POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

KWARTALNIK

TOM III • ZESZYT 3

WARSZAWA • 1955

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

TREŚĆ TOMU III ZESZYTU 3

TABLE DES MATIÈRES DU VOL. III FASC. 3

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

XXXI - XXXIII

WARSZAWA • 1955
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

ZAWIERAJĄ PRACE BADAWCZE Z ZAKRESU TEORII SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMODYNAMIKI ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW KONSTRUKCJI

Adres Redakcji
WARSZAWA, ul. Śniadeckich 8, I p.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE XXXI-XXXIII

Nakład 1920+102 nadb. Papier druk. sat. B.1/16, 70—80 g. Arkuszy wydawn. $5^3/_5$. Arkuszy drukarskich $5^3/_4$
Oddano do składania dn. 8.III.55 r. Druk ukończ. w lipcu 1955 r. Zam. 104. B-6-2092. Cena zł 20.—

Stoł. Zakł. Graf., Drukarnia Naukowa. Warszawa, Śniadeckich 8.

MACIEJ BIENIEK

METODY TEORII STATECZNOŚCI RUCHU

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXXI

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Zagadnienia stateczności ruchu występują w licznych dziedzinach fizyki i techniki. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie podstawowych twierdzeń teorii stateczności ruchu. Wydaje się bowiem, że mimo znajomości przez ogół fizyków i inżynierów metod badania stateczności w pewnych szczególnych przypadkach, ogólne matematyczne podstawy tej teorii (obejmującej także i stateczność równowagi) są mniej znane i w naszej literaturze prawie nie poruszane.

Ograniczono się tu głównie do rozważenia stateczności w sensie L a p u n o w a oraz do podania zarysów jego teorii jako najbardziej podstawowej i najlepiej opracowanej pod względem matematycznym.

I. PODSTAWOWE POJĘCIA I DEFINICJE

1. Określenie stateczności ruchu

Zagadnienia stateczności ruchu można w sposób poglądowy scharakteryzować następująco. Dana jest na przykład pewna postać ruchu układu materialnego. Ruch ten może być określony równaniami dynamiki przy danych siłach działających na układ oraz ustalonych warunkach początkowych układu. Chodzi o zbadanie, jaki wpływ na daną postać ruchu wywierają małe siły oraz małe zmiany warunków początkowych, nie uwzględniane przy określaniu ruchu i często nieznane. Jeżeli pod wpływem małych sił postać ruchu niewiele różni się od postaci pierwotnej — ruch nazywamy statecznym. Jeżeli małe siły wywołują duże zmiany postaci ruchu — ruch nazywamy niestatecznym.

Teoria stateczności ruchu zajmuje się badaniem ruchu pod względem jego stateczności lub niestateczności. Z powyższego sformułowania wynika doniosłość praktyczna zagadnień stateczności ruchu. Pisząc bowiem równania ruchu najczęściej uwzględnia się tylko siły duże, pomija natomiast małe z powodu ich nieznajomości lub dla uproszczenia obliczeń. Ocena więc, jaki wpływ na ruch mają pominięte czynniki, jest ważna, gdyż decyduje o zgodności rozwiązania z rzeczywistym przebiegiem zjawiska.

Zajmiemy się teraz ścisłym sformułowaniem pojęcia stateczności ruchu.

Przyjmujemy, że ruch układu materialnego jest określony za pomocą n równań różniczkowych rzędu pierwszego, które zapiszemy w postaci

$$\frac{dz_k}{dt} = Z_k(z_1, z_2, ..., z_n, t) \qquad (k = 1, 2, ..., n). \tag{1.1}$$

Funkcje $z_1, z_2, ..., z_k, ..., z_n$ zmiennej t (czasu) są parametrami określającymi stan układu, jak na przykład współrzędne, prędkości itp. Rozpatrzmy pewne rozwiązania szczególne układu równań (1.1)

$$z_1 = f_1(t), \quad z_2 = f_2(t) \quad , ..., \quad z_n = f_n(t), \tag{1.2}$$

spełniające warunki początkowe: dla $t = 0$

$$z_{10} = f_1(0), \quad z_{20} = f_2(0) \quad , ..., \quad z_{n0} = f_n(0). \tag{1.3}$$

Ruch określony rozwiązaniami (1.2) nazywać będziemy ruchem niezakłóconym układu materialnego. Inną postać ruchu odpowiadającą równaniu (1.1) i warunkom brzegowym, różniącym się od warunków (1.3) o pewne wielkości x_{k0}, tj. warunkom: dla $t = 0$

$$\begin{cases} z'_{10} = z_{10} + x_{10} = f_1(0) + x_{10}, \\ z'_{20} = z_{20} + x_{20} = f_2(0) + x_{20}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z'_{n0} = z_{n0} + x_{n0} = f_n(0) + x_{n0}, \end{cases} \tag{1.4}$$

nazywać będziemy ruchem zakłóconym. Funkcje określające ruch zakłócony można napisać w postaci

$$\begin{cases} z'_1 = f_1(t) + x_1(t), \\ z'_2 = f_2(t) + x_2(t), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z'_n = f_n(t) + x_n(t). \end{cases} \tag{1.5}$$

Funkcje $x_k(t)$ określają zakłócenia ruchu, a wielkości x_{k0} zmiany warunków początkowych.

Ponieważ (1.5) i (1.2) są rozwiązaniami równania (1.1), to możemy napisać

$$\frac{dx_k}{dt} + \frac{df_k}{dt} = Z_k(x_1 + f_1, x_2 + f_2, ..., x_n + f_n, t) \tag{1.6}$$

oraz

$$\frac{df_k}{dt} = Z_k(f_1, f_2, ..., f_n, t), \tag{1.7}$$

gdzie $k = 1, 2, ..., n$.

Odejmując (1.7) od (1.6) otrzymamy

$$\frac{dx_k}{dt} = Z_k(x_1 + f_1, x_2 + f_2, ..., x_n + f_n, t) - Z_k(f_1, f_2, ..., f_n, t). \tag{1.8}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$X_k(x_1, x_2, ..., x_n, t) \equiv Z_k(x_1 + f_1, x_2 + f_2, ..., x_n + f_n, t) - Z_k(f_1, f_2, ..., f_n, t) \tag{1.9}$$

możemy równania (1.8) napisać

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, ..., x_n, t) \qquad (k = 1, 2, ..., n). \tag{1.10}$$

Układ równań typu (1.10) służy do wyznaczenia funkcji $x_k(t)$, tj. do określenia zakłóceń ruchu. Funkcje x_k spełniają warunki początkowe dla

$$t = 0, \qquad x_k = x_{k0}. \tag{1.11}$$

Równania (1.10) nazywać będziemy w dalszym ciągu równaniami ruchu zakłóconego, mimo że, ściśle rzecz biorąc, określają one zakłócenia ruchu, natomiast ruch zakłócony określają równania (1.5).

Możemy teraz podać następującą definicję, [1]: ruch niezakłócony, określony równaniami (1.2), jest stateczny, jeżeli dla każdej dodatniej liczby ε dowolnie małej można tak dobrać dodatnią liczbę η, że przy wszelkich x_{k0}, określających zakłócenia początkowe i spełniających nierówności

$$|x_{k0}| \leqq \eta \tag{1.12}$$

przy dowolnym $t > 0$, spełniona jest nierówność

$$|z_k(t) - z'_k(t)| < \varepsilon, \tag{1.13}$$

czyli

$$|x_k(t)| < \varepsilon. \tag{1.14}$$

Ruchy nie spełniające powyższych warunków są niestateczne. Jeżeli oprócz nierówności (1.14) mamy również

$$\lim_{t \to \infty} x_k(t) = 0, \tag{1.15}$$

to ruch niezakłócony (1.2) nazywać będziemy asymptotycznie statecznym. Powyższe definicje określają stateczność ruchu w sensie L a p u n o w a.

Jak widać, określenie L a p u n o w a odnosi się tylko do zakłóceń początkowych. Istnieje uogólnienie tego określenia także dla zakłóceń ciągłych w czasie trwania ruchu. Jak się jednak okaże, przynajmniej w praktycznie ważnych przypadkach, stateczność w sensie L a p u n o w a określa ruch stateczny dla wszystkich rodzajów zakłóceń.

Pojęcie stateczności w sensie L a p u n o w a nie jest jedynie możliwym pojęciem stateczności. Na przykład doniosłą rolę odgrywa również pojęcie stateczności orbitalnej (P o i n c a r é g o). Mianowicie ruch ciała nazywamy orbitalnie statecznym, jeżeli parametry określające zakłócenia s_{k0} i spełniające warunek

$$|s_{k0}| \leqq \eta$$

wywołują wychylenia s_k (od toru niezakłóconego), spełniające dla dowolnego t warunek

$$|s_k| < \varepsilon.$$

Przy stateczności w sensie L a p u n o w a warunek drugi powinny spełniać nie tylko wychylenia od toru, lecz w ogóle różnice współrzędnych między ruchem niezakłóconym i ruchem zakłóconym.

Wyróżnić można jeszcze tzw. stateczność warunkową. W tym przypadku dla małych zakłóceń początkowych ($|x_{k0}| < \eta < \eta_{gr}$) ruch jest stateczny, natomiast dla zakłóceń dużych ($|x_{k0}| < \eta, |x_{k0}| > \eta_{gr}$) ruch jest niestateczny. Pojęcie stateczności bezwarunkowej jest przy tym oczywiste.

Podane w tym paragrafie sformułowania dotyczyły, jak widać, stateczności bezwarunkowej.

2. Metody badania stateczności ruchu. Przykłady

Jak wspomniano, pierwsza kompletna teoria stateczności ruchu pochodzi od A. M. L a p u n o w a. Sposoby rozwiązywania zagadnień stateczności dzieli L a p u n o w na dwie grupy. Do pierwszej grupy należą sposoby polegające na bezpośrednim badaniu ruchów zakłóconych, tzn. wymagających rozwiązania układu równań (1.10). Sposoby te noszą nazwę pierwszej metody L a p u n o w a. Do drugiej grupy należą sposoby, które nie wymagają poszukiwania całek szczególnych lub ogólnych równań (1.10), lecz polegają na badaniu własności pewnych funkcji $V(x_1, x_2, ..., x_n, t)$, (tzw. funkcji L a p u n o w a). Sposób ten jest podstawowy w teorii stateczności ruchu i nosi nazwę drugiej metody L a p u n o w a.

Zagadnienia stateczności nie nastręczają trudności, jeżeli równania ruchu są liniowe, tzn. mają postać

$$\frac{dz_k}{dt} = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n. \tag{2.1}$$

W tym przypadku również równania ruchu zakłóconego są liniowe:

$$\frac{dx_k}{dt} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \tag{2.2}$$

dają się rozwiązać.

W rzeczywistości równania liniowe występują bardzo rzadko; regułą są równania nieliniowe. Jednak dla zagadnień nieliniowych można ustalić pewne równania przybliżone, liniowe, z których własności można wysnuć wnioski co do stateczności ruchu (metody linearyzacji). Te sposoby badania stateczności w pierwszym przybliżeniu były stosowane przez Thomsona, Taita, Routha, Żukowskiego. Ścisłą podbudowę znalazły w twierdzeniach Lapunowa.

Dla lepszego wyjaśnienia definicji podanych w p. 1 rozpatrzmy następujący przykład, [3].

Ruch określony jest układem równań

$$\begin{cases} A\dfrac{dz_1}{dt} + (C - B) z_2 z_3 = 0, \\ B\dfrac{dz_2}{dt} + (A - C) z_1 z_3 = 0, \\ C\dfrac{dz_3}{dt} + (B - A) z_1 z_2 = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Jest to ruch ciała sztywnego dookoła punktu, przy czym z_1, z_2, z_3 oznaczają składowe wektora prędkości kątowej wzdłuż ruchomych osi układu współrzędnych, pokrywających się z głównymi osiami bezwładności ciała, a A, B, C są to momenty bezwładności względem tychże osi.

Równania (2.3) mają następujące rozwiązanie:

$$\begin{cases} z_1 = f_1(t) = \omega = \text{const}, \\ z_2 = f_2(t) = 0, \\ z_3 = f_3(t) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Dla zbadania stateczności tego ruchu należy napisać równania ruchu zakłóconego (1.10).

Oznaczając funkcje określające zakłócenia ruchu przez x_1, x_2, x_3 na podstawie (1.8) otrzymamy

$$(2.5)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dx_1}{dt} + (C-B)\,x_2 x_3 = 0, \\ B\dfrac{dx_2}{dt} + (A-C)\,(x_1+\omega)\,x_3 = 0, \\ C\dfrac{dx_3}{dt} + (B-A)\,(x_1+\omega)\,x_2 = 0. \end{cases}$$

W wielu przypadkach równania ruchu zakłóconego można napisać bezpośrednio, badając zachowanie się układu przy wychyleniach od ruchu, który uważamy za ruch niezakłócony.

II. TWIERDZENIA LAPUNOWA

3. Założenia i definicje pomocnicze

Ruch zakłócony nazywamy ustalonym, jeżeli równania (1.10) ruchu zakłóconego mają postać

$$(3.1)\qquad \frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

tzn. funkcje X_k nie zależą od czasu t. Przyjmujemy, że spełnione są pewne warunki w obszarze $|x_k| \leqq H$ (H jest stałą), przy których równania (3.1) posiadają w tym obszarze jednoznaczne i ciągłe rozwiązania.

Ruch zakłócony nazywamy nieustalonym, jeżeli jego równania mają postać

$$(3.2)\qquad \frac{dx_k}{dt} = X_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

czyli że funkcje X_k zależą także od czasu t.

Wprowadzamy pewną funkcję $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ określoną w otoczeniu początku współrzędnych. Przyjmijmy, że funkcja jest jednoznaczna, dla $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ jest równa zeru oraz posiada ciągłe pochodne cząstkowe. Funkcję $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazywać będziemy na pół oznaczoną dodatnio (na pół oznaczoną ujemnie), jeżeli w obszarze $0 < |x_k| \leqq h$, gdzie h jest dostatecznie małą liczbą dodatnią, przyjmuje tylko wartości dodatnie lub równe zeru (ujemne lub równe zeru). Funkcję $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazywać będziemy nieoznaczoną, jeżeli w obszarze $0 < |x_k| \leqq h$ dla dowolnych małych h przyjmuje wartości dodatnie i ujemne. Funkcję $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazywać będziemy oznaczoną dodatnio (ujemnie), jeżeli

w obszarze $0 < |x_k| \leqq h$ dla dostatecznie małych h przyjmuje wartości tylko dodatnie (tylko ujemne). Zauważmy jeszcze, że pochodną zupełną funkcji $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ po uwzględnieniu równań (3.1) możemy wyrazić w sposób następujący:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} X_k = W(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{3.3}$$

Nosi ona nazwę pochodnej funkcji V ze względu na równania ruchu zakłóconego. Dla badania ruchów nieustalonych wprowadza się czasem funkcję $V(t, x_1, x_2, ..., x_n)$. Podobnie nazywamy ją na pół oznaczoną, jeżeli w obszarze $|x_k| < h$ przyjmuje tylko wartości jednego znaku lub równa się zeru dla dowolnego t. Nazywamy ją oznaczoną dodatnio lub ujemnie, jeżeli w obszarze $|x_k| < h$ spełnia warunek

$$V(t, x_1, x_2, ..., x_n) \geqq W \tag{3.4}$$

lub

$$V(t, x_1, x_2, ..., x_n) \leqq -W(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{3.4.1}$$

gdzie $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest funkcją oznaczoną dodatnio i nie zależy od czasu.

Pochodna zupełna funkcji $V(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ ze względu na równania ruchu zakłóconego ma postać

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} X_k. \tag{3.5}$$

4. Twierdzenia Lapunowa dla ruchów ustalonych

Twierdzenie 1. Jeżeli dla równań różniczkowych ruchu zakłóconego można znaleźć funkcję oznaczoną dodatnio (ujemnie) $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, której pochodna dV/dt ze względu na równania ruchu zakłóconego jest funkcją na pół oznaczoną ujemnie (dodatnio), to ruch niezakłócony jest stateczny.

D o w ó d. Przyjmijmy bez ograniczenia ogólności, że funkcja $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest funkcją oznaczoną dodatnio we wszystkich punktach obszaru

$$|x_k| \leqq h \leqq H \tag{4.1}$$

z wyjątkiem początku układu.

Stosownie do założeń twierdzenia musi być w tym obszarze

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} X_k \leqq 0. \tag{4.2}$$

Oznaczamy przez ε dowolnie małą liczbę dodatnią. Dolny kres funkcji V dla wartości $|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|$ takich, że największa z nich jest równa ε, oznaczamy przez l.

Możemy to zapisać tak

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) \geqq l, \tag{4.3}$$

jeśli

$$\max \{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\} = \varepsilon. \tag{4.4}$$

Rozpatrzmy teraz dowolną funkcję $x_k(t)$, dla której wartość początkowa x_{k0} spełnia warunek

$$|x_{k0}| \leqq \eta, \tag{4.5}$$

przy czym liczba η spełnia nierówność $\eta < \varepsilon$ oraz jest tak mała, że $V(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) < l$. Liczbę taką można dobrać, gdyż V jest funkcją ciągłą i $V(0, 0, ..., 0) = 0$.

Ponieważ na podstawie (4.2) funkcja V nie rośnie z upływem czasu, więc w dowolnej chwili t jest

$$V[x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)] \leqq V(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) < l. \tag{4.6}$$

Stąd wynika, że dla dowolnego $t > t_0$ jest spełniony warunek

$$|x_k| < \varepsilon. \tag{4.7}$$

Gdyby bowiem powyższy warunek nie był spełniony, to w pewnej chwili $t = T$, w której $|x_k|$ osiągnęłoby wartość ε, musiałyby być równocześnie spełnione warunki (4.3) oraz (4.6), co jest niemożliwe.

Spełnianie warunku (4.7) przy założeniu (4.5) dowodzi stateczności ruchu przy przyjętych założeniach co do V i dV/dt.

Twierdzenie 2. Jeżeli dla równań różniczkowych ruchu zakłóconego można znaleźć funkcję oznaczoną dodatnio (ujemnie) $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, której pochodna dV/dt ze względu na równania ruchu zakłóconego jest funkcją oznaczoną ujemnie (dodatnio), to ruch niezakłócony jest asymptotycznie stateczny.

Dowód. Nie ograniczając ogólności dowodu zakładamy, że V jest funkcją oznaczoną dodatnio, natomiast dV/dt — oznaczoną ujemnie w obszarze (4.1). W obszarze tym są spełnione warunki

$$V \geqq 0, \qquad \frac{dV}{dt} \leqq 0, \tag{4.7}$$

przy czym znak równości jest możliwy tylko w punkcie $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Na podstawie twierdzenia 1 wiemy, że przy tych założeniach ruch musi być stateczny, tzn. że jeżeli $|x_{k0}| < \eta(\varepsilon)$, to $|x_k(t)| < \varepsilon$, przy czym ε jest dodatnią liczbą mniejszą od h, a η jest liczbą dodatnią zależną od ε.

Przy założeniach twierdzenia 2, które są silniejsze od założeń twierdzenia 1, udowodnimy ponadto, że jest

$$\lim_{t \to \infty} x_k(t) = 0, \tag{4.8}$$

tzn. że ruch jest asymptotycznie stateczny.

Ponieważ przy warunkach początkowych $|x_{k0}| \neq 0$ rozwiązania $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nie mogą być wszystkie równe zeru, zatem funkcja dV/dt jest w każdej chwili ujemna. Wynika stąd, że funkcja V jest monotonicznie malejąca i przy $t \to \infty$ dąży do pewnej granicy a będąc jednak zawsze większa od a, tj.

$$\lim_{t \to \infty} V = a, \qquad V[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] > a.$$

Otóż musi być $a = 0$, zatem

$$\lim_{t \to \infty} V = 0.$$

Wynika stąd, że musi być również

$$\lim_{t \to \infty} x_k(t) = 0.$$

Gdyby bowiem $x_k(t)$ nie dążyło do zera, byłoby dV/dt stale ujemne także dla $t \to \infty$.

A więc byłoby $dV/dt \leqq -b$, gdzie b jest liczbą dodatnią. Zatem dla $t > t_0$

$$V[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] = V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\, dt \leqq V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) - b(t - t_0),$$

czyli przyjmowałoby wartości ujemne dla dużych t V, co jest sprzeczne z założeniem twierdzenia.

Twierdzenie 3. Jeżeli dla równań różniczkowych ruchu zakłóconego można znaleźć funkcję $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, której pochodna dV/dt ze względu na równania ruchu zakłóconego jest funkcją oznaczoną dodatnio (ujemnie), a sama funkcja V nie jest na pół oznaczona ujemnie (dodatnio), to ruch niezakłócony jest niestateczny.

D o w ó d. Przyjmujemy, że funkcja dV/dt jest oznaczona dodatnio w obszarze

$$0 < |x_k| \leqq h \leqq H. \tag{4.9}$$

Wykażemy, że nawet przy dowolnie małych liczbach η można znaleźć zbiór wartości początkowych x_{k0} spełniających warunki

$$|x_{k0}| \leqq \eta, \tag{4.10}$$

przy których rozwiązania $x_k(t)$ w pewnej chwili przekroczą obszar (4.9); tym samym zostanie wykazana niestateczność ruchu. Wartości x_{k0} dobieramy tak, aby spełniony był warunek (4.10) oraz aby

$$V(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) > 0,$$

co jest możliwe, gdyż funkcja V według założeń twierdzenia nie jest na pół oznaczona ujemnie i w otoczeniu początku układu współrzędnych może przyjmować wartości dodatnie. Gdyby $x_k(t)$ nie przekroczyło granic obszaru (4.9), to pochodna dV/dt byłaby zawsze dodatnia, czyli byłaby $dV/dt \geqq l$, gdzie l jest stałą większą od zera. Zatem w chwili $t > t_0$

$$V[x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)] = V(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\, dt \geqq V(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) + l(t - t_0),$$

skąd wynika, że V rośnie nieograniczenie, co jest niemożliwe, gdyż w obszarze domkniętym (4.9) funkcja V jest ciągła, a zatem ograniczona.

Twierdzenie 4. Jeżeli istnieje funkcja V, której pochodna dV/dt ze względu na równania ruchu zakłóconego posiada w obszarze (4.9) postać

$$\frac{dV}{dt} = \gamma V + \bar{V}, \tag{4.11}$$

gdzie γ jest liczbą dodatnią, a $\bar{V}$ jest stale równa zeru lub jest funkcją na pół oznaczoną, i jeśli przy $\bar{V}$ na pół oznaczonej V nie jest na pół oznaczoną o znaku przeciwnym niż $\bar{V}$, to ruch niezakłócony jest niestateczny.

D o w ó d. Przyjmujemy, że funkcja $\overline{V}$ jest nieujemna. Zatem z (4.11) wynika

$$\frac{dV}{dt} \geqq \gamma V .$$

Podobnie jak w poprzednim dowodzie wykażemy, że dla pewnych wartości x_{k0}, spełniających warunki

$$|x_{k0}| < \eta , \qquad V(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) > 0$$

dla dowolnie małych η, wartości $x_k(t)$ przekraczają obszar (4.9), co jest dowodem niestateczności ruchu. Gdyby bowiem $x_k(t)$ nie przekraczało obszaru (4.9), byłaby funkcja V rosnąca i zachodziłaby nierówność

$$\frac{dV}{dt} \geqq \gamma V [x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)] \geqq \gamma V(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}),$$

czyli

$$\frac{dV}{dt} \geqq \gamma V(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}),$$

skąd

$$V \geqq \gamma V(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})(t - t_0).$$

Zatem funkcja V rosłaby nieograniczenie, co jest sprzeczne z założeniem ciągłości funkcji w obszarze domkniętym (4.9).

5. Twierdzenia Lapunowa dla ruchów nieustalonych

Twierdzenie 5. Jeżeli dla równań różniczkowych ruchu zakłóconego (3.2) można znaleźć oznaczoną dodatnio (ujemnie) funkcję $V(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, dla której pochodna ze względu na równania ruchu zakłóconego jest na pół oznaczona ujemnie (dodatnio), to ruch niezakłócony jest stateczny.

D o w ó d. Nie ograniczając ogólności rozważań możemy przyjąć, że V jest funkcją oznaczoną dodatnio. Zatem dla dostatecznie wielkich t oraz dostatecznie małych h $(h \leqq H)$ w obszarze

$$t \geqq t_0 , \qquad |x_k| \leqq h \tag{5.1}$$

jest spełniona nierówność

$$V(t, x_1, x_2, ..., x_n) \geqq W(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{5.2}$$

gdzie W jest funkcją oznaczoną dodatnio i niezależną od czasu. Weźmy pod uwagę liczbę ε dowolnie małą dodatnią mniejszą od h. Oznaczamy przez l dolny kres funkcji W dla wartości x_k spełniających warunek

$$\max \{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\} = \varepsilon .$$

Na podstawie (5.2) jest dla tych wartości

$$V(t, x_1, x_2, ..., x_n) \geqq l.$$

Jeżeli wartości początkowe x_{k0} spełniają warunek

$$|x_{k0}| \leqq \eta, \tag{5.3}$$

przy czym η jest tak małe, że

$$V(t_0, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) < l \tag{5.4}$$

oraz $\eta < \varepsilon$, to jest rzeczą oczywistą, że dla t dostatecznie mało przewyższającego t_0 jest spełniony warunek

$$|x_k| < \varepsilon. \tag{5 5}$$

Należy teraz udowodnić, że warunek (5.5) jest spełniony dla t dowolnego.

Przyjmijmy, że w pewnej chwili t_1 nierówność (5.5) nie jest spełniona, lecz jest

$$\max\{|x_1(t_1)|, |x_2(t_1)|, ..., |x_n(t_1)|\} = \varepsilon.$$

Wtedy przy $t = t_1$ musiałoby być

$$V(t_1, x_1, x_2, ..., x_n) \geqq l,$$

skąd na podstawie (5.4) wynika

$$V(t_1, x_1, x_2, ..., x_n) > V(t_0, x_1, x_2, ..., x_n),$$

co jest sprzeczne z założeniem, że $dV/dt \leqq 0$.

Twierdzenie 6. Jeżeli dla równań ruchu zakłóconego (3.2) można znaleźć oznaczoną dodatnio (ujemnie) funkcję $V(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, dla której pochodna ze względu na równania ruchu zakłóconego jest oznaczona ujemnie (dodatnio), oraz funkcja V posiada własność, że dla dowolnej liczby dodatniej λ można dobrać taką liczbę μ, że przy

$$t \geqq t_0, \qquad |x_k| \leqq \mu \tag{5.6}$$

jest spełniona nierówność

$$|V(t, x_1, x_2, ..., x_n)| \leqq \lambda, \tag{5.7}$$

to ruch niezakłócony jest asymptotycznie stateczny.

D o w ó d. Przyjmujemy, że V jest oznaczona dodatnio, a zatem dV/dt jest oznaczona ujemnie.

W obszarze (5.1) spełniona jest nierówność (5.2) oraz nierówność

$$\frac{dV}{dt} \leqq - W_1(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{5.8}$$

gdzie W_1 jest funkcją oznaczoną dodatnio.

Jeżeli funkcja V jest oznaczona dodatnio, a przy tym monotonicznie malejąca (co wynika z $dV/dt < 0$), to dla $t \to \infty$ dąży do pewnej granicy. Granica ta jest równa zeru. Gdyby bowiem granica ta (oznaczamy ją przez a) była różna od zera, to byłoby dla $t > t_0$

$$V(t, x_1, x_2, ..., x_n) > a. \tag{5.9}$$

Ponieważ założyliśmy, że V posiada własność (5.7) dla warunków (5.6), to (5.9) pociąga za sobą

$$\max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\} \geqq \gamma, \tag{5.10}$$

gdzie γ oznacza dostatecznie małą liczbę dodatnią.

Z (5.8) wynika, że

$$\frac{dV}{dt} \leqq - l_1, \tag{5.11}$$

przy czym l_1 jest liczbą dodatnią, równą dolnej granicy funkcji W_1 dla wartości x_k spełniających warunek (5.10). Całkując nierówność (5.11) otrzymujemy dla $t > t_0$

$$V(t, x_1, x_2, ..., x_n) \leqq V(t_0, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) - l_1(t - t_0),$$

co jest sprzeczne z założeniem (5.9). Zatem granicą funkcji V dla $t \to \infty$ może być tylko zero, a tym samym również funkcja $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ dąży do zera dla $t \to \infty$. Wynika stąd, że

$$\lim_{t=\infty} x_k = 0,$$

co dowodzi słuszności twierdzenia.

Twierdzenie 7. Jeżeli istnieje funkcja $V(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ posiadająca tę własność, że dla dowolnej liczby dodatniej λ można dobrać taką liczbę μ, iż przy

$$t > t_0, \qquad |x_k| \leqq \mu$$

jest spełniona nierówność

$$|V(t, x_1, x_2, ..., x_n)| \leqq \lambda$$

oraz pochodna dV/dt ze względu na równania ruchu zakłóconego jest funkcją oznaczoną, natomiast sama funkcja V przy dowolnie małych x_k i dowolnie dużym t może przyjmować wartości tego samego znaku co pochodna dV/dt, to ruch niezakłócony jest niestateczny.

D o w ó d. Przyjmujemy, że dV/dt jest funkcją oznaczoną dodatnio, czyli w obszarze

$$t \geqq t_0 > 0, \qquad |x_k| \leqq h \tag{5.12}$$

spełniona jest nierówność

$$\frac{dV}{dt} \geqq W(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{5.13}$$

gdzie $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest funkcją oznaczoną dodatnio niezależną od czasu. Wartości początkowe x_{k0} dobieramy tak, aby spełnione były warunki

$$|x_{k0}| \leqq \eta, \qquad V(t_0, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) > 0,$$

przy czym η jest dowolnie małą liczbą dodatnią. Dobór wielkości x_{k0} spełniających te warunki jest możliwy, o ile V spełnia założenia twierdzenia.

Wykażemy, że rozwiązania $x_k(t)$ odpowiadające tym wartościom początkowym nie należą do obszaru (5.12), co świadczy o niestateczności ruchu. Gdyby bowiem było stale $|x_k| \leqq h$, to, ponieważ dV/dt jest stale dodatnią, musiałoby być

$$V(t_1, x_1, x_2, ..., x_n) > V(t_0, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}).$$

Z własności (5.6) i (5.7) wynika, że

$$\max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\} \geqq \gamma, \tag{5.14}$$

gdzie γ jest dostatecznie małą liczbą dodatnią. Zatem na podstawie (5.13)

$$\frac{dV}{dt} \geqq l, \tag{5.15}$$

przy czym l jest liczbą dodatnią, równą dolnemu kresowi funkcji W przy wartościach x_k spełniających warunek (5.14). Całkując (5.15) otrzymujemy

$$V(t, x_1, x_2, ..., x_n) \geqq V(t_0, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) + l(t - t_0).$$

Z ostatniej nierówności wynika, że dla $t \to \infty$ funkcja V rośnie nieograniczenie, co jest sprzeczne z założeniami twierdzenia.

6. Przykłady

Rozpatrzmy dwa przykłady stosowania twierdzeń L a p u n o w a.

Dla pewnego równania ruchu niezakłóconego znaleziono równania ruchu zakłóconego w postaci

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_2 + \alpha x_1^3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + \alpha x_2^3. \end{cases} \tag{6.1}$$

Należy zbadać stateczność ruchu niezakłóconego.

Funkcję V przyjmujemy w postaci

$$V = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \tag{6.2}$$

Wyznaczamy pochodną zupełną tej funkcji ze względu na równania (6.1)

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial V}{\partial x_k} X_k = x_1(-x_2 + \alpha x_1^3) + x_2(x_1 + \alpha x_2^3) = \alpha(x_1^4 + x_2^4). \tag{6.3}$$

Możliwe są tutaj trzy przypadki.

(1) Przy $\alpha > 0$ ruch na podstawie twierdzenia 3 jest niestateczny (bo $V \geqq 0$ oraz $dV/dt \geqq 0$).

(2) Przy $\alpha < 0$ ruch na podstawie twierdzenia 2 jest stateczny asymptotycznie (bo $V \geqq 0$, natomiast $dV/dt \leqq 0$, przy czym znak równości możliwy jest tylko w punkcie $x_1 = x_2 = 0$).

(3) Przy $\alpha = 0$ ruch na podstawie twierdzenia 1 jest stateczny (bo $V \geqq 0$, natomiast $dV/dt \equiv 0$).

Należy zwrócić uwagę na fakt, że o stateczności ruchu decydują nie wyrazy liniowe równań (6.1), lecz wyrazy wyższych stopni.

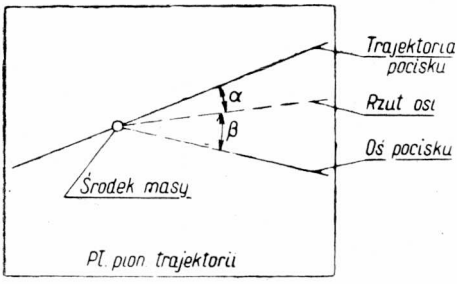
Przy zastosowaniach praktycznych ważną rolę odgrywa zagadnienie wyboru funkcji $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ogólnych reguł pozwalających wyznaczyć tę funkcję w każdym przypadku nie ma.

Przejdźmy teraz do następnego przykładu.

Rozpatrzmy ruch pocisku obracającego się wokół własnej osi po trajektorii zbliżonej do linii prostej.

Dla rozważenia zagadnienia stateczności możemy przyjąć, że ruch środka masy pocisku jest jednostajny i prostoliniowy. Ponadto przyjmujemy, że niektóre siły można pominąć (np. siły aerodynamiczne — unoszącą i M a g n u s a).

Wprowadzimy następujące oznaczenia: β jest kątem pomiędzy osią pocisku a jej rzutem na płaszczyznę pionową trajektorii (rys. 1), α kątem pomiędzy trajektorią a rzutem osi pocisku na płaszczyznę trajektorii, C osiowym momentem bezwładności pocisku, A momentem bezwładności względem osi poprzecznej przechodzącej przez środek ciężkości, n miarą rzutu prędkości kątowej obrotu pocisku na jego oś, R wypadkową siłą oporu ośrodka, e odległością środka masy pocisku od punktu zaczepienia wypadkowej oporu ośrodka, przy czym środek leży za punktem zaczepienia siły oporu.



Rys. 1

Przy tych oznaczeniach równanie ruchu ma postać [1])

$$(6.4)\qquad \begin{cases} A\ddot{\beta} + A\dot{\alpha}^2 \sin\beta\cos\beta - Cn\dot{\alpha}\cos\beta = eR\sin\beta\cos\alpha, \\ A\ddot{\alpha}\cos\beta - 2A\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta + Cn\dot{\beta} = eR\sin\alpha. \end{cases}$$

Równania powyższe można sprowadzić do czterech równań rzędu pierwszego

$$(6.5)\qquad \begin{cases} \dot{\beta} = \beta_1, \quad \dot{\alpha} = \alpha_1, \\ A\dot{\beta}_1 = -A\alpha_1^2 \sin\beta\cos\beta + Cn\alpha_1\cos\beta + eR\sin\beta\cos\alpha, \\ A\dot{\alpha}_1\cos\beta = 2A\alpha_1\beta_1\sin\beta - Cn\beta_1 + eR\sin\alpha. \end{cases}$$

Jeżeli chcemy zbadać stateczność ruchu, przy którym oś pokrywa się z kierunkiem trajektorii, to uważamy, że wielkości $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$, czyli $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$ określają ruchy zakłócone, a równania (6.5) są równaniami ruchu zakłóconego.

Znajdziemy warunek, jaki muszą spełniać parametry pocisku, aby ruch był stateczny. Uczynimy to za pomocą twierdzeń L a p u n o w a. Jako funkcje L a p u n o w a przyjmujemy

$$(6.6)\qquad V = F_1 - \mu F_2,$$

przy czym F_1 jest energią układu:

$$(6.7)\qquad F_1 = \tfrac{1}{2}A(\beta_1^2 + \alpha_1^2\cos^2\beta) + eR(\cos\alpha\cos\beta - 1),$$

natomiast F_2 jest momentem ilości ruchu układu względem osi pocisku:

$$(6.8)\qquad F_2 = A(\beta_1\sin\alpha - \alpha_1\cos\beta\sin\beta\cos\alpha) + Cn(\cos\alpha\cos\beta - 1).$$

[1]) Por. [11], t. 2, str. 387.

Pochodna funkcji $V(\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1)$ ze względu na równania (6.5) jest, jak łatwo sprawdzić, równa zeru:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dF_1}{dt} - \mu \frac{dF_2}{dt} \equiv 0. \tag{6.9}$$

Wykażemy teraz, że można tak dobrać liczbę μ, iż funkcja V będzie funkcją oznaczoną. W tym celu rozwiniemy funkcję V na szereg Taylora, przy czym zachowamy tylko wyrazy pierwszego i drugiego stopnia:

$$V = \tfrac{1}{2}\{A\alpha_1^2 + (Cn\mu - eR)\beta^2 + 2A\mu\alpha_1\beta\} + \tfrac{1}{2}\{A\beta_1^2 + (Cn\mu - eR)\alpha^2 - 2A\mu\beta_1\alpha\} + \ldots. \tag{6.10}$$

Jeżeli obie formy kwadratowe w wyrażeniu (6.10) będą oznaczone dodatnio, to funkcja V będzie również oznaczona dodatnio. Jak wiadomo, warunkiem aby obie postacie były oznaczone dodatnio jest to, aby wyróżniki tych form spełniały nierówność

$$A(Cn\mu - eR) - A^2\mu^2 > 0, \tag{6.11}$$

gdyż formę typu $c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2$ można doprowadzić (przy założeniu $c_{11} > 0$ i $c_{22} > 0$) do postaci $b^2\bar{x}^2 + a^2\bar{y}^2$, jeżeli $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$.

Aby warunek (6.11) był spełniony, równanie kwadratowe na μ

$$-A^2\mu^2 + A(Cn\mu - eR) = 0 \tag{6.12}$$

musi posiadać dwa różne pierwiastki. Musi być zatem

$$A^2C^2n^2 - 4A^3eR > 0,$$

czyli

$$C^2n^2 > 4AeR. \tag{6.13}$$

Jeżeli spełniony jest warunek (6.13), można dobrać takie μ, że funkcja V jest oznaczona dodatnio, a jej pochodna ze względu na dany układ równań ruchu zakłóconego jest tożsamościowo równa zeru [por. (6.9)]. Zatem na podstawie twierdzenia 1 z p. 4 ruch jest stateczny.

Warunek (6.13) określa minimalną prędkość ruchu obrotowego pocisku potrzebną do tego, aby jego oś «trzymała się» w sposób stateczny trajektorii.

Przypominamy, że rozwiązanie powyższe dotyczy tylko trajektorii mało różniących się od prostej, jeżeli bowiem chcemy, aby w przypadku trajektorii silnie zakrzywionych oś pocisku pokrywała się ze styczną do trajektorii, należy ustalić warunek ograniczający prędkość obrotu pocisku.

7. Równania pierwszego przybliżenia dla ruchów ustalonych

Równania ruchu zakłóconego (3.1) w przypadku ruchu ustalonego możemy napisać w postaci

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1}x_1 + p_{k2}x_2 + \ldots + p_{kn}x_n + \overline{X}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k=1,2,\ldots,n). \tag{7.1}$$

Uważając prawą stronę równania (7.1) za rozwinięcie funkcji $X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ z równań (3.1) na szereg potęgowy otrzymamy

$$p_{ki} = \left[\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right]_{x_1=0}. \tag{7.2}$$

Rozwinięcie funkcji $\overline{X}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na szereg potęgowy nie zawiera wyrazów stopnia niższego niż pierwszy, tj. nie zawiera wyrazów stałych, gdyż, jak wynika z tożsamości (1.9), jest

$$\left[X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]_{x_1=\ldots=x_n=0} = 0. \tag{7.3}$$

Równania

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1}x_1 + p_{k2}x_2 + \ldots + p_{kn}x_n \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{7.4}$$

nazywać będziemy równaniami pierwszego przybliżenia. Są to równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego.

Równanie stopnia n-tego

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7.5}$$

nazywa się równaniem charakterystycznym, a wyznacznik $D(\lambda)$ — wyznacznikiem charakterystycznym.

Jeżeli λ_i jest dowolnym pierwiastkiem tego równania, to wyrażenie

$$x_k = A_k e^{\lambda_i t} \tag{7.6}$$

jest całką szczególną układu (7.4). Stałe A_k wyznacza się z układu równań liniowych

$$(7.7) \qquad p_{k1} A_1 + p_{k2} A_2 + \ldots + (p_{kk} - \lambda_i) A_k + \ldots + p_{kn} A_n = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

posiadających rozwiązania nie wszystkie równe zeru ze względu na (7.5) [2]). Jeżeli równanie charakterystyczne (7.5) posiada wszystkie pierwiastki pojedyncze, to podstawiając w wyrażenie (7.6) $i = 1, 2, \ldots, n$ otrzymamy n rozwiązań na każdą funkcję x_k, czyli n rozwiązań niezależnych układu równań (7.4). Jeżeli równanie charakterystyczne posiada pierwiastki wielokrotne i takim pierwiastkiem wielokrotnym jest λ_i, to oprócz rozwiązania (7.6) temu pierwiastkowi odpowiadają jeszcze inne rozwiązania typu

$$(7.8) \qquad x_k = f_k(t)\, e^{\lambda_i t},$$

gdzie $f_k(t)$ jest pewnym wielomianem zmiennej t stopnia co najwyżej o 1 niższego niż krotność pierwiastka λ_i, przy tym wielomiany te są różne dla różnych k.

W przypadku jeżeli pierwiastek λ_i jest zespolony, tj.

$$\lambda_i = \mu + i\nu,$$

to w rozwiązaniach (7.6) i (7.8) stałe A_k oraz funkcje f_k są także zespolone:

$$A_k = P_k + iQ_k, \qquad f_k = \varphi_k + i\psi_k.$$

Biorąc z rozwiązań (7.6) i (7.8) tylko części rzeczywiste otrzymamy dla pierwiastka $\mu + i\nu$ dwa rozwiązania:

$$(7.9) \qquad \begin{cases} x_k = (P_k \cos \nu t - Q_k \sin \nu t)\, e^{\mu t}, \\ x_k = (P_k \sin \nu t + Q_k \cos \nu t)\, e^{\mu t} \end{cases}$$

lub

$$(7.10) \qquad \begin{cases} x_k = (\varphi_k \cos \nu t - \psi_k \sin \nu t)\, e^{\mu t}, \\ x_k = (\varphi_k \sin \nu t + \psi_k \cos \nu t)\, e^{\mu t}. \end{cases}$$

Te same rozwiązania odpowiadają pierwiastkowi $\mu - i\nu$.

---

[2]) Przy założeniu, że nie wszystkie podwyznaczniki rzędu $n-1$ wyznacznika $D(\lambda_i)$ są zerami, możemy stałe A_k wyrazić w postaci $A_k = l D_{jk}$, gdzie l jest dowolnym parametrem, zaś D_{jk} jest podwyznacznikiem elementu p_{jk} w wyznaczniku $D(\lambda)$ określonym równością (7.5), gdzie j jest stałe.

Całkę ogólną układu równań (7.4) wyrażamy za pomocą całek szczególnych typu (7.6) lub (7.8). Oznaczając całki szczególne przez $x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}$, otrzymamy całkę ogólną

$$x_k = C_1 x_{k1} + C_2 x_{k2} + \ldots + C_n x_{kn}. \tag{7.11}$$

Stałe $C_1, C_2, \ldots, C_n$ wyznaczamy z warunków początkowych. Dyskusja stateczności w przypadku równań liniowych, tj. w przypadku gdy równania pierwszego przybliżenia są zarazem równaniami ścisłymi ruchu, jest bardzo prosta. Wynika to stąd, że w całkach szczególnych występuje wyraz

$$e^{\lambda_i t} \quad \text{lub} \quad e^{\mu t}.$$

Otóż jasne jest, co następuje.

Jeżeli rzeczywiste części pierwiastków równania charakterystycznego są wszystkie ujemne, to ruch niezakłócony jest stateczny i to asymptotycznie (gdyż wtedy $x_k(t) \to 0$ przy $t \to \infty$). Jeżeli wśród pierwiastków równania charakterystycznego znajdują się pierwiastki z zerowymi częściami rzeczywistymi i jeżeli tym pierwiastkom odpowiadają rozwiązania typu tylko (7.6) lub (7.9) (A_k, P_k, Q_k są stałymi), to ruch jest stateczny, lecz nie asymptotycznie; natomiast jeżeli tym pierwiastkom odpowiadają rozwiązania typu (7.8) lub (7.10), to ruch jest niestateczny. Zagadnienie stateczności dla przypadków, gdy równania ruchu są nieliniowe [czyli funkcja $\bar{X}_k$ z równania (7.1) nie jest tożsamościowo równa zeru], rozwiązać można za pomocą twierdzeń L a p u n o w a podanych w następnym punkcie.

8. Twierdzenia Lapunowa o stateczności w pierwszym przybliżeniu

Twierdzenie 8. Jeżeli wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego układu równań pierwszego przybliżenia (7.4) mają ujemne części rzeczywiste, to ruch niezakłócony jest asymptotycznie stateczny dla dowolnych wyrazów wyższych rzędów równania ruchu zakłóconego (7.1).

D o w ó d. Jako funkcję L a p u n o w a przyjmujemy funkcję $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ określoną równaniem

$$\sum_{k=1}^{n} (p_{k1} x_1 + \ldots + p_{kn} x_n) \frac{\partial V}{\partial x_k} = U, \tag{8.1}$$

przy czym U oznacza jednorodną formę kwadratową względem $x_1 \ldots x_n$:

$$U = -(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2). \tag{8.2}$$

Przy założeniach twierdzenia równanie różniczkowe (8.1) o pochodnych cząstkowych liniowe niejednorodne posiada jednoznacznie określone rozwiązanie, spełniające warunek

$$[V]_{x_i=0} = 0. \tag{8.3}$$

Wykażemy, że dla dowolnych wartości $x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}$, nierównych równocześnie zeru funkcja V przyjmuje tylko wartości dodatnie, czyli jest oznaczona dodatnio. Mianowicie wartości $x_{10}, ..., x_{n0}$ możemy uważać za wartości początkowe funkcji $x_k(t)$ określonych równaniami

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1}x_1 + p_{k2}x_2 + ... + p_{kn}x_n \qquad (k = 1, 2, ..., n). \tag{8.4}$$

Na podstawie (3.5) wyznaczamy pochodną zupełną funkcji V względem czasu:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} (p_{k1}x_1 + ... + p_{kn}x_n),$$

czyli

$$\frac{dV}{dt} = U. \tag{8.5}$$

Funkcja V nie może przyjmować wartości ujemnych, gdyż na podstawie twierdzenia 3 z p. 4 ruch niezakłócony odpowiadający równaniom (8.4) byłby niestateczny, co jest sprzeczne z założeniem, że równanie charakterystyczne układu (8.4) posiada pierwiastki tylko z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Ponieważ, jak wynika z (8.5) i (8.2), funkcja V jest monotonicznie malejąca, to nie może być równą zeru, gdyż pociągałoby to istnienie wartości ujemnych. Zatem funkcja V jest oznaczona dodatnio dla wszystkich wartości $x_k(t)$. Z ciągłości funkcji V wynika, że również w dowolnym punkcie $x_{10}, ..., x_{n0}$ jest ona dodatnia.

Zbadamy teraz znak pochodnej zupełnej dV/dt dla wartości $x_k(t)$ określonych równaniami ruchu zakłóconego

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1}x_1 + ... + p_{kn}x_n + \overline{X}_k. \tag{8.6}$$

Na podstawie (3.5) i (8.6) jest

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} (p_{k1}x_1 + ... + p_{kn}x_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k,$$

czyli

$$\frac{dV}{dt} = U + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k . \tag{8.7}$$

Funkcja U jest według (8.2) oznaczona ujemnie. Rozwinięcie wyrażenia

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k$$

na szereg T a y l o r a nie zawiera wyrazów rzędu niższego niż trzeci. Zatem w obszarze $|x_k| < h$ przy dostatecznie małym h jest spełniona nierówność

$$|U| > \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k \right| .$$

Wynika stąd, że jeżeli U jest funkcją oznaczoną ujemnie, to również

$$U + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k = \frac{dV}{dt}$$

jest funkcją oznaczoną ujemnie. Jak widać, funkcja V spełnia założenia twierdzenia 2 z p. 4, w konsekwencji czego ruch niezakłócony jest asymptotycznie stateczny.

Twierdzenie 9. Jeżeli wśród pierwiastków równania charakterystycznego układu równań pierwszego przybliżenia (7.4) przynajmniej jeden ma dodatnią część rzeczywistą, to ruch niezakłócony jest niestateczny dla dowolnych wyrazów wyższych rzędów równania ruchu zakłóconego (7.1).

D o w ó d. Przyjmujemy funkcję L a p u n o w a $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ określoną równaniem

$$\sum_{k=1}^{n} (p_{k1} x_1 + ... + p_{kn} x_n) \frac{\partial V}{\partial x_k} = U , \tag{8.8}$$

gdzie

$$U = -(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2). \tag{8.9}$$

Pochodna ze względu na układ równań

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1} x_1 + p_{k2} x_2 + ... + p_{kn} x_n \tag{8.10}$$

wyraża się wzorem

$$\frac{dV}{dt} = U. \tag{8.11}$$

Funkcja V jest zatem monotonicznie malejąca.

Wykażemy, że istnieją wartości $x_{10}, ..., x_{n0}$, dla których funkcja V przyjmuje wartość ujemną. Gdyby bowiem funkcja V była oznaczona dodatnio, to na podstawie twierdzenia 2 ruch niezakłócony odpowiadający równaniom (8.10) byłby asymptotycznie stateczny, co jest sprzeczne z założeniami.

Funkcja V przyjmuje zatem wartości zerowe, a ponieważ jest monotoniczna, przyjmuje również wartości ujemne. Pochodna funkcji V ze względu na układ równań

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1} x_1 + ... + p_{kn} x_n + \overline{X}_k \tag{8.12}$$

jest

$$\frac{dV}{dt} = U + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k, \tag{8.13}$$

czyli, podobnie jak w poprzednim twierdzeniu, jest oznaczona ujemnie dla $|x_k| < h$ przy dostatecznie małym h.

Jak widać, funkcja V spełnia założenia twierdzenia 3, co w konsekwencji pociąga za sobą to, że ruch jest niestateczny.

Dowód powyższy wymaga pewnego uzupełnienia. Mianowicie, jeżeli wśród pierwiastków równania charakterystycznego znajduje się jeden pierwiastek zerowy, to równanie (8.8) może nie mieć jednoznacznie określonego rozwiązania. W tym przypadku funkcję L a p u n o w a przyjmujemy jako funkcję określoną równaniem

$$\sum_{k=1}^{n} (p_{k1} x_1 + ... + p_{kn} x_n) \frac{\partial V}{\partial x_k} = \gamma V + U, \tag{8.14}$$

gdzie

$$U = -(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) \tag{8.15}$$

oraz γ jest liczbą dodatnią. Łatwo wykazać, że V przyjmuje również wartości ujemne. Pochodną funkcji V ze względu na równania (8.12) jest

$$\frac{dV}{dt} = \gamma V + U + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k \tag{8.16}$$

i jest, przy dostatecznie małym γ i h, funkcją oznaczoną ujemnie. Zatem i w tym przypadku na podstawie twierdzenia 4 ruch jest niestateczny.

Funkcja $\overline{V}$ w (4.11) jest tutaj równa

$$\overline{V} = U + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k .$$

Twierdzenie 10. Jeśli równanie charakterystyczne układu równań pierwszego przybliżenia nie posiada pierwiastków z rzeczywistymi częściami dodatnimi, natomiast posiada pierwiastki z częściami rzeczywistymi równymi zeru, to wyrazy wyższych rzędów równania ruchu zakłóconego (7.1) można tak dobrać, aby otrzymać ruch stateczny albo niestateczny. Przykładem może być tutaj zadanie rozwiązane w p. 6 [równania ruchu zakłóconego (6.4)].

9. Kryterium Routha-Hurwitza

Z poprzedniego p. wynika, że dla badania zagadnień stateczności konieczna jest znajomość znaków rzeczywistych części pierwiastków równań algebraicznych. W szczególności ważne są warunki, przy których pierwiastki mają części rzeczywiste ujemne. Zagadnieniem tym zajmowali się R o u t h i H u r w i t z. Ustalili oni warunki konieczne i wystarczające, przy których wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego mają rzeczywiste części ujemne. Warunki te znane są pod nazwą kryterium R o u t h a - H u r w i t z a. Podamy je tutaj bez dowodu w formie przedstawionej przez H u r w i t z a.

Twierdzenie 11. Dane jest równanie n-tego stopnia

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 . \tag{9.1}$$

Ze współczynników ustawiamy wyznaczniki

$$D_1 = a_1, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots & a_n \end{vmatrix} = a_n D_{n-1},$$

przy czym $a_i = 0$, jeśli $i > n$.

Wszystkie pierwiastki równania (9.1) mają części rzeczywiste ujemne, jeżeli wszystkie wyznaczniki są dodatnie, czyli jeśli

$$D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ \ldots,\ D_{n-1} > 0,\ D_n > 0$$

(lub prościej

$$D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ \ldots,\ D_{n-1} > 0\,,\ a_n > 0).$$

Warunek ten jest konieczny i wystarczający.

W przypadku równania stopnia trzeciego

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \qquad (a_0 > 0)$$

otrzymamy warunki

$$(9.2) \qquad a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0\,, \quad a_3 > 0\,.$$

Dla równania stopnia czwartego

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0 \qquad (a_0 > 0)$$

otrzymamy warunki następujące:

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0\,, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0\,, \quad a_4 > 0\,,$$

czyli

$$a_1 > 0\,, \qquad a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0\,,$$

$$a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0\,, \qquad a_4 > 0\,.$$

Na podstawie warunku czwartego wynika z warunku trzeciego

$$a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) > a_4 a_1^2 > 0\,.$$

Zatem drugi warunek może być zastąpiony warunkiem $a_3 > 0$. Ostatecznie dla równania stopnia czwartego mamy warunki

$$(9.3) \qquad a_1 > 0\,, \qquad a_3 > 0\,, \qquad a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0, \qquad a_4 > 0.$$

10. Inne kryteria

W związku z badaniem pewnych układów elektrycznych N y q u i s t, [13], wyprowadził kryterium stateczności w pierwszym przybliżeniu nie wymagające obliczania wyznaczników H u r w i t z a. Kryterium to zostało uzupełnione i rozszerzone na układy automatycznej regulacji maszyn przez M i c h a j ł o w a. Podamy je tutaj w formie różniącej się nieznacznie od formy spotykanej w literaturze.

Rozpatrzmy funkcję

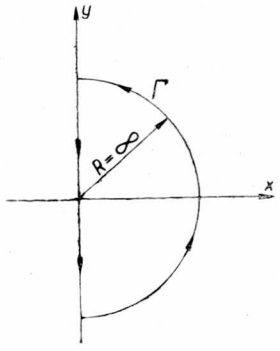
$$K(\lambda) = \frac{1}{a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n}, \tag{10.1}$$

przy czym

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

jest lewą stroną równania charakterystycznego pierwszego przybliżenia (7.5). Funkcję $K(\lambda)$ będziemy uważali za pewną funkcję $w(z)$ zmiennej zespolonej $z = x + iy$

$$w(z) = \frac{1}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n}. \tag{10.2}$$



Rys. 2

Jak wiemy, koniecznym warunkiem stateczności układu są ujemne części rzeczywiste pierwiastków równania

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0. \tag{10.3}$$

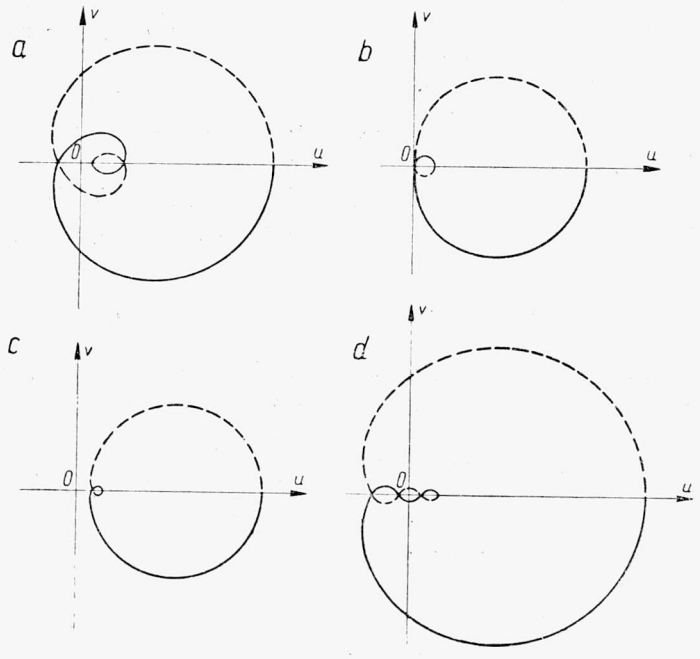
Wynika z tego bezpośredni wniosek, że funkcja $w(z)$ w przypadku układu statecznego nie posiada biegunów w prawej półpłaszczyźnie $x\,y$. A zatem jeżeli weźmiemy pod uwagę kontur Γ na płaszczyźnie $x\,y$ (rys. 2), to przy przejściu wzdłuż tego konturu argument zmiennej w nie zmienia się.

Odwzorowanie konturu Γ na płaszczyznę $w = u + iv$ otrzymamy w formie krzywej S określonej równaniem

$$w(iy) = \frac{1}{a_0(iy)^n + a_1(iy)^{n-1} + \ldots + a_{n-1} iy + a_n}. \tag{10.4}$$

Ponieważ przyrost argumentu w wzdłuż krzywej S musi być równy zeru, warunkiem stateczności jest położenie punktu $w = 0$ poza obszarem ograniczonym konturem S.

Na rysunku 3*a* przedstawiona jest krzywa S dla układu niestatecznego, na rys. 3*b* — krzywa S dla układu w stanie krytycznym; rys. 3*a* i 3*b* przedstawiają krzywe S dla układów statecznych. Linie ciągłe odpowiadają wartościom $y > 0$, linie przerywane odpowiadające $y < 0$ są do nich symetryczne.



Rys. 3

Niezależnie od powyższego w r. 1938 M i c h a j ł o w wyprowadził inaczej sformułowane kryterium w zastosowaniu do układów automatycznej regulacji. Znaleźć je można nie tylko w wymienionej pracy M i c h a j ł o w a, lecz również na przykład w podręczniku [12].

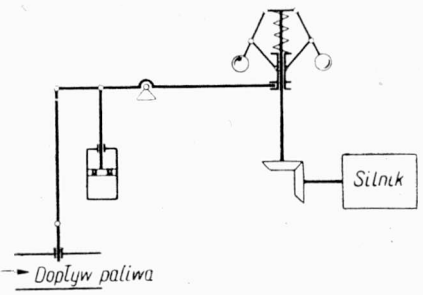
11. Przykłady

Rozpatrzmy najpierw najprostszy typ regulatora przedstawiony schematycznie na rys. 4.

Oznaczając przez φ odchylenie prędkości kątowej wału silnika od stanu ustalonego oraz przez η odchylenie tachometru możemy napisać równania ruchu zakłóconego w postaci

$$T_r^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \delta \eta = \varphi, \qquad T_a \dot{\varphi} + \Theta \varphi = -\eta, \tag{11.1}$$

przy czym parametry T_r^2, T_k, δ charakteryzują dynamiczne własności tachometru, natomiast T_a, Θ własności silnika.



Rys. 4

Równanie charakterystyczne ma postać

$$T_r^2 T_a \lambda^3 + (T_a T_k + T_r^2 \Theta)\lambda^2 + (\delta T_a + \Theta T_k)\lambda + \delta\Theta + 1 = 0. \tag{11.2}$$

Warunki Routha-Hurwitza są następujące (por. p. 9):

$$\begin{cases} T_r^2 T_a > 0, & (T_a T_k + T_r^2 \Theta) > 0, \\ (\delta T_a + \Theta T_k) > 0, & \delta\Theta > 0 \end{cases} \tag{11.3}$$

oraz

$$T_a^2 T_k \delta + T_a T_k^2 \Theta + \Theta^2 T_r^2 T_k - T_r^2 T_a > 0. \tag{11.4}$$

Nierówności (11.3) są spełnione zawsze. Z nierówności (11.4) otrzymamy następujące określenie granicy stateczności:

$$\frac{T_a T_k \delta}{T_r^2} + \frac{T_k^2 \Theta}{T_r^2} + \frac{\Theta^2 T_k}{T_a} = 1. \tag{11.5}$$

Wynika z niego, że należytą stateczność układu można uzyskać przez dobór dużych wartości δ i T_k (to znaczy zmniejszenie czułości regulatora i zwiększenie tłumienia) oraz małych T_r^2 (tzn. małej bezwładności tachometru). Zbadamy jeszcze, jaki wpływ na stateczność ma parametr T_a («czas rozbiegu» silnika). Traktując lewą stronę równania (11.5) jako funkcję T_a znajdziemy przez różniczkowanie, że osiąga ona minimum przy

$$T_a^2 = \frac{\Theta^2 T_r^2}{\delta}. \tag{11.6}$$

W celu zwiększenia stateczności należy wielkość T_a dobrać tak, aby możliwie dużo różniła się od wartości (11.6).

Rozpatrzmy teraz układ z siłownikiem regulacyjnym bez odwodzenia (rys. 5).

Równania ruchu zakłóconego mają postać

$$T_r^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \delta\eta = \varphi, \qquad T_s \dot{\mu} = \eta, \qquad T_a \dot{\varphi} + \Theta\varphi = -\mu. \tag{11.7}$$

Oznaczenia przyjęto takie same, jak w przykładzie poprzednim, a ponadto T_s i μ oznaczają parametr i argument siłownika.

Równanie charakterystyczne jest

$$T_a T_s T_r^2 \lambda^4 + T_s(\Theta T_r^2 + T_a T_k)\lambda^3 + T_s(\delta T_a + \Theta T_k)\lambda^2 + \delta\Theta T_s \lambda + 1 = 0. \tag{11.8}$$

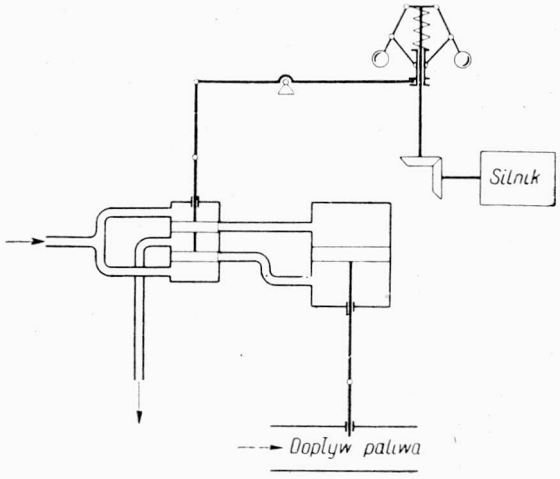
Warunki R o u t h a - H u r w i t z a będą spełnione, jeżeli spełniona będzie nierówność

$$(11.9)\quad (\Theta T_r^2 + T_a T_k) \times$$
$$\times [\delta \Theta T_s (\delta T_a + \Theta T_k) -$$
$$- (\Theta T_r^2 + T_a T_k)] -$$
$$- \delta^2 \Theta^2 T_s T_a T_r^2 > 0.$$

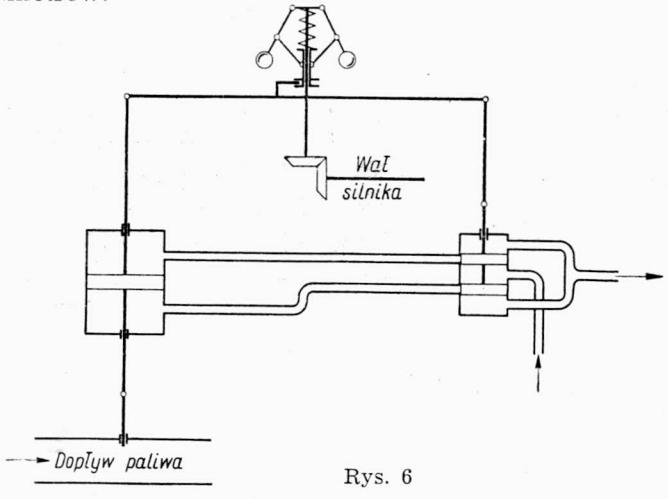
Wynikają z niej dwa wnioski:

(a) aby układ był stateczny, musi być koniecznie $T_k \neq 0$ i możliwie duże,

(b) w przypadku gdy $\Theta = 0$, co oznacza, że silnik nie posiada zdolności samoczynnego wyrównania prędkości kątowej ruchu, układ regulacyjny jest niestateczny przy dowolnych wartościach innych parametrów.



Rys. 5



Rys. 6

Przy silnikach, dla których $\Theta = 0$, jedynie statecznym typem regulatora jest układ z odwodzeniem (rys. 6).

Z równań ruchu zakłóconego

$$(11.10)\quad \begin{cases} T_r^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \delta \eta = \varphi, \\ T_s \dot{\mu} + \mu = \eta, \\ T_a \dot{\varphi} = -\mu \end{cases}$$

można wyprowadzić równanie charakterystyczne

$$(11.11)\quad \lambda^4+\left(\frac{T_k^2}{\delta T_r^2}+\frac{T_k}{T_s\,\delta}\right)\lambda^3+\frac{T_k}{\delta T_r^2}\left(1+\frac{T_k}{\delta T_s}\right)\lambda^2+\frac{T_k^2}{\delta T_r^2}\frac{T_k}{\delta T_s}\lambda+\frac{T_k}{\delta T_s}\frac{T_k^2}{\delta T_r^2}\frac{T_k}{\delta T_a}=0$$

oraz warunek stateczności

$$(11.12)\quad \left(\frac{T_k^2}{\delta T_r^2}+\frac{T_k}{\delta T_s}\right)\left[\frac{T_k^2}{\delta T_r^2}\left(1+\frac{T_k}{\delta T_s}\right)\right]\frac{T_k^2}{\delta^2 T_r^2 T_s}-$$

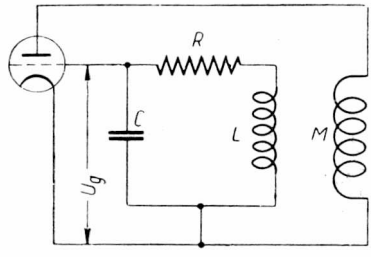
$$-\left(\frac{T_k^2}{\delta T_r^2}+\frac{T_k}{\delta T_s}\right)\frac{T_k^4}{\delta^4 T_s T_r T_a}-\frac{T_k^6}{\delta^4 T_r^4 T_s^2}>0.$$

Jak widać, koniecznym warunkiem stateczności jest istnienie tłumienia T_k.

Wszystkie powyższe rozważania dotyczące stateczności układów mechanicznych oraz wyprowadzone kryteria mogą być rozszerzone na układy elektryczne. Rozpatrzmy tu najprostszy przykład generatora triodowego o sprzężeniu zwrotnym. Schemat generatora przedstawiony jest na rys. 7. Układ rezonansowy włączony jest w obwód siatki.

Charakterystykę lampy przyjmujemy w postaci

$$(11.13)\qquad i_a = Su_g + f(u_g),$$



Rys. 7

przy czym $f(u_g)$ nie zawiera w swoim rozwinięciu wyrazów stopnia niższego niż drugi. Zatem przy rozpatrywaniu zagadnienia w pierwszym przybliżeniu $f(u_g)$ może być pominięte. Potencjał siatki u_g wyrażamy przez ładunek kondensatora q

$$(11.14)\qquad u_g = \frac{q}{C}.$$

Zmiana natężenia prądu anodowego i_a powoduje w obwodzie rezonansowym siłę elektromotoryczną o wielkości

$$(11.15)\qquad -M\frac{di_a}{dt}.$$

Zatem równanie drgań w obwodzie rezonansowym ma postać

$$(11.16)\qquad L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{q}{C}=-M\frac{di_a}{dt}.$$

Wykorzystując liniową część równania (11.13) oraz zależność (11.14) otrzymamy

$$(11.17)\qquad L\ddot{q}+\left(R+\frac{MS}{C}\right)\dot{q}+\frac{1}{C}q=0.$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$L\lambda^2 + \left(R + \frac{MS}{C}\right)\lambda + \frac{1}{C} = 0. \tag{11.18}$$

Kryteria stateczności stanu $q \equiv 0$ są więc

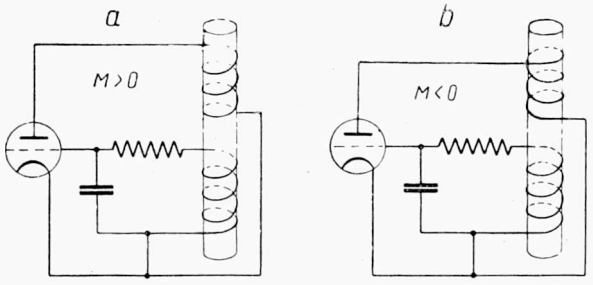
$$R + \frac{MS}{C} > 0, \quad CL > 0. \tag{11.19}$$

Drugi z tych warunków jest zawsze spełniony. Zatem, aby układ był generatorem drgań, musi być

$$RC + MS < 0. \tag{11.20}$$

Stąd wniosek, że musi być $M < 0$ oraz musi być MS dostatecznie duże co do bezwzględnej wartości

$$|MS| > RC. \tag{11.21}$$



Rys. 8

Warunek ilustruje rys. 8*a* i 8*b*. Układ na rys. 8*a* nie jest generatorem, gdyż $M > 0$; natomiast układ na rys. 8*b* może być generatorem, gdyż $M < 0$.

Literatura cytowana w tekście

[1] A. M. Lapunow, *Obszczaja zadacza ob ustojcziwości dwiżenja*, 1892, nast. wyd. 1935, 1950.

[2] N. G. Czetajew, *Ustojcziwost' dwiżenja*, 1946.

[3] I. G. Małkin, *Tieorja ustojcziwosti dwiżenja*, 1952.

[4] G. N. Duboszin, *Osnowy tieorji ustojcziwosti dwiżenja*, 1952.

[5] E. J. Routh, *On the Stability of a Given State of Motion*, 1877.

[6] A. Hurwitz, *Über die Bedingungen unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt*, Math. Ann. 46, 1896.

[7] W. W. Stiepanow, *Kurs diffieriencjalnych urawnienij*, 1950.

[8] W. W. Niemycki i W. W. Stiepanow, *Kaczestwiennaja tieorja diffieriencjalnych urawnienij*, 1949.

[9] I. G. Pietrowski, *Lekcji po tieorji obyknowiennych diffieriencjalnych urawnienij*, 1949.

[10] E. Kamke, *Differentialgleichungen*, t. 1 i 2, 1944.

[11] L. G. Łojcjanski i A. I. Łurie, *Kurs tieorieticzeskoje miechaniki*, 1948.

[12] Z. Sz. Błoch, *Dinamika liniejnych sistiem awtomaticzeskowo riegulirowanja maszin*, 1952.

[13] H. Nyquist, *Regeneration Theory*, Bell. System, Techn. Journ. 11 (1932).

Резюме

МЕТОДЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

В работе приводятся основные теоремы и методы теории устойчивости движения, ограничиваясь при этом устойчивостью в смысле Ляпунова и приведением очерка его теории.

В отдельных главах работы рассматриваются следующие вопросы:

(1) основные понятия и дефиниции, а также общая характеристика методов исследования устойчивости;

(2) теоремы Ляпунова для установившихся и неустановившихся движений. Эти теоремы приводятся в некотором сокращении, основываясь на фундаментальном труде Ляпунова с 1892 г.;

(3) теоремы об устойчивости в первом приближении, критерии Рауса и Гурвица и критерий Никвиста; приводится несколько примеров исследования устойчивости в первом приближении и при помощи общих теорем Ляпунова.

Summary

METHODS OF THE THEORY OF STABILITY OF MOTION

Basic theorems and methods of the theory of stability of motion are discussed. The considerations are confined chiefly to stability as presented by Lyapunov and to the principles of this theory.

The following problems are treated in the successive sections.

(1) Basic notions, definitions and general characteristics of investigation methods of stability.

(2) Lyapunov's theorems for steady and unsteady motion. These are treated somewhat briefly, on the basis of the fundamental work of Lyapunov (1892).

(3) The stability theorems in the first opproximation, the criteria of Routh and Hurwitz and the criterion of Nyquist are discussed. Also some examples are given of stability investigations in the first approximation and by means Lyapunov's general theorems.

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 maja 1954 r.

WŁODZIMIERZ PROSNAK

STRUKTURA PŁASKIEJ FALI UDERZENIOWEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXXI

SPIS TREŚCI

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie aktualnego stanu wiadomości o płaskiej, ustalonej fali uderzeniowej, występującej w gazie lepkim i przewodzącym ciepło *).

Szczególną uwagę zwrócono na wyniki uzyskane na gruncie mechaniki ośrodków ciągłych, ponieważ nadają się one do przedyskutowania ze względu na swą przejrzystość, zaś jakościowo są najzupełniej prawidłowe — zwłaszcza w przypadku fal słabych. Wyniki otrzymane w oparciu o teorię kinetyczną gazów oraz prace doświadczalne omówiono bardziej pobieżnie, traktując je — w istocie — jako podstawę do krytyki wyników, jakie daje mechanika ośrodków ciągłych.

1. Wstęp

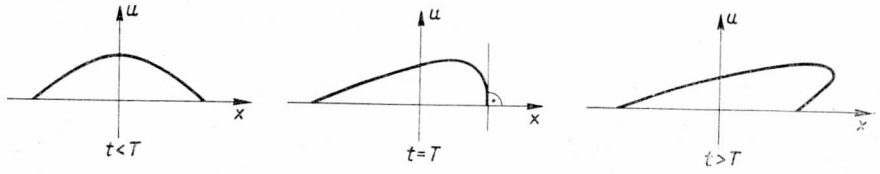
Zjawisko fali uderzeniowej polega na pojawieniu się w obszarze wypełnionym przepływającym gazem bardzo cienkich warstw, w których ulegają gwałtownej zmianie parametry hydrodynamiczne gazu, takie jak prędkość, ciśnienie i temperatura. Grubość tych warstw — jak zobaczymy — jest rzędu swobodnej drogi cząsteczki gazu i z tego względu wspomniana warstwa bywa często traktowana jako *powierzchnia nieciągłości* parametrów.

Na zjawisko pojawiania się nieciągłości w gazie ściśliwym, nielepkim i nieprzewodzącym ciepła wskazały przede wszystkim badania teoretyczne, przeprowadzone mniej więcej 100 lat temu przez R i e m a n n a, [1]. Badając zjawisko rozchodzenia się w gazie nielepkim fal płaskich o skończonej amplitudzie R i e m a n n dowiódł, że rozwiązanie określające ruch fal zgęszczeniowych jest jednoznaczną funkcją drogi (x) tylko w skończonym przedziale czasu $0<t<T$ (rys. 1).

Poczynając od chwili $t=T$ w gazie pojawia się nieciągłość, na co wskazuje nieskończenie wielki gradient parametrów ruchu gazu (np. gradient prędkości $\partial u/\partial x=\infty$ na rys. 1). Dla $t>T$ rozwiązanie staje się wielowartościowe tracąc tym samym sens fizyczny i świadcząc, że po czasie T przebieg zjawiska staje się *jakościowo* odmienny.

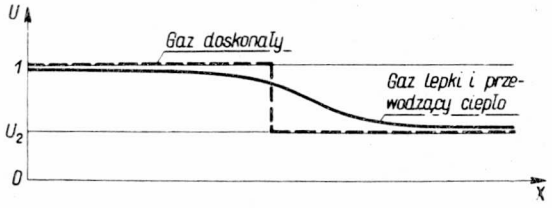
*) Praca przedstawiona na Kursie Naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Międzyzdrojach w sierpniu 1954 r.

Od 1870 roku ukazuje się wiele prac teoretycznych, poświęconych badaniu wspomnianej nieciągłości, przy czym — w miarę rozwoju mechaniki płynów — uwzględniano w coraz to wyższym stopniu rzeczywiste właściwości gazu, uzyskując coraz bliższy rzeczywistości obraz zjawiska.



Rys. 1

Najprostszy model fali uderzeniowej, podany przez H u g o n i o t a, przedstawia ją jako powierzchnię nieciągłości, na której zachodzi «skok» parametrów ruchu gazu, między innymi skok temperatury (rys. 2). Model ten obowiązuje tylko dla gazu doskonałego, tzn. nielepkiego i nieprzewodzącego ciepła; zasługuje on jednak na szczególną uwagę, ponieważ ze względu na swą prostotę jest bardzo wygodny w praktycznych obliczeniach, a prócz tego nie stoi bynajmniej w sprzeczności z wynikami prostszych doświadczeń, polegających np. na obserwowaniu fali metodą cieniów, metodą T ö p p l e r a lub inną.



Rys. 2

Jednak już bardzo wcześnie, bo w 1870 r. R a n k i n e, [2], zauważył, że w gazie przewodzącym ciepło nie może występować nieciągłość temperatury. Przypadek ten (gaz nielepki, ale przewodzący ciepło) został szczegółowiej zbadany przez P r a n d t l a, [4], który istotnie stwierdził *ciągłość* zmian parametrów określających ruch gazu w fali uderzeniowej, a ponadto oszacował grubość warstwy, w której zachodzi najbardziej gwałtowna zmiana parametrów (tzw. «grubość fali uderzeniowej»). Oszacowana na 0,0005 mm grubość fali uderzeniowej stanowiła teoretyczne potwierdzenie trafności nieciągłego modelu fali.

Po P r a n d t l u podał R a y l e i g h, [5], rozwiązanie w postaci skończonej dla gazu lepkiego, ale nieprzewodzącego ciepła, a ponadto dowiódł w sposób przybliżony istnienia rozwiązań ciągłych dla gazu lepkiego i przewodzącego ciepło (stałe współczynniki lepkości i przewodności). Prawie równocześnie z nim, bo również w r. 1910, opublikował T a y l o r, [6], rozwiązanie przybliżone uwzględniające zarówno lepkość, jak i przewodność cieplną gazu, ale obejmujące tylko zakres słabych fal uderzeniowych. Po nim — w kolejności chronologicznej — ogłosili swe

prace Becker, [8], który podał rozwiązanie w formie skończonej dla stałych współczynników lepkości i przewodności cieplnej przy szczególnej wartości liczby Prandtla $Pr = 3/4$; Thomas, [10], który pierwszy uwzględnił zmienność współczynników lepkości μ i przewodności λ z temperaturą ($\mu \sim \sqrt{T}$, $\lambda \sim \sqrt{T}$), nie podając jednak rozwiązania w formie skończonej, lecz tylko dyskutując jego istnienie, i wreszcie Morduchow i Libby, [11], którzy zbadali przypadek stałej liczby Prandtla $Pr = 3/4$ i zmiennych współczynników lepkości i przewodności według prawa $\mu \sim T^n$, $\lambda \sim T^n$, gdzie $0 \leq n \leq 1$. Najnowsze prace (Misesa, [13], i Grada, [18]) dotyczą bardziej ogólnego przypadku, mianowicie dowolnej wartości liczby Prandtla.

Wszystkie wymienione prace (nie wspominamy tu o mniej ważnych, których obszerny wykaz zamieszczony jest na końcu publikacji) opierają się na równaniach mechaniki ośrodka ciągłego i odnoszą się do fali uderzeniowej ustalonej i płaskiej. Wspólny ich wynik można zamknąć w dwu następujących stwierdzeniach: (1) funkcje opisujące falę uderzeniową w gazie lepkim i przewodzącym ciepło są ciągłe wraz ze swymi pierwszymi pochodnymi względem drogi; (2) grubość fali uderzeniowej, tzn. grubość warstwy, w której zachodzi głównie zmiana parametrów ruchu gazu, jest rzędu swobodnej drogi cząsteczki gazu.

Ten drugi wynik świadczący o tym, że nieciągły model fali uderzeniowej stanowi bardzo dobre przybliżenie rzeczywistości, nasunął jednak już Beckerowi zrozumiałą wątpliwość co do stosowalności równań mechaniki ośrodka ciągłego do opisu zjawiska fali uderzeniowej [1]).

Wątpliwość ta stała się — z kolei — impulsem do badań fali uderzeniowej metodami teorii kinetycznej, uwzględniającymi «ziarnistą», molekularną strukturę gazu. Stosunkowo nieliczne prace, [16], [17], [18], z wynikami takich badań ukazują się dopiero od r. 1950, przy czym — w zakresie fal słabych — potwierdzają one na ogół wyniki otrzymane przy założeniu ciągłości gazu.

Jedyną znaną dzisiaj podstawą sprawdzenia wyników wspomnianych wyżej prac teoretycznych drogą ich konfrontacji z doświadczeniem stanowią pomiary grubości fali uderzeniowej, przeprowadzone przez Cowana i Horniga, [19] i [20]. Z tego względu — choć obarczone są one błędem około 25% i nic nie mówią o samej strukturze fali — zasługują na bliższą wzmiankę. Jak zobaczymy, wyniki pomiarów potwierdzają wyniki prac teoretycznych, przynajmniej w zakresie fal słabych.

---

[1]) Równania oparte na założeniu ciągłości gazu nie nadają się oczywiście do opisu zmian zachodzących na odległościach rzędu drogi swobodnej.

2. Struktura fali uderzeniowej w świetle równań mechaniki płynu ciągłego

Jako podstawę do rozważań niniejszego p. przyjmiemy znane równania mechaniki gazu ciągłego, lepkiego i przewodzącego ciepło, odniesione do przypadku ruchu ustalonego, jednoparametrowego, prostoliniowego, o równoległych liniach prądu, [12]. Dla uproszczenia założymy, że równanie stanu gazu doskonałego pozostaje w mocy. Ponadto wprowadzimy znany z termodynamiki związek między lepkością i temperaturą, albo — co na jedno wychodzi wobec $c_p = \text{const}$, $\varkappa = \text{const}$ — między lepkością i entalpią. Otrzymamy następujący układ równań:

równanie ciągłości

$$\frac{d}{dx}(\varrho u) = 0, \tag{2.1}$$

równanie zachowania pędu (równanie N a v i e r a - S t o k e s a)

$$\varrho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \frac{4}{3}\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right), \tag{2.2}$$

równanie zachowania energii

$$\frac{d}{dx}\left[\varrho u\left(i + \frac{u^2}{2}\right) - \mu \frac{d}{dx}\left(\frac{i}{Pr} + \frac{4}{3}\frac{u^2}{2}\right)\right] = 0, \tag{2.3}$$

równanie stanu gazu doskonałego

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} i \tag{2.4}$$

i związek między lepkością i entalpią

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \left(\frac{i}{i_1}\right)^n. \tag{2.5}$$

W równaniach tych oznaczają:

- ϱ gęstość gazu,
- u prędkość gazu,
- p ciśnienie gazu,
- μ lepkość dynamiczną gazu (zależną od temperatury),
- Pr liczbę P r a n d t l a (niezależną od temperatury),
- λ współczynnik przewodności cieplnej (zależny od temperatury),
- c_p ciepło właściwe gazu przy stałym ciśnieniu (niezależne od temperatury),
- $\varkappa$ wykładnik izentropy,
- i entalpię,
- n wykładnik określający zależność lepkości od entalpii (lub temperatury).

Znajdziemy obecnie rozwiązanie szczególne układu równań (2.1)-(2.5) odpowiadające następującym warunkom: (1) dla $x \to -\infty$ przepływ ma dążyć asymptotycznie do prądu jednostajnego określonego wartościami u_1, p_1, ϱ_1, i_1, μ_1, (2) dla $x \to +\infty$ przepływ ma również dążyć asymptotycznie do prądu jednostajnego, określonego wartościami u_2, p_2, ϱ_2, i_2, μ_2 różnymi od poprzednich, (3) rozwiązanie ma być ograniczone w obszarze $-\infty < x < +\infty$.

Żądane rozwiązanie znaleźć można drogą następującego postępowania. Równanie (2.1) posiada widoczną całkę

$$\varrho u = \text{const} = \varrho_1 u_1 . \tag{2.6}$$

Podstawiamy (2.6) do (2.2) i całkujemy otrzymując

$$\varrho_1 u_1 u = -p + \frac{4}{3}\mu \frac{du}{dx} + C_1 . \tag{2.7}$$

Następnie wstawiamy (2.6) do (2.3), całkujemy (2.3) jednokrotnie i po przekształceniach dochodzimy do wyrażenia

$$\left(i + \frac{u^2}{2}\right) - \frac{\lambda}{c_p \varrho_1 u_1} \frac{d}{dx}\left(i + \frac{4}{3} Pr \frac{u^2}{2}\right) = C_2 . \tag{2.8}$$

Liczba P r a n d t l a przybiera dla gazów, których stan jest odległy od punktu skroplenia, wartości od około 0,66 do około 0,9 i jest dla takich gazów prawie stałą funkcją temperatury. Dla przykładu podamy, iż dla powietrza o temperaturze 0°C wartość $Pr = 0{,}720$, zaś dla powietrza o temperaturze 1000°C — $Pr = 0{,}727$, [12].

Przyjmując $Pr = \text{cost} = 3/4$, co jest w pełni usprawiedliwione w świetle powyższych danych, otrzymujemy równanie (2.8) w postaci umożliwiającej rozdzielenie zmiennych i znajdujemy jego całkę ogólną

$$i + \frac{u^2}{2} = C_2 + C_3 e^{c_p \varrho_1 u_1 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\lambda}} . \tag{2.9}$$

Całka ta została podana po raz pierwszy przez M o r d u c h o w a i L i b b y ' e g o, [11]; poprzedni badacze ograniczali się do całki szczególnej bez członu ostatniego zawierającego C_3.

W oparciu o sformułowane uprzednio warunki wyznaczymy obecnie stałe C_1, C_2, C_3.

Ponieważ dla $x = -\infty$ musi być $u = u_1$, zaś $du/dx = 0$, więc z równania (2.7), odniesionego do $x = -\infty$, wypada

$$C_1 = p_1 + \varrho_1 u_1^2 . \tag{2.10}$$

Do określenia stałej C_3 posłużymy się warunkiem ograniczoności rozwiązania. W równaniu (2.9) funkcja $\lambda(x)$ jest ograniczona i dodatnia, wobec czego całka w wykładniku

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\lambda} \to +\infty,$$

gdy $x \to +\infty$, a to pociąga za sobą zdążanie całej prawej strony równania (2,9) do nieskończoności, i — odpowiednio do tego — sprzeczny z założonym warunkiem nieograniczony wzrost funkcji i oraz u. Musi być [2]) zatem

$$C_3 = 0.$$

Stałą C_2 określamy — podobnie jak C_1 — z warunków dla $x = -\infty$ otrzymując

$$C_2 = i_1 + \frac{u_1^2}{2}. \tag{2.11}$$

Rugujemy obecnie z (2.7) wszystkie funkcje oprócz u, wykorzystując przy tym zależność (2.4) i (2.11) i otrzymując jako wynik tych przekształceń równanie

$$\frac{4\mu_1}{3\varrho_1 u_1}\left(1 + \frac{u_1^2}{2i_1} - \frac{u^2}{2i_1}\right)^n u \frac{du}{dx} = \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}u^2 - \left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa}i_1 + u_1^2\right)\frac{u}{u_1} + \frac{\varkappa+1}{\varkappa}\left(i_1 + \frac{u_1^2}{2}\right). \tag{2.12}$$

Równanie (2.12) doprowadzamy do postaci bezwymiarowej przyjmując jako skalę prędkości wielkość u_1, a jako skalę długości wielkość

$$l_1 = 1{,}255\sqrt{\varkappa}\frac{\mu_1}{\varrho_1 a_1}, \tag{2.13}$$

przedstawiającą średnią drogę swobodną cząsteczki gazu, [12], w warunkach odpowiadających $x = -\infty$.

Wprowadzając nowe funkcje i wielkości bezwymiarowe $U = u/u_1$, $X = \frac{x}{l_1}$, $Ma_1 = \frac{u_1}{a_1}$, $(\varkappa - 1)i_1 = a_1^2$, gdzie a_1 jest prędkością dźwięku

[2]) Przypadki $C_3 > 0$ i $C_3 < 0$ są szczegółowo przedyskutowane w [11]; odpowiadające im rozwiązania mają sens fizyczny tylko w ograniczonym obszarze zmienności x.

w warunkach odpowiadających $x = -\infty$, otrzymamy ostatecznie

$$\frac{4}{3 \cdot 1{,}255 \sqrt{\varkappa}} \frac{1}{Ma_1^2}\left[1+\frac{\varkappa-1}{2} Ma_1^2(1-U^2)\right]^n U \frac{dU}{dX} = \tag{2.14}$$

$$= \frac{\varkappa+1}{2\varkappa} U^2 - \left(1+\frac{1}{\varkappa Ma_1^2}\right) U + \left(\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}+\frac{1}{\varkappa Ma_1^2}\right).$$

Przedyskutujmy obecnie równanie (2.14).

Zauważymy przede wszystkim, że wyróżnik trójmianu kwadratowego stanowiącego prawą stronę równania

$$\Delta = \frac{1}{\varkappa^2}\left(1-\frac{1}{Ma_1^2}\right)^2 \geqq 0. \tag{2.15}$$

Wobec tego trójmian można — niezależnie od wartości $\varkappa$ oraz Ma_1 — rozłożyć na czynniki rzeczywiste i przedstawić go w postaci

$$\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}(U-U_1)(U-U_2), \tag{2.16}$$

przy czym

$$U_1 = 1, \tag{2.16.1}$$

zaś

$$U_2 = \frac{Ma_1^2(\varkappa-1)+2}{Ma_1^2(\varkappa+1)}. \tag{2.16.2}$$

Rozpatrywany trójmian kwadratowy jest ujemny przy wartościach U zawartych między pierwiastkami U_1 i U_2, natomiast współczynnik przy dU/dX na lewej stronie równania (2.14) jest dodatni, jeśli tylko $U^2 < 1 + [\varkappa/(\varkappa-1)Ma_1^2]$, co jest oczywiście spełnione zawsze przy $U \leqq 1$, a także w dostatecznie małym zakresie $U > 1$. Wobec tego pochodna $dU/dX < 0$ między pierwiastkami i jest w tym obszarze ograniczona. Zauważymy ponadto, że $dU/dX \to 0$ $(dX/dU \to -\infty)$ dla $U \to U_1, U \to U_2$. Z tych właściwości pochodnej wynika, że U_1 odpowiada punktowi $X = -\infty$, U_2 — punktowi $X = +\infty$, funkcja $U(X)$ jest stale malejąca i wobec tego

$$U_2 < U_1 = 1. \tag{2.17}$$

Równanie (2.14) daje więc funkcję $U(X)$ odpowiadającą postawionym warunkom (1), (2) i (3). Jej przebieg podany jest na rys. 2 linią ciągłą.

Podstawiając do nierówności (2.17) obliczoną uprzednio wartość U_2 i rozwiązując otrzymaną nierówność względem Ma_1 stwierdzimy, iż musi być

$$Ma_1 > 1. \tag{2.18}$$

Znaczy to, że przepływ o właściwościach określonych przyjętymi warunkami, asymptotycznie zdążający do jednostajnego przy $x \to -\infty$ oraz dla $x \to +\infty$ i przy tym różny od banalnego przepływu, określonego przez $u(x) = \text{const}$, $p(x) = \text{const}$, $\varrho(x) = \text{const}$..., istnieje tylko wtedy, gdy jest początkowo (tzn. dla $= -\infty$) naddźwiękowy.

Znajdziemy obecnie zależność między liczbami M a c h a Ma_1 i Ma_2 określającymi przepływ — odpowiednio — przy $x = -\infty$ oraz $x = +\infty$. Korzystając z równania (2.9) spełnionego dla $x = +\infty$ i uwzględniając $C_3 = 0$ oraz (2.11) otrzymujemy po podzieleniu przez u_1^2

$$\frac{i_1}{u_1^2} + \frac{1}{2} = \frac{i_2}{u_2^2}\frac{u_2^2}{u_1^2} + \frac{1}{2}\frac{u_2^2}{u_1^2},$$

a następnie podstawiając $(\varkappa - 1) i_1 = a_1^2$, $(\varkappa - 1) i_2 = a_2^2$, $Ma_1 = u_1/a_1$, $Ma_2 = u_2/a_2$

$$\frac{1}{(\varkappa - 1) Ma_1^2} + \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{(\varkappa - 1) Ma_2^2} + \frac{1}{2}\right] U_2^2.$$

Rozwiązując względem Ma_2^2 po uprzednim wstawieniu wartości U_2 z (2.16.2) otrzymujemy ostatecznie

$$Ma_2^2 = \frac{1 + \frac{\varkappa - 1}{2} Ma_1^2}{\varkappa Ma_1^2 - \frac{\varkappa - 1}{2}}. \tag{2.19}$$

Łatwo sprawdzić, że dla $Ma_1 > 1$ zgodnie z warunkiem (2.18) wypadnie $Ma_2 < 1$, co świadczy o tym, że rozpatrywany przepływ ma charakter fali uderzeniowej *zgęszczeniowej*.

Należy podkreślić, że wniosek ten wysnuliśmy bez stosowania drugiego prawa termodynamiki, co było natomiast rzeczą niezbędną w przypadku badania fal uderzeniowych w gazie nielepkim i nieprzewodzącym ciepła. Z samych bowiem tylko równań hydrodynamicznych gazu doskonałego wynikała — wskutek ich odwracalności — możliwość istnienia zarówno zgęszczeniowych, jak i rozrzedzeniowych fal uderzeniowych, co wymagało wzięcia pod uwagę dodatkowych kryteriów termodynamicznych.

Zależność (2.19) jest znana z teorii fali uderzeniowej w gazie nielepkim i nieściśliwym; podobnie moglibyśmy wykazać, że między wszystkimi parametrami ruchu gazu dla $x = -\infty$ (wskaźnik 1) oraz dla $x = +\infty$ (wskaźnik 2) zachodzą w przypadku gazu lepkiego i przewodzącego ciepło związki identyczne ze znanymi z teorii fali uderzeniowej w gazie nielepkim i nieściśliwym, w szczególności że związki R a n k i n e' a - H u g o n i o t a pozostają ważne. Widać więc, że uwzględnienie lepkości i przewodności cieplnej powoduje ciągłość przejścia parametrów od jednej wartości granicznej (dla $x = -\infty$) do drugiej (dla $x = +\infty$), nie zmieniając jednak samych wartości granicznych (rys. 2, linia przerywana).

Na podstawie równania (2.19) możemy ocenić wpływ, jaki wywiera wartość n na przebieg $U(X)$.

Wykładnik n jest dodatni i waha się w granicach 0,64 - 0,95 dla gazów rzeczywistych, [12], jest przy tym prawie niezmienny z temperaturą. Z teorii kinetycznej gazów wynika $n = 1/2$, zaś założenie $n = 0$ jest równoważne z założeniem stałych, niezależnych od temperatury współczynników lepkości i przewodności cieplnej.

Traktując w równaniu (2.14) pochodną dU/dX jako funkcję n, a pozostałe wielkości jako stałe, stwierdzimy łatwo, iż

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{dU}{dX}\right) = \left(-\frac{dU}{dX}\right) \ln\left[1 + \frac{\varkappa - 1}{2} Ma_1^2 (1 - U^2)\right] > 0$$

dla $U_2 < U < 1$, a zatem dla rosnącego n linia $U(X)$ staje się mniej stroma, co widać wyraźnie na rys. 4 (przypominamy, że $dU/dX < 0$).

Kończąc omówienie równania (2.14) zauważymy jeszcze tylko, że nie nadaje się ono do przedyskutowania wpływu samej tylko lepkości ($\mu \neq 0$, $\lambda = 0$) lub samej tylko przewodności cieplnej ($\mu = 0$, $\lambda \neq 0$) na przebieg funkcji $U(X)$. Dzieje się tak dlatego, że μ oraz λ są związane ze sobą liczbą P r a n d t l a, $Pr = 3/4$, i nie można ich w równaniu (2.14) oddzielić od siebie.

Wpływ samego tylko μ bądź samego tylko λ przedyskutujemy wprowadzając od razu do równań (2.1) - (2.5) $\mu = 0$ albo $\lambda = 0$, przy czym po przeprowadzeniu przeróbek i przekształceń analogicznych do tych, które posłużyły do wyprowadzenia równania (2.14), otrzymamy

$$(2.14.1) \qquad \frac{4(\varkappa - 1)^n \varkappa^{n-1,5}}{3 \cdot 1{,}255\, Ma_1^{1-2n}} \left[\frac{U^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{\varkappa Ma_1^2}\right) U + \frac{1}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\varkappa - 1) Ma_1^2}\right]^n U \frac{dU}{dX} = \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} (U - 1)(U - U_2),$$

dla przypadku $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ i zmiennego z temperaturą, oraz

$$\frac{\lambda}{c_p \varrho_1 u_1 l_1}\left[2U - \left(1 + \frac{1}{\varkappa Ma_1^2}\right)\right]\frac{dU}{dX} = \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa}(U-1)(U-U_2) \tag{2.14.2}$$

dla przypadku $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ [3]).

Prędkość U występująca we wszystkich trzech równaniach [(2.14), (2.14.1) i (2.14.2)] wyraża się wzorem (2.16.1).

Trójmian kwadratowy po lewej stronie równania (2.14.1) jest dodatni, jeśli tylko $Ma_1^2 > (\varkappa - 1)/2\varkappa \approx {}^1/_7$, co łatwo stwierdzić badając jego wyróżnik. Wobec tego w interesującym nas zakresie $Ma_1 > 1$ pochodna $dU/dX < 0$ i funkcja $U(X)$ ma przebieg identyczny z przedstawionym na rys. 2, wynikłym z dyskusji równania (2.14). Uwzględnienie samej tylko lepkości $\mu \neq 0$ wystarcza więc do uzyskania ciągłości parametrów hydrodynamicznych opisujących falę uderzeniową i to zarówno dla przypadku słabych, jak i mocnych fal.

Nieco inaczej przedstawia się sprawa w przypadku uwzględnienia samej tylko przewodności cieplnej $\lambda \neq 0$.

Wprowadzając oznaczenie

$$U_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varkappa Ma_1^2}\right) \tag{2.20}$$

możemy przepisać równanie (2.14.2) w postaci

$$\frac{dU}{dX} = \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa}\,\frac{c_p \varrho_1 u_1 l_1}{2\lambda}\,\frac{(U-1)(U-U_2)}{U - U_0}. \tag{2.21}$$

Jeśli w zakresie $U_2 < U < 1$ ma być $dU/dX < 0$, podobnie jak to miało miejsce w równaniach (2.14) i (2.14.1), to musi być

$$U - U_0 > 0$$

w tym zakresie, co pociąga za sobą w sposób oczywisty warunek

$$U_0 \leqq U_2. \tag{2.22}$$

---

[3]) W równaniu (2.14.2) uzyskano zmienną bezwymiarową X dzieląc x przez l_1, podobnie jak to miało miejsce w przypadku równań (2.14) i (2.14.1.). Wielkość l_1 należy tu jednak traktować — odmiennie niż poprzednio — jako dowolną długość porównawczą, a nie jako średnią drogę swobodną, bo ta ostatnia jest — formalnie rzecz biorąc — zerem wobec $\mu = 0$. Nie wpływa to oczywiście na wyniki dyskusji równania (2.14.2).

Podstawiając do (2.22) wartości (2.20) i (2.16.1) otrzymamy po rozwiązaniu względem Ma_1

$$Ma_1^2 \leqq \frac{3\varkappa - 1}{\varkappa(3-\varkappa)}, \tag{2.22.1}$$

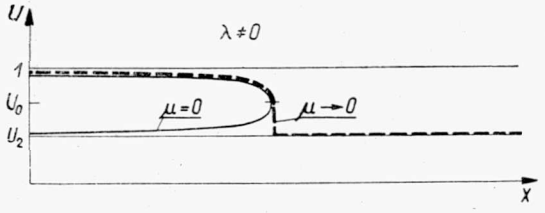
co daje $Ma_1 \leqq 1{,}195$ dla $\varkappa = 1{,}4$.

Stąd wniosek, że uwzględnienie samej tylko przewodności cieplnej $\lambda \neq 0$ wystarcza również do uzyskania ciągłości parametrów (wraz z ich pierwszymi pochodnymi), opisujących falę uderzeniową, ale tylko w zakresie fal słabych

$$1 < Ma_1^2 < \frac{3\varkappa - 1}{\varkappa(3-\varkappa)}.$$

Dla dostatecznie mocnych fal warunek (2.22) nie jest spełniony, wskutek czego pochodna (2.21) zmienia znak w punkcie U_0, przypadającym wówczas między U_1 i U_2, stając się w tymże punkcie nieskończenie wielka. W konsekwencji funkcja $U(X)$ ma przebieg podany na rys. 3 linią ciągłą, jest więc dwuwartościowa i nie istnieje w całym obszarze $-\infty < X < +\infty$.

Warto nadmienić, że przy bardziej subtelnym rozpatrzeniu zagadnienia (polegającym na przejściu z lepkością do granicy równej zeru zamiast przyjęcia wprost $\mu = 0$) otrzymuje się, [18], w przypadku $\lambda \neq 0$ graniczną funkcję $U(X)$ istniejącą w całym obszarze zmienności X. Funkcja ta jest przedstawiona na rys. 3 linią przerywaną.



Rys. 3

W świetle powyższych wywodów słuszne wydaje się stwierdzenie, że wpływ lepkości jest «mocniejszy» od wpływu przewodności cieplnej, jeśli chodzi o uzyskanie ciągłości parametrów opisujących falę uderzeniową.

Całkę równania (2.14) można podać w postaci skończonej tylko dla pewnych szczególnych wartości wykładnika n, a mianowicie dla $n = 0$, $n = 1/2$, [18], oraz $n = 1$. Dla wartości n innych niż podane trzeba przeprowadzić całkowanie numeryczne.

Ponieważ wartość n nie ma wpływu jakościowego na przebieg funkcji $U(X)$, zaś wpływ ilościowy określiliśmy już uprzednio, więc podamy — dla przykładu — tylko całkę dla $n = 0$. Ma ona postać.

$$\frac{3 \cdot 1{,}255\sqrt{\varkappa}}{4\varkappa} Ma_1^2 \left(1 - \frac{1}{Ma_1^2}\right) X = \ln C_4 \frac{1-U}{(U-U_2)^{U_2}}, \tag{2.23}$$

gdzie C_4 zależy od wyboru układu odniesienia i dla przepływu o zadanych uprzednio warunkach brzegowych musi być dodatnia. (Przypadek $C_4 < 0$ został przedyskutowany w [11]; nie ma on sensu fizycznego, ponieważ dla $x \to +\infty$ również $U \to +\infty$, zaś $i \to -\infty$; ponadto entropia maleje tu ze wzrostem x).

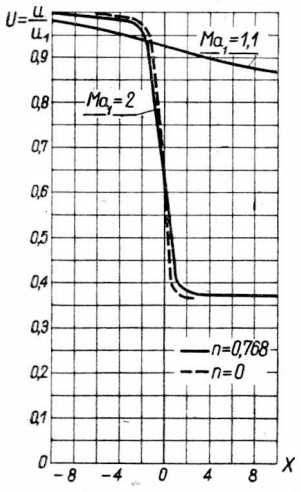
Stałą C_4 określimy przyjmując początek układu odniesienia w punkcie przegięcia $d^2U/dX^2 = 0$; punkt ten odpowiada wartości $U = \sqrt{U_2}$.

Otrzymamy

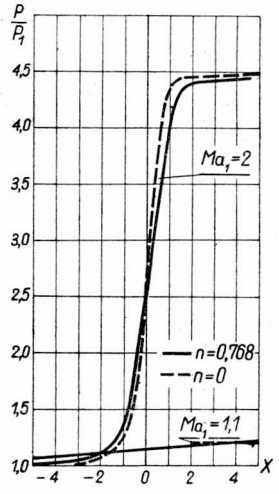
$$e^{\frac{3\cdot 1{,}255\sqrt{\varkappa}}{4\varkappa} Ma_1^2 \left(1-\frac{1}{Ma_1^2}\right) X} = \frac{(\sqrt{U_2}-U_2)^{U_2}}{1-\sqrt{U_2}} \frac{1-U}{(U-U_2)^{U_2}}. \tag{2.24}$$

Łatwo sprawdzić, że całka (2.23) posiada istotnie właściwości przewidziane na podstawie analizy równania (2.14).

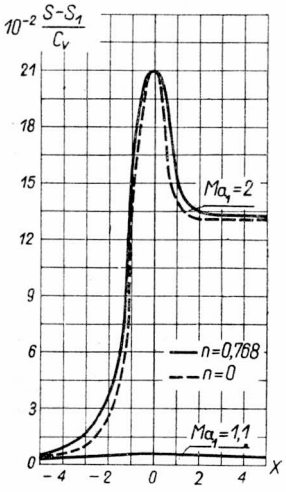
Znając $U(X)$ możemy z łatwością znaleźć pozostałe niewiadome funkcje, a więc $p(x)$, $\varrho(x)$, $i(x)$ oraz $\mu(x)$. Powiadamy często, że zespół tych wszystkich funkcji przedstawia (opisuje) *strukturę fali uderzeniowej*.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Rysunek 4, [11], przedstawia wykres $U(X)$ wykonany dla dwu różnych liczb M a c h a i dwu różnych wartości n. Należy zaznaczyć, że dla $n = 0{,}768$ (powietrze) znaleziono $U(X)$ drogą całkowania numerycznego.

Rysunki 5 i 6, zaczerpnięte z tego samego źródła, przedstawiają rozkład ciśnień oraz przebieg entropii w fali uderzeniowej dla tych samych wartości n i Ma_1.

Jako podstawa do wykonania wykresu ciśnień posłużył wzór

$$\frac{p}{p_1} = \frac{1}{U}\left[1 + \frac{\varkappa - 1}{2} Ma_1^2 (1 - U^2)\right], \tag{2.25}$$

stanowiący przekształcenie wzoru (2.4) za pomocą zależności (2.6), (2.9) i (2.11). U oznacza tu funkcję otrzymaną w wyniku scałkowania równania (2.14).

Wzór służący do wykonania wykresu entropii wyprowadza się na podstawie znanej z termodynamiki zależności

$$S - S_1 = c_p \ln \frac{i}{i_1} - (c_p - c_v) \ln \frac{p}{p_1},$$

która po uwzględnieniu (2.6), (2.9) i (2.11) przybiera postać

$$\frac{S - S_1}{c_v} = \ln\left(U^{\varkappa} \frac{p}{p_1}\right) = \ln\left(U^{\varkappa - 1} \frac{i}{i_1}\right). \tag{2.26}$$

Podstawiając (2.25) do (2.26) otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{S - S_1}{c_v} = \ln\left\{\left[1 + \frac{\varkappa - 1}{2} Ma_1^2 (1 - U^2)\right] U^{\varkappa - 1}\right\}. \tag{2.26.1}$$

Obrazem funkcji (2.26.1) jest rys. 6, na którym zwraca uwagę fakt spadku entropii w zakresie $X > 0$, co wydaje się na pierwszy rzut oka pogwałceniem drugiej zasady termodynamiki.

M o r d u c h o w i L i b b y, [11], którzy — o ile wiemy — pierwsi stwierdzili ten fakt, wyrazili przypuszczenie, iż może on świadczyć o braku równowagi termicznej gazu w pewnych obszarach, nie zajmowali się nim jednak bliżej.

W gruncie rzeczy zaobserwowany spadek entropii nie stoi bynajmniej w sprzeczności z drugą zasadą termodynamiki, ponieważ elementy gazu nie mogą być — wobec $\lambda \neq 0$ — traktowane jako układy odosobnione. Spadek entropii w obszarze $X > 0$ świadczy jedynie o tym, że każdy element gazu, znajdujący się w tym obszarze, oddaje drogą przewodnictwa więcej ciepła elementowi sąsiedniemu, położonemu «przed nim» (tzn. bliżej początku układu odniesienia na rys. 6), niż go otrzymuje od elementu położonego «za nim» (tzn. dalej od początku układu) [4]).

Potwierdzimy prawdziwość powyższego rozumowania wykazując, że dla przypadku $\mu \neq 0$, $\lambda = 0$ wspomniany spadek entropii nie występuje.

---

[4]) Do wniosku tego doszliśmy wspólnie z Z. S z y m a ń s k i m. Podczas przygotowywania niniejszej pracy do druku stwierdziliśmy, że identyczny pogląd wyraził H. C. L e v e y, [21], nie badając go jednak bliżej.

Przyjmując mianowicie w równaniu (2.3) $\lambda = 0$ albo — co na jedno wychodzi — $Pr = \infty$ i całkując je jednokrotnie otrzymamy

$$\varrho_1 u_1 \left(i + \frac{u^2}{2}\right) - \frac{4}{3} \mu u \frac{du}{dx} = C_2, \tag{2.27}$$

gdzie C_2 określone z warunków dla $x = -\infty$ ma wartość (2.11) identyczną jak dla przypadku $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$.

Rugujemy następnie z (2.7) p oraz ϱ korzystając z zależności (2.6) i (2.4); wszystkie te trzy zależności pozostają prawdziwe w przypadku $\lambda = 0$, co łatwo spostrzec. Jako wynik rugowania wypada

$$\varrho_1 u_1 u = -\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \varrho_1 u_1 \frac{i}{u} + \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} + C_1. \tag{2.28}$$

Dodając do (2.27) równanie (2.28) po uprzednim pomnożeniu go przez u otrzymamy

$$\frac{i}{\varkappa} = \frac{u^2}{2} + \frac{C_2}{\varrho_1 u_1} - \frac{C_1 u}{\varrho_1 u_1},$$

skąd po podstawieniu (2.10) i (2.11) wynika

$$\frac{i}{i_1} = \varkappa(\varkappa - 1) Ma_1^2 \left\{ \frac{U^2}{2} - U\left(1 + \frac{1}{\varkappa Ma_1^2}\right) + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{(\varkappa - 1) Ma_1^2}\right] \right\}. \tag{2.29}$$

Wreszcie — po podstawieniu (2.29) do (2.26) i zróżniczkowaniu otrzymanej zależności względem X — otrzymujemy:

$$\frac{dS}{dX} = \frac{dU}{dX} \left[\frac{\varkappa - 1}{U} - \frac{U - \left(1 + \frac{1}{\varkappa Ma_1^2}\right)}{\frac{U^2}{2} - U\left(1 + \frac{1}{\varkappa Ma_1^2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{(\varkappa - 1) Ma_1^2}} \right] \tag{2.30}$$

lub

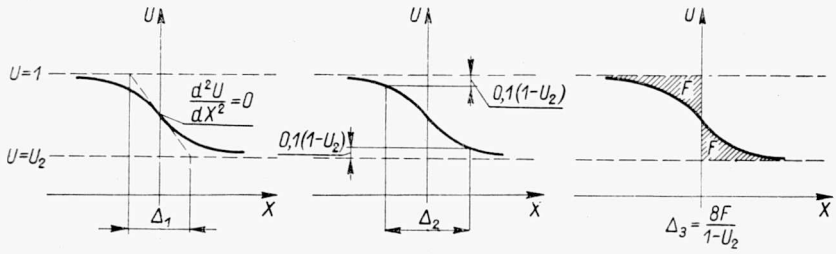
$$\frac{dS}{dX} = \frac{dU}{dX} \frac{\frac{\varkappa + 1}{2}(U - 1)(U - U_2)}{U\left[\frac{U^2}{2} - U\left(1 + \frac{1}{\varkappa Ma_1^2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{(\varkappa - 1) Ma_1^2}\right]}. \tag{2.30.1}$$

Z dyskusji równania (2.14.1) wynikało, że $dU/dX < 0$ w obszarze $U_2 < U < 1$, zaś wyrażenie w nawiasie kwadratowym tegoż równania [wyrażenie to występuje również w mianowniku równania (2.30.1)] jest większe od zera dla $Ma_1^2 > 1/7$. Ponieważ licznik (2.30.1) jest w obszarze $U_2 < U < 1$ stale ujemny, więc z zestawienia tych faktów wynika $dS/dX > 0$; wobec tego dla $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ entropia jest funkcją stale rosnącą, co właśnie chcieliśmy wykazać.

Na zakończenie niniejszego rozdziału zauważymy, że przedstawiona w nim struktura fali uderzeniowej w gazie lepkim i przewodzącym ciepło została otrzymana dla szczególnej wartości liczby Prandtla, $Pr = 3/4$. Obraz jej pozostaje jednak prawdziwy (w sensie jakościowym) również dla innych liczb Prandtla, jak o tym świadczą prace Misesa, [13], i Grada, [18]. Obaj autorzy ograniczyli się do czysto jakościowej analizy układu równań (2.1) - (2.5).

3. Grubość fali uderzeniowej w świetle równań mechaniki ośrodków ciągłych

Grubością fali uderzeniowej [5]) nazywamy grubość warstwy, w której zachodzi najbardziej gwałtowna zmiana parametrów hydrodynamicznych gazu. Oczywiście, grubość fali uderzeniowej musi być określona umownie; rys. 7 przedstawia najczęściej stosowane definicje.



Rys. 7

Definicja Δ_1 pochodzi od Prandtla, [4], definicja Δ_2 od Taylora, [6], definicję Δ_3 spotykamy u Łojcjanskiego, [12], i Grada, [18]. Należy podkreślić, że obliczając grubość pewnej fali uderzeniowej na podstawie każdego z podanych trzech schematów dochodzi się do wyników mało różniących się od siebie ([11] i [18]).

Najwygodniejszy w zastosowaniu praktycznym jest jednak schemat Prandtla, ponieważ w oparciu o niego można określić grubość fali uderzeniowej bez potrzeby znajdowania całki równania (2.14). Wystarczy w tym celu obliczyć $[dU/dX]_{max}$ z warunku $d^2U/dX^2 = 0$; otrzymamy wówczas

$$\Delta_1 = \frac{1 - U_2}{\left|\left[\frac{dU}{dX}\right]_{max}\right|}. \tag{3.1}$$

[5]) Zdajemy sobie sprawę z niewłaściwości tej nazwy: fala uderzeniowa jest zjawiskiem fizycznym, rozciągającym się w dodatku na obszar nieskończony, nie ma więc sensu mówić o jej «grubości». Nazwę podaną zachowujemy jednak z braku lepszej. Analogiczne nazwy stosowane w literaturze obcojęzycznej (np. *Stossdicke, shock front thickness*) również nie są zadowalające i nie dają wobec tego podstaw do utworzenia nazwy prawidłowej.

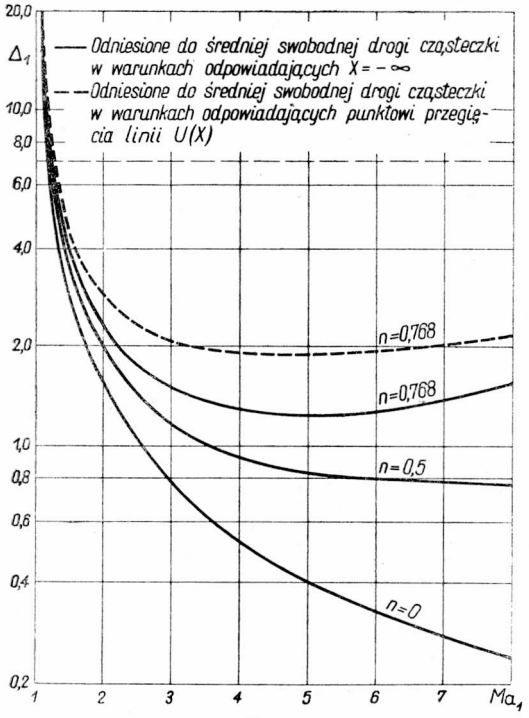
Nadmienimy, że warunek $d^2U/dX^2 = 0$ daje łatwe do rozwiązania równanie tylko w przypadku $n = 0$; dla $n \neq 0$ prowadzi on do równania

$$(3.2)\quad U^4\left(n-\frac{1}{2}\right)-U^3 n(1+U_2)+U^2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{(\varkappa-1)Ma_1^2}+U_2\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]-$$
$$-U_2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{(\varkappa-1)Ma_1^2}\right]=0$$

o budowie dość złożonej.

Obliczoną na podstawie wzoru (3.1) grubość fali uderzeniowej przedstawiają wykresy na rys. 8, [11].

Linie ciągłe na tym rysunku oznaczają grubość fali uderzeniowej, odniesioną do średniej swobodnej drogi cząsteczki w warunkach odpowiadających $X = -\infty$. Linia przerywana przedstawia grubość fali, odniesioną do średniej swobodnej drogi cząsteczki w warunkach odpowiadających punktowi przegięcia linii $U(X)$; w tym drugim przypadku grubość fali uderzeniowej wypada nieco większa.



Rys. 8

Jak widać, przy $n = 0$ (lepkość μ i przewodność cieplna λ niezależne od temperatury) grubość fali uderzeniowej dąży do zera przy rosnącej liczbie Ma_1, co doprowadziło B e c k e r a, [8], który badał to zjawisko, do stwierdzenia, że w przypadku dostatecznie silnych fal uderzeniowych grubość ich staje się mniejsza już nie tylko od średniej drogi swobodnej, ale nawet od średniej odległości między cząsteczkami. Wniosek ten został zakwestionowany przez T h o m a s a, [10], który stwierdził, że przyjęcie bardziej zbliżonego do rzeczywistości modelu gazu, odznaczającego się współczynnikami lepkości i przewodności cieplnej zmiennymi z temperaturą według zależności $\mu \sim \sqrt{T}$, $\lambda \sim \sqrt{T}$, prowadzi do wniosków zupełnie odmiennych, mianowicie (dla $n = 1/2$ grubość fali uderzeniowej dąży przy $Ma_1 \to \infty$ do wartości stałej, różnej od zera; przy tym wartość ta pozostaje rzędu śred-

niej swobodnej drogi cząsteczki gazu. Późniejsze badania wykazały ponadto, że dla $^1/_2 < n < 1$ grubość fali uderzeniowej jest niemonotoniczną funkcją liczby Ma_1, że, mianowicie, grubość fali dąży do nieskończoności dla $Ma_1 \to \infty$ po przejściu przez minimum, które leży w okolicy $Ma_1 = 5$ i którego wielkość jest rzędu drogi swobodnej. Widać to wyraźnie na rys. 4.

Wyniki obliczeń grubości fali uderzeniowej są może najważniejszym osiągnięciem przedstawionej powyżej teorii. Z jednej strony potwierdzają one, jak już wspomniano, trafność nieciągłego modelu fali uderzeniowej, świadczą bowiem, że grubość fali jest rzędu swobodnej drogi cząsteczki gazu. Z drugiej strony jednak nasuwają pewne zastrzeżenie.

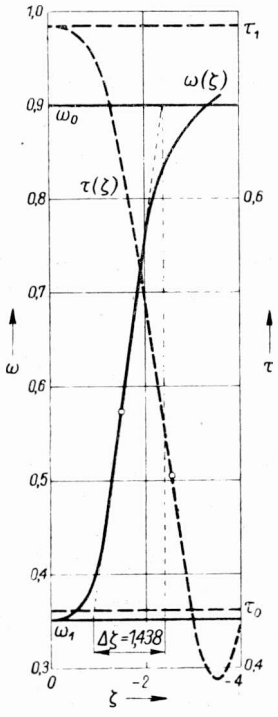
Zastrzeżenie to — niezwykle istotne — dotyczy stosowalności równań mechaniki ośrodków ciągłych do opisu zjawiska fali uderzeniowej, podważając tym samym przedstawione wyżej wnioski; wynika ono z rozważań następujących.

Założenie ciągłości ośrodka jest równoważne warunkowi postulującemu, że skończone zmiany parametrów hydrodynamicznych gazu zachodzą na odległościach dużych w porównaniu z długością średniej swobodnej drogi cząsteczki gazu. Jednak warunek ten, jak widać z rys. 8, jest spełniony tylko dla bardzo słabych (małe Ma_1) fal uderzeniowych, wobec czego wiadomości o strukturze fali uderzeniowej, otrzymane na podstawie równań (2.1) - (2.5) mechaniki ośrodków ciągłych, mogą być bez dalszych zastrzeżeń uznane za prawdziwe tylko dla przypadku dostatecznie słabych fal (np. dla fal określonych przez $Ma_1 \leqq 1,2$, jeśli — w sposób dość dowolny — założymy, że grubość fali równa 10 długościom drogi swobodnej wystarcza do spełnienia warunku ciągłości ośrodka). Natomiast w zakresie $Ma_1 > 1,2$, traktować należy strukturę fali uderzeniowej, wynikającą z równań mechaniki ośrodków ciągłych, jako niepewną — przynajmniej pod względem ilościowym.

Nawiasem mówiąc na rys. 8 widać, że grubość fali uderzeniowej staje się znowu duża dla liczb Ma_1, tzn. dla silnych fal uderzeniowych. Wydawać by się więc mogło, że dla takich fal założenie ciągłości jest utrzymane, a więc ich struktura, wynikająca z równań opartych na tym założeniu, odpowiada rzeczywistości. Wniosek taki byłby oczywiście nadzwyczaj niepewny. Wspomniany obszar bardzo dużych liczb Ma_1 leży za zakresem średnich liczb Ma_1, w którym założenie ciągłości na pewno nie obowiązuje; w obszarze tym równania mechaniki ośrodków ciągłych mogły stracić słuszność nawet z punktu widzenia jakościowego opisu zjawiska, trzeba zatem traktować z dużym zastrzeżeniem zarówno obserwowany na rys. 8 fakt ponownego wzrostu grubości fali w zakresie dużych Ma_1, jak i — tym bardziej — wypływający zeń wniosek, iż równania «odzyskują» słuszność w tym zakresie Ma_1.

4. Struktura fali uderzeniowej w świetle teorii kinetycznej gazów

Teoretyczne zbadanie zjawiska fali uderzeniowej poza zakresem stosowalności równań mechaniki ośrodka ciągłego i wyjaśnienie tą drogą wątpliwości, sformułowanych w p. poprzednim, mogło być dokonane tylko w oparciu o teorię kinetyczną, nie korzystającą z założenia ciągłości gazu i uwzględniającą jego «ziarnistą» strukturę.



Rys. 9

W punkcie niniejszym zostaną omówione wyniki trzech prac, [16], [17] i [18], opartych na teorii kinetycznej [6]). Dwie z tych prac, mianowicie [16] i [18], opierają się na rozszerzonych równaniach hydrodynamiki, otrzymanych w oparciu o pewne rozwinięcia funkcji rozkładu na szereg i odniesionych do przypadku płaskiej ustalonej fali uderzeniowej. Trzecia praca natomiast sprowadza się do bezpośredniego wyznaczenia funkcji rozkładu jako szczególnego rozwiązania równania B o l t z m a n n a, rozwiązania odpowiadającego zjawisku płaskiej fali uderzeniowej.

Praca Z o l l e r a, [16], stanowi zastosowanie metody E n s k o g a - C h a p m a n a - B u r n e t t a; funkcja rozkładu jest tu rozwinięta na szereg wielomianów S o n i n a. Otrzymany układ równań różniczkowych zwyczajnych został scałkowany numerycznie dla przypadków $p_2/p_1 = 1{,}5$; 4 i 6,5, co odpowiada liczbom M a c h a $Ma_1 \approx 1{,}2$; 1,89 i 2,4. Wyniki całkowania dla przypadku $p_2/p_1 = 6{,}5$ przedstawia rys. 9.

Wprowadzone przez Z o l l e r a wielkości bezwymiarowe są związane z wielkościami stosowanymi w niniejszym artykule zależnościami następującymi:

$$\omega = \frac{\varkappa Ma_1^2}{1+\varkappa Ma_1^2} U,$$

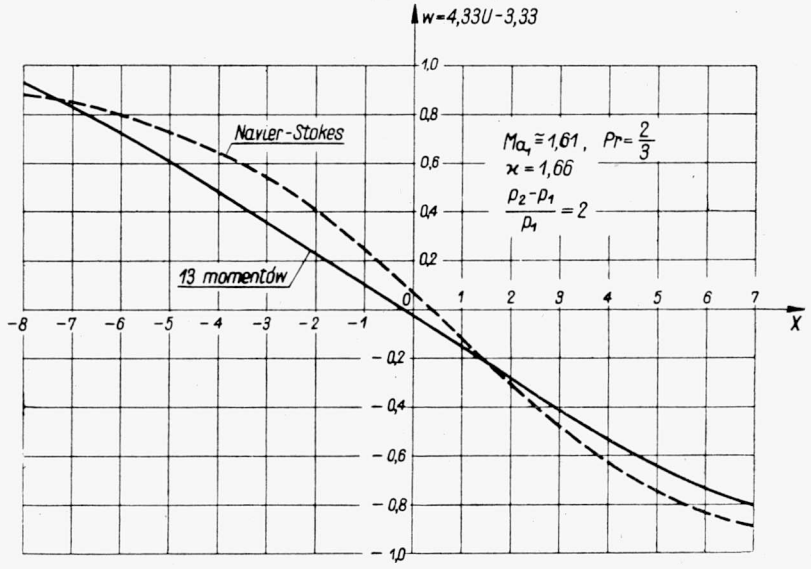
$$\tau = \frac{\varkappa Ma_1^2}{1+\varkappa Ma_1^2} \sqrt{\frac{2R}{u_1^2}}\, T,$$

$$\zeta = \frac{3 \cdot 1{,}255\, \varkappa^2}{4\sqrt{\varkappa}} \frac{Ma_1^3}{(1+\varkappa Ma_1^2)^2} X.$$

[6]) Na Kursie Naukowym w Międzyzdrojach (sierpień 1954 r.) strona teoretyczna tych prac została omówiona w referacie Z. S z y m a ń s k i e g o *Równanie Boltzmanna i jego znaczenie w teorii gazów.*

Na rysunku 9 zwraca uwagę niemonotoniczność funkcji $\tau(\zeta)$ [dotyczy to również funkcji $\omega(\zeta)$]. Z o l l e r faktu tego nie wyjaśnia. Fakt ten obserwuje się, [16], również w przypadku słabszej fali określonej przez $p_2/p_1 = 4{,}0$, jednak występuje on w słabszym stopniu. Natomiast dla najsłabszej fali ($p_2/p_1 = 1{,}5$) funkcje ω i τ są monotoniczne i linia $\omega(\zeta)$ ma przebieg zupełnie identyczny jakościowo z przedstawionym na rys. 4 przebiegiem $U(X)$.

Zauważmy jeszcze, że grubości fali uderzeniowej, wynoszące odpowiednio $\Delta\zeta = 5{,}29$, 1,850 i 1,438 dla $p_2/p_1 = 1{,}5$; 4 i 6,5 są znacznie większe od otrzymanych na podstawie równań mechaniki ośrodków ciągłych. Po przeliczeniu na oznaczenia stosowane w p. poprzednich wynoszą one: $\Delta = 17{,}5$; 6,36 i 5,5, podczas gdy według rys. 8 wyniosłyby dla tych samych Ma_1 około 10, 3 i 2.



Rys. 10

Drugi z cytowanych, [18], autorów, G r a d, oparł się na swej metodzie trzynastu momentów, która ostatecznie prowadzi w przypadku płaskiej fali uderzeniowej do układu pięciu równań różniczkowych zwyczajnych.

W wyniku numerycznego całkowania tego układu dla $Ma_1 = 1{,}611$ otrzymano wykres prędkości podany na rys. 10 linią ciągłą.

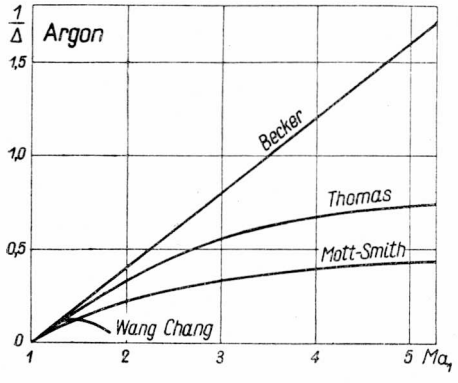
Porównanie go z analogicznym wykresem uzyskanym w oparciu o równania mechaniki ośrodków ciągłych (linia przerywana) wykazuje zupełną zgodność jakościową oraz niewielkie ilościowe różnice, wyrażające się

bardziej łagodnym przebiegiem wykresu otrzymanego na podstawie metody trzynastu momentów.

Grubości fali uderzeniowej, obliczane na podstawie metody trzynastu momentów, także nie różnią się wiele od obliczonych na podstawie równań mechaniki ośrodka ciągłego. Liczbowe różnice wynoszą ok. 2% dla $Ma_1 = 1{,}18$ i $\approx 15\%$ dla $Ma_1 = 1{,}61$ z tym, że metoda trzynastu momentów daje grubości większe.

Dla silniejszych fal uderzeniowych (tzn. dla $Ma_1 \geqq 1{,}65$) G r a d nie przeprowadzał obliczeń, ponieważ stwierdził drogą bardzo wnikliwej i drobiazgowej analizy jakościowej wspomnianego układu pięciu równań różniczkowych, że równania te dają *jedyne* rozwiązanie na falę uderzeniową tylko dla $Ma_1 \leqq 1{,}65$. Powyżej tej wartości Ma_1 istnieje mianowicie nieskończenie wiele linii całkowych łączących punkty osobliwe, odpowiadające stanowi gazu w $+\infty$ i $-\infty$. Wykresy prędkości dla $Ma_1 > 1{,}65$ stają się niemonotoniczne, co pokrywa się z wynikiem Z o l l e r a.

Praca [17] M o t t - S m i t h a zajmuje się wyznaczeniem funkcji rozkładu, będącej sumą dwu makswellowskich funkcji rozkładu, z których jedna określa stan gazu w $-\infty$ (przed falą uderzeniową), druga w $+\infty$ (tzn. za falą). Wyniki ograniczają się do obliczeń grubości fali uderzeniowej w funkcji liczby M a c h a Ma_1 dla dwu różnych równań transportu. Obliczone grubości fali wypadają tu znacznie większe od uzyskanych na podstawie równań mechaniki ośrodków ciągłych (por. rys. 11); różnice wynoszą kilkadziesiąt procent.



Rys. 11

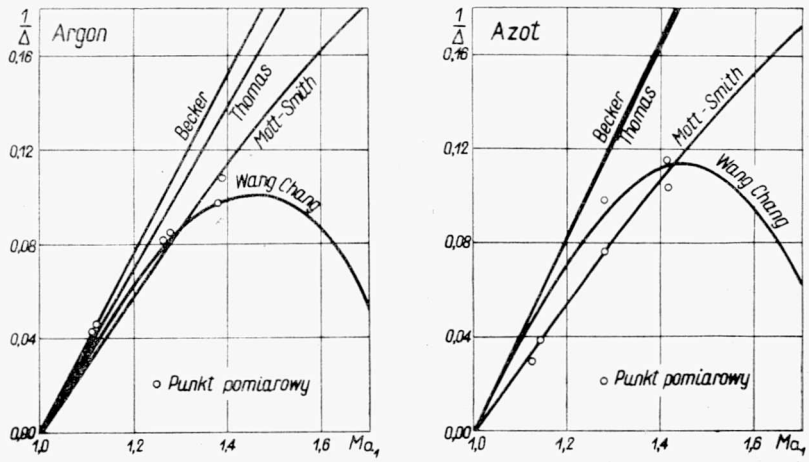
Reasumując wyniki p. 4 stwierdzamy, że teoria kinetyczna potwierdza rezultaty otrzymane dla przypadku słabej płaskiej fali uderzeniowej na podstawie równań mechaniki ośrodków ciągłych: jakościowa zgodność jest zupełna, ilościowo zaś teoria kinetyczna daje większe grubości fali uderzeniowej.

W zakresie silnych fal uderzeniowych teoria kinetyczna daje niemonotoniczne parametry hydrodynamiczne, co stanowi już jakościową różnicę w porównaniu z wynikami mechaniki ośrodków ciągłych. Fakt ten traktować jednak należy z dużą ostrożnością, zważywszy że funkcje rozkładu, zastosowane w omówionych wyżej pracach, [16], [18], obowiązują przy założeniu małych odstępstw gazu od stanu równowagi, które nie jest spełnione w fali uderzeniowej (i to tym mniej, im silniejsza jest fala). Być

może zatem, że funkcje te w ogóle nie nadają się do badania fal silnych. Co prawda, funkcja rozkładu otrzymana przez M o t t - S m i t h a jest wolna od wspomnianego założenia, niestety jednak autor nie podał odpowiadającego jej rozkładu prędkości, nie wiemy zatem, czy byłby on — dla dostatecznie silnych fal — również niemonotoniczny.

5. Pomiary grubości fali uderzeniowej

Wyniki przedstawionych wyżej równań teoretycznych nie mogą być oczywiście uznane za pewne, dopóki nie potwierdzi ich doświadczenie. Niestety, nie znamy dotychczas metod, które pozwoliłyby zbadać doświadczalnie strukturę fali uderzeniowej w całej rozciągłości, a więc uzyskać obraz prędkości, temperatury i innych parametrów hydrodynamicznych gazu. Istnieje natomiast metoda pozwalająca zmierzyć grubość fali uderzeniowej i przynajmniej pod tym jednym względem (w pewnym sensie «z grubsza») skonfrontować wyniki teorii z rzeczywistością.



Rys. 12

Metoda, o której mowa, opiera się na zastosowaniu tzw. «rury uderzeniowej» i została opublikowana w pracy C o w a n a i H o r n i g a, [19], z 1950 r. Praca następna, [20], z 1951 r. zawiera konkretne wyniki pomiarów grubości fali uderzeniowej w argonie i azocie dla liczb $Ma_1 \leqq 1{,}4$.

Wyniki tych pomiarów przedstawia rys. 12, zaczerpnięty z [20]. Potwierdzają one, jak widać, wyniki uzyskane na drodze teoretycznej, przy czym najlepszą zgodność z doświadczeniem daje teoria M o t t - S m i t h a. Należy podkreślić, że wyniki pomiarów obarczone są błędem dochodzącym do 25%.

Niestety, pomiary obejmują zakres małych liczb Ma_1, w którym rozbieżności między poszczególnymi teoriami nie są duże, jeśli chodzi o grubość fali uderzeniowej. Byłoby rzeczą o dużym znaczeniu przeprowadzenie pomiarów grubości fal, charakteryzujących się większymi liczbami M a c h a, i — tym samym — sprawdzenie wyników poszczególnych teorii w zakresie ich większej rozbieżności.

Literatura cytowana w tekście

[1] B. R i e m a n n, *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*, Abhandl. der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys., Kl. 8, 43 (1860).

[2] W. J. M. R a n k i n e, *On the Thermodynamic Theory of Waves of Finite Longitudinal Disturbance*, Transactions of the Roy. Soc., t. 160 (1870).

[3] H. L o r e n z, *Die stationäre Strömung von Gasen und Dämpfen durch Rohre mit veränderlichem Querschnitt*, Zeitschr. des VDI 47 (1903), str. 1600-1603.

[4] L. P r a n d t l, *Zur Theorie des Verdichtungsstosses*, Zeitschr. das gesamte Turbinenwesen 3 (1906), str. 241.

[5] L o r d R a y l e i g h, *Aerial Plane Waves of Finite Amplitude*, Proc. Roy. Soc., Londyn, A 84 (1910), str. 241.

[6] G. I. T a y l o r, *The Conditions Necessary for Discontinuous Motion in Gases*, jw., str. 371.

[7] G. H a m e l, *Das Ausströmen von Gasen durch Düsen*, Zeitschr., des VDI 55 (1911), str. 1895-1898.

[8] R. B e c k e r, *Stosswelle und Detonation*, Zeitschr. f. Physik, 8 (1922).

[9] G. I. T a y l o r i J. W. M a c c o l l, *The Mechanics of Compressible Fluids*, W. F. D u r a n d, *Aerodynamic Theory*, t. 3, Div. H. Berlin 1935.

[10] L. H. T h o m a s, *Note on Becker's Theory of the Shock Front*, Journ. of Chemical Physics 12 (1944), str. 449-453.

[11] M. M o r d u c h o w i P. A. L i b b y, *On a Complete Solution of the One-Dimensional Flow Equations of a Viscous, Heat-Conducting Compressible Gas*, Journal of the Aeronautical Sci. 16 (1949), str. 674-684.

[12] L. G. Ł o j c j a n s k i, *Miechanika żidkosti i gaza*, Moskwa-Leningrad 1950, str. 510-515.

[13] R. M i s e s, *On a Thickness of a Steady Shock Wave*, Journal of the Aeronautical Sci. 17 (1950), str. 551-554.

[14] P. L i e b e r, F. R o m a n o i H. L e w, *Approximate Solutions for Shock Waves in a Steady, One Dimensional, Viscous and Compressible Gas*, Journal of the Aeronautical Sci. 18 (1951).

[15] R. B r u n i a k, *Zur Struktur des Verdichtungsstosses*, Österreichisches Ing.-Arch. 7 (1953).

[16] K. Z o l l e r, *Zur Struktur des Verdichtungsstosses*, Zeitschr. f. Physik 130 (1951).

[17] H. M. Mott-Smith, *The Solution of the Boltzmann Equation for a Shock-Wave,* Physical Rev. 82 (1951), str. 885-892.

[18] H. Grad, *The Profile of a Steady Plane Shock Wave,* Comm. on Pure and Appl. Math. 5 (1952), str. 257.

[19] G. R. Cowan i D. F. Hornig, *The Experimental Determination of the Thickness of a Shock Front in a Gas,* The Journal of the Chemical Physics 18 (1950).

[20] Greene, G. R. Cowan i D. F. Hornig, *The Thickness of Shock Fronts in Argon and Nitrogen and Rotational Heat-Capacity Lags,* jw., 19 (1951).

[21] H. C. Levey, Quaterly of Applied Mathematics, t. 12, 4 (1954), str. 43.

Резюме

СТРУКТУРА ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Работа является сводкой результатов испытаний структуры плоской установившейся ударной волны в вязком и проводящем тепло газе.

В п. 2-ом, являющемся основной частью работы, рассмотрены результаты, полученные на основании уравнений механики сплошной среды. Обсуждается влияние различных факторов на характер изменчивости гидродинамических параметров, между прочим и влияние одной только вязкости и одной только теплопроводности.

Особенное внимание обращается на факт, что в вязком и проводящем тепло газе, на фоне общего повышения энтропии, выступает ее локальное уменьшение, [11]. Это ни в коем случае не противоречит второму принципу термодинамики, так как элементы проводящего тепло газа не являются изолированными системами. Косвенным подтверждением является доказанный нами факт, что ударная волна — в вязком и непроводящем тепло газе — отличается монотонным повышением энтропии.

Результаты, полученные методами механики сплошной среды, сопоставляются затем с результатами кинетической теории и данными экспериментов.

Установлено, что механика сплошной среды дает, в области достаточно слабых волн (до $Ma_1 \approx 1{,}6$), правильную качественно изменчивость гидродинамических параметров; впрочем количественные разницы невелики и выражаются более отвесными формами кривых соответствующих функций, чем это вытекает из кинетической теории. Весьма вероятно, что в области довольно сильных волн будут выступать каче-

ственные разницы; кинетическая теория, [16], дает здесь — в противоположности механике сплошной среды — немонотонные изменения гидродинамических параметров. Однако результаты кинетической теории, [16] и [18], в области сильных волн ненадежны, так как состояние газа может здесь сильно отклоняться от состояния термического равновесия. Кроме того эти результаты слишком отрывочны, чтобы на их основании можно было бы принять представление о структуре сильной ударной волны и провести критику результатов рассуждений механики сплошоой среды (например [17] не содержит образа структуры, а только лишь вычисление толщины волны).

Измерения толщины ударной волны, [20], произведенные для $Ma_1 = 1{,}4$, являющиеся единственным и несовершенным основанием для сопоставления теории и эксперимента, подтверждают результаты теории.

Summary

TWO-DIMENSIONAL SHOCK WAVE STRUCTURE

This paper constitutes a summary of results of investigations of steady plane shock wave in a viscous heat conducting gas.

Sec. 2 the principal part of the paper contains a discussion of the results obtained on the basis of the equations of mechanics of continuous media. The influence of various factors on the type of variability of hydrodynamic parameters are discussed, including the influence of viscosity and of heat conductivity.

Special consideration has been given to the phenomenon of local decrease of entropy, [11], accompanying the overall increase of entropy. This phenomenon is not contrary to the second law of thermodynamics, because the elements of a heat conducting gas do not constitute isolated systems. This is confirmed indirectly by the fact that the shock wave in a viscous non conducting gas is characterized by a monotonic increase of entropy.

Next, the results based on the principles of mechanics of continuous media are compared to those of the kinetic theory and to experimental data.

It was found that the principles of mechanics of continuous media yield, for a sufficiently weak shock wave (up to $Ma_1 \approx 1{,}6$), a qualilatively correct variability of hydrodynamic parameters, the quantitative differences being insignificant and consisting in steeper curves than those

resulting from the kinetic theory. On the other hand, it appears that in the range of sufficiently strong waves qualitative differences will appear: the kinetic theory, [16], indicates here contrarily to the principles of mechanics of continuous media — nonmonotonic variations of hydrodynamic parameters. The results of the kinetic theory, [16] and [18], are uncertain, however, in the range of strong waves, because in this case the state of gas can be different from that of thermal equilibrium; moreover, these results are too fragmentary to be taken as a basis for an opinion on the structure of a strong wave and to allow the results of the mechanics of continuous media to be discussed ([17] does not present any information on the structure, but only calculations of wave thickness).

Measurements of shock wave thickness, [20], for $Ma_1 = 1{,}4$, which constitute the unique and imperfect basis of comparison between theory and practice, confirm the results of the theory.

WITOLD WIERZBICKI

ANALIZA SCHEMATÓW STATYCZNYCH KONSTRUKCJI DREWNIANYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXXIII

SPIS TREŚCI

1. Istota zagadnienia

Niejednorodność, a zwłaszcza anizotropia drewna jako materiału budowlanego, bądź wywołuje potrzebę stosowania przy obliczaniu naprężeń w konstrukcjach wzorów specjalnie ustawianych dla drewna, bądź też wymaga wprowadzenia przy ustalaniu naprężeń dopuszczalnych pewnych współczynników wziętych z doświadczenia. Gdy zaś chodzi o wyznaczenie wielkości statycznie niewyznaczalnych lub o wyznaczenie sił krytycznych przy wyboczeniu słupów drewnianych, rozpatrujemy drewno jako materiał podlegający prawu H o o k e' a licząc się jednak wówczas ze specjalnymi warunkami pracy konstrukcji drewnianych.

Ze względu na rzeczywiste własności fizyczne i technologiczne drewna typ konstrukcji z tego materiału, a również typ wykonanych z niego elementów budowlanych, różni się od konstrukcji wykonanych z materiałów jednorodnych i izotropowych. Z tego powodu mamy tu do czynienia ze schematami statycznymi odmiennymi od występujących w tamtych wypadkach. Typowymi w tym sensie dla konstrukcji drewnianych schematami statycznymi są słupy o kształcie stożków, belki klinowane i układy zastrzałowo-rozporowe.

Analiza tych schematów obliczanych na podstawie prawa H o o k e' a, lecz pod kątem widzenia rzeczywistych warunków pracy konstrukcji drewnianych, stanowi główną treść niniejszej rozprawy.

Obliczenia omówionych wyżej schematów muszą, z jednej strony, czynić zadość wymaganiom ostrożności ze względu na niedoskonałość danych materiałowych i na mniejszą zwykle niż w innych wypadkach kompetencję projektantów — z drugiej jednak dopuszczają śmiałe koncepcje techniczne ze względu na stosunkową taniość materiału i krótki okres pracy konstrukcji. Te okoliczności odróżniają omawiane tu obliczenia od obliczeń konstrukcji z innych materiałów i dają podstawę do zalecanych dalej uproszczeń w obliczeniach statycznych konstrukcji z drewna.

Przy opracowaniu tej rozprawy autor korzystał z następujących swoich dawniejszych publikacji:

(1) *Wielokrotne dźwigary drewniane jako układy hiperstatyczne*, Warszawa 1931,

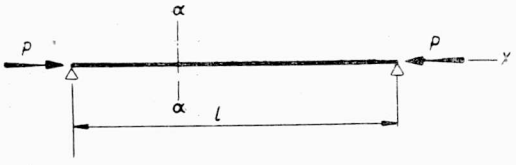
(2) *Sprawa wymiarowania drewnianych mostów zastrzałowych*, Warszawa 1933,

(3) *Sposób momentów wtórnych w zastosowaniu do wyznaczenia siły krytycznej*, Łódź 1946,

(4) *Wyboczenie niesprężyste prętów podpartych w sposób statycznie wyznaczalny*, Warszawa 1947.

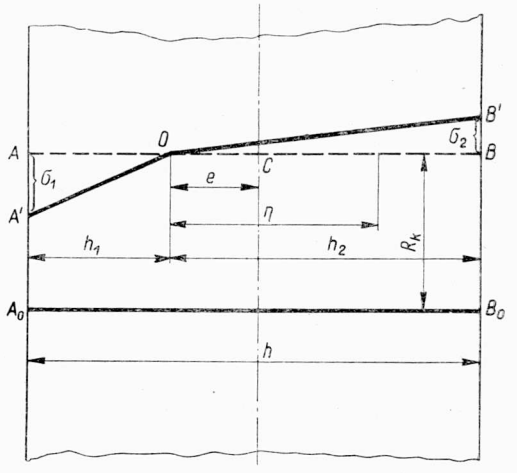
2. Słupy stożkowate

Najczęstszym przypadkiem działania sił podłużnych na elementy konstrukcyjne z drewna jest przypadek osiowego ściskania słupów stożkowatych. Dopóki siła krytyczna działająca na słup drewniany nie wywołuje w nim naprężeń krytycznych przekraczających granicę sprężystości drewna, dopóty wyboczenie słupów stożkowatych jest wyboczeniem sprężystym, do którego oceny służą wzory typu Eulerowskiego. Dopiero po przekroczeniu przez naprężenia krytyczne granicy sprężystości drewna na ściskanie powstaje trudność rozwiązania zagadnienia siły krytycznej w słupie drewnianym. Do rozwiązania tego pomocna jest teoria K á r m á n a dotycząca wyboczenia niesprężystego, która była wprawdzie kwestionowana w szczegółach, nie wzbudza jednak istotnych zastrzeżeń i jest przejrzysta w ujęciu. Podstawy tej teorii są następujące.



Rys. 1

Bierzemy pod uwagę pręt pryzmatyczny w dwóch punktach swobodnie podparty, ściskany siłami podłużnymi P (rys. 1). W chwili wyboczenia, kiedy oś pręta wybaczanego dopiero zaczyna się zakrzywiać, rzędne jej są tak małe, że rozkład naprężeń w poszczególnych przekrojach pręta, niezależnie od położenia w stosunku do podpór, odpowiada typowi wykresu przedstawionego na rys 2, przy czym położenie punktu O jest we wszystkich przekrojach pręta w stosunku do krawędzi to samo.



Rys. 2

Przyjmujemy, że w rozpatrywanym przypadku założenie płaskich przekrojów moc swoją zachowuje i oznaczamy odpowiednio przez C_1 i C_2 współczynniki proporcjonalności między odkształceniami i naprężeniami w dwóch częściach przekroju rozdzielonych punktem O. Wobec tego naprężenia spowodowane zginaniem wynoszą w poszczególnych przekrojach w odległości η od punktu O odpowiednio

$$\sigma = C_1 \frac{\eta}{\varrho} \tag{2.1}$$

od strony wypukłej wygiętego pręta (między A i O) i

$$\sigma = C_2 \frac{\eta}{\varrho} \tag{2.2}$$

od strony wklęsłej (między O i B).

Tu ϱ oznacza promień krzywizny osi pręta przy wyboczeniu, przy czym przyjmujemy dalej, że

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{d^2 y}{dx^2}. \tag{2.3}$$

Z warunków równowagi $\Sigma X = 0$ i $\Sigma M = 0$ części pręta zawartej między jedną z podpór a przekrojem aa wynika, że

$$\int_A \left(R_k + C_1 \frac{\eta}{\varrho}\right) dA + \int_B \left(R_k + C_2 \frac{\eta}{\varrho}\right) dA = P, \tag{2.4}$$

$$\int_A \left(R_k + C_1 \frac{\eta}{\varrho}\right) \eta \, dA + \int_B \left(R_k + C_2 \frac{\eta}{\varrho}\right) \eta \, dA = P(y + e), \tag{2.5}$$

skąd

$$C_1 S_A + C_2 S_B = 0 \tag{2.6}$$

oraz

$$(C_1 J_A + C_2 J_B) \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py, \tag{2.7}$$

gdzie S_A i S_B oznaczają momenty statyczne pól części przekroju, położonych na rysunku na lewo i na prawo od punktu O względem osi przechodzącej przez ten punkt prostopadle do płaszczyzny rysunku, J_A i J_B są momentami bezwładności tych samych pól, R_k naprężeniem krytycznym, e odległością punktu O od osi.

O ile wielkości C_1 i C_2 są znane, z równania (2.6) możemy wyznaczyć położenie punktu O, po czym wyznaczamy J_A i J_B oraz J, moment bezwładności pola całego przekroju poprzecznego pręta względem osi środkowej.

Wprowadzając oznaczenie

$$N = \frac{C_1 J_A + C_2 J_B}{J} \tag{2.8}$$

możemy równaniu (2.7) nadać postać

$$NJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py . \tag{2.9}$$

Ponieważ równanie (2.9) z matematycznego punktu widzenia nie różni się od równania

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py , \tag{2.10}$$

z którego może być wyprowadzony wzór E u l e r a na siłę krytyczną przy wyboczeniu sprężystym pręta przedstawionego na rys. 1, tj. wzór

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} , \tag{2.11}$$

musi ono doprowadzić do wzoru na siłę krytyczną

$$P_k = \frac{\pi^2 NJ}{l^2} , \tag{2.12}$$

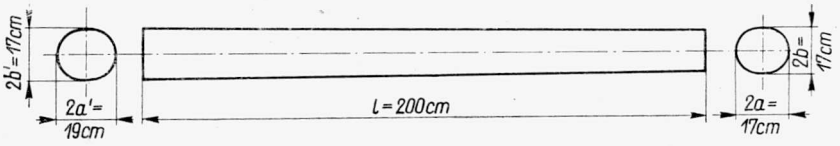
który różni się od wzoru (2.11) tylko tym, że tu wielkość N zastępuje współczynnik sprężystości E.

Spośród słupów drewnianych narażonych na wyboczenie niesprężyste najczęściej mamy do czynienia ze słupami służącymi do obudowy korytarzy w kopalniach. Słupy o takim przeznaczeniu posiadają zwykle długość zawartą w granicach od 1,8 m do 2,8 m i średnicę wahającą się w granicach od 15 cm do 30 cm. Wobec trudności wyznaczenia w sposób ogólny siły krytycznej dla słupów tego rodzaju dalsze rozważania opieramy na obliczeniu przypadku szczególnego, możliwie najbardziej miarodajnego. Za taki uważamy przypadek słupa o długości 2 m mającego kształt stożka o podstawach eliptycznych przy średnicach elipsy równych 15 cm i 17 cm w cieńszym końcu słupa i o średnicach odpowiednio równych 17 cm i 19 cm w jego grubszym końcu. Przyjmujemy, że średnice elipsy zmieniają się wzdłuż pręta w sposób liniowy (rys. 3). Końce słupów uważamy za podparte w sposób przegubowy.

Aczkolwiek dla przyjętych w ten sposób wymiarów słupa wyboczenie jest niesprężyste, wyznaczymy tu przede wszystkim siłę krytyczną w założeniu, że mamy do czynienia z wyboczeniem sprężystym. Poszukujemy więc wzoru dla siły krytycznej P_k w postaci wzoru E u l e r a

$$P_k = \frac{\pi^2 E J}{(\mu l)^2}, \tag{2.13}$$

gdzie μ oznacza współczynnik długości.

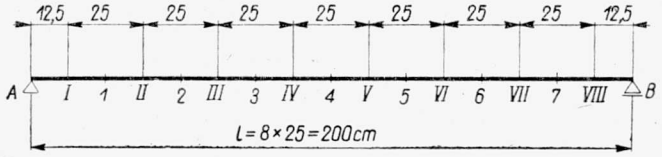


Rys. 3

W tym celu dzielimy wyżej omówiony pręt na odcinki po 25 cm (punkty podziału 1, 2, 3, ...) i obliczamy w środkach tych odcinków (punkty I, II, III, ...) najmniejsze momenty bezwładności poszczególnych elips przekroju poprzecznego (rys. 4) oraz stosunki

$$\frac{J}{J_c} = k, \tag{2.14}$$

gdzie J jest to najmniejszy moment bezwładności przekroju poprzecznego oddalonego o x od cienkiego końca pręta, a $J_c = 2820$ cm^4 najmniejszy moment bezwładności na cienkim końcu B.

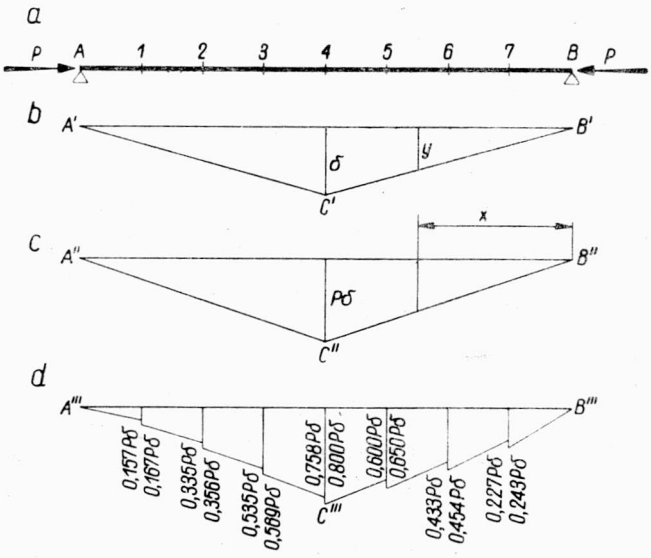


Rys. 4

Przyjmujemy jako pierwszą przybliżoną postać osi odkształconej pręta po wyboczeniu linię łamaną $A'B'C'$ (rys. 5b) o największej nieznanej rzędnej δ i sporządzamy odpowiedni wykres momentów zginających M (rys. 5c). Rzędne wykresu na rys. 5c zmieniamy w punktach 1, 2, 3, ... w stosunku $1 : k$ (rys. 5d) i przyjmujemy otrzymany w ten sposób wykres za wykres jednostkowego obciążenia wtórnego pręta $q = M : k$. Dla ob-

ciążenia q znajdujemy moment zginający w środku pręta (moment wtórny $\mathfrak{M}_{śr}$) i dochodzimy w ten sposób do nowego wyrażenia na ugięcie pręta w środku po wyboczeniu

$$y_{śr} = \frac{\mathfrak{M}_{śr}}{E J_c}. \tag{2.15}$$



Rys. 5

Przyjmujemy dalej jako drugą postać odkształconej osi pręta po wyboczeniu sinusoidę o największej rzędnej $y_{śr}$

$$y = y_{śr} \sin \frac{\pi k}{l}. \tag{2.16}$$

Przyrównując do siebie średnią rzędną osi odkształconej pierwszego przybliżenia do średniej rzędnej osi drugiego przybliżenia, czyli przyrównując do siebie pole $A'B'C'$ i pole ograniczone krzywą (2.16), dochodzimy do następującego wzoru na siłę krytyczną rozpatrywanego pręta:

$$P_k = \frac{\pi^2 E J_c}{(0{,}92\, l)^2}. \tag{2.17}$$

Przechodząc do niesprężystego wyboczenia słupów drewnianych opieramy się na wzorze doświadczalnym T e t m a j e r a - J a s i ń s k i e g o, który dla drewna wszelkich gatunków przybiera postać

$$P_k = A(293 - 1{,}94\,\lambda), \tag{2.18}$$

gdzie A oznacza pole przekroju poprzecznego ściskanego słupa pryzmatycznego, a λ jego smukłość.

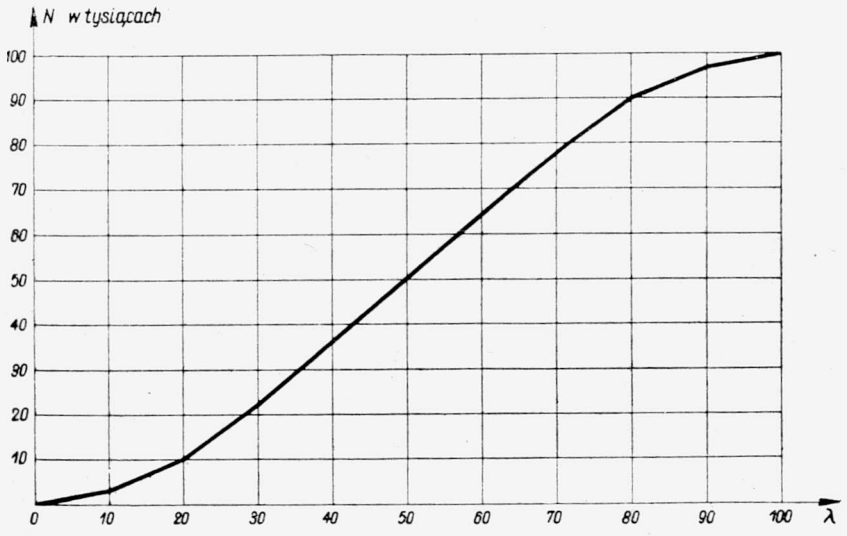
Aby wyzyskać materiał doświadczalny, zawarty we wzorze (2.18) do obliczenia siły krytycznej ze wzorów typu (2.12), ustalamy wartości współczynnika N drogą przyrównania do siebie sił krytycznych obliczonych ze wzorów (2.12), a więc z równania

$$A(a - b\lambda) = \frac{\pi^2 NJ}{l^2}, \tag{2.19}$$

skąd

$$N = \frac{\lambda^2}{\pi^2}(a - b\lambda). \tag{2.20}$$

Wyniki obliczeń przedstawione są na wykresie rys. 6 i w tablicy 1, gdzie wielkości N wyrażone są w kilogramach na cm^2.



Rys. 6

Wracając do wyznaczenia siły krytycznej w przypadku niesprężystego wyboczenia słupa drewnianego stożkowatego ustalamy, że według wzorów (2.11) i (2.17) stosunek siły krytycznej pręta stożkowatego o podstawie eliptycznej i słupa walcowatego o tej samej podstawie wynosi

$$\frac{P_k}{P_k^w} = \frac{1}{0{,}84}. \tag{2.21}$$

Ze względu na słabą zmienność przekrojów słupów drewnianych możemy stosować tu bez zastrzeżeń zarówno równanie (2.10) jak i równanie (2.9), a ze względu na matematyczną identyczność tych równań możemy uważać zależność (2.21) za słuszną nie tylko dla słupów sprężystych, lecz i dla niesprężystych.

Tablica 1

λ	N	λ	N
10	2 772	60	64 413
20	10 301	70	78 042
30	21 410	80	89 353
40	34 917	90	97 167
50	49 645	100	100 303

Ponieważ smukłość omawianego słupa walcowatego o podstawie eliptycznej wynosi w danym wypadku

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{J:A}} = 53{,}3\,,$$

znajdujemy z tablicy lub z wykresu odpowiednią wartość $N = 54\,515$.

Stosując wzór (2.12) na siłę krytyczną dla wyboczenia niesprężystego słupa walcowatego o podstawie eliptycznej znajdziemy

$$P_k = \frac{\pi^2 N J}{l^2} = \frac{\pi^2\, 54\,515 \cdot 2820}{200^2} = 38 \text{ t}, \tag{2.22}$$

skąd dla słupa stożkowatego na podstawie wzoru (2.21) znajdujemy

$$P_k = \frac{38}{0{,}84} = 45{,}2 \text{ t}. \tag{2.23}$$

Możemy obliczyć siłę krytyczną w tym ostatnim wypadku również bezpośrednio ze wzoru (2.17) wstawiając N zamiast E:

$$P_k = \frac{\pi^2\, 54\,515 \cdot 2820}{(0{,}92 \cdot 200)^2} = 45{,}2 \text{ t}. \tag{2.24}$$

Sposób użyty przy wyprowadzeniu wzoru (2.17) może być zastosowany dla dowolnych wymiarów słupa ściskanego, a więc może być wyzyskany i w przypadku słupów podlegających wyboczeniu sprężystemu.

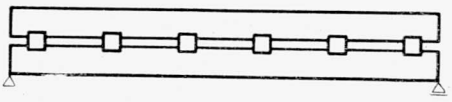
3. Dźwigary wielokrotne

Typowym dla konstrukcji drewnianych schematem belki zginanej jest dźwigar wielokrotny. Powstaje on w drodze nakładania na siebie szeregu belek z drewna kantowego lub okrągłego. Poszczególne belki dźwigara wielokrotnego bądź położone są bezpośrednio jedna na drugiej, bądź też za pośrednictwem klinów.

Kliny łączące poszczególne belki dźwigara wielokrotnego mają dwojakie znaczenie: służą one, mianowicie, albo do uniemożliwienia przesuwa-

nia się po sobie poszczególnych belek dźwigara i do wytworzenia z nich w ten sposób dźwigara, który by można, z pewnymi zresztą zastrzeżeniami, uważać za dźwigar jednolity, albo też do wytworzenia wolnej przestrzeni między poszczególnymi belkami dźwigara dla zabezpieczenia im potrzebnego przewiewu i zapobieżenia w ten sposób gniciu drewna (rys. 7).

Kliny wykonane w ten sposób, iż mogą zabezpieczyć dźwigarowi złożonemu niezmienność płaskiego przekroju poprzecznego, powodują znaczne koszta i wymagają stałej konserwacji. Niewielkie nawet niedokładności w działaniu takich klinów, wywołane niepoprawnym wykonaniem lub zużyciem, powodują przesuwanie się po sobie poszczególnych belek dźwigara i nie pozwalają go już uważać za jednolity. Poza tym w dźwigarach silnie obciążonych już samo rozmieszczenie klinów natrafia na trudności z powodu powstających w nich wielkich sił ścinających.

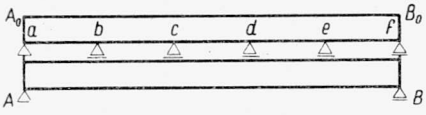


Rys. 7

W ten sposób celowość zastosowania dźwigarów wielokrotnych, pracujących jako jednolite, staje się w wielu wypadkach wątpliwa i dlatego w budowlach bardziej odpowiedzialnych właściwsze jest rozpatrywać belki dźwigara jako pracujące samodzielnie, a kliny uważać jedynie za urządzenia zabezpieczające przed szkodliwym ze względu na trwałość konstrukcji drewnianej bezpośrednim stykaniem się poszczególnych belek na całej ich długości. Kliny mające takie przeznaczenie mogą dopuszczać wzajemne przesuwanie się belek, a rozstaw ich jest przeważnie równomierny.

Podstawowym schematem statycznym dźwigara wielokrotnego, np. podwójnego o klinach mogących się przesuwać, jest więc belka ciągła na podporach *a, b, c* itd. spoczywających na drugiej belce sprężystej w dwóch punktach swobodnie podpartej (rys. 8).

W utartych obliczeniach dźwigarów wielokrotnych niejednolitych przyjmujemy zwykle, że moment zginający rozkłada się między poszczególne belki proporcjonalnie do wskaźników wytrzymałości przekrojów poprzecznych poszczególnych belek, a więc przy tych samych przekrojach belek przypada w jednakowych częściach na każdą z nich. Dalej wykażemy, że rozkład momentu zginającego pomiędzy poszczególne belki dźwigara jest inny i że wobec tego naprężenia w belkach dźwigara mogą być znacznie większe, niżby to wynikało z powyższego układu.



Rys. 8

Punktem wyjścia do rozważań nad rozkładem momentów zginających między poszczególne belki dźwigara wielokrotnego o klinach przesuw-

nych lub bez klinów są doświadczenia, które miały zresztą za cel raczej ustalenie jakościowej niż ilościowej strony zjawiska. Chodziło mianowicie o przekonanie się, czy w przypadku podwójnego dźwigara drewnianego nieklinowanego poszczególne belki jego nie znajdują się jednak w warunkach pod względem wytrzymałościowym korzystniejszych niż dwie belki obok siebie położone. Jako przyczynę oczekiwanego faktu brano pod uwagę tarcie między poszczególnymi belkami dźwigara, pewnego rodzaju wgniatanie się ich jedna w drugą itd.

Doświadczenie wykonano w sposób następujący.

Beleczki o długości wynoszącej w świetle między podporami cylindrycznymi 600 mm obciążano w środku naczyniem z wodą przy temperaturze 4°. Przekrój poprzeczny beleczek drewnianych miał kształt kwadratu o wymiarach 15 mm × 15 mm. Beleczki były wykonane z drewna skrupulatnie dobranego, bez sęków.

Złamano przede wszystkim 3 beleczki pojedyncze, przy czym średnia siła łamiąca wynosiła 19,5 kG (kilogramów), następnie łamano po dwie beleczki położone obok siebie, co dawało średnią siłę łamiącą 38,9 kG.

Wreszcie przystąpiono do łamania beleczek ułożonych jedna na drugiej po dwie, przy czym w dwóch wypadkach układono beleczki bezpośrednio jedna na drugiej, w trzech zaś układano je za pośrednictwem kawałków grubego drutu, mających za zadanie usunięcie bezpośredniego stykania się beleczek na całej ich długości, odgrywających więc w ten sposób rolę przesuwnych klinów.

Siła łamiąca wyniosła w pierwszych dwóch wypadkach 39,1 kG oraz 39,3 kG, w trzech zaś następnych odpowiednio 38,1 kG, 38,3 kG i 38,8 kG, przy czym w tych ostatnich wypadkach zawsze jako pierwsza pękała beleczka górna.

Opisane doświadczenia, aczkolwiek wykonywane niezbyt dokładnie oraz w małej liczbie, nasuwają jednak pewne wnioski, które narzucają się w sposób dość wyraźny.

Przede wszystkim więc wytrzymałość dwóch beleczek położonych bezpośrednio jedna na drugiej mało różni się od wytrzymałości takich samych beleczek położonych obok siebie, co należy zapewne wytłumaczyć faktem, że tarcie między beleczkami było małe zarówno ze względu na ich staranne wyheblowanie, jak i wskutek zwilżenia ich wodą.

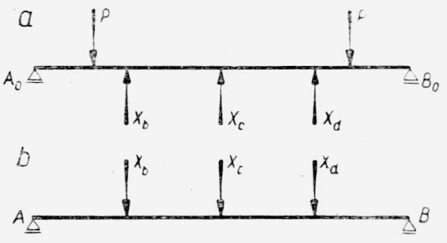
Następnie wytrzymałość dwóch beleczek położonych jedna na drugiej za pośrednictwem podpórek (drutów) jest na ogół cokolwiek mniejsza od wytrzymałości beleczek położonych obok siebie, co można wytłumaczyć tym, że moment zginający nie rozkłada się równomiernie między obie beleczki i że ta z nich, na którą przypada więcej niż połowa momentu, łamie się prędzej i wywołuje w ten sposób zniszczenie dźwigara mniejszą

siłą niż przy bardziej równomiernym rozkładzie momentu zginającego na beleczki położone obok siebie.

Dalsze obliczenia oparte są na wskazówkach ustalonych na podstawie doświadczenia. Dotyczą one dźwigarów wielokrotnych o klinach przesuwnych.

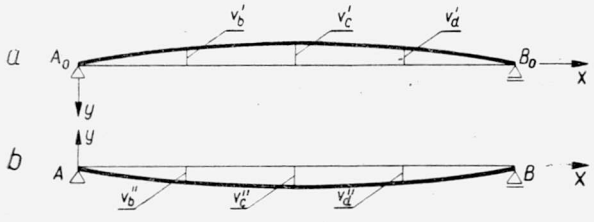
Statycznie wyznaczalny schemat zastępczy dźwigara wielokrotnego przyjmujemy w sposób następujący.

Odrzucamy podpory pośrednie b, c, d, ... (rys. 8) i zastępujemy działanie ich na dolną i górną belkę dźwigara przez siły wzajemnego oddziaływania na siebie tych belek X_b, X_c, X_d, ... (rys. 9). Uważamy, że belki są nieściśliwe w kierunku działania sił zewnętrznych i że wobec tego osie ich można uważać za równoległe do krawędzi również i po ich odkształceniu. Przesunięcia pionowe punktów b, c, d, ... zarówno górnej AB, jak i dolnej $A_0 B_0$ belki dźwigara oznaczone są na rys. 10 literami v.



Rys. 9

Ponieważ w rzeczywistości w punktach podpór b, c, d, ... odległości pionowe osi obydwóch belek (tzn. prostopadłe do osi belki) nie mogą wskutek przyjętych założeń i wobec nieodkształcalności klinów ulec zmianie, dochodzimy więc do równań



Rys. 10

$$(3.1)\quad \begin{cases} v'_b + v''_b = 0\,, \\ v'_c + v''_c = 0\,, \\ v'_d + v''_d = 0\,, \ldots, \end{cases}$$

gdzie przesunięcia (ugięcia) pionowe belek AB i A_0B_0 wyobrażamy sobie jako funkcje sił X_b, X_c, X_d ... i oznaczamy odpowiednio przez v' i v''.

W przypadku przylegania górnej belki do dolnej na całej jej długości liczba równań (3.1) staje się nieskończonością. Całkowite przyleganie obu belek byłoby jednak możliwe tylko w tym wypadku, gdyby były one ze sobą połączone w ten sposób, żeby nie mogły się oddzielać. Ponieważ jednak śruby dźwigara wielokrotnego takiego połączenia nie zabezpieczają, powstają więc w belce górnej odcinki oddzielające się od belki dolnej (rys. 11). Obliczenie długości tych odcinków natrafia na duże trudności.

Rys. 11

W dźwigarach klinowanych nie natrafiamy na podobne trudności, gdyż w tym wypadku łatwo możemy doprowadzić do tego, aby poszczególne belki dźwigara, dotykające się wzajemnie tylko w miejscach klinów, były zabezpieczone przed oddzieleniem się od siebie. Ograniczymy się do zbadania rozkładu momentów zginających między belki dźwigara wielokrotnego tylko w tych warunkach.

Wyznaczenie sił X w dźwigarze wielokrotnym klinowanym odbywa się na podstawie równań (3.1), w których przesunięcia v są funkcjami sił X. Przedstawienie przesunięć v w postaci funkcyj X stanowi główną trudność rachunkową zadania, którą przezwyciężamy stosując przybliżoną metodę wariacyjną R i t z a i T i m o s z e n k i.

Przesunięciom v'' dolnej belki AB dźwigara (rys. 10) w punktach pod klinami b, c, d, ... nadajemy postać

$$(3.2)\qquad \begin{cases} v''_b = -X_b\delta^b_b - X_c\delta^c_b - X_d\delta^d_b \ldots, \\ v''_c = -X_b\delta^b_c - X_c\delta^c_c - X_d\delta^d_c \ldots, \\ v''_d = -X_b\delta^b_d - X_c\delta^c_d - X_d\delta^d_d \ldots, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

gdzie symbol δ^c_b oznacza np. ugięcie spowodowane w punkcie b przez siłę 1 zaczepioną w punkcie c.

Jeżeli oznaczymy przez v_b, v_c, v_d, ... ugięcia górnej belki A_0B_0 dźwigara pod działaniem sił zewnętrznych bezpośrednio zaczepionych P, wówczas dla całkowitych przesunięć pionowych tej belki w miejscach klinów znajdziemy wzory

$$(3.3)\qquad \begin{cases} v'_b = v_b - X_b\delta^b_b - X_c\delta^c_b - X_d\delta^d_b \ldots, \\ v'_c = v_c - X_b\delta^b_c - X_c\delta^c_c - X_d\delta^d_c \ldots, \\ v'_d = v_d - X_b\delta^b_d - X_c\delta^c_d - X_d\delta^d_d \ldots. \end{cases}$$

W związku z wyrażeniami (3.2) i (3.3) równania (3.1) przybierają postać kanoniczną

$$(3.4)\qquad \begin{cases} X_b\delta^b_b + X_c\delta^c_b + X_d\delta^d_b \ldots = \dfrac{v_b}{2}, \\ X_b\delta^b_c + X_c\delta^c_c + X_d\delta^d_c \ldots = \dfrac{v_c}{2}, \\ X_b\delta^b_d + X_c\delta^c_d + X_d\delta^d_d \ldots = \dfrac{v_d}{2}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Stosując dalej sposób R i t z a i T i m o s z e n k i będziemy poszukiwali odkształconej górnej belki A_0B_0 pod postacią sumy sinusoid

$$y = \sum_1^n A_i' \sin \frac{i\pi x}{l}, \tag{3.5}$$

odkształconej zaś dolnej belki AB pod postacią

$$y = \sum_1^n A_i'' \sin \frac{i\pi x}{l}, \tag{3.6}$$

gdzie n oznacza liczbę przyjętych w obliczeniu sinusoid i przedstawia liczbę tym większą, im większa jest wymagana dokładność obliczenia. W razie symetrycznego obciążenia belki odkształcona jej będzie również symetryczna względem środka, wobec czego przyjmujemy dla i tylko liczby nieparzyste 1, 3, 5, ... Odległości x odmierzamy od lewej podpory dźwigara.

Do obliczenia energii sprężystej belek korzystamy z równania

$$V = \int_0^l \frac{M_x^2\, dx}{2EJ} = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2\, dx, \tag{3.7}$$

gdzie M_x oznacza moment zginający w danym przekroju belki, a y'' drugą pochodną ugięcia y. Stąd otrzymujemy dla energii sprężystej górnej i dolnej belki dźwigara odpowiednio

$$V' = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_1^n i^4 A_i'^2, \tag{3.8}$$

$$V'' = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_1^n i^4 A_i''^2. \tag{3.9}$$

Dla pracy sił X, które możemy uważać za zewnętrzne w stosunku do belek A_0B_0 i AB, znajdujemy odpowiednio wyrażenia

$$T' = \sum_1^m P_j \sum_1^n A_i' \sin \frac{i\pi x_j}{l} - \sum_1^s X_g \sum_1^n A_i' \sin \frac{i\pi a_g}{l}, \tag{3.10}$$

$$T'' = -\sum_1^s X_g \sum_1^n A_i' \sin \frac{i\pi a_g}{l}, \tag{3.11}$$

w których P_j oznacza jedną z sił zaczepionych w liczbie m do dźwigara wielokrotnego, x_j odległość tej siły od lewej podpory dźwigara, X_g jedną z sił wzajemnego oddziaływania na siebie belek dźwigara, a_g odległość punktów zaczepienia tych sił od lewej podpory dźwigara i s liczbę klinów.

Znajdujemy dalej różnicę między energią sprężystą V a pracą sił zewnętrznych

$$U = V - T \tag{3.12}$$

i przyrównując do zera pochodne funkcji U względem parametrów A_i, czyli ustawiając równania typu

$$\frac{\partial U}{\partial A_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial A_2} = 0 \quad ,\ldots, \tag{3.13}$$

obliczamy z nich wszystkie potrzebne wielkości A_i' i A_i'':

$$A_i' = \frac{2\,l^3}{EJ\,\pi^4\,i^4}\left(\sum_1^m P_j \sin\frac{i\,\pi\,x_j}{l} - \sum_1^s X_g \sin\frac{i\,\pi\,a_g}{l}\right), \tag{3.14}$$

$$A_i'' = -\frac{2\,l^3}{EJ\,\pi^4\,i^4}\sum_1^s X_g \sin\frac{i\,\pi\,a_g}{l}\,. \tag{3.15}$$

Wstawiamy wyrażenia (3.14) i (3.15) w równania (3.5) i (3.6):

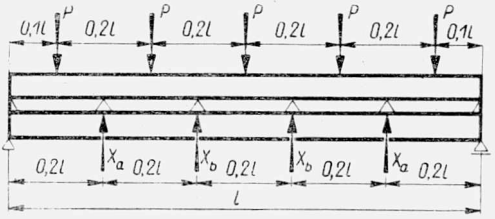
$$y = \sum_1^n \left[\frac{2\,l^3}{EJ\,\pi^4\,i^4}\left(\sum_1^m P_j \sin\frac{i\,\pi\,x_j}{l} - \sum_1^s X_g \sin\frac{i\,\pi\,a_g}{l}\right)\right]\sin\frac{i\,\pi\,x}{l}\,, \tag{3.16}$$

$$y = -\sum_1^n \left(\frac{2\,l^3}{EJ\,\pi^4\,i^4}\sum_1^s X_g \sin\frac{i\,\pi\,a_g}{l}\right)\sin\frac{i\,\pi\,x}{l}\,. \tag{3.17}$$

Aby otrzymać stąd przesunięcia v_b' i v_b'', należy np. wstawić we wzory (3.16) i (3.17) $x = a_b$, gdzie a_b oznacza odległość klina b od lewej podpory dźwigara; w podobny sposób dochodzimy do wyrażeń dla v_c', v_c'', v_d', v_d'' itd. W związku z tym równania układu (3.1) przybierają postać

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_1^n\left(\sum_1^m P_j \sin\frac{i\,\pi\,x_j}{l} - 2\sum_1^s X_g \sin\frac{i\,\pi\,a_g}{l}\right)\sin\frac{i\,\pi\,a_b}{l} = 0\,, \\ \displaystyle\sum_1^n\left(\sum_1^m P_j \sin\frac{i\,\pi\,x_j}{l} - 2\sum_1^s X_g \sin\frac{i\,\pi\,a_g}{l}\right)\sin\frac{i\,\pi\,a_c}{l} = 0\,, \\ \displaystyle\sum_1^n\left(\sum_1^m P_j \sin\frac{i\,\pi\,x_j}{l} - 2\sum_1^s X_g \sin\frac{i\,\pi\,a_g}{l}\right)\sin\frac{i\,\pi\,a_d}{l} = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{3.18}$$

Bierzemy jako przykład obliczenie dźwigara przedstawionego na rys. 12. Dźwigar ten jest obciążony symetrycznie siłami zaczepionymi w odległości 0,2 l jedna od drugiej, przy czym kliny dźwigara rozstawione są również w odległości 0,2 l od siebie. Sztywność belki EJ jest taka sama dla obydwóch belek dźwigara.



Rys. 12

Przyjmujemy dla osi odkształconej górnej belki dźwigara postać

$$(3.19)\qquad y = A'_1 \sin\frac{\pi x}{l} + A'_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + A'_5 \sin\frac{5\pi x}{l} + A'_7 \sin\frac{7\pi x}{l},$$

dla dolnej zaś postać

$$(3.20)\qquad y = A''_1 \sin\frac{\pi x}{l} + A''_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + A''_5 \sin\frac{5\pi x}{l} + A''_7 \sin\frac{7\pi x}{l}.$$

Energia sprężysta nagromadzona w obydwóch belkach dźwigara wyraża się w tych warunkach wzorami:

$$(3.21)\qquad V' = \frac{EJ\pi^4}{4l^3}(A'^2_1 + 3^4 A'^2_3 + 5^4 A'^2_5 + 7^4 A'^2_7),$$

$$(3.22)\qquad V'' = \frac{EJ\pi^4}{4l^3}(A''^2_1 + 3^4 A''^2_3 + 5^4 A''^2_5 + 7^4 A''^2_7).$$

Dla pracy sił P i X zaczepionych do górnej belki i dla pracy sił X zaczepionych do dolnej belki znajdujemy odpowiednio wyrażenia:

$$\begin{aligned}(3.23)\qquad T' = {} & 2P(A'_1 \sin 0{,}1\pi + A'_3 \sin 0{,}3\pi + A'_5 \sin 0{,}5\pi + A'_7 \sin 0{,}7\pi) + \\ & + 2P(A'_1 \sin 0{,}3\pi + A'_3 \sin 0{,}9\pi + A'_5 \sin 1{,}5\pi + A'_7 \sin 2{,}1\pi) + \\ & + P(A'_1 \sin 0{,}5\pi + A'_3 \sin 1{,}5\pi + A'_5 \sin 2{,}5\pi + A'_7 \sin 3{,}5\pi) - \\ & - X_1(A'_1 \sin 0{,}2\pi + A'_3 \sin 0{,}6\pi + A'_5 \sin 1{,}0\pi + A'_7 \sin 1{,}4\pi) - \\ & - X_2(A'_1 \sin 0{,}4\pi + A'_3 \sin 1{,}2\pi + A'_5 \sin 2{,}0\pi + A'_7 \sin 2{,}8\pi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3.24)\qquad T'' = {} & -X_1(A'_1 \sin 0{,}2\pi + A'_3 \sin 0{,}6\pi + A'_5 \sin 1{,}0\pi + A'_7 \sin 1{,}4\pi) - \\ & - X_2(A'_1 \sin 0{,}4\pi + A'_3 \sin 1{,}2\pi + A'_5 \sin 2{,}0\pi + A'_7 \sin 2{,}8\pi).\end{aligned}$$

Ze wzorów (3.14) i (3.15) obliczamy współczynniki A:

$$
(3.25)\quad \begin{cases}
A_1' = \dfrac{2l^3}{EJ\pi^4}(1{,}61804\,P - 0{,}58779\,X_a - 0{,}95106\,X_b), \\
A_3' = \dfrac{2l^3}{81\,EJ\pi^4}(0{,}61804\,P - 0{,}95106\,X_a - 0{,}58779\,X_b), \\
A_5' = \dfrac{2l^3}{625\,EJ\pi^4}\,0{,}5\,P, \\
A_7' = \dfrac{2l^3}{2401\,EJ\pi^4}(0{,}61804\,P + 0{,}95106\,X_a - 0{,}58779\,X_b), \\
A_1'' = \dfrac{2l^3}{EJ\pi^4}(-0{,}58779\,X_a - 0{,}95106\,X_b), \\
A_3'' = \dfrac{2l^3}{81\,EJ\pi^4}(-0{,}95106\,X_a + 0{,}58779\,X_b), \\
A_5'' = 0, \\
A_7'' = \dfrac{2l^3}{2401\,EJ\pi^4}(0{,}95106\,X_a - 0{,}58779\,X_b).
\end{cases}
$$

Zakładając kolejno $a_g = 0{,}2\ l$ i $a_g = 0{,}4\ l$ oraz biorąc pod uwagę, że x_j przybiera tu wartości $0{,}1\ l$, $0{,}3\ l$ i $0{,}5\ l$ ustawiamy równania typu (3.18):

$$
\begin{aligned}
(3.26)\quad & (1{,}61804\,P - 2\cdot 0{,}58779\,X_a - 2\cdot 0{,}95106\,X_b)\sin 36^\circ + \\
& + (0{,}61804\,P - 2\cdot 0{,}95106\,X_a + 2\cdot 0{,}58779\,X_b)\frac{\sin 72^\circ}{81} + \\
& + (-0{,}61804\,P - 2\cdot 0{,}95106\,X_a + 2\cdot 0{,}58779\,X_b)\frac{\sin 72^\circ}{2401} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3.27)\quad & (1{,}61804\,P - 2\cdot 0{,}58779\,X_a - 2\cdot 0{,}95106\,X_b)\sin 72^\circ - \\
& - (0{,}61804\,P - 2\cdot 0{,}95106\,X_a + 2\cdot 0{,}58779\,X_b)\frac{\sin 36^\circ}{81} + \\
& + (-0{,}61804\,P - 2\cdot 0{,}95106\,X_a + 2\cdot 0{,}58779\,X_b)\frac{\sin 72^\circ}{2401} = 0,
\end{aligned}
$$

czyli równania:

$$
(3.28)\qquad 0{,}71331\,X_a + 1{,}10378\,X_b - 0{,}95808\,P = 0,
$$

$$
(3.29)\qquad 1{,}10378\,X_a + 1{,}81786\,X_b - 1{,}53451\,P = 0.
$$

Z równań tych znajdujemy następujące wartości sił X wzajemnego oddziaływania na siebie górnej i dolnej belki dźwigara wielokrotnego:

$$X_a = 0{,}610\,P, \qquad X_b = 0{,}473\,P. \tag{3.30}$$

Reakcja na podporze A górnej belki dźwigara równa się wobec tego

$$R_A^g = \frac{5\,P}{2} - 0{,}610\,P - 0{,}473\,P = 1{,}42\,P, \tag{3.31}$$

dolnej zaś

$$R_A^d = 0{,}610\,P + 0{,}473\,P = 1{,}08\,P. \tag{3.32}$$

Moment zginający w środku całego dźwigara i odpowiednie momenty zginające w górnej i dolnej belce wynoszą w tych warunkach:

$$M_{sr} = \frac{5\,P}{2}\,0{,}5\,l - P \cdot 0{,}4\,l - P \cdot 0{,}2\,l = 0{,}65\,Pl, \tag{3.33}$$

$$M_{sr}^g = 1{,}42\,P \cdot 0{,}5\,l - P \cdot 0{,}4\,l + 0{,}61\,P \cdot 0{,}3\,l - \\ - P \cdot 0{,}2\,l + 0{,}47\,P \cdot 0{,}1\,l = 0{,}34\,Pl, \tag{3.34}$$

$$M_{sr}^d = 1{,}08\,P \cdot 0{,}5\,l - 0{,}61\,P \cdot 0{,}3\,l - 0{,}47\,P \cdot 0{,}1\,l = 0{,}31\,Pl, \tag{3.35}$$

skąd wynika, że moment M_{sr}^g większy jest od momentu M_{sr}^d o 10%. Dla innych przekrojów dźwigara różnica między momentem zginającym w górnej i dolnej belce dochodzi do 30%.

W ten sposób wynik obliczeń statycznych potwierdza spostrzeżenia zdobyte drogą doświadczeń.

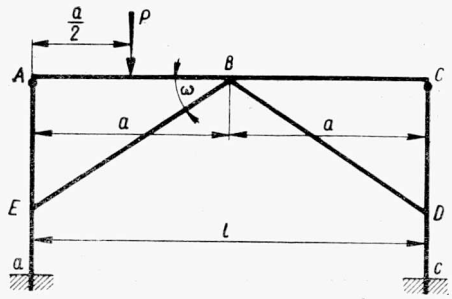
Fakt, że w dźwigarze wielokrotnym naprężenia zginające wypadają w górnej belce większe niż w dolnej w tym samym przekroju poprzecznym obydwóch belek, wskazuje na celowość umieszczania gorszych pod względem gatunku drewna belek w dolnym piętrze dźwigara wielokrotnego, a lepszych w górnym.

4. Układy zastrzałowe

Konstrukcje rozporowe, a więc konstrukcje podlegające w zasadzie jednoczesnemu zginaniu i ściskaniu, są reprezentowane wśród konstrukcji z drewna przez układy zastrzałowe. Spośród układów zastrzałowych mają najczęstsze zastosowanie w budownictwie układy jednozastrzałowe, czyli trójkątno-zastrzałowe. Bardziej skomplikowane układy zastrzałowe znajdują zastosowanie tylko w przypadkach, gdy mamy zapewniony bardzo dobry materiał drzewny i dobrą robociznę.

Aby móc mówić o możliwych uproszczeniach w obliczeniu konstrukcji zastrzałowych, należy się zastanowić nad schematem ścisłego obliczenia układu zastrzałowego.

Na rysunku 13 proste $a\,A$ i $c\,C$ oznaczają słupy układu zastrzałowego, $A\,C$ belkę główną, a $E\,B$ i $B\,D$ zastrzały.



Rys. 13

Przyjmujemy, że zastrzały podtrzymujące belkę główną układu w punkcie B są rozmieszczone względem tego punktu w sposób symetryczny. Ze względu na właściwości połączeń drzewnych nie możemy uważać połączeń w punktach B, E i D za sztywne, wobec czego zakładamy tu istnienie przegubów.

O ile belka główna ma położenie poziome, to pionowe obciążenie jej wywołuje w obu zastrzałach siły równe

$$S = \frac{R_B}{2 \sin \omega}, \tag{4.1}$$

gdzie R_B oznacza reakcję belki głównej w punkcie zbiegania się zastrzałów.

Siły S działające w zastrzałach powodują ich skróty równe

$$\Delta s = \frac{R_B\, s}{2\, E\, A \sin \omega}, \tag{4.2}$$

gdzie s oznacza długość zastrzału, A pole jego przekroju poprzecznego, E zaś współczynnik sprężystości drewna przy ściskaniu.

W związku ze skrótem (4.2) punkt B doznaje pionowego przesunięcia

$$v_B = \frac{\Delta s}{\sin \omega} = \frac{R_B\, s}{2\, E\, A \sin^2 \omega}. \tag{4.3}$$

Belkę główną układu $A\,C$ możemy rozpatrywać jako belkę swobodnie podpartą w punktach A i C i obciążoną poza ciężarami znajdującymi się na belce AC jeszcze siłą R_B, zaczepioną w jej środku i skierowaną ku górze. Ugięcie w punkcie B tej belki wyniesie

$$y_B = y_0 - \frac{R_B\, l^3}{48\, E\, J}, \tag{4.4}$$

gdzie y_0 oznacza ugięcie, jakiego doznałaby w punkcie B belka swobodnie podparta w dwóch punktach A i C, gdyby na nią działały tylko

ciężary znajdujące się na belce, drugi zaś dodajnik prawej części równania (4.4) dotyczy zginania belki $A\,C$ siłą R_B.

Również i po odkształceniu układu między zastrzałami a belką główną przerwy być nie może, wobec czego pionowe przesunięcie się punktu przecięcia zastrzałów musi być równe ugięciu w środku belki, skąd mamy zależność

$$v_B = y_B\,, \tag{4.5}$$

która doprowadza do wyrażenia

$$R_B = \frac{y_0}{\dfrac{s}{2\,A\,E\sin^2\omega} + \dfrac{l^3}{48\,E\,J}}\,. \tag{4.6}$$

Wyrażenie to uwzględnia wpływ sprężysty skrótu zastrzałów na wielkość R_B i wobec tego traci sens dla zastrzałów nie ulegających skrótowi, gdyż wówczas mamy do czynienia z belką ciągłą na podporach sztywnych. Wyrażenie to nie uwzględnia, jak widać, niesprężystego przesunięcia pionowego punktu B.

Mówiąc o obliczaniu belek konstrukcji zastrzałowych przyjmujemy, że skrajne punkty układu A i C podparte słupami nie ulegają pionowym przesunięciom ani sprężystym, ani też trwałym. Założenie to nie jest na ogół dalekie od rzeczywistości; gdybyśmy jednak pionowe przesunięcie punktów A i C chcieli w obliczeniu uwzględnić, to otrzymalibyśmy, jak tego dowodzą obliczenia, różnicę w reakcji R_B dochodzącą do 13%.

Po wyznaczeniu reakcji R_B ze wzoru (4.6) dalsze sprawdzenie wymiarów głównej belki układu odbywa się na podstawie momentu zginającego, obliczonego ze wzoru

$$M_x = M_{0x} - \frac{R_B}{2}\,x\,, \tag{4.7}$$

gdzie x oznacza odległość pewnego przekroju belki $A\,C$ od podpory A, M_{0x} zaś moment zginający, który by w tym przekroju miał miejsce, gdyby belka była swobodnie podparta w punktach A i C.

Wpływ sprężystego skrótu zastrzałów $E\,B$ i $B\,D$ na wielkość reakcji R_B jest niewielki, nie dochodzi zwykle do 20%. Wpływ ten może być śmiało pominięty przy korzystaniu z tego rodzaju materiału budowlanego jak drewno, którego właściwości sprężyste nie są jednorodne.

Pominięcie sprężystości zastrzałów sprowadza schemat statyczny belki głównej układu przedstawionego na rys. 13 do schematu belki ciągłej dwuprzęsłowej na trzech podporach niesprężystych A, B, C.

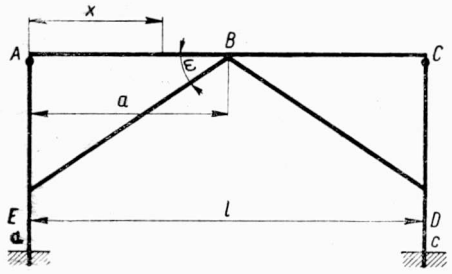
Moment zginający M_B nad podporą B może być wyznaczony z równania trzech momentów, które w danym wypadku przybiera postać

$$4 M_B a = -6 (\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2), \tag{4.8}$$

gdzie $\mathfrak{V}_1$ i $\mathfrak{V}_2$ wyrażają odpowiednio reakcje wtórne podpory B belek AB i BC.

Zachodzi tu pytanie, czy nie można by zastąpić obliczenia belki AC według równania (4.8) przez obliczenie jej jako belki rozciętej w punkcie B.

Obliczanie belek układu zastrzałowego jako ciągłych zmniejsza wprawdzie momenty zginające i pozwala na stosowanie poprzecznych wymiarów belki mniejszych niż przy obliczaniu jej jako rozciętej w punkcie B, nasuwa jednak wątpliwość, czy punkt B może być uważany, pomimo założenia niesprężystości zastrzałów, za nieprzesuwny w kierunku pionowym, co jest warunkiem koniecznym, aby belkę AC można było uważać za belkę ciągłą na podporach sztywnych.



Rys. 14

Zestawmy na przykładzie mającym ogólniejsze znaczenie wyniki obydwóch sposobów obliczenia.

Weźmy więc pod uwagę układ przedstawiony na rys. 13 i wyobraźmy sobie, że przęsło AB belki głównej AC obciążone jest w środku siłą skupioną P (rys. 14) i że ciężar własny belki może być w porównaniu z tą siłą pominięty.

Gdybyśmy uważali, że belka AB jest rozcięta nad podporą B, wówczas moment zginający w środku tej belki wyniósłby

$$M_1 = \frac{Pa}{4} = 0{,}250\, Pa, \tag{4.9}$$

reakcja zaś podpory B

$$R_B = \frac{P}{2}. \tag{4.10}$$

Gdyby belka AC była belką ciągłą na podporach sztywnych, nad podporą B działałby moment zginający, obliczony ze wzoru (4.9) i równy

$$M_B = 0{,}094\, Pa, \tag{4.11}$$

a wówczas w przęśle AB działałby największy moment

$$M_1' = 0{,}203\, Pa, \tag{4.12}$$

a w przęśle $B\,C$ moment

$$M_2' = 0{,}047\,Pa\,, \tag{4.13}$$

który miałby tendencję do wyginania tego przęsła ku górze.

Odpowiednio reakcja podpory B wyniosłaby w danym razie

$$R_B' = \frac{P}{2} + 2\frac{M_B}{a} = 0{,}688\,P. \tag{4.14}$$

Z porównania momentów zginających, podanych we wzorach (4.9), (4.11), (4.12) i (4.13) widać, że moment zginający w środku przęsła $A\,B$, obliczanego jako belka swobodnie podparta w punktach A i B, jest większy od największego z momentów powstających w tym samym przęśle rozpatrywanym jako przęsło belki ciągłej $A\,C$. Stąd wynika, że obliczenie momentów zginających w belce głównej dźwigara trójkątno-jednozastrzałowego, jako w belce rozciętej w punkcie zbiegania się zastrzałów, daje pewien zapas bezpieczeństwa pociągając za sobą jednocześnie dodatkowy nakład materiału.

Rzecz ma się inaczej, gdy chodzi o wyznaczenie wartości reakcji R_B w punkcie B zbiegania się zastrzałów. Jak widać z porównania wzorów (4.10) i (4.14), większą wartość tej reakcji otrzymamy przy obliczeniu głównej belki dźwigara jako ciągłej.

Ponieważ siły w zastrzałach dźwigara trójkątno-jednozastrzałowego, jak to wynika ze wzoru (4.1), są proporcjonalne do reakcji R_B, większy więc zapas bezpieczeństwa w zastrzałach otrzymamy obliczając reakcję tę w założeniu, że belka $A\,C$ nie jest w punkcie B rozcięta.

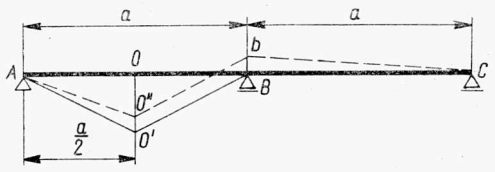
Zdawać by się mogło, że stoimy jedynie przed kwestią, czy warto jest poświęcić pewną ilość materiału dla uzyskania uproszczeń w obliczeniu statycznym konstrukcji zastrzałowej. Kwestia ta przestaje być jednak kwestią czysto ekonomiczną i staje się kwestią bezpieczeństwa, jeżeli weźmiemy pod uwagę okoliczność, że punkt B na rys. 13 może ulec przesunięciu w kierunku pionowym i że wówczas stosowanie równania trzech momentów do obliczenia momentów zginających w belkach głównych układów zastrzałowych staje się już ryzykowne.

Jeżeli przesunięcia pionowe punktów B wywołane przez sprężyste skróty zastrzałów mogą być pominięte, pozostają jednak przesunięcia niesprężyste. Przesunięcia te powstają wskutek wysychania drewna, wskutek nieścisłości roboty ciesielskiej itp. Zastanówmy się nad ich wpływem na wielkość momentów zginających i reakcyj belki głównej mostu zastrzałowego.

Przypuśćmy, że w układzie przedstawionym na rys. 14 rozpiętość $A\,B$ belki głównej wynosi $a = 2$ m, ciężar $P = 5000$ kG, moment bezwładności

belki $J = 25\,000$ cm^4. Współczynnik sprężystości przy ściskaniu drewna przyjmujemy za równy $E = 100\,000$ kG/cm^2.

Przy obliczeniu belki AB jako swobodnie podpartej w punktach A i B wykres momentów zginających miałby kształt przedstawiony na rys. 15 linią pełną. Tu rzędna wykresu w środku odcinka AB belki głównej wynosi w myśl wzoru (4.9) $00' = 0{,}250\ P\,a$. Przy obliczeniu belki głównej jako belki ciągłej otrzymaliśmy wykres przedstawiony na rys. 15 linią przerywaną, przy czym środkowa rzędna wykresu wyniosłaby w myśl wzoru (4.12) $00'' = 0{,}203\ P\,a$, rzędna zaś nad podporą B w myśl wzoru (4.11) $Bb = 0{,}094\ P\,a$.



Rys. 15

Skoro podpora B osiądzie, belka główna dozna dodatkowego ugięcia ku dołowi, które zmniejszy wygięcie belki wypukłością do góry.

Równanie trzech momentów dla belki ciągłej na podporach sprężystych przybiera w danym razie postać

$$4\,M_B a = -6\,\frac{Pa}{4}\,\frac{a}{4} + 6\,EJf\,\frac{2}{a}, \tag{4.15}$$

gdzie f oznacza osiadanie belki w punkcie B.

Ze wzoru (4.15) możemy obliczyć tę wartość f, przy której moment M_B nad podporą B równy jest zeru. W danym razie $f = 0{,}5$ cm.

Zmniejszenie momentu podporowego powoduje jednocześnie zwiększenie momentu zginającego w środku przęsła AB, zmniejsza więc bezpieczeństwo głównej belki dźwigara zastrzałowego obliczonej jako belka ciągła.

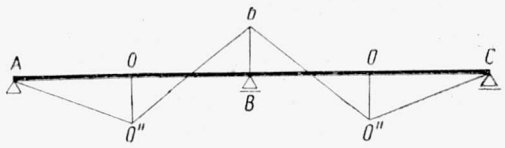
Jak widać ze wzoru (4.14), zmniejszenie momentu zginającego M_B wpływa na zmniejszenie reakcji R_B.

Osiadanie f belki głównej w punkcie B, otrzymane w rozwiązanym poprzednio przykładzie, nie jest dla belki o przyjętych wyżej wymiarach bynajmniej niemożliwe, z wykresu zaś przedstawionego na rys. 15 oraz ze wzoru (4.15) wynika, że również osiadanie mniejsze od 0,5 cm powoduje zwiększenie momentu zginającego w środku przęsła AB belki głównej oraz zmniejszenie reakcji R. Zwiększenie osiadania belki ponad wartość f otrzymaną z równania (4.15) jest zazwyczaj łatwe już do zauważenia i musi być usuwane drogą wprowadzenia podkładki między zbiegające się w punkcie B zastrzały i belkę.

Z powyższego wynika, że reakcja R_B będzie większa wówczas, gdy belka główna osiadać nie będzie, moment zaś zginający w środku AB przęsła, przeciwnie, będzie większy w razie osiadania belki. Należy więc uwa-

żać za bezpieczniejsze, lecz zgoła nie za przesadnie bezpieczne, obliczanie momentów zginających w środku belki jak dla belki swobodnie podpartej w punktach A i B, a reakcji R_B jak dla belki ciągłej AC nierozciętej w punkcie B.

Ponieważ wielkość R_B jest głównie potrzebna do wymiarowania zastrzałów, które podlegają ściskaniu, a więc mogą się znaleźć w niebezpieczeństwie wyboczenia, pewien zapas bezpieczeństwa jest tu pożyteczny. Na podstawie przytoczonych przykładów można ustalić liczbę 40% jako wielkość, o którą należy przy wymiarowaniu zastrzałów powiększyć reakcję R_B w stosunku do reakcji belki AB podpartej swobodnie w punktach A i B.



Rys. 16

Gdybyśmy układ jednozastrzałowy obciążyli symetrycznie z dwóch stron punktu B, otrzymalibyśmy zamiast wykresu na rys. 15 wykres przedstawiony na rys. 16, wzory zaś (4.9)-(4.14) dałyby wartości następujące:

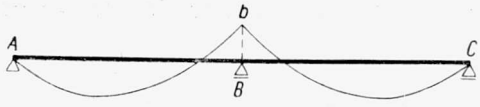
$$(4.16)\qquad \begin{cases} M_1 = 0{,}250\,Pa, & M_2' = 0{,}156\,Pa, \\ M_B = 0{,}188\,Pa, & R_B = P, \\ M_1' = 0{,}156\,Pa, & R_B' = 1{,}376\,P. \end{cases}$$

Przesunięcie pionowe punktu B, przy którym moment M_B obliczony dla belki ciągłej o jednej podporze obniżonej równa się zeru, otrzymamy z równania trzech momentów dla belki na podporach sprężystych:

$$(4.17)\qquad -6\left(\frac{Pa}{4}\,\frac{a}{4}+\frac{Pa}{4}\,\frac{a}{4}\right)+6\,EJf\,\frac{2}{a}=0,$$

skąd znajdziemy $f = 0{,}25$ cm.

Jeżeli ciężary P zaczepione w środku przęseł AB i BC belki głównej rozłożymy w sposób równomierny na całym przęśle, wówczas otrzymamy wykres momentów zginających przedstawiony na rys. 17.



Rys. 17

Zamiast wartości (4.9) - (4.14) otrzymamy wówczas wartości:

$$(4.18)\qquad \begin{cases} M_1 = 0{,}125\,qa^2, & M_1' = 0{,}070\,qa^2, \\ M_B = 0{,}125\,qa^2, & M_2' = 0{,}070\,qa^2, \\ R_B = 1{,}000\,qa, & R_B' = 1{,}250\,qa, \end{cases}$$

a odpowiednie równanie trzech momentów przybiera postać

$$-6\left(\frac{q\,a^2}{24}+\frac{q\,a^2}{24}\right)+EJf\frac{2}{a}=0, \tag{4.19}$$

skąd wyznaczymy tę wartość osiadania f, dla której moment $M = 0$; wynosi ona 0,12 cm.

Jak widzimy, obliczenia porównawcze doprowadzają do wniosku, że wyznaczenie momentów zginających w poszczególnych przęsłach belki głównej układu zastrzałowego powinno być wykonywane w założeniu, że przęsła te są belkami w dwóch punktach swobodnie podpartymi, wyznaczenie zaś reakcji belki głównej w punkcie przecinania się zastrzałów w założeniu, że mamy do czynienia z belką na podporach stałych.

Резюме

АНАЛИЗ СТАТИЧЕСКИХ СХЕМ ДЕРЕВЯННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Определение статически неопределимых величин в деревянных конструкциях и определение критических сил в деревянных стойках хотя и требует обоснования на законе Гука, но, одновременно, принуждает учитывать специальные условия работы деревянных конструкций, а также неоднородность и анизотропию древесины. Поэтому статические схемы деревянных конструкций разнятся от схем других конструкций. Работа посвящена анализу трех, самых характерных для древесины, конструкционных элементов: непризматических стоек, составных балок и раскосных систем. Анализ приводит к установлению ряда конструкционных свойств упомянутых систем, а в частности:

в главе II — приводится вычисление деревянных конусообразных стоек, между прочим и крепежного леса;

в главе III — обосновывается, что верхние балки составных балок должны быть изготовлены из лучшей древесины, чем нижние;

в главе IV — объясняется, при какой, именно, точности вычисленные балки раскосных систем можно трактовать как разрезные — при определении изгибающих моментов, и как неразрезные балки — при определении реакции.

Summary

AN ANALYSIS OF STATICAL COMPUTATION METHODS OF TIMBER STRUCTURES

The computation of redundat quantities in timber structures and the determination of critical forces in timber struts are based on Hooke's law. It is necessary, however, to take into consideration, at the same

time, the special conditions for timber structures, as well as the heterogeneity and the anisotropy of wood. The methods of statical computation of timber structures differ therefore from those for other materials. This paper is concerned with the analysis of the three most typical elements for timber structures. These are: nonprismatic struts, built-up girders and brace structures. The analysis results in the determination of a number of structural properties of those systems.

Sec. II contains a description of a calculation method of conical timber struts, in particular pit-props.

In Sec. III a conclusion is reached that upper beams of built-up girders should be made of better material than the lower ones.

In Sec. IV the degree of exactness is determined, for which the beams of brace systems can be treated as composed of segments, for the determination of bending moments, and as continuous beams, for the determination of the reactions.

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 grudnia 1954 r.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

UKAZAŁY SIĘ

Tom I obejmuje oddzielne zeszyty I - XV·2

I. F. Szelągowski, Rozwiązanie zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych — O pewnych szczególnych przypadkach wytrzymałości tarczy nieograniczonej z odmiennym ośrodkiem zarysu eliptycznego

II. J. Naleszkiewicz i A. Szaniawski, Drgania i stateczność masztów oraz iglic

III. Z. Klębowski, Podstawy uwzględniania wzmocnień obwodowych w wytrzymałościowym obliczaniu rury poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia

IV. M. Życzkowski, Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem siły krytycznej

V. E. Szczepaniak, Nowa metoda rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach bez wykonywania przecięć

VI. W. Olszak, Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych (Plastyczne wyczerpanie nośności)

VII. A. Lisowski, Płyty na sprężystym podłożu

VIII. J. Nowiński, Wyznaczenie przybliżonej wielkości ugięcia płyt na podstawie metody Ritza

IX. W. Fiszdon, O pewnej metodzie obliczania amplitud drgań

X. Z. Wasiutyński, O kształtach pęknięć powierzchniowych

XI. W. Wierzbicki, Dźwigary załamane w planie

XII. W. Wierzbicki, O powstawaniu wyboczenia prętów prostych

XIII. W. Wierzbicki, Kierunki możliwych usprawnień w obliczeniach łuków

XIV. W. Żenczykowski, Podstawy wytrzymałościowe obliczeń statycznych konstrukcji murowanych z cegły

XV·1. W. Wierzbicki, Zastosowanie różnic skończonych w przypadkach dwukierunkowych stanów naprężeń w budowlach

XV·2. W. Wierzbicki, O geometrycznych metodach badania konstrukcji prętowych

Tom II zeszyt 1

XVI. I. Malecki, Metody zastosowania rachunku tensorowego w technice

XVII. J. Nowiński, Podstawy teorii plastyczności (I). Siedem wykładów

XVIII. W. Nowacki, Statyka rusztów płaskich

Tom II zeszyt 2

XIX. W. Bogusz, Z teorii płyt ortotropowych

XX. J. Szmelter, Rozwiązanie zagadnienia błony metodą różnic skończonych z użyciem specjalnego liczydła

XXI. M. Sokołowski, Dwustopniowy sposób obliczania pewnego typu płyt ortotropowych

XXII. M. Życzkowski, Wyboczenie sprężysto-plastyczne niektórych prętów pryzmatycznych

Cena zł 20.—

Tom III zeszyt 1

XXIII. M. P. Wołarowicz, Badania nad własnościami reologicznych układów rozproszonych
XXIV. W. Pogány, O pewnych zagadnieniach mechaniki gruntów
XXV. J. Nowiński, Szlakami teorii sprężystości
XXVI. K. Wolski, Metoda punktów kinetycznych
XXVII. J. T. Pindera, Technika elastooptycznych badań płaskiego stanu naprężenia

Tom III zeszyt 2

XXVIII. W. Olszak i A. Sawczuk, Teoria nośności granicznej płyt w świetle weryfikacji doświadczalnej (I)
XXIX. A. Sawczuk, Zagadnienia nośności granicznej elementów rozciąganych i zginanych w zastosowaniu do teorii zbiorników prostokątnych
XXX. M. Życzkowski, Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym

Tom III zeszyt 3

XXXI. M. Bieniek, Metody teorii stateczności ruchu
XXXII. W. Prosnak, Struktura płaskiej fali uderzeniowej
XXXIII. W. Wierzbicki, Analiza schematów statycznych konstrukcji drewnianych

W DRUKU

XXXIV. J. Klott, J. Naleszkiewicz, J. Rutecki i K. Wituszyński, Studia wstępne z dziedziny skręcania kadłuba na fali skośnej
XXXV. Z. Szymański, Równanie Boltzmanna i jego znaczenie w teorii gazów
XXXVI. W. Wierzbicki, Zagadnienia dynamiczne w obliczeniach statycznych budowli

---

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ ukazuje się jako kwartalnik i kosztuje w prenumeracie rocznej 60 zł.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE ukazywały się początkowo jako wydawnictwo seryjne. Zeszyty od I do XV · 2 są do nabycia w księgarniach naukowych Domu Książki. Zamówienia za zaliczeniem przyjmuje Księgarnia Naukowa, Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7.

Poczynając od III kwartału 1954 r. ROZPRAWY INŻYNIERSKIE ukazują się jako kwartalnik i kosztują w prenumeracie rocznej 80 zł.

Sprzedaż bieżących numerów odbywa się w księgarniach naukowych Domu Książki i w placówkach «Ruchu».