

Daniel Papla

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

ANALIZA STÓP ZWROTU INDEKSÓW GIEŁD W POLSCE I NA ŚWIECIE Z WYKORZYSTANIEM WARUNKOWEGO ROZKŁADU α -STABILNEGO I FUNKCJI *COPULA*

1. Wstęp

Artykuł ten stanowi próbę zastosowania warunkowego rozkładu α -stabilnego do estymacji rozkładu rzeczywistego stóp zwrotu indeksów wybranych giełd. Do analizy powiązań pomiędzy poszczególnymi giełdami wykorzystano funkcje powiązań [*copula*], również w formie warunkowej. Forma warunkowa rozkładu α -stabilnego i funkcji powiązań powstała poprzez uzmiennienie parametrów. Parametry te są estymowane z uwzględnieniem wysokości stopy zwrotu w okresie poprzedzającym okres estymacji. Uzyskane w ten sposób wielkości, zależne od tego, czy na sesji poprzedniej były np. szczególnie wysokie lub niskie stopy zwrotu, pozwolą na dokładniejsze zbadanie dynamiki giełd i związków pomiędzy nimi.

Pierwsza część artykułu prezentuje teoretyczne podstawy zastosowanej metodologii. Omówione są zarówno rozkłady α -stabilne, jak i funkcje *copula*. Sama metodologia jest przedstawiona w drugiej części artykułu. Szczegółowo omówiono sposób uzmiennienia parametrów zarówno rozkładu α -stabilnego, jak i funkcji *copula* w celu uzyskania rozkładów warunkowych. W części trzeciej zawarto wyniki badań empirycznych. Dane wykorzystane w obliczeniach obejmują indeks WIG 20 i wybrane akcje z GPW w Warszawie oraz indeksy z giełd w Nowym Jorku, Londynie, we Frankfurcie nad Menem, w Paryżu, Pradze, Budapeszcie i Bratysławie. Interpretacja otrzymanych wyników i wnioski końcowe są zawarte w ostatniej części pracy.

Początki statystycznej analizy danych finansowych, zwłaszcza jeśli chodzi o notowania giełdowe, sięgają końca XIX i początku XX w., czego przykładem jest praca doktorska Luisa Bacheliera [1900]. W latach 50. i 60. XX w. nastąpił dalszy rozwój tej dziedziny.

ny nauki, powstały prace Markowitza [1952; 1959], Samuelsona [1965], Fama [1965], Mandelbrota [1966], Cootnera [The Random ... 1964]. Niektórzy autorzy wskazywali na to, że rozkład stóp zwrotu znacznie odbiega od rozkładu normalnego (zob. [Mandelbrot 1963]). Postuluje się wykorzystanie np. rozkładów α -stabilnych (zob. [Fama 1963; Mandelbrot 1963]), jednakże ze względu na trudności obliczeniowe to podejście nie było w owych czasach zbyt szeroko wykorzystywane. Lata 70. i 80. wiązały się z dalszym rozwojem teorii i praktyki badań rynków kapitałowych. Powstają prace, w których autorzy wykorzystują podejście wielowymiarowe (np. [Fama, French 1992; Davis 1994]). Rosnąca liczba dowodów na brak normalności rozkładów stóp zwrotu oraz postęp w technikach obliczeniowych spowodował coraz większe zainteresowanie rozkładami α -stabilnymi [Mittnik, Rachev 2000]. W końcu lat 90. powstały z kolei pierwsze prace wykorzystujące funkcje *copula* w analizie danych giełdowych (por. [Nelsen 1999; Jondeau, Rockinger 2001; 2002]). W tym artykule wykorzystano funkcje *copula* i rozkłady α -stabilne właśnie ze względu na to, iż pozwalają one uwzględnić ewentualne, występujące w stopach zwrotu, odchylenia od rozkładu normalnego zarówno jedno-, jak i wielowymiarowego.

2. Rozkłady α -stabilne

Do modelowania stóp zwrotu z akcji autor zdecydował się wykorzystać rozkłady α -stabilne, ponieważ pozwalają one na analizę i modelowanie co najmniej dwóch charakterystycznych cech tych stóp zwrotu:

- grubych ogonów rozkładów, z czym związana jest leptokurtoza,
- skośności rozkładów.

Występowanie tych cech może tłumaczyć niespełnianie przez stopy zwrotu założenia o normalności rozkładu (por. np. [Fama 1965]). Rozpatrujemy tu stopy zwrotu w ujęciu statycznym, nie odwołując się do teorii szeregów czasowych.

Podstawowe cechy rozkładów α -stabilnych oraz sposoby estymacji można znaleźć w takich pracach, jak: [Borak, Härdle, Weron 2004; Samorodnitsky, Taqqu 1994; Weron 1996]. Odwrotną transformatę Fouriera funkcji charakterystycznej rozkładu α -stabilnego można przedstawić w następujący sposób:

$$\log \phi(t) = \begin{cases} i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right), & \alpha \neq 1, \\ i\mu t - \sigma |t| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \ln |t| \right), & \alpha = 1, \end{cases}$$

gdzie: $\alpha \in [0, 2]$ – współczynnik stabilności, zwany również współczynnikiem kształtu, wykładnikiem kształtu lub wykładnikiem charakterystycznym, $\beta \in [-1, 1]$ – parametr określający skośność rozkładu, $\sigma > 0$ – parametr skali, rozproszenia, $\mu \in \mathbb{R}$ – parametr położenia.

Współczynnik stabilności α określa szybkość, z jaką zanikają ogony rozkładu, dla $\alpha = 2$ mamy do czynienia z rozkładem normalnym. Dla $\alpha < 2$ wariancja rozkładu jest nieskończona, dla $\alpha > 1$ określona jest średnia rozkładu równa μ . Dodatni parametr β oznacza skośność prawostronną, ujemny – lewostronną. Dla $\beta = 0$ mamy do czynienia z rozkładem symetrycznym. Ważną właściwością jest to, iż dla α zbieżającego do 2 wartość β przestaje mieć znaczenie i rozkład zbliża się do rozkładu normalnego, który jest symetryczny niezależnie od wartości parametru β .

Jak widzimy, rozkłady stabilne charakteryzują się jednomodalnością, mogą być skośne i mogą mieć „grube ogony”. Biorąc pod uwagę już tylko te cechy, można stawiać hipotezę, że rozkłady stabilne o współczynniku $\alpha < 2$, i $\beta \neq 0$ będą lepiej dopasowane do rozkładów empirycznych stóp zwrotu niż rozkład normalny [Mittnik, Rachev 2000].

Podstawowym ograniczeniem w stosowaniu tych rozkładów jest niemożność w ogólnym przypadku przedstawienia ich funkcji gęstości za pomocą funkcji elementarnych. Utrudnia to estymację parametrów metodą największej wiarygodności. Należy również zauważyć, że modelując stopy zwrotu za pomocą rozkładów α -stabilnych ze współczynnikiem stabilności mniejszym od 2 zakładamy, że wariancja bezwarunkowego rozkładu stóp zwrotu jest nieokreślona, co właściwie uniemożliwia stosowanie tych metod oceny ryzyka, które uwzględniają wariancję.

3. Funkcje *copula*

Zastosowanie funkcji *copula* pozwala obejść najpoważniejszy problem związany z wykorzystaniem rozkładów wielowymiarowych – nieznajomość postaci analitycznej konkretnego rozkładu stóp zwrotu. Definicję funkcji *copula* oraz omówienie jej charakterystyk można znaleźć m.in. w pracy [Nelsen 1999]. Znaczenie funkcji *copula* w analizie zależności wielowymiarowych wynika z twierdzenia Sklára, udowodnionego w pracy Sklára z 1959 r. Nieco prostszą postać przedstawili Schweizer i Sklar w pracy z 1974 r. Z twierdzenia tego wynika, że możemy przybliżać nieznaną dwuwymiarowy rozkład łączny funkcją *copula*. Oczywiście problemem jest znalezienie odpowiednio dobrze dopasowanej funkcji. Częściowym rozwiązaniem tego problemu jest dopasowanie do danych empirycznych kilku rodzajów funkcji *copula* i wybranie do dalszej analizy funkcji najlepiej dopasowanej.

Jeden z pełniejszych przeglądów funkcji *copula* można znaleźć w pracy Nelse-na [1999]. W artykule zostanie przedstawiona jedynie funkcja wykorzystana w badaniach empirycznych, która należy do tzw. funkcji archimedesowskich. Funkcje te można przedstawić za pomocą ogólnego wzoru:

$$C(u_1, u_2) = \psi^{-1}(\psi(u_1) + \psi(u_2)),$$

$$\psi: [0; 1] \rightarrow [0; \infty), \quad \psi(1) = 0.$$

Podstawowym ograniczeniem przy stosowaniu funkcji *copula* jest właściwie brak jednoznacznych wskazówek co do tego, jaki rodzaj funkcji wykorzystać w

danym badaniu. W badaniach empirycznych, których wyniki zamieszczono w dalszej części artykułu, wykorzystano jedynie *copula* Franka:

$$\psi(t) = \begin{cases} -\ln\left(\frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1}\right) & \theta \neq 0 \\ -\ln(t), & \theta = 0 \end{cases},$$

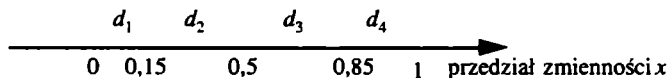
ponieważ wcześniejsze badania tego autora, przeprowadzone wspólnie z K. Jajugą [Jajuga, Papla 2004] dowodziły, że funkcja ta najlepiej dopasowuje się do danych finansowych. Do oceny dopasowania wykorzystano kryteria informacyjne.

Stosując funkcje powiązań, zakładamy oczywiście, że rozkład łączny można modelować za pomocą takich funkcji, co oczywiście nie zawsze musi być prawdą. To zastrzeżenie dotyczy jednakże wszelkich badań empirycznych, których celem jest modelowanie danych rzeczywistych za pomocą rozkładów empirycznych.

4. Metodologia badań

Estymacja warunkowa parametrów rozkładu α -stabilnego

W celu uzyskania estymatorów warunkowych parametrów rozkładu α -stabilnego, gdzie warunkiem ma być wartość stopy zwrotu na sesji poprzedzającej obecną, cały szereg czasowy podzielono na cztery grupy. Liczba grup jest określona arbitralnie, nie przemawiają za nią jakieś szczególne argumenty teoretyczne. Podziału dokonano w zależności od tego, na jakim poziomie kształtowała się stopa zwrotu na sesji poprzedniej, co ilustruje rys. 1.



Rys. 1. Podział przedziału zmienności stóp zwrotu dla estymacji warunkowej rozkładu α -stabilnego
Źródło: opracowanie własne.

Jeśli stopa zwrotu na poprzedniej sesji zawierała się w przedziale od minimum do 15 percentyla, to obecna obserwacja była zaliczana do zbioru d_1 , czyli do zbioru obserwacji następujących po bardzo niskich stopach zwrotu. Zbiór d_2 zawiera obserwacje występujące po umiarkowanie niskich, d_3 – umiarkowanie wysokich, a d_4 – bardzo wysokich stopach zwrotu na poprzedniej sesji.

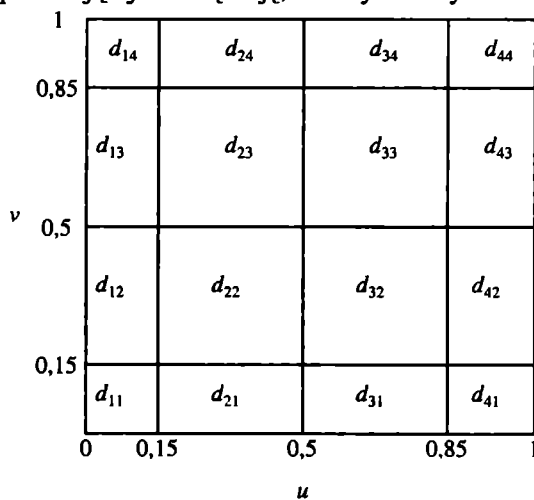
Poszczególne parametry rozkładu α -stabilnego były estymowane dla każdego ze zbiorów osobno, co np. dla wykładnika kształtu można przedstawić następującym wzorem.

$$\alpha_i = \sum_{i=1}^4 d_i I[x_{i-1} \in A_i].$$

Estymacji parametrów rozkładu α -stabilnego dokonano za pomocą metody regresji Koutrouvelisa. Metoda ta polega na minimalizacji pewnej funkcji, której argumentem jest różnica pomiędzy teoretyczną i empiryczną wartością funkcji charakterystycznej rozkładu. Regresja Koutrouvelisa rozpoczyna się od pewnych początkowych wartości estymatorów parametrów rozkładu, po czym następuje kilka iteracji, z których każda składa się z dwóch ważonych regresji. Liczba punktów potrzebnych do przeprowadzenia regresji zależy od liczby danych i początkowej wartości indeksu kształtu α . Iteracje kończą się wraz z osiągnięciem określonego wcześniej kryterium zbieżności. Przystępne omówienie metody Koutrouvelisa można znaleźć w pracy [Borak, Härdle, Weron 2004]. Również z tej pracy pochodzą procedury komputerowe wykorzystane w obliczeniach. Estymatory początkowych wartości parametrów rozkładu obliczono za pomocą metody McCullocha. Po raz pierwszy połączenie tych dwóch metod przedstawiono w pracy Kogona i Williamsa z 1998 r.

Estymacja parametru funkcji *copula*

Analogiczną metodę zastosowano w przypadku estymacji warunkowej parametru θ funkcji *copula* Franka. Metodę tę oryginalnie zastosowali w swoich badaniach Jondeau i Rockinger [2001; 2002]. Ze względu na inny charakter dystrybuant rozkładów brzegowych metoda ta została zmodyfikowana. Obserwacje pochodzące z rozkładu dwuwymiarowego podzielono na 16 podzbiorów, za kryterium podziału przyjęto wartość obserwacji na sesji poprzedzającej badaną sesję, dla obydwu wymiarów, zgodnie z rys. 2.



Rys. 2. Podział rozkładu dwuwymiarowego stóp zwrotu dla estymacji warunkowej funkcji *copula*
Źródło: opracowanie własne.

Jeśli stopy zwrotu z okresu wcześniejszego dla pierwszej i drugiej zmiennej danej obserwacji mieściły się w przedziale od minimum do 15 percentyla odpowiednich rozkładów brzegowych, to taka obserwacja należy do zbioru d_{11} . Obserwacja, dla której o sesję wcześniejsza wartość pierwszej zmiennej zawierała się w przedziale od 15 do 50 percen-

tyła, a wartość drugiej zmiennej zawierała się w przedziale od minimum do 15 procentyla, należy do zbioru d_{21} itd. Estymacje współczynnika θ przeprowadzono według następującego wzoru:

$$\theta_i = \sum_{j=1}^4 d_{ij} I[(u_{i-1}, v_{i-1}) \in A_{ij}].$$

W estymacji metodą największej wiarygodności parametru θ dla poszczególnych zbiorów wykorzystano rozkłady brzegowe α -stabilne z parametrami warunkowymi estymowanymi z wykorzystaniem metody przedstawionej w poprzednim podpunkcie.

W badaniach wykorzystano jedynie *copula* Franka, ponieważ wcześniejsze badania dowiodły, że ona najlepiej dopasowuje się do danych finansowych [Jajuga, Papla 2004].

5. Wyniki badań empirycznych

Dane

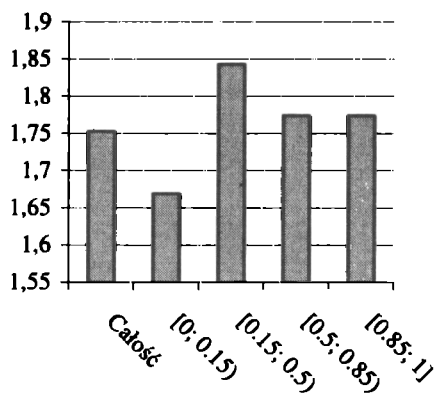
Dane do badań empirycznych obejmują dzienne logarytmiczne stopy zwrotu z okresu od 28 kwietnia 1998 r. do 2 września 2004 r. Okres ten był po prostu najdłuższym okresem danych dostępnym autorowi. Wybór najdłuższego możliwego okresu badań i dziennej [a nie np. tygodniowej lub miesięcznej] stopy zwrotu uzasadnić można chęcią zebrania jak największej liczby danych, które wykorzystano następnie w estymacji. Należy tu zauważyć, że estymacja zarówno rozkładów α -stabilnych, jak i funkcji powiązań daje tym lepsze rezultaty, im większa liczba danych jest brana pod uwagę.

- WIG, WIG 20 – Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie,
- DJIA, S&P 500 – Nowojorska Giełda Papierów Wartościowych [NYSE – USA],
- FT-SE100 – Londyńska Giełda Papierów Wartościowych [LSE – Wielka Brytania],
- DAX – Giełda Papierów Wartościowych we Frankfurcie nad Menem [FWB – Niemcy],
- CAC40 – giełda Euronext w Paryżu [Francja],
- PX50 – Giełda Papierów Wartościowych w Pradze [Czechy],
- BUX – Giełda Papierów Wartościowych w Budapeszcie [Węgry],
- SAX – Giełda Papierów Wartościowych w Bratysławie [Słowacja].

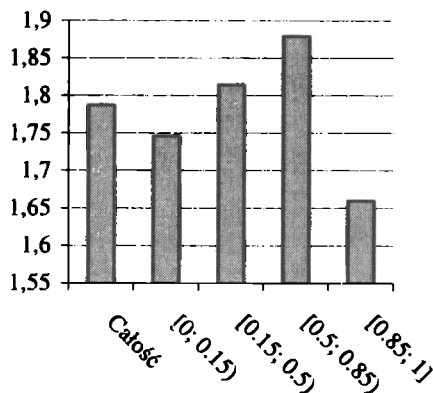
Ze względu na ograniczenia formalne artykułu i dużą liczbę otrzymanych wyników, autor zdecydował się zaprezentować w formie graficznej jedynie wybrane rezultaty. Pełne wyniki badań autor udostępni na życzenie.

Estymacja parametrów rozkładów stabilnych

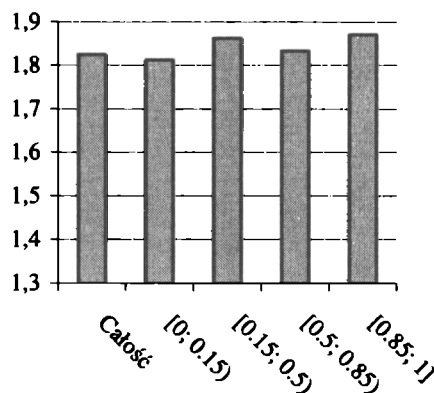
Rysunki 3-6 przedstawiają wartość warunkowego i bezwarunkowego estymatora współczynnika stabilności dla wybranych szeregów czasowych.



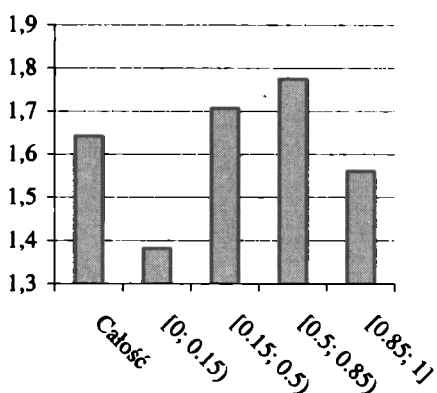
Rys. 3. Estymatory parametru α dla WIG
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Estymatory parametru α dla DAX
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Estymatory parametru α dla CAC40
Źródło: opracowanie własne.

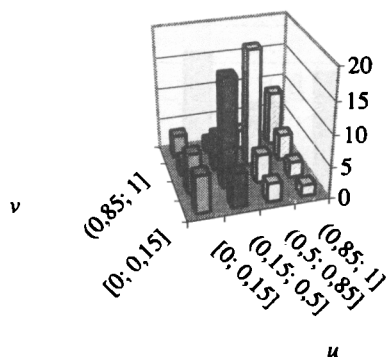


Rys. 6. Estymatory parametru α dla BUX
Źródło: opracowanie własne.

Biorąc pod uwagę wyniki estymacji dla wszystkich indeksów, dostępnych na żądanie u autora, można stwierdzić, iż rozkłady α -stabilne dosyć dobrze dopasowują się do rozkładów empirycznych stóp zwrotu. Wyniki te są bardzo podobne do uzyskanych wcześniej przez autora dla nieco krótszych szeregów danych, opublikowanych w pracy [Papla 2004b].

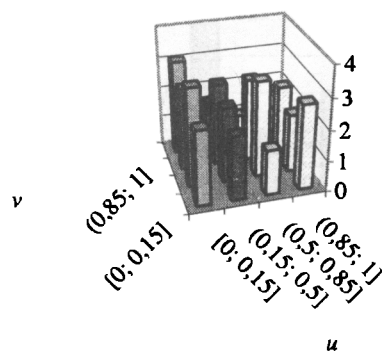
Gorsze dopasowanie występuje w przypadku giełdy słowackiej. Można również zauważyć duże podobieństwo pomiędzy wynikami giełd w Nowym Jorku, Londynie i Frankfurtach, a giełdami w Warszawie i Budapeszcie. Giełda praska wykazuje większe podobieństwo do giełd zachodnich, giełda słowacka zdecydowanie się zaś wyróżnia na tle innych giełd.

Estymacja parametru funkcji powiązań



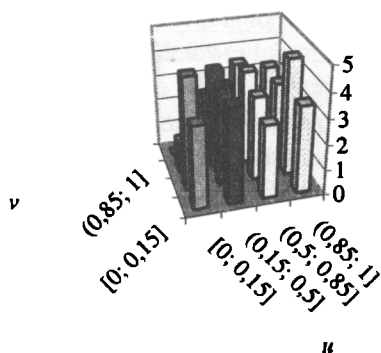
Rys. 7. Estymatory parametru θ dla pary WIG-WIG20

Źródło: opracowanie własne.



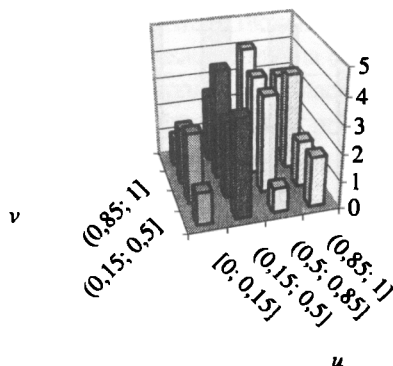
Rys. 8. Estymatory parametru θ dla pary WIG-DAX

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 9. Estymatory parametru θ dla pary WIG20-PX50

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 10. Estymatory parametru θ dla pary SP500-FT-SE100

Źródło: opracowanie własne.

Po zastosowaniu dystrybucyj rozkładu α -stabilnego powiązania pomiędzy giełdami w momentach po szczególnie dużych spadkach i wzrostach notowań okazują się równie wysokie jak powiązania w momentach po umiarkowanych ruchach cen, różni się to od wyników uzyskanych wcześniej przez autora [Papla 2004a], w których wykorzystano dystrybucję empiryczną rozkładów brzegowych. Takie powiązania są szczególnie widoczne np. w przypadku pary WIG-DAX czy WIG20-PX50. Wyniki otrzymane dla pary WIG-DAX mogą świadczyć o tym, że notowania po równoczesnym wzroście na poprzedniej sesji na giełdzie w Warsza-

wie i we Frankfurcie są nawet słabiej powiązane ze sobą niż notowania po spadku na GPW w Warszawie i wzroście na giełdzie niemieckiej.

Można znaleźć również przypadki, kiedy powiązania następujące po momentach, w których zmiany cen na badanych giełdach były podobne, są wyższe niż powiązania po momentach, kiedy te zmiany miały przeciwne kierunki (np. pary WIG-WIG20, SP500-FT-SE100). W takiej sytuacji notowania po równoczesnym wzroście są powiązane ze sobą mocniej niż notowania następujące po sesjach, na których ruchy cen były przeciwne.

6. Podsumowanie

Wyniki badań rozkładów brzegowych zdają się wskazywać na brak normalności rozkładu stóp zwrotu, o czym świadczą wyraźnie mniejsze od 2 wartości współczynnika stabilności. Znaczące, zdaniem autora, jest to, iż szczególnie niskie wartości tego współczynnika występują po momentach spadków i wzrostów, co świadczy o tym, że właśnie wtedy odchylenia od normalności, a co za tym idzie, klasycznie pojmowanej efektywności rynku giełdowego są największe. Jednakże wyniki dopasowywania funkcji powiązań nie są już tak jednoznaczne i, zdaniem autora, nie są zbyt pomocne w analizie związków pomiędzy giełdami.

Dalsze kierunki badań powinny objąć przypadki, w których notowania jednej z giełd są przyjmowane z pewnym opóźnieniem, np. jednosesyjnym. Wydaje się to uzasadnione zwłaszcza w analizie związków pomiędzy giełdami europejskimi i giełdą amerykańską. Zdaniem autora, interesujące byłoby zbadanie zarówno innych postaci funkcji powiązań, jak i innych rodzajów rozkładów brzegowych. Mogłoby to pozwolić na pełniejszą analizę związków pomiędzy wybranymi rynkami. Należałoby również podjąć próby praktycznego wykorzystania otrzymanych wyników, np. w analizie ryzyka giełd metodą *Value at Risk* dla rozkładów dwu- lub więcej wymiarowych.

Literatura

- Bachelier L. (1900), *Theory of Speculation*, [w:] *The Random Character of Stock Market Prices*, red. P. Cootner, MIT Press, Cambridge 1964.
- Borak S., Härdle W., Weron R., *Stable Distributions in Finance*, [w:] *Statistical Tools in Finance and Insurance*, red. P. Cizek, W. Härdle, R. Weron, Springer, Berlin 2004.
- Davis J., *The Cross-Section of Realized Stock Returns: The Pre-COMPUSTAT Evidence*, „Journal of Finance” 1994, 49, s. 1579-1593.
- Fama E.F., French K.R., *The Cross-Section of Expected Stock Returns*, „Journal of Finance” 1992, 47, s. 427-465.

- Fama E.F., *Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis*, „Journal of Business” 1963, 36, s. 420-429.
- Fama E.F., *The Behavior of Stock Market Prices*, „Journal of Business” 1965, 38, s. 34-105.
- Jajuga K., Papla D., *Extreme Value Analysis and Copulas*, [w:] *Statistical Tools in Finance and Insurance*, red. P. Cizek, W. Härdle, R. Weron, Springer, Berlin 2004.
- Jondau E., Rockinger M., *Conditional Dependency of Financial Series: An Application of Copulas*, Working Paper, 2001.
- Jondau E., Rockinger M., *Conditional Dependency of Financial Series: The Copula-GARCH Model*, „FAME Research Paper” 69, 2002.
- Kogon S.M., Williams D.B., *Characteristic Function Based Estimation of Stable Parameters*, [w:] *A Practical Guide to Heavy Tails*, red. R. Adler, R. Feldman, M. Taqqu, Birkhauser, 1998, s. 311-335.
- Koutrouvelis I.A., *Regression-Type Estimation of the Parameters of Stable Laws*, „Journal of the American Statistical Association” 1980, 75, s. 918-928.
- Mandelbrot B., *Forecasts of Future Prices, Unbiased Markets, and Martingale Models*, „Journal of Business” 1966, 39 (dod. spec.), s. 242-255.
- Mandelbrot B., *The Variation of Certain Speculative Prices*, „Journal of Business” 1963, 36, s. 394-419.
- Markowitz H., *Portfolio Selection*, „Journal of Finance” 1952, 7, s. 77-91.
- Markowitz H., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, New York 1959.
- McCulloch J.H., *Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters*, „Communications in Statistics – Simulations” 1986, 15, s. 1109-1136.
- Mittnik S., Rachev S.T., *Stable Paretian Models in Finance*, John Wiley & Sons, New York 2000.
- Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer Verlag, New York 1999.
- Papla D., *Wykorzystanie funkcji copula w analizie zależności pomiędzy rynkami giełdowymi w Polsce i na świecie*, referat wygłoszony na XL Konferencji Statystyków, Ekonometryków i Matematyków Akademii Ekonomicznych Polski Południowej, Podlesice 27-29 kwietnia 2004, 2004a.
- Papla D., *Wykorzystanie warunkowego rozkładu alfa-stabilnego w analizie notowań na giełdach w Polsce i na świecie*, Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie, materiały konferencyjne, cz. I, Uniwersytet Szczeciński 2004b, s. 521-533.
- Samorodnitsky G., Taqqu M.S., *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, 1994.
- Samuelson P.A., *Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly*, „Industrial Management Review” 1965, 6, s. 41-49.
- Schweizer B., Sklar A., *Operations on Distributions Functions not Derivable from Operations on Random Variables*, „Studia Mathematica” 1974, 52, s. 43-52.
- Sklar A., *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publications de l’Institut Statistique de l’Université de Paris, Paris 1959, 8, s. 229-231.

The Random Character of Stock Market Prices, red. P. Cootner, MIT Press, Cambridge 1964.

Weron R., *On the Chambers-Mallows-Stuck Method for Simulating Skewed Stable Random Variables*, „Statistics and Probability Letters” 1996, 28, s. 165-171.

ANALYSIS OF STOCK MARKETS PRICES IN POLAND AND OTHER COUNTRIES USING CONDITIONAL α -STABLE DISTRIBUTION AND *COPULA* FUNCTIONS

Summary

This paper presents a trial in using conditional α -stable distribution in the estimation of the real distribution of the chosen stock market returns. To analyse relations between markets were used *copula* functions, also in the conditional form. First part of paper presents theoretical background of methodology used in research. There are discussed both the α -stable distribution and *copula* function. Exact methodology is presented in second part. There is described method of changing parameters of stable distribution and *copula* function to the conditional form in detail. Third part presents results of the empirical research. Data used in research includes indexes from capital markets in Poland, USA, UK, Germany, France, Czech, Hungary and Slovakia. Interpretation of the obtained results concludes the paper.