

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
K O M I T E T G E O D E Z J I

G E O D E Z J A I K A R T O G R A F I A

K W A R T A L N I K N A U K O W Y

T O M I V • Z E S Z Y T 4



P A Ń S T W O W E
W Y D A W N I C T W O N A U K O W E
W A R S Z A W A

1 9 5 5

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
K O M I T E T G E O D E Z J I

G E O D E Z J A I K A R T O G R A F I A

KWARTALNIK NAUKOWY

TOM IV • ZESZYT 4



P A Ń S T W O W E
W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

W A R S Z A W A

1 9 5 5

KOMITET REDAKCYJNY

Jan Różycki (redaktor naczelny), Bronisław Dzikiewicz
(zastępca redaktora), Marian Brunon Piasecki (sekretarz)

RADA REDAKCYJNA

Franciszek Biernacki, Tadeusz Kochmański, Zygmunt Kowalczyk,
Stanisław Kryński, Henryk Leśniok, Janusz Tymowski

Adres Redakcji: Politechnika Warszawska,
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 1

Nakład 970 egz.	Do składania 29 IX 1955
Ark. wyd. 4,0, druk. 3,5	Podpisano do druku 1 XII 1955
Papier dr. sat. 70 g V kl. 70×100 cm	Druk ukończ. w grudnia 1955
Cena zł 10,—	Nr zam. 450/135. K-6-3043
POZNAŃSKA Drukarnia Naukową — POZNAŃ, FREDRY 10	

Stanisław Szpetkowski

Optyczny pomiar odległości na zasadzie wcięć mimośrodowych

Wstęp

Sposób optycznego pomiaru odległości przy wykorzystaniu teodolitu z lunetą osadzoną ekscentrycznie można zaliczyć do przypadku, gdy stała baza znajduje się na stanowisku obserwacji, kąt paralaktyczny jest zmienny, a punkt celu jest stały. Sposób ten można nazwać krótko sposobem optycznych wcięć mimośrodowych. Teodolit stosowany przy tych pomiarach posiada bazę równą odległości osi lunety centralnej (lub osi pionowej teodolitu) od osi celowej lunety ekscentrycznej. Wykorzystując wielkość bazy i wyznaczając różnice odczytów wykonanych przy dwóch położeniach lunety wycelowanej na punkt stały można wyznaczać odległości od teodolitu do punktów celu. Dokładność pomiaru sposobem wcięć mimośrodowych zależy od samej odległości mierzonej, od wielkości bazy i dokładności określenia kąta paralaktycznego.

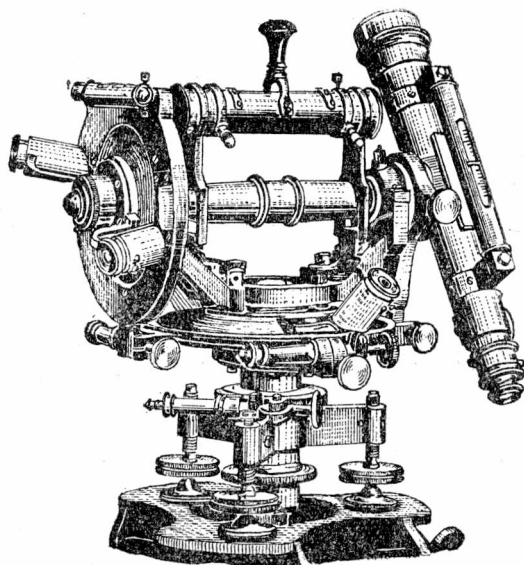
1. Zasada pomiaru odległości teodolitem z boczną lunetą ekscentryczną

Rysunek 1a przedstawia teodolit z lunetą ekscentryczną, tj. umieszczoną w pewnej odległości od osi pionowej teodolitu. Rys. 1b przedstawia teodolit z dwoma lunetami: centralną i ekscentryczną. Odległość celowej lunety ekscentrycznej od pionowej osi teodolitu jest bazą teodolitu ekscentrycznego; nazywa się ją promieniem mimośrodów, który oznacza się literą r . Przy znanym promieniu mimośrodów lunety, wykonując same tylko obserwacje na punkt celu (odczyty noniuszy) przy dwóch położeniach lunety można określić odległość d stanowiska teodolitu od celu.

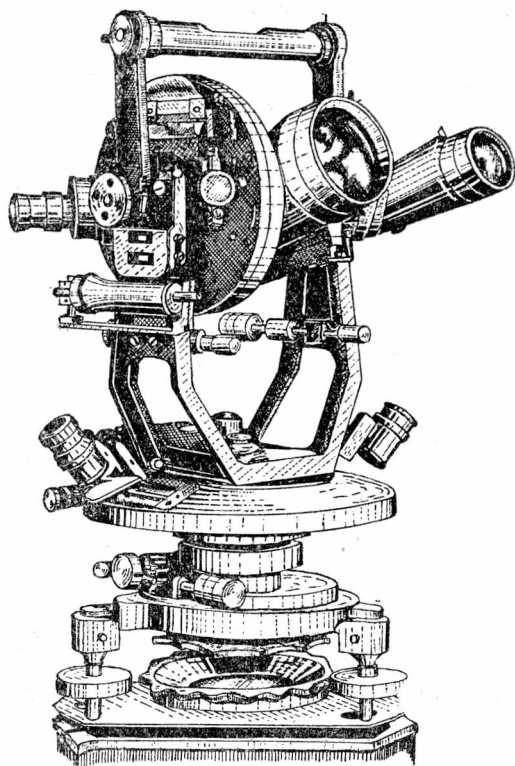
Litery na rys. 2 oznaczają: S — środek teodolitu, P — punkt celu, r — promień mimośrodów, d — odległość, O_1, O_2 — odczyty koła poziomego, φ — kąt paralaktyczny.

Z rozwiązania trójkąta prostokątnego $SO.P$ można wyznaczyć odległość d punktu S od P :

$$d = \frac{r}{\sin \varphi} \quad (1)$$



Rys. 1a



Rys. 1b

Otrzymana wielkość d jest rzutem poziomym.

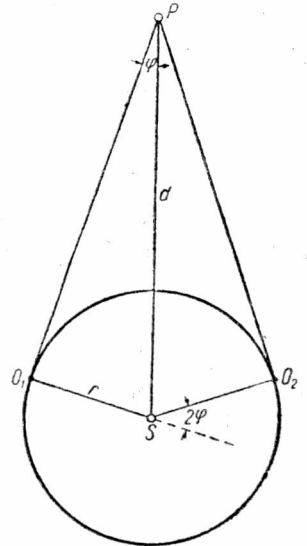
Dla pomiaru odległości sposobem wcięć mimośrodowych należy przy znanej stałej wartości promienia r określić kąt paralaktyczny φ jako połowę różnicy odczytów koła poziomego, dokonanych z dwóch stron limbusa (w 2 położeniach lunety). Promień mimośrodu powinien być określony przed przystąpieniem do pomiarów.

2. Rektyfikacja teodolitu i wyznaczenie promienia mimośrodu

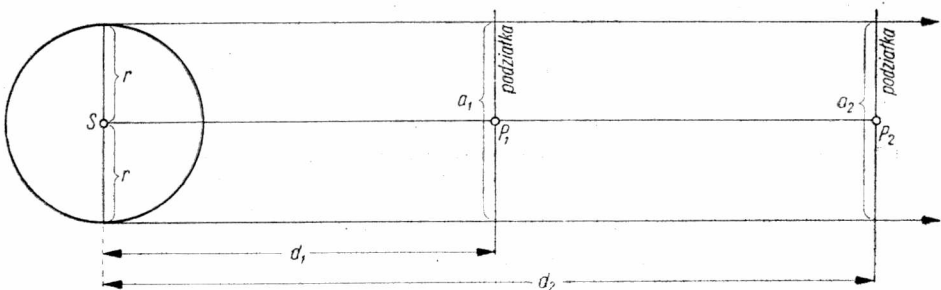
Jak wynika z wzoru (1), promień r i kąt φ należy wyznaczyć bardzo dokładnie. Bezpośrednie wyznaczenie wielkości r , tj. pomiar podziałką, tutaj nie wystarcza, pozostaje zatem sposób pośredni w wyniku próbnych obserwacji.

Z uwagi na występowanie w teodolicie błędów kolimacji oraz inklinacji, wyznaczenie kąta φ (a zatem i odległości d) jest obarczone błędami. Dlatego konieczne jest usunięcie z możliwie maksymalną starannością obu błędów instrumentalnych.

Usunięcie błędu kolimacji przeprowadza się przy poziomej lunecie (wpływ inklinacji równy zero). W tym celu wykonuje się obserwacje podziałek (rys. 3) umieszczonych w odległościach $d_1 \dots d_n$. Na podziałkach



Rys. 2



Rys. 3

w 2 położeniach lunety (przy odczytach różniących się dokładnie o 180°) wyznacza się odczyty, a następnie odcinki $a_1, a_2 \dots a_n$. Wielkości tych odcinków powinny być równe i przedstawiać podwójną wartość promienia mimośrodu.

Jeżeli odcinki podziałek nie są równe sobie ($a_1 \neq a_2 \neq a_n$), wówczas występuje błąd kolimacji, który można obliczyć z wzoru:

$$\operatorname{tg} \xi = \pm \frac{a_2 - a_1}{2(d_2 - d_1)}, \quad (2)$$

w którym znak (—) stosuje się gdy $a_2 > a_1$, zaś znak (+) — gdy $a_2 < a_1$.

Promień mimośrodru podaje wzór:

$$r = \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{2(d_2 - d_1)}. \quad (3)$$

Celując teraz na podziałkę w dowolnym punkcie przesuwają się krzyż nitkowy w ten sposób, aby odczyty z obu ustawień lunety wyznaczały odcinek $a_n = 2r$.

Błąd inklinacji usuwa się w wyniku obserwacji wysokiego punktu, przez podniesienie lub opuszczenie jednego końca osi obrotu lunety. Błąd ten należy usuwać bardzo starannie. Do obserwacji przy stromych celowych należy stosować na oś obrotu libele nasadkowe o przewodzie 2—5".

3. Błąd średni pomiaru długości

Przez zróżniczkowanie wzoru (1) względem r i φ i po przejściu z różniczek na błędy średnie otrzyma się wzór określający błąd średni pomiaru odległości sposobem wcięć ekscentrycznych:

$$m_d = \pm \frac{d}{r} \sqrt{d^2 \frac{m_\varphi^2}{\varrho^2} \cdot \cos^2 \varphi + m_r^2}. \quad (4)$$

Ponieważ φ jest małym kątem, można napisać:

$$m_d = \pm \frac{d}{r} \sqrt{d^2 \frac{m_\varphi^2}{\varrho^2} + m_r^2}. \quad (4a)$$

Błąd względny pomiaru długości jest określony wzorem:

$$M_d = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{d^2 \cdot m_\varphi^2}{\varrho^2} + m_r^2}. \quad (5)$$

Jak wynika z wzoru (4), wielkość średniego błędu wyznaczenia odległości jest odwrotnie proporcjonalna do promienia mimośrodru, a wzrasta ze zwiększeniem samej odległości i błędu określenia promienia. Dlatego celem zwiększenia dokładności pomiaru należałoby:

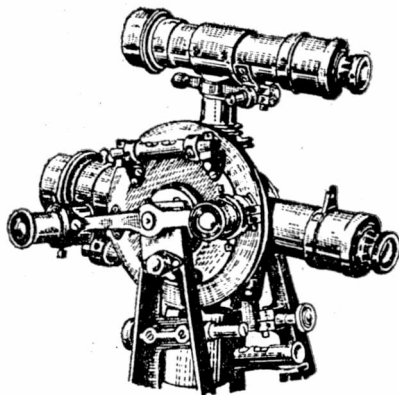
1. stosować teodolit z możliwie dużym promieniem mimośrodru r ;
2. mierzyć kąt φ z największą dokładnością,
3. wyznaczać wartość promienia r z możliwie najmniejszym błędem.

Gdy mierzy się odległości przy stromych celowych należy oprócz tego zwrócić uwagę na staranne zrektyfikowanie teodolitu i dokładne poziomowanie libeli nasadkowej na osi obrotu lunety teodolitu.

Pomiar kierunku teodolitem z lunetą ekscentryczną w dwóch jej ustawieniach (położeniach) jest wolny od wpływów błędów kolimacji i inklinacji, natomiast przy pomiarze kąta paralaktycznego φ wpływ tych błędów nie jest usunięty. Usunięcie go jest możliwe przez zastosowanie specjalnej lunety umożliwiającej dwustronne celowanie od strony obiektywu i okularu. Przy stosowaniu takiej lunety wykonuje się dwie obserwacje (dwa odczyty) z każdej strony limbusea teodolitu.

4. Teodolit z górną lunetą ekscentryczną

Na rysunku 4 przedstawiono teodolit z górną lunetą ekscentryczną umieszczoną w stałej odległości od lunety środkowej. Odległość ta jest promieniem mimośrodów r w płaszczyźnie pionowej. Po doprowadzeniu celowych obu lunet do równoległości, w wyniku określenia różnicy odczytów koła pionowego przy wycelowaniu lunetami środkową i ekscentryczną na punkt stały (kąt paralaktyczny) można określić odległość d stanowiska teodolitu od punktu celu. Wzory (1)–(5) zachowują ważność i dla tego przypadku. Otrzymana odległość d jest odległością pochyłą, którą można zredukować mnożąc przez cosinus kąta nachylenia celowej lunety środkowej.



Rys. 4

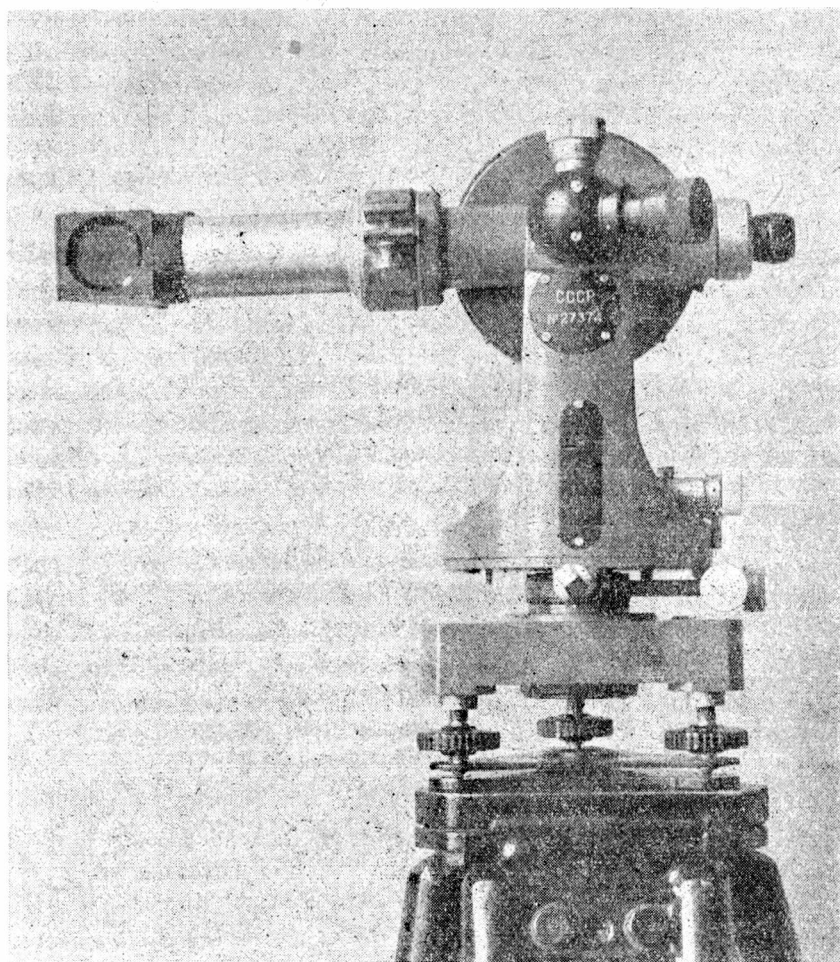
Błąd miejsca zera koła pionowego nie wpływa na dokładność pomiaru odległości pochyłej.

5. Teodolit z lunetą środkową i z nasadką na obiektywie

Zamiast teodolitów z lunetami ekscentrycznymi umieszczonymi mimośrodowo w płaszczyźnie poziomej lub pionowej, można w teodolicie ze środkową lunetą zastosować nasadkę na obiektyw, załamującą celową pod kątem prostym.

Rysunek 5 przedstawia teodolit z nasadką na obiektywie lunety. Teodolitem takim można wykonywać pomiary sposobem wcięć mimośrodowych w płaszczyźnie poziomej. Zasadę pomiaru przedstawia rysunek 6. Celując na punkt P przy 2 położeniach lunety, z różnicy odczytów otrzymuje się wartość podwójnego kąta paralaktycznego.

Należy zaznaczyć, że możliwy jest pomiar odległości teodolitami z lunetą ekscentryczną, obarczonymi błędami kolimacji, lub teodolitami z nasadką załamującą oś celową pod kątem $\neq 90^\circ$. Należy wówczas wy-



Rys. 5

znaczać kąt nieprostokątności ξ (rys. 7). Kąt ten tworzy przecięcie celowej załamanej z kierunkiem obrotu lunety. Odcinek OK jest promieniem mimośrod. Mierzając kąt paralaktyczny takim teodolitem należy wprowadzać do wyniku pomiarów poprawkę ξ z odpowiednim znakiem, wyznaczoną uprzednio sposobem skal poziomych (rys. 3 — wzór (2)) lub wyznaczenie elementów r i ξ przeprowadzać w wyniku pomiaru optycznego kilku znanych odcinków. Wówczas otrzyma się układ równań postaci:

$$d_1 = \frac{r}{\sin(\varphi_1 + \xi)} \quad (6)$$

$$d_2 = \frac{r}{\sin(\varphi_2 + \xi)}$$

.....

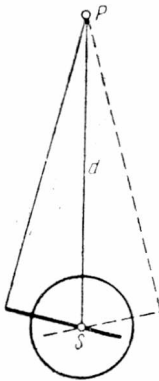
gdzie d — oznacza znaną odległość, zaś φ — pomierzony kąt.

Dla znalezienia r i ξ wystarczają 2 równania. Większa ich ilość pozwoli na wyrównanie szukanych wielkości.

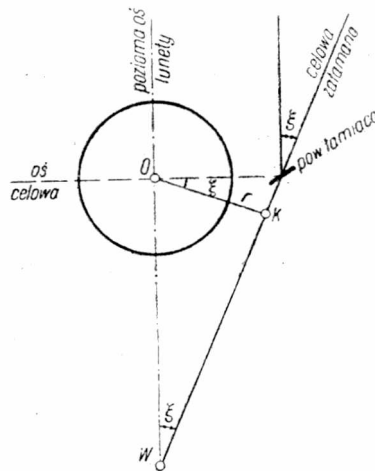
Mając układ 2 równań wielkość kąta ξ można obliczyć z wzoru:

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{d_2 \sin \varphi_2 - d_1 \sin \varphi_1}{d_1 \cos \varphi_1 - d_2 \cos \varphi_2}, \quad (7)$$

natomiast promień mimośrodów określa się na podstawie znanego kąta nieprostokątów z jednego z równań wyjściowych.



Rys. 6



Rys. 7

Jeżeli nasadka obiektywowa posiada śrubkę rektyfikacyjną służącą do zmiany kąta płaszczyzny łamiącej, jest rzeczą wskazaną doprowadzić kąt ξ do zera przez wykonanie odpowiednich obserwacji.

Przy pomiarze z nasadką na obiektywie odległość d oblicza się z wzoru (1), a błędy pomiaru odległości odpowiednio z wzorów (3) i (4).

Stosowanie teodolitu z lunetą środkową zaopatrzoną w nasadkę na obiektywie umożliwia znaczne zwiększenie promienia mimośrodów, czego nie można osiągnąć przy stałych lunetach ekscentrycznych.

6. Przykłady pomiaru odległości sposobem wcięć mimośrodowych

Pomiar teodolitem z boczną lunetą ekscentryczną. Teodolitem ekscentrycznym f-my Max Hildebrand Nr 67265 o dokładności 1' wykonano pomiary dla wyznaczenia stałych r i ξ i ustalenia błędu średniego pomiaru długości.

Pomiary doświadczalne przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Nr pomiaru	Cel	I położenie	Sr.	II położenie	Sr.	2φ	φ	Odległość mierzona taśmą w m
1	1	107° 27' 00"		289° 55' 00"				1,710
	2	287 29 30	28' 15"	103 55 30	55' 15"	3° 33' 00"	1° 46' 30"	
2	1	107 36 30		285 51 30				3,075
	2	33 00	34 45	52 00	51 45	1 43 00	0 51 30	
3	1	287 20 30		288 23 00				4,450
	2	21 00	20 45	19 00	21 00	1 00 15	0 30 07	
4	1	285 45 00		285 19 30				7,250
	2	41 30	43 15	20 00	19 45	0 23 30	0 11 45	

Na podstawie pomiarów przedstawionych w tabeli 1 obliczono kąt nieprostokątności (błąd kolimacji) i promień r . Ujęto je w tabeli 2.

Tabela 2

Z równań na punkty	Kąt ξ	v	vv	Promień r w mm	v	vv
1-2	+17' 23"	- 8	64	61,610	- 82	6724
1-3	+17 32	+ 1	1	61,681	- 11	121
1-4	+17 30	- 1	1	61,675	- 17	289
2-3	+17 42	+11	121	61,894	+202	40844
2-4	+17 32	+ 1	1	61,750	+ 58	3364
3-4	+17 26	+ 5	25	61,545	-147	21609

$$\bar{\xi}_r = +17' 31''$$

$$\Sigma = 213$$

$$r_{sr} = 61,692 \text{ mm}$$

$$\Sigma = 2951$$

$$m_{\xi} = \pm \sqrt{\frac{213}{6(6-1)}} = \pm 2,6''; \quad m_r = \pm \sqrt{\frac{72951}{6(6-1)}} \approx \pm 0,05 \text{ mm}.$$

Przy dokładności odczytu koła poziomego $\pm 30''$ (szacowanie połówki podziału), błędzie celu i kąta ξ równym po $\pm 3''$, otrzyma się całkowity błąd określenia kąta φ z wzoru:

$$m_{\varphi} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{30^2 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^2} = \pm 15,2''.$$

Błąd średni pomiaru długości określi wzór (wg 4a):

$$m_d = \pm \frac{d}{0,061692} \cdot \sqrt{d^2 \frac{231}{\rho^2} + 0,00005^2}.$$

Pomiar teodolitem z nasadką na obiektywie. Do pomiarów użyto teodolitu Zeiss III o dokładności odczytu $\pm 2''$, z nasadką 12 cm długości. Powierzchnię łamiącą stanowił pryzmat. Elementy dalmierza, tj. promień i kąt nieprostokątności ustalono dwukrotnie niezależnie w wyniku obserwacji 2 podziałek i w wyniku pomiaru do 2 punktów.

Poniżej podano obliczenia elementów r i ξ w wyniku czterokrotnych obserwacji punktów A (4,951 m) i B (3,992 m). Przy celu na punkt A kąt paralaktyczny wynosił $2^\circ 54' 06'' \pm 4,5''$, a przy celu na punkt B $3^\circ 27' 17'' \pm 5''$.

Według wzoru (6):

$$4,951 = \frac{r}{\sin(2^\circ 54' 06'' - \xi)}; \quad 3,992 = \frac{r}{\sin(3^\circ 27' 17'' - \xi)}.$$

W wyniku rozwiązania powyższego układu otrzymano:

$$\xi = 36' 03''; \quad r = 0,19696 \text{ m}.$$

Celem praktycznego ustalenia dokładności pomiaru odległości sposobem wcięć wykonano pomiary na różnie oddalone punkty i z czterech niezależnych pomiarów na każdy określono błędy średnie pojedynczego pomiaru. Jako wartości bezbłędne przyjmowano odległości pomierzone bezpośrednio taśmą. Wyniki ujmuje tabela 3. Średni błąd względny wynosił około 1 : 1000.

Tabela 3

Odległość d w m	1,5	3,2	6,0	12,1	20,4	30,0
Błąd średni pojedynczego pomiaru w mm	1,1	3,0	8,4	14,2	22,7	28,5
Błąd względny	$\frac{1}{1360}$	$\frac{1}{940}$	$\frac{1}{710}$	$\frac{1}{850}$	$\frac{1}{900}$	$\frac{1}{1050}$

7. Zastosowanie wcięć mimośrodkowych

Na podstawie przeprowadzonych rozważań i danych liczbowych z praktyki, można określić zastosowanie sposobu wcięć mimośrodkowych. Z uwagi na stosunkowo niski rząd dokładności pomiarów, malejący szybko ze wzrostem odległości, zastosowanie omawianego sposobu można ograniczyć:

1. Do przybliżonego wyznaczania niedużych odległości, np. przy pomiarach topograficznych w miernictwie powierzchniowym i do zdjęcia szczegółów metodą biegunową w wyrobiskach komorowych kopalń. Stosowane tu maksymalne odległości nie powinny przekraczać 50 m.
2. Do pomiarów krótkich boków poligonów drugorzędnych — w sporadycznych wypadkach.
3. Do pomiarów nawiązań i optycznych sposobów przeniesienia współrzędnych punktu do kopalni (orientacja).

РЕЗЮМЕ

Оптическое определение расстояний с использованием теодолита с внецентричной трубой или оптическое определение расстояний по способу эксцентричных засечек — можно причислить к случаю, когда постоянный базис находится на станции наблюдения и параллактический угол перемен.

Основой этого способа является определение разности отсчетов, произведенных при двух визированиях на пункт внецентричной трубой (или внецентричной и центральной трубами). Базис, которым здесь является радиус эксцентра должен быть определен с большой точностью до производства измерения расстояния.

Для оптического определения расстояний по способу эксцентричных засечек могут применяться инструменты с боковой или верхней внецентричными трубами а также — для измерений в горизонте — обыкновенные теодолиты, снабженные объективными насадками, переламливающими визирный луч под прямым углом.

Сущность определения остается одинаковой для любого инструмента. Расстояние определяется по формуле (1), формулы же (4) и (5) служат для определения ср. кв. ошибок измерения. Относительная ошибка измерения расстояния достигает 1/1000 и по этому способ эксцентричных засечек может найти только ограниченное применение. Удовлетворительные результаты могут быть получены лишь в случае коротких сторон.

Résumé

Le mesurage optique de distance effectué au moyen d'un théodolite avec une lunette excentrique, nommé tout court — le mesurage optique par les intersections d'excentricité — peut être rangé au cas — où la base constante se trouve sur le poste d'observation et l'angle parallactique est variable.

Le principe de ce mesurage optique consiste en détermination de différence des lectures qui sont effectuées par les deux visés de lunette excentrique vers le point (ou de lunette excentrique et de lunette centrale).

La base qui constitue ici le rayon de l'excentricité doit être déterminée avec une grande exactitude avant le mesurage. Pour le mesurage optique de distance effectué par le procédé des intersections d'excentricité peuvent être employés les théodolites avec une lunette excentrique de côté ou d'au-dessus ainsi que—pour les mesurages à niveau—les simples théodolites munis d'un manchon sur l'objectif, qui réfracte la ligne de visée d'un angle droit.

L'essentiel de mesurage est le même pour chaque instrument. La distance est déterminée ou moyen de la formule 1 et les formules 4 et 5 font connaître les erreurs moyennes de mesurage.

L'erreur relative de mesurage de distance atteint 1/1000 environ et c'est pourquoi l'application de procédé des intersections d'excentricité est assez restreinte et les mesurages de distance peuvent être effectués avec succès seulement à condition que les côtés soient courts.

Stanisław Szpetkowski

Orientacja optyczna przy zastosowaniu wcięć mimośrodowych

Wstęp

Zastosowanie teodolitu z lunetą ekscentryczną boczną do przeniesienia kierunku i współrzędnych z powierzchni do kopalni nie jest zagadnieniem nowym. W szczególności jest znany sposób prof. dra inż. Z. Kowalczyka optycznego przeniesienia kierunku przez szyb pochyły i pionowy na zasadzie wykorzystania własności reagowania oczu na symetrię linii specjalnej bazy lub łąty.

Wprowadzenie optycznego pomiaru odległości sposobem mimośrodowym do obserwacji sygnałów celowniczych na poziomie orientowanym pozwala na wyznaczenie współrzędnych przynajmniej 2 punktów sygnałowych. Do tych punktów na dole przeprowadza się nawiązanie jedną ze znanych metod.

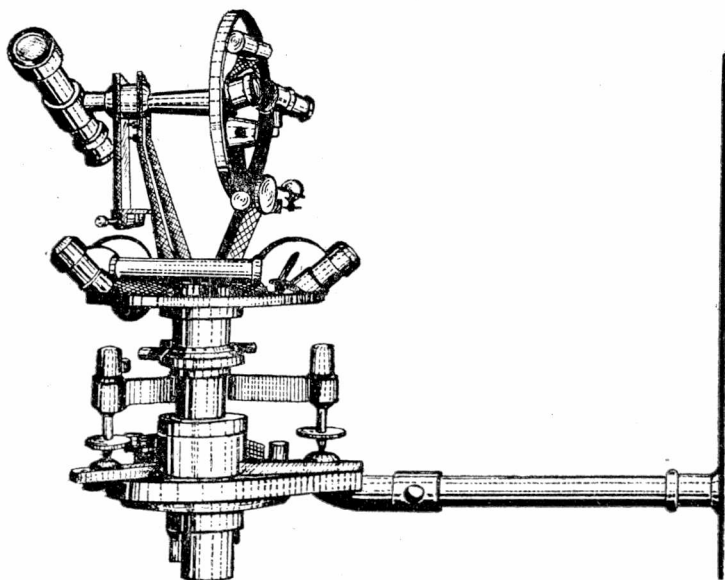
Przy pomiarach teodolitem ekscentrycznym należy zwrócić uwagę na najkorzystniejsze ustawienie go na zrębie szybu, a to ze względu na duży wpływ na dokładność orientacji umieszczenia teodolitu względem kierunku punktów sygnałowych.

Wprowadzenie orientacji optycznej przy zastosowaniu wcięć mimośrodowych do pomiarów odległości znacznie przyspiesza i ułatwia wykonanie pracy w szybie i jak każda orientacja optyczna — eliminuje druty szybowe i czynności związane z pionowaniem mechanicznym, a nawet budowę pomostów.

1. Zasada orientacji

W pobliżu wylotu szybu ustawia się teodolit z boczną lunetą ekscentryczną w ten sposób, aby było możliwe obserwowanie dwóch punktów celowniczych na orientowanym poziomie. Najpraktyczniejsze jest ustawianie teodolitu na rozporze zamocowanej jednostronnie (rys. 1) lub dwustronnie (rys. 2) w obudowie lub dźwigarach szybu. Jako punkt celu na dole służą dwie tarcze — sygnały umieszczone w odpowiedniej od siebie odległości, zależnej od warunków szybowych. Odległość tę nazywa się bazą.

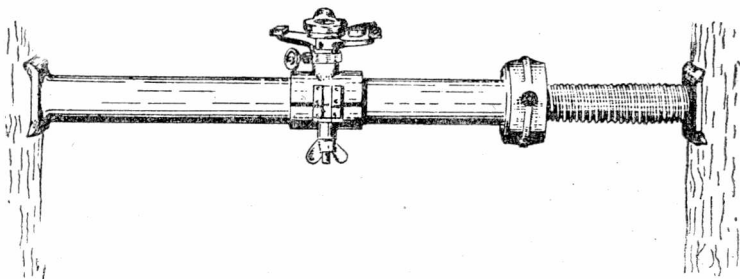
W środku każdej tarczy jest otworek, w który wstawia się ostrze służące do pomiarów na dole. Same tarcze stanowią poziome płytki kartonowe lub szklane z wykreślonymi czarnymi centrycznymi pierścieniami, oświetlane



Rys. 1

przy płytkich szybach światłem odbitym, a przy głębokich — lampami elektrycznymi od dołu.

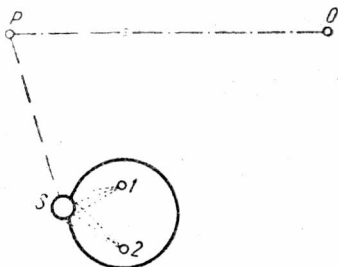
Zrektyfikowanym teodolitem wykonuje się pomiary kierunków na sygnały i punkt stały P na powierzchni (rys. 3), w którym należy pomie-



Rys. 2

zyć również kąt wierzchołkowy. Taśmą mierzy się odległość $S-P$, natomiast wcięciami mimośrodowymi przy stromych celowych odległości poziome $S-1$ i $S-2$. Znając współrzędne punktu P i kierunek na drugi punkt ziemski można wyznaczyć współrzędne punktu dołowego 1 i 2,

a z nich kierunek σ_{1-2} . Przeniesienie kierunku odbywa się zatem, na drodze odpionowania optycznego 2 punktów. Nawiązanie na dole najko-



Rys. 3

rzystniej można wykonać metodą centryczną przez ustawienie teodolitu na podstawie orientacyjnej pomysłu autora w linii 2 stałych punktów — środków tarcz. Przy nawiązaniu należy zmierzyć bazę 1—2.

2. Dokładność przeniesienia współrzędnych i kierunku do kopalni.

Najkorzystniejsze ustawienie teodolitu

Przy omawianym sposobie orientacji kierunek na dole wyznacza się ze współrzędnych 2 punktów określonych z powierzchni. Na dokładność przeniesienia kierunku do kopalni zasadniczy wpływ będzie miało wyznaczenie współrzędnych punktów środków tarcz.

Jak już wiadomo z rozważań dotyczących pomiarów odległości sposobem wcięcia lunetą ekscentryczną, średni błąd określenia długości zależy od samej długości, promienia mimośrodów i dokładności wyznaczenia promienia i kąta paralaktycznego. Ponieważ spotykane przy orientacji odległości nie są większe od 2—3 m, przy promieniu mimośrodu $r = 10$ cm można będzie uzyskać błąd średni pojedynczego pomiaru długości w granicach 2—4 mm.

Na dalsze zwiększenie błędu pomiaru odległości wpływają jeszcze błędy instrumentalne (strome celowe) i błędy naprowadzenia krzyża nitkowego na środki tarcz. Dlatego też celem zmniejszenia wpływu błędów pomiaru optycznego odległości poziomych od teodolitu do tarcz należy:

- 1) stosować dokładnie zrektyfikowany teodolit,
- 2) zwiększyć ilość obserwacji,
- 3) stosować odpowiednie oświetlenie i budowę tarcz,
- 4) umieszczać teodolit w najkorzystniejszym miejscu.

W odniesieniu do punktów (1) — (3) można stwierdzić, że istnieją pewne granice dokładności zrektyfikowania teodolitu oraz ilości obser-

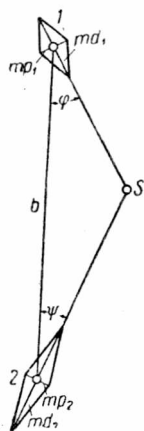
wacji i oświetlenia tarcz. Natomiast bardzo duże znaczenie posiada odpowiednie umieszczenie stanowiska S teodolitu względem linii tarcz świetlnych. Wynika to z następującego rozumowania.

Na błąd wyznaczenia współrzędnych każdej tarczy celowniczej (środek tarczy) wpływają błędy pomiaru odległości i wyznaczenia kierunku S-tarcza. Błąd pomiaru odległości jest — jak już wspomniano — rzędu kilku milimetrów, zaś błąd wyznaczenia kierunku teodolitem na tarcze dla przeciętnych warunków szybowych przy stromej celowej jest równy $10''$ *. Przyjmując średnią odległość ustawienia teodolitu od tarczy równą np. 3 m otrzymamy położenie punktu tarczy określone z następującymi błędami (rys. 4):

w kierunku celowej średnio rzędu : $m_d = \pm 5 \text{ mm}$

w „prostopadłym do celowej równym: $m_n = \pm 0,15 \text{ mm}$.

Wynika z tego, że błąd poprzeczny jest mały i w porównaniu z błędem podłużnym stanowi kilkudziesiątą część jego wielkości. Podobnie ma się z wyznaczeniem położenia drugiej tarczy, gdzie wyróżnia się także dwa błędy: podłużny m_d i poprzeczny m_p . Zależnie od położenia punktu S względem linii tarcz na błąd wyznaczenia kierunku tarcz σ_{1-2} mogą wpływać oba rodzaje błędów albo tylko błędy poprzeczne. Otóż jeżeli punkt S nie leży na linii tarcz (rys. 5), wówczas wielkość błędu wyznaczenia kąta σ_{1-2} określi się z wzoru:



Rys. 5

$$m_{\sigma_{1-2}} = \frac{1}{b} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

$$m_{\sigma_1-2} = \pm \frac{q''}{b} \cdot \sqrt{\frac{e_1^2 + e_2^2}{2}}, \quad (1)$$

gdzie b oznacza bazę, tj. odległość pomiędzy tarczami, e_1, e_2 — błędy wyznaczenia punktu 1, 2 w kierunku bazy 1—2, określane wzorami:

$$e_1 = \pm \sqrt{m_{d_1}^2 \cdot \sin^2 \varphi + m_{p_1}^2 \cdot \cos^2 \varphi} \quad (2)$$

$$e_2 = \pm \sqrt{m_{d_2}^2 \cdot \sin^2 \psi + m_{p_2}^2 \cdot \cos^2 \psi}, \quad (3)$$

gdzie φ i ψ kąty jak na rysunku określa się graficznie.

Wzór (1) przyjmuje minimum dla możliwie dużych b i małych wartości e_1 i e_2 . Najkorzystniejszym warunkiem będzie przypadek ustawienia



Rys. 4

* Wartość powyższa została określona w wyniku pomiarów doświadczalnych w kopalni W. dla celowych nachylonych pod kątem 82° — 89° . Stosowano teodolit f-my Max Hildebrand Nr 67265 o dokładności koła poziomego 1'. Należy uważać, że przy zastosowaniu teodolitów precyzyjnych błąd ten będzie mniejszy.

teodolitu S w połowie bazy. Wówczas $e_1=e_2=m_p$ i wzór (1) przyjmie postać:

$$m_{\sigma_{1-2}} = \pm \frac{\varrho''}{b} \cdot m_p; \quad (4)$$

ale

$$m_p = \pm \frac{5'' \cdot b}{\varrho''}, \quad (5)$$

zatem

$$m_{\sigma_{1-2}} = \pm 5''. \quad (6)$$

Jak wynika z powyższego rozważania, dla przypadku najkorzystniejszego, tj. przy ustawieniu teodolitu dokładnie w połowie linii tarcz, otrzymamy wyznaczony kierunek bazy w kopalni równy stałej wartości, tj. $5''$ — niezależnie od długości bazy.

Przy każdym innym ustawieniu teodolitu między sygnałami tarcz błąd przeniesienia kierunku można określać z wzoru:

$$m_{\sigma_{1-2}} = \pm \frac{7''}{b} \cdot \sqrt{2d^2 + b^2 - 2db}, \quad (7)$$

gdzie d oznacza odległość teodolitu od jego sygnału.

Przy ustawieniu teodolitu w pobliżu jednego sygnału jest utrudnione celowanie lunetą; dlatego też nie powinno się ustawiać teodolitu w poziomej odległości od sygnału mniejszej niż 0,3—0,5 m.

Przy ustawieniu teodolitu na zewnątrz bazy, ale w linii sygnałów można posługiwać się wzorem na wyznaczenie błędu kierunku sygnałów:

$$m_{\sigma_{1-2}} = \pm \frac{\varrho''}{b} \cdot \sqrt{\frac{m_{p_1}^2 + m_{p_2}^2}{2}}, \quad (8)$$

gdzie

$$m_{p_1} = \pm \frac{10}{\varrho''} (d + b), \quad (9)$$

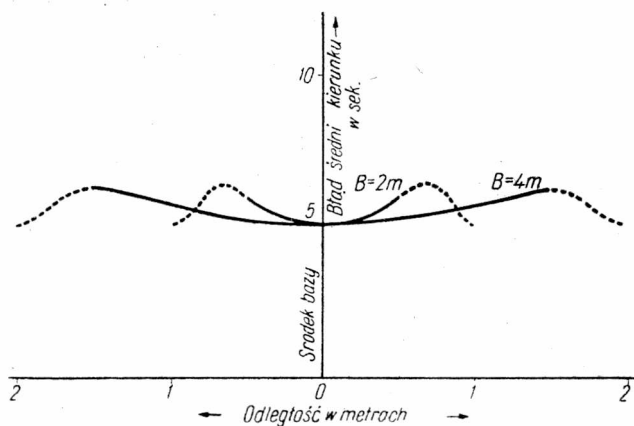
$$m_{p_2} = \pm \frac{10}{\varrho''} \cdot d; \quad (10)$$

we wzorach (9), (10), d oznacza odległość teodolitu od bliższego sygnału.

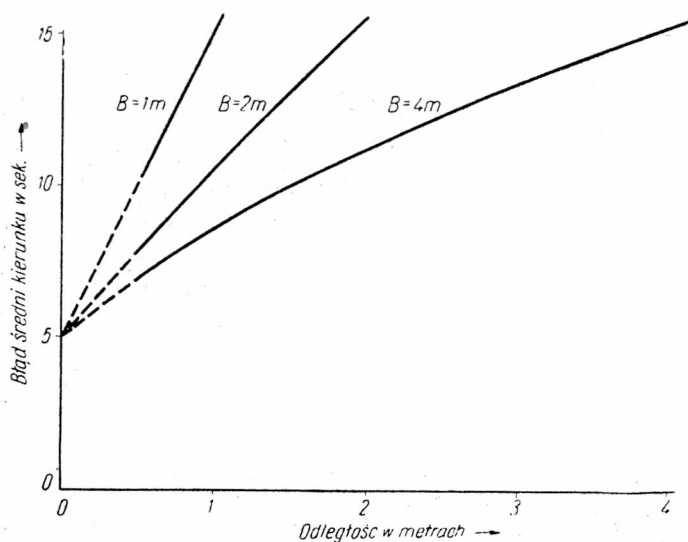
Po wstawieniu wartości (9) i (10) do wzoru (8) otrzymuje się

$$m_{\sigma_{1-2}} = \pm \frac{7''}{b} \cdot \sqrt{2d^2 + b^2 + 2db}. \quad (11)$$

Zależności podane wzorami (6), (7) i (11) przedstawiają wykresy A i B. Wynika z nich, że bezspornie najkorzystniejszym miejscem ustawienia



Wykres A



Wykres B

teodolitu jest środek bazy, a przynajmniej symetralna. Całkowitym błędem przeniesienia kierunku do kopalni sposobem optycznym będzie:

$$M_0 = \pm \sqrt{m_a^2 + m_{\sigma_{1-2}}^2 + m_n^2}, \quad (12)$$

gdzie m_a oznacza błąd pomiaru kąta w punkcie stałym na powierzchni, $m_{\sigma_{1-2}}$ — błąd przeniesienia kierunku na tarcze celownicze, m_n — błąd nawiązania na dole.

Wiadomo, że błąd przeniesienia współrzędnych w kierunku zgodnym z linią tarcz celowniczych jest dość duży. Przy ustawieniu teodolitu S w równej odległości od punktu 1 i 2, pomimo błędów optycznego pomiaru długości można dokładnie określić współrzędne punktów 1 i 2 stosując proste wyrównanie:

$$d_1 + \delta_1 + d_2 + \delta_2 = b, \quad (13)$$

gdzie przez d_1, d_2 oznaczono odległości pomierzone optycznie, a przez b — bazę pomierzoną bezpośrednio taśmą.

Przy ustawieniu teodolitu S na zewnątrz bazy można stosować następujące wyrównanie:

$$(d_2 + \delta_2) - (d_1 + \delta_1) = b, \quad (14)$$

gdzie δ_1 i δ_2 są poprawkami obliczonymi z wprowadzeniem wag równych odwrotności odległości ustawienia teodolitu od odpowiedniego sygnału.

Z uwagi na kierunek rozmieszczenia błędów punktów 1 i 2, nawiązanie na dole należałoby wykonywać sposobami centrycznymi.

4. Czynności pomiarowe i obliczeniowe przy orientacji w punktach

Czynności pomiarowe:

1. Ustawienie sygnałów świetlnych w kopalni.
2. Ustawienie teodolitu S na rozporze nad środkiem bazy (budowa pomostu) lub też w linii tarcz na zrębie szybu (bez pomostu).
3. Pomiar teodolitem kierunków na punkty 1 i 2 bazy i pierwszy punkt stały poligonu na powierzchni oraz pomiar wcięciami odległości d_1, d_2 .
4. Pomiar teodolitem w punkcie poligonowym kąta wierzchołkowego α_1 i taśmą odległości od tegoż punktu do stanowiska S .
5. Nawiązanie na dole do punktów tarcz.

Czynności obliczeniowe:

1. Obliczenie współrzędnych tarcz sygnałowych 1 i 2.
2. Wyrównanie współrzędnych według wzoru (13) lub (14).
3. Wyznaczenie kąta kierunkowego linii tarcz sygnałowych ze współrzędnych.
4. Obliczenie nawiązania dołowego.

5. Przykład orientacji optycznej wykonanej na zasadzie wcięć mimośrodowych

Orientacja miała na celu zorientowanie nowozakładanego poziomu N kopalni znajdującego się 25 m poniżej poziomu M .

Na zrębie szybika międzypoziomowego ustawiono teodolit f-my Max Hildebrand Nr 67265 o dokładności 1'. Na poziomie N ustawiono 2 tarcze-

sygnały (kartony papierowe z centrycznie wykreślonymi kołami o promieniach 1 mm, 1 cm, 3 cm). W środku tarczy osadzono pionowe ostrze o grubości 0,3 mm i wysokości 2 mm. Tarcze umieszczono 1 m powyżej poziomu N ; odległość między nimi wynosiła 1,120 m. Stosowano oświetlenie lampami karbidowymi.

W wyniku pomiaru na górnym poziomie M otrzymano wartości przedstawione w tablicy 1 na str. 212.

Kąty wierzchołkowe:

$$11-12-T = 91^{\circ} 14' 30'',$$

$$12-T-1 = 185^{\circ} 17' 00'',$$

$$12-T-2 = 185^{\circ} 14' 30''.$$

Odległość $12-T=12,475$ m.

Kąty wcięcia mimośrodowego:

$$T-1 = 11' 00'',$$

$$T-2 = 1^{\circ} 36' 30''.$$

Określone poprzednio stałe teodolitu były:

$$r = 6,1575 \text{ cm}, \quad \xi = +17' 21''$$

Obliczenie odległości wcięcia:

$$d_1 = \frac{0,061575}{\sin 28' 21''} = 0,747 \text{ m},$$

$$d_2 = \frac{0,061575}{\sin 1^{\circ} 53' 51''} = 1,859 \text{ m}.$$

Kontrola i wyrównanie odległości:

$$1,859 - 0,747 = 1,112 \text{ m}.$$

Ponieważ pomierzona baza jest równa 1,120 m, zatem błąd z różnicy pomiarów optycznych wcięciami wynosi — 8 mm.

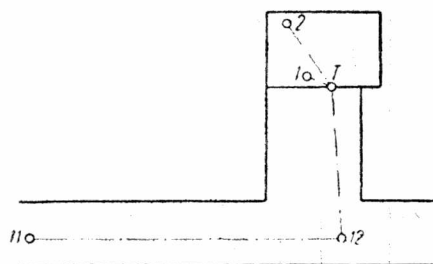
Równanie błędów:

$$1,859 + \delta_2 - 0,747 - \delta_1 = 1,120;$$

$$\delta_2 - \delta_1 = +8 \text{ mm}.$$

$$\text{Wagi: } p_2 = \frac{1}{1,859} = 0,5379; \quad p_1 = \frac{1}{0,747} = 1,3386.$$

$$\text{Równanie normalne: } \left(\frac{1}{p}\right) \cdot k - 8 = 0;$$



Rys. 6

Obliczenie orientacji poziomu N

Nr P. P.	Kąt wierzchołk.			Kąt kierunkowy			Długość boku w m	sin φ cos φ	Przyrosty współrzędnych				Współrzędne		Nr P. P.
	°	'	"	°	'	"			ΔY		ΔX		Y	X	
									+	-	+	-			
11				87	14	50									
12	91	14	30	358	29	20	12,475	0,999 6535 0,026 3223		12,471	0,328		+897,393	+174,272	12
T	185	17	00	3	46	20	0,745	0,065 7901 0,997 8335	0,049 ₀₁		0,743 ₃₈		+884,922	+174,600	T
1													+884,971 ₀₁	+175,343 ₃₈	1
12				358	29	20									
T	185	14	30	3	43	50	1,865	0,065 0645 0,997 8811	0,121 ₃₄		1,861 ₀₅		+884,922	+174,600	T
2													+885,043 ₃₄	+176,461 ₀₅	2

$$1,8765 \cdot k = 8;$$

$$k = 4,26;$$

$$\delta_2 = 0,5379 \cdot 4,26 = 2,3 \text{ mm};$$

$$\delta_1 = 1,3386 \cdot 4,26 = 5,7 \text{ mm}.$$

Wyrównane odległości:

$$d_1 = 0,745 \text{ m};$$

$$d_2 = 1,865 \text{ m}.$$

Kontrola:

$$1,865 - 0,745 = 1,120 \text{ m}.$$

Na podstawie wyrównanych odległości obliczono współrzędne punktów 1 i 2 (na formularzu poligonowym: „obliczenie orientacji poziomu N”), które posłużyły do wyznaczenia kąta kierunkowego σ_{1-2} :

$$\text{tg } \sigma_{1-2} = \frac{0,07233}{1,11767} = 0,0647150;$$

$$\sigma_{1-2} = 3^\circ 42' 38''.$$

Środki tarcz-sygnałów posłużyły do nawiązania na dole. Wyliczenie składowych błędów orientacji: $m_{11-12-T} = \pm 6''$ (z pomiaru). $m_{\sigma_{1-2}}$ liczono wzorem uproszczonym z uwagi na prawie liniowe rozmieszczenie punktów T—1—2:

$$m_{\sigma_{1-2}} = \pm \frac{7}{1,120} \cdot \sqrt{2 \cdot 0,745 + 1,120^2 + 2 \cdot 0,745 \cdot 1,120} = \pm 13''$$

$$m_n = \pm 12'' \text{ (z pomiaru).}$$

Całkowity błąd orientacji:

$$M_0 = \pm \sqrt{6^2 + 13^2 + 12^2} = \pm 18,6''.$$

Błąd graniczny orientacji przyjęty jako trzykrotnie większy od średniego wynosi:

$$M_{gr} = \pm 56''.$$

6. Wnioski

Na podstawie rozważań teoretycznych i pomiarów doświadczalnych (ustalenia średniego błędu kierunku na tarcze celownicze) można stwierdzić, że sposób orientacji przy zastosowaniu wcięć mimośrodowych w pełni nadaje się do orientacji płytkich i średniogłębokich kopalń (100—200 m). Stosowanie ustawiania teodolitu nad środkiem bazy daje bardzo dużą do-

kładność przeniesienia kierunku, a sam pomiar z uwagi na prostotę techniki i szybkość wykonania można zaliczyć — jak każdą metodę optyczną — do najbardziej ekonomicznych metod orientacji.

Głębokość orientacji może być zwiększona dwukrotnie przez umieszczenie tarcz świetlnych w połowie głębokości szybu i wykonanie nawiązań teodolitami ekscentrycznymi od góry i od dołu. Wówczas błąd średni orientacji będzie wyrażony wzorem:

$$M_0 = \pm 1,4 \sqrt{m_a^2 + m_{\sigma_{1-2}}^2}, \quad (15)$$

w którym oznaczenia przyjęto jak we wzorze (12).

Jak wynika z interpretacji wzoru (15), dokładność orientacji dwukrotnie głębszej kopalni przy dwustopniowych pomiarach teodolitem z lunetą ekscentryczną jest całkowicie zadowalająca.

РЕЗЮМЕ

В данной статье автор рассматривает теорию переноса направления и координат в шахту, а также приводит результаты испытательных измерений, которые подтверждая теоретические выводы доказывают одновременно полную возможность применения данного метода ориентирования.

Оптическое ориентирование опирается здесь на возможности оптического измерения коротких (1—3 метровых) сторон инструментом с внецентренной трубой т.е. по способу эксцентричных засечек, ранее рассмотренному.

Теодолит с боковой трубой устанавливается у выхода ствола шахты и по нему визируют на два световых сигнала, находящихся на ориентированном уровне.

По способу эксцентричных засечек можно определить горизонтальные расстояния от инструмента до сигналов, а соответствующие направления — измерением горизонтальных углов. Этих данных достаточно для определения координат двух пунктов в шахте; пункты эти будут в дальнейшем использованы в качестве опоры для привязки. При соответствующей установке инструмента по отношению к сигналам получаются оптимальные условия переноса направления в шахту. Формулы (1)—(10) проводят анализ ошибок переноса направления.

В своей статье автор приводит пример ориентирования по способу эксцентричных засечек. Несмотря на то, что измерения были произведены инструментом малой точности, результаты получились удовлетворительные.

Метод оптического ориентирования с применением эксцентричных засечек благодаря относительно простой и быстрой измерительно-вычислительной технике квалифицируется для его введения в практику маркшейдерского дела.

RÉSUMÉ

Dans ce travail l'auteur envisage la théorie de la projection de direction et des coordonnées dans la mine; il fait connaître aussi les résultats des mesurages d'essai qui confirment les réflexions théoriques que la dite méthode d'orientation peut être, et

avec succès, appliqué en pratique. L'orientation optique est basée ici sur le fait de la possibilité de mesurage optique des courtes (de 1 à 3 mètres) lignes au moyen de théodolite avec la lunette excentrique, c'est à dire par un moyen des intersections d'excentricité, qui a été analysé précédemment.

On place le théodolite avec la lunette latérale audessus (à l'arête) de l'orifice de puits de mine et on observe par cette lunette les deux signaux lumineux qui se trouvent à l'horizon d'orientation. En appliquant les intersections d'excentricité on peut déterminer les distances horizontales de poste d'observation de théodolite jusqu'à ces deux signaux lumineux, et en mesurant les angles horizontales on détermine les direction correspondantes. Ces données sont suffisantes pour déterminer les coordonnées des deux points dans la mine, auxquels on effectue au conséquence les mesurages de connection.

Par une installation adéquate de théodolite par rapport aux signaux on obtient les conditions optimales de la projection d'une direction dans la mine.

L'analyse des erreurs de la projection d'une direction est démontrée par les formules (de 1 à 10).

Dans son travail l'auteur nous donne l'exemple de l'orientation par la méthode des intersections d'excentricité.

Malgré que les mesures ont été effectuées au moyen d'un théodolite d'une faible précision de mesurage on a obtenu les résultats favorables.

La méthode optique d'orientation qui est effectuée au moyen des intersections d'excentricité, grâce à sa rapide et relativement simple technique de mesure et de calculs, se qualifie pour être appliquée aux travaux d'orientation dans la mine.

Witold Senisson

Wzory na błędy średnie poprzeczne i podłużne punktów w prostoliniowym i równobocznym poligonie z uwzględnieniem błędów czteropunktowego nawiazania

Ogólne uwagi o osnovach triangulacyjnych i poligonowych

Reforma triangulacji, przeprowadzona w Polsce w ciągu ostatniego 10-lecia, została już wypróbowana praktycznie i uzyskała bliższe uzasadnienie teoretyczne. Zasadą jej było odstępianie od tradycyjnego podziału triangulacji na rzędy i zastosowanie sieci powierzchniowej o bokach długości około 8 kilometrów. Przyspieszyło to wykonanie całości prac, zmniejszyło koszty, a jednocześnie zapewniło wystarczającą dokładność wyznaczania punktów [5] i [10].

Jak ogólnie wiadomo, wykorzystanie uzyskanej sieci powierzchniowej jako osnovy do dalszych, bezpośrednich pomiarów geodezyjnych wymaga dalszego jej zagęszczenia, uzyskiwanego z reguły w drodze poligonizacji.

Wszechstronny rozwój kraju narzuca potrzebę ciągłego uzupełniania sieci punktów geodezyjnych, na których mogłyby być oparte różnego typu pomiary terenowe, jak np. zdjęcie topograficzne, zdjęcie fotogrametryczne czy też pomiar szczegółów.

Wobec pokrycia przeważającej części naszego kraju punktami jednolitej osnovy triangulacji wypełniającej dalsze zagęszczenie sieci punktów geodezyjnych będzie się wiązać z wykonaniem wielkiej ilości pomiarów poligonowych. Pomiar poligonowy będzie z reguły poprzedzał zarówno zdjęcia szczegółów będące przygotowaniem do nowych prac inwestycyjnych jak i dokładne zdjęcia topograficzne niezbędne dla niektórych prac geologicznych itd.

Łatwość wykonywania pomiarów poligonowych, szczególnie z zastosowaniem pośrednich sposobów określania odległości czy bezpośredniego pomiaru odległości na szynach tras kolejowych, jest przyczyną stosowania tych pomiarów również na większych przestrzeniach jako tzw. poligonizacji precyzyjnej I lub II klasy o długościach ciągów przyjmowanych na ogół od 10 do 15 km.

Ogólne zalecenia, znane dobrze wykonawcom pomiarów poligonowych,

avec succès, appliqué en pratique. L'orientation optique est basée ici sur le fait de la possibilité de mesurage optique des courtes (de 1 à 3 mètres) lignes au moyen de théodolite avec la lunette excentrique, c'est à dire par un moyen des intersections d'excentricité, qui a été analysé précédemment.

On place le théodolite avec la lunette latérale audessus (à l'arête) de l'orifice de puits de mine et on observe par cette lunette les deux signaux lumineux qui se trouvent à l'horizon d'orientation. En appliquant les intersections d'excentricité on peut déterminer les distances horizontales de poste d'observation de théodolite jusqu'à ces deux signaux lumineux, et en mesurant les angles horizontales on détermine les direction correspondantes. Ces données sont suffisantes pour déterminer les coordonnées des deux points dans la mine, auxquels on effectue au conséquence les mesurages de connection.

Par une installation adéquate de théodolite par rapport aux signaux on obtient les conditions optimes de la projection d'une direction dans la mine.

L'analyse des erreurs de la projection d'une direction est démontrée par les formules (de 1 à 10).

Dans son travail l'auteur nous donne l'exemple de l'orientation par la méthode des intersections d'excentricité.

Malgré que les mesures ont été effectuées au moyen d'un théodolite d'une faible précision de mesurage on a obtenu les résultats favorables.

La méthode optique d'orientation qui est effectuée au moyen des intersections d'excentricité, grâce à sa rapide et relativement simple technique de mesure et de calculs, se qualifie pour être appliquée aux travaux d'orientation dans la mine.

Witold Senisson

Wzory na błędy średnie poprzeczne i podłużne punktów w prostoliniowym i równobocznym poligonie z uwzględnieniem błędów czteropunktowego nawiazania

Ogólne uwagi o ośnawach triangulacyjnych i poligonowych

Reforma triangulacji, przeprowadzona w Polsce w ciągu ostatniego 10-lecia, została już wypróbowana praktycznie i uzyskała bliższe uzasadnienie teoretyczne. Zasadą jej było odstąpienie od tradycyjnego podziału triangulacji na rzędy i zastosowanie sieci powierzchniowej o bokach długości około 8 kilometrów. Przyspieszyło to wykonanie całości prac, zmniejszyło koszty, a jednocześnie zapewniło wystarczającą dokładność wyznaczania punktów [5] i [10].

Jak ogólnie wiadomo, wykorzystanie uzyskanej sieci powierzchniowej jako osnowy do dalszych, bezpośrednich pomiarów geodezyjnych wymaga dalszego jej zagęszczenia, uzyskiwanego z reguły w drodze poligonizacji.

Wszechstronny rozwój kraju narzuca potrzebę ciągłego uzupełniania sieci punktów geodezyjnych, na których mogłyby być oparte różnego typu pomiary terenowe, jak np. zdjęcie topograficzne, zdjęcie fotogrametryczne czy też pomiar szczegółów.

Wobec pokrycia przeważającej części naszego kraju punktami jednolitej osnowy triangulacji wypełniającej dalsze zagęszczenie sieci punktów geodezyjnych będzie się wiązać z wykonaniem wielkiej ilości pomiarów poligonowych. Pomiar poligonowy będzie z reguły poprzedzał zarówno zdjęcia szczegółów będące przygotowaniem do nowych prac inwestycyjnych jak i dokładne zdjęcia topograficzne niezbędne dla niektórych prac geologicznych itd.

Łatwość wykonywania pomiarów poligonowych, szczególnie z zastosowaniem pośrednich sposobów określania odległości czy bezpośredniego pomiaru odległości na szynach tras kolejowych, jest przyczyną stosowania tych pomiarów również na większych przestrzeniach jako tzw. poligonizacji precyzyjnej I lub II klasy o długościach ciągów przyjmowanych na ogół od 10 do 15 km.

Ogólne zalecenia, znane dobrze wykonawcom pomiarów poligonowych,

wskazują na celowość tworzenia poligonów o ile możliwości prostoliniowych, o równych bokach, czyli tzw. poligonów typowych. Pozwalają one możliwie najlepiej wyeliminować błędy systematyczne długości i umożliwiają znaczne uproszczenie obliczeń.

Stosowanie poligonów prostoliniowych okazuje się często najprostsze w konkretnych warunkach terenowych, a więc znaczna część poligonów przebiegających po prostych odcinkach torów kolejowych może być uważana za poligony typowe.

Duży zasięg zastosowań pomiarów poligonowych jako podkładów geodezyjnych do pomiarów specjalnych, wymagających często wysokiej precyzji wymaga gruntownego, o ile to możliwe, określenia dokładności, które mogłyby być uzyskiwane w różnych zagadnieniach poligonizacji.

W przypadku dowolnego poligonu czy sieci poligonowej istnieje możliwość określania dokładności w drodze ogólnej przez wyrównanie układu obserwacyjnego metodą spostrzeżeń pośrednich łącznie z obliczeniem błędów średnich wyznaczanych współrzędnych. Postępowanie powyższe przy zastosowaniu symboli pomocniczych S. Hausbrandta [4] oraz rachunku krakowianowego T. Banachiewicza [1] nie przedstawia wprawdzie specjalnych trudności pojęciowych, może jednak niekiedy wymagać znacznego nakładu pracy rachunkowej.

Jest celowe możliwie proste określanie dokładności wyznaczania współrzędnych punktów w poligonizacji jeszcze przed wykonaniem pomiarów dla racjonalnego zaplanowania sieci poligonowych oraz dla określania niezbędnej w danym przypadku dokładności pomiarów polowych. Tego typu analizy wstępne, o ile oparto je na trafnych założeniach, winny znajdować potwierdzenie w wynikach analiz błędów średnich uzyskiwanych z rozpatrywania znacznej ilości wyrównanych ciągów poligonowych.

Wartość analiz wstępnych dla praktyki geodezyjnej jest specjalnie cenna właśnie w poligonizacji z uwagi na występujące tam układy obserwacyjne zawierające bardzo małe ilości spostrzeżeń nadliczbowych. Określenie błędów średnich współrzędnych po wyrównaniu, uzyskane z pojedynczego obustronnie nawiązanego poligonu, opierałoby się na ogół na 3 zaledwie spostrzeżeniach nadliczbowych, co — jak wydaje się — nie charakteryzuje dość pewnie błędów średnich współrzędnych danego poligonu.

Spotykana często skłonność do wyciągania zbyt daleko idących wniosków co do dokładności danego ciągu na podstawie stwierdzenia dobrej zgodności np. w zamknięciu kątowym czy stwierdzenia małej odchyłki długościowej ciągu jest zupełnie nieusprawiedliwiona z uwagi na duże prawdopodobieństwo pojawienia się takich zgodności nawet w bardzo źle pomierzonych poligonach. W przypadku poligonizacji wydaje się raczej słuszniejsze stosowanie analiz opartych na poznanych doświadczalnie błę-

dach każdego typu obserwacji, co w praktyce nie przedstawia zwykle trudności.

W literaturze geodezyjnej znane są wzory pozwalające określać „a priori” dokładności wyznaczania współrzędnych we wspomnianych już poligonach typowych, jednak przy nie zawsze słusznym założeniu bezbłędności punktów nawiązania.

W praktyce punkty nawiązania nie są bezbłędne, a pomijalność błędów nawiązań nie jest — jak dotychczas w większości przypadków milcząco zakładano — sama przez się zrozumiała. Zasadniczym celem niniejszej pracy jest podanie i uzasadnienie nowych wzorów na błędy podłużne i poprzeczne prostoliniowego i równobocznego poligonu przy uwzględnieniu błędów punktów nawiązania. Dla wprowadzenia w istotę zagadnienia słuszne wydaje się krótkie przypomnienie niektórych znanych wzorów, przy czym wzory powtarzające się w wielu podręcznikach i skryptach określono krótko jako „wzory klasyczne”.

*Wzory klasyczne na błędy środkowego punktu poligonu
oparte na założeniu pomijalności błędów nawiązania*

Z wielu podręczników geodezyjnych [12] znany jest wzór na błąd poprzeczny środkowego punktu obustronnie nawiązanego poligonu typowego o $K=N-2$ nowowyznaczonych punktów dla nieparzystego N :

$$q = L \frac{m}{\varrho} \sqrt{\frac{N^2 + 2N^2 - 3}{192N(N-1)^2}},$$

gdzie L oznacza długość ciągu, zaś $\frac{m}{\varrho}$ — błąd kąta w mierze łukowej.

Zagadnienie określenia błędu podłużnego środkowego punktu obustronnie nawiązanego ciągu typowego, niewątpliwie prostsze od poprzedniego, było w różnych podręcznikach różnie ujmowane.

W obszernym podręczniku Jordana nie sprecyzowano wzoru na błąd podłużny środkowego punktu typowego poligonu, odsyłając czytelnika do podanych uprzednio ogólnych wskazówek dotyczących przenoszenia się błędów przy pomiarze długości.

W podręczniku Weigla [13] na stronie 266 podano następujący wzór na błąd podłużny środkowego punktu typowego ciągu:

$$m_L = \omega_x \sqrt{\frac{N-2}{2(N-1)}},$$

gdzie przez ω_x oznaczono odchyłkę długościową zamknięcia całego poligonu.

Wzór powyższy powstał w wyniku błędu w wyprowadzeniu, gdyż wielkość błędu podłużnego środkowego punktu ciągu o parzystej ilości boków, uzyskana z błędu zamknięcia tego ciągu, — określa zależność:

$$m_L = \frac{\omega_x}{2}.$$

Ostatnio przytoczony wzór, podawany zresztą w literaturze radzieckiej, można ściśle uzasadnić w sposób następujący: Niech p będzie liczbą naturalną (parzystą) określającą ilość boków w poligonie typowym. Z uwagi na niezależność warunków kątowych i liniowych w takim poligonie otrzymamy tu dla boków jedno równanie warunkowe:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_p = \omega_x$$

prowadzące do równania korelaty $pk = \omega_x$, z którego wynika $k = \frac{\omega_x}{p}$.

Ze znanego związku $[vv] = k \omega_x$, wynika przeto $[vv] = \frac{\omega_x^2}{p}$ i dalej, ponieważ w układzie mamy jedno spostrzeżenie nadliczbowe: $m_0^2 = \frac{[vv]}{1} = \frac{\omega_x^2}{p}$, gdzie m_0 oznacza średni błąd jednostkowy.

Błąd podłużny środkowego punktu poligonu można obliczyć ze znanego wzoru krakowianowego:

$$m_F^2 = m_0^2 [f(\tau - a((\tau a)^2)^{-1} a)]^2,$$

gdzie a jest krakowianem współczynnikowym równań warunkowych, f kolumną odpowiednich pochodnych, zaś m_F oznacza poszukiwany błąd średni (w danym przypadku błąd średni podłużny środkowego punktu).

Ponieważ będzie tu: $a = (1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1)$ przy ilości elementów równej p , oraz $f = \tau(1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0)$ przy ilości elementów jednostkowych równej ilości elementów zerowych, równej każda $\frac{p}{2}$, otrzymamy, jak łatwo sprawdzić:

$$[f(\tau - a((\tau a)^2)^{-1} a)]^2 = \frac{p}{4},$$

skąd już, po uwzględnieniu $m_0^2 = \frac{\omega_x^2}{p}$, wynika: $m_F^2 = \frac{\omega_x^2}{4}$ lub $m_F = \frac{\omega_x}{2}$.

Ze względu na analogię z podanym w tym samym podręczniku wzorem na błąd poprzeczny środkowego punktu poligonu można by wprowadzić na miejsce odchyłki długościowej zamknięcia ciągu błąd długości boku

$m_b = \frac{\omega_x}{\sqrt{N-1}}$, czyli po wstawieniu do wzoru na m_L wartości $\omega_x = m_b \sqrt{N-1}$ uzyskiwałoby się:

$$m_L = m_b \sqrt{\frac{N-1}{4}}.$$

Wzory S. Hausbrandta na błędy poprzeczne i podłużne dowolnego punktu typowego poligonu z założeniem bezbłędności punktów nawiazania

Pełniejsze ujęcie zagadnienia błędów średnich w poligonie typowym dają ogólniejsze od poprzednio cytowanych wzory S. Hausbrandta [2], które pozwalają obliczyć błędy podłużne i poprzeczne j -tego nowowyznaczanego punktu (na ogólną ilość k nowowyznaczanych punktów) z następujących zależności:

Średni błąd poprzeczny i -tego punktu poligonu typowego

$$m_{\text{poprz}} = m_j l \sqrt{\frac{j(j+1)(k+1-j)(k+2-j)}{6(k+1)(k+2)(k+3)} [(2j+1)k - (2j^2 - 2j - 3)]}.$$

Średni błąd podłużny j -tego punktu poligonu typowego

$$m_{\text{podł}} = m_l \sqrt{\frac{j(k+1-j)}{k+1}}.$$

Podane powyżej uogólnienie wzorów na błędy średnie punktów w poligonach typowych poza dużym znaczeniem teoretycznym okazały się również istotne dla celów praktyki geodezyjnej. Wzory te pozwalają określać „a priori” błędy średnie przesunięć każdego punktu poligonu typowego, co określa też przydatność tych punktów do dalszych prac geodezyjnych. Dużą pomocą może być użycie do tego celu tabeli S. Hausbrandta, zamieszczonej w T. II, z. 1, kwartalnika *Geodezja i Kartografia* [2].

Wydaje się, że bardzo istotne jest również podanie przez autora powyższych wzorów nowych, niesprecyzowanych dotychczas w tej formie wytycznych odnośnie optymalnej wartości wzajemnego stosunku dokładności pomiarów kątowych i liniowych. Oparcie się na ścisłym, zgodnym z metodą najmniejszych kwadratów, założeniu równości sumy kwadratów błędów poprzecznych z sumą kwadratów błędów podłużnych doprowadziło do wzoru na pożądany przy pomiarach stosunek błędu średniego kąta m_a do błędu względnego pomiaru boku $\frac{m_l}{l}$ w zależności od K , tj. od ilości nowowyznaczonych punktów w poligonie:

$$\frac{m_a}{\frac{m_l}{l}} = \sqrt{\frac{70(k+2)}{(k+4)(k^2+4k+9)}}.$$

Celowość uwzględniania błędów nawiązań w poligonizacji

Podane ostatnio wzory opierające się tak samo jak mniej ogólne „wzory klasyczne” na założeniu bezbłędności punktów nawiązania mogą być zawsze w praktyce stosowane wówczas, gdy pomijalność błędów nawiązań jest oczywista.

Słuszne będzie zaniebdywanie wpływu błędów nawiązań w przypadku długich celowych nawiązujących i niewielkich błędów średnich punktów nawiązania, natomiast należy przypuszczać, że dla większości ciągów łączących punkty węzłowe sieci wpływ błędów krótkich boków nawiązania mógłby się okazać istotny.

Celowość uwzględniania w wielu sieciach poligonowych błędów nawiązań znajduje jak gdyby potwierdzenie w praktyce przeliczania punktów węzłowych, gdzie uzyskane wyniki często wykazują rozbieżności znacznie większe od tych, których należałoby się spodziewać na podstawie analizy opartej na pominięciu błędów nawiązań. Istnieje pewna trudność w uchwyceniu rozbieżności wstępnej analizy z wynikami uzyskiwanymi w skali masowej w sieciach poligonowych wobec stosowanych tam niejednorodnych sposobów wyrównania, odbiegających od metody najmniejszych kwadratów.

Jak wiadomo, wyrównanie sieci poligonowych jest zwykle wykonywane jedną z przybliżonych metod, które dają na ogół wyniki jednakowo niepewne, a różnią się mniejszą lub większą przejrzystością postępowania i „pracochłonnością”.

Spośród różnych przybliżonych metod wyrównania sieci poligonowych zasługuje na uwagę ze względu na prostotę „metoda punktów węzłowych” [7] i [8]. Najistotniejszą kwestią jest tutaj trafne określenie wag, azymutów i współrzędnych końcowych uzyskiwanych z jednostronnie nawiązanych ciągów poligonowych. Dla określenia wag współrzędnych punktu uzyskanego z jednostronnie nawiązanego ciągu istotne jest wyznaczenie błędu średniego jego położenia. Dla ciągów prostoliniowych o równych bokach pewne korzyści wykaże tu rozważanie błędów poprzecznych i podłużnych ostatniego punktu ciągu. Przy założeniu bezbłędności nawiązań błędy średnie położenia tego nowowyznaczonego punktu jednostronnie nawiązanego ciągu są określone znanymi wzorami:

$$m_{\text{poprz}} = m_u l \sqrt{\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}},$$

$$m_{\text{podl}} = m_l \sqrt{j}.$$

Zakładając konkretne wartości na błędy średnie współrzędnych obydwóch punktów nawiązania można błędy poprzeczne i podłużne jedno-

stronnie nawiązanego prostoliniowego i równobocznego ciągu obliczać z wzorów

$$m_{\text{poprz}} = \sqrt{\left(\frac{D}{L}\right)^2 m_{x_I}^2 + \left(1 + \frac{D}{L}\right)^2 m_{x_{II}}^2 + l^2 m_a^2 \frac{j(j+1)(2j+1)}{6}},$$

$$m_{\text{podl}} = \sqrt{j m_l^2 + m_{y_{II}}^2},$$

w których symbolami m_a m_l oznaczono błędy średnie obserwacji kątów i długości, a przez m_{x_I} $m_{x_{II}}$ m_{y_I} $m_{y_{II}}$ błędy średnie współrzędnych punktów nawiązania w kierunkach prostopadłym i równoległym do kierunku ciągu. Długość całego ciągu, długość boku nawiązania i długość pojedynczego boku oznaczono odpowiednio przez D , L oraz l .

Gdy zachodzi potrzeba obliczania błędów średnich współrzędnych M_x M_y w układzie X , Y , jeżeli kierunek poligonu odbiega od osi X o kąt φ , można stosować łatwe do wyprowadzenia wzory:

$$F \begin{vmatrix} m_{\text{podl}} & m_{\text{poprz}} \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} M_x = F_2 \\ M_y = F_1 \end{matrix}$$

Można by też obliczać błąd poprzeczny i podłużny z wzorów:

$$\phi = \begin{vmatrix} M_x & M_y \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} m_{\text{poprz}} = \phi_1 \\ m_{\text{podl}} = \phi_2 \end{matrix}$$

Przez porównanie wzorów na błędy poprzeczne i podłużne, opartych na założeniu bezbłędności nawiązań, z podanymi następnie wzorami ogólniejszymi nie trudno stwierdzić, że największy wpływ błędów nawiązania na wzrost błędów średnich długościowego przesunięcia $M_s = \sqrt{m_{\text{poprz}}^2 + m_{\text{podl}}^2}$ punktów jednostronnie nawiązanego poligonu ujawnia się przy krótkich celowych nawiązujących, co jest zresztą intuicyjnie jasne.

Dla poligonów zbliżonych do typowych, obustronnie nawiązanych do dalekich punktów triangulacyjnych, słuszne okaże się stosowanie dla celów praktycznych wzorów pomijających błędy nawiązań, a więc podanych już wzorów S. Hausbrandta. W drodze pewnej analogii z poligonem otwartym również i tu należałoby się spodziewać, że wpływ błędów nawiązania na zwiększenie błędów przesunięć wyznaczanych punktów poligonu będzie się w największym stopniu uwydatniał przy dużych błędach współrzędnych punktów nawiązania oraz krótkich bokach nawiązujących, co, jak wspomniano, często zachodzi przy wyrównaniu poligonów pomiędzy punktami węzłowymi.

W podanych poniżej wzorach na błędy poprzeczne i podłużne prostoliniowego i równobocznego poligonu uwzględniono błędy średnie współrzędnych czterech punktów nawiązania, przy czym założono długości obu boków nawiązania równe pozostałym bokom poligonu, co dość często w przybliżeniu zachodzi w sieciach węzłowych poligonów.

Ze względu na pożądaną prostotę rachunkową przy zestawianiu wzorów przyjęto założenie, że wszystkie kąty, łącznie z obu kątami nawiązania, są zbliżone do 180° . Ostatnio podane założenia odnośnie typu nawiązań wydają się najbardziej celowe, gdyż dostatecznie powinny orientować co do rzędu wielkości błędów przesunięć współrzędnych w sieciach węzłowych poligonowych, nie prowadząc do zbyt skomplikowanych wzorów, trudnych do stabelaryzowania.

Wzory na błędy średnie poprzeczne i podłużne punktów prostoliniowego i równobocznego poligonu z uwzględnieniem błędów czteropunktowego nawiązania

Obliczenie błędów średnich położenia punktów w prostoliniowym równobocznym poligonie, w którym wszystkie kąty (łącznie z dwoma kątami nawiązania) są zbliżone do 180° , a długości boków (też łącznie z obydwooma bokami nawiązania) są w przybliżeniu równe, można wykonywać stosując wzory:

Błąd poprzeczny

$$m_{\text{poprz}} = m_a l \sqrt{\frac{A\mu^3 + B\mu^2 + C\mu + D}{E\mu^3 + F\mu^2 + G\mu}}, \quad \text{przy czym } 1 \leq i \leq n.$$

Błąd podłużny

$$m_{\text{podł}} = m_l \sqrt{\frac{(i-2)(n-i-1) + (n-3) \left(\left(\frac{m_y}{m_l} \right)^2 + \left(\frac{m_y}{m_l} \right)^4 \right)}{n-3 + 2 \left(\frac{m_y}{m_l} \right)^2}}, \quad \begin{array}{l} \text{przy czym} \\ 2 \leq i \leq n-1, \\ \text{natomiast} \\ \text{gdy} \\ i=1 \text{ lub } i=n, \\ \text{to } m_{\text{podł}} = m_y. \end{array}$$

W podanych wzorach i oznacza kolejność punktu (łącznie z dwoma pierwszymi punktami nawiązania), zaś n jest ogólną ilością punktów ciągu (łącznie z czterema punktami nawiązania, czyli zawsze $n \geq 5$). Przez l oznaczono długość pojedynczego boku. Błędy pomiaru kąta i długości boku oznaczono m_a oraz m_l , błędy punktów nawiązania w kierunkach równoległym i prostopadłym do kierunku ciągu oznaczono m_y oraz m_x . Wielkość μ we wzorze na błąd poprzeczny punktu poligonu uzyskuje się z zależności:

$$\mu = \left(\frac{m_a}{m_x} l \right)^2,$$

a współczynniki A, B, C, D, E, F, G z wzorów:

$$A = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} i \\ n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & -12 & -2 & 24 & -2 & -12 & 4 \\ 12 & 32 & -47 & -32 & 43 & -6 & -2 \\ -30 & -1 & 72 & -38 & -9 & 6 & \cdot \\ 24 & -32 & -6 & 20 & -6 & \cdot & \cdot \\ -6 & 13 & -9 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \\ i^6 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} i \\ n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 & 36 & -10 & -48 & 14 & 12 & -4 \\ -120 & -86 & 132 & 44 & -66 & 12 & \cdot \\ 165 & -12 & -162 & 84 & -6 & \cdot & \cdot \\ -96 & 92 & -12 & -8 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 15 & -18 & 24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \\ i^6 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} i \\ n \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -42 & -20 & 4 & 32 & -16 \\ 83 & 38 & -82 & 16 & 8 \\ -75 & 34 & 24 & -16 & \cdot \\ 22 & -24 & 8 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} i \\ n \\ n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ -2 & -4 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ i \\ i^2 \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} i \\ n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -28 \\ 23 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} i \\ n \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -36 \\ 50 \\ -24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} i \\ n \\ n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Założenie bezbłędności nawiązań, czyli przyjęcie, że $m_x=0$ oraz $m_y=0$ sprowadza wzory na błędy poprzeczne i podłużne do postaci:

$$m_{\text{poprz}} = m_a l \sqrt{\frac{A}{E}}; \quad m_{\text{podl}} = m_l \sqrt{\frac{(i-2)(n-i-1)}{n-3}}.$$

Jeżeli do ostatnio podanych wzorów podstawić ilość nowowyznaczanych punktów $k=n-4$ oraz kolejność nowowyznaczanego punktu $I=i-2$, to uzyska się postać identyczną ze znanymi wzorami S. Hausbrandta [2]. Podobnie ograniczając rozważania do środkowego punktu poligonu można by łatwo uzyskać wzór na błąd średni poprzeczny tego punktu, podawany między innymi przez Jordana [6].

Przy dużych błędach współrzędnych nawiązania i niewielkich błędach pomiarów może się okazać logiczne przyjęcie założenia p o m i a l n o ś c i błędów pomiarów co prowadzi do prostych wzorów:

$$m_{\text{poprz}} = m_x \sqrt{\frac{D}{G}}; \quad m_{\text{podł}} = \frac{m_y}{\sqrt{2}}.$$

Sposób uzyskania powyżej podanych wzorów oparto na uogólnieniu wyników otrzymywanych przy analizie układu metodą spostrzeżeń pośrednich. W dalszym ciągu niniejszej pracy krótko naświetlimy tok postępowania przy określaniu błędów średnich ogólnego typu sieci kątowno liniowej w przypadku zastosowania krakowianów Banachiewicza i symboli pomocniczych Hausbrandta. Wymieniony sposób postępowania ze względu na swą ogólność może być z korzyścią stosowany w różnego typu analizach dokładnościowych.

Analizę taką przeprowadzono dla określenia błędów podłużnych prostoliniowego i równobocznego nawiązanego poligonu, po czym wyprowadzono z zastosowaniem rachunku wyznacznikowego podany już wyżej wzór ogólny na błąd podłużny.

Podobny sposób postępowania zastosowany został dla analizy błędów poprzecznych, z uwagi jednak na bardziej skomplikowane zależności zrezygnowano tam z wyprowadzania wzoru ogólnego w oparciu o rachunek wyznacznikowy.

Opis sposobu zestawienia wzoru na błąd poprzeczny wymagający założenia wielu obliczeń odwrotności krakowianowych, wobec trudności pomieszczenia w ramach niniejszej pracy, zostanie podany w osobnym artykule.

W końcowej części pracy podajemy tablice wartości błędów średnich poprzecznych i podłużnych ciągu poligonowego rozpatrywanego typu dla różnych założeń odnośnie błędów średnich współrzędnych punktów nawiązania określonego typu ciągów poligonowych. Jako pierwszą podano tablicę błędów średnich w poligonach typowych przy założeniu bezbłędności nawiązań, zbliżoną do tablicy znanej z pracy S. Hausbrandta [2], przy czym dla większej przejrzystości zachowano w dalszych tablicach podobny układ.

Uwagi o zastosowaniu krakowianów Banachiewicza i symboli pomocniczych Hausbrandta do analizy dokładnościowej dowolnej sieci kątowno-liniowej

Zarówno wyrównanie najogólniej rozumianej sieci triangulacyjnej czy poligonowej jak i określanie błędów średnich wyznaczanych współrzędnych w ujęciu znanym z prac S. Hausbrandta polega, niezależnie od ro-

dzaju obserwacji, na wykonaniu pewnej ilości ustalonego typu łatwych do opanowania czynności rachunkowych [12].

Analizy dokładności określania współrzędnych w różnego typu układach geodezyjnych najracjonalniej wykonywać przy zastosowaniu metody spostrzeżeń pośrednich, która daje możliwość sprowadzenia zagadnienia do zestawienia ustalonego typu wyrażeń i do wykonania łatwych do opanowania, typowych przekształceń tabel liczbowych. Analizę dokładnościową spotykanych zwykle w geodezji układów obserwacyjnych można więc wykonywać metodą spostrzeżeń pośrednich rozbijając całość zagadnienia na 3 następujące etapy pracy:

1) Zestawienie po jednym równaniu błędów dla każdej wykonanej obserwacji kątowej, długościowej, obserwowanego azymutu geodezyjnego oraz dla traktowanej jako uzyskana z obserwacji współrzędnej nawiazania czy też jakichkolwiek innych związanych z wyrównywanym układem obserwacyjnym wielkości uzyskiwanych z pomiaru. Wymienione równania błędów można zapisać w postaci ogólnej:

$$dF + F_{\text{przybl}} - F_{\text{obserw}} = v_F.$$

F_{obserw} , F_{przybl} oraz dF są tutaj wielkością zaobserwowaną, jej przybliżoną wartością obliczoną z przyjęciem współrzędnych przybliżonych oraz utożsamianym z różniczką zupełną przyrostem funkcji F_{przybl} powstałym po nadaniu współrzędnym przybliżonym przyrostów oznaczanych w przypadku sieci triangulacyjnych czy poligonowych, gdy $F = F(x, y)$, przez $dx_1, dy_1, dx_2, dy_2, dx_3, dy_3, dx_4, dy_4, \dots$. W przypadku wyrównania niwelacji, gdy $F = F(z)$, przyrosty konsekwentnie będzie oznaczać $dz_1, dz_2, dz_3, dz_4, \dots$, podobnie zresztą można by rozważać układ przestrzenny gdy $F = F(x, y, z)$.

Blizsze szczegóły postępowania związane z zestawianiem różnego typu błędów pomijamy, gdyż są one znane z innych publikacji (por. bibliografia), podając tylko uzasadnione tam równania błędów, istotne dla dowolnych sieci kątowo liniowych, a więc i dla rozważanego w niniejszej pracy obustronnie nawiazanego prostoliniowego i równobocznego ciągu poligonowego.

Równanie błędu obserwacji kątowej

$$\left| \begin{array}{cc|cc} dx_L & dy_L & dx_p & dy_p \\ A_L & B_L & -A_p & -B_p \end{array} \right| - \left(\frac{dx_c}{A_L - A_p} - \frac{dy_c}{B_L - B_p} \right)_1 + a_{\text{przybl}} - a_{\text{obserw}} = v_a,$$

przy czym współczynniki kierunkowe określone są wzorami:

$$A_L = \frac{\Delta x_L}{\Delta x_L^2 + \Delta y_L^2}; \quad B_L = \frac{\Delta y_L}{\Delta x_L^2 + \Delta y_L^2}; \quad A_p = \frac{\Delta x_p}{\Delta x_p^2 + \Delta y_p^2}; \quad B_p = \frac{\Delta y_p}{\Delta x_p^2 + \Delta y_p^2}.$$

Równanie błędu obserwacji liniowej

$$\begin{vmatrix} dx_i & dy_i \\ -\cos \varphi_{ik} & -\sin \varphi_{ik} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_k & dy_k \\ \cos \varphi_{ik} & \sin \varphi_{ik} \end{vmatrix}_2 + l_{\text{przybl}} - l_{\text{obserw}} = v_i.$$

Równania błędów współrzędnych nawiazania

$$\begin{aligned} dx &= v_x & \text{przy czym przyjęto} & & x_{\text{przybl}} &= x_{\text{obserw}} \\ dy &= v_y & & & y_{\text{przybl}} &= y_{\text{obserw}} \end{aligned}$$

W równaniach błędów obserwacji katowej i obserwacji liniowej obliczenie wprowadzonych tam symboli pomocniczych S. Hausbrandta jest, jak wiadomo, realizowane w sposób następujący:

$$\text{gdy} \quad f \equiv \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_2 & a_3 b_3 \\ c_1 d_1 & c_2 d_2 & c_3 d_3 \end{vmatrix}$$

to obliczenie tzw. funkcji pierwszej f_1 oraz funkcji drugiej f_2 uzyskujemy z wzorów

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_2 & a_3 b_3 \\ c_1 d_1 & c_2 d_2 & c_3 d_3 \end{vmatrix}_1 &= \Sigma(ad-bc) = f_1 \\ \begin{vmatrix} d_1 b_1 & a_2 b_2 & a_3 b_3 \\ c_1 b_1 & c_2 d_2 & c_3 d_3 \end{vmatrix}_2 &= \Sigma(ac+bd) = f_2. \end{aligned}$$

Jak widać, funkcja pierwsza jest sumą wyznaczników drugiego stopnia, a funkcja druga sumą dwuwyrazowych iloczynów we wszystkich kolumnach.

2. Sprowadzenie do równoważności całego układu równań błędów uzyskuje się przez podzielenie każdego z tych równań przez przyjęty „a priori” błąd średni danej obserwacji w myśl wzoru:

$$\frac{1}{m_F} \cdot (dF + F_{\text{przybl}} - F_{\text{obserw}}) = \frac{v_F}{m_F}.$$

W przypadku obliczania błędu średniego niewiadomych wynikającego ze znanych z góry wielkości błędów pomiarowych nieistotne są wartości wyrazów wolnych $(F_{\text{przybl}} - F_{\text{obserw}})$, a obliczenia wykonuje się na podstawie znajomości jedynie tabeli a współczynników przy przyrostach dx_i dy_i w sprowadzonych do równoważności równaniach błędów.

3. Obliczenie wartości błędów średnich każdej z niewiadomych uzyskać można z wzoru wyrażanego zgodnie z symboliką przyjętą w pracach poświęconych rachunkowi wyrównawczemu w ujęciu krakowianowym:

$$m_i = m_0 \sqrt{(\bar{a}^2)_{ii}^{-1}}.$$

Obliczenie wyrażenia znajdującego się pod pierwiastkiem, czyli i -tego wyrazu przekątnej głównej odwrotności kwadratu tabeli zrównoważonych równań błędów a , wymaga wykonania kilku działań na tabelach, a więc

podniesienia do kwadratu tabeli a , pierwiastkowania tak uzyskanej tabeli, a w końcu obliczenia odwrotności pierwiastka i podniesienia do kwadratu n -tej kolumny tej tabeli. Powyżej podane czynności rachunkowe oparte na odpowiednim usystematyzowaniu elementarnych sumowań mnożeń (tzw. sumomnożeń) nie nasuwają żadnych trudności pojęciowych, lecz wymagają tylko większego lub mniejszego wkładu pracy rachunkowej.

W konkretnym przypadku rozważania błędów podłużnych i poprzecznych obustronnie nawiązanego prostoliniowego ciągu przyjęto pomocniczy układ współrzędnych prostokątnych, którego środek pokrywa się z początkiem ciągu prostoliniowego, złożonego z n punktów, rozpatrywanego łącznie z czterema punktami nawiązania, a kierunek ciągu jest zgodny z kierunkiem osi y . Odległości wzajemne punktów łącznie z wzajemnymi odległościami punktów nawiązania przyjęto jednakowe i równe l .

Przyjęcie pomocniczego układu, w którym jedna z osi jest równoległa do kierunku prostoliniowego ciągu, pozwala rozważać niezależnie od siebie błąd podłużny i błąd poprzeczny dowolnego punktu prostoliniowego poligonu. Niezależność obu tych wielkości wynika z braku „niewiadomych wiążących” między istotnymi dla wyznaczenia błędu średniego podłużnego równaniami błędów obserwacji liniowych i równaniami błędów podłużnych współrzędnych nawiązania, a mającymi wpływ na błędy poprzeczne punktów równaniami błędów obserwacji kątowych i równaniami błędów poprzecznych punktów nawiązania.

Rozwiązanie pierwszego z tych 2 niezależnych układów występujących w przypadku rozważania prostoliniowego poligonu jest treścią następnego rozdziału.

Uzasadnienie wzoru na błędy podłużne dowolnego punktu prostoliniowego i równobocznego poligonu z uwzględnieniem błędów nawiązań

Przyjęto, że kierunek prostoliniowego i równobocznego ciągu o ogólnej ilości n punktów pokrywa się z osią pomocniczego układu y , czyli błędy średnie podłużne kolejnych punktów poligonu uzyskują oznaczenia:

$$m_{y1} m_{y2} m_{y3} m_{y4} \dots m_{yn}.$$

Równania błędów $n-3$ mierzonych długości, wobec tego, że $\cos\varphi=0$ $\sin\varphi=1$ przybierają postać:

$$\begin{vmatrix} dx_i & dy_i \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_K & dy_K \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_2 + l_{\text{przybl}} - l_{\text{obserw}} = v_l, \text{ czyli po rozwinięciu:}$$

$$-dy_i + dy_K + l_{\text{przybl}} - l_{\text{obserw}} = v_l.$$

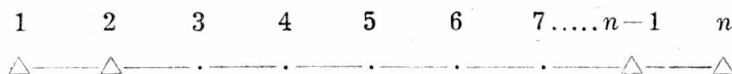
Równania błędów współrzędnych nawiazania w kierunku podłużnym są określone wzorami:

$$dy_1 = v_{y_1}; \quad dy_2 = v_{y_2}; \quad dy_{n-1} = v_{y_{n-1}}; \quad dy_n = v_{y_n}.$$

Zestawiając podobnie równania błędów obserwacji kątowych oraz równania błędów poprzecznych współrzędnych nawiazania można stwierdzić, że nie są one istotne dla przesunięć podłużnych punktów ciągu.

Wyznaczenie błędów średnich podłużnych n punktów poligonu wymaga więc najpierw zestawienia sprowadzonej do równoważności tabeli współczynnikowej o $n+1$ ilości równań błędów o n niewiadomych; tabelę tę podajemy poniżej. Celem sprowadzenia do równoważności należało podzielić współczynniki każdego z równań błędów przez przyjęty „a priori” błąd średni danej obserwacji. Wobec występowania prostych współczynników obserwacji długości pozostawiono je niezmienione przyjmując błąd długości m_l jako błąd jednostkowy, co wymagało pomnożenia pozostałych zrównoważonych równań błędów przez m_l .

Błędy podłużne w poligonie



Współrzędne

$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5 \quad y_6 \quad y_7 \dots y_{n-1} \quad y_n$

Zrównoważona tabela współczynnikowa*

b										
$\frac{m_l}{m_y}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\frac{m_l}{m_y}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	$\frac{m_l}{m_y}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	-1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	-1	1	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	-1	1	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	-1	1	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	-1	1	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	-1	1	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{m_l}{m_y}$	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{m_l}{m_y}$	$\frac{m_l}{m_y}$	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{m_l}{m_y}$	$\frac{m_l}{m_y}$

* Wyrazy tabel będące zerami zaznaczono kropkami.

Tabela współczynników równań normalnych

$$b^2 \left\{ \begin{array}{cccccccc} \frac{m_l^2}{m_y^2} & . & . & . & . & . & . & . \\ . & \frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2} & -1 & . & . & . & . & . \\ . & -1 & 2 & -1 & . & . & . & . \\ . & . & -1 & 2 & -1 & . & . & . \\ . & . & . & -1 & 2 & -1 & . & . \\ . & . & . & . & -1 & 2 & -1 & . \\ . & . & . & . & . & -1 & 2 & -1 \\ . & . & . & . & . & . & -1 & \frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2} \\ . & . & . & . & . & . & . & \frac{m_l^2}{m_y^2} \end{array} \right\}$$

Z zestawionej tabeli równań błędów obserwacji długości i równań błędów współrzędnych nawiązania w kierunku podłużnym można obliczyć błędy podłużne każdego z punktów ciągu z wzoru krakowianowego $m_{\text{podł}} = m_l \sqrt{(b^2)_{ii}^{-1}}$ lub odpowiadającego mu wzoru wyznacznikowego

$m_{\text{podł}} = m_l \sqrt{\frac{D_{ii}}{D}}$, gdzie D jest wyznacznikiem głównym tabeli równań normalnych, a D_{ii} tak zwanym minorem tego wyznacznika, utworzonym dla i -tego elementu przekątnej głównej.

W przypadku stosowania ogólnej postaci wzoru do wyznaczania wielkości błędu podłużnego istnieje konieczność wykonywania znacznej ilości działań na tabelach, łatwo wobec tego zrozumieć celowość wyprowadzenia wzoru bezpośredniego na błąd podłużny i -tego punktu tego typu poligonu o n punktach.

Tego typu wzór bezpośredni, podany już poprzednio w niniejszej pracy, uzasadniony zostanie poniżej w oparciu o rachunek wyznacznikowy.

Błędy podłużne pierwszego i ostatniego punktu poligonu, tj. błędy punktów służących do nawiązań kątowych, które to punkty nie są związane z układem żadną z obserwacji liniowych, nie ulegną zmianie w wyniku wyrównania, co można zresztą uzyskać z obliczenia: $\frac{D_{ii}}{D} = \frac{m_y^2}{m_l^2}$, czyli

$$m_{y_1} = m_l \sqrt{\frac{D_{ii}}{D}} = m_l \sqrt{\frac{m_y^2}{m_l^2}} = m_y; \text{ podobnie } m_{y_n} = m_l \sqrt{\frac{D_{nn}}{D}} = m_l \sqrt{\frac{m_y^2}{m_l^2}} = m_y.$$

Wyznaczenie błędów pozostałych punktów poligonu, tj. od punktu dru-

giego do $n-1$ włącznie może być uzyskane po określeniu stosunku $\frac{D_{ii}}{D}$ i w tym też celu wyprowadzono poniżej wzór ogólny na wartość wyznacznika D zależnie od ilości punktów n , czyli $D=D(n)$, oraz wzór na wartość minora D_{ii} w zależności od ilości punktów w ciągu i kolejności, czyli $D_{ii}=D_{ii}(n, i)$.

Obliczenie wyznacznika głównego równań normalnych. Dla uproszczenia zapisów przyjęto poniżej ilość punktów ciągu równą $n=9$, co nie przeszkodzi w wykorzystaniu wyprowadzonych zależności do określania przez prostą analogię wartości wyznacznika dla dowolnego całkowitego n większego od 4. Należy więc zestawić wzór na wartość wyznacznika:

$$D(n) = \begin{vmatrix} \frac{m_l^2}{m_y^2} & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & \frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2} & -1 & . & . & . & . & . & . \\ . & -1 & 2 & -1 & . & . & . & . & . \\ . & . & -1 & 2 & -1 & . & . & . & . \\ . & . & . & -1 & 2 & -1 & . & . & . \\ . & . & . & . & -1 & 2 & -1 & . & . \\ . & . & . & . & . & -1 & 2 & -1 & . \\ . & . & . & . & . & . & -1 & \frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2} & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \frac{m_l^2}{m_y^2} \end{vmatrix}$$

Rozwijając wyznacznik kolejno względem pierwszej oraz ostatniej kolumny uzyskujemy:

$$D(n) = \left(\frac{m_l}{m_y} \right)^4 \begin{vmatrix} \frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2} & -1 & . & . & . & . & . \\ -1 & 2 & -1 & . & . & . & . \\ . & -1 & 2 & -1 & . & . & . \\ . & . & -1 & 2 & -1 & . & . \\ . & . & . & -1 & 2 & -1 & . \\ . & . & . & . & -1 & 2 & -1 \\ . & . & . & . & . & -1 & \frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2} \end{vmatrix}$$

Ponowne rozwinięcie względem pierwszej kolumny daje wartość:

$$D(n) = \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 \left(\frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2}\right) \begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2} \end{vmatrix} +$$

$$- \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2} \end{vmatrix}$$

Rozwijając ostatnio uzyskane wyznaczniki względem ostatniej kolumny otrzymujemy:

$$D(n) = \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 \left(\frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2}\right)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 2 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$- 2 \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 \left(\frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2}\right) \begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & 2 & -1 & \cdot \\ \cdot & -1 & 2 & -1 \\ \cdot & \cdot & -1 & 2 \end{vmatrix} + \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdot \\ -1 & 2 & -1 \\ \cdot & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Oznaczając występujące powyżej wyznaczniki typu $D_k =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 2 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

zależnie od ilości kolumn (w pierwszym przypadku $k=n-4$, w drugim $k=n-5$ oraz w trzecim $k=n-6$ uzyskujemy:

$$D(n) = \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 \left[\left(\frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2}\right)^2 D_{n-4} - 2 \left(\frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2}\right) D_{n-5} + D_{n-6} \right].$$

Określenie wartości wyznacznika D_k w zależności od ilości kolumn k tego wyznacznika wyprowadził S. Hausbrandt w cytowanej już pracy.

Podany tam wzór $D_k = k+1$ uzyskano przemnażając najpierw każdą z kolumn wyznacznika przez liczbę odpowiadającą jej kolejności, co zwiększa wartość wyznacznika $k!$ -krotnie, czyli:

$$D_k = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 2 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} 2 & -2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 4 & -3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -2 & 6 & -4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -3 & 8 & k \\ \cdot & \cdot & \cdot & -4 & 2k \end{vmatrix}$$

W wypisanym ostatnio wyznaczniku do elementów każdej z kolumn dodano sumy elementów wszystkich kolumn poprzednich, uzyskując łatwy do obliczenia wyznacznik, mający wszystkie elementy powyżej przekątnej głównej równe zeru, czyli:

$$D_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -2 & 4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -3 & 5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -4 & k+1 \end{vmatrix} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot k(k+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot k} = k+1$$

a stąd wzór na wartość wyznacznika głównego

$$\begin{aligned} D(n) &= \left(\frac{m_l}{m_y} \right)^2 \left[\left(\frac{m_l^4}{m_y^4} + 2 \frac{m_l^2}{m_y^2} + 1 \right) (n-3) - \left(\frac{m_l^2}{m_y^2} + 1 \right) (2n-8) + n-5 \right] = \\ &= \left(\frac{m_l}{m_y} \right)^4 \left[\left(\frac{m_l}{m_y} \right)^4 (n-3) + \left(\frac{m_l}{m_y} \right)^2 (2n-6-2n+8) + n-3-2n+8+n-5 \right] \end{aligned}$$

oraz wzór ostateczny na wartość wyznacznika głównego tabeli równań normalnych

$$D(n) = (n-3) \left(\frac{m_l}{m_y} \right)^8 + 2 \left(\frac{m_l}{m_y} \right)^6.$$

Obliczenie wartości podwyznacznika dla i -tego wyrazu przekątnej głównej tabeli równań normalnych. Wartość podwyznacznika dla i -tego elementu przekątnej głównej tabeli równań normalnych uzyskuje się przez obliczenie wyznacznika powstałego przez skreślenie w wyznaczniku głównym i -tego wiersza oraz i -tej kolumny.

Poniżej wypisano tego typu wyznacznik, w którym przyjęto dla prostości $n=10$ oraz $i=6$, co widać zresztą z podanej u góry kolejności kolumn.

$$D_{ii}(n, i) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \dots i \dots 7 & 8 \dots n-1 & n \\ \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2} - 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{m_l^2 + m_y^2}{m_y^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^2 \end{vmatrix}$$

Wartość podwyznacznika może być w danym przypadku obliczona jako iloczyn dwóch określonych niezerowych wyznaczników. Rozwijając pierwszy z tych wyznaczników kolejno względem pierwszej, a następnie drugiej kolumny i wprowadzając przy tym stosowane już poprzednio oznaczenia otrzymamy:

$$\left(\frac{m_l}{m_y}\right)^2 \left[\left(\frac{m_l^2}{m_y^2} + 1\right) (D_{i-3} - D_{i-4}) \right] = \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^2 \left[\left(\frac{m_l^2}{m_y^2} + 1\right) (i-2) - (i-3) \right].$$

Z rozwinięcia drugiego określonego niezerowego wyznacznika względem ostatniej, a następnie przedostatniej kolumny wynika:

$$\left(\frac{m_l}{m_y}\right)^2 \left[\left(\frac{m_l^2}{m_y^2} + 1\right) D_{n-i-2} - D_{n-i-3} \right] = \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^2 \left[\left(\frac{m_l^2}{m_y^2} + 1\right) (n-i-1) - (n-i-2) \right].$$

W celu uzyskania wartości podwyznacznika $D_{ii}(n, i)$ należy teraz wykonać mnożenie obu otrzymanych ostatnio wyrażeń, czyli:

$$\begin{aligned} D_{ii}(n, i) &= \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 \left[\left(\frac{m_l^2}{m_y^2} + 1\right) (i-2) - i - 3 \right] \left[\left(\frac{m_l^2}{m_y^2} + 1\right) (n-i-1) - n + i + 2 \right] = \\ &= \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 \left[\frac{m_l^2}{m_y^2} (i-2) + 1 \right] \left[\frac{m_l^2}{m_y^2} (n-i-1) + 1 \right] = \\ &= \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 \left[\left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 (i-2) (n-i-1) + \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^2 (n-i-1) + \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^2 (i-2) + 1 \right], \end{aligned}$$

a stąd wynika wzór ostateczny na wartość podwyznacznika

$$D_{ii}(n, i) = \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 \left[\left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 (i-2)(n-i-1) + \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^2 (n-3) + 1 \right]$$

oraz wzór na błąd podłużny i -tego punktu prostoliniowego i równobocznego poligonu gdy $1 < i < n$, przy czym $n \geq 5$

$$m_{\text{podł}} =$$

$$= m_l \sqrt{\frac{D_{ii}}{D}} = m_l \sqrt{\frac{\left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 \left[\left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 (i-2)(n-i-1) + \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^2 (n-3) + 1 \right]}{\left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 \left[\left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 (n-3) + 2 \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^2 \right]}}$$

Po prostych przekształceniach postać wzoru staje się identyczna z podaną poprzednio

$$m_{\text{podł}} = m_l \sqrt{\frac{(i-2)(n-i-1) + (n-3) \left(\frac{m_y}{m_l}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{m_l}\right)^4}{n-3 + 2 \left(\frac{m_y}{m_l}\right)^2}}$$

Ostatni wzór nie obejmuje — jak już wspomniano poprzednio — niezależnych od błędów pomiarów długości pierwszego oraz n -tego punktu poligonu. Łatwo można wykazać, że zachowuje on swą ważność dla błędów pozostałych punktów nawiazania, tj. punktu drugiego i przedostatniego. Zestawienie wzoru na podwyznacznik dla drugiego na przykład elementu przekątnej głównej prowadzi do zależności:

$$D_{22} = \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 \left[\left(\frac{m_l^2}{m_y^2} + 1\right)(n-3) - (n-4) \right] = \left(\frac{m_l}{m_y}\right)^4 \left[\left(\frac{m_l}{m_y}\right)^2 (n-3) + 1 \right].$$

Identyczną postać można uzyskać podstawiając $i=2$ lub $i=n-1$ do podanego poprzednio ogólniejszego wzoru na wartość podwyznacznika, co stanowi sprawdzenie słuszności tego wzoru dla drugiego lub przedostatniego punktu poligonu.

Tablice porównawcze błędów średnich w prostoliniowych i równobocznych poligonach dla różnych założeń odnośnie błędów punktów nawiazania

W załączonych do pracy tablicach wyliczono błędy średnie poprzeczne i podłużne punktów ciągów. Rozważano przy tym poligony równoboczne i prostoliniowe o długości boku (łącznie z bokiem nawiazania) $l=400$, zakładając wielkości błędów średnich pomiaru kątów i boków równe $m^a = 10^{\text{cc}}$ $m_l = 0,04$.

Przyjęte założenia odpowiadają normom istotnym dla drugorzędnych pomiarów poligonizacji precyzyjnej.

Obliczenie każdej z załączonych tablic oparto na przyjęciu innego założenia co do wielkości błędów punktów nawiazania przyjmując w każdym przypadku identyczne wielkości wszystkich ośmiu współrzędnych nawiazania.

Jako pierwsza została podana tablica błędów poprzecznych i podłużnych przy założeniu bezbłędności punktów nawiazania będąca odpowiednikiem znanej tablicy Hausbrandta. Następnie umieszczono analogiczne tablice zestawione przy przyjęciu różnych wielkości błędów nawizań. Wydaje się celowe jeszcze raz przypomnieć, że tablice obliczone w przypadkach zarzucenia bezbłędności nawizań odpowiadają poligonom, w których również punkty nawiazania są położone na jednej prostej, przy czym długości boków nawiazania są równe długościom pozostałych boków poligonu. Zrozumiałe, że przy założeniu bezbłędności nawizań zastrzeżenia co do wzajemnego położenia punktów nawiazania stają się nieistotne.

LITERATURA

- [1] Banachiewicz T.: *Metody rachunków astronomicznych*. Kraków 1952.
- [2] Hausbrandt S.: Wzory na błąd średni dowolnego punktu w poligonie typowym i wnioski dotyczące dokładności pomiarów kątowych i liniowych w poligonach typowych. *Geodezja i Kartografia*. T. II, z. 1.
- [3] Hausbrandt S.: Wyrównanie sieci trygonometrycznych z odrzuceniem założenia bezbłędności punktów nawiazania. *Geodezja i Kartografia*. T. III, z. 1.
- [4] Hausbrandt S.: *Rachunki geodezyjne*. Warszawa 1953.
- [5] Hausbrandt S.: Analiza porównawcza dokładności wielokotrójkątowych i małokotrójkątowych sieci triangulacyjnych nawiazana do prac geodezyjnych w Polsce. *Prace Instytutu Geodezji i Kartografii*. T. III, z. 1 (5).
- [6] Jordan-Eggert: *Handbuch der Vermessungskunde*. Stuttgart 1931. II. Band, 1 Halbband. z
- [7] Kamela C.: *Geodezja*. Warszawa 1951. Część I.
- [8] Kluźniak St.: *Geodezja niższa*, Warszawa 1928.
- [9] Kochmański T.: *Metody obliczeń geodezyjnych*. Kraków 1953.
- [10] *Nowe metody i zagadnienia w geodezyjnych pomiarach podstawowych*. Praca zbiorowa pod red. A. Kryńskiego. Warszawa 1952.
- [11] Senisson W.: Wzory na błędy poprzeczne i podłużne punktów jednostronnie nawiazanego poligonu o równych bokach z uwzględnieniem błędów nawiazania. *Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej*. Zeszyt 1 „Geodezja“ (w druku).
- [12] Senisson W.: Zastosowanie krakowianowych tabel zerujących oraz sposoby bezpośredniego wyznaczania najprawdopodobniejszych wartości niewiadomych w układach liniowych. *Przegląd Geodezyjny* 1954, s. 110—114.
- [13] Weigel K.: *Geodezja*. Warszawa 1938.

РЕЗЮМЕ

Анализ ошибок типичных полигонов до сих пор, как правило, опирался на положении о безошибочности исходных пунктов. Однако, вследствие увеличивающейся точности полигональных измерений положение это становится все менее обоснованным. В практике измерений влияние ошибок исходных пунктов может иметь особенно большое значение в случае сети полигональных узлов. С целью облегчения анализа некоторых типичных полигональных ходов были составлены соответствующие формулы а также числовые таблицы, в которых учтено влияние ошибок координат исходных пунктов.

Для прямолинейного равностороннего полигона, в котором все углы (в том числе и примычные) близки к 180° и длины сторон (в том числе и исходные) приблизительно равны между собой, при расчете ошибок положения точек можно использовать следующие формулы:

поперечная ошибка

$$m_{\text{попер}} = m_a l \sqrt{\frac{A\mu^3 + B\mu^2 + C\mu + D}{E\mu^3 + F\mu^2 + G\mu}} \quad \text{при чем } 1 \leq i \leq n$$

продольная ошибка

$$m_{\text{прод}} = m_l \sqrt{\frac{(i-2)(n-i-1) + (n-3) \left(\left(\frac{m_y}{m_l} \right)^2 + \left(\frac{m_y}{m_l} \right)^4 \right)}{n-3 + 2 \left(\frac{m_y}{m_l} \right)^2}} \quad \text{при чем } 2 \leq i \leq n-1$$

а в случае когда $i=1$
или $i=n$ $m_{\text{прод}} = m_y$

В приведенных выше формулах i означает порядковый номер точки (счет точек совместно с двумя исходными), n — общее количество точек (в том числе четыре исходных так, что всегда $n \geq 5$), l — длина отдельной стороны хода, m_a и m_l ошибки измерения угла и длины, m_x и m_y ошибки исходных пунктов по направлениям параллельным и перпендикулярным к ходу. Величина (μ в формуле поперечной ошибки имеет значение

$$\mu = \left(\frac{m_a l}{m_x} \right)^2$$

Коэффициенты A, B, C, D, E, F, G , являющиеся функциями i и n определяются формулами, приведенными на стр.

Положение о безошибочности исходных данных ($m_x=0$ и $m_y=0$) приводит к следующему виду формулы поперечной и продольной ошибки:

$$m_{\text{попер}} = m_a l \sqrt{\frac{A}{G}}; \quad m_{\text{прод}} = m_l \sqrt{\frac{(i-2)(n-i-1)}{n-3}}$$

Если в этих формулах положить количество определяемых точек $K=n-i$ и индекс очередного номера определяемой точки $r=i-2$ — можно получить формулы идентичные с известными формулами С. Гаусбрандта (2).

При больших ошибках координат исходных пунктов и небольших ошибках измерений может оказаться, по практическим соображениям, обоснованным

prenebrech ошибками измерений, что приведет к сравнительно простым формулам:

$$m_{\text{попер}} = m_x \sqrt{\frac{D}{G}} \quad m_{\text{прод}} = \frac{m_y}{\sqrt{2}}.$$

Формулы ср. кв. поперечных и продольных ошибок получены в результате обобщения проведенного анализа ошибок неизвестных с применением краковянского способа к методу посредственных измерений, а также при помощи определительных преобразований.

Résumé

Jusqu'à présent les analyses des erreurs moyennes des polygones typiques ont été, en règle générale, fondées sur le principe de la certitude (fixation sans erreurs) des points de raccordement, ce qui devient de moins en moins justifié en présence de l'augmentation de la précision de la mesure des polygones. En pratique des mesurages, l'influence des erreurs de raccordement peut avoir une importance toute spéciale en cas du réseau des noeuds polygonaux. Pour faciliter l'analyse des certains cheminements polygonaux typiques on a assorti des formules directes et des tables numériques dans lesquelles on a tenu compte de l'influence des erreurs moyennes des coordonnées de raccordement. Pour faire le calcul des erreurs moyennes de la position des points dans un polygone rectiligne et équilatéral où tous les angles (y inclus les deux angles de raccordement) sont rapprochés à 180° et les longueurs des côtés (les deux côtés de raccordement y compris) sont approximativement égales — on peut appliquer les formules suivantes:

Erreur latérale

$$m_{\text{lat}} = m_a^i \sqrt{\frac{A\mu^3 + B\mu^2 + C\mu + D}{E\mu^3 + F\mu^2 + G\mu}} \quad \text{où } 1 \leq i \leq n$$

Erreur longitudinale

$$m_{\text{long}} = m_l \sqrt{\frac{(i-2)(n-i-1) + (n-3) \left(\frac{m_y}{m_l} \right)^2 + \left(\frac{m_y}{m_l} \right)^4}{n-3 + 2 \left(\frac{m_y}{m_l} \right)^2}} \quad \text{où } 2 \leq i \leq n-1$$

par contre quand $i=1$ ou $i=n$ alors $m_{\text{long}} = m_y$

Dans les formules ci-dessus „i“ signifie le numéro du point (compté conjointement avec les deux points de raccordement qui ont été fixés au commencement) et par contre „n“ signifie le nombre globale des points (les quatres points de raccordement y compris, donc il y a toujours $n \geq 5$). La longueur de la ligne simple est représentée par „l“. Les erreurs de mesure des angles et de longueur sont marquées comme m_a et m_l tandis que les erreurs des points de raccordement en direction parallèle et perpendiculaire à la direction de cheminement sont marquées comme m_y et m_x .

La valeur „μ“ dans la formule pour l'erreur latérale signifie $\mu = \left(\frac{m_a l}{m_x} \right)^2$.

Les coefficients A, B, C, D, E, F, G qui représentent les fonctions de „i“ et de „n“ déterminent les formules qui sont présentées à la page ...

Le principe des raccordements sans erreurs, soit l'admission que $m_x=0$ et $m_y=0$ réduit les formules pour les erreurs latérales et les erreurs longitudinales à la forme suivante:

$$m_{\text{lat}} = m_a l \sqrt{\frac{A}{G}} \quad m_{\text{long}} = m_l \sqrt{\frac{(i-2)(n-i-1)}{n-3}}.$$

Si dans les formules dernièrement indiquées on place le nombre des points nouvellement fixés $k=n-4$, ainsi que l'indicateur de suite du point nouvellement déterminé $r=i-2$ on obtient la forme identique aux formules bien connues de S. Hausbrandt (2).

Quand les erreurs des coordonnées de raccordement sont grandes et les erreurs des mesurages sont petites, on peut admettre comme justifié par les considérations pratiques, l'acceptation du principe de l'omission des erreurs des mesurages. Cela nous conduit aux formules relativement simples:

$$m_{\text{lat}} = m_x \sqrt{\frac{D}{G}} \quad m_{\text{long}} = \frac{m_y}{\sqrt{2}}.$$

On a obtenu les formules pour les erreurs moyennes latérales et longitudinales comme une généralisation des analyses effectuées des erreurs des inconnues en appliquant la conception des cracoviens à la méthode des observations indirectes, ainsi qu'à l'aide des transformations des déterminants.

Tablica 1

Tablica wartości błędu średniego $\frac{\text{poprzącznego}}{\text{podłużnego}}$ i -tego punktu poligonu o ogólnej ilości n punktów gdy założono bezbłądność czterech punktów nawiazania, czyli $m_x = m_y = 1$, przy czym przyjęto długość boku $L = 400$ m oraz błędy obserwacji $m_a = 10''$ $m_t = 0,04$

	kolejność punktu w poligonie i																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
5	0	0	3	0	0																			
	0	0	28	0	0																			
6	0	0	3	3	0	0																		
	0	0	33	33	0	0																		
7	0	0	4	5	4	0	0																	
	0	0	35	40	35	0	0																	
8	0	0	4	7	7	4	0	0																
	0	0	36	44	44	36	0	0																
9	0	0	5	8	9	8	5	0	0															
	0	0	36	46	49	46	36	0	0															
10	0	0	5	8	10	10	8	5	0	0														
	0	0	37	48	52	52	48	37	0	0														
11	0	0	5	9	11	12	11	9	5	0	0													
	0	0	38	49	55	56	55	49	38	0	0													
12	0	0	5	9	13	14	14	13	9	5	0	0												
	0	0	38	50	56	60	60	56	50	38	0	0												

w poligonie n

ilość punktów

13	0	0	5	10	13	16	17	16	13	10	5	0	0										
	0	0	38	50	58	62	63	62	58	50	38	0	0										
14	0	0	5	10	14	17	19	19	17	14	10	5	0	0									
	0	0	38	51	59	64	66	66	64	59	51	38	0	0									
15	0	0	5	10	15	18	21	21	21	18	15	10	5	0	0								
	0	0	38	52	60	65	68	69	68	65	60	52	38	0	0								
16	0	0	5	11	15	19	22	24	24	22	19	15	11	5	0	0							
	0	0	38	52	61	66	70	72	72	70	66	61	52	38	0	0							
17	0	0	5	11	16	20	24	26	26	26	24	20	16	11	5	0	0						
	0	0	38	52	62	68	72	74	75	74	72	68	62	52	38	0	0						
18	0	0	6	11	16	21	25	28	29	29	28	25	21	16	11	6	0	0					
	0	0	39	53	62	68	73	76	77	77	76	73	68	62	53	39	0	0					
19	0	0	6	11	17	22	26	29	31	32	31	29	26	22	17	11	6	0	0				
	0	0	39	53	62	69	74	78	79	80	79	78	74	69	62	53	39	0	0				
20	0	0	6	11	17	22	27	31	33	35	35	33	31	27	22	17	11	6	0	0			
	0	0	39	53	63	70	75	79	81	82	82	81	79	75	70	63	53	39	0	0			
21	0	0	6	11	17	23	28	32	35	37	38	37	35	32	28	23	17	11	6	0	0		
	0	0	39	53	63	70	76	80	83	84	85	84	83	80	76	70	63	53	39	0	0		
22	0	0	6	12	18	24	29	33	37	39	41	41	39	37	33	29	24	18	12	6	0	0	
	0	0	39	54	64	71	77	81	84	86	87	87	86	84	81	77	71	64	54	39	0	0	
23	0	0	6	12	18	24	30	35	38	41	43	44	43	41	38	35	30	24	18	12	6	0	0
	0	0	39	54	64	72	78	82	85	88	89	90	89	88	85	82	78	72	64	54	39	0	0
24	0	0	6	12	18	25	30	36	40	43	46	47	47	46	43	40	36	30	25	18	12	6	0
	0	0	39	54	64	72	78	83	86	89	91	92	92	91	89	86	83	78	72	64	54	39	0

Wzory na błędy średnie poprzeczne i podłużne

Tablica 2

Tablica wartości błędu średniego $\frac{\text{poprzącznego}}{\text{podłużnego}}$ i -tego punktu poligonu o ogólnej ilości n punktów gdy uwzględniono błędy punktów nawiązania w kierunkach poprzecznym i podłużnym równe $m_x = m_y = 0,05$. Długość boku nawiązania oraz błędy obserwacji przyjęto te same jak w tablicy pierwszej zestawionej przy założeniu bezbłędności nawiązań. Błędy w milimetrach.

	kolejność punktu w poligonie i																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
5	40	30	25	30	40																			
	50	42	45	42	50																			
6	39	31	27	27	31	39																		
	50	43	49	49	43	50																		
7	39	32	28	27	28	32	39																	
	50	44	51	53	51	44	50																	
8	38	33	30	29	29	30	33	38																
	50	45	53	57	57	53	45	50																
9	38	33	31	30	30	30	31	33	38															
	50	46	54	59	60	59	54	46	50															
10	38	33	32	32	32	32	32	32	33	38														
	50	46	55	61	63	63	61	55	46	50														
11	38	34	33	34	35	35	35	34	33	34	38													
	50	46	56	62	65	66	65	62	56	46	50													
12	37	34	34	35	37	38	38	37	35	34	34	37												
	50	47	57	63	68	69	69	68	63	57	47	50												

w poligonie n

13	37	34	35	37	39	41	41	41	39	37	35	34	37										
	50	47	57	64	69	72	72	72	69	64	57	47	50										
14	37	34	35	38	41	43	45	45	43	41	38	35	34	37									
	50	47	58	65	70	73	75	75	73	70	65	58	47	50									
15	37	35	36	39	43	46	48	49	48	46	43	39	36	35	37								
	50	47	58	66	72	75	77	78	77	75	72	66	58	47	50								
16	37	35	37	41	45	49	51	53	53	51	49	45	41	37	35	37							
	50	48	59	67	72	76	79	80	80	79	76	72	67	59	48	50							
17	37	35	37	42	47	51	55	57	58	57	55	51	47	42	37	35	37						
	50	48	59	67	73	77	80	82	83	82	80	77	73	67	59	48	50						
18	37	35	38	43	48	54	58	61	62	62	61	58	54	48	43	38	35	37					
	50	48	59	68	74	78	82	84	85	85	84	82	78	74	68	59	48	50					
19	37	35	38	44	50	56	61	64	66	67	66	64	61	56	50	40	38	35	37				
	50	48	60	68	75	79	83	86	87	87	87	86	83	79	75	68	60	48	50				
20	37	35	39	45	52	58	64	68	71	72	72	71	68	64	58	52	45	39	35	37			
	50	48	60	68	75	80	84	87	89	90	90	89	87	84	80	75	68	60	48	50			
21	37	35	39	46	53	60	66	71	74	77	78	77	74	71	66	60	53	46	39	35	37		
	50	48	60	69	76	81	85	88	90	92	92	92	90	88	85	81	76	69	60	48	50		
22	37	35	40	47	55	62	69	73	78	81	83	83	81	78	75	69	62	55	47	40	35	37	
	50	48	60	69	76	82	86	89	92	94	94	94	94	92	89	86	82	76	69	60	48	50	
23	37	35	40	48	56	64	72	77	82	86	88	89	88	86	82	77	72	64	56	48	40	35	37
	50	48	60	69	77	82	87	90	93	95	96	96	96	95	93	90	87	82	77	69	60	48	50
24	37	35	40	48	57	66	74	80	86	90	93	94	94	93	90	86	80	74	66	57	48	40	35
	50	48	61	70	77	83	87	91	94	96	98	98	98	98	96	94	91	87	83	77	70	61	48
																							37
																							50

Tablica 3

Tabela wartości błędu średniego $\frac{\text{poprzącznego}}{\text{podłużnego}}$ i -tego punktu poligonu o ogólnej ilości n punktów gdy uwzględniono błędy punktów

nawiazania w kierunkach poprzecznym i podłużnym równo $m_x = m_y = 0,10$.

Długość boku nawiazania oraz błędy obserwacji przyjęto te same jak w tablicy pierwszej zestawionej przy założeniu bezbłędności nawizań. Błędy w milimetrach

	kolejność punktu w poligonie i																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
5	81	59	50	59	81																			
	100	75	76	75	100																			
6	78	62	52	52	62	78																		
	100	77	79	79	77	100																		
7	77	64	54	51	54	64	77																	
	100	79	81	81	81	79	100																	
8	76	65	57	52	52	57	65	76																
	100	80	83	84	84	83	80	100																
9	76	66	59	54	53	54	59	66	76															
	100	81	84	86	86	86	84	81	100															
10	75	66	60	56	54	54	56	60	66	75														
	100	82	85	87	88	88	87	85	82	100														
11	75	67	62	58	56	56	56	58	62	67	75													
	100	83	87	89	90	91	90	89	87	83	100													
12	74	67	63	60	58	58	58	58	60	63	67	74												
	100	84	88	90	92	93	93	92	90	88	84	100												

w poligonie n

13	74	68	64	62	61	60	60	60	61	62	64	68	74											
	100	85	89	91	93	94	95	94	93	91	89	85	100											
14	74	68	65	63	63	63	63	63	63	63	63	65	68	74										
	100	86	89	92	95	96	97	97	96	95	92	89	86	100										
15	74	68	65	64	64	65	65	66	65	65	64	64	65	68	74									
	100	86	90	94	96	98	99	99	99	98	96	94	90	86	100									
16	73	68	66	66	66	67	68	69	69	68	67	66	66	66	68	73								
	100	87	91	95	97	99	100	101	101	100	99	97	95	91	87	100								
17	73	69	66	67	68	70	71	72	73	72	71	70	68	67	66	69	73							
	100	87	92	95	98	100	102	103	103	103	102	100	98	95	92	87	100							
18	73	69	67	68	70	72	74	76	76	76	76	74	72	70	68	67	69	73						
	100	88	92	96	99	102	103	104	105	105	104	103	102	99	96	92	88	101						
19	73	69	68	69	71	74	77	79	80	81	80	79	77	74	71	69	68	69	73					
	100	88	93	97	100	103	104	106	107	107	107	106	104	103	100	97	93	88	100					
20	73	69	68	70	73	76	79	82	82	85	85	82	82	79	76	73	70	68	69	73				
	100	89	93	97	101	103	106	107	108	109	109	108	107	106	103	101	97	93	89	100				
21	73	69	69	71	74	78	82	85	88	89	90	89	88	85	82	78	74	71	69	69	73			
	100	89	94	98	102	104	107	109	110	110	111	110	110	109	107	104	102	98	94	89	100			
22	73	69	69	72	76	80	85	88	91	94	95	95	94	91	88	85	80	76	72	69	69	73		
	100	90	95	99	102	105	108	110	111	112	112	112	112	111	110	108	105	102	99	95	90	100		
23	73	70	70	73	77	82	87	92	95	98	100	100	100	98	95	92	87	82	77	73	70	70	73	
	100	90	95	99	103	106	109	111	113	113	114	114	114	113	113	111	109	106	103	99	95	90	100	
24	73	70	70	74	78	84	89	94	99	102	104	105	105	104	102	99	94	89	84	78	74	70	70	73
	100	90	95	100	104	107	110	112	113	114	115	116	116	115	114	113	112	110	107	104	100	95	90	100

Errata do tomu IV zeszyt 3 „Geodezja i Kartografia“

strona	wiersz	wydrukowano	powinno być
178	10 od góry	zaznaczone	zaznaczono to
178—179	5 od góry	B_2	B_3
„ „	6 od góry	B_3	B_2



SPIS TREŚCI

S. Szpetkowski — Optyczny pomiar odległości na zasadzie wcięć mimośrodkowych	193
S. Szpetkowski — Orientacja optyczna przy zastosowaniu wcięć mimośrodkowych	204
W. Senisson — Wzory na błędy średnie poprzeczne i podłużne punktów w prostoliniowym i równobocznym poligonie z uwzględnieniem błędów czteropunktowego nawiązania	216

СОДЕРЖАНИЕ

С. Шпетковский — Оптическое определение расстояний на основе эксцентрических засечек	202
С. Шпетковский — Оптическое ориентирование при применении способа эксцентрических засечек	214
В. Сениссон — Формулы средне квадратические поперечных и продольных ошибок точек прямолинейного и равносторонного полигона с учетом ошибок исходных четырех пунктов	237

SOMMAIRE

S. Szpetkowski — Le mesurage optique de distance sur base des intersections d'excentricité	202
S. Szpetkowski — L'orientation optique en application des intersections d'excentricité	214
W. Senisson — Les formules pour les erreurs moyennes latérales et longitudinales des points dans un polygone rectiligne et équilatéral, avec prise en considération des erreurs de raccordement de quatres points	238

Cena zł 10,—