POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

KWARTALNIK

TOM III • ZESZYT 4

WARSZAWA • 1955

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

TREŚĆ TOMU III ZESZYTU 4

TABLE DES MATIÈRES DU VOL. III FASC. 4

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

XXXIV - XXXVI

WARSZAWA • 1955
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

ZAWIERAJĄ PRACE BADAWCZE Z ZAKRESU TEORII SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMODYNAMIKI ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW KONSTRUKCJI

Adres Redakcji
WARSZAWA, ul. Śniadeckich 8, I p.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE XXXIV - XXXVI

Nakład 1840+103 nadb. Papier druk. sat. B.1 16, 70–80 g. Arkuszy wydawn. 13,4. Arkuszy drukarskich 11¾
Oddano do składania dn. 6.VII.55 r. Druk ukończ. w grudniu 1955 r. Zam. 351. B-6-1400. Cena zł 20.—

Stoł. Zakł. Graf., Drukarnia Naukowa. Warszawa, Śniadeckich 8.

JERZY KLOTT, JAROSŁAW NALESZKIEWICZ, JERZY RUTECKI,
KAZIMIERZ WITUSZYŃSKI

STUDIA WSTĘPNE Z DZIEDZINY SKRĘCANIA KADŁUBA OKRĘTU NA FALI SKOŚNEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXXIV

SPIS TREŚCI

1. TEORIA PROFILI CIENKOŚCIENNYCH STOSOWANYCH W OKRĘTOWNICTWIE

1.1. Środek ścinania i powierzchnia wycinkowa przekrojów złożonych

Zagadnienie skrępowanego skręcania kadłuba okrętu na fali skośnej poprzedzimy omówieniem własności przekrojów geometrycznie uproszczonych — tj. takich, których kontur składa się z odcinków prostych — lecz zachowujących pewne podobieństwo z rzeczywistymi przekrojami okrętowymi.

Przekroje te są bardziej złożone od dotychczas teoretycznie zbadanych przekrojów otwartych i zamkniętych, dlatego będzie rzeczą wskazaną przeprowadzenie na wstępie krótkich rozważań dotyczących wyznaczania powierzchni wycinkowych wspomnianych profilów.

Jak wiadomo, spaczenie pręta cienkościennego o otwartym profilu, poddanego skręcaniu, powstałe między dwoma punktami A i B linii środkowej konturu, wyraża się następująco:

$$\zeta_B - \zeta_A = -\varphi' \omega_{AB}, \tag{1.1.1}$$

gdzie φ' jest kątem skręcenia przypadającym na jednostkę długości, a ω_{AB} polem powierzchni wycinkowej (względem środka zginania czyli ścinania przekroju otwartego) zawartym pomiędzy punktami A i B.

Spaczenie pręta o profilu zamkniętym wyraża się wzorem

$$\zeta_B - \zeta_A = -\varphi' \hat{\omega}_{AB}, \tag{1.1.2}$$

gdzie $\hat{\omega}_{AB}$ jest polem powierzchni wycinkowej (względem środka zginania przekroju zamkniętego), zawarty między punktami A i B.

Powierzchnie wycinkowe ω_{AB} i $\hat{\omega}_{AB}$ różnią się od siebie o wielkość

$$\frac{\Omega}{\oint \frac{ds}{\delta}} \int_{AB} \frac{ds}{\delta}.$$

Wyrażenia określające spaczenie odpowiednich przekrojów zostały wyprowadzone z zależności, wyznaczających posunięcie elementu leżącego w płaszczyźnie linii środkowej konturu. Różnica polega na przyjęciu

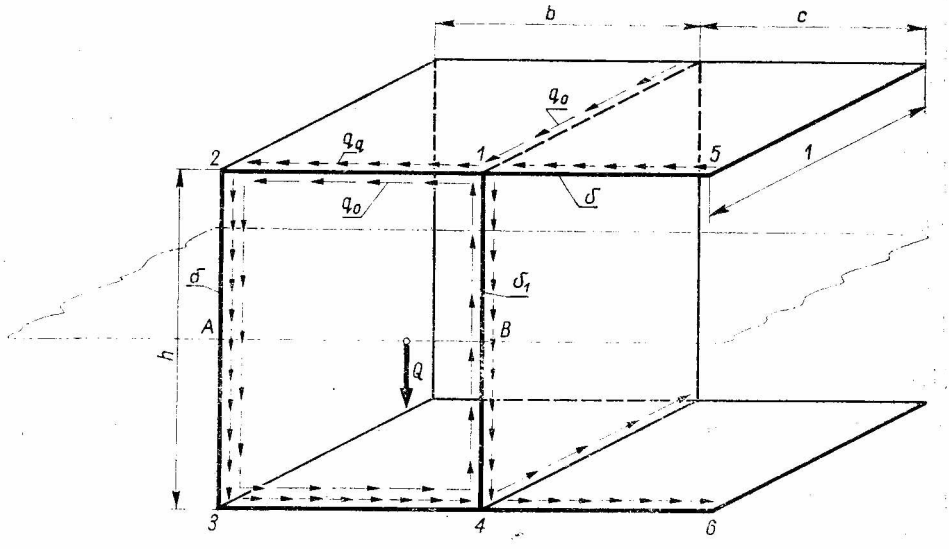
kąta odkształcenia postaciowego γ dla profilu otwartego jako równego zeru, natomiast dla profilu zamkniętego jako różnego od zera ($\gamma = q/G\delta$).

Wzory (1.1.1) i (1.1.2) pozwalają wnioskować, że spaczenie dowolnego profilu wyraża się jako iloczyn wielkości φ' przez odpowiednie pole powierzchni wycinkowej, ściśle zależnej od kształtu przekroju.

Na podstawie powyższego możemy twierdzić, że w przypadku profilu złożonego z elementów otwarto-zamkniętych spaczenie przekroju pomiędzy dwoma dowolnymi punktami A i B linii środkowej konturu wyraża się wzorem

$$\zeta_B - \zeta_A = -\varphi' \tilde{\omega}_{AB}, \tag{1.1.3}$$

gdzie $\tilde{\omega}_{AB}$ jest polem powierzchni wycinkowej przekroju otwarto-zamkniętego, zawartym pomiędzy punktami A i B, obliczonym względem środka zginania.



Rys. 1

Należy podkreślić, że mamy tu do czynienia z zagadnieniem wieloparametrowym, a w przypadku profilu podanego na rys. 1 — ze względu na symetrię przekroju — dwuparametrowym, gdyż $\tilde{\omega}$ jest zależne od dwóch parametrów $\hat{\omega}$ i ω. Wielkość $\hat{\omega}$ jest parametrem przedstawiającym pole powierzchni wycinkowej, dotyczącej profilu złożonego w obrębie zamkniętym, natomiast ω jest drugim parametrem przedstawiającym pole powierzchni wycinkowej w części otwartej. Parametry $\hat{\omega}$ i ω są wielkościami statycznie niewyznaczalnymi dla danego typu profilu otwarto-zamkniętego; możemy je obliczyć jedną ze znanych metod, mianowicie metodą energetyczną lub metodą przyrównania odkształceń. W dalszych

rozważaniach obrano metodę drugą, tzn. przyrównano do siebie spaczenia w punkcie granicznym części przekroju zamkniętej i otwartej.

Tą drogą będziemy postępowali przy dalszych wieloparametrowych profilach.

Szczegółową analizę rozpoczniemy od rozpatrzenia przekroju przedstawionego na rys. 1. Przekrój ten obciążony siłą Q jest najprostszym przekrojem otwarto-zamkniętym. Brak podwójnej symetrii przekroju stwarza konieczność znalezienia poziomej współrzędnej środka zginania. Dokonujemy w myśli rozcięcia przekroju w punktach 1 i 4; wskutek tego w obu ceownikach 1 2 3 4 i 5 1 4 6 jako profilach otwartych powstaną strumienie napięć stycznych q_q pochodzących od siły poprzecznej Q. W celu zlikwidowania posunięcia względnego, powstałego wskutek rozcięcia, wprowadzamy strumień stałych napięć stycznych q_0, płynących w obwodzie zamkniętym 1 2 3 4 1. Wielkość strumienia q_Q w każdym punkcie przekroju można bez trudności wyznaczyć ze wzoru

$$q_q = \frac{Q S_x}{I_x}, \tag{1.1.4}$$

gdzie S_x jest momentem statycznym części przekroju znajdującej się ponad warstwą, w której obliczamy wielkość napięć stycznych.

Dla określenia q_0 posługujemy się dodatkowym warunkiem stwierdzającym, że suma przesunięć poszczególnych elementów przekroju zamkniętego musi się równać zeru:

$$\oint \gamma \cdot 1 \cdot ds = 0. \tag{1.1.5}$$

Ponieważ

$$\gamma = \frac{q}{G\delta} = \frac{q_q + q_0}{G\delta},$$

to

$$\oint \frac{q_q + q_0}{G\delta} ds = 0. \tag{1.1.6}$$

Układając równanie dla części zamkniętej przekroju oraz uwzględniając wartość q_q ze wzoru (1.1.4) otrzymujemy

$$\frac{Q}{I_x G} \int_{12} \frac{S_x ds}{\delta} + \frac{q_0}{G} \int_{12} \frac{ds}{\delta} + \frac{Q}{I_x G} \int_{23} \frac{S_x ds}{\delta} + \frac{q_0}{G} \int_{23} \frac{ds}{\delta} + \frac{Q}{I_x G} \int_{34} \frac{S_x ds}{\delta} +$$

$$+ \frac{q_0}{G} \int_{34} \frac{ds}{\delta} - \frac{Q}{I_x G} \int_{41} \frac{S_x ds}{\delta_1} + \frac{q_0}{G} \int_{41} \frac{ds}{\delta_1} = 0;$$

Wartości momentów statycznych w składnikach powyższego równania są następujące:

$$S_{x_{12}} = x\,\delta\,\frac{h}{2}, \qquad S_{x_{23}} = \frac{b\,\delta\,h}{2} - \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2}\right)\delta\,y,$$

$$S_{x_{34}} = \frac{b\,\delta\,h}{2} - x_1\,\delta\,\frac{h}{2}, \qquad S_{x_{14}} = c\,\delta\,\frac{h}{2} + \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2}\right)\delta, y.$$

Po skróceniu przez G i przeprowadzeniu odpowiednich całkowań równania (1.1.6) zapisujemy w postaci

$$(1.1.7)\quad q_0\left(2\frac{b}{\delta} + \frac{h}{\delta} + \frac{h}{\delta_1}\right) + \frac{Q}{I_x}\left[\left(\frac{b^2h}{4}\right)_{12} + \left(\frac{bh^2}{2} + \frac{h^3}{12}\right)_{23} + \left(\frac{b^2h}{4}\right)_{34} - \left(\frac{ch^2}{2}\,\frac{\delta}{\delta_1} + \frac{h^3}{12}\right)_{14}\right] = 0,$$

skąd

$$q_0 = -\frac{Q}{I_x}\,\frac{\left(\frac{b^2h}{4}\right)_{12} + \left(\frac{bh^2}{2} + \frac{h^3}{12}\right)_{3} + \left(\frac{b^2h}{4}\right)_{34} - \left(\frac{ch^2}{2}\,\frac{\delta}{\delta_1} + \frac{h^3}{12}\right)_{14}}{2\frac{b}{\delta} + \frac{h}{\delta} + \frac{h}{\delta_1}}.$$

Moment strumienia q_0 wyraża się wzorem

$$(1.1.8)\quad M_2 = \frac{Q}{I_x}\,\Omega\,\frac{\left(\frac{b^2h}{4}\right)_{12} + \left(\frac{bh^2}{2} + \frac{h^3}{12}\right)_{23} + \left(\frac{b^2h}{4}\right)_{34} - \left(\frac{ch^2}{2}\,\frac{\delta}{\delta_1} + \frac{h^3}{12}\right)_{14}}{2\frac{b}{\delta} + \frac{h}{\delta} + \frac{h}{\delta_1}},$$

gdzie $\Omega = 2bh$. Moment strumienia q_q względem punktu B jest

$$(1.1.9)\quad M_1 = \frac{Q}{I_x}\left(\int_{12} S_x\,\varrho\,ds + \int_{34} S_x\,\varrho\,ds + \int_{51} S_x\,\varrho\,ds + \int_{46} S_x\,\varrho\,ds + \int_{23} S_x\,\varrho\,ds\right) = -\frac{Q}{I_x}\left[\left(\delta\frac{b^2h^2}{8}\right)_{12} + \left(\delta\frac{b^2h^2}{8}\right)_{34} + \left(\delta\frac{c^2h^2}{8}\right)_{51} + \left(\delta\frac{c^2h^2}{8}\right)_{46} + \left(\delta\frac{b^2h^2}{2} + \delta\frac{bh^3}{12}\right)_{23}\right].$$

Odległość środka ścinania od punktu B otrzymujemy z warunku równoważności momentów napięć stycznych i momentu zewnętrznego (a nie, co pragniemy podkreślić, z równania równowagi momentów):

$$(1.1.10)\qquad a_{xx} = \frac{-M_1 + M_2}{Q}.$$

Za dodatni uważamy moment powodujący obrót zgodny z ruchem wskazówek zegara. W oparciu o oznaczenia podane na rys. 1 i na podstawie wzoru (1.1.10) można stwierdzić, że moment M_1 jest ujemny, zaś moment M_2 dodatni.

Zapiszemy wzór na środek ścinania w postaci całkowej:

$$(1.1.11)\quad a_{xx}=\frac{1}{I_x}\left\{\Omega\frac{\int_0^b x\delta\frac{h}{2}\frac{dx}{\delta}+\int_0^h\left[\frac{b\delta h}{2}+\left(\frac{h}{2}-\frac{y}{2}\right)\delta y\right]\frac{dy}{\delta}}{2\frac{b}{\delta}+\frac{h}{\delta}+\frac{h}{\delta_1}}+\right.$$

$$+\frac{\int_0^b\left(b\delta\frac{h}{2}-x_1\delta\frac{h}{2}\right)\frac{dx}{\delta}-\int_0^h\left[\frac{c\delta h}{2}+\left(\frac{h}{2}-\frac{y}{2}\right)\delta_1 y\frac{dy}{\delta_1}\right]}{2\frac{b}{\delta}+\frac{h}{\delta}+\frac{h}{\delta_1}}$$

$$-\int_0^b x\delta\frac{h}{2}\frac{h}{2}dx-\int_0^b\left(b\delta\frac{h}{2}-x_1\delta\frac{h}{2}\right)\frac{h}{2}dx-\int_0^h\left[\frac{b\delta h}{2}+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{h}{2}-\frac{y}{2}\right)\right]bdy-\int_0^c x\delta\frac{h}{2}\frac{h}{2}dx-\int_0^c\left(c\delta\frac{h}{2}-x_1\delta\frac{h}{2}\right)\frac{h}{2}dx\right\}.$$

Natomiast wzór na środek ścinania względem dowolnego bieguna przy wprowadzeniu powierzchni wycinkowych jest

$$(1.1.12)\qquad a_{xx}=\frac{1}{I_x}\int\tilde{\omega}\,y\,dA,$$

lub w postaci uwzględniającej każdy element rozpatrywanego przekroju (rys. 1)

$$(1.1.13)\quad a_{xx}=\frac{1}{I_x}\left(\int_{12}\hat{\omega}\,y\,dA+\int_{23}\hat{\omega}\,y\,dA+\int_{34}\hat{\omega}\,y\,dA+\right.$$

$$\left.+\int_{41}\hat{\omega}\,y\,dA+\int_{51}\omega\,y\,dA+\int_{46}\omega\,y\,dA\right).$$

We wzorze (1.1.11) podobnie jak i we wzorze (1.1.13) można wydzielić część odpowiadającą momentowi statycznemu ydA; pozostała część powinna odpowiadać powierzchni wycinkowej.

Mając na uwadze, że powierzchnia wycinkowa dowolnego odcinka n-tego konturu zamkniętego ma postać

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_{n-1} - \omega_n + \frac{\Omega}{s_0}\frac{s_n}{\delta_n} \tag{1.1.14}$$

lub

$$\hat{\omega}_n = -\omega_1 - \omega_2 - \ldots - \omega_{n-1} + \frac{\Omega}{s_0}\left(\frac{s_1}{\delta_1} + \frac{s_2}{\delta_2} + \ldots + \frac{s_{n-1}}{\delta_{n-1}}\right) - \omega_n + \frac{\Omega}{s_0}\frac{s_n}{\delta_n},$$

gdzie

$$\hat{\omega}_{n-1} = -\omega_1 - \omega_2 - \ldots - \omega_{n-1} + \frac{\Omega}{s_0}\left(\frac{s_1}{\delta_1} + \frac{s_2}{\delta_2} + \ldots + \frac{s_{n-1}}{\delta_{n-1}}\right),$$

powierzchnie wycinkowe występujące we wzorze (1.1.11) przedstawimy w postaci

$$\begin{cases}
\tilde{\omega}_{B1} = \dfrac{\Omega}{2\dfrac{b}{\delta} + \dfrac{h}{\delta} + \dfrac{h}{\delta_1}} \displaystyle\int_0^{h/2} \frac{dx}{\delta_1} = \frac{\Omega}{s_0}\frac{h}{2\delta_1} & (\omega_{B1} = 0), \\
\tilde{\omega}_{12} = \tilde{\omega}_1 + \dfrac{\Omega}{2\dfrac{b}{\delta} + \dfrac{h}{\delta} + \dfrac{h}{\delta_1}} \displaystyle\int_0^b \frac{dx}{\delta} - \int_0^b \frac{h}{2}\,dx = \tilde{\omega}_1 + \frac{\Omega}{s_0}\frac{b}{\delta} - \omega_{12}, \\
\tilde{\omega}_{23} = \tilde{\omega}_2 + \dfrac{\Omega}{2\dfrac{b}{\delta} + \dfrac{h}{\delta} + \dfrac{h}{\delta_1}} \displaystyle\int_0^h \frac{dy}{\delta} - \int_0^h b\,dy = \tilde{\omega}_2 + \frac{\Omega}{s_0}\frac{h}{\delta} - \omega_{23}, \\
\tilde{\omega}_{34} = \tilde{\omega}_3 + \dfrac{\Omega}{2\dfrac{b}{\delta} + \dfrac{h}{\delta} + \dfrac{h}{\delta_1}} \displaystyle\int_0^b \frac{dx}{\delta} - \int_0^b \frac{h}{2}\,dx = \tilde{\omega}_3 + \frac{\Omega}{s_0}\frac{b}{\delta} - \omega_{34}, \\
\tilde{\omega}_{4B} = \tilde{\omega}_4 + \dfrac{\Omega}{2\dfrac{b}{\delta} + \dfrac{h}{\delta} + \dfrac{h}{\delta_1}} \displaystyle\int_0^{h/2} \frac{dx}{\delta_1} = \tilde{\omega}_4 + \frac{\Omega}{s_0}\frac{h}{2\delta_1} & (\omega_{4B} = 0) \\
\omega_{15} = \tilde{\omega}_1 + \displaystyle\int_0^c \frac{h}{2}\,dx = \tilde{\omega}_1 + \omega_{15}, \\
\omega_{46} = \tilde{\omega}_4 - \displaystyle\int_0^c \frac{h}{2}\,dx = \tilde{\omega}_4 - \omega_{46}.
\end{cases} \tag{1.1.15}$$

Jak widać ze wzorów (1.1.15), składowe wyrażeń dla powierzchni wycinkowych w postaci $(\Omega/s_0)(b/\delta)$ lub $(\Omega/s_0)(h/2\delta)$ nie zależą od położenia pomocniczego bieguna B, natomiast wpływ tego bieguna uwidacznia się w wyrażeniach $\int h\,dx$ i $\int b\,dx$.

Ten wniosek znajduje potwierdzenie we wzorach (1.1.8) i (1.1.9) określających momenty M_1 i M_2. Wielkość momentu M_1 związanego z profilem otwartym zależy od umiejscowienia bieguna, natomiast moment M_2 ma wartość stałą bez względu na położenie bieguna.

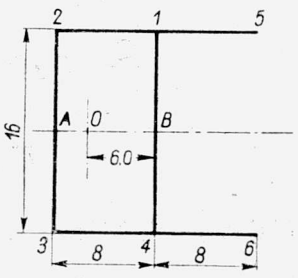
Łatwym sprawdzeniem słuszności wyprowadzonych wzorów (1.1.15) jest obliczenie wyrażenia

$$\frac{\Omega}{s_0}\int\frac{S\,ds}{\delta}-\int S\varrho\,ds$$

jako symbolicznie zapisanego licznika ilorazu we wzorze (1.1.11) odpowiadającego $\int\tilde{\omega}y\,dA$, tzn. wycinkowemu liniowemu momentowi, który dla środka zginania jako głównego bieguna powinien równać się zeru.

Dla większej przejrzystości rozumowań podajemy następujący przykład liczbowy.

Dany jest przekrój z «wypustkami» o wymiarach jak podano na rys. 2; grubość przekroju jest stała i równa $\delta = 0{,}01$ m. Moment bezwładności względem osi x jest



Rys. 2

$$I_x = 2\frac{0{,}01\cdot 16^3}{12}+2\cdot 16\cdot 0{,}01\cdot 8^2 =$$

$$= 6{,}83 + 20{,}48 = 27{,}31\ \text{m}^4.$$

Środek ścinania obliczamy za pomocą momentów strumieni naprężeń stycznych:

$$\int_{12}\frac{S\,ds}{\delta}=\frac{b^2h}{4}=64\cdot 4=256\ \text{m}^3,\qquad \int_{1B}\frac{S\,ds}{\delta}=\int_{2A}\frac{S\,ds}{\delta}=682{,}67\ \text{m}^3,$$

$$\int_{2A}\frac{S\,ds}{\delta}=\frac{1}{2}\left(\frac{b\,h^2}{2}+\frac{h^3}{12}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{8\cdot 256}{2}+\frac{16^3}{12}\right)=512+170{,}67=682{,}67\ \text{m}^3;$$

stąd

$$\frac{Q}{I_x}\int_{12341}\frac{S\,ds}{\delta}=2\cdot 256\frac{Q}{I_x}=512\frac{Q}{I_x}$$

oraz

$$\oint \frac{ds}{\delta} = \left(2\,\frac{16}{0{,}01} + 2\,\frac{8}{0{,}01}\right) = 4800.$$

Na podstawie wzoru (1.1.7) obliczymy q_0:

$$4800\,q_0 + \frac{Q}{I_x}\,512 = 0\,, \qquad q_0 = -0{,}107\,\frac{Q}{I_x}\ \text{t/m}\,.$$

Moment M_2 jest równy

$$M_2 = 0{,}107\,\frac{Q}{I_x}\,\Omega = 0{,}107 \cdot 256\,\frac{Q}{I_x} = 27{,}4\,\frac{Q}{I_x}\ \text{tm}\,.$$

Obliczamy moment M_1 względem punktu B:

$$\frac{Q}{I_x}\int_{51} S\varrho\,ds = -256 \cdot 0{,}01 \cdot 8\,\frac{Q}{I_x} = -20{,}48\,\frac{Q}{I_x}\,,$$

$$\frac{Q}{I_x}\int_{2A} S\varrho\,ds = -682{,}67 \cdot 0{,}01 \cdot 8\,\frac{Q}{I_x} = -54{,}62\,\frac{Q}{I_x}\,,$$

$$M_1 = (-4 \cdot 20{,}48 - 2 \cdot 54{,}62)\,\frac{Q}{I_x} = -191{,}16\,\frac{Q}{I_x}\,.$$

Mając wartości obu momentów obliczymy położenie środka ścinania:

$$\bar{B}_0 = a_{xx} = \frac{-191{,}16 + 27{,}40}{27{,}31} \approx 6{,}00\ \text{m}.$$

Powierzchnie wycinkowe względem środka ścinania obliczamy na podstawie wzorów (1.1.15):

$$\frac{\Omega}{s_0}\,s' = \frac{256}{4800} \cdot 800 = 42{,}6\,, \qquad \hat{\omega}_{B1} = -\omega_{B1} + \frac{\Omega}{s_0}\,s' = -48 + 42{,}6 = -5{,}4\,,$$

$$\hat{\omega}_{15} = \hat{\omega}_{B1} + \omega_{1S} = -5{,}4 + 64 = 58{,}6\,,$$

$$\hat{\omega}_{12} = \hat{\omega}_{B1} - \omega_{12} + \frac{\Omega}{s_0}\,s' = -5{,}4 - 64 + 42{,}6 = -26{,}8\,,$$

$$\hat{\omega}_{2A} = \hat{\omega}_{12} - \omega_{2A} + \frac{\omega}{s_0}\,s' = -26{,}8 - 16{,}0 + 42{,}6 \approx 0\,.$$

Sprawdzenie obliczenia sprowadza się do obliczenia całek $\int \tilde{\omega}\,x\,dA$ oraz $\int \tilde{\omega}\,y\,dA$, które, jak wiadomo, dla środka ścinania jako bieguna mają wartości zerowe.

Pierwsza całka równa się zeru, co wynika z symetrii powierzchni wycinkowych względem osi x; całkę $\int \tilde{\omega} y dA$ rozbijamy na następujące poszczególne elementy dla jednej połowy profilu:

$$\int_{B1} \tilde{\omega} y dA = -\frac{1}{2} 5{,}4 \cdot 8 \frac{2}{3} 8 \cdot 0{,}01 = -1{,}15,$$

$$\int_{11} \tilde{\omega} y dA = -\frac{1}{2} 0{,}675 \cdot 5{,}4 \cdot 8 \cdot 0{,}01 = -0{,}1084,$$

$$\int_{1'S} \tilde{\omega} y dA = \frac{1}{2} 7{,}325 \cdot 58{,}6 \cdot 8 \cdot 0{,}01 = 17{,}1698,$$

$$\int_{12} \tilde{\omega} y dA = \frac{1}{2} (26{,}8 + 5{,}4) \cdot 8 \cdot 8 \cdot 0{,}01 = -10{,}304,$$

$$\int_{2A} \tilde{\omega} y dA = \frac{1}{2} 26{,}8 \cdot 8 \frac{2}{3} 8 \cdot 0{,}01 = -5{,}717,$$

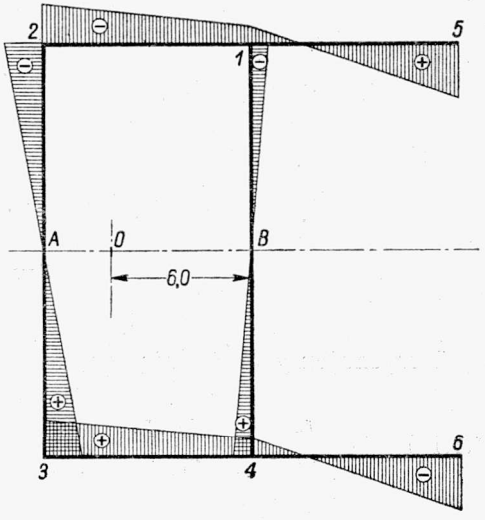
$$\frac{1}{2} \int \tilde{\omega} y dA = -1{,}15 - 0{,}1084 - 10{,}304 - 5{,}717 + 17{,}1698 = -0{,}1112 \approx 0.$$

Jest rzeczą oczywistą, że dla drugiej połowy profilu otrzymamy wynik identyczny.

Omówimy teraz przekrój dwuspójny.

Przez dodanie boku zamykającego 5 6 z przekroju jednospójnego z «wypustkami» otrzymamy przekrój dwuspójny.

Określamy z kolei środek ścinania. Rozcięcia dokonujemy w punktach 1 i 5, co powoduje automatycznie rozcięcia w punktach 4 i 6 (rys. 4).

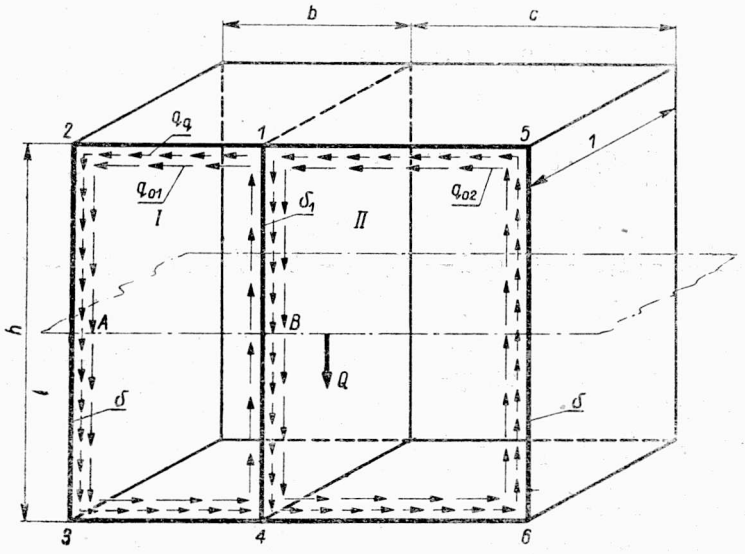


Rys. 3

Ażeby znaleźć strumienie zamykające q_{01} i q_{02}, należy ułożyć warunki typu $\oint \gamma ds = 0$, przedstawiające odrzucenie posunięcia [por. wzór (1.1.5)] dla obu konturów zamkniętych I i II; trzeba również rozwiązać otrzymane równania względem q_{01} i q_{02}.

Wprowadzamy oznaczenia

$$(1.1.16)\quad \begin{cases} \oint\limits_{\mathrm{I}} \dfrac{ds}{\delta} = p_1 = \dfrac{h}{\delta} + \dfrac{2b}{\delta} + \dfrac{h}{\delta_1}, \qquad \oint\limits_{\mathrm{II}} \dfrac{ds}{\delta} = p_2 = \dfrac{h}{\delta} + \dfrac{2c}{\delta} + \dfrac{h}{\delta_1}, \\ \oint\limits_{\mathrm{I}} \dfrac{S_x ds}{\delta} = + \left(\dfrac{b^2 h}{2} + \dfrac{b h^2}{2} - \dfrac{c h^2}{2} \dfrac{\delta}{\delta} \right) = - \Phi_1, \\ \oint\limits_{\mathrm{II}} \dfrac{S_x ds}{\delta} = \left(\dfrac{c^2 h}{2} + \dfrac{c h^2}{2} \dfrac{\delta}{\delta_1} \right) = - \Phi_2. \end{cases}$$



Rys. 4

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$(1.1.17)\quad p_1 \frac{I_x}{Q} q_{01} - \frac{h}{\delta_1} \frac{I_x}{Q} q_{02} = \Phi_1, \qquad - \frac{h}{\delta_1} \frac{I_x}{Q} q_{01} + p_2 \frac{I_x}{Q} q_{02} = \Phi_2;$$

stąd

$$(1.1.18)\quad \frac{I_x}{Q} q_{01} = \frac{\Phi_1 p_2 - \Phi_2 \left(- \dfrac{h}{\delta_1} \right)}{p_1 p_2 - \left(\dfrac{h}{\delta_1} \right)^2}, \qquad \frac{I_x}{Q} q_{02} = \frac{\Phi_2 p_1 - \Phi_1 \left(- \dfrac{h}{\delta_1} \right)}{p_1 p_2 - \left(\dfrac{h}{\delta_1} \right)^2}.$$

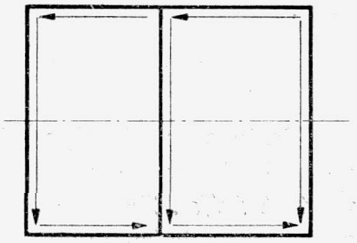
Środek ścinania określamy analogicznie jak we wzorze (1.1.10):

$$a_{xx} = \frac{M_1 + M_2}{Q} = \frac{M_1 + \Omega_1 q_{01} + \Omega_2 q_{02}}{Q}, \tag{1.1.19}$$

gdzie

$$\Omega_1 = 2bh, \qquad \Omega_2 = 2ch.$$

Z poprzednich rozważań dotyczących określenia powierzchni wycinkowych wynika, że w wyrażeniach na moment M_1 strumieni naprężeń stycznych, pochodzących od «otwarcia» profilu, zawarta jest część pola wycinkowego ω przynależna do przekroju otwartego. Zatem dla każdego profilu rozciętego znalezienie pola wycinkowego ω nie napotyka na trudności, gdyż określa się je tak samo, jak dla najprostszych kształtowników, np. dla ceownika lub dwuteownika.



Rys. 5

Natomiast w miarę wzrostu spójności profilu wyrazy określone dla przekroju jednospójnego jako $\Omega s'/s_0$ przybierają bardziej skomplikowaną postać i wyznaczenie ich przeprowadza się w sposób podobny jak dla profilu otwarto-zamkniętego. Dla tego ostatniego przekroju omawiane wyrażenie składało się z części stałej dla wszystkich elementów, tj. Ω/s_0, oraz z członu będącego ilorazem długości i jego grubości. Ta reguła jest słuszna dla wszystkich części przekroju zamkniętego.

Przeprowadzając to samo rozumowanie dla przekroju dwuspójnego w oparciu o wzory (1.1.14) i (1.1.18) otrzymujemy wyrażenia dla zredukowanych współczynników typu $\Omega s'/s_0$:

$$\begin{cases} \left(\frac{\Omega}{s_0}s'\right)'_{B1} = \dfrac{\Omega_1\left(p_2 - \frac{h}{\delta_1}\right) + \Omega_2\left(p_1 - \frac{h}{\delta_1}\right)}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta_1}\right)^2} \dfrac{h}{2\delta_1}, \\ \left(\frac{\Omega}{s_0}s'\right)_{12} = \dfrac{\Omega_1 p_2 + \Omega_2\left(\frac{h}{\delta_1}\right)}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta_1}\right)^2} \dfrac{b}{\delta}, \quad \left(\frac{\Omega}{s_0}s'\right)_{C5} = \dfrac{\Omega_1\left(\frac{h}{\delta_1}\right) + \Omega_2 p_1}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta_1}\right)^2} \dfrac{h}{2\delta}, \\ \left(\frac{\Omega}{s_0}s'\right)'_{2A} = \dfrac{\Omega_1 p_2 + \Omega_2\left(\frac{h}{\delta_1}\right)}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta_1}\right)^2} \dfrac{h}{2\delta}, \quad \left(\frac{\Omega}{s_0}s'\right)_{51} = \dfrac{\Omega_1\left(\frac{h}{\delta_1}\right) + \Omega_2 p_1}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta_1}\right)^2} \dfrac{c}{\delta}. \end{cases} \tag{1.1.20}$$

Oczywiście, w elementach należących tylko do obszaru I bierzemy pod uwagę te wyrazy we wzorach (1.1.19) i (1.1.20), w których czynnikiem jest funkcja Φ_1; podobnie postępujemy z obszarem II związanym z funkcją Φ_2. Natomiast w elemencie wspólnym dla obu obszarów (np. $B\,1$) istotne są wyrazy, w których występuje zarówno funkcja Φ_1, jak i Φ_2.

W poprzednim przypadku profilu otwarto-zamkniętego wzór na środek zginania (ścinania) można było zapisać w postaci podobnej do wzoru (1.1.10):

$$a_{xx}=\frac{M_1+M_2}{Q}=-\frac{\Sigma S\varrho\,ds}{Q}+\frac{\Phi}{IS_x}, \tag{1.1.21}$$

gdzie

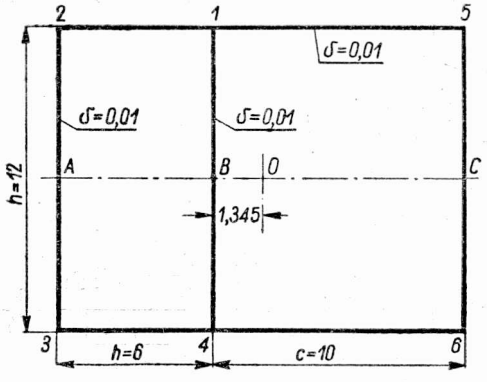
$$\Phi=\oint\frac{Sds}{\delta}.$$

Dla tego profilu obiegliśmy przekrój w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara, czemu towarzyszyła ujemna wartość ω, ale dodatnia wartość $\Omega s'/s_0$. Zgodnie z tym wartość powierzchni wycinkowej na odcinku zawartym między punktem B i 1 wynosiła

$$\hat{\omega}_{B1}=-\omega_{B1}+\frac{\Omega}{s_0}\frac{h}{2\delta_1}. \tag{1.1.22}$$

Oczywiście, zmiana kierunku obiegu spowoduje zmianę znaku obu składników powyższego wyrażenia i np. dla odcinka $B\,4$ otrzymuje się

$$\hat{\omega}_{B4}=\omega_{B4}-\frac{\Omega}{s_0}\frac{h}{2\delta_1}. \tag{1.1.23}$$



Rys. 6

Odrzucając chwilowo w przekroju dwuspójnym bok zamykający 5 c 6 otrzymamy przekrój z «wyrostkami» cmówiony poprzednio. Strumieniowi Φ ze wzoru (1.1.21) będzie odpowiadał strumień Φ_1 o tym samym kierunku, a powierzchnię wycinkową będzie można obliczyć tak jak we wzorze (1.1.15). Zamknięcie profilu, a przez to wprowadzenie na odcinku $1\,B\,4$ strumienia Φ_2 o kierunku przeciwnym do kierunku Φ_1 stwarza konieczność zmiany znaków w wyrazach zawierających Φ_2 [przy obliczeniu powierzchni wycinkowych na podstawie wzorów wyjściowych (1.1.18) i (1.1.20)].

Przejdźmy znowu do przykładu liczbowego biorąc pod uwagę przekrój przedstawiony na rys. 6.

Określmy położenie środka ścinania. Na podstawie wzorów (1.1.16) otrzymujemy wartości funkcji Φ_1 i Φ_2:

$$-\Phi_1 = \left(\frac{36 \cdot 12}{2} + \frac{6 \cdot 144}{2} - \frac{10 \cdot 144}{2}\right) = -72,$$

$$-\Phi_2 = \left(\frac{100 \cdot 12}{2} + \frac{10 \cdot 144}{2}\right) = 1320.$$

Układ równań (1.1.17) ma teraz postać

$$3600\,x - 1200\,y - 72 = 0, \qquad -1200\,x + 4400\,y + 1320 = 0,$$

gdzie

$$p_1 = 3600, \quad p_2 = 4400, \quad \frac{h}{\delta} = 1200, \quad x = \frac{I_x}{Q} q_{01}, \quad y = \frac{I_x}{Q} q_{02},$$

$$x = -0{,}088, \quad y = -0{,}324.$$

Moment M_2 jest

$$\frac{I_x}{Q} M_2 = \Omega_1 x + \Omega_2 y = \Omega_1 \frac{I_x}{Q} q_{01} + \Omega_2 \frac{I_x}{Q} q_{02} = 144 \cdot 0{,}088 + 240 + 0{,}324 = 90{,}43.$$

Moment M_1 względem punktu B jest

$$\frac{1}{2} \frac{I_x}{Q} M_1 = -\left(\int_{12} S \varrho\, ds + \int_{24} S \varrho\, ds + \int_{51} S \varrho\, ds + \int_{65} S \varrho\, ds\right) =$$

$$= \left(\int_{12} \frac{S ds}{\delta}\right) \varrho\,\delta + \left(\int_{24} \frac{S ds}{\delta}\right) \varrho\,\delta + \left(\int_{51} \frac{S ds}{\delta}\right) \varrho\,\delta + \left(\int_{65} \frac{S ds}{\delta}\right) \varrho\,\delta =$$

$$= -108 \cdot 6 \cdot 0{,}01 - 288 \cdot 6 \cdot 0{,}01 - 300 \cdot 6 \cdot 0{,}01 + 72 \cdot 10 \cdot 0{,}01 = -38{,}56 \text{ m}^5,$$

$$I_{xx} = 3 \frac{0{,}01 \cdot 12^3}{12} + 2 \cdot 0{,}01 \cdot 6^2 = 15{,}84 \text{ m}^4,$$

$$a_{xx} = \frac{M_1 + M_2}{I_{xx}} = \frac{-69{,}12 + 90{,}43}{15{,}84} = 1{,}345 \text{ m}.$$

Powierzchnie wycinkowe względem środka ścinania są równe:

$$\hat{\hat{\omega}}_{B1} = \omega_{B1} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)'_{B1} = +8{,}07 +$$

$$+ \frac{144\,(4400 - 1200) + 240\,(-3600 + 1200)}{144 \cdot 10^5}\, 600 = 3{,}27\,,$$

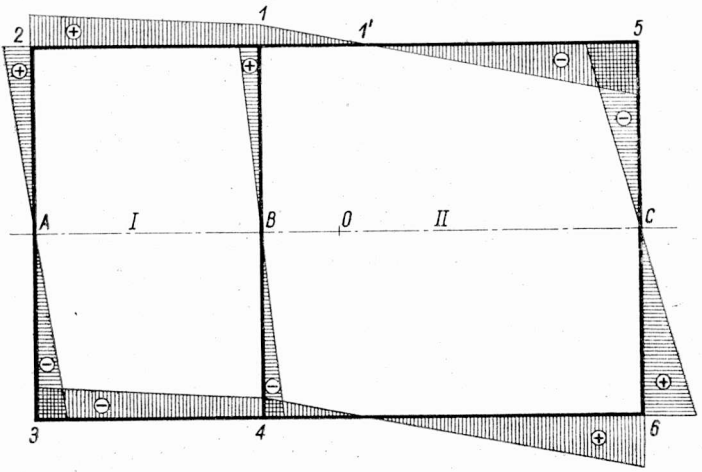
$$\hat{\hat{\omega}}_{12} = \hat{\omega}_1 - \omega_{12} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)_{12} = +3{,}27 - 36 + \frac{144 \cdot 4400 + 240 \cdot 1200}{144 \cdot 10^5}\, 600 = 5{,}67\,,$$

$$\hat{\hat{\omega}}_{2A} = \hat{\omega}_2 - \omega_{2A} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)_{2A} = +5{,}67 - 44{,}07 + \frac{144 \cdot 4400 + 240 \cdot 1200}{144 \cdot 10^5}\, 600 = 0\,,$$

$$\hat{\hat{\omega}}_{C5} = -\omega_{C5} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)_{C5} = -51{,}93 + \frac{144 \cdot 1200 + 240 \cdot 3600}{144 \cdot 10^5}\, 600 = -8{,}73\,,$$

$$\hat{\hat{\omega}}_{51} = \hat{\omega}_5 - \omega_{51} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)_{51} = -8{,}73 - 60 + \frac{144 \cdot 1200 + 240 \cdot 3600}{144 \cdot 10^5}\, 1000 = 3{,}27.$$

Potwierdzeniem słuszności rozumowania jest otrzymanie tych samych wartości liczbowych powierzchni wycinkowych w punktach wspólnych, liczonych oddzielnie dla konturu I i II.



Rys. 7

Sprawdzenie wykonamy podobnie jak dla przekroju z «wyrostkami», mianowicie sprawdzimy, czy całka $\int \hat{\omega} y dA$ dla połowy przekroju jest równa zeru.

Obliczamy kolejno całki dodatnie

$$\int_{B1} \hat{\bar{\omega}}\, y\, dA = \frac{1}{2} 3{,}27 \cdot 6 \cdot 0{,}01 \frac{2}{3} 6 = 0{,}01 \cdot 3{,}27 \cdot 12 = 0{,}392\,,$$

$$\int_{24} \hat{\bar{\omega}}\, y\, dA = \frac{1}{2} 5{,}67 \cdot 6 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = 0{,}01 \cdot 5{,}67 \cdot 12 = 0{,}680\,,$$

$$\int_{12} \hat{\bar{\omega}}\, y\, dA = \frac{1}{2} (3{,}27 + 5{,}67) \cdot 6 \cdot 0{,}01 \cdot 6 = 8{,}94 \cdot 0{,}01 \cdot 18 = 1{,}609\,,$$

$$\int_{11'} \hat{\bar{\omega}}\, y\, dA = \frac{1}{2} 3{,}27 \cdot 2{,}727 \cdot 0{,}01 \cdot 6 = 8{,}917 \cdot 0{,}01 \cdot 3 = 0{,}268\,,$$

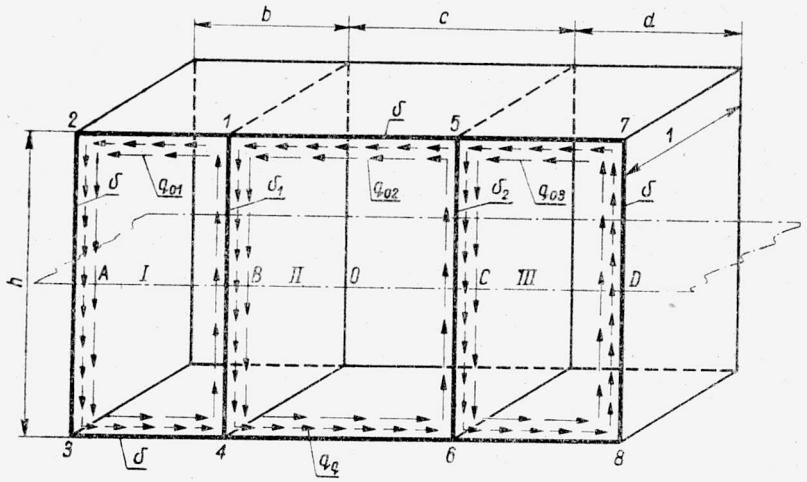
których suma jest 2,949, oraz całki ujemne

$$\int_{C5} \hat{\bar{\omega}}\, y\, dA = -\frac{1}{2} 8{,}73 \cdot 6 \cdot 0{,}01 \frac{2}{3} 6 = -0{,}01 \cdot 8{,}73 \cdot 12 = -1{,}047\,,$$

$$\int_{51'} \hat{\bar{\omega}}\, y\, dA = -\frac{1}{2} 8{,}73 \cdot 7{,}273 \cdot 0{,}01 \cdot 6 = -0{,}01 \cdot 63{,}493 \cdot 3 = -1{,}904\,,$$

o sumie równej — 2,951.

Stąd $2{,}949 - 2{,}951 \approx 0$.



Rys. 8

Dla większego uogólnienia opisanej metody rozpatrzymy jeszcze przekrój trójspójny przedstawiony na rys. 8.

Podobnie jak w przypadkach poprzednich wprowadzimy oznaczenia

$$(1.1.24)\quad \begin{cases} \oint\limits_{\mathrm{I}} \dfrac{ds}{\delta} = p_1 = \dfrac{h}{\delta} + \dfrac{2b}{\delta} + \dfrac{h}{\delta_1}, & -\Phi_1 = \dfrac{b^2 h}{2} + \dfrac{bh^2}{2} - \dfrac{ch^2}{2}, \\ \oint\limits_{\mathrm{II}} \dfrac{ds}{\delta} = p_2 = \dfrac{h}{\delta_1} + \dfrac{2c}{\delta} + \dfrac{h}{\delta_2}, & -\Phi_2 = \dfrac{c^2 h}{2} + \dfrac{ch^2}{2} - \dfrac{dh^2}{2}, \\ \oint\limits_{\mathrm{III}} \dfrac{ds}{\delta} = p_3 = \dfrac{h}{\delta_2} + \dfrac{2d}{\delta} + \dfrac{h}{\delta}, & -\Phi_3 = \dfrac{d^2 h}{2} + \dfrac{dh^2}{2}. \end{cases}$$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$(1.1.25)\quad \begin{cases} p_1 x - \dfrac{h}{\delta_1} y + 0 \cdot z = \Phi_1, \\ -\dfrac{h}{\delta_1} x + p_2 y - \dfrac{h}{\delta_2} z = \Phi_2, \\ 0 \cdot x - \dfrac{h}{\delta_2} y + p_3 z = \Phi_3, \end{cases}$$

gdzie

$$x = \frac{I_x}{Q} q_{01}, \qquad y = \frac{I_x}{Q} q_{02}, \qquad z = \frac{I_x}{Q} q_{03};$$

stąd

$$(1.1.26)\quad \begin{cases} x = \dfrac{I_x}{Q} q_{01} = -\dfrac{\Phi_1 p_2 p_3 - \Phi_1 \dfrac{h}{\delta_1}\dfrac{h}{\delta_2} + \Phi_3 \dfrac{h}{\delta_1}\dfrac{h}{\delta_2} + \Phi_2 p_3 \dfrac{h}{\delta_1}}{D}, \\ y = \dfrac{I_x}{Q} q_{02} = -\dfrac{\Phi_2 p_1 p_3 + \Phi_3 p_1 \dfrac{h}{\delta_2} + \Phi_1 p_3 \dfrac{h}{\delta_1}}{D}, \\ z = \dfrac{I_x}{Q} q_{03} = -\dfrac{\Phi_3 p_1 p_2 + \Phi_2 p_1 \dfrac{h}{\delta_2} - \Phi_3 \dfrac{h}{\delta_1}\dfrac{h}{\delta_2} + \Phi_1 \dfrac{h}{\delta_1}\dfrac{h}{\delta_2}}{D}, \end{cases}$$

gdzie

$$(1.1.27)\quad D = p_1 \left(\frac{h}{\delta_2}\right)^2 + p_3 \left(\frac{h}{\delta_1}\right)^2 - p_1 p_2 p_3.$$

Dla środka ścinania jest

$$(1.1.28)\quad a_{xx} = \frac{1}{I_x}(M_1 + \Omega_1 q_{01} + \Omega_2 q_{02} + \Omega_3 q_{03}).$$

Zgodnie z regułami znakowania podanymi przy omawianiu przekroju dwuspójnego obliczamy powierzchnie wycinkowe profilu przedstawionego na rys. 9.

Na podstawie wzorów (1.1.24) i (1.1.27) obliczymy wielkości parametrów:

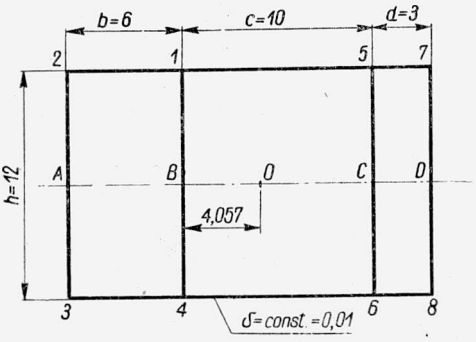
$$p_1 = \frac{2h}{\delta} + \frac{2b}{\delta} = 2400 + 1200 = 3600,$$

$$p_2 = \frac{2h}{\delta} + \frac{2c}{\delta} = 2400 + 2000 = 4400,$$

$$p_3 = \frac{2h}{\delta} + \frac{2d}{\delta} = 2400 + 600 = 3000,$$

$$D = 6600 \cdot 1200^2 - 3600 \cdot 4400 \cdot 3000 = -38\,016 \cdot 10^6,$$

$$\Omega_1 = 144, \qquad \Omega_2 = 240, \qquad \Omega_3 = 72.$$



Rys. 9

Powierzchnie wycinkowe [na podstawie wzorów (1.1.26) i (1.1.28)] są

$$\hat{\hat{\omega}}_{B1} = -\omega_{B1} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right) = 6 \cdot 4{,}037 + \left(-144 \frac{4400 \cdot 300 - 1200^2 - 3000 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6} - \right.$$

$$\left. -240 \frac{-3600 \cdot 3000 + 3000 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6} - 72 \frac{-3600 \cdot 1200 + 1200^2}{-38\,016 \cdot 10^6}\right) 600 = 12{,}222,$$

$$\hat{\hat{\omega}}_{12} = \omega_1 - \omega_{12} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)_{12} = 12{,}222 - 36 + \left(-144 \frac{4400 \cdot 3000 - 1200^2}{-38\,016 \cdot 10^6} - \right.$$

$$\left. -240 \frac{3000 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6} - 72 \frac{1200^2}{-38\,016 \cdot 10^6}\right) 600 = 18{,}222,$$

$$\hat{\hat{\omega}}_{2A} = \omega_2 - \omega_{2A} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)_{2A} = 18{,}222 - 10{,}037 \cdot 6 + 42 = 0,$$

$$\hat{\hat{\omega}}_{C5} = -\omega_{C5} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)_{C5} = -6 \cdot 5{,}963 \left(-144 \frac{-1200^2 + 3000 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6} - \right.$$

$$-240 \frac{3600 \cdot 3000 - 3600 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6} -$$

$$\left. -72 \frac{-3600 \cdot 4400 + 3600 \cdot 1200^2}{-38\,016 \cdot 10^6}\right) 600 = -17{,}778,$$

$$\hat{\hat{\omega}}_{51} = \omega_5 - \omega_{51} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)_{51} = -17{,}778 - 60 \left(-144 \frac{3000 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6} - \right.$$

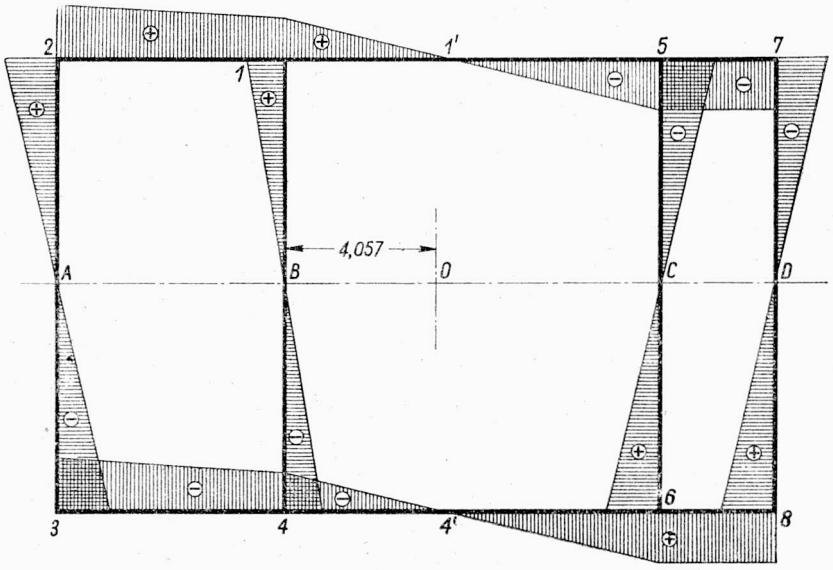
$$\left. -240 \frac{3600 \cdot 3000}{-38\,016 \cdot 10^6} - 72 \frac{3600 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6}\right) 1000 = 12{,}222,$$

$$\hat{\omega}_{D7} = -\omega_{D7} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)_{D7} = -8{,}963 \cdot 6 + \left(-144 \frac{1200^2}{-38\,016 \cdot 10^6} - \right.$$

$$\left. - 240 \frac{3600 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6} - 72 \frac{3600 \cdot 3000 - 1200^2}{-38\,016 \cdot 10^6}\right) 600 = -17{,}778,$$

$$\hat{\hat{\omega}}_{75} = \omega_7 - \omega_{75} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)_{75} = -17{,}778 - 18 + 18 = -17{,}778.$$

Sprawdzamy obliczenia na podstawie warunku, że $\int w y dA = 0$ dla jednej połowy symetrycznego przekroju.



Rys. 10

Otrzymujemy kolejno dodatnie wartości całek:

$$\int_{A2} \hat{\hat{\omega}}\, y dA = \frac{1}{2} 6 \cdot 18{,}222 \cdot 0{,}01 \frac{2}{3} 6 = 0{,}01 \cdot 12 \cdot 18{,}222 = 2{,}187,$$

$$\int_{B1} \hat{\hat{\omega}}\, y dA = \frac{1}{2} 6 \cdot 12{,}222 \cdot 0{,}01 \frac{2}{3} 6 = 0{,}01 \cdot 12 \cdot 12{,}222 = 1{,}467,$$

$$\int_{12} \hat{\hat{\omega}}\, y dA = \frac{1}{2} (18{,}222 + 12{,}222) \cdot 6 \cdot 0{,}01 \cdot 6 = 0{,}01 \cdot 30{,}444 \cdot 18 = 5{,}480,$$

$$\int_{11'} \hat{\hat{\omega}}\, y dA = \frac{1}{2} 4{,}017 \cdot 12{,}222 \cdot 0{,}01 \cdot 6 = 0{,}01 \cdot 49{,}096 \cdot 3 = 1{,}473,$$

których suma równa się 10,607, oraz wartości ujemne całek

$$\int_{D7} \hat{\hat{\omega}}\, y\, dA = -\frac{1}{2} 6 \cdot 17{,}778 \cdot 0{,}01 \frac{2}{3} 6 = -0{,}01 \cdot 17{,}778 \cdot 12 = -2{,}133,$$

$$\int_{C5} \hat{\hat{\omega}}\, y\, dA = -\frac{1}{2} 6 \cdot 17{,}778 \cdot 0{,}01 \frac{2}{3} 6 = -0{,}01 \cdot 17{,}778 \cdot 12 = -2{,}133,$$

$$\int_{S7} \hat{\hat{\omega}}\, y\, dA = -17{,}778 \cdot 3 \cdot 0{,}01 \cdot 6 = 17{,}778 \cdot 0{,}18 = -3{,}200,$$

$$\int_{1'7} \hat{\hat{\omega}}\, y\, dA = -\frac{1}{2} 5{,}983 \cdot 17{,}778 \cdot 0{,}01 \cdot 6 = -0{,}01 \cdot 3 \cdot 106{,}365 = -3{,}191,$$

których suma równa się — 10,657; stąd

$$\int \hat{\hat{\omega}}\, y\, dA = 10{,}603 - 10{,}657 \approx 0.$$

Jednym z ciekawszych przekrojów, mającym zastosowanie w okrętownictwie, jest przekrój złożony z elementów otwarto-zamkniętego i zamkniętego dwuspójnego.

Kształt profilu, sposób rozcięcia oraz bieg strumieni napięć stycznych uwidoczniony jest na rys. 11.

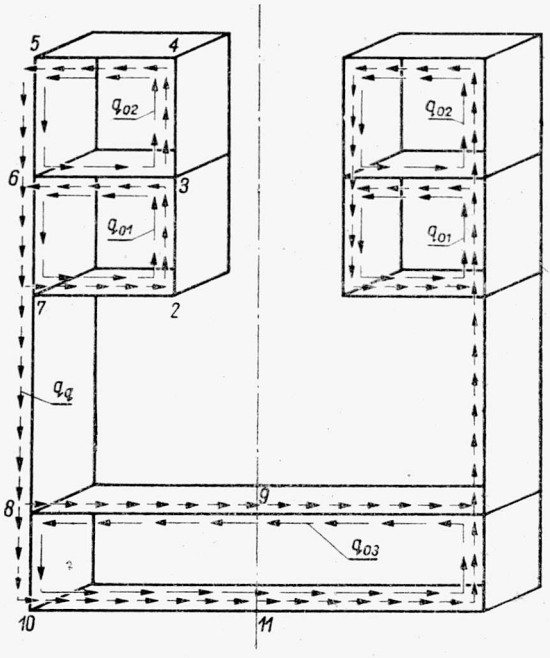
Na podstawie wzorów (1.1.17) napiszemy układ równań dla części dwuspójnej:

$$p_1 q_{01} - \frac{h}{\delta} q_{02} = \Phi_1 \frac{Q}{I_x},$$

$$-\frac{h}{\delta} q_{01} + p_2 q_2 = \Phi_2 \frac{Q}{I_x};$$

stąd określimy strumienie napięć zamykających q_{01} i q_{02}. Strumień q_{03} znajdziemy podobnie jak dla przekroju jednospójnego z «wypustkami»:

$$p_3 q_{03} = \frac{Q}{I_x} \Phi_3.$$



Rys. 11

Mając dane q_{01}, q_{02} i q_{03} możemy obliczyć położenie środka ścinania oraz, w dalszej kolejności, powierzchnie wycinkowe, które będziemy określali

korzystając ze wzoru ogólnego

$$a_{xx}=\frac{M_1}{Q}+\left[\Omega_1\frac{\Phi_1 p_2-\Phi_2\frac{h}{\delta}}{p_1 p_2-\left(\frac{h}{\delta}\right)^2}+\Omega_2\frac{\Phi_2 p_1-\Phi_1\frac{h}{\delta}}{p_1 p_2-\left(\frac{h}{\delta}\right)^2}+\Omega_3\frac{\Phi_3}{p_3}\right]\frac{1}{I_x},$$

napisanego na podstawie rozumowań analogicznych jak w przypadkach poprzednich.

Przykład liczbowy. W odróżnieniu od ostatniego przykładu rachunek przeprowadzimy teraz szczegółowiej, uwzględniając przede wszystkim obliczenie współrzędnej środka zginania. Obliczenie naprężeń q_{01}, q_{02} i q_{03} wiąże się bezpośrednio z określeniem funkcji Φ_1, Φ_2 i Φ_3:

$$\Phi_1=\int_{72}\frac{S\,ds}{\delta}+\int_{23}\frac{S\,ds}{\delta}+\int_{36}\frac{S\,ds}{\delta}+\int_{67}\frac{S\,ds}{\delta},$$

$$\Phi_2=\int_{34}\frac{S\,ds}{\delta}+\int_{45}\frac{S\,ds}{\delta}+\int_{56}\frac{S\,ds}{\delta}-\int_{36}\frac{S\,ds}{\delta},$$

$$\Phi_3=\int_{810}\frac{S\,ds}{\delta}+\int_{1011}\frac{S\,ds}{\delta}+\Phi_1+\int_{78}\frac{S\,ds}{\delta}.$$

Należy zwrócić uwagę, że momenty statyczne są obliczone od punktów rozcięcia (punkty 7, 3 i 8 na rys. 12), co schematycznie jest przedstawione na rys. 13. Natomiast w całce

$$\int_{67}\frac{S\,ds}{\delta}$$

moment statyczny S składa się z elementu bieżącego na odcinku 6-7 oraz z sumy momentów poprzednich elementów zbiegających się w punkcie 6 : $S_{7236}+S_{3456}$.

Wynika z tego, że w punktach węzłowych, które nie są punktami rozcięcia ani symetrycznymi względem nich, należy sumować momenty statyczne poprzednich elementów.

Tablica 1

Kolejne elementy	Moment statyczny poprzednich elementów	$\int\frac{S\,ds}{\delta}$	$\int S p\,ds$ *)
7-2	0,000	22,5	0,675
2-3	0,135	33,0	0,99
3-6	0,195	76,5	3,825
3-4	0,000	6,0	0,18
4-5	0,060	36,0	2,52
5-6	0,195	51,0	3,06
6-7	0,645	141,0	8,46
7-8	0,765	256,5	15,39
8-9	0,945	639,0	0,00
8-10	0,000	3,0	0,18
10-11	0,060	108,0	1,08

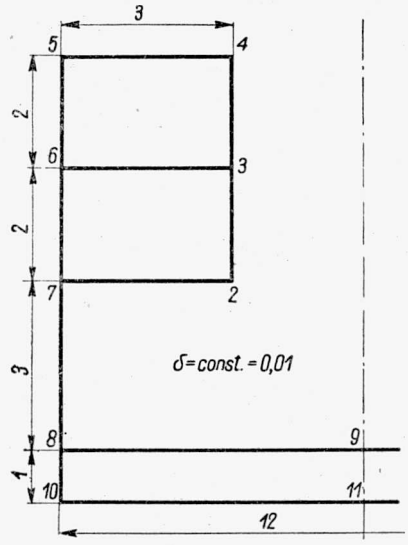
*) Biegun pomocniczy w punkcie B.

Korzystając z tablicy 1 obliczamy parametry równań:

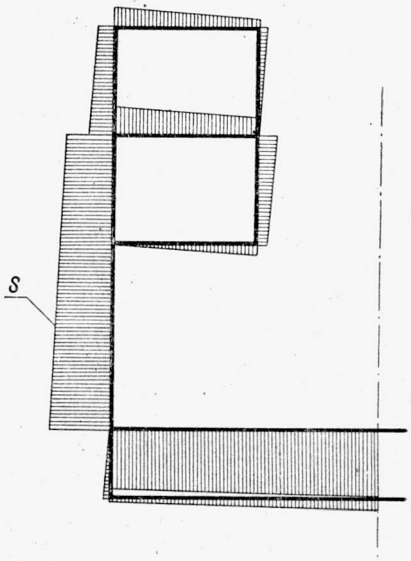
$$p_1 = p_2 = \frac{1}{0{,}01}(S_{12} + S_{23} + S_{36} + S_{67}) = \frac{1}{0{,}01}(3 + 2 + 3 + 2) = 1000,$$

$$\Phi_1 = -(22{,}5 + 33 + 76{,}5 + 141) = -273, \qquad \frac{h}{\delta} = \frac{3}{0{,}01} = 300,$$

$$\Phi_2 = -(6 + 36 + 51 - 76{,}5) = -16{,}5.$$



Rys. 12



Rys. 13

Po uwzględnieniu tych wartości układ równań otrzymuje postać

$$1000\,q_{01} - 300\,q_{02} = -\frac{Q}{I_x}273, \qquad -300\,q_{01} + 1000\,q_{02} = -\frac{Q}{I_x}16{,}5,$$

a jego pierwiastki są równe

$$q_{01} = -0{,}3054\frac{Q}{I_x}, \qquad q_{02} = -0{,}108\frac{Q}{I_x}.$$

Strumień q_{03} obliczymy na podstawie wzoru (1.1.7):

$$1300\,q_{03} = -\frac{Q}{I_x}(3 + 108 - 639), \qquad q_{03} = 0{,}406\frac{Q}{I_x}.$$

Po określeniu wszystkich wartości strumieni napięć stycznych obliczamy momenty:

$$M_1 = 2\frac{Q}{I_x}(0{,}675 + 0{,}99 \cdot 3{,}825 + 0{,}18 - 2{,}52 - $$

$$- 3{,}06 - 8{,}46 - 15{,}39 - 0{,}18 - 1{,}08) = -2 \cdot 32{,}67\frac{Q}{I_x},$$

$$M_2 = \frac{Q}{I_x}(2\Omega_1 q_{01} + 2\Omega_2 q_{02} + \Omega_3 q_{03}) = 2\frac{Q}{I_x}(-0{,}3054 \cdot 12 - $$

$$- 0{,}108 \cdot 12 + 0{,}406 \cdot 12) = 2\frac{Q}{I_x}0{,}084.$$

Z kolei określamy położenie środka zginania przy $I_x = 13{,}14\ \mathrm{m}^4$. Otrzymamy

$$a_{xx} = \frac{M_1 + M_2}{Q} = \frac{-65{,}34 + 0{,}168}{13{,}14} = -4{,}96\ \mathrm{m}.$$

Powierzchnie wycinkowe wyznaczamy zgodnie z poprzednimi rozważaniami:

$$\hat{\omega}_{98} = -\omega_{98} + \left(\frac{\Omega_3}{p_3}s'\right)_{98} = -4{,}96 \cdot 6 \pm \frac{24}{2600} \cdot 600 = -24{,}222,$$

$$\hat{\omega}_{8,10} = \hat{\omega}_8 - \omega_{8,10} + \left(\frac{\Omega_3}{p_3}s'\right)_{8,10} = -24{,}222 - 6 + 0{,}923 = -29{,}299,$$

$$\hat{\omega}_{10,11} = \hat{\omega}_{10} - \omega_{10,11} + \left(\frac{\Omega_3}{p_3}s'\right)_{10,11} = -29{,}299 + 3{,}96 \cdot 6 + 5{,}538 \approx 0;$$

$$\hat{\omega}_{8,7} = \hat{\omega}_8 + \omega_{87} = -24{,}222 + 18 = -6{,}222,$$

$$\hat{\omega}_{16} = \hat{\omega}_1 + \omega_{16} + \left(\frac{\Omega_1}{p_1}s'\right)_{16} = -6{,}222 + 12 - 3{,}428 = 2{,}353,$$

$$\hat{\omega}_{63} = \hat{\omega}_6 + \omega_{63} + \left[\left(\Omega_1 \frac{p_2 - \left(\frac{h}{\delta}\right)}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta}\right)^2} + \Omega_2 \frac{p_1 - \left(\frac{h}{\delta}\right)}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta}\right)^2}\right)s'\right]_{63} =$$

$$= 2{,}353 + 9{,}96 \cdot 3 + 0 = 32{,}233,$$

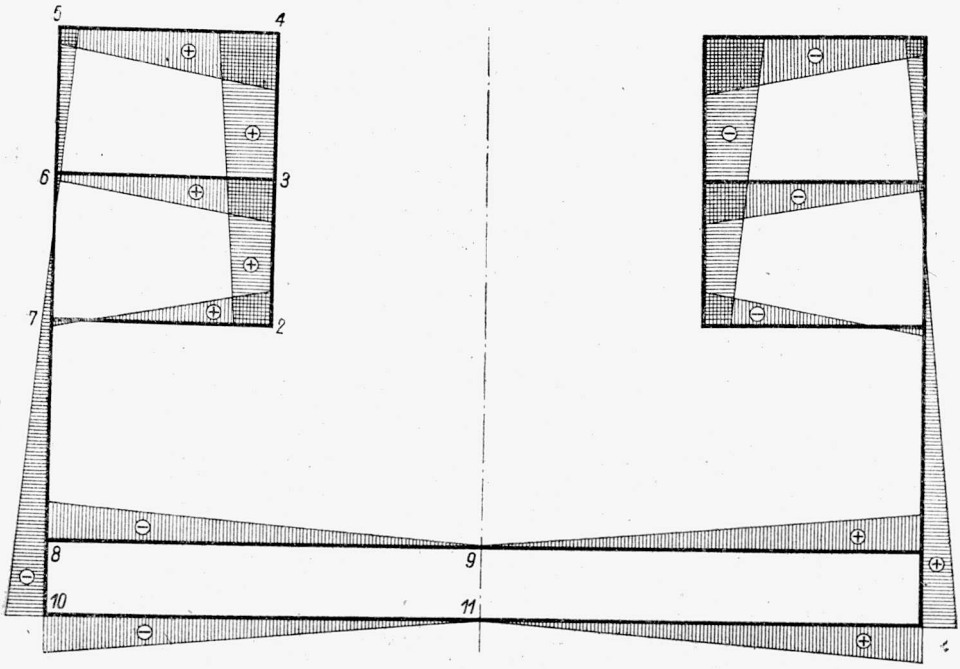
$$\hat{\omega}_{32} = \hat{\omega}_3 - \omega_{32} + \left(\frac{\Omega_1}{p_1}s'\right)_{32} = 32{,}233 - 6 - 3{,}428 = 22{,}805,$$

$$\hat{\omega}_{27} = \hat{\omega}_2 - \omega_{27} + \left(\frac{\Omega_1}{p_1}s'\right)_{27} = 22{,}805 - 7{,}96 \cdot 3 - 5{,}143 = -6{,}218,$$

$$\hat{\omega}_{65} = \hat{\omega}_6 + \omega_{65} + \left(\frac{\Omega_2}{p_2}s'\right)_{65} = 2{,}353 + 12 - 3{,}428 = 10{,}925,$$

$$\hat{\bar{\omega}}_{54} = \hat{\bar{\omega}}_5 + \omega_{54} + \left(\frac{\Omega_2}{p_2} s'\right)_{54} = 10{,}925 + 11{,}96 \cdot 3 - 5{,}143 = 41{,}662,$$

$$\hat{\bar{\omega}}_{43} = \hat{\bar{\omega}}_4 - \omega_{43} + \left(\frac{\Omega_2}{p_2} s'\right)_{43} = 41{,}662 - 6 - 3{,}428 = 32{,}234.$$



Rys. 14

Kontrolę przeprowadzamy podobnie jak w poprzednich przypadkach sprawdzając, czy całka $\int \omega y dA$ dla symetrycznej połowy przekroju jest równa zeru. Suma całek ujemnych

$$\int_{89} \hat{\bar{\omega}}\, y dA = -24{,}222 \cdot 6 \frac{1}{2} \frac{2}{3} 6 \cdot 0{,}01 = -2{,}90664,$$

$$\int_{8,10} \hat{\bar{\omega}}\, y dA = -\frac{1}{2}(24{,}222 + 29{,}299) \cdot 1 \cdot 6 \cdot 0{,}01 = -1{,}60563,$$

$$\int_{10,11} \hat{\bar{\omega}}\, y dA = -29{,}299 \cdot 6 \frac{1}{2} \frac{2}{3} 6 \cdot 0{,}01 = -3{,}5158,$$

$$\int_{87} \hat{\bar{\omega}}\, y dA = -\frac{1}{2}(24{,}222 + 6{,}222) \cdot 3 \cdot 6 \cdot 0{,}01 = -2{,}73996,$$

$$\int_{76} \hat{\tilde{\omega}}\, y\, dA = -6{,}222 \cdot 1{,}4511 \frac{1}{2} 6 \cdot 0{,}01 = -0{,}27862,$$

$$\int_{72} \hat{\tilde{\omega}}\, y\, dA = -6{,}222 \cdot 0{,}643 \frac{1}{2} \left(3 + 2{,}357 + \frac{2}{3} 0{,}643\right) \cdot 0{,}01 = -0{,}115734,$$

jest równa — 11,16238.

Suma całek dodatnich

$$\int_{76} \hat{\tilde{\omega}}\, y\, dA = 2{,}353 \cdot 0{,}5489 \frac{1}{2} 6 \cdot 0{,}01 = 0{,}038747,$$

$$\int_{34} \hat{\tilde{\omega}}\, y\, dA = \frac{1}{2}(41{,}662 + 32{,}234) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 0{,}01 = 2{,}21688,$$

$$\int_{54} \hat{\tilde{\omega}}\, y\, dA = \frac{1}{2}(41{,}662 + 10{,}925) \cdot 3 \cdot (3 + 1{,}20775) \cdot 0{,}01 = 3{,}31909,$$

$$\int_{63} \hat{\tilde{\omega}}\, y\, dA = \frac{1}{2}(2{,}353 + 32{,}233) \cdot 6\,(3 + 1{,}06803) \cdot 0{,}01 = 2{,}11046,$$

$$\int_{72} \hat{\tilde{\omega}}\, y\, dA = 22{,}805 \cdot 2{,}4511 \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{3} 2{,}4511\right) \cdot 0{,}01 = 1{,}0668,$$

$$\int_{65} \hat{\tilde{\omega}}\, y\, dA = \frac{1}{2}(2{,}353 + 10{,}925) \cdot 2 \cdot 6 \cdot 0{,}01 = 0{,}79668,$$

$$\int_{23} \hat{\tilde{\omega}}\, y\, dA = \frac{1}{2}(32{,}234 + 22{,}805) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 0{,}01 = 1{,}65117$$

jest równa 11,19982.

Stąd $\int \hat{\tilde{\omega}}\, y\, dA = 11{,}19982 - 11{,}16238 \approx 0$, jak być powinno.

1.2. Równanie różniczkowe skręcania w przypadku przekrojów złożonych. Rozkład naprężeń

Dotychczasowe rozważania doprowadziły nas do znalezienia powierzchni wycinkowych dowolnych profilów, dla których za główny biegun przyjęto środek zginania.

Otrzymane powierzchnie wycinkowe umożliwiają obliczenie parametrów przekrojów wchodzących do równań teorii skręcania.

Przy rozpatrywaniu profilów otwartych opieramy się na znanym równaniu teorii skręcania przekrojów cienkościennych

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = \zeta m, \tag{1.2.1}$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

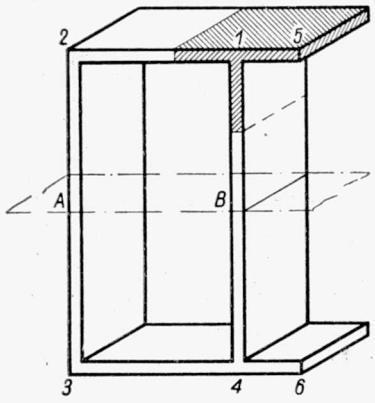
$$k^2 = \frac{GI_s}{EI_\omega}, \qquad \zeta = \frac{1}{EI_\omega}, \qquad I_s = \alpha \sum \frac{s\delta^3}{3}, \qquad I_\omega = \int \omega^2 d.$$

Ostatnie symbole I_s oraz I_ω oznaczają odpowiednio moment bezwładności Saint-Venanta przy skręcaniu oraz wycinkowy moment bezwładności.

Całka powyższego równania znaleziona za pomocą metody głównych parametrów Cauchy'ego ma postać następującą (w przypadku braku obciążeń):

$$(1.2.2) \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{l}{k}\varphi_0' \sinh\frac{kx}{l} - \frac{B_0}{GI_s}\left(\cosh\frac{kx}{l} - 1\right) - \frac{1}{GI_s} M_{skr}\left(\frac{l}{k}\sinh\frac{kx}{l} - x\right).$$

Nie będziemy się zajmowali obecnie bliższą analizą tej całki. Przejdziemy do wyprowadzenia analogicznego równania dla przekrojów złożonych z elementów otwartych i zamkniętych.



Rys. 15

Podobnie jak w p. poprzednim początkowe rozważania przeprowadzimy dla przekroju jednospójnego posiadającego «wyrostki».

Element wytniemy w taki sposób, ażeby jego dolna krawędź biegła wzdłuż zerowej linii deplanacji, bowiem w przekroju poprzecznym w tych punktach naprężenia normalne są równe zeru, a istnieją jedynie naprężenia styczne q_0.

Szczegółowy rozkład naprężeń normalnych i stycznych wpływających na równowagę elementu przedstawiony jest na rys. 16. Strumień napięć stycznych na odcinku 1 4 jest następujący:

$$(1.2.3) \qquad q_1 = q_0 + \int_0^s \frac{\partial \sigma_\omega^{\sim}}{\partial z}\delta\, ds.$$

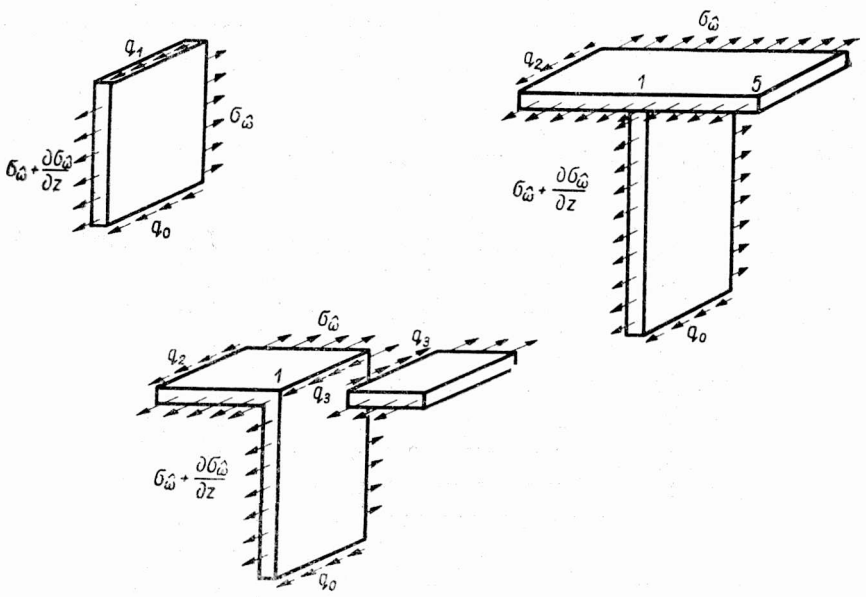
Ten sam strumień na odcinku 1 2 3 4 wynosi

$$(1.2.4) \quad q_2 = q_0 + \int_0^s \frac{\partial \sigma_\omega^{\sim}}{\partial z}\delta\, ds + \int_{51} \frac{\partial \sigma_\omega^{\sim}}{\partial z}\delta\, ds = q_0 + q_3 + \int_0^s \frac{\partial \sigma_\omega^{\sim}}{\partial z}\delta\, ds,$$

gdzie

$$q_3 = \int_{51} \frac{\partial \sigma_{\widetilde{\omega}}}{\partial z} \delta \, ds$$

oznacza strumień napięć stycznych w obrębie wyrostka 5 1.



Rys. 16

Jak wiadomo, naprężenie deplanacyjne normalne wyraża się wzorem

(1.2.5) $$\sigma_{\widetilde{\omega}} = -E\varphi'' \widetilde{\omega}.$$

Oznaczmy przez σ_0 naprężenia normalne odpowiadające stałej wartości $\widetilde{\omega} = 1$; wówczas

(1.2.6) $$\sigma_0 = -E\varphi'',$$

a strumienie napięć stycznych określonych wzorem (1.2.3) będą

(1.2.7) $$q_{14} = q_0 + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_0^s \widetilde{\omega} \, dA,$$

(1.2.8) $$q_{1234} = q_0 + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_0^s \widetilde{\omega} \, dA + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{51} \widetilde{\omega} \, dA.$$

Możemy obecnie wyznaczyć moment skręcający:

$$(1.2.9)\quad M=\int_{14}\varrho\,ds\left(q_0+\frac{d\sigma_0}{dz}\int_0^s\tilde{\omega}\,dA\right)+\int_{1234}\varrho\,ds\left(q_0+\frac{d\sigma_0}{dz}\int_0^s\tilde{\omega}\,dA+\right.$$

$$\left.+\frac{d\sigma_0}{dz}\int_{51}\tilde{\omega}\,dA\right)+\int_{51}h ds\frac{d\sigma_0}{dz}\int_0^{s_1}\tilde{\omega}\,dA=\oint\varrho\,ds q_0+\frac{d\sigma_0}{dz}\left(\int_{14}\varrho\,ds\int_0^s\tilde{\omega}\,dA+\right.$$

$$\left.+\int_{1234}\varrho\,ds\int_0^3\tilde{\omega}\,dA+\int_{1234}\varrho ds\int_{51}\tilde{\omega}\,dA+\int_{51}h ds\int_0^{s_1}\tilde{\omega}\,dA\right).$$

Stąd obliczamy niewiadome napięcia

$$(1.2.10)\quad q_0=\frac{M}{\Omega}-\frac{d\sigma_0}{dz}\frac{1}{\Omega}\left(\oint\varrho\,ds\int_0^s\tilde{\omega}\,dA+\int_{1234}\varrho\,ds\int_{51}\tilde{\omega}\,dA+\right.$$

$$\left.+\int_{51}h\,ds\int_0^{s_1}\tilde{\omega}\,dA\right).$$

Dla ilustracji przytoczymy wzór na q_0 dla profilu zamkniętego:

$$(1.2.11)\quad q_0=\frac{M}{\Omega}-\frac{d\sigma_0}{dz}\frac{\oint\varrho\,ds\int_0^s\tilde{\omega}\,dA}{\Omega}.$$

Ten sam wynik otrzymamy ze wzoru (1.2.10) pomijając wpływ «wyrostków».

W celu uproszczenia wzoru (1.2.10) oznaczmy wyrażenie w klamrze przez β. Wymiar tego wyrażenia jest cm^4. Wówczas

$$(1.2.12)\quad q_0=\frac{M}{\Omega}-\frac{d\sigma_0}{dz}\beta,$$

a odpowiednie strumienie napięć stycznych na odcinku 1 4 i 1 2 3 4 będą

$$(1.2.13)\quad q_1=\frac{M}{\Omega}-\frac{d\sigma_0}{dz}(\beta+\delta)=\frac{M}{\Omega}-\frac{d\sigma_0}{dz}\Phi,$$

$$(1.2.14)\quad q_2=\frac{M}{\Omega}-\frac{d\sigma_0}{dz}(\beta+\delta+\gamma)=q_1-\frac{d\sigma_0}{dz}\gamma,$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$\delta=\int_0^s\tilde{\omega}\,dA,\qquad\gamma=\int_0^{s_2}\tilde{\omega}\,dA.$$

Określimy z kolei energię potencjalną nagromadzoną w badanym elemencie podczas odkształcenia.

Energia całkowita będzie się składała z energii naprężeń normalnych $\sigma_{\tilde{\omega}}$ i energii naprężeń stycznych.

Energia naprężeń normalnych wynosi

$$U_0 dz = \left(\int \frac{\sigma_{\tilde{\omega}}^2 dA}{2E} \right) dz = \frac{\sigma_0^2}{2E} \left(\oint \omega^2 dA + 2 \int_{51} \tilde{\omega}^2 dA \right) dz, \tag{1.2.15}$$

a energia naprężeń stycznych

$$U_p dz = \left(\int_{14} \frac{q_1^2 ds}{2G\delta} + \int_{1234} \frac{q_2^2 ds}{2G\delta} + 2 \int_{51} \frac{q_3^2 ds}{2G\delta} \right) dz = \tag{1.2.16}$$

$$= \int_{14} \frac{\left(\frac{M}{\Omega} - \frac{d\sigma_0}{dz} \Phi \right)^2 ds}{2G\delta} + \int_{1234} \frac{\left[\frac{M}{\Omega} - \frac{d\sigma_0}{dz} (\Phi + \gamma) \right]^2 ds}{2G\delta} +$$

$$+ \left[\int_{51} \frac{\left(\frac{d\sigma_0}{dz} \int_0^{s_1} \tilde{\omega} dA \right)^2 ds}{G\delta} \right] dz = \frac{1}{2G} \left\{ \int_{14} \left[\left(\frac{M}{\Omega} \right)^2 - 2 \frac{M}{\Omega} \frac{d\sigma_0}{dz} \Phi + \right. \right.$$

$$+ \left. \left(\frac{d\sigma_0}{dz} \right)^2 \Phi^2 \right] \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} \left[\left(\frac{M}{\Omega} \right)^2 - 2 \frac{M}{\Omega} \frac{d\sigma_0}{dz} (\Phi + \gamma) + \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{d\sigma_0}{dz} \right)^2 (\Phi + \gamma)^2 \right] \frac{ds}{\delta} + 2 \int_{51} \left(\frac{d\sigma_0}{dz} \right)^2 \lambda^2 \frac{ds}{\delta} \right\} dz,$$

gdzie $\lambda = \int_0^{s_1} \tilde{\omega} dA$.

Energia całkowita układu jest sumą obu całek:

$$U = \int_0^L (U_0 + U_p) dz.$$

Równanie E u l e r a w tym przypadku posiada postać

$$\frac{\partial (U_0 + U_p)}{\partial \sigma_0} - \frac{d}{dz} \left[\frac{\partial (U_0 + U_p)}{\partial \left(\frac{d\sigma_0}{dz} \right)} \right] = 0. \tag{1.2.17}$$

Składnik pierwszy wyrażenia powyższego jest

$$\frac{\partial (U_0 + U_p)}{\partial \sigma_0} = \frac{\sigma_0}{E}\left(\oint \tilde{\omega}^2 \, dA + 2 \int_{51} \tilde{\omega}^2 \, dA\right) = \frac{\sigma_0}{E} I_{\tilde{\omega}}, \tag{1.2.18}$$

zaś składnik pozostały

$$\frac{d}{dz}\frac{\partial (U_0 + U_p)}{\partial \left(\frac{d\sigma_0}{dz}\right)} = \frac{d}{dz}\left\{\int_{14}\left(-2\frac{M}{\Omega}\Phi + 2\frac{d\sigma_0}{dz}\Phi^2\right)\frac{ds}{\delta} + \right. \tag{1.2.19}$$

$$\left. + \int_{1234}\left[-2\frac{M}{\Omega}(\Phi+\gamma) + 2\frac{d\sigma_0}{dz}(\Phi+\gamma)^2\right]\frac{ds}{\delta} + \int_{51} 4\frac{d\sigma_0}{dz}\lambda^2\frac{ds}{\delta}\right\}.$$

Po dalszych przekształceniach otrzymamy

$$\frac{d^2\sigma_0}{dz^2} - \sigma_0 \frac{G}{E}\frac{I_{\tilde{\omega}}}{\int_{14}\Phi^2\frac{ds}{\delta} + \int_{1234}(\Phi+\gamma)^2\frac{ds}{\delta} + \int_{51}\lambda^2\frac{ds}{\delta}} = \tag{1.2.20}$$

$$= \frac{m}{\Omega}\frac{\int_{14}\Phi\frac{ds}{\delta} + \int_{1234}(\Phi+\gamma)\frac{ds}{\delta}}{\int_{14}\Phi^2\frac{ds}{\delta} + \int_{1234}(\Phi+\gamma)^2\frac{ds}{\delta} + 2\int_{51}\lambda^2\frac{ds}{\delta}}.$$

Wzór powyższy można napisać w postaci uproszczonej

$$\frac{d^2\sigma_0}{dz^2} - \sigma_0 k^2 = m\xi, \tag{1.2.21}$$

gdzie

$$k^2 = \frac{G}{E}\frac{I_{\tilde{\omega}}}{\int_{14}\Phi^2\frac{ds}{\delta} + \int_{1234}(\Phi+\gamma)^2\frac{ds}{\delta} + \int_{51}\lambda^2\frac{ds}{\delta}},$$

$$\xi = \frac{\int_{14}\Phi\frac{ds}{\delta} + \int_{1234}(\Phi+\gamma)\frac{ds}{\delta}}{\Omega\int_{14}\Phi^2\frac{ds}{\delta} + \int_{1234}(\Phi+\gamma)^2\frac{ds}{\delta} + \int_{51}\lambda^2\frac{ds}{\delta}}.$$

Porównując wyrażenie (1.2.21) z (1.2.1) dotyczącym skręcania pręta możemy powiedzieć, że odpowiednikiem momentu bezwładności Saint-Venanta I_s będzie wielkość

$$I_{\tilde{s}} = \frac{I_{\tilde{\omega}}}{\int\limits_{14} \Phi \frac{ds}{\delta} + \int\limits_{1234} (\Phi + \gamma) \frac{ds}{\delta}} \Omega \text{ cm}^4,$$

zaś wycinkowego momentu bezwładności $I_{\tilde{\omega}}$ wielkość

$$I_{\tilde{\omega}_s} = \frac{\int\limits_{14} \Phi^2 \frac{ds}{\delta} + \int\limits_{1234} (\Phi + \gamma)^2 \frac{ds}{\delta} + 2 \int\limits_{51} \lambda^2 \frac{ds}{\delta}}{\int\limits_{14} \Phi \frac{ds}{\delta} + \int\limits_{1234} (\Phi + \gamma) \frac{ds}{\delta}} \Omega \text{ cm}^6.$$

Podstawiając wartości ze wzoru (1.2.6) otrzymamy równanie czwartego rzędu w postaci

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = \zeta m, \tag{1.2.22}$$

gdzie $\zeta = \xi / E$

lub

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = f(z), \tag{1.2.23}$$

gdzie $\zeta m(z) = f(z)$.

Rozwiązaniem równania (1.2.23) jest funkcja

$$\varphi = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz + \int_0^z \varphi(z-t) f(t) dt \tag{1.2.24}$$

lub po wyznaczeniu stałych

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_0' z + \frac{\varphi_0''}{k^2} (\cosh kz - 1) + \frac{\varphi_0'''}{k^3} (\sinh kz - kz) + \int_0^z \varphi(z-t) f(t) dt. \tag{1.2.25}$$

Funkcję tę można napisać w postaci krótszej $\varphi = \overline{\varphi} + \overline{\overline{\varphi}}$ przy oznaczeniu

$$\overline{\varphi} = \varphi_0 + \varphi_0' z + \frac{\varphi_0''}{k^2} (\cosh kz - 1) + \frac{\varphi_0'''}{k^3} (\sinh kz - kz), \tag{1.2.26}$$

$$\overline{\overline{\varphi}} = \int_0^z \varphi(z-t) f(t) dt. \tag{1.2.27}$$

Spełniając warunki C a u c h y' e g o otrzymujemy

$$\bar{\varphi} = \frac{\sinh kz - kz}{k^3} = \varphi_4, \qquad \bar{\bar{\varphi}} = \int_0^z \varphi_4 (z-t) f(t)\, dt,$$

$$f(t) = \zeta m(t) = \frac{m(t)}{E I_{\omega_s}^{\sim}};$$

stąd

$$\bar{\bar{\varphi}} = \int_0^z \frac{[\sinh k(z-t) - k(z-t)]}{k^3} \frac{m(t)}{E I_{\omega_s}^{\sim}} dt = \frac{1}{kG I_s^{\sim}} \int_0^z [\sinh k(z-t) - k(z-t)]\, m(t)\, dt.$$

Uwzględniając powyższe, równanie (1.2.24) można napisać w postaci

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_0' z + \frac{\varphi_0''}{k^2}(\cosh z - 1) + \frac{\varphi_0'''}{k^3}(\sinh kz - kz) + \frac{1}{kG I_s^{\sim}} \int_0^z [\sinh k(z-t) - k(z-t)]\, m(t)\, dt.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\beta = -E I_{\omega}^{\sim} \varphi'', \qquad E I_{\omega_s}^{\sim} \varphi''' - G I_s^{\sim} \varphi' = -M_s,$$

a dla $z = 0$

$$\varphi_0'' = -\frac{B_0}{E I_{\omega}^{\sim}}, \qquad \varphi_0''' = \frac{G I_s^{\sim} \varphi_0' - M_{s_0}}{E I_{\omega_s}^{\sim}},$$

otrzymamy ostatecznie

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_0' \frac{\sinh kz}{k} + \frac{B_0}{G I_s^{\sim} \eta}(1 - \cosh kz) + \frac{M_{s_0}}{G I_s^{\sim}}\left(z - \frac{\sinh kz}{k}\right) + \frac{1}{kG I_s^{\sim}} \int_0^z [\sinh k(z-t) - k(z-t)]\, m(t)\, dt, \tag{1.2.28}$$

gdzie nowy parametr $\eta = I_{\omega}^{\sim} / I_{\omega_s}^{\sim}$ określa stosunek właściwego wycinkowego momentu bezwładności do sprowadzonego wycinkowego momentu bezwładności $I_{\omega_s}^{\sim}$. W rezultacie przekrój skręcany jest scharakteryzowany w równaniu dwoma parametrami k i η.

Ostatni wyraz równania (1.2.28) w zależności od rodzaju obciążenia będzie przyjmował następującą postać:

(1) dla równomiernie rozłożonego momentu skręcającego $m(t) = m$ działającego na odcinku pręta $a \leqq z \leqq b$

$$\frac{m}{k^2 G I_{\tilde{s}}}\left[-\cosh k(z-a)+1+\frac{k^2(z-a)^2}{2}\right];$$

(2) dla momentu M_{s_c} działającego w przekroju $z = c$

$$-\left[\frac{M_{s_c}}{kGI_{\tilde{s}}}\right][\sinh k(z-c)-k(z-c)];$$

(3) w przypadku przyłożenia w przekroju $z = d$ bimomentu B_d

$$-\frac{B_d}{GI_{\tilde{s}}}[\cosh k(z-d)-1].$$

Ostatecznie więc, gdy pręt (utwierdzony na jednym końcu a na drugim swobodny) jest obciążony momentem skupionym M_{s_c} w przekroju $z = c$, bimomentem B_d w przekroju $z = d$ oraz momentem równomiernie rozłożonym w przedziale $n \leqq z \leqq b$, wyrażenie dla φ przybiera postać

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{k}\varphi_0' \sinh kz - \frac{B_0}{GI_s\eta}(\cosh kz - 1) - \tag{1.2.29}$$

$$-\frac{M_{s_0}}{kGI_{\tilde{s}}}(\sinh kz - kz) - \frac{B_d}{GI_{\tilde{s}}}[\cosh k(z-d)-1] - \frac{M_{s_c}}{kGI_s}[\sinh k(z-c) -$$

$$-k(z-c)] - \frac{m}{k^2 GI_{\tilde{s}}}\left[\cosh k(z-a) - 1 - \frac{k^2(z-a)^2}{2}\right].$$

Pierwsza pochodna kąta skręcenia wyraża się wzorem

$$\varphi' = \varphi_0' \cosh kz - \frac{k}{GI_{\tilde{s}}\eta} B_0 \sinh kz - \frac{M_{s_0}}{GI_{\tilde{s}}}(\cosh kz - 1) - \tag{1.2.30}$$

$$-\frac{k}{GI_{\tilde{s}}} B_d \sinh k(z-d) - \frac{M_{s_c}}{GI_{\tilde{s}}}[\cosh k(z-c) - 1] -$$

$$-\frac{m}{kGI_{\tilde{s}}}[\sinh k(z-a) - k(z-a)].$$

Druga pochodna, przy uwzględnieniu $B = EJ_{\tilde{\omega}}\varphi''$, jest

$$B = -\varphi_0' \frac{\eta GI_{\tilde{s}}}{k} \sinh kz + B_0 \cosh kz + \frac{\eta M_{s_0}}{k} \sinh kz + \tag{1.2.31}$$

$$+\eta B_d \cosh k(z-d) + \eta \frac{M_{s_c}}{k} \sinh k(z-c) + \frac{\eta m}{k^2}[\cosh k(z-a) - 1].$$

Wreszcie moment giętno-skrętny wyniesie

$$(1.2.32)\quad M_{\tilde{\omega}} = \frac{dB}{dz} = -\varphi_0' \eta G I_s \cosh kz + B_0 k \sinh kz + \eta M_{s_0} \cosh kz +$$

$$+ \eta B_d k \sinh k(z-d) + \eta M_{s_c} \cosh k(z-c) + \frac{\eta m}{k} [\sinh k(z-a)].$$

Wzory powyższe pozwalają wyznaczyć odkształcenie profilu o niezmiennym przekroju przy dowolnym stanie obciążenia.

W podobny sposób można ułożyć równania dla przekrojów bardziej złożonych, rozpatrywanych w poprzednim p. niniejszej pracy. Można przewidzieć, że budowa wzorów będzie w tych przypadkach podobna do wyżej wyprowadzonych, a jedynie istotne różnice wystąpią w wielkościach parametrów k i η. Z tego względu ograniczymy się do podania wspomnianych wzorów w części drugiej tej pracy przy rozważaniu przykładu liczbowego.

Korzystając ze wzorów (1.2.31) i (1.2.32) można wyznaczyć naprężenia

$$\sigma_{\tilde{\omega}} = \frac{B\,\tilde{\omega}}{I_{\tilde{\omega}}}, \qquad \tau_{\tilde{\omega}} = \frac{M_{\tilde{\omega}} S_{\tilde{\omega}}}{I_{\tilde{\omega}} \delta}.$$

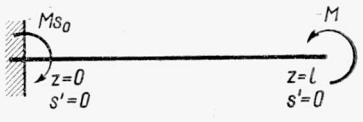
Wzory (1.2.29), (1.2.30) i (1.2.31) w przypadku braku obciążenia zewnętrznego będą miały postać

$$(1.2.33)\quad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{k}\varphi_0' \sinh kz - \frac{B_0}{G I_{\tilde{s}} \eta}(\cosh kz - 1) - \frac{M_{s_0}}{G I_{\tilde{s}} k}(\sinh kz - 1),$$

$$(1.2.34)\quad \varphi' = \varphi_0' \cosh kz - \frac{k}{G I_{\tilde{s}} \eta} B_0 \sinh kz - \frac{M_{s_0}}{G I_{\tilde{s}}}(\cosh kz - 1),$$

$$(1.2.35)\quad B = -\varphi_0' \frac{\eta G I_{\tilde{s}}}{k} \sinh kz + B_0 \cosh kz + \eta \frac{M_{s_0}}{k} \sinh kz.$$

Rozpatrzmy z kolei pręt zamocowany na jednym końcu. Założmy, że przekrój swobodny $z = l$ nie może się deplanować. Wtedy mamy dwa warunki



Rys. 17

$$\varphi_0' = 0 \quad \text{i} \quad \varphi'_{z=l} = 0.$$

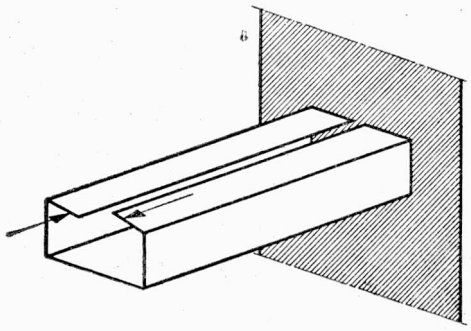
Warunek pierwszy wynika z utwierdzenia przekroju. Warunek drugi wynika z równania

$$0 = -\frac{k}{G I_{\tilde{s}} \eta} B_0 \sinh kz - \frac{M_{s_0}}{G I_{\tilde{s}}}(\cosh kz - 1).$$

Z równania tego znajdziemy

$$B_0 = -\frac{M_{s_0}\eta}{k}\,\frac{\cosh kl - 1}{\sinh kl}.$$

Podstawiając wartość B_0 do równania (1.2.35) otrzymamy



Rys. 18

$$B = -\frac{M_{s_0}\eta}{k}\,\frac{\cosh kl - 1}{\sinh kl}\times$$

$$\times\cosh kz + \frac{M_{s_0}\eta}{k}\sinh kz$$

lub

$$(1.2.36)\qquad B = \frac{M_{s_0}\eta}{k}\times$$

$$\times\left(\frac{1-\cosh kl}{\sinh kl}\cosh kz + \sinh kz\right).$$

Ze wzoru (1.2.36) widać, iż dla $z = 0$ i $z = l$ wartości bezwzględne bimomentów są równe odpowiednio

$$B_0 = -\frac{M_{s_0}\eta}{k}\,\frac{\cosh kl - 1}{\sinh kl} = \frac{M_{s_0}\eta}{k}\,\frac{1-\cosh kl}{\sinh kl},$$

$$B_l = -\frac{M_{s_0}\eta}{k}\,\frac{1-\cosh kl}{\sinh kl} = \frac{M_{s_0}\eta}{k}\,\frac{\cosh kl - 1}{\sinh kl}.$$

Równanie (1.2.34) po zastąpieniu B_0 przez znalezione wyżej na tę wielkość wyrażenie będzie się przedstawiało następująco:

$$\varphi' = \frac{M_{s_0}\eta}{GI_{\tilde{s}}}\left(-\frac{1-\cosh kl}{\sinh kl}\sinh kz + 1 - \cosh kz\right).$$

Wartość bimomentu dla przekroju środkowego ($z = l/2$) wynosi

$$B_{1/2} = \frac{M_{s_0}\eta}{k}\left(\frac{1-\cosh kl}{\sinh kl}\cosh\frac{kl}{2} + \sinh\frac{kl}{2}\right) =$$

$$= \frac{M_{s_0}\eta}{k}\cosh\frac{kl}{2}\left(2 - 2\cosh^2\frac{kl}{2} + 2\sinh^2\frac{kl}{2}\right) = 0.$$

Otrzymane wzory są podobne do wzorów dla otwartych profili; różnica polega na zastąpieniu M przez M_{s_0} oraz GI_s przez $GI_{\tilde{s}}$.

Możemy więc powiedzieć, że pręt będzie się zachowywał jak pręt o profilu otwartym skręcany momentem M_{s_0} i posiadający sztywność zastępczą $GI_{\tilde{s}}$, można go przeto potraktować jako pręt zastępczy o otwartym profilu.

2. SKRĘCANIE KADŁUBA OKRĘTU NA FALI SKOŚNEJ

2.1. Uwagi o cienkościennych przekrojach złożonych kadłuba okrętowego

Teoria cienkościennych przekrojów złożonych znajduje duże zastosowanie przy obliczeniach kadłuba okrętu pracującego na skręcanie, kadłub statku bowiem z powodu specyficznych właściwości konstrukcyjnych można rozpatrywać jako powłokę cienkościenną, tj. jako ustrój konstrukcyjny, którego grubość jest znacznie mniejsza od wymiaru obrysu. Stosowanie w tym przypadku metod obliczeń dla konstrukcji cienkościennych prowadzi do dokładniejszych wyników niż stosowanie metod opartych na elementarnej teorii wytrzymałości.

Pierwsze przybliżenie obliczeń uzyskuje się rozpatrując samą powłokę niezbieżną, bez żeber usztywniających i przegród poprzecznych. Przy tych założeniach przekroje okrętowe dadzą się porównać z przekrojami typowymi rozpatrzonymi w p. 1, dla których wyznaczono środki zginania oraz powierzchnie wycinkowe. Wzory (1.2.29)-(1.2.32) pozwalają wyznaczyć odkształcenia i naprężenia tylko dla profilu otwarto-zamkniętego. Jednakże można przewidzieć, że dla pozostałych przekrojów typowych struktura wzorów (1.2.29)-(1.2.32) będzie podobna do struktury wzorów uprzednio wyprowadzonych, a różnice będą dotyczyły jedynie parametrów charakteryzujących przekrój geometrycznie.

Te parametry obliczymy dla najprostszego przykładu przekroju wielospójnego w celu zobrazowania toku postępowania w przypadku przekrojów bardziej złożonych.

2.2. Równanie skręcania przekroju dwuspójnego

Strumienie naprężeń w poszczególnych częściach przekroju są następujące:

w przekroju K - K

$$q_1 = q_{01} - q_{02} + \int_{BK} \frac{\partial \sigma_\omega^{\hat{}}}{\partial z} \delta \, ds, \tag{2.2.1.1}$$

w przekroju L - L

$$q_2 = q_{01} - q_{02} + \int_{BL} \frac{\partial \sigma_\omega^{\hat{}}}{\partial z} \delta \, ds = q_{01} + \int_{C51} \frac{\partial \sigma_\omega^{\hat{}}}{\partial z} \delta \, ds + \int_{BL} \frac{\partial \sigma_\omega^{\hat{}}}{\partial z} \delta \, ds, \tag{2.2.1.2}$$

w przekroju M - M

$$q_3 = q_{02} + \int_{CM} \frac{\partial \sigma_\omega^{\hat{}}}{\partial z} \delta \, ds. \tag{2.2.1.3}$$

Wprowadzając oznaczenia jak dla przekroju otwarto-zamkniętego otrzymamy

$$(2.2.2)\qquad \begin{cases} q_1 = q_{01} - q_{02} + \dfrac{d\sigma_0}{dz}\int\limits_{BK} \hat{\hat{\omega}}\, dA, \\ q_2 = q_{01} + \dfrac{d\sigma_0}{dz}\int\limits_{C5} \hat{\hat{\omega}}\, dA + \dfrac{d\sigma_0}{dz}\int\limits_{BL} \hat{\hat{\omega}}\, dA, \\ q_3 = q_{02} + \int\limits_{CM} \hat{\hat{\omega}}\, dA. \end{cases}$$

Moment skręcający wynosi

$$M_{skr} = \int\limits_{14} \varrho\, ds q_1 + \int\limits_{1234} \varrho\, ds q_2 + \int\limits_{4651} \varrho\, ds q_3 = \int\limits_{14} \varrho\, ds \left(q_{01} - q_{02} + \right.$$

$$\left. + \frac{d\sigma_0}{dz}\int\limits_{BK} \hat{\hat{\omega}}\, dA\right) + \int\limits_{1234} \varrho\, ds \left(q_{01} + \frac{d\sigma_0}{dz}\int\limits_{C51} \hat{\hat{\omega}}\, dA + \frac{d\sigma_0}{dz}\int\limits_{BL} \hat{\hat{\omega}}\, dA\right) +$$

$$+ \int\limits_{4651} \varrho\, ds \left(q_{02} + \frac{d\sigma_0}{dz}\int\limits_{CM} \hat{\hat{\omega}}\, dA\right) = \int\limits_{14} \varrho\, ds q_{01} - \int\limits_{14} \varrho\, ds q_{02} +$$

$$+ \int\limits_{14} \varrho\, ds \frac{d\sigma_0}{dz}\int\limits_{BK} \hat{\hat{\omega}}\, dA + \int\limits_{1234} \varrho\, ds q_{01} + \int\limits_{1234} \varrho\, ds \frac{d\sigma_0}{dz}\int\limits_{C51} \hat{\hat{\omega}}\, dA +$$

$$+ \int\limits_{1234} \varrho\, ds \frac{d\sigma_0}{dz}\int\limits_{BL} \hat{\hat{\omega}}\, dA + \int\limits_{4651} \varrho\, ds q_{02} + \int\limits_{4651} \varrho\, ds \frac{d\sigma_0}{dz}\int\limits_{CM} \hat{\hat{\omega}}\, dA.$$

Stąd otrzymujemy wzór

$$(2.2.3)\qquad M_{skr} = \Omega_1 q_{01} + \Omega_2 q_{02} + \frac{d\sigma_0}{dz}\left(\int\limits_{14} \varrho\, ds \int\limits_{BK} \hat{\hat{\omega}}\, dA + \int\limits_{1234} \varrho\, ds \int\limits_{C51} \hat{\hat{\omega}}\, dA + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{1234} \varrho\, ds \int\limits_{BL} \hat{\hat{\omega}}\, dA + \int\limits_{4651} \varrho\, ds \int\limits_{CM} \hat{\hat{\omega}}\, dA\right).$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$\Phi = \oint\limits_{1} \varrho\, ds \int\limits_{BK} \hat{\hat{\omega}}\, dA + \int\limits_{1234} \varrho\, ds \int\limits_{BL} \hat{\hat{\omega}}\, dA + \int\limits_{4651} \varrho\, ds \int\limits_{CM} \hat{\hat{\omega}}\, dA$$

znajdziemy

$$(2.2.4)\qquad \Omega_1 q_{01} + \Omega_2 q_{02} = M_{skr} - \frac{d\sigma_0}{dz}\Phi.$$

W celu wyznaczenia q_{01} i q_{02} potrzebny jest jeszcze drugi warunek. Skorzystamy z tego, że suma przemieszczeń na obwodzie zamkniętym jest równa zeru; dzięki temu dla konturu pierwszego można napisać

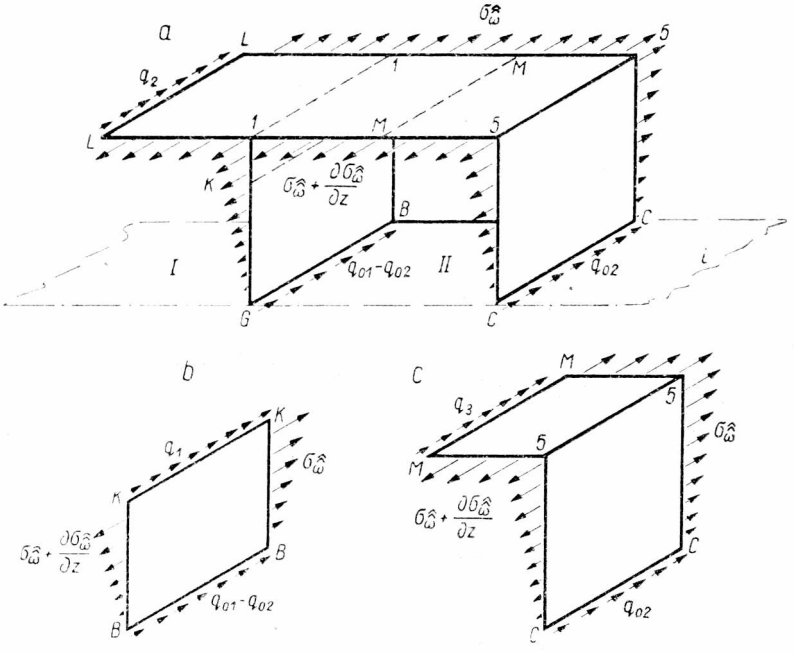
$$\int_{14} \frac{q_1\,ds}{G\delta} + \int_{1234} \frac{q_2\,ds}{G\delta} = 0. \tag{2.2.5}$$

Ponieważ

$$q_1 = q_{01} - q_{02} + \frac{d\sigma_0}{dz}\int_{BK} \hat{\omega}\,dA, \qquad q_2 = q_{01} + \frac{d\sigma_0}{dz}\int_{C51} \hat{\omega}\,dA + \frac{d\sigma_0}{dz}\int_{BI} \hat{\omega}\,dA,$$

to otrzymamy

$$\oint_{1} q_{01}\frac{ds}{\delta} - \int_{14} q_{02}\frac{ds}{\delta} + \frac{d\sigma_0}{dz}\left(\int_{1234}\frac{ds}{\delta}\int_{C51}\hat{\omega}\,dA + \oint_{1}\frac{ds}{\delta}\int_{BI}\hat{\omega}\,dA\right) = 0. \tag{2.2.6}$$



Rys. 19

Oznaczamy wyrażenie w nawiasie w równaniu (2.2.6) przez Ψ oraz

$$p_1 = \oint_{1} \frac{ds}{\delta}, \qquad s_{14} = \int_{14} \frac{ds}{\delta}.$$

Wówczas

$$p_1 p_{01} - s_{14} q_{02} = -\frac{d\sigma_0}{dz}\Psi. \tag{2.2.7}$$

Równania (2.2.4) i (2.2.7) tworzą układ

$$\begin{cases} \Omega_1 q_{01} + \Omega_2 q_{02} = M_{skr} - \dfrac{d\sigma_0}{dz}\Phi, \\ p_1 q_{01} - s_{14} q_{02} = -\dfrac{d\sigma_0}{dz}\Psi, \end{cases} \tag{2.2.8}$$

którego rozwiązaniami są

$$q_{01} = \frac{M_{skr} s_{14} - \dfrac{d\sigma_0}{dz}(\Phi s_{14} + \Psi\Omega_2)}{\Omega_1 s_{14} + \Omega_2 p_1}, \qquad q_{02} = \frac{M_{skr} p_1 + \dfrac{d\sigma_0}{dz}(\Omega_1\Psi - p_1\Phi)}{\Omega_1 s_{14} + \Omega_2 p_1}.$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\mu = \frac{s_{14}}{\Omega_1 s_{14} + \Omega_2 p_1}, \qquad \nu = \frac{p_1}{\Omega_1 s_{14} + \Omega_2 p_1},$$

$$\chi = \frac{\Phi s_{14} + \Psi\Omega_2}{\Omega_1 s_{14} + \Omega_2 p_1}, \qquad \vartheta = \frac{\Psi\Omega_1 - \Phi p_1}{\Omega_1 s_{14} + \Omega_2 p_1}.$$

Wówczas

$$q_{01} = M_{skr}\mu - \frac{d\sigma_0}{dz}\chi, \qquad q_{02} = M_{skr}\nu + \frac{d\sigma_0}{dz}\vartheta. \tag{2.2.9}$$

Strumienie naprężeń stycznych (2.2.2) po podstawieniu (2.2.9) i wprowadzeniu następujących oznaczeń:

$$\pi = \chi + \vartheta - \int_{BK}\hat{\omega}\,dA, \qquad \Theta = \chi - \int_{C51}\hat{\omega}\,dA - \int_{BL}\hat{\omega}\,dA, \qquad \Xi = \vartheta + \int_{CM}\hat{\omega}\,dA,$$

są

$$\begin{cases} q_1 = M_{skr}(\mu - \nu) - \dfrac{d\sigma_0}{dz}\pi, \\ q_2 = M_{skr}\mu - \dfrac{d\sigma_0}{dz}\Theta, \\ q_3 = M_{skr}\nu + \dfrac{d\sigma_0}{dz}\Xi. \end{cases} \tag{2.2.10}$$

Obliczmy całkowitą energię potencjalną profilu

$$U = U_0 + U_p.$$

Energia naprężeń normalnych wyrazi się wzorem

$$U_0\,dz = \int\limits_A \frac{\sigma_{\hat{\omega}}^2\,dA}{2E}\,dz = \frac{\sigma_0^2}{2E}\left(\int\limits_A \sigma_{\hat{\omega}}^2\,dA\right)dz = \frac{\sigma_0^2}{2E}\,I_{\hat{\omega}}\,dz,$$

a energia naprężeń stycznych wzorem

$$U_p\,dz = \int\limits_{14} \frac{q_1^2\,ds}{2G\delta}\,dz + \int\limits_{1234} \frac{q_2^2\,ds}{2G\delta}\,dz + \int\limits_{4651} \frac{q_3^2\,ds}{2G\delta}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2G}\left\{\int\limits_{14}\left[M_{skr}(\mu-\nu) - \frac{d\sigma_0}{dz}\pi\right]^2\frac{ds}{\delta} + \int\limits_{1234}\left(M_{skr}\mu - \frac{d\sigma_0}{dz}\Theta\right)^2\frac{ds}{\delta} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{4651}\left(M_{skr}\nu + \frac{d\sigma_0}{dz}\Xi\right)^2\frac{ds}{\delta}\right\}dz =$$

$$= \frac{1}{2G}\left\{\int\limits_{14}\left[M_{skr}^2(\mu-\nu)^2 - 2\frac{d\sigma_0}{dz}M_{skr}(\mu-\nu)\pi + \left(\frac{d\sigma_0}{dz}\right)^2\pi^2\right]\frac{ds}{\delta} + \right.$$

$$+ \int\limits_{1234}\left[M_{skr}^2\mu^2 - 2\frac{d\sigma_0}{dz}M_{skr}\mu\Theta + \left(\frac{d\sigma_0}{dz}\right)^2\Theta^2\right]\frac{ds}{\delta} +$$

$$\left. + \int\limits_{4651}\left[M_{skr}^2\nu^2 + 2\frac{d\sigma_0}{dz}M_{skr}\nu\Xi + \left(\frac{d\sigma_0}{dz}\right)^2\Xi^2\right]\frac{ds}{\delta}\right\}dz.$$

Równanie **Eulera** w postaci

$$\frac{\partial(U_0+U_p)}{\partial\sigma_0} = \frac{d}{dz}\left[\frac{\partial(U_0+U_p)}{\partial\left(\frac{d\sigma_0}{dz}\right)}\right] \tag{2.2.11}$$

dla funkcji U będzie następujące:

$$\frac{\sigma_0}{E}I_{\hat{\omega}} = \frac{1}{G}\left\{\int\limits_{14}\left[-m_{skr}(\mu-\nu)\pi + \frac{d^2\sigma_0}{dz^2}\pi^2\right]\frac{ds}{\delta} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{1234}\left[-m_{skr}\mu\Theta + \left(\frac{d^2\sigma_0}{dz^2}\right)\Theta^2\right]\frac{ds}{\delta} - \int\limits_{4651}\left(m_{skr}\nu\Xi + \frac{d^2\sigma_0}{dz^2}\Xi^2\right)\frac{ds}{\delta}\right\},$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$m_{skr} = \frac{dM_{skr}}{dz}.$$

Po uporządkowaniu otrzymamy

$$(2.2.12)\quad \frac{d^2\sigma_0}{dz^2}\,\frac{1}{G}\left(\int_{14}\pi^2\frac{ds}{\delta}+\int_{1234}\Theta^2\frac{ds}{\delta}+\int_{4651}\Xi^2\frac{ds}{\delta}\right)-\frac{\sigma_0 I_\omega^{\hat{}}}{E}-$$

$$-\frac{1}{G}m_{skr}\left[\int_{14}(\mu-\nu)\pi\frac{ds}{\delta}+\int_{1234}\mu\Theta\frac{ds}{\delta}-\int_{4651}\nu\Xi\frac{ds}{\delta}\right]=0$$

lub

$$(2.2.13)\quad \frac{d^2\sigma_0}{dz^2}-\sigma_0\,\frac{G}{E}\,\frac{I_\omega^{\hat{}}}{\int_{14}\pi^2\frac{ds}{\delta}+\int_{1234}\frac{ds}{\delta}+\int_{4651}\Xi^2\frac{ds}{\delta}}=$$

$$=m_{skr}\,\frac{\left[\int_{14}(\mu-\nu)\pi\frac{ds}{\delta}+\int_{1234}\mu\Theta\frac{ds}{\delta}-\int_{4651}\nu\Xi\frac{ds}{\delta}\right]}{\int_{14}\pi^2\frac{ds}{\delta}+\int_{1234}\Theta^2\frac{ds}{\delta}+\int_{4651}\Xi^2\frac{ds}{\delta}}.$$

Wykonując podstawienie $\sigma_0=-E\varphi''$ otrzymamy równanie różniczkowe skręcania

$$(2.2.14)\quad \varphi^{IV}-\varphi''\,\frac{G}{E}\,\frac{I_\omega^{\hat{}}}{\int_{14}\pi^2\frac{ds}{\sigma}+\int_{1234}\Theta^2\frac{ds}{\varepsilon}+\int_{4651}\Xi^2\frac{ds}{\delta}}=$$

$$=-\frac{m_{skr}}{E}\,\frac{\left[\int_{14}(\mu-\nu)\pi\frac{ds}{\delta}+\int_{1234}\mu\Theta\frac{ds}{\delta}+\int_{4651}\nu\Xi\frac{ds}{\delta}\right.}{\int_{14}\pi^2\frac{ds}{\varepsilon}+\int_{1234}\Theta^2\frac{ds}{\delta}+\int_{4651}\Xi^2\frac{ds}{\delta}}.$$

Porównując je z następującym równaniem różniczkowym skręcania pręta otwartego lub otwarto-zamkniętego

$$\varphi^{IV}-k^2\varphi''=\frac{\xi}{E}m_{skr}\qquad\left(k^2=\frac{G}{E}\,\frac{I_s}{I_\omega}\right),$$

określamy parametry k i ξ:

$$(2.2.15)\quad \begin{cases} k^2=\dfrac{G}{E}\,\dfrac{I_\omega^{\hat{}}}{\int_{14}\pi^2\frac{ds}{\delta}+\int_{1234}\Theta^2\frac{ds}{\delta}+\int_{4651}\Xi^2\frac{ds}{\delta}}, \\ \xi=-\dfrac{\int_{14}(\mu-\nu)\pi\frac{ds}{\delta}+\int_{1234}\mu\Theta\frac{ds}{\delta}+\int_{4651}\nu\Xi\frac{ds}{\delta}}{\int_{14}\pi^2\frac{ds}{\delta}+\int_{1234}\Theta^2\frac{ds}{\delta}+\int_{4651}\Xi^2\frac{ds}{\delta}}. \end{cases}$$

Stąd zastępcza sztywność skręcania Saint-Venanta i wycinkowa podana jest wzorami

$$(2.2.16)\qquad \begin{cases} I_s^{\hat{}} = \dfrac{I_\omega^{\hat{}}}{\int\limits_{14}(\mu-\nu)\pi\dfrac{ds}{\delta}+\int\limits_{1234}M\Theta\dfrac{ds}{\delta}+\int\limits_{4651}\nu\Xi\dfrac{ds}{\delta}}, \\ I_{\omega_s}^{\hat{}} = \dfrac{\int\limits_{14}\pi^2\dfrac{ds}{\delta}+\int\limits_{1234}\Theta^2\dfrac{ds}{\delta}+\int\limits_{4651}\Xi^2\dfrac{ds}{\delta}}{\int\limits_{14}(\mu-\nu)\pi\dfrac{ds}{\delta}+\int\limits_{1234}\mu\Theta\dfrac{ds}{\delta}+\int\limits_{4651}\nu\Xi\dfrac{ds}{\delta}}. \end{cases}$$

2.3. Obciążenie i warunki brzegowe dla statku o przekroju nieciągle zmiennym

Określenie parametrów I_s i I_{ω_s} przekroju złożonego pozwala wyznaczyć stan naprężenia i odkształcenia cienkościennego pręta skręcanego o dowolnym przekroju poprzecznym stałym. W celu uzyskania dostatecznego przybliżenia dla kadłuba barki lub statku należałoby uwzględnić nieciągłości przekroju spowodowane otworami w pokładzie, nadbudówkami itp.

Dla elementu o przekroju stałym wzór wyjściowy dla kąta skręcania jest następujący:

$$(2.3.1)\qquad \varphi=\varphi_0+\varphi_0' z+\frac{\varphi_0''}{k^2}(\cosh kz-1)+\frac{\varphi_0'''}{k^3}(\sinh kz-kz)+ \\ +\frac{1}{kGI_s}\int_0^z[\sinh k(z-t)-k(z-t)]\,m_{skr}(t)\,dt;$$

przedstawia on całkę znanego równania różniczkowego

$$(2.3.2)\qquad \varphi^{IV}-k^2\varphi''\zeta=m_{skr}.$$

Przyjmujemy rozkład sinusoidalny momentu skręcającego

$$m_{skr}(t)=m_0\sin\frac{2\pi}{L}t.$$

Wówczas równanie kąta skręcania będzie

$$(2.3.3)\qquad \varphi=\varphi_0+\varphi_0' z+\frac{\varphi_0''}{k^2}(\cosh kz-1)+\frac{\varphi_0'''}{k^3}(\sinh kz-kz)+ \\ +\frac{m_0}{k\xi}\left[\frac{\dfrac{2\pi}{Lk^2}\sinh kz-\dfrac{1}{k}\sin\dfrac{2\pi}{L}z}{1+\left(\dfrac{2\pi}{Lk}\right)^2}-\frac{kL}{2\pi}z+k\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\sin\frac{2\pi}{L}z\right],$$

gdzie $\xi=GI_s$.

Pochodne kąta skręcania wynoszą odpowiednio

$$(2.3.4)\qquad \varphi' = \varphi_0' + \frac{\varphi_0''}{k}\sinh kz + \frac{\varphi_0'''}{k^2}(\cosh kz - 1) + \frac{m_0}{k\xi}\times$$

$$\times\left[\frac{\frac{2\pi}{Lk}\cosh kz - \frac{2\pi}{Lk}\cos\frac{2\pi}{L}z}{1+\left(\frac{2\pi}{Lk}\right)^2} - \frac{kL}{2\pi} + \frac{kL}{2\pi}\cos\frac{2\pi}{L}z\right],$$

$$(2.3.5)\qquad \varphi'' = \varphi_0''\cosh kz + \frac{\varphi_0'''}{k}\sinh kz + \frac{m_0}{k\xi}\times$$

$$\times\left[\frac{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\frac{1}{k}\sin\frac{2\pi}{L}z + \frac{2\pi}{L}\sinh kz}{1+\left(\frac{2\pi}{Lk}\right)^2} - k\sin\frac{2\pi}{L}z\right],$$

$$(2.3.6)\qquad \varphi''' = \varphi_0'' k\sinh kz + \varphi_0'''\cosh kz + \frac{m_0}{k\xi}\times$$

$$\times\left[\frac{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3\frac{1}{k}\cos\frac{2\pi}{L}z + \frac{2\pi}{L}k\cosh kz}{1+\left(\frac{2\pi}{Lk}\right)^2} - \frac{2\pi}{L}k\cos\frac{2\pi}{L}z\right].$$

Wzory powyższe pozwolą określić bimoment i moment giętno-skręcający za pomocą zależności

$$(2.3.7)\qquad B = -EI_\omega\varphi'', \qquad M_\omega = -EI_\omega\varphi'''.$$

Dwie niewiadome stałe φ_0'' i φ_0''' występujące w równaniach (2.3.5) i (2.3.6) muszą być tak dobrane, aby był spełniony warunek ciągłości naprężeń normalnych i stycznych w przekrojach granicznych; np. między profilami A i B:

$$(2.3.8)\qquad [\sigma_A]_{z=z_1} = [\sigma_B]_{z=z_1}, \qquad [\tau_A]_{z=z_1} = [\tau_B]_{z=z_1}.$$

2.4. Ciągłość naprężeń w miejscach zetknięcia się dwóch różnych profili

Rozpatrując zagadnienie ciągłości naprężeń w miejscach zetknięcia się dwóch różnych typów profili należy zwrócić uwagę na dwa zjawiska:

(1) przekroje graniczne (lewy, prawy) posiadają różne powierzchnie wycinkowe i wobec tego w przekroju tym nastąpić może skok naprężeń;

(2) także podobna nieciągłość występuje na powierzchni swobodnej jednego z przekrojów.

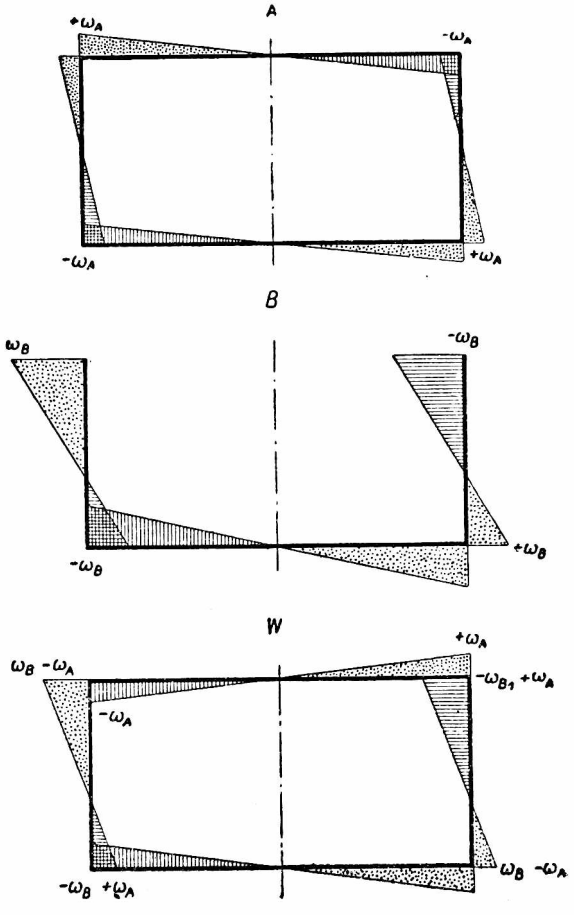
Stąd wniosek, że w przekroju granicznym musi być przyłożony zrównoważony układ obciążeń, który zniweluje skok naprężeń w elementach wspólnych obu profili oraz sprowadzi do zera naprężenia w swobodnych częściach przekroju (tj. w częściach nie stykających się z przekrojem sąsiednim).

Zamiast układu naprężeń wprowadzamy fikcyjny przekrój posiadający powierzchnię wycinkową spełniającą powyższe postulaty. Ten fikcyjny przekrój powinien spełniać warunki

$$(2.4.1)\qquad \begin{cases} \int\limits_A \omega \, dA = 0, \\ \int\limits_A \omega \, y dA = 0, \\ \int\limits_A \omega \, x dA = 0. \end{cases}$$

Można go traktować jako przekrój redukujący różnicę powierzchni wycinkowych obu sąsiednich przekrojów A i B, dla których mają być spełnione przytoczone warunki. Wzory (2.4.1) można także zapisać w postaci następującej:

$$(2.4.2)\qquad \begin{cases} \int\limits_A (\omega_B - \omega_A) dA = 0, \\ \int\limits_A (\omega_B - \omega_A) \eta dA = 0, \\ \int\limits_A (\omega_B - \omega_A) x dA = 0. \end{cases}$$



Rys. 20

Rozpatrzmy styk przekroju zamkniętego A i otwartego B (rys. 20). W celu uzyskania ciągłości naprężeń zgodnie ze wzorem (2.3.8) stwórzmy przekrój zastępczy W, którego powierzchnia wycinkowa stanowić będzie różnicę powierzchni wycinkowych obu profili sąsiednich. Jest rzeczą oczywistą, że z zależności

$$(2.4.3)\qquad \omega_W = \omega_B - \omega_A$$

wypływa nowy związek

$$S_{\omega_W} = S_{\omega_B} - S_{\omega_A}. \tag{2.4.4}$$

Wówczas dla dowolnego elementu swobodnego np. w przekroju A możemy napisać

$$\begin{cases} \sigma_A + \sigma_W = \dfrac{B_A \omega_A}{I_{\omega_A}} + \dfrac{B_W \omega_W}{I_{\omega_W}} = \dfrac{B_A \omega_A}{I_{\omega_A}} - \dfrac{B_W \omega_A}{I_{\omega_W}} = 0, \\ \tau_A + \tau_W = \dfrac{M_{\omega_A} S_{\omega_A}}{I_{\omega_A} \delta} + \dfrac{M_{\omega_W} S_{\omega_W}}{I_{\omega_W} \delta} = \dfrac{M_{\omega_A} S_{\omega_A}}{I_{\omega_A} \delta} - \dfrac{M_{\omega_W} S_{\omega_A}}{I_{\omega_W} \delta}, \end{cases} \tag{2.4.5}$$

przy spełnieniu warunku

$$\frac{B_A}{I_{\omega_A}} = \frac{B_W}{I_{\omega_W}}, \qquad \frac{M_{\omega A}}{I_{\omega_A}} = \frac{M_{\omega_W}}{I_{\omega_W}}. \tag{2.4.6.1}$$

Stąd wypływają zależności

$$\varphi_A'' = \varphi_W'', \qquad \varphi_A''' = \varphi_W'''. \tag{2.4.6.2}$$

Podobny wynik otrzymamy dla elementu wspólnego obu przekrojom A i B:

$$\sigma_A + \sigma_W = \sigma_B, \qquad \tau_A + \tau_W = \tau_B. \tag{2.4.7}$$

Podstawiając wartości naprężeń oraz korzystając z zależności (2.4.3) i (2.4.4) otrzymamy:

$$\begin{cases} \dfrac{B_A \omega_A}{I_{\omega_A}} + \dfrac{B_W \omega_W}{I_{\omega_W}} = \dfrac{B_B \omega_B}{I_{\omega_B}}, \\ \dfrac{M_{\omega_A} S_{\omega_A}}{I_{\omega_A} \delta} + \dfrac{M_{\omega_W} S_{\omega_W}}{I_{\omega_W} \delta} = \dfrac{M_{\omega_B} \omega_B}{I_{\omega_B} \delta}, \end{cases} \tag{2.4.8.1}$$

lub

$$\begin{cases} \dfrac{B_A \omega_A}{I_{\omega_A}} + \dfrac{B_W}{I_{\omega_W}} (\omega_B - \omega_B) = \dfrac{B_B}{I_{\omega_B}}, \\ \dfrac{M_{\omega_A} S_{\omega_A}}{I_{\omega_A} \delta} + \dfrac{M_{\omega_W}}{I_{\omega_W}} \dfrac{S_{\omega_A} - S_{\omega_A}}{\delta} = \dfrac{M_{\omega_B}}{I_{\omega_B}} \dfrac{S_{\omega_B}}{\delta}. \end{cases} \tag{2.4.8.2}$$

Równości (2.4.8) będą spełnione, gdy

$$\frac{B_A}{I_{\omega_A}} = \frac{B_W}{I_{\omega_W}} = \frac{B_B}{I_{\omega_B}}, \qquad \frac{M_{\omega_A}}{I_{\omega_A}} = \frac{M_{\omega_W}}{I_{\omega_W}} = \frac{M_{\omega_B}}{I_{\omega_B}}. \tag{2.4.9.1}$$

Stąd wypływają zależności podobne do (2.4.6.2)

$$\varphi_A'' = \varphi_B'', \qquad \varphi_A''' = \varphi_B'''. \tag{2.4.9.2}$$

Wynika stąd wniosek, że przy przejściu od jednego przekroju do drugiego skok bimomentu i momentu giętno-skręcającego jest proporcjonalny do wzrostu wycinkowego momentu bezwładności.

2.5. Rozkład naprężeń stycznych w przekrojach złożonych

Dla przekrojów zamkniętych i otwarto-zamkniętych podanie wycinkowego momentu statycznego S_ω nie jest jednoznaczne z określeniem rozkładu naprężeń stycznych pochodzących od momentu giętno-skręcającego M_ω. Mianowicie na skutek rozcięcia profilu zamkniętego powstanie dodatkowy strumień q zależny wyłącznie od wyboru miejsca rozcięcia, a przez to samo od wyboru początku liczenia S_ω. Dlatego w dalszych rozważaniach posłużymy się sprowadzonym wycinkowym momentem statycznym $S_{\hat{\omega}}$, składającym się z momentu S_ω, utworzonego jak dla profilu otwartego, oraz ze stałej wartości S_{ω_0}, charakteryzującej strumień napięć zamykających.

Wycinkowy moment statyczny dla danego przekroju przykładowo wyznaczymy dla elementu dwuspójnego rozpatrzonego już w p. 2.2. Rozcięcie tego przekroju w punktach B i C leżących na głównym promieniu powoduje powstanie napięć zamykających q_{01} i q_{02}.

W celu określenia tych napięć ułóżmy drugie równanie typu (2.2.5)

$$\int_{4651} \frac{q_3\,ds}{G\delta} + \int_{14} \frac{q_1\,ds}{G\delta} = \int_{4651} q_{02}\frac{ds}{\delta} + \frac{d\,\delta_0}{dz}\int_{4651}\frac{ds}{\delta}\int_{CM}\hat{\omega}\,dA - \int_{14} q_{01}\frac{ds}{\delta} +$$

$$+ \int_{14} q_{02}\frac{ds}{\delta} - \frac{d\,\sigma_0}{dz}\int_{14}\frac{ds}{\delta}\int_{BK}\hat{\omega}\,dA = 0$$

i rozwiążmy układ równań

$$(2.5.1)\qquad p_1 q_{01} - s_{14} q_{02} = -\frac{d\,\sigma_0}{dz}\psi, \qquad -s_{14} q_{01} + p_2 q_{02} = -\frac{d\,\sigma_0}{dz}\varphi,$$

gdzie

$$\varphi = \int_{4651}\frac{ds}{\delta}\int_{CM}\hat{\omega}\,dA - \int_{14}\frac{ds}{\delta}\int_{BK}\hat{\omega}\,dA.$$

Stąd

$$(2.5.2)\qquad q_{01} = -\frac{d\,\sigma_0}{dz}\,\frac{\psi p_2 + \varphi s_{14}}{p_1 p_2 - s_{14}^2}, \qquad q_{02} = -\frac{d\,\sigma_0}{dz}\,\frac{\varphi p_1 + \psi s_{14}}{p_1 p_2 - s_{14}^2}.$$

Ponieważ

$$(2.5.3)\qquad \frac{d\,\sigma_0}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\frac{B\,\omega}{I_\omega}\right]_{\omega=1} = \frac{M_\omega}{I_\omega},$$

to wzory (2.5.2) można zapisać w postaci

$$q_{01} = \frac{M_\omega}{I_\omega} S_{\omega_{01}}, \qquad q_{02} = \frac{M_\omega}{I_\omega} S_{\omega_{02}}, \tag{2.5.4}$$

gdzie

$$S_{\omega_{01}} = -\frac{\psi p_2 + \varphi s_{14}}{p_1 p_2 - s_{14}^2}, \qquad S_{\omega_{02}} = -\frac{\varphi p_1 + \psi s_{14}}{p_1 p_2 - s_{14}^2}. \tag{2.5.5}$$

Podobny rezultat otrzymamy dla profilu otwarto-zamkniętego:

$$q_1 = q_0 + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_0^s \tilde{\omega} dA, \qquad q_2 = q_0 + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_0^s \tilde{\omega} dA + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{51} \tilde{\omega} dA.$$

Warunek analogiczny do (2.2.5) dla części zamkniętej przekroju ma postać

$$\int_{14} \frac{q_1 ds}{G\delta} + \int_{1234} \frac{q_2 ds}{G\delta} = 0.$$

Stąd znajdziemy

$$q_0 = -\frac{d\sigma_0}{dz} \frac{\oint \frac{ds}{\delta} \int_0^s \tilde{\omega} dA + \int_{1234} \frac{ds}{\delta} \int_{51} \tilde{\omega} dA}{\oint \frac{ds}{\delta}}, \tag{2.5.6}$$

a dla profilu prostokątnego bez «wypustek»

$$q_0 = -\frac{ds_0}{dz} \frac{\oint \frac{ds}{\delta} \int_0^s \tilde{\omega} dA}{\oint \frac{ds}{\delta}}. \tag{2.5.7}$$

2.6. Przykład liczbowy

Opierając się na wynikach zawartych w pięciu poprzednich punktach obliczymy naprężenia σ_ω i τ_ω w barce o szerokości 12 m i długości 100 m.

Całe obliczenie można podzielić na pięć następujących etapów:

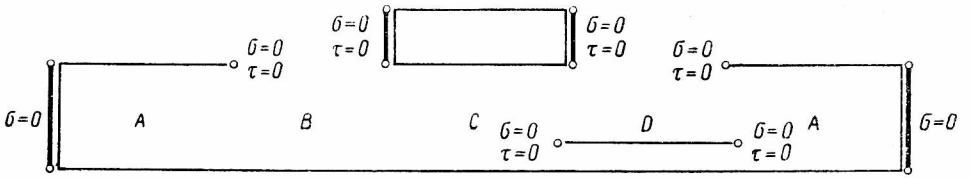
(1) obliczenie środków zginania i powierzchni wycinkowych wszystkich przekrojów barki oraz ustalenie obciążenia zewnętrznego;

(2) określenie parametrów I_ω, I_s, I_{ω_s} i k dla każdego przekroju i podstawienie ich do równań (2.3.5) i (2.3.6);

(3) wyznaczenie dla otrzymanych w ten sposób 10 równań 10 stałych całkowania φ_0'' i φ_0''' z ustalonych warunków brzegowych (rys. 21);

(4) rozwiązanie otrzymanego układu równań i określenie bimomentu i momentu giętno-skręcającego, pochodzących od obciążenia w dowolnym przekroju kadłuba;

(5) uzyskanie ciągłości naprężeń w przekrojach granicznych przez przyłożenie wtórnych układów samozrównoważonych na podstawie wzorów (2.4.6.1) i (2.4.9.1).



Rys. 21

Stosując ten tok postępowania podamy uzyskane rezultaty.

Linia środków zginania podana jest na rys. 22*b*. Powierzchnie wycinkowe wszystkich przekrojów podane są na rys. 22*c*, a na rys. 22*d* wycinkowe momenty statyczne S_ω i $S\tilde{\omega}$. Założono, że rozkład momentu skręcającego jest sinusoidalny o amplitudzie $m_0 = 42{,}5$ tm/m, co odpowiada skośnemu ustawieniu barki na fali o długości $\lambda = L$.

Tablica 2

	I_ω (m^6)	I_s (m^4)	I_{ω_s} (m^6)	k (m^{-1})
Przekrój *A*	4,32	5,75		0.211
Przekrój *B*	22,68	9.10^{-6}		0,000389
Przekrój *C*	2,856	8,185	58,148	0,242
Przekrój *D*	23,43	0,236		0,0508

Obliczone parametry I_ω, I_s, I_{ω_s} i k podano w tablicy 2, przy czym parametry charakteryzujące przekrój *C* wyznaczono na podstawie wzorów (2.2.15), przekrój *D* na podstawie wzorów dla profilu otwarto-zamkniętego części poprzedniej niniejszej pracy.

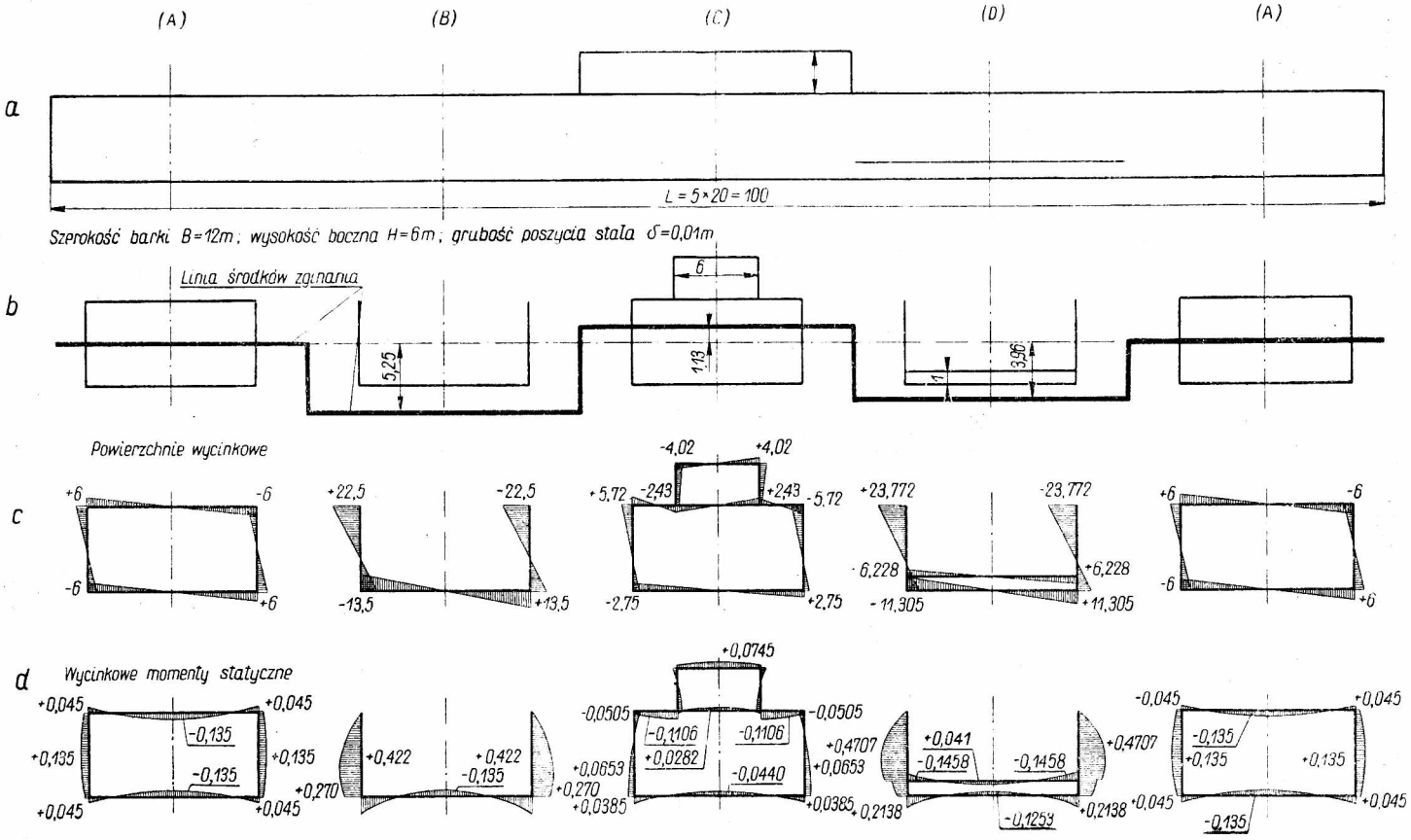
Po wstawieniu parametrów do wzorów (2.3.5) i (2.3.6) otrzymamy następujący układ równań:

$$\varphi''_{A_1} = \varphi''_{0A_1}\cosh 0{,}211\,z + \frac{\varphi'''_{0A_1}}{0{,}211}\sinh 0{,}211\,z + 0{,}9223\cdot 10^{-6}\times$$

$$\times\left(\frac{0{,}00394786\sin 0{,}062832\,z + 0{,}0132575\sinh 0{,}221\,z}{0{,}048469} - \sin 0{,}062832\,z\right), \tag{2.6.1}$$

$$\varphi'''_{A_1} = \varphi''_{0A_1}\cdot 0{,}211\sinh 0{,}211\,z + \varphi'''_{0A_1}\cosh 0{,}211\,z + 0{,}05795\cdot 10^{-6}\times$$

$$\times\left(\frac{0{,}00394786\cos 0{,}062832\,z + 0{,}211^2\cosh 0{,}211\,z}{0{,}048469} - \cos 0{,}062832\,z\right),$$


(A)
(B)
(C)
(D)
(A)
a
L = 5×20 = 100
Szerokość barki B=12m; wysokość boczna H=6m; grubość poszycia stala δ=0,01m
b
Linia środków zginania
6
5,25
1,13
1
3,36
c
Powierzchnie wycinkowe
+6
-6
-6
+6
+22,5
-22,5
-13,5
+13,5
-4,02
+4,02
+5,72
-2,43
+2,43
-5,72
-2,75
+2,75
+23,772
-23,772
6,228
+6,228
-11,305
+11,305
d
Wycinkowe momenty statyczne
+0,045
+0,045
+0,135
-0,135
+0,135
-0,135
+0,045
+0,045
+0,422
+0,422
-0,135
+0,270
+0,0745
-0,0505
-0,0505
-0,1106
-0,1106
+0,0282
+0,4707
+0,0653
+0,0653
-0,0440
+0,270
+0,0385
+0,0385
+0,041
+0,4707
-0,1458
-0,1458
+0,2138
+0,2138
-0,1253
-0,045
+0,045
-0,135
+0,135
+0,135
+0,045
+0,045
-0,135

Rys. 22

$$\varphi''_B = \varphi''_{0B} \cosh 0{,}000389\, z + \frac{\varphi'''_{0B}}{0{,}000389} \sinh 0{,}000389\, z + 0{,}59027 \times$$

$$\times \left(\frac{0{,}00394786 \sin 0{,}062832\, z + 0{,}00002442 \sinh 0{,}000389\, z}{0{,}00394801} - \sin 0{,}062832\, z \right),$$

$$\varphi'''_B = \varphi''_{0B}\, 0{,}000389 \sinh 0{,}000389\, z + \varphi'''_{0B} \cosh 0{,}000389\, z + 0{,}037088 \times$$

$$\times \left(\frac{0{,}00394786 \cos 0{,}062832\, z + 0{,}000389^2 \cosh 0{,}000389\, z}{0{,}00394801} - \cos 0{,}062832\, z \right),$$

$$\varphi''_C = \varphi''_{0C} \cosh 0{,}242\, z + \frac{\varphi'''_{0C}}{0{,}242} \sinh 0{,}242\, z + 0{,}649 \cdot 10^{-6} \times$$

$$\times \left(\frac{0{,}00394786 \sin 0{,}062832\, z + 0{,}0152053 \sinh 0{,}242\, z}{0{,}0625118} - \sin 0{,}062832\, z \right),$$

$$\varphi'''_C = \varphi''_{0C}\, 0{,}242 \sinh 0{,}242\, z + \varphi'''_{0C} \cosh 0{,}242\, z + 0{,}040778 \cdot 10^{-6} \times$$

$$\times \left(\frac{0{,}00394786 \cos 0{,}062832\, z + 0{,}242^2 \cosh 0{,}242\, z}{0{,}0625118} - \cos 0{,}062832\, z \right),$$

$$\varphi''_D = \varphi''_{0D} \cosh 0{,}0508\, z + \frac{\varphi'''_{0D}}{0{,}0508} \sinh 0{,}0508\, z + 22{,}501 \cdot 10^{-6} \times$$

$$\times \left(\frac{0{,}00394786 \sin 0{,}062832\, z + 0{,}00319186 \sinh 0{,}0508\, z}{0{,}0065313} - \sin 0{,}06283\, z \right),$$

$$\varphi'''_D = \varphi''_{0D}\, 0{,}0508 \sinh 0{,}0508\, z + \varphi'''_{0D} \cosh 0{,}0508\, z + 1{,}43783 \cdot 10^{-6} \times$$

$$\times \left(\frac{0{,}00394786 \cos 0{,}062832\, z + 0{,}0508^2 \cosh 0{,}0508\, z}{0{,}0065313} - \cos 0{,}062832\, z \right),$$

$$\varphi''_{A_2} = \varphi''_{0A_2} \cosh 0{,}211\, z + \frac{\varphi'''_{0A_2}}{0{,}211} \sinh 0{,}211\, z + 0{,}9223 \cdot 10^{-6} \times$$

$$\times \left(\frac{0{,}00394786 \sin 0{,}062832\, z + 0{,}0132575 \sinh 0{,}211\, z}{0{,}048469} - \sin 0{,}062832\, z \right),$$

$$\varphi'''_{A_2} = \varphi''_{0A_2}\, 0{,}211 \sinh 0{,}211\, z + \varphi'''_{0A_2} \cosh 0{,}211\, z + 0{,}05795 \cdot 10^{-6} \times$$

$$\times \left(\frac{0{,}00394786 \cos 0{,}062832\, z + 0{,}211^2 \cosh 0{,}211\, z}{0{,}048469} - \cos 0{,}062832\, z \right).$$

Wzory (2.4.6.2) i (2.4.9.2) określają osiem warunków dla przekrojów przejściowych, które razem z warunkami uzyskanymi z przyrównania do

zera bimomentu na końcach statku stworzą następujący układ równań pozwalający wyznaczyć stałe φ_0'' i φ_0''':

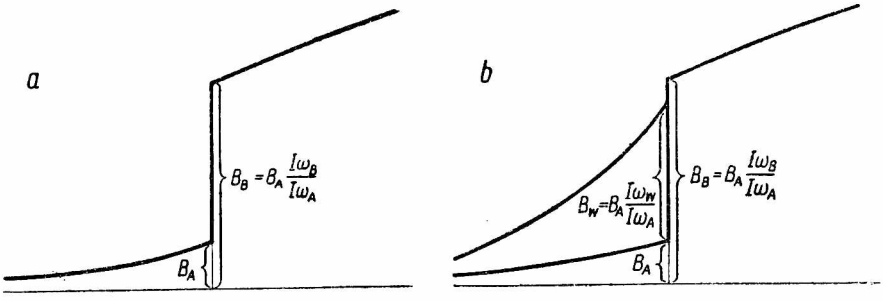
$$(2.6.2)\qquad \begin{cases} \varphi''_{A_1=-50}=0, & \varphi''_{A_2=+50}=0, \\ \varphi''_{A_1=-30}=\varphi''_{B=-30}, & \varphi'''_{A_1=-30}=\varphi'''_{B=-30}, \\ \varphi''_{B=-10}=\varphi''_{C=-10}, & \varphi'''_{B=-10}=\varphi'''_{C=-10}, \\ \varphi''_{C=+10}=\varphi''_{D=+10}, & \varphi'''_{C=+10}=\varphi'''_{D=+10}, \\ \varphi''_{D=+30}=\varphi''_{A_2=+30}, & \varphi'''_{D=+30}=\varphi'''_{A_2=+30}. \end{cases}$$

Wstawiając otrzymane wartości φ_0'' i φ_0''' do równań (2.6.1) oraz stosując wzory $B=-EI_\omega\varphi''$, $M_\omega=-EI_\omega\varphi'''$ określamy bimoment i moment giętno-skrętny oraz funkcję φ'' i φ''' w dowolnym przekroju kadłuba. Następnie z prostych wzorów

$$(2.6.3)\qquad \sigma=\frac{B\omega}{I_\omega}, \qquad \tau=\frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega\delta}.$$

otrzymamy wartości naprężeń.

Bimomenty i momenty giętno-skrętne otrzymane na podstawie wzorów (2.6.1) i (2.6.2) określają tzw. obciążenie pierwotne, nie dające ciągłości naprężeń w przekrojach granicznych (rys. 23a). Konieczne jest w tym przypadku przyłożenie bimomentów i momentów giętno-skrętnych wtórnych w każdym przekroju nieciągłości dla spełnienia zależności (2.4.5) i (2.4.7), (rys. 23b).



Rys. 23

Wzory (2.4.6) i (2.6.2) prowadzą do zależności

$$(2.6.4)\qquad \varphi''_A=\varphi''_W=\varphi''_B, \qquad \varphi'''_A=\varphi'''_W=\varphi'''_B.$$

Wzory (2.6.4) są jednocześnie jednostronnymi warunkami brzegowymi dla obciążeń wtórnych.

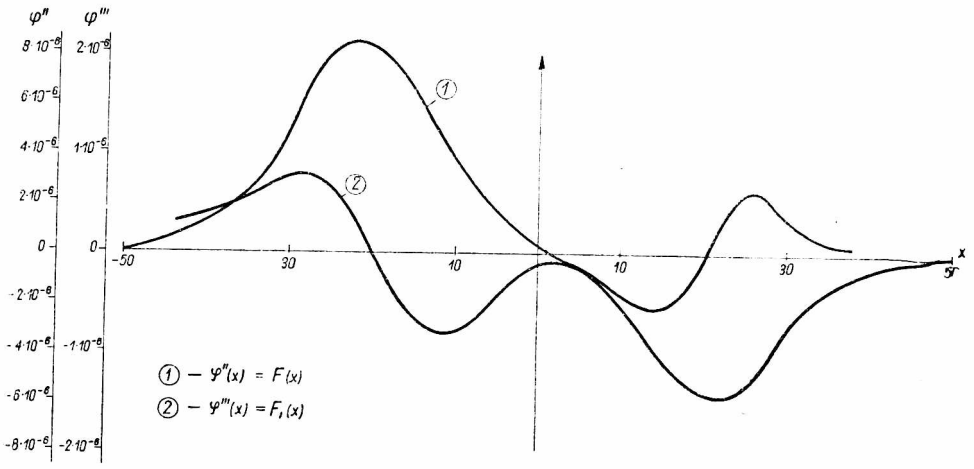
Dla obliczenia rozkładu naprężeń wtórnych można by, jak się wydaje, zastosować teorię układów zerowych (samozrównoważonych) J. N o w i ń s k i e g o.

W tym przypadku całkowite naprężenia można zapisać w postaci następującej:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma^0 + \Sigma\sigma^i, \\ \tau = \tau^0 + \Sigma\tau^i, \end{cases} \tag{2.6.5}$$

gdzie σ^0 i τ^0 odpowiadają wyżej obliczonym naprężeniom pierwotnym, zaś σ^i i τ^i są to naprężenia tworzące w ogólnym przypadku nieskończony zbiór układów zerowych.

Dopiero układy określone wzorami (2.6.5) dadzą całkowity obraz naprężeń w kadłubie skręcanym barki.



Rys. 24

Pomimo że obliczone wartości ze wzorów (2.6.3) nie dają dokładnego przebiegu naprężeń we wszystkich przekrojach barki, to jednakże można się nimi posłużyć w celu oszacowania naprężeń maksymalnych. Jak widać z rys. 24, największe wartości naprężeń (szczególnie normalnych) występują w pewnej odległości od przekrojów granicznych w miejscach, gdzie można się spodziewać raczej niewielkiego wpływu obciążeń wtórnych; np. naprężenia maksymalne w przekroju B równe $\sigma_\omega = 395$ kG/cm^2, $\tau_\omega = 105$ kG/cm^2 należałoby uważać za dość dokładne.

Przyjmując istnienie przegród poprzecznych w miejscach zmiany profilu rezygnujemy tym samym z ciągłości naprężeń stycznych na poszyciu barki w przekrojach granicznych. Wówczas warunki będą następujące:

$$
(2.6.6)\quad
\begin{cases}
\varphi''_{A_1=-50}=0\,, \qquad \varphi''_{A_2=+50}=0\,, \\
\varphi''_{A_1=-30}=\varphi''_{B=-30}\,, \qquad [\tau_{A_1}\delta_1+\tau_{A_1B}=\tau_B\delta_B]_{z=-30}\,, \\
\qquad\qquad \left[\oint \tau_{A_1B}\,\delta_{AB}\,\varrho\,ds\right]_{z=30}=0\,, \\
\varphi''_{B=-10}=\varphi''_{C=-10}\,, \qquad [\tau_B\delta_B+\tau_{BC}\,\delta_{BC}=\tau_C\delta_C]_{z=-10}\,, \\
\qquad\qquad \left[\oint \tau_{BC}\,\delta_{BC}\,\varrho\,ds\right]_{z=-10}=0\,, \\
\varphi''_{C=+10}=\varphi''_{D=+10}\,, \qquad [\tau_C\delta_C+\tau_{CD}\,\delta_{CD}=\tau_D\delta_D]_{z=+10}\,, \\
\qquad\qquad \left[\oint \tau_{CD}\,\delta_{CD}\,\varrho\,ds\right]_{z=+10}=0\,, \\
\varphi''_{D=+30}=\varphi''_{A_2=+30}\,, \qquad [\tau_D\delta_D+\tau_{DA_2}\,\delta_{DA_2}=\tau_{A_2}\delta_{A_2}]_{z=+30}\,, \\
\qquad\qquad \left[\oint \tau_{DA_2}\,\delta_{DA_2}\,\varrho\,ds\right]_{z=+30}=0\,,
\end{cases}
$$

gdzie τ_{A_1B}, τ_{BC}, τ_{CD}, τ_{DA_2}, δ_{AB}, δ_{BC}, δ_{CD}, δ_{DA_2} są to naprężenia styczne oraz grubości blach przegród w odpowiednich przekrojach. Jak widać, w tym przypadku nieciągłości naprężeń stycznych na poszyciu wyrównują naprężenia styczne panujące na obwodzie przegrody.

Na zakończenie przeprowadzimy krótkie rozważania dotyczące dokładniejszego określenia przebiegu naprężeń w pobliżu przekrojów granicznych. Mianowicie, aby uzyskać funkcję ciągłą określającą naprężenia, dodamy jeden wyraz układu wtórnego, zawierający dostateczną ilość stałych do wyznaczenia warunków brzegowych oraz równowagi (2.4.5).

2.7. Układy wyrównujące naprężenia w przekrojach granicznych

Przyjmijmy pierwszy wyraz układu wtórnego w następującej postaci:

$$
(2.7.1)\quad \varphi'' = \varphi''_{01}\cosh kz + \frac{\varphi'''_{01}}{k}\sinh kz + \varphi''_{02}\cos\frac{\pi}{l}z + \varphi'''_{02}\sin\frac{\pi}{l}z +
$$

$$
+ \varphi''_{03}\cos\frac{2\pi}{l}z + \varphi'''_{03}\sin\frac{2\pi}{l}z\,.
$$

Pochodną tej funkcji jest

$$(2.7.2)\quad \varphi''' = \varphi''_{01} k \sin kz + \varphi'''_{01} \cosh kz - \varphi''_{02} \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi}{l} z + \\ + \varphi'''_{02} \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi}{l} z - \varphi''_{03} \frac{2\pi}{l} \sin \frac{2\pi}{l} z + \varphi'''_{03} \frac{2\pi}{l} \cos \frac{2\pi}{l} z.$$

Początek układu umieszczamy w przekroju granicznym.

Uwzględniając wpływ naprężeń S a i n t - V e n a n t a musimy znaleźć pierwszą pochodną kąta skręcenia:

$$(2.7.3)\quad \varphi' = \varphi''_{01} \frac{1}{k} \sinh kz + \varphi''_{01} \frac{1}{k^2} \cosh kz + \varphi''_{02} \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi}{l} z - \\ - \varphi'''_{02} \frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi}{l} z + \varphi''_{03} \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{l} z - \varphi'''_{03} \frac{l}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{l} + C.$$

W funkcji powyższej występuje siedem stałych dowolnych:

$$\varphi''_{01},\quad \varphi'''_{01},\quad \varphi''_{02},\quad \varphi'''_{02},\quad \varphi''_{03},\quad \varphi'''_{03},\quad C.$$

Możemy jednakże podać sześć warunków brzegowych, z których następujące cztery odnoszą się do bimomentu giętno-skręcającego na końcach przedziału:

$$(2.7.4)\quad \begin{cases} z = 0, & \varphi''_W = -\dfrac{B_W}{E I_\omega}, \qquad \varphi'''_W = -\dfrac{M_\omega}{E I_\omega}, \\ z = l, & B_W = \varphi''_W = 0, \qquad M_\omega = \varphi'''_W = 0. \end{cases}$$

Pozostałe dwa warunki otrzymamy zakładając, że dla układów wtórnych nie istnieje obciążenie zewnętrzne w każdym przekroju rozpatrywanego przedziału, czyli że

$$(2.7.5.1)\quad \begin{cases} z = 0, & M_\omega + M_V = M_{skr} = 0, \\ z = l, & M_\omega + M_V = M_{skr} = 0. \end{cases}$$

Wobec tego mamy

$$(2.7.5.2)\quad \begin{cases} z = 0, & k^2 \varphi' - \varphi''' = 0, \\ z = l, & k^2 \varphi' - \varphi''' = 0. \end{cases}$$

Podstawiając do tych równań odpowiednie wartości ze wzorów (2.7.1)-(2.7.3) do (2.7.4) i (2.7.5.2) otrzymamy układ równań

$$
(2.7.6)\quad
\begin{cases}
\varphi_{02}'''\left(\dfrac{k^2 l}{\pi}+\dfrac{\pi}{l}\right)+\varphi_{03}'''\left(\dfrac{k^2 l}{2\pi}+\dfrac{2\pi}{l}\right)-k^2 C=0,\\[2ex]
\varphi_{02}'''\left(\dfrac{k^2 l}{\pi}+\dfrac{\pi}{l}\right)-\varphi_{03}'''\left(\dfrac{k^2 l}{2\pi}+\dfrac{2\pi}{l}\right)+k^2 C=0,\\[2ex]
\varphi_W''=\varphi_{01}''+\varphi_{02}''+\varphi_{03}'',\\[2ex]
\varphi_W^{\mathrm{IV}}=\varphi_{01}'''+\varphi_{02}'''\dfrac{\pi}{l}+\varphi_{03}'''\dfrac{2\pi}{l},\\[2ex]
\varphi_{01}''\cosh kl+\varphi_{01}'''\dfrac{1}{k}\sinh kl-\varphi_{02}''+\varphi_{03}=0,\\[2ex]
\varphi_{01}''k\sinh kl+\varphi_{01}'''\cosh kl-\varphi_{02}'''\dfrac{\pi}{l}+\varphi_{03}'''\dfrac{2\pi}{l}=0.
\end{cases}
$$

Obierzmy stałą C za parametr niezależny i pozostałe stałe określmy jako funkcje C. Znajdziemy wtedy

$$
(2.7.7)\quad
\begin{cases}
\varphi_{01}''=\dfrac{C}{\chi}\dfrac{\cosh kl-1}{k\sinh kl}-\varphi_W'''\dfrac{\cosh kl}{k\sinh kl},\\[2ex]
\varphi_{02}''=-\dfrac{1}{2}\varphi_W''+\dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi_W'''}{k\sinh kl}(\cosh kl-1)-\dfrac{C}{\chi}\dfrac{\cosh kl-1}{k\sinh kl},\\[2ex]
\varphi_{03}''=\dfrac{1}{2}\varphi_W''+\dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi_W'''}{k\sinh kl}(\cosh kl+1),\\[2ex]
\varphi_{01}'''=\varphi_W'''-\dfrac{C}{\chi},\qquad \varphi_{02}'''=0,\qquad \varphi_{03}'''=\dfrac{C}{\chi}\dfrac{l}{2\pi},
\end{cases}
$$

gdzie

$$\chi=\frac{1}{\dfrac{l^2}{4\pi^2}+\dfrac{1}{k^2}}.$$

Brakujące siódme równanie otrzymamy z warunku minimum energii potencjalnej.

Energia całkowita obliczona dla jednego przedziału jest

$$
(2.7.8)\qquad W=\int_0^l\left(\int_A\frac{\sigma^2\,dA}{2E}+\int_A\frac{q^2\,dA}{2G\delta}+\frac{M_v^2}{2GI_s}\right)dz.
$$

Zastępując naprężenia odkształceniami otrzymamy

$$
(2.7.9)\qquad W=\frac{EI_\omega}{2}\int_0^l(\varphi'')^2\,dz+\frac{E^2\int_A S_\omega^2\,dA}{2G\delta}\int_0^l(\varphi''')^2\,dz+\frac{GI_s}{2}\int_0^l(\varphi')^2\,dz.
$$

Podstawmy wartości stałych (2.7.7) do wzorów (2.7.1)-(2.7.3) i wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{\chi}\frac{\cosh kl-1}{k\sinh kl}\cosh kz - \frac{1}{\chi}\frac{\sinh kz}{k} - \frac{1}{\chi}\frac{\cosh kl-1}{k\sinh kl}\cos\frac{\pi}{l}z + \\
&\qquad + \frac{l}{2\pi\chi}\sin\frac{2\pi}{l}z, \\
\nu &= -\varphi'''_W\frac{\cosh kl}{k\sinh kl}\cosh kz + \varphi'''_W\frac{\sinh kz}{k} + \frac{1}{2}\varphi''_W\times \\
&\quad\times\left(\cos\frac{\pi}{l}z+\cos\frac{2\pi}{l}z\right) + \frac{1}{2}\frac{\varphi'''_W}{k\sinh kl}\cosh kl\left(\cos\frac{\pi}{l}z+\cos\frac{2\pi}{l}z\right) + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\frac{\varphi'''_W}{k\sinh kl}\left(\cos\frac{2\pi}{l}z-\cos\frac{\pi}{l}z\right), \\
\vartheta &= \frac{1}{\chi}\frac{\cosh kl-1}{\sinh kl}\sinh kz - \frac{1}{\chi}\cosh kz + \\
&\qquad + \frac{1}{\chi}\frac{\cosh kl-1}{k\sinh kl}\frac{\pi}{l}\sin\frac{\pi}{l}z + \frac{1}{\chi}\cos\frac{2\pi}{l}z, \\
\Phi &= -\varphi'''_W\frac{\cosh kl}{\sinh kl}\sinh kz + \varphi'''_W\cosh kz - \frac{1}{2}\varphi''_W\frac{\pi}{l}\times \\
&\qquad\times\left(\sin\frac{\pi}{l}z+2\sin\frac{2\pi}{l}z\right) + \frac{1}{2}\frac{\varphi'''_W}{k\sinh kl}\frac{\pi}{l}\times \\
&\qquad\times\left[(\cosh kl-1)\sin\frac{\pi}{l}z+2(\cosh kl+1)\sin\frac{2\pi}{l}z\right], \\
\varkappa &= \frac{1}{\chi}\frac{1}{k^2}\frac{\cosh kl-1}{\sinh kl}\sinh kz - \frac{1}{\chi}\frac{1}{k^2}\cosh kz - \\
&\qquad - \frac{1}{\chi}\frac{\cosh kl-1}{k\sinh kl}\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}z - \frac{1}{\chi}\frac{l^2}{4\pi^2}\cos\frac{2\pi}{l}z+1, \\
\lambda &= -\varphi'''_W\frac{\cosh kl}{k^2\sinh kl}\sinh kz + \varphi'''_W\frac{1}{k^2}\cosh kz + \frac{1}{2}\varphi''_W\frac{l}{\pi}\times \\
&\qquad\times\left(\sin\frac{\pi}{l}z+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{l}z\right) - \frac{1}{2}\frac{\varphi'''_W}{k\sinh kl}\frac{l}{\pi}\times \\
&\qquad\times\left[(\cosh kl-1)\sin\frac{\pi}{l}z-\frac{1}{2}(\cosh kl+1)\sin\frac{2\pi}{l}z\right].
\end{aligned}
\tag{2.7.10}
$$

W wyrażeniach na pochodne kąta skręcenia wyróżnijmy składniki zawierające C i składniki nie zawierające tej stałej. Znajdziemy wzory

$$
\varphi'' = C\mu+\nu, \quad \varphi''' = C\vartheta+\Phi, \quad \varphi' = C\varkappa+\lambda. \tag{2.7.11}
$$

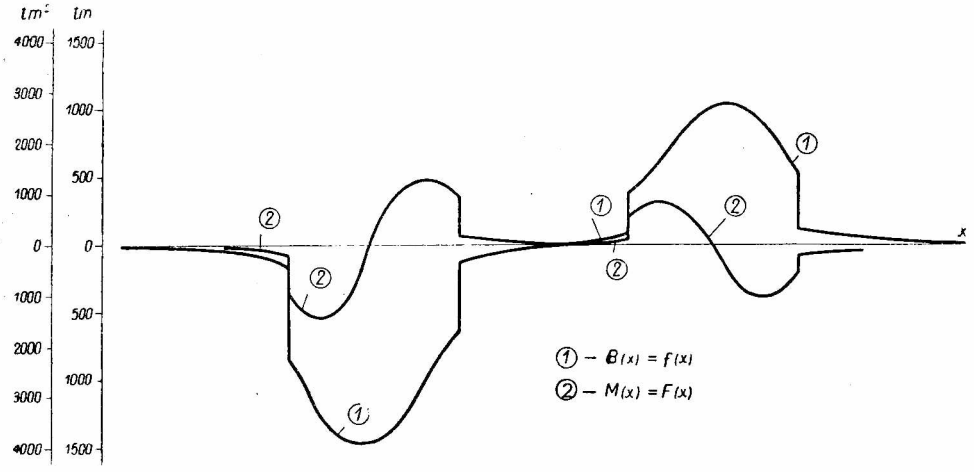
W wyrażeniu na energię (2.7.9) wprowadzimy jeszcze dodatkowe oznaczenia:

$$\alpha = EI_\omega, \qquad \beta = \frac{E^2}{G\delta}\int_A S_\omega^2 dA, \qquad \gamma = GI_s,$$

a następnie wzór (2.7.9) zróżniczkujemy i otrzymane wyrażenie przyrównamy do zera:

$$\frac{dW}{dC} = \alpha\left(C\int_0^l \mu^2 dz + \int_0^l \mu\nu\, dz\right) + \beta\left(C\int_0^l \vartheta^2 dz + \int_0^t \vartheta\Phi dz\right) + \tag{2.7.12}$$

$$+\gamma\left(C\int_0^l \varkappa^2 dz + \int_0^l \varkappa\lambda dz\right) = 0.$$



Rys. 25

W ten sposób otrzymaliśmy równanie do wyznaczenia siódmej stałej:

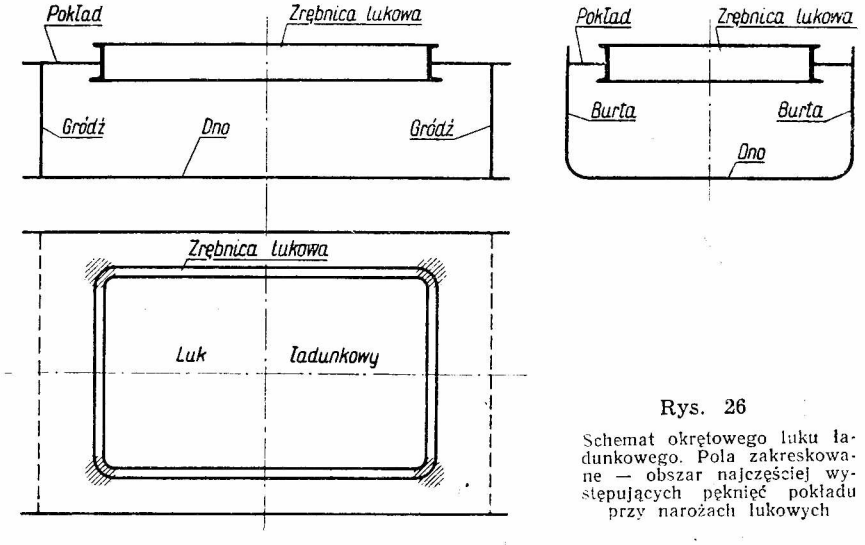
$$C = -\frac{\alpha\int_0^l \mu\nu dz + \beta\int_0^l \vartheta\Phi dz + \gamma\int_0^l \varkappa\lambda dz}{\alpha\int_0^l \mu^2 dz + \beta\int_0^l \vartheta^2 dz + \gamma\int_0^l \varkappa^2 dz}. \tag{2.7.13}$$

Obliczenie wpływu zbieżności poszycia statku na dziobie i rufie zawiera dalsza część niniejszej pracy.

3. OBLICZENIE KADŁUBA OKRĘTOWEGO JAKO KRATOWNICY PRZESTRZENNEJ

Zagadnienie skręcania kadłuba okrętowego, mimo swej doniosłości dla ogólnej teorii wytrzymałości kadłuba, znajduje w literaturze stosunkowo nikłe odzwierciedlenie. Przyczyn tego należy szukać w trudnościach zagadnienia i w skomplikowanych obliczeniach, które powinny uwzględniać zarówno zmienny przekrój kadłuba okrętowego, jak i zmienny rozkład momentu skręcającego wzdłuż długości statku. Jednocześnie obliczenia, aby przedstawiały faktyczny stan rzeczy, nie mogą opierać się na hipotezie płaskich przekrojów, lecz muszą uwzględniać występujące w rzeczywistości paczenie się przekrojów. Wreszcie obliczenia powinny uwzględniać współpracę poszczególnych wiązań okrętowych przy pracy kadłuba jako całości.

Jeśli jednak zwrócimy uwagę, że jedną z najczęściej występujących awarii okrętowych jest pękanie naroży lukowych (rys. 26), którego to zjawiska nie można przypisać działaniu momentu gnącego kadłub na fali, to dojdziemy do wniosku, że doniosłość teoretycznego opracowania zagadnienia o skręcaniu okrętu nie budzi wątpliwości.

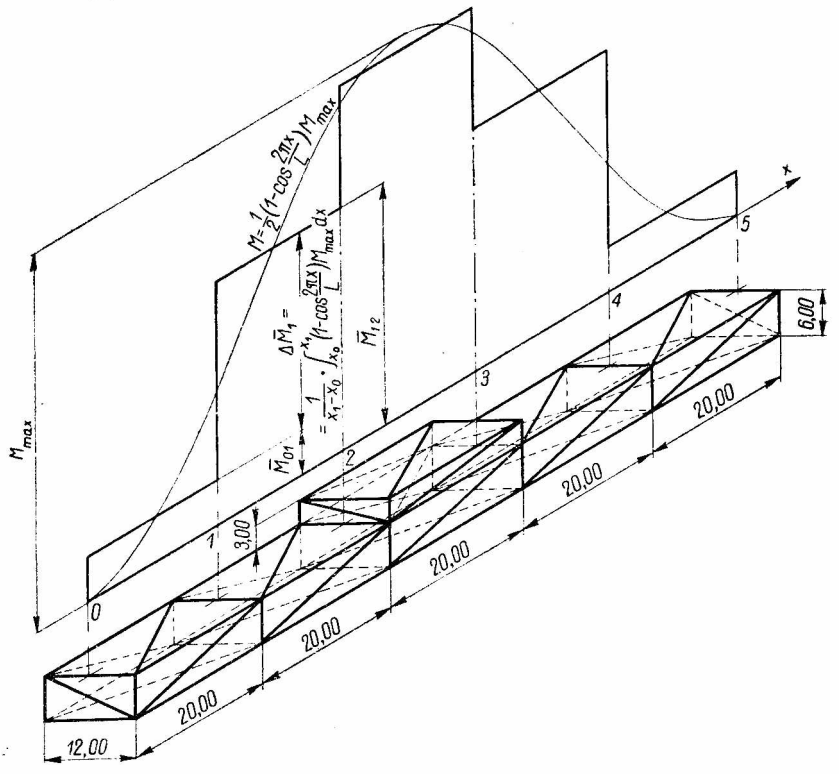


Rys. 26

Schemat okrętowego luku ładunkowego. Pola zakreskowane — obszar najczęściej występujących pęknięć pokładu przy narożach lukowych

Praca niniejsza zasadniczo zajmuje się metodą wyznaczania sił działających w narożach lukowych. W tym celu kadłub jest rozpatrywany jako kratownica przestrzenna, przedstawiona na rys. 27. Jak wynika z rysunku, przyjęto uproszczony kształt kadłuba o stałym przekroju prostokątnym. Założenie to niczym nie wpływa na zasadniczy tok rozumowania, a znacznie upraszcza obliczenia. Jednocześnie pozwala na porównanie otrzyma-

nych wyników z wynikami rozważań nad kadłubem okrętowym traktowanym jako skręcana powłoka cienkościenna, dla której wpływ zmiennego przekroju kadłuba znacznie bardziej komplikuje obliczenia, niż ma to miejsce przy kratownicy przestrzennej. Z tego powodu ograniczono się do kratownicy statycznie wyznaczalnej, tj. do kraty posiadającej przekątnie tylko w skrajnych grodziach (0 i 5) i ścianach zewnętrznych. Grodzie wewnętrzne (1, 2, 3, 4) są pozbawione przekątni, a więc zakładamy, że grodzie te nie mogą przenosić naprężeń stycznych, jak to zdarza się w rzeczywistości przy niedostatecznie usztywnionych tzw. grodziach falistych.



Rys. 27

W odróżnieniu od terminologii stosowanej przy kratownicach lotniczych będziemy stosowali terminy okrętowe: gródź oznaczać będzie płaszczyznę przechodzącą przez węzły kratownicy i prostopadłą do osi kadłuba (w lotnictwie — przegroda); przedział — odcinek kratownicy przestrzennej zawarty między dwiema sąsiednimi grodziami (w lotnictwie — gródź).

Pokład w przedziałach 1-2 i 3-4 posiada tzw. luki ładunkowe, tj. otwory obramowane ramą. Jeśli więc potrafimy obliczyć siły działające w gór-

nych przekątniach 1-2 i 3-4 i siły te potraktujemy jako obciążenia zewnętrzne wspomnianych ram, to obliczenie momentów narożnikowych w ramach daje, łącznie ze znajomością sił w otaczających pokład podłużnicach i poprzecznicach, realne podstawy do obliczenia naprężeń w narożnikach lukowych. Przedział 2-3 posiada nadbudówkę nad całym pokładem. Obciążeniem zewnętrznym dla nadbudówki będzie część siły działającej w górnej przekątni pokładu w przedziale 2-3.

Wartości sił w prętach naszej kratownicy przestrzennej obliczamy jako funkcję maksymalnego momentu skręcającego. Rozkład momentu skręcającego wzdłuż statku nie wpływa na tok rozumowania. Dla naszego przypadku przyjęto na podstawie bardzo nielicznych danych w literaturze rozkład momentu skręcającego w postaci

$$M = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{L}\right) M_{max}. \tag{3.1}$$

Dla konkretnego kadłuba okrętowego można M_{max} wyliczyć ściśle lub też stosować podany przez S i w i e r c i e w a, [17], przybliżony wzór na maksymalny moment skręcający na owrężu

$$M_{max} = k\,\gamma\, r\, B^2 L, \tag{3.2}$$

gdzie k oznacza współczynnik będący funkcją stosunku długości kadłuba i długości fali L/λ, długości kadłuba do jego szerokości L/B oraz współczynnika pełnotliwości wodnicy α, γ oznacza ciężar właściwy wody, r połowę wysokości fali (w praktyce $r = L/40$), B szerokość kadłuba i L długość kadłuba.

W naszym przypadku przyjęto początkowo $M_{max} = 1$ oraz uwzględniając, że pręty kratownicy mogą przenosić tylko siły osiowe (a więc obciążenie zewnętrzne może działać tylko na węzły kratownicy), zastąpiono krzywoliniowy rozkład momentu skręcającego łamaną linią schodkową ze skokami na grodziach. Wielkości skoków na kolejnych przegrodach i, k określono z zależności

$$\bar{M}_{ik} = \frac{1}{x_k - x_i}\int_{x_i}^{x_k} M\,dx = \sqrt{\frac{1}{2(x_k - x_i)}}\int_{x_i}^{x_k}\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{L}\right)dx. \tag{3.3}$$

Obliczenie momentu skręcającego poszczególne przedziały zawiera tablica 3.

Rozwiążemy zagadnienie kratownicy przestrzennej metodą niewiadomych sił deplanujących, opartą na rozważaniach W a g n e r a, [18], a rozpowszechnioną w piśmiennictwie polskim przez G r z ę d z i e l s k i e g o,

[19]. Należy zwrócić uwagę, że dzięki płaskości wszystkich czterech ścian kratownicy podstawowej (jako kratownicę podstawową traktujemy sam kadłub bez nadbudówki) można metodę Grzędzielskiego stosować bez zastrzeżeń. W przypadku istnienia załamanych ścian bocznych

Tablica 3

$$M_{ik} = \frac{1}{x_k - x_i} \int_{x_i}^{x_k} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2a}\left[a - \frac{L}{2\pi}\left(\sin\frac{2\pi}{L}x_k - \sin\frac{2\pi}{L}x_i\right)\right] =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}397888\left(\sin\frac{2\pi}{L}x_k - \sin\frac{2\pi}{L}x_i\right).$$

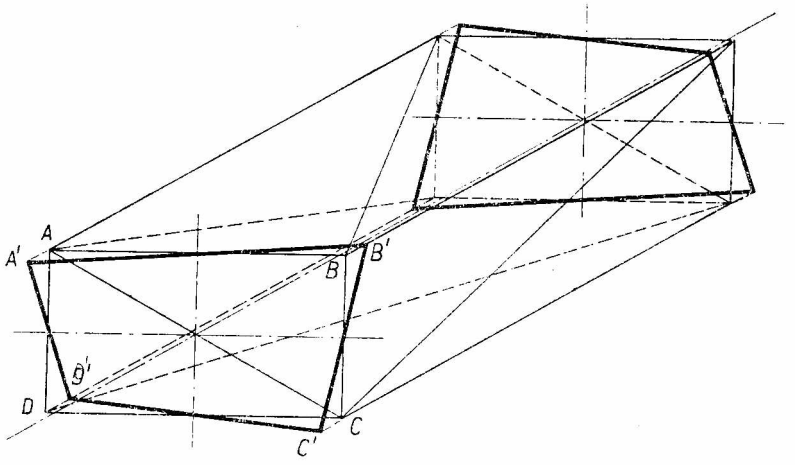
k	0	1	2	3	4	5
$x_k = 20\,k$	0,00	20,00	40,00	60,00	80,00	100,00
$2\pi\frac{x_k}{L} = \frac{2\pi}{100}x_k$	0,0000	1,256638	2,153272	3,769908	5,026544	6,28318
$\sin 2\pi\frac{x_k}{L}$	0,000000	0,95106	0,58779	—0,58779	—0,95106	0,0000
$\sin 2\pi\frac{x_k}{L} - \sin 2\pi\frac{x_i}{L}$	0,00000	0,95106	—0,36327	—1,17558	—0,36327	0,95106
$0.397888\left(\sin 2\pi\frac{x_k}{L} - \sin 2\pi\frac{x_i}{L}\right)$	0,00000	0,378415	—0,144541	—0,467749	—0,144541	0,378415
M_{ik}	0,000000	0,121585	0,644541	0,967749	0,644541	0,121585

kadłuba metoda Grzędzielskiego nie daje dokładnych wyników, gdyż pomija występujące w tym przypadku dodatkowe siły w narożnikach grodzi. Siły te mogą znacznie wpłynąć na całkowitą wartość sił w prętach grodzi. Na fakt ten zwrócił uwagę w swej nieopublikowanej jeszcze pracy Mierzejewski, [20]. Prawidłową metodę rozwiązywania zagadnienia kratownic przestrzennych w przypadku załamanych ścian bocznych podaje Ebner, [21]. Metoda jego oparta jest również na rozważaniach Wagnera.

Zasady zastosowanej metody są następujące.

Pojedynczy przedział sześciościenny ograniczony grodziami i, k kratownicy przestrzennej, poddany działaniu przyłożonego na grodziach i i k momentu skręcającego M_{ik}, ulegnie odkształceniu, w szczególności ulegną deplanacji płaskie początkowo grodzie skrajne (rys. 28). Deplanacja ta powstaje pod wpływem działania bimomentu sił A, sił deplanujących wywołanych momentem skręcającym. Jeśli teraz złączymy nasz przedział $i\,k$ z następnym przedziałem $k\,l$ (w naszym przypadku oba przedziały są

identyczne pod względem kształtu i wymiarów, co jednak nie jest warunkiem koniecznym), również obciążonym na grodziach k i l momentem $M_{kl} \neq M_{ik}$, to gródź k ulegnie również deplanacji na ogół odmiennej co do wielkości i kierunku od deplanacji wywołanej momentem M_{ik}. Warunek nierozdzielności wymaga jednak jednoznacznie określonego wspólnego dla przedziałów ik i kl odkształcenia grodzi k.



Rys. 28

Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy w stosunku do dalszych przedziałów (na ogół o dowolnych kształtach i wymiarach) $l\,m$, $m\,n$, ..., obciążonych momentami skręcającymi M_{lm}, M_{mn}, ...

Uwzględniając warunek nierozdzielności oraz warunki równowagi najpierw poszczególnych grodzi, następnie poszczególnych prętów w grodzi, dochodzimy do równania trzech bimomentów

$$\varepsilon_k^i A_i + \varepsilon_k^k A_k + \varepsilon_k^l A_l = N_k\,, \tag{3.4}$$

gdzie ε_k^i, ε_k^k i ε_k^l są funkcjami parametrów określających wyłącznie geometryczne kształty kratownicy, zaś wyraz wolny N_k jest funkcją obciążenia zewnętrznego sąsiadujących przedziałów $i\,k$ oraz $k\,l$. Wielkość N_k określona jest wzorem

$$N_k = \mu_k^l M_{kl} - \mu_k^i M_{ik}\,, \tag{3.5}$$

przy czym współczynniki μ_k^l i μ_k^i są również zależne wyłącznie od wielkości określających geometryczne kształty kratownicy.

Oznaczmy przez b_i, b_k, ... szerokość kadłuba na odpowiednich grodziach i, k, ..., przez c_i, c_k, ... wysokości kadłuba na odpowiednich grodziach, przez a_{ik}, a_{kl}, ... kolejne odległości sąsiednich grodzi.

Wprowadźmy poza tym oznaczenia

$$F_i = b_i c_i, \qquad K_{ki} = b_i c_k + b_k c_i. \tag{3.6}$$

Wówczas możemy wyrazić współczynniki występujące w równaniach (3.4) i (3.5) przez wymienione wyżej wielkości w sposób następujący:

$$\begin{cases} \varepsilon_k^i = \dfrac{F_i}{K_{ki} a_{ki}}, \qquad \varepsilon_k^k = -\left[\left(1 - \dfrac{F_i}{K_{ki}}\right)\dfrac{1}{a_{ki}} + \left(1 - \dfrac{F_l}{K_{lk}}\right)\dfrac{1}{a_{lk}}\right], \\ \varepsilon_k^l = \dfrac{F_l}{K_{lk} a_{lk}}, \qquad \mu_k^i = \dfrac{b_i}{K_{ki} b_k}, \qquad \mu_k^l = \dfrac{b_l}{K_{lk} b_k}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Uwzględniając, że w naszym przykładzie

$$b_i = b_k = \cdots = b = 12 \text{ m}, \qquad c_i = c_k = \cdots = c = 6 \text{ m},$$
$$a_{ik} = a_{kl} = \cdots = a = 20 \text{ m},$$

otrzymamy również równość wyrażeń

$$F_i = F_k = \cdots = F = b\,c = 12 \cdot 6 = 72 \text{ m}^2,$$
$$K_{ki} = K_{lk} = \cdots = K = 2\,F = 2 \cdot 72 = 144 \text{ m}^2,$$
$$\mu_i^k = \mu_k^l = \cdots = \mu = \frac{1}{K} = \frac{1}{144} = 0{,}006944\,\frac{1}{\text{m}^2}.$$

Należy zwrócić uwagę, że z samego fizycznego charakteru zjawiska wynika, że grodzie skrajne jako umownie zamocowane przegubowo w narożnikach mogą deplanować się swobodnie, skąd bezpośrednio wynika, że siły deplanujące w grodziach skrajnych są równe zeru, tj. w naszym przypadku mamy $A_0 = A_5 = 0$.

Po wstawieniu wartości liczbowych do wyrażeń na współczynniki w równaniach trzech bimomentów otrzymamy układ czterech równań z czterema niewiadomymi:

$$\begin{aligned} -0{,}5\ A_1 + 0{,}025\ A_2 &= -0{,}003632, \\ 0{,}025\ A_1 - 0{,}05\ A_2 + 0{,}025\ A_3 &= -0{,}002244, \\ 0{,}025\ A_2 - 0{,}05\ A_3 + 0{,}025\ A_4 &= \ \ 0{,}002244, \\ 0{,}025\ A_3 - 0{,}05\ A_4 &= \ \ 0{,}003632. \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego układu równań daje siły deplanujące $A_0 = 0$, $A_1 = -0{,}105122$, $A_2 = -0{,}064958$, $A_3 = 0{,}064958$, $A_4 = 0{,}105122$, $A_5 = 0$.

Siły te wyrażone są w takich samych jednostkach, w jakich była wyrażona siła wchodząca do wielkości momentu skręcającego, i obliczone są

dla $M_{max} = 1$. Siły we wszystkich prętach kratownicy możemy teraz określić jako funkcje znalezionych sił deplanujących. Nie będziemy jednak od razu wyznaczali całkowitych sił w prętach, lecz siły jednostkowe, tj. siły w prętach odniesione do długości pręta,

$$s_i = \frac{S_i}{l_i}. \tag{3.8}$$

Uzasadnienie takiego postępowania można znaleźć w ogólnych rozważaniach teoretycznych. Korzyści stąd wynikające są widoczne, zwłaszcza przy obliczaniu sił w podłużnicach i ukośnicach ścian bocznych kratownicy.

Jednostkowe siły w prętach grodzi pośrednich obliczamy z zależności

$$\frac{B_k}{b_k} = -\frac{M_{ki}}{K_{ki}}\frac{b_i}{b_k} + \frac{A_k}{a_{ki}} - \frac{F_i}{K_{ki}\,a_{ki}}(A_i + A_k) \tag{3.9.1}$$

lub

$$\frac{B_i}{b_i} = -\frac{M_{ki}}{K_{ki}}\frac{b_k}{b_i} - \frac{A_i}{a_{ki}} + \frac{F_k}{K_{ki}\,a_{ki}}(A_i + A_k), \tag{3.9.2}$$

$$\frac{C_k}{c_k} = -\frac{M_{ki}}{K_{ki}}\frac{c_i}{c_k} - \frac{A_k}{a_{ki}} + \frac{F_i}{K_{ki}\,a_{ki}}(A_i + A_k) \tag{3.10.1}$$

lub

$$\frac{C_i}{c_i} = \frac{M_{ki}}{K_{ki}}\frac{c_k}{c_i} + \frac{A_i}{a_{ki}} - \frac{F_k}{K_{ki}\,a_{ki}}(A_i + A_k). \tag{3.10.2}$$

Siły B_k, B_i, C_k i C_i oznaczają całkowite siły w odpowiednich poprzecznicach i słupach grodzi. Wzory (3.9) i (3.10) są słuszne, jeśli na grodzi nie działa obciążenie zewnętrzne. Jeżeli grodzie są obciążone parą sił poziomych, to różnica sił obliczonych np. dla grodzi k ze wzorów (3.9.1) i (3.9.2) musi być równa przyrostowi zewnętrznego momentu skręcającego na grodzi k, tj.

$$\left[\frac{B_k}{b_k}\right]_k - \left[\frac{B_i}{b_i}\right]_k = \frac{M_{kl}}{F_k} - \frac{M_{ik}}{F_k} = \frac{\Delta M_k}{F_k}. \tag{3.11}$$

Analogicznie, jeśli obciążenie zewnętrzne w postaci pary sił pionowych działa na gródź, jak ma to miejsce w naszym przypadku, to

$$\left[\frac{C_k}{c_k}\right]_k - \left[\frac{C_i}{c_i}\right]_k = \frac{\Delta M_k}{F_k}. \tag{3.12}$$

Dla obliczenia sił jednostkowych w prętach podłużnic i przekątni wprowadzamy pomocnicze funkcje parametrów określających geometryczne kształty kratownicy:

$$W_k^{ki} = \frac{F_k}{K_{ki}\, a_{ki}} \frac{b_i}{b_k}, \tag{3.13}$$

$$G_k^{ki} = \frac{F_k}{K_{ki}\, a_{ki}} \frac{c_i}{c_k}, \tag{3.14}$$

$$W_i^{ik} = \frac{F_i}{K_{ki}\, a_{ki}} \frac{b_k}{b_i}, \tag{3.15}$$

$$G_i^{ik} = \frac{F_i}{K_{ki}\, a_{ki}} \frac{c_k}{c_i}. \tag{3.16}$$

Łatwo zauważyć, że w przypadku naszego kadłuba zachodzi równość

$$W_k^{ki} = G_k^{ki} = W_i^{ik} = G_i^{ik} = \frac{F}{Ka} = 0{,}025\,\frac{1}{\mathrm{m}}.$$

W ogólnym przypadku jednostkowe siły w prętach podłużnic i przekątni, np. dla przedziału ik, obliczamy według niżej podanego schematu:

$$\left(\frac{S}{l}\right)_{ki} = \left\{\begin{array}{ccc} \pm W_i^{ik} A_i & \longrightarrow & \pm W_k^{ki} A_k \\ & \searrow\!\!\!\times & \\ \pm G_i^{ik} A_i & \longrightarrow & \pm G_k^{ik} A_k \end{array}\right\} \pm \frac{M_{ki}}{K_{ki}}. \tag{3.17}$$

Podłużnice obliczamy według schematu $W + G$ albo $G + W$, przekątnie według schematu $W + W$ lub $G + G$. O zastosowaniu tego lub innego schematu decyduje przynależność podłużnicy do ściany górnej lub bocznej, przy czym kierujemy się umową, że podłużnica należy do tej ściany, w której leży przekątnia, schodząca się z tą podłużnicą w grodzi nieobciążonej.

Obliczenie sił jednostkowych i całkowitych w prętach naszej kratownicy podstawowej dla $M_{max} = 1$ podaje tablica 4, odpowiednie zaś wykresy przedstawione są na rysunkach 29 i 30. Obliczenia te jednak nie uwzględniają istnienia nadbudówki, która obciążona jest częścią reakcji górnej ukośnicy U_{23}^{gd}.

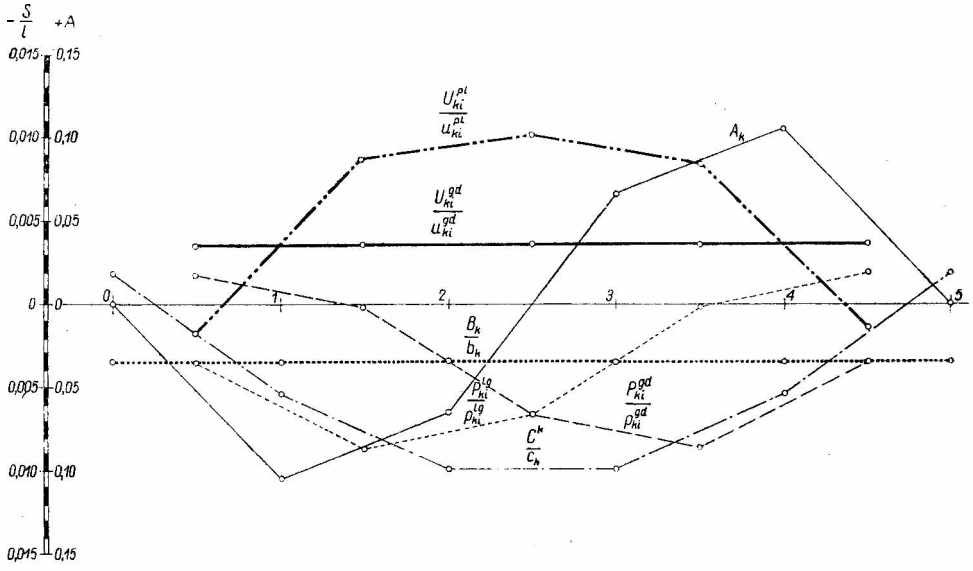
Jeśli jednak weźmiemy pod uwagę, że na ogół w obrębie nadbudówki istnieją w pokładzie kadłuba podstawowego otwory, jak szyb maszynowy, szyb kotłowy itp., oraz że otwory te są stosunkowo słabo obramowane (w każdym razie bez porównania słabiej niż luki ładunkowe), to możemy przyjąć, że partia pokładu w przedziale 2 - 3 nie może przenosić na-

Tablica 4. Obliczenie sił jednostkowych w prętach. Układ statycznie wyznaczalny

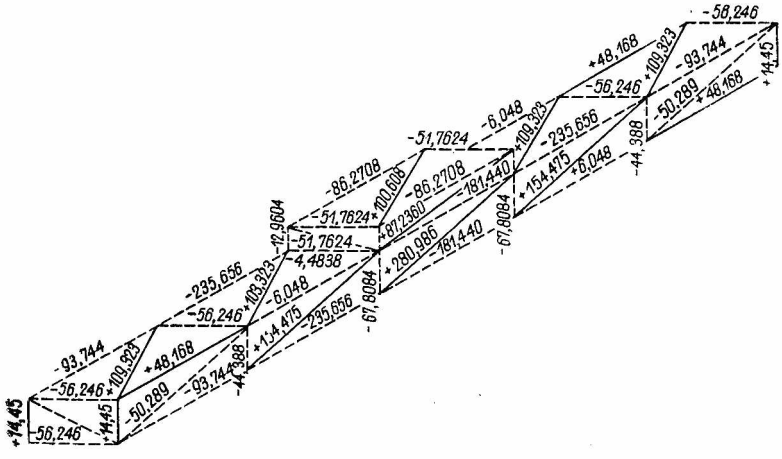
k	1	2	3	4	5
A_k	—0,105122	—0,064958	0,064958	0,105122	0,00000
M_{ik}	0,121585	0,644541	0,967749	0,644541	0,121585
$\frac{M_{ik}}{k}$	0,000844	0,004476	0,006720	0,004476	0,000844
$\frac{F}{Ka}(A_i+A_k)$	—0,002628	—0,004252	0,000000	0,004252	0,002628
$\frac{A_k}{a}$	—0,005256	—0,003248	0,003248	0,005256	0,000000
$\frac{C_k}{c_k}$	0,001784	—0,005480	—0,009968	—0,005480	0,001784
$\frac{A_i}{a}$	0,000000	—0,005256	—0,003248	0,003248	0,005256
$\frac{C_i}{c_i}$	0,001784	—0,005480	—0,009968	—0,005480	0,001784
$\frac{B_k}{b}$	—0,003472	—0,003472	—0,003472	—0,003472	—0,003472
$\frac{B_i}{b}$	—0,003472	—0,003472	—0,003472	—0,003472	—0,003472
$W_k^{ki} A_i$	0,000000	—0,002628	—0,001624	0,001624	0,002628
$W_k^{ki} A_k$	—0,002628	—0,001624	0,001624	0,002628	0,000000
$\frac{P_{ki}^{pg}}{p}$	0,001784	—0,000224	—0,006720	—0,008728	—0,003472
$\frac{P_{ki}^{lg}}{p}$	—0,003472	—0,008728	—0,006720	—0,000224	0,001784
$\frac{U_{ki}^{gd}}{u^{gd}}$	0,003472	0,003472	0,003472	0,003472	0,003472
$\frac{U_{ki}^{pl}}{u^{pl}}$	—0,001784	0,005480	0,009968	0,005480	—0,001784

prężeń stycznych. W takim przypadku nadbudówka nad tak określoną partią pokładu jest wiązaniem koniecznym dla zapewnienia całej konstrukcji dostatecznej sztywności. Wówczas nadbudówka spełnia rolę brakującej przekątni, a cały przedział 2 - 3 łącznie z nadbudówką możemy traktować jako kratownicę przestrzenną statycznie wyznaczalną, obciążo-

ną częścią obliczonej uprzednio siły działającej w górnej przekątni przedziału 2 - 3 (rys. 31).



Rys. 29



Rys. 30

Dla obliczenia sił w prętach nadbudówki posłużymy się metodą Grzędzielskiego i Kostki, [22], opartą również na rozważaniach Wagnera i wykorzystującą znane już zależności (3.9) i (3.10).

Oznaczamy przez U_g część siły w przekątnej U_{23}^{gd} przenoszoną przez nadbudówkę, przez U_d część siły przenoszoną przez kadłub. Stosując wprowadzone już oznaczenia oraz oznaczając jeszcze wysokość nadbudówki przez h, zaś poszukiwane siły w słupach nadbudówki przez X otrzymamy z zależności (3.9) i (3.10)

$$X = \frac{U_{23}^{gd}}{u_{23}^{gd}\left[\frac{1}{2c} + \frac{1}{h}\,\frac{ab}{bh(a+b)}\right]} = 0{,}020838. \tag{3.18}$$

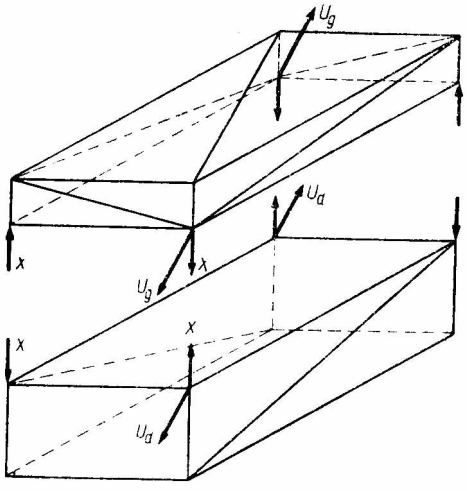
Mając określoną siłę X można obliczyć siły w pozostałych prętach nadbudówki skręcanej momentem

$$M = Xb = \tag{3.19}$$
$$= 0{,}020838 \cdot 12 = 0{,}230056.$$

Przyjmując wartość maksymalnego momentu według podanego przez Siwiercewa wzoru (3.2), gdzie przyjęto średnią wartość współczynnika $k = 0{,}0375$, otrzymujemy

$$M_{max} = k\gamma rB^2L = 1350 \text{ tm}. \tag{3.20}$$

Mnożąc wielkości sił jednostkowych w prętach, obliczone w tablicy 4, przez 1350 otrzymamy wielkości całkowitych sił w prętach wyrażone w tonach.



Rys. 31

Wykaz tych sił podaje tablica 5.

W tablicy tej uwzględniono długości przekątni równe odpowiednio

$$u^{gd} = \sqrt{a^2 + b^2} = 23{,}3238 \text{ m}, \qquad u^{pl} = \sqrt{a^2 + c^2} = 20{,}8806 \text{ m}.$$

Obliczone w powyższy sposób siły w poszczególnych prętach dają pełny obraz obciążenia poszczególnych partii i wiązań kadłuba podczas skręcania. Wyniki obliczeń mogą być wyzyskane do dokładnego obliczenia rozkładu naprężeń metodami ścisłej teorii sprężystości. W przypadkach bardziej skomplikowanych, w których metody ścisłe byłyby zbyt żmudne lub kłopotliwe, mamy konkretne podstawy do przeprowadzenia racjonalnych prób modelowych np. elastooptycznych.

Siły w prętach nadbudówki obciążonej tylko obliczonym uprzednio momentem skręcającym

$$M_N = 0{,}230056 \cdot M_{max} = 310{,}574 \text{ tm}$$

obliczymy z prostej zależności sił jednostkowych we wszystkich prętach nadbudówki

$$\left(\frac{S}{l}\right)_N = \pm \frac{M_N}{K_N}. \tag{3.21}$$

Zależność ta wynika ze wzorów (3.9) i (3.10), jeśli zwrócimy uwagę, że dla nadbudówki

$$b_i = b_k = b = 12{,}00 \text{ m}, \qquad c_i = c_k = h = 3{,}00 \text{ m}$$

oraz że na nadbudówkę oprócz momentu skręcającego nie działają siły deplanujące A.

Stąd

$$K_N = 2bh = 72 \text{ m}^2,$$

zaś jednostkowe siły

$$\left(\frac{S}{l}\right)_N = \pm 4{,}31353 \text{ t/mb}.$$

Obliczywszy uprzednio jeszcze długość bocznych ukośnic nadbudówki

$$u_N^{pl} = \sqrt{a^2 + h^2} = 20{,}2238 \text{ m},$$

możemy obliczyć siły całkowite w prętach nadbudówki. Siły te wynoszą

w słupach	$C_N = -4{,}31353 \cdot 3$	$= -12{,}9406$ t,
w poprzecznicach	$B_N = -4{,}31353 \cdot 12$	$= -51{,}7624$ t,
w podłużnicy	$P_N = -4{,}31353 \cdot 20$	$= -86{,}2706$ t,
w ukośnicy bocznej	$U_N^{pl} = +4{,}31353 \cdot 20{,}2238$	$= +87{,}2360$ t.
w ukośnicy górnej	$U_N^{g} = +4{,}31353 \cdot 23{,}3238$	$= +100{,}608$ t.

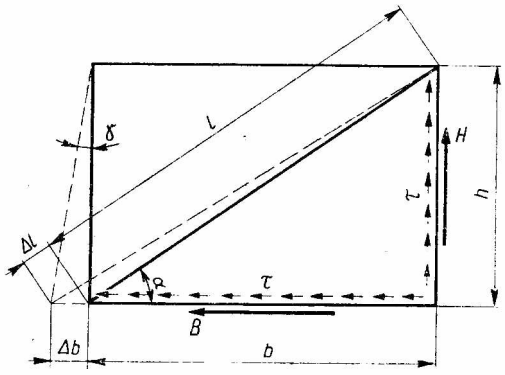
Oczywiście w prętach należących zarówno do kadłuba podstawowego, jak i do nadbudówki panują sumaryczne siły, równe uprzednio obliczonym w tablicach 4 i 5. Zakładamy, że część sił obliczoną powyżej przenosi nadbudówka.

Jak wynika z tych krótkich rozważań, rozpatrzenie kadłuba okrętowego jako kratownicy przestrzennej może oddać pewne usługi przy określeniu sił powstających przy skręcaniu. Ponieważ w warunkach normalnej pracy statku prawie nigdy nie powstaje samo skręcanie, lecz niemal zawsze połączone jest ono ze zginaniem, więc siły całkowite w prętach będą sumą sił powstających przy skręcaniu i przy zginaniu. Obliczanie kratownicy na zginanie nie przedstawia już specjalnych trudności, gdyż przy zginaniu pracują tylko ściany pionowe, a więc kraty płaskie, które oblicza się elementarnymi metodami.

Tablica 5. Obliczenie sił całkowitych w prętach

k		0	1	2	3	4	5
Słupy	$C_k\,(M_{max})$	0,010704	— 0,032880	— 0,059814	— 0,059814	— 0,032880	0,010704
	C_k t	14,450	— 44,388	— 80,749	— 80,749	— 44,388	14,450
Poprzecznice	$B_k\,(M_{max})$	— 0,041664	— 0,041664	— 0,041664	— 0,041664	— 0,041664	— 0,041664
	B_k t	— 56,246	— 56,246	— 56,246	— 56,246	— 56,246	— 56,246
Podłużnice							
prawe górne	$P_{ik}^{pg}\,(M_{max})$		0,035680	— 0,004480	— 0,134400	— 0,174560	— 0,069440
i lewe dolne	P_{ik}^{pg} t		48,168	— 6,048	— 181,440	— 235,656	— 93,744
prawe dolne	$P_{ik}^{lg}\,(M_{max})$		— 0,069440	— 0,174560	— 0,134400	— 0,004480	0,035680
i lewe górne	P_{ik}^{lg} t		— 93,744	— 235,656	— 181,440	— 6,048	48,168
Ukośnice							
górne i dolne	$U_{ik}^{gd}\,(M_{max})$		0,080980	0,080980	0,080980	0,080980	0,080980
	U_{ik}^{gd} t		109,323	109,323	109,323	109,323	109,323
prawe i lewe	$U_{ik}^{pl}\,(M_{max})$		— 0,037251	0,114426	0,208138	0,114426	— 0,037251
	U_{ik}^{pl} t		— 50,289	154,475	280,986	154,475	— 50,289

Należy jeszcze raz podkreślić, że w przykładzie powyższym rozpatrywaliśmy kratownicę statycznie wyznaczalną, w której siły powstające w prętach są zależne tylko od obciążenia zewnętrznego i kształtów kratownicy, nie zależą zaś od sztywności poszczególnych prętów w odróżnieniu od kratownicy statycznie niewyznaczalnej (np. w przypadku gdy grodzie mogą przenosić naprężenia tnące), dla której sztywność prętów odgrywa istotną rolę.



Rys. 32

Powyższy przykład obrazuje więc jeden przypadek skrajny odpowiadający kadłubowi o bardzo wiotkich grodziach, nie przenoszących żadnych sił ścinających.

Zajmiemy się obecnie drugim skrajnym przypadkiem odpowiadającym kadłubowi, w którym grodzie mogą przenosić siły ścinające. Istotnym zagadnieniem w tym przypadku będzie przejście od modelu cienkościennego do kratowego. W rozważaniach niniejszych zastępcze sztywności ukośnic dobierzemy w ten sposób, aby wydłużenie przekątnej blachy, znajdując się rzeczywiście pod wpływem działających na nią sił tnących, równe było wydłużeniu pręta zastępczego pod wpływem siły osiowej.

Stosując oznaczenia podane na rys. 32 założenie powyższe możemy wyrazić wzorem

$$\Delta l = \Delta b \cos \alpha. \tag{3.22}$$

Ze znanych zależności $\gamma = \tau/G$, $\Delta l = Pl/EF$ oraz przyjmując, że siły tnące na krawędziach blachy wyrażają się wzorami $B = b\delta\tau$, $H = h\delta\tau$, możemy wyznaczyć siłę $P = \sqrt{B^2 + H^2} = l\delta\tau$ oraz przekrój pręta zastępczego

$$F_u = \frac{Gl^3\delta}{Ehb} = \frac{l^3\delta}{2(1+\nu)hb}. \tag{3.23}$$

Przyjmując stałą grubość blachy $\delta = 10$ mm $= 0{,}01$ m oraz liczbę Poissona $\nu = 0{,}3$ otrzymujemy

$$F_u = 0{,}003846\frac{l^3}{hb}. \tag{3.24}$$

Dla podłużnic przekroje prętów zastępczych dobieramy w ten sposób, że przekrój przenoszący siły osiowe obejmie po 1/4 szerokości pokładu i wysokości burt dla każdej podłużnicy, a więc przekrój jednej podłużnicy wyniesie

$$F_p = \left(\frac{b}{4} + \frac{c}{4}\right)\delta = 0{,}045 \text{ m}^2.$$

Wymiary przekrojów zastępczych ukośnic i podłużnic podaje tablica 6.

Tablica 6. Funkcje charakterystyk sztywności prętów układu statycznie niewyznaczalnego

Podłużnice	$l = 20{,}00$ m,	$F = 0{,}045$ m^2,	$\bar{\omega} = 0{,}084656$
Ukośnice pokładu i dna	$l = 23{,}32$ m,	$F = 0{,}2032$ m^2,	$\hat{\omega} = 0{,}029716$
Ukośnice burtowe	$l = 20{,}88$ m,	$F = 0{,}2918$ m^2,	$\hat{\omega} = 0{,}014858$

$\Sigma\bar{\omega}$	0,338624	$G^2\Sigma\omega_g$	0,000124
$\Sigma\hat{\omega}$	0,089148	$\delta_{k,k}$	0,0005348
$\Sigma\omega_W$	0,228744	$\delta_{i,k}$	0,0001559
$\Sigma\omega_g$	0,199028	$W\Sigma\omega_W$	0,005719
$\Sigma\bar{\omega} - \Sigma\hat{\omega}$	0,249440	$G\Sigma\omega_g$	0,004976
$W^2\Sigma\omega_W$	0,000143	$\frac{1}{K}(W\Sigma\omega_W - G\Sigma\omega_g)$	$0{,}0_5159$

Siła w pręcie układu statycznie niewyznaczalnego s_p jest równa sumie siły w układzie statycznie wyznaczalnym s_{0p} oraz sił s_{ps}, powstałych pod wpływem działania sił X_s wzdłuż krawędzi przegród s, będących składowymi sił w ukośnicach grodzi X. Przechodząc do sił jednostkowych, odniesionych do długości pręta, możemy to przedstawić jako

(3.25)
$$s_p = s_{0p} + \sum_{s=1}^{n} s_{ps} X_s.$$

Energia potencjalna wszystkich prętów kratownicy wynosi

(3.26)
$$U = \frac{1}{2}\sum \omega_p s_p,$$

gdzie $\omega = l_p^3/E_p F_p$ jest charakterystyką sztywności pręta, a litera p numerem kolejnym pręta.

Zgodnie z zasadą minimum energii w położeniu równowagi musi być

(3.27)
$$\frac{\partial U}{\partial X_p} = 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Można dowieść, że siły deplanujące są liniowo zależne od sił w prętach nadliczbowych:

$$\sum_i \varepsilon_k^i A_i = X_k . \tag{3.28}$$

Uwzględniając tę własność i wykorzystując metody z teorii równań liniowych i rachunku wyznaczników po pewnych przekształceniach dochodzimy do wyrażenia równania

$$\sum_p \sum_i \omega_p s_{pi} s_{pk} A_i + \sum_p \omega_p s_{op} s_{pk} = 0 . \tag{3.29}$$

We wzorze tym s_{pi} i s_{pk} oznaczają siły jednostkowe w pręcie p powstające pod wpływem siły deplanującej A_i lub A_k.

Jeśli rozpatrzymy tutaj przypadek całkowitej sztywności grodzi (a więc biegunowo przeciwny do rozpatrzonego układu statycznie wyznaczalnego), to możemy z dokładnością wystarczającą dla celów praktycznych pominąć wyrazy, dla których $|i-k|>1$. Otrzymujemy wówczas n równań z n niewiadomymi, a żadne z równań nie będzie zawierało więcej niż trzy niewiadome.

Wprowadźmy oznaczenia

$$\sum_p \omega_p s_{0p} s_{pk} = \delta_{0,k} , \tag{3.30}$$

$$\sum_p \omega_p s_{pi} s_{pk} = \delta_{i,k} , \tag{3.31}$$

$$\sum_p \omega_p (s_{pk})^2 = \delta_{k,k} . \tag{3.32}$$

Układ równań będzie więc przedstawiał wyrażenia typu

$$\delta_{k,i} A_i + \delta_{k,k} A_k + \delta_{k,l} A_l = -\delta_{0,k} . \tag{3.33}$$

Współczynniki δ obliczamy z zależności (3.13) - (3.17), skąd po licznych przekształceniach otrzymujemy

$$\delta_{i,k} = \frac{F_i F_k}{K_{ki}^2 a_{ki}^2} (\Sigma \bar{\omega} - \Sigma \hat{\omega})_{ki} , \tag{3.34}$$

$$\delta_{0,k} = [W_k^{kl} (\Sigma \omega_W)_{kl} - G_k^{kl} (\Sigma \omega_g)_{kl}] \frac{M_{lk}}{K_{lk}} - [W_k^{ki} (\Sigma \omega_W)_{ki} - G_k^{ki} (\Sigma \omega_g)_{ki}] \frac{M_{ki}}{K_{ki}} . \tag{3.35}$$

We wzorach (3.34) i (3.35) $\sum \bar{\omega}$ oznacza sumę charakterystyk sztywności ukośnic, $\sum \hat{\omega}$ sumę charakterystyk sztywności podłużnic, $\sum \omega_w$ sumę charakterystyk sztywności prętów zastępczych dna i pokładu, $\sum \omega_g$ sumę charakterystyk sztywności prętów zastępczych burt.

Jeśli wziąć pod uwagę, że wyraz zawierający siły jednostkowe w układzie statycznie wyznaczalnym jest równy

$$s_{0p} = s_{pi} A'_i + s_{pk} A'_k + s_{pl} A'_l, \tag{3.36}$$

to równanie (3.33) przybierze postać

$$\delta_{k,i}(A_i + A'_i) + \delta_{k,k}(A_k + A'_k) + \delta_{k,l}(A_l + A'_l) = -\delta_{0,k}. \tag{3.37}$$

Siły A'_i, A'_k i A'_l są siłami deplanującymi dla układu statycznie wyznaczalnego.

Dalszy tok postępowania jest identyczny jak dla kadłuba statycznie wyznaczalnego: obliczamy siły deplanujące (w naszym przypadku za niewiadome przyjmujemy sumy $A_i + A'_i$), a następnie z zależności i wzorów (3.9), (3.10) i (3.17) wyznaczamy siły w prętach kratownicy. Obliczenia te zawiera tablica 7.

Nadbudówkę w przypadku kadłuba statycznie niewyznaczalnego obliczamy wychodząc również ze wzoru (3.18) lub też, jeśli nadbudówka przedstawia ustrój statycznie niewyznaczalny, stosując omówioną wyżej metodę energetyczną.

Jeśli przejdziemy teraz do naszej kratownicy, to na podstawie stałego przekroju prostokątnego łatwo stwierdzimy, że współczynniki

$$\delta_{i,k} = \frac{F^2}{K^2 a^2}(\sum \bar{\omega} - \sum \hat{\omega}) = 0{,}0001559,$$

$$\delta_{k,k} = 2(W^2 \sum \omega_W - G^2 \sum \omega_g) = 0{,}0005348,$$

zaś różne wyrazy wolne $\delta_{0,k}$ będą

$$\delta_{0,k} = m(-M_{ki} + M_{kl}),$$

gdzie

$$m = \frac{1}{K}(W \sum \omega_W - G \sum \omega_g) = 0{,}0_5 5159.$$

Ze względu na symetrię kratownicy i obciążenia jest

$$\delta_{0,1} = -\delta_{0,4} = 0{,}0_4 27,$$

$$\delta_{0,2} = -\delta_{0,3} = 0{,}0_4 17.$$

Otrzymujemy więc układ czterech równań z czterema niewiadomymi:

$$0{,}0005348\,A_1 + 0{,}0001559\,A_2 = -0{,}0000027,$$
$$0{,}0001559\,A_1 + 0{,}0005348\,A_2 + 0{,}0001559\,A_3 = -0{,}0000017,$$
$$0{,}0001559\,A_2 + 0{,}0005348\,A_3 + 0{,}0001559\,A_4 = 0{,}0000017,$$
$$0{,}0001559\,A_3 + 0{,}0005348\,A_4 = 0{,}0000027,$$

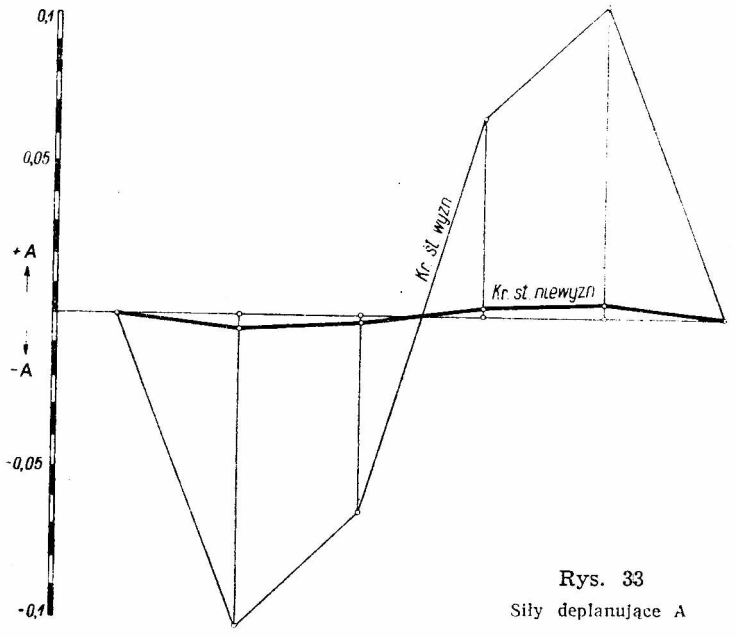
Tablica 7. Obliczenie sił jednostkowych w prętach układu statycznie niewyznaczalnego

k	1	2	3	4	5
A_k	—0,004251	—0,002737	0,002737	0,004251	0,0000
M_{ik}	0,121585	0,644541	0,967749	0,644541	0,121585
$\frac{M_{ik}}{K}$	0,000844	0,004476	0,006720	0,004476	0,000844
$\frac{F}{Ka}(A_i+A_k)$	—0,000106	—0,000175	0,0000	0,000175	0,000106
$\frac{A_k}{a}$	—0,000213	—0,000137	0,000137	0,000213	0,00000
$\frac{C_k}{c}$	—0,000737	—0,004514	—0,006857	—0,004514	—0,000737
$\frac{A_i}{a}$	0,00000	—0,000213	—0,000137	0,000137	0,000213
$\frac{C_i}{c}$	—0,000737	—0,004514	—0,006857	—0,004514	—0,00737
$\frac{B_k}{b}$	—0,000950	—0,004438	—0,006583	—0,004438	—0,000950
$\frac{B_i}{b}$	—0,000950	—0,004438	—0,006583	—0,004438	—0,000950
$W_k^{ki} A_i$	0,00000	—0,000106	—0,000068	0,000068	0,000106
$W_k^{ki} A_k$	—0,000106	—0,000068	0,000068	0,000106	0,000000
$\frac{P_{ki}^{pg}}{p}$	—0,000738	—0,004302	—0,006720	—0,004650	—0,000950
$\frac{P_{ki}^{lg}}{p}$	—0,000950	—0,004650	—0,006720	—0,004302	—0,000738
$\frac{U_{ki}^{gd}}{u^{gd}}$	0,000950	0,004438	0,006584	0,004438	0,000950
$\frac{U_{ki}^{pl}}{u_{pl}}$	0,000738	0,004514	0,006856	0,004514	0,000738

Rozwiązanie tego układu równań daje siły deplanujące układu statycznie niewyznaczalnego: $A_1 = -0{,}004251$, $A_2 = -0{,}002737$, $A_3 = 0{,}002737$, $A_4 = 0{,}004251$.

Warto zwrócić uwagę, że przyjęcie grodzi całkowicie sztywnych spowodowało około 25 - krotne zmniejszenie się sił deplanujących w porównaniu z układem statycznie wyznaczalnym o grodziach zupełnie wiotkich.

Siły jednostkowe w prętach kratownicy statycznie niewyznaczalnej, obliczone w tablicy 7, wskazują na znaczne wyrównanie sił w tym przypadku. Pręty słabo obciążone w układzie statycznie wyznaczalnym są silniej obciążone w układzie statycznie niewyznaczalnym, natomiast zauważyć można spadek obciążenia w prętach uprzednio najsilniej obciążonych.



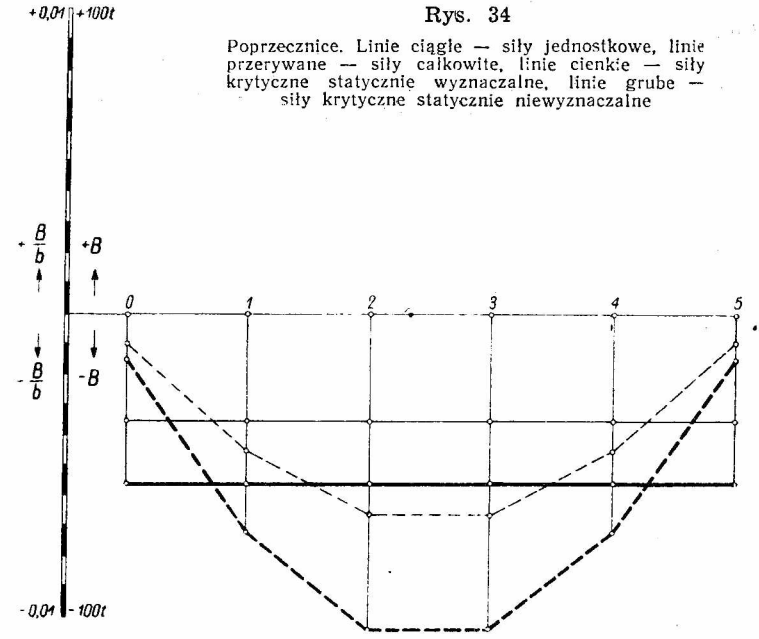
Rys. 33
Siły deplanujące A

Tablica 8 zawiera obliczenie sił w prętach płaszcza kratownicy statycznie niewyznaczalnej, zaś rysunki 33-38 przedstawiają porównanie rozkładu sił w prętach poszczególnych typów dla obu rodzajów kratownic.

Porównując wyniki dla modelu kadłuba statycznie wyznaczalnego z wynikami dla modelu kadłuba statycznie niewyznaczalnego nie należy się nimi sugerować, a tym bardziej je uogólniać. Tak np. w rozpatrywanym modelu ze sztywnymi grodziami otrzymaliśmy w ukośnicy pokładu w przedziale 2-3 niemal dwukrotnie większą siłę niż dla modelu bez gro-

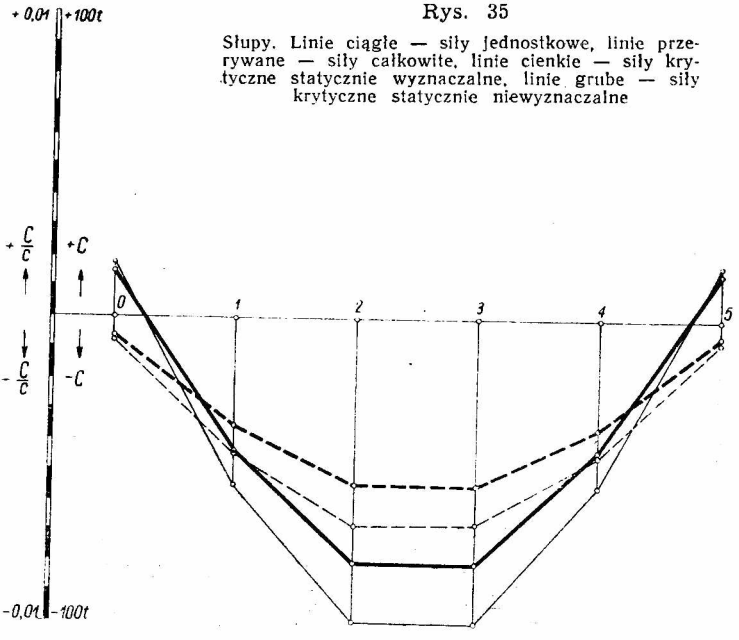
Tablica 8. Obliczenie sił całkowitych w układzie statycznie niewyznaczalnym

k	0	1	2	3	4	5
Słupy $C_k\,(M_{max})$	— 0,004422	— 0,027084	— 0,041142	— 0,041142	— 0,027084	— 0,004422
Słupy C_k t	— 5,970	— 36,563	— 55,542	— 55,542	— 36,563	— 5,970
Poprzecznice $B_k\,(M_{max})$	— 0,011400	— 0,053256	— 0,078996	— 0,078996	— 0,053256	— 0,011400
Poprzecznice B_k t	— 15,390	— 71,896	— 106,645	— 106,645	— 71,896	— 15,390
Podłużnice						
prawa górna $P_{ki}^{pg}\,(M_{max})$		— 0,014760	— 0,086040	— 0,134400	— 0,093000	— 0,019000
i lewa dolna P_{ki}^{pg} t		— 19,926	— 116,154	— 181,440	— 125,550	— 25,650
lewa górna $P_{ki}^{lg}\,(M_{max})$		— 0,019000	— 0,093000	— 0,134400	— 0,086040	— 0,014760
i prawa dolna P_{ki}^{lg} t		— 25,650	— 125,550	— 181 440	— 116,154	— 19,926
Ukośnice						
górne i dolne $U_{ki}^{gd}\,(M_{max})$		0,022158	0,103511	0,153564	0,103511	0,022158
górne i dolne U_{ki}^{gd} t		29,913	139,740	207,311	139,740	29,913
prawe i lewe $U_{ki}^{pl}\,(M_{max})$		0,015410	0,094255	0,143157	0,094255	0,015410
prawe i lewe U_{ki}^{pl} t		20,804	127,244	193,262	127,244	20,804



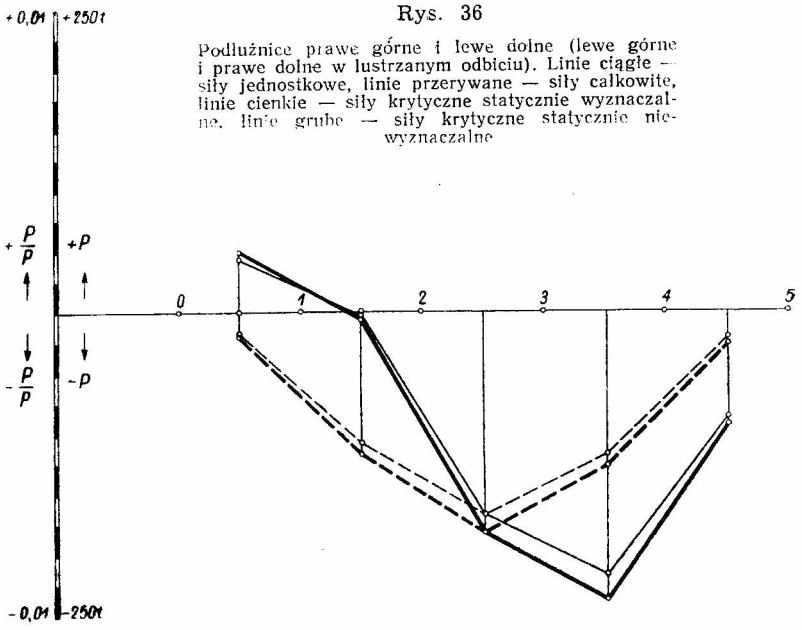
Rys. 34

Poprzecznice. Linie ciągłe — siły jednostkowe, linie przerywane — siły całkowite, linie cienkie — siły krytyczne statycznie wyznaczalne, linie grube — siły krytyczne statycznie niewyznaczalne



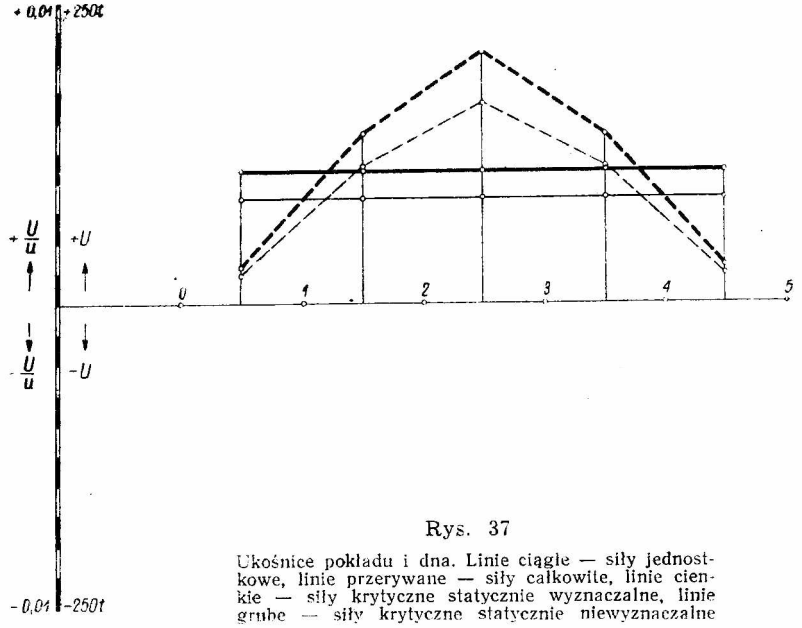
Rys. 35

Słupy. Linie ciągłe — siły jednostkowe, linie przerywane — siły całkowite, linie cienkie — siły krytyczne statycznie wyznaczalne, linie grube — siły krytyczne statycznie niewyznaczalne



Rys. 36

Podłużnice prawe górne i lewe dolne (lewe górne i prawe dolne w lustrzanym odbiciu). Linie ciągłe — siły jednostkowe, linie przerywane — siły całkowite, linie cienkie — siły krytyczne statycznie wyznaczalne, linie grube — siły krytyczne statycznie niewyznaczalne

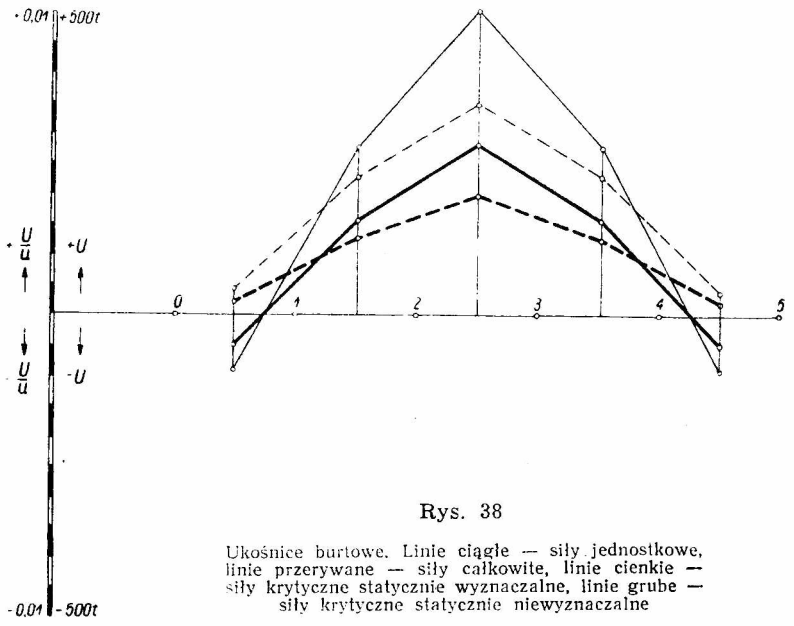


Rys. 37

Ukośnice pokładu i dna. Linie ciągłe — siły jednostkowe, linie przerywane — siły całkowite, linie cienkie — siły krytyczne statycznie wyznaczalne, linie grube — siły krytyczne statycznie niewyznaczalne

dzi. Zjawisko to nie zawsze występować będzie w analogiczny sposób w każdym kadłubie o zwiększonej sztywności grodzi.

Nie należy zapominać, że siły w prętach kratownicy przestrzennej statycznie niewyznaczalnej zależą od jej kształtów, rozkładu obciążenia oraz od sztywności prętów, a więc dla rzeczywistego kadłuba — od jego konstrukcji. Dlatego też przenoszenie otrzymanych wyników na dowolny kadłub jest niesłuszne.



Rys. 38

Ukośnice burtowe. Linie ciągłe — siły jednostkowe, linie przerywane — siły całkowite, linie cienkie — siły krytyczne statycznie wyznaczalne, linie grube — siły krytyczne statycznie niewyznaczalne

Jednakże zastosowana w tej pracy metoda, użyta do kadłuba, pozwala na określenie w stosunkowo prosty sposób obciążeń działających na ramy utworzone z obramowań dużych otworów w kadłubie okrętowym.

Literatura cytowana w tekście

[1] M. M. Fiłonienko, Borodicz i inni, *Kurs soprotiwlenja matieriałow*, t. 2, Moskwa-Leningrad 1950.

[2] W. Z. Własow, *Tonkostiennyje uprugije strierżni*, Moskwa 1940.

[3] W. Z. Własow, *Obszczaja tieorja obołoczek*.

[4] J. Nowiński, *Teoria dźwigarów cienkościennych zbieżnych*, Prace Główn. Inst. Lotn. 1951.

[5] J. Nowiński, *Z teorii dźwigarów cienkościennych o przekroju otwartym, obciążonych równomiernie*, Rozpr. Matem. 1 (1952).

[6] J. Rutecki, *Teoria skręcania cienkościennych profili*, Poznań-Gdańsk 1954.

[7] J. Naleszkiewicz, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, Warszawa 1951.
[8] J. Naleszkiewicz, *Wytrzymałość konstrukcji lotniczych*, PZWS, 1950.
[9] S. P. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, New-York i Londyn 1940.
[10] H. N. Biezuchow, *Tieorja uprugosti i płasticznosti*, Moskwa 1953.
[11] N. M. Bielajew, *Kurs sorprotiwlenja materiałow*, Moskwa-Leningrad 1951.
[12] R. Kappus, *Drillknicken von Stäben mit offenem Profil*, Jahrb. 1937 deutsch. Luftfahrt, t. 14, Berlin.
[13] J. Rutecki, *Niestateczność pręta cienkościennego o otwartym profilu z uwzględnieniem odkształcenia profilu*, Arch. Mech. Stos. 3-4 (1951).
[14] H. Wagner, *Verdrehung und Knickung von offenen Profilen*, Gdańsk 1929.
[15] S. N. Kan i J. G. Panowko, *Elemienty stroitielnoj miechaniki tonkostiennych konstrukcij*, 1952.
[16] B. Gorbunow i A. J. Strielbicka, *Tieorja ram iz tonkostiennych stierżniej*.
[17] I. N. Siwierciew, *Rasczot i projektirowanje korpusow sudow wnutriennowo pławanja*, Rieczizdat, 1949.
[18] H. Wagner, *Über räumliche Flugzeugfachwerke, Die Längsstabmethode*, Zeitschr. Flugt. Motorluftsch. 15 (1928).
[19] A. Grzędzielski, *Obliczanie kadłubów kratowych*, Sprawozd. IBTL 3 (1934).
[20] J. Mierzejewski, *Obliczanie przestrzennych kratownic dźwigowych*, praca niepubl., refer. na IV Sesji nauk. Politechn. Gd., czerwiec 1954.
[21] H. Ebner, *Zur Berechnung räumlicher Fachwerke im Flugzeugbau*, DVL Jahrb. 1929.
[22] A. Grzędzielski i E. Kosko, *Przykłady zastąpienia przekątni zespołem prętów w kratownicy kadłuba*, Sprawozd. IBTL 2 (1935).

Резюме

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КРУЧЕНИЯ КОРПУСА КОРАБЛЯ ПРИ КУРСЕ СКУЛОЙ К ВОЛНЕ

Рассматривается стесненное кручение стержня упрощенного сечения, обладающего однако теми же основными свойствами связности, как и корпуса существующих судов. Такие сечения приведены на рис. 1 - 14. Для упрощенных сечений приводятся величины, характеризующие сечение в отношении к «инженерной теории» стесненного кручения. Выводится уравнение стесненного кручения согласно той же теории. Получается уравнение, вид которого напоминает уравнение кручения балки открытого профиля.

В следующей главе рассматривается кручение корпуса баржи цилиндрической формы, обладающей пятью разными сечениями: двусвязным (закрытым), открытым, односвязным (с отверстием люка), в середине закрытым трехсвязным (с надстройкой), закрыто-открытым двусвязным (с отверстием люка и двойным дном) и закрытым трехсвязным (с двойным дном). Пример характеризуется отсутствием переборок. Формулы для кручения отрезков баржи легко выводятся

на основании результатов, полученных в предыдущей главе; здесь, однако, возникает новое затруднение, состоящее в таком подборе граничных условий в концевых сечениях, для которых была бы соблюдена непрерывность деформаций в этих сечениях. Чтобы преодолеть это затруднение, вводятся самоуравновешенные системы в каждом отрезке корпуса. В заключение главы составлены формулы для параметров таких самоуравновешенных систем.

В последней главе — для расчета корпуса судна — применяется метод вспомогательных пространственных ферм. Это позволяет приближенно определить напряжения в обшивке и углах отверстий люка. Рассматриваются два крайних случая: когда переборки можно считать идеально гибкими в их плоскостях, а также когда можно их считать идеально жесткими. В первом случае корпус становится статически определимой фермой, во втором — статически неопределимой, но наиболее простой в смысле производства расчета из всех статически неопределимых ферм. Оба случая представляют собой ограничения значений всех напряжений в корпусе, что является интересным пополнением расчетов предыдущей главы.

В работе приводятся элементарные методы приближенного расчета цилиндрических судов на кручение, проявляющееся при положении судна скулой к волне. Таким образом они являются основанием для дальнейших работ по приближенным, но более точным методам расчета судовых корпусов.

Числовой пример, примененный ко всем приближенным методам, является наглядной иллюстрацией методов, использованных в работе

Summary

PRELIMINARY INVESTIGATION OF TORSION OF A HULL OF A SHIP CAUSED BY AN OBLIQUE WAVE

To begin with, the problem of torsion with axial constraints of a bar of simplified cross-section is considered, the principal characteristics concerning the connectivity of cross-section being the same as for the hull of the real ship. These simplified cross-sections are shown in Figs. 1 to 14. Quantities characterizing these cross-sections for torsion with axial constraints and obtained on the basis of the «engineer's» theory are represented. Next, the equation of torsion with axial constraints is derived according to the same theory. The form of the equation obtained is similar to that of the equation of torsion of a beam with open cross-section.

In the next section the torsion of a cylindrical hull of a bark, composed of 5 segments of different cross-sections: closed doubly connected, open, simply connected (due to a hatchway), closed triply connected (the bridge-

house being in the middle portion of the hull), closed-open doubly connected (with hatchway and double bottom) and finally, closed triply connected (with a double bottom). The example is characterized by the lack of diaphragms. The formulas of torsion of different portions of the hull are simple to derive on the basis of the results of the foregoing section, but a new difficulty is encountered in the necessity of choosing the boundary conditions in such a way that the deformations be continuous in the planes where the cross-section changes. To overcome this difficulty equalizing self-equilibrating stress systems are introduced in each segment of the hull. Finally, equations for the parameters of the self-equilibrating systems are derived.

In the last section the method of substitute space lattices is used for the determination of approximate values of stresses in the skin and the corners of the hatchways. Two extreme cases are considered: (1) the diaphragms may be considered to be perfectly flexible in their planes, (2) they are assumed absolutely rigid. In the first case the hull becomes a statically determinate lattice, in the second — a statically indeterminate lattice of a special type (i. e. the most simple from the point of view of computation). The values obtained for these cases determine the limits of all stresses in the hull which is an interesting complement of the computations of the preceding section.

Some elementary methods of approximate strength computations of cylindrical vessels for torsion caused by an oblique wave are explained. These may constitute starting points for further improvements of approximate methods of strength computation in hulls of ships.

Each of the discussed approximate methods is applied to the same numerical example thus illustrating the features of each method.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 grudnia 1954 r.

ZDZISŁAW SZYMAŃSKI

RÓWNANIE BOLTZMANNA I JEGO ZNACZENIE W TEORII GAZÓW

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXXV

SPIS TREŚCI

Uwagi dotyczące oznaczeń *)

Wektory oznaczać będziemy drukiem półgrubym; składowe wektora oznaczać będziemy zwykłym drukiem, dopisując do symbolu wskaźnik łaciński np. u_i, a_i $(i = 1, 2, 3)$, gdzie $i = 1$ odpowiada składowej wektora na osi x, $i = 2$ na osi y, $i = 3$ na osi z. Powtórzenie wskaźnika oznacza sumowanie od 1 do 3. Tak np. iloczyn skalarny $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ dwóch wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ zapisywać będziemy także w postaci

$$a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i b_i .$$

Przecinkiem oznaczać będziemy różniczkowanie względem współrzędnej x_i $(i = 1, 2, 3)$ położenia. Tak np.

$$f,i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad u_{i,j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

$$u_{k,k} \equiv \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \equiv \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \; (\equiv \operatorname{div} \mathbf{u}).$$

Wyrażenia $\partial f/\partial \mathbf{x}\,(\equiv \operatorname{grad} f)$ oraz $\partial f/\partial \boldsymbol{\xi}$ oznaczać będą wektory o składowych odpowiednio

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\,(= f,i) \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \qquad (i=1,2,3).$$

Wektory w przestrzeni $3N$ wymiarowej (tj. wektory o $3N$ współrzędnych) oznaczać będziemy symbolami typu $\mathbf{x}^N$, a składowe tego wektora symbolami $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N$.

Tensory i iloczyny diadyczne zapisywać będziemy zawsze za pomocą pisowni wskaźnikowej np.

$$p_{ij}, \quad u_{i,j}\;(=\partial u_i/\partial x_j), \quad t_{ijk}, \quad \xi_i \xi_j \qquad (i,j,k=1,2,3).$$

---

*) Praca została przedstawiona na Kursie Naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Międzyzdrojach w sierpniu 1954 r.

Operację symetryzacji tensora drugiego rzędu oznaczać będziemy za pomocą wężyka nad symbolem, np.

$$\widetilde{t_{ij}} = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji}), \qquad \widetilde{u_{i,j}} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Operację tworzenia tensora bezźródłowego oznaczać będziemy za pomocą kółka nad symbolem, np.

$$\mathring{p}_{ij} = p_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} p_{kk}, \qquad \mathring{u}_{i,j} = u_{i,j} - \frac{1}{3}\delta_{ij} u_{kk},$$

$$\mathring{\xi_i}\xi_j = \xi_i \xi_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\xi_k \xi_k$$

itp., gdzie symbol K r o n e c k e r a δ_{ij} określają równania

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{jeżeli} \quad i = j. \end{cases}$$

Niekiedy wystąpi konieczność użycia obu tych operacji kolejno, np.

$$\mathring{\widetilde{e_{ij}}} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ij}) - \frac{1}{3}\delta_{ij} e_{kk}, \qquad \widetilde{\mathring{u}_{i,j}} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{3}\delta_{ij} u_{kk}.$$

Całki wielokrotne zapisywać będziemy w postaci całki pojedynczej pisząc krotność całkowania przy znaku różniczki. Opuszczenie granic całkowania oznaczać będzie całkowanie w całym zakresie zmienności. Różniczkę pod znakiem całki pisać będziemy zawsze przed funkcją podcałkową. Tak więc np. oznaczenie $\int d_3\xi f(\boldsymbol{\xi})$ oznacza całkę potrójną funkcji $f(\boldsymbol{\xi}) = f(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ po całej przestrzeni (ξ_x, ξ_y, ξ_z).

Kreska nad symbolem oznaczać będzie średnią wielkości fizycznej. Np. symbol $\overline{c^2}$ oznacza średnią wielkości c^2. Pojęcie średniej określone zostanie w p. 2.

W rachunkach operować będziemy najczęściej funkcjami położenia w przestrzeni $\mathbf{x}$, prędkości $\boldsymbol{\xi}$ i czasu t, a więc funkcjami postaci $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$.

Wielkości niezależne od żadnej z tych współrzędnych nazywać będziemy «stałymi». Wielkości niezależne od położenia $\mathbf{x}$ w przestrzeni nazywać będziemy «jednorodnymi», wreszcie wielkości niezależne od czasu t «stacjonarnymi».

Uwagi wstępne

Rozważania nasze ograniczać się będą do gazów złożonych z molekuł elektrycznie obojętnych o trzech stopniach swobody (gazy jednoatomowe), działających na siebie siłami centralnymi według praw fizyki klasycznej

(tj. niekwantowej). Poza ramami niniejszego artykułu znajdą się więc zagadnienia zastosowania równania Boltzmanna do zjawisk natury elektrycznej w gazach, teoria plazmy elektronowej, zjawiska związane z wymianą krętu molekuł oraz wszelkie kwantowe uogólnienia równania Boltzmanna i hydrodynamiki wraz z ich ewentualnymi zastosowaniami do badań własności nadciekłego helu.

1. Różne ujęcia teorii gazów

Zjawiska zachodzące w gazach i cieczach badać możemy na ogół różnymi metodami. Do badania ogólnych praw właściwych gazom oraz do przewidywania nowych zjawisk dotychczas nieznanych służą różne teorie gazów. Posługując się różnorodnymi modelami gazu teorie te usiłują mniej lub bardziej głęboko wyjaśniać zjawiska fizyczne zachodzące w gazach. Istnieją trzy podstawowe możliwości ujęcia teorii gazów. Są to ujęcia: (1) hydrodynamiki ośrodków ciągłych, którą w dalszym ciągu nazywać będziemy hydrodynamiką klasyczną, (2) kinetycznej teorii gazów, (3) mechaniki statystycznej. Omówimy je pokrótce.

Hydrodynamika klasyczna jest teorią opartą o hipotezę ciągłości ośrodka. Spośród trzech wymienionych teorii daje ona stosunkowo najłatwiejsze metody obliczeń. W związku z tym bardzo wiele zagadnień o podstawowym znaczeniu w technice, takich jak np. zagadnienie sił działających na samolot w locie lub zjawiska związane z przepływami przez rury, znajduje wytłumaczenie wyłącznie na gruncie hydrodynamiki klasycznej. Teoria ta w swym rozwoju przechodziła szereg kolejnych etapów. Poczynając od prymitywnego modelu tzw. «gazu idealnego», poprzez stopniowe uwzględnianie ściśliwości, lepkości, zależności lepkości od temperatury itd. otrzymywano coraz to lepszy obraz rzeczywistości. Warto tu zauważyć, że współczesna hydrodynamika klasyczna przestała być teorią o charakterze wyłącznie mechanicznym i zawiera w sobie także elementy termodynamiki — nauki o cieple.

Równania hydrodynamiki klasycznej opierają się na trzech grupach założeń: (1) na prawach podstawowych mechaniki, (2) na prawach termodynamiki, (3) na szeregu dodatkowych zależności doświadczalnych, które nazwiemy prawami fenomenologicznymi.

Stosując do małej części ośrodka ciągłego (czyli — jak będziemy mówili — do «elementu» ośrodka) zasadę zachowania masy [1]) otrzymujemy znane równanie ciągłości

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\varrho u_i)_{,i} = 0 , \tag{1.1}$$

gdzie ϱ oznacza gęstość ośrodka, zaś u_i wektor prędkości przepływu.

[1]) Efekty relatywistyczne będziemy oczywiście pomijali.

Stosując zasadę zachowania pędu do elementu ośrodka ciągłego otrzymujemy równanie wektorowe, znane pod nazwą równania ruchu

$$\varrho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i u_{i,j}\right) = \varrho F_i - p_{ij,j}, \tag{1.2}$$

gdzie F_i oznacza wektor siły odniesionej do jednostki masy ośrodka, zaś p_{ij} tensor napięć powierzchniowych o dowolnym punkcie ośrodka. Wyrażenie znajdujące się z lewej strony równania (1.2) nosi, jak wiadomo, nazwę ilorazu substancjalnego, który oznaczać będziemy dużą literą D; a więc

$$\frac{D}{Dt_i} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Do czterech równań (1.1) oraz (1.2) dołącza się zwykle równania termodynamiki. Jednym z tych równań jest pierwsza zasada termodynamiki (zasada zachowania energii), którą zapisuje się na ogół [2]) w postaci

$$\varrho \frac{D(c_v T)}{Dt} + \varrho \frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \varrho F_i u_i - (p_{ij} u_i)_{,j} - q_{i,i}, \tag{1.3}$$

gdzie c_v oznacza ciepło właściwe ośrodka przy stałej objętości, zaś q_i wektor strumienia ciepła. Pierwszy wyraz z lewej strony równania (1.3) oznacza wzrost energii wewnętrznej gazu, drugi zaś wzrost energii kinetycznej. Trzy wyrazy z prawej strony równania (1.3) oznaczają kolejno pracę sił objętościowych w jednostce czasu, pracę sił powierzchniowych w jednostce czasu oraz ciepło wypływające w jednostce czasu.

Drugim równaniem o podłożu termodynamicznym jest tzw. równanie stanu gazów

$$\frac{p}{\varrho} = RT. \tag{1.4}$$

W tym wzorze R oznacza stałą gazową, zaś T temperaturę gazu. Ciśnienie p określa się za pomocą tensora napięć przez zależność

$$p = \frac{1}{3} p_{ii}. \tag{1.5}$$

Równania (1.1) - (1.4) wraz z dodatkowym warunkiem (1.5) stanowią układ 7 równań dla 18 następujących niewiadomych funkcji miejsca $\mathbf{x}$ i czasu t: $\varrho(\mathbf{x},t)$, 3 składowe $u_i(\mathbf{x},t)$, 9 składowych $p_{ij}(\mathbf{x},t)$, $T(\mathbf{x},t)$, $p(\mathbf{x},t)$ 3 składowe $q_i\,\mathbf{x},t)$.

---

[2]) Por. np. [31].

Do wyznaczenia tych funkcji potrzeba zatem jeszcze 11 dodatkowych równań fenomenologicznych. Wyliczymy je po kolei:

(1) założenie symetrii tensora napięć (3 równania)

$$p_{ij} = p_{ji}; \tag{1.6}$$

(2) prawo N e w t o n a dotyczące lepkości

$$\tau = \mu \frac{\Delta u}{\Delta n},$$

które przy pewnych założeniach daje pięć równań [3])

$$p_{ij} = p\,\delta_{ij} - 2\,\mu\,\overset{\circ}{\widetilde{u_{i,j}}}; \tag{1.7}$$

(3) prawo przewodnictwa cieplnego (3 równania)

$$q_i = -\lambda T_{,i}, \tag{1.8}$$

gdzie λ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego.

Tych jedenaście dodatkowych równań tworzy łącznie z równaniami (1.1) - (1.5) układ osiemnastu równań skalarnych dla osiemnastu niewiadomych funkcji. Ten układ równań stanowi jedną z najogólniejszych metod ujęcia hydrodynamiki klasycznej [4]). Istnieją tu oczywiście możliwości wprowadzania daleko idących uproszczeń, np. założenie stałej gęstości ($\varrho = \text{const}$) prowadzi do bardziej abstrakcyjnego pojęcia gazu nieściśliwego. Podobnie odrzucenie współczynnika lepkości ($\mu = 0$) daje model gazu nielepkiego. Dodatkowe zaś założenie nieprzewodnictwa ($\lambda = 0$) pozwala po prostych rachunkach na zastąpienie równania (1.3) przez równanie adiabaty itd.

Dlaczego rozwiązania przytoczonych powyżej równań dają wyniki niezawsze zgodne z doświadczeniem?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, należy zrewidować założenia, na których opiera się hydrodynamika klasyczna. Praw (1.1) - (1.4) będących zasadami dynamiki i termodynamiki kwestionować nie będziemy. Natomiast wszystkie pozostałe założenia (1.6) - (1.8) wymagają szczegółowej analizy. Tę analizę można jednak konsekwentnie przeprowadzić jedynie wtedy, jeżeli wyjdzie się poza ramy hydrodynamiki klasycznej opartej na pojęciu ośrodka ciągłego. Można to uczynić na gruncie kinetycznej teorii gazów.

Kinetyczna teoria gazów oparta jest na modelu gazu złożonego z wielkiej ilości drobnych molekuł znajdujących się w ustawicznym ruchu. Za-

[3]) Mamy tu właściwie 6 równań, ze względu jednak na warunek (1.5) tylko 5 z nich jest niezależnych.

[4]) Można by tu podać dalsze uogólnienia polegające np. na uzależnieniu współczynników c_v, μ, λ od innych wielkości.

miast osiemnastu makroskopowych funkcji (w dalszym ciągu nazywać je będziemy funkcjami hydrodynamicznymi), którymi operuje hydrodynamika klasyczna, w teorii kinetycznej używa się jednej funkcji siedmiu zmiennych $f(\mathbf{x}, \xi, t)$ (gdzie $\mathbf{x}$ oznacza wektor położenia, ξ wektor prędkości molekuły, a t czas), którą nazywać będziemy w dalszym ciągu funkcją rozkładu lub, gdy zajdzie tego potrzeba, dokładniej — kinetyczną funkcją rozkładu. Znaczenie fizyczne tej funkcji jest następujące. Weźmy pod uwagę element objętości w przestrzeni $\delta_3 x$ otaczający punkt $\mathbf{x}$ oraz trójwymiarowy przedział prędkości $\delta_3 \xi$ otaczający wartość prędkości ξ. Wyrażenie $f(\mathbf{x}, \xi, t)\, \delta_3 x\, \delta_3 \xi$ daje ilość molekuł zawartych w chwili t w elemencie objętości $\delta_3 x$ o prędkościach zawartych w przedziale $\delta_3 \xi$. Element $\delta_3 x$ oraz przedział $\delta_3 \xi$ są to wielkości małe z makroskopowego punktu widzenia. W myśl jednak podstawowego założenia teorii kinetycznej ilość molekuł zawartych w elemencie $\delta_3 x$ o prędkościach z przedziału $\delta_3 \xi$ jest bardzo duża. To założenie stanowi ograniczenie z dołu dla wymiarów elementu $\delta_3 x$ oraz przedziału $\delta_3 \xi$. Pamiętając o tym ograniczeniu możemy jednak zastąpić je przez różniczkowe wielkości $d_3 x$ oraz $d_3 \xi$, a samą funkcję f uważać za funkcję ciągłą (i różniczkowalną) swoich argumentów. Do wyznaczenia tej funkcji teoria kinetyczna podaje różniczkowo-całkowe równanie B o l t z m a n n a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = \frac{\partial_e f}{\partial t}, \tag{1.9}$$

gdzie $\partial_e / \partial t$ oznacza pewien operator całkowy, zaś F_i wektor siły (na jednostkę masy) działającej na molekuły, którego postać podamy później. Wszystkie funkcje hydrodynamiczne otrzymujemy z funkcji rozkładu f przeprowadzając proces «uśrednienia». Znajomość funkcji rozkładu pozwala więc automatycznie poznać cały hydrodynamiczny obraz zjawisk. Znajomość funkcji rozkładu dostarcza jednak znacznie więcej informacji o stanie gazu. Istotnie, hydrodynamika klasyczna pozwala na określenie ruchu elementu gazu jako całości przez wyznaczenie gęstości, prędkości, temperatury itp. wielkości odnoszących się do tego elementu. Teoria kinetyczna natomiast dostarcza ponadto wiadomości o wewnętrznej strukturze tego elementu. Znajomość funkcji rozkładu pozwala np. na określenie, ile molekuł spośród wszystkich molekuł w danym elemencie posiada z góry określoną prędkość, np. prędkość z przedziału $d_3 \xi$ otaczającego wektor ξ. Z drugiej jednak strony rozwiązanie równania B o l t z m a n n a stwarza na ogół znacznie większe trudności od rozwiązywania równań hydrodynamiki klasycznej. Przemawia to z kolei na niekorzyść kinetycznej teorii. W wielu jednak przypadkach rozwiązanie równania B o l t z m a n n a sprowadza się do rozwiązania równań hydrodynamiki klasycznej.

Trzecim wreszcie, znacznie bardziej precyzyjnym, lecz także znacznie trudniejszym ujęciem teorii gazów jest ujęcie mechaniki statystycznej. W mechanice statystycznej operuje się jedną funkcją P zależną od współrzędnych i pędów wszystkich wchodzących w grę molekuł oraz od czasu. Jeżeli przez N oznaczymy ilość wszystkich molekuł, to funkcja P zależy od $6N + 1$ zmiennych, mianowicie od $3N$ współrzędnych tworzących wektor $\mathbf{x}^N$, od $3N$ składowych pędów tworzących wektor $\mathbf{p}^N$ oraz od czasu t.

Zapiszemy to krótko w postaci $P(\mathbf{x}^N, \mathbf{p}^N, t)$.

Znaczenie fizyczne tej funkcji jest następujące. Weźmy pod uwagę elementy objętości d_3x_1, d_3x_2, d_3x_3, ..., d_3x_N otaczające odpowiednio punkty $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_N$ oraz przedziały pędów d_3p_1, d_3p_2, ..., d_3p_N otaczające pędy $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, ..., $\mathbf{p}_N$. Iloczyny tych elementów objętości i przedziałów pędów oznaczymy przez $d_{3N}x$ oraz $d_{3N}p$. Wielkość różniczkową

$$P(\mathbf{x}^N, \mathbf{p}^N, t)\, d_{3N}x\, d_{3N}p \tag{1.10}$$

określamy jako prawdopodobieństwo tego, że jednocześnie

molekuła «1» zajmuje położenie wewnątrz elementu d_3x_1 około $\mathbf{x}_1$ oraz posiada pęd w przedziale d_3p_1 około $\mathbf{p}_1$,

molekuła «2» zajmuje położenie wewnątrz elementu d_3x_2 około $\mathbf{x}_2$ oraz posiada pęd w przedziale d_3p_2 około $\mathbf{p}_2$,

. . . . . .

molekuła «N» zajmuje położenie wewnątrz elementu d_3x_N około $\mathbf{x}_N$ oraz posiada pęd w przedziale d_3p_N około $\mathbf{p}_N$.

Funkcja $P(\mathbf{x}^N, \mathbf{p}^N, t)$ stanowi więc gęstość prawdopodobieństwa w chwili t w przestrzeni $6N$-wymiarowej.

Jak widać z powyższego określenia, znajomość funkcji P dostarcza znacznie więcej wiadomości o stanie gazu w porównaniu ze znajomością kinetycznej funkcji rozkładu. Znajomość gęstości prawdopodobieństwa P daje mianowicie możność określenia jednoczesnego prawdopodobieństwa położeń i prędkości wszystkich N różnych molekuł. Prawdopodobieństwo tego, że wszystkie molekuły mają jakiekolwiek położenia w przestrzeni i jakiekolwiek prędkości wyrazi się całką wielkości (1.10) po całej przestrzeni $6N$-wymiarowej. To prawdopodobieństwo jest oczywiście pewnością. Daje to tzw. warunek normalizacji dla gęstości P

$$\int d_{3N}x \int d_{3N}p\, P(\mathbf{x}^N, \mathbf{p}^N, t) = 1. \tag{1.11}$$

Zmianą funkcji P w czasie i przestrzeni rządzi tzw. twierdzenie L i o u v i l l e' a będące prostą konsekwencją jedynie praw mechaniki:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{N} \left(F_{\alpha i} \frac{\partial P}{\partial p_{\alpha i}} + \frac{p_{\alpha i}}{m_\alpha} \frac{\partial P}{\partial x_{\alpha i}} \right) = 0, \tag{1.12}$$

gdzie $F_{\alpha i}$ oznacza wektor siły (na jednostkę masy) działającej na molekułę α, zaś m_α oznacza masę tejże molekuły (sumowanie także określa wskaźnik i, przy czym $i = 1, 2, 3$).

Należy tu podkreślić, że funkcja P ma znaczenie jedynie teoretyczne z powodu wielkiej ilości zmiennych, od których zależy. Z tej przyczyny nie tylko znalezienie, ale nawet samo wyraźne napisanie zależności P od $6N + 1$ zmiennych jest oczywiście technicznie niemożliwe [5]). Z tego względu metody mechaniki statystycznej ograniczone są na razie jedynie do badania gazów w stanie równowagi. Jak się okazuje, w tym prostym przypadku ilość zmiennych wchodzących do funkcji P może się zredukować do kilku zaledwie podstawowych stałych ruchu takich, jak energia, pęd całkowity i kręt całkowity układu [6]).

Precyzyjne metody mechaniki statystycznej nie znalazły natomiast na razie szerszego zastosowania w teorii gazów, nie znajdujących się w stanie równowagi.

Reasumując możemy twierdzić, że najdokładniejszą i najbardziej ogólną formą teorii gazów jest mechanika statystyczna. W dalszej kolejności należy wymienić teorię kinetyczną, w końcu zaś — hydrodynamikę klasyczną. Z drugiej strony rozwiązywanie konkretnych zagadnień rachunkowych metodami hydrodynamiki klasycznej, aczkolwiek niekiedy bardzo trudne, jest stosunkowo łatwiejsze w porównaniu z zastosowaniem metod teorii kinetycznej. Natomiast operowanie precyzyjnym aparatem matematycznym mechaniki statystycznej w odniesieniu do teorii gazów stanowi nieporównanie jeszcze większą trudność.

Równanie podstawowe (1.12) mechaniki statystycznej wynika ściśle z praw mechaniki. Jak wykazały niedawne prace (które omówimy szczegółowiej w p. 9 niniejszego artykułu), dodając do tego równania szereg założeń upraszczających można otrzymać równanie B o l t z m a n n a (1.9) jako przypadek szczególny. Tak więc oparta na równaniu B o l t z m a n n a kinetyczna teoria gazów stanowi w pewnym sensie przypadek szczególny mechaniki statystycznej. Dalsze założenia ograniczające teorię kinetyczną prowadzą do hydrodynamiki klasycznej. Rozpatrzymy to między innymi w dalszym ciągu tej pracy.

2. Kinetyczna teoria gazów

Rozpatrzymy obecnie elementarne pojęcia i zależności kinetycznej teorii gazów.

Przypuśćmy, że znana jest kinetyczna funkcja rozkładu $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ gazu złożonego z jednakowych molekuł o masach m. Jeżeli $\varrho(\mathbf{x}, t)$ oznacza

[5]) Tak np. ilość molekuł zawartych w 1 molu, N jest rzędu 10^{23}.

[6]) Por. np. [32].

gęstość gazu w miejscu $\mathbf{x}$ w czasie t, to wielkość

$$n(\mathbf{x}, t) = \frac{\varrho(\mathbf{x}, t)}{m} \tag{2.1}$$

zwana gęstością molekularną oznacza średnią liczbę molekuł na jednostkę objętości w otoczeniu punktu $\mathbf{x}$ w chwili t. Funkcja ta jest ciągłą (i różniczkowalną) funkcją miejsca i czasu.

Weźmy pod uwagę element objętości $d_3 x$ otaczający punkt $\mathbf{x}$. Jak wiemy z p. 1 funkcja rozkładu $f(\mathbf{x}, \xi, t)$ pomnożona przez $d_3 x$ oraz przez $d_3 \xi$ daje ilość molekuł zawartych w objętości $d_3 x$ o prędkościach zawartych w otoczeniu $d_3 \xi$ prędkości ξ. Całkowitą ilość molekuł zawartych w $d_3 x$ (o dowolnych prędkościach) otrzymamy przez całkowanie wyrażenia $f d_3 x d_3 \xi$ po całym obszarze prędkości ξ. Z drugiej jednak strony z definicji gęstości molekularnej n wynika, że ilość ta wynosi $n d_3 x$. Mamy więc następującą podstawową zależność:

$$n d_3 x = d_3 x \int d_3 \xi f(\mathbf{x}, \xi, t),$$

skąd

$$n(\mathbf{x}, t) = \int d_3 \xi f(\mathbf{x}, \xi, t) \tag{2.2}$$

lub w innej postaci

$$\varrho(\mathbf{x}, t) = m \int d_3 \xi f(\mathbf{x}, \xi, t). \tag{2.2.1}$$

Weźmy dowolną skalarną, wektorową lub tensorową wielkość fizyczną $\Phi(\mathbf{x}, \xi, t)$ zależną od prędkości ξ i położenia $\mathbf{x}$ molekuły oraz od czasu t (może to być np. pęd lub energia molekuły). Taką wielkość fizyczną nazwiemy wielkością molekularną. Znajomość funkcji rozkładu $f(\mathbf{x}, \xi, t)$ pozwala na obliczenie wartości średniej wielkości Φ w obszarze przestrzennym $d_3 x$ otaczającym punkt $\mathbf{x}$. Oznaczając poszukiwaną wartość średnią przez $\bar{\Phi}$ mamy równanie

$$\Sigma \Phi = n d_3 x \bar{\Phi},$$

gdzie symbol $\Sigma \Phi$ oznacza sumę wartości Φ, odpowiadających wszystkim molekułom zawartym w obszarze $d_3 x$. Wyrażenie $n d_3 x$ jest to oczywiście całkowita liczba molekuł znajdujących się w obszarze $d_3 x$. Dla obliczenia $\Sigma \Phi$ możemy posłużyć się prostą zależnością

$$\Sigma \Phi = d_3 x \int d_3 \xi \Phi(\mathbf{x}, \xi, t) f(\mathbf{x}, \xi, t).$$

Z tego równania wraz z równaniem poprzednim otrzymujemy wzór zasadniczy

$$\bar{\Phi}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{n}\int d_3\xi\,\Phi(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t)\,f(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t). \tag{2.3}$$

Pokażemy obecnie, w jaki sposób wprowadza się do teorii kinetycznej różne funkcje hydrodynamiczne jako wartości średnie pewnych wielkości molekularnych. Prędkość przepływu w sensie hydromechaniki $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ określamy jako średnią wielkości

$$\Phi=\boldsymbol{\xi}.$$

Mamy wtedy

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\bar{\boldsymbol{\xi}}=\frac{1}{n}\int d_3\xi\,\boldsymbol{\xi}\,f(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t). \tag{2.4}$$

Oprócz prędkości molekularnej $\boldsymbol{\xi}$ często bardzo używa się w teorii kinetycznej względnej prędkości molekularnej $\mathbf{c}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t)$ wyrażającej się wzorem

$$\mathbf{c}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t)=\boldsymbol{\xi}-\mathbf{u}(\mathbf{x},t). \tag{2.5}$$

Znaczenie fizyczne prędkości względnej $\mathbf{c}$ jest bardzo proste: oznacza ona prędkość molekuły określoną w układzie współrzędnych (lokalnym), poruszającym się wraz z elementem gazu z prędkością $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$. Można powiedzieć, że prędkości $\mathbf{c}$ charakteryzują ruchy «wewnętrzne» molekuł w elemencie objętości. Oczywiście mamy

$$\bar{\mathbf{c}}=\frac{1}{n}\int d_3\xi\,(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{u})\,f\,d_3c=\bar{\boldsymbol{\xi}}-\frac{1}{n}\mathbf{u}\int d_3\xi\,f\,d_3\xi=\mathbf{u}-\mathbf{u}=0. \tag{2.6}$$

Obliczając średni pęd w kierunku osi x_j ($j=1,2,3$) przenoszony w jednostce czasu przez molekuły na jednostkę powierzchni $d_2\sigma$ prostopadłą do osi x_i otrzymujemy (szczegółowe rachunki podane są w pracy [1] na str. 31) tensor napięć w postaci

$$p_{ij}=mn\,\overline{c_ic_j}=m\int d_3\xi\,c_ic_jf. \tag{2.7}$$

W przypadku gazu w stanie równowagi p_{ij} staje się — jak się później przekonamy — tensorem diagonalnym o postaci

$$p_{ij}=p\,\delta_{ij}. \tag{2.8}$$

Stąd oczywiście

$$p=\frac{1}{3}p_{ii}, \tag{2.9}$$

gdzie p oznacza ciśnienie gazu. Definicję (2.9) ciśnienia gazu rozszerzamy na przypadek dowolnego ruchu gazu. Z wzorów (2.9) oraz (2.7) wynika zależność

$$p = \frac{1}{3} \varrho \overline{c^2}. \tag{2.10}$$

Obliczymy teraz energię kinetyczną układu $n d_3 x$ molekuł znajdujących się w elemencie objętości $d_3 x$ w otoczeniu punktu **x**. Wyrazi się ona wielkością

$$n d_3 x \overline{\frac{1}{2} m \xi^2}.$$

Ponieważ jednak

$$\overline{\xi^2} = \overline{(\mathbf{c} + \mathbf{u})^2} = \overline{c^2} + u^2,$$

to tylko co napisana wartość energii jest

$$n d_3 x \overline{\frac{1}{2} m \xi^2} = \frac{\varrho d_3 x \overline{c^2}}{2} + \frac{\varrho d_3 x u^2}{2} = (\overline{E_w} + E_z) d_3 x,$$

gdzie $E_z = \overline{E_z} = \varrho u^2/2$ oznacza gęstość energii kinetycznej elementu gazu jako całości, czyli gęstość energii kinetycznej «zewnętrznej». Drugi wyraz zaś $\overline{E_w} = \varrho \overline{c^2}/2$ oznacza gęstość energii kinetycznej ruchów wewnętrznych molekuł gazu. W przypadku gazu złożonego z molekuł jednoatomowych nie działających na siebie (poza zderzeniami) wielkość tę utożsamia się z gęstością energii wewnętrznej (w sensie termodynamiki).

Temperaturę określa się w teorii kinetycznej jako wielkość proporcjonalną do gęstości energii wewnętrznej przypadającej na jeden stopień swobody molekuły. Oznaczając stały współczynnik proporcjonalności przez $k/2$ (gdzie k nazywa się stałą B o l t z m a n n a; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-10}$ erg/stopień), mamy więc równanie określające temperaturę

$$\frac{1}{2} k T = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} m \overline{c^2} \right). \tag{2.11}$$

Zestawiając ten wzór ze wzorem (2.10) otrzymujemy równanie stanu gazów

$$\frac{p}{\varrho} = R T, \tag{2.12}$$

gdzie stała gazowa R równa jest k/m.

Możemy wreszcie na gruncie teorii kinetycznej wprowadzić pojęcie strumienia ciepła **q**, przepływającego w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni, jako wartość średnią iloczynu prędkości **c** przez gęstość energii wewnętrznej E_w:

$$\mathbf{q} = n \overline{E_w \mathbf{c}} = \frac{m}{2} \int d_3 \xi \, \mathbf{c} \, \overline{c^2} f. \tag{2.13}$$

W teorii kinetycznej bardzo dużą rolę odgrywają zderzenia molekuł. Najprostszym założeniem byłoby przyjęcie modelu gazu złożonego z nieoddziaływających na siebie gładkich, sztywnych i doskonale sprężystych kulek. Głębsze wyjaśnienie natury i własności sił międzymolekularnych może nam dać jedynie mechanika kwantowa. Wszystkie te siły są oczywiście pochodzenia elektromagnetycznego, gdyż pola grawitacyjne i mezonowe nie mogą być brane w rachubę.

Potencjały tych sił wyrażane bywają na ogół [7]) za pomocą różnych przybliżonych wzorów typu

$$\Phi(r) = -Me^{-r/\sigma} + Ne^{-r/\varrho}$$

lub też

$$\Phi(r) = -\mu r^{-6} + Ne^{-r/\varrho}.$$

W związku z tym, że bardzo wiele efektów fizycznych — jak się przekonano — nie wykazuje zbyt wielkiej wrażliwości na rodzaj sił oddziaływania, można z powodzeniem używać jeszcze mniej dokładnych przybliżeń. Przykładem takiego niedokładnego przybliżenia służyć może wzór

$$\Phi(r) = -\mu r^{-6} + \nu r^{-m}.$$

Jest on bardzo dogodny w wielu rachunkach. Za jeszcze mniej dokładne przybliżenie uważać można potencjał typu

$$\Phi(r) = \mu r^{-m}$$

bardzo często używany w rachunkach. Już M a x w e l l zauważył, że obliczenia różnych wielkości metodami teorii kinetycznej stają się znacznie prostsze przy założeniu, że molekuły odpychają się siłą odwrotnie proporcjonalną do piątej potęgi odległości wzajemnej (w ostatnim wzorze odpowiada to wartości $m = 4$). Taki model oddziaływania molekuł nosi nazwę maxwellowskiego.

Uwzględniając fakt stosunkowo krótkiego zasięgu wszystkich omówionych powyżej sił można uważać, że jedynym okresem, podczas którego istnieje wzajemne oddziaływanie molekuł, jest zderzenie tych molekuł. Średnią drogę, jaką molekuła przebywa od zderzenia do zderzenia, nazywamy drogą swobodną. W normalnych warunkach ciśnienia i temperatury w gazach średnia droga swobodna jest rzędu $l \approx 10^{-5}$ cm. Wymiary molekuły natomiast są na ogół rzędu $\sigma \approx 10^{-8}$ cm.

Pierwiastek ze średniego kwadratu prędkości jest wielkością rzędu prędkości dźwięku w gazie. Teoria kinetyczna pozwala np. na wyprowa-

---

[7]) Bardziej szczegółowe omówienie tej kwestii znaleźć można w pracy [2] na str. 82.

dzenie prostego wzoru łączącego te wielkości (por. np. [4]) w stanie równowagi gazu:

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{\frac{3}{\varkappa}}\, a, \tag{2.14}$$

gdzie a jest prędkością dźwięku, $\varkappa$ wykładnikiem adiabaty.

Z elementarnych rozważań teorii kinetycznej można również otrzymać bez wnikania w strukturę funkcji rozkładu prowizoryczne wzory dla współczynników kinetycznych: lepkości i przewodnictwa cieplnego. Nie wchodząc w metody otrzymywania tych wzorów (znaleźć je można w V rozdziale pracy [3] lub w VI rozdziale pracy [1]) wspomnimy tylko, że zjawiska lepkości i przewodnictwa cieplnego tłumaczy się tu istnieniem chaotycznego ruchu molekuł, wywołującego przenoszenie pędu i energii w polu przepływu gazu. Współczynniki kinetyczne otrzymane tą drogą są proporcjonalne do średniej drogi swobodnej l:

$$\mu \sim l, \qquad \lambda \sim l. \tag{2.15}$$

Współczynniki proporcjonalności jednak nie odpowiadają zbyt dokładnie wartościom rzeczywistym. Dokładniejszą teorią obliczania współczynników kinetycznych zajmiemy się niżej (w p. 5).

W oparciu o powyższe rozważania postaramy się obecnie podać pobieżną analizę zakresu stosowalności hydrodynamiki klasycznej oraz szkicowy przegląd tych efektów fizycznych, w których niezbędne staje się stosowanie metod kinetycznej teorii gazów. Hydrodynamika klasyczna opiera się na szeregu praw fenomenologicznych (1.6)-(1.8), które teoria kinetyczna w jednych przypadkach potwierdza, w innych zaś odrzuca. Nawet w tych przypadkach, w których te prawa fenomenologiczne są przez kinetyczną teorię potwierdzone, hydrodynamika klasyczna nie jest w stanie podać metod obliczania współczynników kinetycznych. Teoria kinetyczna natomiast daje w tym względzie zupełnie zadowalające rezultaty (por. p. 5). Schemat rachunkowy hydrodynamiki klasycznej wymaga zakładania dodatkowych warunków brzegowych (np. warunku znikania składowej stycznej prędkości na powierzchni ciała stałego zanurzonego w gazie), których ogólna prawdziwość nie jest absolutnie pewna we wszystkich przypadkach. Wyjaśnienia tej sprawy należy się spodziewać tylko na gruncie teorii kinetycznej.

Hydrodynamika klasyczna nie jest jednolitą i konsekwentną teorią fizyczną, gdyż prawa mechaniki, termodynamiki i prawa fenomenologiczne nie znajdują na gruncie tej teorii jednolitego wyjaśnienia. Hydrodynamika klasyczna opierająca się na pojęciu ośrodka ciągłego nie jest w stanie opisać zjawisk takiego typu, w których istotnym czynnikiem jest ziarnista budowa substancji gazowej. Tak np. metody hydrodynamiki za-

wodzą w przypadku opisu zjawisk dyfuzji gazów, w przypadku gdy występują wielkie gradienty przestrzenne, np. ciśnienia lub temperatury (odnosi się to także do fal uderzeniowych), w przypadku wreszcie, gdy droga swobodna staje się rzędu wielkości wymiarów ciał opływanych [8]). Również w przypadku wielkich gęstości lub bardzo niskich temperatur równania hydrodynamiki klasycznej zawodzą. Wchodzą wtedy w grę silniejsze oddziaływania molekuł lub też zmienione prawa oddziaływania. Ma to szczególnie duże znaczenie w rozwijającej się obecnie teorii cieczy oraz w teorii nadciekłego helu.

Możemy więc stwierdzić, że zagadnienia takie jak loty na wielkich wysokościach, konstrukcja i działanie aparatów próżniowych, rozdzielanie izotopów metodami dyfuzji i termodyfuzji, badanie przepływów gazów zjonizowanych, wyładowania elektryczne w gazach rozrzedzonych, badania nadciekłego helu, badania opływów ciał silnie rozgrzanych, badania struktury fal uderzeniowych — wymagają bezwarunkowo modyfikacji równań hydrodynamiki klasycznej. Można to przeprowadzić jedynie na gruncie teorii kinetycznej.

3. Równanie Boltzmanna i równania przenoszenia

Podamy obecnie szkic wyprowadzenia równania Boltzmanna dla funkcji rozkładu. Równanie to jest podstawą kinetycznej teorii gazów.

Jeżeli $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ oznacza funkcję rozkładu, to wyrażenie $f d_3 \xi d_3 x$ oznacza, jak wiemy, ilość molekuł zawartych w objętości $d_3 x$ otaczającej punkt $\mathbf{x}$, których prędkości zawarte są w trójwymiarowym przedziale prędkości $d_3 \xi$ otaczającym prędkość $\boldsymbol{\xi}$. Zbadajmy zmianę tej ilości molekuł po upływie czasu dt. Gdyby nie zachodziły zderzenia molekuł, to całkowita zmiana ilości molekuł wyniosłaby

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\right) d_3 x \, d_3 \xi \, dt$$

(gdyż w ciągu czasu dt wektor $\mathbf{x}$ przechodzi w wektor $\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} dt$, zaś wektor $\boldsymbol{\xi}$ w $\boldsymbol{\xi} + \mathbf{F} dt$). Jeżeli zmianę ilości molekuł wskutek zderzeń w ciągu czasu dt oznaczymy przez

$$\frac{\partial_e f}{\partial t} d_3 x \, d_3 \xi \, dt$$

---

[8]) Tak np. na wysokości 123 km nad ziemią średnia droga swobodna jest rzędu 30 cm, na wysokości 184 km $l \approx 27$ m; na wysokości 245 km $l \approx 450$ m. Przykłady te zostały zaczerpnięte z książki [33].

(gdzie operator ∂_e/dt nie oznacza oczywiście różniczkowania), to równanie Boltzmanna zapisać możemy w postaci

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = \frac{\partial_e f}{\partial t}. \tag{3.1}$$

Pozostaje do określenia postać operatora $\partial_e/\partial f$. W tym celu zanalizować musimy bliżej przebiegi zderzeń molekuł. Konieczne jest przyjęcie dwóch podstawowych założeń:

(1) zachodzą jedynie podwójne zderzenia molekuł (tzn. zderzenia 3, 4, ... molekuł na raz mogą być pominięte),

(2) czas trwania zderzenia jest krótki w porównaniu z czasem, w ciągu którego molekuła jest swobodna.

Zakładając, że siły wzajemnego oddziaływania molekuł są siłami krótkiego zasięgu w porównaniu ze średnią drogą swobodną [co jest równoważne z założeniem (2)], możemy przyjąć, że przed zderzeniem i po zderzeniu molekuła porusza się po prostych. Oznaczając przez $\hat{\xi}_1$ i $\hat{\xi}_1'$ odpowiednio prędkości pierwszej molekuły (molekuły «1») przed zderzeniem i po zderzeniu, zaś przez $\hat{\xi}$ i $\hat{\xi}'$ — odpowiednie prędkości drugiej molekuły (molekuły «0»), możemy napisać zasadę zachowania pędu i energii w zderzeniu w postaci

$$\begin{cases} \xi^1 + \hat{\xi} = \hat{\xi}_1' + \hat{\xi}', \\ \xi_1^2 + \xi^2 = \xi_1'^2 + \xi'^2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Wynika stąd równanie

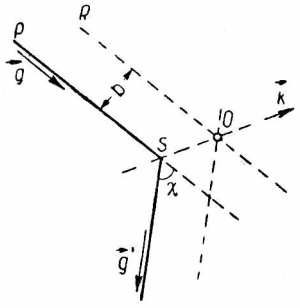
$$g = g', \tag{3.3}$$

gdzie g oraz g' oznaczają moduły prędkości względnych:

$$\begin{cases} \mathbf{g} = \hat{\xi}_1 - \hat{\xi}, \\ \mathbf{g}' = \hat{\xi}_1' - \hat{\xi}'. \end{cases} \tag{3.4}$$

Jeżeli znamy prędkości $\hat{\xi}$ i $\hat{\xi}_1$ obu molekuł przed zderzeniem, to równania (3.2) możemy traktować jako układ 4 równań dla 6 niewiadomych $\hat{\xi}'$ i $\hat{\xi}_1'$. Prędkości $\hat{\xi}'$ i $\hat{\xi}_1'$ po zderzeniu są zatem funkcjami dwóch dodatkowych parametrów skalarnych. Te parametry charakteryzują geometrię zderzenia. Weźmy pod uwagę układ współrzędnych, w którym molekuła «0» spoczywa (przed i po zderzeniu). Przed zderzeniem molekuła «1» porusza się po pewnej prostej PS (rys. 1) z prędkością $\mathbf{g} = \hat{\xi}_1 - \hat{\xi}$. Wzajemne położenie molekuł przed zderzeniem (a więc i cały przebieg zderzenia) jest scharakteryzowane przez dwa parametry geometryczne: b oraz ε. Tzw. «odległość przycelową» b określamy jako odległość punktu O

od prostej *PS*. Litera ε natomiast oznacza kąt (nie uwidoczniony na rys. 1), określający położenie płaszczyzny *PSO* względem dowolnej płaszczyzny przesuniętej przez prostą *OR* obraną za płaszczyznę odniesienia. Kąt χ określający zmianę kierunku ruchu molekuły «1» względem molekuły «0» jest funkcją zmiennych b oraz g:



Rys. 1

$$\chi = \chi(b, g). \tag{3.5}$$

Charakter tej funkcji związany jest z konkretną postacią wyrażenia określającego oddziaływanie molekuł. Prędkości $\hat{\xi}'$ i $\hat{\xi}_1'$ molekuł po zderzeniu są zatem funkcjami prędkości przed zderzeniem $\hat{\xi}$ i $\hat{\xi}_1$ oraz parametrów b i ε charakteryzujących zderzenie pod względem geometrycznym. Zamiast tych dwóch parametrów można wziąć równie dobrze wektor jednostkowy $\mathbf{k}$ (rys. 1) w kierunku prostej *SO* łączącej molekuły w chwili ich największego zbliżenia. Przy pomocy wektora $\mathbf{k}$ można łatwo wyznaczyć prędkości $\hat{\xi}'$ i $\hat{\xi}_1'$ molekuł po zderzeniu. Z prostych rozważań geometrycznych otrzymujemy mianowicie

$$\hat{\xi}' = \hat{\xi} + (\mathbf{k}\,\mathbf{g})\,\mathbf{k}\,, \qquad \hat{\xi}_1' = \hat{\xi} - (\mathbf{k}\,\mathbf{g})\,\mathbf{k}\,, \tag{3.6}$$

gdzie, jak poprzednio, $\mathbf{g} = \hat{\xi}_1 - \hat{\xi}$.

Wpływ zderzeń na zmianę ilości molekuł $f\,d_3\xi\,d_3x$ będzie dwojaki:

(1) pewne molekuły «znikną», tzn. zmienią swe prędkości na inne nie należące już do przedziału $d_3\xi$ otaczającego wektor $\hat{\xi}$,

(2) pewne molekuły «pojawią się», tzn. molekuły o prędkościach nie należących do przedziału $d_3\xi$ otrzymają wskutek zderzeń prędkości należące do przedziału $d_3\xi$.

Z rozważań nad funkcją rozkładu wynika (patrz np. praca [1], str. 59), że ilość molekuł, które «znikną» w ciągu czasu dt wyrazi się wielkością

$$dt\,d_3x\,d_3\xi \int d_3\xi_1 \int_{-0}^{+\infty} b\,db \int_0^{2\pi} d\varepsilon\, g f(\mathbf{x}, \hat{\xi}, t) f(\mathbf{x}, \hat{\xi}_1, t),$$

w której $\hat{\xi}_1$ jest zmienną całkowania. Podobnie dla ilości molekuł, które się «pojawiają», możemy napisać wyrażenie

$$dt\,d_3x\,d_3\xi \int d_3\xi_1 \int_{-0}^{+\infty} b\,db \int_0^{2\pi} d\varepsilon\, g f(\mathbf{x}, \hat{\xi}', t) f(\mathbf{x}, \hat{\xi}_1', t),$$

gdzie wielkości ξ' i ξ_1' dane są przez wzory (3.6). W dalszym ciągu używać będziemy oznaczeń skróconych:

$$f \equiv f(\mathbf{x}, \xi, t), \qquad f' \equiv f(\mathbf{x}, \xi', t),$$

$$f_1 \equiv f(\mathbf{x}, \xi_1, t), \qquad f_1' \equiv f(\mathbf{x}, \xi_1', t).$$

Całkowanie po b oraz ε można drogą zmiany zmiennych pod całką zastąpić przez całkowanie po wszystkich możliwych położeniach wektora $\mathbf{k}$ (tworzących półkulę — jak łatwo się przekonać z rys. 1). Odpowiedni jakobian pomnożony przez gb otrzyma wtedy postać

$$\omega = \omega(g,b) = \frac{2gb}{\frac{\partial \chi}{\partial b}\cos\frac{\chi}{2}}, \tag{3.7}$$

gdzie χ jest określoną przez (3.5) funkcją g oraz b[9]). Postać funkcji ω zależy zatem od postaci funkcji oddziaływania molekuł.

Reasumując powyższe możemy zmianę rozważonej ilości molekuł wskutek zderzeń zapisać w postaci

$$\frac{\partial_e f}{\partial t} d_3x\, d_3\xi\, dt \equiv d_3x\, d_3\xi\, dt \int d_3\xi_1 \int d_2k\, \omega (f' f_1' - f f_1).$$

Równanie Boltzmanna (3.1) otrzymuje zatem postać ostateczną

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = \int d_3\xi_1 \int d_2k\, \omega (f' f_1' - f f_1). \tag{3.8}$$

Lewa strona tego równania wyraża zmianę funkcji rozkładu wskutek: (1) niestacjonarności ruchu (pierwszy wyraz), (2) zmiany położenia molekuł (drugi wyraz) oraz (3) działania sił zewnętrznych (trzeci wyraz). Prawa strona tego równania wyraża zmianę funkcji rozkładu wywołaną przez zderzenia molekuł.

Z matematycznego punktu widzenia równanie (3.8) przedstawia zawiłe równanie funkcjonalne. Lewa strona tego równania ma wprawdzie stosunkowo prostą strukturę liniowego równania różniczkowego pierwszego rzędu o pochodnych cząstkowych. Jednakże prawa strona jest bardzo skomplikowana. Jest to wyrażenie, w którym niewiadoma funkcja występuje nieliniowo pod całką wielokrotną z argumentami poddanymi transformacji liniowej (3.6) względem parametrów, której również wykonane ma być całkowanie. Z tego względu rozwiązywanie równia Boltz-

[9]) Warto tu zauważyć, że dla molekuł maxwellowskich, odpychających się siłami odwrotnie proporcjonalnymi do piątej potęgi odległości, wyrażenie ω jest niezależne od g. Na tym właśnie polega znaczne uproszczenie, do jakiego prowadzi ten model.

manna jest problemem bardzo trudnym. Ograniczamy się na razie jedynie do ustalenia metody kolejnych przybliżeń, rozwinięcia na szereg lub wreszcie dowodu istnienia w prostych przypadkach szczególnych.

Nie wchodząc na razie w szczegóły metod rozwiązywania równania Boltzmanna zastanówmy się nad tym, jakie zależności dla makroskopowych funkcji hydrodynamicznych, określonych wzorami (2.1) - (2.13), wynikają z tego równania.

Niech $\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ oznacza dowolną wielkość molekularną. Jeżeli spełniona jest zależność

$$\psi' + \psi_1' = \psi + \psi_1, \tag{3.9}$$

gdzie jak poprzednio $\psi' = \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}', t)$, $\psi_1' = \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1', t)$ itd., to wielkość ψ nazywamy niezmiennikiem zderzeń.

Prawa strona równania (3.9) oznacza sumę wielkości ψ dla obu molekuł przed zderzeniem, lewa strona zaś — sumę wielkości ψ po zderzeniu. Równanie (3.9) ma więc sens zasady zachowania wielkości ψ podczas elementarnego procesu zderzenia dwóch molekuł.

Istnieje pięć podstawowych skalarnych niezmienników zderzeń:

$$\psi^{(1)} = 1 \text{ [10]}, \tag{3.10.1}$$

$$(\psi^{(2)}, \psi^{(3)}, \psi^{(4)}) = \boldsymbol{\xi}, \tag{3.10.2}$$

$$\psi^{(5)} = \xi^2. \tag{3.10.3}$$

Podstawienie wyrażenia (3.10.1) do równania (3.9) daje banalną równość

$$1 + 1 = 1 + 1,$$

która jest wyrazem fizycznego faktu niezmienności ilości molekuł podczas zderzenia. Podstawienie wielkości (3.10.2) oraz (3.10.3) do równania (3.9), możliwe ze względu na równania (3.6), jest wyrazem zasad zachowania pędu i energii przy zderzeniach.

Równanie Boltzmanna (3.8) pomnóżmy teraz przez dowolną wielkość molekularną $\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ i scałkujmy obie strony względem prędkości $\boldsymbol{\xi}$. Otrzymamy

$$\int d_3\xi\, \psi \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \right) = \int d_3\xi\, \psi \int d_3\xi_1 \int d_2 k\, \omega (f' f_1' - f f_1).$$

Prawą stronę tego równania oznaczmy przez $\overline{\Delta\psi}$. Przekształcając lewą stronę tego równania otrzymujemy tzw. równanie przenoszenia (czyli

[10] Można by tu oczywiście przyjąć ogólniej $\psi^{(1)} = \text{const}$. To uogólnienie nie przynosi żadnych dodatkowych korzyści.

transportu) Maxwella (zwykle przechodzimy do zmiennych $\mathbf{c}$ zamiast zmiennych $\boldsymbol{\xi}$)

$$\frac{D}{Dt}(n\overline{\psi}) = -(n\overline{\psi c_k})_{,k} - n\left|\overline{\psi}\, u_{k,k} - \frac{\overline{D\psi}}{Dt} - \overline{c_k \psi_{,k}} - (F_k - \right. \tag{3.11}$$

$$\left. - \frac{Du_k}{Dt}\right)\overline{\psi_{,k}} - \overline{\frac{\partial \psi}{\partial c_i} c_k u_{i,k}}\right| + n\overline{\Delta\psi}.$$

Jeżeli ψ jest niezmiennikiem zderzeń, to $\overline{\Delta\psi} = 0$.

Dowód tej równości podany jest w pracy [1], w rozdziale 3.

Przyjmując najpierw $\psi = \psi^{(1)} = 1$ (zasada zachowania ilości molekuł) otrzymujemy z równania (3.11) równanie ciągłości

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (n u_i)_{,i} = 0, \tag{3.12}$$

co po pomnożeniu przez masę molekuły m daje równanie (1.1).

Przyjmując dalej

$$\psi = m\boldsymbol{\xi},$$

(zasada zachowania pędu) otrzymujemy równanie

$$p_{ij,j} - \varrho\left(F_i - \frac{Du_i}{Dt}\right) = 0 \tag{3.13}$$

identyczne z równaniem (1.2).

Przyjmując wreszcie

$$\psi = \psi^{(5)} = \frac{1}{2} m c^2,$$

otrzymujemy równanie

$$\frac{DT}{Dt} = -\frac{2}{3kn}\{p_{ij} u_{i,j} + q_{i,i}\} \tag{3.14}$$

równoważne przy uwzględnieniu (3.12) oraz (3.13) równaniu (1.3).

Jak więc widzimy, teoria kinetyczna potwierdza podstawowe równania hydrodynamiki klasycznej (1.1) - (1.4) [wraz z warunkiem (1.5)]. Otrzymanie dalszych zależności, które byłyby odpowiednikiem praw fenomenologicznych, wymaga już znajomości struktury rozwiązań równania Boltzmanna. W ogólnym przypadku zależności te nie będą już miały postaci równań (1.6) - (1.8). W tych natomiast przypadkach, w których równania te zostaną przez teorię kinetyczną potwierdzone, będziemy w stanie ponadto podać ocenę błędu wynikłego z przyjęcia takiego przybliżenia oraz obliczyć wartości współczynników kinetycznych.

Rozpatrzmy najprostszy przypadek równania Boltzmanna odpowiadający stacjonarnemu i jednorodnemu polu przepływu gazu bez działania sił zewnętrznych. Mamy wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad \mathbf{F} = 0.$$

Równanie (3.8) Boltzmanna przyjmie zatem postać

$$\int d_3 \xi_1 \int d_2 k\, \omega\, (f' f_1' - f f_1) = 0. \tag{4.1}$$

Warunkiem wystarczającym rozwiązania tego równania jest spełnienie zależności

$$f' f_1' = f f_1. \tag{4.2}$$

W tym przypadku można natychmiast odgadnąć rozwiązanie:

$$f = A e^{-B(\xi - D)^2}, \tag{4.3}$$

gdzie A, B, **D** jest to pięć stałych dowolnych.

Korzystając z równań (2.2), (2.4) oraz (2.11) możemy tym stałym nadać sens fizyczny. Okazuje się wtedy, że

$$A = n\left(\frac{m}{2\pi k T}\right)^{3n}, \qquad B = \frac{m}{2 k T}, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{u}, \tag{4.4}$$

gdzie n, $\mathbf{u}$, T oznaczają odpowiednio: gęstość molekularną, prędkość i temperaturę stacjonarnego jednorodnego przepływu. Podstawiając wyrażenia (4.4) do wzoru (4.3) otrzymujemy ostatecznie

$$f = n\left(\frac{m}{2\pi k T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m c^2}{2 k T}}. \tag{4.5}$$

Wzór ten przedstawia tzw. maxwellowski rozkład prędkości. Stanowi on podstawę wielkiej ilości obliczeń kinetycznych. Funkcja rozkładu dana równaniem (4.5) opisuje właściwie rozkład prędkości molekuł w stanie spoczynku gazu. Zagadnienie istnienia stałej prędkości $\mathbf{u}$ można bowiem zawsze sprowadzić do zagadnienia zmiany inercyjnego układu współrzędnych.

To najprostsze i podstawowe rozwiązanie równania Boltzmanna można ponadto uogólnić na przypadek istnienia sił zewnętrznych.

Znajomość maxwellowskiej funkcji rozkładu (4.5) pozwala na obliczenie całego szeregu wielkości takich, jak częstość zderzeń molekuł, średnia droga swobodna, prawdopodobieństwo przebycia określonej drogi swo-

bodnej, częstość zderzeń i droga swobodna molekuł o określonej prędkości itp. Przykładowo wymienimy tu wzór dla średniej drogi swobodnej

$$l = \frac{1}{\pi \sqrt{2}\, n \sigma^2}, \tag{4.6}$$

gdzie σ jest średnicą molekuły, n gęstością molekularną. Na maxwellowskiej funkcji rozkładu (4.5) opiera się także teoria obliczeń współczynników kinetycznych. Prowadzi ona jednak jedynie do zależności postaci (2.15), nie dając zatem zbyt dokładnych rezultatów.

Z punktu widzenia teorii opływów rozwiązanie (4.5) można uważać za kinetyczny opis niezaburzonego przepływu w dali od opływanego ciała stałego.

Maxwellowskie rozwiązanie (4.5) może służyć za narzędzie obliczeń jedynie w przypadkach zbliżonych bardzo do stanu równowagi, gdy zaburzenie przepływu jest pomijalnie małe. W szczególności w gazach bardzo rozrzedzonych molekuły odbijające się od powierzchni ciała stałego nieznacznie tylko wpływają na rozkład prędkości. Można zatem w tym przypadku zbudować teorię aerodynamiczną opartą na maxwellowskiej funkcji rozkładu. Ten dział aerodynamiki nosi nazwę aerodynamiki molekularnej (także niekiedy superaerodynamiki lub teorii wolnej molekuły). Rozwinął się on głównie dzięki pracom R o c a r d a, [8], Ł u n c a, [4], [5], [6], [7], T s i e n a, [9], i innych.

Dla uwzględnienia sposobu wzajemnego oddziaływania molekuł i powierzchni ciała stałego wprowadzony został przez S m o l u c h o w s k i e g o i K n u d s e n a tzw. współczynnik akomodacji. Okazało się mianowicie, że większość molekuł uderzających o powierzchnię ciała stałego nie odbija się bezpośrednio od niej, lecz zostaje przez nią na pewien czas zaabsorbowana, następnie zaś emitowana ze średnią energią odpowiadającą temperaturze ścianki. Współczynnik akomodacji określa się zależnością

$$e_0 = (1 - \alpha)\, e_u + \alpha\, e_s, \tag{4.7}$$

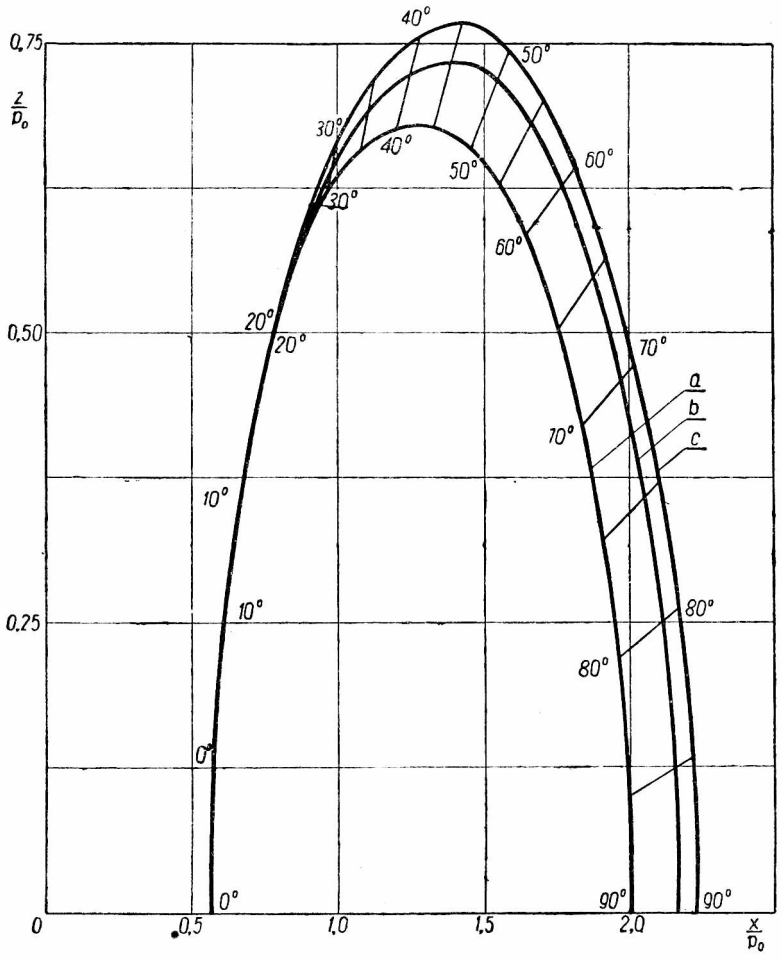
gdzie e_0 jest średnią energią odpowiadającą temperaturze molekuł odbitych, e_u średnią energią odpowiadającą temperaturze molekuł uderzających, e_s średnią energią odpowiadającą temperaturze ścianki.

Dla powierzchni metalicznych wartość współczynnika akomodacji waha się na ogół w granicach 0,87 - 0,97.

Przyjmując, że nierówności na powierzchni ścianki mają charakter chaotyczny, dochodzimy do następującego prawa rozkładu molekuł emitowanych przez ściankę:

$$d\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\, d\sigma \frac{\cos\varphi}{\pi}\, d\omega. \tag{4.8}$$

We wzorze tym $d\mathfrak{N}$ oznacza ilość molekuł emitowanych przez element powierzchni ścianki $d\sigma$ w kącie bryłowym $d\omega$, tworzącym kąt φ z normalną do powierzchni na jednostkę czasu; $\mathfrak{N}$ oznacza ilość molekuł absorbowanych przez ściankę na jednostkę powierzchni i jednostkę czasu.



Rys. 2

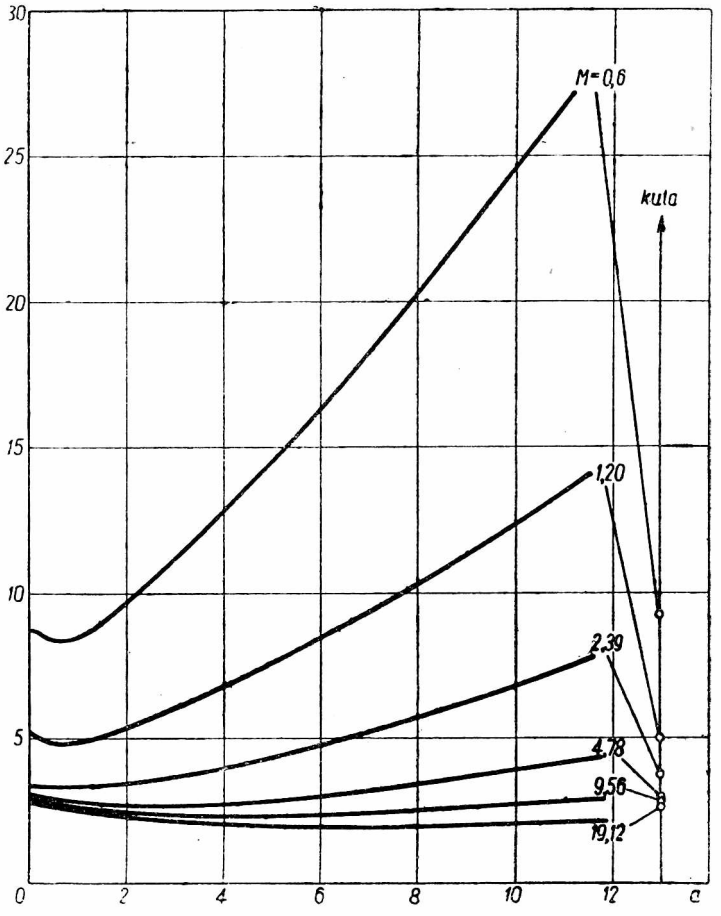
Wzór jest analogiczny do wzoru L a m b e r t a z optyki. Prowadzi on do wniosku, że rozkład molekuł emitowanych przez ściankę ma charakter rozkładu maxwellowskiego dla temperatury odpowiadającej temperaturze ścianki. Ściankę można więc zastąpić gazem fikcyjnym o temperaturze T_s, którego rozkład jest także maxwellowski. Powierzchnia zetknięcia się gazu ze ścianką jest zatem powierzchnią nieciągłości temperatury

oraz — jak łatwo przekonać się — także ciśnienia i prędkości. Dla skoku ciśnień otrzymujemy np.

$$p = \frac{p_0}{2}\left(2 - a + a\sqrt{\frac{T_s}{T_g}}\right), \tag{4.9}$$

gdzie p oznacza ciśnienie gazu na ściankę, p_0 ciśnienie w gazie obok ścianki, T_g temperaturę gazu.

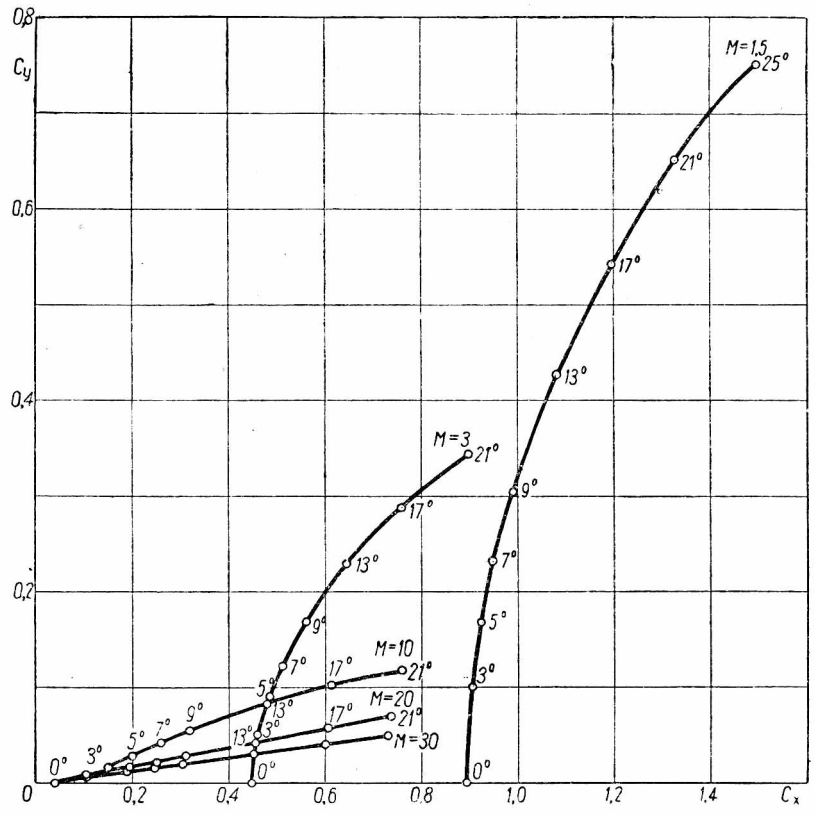
Dla $a = 0$ lub też dla $T_g = T_s$ wzór ten przechodzi w równość $p = p_0$.



Rys. 3

Jeżeli mamy do czynienia z ciałem opływanym przez gaz rozrzedzony, wówczas zakładając, że rozkład prędkości jest maxwellowski możemy obliczyć pęd, który jest przekazywany ciału przez molekuły. Prowadzi to do wzorów na współczynniki oporu i nośności skrzydła w gazach rozrzedzo-

nych. Szczegółowe rachunki wykonane zostały przez Łunca, Sängera i Tsiena. Biegunowe płata płaskiego otrzymane przez Łunca, [4], podajemy na rys. 2. Na rys. 3 podajemy wykresy oporu walców eliptycznych w funkcji stosunku obu półosi elipsy dla różnych liczb Macha, znalezione również przez Łunca, [4]. Na rys. 4 podane są biegunowe płaskiej płytki, otrzymane przez Sängera (cytujemy za Tsienem, [9]).



Rys. 4

Należy podkreślić, że rozważania aerodynamiki molekularnej zachowują swą ważność jedynie w przypadku gazów bardzo rozrzedzonych, gdy średnia droga swobodna jest znacznie większa od wymiarów ciał opływanych.

5. Rozwiązanie równania Boltzmanna metodą Enskoga-Chapmana-Burnetta

Równania aerodynamiki molekularnej słuszne są w przybliżeniu jedynie dla gazów bardzo silnie rozrzedzonych. Aby znaleźć ogólniejszy i dokładniejszy obraz przepływu, należy powrócić do równania Boltzmanna i szukać dalszych jego rozwiązań. Uczynili to niezależnie od sie-

bie D. Enskog (1917) i S. Chapman (1912). Teorię tę rozwinął i uzasadnił pod względem matematycznym Burnett (1935). Teoria Enskoga - Chapmana - Burnetta (w skrócie ECB) może być dziś uważana za klasyczny dorobek kinetycznej teorii gazów. Zasadniczą myślą tej teorii jest rozwinięcie funkcji rozkładu w szereg potęgowy względem parametru odwrotnie proporcjonalnego do gęstości molekularnej gazu. Ze względu na wzór (4.6) można również to rozwinięcie uważać za rozwinięcie według potęg drogi swobodnej. Zwarty lecz pełny obraz teorii ECB podany jest w pracy [1].

Dla funkcji rozkładu możemy zatem napisać rozwinięcie

$$f = n\overset{0}{f} + \overset{1}{f} + \frac{1}{n}\overset{2}{f} + \frac{1}{n^2}\overset{3}{f} + \dots . \tag{5.1}$$

Drugim podstawowym założeniem teorii jest przyjęcie, że funkcja rozkładu $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ zależy od czasu wyłącznie za pośrednictwem funkcji hydrodynamicznych $n(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ i $T(\mathbf{x}, t)$. Otrzymujemy stąd wzór

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{5.2}$$

Trzecim wreszcie podstawowym rachunkowym założeniem teorii ECB jest przyjęcie pewnego charakterystycznego sposobu rozłożenia na szereg występującego w równaniu Boltzmanna operatora różniczkowania względem czasu. Napiszmy mianowicie równanie Boltzmanna (3.8) w postaci

$$\hat{D} f = I(ff_1), \tag{5.3}$$

gdzie

$$\hat{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \hat{R}, \qquad \hat{R} = \boldsymbol{\xi}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}},$$

zaś

$$I(\varphi\psi_1) = \int d_3\xi \int d_2 k\, \omega(\varphi'\psi_1' - \varphi\psi_1).$$

We wzorach tych daszek nad symbolami oznacza operator.

Podstawiając rozwinięcie (5.1) do prawej strony równania (5.3) otrzymujemy

$$I(ff_1) = n^2\overset{0\,0}{I}(ff_1) + n\overset{0\,1}{I}(ff_1 + f\overset{1}{f}_1) + \overset{1\,0}{I}(\overset{1}{f}f_1) + \overset{0\,2}{I}(ff_1 + \overset{1\,1}{f}\overset{1}{f}_1 + f\overset{2}{f}_1) + \overset{2\,0}{I}(\overset{2}{f}f_1) + \dots = \tag{5.4}$$

$$= n^2\overset{0}{I} + n\overset{1}{I} + \overset{2}{I} + \frac{1}{n}\overset{3}{I} + \dots .$$

Dla operatora $\hat{D}$ z lewej strony równania (5.3) Enskog i Chapman przyjmują rozwinięcie

$$\hat{D} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n^r} \frac{\partial_r}{\partial t} + \hat{R}, \tag{5.5}$$

gdzie $\partial_r/\partial t$ oznacza r-ty wyraz rozwinięcia operatora $\partial/\partial t$ w szereg. Aby określić działanie operatora $\partial_r/\partial t$ na funkcję rozkładu wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$\overset{r}{\Phi} = \int d_3 \xi \Phi \overset{r}{f}, \tag{5.6}$$

gdzie $\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ jest dowolną wielkością molekularną. Na mocy równania (2.3) otrzymamy teraz następujące rozwinięcie wartości średniej:

$$\bar{\Phi} = \sum_{r=0}^{\infty} \overset{r}{\Phi} \left(\frac{1}{n}\right)^r. \tag{5.7}$$

W szczególności dla tensora napięć i strumienia ciepła otrzymamy

$$p_{ij} = \sum_{r=0}^{\infty} \overset{r}{p}_{ij} \frac{1}{n^r}, \qquad q_i = \sum_{r=0}^{\infty} \overset{r}{q}_i \frac{1}{n^r},$$

gdzie

$$\overset{r}{p}_{ij} = \varrho \int d_3 \xi \, c_i c_j \overset{r}{f} \qquad \text{oraz} \qquad \overset{r}{q}_i = \varrho \int c^2 c_i \overset{r}{f} d_3 \xi.$$

Równania przenoszenia (3.12) - (3.14) przyjmą wtedy postać

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} = -(n u_i)_{,i}, \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial t} = -(u_i u_{j,i}) + F_j - \dfrac{1}{\varrho} \left(\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} \overset{r}{p}_{ji} \frac{1}{n^r} \right)_{,i}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} = -u_i T_{,i} - \dfrac{2}{3kn} \left(\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\overset{r}{p}_{ij} u_{i,j}}{n^r} + \sum_{r=0}^{\infty} \overset{r}{q}_{i,i} \frac{1}{n^r} \right). \end{cases} \tag{5.8}$$

Przystąpimy obecnie do określenia działania operatora $\partial_r/\partial t$ na funkcję rozkładu. Ze względu na założenie (5.2) możemy napisać

$$\frac{\partial_r f}{\partial t} = \frac{\partial_r n}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial n} + \frac{\partial_r u_i}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u_i} + \frac{\partial_r T}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial T} \quad [11]. \tag{5.9}$$

[11]) Jeśli funkcja f zależy ponadto od gradientów funkcji hydrodynamicznych np. od $u_{i,j}$, to piszemy wzór (5.9) uzupełniając go dodatkowymi wyrazami np.

$$\frac{\partial f}{\partial u_{i,j}} \frac{\partial_r u_{i,j}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u_{i,j}} \left(\frac{\partial_r u_i}{\partial t} \right)_{,j}.$$

Określenie działania operatora $\partial_r/\partial t$ na funkcję rozkładu sprowadza się zatem do określenia działania tego operatora na funkcje hydrodynamiczne n, u_i, T. Działanie to określa się następująco:

$$\frac{\partial_0 n}{\partial t} = -(u_i n)_{,i}, \qquad \frac{\partial_r n}{\partial t} = 0 \qquad (r > 0); \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial_0 u_j}{\partial t} = -u_i u_{j,i} + F_j - \frac{1}{\varrho} \overset{0}{p}_{ji,i}, \qquad \frac{\partial_r u_j}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho} \overset{r}{p}_{ji,i} \qquad (r > 0); \tag{5.11}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial_0 T}{\partial t} = -u_j T_{,j} - \dfrac{2}{3kn} \{\overset{0}{p}_{ij} u_{i,j} + \overset{0}{q}_{i,i}\}, \\ \dfrac{\partial_r T}{\partial t} = -\dfrac{2}{3kn} \{\overset{r}{p}_{ij} u_{i,j} + \overset{r}{q}_{i,i}\}. \end{cases} \tag{5.12}$$

Ze wzorów tych widać przy uwzględnieniu równań (5.8), że

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n^r} \frac{\partial_r n}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial t}, \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n^r} \frac{\partial_r u_i}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n^r} \frac{\partial_r T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}. \tag{5.13}$$

Na mocy wzorów (5.9), (5.2) i (5.13) widzimy, że także

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n^r} \frac{\partial_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Stosując teraz operator $\hat{D}$ w postaci podanej wzorem (5.5) do rozwinięcia (5.1) otrzymujemy

$$\hat{D} f = n \overset{1}{D} + \overset{2}{D} + \frac{1}{n} \overset{3}{D} + \cdots, \tag{5.14}$$

gdzie

$$\begin{cases} \overset{1}{D} = \dfrac{\partial_0 \overset{0}{f}}{\partial t} + \hat{R} \overset{0}{f}, \\ \overset{2}{D} = \dfrac{\partial_0 \overset{1}{f}}{\partial t} + \dfrac{\partial_1 \overset{0}{f}}{\partial t} + \hat{R} \overset{1}{f}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{r}{D} = \dfrac{\partial_0 \overset{r-1}{f}}{\partial t} + \dfrac{\partial_1 \overset{r-2}{f}}{\partial t} + \cdots + \dfrac{\partial_r \overset{0}{f}}{\partial t} + \hat{R} \overset{r-1}{f}. \end{cases} \tag{5.15}$$

Przyrównując do siebie odpowiednie współczynniki rozwinięć (5.4) oraz (5.15) otrzymujemy ciąg kolejnych równań

$$I(\overset{0}{f}\overset{0}{f_1}) = 0, \tag{5.16.1}$$

$$I(\overset{0}{f}\overset{1}{f_1} + \overset{1}{f}\overset{0}{f_1}) = \frac{\partial_0 \overset{0}{f}}{\partial t} + \hat{R}\overset{0}{f}, \tag{5.16.2}$$

$$\begin{cases} I(\overset{0}{f}\overset{2}{f_1} + \overset{1}{f}\overset{1}{f_1} + \overset{2}{f}\overset{0}{f_1}) = \dfrac{\partial_0 \overset{1}{f}}{\partial t} + \dfrac{\partial_1 \overset{0}{f}}{\partial t} + \hat{R}\overset{1}{f}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases} \tag{5.16.3}$$

lub ogólnie

$$\overset{r}{I} = \overset{r}{D}. \tag{5.17}$$

Układ (5.16) daje możliwość kolejnego wyznaczania przybliżeń funkcji rozkładu. Z równania (5.16.1) odgadnąć możemy łatwo funkcję $\overset{0}{f}$ ze względu na analogię tego równania do równania (4.1). Mamy więc

$$\overset{0}{f} = A(\mathbf{x}, t)\, e^{-B(\mathbf{x},t)[\xi - \mathbf{D}(\mathbf{x},t)]^2}. \tag{5.18}$$

Rozwiązanie to przypomina maxwellowski rozkład prędkości (4.3). Zachodzi tu jednak bardzo istotna różnica polegająca na tym, że współczynniki $A, B, \mathbf{D}$ zależą obecnie od miejsca i czasu. Rozkład ten można by nazwać quasimaxwellowskim. Metoda przybliżania nie narzuca żadnego warunku na współczynniki A, B, $\mathbf{D}$: są one dowolnymi funkcjami $\mathbf{x}$ oraz t. Jako «warunek początkowy» Enskog i Chapman przyjmują

$$A = \left(\frac{m}{2\pi k T(\mathbf{x}, t)}\right)^{3/2}, \qquad B = \frac{m}{2kT(\mathbf{x}, t)}, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \tag{5.19}$$

Przy tak dobranych funkcjach $A, B, \mathbf{D}$ pierwsze przybliżenie $n\overset{0}{f}$ funkcji rozkładu pokrywa się z rozkładem maxwellowskim w przypadku jednorodnym i stacjonarnym (p. 4).

Równania (5.16.2), (5.16.3) i wszystkie następne są liniowymi równaniami względem funkcji $\overset{1}{f}, \overset{2}{f}, \dots$, dającymi się sprowadzić do liniowych równań całkowych. Rozwiązując te równania otrzymuje się dalsze przybliżenia funkcji rozkładu.

Zajmiemy się obecnie drugim przybliżeniem funkcji rozkładu danym przez wyrażenie $n\overset{0}{f} + \overset{1}{f}$. Dla znalezienia funkcji $\overset{1}{f}$ mamy równanie (5.16.2). Przyjmując $\overset{1}{f} = \Phi \overset{1}{f}\overset{0}{f}$ sprowadzamy zagadnienie do znalezienia funkcji Φ.

Równanie (5.16.2) można po przekształceniach zapisać w postaci

$$(5.20)\qquad \int d_3\xi_1 \int d_2 k\, \omega\, \overset{0}{f}\overset{0}{f}_1 (\Phi' + \Phi'_1 - \Phi - \Phi_1) = \overset{0}{f}\left[\left(\frac{m}{2\pi k T} c^2 - \frac{5}{2}\right) c_i \frac{\partial \log T}{\partial x_i} + \left(\frac{m}{\pi k T}\right) \overset{\circ}{c}_i c_j u_{i,j}\right].$$

Traktując $\overset{1}{\Phi}$ jako funkcję $\mathbf{x}, \mathbf{c}, t$ oraz korzystając z liniowości równania (5.20) możemy poszukiwać jego rozwiązania w postaci [12])

$$\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} A_i \frac{\partial (\log T)}{\partial x_i} - B_{ij} u_{i,j}.$$

Wektor A_i oraz tensor B_{ij} są funkcjami $\mathbf{c}$. Znalezienie rozwiązania sprowadza się więc do wyznaczenia tych wielkości. W tym celu najdogodniej jest użyć rozwinięć A_i oraz B_{ij} na szeregi wielomianów Sonina. W szczegóły tych rachunków wchodzić nie będziemy (zwarty ich obraz podany jest w pracy [1]).

Znając $\overset{0}{f}$ oraz $\overset{1}{f}$ możemy wreszcie otrzymać trzecie przybliżenie funkcji rozkładu, znajdując $\overset{2}{f}$ z równania (5.16.3). Te dość żmudne rachunki wykonał Burnett (1935).

W świetle omówionej teorii ECB rozpatrzmy obecnie zastosowanie równania Boltzmanna do hydrodynamiki.

Rozpatrzmy najpierw hydrodynamikę opartą na pierwszym przybliżeniu funkcji rozkładu $n\overset{0}{f}$, gdzie $\overset{0}{f}$ dane jest przez wzory (5.18) i (5.19). Żądaną hydrodynamikę otrzymujemy odrzucając w szeregach występujących w równaniach przenoszenia (5.8) wszystkie następne wyrazy po pierwszym oraz wyznaczając $\overset{0}{p}_{ij}$ i $\overset{0}{q}_i$ ze wzorów (2.7) i (2.13) w oparciu o funkcję $n\overset{0}{f}$. Otrzymamy wtedy

$$\overset{0}{p}_{ij} = \varrho \int c_i c_j \overset{0}{f}\, d_3\xi = k n T \delta_{ij} = \frac{1}{3}\varrho \overline{c^2} \delta_{ij} = p \delta_{ij}, \qquad \overset{0}{q}_i = \varrho \int d_3\xi\, c^2 c_i f = 0.$$

Po podstawieniu do równań przenoszenia (5.8) mamy

$$(5.21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} + (n u_i)_{,i} = 0, \qquad \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} = F_i - \dfrac{1}{\varrho} p_{,i}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + u_i T_{,i} = -\dfrac{2}{3} T u_{i,i}. \end{cases}$$

[12]) Do tego rozwiązania należałoby dodać dowolne rozwiązanie równania jednorodnego, tj. równania, po prawej stronie którego znajduje się zero, i sprawdzić tzw. warunek ortogonalności (por. [33], str. 107). Nie wchodząc w szczegóły stwierdzimy, że warunek ten jest spełniony.

Jak widać pierwsze dwa równania stanowią: równanie ciągłości i równanie Eulera. Trzecie z tych równań sprowadza się łatwo do postaci

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{n}{T^{3/2}}\right)=0.$$

Określa więc ono adiabatyczną przemianę gazu. Reasumując możemy powiedzieć, że hydrodynamika oparta na pierwszym przybliżeniu funkcji rozkładu jest hydrodynamiką gazu ściśliwego, lecz nielepkiego i nie przewodzącego ciepła, podlegającego zatem przemianie adiabatycznej.

Przejdźmy z kolei do hydrodynamiki zbudowanej na drugim przybliżeniu funkcji rozkładu

$$f=n\overset{0}{f}+\overset{1}{f}.$$

Obliczając ze wzorów (2.13) i (2.7) wektor strumienia ciepła i tensor napięć otrzymujemy

$$q_j=\frac{1}{n}\overset{1}{q}_j=\frac{m}{2}\int d_3\,\xi\,c_j\,c^2\,f=-\frac{2\,k^2\,T}{3\,m}\,[A_i,A_i]\,T_{,j} \tag{5.22}$$

oraz

$$p_{ij}=\overset{0}{p}_{ij}+\frac{1}{n}\overset{1}{p}_{ij}=m\int d_3\,\xi\,c_i\,c_j\,f=p\,\delta_{ij}-\frac{1}{5}\,k\,T\,[B_{kl},B_{lk}]\,\overset{\circ}{\tilde{u}}_{i,j}, \tag{5.23}$$

gdzie

$$[A_i,A_i]=\frac{1}{4}\int d_3\,\xi\int d_3\,\xi_1\int d_2\,k\,\omega\,\overset{0}{f}\overset{0}{f}_1\,(A_i+A_{1i}-$$

$$-A'_i-A'_{1i})\,(A_i+A_{1i}-A'_i-A'_{1i}),$$

zaś $[B_{kl},B_{lk}]$ jest określone zupełnie analogicznie. Przyjmując

$$\lambda=\frac{2\,k^2\,T}{3\,m}\,[A_i,A_i] \tag{5.24}$$

oraz

$$\mu=\frac{1}{10}\,k\,T\,[B_{kl},B_{lk}] \tag{5.25}$$

otrzymujemy zamiast równań (5.22) i (5.23)

$$q_j=-\lambda\,T_{,j}, \tag{5.26}$$

$$p_{ij}=p\,\delta_{ij}-2\,\mu\,\overset{\circ}{\tilde{u}}_{i,j}. \tag{5.27}$$

Podstawiając te wyrażenia do równań przenoszenia (5.8) otrzymujemy

$$\begin{cases}\dfrac{\partial n}{\partial t}+(n\,u_i)_{,i}=0\,, & \dfrac{\partial u_j}{\partial t}+u_i\,u_{j,i}=F_j-\dfrac{1}{\varrho}\,p_{,j}+\dfrac{2}{\varrho}\,(\mu\,\overset{\circ}{\tilde{u}}_{i,j})_{,i}\,,\\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial t}+u_i\,T_{,i}=-\dfrac{2}{3\,k\,n}\,[(p\,\delta_{ij}-2\,\mu\,\overset{\circ}{\tilde{u}}_{i,j})\,u_{i,j}-(\lambda\,T_{,j})_j]\,. \end{cases} \tag{5.28}$$

Jak widać, hydrodynamika oparta na drugim przybliżeniu funkcji rozkładu prowadzi do równania ciągłości, równań Naviera - Stokesa (ze zmienną lepkością) i równania zachowania energii przy uwzględnieniu przewodnictwa cieplnego cieczy.

Przechodzimy wreszcie do trzeciego przybliżenia funkcji rozkładu

$$f = n\overset{0}{f} + \overset{1}{f} + \frac{1}{n}\overset{2}{f}.$$

Z wykonanych przez Burnetta rachunków wynikają następujące zależności pomiędzy wektorem q_i i tensorem p_{ij} z jednej strony, a funkcjami n, u_i, T — z drugiej:

$$(5.29)\quad q_i = -\lambda T_{,i} + \Theta_1 \frac{\mu^2}{\varrho T} u_{j,j} T_{,i} + \Theta_2 \frac{\mu^2}{\varrho T}\left[\frac{2}{3}(T u_{j,j})_{,i} + 2 u_{j,i} T_{,j}\right] + \\ + \left[\Theta_3 \frac{\mu^2}{\varrho p} p_{,j} + \Theta_4 \frac{\mu^2}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x_j} + \Theta_5 \frac{\mu^2}{\varrho T} T_{,j}\right] \overset{\circ}{\tilde{u}}_{j,i},$$

$$(5.30)\quad p_{ij} = p\,\delta_{ij} - 2\mu \overset{\circ}{\tilde{u}}_{i,j} + K_1 \frac{\mu^2}{p} u_{k,k} \overset{\circ}{\tilde{u}}_{i,j} + \\ + K_2 \frac{\mu^2}{p}\left[-\left(\frac{1}{\varrho} p_{,j}\right)_{,i} - u_{k,i} u_{j,k} - 2 \overset{\circ}{\tilde{u}}_{i,k} u_{j,k}\right] + \\ + K_3 \frac{\mu^2}{\varrho T} \overset{\circ}{\tilde{T}}_{,ij} + K_4 \frac{\mu^2}{\varrho p T} \overset{\circ}{\tilde{p}}_{,i} \overset{\circ}{\tilde{T}}_{,j} + K_5 \frac{\mu^2}{\varrho T^2} \overset{\circ}{\tilde{T}}_{,i} \overset{\circ}{\tilde{T}}_{,j} + K_6 \frac{\mu^2}{p} \overset{\circ}{\tilde{u}}_{i,k} \overset{\circ}{\tilde{u}}_{k,j}.$$

Bezwymiarowe współczynniki $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_5$ oraz $k_1, k_2, \ldots, k_6$ określone są wzorami przybliżonymi

$$(5.31)\quad \begin{cases} \Theta_1 = \dfrac{15}{4}\left(\dfrac{7}{2} - \dfrac{T}{\mu}\dfrac{d\mu}{dT}\right), \quad \Theta_2 = \dfrac{45}{8}, \quad \Theta_3 = -3, \quad \Theta_4 = 3, \\ \Theta_5 = \dfrac{3}{2}\left(5 - \dfrac{T}{\mu}\dfrac{d\mu}{dT}\right), \end{cases}$$

$$(5.32)\quad \begin{cases} K_1 = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{7}{2} - \dfrac{T}{\mu}\dfrac{d\mu}{dT}\right), \quad K_2 = 2, \quad K_3 = 3, \quad K_4 = 0, \\ K_5 = \dfrac{3T}{\mu}\dfrac{d\mu}{dT}, \quad K_6 = 8. \end{cases}$$

Ze wzorów (5.29) i (5.30) widać, że w trzecim etapie przybliżenia pojawiają się w równaniach wyrazy określające wzajemny wpływ napięć na przepływ ciepła oraz wpływ wyrazów «cieplnych» na napięcia.

Przepływ gazu opisany tymi równaniami Burnetta nazywamy poślizgowym.

Pełny układ równań Burnetta otrzymujemy podstawiając wyrażenia (5.29) i (5.30) do równań przenoszenia (5.8).

Poprawki we wzorach (5.29) i (5.30), charakterystyczne dla trzeciego przybliżenia, mogą być oczywiście pominięte w przypadku przepływu gazów o gęstościach zwykłych (tj. zbliżonych do atmosferycznych) z niezbyt wielkimi prędkościami. Co się tyczy wektora strumienia ciepła, to znaczenie poprawek burnettowskich nie jest zbyt duże. Poprawki te mianowicie odnoszą się wyłącznie do stanu ruchu gazu i znikają w stanie spoczynku. Jednakże w stanie ruchu przenoszenie ciepła w gazie odbywa się w przeważającej mierze drogą konwekcji (makroskopowej). Przewodnictwo natomiast nie odgrywa tu większej roli.

Dla zbadania wpływu poprawek burnettowskich na tensor napięć porównajmy np. trzeci i drugi wyraz ze wzorów (5.30). Wpływu drugiego wyrazu nie da się pominąć, jeśli wyrażenie $\mu u_{k,k}/p$ nie jest małe. Ponieważ jednak p jest proporcjonalne do $1/2\,\varrho\,\bar{c}^2$, zaś $\mu \sim \varrho\,\bar{c}\,l$, więc wyrażenie rozważane jest rzędu

$$u_{k,k} \cdot \frac{\text{średnia droga swobodna}}{\text{prędkość dźwięku}}.$$

Wyrażenie to trzeba więc uwzględniać dla opisania ruchu gazu w tych przypadkach, w których zmiana prędkości na długości drogi swobodnej jest znaczną częścią prędkości dźwięku. Warunki takie istnieją np. w fali uderzeniowej. Poza falą uderzeniową rozpatrywane wyrażenie ma znaczenie jedynie przy bardzo małych ciśnieniach, rzędu 10^{-6} atm. Napięcia cieplne [wyrazy zawierające we wzorze (5.30)] w tensorze napięć odgrywają również pewną rolę. Porównując np. wyraz

$$K_3 \frac{\mu}{\varrho T} \overset{\circ}{\underset{\sim}{\underset{\sim}{T}}}_{,ij}$$

z wyrazem

$$-2\mu \overset{\circ}{\underset{\sim}{\underset{\sim}{u}}}_{i,j}$$

można obliczyć, że przy

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{\underset{\sim}{u}}}_{i,j} \approx \frac{1}{\text{sec}}$$

oraz

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{\underset{\sim}{T}}}_{,ij} \approx \frac{1\ \text{stop}}{\text{cm}^2},$$

stosunek obu wyrazów jest rzędu 0,1%.

Analizując wielkości poprawek burnettowskich Tsien, [9], dochodzi do wniosku, że mają one znaczenie przy dużych wartościach stosunku M^2/Re, gdzie M jest liczbą Macha, Re liczbą Reynoldsa.

Oznaczałoby to, że w zakresie małych prędkości można zastąpić układ równań Burnetta przez układ Naviera-Stokesa. Nawet jednak w tym uproszczonym przypadku obraz ruchu poślizgowego zachowa w pewnej mierze swoje charakterystyczne własności ze względu na specyficzne warunki brzegowe.

Problem należytego sformułowania warunków brzegowych w przypadku ruchu poślizgowego nie znalazł dotychczas właściwego rozwiązania. Rzecz zatem zrozumiała, że i kwestia istnienia rozwiązań równań Burnetta pozostaje całkowicie otwarta. Kwestia ta stanowi centralne zagadnienie aerodynamiki ruchu poślizgowego.

W zakresie ruchu poślizgowego nie można dłużej utrzymać założenia znikania stycznej składowej prędkości na powierzchni ciała opływanego (stąd nazwa: ruch «poślizgowy»). Jako swojego rodzaju warunek brzegowy może tu służyć równanie

$$u = \frac{\mu}{\beta}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{3}{4}\frac{\mu}{\varrho T}\frac{\partial T}{\partial x},$$

łączące prędkość przy ścianie u z jej gradientem normalnym $\partial u/\partial y$ wraz ze stycznym gradientem temperatury $\partial T/\partial x$ (β oznacza tu współczynnik tarcia gazu o ścianę i zależy od rodzaju powierzchni ściany).

Rozwiązania kwestii warunków brzegowych należałoby szukać raczej przez ich określenie dla samej funkcji rozkładu. Ten sam punkt widzenia przyjął w swej pracy, [11], H. Grad, czym zajmiemy się nieco później (p. 7).

Tablica 1

Temperatura (°C)	$10^7 \cdot \mu$ dośw.	$10^7 \cdot \mu$ teoret.
—76,3	1275	1269
—37,9	1465	1469
16,1	1728	1728
51,6	1880	1884
100,2	2084	2086
200	2461	2461
250,1	2629	2633

Tablica 2

d_0 helu	$10^7 \cdot \lambda$ dośw.	$10^7 \cdot \lambda$ teoret.
0	(390)	390
27	741	724
45,4	1077	1053
84,7	2320	2347
94,61	2939	2943
100	(3360)	3360

Teoria ECB daje nie tylko możliwość układania równań hydrodynamicznych. Wzory (5.24) i (5.25) pozwalają na obliczenie współczynników kinetycznych: lepkości i przewodnictwa. Można też podać podobny wzór dla współczynnika dyfuzji w przypadku mieszaniny gazów. Chap-

man i Cowling, [1], podają rozbudowany aparat matematyczny służący do obliczania tych współczynników. Wyniki tych obliczeń przeprowadzone dla różnych modeli oddziaływań molekuł są na ogół w bardzo dobrej zgodności z doświadczeniem. Przykładowo podamy tu kilka wartości liczbowych (dane zaczerpnięte są z pracy [1], str. 226 oraz 243).

W tablicy 1 podany jest współczynnik lepkości azotu (N_2) w różnych temperaturach. W tablicy 2 podany jest współczynnik przewodnictwa mieszaniny helu (He) z argonem (A) przy różnych składach procentowych mieszaniny.

6. Zagadnienie nieodwracalności a równanie Boltzmanna

Mechanika klasyczna opisuje jedynie odwracalne procesy fizyczne. Tak np. ruch punktu materialnego w polu sił niezależnych od czasu, zgodny z prawami Newtona, jest typowym przykładem zjawiska odwracalnego. Zjawisko nazywamy odwracalnym, jeżeli może ono przebiegać równie dobrze w obu kierunkach. Wyjaśnijmy bliżej, o co tu chodzi. Przypuśćmy, że jakiś układ materialny A znajdujący się w chwili $t = 0$ w pewnym stanie «0» przeszedł po czasie t do innego stanu np. stanu «1». Weźmy teraz pod uwagę inny układ materialny B znajdujący się w stanie różniącym się od «1» układu A jedynie tym, że kierunki prędkości zostały zamienione na przeciwne. Jeżeli układ B przejdzie w ciągu czasu t w stan, który się różni od stanu «0» układu jedynie kierunkami prędkości, to mówimy, że przejście układu A od stanu «0» do stanu «1» jest zjawiskiem odwracalnym. Zagadnieniu odwracalności można by nadać następującą postać matematyczną. Przypuśćmy, że $\psi_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ są rozwiązaniami pewnych równań ruchu opisujących zjawisko. Zjawisko jest odwracalne wówczas, gdy również funkcje

$$\pi_\nu(t) = \hat{D}\,\psi_\nu(-t)$$

są rozwiązaniami równań ruchu. $\hat{D}$ oznacza tu symbolicznie operację zmiany znaku wszystkich występujących prędkości.

Odwracalność zjawisk opisywanych przez mechanikę klasyczną wynika z niezmienniczości równań ruchu względem zmiany znaku czasu. Istotnie, równanie dynamiczne Lagrange'a

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

możemy także zapisać w postaci [13])

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{d(-t)}\frac{\partial L}{\partial(-\dot{q}_i)} = 0.$$

[13]) Należy tu podkreślić, że całe rozumowanie przytoczone słuszne jest w przypadku funkcji Lagrange'a L niezależnej *explicite* od czasu. Rozumowanie nasze odnosi się więc jedynie do układu izolowanego, zamkniętego i skończonego.

Zupełnie podobnie możemy się przekonać, że procesy opisywane przez twierdzenie Liouville'a (1.12) są procesami odwracalnymi. Istotnie, równanie (1.12) możemy też zapisać w postaci

$$\frac{\partial P}{\partial(-t)} + \sum_{\alpha=1}^{N}\left[F_{\alpha i}\frac{\partial P}{\partial(-p_{\alpha i})} + \frac{(-p_{\alpha i})}{m_\alpha}\frac{\partial P}{\partial x_{\alpha i}}\right] = 0 .$$

Inaczej mówiąc, jeżeli funkcja $P(\mathbf{x}^N, \mathbf{p}^N, t)$ jest rozwiązaniem równania Liouville'a, to także funkcja

$$P_1 \equiv \hat{D}P(\mathbf{x}^N, \mathbf{p}^N, -t) \equiv P(\mathbf{x}^N, -\mathbf{p}^N, -t)$$

jest rozwiązaniem równania Liouville'a.

Ruch gazu nielepkiego opisany równaniami Eulera (5.12) jest również odwracalny. Natomiast ruch gazu lepkiego opisany równaniami (5.28) nie jest już zjawiskiem odwracalnym [14]).

Równanie Boltzmanna, jak się zaraz przekonamy, opisuje procesy nieodwracalne. Fakt ten wiąże się ściśle z założeniem chaosu molekularnego koniecznym do wyprowadzenia równania Boltzmanna. Nieodwracalność zjawisk opisanych równaniem Boltzmanna sprowadza się do tego, że dowolny stan gazu wywołany np. jakimś zaburzeniem zbliża się w miarę upływu czasu do stanu równowagi opisanego przez funkcję rozkładu maxwellowskiego.

Fakt nieodwracalności zjawisk związanych z równaniem Boltzmanna można wykazać bardzo prosto bez rozwiązywania równania w przypadku rozkładu jednorodnego bez działania sił zewnętrznych, do którego to przypadku ograniczymy się. W tym celu wyprowadzamy tzw. funkcję Boltzmanna

$$H = n\,\overline{\log f} = \int d_3\xi\, f \log f . \tag{6.1}$$

Funkcja H jest więc jedynie funkcją czasu, a zarazem funkcjonałem f. Obliczmy pochodną $\partial H/\partial t$. Mamy

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \int d_3\xi\,(1+\ln f)\frac{\partial f}{\partial t} . \tag{6.2}$$

Tę pochodną można przekształcić [15]) do postaci

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{4}\int d_3\xi \int d_3\xi_1 \int d_2 k\,\omega\,(f'f_1' - ff_1)\ln\frac{ff_1}{f'f_1'} .$$

W tym wzorze występują dwa wyrazy, które mają zawsze przeciwne znaki

$$\log\frac{ff_1}{f'f_1'} \quad \text{oraz} \quad f'f_1' - ff_1 .$$

[14]) Zob. np. [35].

[15]) Zob. praca [11], str. 343 lub [1], rozdział 3 (zakończenie).

Stąd wnosimy więc, że zawsze

$$\frac{\partial H}{\partial t} \leqq 0 . \tag{6.3}$$

Zatem funkcja H Boltzmanna stale maleje. Można jednak łatwo wykazać, że wielkość $H(t)$ jest ograniczona z dołu (czego tu nie będziemy dowodzić). Zatem funkcja H maleje do pewnego minimum. Tym minimum jest oczywiście rozkład maxwellowski (4.5). Powyższe twierdzenie nosi nazwę «twierdzenia H» Boltzmanna i odgrywa w teorii kinetycznej dość dużą rolę. Jest ono kinetycznym wyrazem drugiej zasady termodynamiki. Istotnie, jak można wykazać, funkcja H wiąże się z entropią zależnością

$$S = -k\varrho H, \tag{6.4}$$

gdzie S oznacza entropię jednostki masy, zaś k stałą Boltzmanna. Wzór ten może służyć za uogólnienie pojęcia entropii na przypadek gazu nie znajdującego się w równowadze. Twierdzenie H Boltzmanna może być uogólnione również na przypadek niejednorodnych stanów gazu.

Wykazaliśmy nieodwracalność procesów związanych z równaniem Boltzmanna bez jego rozwiązywania. Nadmienimy jednak, że nie brak było prób rozwiązywania równania Boltzmanna w celu wyraźnego wyznaczenia zmienności funkcji rozkładu f w czasie. Takie rozwiązanie określiłoby całkowicie proces przejścia gazu do stanu równowagi. Wspomniane próby ograniczały się zazwyczaj do przypadku jednorodnego rozkładu opisanego funkcją f «izotropową» względem $\boldsymbol{\xi}$ (tj. zależną jedynie od modułu $|\boldsymbol{\xi}|$).Najpoważniejszą z tych prób była praca Carlemanna (1933), który pod powyższymi założeniami dowiódł istnienia rozwiązania równania Boltzmanna przy danych warunkach początkowych i wykazał przechodzenie tego rozwiązania w rozwiązanie maxwellowskie. Były oprócz tej pracy i inne próby dowodzenia istnienia rozwiązania równania Boltzmanna, [13]. Opierały się one jednak zawsze na założeniu jednorodności i izotropowości.

Na znacznie ogólniejszych założeniach oparta jest praca E. Wilda, [14]. Wild sprowadza różniczkowo-całkowe równanie Boltzmanna do postaci równania całkowego dającego się rozwiązywać, jeśli znana jest liczba zderzeń

$$\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = \int d_3 \xi_1 \int d_2 k \omega f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1, t) . \tag{6.5}$$

W przypadku założenia maxwellowskiego oddziaływania molekuł wielkość ta staje się proporcjonalna do gęstości gazu. Wild podaje metodę kolejnych przybliżeń, służącą do rozwiązywania przekształconego przez siebie równania Boltzmanna.

Ciąg kolejnych przybliżeń jest zbieżny, jeśli założyć, że rozwiązanie w ogóle istnieje. Operując molekułami maxwellowskimi Wild bada,

przy jakich założeniach dowolny jednorodny rozkład przechodzi w rozkład maxwellowski. Praca Wilda nosi jednak charakter formalistyczny, gdyż brak w niej wyników fizycznych.

Ostatnio co prawda M. Klein, [15], zastosował tę metodę do zbadania, jak zachowuje się jako funkcja czasu wyrażenie $\overline{\xi_i \xi_j}$ $(i \neq j)$ w jednorodnym stanie gazu.

Okazało się, że wyrażenie to maleje proporcjonalnie do funkcji

$$e^{-t/\tau},$$

gdzie τ jest to tzw. czas relaksacji. Wynik ten był jednak znany już poprzednio Maxwellowi i wyprowadzony był na prostszej drodze.

Fakt nieodwracalności zjawisk związanych z równaniem Boltzmanna może się wydawać paradoksalny. Równanie to wynika bowiem z «odwracalnego» twierdzenia Liouville'a opartego na odwracalnych prawach mechaniki. Częściowym wytłumaczeniem tego faktu może być to, że do wyprowadzenia równania Boltzmanna z twierdzenia Liouville'a potrzebne jest dodatkowe założenie chaosu molekularnego. Nieodwracalność kinetycznej teorii oraz jej stosunek do mechaniki statystycznej jest jeszcze stale przedmiotem żywej polemiki w literaturze naukowej (por. pracę [16]). Zagadnienie to można więc nadal uważać za otwarte. Niektóre aspekty tej sprawy omówimy jeszcze pokrótce w p. 9.

Nieodwracalność procesów opisanych równaniem Boltzmanna stała się szczególnie aktualną sprawą w ostatnich czasach w związku z rozwojem termodynamiki procesów nieodwracalnych. Między innymi wykonane zostały próby oparcia tej nowej teorii fenomenologicznej na gruncie kinetycznej teorii gazów [16]).

7. Metoda trzynastu momentów

Klasyczna teoria ECB daje potwierdzenie równań Naviera-Stokesa, próby wyjścia poza te równania oraz bardzo dobry schemat rachunkowy obliczenia współczynników kinetycznych.

Pomimo tych niewątpliwych sukcesów rozwiązanie ECB jest dalekie od ogólności i obarczone szeregiem braków. Najpoważniejszym z tych braków teorii ECB jest ograniczenie rozwiązania równania Boltzmanna do tzw. rozwiązań normalnych, tj. takich, w których funkcja rozkładu f zależy od swych argumentów jedynie za pośrednictwem pięciu funkcji hydrodynamicznych $n(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $T(\mathbf{x}, t)$ oraz ich gradientów. Jak już stwierdziliśmy (w p. 1), opis ruchu gazów, którego dostarcza nam teoria kinetyczna (a więc równanie Boltzmanna), jest znacznie bogatszy od opisu hydrodynamiki klasycznej. Tak więc ograniczenie się do funkcji roz-

[16]) Por. [36].

kładu danej jedynie poprzez funkcje hydrodynamiczne zacieśnia znacznie teorię i, być może, pozbawia nas możliwości opisania całego szeregu efektów fizycznych o podłożu molekularnym.

W całym dość skomplikowanym formalizmie ECB brak jest bezpośredniości i prostoty, co może nasuwać podejrzenie, że np. trzecie burnettowskie przybliżenie rozwiązania nie dość dokładnie przedstawia rzeczywisty przebieg zjawiska.

Bardzo poważnym brakiem teorii ECB właściwie nieprzezwyciężonym dotychczas przez żadną inną teorię jest nieznajomość warunków brzegowych. Jak już wspominaliśmy, warunki te nie zostały nawet sformułowane. Jednak właśnie teoria kinetyczna powinna przynieść wyjaśnienie tych spraw. Zagadnienie to komplikuje się jeszcze o tyle, że jak wykazały wnikliwe rozważania R o c a r d a, [8], molekuły gazu znajdujące się w pobliżu powierzchni ciała stałego tworzą wraz z nim — wskutek oddziaływań wzajemnych — pewną całość, gaz + ciało stałe, niezwykle trudną do ujęcia matematycznego.

Ciekawą próbą przezwyciężenia przynajmniej części omówionych tu braków teorii ECB jest praca H. G r a d a, [11]. Główną koncepcją metody G r a d a jest rozwinięcie funkcji na szereg trójwymiarowych wielomianów H e r m i t e' a, [10]. Posługując się wielkościami bezwymiarowymi

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{c}}{\sqrt{\frac{kT}{m}}}, \qquad g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{kT}{m}\right)^{3/2} f \tag{7.1}$$

możemy dla bezwymiarowej funkcji rozkładu g napisać rozwinięcie

$$g = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-v^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_i^{(n)}(\mathbf{x}, t) K_i^{(n)}(\mathbf{v}), \tag{7.2}$$

gdzie $K_i^{(n)}(\mathbf{v})$ oznacza trójwymiarowy wielomian H e r m i t e' a n-tego stopnia. Jest to zarazem symetryczny tensor n-tego rzędu, który w przypadku jednowymiarowym sprowadza się do zwykłego wielomianu H e r m i t e' a. Podajemy poniżej kilka pierwszych wielomianów H e r m i t e'a $K_i^{(n)}(\mathbf{v})$:

$$\begin{cases} K^{(0)} = 1, \\ K_i^{(1)} = v_i, \\ K_{ij}^{(2)} = v_i v_j - \delta_{ij}, \\ K_{ijk}^{(3)} = v_i v_j v_k - (v_i \delta_{jk} + v_j \delta_{ik} + v_k \delta_{ij}), \\ K_{ijkl}^{(4)} = v_i v_j v_k v_l - (v_i v_j \delta_{kl} + v_i v_k \delta_{jl} + v_i v_l \delta_{jk} + v_j v_k \delta_{il} + \\ \quad + v_j v_l \delta_{ik} + v_k v_l \delta_{ij}) + (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{il} + \delta_{il}\delta_{jk}). \end{cases} \tag{7.3}$$

Współczynniki rozwinięcia ze wzoru (7.2) $a_i^{(n)}(\mathbf{x}, t)$ są funkcjami miejsca i czasu. Są to także tensory n-tego rzędu, a mnożenie symboliczne $a_i^{(n)} K_i^{(n)}$ należy uważać jako n-krotną sumę po wszystkich wskaźnikach tensorowych. Ze względu na ortonormalność układu wielomianów $K_i^{(n)}$ otrzymujemy następujący wzór dla współczynników a_i:

$$a_i^{(n)} = \int g K_i^{(n)} d_3 v. \tag{7.4}$$

Współczynniki te są ściśle związane z momentami funkcji f określonymi przez wzory

$$Q_{ij\ldots}^{(n)} = \int d_3 \xi \xi_i \xi_j \ldots f. \tag{7.5}$$

Momenty te są wielkościami o określonym znaczeniu fizycznym. Mianowicie

$$Q^{(0)} = n, \quad \frac{1}{n} Q_i^{(1)} = u_i.$$

Przy obliczaniu dalszych momentów wygodniej jest zmienić definicję (7.4) w następujący sposób:

$$Q_{ij\ldots}^{(n)} = \int d_3 \xi c_i c_j \ldots f.$$

Wtedy

$$m Q_{ij}^{(2)} = p_{ij},$$

zwężenie zaś momentu trzeciego rzędu

$$Q_{ijk}^{(3)} = \int d_3 \xi c_i c_j c_k f$$

daje

$$q_i = \frac{m}{2} Q_{ikk}^{(3)} = \frac{m}{2} \int d_3 \xi c^2 c_i f,$$

tj. wektor strumienia ciepła.

Z rozwinięcia (7.2) widać od razu, że zależność funkcji rozkładu f nie może się ograniczać do samych tylko pięciu funkcji hydrodynamicznych ϱ, $\mathbf{u}$, T stanowiących zaledwie pierwsze jej momenty. Funkcja f zależy od nieskończenie wielu swych momentów, które są funkcjami miejsca i czasu. Dla tych nieskończenie wielu momentów [lub, co na jedno wychodzi, dla nieskończenie wielu współczynników $a_i^{(n)}$ rozwinięcia (7.2)] należy podać układ nieskończenie wielu równań różniczkowych. Ten układ równań uzyskuje się przez podstawienie rozwinięcia (7.1) do równania Boltzmanna. Po rozłożeniu otrzymanych w ten sposób wyrażeń na szeregi wielomianów Hermite'a przyrównujemy współczynniki przy odpowiednich wielomianach do siebie. Nie wchodząc w ogólną teorię rozwinięcia (7.2) przedstawioną w pracy [11] zatrzymamy się nieco nad szcze-

gólnym jej przypadkiem, polegającym na zachowaniu w rozwinięciu trzech pierwszych wyrazów

$$f = f^{(0)}\left(1 + \frac{1}{2} a_{ij}^{(2)} K_{ij}^{(2)} + \frac{1}{6} a_{ijk}^{(3)} K_{ijk}^{(3)}\right). \tag{7.6}$$

W rozwinięciu tym występuje 20 momentów: $\varrho, u_i, p_{ij}, Q_{ijk}$. Dalsze uproszczenie polegające na zwężeniu ostatniego wielomianu

$$K_i^{(3)} \equiv K_{ijj}^{(3)}$$

prowadzi również do zwężenia trzeciego współczynnika we wzorze (7.6). Przy uwzględnieniu wzorów (7.3) otrzymujemy więc ostatecznie rozkład

$$f = f^{(0)}\left[1 + \frac{\overset{0}{p}_{ij}}{2pRT} c_i c_j - \frac{q_i c_i}{pRT}\left(1 - \frac{c^2}{5RT}\right)\right]. \tag{7.7}$$

Jak widać z tego wzoru, funkcja f zależy od trzynastu wielkości

$$\varrho,\ u_i,\ T,\ P_{ij},\ q_i,$$

gdzie

$$\overset{0}{p}_{ij} = p_{ij} - \delta_{ij} p$$

daje pięć niezależnych wielkości, zaś ciśnienie $p = 1/3\, p_{ii}$ związane jest z temperaturą T i gęstością ϱ za pośrednictwem równania (2.12). Stąd pochodzi nazwa «metoda trzynastu momentów».

Metoda ta, jak widać, stanowi znacznie ogólniejszy schemat rachunkowy od klasycznej metody ECB, którą można by nazwać metodą pięciu momentów (ϱ, u_i, T).

Dla trzynastu wymienionych wielkości — przez podstawienie do równania Boltzmanna — otrzymuje się następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varrho}{\partial t} + (\varrho u_i)_{,i} = 0, \qquad \dfrac{D u_i}{D t} + \dfrac{1}{\varrho} p_{ij,j} = 0, \\ \dfrac{D}{D t}\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{kT}{m}\right) + \dfrac{1}{\varrho}(\mathring{p}_{ij} u_{i,j} + q_{i,i}) = 0, \\ \dfrac{\partial \mathring{p}_{ij}}{\partial t} + (u_r \mathring{p}_{ij})_{,r} + \dfrac{4}{5}\overset{\circ}{\widetilde{q}}_{i,j} + 2\,\overset{\circ}{\widetilde{p}}_{ir}\overset{\circ}{\widetilde{u}}_{j,r} + 2p\,\overset{\circ}{\widetilde{u}}_{i,j} + \dfrac{6}{m} B_1^{(2)} \varrho\, \mathring{p}_{ir} = 0, \\ \dfrac{\partial q_i}{\partial t} + (u_r q_i)_{,r} + \dfrac{7}{5} q_r u_{i,r} + \dfrac{2}{5} q_r u_{r,i} + \dfrac{2}{5} q_i u_{r,r} + \dfrac{kT}{m}\mathring{p}_{ir,r} + \\ \qquad + \dfrac{7}{2}\dfrac{k}{m}\mathring{p}_{ir} T_{,r} - \dfrac{\mathring{p}_{ir}}{\varrho} p_{rs,s} + \dfrac{5}{2} p \dfrac{k}{m} T_{,i} + \dfrac{4}{m} B_1^{(2)} \varrho\, q_i = 0; \end{cases} \tag{7.8}$$

oraz dodatkowo $p/\varrho = kT/m$.

We wzorach tych $E_1^{(2)}$ jest wielkością zależną od zderzeń; dla sił międzymolekularnych proporcjonalnych do $1/r^s$

$$B_1^{(2)} = \varphi(s)\, T^{\frac{s-5}{2s-2}},$$

zaś $\varphi(s)$ jest zależne od s i innych stałych molekularnych.

Najbardziej charakterystyczną cechą tego schematu jest występowanie w równaniach (7.8) wielkości p_{ij} oraz q_i zupełnie niezależnie od pozostałych funkcji ϱ, u_i, T. Wymaga to jednocześnie określenia dodatkowych warunków początkowych na napięcia i strumień ciepła, co znacznie zwiększa ogólność rozwiązań w porównaniu z teorią ECB.

G r a d wykazuje w dalszym ciągu, że dla niektórych wolno-zmiennych przepływów ogólny schemat (7.8) sprowadza się do równań N a v i e r a - S t o k e s a. Przykładami takiego ruchu mogą być przedstawione w pracy [11] następujące przypadki szczególne:

(1) przepływ ze stałymi funkcjami ϱ, $\mathbf{u}$, T oraz jednorodnymi p_{ij}, q_i,

(2) stacjonarny jednowymiarowy przepływ ciepła w gazie nieruchomym,

(3) płaski stacjonarny przepływ C o u e t t e' a ($u_x \neq 0$, $u_y = u_z = 0$, $\partial u_x/\partial x = \partial u_x/\partial z = 0$, $\partial u_x/\partial y \neq 0$, $\mathbf{q} = 0$.

Wyrażenia otrzymane dla współczynników kinetycznych w tej teorii zgadzają się z wyrażeniami otrzymanymi z teorii ECB, są więc także zgodne z doświadczeniem.

Interesujące stanowisko zajmuje G r a d w sprawie warunków brzegowych. Ustalając pewien warunek brzegowy dla funkcji rozkładu otrzymuje się nieskończenie wiele warunków brzegowych dla nieskończenie wielu momentów funkcji f.

Program zapowiedziany w pracy [11] przez G r a d a zawiera zastosowanie metody 13 momentów dla szczegółowego zbadania następujących zagadnień:

(1) przepływu P o i s e u i l l e' a,

(2) przepływu C o u e t t e' a,

(3) dyspersji płaskich fal dźwiękowych,

(4) stacjonarnej płaskiej fali uderzeniowej.

Z tego programu zostało już zrealizowane zagadnienie (4) (w pracy [12]), które omówione zostanie w następnym punkcie.

Pomimo poważnych trudności rachunkowych teorię rozwinięcia na szereg wielomianów H e r m i t e' a można uważać za otwarcie przed teorią kinetyczną gazów nowych horyzontów.

8. Równanie Boltzmanna a fala uderzeniowa

Badanie struktury uderzeniowej zapoczątkowane jeszcze w XIX wieku przez Rankine'a[17]) i Rayleigha na gruncie hydrodynamiki oraz przez Beckera[18]) na gruncie równań Naviera - Stokesa doprowadziły do wniosku, że grubość fali uderzeniowej jest rzędu kilku dróg swobodnych[19]).

Prowadzi to do wniosku, że hydrodynamika klasyczna nie jest w stanie dostarczyć dokładnego opisu zjawisk związanych z istnieniem fali uderzeniowej.

Zajmiemy się tu krótko zagadnieniem ujęcia kwestii fali uderzeniowej z punktu widzenia rozszerzonej hydrodynamiki. Poprzestaniemy jedynie na przedstawieniu samych koncepcji nie wchodząc w szczegóły rachunkowe. Omówienie wyników poruszonych tu teorii będzie tematem oddzielnego referatu[20]).

Istnieją zasadniczo dwie możliwości rozszerzenia zagadnienia fali uderzeniowej poza hydrodynamikę Naviera - Stokesa. Jedna z nich polega na zastąpieniu równań Naviera - Stokesa przez inny, lepiej dostosowany do zagadnienia układ równań hydrodynamicznych, oparty o jedną z omówionych uprzednio teorii rozwinięcia funkcji rozkładu w szereg. Taką metodę ujęcia można by nazwać quasiklasyczną. Drugą możliwością badania fali uderzeniowej jest bezpośrednie poszukiwanie funkcji rozkładu, która by opisywała zjawisko. Tę metodę można by nazwać molekularną.

Quasiklasyczne ujęcie zjawiska fali uderzeniowej stało się tematem kilku prac, z których omówimy tu dwie: pracę Zollera, [17], oraz pracę Grada, [12].

Metoda Zollera opiera się na rozszerzeniu teorii Enskoga - Chapmana dokonanym przez Burnetta. Zoller rozwija funkcję rozkładu f w szereg wielomianów Sonina i ustala za Burnettem równania przenoszenia wiążące gęstość ϱ, temperaturę T prędkości oraz dwie dodatkowe wielkości B_{11} i B_{02}, odpowiadające zaburzeniu stanu równowagi (związane ściśle z istnieniem napięć i przepływu ciepła). W przypadku płaskiej fali uderzeniowej wszystkie te funkcje zależą od jednej tylko zmiennej x. Układ równań przenoszenia sprowadza się więc do układu (nieliniowego) równań różniczkowych zwyczajnych. Dla tego

---

[17]) Por. [37].

[18]) Por. [38].

[19]) Dokładne omówienie tego zagadnienia na poziomie współczesnym z uwzględnieniem wyników otrzymanych w Związku Radzieckim znaleźć można w cytowanej książce Ł. Łojcjanskiego [31], str. 510.

[20]) Por. [38].

układu postawione jest następujące zagadnienie brzegowe: znaleźć takie rozwiązanie, przy którym

(1) dla $x = -\infty$ jest $\varrho = \varrho_0$, $T = T_0$, $u = u_0$, $B_{11} = B_{02} = 0$ (z dala od fali przepływ jest bowiem niezaburzony),

(2) dla $x = +\infty$ jest $\varrho = \varrho_1$, $T = T_1$, $u = u_1$, $B_{11} = B_{02} = 0$.

To zagadnienie brzegowe rozwiązane jest następnie metodami numerycznymi. Z o l l e r ograniczył się w nowej pracy wyłącznie do maxwellowskiego modelu oddziaływania molekuł.

O ile praca Z o l l e r a oparta jest na schemacie ECB, o tyle praca G r a d a, [12], opiera się na ogólniejszej metodzie trzynastu momentów. Bieg rozumowania jest tu bardzo prosty. Ogólne równanie (7.8) hydrodynamiki 13 momentów pisze się w przypadku jednowymiarowego stacjonarnego przepływu. Sprowadzają się one do układu 5 równań różniczkowych zwyczajnych z pięcioma niewiadomymi funkcjami ϱ, u, T, p_{xx}, q_x. Ten nieliniowy układ równań jest następnie całkowany numerycznie.

Molekularne ujęcie zjawiska fali uderzeniowej znalazło swe odbicie w jednej tylko pracy M o t t a - S m i t h a, [18]. Zasadniczym założeniem tej pracy jest przyjęcie funkcji rozkładu dla fali uderzeniowej w postaci superpozycji dwóch rozkładów maxwellowskich o stałych parametrach T oraz u, natomiast o zmiennych gęstościach. Fala uderzeniowa jest więc rozpatrywana z punktu widzenia tej teorii jako wynik wzajemnego oddziaływania (jak gdyby «reakcji chemicznej») dwóch gazów: poddźwiękowego i naddźwiękowego. Przyjęta za punkt wyjścia funkcja rozkładu ma postać

$$(8.1)\qquad f = f_\alpha + f_\beta = n_\alpha(x)\left(\frac{m}{2\pi k T_\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(\xi - \mathbf{i}u_\alpha)^2}{2kT_\alpha}} + n_\beta(x)\left(\frac{m}{2\pi k T_\beta}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(\xi - \mathbf{i}u_\beta)^2}{2kT_\beta}},$$

gdzie $\mathbf{i}$ oznacza jednostkowy wektor w kierunku osi x. W tym wzorze występują tylko dwie niewiadome funkcje: $n_\alpha(x)$ oraz $n_\beta(x)$. Wielkości T_α, T_β, u_α, u_β są natomiast przyjęte za stałe. Aby całkowicie określić funkcję f z równania (8.1), napiszemy oparte na równaniu B o l t z m a n n a równanie przenoszenia dowolnej wielkości molekularnej $\Phi(\xi)$:

$$(8.2)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int d_3\xi \Phi f + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int d_3\xi \Phi f_\alpha \xi_x + \int d_3\xi \Phi f_\beta \xi_x\right) = I_{\alpha\beta} + I_{\beta\alpha};$$

w równaniu tym

$$I_{\alpha\beta} = \int d_3\xi \int d_3\xi_1 \int d_2 k\, \omega\, (\Phi' - \Phi) f_\alpha f_{\beta 1}$$

oraz

$$I_{\beta\alpha} = \int d_3\xi \int d_3\xi_1 \int d_2 k\, \omega\, (\Phi' - \Phi) f_\beta f_{\alpha 1}.$$

Przyjmując kolejno $\Phi(\xi) = 1$, ξ_x oraz E (E oznacza tu energię molekuły) otrzymujemy po scałkowaniu układ trzech równań algebraicznych dla dwóch niewiadomych funkcji $n_\alpha(x)$, $n_\beta(x)$ oraz czterech stałych T_α, T_β, u_α, u_β. Z faktu, że równania te muszą być spełnione dla każdego x, wnosimy, że muszą one być równoważne jednemu równaniu. Prowadzi to do ustalenia związku pomiędzy stanem gazu w przepływie poddźwiękowym i naddźwiękowym. Związki te stanowią analogię do równań Rankine'a - Hugoniota znanych z dynamiki gazów doskonałych. Dla wyznaczenia gęstości $n_\alpha(x)$, $n_\beta(x)$ mamy zatem jedno równanie algebraiczne. Drugie równanie łączące te wielkości może być otrzymane z równania (8.2) przez przyjęcie dla $\Phi(\xi)$ dowolnej funkcji nie będącej niezmiennikiem zderzeń. Wykonane zostały obliczenia dla $\Phi = \xi_x^2$ oraz dla $\Phi = \xi_x^3$. Wyniki tych obliczeń dają niewielkie różnice. Wiąże się to z faktem, że funkcja (8.1) nie stanowi dokładnego rozwiązania równania Boltzmanna. Różnice wyników otrzymanych przy przyjmowaniu dowolnych funkcji Φ mogą być miarą dokładności przybliżenia (8.1). Dla $\Phi = \xi_x^2$ otrzymuje się dla gęstości wyrażenia typu

$$n_\alpha = \frac{n_0}{1+e^{\beta x/l}}, \qquad n_\beta = \frac{n_0}{1+e^{-\beta x/l}}$$

(gdzie l jest średnią drogą swobodną), znikające odpowiednio dla $x \to +\infty$ oraz dla $x \to -\infty$.

O ile quasiklasyczne ujęcie teorii fali uderzeniowej, oparte o zmodyfikowanie hydrodynamiki, wiąże się zawsze z założeniem niewielkich odstępstw od stanu równowagi, o tyle metoda Motta - Smitha wolna jest od tego założenia. Tak więc dwie pierwsze metody mogą być użyte jedynie do obliczania słabych fal uderzeniowych. Metoda Motta - Smitha zaś może się również nadawać do badania fal silnych.

Niezależnie od wyników teorii Motta - Smitha w dziedzinie fal uderzeniowych teoria ta stanowi odrębny i ciekawy sposób podejścia do równania Boltzmanna. Można przypuszczać, że otworzy ona nowe możliwości dla szeregu różnych obliczeń teorii kinetycznej.

9. Granice stosowalności teorii kinetycznej oraz próby ich rozszerzenia

Zarys teorii kinetycznej przedstawiony w poprzednich rozdziałach w związku z równaniem Boltzmanna jest oczywiście ograniczony w swej stosowalności. Głównym brakiem równania Boltzmanna jest nieuwzględnienie wzajemnego przyciągania molekuł działającego na molekuły poza chwilami ich zderzeń. To uproszczenie ogranicza teorię opartą o równanie Boltzmanna do gazów doskonałych, spełniających równanie stanu postaci (1.4) $p/\varrho = RT$.

Jak wiadomo, gazy rzeczywiste nie spełniają dokładnie tego równania. Podaje się w związku z tym inne, poprawione równania stanu jak np. równanie Van der W a a l s a

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT, \tag{9.1}$$

w którym $v = 1/\varrho$ jest objętością właściwą, lub ogólniejsze równanie U r s e l l - M e y e r a

$$\frac{p}{\varrho RT} = 1 - \frac{\varrho \beta_1}{2} - \frac{2\varrho^2 \beta_2}{3} - \ldots . \tag{9.2}$$

Równanie B o l t z m a n n a nie może więc opisywać ruchu gazów gęstych. Oczywiście tym bardziej będzie ono nieprzydatne do badań ruchów cieczy. Współczynniki kinetyczne lepkości i przewodnictwa cieplnego, obliczone na podstawie równania B o l t z m a n n a, uwzględniają zależność pochodzącą — jak o tym wspominaliśmy — z wymiany pędu i energii wewnętrznej molekuł gazu. Jednakże w przypadku gazów zgęszczonych lub w przypadku cieczy należy oczekiwać wpływu sił międzymolekularnych na te współczynniki. Jest dobrze znanym faktem, że współczynniki kinetyczne cieczy mają na ogół wartości wielokrotnie większe w porównaniu ze współczynnikami kinetycznymi gazów. Faktu tego nie da się oczywiście wyjaśnić na gruncie równania B o l t z m a n n a. Obok nieuwzględnienia przyciągania molekuł równanie B o l t z m a n n a oparte jest bowiem na drugim założeniu upraszczającym: na hipotezie zderzeń podwójnych.

Niewyjaśniona kwestia nieodwracalności zjawisk ujętych równaniem B o l t z m a n n a, o której mówiliśmy w p. 6, nasuwa konieczność zanalizowania związku tego równania z teorią ogólniejszą: mechaniką statystyczną.

Wreszcie odkrycie zjawiska nadciekłości helu II, dającego się wytłumaczyć przyjęciem kwantowej struktury równań hydrodynamiki, wymaga szczegółowego uporządkowania podstawowych założeń hydrodynamiki, co wiąże się z koniecznością poszukiwania możliwie najogólniejszych koncepcji.

Omówione tu sprawy są przyczyną powstania nowych teorii uogólniających równanie B o l t z m a n n a i rewidujących jego stosunek do mechaniki statystycznej.

W 1946 roku ogłoszone zostały niezależnie od siebie trzy nowe teorie kinetyczne oparte na twierdzeniu L i o u v i l l e' a. Są to teorie:

(1) B o g o l u b o w a - G u r o w a, [19] - [21] i [23],

(2) B o r n a - G r e e n a, [2] i [24],

(3) K i r k w o o d a, [27] - [30].

Aby zrozumieć podstawowe założenia tych trzech teorii, wróćmy do wprowadzonej w p. 1 gęstości prawdopodobieństwa

$$P_N(\mathbf{x}^N, \mathbf{p}^N, t)$$

rozkładu N różnych molekuł o położeniach $\mathbf{x}^N$ i pędach $\mathbf{p}^N$. Przez częściowe całkowanie tej funkcji można otrzymać gęstości prawdopodobieństwa rozkładu określonych pędów i położeń dowolnych podzespołów (np. podzespołu h) z zespołu N różnych molekuł. Otrzymamy w ten sposób nowe funkcje typu

$$P_h = \int d_{3(N-h)}\, x \cdot d_{3(N-h)}\, p \cdot P_N. \tag{9.3}$$

Jeżeli nie chcemy odróżniać poszczególnych molekuł, to możemy wprowadzić funkcje rozkładu dowolnych rzędów. Tak np. dla układu h molekuł funkcja rozkładu, którą oznaczać będziemy przez $f_h(\mathbf{x}^h, \mathbf{p}^h, t)$, wyrazi się wzorem

$$f_h(\mathbf{x}^h, \mathbf{p}^h, t) = \frac{N!}{(N-h)!} P_h(\mathbf{x}^h, \mathbf{p}^h, t). \tag{9.4}$$

O ile więc P_h daje gęstość prawdopodobieństwa rozkładu pędów i położeń układu h różnych molekuł, o tyle f_h daje gęstość prawdopodobieństwa rozkładu pędów i położeń h jakichkolwiek molekuł z podzespołu h (tj. daje gęstość prawdopodobieństwa tego, że jedna z dowolnych molekuł ma pęd i położenie $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{p}^1$, druga dowolna molekuła ma położenie i pęd $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{p}^2$ itd). Oczywiście

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = N P_1(\mathbf{x}^1, \mathbf{p}^1, t) = N \int d_{3(N-1)} x\, d_{3(N-1)} p\, P_N, \tag{9.5}$$

$$f_N = N!\, P_N. \tag{9.6}$$

Ze wzoru (9.6) widzimy natychmiast, że funkcja f_N spełnia także twierdzenie Liouville'a (1.12). Centralnym zagadnieniem uogólnionej teorii kinetycznej jest znalezienie równań wiążących z sobą funkcje rozkładu różnych stopni.

W teorii Borna - Greena uzyskuje się to z bezpośrednich rozważań dynamicznych. W myśl podstawowego założenia tej teorii siła działająca na grupę, należącą do podzespołu h, równa jest iloczynowi masy przez przyśpieszenie molekuły średnie dla podzespołu h. To dość dowolne zresztą założenie modelowe prowadzi do związku pomiędzy funkcją f_{h+1} a funkcjami f_1, f_2, ..., f_h. Szczególnym przypadkiem takiej zależności jest twierdzenie Liouville'a dla funkcji f_N. Kinetyczną funkcję rozkładu identyfikuje się z funkcją f_1 podaną wzorem (9.5). Równanie dla określenia tej funkcji ma postać

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \xi^{(1)} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}^{(1)}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^{(1)}} = \int d_3 x^{(2)} \int d_3 \xi^{(2)} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}^{(1)}} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^{(1)}}, \tag{9.7}$$

gdzie Φ oznacza potencjał sił międzymolekularnych, zaś $f_2(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, t)$ jest funkcją rozkładu par molekuł. Równanie Boltzmanna otrzymuje się z równania (9.7) przy następujących założeniach:

(1) podwójnych zderzeń,

(2) przy $|\mathbf{r}_{12}| \to \infty$, $f_2 = f_{(1)} f_{(2)}$ oraz $f_2' = f_{(1')} f_{(2')}$.

Drugie z tych założeń nie jest właściwie zbyt jasne. Ma ono zastąpić założenie chaosu molekuł.

Teoria Borna - Greena użyta była do obliczenia współczynników kinetycznych cieczy, do otrzymania równań ruchu cieczy uwzględniających oddziaływanie molekuł oraz do obliczeń dotyczących nadciekłości.

Teoria Bogolubowa - Gurowa jest zasadniczo bardzo zbliżona do teorii Borna - Greena. W teorii tej dla ustalenia zależności pomiędzy funkcjami rozkładu dowolnych rzędów pominięte są jednak modelowe rozważania nad dynamiką molekuły. Zamiast tego wychodzi się bezpośrednio z twierdzenia Liouville'a, co stanowi pewniejszą podstawę teorii. Dla funkcji rozkładu rzędu h wprowadza się rozwinięcie na szereg

$$f_h = \overset{\circ}{f}_h + \frac{1}{v} \overset{1}{f}_h + \frac{1}{v^2} \overset{2}{f}_h + \ldots$$

względem parametru $1/v$ proporcjonalnego do gęstości gazu. To ujęcie zapewnia teorii Bogolubowa-Gurowa przewagę nad teorią Borna - Greena, gdyż pozwala na fizykalne oszacowanie błędów powstałych przy obcinaniu szeregów.

Teoria ta była stosowana do obliczeń rozkładu energii w gazach przy istnieniu reakcji chemicznych, [22], oraz do teorii nadciekłości, [21]. Gurow podał zastosowanie teorii do kwantowania równań hydrodynamiki, [23]. Teoria ta daje również poprawkę do równania Boltzmanna uwzględniającą taki model oddziaływania molekuł, który prowadzi jednocześnie do zastąpienia równania stanu gazów doskonałych przez równanie (9.2), [19].

Nieco inny punkt widzenia przyjął w swych rozważaniach Kirkwood. Analizując proces pomiaru wielkości fizycznych na układzie złożonym z wielkiej ilości molekuł dochodzi on do wniosku, że mierzone wielkości makroskopowe są wynikiem wprowadzenia średniej nie tylko dla zespołu molekuł, lecz także wprowadzenia średniej w okresie czasu, co jest związane z bezwładnością każdego makroskopowego przyrządu pomiarowego. Prowadzi to bezpośrednio do wniosku, że funkcja f_1 podana wzorem (9.5) nie pokrywa się z kinetyczną funkcją rozkładu. Tę ostatnią uważać należy za wartość średnią funkcji f_1 w ciągu pewnego czasu τ:

$$f = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f_1(\mathbf{x}, \xi, t + s)\, ds.$$

To założenie Kirkwooda okazało się bardzo trafne. Pozwoliło ono przynajmniej częściowo wyjaśnić zagadnienie nieodwracalności zjawisk. Przy założeniu zderzeń jedynie podwójnych dla stanów mało różnych od stanu równowagi otrzymuje się z tej teorii równanie Boltzmanna dla kinetycznej funkcji rozkładu. Teoria Kirkwooda została również z powodzeniem zastosowana do badania ruchów Browna. Poza tym stworzyła ona realne możliwości obliczeń współczynników lepkości cieczy, [29], oraz uwzględnienia oddziaływań międzymolekularnych w równaniach hydrodynamiki, [30].

Poważnym sukcesem teorii Kirkwooda jest rzucenie światła na zagadnienie nieodwracalności. Uzyskanie nieodwracalnego równania Boltzmanna z odwracalnego równania Liouville'a wiąże się tu wyraźnie z przejściem od drobnoziarnistej funkcji rozkładu f_1 do gruboziarnistej kinetycznej funkcji rozkładu f. Teoria Borna - Greena, w której brak tego istotnego rozróżnienia, może więc budzić zastrzeżenia. Już de Boer, [16], wyraził wątpliwość, czy teoria Borna - Greena oparta wyłącznie na odwracalnym twierdzeniu Liouville'a jest w stanie opisać procesy nieodwracalne w gazach. G. Klein i J. Prigogine, [25] i [26], potwierdzili to przypuszczenie drogą rachunku wykonanego dla najprostszego układu molekuł rozłożonych wzdłuż linii prostej.

Wszystkie trzy omówione powyżej teorie podlegają jeszcze opracowaniu i dlatego nie mogą być uważane za ostateczne i wykończone.

Literatura cytowana w tekście

[1] S. Chapman i T. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambr. Univ. Press, 1939.

[2] H. S. Green, *The Molecular Theory of Fluids*, Amsterdam 1952.

[3] E. Sztrauf, *Molekularnaja fizika*, GITTL, Moskwa-Leningrad 1949.

[4] M. Łunc, Recherches Aéronautiques, 7 (1947), str. 17.

[5] M. Łunc, *Pression d'un gaz raréfié*, nieopublikowane.

[6] M. Łunc, *Mouvement d'un gaz normal et tangetiellment a la paroi*, nieopublikowane.

[7] M. Łunc, Techn. Lotn. 5 (1950), str. 39.

[8] Y. Rocard, *L'Hydrodynamique et la théorie cinétique des gaz*, Paryż 1932.

[9] Tsien Heue-shen, Journ. Aer. Sci., grudzień 1946.

[10] H. Grad, Comm. Pure Appl. Math. 2 (1949), str. 325.

[11] H. Grad, Comm. Pure Appl. Math. 2 (1949), str. 331.

[12] H. Grad, Comm. Pure Appl. Math. 5 (1949), str. 257

[13] Lichnerowicz, Marrot Comp. Rend. 210 (1940), str. 391.

[14] E. Wild, Proc. Cambr. Phil. Soc. 47 (1951), str. 602.

[15] M. Klein, Proc. Cambr. Phil. Soc. 50 (1954), str. 293.

[16] J. de Boer, Rep. Progr. Phys. 12 (1948-49), str. 305.

[17] K. Zoller, Zeitschr. Phys. 130 (1945), str. 1.

[18] H. Mott i Smith, Phys. Rev. 82 (1951), str. 885.

[19] N. Bogolubow, ŻETF 16 (1946), str. 702.

[20] N. Bogolubow, ŻETF 16 (1945), str. 690.
[21] N. Bogolubow, ŻETF 18 (1948), str. 622.
[22] E. Stupoczenko, ŻETF 19 (1949), str. 493.
[23] K. Gurow, ŻETF 20 (1950), str. 279.
[24] M. Born i H. Green, Proc. Roy. Soc. A 188 (1946), str. 10.
[25] G. Klein i J. Prigogine, Physica 19 (1953), str. 74.
[26] G. Klein i J. Prigogine, Physica 19 (1953), str. 89.
[27] J. Kirkwood, Journ. Chem. Phys. 14 (1946), str. 180.
[28] J. Kirkwood, Journ. Chem. Phys. 15 (1947), str. 72.
[29] J. Kirkwood, R. Zwanzig i inni, Journ. Chem. Phys. 21 (1956), str. 2050.
[30] J. Kirwood i J. Irwing, Journ. Chem. Phys 18 (1950), str. 817.
[31] Ł. Łojcjanski, *Miechanika żidkosti i gaza*, GITTL, Moskwa-Leningrad 1950, str. 102.
[32] L. Landau i E. Lifszic *Statisticzeskaja fizika*, GITTL, Moskwa-Leningrad 1951, str. 23.
[33] S. Popow, *Niekotoryje zadaczi i mietody ekspierimientalnoj aeromiechaniki*, GITTL, Moskwa 1952.
[34] Courant i Hilbert. *Mietody matiematiczeskoj fiziki*, t. 1, GITTL, Moskwa-Leningrad 1951.
[35] N. Koczin, J. Kibiel, N. Rose, *Tieorieticzeskaja gidrodinamika*, t. 2, GITTL, Moskwa-Leningrad 1948.
[36] De Groot, *Thermodynamics of Irreversible Processes*, Amsterdam 1952.
[37] W. V. Rankine, Trans. Roy. Soc. 160 (1870), str. 277.
[38] R. Becker, Zeitschr. Phys. 8 (1923), str. 321.
[39] W. Prosnak, *Struktura płaskiej fali uderzeniowej*, Rozpr. Inżyn., 3 (1955).

Резюме

УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАННА И ЕГО ЗНАЧЕНИЕ В ТЕОРИИ ГАЗОВ

Рассматриваются три направления исследования явлений, происходящих в газах: феноменологическая гидродинамика, кинетическая теория и статистическая механика. Приводится взаимоотношение этих трех теорий. Представлены основные понятия и положения кинетической теории газов, опираясь на так называемую кинетическую функцию распределения. Приводится элементарный вывод уравнения Больцманна и обсуждение математического и физического смысла этого уравнения.

В следующей главе дается самое простое решение уравнения Больцманна: максвеллово распределение скорости. Опираясь на это решение, рассматриваются основы молекулярной аэродинамики. Далее приводятся расчеты теории Энскога-Чэпмена-Бэрнетта, ведущие к определению кинетических коэффициентов и к так называемых уравнений третьего «приближения».

Следующая глава посвящена вопросам необратимости процессов в газах. Формулируется теорема «*H*» Больцманна вместе с ее

кратким доказательством. Представлена основная проблема необратимости уравнений кинетической теории газов в связи с обратимостью уравнений механики и попытками истолкования этой проблемы.

Далее приводится метод Града решения уравнений Больцманна при помощи разложения в ряд трехмерных полиномов Эрмита.

Следующая глава занимается применением уравнения Больцманна для исследования ударных волн. Здесь рассматриваются кратко главные концепции формулировки явления ударных волн при помощи методов кинетической теории.

В последней главе рассматриваются попытки обобщения уравнения Больцманна и кинетической теории. Представлены проблемы взаимоотношения кинетической теории и статистической механики. Эти попытки сводятся, главным образом, к дальнейшему распространению формализма на сгущенные газы и жидкости. Рассматриваются три важнейших варианта теории: Борна-Грина, Боголюбова-Гурова и Кэрквуда.

Summary

BOLTZMANN'S EQUATION AND ITS ROLE IN THE THEORY OF GASES

Three ways of studying phenomena occuring in gases represented by phenomenological hydrodynamics, kinetic theory and statistical mechanics are discussed as well as the relations between them. Next, fundamental notions and assumptions of the kinetic theory of gases are represented on the basis of the so called kinetic distribution function. Boltzmann's equation is derived in an elementary way and its mathematical and physical sense is discussed.

The following section is devoted to the most simple solution of Boltzmann's equation represented by Maxwell's velocity distribution law. On the basis of this solution the principles of molecular aerodynamics are discussed. Next, the calculations of the theory of Enskog - Chapman - Burnett, leading to the determination of kinetic coefficients and to the so called equations of the third «approximation», are represented.

In the next section the problem of irreversibility of the processes in gases is discussed. Boltzmann's «*H*» theorem is shown in an abridged manner. The principal problem of irreversibility of equations of the kinetic theory of gases in connection with the reversibility of equations of mechanics is discussed. Further, Grad's method of solution of Boltzmann's equation by means of expansion in a series of Hermite's three-dimensional polynomials is represented.

The next section is concerned with the application of Boltzmann's equation to shock wave investigation. Principal ways of treating the phenomenon of shock wave by means of the methods of the kinetic theory are examined.

The last section is devoted to the efforts to generalize Boltzmann's equation and the kinetic theory. The problems of relations between the kinetic theory and statistical mechanics are also discussed. These efforts consist in a formal generalization extended to compressed gases and liquids. Three principal variants of the theory (due to Born-Green, Bogolubov-Gurov and Kirkwood) are discussed.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 stycznia 1955 r.

WITOLD WIERZBICKI

ZAGADNIENIE DYNAMICZNE W OBLICZENIACH STATYCZNYCH BUDOWLI

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXXVI

SPIS TREŚCI

Przedmowa

Obliczenia mechaniczne konstrukcji budowlanych dotyczą obiektów znajdujących się w spokoju. Z tego powodu wszystkie rozważania mechaniki budowli opierają się przede wszystkim na statyce. Zagadnienia dynamiczne występują tu dopiero wówczas, gdy obciążenia budowli nabierają charakteru dynamicznego. Ma to miejsce w nowoczesnym budownictwie przemysłowym w związku z obciążeniem budynków maszynami w ruchu, a w budownictwie komunikacyjnym w związku z dużym wzrostem szybkości ruchu pociągów i samochodów.

Oddziaływanie maszyn i pociągów na obiekty budowlane sprowadza się w zasadzie do uderzeń i drgań.

Zagadnienie uderzeń w pracy konstrukcji budowlanych polega głównie na ustaleniu punktu zaczepienia do budowli sił zaczepionych w sposób nagły, przede wszystkim sił hamowania.

Zagadnienie drgań polega tu na zastosowaniu takich metod obliczeniowych, które pozwoliłyby przy opracowaniu szeregu odmian projektów budowli na szybkie sprawdzenie, w jakim stopniu grozi budynkom rezonans między drganiami własnymi a zmianami sił wymuszających.

Zagadnienia uderzeń i drgań łącznie występują w interpretacji dynamicznej przybliżonej metody R i t z a i T i m o s z e n k i wyznaczania odkształceń i sił krytycznych.

Rozprawa niniejsza jest poświęcona oddziaływaniom dynamicznym obciążeń na budowle, oddziaływaniom rozumianym w sposób wyżej przedstawiony.

Przy opracowaniu rozprawy korzystałem z moich dawniejszych obliczeń zawartych przede wszystkim w następujących publikacjach:

(1) *Interpretacja dynamiczna przybliżonej metody wyznaczania odkształceń sprężystych w konstrukcjach budowlanych*, Przegląd Techniczny, 1928,

(2) *Działanie ruchu pociągu na przyczółki i filary mostowe*, Sprawozdania i Prace Warsz. Tow. Pol., 1930,

(3) *Z dziedziny odkształcenia i stateczności układów prętowych*, Sprawozdania i Prace Warsz. Tow. Pol., 1933,

(4) *Obliczenia drgań własnych belek za pomocą momentów wtórnych,* Inżynieria i Budownictwo, 1948.

Doceniając całkowicie wagę dyskusji prowadzonej na terenie Politechniki Warszawskiej na temat podstawowych pojęć mechaniki, nie mogłem tu wyników tej dyskusji w całości uwzględnić obawiając się, że nowa, niedostatecznie spopularyzowana jeszcze *manière de parler* mogłaby w pracy o charakterze technicznym spowodować szereg nieporozumień.

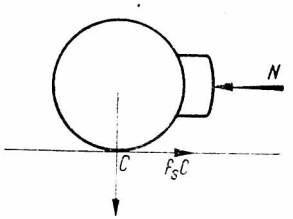
AUTOR

1. Punkt zaczepienia sił hamowania

Przy badaniu stateczności i wytrzymałości przyczółków i filarów mostowych muszą być brane pod uwagę zarówno siły pionowe, jak i poziome. Siły poziome występują tu pod postacią sił wywołanych hamowaniem pociągu na moście lub też pod postacią siły pociągowej lokomotywy. Siły te mają charakter obciążeń dynamicznych.

Działanie ruchu pociągu na przyczółki i na filary jest w zasadzie takie samo. Przy badaniu stateczności przyczółków zadanie komplikuje jednak parcie ziemi i dlatego w dalszych obliczeniach mówiąc o podporach mostowych będziemy mieli przede wszystkim na widoku filary pomimo to, że szerokość filara liczona wzdłuż osi mostu może być niekiedy niedostateczna, aby pomieścić choćby dwie osie taboru. W związku z tym zastosowanie wyników dalszych obliczeń do poszczególnych rodzajów konstrukcji zostanie omówione oddzielnie.

Ponieważ posadowienie podpór mostowych nie ma wpływu na sposób działania na nie pociągu, będziemy zakładali w schematach obliczeniowych, że przyczółki i filary przedstawiają bryły w dwóch punktach swobodnie podparte, inaczej mówiąc bryły podparte liniowo.



Rys. 1

Hamowanie jednostek taboru kolejowego polega na tym, że klocki hamulcowe wywierają nacisk N na koła powodując tarcie potoczyste na obwodach kół i stwarzają w ten sposób dodatkowy opór pociągu (rys. 1). Opór hamowania wyraża się wzorem

$$H = f_r N, \tag{1.1}$$

gdzie f_r oznacza współczynnik tarcia stali po stali w ruchu.

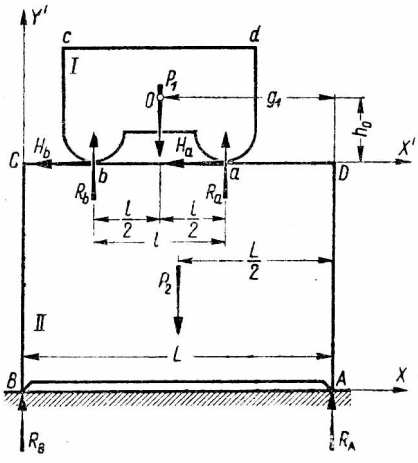
Koła wagonu toczą się pomimo hamowania dotąd, dopóki tarcie klocka hamulcowego o koło jest mniejsze od tarcia posuwistego w spokoju koła po szynie. Z chwilą unieruchomienia kół

$$H = f_s C, \tag{1.2}$$

gdzie C oznacza nacisk na koło, a f_s współczynnik tarcia stali po stali w spokoju. Siły hamowania stają się więc w tym wypadku równe siłom

tarcia unieruchomionych kół taboru po szynach. Siły te odgrywają przeważnie decydującą rolę w działaniu ruchu pociągu na podpory mostowe.

Zajmiemy się przede wszystkim przypadkiem, gdy jednostka taboru znajdująca się bezpośrednio na filarze ulega zahamowaniu z unieruchomieniem kół. Jest to przypadek najniebezpieczniejszy dla podpór mostowych. Schemat tego przypadku przedstawiony jest na rys. 2. Tu bryła *ABCD* podparta w punktach *A* i *B* i oznaczona na rysunku liczbą II przedstawia filar mostu. Jednostkę taboru o kołach unieruchomionych przedstawiamy sobie jako bryłę *abcd* przesuwającą się po bryle *ABCD* w kierunku *CD* (na rysunku bryła I).



Rys. 2

Zakładamy, że nagłe zatrzymanie się na filarze bryły *abcd* nie może spowodować jej obrotu dookoła punktu *a*, co zostanie omówione dalej. Wobec takiego założenia wyłączamy możność przesuwania się środka ciężkości bryły *abcd* w stosunku do płaszczyzny *CD* w kierunku osi *CY*.

Ponieważ przyjęliśmy, że jednostka taboru przedstawiona na rys. 2 jako bryła *abcd* ulega zahamowaniu z unieruchomieniem kół i zatrzymaniu, możemy uważać, że dwie bryły *abcd* i *ABCD* tworzą układ materialny, między elementami którego działają więzy dające reakcję równą wypadkowej sił tarcia *H*, występujących w płaszczyźnie *ab* i zaczepionych w punktach *a* i *b*.

Dla układu osi współrzędnych *BX* i *BY* ustawiamy równanie momentów ilości ruchu w chwili rozpoczynania się ruchu układu materialnego złożonego z brył *abcd* i *ABCD* względem punktu *A* dla środków ciężkości tych brył.

W ogólnej postaci równanie momentów ilości ruchu układu materialnego przedstawia się, jak wiadomo, w sposób następujący:

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\sum\sum(xY-yX), \tag{1.3}$$

gdzie m oznacza masę poszczególnych elementów układu materialnego, a X i Y rzuty sił zewnętrznych, działających na układ, na osie współrzędnych *BX* i *BY*. Tu sumowanie po lewej stronie równania dotyczy wszystkich elementów układu materialnego, a sumowanie po prawej stronie

równania dotyczy, z jednej strony, wszystkich sił zewnętrznych działających na układ, a z drugiej — wszystkich elementów układu.

Stosując równanie (1.3) w naszym wypadku, oznaczamy przez x' i y' współrzędne środka ciężkości bryły *abcd*, a przez x'' i y'' współrzędne środka ciężkości bryły *ABCD*. Siły działające na układ materialny i ich ramiona podane są na rys. 2; w szczególności P_1 oznacza tu ciężar bryły *abcd*, a P_2 ciężar bryły *ABCD*. W ten sposób znajdujemy

$$\frac{d}{dt}\left[m_1\left(\frac{dy'}{dt}g_1+\frac{dx'}{dt}s_1\right)+m_2\left(\frac{dy''}{dt}\frac{L}{2}+\frac{dx''}{dt}s_2\right)\right]= \tag{1.4}$$

$$= R_B L - P_2\frac{L}{2} - P_1 g_1,$$

gdzie R_B oznacza reakcję pionową bryły *ABCD* w punkcie *B*, a symbole m_1 i m_2 dotyczą odpowiednio mas brył *abcd* i *ABCD*.

Ponieważ przyjęliśmy, że bryła *abcd* nie może się obrócić względem punktu *A*, więc $dy'/dt = 0$. Również nieprzesuwność środka ciężkości bryły *ABCD* w kierunku osi *BX* i *BY* uważamy za zabezpieczoną, a tym samym $dx''/dt = 0$ i $dy''/dt = 0$.

W tych warunkach równanie (1.4) przybiera postać

$$R_B L - P_2\frac{L}{2} - P_1 g_1 - m_1\frac{d^2x'}{dt^2}s_1 = 0. \tag{1.5}$$

Ostatni dodajnik lewej strony równania przedstawia moment względem punktu *A* siły bezwładności bryły *abcd*. Z drugiej strony, ustawiając dla bryły *abcd* równanie rzutów ilości ruchu na oś *CX* znajdujemy

$$m_1\frac{d^2x'}{dt^2} = -H. \tag{1.6}$$

Wstawiając wynik (1.6) w równanie (1.5) mamy

$$R_B L - P_2\frac{L}{2} - P_1 g_1 + H s_1 = 0. \tag{1.7}$$

Równanie (1.7) należy uważać za warunek równowagi filara w chwili zatrzymania się na nim jednostki taboru. Natomiast przy

$$R_B L - P_2\frac{L}{2} - P_1 g_1 + H s_1 < 0 \tag{1.8}$$

bryła *ABCD* rozpoczyna wraz ze związaną z nią tarciem bryłą *abcd* ruch obrotowy względem punktu *A*.

Ze wzorów (1.7) i (1.8) wynika, że przy badaniu stateczności i wytrzymałości filara, na którym zatrzymała się mieszcząca się na nim całkowi-

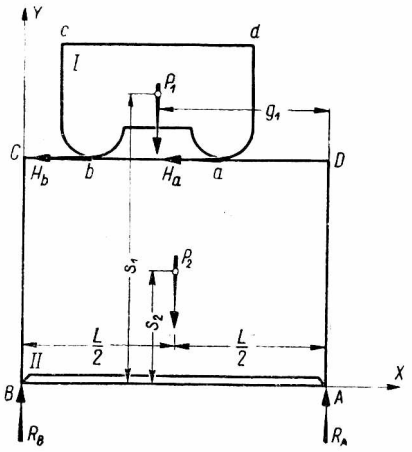
cie jednostka taboru przy hamowaniu z unieruchomieniem kół, należy przyjmować ramię momentu siły hamowania taboru na filarze jako równe odległości bieguna (na rys. 2 punkt A) od linii poziomej przechodzącej przez środek ciężkości taboru. Potwierdza to zresztą prymitywne doświadczenie z człowiekiem wskakującym z rozpędem na stołek.

Gdy chcemy powyższe rozumowania zastosować do przyczółków mostowych, musimy w równaniu (1.7) uwzględnić moment parcia ziemi względem punktu A. Wobec tego, że hamowanie pociągu na przyczółku może spowodować znaczne odkształcenia sprężyste przyczółka i tym wywołać rysę między przyczółkiem a ziemią nasypu wywołującą parcie geodynamiczne, wydaje się stosowanie teorii Coulomba parcia ziemi w tym wypadku bardziej uzasadnione niż w innych. Będzie się to wprawdzie działo na niekorzyść bezpieczeństwa, będzie jednak uzasadnione wobec jednoczesnego uwzględnienia hamowania pociągu w sposób najbardziej niekorzystny dla stateczności przyczółka.

Warunek (1.7) może być zastąpiony przez warunek

$$\mathfrak{M}_{pz} > \mathfrak{M}_{zp} + Hs_1, \tag{1.9}$$

gdzie $\mathfrak{M}_{pz}$ oznacza moment powstrzymujący, czyli moment sił działających na podporę mostową i dążący do obrócenia jej względem punktu A (na rys. 2) na lewo, a $\mathfrak{M}_{zp}$ wyraża moment wywracający, czyli moment sił działających na podporę w kierunku odwrotnym do poprzednich, bez siły hamowania i reakcji R_B symbolizującej w danym razie reakcję podłoża. Warunkowi temu możemy nadać postać



Rys. 3

$$n = \frac{\mathfrak{M}_{pz}}{\mathfrak{M}_{zp} + Hs_1} > 1, \tag{1.10}$$

gdzie n oznacza współczynnik stateczności podpory mostowej na wywrócenie.

W chwili nagłego zatrzymania się taboru na podporze powstaje moment Hh_0 (rys. 3) zaczepiony do bryły I. Warunek równowagi $\Sigma M = 0$ dla bryły I przybiera postać

$$R_b l - P_1 \frac{l}{2} + Hh_0 \geqq 0. \tag{1.11}$$

Moment Hh_0 odgrywa w danym wypadku rolę momentu wzajemnego oddziaływania na siebie dwóch elementów tego samego układu materialnego złożonego z brył I i II i wyraża postulat, aby jednostka taboru nie

uległa obrotowi względem punktu a; możliwość takiego obrotu wyłączyliśmy wyżej w naszych rozumowaniach. Postulatowi temu możemy nadać postać podobną do wzoru (1.10):

$$\frac{\mathfrak{M}_{pz}}{\mathfrak{M}_{zp} + H h_0} > 1, \tag{1.12}$$

gdzie $\mathfrak{M}_{pz}$ i $\mathfrak{M}_{zp}$ oznaczają odpowiednio moment powstrzymujący i moment wywracający dla bryły I.

Wszystkie rozważania dotyczące przypadku, gdy na podporze mostowej uległy całkowitemu zahamowaniu dwie osie pewnej jednostki taboru, zachowują swą moc oczywiście i wówczas, gdy liczba tych osi jest większa od dwóch.

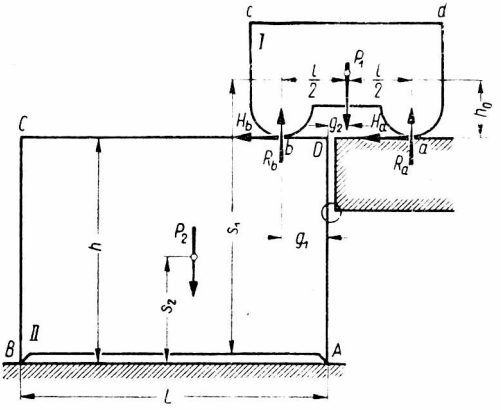
Przechodzimy z kolei do przypadku, gdy zahamowanie jednostki taboru na filarze przy całkowitym unieruchomieniu kół następuje w ten sposób, że jedna oś znajduje się na filarze, a druga na dźwigarze (rys. 4).

Równanie (1.3) ustawione dla układu materialnego I, II przybiera w danych warunkach i przy przyjętych wyżej oznaczeniach postać

$$m_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} s_1 = \tag{1.13}$$

$$= R_b g_1 - P_2 \frac{L}{2} + H_b h_0,$$

gdzie d^2x'/dt^2 oznacza część siły bezwładności bryły I wywierającą wpływ na stateczność bryły II.



Rys. 4

Moment $H_b h_0$ odgrywa w tym wypadku w stosunku do bryły I rolę momentu zewnętrznego. Moment ten powstaje w sposób następujący.

Równanie rzutów ilości ruchu na kierunek poziomy daje w rozpatrywanym przypadku

$$m_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} = -H_b - H_a, \tag{1.14}$$

gdzie H_b i H_a oznaczają odpowiednio siły tarcia w punktach a i b bryły I, tzn. siły tarcia między bryłą I a bryłą II, z jednej strony, i między bryłą I a bryłą III, z drugiej strony.

Siła bezwładności $m_1 d^2x'/dt^2$ oraz suma sił tarcia $H_b + H_a$ tworzą łącznie parę $(H_b + H_a) h_0$, którą można uważać za sumę dwóch momentów $H_b h_0$

oraz $H_a h_0$, z których pierwszy działa na układ materialny I, II, a drugi na układ II, III.

Nadajemy równaniu (1.13) postać

$$H_b s_1 = R_b g_1 - P_1 \frac{L}{2} + H_b h_0 , \tag{1.15}$$

co doprowadza do równania

$$-H_b h + R_b g_1 - P_1 \frac{L}{2} = 0 , \tag{1.16}$$

gdzie $h = s_1 - h_0$ wyraża odległość pionową od bieguna A do poziomu szyny.

Równanie (1.16), jak w poprzednim wypadku, możemy zastąpić przez nierówność

$$n = \frac{\mathfrak{M}_{pz}}{\mathfrak{M}_{zp} + Hh} > 1 . \tag{1.17}$$

Z rozpatrzonych wyżej dwóch przypadków hamowania pociągu na podporze mostowej wynika, że w razie gdy na podporze zatrzymują się przynajmniej dwie osie pewnej jednostki taboru, przy badaniu stateczności podpory należy przyjmować, że siły hamowania zaczepione są w środku ciężkości tej jednostki, w razie zaś gdy tylko jedna oś zatrzymuje się na podporze, siła hamowania powinna być uważana za zaczepioną w poziomie szyn.

Rozpatrzmy wreszcie przypadek, kiedy jednostka taboru zostaje zahamowana z unieruchomieniem kół na dźwigarze swobodnie podpartym na dwóch podporach mostowych (rys. 5).

Stosując równanie (1.3) do brył I (jednostka taboru) i II (dźwigar) oraz do brył I, II, III (podpora) i powtarzając rozważania przytoczone wyżej dochodzimy do wniosku, że siła hamowania

$$H = m \frac{d^2 x'}{dt^2} \tag{1.18}$$

jednostki taboru powinna być zaczepiona do podpory mostowej w poziomie podpory dźwigara. Jeżeli podpora jest nieprzesuwna, siła ta będzie równa H, jeżeli zaś przesuwna, siła hamowania w ogóle nie będzie działała na podporę.

Taki stan rzeczy jest całkowicie zrozumiały, gdyż dźwigar, na którym odbywa się hamowanie, i przyczółek lub filar mają tu jeden tylko punkt wspólny.

W chwili całkowitego zahamowania taboru na dźwigarze tabor i dźwigar będą tworzyły dzięki siłom tarcia niejako jedną bryłę, do której na po-

ziomie środka ciężkości taboru będzie zaczepiona siła hamowania H. Siła ta spowoduje powiększenie nacisku pionowego na jedną podporę dźwigara i odciążenie drugiej podpory.

Wielkości dodatkowego obciążenia podpory B' (rys. 5) obliczamy z równania momentów sił działających na dźwigar względem punktu A':

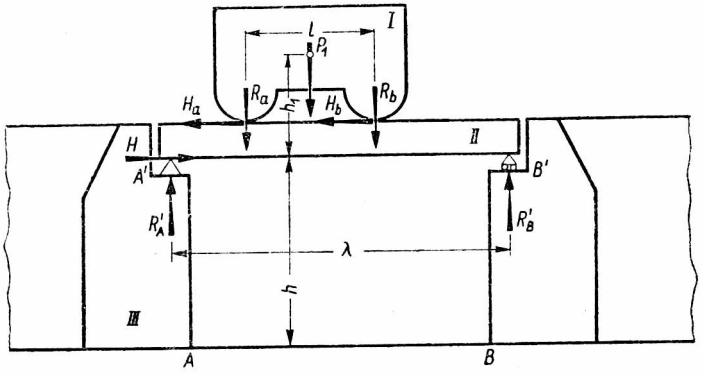
$$R'_B l + H h_1 = 0, \tag{1.19}$$

gdzie R'_B oznacza poszukiwane przeciążenie podpory R'_B, a h_1 odległość pionową podpór dźwigara od płaszczyzny poziomej przechodzącej przez środek ciężkości taboru.

W podobny sposób z równania

$$R'_A l - H h_1 = 0 \tag{1.20}$$

znajdujemy spowodowane przez hamowanie odciążenie R'_A podpory A'.



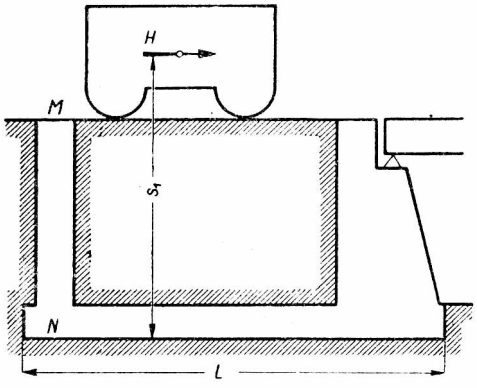
Rys. 5

Wyżej udowodniliśmy, iż siła H tarcia unieruchomionych kół taboru kolejowego po szynach przyczółka lub filara (siła hamowania) powinna być zaczepiona w obliczeniu statycznym podpory mostowej w poziomie środka ciężkości danej jednostki taboru, o ile jednostka ta dotyka podpory co najmniej w dwóch punktach, w poziomie główki szyny, o ile dotyka ona podpory mostowej w jednym tylko punkcie, wreszcie w poziomie przegubu podpory dźwigara, o ile hamowany tabor znajduje się na przegubowo podpartym dźwigarze.

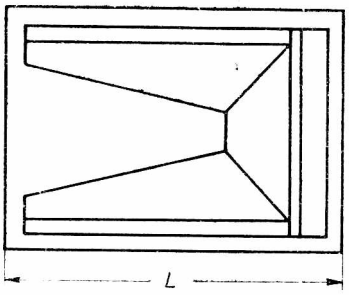
Porównajmy tu w świetle tych twierdzeń poszczególne rodzaje przyczółków.

Wzór (1.10) wyprowadzony został dla przyczółków w rodzaju przedstawionego na rys. 6, tj. takich, na których tor ułożony jest bezpośrednio na murze przyczółka.

Jeżelibyśmy ze środka bryły przyczółka usunęli część muru i zapełnili otrzymaną w ten sposób studnię ziemią, to otrzymalibyśmy przyczółek w rodzaju przedstawionego na rys. 7. O ile by tabor hamowany na takim przyczółku opierał się na nim w dwóch punktach, to wzór (1.10) przy obliczeniu takiego przyczółka zachowałby swoją moc.

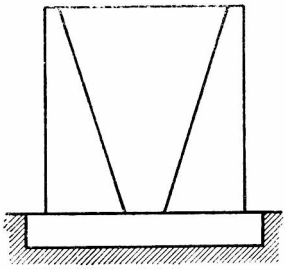


Rys. 6

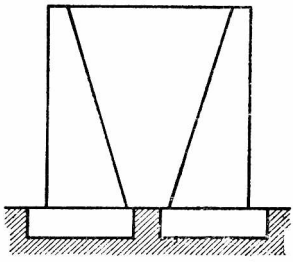


Rys. 7

Usunięcie tylnej ściany *MN* przyczółka przedstawionego na rys. 6 nie spowodowałoby żadnej zmiany zasadniczej w warunkach jego pracy (rys. 7 i 8), gdyż ziemia zapełniająca jego wnętrze pozostałaby w równowadze, podtrzymywana przez ziemię nasypu za przyczółkiem. W tym więc przypadku wzór (1.10) powinien mieć również zastosowanie, tym bardziej że przestrzeń między murami przyczółka typu przedstawionego na rys. 7 i 8 (widok od tyłu) jest zwykle mała i wypełniona ziemią ze szczególną starannością.



Rys. 8

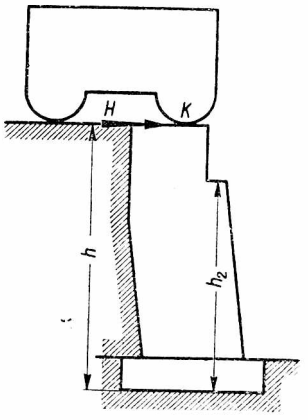


Rys. 9

Usunięcie wspólnego fundamentu pod skrzydłami i przednim murem przyczółka też nie powoduje zmian istotnych w warunkach równowagi przyczółka jako całości, w szczególności pod względem sposobu zaczepienia siły *H* (rys. 9). W tym wypadku nacisk taboru znajdującego się nad przyczółkiem przekazuje się za pomocą ziemi murom przyczółka prawie

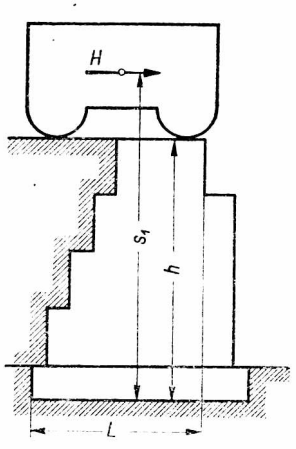
całkowicie lub w razie ziemi spoistej nawet całkowicie, tym bardziej że przestrzeń *mn* wolna od fundamentu jest na ogół mała. Uważamy więc przyczółki przedstawione na rys. 7 i 8 niejako za bryły złożone z murów i ziemi zapełniającej przestrzeń między nimi.

Weźmy teraz pod uwagę przyczółek w postaci muru o przekroju poprzecznym przedstawionym na rys. 10. Na murze przyczółka stoi bezpośrednio jedna tylko oś taboru, druga zaś oś tej samej jednostki taboru opiera się na nasypie za przyczółkiem i nie pozostaje z nim w łączności. W tym wypadku siła tarcia między hamowanym na przyczółku taborem (jedna oś) a szyna powinna być zaczepiona do przyczółka w poziomie punktu *K*, jak to zostało przedstawione we wzorze (1.17).



Rys. 10

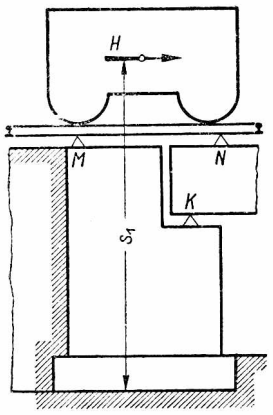
Inaczej rzecz się ma w przypadku przyczółka przedstawionego na rys. 11. Tu nacisk lewej (na rysunku) osi znajdującej się na przyczółku jednostki taboru przekazuje się za pośrednictwem szyn, podkładów i podsypki na ziemię za przyczółkiem, a przez nią wywiera ciśnienie w kierunku pionowym na odsadzki przyczółka. Wobec tego jednostka taboru stojąca dwiema przynajmniej osiami nad fundamentem przyczółka, w szczególności nad jego częścią *L*, może być rozpatrywana, zgodnie ze schematem na rys. 2, jako bryła *abcd* posuwająca się po bryle *ABCD*, a więc siła *H* powinna być w obliczeniu przyczółka zaczepiona w jego środku ciężkości. Jeżeli tylna powierzchnia przyczółka nie posiada odsadzek, lecz jest pochylona, w przekazywaniu pionowego ciśnienia taboru na przyczółek odgrywa rolę tarcie między ziemią a murem, dzięki czemu nie zmienia się zasadniczo sposób zaczepienia do przyczółka siły hamowania pociągu w porównaniu z przypadkiem poprzednim.



Rys. 11

Weźmy teraz pod uwagę przyczółek o pionowej powierzchni tylnej oraz o wąskim parapecie mieszczącym na sobie jedną tylko oś pociągu i przypuśćmy, że z parapetu została przerzucona na nieprzesuwny koniec dźwigara beleczka *MN* (rys. 12), połączona z nim w sposób nieprzesuwny. Mamy więc w ten sposób do czynienia z układem niezmiennym *MNK* sztywno złączonym z przyczółkiem, wobec czego jednostka taboru

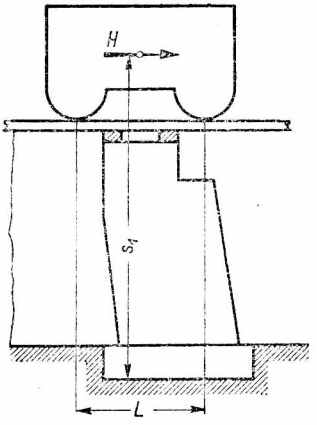
znajdująca się na belce *MN* odpowiada schematowi rys. 2 i siła *H* powinna być tu w obliczeniu przyczółka zaczepiona do środka ciężkości taboru. Rolę beleczki *MN* spełnia w wielu wypadkach szyna przerzucona z parapetu przyczółka na dźwigar.



Rys. 12

Wreszcie może się zdarzyć w okolicznościach podobnych do przedstawionych wyżej, że chociaż parapet nie mieści na sobie więcej ponad jedną oś pociągu, to jest jednak dosyć szeroki na to, aby szyna podparta za pomocą dwóch przynajmniej podkładów mogła wspornikowo utrzymać dwie osie pociągu (rys. 13). W ten sposób powstałyby znowu okoliczności odpowiadające warunkom schematu 2.

Z powyższego zestawienia widzimy, że dla poszczególnych typów murów przyczółkowych należy przyjmować odcinek *L* za pewnego rodzaju sprowadzoną długość przyczółka posiadającą tę własność, że jednostka taboru stojąca na tej długości dwiema osiami znajduje się w warunkach bryły *abcd* w schemacie na rys. 2 i siła *H* powinna tu być zaczepiona w obliczeniu statycznym przyczółka w środku ciężkości taboru. Ponieważ długość *L* jest prawie zawsze większa od rozstawu osi parowozu, należy przy obliczaniu przyczółków uwzględniać wpływ hamowania na przyczółki znajdującego się na nim taboru zawsze według wzoru (1.10).



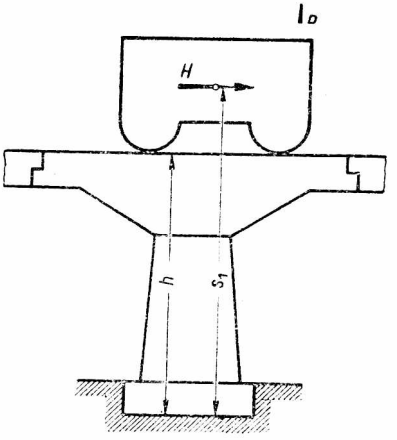
Rys. 13

Jeżeli przyczółki lub filary mostowe podtrzymują dźwigary przegubowo, to, jak uzasadniono wyżej, siła *H* musi być zaczepiona w tych wypadkach w obliczeniu statycznym w poziomie przegubów podpór nieprzesuwnych.

W razie gdy przyczółki i filary podtrzymują inne rodzaje dźwigarów, poza przegubowymi dźwigarami belkowymi, hamowanie pociągu na dźwigarach odbija się na stateczności podpór w różny sposób w zależności od typu dźwigarów lub układu całej konstrukcji mostowej.

A więc w mostach wspornikowych (rys. 14) wsporniki nie mogą się na ogół obracać względem filarów, tak że stanowią one z nimi jakby jedną całość. W mostach tego typu jednostka taboru stojąca dwiema osiami na wsporniku i zahamowana z unieruchomieniem kół znajduje się w warunkach bryły *abcd* z rys. 2 i w obliczeniu stateczności filara (lub przyczółka) siła *H* powinna być tu zaczepiona w środku ciężkości taboru.

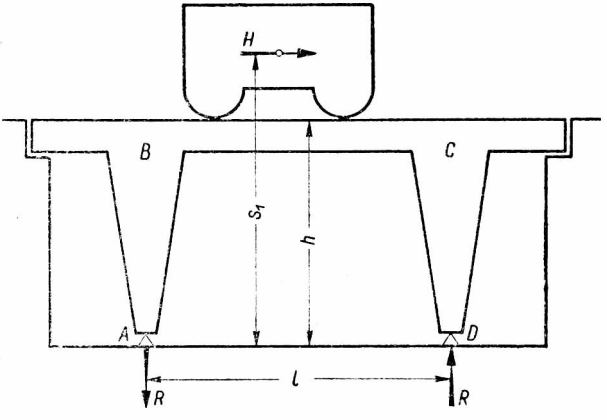
Wsporniki miewają jednak zastosowanie przeważnie w mostach dużych, dla których siła hamowania ma mały wpływ na stateczność podpór, z mostów zaś o małych rozpiętościach zdarzają się one prawie tylko w mostach żelbetowych typu belki zawieszonej.



Rys. 14

Filary (słupy) mostów ramowych również nie w jednakowy sposób podlegają działaniu siły hamowania. Sposób zaczepienia siły H zależy tu od typu ram danego mostu.

Przypuśćmy więc, iż mamy do czynienia z ramą dwuprzegubową przedstawioną na rys. 15. Rama ta pod względem stateczności odpowiada warunkom bryły $AECD$ z rys. 2. Wynika stąd, że siły hamowania należy tu zaczepiać w środku ciężkości hamowanego na ramie taboru. Moment Hs_1 równoważąc się tu z momentem Rl wywołuje dodatkowe (poza reakcjami sił pionowych) reakcje podpór R i dodatkowe naprężenia ściskające w słupach.



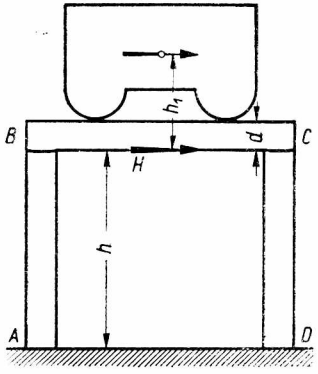
Rys. 15

Rama bezprzegubowa w stosunku do działających na nią sił hamowania znajduje się w tych samych warunkach co rama poprzednia. Odpowiada ona również schematowi na rys. 2, należy więc i w tym wypadku przyjmować punkt zaczepienia sił H w środku ciężkości taboru.

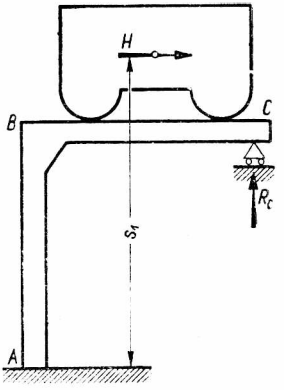
W układzie przedstawionym na rys. 16 dwa słupy połączone bezprzegubowo z fundamentem podtrzymują dźwigar podparty na obydwóch słupach w sposób przegubowy, lecz nieprzesuwny. Siła H spowodowana hamowaniem taboru poruszającego się po rozporze BC powinna być w tym wypadku zaczepiona do słupów AB i CD w poziomie przegubów B i C, gdyż rozpora znajduje się tu w warunkach podobnych do dźwigara z rys. 5. Jeżeli oba przeguby są nieprzesuwne, a roz-

pora ramy jest nieściśliwa, to można przyjmować, że w punktach B i C działają równe sobie siły poziome $H/2$.

W warunkach podobnych do rozpory BC z rys. 16 znajdują się dźwigary belkowych mostów żelbetowych, jeżeli na skutek dużego tarcia na podporach ich końce nie mogą się przesuwać po przyczółkach. W tych wypadkach można siłę hamowania na dźwigarze rozłożyć na dwa przyczółki.

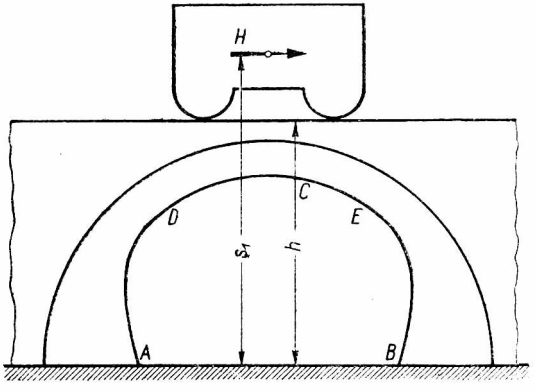


Rys. 16



Rys. 17

Weźmy dla przykładu układ ramowy przedstawiony na rys. 17. Podpora C jest tu podporą przegubowo przesuwną. Układ posiada jedną wielkość statycznie niewyznaczalną, za którą przyjmujemy zwykle reakcję R_c podpory C. Po wprowadzeniu tej wielkości uważamy belkę BC za wspornik, a siłę hamowania (siłę H) przechodzącego po niej taboru za zaczepioną w środku ciężkości taboru.

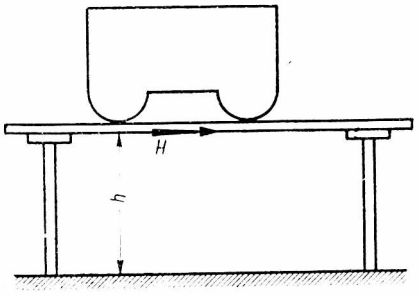


Rys. 18

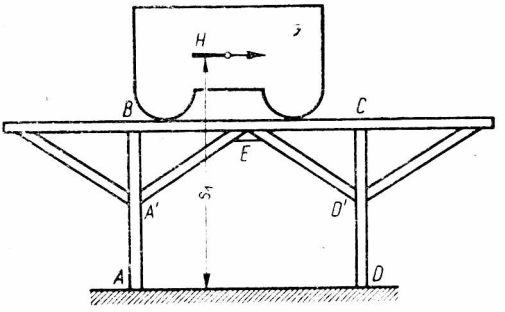
Most łukowy bezprzegubowy przedstawiony na rys. 18 znajduje się pod względem działania na niego sił hamowania w warunkach analogicznych do warunków ramy bezprzegubowej, a więc i w tym wypadku należy siłę hamowania zaczepiać w środku ciężkości poszczególnych jednostek taboru.

Przypuśćmy wreszcie, że hamowanie pociągu odbywa się na moście drewnianym typu leżajowego przedstawionym na rys. 19. Ponieważ pod-

pory takiego mostu uważamy za przegubowe, to będziemy tu mieli do czynienia z tym samym schematem co na rys. 16 i wobec tego przy obliczeniu słupów siłę hamowania należy uważać w danym razie za zaczepioną w poziomie legara (na wysokości h_1).



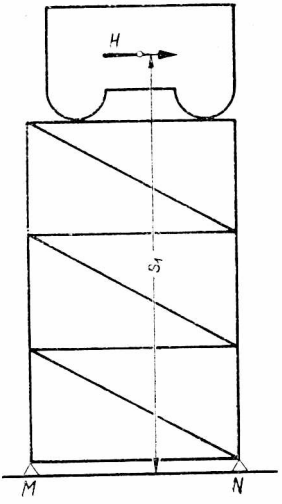
Rys. 19



Rys. 20

W drewnianym moście zastrzałowym (rys. 20) trójkąty $A'BE$ i ECD' tworzą niejako geometrycznie niezmienne wsporniki, wobec czego, zgodnie ze schematem na rys. 2, powinniśmy przyjmować tu siłę hamowania za zaczepioną w środku ciężkości pociągu.

W razie gdy hamowanie pociągu ma miejsce na kratowym filarze stalowym (rys. 21), należy w obliczeniu statycznym przy dwóch przynajmniej kołach unieruchomionych przyjmować siłę hamowania w środku ciężkości taboru. Dotyczy to zarówno obliczenia współczynnika stateczności, jak i obliczenia sił w prętach filara.



Rys. 21

Przypuśćmy, że na przyczółku belkowego mostu przegubowego stoi kołami napędowymi parowóz (rys. 22). Ciśnienie pary w cylindrach parowozu przeniesione w postaci siły pociągowej na obwód kół napędnych wywołuje niejako odpychanie się parowozu od przyczółka. Siła pociągowa odpycha parowóz od nieruchomego przyczółka powodując przesuwanie się parowozu i wywołując w kierunku przeciwnym nacisk poziomy na przyczółek równy sile pociągowej.

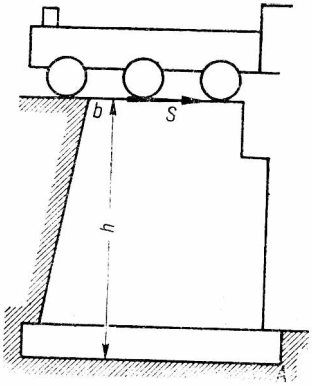
Ponieważ w tym wypadku parowóz i przyczółek stykają się w poziomie szyn, siła pociągowa będzie zaczepiona w tym właśnie poziomie. Odpowiedni moment wywracający będzie tu równy Sh.

Siła pociągowa dosięga swej wartości największej

(1.21) $$S = f_s C,$$

o ile za parowozem znajduje się pociąg, zwłaszcza pociąg posuwający się po wzniesieniu (rys. 23).

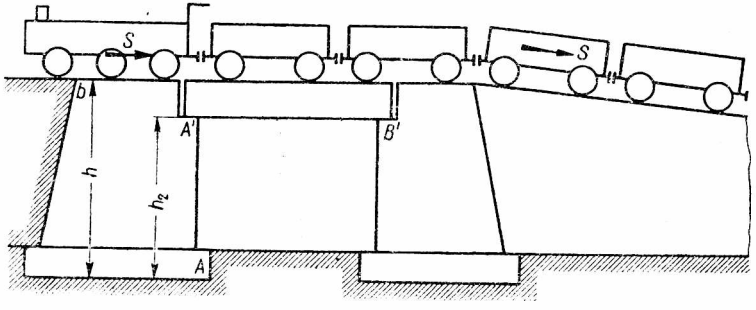
Może się zdarzyć, że pociąg uległ zatrzymaniu i że wagony utrzymywane są na spadku tylko dzięki tarciu między unieruchomionymi kołami parowozu a szynami przytwierdzonymi do przyczółka. W tych warunkach siła tarcia między parowozem a przyczółkiem stwarza z nich jak gdyby jedną bryłę. Siła ta równa się w danym wypadku składowej S siły ciężkości, która wywoływałaby ruch wagonów w kierunku spadku w razie, gdyby nie były one utrzymywane w spokoju przez zahamowany na przyczółku parowóz. Ponieważ jedynym punktem wspólnym dla wagonów i parowozu jest w danym razie środek sprzęgła parowozu, należy uważać, że siła $S = f_s C$ powinna być w tym wypadku przyjmowana w obliczeniu statycznym przyczółka w poziomie sprzęgła parowozu.



Rys. 22

Przy sprawdzaniu stateczności przyczółka na wywracanie należy we wzór (1.10) wstawiać ten z momentów Hs_1 lub Sh, który jest większy.

Siła hamowania oraz siła pociągowa niezależnie od tego, czy tabor znajduje się na samym przyczółku, czy też na dźwigarze lub na przylegającym do przyczółka nasypie, są siłami zaczepionymi do konstrukcji



Rys. 23

w sposób wyraźnie nagły, gdyż w sposób nagły zostają unieruchamiane koła pociągu. Ponieważ wszystkie wzory mechaniki budowli wyprowadzone są w założeniu, że siły zaczepione do budowli wzrastają w sposób ciągły i nieskończenie powolny, jest rzeczą konieczną dla korzystania z tych wzorów w przypadku sił zaczepionych nagle mnożyć te siły przez pewien współczynnik dynamiczny ϑ.

Rozważania tego rozdziału stwarzają podstawę do ustalenia tego współczynnika w różnych warunkach pracy konstrukcji.

2. Arytmetyzacja zagadnienia drgań

Przez arytmetyzację rozumiemy taką metodę obliczeń przybliżonych, przy której przejście od postawienia zagadnienia do rachunków liczbowych odbywa się w drodze jak najkrótszej i kiedy na te obliczenia przerzuca się główny ciężar całego obliczenia statycznego.

Wymiarowanie konstrukcji podtrzymujących pociągi lub maszyny w ruchu wymaga nieraz długiego szeregu prób w dziedzinie obliczeń tych konstrukcji. Z tego powodu ważna jest możność przeprowadzenia obliczeń prędko, choćby mniej dokładnie. Taką możność daje arytmetyzacja zagadnienia drgań, znajdująca wyraz w stosowaniu tzw. metody kolejnych przybliżeń, metody momentów wtórnych i różnic skończonych. Główny ciężar obliczeń przypada na drgania własne, których poznanie pozwala zabezpieczyć budowlę przed rezonansem.

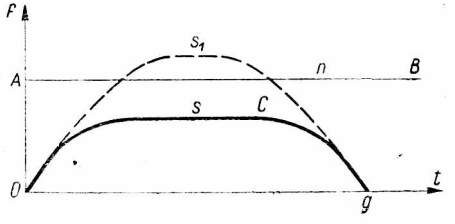
Ustalimy przede wszystkim zakres stosowalności metod przybliżonych w teorii drgań.

Częstotliwość wahań c siły wymuszającej drgania w konstrukcji zmienia się z czasem i jest najmniejsza przy puszczaniu maszyny w ruch i przy jej zatrzymywaniu, częstotliwość n drgań własnych konstrukcji natomiast od czasu nie zależy. Przedstawione to jest schematycznie na rys. 24, gdzie krzywa *Osg* przedstawia zależność c od t, a prosta AB częstotliwość drgań własnych; częstotliwości odkładane są tu równolegle do osi *Of*.

Przy projektowaniu konstrukcji podtrzymującej pociąg lub maszynę w ruchu musimy dla uniknięcia niebezpieczeństwa rezonansu dbać o to, aby

$$n = (1 + z) \max c, \tag{2.1}$$

gdzie liczba z oparta na obserwacjach wynosi od 0,30 do 0,50. W tych warunkach znajdujemy się jeszcze daleko od tzw. sfery rezonansu i możemy sobie pozwolić przy obliczaniu częstotliwości drgań własnych konstrukcji na niedokładności dochodzące do 5%, co może mieć miejsce przy stosowaniu metody kolejnych przybliżeń i sposobu momentów wtórnych. Jeżeli dla tych lub innych powodów n zbliża się do c, to dokładność obliczeń przybliżonych może się okazać niedostateczna; takich wypadków przy projektowaniu konstrukcji staramy się jednak unikać. Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić i dla przypadku, gdy (rys. 24) krzywa *Osg* zostanie zastąpiona przez krzywą $Os_1 g$.



Rys. 24

Badanie drgań konstrukcji budowlanych polega na ustaleniu typu drgań, ich częstotliwości i amplitud. Sposoby badania zależą od stopni swobody układu drgającego. Rozróżniamy więc układy o jednym stopniu swobody, o większej, lecz skończonej liczbie stopni swobody i o nieskończenie wielkiej liczbie stopni swobody.

Przez układ o ν stopniach swobody rozumiemy taki układ, którego położenie w danym momencie czasu określa ν parametrów. Układ o ν stopniach swobody możemy sobie przedstawić jako nieważki układ sprężysty z zaczepionymi do niego w różnych punktach różnymi masami skupionymi, każda w jednym punkcie. Liczba różnych możliwych częstotliwości drgań takiego układu równa się liczbie jego stopni swobody dynamicznej.

Siła wymuszająca zaczepiona do pewnego układu sprężystego wywołuje w nim drgania wymuszone, a jednocześnie staje się przyczyną powstawania drgań własnych. Z tego powodu amplituda drgań układu sprężystego, wywołanych przez siłę wymuszającą, może być przedstawiona jako suma amplitud drgań własnych $y_{wł}$ i drgań wymuszonych w_{wym}, czyli

$$y = y_{wł} + y_{wym}. \tag{2.2}$$

Na skutek oporów wewnętrznych w materiale lub oporów zewnętrznych drgania własne szybko zanikają i amplituda drgań wymuszonych równa się wówczas

$$y_{wym} = \vartheta\, y_{st}, \tag{2.3}$$

gdzie y_{st} jest ugięciem wywołanym działaniem statycznym siły równej największej wartości siły wymuszającej.

Współczynnik ϑ jest to współczynnik dynamiczny, który w razie braku przyczyn tłumiących drgania wyraża się dla układów o jednym stopniu swobody wzorem

$$\vartheta = \frac{1}{1 - \dfrac{c^2}{n^2}}, \tag{2.4}$$

gdzie c oznacza częstotliwość wahań siły wymuszającej, a n częstotliwość drgań własnych układu sprężystego.

W przypadku gdy drgania doznają tłumienia w ten sposób, że opór stawiany drganiom można uważać za proporcjonalny do prędkości ruchu układu drgającego, współczynnik dynamiczny wyraża się wzorem

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{c^2}{n^2}\right)^2 + \dfrac{4c^2h^2}{n^4}}}, \tag{2.5}$$

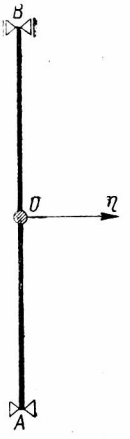
gdzie wielkość h charakteryzuje opór stawiany drganiom.

Znając współczynnik ϑ, możemy na podstawie ze wzoru (2.3) wyznaczyć odkształcenia i naprężenia wywołane w konstrukcji przez siłę wymuszającą. Do wyznaczenia współczynników dynamicznych i uniknięcia rezonansu potrzebna jest znajomość wielkości n, którą obliczamy na podstawie teorii drgań własnych. Tu oddają duże usługi metody arytmetyzacyjne, w szczególności metoda momentów wtórnych.

Równanie różniczkowe drgań własnych pręta prostego w dwóch punktach swobodnie podpartego ma postać

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + n^2\eta = 0\,, \tag{2.6}$$

gdzie n oznacza częstotliwość kołową, a η odchylenia poszczególnych punktów pręta od położenia równowagi, za które przyjmujemy dla pręta ustawionego pionowo położenie wyjściowe (rys. 25), a dla pręta poziomego krzywą odkształconą ugięcia statycznego (krzywa AO_0 na rys. 26).



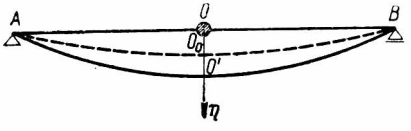
Rys. 25

Równanie (2.6) jest z matematycznego punktu widzenia identyczne z równaniem dotyczącym wyboczenia pręta prostego

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0\,. \tag{2.7}$$

Nasuwa to możliwość zastosowania do wyznaczenia częstotliwości drgań własnych sposobu momentów wtórnych. Niektóre z obliczeń wykonanych tym sposobem mają charakter obliczeń ścisłych, a niektóre przybliżonych.

Aby w tym ostatnim wypadku wyznaczyć częstotliwość kołową n, przyjmujemy dla osi pręta wygiętego pod wpływem sił bezwładności pewną czyniącą zadość warunkom brzegowym dowolną krzywą, której równanie zawiera nieznaną amplitudę δ jako parametr. Na podstawie tej krzywej wyznaczamy odchylenia belki η od położenia równowagi, a na podstawie odchyleń odpowiadające im siły bezwładności. Na podstawie wyznaczonych w ten sposób sił obliczamy sposobem momentów wtórnych rzędne nowej krzywej odkształconej osi pręta i porównujemy tę krzywą z krzywą przyjętą a priori. Przyrównując, mianowicie, bądź największe rzędne obydwóch krzywych, bądź też pola ograniczone przez te krzywe, znajdujemy poszukiwaną częstotliwość z równania



Rys. 26

$$\max y_1 = \max y_2\,, \tag{2.8}$$

bądź z równania

$$\Omega_1 = \Omega_2 , \tag{2.9}$$

gdzie znaczki 1 i 2 dotyczą dwóch kolejnych krzywych.

Otrzymamy w ten sposób częstotliwość n w pierwszym przybliżeniu. Drugie przybliżenie znajdziemy powtarzając przytoczony schemat obliczenia z tym, że rolę krzywej przyjętej a priori odegrać ma tu druga z wymienionych krzywych. Tak samo postępujemy przy poszukiwaniu dalszych przybliżeń.

Przedstawiony schemat postępowania bywa nazywany metodą kolejnych przybliżeń, chociaż nazwa powyższa nie charakteryzuje go dobrze, gdyż nieraz już pierwsze przybliżenie daje wynik ścisły. Istotę metody stanowi właściwie określanie tej samej wielkości przez tę samą (*idem per idem*).

Przybliżony sposób obliczenia drgań własnych nie pozwala na jednoczesne wyznaczenie częstotliwości pierwszego, drugiego, trzeciego i dalszych rzędów. Do wyznaczania częstotliwości każdego rzędu należy przyjmować inną krzywą jako pierwszą postać drgań własnych. Nie jest to duża wada metody, gdyż do niedawna prędkości ruchu pociągów i maszyn nie dawały podstaw do oczekiwania rezonansu wahań sił wymuszających z drganiami własnymi wyższego rzędu niż pierwszy. Obecnie wobec dużych prędkości pociągów i ruchu maszyn wahania sił wymuszających mogą wprawdzie łatwo wpaść w rezonans z drganiami własnymi konstrukcji podtrzymujących drugiego rzędu, ma to już jednak rzadko miejsce z drganiami trzeciego rzędu.

Niżej omówione będą przypadki drgań własnych 1 i 2 rzędu układów o 1 do 4 stopni swobody i ciał sprężystych. Odchylenia η od położenia równowagi będą odkładane dla uproszczenia rysunków od nieodkształconej osi pręta, niezależnie od tego czy oś ta jest pionowa, czy pozioma.

Bierzemy pod uwagę pręt nieważki w dwóch punktach swobodnie podparty z zaczepionym w jego środku C ciężarem o masie m (rys. 27). Prostą AB w myśl tego, co powiedzieliśmy wyżej, uważamy za położenie równowagi, a nieznaną amplitudę drgań własnych układu w punkcie C oznaczamy przez δ. Wobec tego odchylenie η ciężaru C od położenia równowagi wyraża się wzorem

$$\eta = \delta \sin nt , \tag{2.10}$$

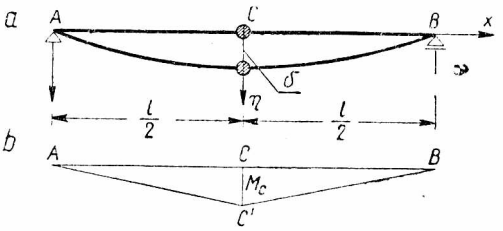
gdzie n oznacza częstotliwość drgań własnych, a t czas liczony od chwili, kiedy pręt zaczyna się wyginać w stosunku do położenia równowagi.

Siła bezwładności ciężaru C odpowiadająca odchyleniu η wynosi $(P/g)(d^2\eta/dt^2)$ dla $P = mg$; przy największym odchyleniu δ, tzn. przy $\sin nt = 1$, siła bezwładności

$$P_c' = \frac{P}{g} n^2 \delta . \tag{2.11}$$

Siła (2.11) wywołuje w środku pręta moment zginający

$$M_c = \frac{l}{4} P_c' l , \tag{2.12}$$



Rys. 27

czemu odpowiada wykres momentów zginających, czyli wykres obciążeń wtórnych w pręcie AB, przedstawiony na rys. 27 jako trójkąt ABC'.

Pole wykresu obciążeń wtórnych

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{2} M_c l , \tag{2.13}$$

a odpowiedni moment wtórny w punkcie C

$$\mathfrak{M}_c = \frac{1}{48} \frac{P}{g} n^2 \delta l^3 . \tag{2.14}$$

Dzieląc ten moment przez sztywność pręta EJ znajdujemy, że największe odchylenie ciężaru C

$$\max \eta = \frac{\mathfrak{M}_c}{EJ} . \tag{2.15}$$

A więc przyjąwszy za punkt wyjścia do obliczeń amplitudę δ drgań własnych ciężaru C doszliśmy do nowej wartości amplitudy, tzn. że

$$\max \eta = \delta . \tag{2.16}$$

Z równania tego znajdujemy poszukiwaną częstotliwość kołową n drgań własnych ciężaru C:

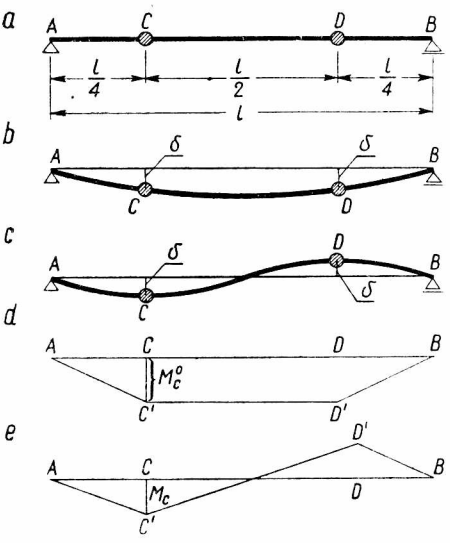
$$n = \sqrt{\frac{48 EJ g}{P l^3}} . \tag{2.17}$$

Otrzymany wynik jest w tym wypadku wynikiem ścisłym.

Przechodząc do układów o dwóch stopniach swobody dynamicznej bierzemy pod uwagę pręt nieważki AB, na którym w punktach C i D rozmieszczonych według rys. 28 zaczepione są dwa ciężary o równych masach m.

Ponieważ mamy do czynienia z układem o dwóch stopniach swobody, będą tu miały miejsce dwa różne rodzaje drgań własnych o różnych częstotliwościach (rys. 28b i 28c).

W przypadku przedstawionym na rys. 28b oznaczamy przez δ największe odchylenia rozpatrywanego układu w punktach C i D. Odpowiadają temu dwie siły bezwładności ciężarów C i D



Rys. 28

$$P'_C = P'_D = \frac{P}{g} n^2 \delta \tag{2.18}$$

oraz wykres momentów zginających w pręcie CD przedstawiony na rys. 28d.

Przyjmując wykres $AC'D'B$ za wykres obciążeń wtórnych znajdujemy momenty wtórne $\mathfrak{M}_C = \mathfrak{M}_D$ w punktach C i D i odpowiednie odchylenia

$$\max \eta_C = \max \eta_D = \frac{\mathfrak{M}_C}{EJ}. \tag{2.19}$$

Ponieważ odchylenia te równe są przyjętym z góry amplitudom punktów C i D, więc $\max \eta_C = \delta$, skąd można obliczyć częstotliwość kołową pierwszego rzędu rozpatrywanego układu

$$n_1 = \sqrt{\frac{48\,EJg}{Pl^3}}. \tag{2.20}$$

Aby wyznaczyć częstotliwość drugiego rzędu tego układu, odpowiadającą typowi drgań przedstawionemu na rys. 28c, przyjmujemy, że amplitudy drgań punktów C i D są równe δ i odłożone w przeciwne strony. W związku z tym zaczepiamy w tych punktach dwie siły wyrażone wzorem (2.18) i skierowane w przeciwne strony. Odpowiedni wykres momentów zginających przedstawiony jest na rys. 28e. Uważając ten wykres za wykres obciążenia wtórnego znajdujemy ugięcia pręta AB w punktach C i D a tym samym największe odchylenia od położenia równowagi:

$$\max \eta_C = \frac{Pl^3}{192\,EJ}. \tag{2.21}$$

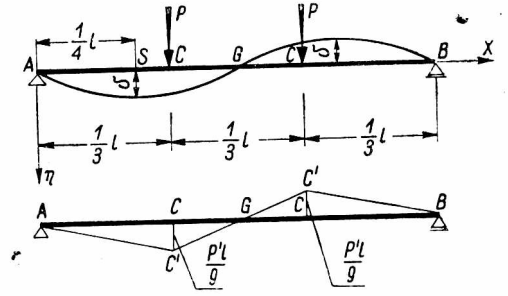
Przyrównując do siebie dwa różne wyrażenia na to samo odchylenie znajdujemy z równania $\max \eta_C = \delta$

$$n_2 = \sqrt{\frac{192\,EJg}{Pl^3}}. \tag{2.22}$$

Z porównania częstotliwości pierwszego i drugiego rzędu widzimy, że częstotliwość n_2 jest dwa razy większa od częstotliwości n_1.

Dalej podamy ogólniejsze rozwiązanie zadania podobnego do poprzedniego.

Bierzemy mianowicie pod uwagę pręt nieważki AB w dwóch punktach swobodnie podparty, do którego w punkcie C w odległościach równych $l/3$ od podpór zaczepione są dwa ciężary o dwu równych masach, i wyznaczamy częstotliwość drgań drugiego rzędu (rys. 29a).



Rys. 29

Przyjmujemy w pierwszym przybliżeniu, że przy drganiach drugiego rzędu pręt wygina się według sinusoidy

$$\eta = \delta \sin \frac{2\pi x}{l}, \tag{2.23}$$

gdzie δ oznacza amplitudę w punkcie S położonym w odległości $l/4$ od podpory.

Największe siły bezwładności mas ciężarów zaczepionych w punktach C wynoszą

$$P' = \frac{P}{g} n^2 \eta_C, \tag{2.24}$$

gdzie η_C są ugięciami (amplitudami) odpowiadającymi największym siłom bezwładności. Siły te są zwrócone w każdym z punktów C w przeciwne strony. Ugięcia η_C otrzymamy wstawiając w równanie (2.23) $x = l/3$:

$$\eta_C = 0{,}86603\,\delta. \tag{2.25}$$

Wykres momentów zginających w belce AB, odpowiadający działaniu dwóch sił P' skierowanych w przeciwne strony, przedstawiony jest na rysunku 29b. Uważając wykres ten za wykres obciążenia wtórnego znajdujemy reakcję $\mathfrak{A}$ podpory A belki AB od tego obciążenia:

$$\mathfrak{A} = \frac{P' l^2}{81}. \tag{2.26}$$

Moment wtórny w punkcie S wynosi w tych warunkach

$$\mathfrak{M}_s = \frac{P' l^2}{81} \frac{l}{4} - \frac{P' l}{12} \frac{1}{4} l \frac{1}{2} \frac{1}{4} l \frac{1}{3} = 0{,}00192\, P' l^3. \tag{2.27}$$

Ugięcia w punktach S równe sobie, lecz skierowane w przeciwne strony równają się

$$\eta_s = \frac{\mathfrak{M}_s}{EJ} = \frac{0{,}00192\,P' l^3}{EJ} = \frac{0{,}00192\,l^3}{EJ}\,\frac{P}{g}\,n^2 \cdot 0{,}86603\,\delta . \tag{2.28}$$

Przyrównując ugięcia δ do założonego z góry ugięcia η_s dochodzimy do równania

$$\eta_s = \delta , \tag{2.29}$$

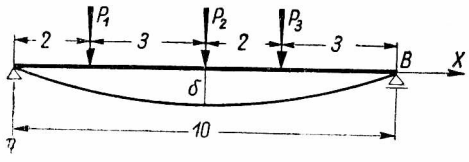
z którego znajdujemy

$$n = 22{,}8\sqrt{\frac{EJg}{Pl^3}} . \tag{2.30}$$

Dalsze przybliżenie dla n moglibyśmy otrzymać przez powtórzenie przytoczonego toku obliczenia przyjmując w nim zamiast δ ugięcie η_s i zastępując przyjętą wyżej sinusoidę krzywą odkształconą belki, wyznaczoną na podstawie wykresu obciążeń wtórnych.

Przypadek drgań układu o trzech stopniach swobody rozważymy na przykładzie przedstawionym na rys. 30. Obliczymy mianowicie częstotliwość drgań podstawowych układu.

Bierzemy dla przykładu belkę w dwóch punktach swobodnie podpartą o rozpiętości $l = 10$ m. W punktach 1, 2, 3 zaczepione są ciężary $P_1 = 10$ t, $P_2 = 20$ t, $P_3 = 10$ t. Belka jest nieważka.



Rys. 30

Wobec tego, że obciążenie pręta niezbyt odbiega od symetrycznego względem środka belki, przyjmujemy za oś odkształconą krzywą

$$\eta = \delta \sin\frac{\pi x}{l} , \tag{2.31}$$

gdzie δ oznacza ugięcie belki w środku. Podobnie jak w przypadkach rozpatrzonych wyżej przyjmujemy

$$P_1' = \frac{P_1}{g}\,n^2\,\eta_1 = s_1\,\eta_1 \tag{2.32}$$

oraz odpowiednio

$$P_2' = s_2\,\eta_2 , \qquad P_3' = s_3\,\eta_3 . \tag{2.33}$$

Wstawiając w równanie (2.31) kolejno $x = 0{,}2\,l$, $x = 0{,}5\,l$ i $x = 0{,}7\,l$ znajdujemy

$$\eta_1 = 0{,}588\,\delta , \qquad \eta_2 = \delta , \qquad \eta_3 = 0{,}808\,\delta . \tag{2.34}$$

Reakcja podpory A spowodowana przez siły P' wynosi

$$R_A = 0{,}8\,P'_1 + 0{,}5\,P'_2 + 0{,}3\,P'_3 = 17{,}12\,\frac{n^2}{g}\,\delta, \tag{2.35}$$

a wobec tego momenty zginające pod poszczególnymi ciężarami będą równe

$$M_1 = 34{,}24\,\frac{n^2}{g}\,\delta, \qquad M_2 = 67{,}96\,\frac{n^2}{g}\,\delta, \qquad M_3 = 50{,}40\,\frac{n^2}{g}\,\delta. \tag{2.36}$$

Rozkład momentów zginających przyjmujemy dalej według prawa

$$M = M_{śr}\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{2.37}$$

Wobec małej liczby ciężarów skupionych na belce rzeczywisty wykres momentów zginających jest bardziej stromy niż wykres (2.37) przy $M_2 = M_{śr}$. Aby to nie odbiło się na momentach wtórnych, bierzemy pod uwagę, że średnia z rzeczywistych momentów powinna się równać średniej z momentów w tych samych punktach obliczonych według wzoru (2.37). Stosunek średniej momentów (2.36) do momentu M_2 wynosi 0,74, a stosunek średniej odpowiednich rzędnych krzywej (2.37) do $M_{śr}$ równa się 0,80. Wobec tego zastępujemy równanie (2.37) przez równanie

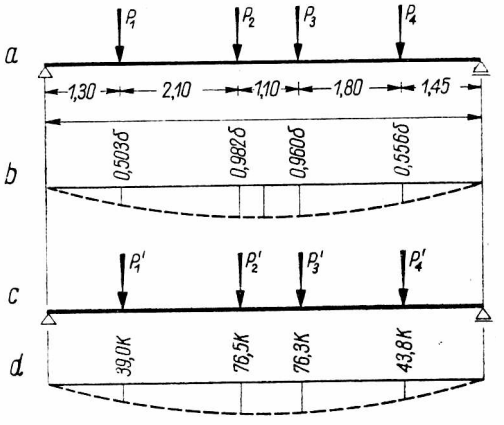
$$M = \frac{0{,}74}{0{,}80}\,M_{śr}\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{2.38}$$

Moment $\mathfrak{M}_{śr}$ będzie w tych warunkach równy

$$\mathfrak{M}_{śr} = 0{,}93\,M_{śr}\,\frac{l^2}{\pi^2} = 63{,}80\,\frac{n^2}{g}\,\delta. \tag{2.39}$$

Dzieląc ten moment przez EJ i przyrównując iloraz do δ znajdujemy

$$n = 0{,}0398\,\sqrt{EJg} \tag{2.40}$$



Rys. 31

wobec dokładnej wartości współczynnika przy pierwiastku 0,0401 podanej przez K. S. Zawriewa.

Wyznaczenie częstotliwości drgań własnych układu o czterech stopniach swobody dynamicznej przeprowadzamy dla przypadku przedstawionego na rys. 31, gdzie $P_1 = P_4 = 4{,}5$ t i $P_2 = P_3 = 3$ t oraz $l = 7{,}75$ m.

Za równanie pierwszej przybliżonej postaci osi odkształconej przyjmujemy równanie

$$\eta = \delta \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{2.41}$$

gdzie δ oznacza nieznane ugięcie belki w środku, mierzone względem położenia równowagi (względem tzw. poziomu statycznego). Rysunek 31b przedstawia wykres sinusoidy (2.41) ze wskazaniem rzędnych wyrażających przesunięcia punktów zaczepienia poszczególnych ciężarów P. Pole Ω_1 zawarte między sinusoidą a osią odciętych wynosi

$$\Omega_1 = \frac{2}{\pi} l \delta. \tag{2.42}$$

Największe wartości sił bezwładności znajdujemy ze wzoru

$$P' = \eta \frac{P}{g} n^2, \tag{2.43}$$

a więc

$$\begin{cases} P'_1 = 2{,}26 \dfrac{\delta n^2}{g}, & P'_3 = 2{,}91 \dfrac{\delta n^2}{g}, \\ P'_2 = 2{,}95 \dfrac{\delta n^2}{g}, & P'_4 = 2{,}50 \dfrac{\delta n^2}{g}. \end{cases} \tag{2.44}$$

Po sporządzeniu wykresu momentów zginających dla sił (2.44) i po znalezieniu odpowiednich momentów wtórnych dochodzimy do nowej odkształconej, przedstawionej na rysunku 31d; znajdujemy nowe pole zawarte między tą krzywą a osią odciętych

$$\Omega_2 = 384{,}40 \frac{\delta n^2}{EJg}. \tag{2.45}$$

Przyrównanie pól Ω_1 i Ω_2 zastępujemy w tym wypadku przez przyrównanie średnich rzędnych obydwóch krzywych; znajdujemy w ten sposób

$$n = 0{,}113 \sqrt{EJg}. \tag{2.46}$$

Przechodząc do obliczenia częstotliwości drgań własnych ciał sprężystych, a więc układów o nieskończenie wielkiej liczbie stopni swobody, wykażemy przede wszystkim, że najniższej częstotliwości odpowiada w tych wypadkach największa amplituda. co ma miejsce przy drganiach podstawowych.

Jeżeli belka sprężysta ma stały przekrój poprzeczny, to zależność między odchyleniem η pewnego punktu jej osi od położenia równowagi a czasem t wyraża się równaniem

$$EJ\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}+\frac{q}{g}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=0, \tag{2.47}$$

gdzie x oznacza odciętą punktu, którego odchylenie jest η.

Po ustaleniu warunków brzegowych dla belek w dwóch punktach swobodnie podpartych, belek utwierdzonych na końcach i belek-wsporników wyznaczamy częstotliwości drgań własnych tych trzech rodzajów belek odpowiednio z równań

$$\sin ul=0, \tag{2.48}$$

$$\cos ul\cosh ul=1, \tag{2.49}$$

$$\cos ul\cosh ul=-1, \tag{2.50}$$

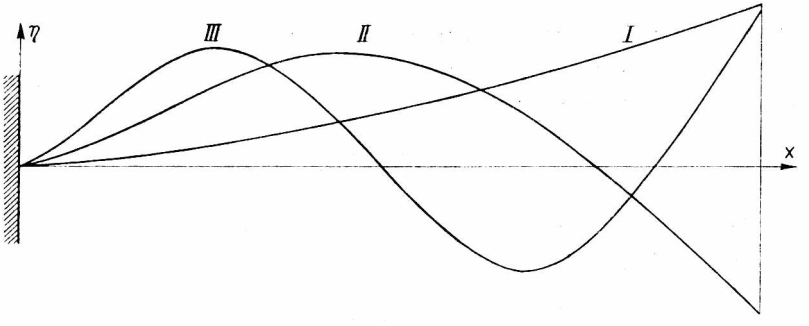
gdzie

$$u=\sqrt{\frac{n}{a}} \qquad \text{oraz} \qquad a=\sqrt{\frac{EJg}{q}}.$$

Każdej wartości ul odpowiada inna częstotliwość n i inne równanie fali stojącej:

$$X(x)=D_1\sin ux+D_2\cos ux+D_3\sinh ux+D_4\cosh ux. \tag{2.51}$$

Przyjmując jedną ze stałych całkowania D za równą 1 otrzymujemy dla każdej z wymienionych wyżej belek wykresy ugięć odpowiadających różnym częstotliwościom drgań, obliczonym z równań (2.48)-(2.50).



Rys. 32

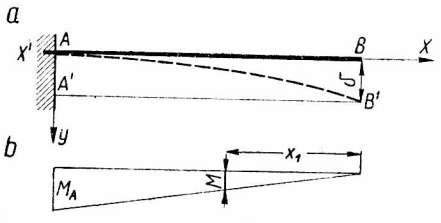
A więc np. dla belki-wspornika po uwzględnieniu warunków brzegowych mamy

$$X(x)=D_2\left[(\cos ux-\cosh ux)+0{,}731\,(\sin ux \quad \sinh ux)\right], \tag{2.52}$$

co doprowadza do wykresu na rys. 32, na którym krzywa I odpowiada $ul = 1{,}875$, krzywa II $ul = 4{,}694$, krzywa III $ul = 7{,}855$. Z wykresu wynika, że największe amplitudy odpowiadają drganiom podstawowym, co potwierdzają obliczenia dla dalszych, wyższych częstotliwości i dla innych typów belek. Pozwala to na ograniczenie się w wielu wypadkach drgań konstrukcji budowlanych do badania samych tylko drgań podstawowych. Możemy to wykonać sposobem momentów wtórnych. Podajemy dwa przypadki tego rodzaju obliczenia.

Bierzemy pod uwagę pręt utwierdzony w przekroju A i swobodny w przekroju B; ciężar własny pręta q kG/cm (kilogramów na centymetr bieżący), $EJ = \text{const}$ (rys. 33).

Oznaczamy przez δ amplitudę drgań podstawowych w punkcie B i przyjmujemy dla osi odkształconej pręta w czasie drgań równanie paraboli



Rys. 33

$$y = \delta \frac{x^2}{l^2}. \tag{2.53}$$

Wykres obciążeń pręta siłami bezwładności będzie się wyrażał wzorem

$$q' = s\,\delta \frac{x^2}{l^2}. \tag{2.54}$$

Największy moment zginający, spowodowany przez siły bezwładności, występuje w przekroju A i wynosi

$$M_A = s\left(\frac{\delta l^2}{2} - \frac{2}{3}\,\delta l \frac{3}{8} l\right) = \frac{s\,\delta l^2}{4}. \tag{2.55}$$

Gdyby chodziło o siłę bezwładności jednego ciężaru zaczepionego w końcu B pręta, mielibyśmy do czynienia z następującym rozkładem obciążeń wtórnych (rys. 33b):

$$M = M_A \frac{x_1}{l}. \tag{2.56}$$

Odpowiadałby temu następujący moment statyczny obciążenia wtórnego pręta względem punktu B:

$$\mathfrak{M}'_B = M_A \frac{l^2}{3}. \tag{2.57}$$

Ponieważ główna część sił bezwładności pręta, jak to wynika z postaci krzywej odkształconej, będzie skupiona około punktu B, moment statyczny $\mathfrak{M}'_B$ w danym zadaniu będzie miał wartość zbliżoną do wartości (2.57).

Wobec tego przyjmujemy, że

$$\eta_B = \frac{M_A l^2}{3EJ}. \tag{2.58}$$

Przyrównując to nowe wyrażenie na ugięcie pręta w punkcie B do pierwotnie przyjętego δ znajdujemy

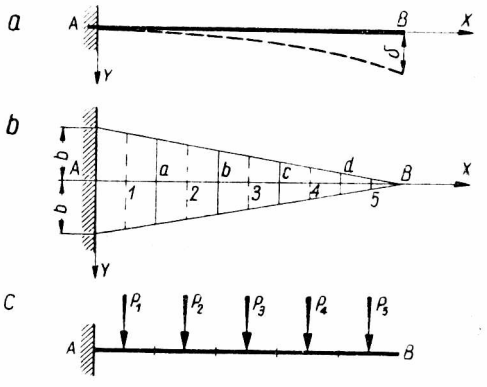
$$n = \frac{\pi^2}{(1{,}69\,l)^2}\sqrt{\frac{EJg}{q}}. \tag{2.59}$$

Wynik ścisły różniłby się od powyższego tylko tym, że współczynnik przy l byłby tu równy 1,67.

Omówimy dalej obliczenie częstotliwości drgań własnych w kolejnych przybliżeniach. Wykonamy to na przypadku drgań podstawowych pręta o kształcie klina utwierdzonego w punkcie A i swobodnego w punkcie B, o wysokości w przekroju utwierdzenia $2b$, o szerokości 1 i o ciężarze jednostkowym γ (rys. 34).

Dzielimy pręt na odcinki $\Delta x = 0{,}2\,l$ i w granicach tych odcinków zastępujemy w przekroju podłużnym trapezy prostokątami. Poszczególne odcinki Δx rozpatrywanego pręta mają w tych warunkach następujące ciężary (rys. 34c):

$$\begin{cases} P_1 = 0{,}18 \cdot 2bl\gamma, \\ P_2 = 0{,}14 \cdot 2bl\gamma, \\ P_3 = 0{,}10 \cdot 2bl\gamma, \\ P_4 = 0{,}06 \cdot 2bl\gamma, \\ P_5 = 0{,}02 \cdot 2bl\gamma. \end{cases} \tag{2.60}$$



Rys. 34

Przejście od sił P do największych działających na pręt sił bezwładności odbywa się na podstawie wzoru

$$P' = P\frac{n_1^2}{g}\eta, \tag{2.61}$$

gdzie η oznacza przesunięcie punktów zaczepienia sił, które obliczamy w pierwszym przybliżeniu według paraboli

$$\eta = \delta\frac{x^2}{l^2}, \tag{2.62}$$

Mnożąc siły (2.60) przez przesunięcia $\eta = 0{,}01\,\delta$, $\eta = 0{,}09\,\delta$ itd. znajdujemy:

$$(2.63)\quad \begin{cases} P_1' = 0{,}0018 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g}, \\ P_2' = 0{,}0126 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g}, \qquad P_4' = 0{,}0294 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g}, \\ P_3' = 0{,}0250 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g}, \qquad P_5' = 0{,}0162 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g}. \end{cases}$$

Siły P' wywołują następujące momenty zginające w poszczególnych przekrojach 1, 2, 3, 4 i 5:

$$(2.64)\quad \begin{cases} M_1' = 0{,}04312 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l, \\ M_2' = 0{,}02648 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l, \qquad M_4' = 0{,}00324 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l, \\ M_3' = 0{,}01236 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l, \qquad M_5' = 0{,}00041 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l. \end{cases}$$

Wobec zmienności przekroju poprzecznego rozpatrywanego pręta znajdujemy jego obciążenie wtórne na podstawie wykresu momentów M' zmieniając rzędne (2.64) w stosunku odwrotnym do trzecich potęg wysokości klina. W ten sposób dochodzimy do następujących rzędnych wykresu obciążeń wtórnych:

$$(2.65)\quad \begin{cases} M_1'' = 0{,}05933 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l, \\ M_2'' = 0{,}07719 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l, \qquad M_4'' = 0{,}11988 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l, \\ M_3'' = 0{,}09888 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l, \qquad M_5'' = 0{,}40500 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l. \end{cases}$$

Przyjmujemy, że na powierzchni poszczególnych odcinków momenty M'' nie ulegną zmianie, i znajdujemy następujące wartości powierzchni pól obciążenia wtórnego na tych odcinkach:

$$(2.66)\quad \begin{cases} \Psi_1 = 0{,}01187 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l^2, \\ \Psi_2 = 0{,}01544 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l^2, \qquad \Psi_4 = 0{,}02398 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l^2, \\ \Psi_3 = 0{,}01978 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l^2, \qquad \Psi_5 = 0{,}08100 \cdot 2bl\gamma \dfrac{n_1^2\delta}{g} l^2. \end{cases}$$

Pola $\mathfrak{P}$ przyjmujemy dalej za siły skupione w punktach 1, 2, 3, 4 i 5, wobec czego moment statyczny tych sił względem punktu B wynosi

$$\mathfrak{M}'_B = 0{,}04667 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^3 . \tag{2.67}$$

Wreszcie z równania

$$\eta_B = \delta , \tag{2.68}$$

czyli z równania

$$\frac{\mathfrak{M}'_B}{EJ} = \delta , \tag{2.69}$$

gdzie J dotyczy przekroju utwierdzenia, dochodzimy do następującej częstotliwości kołowej drgań własnych klina w pierwszym przybliżeniu:

$$n_1 = \frac{4{,}629\, b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}} . \tag{2.70}$$

Aby znaleźć częstotliwość drgań podstawowych w drugim przybliżeniu, musimy przede wszystkim wyznaczyć na podstawie otrzymanej częstotliwości drgań w pierwszym przybliżeniu nowe wartości amplitud pręta w czasie drgań podstawowych. W tym celu obliczamy kolejno momenty statyczne $\mathfrak{M}'$ dla poszczególnych punktów pręta:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}'_1 = 0{,}00030 \cdot 2b\gamma \dfrac{n_1^2 \delta}{g} l^4 , & \\ \mathfrak{M}'_2 = 0{,}00237 \cdot 2b\gamma \dfrac{n_1^2 \delta}{g} l^4 , & \mathfrak{M}'_4 = 0{,}01724 \cdot 2b\gamma \dfrac{n_1^2 \delta}{g} l^4 , \\ \mathfrak{M}'_3 = 0{,}00782 \cdot 2b\gamma \dfrac{n_1^2 \delta}{g} l^4 , & \mathfrak{M}'_5 = 0{,}03144 \cdot 2b\gamma \dfrac{n_1^2 \delta}{g} l^4 . \end{cases} \tag{2.71}$$

Stąd mając na uwadze, że w przekroju utwierdzenia $J = (2b)^3/12$, znajdujemy poszukiwane ugięcia:

$$\begin{cases} \eta_1 = \dfrac{0{,}00030}{EJ} \cdot 2b\gamma \dfrac{n_1^2 \delta}{g} l^4 = 0{,}00045 \dfrac{2\gamma n_1^2 \delta l^4}{Egb^2} , \\ \eta_2 = \dfrac{0{,}00237}{EJ} \cdot 2b\gamma \dfrac{n_1^2 \delta}{g} l^4 = 0{,}00356 \dfrac{2\gamma n_1^2 \delta l^4}{Egb^2} , \\ \eta_3 = \dfrac{0{,}00782}{EJ} \cdot 2b\gamma \dfrac{n_1^2 \delta}{g} l^4 = 0{,}01173 \dfrac{2\gamma n_1^2 \delta l^4}{Egb^2} , \\ \eta_4 = \dfrac{0{,}01724}{EJ} \cdot 2b\gamma \dfrac{n_1^2 \delta}{g} l^4 = 0{,}02586 \dfrac{2\gamma n_1^2 \delta l^4}{Egb^2} , \\ \eta_5 = \dfrac{0{,}03144}{EJ} \cdot 2b\gamma \dfrac{n_1^2 \delta}{g} l^4 = 0{,}04716 \dfrac{2\gamma n_1^2 \delta l^4}{Egb^2} . \end{cases} \tag{2.72}$$

Odpowiednio największe siły bezwładności w drugim przybliżeniu wyniosą (n_2 oznacza tu częstotliwość pierwszego rzędu w drugim przybliżeniu):

$$
\begin{cases}
P_1' = P_1 \dfrac{n_2^2}{g}\eta_1 = 0{,}0000810\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_1^2 \delta l^5}{g^2 E b}, \\
P_2' = P_2 \dfrac{n_2^2}{g}\eta_2 = 0{,}0004984\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_1^2 \delta l^5}{g^2 E b}, \\
P_3' = P_3 \dfrac{n_2^2}{g}\eta_3 = 0{,}0011730\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_1^2 \delta l^5}{g^2 E b}, \\
P_4' = P_4 \dfrac{n_2^2}{g}\eta_4 = 0{,}0015516\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_1^2 \delta l^5}{g^2 E b}, \\
P_5' = P_5 \dfrac{n_2^2}{g}\eta_5 = 0{,}0009432\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_1^2 \delta l^5}{g^2 E b}.
\end{cases}
\tag{2.73}
$$

Siły te wywołują następujące momenty zginające w poszczególnych przekrojach 1, 2, 3, 4 i 5:

$$
\begin{cases}
M_1' = 0{,}0022545\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_1^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\
M_2' = 0{,}0014209\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_1^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\
M_3' = 0{,}0006876\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_1^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\
M_4' = 0{,}0001886\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_1^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\
M_5' = 0{,}0000236\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_1^2 \delta l^6}{g^2 E b}.
\end{cases}
\tag{2.74}
$$

Zmieniając te momenty odwrotnie proporcjonalnie do trzecich potęg wysokości klina dochodzimy do następujących rzędnych nowego wykresu obciążeń wtórnych:

$$
\begin{cases}
M_1'' = \dfrac{M_1'}{0{,}729} = 0{,}003092\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_2^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\
M_2'' = \dfrac{M_2'}{0{,}343} = 0{,}004142\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_2^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\
M_3'' = \dfrac{M_3'}{0{,}125} = 0{,}005500\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_2^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\
M_4'' = \dfrac{M_4'}{0{,}027} = 0{,}006985\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_2^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\
M_5'' = \dfrac{M_5'}{0{,}001} = 0{,}023600\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_2^2 \delta l^6}{g^2 E b}.
\end{cases}
\tag{2.75}
$$

Znajdujemy dalej nowe wartości pól nowego obciążenia wtórnego dla poszczególnych odcinków pręta:

$$(2.76)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_1 = M_1'' \cdot 0{,}2\,l = 0{,}000618\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_2^2 \delta l^7}{g^2 E b}, \\ \mathfrak{P}_2 = M_2'' \cdot 0{,}2\,l = 0{,}000828\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_2^2 \delta l^7}{g^2 E b}, \\ \mathfrak{P}_3 = M_3'' \cdot 0{,}2\,l = 0{,}001100\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_2^2 \delta l^7}{g^2 E b}, \\ \mathfrak{P}_4 = M_4'' \cdot 0{,}2\,l = 0{,}001397\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_2^2 \delta l^7}{g^2 E b}, \\ \mathfrak{P}_5 = M_5'' \cdot 0{,}2\,l = 0{,}004720\, n_2^2 \dfrac{4\gamma^2 n_2^2 \delta l^7}{g^2 E b}. \end{cases}$$

Uważając znowu pola $\mathfrak{P}$ za siły skupione w punktach 1, 2, 3, 4 i 5 obliczamy nowy moment statyczny tych sił względem punktu B:

$$(2.77)\quad \mathfrak{M}_B'' = 0{,}002577\, n_2^2 \frac{4\gamma^2 n_2^2 \delta l^8}{g^2 E b}.$$

Daje to nową wartość amplitudy drgań podstawowych w punkcie B:

$$(2.78)\quad \eta_B = \frac{0{,}002577}{EJ} n_2^2 \frac{4\gamma^2 n_2^2 \delta l^8}{g^2 E b},$$

dzięki czemu równanie (2.68) przybiera postać

$$(2.79)\quad \frac{0{,}002577}{EJ} n_2^2 \frac{4\gamma^2 n_1^2 \delta l^8}{g^2 E b} = \frac{0{,}04667}{EJ} 2 b \gamma \frac{n_1^2 \delta l^4}{g}.$$

Stąd znajdujemy n_2 częstotliwość drgań podstawowych w drugim przybliżeniu:

$$(2.80)\quad n_2 = \frac{5{,}2109\, b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}.$$

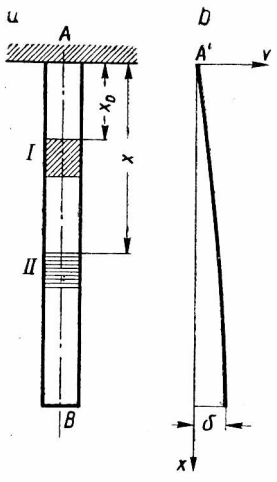
Częstotliwość drgań podstawowych w trzecim przybliżeniu n_3 otrzymać możemy według amplitud wyznaczonych na podstawie częstotliwości w drugim przybliżeniu; wynosi ona

$$(2.81)\quad n_3 = \frac{5{,}374\, b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}},$$

obliczenie zaś ścisłe wykonane przy użyciu funkcji Bessela daje w tym wypadku

$$(2.82)\quad n = \frac{5{,}315\, b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}.$$

W przypadku podłużnych podstawowych drgań własnych prętów prostych rolę poprzednio przyjmowanych a priori krzywych odkształconych przy zginaniu odgrywają krzywe wyrażające zależność przesunięć sprężystych v poszczególnych przekrojów pręta od ich położeń początkowych. Omówimy to w przypadku przedstawionym na rys. 35.



Rys. 35

Oznaczamy przez δ pionowe przesunięcie przekroju B i przyjmujemy, że przesunięcia v poszczególnych przekrojów pręta wzdłuż jego długości będą się zmieniały według równania (rys. 35b)

$$v = \delta \sin \frac{\pi x}{2l}. \tag{2.83}$$

Na element I pręta (na rysunku zacieniowany ukośnie) działa siła rozciągająca S, na którą składają się siły bezwładności elementów II (na rysunku zacieniowanie poziome) zawartych w granicach od $x = x_0$ do $x = l$.

Masa jednego elementu II wynosi $(A/g)\,dx$, a odpowiednia największa wartość siły bezwładności $A\gamma\,dx n^2 v$. W związku z tym

$$S = \int_{x_0}^{l} \frac{A\gamma}{g} n^2 \delta \sin \frac{\pi x}{2l}\,dx = \frac{A\gamma}{g} n^2 \delta \frac{2l}{\pi} \cos \frac{\pi x_0}{2l}. \tag{2.84}$$

Wydłużenie elementu I pod działaniem siły S równa się

$$\Delta\,dx_0 = \frac{S\,dx_0}{EA}. \tag{2.85}$$

W tych warunkach całkowite największe wydłużenie pręta AB wynosi

$$v_B = \int_0^l \Delta\,dx_0 = \int_0^l \frac{A\gamma}{g} n^2 \delta \frac{2l}{\pi} \frac{1}{EA} \cos \frac{\pi x_0}{2l}\,dx = \tag{2.86}$$

$$= \frac{\gamma}{g} n^2 \delta \left(\frac{2l}{\pi}\right)^2 \frac{1}{E}.$$

Przyrównując to wydłużenie do przyjętego z góry największego przesunięcia δ znajdujemy

$$\frac{\gamma}{g} n^2 \delta \left(\frac{2l}{\pi}\right)^2 \frac{1}{E} = \delta, \tag{2.87}$$

skąd

$$n = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}. \tag{2.88}$$

Aby znaleźć wartość częstotliwości n w drugim przybliżeniu, należy granice całkowania we wzorze (2.86) «od 0 do l» zastąpić przez granice «od 0 do x», dzięki czemu wzór ten da wartości v przesunięć poszczególnych przekrojów poprzecznych wyrażone przez częstotliwość n w pierwszym przybliżeniu. W ten sposób zamiast krzywej rys. 35b będziemy mogli zbudować nową krzywą. Postępując z nią w ten sam sposób jak poprzednio dojdziemy do nowej wartości n. W danym wypadku szczególnym częstotliwości n w pierwszym i w drugim przybliżeniu są sobie równe.

Obliczenia częstotliwości drgań własnych sposobem arytmetyzacji tych obliczeń w przypadkach wymagających dłuższych rachunków omówione są w zbiorze zadań autora.

3. Interpretacja dynamiczna metody Ritza i Timoszenki

Analiza zjawisk dynamicznych w pracy konstrukcji inżynierskich może być wyzyskana do wyjaśnienia i pogłębienia niektórych teorii statycznych, w szczególności przybliżonej metody Ritza i Timoszenki wyznaczenia odkształceń układów sprężystych i sił krytycznych.

W zastosowaniu do wyznaczenia odkształceń ogłoszony przez W. Ritza w 1909 roku pomysł matematyczny polega na szukaniu takiej funkcji $w = F(x)$ wyrażającej odkształcenie, aby całka

$$U = \int_a^b f(x, w, w', \ldots)\, dx \tag{3.1}$$

w granicach od a do b czyniła zadość warunkowi extremum.

Aby znaleźć funkcję $w = F(x)$, należy przede wszystkim przedstawić ją w postaci szeregu

$$w = \psi(x) + A_1 \psi_1(x) + A_2 \psi_2(x) \ldots \tag{3.2}$$

o skończonej liczbie wyrazów, w którym symbole ψ oznaczają pewne znane funkcje x odpowiadające tym samym warunkom brzegowym co funkcja w, a A_1, A_2, A_3, ... pewne nieznane i od x niezależne współczynniki (parametry).

Wstawiamy następnie we wzór (3.1) zamiast w i jej pochodnych szereg (3.2) lub szereg odpowiednio zróżniczkowany i po wykonaniu całkowania

otrzymanej w ten sposób funkcji $f(x)$ przedstawiamy całkę U jako funkcję współczynników A_1, A_2, A_3, ... :

$$U = \int_a^b f(x)\,dx = F(A_1, A_2, A_3, \ldots). \tag{3.3}$$

Współczynniki A_1, A_2, A_3, ... konieczne do należytego określenia odkształceń za pomocą szeregu (3.2) powinny być wyznaczone z równań

$$\frac{\partial U}{\partial A_1} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial A_2} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial A_3}, \tag{3.4}$$

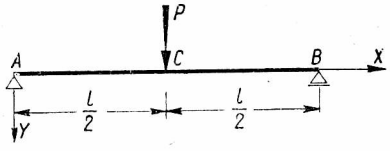
wyrażających warunek extremum funkcji F (A_1, A_2, A_3, ...), a tym samym i extremum całki U.

S. Timoszenko w 1910 roku wprowadził jako szereg (3.2) szereg Fouriera, dzięki czemu omawiana tu metoda znalazła szerokie zastosowanie przy obliczeniu odkształceń belek, płyt, zbiorników itd.; w szczególności stosuje on często łatwe w użyciu szeregi sinusowe typu

$$w = A_1 \sin\frac{\pi x}{l} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots. \tag{3.5}$$

W konkretnych obliczeniach statycznych rolę całki U odgrywa całkowita energia potencjalna układu.

Istotę zagadnienia, które ma być w tym rozdziale omówione, przedstawimy na najprostszym przypadku zastosowania metody Ritza i Timoszenki do belki w dwóch punktach swobodnie podpartej i obciążonej w środku siłą skupioną P (rys. 36). Przebieg obliczenia jest tu następujący.



Rys. 36

Przyjmujemy dla ugięcia belki $v = w$ wyrażenie

$$y = A \sin\frac{\pi x}{l}, \tag{3.6}$$

przedstawiające pierwszy wyraz szeregu (3.5).

Energię sprężystą układu obliczamy ze wzoru

$$V = \int_0^l \frac{M^2\,dx}{2EJ}, \tag{3.7}$$

gdzie M oznacza moment zginający w przekroju poprzecznym belki oddalonym o x od podpory A, a pracę sił zewnętrznych ze wzoru

$$T = P y_{śr}. \tag{3.8}$$

W tych warunkach

$$f(x,w,w',\ldots)\,dx = dV - dT = d(V-T) = d\left(\int_0^l \frac{M^2\,dx}{2EJ} - Py_{śr}\right) \tag{3.9}$$

Wstawiamy we wzór (3.7) wyrażenie

$$M = EJy'', \tag{3.10}$$

gdzie z kolei y'' obliczamy na podstawie równania (3.6). Również na podstawie równania (3.6) znajdujemy $y_{śr}$. W ten sposób dochodzimy do następujących wyrażeń na V i T oraz na $U = V - T$:

$$V = \frac{EJ\pi^4}{4l^3}A^2, \tag{3.11}$$

$$T = PA, \tag{3.12}$$

$$U = \frac{EJ\pi^4}{4l^3}A^2 - PA. \tag{3.13}$$

Wielkość U posiada w danym wypadku ten sam sens co we wzorach (3.1) i (3.3), gdyż

$$U = \int_0^l f(x)\,dx = \int_0^l d(V-T). \tag{3.14}$$

Aby znaleźć współczynnik A we wzorze (3.6), ustawiamy równanie

$$\frac{\partial U}{\partial A} = 0, \tag{3.15}$$

skąd znajdujemy, że

$$A = \frac{Pl^3}{48{,}7EJ}. \tag{3.16}$$

Przebieg przytoczonego obliczenia narzuca pytanie, dlaczego korzystaliśmy wyżej ze wzoru (3.7) na energię sprężystą, ustawionego w założeniu, że siła P wzrasta od 0 do swej wartości ostatecznej w sposób ciągły i nieskończenie powolny, podczas gdy zastosowany jednocześnie wzór (3.8) na pracę sił zewnętrznych przewiduje nagłe zaczepienie siły P, tzn. zaczepienie siły o jej wartości ostatecznej. Do wyjaśnienia tej sprawy zmierzać będziemy dwiema drogami, podając, z jednej strony, formalne uzasadnienie równania

$$d(V-T) = 0, \tag{3.17}$$

którego bezpośrednią konsekwencją jest równanie (3.15), oraz badając, z drugiej strony, przebieg zginania belki w przypadku szczególnym dopiero co omówionym (rys. 36).

Uzasadnienie wzoru (3.17) przeprowadzamy dla zwięzłości na sprężystym układzie kratowym i rozpowszechniamy je na wszystkie układy sprężyste.

O ile kratownica znajduje się w położeniu równowagi, musi być spełnione równanie

$$\sum_{1}^{k} Pv - \sum_{1}^{r} S\,\Delta l = 0, \tag{3.18}$$

gdzie k oznacza liczbę węzłów w kratownicy, r liczbę prętów, P siły zaczepione do poszczególnych węzłów, S siły w poszczególnych prętach, v przesunięcia poszczególnych węzłów i Δl sprężyste wydłużenia lub skróty (zmiany długości) poszczególnych prętów. Równanie (3.18) wyraża w przypadku kraty zasadę prac wirtualnych.

Jeżeli siły P wzrastają od zera do swych wartości ostatecznych w sposób ciągły i nieskończenie powolny, otrzymują one w każdej chwili dokonywającego się odkształcenia takie wartości, że są w stanie zrównoważyć powstające w układzie siły wewnętrzne, lecz nie mogą spowodować drgań układu. W ten sposób praca sił zewnętrznych zamienia się całkowicie w energię sprężystą układu, czyli że ma tu miejsce zależność

$$V = T_c, \tag{3.19}$$

gdzie T_c oznacza pracę sił zewnętrznych w założeniu, że siły te wzrastają w sposób ciągły i nieskończenie powolny od zera do swej wartości ostatecznej.

Jeżeli natomiast siły P posiadają wartości stałe i skończone, wówczas przewaga pracy sił zewnętrznych nad energią sprężystą przetworzy się w energię kinetyczną i układ dozna drgań, przy czym poszczególne jego punkty będą ulegały wahaniom względem pewnych położeń równowagi, które się ostatecznie ustalą jako odpowiadające danemu obciążeniu.

Ilość energii sprężystej nagromadzonej w danym układzie po ustaleniu się stanu równowagi nie jest zależna od dróg, którymi układ zmierza do tego stanu. Istotnie, wyrażenia na energię sprężystą jednostkową, tzn. nagromadzoną w sześcianie o wymiarach $1 \times 1 \times 1$ mają postać

$$V_1 = \frac{1}{2}\sigma^2 E, \qquad V_1 = \frac{1}{2}\varepsilon^2 E, \tag{3.20}$$

gdzie σ oznacza naprężenie normalne występujące na płaszczyznach ograniczających sześcian, a ε wydłużenie jednostkowe jego krawędzi; energia

sprężysta nagromadzona w całym układzie sprężystym wyraża się wobec tego wzorem

$$V = \int\int\int V_1 dx dy dz, \tag{3.21}$$

gdzie całkowanie dotyczy objętości rozpatrywanego ciała.

Ze wzorów (3.20) i (3.21) wynika, że energia sprężysta układu wzrasta w sposób ciągły, o ile w ten sam sposób wzrastają wydłużenia jednostkowe ε, a więc i odkształcenia. Ponieważ z doświadczenia wiemy, że ciało sprężyste odkształca się w sposób ciągły niezależnie od tego, czy siły zewnętrzne zostały zaczepione jako wzrastające w sposób ciągły i nieskończenie powolny, czy też nagle, o swej wartości ostatecznej, możemy więc twierdzić, że nie zależy od tego również i sposób, w jaki wzrasta energia sprężysta układu. A więc ilość energii sprężystej nagromadzonej w danej chwili w odkształconym elemencie konstrukcyjnym zależy wyłącznie od stanu jego wygięcia w tym czasie.

Ponieważ przy zaczepieniu do kratownicy sił P o wartościach stałych i przy związanych z tym drganiach układu poszczególne pręty będą doznawały okresowych zmian długości w sposób ciągły, więc i siły w nich występujące będą, w myśl prawa H o o k e' a, również zmieniały się w sposób ciągły.

Po uspokojeniu się drgań układu w stanie równowagi ustala się takie samo odkształcenie układu, jakie miałoby miejsce, gdyby siły P zostały zaczepione jako wzrastające od zera do swej ostatecznej wartości w sposób ciągły i nieskończenie powolny. Również i energia sprężysta układu jest w obydwóch wypadkach ta sama, jednak w poszczególnych stadiach dokonywającego się odkształcenia zależność między energią sprężystą układu a pracą sił zewnętrznych nie odpowiada równaniu (3.19).

Wobec tego, że w równaniu (3.18) w postaci ogólnej wielkości v zależą tylko od wielkości Δl i odwrotnie, możemy wstawić w nie zamiast v i Δl nieskończenie małe przesunięcia dv węzłów kratownicy z położenia równowagi i odpowiadające im nieskończenie małe przyrosty zmian długości $d(\Delta l)$ prętów. W ten sposób znajdujemy, że

$$\sum_1^k P dv - \sum_1^r S d(\Delta l) = 0. \tag{3.22}$$

Nieskończenie małym przyrostom $d(\Delta l)$ zmian długości poszczególnych prętów kratownicy odpowiadają nieskończenie małe przyrosty sił w tych prętach, tzn. że

$$d(\Delta l) = \frac{dS l}{EA}, \tag{3.23}$$

wobec czego prawy składnik lewej strony równania (3.22) przybiera postać

$$\sum_1^r S\,d(\Delta l) = \sum_1^r S\,\frac{dSl}{EA} \tag{3.24}$$

lub postać

$$\sum_1^r S\,d(\Delta l) = d\sum_1^r \frac{S^2 l}{2EA}; \tag{3.25}$$

skąd

$$\sum_1^r S\,d(\Delta l) = dV, \tag{3.26}$$

gdyż suma po prawej stronie wyrażenia (3.25) przedstawia energię sprężystą układu kratowego.

Podczas odchylania się układu kratowego od położenia równowagi siły P jako niezmienne pozwalają na następujące przekształcenia lewego dodajnika w równaniu (3.22):

$$\sum_1^k P\,dv = d\sum_1^k Pv; \tag{3.27}$$

skąd

$$\sum_1^k P\,dv = dT, \tag{3.28}$$

gdzie przez T rozumiemy pracę sił zewnętrznych jako sumę iloczynów przesunięć poszczególnych węzłów kratownicy przez odpowiednie siły.

Równanie (3.22) przybiera w tych warunkach postać

$$dV - dT = 0; \tag{3.29}$$

skąd

$$d(V - T) = 0 \tag{3.30}$$

lub

$$dU = 0, \tag{3.31}$$

gdzie $U = V - T$ jest funkcją parametrów A.

Równanie (3.31) wyprowadzone dla układów kratowych może być rozszerzone i na układy pełne. Wyraża ono, że o ile układ sprężysty pod dzia-

łaniem sił zaczepionych jako siły stałe, a nie jako wzrastające od zera do swej ostatecznej wartości w sposób ciągły i nieskończenie powolny — znajdzie się, po zaniku drgań, w stanie równowagi — to funkcja U przybiera wartość extremalną.

Całkowanie równania (3.31) daje

$$V - T = C. \tag{3.32}$$

Przy $C > 0$ mamy $V > T$ i równowaga układu sprężystego jest stateczna, a przy $C < 0$ mamy $V < T$ i równowaga jest niestateczna. Przy $V = T$ następuje przejście ze stanu równowagi statecznej do stanu równowagi niestatecznej i równanie

$$V = T \tag{3.33}$$

służy wówczas do wyznaczenia sił krytycznych.

Równanie (3.33) różni się od równania (3.19), ponieważ tu mamy na widoku siły zaczepione w sposób nagły, a tam w sposób ciągły i nieskończenie powolny.

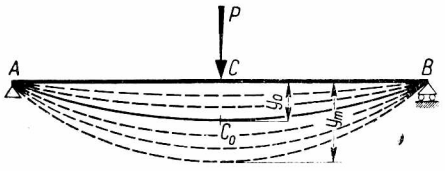
Metodę Ritza i Timoszenki stosujemy do wyznaczenia odkształceń pewnego elementu konstrukcyjnego lub do badania jego wyboczenia. Interesują tu nas wówczas przypadki, gdy $V > T$ i gdy $V = T$.

Wyznaczenie odkształcenia może mieć też miejsce i na podstawie równania (3.19), czyli tzw. równania Clapeyrona, ale w zasadzie tylko wówczas, gdy poszukiwane uogólnione przesunięcie występuje w punkcie zaczepienia uogólnionej siły i gdy chodzi o wyznaczenie odkształcenia w tym właśnie punkcie. Przy większej liczbie sił uogólnionych możemy wyznaczyć odkształcenie układu na podstawie twierdzenia Clapeyrona tylko wówczas, kiedy się zadowolimy w równaniach typu (3.5) jednym współczynnikiem A i obliczymy go z równania (3.19). Przy większej liczbie współczynników A nie daje się to już wykonać i musimy wówczas skorzystać z zależności między energią sprężystą układu a pracą sił zewnętrznych w ujęciu dynamicznym znajdującym wyraz w równaniu (3.31).

Przechodząc do zbadania zginania belki w dwóch punktach swobodnie podpartej i obciążonej w środku jedną siłą skupioną zaczepioną w sposób nagły, tzn. od razu przy jej wartości ostatecznej, interesujemy się przede wszystkim jakościową stroną zjawiska i nie badamy charakteru drgań, które występują i z czasem zanikają.

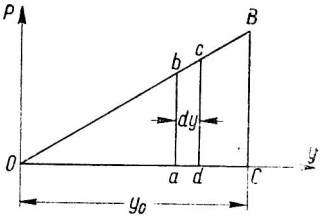
Siła P zaczepiona do belki w sposób nagły wykonywa pracę, która zostaje częściowo zużyta na odkształcenie belki, częściowo zaś na nadanie poszczególnym jej punktom pewnych prędkości, czyli przechodząc w energię kinetyczną znajdującą wyraz w drganiach belki około pewnego położenia równowagi. W ten sposób oś odkształcona belki będzie zajmowała kolejno nieskończenie bliskie do siebie położenia (rys. 37). Położenie rów-

nowagi będzie tym położeniem, które zajęłaby oś odkształcona belki, gdyby siła P wzrastała w sposób ciągły i nieskończenie powolny od zera do swej wartości ostatecznej; ugięcie belki pod ciężarem oznaczamy w tym wypadku przez y_0, a największe jej ugięcie przez y_m. Wielkość y_0, którą uważamy za ostateczne ugięcie belki, nie zależy więc od sposobu, w jaki została zaczepiona siła P. Potwierdza to zresztą doświadczenie.



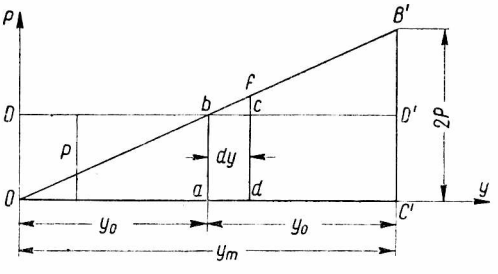
Rys. 37

Zaczepienie do belki siły P w sposób nagły należy uważać za równoznaczne z zetknięciem się z belką ciężaru P posiadającego prędkość 0, czyli ze szczególnym przypadkiem uderzenia. Z tego powodu największe ugięcie belki pod działaniem nagle zaczepionej siły wynosi $y_m = 2\,y_0$. Daje to podstawę do porównania ze sobą zależności, jakie zachodzą między energią sprężystą nagromadzoną w belce, a pracą sił zewnętrznych — z jednej strony, w przypadku zaczepienia sił w sposób ciągły i nieskończenie powolny i, z drugiej strony, w sposób nagły. Robimy to porównanie na wykresach rys. 38 i 39, na których na osi pionowej odkładamy zmienne wartości siły P, a na osi poziomej odpowiednie ugięcia y belki w środku.



Rys. 38

Przy ciągłym i nieskończenie powolnym wzroście sił P od zera do ich wartości ostatecznej zależność między P a y wyraża się za pomocą linii prostej OB. Na rys. 38 nieskończenie małe pole $abcd$ przedstawia przyrost pracy sił zewnętrznych $d\,T$, a tym samym i równy mu przyrost energii sprężystej $d\,V$. Podobnie i pole trójkąta OBC wyraża tu zgodnie z równaniem (3.19) jednocześnie pracę sił zewnętrznych i energię sprężystą nagromadzoną w belce.



Rys. 39

Przy nagłym zaczepieniu siły P, jak wykazano wyżej, energia sprężysta nagromadza się w ten sam sposób, jak przy ciągłym i nieskończenie powolnym wzroście tej siły, a więc w sposób ciągły. Zależność między P a y będzie się tu wyrażała za pomocą tej samej prostej OB' (rys. 39) zarówno przed przekroczeniem położenia równowagi, jak i po tym przekroczeniu, a więc zarówno przy $y < y_0$, jak i przy $y > y_0$. Przy $y = 2\,y_0$ energia nagromadzona w belce będzie równa

tej energii, która by się tu nagromadziła przy sile P wzrastającej w sposób ciągły i nieskończenie powolny od zera do $2P$, a więc energii sprężystej równej polu $OB'C'$, a przy $y = y_0$ będzie się ona wyrażała polem Oab równym polu OBC na rys. 38.

Praca siły zewnętrznej P, niezmiennej podczas odkształcenia belki, wyraża się za pomocą prostokąta $ODD'C'$. Różnica pól $OB'C'$ i $ODD'C'$, czyli pola trójkątów ODb i $bB'D'$ wyrażają różnicę $V - T$, a więc ilość energii potencjalnej, która w czasie odkształcenia belki przechodzi w energię kinetyczną.

Przyrost dV energii sprężystej belki przy nieskończenie małym przyroście dy ugięcia w stosunku do ugięcia odpowiadającego położeniu równowagi równa się na rys. 39 polu trapezu $adfb$, a odpowiedni przyrost dT pracy siły zewnętrznej P polu prostokąta $adcb$. Różnica tych pól, czyli różnica $dV - dT$ wyraża się za pomocą trójkąta bfc; równa się ona iloczynowi $\frac{1}{2}\, dy\, dP$, który przedstawia wielkość nieskończenie małą drugiego rzędu, i musi być przyjmowana za zero. Wynika stąd, że przy nieskończenie małym odchyleniu belki od położenia równowagi $dV = dT$, czyli

$$d(V - T) = 0 .$$

Przy wszystkich innych wartościach ugięcia, poza ugięciem odpowiadającym położeniu równowagi, przyrosty dV i dT nie będą sobie równe, wobec czego otrzymane równanie, jak to zostało już udowodnione w inny sposób, może być podstawą do ustalenia ugięcia odpowiadającego stanowi równowagi, czyli ugięcia mającego miejsce przy ciągłym i nieskończenie powolnym wzroście siły P od zera do jej wartości ostatecznej, o które właśnie chodzi w zwykłych obliczeniach wytrzymałościowych.

Interpretacja dynamiczna równania (3.17), na którym opiera się metoda Ritza i Timoszenki wyznaczenia odkształceń i sił krytycznych, polega na podstawie rozważań tego rozdziału na następującym rozumowaniu.

Siły P zaczepione do danej konstrukcji uważamy za zaczepione w sposób nagły. Siły te wprowadzają belkę w ruch wahadłowy zanikający.

Energia sprężysta V będzie się tu nagromadzała w ten sposób, jak gdyby każda z sił P wzrastała w sposób ciągły i nieskończenie powolny od zera do tej wartości, której odpowiada największe możliwe odkształcenie układu.

Praca sił zewnętrznych T będzie się równała w każdym momencie dokonywającego się odkształcenia sumie iloczynów poszczególnych sił P przez przesunięcia ich punktów zaczepienia.

Różnica $U = V - T$, całkowita energia potencjalna układu, zmienia się jako funkcja parametrów A dla poszczególnych stadiów odkształcenia układu i osiąga maksimum po zaniku drgań w chwili nastania równowagi stałej.

Р е з ю м е

ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ В СТАТИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ СООРУЖЕНИЙ

В главе I рассматривается вопрос, где следует, при расчете береговых устоев и мостовых быков, принимать точку приложения тормозных усилий и тяговой силы паровоза. Доказывается, что, в случае заторможения на опоре двух осей подвижного состава, точку приложения сил торможения следует принимать на высоте центра тяжести подвижного состава; в случае же торможения только одной оси — на уровне головки рельса. Тяговую силу следует прикладывать вообще на уровне головки рельса. Однако, бывают случаи, когда следует их принимать на высоте соединительной муфты; это может случится особенно, когда за мостом линия железной дороги находится на наклоне. Приводится анализ мостовых конструкций с точки зрения определения для них, в статических расчетах, места приложения тормозных усилий.

Глава II содержит приближенный расчет собственных колебаний. Для этого применяется метод, основанный на последовательных приближениях и на способе вторичных моментов М о р а. Рассматриваются колебания систем обладающих 1, 2, 3 и 4 степенями свободы, а также колебания упругих тел, продольные и поперечные. Вычисляются частоты колебаний первого и второго порядков и первые и вторые приближения этих частот.

Глава III посвящена динамической интерпретации уравнения $d(V - T) = 0$, являющегося основой метода приближенного определения деформаций; здесь V обозначает упругую энергию элемента, а T — работу внешних сил, представляемую в виде суммы произведений сил P на соответственные перемещения их точек приложения. Динамическая интерпретация уравнения $d(V - T) = 0$ состоит в том, что силы P считаются приложенными внезапно, что вызывает затухающее колебательное движение конструкции. Ввиду этого, исследуемое уравнение выражает условие экстремума функции $U = V - T$, соответствующего состоянию равновесия конструкции, т. е. ее статической деформации.

S u m m a r y

DYNAMICAL PROBLEMS IN STRUCTURAL ANALYSIS

In Sec. I the problem of the attachment points of braking force and tractive force of a locomotive in computation of bridge abutments and piers is considered. It is shown that if two axles are braked over the considered support, the centre of gravity of rolling stock should be assumed as the attachment point of the force. In the case when only one axle is

braked, the attachment should be taken at the level of the rail head. In general, the tractive force should be taken as acting at the level of the rail head. There are cases, however, in which it should be assumed to act at the level of the couplers. This is, for instance, the case when the track beyond the bridge runs down an incline. An analysis of bridge structures is given, from which attachment points of braking forces can be established in statical computations.

Sec. II contains approximate calculation of free vibration. A method based on successive approximations and on the method of secondary moments is used. Vibrations of 1, 2, 3 and 4 degrees of freedom are discussed as well as transversal and longitudinal vibrations of elastic bodies. The frequencies of vibrations of first and second order as well as first and second approximations of those frequencies are calculated.

Sec. III is devoted to the dynamic interpretation of the equation $d(V - T) = 0$, which constitutes the basis of the method of approximate determination of deformations. V denotes here the elastic energy of the element and T the work of external forces, assumed in the form of a sum of products of forces P and the corresponding displacements of their attachment point. The dynamic interpretation of the equation $d(V - T) = 0$ consists in that the forces P are considered to be attached in a sudden manner which provokes damped vibration of the structure. It follows therefore that this equation expresses te condition for a minimum of the function $U = V - T$, corresponding to the state of equilibrium of the structure — in other words — to its static deformation.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 marca 1955 r.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

UKAZAŁY SIĘ

Tom I obejmuje oddzielne zeszyty I - XV·2

I. F. Szelągowski, Rozwiązanie zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych — O pewnych szczególnych przypadkach wytrzymałości tarczy nieograniczonej z odmiennym ośrodkiem zarysu eliptycznego

II. J. Naleszkiewicz i A. Szaniawski, Drgania i stateczność masztów oraz iglic

III. Z. Klębowski, Podstawy uwzględniania wzmocnień obwodowych w wytrzymałościowym obliczaniu rury poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia

IV. M. Życzkowski, Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem siły krytycznej

V. E. Szczepaniak, Nowa metoda rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach bez wykonywania przecięć

VI. W. Olszak, Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych (Plastyczne wyczerpanie nośności)

VII. A. Lisowski, Płyty na sprężystym podłożu

VIII. J. Nowiński, Wyznaczenie przybliżonej wielkości ugięcia płyt na podstawie metody Ritza

IX. W. Fiszdon, O pewnej metodzie obliczania amplitud drgań

X. Z. Wasiutyński, O kształtach pęknięć powierzchniowych

XI. W. Wierzbicki, Dźwigary załamane w planie

XII. W. Wierzbicki, O powstawaniu wyboczenia prętów prostych

XIII. W. Wierzbicki, Kierunki możliwych usprawnień w obliczeniach łuków

XIV. W. Zenczykowski, Podstawy wytrzymałościowe obliczeń statycznych konstrukcji murowanych z cegły

XV·1. W. Wierzbicki, Zastosowanie różnic skończonych w przypadkach dwukierunkowych stanów naprężeń w budowlach

XV·2. W. Wierzbicki, O geometrycznych metodach badania konstrukcji prętowych

Tom II zeszyt 1

XVI. I. Malecki, Metody zastosowania rachunku tensorowego w technice

XVII. J. Nowiński, Podstawy teorii plastyczności (I). Siedem wykładów

XVIII. W. Nowacki, Statyka rusztów płaskich

Tom II zeszyt 2

XIX. W. Bogusz, Z teorii płyt ortotropowych

XX. J. Szmelter, Rozwiązanie zagadnienia błony metodą różnic skończonych z użyciem specjalnego liczydła

XXI. M. Sokołowski, Dwustopniowy sposób obliczania pewnego typu płyt ortotropowych

XXII. M. Życzkowski, Wyboczenie sprężysto-plastyczne niektórych prętów pryzmatycznych

Cena zł 20.—

Tom III zeszyt 1

XXIII. M. P. Wołarowicz, Badania nad własnościami reologicznych układów rozproszonych
XXIV. W. Pogány, O pewnych zagadnieniach mechaniki gruntów
XXV. J. Nowiński, Szlakami teorii sprężystości
XXVI. K. Wolski, Metoda punktów kinetycznych
XXVII. J. T. Pindera, Technika elastooptycznych badań płaskiego stanu naprężenia

Tom III zeszyt 2

XXVIII. W. Olszak i A. Sawczuk, Teoria nośności granicznej płyt w świetle weryfikacji doświadczalnej (I)
XXIX. A. Sawczuk, Zagadnienia nośności granicznej elementów rozciąganych i zginanych w zastosowaniu do teorii zbiorników prostokątnych
XXX. M. Życzkowski, Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym

Tom III zeszyt 3

XXXI. M. Bieniek, Metody teorii stateczności ruchu
XXXII. W. Prosnak, Struktura płaskiej fali uderzeniowej
XXXIII. W. Wierzbicki, Analiza schematów statycznych konstrukcji drewnianych

Tom III zeszyt 4

XXXIV. J. Klott, J. Naleszkiewicz, J. Rutecki i K. Wituszyński, Studia wstępne z dziedziny skręcania kadłuba na fali skośnej
XXXV. Z. Szymański, Równanie Boltzmanna i jego znaczenie w teorii gazów
XXXVI. W. Wierzbicki, Zagadnienia dynamiczne w obliczeniach statycznych budowli

W DRUKU

XXXVII. W. Nowacki i Z. Olesiak, Stateczność powłoki walcowej wzmocnionej żebrami
XXXVIII. W. Olszak i W. Urbanowski, Elasto-plastyczna grubościenna powłoka kulista z materiału niejednorodnego, poddana działaniu ciśnienia wewnętrznego i zewnętrznego
XXXIX. J. Madejski, O pełznaniu i pełzarce
XL. Z. Thrun, O poziomym oddziaływaniu podłoża sprężystego na płyty poddane działaniu zmian temperatury
XLI. Z. Thrun, Odkształcenia i naprężenia termiczne w płytach na sprężystym podłożu
XLII. W. Wierzbicki, O bezpieczeństwie liny nośnej mostu wiszącego
XLIII. A. Kornecki, Cienkościenna powłoka toroidalna obciążona ciśnieniem równomiernym