

Techn. 408y i Sci. 408y
C-42

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

KWARTALNIK

TOM III • ZESZYT 1



WARSZAWA • 1955

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

T R E Ś Ć T O M U I I I Z E S Z Y T U 1

XXIII. WOŁAROWICZ, M. P. Badania nad własnościami reologicznych układów rozproszonych	3
XXIV. POGÁNY, W. O pewnych zagadnieniach mechaniki gruntów	33
XXV. NOWIŃSKI, J. Szlakami teorii sprężystości	57
XXVI. WOLSKI, K. Metoda punktów kinetycznych	79
XXVII. PINDER, J. T. Technika elastooptycznych badań płaskiego stanu naprężenia	109

TABLE DES MATIÈRES DU VOL. III FASC. 1

XXIII. WOŁAROWICZ, M. P. Исследование реологических свойств дисперсных систем Investigation of Rheological Properties of Dispersed Systems	3
XXIV. POGÁNY, W. Некоторые вопросы механики грунтов Some Problems of Soil Mechanics	33
XXV. NOWIŃSKI, J. По следам теории упругости A Historical Survey of the Theory of Elasticity	57
XXVI. WOLSKI, K. Метод кинетических точек Method of Kinetic Points	79
XXVII. PINDER, J. T. Техника оптических исследований плоского напряженного состояния The Technique of Photoelastic Investigation of Plane States of Stress	109

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTITUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

XXIII - XXVII



WARSZAWA • 1955

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

ZAWIERAJĄ PRACE BADAWCZE Z ZAKRESU TEORII SPRĘŻYSTOŚCI
I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMODYNAMIKI
ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW KONSTRUKCJI

R A D A R E D A K C Y J N A
WITOLD NOWACKI — PRZEWODNICZĄCY
JULIAN BONDER WACŁAW OLSZAK
BOHDAN STEFANÓWSKI STANISŁAW TURSKI
WITOLD WIERZBICKI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y
JERZY NOWIŃSKI — REDAKTOR
TADEUSZ IWIŃSKI JÓZEF JANICZEK

Adres Redakcji
WARSZAWA, ul. Śniadeckich 8, I p.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE XXIII-XXVII

Copyright 1955 by Polska Akademia Nauk.
Warszawa (Poland). Printed in Poland. All rights reserved

Nakład 1694+200 nadb. Papier druk. sat. B.1 16, 70—80 g. Arkuszy wydawn. 13.8. Arkuszy drukarskich 11
Oddano do składania dn. 26.8.1954. r. Druk ukończ. w lutym 1955 r. Zam. 391. B-6-559. Cena zł 20.—

Stoł. Zakł. Graf., Drukarnia Naukowa, Warszawa, Śniadeckich 8.

M. P. WOŁAROWICZ

BADANIA NAD WŁASNOŚCIAMI
REOLOGICZNYCH UKŁADÓW ROZPROSZONYCH



ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXIII

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	5
2. Z historii reologii	6
3. Przepływ ustalony substancji lepko-plastycznej	12
A. Rozwiązania teoretyczne	13
B. Metody doświadczalne i przyrządy	15
I. Metody integralne	16
II. Metody różnicujące	18
C. Przykłady badania reologicznego układów rozproszonych	22
4. Bibliografia	26

1. Wstęp¹⁾

W ciągu ostatnich lat kilkudziesięciu rozwinęła się szeroko reologia — nauka o płynności materii. Jest to nowa dziedzina nauki, nie ma więc jeszcze dostatecznie określonego zakresu i treści. Reologia rozpatruje przede wszystkim zagadnienia odkształcenia i przepływu materiałów łatwo odkształcalnych, tj. przepływ lepkich cieczy, anomalie lepkości, plastyczność koloidów oraz zjawiska relaksacji, opóźnienia sprężystego i tyksootropii układów rozproszonych.

Z zagadnieniami reologii spotykamy się obecnie w każdej dziedzinie przemysłu. W technologii najrozmaitszych procesów wytwórczych, w projektowaniu i w obliczeniach konstrukcyjnych uwzględnia się dziś wyniki badań reologicznych nad niezliczonym wprost mnóstwem materiałów. Dla przykładu wymienimy: gliny, gleby, torfy, farby, smary gęste, różne produkty otrzymywane z ropy naftowej (oleje, bitumy itp.), polimery wysokiego rzędu, różnorakie materiały budowlane (zaprawy cementowe i wapienne itp.), roztwory gliny stosowane w wiertnictwie, kleje, smoły, roztwory kauczuku, żelatyny i krochmalu, różne białka (kazeina, proteina itp.), tłuszcze i wiele innych produktów przemysłu spożywczego, rozmaite materiały włókniste (jedwab, wełna, włókna sztuczne itp.), żużle, szkła, materiały ogniotrwałe i inne stopione krzemiany. W ZSRR reologia rozwinęła się szczególnie szeroko w związku z uprzemysłowieniem kraju i mechanizacją różnorodnych procesów wytwórczych. Aby móc wykonywać obliczenia i użytkować te lub inne maszyny i mechanizmy, trzeba znać własności reologiczne materiałów, które za pomocą tych maszyn obrabiamy, transportujemy itd.

Reologia rozpatruje procesy związane z nieodwracalnymi, trwałymi odkształceniami materii. Jest ona przeto nauką bliską hydrodynamiki i teorii sprężystości. Teoria sprężystości omawia odkształcenia sprężyste, odwracalne, niezależne od czasu i o rozmiarach nieznaczących. Jest to pierwsze przybliżenie do rzeczywistości. Tymczasem nie ma ciał absolutnie sprężystych. Wiadomo dobrze, że wszystkie ciała czy to w stanie ro-

¹⁾ Praca przedstawiona na Kursie Naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w sierpniu 1953 r. w Karpaczu.

dzimym, czy też w postaci wytworów przemysłowych posiadają w większym lub mniejszym stopniu zdolność płynięcia. Najlepsze gatunki stali sprężystej, znajdując się pod dostatecznie dużym obciążeniem, z biegiem czasu odkształcają się trwale wskutek nieodwracalnych względnych przemieszczeń cząstek żelaza i węgla, tj. wskutek płynności materii. Nawet takie ciała stałe, jak skały, przejawiają płynność w wielu przypadkach. Można to łatwo zaobserwować w górach, gdzie pokłady skalne wskutek odkształceń plastycznych związanych z ruchami skorupy ziemskiej są powyginane w najrozmaitszy sposób.

Reologia stanowiąc część mechaniki została wyodrębniona w oddzielną naukę dopiero niedawno, bo zaledwie piętnaście czy dwadzieścia lat temu, ale podstawy jej zakładano stopniowo w ciągu uprzednich lat dzieśiątków i setek. Reologia zapożyczyła przy tym wiele z mechaniki i teorii sprężystości, a szeroko posługiwała się również metodami wiskozymetrii.

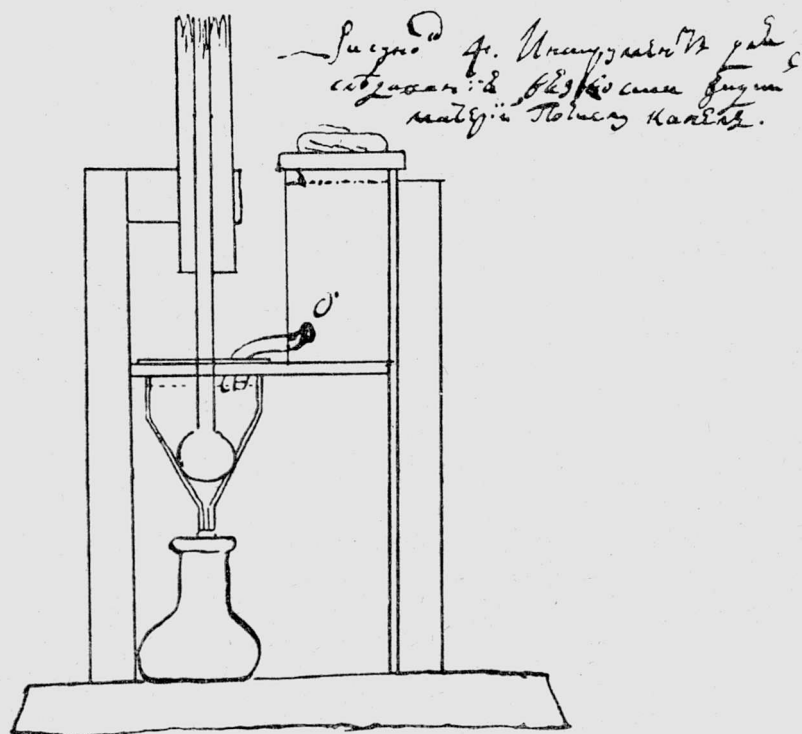
Twórcami głównych działów reologii są wybitni rosyjscy uczeni: M. W. Ł o m o n o s o w, [1], D. I. M i e n d i e l e j e w, [2], N. P. P i e t r o w, [3], F. N. S z w i e d o w, [4], N. S. K u r n a k o w, [5], i inni.

W pracy niniejszej przedstawiony jest najpierw krótki rys historii rozwoju badań w dziedzinie reologii w Rosji do Wielkiej Październikowej Rewolucji Socjalistycznej. Następnie podano opis szeregu prac uczonych radzieckich nad własnościami reologicznymi układów rozproszonych, przy czym opis zilustrowano przykładami zaczerpniętymi głównie z badań piszącego te słowa i jego współpracowników. Artykuł omawia: fenomenologiczną teorię przepływu lepko-plastycznego układów rozproszonych; część doświadczalną związaną z konstruowaniem przyrządów i opracowaniem metod pomiaru reologicznych parametrów koloidów; próby interpretacji koloidalno-molekularnej procesów przepływu lepko-plastycznego układów rozproszonych oraz przykłady praktycznego stosowania wyników badań reologicznych.

2. Z historii reologii

Wielki uczony rosyjski M. W. Ł o m o n o s o w opracowując głoszoną przez siebie teorię kinetyczno-molekularną budowy materii interesował się zagadnieniami płynności cieczy. Wynałazł przy tym wiskozymetr kapilarny, którego schemat podany jest na rys. 1. Zasada działania przyrządu jasno wynika z rysunku. Uchwała Kancelarii Akademii Nauk z dnia 21 maja 1751 r., zawierająca postanowienie zbudowania dla Ł o m o n o s o w a szeregu przyrządów, nazwała ten wiskozymetr «instrumentem do badania lepkości substancji ciekłych według liczby kropel», [1].

Rzecz ciekawa, że Ł o m o n o s o w miał zamiar wykonywać pomiary lepkości cieczy w związku z badaniami «sił spójności» (cząsteczek) w cieczach. Chciał przy tym badać siły spójności zarówno cieczy czystych, jak i roztworów, np. «spójność kropeł alkoholi», «spójność kropeł przy nadmiarze kwasu» i «spójność bitumów». Widzimy więc, że Ł o m o n o s o w zajmował się również zagadnieniami mikrореologii.



Rys. 1. Schemat wiskozymetru kapilarnego M. W. Łomonosowa (1751 r.)

Nie będziemy zatrzymywali się dłużej na ogólnie znanych pracach akademików petersburskich Daniela Bernoulliego, [6], i Leonarda Eulera, [7], nad podstawami hydrodynamiki cieczy idealnej. Wspomniemy natomiast o ciekawych, a do niedawna mało jeszcze znanych dociekaniach profesora uniwersytetu w Kazaniu I. S. Gromieki, [8], który pracując w dziedzinie hydrodynamiki po raz pierwszy uwzględnił ruch wirowy w równaniach ruchu cieczy.

Należy zwrócić uwagę na wybitne dzieło D. I. Miendielejewa z r. 1880 O oporze cieczy, [2]. Te badania genialnego chemika i fizyka nie są tak powszechnie znane, jak jego wspaniałe prawo okresowości i wiele innych prac. Analiza spuścizny Miendielejewa w dziedzinie prze-

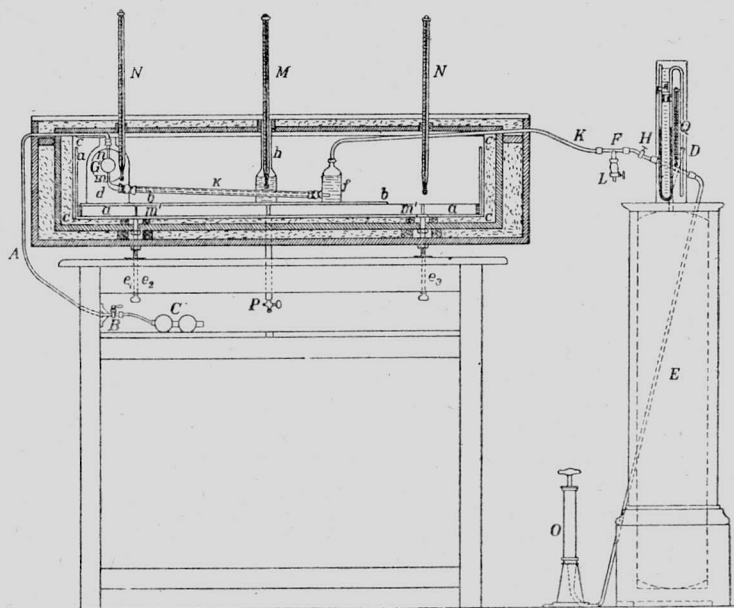
plywu cieczy wskazuje, że wiele uwagi poświęcił on ugruntowaniu ogólnych zasad hydrodynamiki cieczy lepkiej. W pracach swych, poświęconych w znacznym stopniu zagadnieniom lotnictwa, rozpatrywał oczywiście przede wszystkim problemy aerodynamiki. Jednak badał też szczegółowo szereg ważnych i nie wyjaśnionych podówczas procesów przepływu cieczy. Roztrząsając kwestię o zależności oporu od prędkości ruchu cieczy *M i e n d i e l e j e w* zupełnie słusznie wskazał, że przy małych prędkościach przepływu opór jest proporcjonalny do prędkości, przy prędkościach zaś dużych — do kwadratu prędkości. Przypomnijmy, że artykuł *O. R e y n o l d s a*, [9], w którym autor pisze o laminarnym i turbulentnym przepływie cieczy, ukazał się później, mianowicie w 1883 r.

Prace *M i e n d i e l e j e w a* odegrały dużą rolę pod koniec zeszłego wieku wpływając na rozwój w Rosji licznych badań z dziedziny hydrodynamiki, hydrauliki i aerodynamiki, które właściwie wykraczają poza zakres reologii (*N. J. Ż u k o w s k i*, [10], *S. A. C z a p ł y g i n*, [11], i inni), z dziedziny reologii koloidów (*F. N. S z w i e d o w*, [4], i inni) oraz z dziedziny reologii smarów (*N. P. P i e t r o w*, [3], i inni). Wybitny moskiewski mechanik i fizyk, *N. J. Ż u k o w s k i*, w referacie na XIII Zjeździe rosyjskich przyrodników i lekarzy w Tbilisi (1913 r.) powiedział, [12]: «*D. I. M i e n d i e l e j e w* wskazał drogę, po której należy kroczyć w badaniach nad trudnymi zagadnieniami oporu cieczy».

N. P. P i e t r o w jest twórcą hydrodynamicznej teorii smarowania maszyn, [3]. Jednocześnie założył podstawy reologii smarów. Skonstruował też i zbudował bardzo dokładny wiskozymetr kapilarny, [13], którego schemat podaje rys. 2. Badany smar, zawarty w zbiorniku *f*, przepływa przez kapilarę *k* do kulki *G* pod ciśnieniem, które wytwarza się w manostacie *E* za pomocą pompy *O*. Ciśnienie mierzy manometr wodny *D*. Do mierzenia czasu, w ciągu którego kulka *G* napełnia się smarem, służy sekundomierz. Przyrząd umieszczano w termostacie, przy czym temperatura kontrolowana była za pomocą trzech termometrów.

Opisany przyrząd *P i e t r o w a* był pierwszym wiskozymetrem bezwzględny, nie wymagającym uprzedniego cechowania. *P i e t r o w* bowiem, aby obliczyć lepkość według wzoru *P o i s e u i l l a - H a g e n a*, bardzo dokładnie ustalił wymiary kapilary i kulki wiskozymetru. Toteż wyniki jego badań nad lepkością wody były nie mniej dokładne niż dane *P o i s e u i l l a*, [14]. Jedną z wydatnych różnic pomiędzy wiskozymetrem *P i e t r o w a* a przyrządem *P o i s e u i l l a* polega na tym, że *P i e t r o w* zastosował dwa zbiorniki na końcach kapilary. Omówiliśmy bliżej wiskozymetr *P i e t r o w a*, gdyż przyrządy tego typu były później często stosowane w ZSRR i innych krajach do badań nad własnościami reologicznymi układów rozproszonych.

P i e t r o w oznaczył lepkość kilkudziesięciu olejów smarowniczych mineralnych i roślinnych w granicach temperatur od 20° do 60°C . Ustalił przy tym, że nachylenie temperaturowych krzywych lepkości olejów roślinnych jest znacznie większe niż mineralnych. Na podstawie tych badań P i e t r o w dał wskazówki, jak w sposób naukowy dobierać oleje do smarowania maszyn i jak zamieniać jeden olej na inny.



Rys. 2. Schemat wiskozymetru kapilarnego N. P. P i e t r o w a do mierzenia lepkości smarów w szerokich zakresach temperatur

Znaczenie prac P i e t r o w a wyrasta daleko poza zakres reologii smarów. W owym czasie zagadnienia hydrodynamiki były jeszcze bardzo niejasne; tak więc bynajmniej nie było rzeczą pewną, że ogólne równanie ruchu cieczy lepkiej N a v i e r - S t o k e s a można stosować do obliczeń hydrodynamicznych i wiskozymetrycznych. P i e t r o w, po zapoznaniu się z obszerną literaturą z dziedziny dydrodynamiki teoretycznej i doświadczalnej od czasów N e w t o n a począwszy (E u l e r, B e r n o u l l i, C o u l o m b, N a v i e r, S t o k e s, M e y e r, G i r a r d, H e l m h o l t z, J a c o b s o n, P o i s e u i l l, H a g e n, M i e n d i e l e j e w i inni) oraz po zanalizowaniu i krytycznym rozpatrzeniu tego olbrzymiego materiału, doszedł do wniosków w zupełności słusznych. Był pierwszym, który wykazał, że dokładne doświadczenia P o i s e u i l l a (z laminarnym przepływem cieczy przez rury) całko-

wicie potwierdzają teoretyczne równania hydrodynamiki cieczy lepkiej Newtona - Naviera - Stokesa.

Twórcą reologii układów rozproszonych jest F. N. Szwiedow, który w słynnych swych pracach, [4], pierwszy stwierdził anomalię lepkości i sprężystość postaci koloidów na przykładzie 0,5% roztworu wodnego żelatyny.

Dowiódł on, że roztwory koloidalne, nawet o małym stężeniu, zachowują się podczas przepływu inaczej niż idealne newtonowskie cieczy lepkie, wykazują bowiem granice płynności (graniczne naprężenie ścinające). Te prace Szwiedowa są bardzo ciekawe i do dziś zachowały pierwszorzędne znaczenie.

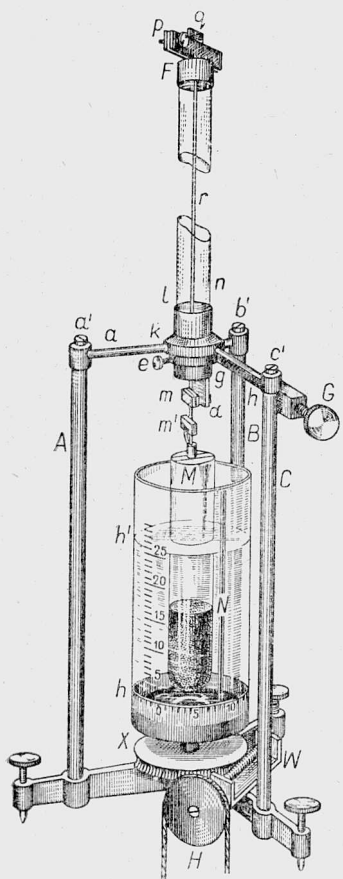
Stosowany przez Szwiedowa przyrząd, oparty na zasadzie obracającego się walca, przedstawiony jest na rys. 3. Substancję badaną umieszczano między dwoma współosiowymi wałcami szklanymi, z których wewnętrzny, M , zawieszony był na nici sprężystej; zewnętrzny, $h'h$, można było wprowadzać w ruch obrotowy za pomocą motoru elektrycznego. Obserwując skręcenie nici sprężystej podczas równomiernego obrotu walca zewnętrznego, wyznaczano lepkość substancji badanej, obracając zaś — w czasie spoczynku walca zewnętrznego — główkę, F , nitki podwieszenia, badano sprężystość postaci danej substancji.

Szwiedow ustalił moduł ścinania, G , 0,5% roztworu żelatyny na $0,535 \text{ dyn/cm}^2$. Badając proces relaksacji tego roztworu Szwiedow wykazał, że równanie Maxwella, [15], nie pokrywa się z danymi doświadczalnymi. Naprężenia nie znikają całkowicie, wobec czego Szwiedow wprowadził wyraz dodatkowy do równania Maxwella. Czas relaksacji, T , wspomnianego roztworu żelatyny wyniósł 13,7 sek.

Stwierdziwszy anomalię lepkości Szwiedow ustalił, że w przypadku 15-krotnego

zwiększenia prędkości obrotu walca lepkość 1% roztworu żelatyny zmniejsza się 7-krotnie.

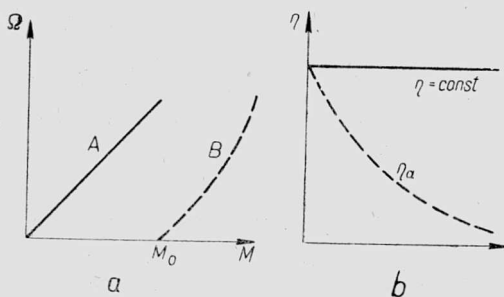
Szwiedow pierwszy więc zaobserwował w układach koloidalno-rozproszonych te zjawiska anomalii, których graficzne ujęcie wygląda



Rys. 3. Przyrząd F. N. Szwiedowa z obracającym się wałcem do badania sprężystości postaci oraz anomalii lepkości koloidów

zwykle tak, jak to podaje rys. 4. Na osi odciętych tego rysunku odłożony został moment obrotowy, M , a na osi rzędnych prędkość kątowna obrotu walca wiskozymetru, Ω . Zgodnie z całą równania Newtona otrzymaną przez Pietrowa, mianowicie $\eta = kM/\Omega$, gdzie η jest lepkością cieczy, a k stałą przyrządu obliczoną na podstawie jego wymiarów, wykres $\Omega = f(M)$, jeśli chodzi o ciecz lepką idealną, jest prostoliniowy (linia A na rys. 4a). Gdy natomiast chodzi o roztwory koloidalne i gruboziarniste układy rozproszonych, to zależność Ω i M jest krzywo-

liniowa (krzywa B na rys. 4a). Z rys. 4b wynika, że lepkość anomalna układów koloidalno-rozproszonych, η_a , jest wielkością zmienną, malejącą ze wzrostem naprężenia ścinającego, τ , lub — co na jedno wychodzi — ze wzrostem gradientu prędkości. Lepkość idealnych cieczy newtonowskich, η , nie zależy, oczywiście, ani od naprężenia, ani od prędkości ścinania. Trzeba podkreślić, że jeśli do doświadczeń stosujemy wiskozymetry kapilarne, to otrzymujemy takie same zależności.



Rys. 4. Wykresy charakteryzujące anomalię lepkości układów rozproszonych. Linie ciągłe — idealna ciecz newtonowska; linie kropkowane — układy rozproszone o lepkości anomalnej

Opracowując wyniki swych doświadczeń S z w i e d o w pierwszy ułożył równanie ustalonego przepływu lepko-plastycznego. Równaniu temu nadał następującą postać:

$$(1) \quad \eta_a = G T + \frac{\Theta}{\dot{\gamma}},$$

gdzie η_a jest lepkością anomalną (zmienną), Θ granicznym naprężeniem ścinającym, $\dot{\gamma}$ prędkością ścinania, tj. gradientem prędkości. Wielkość η_a można zastąpić stosunkiem $\tau/\dot{\gamma}$, gdyż lepkość anomalna obliczana była jako stosunek całego naprężenia ścinającego, τ , do gradientu prędkości. Według S z w i e d o w a, tak samo zresztą jak i według M a x w e l l a, można prócz tego założyć, że iloczyn modułu ścinającego, G , przez czas relaksacji, T , równa się rzeczywistej lepkości ośrodka, η_{pl} , którą obecnie nazywamy lepkością plastyczną. W takim razie

$$(2) \quad \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \eta_{pl} + \frac{\Theta}{\dot{\gamma}}.$$

Oznaczając gradient prędkości $\dot{\gamma}$ przez dv/dz można wreszcie napisać równanie przepływu lepko-plastycznego w następującej postaci:

$$(3) \quad \tau - \Theta = \eta_{pl} \frac{dv}{dz}.$$

Istnienie granicznego naprężenia ścinającego, Θ (granica płynności), w układach koloidalno-rozproszonych uwidaczniają wykresy w rodzaju rys. 4a. Punkt przecięcia M_0 krzywej B z osią odciętych wskazuje, że w razie momentów obrotu mniejszych od M_0 płynięcie układu lepko-plastycznego nie dochodzi do skutku. Wartość Θ łatwo obliczyć znając M_0 , ponieważ M_0 jest prostą funkcją Θ . Jeżeli założymy, że $\Theta = 0$, tj. że substancja nie posiada granicy płynności, to równanie (3) przekształca się w zwykłe newtonowskie równanie przepływu lepkiego.

W r. 1912 uczeń F. N. S z w i e d o w a, B. P. W i e j n b i e r g, [16], po raz pierwszy scałkował równanie (3) biorąc dane uzyskane przy użyciu wiskozymetru z obracającym się walcem. W i e j n b i e r g przeprowadzał badania reologicznych własności lodu, [17]. Wraz z szeregiem współpracowników poddawał również badaniom własności reologiczne bitumów i wydał serię publikacji z tego zakresu, [18]. Opracował przy tym kilka nowych przyrządów i metod.

Równanie (3) było odąd szeroko stosowane w reologii układów rozproszonych. Dla przepływu ośrodka lepko-plastycznego przez rurę cylindryczną ułożył to równanie B i n g h a m, a scałkował B u c k i n g h a m, [19]. Piszący te słowa wraz z A. M. G u t k i n e m dowiódł, [20], że układ równań H e n c k y' e g o, [21], oraz A. A. I l j u s z i n a, [22], wyraża własności takiego samego ośrodka lepko-plastycznego, jak i równanie (3).

Do prac F. N. S z w i e d o w a zbliżone są badania D i e m i e t c a nad własnościami mechanicznymi cieczy i roztworów koloidalnych, w szczególności jego obserwacje co do dwójłomności ciekącego płynu, [23]. Z drugiej strony nieco na uboczu od tych samych zagadnień stoją prace N. A. G i e z i e c h u s a, [24], o zjawisku opóźnienia sprężystego w kauczukach.

3. Przepływ ustalony substancji lepko-plastycznej

Równanie przepływu lepko-plastycznego, [3], S z w i e d o w a - B i n g h a m a rozwiązuje się dość łatwo w szeregu przypadków. Toteż sprawdzano je wielokrotnie doświadczeniami z różnymi układami rozproszonymi. W licznych przypadkach otrzymano przy tym wyniki zadowalające.

Zgodnie z równaniem (3) przepływ substancji plastycznych, związany z odkształceniami nieodwracalnymi, zaczyna się dopiero wtedy, kiedy naprężenia przekraczają graniczne naprężenie ścinające, θ . Przy naprężeniach mniejszych od θ można zaobserwować jedynie naprężenia sprężyste. Taka definicja przepływu plastycznego w znacznym stopniu odpowiada definicji, jaką w postaci jakościowej podał już Maxwell, [25]. Należy tylko zwrócić jeszcze uwagę na ściślejsze sformułowanie: gdy naprężenia ścinające są mniejsze od θ , wówczas w ciałach rzeczywistych można obserwować zjawiska sprężysto-kinetyczne, tzn. procesy opóźnienia sprężystego.

Kiedy jednak chodzi o przepływ ustalony, to można prawie zawsze nie uwzględniać tych odkształceń jako nikłych. Natomiast trwałe odkształcenia lepko-plastyczne układów rozproszonych są bardzo duże, co właśnie dobitnie charakteryzuje reologię substancji łatwo odkształcalnych.

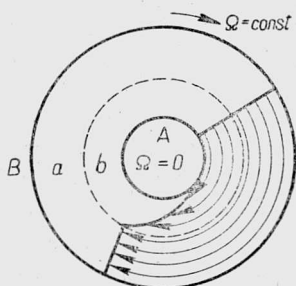
A. Rozwiązania teoretyczne. Wracając do równania (3) zauważymy, że oprócz podanych wyżej przykładów, mianowicie rury o przekroju kołowym, [19], [26], i względnego obrotu walców współosiowych, [16], [27], [28], zostało ono scałkowane w następujących przypadkach: podłużnie przesuwany walec, [29], zgniatanie walca, [30], przepływ przez kapilary szczelinowe i pierścieniowe ([20], odsyłacz pierwszy; [31]), przepływ płaski dwóch stykających się mas lepko-plastycznych, [32], obrót wału w łożysku przy użyciu smaru lepko-plastycznego ([20], odsyłacz drugi), przepływ po równi pochyłej, [33], [34]. Oczywiście, w przypadkach bardziej złożonych równania różniczkowe przepływu substancji lepko-plastycznej trzeba było przedstawiać w bardziej ogólnej postaci, mianowicie według H e n c k y' e g o - I l j u s z i n a, [20], [21], [22].

Przystępując do rozwiązania tego rodzaju zadań, trzeba zawsze brać pod uwagę, że substancja lepko-plastyczna, znajdująca się pod działaniem naprężeń w trakcie przepływu, może mieć obszary odkształceń tak plastycznych, jak i sprężystych. W obszarach podlegających tylko sprężystym odkształceniom odwracalnym naprężenie nie osiąga granicznego naprężenia ścinającego. Inaczej ma się rzecz z obszarami odkształceń plastycznych: naprężenia przekraczają tu granicę płynności, a przepływ substancji dokonywa się nieodwracalnie.

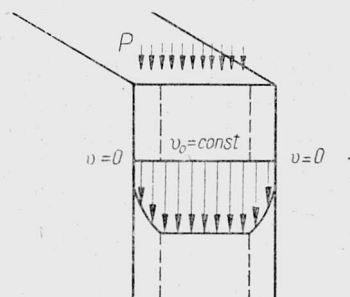
Jednym z podstawowych zadań reologii teoretycznej i doświadczalnej jest rozgraniczenie tych obszarów bądź stref. Na rys. 5 przedstawione są obszary odkształceń sprężystych (a) i plastycznych (b) substancji lepko-plastycznej, znajdującej się w szczelinie między dwoma współosiowymi walcami, A i B, z których jeden (w danym przypadku zewnętrzny, B)

obraca się ze stałą prędkością kątową Ω . Przypadek ten, rozpatrzony teoretycznie, sprawdzono również doświadczalnie, [28].

Schemat na rys. 6 obrazuje rozkład prędkości przepływu, gdy substancja lepko-plastyczna przesuwana jest pod ciśnieniem P przez kapilarę płaską, tzn. przez wąską szczelinę o przekroju prostokątnym. Środkowa część masy — tak samo jak to się dzieje w rurze o przekroju kołowym — przesuwa się na podobieństwo ciała sztywnego z prędkością stałą v_0 .



Rys. 5. Obszary odkształceń sprężystych (a) oraz plastycznych (b) w układzie lepko-plastycznym, znajdującym się w szczelinie między współosiowymi wałkami, przy czym wałek zewnętrzny obraca się z prędkością kątową 0



Rys. 6. Rozkład prędkości przepływu układu lepko-plastycznego przez kapilarę płaską pod ciśnieniem P

Rozpatrzono też przypadki, kiedy w lepko-plastycznym układzie rozproszonym, przepływającym przez rurę o przekroju kołowym lub pierścieniowym, graniczne naprężenie ścinające, Θ , lub lepkość plastyczna, η_{pl} , okazują się zmiennymi wzdłuż osi lub wzdłuż promienia rury, [35]. Może się to zdarzyć w razie, gdy część ośrodka dyspersyjnego (np. wodnego roztworu torfu) odsącza się przez porowate ścianki rury. Próbowano rozstrzygnąć zagadnienie opadania kuli w ośrodku lepko-plastycznym, [36], jednak nie udało się przy tym uzyskać rozwiązania ścisłego, [34].

Próbowano dla przepływu lepko-plastycznego opracować teorię podobieństwa i ustalić właściwe kryteria podobieństwa, [30], [37], [38]. Praca w tym ważnym kierunku powinna być w dalszym ciągu prowadzona i poszerzona. Jeżeli chodzi o przepływ lepko-plastycznego układu rozproszonego (roztworu gliny) przez rury, to zaproponowano uogólnione kryterium Reynoldsa, które obejmuje graniczne naprężenie ścinające, [37].

Należy jeszcze raz podkreślić, że jedna z charakterystycznych własności przepływu lepko-plastycznego układów rozproszonych — materiałów łatwo odkształcalnych — wyróżnia te materiały od metali, minerałów, materiałów kamiennych i temu podobnych «ciał stałych», których pla-

styczność została rozpatrzona w szeregu rozpraw, ([39], [40], [41], [42], [43] i inne). Charakterystyczna ta własność polega na tym, że procesy ich przepływu związane są z bardzo dużymi odkształceniami lepko-plastycznymi i z dużymi prędkościami odkształcenia.

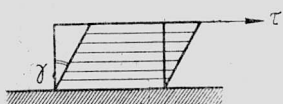
Wymienione powyżej zagadnienia mają określone znaczenie praktyczne. Uzyskane rozwiązania stosowane są bowiem bądź do obliczenia wartości Θ i η_{pl} , gdy wielkości te bywają określane doświadczalnie dla różnorodnych układów rozproszonych przy użyciu wiskozymetrów kapilarnych, obrotowych itd., bądź też do obliczeń w różnych przypadkach przepływu układów rozproszonych oraz przy opracowaniu projektów licznych procesów technologicznych, [44]-[52].

B. Metody doświadczalne i przyrządy. Należy zatrzymać się nieco przy metodach i przyrządach stosowanych do badania reologicznego koloidalnych i gruboziarnistych układów rozproszonych. Doświadczenia metodyczne przeprowadzamy w tym celu, żeby móc konstruować przyrządy i opracować metodykę wyznaczania za ich pomocą parametrów reologicznych Θ i η_{pl} , czasu relaksacji oraz charakterystyk opóźnienia sprężystego. Przyrządy i metody reologiczne są nader różnorokie, co tłumaczy się ogromną różnorodnością cieczy rzeczywistych i układów rozproszonych, jako też praktycznymi warunkami ich przepływu. Nie należy sądzić, iż jeden albo dwa jakiegokolwiek przyrządy będą mogły obsłużyć wszystkie przypadki reologicznych pomiarów dla cieczy i układów rozproszonych. Do substancji o rozmaitym stężeniu, dla różnych naprężeń i różnych gradientów prędkości, stosujemy rozmaite przyrządy. Przyrządy wyznaczające charakterystyki warunkowe (wiskozymetry typu englerowskiego, penetrometry, farynograf do badania ciasta itd.) nie powinny być stosowane w reologii. Nie będziemy ich tu rozpatrywali; zresztą autor tego referatu poddał je krytyce w szeregu swych prac, [50], [53].

Podkreślimy, że dokonanie wyboru właściwych przyrządów i metod nie jest często rzeczą prostą, a w dziedzinie reologii wybór taki ma szczególnie ważne znaczenie, jeżeli badania mają być uwieńczone powodzeniem. Przytoczymy tutaj dwa przykłady historyczne. Była już mowa o tym, że Ł o m o n o s o w, [1], pierwszy (w r. 1751) zastosował wiskozymetr kapilarny do badania lepkości cieczy (przepływ ustalony); jest to i dziś jeszcze podstawowa metoda wiskozymetrii. Później (w r. 1798) C o u l o m b, [54], skonstruował wiskozymetr oparty na zasadzie drgań skrętnych (przepływ nieustalony); obecnie jednak przyrząd ten prawie wcale nie znajduje zastosowania w wiskozymetrii.

Metody i przyrządy reologiczne można podzielić na integralne (całościowe) i dyferencjalne (różnicujące). Poza tym istnieją przyrządy z jednorodnym i niejednorodnym polem naprężeń i odkształceń.

1. Metody integralne — przyrządy kapilarne, obrotowe itp. — pozwalają stwierdzić sumaryczny efekt przepływu, a mianowicie: objętość substancji przepływającej przez kapilarę w jednostce czasu pod określonym ciśnieniem, prędkość kątową lub ilość obrotów walca na sekundę pod działaniem odpowiedniego obciążenia w wiskozymetrze obrotowym itd. Do ciał o anomalnej lepkości i plastyczności należy koniecznie stosować metody całościowe z jednorodnymi polami naprężeń i odkształceń, ponieważ tłumaczenie obserwowanych zjawisk jest w takich warunkach znacznie prostsze: stwierdzamy wówczas ścinanie proste w całej objętości układu rozproszonego, zgodnie ze schematem podanym na rys. 7.



Rys. 7. Schemat odkształcenia ścinania prostego

z - naprężenie styczne, γ - kąt charakteryzujący odkształcenie przy ścinaniu (czyli gradient prędkości)

Jest rzeczą ważną, żeby aparatura, za pomocą której przeprowadzamy pomiary, była prosta, tj. żeby powierzchnie stałe, między którymi umieszczamy badaną masę, dawały proste warunki brzegowe i żeby prócz tego opracowanie obserwacji nie było utrudnione. Ostatnie zastrzeżenie jest szczególnie ważne, gdy chodzi o przyrządy do badań masowych, zwłaszcza do badań w laboratoriach fabrycznych.

1. Poniżej przytaczamy metody związane z jednorodnym lub prawie jednorodnym polem naprężeń i odkształceń.

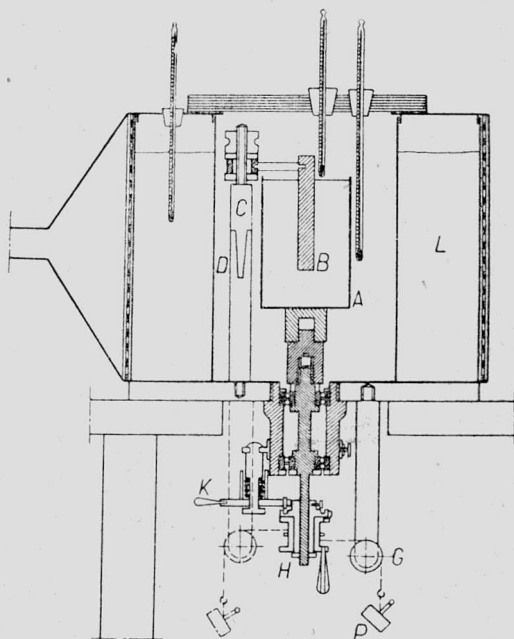
(a) Typy przyrządów rotacyjnych jednospójnych z walcem obrotowym: F. N. S z w i e d o w, [4], M. P. W o ł a r o w i c z, [55], [56], P. A. R i e b i n d i e r ze współpracownikami, [57], G. W. W i n o g r a d o w ze współpracownikami, [58], A. A. T r a p i e z n i k o w, [59], i inni (gdy przyrządy te mają wąską szczelinę, to pole bliża się do jednorodnego). Dwuspójne przyrządy obrotowe (T. J. G o r a z d o w s k i, [60], o jednorodnym polu z aparatem roboczym w postaci dwóch półtorusów specjalnego kształtu lub w postaci dwóch pierścieni stożkowych. Dwuspójny przyrząd obrotowy D. M. T o ł s t o j a, [61], z pierścieniami o polu zbliżonym do jednorodnego.

Za pomocą obrotowego wiskozymetru M. P. W o ł a r o w i c z a RW-4 można określać graniczne naprężenie ścinające, θ , i lepkość plastyczną, η_{pl} , stężonych układów rozproszonych (glin, [28], farb, [55], gęstych smarów, [63], torfu, [64], zapraw budowlanych, [65], i innych). Schemat tego wiskozymetru podaje rys. 8.

Wiskozymetr obrotowy M. P. W o ł a r o w i c z a RW-7 stosuje się do cieczy i układów rozproszonych o wysokiej lepkości, zwłaszcza zaś do olejów smarowniczych w obszarze niskich temperatur, do 60°C, [51], [56], [66], oraz do bitumów w temperaturach wyższych aż do 180°C, [67]. Na rys. 9 podany jest widok ogólny tego wiskozymetru.

(b) Przyrządy z posuwem podłużnym, a więc: ze stycznym posuwem płytki poziomej, nakładanej na sześcian z badanej substancji (B. P. Wiejnbierg, [68], D. M. Tołstoj, [69]); z podłużnym posuwem walców współosiowych (D. M. Tołstoj, [29], M. P. Wołarowicz, [70], D. S. Wielikowski, [71]), między którymi umieszcza się badany układ rozproszony (przy małej szczelinie pole zbliżone jest do jednorodnego); z podłużnym posuwem płytki pionowej, wyciąganej z naczynia zawierającego badaną substancję (P. A. Riebindier i S. J. Wiejler, [72]), przy czym pole zbliżone jest do jednorodnego. Tych trzech metod, opartych na posuwie podłużnym, używa się przy stosunkowo nieznacznych odkształceniach i niewielkich prędkościach odkształcenia.

Schemat na rys. 10 przedstawia przyrząd D. M. Tołstoj a, [69]. W przyrządzie tym następuje ścinanie proste układu rozproszonego, L, umieszczonego między dwiema równoległymi płytkami poziomymi, z których dolna, B, jest nieruchoma, a górna, S, przesuwa się równolegle do niej.



Rys. 8. Schemat wiskozymetru obrotowego RW-4 do określania granicznego naprężenia ścinającego i lepkości plastycznej stężonych układów rozproszonych

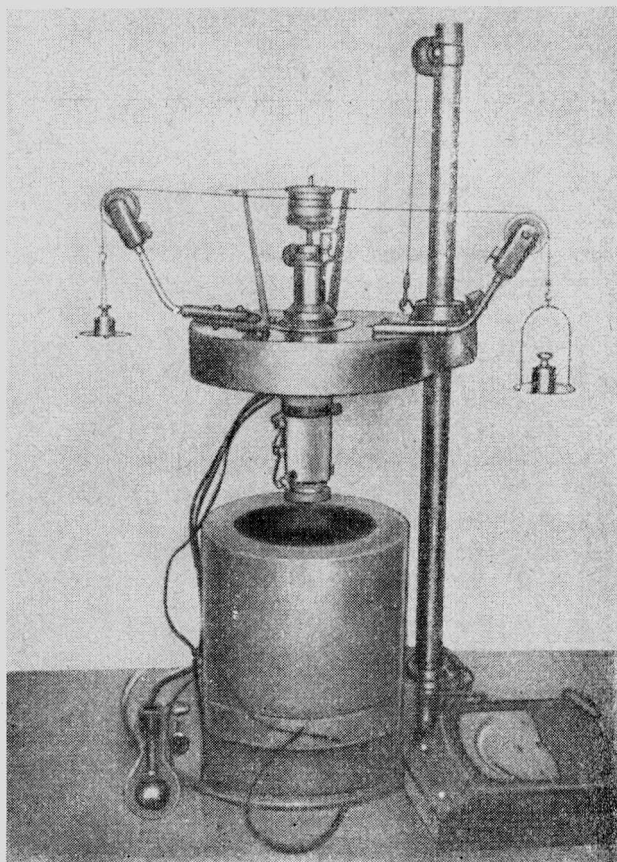
2. Poniżej wymieniamy te spośród metod integralnych, które zalicza się do niejednorodnych.

(a) Przyrządy typu kapilarnego. Do smarów zastosowali je D. S. Wielikowski, [71], M. M. Kusakow, [73], G. W. Winogradow, [74], G. I. Fuks, [51], [75], K. S. Ramajja, [76], i inni, do roztworów kauczuku — B. A. Dogadkin, [77], do masy torfowej — M. P. Wołarowicz oraz N. N. Kulakow, [78], itd.

(b) Metoda wtłaczania stożka, którą teoretycznie podbudowali P. A. Riebindier wraz z B. J. Jampolskim i N. N. Siemienienko, [79]. Można za jej pomocą określać graniczne naprężenie ścinające układów rozproszonych. Do torfu o zmniejszonej wilgotności zastosowali ją M. P. Wołarowicz i S. N. Markow, [80].

(c) Metoda opadania kulki, stosowana do masy torfowej, która jednak nie nadaje się do układów rozproszonych, jak to wykazał N. N. Kułakow, [81].

(d) Metoda drgań, która również — jako niestacjonarna — nie bardzo jest przydatna do badań reologicznych.



Rys. 9. Widok ogólny wiskozymetru obrotowego RW-7 do badania lepkości smarów w obszarze niskich temperatur (do 60°C) oraz bitumów w temperaturach do 180°C . Górny wałek przyrządu i układ rotacyjny są wysunięte z termostatu

II. Metody różnicujące (dyferencjalne) pozwalają bezpośrednio obserwować odkształcenia zachodzące w każdej chwili i w każdym punkcie płynącego układu rozproszonego. Innymi słowy, dają one możliwość ustalania pola i prędkości odkształceń, a niekiedy i pola naprężeń. Warunek

jednorodności pól nie jest tu tak ważny, choć jest również wielce pożą-
dany. Istotne jest to, że metody dyferencjalne przydają się do badania
skomplikowanych przypadków przepływu układów rozproszonych.

1. Poniżej omawiamy różnicujące metody niejednorodne.

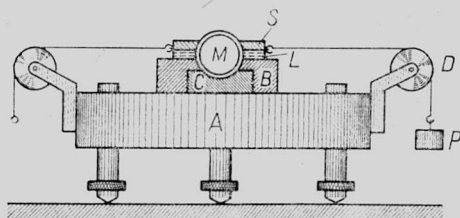
(a) Rozkład prędkości na powierzchni układu rozproszonego można
obserwować w przyrządzie z walcem obrotowym (por. wyżej rys. 5;
M. P. Wołarowicz i D. M. Tołstoj, [28]; G. I. Fuks, [82]). Dobrze
są przy tym rozgraniczone strefy od-
kształceń plastycznych od odkształ-
ceń sprężystych, gdzie naprężenia nie
przekraczają granicznego naprężenia
ścinającego.

(b) Rozkład prędkości przepływu
przez rury określali metodą kontak-
tu elektrycznego M. P. Wołarow-
icz, N. N. Kułakow, K. I. Sa-
marina, E. P. Siemienski
i N. D. Biezzubow, [83]; badania
przeprowadzano nad masą torfową
zarówno w warunkach laboratoryjnych, jak i bezpośrednio w przedsię-
wzięciach torfowych, używając rur o średnicy do 570 mm. M. P. Wo-
łarowicz, D. M. Tołstoj i J. P. Łosza kowa badali meto-
dą optyczną rozkład prędkości podczas wygniatania smarów gęstych
z rurek, [84].

(c) Aby móc badać pola i prędkości odkształceń w układach nieprze-
zroczystych, zwłaszcza podczas przepływu przez rury, M. P. Wo-
łarowicz opracował metodę prześwietlania rentgenowskiego, którą
zastosowano ponadto do badań nad kinematyką przepływu mas rozpro-
szonych w modelach części maszyn: ślimaka, stożka itd. (M. P. Wo-
łarowicz, T. J. Gorazdowski, N. W. Łazowska, S. N. Mar-
kow, [80], [85]).

(d) M. P. Wołarowicz i Ł. I. Korczemkin, [86], badali
pod mikroskopem granice strefy sprężystej i plastycznej podczas prze-
pływu częściowo wykryształizowanych skał stopionych, obserwując orien-
tację kryształów w szlifach, przygotowanych po uprzednim zahartowa-
niu, [86].

(e) Metodykę zdjęć mikrofilmowych opracował G. W. Winograd-
ow, [87]. W szczególności fotografował w świetle spolaryzowanym
procesy przepływu gęstych smarów przez kapilarę płaską. Metoda jest
dogodna do badania mikrokryształicznych przezroczystych układów. Po-
zwala na ustalenie pola naprężeń.

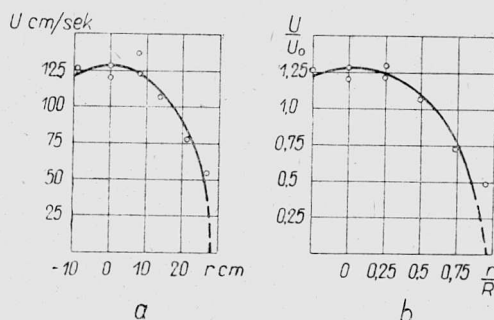


Rys. 10. Schemat przyrządu D. M. Tołstoja

S i B - szklane lub stalowe płytki równoległe,
L - badany układ rozproszony, M - mikroskop
do odczytów na podstawie C, A - płyta stalowa,
D - bloki, P - ciężar

(f) M. M. K u s a k o w i A. N. K i s l i n s k i, [88], opracowali swoistą metodę dwuwymiarową, która pozwala na podstawie jednego doświadczenia określić zależność lepkości oleju smarowniczego od temperatury, dzięki obserwowaniu prędkości opadania kulki w oleju w polu ustalonym o zmiennej lepkości. Zmienność ta występuje wskutek różnicy temperatur oleju w części górnej i dolnej walca.

Dla przykładu podajemy na rys. 11 rozkład prędkości przepływu, uzyskany w drodze eksperymentalnej. Badano, [83], uwodnioną masę torfową o wilgotności około 95%, przepływającą przez rurę o średnicy 57 cm. Rys. 11a przedstawia związek pomiędzy prędkością, u , i odległością, r , od osi rury. Ten sam zaś rozkład przedstawiony jest na rys. 11b we współ-



Rys. 11. Rozkład prędkości przepływu uwodnionej masy torfowej przez rurę o średnicy 670 mm. Rozkład ustalono eksperymentalnie za pomocą sond elektrodowych

rzędnych bezwymiarowych, przy czym R przedstawia promień rury, a u_0 średnią prędkość przepływu masy uwodnionej.

Otrzymane za pomocą prześwietlenia rentgenowskiego wyniki badań, [85], nad przepływem układów rozproszonych zobrazowane są na rysunkach 12, 13 i 14. Rysunek 12 przedstawia przepływ smaru gęstego przez rurę o przekroju kołowym. Jak to widać z kolejnych zdjęć a , b i c , wykonanych w odstępach 15 i 7,5 min, od-

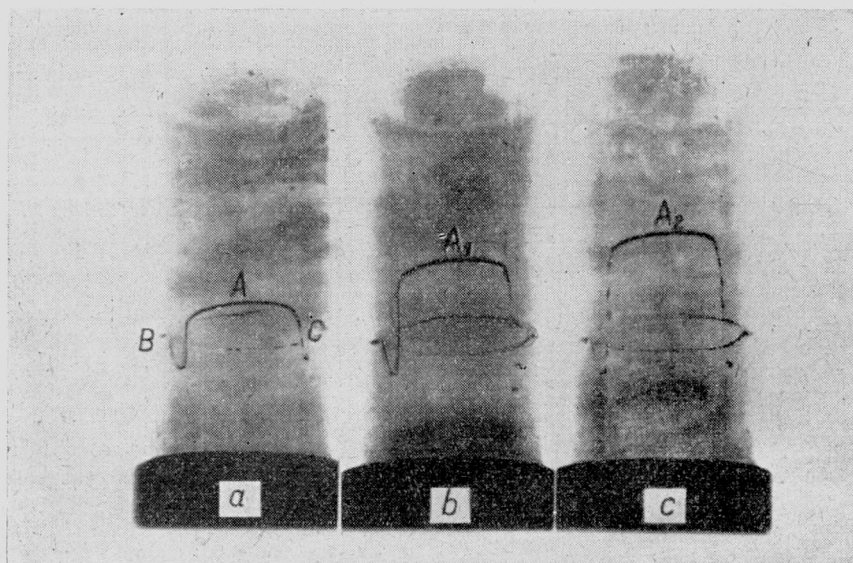
kształcenie smaru dokonywa się tylko w bliskości ścianek rury. Natomiast w środku rury pasmo siarczanu barowego, A , A_1 i A_2 , nie odkształca się wcale. Środkowa część smaru, gdzie naprężenie ścinające jest mniejsze od granicznego, θ , przesuwają się jak jednolity «sztywny» walec. Na rys. 13 podajemy zdjęcia procesu odkształcenia stoków torfu (w modelu): podług odkształceń linii punktowanych z drobnych opiłków ołowianych można dobrze rozgraniczyć strefy odkształceń sprężystych i plastycznych. Rysunek 14 przedstawia przepływ torfu o wilgotności 84,5% przez zgiętą pod kątem 90° rurę o średnicy 16 cm. Kolejne zdjęcia A , B i C , uwidaczniając przesuwanie się wskaźników ołowianych, pozwalają wnioskować o charakterze odkształceń.

2. W dalszym ciągu przedstawimy jednorodne metody różnicujące.

(a) Sposoby obserwacji opisane w punktach (a), (b) oraz (e) poprzedniego paragrafu można, oczywiście, stosować również do przepływu o jednorodnych polach.

(b) Przyrząd D. M. T o ł s t o j a, [61], z pierścieniami płaskimi (por. integralne metody jednorodne) może być także stosowany w metodzie dyferencjalnej.

(c) Metodą zdmuchiwania (B. W. D i e r i a g i n i M. M. K u s a k o w ze współpracownikami, [89]) można badać objętościowe anomalne własności lepkie smarów (układy przezroczyste) w cienkich warstwach, tuż przy stałych ściankach.



Rys. 12. Zdjęcia rentgenowskie procesu przepływu smaru gęstego przez rurę o przekroju kołowym

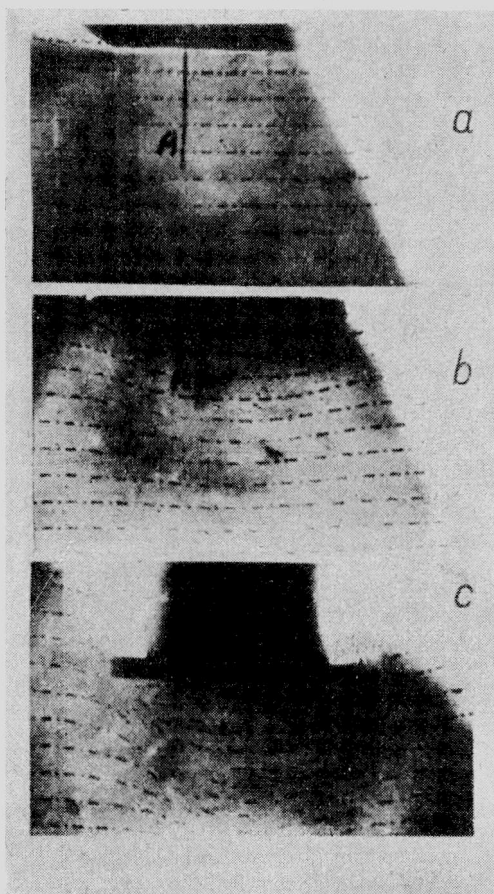
(d) D. M. T o ł s t o j, [69], opracował metodę różnicującą, pozwalającą na posługiwanie się przyrządem ze stycznym przesuwem płytki poziomej.

Należy zauważyć, że na stałych ściankach przyrządów reologicznych, stykających się z układami rozproszonymi, można obserwować poślizg, ponieważ przy tych ściankach wytwarza się często warstwa ośrodka dyspersyjnego. Mimo to rozwiązania zagadnień lepko-plastycznego przepływu na podstawie równania (3) uwzględniają takie warunki brzegowe, przy których substancja przylega do powierzchni stałych. Już N. M. P i e t r o w, [3], [13], zastanawiał się nad możliwością poślizgu cieczy po ściankach stałych. Jednakże można przyjąć, zachowując przy tym bardzo dużą ścisłość, że poślizgu cieczy po powierzchniach stałych nie ma.

Aby uniknąć poślizgu układów rozproszonych, powierzchnie stałe przyrządów reologicznych (walce, płytki itp.) można uczynić chropowatymi, co w wielu przypadkach daje dobre wyniki, [28], [29], [69], [72]. Prowadząc badania wiskozymetryczne można niejednokrotnie wyeliminować efekt poślizgu układów rozproszonych w drodze obliczeń teoretycznych, [3], [47], [78], [81], [80].

Systematyczne badania teoretyczne i praktyczne nad zagadnieniem poślizgu przyściennego układów rozproszonych przeprowadził D. M. Tołstoj, [69], [70].

C. Przykłady badania reologicznego układów rozproszonych. Parametry substancji lepko-plastycznej, wchodzące w skład równania (3), mianowicie graniczne naprężenie ścinające, θ , oraz lepkość plastyczna, η_{pl} , pozwalają badać strukturę układów rozproszonych. Szereg rozpraw P. A. Riebindiera i jego współpracowników, [91], poświęcony jest tym zagadnieniom mikroreologii. Różny sens mikroreologiczny tych dwóch parametrów przepływu lepko-plastycznego, θ i η_{pl} , widoczny jest z wykresów rys. 15, który został zapożyczony z pracy M. P. Wołarowicza i D. M. Tołstoja, [92]. Tak więc dodanie NaOH, peptyzującego zawiesinę, zmniejsza znacznie wartość θ i η_{pl} . Natomiast dodanie NaCl wywołującego koagulację, zmniejsza θ w stopniu nieznacznym, podwyższając jednocześnie lepkość plastyczną

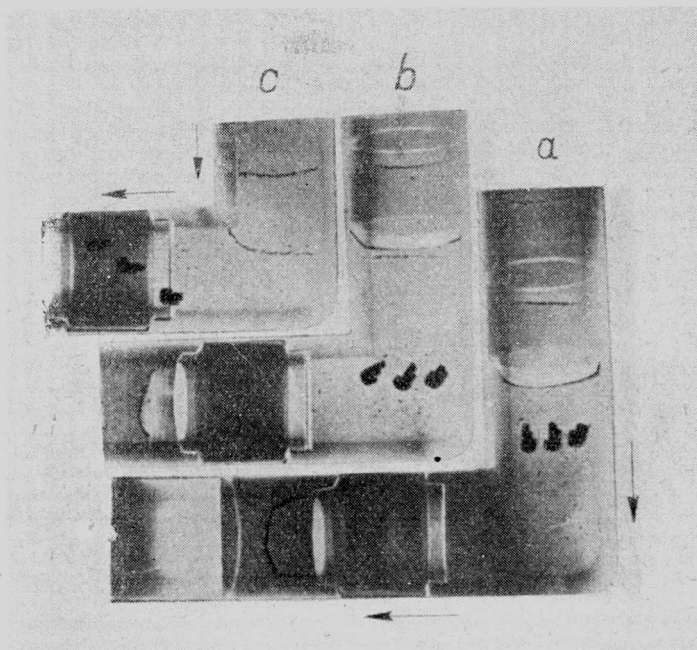


Rys. 13. Zdjęcia rentgenowskie procesu odkształcenia stoków z torfu

ną zawiesiny. Próby obliczeń grubości warstewki oleju wazelinowego w zawieszynie miki koloidalnej, [62], wywołującej graniczne naprężenie ścinające, dały w wyniku wartość kilku mikronów. Odpowiada to mniej więcej grubościom cienkich warstewek cieczy, posiadających sprężystość postaci, zgodnie z bezpośrednimi pomiarami wykonanymi przez B. W. Dieriągina, [93].

W różnych układach rozproszonych jeden z dwóch parametrów, θ lub η_{pl} , odgrywa zazwyczaj główną rolę. W takich wysoce lepkich materiałach

jak bitumy, granicznemu naprężeniu ścinającemu przypada często rola drugorzędna, podczas gdy rolę główną wypełnia lepkość, osiągająca wartość dziesiątków i setek tysięcy, a nieraz milionów poise'ów i więcej, [67].

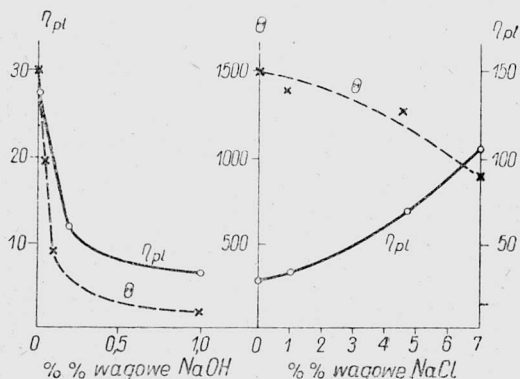


Rys. 14. Zdjęcia rentgenowskie procesu przepływu torfu przez rurę zgiętą pod kątem 90°

Przeciwnie ma się rzecz z wieloma układami rozproszonymi o małej lepkości ośrodka dyspersyjnego, zwłaszcza zaś z zawiesinami wodnymi. W roli głównej występuje tu θ , stanowiąc nader charakterystyczny parametr dla układów tego rodzaju. W stosunku do smarów gęstych z podkładem o małej lepkości wykazali to w szeregu przypadków P. A. R i e b i n d i e r, [94], i D. S. W i e l i k o w s k i, [95].

K. A. C a r i e w i c z i A. I. M a ł y s z e w, [96], zalecili do obliczeń przepływu roztworów gliny przez rury wzór, obejmujący tylko graniczne naprężenie ścinające. Znaczy to, że straty ciśnienia w rurach zależą zasadniczo od θ i w pierwszym przybliżeniu nie zależą od lepkości plastycznej zawiesin gliny. M. P. W o ł a r o w i c z, [83], uzasadnił analogiczny wzór w zastosowaniu do przepływu przez rury uwodnionej masy torfowej z zawartością substancji suchej w granicach od 8 do 20%. Próby, mające na celu określenie rozkładu prędkości w rurociągach

o średnicy od 44 do 75 cm, potwierdziły przypuszczenie, że strata ciśnienia tylko w nikłym stopniu zależy od lepkości plastycznej roztworów, a natomiast określana bywa wartością granicznego naprężenia ścinającego masy uwodnionej.



Rys. 15. Zależność granicznego naprężenia ścinającego (θ dyn/cm²) oraz lepkości plastycznej (η_{pl} w poisach) od ilości dodanych elektrolitów. Badano kaolin głuchowiecki o wilgotności 55%

Jeśli chodzi o zaprawy budowlane (wapno i inne) mające wysoką wartość η_{pl} , to należy — jak to wykazały doświadczenia W. P. Łobanowa, [65], — do obliczeń przepływu przez rury korzystać ze wzoru Buckinghama, [19], [26], z oboma parametrami przepływu lepko-plastycznego, tj. z lepkością plastyczną i z granicznym naprężeniem ścinającym.

Graniczne naprężenie ścinające jest wielkością bardzo charakterystyczną dla torfu o zmniejszonej wilgotności, czyli z zawartością od 92 do 75% wody, [64].

N. W. Łazowska wykazała, między innymi, że jeśli wilgotność torfu obniża się z 83 do 79%, to graniczne naprężenie ścinające, θ , wzrasta trzykrotnie, podczas gdy η_{pl} zwiększa się tylko nieznacznie, bo zaledwie o 15% (por. rys. 16). Okazało się ostatecznie, że wartości θ określają zależność pomiędzy wydatkiem torfu przepływającego przez kształtkę stożkową a ciśnieniem, [97]. Natomiast η_{pl} nie ma pod tym względem praktycznego znaczenia. Ponadto M. P. Wołarowiczowi wraz z S. N. Markowem, [80], udało się ustalić, że graniczne naprężenie ścinające jest nader przydatne do charakteryzowania stopnia przeróbki torfu w różnych mechanizmach przetwórczych, gdyż wiąże się to z naruszeniem jego struktury.

W innych badaniach znaleziono związek pomiędzy własnościami strukturalno-reologicznymi roztworów klejowych a trwałością błonki klejowej, [98]. Stwierdzono, że gdy rozpuścimy kauczuk po przewalcowaniu, to lepkość roztworów jest znacznie mniejsza niż roztworów kauczuku niewalcowanego, graniczne zaś naprężenie ścinające, θ , spada przy tym do zera. Jednocześnie trwałość błonki klejowej kauczuku walcowanego jest o 50% mniejsza niż kauczuku niewalcowanego. Zjawiska powyższe tłumaczą się tym, że walcowanie pociąga za sobą zmianę struktury cząsteczek kauczuku, powodując mianowicie rozpad cząsteczek i zmniejszenie długości łańcuchów cząsteczkowych. Zmiany takie burzą

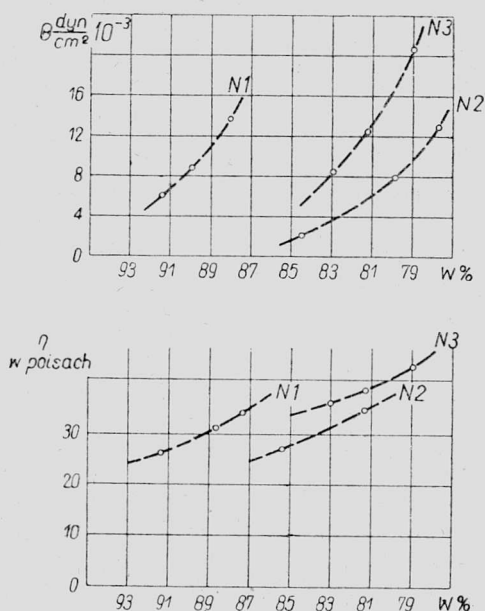
strukturę roztworów, wskutek czego Θ spada do zera, a odpowiednio zmniejsza się i trwałość błonki klejowej.

W referacie niniejszym nie rozpatrywaliśmy ważnych zjawisk sprężysto-kinetycznych, powstających w układach rozproszonych, gdy naprężenia są mniejsze od granicznych naprężeń ścinających, Θ . Badania tego rodzaju, kontynuujące prace F. N. Szwidowa, prowadzono na szeroka skalę w laboratoriach P. A. Riebindiera, [57], [99], G. W. Winogradowa, [58], [74], A. A. Trapieznikowa, [59], [100], M. P. Wołarowicza, [50], [53], [101], i innych.

Na zakończenie należy jedynie pokrótce wspomnieć o zagadnieniu badań nad zjawiskami tyksootropicznymi w układach rozproszonych. Podczas przepływu lepkoplastycznego układu w obszarze, w którym spełnione jest równanie (3) F. N. Szwidowa, tyksootropia jest praktycznie wykluczona, ponieważ struktura tyksootropiczna układu uległa już zazwyczaj całkowitemu zburzeniu. W szeregu doświadczeń przemierzaliśmy uprzednio układy (powodując w ten sposób zburzenie tyksootropicznej struktury), zanim przystępowaliśmy do pomiaru parametrów Θ i η_{pl} . Łatwo to uczynić stosując wiskozymetr obrotowy.

Jednak procesy tyksootropiczne wnoszą dużo komplikacji do badań zjawisk sprężysto-kinetycznych w układach rozproszonych, w których panują małe naprężenia ścinające.

Specjalne badania zjawisk tyksootropii można wykonywać dwojako: już to obserwując odbudowę struktury po jej uprzednim zburzeniu w sposób mechaniczny, już to obserwując proces niszczenia struktury w czasie jej mieszania, gdy wzrasta stopniowo gradient prędkości dv/dz , albo — co na jedno wychodzi — naprężenie ścinające, τ . W obu tych przypadkach najdogodniej charakteryzować trwałość struktury tyksootropicznej za pomocą granicznego naprężenia ścinającego. Pierwszą metodę z powodzeniem stosował P. A. Riebindier i J. J. Siega-



Rys. 16. Zależność granicznego naprężenia ścinającego Θ oraz lepkości plastycznej η_{pl} torfu od zawartości wody według danych N. W. Łazowskiej, otrzymanych za pomocą wiskozymetru obrotowego RW-4

ł o w a, [57], wraz ze współpracownikami. Doświadczenia te pozwoliły wywieść szereg wniosków co do istnienia w różnych układach rozproszonych struktury kondensacyjnej bądź też rozdrobnionej.

Drugi kierunek badań rozwijał M. P. W o ł a r o w i c z z W. Ł. W a l d m a n e m, [66], [102], [103]. Przedmiotem ich były oleje smarownicze w obszarze niskich temperatur. Do pomiarów posługiwano się wiskozymetrem RW-7. Udało się przy tym wyjaśnić, że struktury tyksotropiczne typu siatki z parafin, tworzące się w olejach podczas ostygnięcia, są bardzo nietrwałe. Układy te są bardzo chwiejne pod względem tyksotropicznym, w każdym zaś razie odbudowują swą strukturę powoli. Ponadto graniczne naprężenie ścinające, które pojawia się w olejach smarowniczych po ostygnięciu, ulega całkowitemu zniszczeniu podczas mechanicznego mieszania takiego układu. Wobec tego oleje, posiadając anomalie lepkości po ostudzeniu i naruszoną strukturę po izotermicznym mieszaniu, stają się w niskich temperaturach idealnymi lepкими cieczami newtonowskimi. W związku z tym, obliczając początek przesuwu tłoka w cylindrze silnika w niskiej temperaturze, [104], należy uwzględniać graniczne naprężenie ścinające oleju smarowniczego. Natomiast podczas dalszego ruchu należy uwzględniać tylko lepkość oleju, ponieważ jego struktura jest już naruszona. Jeśli chodzi o ruch ustalony wału w łożysku w niskich temperaturach, jak to wykazały doświadczenia M. P. W o ł a r o w i c z a, [105], to można stosować zwykłe równania hydrodynamicznej teorii smarowania.

Wzmianki powyższe mogą służyć za przykład tego, w jaki sposób badania reologiczne układów rozproszonych stosuje się do celów praktycznych.

Bibliografia

[1] M. W. Ł o m o n o s o w, *Trudy po fizikie i chimji 1747-1752 gg.*, Dzieła wszystkie pod red. S. I. Wawiłowa, T. P. Krawca i A. A. Jelisiejewa, t. 2, 1951; W. P. B a r z a k o w s k i i N. M. R a s k i n, *Oborudowanje chimiczeskoj laboratorji M. W. Łomonosowa*, «Łomonosow», Zbiór artykułów pod red. S. I. Wawiłowa, wyd. AN ZSRR, 3, 191, 1951; A. W. T o p c z i j e w, M. W. Łomonosow — wielikij russkij uczonyj, Priroda 2, 3 (1952).

[2] D. I. M i e n d i e l e j e w, *O soprotiwlenji židkostiej i o wozduchoplawanji*, Petersburg, 1880, Žurn. Russk. Fiz.-chim. obszczestwa, 12, 1-2 (1880); *Sobranje soczinenij*, wyd. AN ZSRR, t. 7, 1946.

[3] N. P. P i e t r o w, *Trienje w maszinach i wlijanje na niewo smazywajuszczej židkosti*, Inż. žurn., 27, 1-4 (1883); *Gidrodinamicheskaja tieorja smazki*, Prace wybrane, wyd. AN ZSRR, 1948.

[4] F. N. S z w i e d o w, *Recherches expérimentales sur la cohésion de liquides*, I, *Rigidité de liquides*, Journ. de phys., 8 (2), 341, 1889; II, *Viscosité de liquides*, 9 (2), 34, 1890; *Rapportes présentés au Congrès international de physique*, Paryż, 1, 478, 1900.

[5] N. S. Kurnakow, *Sobranje izbrannyh rabot*, Chintieorietizdat, t. 1, 1938; t. 2, 1939.

[6] D. Bernoulli, *Dissertatio de actione fluidorum in corpore solida et motu solidorum in fluidis*, p. prima, Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae ad annum MDCCXXVII, 2, 304, 1729, i inne prace; W. I. Smirnow, 250-letje so dnia roždienja D. I. Bernoulli, Wiestnik AN ZSRR, 104, 3 (1950).

[7] L. Euler, *Delucidationes de resistentia fluidorum*, Novi commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 7, (1760-1761), i inne prace; A. N. Kryłow, *Leonard Euler*, Sbornik statiej k 150-letju so dnia smierti Eulera, wyd. AN ZSRR, 1935.

[8] I. S. Gromieka, *Sobranje soczinienij*, pod red. P. J. Koczinoj, wyd. AN ZSRR, 1952; B. N. Jurjew, *Aerodinamika*, Wielka Encyklopedia Radziecka, wyd. 2, 3, 593, 1950.

[9] O. Reynolds, *Phil. Trans.*, Londyn, 174, 935, 1883.

[10] N. J. Żukowski, *Połnoje sobranje soczinienij*, Gławn. ried. awiac. litier. 1935-1937; *Sobranje soczinienij*, Gostiechizdat, 1948-1950.

[11] S. A. Czapłygin, *Gidrodinamika i aerodinamika*, Dzieła zebrane, t. 2, 1948.

[12] N. J. Żukowski, *Nowyje naucznyje zawojewanja w teorji soprotiwlenija żidkostiej*, Dniewnik 13-wo Sjezda russkich jestiestwoispytatielej i wraczaj, 10 (1914).

[13] N. P. Pietrow, *Opisanje i riezultaty opytow nad trienjem żidkostiej i maszin*, Izw. Tiechnologiczeskowo Inst. za 1885 g., Petersburg 1886; M. P. Wołarowicz, N. P. Pietrow — *osnowopolożnik gidrodinamiczeskoj teorii smazki maszin*, Trudy 2-oj Wsies. Konf. po trienju i iznosu w maszinach, 3, 5, (1949).

[14] J. L. M. Poiseuille, *Mém. Acad. Sci.*, Paryż, 9, 433, 1846; *Rhéologie*, Mémoires (redaktor E. C. Bingham), 1 (1940); M. P. Wołarowicz, *Raboty Poiseuilla o tieczenji żidkostiej w trubach (k stoletju so wriemieni opublikowanja)*, Izw. AN ZSRR, sier. fiz., 11, 8, 1 (1947).

[15] J. C. Maxwell, *Phil. Mag.* (4), 45, 133, 1868.

[16] B. P. Wiejnbierg, *Wlijanje tiempieratury na wnutriennieje trienje wara i asfalta*, Żurn. Russk. Fiz.-chim. Obszczestwa, 44, 201, 4 (1912).

[17] B. P. Wiejnbierg, *O wnutrienniem trienji lda*, Petersburg 1906.

[18] B. P. Wiejnbierg ze współpracownikami, Żurn. Russk. Fiz.-chim. Obszczestwa, fiz. otd., 36, 47, 2 (1904); 44, 3, 1 (1912); 46, 66, 2 (1914) i inne prace.

[19] E. C. Bingham, *Fluidity and Plasticity*, New York 1922.

[20] M. P. Wołarowicz i A. M. Gutkin, Żurn. tiechn. fiz., 16, 321, 3 (1946); A. M. Gutkin, Trudy 2-oj Wsies. Konf. po trienju i iznosu w maszinach, wyd. AN ZSRR, t. 1, 31, 1947.

[21] H. Hencky, *Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, 5, 115, 1925.

[22] A. A. Iljuszyn, Trudy Konf. po płastycznym dieformacjam, wyd. AN ZSRR, 1938.

[23] G. G. Diemieć, *Opytnoje issledowanje miechaniczeskich swojstw masiel i kolloidow*, Zapiski matiem. otd. Noworossijskowo Obszczestwa Jestiestwoispytatielej, 9, 193, Odessa 1889; *Sluczajnoje dwojnoje prietomlenje swieta w żidkostiach*, Żurn. Russk. Fiz.-chim. Obszczestwa, fiz. otd., 34, 505, 9 (1902).

[24] N. A. Gieziechus, *Uprugoje poslediejstwie i drugije schodnyje s nim fiziczeskije jawlenja*, Żurn. Russk. Fiz.-chim. Obszczestwa, fiz. otd., 14, 287, 7 (1882); *Iskluczitielnyje swojstwa kauczuka*, tamże, 15, 103, 4 (1883) i inne prace.

- [25] J. C. Maxwell, *Theory of Heat*, 1887.
- [26] E. Buckingham, *Proc. Amer. Soc. Test. Mater.*, 21, 1154, 1921.
- [27] M. Reiner i R. Rivlin, *Koll. Zeitschr.*, 41, 1, 1927.
- [28] M. P. Wołarowicz i D. M. Tołstoj, *Žurn. fiz.-chim.*, 4, 815, 6 (1933).
- [29] D. M. Tołstoj, *Žurn. fiz.-chim.*, 5, 28, 1934.
- [30] A. A. Iljuszyn, *Uczonyje zapiski Mosk. Gos. Uniwier.*, *Miechanika*, 39 (1940).
- [31] P. K. Szczipanow, *Žurn. tiechn. fiz.*, 19, 1211, 10 (1949).
- [32] M. P. Wołarowicz i A. M. Gutkin, *Koń. žurn.*, 10, 329, 5 (1948).
- [33] N. W. Tiabin, *Koń. žurn.*, 13, 55, 1 (1951).
- [34] M. P. Wołarowicz i A. M. Gutkin, *Koń. žurn.*, 15, 155, 2 (1953).
- [35] M. P. Wołarowicz i P. K. Szczipanow, *Koń. žurn.*, 11, 384, 6 (1949); P. K. Szczipanow, *Koń. žurn.*, 11, 363, 5 (1949); *Trudy Mosk. Torfianno Inst.*, 2, 122, 1953.
- [36] N. W. Tiabin, *Trudy Kazanskowo Chim.-tiechno. Inst.*, 52, 14 (1949).
- [37] R. I. Sziszczenko, *Gidrawlika glinistych rastworow*, Aznieftieizdat, Baku 1951.
- [38] N. W. Tiabian, *Koń. žurn.*, 14, 270, 4 (1952).
- [39] A. Nádaí, *Plasticznost'*, tłum. pod red. L. S. Lejbienzona, Gostiechizdat, 1936; wyd. 2, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, New York 1950.
- [40] W. W. Sokołowski, *Plasticznost'*, wyd. AN ZSRR, 1946; wyd. 2, 1951.
- [41] A. A. Iljuszyn, *Plasticznost'*, Gostiechizdat, 1948.
- [42] W. D. Kuzniecowa, *Fizika twierdowo tiela*, t. 5, Tomsk 1949.
- [43] *Tieorja plasticznosti*, *Sbornik pieriewodnych statiej*, pod red. J. N. Rabotnowa, Gos. izdat. inostr. lit., 1948.
- [44] *Trudy Sowieszczanja po wiazkosti židkostiej i kołloidow*, t. 1, 1941; t. 2, 1944.
- [45] *Trudy 2-oj Wsies. Konf. po trienju i iznosu w maszinach*, t. 2, 1948; t. 3, 1949.
- [46] R. Houwink, *Elasticity, Plasticity and Structure of Matter*, Cambridge 1937.
- [47] G. W. Scott Blair, *Introduction to Industrial Rheology*, Londyn 1938.
- [48] G. W. Scott Blair, *A Survey of General and Applied Rheology*, Londyn 1945; wyd. 2, Londyn 1949.
- [49] M. Reiner, *Deformation and Flow*, Londyn 1949.
- [50] M. P. Wołarowicz, *O primienienji mietodow rieologii w piszczewoj promyszlennosti*, *Kolloidy w piszczewoj promysz.*, *Piszczepromizdat*, *Sbornik* 2, 40, 1949.
- [51] G. I. Fuchs, *Wiazkost' i plasticznost' nieftieproduktow*, Gostoptiechizdat, 1951.
- [52] K. Cariewicz, R. Sziszczenko i B. Bakłanow, *Glinistyje rastwory w burienji*, Aznieftieizdat, Baku-Moskwa 1935.
- [53] M. P. Wołarowicz i R. A. Branopolska, *Issledowanje fiziko-miechanicznych swojstw pszenicznowo tiesta*, *Piszczepromizdat*, 1940.
- [54] C. A. Coulomb, *Mém. Inst. National* 3, 261, Paryż 1798.
- [55] M. P. Wołarowicz, *Trudy Inst. Prikl. Minieralogji*, 66 (1934); *Trudy Poligraficz. Inst. OGIz'a*, 261, 5 (1937).
- [56] M. P. Wołarowicz, *Zawod. Labor.*, 832, 9 (1945).
- [57] P. A. Riebindier i J. J. Siegałowa, *Koń. žurn.*, 10, 223, 3 (1948); *Dokł. AN ZSRR*, 71, 85, 1 (1950).

- [58] G. W. Winogradow i K. I. Klimow, Dokł. AN ZSRR, 57, 911, 1947; Żurn. tiechn.-fiz., 18, 355, 3 (1948); Trudy 2-oj Wsies. Konf. po trienju i iznosu w maszinach, 3, 300, 1949.
- [59] A. A. Trapieznikow i J. M. Szlosbierg, *Sbornik Nowyje metody fiziko-chimicznych issledowanij powierchnostnych jawlenij*, 39, 1 (1950).
- [60] T. J. Gorazdowski, Zawod. Labor., 554, 5 (1949); 373, 3 (1951).
- [61] D. M. Tołstoj, Dokł. AN ZSRR, 85, 1089, 5 (1952).
- [62] M. P. Wołarowicz i I. S. Jerochin, Żurn. fiz.-chim., 12, 277, 2-3 (1938).
- [63] M. P. Wołarowicz i J. P. Łoszakowa, Kołł. żurn., 8, 127, 3 (1946).
- [64] M. P. Wołarowicz i T. M. Kuźmńska: patrz. N. N. Kułakow, *Wwiedjenje w fiziku torfa*, Gosenergoizdat, 1947.
- [65] W. P. Łobanow, Kołł. żurn., 12, 352, 5 (1950).
- [66] M. P. Wołarowicz, *Wiazkost' smazocznych masiel pri nizkich temperaturach*, wyd. AN ZSRR, 1944; M. P. Wołarowicz i W. Ł. Waldman, *Trienje i iznos w maszinach*, Sbornik, 2, 80, 1946.
- [67] N. W. Michajłow, *Krowielnyje i gidroizolacjonnyje pokrytja*, Maszstrojizdat, 1950; M. F. Nikiszina, Trudy Dorożnowo Naucznoissled. Inst., Dorizdat, 1949, str. 38.
- [68] B. P. Wiejnbierg, Żurn. Russk. Fiz.-chim. Obszczestwa, fiz. otd. 44, 514, 9 (1912); W. D. Dubiecki, tamże, 45, 519, 9 (1913).
- [69] D. M. Tołstoj, Kołł. żurn., 10, 1933, 2 (1948).
- [70] M. P. Wołarowicz, Trudy Poligraficzeskowo Inst. OGIZ'a, 5, 299, 1937.
- [71] D. S. Wielikowski, Trudy 1-oj Wsies. Konf. po trienju i iznosu, 1, 394, 1939.
- [72] S. J. Wiejler i P. A. Riebindier, Dokł. AN ZSRR, 49, 354, 5 (1945).
- [73] M. M. Kusakow, Izw. AN ZSRR, Otd. Tiechn. Nauk, 672, 10-11 (1944).
- [74] G. W. Winogradow i W. P. Pawłow, Dokł. AN ZSRR, 58, 1391, 7 (1947); Trudy 2-oj Wsies. Konf. po trienju i iznosu w maszinach, 3, 311, 1949; *Sbornik Nizkotiempieraturnyje swojstwa nieftieproduktow*, Gostoptiechizdat, 1949, str. 61; A. A. Konstantinow i G. W. Winogradow, Dokł. AN ZSRR, 86, 749, 4 (1952).
- [75] G. I. Fuks i J. Smolina, Trudy 2-oj Wsies. Konf. po trienju i iznosu w maszinach, 2, 499, 1948.
- [76] K. S. Ramajja, Trudy 1-oj Wsies. Konf. po trienju i iznosu w maszinach, 1, 417, 1939.
- [77] B. A. Dogadkin, *Chimja i fizika kauczuka*, Goschimizdat, 1947.
- [78] M. P. Wołarowicz i N. N. Kułakow, Izw. AN ZSRR, Otd. Matiem. i Jestiestw. Nauk, 1331, 10 (1935).
- [79] P. A. Riebindier i B. J. Jampolski, Kołł. żurn., 10, 466, 6 (1948); P. A. Riebindier i N. N. Siemienienko, Dokł. AN ZSRR, 64, 835, 6 (1949).
- [80] M. P. Wołarowicz i S. N. Markow, Zawod. Labor., 1461, 12, (1951); Żurn. Torfianaja promyszl., 23, 10 (1951).
- [81] N. N. Kułakow, Kołł. żurn., 3, 217, 3 (1937); Trudy Sowieszczanja po wiazk. zidk. i kołł., 1, 391, 1941.
- [82] G. I. Fuks, Dokł. AN ZSRR, 66, 1125, 1949.

- [83] M. P. Wołarowicz ze współpracownikami, *Żurn. tiechn. fiz.*, 14, 448, 7-8 (1944); *Koń żurn.*, 8, 9, 1-2 (1946).
- [84] M. P. Wołarowicz, D. M. Tołstoj i J. P. Łoszakowa, *Trudy 2-oj Wsies. Konf. po trienju i iznosu w maszinach*, 1, 119, 1947; D. M. Tołstoj, tamże, s. 130.
- [85] M. P. Wołarowicz, *Koń żurn.*, 9, 325, 5 (1947); M. P. Wołarowicz i T. J. Gorazdowski, tamże, 11, 1, 12 (1949); N. W. Łazowska, tamże, 11, 77, 2 (1949); M. P. Wołarowicz, *Trudy Mosk. Torf. Inst.*, 112, 2 (1953); T. J. Gorazdowski i S. A. Riegirier, *Koń żurn.*, 14, 85, 2 (1952).
- [86] M. P. Wołarowicz i Ł. I. Korczemkin, *Izw. AN ZSRR, sierja rieologicz.*, 599, 4 (1938); *Trudy Inst. Gieologicz. Nauk AN ZSRR, sierja pietrograf.*, 53, 8 (1940).
- [87] G. W. Winogradow, *Dokł. AN ZSRR*, 71, 505, 1950.
- [88] M. M. Kusakow i A. N. Kislinski, *Trudy 2-oj Wsies. Konf. po trienju i iznosu w maszinach*, 3, 276, 1949.
- [89] B. W. Dieriagin, G. Strachowski i D. Małyszewa, *Żurn. ekspier. i tieoriet. fiz.*, 16, 171, 2 (1946); B. W. Dieriagin, M. M. Kusakow i K. S. Krym, tamże, str. 179; B. W. Dieriagin, *Trudy 2-oj Wsies. Konf. po trienju i iznosu w maszinach*, 1, 103, 1947; M. M. Kusakow i E. A. Razumowska, tamże, 1, 111, 1947.
- [90] D. M. Tołstoj, *Koń żurn.*, 9, 450, 6 (1947); *Dokł. AN ZSRR*, 67, 495, 3 (1949); *Trudy 2-oj Wsies. Konf. po trienju i iznosu w maszinach*, 3, 155, 1949.
- [91] P. A. Riebindier, *Trudy Sowieszczanja po wiazk. židk. i koń.* 1, 361, 1941; N. N. Sierb - Sierbina, tamże, str. 381; P. A. Riebindier i W. Mokijewski, *Dokł. AN ZSRR*, 26, 48, 1 (1940); P. A. Riebindier i J. B. Aron, tamże, 28, 804, 9 (1940).
- [92] M. P. Wołarowicz i D. M. Tołstoj, *Dokł. AN ZSRR*, 557, 9 (1934).
- [93] B. W. Dieriagin, *Żurn. fiz.-chim.*, 3, 29, 1932.
- [94] P. A. Riebindier, N. A. Bogusławska i W. B. Mokijewski, *Trudy Sowieszczanja po wiazk. židk. i koń.* 2, 173, 1944.
- [95] D. S. Wielikowski, *Konsistentnyje smazki*, Gostoptiechizdat, 1945.
- [96] K. A. Cariewicz i A. I. Małyszew, *Nieft. choz.*, 18, 9, 1933; *Nieft. choz.*, 1, 34, 1934.
- [97] N. W. Łazowska, *Torfianaja Promyszl.*, 3 (1951); M. P. Wołarowicz i N. W. Łazowska, *Dokł. AN ZSRR*, 76, 211, 2 (1951).
- [98] M. P. Wołarowicz i Ł. J. Ginzburg, *Koń żurn.*, 14, 20, 1 (1952); *Legkaja Promyszl.*, 23, 6 (1952).
- [99] P. A. Riebindier, *Sbornik Nowyje mietody fiziko-chim. issled. powierchnostnych jawlenij*, Izd. AN ZSRR, 1450; A. S. Kołbanowska i P. A. Riebindier, *Koń żurn.*, 12, 194, 1950; L. I. Edielman i P. A. Riebindier, tamże, 13, 64, 1951; J. J. Siegałowa, P. A. Riebindier i Ł. N. Sientiurichina, tamże, 13, 401, 1951.
- [100] A. A. Trapieznikow i J. M. Szlosbierg, *Koń żurn.*, 8, 421, 6 (1946); A. A. Trapieznikow i S. Ch. Zakijewa, tamże, str. 429; A. A. Trapieznikow i W. A. Fiedotowa, *Dokł. AN ZSRR*, 81, 1101, 6 (1951); 82, 97, 1 (1952).

[101] M. P. Wołarowicz i R. A. Branopolska, Koł. żurn., 10, 406, 6 (1948) (według prac 1938-1940); T. J. Gorazdowski, Torfianaja Promysz., 14,8 (1949).

[102] W. Ł. Waldman, Żurn. tiechn. fiz., 16, 485, 4 (1946); tamże str. 493; Koł. żurn., 9, 175, 3 (1947); Trudy 2-oj Wsies. Konf. po trienju i iznosu w maszinach, 2, 491, 1948; 3, 291, 1949.

[103] M. P. Wołarowicz, Sbornik Nizkotiempieraturnyje swojstwa nieftie-produktow, Gostoptiechizdat, 1949, str. 3.

[104] M. P. Wołarowicz, Trudy 2-oj Wsies. Konf. po trienju i iznosu w maszinach, 2, 463, 1948; Sbornik *Trienje i iznos w maszinach*, 100, 3 (1948).

[105] M. P. Wołarowicz i N. W. Łazowska, Izw. AN ZSRR, Otd. Tiechn. Nauk, 1607, 10 (1948); Sbornik *Trienje i iznos w maszinach*, 142, 4 (1949).

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

В начале дано определение реологии и описаны ее задачи, а также указаны разнообразные дисперсные системы — легкодеформируемые материалы, с реологическими исследованиями которых приходится встречаться в различных отраслях промышленности.

Далее кратко изложена история развития работ в области реологии в России до Великой Октябрьской социалистической революции, связанная с именами знаменитых русских ученых: В. И. Ломоносова, Д. И. Менделеева, Н. П. Петрова, Ф. Н. Шведова, Н. С. Курнакова и других исследователей.

Затем описан ряд работ советских ученых по исследованию реологических свойств дисперсных систем, причем примеры взяты главным образом из работ автора и его сотрудников. В докладе изложена феноменологическая теория вязкопластичного потока дисперсных систем, основанная на применении уравнений Шведова-Генки-Ильюшина. Отмечены решения этих уравнений для ряда задач: течение в трубе круглого и кольцеобразного сечения, а также в плоском капилляре, вращение в зазоре между коаксиальными цилиндрами, вращение вала в подшипнике, продольное смещение цилиндра, течение по наклонной плоскости под действием силы тяжести и т. д.

При изложении экспериментальных работ описаны методы и приборы, как интегральные ротационные и капиллярные вискозиметры, приборы с продольным смещением пластинки и т. д., так и дифференциальные, позволяющие изучать деформации и скорости деформаций во всем объеме испытуемой дисперсной массы. При этом разобраны преимущества приборов, в которых дисперсная система во время испытаний находится в состоянии однородного сдвига.

В докладе приведены некоторые результаты измерений реологических параметров дисперсных систем — пластической вязкости и пре-

дельного напряжения сдвига, а также отмечены попытки молекулярно-коллоидной интерпретации процессов вязко-пластичного течения дисперсных масс.

В заключение приведены примеры применений результатов реологических исследований для различных практических целей.

S u m m a r y

INVESTIGATION OF RHEOLOGICAL PROPERTIES OF DISPERSED SYSTEMS

A definition of rheology is given and the scope of this branch of science is discussed as well as different kinds of dispersed systems, that is, easily deformable materials, which undergo rheological investigations in various industries.

This is followed by a short account of the history of the development of rheology in Russia prior to the revolution, which is linked with such famous names as M. V. Lomonosow, D. J. Mendeleiev, N. P. Petrov, F. N. Shvedov, N. S. Kurnakow and others.

Next, the work of Soviet scientists associated with investigations of rheological properties of dispersed systems, is discussed. The examples used were taken mainly from the works of the author and his co-workers.

The phenomenological theory of viscoplastic flow of dispersed systems, based on the equations of S h v e d o v - H e n c k y - I l i u s h i n, is presented. The equations in question are discussed in a series of problems and include the following: flow through a circular or annular tube as well as through a flat capillary tube; rotational motion in a narrow space formed by two coaxial cylindrical surfaces; rotation of a shaft in a bearing; longitudinal displacement of a cylinder; gravity flow down a slope, etc.

The methods of investigation are described, including integration methods and instruments (rotation and capillary viscometers, slide plate instruments, etc), as well as differentiation methods, methods permitting the study of the deformation and the rate of deformation considered at any point of the dispersed mass.

The advantages of instruments, in which the dispersed system remains during the test, in a state of homogeneous shear, are discussed.

Some results of measurements of rheological properties of dispersed systems (plastic viscosity, limit shear stress, etc.) are presented and the molecular colloidal interpretation of viscoplastic flow of dispersed masses is discussed.

Finally, the paper brings some examples of practical application of the results obtained by rheological investigation.

WOJCIECH POGÁNY

O PEWNYCH ZAGADNIENIACH MECHANIKI GRUNTÓW

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXIV

SPIS TREŚCI

	str.
1. Zagadnienie rozkładu naprężeń pod fundamentami	35
2. Zagadnienie parcia ziemi i murów oporowych	40

Tematyka niniejszego artykułu obejmuje krótki przegląd historyczny rozwoju pewnych zagadnień mechaniki gruntów na przestrzeni dwóch ostatnich wieków. Pierwszym zagadnieniem, o które tutaj chodzi, jest rozkład naprężeń pod fundamentami oraz związane z tym zagadnienie osiadania fundamentów. Drugim jest zagadnienia parcia ziemi względnie murów oporowych. Ten może szkicowy opis wymienionych zagadnień jest zarazem szkicowym przedstawieniem historii rozwoju mechaniki stosowanej gruntów ¹⁾.

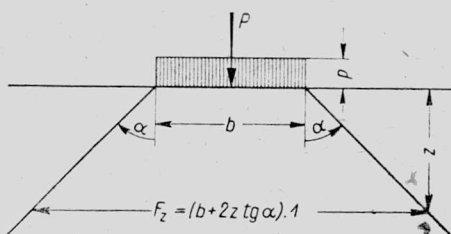
1. Zagadnienie rozkładu naprężeń pod fundamentami

1.1. Pierwsza faza historii tego zagadnienia zbiega się z epoką mechaniki klasycznej (N e w t o n, L e i b n i t z, L a g r a n g e, C l a p p e y r o n). W tej fazie obciążenie powierzchniowe przyjmuje się w postaci siły skupionej P lub siły równomiernie rozłożonej na powierzchni (o długości b i szerokości 1), rys. 1:

$$P = pb,$$

$$\sigma = \frac{pb}{b + 2z \operatorname{tg} \alpha},$$

gdzie P jest wielkością siły skupionej, p ciśnieniem, b długością fundamentu (jego powierzchnia zatem jest $b \cdot 1$), σ wartością naprężenia na dowolnej głębokości z , zaś α kątem rozkładu (w obliczeniach praktycznych przyjmowano zwykle 45°).



Rys. 1.

Naprężenie σ ma dwie wartości graniczne. W głębokości $z = 0$, a więc bezpośrednio pod powierzchnią fundamentu, $\sigma = p$, w głębokości zaś $z = \infty$ jest $\sigma = 0$. Podstawowym twierdzeniem teorii klasycznej jest twierdzenie, że zerowe naprężenie występuje tylko w nieskończonej głębokości.

1.2. Boussinesq w r. 1885, [1], na podstawie już wtedy znanych doświadczeń sformułował teorię matematyczną, w której dowodzi, iż

¹⁾ Praca przedstawiona na Kursie Naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Karpaczu w sierpniu 1953 r.

miejsca o zerowym naprężeniu możliwe są w płaskim obszarze w obrębie granic skończonych; konstruuje on zamknięte obszary, wewnątrz których naprężenie posiada wartości różne od zera. Jego teoria prowadzi do pojęcia tzw. «cebuli naprężeń» B o u s s i n e s q a. Teoria ta rozwiązuje zagadnienie rozkładu naprężeń w sposób ścisły, a otrzymane rozwiązania można było w ówczesnym stanie badań doświadczalnych uważać za bardzo bliskie rzeczywistości.

Teoria B o u s s i n e s q a jest ważna przy przyjęciu założeń:

(a) izotropii, (b) jednorodności, (c) ciągłości oraz (d) proporcjonalności między naprężeniem i odkształceniem (ważność prawa H o o k e' a).

Jeżeli odwrotność liczby P o i s s o n a $m = 2$, to

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi r^2} \cos^3 \delta, \quad \sigma_h = \frac{3P}{2\pi r^2} \cos \delta \sin^2 \delta, \quad \tau = \frac{3P}{2\pi r^2} \cos^2 \delta \sin \delta;$$

tutaj r jest odległością dowolnego punktu od punktu zaczepienia siły, δ kątem pomiędzy kierunkiem r i kierunkiem pionowym, zaś σ_z , σ_h i τ są odpowiednio naprężeniami pionowymi, poziomymi i ścinającymi w dowolnym punkcie (r, δ) .

Jeżeli $m \neq 2$, to wartości σ_z i τ będą takie same, dla σ_h zaś otrzymujemy wyrażenie

$$\sigma_h = \frac{P}{2\pi r^2} \left(3 \cos \delta \sin^2 \delta - \frac{m-2}{m} \frac{1}{1+\cos \delta} \right).$$

Na podstawie teorii B o u s s i n e s q a powstały dwie metody w praktyce inżynierskiej najczęściej stosowane i znane dla obliczenia rozkładu naprężeń i osiadania fundamentów, mianowicie metoda S t e i n b r e n n e r a i H a e f e l i e g o.

1.3. Bezpośrednio po zakończeniu pierwszej wojny światowej przeprowadzono szereg doświadczeń, które wykazały, iż naprężenia obliczone zgodnie z teorią B o u s s i n e s q a w znacznym stopniu różnią się od rzeczywistych. Przypominamy tutaj doświadczenia rentgenologiczne H u g i e g o (1927) i G e r b e r a (1929), dotyczące gruntów piaszczystych i sypkich, przeprowadzone w ten sposób, że z ziarnami gruntu (piasku lub żwiru) zmieszano ziarna ołowiane i za pomocą zdjęć rentgenowskich ustalono wielkość przemieszczeń oraz powierzchnie graniczne mas gruntu bez naprężeń względnie bez ruchu. W doświadczeniach autora niniejszej pracy, przeprowadzonych w 1934 r. (por. *Czasopismo Techniczne* oraz *Bauingenieur* z tego okresu), dla uniknięcia dużej różnicy ciężarów właściwych zamiast ziaren ołowianych stosowano ziarna piasku lub żwiru galwanicznie powleczone ołowiem. Podobne doświadczenia przeprowadził piszący te słowa nad gruntami zwięzłymi. Na podstawie tych i podobnych doświadczeń F r ö h l i c h w r. 1934, [2], biorąc pod uwagę

anizotropię gruntu i częściowo odkształcenie plastyczne podaje dla wartości naprężeń następujące wyrażenia:

$$\sigma_z = \frac{\nu P}{2\pi r^2} \cos^{\nu} \delta, \quad \sigma_h = \frac{\nu P}{2\pi r^2} \cos^{\nu-2} \delta \sin^2 \delta, \quad \tau = \frac{\nu P}{2\pi r^2} \cos^{\nu-1} \delta \sin \delta;$$

tutaj ν jest wskaźnikiem koncentracji charakterystycznym dla danego gruntu. Jeżeli $\nu = 3$, to otrzymujemy wzory B o u s s i n e s q a. W teorii F r ö h l i c h a rozkład naprężeń nie jest liniowy, jeżeli $\nu = 4, 5, 6$.

1.4. Teorię plastyczności wprowadził do zagadnień fundamentowania właściwie P r a n d t l (1923) i jego szkoła: C a q u o t (1934), R é s a l (1933-35) i inni.

Według P r a n d t l a naprężenie graniczne jest równe w przypadku niespoistych (symplich) gruntów

$$q = \gamma t \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \operatorname{tg} \varphi},$$

w przypadku zaś gruntów spoistych względnie zwięzłych

$$q' = q + p_k \left[\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \operatorname{tg} \varphi} - 1 \right],$$

gdzie p_k jest naprężeniem wewnętrznym stanowiącym o spójności; $p_k = c \operatorname{ctg} \varphi$.

Metoda tej szkoły została później skontrolowana przez wiele doświadczeń. Między innymi piszący te słowa przeprowadził doświadczenia dla przypadku obciążenia pali, [3].

1.5. Metody doświadczalne (T e r z a g h i, B e n d e l). W 1946 r. na podstawie metod badawczych opracowanych przez T e r z a g h i e g o podaje on następujący przybliżony i oparty na doświadczeniach laboratoryjnych wzór:

$$\sigma_z = \frac{1}{f} \left(\frac{p_0 b}{b + a z^n} + \frac{p_0}{a b z^n} \right);$$

tutaj f jest współczynnikiem charakteryzującym geometryczny kształt fundamentu, n sztywnością, zaś a stałą charakteryzującą grunt.

We wzorze tym B e n d e l usiłuje skorzystać z wyników mechaniki gruntu z ostatnich 20 lat dla ustalenia rzeczywistego rozkładu naprężeń. Jest bowiem rzeczą zrozumiałą, iż poprzednie metody, uwzględniające tylko niektóre stałe fizyczne, podawały rozkład naprężeń w znacznym stopniu wyidealizowany.

Widzimy tutaj wspólną cechę rozwoju każdej technicznej dyscypliny powstałej w oparciu o nauki przyrodnicze. W pierwszym etapie rozwoju spotykamy się ze schematyzacją: obszerne i różne grupy przedmiotów, czasami w znacznym stopniu różniących się od siebie, zespala się w jedną całość (teoria klasyczna, która traktuje w ten sam sposób wszyst-

kie rodzaje gruntów). Nawet w późniejszej teorii B o u s s i n e s q a naprężenie pionowe i ścinające nie zależy od fizycznych właściwości gruntu, a tylko we wzorze dla naprężenia poziomego występuje liczba P o i s s o n a. Teoria F r ö h l i c h a pod wpływem wtedy właśnie rozpoczętych doświadczeń wprowadza już wskaźnik koncentracji ν pragnąc w ten sposób skompensować odchylenia, pochodzące od anizotropii, odkształcenia plastycznego i nieliniowego rozkładu naprężeń. Ta kompensacja nie dokonuje się jednak na ścisłej fizyko-matematycznej podstawie, ponieważ za pomocą jednego czynnika usiłuje uwzględnić i skompensować wszystkie odchylenia. Szkoła P r a n d t l a stara się uwzględnić każde odchylenie z osobna, ale teoria P r a n d t l a oparta na teorii plastyczności uwzględnić może tylko odchylenia pochodzące od odkształcenia plastycznego. Szkoła P r a n d t l a bierze pod uwagę zaledwie kilka stałych fizycznych: ciężar objętościowy, spójność i kąt tarcia wewnętrznego. Nie zna ona jeszcze niezależnie od niej rozwijającej się szkoły mechaniki gruntów T e r z a g h i e g o i jej wyników.

1.6. Z zagadnieniem rozkładu naprężeń wiąże się ściśle zagadnienie osiadania fundamentów. Całkowite osiadanie, φ , wyraża się matematycznie jako

$$\varphi = \int_0^t \frac{\sigma_z}{M_E} dz,$$

gdzie σ_z jest naprężeniem pionowym, M_E współczynnikiem ściśliwości (odpowiadającym w przypadku ciała sprężystego współczynnikowi Y o u n g a $E = \text{const}$ z tym, że M_E jest na ogół zmienne), zaś t przyjętą granicą głębokości.

Wprowadźmy jeszcze oznaczenia

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_0 + \sigma + \sigma_z,$$

przy czym σ_0 oznacza wartość naprężenia w gruncie przed obciążeniem fundamentów; wartość ta zależy od warunków geologicznych i strukturalnych; σ jest naprężeniem dodatkowym, które nie pochodzi również od obciążenia użytkowego, lecz jest wynikiem wpływów fizyczno-chemicznych (sił włoskowatych, zmian termicznych itd.); σ_z jest naprężeniem dodatkowym wywołanym w gruncie przez obciążenie użytkowe, np. fundamentem.

Na podstawie empirycznej funkcji T e r z a g h i e g o można napisać wartość elementarnych osiadań w następujący sposób:

$$ds_1 = (K' + K \log \sigma_1) dz,$$

$$ds_2 = (K' + K \log \sigma_2) dz,$$

$$ds = ds_2 - ds_1 = \left[K \log \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \right] dz.$$

Stąd całkowite osiadanie

$$\varphi = \int_0^t ds = K \int_0^t \log \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) dz = K \int_0^t \log \frac{\sigma_0 + \sigma + \sigma_2}{\sigma_0 + \sigma} dz.$$

Ponieważ przy całkowaniu spotykamy się częstokroć z dużymi trudnościami, więc przy praktycznych rozwiązaniach zwykle korzystamy z prostego sumowania:

$$\varphi = K \sum \log \frac{\sigma_0 + \sigma + \sigma_2}{\sigma_0 + \sigma} \Delta z.$$

W praktyce inżynierskiej przeważnie są w użyciu dwie metody: metoda Steinbrennera (1936) i Haefeliiego (1938). Metoda Steinbrennera uwzględnia wpływ kształtu fundamentu, ale z badań laboratoryjnych korzysta tylko w ograniczonym stopniu. Metoda Haefeliiego jest bardziej związana z badaniami laboratoryjnymi przynajmniej w obliczeniu osiadań; o ile jednak chodzi o ustalenie rozkładu naprężeń, to tak samo jak i metoda Steinbrennera oparta jest na konserwatywnej teorii Bousinesq'a; oprócz tego przez uwzględnienie ciężaru własnego gruntu niepotrzebnie komplikuje rozwiązanie: wartość osiadania otrzymuje z obliczenia pola powierzchni i wymaga pięciu konstrukcji wykreslnych dla każdego punktu wiercenia. Autorowi niniejszego udało się opracować metodę uproszczoną, która redukuje potrzebne obliczenia numeryczne do dwóch prostych rysunków, a mimo to bardziej zbliża się do rzeczywistości.

1.7. Rozwiązanie Terzaghiiego, oparte na tzw. analogii termodynamicznej, przedstawia zmianę nadciśnienia w wodzie w porach gruntu jako funkcję czasu w postaci cząstkowego równania różniczkowego drugiego rzędu:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{k}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2};$$

tutaj w jest naprężeniem hydrodynamicznym, t czasem, z głębokością, k współczynnikiem filtracji Darcy'ego, zaś a współczynnikiem ściśliwości gruntu.

Jest to właściwie równanie reologiczne, ponieważ nadciśnienie występuje w nim jako funkcja nie tylko obciążenia, lecz i czasu. Powyższe równanie różniczkowe rozwiązyli później Terzaghi i Fröhlichem przy użyciu szeregu Fouriera. Giersiewanow podał bardziej praktyczne rozwiązanie, które zostało opracowane i uproszczone przez R. Piętkowskiego. Zaznaczamy tutaj, iż praktyczne dane pomiarowe osiadań różnych budynków w wielu przypadkach zgadzają się z rozwiązaniem teoretycznym.

2. Zagadnienie parcia ziemi i murów oporowych

2.1. C o u l o m b w pracy swej, [4], z r. 1773 podaje pierwszą i w praktyce inżynierskiej do dziś dnia używaną metodę. Rozwiązanie C o u l o m b a jest ważne dla

- (a) murów pionowych,
- (b) poziomej powierzchni ziemi,
- (c) pełnej sztywności materiału gruntu (podczas obciążenia nie uwzględniamy odkształceń).

Na pryzmat ziemi, znajdującej się między płaszczyzną muru i tzw. powierzchnią poślizgu, działają trzy siły: G — ciężar pryzmatu (jego punktem zaczepienia jest środek ciężkości), E — parcie ziemi, R — siła reakcji działająca na powierzchni poślizgu (tworząca z normalną do tej powierzchni co najwyżej kąt równy kątowi tarcia wewnętrznego).

Jak wiadomo, trzy siły są w równowadze, jeżeli przechodzą przez wspólny punkt i wektory ich tworzą trójkąt zamknięty. Wspólny punkt trzech sił w specjalnym przypadku zagadnienia C o u l o m b a zawsze istnieje; gdy jednak mur nie jest pionowy, a powierzchnia ziemi nie jest pozioma i kierunek siły E nie zgadza się z normalną muru, to te trzy siły na ogół nie przechodzą przez jeden punkt. Nie jest zatem spełniony potrzebny warunek stanu równowagi. Trzeba jeszcze zaznaczyć, że rozkład tak parcia ziemi, E , jak i siły reakcji, R , odpowiada ciśnieniu hydrostatycznemu. Według C o u l o m b a w warunkach pionowej ściany muru i poziomej górnej powierzchni ziemi wartość E można obliczyć z maksimum następującej funkcji:

$$E = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin(\alpha - \varphi) \operatorname{ctg} \alpha}{\cos(\alpha - 2\varphi)},$$

gdzie h jest wysokością muru, γ ciężarem objętościowym, α kątem nachylenia dowolnej powierzchni poślizgu, mierzonym od kierunku poziomego, zaś φ kątem tarcia.

Zgodnie z teorią C o u l o m b a wartość α oblicza się z warunku

$$\frac{dE}{d\alpha} = 0,$$

skąd

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{1 + \sqrt{2} \sin \varphi}.$$

Wobec tego pozioma składowa parcia ziemi jest

$$E_h = E \cos \varphi.$$

Punkt zaczepienia wypadkowej E leży w trzeciej części wysokości muru od dołu. Doświadczenia Müller-Breslau wykazały, iż w przypadku drobnego piasku ($\varphi = 30^\circ$) jest $E_h = E_R \cdot 0,79$, gdzie E_R jest wartością parcia ziemi Rankine'a, [5].

Teoria Coulomba ze względu na swoją prostotę jest bardzo rozpowszechniona w praktyce inżynierskiej i stała się podstawą wielu metod graficznych (Culmann, Poncelet, Rebhann, Winkler, Szily). Charakterystyczną cechą rozwiązania Coulomba oraz wymienionych praktycznych rozwiązań jest to, że powierzchnię poślizgu uważa się za płaską.

2.2. Sprzeczność występująca przy uogólnieniu teorii Coulomba — że trzy siły nie przechodzą przez jeden punkt — różni autorzy usiłowali eliminować przez przyjęcie krzywej powierzchni poślizgu. W ten sposób chcieli ratować teorię Coulomba, tak bardzo użyteczną w praktyce inżynierskiej. Typowe rozwiązania podali autorzy: Fellenius (1927), Kreys (1928), Terzaghi (1929), Pogány (1946).

W celu zapewnienia jednego punktu przecięcia trzech sił trzej pierwsi autorzy wyszli z założenia, iż powierzchnia poślizgu jest odpowiednio walcem kołowym, parabolicznym oraz logarytmiczno-spiralnym. Matematyczne traktowanie zagadnienia odpowiada metodzie Coulomba. Masa ziemi przesuwająca się po powierzchni poślizgu, a w stanie równowagi powstałej po przesunięciu opór tarcia wyczerpuje się i rzeczywista wartość parcia ziemi powstaje tam, gdzie wartość E w różnych możliwych stanach równowagi będzie największa. Zagadnienie prowadzi więc właściwie do warunku

$$\frac{\delta E}{\delta s} = 0,$$

co w przypadku płaskiej powierzchni poślizgu odpowiada poprzedniemu zagadnieniu.

Zanim przejdziemy do rozwiązania podanego przez piszącego te słowa, należy pokrótce zwrócić uwagę na różnicę między wynikami doświadczalnymi i rozwiązaniem teoretycznym. Doświadczenia Müller-Breslau, tak samo jak i inne doświadczenia, świadczą o tym, iż obliczona wartość parcia ziemi dosyć dobrze zgadza się z rzeczywistością (jest o około 15% mniejsza), ale o wiele znacznie większa różnica zachodzi w punkcie zaczepienia. W rozwiązaniu Coulomba i w każdym podobnym rozwiązaniu teoretycznym, które zakłada hydrostatyczny rozkład obciążeń, odległość punktu zaczepienia od spodu muru jest równa trzeciej części wysokości muru. Rzeczywisty punkt zaczepienia zaś, według świadectwa wszystkich wykonanych pomiarów, znajduje się w po-

blizu połowy wysokości muru, czasami nawet powyżej tego punktu. W rozwiązaniu Felleniusa - Kreyasa - Terzaghiego otrzymujemy dla E zgodnie z rzeczywistością większą wartość od wartości Coulomba, ale miejsce punktu zaczepienia wypada jeszcze poniżej miejsca wynikającego z teorii Coulomba.

Teoria Pogány'ego opiera się na pewnym rozważaniu fizycznym. Poddajemy różne materiały gruntowe (chodzi tutaj przeważnie o piasek i materiały sypkie) następującemu elementarnemu doświadczeniu: sypimy materiał przez lejek na powierzchnię płaską i przy sypaniu poruszamy lejek wzdłuż prostej poziomej. Wtedy wysypyany piasek przybiera kształt walca parabolicznego, którego przekroje pionowe są elementarnymi parabolami drugiego stopnia

$$y^2 = 2px,$$

gdzie parametr p jest stałą charakteryzującą własności mechaniczne materiału gruntowego (zależną od porowatości, wilgotności, wielkości ziaren, kąta tarcia wewnętrznego itd.). Tę stałą można określić doświadczalnie dla każdego rodzaju gruntu.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę, iż taki walec piasku znajduje się w równowadze i wypełnimy przestrzeń pomiędzy walcem i murem oporowym materiałem piaskowym, to tylko materiał użyty do wypełnienia będzie wywierał parcie na mur oporowy, masa zaś opisanego walca parabolicznego nie będzie nań wywierała żadnego ciśnienia. Nie ma więc ona wpływu na wartość E . Zatem, jeżeli chodzi o parcie ziemi, należy uwzględnić tylko tę masę piasku, której przekrój pionowy posiada granice składające się z trzech na ogół krzywych linii: łuku paraboli masy piasku znajdującej się w równowadze, przekroju powierzchni ziemi i konturu muru (ten ostatni w zwykłych przypadkach jest prosty). Na wycinek działają trzy siły: G , E i R . Siły te powinny przechodzić przez jeden punkt. Z trójkąta wektorów można obliczyć E i R , ponieważ G jest znane. Dla pewności można (ale nie trzeba) przyjąć, że kierunek E jest poziomy. Przy kierunku R uwzględniamy kąt tarcia wewnętrznego. Zaznaczamy, że przy tej metodzie wartość parcia ziemi jest bliska rzeczywistości, a punkt zaczepienia przypada w pobliżu połowy wysokości muru. Metoda ta — mimo że z punktu widzenia praktycznego daje użyteczniejsze wartości od trzech poprzednich — z punktu widzenia naukowego nie jest zadowalającą, ponieważ traktuje masę ziemi jako ciało sztywne i nie uwzględnia ani sprężystego, ani plastycznego odkształcenia, [6].

2.5. Teoria sprężystości i jej zastosowanie do zagadnienia muru oporowego. Rankine w 1857 r. w pracy [7] stosuje równanie Cauchy'ego

c h y' e g o zakładając płaski stan napięcia w nieskończonej półpłaszczyźnie:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = \gamma,$$

gdzie γ jest ciężarem objętościowym ziemi. Poza tym R a n k i n e bierze pod uwagę, że w granicznym stanie równowagi zachodzi związek

$$\tau = n \operatorname{tg} \varphi,$$

gdzie n jest naprężeniem normalnym (dzisiaj używa się na ogół oznaczenia σ). Zaznaczamy, iż R a n k i n e tutaj uwzględnia na razie tylko grunt niespoisty.

R a n k i n e otrzymuje następujące rozwiązanie układu równań różniczkowych.

$$\sigma_x = \sigma(1 + \sin \varphi \cos 2\alpha), \quad \sigma_y = \sigma(1 - \sin \varphi \cos 2\alpha), \quad \tau = \sigma \sin \varphi \sin 2\alpha,$$

przy czym

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2},$$

zaś α jest kątem określającym kierunek naprężenia głównego.

Jeżeli $\alpha = 0$, tzn. gdy kierunek naprężenia głównego jest poziomy, to

$$\sigma_x = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \gamma y, \quad \sigma_y = \gamma y, \quad \tau = 0$$

i

$$\sigma = \frac{\gamma y}{1 - \sin \varphi}.$$

Jeżeli $\alpha = \pi/2$, to

$$\sigma_x = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \gamma y, \quad \sigma_y = \gamma y, \quad \tau = 0$$

i

$$\sigma = \frac{\gamma y}{1 + \sin \varphi}.$$

W przypadku gdy α przybiera wartość dowolną (różną od 0 i 90°), to dla σ otrzymujemy następującą wartość:

$$\sigma = \frac{\gamma}{\cos^2 \varphi} [y(1 + \sin \varphi \cos 2\alpha) - x \sin \varphi \sin 2\alpha].$$

Wprowadzamy kąt δ dla dowolnego punktu (x, y) jako

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \varphi \sin 2\alpha}{1 + \sin \varphi \cos 2\alpha}.$$

Wtedy w ogólnym przypadku otrzymujemy kierunek naprężeń głównych, a zatem kierunek parcia ziemi E , z następującego równania:

$$\cos 2\alpha = \frac{-\sin^2 \delta + \cos \delta \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta}}{\sin \varphi}.$$

To równanie wtedy tylko będzie miało rzeczywiste rozwiązanie, gdy

$$\sin^2 \varphi \geq \sin^2 \delta,$$

to jest

$$\varphi \geq \delta.$$

Jeżeli więc $\varphi = \delta$, to

$$\cos 2\alpha = -\sin \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right),$$

czyli

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}.$$

W przypadku gruntów piaszczystych powyższy warunek, $\varphi \geq \delta$, sprawdza się w rzeczywistości, w przypadku zaś gruntów spoistych φ może być mniejsze od δ , a równowaga może zachodzić pomimo tego, że rozwiązanie równania jest wielkością zespoloną.

Kierunek naprężenia wypadkowego otrzymujemy z następującego równania:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\tau}{\sigma_x} = \frac{\sin \varphi \sin 2\alpha}{1 + \sin \varphi \cos 2\alpha},$$

czyli

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \delta$$

i

$$\varepsilon = \delta.$$

Oznacza to, że z teorii Rankine'a wynika, iż parcie ziemi, E , jest równoległe do górnej powierzchni gruntu. Natomiast doświadczenia Müller-Breslaua i wiele innych wykazały zupełną bezpodstawność tego twierdzenia.

Warto zwrócić uwagę na to, że aczkolwiek metoda Rankine'a pod względem matematyczno-fizykalnym zasadniczo przewyższa metodę Coulomba, jednak wyniki jej w mniejszym stopniu odpowiadają rzeczywistości, niż wyniki, jakie się otrzymuje przez zastosowanie metody Coulomba.

Publikacje Köttera z r. 1903 pogłębiają teorię Rankine'a. Daje on następujące rozwiązanie równań Cauchy'ego:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad \sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha,$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha; \quad \sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Tutaj σ_1 i σ_2 oznaczają, oczywiście, naprężenia główne.

W jednej ze swoich późniejszych prac Köttér w następujący sposób przekształca równania różniczkowe Cauchy'ego:

$$\cos \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} + 2 \sigma \sin \varphi \frac{\partial \beta}{\partial s_1} = \gamma \sin (\beta + \varphi),$$

$$\cos \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} - 2 \sigma \sin \varphi \frac{\partial \beta}{\partial s_2} = -\gamma \cos \beta,$$

gdzie współrzędne s_1 i s_2 określają miejsce dwóch sprzężonych linii poślizgu, zaś β jest kątem nachylenia pierwszej powierzchni poślizgu. W tych równaniach różniczkowych σ i β są dwiema funkcjami niewiadomymi, które spełniają równania Cauchy'ego. Jeżeli weźmiemy pod uwagę, iż

$$p = \sigma \cos \varphi,$$

gdzie p oznacza naprężenia wypadkowe, to równania Köttera można napisać w następującej postaci:

$$\frac{\partial p}{\partial s_1} + 2 p \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \beta}{\partial s_1} = \gamma \sin (\beta + \varphi),$$

$$\frac{\partial p}{\partial s_2} - 2 p \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \beta}{\partial s_2} = -\gamma \cos \beta.$$

W tym układzie równań niewiadomą jest powierzchnia poślizgu określona przez funkcje p i β . Jeżeli jednak uznamy powierzchnię poślizgu za znaną, to powyższy układ równań umożliwia obliczenie wartości σ

lub p w każdym punkcie powierzchni poślizgu. K ö t t e r napisał równania również w następującej postaci:

$$\frac{\partial}{\partial s_1} (p e^{2 \beta \operatorname{tg} \varphi}) = \gamma e^{2 \beta \operatorname{tg} \varphi} \sin (\beta + \varphi),$$

$$\frac{\partial}{\partial s_2} (p e^{-2 \beta \operatorname{tg} \varphi}) = \gamma e^{-2 \beta \operatorname{tg} \varphi} \cos \beta.$$

R e i s s n e r w r. 1924 wykazał zasadniczą sprzeczność pomiędzy teorią R a n k i n e' a a rozszerzeniem tej teorii przez K ö t t e r a. Mianowicie, tarcie powoduje zakrzywienie powierzchni poślizgu w pobliżu murów. Tym zagadnieniem zajmowali się później M o h r, M ü l l e r - B r e s l a u, K r e y i F r e u n d. Pierwsze w praktyce stosowalne rozwiązanie pochodzi od R e i s s n e r a. Oblicza on z powyższego układu równań różniczkowych wartość σ za pomocą równania różniczkowego drugiego rzędu typu hiperbolicznego. R e i s s n e r dochodzi do wniosku, że równania powierzchni poślizgu są charakterystycznymi równaniami tego równania różniczkowego drugiego rzędu. P r a n d t l wykazał, że wzdłuż linii poślizgu do krzywych całkowych, stanowiących rozwiązanie równania różniczkowego, można dołączyć inne krzywe całkowite, stanowiące też rozwiązanie tego samego równania różniczkowego (tak żeby dwie krzywe w punkcie złączenia miały wspólną styczną), przy czym w obszarze pierwszej krzywej nie powstaje zakłócenie (występuje to tylko przy równaniach różniczkowych typu hiperbolicznego, nie występuje zaś przy typie eliptycznym). Zgodnie z tym w sieci powierzchni poślizgu R a n k i n e' a krzywe segmentu ABC dosztukowuje się do sieci prostych R a n k i n e' a ACD . R e i s n e r rozwiązał to zagadnienie graniczne metodą kolejnych przybliżeń. To samo zagadnienie dla przypadku szorstkiego muru pionowego i poziomej powierzchni ziemi rozwiązał K á r m á n, [8], metodą rozwijania w szeregi.

Według rozwiązania K á r m á n a

$$E_h = 0,81 E_R,$$

gdzie E_R jest parciem ziemi R a n k i n e' a :

$$E_R = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Aczkolwiek przy tym rozwiązaniu wartość siły jest bliska rzeczywistości, to punkt zaczepienia siły znajduje się tutaj też na trzeciej części wysokości muru od dołu, ponieważ rozkład sił i tutaj jest hydrostatyczny.

2.4. Wpływ czasu na wielkość parcia ziemi (pogląd reologiczny). Na podstawie doświadczeń *T r e s c i* publikuje w r. 1871 swoją pracę *S a i n t - V e n a n t* o plastycznych odkształceniach i uwzględnia po raz pierwszy czas jako parametr. Twierdzi on, iż miejsca największego ścinania zbiegają się z tymi miejscami, gdzie przy odkształceniu zachodzi największa prędkość poślizgu. Jeżeli miejsca maksymalnego poślizgu określają wzory

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\tau}, \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}},$$

to $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 2\beta$, czyli $\alpha = \beta$.

To rozwiązanie *S a i n t - V e n a n t a* dotyczy tylko płaskiego stanu napięcia; według niego w przypadku przestrzennego rozkładu naprężeń zagadnienie nie jest rozwiązalne. Po upływie roku *M. L é v y* rozwiązał przypadek przestrzenny. Potem, blisko do r. 1900, nie spotykamy się z badaniami w rozpatrywanym kierunku, tj. z badaniami zjawisk plastycznych z uwzględnieniem czasu, a więc z badaniami reologicznymi. Samo zagadnienie plastyczności tak z punktu widzenia fizykalnego i doświadczalnego, jak z matematyczno-teoretycznego, zostało rozwiązane w pracach *H a a r a* i *K á r m á n a*, [9], [10], oraz szkoły getyngieńskiej: *P r a n d t l a*, *H e n c k y' e g o* i *N á d a i a*. *N á d a i* w swojej pracy, [11], oprócz tensora naprężeń i odkształceń wprowadza tzw. tensor prędkości odkształceń.

W ten sposób teoretycznie zostało przygotowane badanie odkształceń plastycznych jako funkcji czasu. Pomimo tego, że badania nad materiałami plastycznymi przeprowadzone przez *P r a n d t l a*, *H e n c k y' e g o*, *M i s e s a*, [12], i *N á d a i a* odnoszą się do tych doświadczeń, które przeprowadzono w Getyndze nad metalami, doświadczenia *P r a n d t l a*, a przede wszystkim *N á d a i a*, wskazują na to, że idealny stan plastyczny silniej przejawia się w materiałach gruntowych, niż w metalach. Do scharakteryzowania stanu plastycznego na ogół korzystamy z modelu *M o h r a* (koło *M o h r a*). W modelu *M o h r a* charakteryzujemy stan napięcia za pomocą koła największego i najmniejszego; koła średniego nie uwzględniamy, bo nie ma ono wpływu na stan napięcia. *L o d e* w r. 1926, *R o š* i *E i c h i n g e r* (1927) oraz *N á d a i* (1927) wykazali, że w przypadku metali nie można pominąć wpływu naprężenia średniego, a model *M o h r a* właściwie tylko przy gruntach gliniastych zgadza się z rzeczywistością. Jest rzeczą charakterystyczną, że dla materiałów piaszczystych — które nie są ciągłe i do których właściwie nie można stosować równania różniczkowego *C a u-*

c h y' e g o i w ogóle matematycznej teorii sprężystości — wyniki doświadczeń lepiej zgadzają się z teorią idealnego stanu plastycznego niż dla metali.

2.5. Wpływ systematycznych badań reologicznych na wyjaśnienie zagadnienia parcia ziemi. Z takimi systematycznymi badaniami spotykamy się głównie w okresie po drugiej wojnie światowej. Chemia i fizyka sztucznych materiałów plastycznych, które przemysł wojenny podczas drugiej wojny rozwinął w niesłychany sposób w każdym państwie biorącym w niej udział, zmuszały fizyków i chemików do badania szeregu zagadnień technologicznych związanych z tymi materiałami. Wśród tych prac trzeba wspomnieć o dziele H. U m s t ä t t e r a, [13]. Niestety, nie zajmuje się on badaniami gruntu ani spoistego, ani sypkiego. Jego badania wyróżniają się głębokim przygotowaniem tak fizyczno-chemicznym, jak i matematycznym. Aczkolwiek w badaniach tych występuje niekiedy pojęcie kąta tarcia wewnętrznego, to jednak o wiele więcej miejsca zajmuje pojęcie lepkości, jako parametru charakteryzującego materiał; ten parametr odegrał już dużą rolę w mechanice N e w t o n a. Lepkość nie jest wielkością stałą, lecz funkcją temperatury i ciśnienia, podczas gdy kąt tarcia wewnętrznego dotychczas był uważany za niezależny od temperatury i od ciśnienia.

Wiemy, jak wielkie trudności powoduje w badaniach mechaniki gruntów rozrzut kąta tarcia wewnętrznego, ile razy usiłował mistrz klasycznej teorii parcia ziemi, T e r z a g h i, w zagadnieniach związanych z kątem tarcia wewnętrznego zredukować rozrzut przez zmianę metody doświadczalnej i teoretycznej, aby w ten sposób wprowadzić porządek potrzebny do ściślejszego, funkcjonalnego, rozwiązania. Skoro to mu się nie udało, powinniśmy i my wybrać inną drogę. Powinniśmy zatem unikać — o ile możliwości — używania kąta tarcia wewnętrznego, jako stałego parametru, a zamiast niego wprowadzić inne parametry, które łatwiej i pewniej można mierzyć.

W celu lepszego wyjaśnienia naszych uwag naświetlimy tutaj różnicę pomiędzy odkształceniem plastycznym i sprężystym. Podczas gdy w obszarze sprężystym aż do granicy plastyczności zachodzi jednoznaczny związek między odkształceniami i naprężeniami, tzn. do każdego odkształcenia przynależy tylko jedno naprężenie i do każdego naprężenia tylko jedno odkształcenie, to poza granicą plastyczności do jednego stanu napięcia przynależy więcej — właściwie nieskończona ilość — wartości odkształceń i do jednego odkształcenia nieskończona ilość wartości naprężeń. Tutaj więc związek nie jest jednoznaczny i oprócz naprężenia i odkształcenia należy wprowadzić współrzedną czasu. Bez tej współrzednej nie można zrozumieć zjawiska tzw. pełzania. Zagadnienie pełzania w ostatnich czasach odegrało wielką rolę w konstrukcjach betonowych. W zagad-

nieniach dotyczących betonu otwierały się trzy możliwości, by przybliżyć do rzeczywistości teoretyczny stan napięcia i odkształcenia, który powstał z powodu pełzania. Pierwsza polegała na wprowadzeniu tzw. funkcji pełzania jako funkcji korygującej, za pomocą której usiłowano skompensować odchylenia pomiędzy wynikami doświadczalnymi i obliczeniowymi. Inną, ogólniejszą i teoretycznie bardziej wartościową metodą, jest metoda *M i c h e l s o n a* (1917), który kompensuje odchylenia pomiędzy wynikami teoretycznymi i doświadczalnymi za pomocą równania dostosowanego do ołowiu, cyny, cynku, żelaza, miedzi, marmuru, gumy, żelatyny itd., przez podstawienie odpowiednich stałych. Metoda *M i c h e l s o n a* nie ma charakteru prawa przyrodniczego.

Trzecia metoda, która z punktu widzenia teoretycznego i fizycznego stoi zasadniczo ponad poprzednimi metodami i w której wprowadzony matematyczny związek ma charakter prawa przyrodniczego, pochodzi w pierwszym swoim sformułowaniu od *M a x w e l l a* (1868). *M a x w e l l* dla stanu sprężystego podał następujące dwa równania:

$$\sigma = E^* \varepsilon,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = E^* \frac{d\varepsilon}{dt},$$

gdzie σ oznacza jednakowe naprężenia cisnące, ciągnące i ścinające, ε jednostkowe odkształcenie w tych stanach napięcia, t parametr czasu, E^* zaś w przeciwieństwie do współczynnika *Y o u n g a* nie jest wartością stałą. Jeżeli $E^* = E = \text{const}$, to otrzymujemy prawo *H o o k e' a*. Dla stanu plastycznego *M a x w e l l* podaje następujące wyrażenie:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E^* \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma}{T};$$

tutaj T jest stałą wielkością czasu zależną od struktury materiału, której rolę za chwilę oświetlimy. To ostatnie równanie *M a x w e l l* zapisuje również w następującej postaci:

$$E^* \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{T}.$$

Jeżeli $\sigma = \text{const}$, to

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad \text{i} \quad E^* \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{T}.$$

Jeżeli tutaj $T = \infty$, to mamy do czynienia z materiałem idealnie sprężystym:

$$E^* \frac{d\varepsilon}{dt} = 0.$$

Jeżeli ε nie jest funkcją czasu, to $d\varepsilon/dt=0$ i otrzymujemy następujące równanie:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{T} = 0,$$

czyli

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dt}{T},$$

skąd

$$\sigma = \varepsilon e^{-\frac{t}{T}} = E^* \varepsilon e^{-\frac{t}{T}}.$$

Jeżeli tutaj $t=T$, to

$$\sigma = E^* \varepsilon \frac{1}{e}.$$

Zatem T jest czasem, podczas którego wartość naprężenia spadnie od wartości $E^* \varepsilon$ do jej e -tej części (czas odprężenia). Równanie poprzednie można również napisać w postaci

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E^*} e^{\frac{t}{T}}.$$

Jeżeli $T \neq 0$ i $t=0$, to $\varepsilon = \sigma/E^*$; jest to wartość jednostkowego wydłużenia w chwili początkowej

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E^*}.$$

Ogólne prawo można ująć jako kombinację dwóch praw przyrodniczych, mianowicie prawa ścinania, $\tau = G\gamma$, i prawa lepkości Newtona,

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}.$$

Tutaj u oznacza prędkość, y głębokość, η lepkość, τ naprężenie ścinające w kG/cm^2 , G moduł ścinania w kG/cm^2 oraz γ zmianę kąta.

Jeżeli znane już równanie

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E^*} e^{\frac{t}{T}},$$

w którym σ i ε oznaczają naprężenie oraz odpowiadające mu odkształcenie, stosujemy do naprężenia ścinającego, to przybierze ono następującą postać:

$$\gamma = \frac{\tau}{G^*} e^{t \frac{G^*}{\eta}}.$$

W przypadku ścinania te dwa równania mogą stać się identyczne tylko pod warunkiem, że

$$\frac{G^*}{\eta} = \frac{1}{T},$$

czyli $\eta = G^* T$ lub $G^* = \eta/T$.

Wartość γ można napisać w postaci

$$\gamma = \frac{T}{\eta} \tau e^{t \frac{G^*}{\eta}}.$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że według modelu M o h r a w każdym punkcie krzywej granicznej (obwiedni kół M o h r a)

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1(1-k)}{2},$$

gdzie k jest współczynnikiem parcia w stanie spoczynku (T e r z a g h i używa terminu *Ruhedruckziffer*), $k = \sigma_1/\sigma_2$,

to

$$\gamma_{max} = \frac{T}{\eta} \frac{\sigma_1(1-k)}{2} e^{t \frac{G^*}{\eta}}.$$

Jeżeli mnożymy obie strony przez G^* , to otrzymujemy rzędne obwiedni kół M o h r a:

$$\tau = \frac{T}{\eta} G^* \frac{\sigma_1(1-k)}{2} e^{t \frac{G^*}{\eta}}.$$

Wartości kątów tarcia wewnętrznego wzdłuż obwiedni kół M o h r a otrzymujemy z równania $\operatorname{tg} \varphi = \tau/\sigma$; jeżeli zamiast σ napiszemy σ_1 , to

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\tau}{\sigma_1} = \left[\frac{G^* T}{2} (1-k) \right] \frac{1}{\eta} e^{t \frac{G^*}{\eta}} = K \frac{1}{\eta} e^{t \frac{G^*}{\eta}}.$$

Jeżeli podstawimy tę wartość do wzoru czynnego lub biernego parcia ziemi, to wskutek tego prostego matematycznego zabiegu uzyskamy dwa ważne wyniki o znaczeniu fizycznym:

(a) eliminujemy kąt tarcia wewnętrznego i otrzymamy funkcję, w której występuje wartość lepkości (η), a więc parametr zmienny; wartości K i G^* w normalnych okolicznościach, w przypadku praktycznych, inżynierskich zagadnień, można uważać za stałe;

(b) na miejsce funkcji parcia ziemi w stanie sprężystym lub plastycznym — które były niezależne od czasu — wprowadzimy funkcję reologiczną, uwzględniającą zjawisko pełzania.

Wzory K á r m á n a - N á d a i a dla czynnego lub biernego parcia ziemi po rozwinięciu funkcji tg^2 w szereg T a y l o r a i wstawieniu wyżej obliczonej wartości φ przybiorą następującą postać:

$$E_a = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\gamma h^2}{8} \pi \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} K \frac{1}{\eta} e^{t \frac{G^*}{\eta}} \right),$$

$$E_p = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\gamma h^2}{8} \pi \left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} K \frac{1}{\eta} e^{t \frac{G^*}{\eta}} \right).$$

2.6. Na zakończenie pragniemy zwrócić uwagę na pewien szczególny przypadek zagadnienia murów oporowych, o którym, w oparciu o powyższe równanie reologiczne, można powiedzieć, że jest rozwiązany. Zdaje się, że opisana metoda jest pierwszą próbą rozwiązania tego zagadnienia; jej wartości praktycznej na razie nie można ocenić. Przy budowie murów oporowych zauważono, iż w pierwszych latach swego istnienia ich stateczność jest nienaganna, natomiast później — zwykle po 6-8 latach i głównie w przypadku gruntów gliniastych — pokazują się pęknięcia i zerwania. W tym okresie stateczność jest bardzo zagrożona. Metoda reologiczna wydaje się umożliwiać wzięcie w rachubę przy wymiarowaniu murów oporowych zmian stanu napięcia, powstałych wskutek pełzania, i w ten sposób zapewnić pożądaną stateczność.

Literatura cytowana w tekście

- [1] J. B o u s s i n e s q, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre*, Paryż 1855.
- [2] O. K. F r ö h l i c h, *Druckverteilung im Baugrunde*, Wiedeń 1934.
- [3] W. P o g á n y, Kongr., Paryż 1952.
- [4] C. C o u l o m b, *Essai sur une application de règle de maximum et minimum à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*, Mém. Acad. Paryż 1766.

- [5] H. Müller-Breslau, *Erddruck auf Stützmauer*, Stuttgart 1906.
- [6] W. Pórgány, *New Method of Determining Earth Pressure*, Civile Eng., Londyn 1951.
- [7] W. Rankine, *On the Stability of Loose Earth*, Londyn 1857.
- [8] T. Kármán, II Międz. Kongr., Zurych 1926.
- [9] A. Haari T. Kármán, *Nachr. Wiss. Ges.*, Getynga 1909.
- [10] T. Kármán, *Über elastische Grenzzustände*, Zurych 1927.
- [11] A. Nádai, *Plastizität und Erddruck*, Handb. Physik., VI, Berlin 1928.
- [12] R. Mises, *Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand*, Getynga 1913.
- [13] H. Umstätter, *Strukturmechanik*, Drezno 1948.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ ГРУНТОВ

Автор рассматривает две проблемы механики грунтов: (1), распределение напряжений под фундаментом и связанное с этим оседание фундаментов, а также (2), вопрос давления грунтов или подпорных стен. Кроме того, приводит краткую историю развития этих проблем.

(1) В классической физике (Ньютон, Лейбниц, Лагранж, Клапейрон) для значения напряжения получали выражение, по которому нулевое напряжение случается только на бесконечной глубине. Только лишь в 1885 году Буссинеск разработал первую математическую теорию, результаты которой более соответствуют действительности. На основании этой теории были созданы применимые в инженерной практике методы Штейнбреннера и Гефели. От Буссинеска происходит понятие «луковицы напряжений». Фрелих в 1934 г. вводит в формулы Буссинеска коэффициент концентрации.

Прандтль и его школа (Како, Резаль, Маар) рассматривают этот вопрос на основании теории пластичности и приводят формулы для единичной нагрузки в случаях сыпучих и связных грунтов; Терцаги же, Бендель и другие создают приближенные формулы на основании лабораторных исследований; эти формулы учитывают вещество грунта. Для оседания они получают дифференциальное уравнение, в котором выступает время. Таким образом, данное уравнение является уже реологическим уравнением. Герсеванов привел метод практического решения этого уравнения; метод Герсеванова был упрощен впоследствии Пентковским.

(2). Впервые вопросом давления грунтов занимался Кулон (1773), создавая формулу, являющуюся основой целого ряда графических методов (Кульман, Понселе, Ребханн, Винклер, Шили). В особенном случае Кулона — три силы, возникающие при под-

порной стене (вес призмы земли, находящейся между плоскостью стены и поверхностью скольжения, давление грунта и сила реакции), всегда имеют общую точку, но в общем — это не имеет места. Поэтому, Феллениус, Крей и Терцаги пытались устранить это противоречие, принимая кривую поверхность скольжения.

Автор приводит собственный экспериментальный метод (1951), который, с практической точки зрения, приводит к правильным значениям, хотя, с теоретической точки зрения, он не безупречен.

Ранкин, в 1857 году, для решения этой проблемы применяет теорию упругости. Его метод, с теоретической точки зрения, превосходит метод Кулона, но результаты в меньшей степени соответствуют действительности. Кеттер (1903), Райснер (1924) и Карман пытались поправить и углубить теорию Ранкина.

Реологический аспект этой проблемы, т. е. учет влияния времени, выступает уже в трудах Сен-Венана (1871 г.), однако систематические исследования в этой области производились только в последнее время (Г. Умштетер, 1948 г.). Основой этих исследований являются уравнения Максвелла (1868), учитывающие упругое и пластическое состояния. Таким образом, при функциональной трактовке давления грунтов, можно устранить угол внутреннего трения и получить функцию, в которой выступает вязкость, т. е. переменный параметр. Автор, в этом смысле, преобразовывает уравнения Кармана - Надаи для активного и пассивного давления грунта.

S u m m a r y

SOME PROBLEMS OF SOIL MECHANICS

Two problems of soil mechanics are discussed: (1) the stress distribution under a foundation together with the resulting problem of foundation setting, and (2) the problem of soil pressure against a wall. A short historical account is given.

(1) Stress Distribution under a Foundation. In classical physics (Newton, Leibnitz, Lagrange, Clapeyron) an expression for stresses is obtained, according to which the stresses vanish only at infinite depth. The first mathematical theory was created by Boussinesq in 1885. It yielded results which were closer to reality and constituted a basis for the practical methods of Steinbrenner and Haefeli. The notion of «stress bulb» also came from Boussinesq. In 1934 the concentration coefficient was introduced in Boussinesq's equations by Fröhlich.

P r a n d t l and his school (C a q u o t, R é s a l, M a a r) applied the theory of plasticity to the considered problem, and obtained equations for unit load in the cases of loose and cohesive soils. On the other hand, T e r z a g h i, B e n d e l and others introduced approximate formulae based on laboratory tests and taking into consideration the composition of the soil. They obtained a differential equation for foundation setting, in which time is represented. This is therefore a rheologic equation. A practical method of solution of this equation has been given by G h e r s e v a n o v and was simplified by P i e t k o w s k i.

(2) Soil Pressure. This problem was first treated by C o u l o m b (1773), who gave a formula constituting a basis for a series of graphical methods. (C u l m a n n, P o n c e l e t, R e b h a n n, W i n k l e r, S z i l y). In the special case considered by C o u l o m b the three forces appearing in the problem (weight of the prism of soil between the wall and the slip plane, soil pressure and reaction force) have always a common point of intersection, which is not true in general. An effort has been therefore made (F e l l e n i u s, K r e y, T e r z a g h i) to avoid this error by assuming a curved surface of slip. The author gives his own experimental method (1951), which in practice has proved to be useful although theoretically is not without reproach.

The theory of elasticity has been used in 1857 by R a n k i n e to solve the problem in question. This method, from the theoretical point of view, is better than that of C o u l o m b, the results, however, are rather inferior. K ö t t e r (1903), R e i s s n e r (1924) and K á r m á n tried to improve and to generalize the theory of R a n k i n e.

The rheological aspect of this problems was treated in S a i n t - V e n a n t's papers (1871), but systematic investigations have been undertaken only in recent times (H. U m s t ä t t e r, 1948). These investigations are based on M a x w e l l's equations (1868), which take into account the elastic and plastic state. In this manner the angle of internal friction of the soil can be eliminated and a function obtained in which viscosity is represented, this being a variable parameter. In this manner the author transforms the K á r m á n - N á d a i equations for active and passive soil pressure.

JERZY NOWIŃSKI

SZLAKAMI TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

XXV

1. Wypada przyznać, że gdy kierownictwo kursu naukowego w Karpaczu ¹⁾ zwróciło się do autora tych uwag z propozycją wygłoszenia kilku uwag o minionych i ewentualnie przyszłych drogach rozwoju teorii sprężystości, to propozycja ta postawiła go przed dość poważnym dylematem. Z jednej bowiem strony dostatecznie pogłębione i wszechstronne rozwinięcie tak poważnego tematu przed gronem wybitnych ludzi nauki przerażało, niewątpliwie, czas pozostający do dyspozycji, z drugiej atoli stony rzeczą pociągającą było przeprowadzenie pewnej, mniej czy więcej doskonałej, syntezy materiału, którego poszczególne, często drobne fragmenty przychodziło piszącemu te słowa analizować w ciągu niemałej części swego życia. Było to zapewne uczucie zbliżone do uczuć szlifierza drogich kamieni, który polerując przez wiele lat poszczególne okruchy wspianego naszyjnika pragnie wreszcie raz w życiu ujrzeć go w całej świetności. Wyjściem z tej sytuacji stało się tutaj przypomnienie niepisanego zwyczaju obserwowanego w najbardziej postępowej dziedzinie techniki, mianowicie w lotnictwie. Wedle tego zwyczaju co jakiś czas ukazują się na łamach prasy światowej indywidualne wypowiedzi fachowców, zawierające bezpretensjonalną ocenę dotychczasowego stanu i próbę odgadnięcia przyszłych dróg rozwoju tej gałęzi techniki.

Otóż niniejsze uwagi mają stanowić taką właśnie na wskroś osobistą wypowiedź. W danym razie jest to wypowiedź naukowca-amatora, nie związanego z żadnym urzędem naukowym i z żadną szkołą naukową. Daje to pewną rękojmię oswobodzenia poglądów od nalotu rutyny, ale równocześnie zmniejsza, być może, zasięg i ogólność tych poglądów. Jakkolwiekby było, w wypowiedzi niniejszej obok stwierdzeń obiektywnych znajdują się na pewno również poglądy subiektywne, płynące z własnych sympatii i niechęci naukowych, z własnych predylekcji i awersji, z własnej znajomości i nieznanomości rzeczy — jednym słowem z tego wszystkiego, co stanowi o ograniczoności sądów ludzkich.

¹⁾ Referat programowy wygłoszony na Kursie Naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Karpaczu w sierpniu 1953 r.

Te zastrzeżenia wypada mieć na względzie przy ocenie zamieszczonych tu luźnych uwag. Zanim do nich przystąpimy, pragnęlibyśmy podać pewne założenia porządkujące naszą wypowiedź. Są one następujące.

Po pierwsze, dzieje teorii sprężystości ulegają podziałowi na trzy okresy, z których dwa pierwsze — przedzielone rozprawą N a v i e r a z 1820 r. — kończą się w latach pierwszej wojny światowej. Dzieje tych dwóch okresów: okresu pierwszego (okresu zawiązków podstawowych zasad) i okresu drugiego (okresu budowy teorii ogólnych), zostają potraktowane jako przeszłość teorii sprężystości i omówione na podstawie działalności poszczególnych największych uczonych.

Aby uczynić nasz wykład bardziej swobodnym i zbliżonym do gawędy oraz aby nie utracić równocześnie z oczu głównego celu naszej wypowiedzi, mianowicie poszukiwania przyszłych tendencji rozwojowych teorii sprężystości, zastosujemy tutaj metodę użytą tak mistrzowsko przez S ł o w a c k i e g o w *Beniowskim*. Czyniąc zatem przegląd przeszłości coraz to będziemy sobie pozwalali na dygresje aktualne, rzucające nowe światło na stosunki przeszłe i, wzajemnie, ukazujące w nowym świetle na tle przeszłości przeżywaną przez nas teraźniejszość.

Po drugie, przy omówieniu okresu trzeciego (okresu rozbudowy szczegółowej osiągnięć klasycznych oraz tworzenia nowych uogólnień), przedstawiającego teraźniejszość teorii sprężystości, charakteryzowanie dorobku poszczególnych autorów zastąpimy charakteryzowaniem ważniejszych gałęzi tematyki. Czynimy to nie tylko dlatego, że masowość współczesnej pracy naukowej uniemożliwia przyjęcie innego postępowania, ale również dlatego, że ułatwia to nam ekstrapolację wniosków na bliską i nieco dalszą przyszłość.

Po trzecie, zarówno przy oświetlaniu przeszłości, jak i przy omawianiu teraźniejszych i przyszłych dróg rozwoju teorii sprężystości, zawsze mieć będziemy na względzie stosunki i potrzeby krajowe. Kierunki przyszłego rozwoju szkicować zatem będziemy nie tyle z uwagi na rozwój teorii sprężystości w ogólności, ile z uwagi na intensyfikację i podniesienie poziomu pracy naukowej w Polsce. Niestety, nie udało się tutaj, w istocie, przedstawić niczego innego, jak tylko pierwszy szkic węglem.

2. Gdy się chce mówić o drogach przyszłego rozwoju jakiejś nauki, to — jak wspomnieliśmy już poprzednio — niesposób pominąć przeszłości tej nauki, nawet gdyby to miał być tak migawkowy zarys, jaki tutaj podamy²⁾. W tym spojrzeniu w przeszłość — o ile ono dotyczy teorii sprę-

²⁾ Por. A. E. H. L o v e, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, tłum. ros., Moskwa-Leningrad 1935.

żystości — uderza przede wszystkim krótki żywot tej nauki i duże trudności, jakie napotykała na swej drodze³⁾.

Narodziny teorii sprężystości — lub też jej siostrzycy praktycznej, mianowicie wytrzymałości materiałów — zwykło się, jak wiadomo, łączyć z imieniem *G a l i l e u s z a*. Mowa tutaj o roku 1638, w którym ukazały się jego sławne *Discorsi e dimonstrazioni*. W tym zakresie rozwój przemysłu w różnych krajach Europy wysunął wiele nowych zagadnień mechaniki stosowanej, domagających się rozwiązania. Zauważmy, że wedle wymienionej daty mechanika ciał odkształcalnych przedstawia się, o czym już mówiliśmy, jako nauka stosunkowo nader młoda, liczy sobie bowiem lat zaledwie trzysta. Trudno ten okres porównać z sędziwym wiekiem chociażby nauk matematycznych, z których np. geometria znalazła zachwycające pod względem swej budowy logicznej sformułowanie już przed dwudziestu dwoma wiekami.

Pozostanie chyba na zawsze zagadką, czy opóźniony rozwój mechaniki ciał odkształcalnych przypisać należy tkwiącym w niej szczególnym zawiłościom, czy też opóźnienie to właściwe jest wszystkim naukom o podłożu fizycznym, niepomrotnie widać trudniejszym do ogarnięcia umysłem od nauk bardziej formalnych, do jakich należą np. nauki matematyczne. W każdym razie uderzać dzisiaj musi fakt, że ten sam *G a l i l e u s z*, który niewątpliwie władał niektórymi działami matematyki na poziomie niewiele różnym od poziomu dzisiejszego, ten sam *G a l i l e u s z*, który właściwie odkrył i sformułował podstawowe prawa mechaniki, przypisane później w całości *N e w t o n o w i*, ten sam *G a l i l e u s z* nie dostrzegął sprężystych właściwości ciał stałych i istotę zginania belki wspornikowej widział w jej dążeniu do obrócenia się dokoła osi leżącej w płaszczyźnie ściany i prostopadłej do osi belki.

Skoro usankcjonowaliśmy dygresje aktualne w naszej gawędzie, to trzeba w tym miejscu stwierdzić, że problemy utwierdzenia pozostają jeszcze do dziś dnia w znacznej mierze niewyjaśnione i czekają na swego eksploratora. Jest to jeszcze jednym dowodem jakichś dziwnych trudności tkwiących w nauce o wytrzymałości materiałów. Autor tych słów miał okazję w innym wykładzie przypomnieć wnioski, do których prowadzi dokładniejsza analiza sposobu utwierdzenia, na przykład cienkościennej belki wspornikowej o przekroju zamkniętym. Ileż jednak kryje się jeszcze tajemnic, gdy chodzi, powiedzmy, o utwierdzenie belek wspornikowych o przekroju otwartym, o utwierdzenie belek jedno- i wieloprzęsłowych.

³⁾ W podanym zarysie historycznym, opartym na opracowaniu *L o v e'a*, pominięte zostało, właściwie, należyte rozpatrzenie wpływu stosunków gospodarczych na rozwój elastomechaniki. Ten ważny i istotny temat wymaga, w samej rzeczy, dodatkowego studium.

Nie tu miejsce na rozwijanie tych zagadnień i wskazywanie tematów czekających jeszcze na autorów. W każdym razie takie białe plamy odkrywczemu widać jeszcze w pracach największych współczesnych uczonych.

Zagadnienie, które tutaj poruszyliśmy w związku z pierwszymi poszukiwaniami *Galileusza*, można by ująć niepomrotnie szerzej. Chodzi mianowicie w ogólności o podstawy teorii sprężystości lub też o podstawy mechaniki ciał odkształcalnych, które zdaniem naszym mogą i powinny stać się jeszcze przedmiotem obszernych studiów. Będziemy mieli okazję powrócenia do tej myśli, na razie jednak porzucmy tę dygresję i cofnijmy się powtórnie do dziejów wieku siedemnastego. W wieku tym dojrzały w postaci naturalnej ewolucji, jak często bywa w historii, rozwiązania pewnych zagadnień naukowych lub, właściwiej mówiąc, pewnych zagadnień gospodarczych, gdyż w ślad za *Galileuszem* problemami teorii sprężystości zajęli się *R. Hooke* w Anglii i *E. Mariotte* we Francji.

Sformułowane przez nich niezależnie w latach 1676-1680 tzw. prawo *Hooke'a* jest powszechnie znane i wedle przyjętego zwyczaju omawiane we wszystkich podręcznikach wytrzymałości materiałów. Nas tutaj prawo to interesuje ze zgoła innego powodu. Po pierwsze, chcielibyśmy zwrócić uwagę na często zapożyczane dosłowne jego brzmienie. Otóż *ut tensio sic vis* na podstawie komentarzy samego *Hooke'a* ma oznaczać w dzisiejszej terminologii *jakie odkształcenie, takie naprężenie*. Wyprowadziwszy swe prawo z bezpośredniej obserwacji zjawisk *Hooke* musiał, oczywiście, jako fakt pierwotny uznać istnienie odkształcenia. My dzisiaj jesteśmy tak głęboko przeniknięci wpojoną nam przez literaturę wiarą w istnienie realne naprężeń, iż z niedowierzaniem słuchamy o tym, że nikt jeszcze nigdy nie obserwował naprężenia, a jedynie i wyłącznie odkształcenie. Wypada stwierdzić, że są dzisiaj uczeni, którzy kwestionują w ogóle pojęcie naprężenia i wskazują — niestety, nic w zamian za to dać nie mogąc — że pojęcie naprężenia, rozumianego jako siła wewnętrzna działająca na pewien fikcyjnie poprowadzony przekrój, powinno być w ogóle usunięte z mechaniki ciał odkształcalnych. Nie chcielibyśmy tutaj twierdzić, że stronnicy takiego poglądu mają słuszość, aczkolwiek osobiste nasze przekonania nie pokrywają się z poglądami ortodoksyjnymi. Jakkolwiekby było, trudno czasem oprzeć się wrażeniu, że te wektorki napieć wewnętrznych przypominają złośliwe chochliki zapełniające wnętrza ciał odkształcalnych. Nie dał sobie z nimi rady nawet wielki *Augustin Cuchy*, jak o tym za chwilę przypomnimy. Tutaj stwierdzimy tylko, że istnieje głęboka różnica pomiędzy pojęciem siły stworzonym przez *Newtona*, siły przejawiającej się w ruchu brył sztywnych, oraz pomiędzy pojęciem siły powstającej na tle i w wyniku odkształcenia.

Stąd ta niesłychana «sztywność» i sterylność dotychczasowego pojęcia napięć wewnętrznych, zbudowanego na podłożu newtonowskiej koncepcji przyczyny ruchu, ruchu nieomal bezcielesnego w idealnej przestrzeni kosmicznej. Przypomnijmy, że głęboka różnica obu pojęć uwydatnia się już choćby w tym, że siłę związaną z odkształceniem trzeba uważać za wektor związany z punktem, siłę zaś newtonowską, powodującą czysty ruch bryły sztywnej, można przesuwając wzdłuż linii jej działania. Ileż to nieporozumień i kłopotów sprawia w związku z tym stosowanie mechaniki «czystej» w zagadnieniach teorii sprężystości. Weźmy, chociażby, pod uwagę pręt skręcany siłą poprzeczną. Z punktu widzenia mechaniki racjonalnej, tzn. gdy rozważać bryłę idealną, zawsze istnieje coś w rodzaju momentu skręcającego (o ile biegun nie leży w płaszczyźnie poprowadzonej przez prostą działania siły, równoległej do osi pręta). Natomiast w rozumieniu teorii sprężystości, a więc w sensie ciała odkształcalnego, moment skręcający znika bezpowrotnie, gdy siła przechodzi przez tzw. środek ścinania przekroju.

Zakończmy jednak tę rozległą dygresję, która zbyt wiele zajęłaby nam miejsca, stwierdzeniem, że zarysowuje się tutaj dość wyraźne uogólnienie mechaniki newtonowskiej, którego ta ostatnia stawałaby się szczególnym przypadkiem. Jest to jeszcze jeden z dowodów pożytku prowadzenia badań nad podstawami teorii sprężystości, badań na taką skalę, jaką zapoczątkowali w matematyce D. Hilbert i F. Klein, a w fizyce M. Planck i A. Einstein.

Przywołajmy się z kolei powtórnie do porządku i powróćmy do *Mariotte'a*, który w 1680 r. rozwiązuje «zagadnienie *Galileusza*» przyjmując, że połowa włókien belki ulega rozciąganiu, a połowa ściskaniu; obrót zatem nastąpić powinien koło osi połowiącej wysokość belki.

Dalsze wysiłki uczonych tego okresu kierują się w stronę rozwiązania uogólnień zadania *Galileusza* oraz w kierunku badań nad drganiem prętów i płyt a także nad statecznością słupów. Jest rzeczą charakterystyczną, że zagadnienia te pojawiły się na długo przed odkryciem ogólnych równań teorii sprężystości i że właśnie wysiłki wkładane w rozwiązanie tych zadań o znaczeniu praktycznym (np. w związku z brzmieniem dzwonów) doprowadziły w rezultacie do stworzenia podstaw klasycznej teorii. Jakże często zdają się zapominać o tym czciciele czystej wiedzy oderwanej od realnego podłoża, które ją zrodziło.

Pierwszy krok o dużym znaczeniu w kierunku dalszego rozwoju teorii zginania belek uczynił w 1705 r. *Jakub Bernoulli* w swojej pracy *Veritable hypothèse de la résistance des solides*. Kontynuując hipotezę *Mariotte'a* o dwóch rodzajach włókien *Bernoulli* wyprowadza równanie osi odkształconej, czyli elastyki, wykazując, że opór belki prze-

ciw zginaniu przedstawić można przez parę sił o momencie proporcjonalnym do krzywizny odkształconej.

Założenie to przyjmuje również E u l e r w swoich badaniach nad linią sprężystą i drganiem cienkich prętów. Opierając się na uwadze D a n i e l a B e r n o u l l i e g o, że równanie różniczkowe elastyki uzyskać można z warunku minimum całki kwadratu krzywizny rozpostartej na długość pręta, E u l e r wyprowadza to równanie i klasyfikuje różne postacie linii odkształconej. Dokonał tego w sławnej swej pracy *Methodus inveniendi lineas curvas maximum minimive proprietate gaudentes* opublikowanej w 1744 r., kładącej podstawy pod zagadnienie wyboczenia. Rozwiązanie E u l e r a kontynuuje również utalentowany L a g r a n g e mając na względzie uzyskanie najpewniejszego kształtu kolumny. Było to chyba pierwsze studium o kształtowaniu wytrzymałościowym. Obaj badacze, tzn. E u l e r i L a g r a n g e, określają wielkość siły krytycznej wywołującej wyboczenie kolumny i stwarzają tym samym zaczątki nauki o stateczności równowagi sprężystej.

Mając już niewiele do powiedzenia o pierwszym okresie rozwoju teorii sprężystości, pozwolimy sobie w tym miejscu na dygresję związaną z zagadnieniem wyboczenia. Nie przypuszczał zapewne genialny E u l e r, że jego odkrycie pociągnie za sobą taki potok prac, jaki powstał w ciągu wieków w związku ze zjawiskiem wyboczenia. Szczególnie ostatni okres międzywojenny był okresem mistycznej niemal wiary niektórych uczonych w zagadkowość tego zjawiska. Znane są wieloletnie polemiki z tego powodu, które doprowadzały nawet do obraz osobistych. Jest rzeczą interesującą, że te niezdrowe, rzecz można, nienaukowe poglądy obce były uczonym, którzy, prawdę mówiąc, przyczynili się najbardziej do wyjaśnienia sprawy wyboczenia, jak J a s i ń s k i, T e t m a j e r, K á r m á n, T i m o s z e n k o i inni, natomiast znajdowały pożywkę na terenach jałowych, gdzie brakowało prawdziwego talentu. Jeszcze i dzisiaj spotykamy nielicznych epigonów sekty «czcicieli wyboczenia», chociaż przyznać trzeba, że chowają oni swe praktyki «bezbożne» w mrokach gabinetów, dokąd nie dochodzi światło rozwijającej się bujnie prawdziwej nauki. Nie ma tu ani potrzeby, ani miejsca na wyjaśnianie, że z tzw. przybliżonego równania linii ugięcia nie można wyciągać wniosków dalej idących, niż pozwala na to poczynione przybliżenie. Z punktu widzenia geometrycznej nieliniowej teorii sprężystości, do której właśnie zaliczyć wypada zagadnienie wyboczenia, nie ma żadnego «misterium» w tym, że w pewnym momencie następuje rozdwojenie możliwej postaci równowagi. W tym względzie odesłać można np. do prześlicznej książeczki W. W. N o w o ż i ł o w a, którą zapewne wielu z nas miało w swym ręku.

Ale powróćmy do rzeczy. Jak wspomnieliśmy poprzednio, pierwszy okres rozwoju teorii sprężystości niewiele przeciąga się poza prace Eulera i Lagrange'a. Trzeba tutaj zanotować jeszcze prace Coulomba, który oprócz równania momentów rozważył równanie równowagi rzutów sił, powstających w belce zginanej, na kierunku osi belki. Dało mu to możliwość znalezienia rzeczywistego położenia osi obojętnej. Coulomb zajął się badaniem skręcania prętów (1784) oraz wprowadził pojęcie odkształcenia postaciowego (ścięcia). Pierwsze z tych zagadnień znalazło swe znakomite rozwiązanie dopiero w siedemdziesiąt lat później w pracach Saint-Venanta, gdyż, jak wiemy, nawet wielki Navier popełnił tutaj zasadniczy błąd przyjmując hipotezę płaskich przekrojów przy skręcaniu.

O ile chodzi o odkształcenia postaciowe, to Coulombowi chodziło o przyczynę zniszczenia materiałów i, jak wiemy, hipoteza wytrzymałościowa Coulomba była jedną z najwcześniejszych w tej mierze hipotez. W tej dziedzinie Polska poszczycić się może wielkim wkładem naukowym w postaci hipotezy energetycznej M. T. Hubera. Sprawę tę omówimy jednak później oddzielnie w związku z nowym okresem, którego początek łączyć pragniemy z momentem powstania teorii plastyczności.

Oprócz prac Coulomba wymienić jeszcze wypada w tym samym okresie analizę fizyczną sprężystych własności ciał stałych przeprowadzoną przez T. Younga (którego uczczono wprowadzeniem terminu «moduł Younga») oraz prace Daniela Bernoulliego i Eulera nad drganiem prętów i dzwonów. Wywiedli oni równanie różniczkowe drgań poprzecznych pręta wyznaczając równocześnie funkcje, które dzisiaj nazywamy funkcjami właściwymi. W traktacie *De sono campanarum* Euler proponuje rozważenie dzwonu jako zespołu cienkich pierścieni, z których każdy zachowuje się jak pręt zakrzywiony. Rozwiązanie to nie jest ściśle, podobnie jak opublikowane wkrótce po nim rozwiązanie Jakuba Bernoulliego młodszego, który powłokę dzwonu traktuje jako ruszt złożony z krzyżujących się pod kątem prostym dwóch układów belek zakrzywionych. Praca tego autora miała na celu teoretyczne objaśnienie linii węzłowych płyt drgających, ujawnionych doświadczalnie przez fizyka E. Chladniego. Te doświadczenia wyjaśniła dopiero praca Zofii Germain (1815), będąca odpowiedzią na ogłoszony przez akademię francuską i przez sześć lat nierozstrzygnięty konkurs na pracę o tonach drgającej płyty. Równanie Zofii Germain dotyczące zginania płyt, znane wszystkim, wyprowadzone było z błędnego wzoru dla energii zginania.

3. Praca Zofii Germain kończy pierwszy okres rozwoju teorii sprężystości (1638-1820) według klasyfikacji Love'a, gdyż

w 1821 r. N a v i e r przedstawia akademii nauk swój sławny *memoire*, w którym wyprowadza równania różniczkowe równowagi i ruchu ciał sprężystych, nazywane obecnie często równaniami N a v i e r a. Ten twórczy zwrot w historii elastomechaniki połączyć należy, oczywiście, z przewrotem przemysłowym w połowie XVIII wieku.

Korzystając z tak ważnego momentu pozwolimy sobie znów na pewną dygresję natury ogólnej. Omawiając prace okresu pierwszego wskazyaliśmy na omyłki popełnione między innymi przez tak genialnych czy utalentowanych ludzi, jak E u l e r, B e r n o u l l i, N a v i e r i C o u l o m b. Zrobiliśmy to celowo, aby podkreślić, że wedle utartego przysłowia tylko ten się nie myli, kto nie działa. Ta sprawa jest dużo ważniejsza, niż się na pozór wydaje. W kraju naszym, jak zresztą wszędzie, nie brak ludzi, którzy stosują nadmierną krytykę formalistyczną do pracy innych. Jest to stanowisko niepożądane w naszym rozwijającym się dopiero na szerszą skalę życiu naukowym.

Pragnąłbym w tym miejscu przytoczyć opinię polskiego matematyka H. S t e i n h a u s a o genetyku angielskim R. A. F i s h e r z e, autorze książek *Statistical Methods for Research Workers*. Autor ten — wedle słów prof. S t e i n h a u s a — napisał książkę niezrozumiałą dla przyrodników i skrytykowaną przez matematyków jako mętną i błędną, był bowiem matematykiem samoukiem. A mimo to książka F i s h e r a, jak mówi dalej S t e i n h a u s, zrobiła dla statystyki matematycznej więcej niż wszystkie podręczniki tej nauki, które ukazały się w tym okresie. Jej wartość tkwi bowiem w trafnym ujmowaniu istoty zagadnień.

Chcąc rozwinąć u nas żywiej mechanikę ciał odkształcalnych przedstawimy się zatem lękać, że za nieuniknione w pracy naukowej omyłki spotkamy się z zasłużoną i twórczą krytyką.

Ten apel o zwiększenie działalności naukowej należałoby skierować do naszych młodszych kolegów, których produkcja naukowa jest, jak się zdaje, wciąż jeszcze zbyt lękliwa jak na istniejące możliwości.

Wracając po tej dygresji do zasadniczego tematu musimy stwierdzić, że naszkicowane wyniki pierwszego okresu przedstawiają stosunkowo skromne zasoby, z jakimi teoria sprężystości wkroczyła do okresu drugiego. Zasoby te uzupełnić jeszcze wypada poważnymi zdobyczami w dziedzinie fizykalnych teorii strukturalnych, głównie zaś newtonowskiej koncepcji budowy materii, która to materia przedstawia się w ujęciu tego autora jako konglomerat drobnych cząstek, oddziałujących na siebie za pomocą sił centralnych.

Zauważmy za L o v e' m, że dla N e w t o n a jego «molekuły» miały określone rozmiary i postać. Dopiero następcy N e w t o n a «zdematerializowali» tę koncepcję dochodząc do pojęcia punktów materialnych.

Już u B o s c o v i c h a (1743) te punkty materialne nie stają się niczym innym niż centrami sił. Ta uwaga uzupełnia w pewnym sensie naszą poprzednią opinię o stosowanym powszechnie pojęciu naprężeń wewnętrznych. W związku z tym zwróćmy jeszcze uwagę, że centryczność sił wewnętrznych może być również kwestionowana, nie ma bowiem żadnych zasadniczych przeszkód po temu, aby obok oddziaływań centralnych wprowadzić oddziaływania «momentowe» czyli «polarne». Tego rodzaju teorię sprężystości sformułowali w swoim czasie między innymi — o ile nas pamięć nie zawodzi — również bracia C o s s e r a t.

L o v e tak określa bilans pierwszego okresu teorii sprężystości na koniec 1820 r.:

(1) wyjaśnienie różnicy pomiędzy wydłużeniem i posunięciem przygotowało grunt dla ogólnej teorii odkształcenia;

(2) wyobrażenie o siłach działających na elementy przekrojów poprzecznych pręta stało się pierwszym krokiem do sformułowania teorii naprężenia;

(3) zastosowanie równań różniczkowych do zagadnień zginania belek oraz drgania prętów i płyt posłużyło do sformułowania ogólnych równań różniczkowych równowagi;

(4) koncepcja newtonowska budowy materii i prawo H o o k e' a dały fizyczną podstawę dla równań sprężystości;

(5) uogólnienie zasady prac wirtualnych w *Mécanique Analytique* L a g r a n g e' a dało potężną broń analityczną.

W ten sposób teoria sprężystości wkroczyła w nowy, drugi okres swego rozwoju z mocnymi zawiązkami podstawowych zasad. Nastaje czas budowy teorii ogólnych. Na szczęście wielkie nazwiska sypią się jak z rogu obfitości: N a v i e r, C a u c h y, P o i s s o n, L a m é, C l a p e y r o n, G r e e n, K e l v i n, B o u s s i n e s q, H e r t z, A i r y, C l e b s c h, S a i n t - V e n a n t, K i r c h h o f f i inni. Zbliżamy się do początku wieku XX, w którego pierwszym ćwierćwieczu kształtuje się — na tle postępujących przemian gospodarczych — zrazu jakby niepostrzeżenie, rewolucyjna teoria plastyczności. Nie uprzedzając atoli faktów przedstawimy w wielkim skrócie dzieje drugiego okresu, okresu budowy teorii ogólnych, obejmującego w przybliżeniu stulecie 1820-1920.

A więc najpierw przełomowe prace wielkiej trójki: N a v i e r a, C a u c h y' e g o i P o i s s o n a. N a v i e r był, jak już wspomnieliśmy, pierwszym, który zajął się wyprowadzeniem ogólnych równań równowagi i ruchu ciał sprężystych. Uzyskał je w oparciu o koncepcję newtonowską budowy materii. N a v i e r uważał molekuly za punkty materialne, pomiędzy którymi działają siły sprężyste proporcjonalne do iloczynu zmiany ich wzajemnej odległości oraz pewnej funkcji odległości pierwotnej. Cia-

ło sprężyste traktował on jako utwór izotropowy i równania, które otrzymał w przemieszczeniach, zawierały jedną stałą tego samego rodzaju co moduł Y o u n g a.

Tymczasem wielki matematyk C a u c h y, w związku ze swym uczestnictwem w komisji akademii paryskiej dla krytycznego rozpatrzenia rozprawy N a v i e r a o płytach sprężystych, zajął się bliżej zagadnieniami teorii sprężystości. Na jesieni 1822 r. C a u c h y odkrył większość podstawowych elementów matematycznej teorii sprężystości. Wprowadził on pojęcie naprężenia jako wielkości o charakterze tensorowym; przedstawił stan odkształcenia w punkcie przez sześć składanych odkształceń; dla tych ostatnich wyprowadził powiązania z trzema składowymi przemieszczenia, zwane dziś związkami C a u c h y. Następnie podał równania różniczkowe równowagi i ruchu w naprężeniach i, zastępując naprężenia przemieszczeniami, doszedł w rezultacie do tychże równań przedstawionych w przemieszczeniach. Wzory otrzymane przez C a u c h y' e g o są w użyciu po dziś dzień.

Metoda użyta przez C a u c h y' e g o różni się zasadniczo od metody N a v i e r a, gdyż koncepcja punktów materialnych, powiązanych siłami centralnymi, nie znajduje w niej zastosowania. W przeciwieństwie do równań N a v i e r a równania C a u c h y' e g o zawierają dwie stałe sprężyste. W następnych memuarach C a u c h y przechodzi do koncepcji punktów materialnych i otrzymuje dla ciała o najogólniejszej anizotropii dwadzieścia jeden niezależnych stałych sprężystych, które dają się zredukować do piętnastu, o ile przyjąć, że stan pierwotny ciała jest nienaprężony.

W tym samym roku 1828 P o i s s o n ogłasza swą rozprawę poświęconą zagadnieniom teorii sprężystości, zawierającą wiele interesujących przykładów zastosowania teorii ogólnej. Nie obywając się bez panującej wówczas powszechnie «mody» sił intermolekularnych, P o i s s o n wyprowadza równania równowagi nie różniące się od równań N a v i e r a.

Metody N a v i e r a, P o i s s o n a i późniejszych rozpraw C a u c h y' e g o doprowadzają do mniejszej liczby stałych sprężystych niż metoda pierwszej rozprawy C a u c h y' e g o i następnie późniejszych prac G r e e n a i S t o k e s a. Te dwie teorie, nazwane przez P e a r s o n a *multiconstansową* i *rariconstansową*, rozpałały umysły uczonych do końca ubiegłego wieku. Nie tu miejsce na obszerniejsze rozpatrzenie tej kwestii. Wystarczy tylko uwaga, że hipoteza molekularna, na której oparta jest teoria rariconstansowa i która przepisuje określone związki w liczbie sześciu, zwane związkami C a u c h y' e g o, pomiędzy stałymi sprężystymi [z których wynika $\nu = 1/4$, a w konsekwencji stosunek równy $5:3$ modułu odkształcenia objętościowego ($k = \lambda + 2\mu/3$) i modułu odkształcenia postaciowego $\mu = G$], straciła już dawno swój grunt doświadczalny

i teoretyczny. Nasze nowe pojęcia o budowie materii odrzuciły pierwotną wiarę w konglomerat punktów materialnych, oddziałujących na siebie za pomocą sił centralnych. W teorii sprężystości obywamy się zresztą całkowicie bez wyjaśnień dotyczących budowy molekularnej ciał, zastępując, gdzie tylko można, materię «ziarnistą» modelem continuum.

Nasuwa się tutaj znów pewna dygresja, której trudno się oprzeć, gdy porównuje się w dużym dla nas dzisiaj stopniu naiwne modele konstruowane przez pierwszych mistrzów z podejściem współczesnym, prostszym i zarazem tak niepomierne płodnym w wyniki. Łatwo zauważyć, że różnica metodologii polega tutaj przede wszystkim na zgoła odmiennym traktowaniu zjawisk przyrodniczych.

Dzisiaj interesujemy się w mechanice ciał odkształcalnych nie tyle wyjaśnieniem wewnętrznej struktury zjawisk, ile ich stroną syntetyczną, określoną przez eksperyment w skali «makroskopowej». Na tego rodzaju metodzie naukowej oparte są w istocie rzeczy już *Principia* newtonowskie i, być może, na tym polega ich wartość.

Metoda ta znalazła swe znakomite ukoronowanie w rozwinięciu się na jej gruncie teorii plastyczności i, w następstwie, reologii. Wróży ona również piękną przyszłość dalszemu zbliżeniu idealnego modelu ciała stałego, występującego w badaniach teoretycznych, do jego obrazu realnego, tzn. do ciała stałego rzeczywistego występującego w przyrodzie lub wyprodukowanego przez ludzi. W tym zakresie optymistyczne perspektywy roztaczają się dla dalszego rozwoju badań nad anizotropią, nad niejednorodnością, nieliniowością wszelkiego typu, nad wpływem czasu i temperatury. Czy dowodziłoby to, że chcemy tutaj zaprzeczyć racji badań mikroskopowych i submikroskopowych. Z tego, co mieliśmy możliwość dotychczas powiedzieć, wynika wyraźnie, że opinia taka byłaby nam obca.

Istotnie, badania tego rodzaju nie powinny być, zdaniem naszym, nie tylko zaniechane, ale przeciwnie, należałoby jak najszybciej zająć się nimi, zwłaszcza na naszym pod tym względem zaniedbanym terenie. Mamy tu na myśli tzw. fizykę ciała stałego i inne nauki omawiające pogranicza zjawisk odkształcalności materii i jej budowy wewnętrznej. Sądzimy jednak, że przez długi jeszcze okres obie te dziedziny powinny się rozwijać samodzielnie z pożytkiem dla nich obu.

W naszym migawkowym skrócie historycznym nie możemy zatrzymać się dłużej nad pracami następców «wielkiej trójki», tzn. A i r y' e g o, L a m é g o, B o u s s i n e s q a, C l e b s c h a i innych. Poza poważnym własnym wkładem w dorobek teorii sprężystości przygotowali oni częściowo grunt pod działalność nowej wielkiej gwiazdy — B a r r é d e S a i n t - V e n a n t a. Znakomite dwie rozprawy tego uczonego z połowy wieku dziewiętnastego, poświęcone zginaniu i skręcaniu prętów,

odegrały ogromną rolę w rozwoju teorii sprężystości i weszły do żelaznego repertuaru wszystkich podręczników poświęconych tej teorii. Skorzystamy z tego, że są one powszechnie znane, i nie będziemy ich tutaj omawiali.

Przy tej atoli okazji zwrócimy uwagę na fakt zastanawiający, że teoria zginania i skręcania prętów przez nieomal wiek cały utrzymała się w swej pierwotnej formie, częściowo pod wpływem autorytetu autora, częściowo wskutek krystaliczności swej konstrukcji. Dopiero w ostatnich latach zaczęła ona nabierać nowych barw głównie dzięki zastosowaniu przez *Lejbienzon*a metod wariacyjnych dla uzyskania przybliżonych rozwiązań. Ta dziedzina badań przedstawia jeszcze istną kopalnię tematów i powinna być, jak się zdaje, kontynuowana na naszym gruncie. Mamy tutaj na myśli tego rodzaju zagadnienia, jak np. skręcanie lub zginanie siłą lub parą sił przyłożoną w przeszle, jak skręcanie lub zginanie obciążeniem rozłożonym w sposób ciągły, jak skręcanie lub zginanie belek wieloprzęsłowych itp. Na każdym kroku wyrastają tutaj zagadnienia i jeżą się trudności godne pokonania. W Polsce ostatnio wyniki w tym kierunku, o ile chodzi o pręty anizotropowe, uzyskali *W. Nowacki* i *W. Olszak*.

Powracając do naszego szkicu historycznego z licznej plejady autorów wieku dziewiętnastego wspomnimy już tylko o kilku. Więc przede wszystkim wymienimy *Kirchhoff*a, którego analogia kinetyczna pozwoliła na zidentyfikowanie równań ruchu bryły sztywnej dookoła nieruchomego punktu z równaniami osi odkształconej cienkiego pręta, poddanego działaniu sił zewnętrznych przyłożonych na jego końcach. Przemieszczenia nie są tutaj uważane za małe. W ten sposób rozwiązanie *Kirchhoff*a dotyczyło jednego z podstawowych zagadnień geometrycznie nieliniowej teorii sprężystości. O znaczeniu tej teorii dla nowoczesnego ujęcia ciał odkształcalnych powiemy jeszcze dalej słów kilka. Na tym miejscu wypada tylko podkreślić pożytek badań naukowych w tym kierunku w przyszłym etapie rozwoju teorii sprężystości.

Nie można również nie wspomnieć o pracach *Kirchhoff*a poświęconych teorii płyt, w których sformułowana została między innymi tzw. hipoteza *Kirchhoff*-*Love*'a o prostopadłości do powierzchni odkształconej płyty włókien pierwotnie prostopadłych do płaszczyzny środkowej. Dopiero na podstawie nieliniowej teorii sprężystości *Nowożyłow* wykazał głębszy sens tej hipotezy. Jeżeli chodzi o teorię płyt, to na naszym gruncie znalazła ona swoich miłośników w osobach *W. Nowackiego* i jego uczniów. W tej dziedzinie pracują również *W. Olszak* (pod kątem granicznej nośności płyt), *Z. Kąckowski* i inni. Oryginalność prac świadczy, że szkole polskiej nie zabraknie jeszcze na długo tematyki z tego zakresu.

Kończąc tę dygresję powracamy znów do naszego zarysu historycznego. Musimy tutaj przypomnieć, że okres klasyczny teorii sprężystości obejmuje jeszcze zagadnienia styku ciał, podjęte przez B o u s s i n e s q a i H e r t z a.

Wydaje się, że zagadnienia te przechodzą obecnie swój renesans głównie dzięki pracom szkoły rosyjskiej w osobach między innymi S z t a j e r m a n a, G o r b u n o w a - P o s a d o w a i innych. Wydaje się również, że ta dziedzina, mało jeszcze dotychczas eksploatowana, zasługuje na baczną uwagę uczonych polskich, zwłaszcza że mamy tutaj piękną tradycję w postaci prac M. T. H u b e r a.

Oprócz K i r c h h o f f a wymienić trzeba ponadto R a y l e i g h a, twórcę metody przybliżonego rozwiązania zagadnień brzegowych, całkowicie później przypisanej R i t z o w i, znawcę elastodynamiki w zakresie drgań powłok i fal sprężystych. Z uczonych angielskich wspomnieć jeszcze trzeba o I b b e t s o n i e, autorze wybornego podręcznika teorii sprężystości, i o sławnym L o v e' i e, którego wielostronne talenty i zainteresowania skryształizowały się w dziele niezwyklej wartości, traktującym o matematycznej teorii sprężystości, znanym powszechnie i do tej pory chyba nieprześcignionym. Na przełomie wieku XIX i XX rozwija również swą działalność w Niemczech mistrzowski w przybliżonym rozwiązaniu zagadnień wytrzymałościowych i nader wszechstronny A u g u s t F ö p p l, a zaraz za nim P r a n d t l, K á r m á n, M i s e s, H e n c k y i wielu innych. W ten sposób środek ciężkości pracy naukowej w dziedzinie mechaniki ciał odkształcalnych, w wyniku rozrastania się podłoża przemysłowego, przenosi się jak gdyby z Francji do Niemiec i następnie rozgałęzia w kierunku Rosji i Anglii. W pierwszym z tych dwóch krajów zaczyna się formować oryginalna szkoła oparta o talenty tej miary co G a l e r k i n, K r y ł o w, K o ł o s o w i zwłaszcza nieprześcigniony ojciec współczesnej wytrzymałości, T i m o s z e n k o. Szkoła ta, już w ramach Związku Radzieckiego, przeobraziła się, mówiąc bez żadnej chyba przesady, w najlepszą szkołę świata, opartą o plejadę najtęższych uczonych, jak chociażby M u s c h i e l i s z w i l i, I l j u s z i n, W ł a s o w, S o k o ł o w s k i, L u r i e, L e j b i e n z o n, F i ł o n i e n k o - B o r o d i c z, P a p k o w i c z, R ż a n i c y n, M i c h l i n, L e c h n i c k i i dziesiątki innych świetnych umysłów. Problematyka szkoły radzieckiej jest zbyt rozległa, aby dokonać próby omówienia jej na tym miejscu. W tym czasie również Polska zapoczątkowała swój wkład naukowy do mechaniki ciał odkształcalnych dzięki pracom J a s i ń s k i e g o, B e ł ż e c k i e g o i następnie H u b e r a oraz W i e r z b i c k i e g o.

4. W ten sposób zamknęliśmy niejako przeszły obraz rozwoju teorii sprężystości w postaci okresu drugiego, który zakończyć chcemy w latach pierwszej wojny światowej. Tę datę przełomową pomiędzy okresem drugim i okresem trzecim łączymy formalnie z powstaniem nowoczesnej teorii plastyczności, rozpoczętej w pracach H u b e r a i ukształtowanej w zasadniczych liniach przez M i s e s a i H e n c k y'ego. W istocie nie trudno stwierdzić, że coraz to bardziej rozwijająca się industrializacja i związane z nią potrzeby praktyczne techniki budowlanej i maszynowej były przyczyną wydatnego rozwoju myśli badawczej w dziedzinie mechaniki stosowanej. Okres trzeci cechuje w związku z tym coraz to wzmagająca się masowość i intensywność pracy naukowej w dziedzinie mechaniki ciał odkształcalnych oraz dążenie z jednej strony do matematyzacji przedmiotu, z drugiej zaś do przeobrażenia go w możliwie najdoskonalniejszy obraz rzeczywistości. Znajomość powszechna tego okresu zwalnia nas od charakterystyki wybitniejszych autorów, których jest legion, wobec czego nawet pobieżne przeprowadzenie analizy nie byłoby na tym miejscu możliwe.

Skorzystamy równocześnie z przywileju przysługującego gawędzie i omawianie autorów zastąpimy omawianiem główniejszych nasuwających się nam tematów. Mając na uwadze fakt, że znajdujemy się tutaj w pierwszych liniach zetknięcia teraźniejszości z tworzącą się przyszłością, spróbujemy wysnuć odłamki domysłów co do kierunków, które nam przyszłość przyniesie. Zawężymy równocześnie, jak uprzedzaliśmy na wstępie, zakres naszych rozważań i z nieprzebranego gąszczu dzieł, rozpraw i przyczynków postaramy się wyprowadzić kilka, luźnych zresztą i całkowicie subiektywnych, wniosków interesujących głównie ludzi nauki w Polsce.

Gdyby się zatem zastanowić nad najważniejszymi nurtami mechaniki ciał odkształcalnych, które dzisiaj tętnią wyraźnie lub których ujawnienie się można przewidywać w niedalekiej przyszłości, to jakie można by wymienić główne kierunki tematyczne? Gdyby równocześnie na te kierunki tematyczne spojrzeć pod kątem pożytku kraju rodzinnego, to które z nich należałoby otoczyć szczególną troską?

Spróbujemy odpowiedzieć na pierwsze z tych pytań formułując najpierw te zagadnienia, które wymieniliśmy już poprzednio w naszych dygresjach aktualnych. Były to tematy następujące.

1. Badanie podstaw mechaniki ciał odkształcalnych w zakresie jak najbardziej, jeśli tak rzec można, rewolucyjnym.

2. Studia nad fizyką ciała stałego i nad pograniczami zjawisk odkształcalności ciał oraz ich struktury.

3. Studia nad przybliżeniem teoretycznego modelu ciała sprężystego do jego obrazu rzeczywistego przez rozważenie anizotropii i niejednorodności oraz nieliniowości wszelkiego typu (geometrycznej — odpowiadającej dużym odkształceniom; fizycznej — powiązanej z brakiem proporcjonalności pomiędzy odkształceniami i naprężeniami, oraz kombinacji obu tych typów).

4. Uogólnienie teorii skręcania i zginania prętów pełnych (teoria Saint-Venanta).

5. Dalsze studia nad teorią płyt zarówno w dotychczasowych kierunkach, jak i w kierunkach specjalnych, odnoszących się do niejednorodności, dużych ugięć, podłoża sprężystego o szczególnych własnościach (np. reagującego za pomocą momentów skręcających) itd.

6. Teoria konstrukcji cienkościennych. W tej dziedzinie możemy załozować szereg prac polskich, wśród których wymienić wypada prace J. Naleszkiewicz a.

7. Rozwiązanie zagadnień dotyczących styku ciał w najszerszym zakresie, np. belek i płyt sprężystych spoczywających na półprzestrzeni sprężystej, zetknięcia ciał nieliniowo sprężystych itp.

Do listy powyższej spróbujemy dorzucić jeszcze inne nasuwające się grupy tematyczne. Zanim to uczynimy, przypomnijmy, że za najgłówniejszą cechę trzeciego, współczesnego nam okresu rozwoju mechaniki ciał odkształcalnych uznaliśmy powstanie nauki, nazwanej reologią. Pod tą nazwą rozumiemy gałąź mechaniki traktującą o rozwijającym się w czasie odkształceniu ciał.

Już z samej definicji wynika, że reologia zawiera w sobie jako przypadek szczególny teorię plastyczności, jeżeli przez tę ostatnią rozumieć naukę o odkształceniu trwałym, nie będącym funkcją czasu — a w dalszym ciągu również teorię sprężystości, gdy proces odkształcenia uważać za przemianę odwracalną. To pochłonięcie nauki o sprężystości ciał przez nowopowstałą dyscyplinę staje się w pełni widoczne ze współczesnego ujęcia zjawisk plastyczności, chociażby przez szkołę radziecką w osobach Iljuszina, Kaczanowa, Biezuchova i innych. Wystarczy wspomnieć tutaj o twierdzeniach dotyczących przemian zrównoważonych, w których różnica pomiędzy ciałem plastycznym i nieliniowo sprężystym zaciera się zupełnie.

Dochodzimy zatem do dziwnej sytuacji, którą porównać można w sposób obrazowy z sytuacją podróżnika dokonującego wieloletniej wędrówki wzdłuż biegu strumienia, będącego dopływem znacznie większej rzeki. Jesteśmy właśnie w miejscu, w którym nurt teorii sprężystości gubi się w nurcie nowej, potężnej i chwilowo nieogarnionej drogi naukowej. Ten nasz pogląd nie jest, jak się zdaje, w pełni subiektywny i odosobniony,

jak o tym świadczą liczne znaki nadchodzących nowych czasów. Znaki te uwidaczniają się wyraźnie, gdy przeglądać chociażby czasopisma zagraniczne poświęcone mechanice stosowanej; na dziesięć prac omawiających mechanikę ciał odkształcalnych często pięć lub sześć, a więc większość, dotyczy zagadnień teorii plastyczności. Obraz ten w naszym piśmiennictwie jest odmienny i właśnie w tej odrębności naszej produkcji naukowej od produkcji światowej widzielibyśmy poważne skrzywienie, które należałoby najrychlej naprostować. Podobne zdanie słyszeć można od osób, które pozostawały lub pozostają przez czas dłuższy w zagranicznych centrach naukowych. W jednym z listów nadesłanych z Moskwy autor mówi wyraźnie o obserwowanym przez siebie «zmierzchu teorii sprężystości».

W ten sposób doszliśmy do ósmej grupy tematycznej, która w sposób pozornie paradoksalny zaprzecza racji pracom w zakresie teorii sprężystości, będącej właśnie tematem naszej gawędy. Zanotujemy tutaj, jakkolwiekby to było przykre dla miłośników tej nauki, ósme z kolei zagadnienie.

8. Teoria plastyczności i reologia oraz związane z nimi teorie granicznych stanów równowagi płyt i powłok, a także teoria ciał sypkich i, ogólniej jeszcze — mechanika gruntów powinny stanowić u nas ważną dziedzinę badań.

W dziedzinie tych nauk Polska posiada piękne tradycje w postaci pionierskich prac M. T. H u b e r a. Czyżby znaczyło to, że należy zaprzestać dalszych studiów nad teorią sprężystości? Wydaje się, że taki wniosek byłby w pełni wadliwy i niezgodny z treścią tego, co mieliśmy okazję stwierdzić poprzednio. Istotnie, trzeba uznać za wątpliwe, czy w ogóle kiedykolwiek teoria sprężystości zostanie zarzucona; historia mało zna przykładów takich nauk umarłych. Z drugiej strony liczba problemów czekających na rozwiązanie jest tutaj nigdy chyba nie kończąca się.

A oto następne tematy, dalekie od kompletności, jakie należy wymienić.

9. Przede wszystkim energetyczna strona zjawisk sprężystych wydaje się jeszcze daleka od w pełni poprawnego opracowania pod względem logicznym. Być może, że chodzi tu o złudzenie, ale interpretacja nieznanych nam, niestety, w oryginale prac L e j e u n e - D i r i c h l e t a, dotyczących kryteriów równowagi, jest, zdaje się, dalej idąca niż sformułowanie samego autora tego kryterium. Również stwierdzić można braki w powiązaniu zasady prac wirtualnych z zasadami wariacyjnymi L a g r a n g e' a i C a s t i g l i a n o oraz z pojęciem potencjału sprężystego. Spraw tych nie chcielibyśmy tutaj szerzej omawiać.

10. Jest jeszcze wiele przykładów niedostatecznego uporządkowania pod względem logicznym i matematycznym od dawna już znanych fragmentów teorii sprężystości, żeby wspomnieć chociaż o zasadzie S a i n t -

V e n a n t a, stającej w nowym świetle w związku z pojawieniem się elementów konstrukcyjnych tzw. wiotkich, jak np. elementy cienkościenne; to samo dotyczy teorii odkształcenia w ujęciu wielu podręczników, równań nierozdzielności itd. Dużą również przyszłość widzimy, trudno powiedzieć czy słusznie, w zastosowaniach rachunku prawdopodobieństwa, użytego tak znakomicie przez W. W i e r z b i c k i e g o dla uzyskania pojęcia obiektywnego współczynnika bezpieczeństwa. Ujmując to zagadnienie nieco szerzej można by myśleć o następnym zagadnieniu, uznanym z kolei za jedenaste.

11. Probabilistyczna teoria sprężystości czy też, ogólniej, teoria ciał odkształcalnych, których własności mechaniczne są dziełem przypadku. Na stosunkowo wąską skalę podchodzą do tej sprawy prace W e y b u l l a.

Mówiąc o znaczeniu przypadku w zjawiskach wytrzymałościowych pamiętajmy, że fizycy określili właśnie te zjawiska jako podlegające nie prawom indywidualnym, lecz masowym. Stąd na przykład smekalowskie określenie spójności ciał jako *strukturempfindliche Eigenschaft*. Stąd wykrzyknik B o u a s s e' a, że nauka o wytrzymałości materiałów nigdy nie opíše zachowania się poszczególnych ciał, gdyż w nauce tej nie ma praw ogólnych. Ale czy takie stosunki, w których główną rolę odgrywa przypadek, nie są idealnym terenem właśnie dla nauki o roli przypadku, tzn. dla probabilistyki. Sądząc, że tak jest, przypisujemy tej nauce poważną, jak już wspomnieliśmy, rolę w dalszym rozwoju mechaniki ciał odkształcalnych, zwłaszcza na gruncie polskim, gdzie mamy wybitne w tym zakresie tradycje w postaci wspomnianych już poprzednio prac W. W i e r z b i c k i e g o.

Nasz wykaz byłby niekompletny, gdybyśmy pominęli następujące dalsze zagadnienia.

12. Zagadnienia wytrzymałościowe związane ze sprężeniem wstępnym materiałów. O szczegółowej specyfikacji tematów w tej dziedzinie powiedzieć mogą znacznie więcej nasi znawcy przedmiotu. Pragniemy jednak przypomnieć, że prace polskie, dotyczące wstępnego sprężania betonu, zyskały uznanie uczonych zagranicznych.

13. Co do zagadnień dotyczących dynamiki układów odkształcalnych a także badań doświadczalnych i tarcia, to nie chcemy się na tym miejscu wypowiadać.

Za zagadnienie szczególnie ważne dla rozwoju teorii sprężystości trzeba wreszcie uznać należyłą adaptację znanych metod matematycznych. Nie chcąc przedłużać i tak już zbyt obszernej wypowiedzi ograniczymy się tutaj jedynie do suchego wymienienia najważniejszych działów matematyki czystej i stosowanej, częściowo w oparciu o pewną znaną nam opinię. M. T. H u b e r a. Oto te działy:

- (1) rachunek różnic skończonych,
- (2) rachunek prawdopodobieństwa i jego zastosowania w mechanice budowli,
- (3) transformacja L a p l a c e ' a ,
- (4) zastosowania całki F o u r i e r a ,
- (5) metoda perturbacji P o i n c a r é g o ,
- (6) przybliżone metody rozwiązania równań całkowych,
- (7) rachunek tensorowy,
- (8) analiza wymiarowa.

Wydaje się, że nasi matematycy zbyt mało poświęcają uwagi przybliżonemu rozwiązaniu równań różniczkowych, głównie cząstkowych. Te zagadnienia są dla zastosowań teorii sprężystości szczególnie ważne, o czym świadczy opracowywanie coraz to nowych metod przybliżonych, jak chociażby metoda zszywania rozwiązań A r u t i u n i a n a .

Trudno byłoby skończyć tę garść luźnych uwag bez przypomnienia, że mamy obecnie wszelkie dane, aby rozwinąć wspaniałe te piękne zawiązki, jakie obserwujemy dokoła siebie: opiekę Państwa, której brakło przed wojną, utalentowane i światłe kierownictwo, zdolne i ambitne kadry pracowników naukowych. Na wszystkie te strony nowej atmosfery naukowej pragnęlibyśmy zwrócić szczególną uwagę naszych młodych kolegów, którzy w jakże odmiennych pracują warunkach od tych, w jakich przychodziło nam walczyć i często ginąć dla nauki przed wojną. Wydaje się, że mając tak poważne atuty w naszych rękach powinniśmy skupić siły na tematach naukowych, wpływających z potrzeb gospodarczych i kulturalnych kraju.

Резюме

ПО СЛЕДАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

После представления истории механики деформируемых тел в кратком очерке, различающем три этапа (от Г а л и л е я до Н а в ъ е , от Н а в ъ е до создания теории пластичности, от создания этой теории до нынешнего времени) дана попытка определения направлений, в каких — по мнению автора — должна в будущем развиваться механика деформируемых тел в Польше.

Автор перечисляет здесь следующие темы:

- (1) Исследования основ механики деформируемых тел.
- (2) Работы по физике твердых тел и по физическим вопросам смежным с явлениями деформации тел.
- (3) Работы по созданию идеальной модели твердого тела при помощи обсуждения анизотропии, неоднородности, нелинейности и т. д.

- (4) Обобщение теории кручения и изгиба сплошных стержней.
- (5) Дальнейшее исследование в области теории пластинок с учетом особенностей, приведенных в пкт. 3.
- (6) Развитие в широком масштабе теории тонкостенных конструкций.
- (7) Вопросы соприкосновения тел.
- (8) Теория пластичности и реология и связанные с ними исследования предельных состояний равновесия.
- (9) Математизация энергетических методов теории упругости.
- (10) Систематизация других разделов этой теории.
- (11) Применение теории вероятностей.
- (12) Вопросы, связанные с предварительным напряжением конструкций.
- (13) Вопросы, касающиеся динамики деформируемых систем, опытных методов и трения.

Автор считает полезным развивать различные разделы математики, находящие применение в механике деформируемых тел, а в особенности: исчисление конечных разностей, преобразование Лапласа, интеграл Фурье, интегральные уравнения, тензорное исчисление и другие.

S u m m a r y

A HISTORICAL SURVEY OF THE THEORY OF ELASTICITY

A general historical survey of mechanics of deformable bodies, in which the history of that science is divided into three periods (from Galileo to Navier, from Navier to the creation of the theory of plasticity and from that date up to the present), is followed by a suggestion of the principal directions in which, in the author's opinion, the science of mechanics of deformable bodies should be developed in Poland.

The problems suggested are as follows.

- (1) Investigation of the principles of mechanics of deformable bodies.
- (2) Physical problems concerned with solid bodies and the phenomena of deformability.
- (3) Studies with the object of rendering the ideal model of a solid body more real, by considerations involving the properties of anisotropy, non-homogeneity, non-linearity, etc.
- (4) Generalization of the theory of torsion and bending of solid beams.
- (5) Further studies of plates with special consideration of the properties mentioned in (3).

- (6) Extensive development of the theory of thin-walled structures.
- (7) Contact problems.
- (8) The theory of plasticity, rheology and associated problems involving the limit states of equilibrium.
- (9) Mathematical problems concerning energy methods.
- (10) Arrangement of other branches of the theory of elasticity.
- (11) Applications of probability methods.
- (12) The problem of prestressing.
- (13) Problems concerning the dynamics of deformable systems, experimental methods and friction.

The author's opinion is that the development of the branches of mathematics used in the problems of mechanics of deformable bodies should be encouraged. This concerns, in particular, the theory of finite differences, the L a p l a c e transformation and the F o u r i e r integral, integral equations, tensor calculus etc.

**INSTYTUT MATEMATYCZNY
POLSKIEJ AKADEMII NAUK**

KAZIMIERZ WOLSKI

METODA PUNKTÓW KINETYCZNYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXVI

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Ogólne omówienie metody	31
2. Punkty kinetyczne bryły	82
3. Punkty kinetyczne płyty	84
4. Punkty kinetyczne pręta	85
5. Przykłady typowe	85
5.1. Jednorodny pręt prosty	85
5.2. Elementarny wycinek płaski	86
5.3. Ostrosłup elementarny	87
5.4. Płyta trójkątna	88
5.5. Czworóścian	89
6. Metoda przekształcenia. Twierdzenie	90
6.1. Zastosowanie metody przekształcenia do brył przestrzennych	93
6.2. zastosowanie metody przekształcenia do płyt płaskich	95
7. Ruch płaski bryły	97
8. Wskazówki praktyczne. Przykład zastosowania metody punktów kinetycznych	99
9. Katalog punktów kinetycznych	102

1. Ogólne omówienie metody

Metoda punktów kinetycznych w mechanice jest mało znana i w praktyce nie jest stosowana. Zasługuje ona jednak na specjalną uwagę ze względu na korzyści praktyczne, jakie może przynieść przy rozwiązywaniu trudniejszych zagadnień dynamicznych.

Metoda ta w dzisiejszym stanie jest opracowana w sposób niekompletny. Mamy tu na myśli przede wszystkim konieczność przygotowania materiału, który stworzyłby należyte podstawy dla zastosowań praktycznych.

Praca niniejsza ma na celu podanie ogólnej metody oraz dostarczenie wzorów niezbędnych do obliczeń technicznych.

W kinetyce układów sztywnych występuje tzw. geometria mas, która ustala zależność ruchów układu od rozmieszczenia w nim mas. Geometria ta operuje zwykle momentami mas stopnia pierwszego i drugiego, czyli momentami statycznymi i momentami bezwładności oraz momentami zbieżności (lub odśrodkowymi). Do dziedziny geometrii mas należałoby również zaliczyć i punkty kinetyczne.

Punktami kinetycznymi lub kinetycznie zastępczymi będziemy nazywali punkty masowe, stanowiące zespół sztywny skończony lub nieskończony, który może zastąpić dany układ sztywny lub bryłę pod warunkiem zachowania wszystkich cech kinetycznych.

Bryła sztywna, poddana działaniu jakichkolwiek sił zewnętrznych, wprowadzona jest w ruch, który zawsze może być sprowadzony do dwu ruchów:

- (1) ruchu postępowego środka masy bryły oraz
- (2) ruchu obrotowego około tego środka.

(1) Ruch środka masy punktów kinetycznych pozostaje taki sam, jak ruch środka masy bryły, jeżeli:

- (a) zespół punktów kinetycznych posiada masę równą masie bryły, tj.

$$\sum m_i = m,$$

(b) środek mas zespołu punktów kinetycznych i środek masy bryły stale pokrywają się, tj.

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = 0,$$

gdzie $\mathbf{r}_i$ oznacza wektor położenia i -tego punktu kinetycznego względem środka masy bryły.

(2) Ruch obrotowy zespołu punktów kinetycznych oraz ruch obrotowy bryły około wspólnego środka mas są identyczne, jeżeli pokrywają się ich centralne elipsoidy bezwładności. Innymi słowy: moment bezwładności punktów kinetycznych i moment bezwładności bryły względem dowolnej osi, przechodzącej przez wspólny środek mas, powinny być równe. Jeżeli ten warunek jest spełniony, to na zasadzie twierdzenia *Steinera* o momentach bezwładności względem osi równoległe przesuniętej ze środka masy momenty bezwładności punktów kinetycznych i bryły względem dowolnej osi w przestrzeni będą równe.

Również pęd, kręt i energia kinetyczna bryły jako związane z ruchem środka mas i z ruchem obrotowym około tego środka (na podstawie znanych twierdzeń z kinetyki) będą takie same dla bryły, jak dla punktów kinetycznych.

Z powyższego widać, że skoro mamy określone dla bryły punkty kinetyczne, to uzyskujemy następujące korzyści metodyczne:

(1) wszelkie momenty bezwładności bryły względem dowolnych osi, punktów lub płaszczyzn możemy określić dla punktów kinetycznych zamiast dla bryły;

(2) ruch bryły możemy badać na zespole punktów kinetycznych.

Badanie ruchu bryły może być jeszcze znacznie ułatwione przez zastosowanie do punktów kinetycznych metody wykreślnej.

W dalszym ciągu wyprowadzimy ogólne warunki pozwalające określić punkty kinetyczne dla bryły przestrzennej, figury płaskiej lub płyty oraz dla odcinka prostego lub pręta jednorodnego lub niejednorodnego o znanym rozkładzie gęstości.

2. Punkty kinetyczne bryły

W ogólnym przypadku bryły punkty kinetyczne muszą spełniać następujące warunki:

- (a) równość mas,
- (b) tożsamość środków mas,
- (c) tożsamość centralnych elipsoid bezwładności punktów kinetycznych i bryły.

Pierwsze dwa warunki nie wymagają omówienia. Co się tyczy warunku trzeciego, to do wyznaczenia elipsoidy trzeba znać sześć momentów bezwładności względem sześciu osi przechodzących przez środek masy bryły. Wynika to z następującego równania elipsoidy bezwładności:

$$k^2 = J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx - 2J_{xy}xy,$$

w którym mamy określić sześć współczynników na podstawie znajomości współrzędnych w sześciu punktach (niesymetrycznych) elipsoidy $M_e(x_e, y_e, z_e)$, przedstawiających końce wektorów

$$\vec{GM}_e = \frac{\vec{k}}{\sqrt{J_e}} \quad (e = 1, 2, \dots, 6),$$

wychodzących ze środka masy bryły G , w którym obrany jest układ osi współrzędnych x, y, z .

Warunki dla określenia punktów kinetycznych przedstawiają się następująco:

$$(2.1) \quad \Sigma m_i = m,$$

$$(2.2) \quad \Sigma m_i x_i = 0, \quad \Sigma m_i y_i = 0, \quad \Sigma m_i z_i = 0,$$

$$(2.3) \quad \Sigma J_{i1} = J_1, \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \Sigma J_{i6} = J_6,$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie

$$J_{ik} = m_i [a_k^2 (y_i^2 + z_i^2) + \beta_k^2 (z_i^2 + x_i^2) + \gamma_k^2 (x_i^2 + y_i^2) - \\ - 2\beta_k \gamma_k y_i z_i - 2\gamma_k a_k z_i x_i - 2a_k \beta_k x_i y_i]$$

jest momentem bezwładności i -tego punktu kinetycznego względem k -tej osi posiadającej cosinusy kierunkowe a_k, β_k, γ_k oraz J_k jest momentem bezwładności bryły względem k -tej osi ($k = 1, \dots, 6$).

Równania (2.1), (2.2), (2.3) tworzą łącznie układ złożony z dziesięciu równań. Co do liczby punktów kinetycznych n , to rzeczą interesującą jest określić możliwie najmniejszą ich ilość dla różnych przypadków. Dla bryły dowolnej, jak łatwo stwierdzić, minimalna ilość punktów kinetycznych wynosi cztery, jeśli przyjąć, że nie leżą one w jednej płaszczyźnie. Taki układ czterech punktów masowych zawsze może czynić zadość powyższym dziesięciu równaniom i pozostawia przy tym jeszcze dużą swobodę tworzenia zespołów kinetycznych. Mając bowiem dla określenia współrzędnych czterech punktów szesnaście niewiadomych (cztery masy i dwanaście współrzędnych) możemy sześć z nich obrać dowolnie (np. trzy masy punktów i trzy współrzędne). Mniejsza od czterech liczba punktów kinetycznych — trzy — nie może czynić zadość (w ogólnym przypadku) równaniom (2.3), ponieważ wtedy elipsoida podlega następującemu warunkowi płaskiego układu mas:

$$J_z = J_x + J_y$$

przy prostokątnym układzie współrzędnych.

Z tego samego względu cztery punkty kinetyczne nie mogą leżeć w jednej płaszczyźnie.

Nadmienić należy, że ogólna elipsoida bezwładności podlega jedyne-
mu warunkowi

$$J_z \leq J_x + J_y,$$

nawet wtedy, gdy J_z jest największym z głównych momentów; oznacza to, że nie każda elipsoida może być elipsoidą bezwładności.

Zespoły kinetyczne możemy tworzyć tym swobodniej, im większa jest ilość punktów kinetycznych. Mając zapewnioną swobodę w ustalaniu kinetycznych zespołów dążyć będziemy do tworzenia zespołów praktycznie korzystnych.

5. Punkty kinetyczne płyty

Na podstawie p. 2 warunki dla punktów kinetycznych płyty cienkiej jako układu płaskiego możemy napisać w sposób następujący:

$$(3.1) \quad \sum m_i = m,$$

$$(3.2) \quad \sum m_i x_i = 0, \quad \sum m_i y_i = 0,$$

$$(3.3) \quad \sum J_{i1} = J_1, \quad \sum J_{i2} = J_2, \quad \sum J_{i3} = J_3$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Liczba równań w tym przypadku wynosi sześć. Z warunków (3.3) widzimy, że centralna elipsoida bezwładności dla płyty może być wyznaczona przez trzy momenty bezwładności względem trzech osi leżących w płaszczyźnie płyty i przecinających się w środku masy. Te trzy momenty przede wszystkim wyznaczają w płaszczyźnie płyty elipsę zawierającą dwie główne osie elipsoidy bezwładności płyty. Trzecia główna oś elipsoidy jest więc prostopadła do płaszczyzny płyty i wielkość jej wynika z zależności

$$J_z = J_x + J_y,$$

gdzie x i y są to dwie jakiekolwiek osie prostopadłe do siebie w płaszczyźnie płyty.

Punkty kinetyczne muszą leżeć w płaszczyźnie płyty i najmniejsza ich liczba wynosi trzy punkty nie leżące na jednej prostej. Dwa punkty nie mogą spełnić równań (3.3), bowiem nie odpowiada im elipsoida, lecz kołowy walec bezwładności. Z tego również względu trzy punkty nie mogą leżeć na jednej prostej.

Trzy punkty nie leżące na jednej prostej spełniają sześć warunków (3.1), (3.2) i (3.3); wobec dziewięciu niewiadomych (trzy masy i sześć

współrzędnych) mamy więc możność wybrać dowolnie wartości trzech niewiadomych, np. dwie masy i jedną współrzędną. Nadmienić należy, że w ogóle przy n punktach nie możemy ustalać dowolnie wielkości wszystkich mas, lecz najwyżej masy $n-1$ punktów, gdyż n -ta masa jest określona z warunku (3.1).

4. Punkty kinetyczne pręta

W pręcie prostym mamy wszystkie punkty masowe na osi pręta, więc $z = 0$ i $y = 0$. Elipsoidzie bezwładności odpowiada tutaj walec kołowy współosiowy z prętem. Wszystkie punkty kinetyczne muszą leżeć na osi pręta i najmniejsza ich liczba wynosi dwa.

Warunki dla punktów kinetycznych przedstawiają się następująco:

$$\sum m_i = m, \quad \sum m_i x_i = 0, \quad \sum m_i x_i^2 = J.$$

Warunki dla elipsoidy centralnej są następujące:

$$J_z = J_y = J, \quad J_x = 0.$$

Dla najmniejszej liczby dwóch punktów kinetycznych mamy do ustalenia cztery niewiadome (dwie masy i dwie współrzędne), a wobec trzech warunków pozostaje jedna tylko niewiadoma dowolna: albo jedna masa, albo jedna współrzędna.

5. Przykłady typowe

Podamy teraz sposoby wyznaczenia punktów kinetycznych dla pewnych brył mając na uwadze przypadki praktyczne, jak pewne bryły elementarne (pręt, wycinek płaski, wycinek przestrzenny), oraz dla innych prostych brył, na które może być rozłożona jakakolwiek bryła spotykana w konstrukcji. Przykłady takie będziemy nazywali typowymi.

5.1. Jednorodny pręt prosty. Pręt prosty i jednorodny o masie m , o długości l i o stałym, nieskończenie małym przekroju sprowadzimy do trzech punktów kinetycznych: dwóch na końcach pręta i trzeciego w środku. Mamy: $J_G = ml^2/12$ oraz $x_1 = l/2$, $x_2 = -l/2$ i $x_3 = 0$. Znajdziemy masy tych punktów.

Warunki dla punktów kinetycznych będą następujące:

$$m_1 + m_2 + m_3 = m,$$

$$m_1 \frac{l}{2} - m_2 \frac{l}{2} = 0,$$

$$m_1 \frac{l^2}{4} + m_2 \frac{l^2}{4} = m \frac{l^2}{12}.$$

Rozwiązując układ równań znajdujemy

$$m_1 = \frac{1}{6} m, \quad m_2 = \frac{1}{6} m, \quad m_3 = \frac{4}{6} m.$$

Jeżeli pręt jednorodny chcemy sprowadzić do dwóch punktów kinetycznych, symetrycznie rozmieszczonych względem środka G , to mamy:

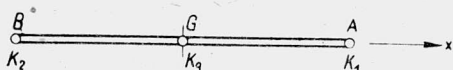
$$m_1 + m_2 = m, \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0, \quad m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = m \frac{l^2}{12};$$

$$x_2 = -x_1, \quad m_1 = m_2 = \frac{m}{2}, \quad x_1 = -x_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} l.$$

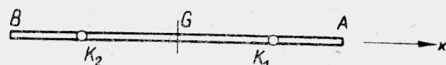
Sprowadzając wreszcie pręt do dwóch punktów, z których jeden umieszczamy na końcu pręta np. w punkcie A , otrzymamy po rozwiązaniu analogicznego układu równań warunkowych:

$$m_1 = \frac{1}{4} m, \quad m_2 = \frac{3}{4} m, \quad x_1 = \frac{1}{2} l, \quad x_2 = -\frac{1}{6} l;$$

czyli punkt K_2 leży na $1/3$ długości od końca B .



Rys. 1



Rys. 2

5.2. Elementarny wycinek płaski. Elementarny wycinek płaski (o nieskończenie małym kącie) traktujemy jako pręt niejednorodny o zmiennej gęstości wzdłuż osi pręta.

Oznaczając wierzchołek przez A i podstawę przez B o długości nieskończenie małej b oraz oznaczając długość (wysokość) wycinka przez l , możemy napisać moment bezwładności względem środka masy G , leżącego w odległości $2/3 l$ od wierzchołka A , w sposób następujący:

$$J_G = J_A - m \left(\frac{2}{3} l \right)^2 = \frac{1}{18} m l^2.$$

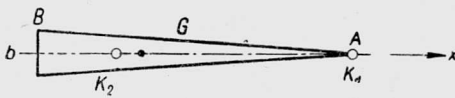
Znajdziemy dwa punkty kinetyczne, z których jeden umieszczamy w wierzchołku A . Układ równań jest następujący:

$$m_1 + m_2 = m, \quad m_1 \frac{2}{3} l + m_2 x_2 = 0, \quad m_1 \frac{4}{9} l^2 + m_2 x_2^2 = \frac{1}{18} m l^2;$$

$$m_1 = \frac{1}{9} m, \quad m_2 = \frac{8}{9} m, \quad x_1 = \frac{2}{3} l, \quad x_2 = -\frac{1}{12} l.$$

Punkt K_2 leży w odległości $3/4$ długości wycinka od wierzchołka A (rys. 3).

Umieszczając jeden punkt kinetyczny na podstawie B znajdziemy po rozwiązaniu analogicznych równań



Rys. 3

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{2}{3} m, & x_1 &= \frac{1}{6} l, \\ m_2 &= \frac{1}{3} m, & x_2 &= -\frac{1}{3} l. \end{aligned}$$

Kiedy więc jeden punkt kinetyczny znajduje się na podstawie wycinka, drugi leży w środku jego długości.

5.3. Ostrosłup elementarny. Elementarny ostrosłup, podobnie jak w przypadku wycinka płaskiego, traktujemy jako niejednorodny pręt. Oznaczmy wierzchołek przez A i podstawę przez B , nieskończenie małe pole podstawy przez b oraz długość ostrosłupa przez l .

Moment bezwładności ostrosłupa względem środka masy G , znajdującego się na $3/4$ długości od A , przedstawiony jest następującym wzorem:

$$J_G = J_A - m \left(\frac{3}{4} l \right)^2 = \frac{3}{80} m l^2.$$

Określmy dwa punkty kinetyczne, z których jeden umieszczamy w wierzchołku A . Wtedy

$$m_1 + m_2 = m, \quad m_1 \frac{3}{4} l + m_2 x_2 = 0, \quad m_1 \frac{9}{16} l^2 + m_2 x_2^2 = \frac{3}{80} l^2;$$

$$m_1 = \frac{1}{16} m, \quad m_2 = \frac{15}{16} m, \quad x_1 = \frac{3}{4} l, \quad x_2 = -\frac{1}{20} l.$$

Widzimy więc, że kiedy punkt kinetyczny K_1 o masie $1/16 m$ leży w wierzchołku A , to drugi K_2 o masie $15/16 m$ leży w odległości od wierzchołka $4/5$ długości ostrosłupa (rys. 4).



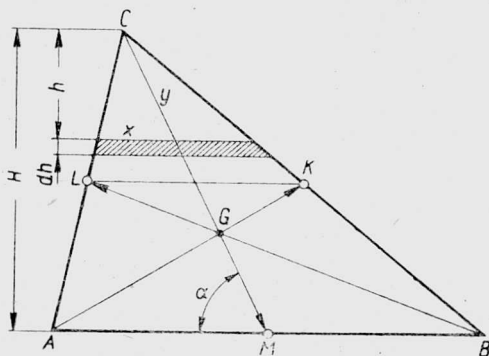
Rys. 4

Umieszczając jeden punkt na podstawie B otrzymamy

$$m_1 = \frac{5}{8} m, \quad m_2 = \frac{3}{8} m, \quad x_1 = \frac{3}{20} l, \quad x_2 = -\frac{1}{4} l.$$

Punkt K_2 o masie $3/8$ leży na podstawie B , a punkt K_1 o masie $5/8 m$ leży w odległości $3/5 l$ od wierzchołka A ostrosłupa.

5.4. Płyta trójkątna. Do znalezienia punktów kinetycznych płyty trójkątnej jednorodnej i nieskończenie cienkiej moglibyśmy wykorzystać rozpatrzony już wycinek płaski jako element podstawowy, dzieląc trójkąt na elementy podstawowe, wychodzące z wierzchołka C . Znaleźlibyśmy



Rys. 5

masę $\frac{1}{9} m$ skupioną w wierzchołku C oraz masę $\frac{8}{9} m$ równomiernie rozłożoną na odcinku równoległym do podstawy AB i odległym od C o $\frac{3}{4} l$. Po sprowadzeniu tego odcinka do dwóch punktów kinetycznych otrzymalibyśmy w ten sposób trzy punkty kinetyczne. Poszukamy jednak innego zespołu punktów, który będzie najprostszymi. Dojdziemy do niego drogą następującą.

Określimy moment bezwładności płyty trójkątnej względem osi z przechodzącej przez środek masy G i prostopadłej do płyty, przy czym zamiast masy będziemy rozpatrywali pole F trójkąta. Przyjmiemy oznaczenia zgodne z rys. 5.

Moment względem osi równoległej do z przechodzącej przez wierzchołek C jest:

$$dJ_c = \frac{x dh x^2}{12} + x dh y^2 = \frac{AB^3 dh h^3}{12 H^3} + \frac{AB dh CM^2 h^3}{H^3},$$

gdzie podstawiono $x = AB h/H$ i $y = CM h/H$.

Całkując w granicach od 0 do H otrzymamy

$$J_c = \frac{F}{3} \left(\frac{AB^2}{8} + \frac{3CM^2}{2} \right).$$

Posługując się rachunkiem wektorowym znajdziemy:

$$\overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{GK} - \overrightarrow{GL}) = 2(2\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GM}),$$

$$\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{GM}, \quad \overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GM},$$

$$J_c = \frac{F}{3} \left(2GK^2 + \frac{1}{2} GM^2 + 2\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{GM} + \frac{27}{2} GM^2 \right),$$

$$J_G = J_C - F \cdot CG^2 = \frac{F}{3} (2GK^2 + 14GM^2 + 2\vec{GK} \cdot \vec{GM}) - 4F \cdot GM^2 =$$

$$= \frac{F}{3} (2GK^2 + 2GM^2 + 2\vec{GK} \cdot \vec{GM}) = \frac{F}{3} |(\vec{GK} + \vec{GM})^2 + GK^2 + GM^2|;$$

$$\vec{GK} + \vec{GM} = -\vec{GL}, \quad J_G = \frac{F}{3} (GL^2 + GK^2 + GM^2).$$

Otrzymany wzór sugeruje, że poszukiwane punkty kinetyczne o równych masach (polach) mogą znajdować się w środkach boków trójkąta. Dla upewnienia się należy sprawdzić, czy takie trzy punkty czynią zadość odpowiednim warunkom. Wzór otrzymany spełnia tylko jeden warunek dla momentów bezwładności względem osi z w punkcie G . Ponieważ jest rzeczą widoczną, że warunki (3.1) i (3.2) są również spełnione, pozostaje więc tylko sprawdzić równania dla dwóch momentów bezwładności.

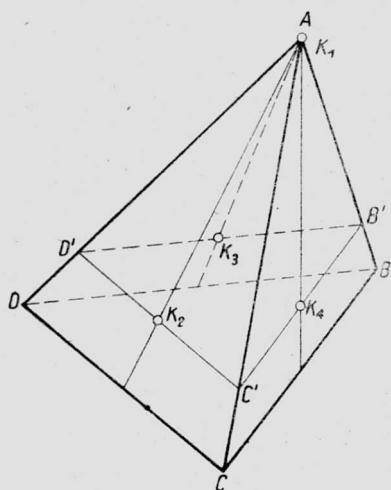
Obliczmy moment bezwładności trójkąta względem środkowej CM :

$$J_{CM} = \int_0^H \frac{x dh x^2}{12} \sin^2 \alpha, \quad x = AB \frac{h}{H},$$

$$J_{CM} = 2 \frac{F}{3} \left(\frac{AB}{4} \sin \alpha \right)^2 = 2 \frac{F}{3} \left(\frac{LK}{2} \sin \alpha \right)^2.$$

Wyrażenie to przedstawia również moment bezwładności trzech punktów M , L i K o masach $F/3$ (przy czym punkt M leży tu na osi). To samo otrzymamy dla każdej środkowej.

Stwierdzamy więc, że trzy punkty kinetyczne płyty trójkątnej o masach równych $m/3$ znajdują się w środkach boków płyty.



Rys. 6

5.5. Czworoscian. Najprostszy z wielościanów — czworoscian — posiada znaczenie specjalne ze względu na możliwość podziału każdego wielościanu na czworosciany składowe; dlatego zajmiemy się wyznaczeniem jego punktów kinetycznych. Między czworoscianem i trójkątem nie ma analogii i nie dochodzimy, jak by się mogło zdawać, do czterech punktów kinetycznych w środkach ścian (o czym można się przekonać na ostrosłupie elementarnym). Posiłkując się ostrosłupem elementarnym znajdziemy dogodnie dla celów praktycznych cztery punkty kinetyczne w sposób następujący.

Niech będzie dany czworościan $ABCD$ (rys. 6), który dzielimy na ostrosłupy elementarne o wspólnym wierzchołku w narożu A . Sprowadzając każdy z elementów do dwu punktów kinetycznych: jednego w A , drugiego w odległości równej $\frac{4}{5}$ długości ostrosłupa od wierzchołka A , otrzymujemy następujący zespół kinetyczny: punkt kinetyczny K_1 w A o masie $\frac{1}{16}m$ oraz jednorodny trójkąt kinetyczny $B'C'D'$ o masie $\frac{15}{16}m$, równoległy do podstawy BCD i odległy od A o $\frac{4}{5}$ wysokości czworościanu. Sprowadzając następnie trójkąt do trzech punktów kinetycznych w środkach boków, otrzymamy dla czworościanu cztery punkty kinetyczne: K_1 o masie $\frac{1}{16}m$ w narożu czworościanu oraz K_2, K_3 i K_4 o masach $\frac{5}{16}m$ na $\frac{4}{5}$ długości środkowych wychodzących z tego naroża. Zespół taki możemy dowolnie wybrać z czterech zespołów analogicznych, wychodząc z różnych naroży.

6. Metoda przekształcenia. Twierdzenie

O ile wyznaczenie układów kinetycznych dla zwykłych figur geometrycznych jest na ogół rzeczą łatwą, to wyznaczenie ich dla figur ogólnych może napotkać na trudności. W celu uniknięcia tych trudności poszukamy dla pewnych przypadków nowych dróg stosując metodę przekształcenia.

Powstaje pytanie, jak się zachowują punkty kinetyczne bryły przy jej przekształceniu. Odpowiedź na nie może mieć znaczenie doniosłe dla celów praktycznych. Jeżeli daną bryłę otrzymujemy przez pewne przekształcenie innej bryły, dla której znane są punkty kinetyczne, oraz jeżeli wiemy, jak przy odkształceniu zachowują się punkty kinetyczne, to tym samym otrzymujemy te punkty dla bryły odkształconej.

Zajmiemy się przekształceniem bryły przez przesunięcie afiniczne, przy którym proste nie ulegają wygięciu, zaś odcinki proste równoległe do kierunku przesunięcia zachowują swą długość. Przy takim «zsunieciu» z prostych brył otrzymujemy bryły ukośne (i ogólniej przekształcone), zachowujące swą objętość (prostopadłościan przekształca się na równoległościan, kula — na elipsoidę itp.).

Udowodnimy następujące *twierdzenie*: jeżeli dla danej bryły mamy jakikolwiek układ punktów kinetycznych $m_1, \dots, m_n$, to po odkształceniu bryły przez afiniczne przesunięcie, punkty kinetyczne bryły pierwotnej przesunięte razem z bryłą stanowią układ punktów kinetycznych dla bryły odkształconej.

Niech będzie bryła z pewnym określonym układem n punktów kinetycznych $m_1, \dots, m_n$, gdzie n może być skończone lub nieskończone. Przyjmijmy w środku masy G bryły prostokątny układ odniesienia x, y, z .

Centralną elipsoidę bezwładności bryły możemy wyznaczyć przez sześć momentów, z których trzy są płaszczyznowymi momentami bezwładności:

$$\int_m x^2 dm, \quad \int_m y^2 dm, \quad \int_m z^2 dm,$$

oraz trzy momentami dewiacyjnymi:

$$\int_m xy dm, \quad \int_m yz dm, \quad \int_m zx dm.$$

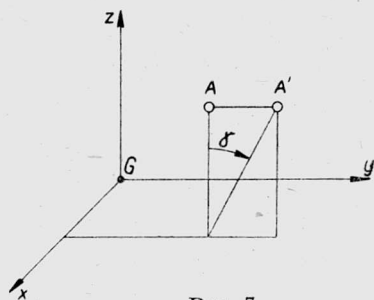
Porównując je z momentami układu punktów kinetycznych mamy:

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \int_m x^2 dm = \sum_1^n x_i^2 m_i, & \int_m xy dm = \sum_1^n x_i y_i m_i, \\ \int_m y^2 dm = \sum_1^n y_i^2 m_i, & \int_m yz dm = \sum_1^n y_i z_i m_i, \\ \int_m z^2 dm = \sum_1^n z_i^2 m_i, & \int_m zx dm = \sum_1^n z_i x_i m_i. \end{array} \right.$$

Równania te stanowią warunek wspólności centralnej elipsoidy bezwładności układu punktów kinetycznych i bryły.

Założmy, że układ współrzędnych x, y, z jest tak zorientowany, że płaszczyzna xy jest płaszczyzną kierującą przesunięcia oraz oś y jest równoległa do kierunku przesunięcia bryły.

Przesunięcie jest afiniczne, jeśli dowolny punkt A przesuwa się równolegle do osi y ; tworzy się przy tym kąt przesunięcia γ [nowe położenie oznaczmy przez A' (rys. 7)].



Rys. 7

Współrzędne punktu A przed i po przesunięciu są następujące:

$$A, \quad x, \quad y, \quad z,$$

$$A', \quad x, \quad y + z \sin \gamma, \quad z.$$

Na podstawie równań (6.1) otrzymujemy następujące związki:

$$(6.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_m x^2 dm &= \sum_1^n x_i^2 m_i, \\ \int_m (y + z \sin \gamma)^2 dm &= \sum_1^n (y_i + z_i \sin \gamma)^2 m_i, \\ \int_m z^2 dm &= \sum_1^n z_i^2 m_i, \\ \int_m x (y + z \sin \gamma) dm &= \sum_1^n x_i (y_i + z_i \sin \gamma) m_i, \\ \int_m (y + z \sin \gamma) z dm &= \sum_1^n (y_i + z_i \sin \gamma) z_i m_i, \\ \int_m z x dm &= \sum_1^n z_i x_i m_i. \end{aligned} \right.$$

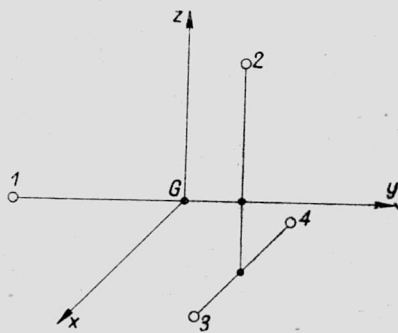
Istotnie, rozwiązując wzory (6.2) otrzymujemy na mocy wzorów (6.1) wyrazy prawej i lewej strony tożsamościowo równe. I tak np. wzór drugi na mocy (6.1) daje

$$\begin{aligned} \int_m y^2 dm + \sin^2 \gamma \int_m z^2 dm + 2 \sin \gamma \int_m y z dm &= \\ &= \sum_1^n y_i^2 m_i + \sin^2 \gamma \sum_1^n z_i^2 m_i + 2 \sin \gamma \sum_1^n y_i z_i m_i. \end{aligned}$$

Równania (6.2) stwierdzają wspólność elipsoidy bezwładności bryły przesuniętej oraz przesuniętych z bryłą jej pierwotnych punktów kinetycznych. Twierdzenie zostało przeto udowodnione.

Doniosłość tego twierdzenia jest widoczna, bowiem daje ono owocną metodę bezpośredniego wyznaczania punktów kinetycznych dla pewnej kategorii figur, które można otrzymać z figur prostych przez przekształcenie.

6.1. Zastosowanie metody przekształcenia do brył przestrzennych. Niech będzie bryła, której dany jest środek masy G oraz główne kierunki bezwładności, jak również i główne centralne momenty bezwładności. Chcemy wyznaczyć cztery punkty kinetyczne o równych masach. Obierzmy w G układ osi współrzędnych x, y, z (rys. 8) zgodny z głównymi kierunkami bezwładności. Wykorzystując swobodę warunków ogólnych umieścimy jeden z punktów kinetycznych (1) na osi y ; pozostałe trzy (2,3,4) w płaszczyźnie prostopadłej do y , przy czym jeden z nich w płaszczyźnie yz . Układ punktów kinetycznych będzie więc symetryczny względem płaszczyzny yz . Warunki dla punktów kinetycznych przedstawia się w sposób następujący:



Rys. 8.

$$(6.1.1) \quad m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \frac{1}{4} m,$$

$$(6.1.2) \quad \frac{1}{4} x_3 + \frac{1}{4} x_4 = 0, \quad \frac{1}{4} y_1 + \frac{3}{4} y_{234} = 0, \quad \frac{1}{4} z_2 + \frac{2}{4} z_{34} = 0,$$

$$(6.1.3) \quad \begin{cases} \frac{1}{4} y_1^2 + \frac{1}{4} (y_{234}^2 + z_2^2) + \frac{2}{4} (y_{234}^2 + z_{34}^2) = \frac{J_x}{m}, \\ \frac{1}{4} z_2^2 + \frac{2}{4} (z_{34}^2 + x_{34}^2) = \frac{J_y}{m}, \\ \frac{1}{4} y_1^2 + \frac{1}{4} y_{234}^2 + \frac{2}{4} (y_{234}^2 + x_{34}^2) = \frac{J_z}{m}. \end{cases}$$

Z równań (6.1.2) oraz z rys. 8 mamy:

$$(6.1.4) \quad x_3 = -x_4, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad y_1 = -3 y_{234}, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = -2 z_{34}.$$

We wzorach wprowadziliśmy oznaczenie $y_{234} = y_2 = y_3 = y_4$ oraz $z_{34} = z_3 = z_4$ i $x_{34}^2 = x_3^2 = x_4^2$.

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$(6.1.5) \quad \begin{cases} 6 y_{234}^2 + 3 z_{34}^2 = \frac{2 J_x}{m}, \\ x_{34}^2 + 3 z_{34}^2 = \frac{2 J_y}{m}, \\ x_{34}^2 + 6 y_{234}^2 = \frac{2 J_z}{m}, \\ J_x + J_y + J_z = 2 J_G. \end{cases}$$

Z (6.1.4) i (6.1.5) wyznaczamy cztery punkty kinetyczne dla bryły:

$$(6.1.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} m_1 = \frac{m}{4}, & x_1 = 0, \\ m_2 = \frac{m}{4}, & x_2 = 0, \\ m_3 = \frac{m}{4}, & x_3 = \sqrt{\frac{2(J_G - J_x)}{m}}, \\ m_4 = \frac{m}{4}, & x_4 = -\sqrt{\frac{2(J_G - J_x)}{m}}, \\ y_1 = -3\sqrt{\frac{J_G - J_y}{3m}}, & z_1 = 0, \\ y_2 = \sqrt{\frac{J_G - J_y}{3m}}, & z_2 = 2\sqrt{\frac{2(J_G - J_z)}{3m}}, \\ y_3 = \sqrt{\frac{J_G - J_y}{3m}}, & z_3 = -\sqrt{\frac{2(J_G - J_z)}{3m}}, \\ y_4 = \sqrt{\frac{J_G - J_y}{3m}}, & z_4 = -\sqrt{\frac{2(J_G - J_z)}{3m}}. \end{array} \right.$$

Jeżeli z tej bryły powstała przez przesunięcie w pewnym kierunku nowa bryła, to przesunięte punkty kinetyczne pierwszej bryły będą punktami kinetycznymi drugiej. Wyznaczamy te punkty w układzie współrzędnych ukośnych, przesuniętych razem z bryłą.

Stosując wzory do prostopadłościanu o krawędziach a, b, c równoległych do osi Gx, Gy, Gz mamy:

$$J_x = m \frac{b^2 + c^2}{12}, \quad J_y = m \frac{c^2 + a^2}{12}, \quad J_z = m \frac{a^2 + b^2}{12}, \quad J_G = m \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12},$$

$$m_1 = \frac{m}{4}, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = -\frac{b}{2}, \quad z_1 = 0,$$

$$m_2 = \frac{m}{4}, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{b}{6}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}c,$$

$$m_3 = \frac{m}{4}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}a, \quad y_3 = \frac{b}{6}, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{6}c,$$

$$m_4 = \frac{m}{4}, \quad x_4 = -\frac{\sqrt{6}}{6}a, \quad y_4 = \frac{b}{6}, \quad z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{6}c.$$

Punkt kinetyczny m_1 znajduje się na ścianie prostopadłościanu prostopadłej do y .

Dla równoległościanu współrzędne punktów kinetycznych w układzie ukośnym nie zmieniają się, jeżeli a , b i c oznaczają krawędzie.

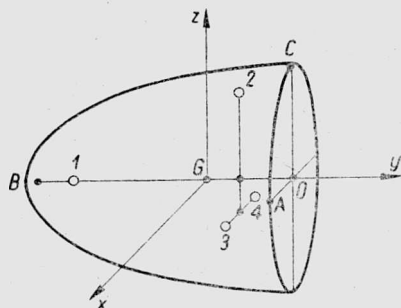
Stosując następnie wzory (6.1.6) do prostego odcinka paraboloidy eliptycznej mamy (rys. 9).

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c,$$

$$OG = \frac{1}{3}b, \quad v = \frac{\pi}{2}abc,$$

$$J_x = m \frac{b^2 + 3c^2}{18}, \quad J_y = m \frac{a^2 + c^2}{6},$$

$$J_z = m \frac{b^2 + 3a^2}{18}, \quad J_G = m \frac{b^2 + 3a^2 + 3c}{18},$$



Rys. 9

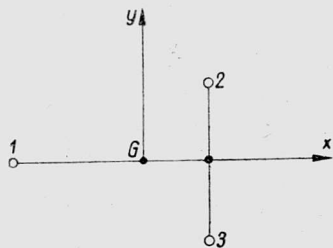
$$m_1 = \frac{m}{4}, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = -\frac{\sqrt{6}}{6}b, \quad z_1 = 0,$$

$$m_2 = \frac{m}{4}, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{\sqrt{6}}{18}b, \quad z_2 = \frac{2}{3}c,$$

$$m_3 = \frac{m}{4}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \quad y_3 = \frac{\sqrt{6}}{18}b, \quad z_3 = -\frac{1}{3}c,$$

$$m_4 = \frac{m}{4}, \quad x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{3}a, \quad y_4 = \frac{\sqrt{6}}{18}b, \quad z_4 = -\frac{1}{3}c.$$

Współrzędne punktów kinetycznych przekształconego odcinka paraboloidy eliptycznej mają taką samą postać (w układzie współrzędnych ukośnych), jak współrzędne punktów kinetycznych odcinka paraboloidy nieprzekształconej.



Rys. 10

6.2. Zastosowanie metody przekształcenia do płyt płaskich. Niech będzie dana figura płaska lub cienka płyta płaska, której wiadome są: środek masy G i główne kierunki oraz główne momenty bezwładności. Określimy trzy punkty kinetyczne o równych masach.

Obieramy w G układ osi x , y zgodny z głównymi kierunkami bezwładności. Mając możliwość wyboru pewnych parametrów, umieszczamy jeden z punktów m_1 na osi x , pozostałe dwa m_2 i m_3 — symetrycznie względem x (rys. 10).

Warunki dla punktów kinetycznych są:

$$(6.2.1) \quad m_1 = m_2 = m_3 = \frac{m}{3},$$

$$(6.2.2) \quad \frac{1}{3} y_2 + \frac{1}{3} y_3 = 0, \quad \frac{1}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_{23} = 0,$$

$$(6.2.3) \quad \begin{cases} \frac{2}{3} y_{23}^2 = \frac{J_x}{m}, & \frac{1}{3} x_1^2 + \frac{2}{3} x_{23}^2 = \frac{J_y}{m}, \\ x_1 = -2x_{23}, & y_2 = -y_3, & y_1 = 0, \\ x_{23}^2 = \frac{J_y}{2m}, & y_{23}^2 = \frac{3J_x}{2m}. \end{cases}$$

Wyznaczamy stąd trzy punkty kinetyczne płyty:

$$(6.2.4) \quad \begin{cases} m_1 = \frac{m}{3}, & x_1 = -2 \sqrt{\frac{J_y}{2m}}, & y_1 = 0, \\ m_2 = \frac{m}{3}, & x_2 = \sqrt{\frac{J_y}{2m}}, & y_2 = \sqrt{\frac{3J_x}{2m}}, \\ m_3 = \frac{m}{3}, & x_3 = \sqrt{\frac{J_y}{2m}}, & y_3 = -\sqrt{\frac{3J_x}{2m}}. \end{cases}$$

Punkty kinetyczne przesunięte będą punktami kinetycznymi dla płyty przesuniętej; wyznaczamy je w układzie współrzędnych ukośnokątnych wyznaczonych przez przesunięcie obranych na początku współrzędnych dla figury nieprzekształconej. Przez zastosowanie wzorów (6.2.4) do prostokąta oraz równoległoboku o bokach a i b otrzymujemy następujące punkty kinetyczne:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{m}{3}, & x_1 &= -\frac{\sqrt{6}}{6} a, & y_1 &= 0, \\ m_2 &= \frac{m}{3}, & x_2 &= \frac{\sqrt{6}}{12} a, & y_2 &= \frac{\sqrt{2}}{4} b, \\ m_3 &= \frac{m}{3}, & x_3 &= \frac{\sqrt{6}}{12} a, & y_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{4} b. \end{aligned}$$

Przez zastosowanie do prostego lub ukośnego odcinka paraboli o sprzężonych: strzałach a i cięciwie b otrzymamy punkty kinetyczne w poniższy sposób.

Biorąc pod uwagę prosty odcinek paraboli obierzemy układ osi x, y , kierując oś x zgodnie z kierunkiem osi paraboli. Wiemy tutaj, że środek G leży na odległości $\frac{2}{5}a$ od cięciwy, pole odcinka wynosi $\frac{2}{3}ab$ oraz

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{20} m b^2, & J_y &= \frac{12}{175} m a^2, \\ m_1 &= \frac{m}{3}, & x_1 &= -\frac{2\sqrt{42}}{35} a, & y_1 &= 0, \\ m_2 &= \frac{m}{3}, & x_2 &= \frac{\sqrt{42}}{35} a, & y_2 &= \frac{\sqrt{30}}{20} b, \\ m_3 &= \frac{m}{3}, & x_3 &= \frac{\sqrt{42}}{35} a, & y_3 &= -\frac{\sqrt{30}}{20} b. \end{aligned}$$

Wzory te nie ulegają zmianie dla odcinka ukośnego paraboli; a i b oznaczają wtedy wielkości sprzężone ukośnie — strzałkę i cięciwę.

7. Ruch płaski bryły

Metoda punktów kinetycznych, specjalnie nadająca się do ogólnych zagadnień przestrzennych, może być również z korzyścią zastosowana do zagadnień związanych z ruchem płaskim. Ruch płaski bryły zasługuje na głębszą analizę ¹⁾.

Przy ruchu płaskim bryły siły bezwładności stanowią układ koplarny (siły równoległe do płaszczyzny). Układ taki może być sprowadzony do układu płaskiego (siły w płaszczyźnie) tylko przy pewnych warunkach. W ogólnym przypadku ruchu płaskiego bryły siły bezwładności sprowadzają się do siły leżącej w płaszczyźnie ruchu, przechodzącej przez środek masy, oraz do momentu o pewnym kierunku wektora.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby układ koplarny sił bezwładności bryły sprowadzał się do układu płaskiego jest prostopadłość wektora momentu sił względem środka masy G do płaszczyzny ruchu tego środka.

Wynika stąd następujący inny równoważny wniosek: oś z w środku masy G , prostopadła do płaszczyzny ruchu tego środka, powinna być jedną z głównych osi bezwładności.

Istotnie, jeżeli moment sił bezwładności względem środka G jest prostopadły do płaszczyzny ruchu środka G , to obierając w tej płaszczyźnie prostokątny układ osi x, y otrzymujemy, co następuje.

Pomijając siły równoległe powodujące ruch postępowy według ruchu środka G , a więc proporcjonalne do mas i dające względem G moment równy zeru, bierzemy pod uwagę tylko siły elementarne obrotu około G :

$$\omega^2 \mathbf{r} dm + \mathbf{e} \times \mathbf{r} dm,$$

¹⁾ Por. [1], str. 517.

gdzie

$$\mathbf{e} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & e \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Momenty sumaryczne tych sił bezwładności względem osi x i y są:

$$\int (y dZ - z dY) = 0, \quad \int (z dX - x dZ) = 0,$$

gdzie

$$dZ = 0,$$

$$dX = \omega^2 x dm - e y dm,$$

$$dY = \omega^2 y dm + e x dm.$$

Podstawiając te znaczenia mamy

$$\omega^2 \int_m z x dm - e \int_m z y dm = 0,$$

$$\omega^2 \int_m y z dm - e \int_m z x dm = 0.$$

Ponieważ wyznacznik tego układu $\omega^4 + e^2$ nie równa się zeru, przeto jedynym rozwiązaniem jest

$$\int_m z x dm = 0, \quad \int_m y z dm = 0,$$

co stwierdza, że oś z jest osią główną w G .

W dalszym ciągu możemy sformułować następujący wniosek: jeżeli bryła znajdująca się w ruchu płaskim czyni zadość wyprowadzonemu warunkowi, to jej masę łącznie z siłami bezwładności możemy przenieść prostopadle do płaszczyzny ruchu środka masy bryły i uważać bryłę za figurę płaską, poruszającą się w jej płaszczyźnie. Układ punktów kinetycznych w tym przypadku znajduje się w płaszczyźnie ruchu środka masy i redukuje się do *dwóch punktów kinetycznych*.

Istotnie, równania punktów kinetycznych dla płaskiego układu i płaskiego ruchu będą następujące:

$$(7.1) \quad \Sigma m_i = m,$$

$$(7.2) \quad \Sigma m_i x_i = 0, \quad \Sigma m_i y_i = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

$$(7.3) \quad \Sigma m_i (x^2 + y^2)_i = J_G,$$

Ilość stopni swobody s dla n punktów kinetycznych wynosi tutaj $s = 3n - 4$.

Dla $n = 1$ oraz $s = -1$ układ jest niemożliwy, zaś dla $n = 2$ oraz $s = 2$ układ jest możliwy, przy czym możemy jeszcze przyjąć dowolnie dwie niewiadome. Przyjmijmy $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}m$. Jedną ze współrzędnych ustalimy na końcu. Możemy napisać

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 = -x_2,$$

$$y_1 + y_2 = 0, \quad y_1 = -y_2,$$

lub

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = \frac{2J_G}{m} = 2i_G^2,$$

$$x_{12}^2 + y_{12}^2 = i_G^2.$$

Ostatnie równanie przedstawia koło o środku w G , o promieniu i_G , na którym leżą przeciwległe dwa punkty kinetyczne. Dysponując jedną ze współrzędnych możemy w dowolnym położeniu średnicy ustalić na kole miejsca obu punktów.

Nadmienić należy, że bryły sprowadzające się do układów płaskich są to najczęściej elementy konstrukcyjne symetryczne względem płaszczyzny ruchu środka masy; jest to przypadek szczególny ogólnego przypadku rozważonego wyżej.

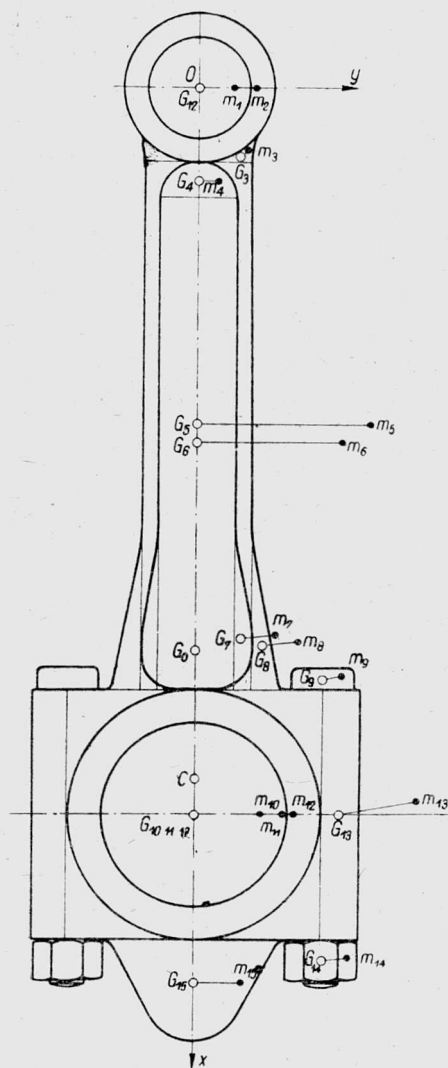
Dwa punkty zastępcze, do jakich daje się sprowadzić bryłę tylko w warunkach wyjątkowych, należałoby nazwać raczej punktami pseudo-kinetycznymi, gdyż nie są to punkty kinetyczne w całym tego słowa znaczeniu.

8. Wskazówki praktyczne. Przykład zastosowania metody punktów kinetycznych

Metoda punktów kinetycznych w połączeniu z metodą wykreślną może mieć szersze zastosowanie dla dynamicznych obliczeń części mechanizmów, jeżeli rozporządza się opracowanym katalogiem punktów kinetycznych dla elementów typowych, na jakie mogą być podzielone części mechanizmów. W tym celu dodajemy na końcu niniejszej pracy katalog punktów kinetycznych dla prostych elementów. W przypadku elementów ukośnych korzystać należy z twierdzenia o odkształceniu.

Sposób użycia metody przedstawiony jest na przykładzie obliczenia korbowodu, a więc bryły znajdującej się w ruchu płaskim i sprowadzającej się do układu płaskiego. Na rys. 11 mamy przedstawiony korbowód w rzucie na płaszczyznę sprowadzenia mas. W tej płaszczyźnie leżą też punkty kinetyczne poszczególnych części otrzymanych z podziału kor-

powodu. Muszą to być elementy typowe, dla których mamy po dwa punkty kinetyczne, objęte katalogiem. Korbowód (rys. 11) został podzielony na



Rys. 11

części zbliżone do trójkątów i do ukośnych odcinków paraboli, które też traktujemy jako trójkąty i parabole. Jeżeli głowa korbowodu posiada z każdej strony po dwie śruby, to mamy podwójne punkty kinetyczne pokrywające się w rzucie. Wnęki i otwory uważamy za masy ujemne. Jeżeli ciężar właściwy wszystkich części korbowodu jest jednakowy, to możemy masy elementów składowych zastąpić przez ich objętości.

Dzieląc korbowód na 21 elementów, wyznaczamy ich punkty kinetyczne w następujący sposób.

Obieramy układ odniesienia x, y w środku O górnej głowicy korbowodu, kierując oś x wzdłuż korbowodu. Dla elementu k zakreślamy z jego środka masy G_k koło promieniem i_{G_k} oraz umieszczamy na tym kole dwa przeciwległe punkty kinetyczne na średnicy prostopadłej do $G_k O$, tj. symetrycznie względem $G_k O$; usprawni to w dużym stopniu obliczenie.

Mamy więc ogółem 42 punkty kinetyczne, wśród nich 24 punkty symetryczne względem osi x . Prócz tego wszystkie pary punktów są symetryczne względem $G_k O$. Otrzymane dane dla piętnastu środków mas i piętnastu punktów kinetycznych porządkujemy w następującej tabeli:

k	m_k	x_k	$m_k x_k$	r_k^2	$m_k r_k^2$
-----	-------	-------	-----------	---------	-------------

W tabeli tej przyjęto oznaczenia następujące: k jest numerem elementu, m_k masą elementu, x_k odcięta położenia, G_k środkiem masy elementu oraz r_k odległością od O jednego z punktów kinetycznych w k -tym elemencie. Z tabeli tej znajdujemy:

(a) położenie środka masy korbowodu G

$$x_G = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k},$$

(b) moment bezwładności korbowodu względem O

$$J_0 = \sum m_k r_k^2,$$

oraz moment bezwładności korbowodu względem środka masy G

$$J_G = J_0 - x_G^2 \sum m_k = i_G^2 m.$$

Ostatecznie określamy albo (a) dwa punkty kinetyczne korbowodu, leżące przeciwległe na kole zakreślonym promieniem i ze środka G o masach równych $m/2$ każdy (gdzie $m = \sum m_k$ określa masę korbowodu), albo (b) dwa punkty kinetyczne, z których jeden umieszczony jest w środku górnej głowicy O , drugi w C na osi x w odległości x_c od środka masy G po przeciwnej stronie.

Znajdziemy x_c oraz m_0 i m_c z równań warunkowych (umieszczając środek układu odniesienia w punkcie G):

$$m_0 + m_c = m, \quad m_0 x_0 + m_c x_c = 0, \quad m_0 x_0^2 + m_c x_c^2 = J_G.$$

Po rozwiązaniu znajdziemy

$$x_0 = GO = a, \quad x_c = -\frac{J_G}{ma} = -\frac{i_G^2}{a},$$

$$m_0 = \frac{J_G m}{J_G + ma^2} = \frac{i_G^2}{i_G^2 + a^2} m, \quad m_c = \frac{a^2}{i_G^2 + a^2} m.$$

Punkty kinetyczne O i C są zwykle wprowadzane w obliczeniach układów korbowych przy wyrównowywaniu mas. Punkt C jest środkiem wahań sprzężonym z punktem O , co widoczne jest ze wzoru na x_c .

Podany przykład układu płaskiego, często występujący w technice, nie wykazuje właściwych zalet metody punktów kinetycznych. Przepracowane wyżej postępowanie, w porównaniu ze zwykłą metodą opartą na twierdzeniu *Steinera*, nie wiele tylko jest korzystniejsze. Natomiast przy obliczeniach mechanizmów przestrzennych metoda punktów kinetycznych góruje nad innymi metodami.

To, że teoria i metody punktów kinetycznych pozostawały dotychczas nierozwinięte należyćie, można tłumaczyć niezbyt częstym stosowaniem mechanizmów przestrzennych.

Katalog punktów kinetycznych

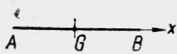
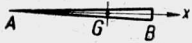
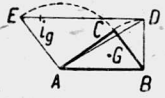
Figura	Układ punktów kinetycznych
1. Pręt prosty elementarny  $AB = l \quad GA = GB$	(a) $m_{12} = \frac{1}{2} m, \quad x_1 = -x_2 = 0,2887 l,$ (b) $m_{12} = \frac{1}{6} m, \quad m_3 = \frac{4}{6} m,$ $x_1 = -x_2 = \frac{1}{2} l, \quad x_3 = 0; \quad i_G = 0,2887 l.$
2. Wycinek płaski elementarny  $AB = l \quad GB = \frac{1}{3} l$	(a) $m_1 = \frac{8}{9} m, \quad m_2 = \frac{1}{9} m,$ $x_1 = \frac{1}{12} l, \quad x_2 = -\frac{2}{3} l, \quad i_G = 0,2357 l,$ (b) jak w trójkącie (por. 4).
3. Ostrosłup elementarny  $AB = l \quad GB = \frac{1}{4} l$	$m_1 = \frac{15}{16} m, \quad m_2 = \frac{1}{16} m,$ $x_1 = \frac{1}{20} l, \quad x_2 = -\frac{3}{4} l, \quad i_G = 0,1936 l.$
4. Trójkąt o bokach a, b, c  $ABD = 90^\circ \quad DAE = 90^\circ$	$m_{123} = \frac{1}{3} m \quad \text{w środkach boków.}$ $i_G^2 = \frac{1}{36} (a^2 + b^2 + c^2),$ $i_G^2 = \frac{1}{36} DE^2, \quad i_G = \frac{1}{6} DE.$
5. Czworoscian (por. rys. 6 w tekście)	$m_1 = \frac{1}{16} m \quad \text{w narożniku A,}$ $m_{234} = \frac{5}{16} m \quad \text{na } \frac{4}{5} \text{ od A długościach środkowych zbieżnych w A.}$
6. Koło płyta	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = 0,707 r \quad \text{co } 120^\circ.$
7. Koło obwód	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = r \quad \text{co } 120^\circ.$

Figura	Układ punktów kinetycznych
8. Trójkąt foremny płyta	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = \frac{1}{2} r \text{ co } 120^\circ,$ $r \text{ promień koła opisanego.}$
9. Trójkąt foremny obwód	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = 0,707 r \text{ co } 120^\circ.$
10. Kwadrat płyta	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = 0,578 r \text{ co } 120^\circ.$
11. Kwadrat obwód	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = 0,508 r \text{ co } 120^\circ.$
12. Pięciokąt foremny	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = 0,634 r \text{ co } 120^\circ.$
13. Sześciokąt foremny	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = 0,645 r \text{ co } 120^\circ.$
14. Czworobok i tra- pez	z podziału na dwa trójkąty otrzymujemy 5 punktów kinetycznych.
15. Prostokąt o bokach a, b	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad x_1 = -0,408 a, \quad y_1 = 0,$ $x_2 = 0,204 a, \quad y_2 = 0,353 b,$ $x_3 = 0,204 a, \quad y_3 = -0,353 b,$ $i_G^2 = 0,2887^2 (a^2 + b^2).$
16. Półkole	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad x_1 = -0,374 r, \quad y_1 = 0,$ $x_2 = 0,187 r, \quad y_2 = 0,667 r,$ $x_3 = 0,187 r, \quad y_3 = -0,667 r,$ $i_G = 0,5656 r.$
17. Parabola	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad x_1 = -0,370 a, \quad y_1 = 0,$ $x_2 = 0,185 a, \quad y_2 = 0,273 b,$ $x_3 = 0,185 a, \quad y_3 = -0,273 b,$ $i_G^2 = (0,261 a)^2 + (0,224 b)^2.$

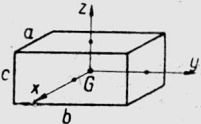
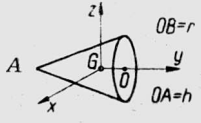
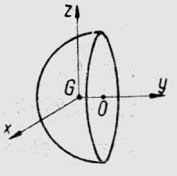
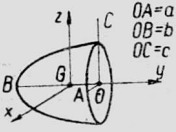
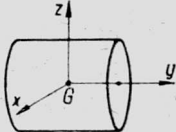
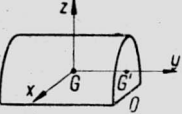
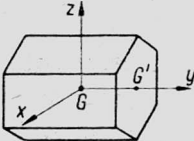
Figura	Układ punktów kinetycznych
18. Kula pełna	$m_{1234} = \frac{1}{4} m, \quad r_{1234} = 0,683 r \text{ (foremnie)},$ $i_x = 0,6325 r.$
19. Kula powierzchni	$m_{1234} = \frac{1}{4} m, \quad r_{1234} = 0,894 r,$ $i_x = 0,8165 r.$
20. Czworoscian foremny	$m_{1234} = \frac{1}{4} m, \quad r_{1234} = 0,447 r,$ $r = \text{promień kuli opisanej}.$
21. Sześcian o krawędzi a	$m_{1234} = \frac{1}{4} m, \quad r_{1234} = 0,577 r = 0,5 a,$ $i_x = 0,4082 r = 0,3535 a.$
22. Prostopadłościan 	$m_{1234} = \frac{1}{4} m,$ $x_1 = 0, \quad y_1 = -\frac{1}{2} b, \quad z_1 = 0,$ $x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{6} b, \quad z_2 = 0,471 c,$ $x_3 = 0,408 a, \quad y_3 = \frac{1}{6} b, \quad z_3 = -0,471 c,$ $x_4 = -0,408 a, \quad y_4 = \frac{1}{6} b, \quad z_4 = -0,471 c$ $i_{x,z}^2 = 0,2887^2 (b^2 + c^2).$
23. Stożek kołowy  $OG = \frac{1}{4} h$	$m_1 = \frac{5}{16} m \text{ w wierzchołku } A,$ $m_{234} = \frac{1}{16} m \text{ w przekroju prostym do osi i odległym o } \frac{4}{5} \text{ wysokości od } A \text{ na promieniach } r_{234} = 0,566 r,$ $i_{x,z}^2 = (0,251 r)^2 + (0,111 h)^2.$
24. Półkula  $OG = \frac{3}{8} b$	$m_{1234} = \frac{1}{4} m, \quad r_{324} = 0,744 r,$ $x_1 = 0, \quad y_1 = -0,564 r, \quad z_1 = 0,$ $x_2 = 0, \quad y_2 = 0,141 r, \quad z_2 = 0,730 r,$ $x_3 = 0,632 r, \quad y_3 = 0,141 r, \quad z_3 = -0,365 r,$ $x_4 = -0,632 r, \quad y_4 = 0,141 r, \quad z_4 = -0,365 r,$ $i_{x,z} = 0,509 r, \quad i_y = \frac{1}{2} r,$ centralna elipsoida bezwładności jest niemal kulą.

Figura	Układ punktów kinetycznych
25. Paraboloidea elip- tyczna  $OG = \frac{1}{3} b$	$m_{1234} = \frac{1}{4} m,$ $\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= -0,408 b, & z_1 &= 0, \\ x_2 &= 0, & y_2 &= 0,136 b, & z_2 &= \frac{2}{3} c, \\ x_3 &= 0,577 a, & y_3 &= 0,136 b, & z_3 &= \frac{1}{3} c, \\ x_4 &= -0,577 a, & y_4 &= 0,136 b, & z_4 &= -\frac{1}{3} c, \end{aligned}$ dla paraboloidy kołowej $i_{x,z}^2 = (0,236 b)^2 + (0,408 r)^2, \quad i_y = 0,577 r.$
26. Walec kołowy  $h = \text{wysokość}$	$m_{1234} = \frac{1}{4} m,$ $\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= -0,5 h, & z_1 &= 0, \\ x_2 &= 0, & y_2 &= 0,167 h, & z_2 &= 0,817 r, \\ x_3 &= 0,707 r, & y_3 &= 0,167 h, & z_3 &= -0,408 r, \\ x_4 &= -0,707 r, & y_4 &= 0,167 h, & z_4 &= -0,408 r, \end{aligned}$ dla ruchu płaskiego równoległego do płaszczyzny yz $m_{12} = \frac{1}{2} m, \quad i_x^2 = (0,5 r)^2 + (0,289 h)^2.$
27. Półwalec kołowy  $OG' = 0,424 r$ $h = 2 GG'$	$m_{1234} = \frac{1}{4} m,$ $\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= -0,5 h, & z_1 &= 0, \\ x_2 &= 0, & y_2 &= 0,167 h, & z_2 &= 0,215 r, \\ x_3 &= 0,707 r, & y_3 &= 0,167 h, & z_3 &= -0,107 r, \\ x_4 &= -0,707 r, & y_4 &= 0,167 h, & z_4 &= -0,107 r, \end{aligned}$ dla ruchu płaskiego równoległego do płaszczyzny yz $m_{12} = \frac{1}{2} m, \quad i_x^2 = (0,5 r)^2 + (0,289 h)^2,$ dla ruchu płaskiego równoległego do płaszczyzny xy $m_{12} = \frac{1}{2} m, \quad i_z^2 = (0,264 r)^2 + (0,289 h)^2.$
28. Graniastosłup sześciokątny  $h = 2 GG'$ $r = \text{promień koła opisanego}$	$m_{1234} = \frac{1}{4} m,$ $\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= -\frac{1}{2} h, & z_1 &= 0, \\ x_2 &= 0, & y_2 &= \frac{1}{6} h, & z_2 &= 0,745 r, \\ x_3 &= 0,645 r, & y_3 &= \frac{1}{6} h, & z_3 &= -0,372 r, \\ x_4 &= -0,645 r, & y_4 &= \frac{1}{6} h, & z_4 &= -0,372 r, \end{aligned}$ dla ruchu płaskiego równoległego do płaszczyzny yz $m_{12} = \frac{1}{2} m, \quad i_x^2 = (0,456 r)^2 + (0,289 h)^2.$

Literatura cytowana w tekście

- [1] I. I. Artobolewski, *Teoria mechanizmów i maszyn*, 1951, str. 517.

Резюме

МЕТОД КИНЕТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Метод «кинетических точек» (т. е. массовых точек, кинетически эквивалентных данной жесткой системе масс) был до сих пор разработан только для частных случаев.

В настоящей работе автор пытается развить новый раздел динамики, устанавливающий некоторые общие принципы метода решения более трудных практических вопросов как, например, проблемы пространственного движения тела с произвольным размещением массы.

Определение кинетических точек обосновано на общих необходимых и достаточных условиях: условии общности центра масс и условии центрального эллипсоида инерции тела и его кинетических точек.

Ввиду того, что форма технических тел состоит из большого числа отдельных геометрических фигур, для определения кинетических точек таких тел, автор приводит таблицы кинетических точек для встречаемых на практике простых фигур. Для обобщения рассуждений, приводится теорема для косых фигур, согласно которой, все кинетические точки тела, при его аффинном преобразовании, перемещаются как точки, принадлежащие телу; это значит, что в системе координат, преобразованной вместе с телом, координаты кинетических точек ведут себя, как инварианты.

Метод «кинетических точек» особенно пригоден для применения совместно с графическим методом и, поэтому, должен найти широкое применение в технике.

S u m m a r y

METHOD OF KINETIC POINTS

The «method of kinetic points» (or mass points kinetically equivalent to the given rigid system of masses) has been applied so far to particular cases only. It is the author's aim to expand in this paper, a new branch of dynamics comprising certain general principles of a method for solving more difficult problems of a practical nature, for instance the spatial motion of a solid of arbitrary mass distribution.

The determination of kinetic points is based on necessary and sufficient conditions of common centre of mass and common central ellipsoid of inertia of the solid and its kinetic points.

In order to determine the kinetic points for solids encountered in engineering problems, usually composed of simple geometric figures, a table of kinetic points for such figures is given. In order to generalize this to oblique figures a theorem is demonstrated, according to which all kinetic points of a solid are displaced under affine transformation, as points pertaining to the solid. In other words, the co-ordinates of kinetic points in the system of co-ordinates transformed jointly with the solid behave as invariants.

The method of kinetic points is particularly suitable when used together with the graphical method. It is likely, therefore, to find a wider application in engineering practice.

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 grudnia 1953 r.

JERZY TADEUSZ PINDERA

TECHNIKA ELASTOOPTYCZNYCH BADAŃ
PŁASKIEGO STANU NAPRĘŻENIA

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXVII

SPIS TRESCI

	Str.
I. Wstęp. Tematyka i organizacja badań elastooptycznych	111
1. Tematyka badań elastooptycznych	111
2. Organizacja badań elastooptycznych	113
II. Technika pracy laboratoryjnej	115
1. Analiza zagadnienia i ułożenia planu badania	115
2. Wykonanie przyrządów i uchwytów realizujących założone obciążenie modelu	115
3. Obróbka materiału na modele	116
3.1. Obróbka cieplna (wygrzewanie)	117
3.2. Obróbka mechaniczna powierzchni	119
4. Wykonanie modelu	122
5. Ustawienie i regulacja aparatury. Zamocowanie modelu w urządzeniu obciążającym	127
5.1. Aparatura pomiarowa	128
6. Wykonanie pomiaru	133
7. Opracowanie wyników pomiaru	136
8. Analiza wyników pomiaru	140
9. Opracowanie wyników badania	140
10. Opracowanie sprawozdania	140
11. Ocena dokładności wyników	142
III. Czynniki wpływające na dokładność wyników. Źródła błędów	144
1. Wpływ własności materiału na modele	144
2. Wpływ wykonania modelu	154
2.1. Wady kształtu geometrycznego modelu	154
2.2. Naprężenia obróbcze	155
3. Wady układu optycznego oraz wady jego ustawienia	157
4. Wpływ dokładności i wartości obciążenia	160
5. Wpływ techniki rejestracji	168
5.1. Rejestracja izoklin	168
5.2. Rejestracja izochrom	171
5.3. Kopiowanie negatywów	172

I. WSTĘP. TEMATYKA I ORGANIZACJA BADAŃ ELASTOOPTYCZNYCH

Przy organizowaniu pracowni elastooptyki jest rzeczą konieczną możliwie wyczerpujące ustalenie rodzaju, zakresu i charakteru badań. Ustalenie takie przesądza o wyposażeniu pracowni i wytycza jej linię rozwojową, a tym samym decyduje o technice prowadzenia badań.

1. Tematyka badań elastooptycznych

Wyodrębnimy następujące zasadnicze kierunki badań elastooptycznych:

- (A) prace długoplanowe o znaczeniu naukowo-technicznym,
- (B) prace bieżące i doraźne o charakterze naukowo-technicznym i technicznym,
- (C) badania naukowe nad samą metodą oraz nad techniką laboratoryjną.

(A) Do prac długoplanowych o znaczeniu naukowo-technicznym zaliczyć można:

- (1) Badania i prace nad ustaleniem współczynników kształtu typowych elementów i szczegółów konstrukcyjnych w zależności od rodzaju obciążenia i sposobu jego przyłożenia.

Badania te powinny być prowadzone systematycznie w łączności z większymi biurami konstrukcyjnymi.

- (2) Badania i prace nad kształtowaniem wytrzymałościowym typowych elementów konstrukcyjnych oraz nad charakterystycznymi połączeniami. Badania te powinny być prowadzone w łączności z ośrodkami normalizacyjnymi oraz z większymi biurami konstrukcyjnymi. Mają one na celu ustalenie najbardziej poprawnego kształtu elementów i połączeń normalizowanych oraz ustalenie wytycznych dla poprawnego projektowania elementów oraz połączeń nienormalizowanych.

Przy opracowywaniu wyżej omówionych zagadnień niezbędne jest ściśle powiązanie badań elastooptycznych z badaniami wytrzymałościowymi materiałów i elementów, zwłaszcza zaś ze zmęczeniowymi.

(B) Prace bieżące i doraźne o charakterze naukowo-technicznym i technicznym obejmują konkretne zagadnienia, ograniczone co do swego zakresu, wyłaniające się przy pracach konstruktorskich i naukowych, oraz ekspertyzy.

Do tej grupy zagadnień zaliczyć można:

(1) Zagadnienia kształtowania wytrzymałościowego nieznormalizowanych i nietypowych elementów konstrukcyjnych oraz konstrukcji. Zagadnienia tego typu wyłaniają się przy opracowywaniu prototypów maszyn i urządzeń oraz przy projektowaniu konstrukcji inżynierskich, w szczególności przy projektowaniu węzłów i połączeń.

(2) Zagadnienia wymagające określenia całkowitego pola napięcia. Zagadnienia tego typu, spotykane w badaniach konstrukcji maszynowych raczej rzadko, wysuwają się na pierwszy plan w badaniach konstrukcji inżynierskich, zwłaszcza zaś przy określaniu pola naprężenia w nowoprojektowanych konstrukcjach, w których analityczne wyznaczenie tego pola z zadowalającą dokładnością nie jest możliwe. Zagadnienia tego typu wyłaniają się również przy sprawdzaniu poprawności i dokładności nowych metod obliczenia.

(3) Zagadnienia specjalne. Do tej grupy zaliczyć należy zagadnienia nie wymienione wyżej. Należą tu będą zagadnienia rozkładu i wartości naprężeń przy obróbce skrawaniem, przy obróbce bezwiórowej, jak również przy walcowaniu, a więc zagadnienia związane z odkształceniami plastycznymi, zagadnienia z dziedziny mechaniki gruntu, górotworów itp. Do grupy tej włączyć należy zagadnienia nietypowe ze względu na sposób przyłożenia obciążenia, np. rozkład i zmiana naprężeń przy uderzeniu, czyli ogólnie ujmując, zagadnienia elastooptyki dynamicznej.

(4) Ekspertyzy.

Omówione wyżej grupy (A) i (B) zagadnień nie zawsze dają się rozwiązać za pomocą metod samej elastooptyki. Korzystamy wówczas z metod uzupełniających, jak metoda kruchych pokryw, metody analogii i inne. Podobnie jak w grupie zagadnień (A), jest rzeczą celową uzupełniać niektóre badania z grupy (B) badaniami wytrzymałościowymi.

(C) W badaniach naukowych nad samą metodą oraz nad techniką laboratoryjną wyodrębnić można następujące kierunki:

(1) Opracowywanie nowych metod pomiarowych, udoskonalenie techniki pomiarowej i laboratoryjnej oraz opracowywanie metod uproszczonych, zapewniających określoną dokładność pomiaru.

(2) Opracowywanie nowych typów przyrządów i aparatury pomiarowej, przyrządów pomocniczych oraz udoskonalanie elementów przyrządów.

(3) Opracowywanie metod cieplnej i mechanicznej obróbki nowych materiałów na modele elastooptyczne oraz współpraca przy przygotowywaniu materiałów na modele.

2. Organizacja badań elastooptycznych

Obecnie ustalają się następujące typy pracowni elastooptyki:

(1) dobrze wyposażone pracownie w dużych ośrodkach badań wytrzymałościowych, będące organiczną częścią grupy doświadczalnej analizy naprężeń;

(2) pracownie istniejące w ramach laboratoriów fabrycznych, w zakładach posiadających większe biura konstrukcyjne;

(3) pracownie przy wyższych uczelniach technicznych, mające przeważnie specjalny charakter.

Pracownie elastooptyki organizowane w ramach grup doświadczalnej analizy naprężeń w większych ośrodkach badań wytrzymałościowych są z zasady tak wyposażone, aby mogły prowadzić samodzielnie badania nad wszystkimi wyżej omówionymi zagadnieniami; rodzaj i jakość posiadanej aparatury oraz przyrządów pomiarowych i pomocniczych posiadanych przez te pracownie umożliwia osiągnięcie wysokiej dokładności wyników.

Pracownie elastooptyki przy wyższych uczelniach technicznych nie są na ogół tak wszechstronnie wyposażone jak pracownie dopiero co omówione, chociaż zwykle posiadają aparaturę umożliwiającą wykonywanie specjalnych prac naukowych poza pracami o charakterze dydaktycznym.

Pracownie elastooptyki w ramach laboratoriów fabrycznych, związane z większymi biurami konstrukcyjnymi (u nas nie wprowadzone, chociaż przed wojną były dążenia w tym kierunku), przystosowane są na ogół tylko do rozwiązywania zagadnień kształtowania wytrzymałościowego oraz pewnych zagadnień rozkładu naprężeń, wyłaniających się w toku prac zakładu. Zwykle przy tego rodzaju badaniach ważniejsza jest szybkość otrzymania wyników niż zachowanie dokładności pomiarów.

Wyposażenie takich pracowni, organizowanych w ramach laboratoriów fabrycznych, przystosowane jest do tematyki — jest więc w zasadzie proste i mało kosztowne. Zadaniem pracowni przyfabrycznych jest ułatwienie lub nawet często umożliwienie konstruktorowi lub projektantowi poprawnego kształtowania wytrzymałościowego. Oznacza to umożliwienie właściwego modelowania opracowywanej konstrukcji lub opracowywanego elementu, mające na celu usunięcie niebezpiecznych spiętrzeń

naprężeń oraz maksymalne wykorzystanie materiału dzięki znajomości rozkładu naprężeń.

Oczywistą jest rzeczą, iż stan oraz kwalifikacje personelu pracowni elastooptycznych dostosowane być muszą do programu prac oraz do wyposażenia pracowni. Fakt ten dlatego — między innymi — zasługuje na podkreślenie, że odpowiednie opanowanie techniki laboratoryjnej i pomiarowej wymaga określonego czasu.

Wyposażenie laboratorium elastooptyki zależy, oczywiście, od założonego zakresu i charakteru badań i pod tym kątem należy oceniać potrzebę przyrządów w laboratorium. Istnieje jednak pewne minimum wyposażenia; nie spełnienie tego minimum powoduje zwykle wzrost kosztów badania i nieproporcjonalnie duży spadek dokładności wyników. Minimum wyposażenia zależy nie tylko od zakresu i charakteru badań, ale również od możliwości nawiązania współpracy z lepiej wyposażonymi ośrodkami.

Sprawę niezbędnego wyposażenia, ściśle związaną z techniką prowadzenia badań, najwłaściwiej jest rozpatrywać analizując poszczególne stadia badania, tzn. prace przygotowawcze, pomiar i opracowanie wyników badania.

Całość prac związanych z przeprowadzeniem «konwencjonalnego» badania elastooptycznego ¹⁾ rozbić można na następujące etapy:

prace przygotowawcze:

- (1) analiza zagadnienia, ułożenie planu badania,
- (2) zaprojektowanie i wykonanie przyrządów oraz uchwytów realizujących założone obciążenie modelu,
- (3) obróbka materiału na modele,
- (4) wykonanie modelu,
- (5) ustawienie i regulacja aparatury, zamocowanie modelu w urządzeniu obciążającym, regulacja całości;

pomiar:

- (6) wykonanie pomiaru,
- (7) opracowanie wyników pomiaru;

opracowanie wyników badania:

- (8) analiza wyników pomiaru,
- (9) opracowanie wyników badania,
- (10) sformułowanie wniosków, opracowanie sprawozdania.

¹⁾ Przez «konwencjonalne badanie elastooptyczne» autor rozumie badanie płaskiego stanu naprężenia, występującego pod wpływem sił zewnętrznych za pomocą powierzchniowych metod badania.

W dalszym ciągu potraktowane zostaną szerzej jedynie zagadnienia związane bezpośrednio z techniką pracy laboratoryjnej w laboratorium elastooptyki, przy wykonywaniu badań konwencjonalnych, czyli zagadnienia wymienione wyżej w punktach (3) - (7).

Praca niniejsza oparta jest o doświadczenia autora, poczynione w toku prac kierowanego przezeń laboratorium elastooptyki oraz pracowni analizy naprężeń. Tam też zaprojektował autor opisywaną aparaturę pomiarową, przyrządy pomocnicze oraz obrabiarki do plastyków. Przy projektowaniu przyrządów i urządzeń oraz przy wykonaniu zdjęć i opracowaniu opisów współpracowali z autorem Z. L e s z c z y ń s k i, T. R ó ż n o w s k i, Z. R ó ż a ń s k i i E. W ł a ź n i k.

II. TECHNIKA PRACY LABORATORYJNEJ

1. Analiza zagadnienia i ułożenie planu badania

Na podstawie analizy projektowanego tematu układa się plan badania, określający ściśle zakres badań. Uwzględnia on możliwości pracowni oraz dokładność pracy posiadanych przyrządów. Należy z góry — na podstawie danych z poprzednich badań — określić orientacyjnie przewidywany stopień dokładności pomiaru i skonfrontować go z żadaną dokładnością pomiaru. Plan badania określa, jakie stadium prac na jakich przyrządach będzie wykonywane, oraz ustala technikę pomiaru i stosowane metody. Wszystkie elementy planu badania powinny być ze sobą starannie szarmonizowane.

2. Wykonanie przyrządów i uchwytów realizujących założone obciążenie modelu

Jakość i dokładność przyrządów i uchwytów decyduje w zasadniczym stopniu o poprawności otrzymanych wyników. Projektując przyrządy obciążające należy brać pod uwagę względnie niski moduł sprężystości plastyków, co wywołuje stosunkowo znaczne odkształcenia modelu w granicach naprężeń dopuszczalnych. W pewnych warunkach odkształcenia te spowodować mogą nawet zmianę wartości momentów obciążających oraz zmianę kierunku działania lub wartości sił obciążających. Zapobiega się temu stosując ciągłą regulację przyrządu obciążającego.

Szczególnie starannie należy zanalizować możliwość wystąpienia nieprzewidzianych sił tarcia. Jeśli natomiast, zgodnie z założeniem, siły tarcia mają występować, to celowe jest takie rozwiązanie przyrządu, aby można było mierzyć wartość tych sił. Przyrządy i uchwyty powinny być

tak rozwiązane, aby regulacja ich była łatwa, dokładna i wygodna nawet w warunkach częściowo zaciemnionego pomieszczenia. Należy również baczyć, aby przyrządy i uchwyty nie wykazywały znaczniejszych odkształceń pod wpływem przewidywanego obciążenia.

3. Obróbka materiału na modele

Modele do badań elastooptycznych wykonujemy, jak wiadomo, z materiałów przezroczystych, posiadających odpowiednie własności wytrzymałościowe i optyczne. Przede wszystkim pożądane są następujące własności: możliwie wysoki moduł sprężystości, możliwie małe pełzanie mechaniczne i optyczne, możliwie wysoka stała elastooptyczna (a więc również możliwie wysoka stała materiałowa), liniowa zależność między efektem elastooptycznym a naprężeniem, możliwie łatwa obrabialność oraz możliwość otrzymania materiału.

Szkło, posiadające doskonałe własności wytrzymałościowe, na przeciętne modele elastooptyczne nie nadaje się ze względu na trudną obróbkę i związany z tym wysoki koszt wykonania modelu oraz ze względu na niską wartość stałej materiałowej; z powyższych względów szkło stosowane jest przy bardzo dokładnych badaniach, jeśli tylko model nie posiada zbyt skomplikowanego kształtu. Przy zwykłych badaniach jako materiał na modele używane są głównie: plexiglas, żywice fenolowe oraz żywice styrenowe. Rzadziej używane są żywice gliptalowe (ze względu na wysoki koszt) oraz celuloid (ze względu na niekorzystne własności wytrzymałościowe).

Do zwykłych badań elastooptycznych płaskiego stanu naprężenia używamy modeli wyciętych z arkuszy plastików o grubościach zawartych w granicach od 4 do 10 mm. Arkusze cieńsze stosuje się przy badaniach powłok oraz płyt rozciąganych; arkusze grubsze używamy na modele, które mają być obciążone siłami ściskającymi oraz na modele o większych wymiarach. Zwykle grubość modelu nie przekracza 10 mm ze względu — między innymi — na to, iż im grubszy jest model, tym dokładniej musi pracować układ optyczny polaryskopu, aby otrzymać poprawny obraz modelu na ekranie lub na matówce aparatu fotograficznego.

Arkusz (płyta) plastiku, z której ma zostać wykonany model, poza możliwie wysokim modułem sprężystości i wysoką wytrzymałością dośrodkową musi wykazywać możliwie małe pełzanie pod obciążeniem stosowanym w doświadczeniu. Poza tym powinien wykazywać możliwie małą anizotropię optyczną przy prześwietlaniu, zarówno w płaszczyźnie prostopadłej, jak i równoległej do powierzchni czołowej płyty, oraz posiadać przezroczyste, możliwie płaskie i równoległe powierzchnie czołowe.

Zwykle otrzymane od dostawcy arkusze plastyków spełniają powyższe warunki w stopniu niedostatecznym; celem odpowiedniej obróbki arkusza plastyku jest zmiana jego własności w pożądanym kierunku oraz doprowadzenie powierzchni czołowej do pożądanego stanu.

Z wymienionych wyżej plastyków jedynie plexiglas nie wymaga żadnej obróbki. Jego własności wytrzymałościowe są zadowalające (niezależnie od tego, nie znamy sposobów ich polepszenia), pełzanie — tak mechaniczne jak i optyczne — w granicach stosowanych naprężeń można pominąć, odznacza się on — w granicach dokładnych pomiarów laboratoryjnych — zupełnym brakiem anizotropii, zarówno mechanicznej, jak i optycznej, oraz dostarczany jest w płytach o zupełnie płaskiej i przezroczystej powierzchni, nie ustępującej powierzchni szkła zwierciadlanego. Inne plastyki dostarczane są zwykle w stanie wymagającym starannej obróbki, z wyjątkiem należącego do żywic styrenowych CR - 39, który dostarczany jest w arkuszach o gładkich powierzchniach, nie wykazujących anizotropii optycznej przy prześwietlaniu prostopadłym do powierzchni czołowej.

Własności wytrzymałościowe oraz optyczne żywic fenolowych można zmieniać przez odpowiednią obróbkę cieplną.

Obróbkę materiału na modele dzielimy na dwa etapy: obróbkę cieplną całości oraz obróbkę mechaniczną powierzchni czołowych.

Obróbka cieplna ma za zadanie zmniejszenie anizotropii optycznej materiału do dopuszczalnych wartości, czyli równocześnie zmniejszenie naprężeń własnych plastyku oraz — przy żywicach fenolowych — podwyższenie modułu sprężystości i zmniejszenie pełzania, o ile to jest konieczne.

Obróbka mechaniczna czołowych powierzchni arkusza plastyku ma na celu doprowadzenie tych powierzchni, drogą obróbki mechanicznej, do zadowalającej płaskości, gładkości oraz przezroczystości, czyli ma usunąć falistość oraz chropowatość powierzchni.

3.1. Obróbka cieplna (wyrzewanie). Ze względu na charakter procesu obróbczego obróbkę cieplną plastyku nazwijmy wyrzewaniem.

Wyrzewanie, które ma za cel wyłączny usunięcie lub zmniejszenie zbyt znacznej anizotropii optycznej arkusza plastyku, jest prostsze, łatwiejsze i krótsze od obróbki mającej na celu osiągnięcie określonych własności wytrzymałościowych, aczkolwiek wpływa również na te własności.

Wyrzewanie plastyku polega na powolnym, stopniowym podwyższeniu temperatury obrabianej płyty aż do osiągnięcia założonej temperatury wyrzewania, następnie na wyrzewaniu płyty w tej temperaturze przez określony czas (na ogół tym krótszy, im temperatura wyrzewania

jest wyższa) i wreszcie na powolnym, stopniowym ochładzaniu do temperatury pokojowej.

Wyraźna zależność własności wytrzymałościowych żywic fenolowych, stosowanych na modele elastooptyczne, od przebiegu wygrzewania powoduje konieczność zachowania ściśle tych samych warunków wygrzewania dla wszystkich partii płyty plastyku (niedopuszczalne są miejscowe przegrzania lub miejscowe przechłodzenia płyty plastyku, mogące spowodować powstanie miejscowych zmian własności). Wobec tego, że przy obróbce różnych płyt zachodzą w praktyce zawsze pewne zmiany warunków wygrzewania, własności elastooptyczne każdej płyty są nieco inne i muszą być indywidualnie określone. (Wartości cyfrowe podawane we wszelkiego rodzaju zestawieniach i tablicach własności elastooptycznych należy traktować zasadniczo jako wartości orientacyjne).

Otrzymane z wytwórni arkusze plastyku wykazują prawie zawsze mniejszą lub większą anizotropię optyczną, charakteryzującą się efektem elastooptycznym. Rysunek 26 przedstawia zdjęcie elastooptycznej płyty plastyku przechowywanej w laboratorium, wykazującej znaczną anizotropię optyczną. Obrawszy za miarę efektu elastooptycznego wartość rzędu izochromy, występującej przy prześwietlaniu próbki o grubości 10 mm, wyciętej z danego arkusza plastyku, przyjmujemy jako dopuszczalne przy pomiarach dokładnych następujące wartości: około 0,1 rzędu izochromy przy prześwietlaniu prostopadłym do powierzchni czołowych oraz około 1,0 rzędu izochromy przy prześwietlaniu równoległym do powierzchni czołowych. Zaznaczyć jednak należy, iż partie przykrawędziowe arkusza plastyku, na przestrzeni kilku milimetrów od krawędzi, wykazywać mogą znacznie wyższe wartości rzędu izochrom, nawet po prawidłowo przeprowadzonym wygrzewaniu. Partie te należy obciąć.

W przypadku gdy efekt elastooptyczny występujący po dokonanych wygrzewaniach przyjmuje wartości wyższe od podanych poprzednio, jest rzeczą celową powtórne przeprowadzenie wygrzewania. Właściwsze i bezpieczniejsze jest wygrzewanie w temperaturze bliższej dolnej granicy temperatur, pomimo tego, że trwa ono dłużej i często musi być powtarzane. Żyvice fenolowe wygrzewa się zwykle w temperaturach 85-115°C, [2], [5], [8], [9], [15].

Obróbkę cieplną arkuszy plastyku przeprowadzić można w piecykach elektrycznych z regulacją temperatury, w specjalnych komorach zasilanych ciepłym powietrzem o żądanej temperaturze lub, po prostu, w wannach wypełnionych olejem, podgrzewanych kuchenką elektryczną lub palnikiem gazowym. Najprostszym sposobem wygrzewania materiału na modele jest wprowadzenie wygrzewania w kąpeli olejowej, nie jest to jednak sposób wygodny. Jeśli prowadzone są w laboratorium systema-

tyczne prace, to opłaca się zainstalowanie piecyka elektrycznego z regulacją temperatury lub specjalnej komory do wygrzewania, [7]. W ostatnich czasach budowane są piecyki wyposażone w automatyczną regulację przebiegu temperatury (E. S h i l t k n e c h t, Zurych).

Przy wygrzewaniu w piecyku należy baczyć, aby elementy grzejne — jeśli są one nieosłonięte — nie promieniowały bezpośrednio na wygrzewany plastik, gdyż w przeciwnym wypadku nie jest możliwe uniknięcie miejscowych różnic temperatury.

Jeśli obrabiany plastik jest żywicą fenolową będącą, jak wiadomo, polikondensatem, to celowe, a często i konieczne, jest przedsięwzięcie specjalnych środków, zapobiegających zmianom zawartości wilgoci w plastyku, w trakcie wygrzewania.

Technikę wygrzewania żywic fenolowych, w szczególności dekoritu 300 a, podali L. F ö p p l i M. M ö n c h w swojej *Praktische Spannungsoptik*, [2]. Zastosowali oni owijanie wygrzewanych modeli w szczelnie przylegającą folię cynową; owinięcie to redukuje zmiany zawartości wilgoci w wygrzewanym plastyku. Wydaje się, iż wygrzewanie żywic fenolowych, przy zachowaniu stale tej samej wilgotności względnej powietrza w piecyku przez cały czas wygrzewania, da również dodatnie wyniki.

Należy zawsze pamiętać o tym, iż właściwa obróbka cieplna arkusza plastyku w przypadku żywic fenolowych zmniejsza znakomicie prędkość narastania efektu naskórkowego, którego wpływ uwidacznia się szczególnie jaskrawo na świeżo obrobionych krawędziach modelu wyciętego z takiego arkusza, [5], [15].

3.2. Obróbka mechaniczna powierzchni. Powierzchnie czołowe płyt plastyku dostarczanych przez wytwórnie lub płyt poddanych obróbce cieplnej posiadają zwykle nierówności, rysy i zmętnienia uniemożliwiające dokonanie poprawnego pomiaru. Powierzchnie te muszą zostać doprowadzone do odpowiedniego stanu gładkości i płaskości. Bezwarunkowo wymagana jest przezroczystość powierzchni; chropowatość powierzchni nie może być zauważona gołym okiem, tzn. nierówności nie mogą przekraczać ułamka mikrona. Stopień dopuszczalnej falistości powierzchni arkusza plastyku przygotowanego do wycięcia modelu zależy od rodzaju układu optycznego polaryskopu, na którym mają zostać wykonane pomiary. Jeśli polaryskop pracuje przy użyciu równoległej wiązki światła o wysokiej jakości, to sfalowania powierzchni, które można zauważyć gołym okiem, nie są dopuszczalne; jeśli natomiast polaryskop pracuje przy użyciu powierzchniowego źródła światła, to wymagania stawiane powierzchniom czołowym płyty plastyku są znacznie mniej ostre.

Przy pracach dokładniejszych obie powierzchnie czołowe powinny być całkowicie płaskie, gładkie, przezroczyste i pozbawione rys, [5], [9].

Materiał szlifuje i poleruje się zasadniczo po wygrzaniu. Jeśli jednak po wyszlifowaniu i wypolerowaniu arkusza plastyku okaże się, iż posiada on jeszcze zbyt wielką anizotropię optyczną, to należy go wygrzać powtórnie a potem, w miarę potrzeby, powtórnie wyszlifować lub tylko wypolerować.

Szlifowanie ma na celu usunięcie falistości powierzchni oraz grubszych rys. Po prawidłowo wykonanym szlifowaniu powierzchnia obrabianego arkusza jest jednostajnie matowa i nie posiada nierówności oraz rys, widocznych gołym okiem. Dobroć szlifowania sprawdza się za pomocą lupy; do sprawdzenia należy arkusz obrabiany umyć i wysuszyć. Kontrolę stanu powierzchni przy obróbce przeprowadza się często, przede wszystkim — aby skrócić czas suszenia — wygodnie jest użyć do tego celu ręcznej suszarki do włosów.

Szlifuje się za pomocą proszków ściernych, np. proszków karborundowych lub korundowych, które są łatwo dostępne w kraju.

Gdy nierówności i rysy powierzchni są głębsze, używamy do szlifowania proszków o ziarnach większych, stopniowo przechodząc do proszków o mniejszych ziarnach. Po każdym zakończeniu szlifowania określonym numerem proszku ściernego należy arkusz plastyku starannie obmyć i wysuszyć, gdyż nawet jedno ziarenko proszku o większych wymiarach, które dostanie się na powierzchnię obrabianą proszkiem drobniejszym, może zniweczyć kilkugodzinną pracę.

Zwykle do wyszlifowania nierównej nawet powierzchni wystarcza komplet proszków w granicach numerów 120-360(400). Doświadczenie nasze wykazało, iż na ogół wystarcza zestaw proszków w granicach numerów 270-360(400). (Numer proszku ściernego równy jest liczbie oczek sita na długości jednego cala, przez które ziarna proszku jeszcze przechodzą).

Szlifowanie można uważać za zakończone, gdy nierówności obrabianej powierzchni nie przekraczają 5-10 mikronów. Dalszą obróbkę wykonuje się za pomocą proszków do polerowania, np. tlenku żelaza lub tlenku glinu. Wykończenie polerowania robi się proszkami o grubości ziaren poniżej jednego mikrona.

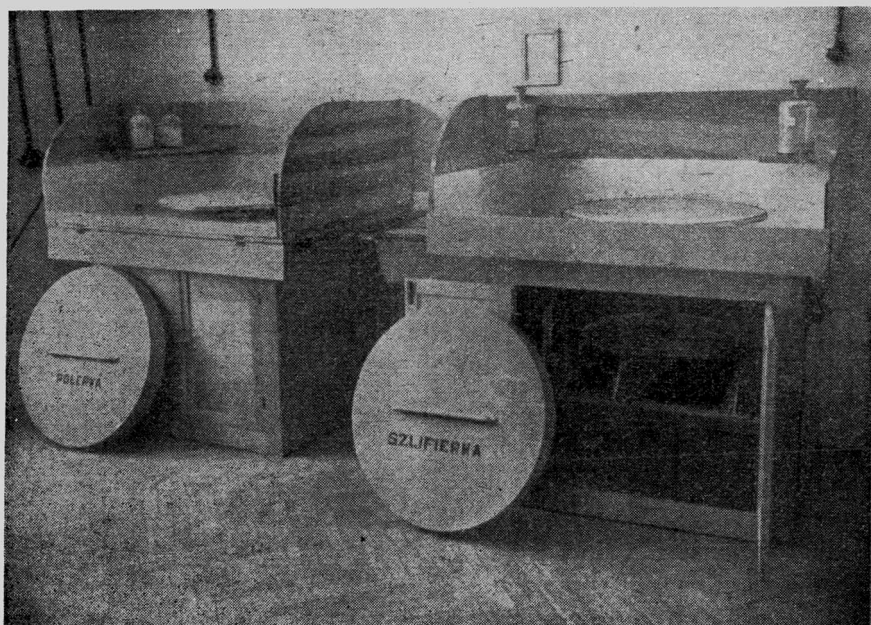
Polerowanie można uważać za zakończone, gdy polerowana powierzchnia nie wykazuje żadnych rys i zmętnień, tzn. gdy jest przezroczysta. Ma to miejsce wówczas, gdy nierówności polerowanej powierzchni są rzędu 0,1-0,2 mikrona.

Polerowanie, podobnie jak szlifowanie, wykonuje się zwykle przy użyciu proszków o różnych średnicach ziaren.

Pojedyncze rysy pochodzące od zabłąkanych ziaren są dopuszczalne, o ile nie przecinają miejsc, w których oczekujemy spiętrzenia naprężeń.

Obróbkę mechaniczną powierzchni płyt plastyku dokonywać można całkowicie ręcznie lub mechanicznie.

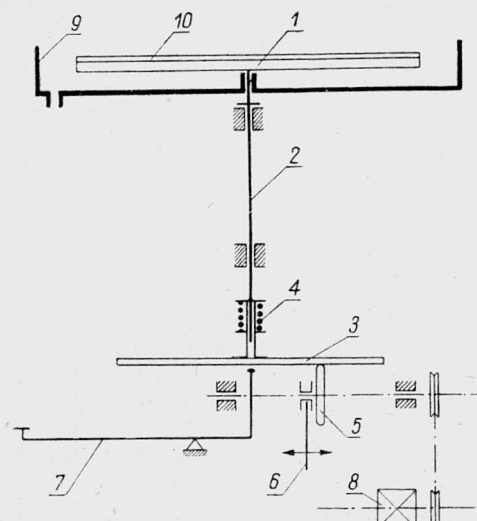
Obróbka ręczna powierzchni jest w zasadzie analogiczna do obróbki ręcznej lakierowanych powierzchni, polegającej na szlifowaniu i polerowaniu obrabianych powierzchni za pomocą odpowiednich proszków lub past do polerowania; nie wymaga więc zasadniczo żadnych specjalnych przyrządów. Obróbka ręczna staje się żmudna i męcząca przy doprowadzaniu do gładkości i przezroczystości powierzchni większych arkuszy plastyku lub większej ilości tych arkuszy. W takich przypadkach opłaca się stosować obróbkę częściowo zmechanizowaną.



Rys. 1. Fragment modelarni laboratorium elastooptyki — szlifierka i polerka do plastyków

Obróbka zmechanizowana — krótko, mechaniczna — jest wygodniejsza, szybsza, tańsza i dokładniejsza. Autor przeprowadzał obróbkę powierzchni płyt plastyku na specjalnie do tego celu zaprojektowanych obrabiarkach — szlifierce i polerce — przedstawionych na rys. 1. Schemat obrabiarki podany jest na rys. 2. Obrabiarki te podobne są w zasadzie do znanych szlifierek do szkła o poziomej tarczy, [7], [9]. Szlifierka i polerka posiadają identyczną budowę. Zasadniczym ich elementem jest

okrągła tarcza o średnicy 780 mm umieszczona poziomo. Obie obrabiarki posiadają indywidualny napęd elektryczny. Obroty tarcz regulowane są



Rys. 2. Schemat szlifierki do plastyków (typ JP-4)

1-tarcza robocza, 2-wał główny, 3-tarcza napędowa, 4-sprężyna dociskowa, 5-kółko napędowe, 6-popychacz, 7-dźwignia, 8-silnik elektryczny, 9-wanna, 10-okładzina tarczy

w sposób ciągły za pomocą przekładni ciernej w zakresie 60-200 obr/min. Tarcza szlifierki obłana jest warstwą wosku pszczelnego. Tarcza polerki wyklejona jest miękkim filcem w dobrym gatunku. Tarcze szlifierki i polerki są w trakcie pracy zwilżane wodą i posypywane odpowiednimi proszkami szlifierskimi oraz polerskimi. Materiał obrabiany, który przymocowany jest do płaskiej płyty z duralu, tak zwanej packi, zaopatrzonej w uchwyt do rąk, jest lekko przyciskany do obracającej się tarczy.

Opisane wyżej obrabiarki pracują zadowalająco.

Kontrolę stanu powierzchni w trakcie szlifowania wstępnego przeprowadza się wygodnie za pomocą ręcznych lup o powiększeniu trój- i pięciokrotnym. Kontrolę powierzchni po

zakończeniu szlifowania oraz w trakcie polerowania wygodnie jest przeprowadzić za pomocą lupy biokularowej.

4. Wykonanie modelu

Model wycinamy z przygotowanego uprzednio arkusza plastyku. Regułą jest, iż po wycięciu modelu z arkusza plastyku nie może on być już ani obrabiany cieplnie (chyba że stosuje się metodę M ö n c h a, [8]), ani jego powierzchnie nie mogą być poddane obróbce mechanicznej. Płyta plastyku przygotowana do wycięcia modelu musi więc spełniać minimum warunków, zależne od charakteru badania, omówionych wyżej. Stan płyty nie powinien w trakcie wykonywania modelu ulec pogorszeniu, to znaczy, powierzchnie czołowe nie mogą zostać uszkodzone i nie mogą powstać odkształcenia plastyczne od nacisku narzędzi obrabiających lub od nacisku przyrządów utwierdzających.

Wykonanie modelu powinno być bardzo staranne, gdyż operacja ta decyduje w sposób zasadniczy o dobroci wyników pomiaru, a w konsekwencji o dokładności wyników badania, [5], [9], [11], [15], [16].

Ze względów technicznych (łatwość badania, dokładność wyników, koszt i czas pomiarów, handlowe wymiary arkuszy plastyku itd.) modele wykonywane są na ogół w zmniejszeniu, rzadziej w powiększeniu.

Przy wykonywaniu modelu — zgodnie z prawami podobieństwa dla płaskiego rozkładu naprężeń — należy zachować ściśle geometryczne podobieństwo wymiarów w płaszczyźnie tarczy, natomiast grubość modelu może być brana dowolnie. Zwykle modele wykonuje się z płyt plastyku o grubościach 4-10 mm.

Podczas wykonywania modelu należy zwrócić szczególną uwagę na to, aby:

(a) odchylenia wymiarowe wykonywanego modelu zawierały się w granicach przyjętych za dopuszczalne;

(b) nie powstały odkształcenia plastyczne, powodujące z kolei powstanie naprężeń własnych; odkształcenia takie powstać mogą na krawędziach obrabianych od zbyt dużego nacisku narzędzi skrawających (zwłaszcza gdy zachodzi zbyt wielki wzrost temperatury) oraz w miejscach zamocowania modelu od nieprawidłowo pracujących uchwytów utwierdzających;

(c) obrabiane powierzchnie krawędziowe były prostopadłe do powierzchni czołowych modelu;

(d) krawędzie modelu nie uległy załamaniu;

(e) czas wykonania modelu był możliwie krótki i nie przekraczał kilku godzin (nie dotyczy to modeli wykonanych z plastyków, w których prędkość narastania efektu naskórkowego jest nieznaczna, jak np. w prawidłowo przechowanym plexiglasie).

Technikę wykonywania modelu należy tak opracować, aby zachowanie podanych wyżej warunków było możliwe i łatwe.

Po wykonaniu modelu jest rzeczą celową naniesienie na jego czołowej powierzchni odpowiednio dobranej sieci współrzędnych.

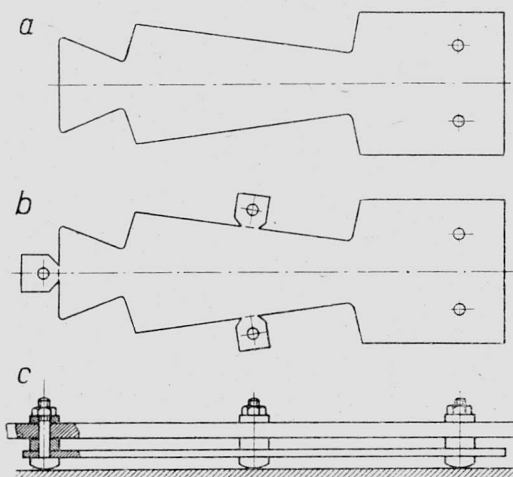
Najprostszym sposobem wykonania modelu jest wycięcie ręczne za pomocą piłeczki (tzw. laubzegi), a następnie dopiłowanie do żądanych wymiarów za pomocą pilnika. Przy tym sposobie kontur modelu musi być wytrasowany na plastyku lub narysowany na papierze przyklejonym następnie do plastyku. Sposób ten jest wprawdzie bardzo prosty, ale niewygodny i żmudny i wymaga znacznej zręczności i wprawy; z tych względów nadaje się zasadniczo tylko do doraźnego wykonywania małych i prostych modeli. Udoskonaleniem powyższego sposobu jest wykonanie ręczne za pomocą wzornika, [9]. Wzornik (szablon), wykonany z blachy ze stali miękkiej o grubości 1-3 mm, zostaje złączony za pomocą śrub z materiałem obrabianym; model wykonuje się jak wyżej za pomocą piłeczki i pilnika. Sposób ten jest znacznie wygodniejszy

od poprzedniego, gdyż ułatwia znakomicie zachowanie wymiarów modelu oraz eliminuje uciążliwe trasowanie na arkuszu plastyku. Tym niemniej wykonanie modelu trwa dość długo, a poza tym wymaga dostatecznej wprawy. Zastosowanie dwóch wzorników, obejmujących płytę plastyku z obu stron, znacznie ułatwia i przyspiesza wykonywanie modelu a nadto zapewnia zachowanie prostokątności powierzchni brzegowych modelu do jego powierzchni czołowych, umożliwiając wykonywanie modelu przez mniej wprawnego pracownika.

Często stosowana obróbka modelu na frezarce lub na frezarko-kopiarce, [1], [2], [3], [7], [9], jest wprawdzie bardzo dokładna, ale pochłania również dużo czasu.

Dobre wyniki daje opracowana i stosowana przez autora metoda wykonywania modelu za pomocą jednego wzornika na specjalnie do tego celu zaprojektowanej prostej obrabiarce, zwanej wycinarką.

Pierwsza zaprojektowana przez autora wycinarka posiada poziomy stół o gładkiej, szlifowanej powierzchni, o wymiarach 500×600 mm.



Rys. 3. Przykład wykonania wzornika oraz połączenie wzornika z arkuszem plastyku
a-kształt modelu, b-kształt wzornika wraz z naddatkami do umocowania plastyku, c-połączenie wzornika z arkuszem plastyku

W bliskości środka stołu znajduje się otwór o średnicy 8 mm, przez który przechodzi frez palcowy o pionowej osi. Frez ten zamocowany jest w tulei zaciskowej, która znajduje się we wrzecionie, umieszczonym tuż pod stołem. Frez jest tak zamocowany, iż jego część walcowa wystaje kilka milimetrów nad powierzchnią stołu. Arkusz plastyku, z którego ma zostać wycięty model, zostaje przymocowany do wykonanego uprzednio wzornika za pomocą kilku śrub tak, iż między nim a wzornikiem istnieje odległość kilku milimetrów. Wzornik wykonany jest z blachy ze stali miękkiej o grubości 1,5-3 mm. Par-

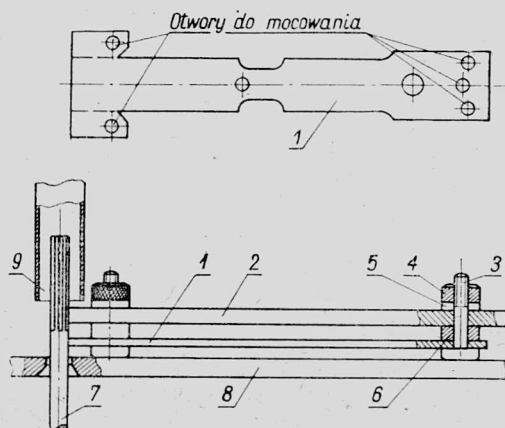
cie arkusza plastyku, w którym znajdują się otwory do śrub mocujących plastyk ze wzornikiem, zostają obcięte po wykonaniu modelu. Rysunek 3 przedstawia schemat połączenia arkusza plastyku ze wzornikiem modelu.

Frez napędzany jest silnikiem elektrycznym o mocy 200 W poprzez przekładnię pasową (pas klinowy). Po uruchomieniu silnika spoczywa-

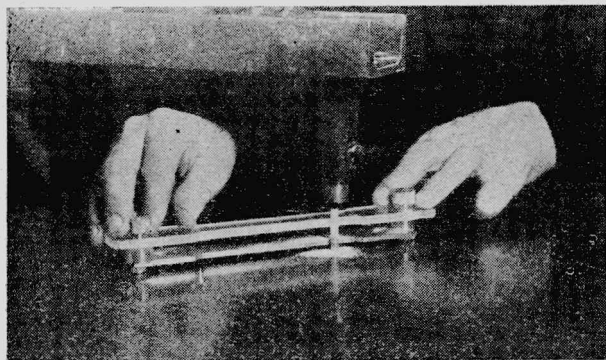
jący na stole wzornik z przymocowanym arkuszem plastyku dosuwa się do freza tak długo, aż krawędź wzornika zetknie się z walcową częścią freza, po czym wzornik zostaje przesuwany po stole w ten sposób, iż kontur wzornika przesuwają się w stosunku do freza, pozostając z nim w stałej styczności. W tym czasie zeby freza atakują arkusz plastiku wycinając z niego kształt identyczny z kształtem wzornika. Rysunek 4 przedstawia schemat pracy wycinarki. Rysunek 5 przedstawia wycinarkę w trakcie wykonywania modelu, zaś rys. 7 ogólny widok wycinarki.

Do wycinania modeli stosowane są zwykle frezy palcowe o średnicach 4-6 mm. Obroty freza regulowane są skokami w zakresie 700-5000 obr./min.

Wadami opisanej wycinarki są: zbyt mała powierzchnia stołu oraz brak wyciągu. Szczególnie niekorzystny jest brak wyciągu, gdyż odpływ wiórów nie jest dostatecznie swobodny, a wydzielające się przy obróbce żywic fenelowych gazy i pary działają ujemnie na drogi oddechowe oraz błony śluzowe pracującego przy wycinarce; jest to nieprzyjemne i szkodliwe dla zdrowia.



Rys. 4. Schemat pracy wycinarki
1-wzornik, 2-materiał modelu, 3-sworzeń łączący, 4-nakrętka, 5-podkładka nakrętki, 6-podkładka dystansowa, 7-frez palcowy, 8-stół wycinarki, 9-tuleja ochronna



Rys. 5. Wycinanie modelu na wycinarce

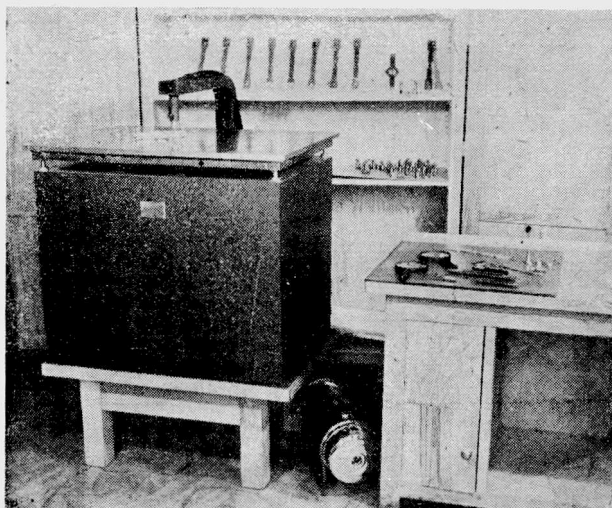
dla wiórów, par i gazów powstających przy wycinaniu modelu.

Przewidywana ciągła regulacja obrotów freza pozwoli na dobranie optymalnych warunków skrawania. Jest to bardzo istotne, gdyż na ilość ciepła wywiązującego się przy skrawaniu i podwyższającego temperaturę

Zaprojektowana przez autora wycinarka (rys. 6) jest pozbawiona tych wad; wymiary stołu wynoszą 600cm×800 cm, zaś ochrona i osłona freza stanowi jednocześnie końcówkę urządzenia wyciągowego

materiału obrabianego, a więc pośrednio na wartość efektu obróbczego, mają wpływ dwa główne czynniki: tarcie narzędzia o materiał oraz wartość pracy niezbędnej do pokonania spójności materiału. O ile wpływ tarcia zwiększa się ze wzrostem obrotów freza, to praca niezbędna do pokonania spójności materiału zmienia się w sposób bardziej zawiły, na ogół maleje ze wzrostem obrotów i to skokami, [17], bywa jednak i tak, że dla pewnego zakresu prędkości wzrasta.

Jest rzeczą celową podzielić wycinanie modelu na dwie operacje: na wycięcie z grubsza i na wycięcie wykończające. Wycięcie z grubsza



Rys. 6. Fragment modelarni laboratorium elastooptyki—wycinarka do modeli (typ JP-3A), konstrukcji autora, wraz z wycinanym modelem oraz przyrządami pomocniczymi

polega na wycięciu modelu z naddatkiem 2-3 milimetrów; można je wykonać ręcznie za pomocą piłeczki lub na wycinarce. Przy tym wycięciu nie jest rzeczą konieczną zachowanie dużej ostrożności.

Wycięcie wykończające należy wykonać bardzo starannie. Frez musi być ostry. Zasada jest, iż frez raz użyty do metalu jest z reguły za tępy do wycinania modeli elastooptycznych. Pożądane jest, aby przy przejściu od wycinania pierwszego do wycinania wykoń-

czającego zmienić frez na ostrzejszy. Na rys. 7 widoczny jest wzornik przygotowany do obróbki wykończającej z przymocowanym doń arkuszem plastyku.

Wykonywanie modeli na wycinarce — jak przekonuje dotychczasowe doświadczenie — jest tanie, dokładne i szybkie.

W trakcie wycinania należy bacznie uważać, aby obrabiany arkusz plastyku wraz z wzornikiem przesuwany był powoli, płynnie, bez szarpnięć lub uderzeń. Dbać należy o swobodny odpływ wiórów. Nadmierne podwyższenie temperatury w miejscach obrabianych ułatwia powstawanie odkształceń plastycznych na krawędzi materiału, gdy nacisk freza jest zbyt duży. Odkształcenia plastyczne na obrabianych krawędziach

powodują powstanie naprężeń krawędziowych, zwanych naprężeniami obróbczymi. Naprężenia te utrudniają, a często uniemożliwiają, przeprowadzenie dokładnych pomiarów.

Kierunek przesuwania wycinanego modelu należy tak zestroić z kierunkiem obrotu freza, aby naroża zewnętrzne modelu nie były narażone na wyłupanie na skutek uderzeń zębów freza.

Po wycięciu modelu na wycinarce okazuje się czasem, iż niektóre partie krawędzi są nieco chropowate; nierówności te wyrównuje się delikatnie drobnym pilnikiem, nie odłączając wzornika od modelu. Wyrównanie takie zmniejsza często ewentualne drobne naprężenia obróbcze. Przy tej operacji należy uważać, aby nie załamać krawędzi modelu, gdyż załamanie takie powoduje powstanie grubej linii konturowej w odpowiednim miejscu na obrazie modelu.

Ze względu na niebezpieczeństwo załamania krawędzi model po wycięciu nie może już być polerowany w partiach przykrawędziowych; należy więc model wykonywać bardzo ostrożnie, aby nie porysować jego powierzchni.

Po wykonaniu modelu jest rzeczą celową naniesienie na nim siatki współrzędnych, gdyż ułatwia ona znakomicie odczytywanie zdjęć.

Przed przekazaniem modelu do badania należy uprzednio starannie sprawdzić jakość jego wykonania.

5. Ustawienie i regulacja aparatury. Zamocowanie modelu w urządzeniu obciążającym

Zasadą jest, aby właściwe ustawienie aparatury oraz jej wstępna regulacja, jak również zmontowanie i wypróbowanie urządzenia obciążającego, dokonane zostało przed wykonaniem modelu, tak aby model bezpośrednio po wykonaniu i sprawdzeniu mógł zostać zamocowany w urządzeniu obciążającym i być zaraz badany. Ustawienie i regulacja aparatury obejmuje dostosowanie polaryskopu do rodzaju badania, umocowanie odpowiednich przyrządów pomiarowych i pomocniczych, dobranie odpowiedniego powiększenia obrazu oraz wyregulowanie całości. Urządzenie obciążające należy po zmontowaniu sprawdzić pod względem poprawności i dokładności działania. Wyżej wymienione czynności należy zakończyć przed rozpoczęciem wykonywania modelu.

Przyrządy i uchwyty obciążające powinny być zawczasu zamontowane i ustawione; najwygodniej jest dokonać tego za pomocą wzornika, według którego wykonywany jest model. Zasadą jest, aby model bezpośrednio po wykonaniu i sprawdzeniu został umieszczony w przyrządzie i badany, chyba że jest wykonany z materiału nie wykazującego efektu naskórkowego.

Po wykonaniu modelu zostaje on umocowany w urządzeniu obciążającym i wstępnie obciążony; obciążenie wstępne powinno być stosunkowo nieznaczne. Obciążenie wstępne modelu ma umożliwić ostateczne sprawdzenie dokładności ustawienia i pracy polaryskopu, dokładności ustawienia i działania urządzenia obciążającego oraz dokładności ustawienia i obciążenia modelu.

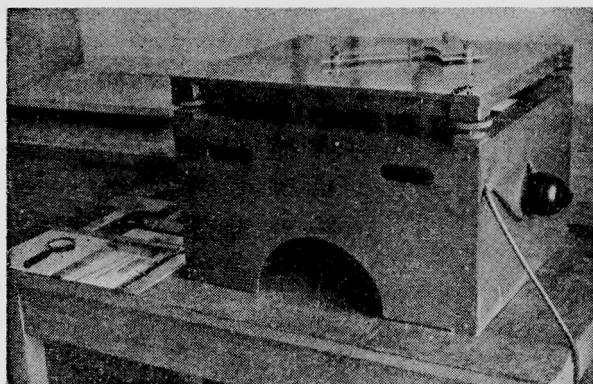
Przy umocowaniu modelu należy szczególnie uważać, by jego powierzchnia była prostopadła do osi optycznej polaryskopu oraz aby wypadkowe sił obciążających leżały w jego środkowej płaszczyźnie. Przyrząd należy wyregulować tak, aby na tle jednorodnego, pozbawionego plam pola widzenia model rysował się czysto i ostro; linie konturów powinny być cienkie i ciągłe, jednostajnie czarne. Często występującym błędem ustawienia na ostrość jest podwojenie czarnej linii konturowej jasną linią leżącą w jej bezpośrednim sąsiedztwie.

Przed obciążeniem modelu należy jeszcze sprawdzić, czy nie występują gdziekolwiek niepożądane siły tarcia.

Po dodatnim wyniku sprawdzenia, przy wstępnym obciążeniu modelu, całość urządzenia uważać można za gotową do przeprowadzenia pomiaru.

Kontrolując działanie urządzenia obciążającego należy sprawdzić, czy przy wzroście wartości sił i momentów obciążających siły obciążające nie zmieniają wyraźnie swego kierunku działania w stosunku do modelu i czy nie zmieniają przez to w sposób nieprzewidziany swej wartości; na-

stać się to może, na przykład, na skutek znaczniejszych odkształceń modelu lub na skutek zbyt dużych luzów w połączeniach. Każdy przyrząd i każde urządzenie obciążające powinno być zbadane z tego punktu widzenia.

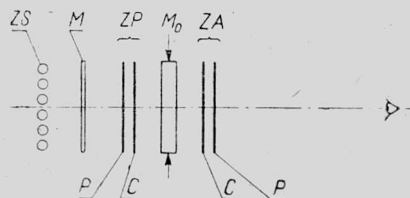


Rys. 7. Wycinarka typ JP-3

5.1. Aparatura pomiarowa. Podstawowym przyrządem pomiarowym jest polaryskop elastooptyczny. Polaryskopy elastooptyczne budowane są w wersjach,

różniących się tak układem, jak i rozwiązaniem konstrukcyjnym, [1], [2], [3], [6], [7], [10], [11]. Rysunek 8 podaje schemat jednego z najprostszych, zaś rys. 9 — jednego z bardziej złożonych polarysko-

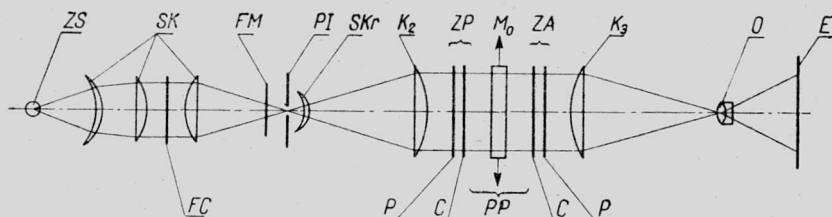
pów elastooptycznych. Polaryskopy o prostszych układach budowane są zwykle możliwie prosto i tanio. Polaryskopy o układach bardziej złożonych konstruowane są na ogół bardzo starannie, posiadają dokładną regulację i są często wyposażone w urządzenia zdalnie sterujące. Jednym z często spotykanych układów, pośrednich pomiędzy wyżej podanymi, jest układ o schemacie podanym na rys. 10. Na takim układzie oparty jest polaryskop o średnicy pola widzenia 150 mm., zbudowany przez autora w jednym z instytutów. Przy użyciu źródła światła o skoncentrowanej powierzchni świecącej układ ten pracuje zupełnie zadowalająco. Ogólny widok omawianego polaryskopu przedstawiony jest na rys. 11. W polaryskopie tym jako filtr cieplny służy płytka szkła specjalnego (z tlenkiem baru) pochłaniającego promieniowanie podczerwone (produkcji Jeleniogórskiej Wytwórni Optycznej; jest ona pocięta w wąskie paski. Taki filtr cieplny jest często wygodniejszy i bezpieczniejszy w użyciu niż filtr ciekły.



Rys. 8. Schemat jednego z najprostszych typów polaryskopu elastooptycznego

ZS-źródło światła jednobarwnego oraz białego (lampy sodowe oraz lampy rtęciowe lub wolframowe), M-szkło młeczne lub matowe, ZP-zespół polaryzatora, ZA-zespół analizatora, P-polaroid, C-ćwierćfalówka, Mo-model, O-obszerny lub kamera fotograficzna

Schemat podany na rys. 10 można uprościć, umieszczając zamiast soczewki kolimacyjnej K_2 i obiektywu O jeden obiektyw odpowiednio dużej średnicy. Na takiej zasadzie oparty jest zbudowany przez autora ma-

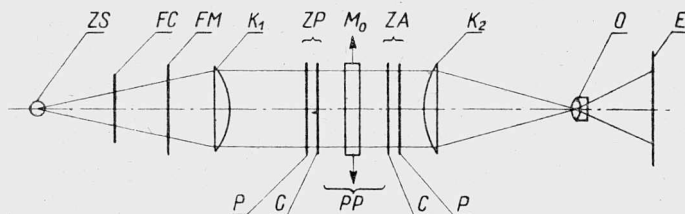


Rys. 9. Schemat polaryskopu elastooptycznego do badań dokładnych i bardzo dokładnych, opracowywanego przez autora; układ optyczny polaryskopu opracowany przez J. Matysiaka; średnica pola widzenia 250 mm

ZS-źródło światła — lampka punktowa, SK-soczewki kondensatora, FC-filtr cieplny, FM-filtr monochromatyczny, PI-przesłona irysowa, SKr-soczewka korygująca, K₂-soczewka oświetlająca, ZP-zespół polaryzatora, ZA-zespół analizatora, P-polaroid, C-ćwierćfalówka, Mo-model badany, K₃-soczewka kolimacyjna, O-obiektyw, E-ekran lub matówka aparatu fotograficznego, PP-przestrzeń pomiarowa

ły podręczny polaryskop o średnicy pola widzenia 40 mm, przedstawiony na rys. 12. Polaryskopy oparte na takich układach są proste i łatwe w obsłudze; jako obiektyw nadają się obiektywy od epidiaskopów, które można otrzymać w kraju w rozmiarach średnicy do 110 mm.

Polaryskopy oparte na schemacie przedstawionym na rys. 8, czyli polaryskopy o powierzchniowym źródle światła, spotyka się dość często. Na tym schemacie oparty jest polaryskop elastooptyczny do prac technicz-

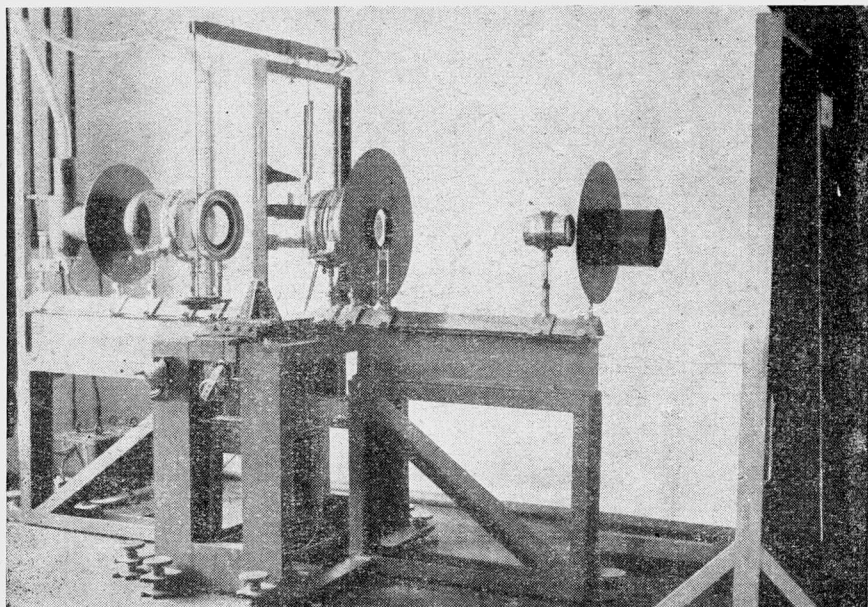


Rys. 10. Często stosowany schemat polaryskopu elastooptycznego

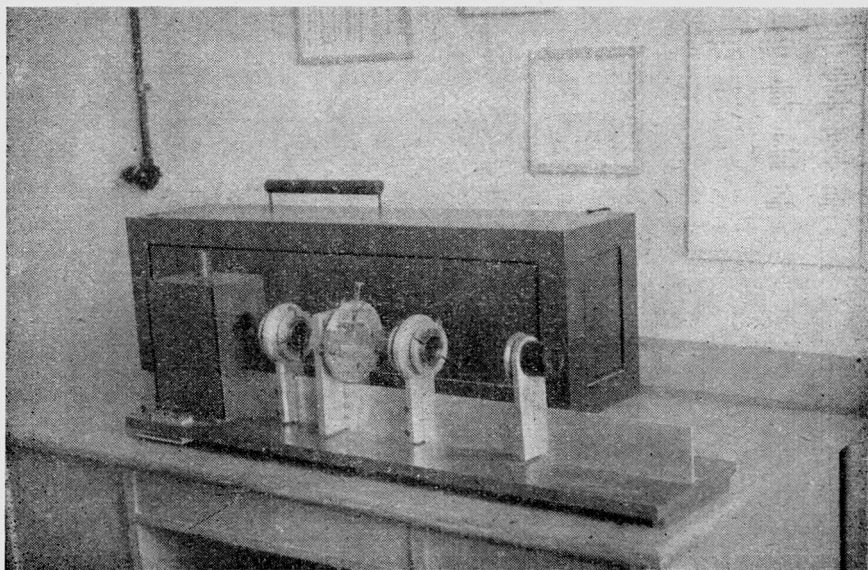
ZS-lampa o skoncentrowanej powierzchni świecącej (pożądana punktowa), FC-filtr cieplny, FM-filtr monochromatyczny, K_1 -kondensator, ZP-zespół polaryzatora, ZA-zespół analizatora, P-polaroid, C-ćwierćfalówka, Mo-model, K_2 -soczewka kolimacyjna, O-obiektyw, E-ekran lub klisza fotograficzna, PP-przestrzeń pomiarowa

nych, zaprojektowany przez autora i wykonany w kilku krajowych laboratoriach elastooptyki; szkic tego przyrządu przedstawia rys. 13 oraz rys. 14 — widok ogólny.

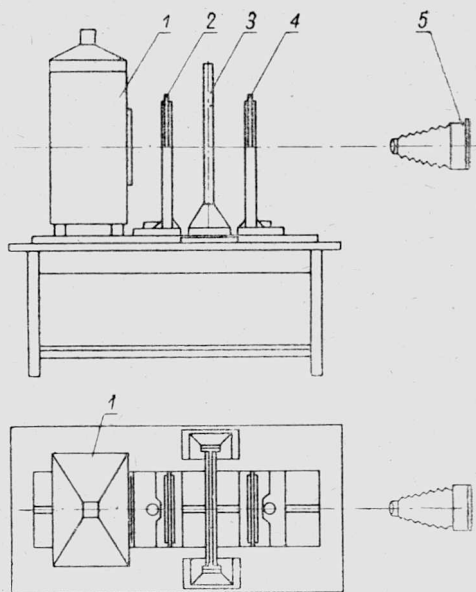
Pewną modyfikację powyższego polaryskopu przedstawia polaryskop o schemacie podanym na rys. 15, opracowany przez autora. Układ ten pozbawiony jest organicznej wady schematu podanego na rys. 8, pole-



Rys. 11. Doświadczalny polaryskop elastooptyczny



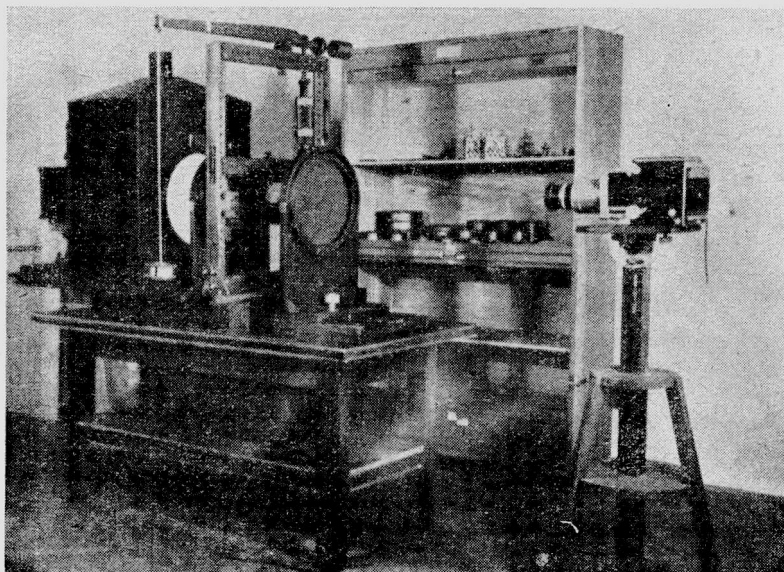
Rys. 12. Mały podręczny polaryskop elastooptyczny o średnicy pola widzenia 40 mm



Rys. 13. Szkic technicznego polaryskopu elastooptycznego; średnica pola widzenia 300 mm

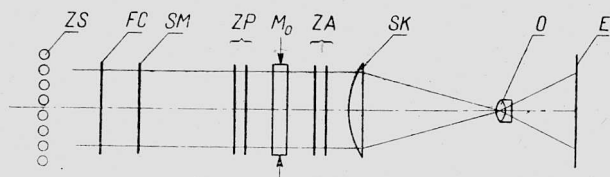
1-latarnia z lampami sodowymi i rtęciowymi,
2-zespół polaryzatora, 3-rama obciążająca, 4-
zespół analizatora, 5-kamera aparatu fotograficz-
nego

gającej na tym, iż z oddaleniem się układu (aparatu fotograficznego) od osi optycznej maleje ostrość zdjęcia; poza tym posiada on wszystkie zalety polaryskopu o powierzchniowym źródle światła.



Rys. 14. Widok ogólny polaryskopu elastooptycznego typu JP-1

Polaryskopy konstruowane według schematu podanego na rys. 9 należą do najdokładniejszych przyrządów tego typu. Według tego schematu autor opracowuje uniwersalny polaryskop elastooptyczny do badań dokładnych i bardzo dokładnych.



Rys. 15. Schemat półuniwersalnego polaryskopu elastooptycznego, typ JP-1c, średnica pola widzenia 300 mm

ZS-źródło światła (powierzchniowe), lampy sodowe oraz wolframowe lub rtęciowe, SM-szkło mleczne lub matowe, ZP-zespół polaryzatora, ZA-zespół analizatora, Mo-model badany zamocowany w zespole obciążającym, SK-soczewka kolimacyjna ($d/f \approx 7$), O-obiekt, E-ekran lub matówka aparatu fotograficznego

Jest rzeczą bardzo pożądaną, a często konieczną — zależnie od typu polaryskopu — aby wyposażony on był w urządzenie pozwalające na przesuwanie modelu w sposób ciągły w płaszczyźnie prostopadłej do osi optycznej układu. Umożliwia to dogodną obserwację wszystkich

partii modelu, gdy model jest większy niż pole widzenia polaryskopu.

Niezbędnym wyposażeniem polaryskopu elastooptycznego jest kamera fotograficzna z matówką, pożądanym jest również ekran projekcyjny.

Pomieszczenie, w którym znajduje się polaryskop, powinno posiadać zaciemnienie.

6. Wykonanie pomiaru

Pomiar przeprowadzamy według zatwierdzonego uprzednio planu możliwie szybko, tak jednak, aby nie odbiło się to niekorzystnie na jego dokładności.

Dokładność pracy stawiamy przy pomiarze na pierwszym planie. Należy zwrócić baczną uwagę na zjawisko pełzania materiału modelu pod obciążeniem i przedsięwziąć środki pozwalające na wyeliminowanie wpływu pełzania na wyniki pomiaru. Pożądane jest, aby była znana temperatura i wilgotność powietrza w pomieszczeniu, w którym odbywa się pomiar. Należy się starać, aby pomiar zakończyć w tym samym dniu, w którym rozpoczęto wykonywanie modelu, chyba że model wykonany jest z materiału nie zmieniającego praktycznie swych własności w czasie, jak szkło lub plexiglas. Pożądane jest dorywcze sprawdzanie w trakcie pomiaru poprawności pracy głównych elementów przyrządu. Przy wykonywaniu zdjęć celowa jest częsta kontrola bezpośrednia (wizualna) obrazu.

Po wykonaniu pomiarów model należy odciążyć, ale nie całkowicie; nieznaczna część obciążenia powinna pozostać, a to w tym celu, aby w razie potrzeby można było odtworzyć łatwo poprzedni stan naprężenia przez proste zwiększenie obciążenia, bez potrzeby powtórnej regulacji.

Wykonane zdjęcia i rysunki kontrolujemy bezpośrednio po pomiarze, przed rozmontowaniem urządzenia. Dopiero po sprawdzeniu poprawności wykonanych rysunków i poprawności wywołanych zdjęć, jeśli zdjęcia i rysunki nie budzą wątpliwości, można zdjąć całkowicie obciążenie. Urządzenia nie należy rozmontowywać aż do opracowania wyników, gdyż zawsze trzeba liczyć się z ewentualną koniecznością wykonania dodatkowych pomiarów dla wyjaśnienia wątpliwości, powstających przy opracowywaniu wyników.

Wobec tego, że pomiary przeprowadza się przeważnie w pomieszczeniu całkowicie lub częściowo zaciemnionym, ze względu na bezpieczeństwo pracy należy dbać o możliwie największy porządek oraz o możliwie największą wygodę i łatwość obsługi przyrządów.

Jeżeli źródłem światła jest lampa wydzielająca dużą ilość ciepła lub lampa rtęciowa o bańce kwarcowej, powodującą tworzenie się ozonu w jej bezpośrednim sąsiedztwie, to pomieszczenie powinno być bezwzględnie wietrzone, tak ze względu na higienę pracy, jak i na konieczność zachowania w trakcie pomiaru stałej temperatury i wilgotności

powietrza, co jest szczególnie ważne przy pomiarach trwających po kilka godzin.

Pożądane jest, aby przedziały czasu pomiędzy chwilą obciążenia modelu a momentami wykonywania zdjęć były możliwie jednakowe oraz dokładnie notowane.

Przy wykonywaniu pomiaru należy — jak już wyżej wspomniano — zwrócić baczną uwagę na zjawisko optycznego pełzania materiału modelu ²⁾, [1], [2], [3], [4], [5], [8], [12], [15].

Skrupulatne notowanie czasu wykonania zdjęcia pozwala na wyeliminowanie wpływu pełzania optycznego za pomocą wykresu pełzania optycznego, zdjętego dla próbki wyciętej z tego samego materiału i badanej w takich samych warunkach, [4]. Sposób ten jest jednak kłopotliwy i niedostatecznie chroni przed możliwymi pomyłkami, poza tym dokładne odtworzenie takich samych warunków sprawia często znaczne trudności. Autor określa wpływ pełzania optycznego za pomocą przyrządu nazwanego kompensatorem optycznym pełzania. Jest to np. pręt pryzmatyczny wycięty z tego samego arkusza plastiku, co model badany, i obciążony siłą rozciągającą. Kompensator optyczny pełzania, zwany krótko kompensatorem pełzania, zostaje obciążony jednocześnie z modelem w ten sposób, iż wartość siły obciążającej kompensator jest w każdej chwili proporcjonalna do wartości obciążenia modelu. W ten sposób zrealizowana jest identyczność warunków obciążenia modelu i kompensatora pełzania.

Powyższe realizuje się praktycznie w ten sposób, iż kompensator pełzania stanowi część urządzenia obciążającego lub też część modelu. Najprostszym kompensatorem pełzania jest pręt pryzmatyczny; użyty do tego celu może być jednak każdy model, w którym rozkład i wartość naprężeń można określić doświadczalnie bez trudności, np. okrągła tarcza ściskana dwiema osiowymi siłami. Rysunek 16 przedstawia rozmaite możliwości rozwiązania kompensatorów pełzania. Posługując się kompensatorem pełzania, przy wykonywaniu każdego zdjęcia izochrom kolejnej partii modelu lub całego modelu pod określonym obciążeniem, wykonuje się jednocześnie zdjęcie kompensatora pełzania.

Na podstawie tego zdjęcia, znając wartość siły obciążającej, a stąd wartość naprężenia w pewnym punkcie modelu, oraz rząd izochromy przechodzącej przez ten punkt, określa się każdorazowo wartość stałej

²⁾ Zjawisko pełzania optycznego polega na tym, że przy stałej wartości obciążenia, a więc i naprężenia, rząd izochromy przechodzącej przez dowolny punkt modelu, nie będący punktem osobiwym, stale wzrasta. Rząd izochromy przechodzącej przez dany punkt jest więc nie tylko funkcją stałej modelowej oraz wartości różnicy naprężeń głównych, ale i czasu działania obciążenia oraz przebiegu wartości obciążenia w czasie.

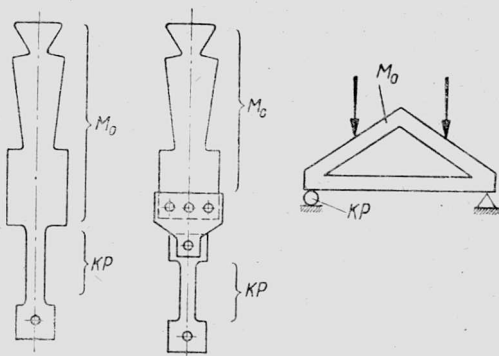
modelowej, odpowiadającej danej chwili wykonania zdjęć izochrom w modelu. Wartość stałej modelowej — jak wiadomo — maleje z upływem czasu działania obciążenia.

Oczywiście, powyżej opisana metoda wykonywania pomiaru przy użyciu jednego kompensatora optycznego pełzania daje poprawne wyniki, gdy pełzanie optyczne materiału jest z dostateczną dokładnością wprost proporcjonalne do wartości różnicy naprężeń głównych. Szczęśliwym trafem żywice fenolowe stosowane na modele elastooptyczne posiadają zasadniczo tę własność, [3], [5]. Natomiast stosunkowo łatwo dostępny celuloid pełźnie optycznie pod obciążeniem w sposób znacznie bardziej zawiły, dlatego pomiary na modelach celuloidowych obarczone są zwykle znacznym błędem; błąd ten można zmniejszyć stosując na modele celuloid kilkuletni, który pełźnie w znacznie mniejszym stopniu.

Opisana metoda pomiaru przy użyciu kompensatora pełzania jest metodą prostą i dokładną.

Istotnym zagadnieniem, wpływającym w zasadniczy sposób na dokładność wyników pomiaru, jest dobór odpowiedniej wartości obciążeń. Dobór ten nie zawsze jest łatwy. Uwzględnić przy nim należy: własności wytrzymałościowe materiału modelu, jak moduł sprężystości, umowna granica sprężystości, pełzanie mechaniczne i optyczne, następnie stałą materiałową, orientacyjną wartość naprężeń własnych modelu, rodzaj i sposób przyłożenia obciążenia oraz kształt geometryczny modelu.

Każdy z wymienionych czynników przemawia za lub przeciw zwiększaniu wartości obciążeń. Gdy wartość obciążenia jest stosunkowo duża, to otrzymujemy izochromy wyższych rzędów, co ułatwia odczytywanie zapisów oraz zwiększa ich dokładność, zwłaszcza iż jednocześnie ze wzrostem naprężeń wywołanych obciążeniem maleje procentowo wartość naprężeń własnych, które zniekształcają odczyty. Z powyższych względów jest rzeczą celową stosowanie możliwie wysokich wartości obciążeń modeli. Z drugiej jednak strony zwiększenie wartości obciążenia powoduje wzrost odkształceń modelu, a więc i zmianę jego kształtu geometrycznego, odwrotnie proporcjonalną do modułu sprężystości materiału. Niedogodność tę można w pewnym sensie skompensować wykonując model tak, aby dopiero po jego obciążeniu i odkształceniu posiadał przyjęty kształt geometryczny.



Rys. 16. Przykład rozwiązań kompensatora optycznego pełzania

MO-badany model, KP-kompensator pełzania

W przypadku działania na model skupionych sił obciążających najbardziej nieprzyjemnym efektem wysokiej wartości obciążeń są — poza większym pełzaniem — powstające odkształcenia plastyczne materiału w bezpośrednim sąsiedztwie działania skupionych sił. Odkształcenia te wpływają zakłócająco na przebieg izochrom na ogół jedynie w najbliższym sąsiedztwie obszarów odkształconych plastycznie, zgodnie z zasadą *Saint-Venanta*. W niektórych jednak przypadkach zakłócenia te mogą być znaczniejsze i sięgać dalej od punktów przyłożenia sił, zależnie od kształtu geometrycznego modelu. Poza tym w wyniku odkształceń plastycznych, spowodowanych działaniem siły skupionej, powierzchnie czołowe odkształconej plastycznie partii modelu zakrzywiają się odchylając bieg promieni świetlnych, w wyniku czego dana partia modelu — przy prześwietlaniu go równoległą wiązką światłą — pozostaje ciemna na obrazie modelu. Jest to tak zwany efekt soczewki, który uniemożliwia odczytanie przebiegu izochrom w partii silnie odkształconej. Zagadnienie to omówił szerzej *Boksztajn*, [6].

Jeśli więc istotne jest określenie przebiegu izochrom oraz izoklin w okolicach punktów przyłożenia sił skupionych, to należy badania tych okolic przeprowadzić przed badaniem całego modelu przy możliwie niskich wartościach sił obciążających, a dopiero po wykonaniu tego zabiegu model obciążyć w sposób przepisany, godząc się z nieuniknionym powstaniem odkształceń plastycznych. Efekt soczewki można wyeliminować w znacznym stopniu dokonując zdjęć w świetle rozproszonym.

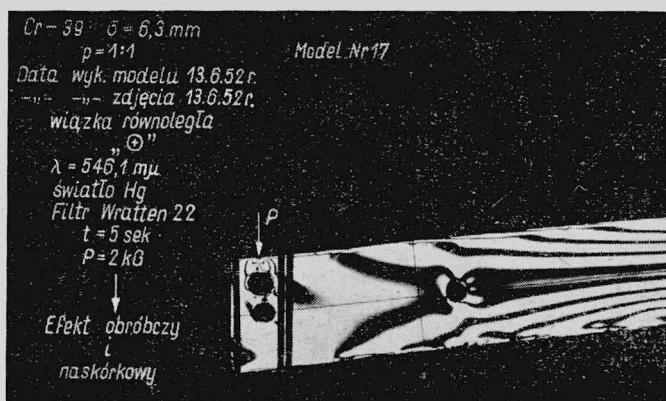
Dla zmniejszenia odkształceń plastycznych modeli wykonanych z żywicy fenolowych, które są najczęściej stosowane na modele elastooptyczne, wygrzewamy uprzednio arkusz plastyku, z którego ma zostać wykonany model, w określonej temperaturze w ciągu dobranego okresu czasu, podwyższając w ten sposób jego moduł sprężystości oraz umowną granicę sprężystości (dopuszczalną wartość naprężenia), [2], [8]. Wygrzewanie takie zwiemy utwardzaniem plastyku.

Biorąc pod uwagę podane wyżej względy, decydujące o wartości obciążenia modelu, należy wybrać rozsądny kompromis pomiędzy względami przemawiającymi za i przeciw zwiększaniu wartości obciążenia, uwzględniając warunki pomiaru, własności materiału modelu oraz żądaną dokładność pomiaru.

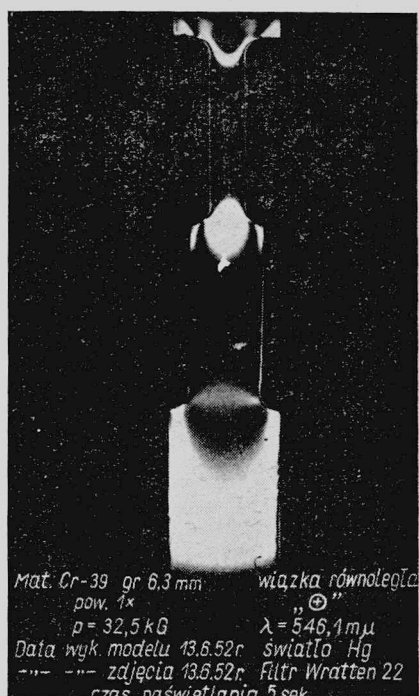
7. Opracowanie wyników pomiaru

Wyniki pomiaru czy to w formie rysunków odręcznych, wykonanych na arkuszu rozpiętym na ekranie, czy to pod postacią zdjęć fotograficznych, należy opracować tak, aby mogły służyć za podstawę do bezpośredniej analizy rezultatów lub do dalszego analitycznego opracowania.

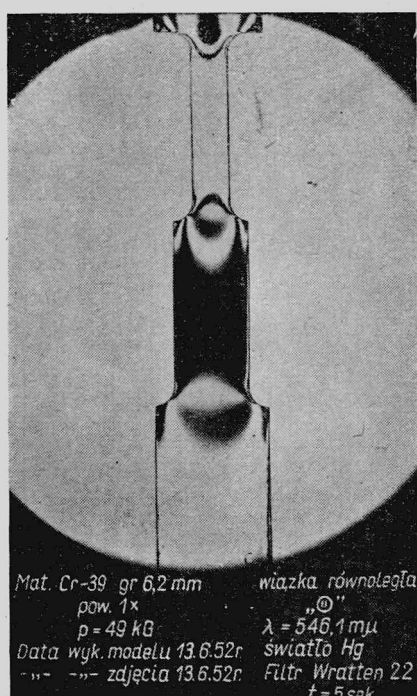
Opracowanie wyników pomiaru obejmuje opracowanie samych zdjęć oraz wykonanie rysunków zbiorczych izoklin i izochrom. Opracowanie



Rys. 17. Przykład opisanania zdjęcia pręta zginanego



Rys. 18. Przykład opisanania zdjęcia pręta rozciąganego



Rys. 19. Przykład opisanania zdjęcia pręta rozciąganego

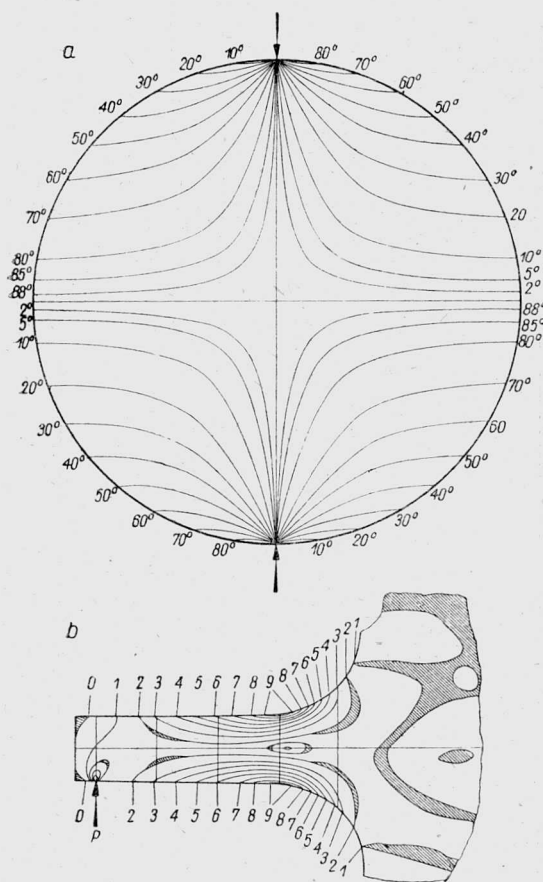
zdjęcia polega na jego poprawnym skopiowaniu oraz na dołączeniu wszystkich ważnych danych technicznych, jak materiał modelu, jego

grubość, wartość siły obciążającej, data wykonania modelu, data wykonania zdjęcia, czas naświetlania, powiększenie zdjęcia, rodzaj wiązki, jaką prześwietlany jest model, rodzaj polaryzacji światła (najwygodniej symbolicznie), rodzaj źródła światła, filtr barwny, długość fali światła. Często celowe jest zarejestrowanie powyższych danych bezpośrednio na zdjęciu

(na negatywie). Rysunki 17-19 przedstawiają takie — jak mówimy — opisane zdjęcia zginanego i rozciąganego pręta. Rysunki i zdjęcia izoklin oraz izochrom opracowuje się korygując ewentualne błędy oraz uzupełniając ewentualne luki w oparciu o zależności dostarczane przez teorię sprężystości. Po opracowaniu rysunków i zdjęć sporządza się — w odpowiedniej skali — rysunek rodzaju izoklin z naniesionymi parametrami oraz rysunek (lub rysunki) izochrom z oznaczonymi rzędami izochrom oraz z oznaczonymi punktami osobliwymi.

Rysunki izoklin i izochrom należy wykonywać możliwie dokładnie i starannie, w skali nie za małej dobranej do oczekiwanej dokładności pomiaru; od dokładności ich wykonania zależy w zasadniczym stopniu dokładność ostatecznych wyników badań.

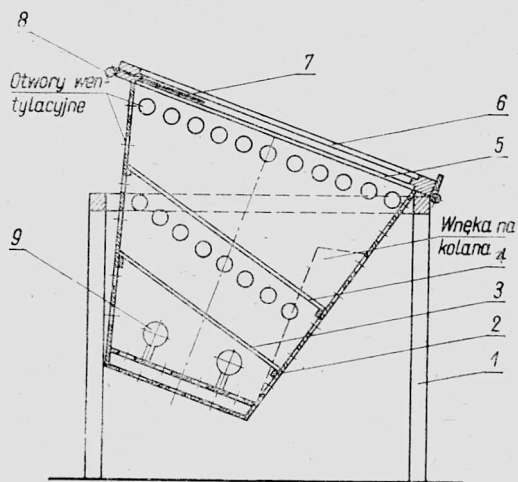
Przykłady opracowanych rysunków zbiorczych izoklin i izochrom podane są na rys 20a i 20b.



Rys. 20. Przykład rysunku zbiorczego
a-izokliny (tarcza ściskana), b-izochromy (pręt zgi-
nany siłą skupioną)

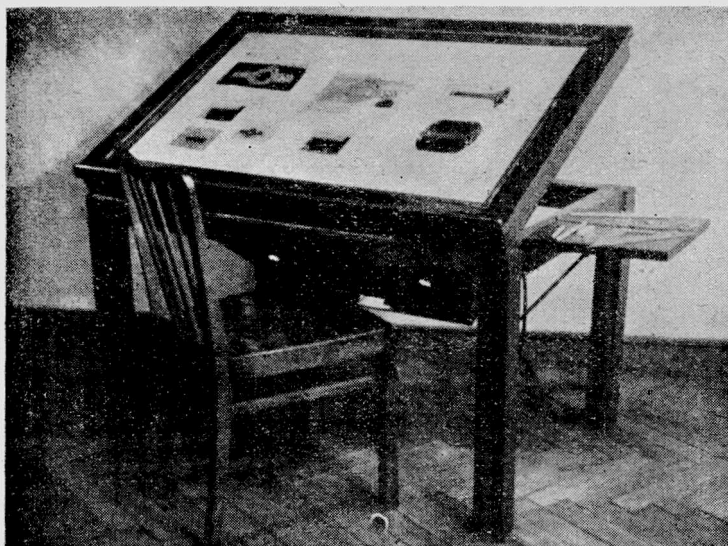
W pracach bardziej dokładnych celowe jest stosowanie wyłącznie rejestracji fotograficznej. Izokliny oraz izochromy zarejestrowane na zdjęciach autor przenosi na rysunek zbiorczy za pomocą specjalnie zbudowanego do tego celu przyrządu, zwanego kopiarką. Schemat kopiarki podany jest na rys. 21. Rysunek 22 przedstawia zdjęcie kopiarki w trak-

cie pracy. Kalkę kreślarską lub papier, na którym wykonuje się rysunek zbiorczy, przypina się do płyty kopiarki za pomocą plastra; pod kalką umieszcza się kolejno zdjęcia, z których kopiuje się linie charakterystyczne. Ze względu na wygodę pracy i na dokładność kreślenia kopiuje się często bezpośrednio z negatywów otrzymanych przy pomiarach. Ponieważ izokliny i izochromy zarejestrowane na negatywach mają postać białych linii, wobec tego rysujący widzi stale wyraźnie koniec ołówka, którym kreśli; ponieważ dalej izokliny i izochromy posiadają często kilkumilimetrową szerokość, więc to wszystko ułatwia poprawne wykreślenie, zmniejsza błędy i nie zmusza do wytyżania wzroku.



Rys. 21. Schemat kopiarki

1-podstawa, 2-skrzynia, 3-szyba izolacyjna dolna, 4-szyba izolacyjna górna, 5-szkło mleczone, 6-płyta, 7-zasłona przesuwna, 8-walek roletowy zasłony, 9-lampy



Rys. 22. Zdjęcie kopiarki w czasie pracy, typ JP-2

Kopiarka posiada trzy stopnie jasności zależnie od ilości włączonych lamp. Najmniej męcząca dla wzroku jest praca na kopiarce przy pełnym

oświetleniu pomieszczenia lub nawet przy dodatkowym oświetleniu płyty kopiarki od góry, albo też w zaciemnionym pomieszczeniu pod warunkiem, iż nie zakryta przez kopiowane zdjęcie powierzchnia płyty kopiarki zostanie starannie przysłonięta czarnym papierem.

Do rozróżnienia drobnych szczegółów na zdjęciach niezbędne są lupy. Bez lupy często w ogóle nie można określić przebiegu oraz rzędu izochrom w obszarach koncentracji naprężeń. Lupy trzy- i pięciokrotne oraz dziesięciokrotna lupka z podziałką produkcji Polskich Zakładów Optycznych oddają dobre usługi. Przy odczytywaniu trudniejszych zdjęć, o znacznym zagęszczeniu izochrom, dobre usługi oddaje również komparator A b b e g o, produkcji Z e i s s a, lub mikroskop warsztatowy z ekranem.

8. Analiza wyników pomiaru

Analiza wyników pomiaru ma na celu przede wszystkim ustalenie, czy opracowany materiał doświadczalny jest wystarczający do uzyskania pożądaných wyników tak pod względem ilości materiału, jak i jego dokładności.

Jednocześnie w trakcie przeprowadzania analizy wyników pomiaru przeprowadza się ich ostateczne sprawdzenie dla wyeliminowania nie zauważonych poprzednio błędów.

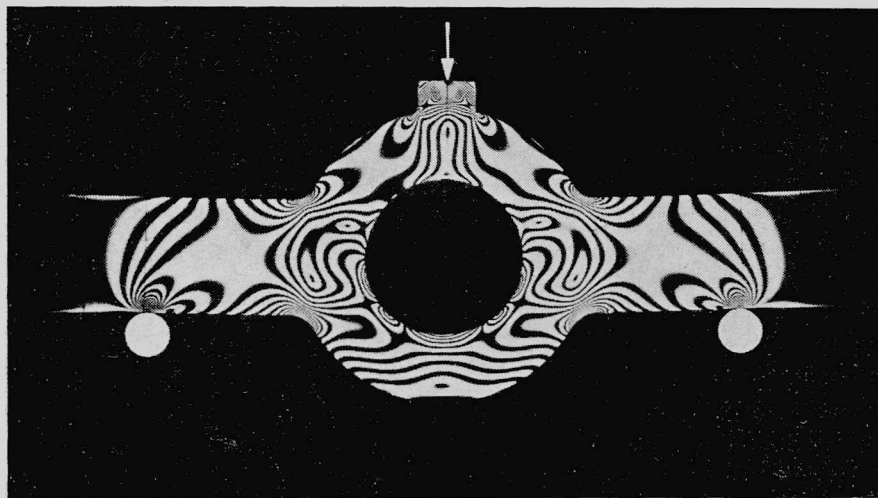
9. Opracowanie wyników badania

W większości zwykłych badań elastooptycznych jest rzeczą wystarczającą wykreślenie trajektorii naprężeń głównych na podstawie rodziny izoklin oraz wyznaczenie rozkładu i wartości naprężeń na nie obciążonych krawędziach. W razie potrzeby wyznaczamy — jedną z metod analitycznych lub analityczno-graficznych — wartości naprężeń w określonych przekrojach lub w określonych punktach badanego modelu. Często sporządza się wykres współczynnika kształtu przyjmując odpowiednie założenia co do sposobu obliczania naprężeń nominalnych. Celowe jest ujęcie wyników badania w zwięzłe wnioski.

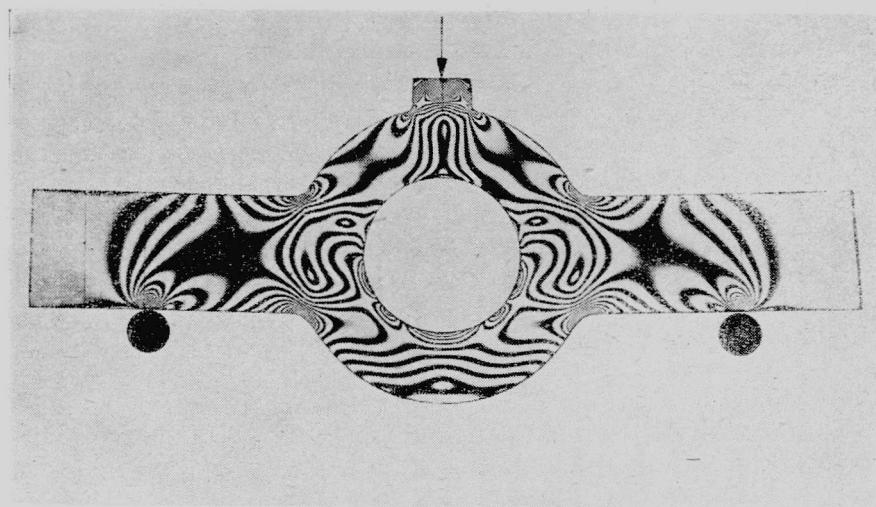
10. Opracowanie sprawozdania

Sprawozdanie z badania powinno zawierać wszystkie istotne elementy badania, dane wyjściowe, obliczenia, krótki opis badania, wszystkie tabele przeliczeniowe, wykresy, najważniejsze zdjęcia elastooptyczne itp. Powinno ono stanowić zwięzłą i zamkniętą logiczną całość.

Wyżej podane uwagi dotyczące wykonania pomiaru, opracowania wyników pomiaru oraz opracowania wyników badania ilustrowane są rysunkiem zbiorczym 23-25.



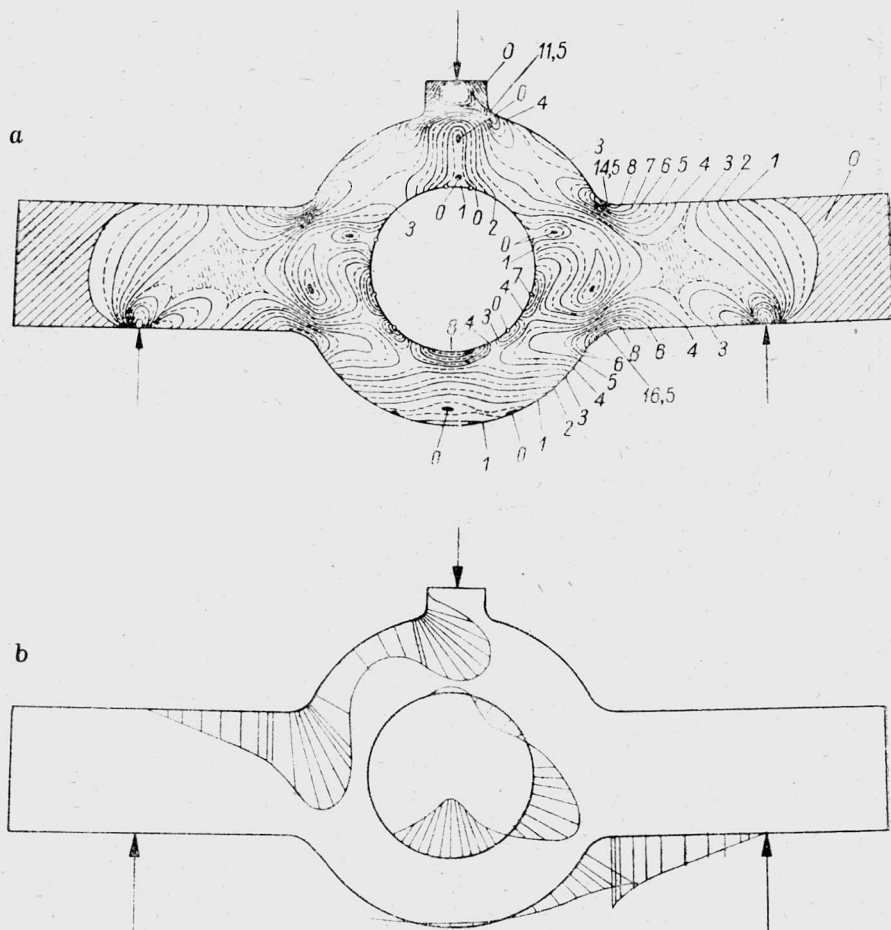
Rys. 23. Przykład wyznaczania naprężeń krawędziowych — zdjęcie izochrom na ciemnym polu widzenia



Rys. 24. Przykład wyznaczania naprężeń krawędziowych — zdjęcie izochrom na jasnym polu widzenia

Podawanie w sprawozdaniu pełnego rysunku izochrom, który nie zawsze jest konieczny do wyznaczenia naprężeń brzegowych, jest pożądane,

gdyż izochromy są — jak wiadomo — liniami jednakowych największych naprężeń ścinających, a więc ich układ i przebieg pozwala na zorientowanie się w rozkładzie naprężeń we wnętrzu elementu.



Rys. 25. Izochromy

a-rysunek izochrom opracowany na podstawie zdjęć z rysunków 23 i 24 oraz skorygowany
b-wykreś naprężeń krawędziowych (brzegowych) opracowany na podstawie rysunku izochrom z rys. 25a

11. Ocena dokładności wyników

Ocenę dokładności wyników badania podzielić można na ocenę dokładności wyników pomiaru i ocenę dokładności opracowania wyników.

Przez dokładność wyników pomiaru rozumiemy dokładność bezpośrednich wyników pomiaru, uzupełnionych i skorygowanych na podsta-

wie zależności, dostarczanych przez teorię sprężystości. Odgrywa tu więc rolę dokładność przebiegu izoklin (odchylenia w stopniach), dokładność przebiegu izochrom (błąd względny równy stosunkowi odchylenia rzędu izochromy do jego wartości), dokładność pomiarów kompensacyjnych (błąd względny) itd.

W przeciętnych badaniach technicznych wykonywanych na przyrządzie opartym na układzie, który podany jest na rys. 10, błąd w określaniu przebiegu izoklin (odchylenie w stopniach) nie powinien przekraczać $\pm 1^\circ$, zaś błąd w określaniu przebiegu izochromy (względne odchylenie rzędu izochromy) nie powinien przekraczać $\pm 5\%$, z tym iż przy starannej pracy błąd ten zmniejszyć można do $\pm 3\%$. Powyższe słuszne jest dla obszarów dostatecznie oddalonych od punktów przyłożenia sił.

Dokładność pracy można ocenić porównując otrzymany doświadczalny przebieg izoklin i izochrom z ich przebiegiem teoretycznym w ciałach, w których przebieg teoretyczny daje się łatwo wyznaczyć; rzecz dotyczy, na przykład, tarczy okrągłej ściskanej wzdłuż średnicy dwiema skupionymi siłami, pierścienia kołowego ściskanego wzdłuż średnicy, klina ściskanego osiowo albo zginanego itp. Dokładność uzyskana w takich badaniach będzie miała miejsce zwykle i w innych podobnych przypadkach, oczywiście przy takich samych warunkach doświadczeń.

Dokładność ostatecznych wyników badania zależy od dokładności wyników pomiaru i dokładności opracowania wyników badania. Ta ostatnia zależy w pierwszym rzędzie od tego, co rozumiemy jako ostateczny wynik badania i jakimi drogami go uzyskujemy. Jeśli celem badania jest tylko otrzymanie układu trajektorii naprężeń głównych, trajektorii największych naprężeń ścinających, linii jednakowej wartości największych naprężeń ścinających oraz wartości naprężeń na nieobciążonych krawędziach, to dokładność ostatecznych wyników badania, otrzymanych na podstawie układu izoklin i izochrom, będzie się zwykle tylko nieznacznie różniła od dokładności wyników pomiaru. Dojdą zasadniczo tylko błędy rysunkowe, które można w znacznym stopniu usunąć. Jeśli natomiast celem pomiaru jest wyznaczenie pola naprężeń jedynie na podstawie znajomości układu izoklin i izochrom za pomocą jednej z metod graficzno-analitycznych, to ostateczny błąd może się znacznie zwiększyć. W takim przypadku należy tak dobrać technikę opracowywania ostatecznych wyników, aby powstające przy obliczeniach błędy były możliwie małe. Gdy prawdopodobieństwo powstania znacznych błędów jest zbyt duże, to należy korzystać z jednej z metod dopełniających, na przykład z metody analogii elektrycznej lub metody pomiaru odkształceń. W ogólności celowe jest stosowanie częstej kontroli wyników za pomocą innych metod pomiarowych i obliczeniowych.

III. CZYNNIKI WPŁYWAJĄCE NA DOKŁADNOŚĆ WYNIKÓW. ŹRÓDŁA BŁĘDÓW

Przy przeprowadzaniu badań elastooptycznych należy baczyć, by opisane poniżej główne źródła błędów zostały wyeliminowane całkowicie lub, co najmniej, zmniejszone do rozsądnych granic, zależnych od typu badania.

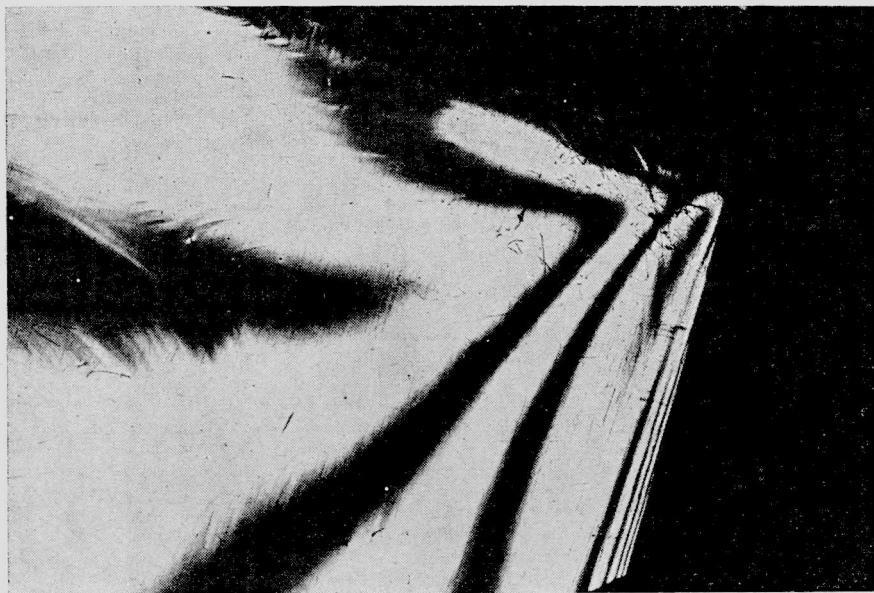
Rozpatrując poszczególne etapy prac laboratoryjnych, związanych z przeprowadzanymi badaniami, należy zawsze mieć na uwadze możliwe błędy i oceniać ich wpływ na jakość i dokładność wyników badania. Omówione poprzednio metody pracy laboratoryjnej należy oceniać również i pod tym kątem widzenia.

1. Wpływ własności materiałów na modele

Oceniając zalety i wady różnych materiałów na modele elastooptyczne oraz decydując o stosowanej technice wykonywania pomiarów, należy zwracać uwagę nie tylko na wyznaczone na podstawie doraźnej próby wartości wielkości mechanicznych, jak moduł sprężystości, liczba $P o i s s o n a$, wytrzymałość doraźna, ale również na specyficzne własności plastyków, jak wyraźna zależność własności mechanicznych od temperatury i wilgotności powietrza oraz od czasu badania, wysoka wartość pełzania oraz wysoka wartość relaksacji (wiotczenia) już w zakresie temperatur pokojowych. Omawianie tych zagadnień wykracza poza ramy niniejszej pracy, są one szczegółowo podane w literaturze, [1], [2], [4], [5], [12], [14], [17]; podkreślić jednak należy, iż nieuwzględnienie tych specyficznych własności plastyków może stać się przyczyną poważnych błędów pomiarowych. Na tym miejscu omówimy szerzej jedynie zagadnienie często występującej anizotropii optycznej plastyków stosowanych na modele elastooptyczne.

Z plastyków najczęściej stosowanych na modele elastooptyczne tylko niektóre nie wykazują zauważalnej anizotropii optycznej — przy prześwietlaniu prostopadłym do powierzchni czołowej — zarówno we wnętrzu płyty, jak i na jej krawędziach. Do takich plastyków należy dobrej jakości plexiglas oraz żywica styrenowa CR 39. Najczęściej stosowane w elastooptyce żywice fenolowe wykazują na ogół znaczną anizotropię optyczną i to zarówno przy prześwietlaniu prostopadłym, jak i równoległym do powierzchni czołowej arkusza plastiku. Anizotropia ta polega na efekcie dwójłomności oraz na obecności smug wskazujących na lokalne ostre zmiany wartości współczynnika załamania światła (efekt *Schlieren*).

Zdjęcie na rys. 26, przedstawiające nieobciążony arkusz grubości 8 mm catalinu 800, należącego do żywic fenolowych, wykonane na ciemnym tle, ilustruje oba wymienione rodzaje anizotropii — dwójłomność przejawiającą się obecnością izochrom oraz smużenie (*Schlieren*). O ile smugi zasadniczo nie dają się eliminować, o tyle dwójłomność można znacznie zredukować poddając arkusz plastyku odpowiedniej obróbce cieplnej, zwanej wygrzewaniem.



Rys. 26. Zdjęcie elastooptyczne nieobciążonego arkusza żywicy fenolowej catalin 800, grubość 8 mm, nieobrabiany cieplnie; wiek arkusza ok. 1,5 roku; widoczna wyraźna anizotropia optyczna — izochromy oraz smugi (*Schlieren*)

Efekt dwójłomności własnej arkusza plastyku, przedstawionego na rys. 26, jest efektem bardzo znacznym; zwykle anizotropia optyczna, uwidaczniająca się przy prześwietlaniu nieobciążonego modelu w polaryskopie, prostopadle do jego powierzchni czołowych, występuje w postaci jasnych lub — przy pracy światłem białym — barwnych plam. Anizotropia powyższa jest wynikiem obecności niejednorodnych naprężeń własnych modelu w przekrojach równoległych do jego powierzchni czołowych.

Również przy prześwietlaniu niektórych plastyków oraz plastyków nieodpowiednio przechowywanych, równoległe do powierzchni czołowych arkusza często można zauważyć znaczną anizotropię optyczną, [2], [13].

Anizotropia optyczna, obserwowana przy prześwietlaniu wyciętego z arkusza (np. żywicy fenolowej) pręta pryzmatycznego, równoległe do

powierzchni czołowych arkusza, charakteryzuje się zwykle kilku lub kilkunastu izochromami przebiegającymi równolegle do pierwotnych powierzchni czołowych arkusza plastyku. Anizotropia tego rodzaju wskazuje, według najprostszej interpretacji tego zjawiska, na obecność mniej lub więcej jednorodnego stanu naprężenia w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny środkowej arkusza z tym, iż wartość tych naprężeń w każdej z płaszczyzn jest inna. Gdy płyta plastyku nie wykazuje anizotropii optycznej przy prześwietlaniu prostopadłym do powierzchni czołowych, a wykazuje ją przy prześwietlaniu równoległym, wówczas w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny środkowej płyty panują jednorodne pola naprężeń, różne co do wartości w każdej płaszczyźnie, [13], względnie zachodzi zjawisko dwójłomności orientacyjnej, wywołanej procesem produkcyjnym. Zjawisko to jest typowe dla plastyku CR 39, a zachodzi często w arkuszach plexiglasu nieodpowiednio przechowywanych.

Przeważnie oba efekty dwójłomności (przy prześwietlaniu prostopadłym oraz równoległym do powierzchni czołowej) występują jednocześnie i wpływają wzajemnie na siebie.

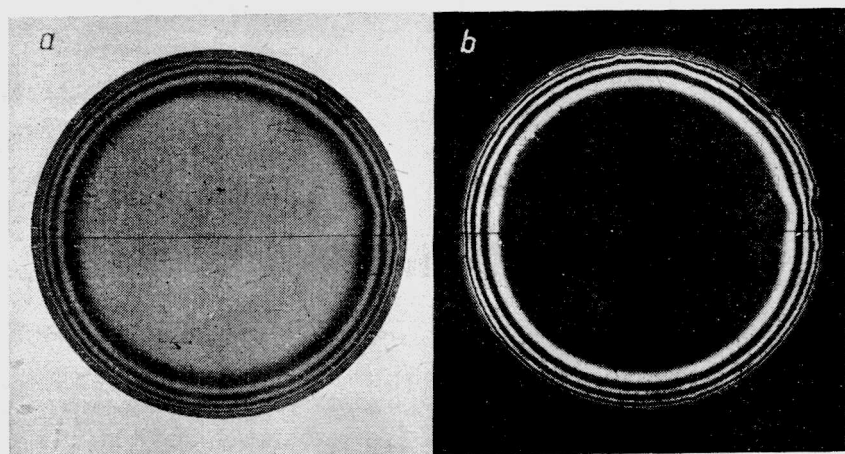
Opisaną anizotropię optyczną materiału na modele elastooptyczne usuwamy przez odpowiednie wygrzewanie plastyku. Przy przeciętnych badaniach elastooptycznych dążymy do takiego zredukowania dwójłomności w arkuszu plastyku na modele, aby, jak już wyżej podano, efekt elastooptyczny — w partiach nie leżących przy krawędzi płyty — nie przekraczał przy prześwietlaniu prostopadłym do powierzchni czołowych około 0,1 m., przy prześwietlaniu równoległym do powierzchni czołowych około 1,0 m.

Opisany wyżej efekt elastooptyczny nie jest niezmienny w czasie. Obserwując płytę, np. żywicy fenolowej prześwietlanej prostopadle do jej powierzchni czołowej, zauważyć można narastanie efektu elastooptycznego od krawędzi płyty z upływem czasu (patrz zdjęcie na rys. 27). Tarcza, przedstawiona na tym rysunku, bezpośrednio po wykonaniu nie wykazała żadnego efektu elastooptycznego, ale po upływie około półtora roku narastający systematycznie efekt elastooptyczny osiągnął pożądaną wartość.

Powstawanie i narastanie efektu zilustrowanego zdjęciami na rys. 27 zauważono na krawędziach arkuszy niektórych rodzajów plastyków, prześwietlanych prostopadle do ich powierzchni czołowej; efekt ten narastał szczególnie szybko na świeżo obrobionych krawędziach. Z powyższego powodu efekt ten nazwano efektem krawędziowym lub krawędziowo-czasowym (*Randeffekt*, *time-edge effect*, *time-stress effect* itp.). Szczególnie szybko narasta opisany efekt na świeżo obrobionych krawędziach modelu wykonanego z nieutwardzanej żywicy fenolowej; narastanie efektu wskazuje na powstawanie naprężeń własnych na świe-

zo obrobionej krawędzi modelu, wzrastających z upływem czasu. Wobec tego jednak, iż narastanie efektu daje się zauważyć przy wszystkich powierzchniach modelu, a nie tylko przy świeżo obrobionych, to wydaje się rzeczą słusniejszą nazwać ten efekt efektem «naskórkowym» i tak go w pracach elastooptycznych nazywamy. Aby odróżnić efekt naskórkowy ogólny, narastający na wszystkich powierzchniach płyty plastiku, od efektu naskórkowego, narastającego przy świeżo obrobionych krawędziach (bardziej złożonego), zwiemy często ten ostatni efektem naskórkowym na krawędzi.

Efekt naskórkowy w żywicach fenolowych wywołany jest zmianą zawartości wody w naskórkowych oraz głębszych partiach modelu oraz — być może — pewnymi procesami chemicznymi zachodzącymi na i pod powierzchnią modelu. Zmiany te powodują powstawanie naprężeń, które z kolei wywołują efekt elastooptyczny.

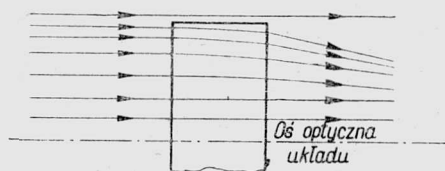


Rys. 27. Zdjęcie elastooptyczne nieobciążonej okrągłej tarczy
tarcza wykonana z utwardzonego catalinu 800, gr 5,6 mm; zdjęcie wykonane w równoległej wiązce światła ok. 1,5 roku po wykonaniu modelu; widoczny efekt naskórkowy przy krawędzi tarczy w postaci kilku rzędów izochrom; a-zdjęcie na tle jasnym, b-zdjęcie na tle ciemnym

Należy jednak zaznaczyć, że — w przeciwieństwie do dotychczas ogólnie przyjętego poglądu, [2], [5], [13], [16], — efektu naskórkowego, przynajmniej w żywicach analogicznych do żywic fenolowych, nie należy, zdaniem naszym, kojarzyć bezpośrednio z obecnością naprężeń własnych, zdefiniowanych w popularnym znaczeniu tego słowa; zjawisko jest bardziej zawile. Zagadnienie to omówione zostało niżej (rys. 30).

Poza opisaną anizotropią optyczną plastyków stosowanych na modele elastooptyczne, związaną z obecnością naprężeń a tym samym z dwój-łomnością wymuszoną (przynajmniej w pierwszej fazie tego zjawiska),

zauważyć można wtórną anizotropię optyczną, polegającą na pewnych zmianach wartości współczynnika załamania światła. Zjawisko to — zauważone przez autora w trakcie obserwacji efektu naskórkowego — występujące łącznie z efektem naskórkowym jest źródłem dodatkowych błędów w pomiarach elastooptycznych. Polega ono na tym, iż promienie równoległej wiązki świetlnej, przechodzące przez partie krawędziowe modelu, wykazujące efekt naskórkowy, zostają odchylone w kierunku do wnętrza modelu podobnie jak promienie w soczewce, partie krawędziowe modelu o przekroju prostokątnym działają bowiem w takim przypadku jak soczewka. Obrazuje to rys. 28. W wyniku tego zjawiska, które nazwiemy efektem «naskórkowo-soczewkowym», krawędzie modelu, wykazującego efekt naskórkowy i przeświec-



Rys. 28. Bieg równoległej wiązki promieni świetlnych przez partię przykrawędziową modelu, wykazującego efekt naskórkowy na krawędzi

zanego równoległą wiązką światła, odwzorowują się na zdjęciu znacznie nie-raz pogrubione. Również i to zjawisko nie jest zupełnie jasne; na przykład występuje ono bardzo słabo lub nie występuje wcale na krawędziach modeli wykonanych z utwardzonej żywicy fenolowej.

Wydaje się, iż wspomniane zjawisko nosi podobny charakter do zjawiska — ujętego analitycznie przez B o k s z t i e j n a, [6], — odchylenia biegu promienia przechodzącego przez partie modelu o różnych wartościach naprężeń. Zjawisko to było zaobserwowane i wyjaśniane przez A. K u s k e, [5], w tym sensie, iż odchylenie biegu promieni świetlnych wywołane jest wtórnym skutkiem efektu naskórkowego, polegającym na zakrzywieniu się powierzchni czołowych modelu w sąsiedztwie krawędzi oraz na zakrzywieniu się samej powierzchni krawędziowej. Słuszny jest pogląd, iż zakrzywienie powierzchni modelu wywoła również w efekcie pogrubienie linii konturowej na obrazie modelu, jednak — jak to wynika z obserwacji autora — efekt ten występuje równocześnie z powstającym efektem naskórkowym, i jest wyraźniej widoczny już wówczas, gdy zakrzywienia przykrawędziowych partii powierzchni czołowych modelu nie można jeszcze odkryć za pomocą typowych mechanicznych przyrządów do pomiaru kątów.

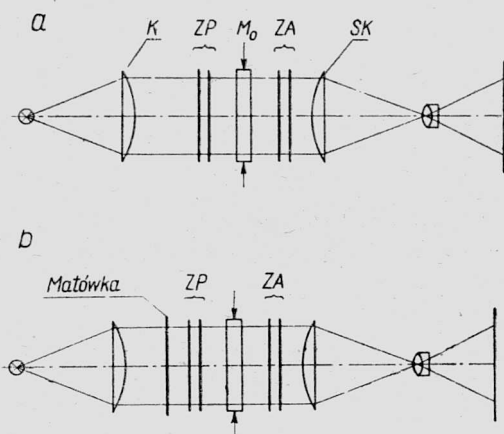
Ogólnie przyjąć można, iż na pojawianie się efektu naskórkowego zasadniczy wpływ wywiera zmiana zawartości wody w plastyku. Zmiana ta nosić może różny charakter. W żywicach fenolowych będących, jak wiadomo, polikondensatami, kondensacja następuje wraz z wydzielaniem cząsteczki wody. W trakcie procesu kondensacji w nieutwardzonej płycie żywicy fenolowej powstałe w materiale cząsteczki wody wędrują

ku powierzchni; w rezultacie następują zmiany w zawartości wody różnych partii modelu. Na przebieg procesu posiada zasadniczy wpływ temperatura i wilgotność otoczenia. Plastyki będące polimerami, jak żywice styrenowe (CR 39) lub żywice metakrylowe (plexiglas) wykazują efekt naskórkowy jako wynik zmiany wilgotności pomieszczenia, a więc jako wynik zakłócenia równowagi między zawartością wilgoci w plastyku i wilgotnością otoczenia. Nieodpowiednio przechowywany plexiglas (w zbyt wilgotnym pomieszczeniu) nie nadaje się bezpośrednio na modele elastooptyczne, gdyż narastający w ciągu kilkunastu minut po wykonaniu modelu efekt naskórkowy na krawędzi deformuje zdecydowanie obraz izoklin. Plexiglas nieodpowiednio przechowywany nadaje się do pracy dopiero po kilkumiesięcznym magazynowaniu w normalnej wilgotności i temperaturze powietrza.

Opisane efekty optyczne ilustrujemy zdjęciami podanymi na rysunkach 29-31.

Na rysunku 30 umieszczony jest zespół zdjęć nieobciążonej beleczki, dokonywanych w różnych warunkach optycznych. Beleczka została wycięta z nieutwardzonego arkusza żywicy fenolowej o grubości 8,8 mm; arkusz ten po otrzymaniu od dostawcy przechowywany był w pomieszczeniu laboratoryjnym w ciągu około półtora roku. Beleczkę prześwietlano światłem zielonym, naturalnym oraz kołowo spolaryzowanym, tworzącym równoległą oraz rozproszoną wiązkę; beleczka była prześwietlona prostopadłe oraz równoległe do powierzchni, które stanowiły część powierzchni czołowych arkusza plastyku. Rysunki 29 przedstawiają układy optyczne polaryskopu, za pomocą których otrzymano zdjęcia podane na rys. 30; na rys. 29a podano układ pracujący na równoległej wiązce świetlnej, zaś na rys. 29b na rozproszonej. Widoczny jest efekt naskórkowy znacznej wielkości, powstający na nieobrabianych powierzchniach (dłuższa krawędź beleczki) w ciągu dłuższego czasu.

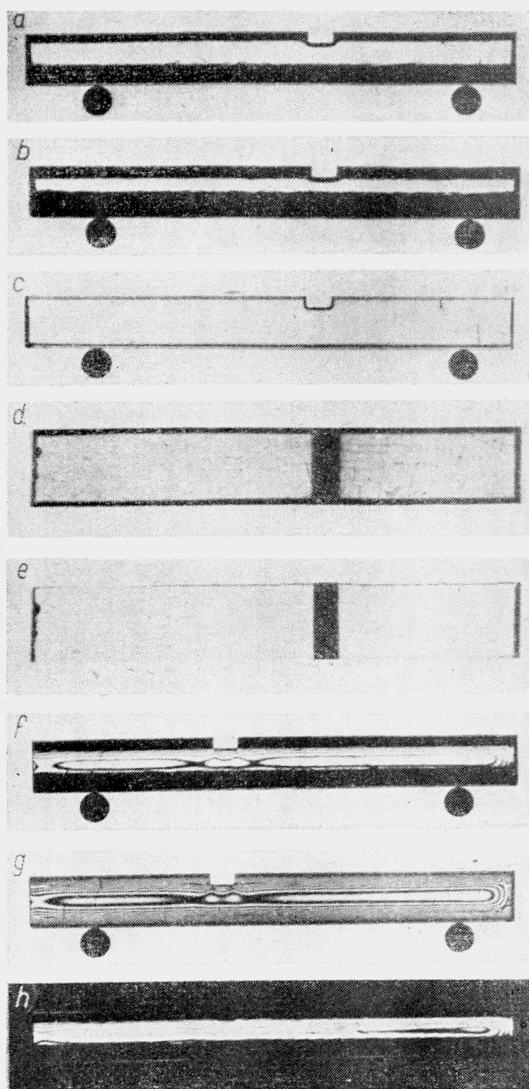
Elastooptyczny efekt naskórkowy, obserwowany na zdjęciach dokonanych przy równoległej wiązce świetlnej, jest wyraźnie zaciemniony na skutek niejednorodnej zmiany wartości współczynnika załamania



Rys. 29. Układy optyczne polaryskopu, za pomocą których wykonano zdjęcia podane na rys. 24

a-układ o równoległej wiązce światła, b-układ o rozproszonej wiązce światła

światła; zmiana ta jest również wynikiem efektu naskórkowego, jak o tym już wspomnieliśmy poprzednio. Zmiana taka powoduje, iż pryzmatyczny



Rys. 30. Zdjęcia nieobciążonej beleczki

a-beleczka prześwietlana równoległą wiązką naturalnego światła jednobarwnego ($\lambda = 546,1 \text{ m}\mu$) równoległe do powierzchni czołowych, data zdjęcia 12.12.1952 r., b-jak na rys. a tylko przy mniejszej przesłonie, c-jak na rys. a rozproszoną wiązką świetlną, d-beleczka prześwietlona równoległą wiązką światła naturalnego prostopadle do powierzchni czołowych, e-beleczka prześwietlona rozproszoną wiązką światła, f-beleczka prześwietlona równoległą wiązką światła kołowo spolaryzowanego, równoległe do powierzchni czołowych, g-jak na rys. f, wiązka rozproszona, h-jak na rys. f, na ciemnym tle

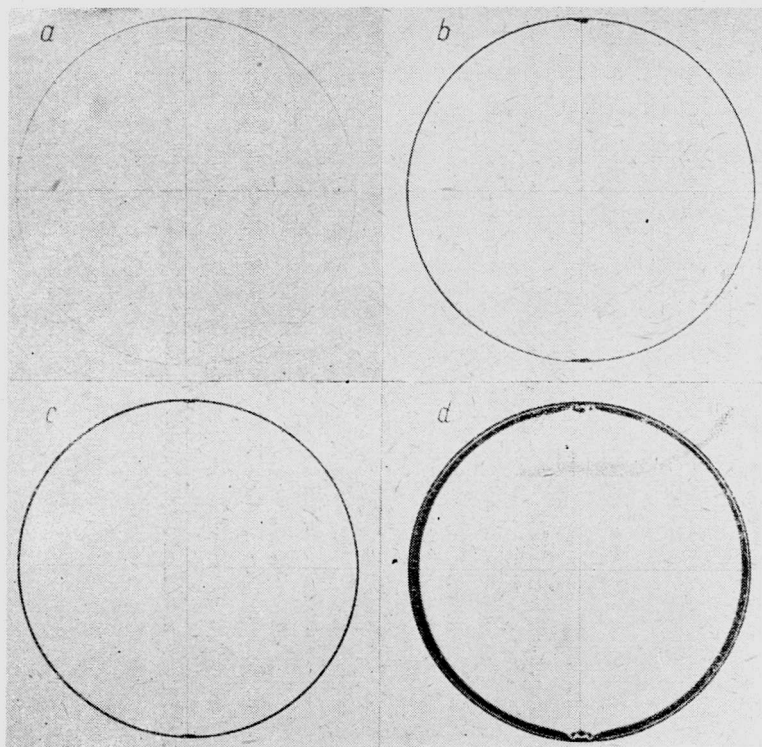
pręt plastyku zachowuje się w równoległej wiązce światła podobnie jak soczewka cylindryczna. Ten «efekt soczewki» można w znacznym stopniu wyeliminować prześwietlając model, ujawniający taki efekt, rozproszoną wiązką światła. Zdjęcia zamieszczone na rys. 30 ilustrują wyraźnie opisane zjawisko.

Elastooptyczny efekt naskórkowy, polegający na samoczynnym powstawaniu efektu dwójłomności i narastaniu tego efektu od powierzchni modelu w głąb materiału, oraz narastający równocześnie efekt soczewki obejmujemy ogólną nazwą efektu naskórkowego.

Zdjęcia na rys. 30 wykazują poza tym, iż efekt naskórkowy, narastający w arkuszu plastyku powoli w ciągu dłuższego czasu, wytwarza dość skomplikowany stan naprężeń własnych; izochromy w okolicy wycięcia oraz w okolicy obciętego końca beleczki przebiegają tak, jakby pewien określony stan naprężenia został w beleczce zamrożony, czyli jakby naprężenia w beleczce składały się z właściwych naprężeń własnych oraz z naprężeń zamrożonych. Zagadnienie to wymaga dalszych badań.

Wynikiem więc efektu naskórkowego, obserwowanego przy prześwietlaniu równoległym do powierzchni czoło-

wych, a przejawiającego się obecnością wzajemnie równoległego układu izochrom, powinien być pewien jednorodny stan napięcia powierzchni czołowych modelu, nie dający się zauważyć przy prześwietlaniu prostopadłym do powierzchni czołowych, oraz zmiana współczynnika załamania światła, którą można dostrzec przy krawędziach modelu, gdy prześwietlająca wiązka światła jest równoległa. Ta ostatnia zmiana uwidacznia się pogrubieniem mniej lub bardziej wyraźnym linii konturowej obrazu modelu.

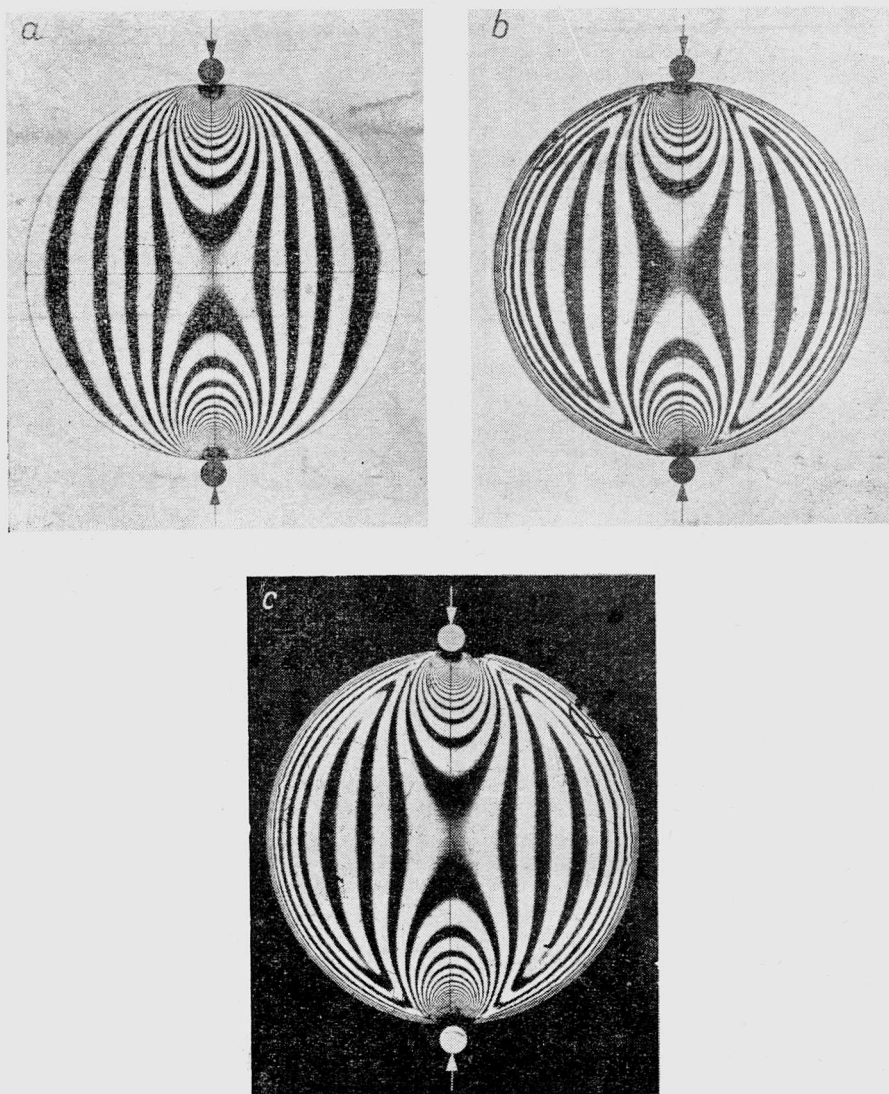


Rys. 31. Zdjęcie okrągłej tarczy z catalinu 800, średnio utwardzonego, grubości 6 mm

a-zdjęcie w świetle naturalnym wykonane dn. 4.2.1952 r., *b*-zdjęcie w świetle naturalnym wykonane dn. 5.2.1952 r., *c*-zdjęcie w świetle naturalnym wykonane dn. 6.2.1952 r., *d*-zdjęcie w świetle kołowo spolaryzowanym wykonane dn. 6.2.1952 r.

Ilustrują to zdjęcia na rys. 31; stanowią one przykład narastania efektu naskórkowo- soczewkowego i efektu naskórkowo-krawędziowego wraz z upływem czasu. Kontur tarczy na zdjęciu pogrubia się wraz z upływem czasu.

Effekt naskórkowy, obserwowany przy świeżo obrobionych krawędziach, jest raczej efektem wypadkowym narastającego efektu naskórkowego na świeżo odkrytej i stykającej się z powietrzem powierzchni



Rys. 32. Zdjęcie izochrom w okrągłej tarczy ściskanej wzdłuż średnicy dwiema skupionymi siłami

a-tarcza nie wykazywała efektu naskórkowego — izochromy przebiegają prawidłowo, *b*-tarcza podana na rys. 21 posiadała silny efekt naskórkowy — przebieg izochrom w pobliżu konturu jest zupełnie zniekształcony, *c*-jak na rys. *b*, na ciemnym tle

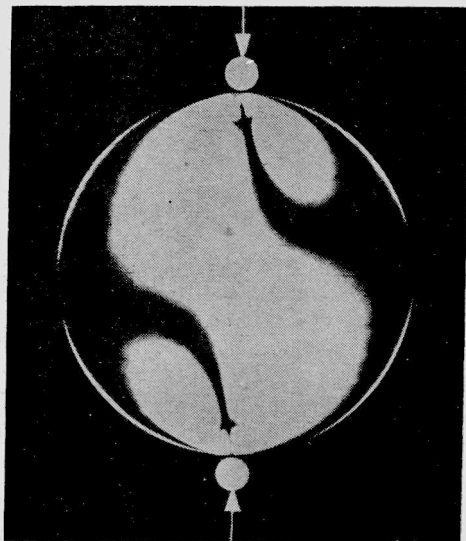
materiału oraz naruszonego stanu równowagi sprężystej materiału, podanego początkowo jednorodnemu stanowi napięcia w płaszczyznach równoległych do czołowych płaszczyzn modelu.

Aby skutecznie zapobiec narastaniu efektu naskórkowego na obrabianych krawędziach, należy nie tylko zapobiec wymianie wilgoci pomię-

dzy obrobionymi powierzchniami krawędziowymi i powietrzem oraz odizolować te powierzchnie od zetknięcia się z nim, ale również poprzednio usunąć lub wydatnie zmniejszyć efekt naskórkowy na powierzchniach czołowych modelu.

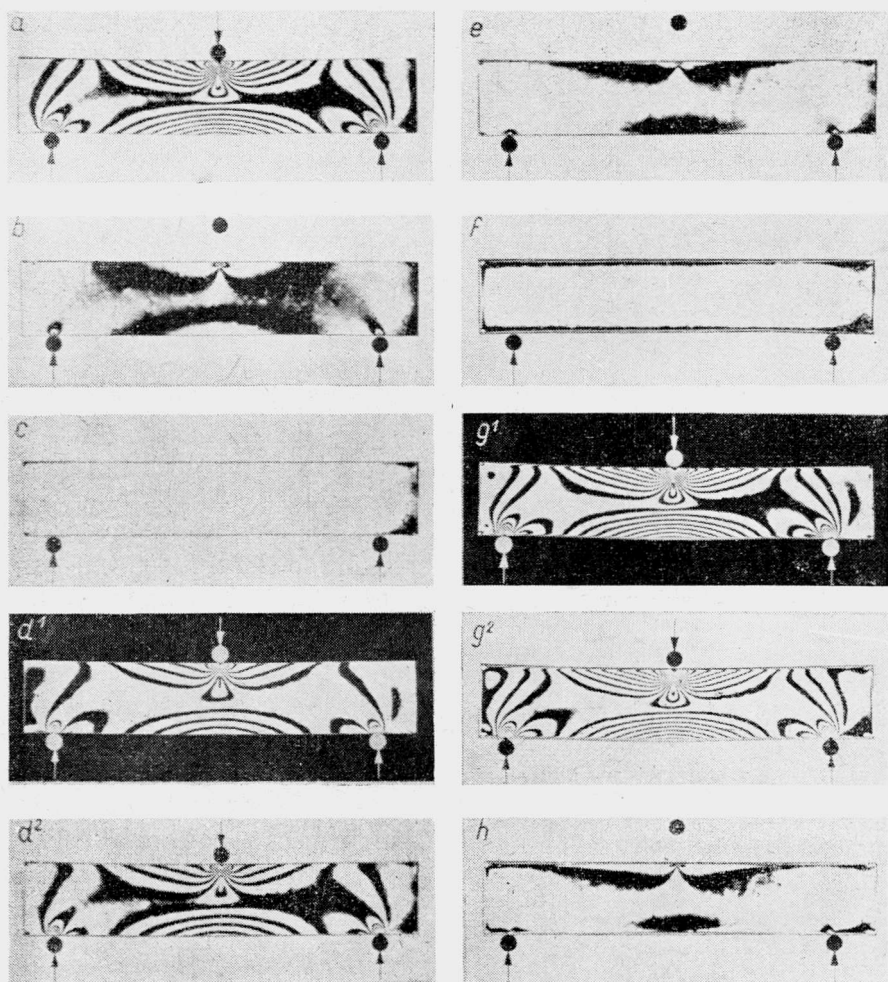
Obecność efektu naskórkowego na krawędzi uniemożliwia lub bardzo utrudnia odczytanie przebiegu i rzędów izochrom w partiach przykrawędziowych modelu.

Ilustrują to rysunki 32, 33 i 34. Rysunek 32 podaje przebieg izochrom w okrągłej tarczy ściskanej wzdłuż średnicy dwiema skupionymi siłami. Zdjęcie 32a przedstawia prawidłowy przebieg izochrom, zaś zdjęcie 32b przedstawia przebieg izochrom zniekształcony silnym efektem naskórkowym. Zdjęcie na rys. 33 przedstawia przebieg izokliny 10° w okrągłej tarczy, jak na rys. 32, zakłócony efektem naskórkowym. Rys. 34 przedstawia zdjęcia beleczki z catalinu 800, wykonane w różnym czasie; ilustrują one zarówno narastanie efektu naskórkowego (wpływ na przebieg izochrom, pogrubienie linii konturowej), jak i efekt pełzania optycznego. Izochromy pozostałe po odciążeniu modelu, wywołane pełzaniem optycznym, zanikają początkowo szybko, potem wolniej; po upływie kilkunastu minut od chwili zdjęcia obciążenia efekt optyczny, spowodowany pełzaniem optycznym pod obciążeniem, jest już nieznaczny.



Rys. 33. Zdjęcie izokliny 10° w okrągłej tarczy wykonanej z CR-39 wykazującej nieznaczny efekt naskórkowy

Efekt naskórkowy powodujący powstawanie naprężeń w modelu wpływa poza tym bardzo niekorzystnie na wartość i charakter pełzania materiału modelu pod obciążeniem, gdyż różne partie tego samego przekroju poprzecznego modelu posiadają różne wartości naprężeń, będących wypadkowymi naprężeń wymuszonych przez obciążenie modelu i naprężeń własnych. W rezultacie wielkość naprężeń w kierunku grubości modelu nie jest stała, lecz zmienia się, i to tym bardziej, im większy jest efekt naskórkowy, co zmusza do stosowania niższych wartości naprężeń wymuszonych, a więc i niższych wartości sił i momentów obciążających.



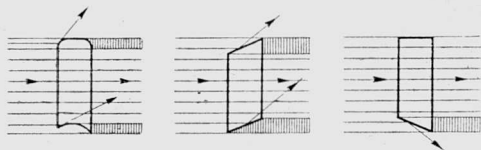
Rys. 34. Narastanie efektu naskórkowego na krawędziach beleczki wyciętej z nieutwardzonego i nieobrabianego ciepłnie catalinu 800. Materiał beleczki wykazywał pewną anizotropię optyczną, objawiającą się nieregularnym rozmazywaniem się izochrom

a-zdjęcie wykonane w parę godzin po obrobieniu modelu, b-zdjęcie jak a wykonane bezpośrednio po odciążeniu modelu, c-zdjęcie wykonane 24 godziny po wykonaniu modelu przed obciążeniem — widać narastający efekt naskórkowy, d-zdjęcie jak c, bezpośrednio po obciążeniu modelu, e-zdjęcie jak c, bezpośrednio po zdjęciu obciążenia, f-zdjęcie wykonane 7 dni po wykonaniu modelu, przed obciążeniem, g-zdjęcie jak f, po przyłożeniu obciążenia, h-zdjęcie jak f, bezpośrednio po zdjęciu obciążenia

2. Wpływ wykonania modelu

2.1. Wady kształtu geometrycznego modelu. Poprawnie wykonany model posiada powierzchnie krawędziowe niezłamane i prostopadłe do powierzchni czołowych. Tak wykonany model, umieszczony w równoległej wiązce światła w taki sposób, iż jego powierzchnie czołowe są prostopadłe do osi optycznej układu, daje na ekranie obraz czysty, o ostro

zarysowanych i cienkich liniach konturowych. Jeśli chociaż jeden z powyższych warunków nie jest spełniony, to linia konturowa obrazu modelu pogrubia i rozszerza się w odpowiedniej partii krawędzi, zaciemniając obraz izochrom dochodzących w tych miejscach do krawędzi. Efekt ten, zwiększający się wraz ze zwiększaniem grubości modelu przy takich samych wadach wykonania, nazwiemy efektem «grubościowym» (*space effect*), [1], [9], [11]. Efekt grubościowy wywołany więc jest brakiem równoległości pomiędzy kierunkiem promieni wiązki świetlnej i odpowiadającymi partiami powierzchni krawędziowej modelu. Efekt



Rys. 35. Najczęstsze wady kształtu geometrycznego modelu powodujące powstawanie efektu grubościowego

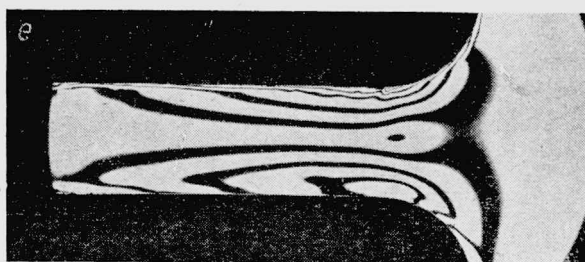
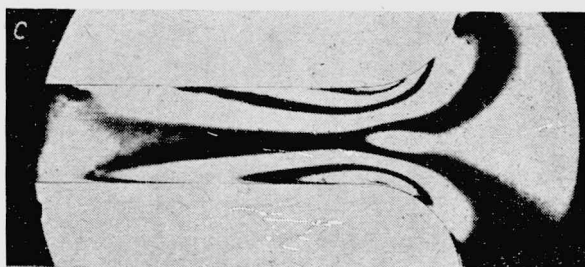
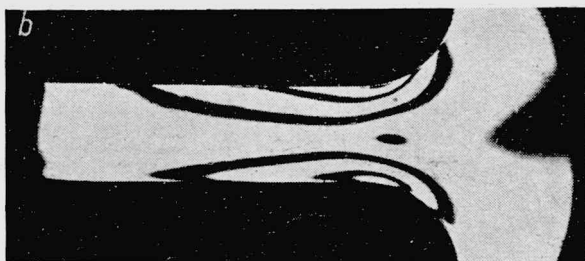
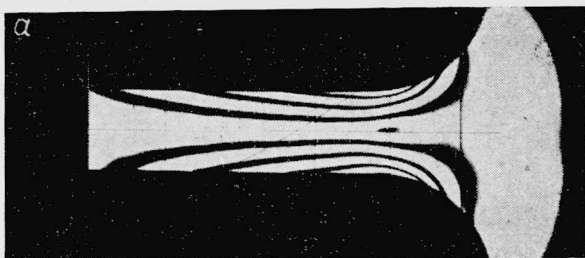
Rysunki przedstawiają przekroje modelu płaszczyzną równoległą do osi optycznej układu; powierzchnie krawędziowe nie są prostopadłe do powierzchni czółowych modelu

grubościowy, spowodowany wadliwym wykonaniem modelu, nie daje się usunąć przez zmianę ustawienia przyrządu; w takim przypadku model należy poprawić lub wykonać na nowo.

Charakterystyczne wady kształtu geometrycznego modelu, powodujące powstawanie efektu grubościowego, przedstawione są na rys. 35.

Efekt grubościowy w żadnym przypadku nie powinien występować w ważnych partiach modelu, które podlegają szczególnie starannej obserwacji. Jeśli nie pomaga zmiana położenia modelu, a poprawa krawędzi modelu za pomocą pilnika mogłaby znacznie zmienić kształt, to opłaca się wykonać nowy model. Należy zwrócić uwagę na to, iż polewanie partii przykrawędziowych modelu po jego wykonaniu prowadzi do załamania krawędzi, a więc do powstania efektu grubościowego.

2.2. Naprężenia obróbcze. Każda obróbka modelu powoduje powstanie naprężeń w obrabianej przykrawędziowej partii modelu, zwanych naprężeniami «obróbczymi». Naprężenia te przy prawidłowo wykonanym modelu są tak małe, iż wpływ ich nie wykracza poza linię konturową obrazu modelu. Naprężenia obróbcze, jeśli są znaczne, mogą utrudnić lub uniemożliwić pomiar naprężeń na krawędziach modelu i w partiach przykrawędziowych. Naprężenia obróbcze mogą być wywołane bądź odkształceniami plastycznymi materiału na powierzchni obrabianej, bądź mogą stanowić efekt wtórny znacznego podwyższenia się temperatury części modelu, leżących przy powierzchniach obrabianych, i spowodowanych tym zmian chemicznych w przegrzanych partiach modelu, [5], [9], [15]. Odkształcenia plastyczne materiału przy obróbce powodują zawsze powstanie naprężeń ściskających.



Rys. 36. Przebieg izochrom w przecie zginanym siłą skupioną (wszystkie pręty wykonane na wycinarce, rys. 7)

a-materiał pręta żywica gliptalowa BT-61893 — model prawidłowo wykonany, przebieg izochrom prawidłowy, *b*-materiał żywica fenolowa catalin 800, efekt obróbczy spowodowany odkształceniami plastycznymi; w wyniku zbyt dużego nacisku narzędzia skrawającego na krawędzi powstały naprężenia ściskające — przebieg izochrom zniekształcony, *c*-jak *b*, na jasnym tle, *d*-materiał żywica styrenowa CR-39, efekt obróbczy spowodowany niejednakowymi odkształceniami plastycznymi (uderzenie narzędzia) oraz przegrzaniem materiału przy obróbce; przebieg izochrom zniekształcony w sposób nieregularny, *e*-jak *d*, na ciemnym tle

Wynikiem istnienia naprężeń obróbczych jest zniekształcenie przebiegu izochrom, czyli tzw. efekt obróbczy. Zdjęcia na rys. 36 ilustrują wpływ efektu obróbczego na przebieg izochrom w pręcie zginanym siłą skupioną. Porównanie zdjęć wykonanych na jasnym i ciemnym tle pola widzenia pozwala na dokładniejsze określenie stopnia zniekształcenia izochrom (por. rys. 36b i 36c) oraz na wyeliminowanie efektu miejscowych wyszczerbień krawędzi modelu, uwidaczniających się zwłaszcza na zdjęciach na ciemnym tle (rys. 36d i 36e). Naprężenia obróbcze wywołane są zwykle zbyt dużym naciskiem narzędzia obrabiającego, zbyt tępym narzędziem oraz zbyt intensywną obróbką, powodującą znaczne podwyższenie temperatury materiału, czyli, ogólnie mówiąc, mało staranną obróbką modelu. Anizotropia optyczna materiału spowodowana naprężeniami obróbczymi na ogół nie daje się usunąć; wtedy należy wykonać nowy model.

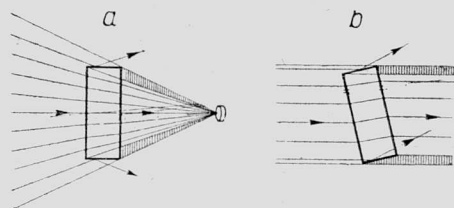
3. Wady układu optycznego oraz wady jego ustawienia

Wady układu optycznego polaryskopu bądź to organiczne (polaryskop pracujący na wiązce zbieżnej), bądź spowodowane złym ustawieniem całości wywołują efekt podobny do wyżej opisanego efektu grubościowego, czyli pogrubienie linii konturowych na ekranie; dlatego nazywamy ten efekt również efektem grubościowym. Efekt sam spowodowany jest nierównoległością promieni przechodzących przez model i trafiających do obiektywu. Zależy on również od grubości modelu i wzrasta z jego wielkością.

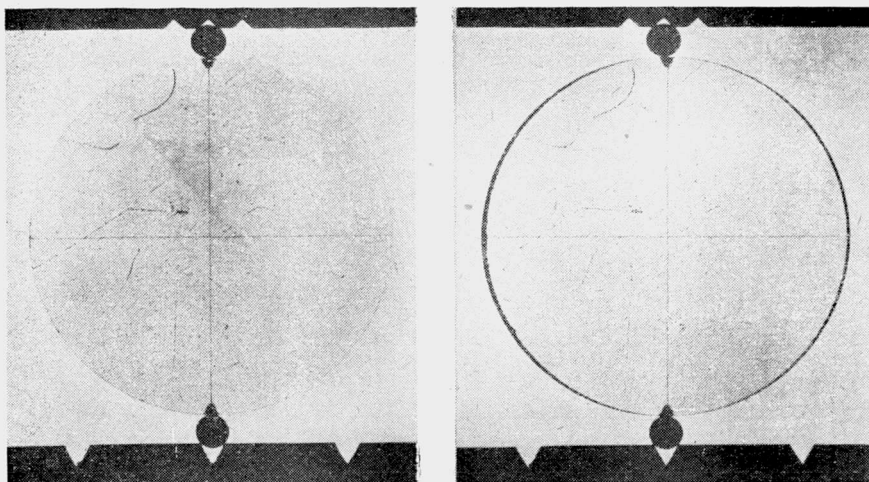
Podobnie wadliwe, mianowicie nieprostokątne ustawienie powierzchni czołowych modelu do osi optycznej układu powoduje powstanie efektu grubościowego.

Przy pracy na polaryskopie, w którym model prześwietlany jest zbieżną wiązką światła, efekt grubościowy jest nieunikniony; linie konturowe modelu są tym grubsze, im dalej leżą od osi optycznej układu. Powstający w ten sposób efekt grubościowy można zmniejszyć do rozsądnej wielkości, stosując obiektyw o możliwie długiej ogniskowej, umieszczony dostatecznie daleko od modelu, [2], [10].

Opisane przyczyny powstawania efektu grubościowego przedstawione są na rysunkach 37, 38 i 39.

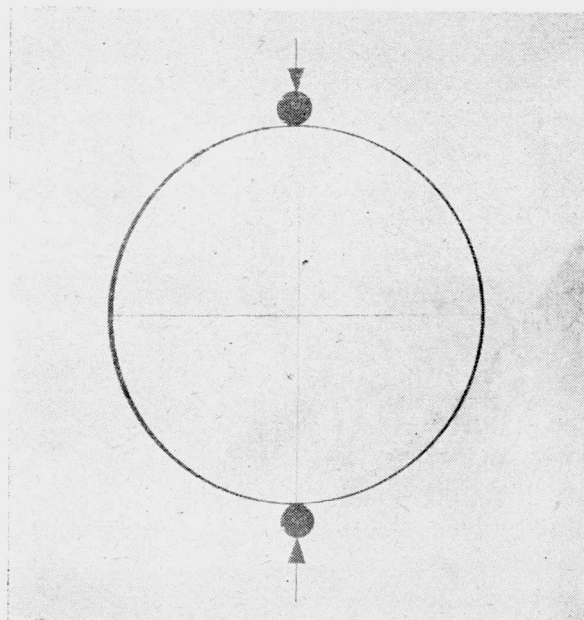


Rys. 37. Wady układu optycznego (a) oraz wady ustawienia (b) powodujące powstawanie efektu grubościowego



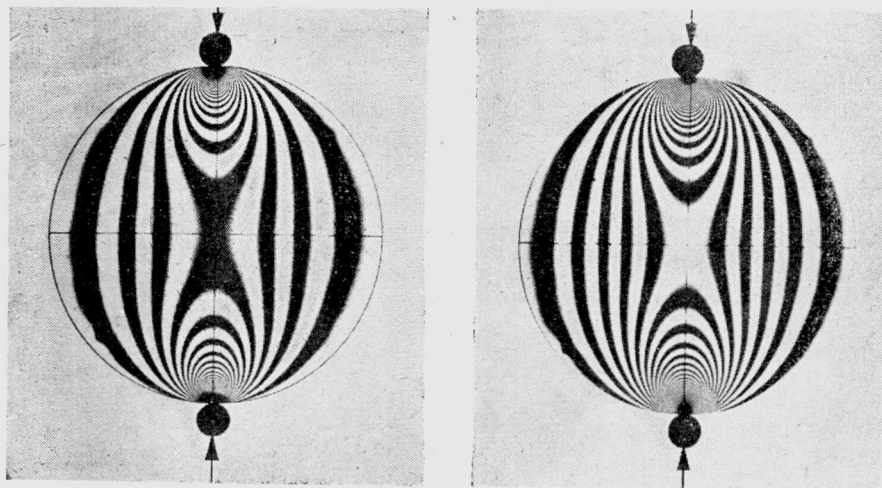
Rys. 38. Zdjęcia okrągłej tarczy wykonanej prawidłowo (lecz niedostatecznie wypolerowanej), wykonane w równoległej wiązce światła naturalnego, materiał tarczy BT-61893

a-powierzchnia czołowa tarczy jest prostopadła do osi optycznej układu, linia konturowa obrazu tarczy jest cienka, *b*-powierzchnia czołowa tarczy nie jest prostopadła do osi optycznej układu, widoczny jest wyraźny efekt grubościowy



Rys. 39. Zdjęcie jak na rys. 32b z tą różnicą, iż model był dobrze wypolerowany oraz wykazywał lekki efekt naskórkowo-soczewkowy; materiał tarczy plexiglas

Na rysunku 38 podane są zdjęcia okrągłej tarczy, ustawionej prostopadle i nieprostopadle do osi optycznej układu pracującego na równoległej wiązce świetlnej; widoczny tu jest wyraźny efekt grubościowy. Powierzchnia modelu była niedostatecznie wypolerowana — stąd rysy i nierówności. Tego rodzaju wady powierzchni stanowią na ogół jedynie usterkę «kosmetyczną». Linia konturowa modelu na zdjęciu 38a jest poprawna.



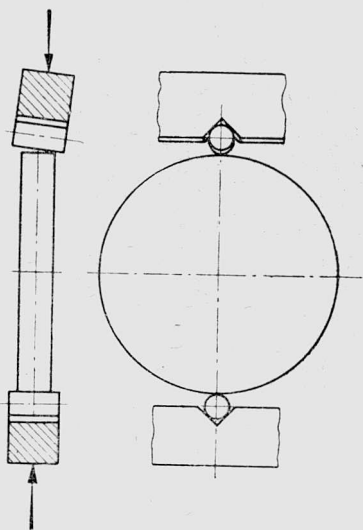
Rys. 40. Zdjęcie niedostatecznie wypolerowanej okrągłej tarczy ściskanej wzdłuż średnicy dwiema skupionymi siłami, dokonane przy świetle spolaryzowanym kołowo

a-zdjęcie w równoległej wiązce światła, *b*-zdjęcie w rozproszonej wiązce światła

Zasadniczy wpływ na stopień występowania na zdjęciu wad powierzchni modelu, spowodowanych niedostatecznym wypolerowaniem lub zadrapaniami, posiada charakter wiązki świetlnej oraz wielkość przesłony umieszczonej w ognisku obiektywu. Wiązka rozproszona tuszuje wady powierzchni modelu. Przy pracy na wiązce równoległej wady powierzchni modelu występują na zdjęciach tym jaskrawiej, im mniejszy jest otwór przesłony umieszczonej w ognisku obiektywu. Zjawisko to ilustrują zdjęcia na rys. 40. Zdjęcia na rys. 38 wykonane zostały przy małej przesłonie. Dodatkowym efektem niewłaściwego ustawienia modelu jest pewne zafałszowanie położenia izochrom, gdyż promienie przechodzą przez model nieprostopadle do jego powierzchni, a więc przez punkty o różnych na ogół stanach naprężenia.

4. Wpływ dokładności i wartości obciążenia

Często zdarzającym się błędem jest nie spełnienie warunku, aby wypadkowe sił obciążających leżały w płaszczyźnie środkowej modelu. Obciążenie siłami skupionymi realizujemy w praktyce przez wałeczki lub ostrza przylegające na całej długości do powierzchni krawędziowej modelu. Wałeczki te powinny być do siebie równoległe; zwichrowanie ich powoduje nierównomierne przyleganie do powierzchni krawędziowej modelu, co w rezultacie daje nierównomierne obciążenie modelu.



Rys. 41. Przykład wadliwego ustawienia modelu — szkic ustawienia

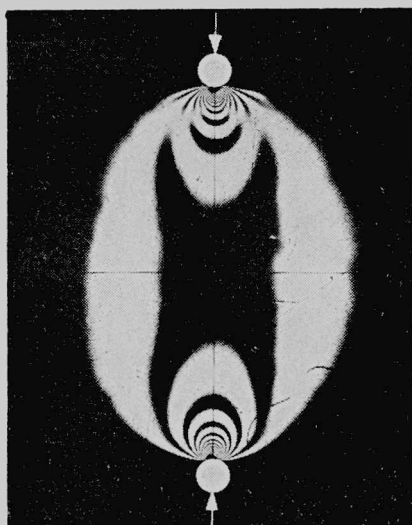
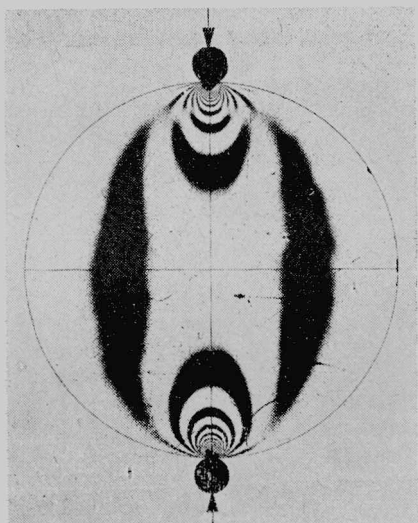
górny wałeczek obciążający naciska na krawędź modelu, powodując odchylenie od płaskiego stanu napiecia, zwłaszcza w najbliższej położonych partiach modelu oraz w okolicy dolnego wałeczka

Efektem ostatecznym nierównoległości wałeczków, względnie ostrzy obciążających, jest wystąpienie mniej lub więcej wyraźnego trójwymiarowego stanu naprężenia, a w rezultacie zakłócenie przebiegu izochrom i izoklin, zwłaszcza w sąsiedztwie punktu działania sił, oraz zanik punktów osobliwych. Zakłócenie to — zgodnie z zasadą *Saint Venanta* — na ogół szybko zanika wraz ze wzrostem odległości od punktu przyłożenia siły. To zjawisko zilustrowane jest rysunkami 41-42 podającymi przebieg izochrom w wadliwie obciążonej tarczy (zdjęcie to pokazuje równocześnie wpływ wadliwego obciążenia na obraz izochrom przy ciemnym i jasnym polu widzenia). Na rysunku 41a podany jest szkic ustawienia modelu; górny wałeczek obciążający jest ustawiony skośnie i naciska krawędź modelu, nie naciskając równomiernie na całą powierzchnię krawędziową. W wyniku tego stanu rzeczy przebieg izochrom w sąsiedztwie wadliwie przyłożonych obciążeń, zwłaszcza zaś obciążenia

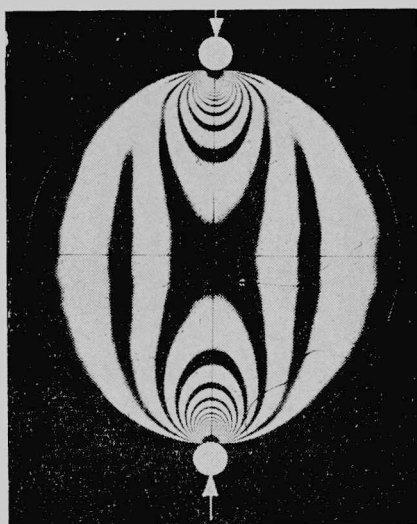
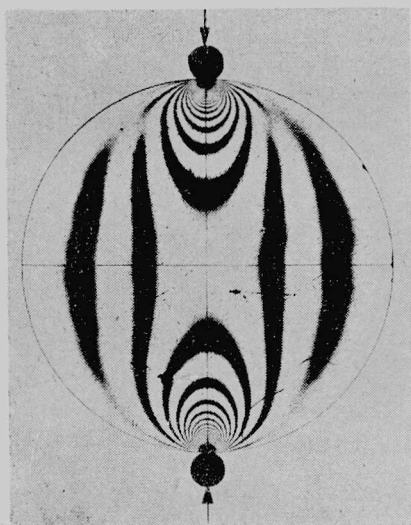
górnego, został zniekształcony — izochromy przerywają się; zniekształcenie to można zauważyć porównując przebieg izochrom w dolnej i górnej połowie tarczy z przebiegiem izochrom na zdjęciach według rys. 40.

Przy wyższych wartościach sił obciążających wałeczki wciskają się w odkształcający się plastycznie materiał modelu, co wyrównuje rozkład obciążeń na powierzchni krawędziowej modelu, jak to jest widoczne z dalszych zdjęć na rys. 42.

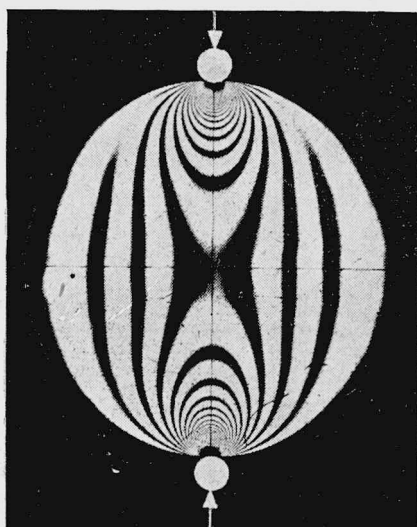
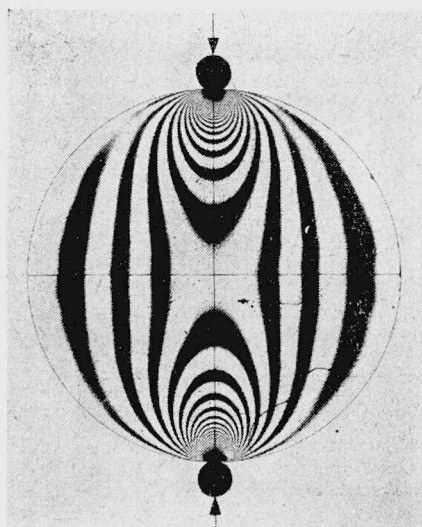
Trójwymiarowy stan naprężenia występujący wyraźnie w okolicy nieprawidłowo przyłożonych sił obciążających wpływa również zakłócająco na przebieg izoklin; izokliny w tych partiach modelu zanikają. Ilustrują



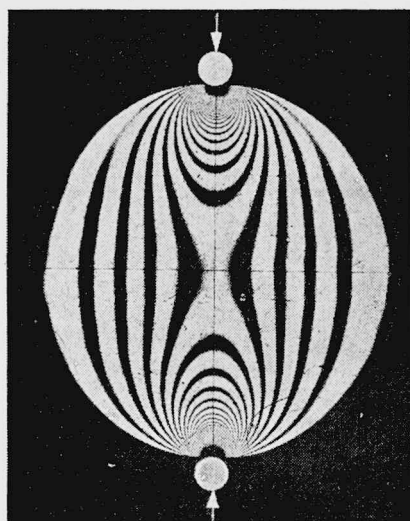
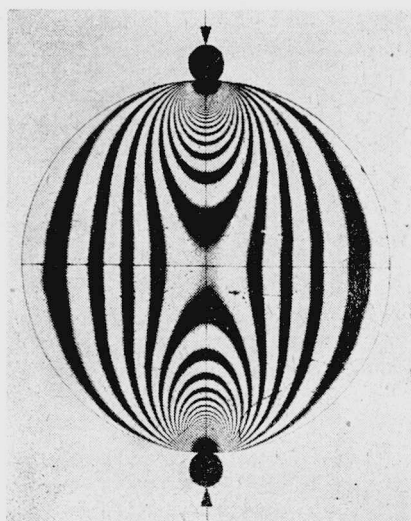
Rys. 42a. $P = 33,8 \text{ kG}$



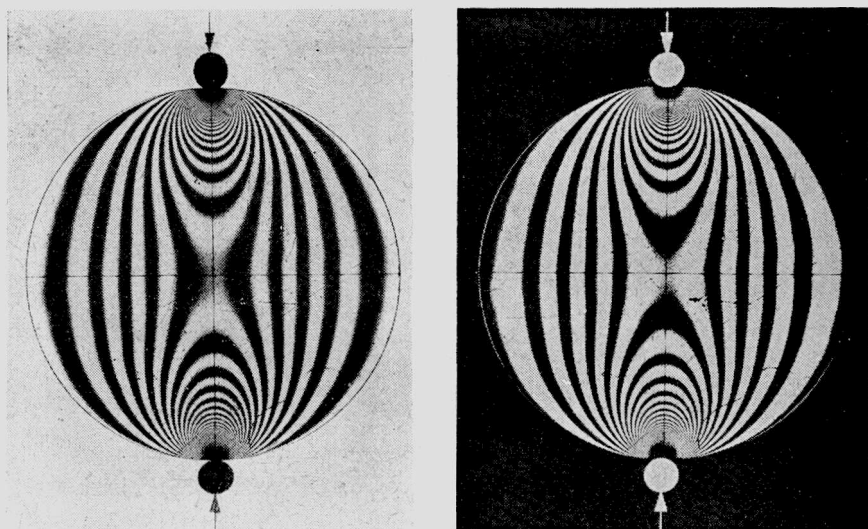
Rys. 42b. $P = 67,6 \text{ kG}$



Rys. 42c. $P = 101,4 \text{ kG}$



Rys. 42d. $P = 135,2 \text{ kG}$



Rys. 42e. $P = 155,4 \text{ kG}$

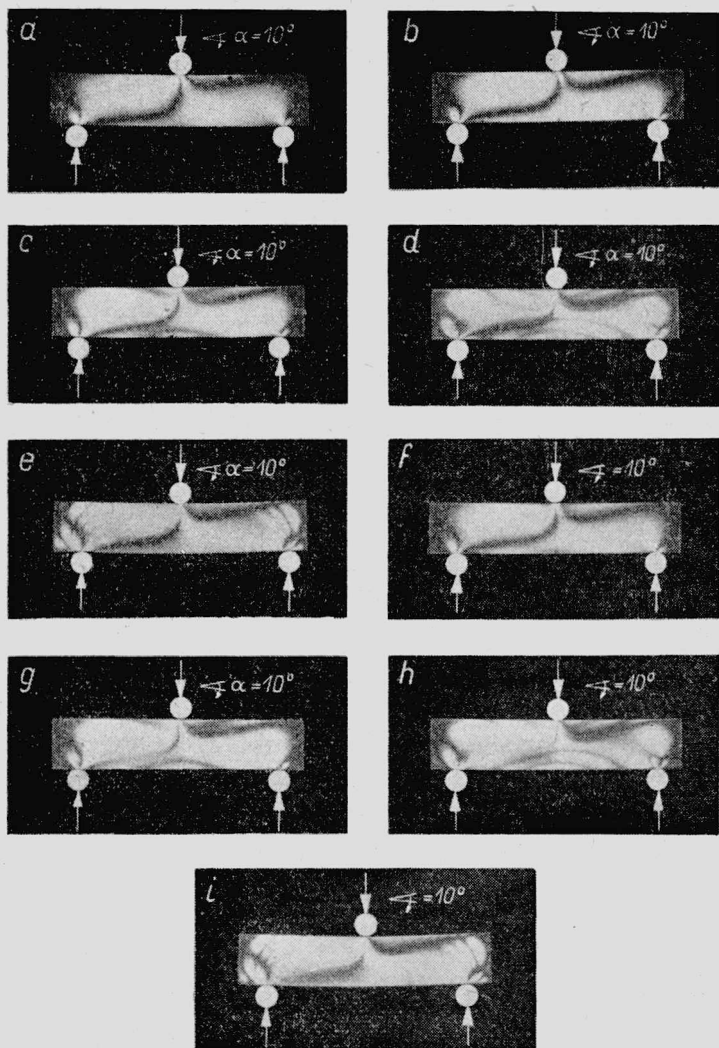
Rys. 42. Zdjęcia izochrom w okrągłej tarczy ściskanej wzdłuż średnicy dwiema skupionymi siłami, dokonane przy ustawieniu jak na rys. 41 przy różnych wartościach sił obciążających P

Materiał tarczy BT-61893, grubość 7 mm, Φ 55 mm

to zdjęcia na rys. 43, przedstawiające przebieg izokliny 10° w beleczce zginanej siłą skupioną. Ze zdjęć wynika, iż nieprawidłowy sposób obciążenia zakłóca wyraźnie przebieg izoklin dopiero przy większych wartościach dwójłomności wymuszonej (gdy pojawiają się pierwsze izochromy), z tym iż przy dostatecznie dużych obciążeniach wpływ wadliwego obciążenia maleje (na skutek odkształceń plastycznych krawędzi modelu wypadkowa siła przekazywana na model przez wałeczek zbliża się do płaszczyzny środkowej modelu).

Bardzo nieprzyjemnym efektem trójwymiarowego stanu naprężenia, wywołanego wadliwym obciążeniem modelu, jest zanik lub rozmazanie się punktów osobliwych; punkty te, jeśli nie zanikają zupełnie, to przybierają kształt półksiężyców lub przerwanych owali.

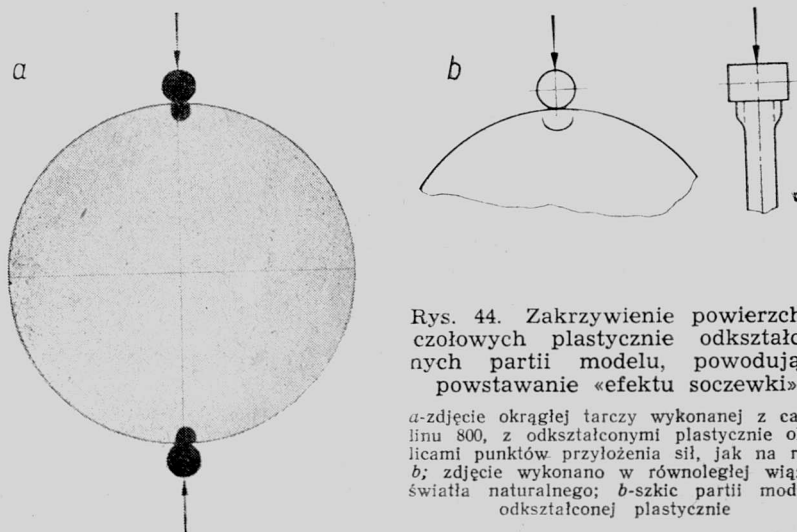
Wpływ odkształceń plastycznych materiału modelu powstających pod działaniem sił skupionych jest dwójaki. Przede wszystkim powierzchnie czołowe plastycznie odkształconych partii modelu zakrzywiają się, jak na rys. 44, dając w równoległej wiązce światła «efekt soczewki» na skutek odchylenia promieni świetlnych, zaś odkształcona plastycznie partia materiału stanowi niejako klin powodujący powstanie naprężeń własnych w modelu, które zniekształcają przebieg izochrom. Za przykład niech służy przebieg izochrom w okrągłej tarczy ściskanej wzdłuż średnicy dwiema skupionymi siłami, przedstawiony na rys. 45. Przy niezbyt



Rys. 43. Przebieg izoklin 10° w beleczce podpartej zginanej siłą skupioną. Zdjęcie *a* przedstawia beleczkę z plexiglasu — zdjęcie w świetle białym. Zdjęcia następne przedstawiają beleczkę z CR-39; zdjęcia te są wykonane w świetle białym i prześwietlone w celu zatuszowania izochrom

a-beleczka z plexiglasu prawidłowo obciążona, $P = 75$ kG, przebieg izokliny prawidłowy; *b*-beleczka z CR-39 prawidłowo obciążona, $P = 5$ kG, izoklina dobrze widoczna; *c*-beleczka z CR-39 prawidłowo obciążona, $P = 10$ kG, izoklina dobrze widoczna; *d*-beleczka z CR-39 prawidłowo obciążona, $P = 20$ kG, izoklina dobrze widoczna; *e*-beleczka z CR-39 prawidłowo obciążona, $P = 80$ kG, wałeczek pochylony, $P = 5$ kG, izoklina dobrze widoczna; *f*-wałeczek pochylony, $P = 10$ kG, izoklina częściowo zanika; *g*-wałeczek pochylony, $P = 20$ kG, izoklina zanika w wyższym stopniu; *h*-wałeczek pochylony, $P = 80$ kG, izoklina ponownie widoczna. Uwaga: zdjęcie izokliny w beleczce z plexiglasu, jak na rys. *a*, obciążonej nieprawidłowo jak na rys. *f*, jest takie samo jak zdjęcie na rys. *a*

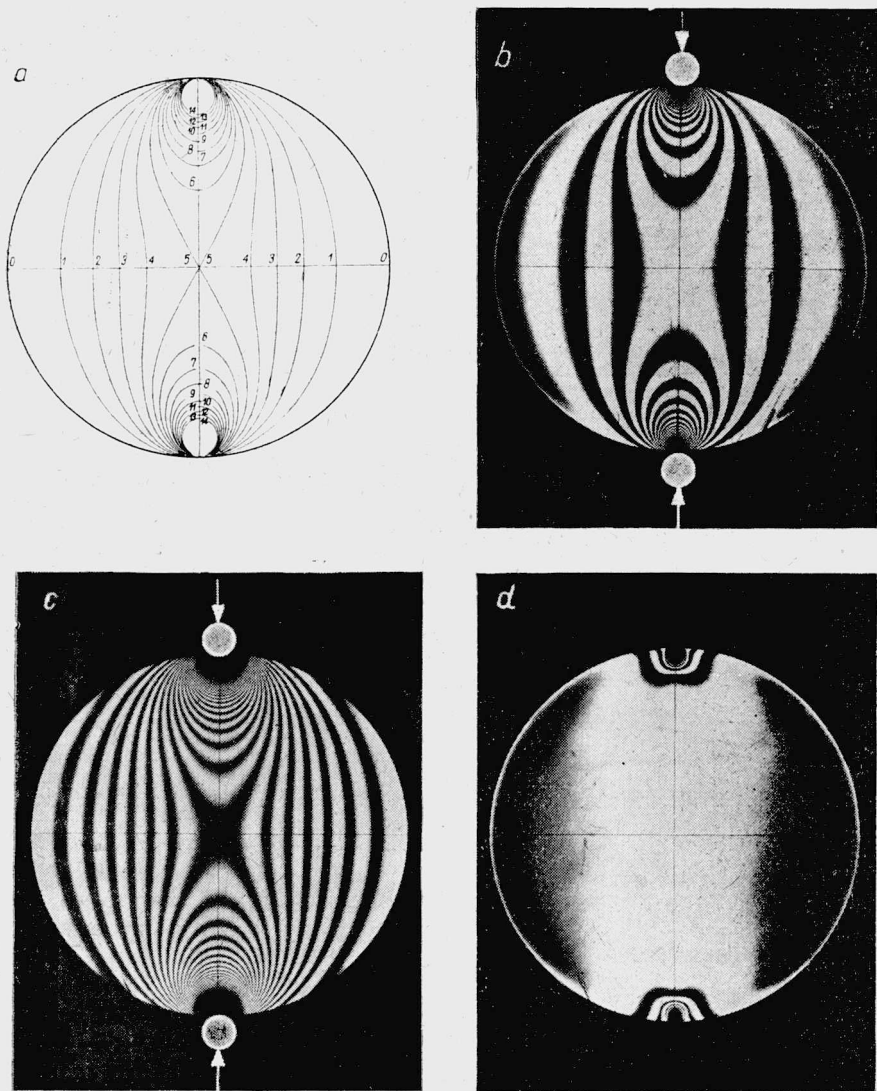
wysokiej wartości obciążenia (w odniesieniu do własności materiału), nie powodującej znaczniejszych odkształceń plastycznych uwidaczniających się na zdjęciu w postaci ciemnych plam (efekt soczewki), przebieg izochrom jest na ogół zgodny z teoretycznym, jak to wynika z porównania rys. 45a z rys. 45b. Przy zbyt wysokim obciążeniu, wówczas gdy obszar odkształceń plastycznych jest znaczniejszy, przebieg izochrom



Rys. 44. Zakrzywienie powierzchni czołowych plastycznie odkształconych partii modelu, powodujące powstawanie «efektu soczewki»

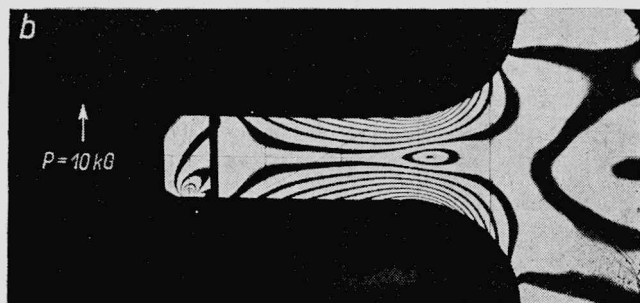
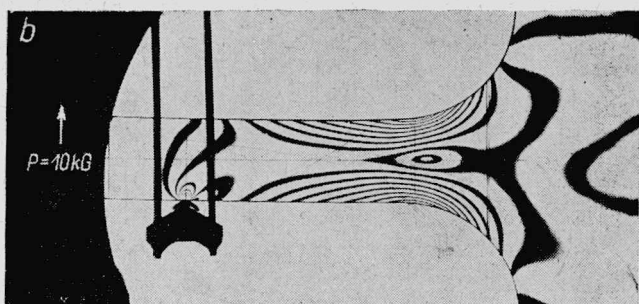
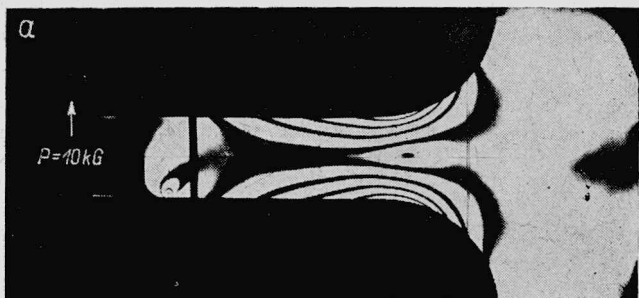
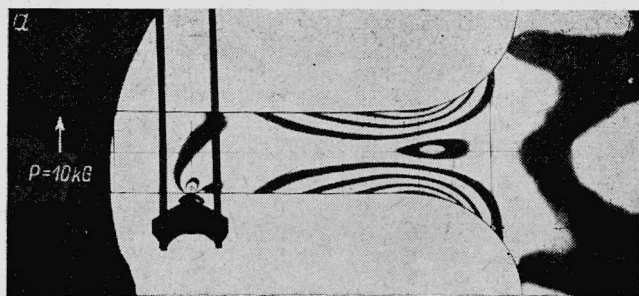
a-zdjęcie okrągłej tarczy wykonanej z catalinu 800, z odkształconymi plastycznie okolicami punktów przyłożenia sił, jak na rys. *b*; zdjęcie wykonano w równoległej wiązce światła naturalnego; *b*-szkieł partii modelu odkształconej plastycznie

w omawianym przypadku jest zakłócony nawet w obszarach bardziej oddalonych, co widoczne jest na rys. 45c. Po odciążeniu modelu przedstawionego na rys. 45c pozostał w okolicy obszarów odkształconych plastycznie pewien stan naprężenia uwidoczniiony przez zespół izochrom, jak to pokazuje rys. 45d. Wartość obciążenia posiada zasadniczy wpływ na rząd powstających izochrom, a tym samym na wartość błędu pomiarowego; im wartość obciążenia jest wyższa, tym wyższy jest rząd izochrom, a więc tym mniejszy jest względny błąd pomiarowy wywołany początkową anizotropią optyczną modelu. Poza tym w miarę wzrostu obciążenia wzrasta gradient naprężeń, wobec czego izochromy stają się cieńsze; ułatwia to znakomicie poprawne ustalenie przebiegu izochromy. Opisany wpływ ilustrujemy zdjęciami na rys. 46, podającym przebieg izochrom w przecie utwierdzonym, zginanym siłą skupioną. Zdjęcia te wykonane są jak przeciętne zdjęcia pomiarowe, to znaczy na jasnym i ciemnym polu widzenia przy określonych wartościach obciążeń. Wpływ wartości obciążenia na dokładność izoklin omówimy w p. 5.

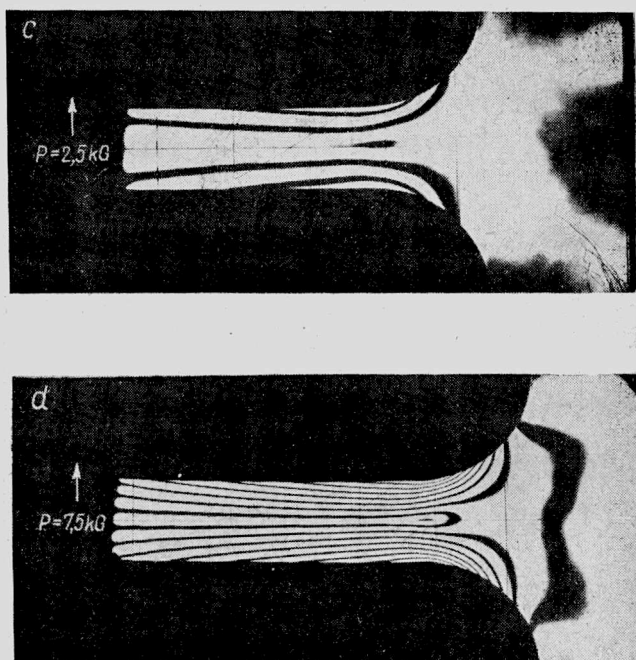


Rys. 45. Wpływ odkształceń plastycznych na przebieg izochrom w okrągłej tarczy ściskanej wzdłuż średnicy dwiema skupionymi siłami

material tarczy catalin 800, średnio utwardzony; *a*-teoretyczny przebieg izochrom wyznaczony na podstawie zależności teorii sprężystości; *b*-doświadczalny przebieg izochrom przy odpowiednio dobranej wartości sił obciążających; nieznaczne zniekształcenia w okolicach punktów przyłożenia sił; *c*-przebieg izochrom przy wysokiej wartości sił obciążających; znaczne zniekształcenia przebiegu izochrom; *d*-stan napęcia po odjęciu sił obciążających, spowodowany powstałymi odkształceniami plastycznymi w sąsiedztwie punktów przyłożenia sił



Rys. 46



Rys. 46. Zdjęcia izochrom w przecie utwardzonym, zginanym siłą skupioną P , wykonywane w tych samych warunkach, przy różnych wartościach siły obciążającej materiał pręta BT-61893; *a*-siła $P = 10$ kG, *b*-siła $P = 20$ kG, *c*-siła $P = 2,5$ kG (siła przyłożona poza zdjęciem), *d*-siła $P = 7,5$ kG, (siła przyłożona jak w *c*)

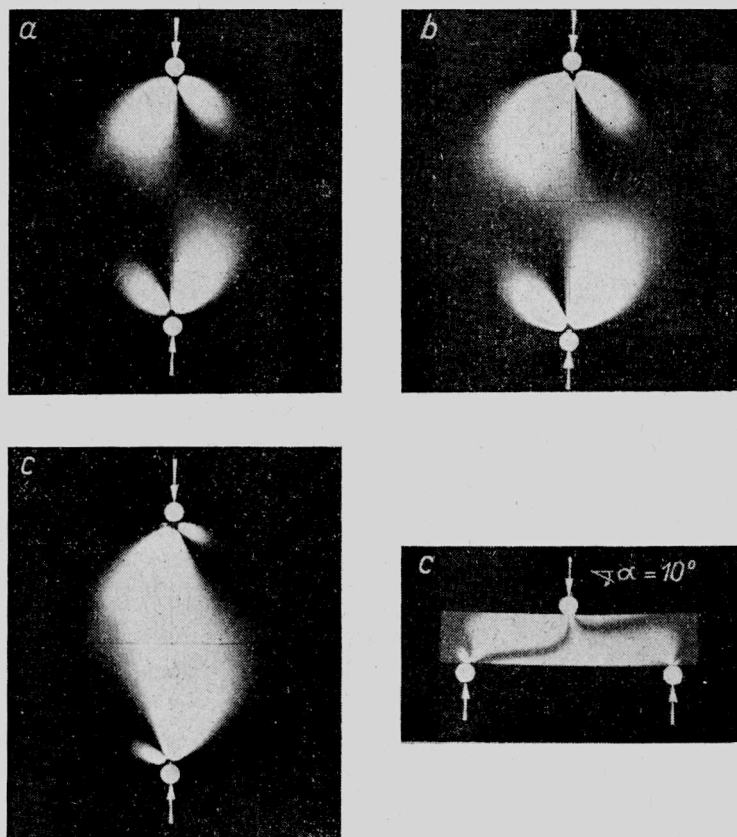
5. Wpływ techniki rejestracji

Pomiary elastooptyczne z reguły rejestrujemy fotograficznie, chyba że chodzi jedynie o pomiar orientacyjny, przy którym wystarcza rejestracja odręczna. Omawiamy obecnie tylko rejestrację fotograficzną.

5.1. Rejestracja izoklin. Stosujemy dwie różne techniki fotografowania izoklin zależnie od materiału modelu. Do zdjęć izoklin możemy użyć tego samego modelu, co do zdjęć izochrom, a więc materiału o wysokiej wartości stałej materiałowej; można też wykonać drugi model z materiału mniej czułego optycznie i o niskiej wartości stałej materiałowej, ale posiadającego inne zalety, jak mała wartość pełzania, brak efektu naskórkowego, pełna izotropia optyczna itd. (np. żywice metakrylowe). Najchętniej używanym materiałem na modele do zdjęć izoklin jest plexiglas.

Jeśli gradient różnicy naprężeń głównych w większych partiach modelu jest zbyt mały, to zdjęcia izoklin na modelu z plexiglasu w takich partiach modelu są słabo czytelne; izokliny są rozmyte i rozplývają

się; przypadek taki zachodzi np. w okrągłej tarczy ściskanej wzdłuż średnicy dwiema skupionymi siłami, w której nie można jednoznacznie określić przebiegu izoklin w dużej ich części. Odmienne natomiast przedstawia się sprawa przy belce podpartej i obciążonej siłą skupioną. Te przypadki ilustrują zdjęcia na rys. 47.



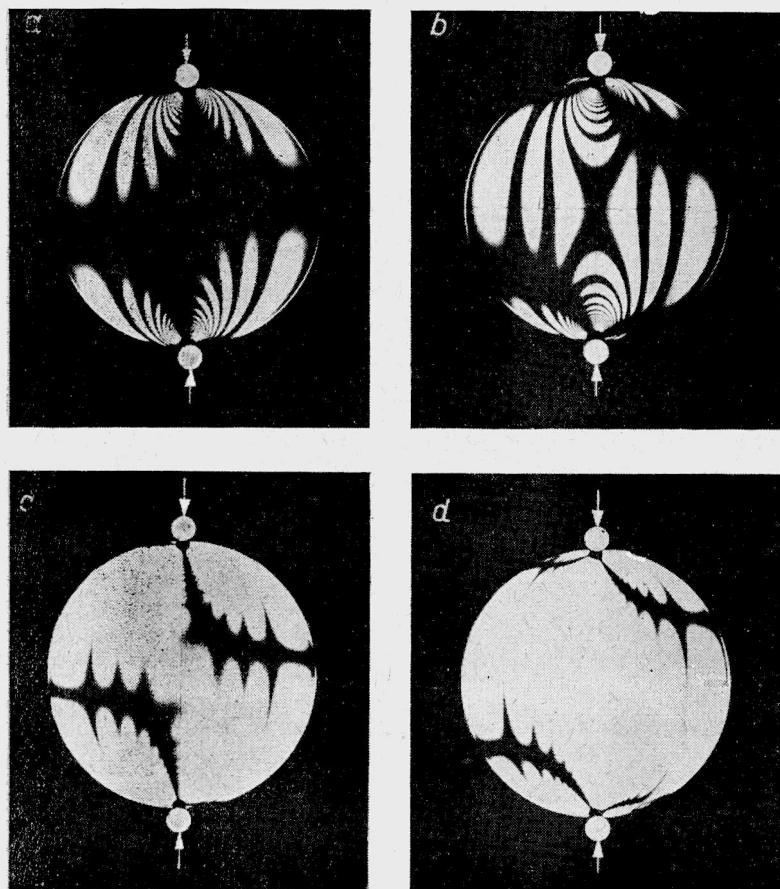
Rys. 47. Zdjęcia izoklin na modelach z plexiglasu w świetle lampy rtęciowej

a-zdjęcie izokliny 10° w tarczy jak na rys. 45, *b*-zdjęcie jak *a* — dłuższy czas naświetlania negatywu, *c*-tarcza jak wyżej izoklina 30° — przebieg izokliny łatwiejszy do ustalenia niż w wypadku *a*, *d*-izoklina w belce podpartej, obciążonej siłą skupioną — przebieg izokliny łatwy do ustalenia

Zdjęcia izoklin w modelach z plexiglasu dokonywujemy przy świetle białym lub jednobarwnym na dowolnych kontrastowych błonach, przy możliwie wysokich wartościach obciążeń.

Wykonując zdjęcia izoklin na modelach z plastyków o wysokiej stałej materiałowej stosujemy z reguły metodę prześwietlenia zdjęć przy użyciu białego, a więc wolframowego lub rtęciowego, źródła światła

oraz — o ile to jest możliwe — błon panchromatycznych. W tym przypadku model obciążamy silnie, aby możliwie zmniejszyć wpływ początkowej anizotropii optycznej modelu na położenie izoklin. Zbyt wysoka wartość obciążenia może jednak spowodować wyboczenie się modelu, co



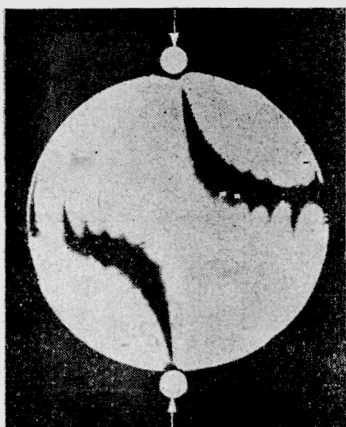
Rys. 48. Zdjęcia okrągłej tarczy ściskanej wzdłuż średnicy dwiema skupionymi siłami, dokonane w równoległej wiązce liniowo spolaryzowanego światła

materiał modelu CR-39; czas zdjęć 24 godziny po wykonaniu modelu, zdjęcia wykonane przy tej samej wartości siły obciążającej; *a*—światło jednobarwne ($\lambda = 546,1 \text{ m}\mu$), izoklina 10° ; *b*—światło jednobarwne ($\lambda = 546,1 \text{ m}\mu$), izoklina 30° ; *c*—światło lampy rtęciowej, zdjęcie prześwietlone, izoklina 10° ; *d*—światło lampy rtęciowej, zdjęcie prześwietlone, izoklina 30°

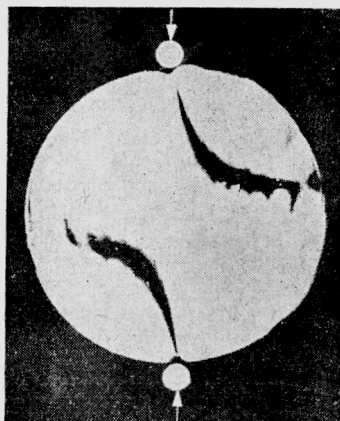
pociąga za sobą zniekształcenie przebiegu izoklin oraz częściowy ich zanik w pewnych partiach modelu, jak to już zostało wyżej omówione. Sygnałem rozpoczynającego się wyboczenia jest zanikanie punktów osobliwych oraz rozjaśnianie się odpowiednich partii izoklin. Ogólnie

biorąc w obszarach, w których panuje trójwymiarowy stan naprężenia, izokliny rysują się blade lub są nawet poprzerywane.

Przy użyciu światła jednobarwnego otrzymamy w takim przypadku na obrazie modelu oba układy linii, izokliny oraz izochromy, jak to ilustrują zdjęcia na rys. 48a i 48b. Przy użyciu światła wolframowego lub (ostatecznie) rtęciowego, stosując dostatecznie długi czas naświetlania zdjęć oraz, o ile to możliwe, błony panchromatyczne, otrzymujemy zdjęcia jak na rys. 48c i 48d — izochromy znikają całkowicie lub w bardzo znacznym stopniu, tak iż przebieg izoklin łatwo jest ustalić. Należy jednak pamiętać, iż nawet stosunkowo drobne, lokalne naprężenia własne modelu spowodować mogą lokalne odchylenia lub przerwania izoklin, jak to jest widoczne na zdjęciu 49, przedstawiającym izoklinę 10° w tarczy jak na rys. 48.



Rys. 49. Zdjęcie izokliny 10° w świetle wolframowym materiał tarczy BT-61893; izokliny poprzerywane na skutek obecności lokalnych naprężeń własnych; zdjęcie nieco za długo naświetlane, kontur tarczy staje się miejscami nieostry



Rys. 50. Zdjęcie izokliny 10° w świetle wolframowym zdjęcie jak na rys. 49, za długo naświetlone — kontur tarczy częściowo zupełnie nieostry

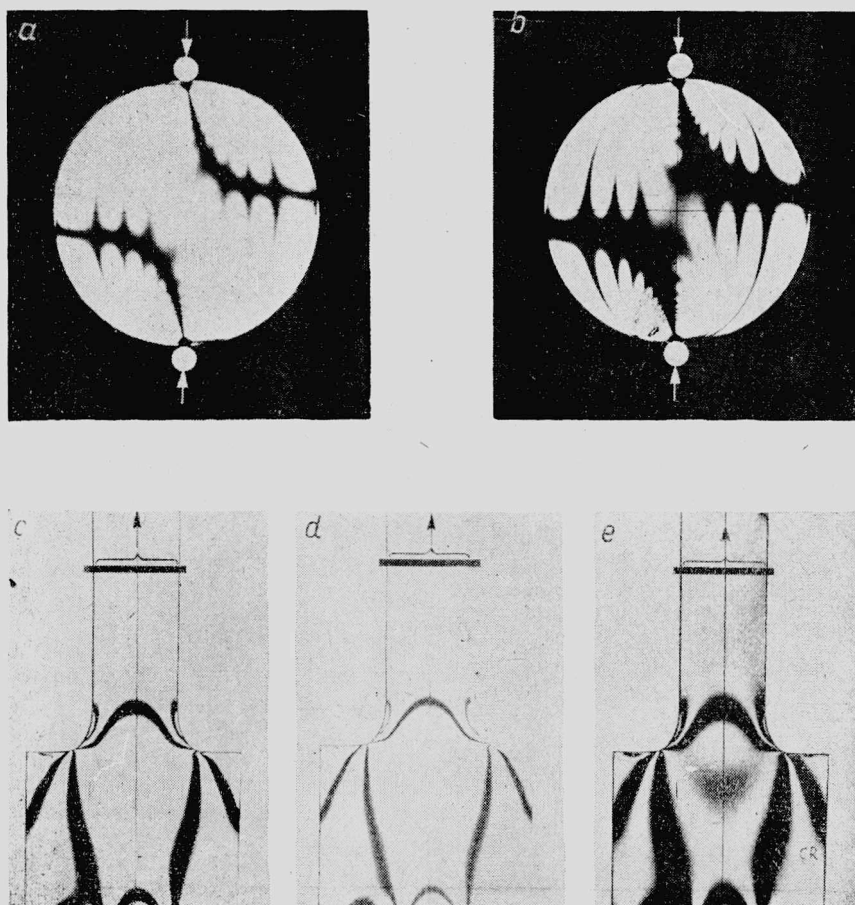
Przy zastosowaniu metody prześwietlania zdjęć izokliny są tym ostrzejsze i cieńsze, im czas naświetlania jest dłuższy. Przy zbyt długim jednak czasie naświetlania zaczynają się zacierać kontury modelu, jak to jest widoczne na rys. 50; taki czas naświetlania jest więc za długi.

5.2. Rejestracja izochrom. Najczęściej spotykanym błędem jest niedoświetlenie zdjęcia; uniemożliwia to wyznaczenie przebiegu izochrom w obszarach spiętrzenia naprężeń, w których izochromy są cienkie i leżą bardzo blisko siebie. Kontrola czasu naświetlania przy zdjęciach izochrom jest podwójna. Przede wszystkim negatyw powinien być kontrastowy, obszary pomiędzy izochromami powinny być zupełnie białe; poza

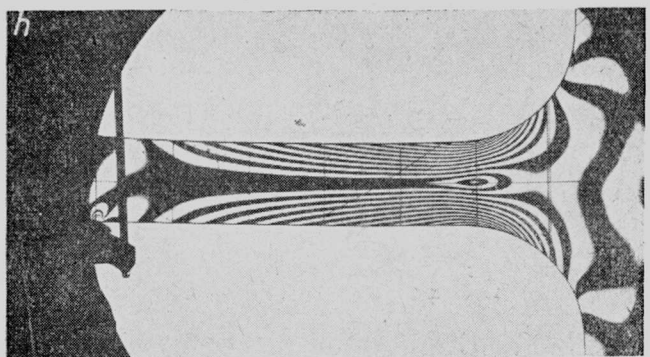
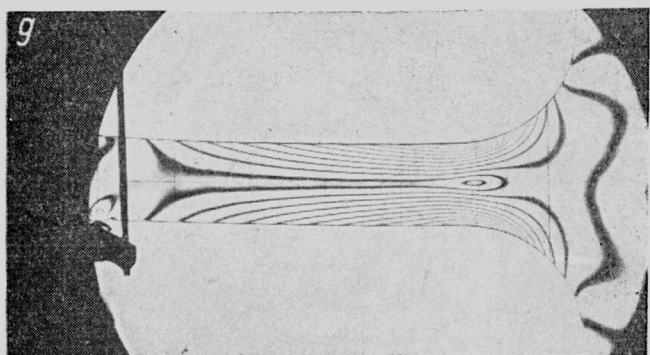
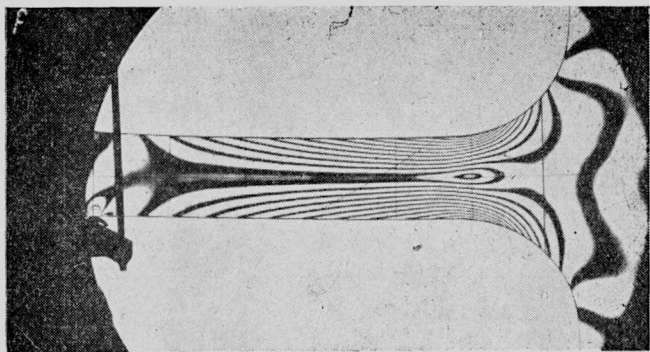
tym izochromy w obszarach, w których się one bardzo zagęszczają, powinny być dobrze widoczne przy obserwacji przez lupę dającą około 10-krotne powiększenie w stosunku do wymiarów modelu.

5.3. Kopiowanie negatywów. Pozytyw — podobnie jak negatyw — powinien być kontrastowy. Im dłuższy jest czas naświetlania, tym szerokość izochrom i izoklin rośnie. Zdjęcia na rys. 51 przedstawiają układy izoklin oraz izochrom otrzymane z tych samych negatywów przy różnych czasach kopiowania, na jasnym i ciemnym polu widzenia. Na zdjęciach rys. 52 widoczny jest wpływ niedoświetlenia negatywu.

Papier na odbitki dobiera się w zależności od charakteru pola naprężeń i od przeznaczenia zdjęcia. Im trwarszy jest papier, tym obraz izoklin oraz izochrom jest plastyczniejszy, jednocześnie jednak tym mniej szczegółów zostaje zarejestrowanych na odbitce.

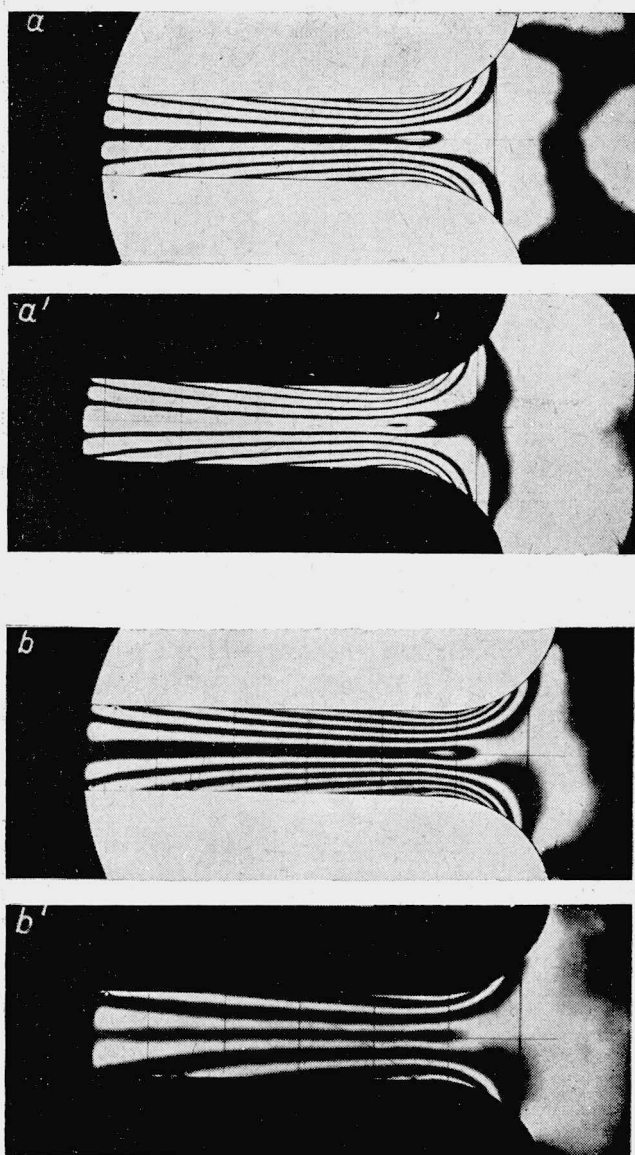


Rys. 51



Rys. 51. Wpływ czasu kopiowania zdjęcia na obraz izoklin i izochrom przy tych samych negatywach

a-odbitka pozytywna z tego samego negatywu co zdjęcie 48 *c*, tylko krócej naświetlana (5 sek.), *b*-jak w *a*, czas kopiowania za długi (90 sek.), *c*-zdjęcie izochrom w pręcie rozciągany wykonane w równoległej wiązce zielonego światła rtęci, materiał preta CR-39, zdjęcie prawidłowo skopiowane (7 sek.), *d*-zdjęcie jak w *c*, czas kopiowania za krótki (3 sek.), *e*-zdjęcie jak w *c*, czas kopiowania za długi (40 sek.), *f*-zdjęcie izochrom w pręcie zginany, wykonane w równoległej wiązce zielonego światła, materiał preta BT-61893, zdjęcie prawidłowo skopiowane (7 sek.), *g*-zdjęcie jak w *e*, czas kopiowania za krótki (3 sek.), *h*-zdjęcie jak w *f*, czas kopiowania za długi (40 sek.)



Rys. 52. Wpływ czasu naświetlania negatywu na obraz izochrom w pręcie zginanym, prześwietlonym równoległą wiązką zielonego światła rtęci, czasy kopiowania takie same

a-negatyw prawidłowo naświetlony, *b*-negatyw niedoświetlony

Literatura cytowana w tekście

- [1] M. M. F r o c h t, *Photoelasticity*, t. 1. Wiley, New York 1941.
- [2] L. F ö p p l i E. M ö n c h, *Praktische Spannungsoptik*, J. Springer, Berlin 1950.
- [3] H. T. J e s s o p i F. C. H a r r i s, *Photoelasticity — Principles and Methods*, Cleaver-Hume Press, Londyn 1949.
- [4] J. C o o l i d g e, *An Investigation of the Mechanical and Stress-Optical Properties of Columbia Resin CR-39*, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., Cambridge Mass., t. 6, 1 (1948).
- [5] A. K u s k e, *Das Kunstharz Phenolformaldehyd in der Spannungsoptik*, Forsch. Ing. Wes., t. 9, 1938.
- [6] M. F. B o k s z t i e j n, *O razrieszajuszczey sile polarizacjonnoj ustanowki dla issledowanja napriazhenij*, Tiechn. Fiz. 10 (1949).
- [7] B. R. L e e, R. M e a d o w s, W. F. T a y l o r, *The Photoelastic Laboratory at the Newport News Shipbuilding and Dry Dock Company*, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., t. 6, 1 (1948).
- [8] E. M. M ö n c h, *Praxis des spannungsoptischen Versuchs mit Dekorit als Modellwerkstoff*, Ing. Arch., 16, 3-4 (1948).
- [9] A. K. P r e i s s, *Izgotowlenje płoskich modelej dla polarizacjonno-opticzekowo mietoda issledowanja napriazhenij*, Zawodsk. Labor. 9 (1950).
- [10] A. J. D u r e l l i, *Discussion of the Paper Entitled Photoelasticity Laboratory at the Newport News Shipbuilding and Dry Dock Company*, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., t. 6, 1 (1948).
- [11] R. B. H e y w o o d, *Modern Applications of Photo-elasticity*, Inst. Mech. Ing. Journ. a Proc., t. 158, 2 (1948).
- [12] W. A. P. F i s c h e r, *Basic Physical Properties Relied upon in the Frozen Stress Technique*, Inst. Mech. Ing. Journ. a Proc., t. 158, 2 (1948).
- [13] R. W o o r d, C. R. S t o c k, T. A l f r e y Jr., *Measurement of Residual Strees in Thermosetting Plastic*, A.S.T.M. Bull., kwiecień, 1952.
- [14] J. W i j k, *Nouvelles tendances dans les méthodes d'essais des matieres plastiques*, Ind. Plast. Mod., t. 5, 1 (1952).
- [15] E. M ö n c h, *Neue Erkenntnisse zur Herstellung von Modellen für die Spannungsoptik*, Forsch., t. 13, 1 (1949).
- [16] W. L e a f, *The time edge effect: its cause and prevention*, Proc. 15-th Semi-Ann. East. Photoel. Confr., Cambridge (Mass.), 1942.
- [17] B. M a x w e l l, J. P. H a r r i n g t o n, *Effect of Velocity on Tensile Impact Properties of Polymethyl Methacrylate*, Trans. A.S.M.E., t. 74, 4 (1952).

Резюме

ТЕХНИКА ОПТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

На фоне общей характеристики темы и проведения поляризационно-оптических исследований, а также общего описания техники оптических исследований плоского напряженного состояния при постоянной нагрузке внешними силами при помощи поверхностных методов автор обсуждает шире некоторые вопросы, как технику произведения мо-

делей, явление поверхностного эффекта, эффекта отделки, технику измерений и аппаратуру.

Автор описывает проектированную им аппаратуру и приборы, являющиеся основным оборудованием оптической лаборатории. Явление поверхностного эффекта рассматривается автором — на основании проведенных автором оптических наблюдений — не только, как связанных с образующимися собственными напряжениями, но и как связанные с вторичным двойным лучепреломлением, похожим на явления «замораживания напряжений», а также с выступающим изменением коэффициента преломления света, похожего в эффекте на явление *Schlieren*.

Влияние оптической ползучести устраняется автором при помощи так называемого оптического компенсатора ползучести. По вопросу точности оптических измерений рассматривается — между прочим — влияние значения нагрузки, при неправильной нагрузке, на верность получаемых оптических образов.

S u m m a r y

THE TECHNIQUE OF PHOTOELASTIC INVESTIGATION OF PLANE STATES OF STRESS

This paper gives an outline of the photoelastic method and a general description of the technique of photoelastic investigation of plane states of stress with loads constituted by constant external forces, by means of the surface methods. Some problems are treated in detail. These are: technique of model manufacture, skin and machining effect, measurement methods, the problem of apparatus etc.

The author describes an apparatus of his own design and the instruments constituting the basic equipment for a photoelastic laboratory. In view of photoelastic experiments, the skin effect is considered by the author to be linked not only to the stress but also to the secondary orientation birefringence (resembling the phenomenon of «stress freezing») and to the change of the refraction index resembling the phenomenon known under the name of *Schlieren*.

The author suppresses the influence of optical creep by means of an optical creep compensation device.

Discussing the exactness of photoelastic measurement the author considers, among other problems, the influence of faulty loading on the exactness of the photoelastic image.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKOW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 kwietnia 1954 r.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

UKAZAŁY SIĘ

Tom I obejmuje oddzielne zeszyty I - XII i XIV

- I. F. Szelaǳowski, Rozwiązanie zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych
— O pewnych szczególnych przypadkach wytrzymałości tarczy nieograniczonej z odmiennym ośrodkiem zarysu eliptycznego
- II. J. Naleszkiewicz i A. Szaniawski, Drgania i stateczność masztów oraz iglic
- III. Z. Klębowski, Podstawy uwzględniania wzmocnień obwodowych w wytrzymałościowym obliczaniu rury poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia
- IV. M. Życzkowski, Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem siły krytycznej
- V. E. Szczepaniak, Nowa metoda rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach bez wykonywania przecięć
- VI. W. Olszak, Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych (Plastyczne wyczerpanie nośności)
- VII. A. Lisowski, Płyty na sprężystym podłożu
- VIII. J. Nowiński, Wyznaczenie przybliżonej wielkości ugięcia płyt na podstawie metody Ritza
- IX. W. Fiszdon, O pewnej metodzie obliczania amplitud drgań
- X. Z. Wasiutyński, O kształtach pęknięć powierzchniowych
- XI. W. Wierzbicki, Dźwigary załamane w planie
- XII. W. Wierzbicki, O powstawaniu wyboczenia prętów prostych
- XIV. W. Zenczykowski, Podstawy wytrzymałościowe obliczeń statycznych konstrukcji murowanych z cegły

Tom II zeszyt 1

- XVI. I. Malecki, Metody zastosowania rachunku tensorowego w technice
- XVII. J. Nowiński, Podstawy teorii plastyczności (I). Siedem wykładów
- XVIII. W. Nowacki, Statyka rusztów płaskich

Tom II zeszyt 2

- XIX. W. Bogusz, Z teorii płyt ortotropowych
- XX. J. Szmelter, Rozwiązanie zagadnienia błony metodą różnic skończonych z użyciem specjalnego liczydła
- XXI. M. Sokołowski, Dwustopniowy sposób obliczania pewnego typu płyt ortotropowych
- XXII. M. Życzkowski, Wyboczenie sprężysto-plastyczne niektórych prętów pryzmatycznych

Tom III zeszyt 1

- XXIII. M. P. Wołarowicz, Badania nad własnościami reologicznych układów rozproszonych
XXIV. W. Pogány, O pewnych zagadnieniach mechaniki gruntów
XXV. J. Nowiński, Szlakami teorii sprężystości
XXVI. K. Wolski, Metoda punktów kinetycznych
XXVII. J. T. Pindera, Technika elastooptycznych badań płaskiego stanu naprężenia

W D R U K U

- XIII. W. Wierzbicki, Kierunki możliwych usprawnień w obliczeniach łuków
XV.1. W. Wierzbicki, Zastosowanie różnic skończonych w przypadkach dwukierunkowych stanów naprężeń w budowlach
XV.2. W. Wierzbicki, O geometrycznych metodach badania konstrukcji prętowych

W P R Z Y G O T O W A N I U

- XXVIII. W. Olszak i A. Sawczuk, Teoria nośności granicznej w świetle weryfikacji doświadczalnej
XXIX. A. Sawczuk, Zagadnienia nośności granicznej elementów rozciąganych i zginanych w zastosowaniu do teorii zbiorników prostokątnych
XXX. M. Życzkowski, Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ ukazuje się jako kwartalnik i kosztuje w prenumeracie rocznej 60 zł.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE ukazywały się do połowy 1954 r. jako wydawnictwo seryjne. Zeszyty od I do XII i zeszyt XIV są do nabycia w księgarniach naukowych Domu Książki. Zamówienia za zaliczeniem przyjmuje Księgarnia Naukowa, Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7.

Poczynając od III kwartału 1954 r. ROZPRAWY INŻYNIERSKIE ukazują się jako kwartalnik i kosztują w prenumeracie rocznej 80 zł.

Sprzedaż bieżących numerów odbywa się w księgarniach naukowych Domu Książki i w placówkach «Ruchu».
