

**POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
INSTYTUT TECHNIKI CIEPLNEJ I MECHANIKI PŁYNÓW**

Raport serii **PREPRINTY** nr 6/2005

**NUMERYCZNE MODELOWANIE RUCHU OŚRODKA
WIELOFAZOWEGO W ZASTOSOWANIU
DO PRZEPŁYWU FLUIDALNEGO**

Robert LEWTAK

Słowa kluczowe: przepływ fluidalny
modelowanie numeryczne przepływu
metoda różnic skończonych
ruch ośrodka wielofazowego

Praca doktorska

Promotor: dr hab. inż. Henryk KUDELA, prof. nadzw. PW

WROCŁAW, 2005

8645



322245L11

2005/0815 ID

Podziękowania

Autor niniejszej rozprawy doktorskiej pragnie wyrazić swą bezgraniczną wdzięczność dla Wrocławskiego Centrum Sieciowo-Superkomputerowego za umożliwienie przeprowadzenia obliczeń numerycznych, których wyniki umieszczono w niniejszej pracy. Bez aktywnej i zawsze bezinteresownej pomocy WCSS-u wykonanie niniejszej pracy nie byłoby możliwe.

Robert Lewtak

Streszczenie

Numeryczne modelowanie ruchu ośrodka wielofazowego w zastosowaniu do przepływu fluidalnego

Celem niniejszej pracy jest opracowanie modelu matematycznego i programu komputerowego do badania dynamiki ośrodka fluidalnego z wykorzystaniem metody „wielofazowej cząstki w komórce” oraz metod rzutowania i dekompozycji kierunków operatora różniczkowego.

Metoda „wielofazowej cząstki w komórce” jest metodą modelowania przepływu wielofazowego z występującym ośrodkiem ciągłym, którym jest płyn, oraz ośrodkiem rozproszonym, którym są cząstki materiału stałego. Ruch płynu modyfikowany jest przez obecność cząstek w przepływie. Ośrodek rozproszony występuje w postaci dyskretnych cząstek, które poruszają się zgodnie z drugim prawem Newtona. Na ruch cząstek wpływa: siła ciężkości, siła oporu i siła wzajemnego oddziaływania między cząstkami, którą określono jako oddziaływanie ciągle.

Metoda rzutowania została zmodyfikowana i przystosowana dla wielofazowego przepływu ściśliwego. Wprowadzono własne warunki brzegowe typu wlot i wylot dla występującej w metodzie funkcji rzutującej i prędkości pośredniej. Zastosowanie metody rzutowania pozwala na prowadzenie obliczeń numerycznych bez konieczności wyznaczania ciśnienia, co jest podstawową zaletą metody.

W pracy do rozwiązywania równania ruchu płynu zastosowano metodę dekompozycji kierunków operatora różniczkowego, która prowadzi do otrzymania zagadnień jednowymiarowych. Dyskretyzacja w sposób niejawny zagadnienia jednowymiarowego prowadzi do otrzymania układu równań z macierzą trójprzekątniową, do rozwiązania którego wykorzystano szybki algorytm rozwiązywania macierzy trójprzekątniowej.

W celu przetestowania opracowanych metod rzutowania i dekompozycji, wykonano serię eksperymentów numerycznych dla nieściśliwego przepływu jednofazowego płynu lepkiego. Obliczenia sprawdzające wykonano dla takich wybranych zagadnień, jak przepływ w dwu- i trójwymiarowej komorze z ruchomą ścianką, test ze znanym rozwiązaniem analitycznym równania Naviera–Stokesa i przepływ w dwu- i trójwymiarowym kanale. Wykorzystując opracowaną metodę „wielofazowej cząstki w komórce”, przeprowadzono badania numeryczne dynamiki przepływu fluidalnego. Do modelowania przyjęto takie charakterystyczne przepływy fluidalne, jak przepływ w złożu pęcherzowym, przepływ z segregacją złoża fluidalnego i przepływ fluidalny w pionowej komorze. Obliczenia przeprowadzono w obszarze dwuwymiarowym. Otrzymane wyniki dobrze odzwierciedlają cechy przepływu fluidalnego.

Abstract

The application of numerical modeling of the multiphase flow for fluidization

Robert Lewtak

The main objective of this PhD dissertation is the development of the mathematical model and to work out a numerical program to investigate multiphase flows, especially fluidized flows. The mathematical model is based on the multiphase particle-in-cell method (MP-PIC). The projection method and the space splitting method have been incorporated into the numerical program as the key components of the numerical algorithm.

The multiphase particle-in-cell method is used for numerical modeling of the multiphase flow which is treated as the flow of both a continuous gas phase and a dispersed phase (solid particles). The gas flow is modified by the presence of the solid particles. The dispersed phase is considered as discrete particles of which motion is governed by the second Newton's law. If the particles are small and the fluid density is considerably lesser than the density of the particles, the forces which act on the particle are the gravity, the drag and a continuous force which is responsible for the particle-particle interaction.

The projection method (Chorin's method) has been modified and adapted for the multiphase compressible flow. The own inlet and outlet boundary conditions have been elaborated in this method.

The space splitting method has been used for solving the equations of the fluid motion. The solution of two- and three-dimensional equations are reduced to a sequence of one-dimensional problems which can very quickly be solved. Due to a fact that the implicit scheme was used the method is unconditionally stable.

The projection and space splitting methods have been tested by examination of incompressible flows of a viscous fluid. The checking computations were performed for the two- and three-dimensional driven cavity, the analytical solution of Navier-Stokes equations and for a flow in a two- and three-dimensional channel. All the numerical results well conform with other experimental data and analytical solutions.

Finally, the numerical study of the fluidized flow has been performed by using the multiphase particle-in-cell method. The numerical simulation were performed for a bubbling bed, a flow with segregation and a fluidized flow in a channel. The numerical results clearly show the characteristic features of the fluidized flow.

Spis treści

Ważniejsze oznaczenia	v
1 Wprowadzenie	1
1.1 Własności przepływu fluidalnego	3
1.2 Przedmiot badań	7
1.3 Równania ruchu płynu	9
1.4 Udział objętościowy	11
2 Przegląd metod modelowania dynamiki ośrodka wielofazowe-	15
go	
2.1 Metoda Eulerowsko–Eulerowska	15
2.2 Metoda Eulerowsko–Lagrangowska	19
2.2.1 Metoda bezpośredniej symulacji numerycznej	19
2.2.2 Metoda cząstek dyskretnych	22
3 Cel, teza i zakres pracy doktorskiej	29
4 Ruch cząstek materiału stałego w płynie lepkim	31
4.1 Równania ruchu pojedynczej cząstki	31
4.1.1 Siła stacjonarnego dynamicznego oporu płynu	35
4.2 Siła oporu płynu w zespole cząstek	38
4.3 Model ciągłego oddziaływania cząstek	41
4.4 Oddziaływanie między płynem a cząstkami	42
5 Równania ruchu fazy ciągłej	45
5.1 Definicje i podstawowe prawa	45
5.1.1 Funkcja charakterystyczna χ_k	45
5.1.2 Uśrednianie po przestrzeni	46

5.1.3	Cząstki brzegowe	49
5.2	Uśrednione równania ruchu płynu	51
5.2.1	Definicja zmiennych uśrednionych	51
5.2.2	Uśrednione równanie ciągłości	53
5.2.3	Uśrednione równanie zachowania pędu	54
5.3	Równania zamykające	55
5.3.1	Efektywny współczynnik lepkości	55
5.3.2	Mechanizm międzyfazowej wymiany pędu	59
5.3.3	Modyfikacja turbulencji płynu przez cząstki	62
5.4	Zestawienie równań ruchu	65
6	Metoda numeryczna rozwiązywania równań ruchu	67
6.1	Sprzężenie ruchu płynu i cząstek	67
6.1.1	Funkcja interpolująca	69
6.2	Metoda rzutowania	70
6.2.1	Warunki brzegowe	73
6.3	Metoda dekompozycji kierunków operatora różniczkowego . .	75
6.4	Algorytm numeryczny metody „wielofazowej cząstki w komórce”	76
6.5	Oddziaływanie cząstki ze ścianką	80
7	Numeryczne modelowanie przepływu jednofazowego	83
7.1	Przepływ w kanale	83
7.1.1	Kanał prostokątny	84
7.1.2	Kanał prostopadłościenny	85
7.2	Przepływ w komorze z ruchomą ścianą	89
7.2.1	Komora kwadratowa	90
7.2.2	Komora sześcienna	94
7.3	Test dla rozwiązania analitycznego	102
8	Numeryczne modelowanie przepływu fluidalnego	107
8.1	Pęcherzowe złoża fluidalne	107
8.2	Segregacja złoża fluidalnego	114
8.3	Przepływ w kolumnie fluidyzacyjnej	119
	Podsumowanie	129
A	Podstawowe wiadomości o funkcjach uogólnionych	133

B Wyprowadzenie równania topologicznego	135
C Wyprowadzenie reguł uśredniania Gaussa i Leibnitza	137
D Dyskretyzacja równań ruchu płynu	139
Bibliografia	143

Spis treści

Ważniejsze oznaczenia

$\mathbf{a}$	: przyspieszenie,
B	: szerokość,
C_D	: współczynnik oporu,
d_p	: średnica cząstki,
f_D	: unormowany współczynnik oporu,
$\mathbf{F}$	: międzyfazowa funkcja transportu pędu,
g	: przyspieszenie ziemskie,
H	: wysokość,
L	: długość,
m	: masa,
$\mathbf{n}$	: wektor normalny,
N_p	: liczba cząstek,
N_g	: liczba cząstek reprezentowanych przez cząstkę w obliczeniach,
p	: ciśnienie,
q	: strumień przepływu,
r_p	: promień cząstki,
Re	: liczba Reynoldsa,
t	: czas,
$\mathbf{t}$	: wektor styczny,
$\mathbf{T}$	: tensor naprężeń,
$\mathbf{u} = (u, v, w)$	: prędkość,
$\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$	: prędkość pośrednia,
V	: objętość,
$\mathbf{x} = (x, y, z)$	: współrzędne kartezjańskie,
α_{max}	: maksymalna prędkość poślizgu,
ε	: udział objętościowy,

μ	: dynamiczny współczynnik lepkości,
ν	: kinematyczny współczynnik lepkości,
ρ	: gęstość,
$\boldsymbol{\tau}$	: tensor naprężeń stycznych,
Φ	: funkcja rzutująca,
$\cdot$	: iloczyn skalarny,
∇	: gradient,
$\nabla \cdot$	: dywergencja,
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla$	: pochodna w kierunku $\mathbf{n}$.

indeksy dolne

a	: rozwiązanie analityczne,
f	: płyn,
p	: cząstka.

indeksy górne

l	: liczba iteracji,
n	: krok czasowy.

Rozdział 1

Wprowadzenie

Wielofazowe przepływy wielu składników często występują w obserwowanym świecie fizycznym. Określony *składnik* wyróżnia się indywidualnym składem chemicznym, który odróżnia go od innej substancji chemicznej. *Faza* określa różne stany skupienia, tzn. faza stała, ciekła lub gazowa. Przepływ fluidalny należy do kategorii wielofazowych przepływów wieloskładnikowych.

Od dawna uczeni i inżynierowie zajmowali się badaniami przepływów jednofazowych. Stąd też równania ruchu i własności fizyczne płynów jednofazowych są dobrze znane i udokumentowane poza nierozwiązanym problemem modelowania turbulencji i określenia jej wpływu na wymianę masy, pędu i energii. Niestety obecny stan wiedzy dotyczący przepływów wielofazowych jest wciąż w początkowym etapie rozwoju. Równania ruchu wymagają prawidłowego określenia i są przedmiotem wielu dyskusji. Z tego powodu badanie przepływów wielofazowych stanowi doskonałe wyzwanie i potencjalnie niezagospodarowany jeszcze obszar zainteresowań dla naukowca lub inżyniera.

Znaczącą część przepływów wielofazowych stanowią przepływy płynu z rozproszonymi w nim cząstkami materiału stałego. Taki przepływ jest nazywany przepływem z ośrodkiem rozproszonym, ponieważ cząstki tworzą fazę rozproszoną (dyskretną), a płyn jest fazą ciągłą. Do tej kategorii przepływów wielofazowych należą m. in. *transport pneumatyczny* i *przepływ fluidalny*. Innym przykładem przepływu płynu i cząstek materiału stałego jest *przepływ granularny*, dla którego wzajemne oddziaływanie między cząstkami są ważniejsze od wzajemnego oddziaływania płynu i cząstek. Jeżeli cząstki materiału stałego są nieruchome, to przepływ redukuje się do *przepływu przez ośrodek porowaty*, w którym siła oporu cząstek wywołana lepkością płynu decyduje o przepływie płynu. Ponieważ cząstki materiału stałego są nieruchome, to niewłaściwe jest określanie przepływu przez ośrodek porowaty jako przepływu płynu i cząstek.

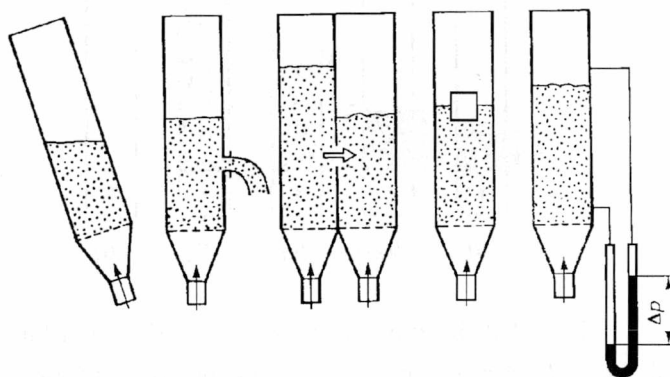
Ze względu na przemysłowe zastosowania, przepływy wielofazowe są szczególnie ważne, gdyż odgrywają podstawową rolę w wielu procesach przetwórczych. Nie bez znaczenia jest więc podejmowanie prób zrozumienia lub rozwiązania zasadniczych problemów, które powstają lub wiążą się z przepływami wielofazowymi. Dotychczas przeprowadzono wiele różnych badań eksperymentalnych. Badania doświadczalne, na ogół dość kosztowne, dostarczają jedynie wyników specyficznych dla danej dziedziny. Z drugiej strony, rozwój techniki komputerowej pozwala na numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych, które opisują wielowymiarowe niestacjonarne przepływy wielofazowe, a zatem interesujący i ważny jest rozwój podstaw teoretycznych. Oczywiście, dodatkowe modele empiryczne zamykające układ równań są bezwzględnie konieczne. W konsekwencji numeryczne modelowanie zakończone sukcesem zależy od wyników badań eksperymentalnych.

Modelowanie przepływu wielofazowego jest zadaniem trudnym, zarówno z matematycznego, jak i fizycznego punktu widzenia. Trudność natury matematycznej pojawia się przy formułowaniu samego przepływu wielofazowego, jako jednoczesnego przepływu z ruchomym brzegiem wielu pojedynczych faz. Trudność fizyczna polega na modelowaniu wzajemnego oddziaływania różnych faz na powierzchni międzyfazowej. Jeżeli liczba cząstek w przepływie jest duża, to uzasadnione jest wprowadzenie do rozważań operacji uśredniania, która znacząco upraszcza problem.

1.1 Własności przepływu fluidalnego

Przepływ fluidalny jest wspólnym przepływem ciągłego ośrodka płynnego i rozproszonego ośrodka ziarnistego, polegającym na tym, że ziarna (cząstki) materiału stałego utrzymywane są w stanie zawiesiny w strudze płynu. W utworzonym w ten sposób *złożu fluidalnym* cząstki nieustannie zmieniają położenie względem siebie. Fluidyzację uzyskuje się tylko w pewnym przedziale prędkości płynu (cieczy lub gazu), zależnym od fizycznych własności płynu i cząstek.

Ze względu na brak sztywności postaciowej i obecność ciśnienia hydrostatycznego i lepkości, złożo fluidalne zachowuje się jak ciecz (rys. 1.1). Po przechyleniu kolumny fluidyzacyjnej swobodna powierzchnia złoża fluidalnego zajmuje położenie poziome. Złożo fluidalne wypływa jak ciecz przez mały otwór na zewnątrz lub do sąsiedniego złoża. Jeżeli do złoża fluidalnego utworzonego z jednakowych cząstek wrzuci się cząstki lub przedmiot o mniejszej gęstości, to będą się one unosić na powierzchni złoża. Spadek ciśnienia na wysokości złoża fluidalnego, podobnie jak dla cieczy, jest proporcjonalny do wysokości i gęstości złoża.

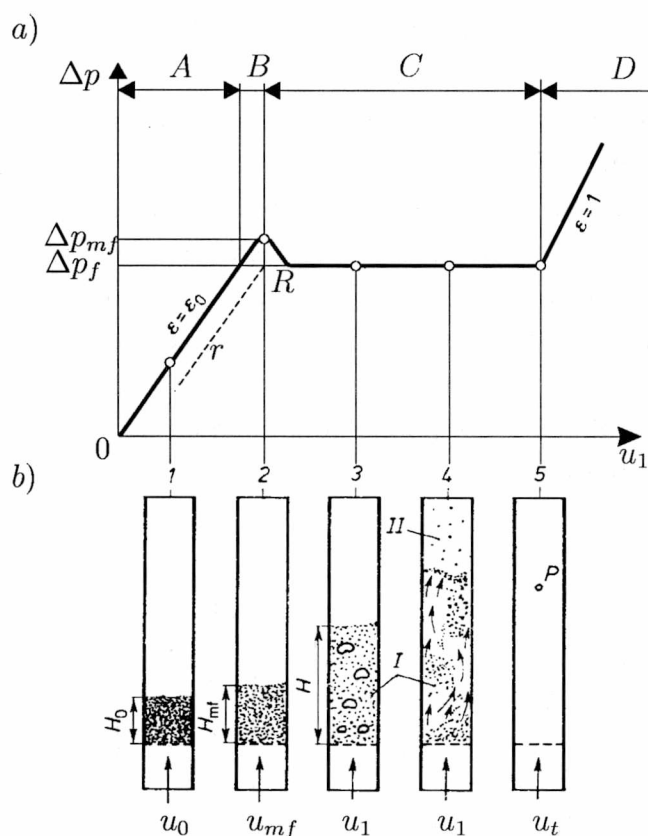


Rys. 1.1. Analogia między złożem fluidalnym a cieczą [102]

W zależności od wartości *prędkości fluidyzacji*, tj. prędkości płynu na wlocie do komory fluidyzacyjnej, wyróżnia się różne *stany złoża fluidalnego*, przedstawione na rys. 1.2 wraz z zależnością spadku ciśnienia $\Delta p = f(u_1)$ na grubości złoża. Stany złoża fluidalnego mają ustalone definicje i nazewnictwo [138, 126].

1.1. Własności przepływu fluidalnego

Złoże *nieruchome* oznaczono cyfrą 1. Cząstki są wtedy nieruchome i podtrzymywane przez kontakt z innymi cząstkami. Spoczywają one na dnie sitowym, które nie tylko utrzymuje złoże, lecz także równomiernie rozdziela gaz tłoczony od dołu. Spadek ciśnienia rośnie wraz ze wzrostem prędkości u_0 ($u_1 = u_0$), a złoże ma minimalną wysokość H_0 . Przepływ ma charakter analogiczny do przepływu przez ośrodek porowaty.



Rys. 1.2. Różne stany złoża fluidalnego [126]:

- a) zależność $\Delta p = f(u)$ w podwójnie logarytmicznym układzie współrzędnych,
 b) ujęcie jakościowe: A – złoże nieruchome, B – złoże ruchome,
 C – złoże fluidalne, D – pusta kolumna

Złoże *ruchome* odpowiada stanowi oznaczonemu cyfrą 2. Złoże nieruchome zostaje rozluźnione, przy czym cząstki pozostają w dalszym ciągu we wzajemnym kontakcie i nie zmieniając położenia względem siebie przesuwały się względem ścian kolumny. Wykonują przy tym oscylacyjne ruchy z

1.1. Własności przepływu fluidalnego

małymi amplitudami, tak jakby były zawieszone w strudze płynu. Rozluźnienie złoża następuje wtedy, gdy nadciśnienie płynu zrówna się z ciśnieniem wywieranym przez złoże. Omówiony stan oznacza *początek fluidyzacji*. Odpowiada mu prędkość początku fluidyzacji $u_1 = u_{mf}$ i wysokość złoża H_{mf} oraz lokalne maksimum spadku ciśnienia Δp_{mf} .

Linia przerywana r (rys. 1.2.a) oznacza przebieg zmiany ciśnienia przy powolnym zmniejszaniu prędkości u_1 . Punkt R jest to teoretyczny punkt przejścia złoża fluidalnego w złoże nieruchome przy powolnym zmniejszaniu prędkości fluidyzacji.

Złoże fluidalne odpowiada stanom 3 i 4. Gdy zostanie przekroczona prędkość u_{mf} , wówczas powstaje złoże fluidalne z *fazą gęstą* I, którą charakteryzuje wyraźnie zaznaczona górna granica. Gdy prędkość gazu rośnie, złoże ekspanduje i staje się *fluidalnym złożem turbulentnym*, w którym zachodzi intensywne mieszanie cząstek w całym obszarze złoża.

Cechą charakterystyczną złoża fluidalnego jest prawie stała wartość spadku ciśnienia Δp_f , mimo wzrostu prędkości u_1 . Spadek ciśnienia ma nieco mniejszą wartość niż na początku fluidyzacji, a różnica ($\Delta p_{mf} - \Delta p_f$) jest spowodowana siłami występującymi między cząstkami. Pojawia się lokalne maksimum, spowodowane tymi siłami. W przypadku dużych cząstek siły te są małe i to maksimum nie występuje.

Gdy prędkość gazu dalej rośnie, złoże fluidalne zwiększa swą wysokość. Drobne cząstki przemieszczają się do góry, tworząc tzw. *fazę rzadką* II, czyli zawiesinę o dużej porowatości (ułamek objętości złoża fluidalnego niezajęty przez cząstki materiału stałego), nie mającą górnej powierzchni swobodnej. Między fazą gęstą a rzadką utrzymuje się dosyć wyraźna granica, co ilustruje stan 4 na rys. 1.2.

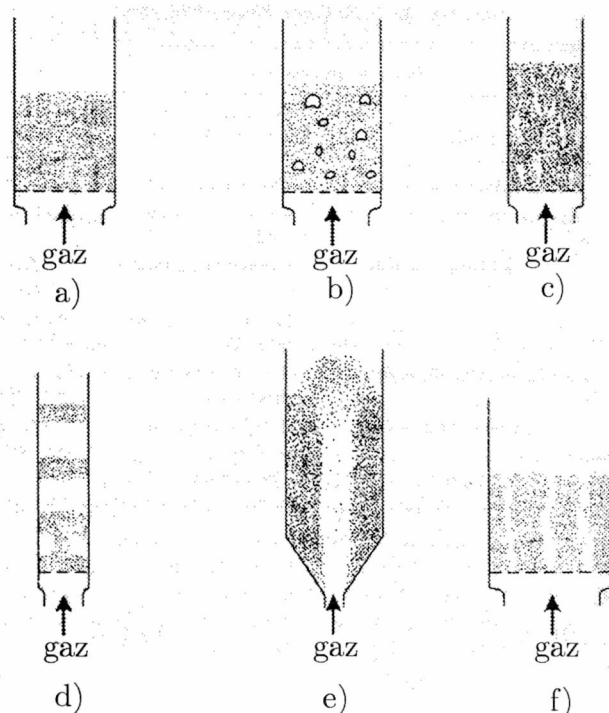
Przy dalszym wzroście prędkości gazu udział fazy rzadkiej rośnie, a fazy gęstej maleje. Gdy prędkość przepływu zrówna się z prędkością swobodnego opadania cząstek, powstaje stan graniczny, w którym kończy się fluidyzacja. Stan graniczny, oznaczony cyfrą 5, jest zilustrowany symbolicznie za pomocą nieruchomej cząstki swobodnej P. Prędkość fluidyzacji nazywana jest *prędkością zawisania* $u_1 = u_t$, jeżeli jest ona równa prędkości swobodnego opadania cząstki w gazie nieruchomym.

Jeżeli prędkość fluidyzacji jest większa od prędkości swobodnego opadania cząstek, to cząstki są wywiewane z komory. Stan taki nazywa się *transpor-*

1.1. Własności przepływu fluidalnego

tem pneumatycznym. Spadek ciśnienia Δp rośnie wtedy wraz ze wzrostem prędkości u_1 , tak jak w każdym przepływie przez rurę.

Przedstawiony obraz fluidyzacji został znacznie uproszczony, gdyż nie uwzględniono w nim sposobu zasilania i odprowadzania cząstek. Poza tym jeżeli rozmiary cząstek różnią się znacznie, następuje ich *segregacja*, która prowadzi do *stratyfikacji* złoża fluidalnego. Cząstki największe opadają na dno, a cząstki najmniejsze przemieszczają się do góry, a nawet są wydmuchiwane na zewnątrz.



Rys. 1.3. Rodzaje złoż fluidalnych [39]: a) jednorodne, b) pęcherzowe, c) turbulentne, d) tłokowe, e) fontannowe, f) kanalikowe

Na rysunku 1.3 przedstawiono *rodzaje złoż fluidalnych*. Podstawą podziału złoż fluidalnych, na *jednorodne* i *niejednorodne*, jest przebieg procesu fluidyzacji. Złoże jednorodne (rys. 1.3a) charakteryzuje się jednakową porowatością we wszystkich punktach. Takim warunkom odpowiadają wszystkie złoża cieczowe, a ze złoż gazowych tylko złoża o małej prędkości przepływu gazu. Złoża niejednorodne (rys. 1.3b – rys. 1.3f) charakteryzują się zmienną po-

rowatością w różnych miejscach (obszarach) złoża. Do złóż niejednorodnych należą złoża pęcherzowe, turbulentne, tłokowe, fontannowe i kanalikowe.

Złoże pęcherzowe charakteryzuje się tym, że część gazu płynie w postaci pęcherzy (rys. 1.3b), zatem porowatość nie jest jednakowa we wszystkich punktach warstwy.

Złoże turbulentne charakteryzuje się tym, że ziarna złoża podlegają intensywnemu mieszanemu w całej objętości (rys. 1.3c). Złoże turbulentne nie ma wyraźnie ukształtowanej górnej powierzchni swobodnej, jednak występuje tu obszar, w którym koncentracja cząstek ulega gwałtownej zmianie.

Złoże tłokowe (zwana również *złożem pulsacyjnym*) charakteryzuje się tym, że pęcherze urastają do rozmiarów równych średnicy kolumny, tworząc poprzeczne warstwy gazu (rys. 1.3d). Warstwy zawiesiny znajdujące się między nimi poruszają się ku górze na podobieństwo tłoków.

Złoże fontannowe charakteryzuje się tym, że cząstki są wynoszone do góry w obszarze występowania dużej prędkości w rdzeniu kolumny, a opadają na dół w obszarze małej prędkości w pobliżu ściany (rys. 1.3e). Profil prędkości w poprzecznym przekroju warstwy jest bardzo nierównomierny i pod tym względem złożo jest bardzo podobne do złoża kanalikowego.

Złoże kanalikowe charakteryzuje się występowaniem pionowych kanałów, przez które przepływa znaczna część płynu, nie wprawiając w ruch cząstek (rys. 1.3f). Kanalikowanie występuje podczas fluidyzacji cząstek o bardzo małych rozmiarach.

1.2 Przedmiot badań

Przedmiotem niniejszej rozprawy jest opracowanie i implementacja numeryczna modelu matematycznego dynamiki ośrodka fluidalnego z wykorzystaniem metody „wielofazowej cząstki w komórce” oraz metody rzutowania i metody dekompozycji kierunków operatora różniczkowego. Zadanie numerycznego modelowania przepływu fluidalnego rozwiązano przez połączenie w jednym algorytmie obliczeniowym trzech wspomnianych metod.

Metodę rzutowania (*projection method*) [19, 152, 17], pierwotnie opracowaną do numerycznego modelowania nieściśliwego przepływu jednofazowego, zmodyfikowano i rozwinięto przez uwzględnienie udziału objętościowego płynu w równaniach ruchu płynu oraz uwzględnienie ściśliwości ośrodka flu-

idealnego. W pracy opracowano własne warunki brzegowe dla występujących w metodzie prędkości pośredniej i funkcji rzutującej. Zarówno ze względów teoretycznych, jak i względów numerycznych, poprawne zadanie warunków brzegowych jest ważnym elementem metody rzutowania, warunkującym uzyskanie poprawnego rozwiązania numerycznego.

Metoda dekompozycji kierunków operatora różniczkowego (*componentwise splitting method*) [163, 114] jest efektywnie ekonomiczną metodą numerycznego rozwiązywania w sposób niejawny niestacjonarnych równań różniczkowych cząstkowych w przestrzeni dwu- i trójwymiarowej. Dzięki dekompozycji kierunków operatora różniczkowego równania wielowymiarowego otrzymuje się układ niestacjonarnych równań jednowymiarowych. Następnie uzyskane niestacjonarne jednowymiarowe zagadnienia brzegowe sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych z wykorzystaniem szybkiego algorytmu rozwiązywania macierzy trójkątnej [72, 136, 42]. Niewątpliwymi zaletami metody są jej szybkość i stabilność numeryczna (zastosowanie metody niejawnej).

Metoda „wielofazowej cząstki w komórce” (MP-PIC od *multiphase particle-in-cell*) [2, 144, 145] jest metodą typu Eulerowsko-Lagrangowskiego modelowania ruchu ośrodka wielofazowego. Cząstki materiału stałego są traktowane jako dyskretne cząstki, których ruch jest określony przez drugie prawo Newtona. Równania ruchu cząstki wyprowadzono m. in. przy założeniu, że gęstość ρ_p materiału cząstek jest znacznie większa od gęstości ρ_f gazu, w którym się one poruszają, tzn. $\frac{\rho_p}{\rho_f} \sim 10^3$. W metodzie MP-PIC przyjmuje się, że oddziaływania (zderzenia) między cząstkami mają charakter ciągły, przez co metoda MP-PIC łączy w sobie dokładność odtwarzania ruchu cząstek metody Eulerowsko-Lagrangowskiej i ekonomiczność traktowania wzajemnych oddziaływań metody Eulerowsko-Eulerowskiej. Równania ruchu płynu, otrzymane metodą uśredniania po przestrzeni, uwzględniają obecność cząstek materiału stałego w przepływie. W pracy przedstawiono mechanizm oddziaływania (wymiany pędu) między płynem a cząstkami. Opisano i zamodelowano również wpływ obecności cząstek na zmianę wartości współczynnika lepkości płynu. Ważnym elementem modelowania ruchu ośrodka wielofazowego jest empiryczna wiedza, wykorzystywana do modelowania turbulencji w przepływie płynu z obecnością cząstek. W pracy przedstawiono lepkościowy model turbulencji LES (od *large eddy simulation*).

1.3. Równania ruchu płynu

W celu potwierdzenia poprawności implementacji numerycznej metody rzutowania i metody dekompozycji, wykonano serię eksperymentów numerycznych dla nieściśliwego przepływu jednofazowego płynu lepkiego. Uzyskane wyniki numeryczne porównano ze znanymi istniejącymi rozwiązaniami analitycznymi lub z dobrze udokumentowanymi wynikami badań eksperymentalnych. Zgodność wyników numerycznych z wynikami eksperymentalnymi była bardzo dobra. Prawidłowość użytego modelu i jego implementacji numerycznej potwierdzają wyniki numerycznych badań wybranych przepływów fluidalnych. Do modelowania przyjęto takie charakterystyczne przepływy fluidalne, jak przepływ w złożu pęcherzowym, przepływ z segregacją złoża fluidalnego i przepływ fluidalny w pionowej komorze.

Kierując się wymogami metodologii numerycznej mechaniki płynów [72, 64], niniejsza praca przedstawia

- w *dalszej części rozdziału* równania ruchu jednofazowego płynu lepkiego oraz definiuje pojęcie udziału objętościowego,
- w *rozdziale 2.* dotychczasowy stan wiedzy na temat metod modelowania dynamiki ośrodka wielofazowego,
- w *rozdziałach 4. i 5.* model matematyczny rozważanego zjawiska fizycznego przepływu fluidalnego wraz ze wszystkimi przyjętymi założeniami,
- w *rozdziale 6.* opis metod rzutowania i dekompozycji kierunków operatora różniczkowego oraz metody „wielofazowej cząstki w komórce”, wykorzystanych do numerycznego rozwiązania równań modelu,
- w *rozdziałach 7. i 8.* uzyskane wyniki numeryczne skonfrontowane z dostępnymi z literatury wynikami badań eksperymentalnych lub wynikami numerycznymi.

1.3 Równania ruchu płynu

Dynamika płynu jednofazowego w przestrzeni trójwymiarowej określona jest przez następujący układ równań:

- równanie ciągłości przepływu opisujące prawo zachowania masy

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u}_f) = 0, \quad (1.1)$$

1.3. Równania ruchu płynu

- równanie przepływu opisujące prawo zachowania pędu

$$\frac{\partial \rho_f \mathbf{u}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f) = \nabla \cdot \mathbf{T}_f + \rho_f \mathbf{b}, \quad (1.2)$$

gdzie ρ_f jest gęstością płynu, $\mathbf{u}_f$ jest prędkością płynu, $\mathbf{T}_f$ jest tensorem naprężenia płynu, $\mathbf{b}$ jest zewnętrzną jednostkową siłą masową. W dalszych rozważaniach przyjęto, że tensor naprężenia płynu jest symetryczny ($\mathbf{T}_f = \mathbf{T}_f^T$), co wynika z zasady zachowania momentu pędu, oraz że płyn jest nieściśliwym płynem niutonowskim, opisywanym następującą zależnością:

$$\mathbf{T}_f = -p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_f, \quad (1.3)$$

w której p_f jest ciśnieniem płynu (naprężenia normalne), a $\boldsymbol{\tau}_f$ jest naprężeniem stycznym w płynie, określonym jako

$$\boldsymbol{\tau}_f = \mu_f (\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T), \quad (1.4)$$

gdzie μ_f jest dynamicznym współczynnikiem lepkości płynu.

Dla potrzeb dalszej analizy, równania (1.1) i (1.2) rządzące ruchem płynu zapisuje się w następującej postaci kanonicznej

$$\frac{\partial \rho_f \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u}_f \psi) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \rho_f \mathbf{f}, \quad (1.5)$$

gdzie ψ jest zmienną podlegającą bilansowaniu, $\mathbf{J}$ jest strumieniem ψ , $\mathbf{f}$ jest źródłem ψ . Dla równania zachowania masy należy przyjąć $\psi = 1$ i $\mathbf{J} = \mathbf{f} = 0$, a dla równania zachowania pędu $\psi = \mathbf{u}_f$, $\mathbf{J} = \mathbf{T}_f$, $\mathbf{f} = \mathbf{g}$.

Równania ruchu należy uzupełnić podając:

- zamykające układ równań związki konstytutywne, które wiążą własności fizyczne płynu (model płynu) z wielkościami zmiennymi w przepływie,
- warunek początkowy dla czasu $t = 0$,
- warunek brzegowy na powierzchni ograniczającej płyn.

W przypadku przepływu płynu niosącego cząstki materiału stałego, należy także uwzględnić warunki ciągłości parametrów fizycznych na powierzchni międzyfazowej rozdzielającej płyn od cząstek. Mimo, że zasady zachowania

1.4. Udział objętościowy

masy i pędu są spełnione, to na powierzchni międzyfazowej własności fizyczne mogą być nieciągłe. Kanoniczna postać warunku ciągłości na powierzchni międzyfazowej ma następującą postać

$$[\rho_f \psi(\mathbf{u}_{fi} - \mathbf{w}_i) + \mathbf{J}] \cdot \mathbf{n} = m, \quad (1.6)$$

gdzie $\mathbf{u}_{fi}$ jest prędkością płynu na powierzchni międzyfazowej, $\mathbf{w}_i$ jest prędkością powierzchni międzyfazowej, $\mathbf{n}$ jest wektorem normalnym do powierzchni międzyfazowej, m jest źródłem powierzchniowym ψ , a $[\]$ oznacza przejście przez powierzchnię międzyfazową.

W rozdziale 5 zostaną przedstawione równania ruchu i związki konstytutywne dla płynu z uwzględnieniem obecności cząstek w przepływie.

1.4 Udział objętościowy

Poszczególne składniki mieszaniny wieloskładnikowej mogą być zidentyfikowane przez podanie ich *udziału objętościowego*, który definiowany jest w następujący sposób. Jeśli $b(r, \mathbf{x})$ jest kulą o promieniu r o środku w punkcie $\mathbf{x}$ (rys. 1.4) i $V_k(b(r, \mathbf{x}))$ jest objętością k -tego składnika znajdującego się wewnątrz kuli b , to [34]

$$A_k(r, \mathbf{x}) = \frac{V_k(b(r, \mathbf{x}))}{V(b(r, \mathbf{x}))} \quad (1.7)$$

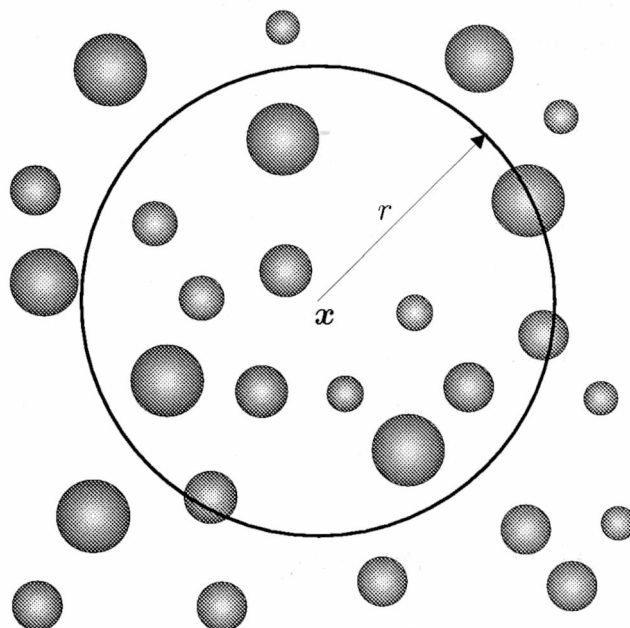
jest częścią objętości kuli b zajmowanej przez k -ty składnik. Wówczas udział objętościowy ε_k k -tej fazy (składnika) określony jest jako [24]

$$\varepsilon_k(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow r_{min}} A_k(r, \mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow r_{min}} \frac{V_k(b(r, \mathbf{x}))}{V(b(r, \mathbf{x}))}, \quad (1.8)$$

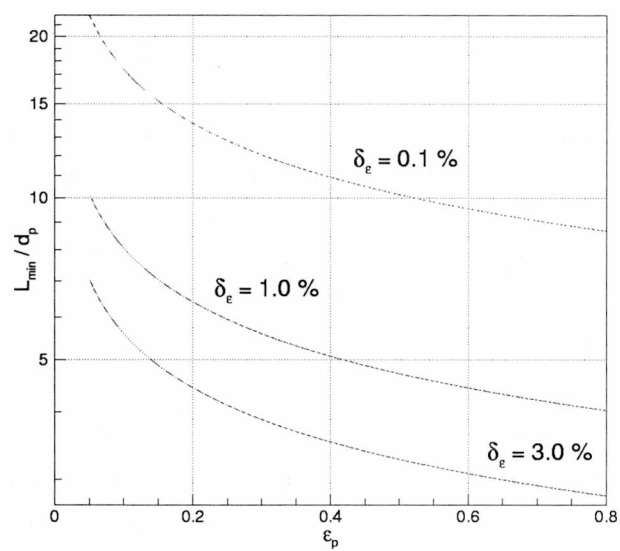
gdzie r_{min} jest promieniem minimalnej objętości granicznej, która zapewnia otrzymanie ciągłego rozkładu w przestrzeni uzyskanych wartości ε_k .

W celu uzyskania ciągłego rozkładu udziału objętościowego, objętość uśredniająca V musi zostać odpowiednio dobrana. Musi ona zawierać wystarczającą liczbę cząstek, aby uzyskane wartości udziału objętościowego spełniały warunek ciągłości. Jednak objętość V nie może mieć porównywalnych rozmiarów z wymiarami obszaru, w którym dokonuje się uśredniania. W niniejszej pracy przyjęto własną definicję, że minimalna objętość graniczna V_0 jest taką objętością kontrolną, dla której zmiana (dodanie lub odjęcie) pojedynczej

1.4. Udział objętościowy



Rys. 1.4. Objętość kontrolna i ośrodek rozproszony



Rys. 1.5. Zależność $\frac{L_{min}}{d_p}$ od ϵ_p dla wybranych wartości δ_e

cząstki o średnicy d_p powoduje zmianę ε_p o co najwyżej $\delta_\varepsilon\%$. Tak więc, po przyjęciu, że objętość kontrolna jest sześcianem o boku L , minimalny wymiar L_{min} boku objętości uśredniającej będzie spełniać następującą relację

$$\frac{L_{min}}{d_p} = \sqrt[3]{\frac{100\pi}{6\varepsilon_p\delta_\varepsilon}}. \quad (1.9)$$

Rysunek 1.5 przedstawia zmianę $\frac{L_{min}}{d_p}$ w zależności od ε_p dla wybranych wartości δ_ε . W niniejszej pracy przyjęto, że $L_{min} = 9d_p < 0.1 L_0$, co odpowiada wartościom $\varepsilon_p = 0.7$ i $\delta_\varepsilon = 0.1\%$, L_0 jest charakterystycznym wymiarem obszaru. Konsekwencją dla obliczeń numerycznych jest fakt, że wielkość siatki numerycznej użytej do wyznaczania wartości udziału objętościowego nie może być mniejsza niż L_{min} .

1.4. Udział objętościowy

Rozdział 2

Przegląd metod modelowania dynamiki ośrodka wielofazowego

2.1 Metoda Eulerowsko–Eulerowska

W metodzie Eulerowsko–Eulerowskiej (E–E) ośrodek płynny i cząstki materiału stałego traktowane są jako niezależne ośrodki ciągle wzajemnie przenikające się i oddziałujące ze sobą. Równania opisujące dynamikę poszczególnych ośrodków uzyskuje się przez zastosowanie metody uśredniania lub metody mieszanin wieloskładnikowych [34, 15].

W metodzie uśredniania, lokalne równania zachowania masy i pędu podlegają procesowi uśredniania po przestrzeni, czasie lub zespole realizacji, otrzymując w ten sposób uśrednione równania ruchu dla każdego ośrodka [83, 34, 24]. W metodzie mieszanin wieloskładnikowych równania ruchu każdego ośrodka są postulowane [34, 15]. Metody uśredniania i mieszanin wieloskładnikowych prowadzą do podobnych rezultatów [88]. Tak uzyskane równania ruchu uzupełnia się zamykającymi równaniami konstytutywanymi,

które wiążą własności fizyczne płynu z podlegającymi wyznaczeniu wielkościami kinematycznymi. Różnice w istniejących modelach matematycznych ośrodka wielofazowego zasadniczo wynikają z przyjmowanych różnych założeń konstytutywnych, których źródłem mogą być dane doświadczalne lub też zaawansowane metody teoretyczne, jak np. teoria kinetyczna gazów.

Z definicji udziału objętościowego wynika, że dla przepływu, w którym występuje ośrodek płynny i cząstki materiału stałego, różniące się między sobą własnościami fizycznymi (gęstość, rozmiar, itp.), zachodzi następujące równanie

$$\varepsilon_f + \sum_{k=1}^M \varepsilon_{p,k} = 1, \quad (2.1)$$

gdzie ε_f jest udziałem objętościowym ośrodka płynnego, $\varepsilon_{p,k}$ jest udziałem objętościowym k -tego ośrodka materiału stałego, a M oznacza ilość ośrodków materiału stałego, uzyskanych po uciągleniu cząstek charakteryzowanych przez te same własności.

Równania zachowania masy mają następujące postacie [57, 49, 98]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_f \rho_f) + \nabla \cdot (\varepsilon_f \rho_f \mathbf{u}_f) = 0 \quad (2.2)$$

dla płynu, i

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{pk} \rho_{pk}) + \nabla \cdot (\varepsilon_{pk} \rho_{pk} \mathbf{u}_{pk}) = 0 \quad (2.3)$$

dla k -tego ośrodka materiału stałego, gdzie $k = 1, 2, 3, \dots, M$.

Również równania zachowania pędu podaje się osobno dla każdej fazy [57, 49, 98]

- płyn

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_f \rho_f \mathbf{u}_f) + \nabla \cdot (\varepsilon_f \rho_f \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f) = \nabla \cdot \mathbf{T}_f + \varepsilon_f \rho_f \mathbf{g} - \sum_{k=1}^M D_{pk}(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_{pk}), \quad (2.4)$$

- materiał stały

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{pk} \rho_{pk} \mathbf{u}_{pk}) + \nabla \cdot (\varepsilon_{pk} \rho_{pk} \mathbf{u}_{pk} \mathbf{u}_{pk}) = \nabla \cdot \mathbf{T}_{pk} + \varepsilon_{pk} \rho_{pk} \mathbf{g} + D_{pk}(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_{pk}), \quad (2.5)$$

gdzie

$$D_{pk} = \begin{cases} 150 \frac{\mu_f \varepsilon_{pk}^2}{d_p^2 \varepsilon_f^2} + 1.75 \frac{\rho_f \varepsilon_{pk} |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_{pk}|}{d_p \varepsilon_f} & , \text{ jeśli } 0 < \varepsilon_f < 0.8 \\ \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_f \varepsilon_{pk} |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_{pk}|}{d_p} \varepsilon_f^{-2.65} & , \text{ jeśli } 0.8 \leq \varepsilon_f \leq 1 \end{cases} , \quad (2.6)$$

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{\text{Re}_p} (1 + 0.15 \text{Re}_p^{0.687}) & , \text{ jeśli } \text{Re}_{pk} \leq 1000 \\ 0.44 & , \text{ jeśli } \text{Re}_{pk} > 1000 \end{cases} , \quad (2.7)$$

$$\text{Re}_{pk} = \frac{\varepsilon_f \rho_f |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_{pk}|}{\mu_f} . \quad (2.8)$$

Tensor naprężeń $\mathbf{T}_f$ płynu modelowany jest przez równanie (1.3). Płyn traktowany jest jako gaz doskonały podlegający równaniu gazu doskonałego, lub też jako płyn nieściśliwy o stałej gęstości.

Tensor naprężeń $\mathbf{T}_p$ dla fazy materiału stałego ma następującą postać [57, 29, 56, 55, 142, 12]

$$\mathbf{T}_p = (-p_p + \lambda_p \nabla \cdot \mathbf{u}_p) \mathbf{I} + 2\mu_p \mathbf{D}_p , \quad (2.9)$$

gdzie

$$\mathbf{D}_p = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_p + (\nabla \mathbf{u}_p)^T) - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u}_p \mathbf{I} , \quad (2.10)$$

p_p jest ciśnieniem (naprężeniem normalnym) ośrodka materiału stałego, μ_p i λ_p są odpowiednio dynamicznym i objętościowym współczynnikiem lepkości fazy materiału stałego.

Zamknięcie układu równań polega na podaniu dodatkowych zależności – nazywanych równaniami konstytutywnymi – określających postać p_p , μ_p i λ_p . Ze względu na podobieństwo ruchu cząstek materiału stałego w przepływie do ruchu molekuł gazu, do zamknięcia układu równań z powodzeniem wykorzystuje się kinetyczną teorię gazów. Odpowiednie wyrażenia zamykające mają postać [57, 29, 23, 110]

$$p_p = \rho_p \varepsilon_p \Theta_p [1 + 2g_0 \varepsilon_p (1 + e_p)] , \quad (2.11)$$

$$\lambda_p = \frac{4}{3} \rho_p \varepsilon_p^2 d_p g_0 (1 + e_p) \sqrt{\frac{\Theta_p}{\pi}} , \quad (2.12)$$

$$\mu_p = \frac{2\mu_{pdil}}{g_0(1 + e_p)} \left[1 + \frac{4}{5} g_0 \varepsilon_p (1 + e_p) \right]^2 + \frac{4}{5} \rho_p \varepsilon_p^2 d_p g_0 (1 + e_p) \sqrt{\frac{\Theta_p}{\pi}} , \quad (2.13)$$

gdzie

$$\mu_{pdil} = \frac{5\sqrt{\pi}}{96} \rho_p d_p \sqrt{\Theta_p}, \quad (2.14)$$

$$g_0 = \frac{3}{5} \left[1 - \sqrt[3]{\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{pmax}}} \right]^{-1}, \quad (2.15)$$

a $e_p \in \langle 0, 1 \rangle$ jest współczynnikiem elastyczności odbicia cząstek.

Podobnie jak temperatura bezwzględna gazu określa jego ciśnienie, współczynniki lepkości i pozostałe parametry stanu, tak z pomocą wprowadzonej do rozważań tzw. *temperatury granularnej* Θ_p możemy określić ciśnienie p_p i współczynniki lepkości μ_p i λ_p ośrodka granularnego, tj. ośrodka powstałego po uciągnięciu rozproszonych cząstek materiału stałego. Temperatura granularna jest miarą uśrednionej energii kinetycznej pulsacyjnego ruchu cząstek

$$\Theta_p = \frac{1}{3} \langle \mathbf{u}_p'^2 \rangle = \frac{1}{3} \frac{\int \int \int \Psi(\mathbf{v}_p - \mathbf{u}_p)^2 d\rho_p dV_p d\mathbf{v}_p}{\int \int \int \Psi d\rho_p dV_p d\mathbf{v}_p}, \quad (2.16)$$

gdzie Ψ jest funkcją rozkładu, która zostanie dokładniej omówiona w podrozdziale 4.4, $\mathbf{v}_p$ jest chwilową nieuśrednioną prędkością cząstki.

Określana osobno dla każdej fazy materiału stałego temperatura granularna, jako wielkość fizyczna podobnie jak masa lub pęd, podlega bilansowaniu. Równanie zachowania temperatury granularnej ma następującą postać [57]

$$\frac{3}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_p \rho_p \Theta_p) + \nabla \cdot (\varepsilon_p \rho_p \mathbf{u}_p \Theta_p) \right] = \mathbf{T}_p : \nabla \mathbf{u}_p - \nabla \cdot \mathbf{q}_p - \sigma_p, \quad (2.17)$$

gdzie

$$\sigma_p = 3\varepsilon_p^2 \rho_p g_0 \Theta_p (1 - e_p^2) \left[\frac{4}{d_p} \sqrt{\frac{\Theta_p}{\pi}} - \nabla \cdot \mathbf{u}_p \right] \quad (2.18)$$

i

$$\mathbf{q}_p = -\kappa_p \nabla \Theta_p \quad (2.19)$$

są odpowiednio dyssypacją i strumieniem energii granularnej. Współczynnik przewodności κ_p określony jest jako

$$\kappa_p = \frac{2\kappa_{pdil}}{g_0(1 + e_p)} \left[1 + \frac{6}{5} \varepsilon_p g_0 (1 + e_p) \right]^2 + 2\rho_p d_p g_0 \varepsilon_p^2 (1 + e_p) \sqrt{\frac{\Theta_p}{\pi}}, \quad (2.20)$$

w którym

$$\kappa_{pdil} = \frac{75}{384} \rho_p d_p \sqrt{\pi \Theta_p}. \quad (2.21)$$

2.2. Metoda Eulerowsko–Lagrangowska

Wykorzystanie kinetycznej teorii gazów do zamknięcia układu równań w metodzie E–E prowadzi do skomplikowania problemu, zarówno z teoretycznego, jak i numerycznego punktu widzenia. Jeżeli przyjmiemy, że ruch pulsacyjny ośrodka stałego jest ustalony ($\Theta = \text{const}$) i modelowana jest jedynie część izotropowa tensora $\mathbf{T}_p$, tzn. $\mathbf{T}_p = -p_p \mathbf{I}$, gdzie $p_p = p_p(\varepsilon_f)$, to

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_p = -\nabla p_p = -G_p(\varepsilon_f) \nabla \varepsilon_f, \quad (2.22)$$

gdzie funkcja G_p określona jest z zależności wyznaczonej doświadczalnie jako [57, 155, 14, 124, 160]

$$G_p(\varepsilon_f) = 10^{-8.76\varepsilon_f + 5.43} \frac{N}{m^2}. \quad (2.23)$$

Dzięki temu w rozważaniach nie występuje już temperatura granularna.

2.2 Metoda Eulerowsko–Lagrangowska

W metodzie Eulerowsko–Lagrangowskiej (E–L) ośrodek płynny jest traktowany jak ośrodek ciągły, podlegający równaniom zachowania ośrodka ciągłego. Jednakże cząstki materiału stałego są traktowane w sposób indywidualny, co jest właśnie cechą charakterystyczną metody. Ruch cząstek określony jest przez drugie prawo Newtona.

W zależności od postaci równań ruchu płynu i równań ruchu cząstek, w literaturze występuje wiele wariantów metody E–L. Jednak istniejące metody E–L można podzielić na: metody bezpośredniej symulacji numerycznej [78, 79, 58, 86] i pozostałe metody, ogólnie określane jako metody cząstek dyskretnych [154, 153, 161, 75, 76, 168, 100].

2.2.1 Metoda bezpośredniej symulacji numerycznej

Jeżeli analizuje się ruch płynu wraz z cząstkami, to ruch cząstek materiału stałego i płynu są ze sobą ściśle sprzężone. Cząstka porusza się zgodnie z działającą na nią siłą i momentem siły, które wywołane są przez otaczający płyn. Często również ruch płynu wyraźnie zdominowany jest przez dynamikę cząstek, np. przy sedimentacji. W metodzie bezpośredniej symulacji numerycznej (DNS od *direct numerical simulation*), wspólna dynamika płynu i cząstek wynika z rozwiązania równań ruchu bezpośrednio wynikających z

2.2. Metoda Eulerowsko–Lagrangowska

zasad zachowania, bez przyjmowania dodatkowych związków empirycznych określających siły działające na cząstkę.

Dynamikę płynu określają przedstawione już w podrozdziale 1.3 równanie (1.1) zachowania masy i równanie (1.2) zachowania pędu.

Ruch p -tej ($p = 1, 2, \dots, N_p$) cząstki opisują następujące równania [79, 78, 58]

- drugie prawo Newtona

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p(t), \quad (2.24)$$

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = m_p \mathbf{g} + \oint_{S_p} (p_f \mathbb{I} + \boldsymbol{\tau}_f) \mathbf{n} \, ds, \quad (2.25)$$

gdzie $\mathbf{x}_p$ i $\mathbf{u}_p$ są odpowiednio położeniem i prędkością środka masy cząstki, m_p jest masą cząstki, $\mathbf{g}$ jest przyspieszeniem ziemskim, $S_p = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_p| = \frac{d_p}{2}$ jest powierzchnią cząstki, $\mathbf{n}$ jest wektorem prostym do powierzchni cząstki,

- równania Eulera ruchu obrotowego

$$\frac{d\boldsymbol{\vartheta}_p}{dt} = \boldsymbol{\omega}_p, \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_p \boldsymbol{\omega}_p) = \oint_{S_p} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times (\mathbf{T}_f \mathbf{n}) \, ds, \quad (2.27)$$

gdzie $\boldsymbol{\vartheta}_p$ jest położeniem kątowym, $\boldsymbol{\omega}_p$ jest prędkością kątową, a $\mathbf{I}_p$ jest tensorem momentu bezwładności dla p -tej cząstki.

Równania ruchu cząstki stanowią zagadnienie początkowe, które w celu rozwiązania należy uzupełnić warunkiem początkowym

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p(0) &= \mathbf{x}_p^0, \\ \mathbf{u}_p(0) &= \mathbf{u}_p^0, \\ \boldsymbol{\vartheta}_p(0) &= \boldsymbol{\vartheta}_p^0, \\ \boldsymbol{\omega}_p(0) &= \boldsymbol{\omega}_p^0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dla płynu, oprócz podania warunku początkowego

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_f^0 \quad (2.29)$$

2.2. Metoda Eulerowsko–Lagrangowska

i warunku brzegowego

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_f^g(t) \quad (2.30)$$

określonego na powierzchni ograniczającej płyn, należy spełnić warunek

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (2.31)$$

określający brak poślizgu prędkości na zmieniającej swe położenie w czasie powierzchni S_p wszystkich N_p cząstek.

Niestety, metoda DNS nie uwzględnia bezpośredniego zderzenia cząstki z innymi cząstkami lub ścianką. Aby zapobiec wzajemnemu przenikaniu cząstek lub wnikięciu cząstki w ściankę, w równaniu (2.25) dodaje się siłę $\mathbf{F}_{col}$ modelującą zderzenie i -tej cząstki z j -tą cząstką lub ścianką [79, 58]

$$\mathbf{F}_{col} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_p} \mathbf{F}_{i,j}^p + \sum_{j=1}^{N_w} \mathbf{F}_{i,j}^w, \quad (2.32)$$

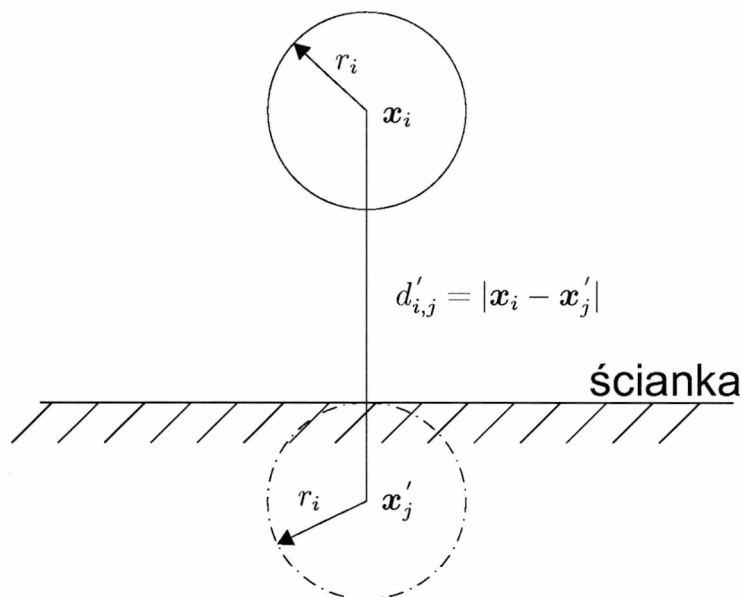
gdzie N_w jest liczbą ścianek. Postać siły odpowiedzialnej za zderzenie między cząstkami ma postać [79, 58]

$$\mathbf{F}_{i,j}^p = \begin{cases} \mathbf{0} & , \quad d_{i,j} > r_i + r_j + \rho_z \\ \frac{1}{\epsilon_p}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)(r_i + r_j + \rho_z - d_{i,j})^2 & , \quad d_{i,j} \leq r_i + r_j + \rho_z \end{cases}, \quad (2.33)$$

gdzie $d_{i,j} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$, r_i i r_j są odpowiednio promieniem i -tej i j -tej cząstki, ρ_z jest zasięgiem działania siły, a ϵ_p jest współczynnikiem sztywności, którego wartość należy odpowiednio dobrać. Podobną postać ma siła $\mathbf{F}_{i,j}^w$ odpowiedzialna za zderzenie cząstki ze ścianką

$$\mathbf{F}_{i,j}^w = \begin{cases} \mathbf{0} & , \quad d'_{i,j} > 2r_i + \rho_z \\ \frac{1}{\epsilon_w}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_j)(2r_i + \rho_z - d'_{i,j})^2 & , \quad d'_{i,j} \leq 2r_i + \rho_z \end{cases} \quad (2.34)$$

gdzie ϵ_w jest współczynnikiem sztywności podczas zderzenia ze ścianką. Od bicie od ścianki i -tej cząstki polega na zamodelowaniu ścianki jako cząstki o tym samym promieniu w położeniu $\mathbf{x}'_j$ odległą o r_i od ścianki (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Zderzenie cząstki ze ścianką [58]

2.2.2 Metoda cząstek dyskretnych

W metodzie cząstek dyskretnych (DPM od *discrete particle method*) równania ruchu cząstek i płynu ulegają zmianie. Siłę i moment siły działające na cząstkę nie wyznacza się w sposób bezpośredni, jak w metodzie DNS, lecz postuluje się pewną postać siły, która zależy od warunków ruchu cząstki. Równania ruchu płynu, otrzymywane najczęściej z wykorzystaniem metody uśredniania, uwzględniają obecność oddziałujących z płynem cząstek.

Wyznaczenie naprężeń normalnych i stycznych działających na cząstkę jest złożonym zadaniem. W ogólnym przypadku zadanie to nie zostało jeszcze rozwiązane. Najczęściej dokonuje się uproszczeń polegających na przyjęciu, że cząstka ma kształt kulisty, a ściśle obliczenie sił od naprężeń normalnych i stycznych zastępuje się sumą sił określonych dla szczególnie prostych sytuacji. Przyjmując, że wszystkie siły działające na cząstkę są addytywne, równanie zachowania pędu cząstki dla dowolnego przepływu ma postać [39, 24, 87]

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \mathbf{F}_p = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_C + \dots \quad (2.35)$$

gdzie odpowiednie składniki sumy po prawej stronie oznaczają:

$$\mathbf{F}_G = \int_{V_p} \rho_p \mathbf{g} \, dv = \rho_p \mathbf{g} V_p \quad (2.36)$$

jest siłą masową,

$$\mathbf{F}_W = - \oint_{S_p} p \mathbf{n} \, ds = -\rho_f \mathbf{g} V_p \quad (2.37)$$

jest siłą wyporu hydrostatycznego,

$$\mathbf{F}_D = \frac{1}{2} C_D \frac{\pi d_p^2}{4} \rho_f |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p| (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p) \quad (2.38)$$

jest siłą stacjonarnego dynamicznego oporu płynu, C_D jest współczynnikiem oporu dla stacjonarnego przepływu płynu,

$$\mathbf{F}_A = \frac{1}{2} \rho_f V_p \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p) \quad (2.39)$$

jest siłą mas stowarzyszonych,

$$\mathbf{F}_B = \frac{3}{2} d_p^2 \sqrt{\pi \mu_f \rho_f} \int_0^t \frac{d}{d\zeta} (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p) \frac{1}{\sqrt{t - \zeta}} \, d\zeta \quad (2.40)$$

jest siłą Basseta,

$$\mathbf{F}_S = \frac{6.46}{4} \mu_f d_p^2 |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p| \sqrt{\frac{1}{\nu_f} \left| \frac{\partial (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p)}{\partial \mathbf{s}} \right|} \quad (2.41)$$

jest siłą nośną Saffmana, $\mathbf{s}$ wskazuje kierunek gradientu prędkości,

$$\mathbf{F}_M = \frac{\pi}{8} d_p^3 \rho_f \left[\left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}_f - \boldsymbol{\omega}_p \right) \times (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p) \right] \quad (2.42)$$

jest siłą nośną Magnusa,

$\mathbf{F}_C$ jest siłą działającą na cząstkę podczas zderzenia. P. Cundall i O. Strack w pracy [26] przedstawili szeroko obecnie stosowany model DEM (od *distinct element method*) wyznaczania siły $\mathbf{F}_C$. Siłę $\mathbf{F}_C$ działającą na i -tą cząstkę rozkłada się na składową normalną $\mathbf{F}_n = (\mathbf{F}_C \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ i składową styczną $\mathbf{F}_t = (\mathbf{F}_C \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}$, tj. [161, 26, 174, 157, 153, 154]

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y) = \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}, \quad \mathbf{n} \perp \mathbf{t} = (n_y, -n_x), \quad (2.44)$$

gdzie

$$\mathbf{F}_n = -[\kappa_n \delta_n + \eta_n (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \quad (2.45)$$

$$\mathbf{F}_t = \begin{cases} -\kappa_t \delta_t \mathbf{t} - \eta_t \mathbf{u}_c & , \text{ jeśli } |\kappa_t \delta_t| < \mu_{ij} |\kappa_n \delta_n| \\ -\mu_{ij} |\mathbf{F}_n| \mathbf{t} & , \text{ jeśli } |\kappa_t \delta_t| \geq \mu_{ij} |\kappa_n \delta_n| \end{cases}, \quad (2.46)$$

w których κ_n , κ_t i η_n , η_t są odpowiednio współczynnikami sztywności i współczynnikami tłumienia odpowiednio w kierunku normalnym i kierunku stycznym, μ_{ij} jest współczynnikiem tarcia materiałów zderzających się cząstek. Odkształcenie δ_n w kierunku normalnym i odkształcenie δ_t w kierunku stycznym są zdefiniowane jako

$$\delta_n = t_z \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j), \quad (2.47)$$

$$\delta_t = t_z \mathbf{u}_c, \quad (2.48)$$

gdzie t_z jest czasem trwania zderzenia, a prędkość $\mathbf{u}_c$ poślizgu wynosi

$$\mathbf{u}_c = [(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{t}] \mathbf{t} + (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i - \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{r}_j). \quad (2.49)$$

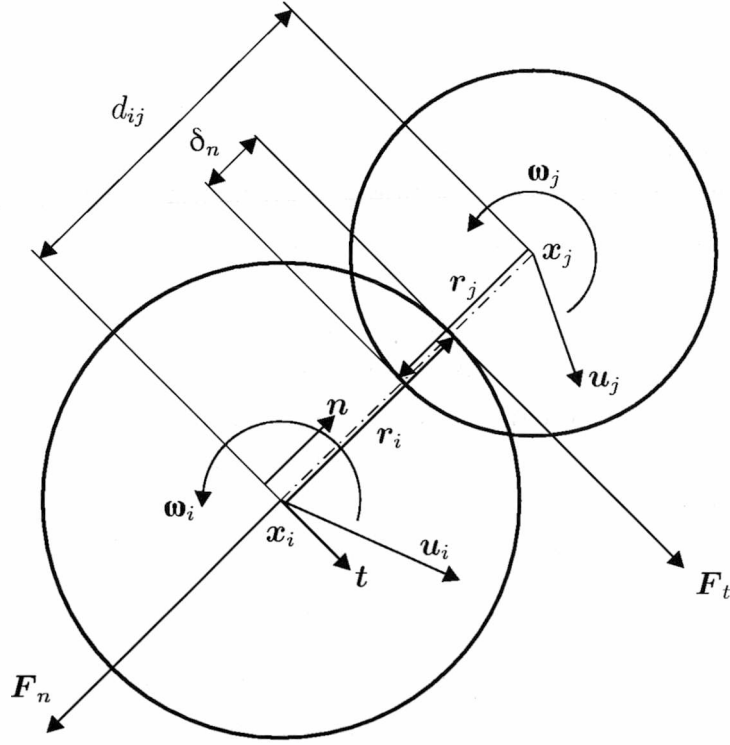
Równanie (2.27) przyjmuje następującą postać

$$\mathbf{I}_p \frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \mathbf{F}_t, \quad (2.50)$$

ponieważ jedynie styczna składowa $\mathbf{F}_t$ siły zderzeniowej $\mathbf{F}_C$ zmienia ruchu obrotowy cząstki.

Równania ruchu płynu wynikają z uśrednienia lokalnych praw zachowania masy i pędu. Uśrednione równanie zachowania masy dane jest przez następujące równanie

$$\frac{\partial(\rho_f \varepsilon_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \mathbf{u}_f) = 0. \quad (2.51)$$



Rys. 2.2. Mechanika zderzenia w modelu DEM [26]

Uśrednione równanie zachowania pędu może przybierać różne postacie, zależnie od zastosowanych metod uśredniania, przyjmowanych założeń i zamykających równań konstytutywanych. Szczególnie wątpliwości i kontrowersje wzbudzają człony związane z tensorem naprężeń i sprzężeniem między fazami. Wydaje się, że najczęściej występującą w literaturze postacią równania zachowania pędu jest postać następująca [13, 168, 108, 76]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \varepsilon_f \mathbf{u}_f) + \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f) = -\varepsilon_f \nabla p_f + \nabla \cdot (\varepsilon_f \boldsymbol{\tau}_f) - \mathbf{S}_p + \varepsilon_f \rho_f \mathbf{g}, \quad (2.52)$$

gdzie [13, 168, 108, 76]

$$\mathbf{S}_p = \frac{1}{V_{ijk}} \int \sum_{p=1}^{N_p} \mathbf{F}_{p,D} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) dv, \quad (2.53)$$

w którym V_{ijk} jest objętością komórki obliczeniowej, $\mathbf{F}_{p,D}$ jest siłą oporu p -tej cząstki, $\delta(\mathbf{x})$ jest funkcją Diraca dla przestrzeni trójwymiarowej.



Każda z przedstawionych powyżej – w sposób skrótowy – metod E–E lub E–L posiada własne wady i zalety. Metody E–E umożliwiają, w sposób uzasadniony teoretycznie, modelować stan naprężenia w uciętym ośrodku rozproszonym. Jednak wciąż modelowanie ciągłego rozkładu wielkości i własności ośrodka rozproszonego nastrocza trudności, gdyż wymaga to przyjęcia do obliczeń dla każdego rodzaju cząstek równań zachowania masy, pędu i równań konstytutywnych. Wykorzystanie teorii kinetycznej do zamknięcia układu równań prowadzi do dalszej komplikacji metody i algorytmu numerycznego, a uzyskane wyniki przedstawiają uśrednione charakterystyki płynu i ośrodka stałego.

Metody E–L, mimo znaczącego postępu w rozwoju mocy obliczeniowej, są nadal metodami czasochłonnymi. Metoda DNS wymaga bezpośredniego wyznaczania sił działających na każdą cząstkę w każdym kroku czasowym. Zagadnienie brzegowe z ruchomym brzegiem (ruchome cząstki) dla płynu znacząco komplikuje i spowalnia algorytm numeryczny. Wszystko to ogranicza dokładną metodę DNS do modelowania dynamiki ośrodka wielofazowego z małą liczbą (~ 1000) cząstek.

Ze względu na rozwiązywanie uśrednionych równań ruchu płynu, które uwzględniają obecność w przepływie cząstek, metoda DPM umożliwia modelowanie większej, w porównaniu do metody DNS, liczby cząstek. Ponieważ cząstki nie stanowią tutaj już ruchomego brzegu, jak w metodzie DNS, to rozwiązanie równań ruchu płynu odbywa się znacznie szybciej, niż w metodzie DNS. Jednak konieczność znajdowania w każdym kroku czasowym cząstek, które ulegają zderzeniom, skutecznie spowalnia obliczenia dla dużej liczby użytych cząstek.

Wydaje się, że panaceum na zaistniałą sytuację byłoby zastosowanie metody łączącej w sobie elementy metody E–E i metody E–L. Metodę taką stanowi właśnie metoda „wielofazowej cząstki w komórce” (MP–PIC od *multiphase particle-in-cell*). Cząstki materiału stałego zachowują swój dyskretny charakter i poruszają się zgodnie z drugim prawem Newtona. Jednak oddziaływania między cząstkami wyznaczane są podobnie jak w metodzie E–E. Do obliczeń wprowadza się siatkę numeryczną, na której wyznacza się naprężenia ośrodka stałego. Następnie uzyskane odpowiednie wartości interpoluje się z węzłów siatki na cząstkę. Ponieważ, w zależności od przyjętych

założeń, w literaturze występują mniej lub bardziej skomplikowane równania ruchu dla cząstki, to w rozdziale 4 przedstawiono szczegółowe wyprowadzenie równania ruchu cząstki, odpowiednie dla celów niniejszej pracy.

Metoda MP-PIC umożliwia zastosowanie w obliczeniach dużej liczby cząstek, co z kolei czyni możliwym przeprowadzenie obliczeń numerycznych w racjonalnie skończonym czasie na dostępnym sprzęcie komputerowym. Cecha ta powoduje, że metoda MP-PIC jest dogodnym narzędziem badawczym, wartym głębszej analizy.

Szczególne zainteresowanie wzbudzają równania ruchu płynu, a w szczególności kwestia ich zamknięcia, tj. postać członów związanych z tensorem naprężeń i oddziaływaniem między płynem a cząstkami. Dlatego więc w rozdziale 5 przedstawiono pełne wyprowadzenie równań ruchu płynu. W pracy wykorzystano metodę uśredniania po przestrzeni, co – jak podkreśla L. Fan i C. Zhu [39, 40] – nie prowadzi do nadmiernie niedopuszczalnej utraty informacji o uśrednianym ośrodku.

W rozdziale 6 omówiono zasadnicze elementy, które składają się na zaimplementowaną w niniejszej pracy metodę MP-PIC.

2.2. Metoda Eulerowsko–Lagrangowska

Rozdział 3

Cel, teza i zakres pracy doktorskiej

Cel pracy

Opracowanie modelu matematycznego i programu komputerowego do badania dynamiki ośrodka fluidalnego z wykorzystaniem metody „wielofazowej cząstki w komórce” oraz metod rzutowania i dekompozycji kierunków operatora różniczkowego.

Teza pracy

W modelowaniu numerycznym dynamiki ośrodka wielofazowego możliwe jest wykorzystanie metody rzutowania i metody dekompozycji kierunków operatora różniczkowego, które mogą stanowić integralną część metody „wielofazowej cząstki w komórce”.

Zakres pracy

Zakres pracy obejmował:

- sformułowanie równań ruchu cząstki stałej w przepływie nieściśliwym płynu lepkiego z uwzględnieniem oddziaływania płynu lepkiego i innych cząstek,
- sformułowanie uśrednionych po przestrzeni równań ruchu płynu niosącego cząstki materiału stałego,
- implementacja numeryczna i przetestowanie metody rzutowania i dekompozycji kierunków operatora różniczkowego dla niestacjonarnych nieściśliwych jednofazowych przepływów płynu lepkiego w dwuwymiarowej i trójwymiarowej przestrzeni,
- implementacja numeryczna opracowanego modelu matematycznego ośrodka fluidalnego,
- wykonanie eksperymentów numerycznych ruchu ośrodka fluidalnego.

Rozdział 4

Ruch cząstek materiału stałego w płynie lepkim

4.1 Równania ruchu pojedynczej cząstki

W celu wyprowadzenia równania ruchu pojedynczej cząstki wykorzystano metodę Maxey’a i Riley’a [118]. Przyjmuje się, że cząstka materiału stałego ma średnicę d_p znacznie mniejszą niż charakterystyczna długość L_0 w przepływie płynu. Cząstka, o gęstości ρ_p i położeniu $\mathbf{x}_p(t)$ środka masy, porusza się z prędkością

$$\mathbf{u}_p(t) = \frac{d\mathbf{x}_p}{dt} \quad (4.1)$$

w niejednorodnym polu prędkości $\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t)$ płynu w przepływie nieściśliwym. Ogólne równanie ruchu pojedynczej cząstki ma postać (rów. (2.25))

$$\rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \mathbf{g} + \oint_{S_p} (p_f \mathbb{I} + \boldsymbol{\tau}_f) \mathbf{n} \, ds, \quad (4.2)$$

gdzie $\frac{d}{dt}$ jest pochodną materialną wzdłuż trajektorii ruchu cząstki. Całkowanie przeprowadzane jest po powierzchni S_p cząstki, tzn. $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p| = \frac{d_p}{2}$. Tensor naprężeń stycznych $\boldsymbol{\tau}_f$ płynu zdefiniowany jest przez równanie (1.4).

Ciśnienie p_f i prędkość $\mathbf{u}_f$ płynu w równaniach (4.2) i (1.4) są rozwiązaniami ogólnego problemu przepływu zewnętrznego dla znanego przepływu w nieskończoności (tzn. przepływu niezaburzonego obecnością cząstki) i właściwych warunków brzegowych na powierzchni poruszającej się cząstki. Dla

4.1. Równania ruchu pojedynczej cząstki

małej cząstki poruszającej się w nieściśliwym przepływie płynu lepkiego, odpowiednie warunki brzegowe są prawidłowo określone przez warunek braku poślizgu prędkości płynu na powierzchni cząstki. Równanie zachowania masy i pędu fazy ciągłej są dobrze znanymi równaniami ciągłości i Naviera–Stokesa:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0, \quad (4.3)$$

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + \mathbf{u}_f \cdot \nabla \mathbf{u}_f \right) = -\nabla p_f + \mu_f \Delta \mathbf{u}_f + \rho_f \mathbf{g}. \quad (4.4)$$

Warunek brzegowy braku nieciągłości prędkości płynu na powierzchni cząstki ma postać:

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t) \big|_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p|=\frac{1}{2}d_p} = \mathbf{u}_p(t), \quad (4.5)$$

oraz równanie stawiane w pewnej odległości od powierzchni cząstki:

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t) \big|_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p| \gg \frac{1}{2}d_p} = \mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}, t), \quad (4.6)$$

gdzie $\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}, t)$ jest niezakłóconym obecnością cząstki polem prędkości płynu odpowiednio oddalonym od powierzchni cząstki.

Obecność cząstki w płynie wywołuje lokalne zakłócenie prędkości $\mathbf{u}_f^0$ płynu warunkiem brzegowym (4.5). Mając na uwadze znacząco małe wymiary cząstki można przyjąć, że prędkości $\mathbf{u}_f$ i ciśnienia p_f płynu można przedstawić jako sumę dwóch niezależnych od siebie składników: składnika od niezakłóconego pola prędkości i ciśnienia płynu ($\mathbf{u}_f^0, p_f^0$), oraz wywołanego warunkiem brzegowym na powierzchni cząstki składnika od lokalnie zakłóconego pola prędkości i ciśnienia ($\mathbf{u}_f^d, p_f^d$), a zatem:

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_f^0 + \mathbf{u}_f^d, \quad (4.7)$$

i

$$p_f = p_f^0 + p_f^d. \quad (4.8)$$

Całkę z równania (4.2) można przedstawić następnie jako sumę dwóch całek:

$$\oint_{S_p} (-p_f \mathbb{I} + \boldsymbol{\tau}_f) \mathbf{n} \, ds = \underbrace{\oint_{S_p} (-p_f^0 \mathbb{I} + \boldsymbol{\tau}_f^0) \mathbf{n} \, ds}_{\mathbf{F}^0} + \underbrace{\oint_{S_p} (-p_f^d \mathbb{I} + \boldsymbol{\tau}_f^d) \mathbf{n} \, ds}_{\mathbf{F}^d}, \quad (4.9)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\tau}_f^0 = \mu_f (\nabla \mathbf{u}_f^0 + (\nabla \mathbf{u}_f^0)^T),$$

4.1. Równania ruchu pojedynczej cząstki

i

$$\boldsymbol{\tau}_f^d = \mu_f (\nabla \mathbf{u}_f^d + (\nabla \mathbf{u}_f^d)^T) .$$

Pierwsza całka po prawej stronie równości (4.9) jest siłą $\mathbf{F}^0$ od niezakłóconego pola $(\mathbf{u}_f^0, p_f^0)$, a całka druga jest siłą $\mathbf{F}^d$ od zakłóconego pola $(\mathbf{u}_f^d, p_f^d)$. Dla przypadku cząstki o średnicy d_p znacznie mniejszej niż charakterystyczna długość L_0 wyróżniana w przepływie, czyli:

$$d_p \ll L_0 , \quad (4.10)$$

siłą $\mathbf{F}^0$ przyjmuje postać [118]

$$\mathbf{F}^0 = \frac{\pi d_p^3}{6} \rho_f \left(\frac{d\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}_p, t)}{dt} - \mathbf{g} \right) . \quad (4.11)$$

Zakłócone pole $(\mathbf{u}_f^d, p_f^d)$, określające siłę $\mathbf{F}^d$, wynika z rozwiązania odpowiednich równań przepływu zakłóconego [118]. Niestety, pełne analityczne rozwiązanie równań przepływu zakłóconego nie jest możliwe. Jednakże, w przypadku dostatecznie małego rozmiaru cząstki, zagadnienie przepływu zakłóconego sprowadza się do niestacjonarnego przepływu Stokesa, rozwiązanie którego ważne jest jedynie dla małych liczb Reynoldsa ($Re < 1$). Wyrażenie na siłę $\mathbf{F}^d$, wywołaną przez lokalne zakłócony przepływ $(\mathbf{u}_f^d, p_f^d)$, otrzymano w postaci [118]

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^d = & 3\pi d_p \mu_f (\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{u}_p) + \frac{\pi d_p^3}{12} \rho_f \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{u}_p) + \\ & + \frac{3}{2} d_p^2 \sqrt{\pi \mu_f \rho_f} \int_0^t \frac{d(\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}_p, \zeta) - \mathbf{u}_p)}{\sqrt{t - \zeta}} d\zeta . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Kolejne człony sumy prawej strony równości (4.12) to odpowiednio siła oporu Stokesa, siła mas stowarzyszonych i siła Basseta. Jednakże udziały siły Basseta i siły nośnej mogą być pominięte w dalszych rozważaniach w przypadku małej cząstki (cytowanie w [118]¹). Zauważmy, że zakłócone pole $(\mathbf{u}_f^d, p_f^d)$ nie pojawia się jawnie w (4.12), które wyraża się całkowicie przez niezakłócone pole $(\mathbf{u}_f^0, p_f^0)$. Zatem $\mathbf{F}^d$ jest wyrażane przy użyciu prędkości $\mathbf{u}_p$ cząstki i prędkości $\mathbf{u}_f^0$ płynu w położeniu $(\mathbf{x}_p, t)$ cząstki.

¹J.J.M. Magnaudet: *The forces acting on bubbles and rigid particles*, in Proc. of ASME Fluid Eng. Div. Summer Meeting, p. 1, June 1997

4.1. Równania ruchu pojedynczej cząstki

Podsumowując, podstawienie (4.11) i (4.12) do (4.9) i (4.2) daje następujące równanie ruchu cząstki:

$$\begin{aligned} \rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} &= \frac{\pi d_p^3}{6} \mathbf{g}(\rho_p - \rho_f) + \frac{\pi d_p^3}{6} \rho_f \frac{d\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}_p, t)}{dt} + \\ &+ 3\pi d_p \mu_f (\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{u}_p) + \frac{\pi d_p^2}{12} \rho_f \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{u}_p) + \\ &+ \frac{3}{2} d_p^2 \sqrt{\pi \mu_f \rho_f} \int_0^t \frac{d(\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}_p, \xi) - \mathbf{u}_p)}{\sqrt{t - \xi}} d\xi. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ruch cząstki (równania (4.1) i (4.2)) jest sprzężony z dynamiką ośrodka ciągłego (płynu) $(\mathbf{u}_f^0, p_f^0)$ przez siły $\mathbf{F}^0$ i $\mathbf{F}^d$. Równanie Maxey'a–Riley'a (4.13) jest szeroko wykorzystywane w badaniach ruchu cząstek w przepływach turbulentnych. Jednakże rozważanie wszystkich członów po prawej stronie równości (4.13) może nastręczać trudności i wymagać znacznych zasobów obliczeniowych.

Dzieląc stronami równość (4.13) przez masę $m_p = \rho_p \frac{\pi d_p^3}{6}$ cząstki otrzymuje się

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} &= \mathbf{g} \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_p} \right) + \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{d\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}_p, t)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{u}_p) + \\ &+ \frac{1}{\tau_V} (\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{u}_p) + \sqrt{\frac{9}{2\pi}} \sqrt{\frac{\rho_f}{\rho_p}} \frac{1}{\sqrt{\tau_V}} \int_0^t \frac{d(\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}_p, \xi) - \mathbf{u}_p)}{\sqrt{t - \xi}} d\xi, \end{aligned} \quad (4.14)$$

gdzie

$$\tau_V = \frac{\rho_p d_p^2}{18 \mu_f} \quad (4.15)$$

jest czasem relaksacji cząstki. W niniejszej pracy rozważany jest przepływ cząstek materiału stałego w gazie, dla którego stosunek gęstości ośrodka ciągłego (płynu) i gęstości materiału stałego cząstki jest pomijalnie mały ($\frac{\rho_f}{\rho_p} \sim 10^{-3}$), oraz siły inne niż siła oporu Stokesa i siła grawitacji zasadniczo nie wpływają na ruch cząstki [5, 36, 119, 146, 24, 73]. Równanie (4.14) może być więc uproszczone do

$$\frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \frac{1}{\tau_V} (\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{u}_p) + \mathbf{g}. \quad (4.16)$$

Jednakże dla przepływów cząstek w cieczy, gdzie wartości gęstości obu ośrodków są porównywalne, należy stosować równanie (4.14).

4.1.1 Siła stacjonarnego dynamicznego oporu płynu

Niestety równania (4.14) lub (4.16) nie uwzględniają takich ważnych z punktu widzenia dynamiki efektów, jak wpływ zmian wartości liczby Reynoldsa poza zakres przepływu Stokesa lub wpływ oddziaływania cząstek sąsiednich (otaczających daną cząstkę) na ruch pojedynczej cząstki.

Często używane równanie ruchu dla przepływów niepełzających jest otrzymywane przez empiryczną modyfikację siły oporu Stokesa do siły dynamicznego oporu płynu:

$$\mathbf{F}_D = \frac{1}{2} C_D \frac{\pi d_p^2}{4} \rho_f |\mathbf{u}_f^0 - \mathbf{u}_p| (\mathbf{u}_f^0 - \mathbf{u}_p), \quad (4.17)$$

gdzie C_D jest współczynnikiem oporu dla stacjonarnego przepływu płynu. Współczynnik oporu określany jest jako funkcja liczby Reynoldsa dla cząstki:

$$\text{Re}_p = \frac{\rho_f d_p |\mathbf{u}_f^0 - \mathbf{u}_p|}{\mu_f}. \quad (4.18)$$

Na rysunku 4.1 przedstawiono zmianę wartości współczynnika oporu dla kulistej nie wirującej kuli. Z zależności tej można wyróżnić charakterystyczne obszary zmienności współczynnika oporu:

- Dla małych wartości liczb Reynoldsa, współczynnik oporu zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do Re_p . Stan ten odpowiada przepływowi Stokesa. Współczynnik oporu wyraża się przez wzór analityczny podany przez Stokesa (1851):

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}_p}. \quad (4.19)$$

- W obszarze przejściowym ($\text{Re}_p \in (0.5, 1000)$) efekty bezwładnościowe zaczynają dominować w zjawisku. Dla tego nieliniowego obszaru, na podstawie badań eksperymentalnych, zaproponowano wiele zależności [22]. Często używaną jest zależność podana przez Schillera and Naumanna² w postaci [22]:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}_p} (1 + 0.15 \text{Re}_p^{0.687}). \quad (4.20)$$

²Schiller L., Naumann A.: *Über die grundlegenden Brechungen bei der Schwerkraftaufbereitung*, Ver. Deut. Ing., 77, 318-320, 1933

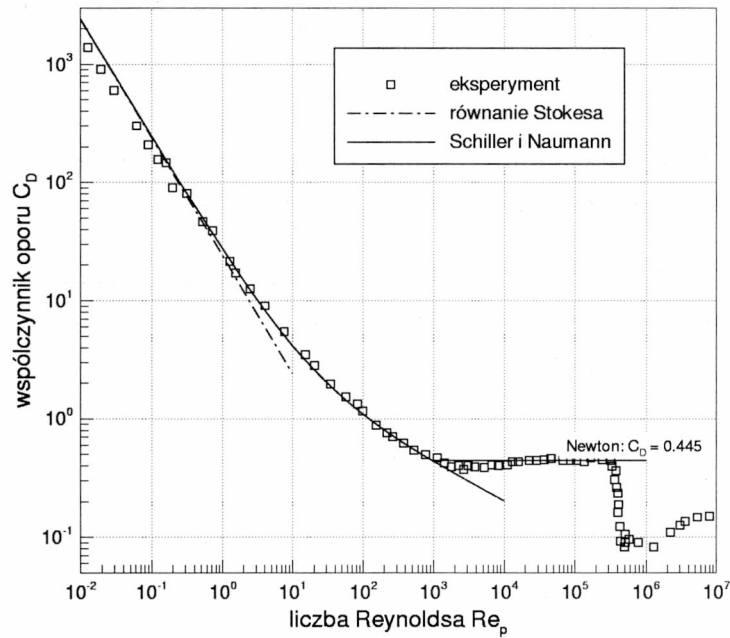
4.1. Równania ruchu pojedynczej cząstki

- Powyżej wartości $Re_p \simeq 1000$ współczynnik oporu osiąga prawie stałą wartość. Obszar ten określany jest obszarem bezwładnościowym lub Newtona:

$$C_D \approx 0.445. \quad (4.21)$$

- Wraz ze zwiększaniem wartości liczby Reynoldsa, obserwuje się nagłe zmniejszenie wartości C_D dla wartości krytycznej $Re_p^{cr} \simeq 3.0 \cdot 10^5$, spowodowane przejściem laminarnej warstwy przyściennej w turbulentną warstwę przyścienną wokół cząstki.
- W zakresie nadkrytycznym ($Re_p > 4.0 \cdot 10^5$), współczynnik oporu zaczyna wzrastać w sposób ciągły. W większości zastosowań praktycznych, obszar ten nie jest rozpatrywany.

Na rys. 4.1 zestawiono wyniki zależności C_D od wartości Re_p .



Rys. 4.1. Współczynnik oporu kuli w zależności od liczby Reynoldsa

Z uwzględnieniem współczynnika oporu, równanie ruchu cząstki może być zapisane w następującej postaci:

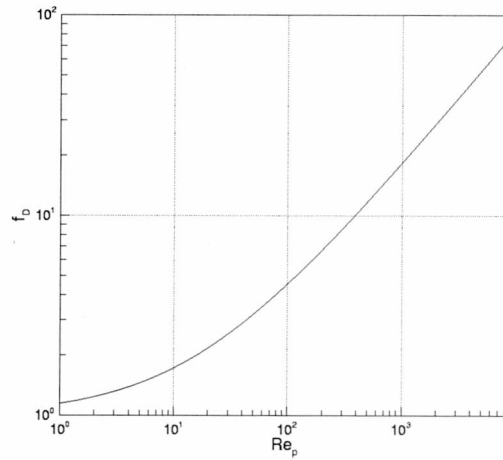
$$\frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \frac{f_D}{\tau_V} (\mathbf{u}_f^0(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{u}_p) + \mathbf{g}, \quad (4.22)$$

4.1. Równania ruchu pojedynczej cząstki

w której f_D jest *unormowanym współczynnikiem oporu* pojedynczej cząstki, określonym jako iloraz współczynnika oporu przez współczynnik oporu Stokesa [24]:

$$f_D = \frac{C_D \operatorname{Re}_p}{24}. \quad (4.23)$$

Oczywiście dla przepływu Stokesa $f_D \rightarrow 1$. Zmiany unormowanego współczynnika oporu w zależności od liczby Reynoldsa przedstawione są na rys. 4.2.



Rys. 4.2. Unormowany współczynnik oporu kuli w zależności od liczby Reynoldsa [24]

Istnieje wiele dostępnych w literaturze korelacji dla f_D (lub C_D) jako funkcji liczby Reynoldsa. Przykładowa korelacja, dokładna dla całego obszaru podkrytycznego, ma następującą postać [24]

$$f_D = 1 + 0.15 \operatorname{Re}_p^{0.687} + 0.0175(1 + 4.25 \cdot 10^4 \operatorname{Re}_p^{-1.16})^{-1}. \quad (4.24)$$

Powyższa korelacja jest rozszerzającą modyfikacją formuły Schillera-Naumanna i dostarcza wartości f_D z błędem $\pm 6\%$ względem wyników eksperymentalnych dla całego zakresu podkrytycznego.

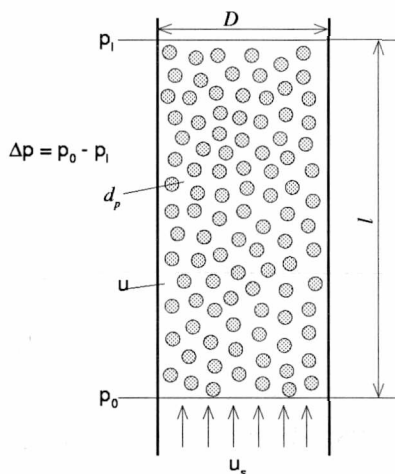
Często wykorzystywaną w praktyce inżynierskiej jest formuła Dallavalle'a [54] w postaci

$$C_D = (0.63 + 4.8 \operatorname{Re}_p^{-0.5})^2, \quad (4.25)$$

słuszna dla zakresu liczb Reynoldsa występujących dla przepływów fluidalnych.

4.2 Siła oporu płynu w zespole cząstek

Informacje na temat siły oporu w zespole cząstek są bardzo ubogo prezentowane w literaturze. Modele analityczne są trudne, ponieważ muszą one uwzględniać oddziaływanie powierzchni każdej cząstki. Badania eksperymentalne są niedostatecznie dokładne ze względu na utrudnienia pomiarowe siły oporu działającej na indywidualną cząstkę i pomiaru lokalnego pola prędkości wokół cząstki w zespole cząstek. Większość danych o sile oporu cząstki uzyskano z badań nad fluidyzacją cząstek stałych. Na rysunku 4.3 przedstawiono, w sposób uproszczony, kolumnę fluidyzacyjną. Założono przy tym, że średnica d_p cząstek pozostających w spoczynku jest znacznie mniejsza od stałej średnicy D kolumny fluidyzacyjnej, w której złożę cząstek jest umieszczone. Dodatkowo założono, że cząstki są rozmieszczone statystycznie jednorodnie w złożu cząstek z objętościowym udziałem płynu równym ε_f .



Rys. 4.3. Kolumna fluidyzacyjna z cząstkami

Ergun, w swej klasycznej pracy³ dotyczącej spadku ciśnienia w złożu fluidalnym, podaje następującą zależność [10]

$$\frac{\Delta p}{l} = 150 \frac{\mu u_s}{d_p^2} \frac{(1 - \varepsilon_f)^2}{\varepsilon_f^3} + \frac{7}{4} \frac{\rho_f u_s^2}{d_p} \frac{1 - \varepsilon_f}{\varepsilon_f^3}, \quad (4.26)$$

³Ergun S., Chem. Eng. Prog., 48, pp. 89-94, 1952

4.2. Siła oporu płynu w zespole cząstek

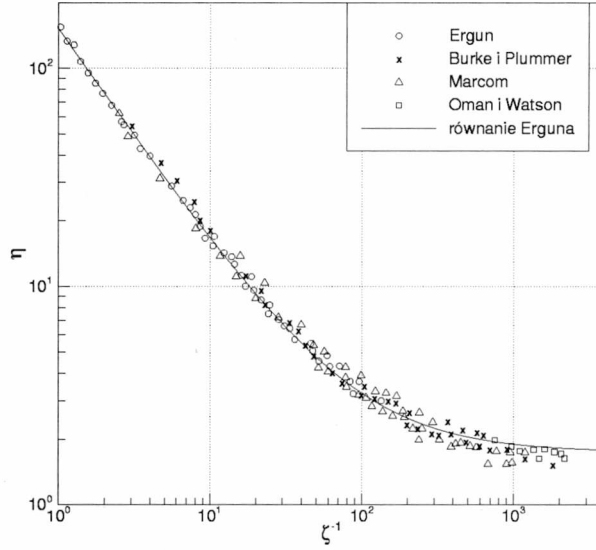
gdzie Δp jest spadkiem ciśnienia na długości l kolumny fluidyzacyjnej, a u_s jest prędkością fluidyzacji gazu przed złożem cząstek, związaną z prędkością u płynu między cząstkami w złożu zależnością $u_s = \varepsilon_f u$.

Na rysunku 4.4 przedstawiono równanie Erguna (4.26) w bezwymiarowej postaci

$$\eta = 150\zeta + \frac{7}{4}, \quad (4.27)$$

w której

$$\eta = \frac{\Delta p}{\rho_f u_s^2} \frac{d_p}{l} \frac{\varepsilon^3}{1 - \varepsilon} \quad \text{ i } \quad \zeta = \frac{\mu(1 - \varepsilon)}{d_p \rho_f u_s}. \quad (4.28)$$



Rys. 4.4. Równanie Erguna dla złoża cząstek [10]

Po uwzględnieniu zależności $u_s = \varepsilon_f(u - u_p)$, równanie (4.26) przyjmie postać

$$\frac{\Delta p}{l} = 150 \frac{\mu(u - u_p)}{d_p^2} \frac{(1 - \varepsilon_f)^2}{\varepsilon_f^2} + \frac{7}{4} \frac{\rho_f(u - u_p)|u - u_p|}{d_p} \frac{1 - \varepsilon_f}{\varepsilon_f}. \quad (4.29)$$

Powyższe równanie (4.29) umożliwia wyprowadzenie wzoru na siłę oporu F_D , a następnie wzoru na unormowany współczynnik oporu f_D dla pojedynczej cząstki w zespole cząstek. Foscolo [44] podaje relację między siłą oporu pojedynczej cząstki a spadkiem ciśnienia w kolumnie fluidyzacyjnej w postaci:

$$F_D = \frac{\pi d_p^3}{6} \frac{\varepsilon_f}{1 - \varepsilon_f} \frac{\Delta p}{l}. \quad (4.30)$$

4.2. Siła oporu płynu w zespole cząstek

Korzystając dalej z wzoru na siłę oporu:

$$F_D = m_p \frac{f_D}{\tau_V} (u^0(\mathbf{x}_p, t) - u_p) \quad (4.31)$$

i równań (4.29) i (4.30), otrzymano formułę umożliwiającą wyznaczenie unormowanego współczynnika oporu w postaci

$$f_D^{Er} = \frac{1}{18} \left(150 \frac{1 - \varepsilon_f}{\varepsilon_f} + \frac{7}{4} \text{Re}_p \right), \quad (4.32)$$

która powinna być stosowana dla $\varepsilon_f < 0.8$ [57].

Równanie Erguna jest jednym z wielu równań, które występują w dostępnej literaturze opisującej złoża fluidalne. Dla przykładu, Tallmadge [151] podaje zależność

$$\eta = 150\zeta + 4.2\sqrt[6]{\zeta}, \quad (4.33)$$

w której η i ζ zostały zdefiniowane przez (4.28). Równanie (4.33) pozwala wyznaczyć unormowany współczynnik oporu jako

$$f_D^{Ta} = \frac{1}{18} \left(150 \frac{1 - \varepsilon_f}{\varepsilon_f} + 4.2 \sqrt[6]{\text{Re}_p^5 \frac{1 - \varepsilon_f}{\varepsilon_f}} \right), \quad (4.34)$$

który powinien być stosowany dla $0.1 < \frac{d_p \rho_f u_s}{\mu_f (1 - \varepsilon_f)} < 10^5$.

Opierając się na pracy Wen'a i Yu [159], Di Felice [28, 53] opisuje siłę oporu pojedynczej cząstki w zespole cząstek z wykorzystaniem *zmodyfikowanego unormowanego współczynnika oporu* w następującej postaci:

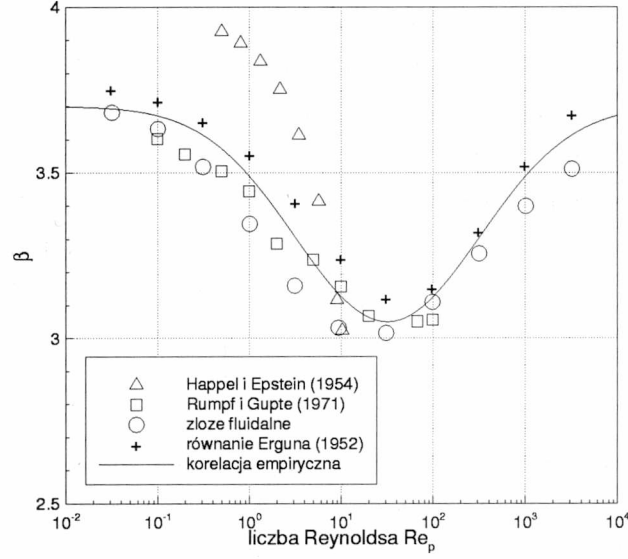
$$f_D^{Di} = f_D^0 \cdot g(\varepsilon_f, \text{Re}_p), \quad (4.35)$$

który jest iloczynem unormowanego współczynnika oporu f_D^0 izolowanej pojedynczej cząstki i *funkcji wypełnienia* $g(\varepsilon_f, \text{Re}_p)$ [112, 172], która rozważana jest jako tylko funkcja udziału objętościowego płynu ε_f i liczby Reynoldsa Re_p . Analizując dostępne w literaturze różne dane, Di Felice zokreślił postać funkcji wypełnienia w następującej formie

$$g(\varepsilon_f) = \varepsilon_f^{-\beta}, \quad (4.36)$$

gdzie β jest funkcją liczby Reynoldsa Re_p . Na rysunku 4.5 przedstawiono wykładnik β dla wartości liczb Reynoldsa najczęściej spotykanych w rzeczywistych przepływach. Wartość β wynosi około 3.65 dla małych i dużych

4.3. Model ciągłego oddziaływania cząstek



Rys. 4.5. Wykładnik β jako funkcja Re_p [28]

wartości liczb Reynoldsa, a następnie maleje do 3.1 dla $Re_p = 30$. Di Felice zaleca dla liczb Reynoldsa z zakresu od 10^{-2} do 10^4 użycie następującej korelacji empirycznej na wykładnik β :

$$\beta = 3.7 - 0.65 \exp \left[-\frac{(1.5 - \log Re_p)^2}{2} \right]. \quad (4.37)$$

Obecny stan wiedzy o sile oporu cząstki w zespole cząstek jest ciągle niewystarczający i bardzo prymitywny, ale zależność zaproponowana przez Di Felice jest zalecana do użycia.

4.3 Model ciągłego oddziaływania cząstek

Zderzenia między cząstkami są dominującym zjawiskiem wpływającym na dynamikę gęstych warstw fluidalnych. Podobnie do metody E-E, w metodzie „wielofazowej cząstki w komórce” oddziaływania (zderzenia) między cząstkami modelowane są jako ciągły stan naprężeń uciąglonego ośrodka materiału stałego, jakim są cząstki. Postać tensora $\mathbf{T}_p$ naprężenia ośrodka stałego przedstawia równanie [27, 67]

$$\mathbf{T}_p = (-p_p + \lambda_p \nabla \cdot \mathbf{u}_p) \mathbf{I} + 2\mu_p \mathbf{D}_p.$$

4.4. Oddziaływanie między płynem a cząstkami

Jak wskazuje Harris i Crighton [67], ciśnienie (napężenie normalne) p_p ośrodka stałego powinno być monotonicznie rosnącą funkcją objętościowego udziału cząstek oraz przyjmować wartość zero, gdy $\varepsilon_f = 1$. Ponadto p_p powinno zabezpieczać przed nadmiernym zmniejszeniem objętościowego udziału płynu poniżej krytycznej wartości minimalnej, obserwowanej w przepływach rzeczywistych. Obecnie, metoda MP-PIC opiera się na modelowaniu jedynie części izotropowej tensora, tj. $\mathbf{T}_p = -p_p \mathbf{I}$, gdzie [2, 145, 144, 130, 131]

$$p_p = P_s \frac{\varepsilon_p^\beta}{\varepsilon_{cp} - \varepsilon_p}, \quad (4.38)$$

w którym P_s jest stałą określaną w jednostkach ciśnienia, ε_{cp} maksymalnym objętościowym udziałem cząstek, a β jest taką stałą, że $2 \leq \beta \leq 5$.

Cząstka, pod działaniem obliczonego w oparciu o wzór (4.38) napężenia normalnego, doznaje przyspieszenia $\mathbf{A}_{cp}$, określonego przez wyrażenie

$$\mathbf{A}_{cp} = \frac{1}{\varepsilon_p \rho_p} \nabla \cdot \mathbf{T}_p = -\frac{1}{\varepsilon_p \rho_p} \nabla p_p, \quad (4.39)$$

które stanowi dodatkowy człon w równaniu ruchu cząstki

$$\mathbf{a}_p = \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = D_p(\mathbf{u}_f(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{u}_p) + \mathbf{g} + \mathbf{A}_{cp}, \quad (4.40)$$

z

$$D_p = \frac{f_D}{\tau_V}. \quad (4.41)$$

4.4 Oddziaływanie między płynem a cząstkami

Jeżeli przepływ cząstek materiału stałego i płynu zachodzi bez procesu wymiany masy i ciepła między fazami, to jedynym mechanizmem oddziaływania cząstek z płynem jest wymiana pędu między fazami. W równaniu ruchu cząstki wymiana pędu między płynem a cząstką opisana jest przez składnik oporu dynamicznego, który wywiera płyn na cząstkę. W celu wyznaczenia właściwej postaci oddziaływania międzyfazowego w równaniu ruchu płynu, ośrodek rozproszony w postaci cząstek należy potraktować jak ośrodek ciągły, do opisanego którego wykorzystuje się *funkcję rozkładu* $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_p, \rho_p, V_p, t)$ rozważaną w teorii kinetycznej [23, 57, 38, 34].

4.4. Oddziaływanie między płynem a cząstkami

Przyjęto, że masa każdej cząstki pozostaje stała w czasie (brak wymiany masy między cząstkami i płynem), lecz cząstki mogą występować w różnych rozmiarach i posiadać różne gęstości. Ewolucja funkcji rozkładu podlega następującemu równaniu Liouville'a [2, 145, 144, 130, 131]

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{u}_p) + \nabla_{\mathbf{u}_p} \cdot (\psi \mathbf{a}_p) = 0, \quad (4.42)$$

gdzie $\nabla_{\mathbf{u}_p} \cdot$ jest operatorem dywergencji względem składowych prędkości cząstki, a $\mathbf{a}_p$ określone jest równaniem (4.40).

Funkcja rozkładu ψ scałkowana po masie $m_p = \rho_p V_p$ i prędkości $\mathbf{u}_p$ cząstek określa koncentrację n_p cząstek (prawdopodobna liczba cząstek odniesiona do objętości jednostkowej w punkcie $\mathbf{x}$ i czasie t)

$$n_p(\mathbf{x}, t) = \int \int \int \psi d\rho_p dV_p d\mathbf{u}_p. \quad (4.43)$$

Wykorzystując funkcję rozkładu można określić udział objętościowy cząstek jako

$$\varepsilon_p(\mathbf{x}, t) = \int \int \int \psi V_p d\rho_p dV_p d\mathbf{u}_p. \quad (4.44)$$

Po przemnożeniu równania (4.42) przez $\rho_p V_p$ i scałkowaniu po masie i prędkości cząstek, otrzymano równanie zachowanie masy dla cząstek [145]

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon_p \rho_p}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\varepsilon_p \rho_p} \bar{\mathbf{u}}_p) = 0, \quad (4.45)$$

gdzie $\bar{\mathbf{u}}_p$ jest średnią prędkością cząstek, określoną jako

$$\bar{\mathbf{u}}_p = \frac{1}{\overline{\varepsilon_p \rho_p}} \int \int \int \psi \rho_p V_p \mathbf{u}_p d\rho_p dV_p d\mathbf{u}_p, \quad (4.46)$$

a średnią gęstość cząstek określona jest jako

$$\overline{\varepsilon_p \rho_p} = \int \int \int \psi \rho_p V_p d\rho_p dV_p d\mathbf{u}_p. \quad (4.47)$$

Po pomnożeniu natomiast równania (4.42) przez $\rho_p V_p \mathbf{u}_p$ i scałkowaniu po masie i prędkości cząstek z wykorzystaniem zależności

$$\int \mathbf{u}_p \nabla_{\mathbf{u}_p} \cdot (\psi \mathbf{a}_p) d\mathbf{u}_p = - \int \psi \mathbf{a}_p d\mathbf{u}_p, \quad (4.48)$$

4.4. Oddziaływanie między płynem a cząstkami

otrzyma się równanie zachowania pędu dla cząstek w postaci [145]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\varepsilon_p \rho_p} \bar{\mathbf{u}}_p) + \nabla \cdot (\overline{\varepsilon_p \rho_p} \bar{\mathbf{u}}_p \bar{\mathbf{u}}_p) = -\nabla p_p + \overline{\varepsilon_p \rho_p} \mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad (4.49)$$

gdzie

$$\mathbf{F} = \iiint \Psi \rho_p V_p D_p (\mathbf{u}_f(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{u}_p) d\rho_p dV_p d\mathbf{u}_p \quad (4.50)$$

jest *międzyfazową funkcją transportu pędu*, określającą wymianę pędu między płynem a ciągłym ośrodkiem materiału stałego.

Rozdział 5

Równania ruchu fazy ciągłej

5.1 Definicje i podstawowe prawa

Przepływ wielofazowy charakteryzuje się obecnością nieciągłości własności fizycznych, które występują na powierzchniach międzyfazowych. Przecho-
dząc przez powierzchnię międzyfazową od jednej fazy do innej fazy, własności fizyczne (gęstość, lepkość, itp.) zmieniają swą wartość w sposób nieciągły, mimo że wewnątrz danej fazy rozpatrywana własność jest funkcją ciągłą. Tak więc dla danej wielkości fizycznej f operację różniczkowania należy tak uogólnić, aby można było ją stosować do funkcji nie mających pochodnej w zwykłym sensie. Podstawowe wiadomości o funkcjach uogólnionych, wykorzystywane w niniejszej pracy, zawarte są w Dodatku A.

5.1.1 Funkcja charakterystyczna χ_k

Niech k będzie podzbiorem zbioru Ω . Wówczas funkcję

$$\chi_k(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 & , \text{ jeśli } \mathbf{x} \in k \\ 0 & , \text{ jeśli } \mathbf{x} \in \Omega \setminus k \end{cases} \quad (5.1)$$

nazywamy *funkcją charakterystyczną* lub *funkcją wskaźnikową* [34, 62, 33].

Funkcja charakterystyczna pozwala na „wyróżnienie” k -tej fazy, ignorując pozostałe składniki mieszaniny wielofazowej.

Gradient funkcji charakterystycznej

Gradient funkcji charakterystycznej $\nabla\chi_k$ definiuje się następująco (patrz Dodatek A):

$$\int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \nabla\chi_k(\mathbf{x}, t) \, dv = - \int_{\Omega} \nabla\varphi(\mathbf{x}) \chi_k(\mathbf{x}, t) \, dv = - \int_{\Omega_k} \nabla\varphi(\mathbf{x}) \, dv, \quad (5.2)$$

gdzie $\varphi(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ jest funkcją próbną, Ω_k jest częścią wspólną Ω i k -tej fazy. Wykorzystując twierdzenie Gaussa do równania (5.2), otrzymujemy następującą zależność

$$\int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \nabla\chi_k(\mathbf{x}, t) \, dv = - \int_{\partial\Omega_k} \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{n}_k \, ds, \quad (5.3)$$

w której $\partial\Omega_k$ jest powierzchnią ograniczającą k -tą fazę, $\mathbf{n}_k$ jest wektorem normalnym do $\partial\Omega_k$ wskazującym kierunek na zewnątrz od fazy k .

Równanie topologiczne

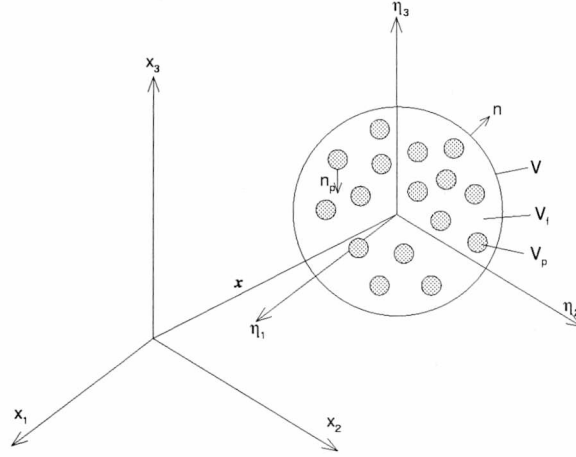
Równanie postaci

$$\frac{d\chi_k}{dt} = \frac{\partial\chi_k}{\partial t} + \mathbf{w}_i \cdot \nabla\chi_k = 0, \quad (5.4)$$

gdzie $\mathbf{w}_i$ jest prędkością powierzchni międzyfazowej, nazywane jest *równaniem topologicznym* [34, 33, 62]. Stanowi ono pochodną materialną z χ_k unoszoną przez powierzchnię międzyfazową. Wyprowadzenie równania topologicznego podano w Dodatku B.

5.1.2 Uśrednianie po przestrzeni

Rozważmy kulę o środku w punkcie $\mathbf{x}$, zawierającą płyn (ośrodek ciągły) wraz z unoszonymi przez ten płyn cząstkami (rys. 5.1). Zdefiniujmy lokalny układ współrzędnych η_1, η_2, η_3 o początku w punkcie $\mathbf{x}$, którego osie są odpowiednio równoległe z x_1, x_2, x_3 . Uśrednione po objętości kuli własności fizyczne są przypisane dla środka $\mathbf{x}$. Objętość kuli powinna być na tyle duża, że dalsze zwiększanie objętości nie powoduje już zmian wartości wielkości uśrednionych. Jednakże rozmiary kuli nie powinny być porównywalne z rozmiarami obszaru objętego przepływem. Ponieważ objętość V kuli składa się



Rys. 5.1. Objętość kontrolna zawierająca płyn i cząstki [62]

z objętości V_f płynu i objętości V_p cząstek, to w zależności od przyjętej do uśredniania objętości, wyróżnia się dwa rodzaje uśrednień [24, 62, 133].

Średnia objętościowa z wielkości $f(\mathbf{x}, t)$ definiowana jest jako

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) d\mathbf{x}_\eta, \quad (5.5)$$

gdzie obszar całkowania $V = V_f + V_p$ nie zależy od czasu t . Jednakże objętości V_f i V_p będą zależeć od $\mathbf{x}$ i t podczas przepływu.

Fazowa średnia objętościowa z wielkości $f(\mathbf{x}, t)$ definiowana jest jako

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_k(\mathbf{x}, t)} \int_{V_k(\mathbf{x}, t)} f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) d\mathbf{x}_\eta, \quad (5.6)$$

gdzie obszar całkowania zależy od czasu i zmiennej przestrzennej. Średnia fazowa opisuje średnie własności k -tej fazy uśrednione tylko w obszarze występowania tej fazy.

Dla potrzeb dalszej analizy, rozważmy średnią objętościową z $\chi_k f$:

$$\overline{\chi_k f}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \int_V \chi_k(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) d\mathbf{x}_\eta = \frac{1}{V} \int_{V_k(\mathbf{x}, t)} f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) d\mathbf{x}_\eta, \quad (5.7)$$

5.1. Definicje i podstawowe prawa

ponieważ $\chi_k = 1$ tylko w obszarze k -tej fazy. Wykorzystując zależność (1.8), równanie (5.7) zapisujemy jako

$$\overline{\chi_k f}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_k(\mathbf{x}, t) \cdot \langle f(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (5.8)$$

W celu zastosowania metody uśredniania po przestrzeni do równań ruchu, należy przedstawić prawa związane z uśrednianiem wyrażeń zawierających zmienne i ich pochodne. Szczególnie ważne są relacje między uśrednionymi po przestrzeni wielkościami (zmienne i pochodne) i pochodnymi po przestrzeni lub czasie ze zmiennych uśrednionych. Reguły te nazywane są jako prawa Reynoldsa, Gaussa i Leibnitza [34, 33]:

Reguły Reynoldsa

$$\overline{c_1} = c_1, \quad (5.9)$$

$$\overline{c_1 f_1 + c_2 f_2} = c_1 \overline{f_1} + c_2 \overline{f_2}, \quad (5.10)$$

$$\overline{\overline{f_1} f_2} = \overline{f_1} \overline{f_2}, \quad (5.11)$$

gdzie c_1 i c_2 oznaczają stałe, a f_1 i f_2 dowolne funkcje.

W szczególności, jeśli $f_2 \equiv 1$, to $\overline{\overline{f_1}} = \overline{f_1}$.

Reguła Gaussa

$$\overline{\chi_k \nabla f} = \nabla \overline{\chi_k f} - \overline{f_{ki} \nabla \chi_k}, \quad (5.12)$$

gdzie f_{ki} oznacza wartość wielkości f_k brana na powierzchni międzyfazowej.

Reguła Leibnitza

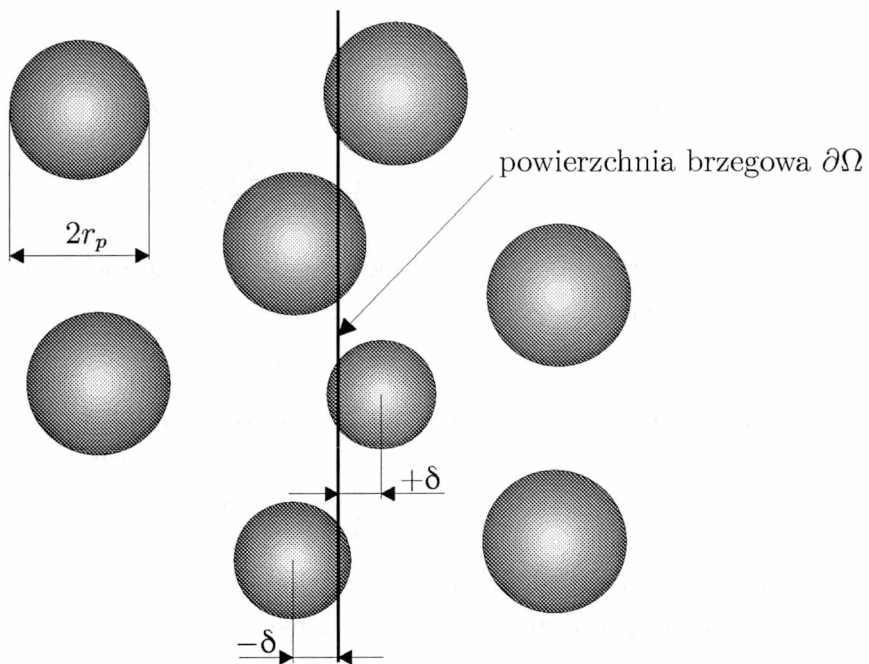
$$\overline{\chi_k \frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k f} - \overline{f \frac{\partial \chi_k}{\partial t}}. \quad (5.13)$$

Wyprowadzenie reguł Gaussa i Leibnitza przedstawiono w Dodatku C.

5.1.3 Cząstki brzegowe

Uśrednione równania ruchu są wynikiem zastosowania praw uśredniania do objętości kontrolnej, która jest ograniczona powierzchnią brzegową. Powierzchnia ta może jednak przechodzić przez tzw. *cząstki brzegowe* [24], które znajdują się na brzegu objętości kontrolnej. Cząstki brzegowe odpowiedzialne są za zmniejszenie efektywnej powierzchni przepływu płynu przez powierzchnię brzegową. Należy więc uwzględnić ich wpływ w procesie transportu pędu między poszczególnymi fazami.

Na rysunku 5.2 przedstawiono część powierzchni brzegowej objętości kontrolnej. Powierzchnia brzegowa, o polu $A = |\partial\Omega|$, przecina pewną ilość cząstek. Całkowite pole A_b powierzchni przecinanych cząstek stanowi *powierzchnię blokującą*, która nie jest dostępna dla przepływu płynu. Dla potrzeb dalszej analizy, niezbędnym elementem pracy staje się wyznaczenie udziału powierzchni blokującej w całkowitym polu powierzchni brzegowej, tj. wyznaczenie ilorazu $\frac{A_b}{A}$, który – jak się okazuje – zależy od udziału objętościowego cząstek.



Rys. 5.2. Powierzchnia brzegowa wraz z cząstkami [24]

5.1. Definicje i podstawowe prawa

Zakłada się, że wszystkie cząstki są kształtu kulistego o jednakowym promieniu r_p . Pole powierzchni A_c przekroju pojedynczej cząstki przecinanej powierzchnią brzegową określa wzór

$$A_c = \pi(r_p^2 - \delta^2), \quad (5.14)$$

gdzie δ jest odległością środka cząstki od powierzchni brzegowej. Środki cząstek brzegowych znajdują się w przestrzeni wokół powierzchni brzegowej w odległości r_p po obu stronach powierzchni. Prawdopodobieństwo, że cząstka znajduje się w odległości δ od powierzchni określa rozkład jednostajny

$$f(\delta) = \begin{cases} \frac{1}{2r_p} & , \text{ jeśli } |\delta| \leq r_p \\ 0 & , \text{ jeśli } |\delta| > r_p \end{cases}. \quad (5.15)$$

Jeśli powierzchnia brzegowa przecina N cząstek, to blokująca powierzchnia cząstek (całkowita powierzchnia przecinanych cząstek) wynosi

$$A_b = N \int_{-r_p}^{+r_p} \pi(r_p^2 - \delta^2) f(\delta) d\delta. \quad (5.16)$$

Po uwzględnieniu (5.15) i scałkowaniu powyższej zależności, otrzymano

$$A_b = N \frac{2\pi}{3} r_p^2. \quad (5.17)$$

Liczba N przecinanych cząstek związana jest z koncentracją n_p cząstek następującą zależnością

$$N = 2r_p A n_p. \quad (5.18)$$

Po podstawieniu powyższej zależności do (5.17) otrzymujemy

$$\frac{A_b}{A} = n_p \frac{4}{3} \pi r_p^3, \quad (5.19)$$

gdzie iloczyn koncentracji cząstek i objętości pojedynczej cząstki jest objętościowym udziałem cząstek. Tak więc

$$\frac{A_b}{A} = \varepsilon_p. \quad (5.20)$$

5.2 Uśrednione równania ruchu płynu

Mnożąc kanoniczne równanie ruchu (1.5) przez χ_f i dokonując uśredniania, otrzymujemy uśrednione równanie ruchu płynu w postaci kanonicznej [34]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\chi_f \rho_f \Psi}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\chi_f \rho_f \mathbf{u}_f \Psi}) - \nabla \cdot (\overline{\chi_f \mathbf{J}}) - \overline{\chi_f \rho_f \mathbf{f}} = \\ = \overline{\rho_f \Psi \left(\frac{\partial \chi_f}{\partial t} + \mathbf{u}_{fi} \cdot \nabla \chi_f \right)} - \overline{\mathbf{J} \cdot \nabla \chi_f}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Po wykorzystaniu uśrednionego z $\rho_f \Psi$ równania topologicznego, prawa strona równania (5.21) redukuje się do postaci

$$\overline{\{\rho_f \Psi (\mathbf{u}_{fi} - \mathbf{w}_i) - \mathbf{J}\} \cdot \nabla \chi_f}, \quad (5.22)$$

co stanowi źródło powierzchniowe Ψ , wywołane przejściem fazowym i strumieniem $\mathbf{J}$ na powierzchni międzyfazowej.

Przyjmując za Ψ , $\mathbf{J}$ i $\mathbf{f}$ odpowiednie wielkości, otrzymujemy odpowiednie uśrednione równania zachowania:

masy

$$\frac{\partial \overline{\chi_f \rho_f}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\chi_f \rho_f \mathbf{u}_f}) = \overline{\rho_f (\mathbf{u}_{fi} - \mathbf{w}_i) \cdot \nabla \chi_f}, \quad (5.23)$$

i pędu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\chi_f \rho_f \mathbf{u}_f}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\chi_f \rho_f \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f}) = \nabla \cdot \overline{\chi_f \mathbf{T}_f} + \overline{\chi_f \rho_f \mathbf{g}} + \\ + \overline{(\rho_f \mathbf{u}_{fi} (\mathbf{u}_{fi} - \mathbf{w}_i) - \mathbf{T}_f) \nabla \chi_f}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

5.2.1 Definicja zmiennych uśrednionych

Zmienne uśrednione opisują własności makroskopowe płynu z uwzględnieniem obecności w nim innej fazy (np. cząstek stałych). Uzyskuje się w ten sposób nowy ośrodek ciągły (płyn), którego własności fizyczne są różne od płynu jednofazowego.

Uśredniając funkcję charakterystyczną dla płynu, otrzymujemy jedną z ważniejszych wielkości opisujących ośrodek wielofazowy, tzn. udział objętościowy płynu ε_f w postaci:

$$\varepsilon_f = \overline{\chi_f}. \quad (5.25)$$

5.2. Uśrednione równania ruchu płynu

Wszystkie pozostałe zmienne uśrednione określone są jako średnie ważone z χ_f lub z $\chi_f \rho_f$ i zgodnie z (5.8) definiowane są jako [33, 34]:

- gęstość uśredniona

$$\langle \rho_f \rangle = \frac{\overline{\chi_f \rho_f}}{\varepsilon_f}, \quad (5.26)$$

- prędkość uśredniona

$$\langle \mathbf{u}_f \rangle = \frac{\overline{\chi_f \rho_f \mathbf{u}_f}}{\varepsilon_f \langle \rho_f \rangle}, \quad (5.27)$$

- uśredniony tensor naprężeń

$$\langle \mathbf{T}_f \rangle = \frac{\overline{\chi_f \mathbf{T}_f}}{\varepsilon_f}, \quad (5.28)$$

- uśredniona siła masowa

$$\langle \mathbf{g} \rangle = \frac{\overline{\chi_f \rho_f \mathbf{g}}}{\varepsilon_f \langle \rho_f \rangle}. \quad (5.29)$$

Obecność powierzchni międzyfazowych zasadniczo zmienia i odróżnia dynamikę ośrodka wielofazowego w porównaniu z przepływem płynu jednofazowego. Przepływające przez powierzchnię międzyfazową strumienie masy i pędu stanowią źródła powierzchniowe, które odpowiadają za oddziaływania między fazami. Powierzchniowe człony źródłowe zdefiniowane są w następujący sposób:

- uśredniony powierzchniowy strumień masy

$$\Gamma_f = \overline{\rho_f (\mathbf{u}_{fi} - \mathbf{w}_i) \cdot \nabla \chi_f}, \quad (5.30)$$

wynikający ze strumienia masy przepływającej przez powierzchnię międzyfazową,

- uśrednione powierzchniowe źródła pędu:

1.:

$$\mathbf{u}_{fi}^m \Gamma_f = \overline{\rho_f \mathbf{u}_{fi} (\mathbf{u}_{fi} - \mathbf{w}_i) \nabla \chi_f}, \quad (5.31)$$

wynikające ze strumienia pędu masy przepływającej przez powierzchnię międzyfazową,

5.2. Uśrednione równania ruchu płynu

2.:

$$\mathbf{M}_f = -\overline{\mathbf{T}_f \nabla \chi_f}, \quad (5.32)$$

wynikające z działania naprężeń normalnych i stycznych na powierzchni międzyfazowej.

Różnica między rzeczywistą (mikroskopową) wielkością nieuśrednioną a wielkością uśrednioną definiuje *pulsację* danej wielkości, oznaczaną tutaj przez „'”. Pulsacja jest funkcją losową położenia $\mathbf{x}$ i czasu t , a jej wartość określona jest w sensie probabilistycznym. Dla przykładu, pulsacja prędkości i pulsacja ciśnienia określone są jako [34, 133]

$$\mathbf{u}'_f = \mathbf{u}_f - \langle \mathbf{u}_f \rangle, \quad (5.33)$$

$$p'_f = p_f - \langle p_f \rangle. \quad (5.34)$$

W odróżnieniu od przepływu jednofazowego, w którym pulsacje wynikają jedynie z turbulencji, w przepływie wielofazowym pulsacje dodatkowo spowodowane są ruchem powierzchni międzyfazowych.

Wykorzystując (5.33) do członu nieliniowego w równaniu (5.24), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \overline{\chi_f \rho_f \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f} &= \overline{\chi_f \rho_f (\langle \mathbf{u}_f \rangle + \mathbf{u}'_f) (\langle \mathbf{u}_f \rangle + \mathbf{u}'_f)} = \\ &= \varepsilon_f \langle \rho_f \rangle \langle \mathbf{u}_f \rangle \langle \mathbf{u}_f \rangle - \varepsilon_f \mathbf{T}_f^V, \end{aligned} \quad (5.35)$$

gdzie

$$\mathbf{T}_f^V = -\frac{\overline{\chi_f \rho_f \mathbf{u}'_f \mathbf{u}'_f}}{\varepsilon_f}. \quad (5.36)$$

5.2.2 Uśrednione równanie ciągłości

Po wprowadzeniu zmiennych uśrednionych, równanie (5.23) przybiera następującą postać

$$\frac{\partial \varepsilon_f \langle \rho_f \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_f \langle \rho_f \rangle \langle \mathbf{u}_f \rangle) = \Gamma_f. \quad (5.37)$$

W niniejszej pracy rozważany jest płyn lepki ($\mathbf{u}_{fi} = \mathbf{w}_i$) w przepływie bez zmian fazowych ($\Gamma_f = 0$), którego gęstość jest stała ($\rho_f(\mathbf{x}, t) = \text{const}$). Wówczas równanie (5.37) redukuje się do postaci

$$\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_f \langle \mathbf{u}_f \rangle) = 0. \quad (5.38)$$

5.2. Uśrednione równania ruchu płynu

Powyższe równanie można otrzymać również w inny prostszy sposób. Stosując bezpośrednio operację uśredniania do iloczynu χ_f z $\nabla \cdot \mathbf{u}_f$, otrzymujemy

$$\overline{\chi_f \nabla \cdot \mathbf{u}_f} = \nabla \cdot \overline{\chi_f \mathbf{u}_f} - \overline{\mathbf{u}_{fi} \cdot \nabla \chi_f} = 0. \quad (5.39)$$

Następnie korzystamy z uśrednionego równania topologicznego (5.4):

$$\overline{\frac{\partial \chi_f}{\partial t} + \mathbf{u}_{fi} \cdot \nabla \chi_f} = \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}_{fi} \cdot \nabla \chi_f} = 0, \quad (5.40)$$

z którego wynika, że

$$-\overline{\mathbf{u}_{fi} \cdot \nabla \chi_f} = \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t}, \quad (5.41)$$

co po zastosowaniu do (5.39) daje pożądaną równanie (5.38). Należy zdawać sobie sprawę z tego, że uzyskany przepływ uśredniony *nie jest przepływem nieściśliwym*, ponieważ, zgodnie z równaniem (5.38), dywergencja z uśrednionego pola prędkości

$$\nabla \cdot (\langle \mathbf{u}_f \rangle) = -\frac{1}{\varepsilon_f} \frac{d\varepsilon_f}{dt}. \quad (5.42)$$

5.2.3 Uśrednione równanie zachowania pędu

Uśrednione równanie zachowania pędu dla płynu ma postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_f \langle \rho_f \rangle \langle \mathbf{u}_f \rangle + \nabla \cdot (\varepsilon_f \langle \rho_f \rangle \langle \mathbf{u}_f \rangle \langle \mathbf{u}_f \rangle) = \\ = \nabla \cdot (\varepsilon_f (\langle \mathbf{T}_f \rangle + \mathbf{T}_f^V)) + \varepsilon_f \langle \rho_f \rangle \langle \mathbf{g} \rangle + \mathbf{M}_f. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Po uśrednieniu równania (1.3), otrzymujemy zależność

$$\langle \mathbf{T}_f \rangle = -\langle p_f \rangle \mathbb{I} + \langle \boldsymbol{\tau}_f \rangle, \quad (5.44)$$

która po podstawieniu do równania (5.43) daje postać uśrednionego równania zachowania pędu wykorzystywaną w dalszej analizie, tj.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_f \langle \rho_f \rangle \langle \mathbf{u}_f \rangle + \nabla \cdot (\varepsilon_f \langle \rho_f \rangle \langle \mathbf{u}_f \rangle \langle \mathbf{u}_f \rangle) = \\ = -\nabla (\varepsilon_f \langle p_f \rangle) + \nabla \cdot (\varepsilon_f (\langle \boldsymbol{\tau}_f \rangle + \mathbf{T}_f^V)) + \varepsilon_f \langle \rho_f \rangle \langle \mathbf{g} \rangle + \mathbf{M}_f. \end{aligned} \quad (5.45)$$

5.3 Równania zamykające

W celu zamknięcia układu uśrednionych równań ruchu płynu, należy dodatkowo podać *równania zamykające*. Należy wyróżnić tutaj równania zamykające w postaci praw konstytutywnych i praw transferu [38]. Równania konstytutywne opisują własności fizyczne ośrodka, a prawa transferu opisują mechanizmy oddziaływania między poszczególnymi fazami.

5.3.1 Efektywny współczynnik lepkości

Wchodzący do równania (5.45) uśredniony tensor naprężeń stycznych $\langle \tau_f \rangle$, będzie modelowany w następujący sposób [24, 7, 71, 10, 38]:

$$\langle \tau_f \rangle = \mu_e (\nabla \langle \mathbf{u}_f \rangle + (\nabla \langle \mathbf{u}_f \rangle)^T), \quad (5.46)$$

gdzie μ_e jest *efektywnym współczynnikiem lepkości*, który opisuje uśredniony przepływ płynu i cząstek jako układu jednofazowego. Efektywny współczynnik lepkości odzwierciedla średnie własności pola prędkości płynu zakłócone go obecnością cząstek.

Historycznie pierwszym badaczem, który rozwinął teorię lepkości zawiesiny cząstek w płynie, był A. Einstein^{1,2}. Rozwazał on taką mieszninę płynu i sztywnych cząstek, że dynamika pojedynczej cząstki nie wpływała na dynamikę przepływu wokół sąsiednich cząstek. Wówczas wzajemne oddziaływanie cząstek na płyn jest sumą oddziaływań poszczególnych cząstek, rozpatrywanych oddzielnie. *Równanie Einsteina* ma następującą postać

$$\frac{\mu_e}{\mu_f} = 1 + \frac{5}{2} \varepsilon_p, \quad (5.47)$$

w którym objętościowy udział cząstek nie powinien przekraczać wartości 0.03. Prekursorskie prace Einsteina podlegały następnie dalszym modyfikacjom. Poniżej zostaną zaprezentowane wybrane formuły, które określają efektywny współczynnik lepkości [38, 10].

¹Einstein A.: *Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen*, Ann. Phys. 19, pp. 289-306, 1906

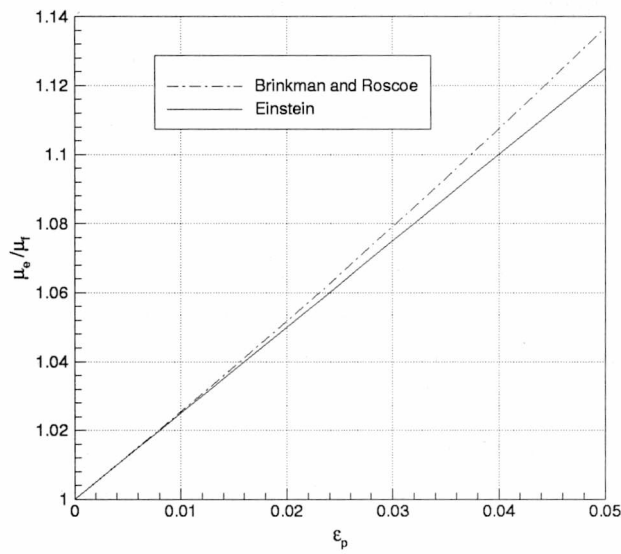
²Einstein A.: *Berichtigung zu meiner Arbeit: Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen*, Ann. Phys. 34, pp. 591-592, 1911

5.3. Równania zamykające

Brinkman³ i niezależnie Roscoe⁴ przedstawili model opisujący efektywny współczynnik lepkości dla małych wartości objętościowego udziału cząstek w postaci

$$\frac{\mu_e}{\mu_f} = (1 - \varepsilon_p)^{-2.5}. \quad (5.48)$$

która, podobnie do równania Einsteina, ma zastosowanie dla niskich wartości objętościowego udziału cząstek. Na rysunku 5.3 przedstawiono porównanie formuły Einsteina z formułą Brinkmana i Roscoe.



Rys. 5.3. Efektywny współczynnik lepkości dla niskich wartości objętościowego udziału cząstek

Dla gęstszych niż $\varepsilon_p = 0.05$ warstw fluidalnych, oddziaływania między cząstkami stają się znaczące i nie można ich pomijać. Jedną z najprostszych formuł, jakie mają tutaj zastosowanie, jest *równanie Mooneya*⁵

$$\frac{\mu_e}{\mu_f} = \exp \left(\frac{\frac{5}{2}\varepsilon_p}{1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{cp}}} \right), \quad (5.49)$$

³Brinkman H.C.: *The viscosity of concentrated suspensions and solutions*, J. Chem. Phys. 20, pp. 571-573, 1952

⁴Roscoe R.: *The viscosity of suspensions of rigid spheres*, Brit. J. Appl. Phys. 3, pp. 257-269, 1952

⁵Mooney M., J. Coll. Sci., No. 6, pp. 162-170, 1951

5.3. Równania zamykające

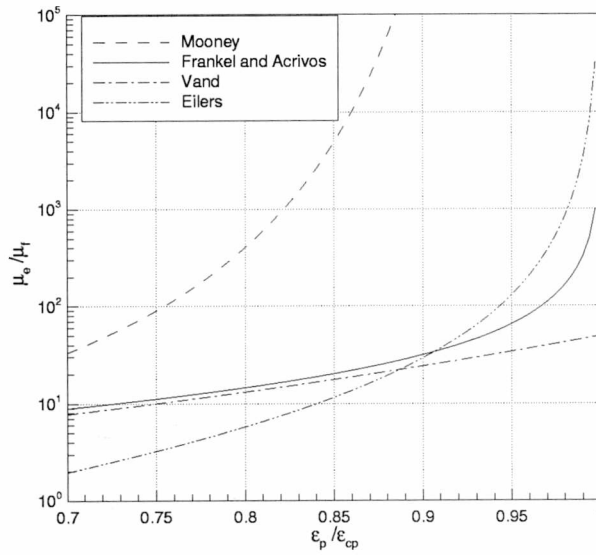
w którym $\varepsilon_{cp} = 0.52 \div 0.74$ określa fizycznie maksymalny stopień upakowania cząstek.

Dla pęcherzowych warstw fluidalnych, Frankel and Acrivos⁶ podali następującą teoretyczną formułę:

$$\frac{\mu_e}{\mu_f} = \frac{9}{8\psi}, \quad (5.50)$$

gdzie

$$\psi = \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{cp}}}}{\sqrt[3]{\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{cp}}}}. \quad (5.51)$$



Rys. 5.4. Efektywny współczynnik lepkości dla gęstych warstw fluidalnych

Dla gęstych złóż fluidalnych mogą być również zastosowane: teoretyczna formuła podana przez Vanda⁷

$$\frac{\mu_e}{\mu_f} = \exp \left(\frac{2,5\varepsilon_p + 2,7\varepsilon_p^2}{1 - 0,609\varepsilon_p} \right), \quad (5.52)$$

⁶Frankel N.A., Acrivos A.: *On the viscosity of a concentrated suspension of solid spheres*, Chem. Engng. Sci., No. 22, pp. 847-853, 1967

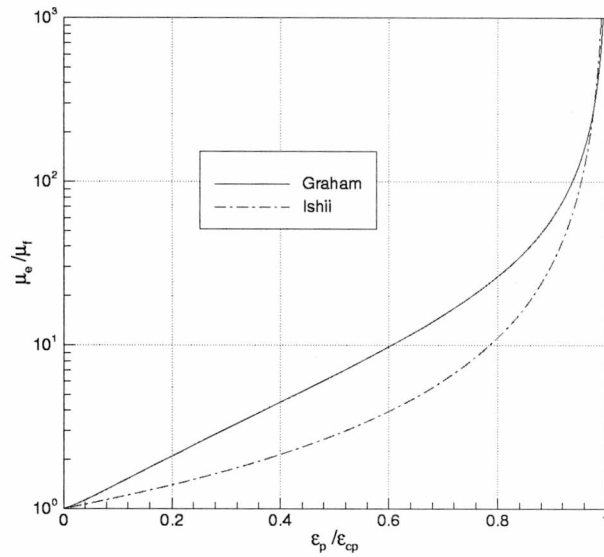
⁷Vand V.: *Viscosity of solutions and suspensions. I-III*, J. Phys. Coll. Chem., No. 52, pp. 277-321, 1948

5.3. Równania zamykające

i doświadczalny wzór Eilersa⁸

$$\frac{\mu_e}{\mu_f} = \frac{25}{16} \left(\frac{\varepsilon_p}{1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{cp}}} \right)^2. \quad (5.53)$$

Wykresy ilorazów efektywnego i dynamicznego współczynnika lepkości otrzymane ze wzorów (5.49), (5.50), (5.52) and (5.53) przedstawiono na rysunku 5.4, gdzie przyjęto $\varepsilon_{cp} = 0.6$.



Rys. 5.5. Efektywny współczynnik lepkości w pełnym zakresie zmienności objętościowego udziału cząstek

W rzeczywistych przepływach fluidalnych, objętościowy udział cząstek przyjmuje wartości z całego dopuszczalnego zakresu zmienności, tzn. $\varepsilon_p \in (0, \varepsilon_{cp})$. Formułę dla całego zakresu podali: Graham⁹

$$\frac{\mu_e}{\mu_f} = 1 + \frac{5}{2}\varepsilon_p + \frac{9}{4} \left(\frac{1}{1 + 0.5\psi} \right) \left(\frac{1}{\psi} - \frac{1}{1 + \psi} - \frac{1}{(1 + \psi)^2} \right) \quad (5.54)$$

⁸Eilers H.: *Die Viskositäts-Konzentrationsabhängigkeit kolloider System in organischen Lösungsmitteln*, Kolloid Zeitschrift, No. 102, pp. 154-169, 1943

⁹Graham A.L.: *On the viscosity of suspensions of solid spheres*, Applied Scientific Research, No. 37, pp. 275-286, 1981

5.3. Równania zamykające

gdzie ψ jest zdefiniowane przez (5.51), i Ishii¹⁰

$$\frac{\mu_e}{\mu_f} = \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{cp}}\right)^{-2.5\varepsilon_{cp}}. \quad (5.55)$$

Równania (5.54) i (5.55) przedstawiono na rysunku 5.5.

5.3.2 Mechanizm międzyfazowej wymiany pędu

Mimo, że w literaturze, m. in. [33, 34, 82, 83, 88, 171, 38, 68, 39, 84, 169, 15, 93, 147], przedstawiane są różne, często sprzeczne mechanizmy wymiany pędu między fazami, to w niniejszej pracy prezentowany jest mechanizm, oparty na istotnych własnościach zjawiska fizycznego oddziaływania między płynem a cząstkami [24].

Rozważaniu podlega tutaj powierzchniowe źródło pędu (5.32), które z definicji uśredniania ma postać

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_f &= -\overline{\mathbf{T}_f \nabla \chi_f}(\mathbf{x}, t) = \\ &= -\frac{1}{V} \int_V \mathbf{T}_f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) \nabla \chi_f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) d\mathbf{x}_\eta \stackrel{(5.3)}{=} \frac{1}{V} \int_{S_i} \mathbf{T}_f \mathbf{n} ds_\eta, \end{aligned} \quad (5.56)$$

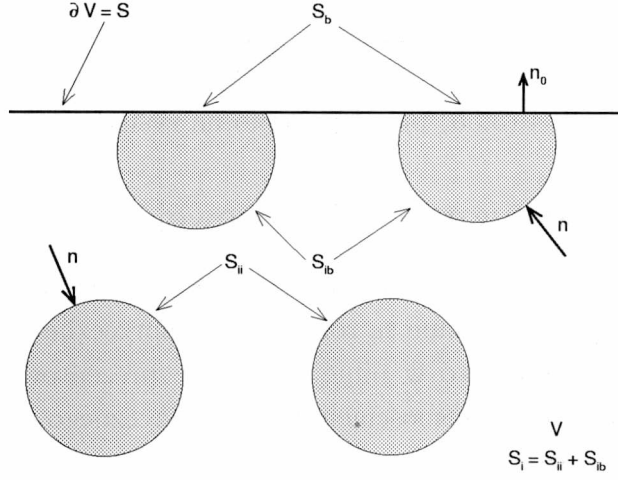
gdzie S_i jest powierzchnią płynu otaczającą cząstki wewnątrz objętości V , $\mathbf{n}$ jest wektorem normalnym wskazującym kierunek na zewnątrz płynu (rys. 5.6). Powierzchnia S_i składa się z powierzchni S_{ii} cząstek znajdujących się całkowicie w objętości V , i części powierzchni S_{ib} cząstek brzegowych wewnątrz objętości V , przecinanych powierzchnią S , będącej brzegiem V .

Wstawiając związek (1.3) do (5.56), otrzymano

$$\frac{1}{V} \int_{S_i} \mathbf{T}_f \mathbf{n} ds = -\underbrace{\frac{1}{V} \int_{S_i} p_f \mathbb{I} \mathbf{n} ds}_a + \underbrace{\frac{1}{V} \int_{S_i} \boldsymbol{\tau}_f \mathbf{n} ds}_b, \quad (5.57)$$

gdzie składniki a i b są powierzchniowymi źródłami pędu, odpowiednio wywołanymi działaniem ciśnienia i naprężeń stycznych na powierzchni międzyfazowej.

¹⁰Ishii M.: *One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimes*, Argonne National Laboratory Report, ANL-77-47, 1977



Rys. 5.6. Definicja powierzchni

Po wykorzystaniu zależności (5.34), składnik a równania (5.57) przyjmuje postać

$$\frac{1}{V} \int_{S_i} p_f \mathbb{I} \mathbf{n} \, ds = \frac{1}{V} \int_{S_{ib}} \langle p_f \rangle \mathbb{I} \mathbf{n} \, ds + \frac{1}{V} \int_{S_i} p'_f \mathbb{I} \mathbf{n} \, ds, \quad (5.58)$$

ponieważ całka z uśrednionego ciśnienia po powierzchni cząstek znajdujących się całkowicie w objętości kontrolnej jest równa zero. Druga całka po prawej stronie równania (5.58) stanowi część siły dynamicznej (oporu i nośnej) pochodzącej od naprężeń normalnych, działającej ze strony płynu na cząstkę.

Całkę po powierzchni cząstek brzegowych przekształca się do postaci

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{S_{ib}} \langle p_f \rangle \mathbb{I} \mathbf{n} \, ds &= \frac{1}{V} \int_{S_b} \langle p_f \rangle \mathbb{I} \mathbf{n}_0 \, ds \stackrel{(5.20)}{=} \\ &= \frac{1}{V} \oint_S \epsilon_p \langle p_f \rangle \mathbb{I} \mathbf{n}_0 \, ds \stackrel{\text{Gauss}}{=} \frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot (\epsilon_p \langle p_f \rangle \mathbb{I}) \, dv. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Jeśli objętość kontrolna V jest mała, to ostatnia całka równania (5.59) może

5.3. Równania zamykające

być zapisana jako

$$\frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot (\epsilon_p \langle p_f \rangle \mathbb{I}) dv = \nabla (\epsilon_p \langle p_f \rangle). \quad (5.60)$$

Zatem, składnik a równania (5.57) przybiera postać

$$-\frac{1}{V} \int_{S_i} p_f \mathbb{I} \mathbf{n} ds = -\nabla (\epsilon_p \langle p_f \rangle) - \frac{1}{V} \int_{S_i} p'_f \mathbb{I} \mathbf{n} ds. \quad (5.61)$$

Następnie przedstawioną procedurę stosuje się odpowiednio do członu b równania (5.57), otrzymując

$$\frac{1}{V} \int_{S_i} \tau_f \mathbf{n} ds = \nabla \cdot (\epsilon_p \langle \tau_f \rangle) + \frac{1}{V} \int_{S_i} \tau'_f \mathbf{n} ds, \quad (5.62)$$

gdzie ostatnia całka jest częścią siły dynamicznej od naprężeń stycznych. Całka po powierzchni cząstek z pulsacji ciśnienia i naprężeń stycznych definiuje siłę dynamicznego oddziaływania płynu i cząstek, tj. [24]

$$\frac{1}{V} \int_{S_i} (-p'_f \mathbb{I} + \tau'_f) \mathbf{n} ds = -\mathbf{F}, \quad (5.63)$$

gdzie $\mathbf{F}$, określone równaniem (4.50), jest członem odpowiadającym za wymianę pędu między fazami w postaci siły dynamicznej, tj. siły nośnej i siły oporu.

Zatem wyrażenie $\mathbf{M}_f$ na powierzchniowe źródło pędu przyjmuje postać

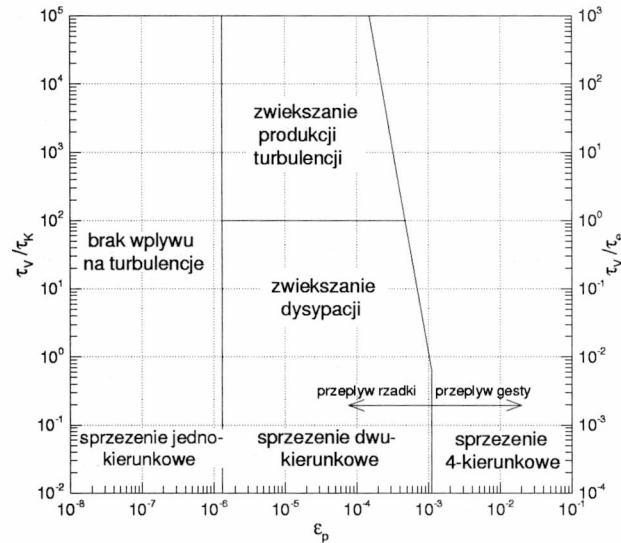
$$\mathbf{M}_f = -\nabla (\epsilon_p \langle p_f \rangle) + \nabla \cdot (\epsilon_p \langle \tau_f \rangle) - \mathbf{F}, \quad (5.64)$$

które, po podstawieniu do równania (5.45), daje

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_f \langle \rho_f \rangle \langle \mathbf{u}_f \rangle + \nabla \cdot (\epsilon_f \langle \rho_f \rangle \langle \mathbf{u}_f \rangle \langle \mathbf{u}_f \rangle) = \\ = -\nabla \langle p_f \rangle + \nabla \cdot (\langle \tau_f \rangle + \epsilon_f \mathbf{T}_f^V) + \epsilon_f \langle \rho_f \rangle \langle \mathbf{g} \rangle - \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

5.3.3 Modyfikacja turbulencji płynu przez cząstki

Ilościowo ruch turbulentny płynu charakteryzowany jest przez kinetyczną energię turbulencji i prędkość (intensywność) dysypacji kinetycznej energii turbulencji. Obecność cząstek materiału stałego w przepływie modyfikuje turbulencję płynu. Elghobashi w pracy [37] sklasyfikował rodzaje modyfikacji turbulencji płynu przez cząstki. Na rysunku 5.7, na którym τ_K jest czaso-



Rys. 5.7. Klasyfikacja modyfikacji turbulencji płynu przez cząstki materiału stałego [37]

wą skalą Kołmogorowa, τ_e jest czasową skalą dla dużych struktur wirowych w przepływie, przedstawiono podział przepływów w zależności od rodzaju występującego oddziaływania między cząstkami a turbulencją płynu.

W przepływie, dla którego $\epsilon_p \leq 10^{-6}$, obecność cząstek nie modyfikuje turbulencji płynu, ponieważ ilość występujących cząstek jest znikomo mała. Oddziaływanie między cząstkami a płynem ma charakter sprzężenia jednokierunkowego, w którym jedynie dynamika płynu wpływa na dynamikę cząstek, lecz cząstki nie zmieniają turbulencji płynu.

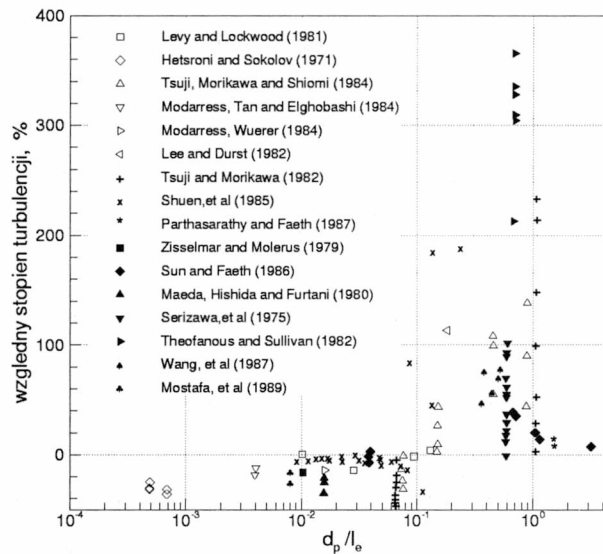
Dla $10^{-6} < \epsilon_p \leq 10^{-3}$ koncentracja cząstek jest na tyle znacząca, że zachodzi proces dwustronnej wymiany pędu między płynem a cząstkami. Oddziaływanie to ma charakter sprzężenia dwukierunkowego. Zmniejszając τ_v , tj. zmniejszając średnicę cząstki i pozostawiając pozostałe wielkości stałe,

5.3. Równania zamykające

zwiększamy powierzchnię ośrodka rozproszonego, co prowadzi do zwiększenia dysypacji kinetycznej energii turbulencji. Zwiększając τ_V , zwiększamy Re_p , gdzie przy $Re_p \geq 400$ powstają struktury wirowe w strudze nadążającej za opływającą cząstką, przez co następuje zwiększenie produkcji kinetycznej energii turbulencji.

Przepływy z $\varepsilon_p \geq 10^{-3}$ nazywane są przepływami gęstymi, dla których występuje sprzężenie czterokierunkowe. Oprócz sprzężenia dwukierunkowego między płynem a cząstkami, występują tutaj wzajemne zderzenia między cząstkami. Dla $\varepsilon_p \rightarrow 1$ otrzymujemy tzw. ośrodek granularny, w którym płyn i cząstki należy traktować wspólnie jako jeden ośrodek ciągły.

W pracach Gore'a i Crowe'a [61, 60] oraz Hetsroni'ego [69] podkreśla się, że dla $d_p < 0,1l_e$, gdzie l_e jest przestrzenną skalą dla dużych struktur wirowych w przepływie, zachodzi proces wzmożonej dysypacji turbulencji płynu (rys. 5.8).



Rys. 5.8. Względny stopień turbulencji w zależności $\frac{d_p}{l_e}$ [61]

Numeryczne wyznaczenie pełnego spektrum skal turbulencji wymaga użycia metody bezpośredniej symulacji numerycznej (DNS). Niestety, metoda DNS jest czasochłonna, tak więc nie jest przydatna dla szybkich obliczeń. Rozwiązaniem problemu wydaje się zastosowanie modelu $k - \varepsilon$ z tak zmodyfikowanymi równaniami modelu turbulencji, aby uwzględniały one obecność

5.3. Równania zamykające

cząstek materiału stałego [25, 117, 9, 70, 129, 123]. Jednakże model $k - \varepsilon$ wymaga wprowadzenia do obliczeń dodatkowych dwóch równań, co nie zawsze jest efektywne pod względem obliczeniowym.

W literaturze, m. in. [48, 158, 162, 4], do modelowania turbulencji w przepływie płynu i cząstek, coraz częściej wykorzystywana jest metoda LES (od *large eddy simulation*), która jest już powszechnie stosowaną metodą modelowania turbulencji dla przepływów jednofazowych [92, 107, 51, 80, 52, 111, 137, 47, 141]. Metoda LES łączy metodę bezpośredniej symulacji numerycznej (DNS), która nie zawiera żadnych zamykających modeli turbulencji, oraz elementy metody Reynoldsa (RANS), gdzie wykorzystuje się technikę uśredniania po przestrzeni. Duże struktury, wynikające bezpośrednio z geometrii przepływu, wyznaczane są bezpośrednio, podczas gdy modelowaniu podlegają mniejsze skale w przepływie, które – jak się uważa – mają naturę uniwersalną i nie zależą od geometrii i charakteru przepływu turbulentnego.

Dla przepływu jednofazowego procedura uśredniania po przestrzeni równań ruchu prowadzi do otrzymania dodatkowych wyrażeń, tj. tensora naprężeń struktur drobnoskalowych, który należy następnie odpowiednio zamodelować. Podobnie dla przepływu wielofazowego, w równaniu (5.65) otrzymano tensor naprężeń struktur drobnoskalowych w postaci

$$\boldsymbol{\tau}^V = \varepsilon_f \boldsymbol{T}_f^V, \quad (5.66)$$

który dla $\varepsilon_f \rightarrow 1$ przechodzi w tensor naprężeń struktur drobnoskalowych dla przepływu jednofazowego. W celu zamknięcia układu równań ruchu płynu, tensor $\boldsymbol{\tau}^V$ należy następnie wyrazić przez zmienne, które występują w rozważanych równaniach ruchu płynu. Na podobieństwo do metody LES dla przepływu jednofazowego, tensor $\boldsymbol{\tau}^V$ jest wyrażony w postaci

$$\boldsymbol{\tau}^V = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}^V) \boldsymbol{I} + 2\mu_s \boldsymbol{D}_f, \quad (5.67)$$

gdzie

$$\mu_s = C_s \Delta_s^2 \sqrt{2\boldsymbol{D}_f : \boldsymbol{D}_f}, \quad (5.68)$$

$$\boldsymbol{D}_f = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{u}_f + (\nabla \boldsymbol{u}_f)^T), \quad (5.69)$$

i $C_s \in (0.005, 0.05)$ [148], $\Delta_s = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}$ dla przestrzeni trójwymiarowej. Jednak w dalszej części pracy, do modelowania przepływu fluidalnego w przestrzeni dwuwymiarowej przyjęto $C_s = 0$.

5.4. Zestawienie równań ruchu

Jednocześnie należy podkreślić, że problem modelowania turbulencji w przepływach wielofazowych jest niewspółmiernie bardziej skomplikowany niż dla przepływów jednofazowych, ponieważ tensor naprężeń struktur drobno-skalowych jest modulowany tutaj przez

1. pulsacje wywołane przez turbulencję, występującą w każdej fazie,
2. pulsacje wywołane rozkładem cząstek materiału stałego w objętości.

Dla przepływu jednofazowego objętość uśredniającą można uczynić tak małą, że struktury drobnoskalowe mogą osiągnąć stan uniwersalny (z wyjątkiem obszarów przysciennych i obszarów objętych dużymi gradientami prędkości). Jeżeli objętość uśredniającą w przepływie wielofazowym ulega zmniejszeniu, to pulsacje wywołane rozkładem cząstek materiału stałego w objętości uśredniającej ulegną zwiększeniu. Wskazuje to na istnienie nieuwzględnionych wcześniej dodatkowych skal przestrzennych, z których pierwsza skala charakteryzuje przestrzenny rozkład ośrodka rozproszonego, a druga skala charakteryzuje turbulencje danej fazy. Tak więc sformułowanie praw zamykających turbulencję dla przepływu wielofazowego jest niezwykle trudne.

5.4 Zestawienie równań ruchu

W niniejszym podrozdziale zostaną zapisane wybrane – wcześniej wprowadzone – równania ruchu dla płynu i cząstek.

Ruch cząstki określony jest przez następujące równania

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p(t), \quad (5.70)$$

$$\mathbf{a}_p = \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = D_p(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p) + \mathbf{g} + \mathbf{A}_{cp}, \quad (5.71)$$

gdzie

$$D_p = \frac{f_D}{\tau_V} \epsilon_f^{-3.5}, \quad f_D = 1 + 0.15 \text{Re}^{0.687}, \quad (5.72)$$

$$\mathbf{A}_{cp} = -\frac{1}{\epsilon_p \rho_p} \nabla p_p, \quad p_p = P_s \frac{\epsilon_p^2}{\epsilon_{cp} - \epsilon_p}. \quad (5.73)$$

5.4. Zestawienie równań ruchu

Ruch płynu opisują następujące równania¹¹

$$\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_f \mathbf{u}_f) = 0, \quad (5.74)$$

$$\varepsilon_f \left[\frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + (\mathbf{u}_f \cdot \nabla) \mathbf{u}_f \right] = -\nabla P_f + \nabla \cdot [\mathbf{v}_c (\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T)] - \frac{1}{\rho_f} \mathbf{F}, \quad (5.75)$$

gdzie

$$P_f = \frac{p_f}{\rho_f} \quad (5.76)$$

jest ciśnieniem kinematycznym płynu, a

$$\mathbf{v}_c = \frac{\mu_e + \mu_s}{\rho_f} \quad (5.77)$$

jest całkowitym kinematycznym współczynnikiem lepkości płynu.

Za efektywny współczynnik lepkości μ_e przyjmuje się zgodnie z formułą (5.55) wyrażenie

$$\frac{\mu_e}{\mu_f} = \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{cp}} \right)^{-2.5\varepsilon_{cp}}.$$

W obliczeniach dla przestrzeni dwuwymiarowej przyjęto $C_s = 0$, co oznacza $\mu_s = 0$. Siła $\mathbf{F}$ określona jest przez równanie (4.50):

$$\mathbf{F} = \int \int \int \psi \rho_p V_p D_p (\mathbf{u}_f(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{u}_p) d\rho_p dV_p d\mathbf{u}_p.$$

Postać niezachowawcza równania (5.75) wynika z wykorzystania równania (5.74) do równania (5.65), które jest zapisane w postaci zachowawczej [136].

¹¹w celu uproszczenia zapisu, w dalszej części pracy pomija się $\langle \rangle$ dla oznaczenia zmiennych uśrednionych

Rozdział 6

Metoda numeryczna rozwiązywania równań ruchu

6.1 Sprzężenie ruchu płynu i cząstek

Równanie ruchu płynu (5.75) i równanie ruchu cząstki (5.71) są sprzężone przez udział objętościowy ε_f i siłę $\mathbf{F}$ oddziaływania międzyfazowego. Przez przekształcenie wyrażenia na siłę $\mathbf{F}$, uzyskuje się równanie ruchu płynu w formie dostosowanej do obliczeń numerycznych. W niniejszej pracy, oba równania ruchu zostają sprzężone niejawnie, a uzyskane jedno równanie wynikowe zawiera parametry opisujące zarówno płyn, jak i cząstki. Sprzężenie równań ruchu płynu i cząstek przeprowadzane jest po dyskretyzacji równań.

Równanie (5.75), zdyskretyzowane w przestrzeni i po czasie uogólnionym schematem Cranka–Nicholsona, przyjmuje dla czasu $t^{n+1/2}$, gdzie $t^n = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots$ i Δt jest krokiem czasowym, następującą postać

$$\begin{aligned} \varepsilon_f^{n+1} \left[\frac{\mathbf{u}_f^{n+1} - \mathbf{u}_f^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}_f^{n+1/2} \cdot \nabla_h) \mathbf{u}_f^{n+1/2} \right] = & -\nabla_h P_f^{n+1/2} + \theta \nabla_h \cdot \left[\mathbf{v}_c^n \left(\nabla_h \mathbf{u}_f^{n+1} \right. \right. \\ & \left. \left. + (\nabla_h \mathbf{u}_f^{n+1})^T \right) \right] + (1 - \theta) \nabla_h \cdot \left[\mathbf{v}_c^n \left(\nabla_h \mathbf{u}_f^n + (\nabla_h \mathbf{u}_f^n)^T \right) \right] - \frac{1}{\rho_f} \mathbf{F}^{n+1}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

6.1. Sprężenie ruchu płynu i cząstek

gdzie $\theta \in (0, 1)$, indeks h oznacza operator różnicowy odpowiedniego operatora różniczkowego, a $P_f^{n+1/2}$ jest tak dobrane, aby spełnione było zdyskretyzowane równanie ciągłości

$$\frac{\varepsilon_f^{n+1} - \varepsilon_f^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\varepsilon_f^{n+1} \mathbf{u}_f^{n+1}) = 0. \quad (6.2)$$

Nieliniowy człon konwekcyjny $(\mathbf{u}_f^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}_f^{n+1/2}$ w równaniu (6.1) aproksymuje się jako

$$(\mathbf{u}_f^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}_f^{n+1/2} = \theta(\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_f^{n+1} + (1 - \theta)(\mathbf{u}_f^n \cdot \nabla) \mathbf{u}_f^n, \quad (6.3)$$

gdzie

$$\hat{\mathbf{u}} = 3\mathbf{u}_f^n - 3\mathbf{u}_f^{n-1} + \mathbf{u}_f^{n-2} \quad (6.4)$$

aproksymuje $\mathbf{u}_f^{n+1}$ z rzędem dokładności $O((\Delta t)^3)$ i wynika z zastosowania rozwinięcia $\mathbf{u}_f^{n+1}$ w szereg Taylora wokół $\mathbf{u}_f^n$.

Po wprowadzeniu prędkości cząstki

$$\mathbf{u}_p^{n+1} = \frac{1}{1 + D_p^n \Delta t} [\mathbf{u}_p^n + \Delta t(D_p^n \mathbf{u}_f^{n+1} + \mathbf{g} + \mathbf{A}_{cp}^{n+1})], \quad (6.5)$$

wyznaczonej z niejawnie zdyskretyzowanego równania (5.71), do wyrażenia określającego $\mathbf{F}^{n+1}$ [144, 130]

$$\mathbf{F}^{n+1} = \frac{1}{V_{ijk}} \sum_{p=1}^{N_p} [\rho_p N_g V_p S_{ijk}(\mathbf{x}_p^{n+1}) D_p^n (\mathbf{u}_{fijk}^{n+1} - \mathbf{u}_p^{n+1})], \quad (6.6)$$

równanie (6.1), po odpowiednich przekształceniach, przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \varepsilon_f^{n+1} \left[\frac{\mathbf{u}_f^{n+1} - \mathbf{u}_f^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}_f^{n+1/2} \cdot \nabla_h) \mathbf{u}_f^{n+1/2} \right] + H_f \mathbf{u}_f^{n+1} = -\nabla_h P_f^{n+1/2} + \mathbf{G}_f + \\ + \theta \nabla_h \cdot [\mathbf{v}_c^n (\nabla_h \mathbf{u}_f^{n+1} + (\nabla_h \mathbf{u}_f^{n+1})^T)] + (1 - \theta) \nabla_h \cdot [\mathbf{v}_c^n (\nabla_h \mathbf{u}_f^n + (\nabla_h \mathbf{u}_f^n)^T)], \end{aligned} \quad (6.7)$$

gdzie

$$H_f = \frac{1}{|V_{ijk}|} \sum_{p=1}^{N_p} \frac{\rho_p V_p N_g S_{ijk}(\mathbf{x}_p^{n+1}) D_p^n}{\rho_f (1 + D_p^n \Delta t)} \geq 0, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{G}_f = \frac{1}{|V_{ijk}|} \sum_{p=1}^{N_p} \left\{ \frac{\rho_p V_p N_g S_{ijk}(\mathbf{x}_p^{n+1}) D_p^n}{\rho_f (1 + D_p^n \Delta t)} [\mathbf{u}_p^n + \Delta t(\mathbf{g} + \mathbf{A}_{cp}^{n+1})] \right\}. \quad (6.9)$$

Równanie (6.7) łączy w sobie równanie zachowania pędu dla cząstki i płynu.

6.1.1 Funkcja interpolująca

Oddziaływania między pojedynczą cząstką a płynem oraz między pozostałymi cząstkami wyznacza się na siatce numerycznej. Mimo, że do określenia oddziaływania między płynem a cząstką można zastosować inną siatkę niż do wyznaczania oddziaływania między cząstkami, to w niniejszej pracy stosuje się tę samą siatkę, na której wykonuje się obliczenia dotyczące płynu. Własności fizyczne przynależne cząstce, tj. gęstość, objętość, prędkość, itp., interpoluje się na węzły siatki, na której wyznacza się odpowiednie oddziaływania. Następnie, oddziaływanie w postaci siły, odpowiadającej za wzajemne zderzenia między cząstkami, interpoluje się z węzłów siatki na cząstkę. Procesowi interpolacji z węzłów siatki na cząstkę podlegają również zmienne wykorzystywane do rozwiązywania równań ruchu cząstki, tj. prędkość płynu i objętościowy udział cząstek.

Interpolacja na i z węzłów siatki wykonywana jest przy użyciu *funkcji interpolującej*. Dla przestrzeni trójwymiarowej funkcja interpolująca S^{3D} określona jest jako [130, 131, 144, 145, 42]

$$S_{ijk}^{3D}(\mathbf{x}) = S_i(x)S_j(y)S_k(z), \quad (6.10)$$

oraz dla przestrzeni dwuwymiarowej

$$S_{ij}^{2D}(\mathbf{x}) = S_i(x)S_j(y), \quad (6.11)$$

gdzie

$$S_l(r) = \begin{cases} \frac{r - r_{l-1}}{r_l - r_{l-1}} & \text{gdy } r \in (r_{l-1}, r_l), \\ \frac{r - r_{l+1}}{r_l - r_{l+1}} & \text{gdy } r \in (r_l, r_{l+1}), \\ 0 & \text{gdy } r \notin (r_{l-1}, r_{l+1}), \end{cases} \quad (6.12)$$

w którym l wskazuje węzeł r_l siatki. Funkcja interpolująca S_{ijk}^{3D} przyjmuje w węźle (ijk) wartość 1, a następnie tak maleje liniowo, że w węzłach sąsiednich do węzła (ijk) i obszarze poza nimi przyjmuje wartość 0. Funkcja interpolująca S^{3D} jest tak określona, że

$$\sum_{\xi=1}^8 S_{\xi}^{3D}(\mathbf{x}_p) = 1, \quad (6.13)$$

gdzie $\mathbf{x}_p$ jest punktem znajdującym się wewnątrz sześciianu, którego wierzchołkami są węzły siatki, numerowane przez wskaźnik ζ . W dalszej części pracy funkcję interpolującą oznaczono przez S , nie precyzując wymiaru przestrzeni, do której się ona odnosi.

Dowolną wielkość fizyczną, która charakteryzuje cząstkę, można interpolować na węzły siatki. Dla przykładu, prędkość $\mathbf{u}_{pijk}$ cząstki w węźle (ijk) wyraża się jako

$$\mathbf{u}_{pijk} = \sum_{p=1}^{N_p} \mathbf{u}_p S_{ijk}(\mathbf{x}_p). \quad (6.14)$$

Objętościowy udział cząstek ε_{pijk} w węźle (ijk) siatki dany jest wyrażeniem

$$\varepsilon_{pijk} = \frac{1}{V_{ijk}} \sum_{p=1}^{N_p} N_g V_p S_{ijk}(\mathbf{x}_p), \quad (6.15)$$

w którym V_{ijk} jest objętością komórki (ijk) siatki numerycznej, a N_g jest liczbą cząstek, jaką reprezentuje w obliczeniach p -ta cząstka. Objętościowy udział płynu ε_{fijk} w węźle (ijk) siatki oblicza się następnie jako

$$\varepsilon_{fijk} = 1 - \varepsilon_{pijk}. \quad (6.16)$$

Dowolne ciągłe pole można interpolować na cząstkę. Dla przykładu, prędkość $\mathbf{u}_{fp}$ płynu w położeniu $\mathbf{x}_p$ p -tej cząstki określona jest jako

$$\mathbf{u}_{fp} = \sum_{\zeta=1}^8 \mathbf{u}_{f\zeta} S_{\zeta}(\mathbf{x}_p), \quad (6.17)$$

gdzie ζ numeruje węzły siatki komórki numerycznej, w której znajduje się p -ta cząstka.

6.2 Metoda rzutowania

Metoda rzutowania (*projection method*) jest taką metodą numerycznego modelowania nieściśliwego przepływu jednofazowego, która eliminuje z równań ruchu płynu ciśnienie, często kłopotliwe i trudne do wyznaczenia. Podstawą do opracowania metody rzutowania jest twierdzenie Helmholtza–Hodge’a [20, 122], według którego dowolne pole wektorowe $\tilde{\mathbf{u}} \in L_2(\Omega)$ można

6.2. Metoda rzutowania

przedstawić w sposób jednoznaczny w postaci sumy dwóch pól wektorowych: pola bezźródłowego $\mathbf{u} \in L_2(\Omega)$ i pola bezwirowego $\nabla\Phi$, tj.

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \nabla\Phi, \quad (6.18)$$

z

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{w } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{na } \partial\Omega, \\ \nabla \times \nabla\Phi &= 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Ponieważ

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla\Phi \, dV = 0, \quad (6.20)$$

to mówi się, że pola $\mathbf{u}$ i $\nabla\Phi$ są ortogonalne.

Klasyczna metoda rzutowania, pierwotnie przedstawiona przez Chorina [19] i niezależnie przez Temama [152] dla nieściśliwego przepływu jednofazowego płynu lepkiego, polega na zastosowaniu tw. Helmholtza–Hodge’a bezpośrednio do zdyskretyzowanego równania Naviera–Stokesa

$$\mathbf{u}_f^{n+1} + \nabla(\Delta t P_f^{n+1}) = \mathbf{u}_f^n + \Delta t A(\mathbf{u}_f^n) = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \quad (6.21)$$

gdzie

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_f^{n+1} = 0, \quad \nabla \times \nabla(\Delta t P_f^{n+1}) = 0 \quad (6.22)$$

i

$$A(\mathbf{u}_f) = \nu \Delta \mathbf{u}_f - (\mathbf{u}_f \cdot \nabla) \mathbf{u}_f. \quad (6.23)$$

Z równania (6.21) wynika jednocześnie równanie

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}_f^n}{\Delta t} = A(\mathbf{u}_f^n) \quad (6.24)$$

określające ewolucję w czasie *prędkości pośredniej* $\tilde{\mathbf{u}}$ i nie zawierające ciśnienia. Obliczoną w ten sposób prędkość pośrednią $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$, która nie spełnia równania ciągłości ($\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \neq 0$) dla przepływu nieściśliwego, należy następnie tak skorygować, aby uzyskać pole prędkości $\mathbf{u}_f^{n+1}$, które będzie spełniać równanie ciągłości i równanie zachowania pędu. W celu wykonania korekcji prędkości pośredniej wykorzystuje się tw. Helmholtza–Hodge’a, które zapisuje się w postaci następującego *równania korekcji*:

$$\mathbf{u}_f^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \Delta t \nabla \Phi^{n+1}, \quad (6.25)$$

6.2. Metoda rzutowania

gdzie Φ jest tzw. *funkcją rzutującą (korygującą)*, której celem jest sprowadzenie (zrzutowanie) prędkości pośredniej na podprzestrzeń funkcji bezźródłowych. Funkcja rzutująca określona jest przez równanie Poissona

$$\Delta \Phi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \quad (6.26)$$

które wynika z równań (6.25) i (6.22). Metoda rzutowania jest powszechnie stosowana do modelowania nieściśliwych przepływów jednofazowych [90, 17, 122, 8, 175, 35, 135, 106].

W niniejszej pracy, do rozwiązywania równań (6.2) i (6.7) ruchu płynu, zastosowano odpowiednio przystosowaną metodę rzutowania [130, 131]. Na podobieństwo do metody rzutowania dla przepływu nieściśliwego, do rozważań wprowadza się *równanie korekcji* [130, 131]

$$\varepsilon_f^{n+1} \frac{\mathbf{u}_f^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\Delta t} = -\nabla \Phi^{n+1}, \quad (6.27)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ jest prędkością pośrednią, a Φ jest skalarną funkcją rzutującą, której wartość będzie tak dobrana, aby zachodziło równanie (6.2). Jeżeli wyznaczoną z równania korekcji (6.27) prędkość płynu $\mathbf{u}_f^{n+1}$ wprowadzi się do równania (6.7) i przyjmując, że

$$\begin{aligned} \nabla P_f^{n+1/2} = \nabla \Phi^{n+1} + H_f \frac{\Delta t}{\varepsilon_f^{n+1}} \nabla \Phi^{n+1} + \theta \frac{\Delta t}{\varepsilon_f^{n+1}} (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \nabla \Phi^{n+1} \\ - \theta \Delta t \nabla \cdot \left\{ \mathbf{v}_c^n \left[\nabla \left(\frac{\nabla \Phi^{n+1}}{\varepsilon_f^{n+1}} \right) + \left| \nabla \left(\frac{\nabla \Phi^{n+1}}{\varepsilon_f^{n+1}} \right) \right|^T \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

to równanie (6.7) zapisuje się w następującej postaci

$$\begin{aligned} \varepsilon_f^{n+1} \left[\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}_f^n}{\Delta t} + \theta (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla_h) \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + (1 - \theta) (\mathbf{u}_f^n \cdot \nabla_h) \mathbf{u}_f^n \right] + H_f \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{G}_f + \\ + \theta \nabla_h \cdot [\mathbf{v}_c^n (\nabla_h \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + (\nabla_h \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})^T)] + (1 - \theta) \nabla_h \cdot [\mathbf{v}_c^n (\nabla_h \mathbf{u}_f^n + (\nabla_h \mathbf{u}_f^n)^T)]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Z równania (6.29), które nie zawiera gradientu ciśnienia, i odpowiednich warunków brzegowych wyznacza się prędkość pośrednią $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$, która podlega później korekcji.

Wykorzystując równanie korekcji (6.27) w równaniu ciągłości (6.2), otrzymujemy równanie Poissona na funkcję rzutującą

$$\Delta \Phi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\varepsilon_f^{n+1} - \varepsilon_f^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\varepsilon_f^{n+1} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \right]. \quad (6.30)$$

Warunki brzegowe dla równań (6.29) i (6.30) zostaną podane w podrozdziale 6.2.1. Po wyznaczeniu $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ i Φ^{n+1} , obliczamy $\mathbf{u}_f^{n+1}$ z zależności

$$\mathbf{u}_f^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\varepsilon_f^{n+1}} \nabla \Phi^{n+1}, \quad (6.31)$$

która wynika z przekształcenia równania korekcji. Wyznaczona w ten sposób prędkość spełnia równanie (6.2), a dodatkowo z równania (6.28) można wyznaczyć gradient ciśnienia.

6.2.1 Warunki brzegowe

W celu rozwiązania równania (6.29), należy podać wartość $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ na brzegu $\partial\Omega$ obszaru obliczeniowego Ω . Odpowiednie warunki brzegowe mają postać:

1. dla ścianki sztywnej i ruchomej oraz wlotu przyjmuje się warunek brzegowy w postaci Dirichleta [17]

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_f^{n+1}|_{\partial\Omega} + \frac{\Delta t}{\varepsilon_f^{n+1}} \nabla \Phi^{n+1}|_{\partial\Omega}, \quad (6.32)$$

gdzie $\mathbf{u}_f = 0$ dla ścianki sztywnej oraz $\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t) \neq 0$ dla wlotu,

2. dla wylotu następujące warunki

- dla składowej normalnej do wylotu

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \Big|_{wylot} = \Delta t \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\nabla \Phi^{n+1}}{\varepsilon_f^{n+1}} \right) \Big|_{wylot}, \quad (6.33)$$

gdzie $\mathbf{n}$ jest wektorem normalnym do $\partial\Omega$ i przyjęto, że

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_f^{n+1}) \Big|_{wylot} = 0, \quad (6.34)$$

- dla składowych stycznych do wylotu

$$\mathbf{t} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{wylot} = \frac{\Delta t}{\varepsilon_f^{n+1}} \mathbf{t} \cdot \nabla \Phi^{n+1}|_{wylot}, \quad (6.35)$$

gdzie $\mathbf{t}$ jest wersorem stycznym do $\partial\Omega$ i przyjęto, że

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_f^{n+1}|_{wylot} = 0. \quad (6.36)$$

Warunki brzegowe dla równania (6.30) mają następującą postać

1. dla ścianki sztywnej i ruchomej ($\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_f \neq 0$ i $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_f = 0$) [17]

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi^{n+1} = 0, \quad (6.37)$$

2. dla wlotu

$$\Phi^{n+1} = 0, \quad (6.38)$$

3. dla wylotu

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi^{n+1} = \frac{1}{A_o \Delta t} & \left[\int_{wylot} \varepsilon_f^{n+1} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, dS + \right. \\ & \left. + \int_{wlot} \varepsilon_f^{n+1} \mathbf{u}_f^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \varepsilon_f^{n+1} \, dV \right], \end{aligned} \quad (6.39)$$

gdzie A_o jest polem powierzchni wylotu.

Warunek (6.39) wynika z wykorzystania równania ciągłości (5.74) w postaci całkowej

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \varepsilon_f \, dV = - \oint_{\partial\Omega} \varepsilon_f \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (6.40)$$

do scałkowanej po powierzchni wylotu składowej normalnej równania korekcji

$$\int_{wylot} \varepsilon_f^{n+1} \mathbf{u}_f^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{wylot} \varepsilon_f^{n+1} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\Delta t A_o \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi^{n+1}, \quad (6.41)$$

gdzie przyjęto

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi^{n+1}|_{wylot} = const. \quad (6.42)$$

6.3 Metoda dekompozycji kierunków operatora różniczkowego

W przypadku, gdy należy wyznaczyć rozwiązanie numeryczne wielowymiarowego zagadnienia niestacjonarnego, możliwe jest zastosowanie metody polegającej na wyznaczeniu rozwiązania danego zagadnienia przez rozwiązanie ciągu zadań prostszych, dla których znane są efektywnie szybkie i ekonomiczne algorytmy numeryczne. Wszystkie metody realizujące redukcję bardziej złożonego zagadnienia do układu zadań o mniej skomplikowanej strukturze nazywane są *metodami dekompozycji*.

Ważny etap w rozwoju metod dekompozycji stanowi *metoda naprzemiennych kierunków* (ADI od *alternating direction implicit*) oparta na jednorodnej aproksymacji, której autorami są Peaceman [132], Douglas [30, 32] i Rachford [31]. Obecnie znanych jest wiele modyfikacji tej metody [41, 21, 1, 109].

W klasie metod dekompozycji najbardziej uniwersalną, jeśli chodzi o zastosowania, jest *metoda dekompozycji kierunków operatora różniczkowego*. Metoda ta jest do szybkich obliczeń numerycznych atrakcyjną i konkurencyjną alternatywą dla metod naprzemiennych kierunków, gdyż oparta jest na niejednorodnej aproksymacji zagadnienia wejściowego. Istota metody zawiera się w pomysle polegającym na zastąpieniu danego operatora równania wielowymiarowego przez układ operatorów o prostszej strukturze, przy czym dopiero pełny układ równań dyskretnych spełnia warunki aproksymacji i stabilności. Prekursorami metody dekompozycji kierunków operatora różniczkowego byli Yanenko [163, 164, 165, 166], Baker [6], Oliphant [125], Brian [16], Marchuk [114, 113].

Ponieważ najwięcej uwagi poświęcono w literaturze zastosowaniom metod dekompozycji do rozwiązywania zagadnień opisywanych za pomocą operatorów, które można przedstawić w postaci sumy dwóch (lub trzech) operatorów o prostszej strukturze, to w niniejszej pracy metoda dekompozycji kierunków operatora różniczkowego będzie przedstawiona w ten sposób i dla uproszczenia zapisu w przestrzeni dwuwymiarowej.

Równanie (6.29), do którego stosuje się metodę dekompozycji kierunków operatora różniczkowego, można zapisać w następującej postaci operatoro-

6.4. Algorytm numeryczny metody „wielofazowej cząstki w komórce”

wej:

$$\varepsilon_f^{n+1} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}_f^n}{\Delta t} + L_x(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{u}_f^n) + L_y(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{u}_f^n) = \mathbf{G}_f - H_f \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \quad (6.43)$$

gdzie L_x i L_y są operatorami różnicowymi odpowiednio względem zmiennych przestrzennych x i y . Metoda dekompozycji operatora różniczkowego polega na zastąpieniu równania (6.43) układem równań

$$\begin{aligned} \varepsilon_f^{n+1} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2} - \mathbf{u}_f^n}{\Delta t} + L_x(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}, \mathbf{u}_f^n) &= 0 \\ \varepsilon_f^{n+1} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}}{\Delta t} + L_y(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}) &= \mathbf{G}_f - H_f \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \end{aligned} \quad , \quad (6.44)$$

gdzie w każdym równaniu występują jedynie pochodne po wybranej niezależnej zmiennej przestrzennej. Korzyści z tak zapisanego układu równań ujawniają się natychmiast podczas numerycznego rozwiązywania poszczególnych równań. Problem rozwiązywania każdego z równań układu (6.44) jest zagadnieniem brzegowym, w którym występują jedynie pochodne po jednej zmiennej. Zatem z numerycznego punktu widzenia, zagadnienie rozwiązywania równania (6.43) w przestrzeni dwuwymiarowej redukuje się do rozwiązywania równań jednowymiarowych dla każdego z kierunków w przestrzeni. Następnie, niestacjonarne jednowymiarowe nieliniowe zagadnienia brzegowe zdyskretyzowane w sposób niejawny, sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych z wykorzystaniem szybkiego bezpośredniego algorytmu rozwiązywania macierzy trójkątnej [21, 72].

6.4 Algorytm numeryczny metody „wielofazowej cząstki w komórce”

Metoda „wielofazowej cząstki w komórce” (MP-PIC od *multiphase particle-in-cell*), której autorami są Andrews, O’Rourke [2] i Snider [144, 145], jest metodą modelowania przepływu wielofazowego z występującym ośrodkiem ciągłym, którym jest płyn, oraz ośrodkiem rozproszonym, którym są cząstki materiału stałego.

Ośrodek rozproszony występuje w postaci dyskretnych cząstek, które poruszają się zgodnie z drugim prawem Newtona. W rezultacie w tak przyjętej

6.4. Algorytm numeryczny metody „wielofazowej cząstki w komórce”

metodzie Lagrange’a, gdzie każda pojedyncza cząstka charakteryzowana jest przez własne indywidualne cechy (gęstość, rozmiar, prędkość, itp.), uzyskiwany przepływ dla ośrodka rozproszonego jest przepływem prawdziwie wielofazowym. W obliczeniach numerycznych pojedyncza cząstka obliczeniowa reprezentuje pewną liczbę N_g cząstek o jednakowych własnościach. Ponieważ w przepływie rozpatrywanym w niniejszej pracy nie występują procesy związane z wymianą masy między cząstkami, to liczba N_g cząstek zgrupowanych w pojedynczej cząstce obliczeniowej jest stała w czasie, co jest zgodne z zasadą zachowania masy dla ośrodka rozproszonego.

Z drugiej strony, wszelkie wzajemne oddziaływania między cząstkami a płynem i pozostałymi cząstkami wyznaczane są w taki sposób, jak gdyby ośrodek rozproszony był ośrodkiem ciągłym, opisywanym metodą Eulera. Do rozważań wprowadza się siatkę numeryczną, na węzły której interpolowane są odpowiednie własności cząstek, w celu wyznaczenia oddziaływań ciągłych między cząstką a płynem i pozostałymi cząstkami. Wyznaczenie oddziaływania między cząstkami, odpowiadającemu ich wzajemnym zderzeniom, polega na obliczeniu na siatce gradientu naprężenia normalnego dla ośrodka rozproszonego. Naprężenie normalne, dane przez pewną funkcję skalarną zależną od objętościowego udziału cząstek, określone jest w taki sposób, aby w przepływie wartość objętościowego udziału cząstek nie przekraczała wartości maksymalnej, zwykle przyjmowanej na 0,6. Składowe gradientu, interpolowane z węzłów siatki na cząstkę, determinują tym samym jej dynamikę.

Metoda MP-PIC, łącząc w sobie elementy metody Lagrange’a i metody Eulera, zwiększa efektywność obliczeniową. Oddziaływania międzyfazowe i zakres modelowanych wartości objętościowego udziału cząstek odpowiada metodzie Eulera. Traktowanie cząstek stałych jako cząstek dyskretnych odpowiada metodzie Lagrange’a.

Autor niniejszej pracy zaproponował zastosowanie metody MP-PIC przedstawionej przez Patankara i Josepha [130, 131].

Obliczenia z wykorzystaniem metody „wielofazowej cząstki w komórce” przebiegały następująco:

Równania ruchu zostały zdyskretyzowane metodą różnic skończonych. Obszar obliczeniowy pokryty był prostokątną siatką numeryczną o równomiernym kroku $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$. Wartości wszystkich zmiennych skalar-

nych i składowych wektorowych znajdują się w tych samych węzłach (i, j, k) siatki numerycznej.

Dla znanych wartości $\mathbf{x}_p^n$, $\mathbf{u}_p^n$, ε_f^n , $\mathbf{u}_f^n$, Φ^n danych w czasie $t^n = n\Delta t$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$, z $\mathbf{x}_p^0$, $\mathbf{u}_p^0$, $\mathbf{u}_f^0$ określonymi przez warunek początkowy, rozwiązanie dla $n + 1$ -szego kroku czasowego obliczane jest w następujących etapach:

Etap 1 Obliczenia nowego położenia cząstek i udziału objętościowego

1° obliczenie $\mathbf{x}_p^{n+1}$ dla każdej cząstki:

$$\tilde{\mathbf{x}}_p^{n+1} = \mathbf{x}_p^n + \Delta t \left(\mathbf{u}_p^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}_p^n \right) \quad (6.45)$$

$$\mathbf{x}_p^{n+1} = \tilde{\mathbf{x}}_p^{n+1} + \frac{(\Delta t)^2}{4} (\mathbf{A}_{cp}(\mathbf{x}^n) + \mathbf{A}_{cp}(\tilde{\mathbf{x}}_p^{n+1})) . \quad (6.46)$$

2° obliczenie $\mathbf{A}_{cp}^{n+1}$ dla każdej cząstki:

$$\mathbf{A}_{cp}^{n+1} = \frac{2}{(\Delta t)^2} \left(\mathbf{x}_p^{n+1} - \mathbf{x}_p^n - \Delta t \left(\mathbf{u}_p^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}_p^n \right) \right) . \quad (6.47)$$

3° obliczenie ε_p^{n+1} i ε_f^{n+1}

dla przestrzeni trójwymiarowej ε_p^{n+1} określone jest wzorem (6.15), dla przestrzeni dwuwymiarowej, ze względu na zmniejszenie wymiaru przestrzeni, wzór (6.15) wymaga modyfikacji i przyjmuje postać [173, 127, 76, 156]

$$\tilde{\varepsilon}_{pij}^{n+1} = \frac{1}{A_{ij}} \sum_{p=1}^{N_p} N_g A_p S_{ij}(\mathbf{x}_p) , \quad (6.48)$$

$$\varepsilon_{pij}^{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\sqrt{3}}} \sqrt{(\tilde{\varepsilon}_{pij}^{n+1})^3} , \quad (6.49)$$

gdzie A_{ij} i A_p są polem przekroju odpowiednio dla dwuwymiarowej komórki obliczeniowej i dla cząstki. Następnie ε_f^{n+1} oblicza się w oparciu o wzór (6.16).

Etap 2 Obliczenia nowej prędkości $\mathbf{u}_f^{n+1}$ płynu

Ze względu, że warunki brzegowe dla $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ wyrażają się przez Φ^{n+1} , której wartości są jeszcze nieznane, to obliczenie nowej prędkości pośredniej i prędkości płynu wykonuje się w sposób iteracyjny dla $l = 0, 1, 2, \dots, L_{max}$:

4° obliczenie $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1,l}$ z następującego układu

$$\varepsilon_f^{n+1} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2,l} - \mathbf{u}_f^n}{\Delta t} + L_x(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2,l}, \mathbf{u}_f^n) = 0 \quad (6.50)$$

$$\varepsilon_f^{n+1} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1,l} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2,l}}{\Delta t} + L_y(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1,l}, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2,l}) = \mathbf{G}_f - H_f \tilde{\mathbf{u}}^{n+1,l} \quad (6.51)$$

z warunkiem brzegowym określonym przez równania (6.32)–(6.36), w których przyjęto $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1,l}$, $\Phi^{n+1} = \Phi^{n+1,l}$ i $\Phi^{n+1,0} = \Phi^n$. Szczegółowa postać układu (6.50)–(6.51), rozpisana na poszczególne składowe w przestrzeni dwuwymiarowej, znajduje się w Dodatku D.

5° obliczenie $\Phi^{n+1,l}$ z równania Poissona

$$\Delta \Phi^{n+1,l} = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\varepsilon_f^{n+1} - \varepsilon_f^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\varepsilon_f^{n+1} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1,l}) \right], \quad (6.52)$$

z warunkiem brzegowym określonym przez równania (6.37)–(6.42), w których przyjęto $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1,l}$.

6° obliczenie $\mathbf{u}_f^{n+1,l}$ przez korekcję prędkości pośredniej:

$$\mathbf{u}_f^{n+1,l} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1,l} - \frac{\Delta t}{\varepsilon_f^{n+1}} \nabla \Phi^{n+1,l}, \quad (6.53)$$

wykonywaną w obszarze obliczeniowym Ω i na jego brzegu $\partial\Omega$.

Jeśli

$$\alpha^{n+1,l} = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} (|\mathbf{u}_f^{n+1,l} - \mathbf{u}_f^{n+1}|) < \alpha_{max} \quad \text{lub} \quad l = L_{max}, \quad (6.54)$$

gdzie $0 < \alpha_{max} \ll 1$ jest z góry zadaną wartością, to przyjmuje się

$$\mathbf{u}_f^{n+1} = \mathbf{u}_f^{n+1,l}, \quad \Phi^{n+1} = \Phi^{n+1,l}. \quad (6.55)$$

Gdy warunek (6.54) nie jest spełniony, to zmieniamy warunek brzegowy

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1,l+1} = \mathbf{u}_f^{n+1} + \frac{\Delta t}{\varepsilon_f^{n+1}} \nabla \Phi^{n+1,l} \quad (6.56)$$

i wracamy do podpunktu 4° z $l = l + 1$, aby obliczyć nową wartość prędkości dla zmienionych warunków brzegowych.

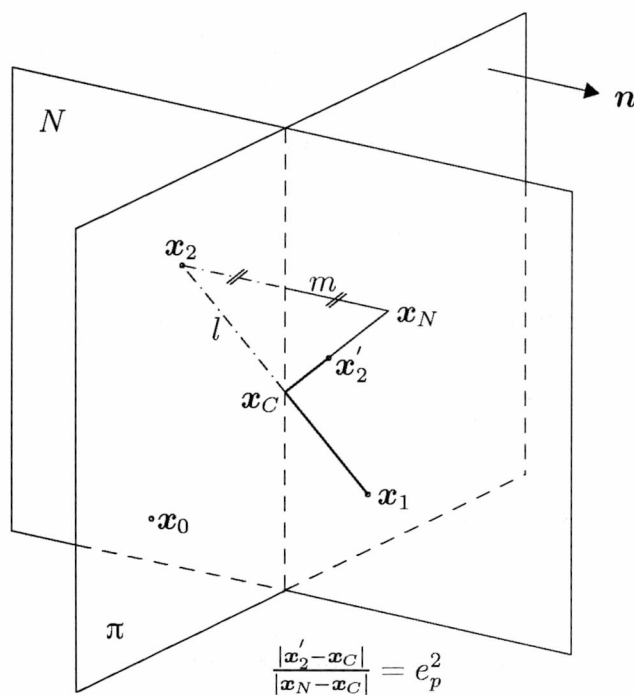
Etap 3 Obliczenia nowej prędkości cząstek

7° dla każdej cząstki nowa prędkość $\mathbf{u}_p^{n+1}$ obliczana jest ze wzoru (6.5):

$$\mathbf{u}_p^{n+1} = \frac{1}{1 + D_p^n \Delta t} [\mathbf{u}_p^n + \Delta t (D_p^n \mathbf{u}_f^{n+1} + \mathbf{g} + \mathbf{A}_{cp}^{n+1})] .$$

6.5 Oddziaływanie cząstki ze ścianką

Autor niniejszej pracy zaproponował własny model oddziaływania cząstki ze ścianką. Jeżeli nowe położenie $\mathbf{x}_2$ cząstki dla czasu t^{n+1} obliczone według wzorów (6.45)–(6.46) znajduje się poza obszarem obliczeniowym, którego brzegiem jest ścianka, to cząstka, która dla czasu t^n znajdowała się wewnątrz obszaru obliczeniowego w położeniu $\mathbf{x}_1$, zderza się ze ścianką w chwili $t_c \in (t^n, t^{n+1})$.



Rys. 6.1. Zderzenie cząstki ze ścianką

6.5. Oddziaływanie cząstki ze ścianką

Nowe położenie $\mathbf{x}_2'$ odbitej od ścianki cząstki znajduje się w płaszczyźnie N ($\mathbf{x}_1 \in N$, $\mathbf{x}_2 \in N$, $N \perp \pi$, π – płaszczyzna ścianki), i określone jest jako

$$\mathbf{x}_2' = \mathbf{x}_C + e_p^2(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_C), \quad (6.57)$$

gdzie $e_p \in \langle 0, 1 \rangle$ modeluje elastyczność odbicia cząstki od ścianki.

Punkt

$$\mathbf{x}_C = \mathbf{x}_1 + s_C(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (6.58)$$

jest punktem przebiecia płaszczyzny $\pi : \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ przez prostą $l : \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$, gdzie $\mathbf{x}_0 \in \pi$, $s \in \mathbf{R}$, $\mathbf{n} \perp \pi$ wskazuje kierunek do wnętrza obszaru obliczeniowego, a

$$s_C = \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1)}{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}. \quad (6.59)$$

Odległość punktu

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_2 + 2s_N\mathbf{n}, \quad (6.60)$$

gdzie

$$s_N = \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{n}|^2}, \quad (6.61)$$

i punktu $\mathbf{x}_2$, leżących po przeciwnych stronach płaszczyzny π na prostej $m : \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + s\mathbf{n}$, od płaszczyzny π jest taka sama.

Składowe prędkości $\mathbf{u}_2'$ cząstki po odbiciu od ścianki określone są jako

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_2' = -e_p \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1 \quad (6.62)$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_2' = e_p \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_1. \quad (6.63)$$

6.5. Oddziaływanie cząstki ze ścianką

Rozdział 7

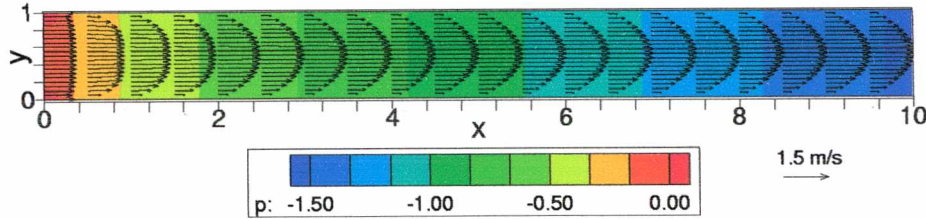
Numeryczne modelowanie przepływu jednofazowego

7.1 Przepływ w kanale

Mimo swej prostoty, numeryczne modelowanie przepływu w kanale stanowi ważną część niniejszej pracy, ponieważ rozważany w następnym rozdziale przepływ fluidalny występuje właśnie w obszarze prostokątnym. Przepływ w kanale jest dobrym przykładem, dla którego porównanie istniejących rozwiązań analitycznych z otrzymywanymi rozwiązaniami numerycznymi pozwala przetestować poprawność stosowanej metody numerycznej rozwiązywania równań ruchu. Ponieważ dla przepływów wielofazowych brak jest adekwatnych rozwiązań analitycznych, więc poprawność działania programu zbadano przez modelowanie przepływu jednofazowego. W niniejszej pracy rozważono przepływ laminarny w kanale dwu- i trójwymiarowym. Do rozwiązania niestacjonarnych równań nieściśliwego ruchu jednofazowego płynu lepkiego wykorzystano wcześniej opisaną metodę rzutowania i dekompozycji kierunków operatora różniczkowego.

7.1.1 Kanał prostokątny

Obszarem obliczeniowym był prostokąt $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H\}$, gdzie $H = 1 \text{ m}$. Długość L została tak dobrana w zależności od danej liczby Reynoldsa, aby na wylocie z kanału uzyskać rozwinięty profil prędkości. Na wlocie ($x = 0$) przyjęto równomierny profil prędkości $u_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Przyjęte warunki brzegowe na ściankach sztywnych ($y = 0, y = H$) i na wylocie ($x = L$) opisano w podrozdziale 6.2.1. Obliczenia prowadzono w sposób niestacjonarny do czasu t_{end} uzyskania stacjonarnego rozwiązania numerycznego. Obliczenia sprawdzające wykonano w szerokim zakresie liczb Reynoldsa, dla różnych wielkości siatki numerycznej i z różnymi wielkościami kroku czasowego. Wartości użytych parametrów numerycznych wynosiły: $\theta = 0.5$ (wzór (6.1)), $\gamma = 0.5$ (wzór (D.5) w Dodatku D), $L_{\text{max}} = 1000$, $\alpha_{\text{max}} = 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Prezentowane w niniejszej pracy wyniki numeryczne dotyczą przepływu z $\text{Re} = 100$, dla którego $\frac{L}{H} = 10$ i $t_{\text{end}} = 10 \text{ s}$, oraz $\text{Re} = 1000$, dla którego $\frac{L}{H} = 50$ i $t_{\text{end}} = 60 \text{ s}$. Rysunek 7.1 przedstawia przykładowo wybrane rozwiązanie numeryczne dla $\text{Re} = 100$.



Rys. 7.1. Pole prędkości i ciśnienia w kanale prostokątnym z $\text{Re} = 100$

Uzyskane rozwiązania numeryczne porównano z analitycznym rozwiązaniem Poiseuille'a dla kanału prostokątnego. Na rysunku 7.2 przedstawiono wybrane profile prędkości na wylocie z kanału unormowane przez prędkość maksymalną $u_{\text{max}} = \frac{3}{2}u_0$, oraz rozwiązanie analityczne

$$\frac{u}{u_{\text{max}}} = 4 \frac{y}{H} \left(1 - \frac{y}{H}\right). \quad (7.1)$$

Dla obu profili prędkości zgodność z rozwiązaniem analitycznym jest bardzo dobra. Na rysunku 7.3 przedstawiono rozkłady gradientu ciśnienia wzdłuż osi kanału ($y = \frac{1}{2}H$) unormowane przez teoretyczny gradient ciśnienia p_{xa}

$$p_{xa} = -\frac{12\mu_f q_l}{H^3}, \quad (7.2)$$

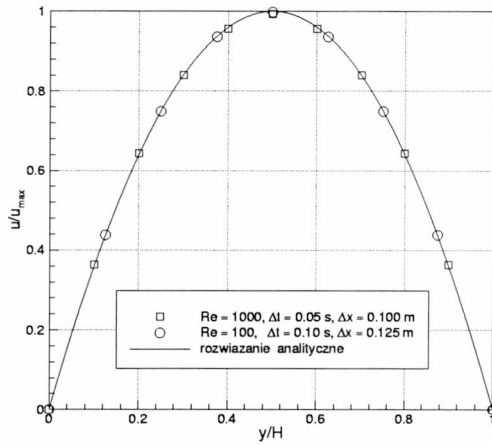
7.1. Przepływ w kanale

gdzie

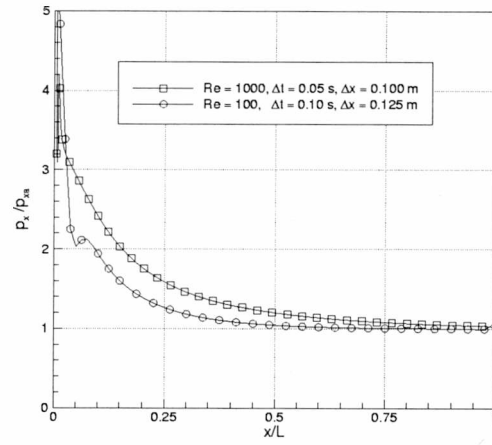
$$q_l = \int_0^{H=1\text{ m}} u(y) dy = 1 \frac{\text{m}^3}{\text{s} \cdot \text{m}} \quad (7.3)$$

jest strumieniem objętości na jednostkę długości (głębokości kanału).

W pobliżu wlotu gradient ciśnienia znacznie przewyższa teoretyczną wartość gradientu ciśnienia, ponieważ występuje tutaj proces formowania się profilu prędkości. W obszarze wylotu, gdzie przepływ jest już ustalony, gradient ciśnienia przyjmuje właściwe wartości, równe oczekiwany wartościom teoretycznym.



Rys. 7.2. Profil prędkości na wylocie

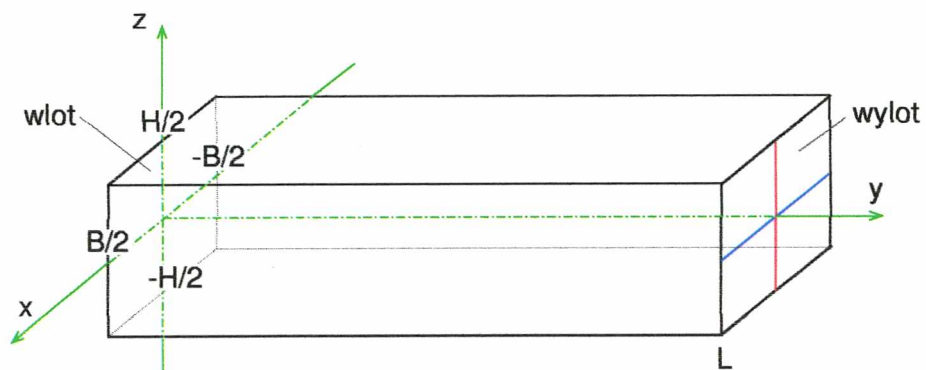


Rys. 7.3. Rozkład ciśnienia dla $y = \frac{1}{2}H$

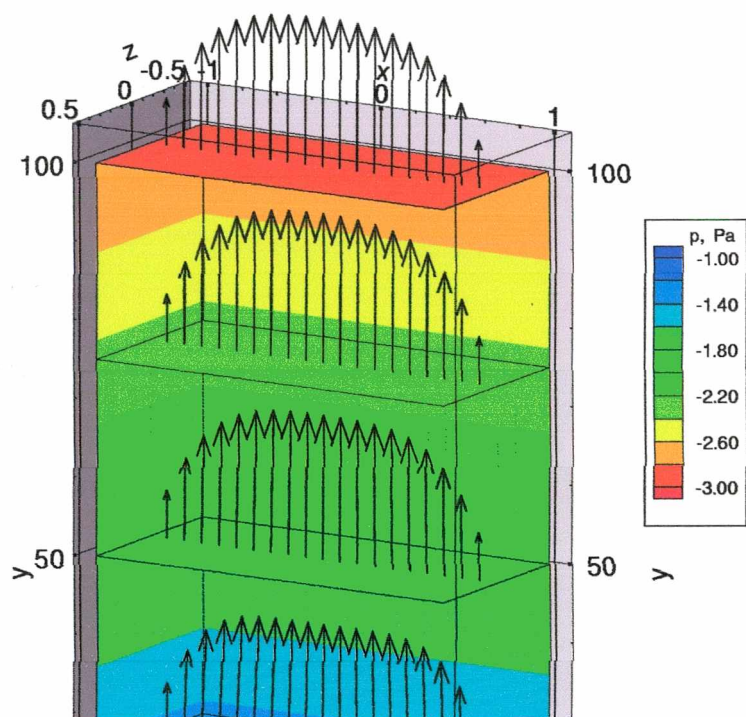
7.1.2 Kanał prostopadłościenny

Rysunek 7.4 definiuje przyjęty do obliczeń obszar, którym był prostopadłościan $D = \{(x, y, z) : -\frac{1}{2}B \leq x \leq \frac{1}{2}B, 0 \leq y \leq L, -\frac{1}{2}H \leq z \leq \frac{1}{2}H\}$, gdzie $B = 2\text{ m}$, $H = 1\text{ m}$. Długość L została tak dobrana w zależności od danej liczby Reynoldsa, aby na wylocie z kanału uzyskać rozwinięty profil prędkości. Na wlocie ($y = 0$) przyjęto równomierny profil prędkości $v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Przyjęte warunki brzegowe na ściankach sztywnych ($|x| = \frac{B}{2}, |z| = \frac{H}{2}$) i na wylocie ($y = L$) opisano w podrozdziale 6.2.1. Obliczenia prowadzono do czasu t_{end} uzyskania stacjonarnego rozwiązania numerycznego. Obliczenia sprawdzające wykonano w szerokim zakresie liczb Reynoldsa, dla różnych wielkości siatki

7.1. Przepływ w kanale



Rys. 7.4. Definicja geometrii obszaru obliczeniowego



Rys. 7.5. Pole prędkości i ciśnienia w pobliżu wylotu dla $Re = 1000$

7.1. Przepływ w kanale

numerycznej i z różnymi wielkościami kroku czasowego. Wartości użytych parametrów numerycznych wynosiły: $\theta = 0.5$, $\gamma = 0.5$, $L_{max} = 1000$, $\alpha_{max} = 10^{-4} \frac{m}{s}$. Prezentowane w niniejszej pracy wyniki numeryczne dotyczą przepływu z $Re = 100$, dla którego $\frac{L}{H} = 50$ i $t_{end} = 20 s$, oraz $Re = 1000$, dla którego $\frac{L}{H} = 100$ i $t_{end} = 200 s$. Na rysunku 7.5 przedstawiono przykładowo wybrane rozwiązanie numeryczne dla $Re = 1000$.

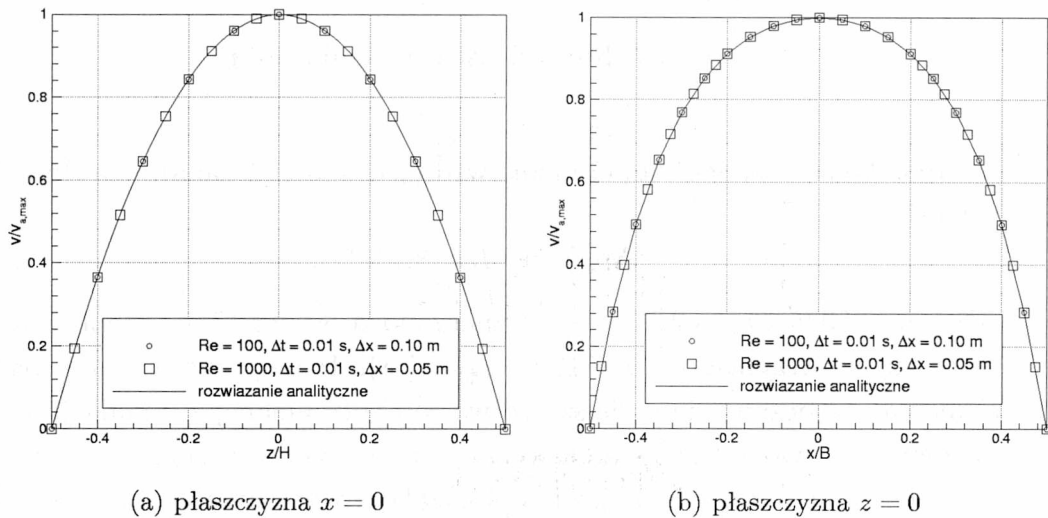
Uzyskane rozwiązania numeryczne porównano z analitycznym rozwiązaniem Poiseuille’a dla kanału prostokątnościennego. Na rysunku 7.6 przedstawiono wybrane profile prędkości na wylocie z kanału unormowane przez prędkość maksymalną $v_{a,max} = v_a(0,0)$, gdzie rozwiązanie analityczne $v_a(x,z)$ określone jest przez [87]

$$v_a(x,z) = \frac{4B^2}{\pi^3\mu_f} \left(-\frac{dp_a}{dy} \right) \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{k\pi x}{B}\right)}{k^3} \cdot \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{k\pi z}{B}\right)}{\cosh\left(\frac{k\pi H}{2B}\right)} \right], \quad (7.4)$$

gdzie

$$-\frac{dp_a}{dy} = q_v \frac{12\mu_f}{HB^3} \left[1 - \frac{192B}{\pi^5 H} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh\left(\frac{k\pi H}{2B}\right)}{k^5} \right]^{-1} = p_l \quad (7.5)$$

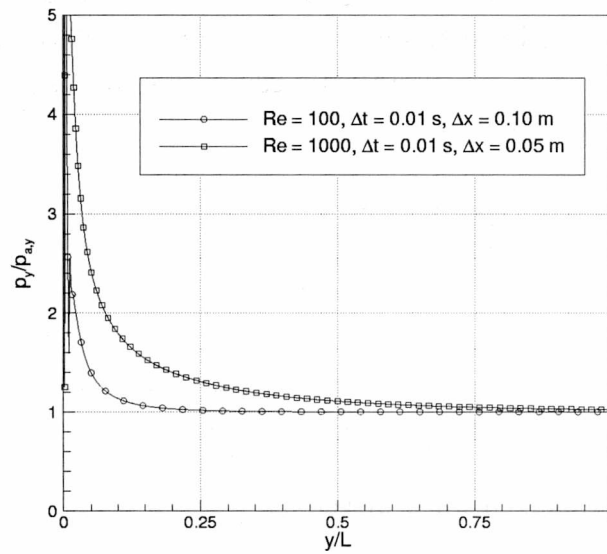
i dla przyjętych danych wejściowych $q_v = 2 \frac{m^3}{s}$.



Rys. 7.6. Profil prędkości na wylocie

7.1. Przepływ w kanale

Na rysunku 7.7 przedstawiono rozkład gradientu ciśnienia wzdłuż osi kanału. Podobnie jak dla kanału dwuwymiarowego, dla kanału trójwymiarowego w pobliżu wlotu występuje zjawisko formowania się profilu prędkości. Towarzyszą temu większe straty hydrauliczne, zwane stratami wejściowymi, i gradient ciśnienia znacznie przewyższa tutaj teoretyczną wartość gradientu ciśnienia. W obszarze wylotu, gdzie profil prędkości nie ulega już zmianom, gradient ciśnienia stabilizuje swą wartość do wartości teoretycznej.

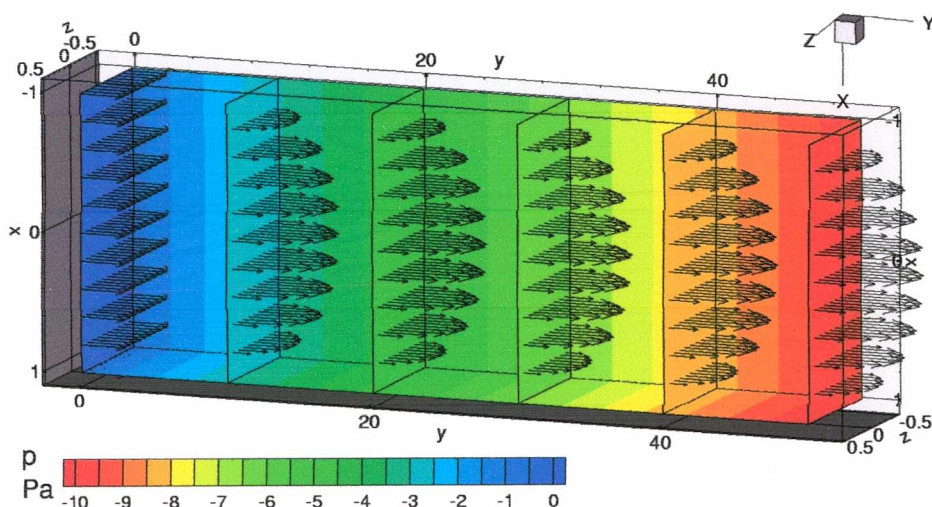


Rys. 7.7. Rozkład ciśnienia wzdłuż osi y

Teoretyczny spadek Δp_a ciśnienia wzdłuż długości L kanału dla $Re = 100$ wynosi

$$\Delta p_a = p_l \cdot L \approx 8.75 Pa, \quad (7.6)$$

gdzie $L = 50 \text{ m}$ i $p_l \approx 0.1749 \frac{Pa}{m}$ wyznaczono ze wzoru (7.5). Z obliczeń numerycznych otrzymano $\Delta p \approx 10 \text{ Pa}$ (rys. 7.8). Teoretyczna wartość spadku ciśnienia jest oczywiście mniejsza od wartości otrzymanej z symulacji numerycznej, ponieważ zależność analityczna, otrzymana dla warunków przepływu ustalonego, nie uwzględnia zjawiska kontrakcji w obszarze wlotu do kanału.



Rys. 7.8. Pole prędkości i ciśnienia dla $Re = 100$

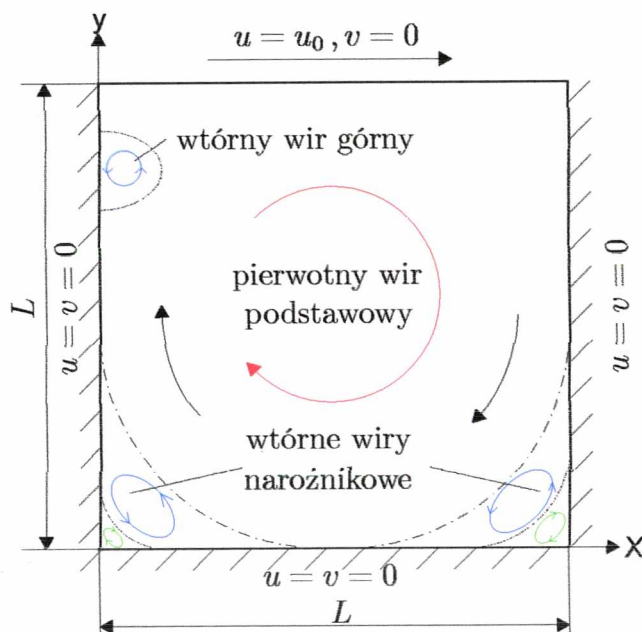
7.2 Przepływ w komorze z ruchomą ścianą

Ze względu na prostotę występujących w przepływie zjawisk fizycznych, przepływ w kanale nie może być jedynym wiarygodnym testem, badającym dokładność subtelnych cech przepływu odtwarzanych przez metodę numeryczną. Tak więc w celu przeprowadzenia dodatkowej analizy otrzymywanych rozwiązań numerycznych, wykonano symulację numeryczną przepływu bardziej skomplikowanego, którym jest przepływ w komorze z ruchomą ścianką.

Badanie przepływu w komorze z ruchomą ścianką [143] jest standardowym zadaniem, często wykorzystywanym w testowaniu i badaniu dokładności rozwiązań numerycznych [50, 90, 167, 97, 65, 45, 63, 101]. Ponadto w literaturze można znaleźć dobrze udokumentowane wyniki badań doświadczalnych dla tego zagadnienia [95, 94, 96, 139, 121, 120]. Przepływ w komorze występuje na skutek ruchu górnej ścianki oraz powstawaniu, ewolucji i wzajemnego oddziaływania struktur wirowych, charakterystycznych dla danych wartości liczb Reynoldsa. W niniejszej pracy rozważany jest przepływ laminarny w dwu- i trójwymiarowej komorze z ruchomą ścianą.

7.2.1 Komora kwadratowa

Na rysunku 7.9 przedstawiono geometrię obszaru obliczeniowego. Przepływ w kwadratowej komorze o długości boku $L = 1\text{ m}$ jest wywołany ruchem górnej ścianki z prędkością $u_0 = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a pozostałe ścianki są nieruchome. Dobór warunków brzegowych przedstawiono w rozdziale 6.2.1. W zależności od wartości liczby Reynoldsa $Re = \frac{u_0 L}{\nu_f}$, w obszarze komory powstaje szereg charakterystycznych struktur wirowych. Na rys. 7.9 przedstawiono typowe struktury wirowe, które występują w przepływie dla $Re > 1000$.

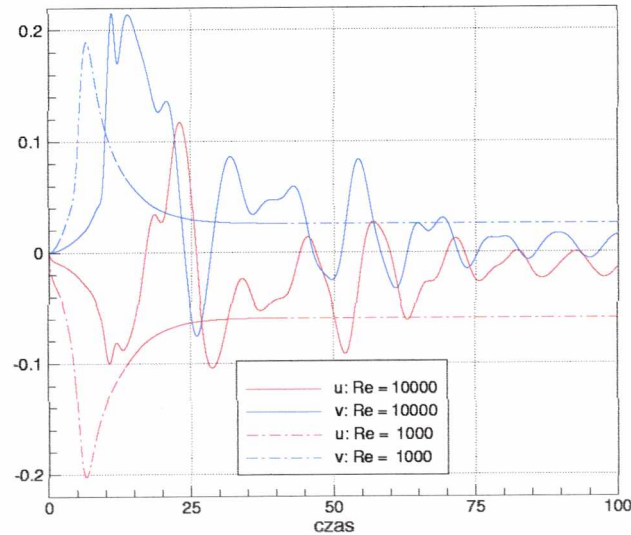


Rys. 7.9. Definicja obszaru obliczeniowego i występujących struktur wirowych

Obliczenia sprawdzające wykonano w szerokim zakresie liczb Reynoldsa, dla różnych wielkości siatki numerycznej i z różnymi wielkościami kroku czasowego. Wartości użytych parametrów numerycznych wynosiły: $\theta = 0.5$, $\gamma = 0.5$, $L_{max} = 1000$, $\alpha_{max} = 10^{-4}\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Prezentowane w niniejszej pracy wyniki numeryczne dotyczą przepływu z $Re = 100$, 400 i 1000 , dla których przyjęto $t_{end} = 100\text{ s}$. Rysunek 7.10 przedstawia ewolucję składowych prędkości dla $Re = 1000$ i $Re = 1000$ w środku komory, tj. $x = y = 0.5$. Dla $Re \leq 1000$ roz-

7.2. Przepływ w komorze z ruchomą ścianą

wiązania przyjmują stan stacjonarny po ~ 40 s, podczas gdy dla $Re = 10000$ przepływ nie osiąga stanu stacjonarnego we wskazanym przedziale czasu.

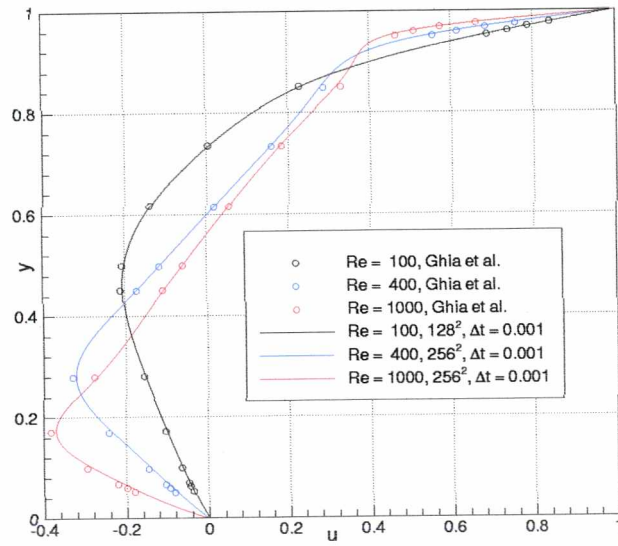


Rys. 7.10. Ewolucja składowych u, v prędkości dla $Re = 1000$ i $Re = 10000$

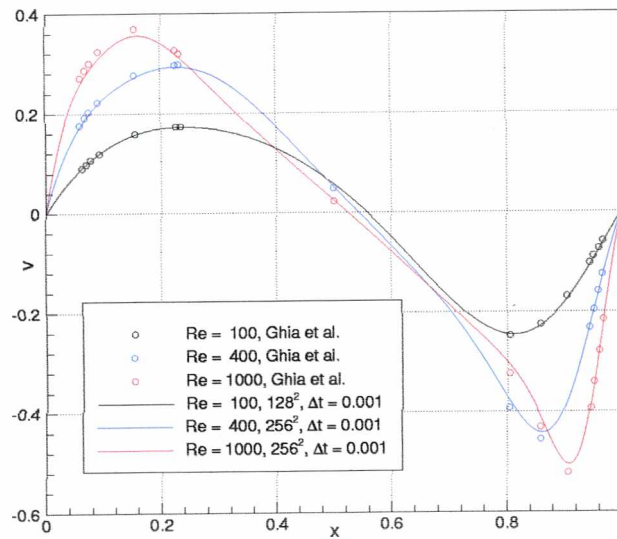
Na rysunku 7.11 porównano profile składowych prędkości wzdłuż pionowej i poziomej linii, przechodzącej przez środek komory, z wynikami przedstawionymi przez Ghia *et al.* [50].

Rysunek 7.12 przedstawia obrazy linii prądu dla różnych wartości liczb Reynoldsa. Występujące takie cechy przepływu, jak kształt i ilość wirów (pierwotnego i wtórnych), są charakterystyczne dla danej wartości Re . Dla $Re = 100, 400, 1000$ w przepływie występuje pierwotny wir podstawowy i wiry wtórne, które wraz ze zwiększaniem wartości Re powiększają swe rozmiary. Dla $Re = 10000$ cechą charakterystyczną jest występowanie wtórnych wirów narożnych oraz wtórnego wiru górnego. Dodatkowo w tabeli 7.1 zestawiono współrzędne środka pierwotnego wiru podstawowego z dostępnymi z literatury wynikami.

7.2. Przepływ w komorze z ruchomą ścianą



(a) składowa u wzdłuż pionowej linii $x = 0.5$



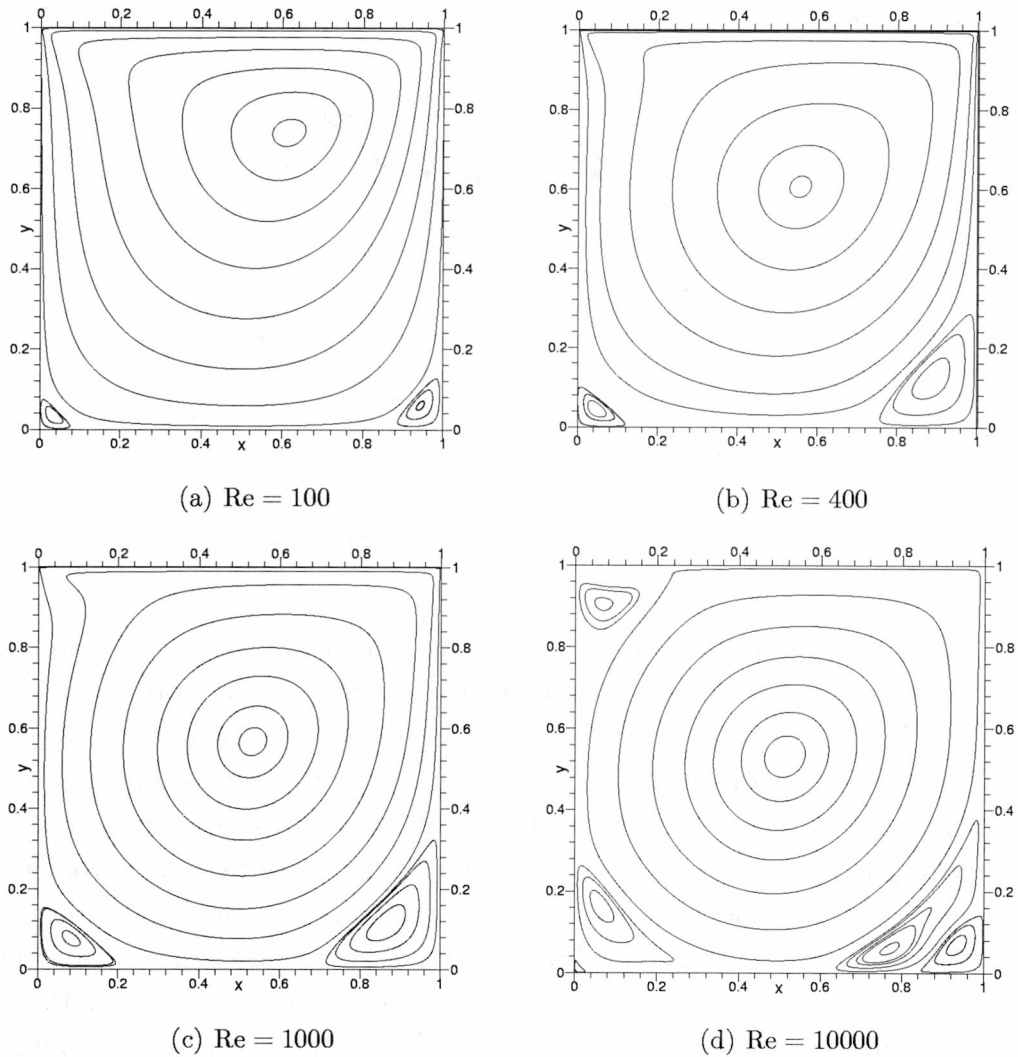
(b) składowa v wzdłuż poziomej linii $y = 0.5$

Rys. 7.11. Profile składowych prędkości dla przepływu w komorze kwadratowej

7.2. Przepływ w komorze z ruchomą ścianą

Tabela 7.1. Porównanie położenia środka pierwotnego wiru podstawowego

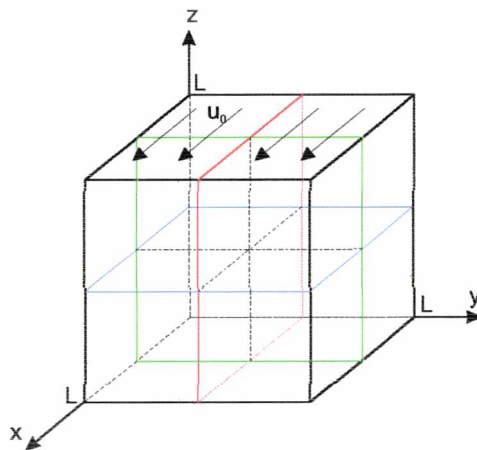
	niniejsza praca	Ghia <i>et al.</i> [50]	Ho <i>et al.</i> [74]
Re	(x, y)	(x, y)	(x, y)
100	(0.6165, 0.7394)	(0.6172, 0.7344)	(0.6154, 0.7368)
400	(0.5557, 0.6072)	(0.5547, 0.6055)	(0.5550, 0.6078)
1000	(0.5326, 0.5668)	(0.5313, 0.5625)	(0.5342, 0.5615)



Rys. 7.12. Linie prądu dla przepływu w komorze kwadratowej

7.2.2 Komora sześcienna

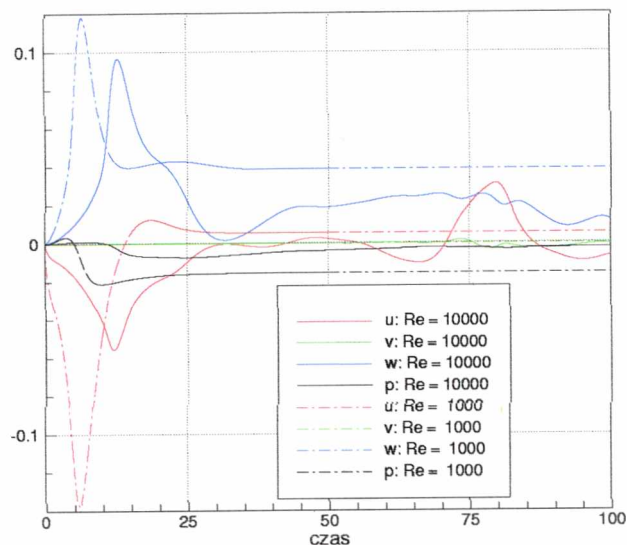
Sześcienny obszar obliczeniowy $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L, 0 \leq z \leq L\}$, gdzie $L = 1\text{ m}$, przedstawiony jest na rys. 7.13. Ścianka $z = L$ porusza się z prędkością $u_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Pozostałe ścianki pozostają nieruchome. Warunki brzegowe i czas prowadzenia obliczeń dobrano w sposób podobny, jak dla komory kwadratowej. Na rysunku 7.14 przedstawiono ewolucję składowych prędkości i ciśnienia dla $\text{Re} = 1000$ i $\text{Re} = 10000$ w środku komory. Czas $t_{\text{end}} = 40\text{ s}$ jest wystarczający do uzyskania rozwiązań stacjonarnych dla $\text{Re} \leq 1000$.



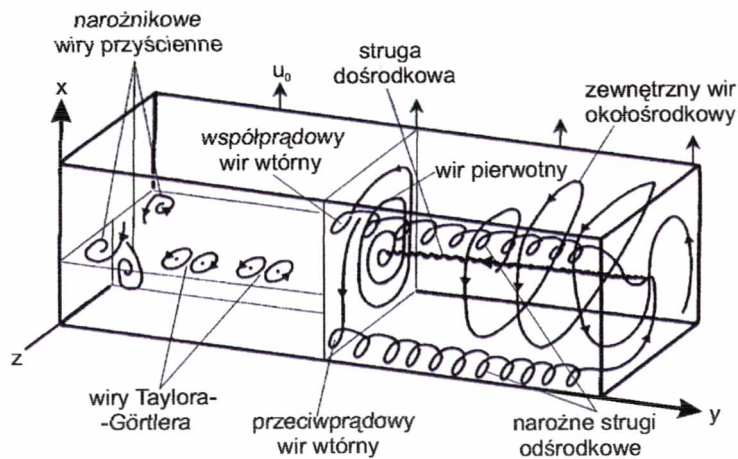
Rys. 7.13. Definicja obszaru obliczeniowego dla przepływu w komorze sześcienniej

Mimo prostej geometrii, w przepływie w komorze trójwymiarowej występują struktury o znacznym stopniu skomplikowania. Na podstawie badań doświadczalnych [121], na rysunku 7.15 przedstawiono schematycznie struktury występujące dla całkowicie rozwiniętego przepływu. Podobnie jak w przepływie w komorze dwuwymiarowej, dla przepływu w komorze trójwymiarowej w płaszczyźnie $y = 0.5$ występuje wir pierwotny oraz narożnikowe współ- i przeciwpądowe wiry wtórne, z których – w odróżnieniu do przypadku dwuwymiarowego – wypływają narożne strugi odśrodkowe. Do środka wiru pierwotnego wpływają cząstki płynu, co zaznaczono na rys. 7.15 strugą dośrodkową, która jest oplataną przez zewnętrzne wiry okołosrodkowe, będące przedłużeniem narożnych strug odśrodkowych. W narożach komory występują narożne wiry przyscienne, a w płaszczyznach yOz tzw. wiry Taylora–Görtlera.

7.2. Przepływ w komorze z ruchomą ścianą

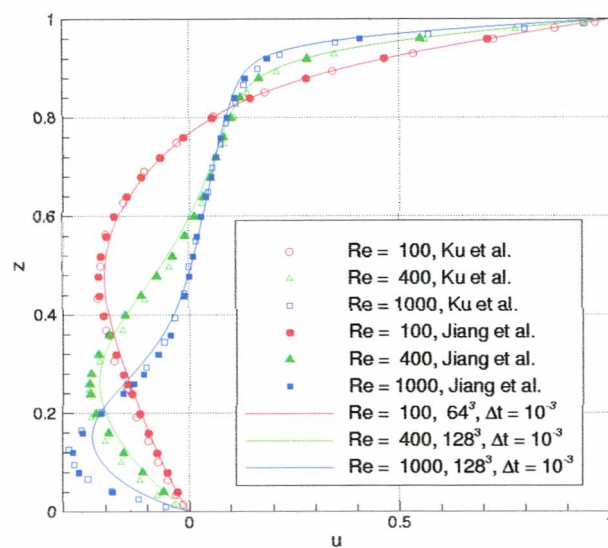


Rys. 7.14. Ewolucja składowych prędkości i ciśnienia dla $Re = 1000$ i $Re = 10000$ w $x = y = z = 0.5$

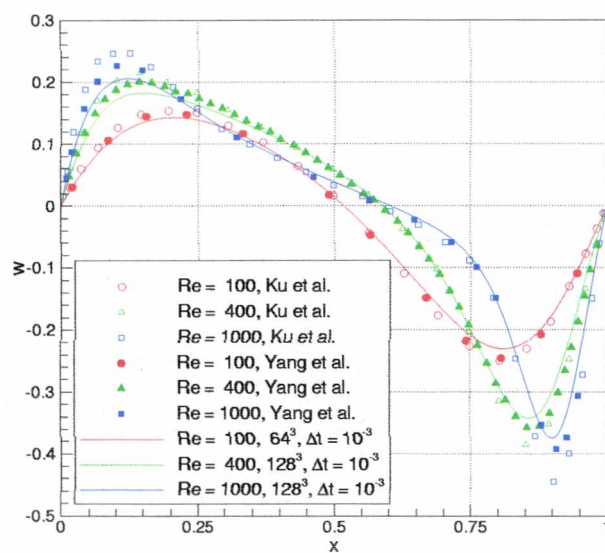


Rys. 7.15. Definicja struktur występujących podczas przepływu w sześcienniej komorze z ruchomą ścianką [121]

7.2. Przepływ w komorze z ruchomą ścianą



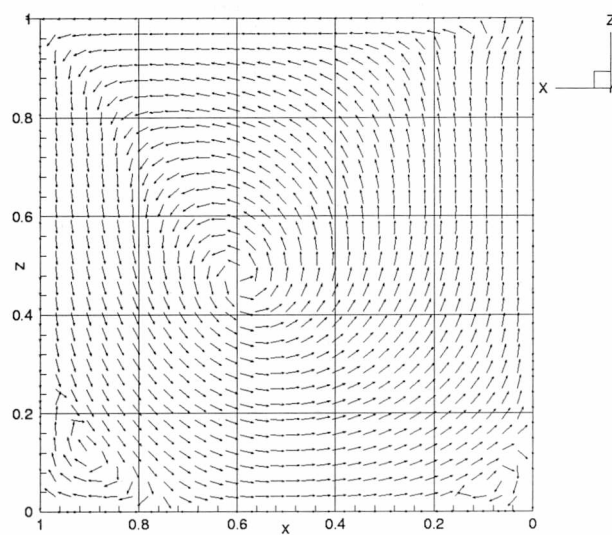
(a) składowa u dla $x = 0.5$ i $y = 0.5$



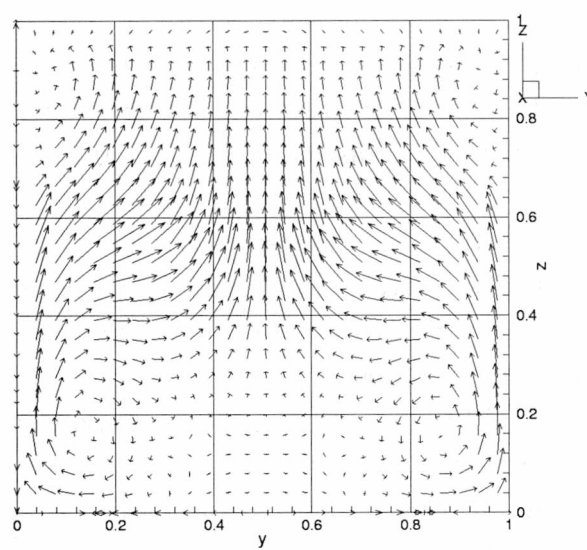
(b) składowa w dla $y = 0.5$ i $z = 0.5$

Rys. 7.16. Profile składowych prędkości dla przepływu w komorze sześcienniej

7.2. Przepływ w komorze z ruchomą ścianą

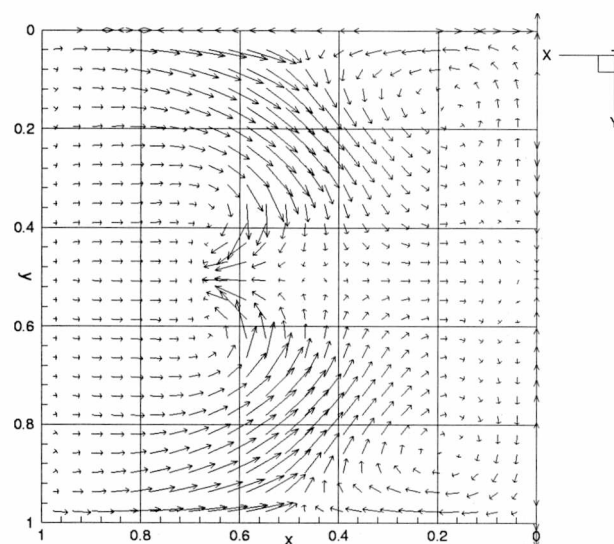


(a) płaszczyzna $y = 0.5$



(b) płaszczyzna $x = 0.5$

Rys. 7.17. Pole prędkości dla $Re = 1000$

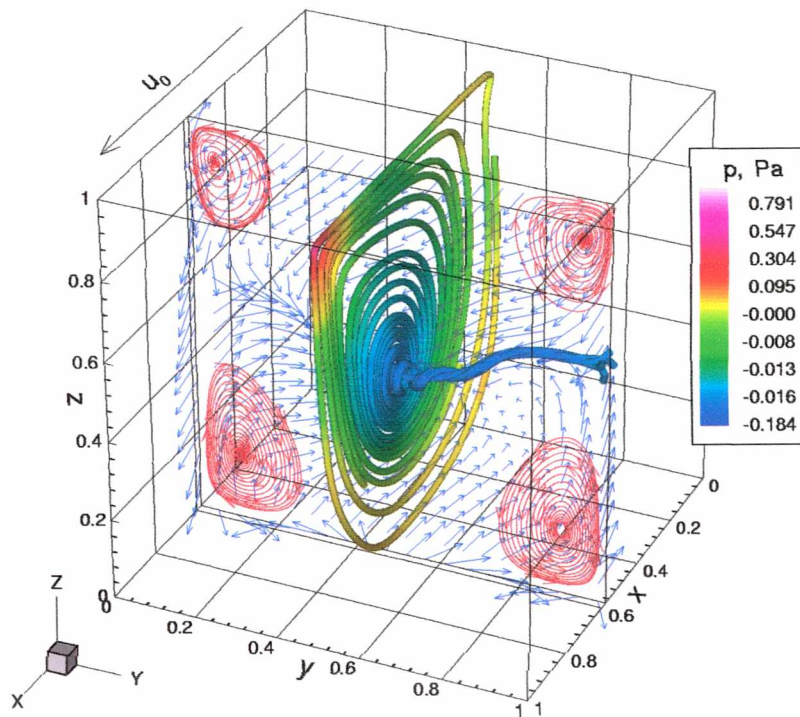

(c) płaszczyzna $z = 0.5$

Rys. 7.17. (kontynuacja)

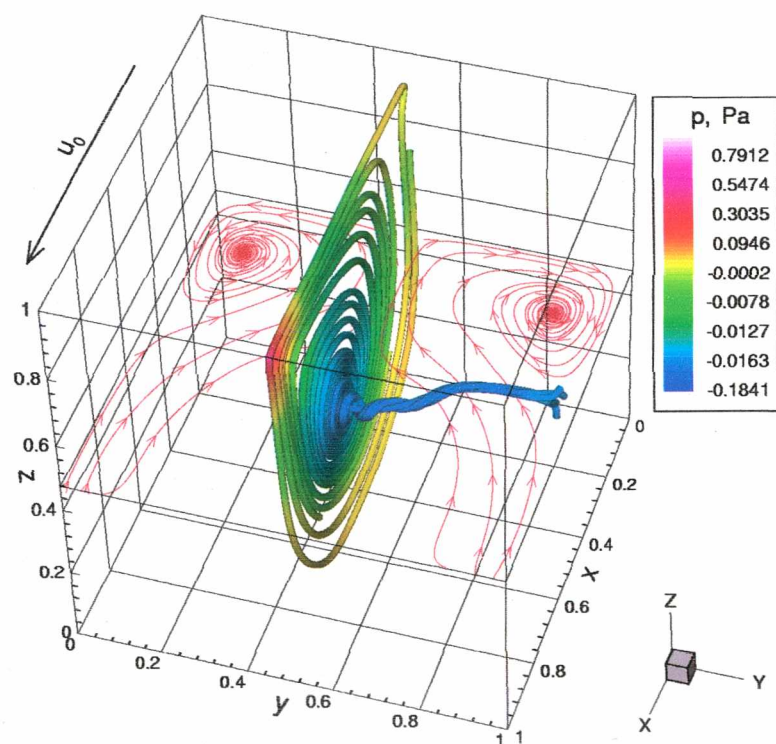
Na rysunku 7.16 przedstawiono, dla $Re = 100, 400$ i 1000 , porównanie uzyskanych profili składowych prędkości z wynikami przedstawionymi przez Ku *et al.* [97] i Jiang *et al.* [85]. Na rys. 7.17 przedstawiono, obliczone przez autora, pole prędkości w płaszczyznach $y = 0.5$, $x = 0.5$ i $z = 0.5$ dla $Re = 1000$.

Rysunki 7.18, 7.19 i 7.20 przedstawiają obrazy perspektywiczne wybranych struktur, charakterystycznych dla przepływu w komorze sześcienniej. Rysunki wykonano dla przepływu z $Re = 1000$. Struga dośrodkowa, przedstawiona jako linia prądu w postaci rurki zabarwionej zależnie od wartości ciśnienia (rys. 7.18 i 7.19), po dotarciu do płaszczyzny środkowej $y = 0.5$ przekształca się w wir pierwotny. Uwidoczniono również obecność przyściennych wirów narożnych. Na rys. 7.20 przedstawiono linie prądu w postaci rurki, wydostające się z wnętrza wirów narożnych jako narożne strugi odśrodkowe, które po osiągnięciu ścianki $y = 0$, powracają po spiralach w kierunku płaszczyzny wiru pierwotnego.

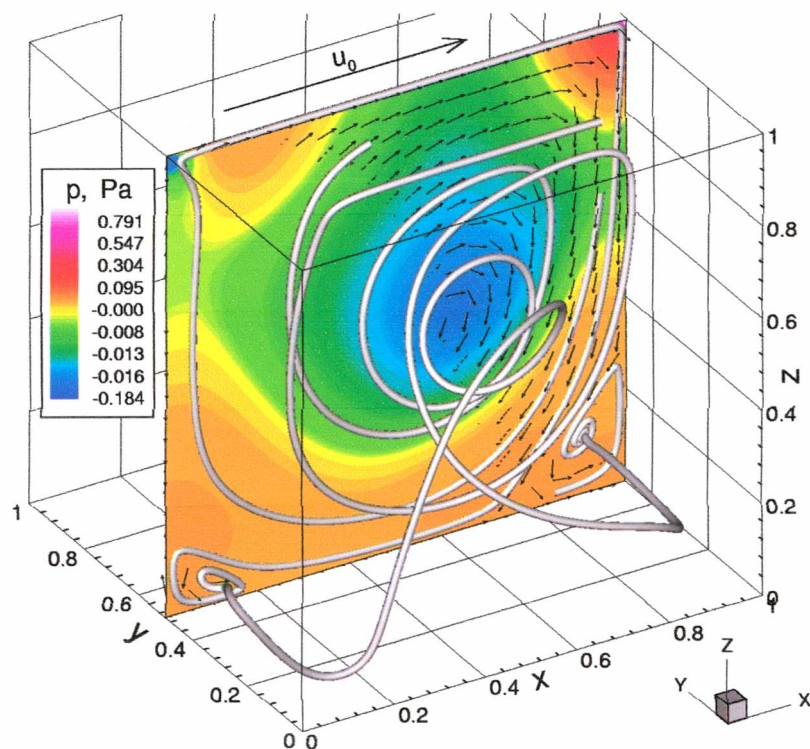
Otrzymane wyniki numeryczne są zgodne z wynikami badań eksperymentalnych i innych symulacji numerycznych, co utwierdza przekonanie o poprawnej implementacji numerycznej zastosowanej metody.



Rys. 7.18. Widok perspektywiczny pierwotnego wiru podstawowego w płaszczyźnie $y = 0.5$ oraz pola prędkości, poprzecznych narożnikowych wirów przyściennych i strugi dośrodkowej w płaszczyźnie $x = \frac{74}{128}$ dla $Re = 1000$



Rys. 7.19. Widok perspektywiczny strugi dośrodkowej ($x = \frac{74}{128}$), pierwotnego wiru podstawowego ($y = 0.5$) oraz wzdłużnych narożnikowych wirów przyściennych w płaszczyźnie $z = \frac{61}{128}$ dla $Re = 1000$



Rys. 7.20. Widok perspektywiczny pola prędkości w płaszczyźnie pierwotnego wiru podstawowego ($y = 0.5$) oraz wtórnych wirów narożnikowych, strug odśrodkowych i zewnętrznych wirów okołosrodkowych dla $Re = 1000$

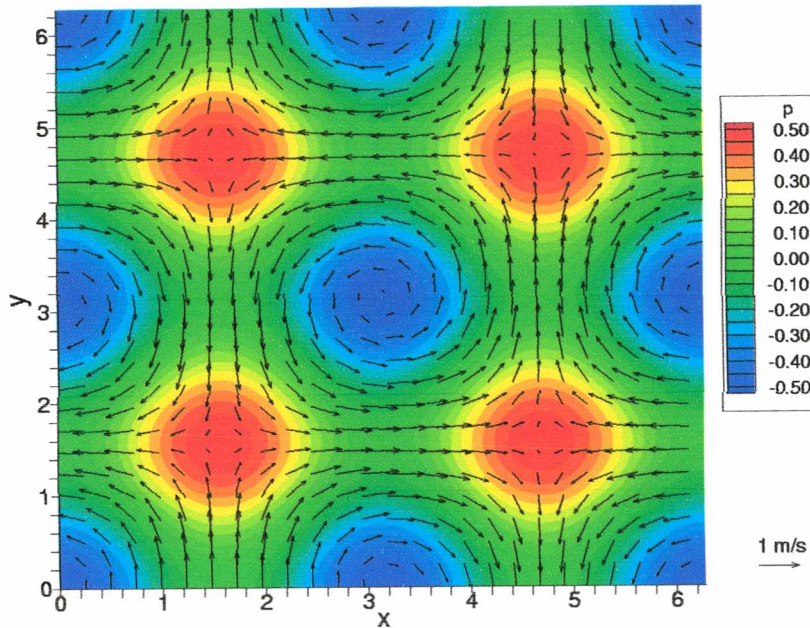
7.3 Test dla rozwiązania analitycznego

Dla przestrzeni dwuwymiarowej istnieje analityczne rozwiązanie niestacjonarnych równań Naviera–Stokesa, opisywanego przez następujący układ równań [19, 18]

$$u_a(x, y, t) = -\cos(x) \sin(y) e^{-2\mu t}, \quad (7.7)$$

$$v_a(x, y, t) = \sin(x) \cos(y) e^{-2\mu t}, \quad (7.8)$$

$$p_a(x, y, t) = -\frac{1}{4} (\cos(2x) + \cos(2y)) e^{-4\mu t} + \text{const}. \quad (7.9)$$



Rys. 7.21. Pole prędkości i ciśnienia dla $t = 0$

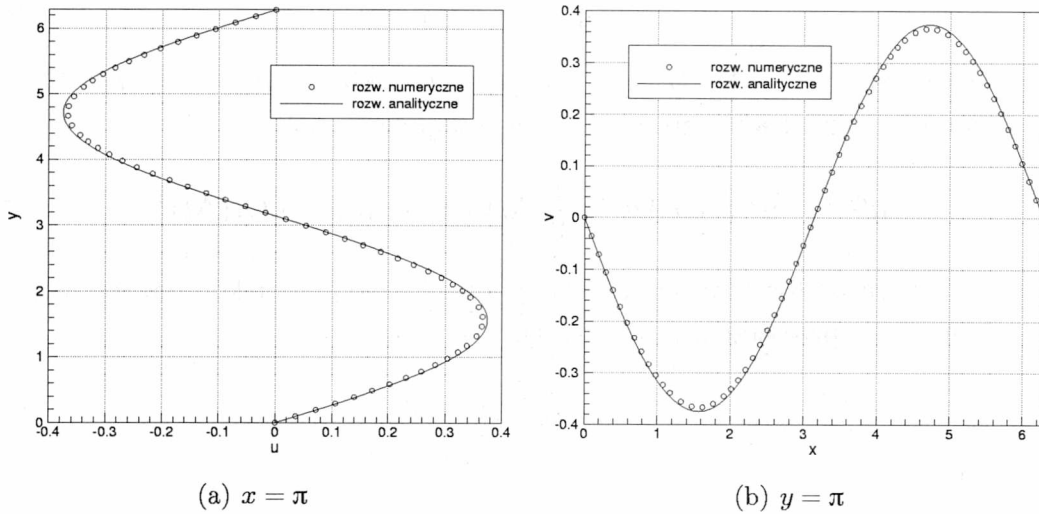
Obliczenia sprawdzające wykonano dla $\mu = 0.05$. Do obliczeń przyjęto obszar kwadratowy $D = \{(x, y) : x \in \langle 0, 2\pi \rangle, y \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$. Za warunek początkowy przyjęto $\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_a(\mathbf{x}, 0)$, a warunek brzegowy $\mathbf{u}_f(t)|_{\partial D} = \mathbf{u}_a(t)|_{\partial D}$. Rysunek 7.21 przedstawia obszar obliczeniowy oraz pole prędkości i ciśnienia dla $t = 0$, wyznaczone w oparciu o wzory (7.7)–(7.9). Obliczenia przeprowadzono dla różnych wielkości $\Delta x = \Delta y$ siatki numerycznej z krokiem czasowym $\Delta t = \frac{1}{2}\Delta x$.

7.3. Test dla rozwiązania analitycznego

Tabela 7.2. Błędy numeryczne i rząd zbieżności

	32×32	64×64	128×128	rząd
$\ E(u_a, u)\ _1$	$4.17 \cdot 10^{-1}$	$2.14 \cdot 10^{-1}$	$1.10 \cdot 10^{-1}$	0.96
$\ E(u_a, u)\ _2$	$8.92 \cdot 10^{-2}$	$4.58 \cdot 10^{-2}$	$2.35 \cdot 10^{-2}$	0.96
$\ E(u_a, u)\ _\infty$	$3.10 \cdot 10^{-2}$	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$9.57 \cdot 10^{-3}$	0.85
$\ E(v_a, v)\ _1$	$4.08 \cdot 10^{-1}$	$2.11 \cdot 10^{-1}$	$1.08 \cdot 10^{-1}$	0.96
$\ E(v_a, v)\ _2$	$8.71 \cdot 10^{-2}$	$4.49 \cdot 10^{-2}$	$2.30 \cdot 10^{-2}$	0.96
$\ E(v_a, v)\ _\infty$	$3.04 \cdot 10^{-2}$	$1.57 \cdot 10^{-2}$	$8.04 \cdot 10^{-3}$	0.96

Na rysunku 7.22 przedstawiono porównanie składowych prędkości rozwiązania analitycznego i rozwiązania numerycznego, otrzymanego dla $t = 400\Delta t$ na siatce 128×128 .



Rys. 7.22. Profile składowych prędkości wzdłuż pionowej i poziomej linii środkowych ($\Delta t = \frac{1}{2}\Delta x$, $\Delta x = \frac{2\pi}{128}$, $t = 400\Delta t$)

W celu uzyskania rzędu zbieżności metody numerycznej, obliczenia wykonywano na różnych siatkach numerycznych. Tabela 7.2 przedstawia zestawienie błędów numerycznych składowych prędkości w normach L_1 , L_2 i L_∞ :

$$\|E(a, b)\|_p = \sqrt[p]{\int_D |a(\mathbf{x}, t) - b(\mathbf{x}, t)|^p dA}, \quad p = 1, 2, \quad (7.10)$$

7.3. Test dla rozwiązania analitycznego

$$\|E(a, b)\|_\infty = \max_{\mathbf{x} \in D} |a(\mathbf{x}, t) - b(\mathbf{x}, t)|, \quad (7.11)$$

oraz uzyskany rząd zbieżności, który wynosi ~ 1 .

Analityczne wyznaczenie rzędu dokładności metody numerycznej

Uzyskany z badań numerycznych rząd zbieżności wynika z zastosowania metody dekompozycji kierunków operatora różniczkowego. Równanie, podlegające dekompozycji, można zapisać w następującej postaci operatorowej:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = A\mathbf{u}, & t \in \langle 0, T \rangle \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) \end{cases}, \quad (7.12)$$

gdzie

$$A = \nu \Delta - (\mathbf{u} \cdot \nabla). \quad (7.13)$$

Dla czasu $t^{n+1} = \Delta t \cdot (n+1)$ rozwiązanie dokładne $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^{n+1})$ określone jest przez $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^n)$ w następujący sposób

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t A \mathbf{u}^n + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 [A^2 + A_t] \mathbf{u}^n + O((\Delta t)^3). \quad (7.14)$$

Operator A w równaniu (7.12) podlega następnie dekompozycji względem kierunków przestrzennych x i y , tj.

$$A = A_x + A_y, \quad (7.15)$$

gdzie

$$A_x \mathbf{u} = \nu \Delta_x \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla_x) \mathbf{u}, \quad (7.16)$$

$$A_y \mathbf{u} = \nu \Delta_y \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla_y) \mathbf{u}, \quad (7.17)$$

w których $\nabla_x = (\frac{\partial}{\partial x}, 0)$, $\nabla_y = (0, \frac{\partial}{\partial y})$, $\Delta_x = \nabla_x^2$, $\Delta_y = \nabla_y^2$. Dzięki temu równanie (7.12) można przedstawić jako następujący układ równań [59]

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} = A_x \mathbf{u}^*, & t \in \langle t^n, t^{n+1} \rangle \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t^n) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^n) \end{cases}, \quad (7.18)$$

7.3. Test dla rozwiązania analitycznego

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} = A_y \mathbf{u}_h, & t \in \langle t^n, t^{n+1} \rangle \\ \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t^n) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t^{n+1}) \end{cases}, \quad (7.19)$$

gdzie $\mathbf{u}_h^{n+1}$ jest rozwiązaniem numerycznym dla czasu t^{n+1} zadania (7.12), które otrzymano jako rezultat wykorzystania metody dekompozycji.

Do rozwiązania równań układu (7.18)–(7.19) wykorzystano metodę Cranka–Nicholsona:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} A_x \mathbf{u}^* + \frac{1}{2} A_x \mathbf{u}^n \\ \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = \frac{1}{2} A_y \mathbf{u}_h^{n+1} + \frac{1}{2} A_y \mathbf{u}^* \end{cases}, \quad (7.20)$$

Wyznaczając kolejno $\mathbf{u}^*$ i $\mathbf{u}_h^{n+1}$ z układu (7.20) otrzymujemy odpowiednio

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= [I - \frac{1}{2} \Delta t A_x]^{-1} [I + \frac{1}{2} \Delta t A_x] \mathbf{u}^n = \\ &= \mathbf{u}^n + \Delta t A_x \mathbf{u}^n + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 A_x^2 \mathbf{u}^n + \frac{1}{4} (\Delta t)^3 A_x^3 \mathbf{u}^n + \mathcal{O}((\Delta t)^4), \end{aligned} \quad (7.21)$$

i

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h^{n+1} &= [I - \frac{1}{2} \Delta t A_y]^{-1} [I + \frac{1}{2} \Delta t A_y] \mathbf{u}^* = \\ &= \mathbf{u}^* + \Delta t A_y \mathbf{u}^* + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 A_y^2 \mathbf{u}^* + \frac{1}{4} (\Delta t)^3 A_y^3 \mathbf{u}^* + \mathcal{O}((\Delta t)^4). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Po podstawieniu $\mathbf{u}^*$, określonego przez równanie (7.21), do równania (7.22), rozwiązanie numeryczne $\mathbf{u}_h^{n+1}$ określone jest przez $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^n)$ w następujący sposób

$$\mathbf{u}_h^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t (A_x + A_y) \mathbf{u}^n + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 (A_x^2 + 2A_y A_x + A_y^2) \mathbf{u}^n + \mathcal{O}((\Delta t)^3). \quad (7.23)$$

Lokalny błąd $\mathbf{E}_l^n$ metody dekompozycji, tzn. błąd metody powstały przy przejściu od t^n do t^{n+1} [11, 140], wynosi

$$\mathbf{E}_l^n = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1} = \frac{1}{2} (\Delta t)^2 (A_x A_y - A_y A_x + A_t) \mathbf{u}^n + \mathcal{O}((\Delta t)^3), \quad (7.24)$$

ponieważ, ze względu na nieliniowość operatorów A_x i A_y , operatory te nie są operatorami przemiennymi, tj. $A_x A_y \neq A_y A_x$. Wielkość błędu lokalnego szacuje się jako

$$\|\mathbf{E}_l^n\|_p \leq K_1^n (\Delta t)^2, \quad (7.25)$$

7.3. Test dla rozwiązania analitycznego

gdzie $K_1^n = \frac{1}{2} \max_{t \in \langle t^n, t^{n+1} \rangle} \|(A_x A_y - A_y A_x + A_t) \mathbf{u}\|_p < \infty$, i $p = \{1, 2, \dots, \infty\}$ ¹.

Błąd całkowity $\mathbf{E}_g$ metody dekompozycji, tzn. błąd metody powstały na całym przedziale $\langle 0, T \rangle$ po $N = \frac{T}{\Delta t}$ krokach czasowych [11, 140], jest sumą błędów lokalnych występujących w każdym kroku czasowym:

$$\mathbf{E}_g = \sum_{n=1}^N \mathbf{E}_l^n. \quad (7.26)$$

Błąd całkowity szacuje się jako

$$\|\mathbf{E}_g\|_p \leq \sum_{n=1}^N K_1^n (\Delta t)^2 \leq N K_1 (\Delta t)^2 = K_2 \Delta t, \quad (7.27)$$

gdzie $K_1 = \max_{n=1,2,\dots,N} K_1^n$, $K_2 = K_1 \cdot T$. Tak więc rząd dokładności wykorzystanej w niniejszej pracy metody dekompozycji (7.18)–(7.19) wynosi $O(\Delta t)$, co potwierdzają uzyskiwane wyniki numeryczne. Ponieważ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|\mathbf{E}_g\|_p = 0, \quad (7.28)$$

to układ różnicowy (7.20) jest zgodny z równaniem różniczkowym (7.12). Dla układu równań z niezależnymi od czasu operatorami nieprzemiennymi, rząd zbieżności metody dekompozycji można zwiększyć przez zastosowanie metody dekompozycji Stranga [149].

¹W przestrzeni $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, wszystkie normy wektorów są równoważne w tym sensie, że jeśli według pewnej normy ciąg wektorów $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots$ dąży do wektora zerowego, czyli ciąg liczb $\|\mathbf{x}^{(1)}\|, \|\mathbf{x}^{(2)}\|, \dots$ dąży do zera, to dla dowolnej innej normy również zachodzi zbieżność do zera [43]

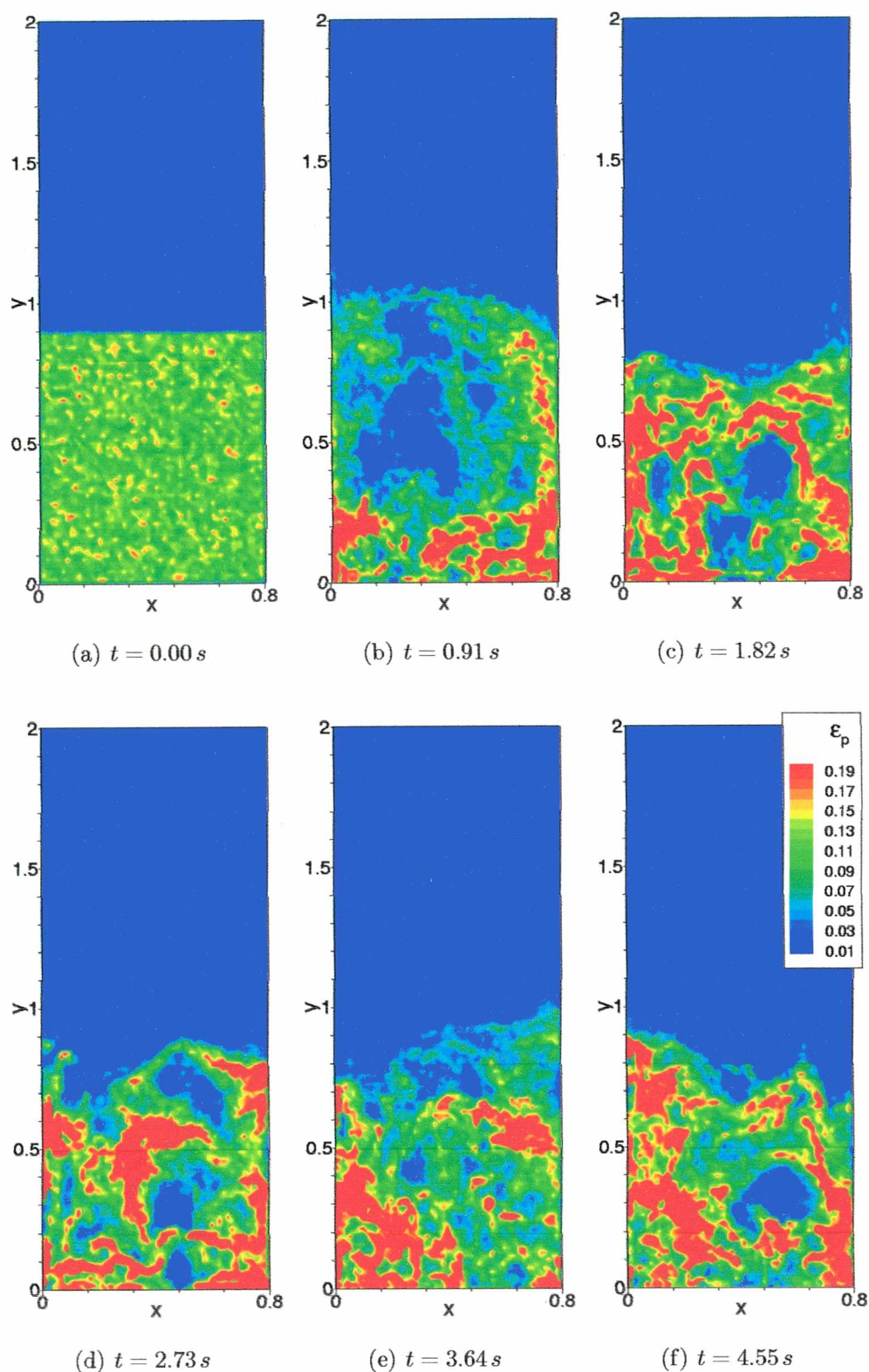
Rozdział 8

Numeryczne modelowanie przepływu fluidalnego

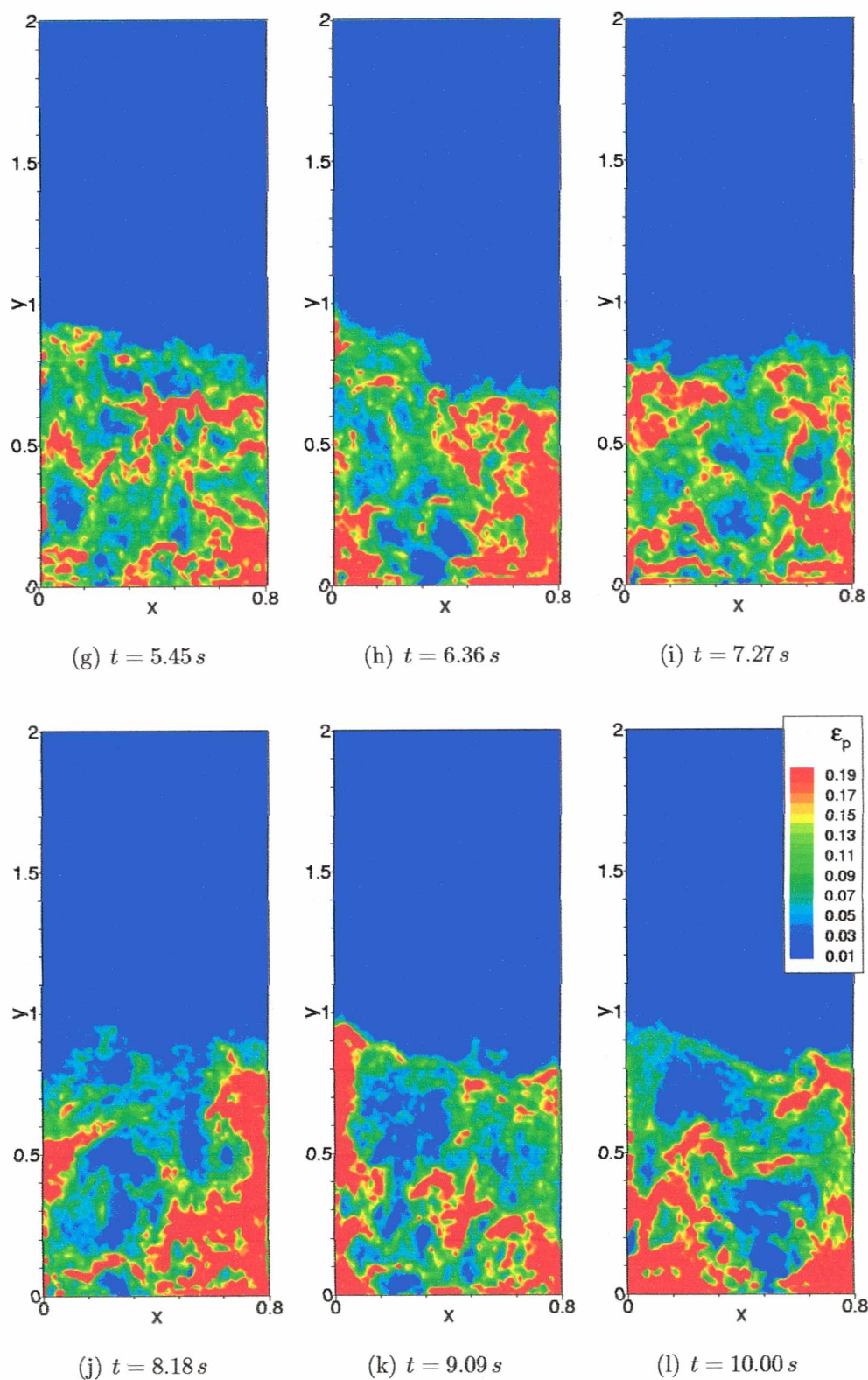
8.1 Pęcherzowe złożo fluidalne

Powstawanie i ewolucja pęcherzy w złożu fluidalnym jest jednym z najbardziej charakterystycznych zjawisk występujących w przepływie fluidalnym. Prawidłowe odtworzenie przepływu w warstwie pęcherzykowej stanowić więc będzie dobre potwierdzenie poprawności użytego modelu. Do obliczeń przyjęto komorę dwuwymiarową o szerokości 80 cm w kierunku x i wysokości 2.0 m w kierunku y . Na wlocie ($y = 0.0\text{ m}$) przyjęto równomierny profil prędkości $v = 2.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ powietrza o gęstości $\rho_f = 0.30 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ i dynamicznym współczynnikiem lepkości $\mu_f = 45.3 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, co odpowiada warunkom dla temperatury 1123 K . Przyspieszenie ziemskie działa w ujemnym kierunku osi y . Gęstość materiału cząstek wynosiła $\rho_p = 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a średnica cząstek $d_p = 500\text{ }\mu\text{m}$. Każda ze 100 000 cząstek, użytych w obliczeniach, reprezentowała $N_g = 12$ cząstek o jednakowych własnościach, co w sumie odpowiada przepływowi z całkowitą liczbą $1.2 \cdot 10^6$ cząstek. Dla czasu $t = 0.0\text{ s}$ cząstki tak rozmieszczono w sposób losowy na całej szerokości komory do wysokości 90 cm , że początkowy udział objętościowy cząstek wynosił ~ 0.1 (rys. 8.1(a)). Obszar obliczeniowy podzielono na 56 i 140 komórek siatki numerycznej, odpowiednio w kierunku x i kierunku y . Parametry modelu oddziaływania ciągłego dla cząstek wynosiły: $P_s = 170\text{ Pa}$, $\varepsilon_{cp} = 0.65$. Obliczenia z krokiem czasowym $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}\text{ s}$ prowadzono do czasu 10 s .

8.1. Pęcherzowe złoża fluidalne

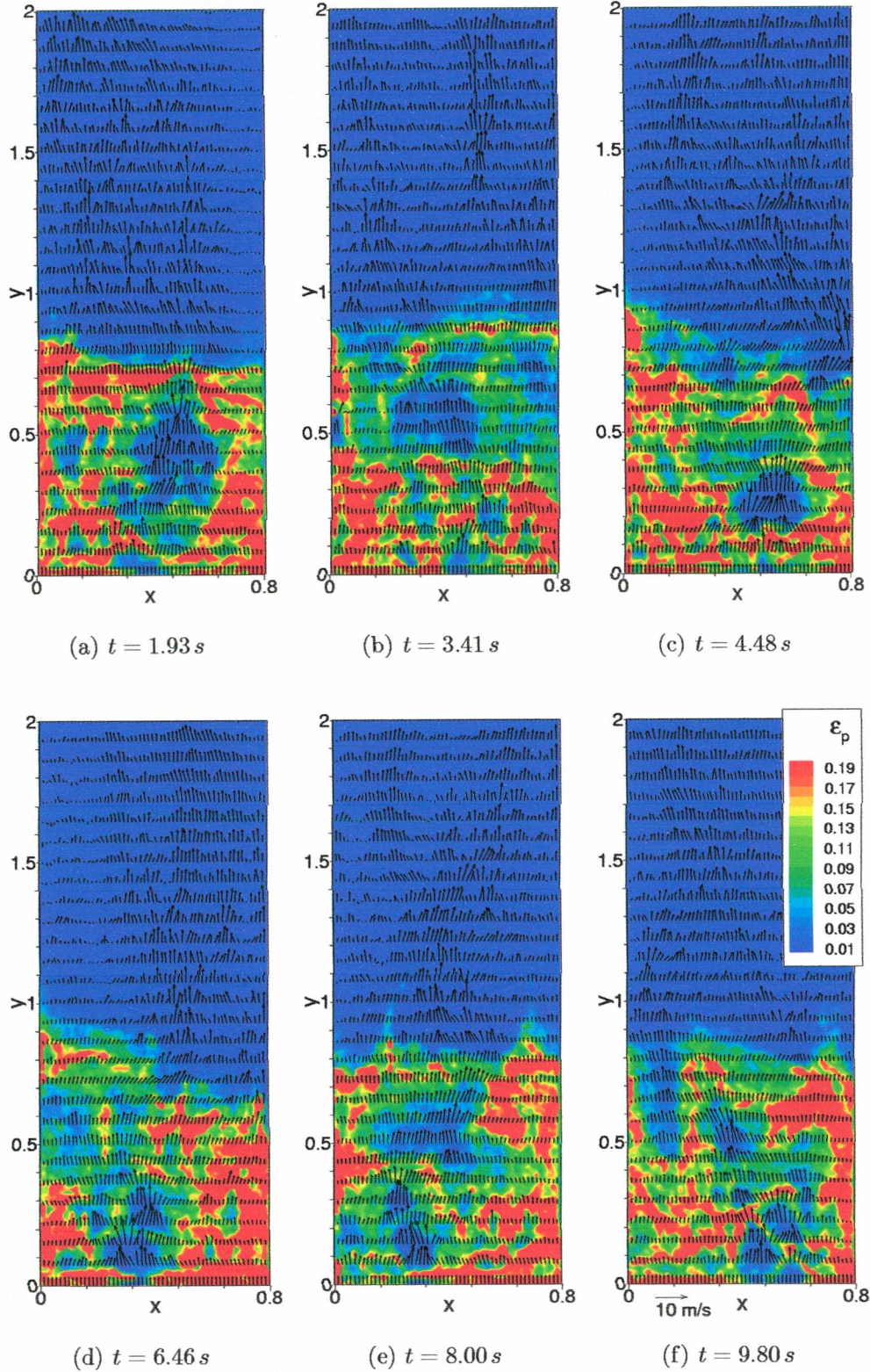


Rys. 8.1. Ewolucja pola udziału objętościowego cząstek dla pęcherzykowej warstwy fluidalnej

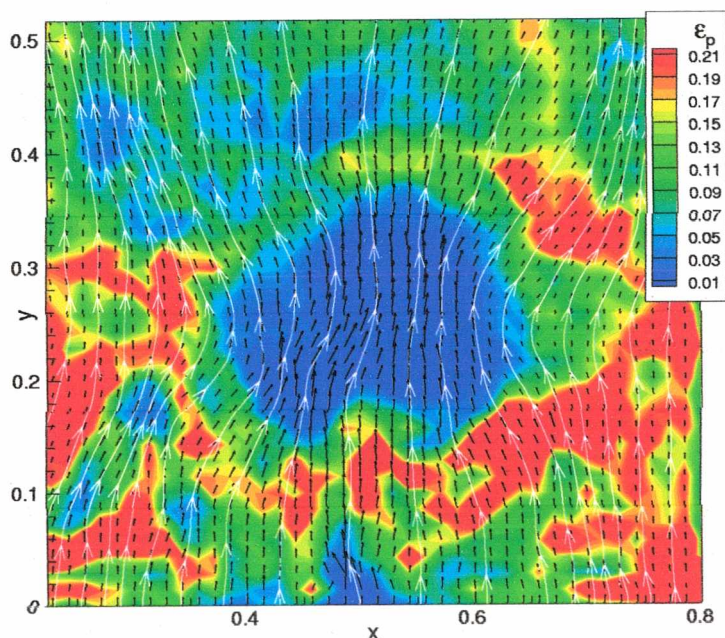


Rys. 8.1. (kontynuacja)

8.1. Pęcherzowe złożo fluidalne



Rys. 8.2. Obrazy udziału objętościowego cząstek i pola prędości płynu dla wybranych chwil czasowych

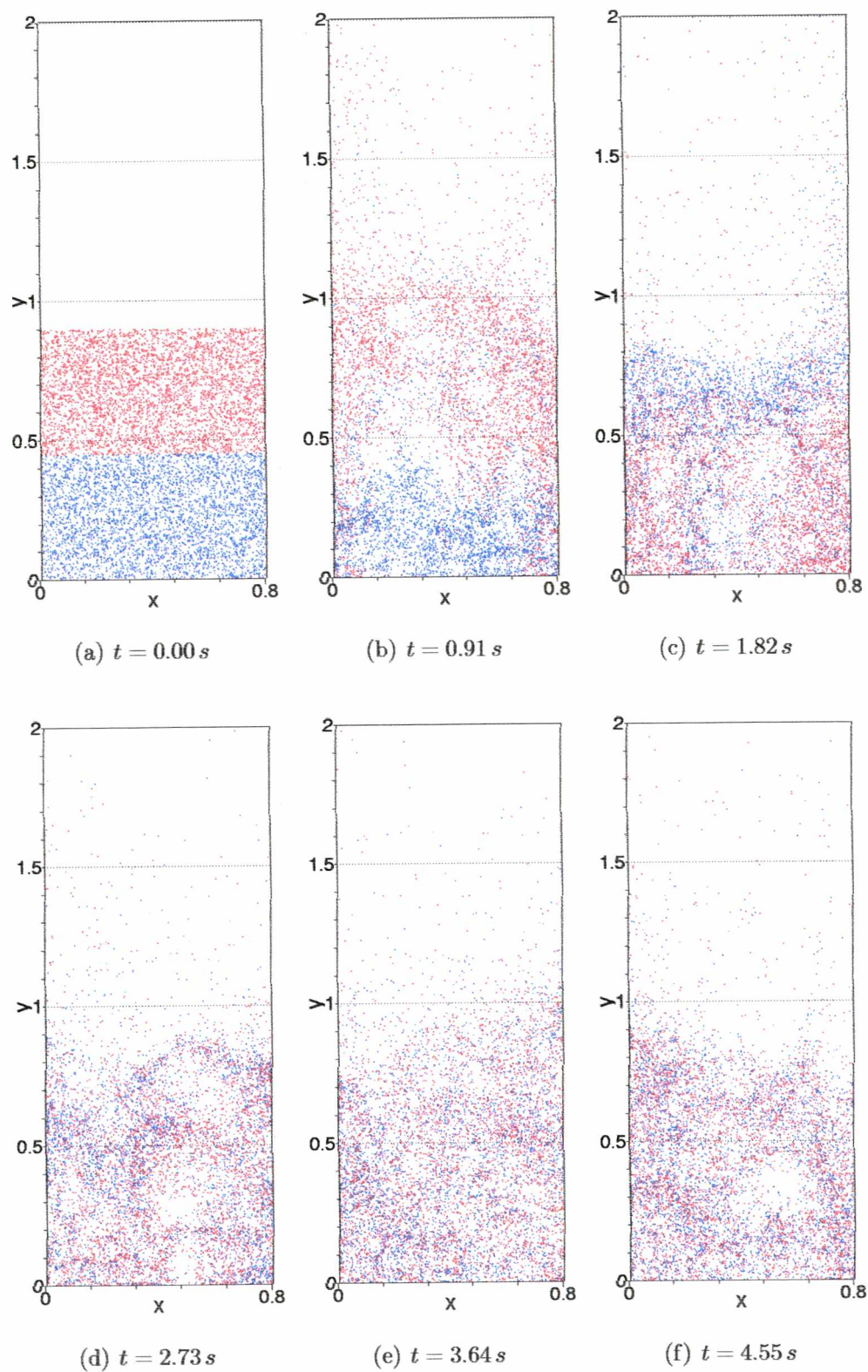


Rys. 8.3. Linie prądu dla płynu przepływającego przez pęcherz ($t = 4.48 \text{ s}$)

Rysunek 8.1 przedstawia ewolucję pola udziału objętościowego cząstek, a na rysunku 8.2 dla wybranych chwil czasowych przedstawiono pole prędkości na tle udziału objętościowego cząstek. Cechą charakterystyczną przepływu jest występowanie pęcherzy. Dynamika przepływu jest skomplikowana. Na rysunku 8.3 przedstawiono linie prądu i pole prędkości płynu wokół pęcherza. Cechą przepływu płynu jest charakterystyczne zagięcie linii prądu w pobliżu pęcherza. Najbardziej charakterystycznym i szeroko wykorzystywanym procesem, który występuje w złożach fluidalnych, w szczególności w złożu pęcherzowym, jest zjawisko szybkiego mieszania. Na rysunku 8.4 przedstawiono dynamikę cząstek w przepływie. Cząstki znajdujące się w górnej połowie warstwy zabarwiono kolorem czerwonym, a cząstki znajdujące się w dolnej połowie warstwy zabarwiono kolorem niebieski. Mimo początkowego rozdzielającego rozróżnienia cząstek, całkowite wymieszanie złoża zachodzi bardzo szybko, tj. po czasie ok. 2 s.

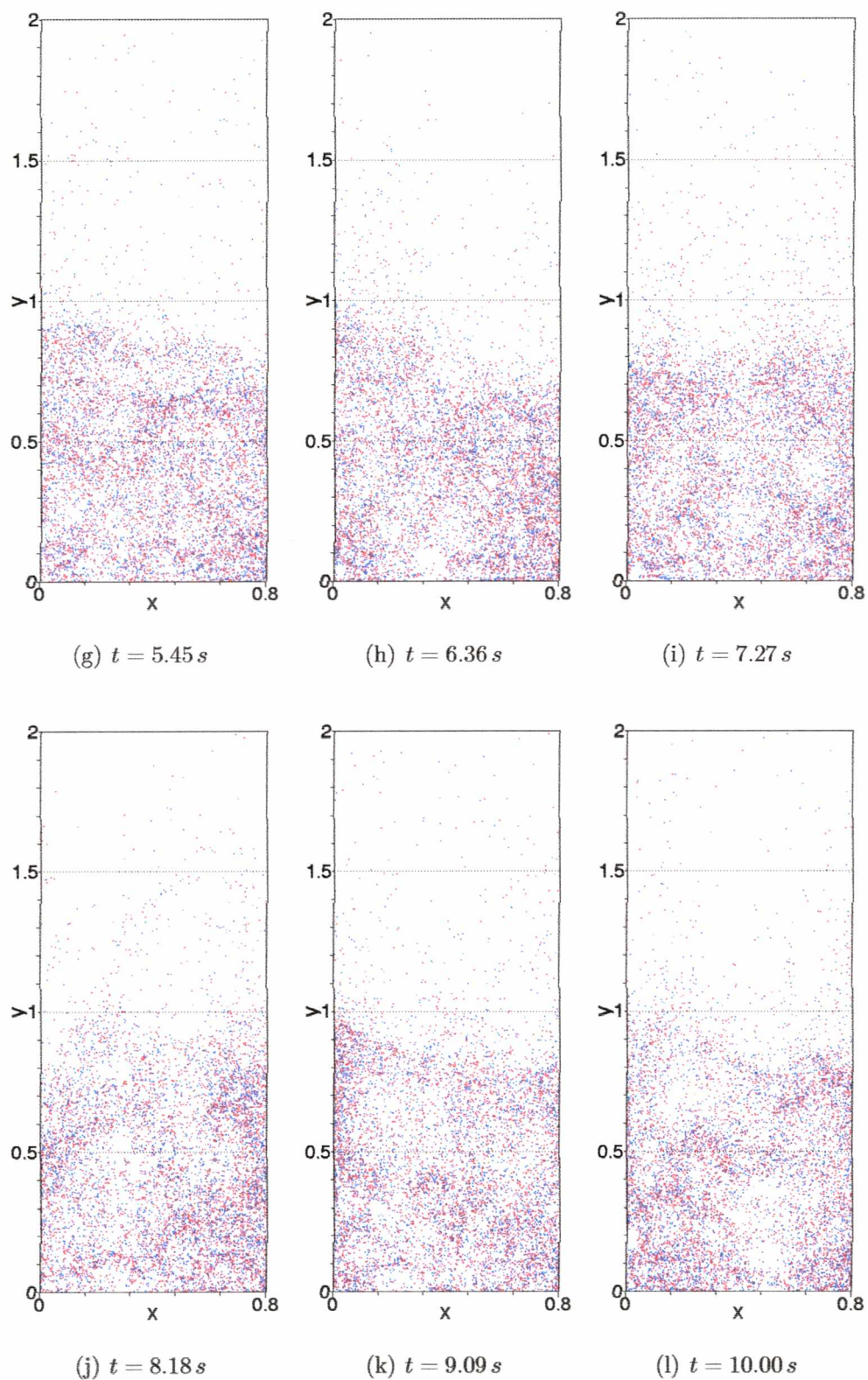
Otrzymane obrazy przepływu w warstwie pęcherzykowej są w dobrej zgodności jakościowej zarówno z innymi wynikami numerycznymi [128, 134, 170], jak i wynikami badań eksperymentalnych [156].

8.1. Pęcherzowe złożo fluidalne



Rys. 8.4. Mieszanie w pęcherzowym złożu fluidalnym
(na rysunku przedstawiono co 12-tą cząstkę wykorzystywaną do obliczeń)

8.1. Pęcherzowe złożo fluidalne



Rys. 8.4. (kontynuacja)

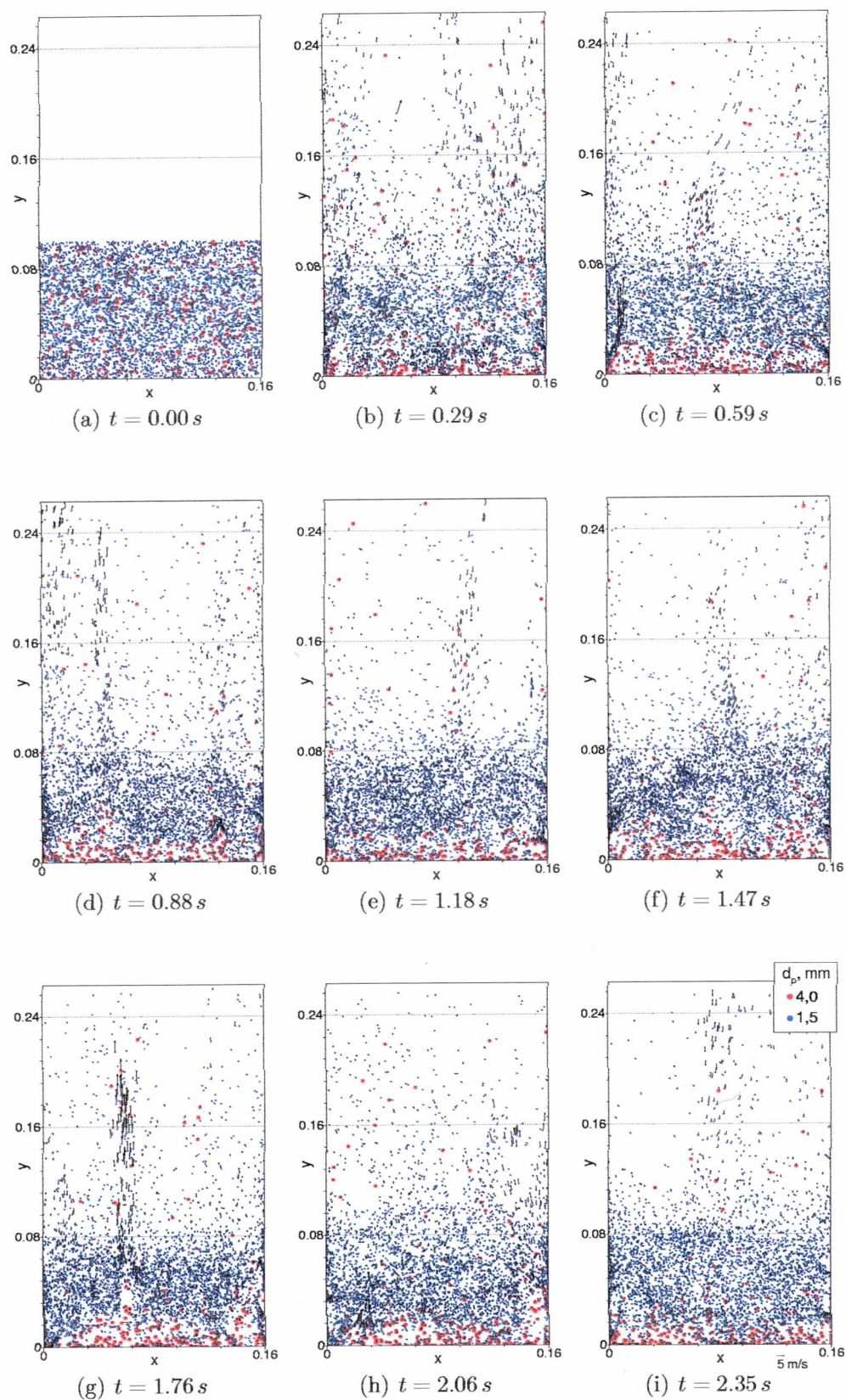
8.2 Segregacja złoża fluidalnego

Jeżeli w złożu fluidalnym znajdują się cząstki o różnych średnicach i/lub różnej gęstości i prędkość fluidyzacji jest tak dobrana, aby utrzymać w warstwie cząstki tych różnych rodzajów, to zwykle złożo fluidalne ulega segregacji (stratyfikacji). Cząstki o największej średnicy lub największej gęstości opadają na dno, a pozostałe cząstki przemieszczają się do góry lub są nawet wydmuchiwane na zewnątrz. Zjawisko segregacji odgrywa kluczową rolę tam, gdzie zjawisko rozdzielania (separacji) różnych typów cząstek stanowi podstawę działania danego układu. Cyrkulacyjna warstwa fluidalna jest przykładem, gdzie wykorzystuje się zarówno zjawisko intensywnego mieszania, jak i proces segregacji. Drobne cząstki ulegają wyniesieniu z dobrze wymieszanej warstwy fluidalnej do góry komory, a cząstki większe i o większej gęstości pozostają przy dnie.

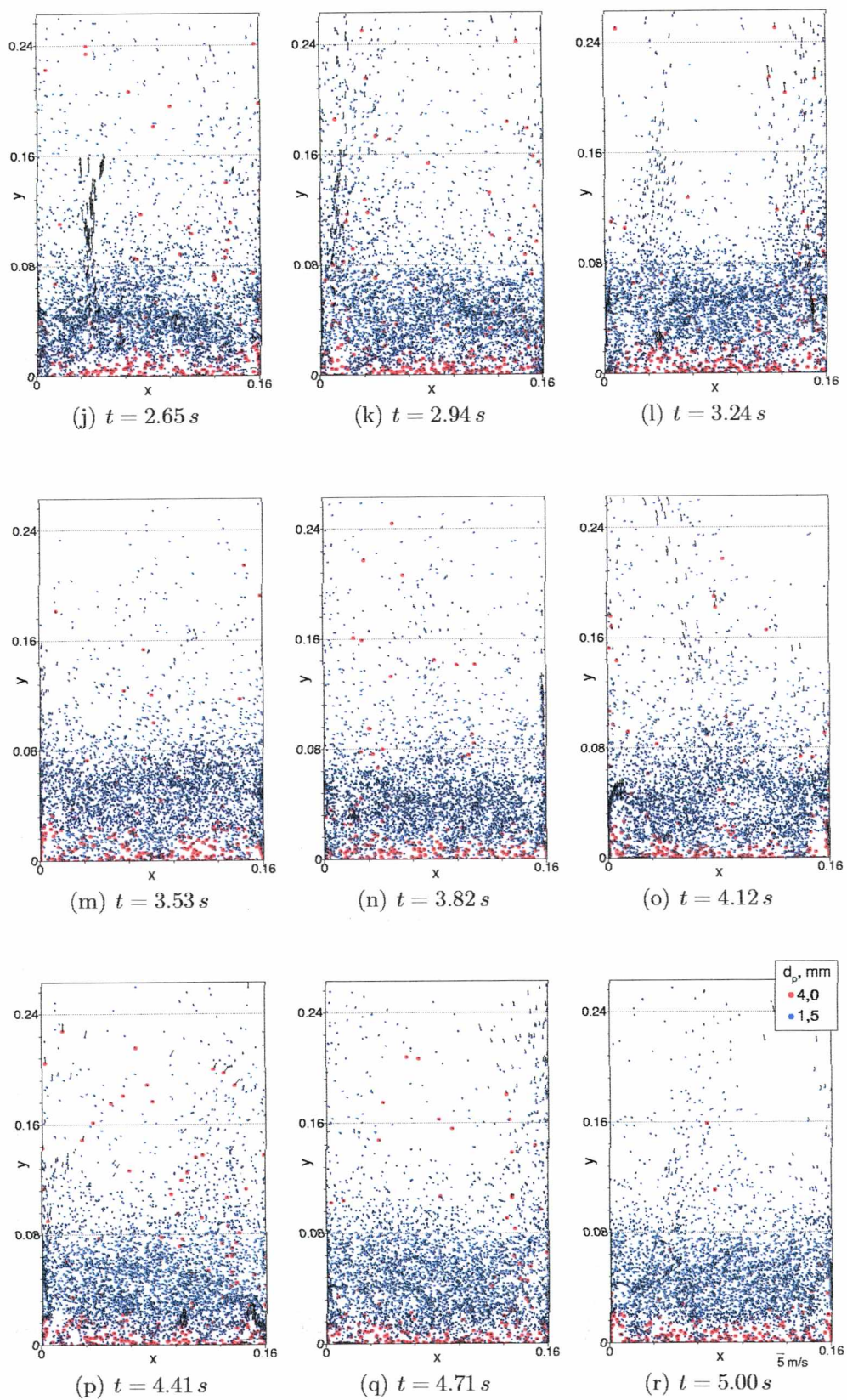
Do obliczeń przyjęto obszar o szerokości 16 cm i wysokości 26 cm . Obszar obliczeniowy podzielony został na 16 i 26 komórek siatki numerycznej, odpowiednio w kierunku x i kierunku y . Fluidyzującym płynem było powietrze o gęstości $\rho_f = 1.21 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ i dynamicznym współczynniku lepkości $\mu_f = 17.9 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Obliczenia przeprowadzono dla różnych średnic i gęstości cząstek. Każda z 1 000 cząstek, użytych w obliczeniach, reprezentowała $N_g = 1$ cząstek o jednakowych własnościach.

Na rys. 8.5 przedstawiono dynamikę cząstek dla złoża składającego się z cząstek o tej samej gęstości $\rho_p = 2480 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ lecz różnych średnicach. Do obliczeń przyjęto 250 cząstek o średnicy $d_p = 4.0\text{ mm}$ i 4750 cząstek o średnicy $d_p = 1.5\text{ mm}$. Prędkość fluidyzacji wynosiła $u_{flu} = 3.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

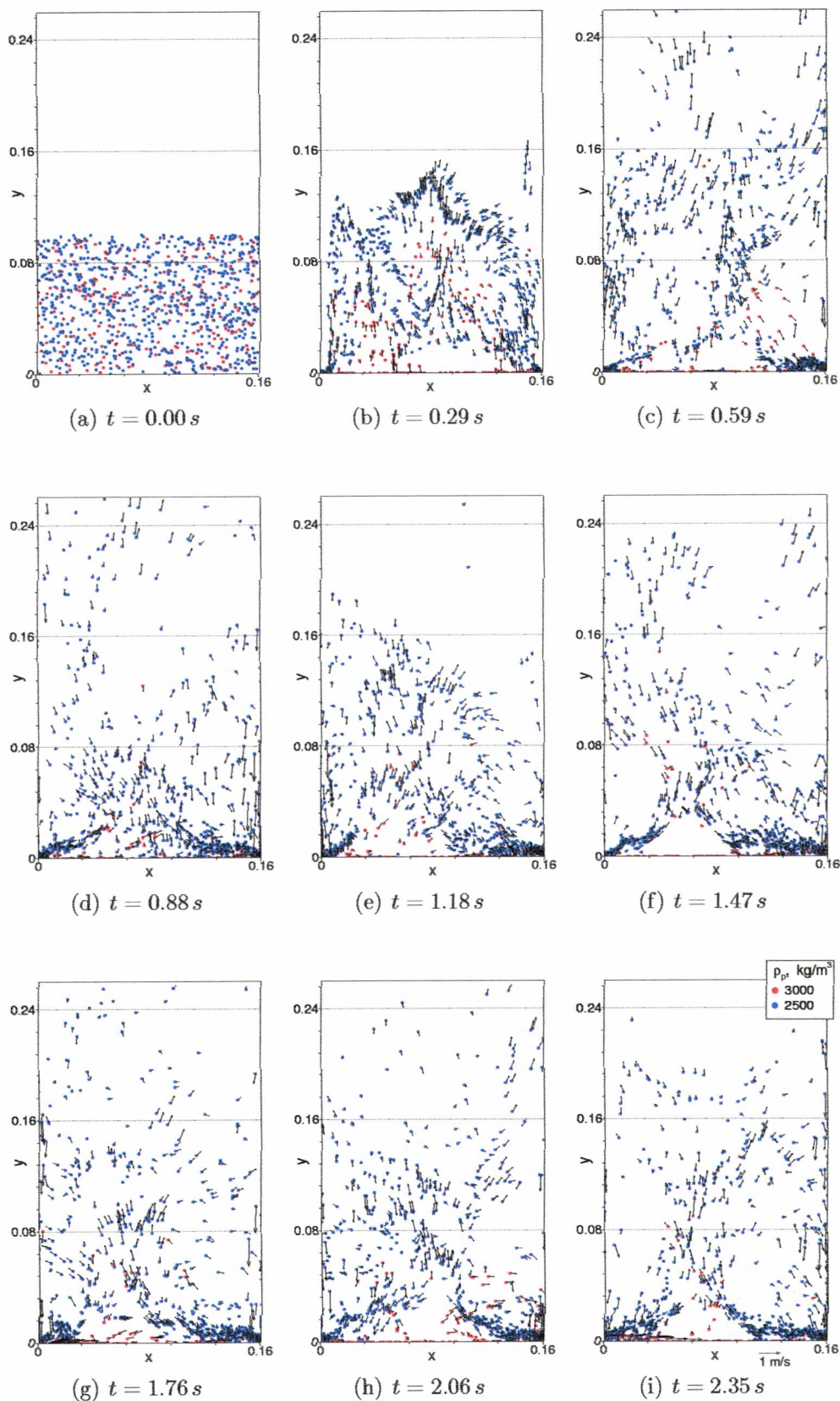
Rysunek 8.6 przedstawia dynamikę cząstek dla złoża składającego się z cząstek o tej samej średnicy $d_p = 1.0\text{ mm}$ lecz różnych gęstościach. Do obliczeń przyjęto 750 cząstek o gęstości $\rho_p = 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ i 250 cząstek o gęstości $\rho_p = 3000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Prędkość fluidyzacji wynosiła $u_{flu} = 6.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. W obliczeniach przyjęto, że cząstki, które zostały wyniesione z obszaru obliczeń, zostają zawrócone z powrotem na wlot. W obu przypadkach, mimo że cząstki zostały początkowo losowo rozmieszczono w komorze, to zgodnie z oczekiwaniami, cząstki o większej średnicy i większej gęstości gromadzą się przy dnie komory. Cząstki o mniejszej średnicy i gęstości tworzą warstwę nad cząstkami o większej średnicy lub większej gęstości. Otrzymane wyniki są w całkowitej zgodzie z wynikami dostępnymi w literaturze [49, 76].



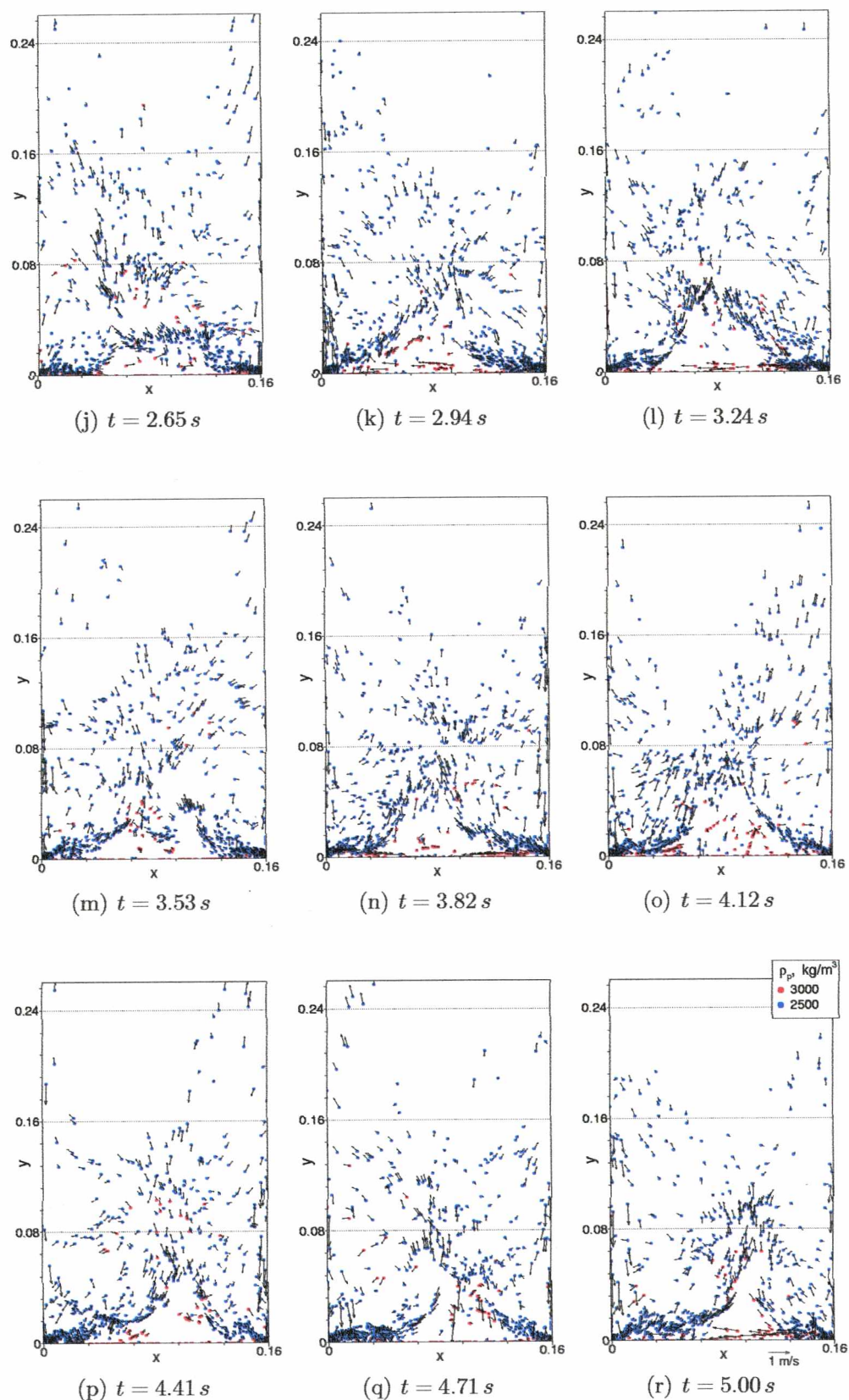
Rys. 8.5. Położenia i prędkości cząstek w wybranych chwilach czasowych dla układu o różnej średnicy cząstek: ● – 4,0 mm, ● – 1,5 mm



Rys. 8.5. (kontynuacja)



Rys. 8.6. Położenia i prędkości cząstek w wybranych chwilach czasowych dla układu o różnej gęstości materiału cząstek: $\bullet$ – $3000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\bullet$ – $2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$



Rys. 8.6. (kontynuacja)

8.3 Przepływ w kolumnie fluidyzacyjnej

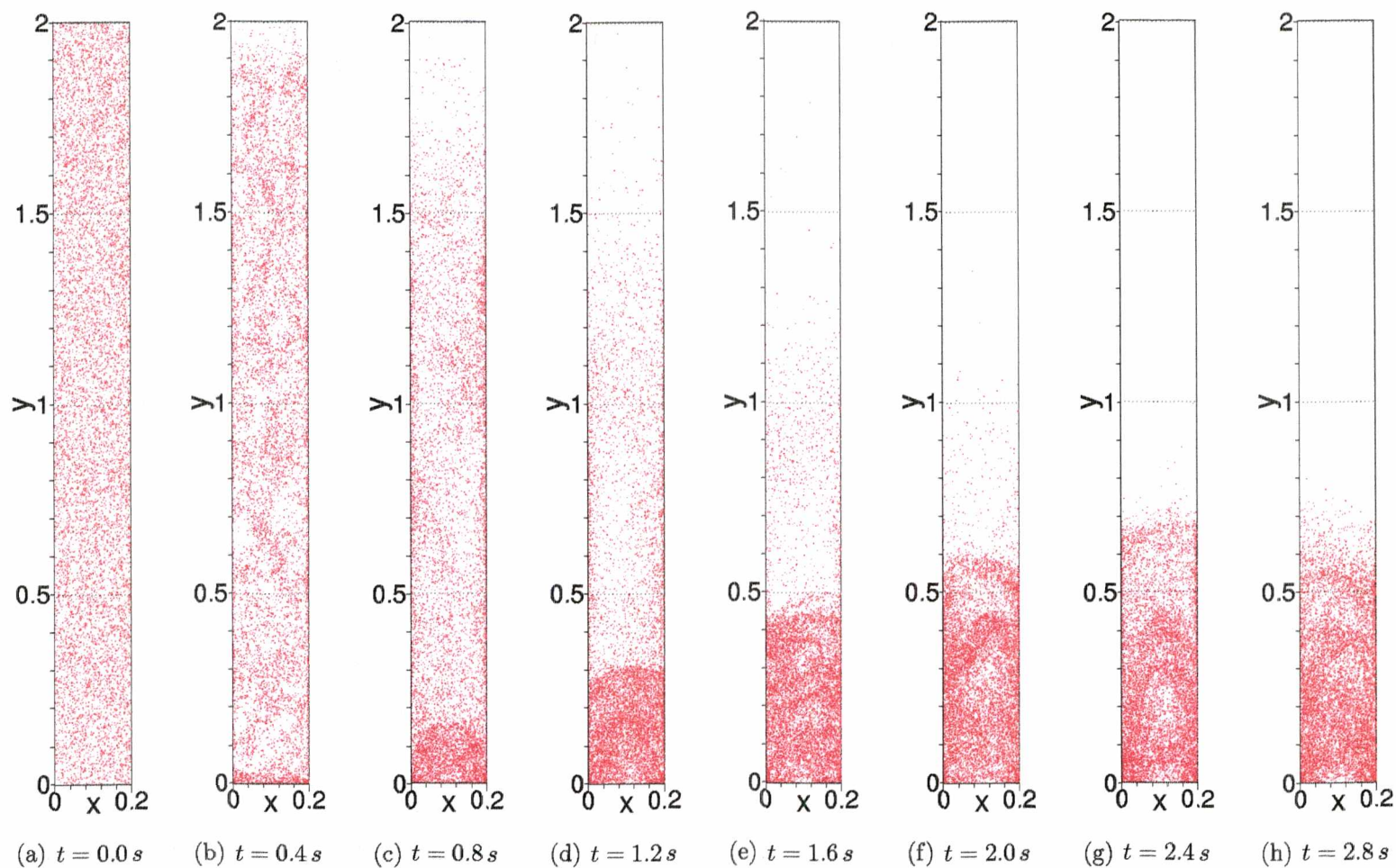
W niniejszym podrozdziale zostanie przedstawiony przepływ w pionowej dwuwymiarowej kolumnie fluidyzacyjnej. Badanie przepływu w pionowej kolumnie ma na celu odwzorowanie charakterystycznych cech rzeczywistego przepływu w cyrkulacyjnym kotle fluidalnym. Przepływ w cyrkulacyjnych kotłach fluidalnych odznacza się bardzo skomplikowaną dynamiką, wywołaną przez wzajemne oddziaływania między płynem a cząstkami.

Do obliczeń przyjęto dwuwymiarowy obszar o szerokości 20 cm i wysokości 2 m . Obszar obliczeniowy podzielony został na 24 i 240 komórek siatki numerycznej, odpowiednio w kierunku x i kierunku y . Fluidyzującym płynem było podgrzane powietrze o gęstości $\rho_f = 0.30 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ i dynamicznym współczynniku lepkości $\mu_f = 45.3 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. W chwili początkowej, cząstki materiału stałego w ilości $N_p = 30\,000$ o gęstości $\rho_p = 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ i średnicy $d_p = 500\text{ }\mu\text{m}$, umieszczono w całym obszarze kolumny (rys. 8.7(a)). Obliczenia prowadzono do czasu $t = 10\text{ s}$ z krokiem czasowym $\Delta t = 10^{-4}\text{ s}$.

Najpierw przeprowadzono obliczenia dla prędkości fluidyzacji $u_{flu} = 3.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ z parametrem $N_g = 4$. Rysunki 8.7, 8.8, 8.9 i 8.10 przedstawiają odpowiednio ewolucję położenia cząstek i ewolucję pola udziału objętościowego cząstek. Dodatkowo na rysunku 8.10 wykreślono pole prędkości płynu. Ponieważ prędkość fluidyzacji jest mniejsza od prędkości swobodnego opadania cząstki, która dla parametrów przepływu wynosi $\sim 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i wartość której obliczono w oparciu o nieliniowe równanie

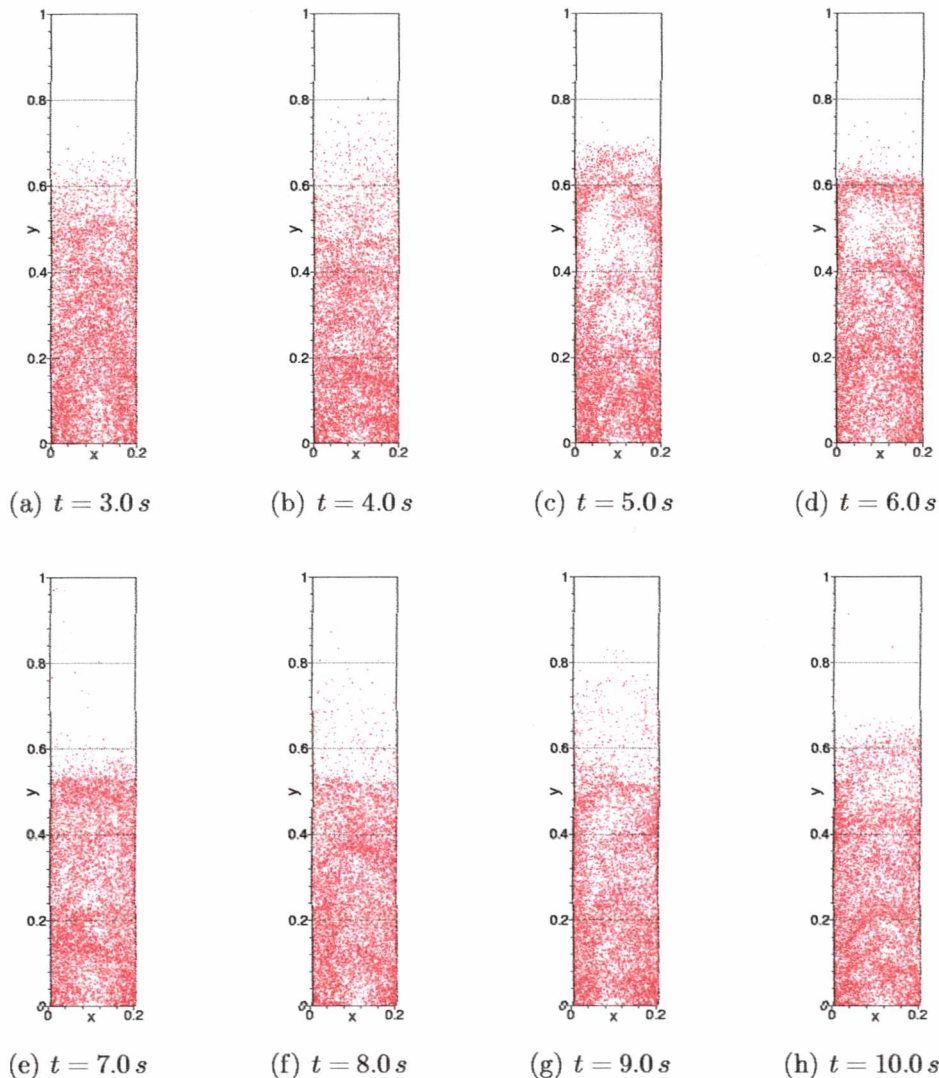
$$D_p u_f = g, \quad (8.1)$$

to cząstki opadają. Równanie (8.1) wynika z równania (5.71) ruchu cząstki, dla którego przejęto $\mathbf{u}_p = 0$. Przedstawiony na rys. 8.7(a)–8.7(h) i rys. 8.9 proces opadania cząstek jest określany mianem *sedymtacji grawitacyjnej*. U góry komory pojawia się powierzchnia rozdziału między płynem a opadającymi cząstkami. Na dnie komory zaczyna narastać warstwa gęsta. Powstające strefy czystego płynu, opadających cząstek i warstwy gęstej są wzajemnie od siebie oddzielone wyraźnymi powierzchniami rozdziału. Powierzchnia rozdzielaająca opadające cząstki i płyn obniża się z prędkością $\sim 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, co stanowi różnicę prędkości swobodnego opadania cząstek i prędkości fluidyzacji. Proces sedymtacji kończy się w chwili, gdy wysokość warstwy gęstej osiąga poziom powierzchni rozdzielającej opadające cząstki i płyn. Dalsza dynamika przepływu przebiega w sposób podobny do przepływu w złożu pęcherzowym.



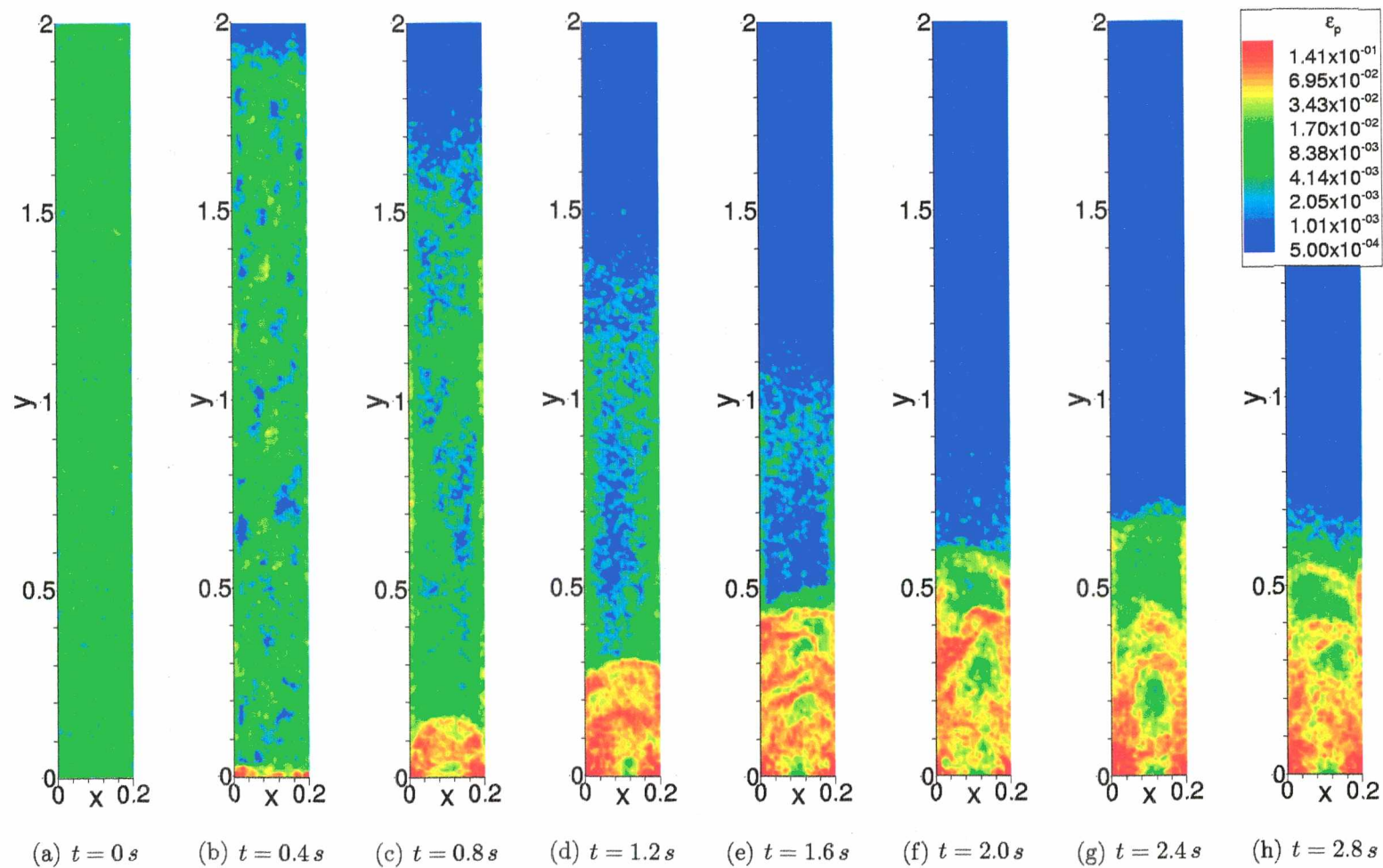
Rys. 8.7. Ewolucja położenia cząstek materiału stałego w przepływie dla $t \in (0, 2.8)$ i prędkości fluidyzacji $u_{flu} = 3.5 \frac{m}{s}$
 (na rysunku przedstawiono co trzecią cząstkę wykorzystywaną w obliczeniach)

8.3. Przepływ w kolumnie fluidyzacyjnej

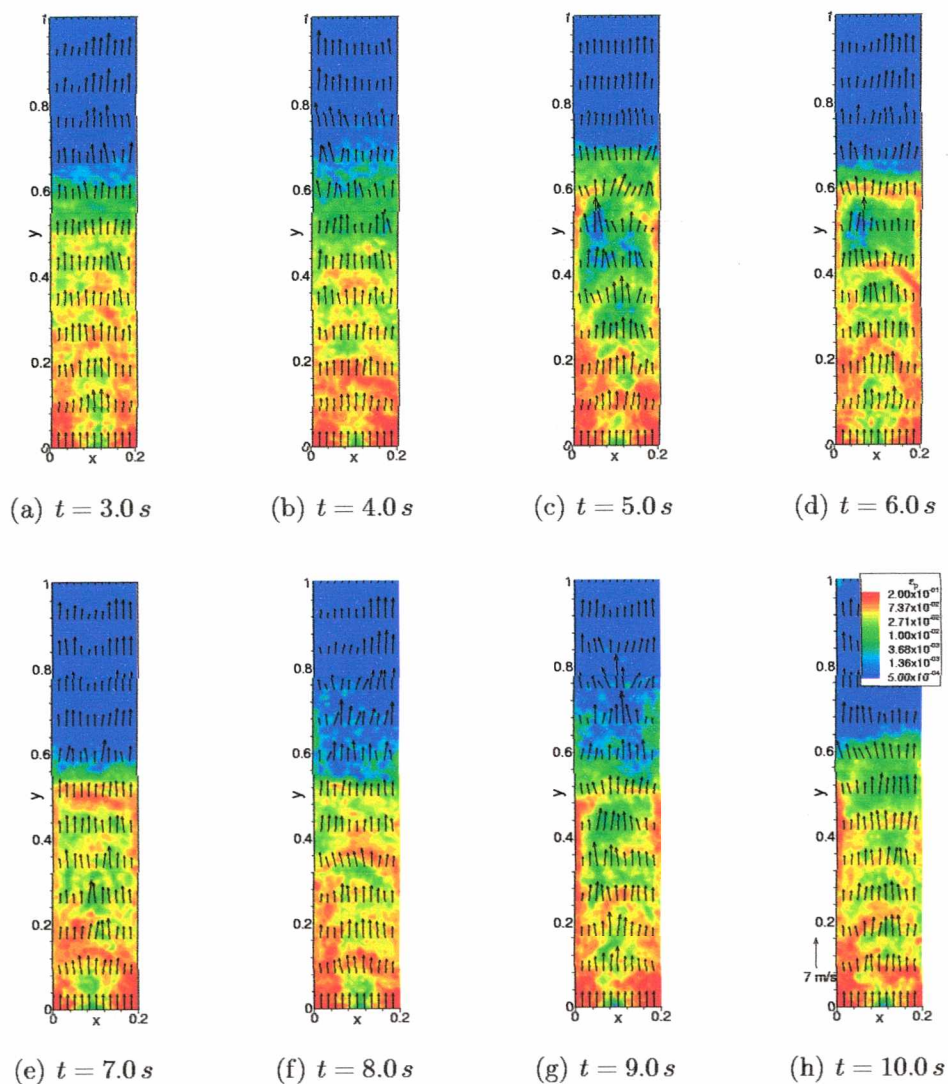


Rys. 8.8. Kontynuacja rys. 8.7 dla $t \in (3.0, 10.0)$

Następnie przeprowadzono obliczenia dla prędkości fluidyzacji $u_{flu} = 5.0 \frac{m}{s}$ z parametrem $N_g = 1$. Rysunki 8.11 i 8.12 przedstawiają odpowiednio ewolucję położenia cząstek i ewolucję pola udziału objętościowego cząstek. Ze względu na to, że prędkość fluidyzacji jest większa niż $4.0 \frac{m}{s}$, to otrzymany przepływ jest całkowicie odmienny od przepływu dla $u_{flu} = 3.5 \frac{m}{s}$. Cząstki, znajdujące się w obszarze środka komory, tworzą wznoszącą się do góry strugę cząstek. Wokół ścian komory, gdzie prędkość płynu jest mała, cząstki tworzą opadającą warstwę przyścienną. Obliczenia prowadzono ze stałą ilością cząstek, tzn. cząstki, które zostały wyniesione przez wylot ($y = 2 m$), są zwracane z powrotem na wlot ($y = 0 m$).

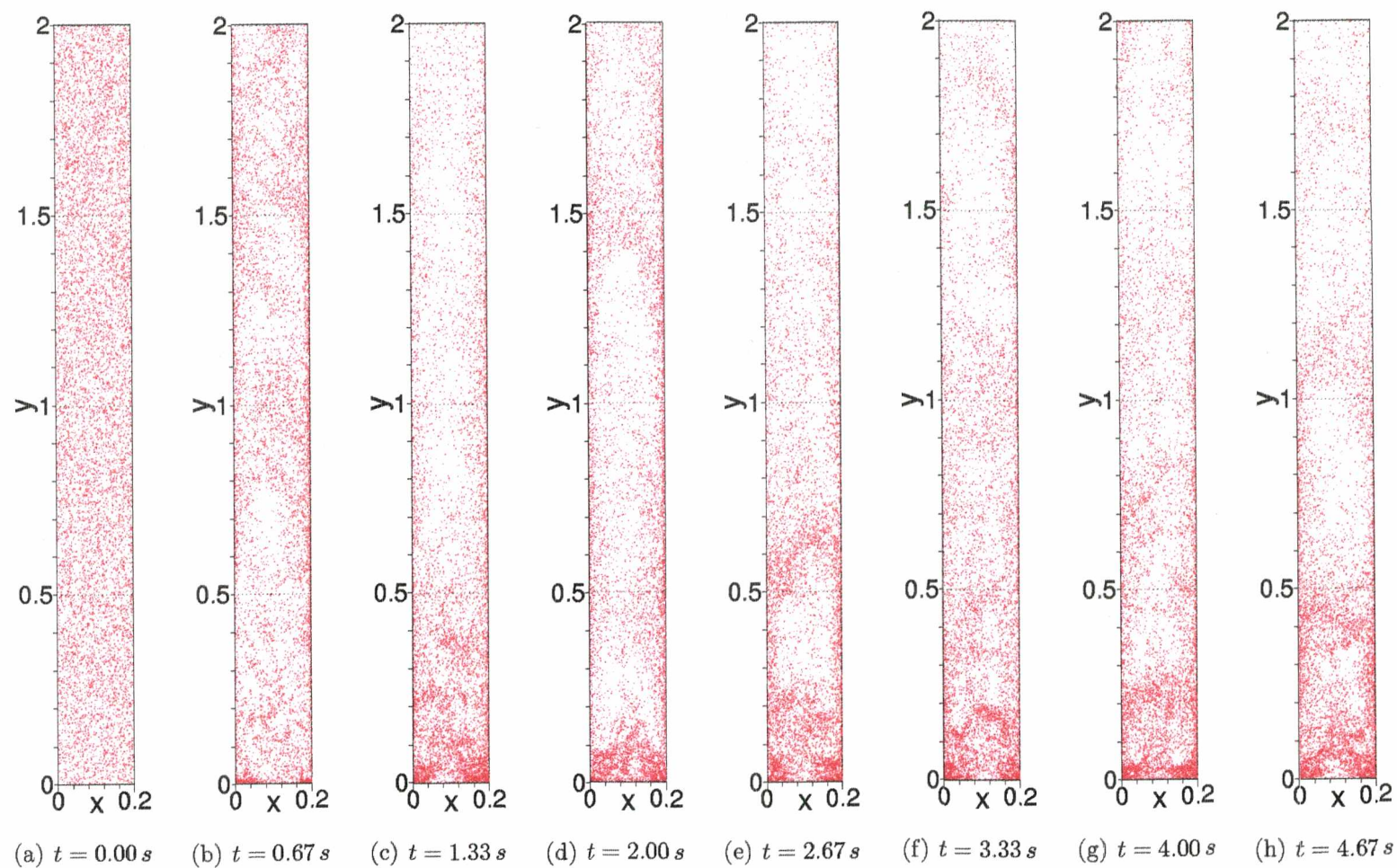
Rys. 8.9. Ewolucja pola udziału objętościowego cząstek w przepływie dla prędkości fluidyzacji $u_{flu} = 3.5 \frac{m}{s}$

8.3. Przepływ w kolumnie fluidyzacyjnej

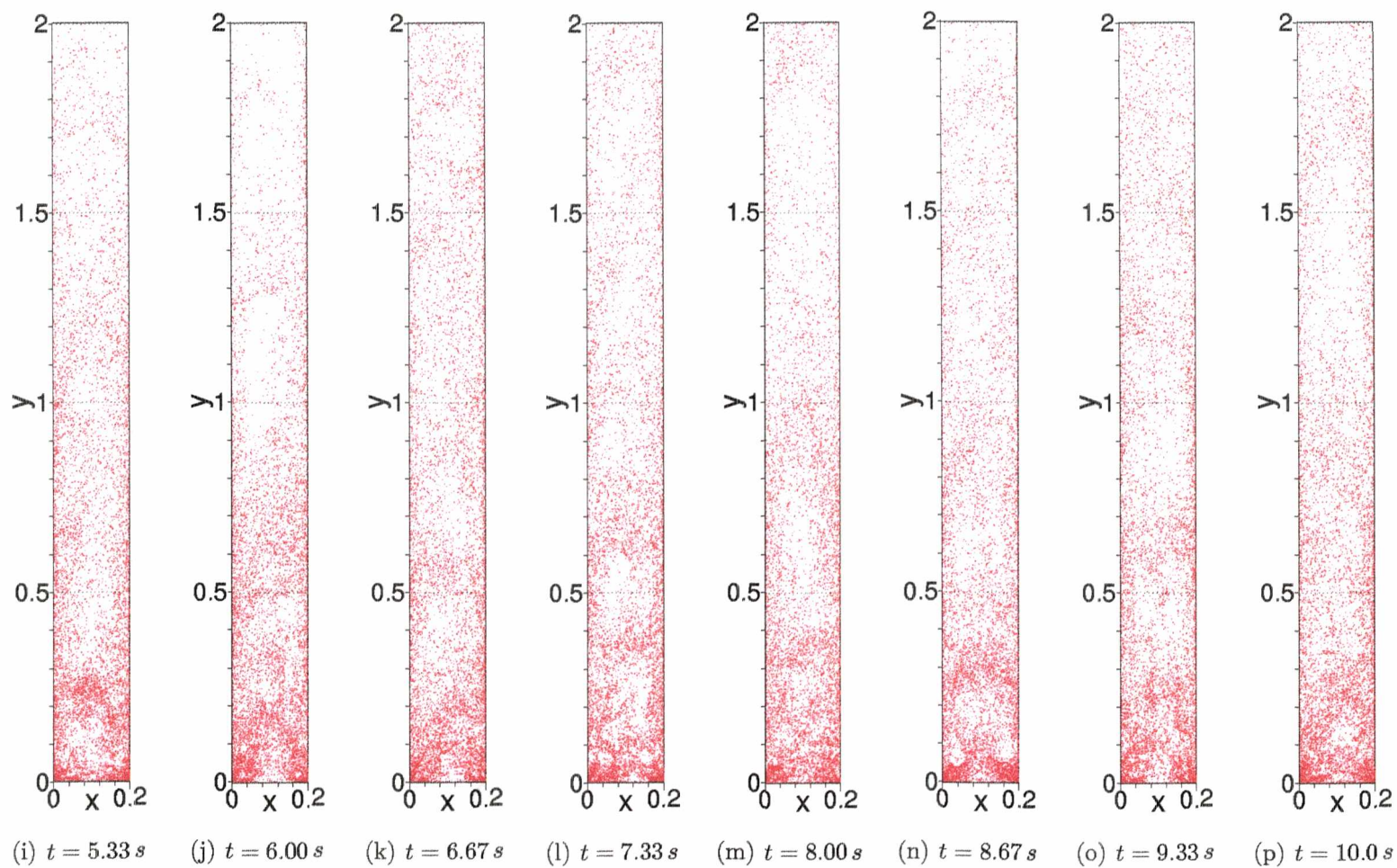


Rys. 8.10. Ewolucja pola udziału objętościowego cząstek i pole prędkości w przepływie z prędkością fluidyzacji $u_{flu} = 3.5 \frac{m}{s}$

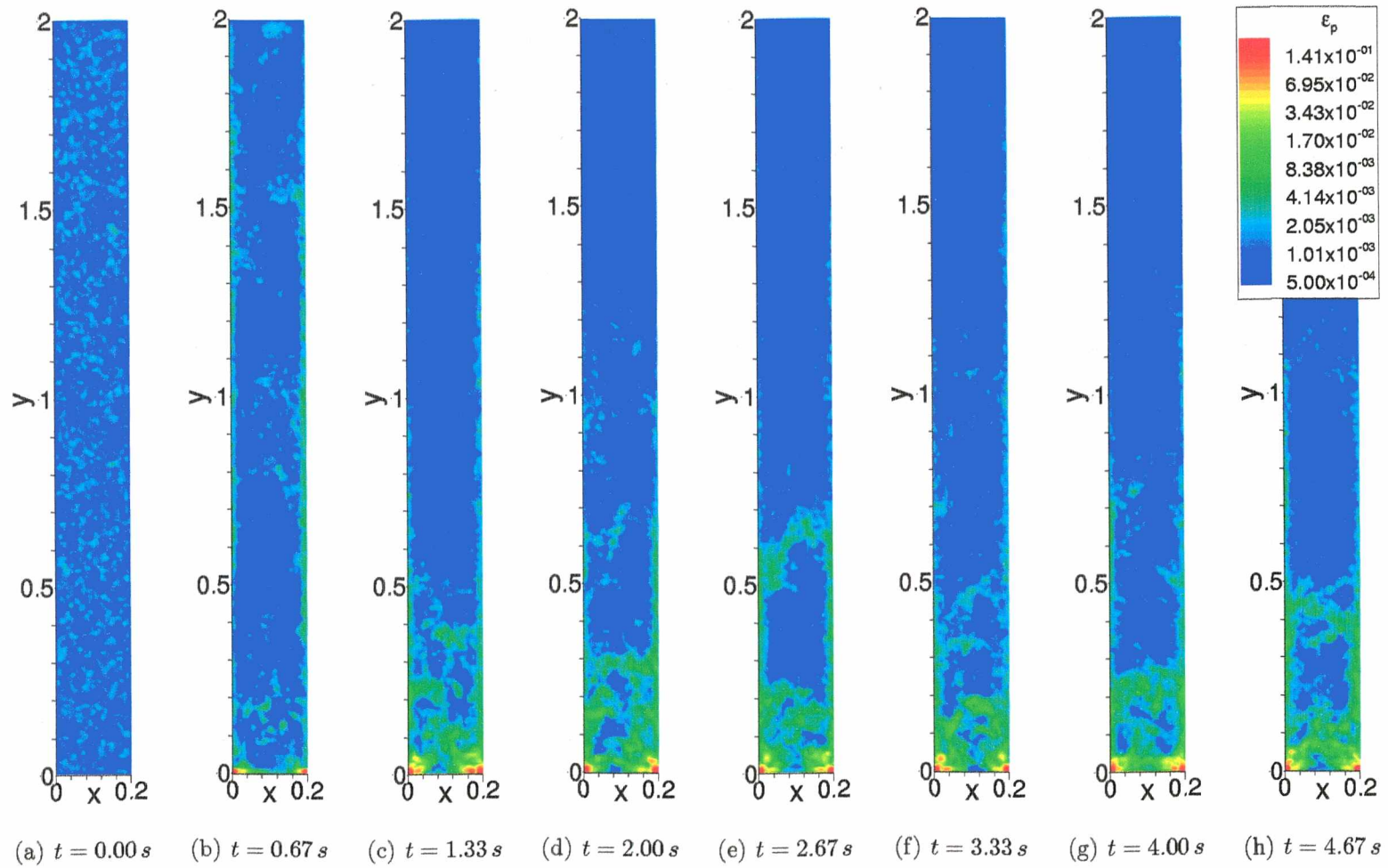
Opisany mechanizm przepływu odpowiada modelowi pierścieniowo-rdzeniowemu [66, 77, 39]. Rdzeniem określana jest struga cząstek, która wznosi się do góry wzdłuż osi komory. Pierścień tworzy opadająca warstwa przysciana cząstek. W modelu pierścieniowo-rdzeniowym, oprócz zmian w kierunku poprzecznym komory, wyróżnia się również zmiany koncentracji cząstek w kierunku wzdłużnym. Przy dnie komory tworzy się warstwa gęsta. Wraz z wysokością, udział objętościowy cząstek maleje.



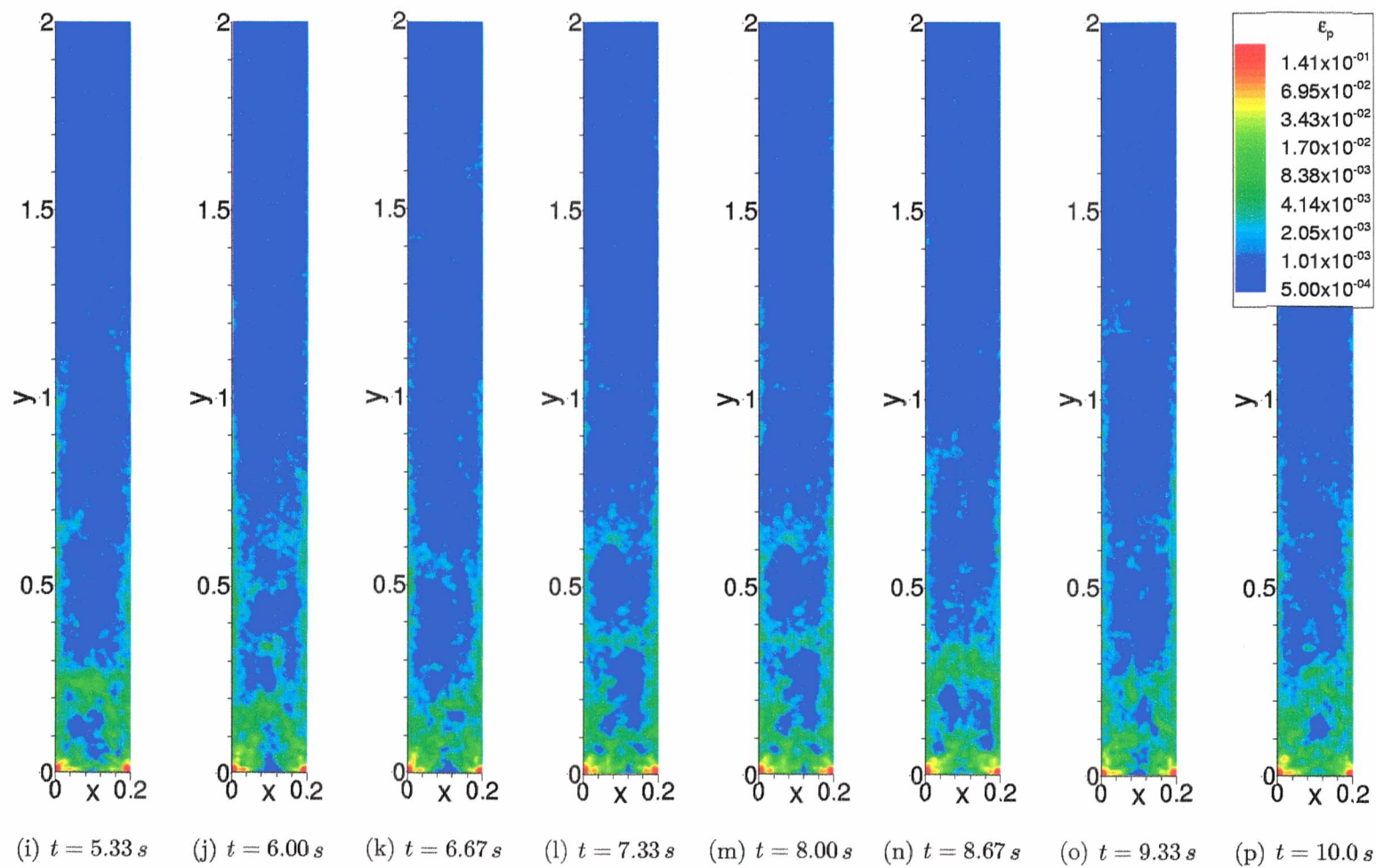
Rys. 8.11. Ewolucja położenia cząstek materiału stałego w przepływie dla prędkości fluidyzacji $u_{flu} = 5.0 \frac{m}{s}$
 (na rysunku przedstawiono co trzecią cząstkę wykorzystywaną w obliczeniach)



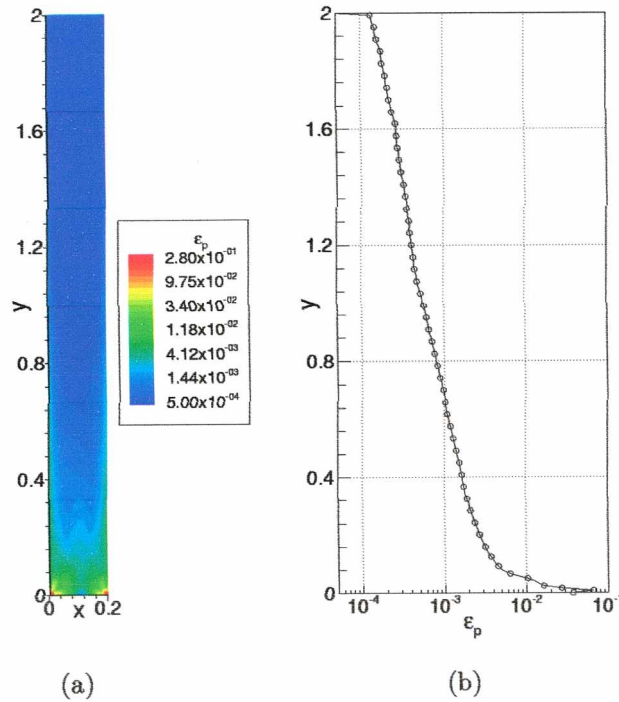
Rys. 8.11. (*kontynuacja*)



Rys. 8.12. Ewolucja pola udziału objętościowego cząstek w przepływie dla prędkości fluidyzacji $u_{flu} = 5.0 \frac{m}{s}$



Rys. 8.12. (kontynuacja)



Rys. 8.13. Pole udziału objętościowego cząstek uśrednione od 5 s do 10 s (a), rozkład uśrednionego udziału objętościowego cząstek wzdłuż wysokości (b)

Rysunek 8.13(a) przedstawia pole udziału objętościowego cząstek uśrednione w czasie od 5 s do 10 s. Opadająca warstwa przyścienna cząstek zwiększa swą grubość. Przy dnie komory tworzy się warstwa gęsta. W narożach komory przy dnie udział objętościowy jest znacznie większy niż dla środkowej części wlotu, gdzie struga płynu unosi cząstki do góry i tworzy rdzeń przepływu.

Rysunek 8.13(b) przedstawia zmianę uśrednionego w przekroju udziału objętościowego cząstek wzdłuż wysokości. Uzyskana przy dnie wartość udziału objętościowego $\epsilon_p \approx 0.1$ wskazuje na przepływ na granicy między szybką fluidyzacją a transportem pneumatycznym, co potwierdzają badania doświadczalne [103, 104].

Otrzymane charakterystyki przepływu fluidalnego w pionowej kolumnie są zgodne z wynikami podobnych badań numerycznych i eksperymentalnych [117, 91, 81, 46, 105, 104, 99].

Podsumowanie

Przedmiotem niniejszej rozprawy doktorskiej było opracowanie modelu matematycznego i programu komputerowego do badania dynamiki ośrodka fluidalnego z wykorzystaniem metody „wielofazowej cząstki w komórce” oraz metod rzutowania i dekompozycji kierunków operatora różniczkowego.

Metoda „wielofazowej cząstki w komórce” (MP-PIC) traktuje cząstki materiału stałego jako cząstki dyskretne, których ruch określony jest przez drugie prawo Newtona. Przy założeniu, że średnica cząstki jest znacznie mniejsza niż charakterystyczny wymiar w przepływie i gęstość materiału cząstki jest znacznie większa niż gęstość płynu, to na ruch cząstki wpływają następujące siły: siła ciężkości, siła oporu i siła odpowiedzialna za zderzenia między cząstkami. Siła oporu pojedynczej cząstki jest modyfikowana przez wpływ obecności cząstek sąsiednich w przepływie. Na podobieństwo do ośrodka ciągłego, wprowadza się ciśnienie cząstek, którego wartość zależy od udziału objętościowego cząstek. Obliczany na siatce numerycznej i interpolowany na położenie cząstki gradient ciśnienia cząstek modeluje oddziaływania (zderzenia) między cząstkami. Wprowadzenie ciągłego modelu oddziaływań między cząstkami upraszcza algorytm numeryczny i znacząco przyspiesza obliczenia, a także czyni możliwym przeprowadzanie obliczeń dla gęstych złóż fluidalnych, dla których oddziaływania między cząstkami nie są pomijalne.

Ponieważ w równaniach ruchu płynu, które otrzymano metodą uśredniania po przestrzeni, występuje udział objętościowy i siła oddziaływania międzyfazowego, to ruch płynu uwzględnia obecność cząstek w przepływie.

Do rozważań wprowadzono efektywny współczynnik lepkości, który opisuje zjawisko modyfikacji lepkości płynu obecnością cząstek w przepływie. Powstający w procesie uśredniania po przestrzeni dodatkowy tensor naprężeń struktur drobnoskalowych – ze względu na brak odpowiednich modeli – został określony podobnie, jak dla przepływu jednofazowego, przez lepkościowy model turbulencji LES.

Do rozwiązania równań ruchu płynu wykorzystano metodę rzutowania i metodę dekompozycji kierunków operatora różniczkowego. Metoda rzutowania, pierwotnie opracowana do numerycznego modelowania nieściśliwego przepływu płynu jednofazowego, została zmodyfikowana i przystosowana dla wielofazowego przepływu ściśliwego. Wprowadzono własne warunki brzegowe typu wlot i wylot dla występującej w metodzie funkcji rzutującej i prędkości pośredniej. Zastosowanie metody rzutowania pozwala na prowadzenie obliczeń numerycznych bez konieczności wyznaczania ciśnienia, co jest podstawową zaletą metody.

Zastosowanie do niestacjonarnego równania wielowymiarowego metody dekompozycji kierunków operatora różniczkowego prowadzi do uproszczenia i sprowadzenia zagadnienia wielowymiarowego do układu niestacjonarnych zagadnień jednowymiarowych. Dyskretyzacja w sposób niejawni zagadnienia jednowymiarowego prowadzi do otrzymania układu równań z macierzą trójkątną, do rozwiązania którego wykorzystano szybki algorytm rozwiązywania macierzy trójkątnych. Metoda dekompozycji jest metodą szybką i stabilną numerycznie, co jest bezpośrednią przyczyną zastosowania jej w niniejszej pracy.

W celu potwierdzenia poprawności implementacji numerycznej metody rzutowania i metody dekompozycji, wykonano serię testujących eksperymentów numerycznych dla nieściśliwego przepływu jednofazowego płynu lepkiego. Obliczenia sprawdzające wykonano dla takich wybranych, szeroko wykorzystywanych do badania poprawności rozwiązań numerycznych zagadnień, jak przepływ w dwu- i trójwymiarowej komorze z ruchomą ścianką i test ze znanym rozwiązaniem analitycznym dla równania Naviera–Stokesa. Ze względu na to, że rozważany przepływ fluidalny występuje w kanale, to dodatkowo zbadano przepływ w kanale dwu- i trójwymiarowym. Uzyskane wyniki numeryczne są w bardzo dobrej zgodności z innymi wynikami eksperymentalnymi lub rozwiązaniami analitycznymi.

Następnie, wykorzystując opracowaną metodę „wielofazowej cząstki w komórce”, przeprowadzono badania numeryczne dynamiki przepływu fluidalnego. Do modelowania przyjęto takie charakterystyczne przepływy fluidalne, jak przepływ w złożu pęcherzowym, przepływ z segregacją złoża fluidalnego i przepływ fluidalny w pionowej komorze. Obliczenia przeprowadzono w obszarze dwuwymiarowym. Otrzymane wyniki dobrze odzwierciedlają cechy przepływu fluidalnego, co potwierdza słuszność postawionej na początku pracy tezy, że w modelowaniu numerycznym dynamiki ośrodka wielofazowego możliwe jest wykorzystanie metody rzutowania i metody dekompozycji kierunków operatora różniczkowego, które mogą stanowić integralną część metody „wielofazowej cząstki w komórce”. Opracowany program komputerowy pozwala na numeryczne badanie przepływu fluidalnego.

Dalszy wysiłek autora będzie skierowany na implementację numeryczną opracowanego modelu ruchu ośrodka fluidalnego w przestrzeni trójwymiarowej. Niezbędne również jest podniesienie rzędu dokładności metody dekompozycji oraz wykonanie wnikliwych badań numerycznych nad lepkościowym modelem turbulencji LES zarówno dla przepływu jednofazowego, jak i przepływu wielofazowego. Wydaje się również możliwe wprowadzenie w niedalekiej przyszłości do rozważań równania zachowania energii, które opisuje procesy wymiany ciepła, oraz inne zjawiska cieplno-przepływowe, jak np. spalanie lub dodatkowych równań zachowania dla poszczególnych składników gazowych.

Dodatek A

Podstawowe wiadomości o funkcjach uogólnionych

Nośnikiem ciągłej funkcji φ określonej na zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, gdzie $n \in \mathbf{N}$, nazywamy domknięcie w Ω zbioru $\{\mathbf{x} : \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\}$ [115, 150].

Niech $C^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq +\infty$, oznacza zbiór wszystkich funkcji określonych na $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, które są ciągłe na Ω wraz ze wszystkimi pochodnymi do rzędu k włącznie, gdy $k < +\infty$, a wraz ze wszystkimi pochodnymi dowolnie wysokiego rzędu, gdy $k = +\infty$. Niech $C_0^k(\Omega)$ oznacza zbiór funkcji klasy $C^k(\Omega)$, których nośniki są ograniczone w Ω . Funkcje klasy $C_0^k(\Omega)$ nazywamy *funkcjami próbnymi* w Ω .

Ciąg funkcji $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ jest *zbieżny* do φ , jeżeli

- istnieje taki ograniczony zbiór $K \subset \Omega$, że nośnik φ_k zawarty jest w K dla każdego k ,
- po zróżniczkowaniu dowolną liczbę razy ciąg $\left\{ \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\}_{k=1}^\infty$, gdzie $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, jest jednostajnie zbieżny do $\frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ na K .

Przestrzeń liniowa $C_0^\infty(\Omega)$ z tak określoną zbieżnością oznaczana jest przez $\mathcal{D}(\Omega)$.

Ciąg funkcji $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ jest zbieżny (słabo) do funkcji uogólnionej $\tilde{f}$, jeśli

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \tilde{f} \varphi \, d\mathbf{x} \quad (\text{A.1})$$

dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

Niech f będzie funkcją lokalnie całkowalną na $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, tj. $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Funkcję $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ nazywamy *uogólnioną pochodną funkcji f względem zmiennej x_j* , gdzie $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, jeżeli

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} g \varphi \, d\mathbf{x} \quad (\text{A.2})$$

zachodzi dla każdej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. W szczególności zachodzi

$$\int_{\Omega} f \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \varphi \nabla f \, d\mathbf{x}, \quad (\text{A.3})$$

gdzie $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ jest *uogólnionym gradientem funkcji f* .

Dodatek B

Wyprowadzenie równania topologicznego

Niech $\varphi(\mathbf{x}, t) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Wówczas

$$\int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \chi_k}{\partial t} dv dt = - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \chi_k dv dt, \quad (\text{B.1})$$

i

$$\int_{\Omega} \varphi \nabla \chi_k dv dt = - \int_{\Omega} \nabla \varphi \chi_k dv dt. \quad (\text{B.2})$$

Zatem

$$\int_{\Omega} \varphi \left[\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \chi_k \right] dv dt = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{u}_i) \right] \chi_k dv dt. \quad (\text{B.3})$$

Wykorzystując twierdzenie transportowe Reynoldsa [3], otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{u}_i) \right] \chi_k \, dv \, dt &= \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega_k(t)} \varphi \, dv \right) dt = \\
 &= \int_{\Omega_k(t)} \varphi \, dv \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} = 0.
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Zatem

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \chi_k = 0. \tag{B.5}$$

Równanie (B.5) nazywane jest *równaniem topologicznym* i stanowi ono pochodną materialną z χ_k . Przyjmując punkt nie znajdujący się na powierzchni międzyfazowej, otrzymujemy $\chi_k = 1$ lub $\chi_k = 0$. Dla obu przypadków, równanie topologiczne jest tożsamościowo spełnione. Punkt, znajdujący się na powierzchni międzyfazowej, porusza się z prędkością $\mathbf{u}_i$ równą prędkości $\mathbf{w}_i$ powierzchni międzyfazowej. Funkcja χ_k jest więc skokiem jednostkowym, poruszającym się wraz z powierzchnią międzyfazową.

Dodatek C

Wyprowadzenie reguł uśredniania Gaussa i Leibnitza

Niech $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Dla procesu uśredniania po przestrzeni, zdefiniowanego równaniem (5.5), zachodzi [33, 34, 62]

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}, \quad (\text{C.1})$$

i

$$\overline{\nabla f} = \nabla \bar{f}. \quad (\text{C.2})$$

Rozważmy średnią objętościową z $\chi_k \nabla f$

$$\begin{aligned} \overline{\chi_k \nabla f}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{V} \int_V \chi_k(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) \nabla f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) \, d\mathbf{x}_\eta = \\ &= \frac{1}{V} \int_{V_k(\mathbf{x}, t)} \nabla f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) \, d\mathbf{x}_\eta = \frac{1}{V} \int_{S_k(\mathbf{x}, t)} f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) \mathbf{n}_k \, ds_\eta + \\ &\quad + \frac{1}{V} \int_{S_{ki}(\mathbf{x}, t)} f_{ki}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) \mathbf{n}_{ki} \, ds_\eta, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

gdzie $S_k(\mathbf{x}, t)$ jest powierzchnią wspólną brzegu ∂V i k -tej fazy, $S_{ki}(\mathbf{x}, t)$ jest powierzchnią międzyfazową, całkowicie znajdującą się w V , a f_{ki} wartością funkcji f dla k -tej fazy na powierzchni międzyfazowej.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{V} \int_{S_k(\mathbf{x}, t)} f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) \mathbf{n}_k \, ds_\eta &= \frac{1}{V} \oint_{S=\partial V} \chi_k(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) \mathbf{n}_k \, ds_\eta = \\
 &= \frac{1}{V} \int_V \nabla_\eta [\chi_k(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t)] \, d\mathbf{x}_\eta = \frac{1}{V} \int_V \nabla_x [\chi_k(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t)] \, d\mathbf{x}_\eta = \\
 &= \frac{1}{V} \nabla_x \int_V \chi_k(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) \, d\mathbf{x}_\eta = \nabla \overline{\chi_k f}(\mathbf{x}, t),
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

więc

$$\overline{\chi_k \nabla f} = \nabla \overline{\chi_k f} + \frac{1}{V} \int_{S_{ki}(\mathbf{x}, t)} f_{ki}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) \mathbf{n}_{ki} \, ds_\eta. \tag{C.5}$$

Wykorzystując równanie (5.3), otrzymujemy równanie

$$\overline{\chi_k \nabla f} = \nabla \overline{\chi_k f} - \overline{f_{ki} \nabla \chi_k}, \tag{C.6}$$

które jest *regułą Gaussa* dla uśredniania po przestrzeni.

Rozważmy średnią objętościową z $\chi_k \frac{\partial f}{\partial t}$

$$\overline{\chi_k \frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{1}{V} \int_V \chi_k \frac{\partial f}{\partial t} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial \chi_k f}{\partial t} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{V} \int_V f \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \, d\mathbf{x}. \tag{C.7}$$

Zatem

$$\overline{\chi_k \frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\chi_k f}) - \overline{f \frac{\partial \chi_k}{\partial t}}, \tag{C.8}$$

co jest *regułą Leibnitza* dla uśredniania po przestrzeni.

Dodatek D

Dyskretyzacja równań ruchu płynu

Dolne indeksy ij oznaczają wartość danej zmiennej określonej w węźle (i, j) . Równanie wektorowe (6.50) rozpisane na składowe przyjmuje postać¹:
– składowa u

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f,i,j}^{n+1} \left[\frac{\tilde{u}_{i,j}^{n+1/2} - u_{f,i,j}^n}{\Delta t} + \theta \hat{u}_{i,j} \frac{\delta \tilde{u}_{i,j}^{n+1/2}}{\delta x} + (1 - \theta) u_{f,i,j}^n \frac{\delta u_{f,i,j}^n}{\delta x} \right] = \\ = \frac{2\theta}{\Delta x} \left[v_{i+1/2,j}^n \frac{\tilde{u}_{i+1,j}^{n+1/2} - \tilde{u}_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} - v_{i-1/2,j}^n \frac{\tilde{u}_{i,j}^{n+1/2} - \tilde{u}_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x} \right] + \\ + \frac{2(1 - \theta)}{\Delta x} \left[v_{i+1/2,j}^n \frac{u_{f,i+1,j}^n - u_{f,i,j}^n}{\Delta x} - v_{i-1/2,j}^n \frac{u_{f,i,j}^n - u_{f,i-1,j}^n}{\Delta x} \right], \end{aligned} \quad (D.1)$$

¹górny indeks l pominięto

– składowa v

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{f,i,j}^{n+1} & \left[\frac{\tilde{v}_{i,j}^{n+1/2} - v_{f,i,j}^n}{\Delta t} + \theta \hat{u}_{i,j} \frac{\delta \tilde{v}_{i,j}^{n+1/2}}{\delta x} + (1 - \theta) u_{f,i,j}^n \frac{\delta v_{f,i,j}^n}{\delta x} \right] = \\
 & = \frac{\theta}{\Delta x} \left[\mathbf{v}_{i+1/2,j}^n \frac{\tilde{v}_{i+1,j}^{n+1/2} - \tilde{v}_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} - \mathbf{v}_{i-1/2,j}^n \frac{\tilde{v}_{i,j}^{n+1/2} - \tilde{v}_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x} \right] + \\
 & + \frac{1 - \theta}{\Delta x} \left[\mathbf{v}_{i+1/2,j}^n \frac{v_{f,i+1,j}^n - v_{f,i,j}^n}{\Delta x} - \mathbf{v}_{i-1/2,j}^n \frac{v_{f,i,j}^n - v_{f,i-1,j}^n}{\Delta x} \right] + \\
 & + \frac{1}{2\Delta x} \left[\mathbf{v}_{i+1,j}^n \frac{u_{f,i+1,j+1}^n - u_{f,i+1,j-1}^n}{2\Delta y} - \mathbf{v}_{i-1,j}^n \frac{u_{f,i-1,j+1}^n - u_{f,i-1,j-1}^n}{2\Delta y} \right],
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

gdzie

$$\mathbf{v}_{i+1/2,j} = (\mathbf{v}_{i+1,j} + \mathbf{v}_{i,j})/2, \tag{D.3}$$

$$\mathbf{v}_{i-1/2,j} = (\mathbf{v}_{i-1,j} + \mathbf{v}_{i,j})/2. \tag{D.4}$$

Konwekcyjne człony bezwładnościowe aproksymuje się w sposób ważony ilorazem różnicowym „pod prąd” i ilorazem różnicowym centralnym [64]:

$$a \frac{\delta f_{i,j}}{\delta x} = a \left\{ \gamma \left[(1 + \lambda) \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + (1 - \lambda) \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{2\Delta x} \right] + (1 - \gamma) \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \right\}, \tag{D.5}$$

z $a = \{\hat{u}, u_f\}$, $f = \{\tilde{u}, u_f\}$, $\gamma \in \langle 0, 1 \rangle$, $\lambda = \text{sgn}(a)$.

Równanie wektorowe (6.51) rozpisane na składowe przyjmuje postać²:

– składowa v

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{f,i,j}^{n+1} & \left[\frac{\tilde{v}_{i,j}^{n+1} - \tilde{v}_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} + \theta \hat{v}_{i,j} \frac{\delta \tilde{v}_{i,j}^{n+1}}{\delta y} + (1 - \theta) \tilde{v}_{i,j}^{n+1/2} \frac{\delta \tilde{v}_{i,j}^{n+1/2}}{\delta y} \right] + H_{f,i,j} \tilde{v}_{i,j}^{n+1} = \\
 & = G_{fy,i,j} + \frac{2\theta}{\Delta y} \left[\mathbf{v}_{i,j+1/2}^n \frac{\tilde{v}_{i,j+1}^{n+1} - \tilde{v}_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} - \mathbf{v}_{i,j-1/2}^n \frac{\tilde{v}_{i,j}^{n+1} - \tilde{v}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \right] + \\
 & + \frac{2(1 - \theta)}{\Delta x} \left[\mathbf{v}_{i,j+1/2}^n \frac{\tilde{v}_{i,j+1}^{n+1/2} - \tilde{v}_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} - \mathbf{v}_{i,j-1/2}^n \frac{\tilde{v}_{i,j}^{n+1/2} - \tilde{v}_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y} \right],
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

²górny indeks l pominięto

– składowa u

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{f,i,j}^{n+1} & \left[\frac{\tilde{u}_{i,j}^{n+1} - \tilde{u}_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} + \theta \hat{v}_{i,j} \frac{\delta \tilde{u}_{i,j}^{n+1}}{\delta y} + (1 - \theta) \tilde{v}_{i,j}^{n+1/2} \frac{\delta \tilde{u}_{i,j}^{n+1/2}}{\delta x} \right] + H_{f,i,j} \tilde{u}_{i,j}^{n+1} = \\
 & = G_{fx} + \frac{\theta}{\Delta y} \left[v_{i,j+1/2}^n \frac{\tilde{u}_{i,j+1}^{n+1} - \tilde{u}_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} - v_{i,j-1/2}^n \frac{\tilde{u}_{i,j}^{n+1} - \tilde{u}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \right] + \\
 & + \frac{1 - \theta}{\Delta y} \left[v_{i,j+1/2}^n \frac{\tilde{u}_{i,j+1}^{n+1/2} - \tilde{u}_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} - v_{i,j-1/2}^n \frac{\tilde{u}_{i,j}^{n+1/2} - \tilde{u}_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y} \right] + \\
 & + \frac{1}{2\Delta y} \left[v_{i,j+1}^n \frac{v_{f,i+1,j+1}^n - v_{f,i-1,j+1}^n}{2\Delta x} - v_{i,j-1}^n \frac{v_{f,i+1,j-1}^n - v_{f,i-1,j-1}^n}{2\Delta x} \right], \tag{D.7}
 \end{aligned}$$

gdzie

$$v_{i,j+1/2} = (v_{i,j+1} + v_{i,j})/2, \tag{D.8}$$

$$v_{i,j-1/2} = (v_{i,j-1} + v_{i,j})/2. \tag{D.9}$$

Konwekcyjne człony bezwładnościowe, podobnie jak uprzednio, są ważone ilorazem różnicowym „pod prąd” i ilorazem różnicowym centralnym.

Jak nietrudno spostrzec, po odpowiednich przekształceniach równań (D.1), (D.2), (D.6) i (D.7), otrzymuje się do rozwiązania odpowiednio układy równań liniowych z macierzą trójdziagonalną.

Bibliografia

- [1] Anderson J.D.: *Computational fluid dynamics – the basics with applications*, McGraw–Hill, 1995.
- [2] Andrews M.J., O’Rourke P.J.: *The multiphase particle-in-cell (MP–PIC) method for dense particulate flows*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 22, No. 2, pp. 379-402, 1996.
- [3] Aris R.: *Vectors, Tensors and basic equations of fluid mechanics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
- [4] Armenio V.: *Effect of the subgrid scales on particle motion*, Physics of Fluids, Vol. 11, No. 10, pp. 3030-3042, 1999.
- [5] Armenio V., Fiorotto V.: *The importance of the forces acting on particles in turbulent flows*, Physics of Fluids, Vol. 13, No. 8, 2001.
- [6] Baker G.A.: *An implicit numerical method for solving the n-dimensional heat equation*, Quart. Appl. Math., Vol. 17, No. 4, pp. 440-443, 1960.
- [7] Batchelor G.K.: *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, 1991.
- [8] Bell J.B., Colella P., Glaz H.M.: *A second-order projection method for the incompressible Navier–Stokes equation*, Journal of Computational Physics, Vol. 85, pp. 257-283, 1989.
- [9] Benerjee S.: *Modelling considerations for turbulent multiphase flows* in W. Rodi, E. N. Ganić (eds.): *Engineering turbulence modelling and experiments*, Elsevier, pp. 831-866, 1990.

- [10] Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N., *Transport phenomena*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [11] Björck Å., Dahlquist G.: *Metody numeryczne*, PWN, Warszawa 1987.
- [12] Boemer A., Qi H., Renz U.: *Eulerian simulation of bubble formation at a jet in a two-dimensional fluidized bed*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 23, pp. 927-944, 1997.
- [13] Bokkers G.A., van Sint Annaland, Kuipers J.A.M.: *Mixing and segregation in a bidisperse gas-solid fluidized bed: a numerical and experimental study*, Powder Technology, Vol. 140, pp. 176-186, 2004.
- [14] Bouillard J.X., Lyczkowski R.W., Gidaspow D.: *Porosity distributions in a fluidized bed with an immersed obstacle*, AIChE J., Vol. 35, No. 6, pp. 908-922, 1989.
- [15] Bowen R.M.: *Theory of mixtures*, in A.C. Eringen (eds.): *Continuum physics, Vol. III—Mixtures and EM field theories*, Academic Press, pp. 1-127, 1971.
- [16] Brian P.L.T.: *A finite-difference method of high-order accuracy for the solution of three-dimensional transient heat conduction problems*, A.I.Ch.E. Journal, Vol. 7, No. 3, pp. 367-370, 1961.
- [17] Brown D.L., Cortez R., Minion M.L.: *Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations*, Journal of Computational Physics, Vol. 168, pp. 464-499, 2001.
- [18] Chen Y.-N., Yang S.-C., Yang J.-Y.: *Implicit weighted essentially non-oscillatory schemes for the incompressible Navier-Stokes equation*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 31, pp. 747-765, 1999.
- [19] Chorin A.J.: *Numerical solution of the Navier-Stokes equations*, Math. Comput., Vol. 22, pp. 745-762, 1968.
- [20] Chorin A.J., Marsden J.E.: *A mathematical introduction to fluid mechanics*, Springer, 1990.

- [21] Chung T.J.: *Computational fluid dynamics*, Cambridge, Cambridge University Press, 2002.
- [22] Clift R., Grace J.R., Weber M.E.: *Bubbles, drops, and particles*, Academic Press, 1978.
- [23] Chapman S., Cowling T.G., *The mathematical theory of non-uniform gases*, 3rd Edn., Cambridge University Press, Cambridge, 1970.
- [24] Crowe C., Sommerfeld M., Tsuji Y.: *Multiphase flows with droplets and particles*, CRC Press LLC, 1998.
- [25] Crowe C.T.: *On models for turbulence modulation in fluid-particle flows*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 26, pp. 719-727, 2000.
- [26] Cundall P.A., Strack O.D.L.: *A discrete numerical model for granular assemblies*, Geotechnique 29, pp. 47-65, 1979.
- [27] Davidson J.F., Clift R., Harrison D.: *Fluidization*, 2nd edition, Academic Press, 1985.
- [28] Di Felice R.: *The voidage function for fluid-particle interaction systems*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 20, No. 1, pp. 153-159, 1994.
- [29] Ding J., Gidaspow D.: *A bubbling fluidization model using kinetic theory of granular flow*, AIChE J., Vol. 36, No. 4, pp. 523-538, 1990.
- [30] Douglas J.: *On the numerical integration of $u_{xx} + u_{yy} - u_t$ by implicit methods*, J. Soc. Ind. Appl. Math., Vol. 3, pp. 42-65, 1955.
- [31] Douglas J., Rachford H.H.: *On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 82, No. 2, pp. 421-439, 1956.
- [32] Douglas J.: *Alternating direction methods for three space variables*, Numerische Mathematik, Vol. 4, pp. 41-63, 1962.
- [33] Drew D.A.: *Mathematical modeling of two-phase flow*, Ann. Rev. Fluid Mech. 15, pp. 261-291, 1983.

- [34] Drew D.A., Passman S.L.: *Theory of multicomponent fluids*, Springer, 1999.
- [35] Dukowicz J.K., Dvinsky A.S.: *Approximate factorization as a high order splitting for the implicit incompressible flow equations*, Journal of Computational Physics, Vol. 102, pp. 336-347, 1992.
- [36] Elghobashi S., Truesdell G.C.: *Direct simulation of particle dispersion in a decaying isotropic turbulence*, J. Fluid Mech., Vol. 242, pp. 655-700, 1992.
- [37] Elghobashi S.: *On predicting particle-laden turbulent flows*, Applied Scientific Research, Vol. 52, pp. 309-329, 1994.
- [38] Enwald H., Peirano E., Almstedt A.-E.: *Eulerian two-phase flow theory applied to fluidization*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 22, Suppl., pp. 21-66, 1996.
- [39] Fan L.-S., Zhu C.: *Principles of gas-solid flows*, Cambridge University Press, 1998.
- [40] Fan L.-S., Zhu C.: *Multiphase flow: gas/solid* in R.W. Johnson (eds.): *The handbook of fluid dynamics*, CRC Press Springer, 1998.
- [41] Ferziger J.H., Perić M.: *Computational methods for fluid dynamics*, Springer, 1996.
- [42] Fletcher C.A.J.: *Computational techniques for fluid dynamics 1. Fundamental and general techniques*, Springer, 1988.
- [43] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J.: *Metody numeryczne*, WNT, Warszawa 1998.
- [44] Foscolo P.U., Gibilaro L.G., Waldram S.P.: *A unified model for particulate expansion of fluidised beds and flow in fixed porous media*, Chemical Engineering Science, Vol. 38, No. 8, pp. 1251-1260, 1983.
- [45] Freitas C.J.: *Perspective: Selected benchmarks from commercial CFD codes*, Trans. of ASME, Journal of Fluids Engineering, Vol. 117, pp. 208-218, 1995.

- [46] Fujima Y., Deguchi S., Endo T.: *Simulation for solid concentration profile in CFB with different fluid/solid density ratios*, Chemical Engineering Science, Vol. 54, pp. 5507-5513, 1999.
- [47] Galperin B., Orszag S.A.: *Large eddy simulation of complex engineering and geophysical flows*, Cambridge University Press, 1993.
- [48] Garcia J.: *Study of the turbulence modulation in particle-laden flows using LES*, Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, pp. 177-188, 2001.
- [49] Gera D., Syamlal M., O'Brien T.J.: *Hydrodynamics of particle segregation in fluidized beds*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 30, pp. 419-428, 2004.
- [50] Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.: *High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method*, Journal of Computational Physics, Vol. 48, pp. 387-411, 1982.
- [51] Ghosal S., Moin P.: *The basic equation for the large eddy simulation of turbulent flows in complex geometry*, J. of Computational Physics, Vol. 118, pp. 24-37, 1995.
- [52] Ghosal S., Lund T.S., Moin P., Voll K.A.: *A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows*, J. Fluid Mech., Vol. 286, pp. 229-255, 1995.
- [53] Gibilaro L.G., Di Felice R., Waldram S.P.: *Generalized friction factor and drag coefficients for fluid-particle interactions*, Chemical Engineering Science, Vol. 40, No. 10, pp. 1817-1823, 1985.
- [54] Gibilaro L.G.: *Fluidization-dynamics. The formulation and application of a predictive theory for the fluidized state*, Butterworth Heinemann, 2001.
- [55] Gidaspow D., Ding J., Jayaswal U.K.: *Multiphase Navier-Stokes equation solver*, ASME FED, Vol. 91, pp. 47-56, 1990.

- [56] Gidaspow D., Jayaswal U.K., Ding J.: *Navier–Stokes equation model for liquid–solid flows using kinetic theory*, ASME FED, Vol. 118, pp. 165–172, 1991.
- [57] Gidaspow D.: *Multiphase flow and fluidization, Continuum and kinetic theory descriptions*, Academic Press, 1994.
- [58] Glowinski R., Pan T.–W., Hesla T.I., Joseph D.D.: *A distributed Lagrangian multiplier/fictitious domain method for particulate flows*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 25, pp. 755–794, 1999.
- [59] Годунов С.К., Рябенький В.С.: *Разностные схемы*, Наука, Москва 1973.
- [60] Gore R.A., Crowe C.T.: *Effect of particle size on modulating turbulent intensity*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 15, No. 2, pp. 279–285, 1989.
- [61] Gore R.A., Crowe C.T.: *Modulation of turbulence by a dispersed phase*, Trans. of the ASME, Vol. 113, pp. 304–307, 1991.
- [62] Gray W.G., Lee P.C.Y.: *On the theorems for local volume averaging of multiphase systems*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 3, pp. 333–340, 1977.
- [63] Gresho P.M., Chan S.T., Lee R.L., Upson C.D.: *A modified finite element method for solving the time–dependent, incompressible Navier–Stokes equations, Part 2: Applications*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 4, pp. 619–640, 1984.
- [64] Griebel M., Dornseifer T., Neunhöffer T.: *Numerical simulation in fluid dynamics. A practical introduction*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [65] Guj G., Stella F.: *A vorticity–velocity method for the numerical solution of 3D incompressible flows*, Journal of Computational Physics, Vol. 106, pp. 286–298, 1993.
- [66] Hannes J.: *Mathematical modelling of circulating fluidized bed combustion*, City–Print Verlag GmbH, 1996.
- [67] Harris S.E., Crighton D.G.: *Solitons, solitary waves, and voidage disturbances in gas–fluidized beds*, J. Fluid Mech., Vol. 266, pp. 243–276, 1994.

- [68] Hashimoto H., Amagai K.: *A theoretical model for multiphase flow with solidified particles*, JSME Int. J., Series B, Vol. 36, No. 4, pp. 584-591, 1993.
- [69] Hetsroni G.: *Particles-turbulence interaction*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 15, No. 5, pp. 735-746, 1989.
- [70] Hérard J.M., Simonin O.: *Numerical modelling of turbulent two-phase flows* in W. Rodi, E. N. Ganić (eds.): *Engineering turbulence modelling and experiments*, Elsevier, pp. 887-896, 1990.
- [71] Hinch E.J.: *An averaged-equation approach to particle interactions in a fluid suspension*, J. Fluid Mech., Vol. 83, part 4, pp. 695-720, 1977.
- [72] Hirsch C.: *Numerical computation of internal and external flows. Vol. 1: Fundamentals of numerical discretisation*, John Wiley & Sons Ltd., New York, 1988.
- [73] Hjelmfeld A.T. Jr, Mokros L.F.: *Motion of discrete particles in a turbulent field*, Appl. Sci. Res. 16, 149, 1966.
- [74] Ho C.J., Lin F.H.: *Numerical simulation of three-dimensional incompressible flow by a new formulation*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 23, pp. 1073-1084, 1996.
- [75] Hoomans B.P.B., Kuipers J.A.M., Briels W.J., van Swaaij W.P.M.: *Discrete particle simulation of bubble and slug formation in a two-dimensional gas-fluidized bed: a hard-sphere approach*, Chemical Engineering Science, Vol. 51, No. 1, pp. 99-118, 1996.
- [76] Hoomans B.P.B., Kuipers J.A.M., van Swaaij W.P.M.: *Granular dynamics simulation of segregation phenomena in bubbling gas-fluidised beds*, Powder Technology, Vol. 109, pp. 41-48, 2000.
- [77] Horio M.: *Hydrodynamics in Circulating fluidized beds* ed.: J.R. Grace, A.A. Avidan, T.M. Knowlton, Blackie Academic & Professional, 1997.
- [78] Hu H.H.: *Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 22, No. 2, pp. 335-352, 1996.

- [79] Hu H.H., Patankar N.A., Zhu M.Y.: *Direct numerical simulations of fluid–solid systems using the arbitrary Lagrangian–Eulerian technique*, J. of Comp. Physics, Vol. 169, pp. 427-462, 2001.
- [80] Hughes T.J.R., Mazzei L., Jansen K.E.: *Large eddy simulation and the variational multiscale method*, Comput. Visual Sci., Vol. 3, pp. 47-59, 2000.
- [81] Issangya A.S., Bai D., Bi H.T., Lim K.S., Zhu J., Grace J.R.: *Suspension densities in a high–density circulating fluidized bed riser*, Chemical Engineering Science, Vol. 54, pp. 5451-5460, 1999.
- [82] Ishii M.: *Thermo–fluid dynamic theory of two–phase flow*, Eyrolles, 1975.
- [83] Ishii M., Mishima K.: *Two–fluid model and hydrodynamic constitutive relations*, Nuclear Engineering and Design, Vol. 82, pp. 107-126, 1984.
- [84] Jackson R.: *The dynamics of fluidized particles*, Cambridge University Press, 2000.
- [85] Jiang B.N., Lin T.L., Povinelli L.A.: *Large–scale computation of incompressible viscous flow by least–squares element method*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 114, Vol. 213, 1994.
- [86] Johnson A., Tezduyar T.: *Fluid–particle simulations reaching 100 particles*, AHPCRC Technical Report 97-010, University of Minnesota, 1997.
- [87] Johnson R.W.: *The handbook of fluid dynamics*, CRC Press Springer, 1998.
- [88] Joseph D.D., Lundgren T.S.: *Ensemble averaged and mixture theory equations for incompressible fluid–particle suspensions*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 16, pp. 35-42, 1990.
- [89] Kenning V.M., Crowe C.T.: *On the effect of particles on carrier phase turbulence in gas–particle flows*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 23, No. 2, pp. 403-408, 1997.

- [90] Kim J., Moin P.: *Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equation*, Journal of Computational Physics, Vol. 59, pp. 308-323, 1985.
- [91] Kim S.W., Kirbas G., Bi H., Lim C.J., Grace J.R.: *Flow behavior and regime transition in a high-density circulating fluidized bed riser*, Chemical Engineering Science, Vol. 59, pp. 3955-3963, 2004.
- [92] Kim W.-W., Menon S.: *An unsteady incompressible Navier-Stokes solver for large eddy simulation of turbulent flows*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 31, pp. 983-1017, 1999.
- [93] Kolev N.: *Multiphase flow dynamics 1. Fundamentals*, Springer, 2002.
- [94] Koseff J.R., Street R.L.: *On end wall effects in a lid-driven cavity flow*, Trans. of ASME, Journal of Fluids Engineering, Vol. 106, pp. 385-389, 1984.
- [95] Koseff J.R., Street R.L.: *The lid-driven cavity flow: A synthesis of qualitative and quantitative observations*, Trans. of ASME, Journal of Fluids Engineering, Vol. 106, pp. 390-398, 1984.
- [96] Koseff J.R., Street R.L.: *Visualization studies of a shear driven three-dimensional recirculating flow*, Trans. of ASME, Journal of Fluids Engineering, Vol. 106, pp. 21-29, 1984.
- [97] Ku H.C., Hirsh R.S., Taylor T.D.: *A pseudospectral method for solution of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations*, Journal of Computational Physics, Vol. 70, pp. 439-462, 1987.
- [98] Kudela H., Lewtak R.: *Badania numeryczne dynamiki złoża fluidalnego z wykorzystaniem kinetycznej teorii gazów*, Konferencja naukowo-techniczna Energetyka 2000, Wrocław, 8-10 listopada 2000, Prace Naukowe Instytutu Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów Politechniki Wrocławskiej nr 56, Konferencje, s. 61-68, 2000.
- [99] Kudela H., Lewtak R.: *Numerical simulation of the circulating fluidized bed combustor using 1-D model*, Euroconference on Computational Mechanics and Engineering Practice, Szczyrk, 19-21 September 2001,

- Zeszyty Naukowe – Politechnika Łódzka Filia w Bielsku-Białej nr 39, Budowa i Eksploatacja Maszyn, s. 198-203, 2001.
- [100] Kudela H., Lewtak R.: *Modelowanie numeryczne dynamiki ośrodka fluidalnego*, Konferencja naukowo-techniczna Energetyka 2002, Wrocław, 6-8 listopada 2002, Instytut Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów, s. 399-404, 2002.
- [101] Kudela H., Lewtak R.: *Numeryczne modelowanie przepływu nieściśliwego płynu lepkiego metodą rzutowania i dekompozycji operatora różniczkowego*, Inż. Chem. Proces., tom 25, z. 4, pp. 2207-2213, 2004.
- [102] Kunii D., Levenspiel O.: *Fluidization engineering*, John Wiley & Sons, Inc., 1969.
- [103] Kunii D., Levenspiel O.: *Entrainment of solids from fluidized beds I. Hold-up of solids in the freeboard II. Operation of fast fluidized beds*, Powder Technology, Vol. 61, pp. 193-206, 1990.
- [104] Kunii D., Levenspiel O.: *Circulating fluidized-beds reactors*, Chemical Engineering Science, Vol. 52, No. 15, pp. 2471-2482, 1997.
- [105] Kunii D., Levenspiel O.: *The K-L reactor model for circulation fluidized beds*, Chemical Engineering Science, Vol. 55, pp. 4563-4570, 2000.
- [106] Langtangen H.P., Mardal K.-A., Winther R.: *Numerical methods for incompressible viscous flow*, private publication.
- [107] Lesieur M., Métais O.: *New trends in large-eddy simulations of turbulence*, Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 28, pp. 45-82, 1996.
- [108] Li J., Kuipers J.A.M.: *Gas-particle interactions in dense gas-fluidized beds*, Chemical Engineering Science, Vol. 58, pp. 711-718, 2003.
- [109] Lomax H., Pulliam T.H., Zingg D.W.: *Fundamentals of computational fluid dynamics*, Springer, 2001.
- [110] Lun C.K.K., Savage S.B., Jeffrey D.J., Chepurniy N.: *Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in Couette flow and slightly inelastic particles in a general flowfield*, J. Fluid Mech., Vol. 140, pp. 223-256, 1984.

- [111] Mahesh K., Constantinescu G., Moin P.: *A numerical method for large-eddy simulation in complex geometries*, J. of Computational Physics, Vol. 197, pp. 215-240, 2004.
- [112] Makkawi Y.T., Write P.C.: *The voidage function and effective drag force for fluidized beds*, Chemical Engineering Science, Vol. 58, pp. 2035-2051, 2003.
- [113] Marchuk G.I.: *Analiza numeryczna zagadnień fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa, 1983.
- [114] Marchuk G.I.: *Splitting and alternating direction methods*, in *Handbook of numerical analysis*, ed. by P.G. Ciarlet and J.L. Lions, Vol. 1, Amsterdam, North-Holland, 1990.
- [115] Marcinkowska H.: *Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993.
- [116] Mashayek F.: *Droplet-turbulence interactions in low-Mach-number homogeneous shear two-phase flows*, J. Fluid Mech., Vol. 367, pp. 163-203, 1998.
- [117] Mastellone M.L., Arena U.: *The effect of particle size and density on solids distribution along the riser of a circulating fluidized bed*, Chemical Engineering Science, Vol. 54, pp. 5383-5391, 1999.
- [118] Maxey M.R., Riley J.J.: *Equation of motion for small rigid sphere in a nonuniform flow*, Phys. Fluids 26 (4), pp. 883-889, 1983.
- [119] Mei R., Adrian R.J., Hanratty T.J.: *Particle dispersion in isotropic turbulence under Stokes drag and Basset force with gravitational settling*, J. Fluid Mech., Vol. 225, pp.481-495, 1991.
- [120] Migeon C.: *Details on the start-up development of the Taylor-Görtler-like vortices inside a square-section lid-driven cavity for $1000 \leq Re \leq 3200$* , Experiments in Fluids, Vol. 33, pp. 594-602, 2002.
- [121] Migeon C., Pineau G., Texier A.: *Three-dimensionality development inside standard parallelepipedic lid-driven cavities at $Re=1000$* , J. Fluids and Structures, Vol. 17, pp. 717-738, 2003.

- [122] Minion M.L.: *A projection method for locally refined grids*, Journal of Computational Physics, Vol. 127, pp. 158-178, 1996.
- [123] Nadaoka K., Nihei Y., Yagi H.: *Grid-averaged Lagrangian LES model for multiphase turbulent flow*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 25, pp. 1619-1643, 1999.
- [124] O'Brien T.J., Syamlal M.: *NIMPF: A nonisothermal multiparticle fluidized-bed hydrodynamical model*, ASME FED, Vol. 91, pp. 65-72, 1990.
- [125] Oliphant T.A.: *An implicit numerical method for solving two-dimensional time-dependent diffusion problems*, Quart. Appl. Math., Vol. 19, No. 3, pp. 221-229, 1961.
- [126] Orzechowski Z.: *Przepływy dwufazowe*, PWN, Warszawa, 1990.
- [127] Ouyang J., Li J.: *Particle-motion-resolved discrete model for simulating gas-solid fluidization*, Chemical Engineering Science, Vol. 54, pp. 2077-2083, 1999.
- [128] Pain C.C., Mansoorzadeh S., Gomes J.L.M., de Oliveira C.R.E.: *A numerical investigation of bubbling gas-solid fluidized bed dynamics in 2-D geometries*, Powder Technology, Vol. 128, pp. 56-77, 2002.
- [129] Pandya R.V.R., Mashayek F.: *Two-fluid large-eddy simulation approach for particle-laden turbulent flows*, Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 45, pp. 4753-4759, 2002.
- [130] Patankar N.A., Joseph D.D.: *Modeling and numerical simulation of particulate flows by the Eulerian-Lagrangian approach*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 27, pp. 1659-1684, 2001.
- [131] Patankar N.A., Joseph D.D.: *Lagrangian numerical simulation of particulate flows*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 27, pp. 1685-1706, 2001.
- [132] Peaceman D.W., Rachford H.H.: *The numerical solution for parabolic and elliptic differential equations*, J. Soc. Ind. Appl. Math., Vol. 3, pp. 28-41, 1955.

- [133] Pedras M.H.J., de Lemos M.J.S.: *Macroscopic turbulence modeling for incompressible flow through undeformable porous media*, Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 44, pp. 1081–1093, 2001.
- [134] Peirano E., Delloume V., Johnsson F., Leckner B., Simonin O.: *Numerical simulation of the fluid dynamics of a freely bubbling fluidized bed: influence of the air supply system*, Powder Technology, Vol. 122, pp. 69–82, 2002.
- [135] Perot J.B.: *An analysis of the fractional step method*, Journal of Computational Physics, Vol. 108, pp. 51–58, 1993.
- [136] Peyret R., Taylor T.D.: *Computational methods for fluid flow*, Springer, 1983.
- [137] Piomelli U., Chasnov J.R.: *Large-eddy simulations: theory and applications* in M. Hallböck *et al.* (eds.): *Turbulence and transition modelling*, Kluwer Academic Publisher, pp. 269–336, 1996.
- [138] Polski Komitet Normalizacji i Miar: *Fluidyzacja. Nazwy i określenia*, PN-76/C-01350/A011.
- [139] Prasad A.K., Koseff J.R.: *Reynolds number and end-wall effects on a lid-driven cavity flow*, Phys. Fluids A, Vol. 1, No. 2, pp. 208–218, 1989.
- [140] Ralston A.: *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1975.
- [141] Sagaut P.: *Large eddy simulation for incompressible flows*, Springer 2003.
- [142] Samuelsberg A., Hjertager B.H.: *Computational modelling of gas/particle flow in a riser*, AIChE J., Vol. 42, No. 6, pp. 1536–1546, 1996.
- [143] Shankar P.N., Deshpande M.D.: *Fluid mechanics in the driven cavity*, Ann. Rev. Fluid Mech., pp. 93–136, 2000.
- [144] Snider D.M., O'Rourke P.J., Andrews M.J.: *Sediment flow in inclined vessels calculated using a multiphase particle-in-cell model for dense particle flows*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 24, pp. 1359–1382, 1998.

- [145] Snider D.M.: *An incompressible three-dimensional multiphase particle-in-cell model for dense particle flows*, J. of Comp. Physics, Vol. 170, pp. 523-549, 2001.
- [146] Sommerfeld M.: *Theoretical and experimental modelling of particulate flow*, Lecture Series 2000-6, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Brussels, Belgium.
- [147] Soo S.L.: *Multiphase fluid dynamics*, Science Press and Gower Technical, Beijing, China, 1990.
- [148] Speziale C.G., So R.M.C: *Turbulence modeling and simulation* in R.W. Johnson (eds.): *The handbook of fluid dynamics*, CRC Press Springer, 1998.
- [149] Strang G.: *On the construction and comparison of difference schemes*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 5, No. 3, pp. 506-517, 1968.
- [150] Szmydt Z.: *Transformacja Fouriera i równania różniczkowe liniowe*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1972.
- [151] Tallmadge J.A.: *Packed bed pressure drop – an extension to higher Reynolds numbers*, A.I.Ch.E. Journal, Vol. 16, No. 6, pp. 1092-1093, 1970.
- [152] Temam R.: *Sur l'approximation de la solution des equations de Navier-Stokes par la méthode des fractionnaires II*, Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 33, pp. 377-385, 1969.
- [153] Tsuji Y., Tanaka T., Ishida T.: *Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe*, Powder Technology, Vol. 71, pp. 239-250, 1992.
- [154] Tsuji Y., Kawaguchi T., Tanaka T.: *Discrete particle simulation of two-dimensional fluidized bed*, Powder Technology, Vol. 77, pp. 79-87, 1993.
- [155] Tsuo Y.P., Gidaspow D.: *Computation of flow patterns in circulating fluidized beds*, AIChE J., Vol. 36, No. 6, pp. 885-896, 1990.

- [156] van Wachem B.G.M., van der Schaaf J., Schouten J.C., Krishma R., van den Bleek C.M.: *Experimental validation of Lagrangian-Eulerian simulations of fluidized beds*, Powder Technology, Vol. 116, pp. 155-165, 2001.
- [157] van Wachem B.G.M., Almstedt A.E.: *Methods for multiphase computational fluid dynamics*, Chemical Engineering Journal, Vol. 96, pp. 81-98, 2003.
- [158] Wang Q., Squires K.D.: *Large eddy simulation of particle deposition in a vertical turbulent channel flow*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 22, No. 4, pp. 667-683, 1996.
- [159] Wen C.Y., Yu Y.H.: *Mechanics of fluidization*, Chem. Engng. Prog. Symp. Ser., Vol. 62, No. 62, pp. 100-111, 1966.
- [160] Witt P.J., Perry J.H., Schwarz M.P.: *A numerical model for predicting bubble formation in a 3D fluidized bed*, Applied Mathematical Modeling, Vol. 22, pp. 1071-1080, 1998.
- [161] Xu B.H., Yu A.B.: *Numerical simulation of the gas-solid flow in a fluidized bed by combining discrete particle method with computational fluid dynamics*, Chemical Engineering Science, Vol. 52, No. 16, pp. 2785-2809, 1997.
- [162] Yamamoto Y., Potthoff M., Tanaka T., Kajishima T., Tsuji Y.: *Large-eddy simulation of turbulent gas-particle flow in a vertical channel: effect of considering inter-particle collisions*, J. Fluid Mech., Vol. 442, pp. 303-334, 2001.
- [163] Yanenko N.N.: *The method of fractional steps. The solution of problems of mathematical physics in several variables*, Springer, 1971.
- [164] Яненко Н.Н.: Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности, Доклады Академии Наук СССР, Том 125, № 6, 1207-1210, 1959
- [165] Яненко Н.Н., Сучков В.А., Погодин Ю.Я.: О разностном решении уравнения теплопроводности в криволинейных координатах, Доклады Академии Наук СССР, Том 128, № 5, 903-905, 1959

- [166] Яненко Н.Н.: О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности, Известия Высших Учебных Заведений, № 4(23), 148-157, 1961.
- [167] Yang J.-Y., Yang S.-C., Chen Y.-N., Hsu C.-A.: *Implicit weighted ENO schemes for the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations*, Journal of Computational Physics, Vol. 146, pp. 464-487, 1998.
- [168] Ye M., van der Hoef M.A., Kuipers J.A.M.: *A numerical study of fluidization behavior of Geldart A particles using a discrete particle model*, Powder Technology, Vol. 139, pp. 129-139, 2004.
- [169] Young J.B.: *The fundamental equations of gas-droplet multiphase flow*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 21, No. 2, pp. 175-191, 1995.
- [170] Yuu S., Umekage T., Johno Y.: *Numerical simulation of air and particle motions in bubbling fluidized bed of small particles*, Powder Technology, Vol. 110, pp. 158-168, 2000.
- [171] Zhang D.Z., Prosperetti A.: *Momentum and energy equations for disperse two-phase flows and their closure for dilute suspensions*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 23, pp. 425-453, 1997.
- [172] Zhang Y., Reese J.M.: *The drag force in two-fluid models of gas-solid flows*, Chemical Engineering Science, Vol. 58, pp. 1641-1644, 2003.
- [173] Zhou H., Flamant G., Gauthier D., Lu J.: *Lagrangian approach for simulating the gas-particle flow structure in a circulating fluidized bed riser*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 28, pp. 1801-1821, 2002.
- [174] Zhou H., Flamant G., Gauthier D.: *DEM-LES of coal combustion in a bubbling fluidized bed. Part I: gas-particle turbulent flow structure*, Chemical Engineering Science, Vol. 59, pp. 4193-4203, 2004.
- [175] Zhu J.: *The second-order projection method for the backward-facing step flow*, Journal of Computational Physics, Vol. 117, pp. 318-331, 1995.

