

Stanisław Heilpern

ANALIZA ZALEŻNOŚCI WARTOŚCI EKSTREMALNYCH A POMIAR RYZYKA

1. Wstęp

Artykuł poświęcony jest badaniu zależności wartości ekstremalnych. Zależności te rozpatrywane są z punktu widzenia zastosowań w finansach i ubezpieczeniach, głównie w zarządzaniu ryzykiem. Badanie dotyczyło zależności zachodzących między małymi lub dużymi wartościami rozpatrywanych zmiennych losowych.

Zależności wartości ekstremalnych są wykorzystywane w zarządzaniu ryzykiem, głównie przy wyznaczaniu miar ryzyka i składek ubezpieczeniowych. Ich znajomość pomocna jest również podczas przeprowadzania dynamicznej analizy finansowej, prognoz ostrzegawczych dotyczących kryzysów finansowych. Ponadto można je wykorzystać przy badaniu wypłacalności towarzystw ubezpieczeniowych i instytucji finansowych, zarządzania kredytami, jak i w różnych rodzajach działalności ubezpieczeniowej, takich jak ubezpieczenia komunikacyjne czy dotyczące szkód katastrofalnych. Istnienie zależności ekstremalnych jest bardzo niebezpieczne z punktu widzenia ubezpieczyciela. Następuje wtedy kumulacja dużych szkód różnego typu.

2. Podstawy teoretyczne

Oznaczmy symbolem $H(x, y)$ dystrybuantę łącznego rozkładu zmiennych losowych X i Y oraz symbolami $F(x)$ i $G(y)$ dystrybuanty brzegowe tych zmiennych. Załóżmy ponadto, że dystrybuanty brzegowe są ciągłe. Analiza zależności wartości ekstremalnych, którą będziemy się zajmować, oparta będzie na funkcjach łączących (*copula*). Funkcje łączące są łącznikami między rozkładem łącznym a rozkła-

dami brzegowymi. Umożliwiają lepszą, pełniejszą analizę zależności zachodzących między zmiennymi losowymi. Rozbijają one łączny rozkład na dwie części: strukturę zależności i rozkłady brzegowe. Struktura zależności zależy jedynie od funkcji łączących, nie jest zależna od rozkładów brzegowych.

Definicja [11; 6; 9]. *Funkcją łączącą* C nazywamy dystrybuantę skupioną na $[0, 1] \times [0, 1]$ o jednostajnych na $[0, 1]$ rozkładach brzegowych.

Podstawowym twierdzeniem teorii funkcji łączących jest przedstawione poniżej twierdzenie Sklara.

Twierdzenie 1 [11; 6].

a. Istnieje dokładnie jedna funkcja łącząca C , spełniająca poniższe równanie

$$H(x, y) = C(F(X), G(y)). \quad (1)$$

b. Dla danej funkcji łączącej C i dystrybuant jednowymiarowych F i G równanie (1) wyznacza dystrybuantę łączną o dystrybuantach brzegowych równych F i G .

Gdy dystrybuanty brzegowe nie są ciągłe, wówczas funkcja łącząca jest jednoznacznie określona jedynie na iloczynie kartezjańskim zbiorów wartości dystrybuant.

Twierdzenie Sklara umożliwia nam, w przypadku ciągłych dystrybuant brzegowych, przedstawienie funkcji łączącej następującym wzorem:

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)).$$

Podstawowymi własnościami funkcji łączących jest ich niezmienniczość ze względu na rosnące przekształcenia oraz, oczywiście, brak zależności od rozkładów brzegowych.

Spośród wszystkich funkcji łączących można wymienić trzy podstawowe:

$$C_L(u, v) = (u + v - 1)^+,$$

$$C_U(u, v) = u \wedge v,$$

$$C_I(u, v) = u.$$

Dwie pierwsze funkcje to *dolne i górne ograniczenie Frecheta-Hoeffdinga*, a trzecia przedstawia niezależność. Dla dowolnej funkcji łączącej C zachodzi następująca zależność, wyjaśniająca nazwę wymienionych funkcji łączących

$$C_L(u, v) \leq C(u, v) \leq C_U(u, v).$$

W praktyce często wykorzystuje się parametryzowane rodziny funkcji łączących. Parametry opisujące elementy tych rodzin oddają zwykle stopień zależności zachodzącej między badanymi zmiennymi losowymi. Najbardziej znanymi są

rodziny archimedesowych funkcji łączących. *Archimedesowa funkcja łącząca* określona jest wzorem [9]:

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)),$$

gdzie *generator* $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ jest malejącą, wypukłą funkcją spełniającą warunki: $\varphi(0) = \infty$, $\varphi(1) = 0$. Charakteryzuje się prostotą, ponieważ jest jednoznacznie wyznaczona przez funkcję jednej zmiennej φ . Do najbardziej znanych rodzin archimedesowych funkcji łączących należą rodziny:

Claytona:

$$C_{\alpha}^{Cl}(u, v) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha},$$

gdzie parametr $\alpha > 0$. Funkcja łącząca Claytona opisana jest generatorem $\varphi(u) = u^{-\alpha} - 1$.

Franka:

$$C_{\alpha}^F(u, v) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{\alpha u} - 1)(e^{\alpha v} - 1)}{e^{\alpha} - 1} \right),$$

gdzie dla $\alpha \neq 0$ oraz generator $\varphi_{\alpha}(u) = -\ln \left(\frac{e^{\alpha u} - 1}{e^{\alpha} - 1} \right)$.

Gumbela:

$$C_{\alpha}^G(u, v) = \exp \left(- \left[(-\ln u)^{\alpha} + (-\ln v)^{\alpha} \right]^{1/\alpha} \right),$$

gdzie $\alpha > 1$ oraz $\varphi(u) = (-\ln u)^{\alpha}$.

Innym przykładem rodzin, również często stosowanych w praktyce, są rodziny *eliptycznych funkcji łączących* [3]. Są to funkcje łączące indukowane przez wielowymiarowe rozkłady eliptyczne, takie jak wielowymiarowe rozkłady normalne czy Studenta. Eliptyczne funkcje łączące są charakteryzowane przez macierze korelacji. Parametrem funkcji łączącej Studenta jest też liczba stopni swobody.

Przedstawione powyżej funkcje łączące charakteryzują się symetrią. Zachodzi bowiem zależność:

$$C(u, v) = C(v, u).$$

Funkcje łączące oparte są na dystrybuancie łącznej $H(x, y)$. Jednakże funkcja przetrwania $\bar{H}(x, y) = P(X > x, Y > y)$ również indukuje tzw. *funkcję łączącą przetrwania*, opisaną wzorem

$$\bar{H}(x, y) = \bar{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)).$$

Funkcja ta związana jest ze zwykłą funkcją łączącą C formułą:

$$\bar{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

Jeśli zachodzi zależność

$$C(u, v) = \bar{C}(u, v),$$

to mówimy, że funkcja łącząca jest rotacyjnie symetryczna. Eliptyczne funkcje łączące oraz funkcja łącząca Franka są rotacyjnie symetryczne [6; 3].

3. Współczynniki zależności wartości ekstremalnych

Współczynniki zależności wartości ekstremalnych (tail dependence coefficients): dolny λ_L oraz górny λ_U są podstawowymi narzędziami ułatwiającymi w dużym stopniu analizę zależności między ekstremalnymi wartościami badanych zmiennych losowych. Odgrywają one na tym obszarze rolę klasycznych współczynników korelacji. Definiujemy je w następujący sposób:

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0} P(X \leq F^{-1}(u) | Y \leq G^{-1}(u)),$$

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 1} P(X > F^{-1}(u) | Y > G^{-1}(u)).$$

Można pokazać [3], że współczynniki te, będąc granicznymi prawdopodobieństwami warunkowymi opartymi na kwantylach, zależą jedynie od funkcji łączących, zwykłych i przetrwania. Zachodzą bowiem zależności:

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u},$$

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\bar{C}(1 - u, 1 - u)}{1 - u}.$$

Dla archimedesowych funkcji łączących otrzymujemy prostsze wzory

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varphi^{-1}(2\varphi(u))}{u},$$

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + \varphi^{-1}(2\varphi(u))}{1 - u},$$

zależne jedynie od generatorów tych funkcji.

Dolna (górna) niezależność wartości ekstremalnych występuje, gdy otrzymujemy $\lambda_L = 0$ ($\lambda_U = 0$). Dla rotacyjno-symetrycznych funkcji łączących obydwa współczynniki zależności wartości ekstremalnych są sobie równe, tzn. $\lambda_L = \lambda_U$. W przypadku funkcji łączących gaussowskich (indukowanych przez wielowymiarowy rozkład normalny) i Franka zachodzi $\lambda_L = \lambda_U = 0$. Natomiast dla funkcji łączącej Clayтона otrzymujemy:

$$\lambda_L = 2^{-1/\alpha} = 2^{-0,5(1-\tau)/\tau}, \quad \lambda_U = 0,$$

a dla funkcji Gumbela:

$$\lambda_L = 0, \quad \lambda_U = 2 - 2^{1/\alpha} = 2 - 2^{1-\tau},$$

gdzie τ jest współczynnikiem korelacji rang Kendalla. Widzimy, że gdy struktura zależności opisana jest funkcją łączącą Clayтона, to zachodzi jedynie zależność dla małych wartości zmiennych X oraz Y , a dla funkcji łączącej Gumbela mamy zależność dla wartości dużych. Dodatkowo współczynniki zależności wartości ekstremalnych dla funkcji łączącej Gumbela i Clayтона zależą od wartości parametru α oraz współczynnika korelacji Kendalla. Natomiast funkcja łącząca Studenta z liczbą stopni swobody k jest zależna zarówno dla małych, jak i dużych wartości. Zachodzą dla niej następujące zależności:

$$\lambda_L = \lambda_U = 2\bar{t}_{k+1} \left(\sqrt{\frac{(k+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right),$$

gdzie ρ jest współczynnikiem korelacji Pearsona, a $\bar{t}_k$ jest funkcją przetrwania jednowymiarowego rozkładu Studenta z k stopniami swobody.

Istnieje wiele metod estymacji współczynników zależności wartości ekstremalnych (zob. [4; 5; 10]). Są to metody zarówno parametryczne, jak i nieparametryczne. Wykorzystują całą próbę lub tylko wartości ekstremalne z próby.

Jedną z metod polega na estymacji parametrów rozkładów brzegowych oraz parametrów wybranej rodziny funkcji łączących metodą największej wiarygodności. Następnie wybierana jest rodzina najlepsza według ustalonego kryterium. Na przykład maksymalizuje się wartość funkcji wiarygodności, czy wartość AIC. Inne kryteria polegają na wyborze najlepszego dopasowania do empirycznej funkcji łączącej

$$C_n(u, v) = H_n(F_n^{-1}(u), G_n^{-1}(v)),$$

gdzie H_n , F_n , G_n są empirycznymi dystrybucjami, lub na optymalnym dopasowaniu dystrybucyjności $K(z)$ zmiennej losowej $Z = F(X, Y)$ do dystrybucyjności empirycznej K_n .

Współczynnik korelacji wartości ekstremalnych λ (dolnych lub górnych) możemy estymować, wyznaczając najpierw empiryczny współczynnik korelacji Kendalla i wykorzystując zależności zachodzące między tym współczynnikiem a estymowanym współczynnikiem dla zidentyfikowanej wcześniej rodziny funkcji łączących. Na przykład dla rodziny funkcji łączących Clayтона estymator współczynnika λ_L wyznaczmy według wzoru:

$$\hat{\lambda}_L = 2^{-0,5(1-\tau_n)/\tau_n},$$

gdzie τ_n jest empirycznym współczynnikiem korelacji Kendalla.

Inna metoda estymacji współczynnika korelacji wartości ekstremalnych opiera się na empirycznej wersji tego współczynnika. W przypadku zależności dla małych wartości empiryczna wersja tego współczynnika jest równa

$$\lambda_{L,n}(k) = \frac{n}{k} C_n\left(\frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right).$$

Można też, zamiast brania próby z całej dziedziny, ustalić dolny *thl* lub górny *thu* próg i badać jedynie dane o wartościach mniejszych lub większych od tych wielkości.

W analizie zależności wartości ekstremalnych można wykorzystać też funkcje łączące wartości ekstremalnych (*tail dependence copula*). Wyznaczone są one na ustalonym poziomie $u \in [0, 1]$ oraz stanowią bardziej zaawansowane narzędzie badawcze. Nie jest to jednak wartość jak w przypadku współczynników zależności wartości ekstremalnych, ale funkcja charakteryzująca zależność.

Funkcja łącząca dolne wartości ekstremalne określona jest wzorem [8; 12]

$$C_u(x, y) = P\left(X \leq F_u^{-1}(x), Y \leq F_u^{-1}(y) \mid X \leq u, Y \leq u\right) = \frac{C\left(F_u^{-1}(x), F_u^{-1}(y)\right)}{C(u, u)},$$

gdzie $F_u(x)$ jest następującą warunkową dystrybuantą:

$$F_u(x) = P(X \leq x \mid X \leq u, Y \leq u) = \frac{C(x \wedge u, u)}{C(u, u)}.$$

Można sprawdzić, czy otrzymana powyżej funkcja jest też funkcją łączącą. Gdy C jest archimedesową funkcją łączącą, to C_u jest również archimedesową funkcją z generatorem $\varphi_u(t) = \varphi(t\varphi^{-1}(2\varphi(u))) - 2\varphi(u)$.

Natomiast funkcja łącząca górne wartości ekstremalne $\bar{C}_u$ oparta jest na funkcji łączącej przetrwania $\bar{C}$. Określona jest ona wzorem:

$$\begin{aligned}\bar{C}_u(x, y) &= P(X > 1 - \bar{F}_u^{-1}(x), Y > 1 - \bar{F}_u^{-1}(y) | X > 1 - u, Y > 1 - u) = \\ &= \frac{\bar{C}(1 - \bar{F}_u^{-1}(x), 1 - \bar{F}_u^{-1}(y))}{\bar{C}(1 - u, 1 - u)},\end{aligned}$$

$$\text{gdzie } \bar{F}_u(x) = P(X > x | X > u, Y > u) = \frac{\bar{C}(x \wedge u, u)}{\bar{C}(u, u)}.$$

Mówimy, że funkcja charakteryzuje się *regularną zmiennością* (*regularly varying*) z indeksem $\alpha \in \mathbb{R}$ w punkcie x , jeśli $\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(yt)}{f(y)} = t^\alpha$. Stosujemy wtedy oznaczenie $f \in \mathfrak{R}_\alpha^x$. Powolna zmienność zachodzi gdy $\alpha = 0$, a szybka gdy $\alpha = \infty$.

4. Podstawowe twierdzenia

Przedstawione poniżej twierdzenie umożliwi nam badanie granicznego zachowania funkcji łączącej wartości ekstremalne.

Twierdzenie 2 [7]. Niech C będzie archimedesową funkcją łączącą z generatorem φ .

a. Jeśli $\varphi \in \mathfrak{R}_{-\alpha}^0$, gdzie $0 < \alpha < \infty$, to $\lim_{u \rightarrow 0} C_u(x, y) = C_\alpha^{Cl}(x, y)$ (funkcja łącząca Clayтона).

b. Jeśli $\varphi \in \mathfrak{R}_0^0$, to $\lim_{u \rightarrow 0} C_u(x, y) = C_I(x, y)$ (niezależność).

c. Jeśli $\varphi \in \mathfrak{R}_{-\infty}^0$, to $\lim_{u \rightarrow 0} C_u(x, y) = C_U(x, y)$ (górne ograniczenie Frecheta-Hoeffdinga).

Widzimy, że w zależności od rodzaju regularnej zmienności generatora archimedesowej funkcji łączącej C otrzymujemy w granicy dla funkcji łączącej dolne wartości ekstremalne albo funkcję Clayтона, albo niezależność lub ewentualnie górne ograniczenie Frecheta-Hoeffdinga. Generator funkcji łączącej Clayтона należy do klasy $\mathfrak{R}_{-\alpha}^0$, a Gumbela i Franka do klasy $\mathfrak{R}_0^0$.

Chcąc badać graniczne zachowanie funkcji łączącej górne wartości ekstremalne gdy u dąży do 1, należy zamienić zmienne losowe X, Y na $-X, -Y$, a funkcję łączącą C na funkcję przetrwania $\bar{C}$ i zastosować twierdzenie 2.

Następne twierdzenie umożliwi nam badanie granicznego zachowania funkcji przetrwania sumy zmiennych losowych. Tego typu sumy odgrywają dużą rolę w zagadnieniach finansowych i ubezpieczeniach, głównie w zarządzaniu portfelami. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z ciągłymi dystrybuantami $F(x)$, a struktura zależności tych zmiennych losowych będzie opi-

sana archimedesową funkcją przetrwania C^φ z generatorem φ . W twierdzeniu wykorzystamy odpowiadającą jej funkcję łączącą przetrwania $C(u, v) = u + v - 1 + C^\varphi(1 - u, 1 - v)$. W tym przypadku zachowanie funkcji przetrwania sumy $X + Y$ w granicy będzie zależało od charakterystyki funkcji przetrwania $\bar{F}$. Wyróżnione zostaną trzy przypadki, trzy klasy funkcji przetrwania: Frecheta, Weibulla oraz Gumbela, podobnie jak w przypadku standardowego badania zdarzeń ekstremalnych (zob. [2]).

Twierdzenie 3. [12]. Niech $\mathfrak{R}_{-\alpha}^0$, gdzie $\alpha > 0$, $\beta > 0$, oraz x_F spełnia warunek $F(x_F) = 1$.

a. Frechet: jeśli $\bar{F} \in \mathfrak{R}_{-\beta}^\infty$, to

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\bar{F}(x)} P(X + Y \geq 2x) = q^F(\alpha, \beta).$$

b. Weibull: jeśli $x_F < \infty$ oraz $\bar{F}(x_F - 1/\cdot) \in \mathfrak{R}_{-\beta}^\infty$, to

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\bar{F}(x_F - 1/x)} P(X + Y \geq 2x_F - 1/x) = q^W(\alpha, \beta).$$

c. Gumbel: jeśli istnieje funkcja $a(x) > 0$ taka, że $\lim_{x \rightarrow x_F} \frac{\bar{F}(x + ta(x))}{\bar{F}(x)} = e^{-t}$ dla $t \in R$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_F} \frac{1}{F(x)} P(X + Y \geq 2x) = q^G(\alpha).$$

Występujące w treści twierdzenia 3 stałe q^F oraz q^W zależą od wartości parametru α oddającego siłę zależności i indeksu β charakteryzującego funkcję przetrwania rozpatrywanych zmiennych losowych. Natomiast stała q^G zależy jedynie od parametru α . Stałe te możemy wyznaczyć, korzystając z pomocniczej zmiennej losowej Y_α o gęstości

$$f_\alpha(x) = (1 + x^\alpha)^{-1/\alpha-1},$$

gdzie $x \geq 0$. Dla funkcji przetrwania należących do klasy Frecheta (rozkłady Pareto, Cauchy'ego, czy gamma-logarytmiczny) otrzymujemy

$$q^F(\alpha, \beta) = 1 + E \left[\left(1 + Y_\alpha^{-1/\beta} \right)^{\beta-1} \right].$$

Gdy indeks $\beta \in N \setminus \{0\}$, wówczas wzór ten przyjmuje jawną postać

$$q^F(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} \frac{\Gamma((\beta-k)/(\alpha\beta)+1) \Gamma(k/(\alpha\beta)+1)}{\Gamma(1/\alpha+1)}.$$

Gdy funkcje przetrwania należą do klasy Weibulla (rozkład jednostajny, czy beta), otrzymujemy

$$q^W(\alpha, \beta) = E \left[\left(1 + Y_{\alpha}^{1/\beta} \right)^{-\beta-1} \right].$$

Natomiast dla klasy Gumbela (rozkłady gamma, normalny czy logarytmiczno-normalny) stała występująca w twierdzeniu 3 jest równa

$$q^G(\alpha) = 0,5 E \left[Y_{\alpha}^{-1/2} \right] = \frac{\Gamma^2(1+1/(2\alpha))}{\Gamma(1+1/\alpha)}.$$

Stałe te rozpatrywane jako funkcje parametru α są funkcjami rosnącymi dla funkcji przetrwania $\bar{F}$ należących do klasy Weibulla i Gumbela oraz do klasy Frecheta gdy $\beta > 1$. W tych przypadkach w miarę wzrostu wartości parametru α , czyli wraz ze wzrostem siły zależności, maleje efekt dywersyfikacyjny [1; 12]. Prawdopodobieństwo uzyskania dużych wartości przez sumę zmiennych losowych się zwiększa. W sytuacji gdy rozkład należy do klasy Frecheta dla $\beta \leq 1$, stałe maleją w miarę wzrostu wartości parametru α , ale należy przy tym pamiętać, że wtedy wartości oczekiwane tych zmiennych losowych są nieskończenie duże. W praktyce zwykle unika się takich sytuacji.

Twierdzenie 3 można uogólnić na sumę większej liczby zależnych zmiennych losowych (zob. [1]).

5. Miary ryzyka

Rozpatrzmy teraz miary ryzyka sumy zmiennych losowych oparte na kwantylach. Załóżmy, że funkcje przetrwania tych zmiennych należą do klasy Frecheta i Gumbela. Jedną z najbardziej popularnych miar ryzyka stosowanych w finansach i ubezpieczeniach jest *wartość zagrożona* VaR (*Value-at-Risk*). Jest to po prostu wartość kwantyla

$$VaR_X(1-p) = F^{-1}(1-p),$$

gdzie $0 < p < 1$.

W przypadku gdy p przyjmuje bardzo małe wartości, możemy stosować twierdzenie 3. Funkcja przetrwania sumy zmiennych losowych jest wtedy w przybliżeniu równa iloczynowi stałej $q(\alpha)$ zależnej od siły zależności α i funkcji przetrwania zmiennych losowych, tzn. zachodzi [1; 12]:

$$\bar{F}_{X+Y}(x) \approx q(\alpha) \bar{F}_X(0,5x).$$

Natomiast wartość zagrożona jest w przybliżeniu równa wyrażeniu

$$VaR_{X+Y}(1-p) \approx V(p, \alpha) = 2\bar{F}^{-1}\left(\frac{p}{q(\alpha)}\right),$$

gdzie $p < q(\alpha)$.

Inną, często stosowaną w finansach i ubezpieczeniach, miarą ryzyka jest *ekstremalna wartość zagrożona* (*Tail Value-at-Risk*). Jest to następująca warunkowa wartość oczekiwana

$$TailVaR_X(1-p) = E(X|X > VaR_X(1-p)).$$

- Dla bardzo małych wartości p jest ona w przybliżeniu równa

$$TailVaR_X(1-p) \approx V(p, \alpha) + \frac{q(\alpha)}{p} \int_{V(p, \alpha)}^{\infty} \bar{F}(0,5x) dx.$$

Na podstawie wartości zagrożonej VaR można zdefiniować następującą składkę ubezpieczeniową [12]:

$$pr(X) = E(X) + (r - r_0)(VaR_X(p) - E(X)).$$

Przyjmuje ona klasyczną postać:

czysta składka + rezerwa bezpieczeństwa,

gdzie rezerwa bezpieczeństwa zależy od wartości zagrożonej i różnicy między stopą kapitału r i stopą wolną od ryzyka r_0 .

Przykłady

Podamy teraz przybliżone wartości funkcji przetrwania, wartości zagrożonej oraz ekstremalnej wartości zagrożonej dla sum zmiennych losowych o rozkładach Pareto, wykładniczego i normalnego.

a. Niech zmienne losowe X i Y mają rozkład Pareto (klasa Frecheta) z funkcją przetrwania $\bar{F}(x) = \left(\frac{c}{x}\right)^\beta$, gdzie $x > c$. Wtedy otrzymujemy

$$\bar{F}_{X+Y}(x) \approx q(\alpha) \left(\frac{2c}{x}\right)^\beta,$$

$$VaR_{X+Y}(1-p) \approx 2c \left(\frac{q(\alpha)}{p}\right)^{1/\beta},$$

$$\text{TailVaR} \approx \frac{\beta}{\beta-1} 2c \left(\frac{q(\alpha)}{p} \right)^{1/\beta}$$

b. Niech X i Y mają rozkład wykładniczy (klasa Gumbela) z funkcją przetrwania równą $\bar{F}(x) = \exp(-x/m)$. Wtedy mamy

$$\bar{F}_{X+Y}(x) \approx q(\alpha) \exp(-0,5x/m),$$

$$\text{VaR}_{X+Y}(1-p) \approx -2m \ln(p/q(\alpha)),$$

$$\text{TailVaR} \approx 2m(1 - \ln(p/q(\alpha))).$$

c. Niech X i Y mają rozkład normalny $N(m, \sigma)$ (klasa Gumbela). Wtedy otrzymujemy

$$\bar{F}_{X+Y}(x) \approx 1 - q(\alpha) [1 - \Phi((x-m)/(2\sigma))],$$

$$\text{VaR}_{X+Y}(1-p) \approx 2\sigma\Phi^{-1}(1-p/q(\alpha)) + m.$$

Literatura

- [1] Alink S., Lowe M., Wuthrich M.V., *Diversification of Aggregate Dependent Risks*. „Insurance: Mathematics & Economics” 2004, 35, 77-95.
- [2] Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T., *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, Berlin 1997.
- [3] Embrechts P., Lindskog F., McNeil A., *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, ETH Zurich, preprint, 2001.
- [4] Frahm G., Junker M., Schmidt R., *Estimating the Tail-dependence Coefficient: Properties and Pitfalls*, „Insurance: Mathematics & Economics” 2005, 37, 80-100.
- [5] Frees E.W., Valdez E.A., *Understanding Relationships Using Copulas*, „North Amer. Actuarial J.” 1998, 2, 1-25.
- [6] Joe H., *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, London 1997.
- [7] Juri A., Wuthrich M.V., *Copula Convergence Theorems for Tail Events*, „Insurance: Mathematics & Economics” 2002, 24, 139-148.
- [8] Juri A., Wuthrich M.V., *Tail Dependence from Distributional Point of View*, „Extremes” 2003, 6, 213-246.
- [9] Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer, New York 1999.
- [10] Romano C., *Calibrating and Simulating Copula Functions: An Application to the Italian Stock Market*, Univ. of Rome, Working Paper 2002.
- [11] Schweitzer B., Sklar A., *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, New York 1981.
- [12] Wuthrich M.V., *Aggregation and Diversification Effect of Dependent Random Variables*, Working Paper 2004.

ANALYSIS OF TAIL DEPENDENCE AND MEASURE OF RISK

This paper is devoted to the tail dependence, i.e. the dependence for the small or big values of the random variables. These dependences are studied from the finance and insurance point of view, the management of risk mainly.

The tail dependence coefficients and the tail dependence copulas are presented. The basic properties of these notions and the methods of estimation of such coefficients are studied. Two theorems, which let us analyze the tail dependences, are presented. One theorem is used to the approximation of the basic measures of risks: *VaR* and *TailVaR*.

Stanisław Heilpern – prof. dr hab., profesor zwyczajny w Katedrze Statystyki Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.