

Radosław Pietrzyk

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

WERYFIKACJA METOD ANALIZY RYZYKA EKSTREMALNEGO NA POLSKIM RYNKU WALUTOWYM

1. Wstęp

W ostatnich latach na rynkach finansowych wzrosło ryzyko będące efektem nagłych i nieprzewidywalnych wydarzeń powodujących ekstremalne stopy zwrotu. Chodzi tu m.in. o spektakularne bankructwa, kryzysy finansowe czy rosnące zagrożenie zamachami terrorystycznymi. Wydarzenia te przyczyniają się do wzrostu ryzyka rynkowego i mogą być powodem ogromnych strat finansowych. Takie wydarzenia i ekstremalne stopy zwrotu wymagają nowego podejścia do szacowania ryzyka i skutecznej analizy występowania zjawisk ekstremalnych. Ryzyko na rynku walutowym stanowi ważny element w całościowej ocenie ryzyka rynkowego. Przeprowadzone badania mają na celu zweryfikowanie założenia o możliwości modelowania ogonów rozkładów stóp zwrotu na polskim rynku walutowym na przykładzie wybranych kursów polskiej waluty wobec innych walut światowych, a w szczególności dolara amerykańskiego i euro, z wykorzystaniem teorii wartości ekstremalnych (*extreme value theory* – EVT). EVT pozwala na konstruowanie miar ryzyka uwzględniających występowanie zdarzeń ekstremalnych, a miary te w pewnych sytuacjach umożliwiają bardziej precyzyjne określenie ryzyka rynkowego niż metody klasyczne. Wykorzystanie metod pochodzących z teorii wartości ekstremalnych stwarza szansę na analizę ryzyka ekstremalnego z wykorzystaniem niewielkiej liczby danych pochodzących z ogonów rozkładów. Konieczna zatem wydaje się weryfikacja tych metod na polskim rynku finansowym oraz porównanie ich z metodami klasycznymi szacowania miar zagrożenia.

2. Polski rynek walutowy

W badaniach wykorzystano kursy NBP trzech walut w stosunku do polskiego złotego. Badaniu poddano kursy dolara amerykańskiego (USD), franka szwajcarskiego (CHF) oraz euro (EUR). Dane pochodzą z okresu od 4 stycznia 1993 r. do 24 lutego 2006 r. i jedynie dla EUR są z okresu krótszego – od 1 stycznia 1999 r., co daje odpowiednio 3320 obserwacji dziennych logarytmicznych zmian kursu dolara amerykańskiego i franka szwajcarskiego oraz 1809 dla euro. Wszystkie z przedstawionych kursów walut charakteryzują się dużą kurtozą i dużą skośnością. Ma to związek z wysoką inflacją i deprecjacją polskiej waluty w latach dziewięćdziesiątych XX w. Okres wybrany do badań jest okresem niepełnej wymienialności polskiej waluty. Niestety polski rynek walutowy nie ma zbyt długiej historii, a wykorzystanie do badań jedynie danych z ostatnich lat powodowałoby znaczne skrócenie szeregu czasowego.

Przyczynami największych spadków i wzrostów kursów walut w Polsce są przede wszystkim przyczyny zewnętrzne, czyli sytuacja na międzynarodowych rynkach walutowych i gwałtowne zmiany przede wszystkim kursów USD/EUR. Z przyczyn wewnętrznych można wymienić skokowe dewaluacje złotego w latach dziewięćdziesiątych. Z taką sytuacją mieliśmy do czynienia np. 27 sierpnia 1993 r., kiedy to dokonano dewaluacji złotego o 8%. W tym dniu odnotowano właśnie największy wzrost kursu USD/PLN i CHF/PLN odpowiednio o 7,27% oraz 7,78%. Największy spadek wartości złotego wobec euro odnotowano 11 lipca 2001 r. Kurs EUR/PLN wzrósł o 5,42% w następstwie niepewności co do zwiększenia deficytu budżetowego Polski po ujawnieniu niedoboru rządu 17 mld zł. 12 sierpnia 2001 r. mieliśmy z kolei do czynienia z rekordowym umocnieniem się polskiej waluty w stosunku do podstawowych walut światowych. Kurs dolara amerykańskiego spadł o 4,77%, franka szwajcarskiego – o 5,35%, a kurs euro – o 5,53%. Taka sytuacja na rynku walutowym była następstwem informacji, że rząd zgodzi się na zwiększenie deficytu budżetowego jedynie o 8-9 mld zł, a reszta niedoboru zostanie pokryta przez dużą redukcję wydatków budżetowych. Na poziom kursów walut wpływają więc w znacznie mierze również informacje polityczne i dotyczące polityki finansowej państwa. Nie bez znaczenia pozostają również stopy procentowe w strefie euro oraz Stanach Zjednoczonych, których zmiany mogą powodować szybkie transfery kapitału.

Ryzyko ekstremalne powoduje, że liczba przekroczeń przedziału 3 odchyłeń standardowych jest kilkakrotnie większa niż mogłoby to wynikać z rozkładu normalnego. W odniesieniu do dolara amerykańskiego zanotowano 23 przekroczenia przedziału 3 odchyłeń standardowych po prawej i 14 po lewej stronie, dla franka szwajcarskiego było to odpowiednio 31 i 15, a dla euro – 13 i 6. Przedział 4 sigma również został przekroczony we wszystkich przypadkach: dla dolara amerykańskiego 7 i 4 razy, dla franka szwajcarskiego – 5 i 7 razy, a dla euro – 5 i 2 razy.

3. Podstawy statystyczne

Jedną z propozycji rozwiązania problemu występowania grubych ogonów rozkładów może być zastosowanie teorii wartości ekstremalnych do szacowania ryzyka rynku walutowego za pomocą miar kwantylowych. Modele wywodzące się z EVT możemy podzielić na 2 grupy:

1. Modele maksimów blokowych (*block maxima*).
2. Modele *peaks over threshold* – POT.

O teorii wartości ekstremalnych szczegółowo traktuje m.in. praca Embrechtsa, Klüppelberg i Mikoscha [1997].

W niniejszej pracy zostanie wykorzystana metoda *peaks over threshold*, która opiera się na zaproponowanym przez McNeila [McNeil, Saladin 1997] wykorzystaniu warunkowego rozkładu przekroczenia (*conditional excess distribution*), o dystrybuancie [McNeil, Saladin 1997, s. 3]:

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) \quad 0 \leq y \leq (x_F - u), \quad (1)$$

gdzie: X – strata, zmienna losowa pochodząca z rozkładu o dystrybuancie F ,

u – ustalony próg,

y – wartość, o którą strata przekracza próg u ,

x_F – kres górny dziedziny funkcji F .

Jest to więc prawdopodobieństwo, że strata przekroczy pewien próg u o wartość nieprzekraczającą y , przy założeniu, że w ogóle ten próg przekroczy. Mamy zatem do czynienia z rozkładem warunkowym zależnym od wybranego progu u .

Dystrybuantę $F_u(\cdot)$ możemy zapisać w zależności od dystrybuanty F (por. [Köllezi, Gilli 2000, s. 5]):

$$F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}. \quad (2)$$

Znalezienie postaci rozkładu $F_u(\cdot)$ jest możliwe dzięki zastosowaniu twierdzenia Pickandsa-Balkema-de Haana [Köllezi, Gilli 2000, s. 6]. Mówi ono, że dla szerokiej klasy rozkładów danych dystrybuantą F warunkowy rozkład przekroczenia, dla dużej wartości u , może być aproksymowany za pomocą

$$F_u(y) \approx G_{\xi, \beta}(y) \quad u \rightarrow \infty,$$

gdzie:

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta} y\right)^{-1/\xi} & \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-y/\beta} & \xi = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

dla $0 \leq y \leq (x_F - u)$ jest uogólnionym rozkładem Pareto (*generalized Pareto distribution* – GPD), gdzie: β – parametr skali ($\beta > 0$), ξ – parametr kształtu (indeks ogona).

Parametr ξ określa trzy postaci uogólnionego rozkładu Pareto (por. [McNeil, Saladin 1997, s. 3]). Dla $\xi > 0$ otrzymujemy rozkład Pareto, dla $\xi = 0$ – rozkład wykładniczy, a dla $\xi < 0$ – tzw. rozkład Pareto II typu.

Uogólniony rozkład Pareto dla $\xi > 0$ charakteryzuje się grubymi ogonami. Może mieć zatem znaczenie w analizie wartości ekstremalnych, a kwantyl tego rozkładu może być zastosowany do estymacji miar zagrożenia dla ryzyka ekstremalnego.

Estymacja parametrów rozkładu *GP* może się odbywać różnymi sposobami. Można je podzielić na dwa główne podejścia: estymację nieparametryczną i parametryczną. Do najczęściej wykorzystywanych podejść parametrycznych zaliczyć można metodę największej wiarygodności oraz metodę momentów ważonych prawdopodobieństwem¹, które zostały wykorzystane niniejszej pracy.

4. Pomiar ryzyka

Pomiar ryzyka kursów walutowych na rynku polskim zostanie przeprowadzony przy zastosowaniu wartości zagrożonej (*value at risk* – *VaR*). Metody szacowania wartości zagrożonej najogólniej można podzielić na wykorzystujące koncepcję zmiennej losowej oraz wykorzystujące koncepcję procesu stochastycznego. Szczegółowy podział metod został zaprezentowany m.in. w pracach Joriona [2001] i Dowda [1998]. Do obliczania wartości zagrożonej najczęściej stosuje się 3 podstawowe podejścia²: podejście wariancji-kowariancji (W-K), symulację historyczną (SH), symulację Monte-Carlo (MC).

Wykorzystanie teorii wartości ekstremalnych pozwala na zastosowanie kwantyla warunkowego rozkładu przekroczenia zamiast rozkładu stóp zwrotu. Model *POT* opiera się na wykorzystaniu warunkowego rozkładu przekroczenia, którego dystrybuanta została zaprezentowana we wzorze (3). W takim przypadku estymacja *VaR* możliwa jest wprost z kwantyla uogólnionego rozkładu Pareto, który ma postać:

$$EV - VaR_{POT}(p) = \begin{cases} u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u}(p) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) & \xi \neq 0 \\ -\hat{\beta} \ln \left(\frac{n}{N_u}(p) \right) & \xi = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

gdzie: N_u – liczba obserwacji przekraczających próg.

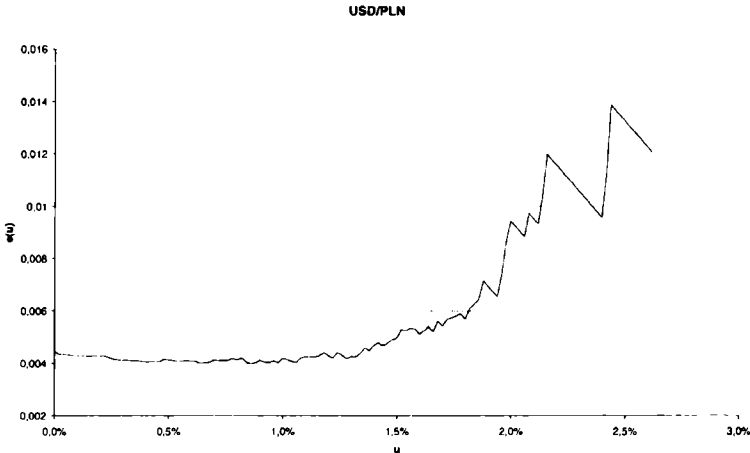
Otrzymaliśmy zatem dla danego prawdopodobieństwa p kwantyl rozkładu F , który jest oszacowaniem *EV-VaR* (*extreme value-VaR*) opartym na uogólnionym rozkładzie Pareto. Inną uproszczoną metodę szacowania parametrów rozkładu i *VaR* podaje m.in. Falk [1994].

¹ Szerzej m.in. w pracy Hoskinga i Wallisa [1987].

² W niniejszej pracy w odniesieniu do tych podejść będzie używane określenie „klasyczne”.

5. Wyniki badań

Jednym z najważniejszych zagadnień związanych z estymacją parametrów *GPD* jest wyznaczenie progu. Obserwacje, których wartość jest większa od wartości u , posłużą do estymacji parametrów *GPD*. W tym celu będzie zastosowana metoda graficzna opisana w m.in. w pracy Këllezi, Gilli [2000, s. 10]. Rysunek 1 prezentuje przykład wyznaczania progu na przykładzie kursu USD/PLN dla lewego ogona rozkładu. Został on wyznaczony na poziomie 1,3 %, co oznacza, że istnieją 72 obserwacje, które ten próg przekraczają i posłużą do estymacji parametrów *GPD*.



Rys. 1. Wykres $(u, e(u))$ dla prawego ogona rozkładu kursu USD/PLN

Źródło: opracowanie własne.

Również w pozostałych przypadkach na podstawie wykresów u od $e(u)$ dokonano wyboru progu. Tabela 1 prezentuje wartości progu u oraz odpowiadające im liczby obserwacji przekraczające ten próg (k). Wybór progu u pozwala na estymację parametrów uogólnionego rozkładu Pareto. Korzystając z metody największej wiarygodności (*MLE*) oraz metody momentów ważonych prawdopodobieństwem (*PWM*), oszacowano parametry ξ , ν oraz β .

Tabela 1. Parametry rozkładu *GPD* oszacowane metodą największej wiarygodności oraz metodą momentów ważonych prawdopodobieństwem

Wyszczególnienie	Kurs	k	u	<i>MLE</i>			<i>PWM</i>		
				ξ	ν	β	ξ	ν	β
Lewy ogon	USD/PLN	72	1,30%	0,2818	0,0073	0,0015	0,2901	0,0074	0,0014
	CHF/PLN	224	0,88%	0,2468	0,0048	0,0022	0,2506	0,0048	0,0022
	EUR/PLN	69	1,14%	0,3186	0,0065	0,0012	0,3384	0,0067	0,0011
Prawy ogon	USD/PLN	67	1,48%	0,4535	0,0099	0,0009	0,4462	0,0100	0,0009
	CHF/PLN	161	1,08%	0,4064	0,0055	0,0020	0,3771	0,0053	0,0021
	EUR/PLN	104	1,05%	0,2756	0,0043	0,0021	0,2805	0,0044	0,0021
		57	1,32%	0,4164	0,0073	0,0012	0,3904	0,0072	0,0012

Źródło: opracowanie własne.

Otrzymane wyniki dla lewego ogona rozkładu potwierdziły tezę, że ogon rozkładu może być modelowany za pomocą rozkładu Fréchet. We wszystkich przypadkach wartość parametru ξ jest istotnie różna od 0, co wskazuje na zasadność wyboru tego rozkładu. Otrzymane wyniki dla prawego ogona rozkładu są zbliżone do tych otrzymanych dla lewego ogona. Otrzymane wyniki estymacji posłużą do szacowania miar ryzyka.

W procesie kalkulacji *EV-VaR* wykorzystano oszacowania parametrów *GPD* uzyskane dwiema metodami: metodą największej wiarygodności oraz metodą momentów ważonych prawdopodobieństwem.

Tabela 2. Jednodniowy *EV-VAR* obliczony metodą *POT* z zastosowaniem metody największej wiarygodności *EV-VAR_{MLE}* oraz metody momentów ważonych prawdopodobieństwem *EV-VAR_{PWM}* dla lewego i prawego ogona rozkładu (w %)

Wyszczególnienie	Kurs	u	<i>EV-VaR_{MLE}</i>				<i>EV-VAR_{PWM}</i>			
			99,9	99,5	99	95	99,9	99,5	99,0	95,0
Lewy ogon	USD/PLN	2,17	2,75	2,30	2,16	1,92	2,75	2,30	2,17	1,94
	CHF/PLN	6,75	3,00	2,17	1,90	1,43	3,00	2,17	1,90	1,43
	EUR/PLN	3,81	2,61	2,13	1,99	1,75	2,60	2,13	2,00	1,78
Prawy ogon	USD/PLN	2,02	3,06	2,65	2,55	2,40	3,06	2,65	2,55	2,41
	CHF/PLN	4,85	3,48	2,36	2,06	1,62	3,45	2,36	2,06	1,61
	EUR/PLN	5,75	3,06	2,22	1,96	1,51	3,06	2,22	1,96	1,52
		3,15	2,95	2,38	2,22	2,01	2,94	2,38	2,22	1,99

Źródło: opracowanie własne.

Jednodniowy *EV-VaR* obliczony metodą *POT* z zastosowaniem dwóch metod estymacji daje podobne wyniki. Dla poziomu ufności 99% oszacowania *EV-VaR_{MLE}* wahają się w przedziale od 1,9 dla kursu CHF/PLN (lewy ogon) do 2,55% dla kursu USD/PLN (prawy ogon). *EV-VaR_{PWM}* zawiera się w przedziale od 1,9 do 2,55% dla tych samych kursów walut. Ze względu na niewielkie różnice w estymacji *EV-VaR* z wykorzystaniem oszacowań parametrów *GPD* dwiema metodami do dalszych badań użyto jedynie oszacowań uzyskanych dzięki zastosowaniu metody największej wiarygodności.

Zestawione zostały również wyniki pochodzące z metod klasycznych: wariacji-kowariancji, symulacji historycznej oraz symulacji Monte Carlo, a także otrzymane w wyniku zastosowania metody *POT*. Porównanie wyników badań dla 3 klasycznych metod, a także oszacowań *EV-VAR_{POT}* wskazują, że w przypadku metody wariacji-kowariancji oraz symulacji Monte Carlo oszacowania *VaR* są niższe niż uzyskane metodą *POT*. Może to świadczyć o tym, że dla wyższych kwantyli rozkładu metoda *POT* w większym stopniu uwzględnia wartości ekstremalne. Inaczej wygląda sytuacja w symulacji historycznej. Wzrost poziomu ufności powoduje zwiększenie liczby oszacowań *VaR* większych niż dla metody *POT*. W odniesieniu do *VaR-99,5%* zaobserwowano dwa takie przypadki na łączną liczbę sześciu, a dla 99,9% – aż pięć na sześć. Jest to spowodowane tym, że symulacja historyczna jest wrażliwa na występowanie wartości ekstremalnych. Jest to szczególnie widoczne

w przypadku wysokich kwantyli rozkładów, takich jak 99 czy 99,5%, kiedy to o poziomie *VaR* decydują pojedyncze obserwacje.

W celu weryfikacji zaprezentowanych podejść można zastosować kilka metod proponowanych w literaturze. Popularność *VaR* wynika m.in. ze stosunkowo prostej weryfikacji jakości stosowanych modeli i otrzymywanych wyników. Najprostszą i niemal narzucającą się metodą jest analiza bezwarunkowej liczby przekroczeń. Do weryfikacji otrzymanych założeń zastosowano test przekroczeń Kupca, którego opis można znaleźć m.in. w pracy Joriona [2001].

Testy Kupca przeprowadzone w odniesieniu do wyników kalkulacji *VaR* wykazały, że dla symulacji historycznej nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, że prawdopodobieństwo przekroczenia *VaR* równe jest zadanemu poziomowi tolerancji. Było to zgodne z oczekiwaniami, gdyż *VaR* szacowany był na podstawie kwantyla empirycznego rozkładu, a test Kupca dotyczył tego samego okresu. Ważniejsze wydaje się porównanie wyników otrzymanych w metodach wariancji-kowariancji, symulacji Monte Carlo oraz *POT*.

Dla poziomu ufności *VaR* równego 99,5% test Kupca dotyczący metody wariancji-kowariancji oraz symulacji Monte Carlo wskazuje na występowanie większej liczby przekroczeń *VaR* (tab. 3). Liczba odrzuceń (szare pola w tab. 3) oszacowań modelu w teście Kupca wyniosła 5 na łącznie 6 dla metody wariancji-kowariancji oraz symulacji Monte Carlo. W przypadku metody *POT* takich odrzuceń było 2 na 6 oszacowań. Warto również podkreślić, że w modelu *POT* odrzucenie modelu nastąpiło z powodu zbyt małej liczby przekroczeń *VaR* (pogrubiona czcionka w tab. 3). Zbyt mała liczba przekroczeń może wskazywać na przeszacowywanie przez model poziomu *VaR*. Podobne wyniki otrzymano dla *VaR* dla $p = 99\%$.

Tabela 3. Wyniki testu Kupca dla $p = 99,5, 99$ i 95%

p	Kurs waluty	W-K				MC				POT			
		liczba przekroczeń		statystyka testu		liczba przekroczeń		statystyka testu		liczba przekroczeń		statystyka testu	
		prawy ogon	lewy ogon	prawy ogon	lewy ogon	prawy ogon	lewy ogon	prawy ogon	lewy ogon	prawy ogon	lewy ogon	prawy ogon	lewy ogon
99,5%	USD/PLN	40	31	23,72	9,99	39	32	21,98	11,28	7	6	7,14	9,02
	CHF/PLN	42	27	27,37	5,50	37	29	18,64	7,60	23	13	2,21	0,85
	EUR/PLN	19	12	8,35	0,88	19	12	8,35	0,88	10	6	0,10	1,17
99%	USD/PLN	64	46	22,70	4,45	65	48	24,05	5,86	7	6	30,82	34,1
	CHF/PLN	51	36	8,28	0,23	51	37	8,28	0,42	34	23	0,02	3,55
	EUR/PLN	29	20	5,62	0,20	29	20	5,62	0,20	11	7	3,26	8,9
95%	USD/PLN	144	140	3,207	4,517	140	142	4,517	3,83	9	14	269,2	241,9
	CHF/PLN	123	109	12,83	23,32	122	110	13,47	22,46	53	57	108,9	99,9
	EUR/PLN	84	69	0,495	5,811	80	69	1,32	5,81	15	12	100,3	111,9

Źródło: opracowanie własne.

Odmianą sytuację obserwujemy w odniesieniu do *VaR* wyznaczonego w odniesieniu do poziomu ufności $p = 95\%$. Wyraźnie widać, że wraz ze wzrostem po-

ziomu tolerancji polepsza się jakość modeli klasycznych. Test Kupca odrzucił 4 oszacowania dla modelu wariancji i kowariancji oraz dla symulacji Monte Carlo. Wszystkie odrzucenia spowodowane są mniejszą liczbą przekroczeń niż wynikałoby to z modelu. Liczba odrzuceń modelu *POT*, w przeciwieństwie do metod klasycznych, rośnie. Model został odrzucony we wszystkich przypadkach z powodu zbyt małej liczby przekroczeń.

Model *POT* dla większych poziomów tolerancji przeszacowuje ryzyko. Liczba przekroczeń poziomu *VaR* jest stosunkowo mała, jednak przyjęcie takiego modelu byłoby podejściem bardzo zachowawczym. Oszacowanie ryzyka byłoby zbyt duże w porównaniu z rzeczywistym poziomem. W takim przypadku lepsze wydają się klasyczne podejścia.

6. Podsumowanie

Podsumowując wyniki porównania poszczególnych modeli, a także test przekroczeń *VaR*, można stwierdzić, że model *POT* lepiej sprawdza się dla wysokich kwantyli rozkładów i kalkulacja miary *VaR* na poziomie tolerancji 0,01 lub niższym jest zasadna właśnie dla tego podejścia. Jednak na poziomie tolerancji rzędu 0,05 bardziej odpowiednie wydają się podejścia klasyczne. *VaR_{POT}* może być więc uzupełnieniem podstawowego modelu *VaR* dla wyższych kwantyli rozkładu.

Literatura

- Bennett D. (2000), *Ryzyko walutowe*, Dom Wydawniczy ABC, Warszawa.
- Christoffersen P.F. (1998), *Evaluating Interval Forecast*, „International Economic Review” 39, s. 841-862.
- Dowd K. (1998), *Beyond Value at Risk*, John Wiley & Sons, Chichester.
- Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. (1997), *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, Berlin.
- Falk M. (1994), *Extreme Quantile Estimation in d-Neighborhoods of Generalized Pareto Distributions*, „Statistics and Probability Letters” 20, s. 9-21.
- Hosking J.R.M., Wallis J.R. (1987), *Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution*, „Technometrics” 29 (3), s. 339-349.
- Jorion P. (2001), *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, Chicago, 2nd edition, McGraw-Hill, Nowy Jork.
- Köllezi E., Gilli M. (2000), *Extreme Value Theory for Tail-Related Risk Measures*, <http://www.gloriamundi.org>.
- McNeil A., Saladin T. (1997), *The Peaks over Thresholds Method for Estimating High Quantiles of Loss Distributions*, http://www.math.ethz.ch/~mcneil/pub_list.html.

VERIFICATION OF METHODS OF EXTREMAL RISK ANALYSIS IN THE POLISH EXCHANGE MARKET

Summary

In this paper a study on tail index estimation has been carried out. Extreme daily changes in Polish exchange market are estimated using the peaks over threshold method. The parameters of Generalized Pareto distribution are estimated using maximum likelihood estimation. The peaks over threshold method provides a simple tool for estimating tail-related risk measures and may be useful in risk analysis of exchange rates. This method has been verified on Polish market.