

Katarzyna Kuziak

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

POMIAR RYZYKA MODELU W WYCENIE OPCJI

1. Ryzyko modelu

Ryzyko modelu charakteryzuje się tym, że nie można go całkowicie wyeliminować. Peter Temple porównał nawet modelowanie ryzyka z poszukiwaniami Świętego Graala [Temple 2001]. Znaczenie ryzyka modelu podkreślił również, odbierając Nagrodę Nobla, Robert Merton: „łatwo jest stracić cel wykorzystania modelu, kiedy jego matematyka staje się zbyt interesująca (zaczyna być sztuką dla sztuki). Modele są bardzo precyzyjne, ale rzeczywisty rynek ma bardzo skomplikowaną naturę, a dokładność modelu jako użytecznego przybliżenia rzeczywistości zmienia się w czasie i przestrzeni. Modele mogą być wykorzystywane w praktyce, ale bardzo ostrożnie i z uwzględnieniem ich ograniczenia” (Noble Lecture, 9 grudnia 1997). Zatem pomiar ryzyka modelu jest bardzo ważny, ale jednocześnie bardzo trudny. Ryzyko modelu w zależności od obszaru jego zastosowania może być różnie definiowane. W obszarze wyceny ryzyko modelu można określić jako:

1. Ryzyko modelu to potencjalna możliwość poniesienia straty w wyniku zastosowania złego modelu do wyceny instrumentów finansowych lub pomiaru ryzyka – zakładamy, że model wykorzystywany jest w sposób poprawny [Gałarek 2002].

2. Ryzyko modelu to możliwość generowania strat przez wykorzystywany w warunkach rzeczywistych model teoretyczny.

3. W wycenie instrumentów pochodnych ryzyko modelu to ryzyko braku możliwości precyzyjnej estymacji prawdopodobieństwa rozkładu przyszłych wartości instrumentu podstawowego.

Źródła ryzyka modelu można podzielić na finansowe, techniczne i statystyczne. W niniejszym artykule zajmiemy się jedynie statystycznymi źródłami ryzyka modelu. Do nich można zaliczyć przede wszystkim:

a) niepewność co do struktury modelu (czy model jest prawidłowy),

b) niepewność co do oszacowań parametrów modelu przy zadanym modelu (czy oszacowania są prawidłowe),

c) niepewność co do wykorzystania modelu w określonej sytuacji przy zadanym modelu i oszacowaniach parametrów modelu (czy wykorzystanie modelu jest prawidłowe).

W artykule tym skupimy się na zagadnieniu pomiaru ryzyka modelu. Analizowanym źródłem ryzyka modelu będzie tylko niepewność co do oszacowań parametrów modelu przy zadanym modelu (zatem przyjmujemy, że model jest prawidłowy i prawidłowo wykorzystywany). Badanymi modelami będą modele wyceny opcji indeksowych, a przeprowadzone badania będą dotyczyć opcji wystawionych na indeks WIG20.

2. Modele wyceny opcji

Rozważone zostaną następujące procesy dla stóp zwrotu r_t indeksu w trzech wybranych modelach wyceny opcji indeksowej:

1) w modelu Blacka–Scholesa–Mertona (BSM):

$$r_t = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1),$$

gdzie: μ – oczekiwana stopa zwrotu,

σ – zmienność (odchylenie standardowe stopy zwrotu);

proces ten zakłada stałą zmienność w czasie;

2) w modelu CEV (Constant Elasticity Variance):

$$r_t = \mu \Delta t + \sigma S^{\alpha-1} \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1),$$

gdzie: μ – oczekiwana stopa zwrotu,

$\sigma S^{\alpha-1}$ – zmienność;

proces ten zakłada stałą elastyczność wariancji, jest wykorzystywany do modelowania heteroskedastyczności;

3) proces AR(1)-GJR-GARCH(1,1)¹:

$$r_t = \mu + \varphi r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$h_t = \omega + (\alpha + \alpha^- I_{(\varepsilon_{t-1} < 0)}) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1},$$

$$V = \frac{\omega}{1 - \bar{\alpha} - \beta} \cdot \frac{1}{1 - \varphi^2},$$

gdzie: $\mu, \varphi, \alpha, \alpha^-, \beta, \omega$ – parametry procesu stóp zwrotu,

h – warunkowa wariancja,

V – bezwarunkowa wariancja procesu (długoterminowa wariancja procesu);

proces ten umożliwia uwzględnienie grubych ogonów rozkładów, skupiania zmienności, autokorelacji stóp zwrotu oraz efektu dźwigni (asymetrycznej reakcji inwestorów na dobre i złe wiadomości).

¹ W dalszej części stosowany będzie skrót GJR-GARCH.

Modele wyceny opcji:

1) model BSM [Black, Scholes 1973; Merton 1973]

wartość opcji kupna: $c = Se^{-qT}N(d) - Xe^{-rT}N(d - \sigma\sqrt{T})$,

gdzie:
$$d = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

S – wartość zamknięcia indeksu,

X – cena wykonania opcji,

r – wolna od ryzyka stopa procentowa,

q – roczna stopa dywidendy dla indeksu,

σ – zmienność indeksu,

T – czas do wygaśnięcia.

2) model CEV [Cox 1996; Delbaen, Shirakawa 1996];

wartość opcji kupna:

$$c(S) = s \sum_{n=1}^{\infty} g(n, z') G(n + \lambda, w') - \exp\{-rT\} K \sum_{n=1}^{\infty} g(n + \lambda, z') G(n, w'),$$

gdzie:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2(1-\rho)} \\ z &= \frac{s^{2(1-\rho)}}{2\tau_T^{(\delta_\rho, \mu)}} = \frac{2\mu\lambda \exp\left\{\frac{\mu T}{\lambda}\right\} s^{\frac{1}{\lambda}}}{\sigma^2 \left(\exp\left\{\frac{\mu T}{\lambda}\right\} - 1\right)} \\ w &= \frac{(\exp\{-\mu T\} x) s^{2(1-\rho)}}{2\tau_T^{(\delta_\rho, \mu)}} = \\ &= \frac{2\mu\lambda x^{\frac{1}{\lambda}}}{\sigma^2 \left(\exp\left\{\frac{\mu T}{\lambda}\right\} - 1\right)} \\ g(u, v) &= \frac{v^{u-1}}{\Gamma(u)} \exp\{-v\} \\ G(u, v) &= \int_{w \geq v} g(u, w) dw \end{aligned} \right.$$

oraz

$$\left\{ \begin{aligned} z' &= \frac{s^{2(1-\rho)}}{2\tau_T^{(\delta_\rho, r)}} = \frac{2r\lambda \exp\left\{\frac{rT}{\lambda}\right\} s^{\frac{1}{\lambda}}}{\sigma^2 \left(\exp\left\{\frac{rT}{\lambda}\right\} - 1\right)} \\ w' &= \frac{(\exp\{-rT\} x) s^{2(1-\rho)}}{2\tau_T^{(\delta_\rho, r)}} = \frac{2r\lambda K^{\frac{1}{\lambda}}}{\sigma^2 \left(\exp\left\{\frac{rT}{\lambda}\right\} - 1\right)} \end{aligned} \right.$$

W modelach BSM i CEV wyceny opcji znana jest postać analityczna modelu, natomiast w trzecim modelu wartość opcji jest ustalana za pomocą symulacji Mon-

te Carlo, w tym przypadku metodą zaproponowaną w pracy [Duan 1995] – nie ma postaci analitycznej modelu.

3. Współczynnik *vega*

Pomiar ryzyka modelu dotyczy:

- oceny jakościowej (sprawdzanie założeń, badanie sytuacji rynkowej),
- oceny ilościowej (błędy estymacji, analiza wrażliwości, analiza symulacyjna),
- *backtesting*,
- *stress testing*.

Analizie podlegać będzie obszar oceny ilościowej. Ocena ilościowa może zostać dokonana poprzez:

- podanie błędu estymacji (wyznaczenie przedziału ufności dla parametru);
- pomiar wrażliwości (wyznaczenie pierwszej pochodnej wartości instrumentu po czynniku ryzyka);
- analizę symulacyjną (sprawdzenie wyników generowanych przez model dla różnych wartości parametrów).

W niniejszej pracy pomiar ryzyka zostanie przeprowadzony za pomocą miary wrażliwości (pochodnej wartości opcji po czynniku ryzyka, którym jest w tym przypadku zmienność ceny instrumentu podstawowego). W przypadku opcji za miarę ryzyka modelu przyjmuje się współczynnik *vega* (pochodną opcji po zmienności). Współczynnik *vega* określa zatem, o ile zmieni się wartość opcji w wyniku zmiany zmienności instrumentu podstawowego o jeden punkt procentowy. W modelu BSM jest on wyznaczany następująco:

$$vega = \frac{S \cdot \sqrt{T} \cdot e^{-qT} \cdot N'(d)}{100},$$

gdzie $N'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2}}$, pozostałe oznaczenia takie jak w opisie modelu BSM.

Jeśli postać analityczna nie jest znana lub jest bardzo skomplikowana (jak modelu CEV i wykorzystującego proces GJR-GARCH), można wykorzystać bezpośrednio definicję pochodnej jako granicy ilorazu różnicowego:

$$vega = \frac{\partial c(\sigma_t)}{\partial \sigma_t} = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{c_t(\sigma_t + \kappa) - c_t(\sigma_t - \kappa)}{2\kappa}.$$

Właściwości współczynnika *vega* są następujące:

- dla pozycji długich *vega* jest dodatnia,
- dla pozycji krótkich *vega* jest ujemna,
- największa wartość jest dla opcji ATM,
- wartość współczynnika maleje dla opcji ITM i OTM,
- wartość współczynnika maleje wraz z upływem czasu do terminu wygaśnięcia,

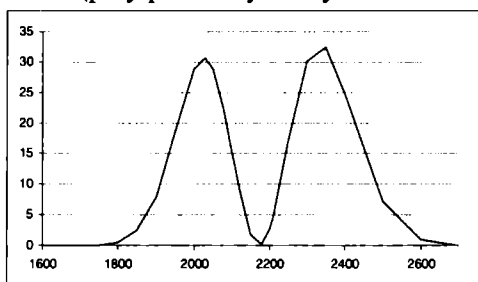
- cena instrumentu podstawowego wpływa ujemnie na współczynnik *vega* (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych),
- cena wykonania wpływa ujemnie na współczynnik *vega* (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych),
- stopa wolna od ryzyka wpływa dodatnio na współczynnik *vega* (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych).

Badając wrażliwość współczynnika *vega*, można zastosować pochodną tego współczynnika po zmienności (tj. drugą pochodną wartości opcji po zmienności). Na potrzeby tego artykułu współczynnik ten został oznaczony jako współczynnik *vega*". Dla modelu BSM przedstawia się on następująco:

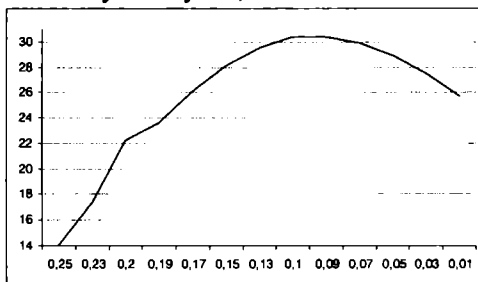
$$vega'' = \frac{\partial veга}{\partial \sigma} = \frac{e^{\frac{\left[T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \ln\left(\frac{S}{X}\right) \right]^2}{2T\sigma^2}} S \sqrt{T} \left[\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{2}} - \frac{T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \ln\left(\frac{S}{X}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{T}\sigma^2} \right]}{\sqrt{\pi}}$$

Właściwości współczynnika *vega*" są następujące:

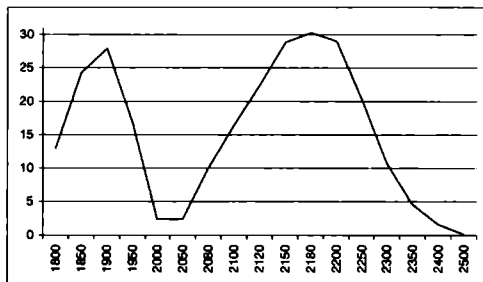
- wartość współczynnika maleje dla opcji *deep ITM*, *deep OTM* i *ATM*,
- wartość współczynnika maleje wraz z upływem czasu do terminu wygaśnięcia, ale najszybciej dla opcji *OTM*,
- cena instrumentu podstawowego wpływa dodatnio/ujemnie na współczynnik *vega*" (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych – rys. 1),
- cena wykonania wpływa dodatnio/ujemnie na współczynnik *vega*" (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych – rys. 3),
- zmienność wpływa dodatnio/ujemnie na współczynnik *vega*" (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych – rys. 2),
- stopa wolna od ryzyka wpływa dodatnio/ujemnie na współczynnik *vega*" (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych – rys. 4).



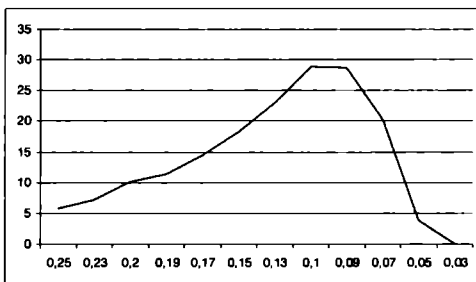
Rys. 1. *Vega*" względem ceny instrumentu podstawowego
Źródło: obliczenia własne.



Rys. 2. *Vega*" względem zmienności
Źródło: obliczenia własne.



Rys. 3. Vega " względem ceny wykonania
Źródło: obliczenia własne.



Rys. 4. Vega " względem wolnej od ryzyka
stopy procentowej
Źródło: obliczenia własne.

Na rysunkach 1-4 przedstawiono zachowanie współczynnika *vega* " dla czterech wyróżnionych czynników (ceny wykonania, ceny instrumentu podstawowego, wolnej od ryzyka stopy procentowej, zmienności) dla europejskiej opcji kupna o parametrach: do czasu wygaśnięcia pozostają 3 miesiące, cena wykonania 2200, cena instrumentu podstawowego 2000, zmienność 10%, stopa wolna od ryzyka 5%. Na rysunkach w każdym przypadku przedstawiono zmiany jednego czynnika, pozostałe pozostawiając na nie zmienionym poziomie.

4. Analiza pomiaru ryzyka modelu

Analiza pomiaru ryzyka modelu w wycenie opcji za pomocą współczynnika *vega* zostanie przedstawiona dla opcji wystawionych na indeks WIG20 na trzech przykładach.

Przykład 1

Przykład ten ilustruje źródło ryzyka modelu, jakim jest zła specyfikacja procesu kształtującego stopę zwrotu indeksu WIG20. Oszacowano parametry trzech procesów kształtujących stopę zwrotu z indeksu WIG20. Wyniki przedstawia tab. 1.

Tabela 1. Oszacowania parametrów procesów stopy zwrotu indeksu WIG20 z okresu od 14 kwietnia 1994 r. do 22 sierpnia 2005 r.

GBM	$\mu = 0,0000$	$\sigma = 0,30297$	
CEV	$\mu = 0,000835$	$\sigma = 1,530798$	$\alpha = 0,824952$
AR(1)-GJR-GARCH(1,1)	$\mu = 0,000525$	$\phi = 0,080733$	$\omega = 0,00001$
	$\beta = 0,881619$	$\alpha = 0,088043$	$\tilde{\alpha} = 0,034478$

Źródło: obliczenia własne.

Jako najbliższy rzeczywistości przyjęto proces GJR-GARCH i oszacowania parametrów (tab. 1) tego procesu posłużyły jako parametry w symulacji. Wykonano 100 000 powtórzeń i otrzymano szereg o parametrach takich, jak model GJR-GARCH z tab. 1. Następnie dokonano wyceny opcji za pomocą modelu CEV,

BSM oraz BSM*², przyjmując wysymulowany ciąg wartości. Na tej podstawie obliczono współczynniki *vega*. Zatem oszacowana zmienność z procesu GJR-GARCH została wykorzystana do obliczenia ryzyka różnych modeli wyceny (przyjmujących inne procesy stóp zwrotu indeksu niż GJR-GARCH), tj. współczynnika *vega*. Wyniki z tab. 2 wskazują na najniższy poziom ryzyka modelu dla modelu CEV.

Tabela 2. Współczynniki *vega* dla różnych cen wykonania

	1700	1750	1800	1850	1900
CEV	23,227	27,666	32,284	36,958	41,557
BSM	101,181	125,762	152,119	179,421	206,738
BSM*	73,995	91,447	110,059	129,252	148,381

Źródło: obliczenia własne.

Przykład 2

Przykład ten przedstawia poziom współczynnika *vega* dla rzeczywistych opcji na WIG20 notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Obliczenia współczynników *vega* zostały przeprowadzone na losowo wybrany dzień, tj. 22 sierpnia 2005 r. dla 12 opcji o symbolu I, U oraz 12 o symbolu L, X. Przyjęto poziom indeksu WIG20 równy 2211 pkt, zmienność obliczano na podstawie 250 dni, stopę wolną od ryzyka = 4,56% (dla opcji I, U o terminie wygaśnięcia 25 dni) i 4,49% (dla opcji L, X o terminie wygaśnięcia za 116 dni). Obliczono współczynniki *vega* dla modelu GJR-GARCH, BSM i BSM*. Wyniki zestawiono w tab. 3. Wynika z nich, że najmniejsze ryzyko modelu dla wszystkich opcji reprezentuje model BSM ze zmiennością oszacowaną jako długoterminowa zmienność z procesu GJR-GARCH, tj. BSM*.

Tabela 3. Współczynniki *vega* obliczone dla modelu BSM, BSM* oraz GJR-GARCH

	GJR	BSM	BSM*		GJR	BSM	BSM*
OW20I5200	296,00	352,25	15,96	OW20L5190	255,50	416,00	42,39
OW20I5210	276,30	531,74	24,96	OW20L5200	234,60	602,93	51,79
OW20I5220	100,40	632,71	30,11	OW20L5210	273,40	849,42	59,21
OW20I5230	529,60	611,80	28,97	OW20L5220	131,10	842,31	63,89
OW20I5240	117,20	493,43	22,87	OW20L5230	166,20	776,94	65,55
OW20U5170	48,90	16,61	0,57	OW20L5240	215,90	756,39	64,36
OW20U5180	42,20	65,21	2,54	OW20X5180	622,90	208,94	32,13
OW20U5190	44,30	177,49	7,57	OW20X5190	255,50	416,00	42,39
OW20U5200	296,00	352,25	15,96	OW20X5200	234,60	702,93	51,79
OW20U5210	276,30	531,74	24,96	OW20X5210	273,40	749,42	59,21
OW20U5220	100,40	632,71	30,11	OW20X5220	131,10	742,31	63,89
OW20U5230	529,60	611,80	28,97	OW20X5230	166,20	776,94	65,55

Źródło: obliczenia własne.

² Model BSM* to model BSM, w którym przyjęto długoterminową zmienność z procesu AR(1)-GJR-GARCH(1,1), a nie z geometrycznego ruchu Browna.

Przykład 3

Dla porównania współczynnika *vega* wyznaczonego analitycznie z wartości otrzymanych z modelu wyceny jako pochodna, obliczono współczynniki *vega* na podstawie cen rynkowych. Jest to tzw. empiryczna *vega* ustalona jako zmiana w cenie opcji w odniesieniu do zmiany zmienności (iloraz różnicowy). W tym przypadku nie jest wykorzystywany żaden model wyceny (notowania rynkowe), jedynie model do oszacowania zmienności. Zmienność została wyznaczona jako odchylenie standardowe stóp zwrotu dla czterech różnej długości okresów (50 dni, 100 dni, 250 dni oraz 350 dni). Wyniki przedstawia tab. 4.

Tabela 4. Współczynniki empiryczne *vega*

	50	100	250	350
OW20I5200	4,10298	2,025282	3,4588	2,533827
OW20I5210	0,113276	2,471709	3,591533	1,903714
OW20I5220	-0,33078	2,009206	2,059413	3,027285
OW20I5230	-6,78603	-0,20903	1,322968	2,474307
OW20I5240	6,857012	0,63195	3,136717	6,101259
OW20U5170	1,579144	-1,46002	1,573071	-0,17101
OW20U5180	1,615049	0,131776	2,541962	1,596859
OW20U5190	2,527149	0,503142	-0,60074	-2,67286
OW20U5200	0,361441	1,574293	3,110324	-2,7096
OW20U5210	-0,39329	1,938892	-2,58288	-2,92808
OW20U5220	2,234536	-2,78207	-8,72367	-2,95476
OW20U5230	1,890926	-2,6488	-4,82096	-3,27738
OW20L5190	12,88712	3,97271	7,67281	3,775691
OW20L5200	-8,76078	6,046453	2,367729	5,574135
OW20L5210	0,935031	2,218646	16,03473	12,53706
OW20L5220	-2,24049	2,064077	0,973017	3,25272
OW20L5230	-2,93601	3,474884	3,589705	-0,65728
OW20L5240	-2,49424	0,061807	-1,40914	1,539371
OW20X5180	0,980078	-0,26841	-4,7877	-4,13492
OW20X5190	-0,645	-0,47025	-3,63166	-3,73452
OW20X5200	1,156634	0,115741	-5,26758	-4,04973
OW20X5210	-1,79201	-3,11049	-0,17997	-6,67274
OW20X5220	3,913904	-4,07372	-1,87722	-3,5712
OW20X5230	-6,46935	-1,90706	-3,84023	-2,34161

Źródło: obliczenia własne.

W tym przypadku poziom współczynnika *vega* odbiega znacznie od poziomu współczynników obliczonych na podstawie modeli, ponieważ wykorzystywany jest inny model (tylko do oszacowania zmienności). Współczynnik empiryczna *vega* nie wykazuje żadnych prawidłowości, nie cechuje się takimi właściwościami jak współczynniki obliczane z modeli. Z pewnością mała płynność rynku opcji na GPW w Warszawie ma na to istotny wpływ.

5. Podsumowanie

Przeprowadzone badania dla modeli wyceny opcji na indeks giełdowy WIG20 wskazują na dużą wrażliwość otrzymanych wyników na przyjęte założenia i konieczność zarządzania tego rodzaju ryzykiem. Jednym z etapów zarządzania ryzykiem jest jego pomiar. W przypadku opcji miernikiem ryzyka modelu może być współczynnik *vega* (pochodna wartości opcji po zmienności ceny instrumentu podstawowego). Pomiar ryzyka modelu w obszarze wyceny opcji indeksowych zilustrowano przykładem błędu estymacji (złej specyfikacji procesu stochastycznego kształtującego stopę zwrotu). Obliczono również współczynniki *vega* na podstawie cen rynkowych. Współczynnik empiryczna *vega* nie wykazuje żadnych prawidłowości, nie cechuje się takimi właściwościami jak współczynniki obliczane z modeli.

Literatura

- Allen S.L. (2003), *Financial Risk Management: a Practitioners Guide to Managing Market and Credit Risk*, John Wiley.
- Black F., Scholes M. (1973), *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, „Journal of Political Economy” nr 81, s. 637-659.
- Bollerslev T. (1986), *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, „Journal of Econometrics” nr 31, s. 307-327.
- Cont R. (2005), *Model Uncertainty and its Impact on the Pricing of Derivative Instruments*, „Mathematical Finance”.
- Cox J.C. (1996), *The Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model*, „The Journal of Portfolio Management”, s. 15-17.
- Crouhy M., Galai D., Mark R. (2001), *Risk Management*, McGraw-Hill, New York.
- Delbaen F., Shirakawa H. (1996), *A Note of Option Pricing for Constant Elasticity in Variance Model*, Department of Mathematics, ETH-Zentrum, nr 96-03.
- Derman E. (1996), *Model Risk*, „Risk” nr 9, s. 34-37.
- Duan J. (1995), *The GARCH Option Pricing Model*, „Mathematical Finance” nr 5, s. 13-32.
- Gątarek D. (2002), *Ryzyko modelu*, „Rynek Terminowy” nr 4, s. 52-55.
- Glosten L., Jagannathan R., Runkle D. (1993), *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*, „Journal of Finance” nr 48, s. 1179-1801.
- Kato T., Yoshida T. (2000), *Model Risk and its Control*, „Monetary and Economic Studies”, grudzień, s. 129-156.
- Merton R. (1973), *Theory of Rational Option Pricing*, „Bell Journal Economics and Management Science” nr 4, s. 141-183.

- Rebonato R. (2003), *Theory and Practice of Model Risk Management*, [w:] *Modern Risk Management: a History*, red. P. Field, Risk Book.
- Temple P. (2001), *Hedge Funds: Courtesans of Capitalism*, John Wiley and Sons, New York.

MODEL RISK VALUATION IN OPTION PRICING

Summary

Empirical research conducted in index option pricing models pointed out that results are very sensitive to assumptions laying upon them and necessity of managing this type of risk. One of the steps in risk management process is the risk measurement. For the options good risk measure is *vega* coefficient (first derivative of the option value with respect to volatility of underlying). Models risk measurement in the index option pricing area was illustrated with estimation error example (bad specification of stochastic process for the rate of return). *Vega* coefficients were calculated based on market prices also. So called empirical *vega* do not show any regularities and it is not characterized by the same properties as *vega* coefficient which is calculated from the models.