

50

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET GEODEZJI

GEODEZJA I KARTOGRAFIA

KWARTALNIK NAUKOWY

TOM IV • ZESZYT 3



PAŃSTWOWE
WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

1 9 5 5

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
K O M I T E T G E O D E Z J I

G E O D E Z J A I K A R T O G R A F I A

K W A R T A L N I K N A U K O W Y
T O M I V • Z E S Z Y T 3

P A Ń S T W O W E
W Y D A W N I C T W O N A U K O W E
W A R S Z A W A
1 9 5 5



KOMITET REDAKCYJNY

Jan Różycki (redaktor naczelny), Bronisław Dzikiewicz
(zastępca redaktora), Marian Brunon Piasecki (sekretarz)

RADA REDAKCYJNA

Franciszek Biernacki, Tadeusz Kochmański, Zygmunt Kowalczyk,
Stanisław Kryński, Henryk Leśniok, Janusz Tymowski

Adres Redakcji: Politechnika Warszawska,
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 1

Nakład 866+103 egz.	Do składania 13 VI 1955
Ark. wyd. 2,8 druk. 2 ¹ / ₈	Podpisano do druku 13 IX 1955
Papier dr. sat. 70 g V kl. 70 × 100 cm	Druk ukończ. we wrześniu 1955
Cena zł 10,—	Nr zam. 303/121. K-6-971
POZNAŃSKA Drukarnia Naukowa — POZNAŃ, FREDRY 10	

Włodzimierz Kryszicki

O pewnym zastosowaniu i o oszacowaniu rozkładu Studenta

1. Zastosowanie rozkładu Studenta do eliminacji pomiaru budzącego wątpliwości

Gdy dokonujemy pewnej ilości niezależnych, jednakowo dokładnych pomiarów tej samej wielkości, to każdy wynik pomiaru uważać można za wartości tej samej zmiennej losowej; zakładamy w dalszym ciągu naszych rozważań, że zmienna ta podlega rozkładowi normalnemu (Gaussa) o nieznanym średniej m i nieznanym wariancji σ^2 , to znaczy, że gęstość prawdopodobieństwa jej rozkładu wyraża się wzorem

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (1)$$

Założenie takie można przyjąć np. w przypadku, gdy wszystkie pomiary są dokonane tym samym przyrządem.

Na temat prawa błędów Gaussa warto przytoczyć tutaj cytaty Poincarégo¹: „wszyscy przekonani są o słuszności prawa błędów, zakomunikował mi pewnego dnia M. Lippmann, eksperymentatorzy — ponieważ sądzą, że jest to twierdzenie matematyczne, matematycy — ponieważ uważają to za fakt eksperymentalny“. I obie strony właściwie mają rację: przy pewnych bowiem założeniach [np. 1) taki sam (dowolny) rozkład prawdopodobieństwa n zmiennych losowych, 2) skończona jednakowa wartość średniej m , 3) skończona jednakowa wartość wariancji σ^2] twierdzenie, o którym mowa (jedno z tak zwanych centralnych twierdzeń granicznych), mówi, że rozkład sumy tych zmiennych losowych przy n rosnącym nieograniczenie dąży do rozkładu normalnego, z drugiej zaś strony wiele rozkładów spotykanych w praktyce da się z zadowalającym przybliżeniem zastąpić przez odpowiedni rozkład normalny.

¹ Poincaré H., Calcul des probabilités, Paris 1912, str. 171.



W odniesieniu do błędów przypadkowych² powszechnie przyjmuje się tzw. „hipotezę błędów elementarnych“ przyjętą przez Bessela i Hagen, według której łączny błąd popełniony przy pomiarach astronomicznych lub fizycznych traktuje się jako sumę dużej liczby wzajemnie niezależnych elementarnych błędów. Z przyjęcia tej hipotezy na podstawie centralnego twierdzenia granicznego wynika, że łączny błąd posiada rozkład prawdopodobieństwa w przybliżeniu normalny.

Założmy następnie, że wykonaliśmy $(n+1)$ pomiarów tej samej wielkości, które jako wyniki dały $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$, oraz niechaj jeden z pomiarów, np. x_{n+1} , różni się na tyle od każdego z pozostałych, że powstaje podejrzenie, iż błąd, którym obarczony jest ów pomiar, nie jest przypadkowy.

Rozstrzygnięcie tego zagadnienia jest możliwe przy użyciu rachunku prawdopodobieństwa, tzn. można okazać, z jakim prawdopodobieństwem można twierdzić, że budzący wątpliwość pomiar x_{n+1} powstał nie na skutek popełnienia błędu przypadkowego.

W matematycznej statystyce znana jest metoda³ oceny rozbieżności dwóch średnich (arytmetycznych), pochodzących z prób od siebie niezależnych, które zostały pobrane z normalnej zbiorowości generalnej. Jeżeli liczność pierwszej próbki wynosi n_1 , drugiej n_2 oraz średnie (arytmetyczne) wyników pomiarów wynoszą dla pierwszej próbki $\bar{x}_1$, dla drugiej $\bar{x}_2$, to wielkość

$$t = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{S_{\bar{x}}} \quad (2)$$

jest zmienną losową, podlegającą rozkładowi Studenta z $k = n_1 + n_2 - 2$ stopniami swobody; we wzorze (2) wielkość $S_{\bar{x}}$ winna być obliczona na podstawie zależności

$$S_{\bar{x}} = s \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}, \quad (3)$$

gdzie

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i^{(1)} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_i^{(2)} - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}}. \quad (4)$$

Zagadnienie postawione na początku da się sprowadzić do oceny rozbieżności dwóch średnich, pochodzących z prób od siebie niezależnych: jednej o liczności $n_1 = n$, drugiej o liczności $n_2 = 1$.

² Patrz np. *Mechanik* T. I, cz. I S. I M. P., Warszawa 1949; J. Obalski, *Rachunek błędów*, § 2 *Teoria błędów przypadkowych*, str. 336 i dalsze.

³ Patrz np. W. Romanowski, *Zastosowanie statystyki matematycznej w doświadczałnictwie*. Tłumaczenie z rosyjskiego, Pol. Wyd. Gosp. Warszawa 1951, str. 82—85.

Niech więc

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_1^n x_i}{n}, \quad \bar{x}_2 = x_{n+1}. \quad (5)$$

Z wzoru (4) otrzymujemy

$$s = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x}_1)^2}{n-1}}; \quad (6)$$

wzór (3) na podstawie (6) przyjmie teraz postać

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x}_1)^2}{n-1}}. \quad (7)$$

Tak więc zmienna losowa

$$t = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{\bar{x}_1 - x_{n+1}}{\sqrt{\frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x}_1)^2}{n-1}}} \quad (8)$$

podlega rozkładowi Studenta z $(n-1)$ stopniami swobody, to znaczy, że gęstość prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej wyraża się wzorem

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}. \quad (9)$$

Postępowanie praktyczne da się podzielić na następujące etapy:

1. obliczamy średnią arytmetyczną z n pomiarów $x_1, x_2, \dots, x_n$ nie budzących podejrzenia, że są obciążone błędem nieprzypadkowym.
2. obliczamy wielkość s podług wzoru (6) (wzór ten w rozpatrywanym przypadku jest identyczny ze wzorem na odchylenie standardowe (średnie) z próbki liczącej n sztuk).
3. obliczamy wielkość $S_{\bar{x}}$ z wzoru (7).
4. obliczamy różnicę pomiędzy średnią obliczoną w 1. a $(n+1)$ -ym wynikiem pomiaru x_{n+1} ; oznaczmy jej wartość bezwzględną przez a

$$|x_1 - x_{n+1}| = a$$

5. obliczamy wielkość t z wzoru (8), odpowiadającą obliczonej różnicy; oznaczmy jej wartość bezwzględną przez t_a

6. przy obliczonej wartości t_a oraz ilości stopni swobody $k=n-1$ znajdujemy prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową t wartości spełniającej nierówność $|t| > t_a$; jest ono równe

$$P[|t| > t_a] = 1 - 2 \int_0^{t_a} S_{n-1}(t) dt = 2 \int_{t_a}^{\infty} S_{n-1}(t) dt, \quad (10)$$

gdzie gęstość prawdopodobieństwa $S_{n-1}(t)$ określona jest wzorem (9).

Wartości całki występującej we wzorze (10) są tablicowane i znajdują się w każdym podręczniku statystyki matematycznej.

2. Przykład

Jednakowo dokładne pomiary dokonane tym samym przyrządem pewnego kąta dały poniższe rezultaty

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
35° 43' 16,8"	+1	1
35° 43' 15,3"	-0,5	0,25
35° 43' 18,5"	+2,7	7,29
35° 43' 10,8"	-5	25,
35° 43' 31,8"		
35° 43' 18,8"	+3	9,
35° 43' 21,4"	+5,6	31,36
35° 43' 18,4"	+2,6	6,84
35° 43' 10,9"	-4,9	24,01
35° 43' 11,3"	-4,5	20,25
		125,00

Piąty pomiar różni się od pomiaru najbliższego o 10,4" co może budzić wątpliwość, czy pomiar ten jest obciążony tylko błędem przypadkowym. Zbadajmy tę sprawę za pomocą metody podanej powyżej. Obliczamy kolejno:

1. średnia arytmetyczna z dziewięciu pomiarów (prócz zakwestionowanego pomiaru, który oznaczmy przez x_{10})

$$\bar{x}_1 = 35^\circ 43' 15,8'' \text{ oraz } x_{10} = \bar{x}_2 = 35^\circ 43' 31,8''$$

$$2. \quad s = \sqrt{\frac{125}{8}} = \sqrt{15,625}$$

$$3. \quad S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{10}{9}} \cdot \sqrt{15,625} = \frac{12,5}{3} = 4,1667$$

$$4. \quad \bar{x}_1 - x_{10} = -16''; \quad a = |\bar{x}_1 - x_{10}| = 16''$$

$$5. \quad t = \frac{\bar{x}_1 - x_{10}}{S_{\bar{x}}} = \frac{-16}{4,1667} = -3,84, \quad t_a = 3,84$$

6. przy danych $t_a = 3,84$ oraz $k = n_1 + n_2 - 2 = 8$ odczytujemy z tablic⁴ prawdopodobieństwo dane wzorem (10), wynosi ono około 0,006. Prawdopodobieństwo otrzy-

⁴ Romanowski loco cit. str. 220.

mania wyniku pomiaru nie mniej odchylającego się w jedną lub w drugą stronę od średniej (otrzymanej z pozostałych 9 pomiarów) niż zakwestionowany pomiar wynosi więc około 6⁰⁰/o

$$P[|\bar{x}_1 - x_{10}| \geq 16''] \approx 0,006,$$

a prawdopodobieństwo otrzymania wyniku pomiaru nie mniejszego niż kwestionowany wynosi oczywiście połowę tego, to znaczy

$$P[x_{10} - \bar{x}_1 \geq 16''] \approx 0,003.$$

Prawdopodobieństwo to jest na tyle małe, że otrzymanie takiego wyniku pomiaru (przy danych dziewięciu pomiarach jak wyżej) uważać możemy praktycznie za niemożliwe. Wobec tego z prawdopodobieństwem przeciwnym, tzn. około 99,7⁰/o, możemy twierdzić, że pomiar kwestionowany nie może być uważany za obciążony tylko błędem przypadkowym i dlatego winien być odrzucony.

3. Trzy twierdzenia graniczne o rozkładzie Studenta

Jak wiadomo przy n dostatecznie dużym rozkład Studenta może być zastąpiony przez rozkład normalny o średniej równej zero i standardzie równym jedności, którego gęstość prawdopodobieństwa

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (11)$$

jest niezależna od n .

Jest bowiem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \varphi_1(x) \quad (12)$$

dla każdej ustalonej wartości x .

Celem niniejszego jest rozstrzygnięcie zarówno rzędu tej zbieżności względem $\frac{1}{n}$, jak i oszacowanie różnicy $\varphi_1(x) - S_n(x)$. Precyzując dokładniej:

Należy znaleźć taką liczbę rzeczywistą $k > 0$ oraz taką funkcję $S(x)$, nie równą tożsamościowo zero, aby spełniony był warunek:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n^k [\varphi_1(x) - S_n(x)]\} = S(x) \quad (13)$$

dla każdej ustalonej wartości x .

Ażeby oszacować wyrażenie $S_n(x)$, otrzymane z prawej strony wzoru (9) przez zastąpienie $n-1$ przez n , rozważymy $\ln S_n(x)$.

⁵ Patrz np. Cramer H., *Matematyczne Metody Statystyki*, Moskwa 1948, str. 279.

W tym celu użyjemy następujących rozwinięć

$$\ln \Gamma(a) = \ln \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln a - a + \frac{\theta}{12a}, \quad (14)$$

$$0 < \theta < 1$$

oraz

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + z^3 \cdot \theta_1,$$

gdzie

$$0 < \theta_1 < \frac{1}{3} \quad \text{dla} \quad 0 < z < 1. \quad (15)$$

Wzoru (15) użyjemy do rozwinięcia $\ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)$ przy ustalonej wartości x i takich wartości n , aby było

$$\frac{x^2}{n} < 1, \quad \text{to znaczy dla} \quad n > x^2. \quad (16)$$

Wykonując wszystkie obliczenia według wzorów (14) i (15) otrzymamy przy założeniu (16)

$$\ln S_n(x) = -\ln \sqrt{2\pi} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{4n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (17)$$

gdzie $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ dąży do zera przy $n \rightarrow \infty$ tak jak $\frac{1}{n^2}$.

Na podstawie (17) będzie

$$\varphi_1(x) - S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[1 - \exp^{6*} \left(\frac{x^4 - 2x^2 - 1}{4n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right].$$

Rozwińmy teraz funkcję wykładniczą w nawiasie podług wzoru

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3 \cdot 4} + \dots \right) = 1 + z + z^2 \theta_2,$$

gdzie, jak łatwo wyliczyć przy $0 < z < 1$, jest $\frac{1}{2} < \theta_2 < \frac{3}{4}$.

Teraz otrzymamy dla dostatecznie dużych n

$$\varphi_1(x) - S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[\frac{-x^4 + 2x^2 + 1}{4n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

* Symbol $\exp x$ oznacza e^x .

Z postaci tej natychmiast wnioskujemy, że jeżeli we wzorze (13) przyjmujemy $k=1$, to otrzymamy następujące

twierdzenie graniczne I. Jeżeli $x \neq -\sqrt{1+\sqrt{2}}$ oraz $x \neq \sqrt{1+\sqrt{2}}$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n[\varphi_1(x) - S_n(x)]\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{-x^4 + 2x^2 + 1}{4} \neq 0. \quad (\text{I})$$

Prawa strona jest różna od zera dla wszelkich rzeczywistych wartości x , z wyjątkiem dwóch różnych wartości

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{1+\sqrt{2}}. \quad (18)$$

Jeśli więc $x = \pm \sqrt{1+\sqrt{2}}$, to cel naszego zagadnienia nie został jeszcze osiągnięty, bo wówczas prawa strona wzoru (I) jest równa zero. Wówczas należy w rozwinięciach (14) i (15) wziąć jeden wyraz więcej. Okaze się wówczas, że wyrażenie $0 \left(\frac{1}{n^2} \right)$ we wzorze (17) należy zastąpić przez

$$\frac{x^4}{4n^2} - \frac{x^6}{6n^2} + \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{6n(n+1)} + 0 \left(\frac{1}{n^3} \right).$$

W tym przypadku należy we wzorze (13) przyjąć $k=2$ i wówczas otrzymamy następujące

twierdzenie graniczne II. Jeżeli $x = -\sqrt{1+\sqrt{2}}$ albo $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n^2[\varphi_1(x) - S_n(x)]\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{x^4(2x^2-3)}{12}. \quad (\text{II})$$

Obliczając prawą stronę przy podanych wartościach x otrzymamy wartość następującą

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{4\sqrt{2}+5}{12} \approx 0,106. \quad (19)$$

Prawą stronę wzoru granicznego (I) można traktować jako funkcję zmiennej x w dowolnym skończonym przedziale i zbadać jej przebieg dla $|x| < X < +\infty$. Niechaj

$$S(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} (-x^4 + 2x^2 + 1) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

i obliczmy jej pochodną

$$S'(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} x(x^4 - 6x^2 + 3) e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Pochodna zeruje się przy pięciu różnych wartościach x , które oznaczmy

$$x_{1,5} = \mp \sqrt{3 + \sqrt{6}}, \quad x_{2,4} = \mp \sqrt{3 - \sqrt{6}}, \quad x_3 = 0.$$

Wówczas przebieg zmienności funkcji $S(x)$ będzie następujący

x	$-\infty$	$\dots$	x_1	$\dots$	x_2	$\dots$	x_3	$\dots$	x_4	$\dots$	x_5	$\dots$	$+\infty$
$S'(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$S(x)$	0	$\searrow$	$S(x_1)$	$\nearrow$	$S(x_2)$	$\searrow$	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}$	$\nearrow$	$S(x_4)$	$\searrow$	$S(x_5)$	$\nearrow$	0

gdzie

$$S(x_1) = S(x_5) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} (2 + \sqrt{6}) e^{-\frac{3+\sqrt{6}}{2}} \approx -0,117,$$

$$S(x_2) = S(x_4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sqrt{6} - 2) e^{\frac{3-\sqrt{6}}{2}} \approx 0,136,$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \approx 0,099.$$

Bez względu na wartość x mamy oszacowanie

$$|S(x)| \leq S(x_2) = S(x_4) \approx 0,136. \quad (20)$$

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie III. Funkcja $S(x)$ równa prawej stronie wzoru granicznego (I) jest dla wszelkich rzeczywistych wartości x ograniczona; nierówność (20) podaje dokładne oszacowanie (ostre)⁷ tej funkcji.

LITERATURA

1. N. A. Borodaczew, *Osnownyje woprosy tieorii tocznosti proizvodstwa*, Moskwa—Leningrad 1950, Rozdział II.
2. A. M. Dlin, *Matematiczeskaja statistika w tiechnike*, Moskwa 1951, str. 98—105 i 132—134.
3. M. Fis z, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1954, str. 197—202.
4. M. F. Malikow, *Osnowy nietrologii*, Moskwa 1949, Rozdział III—IV.
5. J. Oderfeld, *Zarys statystycznej kontroli jakości*, str. 36—38.
6. S. Romanowski, *Podstawy statystyki matematycznej*, Kraków 1952, str. 159—167.
7. W. I. Romanowski, *Osnownyje zadaczi tieorii oszibok*, Moskwa 1947, str. 12—32. [Znane z polskiego tłumaczenia p. t. Podstawowe zagadnienia teorii błędów. PWN, Warszawa 1955, które ukazało się po opracowaniu niniejszej pracy.]

⁷ Oszacowanie ostre jest to oszacowanie, którego nie da się już poprawić.

8. A. Weryha, *Statystyka teoretyczna cz. I i II*, PWN, Warszawa 1954.
9. A. G. Worthing, Geffner J., *Treatment of experimental data*, New-York—London 1943. Rozdziały VI, VII, VIII, IX, X (istnieje tłumaczenie na język rosyjski).

РЕЗЮМЕ

В пункте 1 работы приведено применение метода оценки расходимости двух средних значений, полученных из взаимно независимых испытаний, взятых с нормальной генеральной совокупности, для исключения сомнительного наблюдения с применением распределения плотности вероятности Студента $S_n(x)$, определенной формулой (9); в пункте 2 приведен пример применения этого метода для 10 наблюденийданного угла, произведенных тем же самым инструментом.

В виду того, что при $n \rightarrow \infty$ плотность $S_n(x)$ стремится к плотности нормального распределения $\varphi_1(x)$ со средней равной нулю и стандартным отклонением равным единице (формула 11), исследован ряд сходимости к нулю разности $\varphi_1(x) - S_n(x)$ по отношению к $\frac{1}{n}$ и получены при этом следующие результаты:

Теорема I: Если $x \neq -\sqrt{1+\sqrt{2}}$ и $x \neq \sqrt{1+\sqrt{2}}$ тогда для каждого определимого значения x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n [\varphi_1(x) - S_n(x)]\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{-x^4 + 2x^2 + 1}{4} \neq 0 \quad \text{I}$$

Теорема II: Если $x = -\sqrt{1+\sqrt{2}}$ или $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ тогда

$$\lim \{n^2 [\varphi_1(x) - S_n(x)]\} = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{x^4(2x^2 - 3)}{12} \right] x = \pm \sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 0,106 \quad \text{II}$$

Теорема III: Функция $S(x)$ равна правой стороне граничной формулы I для всех действительных значений x ограничена:

$$|S(x)| \leq S(x_2) = S(x_n) \approx 0,136$$

причем максимальное значение достигает при

$$x_{2,4} = \pm \sqrt{3 - \sqrt{6}}.$$

RÉSUMÉ

Dans le premier article du travail on discute l'application de la méthode de l'appréciation de la divergence de deux moyennes provenant des épreuves indépendantes, lesquelles ont été pris d'une normale collectivité générale pour élimination du mesurage, qui inspire de l'incertitude en appliquant la répartition de la densité de probabilité de Student $S_n(x)$ déterminée par la formule (9).

L'article 2 du travail contient un exemple de l'application de cette méthode pour 10 mesurages du même angle et qui ont été exécuté avec le même appareil. Etant donné que pour $n \rightarrow \infty$ densité $S_n(x)$ tend vers densité de la repartition

normale $\varphi_1(x)$ avec la moyenne égale zéro et avec la déviation standard égale un (formule 11); on a examiné le degré de la convergence jusqu'au zéro de la différence $\varphi_1(x) - S_n(x)$ par rapport à $1/n$ et on a obtenu les résultats suivants:

Théorème I.

Si $x \neq -\sqrt{1+\sqrt{2}}$ et $x \neq \sqrt{1+\sqrt{2}}$, il y a pour chaque valeur fixé

$$\lim \{n [\varphi_1(x) - S_n(x)]\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{-x^4 + 2x^2 + 1}{4} \neq 0.$$

Théorème II.

Si $x = -\sqrt{1+\sqrt{2}}$ ou $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ il y a

$$\lim \{n^2 [\varphi_1(x) - S_n(x)]\} = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{x^4(2x^2 - 3)}{12} \right]_{x=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}} \approx 0,106.$$

Théorème III.

La fonction $S(x)$ égale au côté droit de la formule (I) est pour toutes les valeurs réelles x limitée:

$$|S(x)| \leq S(x_2) = S(x_4) \approx 0,136$$

pendant que la plus grande valeur est atteinte quand

$$x_{2,4} = \pm \sqrt{3 - \sqrt{6}}.$$

Władysław Batkiewicz

Obliczenie sieci triangulacyjnej zbudowanej z trójkątów „wyliczeniowych“

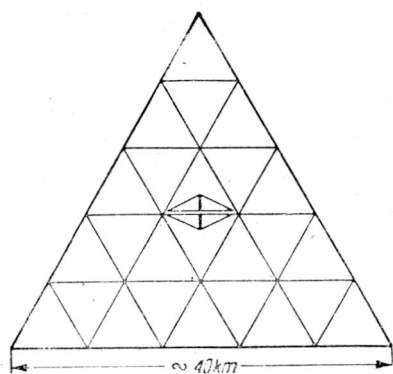
I

Dotychczas stosowana triangulacja składa się z przylegających do siebie trójkątów, w których pomierzono wszystkie kąty. Długości boków tych trójkątów określane są za pomocą pomiarów liniowych i rozwinięć bazowych dokonanych dla boku wyjściowego. Poza tym mierzy się jeszcze szereg baz dla innych boków sieci, które stanowią kontrolę pomiarów kątowych. Materiał ten jest jednak szczupły w porównaniu z przeważającą ilością pomiarów kątowych, a w dodatku ze względów obliczeniowych nie jest on odpowiednio wykorzystywany. Celem uniknięcia bardzo uciążliwych i długich prac obliczeniowych sieć taką, jak wiadomo, dzieli się na sieć wieńcową, sieci łączne i wypełniające. Jest to tzw. triangulacja I rzędu, którą z kolei — dla dokładniejszego pokrycia terenu punktami pomiarowymi — uzupełnia się triangulacją rzędu II, III i IV. Przy wyrównaniu i obliczeniu sieć II rzędu nawiązana jest do sieci rzędu I, trzeciego rzędu do II itd. Metoda ta jest więc metodą przybliżoną, głównie uzgadniającą pomiary sieci rzędów wyższych z niższymi, a nie wyrównującą ich według warunku $[pvv] = \min$. Cała zatem triangulacja I, II i III rzędu jest tylko triangulacją kontrolującą i wzmacniającą triangulację rzędu IV. Kontrola ta jest bardzo kosztowna, bowiem jest ona połączona ze żmudnymi pomiarami kątów przy długich celowych, uciążliwą lokalizacją punktów, budową wysokich wież itp. Rozciągnięcie takiej triangulacji na cały kontynent i wyrównanie jej metodami dotychczasowymi jest pracą niezmiernie ciężką i nie gwarantuje dostatecznej dokładności, dokładność bowiem pomiarów w łańcuchu trójkątów bardzo szybko maleje w miarę oddalania się od boku wyjściowego.

II

Prof. T. Kochmański zaproponował więc nową metodę pomiarów triangulacyjnych opartą na tzw. trójkątach „wyliczeniowych“. Metoda ta została opracowana i przeanalizowana pod względem dokładności w sposób przybliżony, podany poniżej.

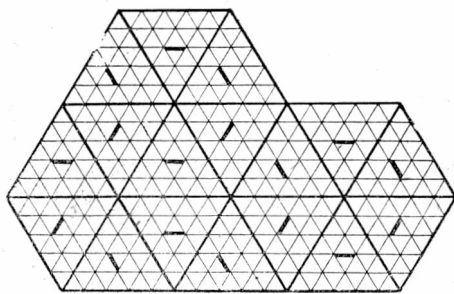
Cały obszar, który ma być objęty triangulacją, pokrywamy siecią trójkątów o bokach np. około 8 km, a następnie z tej sieci wybieramy punkty odległe o około 5 boków trójkątów, czyli około 40 km i tworzymy z nich trójkąty wyliczeniowe (rys. 1). W trójkątach tych nie wykonujemy żadnych pomiarów kątowych, a jedynie obliczamy długości ich boków z boków trójkątów 8-kilometrowych. Za długość wyjściową w każdym trójkącie wyliczeniowym lub w co drugim trójkącie przyjmujemy jeden bok



Rys. 1

trójkąta 8-kilometrowego otrzymany z rozwinięcia bazowego lub w miarę możliwości z bezpośredniego pomiaru. Bok ten należy wybrać jak najbliższej środka ciężkości trójkąta wyliczeniowego, tak by boki tego ostatniego zostały obliczone mniej więcej z jednakową dokładnością i nie przez zbyt dużą ilość trójkątów łączących je z bazą. W ten sposób długość każdego boku trójkąta wyliczeniowego może być określona dwa razy z dwu sąsiednich trójkątów, co stanowi doskonałą kontrolę pomiarów i lokalizuje błędy w sieci. Za ostateczną wartość bierzemy średnią arytmetyczną, wartości te bowiem pochodzą z dwu niezależnych pomiarów.

Wewnątrz każdego trójkąta wyliczeniowego pozostaje grupa trójkątów w ilości około 25. Grupę tę wyrównujemy niezależnie od podobnych grup w trójkątach sąsiednich, a dopiero po wyrównaniu obliczamy długości boków trójkąta wyliczeniowego. Tak więc sieć trójkątów 8-kilometrowych spełnia podwójne zadanie, a mianowicie stanowi ona sieć triangulacyjną w danym trójkącie wyliczeniowym oraz rozwinięcie bazowe dla jego boków. Postępowanie to prowadzi więc do uzyskania sieci triangulacyjnej złożonej z trójkątów, w których znane są długości wszystkich boków (rys. 2). Sieć tę orientujemy w sposób przybliżony i wyrównujemy równocześnie dla całego obszaru objętego triangulacją, opierając się na metodzie podanej przez prof. E. Warchałowskiego



Rys. 2

w „Przeglądzie Geodezyjnym“ nr 7—8 z 1948 r. Po tym wyrównaniu obliczamy ostateczne współrzędne punktów położonych w wierzchołkach trójkątów wyliczeniowych. Następnie wyrównujemy ponownie grupy

trójkątów w liczbie około 25 każda, położone wewnątrz trójkątów wyliczeniowych. W tym celu rozszerzamy tylko każdy z poprzednio ułożonych systemów równań warunkowych o warunki wynikające z nawiązania do trzech punktów stałych. Dla punktów znajdujących się na linii rozgraniczającej dwie sąsiednie grupy trójkątów 8-kilometrowych otrzymamy po dwie pary współrzędnych, z których tworzymy średnią arytmetyczną dla otrzymania ostatecznych współrzędnych.

Dla sieci obejmujących całe kontynenty należałoby (celem zmniejszenia ilości warunków uwzględnianych równocześnie) z wyżej wymienionych trójkątów wyliczeniowych utworzyć jeszcze większe trójkąty wyliczeniowe i tak dopiero otrzymaną sieć wyrównać równocześnie. Długość boków tych trójkątów umotywowana byłaby ilością warunków, które decydujemy się rozwiązać równocześnie, oraz dokładnością, którą chcemy uzyskać (patrz wykres nr 1). Jest to zatem podobny sposób wyrównania, jak wyżej opisany, z tą tylko różnicą, że składa się on z dwu etapów prowadzących do utworzenia jednolitej sieci dla całego obszaru.

III

Obecnie zajmiemy się analizą dokładności proponowanej sieci. Na wstępie należy zaznaczyć, że jest to sieć kątowa skontrolowana i wzmocniona przez znaczną ilość pomiarów liniowych (baz). W sieci tej błąd pomiarów kątowych nie przenosi się i nie narasta poprzez długie łańcuchy trójkątów do takich wartości, jak w triangulacjach dotychczasowych. Pomiarów kątowych w dwu sąsiednich grupach trójkątów, położonych wewnątrz odpowiednich trójkątów wyliczeniowych, są wzajemnie kontrolowane. Każdy błąd, przekraczający przewidywane granice dokładności, może być od razu wykryty, tak że nie wywrze on szkodliwego wpływu na całą sieć. Jest to metoda niewiele odbiegająca od metody ścisłej, wpływ bowiem wszystkich pomiarów kątowych i liniowych w całej sieci na wynik wyrównania jest ujęty w równoczesnym wyrównaniu sieci złożonej z trójkątów wyliczeniowych. Przy tworzeniu zaś trójkątów wyliczeniowych popełniamy nieznaczną nieścisłość,* gdyż na obliczenie długości boków tych trójkątów mają wpływ dwie najbliższe położone bazy, co uwzględniamy biorąc średnią odpowiednich wyników. Wpływ dalszych baz (zresztą szybko zanikający) pomijamy za cenę o wiele ekonomiczniejszego pod względem nakładu pracy sposobu wyrównania. Podobną nieścisłość popełniamy także przy postępowaniu odwrotnym, kiedy, mając wyrównane współrzędne sieci trójkątów wyliczeniowych, przystępujemy do wyrównania współrzędnych pozostałych punktów.

Niżej podajemy wartości błędów średnich przy założeniu że rozpatrujemy sieć zbudowaną z trójkątów równobocznych, w których błąd średni

jednostkowy m_0 pomiaru kąta wynosi $\pm \frac{\varrho''}{412\,000}$, czyli $\pm 0,5''$, błędy zaś

pomiaru boków wyjściowych ($b=8$ km) wynoszą $\pm \frac{b}{500\,000}$, czyli

$m_b = \pm 16$ mm, oraz że boki trójkątów wyliczeniowych podane są z jednokrotną dokładnością. Jeżeli chodzi o to założenie, to przeprowadzono tutaj obliczenie, które wykazało, że dla prostoty rachunkowej można je uczynić bez żadnego praktycznego uszczerbku dla całości wyrównania.

Przy tych założeniach, jak zobaczymy poniżej, otrzymano błąd średni po wyrównaniu boku 40-kilometrowego trójkąta wyliczeniowego nie większy od około 13 cm (dokładnie 128 mm) jako średnia arytmetyczna z dwu sąsiednich trójkątów. Długość takiego boku da się wyrazić za pomocą funkcji

$$\varphi_1 = b \cdot f_1(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

a po zamianie na funkcję liniową:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & b_0 \cdot f_1(a_1, a_2, \dots, a_n)_0 + f_1(a_1, a_2, \dots, a_n)_0 db + b_0 \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial a_1} \right)_0 da_1 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial f_1}{\partial a_2} \right)_0 da_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial a_n} \right)_0 da_n \right], \end{aligned}$$

czyli

$$\varphi_1 = b_0 \cdot f_{0,1} + f_{0,1} db + b_0(a_1 da_1 + a_2 da_2 + \dots + a_n da_n) = f_{c,1} db + b_0(f_{0,1} + df_1).$$

Błąd średni tej funkcji równa się

$$m_{\varphi_1} = \sqrt{f_{0,1}^2 \cdot m_b^2 + b_0^2 \cdot m_{f_1}^2}, \quad \text{gdzie } m_{f_1} = m_0 \cdot F_{f_1}.$$

Jak widać, składa się on z dwu niezależnych wyrazów: z błędu wywołanego pomiarem bazy oraz z błędu wywołanego niedokładnością pomiaru kątów. Wyraz pierwszy nie wymaga dalszego omówienia. Jest on, jak wiadomo, wynikiem zmiany skali trójkąta wyliczeniowego przy zachowaniu jego podobieństwa do trójkąta, w którym długość bazy byłaby podana bezbłędnie. Wyraz drugi natomiast jest wynikiem błędów pomiaru kątów. Ze względu na to, że wyrównanie przeprowadzono metodą warunkową w ujęciu krakowianowym, błąd rozpatrywanej funkcji po wyrównaniu obliczono z pierwiastka krakowianowego wzorem podanym przez prof. T. Kochmańskiego. Wzór ten w zastosowaniu praktycznym daje kilkakrotną oszczędność czasu niezbędnego dla wykonania obliczeń oraz zezwala na proste obliczenie błędów średnich nawet bardzo skompliko-

wanych funkcji. I tak jeżeli weźmiemy funkcję f_1 , występującą w φ_1 po zamianie jej na funkcję liniową, czyli

$$f_1 = f_{01} + a_1 da_1 + a_2 da_2 + \dots + a_n da_n,$$

wtedy błąd średni tej funkcji po wyrównaniu określa wzór:

$$m_{f_1}^2 = m_0^2 [\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}^{-1} \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{w}' : \mathbf{r})^2],$$

czyli

$$m_{f_1} = m_0 \cdot F_{f_1},$$

gdzie

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & & \\ & \frac{1}{p_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} \mathbf{w}' = \boldsymbol{\tau} \mathbf{w} \cdot \mathbf{p}^{-1};$$

$\boldsymbol{\tau} \mathbf{w}$ jest transponowanym krakowianem współczynników przy niewiadomych w równaniach warunkowych,

$\mathbf{r}$ jest pierwiastkiem krakowianowym z równań korelat.

Można zauważyć, że obliczenie błędności F_{f_1} w praktyce sprowadza się do spierwiastkowania jeszcze jednej kolumny dołączonej do krakowianu równań korelat.

Ze względu na fakt, że przy dalszej analizie dokładnościowej będziemy zmuszeni z powodu trudności rachunkowych traktować wyniki otrzymane dla każdego z trzech boków trójkąta jako spostrzeżenia niezależne, chociaż w rzeczywistości są one związane wyrównaniem i pomiarem wspólnej podstawy, wydaje się słuszne wprowadzenie pojęcia zastępczego boku. Przyjęto przy tym założenie, że błąd średni zastępczego boku będzie taki, że suma trzech takich (zastępczych) boków traktowanych jako spostrzeżenia niezależne będzie obciążona błędem średnim równym błędowi średniemu sumy boków, leżących na obwodzie trójkąta, ponieważ suma taka jest spostrzeżeniem bezpośrednim.

Oznaczmy więc długość obwodu przez funkcję φ_2 (analogiczną do funkcji φ_1), a jej błąd średni przez m_{φ_2} wówczas z prawa przenoszenia się błędów wynika, że błąd średni boku zastępczego $m_{\varphi_2} = \frac{m_{\varphi_1}}{\sqrt{3}}$.

Przyjmując teraz, jak już wspomniano:

$$b_0 = 8 \text{ km}, \quad m_b = \pm 16 \text{ mm} \quad \text{oraz} \quad m_0 = \pm 0,5''$$

otrzymano analogicznie do wzoru dla m_{φ_1} :

$$m_{\varphi_2} = \sqrt{15^2 \cdot 16^2 + 8\,000\,000^2 \left(\frac{0,5''}{\varrho''}\right)^2} \cdot 8,23^2 \cong$$

$$\cong \sqrt{57\,600 + 160^2} = \sqrt{57\,600 + 25\,600} = \sqrt{83\,200} \cong \pm 288 \text{ mm}$$

a stąd

$$m_{\varphi_z} = \frac{m_{\varphi_2}}{\sqrt{3}} = \pm 167 \text{ mm}.$$

Średnia z dwu niezależnych pomiarów w dwu przylegających trójkątach będzie obarczona błędem średnim

$$m'_{\varphi_z} = \frac{m_{\varphi_z}}{\sqrt{2}} = \pm 128 \text{ mm}.$$

Obliczono także m_{φ_1} dla funkcji φ_1 i otrzymano przy powyżej przyjętych wartościach dla b_0 , m_b , oraz m_0 :

$$m_{\varphi_1} = \sqrt{5^2 \cdot 16^2 + 8\,000\,000^2 \left(\frac{0,5''}{\varrho''}\right)^2} \cdot 3,71^2 \cong \sqrt{6\,400 + 4\,900} \cong \pm 106 \text{ mm}$$

$$m'_{\varphi_1} = \frac{m_{\varphi_1}}{\sqrt{2}} = \pm 75 \text{ mm}.$$

W ten sposób określono dolną i górną granicę błędu średniego długości boku trójkąta wyliczeniowego. Dolną granicą jest wartość ± 75 mm, ponieważ do jej uzyskania przyjęto taki przypadek, jak gdyby dla każdego boku trójkąta wyliczeniowego pomierzona była osobna podstawa, a w funkcji „przenoszącej” długość tej podstawy na bok trójkąta wyliczeniowego występowałyby wielkości niezwiązane wyrównaniem z wielkościami występującymi w podobnych funkcjach utworzonych dla pozostałych boków trójkąta. Wartość ± 128 mm jest górną granicą rozpatrywanego błędu z tego względu, że w każdej funkcji kształtu

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \text{const.}$$

przeciętna wartość

$$|x| = \frac{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|}{n} \text{ osiąga max. dla}$$

$$|x_1| = |x_2| = \dots = |x_n|.$$

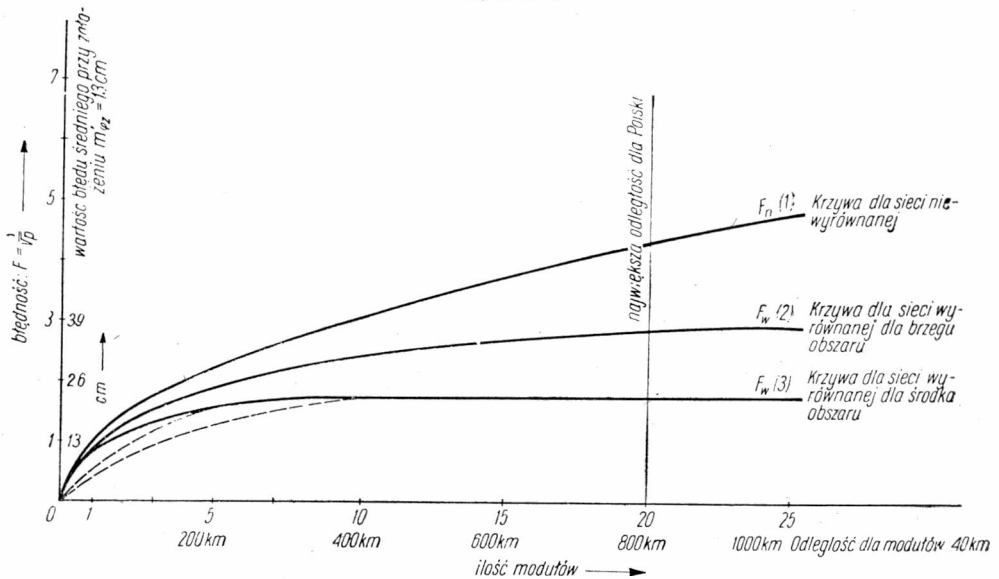
Wobec tego w funkcji:

$$m_{\varphi_2} = m_{\varphi_z} \sqrt{3} = \sqrt{m_{\varphi_z}^2 + m_{\varphi_z}^2 + m_{\varphi_z}^2}$$

m_{φ_z} jest maksymalnym przeciętnym błędem średnim. Dla wyrównania sieci złożonej z trójkątów wyliczeniowych m'_{φ_z} jest przyjęty za błąd średni jednostkowy.

Błędy średnie największej odległości — w sieci w kształcie trójkąta równobocznego o dowolnej wielkości — charakteryzuje wykres 1. Na osi pionowej podano tu wartości błędności dla jednostki wagi, na osi zaś poziomej odległość między dwoma punktami oraz ilość boków (40-kilometrowych) łączących te dwa punkty¹. Na tym wykresie krzywa (1) podaje wartości błędności dla sieci niewyrównanej. Jest to wykres prawa przenoszenia się błędów o postaci $F = \sqrt{n}$.

Wykres 1



Krzywa (2) przedstawia wykres błędności dla sieci wyrównanej. Powstał on w ten sposób, że wyliczono na podstawie wyrównania metodą prof. Warchałowskiego wartości błędności dla najdłuższej i najniekorzystniej położonej (na brzegu) odległości w sieci o kształcie trójkąta o wymiarach 1×1 moduł, następnie w sieci 3×3 moduły, 5×5 i 7×7 modułów (rys. 3a, b, c, d).

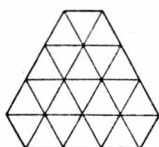
W metodzie prof. E. Warchałowskiego pomierzonymi i wyrównywanymi elementami sieci są długości boków. Jest to więc metoda wyrównania sieci triangulacyjnej liniowej, za którą możemy uważać także sieć zbudowaną z trójkątów wyliczeniowych. Przy wyrównaniu tą metodą wyrażamy

¹ W dalszym ciągu ilość boków łączących dwa punkty będziemy nazywali ilością modułów.

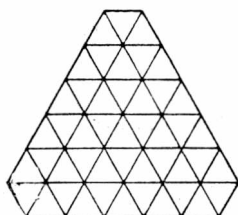
najpierw kąty w funkcji boków odpowiednich trójkątów. Jak widać, jest to rozwiązanie jednoznaczne, tak że jedynymi warunkami nadliczbowymi, jakie należy uwzględnić w sieci przy jej wyrównaniu, są warunki hory-



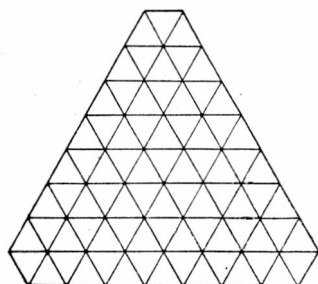
Rys. 3a



Rys. 3b



Rys. 3c



Rys. 3d

zontu. Ilość warunków w sieci trójkątowej prostej jest zatem równa ilości punktów wewnętrznych sieci, co niezmiernie ułatwia wyrównanie tak pod względem myślowym, jak i pod względem nakładu pracy.

Kształt tych warunków podanych już w formie liniowej i zgodnie z rys. 4 jest następujący:

$$\begin{aligned}
 & (a_{12}) \cdot \frac{1}{4} \frac{\Delta_1}{a_{01} \cdot a_{02}} \left(+ \frac{1}{p_1 - a_{01}} + \frac{1}{p_1 - a_{02}} + \frac{1}{p_1 - a_{12}} - \frac{1}{p_1} \right) + \\
 & + (a_{23}) \cdot \frac{1}{4} \frac{\Delta_2}{a_{02} \cdot a_{03}} \left(+ \frac{1}{p_2 - a_{02}} + \frac{1}{p_2 - a_{03}} + \frac{1}{p_2 - a_{23}} - \frac{1}{p_2} \right) + \dots \\
 & \dots + (a_{61}) \cdot \frac{1}{4} \frac{\Delta_6}{a_{06} \cdot a_{01}} \left(+ \frac{1}{p_6 - a_{06}} + \frac{1}{p_6 - a_{01}} + \frac{1}{p_6 - a_{61}} - \frac{1}{p_6} \right) + \\
 & + (a_{01}) \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta_6}{a_{06} \cdot a_{01}} \left(+ \frac{1}{p_6 - a_{06}} - \frac{1}{p_6 - a_{01}} - \frac{1}{p_6 - a_{61}} - \frac{1}{p_6} \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{4} \frac{\Delta_1}{a_{01} \cdot a_{02}} \left(- \frac{1}{p_1 - a_{01}} + \frac{1}{p_1 - a_{02}} - \frac{1}{p_1 - a_{12}} - \frac{1}{p_1} \right) \left. \right] + \dots \\
 & \dots + (a_{06}) \left[\frac{1}{4} \frac{\Delta_5}{a_{05} \cdot a_{06}} \left(+ \frac{1}{p_5 - a_{05}} - \frac{1}{p_5 - a_{06}} - \frac{1}{p_5 - a_{56}} - \frac{1}{p_5} \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{4} \frac{\Delta_6}{a_{06} \cdot a_{01}} \left(- \frac{1}{p_6 - a_{06}} + \frac{1}{p_6 - a_{01}} - \frac{1}{p_6 - a_{61}} - \frac{1}{p_6} \right) \left. \right] + \omega = 0^2
 \end{aligned}$$

² Dla wyrównania sieci na powierzchni elipsoidy zmieniają się jedynie wyrazy wolne.

gdzie: $\omega = \left(\sum \arctg \frac{\pi_{oik}}{p - a_{ik}} - 180^\circ \right) \cdot \sin 1''$,

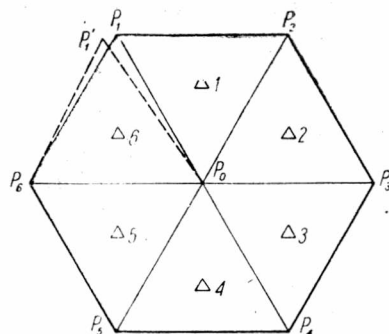
(a_{mn}) — poprawka boku $P_m - P_n$,

Δm — powierzchnia trójkąta m ,

p_m — połowa obwodu trójkąta m ,

a_{ik} — bok $P_i - P_k$,

$$\pi_{oik} = \sqrt{\frac{(p_m - a_{oi}) \cdot (p_m - a_{ok}) \cdot (p_m - a_{ik})}{p_m}}$$



Rys. 4

Dla trójkątów równobocznych o bokach jednomodułowych współczynniki przy poprawkach przybierają wartości $+ 0,57$ lub $- 0,57$.

Za str. 178 załączono przykład wyrównania i obliczenia błędności dla sieci o wymiarze 3×3 moduły.

Tablica I zawiera wartości uzyskane z obliczeń, które posłużyły do konstrukcji nr 1 i 2.

Tablica I

Ilość mod.	Odległość na brzegu obszaru				Odległość w środku obszaru			
	F_n	F_w	$F_n - F_w$	$F_{w_{n+1}} - F_{w_n}$	F_n	F_w	$F_n - F_w$	$F_{w_{n+1}} - F_{w_n}$
0	0	0	0	—	0	0	0	—
1	1,000	0,957	0,043	0,957	1,000	0,957	0,043	0,957
3	1,732	1,569	0,163	0,612	1,732	1,432	0,300	0,475
5	2,236	1,925	0,311	0,356	2,236	1,612	0,624	0,180
7	2,646	2,177	0,469	0,252	2,646	1,729	0,917	0,117

gdzie F_n jest błędnością przed wyrównaniem, a F_w błędnością po wyrównaniu. Następnie z różnic ($F_n - F_w$) z tab. I skonstruowano wykres nr 2. Na wykresie tym przeekstrapolowano krzywą różnic (2)' przyjmując, że między dwoma ostatnimi punktami pochodzącymi z wyliczenia krzywa ta jest już linią prostą. Jest to konstrukcja dostatecznie dokładna dla wykonywanej analizy. Z wartości krzywej różnic i krzywej dla sieci niewyrównanej tworzymy krzywą (2) na wykresie nr 1 dla sieci wyrównanej.

Z kolei przeprowadzono podobne badania dla takich samych odległości, lecz położonych możliwie najkorzystniej na obszarze objętym triangulacją, czyli wewnątrz tego obszaru (rys. 3a, b, c, d) i otrzymano krzywą (3) — wykres nr 1. Wartości tej krzywej obliczone dla odciętych większych od 9 modułów praktycznie nie wykazują wzrostu.

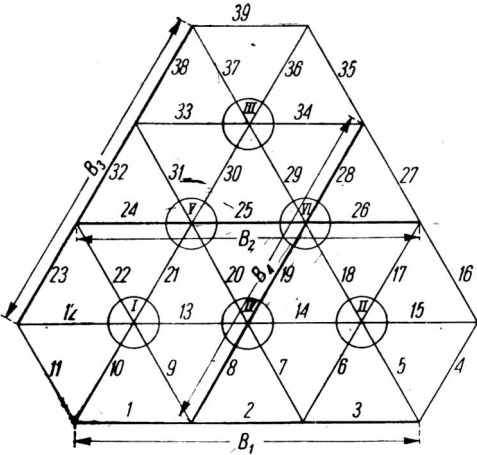
Przykład wyrównania sieci o wymiarach 3×3 moduły
(Obliczenie wykonano metodą warunkową w ujęciu krakowianowym)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	
B_1	+1	+1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
B_2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	+1	.	
B_3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	+1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
B_4	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
I	+0,57	.	.	.	.	.	.	+0,57	-0,57	-0,57	+0,57	-0,57	-0,57	.	.	.	.	.	.	+0,57	-0,57	-0,57	+0,57	+0,57	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		
II	.	.	+0,57	+0,57	-0,57	-0,57	+0,57	.	.	.	.	.	.	-0,57	-0,57	+0,57	-0,57	-0,57	+0,57	.	.	.	.	.	.	+0,57	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
III	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+0,57	.	.	+0,57	-0,57	-0,57	+0,57	.	-0,57	-0,57	+0,57	-0,57	-0,57	+0,57	+0,57
IV	.	+0,57	.	.	.	+0,57	-0,57	-0,57	+0,57	.	.	.	-0,57	-0,57	.	.	.	+0,57	-0,57	-0,57	+0,57	.	.	.	+0,57	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
V	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+0,57	.	.	.	.	.	+0,57	-0,57	-0,57	+0,57	.	-0,57	-0,57	.	.	+0,57	-0,57	-0,57	+0,57	+0,57	.	.	.	.	.	.		
VI	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+0,57	.	.	+0,57	-0,57	-0,57	+0,57	.	.	.	.	-0,57	-0,57	+0,57	-0,57	-0,57	+0,57	.	.	.	+0,57	.	.	.	.	.	
S	+1,57	+1,57	+1,57	+0,57	-0,57	.	.	+1,00	.	-0,57	+0,57	-0,57	-0,57	-0,57	-0,57	+0,57	.	-0,57	+1,00	.	-0,57	.	+1,57	+1,00	+1,00	+1,00	+0,57	+1,00	-0,57	-0,57	.	+1,57	.	.	+0,57	-0,57	-0,57	+1,57	+0,57	

Zestawienie współczynników przy
spozrzeniach w funkcjach
 B_1, B_2, B_3, B_4 .
(Krakowiany a wypisane dla pro-
stoty obliczenia w formie wierszy)

Zestawienie współczynników przy
poprawkach w równaniach warun-
kowych (krakowian $\tau w'$)

1, 2, 3, = Nr spostrzeżenia (boku) $L_1, L_2, L_3,$
I, II, III, = Nr równania warunkowego
Funkcja: $B_1 = L_1 + L_2 + L_3$
 $B_2 = L_{24} + L_{25} + L_{26}$
 $B_3 = L_{23} + L_{32} + L_{38}$ — Kontrola dla B_1
 $B_4 = L_{18} + L_{19} + L_{28}$ — Kontrola dla B_2



Rys. 5

Krakowian równań korelat (dolne liczby w kratkach)
oraz pierwiastek r (górne liczby)

Krakowiany $a \cdot \tau w' : r$ (górne liczby)
Krakowiany $a \cdot \tau w'$ (dolne liczby)

	I	II	III	IV	V	VI	B_1	B_2	B_3	B_4	S
I	+1,9745 +3,8988	.	.	-0,4936 -0,9747	-0,4936 -0,9747	+0,1645 +0,3249	+0,2887 +0,57	+0,2887 +0,57	+0,2887 +0,57	+0,2887 +0,57	+2,3066 +4,5543
II		+1,9745 +3,8988	.	-0,4936 -0,9747	+0,1645 +0,3249	-0,4936 -0,9747	+0,2887 +0,57	.	+0,2887 +0,57	+0,2887 +0,57	+2,0179 +3,9843
III			+1,9745 +3,8988	+0,1645 +0,3249	-0,4936 -0,9747	-0,4936 -0,9747	.	+0,2887 +0,57	+0,2887 +0,57	+0,2887 +0,57	+2,0179 +3,9843
IV				+1,8397 +3,8988	-0,5740 -0,9747	-0,5740 -0,9747	+0,4647 +0,57	+0,0516 .	+0,4389 +0,57	-0,4906 -1,14	+1,1563 +0,3249
V					+1,7479 +3,8988	-0,7926 -0,9747	+0,2070 .	+0,5061 +0,57	-0,3722 -1,14	+0,3009 +0,57	+1,5971 +0,3249
VI						+1,5578 +3,8988	+0,3375 .	+0,3375 .	-0,6070 -1,14	-0,6070 -1,14	+1,0188 -1,9551

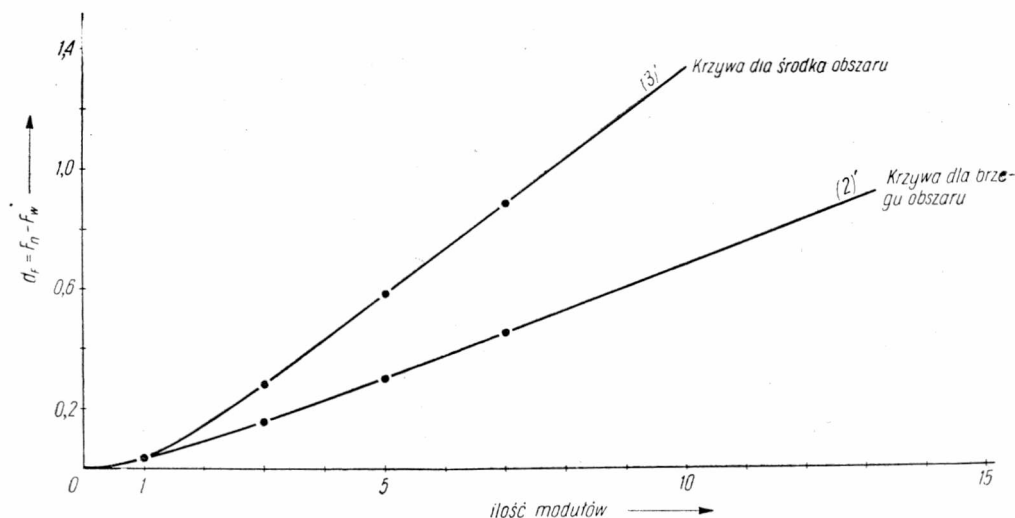
$$F_w = \sqrt{a \cdot p^{-1} \cdot a - (a \cdot \tau w' : r)^2} =$$

$$F_n^2 = a \cdot p^{-1} a =$$

1,5686	1,5686	1,4319	1,4319
3,0000	3,0000	3,0000	3,0000

Na podstawie wykresu nr 1 można także natychmiast ustalić, jak duże należy tworzyć trójkąty wyliczeniowe (z już raz utworzonych trójkątów mniejszych) przy wyrównywaniu sieci tego typu dla całego kontynentu, aby nie przekroczyć żądanych granic dokładności.

Wykres 2



IV

Podamy teraz krótkie porównanie sieci nowego typu z siecią dotychczas stosowaną biorąc pod uwagę następujące względy:

- 1) ilość prac pomiarowych i obliczeniowych,
- 2) szybkość wykonania,
- 3) uzyskaną dokładność.

ad 1) Przy triangulacji nowego typu odpada konieczność tworzenia triangulacji I i II rzędu, a w zamian za to należy pomierzyć np. dla Polski 300—400 baz o długości średnio ok. 2,5 km wraz z przeniesieniem bazowym na bok 8-kilometrowy. Wyrównanie zaś ogranicza się do rozwiązania ok. 400 zespołów równań warunkowych o ok. 30—40 równań w każdym i jednego zespołu o ok. 200 równaniach warunkowych.

ad 2) Wykonanie pomiaru 300—400 baz i ich rozwinięć jest niewątpliwie pracą mniej czasochłonną niż wykonanie triangulacji I i II rzędu. Bardzo ważne jest tu znaczne uniezależnienie się od warunków atmosferycznych. Wyrównanie sieci nowego typu można by powierzyć szeregowi grup obliczeniowych, które mogą pracować rów-

nocześnie. Wyrównanie ostateczne, obejmujące równocześnie obszar całego państwa, jest znacznie uproszczone.

ad 3) Dokładność pomiarów i obliczenia sieci nowego typu jest wielokrotnie wyższa niż sieci dotychczas stosowanych, co obrazuje wykres nr 1. Należy tutaj zaznaczyć także, że sieć nowego typu składa się tylko z krótkich celowych, które, jak wykazuje doświadczenie, charakteryzują się większą dokładnością pomiarów niż celowe długie.

W przypadku gdyby sieć nowego typu miała znaleźć zastosowanie na terenie już objętym triangulacją, należałoby pomierzyć brakującą ilość baz. Przy wyrównaniu i obliczeniu pomiary dotychczasowe, wykonane dla triangulacji I i II rzędu, zostałyby uwzględnione z odpowiednimi wagami.

LITERATURA

- I. Hazay, *O wyrównaniu sieci trygonometrycznych państwowych i kontynentalnych*.
W. Jordan, *Handbuch der Vermessungskunde*, III t., 5 wyd.
T. Kochmański, *Zarys rachunku krakowianowego*, Warszawa 1948.
E. Regöczy, *Sieć triangulacji I rzędu, utworzona z sieci III rzędu*.
E. Warchałowski, *Triangulacja nowego typu* („Przegląd Geodezyjny” nr 7—8, 1948).

РЕЗЮМЕ

Целью данной статьи является исследование возможности заменить классическую схему государственной триангуляции I-III классов сетью, состоящей из вычислительных треугольников, предложенную профессором Т. Кохманским. Согласно этого предложения территория, на которой должна быть построена триангуляция, покрывается сетью треугольников со сторонами длиной ок. 8 км., в которой измеряются все углы; в последующем из этой сети создается сеть т. наз. „вычислительных треугольников” со сторонами длиной ок. 40 км. При этом полагается, что в каждом, или в каждом другом вычислительном треугольнике будет измерена тем или иным способом одна 8-километровая сторона с целью определения длин сторон соответствующего вычислительного треугольника.

Уравнивание такой сети складывается из 3-х этапов:

1. уравнивание ок. 400 систем, состоящих из 30—40 условных уравнений и вычисление длины сторон вычислительных треугольников; каждая из этих систем охватывает сеть 8-километровых треугольников, расположенных внутри соответствующего вычислительного треугольника.
2. совместное уравнивание сети вычислительных треугольников по методу проф
3. Вархаловского (ок. 200 условных уравнений),
3. повторное уравнивание систем, перечисленных в первом этапе, с включением уравнений, вытекающих из привязки к 3-м твердым пунктам — вершинам соответствующих вычислительных треугольников, совместно уравненных во втором этапе.

Анализ точности приведенный в статье в форме графиков привел автора к убеждению, что предлагаемая сеть на много превосходит по точности применяемые до сих пор схемы построения триангуляции. Объем измерительных и вычислительных работ, а также стоимость их были бы значительно меньшими. Кроме того, сеть такого типа можно бы легко применить для значительно больших пространств, напр. для целого материка.

RÉSUMÉ

L'objet de cet article que l'auteur voulait atteindre est l'examen des possibilités de remplacement de la triangulation classique d'Etat (du 1^{er} jusqu'au 3^e rang) par le réseau de triangles établis moyennant les calculs dont la conception fut proposée par le professeur T. Kochmański. D'après ce système l'étendue, sur laquelle doit être effectuée la triangulation, doit être couverte par le réseau de triangles aux côtés huit kilomètres longs environ. Dans ce réseau il faut mesurer tous les angles et puis par la voie de calculs on établit de ce réseau un nouveau réseau soi-disant de „Triangles calculés“ et dont les côtés ont une longueur de 40 kilomètres environ. Il faut admettre que dans chaque ou chaque deuxième „triangle calculé“ on mesure par n'importe quel système un 8-kilomètres long côté afin d'établir la longueur des côtés du correspondant „triangle calculé“.

La compensation de ce réseau implique trois phases du travail, à savoir:

1^o La compensation de 400 ensembles environ dont chacun est composé de 30 à 40 équations de condition et le calcul du longueur des côtés des „triangles calculés“. Chacun de ces ensembles contient le réseau des triangles de huit kilomètres qui sont situés à l'intérieur du respectif „triangle calculé“;

2^o La compensation simultanée du réseau des „triangles calculés“ par la méthode élaborée par le professeur E. Warchałowski (200 équations de condition environ);

3^o La compensation nouvelle des ensembles cités dans la première phase mais qui sont élargies par les équations qui résultent de la liaison avec les trois points fixes comme les sommets des „triangles calculés“ correspondants et qui ont été simultanément compensés dans la seconde phase.

Par une analyse approfondie de l'exactitude, présentée dans cet article sous la forme des diagrammes, l'auteur est arrivé à une conviction que le réseau proposé surpasse de quelques fois, quant à son exactitude, tous les réseaux précédents. Il faut souligner aussi que la quantité des travaux de mesurage et de calcul ainsi que les frais y relatifs seraient dans cette nouvelle proposition réduits considérablement.

De plus, il serait très facile appliquer ce réseau pour l'étendue beaucoup plus vaste, par exemple pour le continent entier.

Zbigniew Czerski

O zmianach w położeniu osi obrotu lunety w teodolitach Wilda T4

W kwartalniku „Geodezja i Kartografia” tom III, zeszyt 2 1954 r. ukazała się praca mgra inż. Błażeja Duliana na temat zmian w położeniu osi obrotu lunety w teodolitach astronomicznych oraz sposobu ich wyznaczania¹.

W pracy tej autor omawia dwa charakterystyczne zjawiska, które przez niego zostały stwierdzone w teodolitach astronomicznych.

Pierwsze z nich polega na tym, że naprowadzając lunetę na jakikolwiek odległy cel raz ruchem lunety z dołu do góry, a drugi raz z góry na dół — otrzymuje się różne odczyty azymutalne. Należy przy tym uważać, aby kierunek obrotu leniwki koła wierzchołkowego był zgodny z obranym kierunkiem naprowadzenia lunety. Zmiana ruchu, chociażby najdrobniejsza, jest niedopuszczalna. Z podanych zestawień badań teodolitów Wilda T4 i Zeissa 100/100 m wynika, że zjawisko to powoduje różnice odczytów azymutalnych rzędu kilku sekund (od 2" do 4"). Wpływ tego zjawiska na wyniki pomiarów azymutalnych eliminuje się, jeśli przestrzega się zasady różnokierunkowego, lecz systematycznie powtarzalnego naprowadzania lunety na cel.

Drugie zjawisko jest ściśle zależne od odległości zenitalnej osi celowej i polega na systematycznej zmianie odczytu azymutalnego. Wpływ tego zjawiska nie eliminuje się w średniej arytmetycznej z pomiarów w obu położeniach lunety, wchodzi więc do ostatecznego wyniku pomiaru jako błąd systematyczny. W szczególności zniekształca np. azymut przedmiotu ziemskiego z obserwacji Polaris. Specjalne badania przeprowadzone przez inż. Duliana pozwoliły na ustalenie wielkości tego błędu dla trzech teodolitów Wilda T4 starego typu (dla odległości zenitalnej Polaris $z=37^\circ$) i wprowadzenie poprawki do zaobserwowanych azymutów.

Powtarzamy poniżej ostateczne zestawienie wyników podane przez autora na str. 70 omawianego artykułu:

Numer teodolitu	16969	16956	16957
Średni azymut obserwowany i średni błąd jego	$2^\circ 20'41,37'' \pm 0,23''$	$40,69'' \pm 0,44''$	$40,71'' \pm 0,20''$
Poprawka na zmianę w położeniu osi obrotu lunety	$-0,68''$	$-0,39$	$+0,02''$
Azymut poprawiony	$40,69''$	$40,30''$	$40,73''$

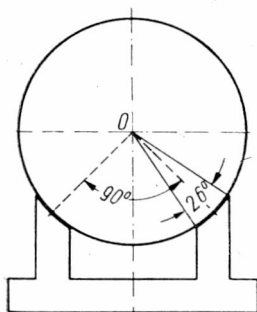
Występowanie pierwszego zjawiska tłumaczy inż. Dulian zmianą położenia osi obrotu lunety przy różnych kierunkach jej naprowadzania na cel, przy czym zmiana ta ma być spowodowana:

¹ Praca dotyczy głównie teodolitów Wilda T4.

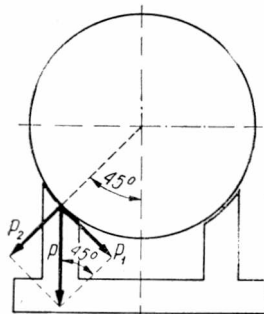
1. „Częściowym toczeniem się czopów w łożyskach zamiast wyłącznego obrotu lunety dookoła swej osi“.

2. „Wypychaniem czopów z łożysk alidady wskutek szkodliwego napięcia sił występujących w czasie obrotu lunety dookoła swej osi“.

W teodolitach Wilda T4 starego typu, które były badane przez inż. Duliana, każdy czop spoczywa na dwóch podstawkach walcowych. Kąt środkowy każdej z tych podstawek wynosi 26° , zaś kąt między ich promieniami centralnymi 90° (rys. 1). Jest to konstrukcja łożyska typu Y, która, jak wiadomo, wyklucza możliwość potoczenia się osi do stanu równowagi stałej. Istotnie, gdyby takie toczenie miało zachodzić, czop musiałby się oderwać od jednej podstawki. Rozkład sił działających w punkcie



Rys. 1



Rys. 2

styczności czopa z łożyskiem przedstawiałby się jak na rys. 2. Oznaczając przez p siłę ciężkości czopa łącznie z innymi masami, które na nim spoczywają, otrzymalibyśmy na wartość siły stycznej:

$$p_1 = p \cdot \sin 45^\circ \approx 0,7 p.$$

Siła ta wynosiłaby w praktyce kilka kilogramów i w żadnym razie nie mogłaby być równoważona siłą tarcia czopa w łożysku. Trudno również przypuścić, aby mógł działać na czop jednostronny nacisk tej wielkości równoważący omawianą siłę.

Stan równowagi stałej przy potaczaniu możliwy jest w innej konstrukcji łożyska, gdy mianowicie stykność czopa z łożyskiem zachodzi w punkcie najniższym czopa. Wówczas składowa styczna jest niewielka i może być zrównoważona siłą tarcia lub jednostronnym naciskiem.

Fizyczne wytłumaczenie zjawiska pierwszego, stwierdzonego przez inż. Duliana, jest zagadnieniem trudnym. Można by przypuszczać, że przy jednokierunkowym obrocie czopa oraz na skutek jednostronnych nacisków, które inż. Dulian nazywa prawdopodobnie „szkodliwymi napięciami sił“, smar wyciska się na jednej podstawie, gromadzi zaś na drugiej, umożliwiając przesunięcie czopa w płaszczyźnie poziomej. Również przypuszczać można, że obrót czopa może powodować odkształcenia sprężyste podstawek, zależne od kierunku obrotu. Obie te przyczyny mogą dawać zmiany w położeniu osi obrotu lunety, lecz o charakterze równowagi niestąjącej. Toteż byłoby interesujące zbadać, czy zjawisko stwierdzone przez inż. Duliana nie cofa się po pewnym okresie czasu (nawet dość długim).

Jeśli chodzi o wyeliminowanie szkodliwego wpływu zjawiska pierwszego na pomiary azymutalne, nasuwa się logiczne pytanie, czy nie byłoby najprościej stosować regułę jednokierunkowego nastawiania lunety na cel przez przestrzeganie klasycznej zasady obracania leniwką koła pionowego zawsze zgodnie ze wskazówkami zegara. Reguła, którą zaleca stosować inżynier Dulian, jest bardziej skomplikowana i obciąża

pamięć obserwatora dodatkowymi czynnościami; uzasadnienie tej reguły pomija autor milczeniem.

Występowanie drugiego z kolei zjawiska można wytłumaczyć niecyldrycznością czopów. Profil czopa nie jest w rzeczywistości kołem, lecz inną linią krzywą. Przyjmując pewien stały promień odniesienia r można przedstawić tę krzywą w układzie biegunowym

$$r(\varphi) = r_0 + dr(\varphi).$$

Jeśli przyrosty promienia dr w obu miejscach styku B_1 i B_2 nie są jednakowe, nastąpi przesunięcie środka czopa z punktu O do punktu O_2 (rys. 3). Rzut tego przesunięcia na płaszczyznę poziomą wyrazimy

$$\Delta = d_1 r \cdot \cos 45^\circ - d_2 r \cdot \cos 45^\circ.$$

Załóżmy przypadek najbardziej niekorzystny gdy oba przyrosty przyjmują wartości maksymalne dla danego profilu (c) i mają znaki przeciwne, wówczas

$$\Delta = \sqrt{2} \cdot c.$$

Załóżmy z kolei, że równocześnie przesunięcie drugiego czopa jest identyczne co do wielkości i kierunku. Odległość między czopami w teodolicie T4 wynosi 310 mm, wobec czego na zmianę kierunku osi celowej lunety w azymucie otrzymujemy

$$\varepsilon_I = \frac{2\sqrt{2} \cdot c \cdot q''}{310} = 1880 \text{ c.}$$

Idąc dalej po linii najbardziej niekorzystnej przyjmijmy, że w drugim położeniu lunety efekt był identyczny co do wielkości i znaku. W średniej arytmetycznej otrzymamy zatem:

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} = 1880 \text{ c.}$$

Dotychczasowe rozważania dotyczyły, powiedzmy, miry. Załóżmy w dalszym ciągu, że przy obserwacji gwiazdy występuje ten sam maksymalny wpływ, lecz znaku przeciwnego

$$\varepsilon_S = -1880 \text{ c.}$$

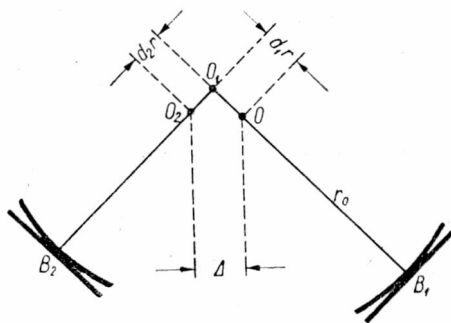
Poprawka do azymutu wyniesie zatem

$$\varepsilon_M - \varepsilon_S = 3760 \text{ c.} \quad (12)$$

W teodolicie Wilda T4 $c = 0,0001 \text{ mm}$ otrzymujemy więc

$$\varepsilon_M - \varepsilon_S = 0,38''.$$

Zwróćmy uwagę, że prawdopodobieństwo występowania tego maksimum maksimum jest niezmiernie małe, a nawet można powiedzieć, że przypadek ten jest praktycznie niemożliwy. Istotnie w przeprowadzonych rozważaniach założyliśmy, że maksymalne i minimalne przyrosty promieni występują po cztery razy na obwodzie każdego czopa, nie mówiąc o tym, że są w pewien określony sposób względem siebie usytuowane i że równocześnie usytuowane są w określony sposób względem siebie profile obu czopów. W rzeczywistości profile czopów mogą mieć



Rys. 3

² Porównaj: Odermatt — *Introduction à la détermination des lieux* — 1954.

kształty zupełnie rozmaite z pewną tendencją do kształtu eliptycznego (ostatnie badania metodą elektronową wykonane przez De Munk'a — Kongres Unii Geodezyjno-Geofizycznej, Rzym, 1954 r.), równoczesne zaś usytuowanie tych profili względem siebie w sposób najbardziej niekorzystny jest bardzo mało prawdopodobne. Przejście w cyklu obserwacji mira — gwiazda musi nastąpić zawsze pewna kompensacja przesunięć czopów, dzięki czemu należy się liczyć w praktyce z poprawką do azymutu znacznie mniejszą od $0,38''$.

Tak czy inaczej kilka dziesiątych sekundy łuku jest to wielkość, która leży poniżej lub na granicy osiągalnej dokładności wyznaczenia azymutu najbardziej precyzyjnymi metodami i instrumentami.

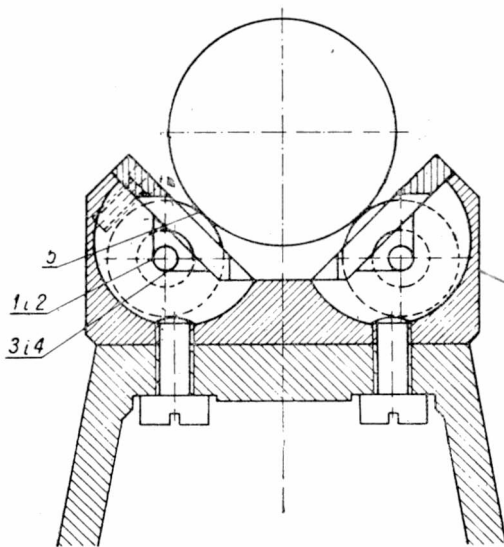
Z podanego na początku zestawienia wyników badań inż. Duliana wynika, że tylko w jednym przypadku poprawka przekracza średni błąd wyznaczenia azymutu, w pozostałych dwóch jest mniejsza od tych błędów. Metodzie wyznaczenia poprawek pomysłu inż. Duliana nie można postawić logicznych zarzutów, jednakże jest to metoda nader skomplikowana i nasuwa stąd możliwości występowania dodatkowych błędów instrumentalnych, systematycznych i przypadkowych. Inż. Dulian nie charakteryzuje stopnia niepewności wyznaczonych poprawek, z uwagi jednak na to (str. 64), „że ilość serii nie powinna być mniejsza od 100“, można przypuszczać, iż różnice między poszczególnymi wynikami pomiarów są znaczne.

Ponadto można się spodziewać, że wpływ rodzaju i ilości smaru oraz temperatury, o czym zresztą mowa również na wspomnianej stronie 64, nie jest bez znaczenia

dla wartości poszukiwanej poprawki, stąd można wnioskować, że poprawka ta, wyznaczona w pewnych określonych warunkach, nie jest stałą wielkością charakterystyczną dla danego teodolitu.

Na podstawie powyższych rozważań można mieć wątpliwości, czy proponowane na str. 70 wyznaczenie poprawek do azymutów w każdym teodolicie jest celowe w zestawieniu z dużym trudem, jaki trzeba włożyć w badania, i realnymi korzyściami, jakie te badania przynoszą.

Na rys. 4 przedstawiona jest konstrukcja osi w teodolicie Wilda T4 nowego typu (aktualnej produkcji). Każdy z czopów spoczywa tutaj na dwóch walcowych rolkach, z którymi styka się wzdłuż tworzących. Przy obrocie czopa każda rolka obraca się na swojej osi. Czopy tych osi spoczywają dopiero w nie-



Rys. 4

ruchomych łożyskach, stykając się z nimi wzdłuż dwóch tworzących.

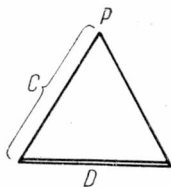
W konstrukcji tej niecyldryczność występuje nie tylko na czopie osi lunety, ale również na rolkach i ich czopach. Ponieważ jednak po każdej stronie mamy w przekroju 5 punktów styku (jak pokazano na rysunku), razem po obu stronach 10, zamiast 2 w konstrukcji starego typu, statystycznie biorąc w każdym przypadku następuje tutaj znacznie większa kompensacja przesunięć o różnych znakach, co w rezultacie sprowadza praktycznie wpływ niecyldryczności do zera.

Kolokwium Komitetu Geodezji Polskiej Akademii Nauk

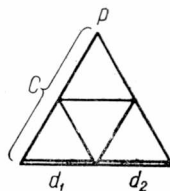
Dnia 19 lutego 1955 r. odbyło się w Akademii Górniczo-hutniczej w Krakowie II kolokwium Komitetu Geodezji PAN, poświęcone zagadnieniu wyrównania triangulacji wypełniającej. W zebraniu wzięli udział liczni specjaliści z tej dziedziny z następujących instytucji: Politechniki Warszawskiej, Akademii Górniczo-hutniczej, Geodezyjnego Instytutu Naukowo-badawczego oraz Państwowego Przedsiębiorstwa Geodezyjnego. Zebraniu przewodniczył mgr inż. Jerzy Jasnorzewski, członek Komitetu Geodezji PAN. Ogólna ilość uczestników wyniosła 46 osób.

Na zebraniu zostały wygłoszone dwa referaty: 1) prof. dra Stefana Hausbrandta pt.: *Analiza porównawcza dokładności wielkotrójkątowych i małotrójkątowych sieci triangulacyjnych, nawiązana do prac geodezyjnych w Polsce* (praca wykonana w Geodezyjnym Instytucie Naukowo-badawczym), oraz mgra inż. Władysława Batkiewicza pt.: *Sieć triangulacyjna zbudowana z trójkątów obliczeniowych* (praca wykonana w Katedrze Geodezji Wyższej i Obliczeń Geodezyjnych AGH na zlecenie Komitetu Geodezji PAN).

Prof. S. Hausbrandt, między innymi, zajmuje się w swojej pracy obliczeniem błędu wyznaczenia położenia punktu w sieciach mało- i wielkotrójkątowych w zależności od przyjętego teoretycznie parametru m_o (średni błąd pomiaru kąta). Autor podkreśla na wstępie, że zagadnienie to nie jest nowe, gdyż było już rozpatrywane swego czasu przez Jordana (w r. 1916). Nie zostało ono jednak całkowicie wyczerpane, prawdopodobnie ze względu na użycie do analizy metody spostrzeżeń zawarunkowanych, która w takich przypadkach jest mało przejrzysta. Jordan rozważał sieci elementarne jedno i czterotrójkątowe (rys. 1 i 2). Przeprowadzone badania wykazały, że typ drugi daje lepsze wyniki dla boku c . Średni błąd boku c dla typu pierwszego wyniósł $0,000\ 003\ 96\ m_o$, a dla typu drugiego $0,000\ 003\ 79\ m_o$.



Rys. 1



Rys. 2

Prof. Hausbrandt przyjął w swojej pracy jako wyjście do analizy krakowian współczynnikowy równań błędów (oznaczony symbolem a). Znając ten krakowian i przyjmując, że obserwacje kątowe w sieci będą prowadzone ze średnim błędem pojedynczej obserwacji m_o , można przeprowadzić analizę dokładnościową dowolnej sieci, opierając się na metodzie najmniejszych kwadratów. Rozpatrzono cztery kryteria, charakteryzujące sieć triangulacyjną pod względem dokładności:

1. wielkość średniego błędu położenia punktu (którego odcięta jest i -tą, zaś rzędna k -tą niewiadomą w układzie błędów):

$$m_p = m_0 \sqrt{(a^2)_{ii}^{-1} + (a^2)_{kk}^{-1}}$$

2. wielkość wpływu błędów nieprzypadkowych, tj. wielkość zmiany dx_i , jakiej dozna i -ta niewiadoma w układzie wyrównanym metodą najmniejszych kwadratów, jeżeli zmienimy k -tą obserwację (nadając jej przyrostek dl_k) i ponownie wyrównamy układ metodą najmniejszych kwadratów:

$$dx_i = dl_k \cdot a_{(k)} w(a^2)_{(i)}^{-1}$$

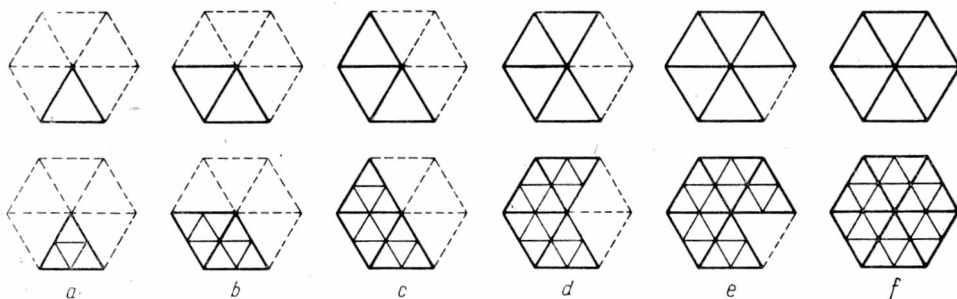
3. wielkość średniego błędu błędu średniego, określoną przez znany od czasu Gaussa wzór ogólny $m_m = m : \sqrt{2n_p}$ (gdzie n_p — ilość spostrzeżeń nadliczbowych), który dla sieci triangulacyjnej wyznaczającej p punktów z n obserwacji kątowych ma postać:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n - 4p}}$$

4. wartość przeciętna stosunku kwadratu błędu średniego obserwacji po wyrównaniu do kwadratu błędu średniego obserwacji przed wyrównaniem. Wielkość ta (M^2) równa się — według A. Otrębskiego — stosunkowi ilości obserwacji niezbędnych do wyznaczenia układu do ilości obserwacji dokonanych w układzie. Dla sieci wyznaczającej p punktów z n obserwacji:

$$M^2 = \frac{2p}{n}.$$

Ze względu na cel prac triangulacyjnych jest najbardziej istotne kryterium pierwsze, jednak aby uniknąć zejścia na błędne drogi, musi ono być stosowane łącznie z kryterium drugim i trzecim. Ogólnie: kryterium I dotyczy dokładności rezultatów, a II i III ich realności czy też pewności. Kryterium IV ma charakter statystyczny i opiniuje, w jakim stopniu dany układ obserwacyjny wpływa na zmniejszenie błędów obserwacyjnych, a to jest celem wyrównania. Stosując powyższe kryteria do omawianych na początku sieci elementarnych jedno- i czterotrójkątowych, autor stwierdza,



Rys. 3

że pierwsze kryterium omawia obydwie sieci jako równorzędne, natomiast kryteria II, III i IV wskazywały zdecydowanie na typ drugi (małotrójkątowy) jako lepszy. Przy

stosowaniu np. kryterium II stwierdzono dla sieci typu drugiego przesunięcie punktu n razy mniejsze niż przy typie pierwszym. Rozważanie zagadnienia dokładności wyznaczenia punktów przez zespoły sieci elementarnych (nazwanych przez autora „sieciami okrążającymi” — rys. 3) doprowadziły do takich samych wyników, co i poprzednio.

Poniżej jest podane zestawienie porównawcze wielkości średniego błędu błędu średniego dla sieci okrążających typów od a do f:

Ilość sieci elementarnych	1	2	3	4	5	6
a) jednotrójkątowych	0,71 m	0,35 m	0,27 m	0,22 m	0,20 m	0,18 m
b) czterotrójkątowych	0,35	0,20	0,16	0,13	0,12	0,10
c) dziewięciotrójkątowych	0,21	0,13	0,11	0,09	0,08	0,07

Z zestawienia powyższego widać wyraźnie wyższość sieci małowielokątowych nad sieciami wielkotrójkątowymi.

W pracy swej prof. Hausbrandt poza powyższymi badaniami teoretycznymi przeprowadził analizę jednej z wykonanych w Polsce sieci triangulacyjnych powierzchniowych. Pomimo zasadniczych braków w tej sieci, jak: niekształtne trójkąty o bokach 4—12 km, nierównomierne rozłożenie punktów nawiązania, niezbyt dobre obserwacje (średni błąd pomiaru kąta $2,7''$) otrzymano dobre wyniki. Średni błąd położenia punktu wyniósł bowiem 5,1 cm, wobec 5,5 cm w niemieckich sieciach podstawowych, przytoczonych w *Handbuch der Vermessungskunde* Jordana—Eggerta.

Praca mgra inż. W. Batkiewicza została zainicjowana przez prof. dra T. Kochmańskiego. Autor, ze względu na duże koszty prac polowych i obliczeniowych oraz ze względu na małą dokładność, proponuje zastąpienie klasycznej triangulacji I—IV rzędu siecią zbudowaną z trójkątów obliczeniowych. Ponieważ praca ta została wydrukowana w niniejszym zeszycie kwartalnika, przeto staje się zbędne omawianie jej treści.

W dyskusji, jaka rozwinęła się nad obydwoma referatami, zabierali głos (w kolejności wypowiedzi): Rektor AGH prof. dr Z. Kowalczyk, prof. dr T. Kochmański (AGH), mgr inż. S. Kryński (GINB), prof. dr S. Hausbrandt (GINB), prof. dr Cz. Kamela (Polit. Warsz.), dr inż. T. Kluss (PPG), mgr inż. W. Senisson (Polit. Warsz.), prof. dr S. Milbert (AGH), mgr inż. R. Włodarczyk (PPG), mgr inż. B. Dulian (GINB), prof. dr J. Piotrowski (Polit. Warsz.), mgr inż. W. Batkiewicz (AGH), mgr inż. W. Gedliczka (PPG), mgr inż. J. Borysowski (PPG).

Z wypowiedzi dyskutantów wynika, że obydwie referowane metody nie są przeciwstawne. Pierwsza jest ścisła i wyrównuje obserwacje kątowe, druga — półścisła i na pierwsze miejsce wysuwa pomiary bazowe. Z punktu widzenia praktycznego jest zasadniczo obojętne, jaka metoda wyrównania zostanie zastosowana do sieci wypełniających, gdyż rzeczą istotną jest wielkość średniego błędu położenia punktu. W metodzie W. Batkiewicza przy obliczaniu boków dużych trójkątów należy wykorzystywać zachodzące na siebie pasy trójkątów małych. Badania GINB potwierdziły słuszność tez zawartych w pracy W. Batkiewicza, otrzymane bowiem średnie błędy kątów obliczonych były poniżej $1''$, przy $3''$ dla kątów mierzonych. Wypowiedzi przedstawicieli produkcji również dawały pierwszeństwo metodzie małych trójkątów, która w praktyce dała dobre wyniki dokładnościowe przy

dużej oszczędności kosztów. Uznano potrzebę prowadzenia dalszych badań naukowych oraz zacieśnienia współpracy ośrodków badawczych między sobą i z produkcją.

W wyniku przeprowadzonej dyskusji przyjęto następujące wnioski:

1. Konferencja Naukowa, zorganizowana przez Komitet Geodezji PAN, rozważająca koncepcję tzw. sieci wypełniających budowanych bądź z trójkątów małych, bądź z wielkich stwierdza, że wyniki badań Katedry Geodezji Wyższej i Obliczeń Geodezyjnych AGH w Krakowie oraz Geodezyjnego Instytutu Naukowo-badawczego w linii zasadniczej pokrywają się w zupełności. Oba ośrodki badawcze doszły do wniosku, iż sieci budowane z trójkątów małych są dokładniejsze od sieci budowanych z trójkątów dużych, co potwierdza słuszność koncepcji sieci triangulacyjnej, zbudowanej przez Geodezję Polską w latach 1947—1955. Konferencja uważa, że dalsze badania, zmierzające do sprecyzowania zagadnienia wyrównania ostatecznego sieci polskiej, są aktualne i winny wychodzić z założenia jak najmniejszego zniekształcenia układów obserwacyjnych i oparcia rachunków na nowoczesnych maszynach rachunkowych. Konferencja uważa za celowe wykorzystanie w tym kierunku prac Instytutu Matematycznego w Warszawie, jak również koncepcji maszyny rachunkowej do działań krakowianowskich pomysłu prof. T. Kochmańskiego (wniosek prof. S. Hausbrandta).

2. Uznaje się za celowe kontynuowanie pracy naukowej mgra inż. W. Batkiewicza dla pełnego opracowania metody wyrównania triangulacji obejmującej wielkie obszary (wniosek dyr. S. Kryńskiego).

3. W pracy mgra inż. W. Batkiewicza należy opracować sposób obliczania długości boków dużych trójkątów oraz wykorzystanie punktów Laplace'a (wniosek doc. dra S. Milberta).

4. W pracy mgra inż. W. Batkiewicza należy:

a) rozciągnąć długość boków obliczeniowych tak, żeby łączyły one punkty Laplace'a,

b) dotychczasową sieć wypełniającą wyrównać metodą Pranis-Praniewiczza (w grupach) w ujęciu krakowianowym,

c) po zakończeniu wyrównania sieci astronomiczno-geodezyjno-grawimetrycznej, ażeby nie obniżyć dokładności sieci wypełniającej, należy ją wyrównać jak pod b), lecz jako sieć niezależną; po uwzględnieniu na tym obszarze pomiarów grawimetrycznych i astronomicznych łącznie z materiałami geodezyjno-astronomiczno-grawimetrycznymi z sieci wieńcowych i łącznych poddać wyrównaniu sieć obejmującą cały kraj (wniosek prof. Cz. Kameli).

5. Pożądany byłby taki wybór układu sieci wypełniającej pod względem ilości punktów, warunków brzegowych i sposobu wyrównania, by przy możliwie małym nakładzie pracy, tj. bez powtarzania wyrównania sieci wypełniającej (małotrójkątowej) otrzymać jej ostateczne współrzędne. Rozumieć to należy następująco: ilość punktów sieci wypełniającej winna uwzględniać praktyczne możliwości wyrównań wielkiej ilości punktów. Punkty na stykach sieci wypełniających winny wejść do niezależnych wyrównań stykających się sieci. Przed niezależnym wyrównaniem sieci wypełniających należy przeprowadzić wyrównania stacyjne na wszystkich punktach sieci wypełniających. Oba te warunki są pewnego rodzaju sprowadzeniem do równych wag stykających się z sobą obszarów sieci wypełniających. Powtórnego wyrównania sieci wypełniającej można uniknąć stosując do niezależnie wyrównanej sieci metodę dostosowania do współrzędnych wyrównanej sieci obliczeniowej. Metoda ta poza wielką wartością praktyczną posiada jednocześnie cenne kryteria, pozwalające na

porównywanie otrzymanych wyników, przez co staje się możliwe wprowadzanie zmian w przypadkach stwierdzonej konieczności (wniosek dra inż. T. Klussa).

6. Należy porównać obserwacje bezpośrednie triangulacji głównej z wielkościami uzyskanymi z trójkątów obliczeniowych i zależnie od wyników:

a) wykorzystać wielkości obliczone do triangulacji głównej,

b) rozszerzyć triangulację główną za pomocą obserwacji obliczonych do sieci wypełniającej włącznie (wniosek mgra inż. W. Gedliczki).

7. Z uwagi na dokładność celowania jak i możliwość korzystnego zagęszczenia sieci oraz obniżenia pułapu zabudowy należy przyjąć optymalne długości boku około 7 km (wniosek mgra inż. H. Włodarczyka).

Na podstawie protokołu zebrania sprawozdanie opracował

mgr inż. Janusz Tatarkowski (AGH)

Errata do tomu IV zeszyt 2 „Geodezja i Kartografia“

strona	wiersz	wydrukowano	powinno być
132	18 od góry	$\frac{\partial b}{\partial Z}$ i $\frac{\partial r_0}{\partial Z}$	$\frac{db}{dZ}$ i $\frac{dr_0}{dZ}$
132	23 od góry	$\varepsilon_z = C(z) \frac{\partial w}{\partial b} + C_1(z) \frac{\partial w}{\partial r_0}$	$\varepsilon_z = C(Z) \frac{\partial w}{\partial b} + C_1(Z) \frac{\partial w}{\partial r_0}$
133	1 od góry	$C(Z) = \frac{\partial b}{\partial Z}$ i $C_1(Z) = \frac{\partial r_0}{\partial Z}$	$C(Z) = \frac{db}{dZ}$ i $G_1(Z) = \frac{dr_0}{dZ}$



SPIS TREŚCI

W. Krysicki — O pewnym zastosowaniu i o oszacowaniu rozkładu Studenta	159
W. Batkiewicz — Obliczenie sieci triangulacyjnej zbudowanej z trójkątów „wyliczeniowych“	169
Z. Czerski — O zmianach w położeniu osi obrotu lunety w teodolitach Wilda T4	182
Kolokwium Komitetu Geodezji Polskiej Akademii Nauk	186

СОДЕРЖАНИЕ

В. Крысички — О некотором применении и оценке разложения Студента	167
В. Баткевич — Вычисление триангуляционной сети построенной из „вычислительных треугольников“	180
З. Черски — Об изменениях в положении оси вращения трубы в теодолитах Вильд Т4	182
Зачеты Комитета Геодезии Польской Академии Наук	186

SOMMAIRE

W. Krysicki — D'une certaine application et évaluation de la répartition de Student	167
W. Batkiewicz — Le calcul du réseau de triangulations composé de „triangles calculés“	181
Z. Czerski — Sur les déplacements de l'axe de rotation de la lunette de théodolite Wild T4	182
La session du Comité de Géodésie de l'Académie des Sciences de Pologne (PAN)	186

Cena zł 10,—