

Stanisław Wanat

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

WPLYW WYBRANYCH STRUKTUR ZALEŻNOŚCI NA ROZKŁAD ZAGREGOWANYCH SZKÓD

1. Wstęp

Problem zależności już dawno został rozpoznany jako integralny czynnik wpływający na proces agregacji ryzyka ubezpieczyciela, jednak w przeszłości w praktyce mało było prób wprowadzenia struktury zależności do tego procesu. Obecnie temu zagadnieniu poświęca się coraz więcej uwagi. Związane jest to z nowymi rozwiązaniami proponowanymi w modelach wypłacalności ubezpieczycieli, w których kapitałowy wymóg wypłacalności wyznacza się na drodze agregacji wymogów kapitałowych z tytułu rozpoznanych czynników ryzyka ubezpieczyciela. Przy takim podejściu ustalania wymogów wypłacalności pojawia się, ściśle związany z zależnością agregowanych rodzajów ryzyka, tzw. efekt dywersyfikacji. Polega on na tym, że całkowity kapitał potrzebny w celu zabezpieczenia się przed wszystkimi typami ryzyka, na które narażony jest ubezpieczyciel, jest mniejszy od sumy kapitałów potrzebnych na zabezpieczenie się przed każdym z czynników z osobna lub równy ich sumie.

W praktycznych rozwiązaniach w procesie agregacji albo ignoruje się strukturę zależności między rodzajami ryzyka (wtedy nie uwzględnia się efektu dywersyfikacji), albo zakłada się, że są one niezależne (wtedy otrzymuje się maksymalne oszacowanie efektu dywersyfikacji). Jeżeli zależność jest uwzględniana, to do jej opisu wykorzystuje się korelację liniową (to rozwiązanie jest proponowane w projekcie *Solvency II*). Ignorując strukturę zależności, wymogi kapitałowe dla zagregowanego ryzyka są ustalone jako suma wymogów kapitałowych dla poszczególnych rodzajów ryzyka, co sprawia, że są one przeszacowane (w tym podejściu tak naprawdę zależność nie jest ignorowana, ale przyjmuje się, że rodzaje ryzyka są współmonotoniczne). Przyjęcie założenia o niezależności ryzyka sprawia, że wymagania kapitałowe dla zagregowanego ryzyka są z kolei niedoszacowane. Natomiast wykorzystanie korelacji liniowej wymaga założenia, że agregowane rodzaje ryzyka mają rozkłady normalne.

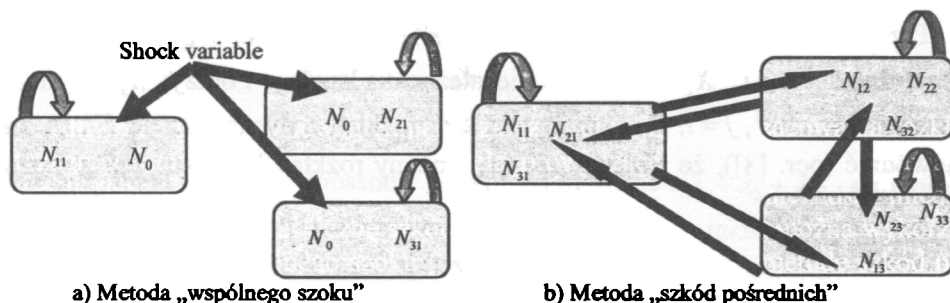
W tym kontekście bardzo ważny wydaje się problem uwzględnienia odpowiedniej struktury zależności w modelowaniu zagregowanych szkód ubezpieczy-

ciela prowadzącego działalność w ramach kilku linii biznesu (grup ubezpieczeń). Rozkład szkód jest bowiem podstawowym czynnikiem wpływającym na wysokość wymogów kapitałowych z tytułu ryzyka ubezpieczeniowego. W związku z tym w artykule zostaną zaprezentowane dwie metody wyznaczania zagregowanych szkód, w których zależność między szkodami z poszczególnych linii biznesu modeluje się przez wprowadzenie odpowiednich struktur zależności między zmiennymi opisującymi liczbę szkód w tych liniach. Metody te zostaną zilustrowane przykładem numerycznym przedstawiającym, jak wybrana struktura zależności wpływa na rozkład zagregowanych szkód, a tym samym – na efekt dywersyfikacji.

2. Charakterystyka metod

Jednym ze sposobów uwzględniania zależności w procesie szacowania rozkładu zagregowanych szkód ubezpieczyciela prowadzącego działalność w ramach kilku linii biznesu jest wprowadzenie odpowiednich struktur zależności między zmiennymi modelującymi liczbę szkód dla tych linii. W tym celu można wykorzystać m.in. metodę wspólnego szoku (*common shock model*) lub metodę szkód pośrednich¹ (*thinning-dependence structure*).

W pierwszej metodzie przyjmuje się, że jedynym źródłem zależności jest oddziaływanie wspólnej zmiennej o rozkładzie Poissona (tzw. *shock variable*). Wówczas zmienne modelujące liczbę szkód w poszczególnych liniach są sumą dwóch niezależnych zmiennych o rozkładzie Poissona. Jedna z nich (opisująca liczbę szkód związanych z szokiem) ma taki sam rozkład dla wszystkich linii biznesu, druga jest charakterystyczna dla danej linii biznesu (por. rys. 1a). Zmienne charakterystyczne dla linii biznesu są niezależne. Metoda ta jest opisana m.in. w pracach: [1; 4; 7].



Rys. 1. Schemat wprowadzania opisanych struktur zależności w przypadku trzech linii biznesu
Źródło: opracowanie własne.

Druga metoda została zaproponowana w pracy [8]. U jej podstaw leży założenie, że wypadek ubezpieczeniowy generujący szkodę w jednej linii biznesu może powodować także szkody w kilku innych (por. rys. 1b). Przyjmuje się, że na proces gene-

¹ Nie jest to tłumaczenie bezpośrednie (nawiązuje do idei metody).

rujący szkody w określonej linii biznesu mają wpływ nie tylko źródła ryzyka dla niej charakterystyczne, ale także – z pewnym prawdopodobieństwem – ryzyko charakterystyczne dla innych linii. W związku z tym dla każdej linii określa się tzw. szkody główne, których źródłem jest ryzyko charakterystyczne dla danej linii biznesu, i tzw. szkody pośrednie związane z realizacją ryzyka charakterystycznego dla innej linii.

Niech dalej N_{ii} oznacza liczbę szkód głównych w i -tej linii biznesu, natomiast N_{ki} – liczbę szkód pośrednich związanych ze szkodami głównymi z k -tej linii ($k \neq i$). Przyjmując, że zmienna N_{ii} , $i=1, \dots, n$ ma rozkład Poissona z parametrem λ_i oraz zakładając, że prawdopodobieństwo wygenerowania przez szkodę główną w linii k szkody pośredniej w linii i wynosi p_{ki} ($0 < p_{ki} < 1$, $p_{ii} = 1$), zmienna N_{ki} ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_k p_{ki}$. Zagregowane szkody w i -tej linii biznesu są równe

$$\tilde{Y}_i = \sum_{j=1}^{\tilde{N}_i} X_i^{(j)}, \quad (1)$$

gdzie

$$\tilde{N}_i = \sum_{k=1}^n N_{ki}, \quad (2)$$

oznacza liczbę szkód w i -tej linii biznesu, natomiast $X_i^{(j)}$ – wysokość j -tej szkody w i -tej linii biznesu, a zatem zagregowane szkody z n linii biznesu są równe:

$$\tilde{Y} = \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\tilde{N}_i} X_i^{(j)}. \quad (3)$$

Przy założeniu, że zmienne: N_{ii} ($i=1, \dots, n$) są niezależne, N_{ki}/N_{kk} są parami niezależne dla $k \neq i$; $X_i^{(j)}$ są parami niezależne dla każdego i oraz j ; $X_i^{(j)}$ są niezależne od N_i ; $X_i^{(j)}$, $j=1, 2, \dots$ mają taki sam rozkład o dystrybuancie F_i , można udowodnić (por. [8]), że zmienna (3) ma złożony rozkład Poissona, który można przedstawić jako:

$$\tilde{Y} = \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \tilde{Z}^{(j)}, \quad (4)$$

gdzie $\tilde{N}$ ma rozkład Poissona z parametrem $\tilde{\lambda} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, natomiast zmienne $\tilde{Z}^{(j)}$, $j=1, 2, \dots$ są niezależne i mają taki sam rozkład o dystrybuancie będącej średnią ważoną dystrybuant F_i i ich splotów.

3. Wpływ wybranych struktur zależności na efekt dywersyfikacji – przykład numeryczny

Wpływ opisanych metod modelowania zależności na rozkład zagregowanych szkód² zostanie zilustrowany przykładem ubezpieczyciela prowadzącego działalność w ramach dwóch linii biznesu, dla których modelując liczbę szkód, uwzględnia się:

- ryzyko charakterystyczne dla danej linii biznesu,
- wpływ ryzyka z drugiej linii (w postaci szkód pośrednich),
- wpływ wspólnego ryzyka na dwie linie jednocześnie (wspólny szok).

Przy tych założeniach liczba szkód w i -tej linii biznesu ($i = 1, 2$) wynosi

$$N_i = \tilde{N}_i + N_c, \quad (5)$$

gdzie $\tilde{N}_i$ dane jest wzorem (2), natomiast N_c oznacza liczbę szkód związanych z oddziaływaniem wspólnego szoku. Natomiast wysokość szkód dla i -tej linii jest równa:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{N_i} X_i^{(j)} = \sum_{j=1}^{\tilde{N}_i} X_i^{(j)} + \sum_{j=1}^{N_c} X_i'^{(j)}, \quad (6)$$

gdzie $X_i^{(j)}$ oraz $X_i'^{(j)}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie opisującymi wysokość pojedynczych szkód. Wtedy zagregowane szkody wynoszą:

$$Y = \sum_{i=1}^2 Y_i = \sum_{j=1}^{\tilde{N}_1} X_1^{(j)} + \sum_{j=1}^{\tilde{N}_2} X_2^{(j)} + \sum_{j=1}^{N_c} W^{(j)}, \quad (7)$$

przy czym $W^{(j)} = X_1'^{(j)} + X_2'^{(j)}$. Można pokazać (por. [8]), że zmienna Y ma złożony rozkład Poissona dający się wyrazić w następujący sposób:

$$Y = \sum_{j=1}^{N_Y} Z^{(j)}, \quad (8)$$

gdzie N_Y ma rozkład Piossona z parametrem $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_c$, natomiast $Z^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie, którego funkcja tworząca momenty ma postać:

$$M_Z(s) = a_1 M_1(s) + a_2 M_2(s) + a_3 M_1(s) M_2(s), \quad (9)$$

przy czym

$$a_1 = \frac{\lambda_1(1-p_{12})}{\lambda}, \quad a_2 = \frac{\lambda_2(1-p_{21})}{\lambda}, \quad a_3 = \frac{\lambda_1 p_{12} + \lambda_2 p_{21} + \lambda_c}{\lambda}, \quad (10)$$

² Wpływ omawianych struktur zależności na prawdopodobieństwo ruiny ubezpieczyciela jest analizowany w pracy [6].

natomiast $M_i(s)$, $i=1, 2$ oznacza funkcję tworzącą momenty zmiennych $X_i^{(j)}$.

Można również pokazać, że:

$$E(N_i) = D^2(N_i) = \sum_{k=1}^2 p_k \lambda_k + \lambda_c, \quad (11)$$

$$\text{Cov}(N_1, N_2) = p_{12} \lambda_1 + p_{21} \lambda_2 + \lambda_c, \quad (12)$$

$$D^2(Y_i) = \left(\sum_{k=1}^2 p_k \lambda_k + \lambda_c \right) \left(D^2(X_i) + (E(X_i))^2 \right), \quad (13)$$

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = E(X_1) E(X_2) (p_{12} \lambda_1 + p_{21} \lambda_2 + \lambda_c). \quad (14)$$

Rozkład zagregowanych szkód ubezpieczyciela wyznaczono dla następujących struktur zależności³:

1. **Struktura A.** Założono niezależność zmiennych modelujących liczbę szkód w poszczególnych liniach biznesu. Zagregowane szkody wyznaczono na podstawie modelu (7) przy założeniu, że: $\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = 70$, $p_{12} = p_{21} = 0$ oraz $\lambda_c = 0$.

2. **Struktura B.** Modelując liczbę szkód dla danej linii biznesu, uwzględniono: ryzyko charakterystyczne dla tej linii oraz ryzyko wspólne, czyli do modelowania zależności między liniami wykorzystano metodę wspólnego szoku. Zagregowane szkody wyznaczono na podstawie (7) przy założeniu, że: $\lambda_1 = 30$, $\lambda_2 = 50$, $\lambda_c = 20$, $p_{12} = p_{21} = 0$.

3. **Struktura C.** Modelując liczbę szkód dla danej linii biznesu, uwzględniono: ryzyko charakterystyczne dla tej linii oraz wpływ ryzyka z drugiej linii (w postaci szkód pośrednich), czyli do modelowania zależności między liniami wykorzystano metodę szkód pośrednich. Zagregowane szkody wyznaczono na podstawie (7) przy założeniu, że: $\lambda_1 = 30$, $\lambda_2 = 50$, $\lambda_c = 0$, $p_{12} = 0,6667$, $p_{21} = 0,40$.

4. **Struktura D.** Modelując liczbę szkód dla danej linii biznesu, uwzględniono: ryzyko charakterystyczne dla tej linii, wpływ ryzyka z drugiej linii (w postaci szkód pośrednich) oraz ryzyko wspólne. Zagregowane szkody wyznaczono na podstawie (7), przy założeniu, że: $\lambda_1 = 12,5$, $\lambda_2 = 43,75$, $\lambda_c = 20$, $p_{12} = 0,50$, $p_{21} = 0,40$.

Wysokość pojedynczej szkody modelowano za pomocą rozkładu gamma $G(\alpha, \beta)$. Dla pierwszej linii biznesu przyjęto, że $X_1^{(j)} \sim G(0,9, 0,03)$, czyli średnia i wariancja wysokości pojedynczej szkody wynoszą odpowiednio 30 i 1000, natomiast dla drugiej linii: $X_2^{(j)} \sim G(0,2, 0,02)$, co oznacza średnią 10 i wariancję 500. Przy tych założeniach funkcja tworząca momenty zmiennych $Z^{(j)}$ ma postać:

³ We wszystkich modelach wartości parametrów modelujących liczbę szkód, tzn. λ_1 , λ_2 , λ_c , p_{12} , p_{21} ustalono tak, aby w każdym z nich wartość oczekiwana zagregowanych szkód była taka sama.

$$M_z(s) = a_1 \left(\frac{0,03}{(0,03-s)} \right)^{0,9} + a_2 \left(\frac{0,02}{(0,02-s)} \right)^{0,2} + a_3 \left(\frac{0,03}{(0,03-s)} \right)^{0,9} \left(\frac{0,02}{(0,02-s)} \right)^{0,2}, \quad (15)$$

co oznacza, że odpowiednie momenty zwykłe są równe:

$$m_1(Z) = 30a_1 + 10a_2 + 40a_3, \quad (16)$$

$$m_2(Z) = 1900a_1 + 600a_2 + 3100a_3, \quad (17)$$

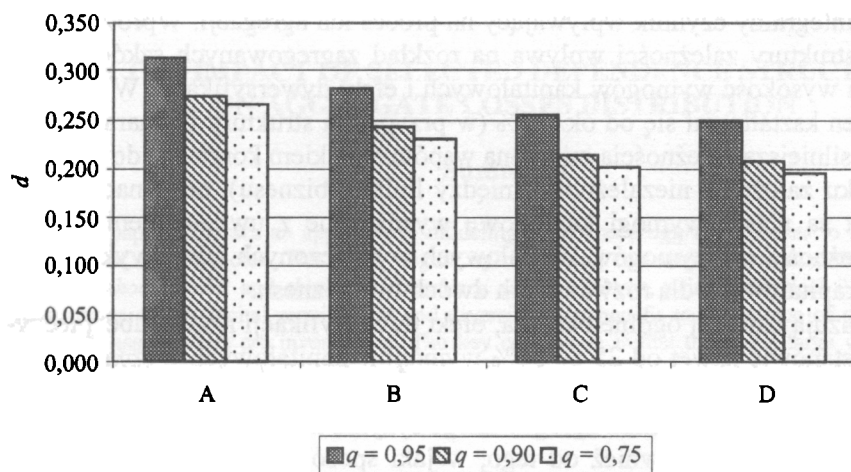
$$m_3(Z) = 1,836667 \cdot 10^5 a_1 + 66000a_2 + 3,606667 \cdot 10^5 a_3. \quad (18)$$

Na podstawie (16)–(18) wyznaczono wartość oczekiwaną, wariancję i skośność rozkładu zagregowanych szkód Y , a następnie metodą symulacyjną (wykorzystując generator Wilsona-Hilferty’ego, zob. np. [2, s. 144]) wyznaczono jej rozkład.

Tabela 1. Efekt dywersyfikacji dla rozważanych struktur zależności

Kwantyl	Struktura zależności			
	A $r(Y_1, Y_2) = 0$	B $r(Y_1, Y_2) = 0,112$	C $r(Y_1, Y_2) = 0,190$	D $r(Y_1, Y_2) = 0,246$
$q = 0,75$	0,314	0,284	0,255	0,250
$q = 0,90$	0,276	0,244	0,214	0,209
$q = 0,95$	0,266	0,233	0,203	0,197

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 2. Efekt dywersyfikacji dla rozważanych struktur zależności

Źródło: opracowanie własne.

Effekt dywersyfikacji oszacowano na podstawie wzoru:

$$d = 1 - \frac{\rho(Y)}{\rho(Y_1') + \rho(Y_2')}, \quad (19)$$

gdzie $\rho(\cdot)$ oznacza wymogi kapitałowe z tytułu danego ryzyka, określone jako różnica kwantyla rzędu q rozkładu zmiennej losowej modelującej to ryzyko i jej wartości oczekiwanej (por. np. [3]), czyli np. dla Y : $\rho(Y) = F_Y^{-1}(q) - E(Y)$, natomiast Y_1' , Y_2' są to zmienne modelujące zagregowane szkody w pierwszej i drugiej linii biznesu (bez uwzględniania opisanych struktur zależności); mają one złożone rozkłady Poissona odpowiednio z parametrami $\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = 70$ oraz z rozkładami pojedynczej szkody: $X_1^{(j)} \sim G(0,9, 0,03)$, $X_2^{(j)} \sim G(0,2, 0,02)$.

Wartości efektu dywersyfikacji dla uwzględnionych struktur zależności, wyznaczone przy założeniu, że wymogi kapitałowe są ustalane odpowiednio w oparciu na 0,75, 0,90 i 0,95 kwantylu, przedstawiono w tab. 1 i na rys. 2. W tabeli 1 podano także wartość współczynnika korelacji liniowej między zmiennymi modelującymi szkody w rozważanych liniach biznesu (wyznaczono je na podstawie wzorów (13) i (14)).

4. Uwagi końcowe

Przedstawiony prosty przykład wskazuje, że zależność między rodzajami ryzyka stanowi integralny czynnik wpływający na proces ich agregacji. Wprowadzenie określonej struktury zależności wpływa na rozkład zagregowanych szkód, a tym samym – na wysokość wymogów kapitałowych i efekt dywersyfikacji. W przykładzie efekt ten kształtował się od ok. 20% (w przypadku struktury D charakteryzującej się najsilniejszą zależnością mierzoną współczynnikiem korelacji) do ok. 32% (w przypadku założenia niezależności między liniami biznesu), co oznacza, że o tyle procent są niższe wymogi kapitałowe wyznaczone z uwzględnieniem tych struktur zależności od wymogów kapitałowych wyznaczonych jako zwykła suma wymogów kapitałowych dla rozważanych dwóch linii biznesu.

Jak pokazują bardziej ogólne badania, efekt dywersyfikacji ryzyka ubezpieczyciela może stanowić nawet od 25 do 50% wymogów kapitałowych wyznaczonych na bazie niezdywersyfikowanych rodzajów ryzyka (por. [5]). Również wiele wyników badań wskazuje, że rozkład agregowanego ryzyka, a tym samym efekt dywersyfikacji, zależy istotnie również od tego, w jaki sposób modelowano zależność między typami ryzyka w procesie agregacji (potwierdza to również przytoczony przykład). Stosowana w praktyce przez wiele instytucji finansowych i proponowana w ramach projektu *Solvency II* korelacja liniowa jako narzędzie modelowania zależności może prowadzić do błędnych oszacowań rozkładów zagregowanego ryzyka i w konsekwencji – do zawyżenia lub niedoszacowania wymogów kapita-

łowych. Istnieje zatem potrzeba szukania nowych rozwiązań dotyczących modelowania zależności między czynnikami ryzyka ubezpieczyciela.

Literatura

- [1] Cossette H., Marceau E., *The Discrete-Time Risk Model with Correlated Classes of Business*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2000, 26.
- [2] Daykin C.D., Pentikäinen T., Pesonen M., *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman&Hall 1994.
- [3] Dhaene J., Goovaerts M.J., Lundin M., Vanduffel S., *Aggregating Economic Capital*, „Belgian Actuarial Bulletin” 2006, vol. 5.
- [4] Lindskog F., McNeil A.J., *Common Poisson Shock Models: Applications to Insurance and Credit Risk Modelling*, ETHZ, Zurich 2001.
- [5] *Solvency II. Current Developments and Implications*, Towers Perrin, TILLINGHAST, <http://www.towersperrin.com>, 2005.
- [6] Wanat S., *Wpływ wybranych struktur zależności na ryzyko ruiny ubezpieczyciela - analiza symulacyjna*, Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Krakowie 2007 (w druku).
- [7] Wang S., *Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models and Algorithms*, [w:] *Proceedings of the 1998 Casualty Actuarial Society*, 1998, vol. LXXXV.
- [8] Yuen K.C., Wang G. (), *Comparing Two Models with Dependent Classes of Business*, ARCH, Society of Actuaries 2002.
- [9] *Zarządzanie ryzykiem w ubezpieczeniach*, red. W. Ronka-Chmielowiec, AE, Wrocław 2000.

ON THE IMPACT OF SELECTED DEPENDENCE STRUCTURES ON AGGREGATE LOSSES DISTRIBUTION

Summary

This paper discusses an approach to modeling of insurer's *aggregate losses* to incorporate the presence of dependencies. The paper begins by describing two dependence modeling techniques: *common shock model* and *thinning-dependence structure*. Next, using numerical illustrations, the sensitivities of the capital requirement and diversification benefit to the choice of the dependency modeling assumptions are investigated. The key conclusion is that there is a large variation in the capital requirement as well as diversification benefit.