

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

KWARTALNIK

TOM III • ZESZYT 2

WARSZAWA • 1955

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

T R E Ś Ć T O M U I I I Z E S Z Y T U 2

XXVIII. OLSZAK, W. i SAWCZUK, A. Teoria nośności granicznej płyt w świetle weryfikacji doświadczalnej (I)	179
XXIX. SAWCZUK, A. Zagadnienia nośności granicznej elementów rozciąganych i zginanych w zastosowaniu do teorii zbiorników prostokątnych	255
XXX. ŻYCZKOWSKI, M. Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym	285

T A B L E D E S M A T I È R E S D U V O L . I I I F A S C . 2

XXVIII. OLSZAK, W. i SAWCZUK, A. Теория несущей способности пластинок в освещении экспериментальной проверки (I) La théorie de la charge limite des plaques sous l'aspect de sa vérification expérimentale (I).	179
XXIX. SAWCZUK, A. Вопросы несущей способности растягиваемых и изгибаемых элементов с применением к теории прямоугольных резервуаров Some Problems of Limit Analysis of Elements Subjected to Tension and Bending and Application to the Theory of Rectangular Tanks.	255
XXX. ŻYCZKOWSKI, M. Случай одновременного растяжения и кручения стержня круглого сечения в упруго-пластическом состоянии The Problem of Combined Tension and Torsion of a Circular Bar in the Elasto-Plastic Range.	285

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTITUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

XXVIII - XXX

WARSZAWA • 1955

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

ZAWIERAJĄ PRACE BADAWCZE Z ZAKRESU TEORII SPRĘŻYSTOŚCI
I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMODYNAMIKI
ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW KONSTRUKCJI

R A D A R E D A K C Y J N A
WITOLD NOWACKI — PRZEWODNICZĄCY
JULIAN BONDER JERZY LITWINISZYN
JERZY NOWIŃSKI WACŁAW OLSZAK
BOHDAN STEFANOWSKI STANISŁAW TURSKI
WITOLD WIERZBICKI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y
JERZY NOWIŃSKI — REDAKTOR
TADEUSZ IWIŃSKI JÓZEF JANICZEK

Adres Redakcji
WARSZAWA, ul. Śniadeckich 8, I p.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE XXVIII-XXX

Copyright 1955 by Polska Akademia Nauk.
Warszawa (Poland), Printed in Poland. All rights reserved

Nakład 1742 + 104 nadb. Papier druk. sat. B.1 16, 70—80 g. Arkuszy wydawn. 11.28. Arkuszy drukarskich 9 $\frac{1}{8}$.
Oddano do składania dn. 14.I.55 r. Druk ukończ. w maju 1955 r. Zam. 576. B-6-3117. Cena zł 20.—

Stoł. Zakł. Graf., Drukarnia Naukowa. Warszawa, Śniadeckich 8.

WACŁAW OLSZAK i ANTONI SAWCZUK

TEORIA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ PŁYT
W ŚWIELE WERYFIKACJI DOŚWIADCZALNEJ

CZEŚĆ PIERWSZA

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXVIII

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	181
2. Prace polskie	183
3. Ogólne założenia teorii nośności granicznej płyt	185
4. Zasady badań laboratoryjnych nad teorią nośności granicznej	194
5. Charakterystyka warunków doświadczeń	203
6. Płyta kwadratowa obciążona w środku siłą skupioną	204
7. Płyta kwadratowa obciążona siłami skupionymi rozmieszczonymi koncentrycznie wokół środka	210
8. Płyta kwadratowa podparta na trzech bokach, obciążona siłą skupioną w środku	215
9. Płyta kwadratowa obciążona równomiernie	217
10. Płyta izotropowa prostokątna obciążona równomiernie	225
11. Płyta dwuprzęsłowa obciążona równomiernie	233
12. Płyta prostokątna ortotropowa obciążona równomiernie	236
13. Uwagi końcowe	243
14. Dodatek do p. 3. Przykład liczbowy	244

1. Wstęp*)

1.1. Teoria nośności granicznej płyt powstała z bezpośrednich obserwacji układów pęknięć w zniszczonych ustrojach płytowych, w szczególności w konstrukcjach żelbetowych. Systematyczne obserwacje, a następnie szczegółowa analiza układów linii załomów pozwoliły wykryć szereg prawidłowości, występujących w ustrojach płytowych w końcowym stadium wyczerpania się ich nośności; stadium to praktycznie równoznaczne jest ze zniszczeniem tego rodzaju konstrukcyj.

Szereg prac — począwszy od pierwszych, nie wolnych od błędów, sformułowań A. Ingersleva, [7], poprzez cenne spostrzeżenia K. W. Johansena, [8], [9], [10], [11], (szczególnie w odniesieniu do poprawnego ujęcia obrazu kinematycznych zależności w stadium złamania płyty), następnie poprzez prace A. A. Gwozdiewa, [6], L. S. Gilmana, [5], W. Olszaka, [15], [16], [17], [18], [20], [21], [22], [23], i jego współpracowników, [12], [13], [14], [29], [30], [31], — wyjaśniło zasady i sprecyzowało metody tej szczególnej gałęzi teorii plastyczności, którą ująć można mianem teorii granicznej ustrojów. Warto przy tym na marginesie zaznaczyć, że problemy nośności granicznej były atakowane przez szereg badaczy niezależnie od siebie. Świadczy to o tym, że stan wiedzy, a w szczególności rozwój teorii plastyczności, stworzył obiektywne warunki do rozwoju tego szczególnego jej odcinka, który, co zdaje się nie ulegać wątpliwości, posiada duże znaczenie teoretyczne i praktyczne.

1.2. Mimo iż teoria nośności granicznej powstała na gruncie potrzeb praktyki inżynierskiej i rychło doczekała się praktycznego potwierdzenia od strony weryfikacji jakościowego przebiegu zjawisk, długo pozostawały niesprawdzone te zależności, które od strony ilościowej charakteryzują stany graniczne, związane z ostateczną fazą wyczerpania nośności ustroju płytowego.

1.3. Z uwagi na korzyści techniczne i gospodarcze, jakich należy się spodziewać na skutek szerokiego wprowadzenia do praktycznego stoso-

*) Praca przedstawiona na Zebraniu Naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w dniu 8 marca 1954 r.

wania wyników teoretycznych badań nośności granicznej płyt, narzuca się konieczność weryfikacji doświadczalnej tych wyników w sposób możliwie wszechstronny.

Realizacja programu badań eksperymentalnych, które by potwierdziły słuszność założeń i pozwoliły na zaakceptowanie wyników teoretycznych zarówno od strony jakościowej, jak i ilościowej, pozwoliłaby zamknąć krąg cyklu poznawczego: od obserwacji faktów, występujących w praktyce, poprzez teorię z powrotem do praktyki w sensie zarówno potwierdzenia teorii, jak i jej wykorzystania i uogólnienia.

Przeprowadzenie jednak doświadczalnych badań tego typu jak badania nad stanami granicznymi układów powierzchniowych wymaga — z uwagi na mnogość zmiennych parametrów — odpowiedniej skali (w sensie zakresu badań); badania takie związane są zatem ze sporymi kosztami i wymagają dużo czasu.

1.4. Były, co prawda, prowadzone już badania eksperymentalne nad płytami żelbetowymi, ale badania te — o znaczeniu dziś już tylko historycznym — nie były podbudowane żadną koncepcją teoretyczną.

Mimo to niektóre ich wyniki, odpowiednio interpretowane, stanowić będą, jak zobaczymy, wcale pożyteczny materiał, umożliwiający weryfikację założeń, budowy i wyników teorii zjawisk towarzyszących wyczerpaniu nośności ustrojów płytowych.

Zważyć przy tym jednak należy, że prace doświadczalne nad płytami żelbetowymi, począwszy od pierwszych opublikowanych wyników badań C. B a c h a, [1], i O. G r a f a, [4], mimo iż zawierają wiele rzeczowego materiału, tylko częściowo nadają się do wykorzystania do naszych celów. Wynika to stąd, że badania te nie zawsze były prowadzone w warunkach, które można z naszego stanowiska przyjąć za odpowiednie, jak też i z tego, że nie we wszystkich dostępnych nam publikacjach scharakteryzowane są dostatecznie dokładnie interesujące nas parametry (jak np. komplet mechanicznych własności stosowanych materiałów itp.).

Niemniej jednak uważaliśmy za swój obowiązek (niezależnie od prowadzonych specjalnie pod kątem widzenia teorii nośności granicznej własnych badań doświadczalnych) przejrzeć krytycznie dotychczasowe dostępne nam rezultaty badań i wyciągnąć z nich wnioski, o ile można było przy tym interpretować wyniki tych badań w świetle teorii nośności granicznej. Z materiałów tych korzystaliśmy z rozmysłem, stanowią one bowiem dodatkowe potwierdzenie słuszności założeń teoretycznych. Szczególnie pod tym względem cenną jest praca K. W. J o h a n s e n a, [10].

1.5. Przypadki, spotykane w praktyce, wykazują duże bogactwo zmieniających warunków; dotyczy to w szczególności:

(1) struktury płyt (izotropia, ortotropia, ortotropia «podwójna» itd.);

- (2) ich ukształtowania geometrycznego i warunków podparcia (płyty prostokątne, płyty w postaci wieloboków umiarych, płyty jedno-prześłowe i ciągłe, podparcie swobodne, utwierdzenie, brzegi wolne itp.);
- (3) ich obciążenia (układy sił skupionych, obciążenia ciągłe itp.).

2. Prace polskie

Dotychczasowe prace polskie w dziedzinie nośności granicznej płyt szły w następujących zasadniczych kierunkach.

2.1. Pierwszy z nich dotyczył sformułowania *podstaw* tej teorii, przy czym okazało się, że są one słuszne nie tylko dla problemu nośności granicznej płyt, lecz dla szerszej klasy problemów teorii ustrojów nośnych. Dotyczy to np. poprawnego kinematycznego obrazu stanu granicznego, twierdzenia o maksymalnym oporze plastycznym itd.

2.2. Drugim podstawowym zagadnieniem, które ma doniosłe znaczenie zarówno dla rozbudowy teorii, jak i dla jej praktycznych zastosowań, jest zagadnienie *anizotropii struktury płyt*.

Dla praktyki projektodawczej szczególne znaczenie ma przypadek anizotropii ortogonalnej (ortotropii).

Udowodnić można, że w teorii nośności granicznej każdy przypadek ortotropii bez względu na zachodzące warunki, tzn. przy dowolnym ukształtowaniu płyty, przy dowolnym jej obciążeniu i przy dowolnych warunkach brzegowych, sprowadzić można do zagadnienia płyty izotropowej i to przez zastosowanie prostej transformacji liniowej.

Transformację tę rozszerzyć można również na płyty «podwójne ortotropowe». Zagadnienie powyższe omawia szczegółowo oddzielna praca pierwszego z autorów, [17].

Podano przy tym nowe rozwiązania szeregu trudniejszych przypadków, jak np. obciążenie siłami skupionymi płyt eliptycznych w dowolnym punkcie na osi dłuższej, [17]; zagadnienie to zostało następnie uogólnione dla przypadku obciążenia w dowolnym punkcie elipsy, [14]; podano rozwiązanie dla płyt wielobocznych o ukształtowaniu foremnym, [29], [31].

2.3. Ważnym zagadnieniem jest problem *płyt ciągłych*.

W pracy [22] przedstawiono ujęcie teoretyczne tego problemu w przypadku ciągłości «dwuwymiarowej», a zatem takiej, jaka charakteryzuje ustroje płytowe «wielopolowe» w dwóch kierunkach (np. x oraz y). Wyniki podobne jak dla («dwuwymiarowo») ciągłych płyt uzyskuje się dla *zbiorników prostokątnych*, które, w rzeczy samej, złożone są z tego rodzaju płyt ciągłych. Istotną różnicę stanowi przy tym konieczność równoczesnego uwzględnienia stanu membranowego. Zagadnienie to jest obecnie w trakcie opracowywania, [30].

Nieco bardziej złożone zagadnienie spotykamy w analizie *stropów «grzybkowych»*, kiedy to ujęcie siatki zniszczenia z punktu widzenia kinematyki wymagać będzie na ogół rozwiązania tego zagadnienia w przestrzeni (a nie w płaszczyźnie).

I ten problem jest obecnie w opracowaniu.

2.4. Ostatnio zwrócono również uwagę na problem *niejednorodności* struktury płyt. Podstawy ogólnej teorii ciał sprężysto-plastycznych przedstawione przez W. Olszaka, [24], [25], doznają znacznego uproszczenia, gdy chodzi o ich zastosowanie do tej klasy zagadnień, które są związane z analizą stanów granicznych.

Okazuje się przy tym, że w fazie końcowej, charakteryzującej wyczerpanie się nośności ustroju, zagadnienie niejednorodności (przy założeniu schematu sztywno-plastycznego), [15], [16], [20], [21], wyraża się przez pewne proste zależności całkowite, polegające na operowaniu pewnymi wielkościami, które można by — przez analogię do zagadnień spotykanych w «klasycznej» nauce o wytrzymałości materiałów — nazwać wielkościami «wypadkowymi», [13], [30], [31].

Zależności te wyrażają się w sposób prosty.

2.5. Wspomnieć wreszcie należy o pewnej analogii mechanicznej, która umożliwia rozwiązywanie złożonych zagadnień z dziedziny teorii nośności granicznej płyt.

Mamy na myśli *analogię «wzgórza piaskowego»*, która — jak wykazano to na innym miejscu ¹⁾ — znajduje zastosowanie zarówno w zagadnieniu płyt izotropowych, jak i ortotropowych.

2.6. Zainteresowanie, jakim się cieszą obecnie problemy nośności granicznej, skłoniło nas do opracowania obszernego planu badań doświadczalnych.

Pierwszą serię tych badań eksperymentalnych, na razie dość skromną, można w zasadzie uznać za zakończoną. Dotyczyła ona przede wszystkim weryfikacji doświadczalnej założeń podstawowych teorii nośności granicznej płyt i to zarówno w sensie poszukiwania jej potwierdzenia pod względem jakościowym (kinematyka stanów granicznych, siatka zniszczenia), jak i pod względem ilościowym (wartości parametrów, charakteryzujące siatkę zniszczenia, wartości obciążeń granicznych).

Badania doświadczalne dalsze, już rozpoczęte, dotyczą układów bardziej złożonych (płyty ciągle, struktura ortotropowa, zagadnienie naroży itd.).

¹⁾ Zagadnienie to, na którego charakter zwrócił uwagę jednemu z autorów W. Nowacki, omówiono w pracy W. Olszaka, [23], w której podano możliwości stosowania tej analogii przede wszystkim w przypadkach obciążenia równomiernego.

2.7. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie części wyników doświadczeń własnych (z serii pierwszej) oraz niektórych, nadających się do wykorzystania do naszych celów, badań zagranicznych.

3. Ogólne założenia teorii nośności granicznej płyt

3.1. Zanim przystąpimy do omówienia przeprowadzonych doświadczeń oraz do analizy wyników, uzyskanych w oparciu o te doświadczenia, wydaje się nam rzeczą wskazaną podać krótką charakterystykę ogólnych założeń i zasad teorii nośności granicznej płyt.

3.2. Wyobraźmy sobie w tym celu płytę o strukturze izotropowej lub ortotropowej, znajdującą się w pewnych warunkach podparcia. Mówiąc o płytach ortotropowych mamy przede wszystkim na uwadze krzyżowo zbrojone płyty żelbetowe, będące najbardziej charakterystycznym reprezentantem tego typu struktury.

Założmy, że zbrojenie ułożone jest równomiernie w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach, przy czym ilość tego zbrojenia na jednostkę długości przekroju poprzecznego może być w obu kierunkach prostopadłych różna. Założenia takie prowadzą do postulatu rozpatrywania układów zarówno izotropowych, jak i ortotropowych. W przypadku gdy warunki podparcia narzucają konieczność stosowania zbrojenia górnego, zakładamy, że płyta może być inaczej (krzyżowo) zbrojona górną, a inaczej (krzyżowo) zbrojona dołem; stanowi ona wtedy układ «warstwowo» albo «podwójnie» ortotropowy.

Założenia powyższe, dotyczące układu zbrojenia, mają swoje uzasadnienie praktyczne. Płyty krzyżowo zbrojone posiadają na ogół cztery różne charakterystyki, odnoszące się do mocy zbrojenia.

3.3. Równomierność rozkładu zbrojenia w każdym z kierunków przy stałej grubości płyty powoduje, iż płytę tę rozpatrywać można jako jednorodną²⁾. Prowadzi to z kolei do wniosku, że moment łamiący, obliczony na jednostkę długości, charakteryzuje się stałą wartością, przy czym za moment łamiący uważa się wartość występującą w chwili wyczerpania nośności układu i przekształcenia go w (ruchomy) mechanizm. Moment jednostkowy posiada tę samą wartość we wszystkich przekrojach równoległych do danego kierunku.

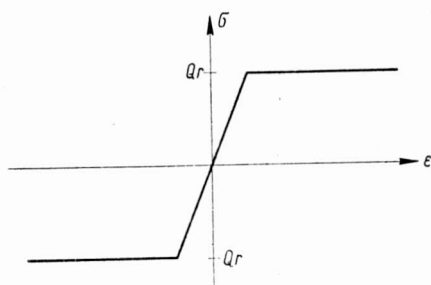
²⁾ Badania nad ustrojami zbrojonymi nierównomiernie prowadzą do pojęcia jego niejednorodności. Zagadnienie to omawiają w swych pracach: W. Olszak, [24], [25], D. Niepostyn, [13], i A. Sawczuk, [30], [31]. Por. p. 2.4.

5.4. W miarę wzrostu obciążenia ustroju obserwować można odkształcenia sprężyste i to aż do chwili, gdy w pewnym miejscu moment osiągnie wartość graniczną, charakteryzującą uplastycznienie tej partii płyty. Z tą chwilą uplastycznienie zaczyna rozchodzić się wzdłuż pewnych linii, zwanych liniami załomów.

W okresie tym występują obok siebie w płycie odkształcenia plastyczne w liniach załomów oraz odkształcenia sprężyste na pozostałym obszarze.

Nośność układu nie jest jeszcze wówczas wyczerpana i możliwy jest dalszy wzrost obciążeń. Obciążenie przybierze swą wartość graniczną z chwilą, kiedy linie załomów dojdą do krawędzi płyty, wskutek czego ustrój nośny zamieni się w mechanizm; odkształcenia plastyczne w liniach załomów narastać bowiem mogą bez przyrostu obciążenia.

Przyjęcie tego schematu przebiegu zjawiska wynika z pominięcia wpływu «utwardzenia» stali, obserwowanego w czasie badania próbek na rozciąganie. Ograniczamy się tym samym do przyjęcia zależności między odkształceniem a naprężeniem, przedstawionej schematycznie na rys. 1.



Rys. 1

Doświadczenia wykazują—będzie mowa o tym szczegółowiej w dalszej części pracy — że w przypadku elementów żelbetowych przy odkształceniach, które charakteryzują chwilę wyczerpania nośności, przyjęcie zależności przedstawionej na rys. 1, a charakteryzującej związek między naprężeniami i odkształceniami znajduje swe fizyczne uzasadnienie.

5.5. W teorii nośności granicznej, rozwiniętej w pracach polskich, pomija się z zasady odkształcenia sprężyste ustroju, ograniczając się do uwzględniania odkształceń plastycznych. Takie stanowisko — którego słuszność potwierdzają badania eksperymentalne — prowadzi do rozpatrywania modelu sztywno-plastycznego. W naszym przypadku przyjęcie uproszczonego modelu sztywno-plastycznego oznacza, że odkształcenia (w szczególności zakrzywienia) «koncentrują» się w miejscach, w których naprężenia osiągnęły wartość, odpowiadającą granicy plastyczności, a więc wzdłuż linii załomów. Obszary ograniczone liniami załomów, lub liniami załomów i bokami płyty, pozostają — przy pominięciu odkształceń sprężystych — płaskie. Oznacza to w konsekwencji, że linie załomów muszą być liniami prostymi, gdyż jedynie wówczas jest możliwe przeprowadzenie układu w mechanizm.

3.6. Z przyjęcia powyższych założeń wynika, że odkształcenie płyty rozpatrywane być może jako zespół kątowych obrotów płatów płaskich wokoło chwilowych osi obrotu.

Położenie osi obrotu każdego z płatów jest przy tym zależne od warunków podparcia. Oś obrotu przechodzić bowiem musi np. przez punkty podparcia płyty, jak to ma miejsce w przypadku swobodnego oparcia płyty na głowicach słupów, albo też przez prostą podparcia — w przypadku płyt podpartych liniowo, albo wreszcie pokrywać się z linią załomu.

Proste załomów, które — jak widzieliśmy — są krawędziami przecięcia się płaskich płatów, muszą każdorazowo przechodzić przez punkt przecięcia się odpowiednich osi obrotu sąsiadujących ze sobą płatów.

Układ prostych załomu albo — jak układ ten chcemy nazywać w dalszym ciągu — siatkę zniszczenia można więc przewidzieć bezpośrednio z analizy warunków podparcia płyty. Należy tu dorzucić, że określa się w ten sposób z warunków geometrycznych jedynie ogólny zarys siatki zniszczenia bez określenia jej wymiarów i kątów nachylenia odpowiednich linii względem siebie. Ponadto są niejednokrotnie możliwe różne typy (konfiguracje) tej siatki.

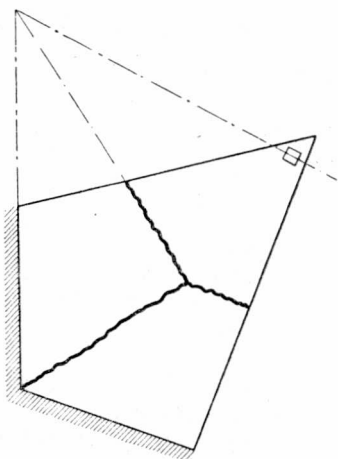
Wybór siatki właściwej oraz wyznaczenie parametrów, na podstawie których można będzie ściśle — w danych warunkach podparcia i obciążenia — określać rzeczywistą siatkę zniszczenia, nastąpić może w oparciu o metodę postępowania, której poświęcimy nieco uwagi w dalszej części niniejszej pracy.

3.7. Dla zilustrowania faktu, iż siatka zniszczenia (w przypadku obciążeń ciągłych) dana jest przez warunki geometryczne, przedstawiono na rysunkach 2-5 kilka przykładów siatek zniszczenia bez ściślejszego precyzowania określających je parametrów.

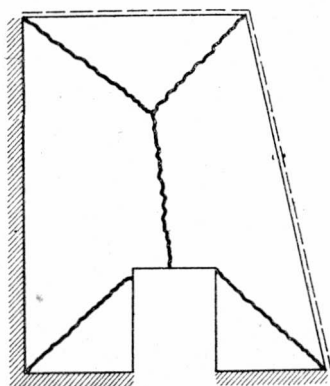
Nie wszystkie jednak typy obciążeń pozwalają na podstawie warunków geometrycznych określić kształt siatki zniszczenia. Nie będzie tak między innymi wówczas, gdy mamy do czynienia z płytą poddaną działaniu pojedynczych sił skupionych, układów obciążeń, zbliżonych w swym działaniu do działania sił skupionych, bądź zespołów sił skupionych. Dla tych obciążeń figury załomów tworzą układ zbliżony do szeregu trójkątów o wspólnym wierzchołku w miejscu zaczepienia siły oraz trapezów — w zależności od obciążenia. Ilustracją powyższego stwierdzenia niech będzie rys. 6, na którym podana jest siatka zniszczenia tafli ze szkła zbrojonego, obciążonej siłą skupioną.

Cztery inne przykłady takich siatek zniszczenia przedstawiają rysunki 7, 8, 9 i 10.

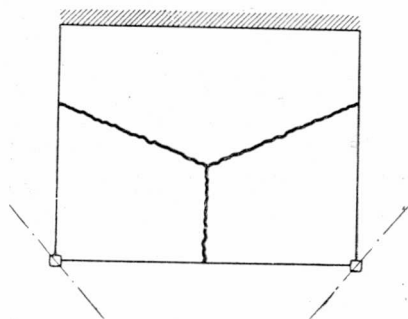
3.8. Warto tu — w związku z omawianym problemem siatek zniszczenia — przytoczyć jako rzecz charakterystyczną fakt, że również niektóre



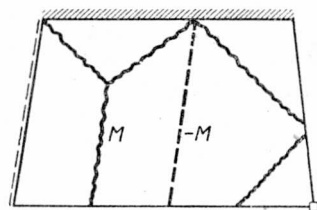
Rys. 2



Rys. 3



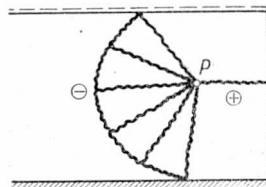
Rys. 4



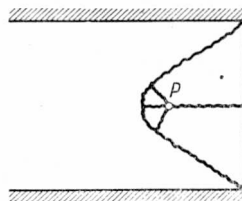
Rys. 5



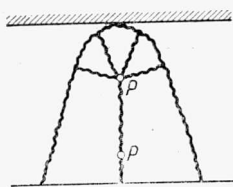
Rys. 6



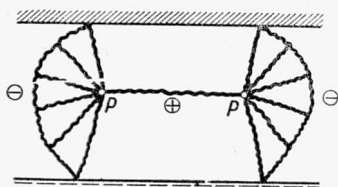
Rys. 7



Rys. 8

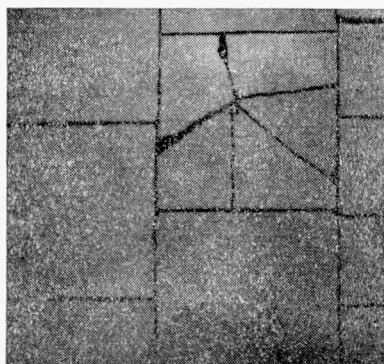


Rys. 9

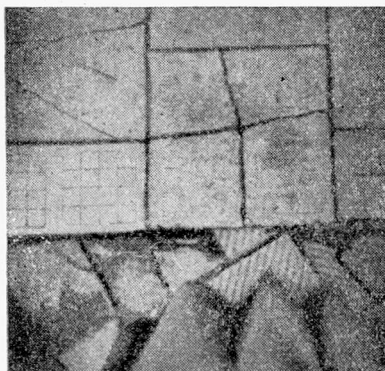


Rys. 10

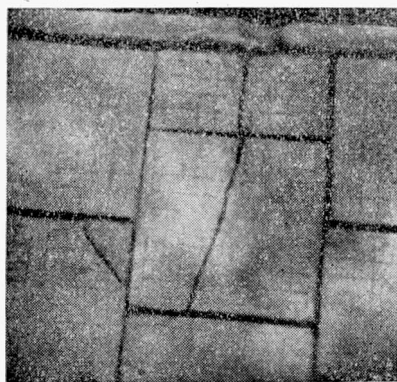
typy płyt niezbrojonych wykazują figury zniszczenia podobne do figur, występujących w przypadku płyt zbrojonych, mimo że mechanizm ich destrukcji jest odmienny.



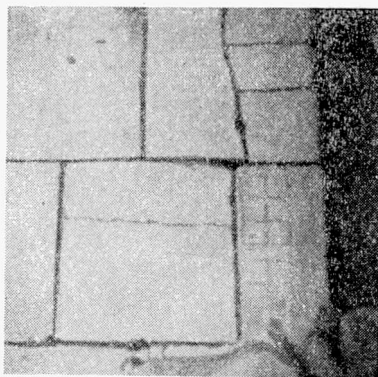
Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13

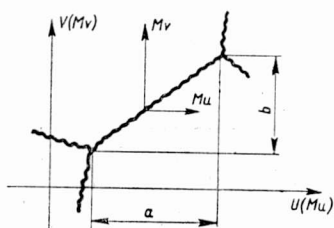


Rys. 14

Rysunki 11, 12, 13 i 14 przedstawiają prostoliniowe załomy szeregu płyt betonowych według obserwacji, przeprowadzonych na jednym z chodników. W przypadku, którego dotyczą owe ilustracje, o załomach prostoliniowych stanowiły 91,2% ogólnej ilości płyt złamanych, [16].

3.9. Następne z kolei zagadnienie, które należy wyjaśnić po omówieniu siatek zniszczenia, to zagadnienie związku, jaki istnieje między układem linii załomów i ich długością a nośnością płyty.

Stwierdziliśmy poprzednio, że decyzja przyjęcia sztywno-plastycznego modelu odkształcenia oznacza prostoliniowość siatki załomów; wyraża ona zarazem okoliczność, że linie załomów są równocześnie osiami obrotu momentu łamiącego.



Rys. 15

Weźmy pod uwagę ogólny przypadek znamienny tym, że linia załomu jest nachylona do obydwu wzajemnie prostopadłych kierunków zbrojenia (rys. 15). Z uwagi na fakt, że moment graniczny («łamiący») na długości tej linii charakteryzuje się wartością stałą, również i jego składowe, związane z odpowiednimi osiami układu odniesienia, będą stałe.

Wynika to zresztą bezpośrednio z faktu, że momenty M_u i M_v są funkcjami mocy zbrojenia:

$$(3.9.1) \quad \begin{cases} M_u = F(f_v), \\ M_v = F(f_u). \end{cases}$$

W zapisie tym f_v i f_u oznaczają moc zbrojenia w kierunkach równoległych do osi danego układu współrzędnych (u, v) .

Wychodząc z wzajemnego stosunku mocy zbrojenia dołem f_u i f_v oraz górami f'_u i f'_v przynależne momenty łamiące, obliczane na jednostkę szerokości zbrojenia dołem będą M_u i M_v , natomiast dla zbrojenia górami M'_u i M'_v .

Ustalając wzajemne stosunki momentów otrzymamy

$$(3.9.2) \quad \begin{cases} M_v = \kappa M_u, \\ M'_v = \lambda M'_u. \end{cases}$$

Gdy ponadto zachodzi zależność $M'_u = \mu M_u$, oznacza to zarazem, że

$$(3.9.3) \quad M'_v = \lambda \mu M_u.$$

Jeśli jako przypadek szczególny układu izotropowego przyjmiemy płytę o jednakowej mocy zbrojenia w obydwu wzajemnie prostopadłych kierunkach, wówczas zachodzi równość momentów składowych M_u i M_v (liczonych na jednostkę długości), co zapisać możemy w postaci

$$(3.9.4) \quad M_u = M_v = M.$$

Całkowity moment $\underline{M}$, związany z określonym odcinkiem linii załomu, będzie funkcją jednostkowego momentu wypadkowego M i długości tego odcinka s :

$$(3.9.5) \quad \underline{M} = M \cdot s.$$

Gdy rozpatrywać będziemy momenty graniczne jako wielkości wektorowe, stwierdzimy łatwo, że sama siatka zniszczenia stanowi naoczny wektorowy obraz momentów łamiących w chwili osiągnięcia granicy nośności płyty.

Gdy natomiast, w przypadku ogólniejszym, będziemy mieli do czynienia z płytami ortotropowymi o stałych wartościach momentów składowych M_u i M_v , przy czym $M_v = \kappa M_u$, wówczas układ linii załomów nie będzie bezpośrednio przedstawiał wartości całkowitego momentu $\underline{M}$, ale pewne wartości do niego proporcjonalne. Współczynniki proporcjonalności są łatwe do wyznaczenia.

3.10. Zatrzymując się nad wyznaczeniem dla przypadku ortotropii odpowiednich składowych momentu całkowitego, związanego z danym odcinkiem, zauważymy, że jeśli przez a i b oznaczymy odpowiednie składowe odcinka w układzie osi współrzędnych (u, v) , otrzymamy bezpośrednio

$$(3.10.1) \quad \begin{cases} \underline{M}_u = a M_u, \\ \underline{M}_v = b M_v = b \kappa M_u. \end{cases}$$

Analogiczne zapisy są słuszne w przypadku występowania momentów ujemnych, jak również w przypadku najogólniejszym, tzn. przy uwzględnieniu ortotropii warstwowej (podwójnej).

Wskazana proporcjonalność między wartością momentu całkowitego (charakteryzującą w istocie nośność graniczną) a długością odcinków siatki zniszczenia ułatwi analizę wielkości sił, powodujących graniczne stadium wyczerpania nośności rozpatrywanego ustroju.

3.11. Aby uwolnić się od konieczności ewentualnego uwzględnienia momentów skręcających i sił poprzecznych, które, co prawda, w liniach załomów — w interesujących nas przypadkach — nie występują, mogą jednak powodować powstanie tzw. sił węzłowych w punktach zbiegu większej ilości linii załomów, posłużymy się dla określenia wartości momentu łamiącego zasadą prac przygotowanych.

Zapiszemy ją tutaj w postaci

$$(3.11.1) \quad \delta L = \delta V,$$

co wyraża, że dla ciała będącego w równowadze, przy jego przesunięciu przygotowanym, połączonym z odkształceniem, praca sił zewnętrznych

jest równa pracy sił wewnętrznych na odpowiednich przyrostach odkształceń.

Gdy jako najstosowniejsze w rozpatrywanym problemie weźmiemy pod uwagę wzajemne obroty kątowe poszczególnych pól płyty, to w wyrażenie na pracę wejdą jedynie wyrazy pochodzące z działania momentów. Praca wyrażona będzie wtedy każdorazowo przez iloczyn, utworzony z kąta obrotu $\delta\varphi$ pola wokół odpowiedniej osi obrotu oraz rzutu wypadkowej momentu łamiącego na kierunku tej osi $M \cos(\underline{M}, \delta\varphi)$.

Daje to w rezultacie iloczyn skalarny

$$(3.11.2) \quad \underline{M} \delta \varphi_i = \underline{M} \delta \varphi \cos(\underline{M}, \delta \varphi)$$

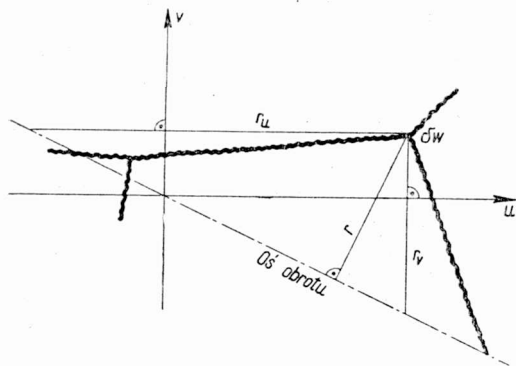
albo, operując składowymi wektorów obrotu i momentu,

$$(3.11.3) \quad \underline{M} \delta \varphi = M_u \delta \varphi_u + M_v \delta \varphi_v,$$

gdzie M_u i M_v oznaczają odpowiednie składowe, przy czym pamiętać należy o znaczeniu wskaźnika ortotropii α , określonego np. wyrażeniem (3.10.1).

W podanych wyżej wzorach założyliśmy, że obrót, wywołany danym momentem, charakteryzuje się tym samym znakiem co i odpowiedni moment; za dodatnie uważać będziemy przy tym takie momenty, które wywołują występowanie sił wewnętrznych rozciągających po stronie «dolnej». Tak więc np. załomy na podporach płyt utwierdzonych przyjmować będziemy za ujemne, w przesłach natomiast za dodatnie.

3.12. Występujące w wyrażeniu (3.11.3) składowe wektora $\delta\varphi$ przedstawić można na podstawie rys. 16, przy obrocie danego pola wokół osi obrotu i przy udzieleniu pewnemu punktowi przemieszczenia przygotowanego δw , w postaci



Rys. 16

$$(3.12.1) \quad \delta \varphi_u = \frac{\delta w}{r_v}, \quad \delta \varphi_v = \frac{\delta w}{r_u}.$$

Praca sił wewnętrznych jest więc łatwa do określenia i przedstawi się jako suma iloczynów typu (3.11.3).

Jeśli natomiast chodzi o pracę sił zewnętrznych, to w przypadku sił skupionych będzie ona sumą iloczynów typu

$$(3.12.2) \quad \delta L_P = \sum P_i \delta w_i,$$

przy czym P_i oraz δw_i oznaczają odpowiednio siłę i jej przesunięcie w kierunku działania siły, wywołane przemieszczeniem przygotowanym δw ,

natomiast przy działaniu rozłożonego na powierzchni płyty obciążenia o intensywności $p(u, v)$ otrzymuje się wyrażenie

$$(3.12.3) \quad \delta L_p = \iint p(u, v) \delta w(u, v) du dv,$$

gdzie $\delta w(u, v)$ oznacza przynależne przemieszczenie związane z przemieszczeniem przygotowanym.

Oczywiście, odpowiedni bilans prac objąć powinien wszystkie biorące udział w obrotach płyty, podobnie jak wzór (3.12.2) dotyczył wszystkich punktów zaczepienia sił P_i .

Ostatecznie na podstawie przytoczonych wzorów otrzymamy równanie

$$(3.12.4) \quad \sum P_i \delta w_i + \iint p(u, v) \delta w(u, v) du dv - \sum M \delta \varphi \cos(M, \delta \varphi) = 0,$$

z którego przy znanej siatce zniszczenia wyznaczyć możemy wielkość momentu łamiącego M .

3.15. Wyjaśnić jeszcze należy sposób postępowania, gdy siatka zniszczenia nie będzie z góry znana co do długości poszczególnych jej odcinków itp. (choć, o ile chodzi o jej kształt to określony on jest — jak wiemy — warunkami podparcia i obciążenia). Należy wówczas przedstawić siatkę za pomocą funkcji zależnej od odpowiedniej ilości nieznanymi parametrów $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, co z kolei pociągnie za sobą to, że wyrażenie na moment M będzie funkcją obciążenia Q oraz tychże parametrów:

$$(3.13.1) \quad M = F(Q, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

W celu wyznaczenia wielkości momentu charakteryzującego stan graniczny danej płyty posłużymy się zasadą maksymalnego oporu plastycznego, [16], [22], która mówi, że ze wszystkich geometrycznie możliwych układów linii załomu ważna jest ta siatka, której odpowiada największa wartość momentu M ³⁾; dla poprawnej siatki załomów muszą więc być spełnione warunki

$$(3.13.2) \quad \frac{\partial M}{\partial x_1} = \frac{\partial M}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial M}{\partial x_n} = 0.$$

Z powyższych warunków otrzymujemy n równań, pozwalających wyznaczyć n nieznanymi parametrów $x_1, x_2, \dots, x_n$, gdy zaś znana będzie siatka zniszczenia, nic nie stoi na przeszkodzie wyznaczeniu wielkości momentu łamiącego M ⁴⁾.

Przejdziemy teraz do omówienia problemów związanych bezpośrednio z techniką wykonywania doświadczeń nad nośnością graniczną płyt.

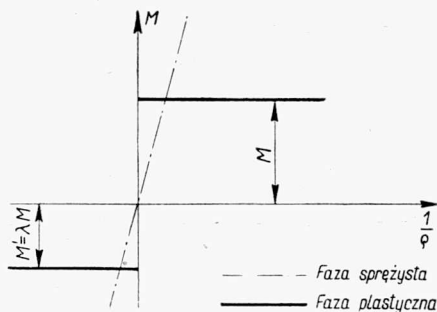
³⁾ Jest to równoznaczne ze stwierdzeniem, że obciążenie spełnia wówczas warunek minimum.

⁴⁾ Prosty przykład liczbowy, objaśniający sposób postępowania w konkretnych zagadnieniach, podany jest na końcu pracy (patrz str. 244).

4. Zasady badań laboratoryjnych nad teorią nośności granicznej

4.1. Moment zginający «graniczny» w linii załomów posiada wartość stałą wzdłuż całej długości tej linii. Takie przyjęcie stałości momentu łamiącego, oparte na znanej platformie plastycznej z wykresu zależności (σ, ϵ) dla stali, upraszcza znacznie obliczenia przy wyznaczaniu momentów łamiących⁵⁾.

Dla przypadku elementów zginanych interesującą będzie zależność — wynikająca ze wspomnianego wykresu relacji (σ, ϵ) — między krzywizną a momentem zginającym w okresie pojawienia się odkształceń plastycznych. Zależność tę możemy przedstawić na podstawie znanych



Rys. 17

związków między krzywizną a momentem zginającym w formie wykresu przedstawionego na rys. 17.

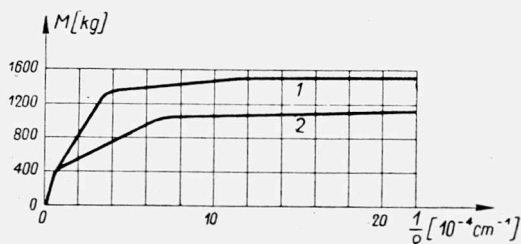
Prosta przerywana przedstawia funkcję $M = f(\rho)$ dla ciała sprężystego, prosta pełna dla ciała idealnie plastycznego. Wartości momentów M i M' określone są między innymi zdolnością materiału do przejmowania sił wewnętrznych rozciągających w jego warstwach, położonych odpowiednio poniżej względnie powyżej osi zgięcia plastycznego.

Dla elementów zbudowanych z materiału elasto-plastycznego wykres przedstawionej zależności będzie odpowiednią kombinacją obu faz; rozumieć to należy w ten sposób, że platforma rosnącej krzywizny przy stałym momencie powstanie z chwilą osiągnięcia w materiale granicy plastyczności.

Nasuwa się pytanie, w jakiej mierze tego rodzaju założenie odkształceń plastycznych znajduje potwierdzenie przez zachowanie się żelbetowego pasma płytowego. Doświadczenia, wykonane nad pasmem płyty żelbetowej o podanej grubości i zbrojeniu ułożonym «dołem», wykazały, że jeśli oś odciętych przedstawiać będzie krzywiznę, a więc — w założeniu sztywno-plastycznego schematu odkształcenia — nachylenie płatów względem siebie, zaś oś rzędnych — wartość momentu «granicznego», to zależność między momentem a krzywizną linii załomu przedstawi się jak na rys. 18.

⁵⁾ Oznacza to zarazem, że pomijamy w ten sposób niedużą nadwyżkę nośności, wynikającą z faktu «utwardzenia» materiału.

Krzywa 1 dotyczy płyty zbrojonej stalą miękką, zaś krzywa 2 odnosi się do zbrojenia drutem stalowym, który przy próbie rozciągania po zerwaniu wykazywał wydłużenie około 5% i nie posiadał wyraźnej granicy plastyczności. Jak widać z rysunku, w obydwu przypadkach istnieje znacznej długości platforma, którą uważać można za poziomą, a która wskazuje, iż wartość momentu od chwili osiągnięcia pewnej wielkości jest stała i niezależna od krzywizny.



Rys. 18

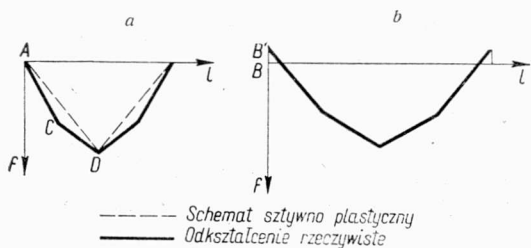
4.2. Następnym problemem, któremu należy poświęcić nieco uwagi, jest problem odkształceń sprężystych oraz ich wpływu na układ linii załomów płyty. Na innym miejscu, [16], stwierdzono, iż odkształcenia sprężyste, w szczególności zaś zakrzywienia płyty w tych częściach, w których naprężenia nie osiągnęły granicy plastyczności, można w pierwszym przybliżeniu pominąć w porównaniu z odkształceniami plastycznymi, występującymi w przekrojach, w których nastąpiło osiągnięcie stanu granicznego. Takie założenie jest równoznaczne z przyjęciem tzw. sztywno-plastycznego modelu odkształcenia w chwili zniszczenia (por. [15], [16], [27]), co pozwala uważać poszczególne płyty za płaskie. Stąd bezpośrednio wynika, że linie załomu są liniami prostymi (por. [6], [7], [8], [9], [10], [15], [16], [22]).

Problem ten wymaga nieco innego potraktowania dla dwu różnych praktycznie ważnych typów obciążeń, mianowicie obciążeń rozłożonych równomiernie i obciążeń skoncentrowanych w formie sił skupionych.

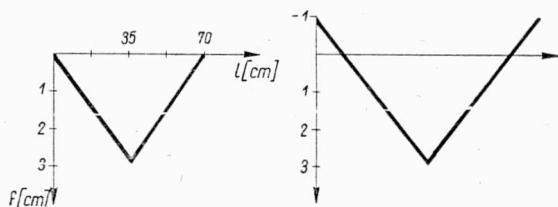
Jeśli chodzi o płyty obciążone w sposób równomierny na całej powierzchni, to założenie, że płyty pozostają płaskimi, nie jest w rzeczywistości w pełni spełnione, lecz w przybliżeniu jest ono uzasadnione. Jako ilustracja powyższego problemu niech posłuży rys. 19, [10].

Na rysunku 19a przedstawiony jest charakter odkształceń płatów płyty kwadratowej w płaszczyźnie jednej osi symetrii powierzchni płyty, natomiast na rys. 19b odkształcenia, występujące wzdłuż przekątnej. Przesunięcie się punktu B z pierwotnego położenia na osi długości l do położenia B' świadczy o podniesieniu się naroża B w stosunku do położenia w stanie nieobciążonym. Zagadnienie podnoszących się naroży omówione zresztą będzie na innym miejscu. Oczywiście, przedstawienie odkształcenia płyty w rozpatrywanym przekroju w postaci linii łamanej ACD

jest schematyczne i ma na celu jedynie zwrócenie uwagi na rząd wielkości odkształceń sprężystych w stosunku do plastycznych w linii załomu, reprezentowanej na rysunku przez punkt D.



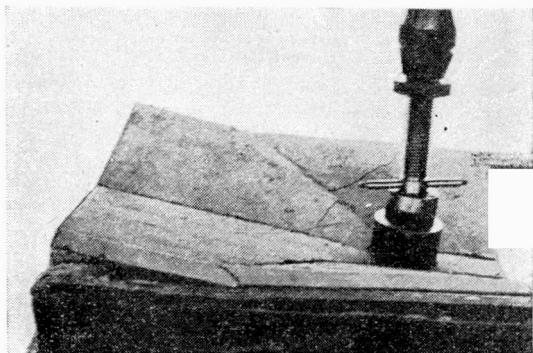
Rys. 19



Rys. 20

Inny przypadek potwierdzający założenie prostoliniowości linii załomów przedstawia rys. 21.

Należy się tu jednak zastrzec, że w przypadku płyty o dużej powierzchni, a małej przy tym sztywności, obciążonej pojedynczą siłą skupioną, zagadnienie przedstawiać się może nieco inaczej, gdyż linie załomów niekoniecznie muszą dojść do krawędzi podparcia. Powstaje w tym przypadku inny układ siatki zniszczenia oraz inny nieco obraz odkształceń, który może nie odpowiadać wykresom, przedstawionym na rys. 19, niemniej jest on również zgodny z założeniami teorii granicznej.



Rys. 21

4.5. Po tym omówieniu doświadczalnego sprawdzenia słuszności założeń teorii nośności granicznej należy z kolei wyjaśnić niektóre zagadnienia, związane z metodyką prowadzenia doświadczeń nad weryfikacją tej teorii.

Jest rzeczą wiadomą, że o wielkości obciążenia łamiącego według teorii nośności granicznej świadczy układ linii załomów oraz wartość jednostkowego momentu łamiącego. Jeśli chodzi o pierwszy z wymienionych czynników, nie będziemy go w chwili obecnej bliżej rozpatrywali, a to dlatego, że metoda wyznaczania układu linii załomów dla danych warunków podparcia i obciążenia omówiona została już uprzednio dość szczegółowo⁶⁾. Należy tu jedynie przypomnieć, że posługuje się ona kryterium maksymalnego oporu plastycznego, co pozwala ustalić niezbędną liczbę parametrów charakteryzujących siatkę zniszczenia.

Ze stanowiska eksperymentalnego uzasadnienia teorii nośności granicznej ważnym jest drugi ze wspomnianych czynników, mianowicie wartość momentu łamiącego na jednostkę długości linii załomu, czyli — jak wartość tę będziemy nazywali — tzw. moment jednostkowy. Znajomość momentu jednostkowego jest ważna z tego względu, iż pozwoli ona przy właściwej w danych warunkach obciążenia i podparcia siatce zniszczenia na wyznaczenie wielkości obciążenia łamiącego na drodze teoretycznej i porównanie go z rzeczywistym obciążeniem niszczącym, co zatem pozwoli ustalić stopień zgodności wyników teoretycznych z wynikami doświadczeń. Znajomość momentu jednostkowego jest przeto nieodzowna w tym celu, aby można było na podstawie układu linii załomów wnioskować o wielkości obciążenia łamiącego.

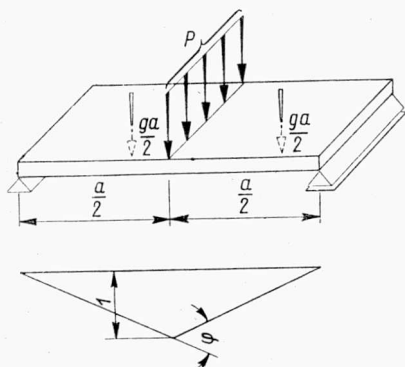
Jak o tym powiedzieliśmy już na innym miejscu ([16] oraz p. 3.2 pracy niniejszej) przyjmuje się zazwyczaj, iż nośność płyty żelbetowej określona jest między innymi przez moc zbrojenia, mającego przenieść powstałe w elemencie naprężenia rozciągające; pomija się przy tym zwykle ten dodatkowy czynnik, który, w sposób co prawda nieznaczący, niewątpliwie jednak zwiększa nośność ustroju, mianowicie wytrzymałość betonu na rozciąganie.

Aby uniezależnić się od konieczności wyznaczania momentu jednostkowego na drodze teoretycznej w oparciu o jedną z metod z dziedziny tzw. teorii żelbetu, wskazane jest poszukiwanie tego momentu dla obecnych naszych potrzeb na drodze doświadczalnej. Wyznaczanie w ten sposób momentu jednostkowego, przyporządkowanego płycie o danej grubości, mocy zbrojenia i rodzaju mieszanki betonowej, pozwala pominąć szereg czynników nie mających dla naszych badań znaczenia, a występujących przy wyznaczaniu tego momentu na podstawie którejkolwiek z metod wymiarowania zginanych elementów żelbetowych.

Konieczność zrealizowania największego wyężenia w punktach, położonych na linii prostej, narzuca określony schemat prowadzonego do-

⁶⁾ Por. np. [16] oraz podany na końcu pracy przykład liczbowy.

świadczenia. Jest to schemat belki swobodnie podpartej, obciążonej siłą skupioną; w zastosowaniu do pasma płytowego o szerokości równej pewnej jednostce liniowej, np. 1 m, oznacza to, że obciążenie powinno być rozłożone w sposób równomierny wzdłuż pewnej linii. Schemat taki przedstawia rys. 22. W bilansie jednak sił wewnętrznych i zewnętrznych należy uwzględnić również ciężar własny płyty g .



Rys. 22

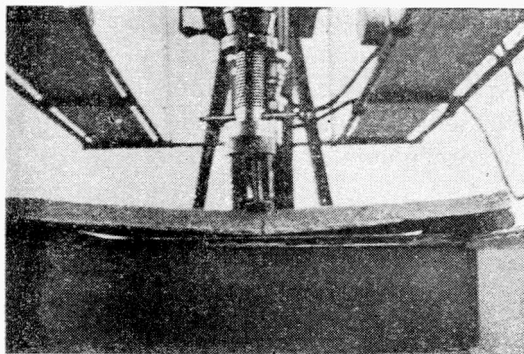
Rozpatrując zagadnienie jako «liniowe» udzielamy punktowi zaczepienia siły P w kierunku jej działania przesunięcia równego jednostce. Wówczas bilans prac sił wewnętrznych i zewnętrznych można zapisać w postaci

$$P \cdot 1 + \frac{ga}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = M \frac{4}{a};$$

stąd

$$(4.3.1) \quad M = \frac{Pa}{4} + \frac{ga^2}{8}.$$

Dla wykonywanych przez nas doświadczeń wartość momentu jednostkowego przy procencie zbrojenia $\varphi = 0,126\%$ wyznaczana była na podstawie wyników obciążenia i łamania pasma płytowego, którego szerokość miała 68 cm, odstęp punktów podparcia $a = 70$ cm i grubość 3 cm. Stosowano prasę hydrauliczną; siła rozłożona była wzdłuż prostej w środku rozpiętości pasma za pomocą dźwigarka rozdzielczego INP 8 (rys. 23).

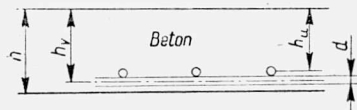


Rys. 23

Średnia wartość siły łamiącej, przeliczona na 1 mb szerokości pasma przy uwzględnieniu ciężaru belki rozkładającej obciążenie, wynosiła $P = 109$ kG/m; ciężar własny płyty (wykonanej ze zbrojonej zaprawy cementowej) wynosił $g = 1.900 \cdot 0,03 = 57$ kG/m²; daje to wartość momentu

$$M = \frac{109 \cdot 0,7}{4} + \frac{57 \cdot 0,7^2}{8} = 19,1 + 3,5 = 22,6 \text{ kGm m.}$$

4.4. Wartość momentu jednostkowego zależy oczywiście od odległości zbrojenia od ściskanej krawędzi przekroju płyty. Powoduje to taki skutek, że żelbetowa płyta o jednakowej mocy zbrojenia w dwu wzajemnie prostopadłych kierunkach staje się, ściśle rzecz biorąc, układem ortotropowym o różnych wartościach momentów przypisanych tym kierunkom ortotropii. Stosunek tych momentów możemy traktować jako zależny w sposób istotny jedynie od grubości prętów zbrojenia (przy założeniu, że zbrojenie w dwu prostopadłych do siebie kierunkach układane jest bezpośrednio jedno na drugim, rys. 24).



Rys. 24

Jeśli więc został wyznaczony doświadczalnie np. moment M_v , to $M_u = M_v h_u / h_v$ ⁷⁾ względnie, wstawiając $h_u = h_v - d$,

$$(4.4.1) \quad M_u = M_v \left(1 - \frac{d}{h_v} \right).$$

W celu jednak uproszczenia przeliczeń, dokonywanych przy opracowywaniu wyników doświadczeń, będzie rzeczą korzystną posługiwać się pewną wartością momentu jednostkowego średniego (oczywiście tylko dla warunku zbrojenia jednakowego w obu kierunkach). Taki średni moment «zredukowany» pozwoli wnosić o wielkości obciążenia łamiącego bezpośrednio z długości linii załomów.

Jeśli więc $M_u = F(f_v)$ wprowadzimy do bilansu prac, jako działający na długości a , zaś $M_v = F(f_u)$ na długości b , to średni moment na jednostkę długości linii załomu dla płyty podpartej na obwodzie jest

$$(4.4.2) \quad M = \frac{M_u a + M_v b}{a + b} = M_t \frac{b + a \left(1 - \frac{d}{h_v} \right)}{a + b} = k M.$$

Tak więc dla płyty kwadratowej ($a = b$) przy grubości płyty $h = 30$ mm, $h_v = 28,9$ mm, $\rho = 0,126\%$ i średnicy prętów zbrojenia $d = 2,2$ mm zredukowany moment jednostkowy wyznacza się, posługując się współczynnikiem k o wartości

$$k = 1 - \frac{d}{2 h_v} = 1 - \frac{2,2}{2 \cdot 28,9} = 0,962;$$

stąd wartość momentu zredukowanego wynosi

$$M = 22,6 \cdot 0,962 = 21,7 \text{ kGm m}.$$

⁷⁾ Por. treść odsyłacza *).

4.5 Należy jeszcze kilka słów poświęcić sposobowi realizacji obciążeń w badaniach laboratoryjnych, dotyczących teorii nośności granicznej. Obciążenie rozłożone w sposób równomierny, będące jednym z głównych przypadków praktycznie występujących obciążeń, jest w laboratorium trudne do zrealizowania, szczególnie w przypadku badań nad nośnością graniczną. Nie może być tu mowy o stosowaniu takich prostych sposobów obciążenia jak np. stosowanie warstwy piasku, a to z kilku powodów. Jednym z nich jest to, że obciążenie górnej powierzchni piaskiem czy innym podobnym materiałem (zarówno w workach lub skrzynkach, jak też nasypywanego bezpośrednio na płytę) uniemożliwia obserwację górnej powierzchni płyty, nie mówiąc już o braku dokładności, który przy takim sposobie jest nieunikniony. Drugim powodem, przemawiającym przeciwko takiemu typowi obciążenia, jest trudność właściwego uchwycenia zjawisk zachodzących w ułożonej przyźnie woreczków z piaskiem bądź też w jeszcze bardziej złożonym przypadku bezpośredniego obciążenia piaskiem w skrzyni, której dnem jest badana płyta. Zachodzące podówczas zjawiska tarcia materiału sypkiego o ścianki i inne objawy, znane z zagadnień rozkładu ciśnień w silosach, jak np. tworzenie się «sklepień» materiału, «korków» itd., a to na skutek specyficznego układu powierzchni ciśnień — zmieniają w sposób istotny warunki wykonywania doświadczenia.

Dla ilustracji przytoczymy wyniki przeprowadzonego przez nas badania próbnego dla uzasadnienia niewłaściwości stosowania dla naszych badań tego typu obciążeń. Poddano w tym celu płytę 70 cm × 70 cm, stanowiącą dno skrzyni, obciążeniu luźno sypanym piaskiem. Jednostkowy moment łamiący dla tej płyty wynosił około 70 kG/m, (zbrojenie w obydwu kierunkach było jednakowe, podparcie swobodne na obwodzie). Obciążenie łamiące wyznaczone na podstawie jednostkowego momentu wynosiło:

$$p = \frac{24 M}{b^2} = \frac{24 \cdot 70}{0,7^2} = 340 \text{ kG/m}^2,$$

podczas gdy rzeczywiste obciążenie (rzeczywiste w rozumieniu całkowitego ciężaru warstwy piasku na «obciążoną» powierzchnię) wynosiło około 1000 kG/m² w chwili pojawienia się pierwszych rys; ponadto stwierdzono, że dalsze pogrubienie warstwy obciążającej piasku nie powodowało widocznego wpływu na strukturę pęknięć płyty.

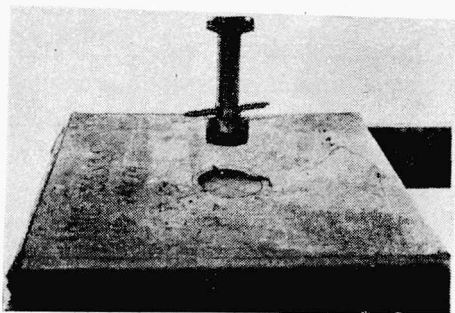
Analizowaliśmy szereg innych możliwości realizowania obciążeń ciągłych, między innymi za pomocą warstwy wody przy zastosowaniu odpowiednich uszczelnień gwarantujących, że nie będzie ona mogła wyciekać; jednak mimo iż realizacja tego typu obciążenia jest możliwa i stan

parć jest tu łatwy do określenia, zrezygnowaliśmy z niego z uwagi na trudności w uzyskaniu niezbędnych materiałów.

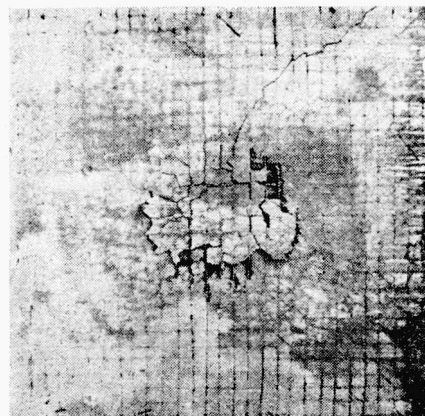
Tak więc jedynym praktycznie łatwym sposobem realizacji jest system obciążenia ustroju za pomocą sił skupionych, rozstawionych dostatecznie gęsto; tak by działanie szeregu tych sił można było uważać za obciążenie równomiernie rozłożone. Można taki typ obciążenia uzyskać przez działanie szeregu pras hydraulicznych sprzężonych bądź przez układ dźwigni, bądź też po dostosowaniu urządzenia wielokrążkowego do realizowania obciążeń powierzchniowych — za pomocą schematu z dwulinkowym układem krążków, [3].

4.6 Zastąpienie obciążenia ciągłego przez siły skupione w pewnym sensie utrudnia właściwą interpretację wyników doświadczeń, a to przez istniejącą w tych warunkach możliwość lokalnego przewyciężenia wytrzymałości betonu na ścinanie i przebicia płyty. Taki stan zniszczenia w teorii nośności granicznej płyt nie jest na ogół rozpatrywany, a to z tego powodu, że teoria ta opiera się na założeniu występowania odkształceń plastycznych w stali lub też innym materiale ciągliwym (elasto-plastycznym), który ma za zadanie przejąć naprężenia rozciągające, występujące w ustroju. Jak się okaże w dalszym ciągu niniejszej pracy, «lokalne» zniszczenie płyty przez przebicie może być związane z graniczną wartością siły znacznie niższej, niżby to wpływało z zależności, wynikających z teorii nośności granicznej (zniszczenie «pełne» przy zginaniu).

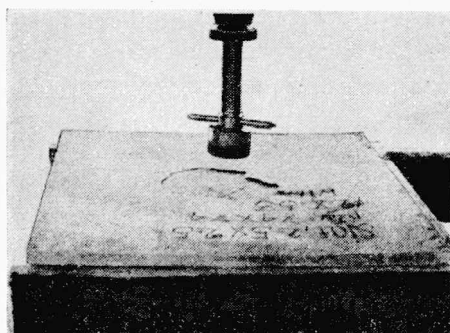
Na tym miejscu ograniczymy się do zilustrowania zjawiska przebicia kilkoma fotografiami. I tak rys. 25 przedstawia zniszczenie przez przebicie płyty izotropowej kwadratowej swobodnie podpartej o mocy zbrojenia $\rho = 0,505\%$, oglądane od strony górnej powierzchni płyty, zaś rys. 26 pokazuje dolną powierzchnię płyty po zniszczeniu. Podobne zjawisko ilustrują również dla płyty o dwukrotnie mniejszej mocy zbrojenia rysunki 27 i 28, zaś rysunki 29 i 30 — dla płyty o innej grubości i jeszcze niższym procencie zbrojenia. Jeszcze inny przykład zniszczenia przez «przebicie» podaje rys. 31. Bliższa analiza reprezentowanych na fotografiach układów linii zniszczenia pozwala wyciągnąć tu jeszcze jeden — zresztą oczywisty — wniosek; okazuje się mianowicie, że w płycie o większej mocy zbrojenia (rys. 25 i 26) zniszczenie przez przebicie nastąpiło przed powstaniem w stali odkształceń plastycznych, wywołanych przez naprężenia normalne. Dolna powierzchnia płyty — poza miejscem przebicia płyty — nie jest spękana tak, jak miałoby to miejsce w chwili powstania w zbrojeniu odkształceń plastycznych. Inny układ siatki zniszczenia reprezentuje rys. 28, gdzie powstają już w sposób wyraźny pęknięcia charakterystyczne dla tego typu podparcia i obciążenia, jednak i tu zniszczenie elementu nastąpiło przez przebicie. O tym, iż nie na całej długości linii



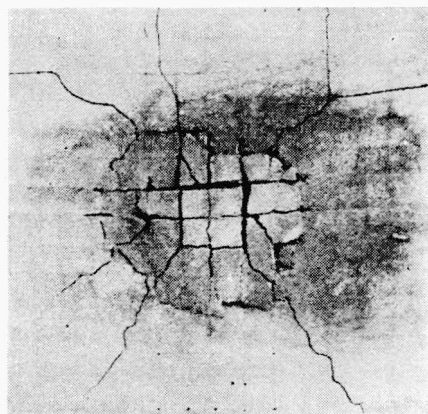
Rys. 25



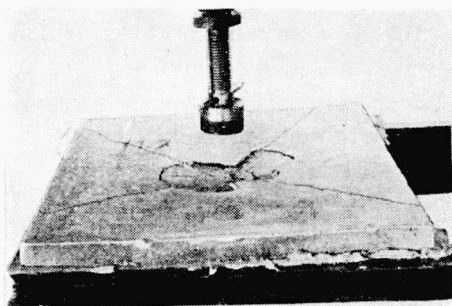
Rys. 26



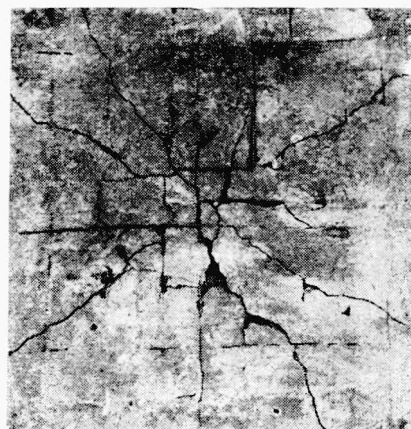
Rys. 27



Rys. 28



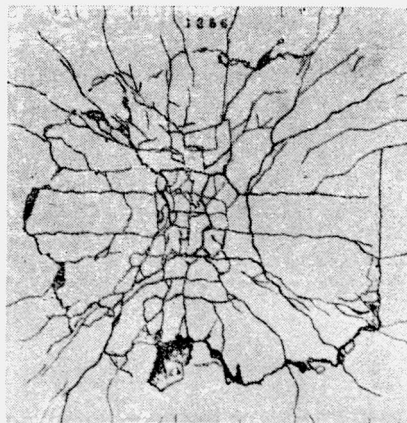
Rys. 29



Rys. 30

załomów powstały w zbrojeniu naprężenia $\sigma = Q_r$, mówi również zjawisko, że po zdjęciu obciążenia rysy w ich partiach przy narożach znikają. Rysunki 29 i 30, dotyczące płyty ortotropowej, odznaczającej się jeszcze niższym procentem zbrojenia, wskazują, iż tu za pierwszy czynnik, powodujący powstanie trwałych odkształceń, uważać można zginanie, nie zaś przebicie (wyraźne linie załomów spowodowane zginaniem płyty).

4.7. Przedstawienie powyżej kilku charakterystycznych zdjęć, dotyczących zniszczenia przez przebicie, ma na celu zwrócenie uwagi na czynniki, które należy brać pod uwagę przy zastępowaniu obciążeń ciągłych siłami skupionymi. Dlatego też w naszych doświadczeniach staraliśmy się posługiwać płytami o niskim procencie zbrojenia, co może nie jest uzasadnione ze stanowiska ekonomiki, ale jest właściwe ze stanowiska warunków, w jakich przeprowadzane są doświadczenia. Zjawisko to zresztą zostało tu może nieco przejawione, gdyż zdjęcia dotyczyły niszczenia płyt jedną tylko siłą skupioną, a więc o dużej stosunkowo wartości. Wówczas, gdy działa szereg sił, wartości, jakie osiągną one w chwili przekształcenia układu w mechanizm, będą w pewien określony sposób mniejsze i zjawisko przebicia może nie wystąpić i wystąpić nie powinno. Tak więc w dalszej części, przy omawianiu zgodności strony doświadczalnej z teoretyczną, dla obciążeń ciągłych zagadnienie przebicia płyty nie będzie już omawiane, albowiem warunki przeprowadzania doświadczeń uzasadniają takie stanowisko.



Rys. 31

5. Charakterystyka warunków doświadczeń

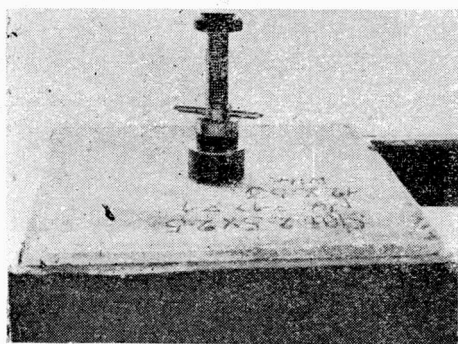
5.1. Uzasadnienia doświadczalnego słuszności teorii nośności granicznej szukaliśmy nie tylko w doświadczeniach własnych, zresztą skromnych z uwagi na nasze możliwości w zakresie urządzeń i sprzętu, lecz również i w ogłaszanych wynikach doświadczeń obcych. Doświadczenia takie wykonywane dla innych celów i interpretowane z innego stanowiska wykorzystane zostały obecnie dla naszych potrzeb. Do najstarszych badań nad zagadnieniem kształtowania się rys i wielkości obciążenia niszczącego należą badania C. Bacha, [1],[4]. Następnie opieraliśmy się na wynikach doświad-

czeń przeprowadzonych przez instytucję *Deutscher Ausschuss für Eisenbeton*⁸⁾ i opublikowanych w jej wydawnictwach, w szczególności w pracy [4].

Nie będziemy zatrzymywać się nad charakterystyką używanych w obcych badaniach materiałów (kruszywo, stal), natomiast podamy kilka charakterystycznych danych na ten temat, odnoszących się do badań własnych.

5.2 Modele do własnych badań⁹⁾ wykonywane były z zaprawy cementowej o stosunku 1 : 4 i wskaźniku $w/c = 0,7$. Wytrzymałość na ściskanie walców ϕ 16 wahała się w granicach 60 do 75 kG/cm², wytrzymałość na rozciąganie, mierzona na podobnych próbkach według metody «poprzeczne-go» ściskania walców, [26], zawierała się w granicach 10,0 do 12,4 kG/cm².

Modele zbrojone były siatką z drutu o średnicy $d = 2,2$ mm i $Q_r = 2210$ kG/cm² oraz $R_r = 3440$ kG/cm², przy czym strefa pozioma na wykresie roboczym rozciągania w chwili osiągnięcia Q_r była stosunkowo krótka (odpowiadała przyrostowi wydłużeń około 1%). Stal charaktery-



Rys. 32

zowała się dużym wydłużeniem względnym (ok. 20% przy długości próbki 20 cm), przy czym na obszarze utwardzenia (z chwilą przekroczenia granicy plastyczności) występowała strefa, w której odkształcenia przyrastały znacznie przy małym zwiększaniu siły. Jako charakterystyczny dla tego rodzaju zbrojenia wykres zależności między krzywizną a jednostkowym momentem łamiącym w pasmie płytowym należy przyjąć krzywą 2 spośród przedstawionych na rys. 18.

Obciążania modeli siłą skupioną dokonywano za pomocą prasy hydraulicznej do 2 t z dokładnością odczytów do 5 kG.

Sposób przeprowadzania doświadczenia ilustruje rys. 32.

Z kolei przejdziemy do bezpośredniego omówienia wyników doświadczeń.

6. Płyta kwadratowa obciążona w środku siłą skupioną

6.1. Przed przystąpieniem do analizy wyników doświadczeń należy jeszcze wyjaśnić niektóre problemy teorii w przypadku działania obciążeń skupionych.

⁸⁾ Badania te przeprowadzone były w Stuttgarcie pod kierownictwem C. Bacha i O. Grafa, następnie w Dreźnie pod kierunkiem W. Gehlera i H. Amosa.

⁹⁾ W badaniach brał również udział J. Pietrzykowski.

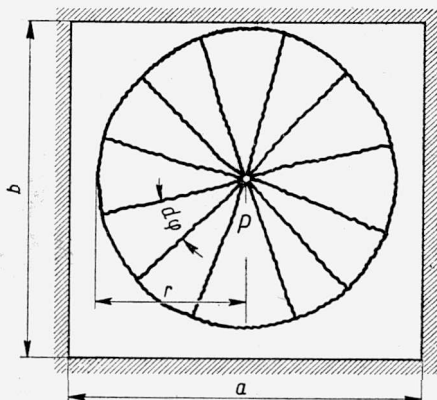
Płyta prostokątna izotropowa przy zachowaniu pewnych warunków, mianowicie wtedy, gdy punkt działania siły znajduje się nie w jednako- wych odległościach od krawędzi podparcia, wykazuje siatkę zniszczenia jak przedstawiono na rys. 33, gdzie pęknięcia radialne dotyczą dolnej, obwodowe zaś górnej powierzchni płyty.

Gdybyśmy chcieli obliczyć wiel- kość siły łamiącej, to, nadając punk- towi działania siły przesunięcie jed- nostkowe, otrzymamy

$$(6.1.1) \quad P = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} (M + M') r d\varphi,$$

co da w rezultacie

$$(6.1.2) \quad P = 2 \pi M (1 + \lambda).$$



Rys. 33

Wartości momentów jednostkowych M oraz $M' = \lambda M$ uwarunkowane są możliwością ich przejścia przez zbrojenie «dolne» względnie «górne».

Jeżeli przyjmiemy, że naprężenia rozciągające może przyjmować je- dynie zbrojenie, to w przypadku gdy $\lambda = 0$, tzn. gdy nie ma zbrojenia górą, do bilansu prac przygotowanych nie wejdzie praca potrzebna do otwarcia pęknięcia obwodowego i wartość siły łamiącej przedstawi zna- na zależność

$$(6.1.3) \quad P = 2 \pi M.$$

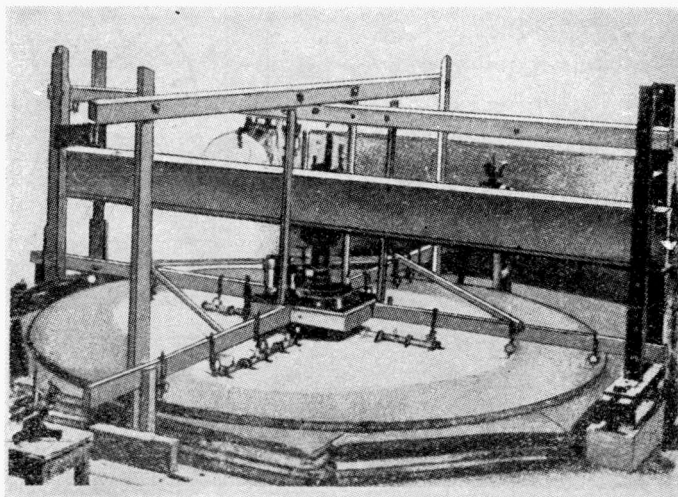
Identyczną wartość otrzymuje się wychodząc ze ściślejszych założeń teorii odkształceń elasto-plastycznych¹⁰⁾.

6.2. Przy obciążaniu jedną siłą skupioną płyty izotropowej czy też ortotropowej, w przypadku gdy zabezpieczone są warunki, by nie na- stąpiło «przebicie», tworzy się wokół punktu zaczepienia siły stożek. Sto- żek ten scharakteryzowany jest — w przypadku płyt izotropowych — pewnym promieniem stałym, innymi słowy jest stożkiem, którego prze- kroje prostopadłe do osi są kołami. W przypadku płyt ortotropowych przekroje te są elipsami¹¹⁾. Równanie (6.1.2) mówi, że wielkość siły ni- szczącej (w założeniu, że płyta jest nieważka) nie zależy od wymiarów

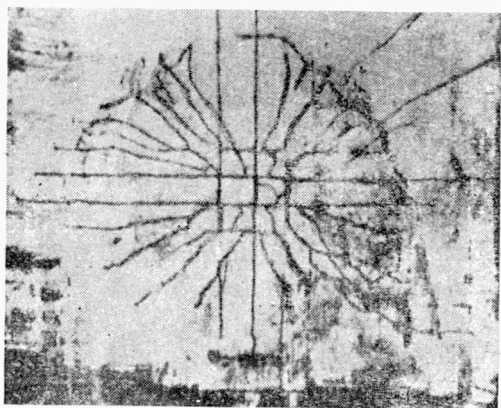
¹⁰⁾ Por. np. W. W. Sokołowski, [31].

¹¹⁾ Należy zaznaczyć, że nie są to jedynie możliwe formy zniszczenia, istnieją bo- wiem pewne specjalne przypadki ogólniejszego rozwiązania, które dają linię za- łomu według spirali logarytmicznej; por. [27] i [14].

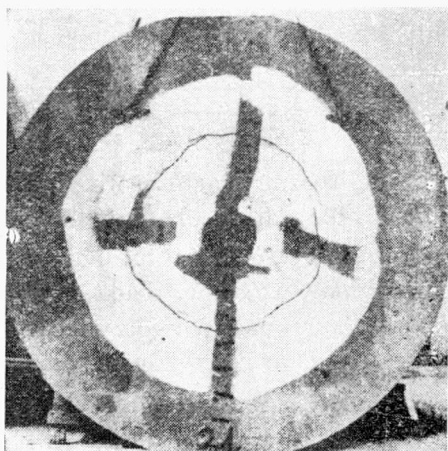
geometrycznych (wielkości) płyty ani od promienia «stożka wyłomu» (gdy ograniczamy się do układów izotropowych). Określenie wielkości tego promienia i czynników, wpływających na jego wielkość, wiąże się z problemami nośności granicznej płyt spoczywających na sprężystym podłożu; stanowi to oddzielne zagadnienie.



Rys. 34



Rys. 35



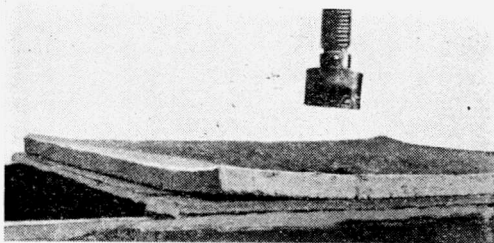
Rys. 36

Jako ilustracja rozważań dotyczących «wylamywania» się z płyty — niezależnie od jej wymiarów¹²⁾ — pewnego skończonego obszaru, niech

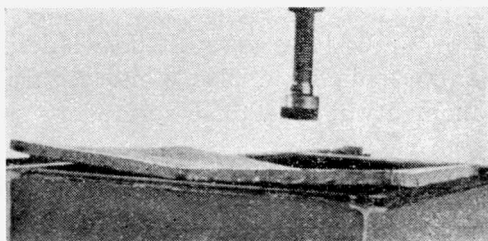
¹²⁾ Istnieje jednak pewne ograniczenie ku dołowi (wymiały krytyczne), którego tu obecnie nie precyzujemy.

posłużą rysunki 34, 35 i 36. Rysunek 34 przedstawia sposób przeprowadzenia badania płyty o średnicy 7 m i grubości 15 cm, zbrojonej górną i dolną; rys. 35 — układ pęknięć po stronie dolnej, zaś rys. 36 — układ pęknięć od strony górnej. Widać tu w sposób wyraźny, że linie załomów nie dochodzą do krawędzi swobodnego podparcia. Płyta oparta była na podłożu z masy drzewnej.

6.5. Taki jednak układ zniszczenia powstaje również w płytach o małych wymiarach w tym przypadku, gdy naroża mają uniemożliwioną swobodę podnoszenia się. Możliwość podnoszenia się naroży zmienia sposób podparcia płyty; wtedy bowiem płyta będzie podparta już nie na całym obwodzie, lecz jedynie na pewnych jego partiach. Rysunek 37 przedstawia podniesione naroże i charakteryzuje rzeczywisty sposób podparcia oraz miejsca przecięcia się



Rys. 37



Rys. 38

linij załomów z krawędzią podparcia przy sile działającej w środku płyty; rys. 38 jest charakterystyczny dla innego umiejscowienia siły.

Aby uzyskać więc możliwość porównania wyników doświadczeń z rezultatami rozważań teoretycznych, należy rozpatrzyć stan zniszczenia płyty w przypadku podnoszących się naroży.

Dla izotropowej płyty kwadratowej (rys. 39) udzielenie punktowi zaczepienia siły przemieszczenia równego jednostki prowadzi z uwagi na warunki symetrii układu, do wyrażenia na bilans pracy sił wewnętrznych i zewnętrznych w postaci

$$P = 8M \frac{a - 2x}{a} + 4M \frac{x\sqrt{2}}{a - x} \sqrt{2} = 8M \left(\frac{a - 2x}{a} + \frac{x}{a - x} \right).$$

Rys. 39

Stosując kryterium maksymalnego oporu plastycznego otrzymamy z warunku $dM/dx = 0$ po wykonaniu działań pośrednich

$$(6.3.1) \quad x = \frac{a}{2} (2 - \sqrt{2}),$$

a następnie

$$(6.3.2) \quad M = \frac{P}{16} \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Wynika zatem, że wartość siły jest w rozpatrywanym przykładzie taka sama, jak dla płyty o kształcie ośmiokąta umiarowego w przypadku przytrzymania naroży.

6.4. W toku naszych doświadczeń poddana została obciążeniu aż do zniszczenia seria płyt o mocy zbrojenia $\varphi = 0,252$ i $0,505$, dla których momenty jednostkowe zestawione są w tabelcy 1.

Tablica 1

Typ zbrojenia	Moc zbrojenia %	Moment jednostkowy kG			Moment obliczeniowy $M = k M_v$
		obciążenie zewnętrzne	ciężar własny	M_v	
⊙ 2,2 co 5 cm	0.252	38,2	3,5	41,7	40,1
⊙ 2,2 co 2,5 cm	0.505	76,4	3,5	79,9	76,8

Na podstawie równania (6.3.2) po uwzględnieniu pracy ciężaru własnego płyty na odpowiednich przesunięciach możemy napisać

$$P \cdot 1 + g \frac{a^2(\sqrt{2} - 1)}{2,2} \cdot \frac{8}{3} = 16 M (\sqrt{2} - 1),$$

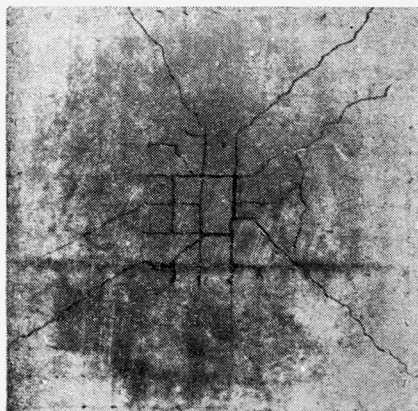
następnie zaś

$$P + ga^2 \cdot 0,276 = 6,62 M.$$

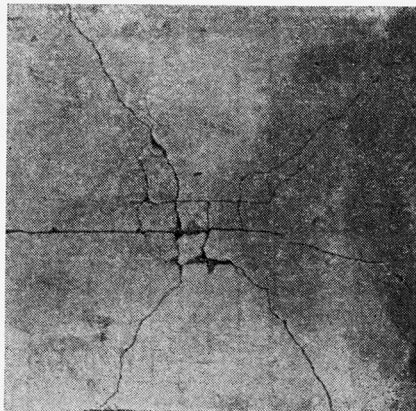
Podstawiając teraz $a = 0,7$ m, $g = 57$ kG/m² oraz $G = ga^2$ otrzymujemy wartość teoretyczną

$$6.4.1) \quad P = 6,62 M - 0,276 G.$$

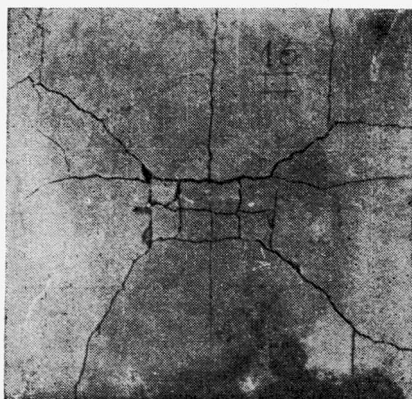
Wyniki doświadczeń natomiast zestawione są w tabelcy 2.



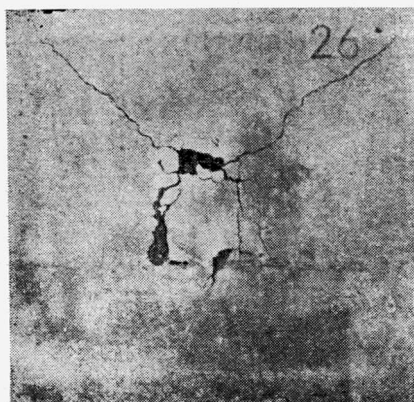
Rys. 40



Rys. 41



Rys. 42



Rys. 43



Rys. 44

Jest rzeczą interesującą, w jakiej mierze linie załomów rzeczywiste odpowiadają schematowi teoretycznemu. Rysunki 40, 41 i 42 obrazują rzeczywisty układ siatek zniszczenia na dolnej powierzchni płyty dla przypadku mocy zbrojenia $\varphi = 0,252\%$, zaś rysunki 43 i 44 dla $\varphi = 0,505\%$.

Tablica 2

h cm	Zbrojenie				M kGm/m	Obciążenie łamiące P kG			Różnica %
	φ %	d mm	oczka siatki cm	Q_r kG/m ²		obliczo- ne	z do- świadczenia	średnia z do- świadczeń	
3,0	0,252	2,2	5/5	2210	40,1	264	225 235 235 260	239	— 9,5
3,0	0,505	2,2	2,5 2,5	2210	79,9	501	455 415	435	— 13,2

Fotografie te wykazują poprawność teoretycznego modelu zniszczenia potwierdzając tym samym teorię nośności granicznej od strony jakościowej.

Należy powiedzieć tu jeszcze kilka słów na temat zgodności wyników doświadczalnych z teoretycznymi, o ile chodzi o stronę ilościową. Jak widać z tablicy 2, rzeczywista siła niszcząca jest niższa, aniżeli wynika to z obliczeń. Jako zasadniczą przyczynę takiego stanu należy podać omawiane już poprzednio zniszczenie wskutek przebicia. Skutki przebicia są widoczne na załączonych fotografiach i to szczególnie wyraźnie dla większego procentu zbrojenia, gdzie różnice między obliczoną a wyznaczoną siłą niszczącą są największe.

7. Płyta kwadratowa obciążona siłami skupionymi rozmieszczonymi koncentrycznie wokół środka

7.1. Płyty o grubości 8 i 12 cm, co do pozostałych wymiarów i rozłożenia obciążeń scharakteryzowane na rys. 45, zbrojone były stałą o $Q_r = 4080 \text{ kG/cm}^2$ i podparte swobodnie na obwodzie; zbrojenie układane było w obu kierunkach w jednakowych odległościach od siebie, równych 10 cm.

Momenty jednostkowe dla tego rodzaju stali i rozstawu zbrojenia co 10 cm, uwzględniające odległości zbrojenia od górnej krawędzi (zbrojenia poprzeczne dołem lub górą), są zestawione w tablicy 3.

Tablica 3

	Grubość pasma cm	d mm	Rozstaw zbrojenia cm	φ %	Q_r kG/cm ²	Moment łamiący M_v	
						doświadcz. tm/m	średnio tm/m
Zbrojenie w dolnej warstwie (h_v)	12,1	7,3	10	0,37	4080	2,06	2,00
	12,2	7,2				2,02	
	12,1	7,2				2,03	
	12,1	7,2				1,90	
Zbrojenie w górnej warstwie ($h_v - d$)	12,2	7,3	10	0,37	4080	1,83	1,85
	12,1	7,2				1,83	
	12,1	7,3				1,86	
	12,2	7,2				1,90	
Zbrojenie w dolnej warstwie (h_v)	8,1	7,2	10	0,58	4080	1,19	1,19
	8,0	7,3				1,18	
	8,1	7,2				1,18	
	8,1	7,2				1,22	
Zbrojenie w górnej warstwie ($h_v - d$)	8,0	7,2	10	0,58	4080	1,01	1,08
	8,2	7,3				1,12	
	8,1	7,2				1,09	
	8,1	7,3				1,09	

Współczynnik redukcji momentu jednostkowego, z uwagi na warstwowe ułożenie zbrojenia, obliczony w stosunku do momentu dla zbrojenia w dolnej warstwie, wynosi

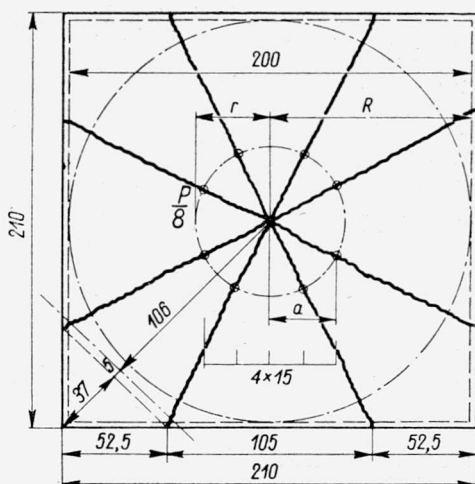
$$k = \frac{2,00 + 1,85}{2 \cdot 2,00} = 0,964.$$

7.2. Za punkt wyjścia do obliczenia siły niszczącej należy tu przyjąć wzór (6.1.3) odpowiednio dostosowany do układu sił; otrzymujemy w ten sposób

$$(7.2.1) \quad P = 2\pi \left(1 - \frac{r}{R}\right) M,$$

gdzie r jest promieniem koła, wzdłuż obwodu którego działają obciążenia, zaś R promieniem koła, na którego obwodzie wystąpi pęknięcie na górnej powierzchni płyty.

Koła te zaznaczone są na rys. 45 liniami przerywanymi w przeciwieństwie do oznaczonych pełnymi liniami załomów promieniowych na dolnej



Rys. 45

powierzchni, gdyż z uwagi na brak zbrojenia górą nie wnoszą one żadnych wartości do bilansu pracy.

Obliczona wartość siły łamiącej na podstawie wzoru (7.2.1) po uwzględnieniu udziału ciężaru własnego jest

$$P = \frac{2\pi}{1 - \frac{33,6}{100}} \left(M - \frac{1}{6} g \cdot 105^2 \right),$$

albo też wstawiając $G = g \cdot 210^2$

$$(7.2.2) \quad P = 9,46 M - 0,39 G.$$

Tablica 4

Grubość płyty cm	Zbrojenie				M tm/m	Obciążenie łamiące Pt			Różnica %
	φ %	d mm	oczka siatki cm	Q_r kG/cm ²		obli- czone	z do- świadczenia	średnie z do- świadczeń	
8,1	0,58	7,2	10/10	4080	1,14	11,1	12,5	12,0	8,1
8,1							12,2		
8,1							12,0		
12,1	0,37	7,3	10/10	4080	1,92	18,7	19,6	19,0	1,6
12,3		7,2					19,0		
12,2		7,2					19,5		
12,1		7,1					18,0		

Obliczenie to nie jest jednak zupełnie ścisłe, płyty bowiem nie są sobie całkiem równe; poprawniejsze obliczenie powinno uwzględnić fakt, iż wskutek działania sił skupionych linie załomów przejdą przez ich punkty zaczepienia. Poszczególne siły skupione przy nadaniu środkowi płyty przemieszczenia jednostkowego doznają przesunięć $(R - a)/R = 0,7$, zaś momenty odpowiednio na płatach A i B wykonają pracę na obrotach $\varphi_A = 1/100$ i $\varphi_B = 1/106$. Tak więc po obliczeniu potrzebnych wartości z zależności trygonometrycznych bilans prac można przedstawić w postaci

$$0,7 P + 4 \cdot \frac{1}{6} g \cdot 105^2 + 4 \cdot \frac{1}{6} g \cdot 111 \cdot 52,5 \sqrt{2} -$$

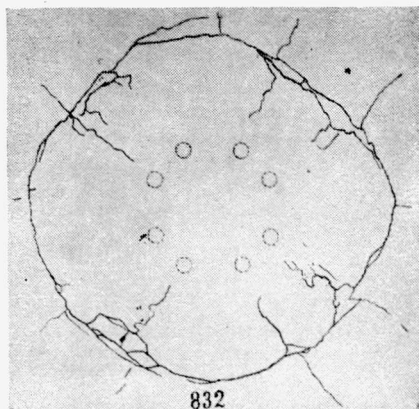
$$- 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot 52,5^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 4 M \frac{105}{100} + 4 M \frac{52,5 \sqrt{2}}{106};$$

stąd, podstawiając G jak poprzednio, otrzymujemy

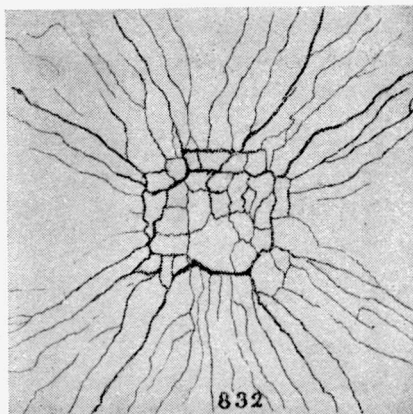
$$(7.2.3) \quad P = 10 M - 0,35 G.$$

Obliczona na podstawie tego wzoru siła niszcząca jest porównana z wynikami doświadczeń podanymi w tablicy 4.

Rzeczywisty układ linii zniszczenia przedstawia się dla tych doświadczeń, jak wskazują to rysunki 46 i 47; odpowiada on układowi teoretycznemu. Rysunek 46 przedstawia obraz siatki zniszczenia na górnej, następny zaś na dolnej powierzchni płyty. Na tych fotografiach zwracają uwagę drobne rysy występujące wyraźniej, aniżeli jest to widoczne na zdjęciach dotyczących poprzednich doświadczeń. Odnoszą się one do okresu naprężeń sprężystych w stali.



Rys. 46



Rys. 47

Te drobne pęknięcia zjawiają się jeszcze w okresie występowania w zbrojeniu naprężeń znacznie niższych od granicy plastyczności. Wzrost ustawionych w tak specjalny sposób obciążeń powoduje, że punkty, w których naprężenia najwcześniej osiągnęły granicę plastyczności, układają się według prostych, przechodzących przez punkty zaczepienia sił (rys. 45).

7.3. Jako przykład zastosowania wzoru (7.2.1) posłuży doświadczenie, wykonane na płytach takiej samej grubości 8 cm i 12 cm, przy czym obciążane one były siłą skupioną, działającą na małej (12 cm $\times$ 12 cm) powierzchni bezpośrednio wokół środka płyty. Płyty te charakteryzowały się tym, iż zbrojenie nie było układane w równych od siebie odległościach, lecz w kierunku obu boków odległości te były zmienne (w jednym kierunku rozstaw zbrojenia zmieniał się od 10 cm w środku do 14,3 cm przy brzegu, w drugim zaś odpowiednio od 9,3 cm do 14 cm).

Problem komplikuje tu zmienność momentu jednostkowego¹³⁾. Można jednak przyjąć do dalszych obliczeń moment jednostkowy dla śred-

¹³⁾ W sprawie rozwiązania ścisłego por. prace D. Niepostyna, [13], i A. Sawczuka, [30], [31].

niego rozstawu w każdym kierunku. Upoważnia nas do tego — przybliżonego tutaj — założenia zarówno rząd wielkości zmiany rozstawu, jak też i fakt, że dla płyty izotropowej — a rozpatrywaną płytę można uważać za taką z dobrym przybliżeniem — siatka zniszczenia pozostanie taka sama jak dla płyty o stałym momencie jednostkowym. Pamiętamy przy tym, że rozpatrujemy płytę kwadratową.

Moment jednostkowy obliczony został jako średni z momentów jednostkowych, przyporządkowanych odpowiednim średnim rozstawom zbrojenia, które wynoszą 11,7 cm i 11,0 cm dla omówionych wyżej kierunków [por. wzór (4.4.2)]. Tak więc moment jednostkowy wynosił dla płyt o grubości 12 cm

$$M = kM_v = \frac{1}{2} \left(\frac{2,00}{11,7} 10 + \frac{1,85}{11,0} 10 \right) = 1,69 \text{ tm/m},$$

zaś dla płyt o grubości 8 cm

$$M = kM_v = \frac{1}{2} \left(\frac{1,19}{11,7} 10 + \frac{1,08}{11,0} 10 \right) = 1,00 \text{ tm/m}.$$

Wartości momentów dla rozstawów wynoszących 10 cm wzięte są z tablicy 3.

Tablica 5

Grubość płyty cm	Zbrojenie				M tm/m	Obciążenie łamiące Pt		Różnica %
	η %	d mm	oczek siatki cm	Q_r kg/cm ²		obliczone	z doświad- czenia	
12,1	0,32	7,0	zmienne,	4080	1,69	10,8	11,0	1,8
8,1	0,50	7,1	średnio 11,7/11,0	4080	1,00	6,35	6,00	— 5,8 *)

*) Należy przypuszczać, że zniszczenie zostało spowodowane przez przebiecie (por. np. rys. 31).

Ustawiając równanie bilansu prac zgodnie z równaniem (7.2.1) dla wymiarów płyty jak w przypadku poprzednim i dla $r = 2/3 \cdot 6 = 4$ cm oraz $R = 100$ cm otrzymamy

$$(7.2.4) \quad P = \frac{2\pi}{1 - \frac{r}{R}} \left(M - \frac{1}{24} G \right) = 6,55 M - 0,25 G.$$

Wyniki doświadczalne dają dobrą zgodność z wynikami teoretycznymi; przedstawione są one w tablicy 5.

8. Płyta kwadratowa podparta na trzech bokach, obciążona siłą skupioną w środku

8.1. Obserwowana na modelach — w przypadku nie przytrzymywanych naroży — siatka zniszczenia sugeruje dla rozpatrywanego typu płyty przyjęcie układu linii załomów symetrycznego względem osi, przebiegającej prostopadłe do swobodnego boku płyty, jak wskazuje to rys. 48.

Pracę sił wewnętrznych można w przypadku płyty izotropowej przedstawić w postaci

$$(8.1.1) \quad \delta V = \sum_{i=1}^n M l_i \delta q_i,$$

gdzie n jest ilością płatów, niezbędnych dla przekształcenia układu w mechanizm, a l_i długością rzutu linii załomu na oś obrotu płata.

W rozpatrywanym przykładzie

$$\delta V = M \frac{2}{a} (a-x)^2 + M \frac{2}{a} (a-2x) + M \frac{1}{a-x} x \sqrt{2} \cdot 2, \quad \delta L = P \cdot 1.$$

Warunek $dM/dx = 0$ dla takich układów, dla których praca sił zewnętrznych nie zależy od wielkości charakteryzujących siatkę zniszczenia — a taki przypadek tutaj zachodzi — można zastąpić warunkiem minimum pracy sił wewnętrznych, a więc

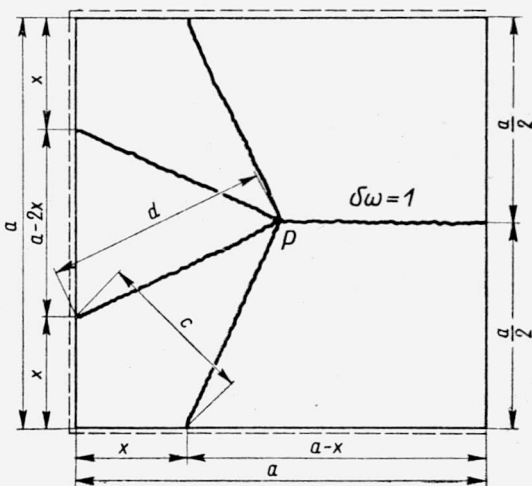
$$(8.1.2) \quad \frac{d(\delta V)}{dx} = 0.$$

8.2. Równanie (8.1.2) dla rozpatrywanego konkretnego przypadku prowadzi do wzoru

$$\frac{d(\delta V)}{dx} = \left[\frac{-4(a-x) + 2a^2}{a(a-x)^2} \right] = 0.$$

Stąd otrzymujemy

$$x = \frac{a}{2} (2 - \sqrt{2}).$$



Rys. 48

Jest to wartość identyczna jak w przypadku płyty podpartej swobodnie na czterech bokach.

Obliczając teraz wartość siły niszczącej z zależności $\delta L = \delta V$ otrzymujemy

$$P = 2M \left(\frac{3a-4x}{a} + \frac{2x}{a-x} \right),$$

co po wstawieniu wartości x , spełniającej warunek największego oporu plastycznego, wyrazi się w formie

$$(8.2.1) \quad P = 2 M (4 \sqrt{2} - 3).$$

Przystępując do porównania wyników doświadczeń z rezultatami wyżej przytoczonego rozwiązania teoretycznego należy wprowadzić w sposób podobny, jak czyniliśmy to w poprzednich przypadkach, pracę wykonaną przez ciężar własny płyty. Wówczas wyrażenie na siłę niszczącą otrzymuje się w postaci

$$(8.2.2) \quad P = 2 M (4 \sqrt{2} - 3) - AG,$$

gdzie A jest współczynnikiem, określającym udział sił ciężkości w ogólnym bilansie pracy.

Jeśli $a = 70$ cm i $x = 21$ cm, to

$$74^2 A = 2 \cdot 35^2 \cdot \frac{1}{2} + 14 \cdot 35 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 + 28 \cdot 35 \cdot \frac{1}{6} + \sqrt{2} \cdot 21 \cdot 35 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 = 1990.$$

Ostatecznie będzie zatem

$$(8.2.3) \quad P = 5,31 M - 0,35 G.$$

8.5. Badane płyty były zbrojone siatką o oczkach 5 cm i o procencie zbrojenia $\varphi = 0,252$. Dla rozważanego typu podparcia wartość współczynnika k , przez jaki należy pomnożyć moment jednostkowy podany w tabelcy 1, zgodnie z zasadą sformułowaną w p. 4, dla płyty czterosronnie podpartej wynosi

$$k = \frac{2a + a \left(1 - \frac{d}{h_v}\right)}{2a + a} = 1 - \frac{d}{3h_v} = 1 - \frac{2,2}{3 \cdot 28,9} = 0,975.$$

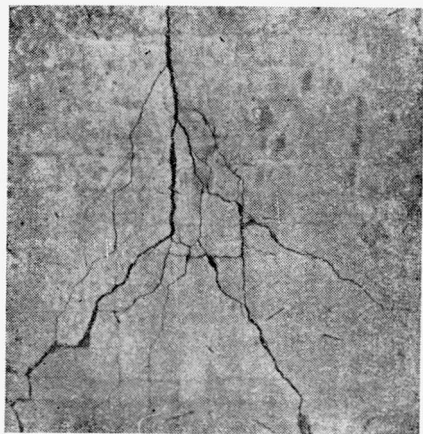
Tablica 6

Grubość płyty cm	Zbrojenie				M kGm/m	Obciążenie łamiące P kG			Różnica %
	φ %	d mm	oczka siatki cm	Q_r kG/cm ²		obli- czone	z do- świad- czenia	średnie z do- świadcz.	
3	0,252	2,2	5/5	2210	40,6	216	260	255	18
3							265		
3							240		

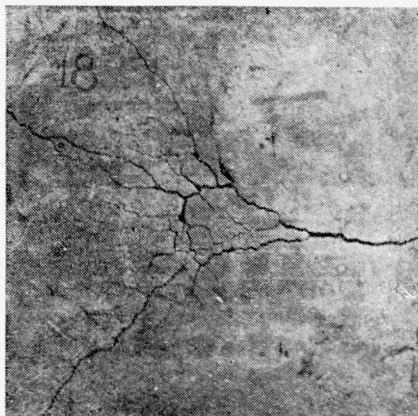
Moment jednostkowy, zredukowany, wynosi wtedy $M = kM_v = 0,975 \cdot 41,7 = 40,6$ kGm/m.

Tablica 6 przedstawia porównanie wartości obliczonych ze wzoru (8.2.3) z uzyskanymi na drodze doświadczalnej.

Rzeczywisty przebieg linii załomów na podstawie tych doświadczeń przedstawiony jest na rysunkach 49 i 50 dolnej powierzchni płyty.

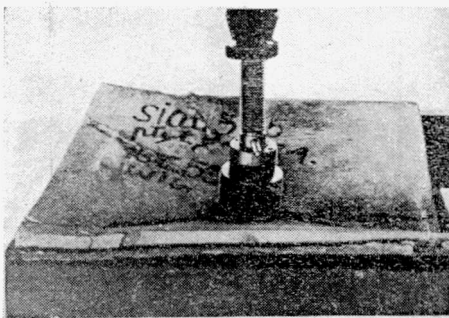


Rys. 49



Rys. 50

Należy jeszcze wyjaśnić stosunkowo dużą procentową różnicę między wynikami obliczenia teoretycznego a wynikami doświadczeń, jakie podaje tablica 6. Czynnikiem powodującym taki stan rzeczy jest działanie siły nie ściśle punktowo, lecz na pewnej powierzchni (rys. 51), co wpływa na zmianę wielkości obciążenia łamiącego, jak to widać chociażby z zależności (7.2.1) lub (7.2.4). Przy obliczeniu uwzględniającym powierzchniowe przenoszenie obciążenia różnica zmalałaby. Będzie o tym mowa niżej.



Rys. 51

9. Płyta kwadratowa obciążona równomiernie

9.1. Warto przytoczyć — przed przystąpieniem do analizy stopnia zgodności strony ilościowej teorii nośności granicznej z doświadczeniem dla interesującego nas tu przypadku — ciekawą fotografię zaczerpniętą z pracy C. Bacha, [1]. Rysunek 52 ilustruje stopień zgodności założeń od strony jakościowej i stanowi cenny materiał, ponieważ badania C. Bacha prowadzono z punktu widzenia innego stanowiska teoretycznego.

9.2. Omówione poprzednio trudności w laboratoryjnym zrealizowaniu obciążeń rozłożonych w sposób ciągły spowodowały, że starano się je zastąpić szeregiem sił skupionych. W omawianym obecnie doświadczeniu na płycie o rozpiętości w świetle podpór $2,0 \text{ m} \times 2,0 \text{ m}$ działały siły skupione w 16 punktach (rys. 53). Po nadaniu środkowi płyty przemieszczenia równego jedności poszczególne siły zewnętrzne wykonają pracę wskutek odpowiednich przesunięć ich punktów zaczepienia. Nie uwzględniając wpływu naroży otrzymujemy równanie pracy w postaci

$$4 \frac{P}{16} \cdot \frac{3}{4} + 12 \frac{P}{16} \cdot \frac{1}{4} + 4 \frac{G \cdot 30}{4 \cdot 100} = 4 M \frac{210}{100};$$

stąd

$$(9.2.1) \quad P = 22,4 M - 0,8 G,$$

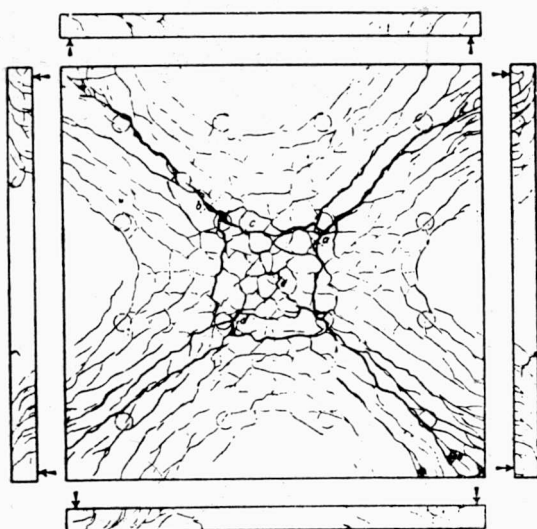
gdzie G oznacza — jak poprzednio — ciężar własny płyty.

Na podstawie obliczenia przyjmującego obciążenie za równomiernie rozłożone można by napisać

$$\frac{P}{3} + 0,3 G = 4 M \cdot 2,1;$$

stąd

$$(9.2.2) \quad P = 25,2 M - 0,9 G.$$



Rys. 52

Widać z porównania wzorów (9.2.1) i (9.2.2), że zastąpienie

obciążenia ciągłego siłami skupionymi daje różnicę wielkości siły niszczącej, wynoszącą około 12%.

Wynika stąd oczywisty wniosek, że porównywanie wyników badań należy oprzeć na wzorze (9.2.1).

9.3. W celu uzyskania wyników jeszcze bardziej poprawnych należy uwzględnić w równaniu, z którego wyznaczamy siłę łamiącą w oparciu o wartość momentu jednostkowego, zmniejszenie pracy sił wewnętrznych wskutek utworzenia się specyficznego układu linii załomów w narożach. Temu zagadnieniu należy tu kilka słów poświęcić.

Rozpatrzmy naroże płyty izotropowej (rys. 54); osie podparcia niech przecinają się pod kątem prostym, zaś siła skupiona niech będzie usytuowana na dwusiecznej tego kąta w pewnej odległości r od osi podparcia.

Gdyby zjawisko podnoszenia się naroża nie występowało po przesunięciu punktu działania siły o wielkość δw , powstałoby na dolnej krawędzi płyty pęknięcie, zaznaczone linią przerywaną, i praca sił wewnętrznych odnosząca się do naroża wyniosłaby

$$(9.3.1) \quad \delta V_1 = M \frac{\delta w}{r} r \cdot 2 = 2M \delta w.$$

Wskutek jednak możliwości podnoszenia się naroża powstana pęknięcia, zaznaczone linią pełną, i praca sił wewnętrznych będzie mniejsza (widać to chociażby z rozpatrzonego w p. 6 problemu płyty kwadratowej, obciążonej siłą skupioną w środku). Wartość x na podstawie (6.3.1) wynosi

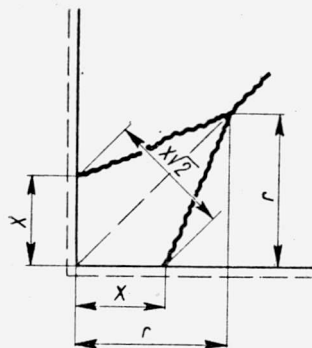
$$x = r(2 - \sqrt{2});$$

praca sił wewnętrznych wyrazi się zatem w tym przypadku zależnością

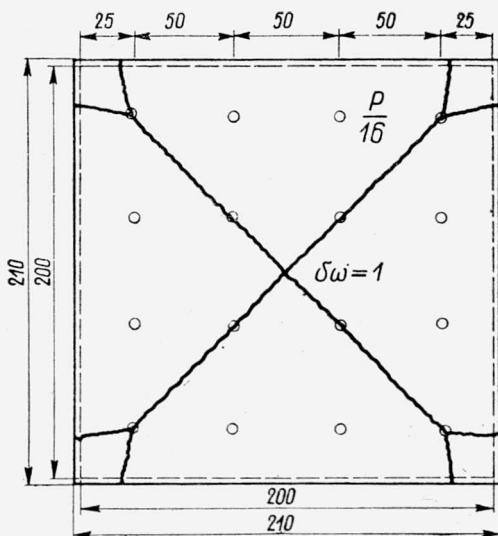
$$\begin{aligned} \delta V_2 &= Mr \sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) \frac{\delta w}{r} + 2M[r - r(2 - \sqrt{2})] \frac{\delta w}{r} = \\ &= 2M \delta w - (2 - \sqrt{2})^2 M \delta w. \end{aligned}$$

Zmniejszenie się więc pracy sił wewnętrznych wskutek powstania układu linii zniszczenia, oznaczonych linią ciągłą, wyniesie

$$\begin{aligned} (9.3.2) \quad \Delta \delta V &= \delta V_1 - \delta V_2 = \\ &= 2M \delta w - 2M \delta w + \\ &+ (2 - \sqrt{2})^2 M \delta w = M(2 - \sqrt{2})^2 \delta w. \end{aligned}$$



Rys. 54



Rys. 53

W rozpatrywanym przypadku należy to zmniejszenie się pracy momentów łamiących uwzględnić przez odpowiednią korektę wyrażenia (9.2.1). Tak więc, ponieważ δw jest w tym przypadku równe $\frac{1}{4}$ (przy przesunięciu środka o jednostkę), zmniejszenie się

pracy sił wewnętrznych wskutek możliwości podnoszenia się naroża wyraża się przez

$$\Delta \delta V = \frac{1}{4} (2 - \sqrt{2})^2 M.$$

Ogólna liczba naroży w rozpatrywanym przypadku wynosi 4, tak więc wpływ ich wyrazi się jako

$$(2 - \sqrt{2})^2 M = 0,346 M \approx 0,35 M.$$

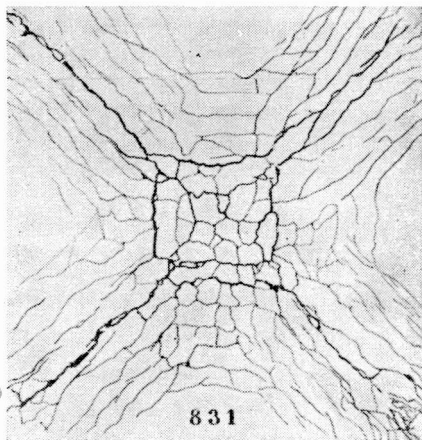
Zależność (9.2.1) po wprowadzeniu powyższego wyrażenia do bilansu prac przyjmuje postać

$$\frac{3}{8} P + 0,3 G = (8,4 - 0,35) M,$$

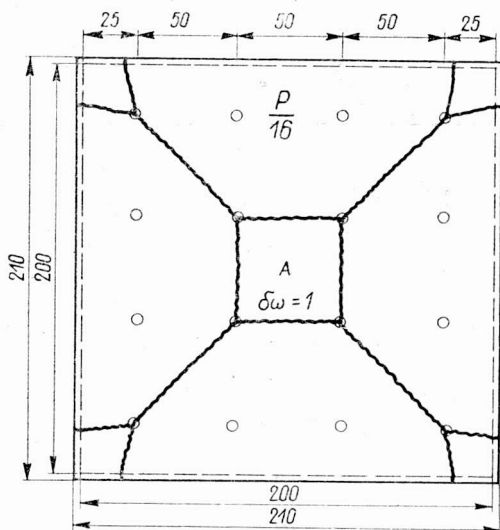
skąd

$$(9.3.3) \quad P = 21,5 M - 0,8 G.$$

Doświadczenia (rys. 55) wskazują jednak na nieco inny układ linii załomów, niż to ma miejsce na rys. 53, i odpowiada raczej schematowi przedstawionemu na rys. 56.



Rys. 55



Rys. 56

Udzielając środkowemu płatowi, oznaczonemu na rys. 56 literą A, przesunięcia pionowego $\delta w = 1$ otrzymujemy równanie pracy sił wewnętrznych i zewnętrznych w postaci

$$\begin{aligned} 4 \frac{P}{16} \cdot 1 + 12 \frac{P}{16} \cdot \frac{1}{3} + 50^2 g + 4 g \frac{80}{2} (210 + 50) \frac{27}{75} = \\ = 4 M \frac{210}{75} - 4 M \frac{1}{3} (2 - \sqrt{2})^2, \end{aligned}$$

co prowadzi do wartości siły łamiącej

$$(9.3.4) \quad P = 21,5 M - 0,74 G.$$

Porównanie wzorów (9.3.3) i (9.3.4) wskazuje, że dla rozpatrywanej siatki zniszczenia uzyskujemy nieco większą siłę łamiącą. Praktycznie jednak różnica w wielkościach obciążenia łamiącego, obliczanego na podstawie wzorów (9.3.3) i (9.3.4), leży w granicach błędu rachunkowego i dotyczy tylko ciężaru własnego. Dla obciążenia realizowanego tu obydwoma schematami zniszczenia praktycznie są równoważne.

9.4. W innych badaniach, prowadzonych na płytach o grubości 12 cm, o wymiarach $3,12 \text{ m} \times 3,12 \text{ m}$ i rozpiętości w świetle podpór $3,0 \text{ m} \times 3,0 \text{ m}$, obciążenie realizowano również za pomocą sił skupionych, lecz wprowadzono większą ich ilość, mianowicie zaczepiono te siły w 64 punktach. W takim przypadku obciążenie można już z dostateczną dokładnością uważać za rozłożone równomiernie. Uwzględniając w równaniu podstawowym dla tej płyty wystawanie brzegów poza linie podparcia otrzymamy

$$\frac{P+G}{24} = M \frac{3,12}{3,0},$$

skąd wynika

$$(9.4.1) \quad P = 25 M - 1,0 G.$$

Również i tutaj wysuwa się sprawa naroży i sprawa zmniejszenia się nośności wskutek ich powstawania. Nie wdając się obecnie na tym miejscu w szczegóły, dotyczące tego specjalnego zagadnienia, można stwierdzić, że dla przypadku równomiernie obciążonej i swobodnie podpartej płyty, przy założeniu, że naroże nie jest przytrzymane (tzn. $M' = 0$, co oznacza, że nie ma zbrojenia górnego w narożu), podstawowa zależność ma postać

$$(9.4.2) \quad M = \frac{p b^2}{22}.$$

W zastosowaniu do naszego przykładu otrzymujemy

$$(9.4.3) \quad P = 22,9 M - 1,0 G.$$

9.5. Wyniki opracowane na podstawie podanych zależności dla płyt o grubości 8 cm i 12 cm zestawione są w tablicach 7 i 8. Ponieważ zasady wyznaczania momentów jednostkowych dla różnych przypadków ułożenia zbrojenia w warstwie dolnej i w warstwie górnej oraz stosowane metody zostały dość szczegółowo omówione już poprzednio ¹⁴⁾, podamy tu

Tablica 7.

Se- ria	Grubość płyty cm	Z b r o j e n i e				M tm/m	Obciążenie łamiące P t			Różnica %
		d mm	φ %	oczka siatki cm	Qr kG/cm ²		obli- czone	z do- świad- czenia	średnie z doświad- czenia	
A	12,2	7,1	0,37	10 10	4080	1,92	40,3	40,0	40,3	0
	12,2	7,2						39,0		
	12,2	7,2						42,0		
B	12,1	7,1	0,37	10 9,3	4080	2,00	42,0	42,5	42,2	0
	12,2	7,2						42,0		
	12,1	7,1						42,0		
C	12,1	7,0	0,32	zmienne, średnio 11,7 11,0	4080	1,69	35,3	37,0	37,5	5
	12,1	7,0						38,0		
C'	12	7,0			3400	1,26	26,1	33,4	32,5	24
	12	7,0						31,6		
D	12,2	7,0	0,37	10 9,3 po prze- kątnej	4446	2,06	43,3	42,0	41,3	— 6
	12,1	7,0						41,0		
	12,2	7,0						41,0		
E	12,1	10,0	0,8	10 8,9	3486	2,94	62,1	56,0	56,7	— 8,7
	12,1	10,0						56,0		
	12,1	10,0						58,0		

bezpośrednio zestawienie wyników. Wartości podane w tablicach 7 i 8 oparte są na wynikach doświadczeń drezdeńskich ¹⁵⁾.

Tablica 7 dotyczy płyt o grubości 12 cm, zaś tablica 8 płyt o grubości 8 cm.

¹⁴⁾ Zakładamy przy tym, że zmiany w rozkładzie zbrojenia są nieznaczne, gdyż w przypadku przeciwnym musielibyśmy w celu uniknięcia większego błędu uwzględnić niejednorodność, ewentualnie również ortotropię (por. p. 4.4 oraz 7.3).

¹⁵⁾ Cytujemy na podstawie [10].

Występujące w rzeczywistości obrazy zniszczenia ilustrują rysunki 57 i 58 odpowiednio dla dolnej i górnej powierzchni płyty.

Naroża, jak powiedzieliśmy, nie były w badaniach tych przytrzymywane. Odrębne badania, dotyczące specjalnie problemu naroży, zostaną omówione w dalszej części.

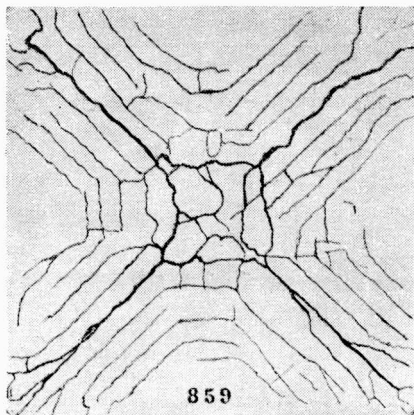
Tablica 8

Se- ria	Grubość płyty cm	Zbrojenie				M tm m	Obciążenie łamiące P t			Różnica %
		d mm	φ %	oczka siatki cm	Q_r kG cm		obli- czone	z do- świad- czenia	średnia z doświad- czenia	
A	8,1	7,2	0,58	10 10	4080	1,14	23,8	26,25	26,2	10,0
	8,1	7,2						26,3		
	8,2	7,1						26,0		
B	8,1	7,2	0,58	10 8,8	4080	1,19	24,9	26,0	26,2	5,2
	8,1	7,2						26,0		
	8,1	7,2						26,5		
C	8,1	7,1	0,50	zmienne, średnio	4080	1,00	20,8	24,0	24,0	15,9
	8,1	7,1		11,7/11,0				24,0		
D	8,1	7,0	0,58	10 8,8	4446	1,23	25,7	27,0	26,7	7,7
	8,2	7,0		po prze- kątnej				27,0		
	8,1	7,0						26,0		
E	8,1	10,0	1,20	10 8,3 po prze- kątnej	3490	1,75	36,9	34,0	34,0	— 7,8
	8,1	10,0						34,0		
	8,1	10,0						34,0		
F	8,1	10,0	1,20	10 8,3	3490	1,75	36,9	34,0	34,0	— 7,8
	8,1	10,0		po prze- kątnej				34,0		
	8,1	10,0						34,0		
G	8,1	10,0	2,0	6/5	5290	2,05	43,4	44,0	43,0	0,9
	8,1	10,1						45,0		
	8,1	10,2						40,0		
H	8	5	0,29	10 10	5600	0,74	15,2	18,8	18,5	21,5
	8	5						18,3		

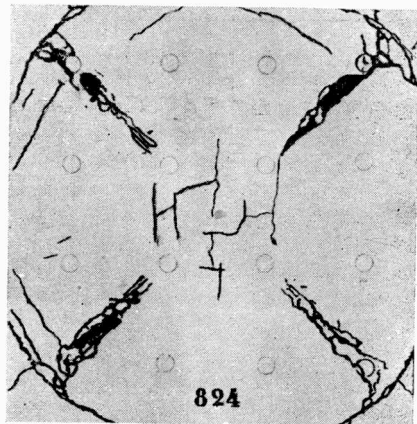
Na ogół wyniki zestawione w tablicach są zgodne z wynikami teoretycznymi. Dwie pozycje wykazują mniejsze rzeczywiste obciążenie łamiące aniżeli obciążenie obliczone. Tłumaczy się to tym, że jednostkowy moment łamiący nie był tu wyznaczany doświadczalnie dla pasma o grubości 8 cm, lecz obliczany na podstawie wyników dla pasma 12 cm, zbrojonego w identyczny (co do ilości, rozstawu i średnicy prętów) sposób, na podstawie stosunku

$$2,94 \cdot \frac{1,19}{2,00} = 1,75 \text{ tm/m.}$$

Wartość 2,94 t przedstawia moment jednostkowy dla pasma o grubości 12 cm przy $Q_r = 3490$, zaś wyraz $1,19/2,00$ określa stosunek momentów łamiących dla płyt o grubościach 8 cm i 12 cm według wyników, otrzymywanych przy zbrojeniu o innej wartości. Wartości te dotyczą badań oznaczonych w tablicach literą B (dla których $Q_r = 4080 \text{ kG/cm}^2$).



Rys. 57



Rys. 58

Należy podkreślić, że seria G wykonana była ze słabego betonu, zbrojona przy tym stałą twardą, lecz i tu zgodność z obliczonymi wartościami sił niszczących jest dobra, mimo iż założenia teorii nie są w pełni słuszne dla tego rodzaju przypadku.

Fakt ten wskazuje (o czym zresztą wspominaliśmy już poprzednio, por. rys. 18), że odkształcenia plastyczne betonu mają podobne znaczenie w teorii nośności granicznej, jak plastyczne odkształcenia stali. Zbrojenie stałą twardą w grupie H spowodowało, że zniszczenie nastąpiło przez zerwanie prętów w chwili złamania, przy czym siła powodująca ten stan była znacznie wyższa od obliczonej.

Jeszcze nieco uwagi należy poświęcić przypadkom, w których zbrojenie ułożone było równoległe do przekątnych. Takie ułożenie zbrojenia nie może oczywiście mieć wpływu — z punktu widzenia teorii stanów granicznych — na wielkość obciążenia łamiącego. Stwierdzenie to znajduje — jak widać z zestawienia odpowiednich pozycji z tablic 7 i 8 — należyte uzasadnienie doświadczalne. Ułożenie zbrojenia po przekątnej, jak wykazały badania radzieckie¹⁶⁾, wpływa jedynie na okres, w którym — licząc od początku obciążenia — pojawiają się pierwsze pęknięcia. Przy takim układzie zbrojenia pęknięcia pojawiają się wcześniej, niż to ma

¹⁶⁾ Por. np. K. W. Sachnowski, [28].

miejsce w przypadku ułożenia zbrojenia równoległe do boków płyty. Badania radzieckie, przedstawione w cytowanej pracy, stwierdzają również, że nośność płyty w obu przypadkach nie ulega zmianie.

Skoro jest mowa o badaniach radzieckich, należy jeszcze podać, iż przeprowadzane doświadczenia w przypadkach zagęszczonego zbrojenia w obszarze środkowym płyty dawały nieco większą siłę niszczącą, niż w przypadku równomiernego ich rozłożenia. Jest to w pewnej mierze uzasadnione faktem, iż praktycznie — jak widać to chociażby z podanych uprzednio fotografii — linie załomów nie zawsze osiągają krawędzie płyty, a więc pewne nieznaczące partie zbrojenia przy krawędziach podparcia nie zostają naprężone do granicy plastyczności. Pewną ilustracją takiego stwierdzenia mogą być również odpowiednie wyniki przedstawione w tablicach 7 i 8. Przytoczonej tu analizy nie ma w pracy [10], na podstawie której sporządzone zostały tablice 7 i 8.

10. Płyta izotropowa prostokątna obciążona równomiernie

10.1. Przedstawione niżej doświadczenia wykonane były na płytach o grubości 12 cm i o stosunku boków (licząc w świetle podpór) $b/a = \beta$, wynoszącym $\beta = 2/3$ i $\beta = 1/2$; uwzględniając zaś wystające brzegi płyty $\beta_1 = 210/310 = 0,676$ i $\beta_1 = 210/410 = 0,51$.

W przypadku płyty izotropowej $\kappa = 1$, wielkość momentu łamiącego moglibyśmy wyznaczyć dla obciążeń rozłożonych równomiernie na podstawie [16] ze wzoru

$$(10.1.1) \quad M = \frac{p b^2}{24} \bar{\gamma}^2,$$

gdzie $\bar{\gamma} = \sqrt{3 + \beta^2} - \beta$; dla $\beta = 2/3$ daje to $\bar{\gamma} = 1,19$. Operując, jak poprzednio, obciążeniem łamiącym $P = p b^2 / \beta$ i uwzględniając przy ciężarze własnym wystające poza linię podpór brzegi płyty oraz pomijając wpływ naroży, otrzymamy

$$(10.1.2) \quad M = \frac{P \beta}{24} \bar{\gamma}^2 + \frac{G \beta}{24} \bar{\gamma}^2 \frac{3 \cdot 2}{3,1 \cdot 2,1},$$

co po wstawieniu wartości liczbowych daje

$$M = \frac{2 P}{3 \cdot 24} 1,19^2 + \frac{2 G}{3 \cdot 24} 1,19^2 \cdot 0,93.$$

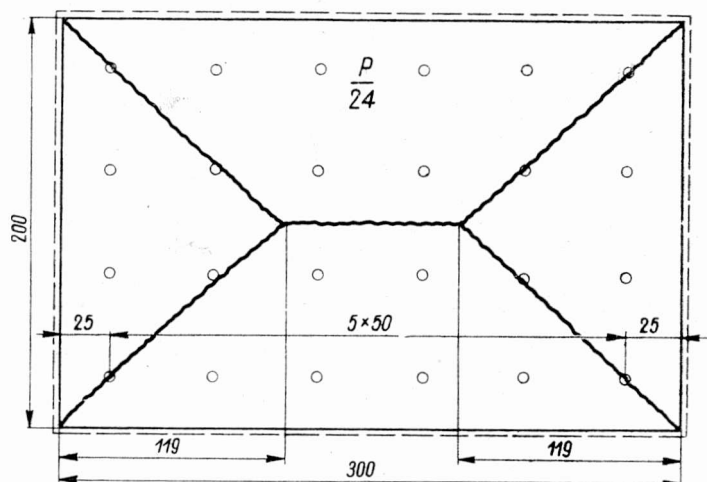
Stąd wartość obciążenia łamiącego wyniesie

$$(10.1.3) \quad P = 25,4 M - 0,93 G,$$

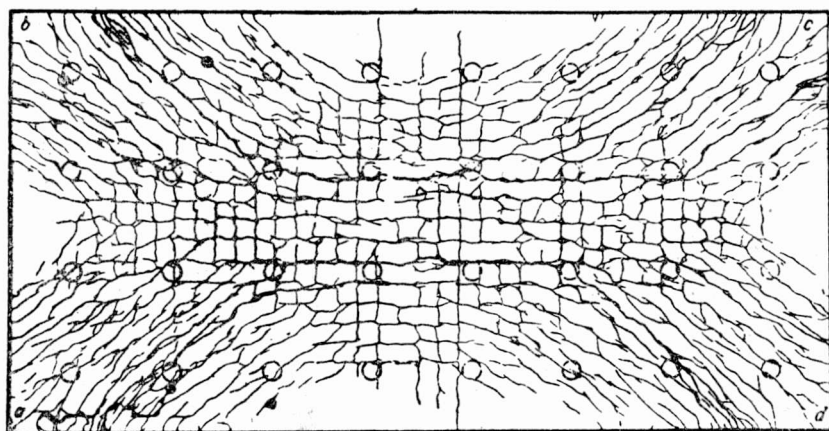
gdzie

$$G = g \cdot 310 \cdot 210.$$

Układ teoretycznej siatki zniszczenia dla rozpatrywanego przypadku w założeniu obciążenia ciągłego przedstawia rys. 59, zaś rys. 60 układ pęknięć według jednego z doświadczeń C. B a c h a, [1], ¹⁷⁾.



Rys. 59



Rys. 60

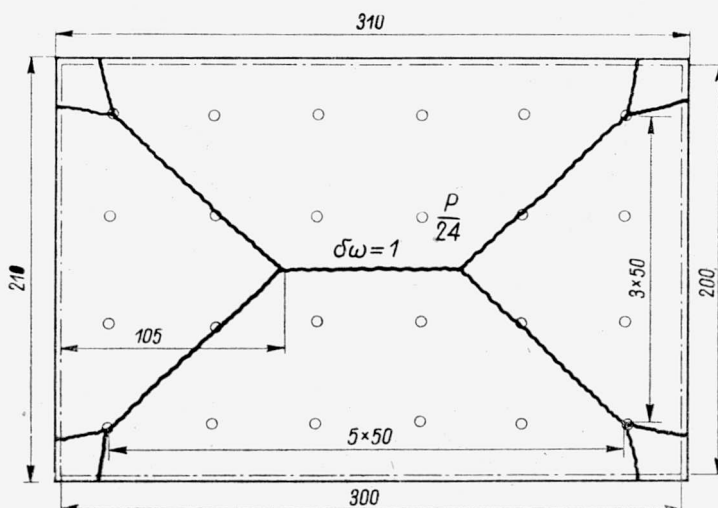
Odległość szczytu daszka załomów charakterystycznego dla $\beta < 1$ jest

$$x = \frac{b}{2} \bar{\gamma} = \frac{2,00}{2} 1,19 = 1,19 \text{ m,}$$

a więc linia załomu nie jest dwusieczną kąta między odpowiednimi bokami płyty.

¹⁷⁾ Por. p. 9.1.

Doświadczenie przeprowadzono obciążając płytę siłami skupionymi, działającymi punktowo; wskazuje na to rys. 59. Przy takim rozłożeniu obciążeń linie załomów przechodzą przez punkty działania sił; otrzymany doświadczalnie układ zniszczenia będzie nieco inny. Przedstawia go rys. 61. Względ, by porównania wyników doświadczalnych z teoretycznymi dokonywać dla rzeczywiście realizowanych układów siatek zniszczenia, powoduje, iż porównania takiego nie możemy dokonać na podstawie wzoru (10.1.3).



Rys. 61

Rzeczywisty układ linii załomów przy danym typie obciążenia w 24 punktach daje równanie bilansu prac z uwzględnieniem naroży w postaci

$$8 \frac{P}{24} \cdot \frac{3}{4} + 16 \frac{P}{24} \cdot \frac{1}{4} + 4 \frac{1}{2} g \cdot 105 \cdot 210 \cdot \frac{30}{100} + 2 g \cdot 100 \cdot 105 \cdot \frac{47,5}{100} =$$

$$= 2 M \frac{310}{100} + 2 M \frac{210}{100} - 4 M \frac{1}{4} (2 - \sqrt{2})^2,$$

co prowadzi do wartości

$$(10.1.4) \quad P = 24,1 M - 0,84 G.$$

Z analizy rys. 62 oraz 63, na których przedstawiona jest siatka zniszczenia, nasuwać się może wniosek, że bardziej prawdopodobnym układem jest układ przedstawiony na rys. 64.

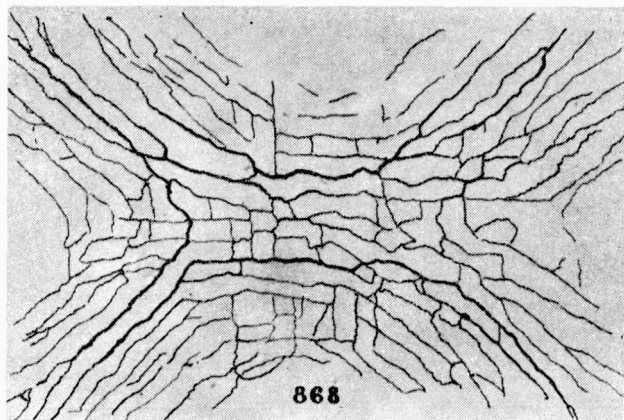
Stosując zasadę prac przygotowanych otrzymamy dla takiego schematu zniszczenia

$$8 \frac{P}{24} \cdot 1 + 16 \frac{P}{24} \cdot \frac{1}{3} + g \cdot 150 \cdot 80 \cdot 2 \cdot \frac{35}{75} + g \cdot 50 \cdot 80 \cdot 2 \cdot \frac{35}{70} + g \cdot 150 \cdot 50 \cdot 1 + \\ + g \cdot 80 \cdot 80 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{22}{75} = 2 M \frac{310}{75} + 2 M \frac{210}{75} - 4 M \frac{1}{3} (2 - \sqrt{2})^2,$$

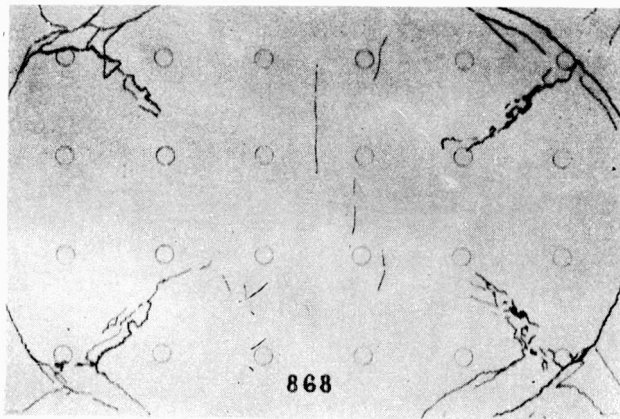
skąd

(10.1.5)

$$P = 24,1 M - 0,82 G.$$



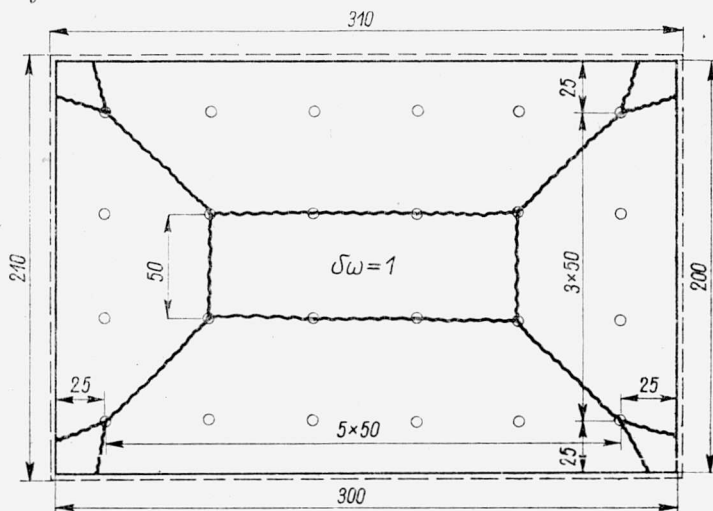
Rys. 62



Rys. 63

Jak widać, siatka załomów według rys. 64 daje nieco wyższą wartość obciążenia łamiącego. Siatki zniszczenia, które widać na fotografiach,

są kombinacją przedstawionych dwóch schematów, a to dlatego, że wyrażenia, dotyczące pracy sił zewnętrznych, są dla obu schematów jednako-
we, wyrażenia zaś określające udział ciężaru własnego nieznacznie się
różnią. Wyniki zestawione w tablicy 9 są słuszne dla obydwu wzorów
z dokładnością odpowiadającą obliczeniom dokonywanym na suwaku lo-
garytmicznym.



Rys. 64

W przeprowadzonych badaniach użyta była stal $Q_r = 4280 \text{ kg/cm}^2$,
przy czym średnica prętów wynosiła 7,0 mm. Przy danym rozstawie
zbrojenia, jednakowym w obydwu kierunkach i wynoszącym 10 cm, wiel-
kość momentu jednostkowego wyznaczono na podstawie danych z tablicy 3
z zależności

$$M = k M_v = 0,964 \cdot 2,03 \cdot \frac{4280}{4080} \left(\frac{7,0}{7,2} \right)^2 = 1,90 \text{ tm/m.}$$

Tablica 9

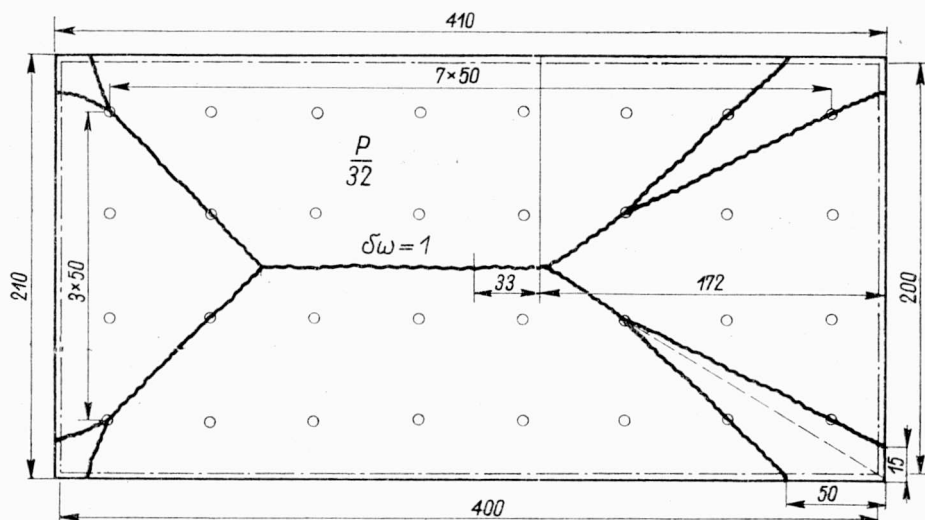
Grubość płyty cm	Zbrojenie				M tm m	Obciążenie łamiące P t			Różnica %
	d mm	φ %	oczka siatki cm	Q_r kg/cm		obli- czone	z doświad- czenia	średnia z doświad- czenia	
12,2	7,0	0,37	10 10	4289	1,90	44,2	45,0	44,3	0,2
12,1	7,0						44,0		
12,1	7,0						44,0		

Zestawienie wyników dla płyty, dla której $\beta = 2/3$, podane jest w ta-
blicy 9 (β dla wymiarów płyty wynosi 0,676; $2/3$ dotyczyło rozpiętości
w świetle podpór).

2. Zajmijmy się teraz płytą prostokątną, dla której stosunek boków $\beta = 1/2$. Wielkość $\bar{\gamma}$, określająca odległość punktu od jednego z boków punktu, w którym spotykają się trzy dodatnie linie załomów, wynosi w takim przypadku

$$\bar{\gamma} = \sqrt{3 + 0,5^2} - 0,5 = 1,30 \text{ m};$$

będzie zatem $x = 1,30 \text{ m}$. Z rysunku 65, na którym przedstawiona jest rozpatrywana płyta, widać, że wynikający z teorii układ linii załomów z uwagi na sposób obciążenia musi być dostosowany do obciążenia zaczepionego w 32 punktach. Istnieje w tym przypadku możliwość występowania dwóch układów linii załomów, przedstawionych na prawej i lewej części płyty. Ogólnym kryterium wskazującym, która z proponowanych siatek odpowiadać będzie sile niszczącej, jest kryterium maksymalnego oporu plastycznego. Należy zatem sprawdzić, która z siatek czyni zadość temu kryterium.



Rys. 65

Siatka przedstawiona na rys. 65 z lewej strony pozwala napisać równanie pracy sił wewnętrznych i zewnętrznych w postaci

$$\begin{aligned} 12 \frac{P}{32} \cdot \frac{3}{4} + 20 \frac{P}{32} \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot 105 \cdot 210 \cdot \frac{30}{100} + 2 g \cdot 200 \cdot 105 \cdot \frac{47,5}{100} = \\ = 2 M \left(\frac{410}{100} + \frac{210}{100} \right) - 4 M \frac{1}{4} (2 - \sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

Do równania tego doszliśmy udzielając punktom, leżącym na «kalenicy» daszku załomów, przesunięcia jednostkowego. Wstawiając doń $G = g \cdot 410 \cdot 210$ otrzymamy wartość siły niszczącej

$$(10.2.1) \quad P = 27,6 M - 0,88 G.$$

Dla siatki przedstawionej na prawej części rysunku równanie prac przygotowanych, otrzymane przez udzielenie analogicznego przesunięcia $\delta w = 1$ bez uwzględnienia zmniejszającego wpływu naroży (linia przerywana na prawej części rys. 65), przedstawia się, jak następuje:

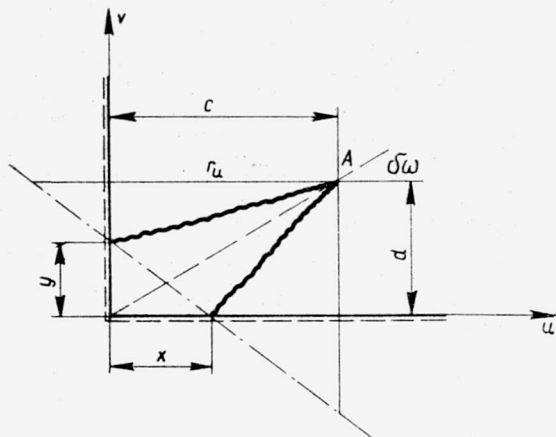
$$\begin{aligned} 12 \frac{P}{32} 0,25 + 8 \frac{P}{32} 0,75 + 8 \frac{P}{32} 0,15 + 4 \frac{P}{32} 0,45 + \\ + 2g \cdot \frac{1}{2} \cdot 210 \cdot 172 \cdot 52,3 \frac{0,75}{125} + 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot 105 \cdot 172 \cdot 30 \frac{0,75}{75} + \\ + 2g \cdot 66 \cdot 105 \cdot 47,5 \cdot \frac{0,75}{75} = 2M \left(410 \frac{0,75}{75} + 206 \frac{0,75}{126} \right); \end{aligned}$$

stąd obliczamy

$$(10.2.2) \quad P = 28,5 M - 0,89 G.$$

10.5. Zastanowimy się obecnie nad wpływem naroża (rys. 66). Rozpatrzyć zagadnienie w tym przypadku jest stosunkowo łatwo, gdyż charakter obciążenia wyznacza kształt tworzącego się naroża.

Traktując wielkości x i y jako znane (co odpowiada naszemu przypadkowi) i postępując analogicznie jak w przypadku, gdy siła przesuwiała się po przekątnej kwadratu, otrzymamy na pracę sił wewnętrznych, wykonaną przy utworzeniu się załomu według linii kreskowanej, wyrażenie

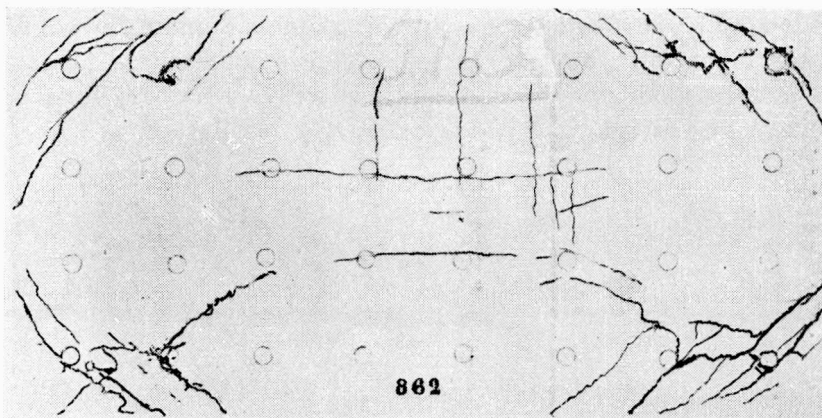


Rys. 66

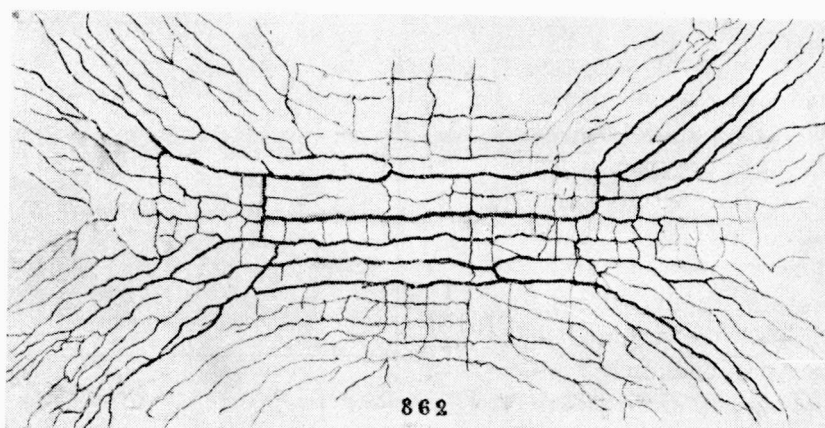
$$\delta V_1 = M \frac{c}{d} \delta w + M \frac{d}{c} \delta w = M \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c} \right) \delta w,$$

zaś na pracę wykonaną przy pojawieniu się rzeczywistych linii załomów

$$\delta V_2 = M \frac{\delta w}{d} (c - x) + M \frac{\delta w}{c} (d - y) + M x \frac{\delta w}{r_v} + M y \frac{\delta w}{r_u}.$$



Rys. 67



Rys. 68

Różnica $\delta V_1 - \delta V_2$ przedstawia skutek podnoszącego się naroża. Wielkość jej wynosi

$$(10.3.1) \quad \Delta \delta V = \delta V_1 - \delta V_2 = -M \delta w \left(\frac{x}{r_v} + \frac{y}{r_u} - \frac{x}{d} - \frac{y}{c} \right).$$

Wstawiając

$$r_u = c + (d - y) \frac{x}{y} = c + \frac{d}{y} x - x$$

oraz

$$r_v = d + \frac{c}{x} y - y$$

otrzymujemy

$$(10.3.2) \quad \Delta \delta V = \left[\frac{-(x^2 + y^2)}{xd + yc - xy} + \frac{x}{d} + \frac{y}{c} \right] M \delta w.$$

Podstawiając wartości z rozpatrywanego przykładu, tzn. $\delta w = \frac{3}{4}$, $x = 50$ cm, $y = 15$ cm, $d = 80$ cm i $c = 130$ cm, obliczamy

$$\Delta \delta V = \frac{3}{4} M \frac{-(15^2 + 50^2)}{80 \cdot 50 + 15 \cdot 130 - 15 \cdot 50} + \frac{50}{80} + \frac{15}{130} = \frac{3}{4} M \cdot 0,215.$$

Uwzględnienie wpływu czterech naroży we wzorze (10.2.2) prowadzi do siły łamiącej o wartości

$$(10.3.3) \quad P = 26,8 M - 0,89 G;$$

jest to najmniejsza dla danego przypadku wartość siły łamiącej ze wszystkich wielkości według wzorów (10.2.1), (10.2.2) oraz (10.3.3).

10.4. Zestawienie wyników doświadczeń i porównanie wielkości sił łamiących podane jest w tablicy 10. Stal w tych płytach charakteryzowała się takimi samymi własnościami jak w przypadku płyt o stosunku boków $\beta = \frac{2}{3}$ (tzn. takich jak podano w tablicy 9). Rysunki 67 i 68 przedstawiają rzeczywisty układ linii załomów.

Tablica 10.

β	Grubość płyty cm	Zbrojenie				M tm/m	Obciążenie łamiące P t			Róż- nica 0/ 0
		d mm	η 0/0	oczka siatki cm	Q_r kG cm ²		obli- czone	z do- świad- czenia	średnie z doświad- czenia	
0,50 (0,51)	12,2	7,0	0,37	10/10	4280	1,90	48,8	50,0	50,7	4
	12,1	7,0						50,0		
	12,1	7,0						52,0		

11. Płyta dwuprzęsłowa obciążona równomiernie

11.1. Płyta dwuprzęsłowa, składająca się z dwóch pól kwadratowych o rozpiętości dla osi podpór 200 cm $\times$ 200 cm, obciążona była 32 siłami skupionymi. Grubość płyty wynosiła 12 cm; zbrojenie wykonano dołem równomiernie prętami $d = 7$ mm, górą nad podporą pośrednią $\bar{d} = 8,8$ mm; rozstaw zbrojenia nośnego wynosił 10 cm $\times$ 10 cm. Górne zbrojenie charakteryzowało się granicą plastyczności $Q_r = 2940$ kG/cm², dla dolnego było $Q_r = 4320$ kG/cm².

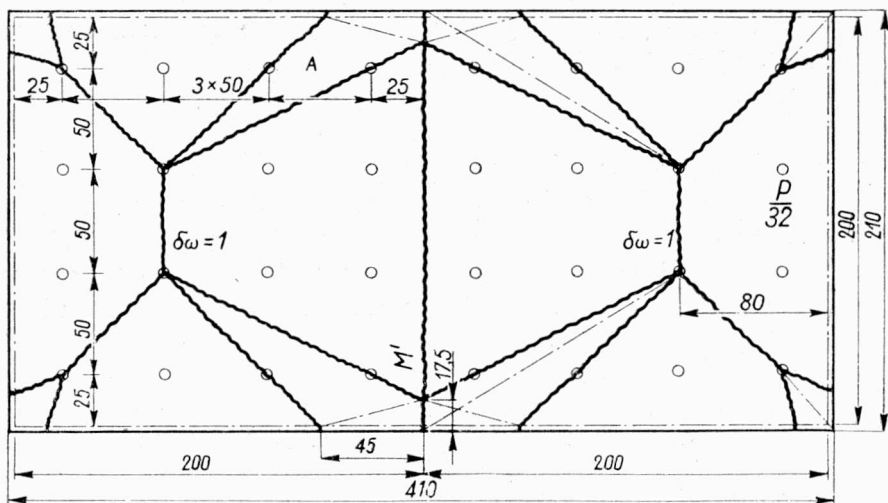
Wartości momentów jednostkowych wyznaczono na podstawie tablicy 3 dokonując przeliczeń z uwagi na inne Q_r oraz d . Momenty jednostkowe wynosiły zatem

$$M = 1,92 \cdot \frac{4320}{4080} \cdot \frac{7,0^2}{7,2^2} = 1,92 \text{ tm/m},$$

$$M' = 2,00 \cdot \frac{2940}{4080} \cdot \frac{8,8^2}{7,2^2} = 2,16 \text{ tm/m},$$

$$\lambda = \frac{M'}{M} = \frac{2,16}{1,92} = 1,13,$$

gdzie M' oznacza jednostkowy moment ujemny (tzn. związany ze zbrojeniem górnym), zaś M posiada znaczenie objaśnione poprzednio.



Rys. 69

Układ linii załomów, uwarunkowany typem obciążenia, dla tego układu przedstawia rys. 69. Zasada prac przygotowanych daje tu równanie

$$\begin{aligned} 8 \frac{P}{32} \cdot \frac{1}{3} + 4 \frac{P}{32} \cdot \frac{1}{5} + 2 \frac{P}{32} \cdot \frac{3}{5} + 2 \frac{P}{32} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} g \cdot 80 \cdot 205 \cdot \frac{21,7}{75} + \\ + 2 \cdot \frac{1}{2} g \cdot 80^2 \cdot \frac{21,7}{75} + g \cdot 50 \cdot 80 \cdot \frac{35}{75} + 2 \cdot \frac{1}{2} g \cdot 80 \cdot 125 \cdot \frac{1}{3} + \\ + g \cdot 50 \cdot 125 \cdot \frac{1}{2} = 2 M (205 - 45) \cdot \frac{1}{75} + M \frac{210}{75} - 2 M \frac{1}{3} (2 - \sqrt{2})^2 + \\ + (M + M') (205 - 35) \cdot \frac{1}{125} + 2 (M + M') \cdot \frac{17,5}{375} + 2 M \cdot 45 \cdot \frac{4}{375}; \end{aligned}$$

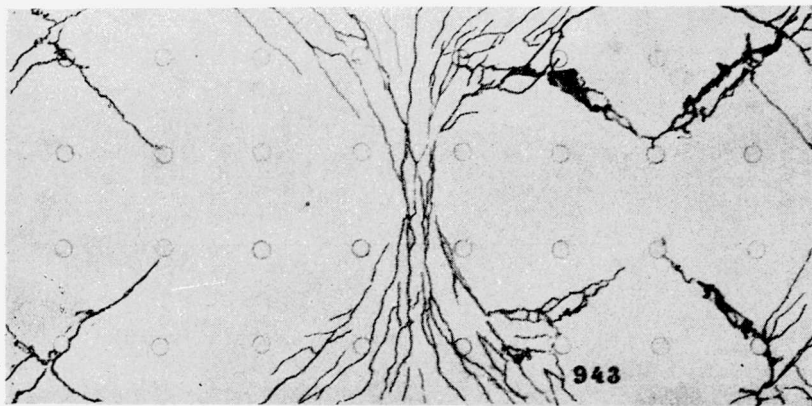
stąd

$$(11.1.1) \quad P = 44,6 M + 7,15 M' - 0,83 G,$$

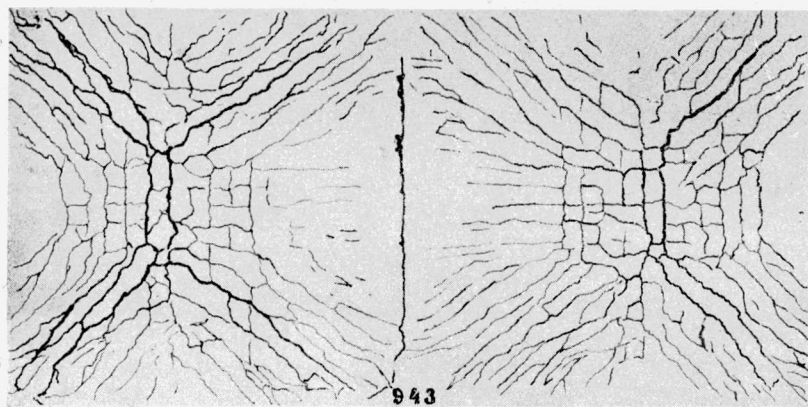
gdzie

$$G = g \cdot 410 \cdot 210 .$$

Wpływ naroża, oznaczonego na rysunku 69 literą A, jest uwzględniony bezpośrednio przy zestawianiu bilansu prac. Składowe kąty obrotu wynoszą 1 : 375 i 4 : 375 odpowiednio dla obrotów wokół środkowej podpory i dłuższych boków.



Rys. 70



Rys. 71

11.2. Tablica 11 zawiera zestawienie wyników dla omawianego przypadku.

Rysunki 70 i 71 przedstawiają otrzymaną siatkę zniszczenia. Warto zwrócić uwagę na fakt, że na podporze pośredniej następowało zniszczenie przez zmiążdżenie betonu jedynie w pewnej partii środkowej, natomiast przy brzegach — z uwagi na tendencję unoszenia się naroży — nie miało to miejsca.

Tablica 11

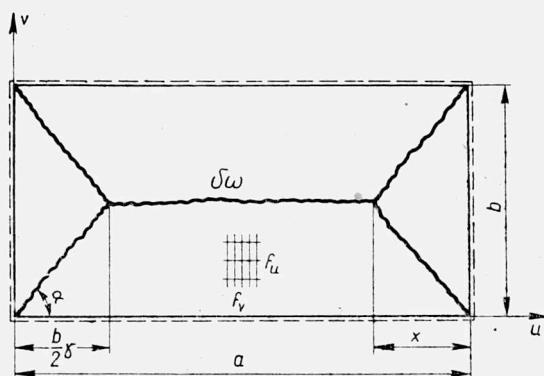
Grubość płyty cm	Zbrojenie				$\frac{M}{M'}$	Obciążenia łamiące P t			Różnica %
	d mm	η %	oczka siatki cm	Q_r kG cm ²		obli- czone	z doświad- czeń	średnia z doświad- czeń	
12.1	7,0 8,8		10 10				100,0		
12.1	7.0 8,8	0,37 0,61		4320 2940	1,92 2,16	98,4	95,0	98,3	0,18
12.2	7.0 8,8		10 10				100,0		

12. Płyta prostokątna ortotropowa obciążona równomiernie

12.1. Płytom o różnej mocy zbrojenia w dwu prostopadłych do siebie kierunkach odpowiadają różne wielkości momentów granicznych, przyporządkowanych tym zbrojeniom; mamy więc do czynienia ze strukturą ortotropową. Wskaźnik ortotropii jest określony z dostatecznym przybliżeniem bezpośrednio przez moc zbrojenia¹⁸⁾. Wyraża się on stosunkiem wielkości momentów jednostkowych dla każdego z kierunków ortotropii.

Doświadczenia przeprowadzone były nad płytami 416 cm $\times$ 210 cm o grubości 12 cm, przy czym zbrojenie, ułożone prostopadle do boku dłuższego, obsługiwało partie długości 410 cm. Zbrojenie krótkie wykonane było z prętów o średnicy $d = 70$ mm, rozstawionych w odległościach 10 cm, natomiast zbrojenie podłużne wykonane było z prętów o średnicy $d = 7$ mm względnie 5 mm. To ostatnie było ułożone, w zależności od typu płyty, w odległościach od 10 cm do 26 cm. Zbrojenie posiadało granicę plastyczności $Q_f = 4280$ kG/cm². Wszystkie omawiane powyżej charakterystyki podane są w tablicy 12 (patrz str. 242) łącznie z opracowanymi wynikami doświadczeń.

¹⁸⁾ Pomijamy przy tym zmianę ramienia sił wewnętrznych; por. treść odsyłacza ²¹⁾.

$$(12.1.1) \quad M_u = \frac{p b^2}{24} \frac{\bar{\gamma}^2}{\varepsilon},$$
$$\gamma = \kappa \left(\sqrt{\frac{3}{\kappa} + \beta^2} - \beta \right),$$
$$\kappa = \frac{M_v}{M_u} = \frac{k f_u}{k f_v}.$$

$$(12.1.2) \quad x = \frac{b}{2} \gamma.$$
$$\gamma = \kappa \left(\sqrt{\frac{3}{\kappa}} + 0,26 - 0,51 \right).$$
$$x = \frac{0,92 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,40}{1,40} = 0,46.$$
$$\gamma = \operatorname{ctg} \alpha = 0,46 \left(\sqrt{\frac{3}{0,46} + 0,26} - 0,51 \right) = 0,96.$$

237

12.2. Postulat sprawdzenia doświadczalnego wielkości obciążenia łamiącego nasuwa konieczność wyznaczenia tego obciążenia jako funkcji momentów granicznych; gdy więc podstawimy do wzoru (12.1.1)

$$pb^2 = \beta \left(P + G \frac{4,0 \cdot 2,0}{4,1 \cdot 2,1} \right),$$

otrzymamy

$$(12.2.1) \quad P = \frac{24 M_u \kappa}{\beta \gamma^2} - 0,93 G.$$

Tak więc dla przykładu rozpatrywanego powyżej, dla którego $\kappa = 0,46$ i $\gamma = 0,96$, wartość obciążenia łamiącego wyraża się przez

$$(12.2.2) \quad P = \frac{24 M_u \cdot 0,46}{0,51 \cdot 0,96^2} - 0,93 G = 23,5 M_u - 0,93 G.$$

12.3. Obciążenie łamiące wyznaczyć można również rozpatrując omawianą płytę jako izotropową o odpowiednio zmienionych wymiarach. Należy przy tym wymiary płyty przekształcić przy zastosowaniu odpowiedniego współczynnika transformacji.

Współczynnik ten pozostaje w określonym stosunku do wskaźnika ortotropii i — przy niezmienionych wymiarach w kierunku osi v — wynosi dla wymiarów w kierunku osi u ¹⁹⁾

$$(12.2.3) \quad \eta = \sqrt{\kappa}.$$

Tak przekształcona płyta będzie teraz posiadała wymiary b i $a\sqrt{\kappa}$. Natężenie obciążenia w tym przypadku pozostaje niezmienione; jest ono zatem nadal określone przez intensywność p .

Obraz transformowanej płyty przedstawiony jest na rys. 73.

Przystępując do wyznaczenia momentów łamiących i posługując się powyższą transformacją liniową wyznaczyć musimy $\beta_t = b/\sqrt{\kappa} \cdot a$ a następnie

$$\bar{\gamma} = \gamma_t = \sqrt{3 + \beta_t^2} - \beta_t.$$

Dla rozpatrywanej płyty o wymiarach 210 cm $\times$ 416 cm oraz cechach $\kappa = 0,46$ i $\beta_t = 0,755$ otrzymujemy

$$\gamma_t = \sqrt{3 + 0,755^2} - 0,755 = 1,14,$$

zaś wartość momentu granicznego M_u obliczamy ze wzoru (10.1.1) podanego dla płyty izotropowej.

¹⁹⁾ Por. np. W. Olszak, [17].

Ponieważ porównujemy wielkości obciążeń łamiących, otrzymane z doświadczeń i obliczone na drodze teoretycznej w oparciu o analogiczne rozważania, jak podaliśmy uprzednio dla płyty ortotropowej (nie transformowanej), otrzymamy

$$pb^2 = \beta_t \left(P + G \frac{2,0 \cdot 4,0 \cdot \sqrt{0,46}}{2,1 \cdot 4,1 \cdot \sqrt{0,46}} \right),$$

co prowadzi do siły łamiącej o wartości

$$P = \frac{24 M_u}{\beta_t \gamma_t^2} - 0,93 G = 23,5 M - 0,93 G.$$

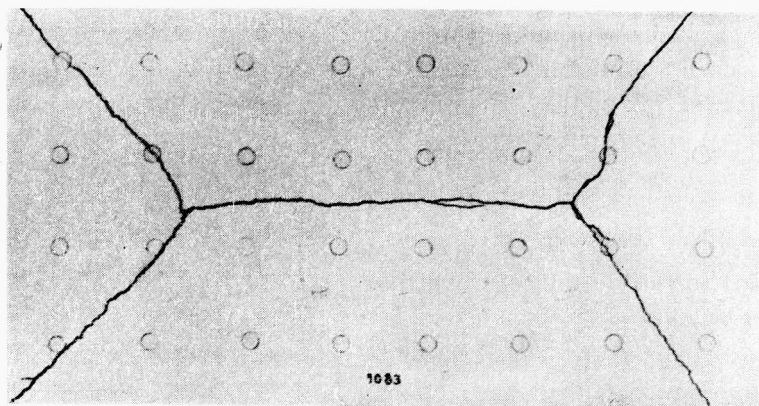
Jest to zatem wynik identyczny z (12.2.2).

12.4. Przystępując do ustalenia siatki zniszczenia spowodowanej przez obciążenie siłami skupionymi, działającymi w 32 punktach powierzchni płyty, należy, podobnie jak w poprzednich przykładach, obliczyć pracę sił zewnętrznych i wewnętrznych przy uwzględnieniu odpowiedniej siatki zniszczenia. Siatkę tę można znaleźć na drodze teoretycznej (w sposób scharakteryzowany uprzednio) albo też można ją wziąć bezpośrednio z doświadczenia (rys. 74 i 75). Obserwuje się w przypadkach małego α , iż nie występują tu pojedyncze naroża, tworzy się natomiast przy malejącym stosunku boków β jedno «naroże» wspólne (unosi się cały krótszy bok płyty). Schemat takiego układu siatki zniszczenia przedstawia rys. 76. Kąt nachylenia linii załomu względem boku poziomego określa wielkość γ .

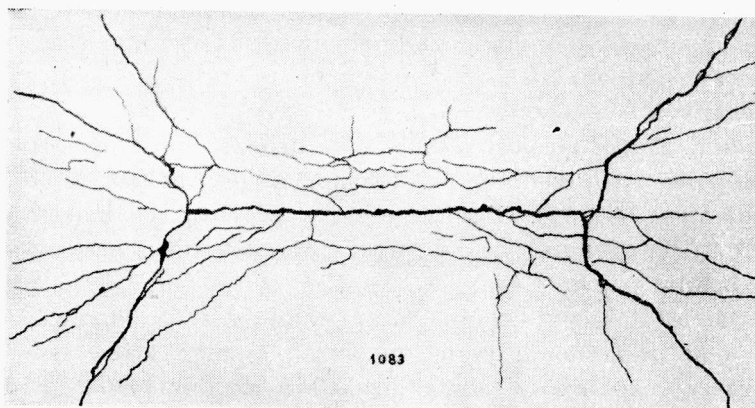
Gdybyśmy rozpatrywali płytę obciążoną równomiernie, porównanie wyników doświadczeń z wynikami teoretycznymi byłoby łatwe; posługiwanie się siłami skupionymi zmusza jednak do poszukiwania pewnej charakterystycznej dla układu obciążeń siatki zniszczenia w oparciu o podaną poprzednio metodę. Niech taką siatką zniszczenia będzie siatka przedstawiona na rys. 76, przy czym na każdej z dwóch połówek płyty podano różne siatki, charakteryzujące się innym kątem linii nachylenia załomu, wychodzące z naroża. Wybór właściwej siatki następuje na podstawie zasady maksymalnego oporu plastycznego, z której określa się wartość γ .

Udzielając punktom zaczepienia sił przemieszczeń przygotowanych, związanych z sobą założeniem sztywno-plastycznego modelu odkształcenia, równanie bilansu prac otrzymujemy w postaci

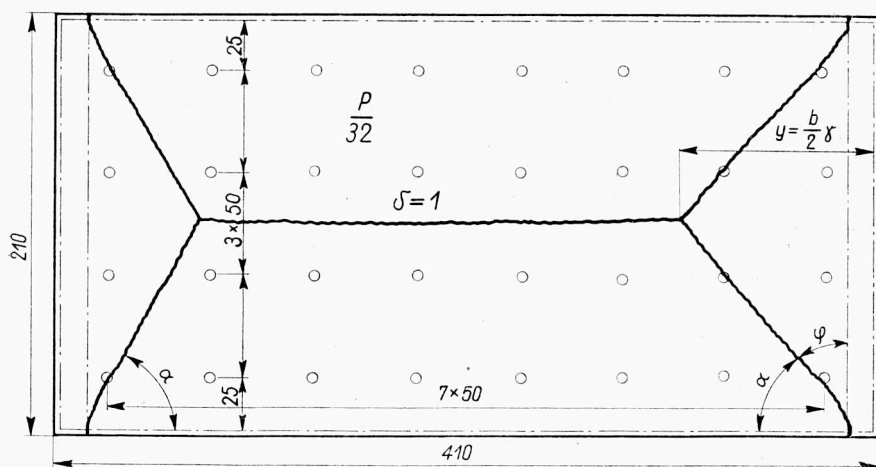
$$\begin{aligned} 12 \frac{P}{32} + 12 \frac{P}{32} \cdot \frac{1}{3} + 8 \frac{P}{32} (75 \operatorname{tg} \varphi - 50) = \\ = 2 M_u (250 + 2 \cdot 80 \operatorname{tg} \varphi) \frac{1}{75} + 2 \alpha M_u \cdot 210 \cdot \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{75}. \end{aligned}$$



Rys. 74



Rys. 75



Rys. 76

W równaniu tym nie uwzględniono tworzenia się pojedynczych naroży jak również pominięto ciężar własny. Ciężar własny wprowadzony zostanie na podstawie równania (12.2.2).

Z podanej wyżej zależności wyznaczmy wielkość siły

$$(12.4.1) \quad P = 16 \frac{4,2 \kappa + 5 \operatorname{tg} \varphi + 3,2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{9 \operatorname{tg} \varphi - 2} M_u = 16 \frac{4,2 \kappa + 5 \gamma + 3,2 \gamma^2}{9 \gamma - 2} M_u,$$

gdzie $\gamma = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha$.

Zasada maksymalnego oporu plastycznego daje równanie

$$(9 \gamma - 2)(5 - 6,4 \gamma) - 9(5 \gamma + 3,2 \gamma^2 + 4,2 \kappa) = \\ = \gamma^3 - 0,435 \gamma - 0,347 - 1,31 \kappa = 0,$$

skąd

$$(12.4.2) \quad \gamma = 0,217 + \frac{1}{2} \sqrt{1,57 + 5,24 \kappa}.$$

Zależność ta przy $\gamma \leq 1$ (tylko wtedy bowiem linia załomu przecina dłuższy bok płyty) jest słuszna dla $\kappa \leq 0,165$. Obliczając rzeczywistą wartość siły dla $\kappa = 0,112$ otrzymamy $\gamma = 0,952$, zaś na podstawie (12.4.1)

$$P = \frac{16 \cdot 8,12}{6,55} M_u.$$

Przy uwzględnianiu ciężaru własnego według równania (12.2.1) siła niszcząca wynosi

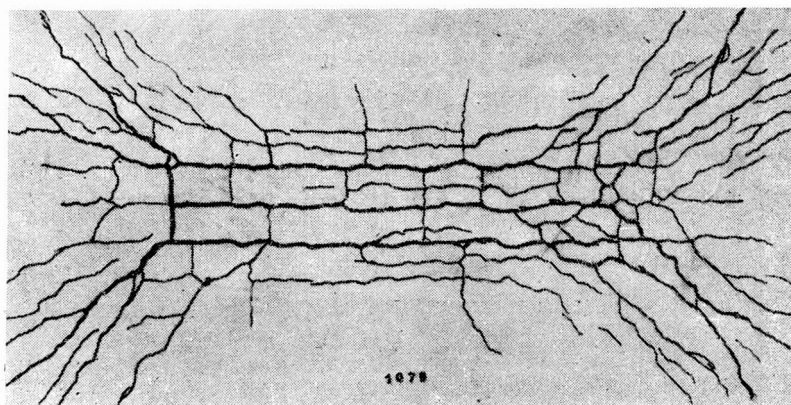
$$(12.4.3) \quad P = 19,8 M_u - 0,93 G.$$

W sposób analogiczny obliczyć można, jakie wartości γ odpowiadać będą siatce zniszczenia przedstawionej na rysunku 76 z lewej strony i jakim to odpowiada wskaźnikom ortotropii²⁰⁾.

12.5. Tablica 12 podaje wielkości sił łamiących, uzyskanych z doświadczenia, oraz wyniki teoretyczne. W tablicy górna wartość siły niszczącej obliczona jest w założeniu równomiernego rozłożenia obciążeń, tzn. według wzoru (12.2.2) z uwzględnieniem odpowiednich współczynni-

²⁰⁾ Postępując jak powyżej dla siatki przedstawionej na lewej części płyty otrzymalibyśmy, że przy $\gamma \leq 1$ jest ona słuszna dla $\kappa \leq 0,286$.

ków γ , dolne zaś wartości odnoszą się do obliczeń przeprowadzonych według siatki, przedstawionej na rys. 76 z równoczesnym uwzględnieniem wielkości γ .



Rys. 77

Jeszcze jeden przykład układu linii dla przypadku płyt typu omawianego w tym p. przedstawia rys. 77.

Tablica 12

Grubość płyty cm		12	12	12	12	12
Zbrojenie poprzeczne f_v , $Q_r = 4280 \text{ kG/cm}^2$	$d \text{ mm}$	6,9	7,0	7,0	7,0	7,0
	odstęp wkładek cm	10	10	10	10	5,5
	$\varphi \%$	0,37	0,37	0,37	0,37	0,7
Zbrojenie podłużne f_u , $Q_r = 4280 \text{ kG/cm}^2$	$d \text{ mm}$	6,9	7,0	7,0	5,0	5,0
	odstęp wkładek cm	10	20	35	42	26,2
	$\varphi \%$	0,37	0,19	0,11	0,047	0,075
Wskaźnik ortotropii α		0,92	0,46	0,263	0,112	0,098
Moment łamiący $M_u \text{ tm/m}$		1,40	1,40	1,40	1,50	2,45
γ		1,25	0,96	0,72	0,525	0,502
Obciążenie łamiące $P \text{ t}$	wyznaczone dla ob- ciążeń ciągłych*)	36,5	33,1	31,1	27,1	43,0
	wyznaczone dla sił skupionych	33,8	29,3	27,6	27,5	46,2
	z doświadczenia	35,0	31,0	29,0	28,0	48,0

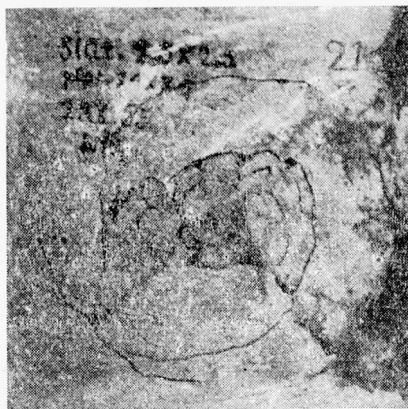
*) Wartości podane bez uwzględnienia zmniejszającego wpływu naroży na podstawie (12.2.1).

Przedstawione wyniki potwierdzają również i dla płyt ortotropowych słuszność teorii nośności granicznej. Zagadnienie płyt ortotropowych stanowi bardziej złożony problem obciążenia siłami skupionymi z punktu widzenia wpływu naroży w porównaniu z przypadkiem płyt izotropowych i wymaga odrębnego studium. Szersze opracowanie tego zagadnienia odkładamy do drugiej części pracy, gdzie zostanie ono przedstawione na tle wyników ostatnich naszych prac teoretycznych, [16], [17], [22], [14], [31].

15. Uwagi końcowe

Rozpatrzony wyżej szereg prostszych przypadków płyt i obciążeń wskazuje na dobrą zgodność przedstawionej teorii z badaniami doświadczalnymi. Otrzymane wyniki pozwalają przypuszczać, iż w przypadkach bardziej złożonych, jak np. przy rozpatrywaniu płyt ciągłych, płyt zamocowanych, układów o mieszanych warunkach brzegowych itp., rezultaty doświadczeń również potwierdzają słuszność teorii.

Weryfikacja doświadczalna tych bardziej złożonych układów wymaga jednak dodatkowego opracowania paru jeszcze zagadnień natury teoretycznej, jak np. wpływu naroży w płytach zamocowanych i ciągłych, układów linii załomów w płytach obustronnie zbrojonych a obciążonych siłą skupioną itp. Ten ostatni problem jest szczególnie interesujący, gdyż w trakcie prowadzonych przez nas doświadczeń otrzymaliśmy, w przypadku obciążenia siłą skupioną przy dowolnym jej wzroście, linię załomu na górnej powierzchni płyty w postaci spirali (rys. 78). Analiza teoretyczna już uprzednio dała wynik, który prowadził do linii spiralnej jako do jednego z możliwych rozwiązań. Gdy zatem obecnie doświadczenie potwierdziło jego słuszność, zachodzi potrzeba sprecyzowania warunków powodujących tego rodzaju zniszczenie.



Rys. 78

Wspomniane zagadnienia są obecnie w fazie badań doświadczalnych; ich wyniki przedstawione będą w czasie późniejszym.

Warto dorzucić, że również i te z dostępnych nam dotychczasowych doświadczeń, które nie zawsze były przeprowadzane pod kątem widzenia teorii nośności granicznej (jak np. badania instytucji *Deutscher Ausschuss*

für Eisenbeton), pozwalają wysnuć wniosek o słuszności założeń tej teorii, jak wynika to z szeregu danych w poprzednich rozdziałach.

Uzasadnienie słuszności założeń teorii nośności granicznej pozwoli wprowadzić przedstawioną metodę do praktyki inżynierskiej, co zarówno z uwagi na korzyści natury ekonomicznej, jak i ze względu na stosunkowo prostą budowę samej teorii, przynieść powinno efekty gospodarcze.

Należy przy tym wziąć również pod uwagę, że oparcie się o przedstawioną teorię, zdążającą do wyznaczenia sił wewnętrznych na podstawie analizy stanu zniszczenia, pozwoli usunąć w stosunku do płyt istniejącą obecnie niekonsekwencję między obliczaniem tych sił wewnętrznych na podstawie studium ustroju jako sprężystego, a wymiarowaniem ustroju według tzw. metody odkształceń plastycznych. W ten sposób teoria nośności granicznej rozpatruje konsekwentnie zagadnienie jako logiczną całość.

14. Dodatek do p. 3. Przykład liczbowy

Dla zilustrowania przedstawionej w p. 3 metody wyznaczania momentów łamiących zastosujemy ją do obliczenia konkretnego przykładu, którego rozwiązanie na gruncie teorii sprężystości byłoby trudne.

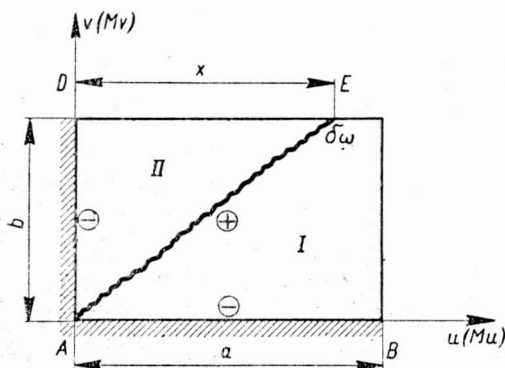
Z rozmysłem dobieramy przykład możliwie prosty dotyczący układu jednorodnego przy założeniu najprostszych warunków podparcia i obciążenia.

Dana jest płyta prostokątna o bokach $a=3$, $b=2$ (jednostki dowolne), zamocowana na dwóch sąsiednich krawędziach, na dwóch pozostałych swobodna (rys. I), obciążona równomiernie rozłożonym obciążeniem $p(u, v) = \text{const}$, która w ogólnym przypadku zbrojona jest górą i dołem w obu kierun-

kach równoległych do osi układu odniesienia w sposób różny; rozpatrzmy zatem płytę o strukturze warstwowo ortotropowej.

Dla uproszczenia zagadnienia zakładamy, że momenty związane ze zbrojeniem dolnym, te zatem, które nazywamy dodatnimi, a oznaczone odpowiednio M_u oraz M_v , są sobie równe. Współczynnik ortotropii charakteryzujący «warstwę» dolną wynosi wtedy $\mu = 1$.

Wskutek utwierdzenia płyty na krawędziach AB i AD oraz przewidywanego tam zbrojenia powstana linie załomów ujemne (tzn. związane



Rys. I

z momentami ujemnymi). Odpowiednie momenty w warstwie górnej wynoszą

$$(14.1) \quad \begin{cases} M'_u = \mu M_u, \\ M'_v = \lambda \mu M_u. \end{cases}$$

Założmy, że współczynnik ortotropii «warstwy» górnej wynosi $\lambda = 0,5$, zaś współczynnik charakteryzujący stosunek mocy zbrojenia równoległego do osi v warstwy górnej i dolnej $\mu = 3$ [tzn. moc zbrojenia «krótszego» warstwy górnej jest trzykrotnie większa od analogicznej mocy warstwy dolnej²¹⁾].

Na podstawie przytoczonych wyżej zależności możemy wyrazić wszystkie wielkości momentów w funkcji jednej wartości momentu M_u .

Chcąc obliczyć tę wartość rozpatrzmy układ zniszczenia podany na rys. I. Nie jest to jedyny możliwy układ zniszczenia dla interesujących nas warunków obciążenia i podparcia płyty; do zagadnienia tego powrócimy jeszcze później.

W rozpatrywanej siatce zniszczenia mamy trzy linie załamów: dwie «ujemne» wzdłuż boków AB i AD oraz jedną «dodatnią», która przechodzi przez punkt A ; nachylenie jej do układu osi odniesienia nie jest znane. Założmy, że położenie tej linii jest określone parametrem x .

Jeśli teraz udzielimy punktowi E przemieszczenia przygotowanego δw ku dołowi, wówczas będziemy mogli napisać równanie pracy sił zewnętrznych i wewnętrznych stosownie do (3.11.3) i (3.12.3).

Tak więc praca sił zewnętrznych wyniesie (pamiętając że $a = 3$, $b = 2$)

$$(14.2) \quad \delta L = p \frac{bx}{2} \frac{\delta w}{3} 2 + \frac{p(a-x)b}{2} \delta w = \\ = \left(\frac{pab}{2} - \frac{pxb}{6} \right) \delta w = p \left(3 - \frac{x}{3} \right) \delta w.$$

Przystępując do ujęcia wyrażenia na pracę sił wewnętrznych zauważymy, że płat I obracać się może jedynie wokół osi u , zaś płat II wokół osi v . Na tej podstawie odpowiednie wyrażenia na kąty obrotu płatów przedstawiają się następująco:

$$(14.3) \quad \delta \varphi_I = \frac{\delta w}{b} = \frac{\delta w}{2}, \quad \delta \varphi_{II} = \frac{\delta w}{x}.$$

²¹⁾ Dla uproszczenia zakładamy przy tym proporcjonalność między wartością momentu łamiącego a ilością zbrojenia. Łatwo byłoby uwzględnić ewentualne poprawki z uwagi na zmianę ramienia momentu sił wewnętrznych [por. p. 4, wzór (4.4.1)].

Sumaryczna praca momentów będzie stosownie do (3.11.3) iloczynem momentu całkowitego przez kąt obrotu, gdzie moment całkowity jest proporcjonalny do długości prostej załomu.

Pracę sił wewnętrznych zapisać zatem można następująco:

$$(14.4) \quad \delta V = M_u x \frac{\delta w}{b} + M'_u a \frac{\delta w}{b} + M_v b \frac{\delta w}{x} + M'_v b \frac{\delta w}{x}.$$

Wprowadzając zależności podane przez (3.9.2) i (3.9.3) oraz wielkości geometryczne charakteryzujące układ, uzyskujemy stąd

$$(14.5) \quad \delta V = M_u \delta w \left(\frac{x}{b} + \mu \frac{a}{b} + \nu \frac{b}{x} + \lambda \mu \frac{b}{x} \right) = M_u \delta w \left(\frac{x^2 + 9x + 10}{2x} \right).$$

Przyrównując do siebie na podstawie zasadniczego równania (3.11.1) δL oraz δV , otrzymamy wyrażenie na moment jednostkowy

$$(14.6) \quad M_u = \frac{18x - 2x^2}{3x^2 + 27x + 30} p.$$

Do wyznaczenia nieznanego dotychczas parametru x posłużymy się zasadą maksymalnego oporu plastycznego, sformułowaną w (3.13.2). Przybierze ona w rozpatrywanym przykładzie postać

$$(14.7) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{18x - 2x^2}{3x^2 + 27x + 30} \right) = 0,$$

skąd otrzymujemy równanie na x w postaci

$$(14.8) \quad x^2 + 1,11x - 5,0 = 0.$$

Rozwiązanie daje $x = 1,75$.

Znając teraz już położenie linii załomu możemy dla danych stosunków ortotropii i «warstwowości» obliczyć wartości interesujących nas momentów. Uzyskujemy w ten sposób

$$(14.9) \quad \begin{cases} M_u = M_v = 0,293 p \text{ kG m/m}, \\ M'_u = 3 \cdot 0,293 = 0,879 p \text{ kG m/m}, \\ M'_v = 0,5 \cdot 3 \cdot 0,293 = 0,440 p \text{ kG m/m}. \end{cases}$$

Wspomnieliśmy już uprzednio, że figura załomów podana na rys. I nie przedstawia w rozpatrywanym przypadku jedynej kinematycznie możliwej siatki zniszczenia. Nastąpić może również zniszczenie tego typu, że odłamek się trójkąt BCD wzdłuż linii AD , która wtedy musi być linią załomu ujemną (rys. II).

Przy zniszczeniu według podanego schematu wyrażenia na pracę sił zewnętrznych i wewnętrznych przy udzieleniu punktowi C przemieszczenia przygotowanego δw będą wynosiły

$$(14.10) \quad \delta L = \frac{pab}{2} \frac{1}{3} \delta w = p,$$

$$(14.11) \quad \delta V = \mu M_u \frac{\delta w}{b} a + \lambda \mu M_u \frac{\delta w}{a} b = 5,5 M_u.$$

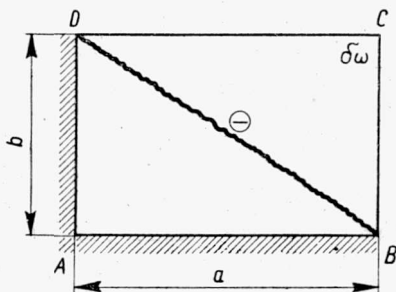
Otrzymamy stąd

$$(14.12) \quad M_u = \frac{2}{11} p = 0,182 p \text{ kGm/m}.$$

Jest to wartość znacznie mniejsza aniżeli wartość uzyskana na podstawie analizy poprzednio rozpatrywanej siatki zniszczenia.

Na zasadzie twierdzenia o maksymalnym oporze plastycznym możemy więc — porównując wyniki otrzymane dla dwóch kinematycznie możliwych siatek zniszczenia — wnosić o urzeczywistnieniu się pierwszej z rozpatrywanych siatek zniszczenia.

Można by również sprecyzować warunki (przy danym ukształtowaniu geometrycznym płyty), w których obydwie siatki zniszczenia byłyby równouprawnione. Wystarczyłoby, przy danych wskaźnikach ortotropii warstwy górnej λ i dolnej κ , wyrażenia na moment przedstawić w funkcji współczynnika μ oraz poszukiwać takiego μ , dla którego równania (14.6) i (14.12) prowadzą do identycznych wartości momentu M_u .



Rys. II

Warto tu może jeszcze nadmienić, że dla praktycznie występujących stosunków mocy zbrojenia założenie linii załomów wzdłuż dwusiecznej kąta między osiami obrotu płatów prowadzi do wartości momentów, zbliżonych do wartości uzyskiwanych z warunku na ekstremum (3.13.2). Np. w rozpatrywanym wyżej przypadku założenie $x = 2$ prowadzi do wartości momentu $M_u = 0,291 p$ przy dokładnej wartości $M_u = 0,293 p$. Zagadnienie przybliżonych metod wyznaczania momentów łamiących nie stanowi jednak obecnie przedmiotu naszego zainteresowania i zostanie przedstawione przy innej okazji.

Literatura cytowana w tekście

- [1] C. Bach i R. Baumann, *Elastizität und Festigkeit*, wyd. 9, Berlin 1924.
- [2] G. Brendel, *Stahlbetonbau*, Lipsk 1953.
- [3] Z. Brzoska, *Nowa metoda realizacji prób statycznych*, Technika Lotnicza 6 (1953).
- [4] Deutscher Ausschuss für Eisenbeton, zesz. 30, 56, 88.
- [5] L. S. Gilman, Inst. Bud. Przem. 3 (1938).
- [6] A. A. Gwozdiew, *Rasczot niesuszczey sposobnosti konstrukcji po mietodu priedielnowo rawnowiesja*, Moskwa 1949.
- [7] A. Ingerslev, *Ingeniören*, 1921.
- [8] K. W. Johansen, *Mémoires MSMKI*, 1932.
- [9] K. W. Johansen, *Mémoires MSMKI*, 1936.
- [10] K. W. Johansen, *Brudlinieteorier*, Kopenhaga 1943.
- [11] K. W. Johansen, *Pladeformler*, wyd. 2, 1949.
- [12] D. Niepostyn, *Nośność graniczna prostokątnych płyt ortotropowych obciążonych w sposób ciągły. Zagadnienie zbrojenia ekonomicznego*, Zesz. Nauk. Polít. Warsz. (w druku).
- [13] D. Niepostyn, *Nośność graniczna niejednorodnych płyt prostokątnych*, Rozpr. Inż. (w druku).
- [14] D. Niepostyn, *Spiralne i eliptyczne linie załomu płyt obciążonych siłą skupioną* (w przygotowaniu).
- [15] W. Olszak, *Plastostatyka ustrojów nośnych*, Inż. i Budown. 7 (1953).
- [16] W. Olszak, *Teoria nośności granicznej płyt ortotropowych*, Budown. Przem. 7-8 (1953).
- [17] W. Olszak, *Zagadnienie ortotropii w teorii nośności granicznej płyt*, Arch. Mech. Stos. 3 (1953).
- [18] W. Olszak, *Potencjał plastyczności w teorii ciał niejednorodnych* (w przygotowaniu).
- [19] W. Olszak, *Prestressing*, Appl. Mech. Rev. 1 (1955).
- [20] W. Olszak, *Az ortotrop lemezek határteher elmeletének nehany kerdeséről*, Węg. Akad. Nauk, Budapeszt 1953.
- [21] W. Olszak, *Uj gondolatok az epítőmérnöki gyakorlatban*, Magyar Tudományos Akademia, t. 4, 1-2.
- [22] W. Olszak, *Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych (plastyczne wyczerpanie nośności)*, Rozpr. Inż. VI (1954).
- [23] W. Olszak, *Twierdzenie o największym oporze plastycznym i jego zastosowania* (w przygotowaniu).
- [24] W. Olszak, *O podstawach teorii ciał elasto-plastycznych niejednorodnych I*, Arch. Mech. Stos. 3 (1954).
- [25] W. Olszak, *O podstawach teorii ciał elasto-plastycznych niejednorodnych, cz. II*, Arch. Mech. Stos. 4 (1954).
- [26] W. Olszak, S. Kajfasz i J. Pietrzykowski, *O nowej metodzie badań wytrzymałości materiałów kruchych na rozciąganie (Teoria tarczy kołowej w zastosowaniu do badań laboratoryjnych)*, Inż. i Budown. 9 (1954).
- [27] A. K. Rżanicyn, *Rasczot sooruzhenij s uczotom plasticzeskich swojstw materialow*, Moskwa 1949.
- [28] K. W. Sachnowski, *Żelezobietonnyje konstrukcji*, Moskwa 1951.

[29] A. Sawczuk, *Transformacja liniowa w zastosowaniu do teorii nośności granicznej płyt*, Zesz. Nauk. Polit. Warsz., Budownictwo 3 (1955).

[30] A. Sawczuk, *Zagadnienia nośności granicznej elementów rozciąganych i zginanych*, Rozpr. Inż. 2 (1955).

[31] A. Sawczuk, *Zagadnienia nośności granicznej płyt w kształcie wieloboków* (w przygotowaniu).

[32] W. W. Sokołowski, *Teoria plastyczności*, Moskwa 1950.

Резюме

ТЕОРИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПЛАСТИНОК В ОСВЕЩЕНИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ (I)

Работа посвящена экспериментальным проблемам теории несущей способности пластинок (изо- и анизотропных) и анализу степени согласованности предположений этой теории с результатами экспериментальных исследований.

В начале работы, после замечаний по истории развития теории предельной несущей способности пластинок, рассматриваются проблемы согласованности предположений этой теории, касающихся качественной стороны явлений, с результатами экспериментов, проводимых до сих пор с точки зрения различных теоретических предположений о поведении пластинок.

Указывается, одновременно, на необходимость проведения в широком масштабе количественной проверки обсуждаемой теории, причем разнообразие изменчивых условий (изотропная или ортотропная структура пластинок, их геометрическая форма, условия их закрепления, однородная или неоднородная структура, нагрузка) обуславливает обширность программы исследований. Проведение таких исследований, принимая во внимание экономические выгоды, вытекающие из внедрения этой теории в непосредственную инженерную практику, весьма желательно. Для подтверждения правильности результатов собственных исследований приводится ряд результатов зарубежных экспериментальных работ.

Во второй главе обсуждаются имеющиеся до сих пор польские работы по теории несущей способности пластинок. Первые работы были посвящены основным проблемам этой теории, как например, работы В. О л ь ш а к а, [15], [16], [18], [21] и [22]. В следующих работах приводилось решение вопроса ортотропной структуры пластинок (также и случай «двойной» ортотропии; ср. работы того-же автора [16], [17], [20]). Были разработаны основные проблемы по «двумерной» непрерывности (работа В. О л ь ш а к а, [22]), а также работы по структурной и вынужденной неоднородности (работы В. О л ь ш а к а, [24] и [25], Д. Непостына, [13], и А. Савчука, [29])

и по связанной с этой проблемой, несущей способности резервуаров (А. Савчук, [30]); наконец, приводится простая механическая аналогия применимая к вопросам изотропных, равно как анизотропных пластинок и актуализирующая решение даже сложных конкретных случаев.

Независимо от теоретических работ, проводились экспериментальные исследования, которые внесли много материала.

В третьей главе рассматриваются, главным образом, предположения теории несущей способности однородных пластинок и приводится генезис этих предположений в связи с наблюдениями механизма деструкции пластинчатых систем, в особенности железобетонных пластинок.

В четвертой главе обсуждаются принципы лабораторных экспериментов над теорией несущей способности пластинок. Специфика проблемы и необходимость осуществления таких опытных условий, которые создали бы возможность наблюдения за обеими поверхностями пластинки, требует особого способа нагрузки. Важным является экспериментальное определение «единичного» предельного момента. Подчеркивается необходимость обращения внимания на явление разрушения путем «пролома» и его влияние на несущую способность изгибаемых пластинок.

Пятая глава дает характеристику условий экспериментов.

В последующих главах обсуждаются эксперименты над отдельными видами пластинок и случаями их нагрузки, начиная с квадратной пластинки толщиной в 3 см, нагруженной в центре сосредоточенной силой. Здесь анализируется проблема образования «конуса» перелома и влияние упругой стадии на изменение условий заделки системы этого типа. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными приводится для случая квадратной пластинки, нагруженной сосредоточенной силой в центре (таблица 2). Эту главу иллюстрирует ряд фотоснимков.

В седьмой главе рассматриваются квадратные пластинки, нагруженные сосредоточенными силами, размещенными концентрически вокруг центра пластинки. Здесь рассматриваются исследования над пластинками толщиной в 8 и 12 см. Эти случаи представлены в таблицах 3, 4 и 5.

В следующей — восьмой главе приводится теоретическое решение для пластинки с тремя свободно опертыми сторонами, нагруженной сосредоточенной силой, приложенной в центре. Анализируются также результаты экспериментов над такого рода системой. Результаты анализов, так как и в предыдущем случае, приведены в таблице 6.

В девятой главе обсуждается квадратная пластинка, нагруженная равномерно, причем такая нагрузка заменена шестнадцатью сосре-

доточенными силами. Приводится теоретический анализ системы такого рода и нагрузки, а также метод, позволяющий учитывать влияние углов, уменьшающих несущую способность. Результаты экспериментов над пластинками толщиной в 12 и 8 см. приводятся в таблицах 7 и 8.

Подобный метод, но для прямоугольных пластинок, толщиной также в 8 и 12 см. и с отношением сторон $\beta = 0,5$ и $\beta = 0,667$ применяется в главе 10, содержащей таблицы 9 и 10.

В главе 11 приводятся результаты исследований для двупролетной, свободно опертой пластинки (таблица 11).

Наконец, приводятся теоретическое решение и анализ экспериментальных результатов, касающихся прямоугольных ортотропных пластинок. Также для этого случая — согласованность между теорией и результатами экспериментов — удовлетворительна.

Проблемы ортотропных пластинок будут рассматриваться более подробно во второй части работы, на основании проведенных экспериментальных исследований.

Работа снабжена приложением, иллюстрирующим на простом примере, способ расчета несущей способности систем.

R é s u m é

LA THÉORIE DE LA CHARGE LIMITE DES PLAQUES SOUS L'ASPECT DE SA VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE (I)

Le présent mémoire est consacré aux problèmes expérimentaux de la théorie de la charge limite des plaques (isotropes et anisotropes) ainsi qu'à la confrontation des hypothèses de la théorie avec les résultats expérimentaux.

D'abord, après quelques remarques historiques sur le développement de la théorie de la charge limite, les auteurs discutent la conformité des hypothèses «qualitatives» de la théorie aux résultats d'expériences qui, jusqu'à présent, ont été effectués pour vérifier d'autres problèmes théoriques.

On indique en même temps la nécessité de recherches sur une grande échelle, ayant pour but la vérification «quantitative» de la théorie. Le grand nombre de paramètres (la structure isotrope ou anisotrope des plaques, leur forme géométrique, leur structure homogène ou non-homogène, les conditions d'appui, le mode de sollicitation etc.) exige un programme de recherches très vaste. La réalisation de telles recherches est d'une importance particulière étant donné que les avantages économiques conditionnés par l'application de la théorie considérée dans la pratique d'ingénieur sont considérables. Les résultats expérimentaux dont il est que-

sition concernant surtout les plaques isotropes. Pour confirmer ces résultats on les compare à quelques résultats de recherches étrangères.

Dans le chapitre 2 on discute les travaux polonais sur la théorie de la charge limite des plaques. Les premiers de ces travaux, ceux de W. Olszak, étaient consacrés aux problèmes de base de la théorie, [15], [16], [18], [21], [22]. Dans les travaux suivants on a donné la solution du problème de l'orthotropie des plaques, y compris l'orthotropie «double» (les mémoires [16], [17], [20] du même auteur). On a également étudié les problèmes fondamentaux de la continuité «bidimensionnelle» des plaques et de l'hétérogénéité structurale et «forcée» (les travaux de W. Olszak, [24], [25], D. Niepostyn, [13], et A. Sawczuk, [29], ainsi que les problèmes associés de la charge limite des réservoirs (A. Sawczuk, [30]). Enfin on a établi une simple analogie mécanique (de la «colline de sable») qui peut être appliquée aux problèmes des plaques isotropes et anisotropes et facilite la solution même des cas complexes.

À côté des travaux théoriques on a poursuivi des recherches expérimentales qui ont fourni des résultats intéressants.

Dans le chapitre 3 on discute les hypothèses de la théorie de la charge limite des plaques homogènes et on explique l'origine de ces hypothèses en se basant sur l'observation du phénomène du mécanisme de destruction des plaques, en particulier des plaques en béton armé.

Le chapitre 4 est consacré aux principes de recherches expérimentales relatives à la théorie de la charge limite des plaques. Les conditions spéciales du problème et la nécessité d'arranger les recherches d'une manière à pouvoir observer les deux surfaces de la plaque exigent une méthode spéciale de solliciter l'élément étudié. La détermination expérimentale du moment limite (de rupture) unitaire est d'une grande importance. On souligne la nécessité d'étude du phénomène de la destruction par «poinçonnement» et son influence sur la résistance des plaques fléchies.

Dans le chapitre 5 les auteurs donnent une caractéristique des conditions de leurs travaux de recherches.

Les chapitres qui suivent concernent les recherches expérimentales sur les divers types des plaques et les divers modes de sollicitation, en commençant par une plaque carrée de 3 cm d'épaisseur, sollicitée par une force concentrée située au centre de la plaque. On analyse le problème de la formation d'un «cône de rupture» et l'influence de la phase élastique sur le changement des conditions d'appui des plaques. La table 2 permet de faire une comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux dans le cas d'une plaque carrée sollicitée par une force concentrée agissant au centre de la plaque. Le chapitre est illustré par quelques photographies.

Le chapitre 7 concerne les plaques carrées sollicitées par des forces concentrées, disposées concentriquement autour du centre de la plaque.

La discussion concerne les recherches sur les plaques de 8 et 12 cm d'épaisseur. Les tables 3, 4 et 5 illustrent le même cas.

Le chapitre 8 contient la solution théorique d'une plaque simplement appuyée sur trois de ses côtés et sollicitée par une force concentrée au centre ainsi qu'une analyse des résultats expérimentaux obtenus pour ce genre de construction. Les résultats sont résumés dans la table 6.

Le chapitre 9 concerne une plaque carrée avec une charge uniformément répartie, remplacée ensuite par 16 forces concentrées. Les auteurs donnent une analyse théorique d'une structure et d'une sollicitation de ce type et présentent une méthode, permettant de tenir compte de l'influence des coins réduisant la charge limite. Les résultats expérimentaux pour les plaques de 12 et 8 cm d'épaisseur sont résumés dans les tables 7 et 8.

Une méthode pareille est appliquée dans le chapitre 10 aux plaques de 8 et 12 cm d'épaisseur avec rapports des côtés $\beta=0,5$, $\beta=0,677$ (tables 9 et 10).

Le chapitre 11 concerne les résultats pour une plaque à deux travées, simplement appuyée (tabl. 11).

Les plaques rectangulaires orthotropes représentent le dernier type discuté dans la présente partie du travail. On présente la solution théorique et une analyse des résultats expérimentaux. La conformité des résultats théoriques à ceux d'expériences est, ici encore, satisfaisante. Une plus ample discussion des problèmes relatifs aux plaques orthotropes basée sur des expériences sera donnée dans la II^e partie de ce travail.

Dans l'annexe on explique, au moyen d'un simple exemple, la méthode de calcul de la charge limite.

ANTONI SAWCZUK

ZAGADNIENIA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ
ELEMENTÓW ROZCIĄGANYCH I ZGINANYCH
W ZASTOSOWANIU
DO TEORII ZBIORNIKÓW PROSTOKĄTNYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXIX

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Uwagi ogólne	257
2. Nośność graniczna elementów rozciąganych i zginanych	259
3. Ortotropia wymuszona	265
4. Niejednorodność struktury elementu	267
5. Zagadnienie sił węzłowych	271
6. Stany graniczne zbiorników prostokątnych	276

1. Uwagi ogólne *)

1.1. Podstawowe założenia teorii nośności granicznej płyt znalazły zadowalające potwierdzenie doświadczalne w szeregu przeprowadzonych dotychczas badań laboratoryjnych. Obserwacje linii załomów elementów płytowych, znajdujących się pod działaniem złożonych obciążeń, pozwalają przypuszczać, że również przypadki zginania, połączonego z działaniem sił rozciągających, rozpatrywać można ze stanowiska teorii nośności granicznej.

Zastosowanie jednak teorii nośności granicznej do płaskich układów, poddanych rozciąganiu i zginaniu, wymaga wstępnego wyjaśnienia szeregu zagadnień oraz określenia zakresu stosowności teorii.

Zajmiemy się analizą stanu równowagi granicznej płyt poddanych działaniu obciążenia, rozłożonego w sposób ciągły i skierowanego prostopadle do ich powierzchni; oraz sił rozciągających, działających w płaszczyźnie tych płyt. Ścisłejsze sprecyzowanie miejsca działania sił rozciągających w przekroju poprzecznym zostanie dokonane później. Co do warunków podparcia nie ma potrzeby wprowadzania tu jakichkolwiek ograniczeń.

1.2. Należy na wstępie zaznaczyć, że nie będzie tu spełnione, ogólnie rzecz biorąc, założenie stałości momentu łamiącego na jednostkę długości linii załomu, a tym samym będziemy mieli do czynienia z układami niejednorodnymi, charakteryzującymi się w każdym punkcie inną wartością momentu łamiącego. Ponieważ jednak przedmiot naszych rozważań stanowią elementy, zbudowane z materiałów ciągliwego i kruchego, przy czym zakłada się, że materiał kruchy zdolny jest przenosić jedynie naprężenia ściskające, zaś ciągliwy umieszczony jest w sposób pozwalający na wykorzystywanie go dla przejścia naprężeń rozciągających, przeto niejednorodność ta dla elementów zginanych może być ściśle określona. Działanie sił rozciągających skomplikuje nieco zagadnienie niejednorodności, nie uniemożliwi jednak analizy stanu równowagi granicznej.

*) Praca przedstawiona na Kursie Naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Międzyzdrojach w sierpniu 1954 r.

Rozpatrywanie układów niejednorodnych ze stanowiska teorii nośności granicznej narzuca automatycznie przyjęcie sztywno-plastycznego schematu odkształcenia, tzn. pominięcie wszystkich odkształceń sprężystych. Taki bowiem schemat leży u podstaw tej teorii. Wynika stąd również konieczność rozpatrywania ustroju w takiej chwili, gdy naprężenia w materiale poddanym rozciąganiu osiągnęły na całej długości linii załomu, ściślej, na długościach wszystkich linii załomów, wartość równą granicy plastyczności, niezależnie od koncentracji włókien rozciąganych na odpowiednich odcinkach, a więc niezależnie od funkcji, określającej niejednorodność struktury (w sensie zdolności przenoszenia momentów łamiących). Niejednorodność struktury elementu ma duże znaczenie przy traktowaniu zagadnienia według sprężysto-plastycznego modelu odkształcenia, pozwalającego na uwzględnienie wszystkich faz, jakie ustrój przechodzi od chwili rozpoczęcia działania obciążeń aż do chwili jego zniszczenia. W tym przypadku niejednorodność budowy ma znaczenie dlatego, że są od niej uzależnione odkształcenia sprężyste. Zagadnienia niejednorodności nie będą tu jednak stanowiły przedmiotu naszych zainteresowań i są one omówione jedynie ogólnie w zakresie niezbędnym do dalszych rozważań, a szczególnie do określenia wpływu sił podłużnych na wielkość jednostkowego momentu łamiącego.

1.3. Nasuwa się tu jeszcze pytanie, czy układy niejednorodne charakteryzować się będą załomami prostoliniowymi, czy też będzie tu należało rozpatrywać załomy krzywoliniowe. Ograniczymy się do omówienia przypadków obciążeń rozłożonych w sposób ciągły na całej powierzchni płyty. Jest to ważne z uwagi na fakt, że w przypadku występowania sił skupionych bądź też obciążeń działających tylko na pewną część powierzchni płyty, geometrycznie możliwa siatka zniszczenia nie składa się wyłącznie z samych tylko linii prostych.

Przy naszych założeniach i dla sztywno-plastycznego schematu odkształcenia można przyjąć, z taką samą dokładnością jak w przypadku stałego momentu łamiącego, że załomy są prostoliniowe, bowiem jedynie linie proste stanowią geometrycznie możliwe formy zniszczenia dla obciążeń ciągłych.

1.4. Teoria nośności granicznej płyt, zbudowanych z materiału ciągłego, rozciąganego oraz kruchego, ściskanego — opiera się na założeniu, że we wszystkich punktach leżących na linii załomu naprężenia w materiale, przenoszącym siły rozciągające, osiągnęły granicę plastyczności σ_{pl} i wyrażają się jako funkcje wielkości charakteryzujących strukturę elementu oraz momentu, występującego w liniach załomów bądź też przez jego składowe, w postaci

$$(1.4.1) \quad \sigma_u = f_1(M_v, s) = \sigma_{pl}, \quad \sigma_v = f_2(M_u, s) = \sigma_{pl}.$$

Symbole σ_u i M_u oznaczają odpowiednio składowe naprężenia i momentu na osi u w układzie współrzędnych (u, v) , zaś σ_v i M_v odpowiednie składowe na osi v ; s jest wielkością określającą strukturę elementu.

W przypadku płyty jednorodnej i stałych naprężeń we włóknach rozciąganych uzyskujemy moment łamiący stały; nie badamy przy tym bliżej rozkładu wewnętrznego naprężeń w materiale przenoszącym ciśnienia.

1.5. Podobnie rozpatrując elementy poddane nie tylko zginaniu, ale również działaniu sił osiowych, można stwierdzić, że siły te muszą spełniać pewien warunek. Mianowicie muszą one wywoływać w elemencie taki stan naprężeń, aby w punktach linii załomu naprężenia wypadkowe warstwy dolnej posiadały ten sam znak jak w przypadku zginania. Przypadek sił rozciągających warunek taki spełnia. Można tu będzie nie wnioskując na razie w zależności między momentem a siłą w stanie wyczerpania nośności stwierdzić, że w przypadku działania sił rozciągających N_u i N_v , skierowanych zgodnie z układem osi odniesienia, stan graniczny będzie osiągnięty, gdy naprężenia we włóknach rozciąganych przedstawia się w postaci

$$(1.5.1) \quad \begin{cases} \sigma_u = f(M_v, N_u, s) = \sigma_{pl}, \\ \sigma_v = f(M_u, N_v, s) = \sigma_{pl}. \end{cases}$$

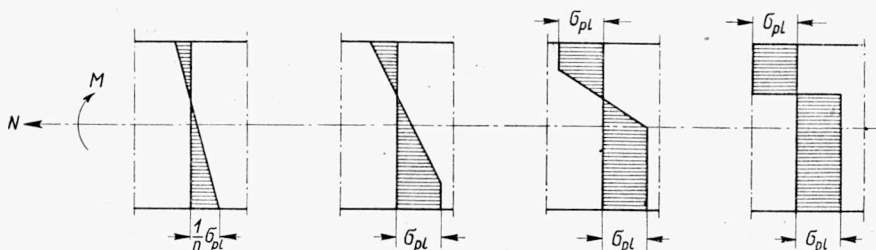
Zależności (1.4.1) i (1.5.1) określają naprężenia jedynie w stanie granicznym, nie można ich natomiast stosować dla fazy przejścia od stanu nieobciążonego (przez obszar odkształceń sprężystych) do stanu wyczerpania nośności.

1.6. Powyższe uwagi pozwalają na rozpatrywanie problemu nośności elementów rozciąganych i zginanych na podstawie teorii nośności granicznej, odnoszącej się do analizy stanu zniszczenia elementów zginanych. Jeśli natomiast chcielibyśmy rozpatrywać układy zginane oraz dodatkowo ściskane i rozciągane w kierunkach wzajemnie prostopadłych, to (pomijając problem stateczności) istniałyby ograniczenia w stosowaniu teorii nośności granicznej do takich układów. Ogólnie biorąc naprężenia powstające na skutek zginania musiałyby być większe co do bezwzględnej wartości od naprężeń, wywołanych przez siły ściskające.

2. Nośność graniczna elementów rozciąganych i zginanych

2.1. W przypadku pręta, zbudowanego z materiału elasto-plastycznego, obciążonego momentem zginającym i siłą podłużną, stan graniczny osiągnięty zostanie z chwilą, kiedy w całym przekroju naprężenia osiągną granicę plastyczności (ściśle biorąc pozostanie pewien rdzeń sprężysty wokół punktu, w którym naprężenia zmieniają znak; pomijając ten rdzeń nie

rebimy dużego błędu). Sposób narastania naprężeń i przechodzenia od fazy sprężystej w plastyczną dla materiału elasto-plastycznego bez uwzględnienia ewentualnego «utwardzenia» materiału przedstawiony jest na rys. 1 (przy zginaniu symetrycznym).

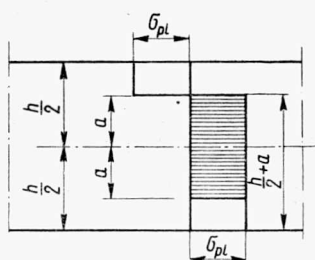


Rys. 1

Warunki równowagi zastosowane do stanu granicznego przekroju dają równania

$$(2.1.1) \quad \int_A \sigma_{pl} dA = N, \quad \int_A \sigma_{pl} y dA = M.$$

Równania te pozwolą wyznaczyć zależność między momentem a siłą podłużną w chwili osiągnięcia stanu równowagi granicznej, jak również położenie osi obojętnej, jeśli znany jest kształt geometryczny przekroju. War-



Rys. 2

to przypomnieć, że w przypadku przekrojów o jednej tylko osi symetrii zmieniać się będzie punkt działania siły osiowej; przesuwając się on będzie po osi symetrii i nie zawsze leżeć będzie w środku ciężkości figury przedstawiającej przekrój. Utrudnia to rozpatrywanie zależności między siłą a momentem w stadium granicznym. Dodać należy, że w fazie sprężysto-plastycznej nie jest zachowana w ogólnym przypadku zasada niezależności działania sił¹⁾.

Ograniczając się do rozpatrzenia przekroju prostokątnego o bokach h i b można będzie uważać, że siłę podłużną przenosi część przekroju, położona wokół środka ciężkości o wysokości równej $2a$, zaś moment zginający reprezentowany jest przez pozostałe części wykresu naprężeń (rys. 2).

Równania równowagi przedstawiają się w postaci

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} N = 2ab\sigma_{pl}, \\ M = b\sigma_{pl}\left(\frac{h^2}{4} - a^2\right). \end{cases}$$

¹⁾ Zagadnienia te analizuje np. A. A. Gwozdiew, [5].

Wyznaczając z pierwszego wartość a i wstawiając ją do drugiego z powyższych równań otrzymamy

$$(2.1.3) \quad M = \frac{bh^2}{4} \sigma_{pl} - \frac{N^2}{4 \sigma_{pl} b}.$$

Uzyskaną zależność przedstawia rys. 3 w postaci paraboli. Na osi pionowej podane są stosunki momentu do momentu granicznego, na osi zaś poziomej analogiczne zależności dla siły niszczącej.

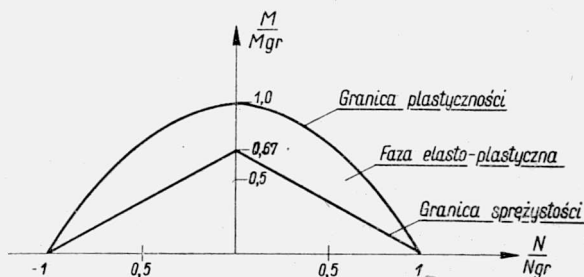
W przypadku rozpatrywania jedynie fazy sprężystej warunków na maksymalną wartość momentu w chwili osiągnięcia w skrajnych włóknach naprężeń równych granicy plastyczności przedstawić można w postaci

$$(2.1.4) \quad M = \frac{\sigma_{pl} bh^2}{6} - \frac{Nh}{6}.$$

Odpowiedni wykres (rys. 3) ma postać trójkąta, którego wnętrze charakteryzuje fazę sprężystą pracy pręta.

Dla przypadku zmiany znaku momentu wykreślić można analogiczną zależność poniżej osi N/N_{gr} .

Tak więc w przypadku pręta z materiału elasto-plastycznego możemy dla każdej wartości siły $N < N_{gr}$ określić odpowiednią wartość momentu, który dla rozpatrywanego przykładu będzie momentem łamiącym; będzie on mniejszy od momentu łamiącego w przypadku, gdy siła podłużna nie działa.



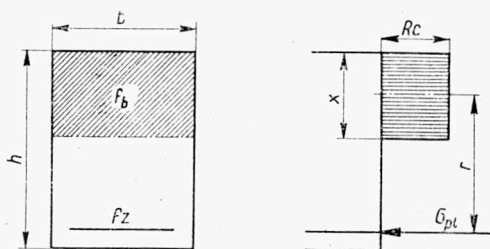
Rys. 3

2.2. Zastanówmy się, jak przedstawiać się będzie zależność momentu od siły podłużnej dla elementów, w których naprężenia rozciągające występować mogą jedynie we włóknach z materiału ciągliwego, zaś materiał kruchy pracuje tylko na ściskanie. Znajomość tej zależności pozwoli na sprowadzenie zagadnienia rozciągania połączonego ze zginaniem do zagadnienia samego zginania o innej jednak wartości momentu łamiącego. Spowodowane to jest zmniejszeniem momentu na skutek działania podłużnych sił rozciągających.

Najpierw należy sprecyzować założenia dotyczące rozkładu naprężeń w przekroju poprzecznym określonego wyżej elementu. Choć zagadnienie to należy — ściśle biorąc — do teorii żelbetu, która zajmuje się właśnie

ustrojami zbudowanymi z materiałów kruchych i ciągliwych w założeniu właściwego ich wykorzystania, to jednak krótkie omówienie tego zagadnienia potrzebne jest dla ujęcia całokształtu rozpatrywanego problemu.

W przypadku zginania bez działania sił podłużnych dany przekrój materiału kruchego i materiału ciągliwego (np. betonu i stali) w stadium zniszczenia zdolny jest przenieść pewną wartość momentu, którą uważa-



Rys. 4

my za moment graniczny. Tak rozumiany moment jednostkowy oznaczamy przez M . Przyjmując dla uproszczenia prostokątny wykres naprężeń ściskających w materiale kruchym²⁾ oraz prostokątny przekrój elementu, moment łamiący wyrazimy zależnością (rys. 4)

$$(2.2.1) \quad M = \sigma_{pl} f_z r = R_c x b r.$$

Gdy rozpatrzmy przekrój rozciągany siłą zaczepioną mimośrodowo, przy czym mimośród jest stały (co spotykamy np. w przypadku zbiorników prostokątnych obliczanych jako ramy poziome), otrzymamy (rys. 5) zależności

$$(2.2.2) \quad \sigma_{pl} f_z - N - R_c b x_1 = 0,$$

$$(2.2.3) \quad N e - R_c b x_1 r_1 = 0,$$

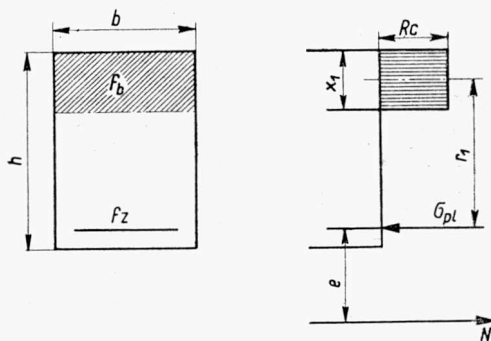
gdzie R_c oznacza wytrzymałość materiału na ściskanie.

Na podstawie zależności, podanych wzorami (2.2.1) i (2.2.2), można uzyskać związek

$$x_1 = x - \frac{N}{R_c b}$$

oraz

$$r_1 = r + \frac{N}{2 R_c b}.$$



Rys. 5

Uwzględniając powyższe zależności we wzorze (2.2.3) oraz uważając wartość $N e$ za jednostkowy moment łamiący dla przypadku zginania łącz-

²⁾ Wiadomo, na podstawie np. prac A. F. Lolejta, że kształt wykresu naprężeń w ściskanej strefie belki żelbetowej przy zginaniu nie ma istotnego wpływu na wyniki obliczeń; por. [5].

nie z rozciąganiem (wartość tę oznaczmy przez ${}_NM$) otrzymamy

$$(2.2.4) \quad {}_NM = R_c \left(x - \frac{N}{R_c b} \right) \left(r + \frac{N}{2 R_c b} \right) = R_c x r - \frac{N r}{b} + \frac{N x}{2 b} - \frac{N^2}{2 R_c b^2}.$$

Biorąc pod uwagę wartość jednostkowego momentu w przypadku samego tylko zginania z równania (2.2.1) uzyskujemy poszukiwaną zależność na wielkość momentu jednostkowego przy obecności sił osiowych

$$(2.2.5) \quad {}_NM = M - \frac{NM}{\sigma_{pl} f_z} + \frac{N}{2 R_c b^2} (\sigma_{pl} f_z - N) = M - M \frac{N}{N_{gr}} + \frac{N}{2 R_c b^2} (N_{gr} - N).$$

Powyższy wzór przedstawia analogiczną zależność dla elementów, zbudowanych z materiałów ciągłego i kruchego, do podanej przy pomocy wzoru (2.1.3) dla elementów z materiałów elasto-plastycznych.

Bezpośrednio z podanego wzoru wynika, że w przypadku gdy

$$(1) \quad N = 0, \quad \text{to} \quad {}_NM = M_{gr} = M;$$

$$(2) \quad N = \sigma_{pl} f_z = N_{gr}, \quad \text{to} \quad {}_NM = 0.$$

Ilustrację zależności (2.2.5) przedstawia rys. 6.

Wykres taki dotyczy związanych ze sobą wartości $M_{gr} = M$, N_{gr} , N oraz R_c . Rysunek 6 został wykonany dla stosunku $\sigma_{pl}/R_c = 11,5$ oraz $N_{gr}/M = 13,1 \text{ m}^{-1}$. Nie

należy do naszego tematu zagadnienie, w jaki sposób zależy moment graniczny od wartości R_c .

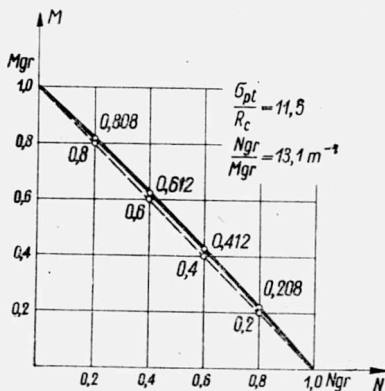
2.5. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że wyrażenie

$$\frac{N}{2 R_c b^2} (N_{gr} - N)$$

w przypadkach praktycznych wpływa niewiele na wartość ${}_NM$. Dla uzasadnienia tego wniosku przytoczymy następujący przykład liczbowy.

Płyta o grubości $h = 10 \text{ cm}$ wykonana z betonu $R_c = 200 \text{ kg/cm}^2$ zbrojona jest na metr bieżący prętami ze stali o granicy plastyczności 2300 kg/cm^2 o łącznym przekroju 6 cm^2 , tzn. $N_{gr} = 13800 \text{ kG}$. Jednostkowy moment łamiący obliczony dla tego przykładu wyniesie

$$M = 6 \cdot 2300 \cdot 0.95 (10 - 2) \approx 105000 \text{ kGcm/m}.$$



Rys. 6

Jeśli pasmo płyty poddane jest działaniu sił rozciągających o wielkości 4000 kG/mb, to moment jednostkowy ${}_NM$ wyniesie

$${}_NM = 1050 - \frac{4000 \cdot 1050}{2300 \cdot 6} + \frac{4000}{2 \cdot 200 \cdot 100^2} (2300 \cdot 6 - 4000) = 756 \text{ kGm/m.}$$

Wpływ badanego trzeciego składnika będzie tym mniejszy, im bardziej wielkość siły N zbliżać się będzie do wartości granicznej. Wpływ ten będzie również niewielki, gdy $N \rightarrow 0$.

Największe znaczenie ma omawiany czynnik, jak łatwo się przekonać z warunku ekstremum — dla $N = 1/2 N_{gr}$. Dla omawianego wyżej przypadku maksymalna wartość liczbową tego czynnika wyniesie 12 kGm/m.

2.4. Należy tu zwrócić uwagę na jedno jeszcze zagadnienie wiążące się z przyjęciem prostokątnego wykresu naprężeń w materiale kruchym (np. w betonie). Bliższa analiza wpływu wykresu naprężeń na wielkość momentu ${}_NM$ wykazuje, że w przypadku nieprostokątnego wykresu następuje zmiana ostatniego składnika we wzorze (2.2.5). Odpowiednia wartość momentu zwiększa się nieznacznie (orientacyjnie dla betonu w stosunku około 1,2 zależnie od stosunku R_w/R_m). Można uważać, że przez zastąpienie wielkości R_c przez wielkość R_m korekta ta jest uwzględniona należyście.

2.5. Przeprowadzona wyżej analiza wielkości momentu łamiącego w przypadku zginania łącznie z rozciąganiem wykazała wpływ wielkości siły podłużnej na wartość tego momentu. Odrzucenie ostatniego składnika w otrzymanym wzorze doprowadza do zależności liniowej między momentem a siłą podłużną (na rys. 6 linia przerywana). Na pytanie, czy składnik ten istotnie można pominąć, odpowiedzieć może jedynie doświadczenie. Pomijając go działamy na korzyść bezpieczeństwa ustroju. Stopień zwiększenia współczynnika bezpieczeństwa waha się — w zależności od parametrów σ_{pl}/R_c oraz N_{gr}/N — teoretycznie w granicach do około 10% dla zmieniającego się w żelbecie stosunku σ_{pl}/R_c od 9,0 do około 25,0.

2.6. Omawianą zależność (2.2.5) dobrze będzie dla dalszych rozważań przedstawić w nieco innej, następującej formie:

$$(2.6.1) \quad {}_NM = M [1 - \Psi(N, s)],$$

gdzie przez $\Psi(N, s)$ oznaczono wielkość

$$\Psi(N, s) = \frac{N}{N_{gr}} - \frac{N}{2 M R_c b^2} (N_{gr} - N).$$

Wzór (2.6.1) pozwala stwierdzić, że moment jednostkowy dla przypadku zginania łącznie z rozciąganiem przedstawić można jako funkcję momentu jednostkowego, obliczonego dla elementu zginanego, przy czym moment ten należy zmniejszyć tak, jak to określa funkcja $\Psi(N, s)$.

3. Ortotropia wymuszona

3.1. Przejdźmy teraz do rozpatrzenia stanów granicznych układów płytowych. Rozpocznijmy od najprostszego układu, mianowicie od płyty o zbrojeniu krzyżowym mocy f_u w kierunku równoległym do osi u i f_v w kierunku osi v . Moc zbrojenia jest stała, jak to przyjmuje się w założeniach teorii nośności granicznej, a więc odpowiednim kierunkom przyporządkowane są składowe momentu łamiącego M_v i M_u .

Założmy, że płyta jest swobodnie podparta oraz że na mimośrodku e liczonym od osi zbrojenia dolnego na podporze (to znaczy, że pomijamy zmianę mimośrodu wskutek odkształcenia ustroju) zaczepione są siły rozciągające n_u i n_v skierowane odpowiednio zgodnie z kierunkami osi u i v (rys. 7).

Natężenie sił rozciągających n_u i n_v jest stałe, można więc oznaczyć siły, przypadające na jednostkę długości obwodu odpowiednio przez N_u i N_v (rys. 7).

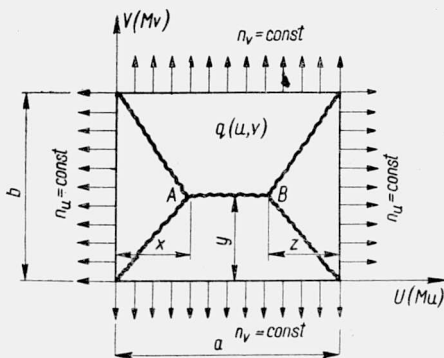
Na płytę działa prostopadle do jej powierzchni obciążenie ciągłe o natężeniu $q(u, v) = \text{const}$.

Zakładając z kolei, że odkształcenia w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni płyty są rzędu pozwalającego pominąć je w stosunku do mimośrodu e , możemy napisać odpowiednie wyrażenia dla pracy przygotowanej sił zewnętrznych i wewnętrznych (rozpatrywanych jako funkcje parametrów x, y, z) na możliwym przesunięciu δw odcinka AB linii załomu.

Równanie pracy sił zewnętrznych będzie tu takie samo, jak dla przypadku płyty zginanej, natomiast siły podłużne pojawią się w wyrażeniu dla pracy sił wewnętrznych przez wprowadzenie zamiast momentów M_u i M_v odpowiednich momentów ${}_NM_u$ oraz ${}_NM_v$ na podstawie wzoru (2.6.1). Tak więc zagadnienie nośności granicznej w przypadku stałych sił rozciągających n_u i n_v , zaczepionych na obwodzie elementu, dało się sprowadzić do przypadku nośności granicznej elementów zginanych.

3.2. Aby omówić dokładniej ten wniosek, napiszmy odpowiednie składowe momentu jednostkowego w przypadku działania sił rozciągających przy użyciu wzoru (2.6.1) w formie następującej:

$$(3.2.1) \quad \begin{cases} {}_NM_u = M_u [1 - \Psi_u(N_v, s)] , \\ {}_NM_v = M_v [1 - \Psi_v(N_u, s)] . \end{cases}$$



Rys. 7

Płyta zginana charakteryzuje się wskaźnikiem ortotropii

$$(3.2.2) \quad \kappa = \frac{M_v}{M_u}.$$

Działanie sił rozciągających zmieniło wyrażenie dla jednostkowych momentów, które przyjęło obecnie postać podaną w (3.2.1); zmieniło więc tym samym jak gdyby ortotropię struktury elementu, dając w wyniku element o innej strukturze. Ortotropię tej struktury nazwiemy ortotropią wymuszoną, rozumiejąc przez to, że wywołana ona została przez wspomniane siły rozciągające.

Wskaźnik ortotropii wymuszonej, oznaczmy go przez ${}_N K$, wyniesie

$$(3.2.3) \quad {}_N \kappa = \frac{{}_N M_v}{{}_N M_u} = \kappa \frac{1 - \Psi_u(N_u, s)}{1 - \Psi_v(N_v, s)} = \kappa F(N_u, N_v, s)$$

i wyraża się przez wskaźnik ortotropii dla zbrojenia w kierunkach pokrywających się z kierunkami osi odniesienia (u, v) oraz za pomocą pewnej funkcji zależnej od sił rozciągających N_u i N_v oraz struktury płyty s .

3.3. Dla przypadku równomiernie rozłożonych sił rozciągających funkcja $F(N_u, N_v, s)$ jest stała i stanowi pewien współczynnik. Zachowany jest więc w tym przypadku warunek stałości momentu granicznego na jednostkę długości i obliczanie zależności charakteryzujących stany graniczne tak obciążonych układów przeprowadzać można w oparciu o znane wzory z teorii stanów granicznych ustrojów płytowych zginanych³⁾. Wykazaliśmy więc, że układy poddane zginaniu i rozciąganiu za pomocą przekształcenia wskaźnika ortotropii rozpatrywać można jako elementy zginane. Przy stałych wartościach momentów i sił podłużnych jest to przekształcenie liniowe określone przez równanie $F(N_u, N_v, s) = \text{const}$.

3.4. Dla ilustracji rozpatrzmy następujący przykład. Płyta kwadratowa o boku a jest obciążona równomiernie i posiada zbrojenia równej mocy w obydwu kierunkach. Siły rozciągające na jednostkę wynoszą $N_u = N_v = N$, a więc ${}_N \kappa = \kappa = 1$. Przy $\Psi = 1/2$ natężenie obciążenia granicznego wyniesie

$${}_N q = \frac{24 {}_N M}{a^2} = \frac{24 M [1 - \Psi(N, s)]}{a^2} = \frac{12 M}{a^2},$$

gdzie M oznacza wartość momentu granicznego, wyznaczonego dla płyty zginanej bez działania sił rozciągających.

³⁾ Por. np. W. Olszak, [9], [10].

4. Niejednorodność struktury elementu

4.1. W pierwszym punkcie niniejszej pracy stwierdziliśmy, że przy rozpatrywaniu stanów granicznych układów mimośrodowo rozciąganych wynika konieczność zajęcia się problemami niejednorodności struktury układu. Wniosek ten stanie się oczywisty, gdy wyobrazimy sobie płytę prostokątną znajdującą się w dowolnych warunkach podparcia a poddaną poza działaniem obciążeń $q(u, v)$ również działaniu sił rozciągających n_u i n_v zależnych od miejsca. Założmy jeszcze, że funkcja określająca zmianę tych sił jest identyczna na obydwu równoległych do siebie bokach płyty (rys. 8).

Założenia takie dla interesujących nas zbiorników o rzucie poziomym prostokątnym dla celów praktycznych są spełnione w przypadku symetrii układu i obciążenia.

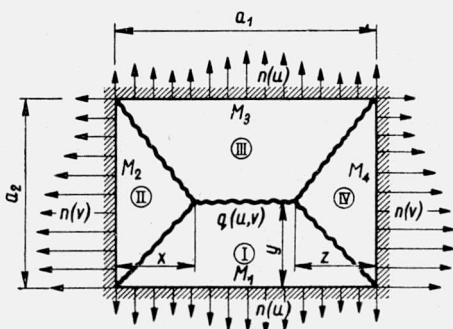
Siły jednostkowe rozciągające N_u i N_v , działające w kierunku równoległym do osi układu odniesienia, są odpowiednio funkcjami zmiennej u i v ; oznaczać je w dalszym ciągu będziemy

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} N_u = \int_v^{v+1} n(v) dv, \\ N_v = \int_u^{u+1} n(u) du. \end{cases}$$

Tak więc na podstawie związków (2.2.5) oraz (3.2.1) możemy napisać wyrażenie określające moment jednostkowy na odcinku $(v+1) - v$ oraz $(u+1) - u$ w formie

$$(4.1.2) \quad \begin{cases} {}_N M_v = M_v - \frac{M_v}{N_{gr}} \int_v^{v+1} n(v) dv + \frac{\int_v^{v+1} n(v) dv}{2 R_c} [N_{gr} - \int_v^{v+1} n(v) dv], \\ {}_N M_u = M_u - \frac{M_u}{N_{gr}} \int_u^{u+1} n(u) du + \frac{\int_u^{u+1} n(u) du}{2 R_c} [N_{gr} - \int_u^{u+1} n(u) du]. \end{cases}$$

4.2. Bezpośrednio z podanych wzorów wynika, że i wartości odpowiednich momentów ${}_N M_u$ oraz ${}_N M_v$ nie są stałe, mimo iż zbrojenie płyty jest rozłożone równomiernie, dzięki czemu M_u, M_v i N_{gr} są stałe.



Rys. 8

Zapisując powyższe wzory w skróconej postaci otrzymamy

$$(4.2.1) \quad \begin{cases} {}_N M_u = M_u [1 - \Psi(u, s)], \\ {}_N M_v = M_v [1 - \Psi(v, s)], \end{cases}$$

gdzie np.

$$(4.2.2) \quad \Psi(v, s) = \frac{1}{N_{gr}} \int_v^{v+1} n(v) dv + \frac{\int_v^{v+1} n(v) dv}{2 M_v R_c} [N_{gr} - \int_v^{v+1} n(v) dv],$$

przy czym $\psi(v, s)$ jest inną funkcją niż poprzednio występująca $\psi(N, s)$

Ogólna postać wzorów ulega odpowiednim uproszczeniom zależnie od kształtu funkcji $n(u)$ i $n(v)$.

Badanie układów o jednorodnej strukturze, poddanych działaniu sił rozciągających, może być zastąpione badaniem układów niejednorodnych ⁴⁾. Jak już wyjaśniliśmy, niejednorodność tę nazwiemy wymuszoną.

4.3. Ponieważ zagadnienie stanów granicznych układów niejednorodnych nie jest jeszcze w pełni opracowane, poświęcimy nieco uwagi temu tematowi. Nawiążemy przy tym do prac [18] oraz [9]. Według tych prac stan graniczny układu niejednorodnego osiągnięty będzie wówczas, gdy w każdym punkcie linii załomu naprężenia w materiale ciągliwym (stali) osiągną granicę plastyczności, zaś w materiale kruchym (betonie) wystąpią odpowiednie naprężenia równe granicy wytrzymałości na ściskanie (rys. 4 i 5). Szczegóły dotyczące wymiarowania takiego przekroju pomijamy.

Stosując do układu w chwili jego przekształcenia się w mechanizm przez wyczerpanie nośności zasadę zeszytnienia możemy rozpatrzeć warunki równowagi poszczególnych pławów. Ograniczmy się na razie do płyty prostokątnej o siatce zniszczenia podanej na rys. 8.

Zastosowanie równań równowagi zmusza do uwzględnienia poza momentami zginającymi również występujących w rzeczywistych układach sił poprzecznych i momentów skręcających, które działając w fazie sprężystej mają wpływ na ukształtowanie się siatki zniszczenia (w tej sprawie por. pracę [14], p. 4 i 5). Działanie tych uogólnionych sił zastąpić można działaniem pewnych umownych wielkości, zwanych siłami węzłowymi, które uważamy za zaczepione w miejscach zbiegania się linii załomów. Odkładając do następnego p. 5 omówienie tych zagadnień ograniczymy się tu jedynie do stwierdzenia, że w punktach, gdzie linie jedna-

⁴⁾ Podstawy teorii plastyczności ciał elasto-plastycznych niejednorodnych wyłożone są w pracy W. Olszaka, [13].

kowego znaku zbiegają się, zaś obciążenie jest ciągle, te siły węzłowe równe są zeru. Ma to więc miejsce np. w przypadku przedstawionym na rys. 7.

Odpowiednie równania równowagi przyjmują dla płyta pierwszego i drugiego odpowiednio postać następującą:

$$(4.3.1) \quad \begin{cases} \int_0^{a_1} [M_u(v) + M_1(v)] du = \int_1 \int q(u,v) v du dv, \\ \int_0^{a_2} [M_v(u) + M_2(u)] dv = \int_{II} \int q(u,v) u du dv \end{cases}$$

oraz analogicznie dla pozostałych płytów.

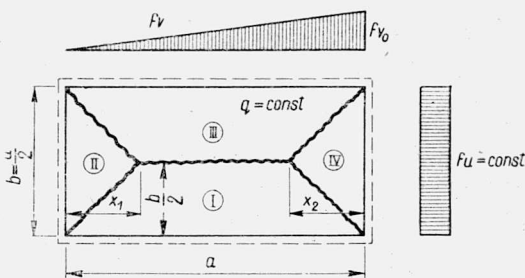
W podanych wzorach przez M_u i M_v oznaczono momenty w pewnym prześle, zaś przez M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) odpowiednie momenty na podporach. Na podstawie (4.3.1) uzyskujemy 4 zależności, z których przy znanych stosunkach momentów M_u , M_v i M_i wyznaczyć można już bezpośrednio interesujące nas parametry x, y, z , charakteryzujące siatkę zniszczenia. Ponieważ jednak układ otrzymanych równań jest na ogół zawily, wygodniej jest przyjąć odpowiednie wartości parametrów, a następnie znaleźć wartości odpowiednich stosunków (por. np. [11]).

Zilustrujemy przedstawione postępowanie przykładem (rys. 9). Wyobraźmy sobie płytę prostokątną, zginaną, swobodnie podpartą, której zbrojenie f_u równoległe do osi u oraz zbrojenie f_v równoległe do osi v zmieniają się według zależności

$$(4.3.2) \quad \begin{cases} f_u = \text{const}, \\ f_v = f_{v_0} \frac{u}{a}. \end{cases}$$

Ponieważ $M_u = F(f_v)$, otrzymamy na podstawie (4.3.2)

$$(4.3.3) \quad \begin{cases} M_u = M_{u_0} \frac{u}{a}, \\ M_v = \text{const}. \end{cases}$$



Rys. 9

Równania równowagi są następujące:

$$(4.3.4) \quad M_v b = \frac{p b x_1^2}{6} = \frac{p b x_2^2}{6},$$

$$(4.3.5) \quad M_{u_0} \int_0^a \frac{u}{a} du = \frac{p b^2}{24} (3a - 4x).$$

Z równania (4.3.4) bezpośrednio wynika, że $x_1 = x_2$. Przyjmując $M_{u_0} = M_v$ i przyrównując odpowiednie wyrażenia dla momentów, otrzymamy

$$x^2 = \frac{a(3a - 4x)}{8}.$$

Stąd $x = 0,415 a$. Dla przypadku jednorodnej płyty izotropowej ($M_u = M_v = \text{const}$) odpowiednia odległość wynosi $x = 0,325 a$.

4.4. Teoretycznie jest rzeczą obojętną, czy mamy do czynienia [z niejednorodnością wywołaną, jak w rozpatrywanym wyżej przykładzie, odpowiednim ułożeniem zbrojenia, czy też działaniem sił rozciągających, a więc niejednorodnością wymuszoną.

Warto nadmienić, że z punktu widzenia teorii stanów granicznych układów zginanych obojętnym jest również dla nośności układu miejsce ułożenia zbrojenia, ważną jest jedynie jego ilość⁵⁾. Stopień dokładności tego wniosku sprawdza się doświadczalnie. Problem ten jest szerzej omówiony w pracach [9], [14] i [18].

Natomiast niejednorodność struktury ma wpływ na układ linii załomów. Wynika to z równań (4.2.2).

Tak na przykład dla płyty prostokątnej swobodnie podpartej i obciążonej równomiernie oraz poddanej działaniu sił rozciągających wyrażenie na odległość daszku x jest funkcją odpowiadającą niejednorodności. Gdy weźmiemy pod uwagę płytę o niejednorodności wymuszonej, dla której na przykład wielkość ${}_NM_u$ dana jest przez (4.2.1), odległość daszku linii załomów będzie

$$(4.4.1) \quad x = \sqrt{\frac{6 \int_0^b M_u \kappa [1 - \psi_1(u, s)] ds}{qb}}.$$

Warto zaznaczyć, że powyższy sposób pozwala wyznaczyć szereg zależności pomiędzy parametrami w funkcji momentów łamiących. Tak na przykład bardzo żmudne rachunkowo rozwiązanie płyty prostokątnej swobodnie podpartej wzdłuż trzech boków i zamocowanej na czwartym boku można znacznie uprościć korzystając z analogicznych zależności do podanej w (4.3.4) i (4.3.5). Gdy mamy do czynienia ze stałymi momentami M_u i M_v w polu oraz M'_v na zamocowanej podporze, stosunek odległości daszku x_2 od krawędzi zamocowanej do odległości x_1 oraz od krawędzi swobodnie podpartej do tejże odległości x_1 jest

$$(4.4.2) \quad \frac{x_2}{x_1} = \sqrt{\frac{M_v + M'_v}{M_v}} = \sqrt{1 + \lambda}.$$

Ponieważ wartość stosunku momentu $M'_v/M_v = \lambda$ jest zawsze określona, zagadnienie prowadzi do równania z jedną niewiadomą, znacznie prostszego od równań

⁵⁾ Pochodzi to stąd, że o zachowaniu się ustroju decyduje pewna wielkość wypadkowa.

znalezionych na innej drodze. W przypadku obciążeń nie rozłożonych równomiernie stosunek tych odległości wyraża się wzorem bardziej skomplikowanym na skutek występowania funkcji rozkładu obciążeń. Niemniej jednak podana metoda i w tym przypadku może być zastosowana.

4.5. W przypadku układów o niejednorodnej strukturze można również posługiwać się wyprowadzonymi równaniami stosując zasadę prac przygotowanych. Parametry siatki zniszczenia znajdujemy z warunku maksymalnego oporu plastycznego:

$$(4.5.1) \quad \frac{\partial_N M_u}{\partial x_1} = \frac{\partial_N M_u}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial_N M_u}{\partial x_u} = 0.$$

Ponieważ wyrażenia dla $_N M_u$ są często funkcjami złożonymi, droga ta okazać się może dłuższa niż przy stosowaniu równań równowagi. Dobre wyniki daje kombinowanie obydwu sposobów. Korzystanie z równań równowagi wymaga wzięcia pod uwagę tzw. sił węzłowych.

To zagadnienie omówimy dokładniej, gdyż wymagają tego podane dalej metody obliczania stanów granicznych zbiorników prostokątnych.

5. Zagadnienie sił węzłowych

5.1. Zagadnienie sił węzłowych wiąże się z działaniem sił poprzecznych wzdłuż linii załomów oraz momentów skręcających na odcinkach między sąsiednimi punktami przecięcia się kilku takich linii. Rozpatrywać będziemy układy, znajdujące się pod działaniem obciążeń ciągłych. Postępowanie przedstawione tutaj oparte będzie na rozważaniach K. W. Johansena, [6], [7], dotyczących zagadnień płyt o strukturze niejednorodnej z zastosowaniem do układów niejednorodnych.

5.2. Siatka zniszczenia układu jednorodnego i izotropowego o stałej wartości momentu granicznego jest wektorowym obrazem momentów zniszczenia. Na odpowiednich odcinkach linii załomów między poszczególnymi węzłami, w których zbiega się więcej niż dwie linie załomów, prócz momentów zginających wskutek przechodzenia ustroju przez fazę sprężystą mogą działać siły poprzeczne i momenty skręcające (por. np. [4], [6]). Działanie ich na danym odcinku zastąpić można przez dwie siły zaczepione w węzłach. Zgodnie z K. W. Johansenem, [6], oznaczać będziemy te siły przez Q i Q' , przy czym siły skierowane ku górze oznaczać będziemy kropką, zaś działające ku dołowi krzyżykiem.

Rysunek 10 (por. [6]) przedstawia właśnie taki fragment siatki zniszczenia, gdzie płyty oznaczone są literami A, B, C , zaś odpowiednie odcinki linii załomów między węzłami przez a, b, c . Strzałki oznaczają kierunek wektora momentu. Ponieważ układ jest w równowadze granicznej, wielobok momentów jest zamknięty.

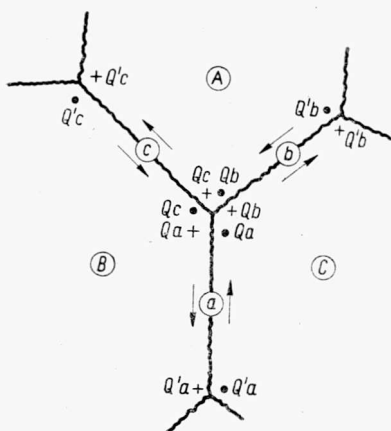
Ustalić można następujące związki (rys. 10):

$$(5.2.1) \quad \begin{cases} Q_A = Q_b - Q_c, \\ Q_B = Q_c - Q_a, \\ Q_C = Q_a - Q_b. \end{cases}$$

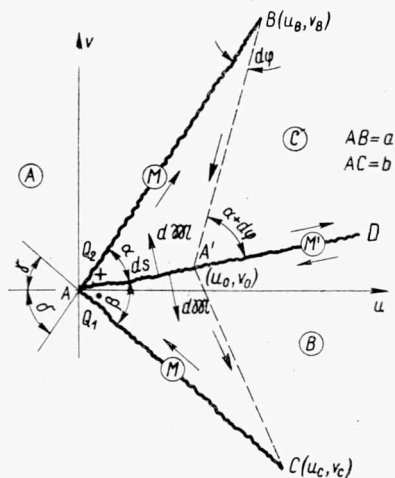
Ponieważ w rozpatrywanym obszarze nie działa żadna siła zewnętrzna, to

$$(5.2.2) \quad Q_A + Q_B + Q_C = 0.$$

Aby wyznaczyć siły węzłowe w zależności od ukształtowania linii załomów, weźmy pod uwagę węzeł o układzie linii przedstawionym na rys. 11. Ponieważ mamy układ niejednorodny i anizotropowy, wprowadzimy składowe momentów granicznych, przedstawione w postaci pewnych funkcji, których tu nie precyzujemy. W sąsiedztwie linii załomów momenty te są bliskie wartościom granicznym.



Rys. 10



Rys. 11

Aby wyznaczyć wielkość siły węzłowej założymy, że przesunięcie węzła A o współrzędnych $(0, 0)$ do punktu $A'(u_0, v_0)$ jest takim przesunięciem, dla którego momenty wzdłuż linii załomów oznaczonych na rysunku kreską przerywaną nie uległy zmianie.

Kierunki załomów AB i AC są dodatnie, zaś kierunek AD jest ujemny. Wektory momentów mają więc kierunki przeciwne. Wskutek przesunięcia węzła do punktu A' zaobserwujemy przyrost siły poprzecznej. Przyrost ten możemy pominąć, gdy $ds \rightarrow 0$. Równocześnie wzdłuż linii AA' działa pewien moment skręcający dM .

Równanie sumy momentów względem osi AB jest następujące:

$$\begin{aligned}
 (5.2.3) \quad Q_1 ds \sin \alpha &= dM \sin \alpha + \int_0^{v_B} M_v \sin \delta dv - \int_{v_0}^{v_B} M_v \sin \delta dv + \\
 &+ \int_0^{v_0} M'_v \sin \delta dv + \int_0^{u_B} M_u \cos \delta du + \int_{u_0}^{u_B} M_u \cos \delta du + \int_0^{u_0} M'_u \cos \delta du = \\
 &= dM \sin \alpha + \int_0^{v_0} (M_v + M'_v) \sin \delta dv + \int_0^{u_0} (M_u + M'_u) \cos \delta du.
 \end{aligned}$$

Ponieważ odcinek AA' jest równy ds można wielkości du i dv przedstawić w zależności od ds . Gdy $ds \rightarrow 0$, wartość siły węzłowej, związanej z linią załomu AB , wyrazić można jako funkcję składowych momentu łamiącego, obowiązującego w rozpatrywanym węźle A . Tak więc siła węzłowa Q_1 jest następująca:

$$\begin{aligned}
 (5.2.4) \quad Q_1 &= \frac{dM}{ds} + (M_{v_0} + M'_{v_0}) \frac{\sin \delta \sin (\delta - \alpha)}{\sin \alpha} + \\
 &+ (M_{u_0} + M'_{u_0}) \frac{\cos \delta \cos (\delta - \alpha)}{\sin \alpha}.
 \end{aligned}$$

W sposób podobny z trójkąta ACA' ułożymy równanie momentów względem prostej AC :

$$\begin{aligned}
 (5.2.5) \quad Q_2 &= \frac{dM}{ds} - (M_{v_0} + M'_{v_0}) \frac{\sin \gamma \sin (\beta - \gamma)}{\sin \beta} - \\
 &- (M_{u_0} + M'_{u_0}) \frac{\cos \gamma \cos (\beta - \gamma)}{\sin \beta}.
 \end{aligned}$$

Na podstawie (5.2.1) otrzymamy wyrażenie na siłę węzłową Q_A

$$\begin{aligned}
 (5.2.6) \quad Q_A &= Q_1 - Q_2 = (M_{v_0} + M'_{v_0}) \left[\frac{\sin \delta}{\sin \alpha} \sin (\delta - \alpha) + \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \sin (\beta - \gamma) \right] + \\
 &+ (M_{u_0} + M'_{u_0}) \left[\frac{\cos \delta}{\sin \alpha} \cos (\delta - \alpha) + \frac{\cos \gamma}{\sin \beta} \cos (\beta - \gamma) \right].
 \end{aligned}$$

Na podstawie analogicznych rozważań uzyskać można wyrażenia na Q_B i Q_C :

$$(5.2.7) \quad \begin{cases} Q_B = -(M_{v_0} + M'_{v_0}) \sin(\delta - \alpha) \frac{\sin \delta}{\sin \alpha} - (M_{u_0} + M'_{u_0}) \cos(\delta - \alpha) \frac{\cos \delta}{\sin \alpha}, \\ Q_C = -(M_{v_0} + M'_{v_0}) \sin(\beta - \gamma) \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} - (M_{u_0} + M'_{u_0}) \cos(\beta - \gamma) \frac{\cos \gamma}{\sin \beta}. \end{cases}$$

We wzorach (5.2.4)-(5.2.7) wielkości momentów oznaczone M_{u_0} dotyczą jednostkowych momentów w punkcie $A(0, 0)$.

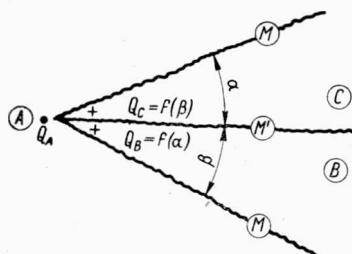
5.3. Pomijając obliczenia sił węzłowych dla przypadku ogólnego ograniczymy się jedynie do przykładów ważnych dla obliczania płyt prostokątnych.

Jeśli chodzi o linie załomów w polu między podporami, gdy środkowa linia załomu wyznaczona przez kierunek AA' jest równoległa do osi u , to wówczas $\delta = \alpha$ oraz $\gamma = \beta$ i wzór na wartość siły węzłowej Q_A znacznie się upraszcza z powodu zniknięcia wyrazu związanego ze składową M_v .

Będziemy mieli

$$(5.3.1) \quad Q_A = (M_{u_0} + M'_{u_0}) (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta).$$

Dla tego samego przypadku, gdy środkowa linia jest równoległa do osi u , odpowiednie siły węzłowe Q_B i Q_C będą



Rys. 12

$$(5.3.2) \quad \begin{cases} Q_B = -(M_{u_0} + M'_{u_0}) \operatorname{ctg} \alpha, \\ Q_C = -(M_{u_0} + M'_{u_0}) \operatorname{ctg} \beta. \end{cases}$$

Powyższe przypadki ilustruje rys. 12.

W przypadku rozpatrywanej klasy układów niejednorodnych ważne jest więc również następujące twierdzenie dla układów jednorodnych: jeśli zbiegające się w węzle linie załomów mają ten sam znak,

a nie działa w nim żadna siła skupiona, to wszystkie siły węzłowe są tam równe zero. Słuszności powyższego twierdzenia można dowieść wstawiając do równań (5.2.6)-(5.3.2) wartość $M' = -M$ (momenty M i M' miały z założeńa znaki różne).

Dla rozpatrywanego w poprzednim rozdziale przykładu można było na podstawie powyższego napisać równania (4.3.4)-(4.4.2).

Ze wzoru (5.2.6) wynika bezpośrednio, że gdy $\alpha + \beta = \pi$, $Q_A = 0$, co jest oczywiste dla przypadku swobodnego brzegu lub swobodnego podparcia. Stąd też

$$(5.3.4) \quad Q_B = -Q_C.$$

Jeśli jeszcze przyjmiemy warunek $\alpha + \beta = \delta = \pi$, to ze wzoru (5.2.6) (niezależnie od tego, która linia załomu jest równoległa do osi u) otrzymamy następujący wzór na wartość sił węzłowych w przypadku swobodnego brzegu zbiornika:

$$(5.3.5) \quad Q_B = -(M_{u_0} + M'_{u_0}) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Podane wzory, pozwalające wyznaczyć wielkość sił węzłowych dla płyt ze swobodnym brzegiem, odnoszą się do przypadku, gdy brzeg swobodny jest równoległy do osi u (np. rys. 13).

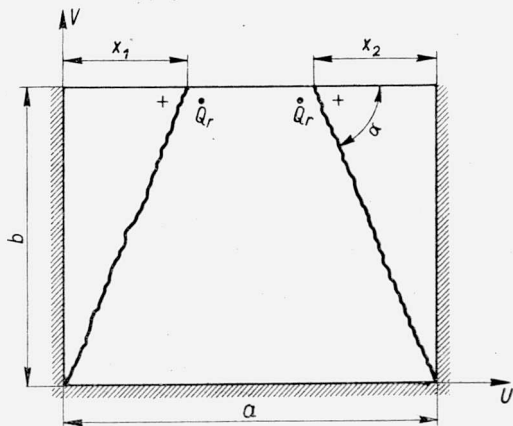
Dla bardziej skomplikowanego podparcia i dla płyt o strukturze niejednorodnej odpowiednie wyrażenia mogą ulec zmianie.

Wzór (5.3.5) jest interesujący, gdyż wskazuje na zależność siły węzłowej jedynie od momentu jednostkowego na krawędzi; łatwo ją wobec tego wyznaczyć.

5.4. Należy zwrócić uwagę, iż niezależność siły węzłowej od struktury płyty (jednorodnej lub niejednorodnej) jest tylko pozorna. Charakter siatki zniszczenia wpływa na wielkość siły. We wspomnianym wzorze zależność tę reprezentuje kąt nachylenia linii załomu do danego układu. Jak wynika z poprzednich rozważań oraz przykładu, jest to zależność związana z niejednorodnością układu.

Gdybyśmy założyli, że momenty jednostkowe wzdłuż linii AB i AC (rys. 11) nie są równe, to wzory na wielkości siły węzłowej byłyby podobne do wzorów (5.2.6) z tą jednak różnicą, że przed nawias kwadratowy nie można by wynieść czynnika M_{v_0} , gdyż mielibyśmy teraz dwie różne wielkości $M_{v_0}(AB)$ i $M_{v_0}(BC)$. Samo wyznaczenie sił węzłowych nie nastręczałoby trudności.

5.5. Dla obliczeń jest ważny kierunek działania sił węzłowych. Na podstawie zależności (5.3.5) dla płyty na trzech bokach swobodnie podpartej bądź też utwierdzonej, a na pozostałym boku swobodnej, przy $M'_{u_0} = 0$ wielkość siły, występującej przy brzegu (rys. 13), będzie



Rys. 13

$$(5.5.1) \quad Q_s = -M_{u_0} \operatorname{ctg} \alpha = -M_{u_0} \frac{x}{b}.$$

W płacie, w którym linia załomu tworzy z wolnym brzegiem kąt ostry, siła ta jest skierowana ku dołowi, zaś w narożu o kącie dopełniającym do 180° siła ta na podstawie (5.3.4) jest skierowana ku górze. Pamiętając o sposobie znakowania możemy napisać

$$(5.5.2) \quad Q_s = M_{u_s} \frac{x}{b}.$$

Powyższe wiadomości o siłach węzłowych, które koniecznie należy uwzględniać, gdy zależności występujące w stadium granicznym chcemy zbadać za pomocą równań równowagi, wystarczą do rozwiązywania pewnych zadań, w szczególności do opracowania metody obliczania stanów granicznych zbiorników prostokątnych.

Warto zwrócić uwagę, że za pomocą sił węzłowych można badać wpływ tworzących się naroży na nośność płyty.

6. Stany graniczne zbiorników prostokątnych

Ograniczymy się jedynie do podania kilku przykładów obliczania stanów granicznych zbiorników prostokątnych.

Zakładać będziemy, że rozkład obciążeń prostopadłych do powierzchni w chwili osiągnięcia stanu granicznego jest taki sam, jak na początku. Oznacza to, że pomimo powstawania przegubów (czy «zawiasów») plastycznych, ciśnienie wewnętrzne w zbiorniku nie spada. Pomijamy również wpływ odkształceń przy wypisywaniu równań równowagi płyt.

Przykład pierwszy. Weźmy pod uwagę zbiornik o wymiarach w rzucie poziomym $a \times a$ i wysokości b , poddany ciśnieniu typu hydrostatycznego. Ściany boczne zamocowane są w dnie, zaś u góry podparte przegubowo (rys. 14).

Na rysunku podana jest jedna ze ścian bocznych zbiornika. Symetria układu i obciążenia pozwala na rozpatrzenie stanu granicznego omawianego zbiornika na podstawie stanu jednej ściany bocznej. Momenty jednostkowe M_v i M_u określone przez moc zbrojenia są znane. Siły rozciągające działają tylko na boki 2 i 4, zaś funkcja rozkładu tych sił wzdłuż boków nie jest znana. Znana natomiast może być całkowita wartość siły rozciągającej, działającej na ściankę na odcinku a . Aby tę wartość obliczyć, wprowadzimy zastępczą funkcję rozkładu sił wewnętrznych, określoną na podstawie warunku równowagi płyta typu II. Z powodu symetrii układu i obciążenia oraz niewystępowania sił węzłowych całkowita siła rozciągająca na rozpatrywaną ściankę w kierunku osi u jest dana przez obciążenie, przypadające na bliźniaczy płat sąsiedniej ścianki.

Funkcja obciążeń ścianek zbiornika jest określona przez kształt wykresu obciążeń oraz kształt płyta II ⁶⁾ i wyraża się wzorem

$$(6.1) \quad p(v) = p_0 \left(1 - \frac{v}{b} \right).$$

Zastępcze siły rozciągające określone są przez zależność

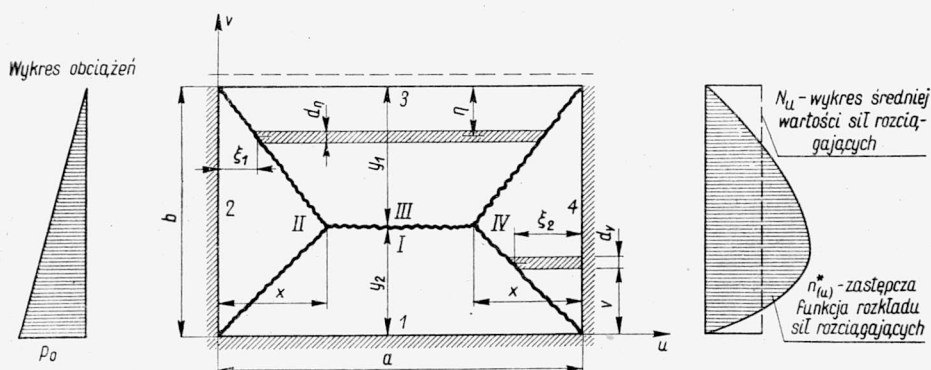
$$(6.2) \quad u^*(v) = p(v) x(v).$$

Na odcinku $\langle 0, y_2 \rangle$ jest

$$(6.3) \quad u^*(v) = p_0 \left(1 - \frac{v}{b} \right) \frac{xv}{y_2},$$

zaś na odcinku $\langle y_2, b \rangle$

$$(6.4) \quad u^*(v) = p_0 \left(1 - \frac{v}{b} \right) \frac{x(b-v)}{y_1}.$$



Rys. 14

Po określeniu sił rozciągających znamy funkcję określającą zastępczą niejednorodność momentów ${}_NM_u$ i ${}_NM_v$. Znajomość dokładnej funkcji nie jest konieczna, gdyż występuje ona pod całką. Funkcja zastępcza musi być tak dobrana, aby całka na długości odpowiedniego boku dawała takie same wartości, jak dla ścisłej funkcji niejednorodności. Postulat ten jest spełniony przy zachowaniu warunków równowagi. Możemy teraz wyznaczyć parametry siatki zniszczenia, jeżeli dodatkowo znane są M_u , M_v oraz M_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

⁶⁾ Słuszne jest to jedynie dla zbiornika kwadratowego, gdyż przy prostokątnym funkcja sił rozciągających określona będzie — poza obciążeniem — przez kształt odpowiedniego płyta sąsiedniej ścianki zbiornika.

Wyprowadzimy równania równowagi rozpoczynając od płata III.

Na pasku o szerokości $d\eta$ i długości $a - 2\xi$ płata III działa obciążenie

$$dP_1 = p_0 \frac{\eta}{b} (a - 2\xi) d\eta.$$

Ponieważ $\xi = x\eta/y_1$, to równanie równowagi przy stałym M_u jest

$$(6.5) \quad M_u a = \int_0^{y_1} p \frac{\eta}{b} \left(a - \frac{2x\eta}{y_1} \right) \eta d\eta = \frac{p_0 y_1^3}{b} \left(\frac{a}{3} - \frac{x_1}{2} \right).$$

W sposób analogiczny napisać możemy równanie dla płata I, przy czym wykres obciążenia w kształcie trapezu można będzie uważać za sumę obciążenia równomiernego i trójkątnego. Pozwoli to skorzystać z wyniku podanego przez (6.5) oraz z prostych zależności dla obciążeń równomier-nych.

Będziemy mieli

$$(6.6) \quad M_u a + M_1 a = \frac{p_0 y_2^2}{6} (3a - 4x) - \frac{p_0 y_2^2}{6b} (2a - 3x).$$

Podobnie dla płatów II i IV znajdziemy równania

$$(6.7) \quad \int_0^b ({}_NM_v + {}_NM_1) dv = \\ = \int_0^{y_1} \frac{p_0 \eta}{2b} \xi_1^2 d\eta + \int_0^{y_2} p_0 \left(1 - \frac{v}{b} \right) \frac{\xi_1^2}{2} dv = \frac{p_0 x^2}{24} (b + 2y_1).$$

W powyższym wzorze składowe momentów sił wewnętrznych występują w równaniach równowagi pod całką. Pozwala to zastąpić układ niejednorodny przez jednorodny, gdzie funkcja Ψ , określona wzorem (4.2.2), będzie stałym współczynnikiem na całej wysokości boku b . Określmy całkowitą siłę rozciągającą, działającą na bok b . Z równań (6.3) i (6.4) uzyskujemy

$$(6.8) \quad N_b = \int_0^{y_2} p_0 \left(1 - \frac{v}{b} \right) \frac{xv}{y_2} dv + \\ + \int_{y_2}^b p \left(1 - \frac{v}{b} \right) \frac{x(b-v)}{y_1} dv = \frac{p_0 x}{b} 2b - y_2.$$

Średnia wartość siły na jednostkę wysokości ścianki zbiornika wyniesie

$$(6.9) \quad N_u = \frac{p_0 x}{6b} 2b - y_2.$$

Poszukiwanie siatki zniszczenia, spełniającej warunek maksymalnego oporu plastycznego, jest uciążliwe, łatwiej natomiast przyjąć, że parametry tej siatki są znane i szukać związanych z nimi wartości momentów granicznych na odpowiednich liniach załomów (por. np. [10]). Decydując się na taką zasadę postępowania i odkładając do innej okazji traktowanie zagadnienia z uwzględnieniem twierdzenia o maksymalnym oporze plastycznym przyjmiemy, że $x = y = b/2$, $a = 2b$. Wówczas z równania (6.5) otrzymamy wartość momentu

$$(6.10) \quad M_u = \frac{p_0 b^3}{8ba} \left(\frac{2b}{3} - \frac{b}{4} \right) = \frac{5}{192} p_0 b^2.$$

Podobnie wartość M_1 na podstawie (6.6) będzie

$$(6.11) \quad M_u + M_1 = \frac{4p_0 b^2}{48} - \frac{5}{192} p_0 b^2 = \frac{11}{192} p_0 b^2.$$

Stąd

$$(6.12) \quad M_1 = \frac{1}{32} p_0 b^2.$$

Na podstawie (6.9) średnia wartość siły na jednostkę wyniesie dla boku b

$$(6.13) \quad N_u = \frac{p b}{2 \cdot 6b} 2b - \frac{b}{2} = \frac{3}{24} p b.$$

Z zależności (6.7) przy założeniu działania siły równomiernie rozłożonej o wartości podanej przez (6.13) otrzymamy średnią wartość momentu łamiącego

$$(6.14) \quad {}_N M_v + {}_N M_1 = \frac{p b^2}{4 \cdot 24b} \left(b + 2 \frac{b}{2} \right) = \frac{p b^2}{48}.$$

Zakładając, że zbrojenie w kierunku osi u na górze i na dole jest identyczne, otrzymamy

$$(6.15) \quad {}_N M_v = {}_N M_1 = \frac{p b^2}{96}.$$

Jeśli by przyjąć liniową zależność między momentem łamiącym a siłami rozciągającymi (linia przerywana na rys. 5), tzn. jeżeli pominiemy drugi wyraz we wzorze (4.2.2) określającym wpływ sił rozciągających na niejednorodność wymuszoną ustroju, zadanie można uważać za rozwiązane.

Podstawiając wartości liczbowe $b = 2\text{ m}$ w przypadku ciśnienia hydrostatycznego przy materiale o ciężarze na jednostkę objętości $\gamma = 0,8\text{ t/m}^3$ ($p_0 = 1,6\text{ t/m}^2$) znajdziemy

$$M_u = \frac{5}{192} 1600 \cdot 2,0^2 = 167\text{ kGm/m},$$

$$M_1 = \frac{1}{32} 1600 \cdot 2,0^2 = 200\text{ kGm/m},$$

$${}_NM_v = {}_NM_1 = \frac{1}{96} 1600 \cdot 2,0^2 = 67\text{ kGm/m}.$$

W projekcie przewidujemy ze względu na powyższe momenty odpowiednie zbrojenie. Obliczamy je nie zwracając uwagi na obecność sił rozciągających. Poza tym w kierunku równoległym do osi u projektujemy odpowiednie zbrojenie przenoszące siłę rozciągającą N_b , która na całej wysokości ścianki wynosi

$$N_b = \frac{3}{24} p b^2 = \frac{3}{24} 1600 \cdot 2,0^2 = 800\text{ kG}.$$

Projektowanie zbrojenia przy uwzględnianiu obydwu wyrazów we wzorze (4.2.2) jest nieco dłuższe, ale również nie przedstawia trudności, jeśli znamy wszystkie wielkości występujące w tym wzorze.

Przykład drugi. Określimy siły występujące w stanie wyczerpania nośności zbiornika o jednym brzegu swobodnym. Wymiary przyjmujemy takie same jak w przykładzie poprzednim (rys. 15).

Zastępczą funkcją rozkładu sił podłużnych na podstawie zależności (6.3) oraz (6.4) będzie

$$(6.16) \quad n(v) = p_0 \left(1 - \frac{v}{b} \right) \frac{xv}{b}.$$

Siła węzłowa jest stała, ponieważ $M_u = \text{const}$, a linia załomu, dochodząca do swobodnego brzegu, jest skierowana dodatnio; wartość siły wynosi

$$(6.17) \quad Q_s = M_u \frac{x}{b}.$$

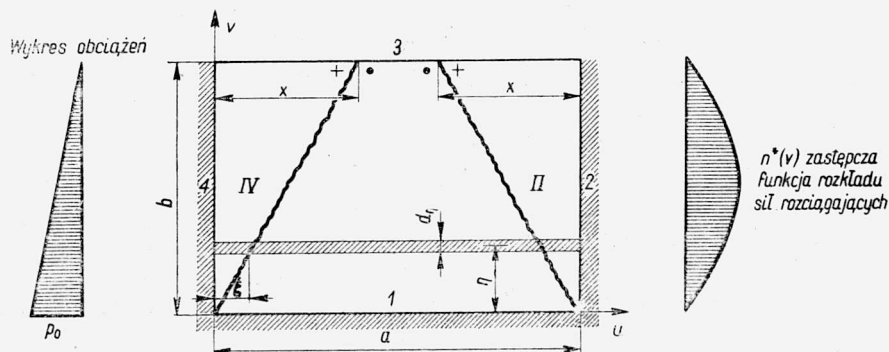
Równania równowagi są następujące:

dla płyty I

$$(6.18) \quad 2 M_u x + M_1 a + 2 M_u \frac{x}{b} = \int_0^b p_0 \frac{\eta}{b} \left(a - \frac{2x\eta}{b} \right) \eta d\eta = p_0 b^2 \left(\frac{a}{3} - \frac{x}{2} \right);$$

dla płyt II i IV

$$(6.19) \quad \int_0^b ({}_N M_v + {}_N M_2) dv - M_u \frac{x}{b} = \int_0^b p_0 \frac{\eta}{b} \xi \frac{\xi}{2} d\eta = \frac{p_0 x^2}{8} b.$$



Rys. 15

Przyjmując $a = 2b$, $x = 2b/3$ oraz $M_u = M_1$ i ${}_N M_v = {}_N M_2 = {}_N M_4$ otrzymamy

$$(6.20) \quad \frac{4}{3} M_u b + M_u 2b + \frac{2}{3} M_u b = p_0 b^2 \left(\frac{2}{3} b - \frac{2}{3} \frac{b}{2} \right),$$

$$M_u = M_1 = \frac{p_0 b^2}{12} \text{ kGm/m}$$

oraz

$$(6.21) \quad 2 \int_0^b {}_N M_v dv = \frac{p b^3}{18} \text{ kGm.}$$

Tak więc średni moment na wysokości ścianki b tak na podporze, jak i w przęśle wyniesie

$$(6.22) \quad {}_N M_v = {}_N M_2 = {}_N M_4 = \frac{p_0 b^2}{36} \text{ kGm/m.}$$

Chcąc znaleźć całkowity moment działający na całej wysokości ścianki należy powyższą wartość pomnożyć przez wysokość b i odpowiednio dla tego momentu zaprojektować wymiary i całkowite zbrojenie przekroju.

Przyjmujemy, podobnie jak w przykładzie poprzednim, liniową zmianę momentów NM_v sił rozciągających. Prowadzi to do niezależnego zbrojenia na zginanie oraz niezależnego zbrojenia na rozciąganie. Jak wynika z rozważań w p. 3 i 4, takie założenie jest dopuszczalne i nieznacznie wpływa na zwiększenie stopnia bezpieczeństwa (por. rys. 6).

Całkowita siła działająca wzdłuż boku wyniesie

$$(6.23) \quad N_b = p_0 \frac{x}{b} \int_0^b \left(v - \frac{v^2}{b} \right) dv + M_u \frac{x}{b} = \frac{p_0 b^2}{9} + \frac{p_0 b^2}{18} = \frac{p_0 b^2}{6}.$$

Przytoczone obliczenie opierało się na założeniu, że w punkcie zbiegu boków zamocowanych $M_u = -M_u$. Tak więc siła węzłowa w tym narożu płyta trójkątnej nie występuje. Możemy się o tym również przekonać zestawiając równania równowagi, tj. rzutując siły na płaszczyznę prostopadłą do powierzchni rozpatrywanej płyty.

Podane przykłady wskazują, jak jasny jest tok obliczania zbiorników w stanie granicznym. Nadto mamy możliwość wyznaczenia w sposób prosty wielkości, co prawda sumarycznych, sił rozciągających. O ile chodzi o funkcję rozkładu zbrojenia przejmującego siły rozciągające, to kierować się należy oczywiście rozkładem tych sił w fazie sprężystej, co nie doprowadzi do nagłych przegrupowań sił wewnętrznych.

Blizsze badania zbiorników wykazują, że istnieje możliwość uproszczenia wzorów dla najbardziej typowych funkcji ciśnień (mury oporowe, silosy), i opracowania odpowiednich tablic współczynników określających wypadkowe siły rozciągających oraz momenty jednostkowe. Analiza «ekonomicznego» stosunku ortotropii w oparciu o sprężyste stadium pracy układu pozwoli wyznaczyć parametry, wiążące się z wymiarami tego układu i określające siatki załomów. Parametry te, określone w formie współczynników, ułatwią praktyczne stosowanie teorii stanów granicznych do obliczania zbiorników. Projektowane badania doświadczalne pozwolą ocenić poprawność przyjętych założeń.

Literatura cytowana w tekście

- [1] H. Craemer, *Slabs Spanning in Two Directions Analysed by Consideration of Pattern of Fracture*, Concrete and Constr. Engineering, 1950.
- [2] H. Craemer, *Rectangular Slabs Spanning in Two Directions*, Concrete and Constr. Engineering, 1952.
- [3] A. M. F r e u d e n t h a l, *The Inelastic Behaviour of Engineering Materials and Structures*, New York 1950.
- [4] K. G i r k m a n n, *Flächentragwerke*, Wiedeń 1952.
- [5] A. A. G w o z d i e w, *Rasczot niesuszczej sposobnosti konstrukcij po mietodu priedielnowo rawnowiesja*, Moskwa 1949.

- [6] K. W. Johansen, *Mémoires*, MSMKI, 1932.
- [7] K. W. Johansen, *Pladeformler*, Kopenhaga 1949.
- [8] M. S. Mikieladze, *Izgib bałki, rastiagiwajemoj centrobieżnymi siłami*, Inż. zbornik, 1953.
- [9] D. Niepostyn, *Nośność graniczna niejednorodnych płyt prostokątnych*, Rozpr. Inż. (w druku).
- [10] W. Olszak, *Teoria nośności granicznej płyt ortotropowych*, Bud. Przem. 7-8 (1953).
- [11] W. Olszak, *Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych*, Rozpr. Inż. VI (1954).
- [12] W. Olszak, *Zagadnienie ortotropii w teorii nośności granicznej płyt*, Arch. Mech. Stos. 3 (1953).
- [13] W. Olszak, *O podstawach teorii ciał elasto-plastycznych niejednorodnych*, Arch. Mech. Stos. 3 i 4 (1954).
- [14] W. Olszak i A. Sawczuk, *Teoria nośności granicznej płyt w świetle weryfikacji doświadczalnej*, Rozpr. Inż. 2 (1955).
- [15] W. Prager, *Limit Analysis and Design*, Journ. Americ. Concr. Institute, 1953.
- [16] A. R. Rżanicyн, *Rasczot sooruzenij s uczotom plasticzeskich swojstw materialow*, Moskwa 1949.
- [17] W. W. Sokołowski, *Teorja plasticznosti*, Moskwa 1950.
- [18] A. Sawczuk, *Zagadnienia nośności granicznej płyt w kształcie wieloboków* (praca niepublikowana).

Резюме

ВОПРОСЫ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ РАСТЯГИВАЕМЫХ И ИЗГИБАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ К ТЕОРИИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РЕЗЕРВУАРОВ

Работа касается вопросов несущей способности элементов, подвергаемых одновременно изгибу и растяжению. Здесь учитываются системы, построенные из хрупкого и тягучего материалов, так что хрупкий материал работает как сжимаемый, а тягучий — как растягиваемый, именно так, как В. Олшак рассматривал предельное равновесие пластинок, [10], [11] и [12].

Рассмотрение предельного состояния элемента такой системы позволяет установить, что учет растягивающих сил (мембранного состояния) ведет к изменению показателя ортотропии системы, вызывая так называемую вынужденную ортотропию. Одновременно (в зависимости от формы функции, задающей распределение растягивающих сил по периметру пластинки) может возникнуть изменение структуры элемента из однородной на неоднородную. Эта неоднородность точно определена условиями нагрузки и параметрами, изображающими структуру рассматриваемого элемента.

В связи с учетом — кроме учета изгиба — действия растягивающих сил, рассматривается вопрос узловых сил для неоднородных си-

стем, подобным образом, как это сделал К. В. Иогансен для однородных изгибаемых пластинок.

После выяснения теоретических вопросов несущей способности растягиваемых и изгибаемых элементов, рассматриваются предельные состояния двух прямоугольных резервуаров, основываясь на существующих решениях для изгибаемых пластинок.

Summary

SOME PROBLEMS OF LIMIT ANALYSIS OF ELEMENTS SUBJECTED TO TENSION AND BENDING AND THEIR APPLICATION TO THE THEORY OF RECTANGULAR TANKS

This paper concerns the problems of the limit loads of elements subjected to simultaneous bending and tension. Structures made from two materials, brittle and ductile, are considered, the brittle material being subjected to compression and the ductile one — to tension on the same way as W. Olszak had considered the limit analysis of bending plates, [10], [11] and [12].

An investigation of the limit state of such an element permits to observe that if tensile forces (the membrane state) are taken into consideration, a change of the index of orthotropy of the structure occurs resulting in the so called «forced» orthotropy. At the same time the phenomenon of change of the homogeneous structure of the element into a heterogeneous one can occur, depending on the form of the function determining the distribution of tensile forces on the periphery of the plate. This heterogeneity is strictly determined for the given conditions of load and the given parameters determining the structure of the considered element.

Considering the action of the tensile forces, the problem of knot forces for heterogeneous system is investigated in a way similar to that of K. W. Johansen for homogeneous plates subjected to bending.

After the explanation of the theoretical problems concerning limit load of elements subjected to tension and bending, limit states of two rectangular tanks are considered on the basis of existing solutions for plates subjected to bending.

KATEDRA WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW
WYDZ. BUD. PRZEM. P. W.

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

PRZYPADEK JEDNOCZESNEGO ROZCIĄGANIA
I SKRĘCANIA PRĘTA O PRZEKROJU KOŁOWYM
W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXX

SPIS TREŚCI

	Str
1. Sformułowanie zagadnienia	287
2. Wyprowadzenie równań podstawowych	288
3. Warunki brzegowe	293
4. Rozwiązanie w zakresie sprężysto-plastycznym. Przybliżenie zerowe	296
5. Rozwiązanie w zakresie czysto plastycznym. Przybliżenie zerowe	300
6. Uzupełnienie rozwiązania na drodze graficznej i numerycznej	303
7. Rozwiązanie w zakresie sprężysto-plastycznym. Przybliżenie pierwsze	314
8. Rozwiązanie w zakresie czysto plastycznym. Przybliżenie pierwsze	319

1. Sformułowanie zagadnienia*)

Teoria nośności granicznej pręta o przekroju kołowym, poddanego jednoczesnemu rozciąganiu i skręcaniu, została opracowana przez N á d a i a, [8], [9], oraz R ż a n i c y n a, [11], którzy posłużyli się równaniami H e n c k y' e g o (teorią odkształceń plastycznych); do analogicznych wyników doszedł H i l l, [4], biorąc za punkt wyjścia równania R e u s s a (teorię płynięcia plastycznego). Rozważania te uogólnił G a y d o n, [3], zajmując się przypadkiem jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym. G a y d o n, podobnie jak i H i l l, posłużył się teorią plastyczności R e u s s a, przyjmując dla uproszczenia, że współczynnik P o i s s o n a ν wynosi $\frac{1}{2}$ i jest stały zarówno w zakresie sprężystym, jak i plastycznym. Rozważył on różne przypadki kolejności działania obciążeń, ograniczając się jednak do wyznaczenia rozkładu naprężeń i znalezienia zależności momentu skręcającego i siły podłużnej od wydłużenia i kąta skręcenia, a nie zajmując się np. równie interesującym wyznaczeniem zależności odwrotnych.

Celem niniejszej pracy jest rozwiązanie inaczej postawionego zagadnienia.

Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta można scharakteryzować pięcioma parametrami: momentem skręcającym M_s , siłą podłużną N , promieniem granicznym c (oddzielającym strefę plastyczną od sprężystej), wydłużeniem względnym ϵ i kątem skręcenia na jednostkę długości Φ . Parametry te są uzależnione od siebie za pomocą trzech związków — dwóch równań równowagi myślowo odciętej części pręta oraz warunku plastyczności; G a y d o n przyjmuje ϵ i Φ za zmienne niezależne, ujmując pozostałe jako ich funkcje. W niniejszej pracy posuniemy się dalej; ponieważ wspomniane wyżej związki przedstawione są funkcjami monotonicznymi ze względu na obie występujące w nich zmienne niezależne i dają się, przynajmniej teoretycznie, odwrócić, można nie wyróżniać specjalnie zmiennych zależnych i niezależnych, uważając wszystkie za równouprawnione. Dojdziemy w ten sposób do dzie-

*) Praca przedstawiona na Kursie Naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Międzyzdrojach w sierpniu 1954 r.

sięciu związków uwikłanych, wiążących poszczególne trójki zmiennych M_s, N, c, ε i Φ . Każdy z tych związków daje się, przynajmniej teoretycznie, rozwikłać ze względu na wszystkie trzy zmienne, zatem otrzymamy 30 jawnych funkcji dwóch zmiennych. Uzyskane tą drogą rozwiązanie umożliwi efektywne wyznaczanie dowolnych trzech parametrów przy znajomości dwóch pozostałych.

Uogólnienie polegać będzie również na opuszczeniu założenia $\nu = 1/2$ i zbadaniu wpływu współczynnika Poissona na rozkład naprężeń.

Ograniczymy się natomiast do działania obciążenia «prostego» w sensie Iljuszina, bowiem oprzemy się na teorii odkształceń plastycznych (Henckye'go).

2. Wyprowadzenie równań podstawowych

Przyjmujemy, że jeden koniec pręta jest utwierdzony, drugi swobodny. Zagadnienie rozwiążemy we współrzędnych walcowych r, θ, z ; początek układu umieścimy w środku przekroju utwierdzonego, oś z skierujemy zgodnie z osią pręta.

Punktem wyjścia naszych rozważań będą następujące założenia odnośnie do przemieszczeń u_r, u_θ i u_z :

(1) w zakresie sprężysto-plastycznym i czysto plastycznym, podobnie jak i w sprężystym, słuszne będą wzory ¹⁾

$$(2.1) \quad u_\theta = \Phi r z,$$

$$(2.2) \quad u_z = \varepsilon z,$$

gdzie kąt skręcenia na jednostkę długości Φ i wydłużenie względne ε nie zależą od współrzędnych;

(2) przemieszczenie u_r zależy jedynie od współrzędnej r :

$$(2.3) \quad u_r = f(r).$$

Przy przyjęciu tych założeń składowe stanu odkształcenia określą wzory (por. np. [5])

$$(2.4) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, & \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_z = \varepsilon = \text{const}, \\ \gamma_{\theta z} = \Phi r, & \gamma_{zr} = 0, & \gamma_{r\theta} = 0. \end{cases}$$

Spośród sześciu składowych stanu odkształcenia cztery są więc w zupełności określone, a pozostałe dwie, ε_r i ε_θ , są związane wynikającym z dwóch pierwszych równań (2.4) warunkiem nierozdzielności

$$(2.5) \quad \varepsilon_r = \frac{d(r\varepsilon_\theta)}{dr}.$$

¹⁾ Zagadnieniem stateczności pręta nie będziemy się zajmowali. Założymy, że poszczególne parametry nie osiągają wartości krytycznych.

Odształcenia wyrazimy teraz przez naprężenia pisząc równania teorii plastyczności H e n c k y' e g o w postaci ^{1a)}

$$(2.6) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = q \sigma_r - \left(q - \frac{1}{3K} \right) \sigma_{sr}, & \gamma_{\theta z} = 2 q \tau_{\theta z}, \\ \varepsilon_{\theta} = q \sigma_{\theta} - \left(q - \frac{1}{3K} \right) \sigma_{sr}, & \gamma_{zr} = 2 q \tau_{zr}, \\ \varepsilon_z = q \sigma_z - \left(q - \frac{1}{3K} \right) \sigma_{sr}, & \gamma_{r\theta} = 2 q \tau_{r\theta}, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.7) \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

jest modułem odształcenia objętościowego (modułem ściśliwości), który teoria H e n c k y' e g o przyjmuje za stałą materiałową zarówno w zakresie sprężystym, jak i plastycznym, q jest wielkością zmienną [można by ją nazwać «funkcją materiałową» ²⁾], równą w zakresie sprężystym

$$(2.8) \quad q = q_s = \frac{1}{2G},$$

a więc w zakresie tym stałą, E , G i ν są stałymi sprężystymi materiału, wreszcie

$$(2.9) \quad \sigma_{sr} = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_{\theta} + \sigma_z).$$

Z trzech ostatnich równań układu (2.6), przy uwzględnieniu związków (2.4), otrzymujemy od razu

$$(2.10) \quad \tau_{\theta z} = \frac{q r}{2 q}, \quad \tau_{zr} = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0.$$

Wykorzystamy teraz warunki równowagi wewnętrznej. Z pierwszych trzech równań (2.6) wobec (2.4) wynika, że naprężenia σ mogą być jedynie

^{1a)} Oznaczenia są w większości zgodne z używanymi przez L e j b i e n z o n a, [6], gdzie omyłkowo wydrukowano $K = E/(1-2\nu)$ zamiast związku (2.7). S o k o ł o w s k i, [14], używa oznaczenia β zamiast q .

²⁾ Podobnie postępuje np. M i e ż ł u m j a n, [7], nazywając współczynnik P o i s s o n a zmienny w zakresie plastycznym, a więc funkcję materiałową, «funkcją odształcenia poprzecznego».

funkcjami współrzędnej r ; zatem, z uwagi na (2.10), dwa ostatnie równania układu równań równowagi (por. np. [4] lub [5])

$$(2.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} = 0 \end{cases}$$

są spełnione tożsamościowo, a pierwsze możemy przepisać w postaci

$$(2.12) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ pięciu równań, mianowicie (2.5), trzy pierwsze układu (2.6) oraz (2.12) o sześciu funkcjach niewiadomych: ε_r , ε_θ , σ_r , σ_θ , σ_z i φ . Brakujące równanie będzie miało inną postać w strefie sprężystej, inną w plastycznej. W strefie sprężystej będzie to równanie (2.8), zamieniające równania H e n c k y' e g o (2.6) na równania H o o k e' a; w strefie plastycznej brakującym równaniem będzie warunek plastyczności.

Zajmiemy się strefą plastyczną. Założymy, że materiał pręta jest idealnie plastyczny (nie podlegający wzmocnieniu plastycznemu), i przyjmujemy warunek plastyczności w postaci H u b e r a - M i s e s a - H e n c k y' e g o ($\sigma_{zred}^2 = \sigma_{pl}^2$), który w naszym przypadku zredukuje się do

$$(2.13) \quad \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2 - \sigma_r \sigma_\theta - \sigma_\theta \sigma_z - \sigma_z \sigma_r + 3 \tau_{\theta z}^2 = \sigma_{pl}^2,$$

gdzie σ_{pl} oznacza granicę plastyczności przy czystym rozciąganiu lub ściskaniu.

Zanim przystąpimy do kolejnego rugowania niewiadomych, sprowadzimy równania do postaci bezwymiarowej. Oznaczmy najpierw

$$(2.14) \quad 6 K \varphi = \frac{1}{\psi}$$

i odpowiednio

$$(2.15) \quad 6 K \varphi_s = \frac{1}{\psi_s}.$$

Wprowadzona przez nas wielkość ψ jest więc funkcją materiałową, równą w zakresie sprężystym stałej materiałowej ψ_s . Wykorzystując (2.7) i (2.8) oraz znany związek między E i G otrzymujemy zależność ³⁾

$$(2.16) \quad \psi_s = \frac{1 - 2\nu}{2(1 + \nu)}.$$

Stała ψ_s zależy zatem jedynie od stałej P o i s s o n a ν i przyjmuje wartości w granicach od 0 (gdy $\nu = 1/2$) do $1/2$ (gdy $\nu = 0$), stanowiąc jej «negatyw». Wartości funkcji ψ leżą również w przedziale $0 \leq \psi \leq 1/2$. W przypadku materiału nieściśliwego ($\nu = 1/2$): $\psi = \psi_s = 0$; w przypadku nieznacznej ściśliwości (ν bliskie $1/2$) można przyjąć, że ψ i ψ_s są «nie- skończenie małymi», co umożliwia uzyskiwanie rozwiązań przybliżonych.

Wprowadzimy następnie oznaczenia

$$(2.17) \quad \frac{E}{\sigma_{pl}} \varepsilon = e,$$

$$(2.18) \quad \frac{Ga\sqrt{3}}{\sigma_{pl}} \phi = g,$$

przy czym przez a oznaczyliśmy promień zewnętrzny pręta; e i g są więc wielkościami bezwymiarowymi, odpowiednio proporcjonalnymi do wydłużenia i kąta skręcenia pręta, przy czym współczynniki proporcjonalności są tak dobrane, że $e = 1$, gdy pojawiają się pierwsze odkształcenia plastyczne przy czystym rozciąganiu, natomiast $g = 1$, gdy pojawiają się pierwsze odkształcenia plastyczne przy czystym skręcaniu.

Dalej oznaczmy

$$(2.19) \quad \frac{\sigma_r}{\sigma_{pl}} = s_1, \quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_{pl}} = s_2, \quad \frac{\sigma_z}{\sigma_{pl}} = s_3$$

oraz wprowadzimy bezwymiarową współrzędną

$$(2.20) \quad \frac{r}{a} = \varrho;$$

pozostałe współrzędne nie będą nam potrzebne. Pochodne względem ϱ będziemy oznaczali przecinkiem u góry.

³⁾ Stałą ψ_s posługuje się np. S o k o ł o w s k i, [14], oznaczając ją przez N . Oznaczenie zmieniono dla uniknięcia nieporozumień, bowiem tą samą literą oznacza się często siłę podłużną.

Po wprowadzeniu powyższych oznaczeń do równań (2.5), trzech pierwszych układu (2.6), (2.12) oraz (2.13), otrzymujemy układ sześciu równań o sześciu niewiadomych ε_r , ε_θ , s_1 , s_2 , s_3 i ψ :

$$(2.21) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{3 \psi_s \varepsilon}{2(1+\psi_s) e} \left[\frac{s_1}{\psi} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\psi} - 2 \right) (s_1 + s_2 + s_3) \right], \\ \varepsilon_\theta = \frac{3 \psi_s \varepsilon}{2(1+\psi_s) e} \left[\frac{s_2}{\psi} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\psi} - 2 \right) (s_1 + s_2 + s_3) \right], \\ 1 = \frac{3 \psi_s}{2(1+\psi_s) e} \left[\frac{s_3}{\psi} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\psi} - 2 \right) (s_1 + s_2 + s_3) \right], \\ \varrho \varepsilon'_\theta + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0, \\ \varrho s'_1 + s_1 - s_2 = 0, \\ s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - s_1 s_2 - s_2 s_3 - s_3 s_1 + \frac{g^2 \varrho^2 \psi^2}{\psi_s^2} = 1. \end{cases}$$

Przejdziemy teraz do kolejnego rugowania niewiadomych. Najłatwiej jest wyrugować odkształcenia ε_r i ε_θ : wystarczy w tym celu podstawić pierwsze dwa równania do czwartego. Otrzymany układ czterech równań uprości się nieco, gdy wprowadzimy nową funkcję materiałową

$$(2.22) \quad \frac{\psi}{\psi_s} = \frac{\varphi_s}{\varphi} = p,$$

równą jedności w zakresie sprężystym, a zawartą w przedziale $0 < p \leq 1$ w zakresie plastycznym⁴⁾. Oczywiście w przypadku materiałów nieściśliwych ma sens tylko druga część równości (2.22).

Niewiadomymi układu

$$(2.23) \quad \begin{cases} \varrho s'_1 + s_1 - s_2 = 0, \\ 3 s_3 - (1 - 2 p \psi_s) (s_1 + s_2 + s_3) - 2 e (1 + \psi_s) p = 0, \\ - 3 p' s_2 + 3 p s'_2 + p' (s_1 + s_2 + s_3) - (1 - 2 \psi_s p) p (s'_1 + s'_2 + s'_3) + \\ \quad + \frac{3 p}{\varrho} (s_2 - s_1) = 0, \\ s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - s_1 s_2 - s_2 s_3 - s_3 s_1 + g^2 \varrho^2 p^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

są teraz s_1 , s_2 , s_3 i p . Z pierwszego równania

$$(2.24) \quad s_2 = s_1 + \varrho s'_1,$$

⁴⁾ S o k o ł o w s k i, [14], wprowadza funkcję $1/p$ oznaczając ją przez ψ . Wygodniej jednak posługiwać się funkcją przyjmującą wartości z przedziału $(0,1 >$, niż $< 1, \infty)$.

a z drugiego

$$(2.25) \quad s_3 = \frac{2e(1+\psi_s)p + (1-2\psi_s p)(2s_1 + \varrho s'_1)}{2(1+\psi_s p)}.$$

Podstawienie (2.24) i (2.25) do dwóch ostatnich równań układu (2.23) doprowadzi nas do układu dwóch równań o dwóch niewiadomych s_1 i p . Po dość żmudnych przeliczeniach otrzymujemy

$$(2.26) \quad \begin{cases} (4\psi_s^2 \varrho p^3 + 5\psi_s \varrho p^2 + \varrho p) s'_1 + (-4\psi_s^2 \varrho p^2 p' + 12\psi_s^2 p^3 - 2\psi_s \varrho p p' + \\ + 15\psi_s p^2 - \varrho p' + 3p) s'_1 - 6\psi_s^2 p^2 p' s_1 + 2\psi_s (1+\psi_s) e p^2 p' = 0, \\ (12\psi_s^2 \varrho^2 p^2 + 6\psi_s \varrho^2 p + 3\varrho^2) s_1'^2 + 36\psi_s^2 \varrho p^2 s_1 s'_1 + 36\psi_s^2 p^2 s_1^2 - \\ - 12\psi_s (1+\psi_s) e p^2 (2s_1 + \varrho s'_1) + 4g^2 \psi_s^2 \varrho^2 p^4 + 8g^2 \psi_s \varrho^2 p^3 + \\ + [4g^2 \varrho^2 - 4\psi_s^2 + 4(1+\psi_s)^2 e^2] p^2 - 8\psi_s p - 4 = 0. \end{cases}$$

Równanie pierwsze z otrzymanych jest równaniem różniczkowym liniowym drugiego rzędu ze względu na niewiadomą funkcję s_1 , a równaniem różniczkowym nieliniowym pierwszego rzędu ze względu na niewiadomą funkcję p , drugie natomiast jest równaniem różniczkowym nieliniowym pierwszego rzędu ze względu na s_1 , a równaniem algebraicznym czwartego stopnia ze względu na p .

Ścisłe rozwiązanie układu (2.26) natrafia na poważne trudności; trudności te następują już przy sprowadzaniu układu do jednego równania o jednej funkcji niewiadomej. Ograniczymy się do podania rozwiązań przybliżonych, przy czym wykorzystamy okoliczność, że stała materiałowa ψ_s jest znacznie mniejszą od jedności.

3. Warunki brzegowe

Rozwiązanie układu (2.26) wymaga znajomości dwóch warunków brzegowych. Warunki te uzależnione są od rozpatrywanego zakresu pracy pręta.

W przypadku prostego obciążania pręta, jednocześnie rozciąganego i skręcanego, wykonanego z materiału idealnie plastycznego, wyróżnimy następujące stany:

(1) stan sprężysty — w każdym punkcie ciała naprężenie zastępcze (intensywność naprężeń) $\sigma_0 < \sigma_{pl}$, a funkcja materiałowa $p = 1$;

(2) granica odkształceń sprężystych — w każdym punkcie ciała $\sigma_0 \leq \sigma_{pl}$, $p = 1$, przy czym istnieje co najmniej jeden punkt, w którym $\sigma_0 = \sigma_{pl}$ (tworzy się strefa plastyczna);

(3) stan sprężysto-plastyczny — obszar całego ciała można podzielić na dwa podobszary, przy czym w jednym z nich $\sigma_0 < \sigma_{pl}$, $p = 1$ (strefa sprężysta), w drugim $\sigma_0 = \sigma_{pl}$, $p < 1$ (strefa plastyczna); obszary te rozgranicza powierzchnia o własnościach $\sigma_0 = \sigma_{pl}$, $p = 1$;

(4) granica odkształceń plastycznych — w każdym punkcie ciała $\sigma_0 = \sigma_{pl}$, $p \leq 1$, przy czym istnieje co najmniej jeden punkt, w którym $p = 1$ (strefa sprężysta zanika)⁵⁾;

(5) stan czysto plastyczny — w każdym punkcie ciała $\sigma_0 = \sigma_{pl}$, $p < 1$.

O parametrach, których wartości odpowiadają stanowi sprężystemu, sprężysto-plastycznemu i czysto plastycznemu pręta, będziemy mówili, że znajdują się odpowiednio w zakresie sprężystym, sprężysto-plastycznym itd.

Zajmiemy się najpierw zakresem sprężysto-plastycznym.

W naszym przypadku — pręta o przekroju kołowym — powierzchnią rozgraniczającą strefę plastyczną od sprężystej będzie oczywiście powierzchnia walca kołowego; promień tego walca oznaczmy przez c oraz wprowadzimy oznaczenie

$$(3.1) \quad \frac{c}{a} = w.$$

Strefę sprężystą — walec kołowy pełny — określimy zatem nierównością $0 < \varrho < w$, natomiast strefę plastyczną — walec kołowy drażony (pierścieniowy) — nierównością $w < \varrho < 1$.

Powierzchnia pobocznic pręta musi być wolna od naprężeń promieniowych, zatem pierwszym warunkiem brzegowym będzie

$$(3.2) \quad s_1 = 0 \quad \text{dla} \quad \varrho = 1.$$

Postać matematyczną drugiego warunku brzegowego otrzymamy ze złożenia kilku warunków fizycznych, wynikających ze stykania się strefy plastycznej ze sprężystą wzdłuż powierzchni $\varrho = w$. Wielkości odnoszące się do strefy sprężystej będziemy wyróżniali wskaźnikami s , plastycznej — wskaźnikami p . Na powierzchni styku muszą mianowicie zachodzić równości naprężeń promieniowych w obu strefach,

$$(3.3) \quad \sigma_{rp} = \sigma_{rs},$$

oraz równości przemieszczeń promieniowych, czyli, jak widać z drugiego równania układu (2.4), równości odkształceń obwodowych

$$(3.4) \quad \varepsilon_{\theta p} = \varepsilon_{\theta s};$$

⁵⁾ Pojęcia granic odkształceń sprężystych i plastycznych, związane ze stanem naprężenia w całym ciele, są oczywiście różne od lokalnych (związanych z określonym punktem ciała) pojęć granicy sprężystości czy plastyczności.

wydłużenie strefy sprężystej musi wreszcie wynosić

$$(3.5) \quad \varepsilon_{zs} = \varepsilon = \text{const.}$$

W strefie sprężystej — walcu, poddanym działaniu równomiernego obciążenia ciągłego q_r na pobocznicy i q_z na obu podstawach (jednoczesne skręcanie nie ma tu żadnego wpływu) — panuje jednorodny stan naprężenia, określony składowymi

$$(3.6) \quad \begin{cases} \sigma_{rs} = \sigma_{\theta s} = q_r, \\ \sigma_{zs} = q_z; \end{cases}$$

zatem, zgodnie z prawem Hooke'a,

$$(3.7) \quad \begin{cases} \varepsilon_{rs} = \varepsilon_{\theta s} = \frac{1}{E} [(1 - \nu) q_r - \nu q_z], \\ \varepsilon_{zs} = \frac{1}{E} (q_z - 2\nu q_r). \end{cases}$$

Po podstawieniu do (3.3), (3.4) i (3.5) odpowiednich wyrażeń, przy uwzględnieniu drugiego z równań (2.6) oraz związku (2.4) i oznaczeń (2.17) i (2.19), otrzymujemy więc układ trzech równań o dwóch niewiadomych q_r i q_z

$$(3.8) \quad \begin{cases} s_1 \sigma_{pl} = q_r, \\ q_r s_2 \sigma_{pl} - \frac{1}{3} \left(q - \frac{1}{3K} \right) (s_1 + s_2 + s_3) \sigma_{pl} = \frac{1}{E} [(1 - \nu) q_r - q_z], \\ q_z - 2\nu q_r = e \sigma_{pl}, \end{cases}$$

bowiem na powierzchni granicznej

$$(3.9) \quad p = 1 \quad \text{dla} \quad q = w,$$

czyli

$$(3.10) \quad q = q_s = \frac{1}{2G}$$

jest wielkością znaną. Rugując niewiadome q_r i q_z z układu (3.8) otrzymujemy po wykorzystaniu związków (2.24) i (2.25) drugi warunek brzegowy w bardzo prostej postaci

$$(3.11) \quad s'_1 = 0 \quad \text{dla} \quad q = w,$$

przy czym samą wartość w będziemy mogli obliczyć z (3.9) dopiero po rozwiązaniu układu (2.26) (znalezieniu jego całek ogólnych).

W zakresie czysto plastycznym warunki brzegowe przedstawia się prościej: warunek (3.2) pozostanie bez zmiany, a drugim warunkiem będzie ograniczoność funkcji s_1 w punkcie (a raczej wzdłuż linii) $\varrho = 0$ jak zwykle w zagadnieniach tego typu.

4. Rozwiązanie w zakresie sprężysto-plastycznym. Przybliżenie zerowe

Rozwiążemy najpierw układ (2.26) przy założeniu dodatkowym $\psi_s = 0$. Mamy wtedy $\nu = 1/2$, czyli materiał nieściśliwy, co odpowiada przypadkowi rozważanemu przez G a y d o n a. Równania (2.26) przybiorą postać uproszczoną

$$(4.1) \quad \begin{cases} \varrho p s_1'' + (-\varrho p' + 3p) s_1' = 0, \\ 3\varrho^2 s_1'^2 + 4g^2 \varrho^2 p^2 + 4e^2 p^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

i, jak widać, układem całek szczególnych, spełniających warunki brzegowe (3.2) i (3.11) jest tutaj

$$(4.2) \quad \begin{cases} s_1 = 0, \\ p = \frac{1}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}}, \end{cases}$$

przy czym wykazanie jednoznaczności rozwiązania nie nastęrcza trudności. Promień graniczny określimy teraz z warunku (3.9):

$$(4.3) \quad w = \frac{\sqrt{1-e^2}}{g},$$

a zatem w strefie plastycznej

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{g} < \varrho < 1$$

będziemy mieli następujący rozkład naprężeń:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \sigma_r = \sigma_\theta = 0, \\ \sigma_z = \sigma_{pl} e p = \frac{\sigma_{pl} e}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}}, \\ \tau_{\theta z} = \frac{\sigma_{pl} g \varrho p}{\sqrt{3}} = \frac{\sigma_{pl} g \varrho}{\sqrt{3} \sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}}, \\ \tau_{zr} = \tau_{r\theta} = 0, \end{cases}$$

i odkształceń

$$(4.5) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = -\varphi \sigma_{sr} = -\frac{\sigma_{pl}}{2E} e, \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_{pl}}{E} e, \\ \gamma_{\theta z} = 2\varphi \tau_{\theta z} = \frac{\sigma_{pl} g \varrho}{G \sqrt{3}}, \\ \gamma_{zr} = \gamma_{r\theta} = 0. \end{cases}$$

Powyższe wzory są ściśle w przypadku materiału nieściśliwego, natomiast posłużą nam jako przybliżone w przypadku $\nu \neq 1/2$. Będziemy je wtedy zwali przybliżeniem zerowym.

Wykreślonego przedstawienia rozkładu naprężeń w przybliżeniu zerowym nie będziemy zamieszczali, ponieważ podaje je w swej pracy G a y d o n.

Zajmiemy się natomiast szczegółowo związkami, zachodzącymi pomiędzy odkształceniami i wywołującymi je obciążeniami: siłą podłużną N i momentem skręcającym M_s . Wyjdziemy z równań

$$(4.6) \quad \begin{cases} \int_F \sigma_z dF = N, \\ \int_F r \tau_{\theta z} dF = M_s, \end{cases}$$

gdzie F jest polem przekroju pręta; ponieważ składowe stanu naprężenia zależą jedynie od zmiennej r , możemy napisać

$$(4.7) \quad \begin{cases} \int_0^a r \sigma_z dr = \frac{N}{2\pi}, \\ \int_0^a r^2 \tau_{\theta z} dr = \frac{M_s}{2\pi}. \end{cases}$$

Wprowadzimy teraz, podobnie jak poprzednio, wielkości bezwymiarowe. Oznaczymy mianowicie

$$(4.8) \quad \frac{N}{a^2 \pi \sigma_{pl}} = n,$$

$$(4.9) \quad \frac{2\sqrt{3} M_s}{a^3 \pi \sigma_{pl}} = m_s.$$

Parametry n i m_s są więc odpowiednio proporcjonalne do siły podłużnej i momentu skręcającego, przy czym współczynniki proporcjonalności są tak dobrane, że $n = 1$, gdy pojawiają się pierwsze odkształcenia plastyczne przy czystym rozciąganiu, natomiast $m_s = 1$, gdy pojawiają się pierwsze odkształcenia plastyczne przy czystym skręcaniu. Wprowadzając jeszcze bezwymiarową zmienną ϱ , określoną wzorem (2.20), i całkując osobno po strefie sprężystej, osobno po plastycznej, możemy [przy uwzględnieniu oznaczeń (2.17) i (2.18), zależności (2.8), (2.10) i (4.4)] zamiast (4.7) napisać

$$(4.10) \quad \begin{cases} e \int_0^w \varrho d\varrho + e \int_w^1 \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}} = \frac{n}{2}, \\ g \int_0^w \varrho^3 d\varrho + g \int_w^1 \frac{\varrho^3 d\varrho}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}} = \frac{m_s}{4}, \end{cases}$$

a po scałkowaniu

$$(4.11) \quad w^2 + \frac{2}{g^2} \sqrt{e^2 + g^2} - \frac{2}{g^2} \sqrt{e^2 + g^2 w^2} = \frac{n}{e},$$

$$(4.12) \quad w^4 + \frac{4}{g^2} \sqrt{e^2 + g^2} - \frac{8}{3g^4} (e^2 + g^2)^{3/2} - \frac{4w^2}{g^2} \sqrt{e^2 + g^2 w^2} + \\ + \frac{8}{3g^4} (e^2 + g^2 w^2)^{3/2} = \frac{m_s}{g}.$$

Tak więc pięć parametrów: e , g , w , n i m_s związaliśmy trzema równaniami (4.3), (4.11) i (4.12). Równania te są w zasadzie zgodne z wynikami G a y d o n a, otrzymanymi z równań R e u s s a przy założeniu stałego stosunku wydłużenia do kąta skręcenia, a różnią się jedynie tym, iż G a y d o n otrzymuje odkształcenie liniowe wyrażone w mierze logarytmicznej.

Zajmiemy się teraz zbadaniem zakresu ważności rozwiązania. Zgodnie z rozważaniami, przeprowadzonymi w p. 3, stan sprężysto-plastyczny pręta jest zawarty między granicą odkształceń sprężystych a granicą odkształceń plastycznych. Zależności na granicy odkształceń sprężystych otrzymamy podstawiając do równań (4.3), (4.11) i (4.12) $w = 1$, ponieważ odpowiada to tworzeniu się strefy plastycznej. Trzy zależności wiążą teraz cztery zmienne, zatem drogą rugowania możemy otrzymać same funkcje jednej zmiennej. Zostały one zestawione w tablicy 1.

Podobnie, podstawiając $w = 0$, otrzymujemy zależności na granicy odkształceń plastycznych — strefa sprężysta zanika. Z równania (4.3) wy-

nika, że $e = 1$ ⁶⁾, a trzy pozostałe parametry, g , n i m_s , są związane dwoma równaniami (4.11) i (4.12). W wyniku rugowania otrzymujemy więc znowu funkcje jednej zmiennej, jednak tym razem nie wszystkie dadzą się przedstawić w postaci skończonej kombinacji funkcji elementarnych: w dwóch przypadkach otrzymujemy do rozwiązania równania trzeciego stopnia o ujemnym wyróżniku (choć tylko jeden pierwiastek spełnia warunki zagadnienia). Zestawienie podaje tabela 2. Niemożność wyrażenia odpowiedniej zależności za pomocą funkcji elementarnych została zaznaczona w tabelicy kreską poziomą.

Znając granice ważności rozwiązania możemy przystąpić do zestawienia zależności w zakresie sprężysto-plastycznym. Rugując ze związków (4.11) i (4.12) zmienną w , otrzymujemy z łatwością funkcje $n = f(e, g)$ oraz $m_s = f(e, g)$, uzależniające obciążenia od odkształceń. Są to funkcje monotoniczne ze względu na obie zmienne [podobnie, jak funkcja $w = f(e, g)$, określona równaniem (4.3)] i dają się, przynajmniej teoretycznie, odwrócić, określając ważne dla zastosowań zależności odwrotne $e = f(n, m_s)$ oraz $g = f(n, m_s)$.

Niestety praktyczne wykonanie tego odwrócenia jest poważnie utrudnione koniecznością rozwiązywania równań algebraicznych wysokich stopni (do dwunastego włącznie), toteż w celu efektywnego uzyskania poszukiwanych zależności będziemy musieli pójść nieco inną drogą.

Zamiast jawnych funkcji dwóch zmiennych postaramy się najpierw uzyskać związki uwikłane, łączące poszczególne trójki spośród parametrów e , g , n , m_s i w . Łatwo stwierdzić, iż związków tych będzie 10. Napisanie ośmiu spośród nich nie przedstawia zasadniczych trudności; są to równania algebraiczne stopnia 2-12 ze względu na poszczególne zmienne. Pozostałe dwie zależności, mianowicie $F(m_s, n, w) = 0$ oraz $F(m_s, n, g) = 0$, dadzą się otrzymać z tamtych przez rugowanie zmiennych metodą F e r m a t a lub za pomocą wyznaczników S y l w e s t e r a⁷⁾, jednak metody te prowadzą do nadzwyczaj długich rachunków, a rów-

Tablica 1. Zestawienie zależności na granicy odkształceń sprężystych

Zmienne	Zależności
w	$w = 1 = \text{const.}$
e, g	$e = \sqrt{1 - g^2},$ $g = \sqrt{1 - e^2}.$
e, n	$e = n,$ $n = e.$
e, m_s	$e = \sqrt{1 - m_s^2},$ $m_s = \sqrt{1 - e^2},$
g, n	$g = \sqrt{1 - n^2},$ $n = \sqrt{1 - g^2}.$
g, m_s	$g = m_s,$ $m_s = g,$
n, m_s	$n = \sqrt{1 - m_s^2},$ $m_s = \sqrt{1 - n^2}.$

⁶⁾ Dla uproszczenia będziemy zakładali $g \geq 0$ oraz $e \geq 0$ (rozciąganie). W przypadku ściskania rozwiązanie nie podlega jednak żadnym zmianom.

⁷⁾ Por. np. [12].

niania wynikowe z powodu swej zawłości nie mogą być przydatne dla celów praktyki.

Niektóre z otrzymanych związków dadzą się rozwikłać ze względu na poszczególne zmienne przy użyciu funkcji elementarnych. Zestawienie uzyskanych w ten sposób wzorów podaje tablica 3.

Tablica 2. Zestawienie zależności
na granicy odkształceń plastycznych

Zmienne	Zależności
w	$w = 0 = \text{const},$
e	$e = 1 = \text{const},$
n, g	$n = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + g^2}},$
	$g = \frac{2}{n} \sqrt{1 - n}.$
g, m_s	$m_s = \frac{4}{3g^3} [2 - (2 - g^2) \sqrt{1 + g^2}],$
	$g = f(m_s): -.$
n, m_s	$m_s = \frac{2}{3} (2 + n) \sqrt{1 - n} = \frac{4}{3} \sqrt{1 - \frac{3}{4} n^2 - \frac{1}{4} n^3},$
	$n = f(m_s): -.$

Tak więc uzyskaliśmy jedynie dwanaście spośród trzydziestu możliwych związków. Liczba ta jest niewątpliwie zbyt mała dla zastosowań praktycznych, tym bardziej że brak zależności odkształceń (a więc e i g) od obciążeń (n, m_s). Jednak podane równania stanowią dostateczną podstawę do uzyskania poszukiwanych zależności na drodze numerycznej lub graficznej, czym zajmiemy się w p. 6.

5. Rozwiązanie w zakresie czysto plastycznym. Przybliżenie zerowe

Rozważania nasze uzupełnimy teraz rozwiązaniem postawionego zagadnienia w zakresie czysto plastycznym. Założymy $\psi_s = 0$, uzyskując rozwiązanie ściśle w przypadku materiału nieściśliwego, a przybliżenie zerowe w przypadku ściśliwego.

Układ (2.26) redukuje się znowu do (4.1) przy zmienionych warunkach brzegowych, które omówiliśmy szczegółowo w p. 3. Jednak widać od razu, że układ całek szczególnych (4.2) spełnia i te warunki i w całym obszarze $0 \leq \varrho \leq 1$ stan naprężenia określa wzory (4.4), a stan odkształcenia wzory (4.5).

Tablica 3. Zestawienie zależności obowiązujących w zakresie sprężysto-plastycznym

Zmienne	Zależności
e, g, w	$w = \frac{\sqrt{1-e^2}}{g},$ $g = \frac{\sqrt{1-e^2}}{w},$ $e = \sqrt{1-g^2 w^2},$
e, g, n	$n = \frac{e}{g^2} (2\sqrt{e^2+g^2} - 1 - e^2),$ $g = \frac{\sqrt{e}}{n} \sqrt{2e-n-n e^2 + 2\sqrt{e(1-en)(e-n)}},$ $e = f(g, n) : -,$
e, g, m_s	$m_s = \frac{4}{3g^3} \left[(g^2 - 2e^2) \sqrt{e^2+g^2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{4} e^4 \right],$ $g = f(e, m_s) : -,$ $e = f(g, m_s) : -,$
e, w, n	$n = \frac{ew}{1-e^2} [2\sqrt{1-e^2+e^2 w^2} - w(1+e^2)],$ $w = \frac{1}{\sqrt{e(1-e^2)}} \sqrt{2e-n-n e^2 - 2\sqrt{e(1-en)(e-n)}},$ $e = f(w, n) : -$
e, w, m_s	$m_s = \frac{4w^3}{3(1-e^2)^{3/2}} \left(\frac{1-e^2-2e^2 w^2}{w^3} \sqrt{1+e^2 w^2 - e^2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{4} e^4 \right),$ $w = f(e, m_s) : -,$ $e = f(w, m_s) : -,$
g, w, n	$n = \frac{\sqrt{1-g^2 w^2}}{g^2} (2\sqrt{1+g^2-g^2 w^2} - 2 + g^2 w^2),$ $w = f(g, n) : -,$ $g = f(w, n) : -,$
g, w, m_s	$m_s = \frac{4}{3g^3} [(g^2 + g^2 w^2 - 2) \sqrt{1+g^2-g^2 w^2} + 2 - 3g^2 w^2 + \frac{3}{4} g^4 w^4],$ $w = f(g, m_s) : -,$ $g = f(w, m_s) : -,$
e, n, m_s	$m_s = \frac{4}{3[2e-n-n e^2 + 2\sqrt{e(1-en)(e-n)}]^{3/2}} \times$ $\times \left\{ \frac{n^3}{e^{3/2}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{4} e^4 \right) + [2e-n-n e^2 - 2en^2 + \right.$ $\left. + 2\sqrt{e(1-en)(e-n)}] \sqrt{2e-n-n e^2 + en^2 + 2\sqrt{e(1-en)(e-n)}} \right\},$ $e = f(n, m_s) : -,$ $n = f(e, m_s) : -,$
g, n, m_s	$m_s = f(g, n) : -,$ $g = f(n, m_s) : -,$ $n = f(g, m_s) : -,$
w, n, m_s	$m_s = f(w, n) : -,$ $w = f(n, m_s) : -,$ $n = f(w, m_s) : -.$

Zmianie ulegną dopiero zależności między odkształceniami i obciążeniami. Zamiast (4.10) napiszemy teraz

$$(5.1) \quad \begin{cases} e \int_0^1 \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}} = \frac{n}{2}, \\ g \int_0^1 \frac{\varrho^3 d\varrho}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}} = \frac{m_s}{4}, \end{cases}$$

a po scałkowaniu

$$(5.2) \quad \frac{2}{g^2} (\sqrt{e^2 + g^2} - e) = \frac{n}{e},$$

$$(5.3) \quad \frac{4}{g^2} \sqrt{e^2 + g^2} - \frac{8}{3g^4} [(e^2 + g^2)^{3/2} - e^3] = \frac{m_s}{g}.$$

Otrzymaliśmy dwa związki między czterema zmiennymi e , g , n i m_s , z których, przez rugowanie, można na ogół uzyskać cztery związki uwikłane, łączące poszczególne trójki zmiennych. Okazuje się jednak, że bez względu na wartości parametrów e i g pomiędzy parametrami n i m_s w całym zakresie plastycznym istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna (ta sama, z którą mieliśmy do czynienia już na granicy odkształceń plastycznych)⁸⁾, co redukuje ilość związków uwikłanych do trzech: $F(e, g, n) = 0$, $F(e, g, m_s) = 0$ oraz $F(n, m_s) = 0$. Niektóre z tych związków dają się rozwikłać ze względu na poszczególne zmienne przy użyciu funkcji elementarnych; uzyskane w ten sposób wzory podaje tablica 4.

Tablica 4. Zestawienie zależności obowiązujących w zakresie czysto plastycznym

Zmienne	Zależności
e, g, n	$n = \frac{2e}{e + \sqrt{e^2 + g^2}},$ $g = \frac{2e}{n} \sqrt{1 - n},$ $e = \frac{gn}{2\sqrt{1 - n}},$
e, g, m_s	$m_s = \frac{4}{3g^3} [2e^3 + (g^2 - 2e^2)\sqrt{e^2 + g^2}],$ $g = f(e, m_s) : -,$ $e = f(g, m_s) : -,$
n, m_s	$m_s = \frac{2}{3} (2 + n) \sqrt{1 - n} = \frac{4}{3} \sqrt{1 - \frac{3}{4}n^2 - \frac{1}{4}n^3},$ $n = f(m_s) : -.$

⁸⁾ Określa ona nośność graniczną pręta. Por. np. [11].

6. Uzupełnienie rozwiązania na drodze graficznej i numerycznej

Tablice 3 i 4 uzupełnimy teraz na drodze graficznej i numerycznej. Rysując np. wykres funkcji $m_s = f(e, n)$ w płaszczyźnie $e - m_s$ (przy ustalonych wartościach parametru n), otrzymujemy zarazem wykres funkcji odwrotnej, mianowicie $e = f(n, m_s)$; także wartości liczbowe funkcji $e = f(n, m_s)$ uzyskujemy stosunkowo łatwo na drodze interpolacji funkcji jednej zmiennej. Teraz uzyskujemy łatwo wartości funkcji $g = f(n, m_s)$, jako funkcji złożonej $g = f[e(n, m_s), n]$, funkcji $w = f(n, m_s)$, wykorzystując związek (4.3) itd.

Wartości ważniejszych dla zastosowań funkcji $w = f(e, g)$, $n = f(e, g)$, $m_s = f(e, g)$, $w = f(m_s, n)$, $e = f(m_s, n)$ oraz $g = f(m_s, n)$ określonych w zakresie sprężysto-plastycznym (i ewentualnie czysto plastycznym) podają tablice 5-10.

Zamieszczone tablice pozwolą obliczyć odkształcenia pręta przy danych obciążeniach i na odwrót, nie rozwiązują jednak wszystkich zagadnień, związanych z wyznaczaniem parametrów, charakteryzujących przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta. Korzystne okaże się tu wykreślne przedstawienie zależności, bardziej pogładowe, chociaż mniej dokładne. Wykresy wszystkich trzydziestu funkcji w zakresie sprężysto-plastycznym i ośmiu w zakresie czysto plastycznym podają rysunki 1-10. Umożliwiają one łatwe wyznaczenie trzech parametrów za pomocą dwóch pozostałych.

Tablica 5. Wartości funkcji $w = f(e, g)$

$g \backslash e$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0											nieozn.
0,1											0,000
0,2											0,000
0,3											0,000
0,4											0,000
0,5			zakres sprężysty, w nie istnieje							0,872	0,000
0,6									1,000	0,726	0,000
0,7									0,857	0,623	0,000
0,8							1,000	0,893	0,750	0,545	0,000
0,9						0,962	0,889	0,793	0,667	0,484	0,000
1,0	1,000	0,995	0,980	0,954	0,917	0,866	0,800	0,714	0,600	0,436	0,000
1,2	0,833	0,825	0,816	0,795	0,764	0,722	0,667	0,595	0,500	0,363	0,000
1,5	0,667	0,663	0,653	0,636	0,611	0,577	0,533	0,476	0,400	0,291	0,000
2,0	0,500	0,497	0,490	0,477	0,458	0,433	0,400	0,357	0,300	0,218	0,000
2,5	0,400	0,398	0,392	0,382	0,367	0,346	0,320	0,286	0,240	0,174	0,000
3,0	0,333	0,332	0,327	0,318	0,305	0,289	0,267	0,238	0,200	0,145	0,000
5,0	0,200	0,199	0,196	0,191	0,183	0,173	0,160	0,143	0,120	0,087	0,000
10,0	0,100	0,099	0,098	0,095	0,092	0,087	0,080	0,071	0,060	0,044	0,000
∞	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tablica 6. Wartości funkcji $n = f(e, g)$

$g \backslash e$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	5,0	10,0	∞
0,0											1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1											0,998	0,998	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2			zakres sprężysty. $n = e$								0,990	0,993	0,996	0,998	0,998	0,999	1,000	1,000	1,000
0,3											0,978	0,985	0,990	0,994	0,996	0,998	0,999	1,000	1,000
0,4											0,963	0,974	0,983	0,990	0,994	0,996	0,998	1,000	1,000
0,5										0,897	0,944	0,960	0,974	0,985	0,990	0,993	0,998	0,999	1,000
0,6									0,800	0,883	0,923	0,944	0,963	0,978	0,986	0,990	0,996	0,999	1,000
0,7									0,793	0,864	0,901	0,927	0,951	0,971	0,981	0,987	0,995	0,999	1,000
0,8							0,600	0,696	0,779	0,841	0,877	0,908	0,938	0,963	0,976	0,983	0,994	0,998	1,000
0,9						0,499	0,595	0,683	0,759	0,817	0,853	0,889	0,923	0,954	0,970	0,978	0,992	0,998	1,000
1,0	0,000	0,100	0,200	0,299	0,398	0,493	0,583	0,666	0,737	0,793	0,828	0,869	0,908	0,944	0,963	0,974	0,990	0,998	1,000
1,2	0,000	0,097	0,194	0,288	0,381	0,469	0,551	0,626	0,691	0,744	0,781	0,828	0,877	0,923	0,948	0,963	0,986	0,996	1,000
1,5	0,000	0,089	0,177	0,263	0,346	0,425	0,499	0,566	0,626	0,675	0,714	0,769	0,828	0,889	0,923	0,944	0,978	0,994	1,000
2,0	0,000	0,075	0,149	0,222	0,292	0,359	0,422	0,481	0,534	0,580	0,618	0,679	0,750	0,828	0,877	0,908	0,963	0,990	1,000
2,5	0,000	0,064	0,127	0,189	0,250	0,308	0,363	0,415	0,462	0,505	0,542	0,604	0,679	0,769	0,828	0,869	0,944	0,985	1,000
3,0	0,000	0,056	0,111	0,165	0,218	0,268	0,317	0,363	0,406	0,445	0,481	0,542	0,618	0,714	0,781	0,828	0,923	0,978	1,000
5,0	0,000	0,036	0,072	0,107	0,142	0,176	0,209	0,241	0,272	0,301	0,328	0,378	0,446	0,542	0,618	0,679	0,828	0,944	1,000
10,0	0,000	0,019	0,038	0,057	0,075	0,094	0,112	0,130	0,147	0,164	0,181	0,213	0,258	0,328	0,390	0,446	0,618	0,828	1,000
∞	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	nieozn.

Tablica 7. Wartości funkcji $m_s = f(e, g)$

$g \backslash e$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	5,0	10,0	∞
0,0											0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1											0,100	0,083	0,067	0,050	0,040	0,033	0,020	0,010	0,000
0,2			zakres sprężysty, $m_s = g$								0,197	0,165	0,133	0,100	0,080	0,067	0,040	0,020	0,000
0,3											0,291	0,245	0,197	0,149	0,119	0,100	0,060	0,030	0,000
0,4											0,380	0,322	0,261	0,197	0,159	0,133	0,080	0,040	0,000
0,5										0,497	0,463	0,395	0,322	0,245	0,197	0,165	0,100	0,050	0,000
0,6									0,600	0,581	0,540	0,463	0,380	0,291	0,236	0,197	0,119	0,060	0,000
0,7									0,690	0,656	0,610	0,528	0,436	0,337	0,273	0,229	0,139	0,070	0,000
0,8							0,800	0,791	0,763	0,721	0,673	0,587	0,490	0,380	0,310	0,261	0,159	0,080	0,000
0,9						0,898	0,886	0,862	0,825	0,779	0,730	0,642	0,540	0,422	0,345	0,291	0,178	0,090	0,000
1,0	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989	0,975	0,952	0,919	0,878	0,831	0,781	0,692	0,587	0,463	0,380	0,322	0,197	0,100	0,000
1,2	1,140	1,138	1,131	1,119	1,100	1,074	1,044	1,006	0,963	0,916	0,868	0,781	0,673	0,540	0,447	0,380	0,236	0,119	0,000
1,5	1,235	1,232	1,223	1,208	1,187	1,161	1,129	1,093	1,053	1,011	0,968	0,887	0,781	0,642	0,540	0,463	0,291	0,149	0,000
2,0	1,292	1,289	1,282	1,269	1,253	1,231	1,206	1,177	1,146	1,113	1,079	1,011	0,917	0,781	0,673	0,587	0,380	0,197	0,000
2,5	1,312	1,310	1,304	1,295	1,282	1,266	1,246	1,224	1,200	1,174	1,147	1,092	1,011	0,887	0,781	0,692	0,463	0,245	0,000
3,0	1,321	1,320	1,315	1,308	1,298	1,285	1,270	1,253	1,234	1,213	1,192	1,147	1,079	0,968	0,868	0,781	0,540	0,291	0,000
5,0	1,331	1,330	1,328	1,325	1,321	1,315	1,308	1,301	1,292	1,283	1,272	1,250	1,213	1,147	1,079	1,011	0,781	0,463	0,000
10,0	1,333	1,333	1,332	1,331	1,330	1,329	1,327	1,324	1,322	1,319	1,316	1,309	1,297	1,272	1,244	1,213	1,079	0,781	0,000
∞	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	niewozn.

Tablica 8. Wartości funkcji $w = f(m_s, n)$

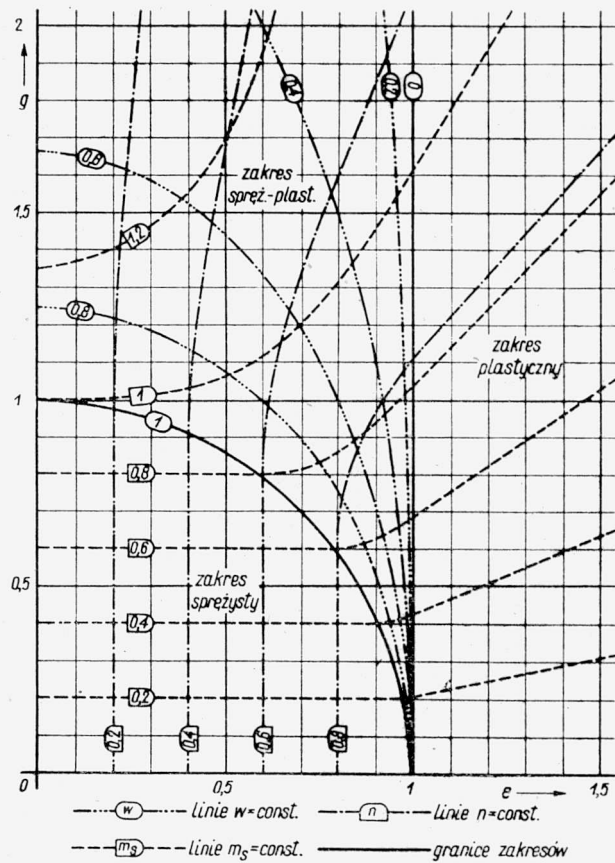
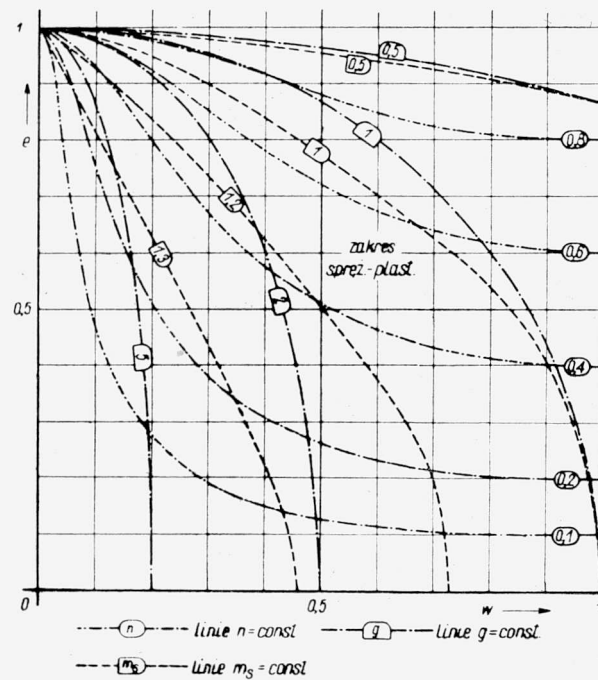
$m_s \backslash n$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,00																					nieozn.
0,05																					
0,10																					
0,15																					
0,20																					
0,25																					
0,30																					
0,35																					
0,40																					
0,45																					
0,50																					
0,55																					
0,60																					
0,65																					
0,70																					
0,75																					
0,80																					
0,85																					
0,90																					
0,95																					
1,00																					
1,05																					
1,10																					
1,15																					
1,20																					
1,25																					
1,30																					
4/3																					

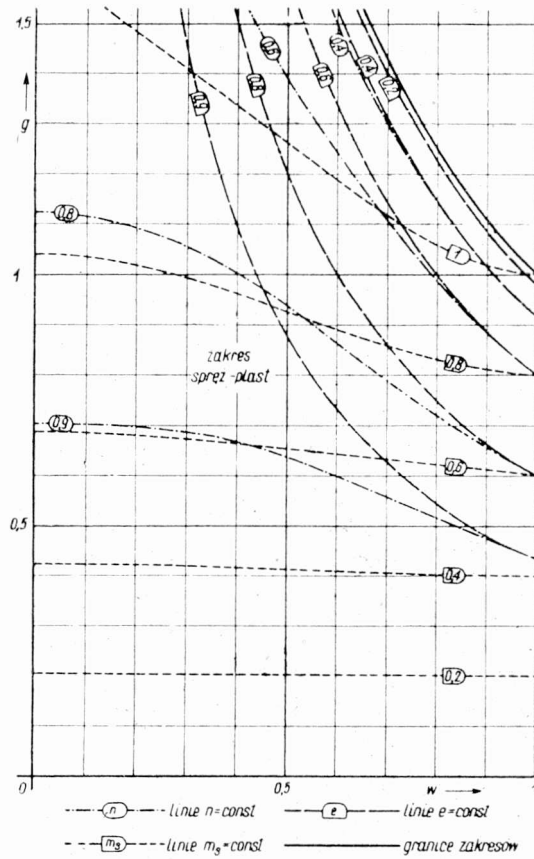
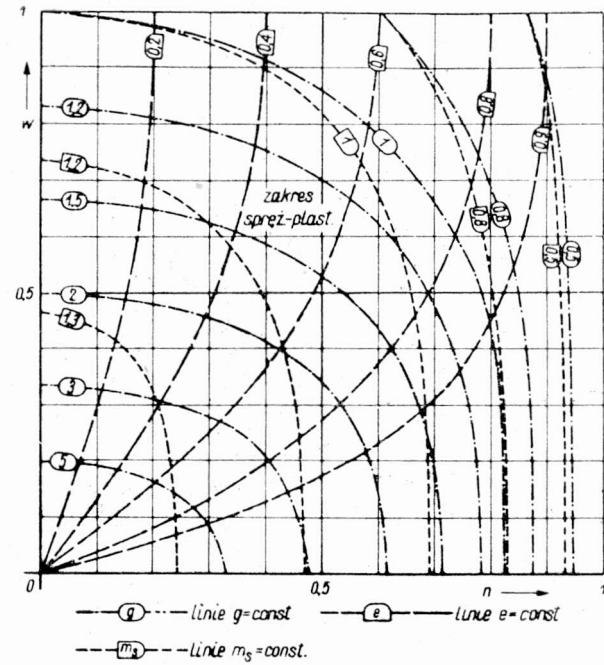
Tablica 9. Wartości funkcji $e = f(m_s, n)$

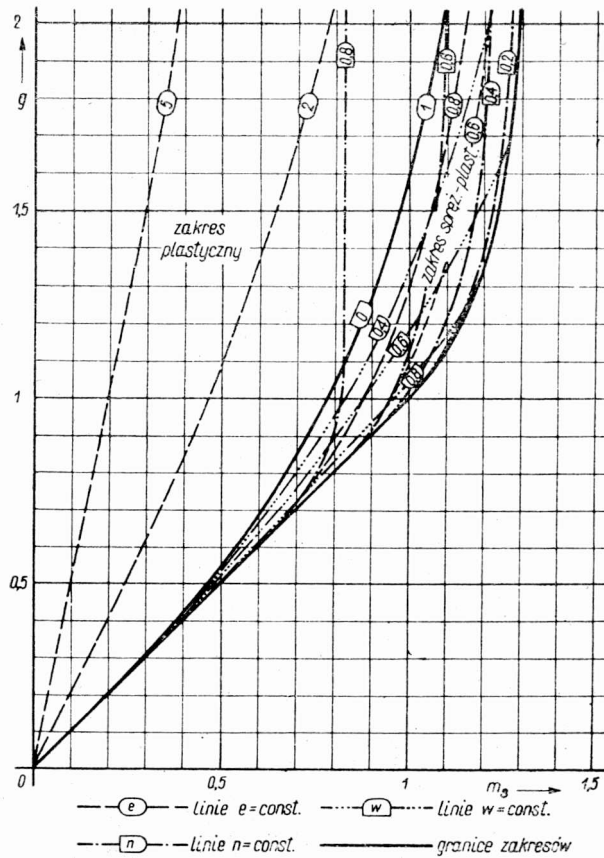
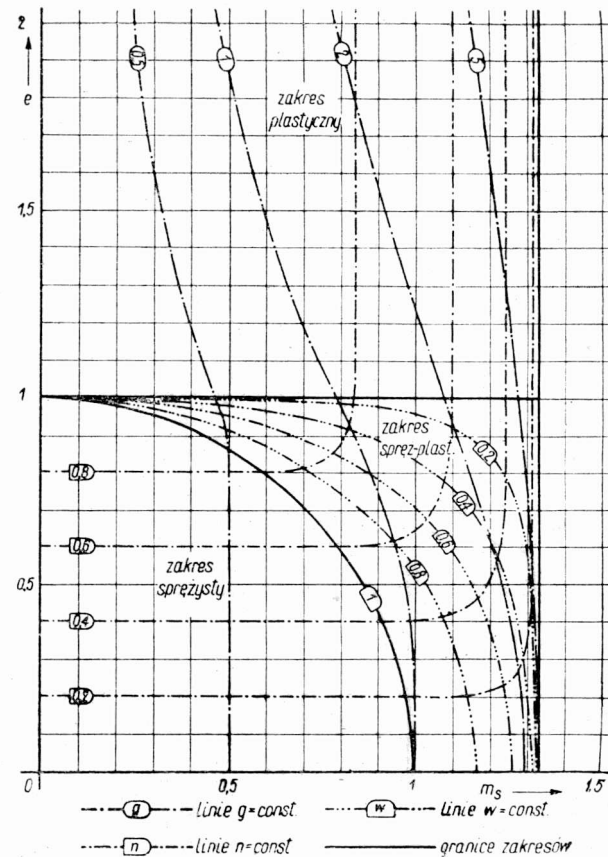
$m_s \backslash n$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,00																					1,000
0,05																					
0,10																					
0,15																					
0,20																					
0,25																					
0,30																					
0,35																					
0,40																					
0,45																					
0,50																					
0,55																					
0,60																					
0,65																					
0,70																					
0,75																					
0,80																					
0,85																					
0,90																					
0,95																					
1,00	0,000	0,050	0,100	0,150	0,200	0,250	0,301	0,352	0,403	0,457	0,513	0,574	0,647	0,746							
1,05	0,000	0,050	0,100	0,151	0,201	0,252	0,304	0,356	0,410	0,466	0,530	0,604	0,702								
1,10	0,000	0,051	0,101	0,152	0,204	0,256	0,310	0,365	0,423	0,487	0,563	0,664									
1,15	0,000	0,052	0,104	0,156	0,209	0,264	0,321	0,382	0,450	0,530	0,651										
1,20	0,000	0,054	0,108	0,163	0,220	0,280	0,345	0,420	0,512	0,691											
1,25	0,000	0,058	0,117	0,179	0,244	0,318	0,413	0,557													
1,30	0,000	0,070	0,146	0,236	0,368																
4/3	nie- ozn.																				

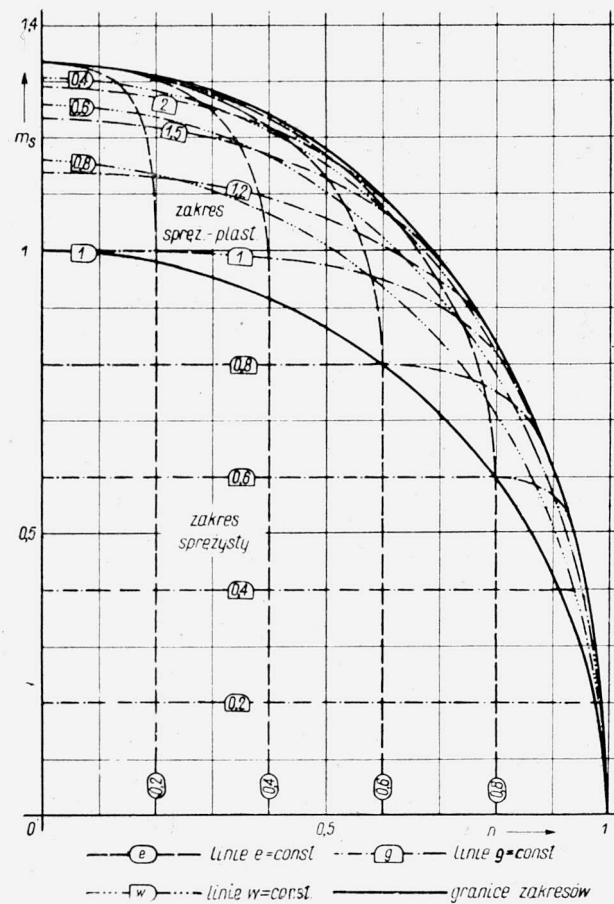
Tablica 10. Wartości funkcji $g = f(m_s, n)$

$m_s \backslash n$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,0
0,00																					0,000
0,05																					
0,10																					
0,15																					
0,20																					
0,25																					
0,30																					
0,35																					
0,40																					
0,45																					
0,50																					
0,55																					
0,60																					
0,65																					
0,70																					
0,75																					
0,80																					
0,85																					
0,90																					
0,95																					
1,00																					
1,05																					
1,10																					
1,15																					
1,20																					
1,25																					
1,30																					
4/3																					

Rys. 1. Wykres w płaszczyźnie e - g Rys. 2. Wykres w płaszczyźnie w - e

Rys. 3. Wykres w płaszczyźnie w - g Rys. 4. Wykres w płaszczyźnie n - w

Rys. 7. Wykres w płaszczyźnie m_s - g Rys. 8. Wykres w płaszczyźnie m_s - e



7. Rozwiązanie w zakresie sprężysto-plastycznym. Przybliżenie pierwsze

Rozwiązanie w zakresie sprężysto-plastycznym, uzyskane w p. 4, jest ściśle tylko w przypadku materiału nieściśliwego ($\psi_s = 0$, $\nu = 1/2$); w przypadku materiałów ściśliwych, z jakimi zazwyczaj mamy do czynienia w praktyce, rozwiązanie to nazwalibyśmy przybliżeniem zerowym. Posłuży ono bowiem teraz do uzyskania rozwiązań dokładniejszych, umożliwiających ocenę błędu przybliżenia.

W tym celu zastosujemy metodę pokrewną metodzie «małych parametrów» (zakłóceń)⁹⁾. Założymy mianowicie, że ściśle rozwiązanie układu (2.26) przy warunkach brzegowych (3.2) i (3.11) daje się rozwinąć w szereg potęgowy (M a c l a u r i n a) zmiennej ψ_s , czyli

$$(7.1) \quad \begin{cases} s_1 = s_{10} + s_{11} \psi_s + s_{12} \psi_s^2 + \dots \\ p = p_0 + p_1 \psi_s + p_2 \psi_s^2 + \dots \end{cases}$$

Ponieważ wielokrotnie stwierdzono, że wartość stałej P o i s s o n a ν , a więc i stałej ψ_s [związanej z nią równaniem (2.16)], ma nieznaczny wpływ na rozkład naprężeń¹⁰⁾, możemy się spodziewać szybkiej zbieżności szeregów (7.1).

Podstawiając do (7.1) $\psi_s = 0$, otrzymujemy $s_1 = s_{10}$, $p = p_0$; s_{10} i p_0 są zatem rozwiązaniami, uzyskanymi przez nas w p. 4, określonymi równaniami (4.2). Zajmiemy się teraz wyznaczeniem funkcji s_{11} i p_1 ; będą one stanowiły główną część błędu przybliżenia zerowego, ponieważ dla większości materiałów konstrukcyjnych $\nu = 0,3$, $\psi_s = 0,154$ i wyraz zawierający $\psi_s^2 = 0,023$ możemy już zazwyczaj pominąć wobec jedności. Funkcje powstałe z zachowania w odpowiednim szeregu M a c l a u r i n a zmiennej ψ_s jedynie wyrazów zerowego i pierwszego będziemy zwali pierwszym przybliżeniem.

Do układu (2.26) podstawimy więc

$$(7.2) \quad \begin{cases} s_1 = s_{11} \psi_s, \\ p = \frac{1}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}} + p_1 \psi_s \end{cases}$$

i przyrównamy do zera wyrażenia przy pierwszej potęgze ψ_s . Wygodnie będzie tutaj wprowadzić nową funkcję niewiadomą η , określoną wzorem

$$(7.3) \quad \frac{p_1}{p_0} = p_1 \sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2} = \eta,$$

⁹⁾ Por. np. [2] oraz [13].

¹⁰⁾ Por. np. [10].

bowiem $\eta\psi_s$ będzie wtedy wprost błędem procentowym zerowego przybliżenia funkcji p . Otrzymujemy stosunkowo łatwy do rozwiązania układ dwóch równań niezależnych

$$(7.4) \quad \begin{cases} \varrho (e^2 + g^2 \varrho^2)^2 s''_{11} + (3e^2 + 4g^2 \varrho^2)(e^2 + g^2 \varrho^2)s'_{11} = 2eg^2 \varrho, \\ (e^2 + g^2 \varrho^2)^{3/2} \eta + e^2 \sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2} - e^2 = 0. \end{cases}$$

Najpierw musimy rozwiązać drugie równanie, by sprecyzować warunki brzegowe dla pierwszego (nie znamy promienia granicznego w):

$$(7.5) \quad \eta = - \frac{e^2 (\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2} - 1)}{(e^2 + g^2 \varrho^2)^{3/2}},$$

a stąd

$$(7.6) \quad p = \frac{1}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}} - \frac{\psi_s e^2 (\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2} - 1)}{(e^2 + g^2 \varrho^2)^2}.$$

Warunek (3.9) napiszemy więc w postaci

$$(7.7) \quad 1 = \frac{1}{\sqrt{e^2 + g^2 w^2}} - \frac{\psi_s e^2 (\sqrt{e^2 + g^2 w^2} - 1)}{(e^2 + g^2 w^2)^2},$$

a rozwiązanie tego równania ze względu na w daje

$$(7.8) \quad w = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{g},$$

czyli że pierwsze przybliżenie pokrywa się w tym przypadku z przybliżeniem zerowym [wzór (4.3)].

Możemy teraz przystąpić do całkowania pierwszego równania (7.4). Całka ogólna tego równania ma postać

$$(7.9) \quad s_{11} = \frac{1}{e} \ln \frac{e^2 + g^2 \varrho^2}{\varrho^2} - \frac{2e}{g^2 \varrho^2} + \\ + C_1 \left(\frac{g^2}{e^3} \ln \sqrt{\frac{e^2 + g^2 \varrho^2 + e}{\varrho}} - \frac{e^2 + g^2 \varrho^2}{e^2 \varrho^2} \right) + C_2,$$

a warunki brzegowe (3.2) i (3.11) z podstawieniem (7.8) wyznaczają wartości stałych C_1 i C_2 .

$$(7.10) \quad C_1 = -\frac{e(1+e^2)}{g^2},$$

$$(7.11) \quad C_2 = -\frac{1}{e} \ln(e^2 + g^2) + \frac{2e}{g^2} + \\ + (1+e^2) \left[\frac{1}{e^2} \ln(\sqrt{e^2 + g^2} + e) - \frac{\sqrt{e^2 + g^2}}{eg^2} \right],$$

więc ostatecznie

$$(7.12) \quad s_{11} = - \left\{ \frac{1+e^2}{e^2} \ln \frac{\sqrt{e^2 + g^2} \varrho^2 + e}{\varrho (\sqrt{e^2 + g^2} + e)} - \frac{1}{e} \ln \frac{e^2 + g^2 \varrho^2}{(e^2 + g^2) \varrho^2} + \right. \\ \left. + \frac{2e}{g^2} \left(\frac{1}{\varrho^2} - 1 \right) - \frac{(1+e^2)(\sqrt{e^2 + g^2} \varrho^2 - \varrho^2 \sqrt{e^2 + g^2})}{eg^2 \varrho^2} \right\}.$$

Znamy już zatem rozkład naprężeń promieniowych i obwodowych, bowiem — w pierwszym przybliżeniu —

$$(7.13) \quad \sigma_r = s_{11} \psi_s \sigma_{pl}$$

oraz, zgodnie z (2.24),

$$(7.14) \quad \sigma_\theta = (s_{11} + \varrho s'_{11}) \psi_s \sigma_{pl} = s_{21} \psi_s \sigma_{pl},$$

przy czym funkcję s'_{11} określa stosunkowo prosty wzór

$$(7.15) \quad s'_{11} = \frac{2e(\sqrt{e^2 + g^2} \varrho^2 - 1)(\sqrt{e^2 + g^2} \varrho^2 - e^2)}{g^2 \varrho^3 (e^2 + g^2 \varrho^2)}.$$

Naprężenia promieniowe i obwodowe są wynikiem mniejszej wartości współczynnika P o i s s o n a (funkcji odkształcenia poprzecznego) w wewnętrznej, sprężystej strefie pręta niż w zewnętrznej, plastycznej: przy rozciąganiu strefa plastyczna «kurczy» się silniej i wywiera nacisk na strefę sprężystą. Podobny rozkład naprężeń uzyskalibyśmy, rozciągając gumową rurkę, nałożoną na sztywny, pasowany trzpień. Rozkład ten przedstawiają rys. 11 i 12.

Przejdziemy do obliczenia ważniejszych dla nas naprężeń σ_z i $\tau_{\theta z}$ oraz oszacowania błędów przybliżenia zerowego. Podstawienie (7.2) do wzoru (2.25), rozwinięcie uzyskanego wyrażenia na szereg M a c l a u r i n a zmiennej ψ_s i zachowanie jedynie wyrazów zerowego i pierwszego daje

$$(7.16) \quad s_{31} = \frac{e}{\sqrt{e^2 + g^2} \varrho^2} + \left[\frac{eg^2 \varrho^2 (\sqrt{e^2 + g^2} \varrho^2 - 1)}{(e^2 + g^2 \varrho^2)^2} + s_{11} + \frac{1}{2} \varrho s'_{11} \right] \psi_s$$

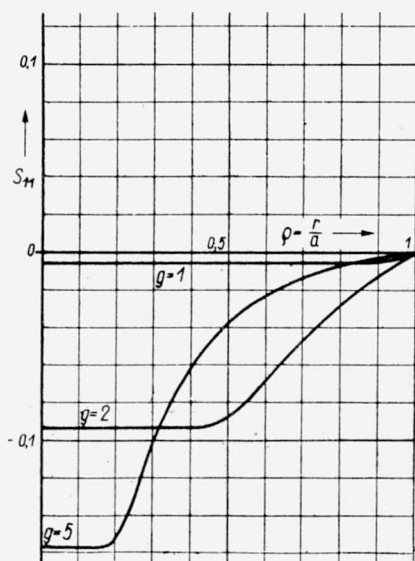
lub inaczej

$$(7.17) \quad s_{31} = s_{30} (1 + \zeta \psi_s),$$

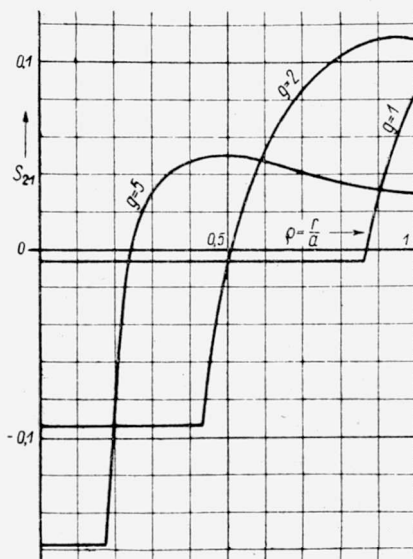
gdzie s_{30} i s_{31} oznaczają, jak zwykle, zerowe i pierwsze przybliżenie funkcji s_3 , natomiast

$$(7.18) \quad \zeta = \frac{g^2 \varrho^2 (\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2} - 1)}{(e^2 + g^2 \varrho^2)^{3/2}} + \frac{(s_{11} + \frac{1}{2} \varrho s'_{11}) \sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}}{e}$$

decyduje o błędzie zerowego przybliżenia w stosunku do pierwszego w przypadku naprężeń osiowych σ_z .



Rys. 11. Rozkład naprężeń promieniowych σ_r w przypadku $e=0,5$ (zakres sprężysto-plastyczny).
Przybliżenie pierwsze



Rys. 12. Rozkład naprężeń obwodowych σ_θ w przypadku $e=0,5$ (zakres sprężysto-plastyczny). Przybliżenie pierwsze

Naprężenie styczne $\tau_{\theta z}$ określa wzór

$$(7.19) \quad \tau_{\theta z} = \frac{g \varrho p \sigma_{pl}}{\sqrt{3}},$$

zatem, wykorzystując (7.2) i (7.3), możemy napisać wprost

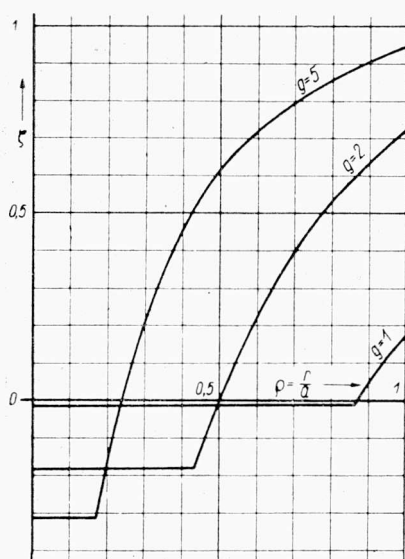
$$(7.20) \quad \tau_{\theta z1} = \tau_{\theta z0} (1 + \eta \psi_s),$$

gdzie poprawkę η określa wzór (7.5). Warto zauważyć, że wobec związku (7.8) η jest równe zero na granicy strefy plastycznej i sprężystej (podob-

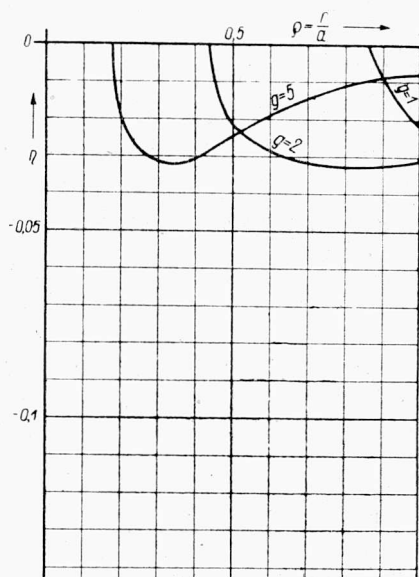
nie jak w całej strefie sprężystej), natomiast w strefie plastycznej jest stale dodatnie; ζ jest w strefie sprężystej ujemne, w strefie plastycznej zmienia znak.

Wykresy funkcji η i ζ podają rysunki 13 i 14.

Jak widać, błędy przy obliczeniu w przybliżeniu zerowym naprężeń σ_z są (w podanym przypadku $e = 0,5$) wielokrotnie większe niż przy obliczaniu naprężeń $\tau_{\theta z}$. Jednak w całym zakresie sprężysto-plastycznym $\zeta < 1$ i błąd nie przekracza ψ_s , czyli np. 15,4% w przypadku materiału o stałej P o i s s o n a $\nu = 0,3$, a przy niewielkich kątach skręcenia (np. $g = 1$) jest znacznie mniejszy.



Rys. 13. Błędy przy obliczaniu naprężenia osiowego σ_z w przybliżeniu zerowym w przypadku $e = 0,5$ (zakres sprężysto-plastyczny)



Rys. 14. Błędy przy obliczaniu naprężenia stycznego $\tau_{\theta z}$ w przybliżeniu zerowym w przypadku $e = 0,5$ (zakres sprężysto-plastyczny)

Wspomnimy wreszcie, że zależność siły podłużnej i momentu skręcającego od wydłużenia i kąta skręcenia daje się w pierwszym przybliżeniu wyrazić za pomocą skończonej kombinacji funkcji elementarnych podobnie jak w przybliżeniu zerowym. Uzyskane wyniki są jednak długie i niewygodne do analizy błędów, którą wygodniej jest przeprowadzić w oparciu o znajomość błędów w rozkładzie naprężeń.

8. Rozwiązanie w zakresie czysto plastycznym. Przybliżenie pierwsze

Przybliżenie pierwsze uzyskamy w zakresie czysto plastycznym podobnie jak w zakresie sprężysto-plastycznym. Podstawiając (7.2) do (2.26) otrzymujemy znowu układ (7.4), bez zmiany pozostając (7.5), (7.6) oraz całka ogólna (7.9). Zmienia się dopiero wartości stałych C_1 i C_2 wobec zmiany warunków brzegowych, musimy bowiem warunek (3.11) zastąpić warunkiem ograniczoności s_{11} dla $\varrho = 0$:

$$(8.1) \quad C_1 = -\frac{2e^2}{g^2},$$

$$(8.2) \quad C_2 = -\frac{1}{e} \ln(e^2 + g^2) + \frac{2e}{g^2} + \frac{2}{e} \ln(\sqrt{e^2 + g^2} + e) - \frac{2\sqrt{e^2 + g^2}}{g^2},$$

a całka szczególna przybierze postać

$$(8.3) \quad s_{11} = -\left[\frac{2}{e} \ln \frac{(\sqrt{e^2 + g^2} \varrho^2 + e) \sqrt{e^2 + g^2}}{(\sqrt{e^2 + g^2} + e) \sqrt{e^2 + g^2} \varrho^2} + \frac{2e}{g^2} \left(\frac{1}{\varrho^2} - 1 \right) - \frac{2}{g^2 \varrho^2} (\sqrt{e^2 + g^2} \varrho^2 - \varrho^2 \sqrt{e^2 + g^2}) \right].$$

W przybliżeniu zerowym układ (2.26) rozwiązywały te same funkcje s_1 i p w obu zakresach: sprężysto-plastycznym i czysto plastycznym; w przybliżeniu pierwszym funkcja s_1 w zakresach tych jest przedstawiona różnymi wzorami. Warto jednak zauważyć, że «przechodzi» ona z zakresu do zakresu w sposób ciągły, bowiem na granicy odkształceń plastycznych, gdy $e = 1$, obie stałe C_1 i C_2 , obliczone ze wzorów (7.10) i (8.1) oraz (7.11) i (8.2), mają te same wartości, a zatem i całka szczególna jest wspólna.

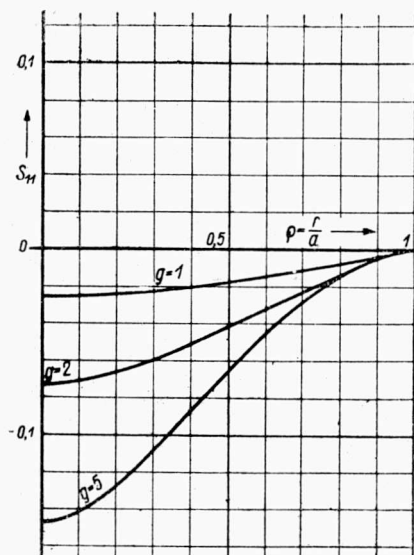
Naprężenia promieniowe i obwodowe są określone wzorami (7.13) i (7.14), do których należy teraz wstawić (8.3). Pochodna s'_{11} jest równa

$$(8.4) \quad s'_{11} = \frac{2eg^2\varrho}{(e^2 + g^2\varrho^2)(\sqrt{e^2 + g^2}\varrho^2 + e)^2}$$

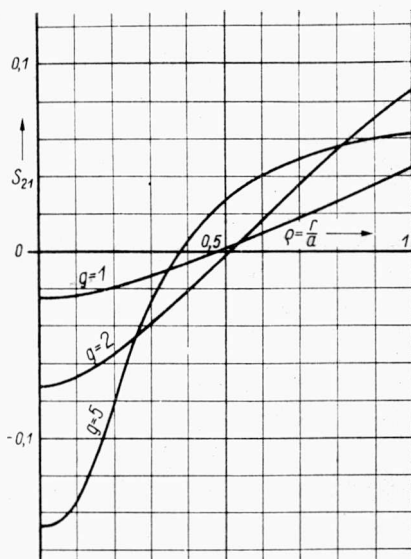
i jest stale nieujemna, a równa zero, gdy $\varrho = 0$. W tym punkcie funkcja s_{11} osiąga wartość najmniejszą (co do modułu największą), wynoszącą

$$(8.5) \quad [s_{11}]_{\varrho=0} = -\frac{2}{e} \left\{ \ln \left[1 + \frac{g^2}{(\sqrt{e^2 + g^2} + e)^2} \right] - \frac{g^2}{2(\sqrt{e^2 + g^2} + e)^2} \right\}.$$

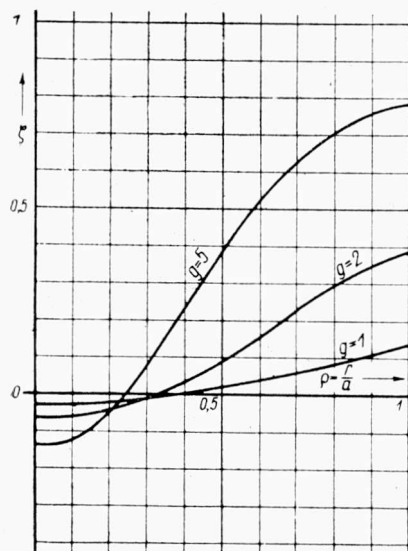
Rozkład naprężeń promieniowych i obwodowych w przypadku $e = 2$ przedstawiają rys. 15 i 16.



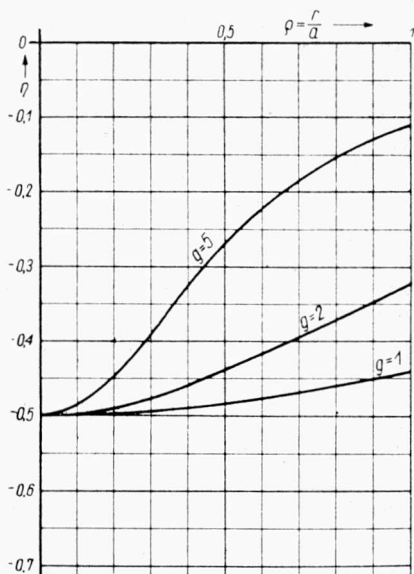
Rys. 15. Rozkład naprężeń promieniowych σ_r w przypadku $e=2$ (zakres czysto plastyczny). Przybliżenie pierwsze



Rys. 16. Rozkład naprężeń obwodowych σ_θ w przypadku $e=2$ (zakres czysto plastyczny). Przybliżenie pierwsze



Rys. 17. Błędy przy obliczaniu naprężenia osiowego σ_z w przybliżeniu zerowym w przypadku $e=2$ (zakres czysto plastyczny)



Rys. 18. Błędy przy obliczaniu naprężenia stycznego $\tau_{\theta z}$ w przybliżeniu zerowym w przypadku $e=2$ (zakres czysto plastyczny)

Funkcje ζ i η , decydujące o wielkości błędów przy obliczaniu naprężeń σ_z i $\tau_{\theta z}$ z przybliżeniem zerowym, są w zakresie czysto plastycznym określone tymi samymi wzorami, co w sprężysto-plastycznym, mianowicie (7.18) i (7.5), z tą różnicą, że do (7.18) należy wstawić (8.3) zamiast (7.12).

Rozkład błędów w przypadku $e = 2$ jest przedstawiony na rys. 17 i 18. Obserwujemy nieznaczne różnice w wartościach ζ , natomiast gwałtowny wzrost (co do modułu) wartości η w porównaniu z zakresem sprężysto-plastycznym. Moduły obu funkcji, ζ i η , w całym zakresie czysto plastycznym nie przekraczają jednak jedności (podobnie jak w zakresie sprężysto-plastycznym), zatem przy $\nu = 0,3$, błędy nie przekraczają 15,4%.

W zakresie czysto plastycznym zależność siły podłużnej i momentu skręcającego od wydłużenia i kąta skręcenia daje się również wyrazić przy pomocy skończonej kombinacji funkcji elementarnych, jednak i tu analizę błędów przybliżenia zerowego łatwiej przeprowadzić w oparciu o znajomość błędów w rozkładzie naprężeń. W przypadku $\nu = 0,3$ można przyjąć, że siła podłużna jest o kilka procent większa, a moment skręcający o kilka procent mniejszy od obliczonego wzorami przybliżenia zerowego.

Literatura cytowana w tekście

- [1] N. I. Biezuchow, *Teoria uprugosti i plasticznosti*, Gostiechizdat, Moskwa 1953.
- [2] L. Collatz, *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*, Akad Verlagsges., Lipsk 1949.
- [3] F. A. Gaydon, *On the Combined Torsion and Tension of a Partly Plastic Circular Cylinder*, Journ. Mech. Appl. Math. 1 (1952) Oksford.
- [4] R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oksford 1950.
- [5] M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, t. 1, PAU, Kraków 1948.
- [6] L. S. Lejbienzon, *Kurs teorii uprugosti*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1947.
- [7] R. A. Mieźtiumjan, *O funkcji popieriecznoy dieformacji*, Prikl. Mat. Miech., t. 16, Moskwa 1952, str. 491.
- [8] A. Nádai, Trans. Am. Soc. Mech. Eng. 52 (1930), str. 193; cyt. według [4].
- [9] A. Nádai, *Plasticity*, Mc Graw-Hill. New York i Londyn 1931.
- [10] J. Nowiński i W. Olszak, *O podstawach teorii sprężystości ciał fizykalnie nieliniowych*, Arch. Mech. Stos. 1 (1954).
- [11] A. R. Rżanicyn, *Raszot sooruzenij s uczotom plasticzeskich swojstw matieriałow*, Strojwojenmorizdat, Moskwa 1949.
- [12] W. Sierpiński, *Zasady algebry wyższej*, Monogr. Matem., Warszawa-Wrocław 1946.
- [13] M. Sokołowski, *Zastosowania metody małych parametrów w zagadnieniach płyt*, Arch. Mech. Stos. 3 (1953).
- [14] W. W. Sokołowski, *Teoria plasticznosti*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1950.

Р е з ю м е

СЛУЧАЙ ОДНОВРЕМЕННОГО РАСТЯЖЕНИЯ И КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

Работа решает поставленный вопрос, основываясь на теории пластических деформаций Г е н к и. Выводятся общие уравнения и формируются краевые условия. Общие уравнения интегрируются точно в случае несжимаемого материала, которого коэффициент Пу а с с о н а равен $1/2$, и приближенно, в случае сжимаемого материала, причем приводится оценка погрешности.

Случай одновременного растяжения и кручения стержня можно охарактеризовать пятью параметрами: скручивающим моментом M_s , продольной силой N , предельным радиусом c , отделяющим пластическую зону от упругой, относительным удлинением ε и углом закручивания на единицу длины Φ . В работе подробно рассматриваются зависимости между этими параметрами. Зависимости нагрузок от деформаций выражаются при помощи элементарных функций, обратные же зависимости не обладают этим свойством. Они представляются графически и численно.

Результаты работы дают возможность определить три любых параметра, имея два остальных, так в упруго-пластическом состоянии, как и в чисто пластическом.

S u m m a r y

THE PROBLEM OF COMBINED TENSION AND TORSION OF A CIRCULAR BAR IN THE ELASTO-PLASTIC RANGE

The problem is solved on the basis of H e n c k y's theory of plastic deformations. General equations are derived and boundary conditions stated. The general equations are integrated in an exact manner in the case of an incompressible material having P o i s s o n's ratio equal to $1/2$. In the case of a compressible material an approximate integration is carried out together with the evaluation of error.

The problem of simultaneous tension and torsion of a bar can be characterized by means of five parameters: torque M_s , longitudinal force N , radius c of the boundary separating the plastic region from the elastic region, unit elongation ε and unit angle of twist Φ . The relations between these parameters are considered in detail. The stresses can be expressed in terms of strains by means of elementary functions. The inverse relations however have not this property. They are expressed graphically and numerically.

The results permit to determine any three parameters in the elasto-plastic and plastic range, when two other parameters have a known value.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

UKAZAŁY SIĘ

Tom I obejmuje oddzielne zeszyty I - XV.1

- I. F. Szelągowski, Rozwiązanie zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych
— O pewnych szczególnych przypadkach wytrzymałości tarczy nieograniczonej z odmiennym ośrodkiem zarysu eliptycznego
- II. J. Naleszkiewicz i A. Szaniawski, Drgania i stateczność masztów oraz iglic
- III. Z. Klębowski, Podstawy uwzględniania wzmocnień obwodowych w wytrzymałościowym obliczaniu rury poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia
- IV. M. Życzkowski, Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem siły krytycznej
- V. E. Szczepaniak, Nowa metoda rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach bez wykonywania przecięć
- VI. W. Olszak, Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych (Plastyczne wyczerpanie nośności)
- VII. A. Lisowski, Płyty na sprężystym podłożu
- VIII. J. Nowiński, Wyznaczenie przybliżonej wielkości ugięcia płyt na podstawie metody Ritza
- IX. W. Fiszdón, O pewnej metodzie obliczania amplitud drgań
- X. Z. Wasiutyński, O kształtach pęknięć powierzchniowych
- XI. W. Wierzbicki, Dźwigary załamane w planie
- XII. W. Wierzbicki, O powstawaniu wyboczenia prętów prostych
- XIII. W. Wierzbicki, Kierunki możliwych usprawnień w obliczeniach łuków
- XIV. W. Zenczykowski, Podstawy wytrzymałościowe obliczeń statycznych konstrukcji murowanych z cegły
- XV.1. W. Wierzbicki, Zastosowanie różnic skończonych w przypadkach dwukierunkowych stanów naprężeń w budowlach

Tom II zeszyt 1

- XVI. I. Małeck i, Metody zastosowania rachunku tensorowego w technice
- XVII. J. Nowiński, Podstawy teorii plastyczności (I). Siedem wykładów
- XVIII. W. Nowacki, Statyka rusztów płaskich

Tom II zeszyt 2

- XIX. W. Bogusz, Z teorii płyt ortotropowych
- XX. J. Szmelter, Rozwiązanie zagadnienia błony metodą różnic skończonych z użyciem specjalnego liczydła
- XXI. M. Sokołowski, Dwustopniowy sposób obliczania pewnego typu płyt ortotropowych
- XXII. M. Życzkowski, Wyboczenie sprężysto-plastyczne niektórych prętów pryzmatycznych

Tom III zeszyt 1

- XXIII. M. P. Wołarowicz, Badania nad własnościami reologicznych układów rozproszonych
XXIV. W. Pogány, O pewnych zagadnieniach mechaniki gruntów
XXV. J. Nowiński, Szlakami teorii sprężystości
XXVI. K. Wołski, Metoda punktów kinetycznych
XXVII. J. T. Pindera, Technika elastooptycznych badań płaskiego stanu naprężenia

Tom III zeszyt 2

- XXVIII. W. Olszak i A. Sawczuk, Teoria nośności granicznej płyt w świetle weryfikacji doświadczalnej (I)
XXIX. A. Sawczuk, Zagadnienia nośności granicznej elementów rozciąganych i zginanych w zastosowaniu do teorii zbiorników prostokątnych
XXX. M. Życzkowski, Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym

W D R U K U

- XV.2. W. Wierzbicki, O geometrycznych metodach badania konstrukcji prętowych
XXXI. M. Bieniek, Metody teorii stateczności ruchu
XXXII. W. Prosnak, Struktura fali uderzeniowej
XXXIII. W. Wierzbicki, Analiza schematów statycznych konstrukcji drewnianych

W P R Z Y G O T O W A N I U

- XXXIV. J. Klott, J. Naleszkiewicz, J. Rutecki i K. Wituszyński, Studia wstępne z dziedziny skręcania kadłuba na fali skośnej

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ ukazuje się jako kwartalnik i kosztuje w prenumeracie rocznej 60 zł.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE ukazywały się do połowy 1954 r. jako wydawnictwo seryjne. Zeszyty od I do XV.1 są do nabycia w księgarniach naukowych Domu Książki. Zamówienia za zaliczeniem przyjmuje Księgarnia Naukowa, Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7.

Poczynając od III kwartału 1954 r. ROZPRAWY INŻYNIERSKIE ukazują się jako kwartalnik i kosztują w prenumeracie rocznej 80 zł.

Sprzedaż bieżących numerów odbywa się w księgarniach naukowych Domu Książki i w placówkach «Ruchu».
