P}_j k_i, \quad (106)$$

gdzie g_i względnie k_i oznaczają odległość linii działania sił od środka klina i (rys. 20).

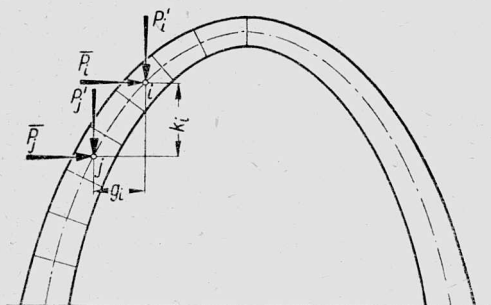
W przypadku obliczenia sklepień przepustów jako prętów sprężystych o krzywiźnie małej należy we wzorach (95)-(102) uwzględnić uproszczenia podane we wzorach (82); oparte jednak na tych samych uproszczeniach wzory Mörscha, Schönhöfera,

Melana itd. nie mogą w danym razie mieć bezpośredniego zastosowania, ponieważ dotyczą jedynie obciążeń pionowych nie uwzględniając poziomej składowej parcia ziemi na przepusty.



Rys. 20

Po przeprowadzeniu obliczeń trzech omówionych wyżej przepustów jako łuków o dużej i o małej krzywiznie zestawiamy uzyskane wyniki na wykresach przedstawionych na rysunkach 22, 23 i 24.

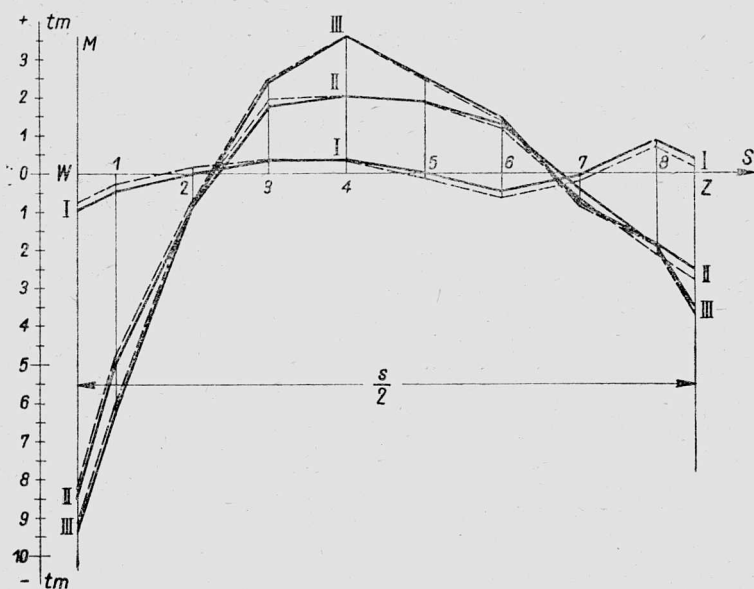


Rys. 21

Każdy z powyższych wykresów zawiera dla porównania dane dotyczące wszystkich trzech rozpatrywanych przepustów, co pozwala na wykazanie wpływu rozpiętości sklepienia na naprężenia i momenty zginające.

Linie odpowiadające przepustom I, II i III są oznaczone na rysunkach odpowiednio tymi cyframi.

Rysunek 22 przedstawia wykres momentów zginających w wyniosłych łukach eliptycznych. Odcięte wykresu wyrażają odległości od zwornika liczone wzdłuż osi łuków. Linie pełne odpowiadają obliczeniu łuków jako

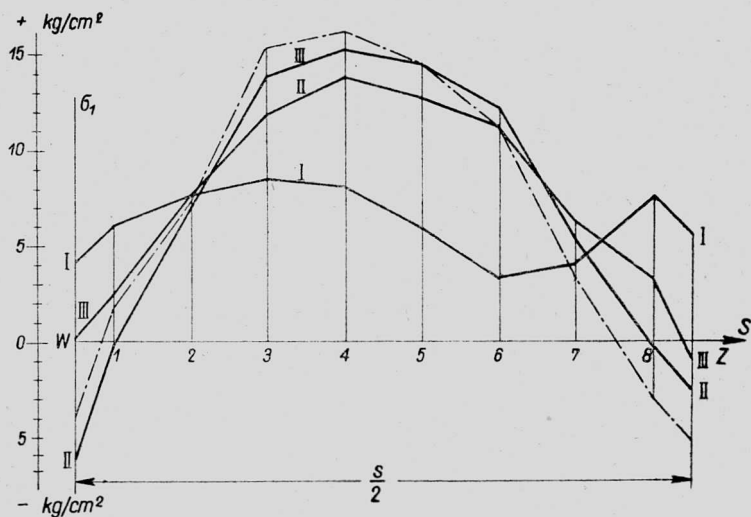


Rys. 22

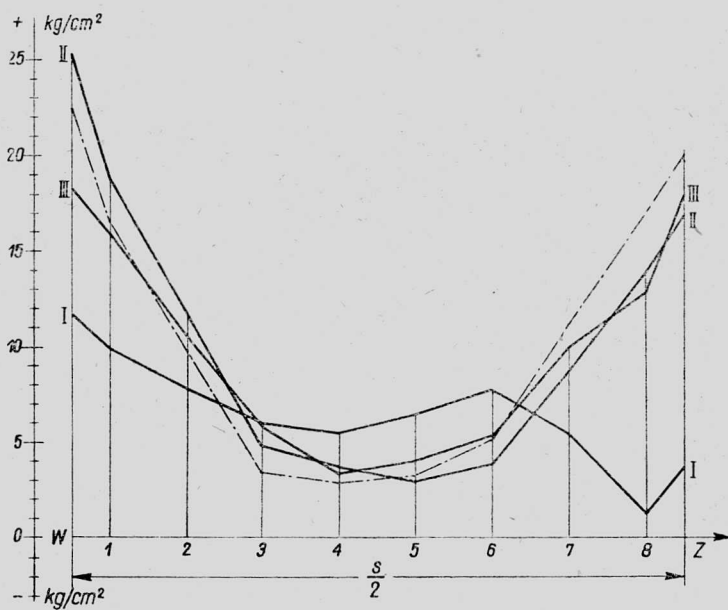
prętów o dużej krzywiznie, a przerywane dotyczą obliczeń przeprowadzonych w założeniu małej krzywizny.

Rysunek 23 przedstawia wykres naprężeń σ_1 w skrajnych zewnętrznych włóknaх łuków, a rys. 24 wykres naprężeń σ_2 w skrajnych włóknaх we-

wewnętrznych. Podobnie jak na rys. 22, linie pełne odpowiadają tu założeniu dużej, a przerywane małej krzywiznie łuków.



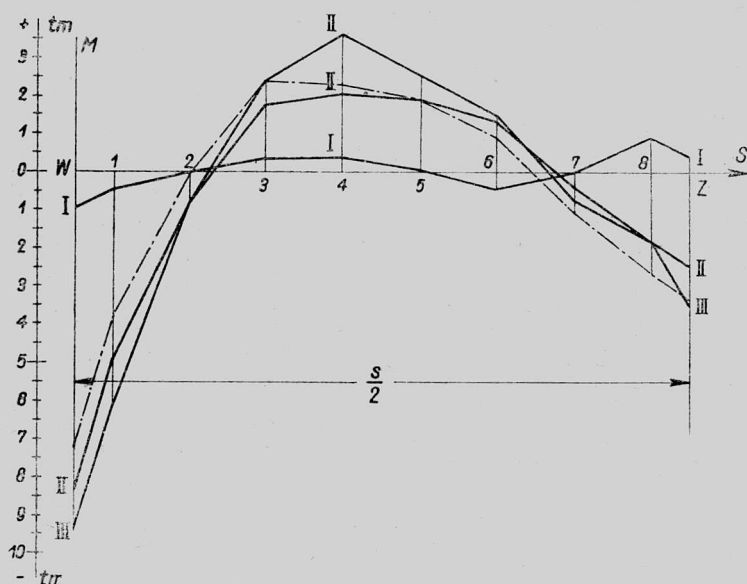
Rys. 23



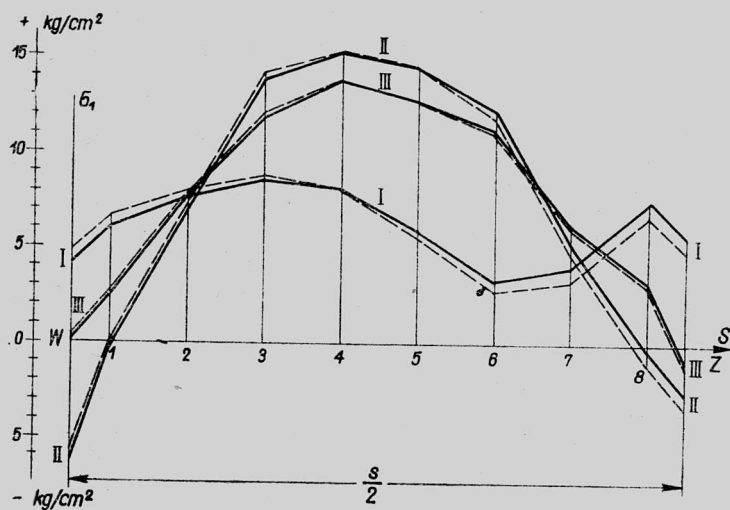
Rys. 24

Z podanych wykresów widać, że największa dla wszystkich punktów sklepienia różnica w wynikach obydwu sposobów obliczeń jest niewielka. Momenty podporowe M_A obliczone w obydwu założeniach róż-

nią się, mianowicie, od siebie nie więcej niż o 4%, przy czym zarówno momenty M_A , jak i parcia H są większe przy obliczaniu łuku jako pręta o dużej krzywiznie niż o małej.



Rys. 25



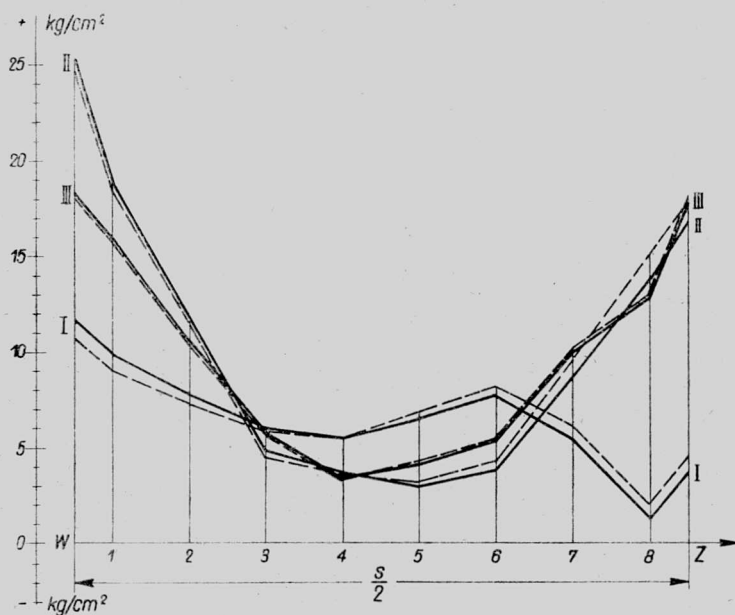
Rys. 26

Ponieważ, z drugiej strony, wiemy, iż zarówno współczynnik sprężystości, jak i inne cechy wytrzymałościowe betonu wahają się dla tego samego materiału zwykle w szerszych granicach niż wspomniane 4%,

wynika stąd, że nie jest rzeczą słuszną, aby w obliczeniach przeznaczonych dla celów praktycznych rozpatrywać sklepienia przepustów eliptycznych jako łuki o dużej krzywiznie. Dotyczy to tym bardziej przepustów wykonywanych z kamienia.

W dążeniu do uproszczenia obliczenia sklepień przepustów eliptycznych można iść jeszcze dalej i we wzorach (95)-(102) przyjmować stale, że $\cos \varphi = 1$, a $\sin \varphi = 0$, przy czym uproszczenia te zmniejszają momenty M_A oraz parcia poziome H . Wpływ ich na momenty w poszczególnych przekrojach łuku przedstawiony jest dla przepustu o rozpiętości $l = 3,74$ m (typ II) na rys. 25 linią przerywano-punktowaną.

Odpowiednie wykresy dla σ_1 i σ_2 podane są na rys. 26 i rys. 27.



Rys. 27

Znaczne wreszcie uproszczenie wprowadza w obliczenia założenie, że oś sklepienia nie ulega skrótowi, tj. że we wzorze (85) $\Delta ds = 0$, co stosowane jest np. prawie zawsze w obliczeniu ram żelbetowych.

Wielkości momentów M_A przy pominięciu Δds i bez tego pominięcia równe są dla kolejnych rozpiętości:

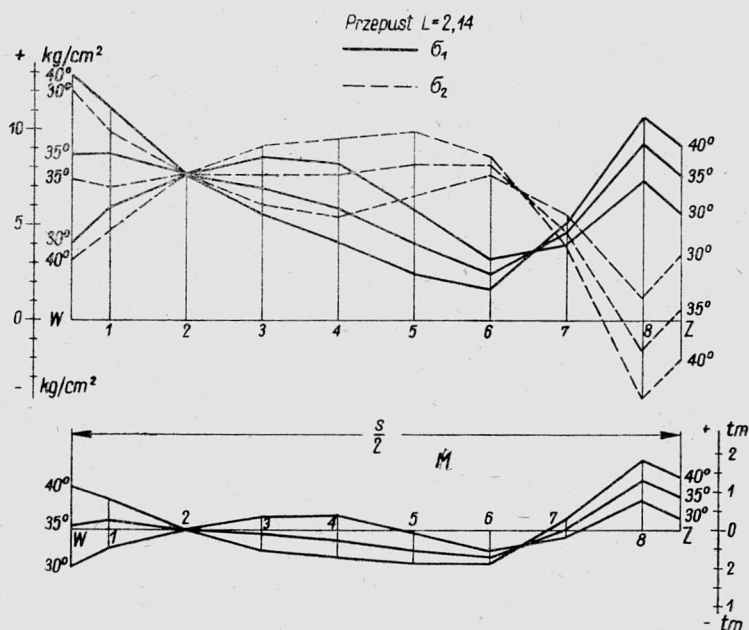
$$\left. \begin{array}{ll} \text{I} & M_A = -0,80 \text{ tm}, \quad M_A = -0,76 \text{ tm}, \\ \text{II} & M_A = -8,61 \text{ tm}, \quad M_A = -8,52 \text{ tm}, \\ \text{III} & M_A = -9,41 \text{ tm}, \quad M_A = -9,58 \text{ tm}. \end{array} \right\} \quad (107)$$

Odpowiednio do tego dla parcia poziomego H otrzymujemy tu:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I} & H = -4,49 \text{ t}, & H = -4,31 \text{ t}, \\ \text{II} & H = -4,91 \text{ t}, & H = -4,46 \text{ t}, \\ \text{III} & H = +6,36 \text{ t}, & H = +6,90 \text{ t}. \end{array} \right\} \quad (108)$$

Z powyższego wynika, że założenie $\Delta ds = 0$ w obliczeniu statycznym sklepienia eliptycznego daje błędy do 10%, co odpowiada wielkości błędów wpływających z podobnej przyczyny w obliczeniach ramownic. Założenie to usuwające jednocześnie z zadania wielkości $\sin \varphi$ i $\cos \varphi$ powoduje na ogół mniejsze błędy niż samo założenie $\sin \varphi = 0$ i $\cos \varphi = 1$; wobec tego stosowanie samodzielne tego ostatniego założenia nie jest rzeczą celową.

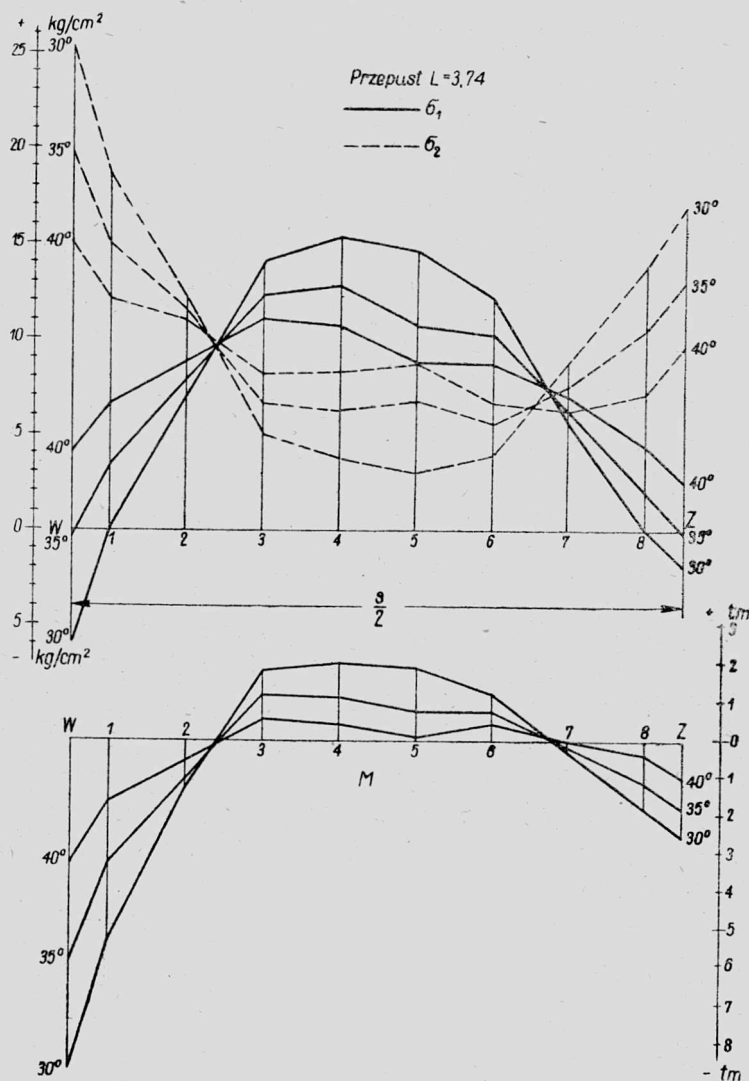
Z powodu znacznego zagłębienia przepustów pod torem kolejowym lub drogą spośród działających na nie obciążeń główną rolę odgrywa parcie ziemi.



Rys. 28

Z punktu widzenia statyki budowli ziemia jest materiałem bardzo różnorodnym, przy czym poszczególne gatunki ziemi charakteryzują się w przypadku parcia geodynamicznego przede wszystkim kątem tarcia wewnętrznego ψ .

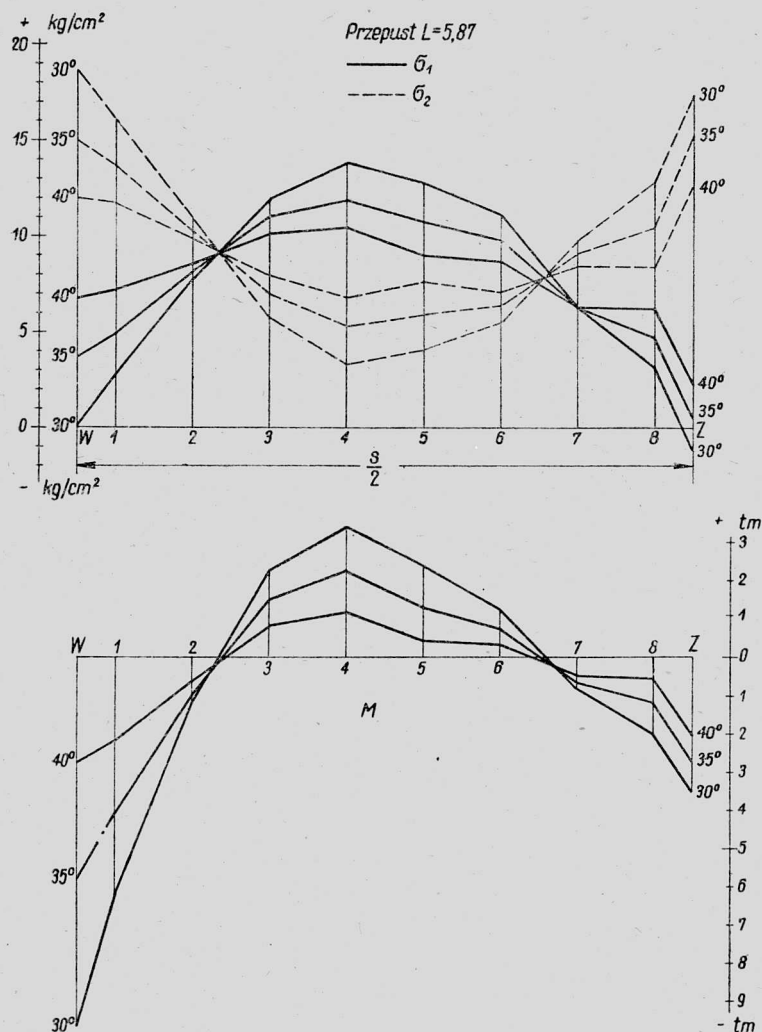
Wykresy na rys. 28-30 zawierają wyniki obliczenia momentów zginających i naprężeń w poszczególnych przekrojach poprzecznych dla przepustów typu I, II i III i dla kątów tarcia wewnętrznego $\psi = 30^\circ$, $\psi = 35^\circ$, $\psi = 40^\circ$.



Rys. 29

Z wykresów tych wynika, że wielkość kąta ψ ma bardzo znaczny wpływ na naprężenia krawędziowe w przepustach. Widać z nich poza tym, że wpływ ten odbija się na naprężeniach nie zawsze w tym samym

kierunku. O ile, mianowicie, w przepuście o rozpiętości $l = 5,870$ m zmniejszenie kąta ψ wywołuje zwiększenie decydującego w danym razie największego w przepuście naprężenia rozciągającego, o tyle w przepu-



Rys. 30

stach o rozpiętościach $l = 2,140$ m i $l = 3,740$ m zauważymy zjawisko odwrotne, czyli że zmniejszenie kąta ψ wywołuje tu zmniejszenie największego naprężenia rozciągającego.

Podobne zjawisko jest groźne dla bezpieczeństwa przepustów eliptycznych, gdyż kąty ψ ulegają poważnym wahaniom w zależności od ro-

dzaju ziemi oraz od stopnia jej jednorodności i wilgotności, a wobec powyższych zestawień nie zawsze przyjęcie w obliczeniach mniejszego ψ zwiększa jego bezpieczeństwo. Można to sobie w ten sposób wytłumaczyć, że ziemia wywierając parcie poziome na sklepienie do pewnego stopnia podtrzymuje je i pomaga mu niejako utrzymać pionowe ciśnienie ziemi; w tych warunkach parcie największe odpowiadające min. φ niekoniecznie musi być najgroźniejsze dla sklepienia.

Sposób działania parcia ziemi na sklepienia przepustów eliptycznych jest dość nieokreślony również z tego powodu, że parcie na sklepienia może być przeważnie tylko wyznaczone dla stanu równowagi granicznej, tj. jako parcie geodynamiczne. W przypadku zaś parcia geostatycznego może ciśnienie ziemi w kierunku pionowym zgoła inaczej ustosunkować się do parcia poziomego, niżby to można było ustalić z obliczeń dla danego kąta ψ .

Z powyższych rozważań wynika, że przy projektowaniu przepustów eliptycznych należy szczególną uwagę zwrócić na ustalenie sposobu parcia ziemi na sklepienie. Natomiast obliczenie przepustów eliptycznych jako łuków o małej krzywiznie jest tu całkowicie dopuszczalne.

III. ŁUKI KOLISTE

Oś łuku w kształcie odcinka ma znaczne zalety artystyczne i budowlane.

Ze statycznego punktu widzenia łuk kolisty nie jest na ogół wygodny, gdyż równanie odcinka kołowego odniesione do jego cięciwy jako do osi X -ów i do prostej do niej prostopadłej jako do osi Y -ów jest trudne do całkowania, taki zaś właśnie układ współrzędnych narzuca zwykle obciążenie łuku.

W tych warunkach całki wchodzące do obliczenia statycznego łuku kolistego muszą być przeważnie wyznaczane w sposób przybliżony drogą zastąpienia nieskończenie małych odcinków osi łuku d s przez małe odcinki skończone.

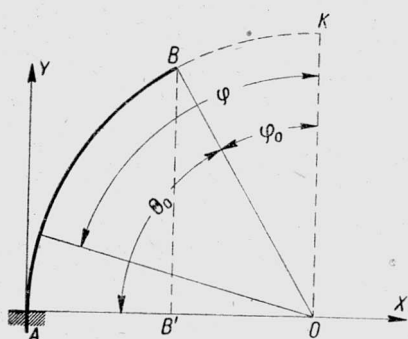
Kolista oś łuku ma jednak wysoce użyteczną, w danym razie ważną, własność geometryczną w postaci stałości promienia krzywizny. Własność ta pozwala na daleko posunięte usprawnienia w obliczaniu statycznym, w szczególności na sprowadzenie obliczenia drogą ujęcia wyników w tablice i sporządzenia odpowiednich wykresów do niewielu krótkich i prostych manipulacji.

Będziemy tu rozpatrywali tylko łuki o stałym przekroju poprzecznym pomijając wpływ sił podłużnych na wielkości statycznie niewyznaczalne,

ponieważ łuki koliste mają przeważnie bądź przekrój stały (łuki stalowe), bądź słabo się zmieniający (łuki żelazo-betonowe), a wpływ sił podłużnych na wielkości statycznie nadliczbowe ujawnia się wyraźniej tylko przy małych wyniosłościach; tak więc np. przy $\zeta = 0,300$ wpływ ten wyraża się już zaledwie liczbą 0,1%. Zresztą przytoczone niżej sposoby postępowania mogą być rozszerzone również i na łuki o przekroju zmiennym oraz na łuki, w których obliczenia sił podłużnych pomijane być nie mogą.

Można tu również posilkować się funkcjami Φ i parametrami g omówionymi w rozdziale I i ustawionymi dla łuku kolistego *).

Bierzemy pod uwagę odcinek AB pręta kolistego utwierdzonego w punkcie A płaszczyzny AO normalnej do jego osi (rys. 31). Prosta AO przyjmujemy za oś X -ów, a prostą do niej prostopadłą i przechodzącą przez punkt



Rys. 31

A za oś Y -ów. W odległości AO równej promieniowi osi pręta r przeprowadzamy prostą OK równoległą do osi Y -ów. Kąt φ między prostą OK a dowolnym promieniem odcinka koła oraz promień r odgrywają tu rolę współrzędnych biegunowych zadania. W danym przypadku $r = \text{const.}$

Przez u i v (rys. 32) przedstawiamy (w skali mocno skróconej) dodatnie przesunięcia punktu B w kierunkach równoległych do osi współrzędnych AX

i AY . Przez ω oznaczamy tu dodatni obrót przekroju poprzecznego pręta w punkcie B (zwrot strzałki).

Przyjmujemy dalej, że w punkcie B zaczepione są dwie siły równoległe do osi współrzędnych N_x i N_y oraz moment M_B , przy czym zwroty tych wielkości wskazane są na rys. 33. Wskazane tu są również zwroty dwu sił P_x i P_y zaczepionych w punkcie C i równoległych do osi współrzędnych.

Wielkości u , v i ω obliczamy ze wzorów Bresse'a, które w danym przypadku przybierają postać

$$u = - \int_0^s (b - y) \Delta d\varphi, \quad (109)$$

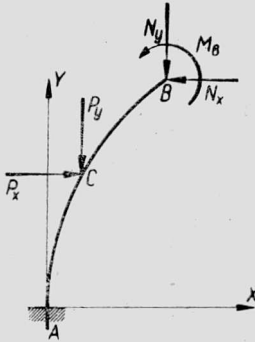
$$v = \int_0^s (a - x) \Delta d\varphi, \quad (110)$$

*) Por. J. Cz ul a k. Łuki koliste we współrzędnych prostokątnych, Arch. Mech. Stos., 1950.

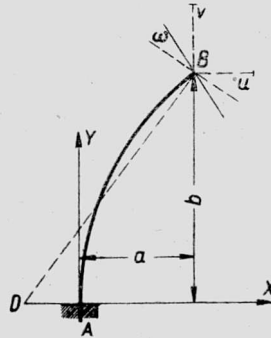
$$\omega = \int_0^s \Delta d\varphi, \quad (111)$$

gdzie s oznacza długość łuku.

Znaki algebraiczne wzorów (109) - (111) odpowiadają kierunkom przesunięć i obrotów przedstawionych na rys. 32. Kąty $\Delta d\varphi$ przedstawiające wzajemne obroty dwu płaszczyzn ograniczających nieskończenie mały odcinek osi łuku ds mają te same zwroty co kąty ω .



Rys. 32



Rys. 33

Dla kątów $\Delta d\varphi$ przyjmujemy uproszczone wyrażenia

$$\Delta d\varphi = \frac{M}{EJ} ds, \quad (112)$$

nadające się jednak zawsze do obliczenia łuków o małej krzywiznie, tzn. o dużym stosunku $r : e$ promienia do grubości łuku.

Do wzorów (109)-(111) wstawiamy $ds = r d\varphi$. Ponieważ tu promień r jest wielkością stałą, więc granice całkowania od 0 do s powinniśmy zastąpić przez granice od φ_0 do $\pi/2$ (rys. 31).

W przypadku zaczepienia w punkcie B siły N_x moment zginający w pewnym punkcie pręta kolistego (przy współrzędnych x, y) równa się

$$M = N_x (b - y). \quad (113)$$

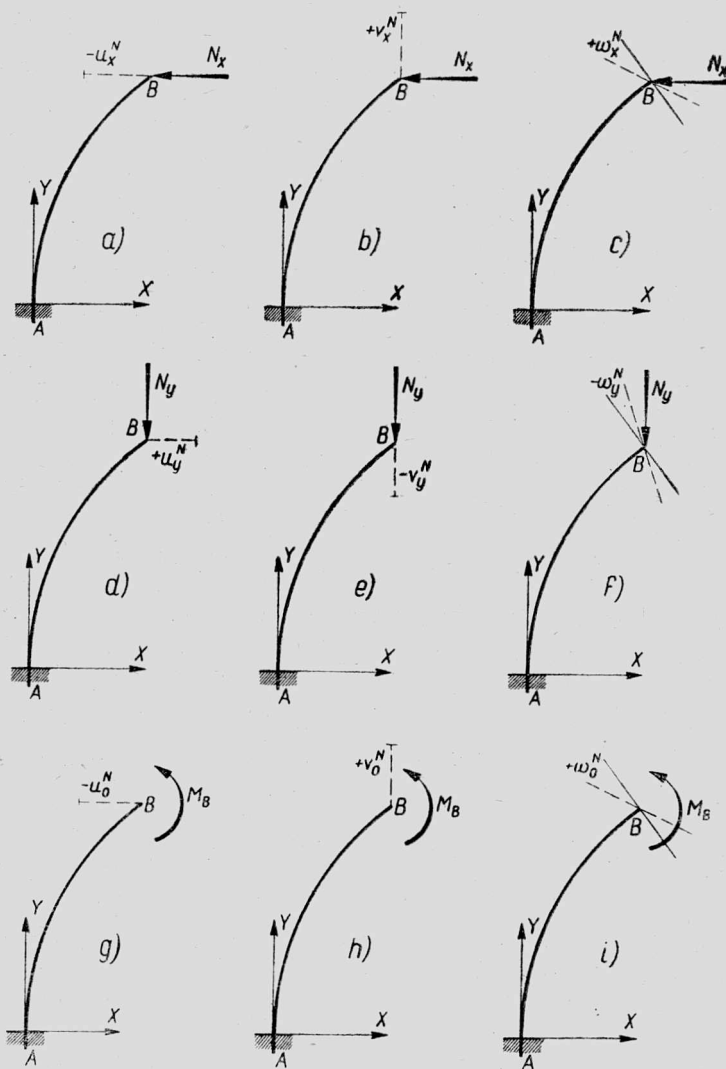
Odpowiednio dla siły N_y mamy

$$M = -N_y (a - x). \quad (114)$$

Wreszcie, przy obciążeniu pręta w punkcie B momentem M_B ,

$$M = M_B. \quad (115)$$

Wobec przyjętego znakowania sił i momentów zależność między zwrotami sił i momentów, z jednej strony, a zwrotami przesunięć i obrotów, z drugiej, przybierze postać przedstawioną na rys. 33.



Rys. 34

Po wstawieniu momentów (113), (114) i (115) we wzory (109)-(111) i po wykonaniu całkowania w granicach wskazanych wyżej otrzymujemy dla przesunięć u i v oraz obrotów ω w przypadkach przedstawionych na rys. 34 wzory następujące:

Przypadek 34a

$$u_x^N = -\frac{N_x r^3}{E J} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) + \frac{3}{4} \sin 2 \varphi_0 - \right. \\ \left. - 2 \cos \varphi_0 + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) \cos^2 \varphi_0 \right] = -u'_x \frac{N_x r^3}{E J}. \quad (116)$$

Przypadek 34b

$$v_x^N = \frac{N_x r^3}{E J} \left[\sin \varphi_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) \sin 2 \varphi_0 + \right. \\ \left. + \cos 2 \varphi_0 - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 \right] = v'_x \frac{N_x r^2}{E J}. \quad (117)$$

Przypadek 34c

$$\omega_x^N = \frac{N_x r^2}{E J} \left[\sin \varphi_0 - 1 + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) \cos \varphi_0 \right] = \omega'_x \frac{N_x r^2}{E J}. \quad (118)$$

Przypadek 34d

$$u_y^N = v'_x \frac{N_y r^3}{E J}. \quad (119)$$

Przypadek 34e

$$v_y^N = -\frac{N_y r^3}{E J} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) - \frac{3}{4} \sin 2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 \right] = -v'_y \frac{N_y r^3}{E J}. \quad (120)$$

Przypadek 34f

$$\omega_y^N = -\frac{N_y r^2}{E J} \left[\cos \varphi_0 - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) \sin \varphi_0 \right] = -\omega'_y \frac{N_y r^2}{E J}. \quad (121)$$

Przypadek 34g

$$u_0^N = -\omega'_x \frac{M_B r^2}{E J}. \quad (122)$$

Przypadek 34h

$$v_0^N = \omega'_y \frac{M_B r^2}{E J}. \quad (123)$$

Przypadek 34i

$$\omega_0^N = \frac{M_B r}{E J} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) = \omega'_0 \frac{M_B r}{E J}. \quad (124)$$

Ze wzorów (116)-(124) wynika, że każde z przesunięć uogólnionych ujętych w schemat na rys. 34 może być przedstawione jako wzięty ze znakiem + lub — iloczyn odpowiedniej siły uogólnionej przez jedną z wielkości

$$\frac{r^3}{EJ}, \quad \frac{r^2}{EJ}, \quad \frac{r}{EJ} \quad (125)$$

i przez jeden z 6 współczynników $u'_x, v'_x, \omega'_x, v'_y, \omega'_y, \omega'_0$ zależnych tylko od kąta φ_0 .

Jeżeli siły zaczepione są nie do końcowego przekroju pręta kolistego B, lecz do któregoś z przekrojów pośrednich C i jeżeli kierunki tych sił (siły P_x i P_y) są takie, jak to jest wskazane na rys. 35, wówczas zwroty przesunięć i obrotów przekroju C mogą być ujęte w schemat przedstawiony na rysunkach 36a do 36f.

Na rysunkach 34 i 36 przesunięcia zostały podane wraz z ich znakami algebraicznymi.

Wyznaczenie przesunięć i obrotów przekroju C odbywa się według tych samych równań co wyznaczenie przesunięć i obrotów przekroju B, przy

czym całki oznaczone (109), (110) i (111) muszą być obliczane w granicach od φ_0 do $\pi/2$ (rys. 35). Tą drogą dochodzimy do wzorów następujących:

Przypadek 36a

$$u_x^P = u'_x \frac{P_x r^3}{EJ} \quad (126)$$

Przypadek 36b

$$v_x^P = -v'_x \frac{P_x r^3}{EJ} \quad (127)$$

Przypadek 36c

$$\omega_x^P = -\omega'_x \frac{P_x r^2}{EJ} \quad (128)$$

Przypadek 36d

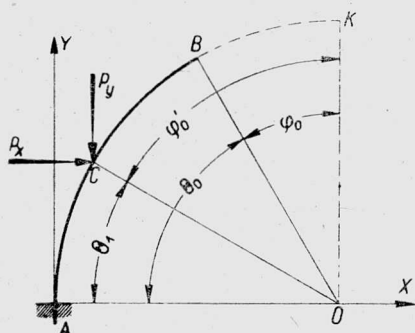
$$u_y^P = v'_x \frac{N_y r^3}{EJ} \quad (129)$$

Przypadek 36e

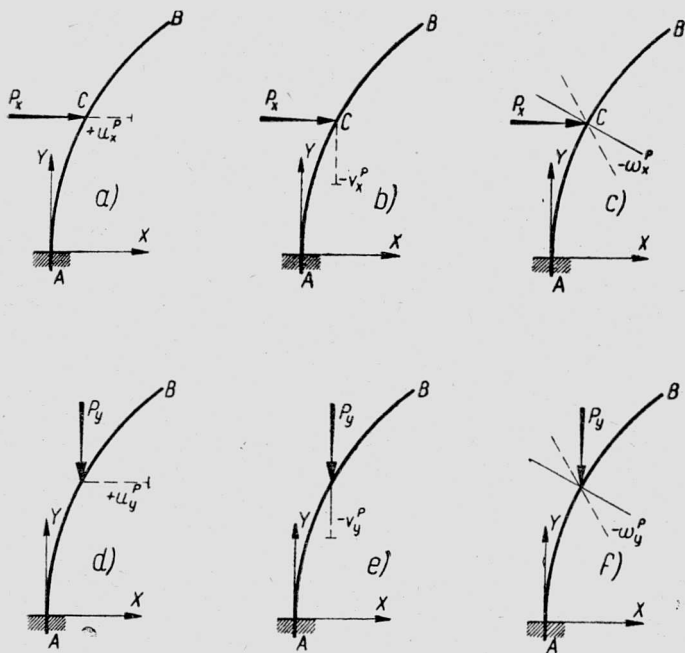
$$v_y^P = -v'_y \frac{P_y r^3}{EJ} \quad (130)$$

Przypadek 36f

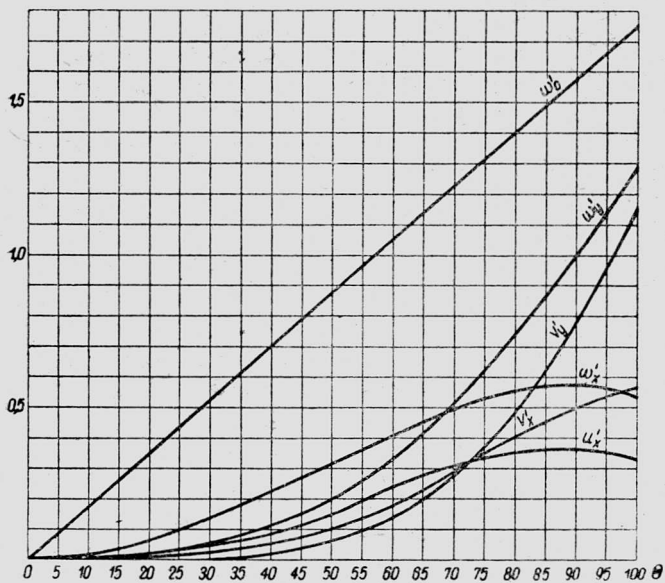
$$\omega_y^P = -\omega'_y \frac{P_y r^2}{EJ} \quad (131)$$



Rys. 35



Rys. 36



Rys. 37

Współczynniki $u'_x, v'_x, \omega'_x, v'_y, \omega'_y, \omega_0$ wchodzące we wzory (126)-(131) tym różnią się tylko od współczynników we wzorach (116)-(124) oznaczonych w ten sposób, że przy obliczeniu pierwszych były wstawione w równania (116), (117), (118), (120), (121) i (124) zamiast kątów φ_0 kąty φ'_0 . Ponieważ wielkości φ_0 i φ'_0 są tylko pewnymi wartościami szczególnymi kąta φ (rys. 31 i 35) zawartego między 0 a $\pi/2$, przeto współczynniki $u'_x, v'_x, \omega'_x, v'_y, \omega'_y, \omega_0$, zarówno wchodzące we wzory (126)-(131), jak i wchodzące we wzory (116)-(124), wyrażają te same funkcje tego samego kąta φ odpowiadającego odcinkowi koła KB lub KC (rys. 31). Przy ujęciu wymienionych współczynników w tablicy wygodniej jest przedstawić je nie jako funkcje kąta φ , lecz jako funkcje kąta $\Theta = (\pi/2) - \varphi$.

Potwierdzają to zresztą dalsze rozważania.

Zakładając kolejno $\Theta = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots, 100^\circ$ otrzymujemy na podstawie równań (116), (117), (118), (120), (121) i (124) tablice 7 i 8.

Tablica 7

Θ°	u'_x	v'_x	ω'_x
0	0,00000	0,00000	0,00000
5	0,00022	0,00001	0,00380
10	0,00175	0,00019	0,01512
15	0,00580	0,00097	0,03369
20	0,01342	0,00297	0,05908
25	0,02539	0,00711	0,09071
30	0,04222	0,01430	0,12783
35	0,06402	0,02563	0,16953
40	0,09055	0,04205	0,21479
45	0,12118	0,06441	0,26247
50	0,15495	0,09332	0,31128
55	0,19056	0,12908	0,35991
60	0,22646	0,17155	0,40691
65	0,26099	0,22020	0,45079
70	0,29239	0,27389	0,49007
75	0,31896	0,33110	0,52322
80	0,33919	0,38966	0,54870
85	0,35187	0,44694	0,56504
90	0,35620	0,50000	0,57080
95	0,35185	0,54539	0,56458
100	0,33923	0,57960	0,54517

Tablica 8

Θ°	v'_y	ω'_y	ω_0
0	0,00000	0,00000	0,00000
5	0,00000	0,00022	0,08727
10	0,00001	0,00177	0,17453
15	0,00016	0,00594	0,26180
20	0,00068	0,01400	0,34907
25	0,00203	0,02717	0,43633
30	0,00498	0,04655	0,52360
35	0,01056	0,07319	0,61087
40	0,02013	0,10799	0,69813
45	0,03540	0,15175	0,78540
50	0,05829	0,20510	0,87266
55	0,09100	0,26855	0,95993
60	0,13588	0,34243	1,04720
65	0,19531	0,42686	1,13446
70	0,27169	0,52183	1,22173
75	0,36718	0,62713	1,30900
80	0,48371	0,74235	1,39626
85	0,62281	0,86689	1,48353
90	0,78540	1,00000	1,57080
95	0,97189	1,14071	1,65806
100	1,18181	1,28789	1,74533

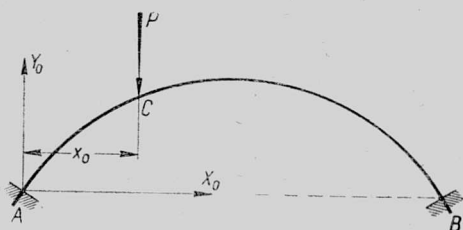
Zależnościom zachodzącym między poszczególnymi współczynnikami $u'_x, v'_x, \omega'_x, v'_y, \omega'_y, \omega_0$ a kątami Θ możemy nadać postać krzywych przedstawionych na rys. 37.

Przytoczone krzywe wskazują, że przy wyznaczaniu współczynników $u'_x, v'_x, \omega'_x, v'_y, \omega'_y, \omega'_0$ dla wielkości kąta θ nie zawartych w tablicach 7 i 8 interpolacja liniowa między wartościami podanymi w nich jest uzasadniona.

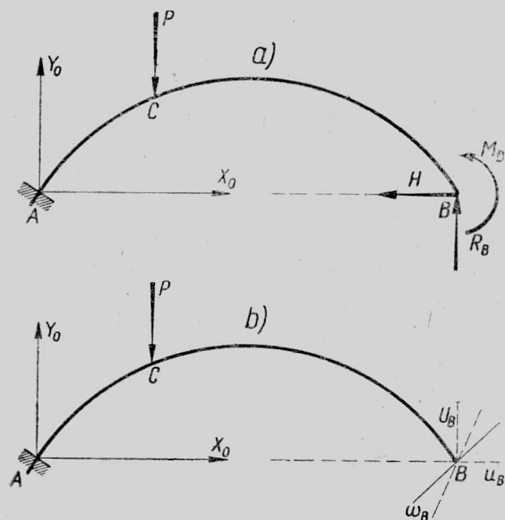
Weźmy dalej dla przykładu łuk kołisty w dwóch końcach utwierdzo-ny (rys. 38), obciążony siłą skupioną P zaczepioną w punkcie C i skiero-waną prostopadłe do cięciwy łuku

łączącej środki podpór. Na rys. 39a przedstawiony jest zastępczy schemat statycznie wy-znaczalny łuku. Jest nim pręt ko-łisty utwierdzony w końcu A i ob-ciążony poza siłą P siłami H i R_B oraz momentem M_B zaczepionymi w punkcie B na swobodnym koń- cu pręta. Siła H działa tu w kierunku cięciwy AB , a siła R_B w kierunku do tej cięciwy prostopadłym.

Na rys. 39b przedstawione są przesunięcia u_B i v_B końca B pręta AB i odpowiedni obrót ω_B przekroju poprzecznego tego pręta w punkcie B . Wielkości te są wszystkie, z jednej strony, znanymi funkcjami sił H i R_B oraz momentu M_B , z drugiej zaś równe są zero.



Rys. 38



Rys. 39

Układ przedstawiony na rys. 39 może być uważany nie tylko za schemat zastępczy łuku bez-przegubowego (rys. 38), lecz również za schemat zastępczy wielu innych układów łuko-wych, np. łuku dwuprzegubowego (rys. 40a) lub łuku w jed-nym końcu utwierdzonego, a w drugim swobodnie podpartego (rys. 40b).

Na przesunięcia uogólnione u_B, v_B i ω_B składają się przesunięcia punktu B , które są spowodowane zarówno przez siłę P , jako też i przez siły uogólnione H, R_B i M_B .

Aby nawiązać do schematów podanych na rys. 36 rozkładamy siłę P zaczepioną w punkcie C na siły P_x i P_y równoległe do osi współrzędnych na tych schematach.

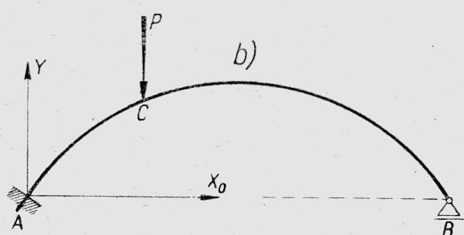
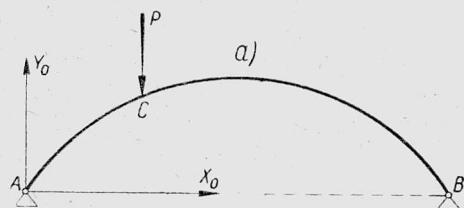
Będziemy w dalszym ciągu zgodnie z rys. 31 oznaczali wartość kąta θ , odpowiadającą łukowi AB , przedstawionemu na rys. 38 przez θ_0 , a wartość

kąta Θ , odpowiadającą odcinkowi łuku AC , przez Θ_1 ; w razie większej liczby sił P i punktów C będziemy odpowiednio stosowali oznaczenia $\Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ itd., ogólnie Θ_x .

Przy podobnych oznaczeniach znajdujemy (rys. 41)

$$P_x = P \cos \frac{\Theta_0}{2}, \quad (132)$$

$$P_y = P \sin \frac{\Theta_0}{2}, \quad (133)$$



Rys. 40

odpowiednie zaś przesunięcia punktu C , przesunięcia u_x^P i u_y^P równoległe do osi X -ów i Y -ów możemy tu obliczyć ze wzorów (126)-(131).

Na przesunięcia s_u^P i s_v^P punktu B spowodowane działaniem siły P składają się równoległe do osi współrzędnych przesunięcia punktu C oraz

przesunięcia punktu B powstałe

przez obrót odcinka łuku CB względem punktu C o kąt obrotu przekroju poprzecznego w C , wywołany przez siły P . Mamy więc (rys. 42)

$$s_u^P = u_x^P + u_y^P - (\omega_x^P + \omega_y^P) (b - y_c), \quad (134)$$

$$s_v^P = v_x^P + v_y^P + (\omega_x^P + \omega_y^P) (a - x_c). \quad (135)$$

Przed wyznaczeniem przesunięć punktu B spowodowanych przez siły H i R_B oraz moment M_B , zaczeplone w tym punkcie, należy obliczyć siły N_x i N_y i odpowiednie przesunięcia równoległe do osi X -ów i Y -ów, przewidziane we wzorach (116)-(124). Siły N_x i N_y znajdujemy drogą rzutowania na ich kierunki sił H i R_B działających wzdłuż cięciwy AB i do niej prostopadle. Otóż z rys. 43 wynika, że

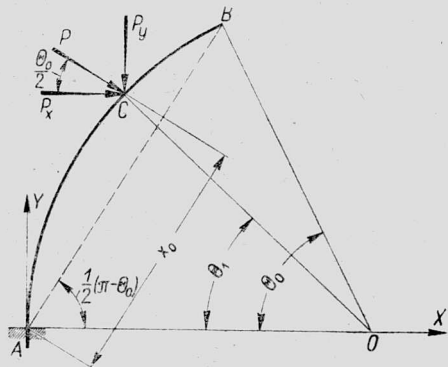
$$N_x = H \sin \frac{\Theta_0}{2} + R_B \cos \frac{\Theta_0}{2}, \quad (136)$$

$$N_y = H \cos \frac{\Theta_0}{2} + R_B \sin \frac{\Theta_0}{2}. \quad (137)$$

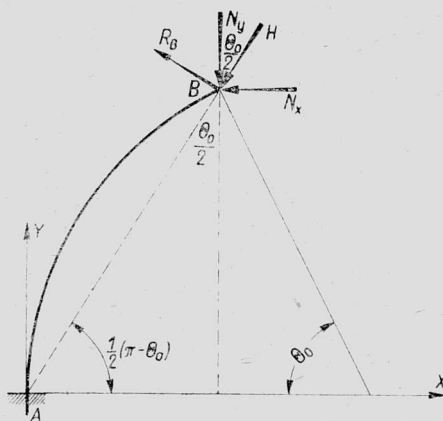
Rozumiejąc, jak poprzednio, odpowiednio przez s_u^N i s_v^N sumy równoległych do osi X -ów i Y -ów przesunięć punktu B (w sensie schematów rys. 32 i 34) znajdujemy, że

$$s_u^N = u_x^N + u_y^N + u_0^N, \quad (138)$$

$$s_v^N = v_x^N + v_y^N + v_0^N. \quad (139)$$



Rys. 41



Rys. 42

W rezultacie przesunięcia s_u i s_v punktu B , równoległe do osi współrzędnych, spowodowane przez jednoczesne działanie siły P , sił H i R_B oraz momentu M_B wynoszą

$$s_u = s_u^P + s_u^N = u_x^P + u_y^P + u_x^N + u_y^N + u_0^N - (\omega_x^P + \omega_y^P) (b - y_c), \quad (140)$$

$$s_v = s_v^P + s_v^N = v_x^P + v_y^P + v_x^N + v_y^N + v_0^N + (\omega_x^P + \omega_y^P) (a - x_c). \quad (141)$$

Przy większej liczbie sił P należy tu wstawić zamiast s_u^P i s_v^P sumy Σs_u^P i Σs_v^P dotyczące wszystkich sił P .

Do wzorów (140) i (141), jak to wynika z rys. 42, możemy wprowadzić

$$b - y_c = r (\sin \theta_0 - \sin \theta_1), \quad (142)$$

$$a - x_c = r (\cos \theta_1 - \cos \theta_0). \quad (143)$$

Do wyznaczenia przesunięć u_B i v_B (rys. 39b) łuku w kierunku cięciwy AB i w kierunku do niej prostopadłym dojdziemy drogą rzutowania

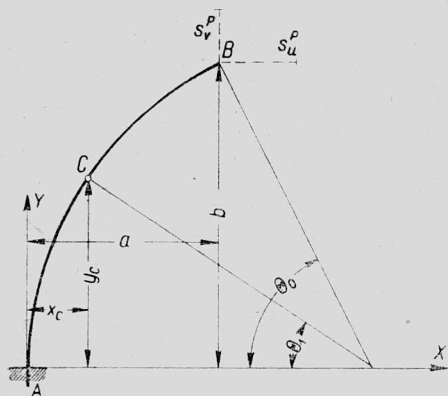
na te kierunki przesunąć s_u i s_v (układ osi $X_0 AY_0$). Na podstawie rys. 44 znajdujemy więc, że

$$u_B = s_u \sin \frac{\Theta_0}{2} + s_v \cos \frac{\Theta_0}{2}, \quad (144)$$

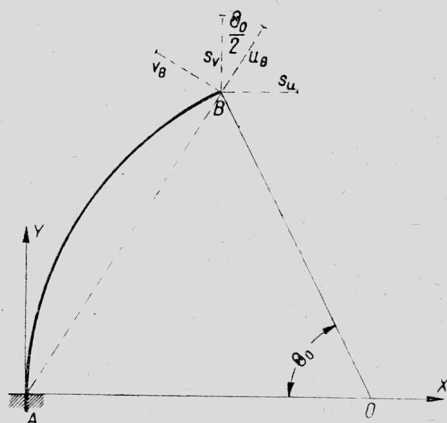
$$v_B = -s_u \cos \frac{\Theta_0}{2} + s_v \sin \frac{\Theta_0}{2}. \quad (145)$$

Obrót końcowego przekroju poprzecznego B łuku AB znajdujemy jako sumę kątów obrotu tego przekroju spowodowanych przez siły P_x , P_y , N_x , N_y i moment M_B , albo też przez równoznaczny układ sił H , R_B i M_B . Jest to więc kąt obrotu

$$\omega_B = \omega_x^P + \omega_y^P + \omega_x^N + \omega_y^N + \omega_0^M. \quad (146)$$



Rys. 43



Rys. 44

Na podstawie wszystkich powyższych rozważań możemy przedstawić przesunięcia u_B i v_B oraz obrót ω_B pod postacią

$$u_B = f_1(H, R_B, M_B), \quad (147)$$

$$v_B = f_2(H, R_B, M_B), \quad (148)$$

$$\omega_B = f_3(H, R_B, M_B). \quad (149)$$

Z warunków brzegowych łuku bezprzegubowego (rys. 38) wynika, że

$$u_B = 0, \quad v_B = 0, \quad \omega_B = 0, \quad (150)$$

skąd mamy trzy równania do wyznaczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych H , R_B i M_B .

Wobec całkowitego utwierdzenia przekroju B (rys. 38) moglibyśmy tu zastąpić dwa pierwsze z równań (150) przez równania

$$s_u = 0, \quad s_v = 0, \quad (151)$$

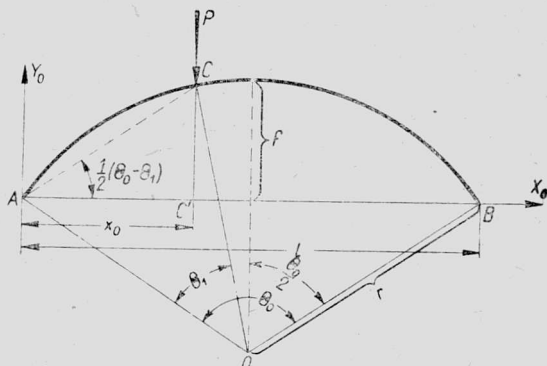
dzięki czemu odpadłaby konieczność zastosowania operacji wyrażonej wzorami (144) i (145).

Aby jednak zachować ogólność schematu rys. 39, nie będziemy się tu uciekali do takiego uproszczenia.

Aby wyznaczyć współczynniki równań liniowych (150), musimy, z jednej strony, ustalić zależność między wyniosłością łuku a kątem θ_0 z drugiej zaś, zależność między odciętą punktu C zaczepienia siły P w układzie współrzędnych X_0AY_0 a kątem θ_1 .

Pierwsza z wymienionych zależności wypływa bezpośrednio z rys. 45 i przedstawia się w sposób następujący:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{4} = 2\zeta, \quad (152)$$



Rys. 45

gdzie $\zeta = f/l$, tzn. równa się stosunkowi strzałki łuku do jego rozpiętości (wyniosłość łuku).

Drugą zależność otrzymujemy również z rys. 45 mając na uwadze, że kąt CAC' równa się $1/2 (\theta_0 - \theta_1)$. Zależność ta ma postać

$$x_0 = 2r \sin \frac{\theta_x}{2} \cos \frac{\theta_0 - \theta_x}{2}, \quad (153)$$

gdzie $x_0 = AC'$ jest odciętą punktu zaczepienia siły prostopadłej do cięciwy łuku w układzie X_0AY_0 .

Przy rozwiązywaniu równania (153) zwykle wielkości x_0 i θ_0 są znane, wielkość zaś θ_x niewiadoma. Z wykresu $\theta_x = F(x)$ wynika, że nie różni się ona wiele od linii prostej, wobec czego można przyjąć początkowo, że

$$\theta_x = \theta_0 \frac{x_0}{l}, \quad (154)$$

po czym wstawiając wartości (154) w równanie (153) znaleźć dokładniejszą wartość θ_x .

Zależność (153) jest ujęta w tablice 9 i 10 ułożone dla kątów Θ_x , zmieniających się co 5° i dla kątów Θ_0 zmieniających się co 10° . Ostatnie tłumaczy się tym, że krzywe $\Theta_x = F(x)$ odpowiadające różnym kątom Θ_0 przechodzą blisko siebie i tworzą kąty bardzo ostre. Stosunek $x_0/2r$ może być dla kątów Θ_0 i Θ_x nie zawartych w tablicach 9 i 10 otrzymany drogą interpolacji w dwóch kierunkach.

Tablica 9

Stosunek $x_0 : 2r$ dla kątów Θ_x i Θ_0 równych:			
$\Theta_x \backslash \Theta_0$	50°	60°	70°
0	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0403	0,0387	0,0368
10	0,0820	0,0790	0,0755
15	0,1244	0,1203	0,1158
20	0,1677	0,1631	0,1573
25	0,2113	0,2065	0,2000
30	0,2549	0,2502	0,2430
35	0,2979	0,2934	0,2866
40	0,3410	0,3365	0,3303
45	0,3823	0,3791	0,3739
50	0,4226	0,4210	0,4160
55		0,4613	0,4580
60		0,5000	0,4981
65			0,5368
70			0,5736
75			
80			
85			
90			
95			
100			

Tablica 10

Stosunek $x_0 : 2r$ dla kątów Θ_x i Θ_0 równych:			
$\Theta_x \backslash \Theta_0$	80°	90°	100°
0	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0346	0,0322	0,0295
10	0,0714	0,0668	0,0617
15	0,1102	0,1036	0,0956
20	0,1503	0,1421	0,1330
25	0,1921	0,1827	0,1718
30	0,2345	0,2243	0,2120
35	0,2774	0,2665	0,2535
40	0,3213	0,3100	0,2961
45	0,3651	0,3535	0,3392
50	0,4085	0,3971	0,3829
55	0,4516	0,4403	0,4270
60	0,4924	0,4829	0,4698
65	0,5325	0,5250	0,5125
70	0,5715	0,5650	0,5548
75	0,6081	0,6035	0,5945
80	0,6428	0,6396	0,6320
85		0,6749	0,6698
90		0,7071	0,7048
95			0,7365
100			0,7660

Aby doprowadzić równania (150) do ogólnej postaci równań liniowych, musimy kolejno wykonać czynności następujące:

(1) wprowadzić we wzory dla przesunięć (116)-(124) zamiast sił N_x i N_y ich wartości ze wzorów (136) i (137), a we wzory (126)-(131) zamiast sił P_x i P_y ich wartości ze wzorów (132) i (133),

(2) przekształcone w ten sposób wyrażenia na przesunięcia wstawić we wzory (134), (135), (138) i (139), a otrzymane stąd wyrażenia dla s_u^P , s_v^P , s_u^N i s_v^N we wzory (140) i (141),

(3) na podstawie wielkości s_u^P , s_v^P , s_u^N i s_v^N ustawić wyrażenia (144) i (145) dla u_B i v^B ,

(4) wyrażenia na obroty otrzymane w sposób podany pod (1) wstawić we wzór (146) dla kąta obrotu ω_B ,

(5) wreszcie ustawić trzy równania (150).

Dochodzimy w ten sposób do następującego układu równań:

$$a_1 H + b_1 R_B + c_1 K + d_1 P = 0, \quad (155)$$

$$a_2 H + b_2 R_B + c_2 K + d_2 P = 0, \quad (156)$$

$$a_3 H + b_3 R_B + c_3 K + d_3 P = 0, \quad (157)$$

gdzie $K = M_B/r$.

Współczynniki a , b i c otrzymują tu wyrażenia następujące:

$$a_1 = -u'_x \sin^2 \frac{\Theta_0}{2} + u'_y \sin \Theta_0 - v'_y \cos^2 \frac{\Theta_0}{2}, \quad (158)$$

$$b_1 = u'_y \cos \Theta_0 + \frac{1}{2} (v'_y - u'_x) \sin \Theta_0, \quad (159)$$

$$c_1 = -\omega'_x \sin \frac{\Theta_0}{2} + \omega'_y \cos \frac{\Theta_0}{2}, \quad (160)$$

$$a_2 = -b_1, \quad (161)$$

$$b_2 = u'_x \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} + v'_x \sin \Theta_0 + v'_y \sin^2 \frac{\Theta_0}{2}, \quad (162)$$

$$c_2 = \omega'_x \cos \frac{\Theta_0}{2} + \omega'_y \sin \frac{\Theta_0}{2}, \quad (163)$$

$$a_3 = -c_1, \quad (164)$$

$$b_3 = c_2, \quad (165)$$

$$c_3 = \omega'_0. \quad (166)$$

We wszystkich wyrażeniach (158)-(166) funkcje kąta Θ , jakimi są współczynniki u'_x , v'_x , ω'_x , v'_y , ω'_y i ω'_0 , powinny być obliczone przy $\Theta = \Theta_0$.

Współczynniki d_1 , d_2 i d_3 przybierają postać następującą:

$$d_1 = -t - m (\cos \Theta - \cos \Theta_0) + n (\sin \Theta_0 - \sin \Theta), \quad (167)$$

gdzie

$$t = v'_x \cos \Theta_0 + \frac{1}{2} (v'_y - u'_x) \sin \Theta_0,$$

$$m = \omega'_x \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} + \frac{1}{2} \omega'_y \sin \Theta_0,$$

$$n = \frac{1}{2} \omega'_x \sin \Theta_0 + \omega'_y \sin^2 \frac{\Theta_0}{2},$$

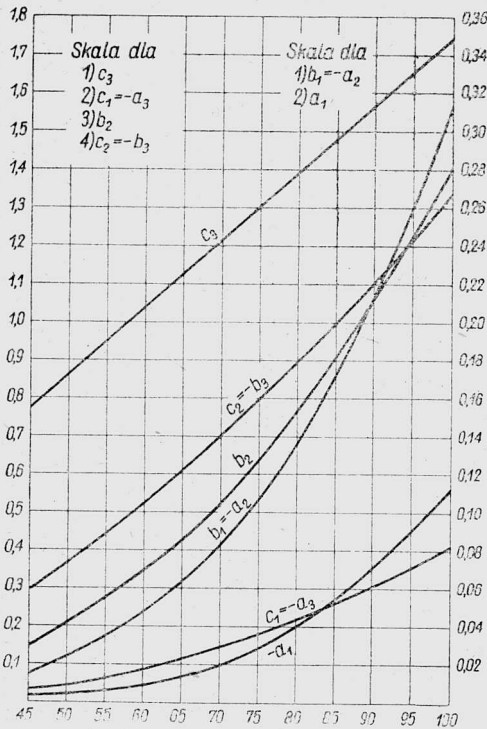
$$d_2 = -z - n (\cos \Theta_x - \cos \Theta_0) - m (\sin \Theta_0 - \sin \Theta_x), \quad (168)$$

gdzie

$$z = u'_x \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} + v'_x \sin \Theta_0 + v'_y \sin^2 \frac{\Theta_0}{2}$$

oraz

$$d_3 = -\omega'_x \cos \frac{\Theta_0}{2} - \omega'_y \sin \frac{\Theta_0}{2}. \quad (169)$$



Rys. 46

W wyrażeniach (167), (168) i (169) funkcje u'_x , v'_x , ω'_x , v'_y , ω'_y i ω'_0 powinny być obliczone dla kąta $\Theta = \Theta_x$, w szczególności przy jednej sile P dla kąta $\Theta = \Theta_1$.

Dla łuków o różnych wartościach l i ζ , a więc i różnych Θ_0 , współczynniki a , b , c mogą być uważane za funkcje jednej zmiennej Θ_0 (kąta środkowego łuku), współczynniki zaś d za funkcje dwóch zmiennych Θ i Θ_x .

Tablice 11 i 12 zawierają współczynniki a , b , c dla kątów Θ_0 zmieniających się co 5° w granicach od 45° do 100° .

Zależność współczynników a , b , c od kąta Θ_0 przedstawiona jest na rys. 46.

Z wykresu tego wynika, że interpolacja liniowa między tablicowymi wartościami kąta Θ_0 daje dla zagadnień praktycznych wyniki dostatecznie ścisłe.

Przypuśćmy, że w pewnym przypadku łuku kołowego bezprzegubowego $\zeta = 0,175$, a odcięta punktu zaczepienia siły $x = l/4$.

Ze wzoru (152) znajdujemy $\Theta_0 = 77^\circ 10'$.

Z tablic 9 i 10 bądź ze wzoru (153) otrzymujemy $\Theta_1 = 20^\circ 25'$.

Tablica 11

Θ_0	a_1	b_1	c_1
45	— 0,00243	0,01521	0,03976
50	— 0,00407	0,02297	0,05433
55	— 0,00649	0,03326	0,07202
60	— 0,00996	0,04656	0,09309
65	— 0,01471	0,06330	0,11780
70	— 0,02113	0,08395	0,14637
75	— 0,02949	0,10899	0,17901
80	— 0,04026	0,13882	0,21597
85	— 0,05391	0,17391	0,25740
90	— 0,07080	0,21460	0,30349
95	— 0,09154	0,26130	0,35440
100	— 0,11657	0,31424	0,41022

Tablica 12

Θ_0	b_2	c_2	c_3
45	0,15415	0,30056	0,78540
50	0,20917	0,36880	0,87266
55	0,27507	0,44324	0,95993
60	0,35239	0,52362	1,04720
65	0,44159	0,60954	1,13446
70	0,54295	0,70075	1,22173
75	0,65665	0,79687	1,30900
80	0,78264	0,89751	1,39626
85	0,92077	1,00225	1,48353
90	1,07080	1,11073	1,57080
95	1,23220	1,22244	1,65806
100	1,40447	1,33701	1,74533

Wyznaczamy z tablic 7 i 8 współczynniki u , v , ω dla $\Theta = \Theta_0 = 77^\circ 10'$:

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= 0,3286, & v'_y &= 0,4140, \\ v'_x &= 0,3564, & \omega'_y &= 0,6759, \\ \omega'_x &= 0,5353, & \omega'_0 &= 1,3468. \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

W dalszym ciągu wyznaczamy z tych samych tablic 7 i 8 współczynniki u , v , ω dla $\Theta = \Theta_1 = 20^\circ 25'$:

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= 0,01421, & v'_y &= 0,00069, \\ v'_x &= 0,00333, & \omega'_y &= 0,01493, \\ \omega'_x &= 0,06148, & \omega'_0 &= 0,35633. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Z tablic 9 i 10 znajdujemy:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -0,0339, & a_2 &= 0,1213, & a_3 &= 0,1945, \\ b_1 &= 0,1213, & b_2 &= 0,7097, & b_3 &= 0,8400, \\ c_1 &= 0,1945, & c_2 &= 0,8400, & c_3 &= 1,3468. \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

Wchodzące we wzory (167), (168) i (169) funkcje kątowe przybierają w danym razie wartości następujące:

$$\left. \begin{aligned} \sin \Theta_0 &= 0,97502, & \sin \frac{\Theta_0}{2} &= 0,62365, \\ \sin^2 \frac{\Theta_0}{2} &= 0,38894, & \cos \Theta_0 &= 0,22212, \\ \cos \frac{\Theta_0}{2} &= 0,78170, & \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} &= 0,61105. \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

Ponieważ $(\sin \Theta_0 - \sin \Theta_1) = 0,62617$, a $(\cos \Theta_1 - \cos \Theta_0) = 0,71506$, więc znajdujemy:

$$t = -0,00587 \quad m = 0,04485, \quad n = 0,03578, \quad (174)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= -0,00380, \\ z &= 0,01210, \end{aligned} \quad (175)$$

$$\begin{aligned} d_2 &= 0,06576, \\ d_3 &= -0,05737. \end{aligned} \quad (176)$$

W ten sposób nadajemy równaniom (155), (156) i (157) postać:

$$\left. \begin{aligned} -0,03390 H + 0,12130 R_B + 0,19450 K - 0,00380 P &= 0, \\ -0,12130 H + 0,70970 R_B + 0,84000 K - 0,06576 P &= 0, \\ -0,19450 H + 0,84000 R_B + 1,34680 K - 0,05737 P &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

Z równań tych otrzymujemy:

$$H = 0,7726 P, \quad R_B = 0,1612 P, \quad M_B = Kr = 0,0430 Pl. \quad (178)$$

Na podstawie równań równowagi obliczamy w dalszym ciągu

$$R_A = P - R_B = 0,8388 P, \quad (179)$$

$$M_A = M_B + R_B l = -0,0458 Pl. \quad (180)$$

W przypadku łuku dwuprzegubowego o tym samym obciążeniu, rozpiętości i wyniosłości co wyżej omówiony łuk bezprzegubowy będziemy mieli ten sam schemat zastępczy rys. 39, co w przypadku poprzednim. Tu jednak, jak to wynika z równań statyki, $K = 0$ a $R_B = 0,25 P$.

W przypadku łuku dwuprzegubowego z trzech równań (150) potrzebne nam jest tylko pierwsze, tj. równanie $u_B = 0$.

Z równań (155), (156) i (157) zachowuje więc moc w danym przypadku tylko równanie (155). Wstawiając tu przytoczone wyżej wartości dla K i R_B znajdujemy

$$-0,03390 H + 0,12130 \cdot 0,25 P - 0,00380 P = 0, \quad (181)$$

skąd otrzymujemy, że $H = 0,782 P$.

Łatwo się zorientować, że tablice i wykresy tego rozdziału, usprawniające obliczenie statyczne łuków o stałym przekroju, mogą być rozszerzone i na łuki koliste o przekrojach zmiennych, o ile tylko zmienność przekroju poddana jest pewnej określonej regule.

НАПРАВЛЕНИЯ ВОЗМОЖНЫХ УПРОЩЕНИЙ В РАСЧЕТАХ АРОК

Настоящая работа посвящена упрощениям в области статических расчетов, касающихся самых важных, с точки зрения строительной механики, форм арок, а именно: параболических, эллиптических с вертикальной большей осью эллипса и круговых.

Статические расчеты арок в форме параболы второго или третьего порядка приводят к определенным интегралам, нетрудным для вычисления, если положить, что дифференциал длины оси арки ds равен ее проекции dx на ось $X-Ox$, или-же, находится в простой зависимости от этой проекции. Зависимость ds от dx установленная здесь на основании метода наименьших квадратов выражается для арок в форме параболы второго порядка при помощи формул (22), (38) и (41), а для арки в форме параболы третьего порядка — при помощи формул (72), (73 и (74). Приводятся значения параметров g в зависимости от высоты арки $\zeta = f:l$ (таблицы 3 и 6). Рассматривается также случай параболической арки с поперечными сечениями изменяющимися по линейному закону и приводится выражение (54) для отношения $1:J$, представленное в виде алгебраической функции.

Эллиптические арки с вертикальной большей осью эллипса представляют собой статическую схему каменной или бетонной трубы. Верхние части этой арки представляют кривые брусья т. е. отвечающие большим значением отношения $r:e$. Это показано на рис. 18. Возникает вопрос, следует-ли эллиптические трубы рассчитывать как брусья большой или же как брусья малой кривизны. Работа содержит сравнительные расчеты, результаты которых представлены на графиках 22 - 24. Из них следует, что при практических статических расчетах эллиптический свод трубы можно рассматривать, как стержень малой кривизны. Рассматривается также зависимость между напряжениями в эллиптических трубах и углами внутреннего трения в земле, представляющей нагрузку трубы.

В главе, посвященной круговым аркам, приведены таблицы и графики, служащие для облегчения статических расчетов этих арок. Исходным пунктом для определения коэффициентов канонических уравнений (155) - (157) круговых арок являются деформации отрезка кругового стержня, защемленного на одном конце, и свободного на другом, под действием сил, параллельных осям координат и приложенных в конце стержня и в некоторой промежуточной точке (рис. 34 и 36). Эти деформации представлены в виде произведений некоторых постоянных величин (125) на коэффициенты, являющиеся функциями углов θ , определенных на рис. 35 и приведенных в таблицах 7 и 8. Путем

геометрического сложения этих деформации, мы приходим к перемещениям (150), определяющим условия безшарнирной арки на концах для заменяющей статичности определяемой схемы, приведенной на рис. 39b. В результате — формулы (150) приводят к уравнениям (155) - (157), коэффициенты которых приведены на таблицах 11 и 12.

Проблемы влияния продольных сил арки на статически неопределимые величины арки рассмотрены в отдельных главах работы, в связи с отдельными формами оси арки.

S u m m a r y

THE POSSIBILITIES OF IMPROVEMENT OF ARCH COMPUTATION

This paper discusses the possible improvements in the statical computation of three main types of arches from the point of view of engineering practice. These are parabolic, elliptic (with vertical major axis) and circular arches.

The statical computation of arches representing parabolas of the second or third order leads to indefinite integrals, which are easy to calculate, if one assumes that the differential of the arch length, ds , is equal to its projection, dx , on the X-axis, or depends on this projection in a simple manner. The dependence between ds and dx is determined here by means of the method of least squares, and is expressed for a second order parabolic arch by Eqs. (22), (38) and (41), and for a third order parabolic arch by Eqs. (72), (73) and (74). The values of parameters g in function of rise-to-span ratio $\zeta = f:l$ are gathered in Tables 3 and 6. In addition, the case of a parabolic arch with a linear variability of cross-section is discussed. Eq. (54) represents the ration $1:J$ expressed in the form of an algebraic function.

Elliptic arches with vertical major axis are used in the design of arched culverts. Upper portions of these arches can be considered as curved beams of great curvature, i. e. of high $r:e$ ratio. This is illustrated in Fig. 18. The question arises, whether elliptic arches should be treated as beams of great or of small curvature. The paper contains comparative computations, the results of which are represented graphically in Figs. 22-24. It can be seen from these graphs, that for practical calculations an elliptic arch of a culvert can be considered as a beam of small curvature. The dependence between the stresses in a lliptic culvert and the angle of internal friction of the loading soil is considered.

The chapter, in which circular arches are discussed, contains tables and graphs facilitating the calculation of these arches. The basis for the determination of coefficients of the canonical equations of circular

arches, (155)-(157) is the deformation of a bar representing a circular arch, built in at one end and free at the other, under the action of forces parallel to the axes of co-ordinates and located at the end and at an intermediate point of the bar (Figs. 34 and 36). These deformations are expressed as products of certain constants, (125), and coefficients depending on the angles θ defined in Fig. 35. They are represented in Tables 7 and 8. By geometric addition of these deformations one obtains the displacements (150) determining the boundary conditions for an arch without articulations, of the auxiliary system represented in Fig. 39b. Equations (150) lead to Eqs. (155)-(157), the coefficients of which are tabulated in Tables 11 and 12.

The problems of the influence of longitudinal forces on statically indeterminate quantities of an arch are discussed for each arch from in the corresponding chapters.

SPIS TREŚCI

	Str
Przedmowa	3
I. Łuki paraboliczne	5
1. Łuki o kształcie paraboli 2 stopnia	5
2. Łuki o kształcie paraboli 3 stopnia	18
II. Łuki eliptyczne	23
III. Łuki kołiste	37

R O Z P R A W Y I N Ż Y N I E R S K I E

U K A Z A Ł Y S I Ę

Tom I obejmuje oddzielne zeszyty I - XII i XIV

- I. F. Szelański, Rozwiązanie zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych
— O pewnych szczególnych przypadkach wytrzymałości tarczy nieograniczonej z odmiennym ośrodkiem zarysu eliptycznego
- II. J. Naleszkiewicz i A. Szaniawski, Drgania i stateczność masztów oraz iglic
- III. Z. Kłębowski, Podstawy uwzględniania wzmocnień obwodowych w wytrzymałościowym obliczaniu rury poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia
- IV. M. Zyczkowski, Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem siły krytycznej
- V. E. Szczepaniak, Nowa metoda rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach bez wykonywania przecięć
- VI. W. Olszak, Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych (Plastyczne wyczerpanie nośności)
- VII. A. Lisowski, Płyty na sprężystym podłożu
- VIII. J. Nowiński, Wyznaczenie przybliżonej wielkości ugięcia płyt na podstawie metody Ritza
- IX. W. Fiszdón, O pewnej metodzie obliczania amplitud drgań
- X. Z. Wasiutyński, O kształtach pęknięć powierzchniowych
- XI. W. Wierzbicki, Dźwigary załamane w płanie
- XII. W. Wierzbicki, O powstawaniu wyboczenia prętów prostych
- XIV. W. Zenczykowski, Podstawy wytrzymałościowe obliczeń statycznych konstrukcji murowanych z cegły

Tom II zeszyt 1

- XVI. I. Malecki, Metody zastosowania rachunku tensorowego w technice
- XVII. J. Nowiński, Podstawy teorii plastyczności (I). Siedem wykładów
- XVIII. W. Nowacki, Statyka rusztów płaskich

Tom II zeszyt 2

- XIX. W. Bogusz, Z teorii płyt ortotropowych
- XX. J. Szmelter, Rozwiązanie zagadnienia błony metodą różnic skończonych z użyciem specjalnego liczydła
- XXI. M. Sokołowski, Dwustopniowy sposób obliczania pewnego typu płyt ortotropowych
- XXII. M. Zyczkowski, Wyboczenie sprężysto-plastyczne niektórych prętów pryzmatycznych

A 1904 I

Tom III zeszyt 1

- XXIII. M. P. Wołarowicz, Badania nad własnościami reologicznych układów rozproszonych
XXIV. W. Pogány, O pewnych zagadnieniach mechaniki gruntów
XXV. J. Nowiński, Szlakami teorii sprężystości
XXVI. K. Wolski, Metoda punktów kinetycznych
XXVII. J. T. Pindera, Technika elastooptycznych badań płaskiego stanu naprężenia

W D R U K U

- XIII. W. Wierzbicki, Kierunki możliwych usprawnień w obliczeniach łuków
XV.1. W. Wierzbicki, Zastosowanie różnic skończonych w przypadkach dwukierunkowych stanów naprężeń w budowlach
XV.2. W. Wierzbicki, O geometrycznych metodach badania konstrukcji prętowych

W P R Z Y G O T O W A N I U

- XXVIII. W. Olszak i A. Sawczuk, Teoria nośności granicznej w świetle weryfikacji doświadczalnej
XXIX. A. Sawczuk, Zagadnienia nośności granicznej elementów rozciąganych i zginanych w zastosowaniu do teorii zbiorników prostokątnych
XXX. M. Życzkowski, Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ ukazuje się jako kwartalnik i kosztuje w prenumeracie rocznej 60 zł

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE ukazywały się do połowy 1954 r. jako wydawnictwo seryjne. Zeszyty od I do XII i zeszyt XIV są do nabycia w księgarniach naukowych Domu Książki. Zamówienia za zaliczeniem przyjmuje Księgarnia Naukowa, Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7.

Poczynając od III kwartału 1954 r. ROZPRAWY INŻYNIERSKIE ukazują się jako kwartalnik i kosztują w prenumeracie rocznej 80 zł.

Sprzedaż bieżących numerów odbywa się w księgarniach naukowych Domu Książki i w placówkach «Ruchu».
