

na prawach rękopisu

Politechnika Wrocławska
Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego
Instytut Inżynierii Lądowej
Raport serii PRE nr 4/2004

**ANALIZA FALKOWA
W PARAMETRYCZNEJ
IDENTYFIKACJI DYSKRETNYCH
UKŁADÓW DYNAMICZNYCH**

Magdalena Napiórkowska-Alykow

Praca doktorska

Promotor :

Dr hab. inż. Wojciech Glabisz, prof. PWr.

słowa kluczowe:
analiza falkowa
pakietowa analiza falkowa
identyfikacja parametrów
dyskretne układy dynamiczne

Wrocław, czerwiec 2004 r.

SPIS TREŚCI:

1. Wstęp	3
1.1. Wprowadzenie	3
1.2. Przegląd literatury	4
1.3. Cel, teza i zakres pracy	9
2. Wprowadzenie do analizy falkowej i pakietowej analizy falkowej	11
2.1. Rys historyczny	11
2.2. Podstawy analizy falkowej – analizy wielorozdzielczej	11
2.3. Przegląd falek i funkcji skalujących	15
2.3.1. Falka Haara	16
2.3.2. Falki Battle-Lemarié	17
2.3.3. Falka Shannon'a	20
2.3.4. Falka Meyera	21
2.3.5. Falki Daubechies	23
2.4. Algorytm analizy falkowej	25
2.5. Falkowa analiza pakietowa	26
3. Podstawy identyfikacji konstrukcji inżynierskich	34
3.1. Przegląd metod identyfikacji	34
3.1.1. Identyfikacja parametryczna i nieparametryczna	35
3.1.2. Metody identyfikacji parametrów układów liniowych	36
3.1.3. Metody identyfikacji parametrów układów nieliniowych	37
3.1.4. Inne metody identyfikacji	38
3.2. Wybrane etapy modelowania obiektu	40
3.3. Zagadnienia matematyczne wykorzystywane w metodach identyfikacji	42
3.3.1. Metoda najmniejszych kwadratów	42
3.3.2. Metoda największej wiarygodności	43
3.3.3. Metoda funkcji korelacji i gęstości widmowych	43
3.3.4. Metody aproksymacji stochastycznej	44
3.3.5. Inne sformułowania matematyczne stosowane w metodach identyfikacji ..	44
4. Falkowa analiza pakietowa Walsha w wyznaczaniu pochodnych sygnału	45
4.1. Wprowadzenie	45
4.2. Algorytm wyznaczania pochodnych sygnału	46
4.3. Przykłady numeryczne	57
4.3.1. Identyfikacja parametrów układu oparta na interpolacji danych	57
4.3.2. Identyfikacja parametrów układu liniowego o jednym stopniu swobody wykorzystująca analizę pakietową z bazą Walsha	60
4.3.3. Identyfikacja parametrów układu nieliniowego o jednym stopniu swo- body	65
4.3.4. Identyfikacja parametrów układu liniowego i nieliniowego z zakłóce- niami	69
4.3.5. Identyfikacja parametrów układów liniowych i nieliniowych opisanych równaniami czwartego rzędu	75
4.3.6. Identyfikacja parametrów układu o dwóch stopniach swobody z tarciem suchym	79
4.3.7. Identyfikacja parametrów układu nieliniowego o wolno zmiennych w czasie parametrach	81
4.4. Kryteria wyboru modelu matematycznego i czasu obserwacji odpowiedzi układu	83

5. Pakietowe bazy falkowe w identyfikacji dyskretnych układów liniowych i nieliniowych	89
5.1. Wprowadzenie	89
5.2. Sformułowanie algorytmu identyfikacji	91
5.3. Analiza numeryczna	99
5.3.1. Procedura Ghanem'a i Romeo w parametrycznej identyfikacji układu liniowego	99
5.3.2. Identyfikacja parametrów liniowego układu o jednym stopniu swobody ...	102
5.3.3. Identyfikacja parametryczna układu liniowego o dwóch stopniach	108
5.3.4. Identyfikacja parametrów równania rzędu czwartego	115
6. Podsumowanie	117
Załącznik	120
Literatura	143

1. WSTĘP

1.1. Wprowadzenie

„Falki” (ang. *wavelets*) czyli dokładnie „małe fale”, dzięki zwartej dziedzinie, ortogonalności i możliwości skalowania mogą być wykorzystane w wielu dziedzinach nauki. W literaturze światowej można znaleźć pozycje książkowe, w których przedstawione są założenia transformacji falkowej [26, 85, 92, 98, 109, 121, 127], oraz zastosowanie falek między innymi w elektronice [107, 131], medycynie [3, 4]. Zauważalne jest także zainteresowanie transformacją falkową w ekonomii [39], inżynierii elektromagnetycznej [114], czy geofizyce [35]. Na stronie internetowej *btob.barnesandnoble.com* znaleźć można ponad 200 tytułów pozycji książkowych z ostatniej dekady dotyczących falek i ich zastosowań. Wymienione pozycje literaturowe jedynie sygnalizują możliwości szerokiego wykorzystania analizy falkowej.

Termin „falka” został wprowadzony przez J. Morlet’a i oznacza obiekt matematyczny $\psi(t)$ zmiennej niezależnej t . Skalowanie falki ($\psi(at)$) i przesuwanie jej w czasie ($\psi(t-b)$) pozwala na zbudowanie ortogonalnej bazy w $L^2(R)$ – w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem. Falki są funkcjami oscylującymi, definiowanymi na skończonym obszarze, co oznacza, że są one dobrze lokalizowalne w dziedzinie ich argumentów, np. czasie czy przestrzeni.

Analizę falkową często porównuje się z transformacją Fouriera. Transformacja Fouriera wykorzystywana jest głównie do analizy sygnałów stacjonarnych. W analizie Fouriera funkcjami bazowymi są funkcje trygonometryczne, dokładnie zlokalizowane w dziedzinie częstości. Nieograniczony zasięg funkcji bazowych w transformacji Fouriera daje bazę – złożoną na ogół z wielu funkcji aproksymujących – co jest niekorzystne np. w przypadku opisu sygnałów niestacjonarnych. Liczne bazy Fouriera stanowią istotne utrudnienie w analizie numerycznej i dlatego bazy te nie są wygodnym narzędziem w opisie sygnałów niestacjonarnych. Bazy falkowe, w przeciwieństwie do baz Fouriera, dzięki zwartym nośnikom dobrze aproksymują (opisują) sygnały niestacjonarne. W transformacji falkowej bazę stanowią funkcje skalujące i towarzyszące im falki, które mają na ogół ograniczony zasięg i tym samym tworzą bazę dobrze zlokalizowaną w dziedzinie czasu i częstości.

W dalszej części pracy zmienną niezależną przyjętą do analizy będzie czas t trwania badanych procesów, a parametry opisujące proces będą rozpatrywane jako stałe bądź zmienne w czasie.

1.2. Przegląd literatury

W dostępnej literaturze znaleźć można zastosowanie transformacji falkowej przede wszystkim w zagadnieniach matematycznych takich jak numeryczne aproksymacje równań różniczkowych [13, 16, 50, 65, 137]; równań całkowych [21]; w fizyce (np. astrofizyce, kosmologii, fizyce plazmowej, biofizyce, multifraktalach) [32, 128, 130]; w chemii [96]. Transformacja falkowa znalazła również zastosowanie w zagadnieniach związanych m.in. z elektrotechniką [129], budową maszyn [17, 18, 78, 79, 91, 112, 116, 118, 120, 124, 131]; mechaniką płynów [34] czy ekonomią [122]. Szczegółowy przegląd publikacji dotyczących transformacji falkowej można znaleźć w pozycji [105]. W mniejszym stopniu, w porównaniu z wyżej wymienionymi dziedzinami zastosowań, transformacja falkowa znalazła zastosowanie w rozwiązywaniu problemów z zakresu mechaniki konstrukcji. Można znaleźć prace dotyczące między innymi: zastosowania analizy falkowej w lokalizacji uszkodzeń w konstrukcjach inżynierskich [19, 43, 75, 76, 77, 123] i identyfikacji parametrów układów dynamicznych [20, 21, 22, 38, 40, 41, 45, 52, 64, 95]. Sukcesywnie wzrasta zainteresowanie zastosowaniem falek do opisu analizy sygnału [1, 14, 85, 98, 107, 109, 130] i przetwarzania danych uzyskanych z pomiarów prowadzonych na różnego typu obiektach. W przeglądzie literatury ograniczono się do omówienia przykładowych pozycji z ostatnich lat (uporządkowanych chronologicznie), które nawiązują do identyfikacji, która jest tematyką niniejszej dysertacji. Skupiono się na pozycjach, w których zaprezentowano identyfikację parametrów analizowanych układów takich jak tłumienie czy częstotliwości drgań rozpatrywanych systemów.

Tematem pracy [113] było wykorzystanie dekompozycji falkowej na bazie falek Morleta do reprezentacji czasowo-częstotliwościowej odpowiedzi systemu w celu identyfikacji i oszacowania częstotliwości oraz tłumienia układu. Analizę oparto na pomiarach uzyskanych z rzeczywistego obiektu inżynierskiego (most Queensborough w Vancouver w Kanadzie). Poszukiwane parametry wyznaczano uśredniając rezultaty z uzyskanych pomiarów. Autorzy otrzymali porównywalne wyniki z wynikami otrzymanymi na drodze symulacji numerycznej rozpatrywanego zagadnienia.

W pracy [27] przedstawiono zalety dekompozycji falkowej zastosowanej do analiz liniowych oraz nieliniowych reprezentacji ciągłych procesów o charakterze dynamicznym. Transformacje rozpatrywanego procesu przeprowadzono przy zastosowaniu B-splajnów. Analizowano oscylator Duffinga. Transformację falkową wykorzystano do aproksymacji odpowiedzi analizowanego układu, której pochodne uzyskano w wyniku różniczkowania jej wygładzonej postaci. Na podstawie pochodnych pierwszego i drugiego rzędu określono parametry równania Duffinga, z błędem mniejszym niż 4% w stosunku do rzeczywistych parametrów równania. Poszukiwane parametry wyznaczono stosując metodę najmniejszych kwadratów.

Celem pracy [119] było zaprezentowanie procedury identyfikacji nieliniowego systemu o wielu stopniach swobody opartej na ciągłej transformacji falkowej. Autor zastosował falki Morleta do analizy odpowiedzi badanego układu z uwzględnionym tarciem Coulomba i nieliniową sztywnością. Poszukiwane parametry autor wyznaczał stosując algorytm optymalizacji rozpatrywanego zagadnienia. Optymalizacja polegała na minimalizacji funkcjonu opisu energii badanego układu. Wykorzystanie transformacji falkowej do identyfikacji parametrów analizowanego układu (tłumienia i sztywności) dało porównywalne wyniki z symulacjami wykorzystującymi procedury Runge-Kutta czwartego rzędu.

W pracy [2] autorzy dokonali przeglądu metod identyfikacji nieliniowych układów dynamicznych. Jedną z prezentowanych metod była transformacja falkowa, wykorzystywana do analizy procesów niestacjonarnych i wykrywania uszkodzeń w badanych układach. Autorzy zaproponowali transformację falkową do opisu procesów o ograniczonej dziedzinie, dla których analiza falkowa pozwala na lepszą aproksymację badanych procesów niż transformacja Fouriera czy transformacja Hilberta.

Autorzy [9, 10] zastosowali transformację falkową do analizy niestacjonarnych odpowiedzi systemu o jednym stopniu swobody. Zaproponowali zastosowanie bazy falek ortogonalnych opartej o zmodyfikowaną bazę typu $L - P$ (Littlewood-Paley). Falkami zamodelowano uzyskany z pomiarów sygnał trzęsienia ziemi (jako proces niestacjonarny), poszukując odpowiedzi rzeczywistych konstrukcji (m.in. most Dumbarton niedaleko Coyote Hills), wywołanych trzęsieniami w San Fernando i Loma Prieta. Zaproponowano stochastyczne sformułowanie problemu drgań układu wywołanych trzęsieniem ziemi. Wyniki uzyskane z proponowanego podejścia wykorzystującego falki, porównano z rezultatami uzyskanymi z analizy stochastycznej.

W artykule [66] przedstawiono zastosowanie transformacji falkowej z falką Daubechies do identyfikacji nieliniowych systemów dynamicznych. Autor rozpatrywał nieliniowe modele o jednym oraz wielu stopniach swobody, z obciążeniem kinematycznym wywołanym trzęsieniem ziemi. Poszukiwanymi wielkościami było tłumienie i sztywność układu, do wyznaczenia których zastosowano metodę najmniejszych kwadratów. Zaproponowane podejście szacowania poszukiwanych parametrów dawało porównywalne wyniki do rezultatów otrzymanych na drodze badań eksperymentalnych.

W artykule [110] omówiono zastosowanie dyskretnej transformacji falkowej z falkami Daubechies w identyfikacji parametrów modelu dynamicznego. Rozpatrywano układ o czterech stopniach swobody z losowym wymuszeniem. Poszukiwane parametry autorzy wyznacжали wykorzystując procedurę opartą o konstruowanie macierzy Hankela, której elementy opisują dyskretne wartości analizowanej odpowiedzi układu. Macierzami Hankela autorzy opisali także charakterystyki przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia rozpatrywanego modelu dynamicznego. Autorzy wykazali, że analiza falkowa może być przydatnym i skutecznym narzędziem w procedurze identyfikacji oraz może stanowić alternatywę dla procedur opartych na transformacji Fouriera.

W pracach [75, 108] przedstawiono wykorzystanie transformacji falkowej do lokalizacji uszkodzeń konstrukcji. W badaniach wykorzystano między innymi pomiary przemieszczeń, przyspieszeń i naprężeń występujących w konstrukcji. Autorzy przeprowadzili próby identyfikacji położenia rysy w belce swobodnie podpartej, w belce wspornikowej obciążonych statycznie i dynamicznie oraz w płycie. Zarówno w belce jak i w płycie modelowano rysę w postaci szczeliny. Do transformacji zastosowano falkę Haara i Gabora. Autorzy na podstawie wykresów przedstawiających rozkład współczynników falkowych podjęli próbę lokalizacji uszkodzeń. Uzyskane gwałtowne skoki w wartościach współczynników oznaczają lokalne zaburzenia sygnału w pobliżu spodziewanego występowania uszkodzenia. W badaniach tych także podjęto próbę określenia minimalnej liczby danych, na podstawie których można określić występowanie defektów struktury.

W pracy [53] za pomocą dekompozycji falkowej analizowano i symulowano procesy niestacjonarne, jakimi modeluje się m.in. trzęsienia ziemi oraz oddziaływanie wiatru bądź fal oceanicznych np. na platformy wiertnicze. W pracy tej zastosowano dyskretną oraz ciągłą transformację falkową (wykorzystano falki Daubechies) do oszacowania widma przyspieszenia i częstości fal sejsmicznych. Poszukiwano także postaci formy własnej drgań budynku jako odpowiedzi konstrukcji na obciążenia dynamiczne. Autorzy na bazie skalogramów przedstawiających rozkład współczynników analizowali energię układu, co

pozwoili na identyfikacj poszukiwanych parametrów. W pracy zwrócono uwag na to, że informacja o wysokich czstotciach moe byc uyteczna przy przewidywaniu zachowania si konstrukcji inynierskich np. podczas trzsien ziemi. Autorzy pokazali zalety i moilnoci zastosowania transformacji falkowej do analizy sygnatów niestacjonarnych, identyfikacji chwilowych zakłóceń sygnátu oraz moilnoci „odszumienia” badanego sygnátu w celu jego „wygładzenia”.

W pracy [25] autorzy zaprezentowali rozwizanie zagadnienia układu dynamicznego o jednym stopniu swobody, poddanemu impulsowemu wymuszeniu o charakterze sinusoidalnym. Stosujac falki Haara, Daubechies i B-splajny zaproponowali aproksymacj siły wymuszajacej (*control force*), poszukujac minimum funkcjonału, okrelajacego kryterium wystepowania odchyleń w przemieszczeniach analizowanego układu. Wykazano wyzsza precyzj opisu siły wymuszajacej przy zastosowaniu transformacji falkowej (z falkami Haara oraz Daubechies), w porównaniu z aproksymacj badanej wielkości z wykorzystaniem transformacji Fouriera.

Z kolei autorzy [11] wykorzystali ciagla transformacj falkowa – na bazie falek Daubechies – do analizy sygnatów impulsowych defektoskopii magnetycznej lin stalowych. Wykazali, że transformacja falkowa moe dostarczac wielu informacji o badanych obiektach (np. o naglych zmianach przekroju liny), na podstawie wynikow uzyskanych z testów magnetycznych.

Przedmiotem pracy [145] bylo kontrolowanie drgów wspornikowej plyty o zmiennej grubosci przy zastosowaniu transformacji falkowej falkami Daubechies. Za pomoca sensorów piezoelektrycznych i czujników wzбудzajacych autorzy pomierzyli odpowiedz plyty na zadane wymuszenie. Uzyskane z pomiarów wyniki poddawali transformacji w celu oszacowania ugięcia analizowanej plyty. Poszukiwane wielkości wyznaczano z układu równań algebraicznych metoda Galerkina.

W pracy [104] autorzy przedstawili identyfikacj tłumienia wiskotycznego i czstotci własnych swobodnie podpartego trzyprzesłowego mostu. Analizowany most zamodelowano jako plyte ortotropowa, a obciężenie pojazdami jako system o wielu stopniach swobody (globalnie cały układ miał siedem stopni swobody). Drgania pomierzone akcelerometrami poddano transformacji falkowej z falkami Morleta w celu identyfikacji poszukiwanych parametrów (tłumienia i czstotci własnych układu). Poszukiwane parametry wyznaczono stosujac analizę modalna. Porównujac wyniki z wynikami otrzymanymi na drodze numerycznej – przy zastosowaniu metody Rayleigha-Ritza –

autorzy pracy wykazali skuteczność transformacji falkowej w identyfikacji parametrów konstrukcji.

W artykułach [55, 70] przedstawiono identyfikację tłumienia układu o wielu stopniach swobody. Badania przeprowadzono na ośmiokondygnacyjnym budynku. Badania dotyczyły odpowiedzi konstrukcji pod wpływem harmonicznym i impulsowym wymuszeń. Do identyfikacji poszukiwanych parametrów zastosowano transformację falkową z okresowymi splajnami (*periodic Spline wavelet*) oraz falkami Daubechies, pokazując szerokie spektrum jej zastosowań w analizie badanego obiektu. Poszukiwane parametry wyznaczono stosując analizę stochastyczną (procedurę standardowego dekrementu logarytmicznego).

Autorzy [97] stosując dyskretną transformację falkową z falkami Daubechies, przeprowadzili badania w czasie budowy czterech segmentów mostu na trasie Singapur – Malezja. Badania dotyczyły krótko i długo terminowych zachowań i odpowiedzi konstrukcji pod obciążeniem wywołanym ciężarem konstrukcji, ruchem kołowym (most kolejowy), czynnikami środowiskowymi (wpływ wiatru, ruchy ziemi) oraz zdarzeniami losowymi (wypadki, zwiększenie ciężaru pojazdów, nagłe zmiany pogody). Badania te wykazały zależność pomiędzy zdarzeniami, a nagłymi zmianami naprężeń w analizowanych segmentach. Podejście wykorzystujące zależności pomiędzy czynnikami zewnętrznymi, działającymi na konstrukcję a naprężeniami, umożliwiło indywidualne monitorowanie – poprzez analizę skalogramów przedstawiających rozkład współczynników falkowych – analizowanych zmiennych takich jak: naprężenia, obciążenia konstrukcji, temperatura i wilgotność materiału konstrukcji.

W pracy [56] zaprezentowano zastosowanie ciągłej transformacji falkowej (z falką typu *Mexican hat*) do śledzenia zachowań uszkodzonej belki swobodnie podpartej o przekroju kwadratowym. Uszkodzenie zamodelowano jako dwustronne lokalne zmniejszenie sztywności analizowanego przekroju. W pracy tej transformacja falkowa służyła do estymacji wykładnika Lipschitza (poszukiwano lokalnego maksimum w rozkładzie współczynników transformacji falkowej), którym opisano własności badanego układu.

W artykule [144] autorzy zaprezentowali wykorzystanie transformacji falkowej – z falkami z rodziny pochodnych funkcji Gaussa ($\psi(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{t^2}{2}}$, dla $n \in \mathbb{N}$) – do identyfikacji parametrycznej układu liniowego o pięciu stopniach swobody z tłumieniem

wiskotycznym. Autorzy przeprowadzili analizę pięciokondygnacyjnej ramy stosując ciągłą transformację falkową, a poszukiwane parametry wyznaczyli wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów. Dla porównania wyników analizę badanego systemu przeprowadzono stosując transformację Fouriera. Identyfikacji podlegały parametry tłumienia i sztywności analizowanego układu. Autorzy porównując rezultaty badań wykazali, że stosowanie transformacji falkowej w przypadku sygnałów zaburzonych, które są odpowiedzią analizowanej konstrukcji, daje lepsze wyniki niż klasyczna analiza Fouriera.

Na podstawie przedstawionej analizy literatury można stwierdzić, że w zagadnieniach identyfikacji parametrów konstrukcji inżynierskich dotychczas nie stosowano falkowej analizy pakietowej, której algorytmy stanowią uogólnienie algorytmów analiz falkowych. Procedury pakietowej analizy falkowej mogą stanowić podstawę definiowania szeregu pakietowych baz falkowych, których jednym, szczególnym przypadkiem, są bazy falkowe.

W pracy wykorzystano pakietową analizę falkową bazującą na filtrze Haara, którą dalej nazywa się falkową analizą pakietową Walsha.

1.3. Cel, teza i zakres pracy

W pracy przedstawiono podstawy analizy falkowej i pakietowej analizy falkowej, którą stosuje się do identyfikacji parametrów liniowych i nieliniowych modeli dyskretnych układów dynamicznych. W pracy podjęto próbę sformułowania skutecznych algorytmów numerycznych, bazujących na pakietowej transformacji falkowej, do identyfikacji parametrów konstrukcji. Celem pracy jest wykazanie, że pakietowa analiza falkowa stanowi dobre narzędzie identyfikacji dyskretnych układów dynamicznych.

Podstawowe cele pracy to:

- uogólnienie – wykorzystującego właściwości analizy pakietowej Walsha – algorytmu wyznaczania pochodnych sygnału, które są podstawą identyfikacji parametrów dyskretnych układów liniowych i nieliniowych o stałych i zmiennych współczynnikach,
- zbudowanie – bazującej na właściwościach analizy pakietowej i funkcjach pakietowych Walsha – efektywnej procedury identyfikacji parametrycznej dyskretnych układów liniowych o stałych i zmiennych współczynnikach.

Realizacja wyżej zdefiniowanych celów pracy pozwoli na wykazanie słuszności tezy pracy, którą jest następujące stwierdzenie:

„Właściwości pakietowej analizy falkowej Walsha i bazy pakietowe Walsha mogą stanowić podstawę budowania skutecznych algorytmów parametrycznej identyfikacji dyskretnych modeli liniowych i nieliniowych układów dynamicznych”.

W rozdziale drugim pracy przedstawiono podstawy analizy falkowej i pakietowej analizy falkowej, ze szczególnym uwzględnieniem dalej wykorzystywanej pakietowej analizy falkowej Walsha.

W rozdziale trzecim omówiono metody identyfikacji, jakie stosuje się do szacowania parametrów konstrukcji inżynierskich. Przedstawiono wybrane etapy modelowania obiektu matematycznego, który poddawany jest analizie i identyfikacji. Opisano także zagadnienia matematyczne najczęściej wykorzystywane w metodach identyfikacji.

Uogólnienie dotychczas stosowanego algorytmu wyznaczania pochodnych niezakłóconego i losowo zakłóconego sygnału, stanowiącego odpowiedź konstrukcji na znane wymuszenie, przedstawiono w rozdziale czwartym. Algorytm ten wykorzystano w identyfikacji parametrów różniczkowych równań liniowych i nieliniowych o stałych i zmiennych współczynnikach.

W rozdziale piątym pokazano algorytm identyfikacji parametrów układów liniowych, który wykorzystuje bazy pakietowe Walsha. Skuteczność funkcjonowania algorytmu pokazano na przykładach identyfikacji parametrów liniowych układów równań różniczkowych o stałych i zmiennych współczynnikach.

Podsumowanie wraz z wnioskami wynikającymi z pracy przedstawiono w rozdziale szóstym.

2. WPROWADZENIE DO ANALIZY FALKOWEJ I PAKIETOWEJ ANALIZY FALKOWEJ

2.1. Rys historyczny

Termin „falka” zaczęto używać powszechnie dopiero w latach 80-tych ubiegłego wieku, chociaż pierwsza wzmianka o falkach pojawiła się w dysertacji Haara [54] już w 1910 r. Falka Haara jest najstarszą i jednocześnie najprostsza falką. Ta elementarna falka traktowana jest często jako punkt wyjściowy do analiz i stanowi podstawę opisu innych rodzajów falek [1].

W latach 30-tych XX wieku wielu matematyków poszukiwało reprezentacji funkcji w bazie funkcji różniących się skalą (ang. *scale-varying basis functions*) [49]. Według autorki pracy [49] w 1930 roku Paul Levy opisał za pomocą funkcji Haara sygnał losowy opisujący ruchy Browna. Wykazał on, że falki Haara lepiej opisują skomplikowane detale sygnału niż funkcje bazowe z transformacji Fouriera.

W latach 1960 – 1980 matematycy G. Weiss i R. Coifman badali proste elementy przestrzeni funkcyjnych – atomy (ang. *atoms*), dzięki którym można opisać i zrekonstruować badaną funkcję [132, 133; 134, 135, 136]. W latach 80-tych D. Marr [88] stworzył algorytm falkowy do opisu procesów numerycznych. W latach 80-tych Grossman i Morlet [50] zastosowali falki w fizyce kwantowej, co przyczyniło się do rozwoju tej dziedziny nauki. W drugiej połowie lat 80-tych S. Mallat [82, 83, 84] rozpoczął prace nad przetwarzaniem dyskretnych sygnałów cyfrowych. Mallat zdefiniował zależności pomiędzy algorytmami piramidowymi a ortonormalną bazą falkową. Zależności te zostały później wykorzystane przez Meyera do opisu pierwszej różniczkowalnej falki, która jednak nie miała ograniczonej dziedziny. Dopiero bazy ortonormalnych falek zbudowane przez Ingrid Daubechies [29, 30] wykorzystujące prace Mallat’a, można uznać za podstawę stosowanej analizy falkowej.

2.2 Podstawy analizy falkowej – analizy wielorozdzielczej.

Tworzenie falek rozpoczyna się od skonstruowania falki podstawowej $\psi(t)$ (falki „matki”) i budowy bazy funkcji przez skalowanie (parametrem a) i przesuwanie (parametrem b) falki $\psi(at-b)$ w czasie t . Falka podstawowa musi być tak dobrana, aby spełniała warunek:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.1)$$

Wartości parametrów a i b mogą być ciągłe (mamy wtedy do czynienia z ciągłą transformacją falkową), bądź dyskretne, zwykle o wartościach $a = 2^j, b = k$ (gdzie $j, k \in \mathbf{Z}$) i wtedy mamy do czynienia z tutaj wykorzystywaną dyskretną transformacją falkową. Skalowanie funkcji daje możliwość hierarchicznego przedstawiania analizowanych sygnałów w bazie funkcji falkowych.

Znając falkę podstawową $\psi(t)$ możemy w wyniku skalowania i translacji wygenerować rodzinę falek w postaci:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (2.2)$$

gdzie j jest współczynnikiem skali, a k współczynnikiem przesunięcia. Falce podstawowej $\psi(t)$ odpowiada tzw. funkcja skalująca $\phi(t)$, która poprzez skalowanie i przesuwanie tworzy funkcje bazowe zgodnie z następującą relacją:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad (2.3)$$

W obu równaniach (2.2) i (2.3) współczynnik $2^{j/2}$ jest współczynnikiem normalizującym. Funkcje skalujące z poziomu j stanowią bazę przestrzeni V_j , a falki z tego poziomu są bazą przestrzeni W_j , która jest ortogonalnym dopełnieniem przestrzeni V_j . Do opisu bazy falkowej wykorzystuje się skalowaną analizę hierarchiczną (*multiresolution analysis*) [26, 126]. Z definicji, analiza wielorozdzielcza spełnia warunek:

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(R) \quad (2.4)$$

gdzie V_j jest podprzestrzenią przestrzeni V funkcji całkowalnych z kwadratem $L^2(R)$ na j -tym poziomie rozdzielczości, a

$$\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j = L^2(R) \quad (2.5)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (2.6)$$

Wiedząc, że przestrzeń V_j zawiera podprzestrzeń V_j ($j < J$), można zapisać, że przestrzeń na poziomie rozdzielczości $j+1$ jest utworzona przez przestrzeń V_j i przestrzeń szczegółów W_j , co zapisujemy:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (2.7)$$

Podprzestrzenie te są ortogonalne ($W_j \perp V_j$). Kontynuując rozkład, przestrzeń V_{j+1} można zapisać w postaci:

$$V_{j+1} = W_j \oplus V_j = W_j \oplus W_{j-1} \oplus V_{j-1} = \dots = W_j \oplus \dots \oplus W_{j-J} \oplus V_{j-J} \quad (2.8)$$

co dla $J \rightarrow \infty$ daje $L^2(R) = \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} W_k$.

Funkcja $f(t)$ należąca do przestrzeni V_j spełnia następujące warunki [26, 126]:

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1} \quad (2.9)$$

$$f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t-k) \in V_0 \quad (2.10)$$

Z warunków (2.9) i (2.10) wynika, że:

$$f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j t - k) \in V_j \quad (2.11)$$

dla j i k należących do przestrzeni liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

W dyskretnej transformacji falkowej badaną funkcję lub sygnał przedstawia się jako dekompozycję w postaci [26, 29]:

$$f(t) = \sum_k f_k^j \phi_{jk}(t) = \sum_k f_k^{j_0} \phi_{j_0 k}(t) + \sum_{l=j_0}^{j-1} \sum_k d_k^l \psi_{lk}(t) \quad (2.12)$$

gdzie:

j_0 – jeden, określony poziom rozdzielczości,

j – kolejne poziomy rozdzielczości,

$f_k^{j_0} = \langle \phi_{j_0,k}, f \rangle = \int f_{j_0}(t) \phi_{j_0,k}(t) dt$ – współczynniki rozwinięcia części gładkiej sygnału,

$d_k^j = d_k^{j-1} = \langle \psi_{j-1,k}, f \rangle = \int f_{j-1}(t) \psi_{j-1,k}(t) dt$ – współczynniki rozwinięcia części opisującej szczegóły sygnału.

Równanie (2.12) pokazuje, że analizowaną funkcję $f(t)$ można rozłożyć na część gładką $f_j(t)$ i część obrazującą lokalne wahania (szczegóły funkcji) $d_j(t)$. Precyzyjniejszy opis funkcji na wyższym $j+1$ poziomie rozdzielczości otrzymuje się dodając do opisu funkcji na niższym poziomie rozdzielczości $f_j(t)$ szczegóły $d_j(t)$ – rzut funkcji $f(t)$ na podprzestrzeń W_j – co zapisuje się jako:

$$f_{j+1}(t) = f_j(t) + d_j(t) \quad (2.13)$$

Pełny opis funkcji otrzymuje się w przejściu granicznym ze skalą do zera, sumując szczegóły ze wszystkich poziomów rozdzielczości:

$$f(t) = f_j(t) + \sum_{k=j}^{\infty} d_k(t) \quad (2.14)$$

W szczególności funkcja skalująca $\phi(t) \in V_0$ może być zapisana w bazie $\{\phi_{1k}(t)\}$ jako:

$$\phi(t) = \sum_k h_k \phi_{1k}(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k) \quad (2.15)$$

Współczynniki h_k , określane mianem filtra dolnoprzepustowego, można obliczyć ze wzoru [1, 29]:

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt \quad (2.16)$$

Funkcje $\{\psi_{jk}(t)\}_{jk}$ tworzą ortonormalną bazę falkową przestrzeni $L^2(R)$. Baza falkowa $\{\psi(t - k)\} \in W_0$ i warunek $W_0 \subset V_1$ pozwala na zdefiniowanie falki $\psi(t)$ [1, 26, 29]:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2t - k) \quad (2.17)$$

gdzie g_k są współczynnikami rozwinięcia określanymi jako współczynniki filtra górnoprzepustowego. Wiedząc, że $\psi(t - k)$ oraz $\phi(t - k)$ są ortogonalne, można na podstawie przekształceń w przestrzeni Fouriera wyprowadzić zależność pomiędzy współczynnikami g_k i h_k [1, 26, 29]:

$$g_k = (-1)^k h_{1-k} \quad (2.18)$$

Z własności (2.1) oraz z tego, że:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \quad (2.19)$$

wynika, że $\sum_k h_k = \sqrt{2}$ i $\sum_k g_k = 0$ [26, 29].

2.3. Przegląd falek i funkcji skalujących

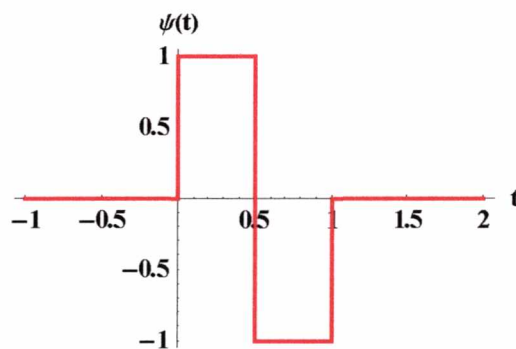
Dalej przedstawiono te z falek, które znalazły zastosowanie w rozwiązywaniu różnych problemów mechaniki, np. przy identyfikacji parametrów konstrukcji, obliczania zginanych belek czy płyt, lokalizacji rys w elementach konstrukcji. W mechanice transformację falkową wykorzystuje się przede wszystkim do opisu sygnałów jako odpowiedzi konstrukcji inżynierskich. Istotnymi właściwościami jakie mają wpływ na wybór rodzaju falki czy funkcji skalującej są ich ograniczona dziedzina i gładkość.

W kolejnych podpunktach scharakteryzowano podstawowe właściwości falek i funkcji skalujących, podkreślając ich wady i zalety.

2.3.1. Falka Haara

Rozwinięcie Haara jest najprostszym i najstarszym przykładem rozwinięcia funkcji, na podstawie którego najlepiej widoczne są ogólne właściwości analizy falkowej. Falka „matka” Haara ma postać [126] (rysunek 2.1):

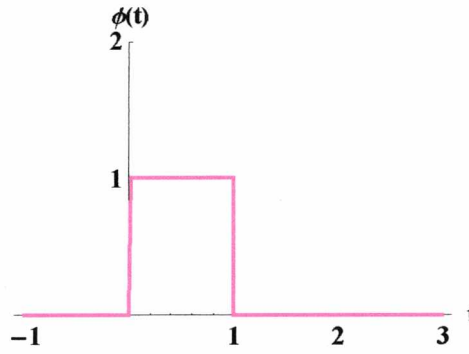
$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{gdy } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{dla innych } t \end{cases} \quad (2.20)$$



Rys. 2.1. Falka Haara

Funkcję skalującą Haara można przedstawić w postaci (rysunek 2.2):

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \text{ i } t \geq 1 \end{cases} \quad (2.21)$$



Rys.2.2. Funkcja skalująca Haara

Falki Haara spełniają warunek:

$$\int \psi_{jk} \psi_{j'k'} = 0 \quad (2.22)$$

gdzie równości $j = j'$ i $k = k'$ nie zachodzą równocześnie.

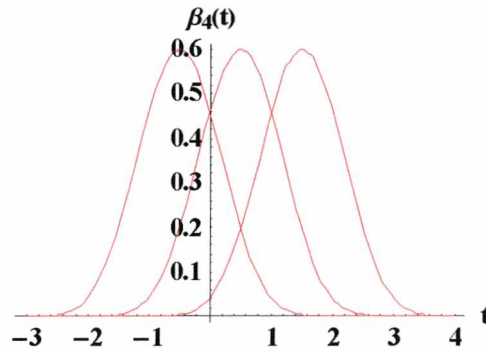
Zaletą falek i funkcji skalujących Haara jest ich dobra lokalizacja w czasie. Funkcje Haara mają zwartą dziedzinę, są ortogonalne, spełniają warunki analizy wielorozdzielczej. Są jednak nieciągłe – odcinkowo stałe, co przy aproksymacji dowolnych funkcji $f(t)$ należących do przestrzeni $L^2(R)$ prowadzi (dla $j \rightarrow \infty$) do dużej liczby elementów potrzebnych do opisu analizowanej funkcji. Falki Haara wykorzystano między innymi do identyfikacji i analizy układów nieliniowych [21, 51, 59, 60].

2.3.2. Falki Battle-Lemarié

Brak ciągłości w funkcji Haara powoduje, że baza ta jest nieefektywna w przypadku aproksymacji funkcji gładkich. Falki Battle-Lemarié są zbudowane na bazie funkcji sklepanych wielomianów (splajnów) [30, 126], co pozwala na generowanie takiej funkcji skalującej, która dobrze opisuje funkcje gładkie. Falki Battle-Lemarié, ze względu na ich charakterystyczny kształt, nazywane są funkcjami „kapeluszowymi” (rysunek 2.3).

Bazą przestrzeni V_n splajnów funkcji rzędu n jest $\{\beta_n(t-k)\}$. Dla rozpatrywanej przestrzeni V_n funkcja $f(t)$ jest wielomianem o stopniu nie przekraczającym n dla każdego przedziału $[k, k+1)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, i dla każdego $n > 0$. Funkcja $f(t)$ jest gładka i ma $(n-1)$ ciągłych pochodnych. Baza $\{\beta_n(t-k)\}$ jest nieortogonalna (poza przypadkiem

gdy $n = 0$). Na rysunku 2.3. przedstawiono przykładową funkcję splajnu rzędu czwartego: $\beta_4(t-1)$, $\beta_4(t)$ i $\beta_4(t+1)$ w celu pokazania nieortogonalnej natury bazy $\{\beta_n(t-k)\}$.



Rys. 2.3. Funkcje $\beta(t)$ rzędu czwartego

Aby z funkcji $\beta_n(t)$ utworzyć ortogonalną funkcję skalującą, należy zastosować procedurę ortogonalizacji w przestrzeni częstości. Procedura ta wykorzystuje dyskretne przekształcenia Fouriera, wyrażone wzorem [30]:

$$\hat{\phi}_{ort}(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\sqrt{\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2}} \quad (2.23)$$

oraz

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}_{ort}(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_k \left| \frac{\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)}{\sqrt{\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2}} \right|^2 = 1 \quad (2.24)$$

gdzie funkcja $\hat{\phi}_{ort}(\omega)$ spełnia warunek ortonormalności:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = 1 \quad (2.25)$$

W przestrzeni Fouriera równanie skalujące ma postać:

$$\hat{\phi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.26)$$

a warunek (2.25) możemy przedstawić jako [26, 29]:

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}(\omega + 2\pi l) \right|^2 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| H\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right) \right|^2 = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| H(\omega' + \pi l) \right|^2 \left| \hat{\phi}(\omega' + \pi l) \right|^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

gdzie $\omega' = \frac{\omega}{2}$. Rozdzielając sumy na parzyste ($l = 2k$) i nieparzyste ($l = 2k + 1$) oraz uwzględniając fakt, że $H(\omega)$ jest 2π -periodyczne równanie (2.27) można zredukować do postaci:

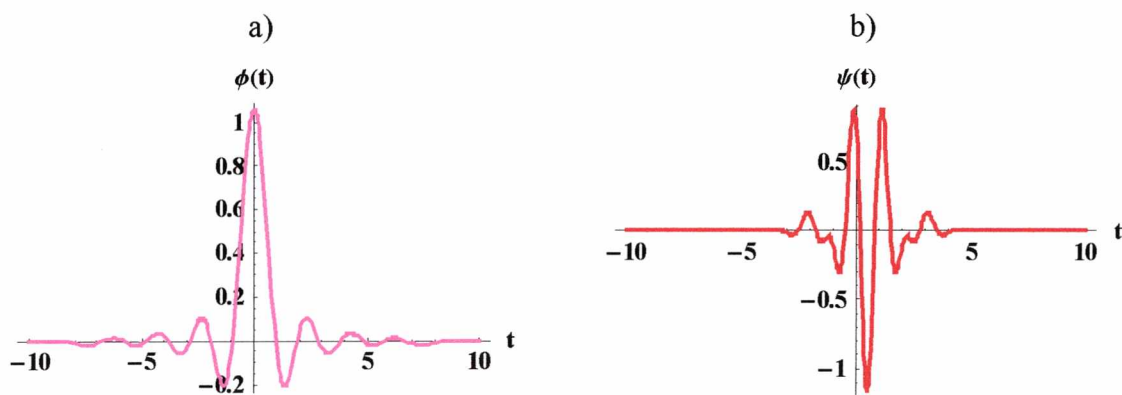
$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (2.28)$$

W wyniku tej procedury można otrzymać funkcję skalującą Battle-Lemarié w postaci [1]:

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t < 1 \\ -t^2 + 3t - \frac{3}{2}, & 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2}(t-3)^2, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & \text{dla innych } t \end{cases} \quad (2.29)$$

która ma ograniczoną dziedzinę.

Funkcję skalującą i odpowiadającą jej falkę rzędu piątego pokazano na rysunku 2.4:



Rys. 2.4. Funkcja skalująca $\phi(t)$ Battle-Lemarié rzędu piątego (a), falka $\psi(t)$ Battle-Lemarié rzędu piątego (b)

Zaletą funkcji skalujących i falek Battle-Lemarié jest fakt że są gładkie i mają $(n-1)$ ciągłych pochodnych. Wadą funkcji skalujących i falek Battle-Lemarié jest nieskończona dziedzina. Falki Battle-Lemarié znalazły zastosowanie między innymi w analizie układów dynamicznych [25, 27].

2.3.3. Falka Shannon'a

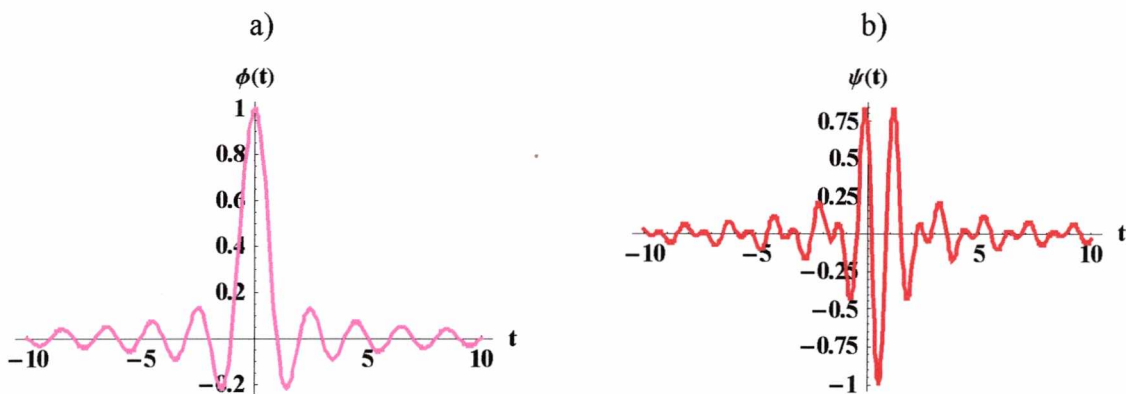
Funkcja skalująca Shannon'a ma postać [1]:

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Odpowiadającą funkcji skalującej (2.30) falkę Shannon'a wyrazić można jako :

$$\psi(t) = \frac{\sin \pi \left(t - \frac{1}{2} \right) - \sin 2\pi \left(t - \frac{1}{2} \right)}{\pi \left(t - \frac{1}{2} \right)} \quad (2.31)$$

Rysunek 2.5a przedstawia funkcję skalującą Shannon'a, natomiast rysunek 2.5b odpowiadającą jej falkę.

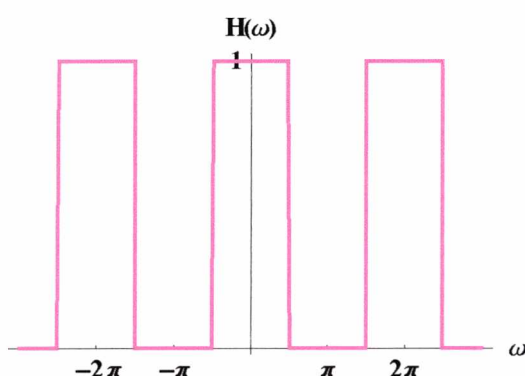


Rys. 2.5. Funkcja skalująca $\phi(t)$ Shannon'a (a), falka $\psi(t)$ Shannon'a (b)

Powolne zanikanie funkcji skalującej jak i falki Shannon'a skutkuje występowaniem nieciągłości funkcji w przestrzeni Fouriera (przestrzeni częstości) – rysunek 2.6. W przestrzeni Fouriera transformatę funkcji skalującej opisuje wzór [30]:

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega < \pi \\ 0 & \text{dla innych } \omega \end{cases} \quad (2.32)$$

gdzie ω jest dziedziną częstości w przestrzeni Fouriera.



Rys. 2.6. Funkcja skalująca Shannon'a w przestrzeni Fouriera

Funkcje i falki Shannon'a są funkcjami gładkimi i jest to ich zaleta w praktycznych zastosowaniach. Wadą funkcji i falek Shannon'a jest brak ciągłości w dziedzinie częstości, co jest przyczyną słabej lokalizacji w dziedzinie czasu. Wada ta powoduje, że falka i funkcja skalująca Shannon'a są mniej praktyczne przy zastosowaniu ich w analizie czasowej badanych sygnałów niestacjonarnych przede wszystkich z zaburzeniami losowymi. Falki Shannon'a znalazły zastosowanie w kodowaniu transmitowanych sygnałów [109].

2.3.4. Falka Meyera

Wolne zanikanie falki Shannona w dziedzinie czasu może być poprawione przez wygładzenie transformaty funkcji skalującej w przestrzeni częstotliwości. W miejscu ostrych nieciągłości do interpolacji pomiędzy $\hat{\phi}(\xi)=1$ i $\hat{\phi}(\xi)=0$ wykorzystywana jest funkcja gładka. W ten sposób definiowana jest funkcja skalująca Meyera w przestrzeni częstotliwości [30]:

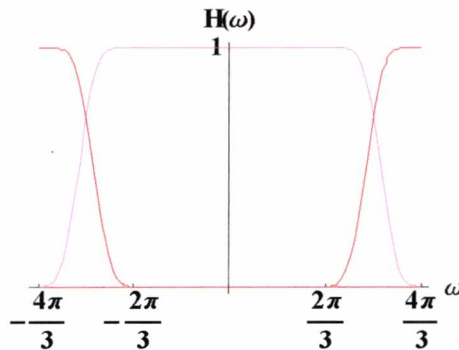
$$\hat{\phi}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & |\xi| \leq \frac{2\pi}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3}{2\pi}|\xi| - 1\right)\right), & \frac{2\pi}{3} < |\xi| \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0, & \text{dla innych } \xi \end{cases} \quad (2.33)$$

gdzie ν jest funkcją gładką, spełniającą warunki:

$$\begin{cases} \nu(x) = 0, & x \leq 0 \\ \nu(x) = 1, & x \geq 1 \\ \nu(x) + \nu(1-x) = 1, & \text{dla } x \in (0, 1) \end{cases} \quad (2.34)$$

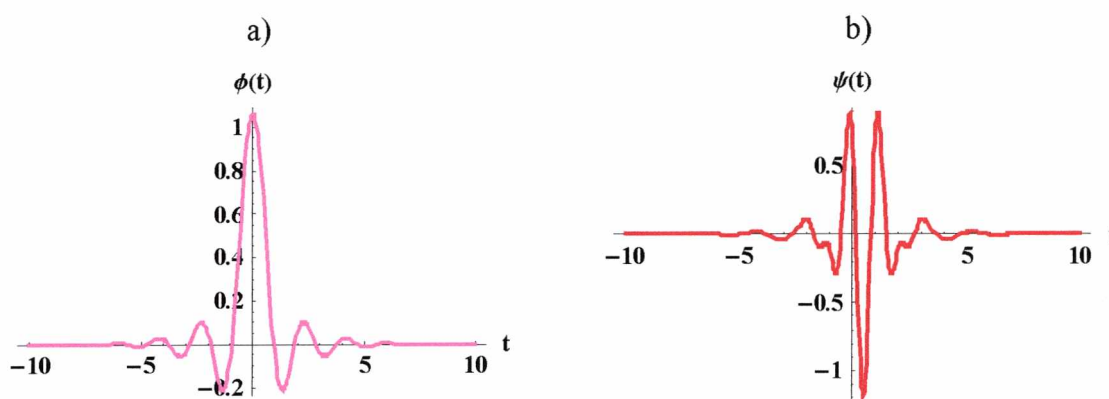
Przykładowo funkcja ν może być równa $\nu(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$.

Funkcję skalującą Meyera w przestrzeni Fouriera ilustruje rysunek 2.7.



Rys. 2.7. Funkcja skalująca Meyera w przestrzeni Fouriera

Aproksymacja sygnału falką i funkcją skalującą Meyera, połączona z interpolacją wielomianu ν pozwala na uzyskanie n ciągłych pochodnych funkcji $\hat{\phi}(\xi)$. Liczbą n określa się rząd falki (funkcji skalującej). Rysunki 2.8a i 2.8b przedstawiają odpowiednio funkcję skalującą i falkę Meyera drugiego rzędu – funkcje które mają ciągłe pochodne do drugiego rzędu włącznie.



Rys. 2.8. Funkcja skalująca $\phi(t)$ Meyera rzędu drugiego (a), falka Meyera $\psi(t)$ rzędu drugiego (b)

Falka i funkcja skalująca Meyera zanikają szybciej niż opisana wcześniej falka Shannon'a. Zaletą Falki Meyera jest możliwość lepszego opisu funkcji w miejscu występowania nieciągłości. Wadą jest fakt, że zarówno funkcję skalującą jak i falkę Meyera w dziedzinie czasu można otrzymać tylko w wyniku odwrotnej transformacji Fouriera. Brak analitycznych postaci tych funkcji, sprawia, że falki Meyera są rzadziej wykorzystywane w rozwiązywaniu zagadnień mechaniki budowli.

2.3.5. Falki Daubechies

Falki Daubechies to kolejne falki z rodziny falek ortogonalnych. Mają ograniczoną dziedzinę i liczbę N zanikających momentów M . Ważną właściwością funkcji skalującej jest zdolność przedstawienia wielomianu aż do stopnia $N-1$ [99]. Falki Daubechies spełniają warunek:

$$t^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k^n \phi(t-k) \text{ dla } t \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.35)$$

gdzie :

$$M_k^n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \phi(t-k) dt \quad n, k \in \mathbf{R} \quad (2.36)$$

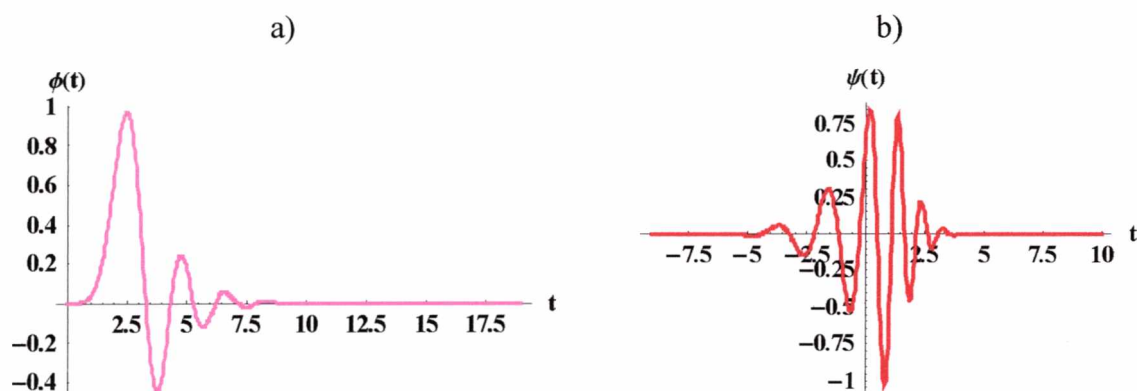
Uwzględniając równanie (2.19) w równaniu (2.36) zauważyć można, że [99]:

$$M_k^0 = 1 \quad k \in \mathbf{Z} \quad (2.37)$$

Dla $k = 0$ równanie (2.36) można przedstawić w postaci [99]:

$$M_0^n = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} \sum_k h_k M_k^n \quad (2.38)$$

Falki Daubechies można uzyskać jedynie na drodze numerycznej, poszukując skończonej liczby współczynników h_k , dla której falki i funkcje skalujące będą miały ograniczoną dziedzinę. Znając wartości współczynników h_k można znaleźć wartości funkcji skalującej dla $t \in \mathbb{Z}$. Na podstawie znanej funkcji skalującej można określić falke Daubechies. Rysunki 2.9a i 2.9b przedstawiają odpowiednio funkcję skalującą i falke Daubechies rzędu 10-go. W tym przypadku rząd oznacza liczbę znikających momentów dla danej falki.



Rys. 2.9. Funkcja skalująca Daubechies rzędu dziesiątego (a), falke Daubechies rzędu dziesiątego (b)

Zaletą falek Daubechies jest ich ortogonalność i ograniczona dziedzina. Falkami Daubechies można opisać sygnały zakłócone, o charakterze losowym. Falki Daubechies nie są jednak pozbawione wad – pochodne falek niższych rzędów nie są ciągłe, niektóre pochodne falek nie istnieją. Falki Daubechies wykorzystano między innymi do analizy układów obciążonych dynamicznie, układów o wielu stopniach swobody [53, 55, 66, 70].

Inne rodzaje falek, takie jak np. falki Maara, Gabora, Morleta czy falki biortogonalne nie zostały przedstawione w niniejszej pracy, ponieważ są rzadko stosowane w analizie zagadnień technicznych.

2.4. Algorytm analizy falkowej

Aproksymacja $f_J(t)$ funkcji $f(t)$ może być przedstawiona w bazie falkowej jako:

$$f_J(t) = \sum_k f_k^J \phi_{Jk}(t) = \sum_k f_k^{j_0} \phi_{j_0 k}(t) + \sum_{l=j_0}^{J-1} \sum_k d_k^l \psi_{lk}(t) \quad (2.39)$$

gdzie w ogólnym przypadku współczynniki rozwinięcia falkowego f_k^j oraz d_k^j oblicza się jako:

$$f_k^j = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{jk}(t) dt \quad (2.40)$$

$$d_k^j = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{jk}(t) dt \quad (2.41)$$

Współczynniki $\{f_k^j\}$ reprezentują część gładką funkcji na j -tym poziomie rozdzielczości, natomiast $\{d_k^j\}$ reprezentują szczegóły funkcji na tym poziomie. Kolejna transformacja falkowa rozkłada część gładką ponownie na część gładką i część szczegółów na wyższym poziomie rozdzielczości. Kolejne dekompozycje ilustruje schemat przedstawiony na rysunku 2.10:

$f_k(t)$				$j = 0$
$f_{k/2}^1(t)$		$d_{k/2}^1(t)$		$j = 1$
$f_{k/4}^2(t)$		$d_{k/4}^2(t)$		$j = 2$
$f_{k/8}^3(t)$	$d_{k/8}^3(t)$			$j = 3$

Rys. 2.10. Schemat algorytmu analizy falkowej

Transformacja falkowa wykorzystuje następujące formuły iteracyjne [26]:

$$f_k^{j-1} = \sum_l h_{k-2l} f_l^j \quad (2.42)$$

$$d_k^{j-1} = \sum_l g_{k-2l} f_l^j \quad (2.43)$$

gdzie h_{k-2l} i g_{k-2l} są współczynnikami filtru odpowiednio dolno- i górnoprzepustowego.

W celu uzyskania reprezentacji funkcji, po jej dekompozycji falkowej, stosuje się odwrotną transformację falkową wykorzystując relację:

$$f_k^j = \sum_l h_{k-2l} f_l^{j-1} + \sum_l g_{k-2l} d_l^{j-1} \quad (2.44)$$

Z uwagi na to, że w praktyce mamy zwykle do czynienia z sygnałami skończonymi, w analizie falkowej pojawia się problem z analizą wartości na brzegach rozpatrywanego przedziału. Przykładowo, wartości dane poza pomierzonym obszarem wyznaczyć można z:

$$f_0^{j-1} = \sum_{k=-m}^{-m+L-1} h_k f_l^j \quad (2.45)$$

oraz

$$f_{N/2-1}^{j-1} = \sum_{k=N-2-m}^{N+L-m-3} h_{k-N+2} f_l^j. \quad (2.46)$$

Tak więc musimy wygenerować liczbą m wartości na początku oraz liczbą $L-2-m$ dodatkowych wartości na końcu rozpatrywanego zbioru. W transformacji falkowej warunki brzegowe można traktować jako ustalone – stałe, jeżeli ($f_{-i} = f_0$ i $f_{N-1+i} = f_{N-1}$ dla $i > 0$); jako periodyczne jeżeli ($f_{i+N} = f_i$); jako „zwierciadlane” jeżeli ($f_{-i} = f_{i-1}$ i $f_{N-1+i} = f_{N-i}$ dla $i > 0$) lub jako zerowe jeżeli ($f_i = 0$ dla $i < 0$ i $i > N-1$). Przykładowo dla $m = \frac{L}{2} - 1$ warunki brzegowe będą „zwierciadlane”.

2.5. Falkowa analiza pakietowa

Analiza falkowa dokonuje dekompozycji części gładkiej funkcji na część gładką i część szczegółów, pozostawiając część szczegółów z wyższego poziomu niezmienną. W przeciwieństwie do transformacji falkowej, w pakietowej analizie falkowej część szczegółów jest poddawana dekompozycji, na część gładką i część szczegółów. Przykładowo przedstawiając wynik filtrowania danych jednowymiarowych $\{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$ przy zastosowaniu formuł (2.42) i (2.43) jako:

$$\left\{f_0^{J-1}, f_1^{J-1}, \dots, f_{\frac{N}{2}-1}^{J-1}\right\} = hf \quad (2.47)$$

oraz

$$\left\{d_0^{J-1}, d_1^{J-1}, \dots, d_{\frac{N}{2}-1}^{J-1}\right\} = gf \quad (2.48)$$

otrzymuje się po jednej transformacji zbiór $\{hf, gf\}$, a po dwóch dekompozycjach w analizie pakietowej $\{hhf, ghf, hgf, ggf\}$.

W pakietowej analizie falkowej przestrzeń V można rozłożyć na ortogonalne podprzestrzenie, w których funkcje bazowe są określone równaniami (2.15) oraz (2.17). Analogiczny podział można zastosować do przestrzeni szczegółów W . Definiując:

$$w_2(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \psi(2t - k) \quad (2.49)$$

$$w_3(t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \psi(2t - k) \quad (2.50)$$

można $\{w_2(t - k)\}$ oraz $\{w_3(t - k)\}$ traktować jako ortonormalne funkcje bazowe dla dwóch podprzestrzeni, których suma stanowi przestrzeń W_1 . W ogólnym przypadku dla $n = 0, 1, \dots$, można zdefiniować funkcje [47, 48]:

$$w_{2n}(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k w_n(2t - k) \quad (2.51)$$

$$w_{2n+1}(t) = \sqrt{2} \sum_k g_k w_n(2t - k) \quad (2.52)$$

które tworzą sekwencje funkcji bazowych przestrzeni V_j . Różne kombinacje funkcji (2.51) i (2.52) oraz funkcji powstających w wyniku ich skalowania i translacji tworzą zbiór ortonormalnych baz $\{w_n(t)\}$, które mogą stanowić podstawę opisu elementów przestrzeni V_j . Taką kolekcję funkcji bazowych nazywa się biblioteką baz pakietowych, a funkcje $w_{n,j,k} = 2^{j/2} w_n(2^j t - k)$ określa się mianem pakietu falkowego. Jeżeli przestrzeń z bazą

$\{w_{n,j,k}(t)\}$ oznaczmy jako $w_{n,j}$, to przykładowy schemat dekompozycji przestrzeni V_3 z wykorzystaniem pakietowej analizy falkowej ilustruje schematycznie rysunek 2.11:

$w_{0,3}$							
$w_{0,2}$				$w_{1,2}$			
$w_{0,1}$		$w_{1,1}$		$w_{2,1}$		$w_{3,1}$	
$w_{0,0}$	$w_{1,0}$	$w_{2,0}$	$w_{3,0}$	$w_{4,0}$	$w_{5,0}$	$w_{6,0}$	$w_{7,0}$

Rys. 2.11. Schemat algorytmu analizy pakietowej

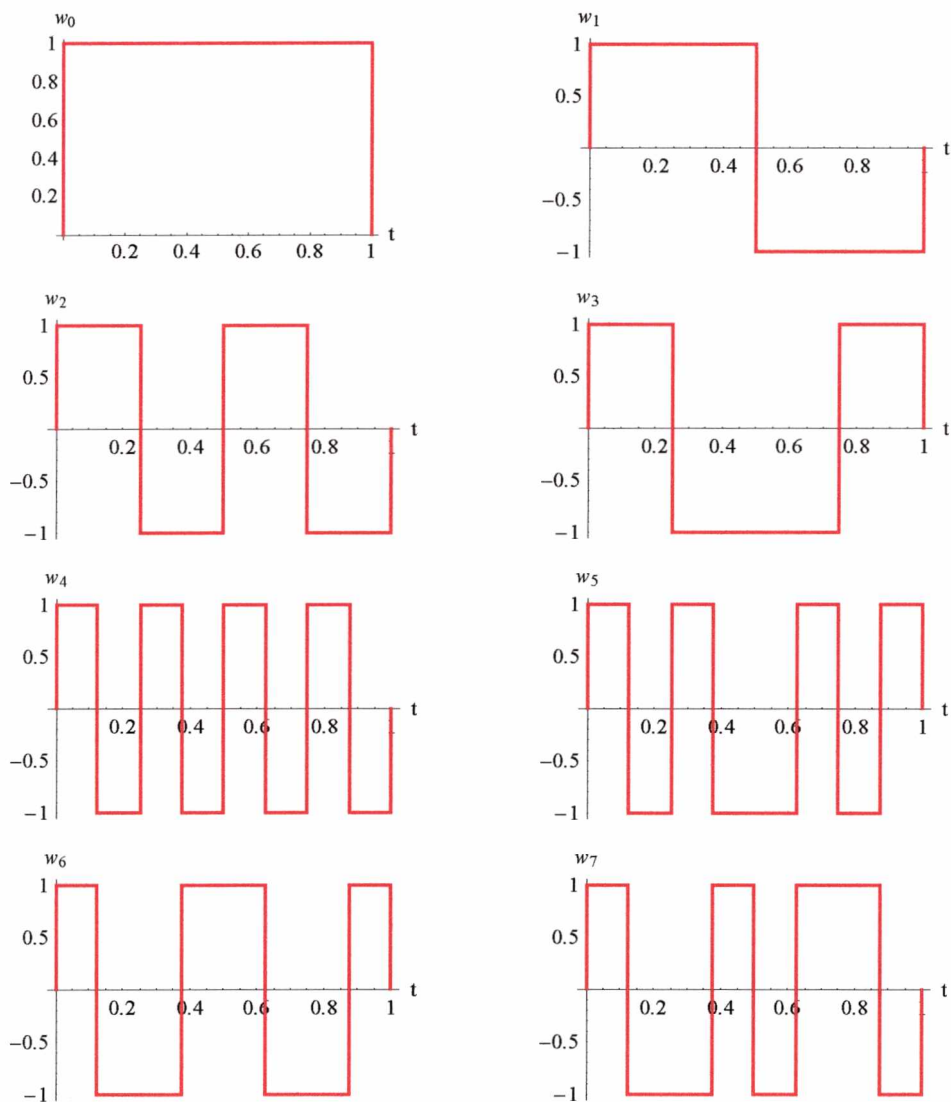
Dalej w pracy stosowana będzie pakietowa transformacja falkowa bazująca na filtrze Haara, dla którego $h_0 = h_1 = g_0 = -g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dla przykładu, baza falkowa Haara $\mathbf{H}$, która jest jedną z możliwych baz pakietowych, ma (przy $j=3$) następującą dyskretną reprezentację:

$$\mathbf{H}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

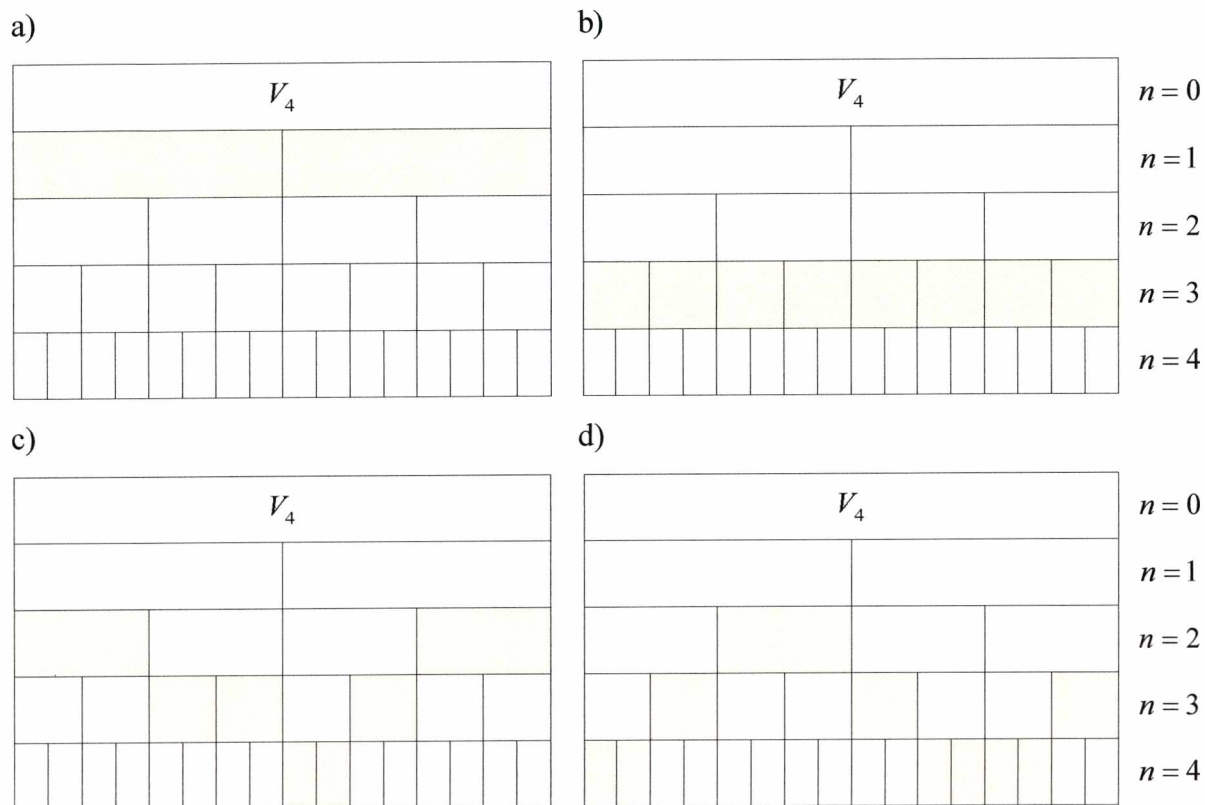
Pierwszy wiersz bazy pakietowej Haara $\mathbf{H}$ stanowi funkcja bazowa $w_{0,0}$ przedstawiona na schemacie algorytmu analizy pakietowej (rysunek 2.11). Drugi wiersz macierzy $\mathbf{H}$ odpowiada funkcji bazowej $w_{1,0}$ tego schematu. Wiersz trzeci i czwarty tworzą dwie funkcje bazowe bazy pakietowej $w_{1,1}$. Wiersze piąty, szósty, siódmy i ósmy macierzy $\mathbf{H}$ reprezentują cztery funkcje bazowe bazy pakietowej $w_{1,2}$. Pakietowe bazy falkowe $\{w_n(t)\}$ bazujące na filtrze Haara nazywane są bazami Walsha. Rysunek 2.12 przedstawia bazę Walsha przestrzeni V_3 , której dekompozycja została przedstawiona na rysunku 2.11.

Przestrzeń V_n można odtworzyć na podstawie różnych kombinacji funkcji bazowych Walsha.

Przykładowe dekompozycje przestrzeni V_4 dla $n=4$ przedstawiono na rysunku 2.13. Na rysunku 2.13 pokazano przykładowe usytuowanie falkowych baz pakietowych Walsha diagramie dekompozycji przestrzeni V_4 . Dyskretną reprezentację bazy pakietowej **H** z rysunku 2.13a przedstawia relacja (2.54). Wybraną funkcję tej bazy pokazano na rysunku 2.14. Dyskretną reprezentację bazy pakietowej z rysunku 2.13b przedstawia relacja (2.55), a przykładową funkcję bazową pokazano na rysunku 2.15. Relacja (2.56) przedstawia bazę pakietową, której usytuowanie pokazano na rysunku 2.13c, a na rysunku 2.16. pokazano postać wybranej funkcji tej bazy. Dyskretną reprezentację bazy pakietowej z rysunku 2.13d przedstawiono relacją (2.57), a na rysunku 2.17 pokazano przykładową funkcję bazową tej bazy.

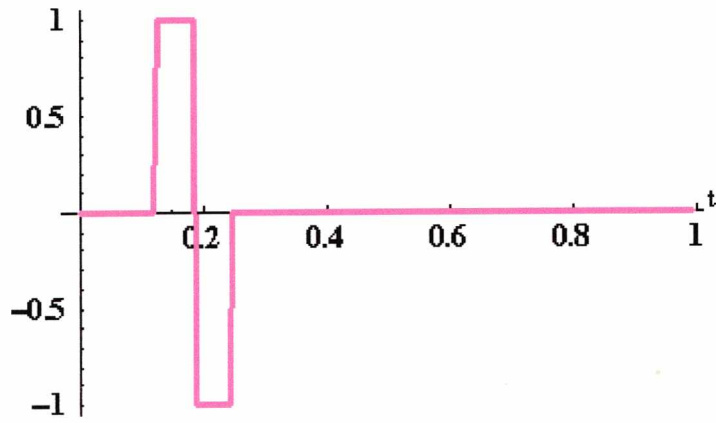


Rys. 2.12. Falkowe funkcje bazowe Walsha



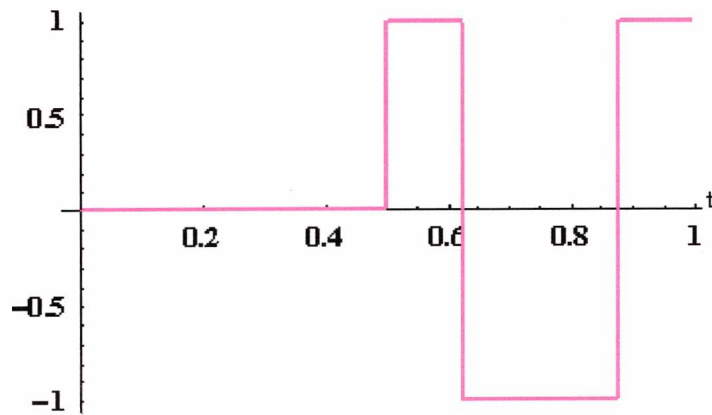
Rys. 2.13. Przykładowe usytuowanie falkowych baz pakietowych Walsha na diagramie dekompozycji przestrzeni V_4

$$\mathbf{H}_{16 \times 16} = \begin{pmatrix} 1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. \\ 1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. \end{pmatrix} \quad (2.54)$$



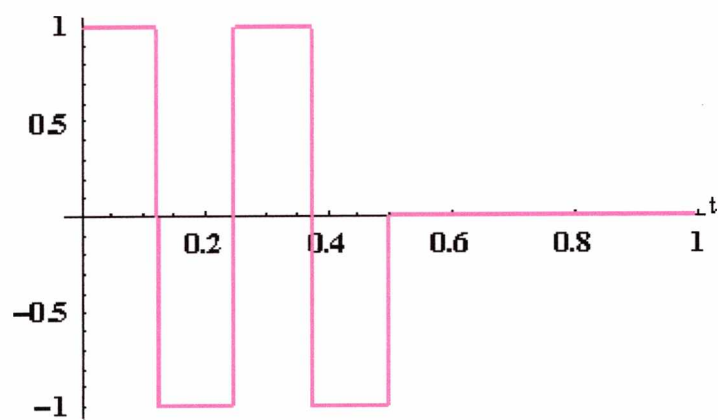
Rys. 2.14. Przykładowa funkcja bazowa przestrzeni V_4
(wiersz 10-ty macierzy (2.54))

$$\mathbf{H}_{16 \times 16} = \begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & 1. & 1. & 1. & -1. & -1. & -1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 1. & 1. & -1. & -1. & -1. & -1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. & 1. & 1. & -1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & -1. & -1. & 1. & 1. & -1. & -1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. & -1. & -1. & 1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & -1. & -1. & -1. & -1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. & -1. & 1. & -1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & 1. & -1. & -1. & 1. & -1. & 1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. & 1. & -1. & -1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & -1. & 1. & 1. & -1. & -1. & 1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. & -1. & 1. & 1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & -1. & 1. & -1. & 1. & 1. & -1. \end{pmatrix} \quad (2.55)$$



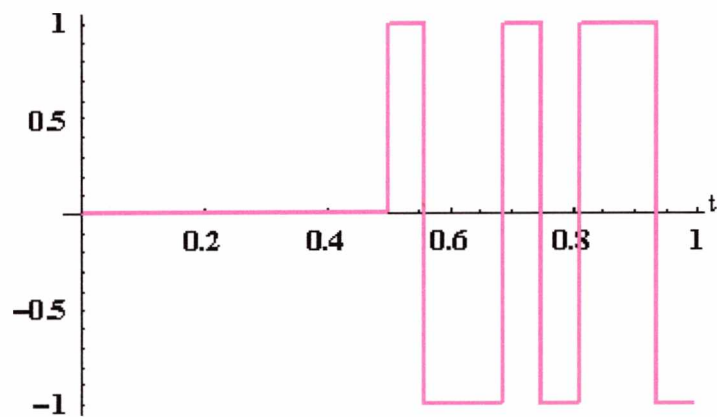
Rys. 2.15. Przykładowa funkcja bazowa przestrzeni V_4
(wiersz ósmy macierzy (2.55))

$$\mathbf{H}_{16 \times 16} = \begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. & 1. & 1. & -1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & -1. & -1. & 1. & 1. & -1. & -1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. & -1. & -1. & 1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & -1. & -1. & -1. & -1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. & -1. & 1. & -1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & 1. & -1. & -1. & 1. & -1. & 1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & -1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & -1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & -1. & 1. \end{pmatrix} \quad (2.56)$$



Rys. 2.16. Przykładowa funkcja bazowa przestrzeni V_4
(wiersz 5-ty macierzy (2.56))

$$\mathbf{H}_{16 \times 16} = \begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & -1. & -1. & -1. & -1. & -1. & -1. & -1. & -1. \\ 1. & 1. & 1. & 1. & -1. & -1. & -1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 1. & 1. & -1. & -1. & -1. & -1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & -1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & -1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & -1. & -1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. & -1. & 1. & -1. & 1. & 1. & -1. & 1. & -1. & -1. & 1. & -1. & 1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & -1. & 1. & 1. & -1. & 1. & -1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. & 1. & -1. & -1. & 1. & 1. & -1. & -1. & 1. & 1. & -1. & -1. & 1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. & 1. & -1. & -1. & 1. & -1. & 1. & 1. & -1. & -1. & 1. & 1. & -1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. & -1. & 1. & 1. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & -1. & 1. & -1. & 1. & 1. & -1. \end{pmatrix} \quad (2.57)$$



Rys. 2.17. Przykładowa funkcja bazowa przestrzeni V_4
(wiersz 16-ty macierzy (2.57))

3. PODSTAWY IDENTYFIKACJI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

3.1. Przegląd metod identyfikacji

W niniejszym rozdziale przedstawiono przegląd metod identyfikacji, jakie wykorzystywane są do szacowania parametrów konstrukcji inżynierskich. Zaprezentowano również krótki opis modelowania obiektu oraz zagadnienia matematyczne najczęściej wykorzystywane w opisywanych metodach identyfikacji.

Metody identyfikacji można ogólnie podzielić na lokalne, dotyczące wybranego elementu analizowanej konstrukcji, oraz globalne, oparte na analizie całego układu [31]. Do metod lokalnych należy zaliczyć metody akustyczne, ultradźwiękowe, metody badania pola magnetycznego czy termicznego. W metodach lokalnych konieczna jest dobra znajomość charakterystyk (takich jak masa, tłumienie, sztywność) układu dla opisywanego elementu.

Z kolei w metodach globalnych analizuje się na przykład parametry modalne całego układu. Metody globalne to między innymi najczęściej stosowana analiza Fouriera, analiza czasowo-częstotliwościowa, czy transformacja falkowa. Do globalnych metod identyfikacji należy zaliczyć także metody opierające się na określaniu charakterystyk układu na podstawie zmian parametrów modalnych, opisie parametrów na bazie analizy statycznej czy metody polegające na poszukiwaniu modeli teoretycznych opisujących układy rzeczywiste wykorzystujących modyfikację macierzy bezwładności, tłumienia czy sztywności układów dyskretnych [44].

Metody identyfikacji można podzielić także na analityczne (oparte między innymi na równaniach bilansu energetycznego, materiałowego, procesów fizykochemicznych) i eksperymentalne, gdzie dane pochodzą z obserwacji układu [86].

Wybór metody jest ściśle związany z informacjami o obiekcie, które mamy przed jego identyfikacją i celem jaki w procedurze identyfikacji sobie stawiamy. Informacje o badanym obiekcie lub jego odpowiedź determinują: rodzaj metody wykorzystanej do identyfikacji, czas trwania analizy i poprawność uzyskiwanych rezultatów. Dalej scharakteryzowano podstawowe metody identyfikacji, jakie można wykorzystać do określania parametrów konstrukcji. Skupiono się na metodach, których podstawą opisu identyfikowanych układów jest przestrzeń, w której poszukiwany jest opis analizowanych układów – podrozdział 3.1.1. Przedstawiono także metody identyfikacji parametrów modeli matematycznych, jakimi opisuje się najczęściej rzeczywiste układy poddawane analizie –

podrozdziały 3.1.2. i 3.1.3. W podrozdziale 3.1.4. opisano pozostałe metody wykorzystywane w identyfikacji parametrów konstrukcji inżynierskich.

3.1.1. Identyfikacja parametryczna i nieparametryczna

Istotnym problemem mechaniki jest identyfikacja parametrów układów rzeczywistych. Identyfikacji dokonuje się zwykle na podstawie pomierzonych odpowiedzi (np. przemieszczeń, przyspieszeń) analizowanego układu. Do identyfikacji parametrycznej wykorzystuje się przede wszystkim metody prognozowania błędu, liniowej regresji, najmniejszych kwadratów czy metody statystyczne i probabilistyczne [80]. Przegląd wszystkich metod wykorzystywanych w identyfikacji parametrycznej można znaleźć między innymi w pracy [103]. Wybór procedury zastosowanej do analizy obiektu zależy od zakresu posiadanej wiedzy na temat tego układu, jak również, od tego czy interesuje nas jego model matematyczny, czy tylko prognozowanie odpowiedzi w nie pomierzonych zakresach parametrów identyfikowanego systemu. Znajomość modelu matematycznego identyfikującego analizowany obiekt rzeczywisty może stanowić cenne źródło informacji o stanie technicznym badanego obiektu. Zidentyfikowany model matematyczny opisujący badany układ rzeczywisty pozwala także na przewidywanie zachowania się obiektu na zadane wymuszenia, jak również zmieniające się warunki użytkowania i eksploatacji. Możliwość identyfikacji parametrów konstrukcji jest także istotna wtedy, gdy mamy do czynienia z już istniejącymi obiektami, wtedy kiedy konieczna staje się ocena ich stanu technicznego np. ze względu na postępujący proces degradacji.

Na ogół trudnym zadaniem w identyfikacji parametrycznej jest wyznaczenie pochodnych mierzonego sygnału. Problem skutecznego wyznaczania pochodnych pojawia się w momencie, gdy analizujemy sygnał zaburzony (często w sposób losowy) lub obarczony błędem pomiaru, a model matematyczny opisujący badany układ posiada pochodne sygnału wyższych rzędów.

Wyznaczanie pochodnych sygnału jest zagadnieniem trudniejszym w analizie numerycznej, od tego, w którym posiadamy pomierzone np. przyspieszenia i w procedurze identyfikacji (na drodze całkowania) wyznaczamy prędkości i ugięcia [138]. Przy całkowaniu sygnału problemem jest wyznaczanie stałych całkowania.

W identyfikacji nieparametrycznej nie przyjmuje się modelu matematycznego, tylko poszukuje się funkcyjnego zapisu zmienności parametrów określających badany układ.

Identyfikację nieparametryczną przeprowadza się najczęściej metodami poszukiwania funkcji przejścia, metodami formułowanymi w dziedzinie częstości, czy aproksymacji funkcji, opisujących zachowanie analizowanego modelu, z zastosowaniem wielomianowych funkcji bazowych [46, 80].

W przypadku identyfikacji nieparametrycznej istotnym zadaniem jest dobór funkcji bazowych w taki sposób, aby w ich bazie można efektywnie opisywać poszukiwane powierzchnie (poza obszarem pomiarów) odpowiedzi analizowanego układu. Przyjęcie konkretnej bazy funkcji umożliwia parametryzację rozpatrywanego zagadnienia poprzez poszukiwanie odpowiednich mnożników dla funkcji bazowych [46, 80].

Dalej przedstawiono metody, opisane w dostępnej literaturze, wykorzystywane do identyfikacji parametrów układów liniowych i nieliniowych.

3.1.2. Metody identyfikacji parametrów układów liniowych

Do identyfikacji parametrów układów liniowych wykorzystuje się metody oparte między innymi na modelu matematycznym, którego opis bazuje na wartościach własnych (wyznaczonych na podstawie pomierzonych sygnałów) analizowanych układów. Metoda, opierająca się na pomiarach częstości, polega na szacowaniu poszukiwanych parametrów na podstawie długiego czasu obserwacji sygnału wejściowego [7]. Podejście to sprawdza się w badaniach laboratoryjnych, gdzie możliwe jest otrzymanie liczego zbioru danych, pozwalających na identyfikację poszukiwanych parametrów [7]. Metody wykorzystujące zmiany częstości układu stosuje się między innymi w analizie drgań betonowych konstrukcji belkowych, konstrukcji powłokowych czy platform wiertniczych [12, 31, 33, 81].

Richardson i Potter [106] sformułowali metodę wykorzystywaną do identyfikacji macierzy masy, sztywności i tłumienia. Metoda ta opiera się na modelu układów dyskretnych ze skupionymi parametrami. Pod pojęciem skupionych parametrów rozumiany jest np. dyskretny punktowy rozkład mas (powstały na skutek granulacji zwykle ciągłych pól masowych) lub punktowe więzi tłumiące. W pracy parametry skupione będą określane jako parametry punktowe. Sposób identyfikacji zaproponowany przez Richardsona i Pottera odrzucili Shye i Richardson [115] z powodu zbyt dużej wrażliwości tego typu układu, na zmianę jego charakterystyk. Duża wrażliwość modelu prowadziła do słabych rezultatów identyfikacji parametrów, szczególnie przy niepełnej liczbie form własnych badanego

układu. Shye i Richardson proponowali metodę identyfikacji, opartą na modelu matematycznym Leuridana [73], bazującą na dynamicznych charakterystykach analizowanego układu (np. częstości własnych, parametrów tłumienia, czy form własnych), dla którego macierz masy jest diagonalna, a macierze sztywności i tłumienia są symetryczne. Shye i Richardson założyli, że całkowita masa układu jest znana. Założenia te pozwoliły na dodawanie do znanych charakterystyk modelu matematycznego istotnych, nowych informacji dotyczących analizowanego układu. Założenia Shye'a i Richardsons'a były konieczne do poprawnego rozwiązania sformułowanych przez nich równań metodą najmniejszych kwadratów. Zaproponowana przez Shye'a i Richardsons'a metoda umożliwia poprawną identyfikację parametrów, nawet przy ograniczonej liczbie posiadanych danych modelu przyjętego do analizy. Lambergt, Leuridan i Brussel [71] zmodyfikowali model Leuridana [73] i opracowali metodę identyfikacji pozwalającą na bezpośrednie szacowanie poszukiwanych parametrów bez założeń przyjmowanych przez Shye'a i Richardsons'a. Metody bazujące na analizie zmian formy własnej stosowane są przede wszystkim do analizy drgań belek, lokalizacji uszkodzeń w konstrukcjach belkowych, czy konstrukcjach stalowych [31, 36]. Metody wykorzystujące charakterystyki dynamiczne (np. częstości własne, formy własne) obiektu są najczęściej wykorzystywane w analizie konstrukcji mostowych, kratownicowych [31, 100].

3.1.3. Metody identyfikacji parametrów układów nieliniowych

Do identyfikacji parametrów układów nieliniowych wykorzystuje się między innymi metodę zaproponowaną przez Masri'ego, Sassi'ego i Caughey'a [89, 90]. Autorzy ci założyli, że masa analizowanego układu jest znana, a przyspieszenie i siła wymuszenia są uzyskane z pomiarów rozpatrywanego układu. Metoda przedstawiona przez Masri'ego, Sassi'ego i Caughey'a wykorzystuje ortogonalne, wielomiany opisujące tzw. pozostałe siły (*restoring force*) $f(q, \dot{q})$ działające na obiekt. Masri, Sassi i Caughey zastosowali do opisu siły $f(q, \dot{q})$ wielomiany Czebyszewa. Modyfikacji tej procedury dokonali w swoich pracach Worden i Tomlinson [139, 140] oraz Al-Hadid [6]. Worden i Tomlinson przedstawili siłę $f(q, \dot{q})$ jako nieliniową funkcję przemieszczenia i prędkości. Główną trudnością tego podejścia, jest konieczność jednoczesnego pomiaru przemieszczeń, prędkości i przyspieszenia. Worden i Tomlinson proponowali dwa podejścia rozwiązania: w pierwszym pomierzyli przyspieszenie układu $\ddot{q}(t)$ i na jego podstawie wyznaczyli

numerycznie prędkość $\dot{q}(t)$ i przemieszczenie $q(t)$ układu. W drugim podejściu pomierzyli przemieszczenie układu i numerycznie wyznaczyli prędkość i przyspieszenie analizowanego sygnału.

Do estymacji parametrów układów nieliniowych stosuje się również metodę opracowaną przez Yanga i Ibrahima [143], którzy zaproponowali model matematyczny wykorzystujący wielomiany potęgowe do opisu układów dyskretnych z punktowymi parametrami, zakładając jednocześnie, że całkowita masa układu jest znana.

Niezależnie od Yanga i Ibrahima, Al-Hadid i Wright [5] opisali zalety wykorzystania wielomianów potęgowych do szacowania nieznanych parametrów w procedurze aproksymacji pozostałych sił występujących w układzie. Do wyznaczenia poszukiwanych parametrów Al-Hadid i Wright [5] zastosowali funkcje takie jak signum, wartość bezwzględna czy funkcje definiowane do opisu danych charakterystyk (np. tarcia) analizowanego układu. Zastosowanie tych funkcji pozwala na skuteczną aproksymację w przypadku nieliniowości modelu opisującego poszukiwane parametry. Worden i Tomlinson [141] zaproponowali model podobny do modelu prezentowanego przez Yanga i Ibrahima. Worden i Tomlinson [141] przedstawili charakterystyki układu za pomocą szeregów wielomianowych. Wykorzystując podejście Wordena i Tomlinsona, Hunter, Paez i Gregory [63] zaproponowali metodę identyfikacji parametrów w dziedzinie częstości. Z kolei Gifford i Tomlinson [42] zaprezentowali identyfikację parametrów układów nieliniowych z wykorzystaniem częstości wyższych rzędów jako odpowiedzi układu o punktowych parametrach.

Metody identyfikacji parametrów układów nieliniowych znalazły zastosowanie między innymi w rozwiązywaniu zagadnień drgań konstrukcji belkowych [31, 87], identyfikacji uszkodzeń w belkach wspornikowych [19, 75].

3.1.4. Inne metody identyfikacji

Poniżej przedstawiono wybrane metody identyfikacji parametrów, które choć często spotykane, są mało istotne z punktu widzenia tematu i zakresu niniejszej pracy. Wybrane – przedstawione dalej – metody znajdują zastosowanie w szacowaniu parametrów analizowanych układów.

- Metoda największego prawdopodobieństwa – pozwalająca na identyfikowanie nieznanymi parametrów układu poprzez maksymalizację funkcji prawdopodobieństwa, którą opisane są poszukiwane wielkości [67]. Metodę zastosowano między innymi do identyfikacji parametrów mostów oraz drgań układów dyskretnych.
- Metoda oparta na filtrze Kalmana [67] – wykorzystywana często do identyfikacji parametrów układów nieliniowych oraz uszkodzeń w mostach i budynkach wielokondygnacyjnych. Metoda ta wykorzystuje linearyzację równań opisujących badany układ.
- Metody oparte na sieciach neuronowych [15]. Sieci neuronowe mają zdolność przetwarzania informacji czyli uogólniania wiedzy dla nowych danych wykorzystanych do analizy badanego układu. Sieci neuronowe mogą aproksymować wartości funkcji wielu zmiennych. Poprzez „szkolenie” sieci neuronowych można modelować i przewidywać zachowanie złożonych systemów, bez wcześniejszych informacji na temat modelu matematycznego obiektu, poddawanego analizie [67]. Sieci neuronowe stosowano w identyfikacji parametrów w budynkach wielokondygnacyjnych, elementach konstrukcji mostowych.
- Metoda losowego dekrementu [142]. Metoda ta zakłada, że znana jest odpowiedź analizowanych układów i funkcja wymuszenia działająca na obiekt. Odpowiedź układu może być przedstawiona jako dekompozycja trzech elementów: odpowiedzi układu wywołanej początkowym przemieszczeniem, odpowiedzi wywołanej prędkością początkową i odpowiedzi układu wywołanej funkcją obciążenia. To podejście znalazło zastosowanie w identyfikacji uszkodzeń w platformach wiertniczych [142].
- Metoda oparta na modalnym przesyłaniu energii (*energy transfer ratio*). Pomiar energii dotyczy ilości energii przesyłanej do poszczególnych części struktury w czasie jednego cyklu analizy układu [62, 74]. Metodę opartą na modalnym przesyłaniu energii wykorzystano do identyfikacji zmian parametrów mostów stalowych.
- Algorytm genetyczny pozwalający na rozwiązywanie problemów wymagających wielu informacji dotyczących analizowanego układu. Algorytm genetyczny nie wymaga informacji na temat pochodnych, gradientów badanego procesu, czy założeń dotyczących obszaru, w którym poszukuje się identyfikowanych

parametrów. Algorytm ten stosowany jest do analizy systemów nieliniowych [67]. Podejście to opiera się na minimalizacji różnicy pomiędzy estymowaną a pomierzoną odpowiedzią układu. Wyznaczana różnica jest stosowana do oszacowania poszukiwanej wielkości.

- Analiza Fouriera – jedna z najstarszych analiz stosowana w zagadnieniach identyfikacji parametrów układów dynamicznych. W tej analizie funkcjami bazowymi są funkcje trygonometryczne, których nieograniczony zasięg daje bazę złożoną z wielu funkcji aproksymujących. Transformacja Fouriera umożliwia przedstawienie analizowanego sygnału, zmiennego w czasie, w skali częstości. Z uwagi na utrudnienia w analizie numerycznej spowodowane liczną bazą funkcji aproksymujących, analiza Fouriera jest rzadko wykorzystywana do analizy sygnałów niestacjonarnych. Podejście to stosuje się do analizy i identyfikacji sygnałów stacjonarnych, periodycznych [2, 25, 110].
- Metoda monitorowania stanu konstrukcji – wykorzystywana do identyfikacji i lokalizacji uszkodzeń w obiektach, oraz do oceny stanu technicznego badanego obiektu [7, 97]. Monitorowanie stanu konstrukcji może być ciągłe co skutkuje długim czasem pomiaru odpowiedzi konstrukcji na czynniki zewnętrzne (np. temperatura otoczenia lub zmiana obciążenia). Monitorowanie stanu konstrukcji może dotyczyć także pomiaru odpowiedzi konstrukcji na zdarzenia losowe (np. nagłe zmiany pogody, podmuchy wiatru, wypadki). Pomiary odpowiedzi konstrukcji (uzyskane z czujników rozmieszczonych na badanym obiekcie) poddaje się analizie numerycznej i interpretacji w zależności od celu monitorowania stanu konstrukcji.

3.2. Wybrane etapy modelowania obiektu [117, 146]

Istotnym zadaniem metod identyfikacji jest stworzenie modelu matematycznego, którego charakterystyki będą odpowiadały rzeczywistym właściwościom układu. W rozdziale tym w oparciu o literaturę cytowaną w tytule podrozdziału, przedstawiono wybrane etapy modelowania obiektu poddawanego analizie lub identyfikacji jego parametrów.

Do identyfikacji obiektu tworzy się modele fizyczne będące odzwierciedleniem i idealizacją obiektów rzeczywistych. Model fizyczny stanowią np. obiekty zbudowane

w laboratoriach o parametrach i cechach zgodnych z właściwościami badanego układu rzeczywistego lub schematy statyczne odpowiadające obiektom rzeczywistym.

Najważniejszym etapem w identyfikacji obiektu jest opisanie jego modelu fizycznego za pomocą modelu matematycznego bazującego na zasadach mechaniki [69]. W tworzeniu modelu matematycznego podstawowym problemem jest pogodzenie prostoty modelu i możliwości jego stosowania z precyzyjnym przedstawieniem rzeczywistości. Model matematyczny obiektu odwzorowywać powinien jego podstawowe właściwości. Odwzorowanie wybranych właściwości analizowanego układu prowadzi do stworzenia różnych rodzajów modelu tzw. klas modelu. Modele matematyczne można podzielić na liniowe i nieliniowe.

W praktyce badane układy rzeczywiste sprowadza się do prostych modeli matematycznych o jednym bądź kilku stopniach swobody. Modele o jednym stopniu swobody mogą być stosowane między innymi do opisu: kominów, mostów jednoprzęsłowych, belek swobodnie podpartych czy belek wspornikowych. Obiekty o dwóch kondygnacjach czy mosty dwuprzęsłowe można modelować jako układy o dwóch stopniach swobody. Modele o wielu stopniach swobody wykorzystywane są między innymi do opisu: budynków wielokondygnacyjnych, mostów wieloprzęsłowych, masztów, wież czy platform wiertniczych.

W zależności od rodzaju modelu przyjętego do opisu analizowanego układu, model ten może okazać się nieskuteczny lub nieprecyzyjny. Należy wtedy poprawić model poprzez zmianę jego założeń. Zmiana założeń modelu może polegać między innymi na zmianie struktury modelu. W niektórych przypadkach skuteczne może się okazać zwiększenie zbioru danych początkowych w przypadku, gdy dokładność prowadzonych badań jest niewystarczająca. W przypadku gdy zbyt duża liczba danych przyjętych do analizy powoduje komplikacje obliczeń i czyni model zbyt złożonym, konieczne staje się ograniczenie liczby danych początkowych.

Dobór najlepszego modelu polega na sprawdzeniu kilku klas modeli, porównaniu wyników i wyborze modelu, który najdokładniej opisuje analizowany obiekt. Najlepszy model powinien być prosty w praktycznym zastosowaniu i jednocześnie minimalizować błędy prowadzonej analizy. Jeżeli wyjściowy model fizyczny ulega modyfikacji, należy uwzględnić konieczność modyfikowania i doskonalenia jego modelu matematycznego.

3.3. Zagadnienia matematyczne wykorzystywane w metodach identyfikacji

Metody identyfikacji opierają się na różnych sformułowaniach matematycznych. W rozdziale tym dokonano przeglądu niektórych zagadnień matematycznych wykorzystywanych w procesach identyfikacji. Opierając się na literaturze cytowanej w tytułach podrozdziałów omówiono podstawy zagadnień, które znalazły szerokie zastosowanie w identyfikacji poszukiwanych wielkości parametrów badanych układów. Szczegółowo przedstawiono metodę najmniejszych kwadratów, z uwagi na fakt, że jest ona wykorzystywana w dalszych rozdziałach pracy w prezentowanych algorytmach.

3.3.1. Metoda najmniejszych kwadratów [125]

W metodach identyfikacji najczęściej stosowana jest metoda najmniejszych kwadratów. Metoda ta będzie wykorzystana w algorytmach przedstawionych w dalszych rozdziałach pracy.

Założmy, że dane są wartości funkcji $y_1, y_2, \dots, y_n$ w punktach $x_1, x_2, \dots, x_n$. Opis poszukiwanej funkcji można przedstawić w postaci:

$$y = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_l f_l(x) \quad (3.1)$$

gdzie $f_1(x), \dots, f_l(x)$ są znanymi funkcjami przy $l \ll n$. Współczynniki a_k dobieramy w taki sposób, żeby miara Δy_i sumarycznego błędu była najmniejsza ($\Delta y_i = y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - \dots - a_l f_l(x_i) = 0$). Mając tak określoną miarę Δy_i błędu konstruujemy funkcjonal H w postaci:

$$H = \sum_{i=1}^n \Delta y_i^2 = \sum_{i=1}^n \left[y_i - \sum_{k=1}^l a_k f_k(x_i) \right]^2 \quad (3.2)$$

Minimum funkcjonału H poszukujemy przyrównując do zera jego pochodne względem a_j :

$$\frac{\partial H}{\partial a_j} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^n \left[y_i - \sum_{k=1}^l a_k f_k(x_i) \right] [-f_j(x_i)] = 0 \text{ dla } j = 1, 2, \dots, l \quad (3.3)$$

Z równania (3.3) otrzymujemy układ l równań na poszukiwane parametry $a_1, a_2, \dots, a_l$.

3.3.2. Metoda największej wiarygodności [86]

Metoda największej wiarygodności wymaga, w porównaniu z metodą najmniejszych kwadratów, większej liczby danych początkowych. W metodzie największej wiarygodności zakłada się, że znany jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennych, występujących w analizowanym zagadnieniu. Metoda stosowana jest do identyfikacji obiektów dynamicznych. Przy szacowaniu parametrów analizowanych układów jako ocenę wektora nieznanych parametrów $\mathbf{p}$ przyjmuje się wartość prawdopodobieństwa poszukiwanej wartości nieznanego parametru p , która maksymalizuje funkcję wiarygodności $L(p)$ na zbiorze dopuszczalnych wartości p . W przypadku, kiedy zmienne losowe $x_1, \dots, x_n$ są niezależne, funkcja wiarygodności jest iloczynem gęstości prawdopodobieństw $f(x_n|p)$

w postaci $L(p) = \prod_{n=1}^N f(x_n|p)$. Metoda największej wiarygodności znajduje zastosowanie

w analizie modeli o wielu sygnałach wejściowych i jednym wyjściowym (MISO). Rzadziej metoda ta jest stosowana w analizie modelu obliczeniowego dla układu o wielu sygnałach wejściowych oraz wyjściowych (MIMO).

3.3.3. Metoda funkcji korelacji i gęstości widmowych [86, 117]

Metody funkcji korelacji i gęstości widmowych wykorzystywane są przede wszystkim do analizy obiektów z ciągłym przebiegiem czasowym mierzonych charakterystyk. Funkcję korelacji i gęstość widmową używa się do opisu charakterystyk procesów stochastycznych stacjonarnych. Podstawą metody jest wyznaczenie pełnego opisu (funkcji korelacji i gęstości widmowych) analizowanego zagadnienia w przyjętym do analizy przedziale czasowym. Znając charakterystyki układu można na ich podstawie identyfikować poszukiwane wielkości.

Metodę funkcji korelacji można zastosować do analizy obiektów o wielu sygnałach wejściowych i wyjściowych. Analizę korelacyjną można stosować w przypadku, gdy dane wejściowe są opisane jako biały szum.

Obliczanie gęstości widmowej może być przydatne przy określaniu charakterystyk częstotliwościowych analizowanego obiektu. Analiza widmowa stosowana jest dla dowolnych sygnałów wejściowych.

Dokładność metody funkcji korelacji i gęstości widmowej jest często niezadowalająca. Obie metody wymagają skomplikowanych algorytmów obliczeniowych, przez co mogą służyć do wstępnego przybliżenia opisu analizowanego obiektu.

3.3.4. Metody aproksymacji stochastycznej [86]

Metody aproksymacji stochastycznej stosuje się do identyfikacji modeli dyskretnych. Metoda ta polega na poszukiwaniu pierwiastka z funkcji regresji (funkcji jednej zmiennej w warunkach zakłóceń losowych) na bazie danych uzyskanych z obserwacji obiektu. Metoda ta jest stosowana w analizie modeli o dużej liczbie parametrów, dla których nie znamy rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej (np. odpowiedzi układu).

3.3.5. Inne sformułowania matematyczne stosowane w metodach identyfikacji [86, 117]

Poniżej zebrano inne sformułowania matematyczne, które stosuje się w metodach identyfikacji parametrów. Z uwagi na fakt, że są to zagadnienia wykorzystywane głównie w teorii sterowania, ograniczono się do ich wymienienia w oparciu o literaturę cytowaną w tytule podrozdziału:

- Metoda błędu predykcji – analiza regresji stosowana w układach dynamicznych.
- Metoda uogólnionej sumy kwadratów – stosowana do identyfikacji układów dynamicznych z zakłóceniami przedstawionymi w postaci dyskretnego procesu stochastycznego autoregresji.
- Metoda ze średnią ruchomą – metoda stosowana w identyfikacji układów dynamicznych, dla których zakłócenia opisuje się modelem o średniej ruchomej.
- Metoda zmiennych instrumentalnych – stosowana do identyfikacji układów dynamicznych, dla których sygnały wejściowe są nieskorelowane z zakłóceniami.

4. FALKOWA ANALIZA PAKIETOWA WALSHA W WYZNACZANIU POCHODNYCH SYGNAŁU

4.1. Wprowadzenie

W zagadnieniach identyfikacji parametrycznej bardzo ważnym problemem jest wyznaczanie pochodnych sygnału. Wyznaczenie pochodnych jest trudnym zadaniem, szczególnie wtedy, gdy w wyniku przeprowadzonych pomiarów dysponujemy często losowo zaburzonym i obciążonym błędem pomiarem, którym może być na przykład przemieszczenie punktu konstrukcji, a przyjęty model matematyczny ma postać równania różniczkowego z wysokimi pochodnymi mierzonej wielkości.

Celem niniejszego rozdziału jest pokazanie skuteczności pakietowej analizy falkowej w poszukiwaniu dobrych reprezentacji pochodnych analizowanego sygnału. Bazą pakietowej analizy falkowej będą funkcje Walsha, bazujące na filtrze Haara [80]. Rozdział ten stanowi uogólnienie rozwiązania szczególnego pokazanego w pracy Glabisza [46]. Zaproponowany algorytm oparty na pakietowej analizie falkowej pozwala na wygenerowanie pochodnych wyższych rzędów, które następnie wykorzystuje się w procesie identyfikacji parametrów modeli matematycznych, opisujących zadany układ. Do identyfikacji zastosowano procedurę najmniejszych kwadratów i wykorzystano ją do analizy wybranych modeli liniowych i nieliniowych, w których występują pochodne do czwartego rzędu włącznie.

W punkcie drugim tego rozdziału przedstawiono algorytm generowania mnożników, które pozwalają na odtwarzanie pochodnych sygnału na podstawie wyników jego analizy pakietowej. W punkcie trzecim, na przykładach, pokazano procedurę identyfikacji bazującą na numerycznym, klasycznym wyznaczaniu pochodnych sygnału i przedstawiono niedogodności wynikające ze stosowania tego podejścia przy identyfikacji pochodnych sygnału. Następnie – wykorzystując przedstawiony w punkcie 4.2. algorytm – pokazano na przykładach, że pakietowa analiza Walsha jest skutecznym narzędziem wyznaczania pochodnych sygnałów, które mogą być podstawą identyfikacji parametrów liniowych i nieliniowych modeli dyskretnych. W punkcie czwartym omówiono kryteria doboru struktury przyjmowanego opisu matematycznego modelu oraz przedstawiono problem doboru czasu obserwacji odpowiedzi identyfikowanego układu.

4.2. Algorytm wyznaczania pochodnych sygnału

Mierzone wielkości fizyczne przedstawia się z reguły w postaci ciągu N liczb, opisujących zmianę poszukiwanej wielkości, w czasie t trwania analizowanego sygnału. W tutaj pokazanym podejściu zakłada się stałą częstość odczytu mierzonej wielkości. Procedura identyfikacji parametrycznej polega na wyznaczeniu parametrów przyjętych modeli matematycznych. Modele matematyczne przedstawia się w postaci równań, bądź układów równań różniczkowych liniowych lub nieliniowych. Przy takich założeniach problemem staje się wyznaczenie pochodnych mierzonego sygnału. Rząd wyznaczanych pochodnych zależy od rzędu równania różniczkowego przyjętego do opisu rozpatrywanego zagadnienia. Efektywnym narzędziem do rozwiązania tego typu problemu (wyznaczania pochodnych sygnału) okazuje się być pakietowa analiza falkowa, bazująca na filtrze Haara.

Stosowanie dolno- i górnoprzepustowego filtra Haara umożliwia obliczanie ważonej sumy $\left(\frac{(a+b)}{\sqrt{2}}\right)$ i ważonej różnicy $\left(\frac{(a-b)}{\sqrt{2}}\right)$ następujących po sobie par liczb a i b , uzyskanych podczas pomiarów badanego sygnału. W wyniku ważonego uśredniania N -elementowego sygnału, otrzymujemy zbiór $\frac{N}{2}$ elementowy, który jest przeskalowaną, wygładzoną reprezentacją sygnału wejściowego. Procedura filtrowania przy zastosowaniu filtra dolnoprzepustowego pozwala na wyeliminowanie niewielkich lokalnych zaburzeń, czy błędów zarejestrowanych podczas pomiarów. Filtrowanie z wykorzystaniem filtra górnoprzepustowego daje zbiór $\frac{N}{2}$ elementowy, który z dokładnością do znaku, częstości próbkowania i skali jest reprezentacją pierwszej pochodnej sygnału wejściowego. W kolejnym etapie filtrowania tego zbioru powstają dwa zbiory $\frac{N}{4}$ elementowych z których ten, który powstał w wyniku filtrowania górnoprzepustowego może być podstawą do odtworzenia reprezentacji drugiej pochodnej sygnału wejściowego. Pakietowa analiza falkowa Walsha jest takim wielokrotnym filtrowaniem sygnału wejściowego. Algorytm analizy pakietowej Walsha może dostarczyć wygładzonej postaci sygnału wejściowego oraz jego pochodnych, pod warunkiem, że znane będą mnożniki, które umożliwią skalowanie, otrzymanych na poszczególnych etapach analizy pakietowej, ciągów liczb przyjętych do identyfikacji [41]. Rysunek 4.1 przedstawia schemat pakietowej analizy Walsha, ze wskazaniem miejsc, na podstawie których można wyznaczyć pierwszą, drugą, trzecią lub

czwartą pochodną sygnału. Na schemacie tym wiersz $n = 0$ reprezentuje sygnał wejściowy nie poddany procesowi filtracji. W następnych wierszach przedstawiono kolejne etapy filtrowania sygnału, w wyniku których uzyskano równoliczne zbiory współczynników rozwinięcia falkowego $s_{i,j}$ sygnału wejściowego.

$s_{0,0}$										$n=0$
$C^0(1)s_{1,0}$					$C^1(1)s_{1,1}$					$n=1$
$C^0(2)s_{2,0}$			$C^1(2)s_{2,1}$			$C^2(2)s_{2,3}$				$n=2$
$C^0(3)s_{3,0}$		$C^1(3)s_{3,1}$		$C^2(3)s_{3,3}$		$C^3(3)s_{3,7}$				$n=3$
$C^0(4)s_{4,0}$	$C^1(4)s_{4,1}$	$C^2(4)s_{4,3}$			$C^3(4)s_{4,7}$				$C^4(4)s_{4,15}$	$n=4$

Rys. 4.1. Schemat algorytmu pakietowej analizy Walsha

Współczynniki $s_{i,j}$ zostały pomnożone przez mnożniki $C^p(n)$, gdzie indeks p oznacza rząd pochodnej sygnału ($p \geq 0$) [46]. Mnożniki te zależą od:

- etapu filtracji n ,
- współczynników filtrów Haara,
- liczebności N zbioru reprezentującego sygnał wejściowy,
- częstości $\Delta = \frac{t}{N}$ próbkowania sygnału,
- rzędu p szukanej pochodnej sygnału.

Analizując schemat pokazany na rysunku 4.1 można zauważyć, że pochodne sygnału można odtworzyć na podstawie różnych bloków współczynników $s_{i,j}$. Przykładowo pierwszą pochodną sygnału możemy odtworzyć na: bazie $C^1(1)s_{1,1}$ z poziomu pierwszego, współczynników $C^1(2)s_{2,1}$ z poziomu drugiego, współczynników $C^1(3)s_{3,1}$ z poziomu trzeciego, bądź współczynników $C^1(4)s_{4,1}$ z czwartego poziomu filtracji sygnału. Maksymalny rząd pochodnej p jaki możemy odtworzyć na podstawie n etapów filtracji wynosi $p = n$.

Mnożniki $C^p(n)$ otrzymuje się w wyniku analizy sekwencji kolejnych etapów filtracji sygnału. Mnożnik $C^0(n)$, który jest podstawą wyznaczenia filtrowanej postaci sygnału zapisuje się jako [46]:

$$C^0(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \quad (4.1)$$

Na podstawie analizy bloków współczynników znajdujących się na poziomach 2, 4, 8, 16 – patrząc od lewej strony diagramu (rys. 4.1) – reprezentujących pochodne sygnału (pierwszą, drugą, trzecią i czwartą), mnożniki odpowiadające kolejnym pochodnym można zapisać jako:

$$C^1(n) = (-1) \cdot 4 \cdot (2^n \Delta)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \quad (4.2)$$

$$C^2(n) = (-1)^2 \cdot 32 \cdot (2^n \Delta)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \quad (4.3)$$

$$C^3(n) = (-1)^3 \cdot 512 \cdot (2^n \Delta)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \quad (4.4)$$

$$C^4(n) = (-1)^4 \cdot 16384 \cdot (2^n \Delta)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \quad (4.5)$$

Powyższe relacje można przedstawić w postaci:

$$C^p(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \prod_{i=1}^{i=p} (-1) \cdot 4 \cdot 2^{(i-1)} \cdot (2^n \Delta)^{-1} \quad (4.6)$$

gdzie $C^p(n)$ jest mnożnikiem dla p -tej pochodnej pod warunkiem, że $p \leq n$.

Mnożniki dane relacjami od (4.2) do (4.6) mogą być podstawą odtwarzania kolejnych pochodnych sygnału wyłącznie na podstawie pierwszych – licząc od lewej – ich reprezentacji na wybranym etapie n pakietowej analizy falkowej Walsha.

Uogólniając wyniki przedstawione w pracy Glabisza [46], pochodne sygnału można odtworzyć również na podstawie innych bloków współczynników rozwinięcia sygnału na n -tym poziomie jego filtracji. Na rysunku 4.2 pokazano schemat pakietowej analizy falkowej Walsha z cyfrowym oznaczeniem bloków, które mogą być podstawą do określenia pochodnych analizowanego sygnału. Przypisana każdemu blokowi cyfra oznacza rząd pochodnej możliwej do odtworzenia na podstawie zawartych w tym bloku danych. Przefiltrowanej postaci sygnału wejściowego przypisano cyfrę 0. Elementy w poszczególnych blokach będzie się dalej nazywać współczynnikami, ponieważ są to właśnie współczynniki rozwinięcia sygnału w falkowej, pakietowej analizie sygnału.

sygnał																$n = 0$
0								1								$n = 1$
0				1				1				2				$n = 2$
0		1		1		2		1		2		2		3		$n = 3$
0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3	4	$n = 4$

Rys. 4.2. Diagram usytuowania bloków współczynników mogących być źródłem odtwarzania pochodnych sygnału

Elementy ciągów liczbowych (bloków), na podstawie których można odtworzyć pochodne, są generowane różnymi (dla każdego z tych bloków) schematami różnicowymi stosowanymi do sygnału wejściowego. Na rysunku 4.3 przedstawiono schematy różnicowe wykorzystywane przy obliczaniu pierwszej pochodnej sygnału na podstawie bloków współczynników pakietowej analizy falkowej po trzecim jej etapie ($n=3$). Łatwo zauważyć na rysunku 4.2, że pierwsza pochodna sygnału możliwa jest do odtworzenia na podstawie drugiego, trzeciego i piątego bloku współczynników. Przy obliczaniu pierwszej pochodnej na etapie $n=3$ analizy pakietowej wykorzystywanych jest osiem kolejnych danych sygnału wejściowego.

Schemat różnicowy, który generuje współczynniki proporcjonalne do pierwszej pochodnej sygnału zawarte w drugim (licząc od lewej) bloku analizy pakietowej przedstawiono na rysunku 4.3 jako schemat 1. Schemat wykorzystuje $k=8$ kolejnych elementów sygnału wejściowego, z których cztery pierwsze wykorzystywane są bez zmiany znaku, a cztery kolejne ze zmienionym znakiem. Element pierwszy położony jest między $k=0$ i $k=1$, drugi między $k=1$ i $k=2$ itd.. Przy interpretacji schematu należy pamiętać

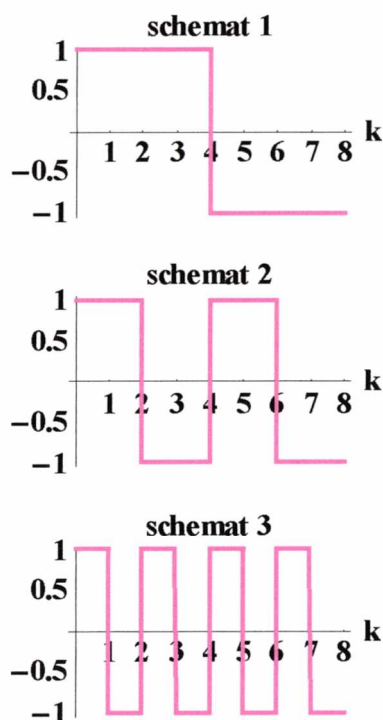
o stosownym mnożniku (w tym przypadku dany jest formułą (4.6)), w którym występuje czynnik $(-1)^p$.

Schematami 2 i 3 na rysunku 4.3 oznaczono schematy różnicowe generujące współczynniki proporcjonalne do pierwszej pochodnej zawarte odpowiednio w trzecim i piątym bloku analizy pakietowej przy $n=3$. Należy zaznaczyć, że dla tych bloków nie obowiązuje formuła (4.6) na konieczny do odtworzenia pochodnej mnożnik.

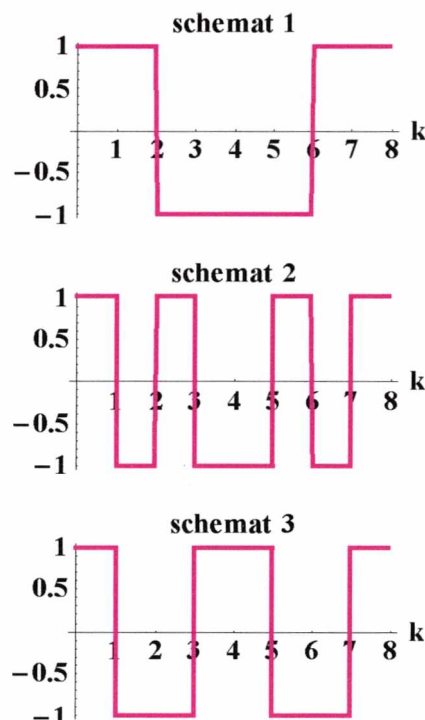
Pierwszą pochodną sygnału ($p=1$) można otrzymać przez pomnożenie bloków n -tego etapu analizy pakietowej występujące na pozycjach $2^{m-1} + 1$ ($m=1,2,\dots,n$) przez mnożnik, który otrzymuje się śledząc sekwencje filtrowania i który dany jest relacją:

$$C^1(n) = (-1) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n 4 \cdot 2^{m-1} (2^n \Delta)^{-1}, \quad m=1,2,\dots,n \quad (4.7)$$

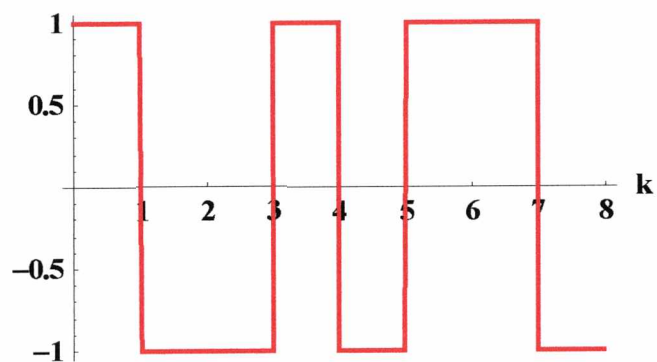
Na rysunkach od 4.4 do 4.10 pokazano przykładowe schematy różnicowe generowane w pakietowej analizie falkowej, które mogą być wykorzystywane do obliczania pochodnych różnych rzędów na bazie współczynników po dowolnym, n -tym etapie tej analizy.



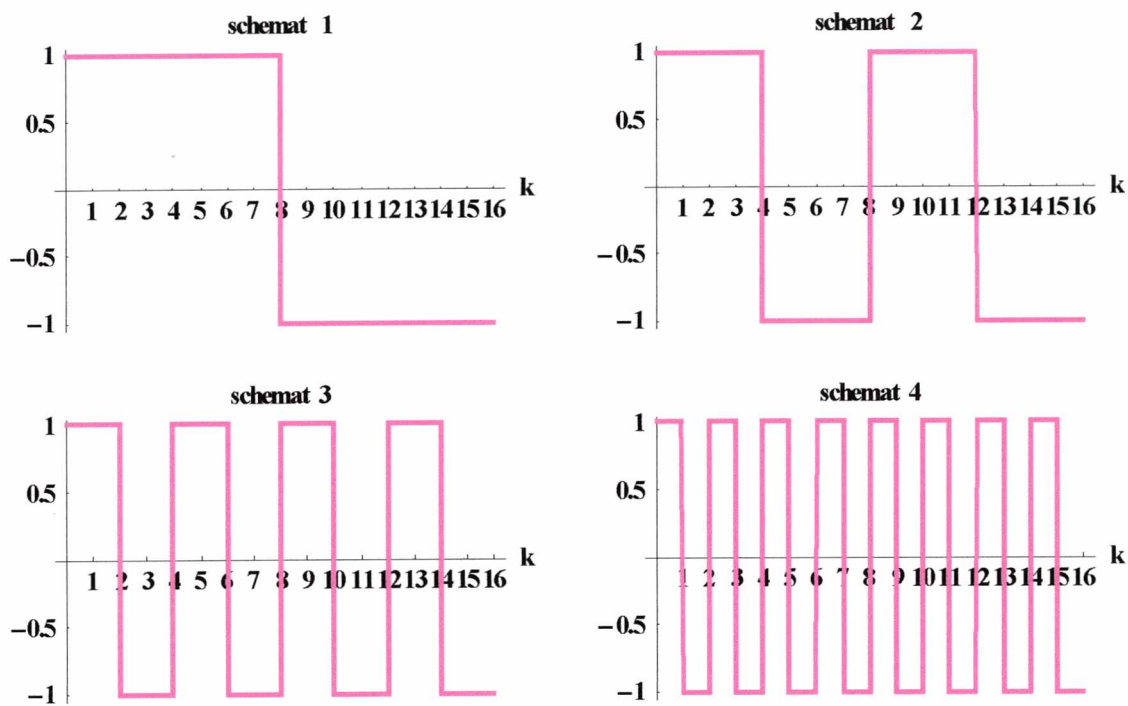
Rys. 4.3. Schematy różnicowe pierwszej pochodnej ($p=1$) przy $n=3$



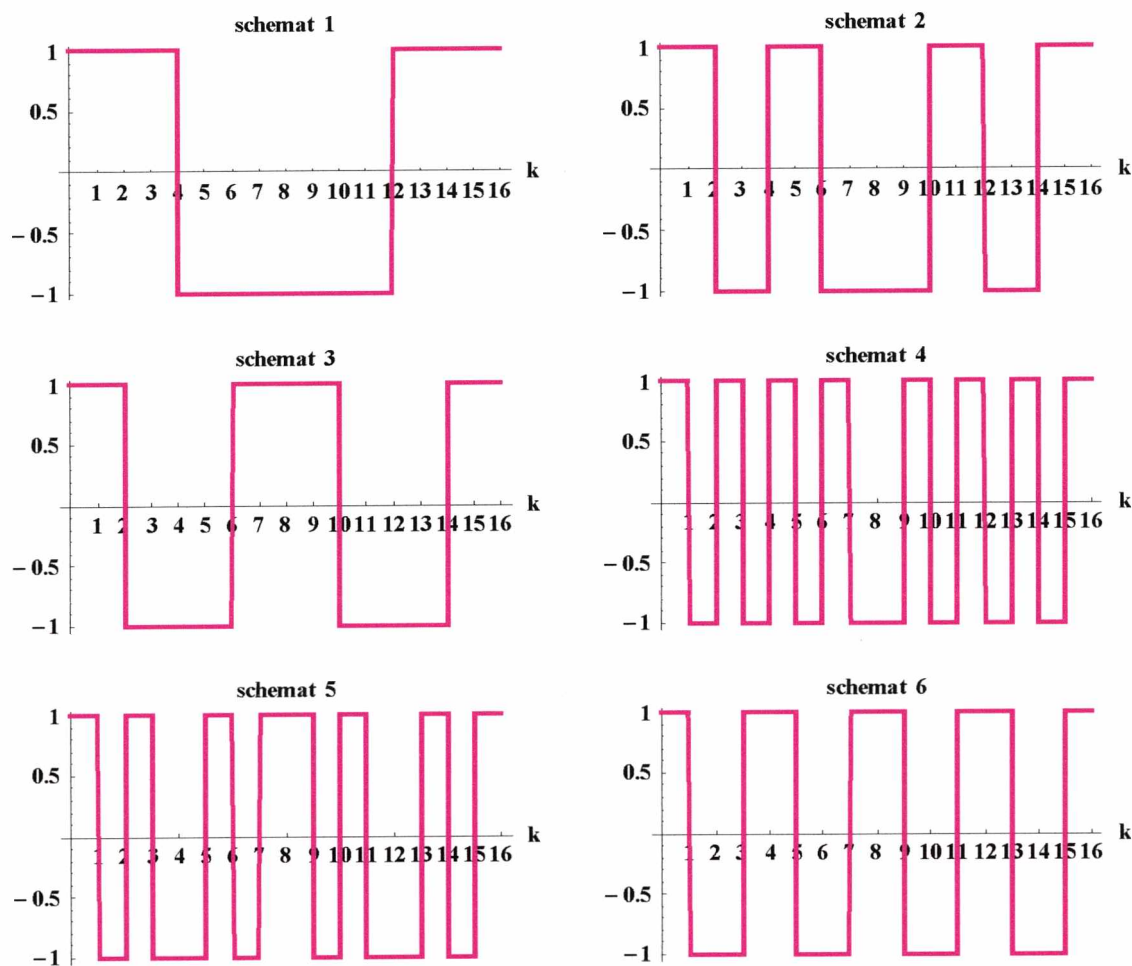
Rys. 4.4. Schematy różnicowe drugiej pochodnej ($p=2$) przy $n=3$



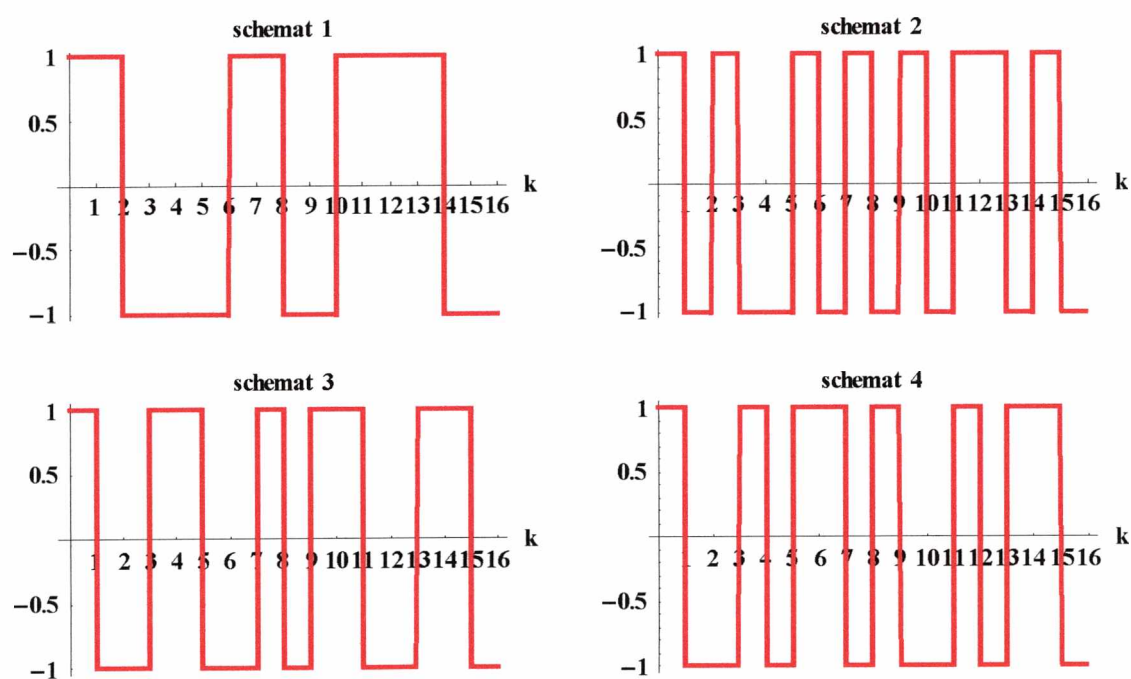
Rys. 4.5. Schemat różnicowy trzeciej pochodnej ($p = 3$) przy $n = 3$



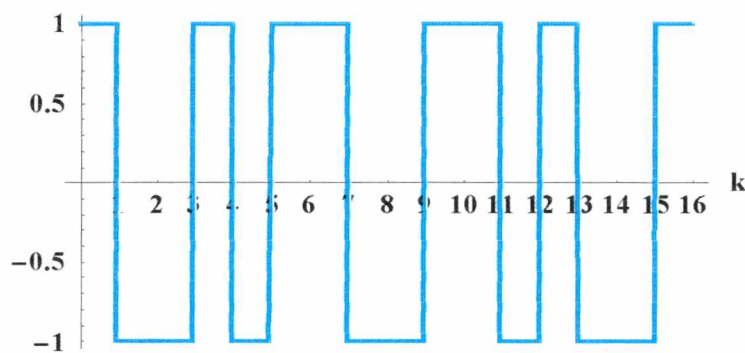
Rys. 4.6. Schematy różnicowe pierwszej pochodnej ($p = 1$) przy $n = 4$



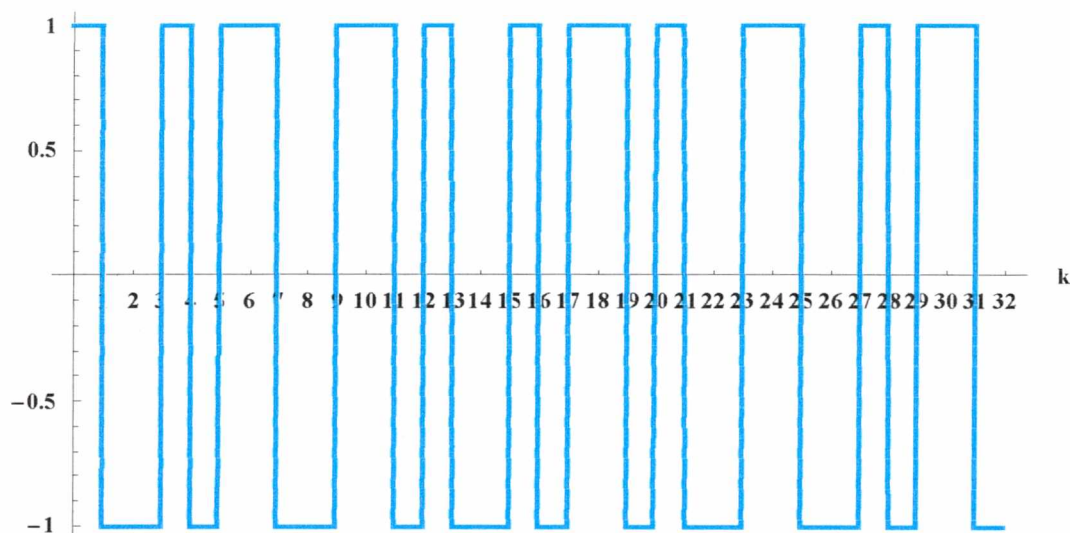
Rys. 4.7. Schematy różnicowe drugiej pochodnej ($p = 2$) przy $n = 4$



Rys. 4.8. Schematy różnicowe trzeciej pochodnej ($p = 3$) przy $n = 4$



Rys. 4.9. Schemat różnicowy czwartej pochodnej ($p = 4$) przy $n = 4$



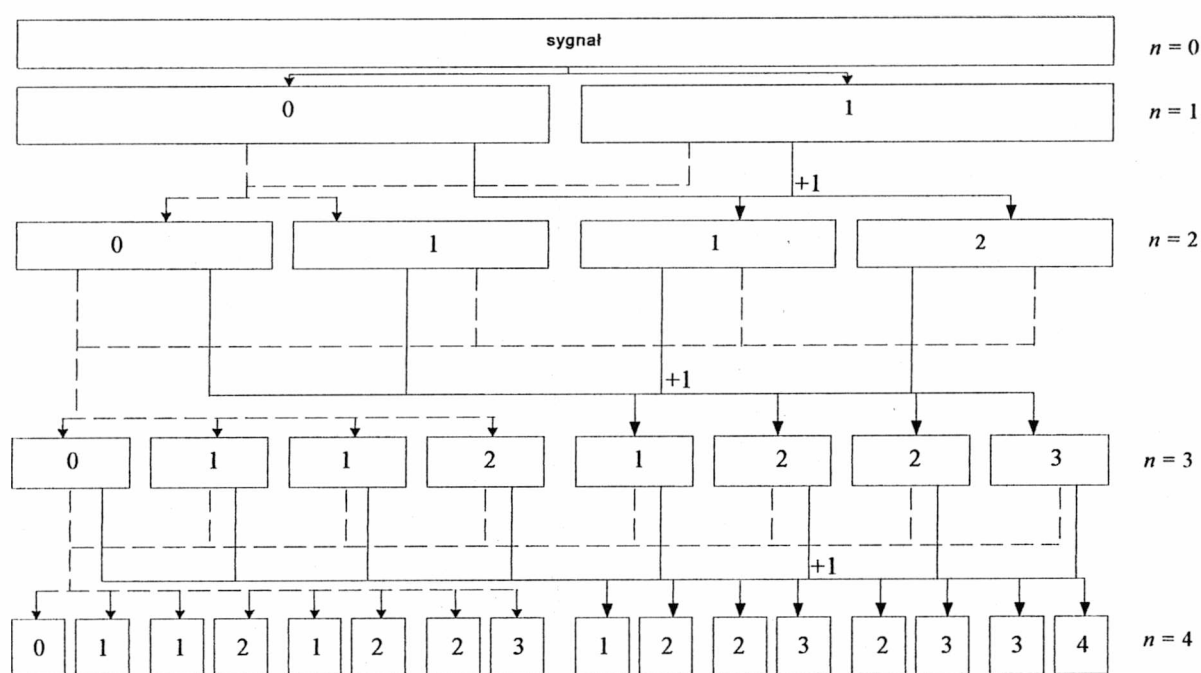
Rys. 4.10. Przykładowy schemat różnicowy piątej pochodnej ($p = 5$) przy $n = 5$

Można zauważyć, że schematy różnicowe obliczania pochodnej ustalonego rzędu (p) na wybranym n -tym etapie pakietowej analizy falkowej istotnie się między sobą różnią. Jest to wynikiem kolejności filtrowania sygnału wejściowego filtrami dolno- i górnoprzepustowymi. Jeżeli dla uproszczenia zapisu działanie na sygnał s filtra dolno-przepustowego oznaczmy jako d , a górno-przepustowego jako g , to przedstawione na rysunku 4.3 schematy 1, 2 i 3 wynikają odpowiednio z następujących sekwencji zastosowanych filtrów: $g(d(d(s)))$, $d(g(d(s)))$ i $d(d(g(s)))$.

W celu praktycznego wykorzystania możliwych, różnych schematów obliczania pochodnych na dowolnym etapie pakietowej analizy falkowej konieczna jest informacja o położeniu bloków współczynników proporcjonalnych do rzędnych wybranej pochodnej i odpowiadającemu temu miejscu (i rzędowi pochodnej) mnożnika. Relacja (4.7) formułuje mnożnik dla pierwszej pochodnej, której miejsce występowania na n -tym etapie analizy pakietowej określone jest liczbą $2^{m-1} + 1$.

Można zbudować analogiczne formuły dla pochodnych wyższego rzędu, lecz przyjmują one istotnie bardziej złożone postaci od tych, które obowiązują wyłącznie dla pierwszych (licząc od lewej bloki współczynników n -tego etapu analizy) pochodnych kolejnych rzędów na n -tym etapie analizy.

Obserwując diagram przedstawiony na rysunku 4.3 można zauważyć schemat rekurencyjny, który pozwala na określenie rzędu pochodnej możliwej do odtworzenia przez współczynniki dowolnego bloku występujące na wybranym etapie falkowej analizy pakietowej. Na rysunku 4.11 pokazano schemat procedury rekurencyjnej generującej poszukiwaną informację na n -tym etapie analizy, na podstawie informacji zawartych na etapie poprzednim $n-1$. Na n -tym etapie analizy, rzędy możliwych do odtworzenia pochodnych można ustalić na podstawie bloku informacji z etapu $(n-1)$ -szego i prostej ich transformacji polegającej na zwiększeniu rzędu pochodnych o 1.



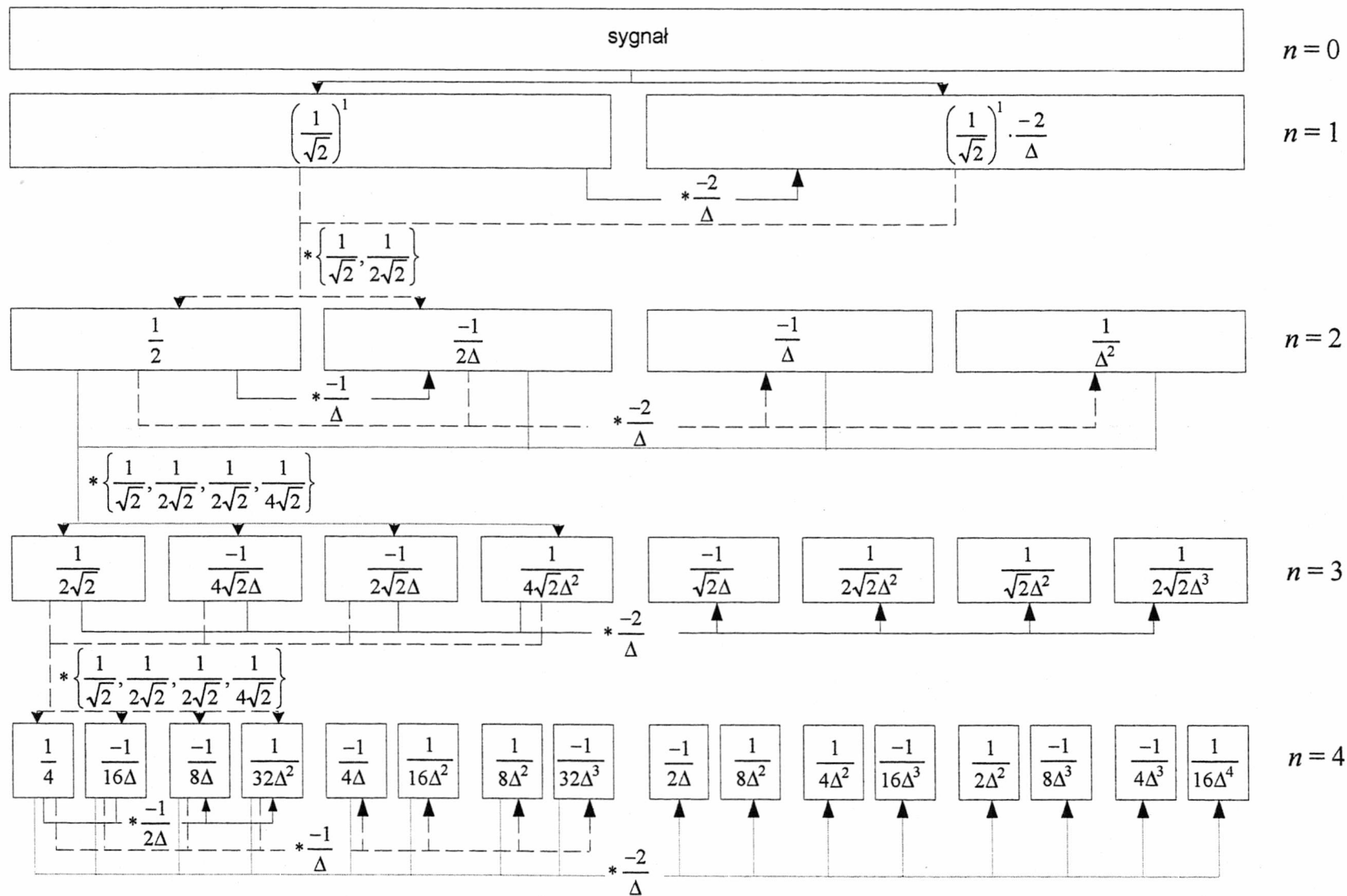
Rys. 4.11. Schemat rekurencyjny ustalający rząd możliwej do odtworzenia pochodnej na podstawie bloków z dowolnego etapu analizy pakietowej

Obserwując (tutaj nie przytaczane z uwagi na ich złożoną postać) formuły na mnożniki niezbędne do odtwarzania pochodnych rzędu drugiego i wyższych, można zbudować prosty, praktyczny w stosowaniu schemat rekurencyjny ich generowania. Na rysunku 4.12 pokazano schemat rekurencyjny generowania mnożników na dowolnym etapie analizy pakietowej z filtrem Haara. Schemat ten wraz ze schematem pokazanym na rysunku

4.11 umożliwia odtworzenie pochodnej wybranego rzędu na podstawie bloku określającej jej rząd (rysunek 4.11) i stosowny mnożnik (rysunek 4.12.). Przedstawione schematy rekurencyjne określają całą klasę pochodnych sygnału, z której jeden, szczególny przypadek analizowano w pracy [46].

Przykładowo, chcąc sformułować mnożniki dla trzeciej pochodnej sygnału łatwo można zauważyć na rysunku 4.12, że podstawą odtworzenia tej pochodnej może być blok ósmy liczb przy $n=3$ (licząc od lewej strony), a przy $n=4$ bloki: 8-my, 12-sty, 14-sty i 15-sty (licząc od lewej). Schemat rekurencyjny przedstawiony na rysunku 4.13 pozwala na określenie stosownych mnożników, które w analizowanym przykładzie przyjmują następujące wartości: $-\frac{1}{2\sqrt{2}\Delta^3}$ (dla bloku przy $n=3$) i $-\frac{1}{32\Delta^3}$, $-\frac{1}{16\Delta^3}$, $-\frac{1}{8\Delta^3}$, $-\frac{1}{4\Delta^3}$ (odpowiednio dla 8-mego, 12-stego, 14-stego i 15-stego bloku przy $n=4$).

Poprawność przedstawionych schematów rekurencyjnych określających rząd pochodnej i wartość mnożnika można łatwo sprawdzić prowadząc pakietową analizę z bazą Walsh'a dyskretnej reprezentacji funkcji gładkich, których pochodne są znane.



Rys. 4. 12. Schemat rekurencyjny ustalający mnożniki niezbędne do odtworzenia pochodnych

4.3. Przykłady numeryczne

Możliwości praktycznego wykorzystania wyników falkowej analizy pakietowej z bazą Walsha do identyfikacji prostych modeli układów dynamicznych testowano na szeregu przykładach. W procesie identyfikacji współczynników modeli matematycznych wykorzystano metodę najmniejszych kwadratów (rozdz. 3.3.1.). Badano wpływ wykorzystywanych różnych bloków współczynników proporcjonalnych do wybranej pochodnej (przy ustalonym etapie analizy pakietowej n) na dokładność otrzymywanych rezultatów. Przedstawione w rozdziale 4.1 rekurencyjne algorytmy testowano między innymi na identycznych jak w pracy [46] przykładach, co pozwoliło na ocenę przedstawionego uogólnienia. Analizy bazujące na przedstawionym w punkcie 4.2. algorytmie wyznaczania pochodnych sygnału poprzedzono identyfikacją parametrów przykładowego równania, w której wykorzystano wielomianową interpolację danych.

4.3.1. Identyfikacja parametrów układu oparta na interpolacji danych

Procedura identyfikacji przedstawiona w tym rozdziale bazuje na informacjach o sygnale wejściowym $q(t)$ oraz danej sile wymuszającej $f(t)$. Niezbędne pochodne sygnału w wykorzystywanej tutaj procedurze najmniejszych kwadratów generowane są numerycznie na bazie przyjętej interpolacji wielomianowej. Zastosowano wielomiany 3-ciego stopnia, które pozwalają skutecznie interpolować lokalne wartości sygnału i jego pochodne między kolejnymi jego wartościami.

Założmy, że matematycznego opisu układu o jednym stopniu swobody poszukujemy w postaci równania Duffinga [8]

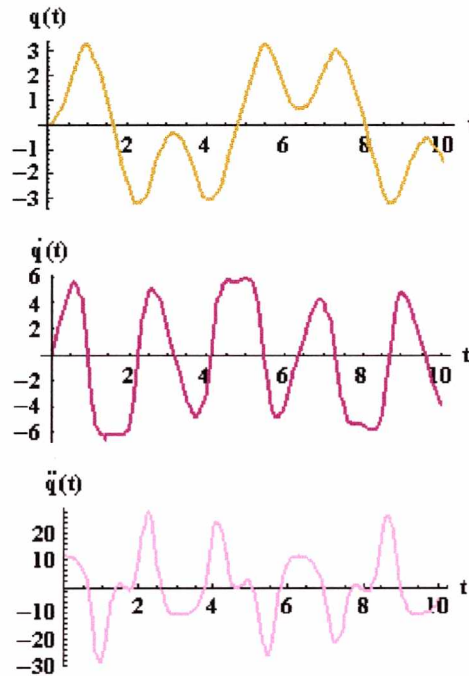
$$a\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + cq^3(t) = 11\cos(t) \quad (4.8)$$

dla przykładowych wartości $a = 1.0$, $b = 0.1$ i $c = 1.0$.

Jeżeli odpowiedź układu (4.8) – przy zerowych warunkach początkowych – będzie dana ciągiem q_i , a wymuszenie ciągiem f_i , gdzie $i = 1, \dots, N$, to poszukiwane parametry łatwo można znaleźć szukając minimum funkcjonału H

$$H = \sum_{i=1}^N [a\ddot{q}_i + b\dot{q}_i + cq_i^3(t) - f_i]^2 \quad (4.9)$$

Na rysunku 4.13 pokazano sygnał i jego numerycznie wyznaczone pochodne, a w tabeli 4.1 przedstawiono wyniki identyfikacji przy różnych częstościach próbkowania t/N sygnału w czasie obserwacji t . W analizie przyjęto 10-cio sekundowy czas obserwacji.



Rys. 4.13. Odpowiedź $q(t)$ układu (4.8) i jego pochodne $\dot{q}(t)$ i $\ddot{q}(t)$

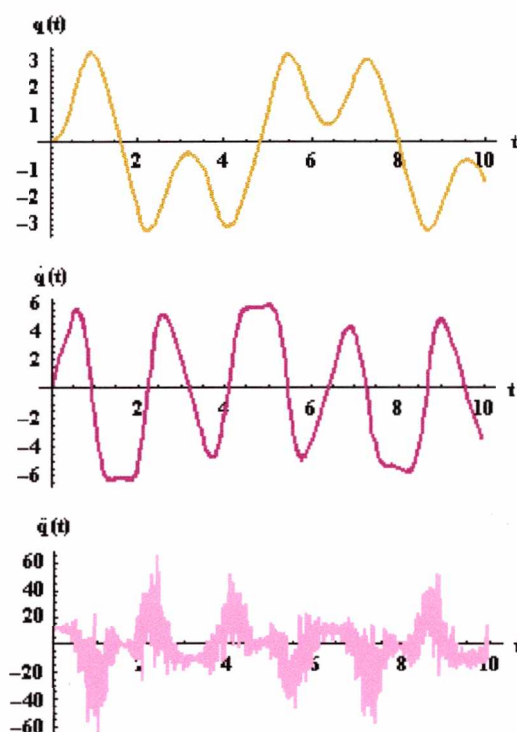
Tabela 4.1. Wyniki identyfikacji równania (4.8) przy różnych liczebnościach N ciągu danych

Liczebność próbek N	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a = 1.0$, $b = 0.1$, $c = 1.0$)		
	a	b	c
1024	0.89485	0.104887	0.926615
2048	0.94404	0.102623	0.96095
4096	0.97109	0.10136	0.97982
8192	0.98529	0.10068	0.98974
16834	0.99258	0.10034	0.99482

Możliwe zakłócenia sygnału modelowano jako liczby losowe z rozkładu równomiernego z przyjętego zakresu (wyrażonego w %) wartości bezwzględnej z q_i . Tak

wylosowane liczby dodawano do q_i otrzymując losowo zakłócony sygnał odpowiedzi układu.

Na rysunku 4.14 pokazano zakłócony sygnał przy poziomie zakłócenia 0.05% i jego numerycznie wyznaczone pochodne, a w tabeli 4.2 przedstawiono wyniki identyfikacji parametrów równania (4.8) w funkcji wielkości zakłócenia.



Rys. 4.14. Odpowiedź zakłócona $q(t)$ układu (4.8) i jego pochodne $\dot{q}(t)$ i $\ddot{q}(t)$

Tabela 4.2. Wyniki identyfikacji równania (4.8) przy różnych poziomach zakłóceń

Poziom zakłócenia %	Identyfikowane parametry(wartości ścisłe: $a = 1.0$, $b = 0.1$, $c = 1.0$)		
	a	b	c
0.5	0.00232	0.136413	0.3037
0.05	0.21648	0.12999	0.45306
0.01	0.85242	0.11447	0.897045
0.005	0.9636	0.10901	0.97449

Z przedstawionych analiz wynika, że stosowane tutaj podejście wymaga licznych niezakłóconych ciągów danych dla uzyskania zadowalających rezultatów, a w przypadku analizy ciągów zakłóconych błąd rozwiązania (powodowany wyznaczaniem 2-giej pochodnej sygnału) jest na ogół nie do przyjęcia.

W pracy [44] podjęto próbę zastosowania analizy falkowej (przy różnych typach falek) i jej właściwości filtracyjnych do kompresji losowo zakłócanych sygnałów, co istotnie wpływało na poprawę otrzymywanych rezultatów. Poddawanie sygnału analizie falkowej, a następnie jego odtwarzanie jedynie na bazie istotnych (co do wartości bezwzględnych) jego współczynników rozwinięcia nie prowadzi do zadawalających wyników identyfikacji i zwykle skutkuje powstawaniem zaburzeń na brzegach sygnału. Brzegowe zakłócenia powodowane są koniecznością – dla skończonych sygnałów – przyjęcia w analizie falkowej określonego typu warunków brzegowych [1, 26, 85].

4.3.2. Identyfikacja parametrów układu liniowego o jednym stopniu swobody wykorzystująca analizę pakietową z bazą Walsha

Pierwszym przykładem, w którym wykorzystano analizę pakietową z bazą Walsha jest proces identyfikacji współczynników różniczkowego równania rzędu drugiego, którym można opisywać na przykład drgania układu o jednym stopniu swobody. Podstawą identyfikacji są znane, niezakłócone ciągi liczb, które są efektem próbkowania ze stałą częstotliwością znanej odpowiedzi układu $q(t)$ i znanego wymuszenia $f(t)$. Załóżmy, że matematycznego opisu układu poszukujemy w postaci:

$$a\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + cq(t) = f(t) \quad (4.10)$$

gdzie a , b i c są poszukiwanymi parametrami.

Wyniki przeprowadzonej identyfikacji równania (4.10) przy $a = 2$ $b = 0.1$ $c = 5$ oraz $f = 11\cos(t)$, w zależności od etapu n analizy pakietowej sygnału, który jest źródłem równolicznych zbiorów (o liczebności l) opisujących w sposób dyskretny $q(t)$, $\dot{q}(t)$ i $\ddot{q}(t)$ przedstawiono w tabelach 4.3 i 4.4 zestawiając estymowane wartości parametrów i ich błędy względne w stosunku do wartości dokładnych. Analizę przeprowadzono przy różnych, kolejnych licząc od lewej, pojawiających się blokach współczynników transformacji pakietowej będących źródłem odtworzenia pierwszej (tabela 4.3) i drugiej (tabela 4.4) pochodnej. Analizę, której wyniki pokazano w tabeli 4.3 prowadzono przyjmując, że druga pochodna odtwarzana jest na podstawie pierwszego (licząc od lewej) bloku n -tego etapu analizy, którego elementy są proporcjonalne do drugiej pochodnej. Wyniki analizy przedstawione w tabeli 4.4 uzyskano przyjmując, że pierwsza pochodna

odtworzana jest na podstawie pierwszego (licząc od lewej) bloku n -tego etapu analizy, którego elementy są proporcjonalne do pierwszej pochodnej.

We wszystkich tabelach przedstawiono:

- błędy względne λ_i (wyrażone w procentach) dla każdego z wyznaczanych parametrów, które obliczano jako $\lambda_i = \frac{p_i - p_i^0}{p_i^0} \cdot 100\%$ (gdzie p_i jest wartością i -tego parametru uzyskaną w wyniku identyfikacji, a p_i^0 wartością ścisłą tego parametru),
- błędy globalne δ (wyrażone w procentach) – których podstawą wyznaczania są sygnały wejściowe q_i – obliczane jako

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (q_i - \tilde{q}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (q_i)^2}} \cdot 100\% \quad (4.11)$$

gdzie przez $\tilde{q}_i$ oznaczono odpowiedź układu ze zidentyfikowanymi parametrami. Należy podkreślić, że błędy względne λ_i można wyznaczać jedynie w zadaniach testowych, w których znamy dokładne wartości poszukiwanych parametrów. Błędy δ dane relacją (4.11) mogą być podstawą oceny wyników procedury identyfikacji układów, których parametrów z góry nie znamy.

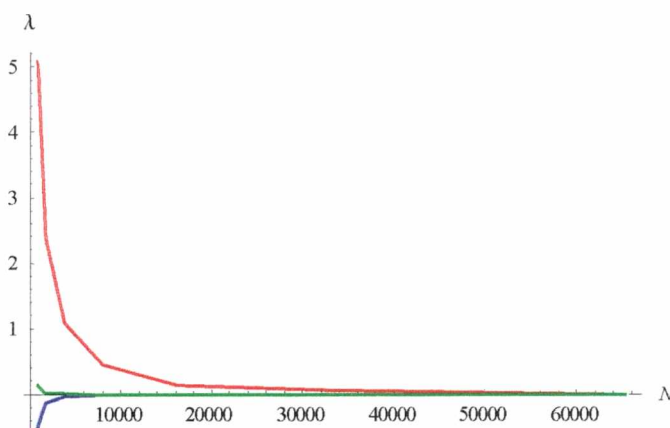
Łatwo zauważyć w prezentowanych tabelach (4.3 i 4.4), że różnice w wartościach błędu δ – przy ustalonym poziomie analizy pakietowej – występują na dalszych miejscach znaczących. Błąd δ ma porównywalną wartość, gdy do odtwarzania pierwszej pochodnej wykorzystuje się różne bloki danych (licząc od lewej strony) dla n -tego, ustalonego etapu analizy pakietowej. Porównując wartości błędu dla następnych poziomów n falkowej analizy pakietowej można zauważyć stopniowy wzrost jego wartości, co wynika z odcinkowo stałej aproksymacji odpowiedzi układu i jej pochodnych na coraz dłuższych przedziałach analizowanego czasu. Na wyższych poziomach analizy pakietowej, sygnał i jego pochodne są odtwarzane na podstawie mniej licznych ciągów liczbowych i tym samym procedura identyfikacji z ich wykorzystaniem przebiega szybciej, choć – jak pokazano – błąd rozwiązania rośnie.

W tabelach przedstawionych w tekście rozprawy i w załączniku, w których przedstawiono wpływ na otrzymywane wyniki położenie bloku, który był podstawą

odtworzenia wybranej pochodnej (trzecie kolumny tych tabel) przyjęto jako zasadę, że pozostałe pochodne odtwarzane są na podstawie pierwszych (licząc od lewej) bloków danych, których elementy są proporcjonalne do tych pochodnych. Podstawą wyników przedstawionych w tabelach były zbiory o liczebności $N = 16384$, które opisywały odpowiedzi układu $q_i = q(t_i)$ i wymuszenie $f_i = 11 \cos(t_i)$ dla $t \in \langle 0, 10 \rangle$.

Analizując uzyskane rezultaty (tabele 4.3. i 4.4.) łatwo można zauważyć, że parametry modelu można określić z błędem względnym nie przekraczającym 1% już na podstawie $4 \times 8 = 32$ liczb, z których 24 to współczynniki pakietowego rozwinięcia sygnału, a pozostałych 8 to wyniki pomiarów wymuszenia. Błąd procentowy określanych współczynników nie przekracza 0.1%, jeżeli w procesie identyfikacji wykorzystamy 128 liczb. Na wielkość błędów identyfikowanych parametrów nie wpływa wybór bloku, na podstawie którego wyznacza się pochodne sygnału.

Wyniki prowadzonych analiz zależą od liczebności N zbiorów wejściowych. Na rysunku 4.15 przedstawiono zmianę błędu względnego λ_i identyfikowanych parametrów a , b , c układu liniowego (4.10), w zależności od liczebności zbioru poddawanego falkowej analizie pakietowej. Kolorem niebieskim przedstawiono zmianę błędu λ dla parametru a , kolorem czerwonym zmianę błędu λ dla parametru b , kolorem zielonym zmianę błędu λ dla parametru c . Analizując wykres przedstawiony na rysunku 4.15 można zauważyć, że liczebność N zbiorów danych ma istotny wpływ na uzyskiwane rezultaty. Duża liczebność zbioru poddawanego analizie pozwala na określenie poszukiwanych parametrów z błędem nie przekraczającym 0.1%. Dla małej liczebności zbioru (przykładowo 1024 elementy) błąd szacowanych wartości gwałtownie wzrasta, choć i wtedy wyniki są do zaakceptowania.



Rys. 4.15. Wykres zmian błędu względnego identyfikowanych parametrów dla układu liniowego (4.10) w funkcji liczebności N zbiorów danych

Tabela 4.3. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.10) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$
przy różnych zbiorach odtworzenia pierwszej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia I-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=2, b=0.1, c=5$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
5	512	1	1.9999	-0.005	0.1001	0.1	5.0000	0.0	0.0164831
		2	1.9999	-0.005	0.1001	0.1	5.0000	0.0	0.0164831
		3	1.9999	-0.005	0.1001	0.1	5.0000	0.0	0.0164831
		4	1.9999	-0.005	0.1001	0.1	5.0000	0.0	0.0164831
7	128	1	1.9993	-0.035	0.1001	0.1	5.0005	0.01	0.136325
		2	1.9993	-0.035	0.1001	0.1	5.0005	0.01	0.136325
		3	1.9993	-0.035	0.1001	0.1	5.0005	0.01	0.136325
		4	1.9993	-0.035	0.1001	0.1	5.0005	0.01	0.136325
9	32	1	1.9902	-0.49	0.1003	0.3	5.0076	0.152	1.95268
		2	1.9902	-0.49	0.1006	0.6	5.0076	0.152	1.94954
		3	1.9902	-0.49	0.1007	0.7	5.0076	0.152	1.9486
		4	1.9902	-0.49	0.1007	0.7	5.0076	0.152	1.9486
11	8	1	1.8417	-7.915	0.1042	4.2	5.1245	2.49	30.0391
		2	1.8420	-7.9	0.1096	9.6	5.125	2.5	29.8719
		3	1.8421	-7.895	0.111	11.0	5.1251	2.502	29.8258
		4	1.8421	-7.895	0.111	11.0	5.1251	2.502	29.8258

Tabela 4.4. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.10) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$
przy różnych zbiorach odtworzenia drugiej pochodnej

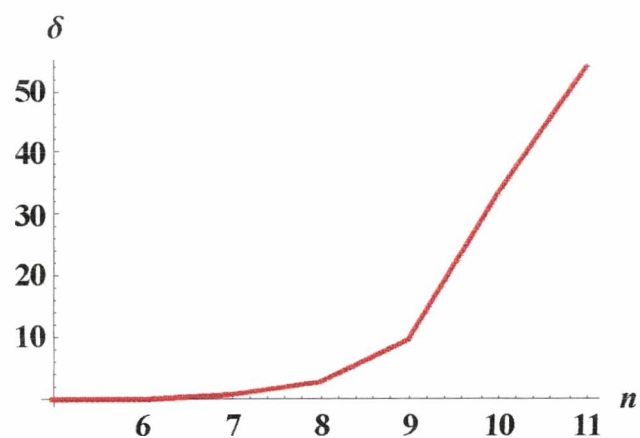
Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia II-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=2$, $b=0.1$, $c=5$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
5	512	1	1.9999	-0.005	0.1001	0.1	5.0000	0.0	0.01648
		2	1.9999	-0.005	0.1001	0.1	5.0000	0.0	0.01648
		3	1.9999	-0.005	0.1001	0.1	5.0001	0.002	0.02279
		4	1.9999	-0.005	0.1001	0.1	5.0000	0.0	0.01648
7	128	1	1.9993	-0.035	0.1001	0.1	5.0005	0.01	0.13632
		2	1.9995	-0.025	0.1001	0.1	5.0006	0.012	0.11409
		3	2.0001	0.005	0.1001	0.1	5.0010	0.02	0.05690
		4	1.9995	-0.025	0.1001	0.1	5.0006	0.012	0.11409
9	32	1	1.9902	-0.49	0.1003	0.3	5.0076	0.152	1.95268
		2	1.9929	-0.355	0.1003	0.3	5.0095	0.19	1.68794
		3	2.0036	0.18	0.1002	0.2	5.0172	0.344	0.70398
		4	1.9936	-0.32	0.1003	0.3	5.0100	0.2	1.62016
11	8	1	1.8417	-7.915	0.1042	4.2	5.1245	2.49	30.0391
		2	1.8811	-5.595	0.1037	3.7	5.1535	3.07	26.3426
		3	2.0606	3.03	0.1010	1.0	5.2862	5.724	10.6633
		4	1.8910	-5.45	0.1035	3.5	5.1607	3.214	25.4193

4.3.3. Identyfikacja parametrów układu nieliniowego o jednym stopniu swobody

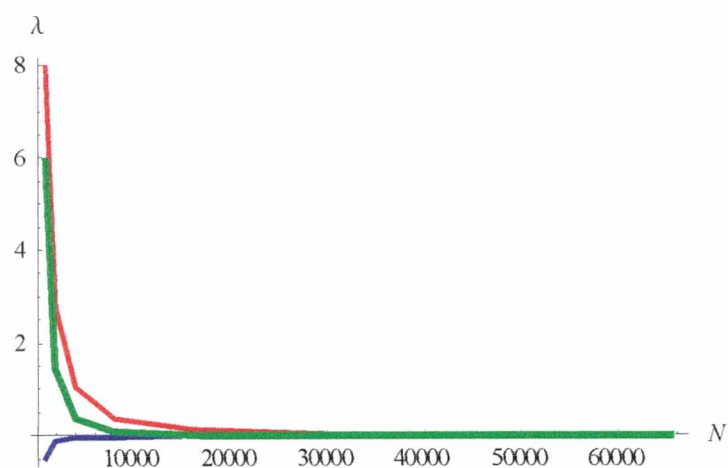
Kolejnym przykładem wykorzystania pakietowej analizy Walsha jest identyfikacja parametrów modelu nieliniowego, do którego często sprowadza się problem drgań układów wykazujących cechy ruchów chaotycznych [8]. W tym przypadku model matematyczny przyjmuje postać równania typu Duffinga daną relacją (4.8).

Podobnie jak poprzednio, w tabelach 4.5 i 4.6 przedstawiono rezultaty identyfikacji parametrów modelu (4.8) przy $a=1$ $b=0.1$ $c=1$ i $f(t)=11\cos(t)$, przy różnych częstościach próbkowania odpowiedzi i wymuszenia układu w czasie $t \in \langle 0,10 \rangle$, oraz przy różnych blokach współczynników będących podstawą odtworzenia pierwszej i drugiej pochodnej. Jak widać, w przypadku identyfikacji parametrów układu nieliniowego wymagana jest większa – w porównaniu z układem liniowym – liczebność zbiorów opisujących przefiltrowany sygnał i filtrowane jego pochodne; przy $l=128$ błąd procentowy wyznaczenia współczynników jest rzędu 0.5%. W przypadku tutaj analizowanego układu nieliniowego uzyskane wartości identyfikowanych parametrów – podobnie jak w przypadku układu liniowego – nie zależą od położenia zbiorów, na podstawie których były odtwarzane pochodne sygnału.

Analizując błąd globalny rozwiązania δ dla kolejnych zbiorów odtwarzania pochodnej na ustalonym poziomie n pakietowej analizy falkowej można stwierdzić, że jego wartości są zbliżone. Wartości błędu δ dla kolejnych poziomów n rośnie, co przedstawiono na rysunku 4.16. Podobnie jak dla układu liniowego i tutaj zbadano zmiany błędu względnego λ poszukiwanych parametrów a , b , c układu nieliniowego (4.8), w zależności od liczebności zbioru poddawanego falkowej analizie pakietowej, co ilustruje rysunek 4.17. Kolorem niebieskim przedstawiono zmianę błędu λ dla parametru a , kolorem czerwonym zmianę błędu λ dla parametru b , natomiast kolorem zielonym zmianę błędu dla parametru c . Dla dużej liczebności zbioru (np. $N=65536$) błąd względny nie przekracza 0.1%, natomiast dla zbioru o małej liczebności (np. $N=1024$) wartości błędu nie przekraczają 8%.



Rys. 4.16. Wykres zmian błędu δ dla układu nieliniowego (4.8) dla poszczególnych poziomów n falkowej analizy pakietowej



Rys. 4.17. Wykres zmian błędu względnego identyfikowanych parametrów dla układu nieliniowego (4.8) w funkcji liczebności N zbiorów danych

Tabela 4.5. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.8) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$ przy różnych zbiorach odtworzenia pierwszej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowe j	Liczba elementó w l	Kolejny zbiór odtworzeni a I-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=1$, $b=0.1$, $c=1$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
5	512	1	0.9999	-0.01	0.1001	0.1	1.0002	0.02	0.0766528
		2	0.9999	-0.01	0.1001	0.1	1.0002	0.02	0.0766528
		3	0.9999	-0.01	0.1001	0.1	1.0002	0.02	0.0766528
		4	0.9999	-0.01	0.1001	0.1	1.0002	0.02	0.0766528
7	128	1	0.9997	-0.03	0.1004	0.4	1.0037	0.37	0.699945
		2	0.9997	-0.03	0.1005	0.5	1.0037	0.37	0.698557
		3	0.9997	-0.03	0.1005	0.5	1.0037	0.37	0.698557
		4	0.9997	-0.03	0.1005	0.5	1.0037	0.37	0.698557
9	32	1	0.9956	-0.44	0.1046	4.6	1.0598	5.98	9.80947
		2	0.9956	-0.44	0.1061	6.1	1.0598	5.98	9.73271
		3	0.9956	-0.44	0.1064	6.4	1.0597	5.97	9.70763
		4	0.9956	-0.44	0.1065	6.5	1.0597	5.97	9.70177
11	8	1	0.6388	-36.12	0.4083	308.3	1.8112	81.12	53.7946
		2	0.6583	-34.17	0.5478	447.8	1.8197	81.97	53.9383
		3	0.6543	-34.57	0.5676	467.6	1.8229	82.29	54.2641
		4	0.6537	-34.63	0.5726	472.6	1.8225	82.25	54.3316

Tabela 4.6. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.8) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$ przy różnych zbiorach odtworzenia drugiej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia II-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=1$, $b=0.1$, $c=1$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
5	512	1	0.9999	-0.01	0.1001	0.1	1.0002	0.02	0.07665
		2	0.9999	-0.01	0.1001	0.1	1.0002	0.02	0.07665
		3	1.0000	0.0	0.1001	0.1	1.0002	0.02	0.03497
		4	0.9999	-0.01	0.1001	0.1	1.0002	0.02	0.07665
7	128	1	0.9997	-0.03	0.1004	0.4	1.0037	0.37	0.69994
		2	1.0001	0.01	0.1004	0.4	1.0037	0.37	0.52349
		3	1.0020	0.2	0.1003	0.3	1.004	0.4	0.33792
		4	1.0003	0.03	0.1004	0.4	1.0037	0.37	0.43673
9	32	1	0.9956	-0.44	0.1046	4.6	1.0598	5.98	9.80947
		2	1.0024	0.24	0.1052	5.2	1.0605	6.05	7.36831
		3	1.0271	2.71	0.1081	8.1	1.0607	6.07	4.0758
		4	1.0040	0.4	0.1054	5.4	1.0606	6.06	6.77747
11	8	1	0.6388	-36.12	0.4083	308.3	1.8112	81.12	53.7946
		2	0.6639	-33.61	0.4781	378.1	1.8100	81.00	53.3256
		3	0.6184	-38.16	0.8451	745.1	1.7301	73.01	59.6729
		4	0.6709	-32.91	0.4854	385.4	1.8105	81.05	53.1913

4.3.4. Identyfikacja parametrów układu liniowego i nieliniowego z zakłóceniami

Możliwe losowe zakłócenia w mierzonym sygnale $q(t)$ generowano – jak już wcześniej wspomniano – używając rozkładu równomiernego i losując liczby z zakresu $\pm 3\%$, $\pm 5\%$ i $\pm 10\%$ wartości amplitudy q_i , które następnie dodawano do q_i . Wyniki identyfikacji parametrów modelu liniowego (4.10) przy uwzględnieniu losowych zakłóceń sygnału q_i i niezakłóconym wymuszeniu pokazano odpowiednio w tabelach 4.7 i 4.8 (przy $\pm 3\%$ amplitudzie zakłócenia), tabelach 4.9 i 4.10 (przy $\pm 5\%$ amplitudzie zakłócenia) i tabelach 4.11 i 4.12 (przy $\pm 10\%$ amplitudzie zakłócenia) dla różnych postaci schematów różnicowych obliczania pierwszych i drugich pochodnych. Tabele 4.9 – 4.12 zestawiono w załączniku. Wyniki identyfikacji parametrów modelu nieliniowego (4.8) przy uwzględnieniu losowych zakłóceń sygnału q_i i niezakłóconym wymuszeniu pokazano odpowiednio w tabelach 4.13. i 4.14. (przy $\pm 3\%$ amplitudzie zakłócenia), tabelach 4.15 i 4.16 (przy $\pm 5\%$ amplitudzie zakłócenia) i tabelach 4.17 i 4.18 (przy $\pm 10\%$ amplitudzie zakłócenia) dla różnych postaci schematów różnicowych obliczania pierwszych i drugich pochodnych. Tabele 4.15 – 4.18 zestawiono w załączniku. Z zestawienia wyników widać, że proces filtracji pakietowej analizy Walsha jest wystarczający do identyfikacji parametrów modelu, tutaj przy $l = 16$ i $l = 32$ odpowiednio dla modelu liniowego i nieliniowego. W przeciwieństwie do wyników analiz układów bez losowych zakłóceń, tutaj błąd globalny rozwiązania δ zależy od bloku danych, który jest podstawą odtwarzania pochodnych. Okazuje się, że na niższych etapach pakietowej analizy falkowej błąd ten jest mniejszy, jeżeli w analizie wykorzystamy pierwsze bloki na podstawie których można odtworzyć najwyższą w równaniu występującą pochodną. Na wyższych etapach analizy pakietowej błąd ten jest podobny dla różnych bloków danych wykorzystywanych przy odtwarzaniu najwyższej pochodnej. Wybór bloków, na podstawie których uzyskujemy niższe pochodne nie ma istotnego wpływu na otrzymywane wyniki. Ogólnie można stwierdzić, że o dokładności rozwiązania decyduje głównie podstawa, jaką przyjmuje się do odtworzenia najwyższej – w równaniu występującej – pochodnej.

Przyczyną zależności błędu δ rozwiązania od bloku danych na niższych etapach analizy pakietowej są stosowane do ich uzyskania różne sekwencje filtrów dolno- i górnoprzepustowych. Wcześniejsze zastosowanie filtra dolnoprzepustowego skutkuje – w przypadku tutaj analizowanych układów z zakłóceniami – wygładzeniem sygnału

(częściowym odfiltrowaniem wprowadzonych zakłóceń) i tym samym efekt następującego filtrowania górnoprzepustowego jest obarczony mniejszym błędem. Obliczanie pochodnych sygnałów gładkich daje lepsze rezultaty numeryczne od filtrowania dolnoprzepustowego pochodnych obliczonych na podstawie sygnałów zakłóconych.

Błąd globalny δ identyfikacji układów z zakłóceniami jest funkcją etapu n pakietowej analizy falkowej, który jest podstawą odtwarzania sygnału i jego pochodnych. Każdy kolejny etap n dostarcza danych, z których w wyniku filtrowania są sukcesywnie eliminowane zakłócenia, co w procesie identyfikacji jest pożądane. Jednocześnie – wraz ze wzrostem n – istotnie zmniejsza się liczebność zbiorów będących podstawą procedury identyfikacji, co w oczywisty sposób rzutuje na wzrost błędu δ . Wybór etapu analizy pakietowej sygnałów z zakłóceniami, który jest podstawą identyfikacji jest zawsze pewnym kompromisem między liczebnością zbiorów i ich jakością mierzoną wielkością nie wyeliminowanych zakłóceń.

Tabela 4.7. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.10) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$
oraz 3% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia pierwszej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia I-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=2$, $b=0.1$, $c=5$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
9	32	1	1.8543	-7.285	0.1150	15.0	4.5362	-9.276	13.8069
		2	1.8544	-7.28	0.1148	14.8	4.5370	-9.26	13.7628
		3	1.8546	-7.27	0.1149	14.9	4.5366	-9.268	13.8204
		4	1.8517	-7.415	0.1171	17.1	4.5370	-9.26	13.3302
10	16	1	1.9253	-3.735	0.1166	16.6	5.0089	0.178	11.2704
		2	1.9255	-3.725	0.1182	18.2	5.0092	0.184	11.2503
		3	1.9256	-3.72	0.1183	18.3	5.0104	0.208	11.312
		4	1.9261	-3.695	0.1190	19.0	5.0104	0.208	11.2373
11	8	1	1.8436	-7.82	0.1058	5.8	5.1364	2.728	30.3894
		2	1.8437	-7.815	0.1113	11.3	5.1367	2.734	30.239
		3	1.8440	-7.8	0.1127	12.7	5.1372	2.744	30.1889
		4	1.8441	-7.795	0.1130	13.0	5.1383	2.766	30.2277

Tabela 4.8. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.10) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$ oraz 3% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia drugiej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia II-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=2$, $b=0.1$, $c=5$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
9	32	1	1.8543	-7.285	0.1150	15.0	4.5362	-9.276	13.8069
		2	1.4247	-28.765	0.0803	-19.7	4.2365	-15.27	45.8409
		3	0.5807	-70.965	0.2045	104.5	2.6727	-46.546	84.7283
		4	0.6437	-67.815	0.1142	14.2	2.7391	-45.218	102.338
10	16	1	1.9253	-3.735	0.1166	16.6	5.0089	0.178	11.2704
		2	1.9426	-2.87	0.0907	-9.3	4.9826	-0.348	7.5738
		3	1.9131	-4.345	0.1023	2.3	4.6667	-6.666	12.2938
		4	1.832	-8.4	0.0026	-97.4	4.7748	-4.504	19.1333
11	8	1	1.8436	-7.82	0.1058	5.8	5.1364	2.728	30.3894
		2	1.8917	-5.415	0.1049	4.9	5.1712	3.424	25.8861
		3	2.0089	0.445	0.1181	18.1	5.2496	4.992	14.9467
		4	1.8952	-5.24	0.1174	17.4	5.1531	3.062	24.1321

Tabela 4.13. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.8) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$ oraz 3% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia pierwszej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia I-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=1$, $b=0.1$, $c=1$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
9	32	1	1.0076	0.760	0.0836	-16.4	1.0526	5.26	6.28077
		2	1.0076	0.760	0.0851	-14.9	1.0525	5.26	6.0566
		3	1.0074	0.740	0.0846	-15.4	1.0524	5.24	6.18245
		4	1.0072	0.720	0.0851	-14.9	1.0526	5.26	6.20657
10	16	1	0.9646	-3.540	0.0943	-5.7	1.2375	23.75	32.5297
		2	0.9637	-3.630	0.0940	-6.0	1.2379	23.79	32.7439
		3	0.9636	-3.640	0.0941	-5.9	1.2378	23.78	32.7466
		4	0.9633	-3.670	0.0941	-5.9	1.2376	23.76	32.7907
11	8	1	0.6395	-36.050	0.4081	308.1	1.8112	81.12	53.775
		2	0.6589	-34.110	0.5480	448.0	1.8195	81.95	53.9198
		3	0.6548	-34.520	0.5655	465.5	1.8228	82.28	54.2266
		4	0.6553	-34.470	0.5734	473.4	1.8221	82.21	54.2819

Tabela 4.14. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.8) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$ oraz 3% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia drugiej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia II-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=1$, $b=0.1$, $c=1$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
9	32	1	1.0076	0.760	0.0836	-16.4	1.0526	5.26	6.28077
		2	0.9783	-2.170	0.0841	-15.9	1.0500	5.00	16.6554
		3	0.9016	-9.840	0.1384	38.4	0.9946	-0.54	27.6119
		4	0.9143	-8.570	-0.0138	-113.8	0.9859	-1.41	47.2368
10	16	1	0.9646	-3.540	0.0943	-5.7	1.2375	23.75	32.5297
		2	0.9861	-1.390	0.0551	-44.9	1.2252	22.52	33.174
		3	1.0737	7.370	-0.0835	-183.5	1.1846	18.46	60.7616
		4	1.0045	0.450	0.0356	-64.4	1.2736	27.36	36.2596
11	8	1	0.6395	-36.050	0.4081	308.1	1.8112	81.12	53.775
		2	0.6651	-33.490	0.4784	378.4	1.8087	80.87	53.2921
		3	0.6197	-38.030	0.8512	751.2	1.7304	73.04	59.7377
		4	0.6673	-33.270	0.4795	379.5	1.8099	80.99	53.2505

4.3.5. Identyfikacja parametrów układów liniowych i nieliniowych opisanych równaniami czwartego rzędu

We wcześniejszych przykładach identyfikowane były parametry równań niskiego, drugiego rzędu, które są charakterystyczne dla matematycznych opisów dynamicznych układów dyskretnych. Załóżmy teraz, że matematycznego opisu pomierzonych wielkości (q_i, f_i) szukamy w klasie równań różniczkowych rzędu czwartego. Niech przykładowe równania, których stałych współczynników poszukujemy, mają postać:

$$a\overset{....}{q}(t)+b\overset{...}{q}(t)+c\overset{..}{q}(t)+d\overset{.}{q}(t)+eq(t)=f(t) \quad (4.12)$$

$$a\overset{....}{q}(t)+b\overset{...}{q}(t)+c\overset{..}{q}(t)+d\overset{.}{q}(t)+eq^3(t)=f(t) \quad (4.13)$$

odpowiednio dla przykładowego zagadnienia liniowego i nieliniowego.

Podobnie jak poprzednio wyniki identyfikacji parametrów tych równań dla różnych etapów analizy pakietowej n sygnału o liczebności $N=16384$ pokazano w tabelach 4.19 do 4.22 (tabele 4.20 do 4.22 zestawiono w załączniku) oraz w tabelach 4.23 do 4.26 (tabele 4.24 do 4.26 zestawiono w załączniku) odpowiednio dla modelu liniowego (4.12) i nieliniowego (4.13) przy $f(t)=11\cos(t)$ i niezakłóconej losowo odpowiedzi.

Wyniki przykładowej analizy losowo zakłóconego sygnału (o amplitudzie zakłóceń $\pm 0,001\%$, $\pm 0,02\%$) odpowiedzi układu (4.12) i (4.13) przy różnych wariantach schematów różnicowych wykorzystywanych do obliczania drugiej i czwartej pochodnej przedstawiono odpowiednio w tabelach 4.27 do 4.30 oraz od 4.31 do 4.34. Tabele 4.27 do 4.34 zestawiono w załączniku. W przykładzie testowano różne wartości losowych zakłóceń, ale tylko dla amplitud nie przekraczających $\pm 0,02\%$ uzyskiwano zadowalające rezultaty identyfikowanych parametrów. W analizach tych przyjęto identyczną, jak przy analizie równań rzędu drugiego, zasadę odtwarzania pozostałych (nie wymienionych w trzecich kolumnach tabel) pochodnych występujących w modelu. Analizując otrzymane wyniki łatwo zauważyć, że układy z pochodnymi wyższych rzędów są bardzo wrażliwe na losowe zaburzenia sygnału. Tylko przy bardzo niewielkich zakłóceniach możliwe jest poprawne identyfikowanie szukanych parametrów – dla układu liniowego błąd względny nie

przekracza 2.5% – tabele 4.27 i 4.28, 11-sty poziom analizy, pierwszy blok współczynników przyjęty do odtwarzania pochodnych. Przy wyższych zakłóceniach błąd względny dochodzi do 31% – tabele 4.29 oraz 4.30, 11-sty poziom analizy, pierwszy blok współczynników przyjęty do odtwarzania pochodnych.

Analiza otrzymanych wyników zarówno, w przypadku bez losowych zakłóceń jak i z tymi zakłóceniami, w pełni potwierdza wnioski sformułowane dla analogicznych zadań z modelami o pochodnych niższych rzędów.

Określanie wysokich pochodnych pomierzonego sygnału jest często bardzo trudne. Biorąc pod uwagę słabe rezultaty, jakie uzyskuje się w identyfikacji poszukiwanych parametrów, zwykle unika się odtwarzania pochodnych wyższego rzędu [138].

Pakietowa analiza sygnału z wykorzystaniem bazy Walsha pozwala na skuteczne wyznaczenie postaci jego wysokich pochodnych, które umożliwiają – jak pokazano w tabelach 4.19 do 4.26 – identyfikację parametrów modeli. Dla modeli z wysokimi rzędami pochodnych sygnału, proces identyfikacji wymaga szczególnej uwagi przy doborze etapu n analizy pakietowej, którego współczynniki stanowią podstawę do odtworzenia sygnału i jego pochodnych, a przy wyborze tego etapu niezbędna jest analiza globalnego błędu rozwiązania δ .

Z uwagi na to, że podstawowym elementem decydującym o skuteczności procedury identyfikacji – szczególnie w analizie prowadzonej na podstawie sygnałów zakłóconych – jest wyznaczenie najwyższej w modelu występującej pochodnej, istnieje potrzeba poszukiwania takich rozwiązań, które obniżają rząd generowanych pochodnych. W rozdziale piątym zaproponowano takie rozwiązanie.

Tabela 4.19. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.12) dla $N = 16384$ przy różnych zbiorach odtworzenia pierwszej pochodnej

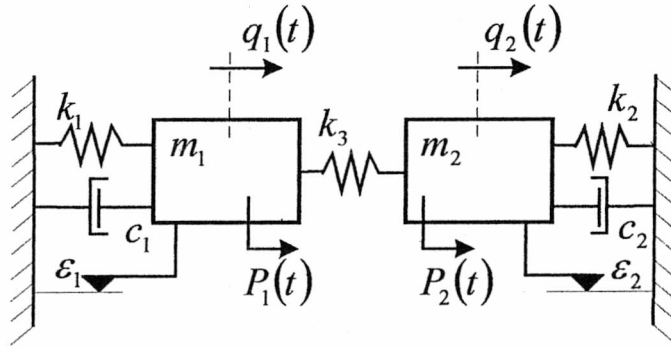
Poziom n falkowej analizy pakieto- wej	Liczba elemen- tów l	Kolejny zbiór odtworzenia I-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=30, b=8, c=15, d=6, e=2$)										Błąd δ %
			a		b		c		d		e		
			Estyma- cja	Błąd λ_a %	Estyma- cja	Błąd λ_b %	Estyma- cja	Błąd λ_c %	Estyma- cja	Błąd λ_d %	Estyma- cja	Błąd λ_e %	
9	32	1	28.7604	-4.132	8.5151	6.4387	13.1979	-12.014	6.4462	7.4366	1.4703	-26.485	2.9918
		2	28.7604	-4.132	8.5052	6.315	13.1979	-12.014	6.4462	7.4366	1.4703	-26.485	3.0012
		3	28.7604	-4.132	8.5028	6.285	13.1979	-12.014	6.4462	7.4366	1.4703	-26.485	3.0036
		4	28.7604	-4.132	8.5022	6.2775	13.1979	-12.014	6.4462	7.4366	1.4703	-26.485	3.0042
10	16	1	30.2587	0.8623	7.8769	-1.5387	15.2979	1.986	5.8915	-1.8083	2.0784	3.92	0.2583
		2	30.2587	0.8623	7.8409	-1.9887	15.2978	1.985	5.8915	-1.8083	2.0784	3.92	0.2480
		3	30.2587	0.8623	7.8320	-2.1	15.2979	1.986	5.8915	-1.8083	2.0784	3.92	0.2668
		4	30.2587	0.8623	7.8298	-2.1275	15.2979	1.986	5.8915	-1.8083	2.0784	3.92	0.2726
11	8	1	30.6317	2.10567	8.1040	1.3	15.2567	1.7113	6.1269	2.115	2.0468	2.34	1.3354
		2	30.6312	2.104	7.9535	-0.5812	15.2556	1.704	6.1269	2.115	2.0464	2.32	0.6538
		3	30.6319	2.1063	7.9173	-1.0337	15.2569	1.7126	6.1269	2.115	2.0469	2.345	0.5087
		4	30.6321	2.107	7.9083	-1.1462	15.2573	1.7153	6.1269	2.115	2.0471	2.355	0.5089

Tabela 4.23. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.13) dla $N = 16384$ przy różnych zbiorach odtworzenia pierwszej pochodnej

Poziom <i>n</i> falkowej analizy pakieto- wej	Liczba elemen- tów <i>l</i>	Kolejny zbiór odtworzenia I- <i>e</i> - j pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: <i>a</i> =30, <i>b</i> =8, <i>c</i> =15, <i>d</i> =6, <i>e</i> =2)										Błąd <i>δ</i> %
			<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>		<i>d</i>		<i>e</i>		
			Estyma- cja	Błąd <i>λ_a</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_b</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_c</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_d</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_e</i> %	
8	64	1	27.2284	-9.2386	9.4888	18.61	12.3	-18.0	6.3675	6.125	1.8813	-5.935	10.9342
		2	27.2284	-9.2386	9.4863	18.578	12.3	-18.0	6.3674	6.123	1.8813	-5.935	10.9567
		3	27.2284	-9.2386	9.4857	18.571	12.3	-18.0	6.3675	6.125	1.8813	-5.935	10.9626
		4	27.2284	-9.2386	9.4856	18.57	12.3	-18.0	6.3675	6.125	1.8813	-5.935	10.9635
9	32	1	30.0223	0.0743	7.2884	-8.895	15.3619	2.4126	5.5805	-6.9916	1.9930	-0.35	2.1977
		2	30.0223	0.0743	7.2798	-9.0025	15.362	2.4133	5.5805	-6.9916	1.9930	-0.35	2.2445
		3	30.0223	0.0743	7.2777	-9.0287	15.3619	2.4126	5.5805	-6.9916	1.9930	-0.35	2.2572
		4	30.0223	0.0743	7.2772	-9.035	15.3619	2.4126	5.5805	-6.9916	1.9930	-0.35	2.2600
10	16	1	30.8831	2.9436	6.6443	-16.946	15.9678	6.452	5.3957	-10.071	2.0611	3.055	3.1001
		2	30.8832	2.944	6.6111	-17.361	15.968	6.453	5.3956	-10.073	2.0611	3.055	3.2047
		3	30.883	2.9433	6.6032	-17.46	15.9677	6.451	5.3957	-10.071	2.0611	3.055	3.2336
		4	30.883	2.9433	6.6013	-17.483	15.9676	6.450	5.3958	-10.07	2.0611	3.055	3.2406
11	8	1	35.0627	16.8757	-0.6871	-108.58	22.2087	48.058	1.5182	-74.696	2.3337	16.685	15.7123
		2	35.0628	16.876	-0.7249	-109.06	22.2091	48.060	1.5177	-74.705	2.3337	16.685	15.792
		3	35.0627	16.8757	-0.7333	-109.16	22.2086	48.057	1.5182	-74.696	2.3337	16.685	15.8095
		4	35.0626	16.8753	-0.7353	-109.19	22.2085	48.056	1.5184	-74.693	2.3337	16.685	15.8124

4.3.6. Identyfikacja parametrów układu o dwóch stopniach swobody z tarciem suchym

Jednym z testowych zadań procedur identyfikacji wykorzystywanych w literaturze jest problem identyfikacji parametrów układu o dwóch stopniach swobody z wiskotycznym i suchym tarciem Coulomba [24, 41]. Schemat tego zadania pokazano na rysunku 4.18.



Rys. 4.18. Schemat układu z tarciem wiskotycznym i tarciem suchym

Jeżeli funkcję znaku (*sign*) zdefiniujemy jako

$$\text{sign} = \begin{cases} +1 & \text{dla } \dot{q}(t) > 0 \\ 0 & \text{dla } \dot{q}(t) = 0 \\ -1 & \text{dla } \dot{q}(t) < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

to równania drgań układu przedstawionego na rysunku 4.18 można zapisać jako

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1(t) + c_1 \dot{q}_1(t) + \varepsilon_1 \text{sign}(\dot{q}_1) + (k_1 + k_3)q_1(t) - k_3 q_2(t) &= P_1(t) \\ m_2 \ddot{q}_2(t) + c_2 \dot{q}_2(t) + \varepsilon_2 \text{sign}(\dot{q}_2) + (k_2 + k_3)q_2(t) - k_3 q_1(t) &= P_2(t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

W trakcie identyfikacji parametrów równania (4.15) zauważono, że otrzymywane rezultaty nieznacznie zmieniają się w zależności od wyboru czasu próbkowania odpowiedzi układu. W tabeli 4.35 przedstawiono wyniki identyfikacji wszystkich dziewięciu parametrów układu w czterech kolejnych (poczynając od $t=0$) przedziałach czasu ($\Delta t = 0.1$) obserwacji układu. Identyfikację przeprowadzono na podstawie sygnałów

o małej liczebności $N = 512$ elementów, na podstawie pochodnych odtwarzanych z drugiego etapu analizy pakietowej. Jako wielkości testowe przyjęto: $m_1 = m_2 = 1.0$, $c_1 = c_2 = 10.0$, $k_1 = k_2 = k_3 = 10000.0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1.0$, $P_1(t) = 7.5 \cos(105t)$, $P_2(t) = 7.5 \cos(95t)$ i wszystkie zerowe warunki początkowe. Z uwagi na to, że procedura identyfikacji większej liczby parametrów jest z reguły trudniejsza, a rozwiązania zwykle mniej dokładne zdecydowano się – w celu pokazania realnych możliwości proponowanej procedury – identyfikować wszystkie parametry (w literaturze zwykle przynajmniej dwa z nich przyjmuje się jako znane), a analizę prowadzono przy małym N .

Tabela 4.35. Wyniki identyfikacji układu (4.15) w kolejnych przedziałach czasu obserwacji
 $\Delta t = 0.1$

Przedział czasu	Identyfikowane parametry (wartości ściśle $m_1 = m_2 = 1.0$; $c_1 = c_2 = 10.0$; $k_1 = k_2 = 10000.0$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1.0$)								
	m_1	m_2	c_1	c_2	k_1	k_2	k_3	ε_1	ε_2
$0 \leq t < 0.1$	0.9875	0.9926	11.4540	11.9022	9875.2	9935.0	10047.1	1.0922	1.0654
$0.1 \leq t < 0.2$	1.0052	0.9949	11.7998	11.9002	10081.1	9924.7	10183.2	0.9850	1.0602
$0.2 \leq t < 0.3$	1.0279	1.0044	11.6680	11.9927	10299.5	9997.6	10159.8	1.0627	1.0453
$0.3 \leq t < 0.4$	0.9920	0.9744	11.7766	12.1457	9843.9	9726.0	9959.5	0.9264	0.9142

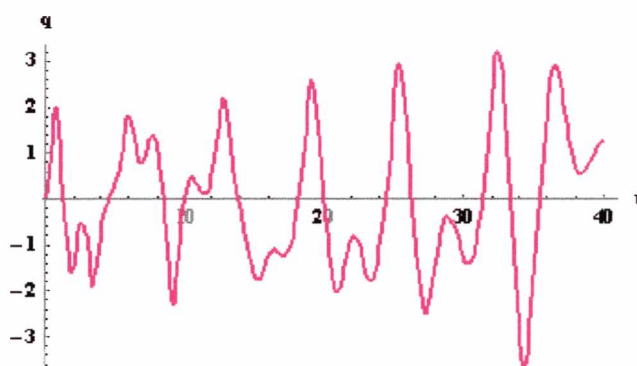
Można przyjąć, że wyniki identyfikacji układu przedstawione w tabeli 4.35 są – przy tak dużej liczbie parametrów i nielicznym zbiorze danych – zadowalające, choć należy podkreślić fakt ich pogarszania się wraz z upływem czasu obserwacji układu. Problem pogarszania się wyników tego układu omówiony będzie w punkcie 4.4 tego rozdziału.

Należy podkreślić, że w prezentowanych testach numerycznych procedury identyfikacji dyskretnych układów dynamicznych przyjmowano zwykle harmoniczne wymuszenia drgań, co w stosunku do innego typu obciążeń stawia większe wymagania stosowanej procedurze. W zadaniach identyfikacji parametrów układów przy obciążeniu w postaci funkcji Heaviside'a (model nagle przyłożonego, stałego obciążenia konstrukcji), bądź obciążenia w postaci impulsu (modelowanego różnymi od zera prędkościami początkowymi) prezentowana procedura daje również zadowalające rezultaty.

4.3.7. Identyfikacja parametrów układu nieliniowego o wolno zmiennych w czasie parametrach

Dotychczas procedurę identyfikacji bazującą na odtwarzaniu pochodnych przy pomocy pakietowej, falkowej analizy Walsha stosowano tutaj do szukania parametrów stałych w czasie obserwacji. Nic nie stoi na przeszkodzie, żeby sposób ten zastosować do analizy układów z parametrami wolno zmiennymi, jeżeli tylko do identyfikacji parametrów wystarczająca jest ich odcinkowo stała aproksymacja. Przyjmując ustalony podział sygnału na równoliczne zbiory, można stosowane podejście wykorzystać do identyfikacji parametrów na podstawie każdego z tych zbiorów.

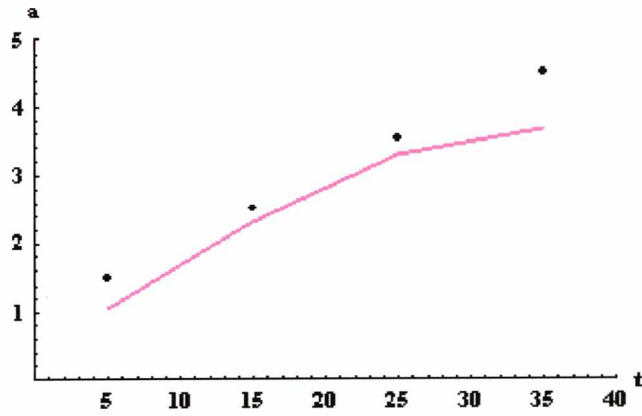
Przykładem identyfikacja układu o wolno zmiennych parametrach będzie analiza równania (4.8) przy założeniu, że $a = 1.0 + t/10$, $b = 0.1$ i $c = 5.0 - t/10$, przy zerowych warunkach początkowych i czasie obserwacji $t = 40\text{sek.}$ Podstawę identyfikacji stanowił ciąg $N=32768$ pomiarów siły wymuszającej i odpowiedzi układu przedstawionej na rysunku 4.19.



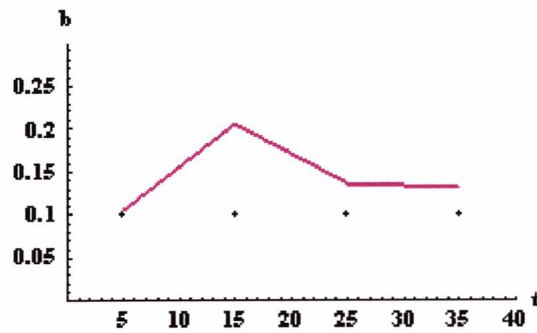
Rys. 4.19. Odpowiedź $q(t)$ równania (4.8) przy $a = 1.0 + t/10$, $b=0.1$ i $c = 5.0 - t/10$

Jeżeli identyfikację poszukiwanych parametrów prowadzić będziemy na podstawie całego ciągu danych, to otrzymany wynik będzie pewną wypadkową zmieniających się w czasie parametrów, które tutaj przyjmują następujące wartości: $a=0.41609$, $b=0.1057$ i $c=0.6092$.

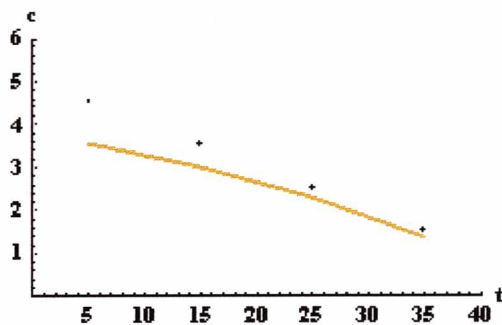
Jeżeli czas obserwacji podzielimy na cztery równe odcinki, to otrzymamy przedstawioną na rysunkach od 4.20 do 4.22 aproksymację poszukiwanych parametrów a , b i c . Na rysunkach tych linią ciągłą oznaczono wynik identyfikacji, a kropkami przedstawiono rozwiązanie ścisłe.



Rys. 4.20 Wynik identyfikacji parametru a równania (4.8) przy $a = 1.0 + t/10$, $b = 0.1$
i $c = 5.0 - t/10$



Rys. 4.21 Wynik identyfikacji parametru b równania (4.8) przy $a = 1.0 + t/10$, $b = 0.1$
i $c = 5.0 - t/10$



Rys. 4.22 Wynik identyfikacji parametru c równania (4.8) przy $a = 1.0 + t/10$, $b = 0.1$
i $c = 5.0 - t/10$

Przedstawiono wyniki jedynie dla nielicznego podziału czasu obserwacji i nie dużej częstości próbkowania. Zwiększając częstość próbkowania sygnału i liczbę podziału czasu obserwacji otrzymuje się wyniki zbieżne do dokładnych.

4.4. Kryteria wyboru modelu matematycznego i czasu obserwacji odpowiedzi układu

Jednym z podstawowych problemów, który pojawia się w trakcie identyfikacji, jest stosowny dobór modelu matematycznego identyfikowanego zadania. Problem ten szczególnie dotyczy procesów identyfikacji zagadnień nieliniowych, których model matematyczny nie jest oczywisty. Zwykle w literaturze wykorzystywanym kryterium doboru modelu jest warunek minimalizacji średniego błędu kwadratowego (MSE) przyspieszeń [68, 41]. Odpowiednikiem tego podejścia w tej pracy jest minimalizacja błędu, który przy znanym, danym dyskretnym sygnale wejściowym i odpowiedzi zidentyfikowanego modelu przyjmuje następującą postać:

$$\delta^{(p)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (q_i^{(p)} - \bar{q}_i^{(p)})^2}{\sum_{i=1}^N (q_i^{(p)})^2}} \cdot 100\% \quad (4.16)$$

gdzie $p = 0, 1, 2$ i oznacza rząd pochodnej sygnału i odpowiedzi po czasie, a N jest liczebnością sygnału wejściowego. Oczywiście, przy $p=0$ błąd ten jest identyczny z błędem danym relacją (4.11).

Jak się okazuje tak zdefiniowana, oczywista relacja będąca miarą błędów względnych rozwiązania w całym czasie trwania sygnału wejściowego, jest co najmniej równie skuteczna w ocenie przyjętej struktury modelu matematycznego jak MSE, w którego mianowniku (w odróżnieniu od (4.16) przy $p = 2$) występuje kwadrat odchylenia standardowego przyspieszenia.

Próba oceny poprawności wyboru struktury identyfikowanego modelu matematycznego za pomocą relacji (4.16) będzie pokazana na przykładzie następującego nieliniowego równania różniczkowego:

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t)^3 + k \sin(q(t)) = F(t) \quad (4.17)$$

w którym przykładowo przyjęto: $m = 2$, $c = 0.5$, $k = 5$, $F(t) = 10 \cos(5t)$ i zerowe warunki początkowe.

Sygnał wejściowy, który wraz ze znaną siłą $F(t)$ jest podstawą identyfikacji, otrzymano na podstawie dyskretnego pomiaru (ze stałą częstotliwością) zmiennej $q(t)$ w czasie $t=5\text{sek}$ tak, że sygnał jest reprezentowany przez 1024 elementowy ciąg liczb. Identyfikację prowadzono na niezbyt licznych zbiorze danych, w celu pokazania, że i w takiej sytuacji proponowane podejście jest skuteczne. Wyniki identyfikacji wraz błędami $\delta^{(p)}$ przy różnych strukturach modelu matematycznego zadania przedstawiono w tabeli 4.36.

W tabeli 4.36 zestawiono wyniki otrzymane dla modelu (4.17) oraz dla następujących modeli matematycznych, w których zmieniano opis członu tego równania związanego z $\dot{q}$

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t)^1 + k \sin(q(t)) = F(t) \quad (4.18)$$

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t)^2 + k \sin(q(t)) = F(t) \quad (4.19)$$

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t)^4 + k \sin(q(t)) = F(t) \quad (4.20)$$

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t)^5 + k \sin(q(t)) = F(t) \quad (4.21)$$

Tabela 4.36. Wyniki identyfikacji modeli danych relacjami od (4.17) do (4.21)

Model dany równaniem	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $m=2$, $c=0.5$, $k=5$)			Wartości błędów $\delta^{(p)}$ %		
	m	c	k	$\delta^{(0)}$	$\delta^{(1)}$	$\delta^{(2)}$
(4.17)	2.020921	0.4816600	5.380305	5.857	2.219	15.985
(4.18)	1.9646	0.8967	4.1763	8.35	4.8640	4.493
(4.19)	1.9749	-0.017	4.3918	44.506	14.63	7.522
(4.20)	1.968	-0.0163	4.2530	45.5931	14.72	7.567
(4.21)	2.0144	0.2341	5.33	5.55	3.207	2.296

Analizując wyniki przedstawione w tabeli 4.36 łatwo można zauważyć, że decyzja o tym, który z przyjętych modeli najlepiej odpowiada danym wejściowym nie powinna być wyłącznie podejmowana na podstawie wielkości błędu $\delta^{(2)}$ jak się sugeruje w cytowanej wcześniej literaturze. Przyjęcie $\delta^{(2)}$ jako wyłącznej podstawy oceny może prowadzić do błędnego wyboru matematycznego modelu identyfikowanego problemu. Lepszą decyzję

w kwestii wyboru struktury modelu można podjąć analizując wielkości błędów $\delta^{(0)}$ i $\delta^{(1)}$. Oczywiście – co z łatwością można potwierdzić przy bardziej licznych zbiorach danych i wyższym stopniu aproksymacji – przy poprawnie wybranej strukturze modelu wszystkie trzy miary błędu ($\delta^{(0)}$, $\delta^{(1)}$ i $\delta^{(2)}$) osiągają wartości najmniejsze.

W tabeli 4.37 zestawiono wyniki otrzymane dla modelu (4.17) – przy parametrach jak w poprzedniej analizie – oraz dla następujących modeli matematycznych, w których uwzględniano kolejne wyrazy szeregu Taylora rozwinięcia członu równania (4.17) opisującego sztywność drgającego układu:

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t)^3 + kq(t) = F_1(t) \quad (4.22)$$

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t)^3 + k[q(t) - q(t)^3/6] = F_1(t) \quad (4.23)$$

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t)^3 + k[q(t) - q(t)^3/6 + q(t)^5/120] = F_1(t) \quad (4.24)$$

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t)^3 + k[q(t) - q(t)^3/6 + q(t)^5/120 - q(t)^7/5040] = F_1(t) \quad (4.25)$$

W relacjach (4.22) do (4.25) przyjęto, że $F_1(t) = 100 \cos(5t)$, a identyfikację prowadzono na podstawie danych uzyskanych przy tej samej częstotliwości próbkowania sygnału (jego początkowych 5 sek.) jak w zadaniu poprzednim.

Tabela 4.37. Wyniki identyfikacji modeli danych relacjami (4.17) (przy $F_1(t)$) oraz relacjami (4.22) do (4.25).

Model dany równaniem	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $m = 2$, $c = 0.5$, $k = 5$)			Wartości błędów $\delta^{(p)}$ %		
	m	c	k	$\delta^{(0)}$	$\delta^{(1)}$	$\delta^{(2)}$
(4.17)	2.06481939	0.51209949	5.8371750	2.24045	1.275648	2.328348
(4.22)	2.0420756	0.5126442	4.09555	3.21327	1.2396	1.7015
(4.23)	2.0694101	0.51198	6.1078	2.09055	1.2970	9.9861
(4.24)	2.064585	0.512105	5.824616	2.2474	1.2748	2.32099
(4.25)	2.064826	0.51209932	5.837533	2.24026	1.27566	2.328564

Wyniki przedstawione w tabeli 4.37 potwierdzają wcześniej sformułowane spostrzeżenia.

Jednym z istotnych problemów, który pojawia się w procesie identyfikacji parametrów modelu może być dobór czasu obserwacji odpowiedzi układu, co – jak wynika z przeprowadzonych doświadczeń numerycznych – jest szczególnie istotne przy identyfikacji parametrów niektórych modeli nieliniowych. Jak się okazuje w przypadku analizy układów nieliniowych, przy ocenie wartości identyfikowanych parametrów na podstawie różnych fragmentów obserwowanej odpowiedzi układu, pomocna może być klasyczna procedura badania wrażliwości.

Wrażliwość modeli matematycznych na zmiany ich parametrów jest jednym z podstawowych zagadnień w analizie układów dynamicznych, których zachowanie te modele opisują. Wiedza o wrażliwości analizowanych modeli może być kryterium dopuszczenia do praktycznego stosowania modelu, bądź jego modyfikacji. Jedną z podstaw analizy wrażliwości układu jest jego funkcja wrażliwości $S(\alpha_0)$, która wiąże wektor odchyłek $\Delta\alpha$ wektora parametrów α od jego stanu nominalnego α_0 z odchyłkami Δq wektora stanu [37]

$$\Delta q \cong S(\alpha_0)\Delta\alpha \quad (4.26)$$

Przy powyższej definicji układ nazwiemy niewrażliwym, jeżeli $S \equiv 0$ przy dowolnym $\Delta\alpha$ i $t > 0$.

Funkcje wrażliwości S_j definiuje się zwykle jako

$$S_j = \left. \frac{\partial q(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = S_j(\alpha_0) \quad (4.27)$$

Za Millerem i Murrayem [93, 94] zwykle wyróżnia się klasy problemów wrażliwości związanych ze zmianami trzech podstawowych kategorii parametrów analizowanego układu. Pierwszą klasę problemów wiąże się ze zmianami takich parametrów $\alpha_0 \neq 0$, których zmiany nie wpływają na zmianę struktury modelu – zmiany $\Delta\alpha$ tej kategorii parametrów nazywa się α -błędami, bądź α -wariacjami. Tak zwane β -błędy (β -wariacje) wiąże się ze zmianami $\Delta\beta$ warunków początkowych od ich

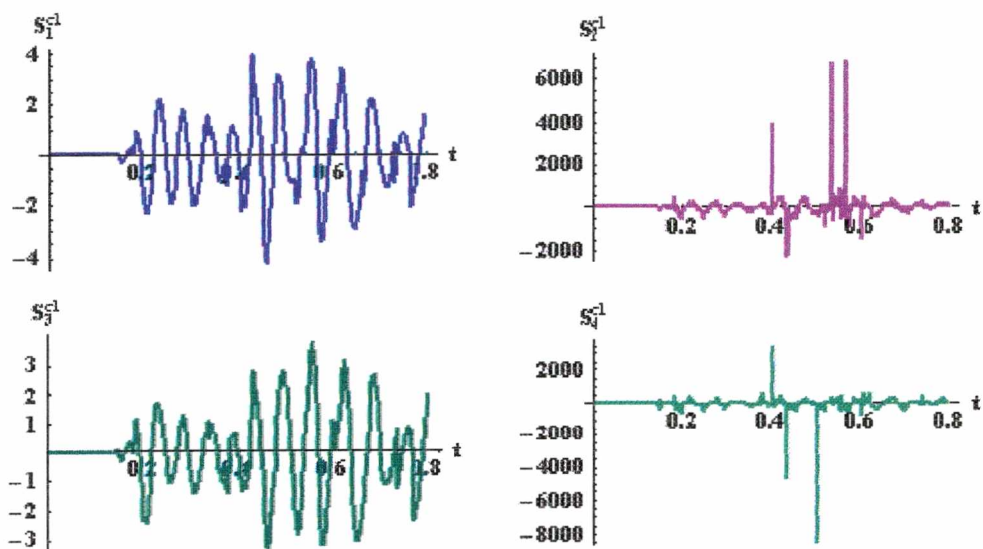
nominalnych wartości β_0 – zmiany tej kategorii parametrów stanowią kolejny obszar analiz wrażliwości układów dynamicznych. Jeżeli badamy wpływ zmian parametrów λ przy założeniu, że ich nominalne wartości $\lambda_0 = \mathbf{0}$, to tak zwane λ -błędy (λ -wariacje) wpływają na zmianę struktury analizowanego modelu matematycznego i stanowią trzeci z podstawowych obszarów analiz wrażliwości układów dynamicznych.

Z uwagi na przyjęte w pracy założenie, że podstawę identyfikacji stanowią znane wymuszenia i znana odpowiedź układu (jego sygnał), najistotniejszym zadaniem jest tutaj ocena wartości zidentyfikowanych parametrów przyjętego modelu matematycznego. Zadanie to mieści się w pierwszej klasie wymienionych wcześniej problemów wrażliwości. Przy tej ocenie pomocna może być macierz wrażliwości σ , w której zestawia się zwykle funkcje wrażliwości (4.27)

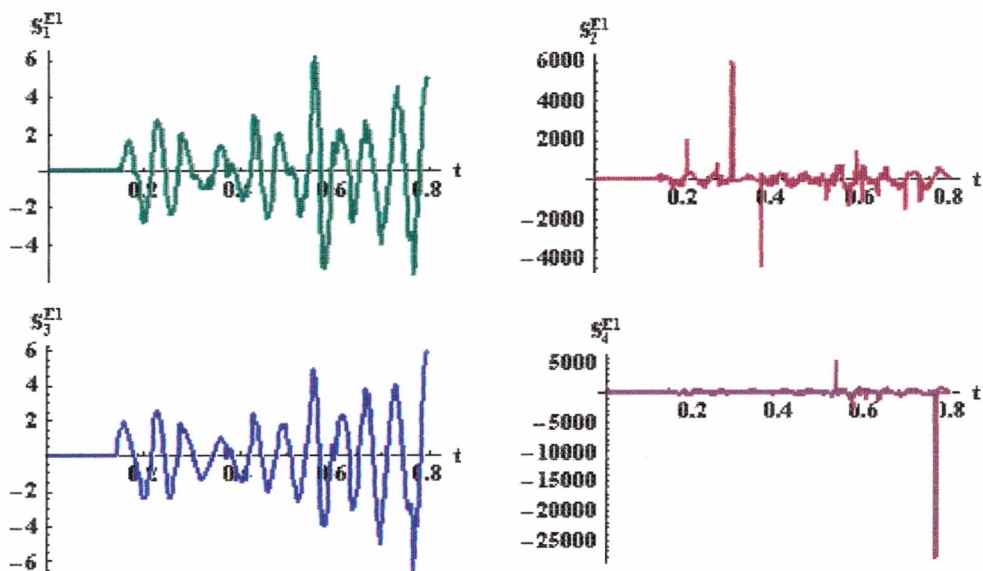
$$\sigma = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_0} = \left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} \right]_{\alpha_0} \quad (4.28)$$

gdzie $i = 1, \dots, n$ jest liczbą składowych wektora stanu $\mathbf{q}$, a $k = 1, \dots, r$ jest liczbą identyfikowanych parametrów. Analiza postaci funkcji wrażliwości macierzy wrażliwości σ może być pomocna przy ustaleniu wyboru czasu obserwacji układu, na podstawie którego można poszukiwać wartości identyfikowanych parametrów. Te zakresy czasu obserwacji, w których funkcje wrażliwości odpowiedzi układu na zmiany wybranego parametru przyjmują relatywnie duże wartości mogą skutkować błędnym oszacowaniem tego parametru, a także parametrów pozostałych (jeżeli identyfikuje się większą liczbę parametrów).

Na rysunkach 4.23 i 4.24 pokazano wybrane funkcje wrażliwości układu (4.15) odpowiednio dla parametru c_1 i ε_1 .



Rys. 4.23 Funkcje wrażliwości parametru c_1 równania (4.15)



Rys. 4.24 Funkcje wrażliwości parametru ε_1 równania (4.15)

Charakter zmienności funkcji wrażliwości wskazuje, że poprawnych wyników identyfikacji należy spodziewać się na podstawie krótkiego, początkowego czasu obserwacji drgań układu, co może stanowić uzasadnienie pogarszania się wyników przedstawionych w tabeli 4.35.

Z uwagi na to, że kształt funkcji wrażliwości zależy od postaci funkcji wymuszenia $F(t)$ [37] jednoznaczna ocena, na podstawie którego z przedziałów czasu obserwacji można spodziewać się poprawnych wyników, jest trudna.

5. PAKIETOWE BAZY FALKOWE W IDENTYFIKACJI DYSKRETNÝCH UKŁADÓW LINIOWYCH I NIELINIOWYCH

5.1 Wprowadzenie

Identyfikacja parametrów przyjętego modelu matematycznego obserwowanego zjawiska może bazować, na często w literaturze wykorzystywanej, procedurze Galerkina z funkcjami bazowymi w postaci funkcji skalujących i towarzyszących im falek.

Ostatnio Ghanem i Romeo [40, 41] wykorzystując funkcje skalujące Daubechies rzędu trzeciego i czwartego, zbudowali algorytm identyfikacji parametrów liniowych i niektórych nieliniowych układów dyskretnych. Algorytm ten wykorzystuje metodę Galerkina, która umożliwia sprowadzenie równań różniczkowych zwyczajnych do liniowych równań algebraicznych. Funkcjonowanie tego algorytmu autorzy testowali na przykładach liniowych i niektórych nieliniowych układów dyskretnych ze stałymi i wolno zmiennymi w czasie identyfikowanymi parametrami.

Podstawową niedogodnością w efektywnym stosowaniu zaproponowanego przez Ghanema i Romeo podejścia jest konieczność obliczania tak zwanych współczynników wpływu (*connection coefficients*), które są całkami z iloczynów funkcji skalujących i ich pochodnych do rzędu identyfikowanego równania włącznie. Z reguły przy obliczaniu współczynników wpływu zawodzą algorytmy numerycznego całkowania z uwagi na silnie oscylacyjny charakter pochodnych wykorzystywanych (w tym podejściu) funkcji skalujących Daubechies. Poprawne obliczenie współczynników wpływu wymaga stosowania złożonych, żmudnych procedur rekurencyjnych.

Z uwagi na granice całkowania wyróżnia się niewłaściwe współczynniki wpływu

$$\Gamma_l^d = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi^d(x) dx \text{ dla } l \in C, \text{ (o granicach całkowania w nieskończoności) i właściwe}$$

współczynniki wpływu, które posiadają skończone granice całkowania

$$\Gamma_l^d = \int_a^b \phi(x) \phi^d(x) dx \text{ dla } l \in C. \text{ Niewłaściwe współczynniki wpływu stosuje się do analizy}$$

zagadnień z okresowymi warunkami brzegowymi, natomiast zastosowanie właściwych współczynników wpływu umożliwia rozwiązywanie zagadnień o dowolnych warunkach brzegowych. Szczegółowe omówienie sposobów obliczania współczynników wpływu można znaleźć na przykład w pozycjach literaturowych Resnikoff'a i Wells'a [109] oraz Latto, Resnikoff'a i Tenenbaum'a [72]. Współczynniki wpływu prezentują również w swojej pracy Nielsen [99] oraz Romine i Peyton [111].

Istotną trudnością metody Galerkina z funkcjami bazowymi Daubechies jest uwzględnienie warunków początkowych ruchu identyfikowanych modeli. Niestety problem ten nie został przez Ghanema i Romeo rozwiązany, a tym samym procedura identyfikacji przez nich zbudowana – pomimo takiej deklaracji autorów – nie może być wykorzystywana przy rozwiązywaniu zagadnień początkowych układów liniowych i może być zawodna w identyfikacji układów nieliniowych wtedy, kiedy te układy są wrażliwe na zmiany warunków początkowych.

W rozdziale tym zaproponowano procedurę identyfikacji parametrów liniowych układów dyskretnych, bazującą na pakietach falkowych z filtrem Haara oraz na filtrowanych postaciach sygnałów wejściowych i ich pochodnych.

Jedną z wielu możliwych falkowych baz pakietowych zbudowanych na podstawie filtru Haara jest baza funkcji, z których każda określona jest na całym przedziale zmiennej niezależnej $t \in [0,1)$. Funkcje te tworzą ciąg funkcji Walsha (rozdział 2.4), które Corrington [28] jako jeden z pierwszych wykorzystał do rozwiązywania zagadnień początkowych opisywanych równaniami różniczkowymi i równaniami całkowymi. W pracy Corringtona znaleźć można pierwsze elementy później sformułowanych operacyjnych macierzy całkowania, które definiują całki z funkcji bazowych przedstawiane w bazie tych funkcji. Chen i Hsiao [20] analizując liniowe zagadnienia dynamiki, jako pierwsi pokazali postaci macierzy operacyjnych całkowania dla funkcji Walsha. Chen, Tsay i Wu [23] do analizy równań różniczkowych wykorzystywali funkcje Walsha i tak zwane funkcje blokowe, które są identyczne z funkcjami bazowymi jednej z podprzestrzeni funkcji pakietowych. Unormowane funkcje skalujące i falki Haara, które są jedną z wielu możliwych baz pakietowych, Ohkita i Kobayashi [101] i Ohkita [102] wykorzystali do rozwiązywania zagadnień początkowych opisywanych liniowymi równaniami różniczkowymi. Postacie macierzy operacyjnych całkowania funkcji skalujących i falek Haara pokazali Gu i Jiang [51]. Chen i Hsiao [21], Hsiao [61], Hsiao i Wang [57] i Chen i Hsiao [22] wykorzystując bazy falkowe Haara analizowali odpowiednio: zagadnienia początkowe równań różniczkowych bez i z opóźnieniem oraz zagadnienia optymalizacji opisywane układami równań różniczkowych o zmiennych w czasie współczynnikach. Nieliniowe układy z osobliwościami Hsiao i Wang [58] rozwiązywali wykorzystując falkowe bazy Haara. Te same funkcje bazowe Hsiao i Wang [59, 60] posłużyły do analizy systemów biliniowych i słabo uwarunkowanych systemów nieliniowych. Ostatnio Glabisz [47, 48] uogólnił dotychczas stosowane macierze operacyjne całkowania, sformułował uogólnione macierze

operacyjne całkowania dla wszystkich możliwych baz pakietowych z filtrem Haara i wykorzystał je w analizie zagadnień początkowych i brzegowych.

Zastosowanie w procedurze identyfikacji – dotychczas nie wykorzystywanych w tego typu zagadnieniach – baz funkcji pakietowych z filtrem Harra (zgodnie z uwagami z rozdziału drugiego dalej funkcje te nazywać się będzie funkcjami pakietowymi Walsha), w porównaniu ze zwykle stosowanymi w tego typu zagadnieniach funkcjami skalującymi innych falek (w szczególności falek Daubechies) pozwala na:

- obniżenie o 1 rzędu generowanych pochodnych koniecznych w procedurze identyfikacji modelu,
- wyeliminowanie żmudnych procedur generowania współczynników wpływu,
- proste uwzględnienie warunków początkowych, których uwzględnienie daje pełny opis zagadnienia i umożliwia – w miarę potrzeby – wykorzystanie procedury do całkowania zadań początkowych,
- wyeliminowanie zaburzeń procesu identyfikacji przy wykorzystywaniu początkowych i końcowych zakresów sygnałów wejściowych,
- wykorzystanie w algorytmie różnych, możliwych baz pakietowych i prowadzenie analizy przy wybranym stopniu aproksymacji sygnału.

Proponowane podejście wykorzystuje przedstawione w poprzednim rozdziale właściwości filtrowania sygnału w jego analizie pakietowej, co umożliwia skuteczną analizę sygnałów z zakłóceniami, a dzięki sprowadzeniu opisów matematycznych modeli układów dyskretnych do układów równań różniczkowych rzędu pierwszego, nie wymaga generowania wyższych od pierwszej pochodnych sygnału. W przypadku identyfikacji parametrów równań różniczkowych rzędu n konieczne jest generowanie pochodnych do $n-1$ rzędu włącznie. Możliwości obniżenia rzędu generowanych pochodnych w procedurze identyfikacji jest jednym z podstawowych atrybutów proponowanego w punkcie następnym algorytmu.

5.2. Sformułowanie algorytmu identyfikacji

Identyfikowany model matematyczny w postaci równania, bądź równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach sprowadźmy do układu równań różniczkowych rzędu pierwszego. Układ ten możemy zapisać w następującej postaci:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{q}(t) + \mathbf{C}(t) \quad (5.1)$$

gdzie:

- $\mathbf{q}(t)$ – wektor współrzędnych uogólnionych i ich pochodnych w funkcji czasu t , który dalej nazywany jest wektorem odpowiedzi układu,
- $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ – macierze zawierające poszukiwane, identyfikowane parametry,
- $\mathbf{C}(t)$ – z założenia znany wektor wymuszenia.

Choć założono tutaj, że macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ nie są funkcjami czasu, to przedstawioną dalej procedurę można wykorzystać do analizy układów z parametrami wolnozmiennymi, zależnymi od czasu, jeżeli przyjmiemy lokalny opis tych układów w postaci (5.1). Przyjęcie takiego opisu lokalnego skutkuje odcinkowo stałą aproksymacją poszukiwanych parametrów przy zadanym podziale czasu obserwacji t na podprzedziały.

Z uwagi na to, że dalej wykorzystywane pakietowe, falkowe funkcje bazowe ($\mathbf{H}$) określone są dla $t \in [0,1)$, a identyfikacja modelu bazować będzie na sygnałach (bądź ich fragmentach) o czasie trwania t_i , należy przeskalować czas t wprowadzając zmienną τ tak, że $t = \tau t_i$, gdzie $\tau \in [0,1)$. Równanie (5.1) po przeskalowaniu zmiennej niezależnej przyjmie postać:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}(\tau) = t_i \mathbf{B}\mathbf{q}(\tau) + t_i \mathbf{C}(\tau) \quad (5.2)$$

Zakładamy, że podstawą identyfikacji parametrów modelu jest znany wektor $\mathbf{q}(t)$ i znane wymuszenie $\mathbf{C}(t)$. Jeżeli identyfikujemy dynamiczne układy dyskretne, to składowymi wektora $\mathbf{q}(t)$ odpowiedzi układu (zgodnie z równaniem (5.2)) są pomierzone wielkości (np. przemieszczenie, obrót itp.) i ich pierwsze pochodne, dla każdej ze współrzędnych uogólnionych z osobna. Pierwsze pochodne sygnału w proponowanej w tym rozdziale procedurze identyfikacji, obliczane są za pomocą algorytmów pokazanych w rozdziale poprzednim i dla sygnałów niezakłóconych ustalane są na podstawie pierwszego etapu tej analizy. Należy podkreślić, że w tej procedurze obliczane są pochodne mierzonej wielkości o jeden rząd niższe, niż rząd identyfikowanego modelu matematycznego. Jeżeli identyfikujemy dynamiczne układy dyskretne, to obliczamy wyłącznie pierwsze pochodne pomierzonych wielkości, a jeżeli identyfikujemy równania

rzędu n , to obliczamy pochodne do rzędu $n-1$ włącznie i wtedy oczywiście reprezentacje tych pochodnych pochodzą z $n-1$ etapu analizy pakietowej. Obniżenie rzędu obliczanej pochodnej jest istotnym elementem poprawiającym skuteczność algorytmu identyfikacji i zaletą tutaj proponowanego podejścia.

Dalej dane wielkości $(\mathbf{q}(\tau), \mathbf{C}(\tau))$ przedstawiać będziemy w dowolnej, wybranej falkowej bazie pakietowej Walsha, której dyskretną postać przedstawimy w macierzy $\mathbf{H}(\tau)$. Kolejne wiersze $\mathbf{H}$ stanowią dyskretny zapis poszczególnych, odcinkowo stałych pakietowych funkcji bazowych. Postać macierzy $\mathbf{H}$ zależy od stopnia j przyjętej aproksymacji, która wprowadza podział $\tau \in [0,1)$ na $s = 2^j$ równych odcinków.

Jeżeli znane wektory $(\mathbf{q}(\tau), \mathbf{C}(\tau))$ przedstawimy w dowolnej bazie pakietowej Walsha $\mathbf{H}$, to otrzymamy następujące relacje:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(\tau) &= \mathbf{F}\mathbf{H}(\tau) \\ \mathbf{C}(\tau) &= \mathbf{D}\mathbf{H}(\tau)\end{aligned}\tag{5.3}$$

gdzie $\mathbf{F}$ i $\mathbf{D}$ to macierze współczynników rozwinięcia odpowiednio wektora $\mathbf{q}$ i $\mathbf{C}$ w bazie $\mathbf{H}$.

Obustronnie całkując równanie (5.2)

$$\int_0^\tau \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}(\tau)d\tau = t_i \int_0^\tau \mathbf{B}\mathbf{q}(\tau)d\tau + t_i \int_0^\tau \mathbf{C}(\tau)d\tau\tag{5.4}$$

i uwzględniając relacje:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(\tau) &= \int_0^\tau \dot{\mathbf{q}}(\tau)d\tau + \mathbf{q}_0 \\ \int_0^\tau \mathbf{H}(\tau)d\tau &\equiv \mathbf{P}\mathbf{H}(\tau)\end{aligned}\tag{5.5}$$

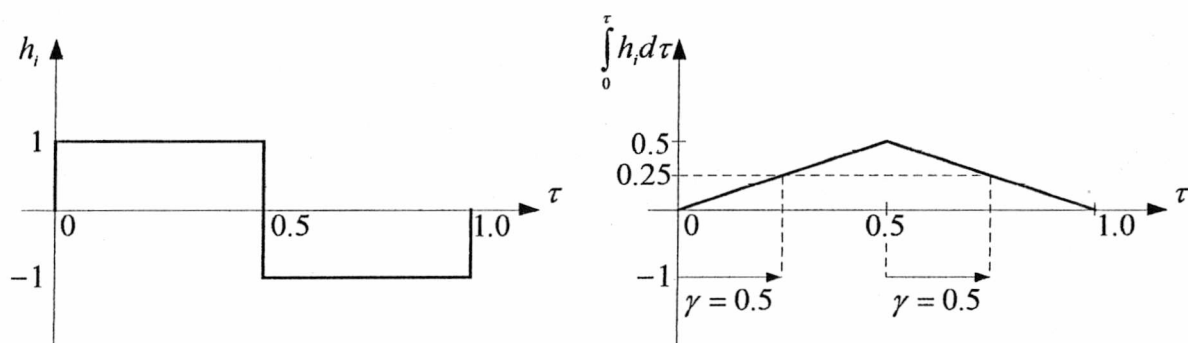
oraz (5.3) otrzymujemy:

$$\mathbf{A} \mathbf{F} \mathbf{H}(\tau) - \left[\underbrace{\mathbf{A} \mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{A} \mathbf{q}_0}_k, 0, \dots, 0 \right] \mathbf{H}(\tau) = t_i \mathbf{B} \mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{H}(\tau) + t_i \mathbf{D} \mathbf{P} \mathbf{H}(\tau) \quad (5.6)$$

Należy podkreślić, że w relacjach (5.3) i (5.4) $\mathbf{q}$ i $\mathbf{C}$ są wektorami, których składowe są funkcjami czasu t . Przy reprezentacji tych funkcji w bazie $\mathbf{H}$ w realizacjach numerycznych $\mathbf{q}$ i $\mathbf{C}$ są macierzami o wymiarach $n \times s$, których wiersze są dyskretnymi reprezentacjami danych składowych odpowiedzi $\mathbf{q}$ układu i znanych wymuszeń $\mathbf{C}$.

Macierz $\mathbf{P}$ jest macierzą operacyjną całkowania i przedstawia w bazie $\mathbf{H}$ całkę z funkcji bazowych $\mathbf{H}$. Znak przybliżonej równości występujący w drugiej z relacji (5.5) wynika z aproksymacji całki z odcinkowo stałej funkcji bazowej w każdym z s przedziałów jedną liczbą, która oczywiście zależy od punktu ustalającego górną granicę całkowania. Zwykle punkt ten przyjmowany jest w środku z każdego z s odcinków. Jak już wspomniano we wstępie, Glabisz [47, 48] uogólnił pojęcie macierzy operacyjnej całkowania wprowadzając dowolne (określane parametrem $\gamma \in [0, 1]$) położenie punktu wyznaczającego górną granicę całkowania w każdym z s odcinków podziału $\tau \in [0, 1]$ i pokazał, że parametr ten może mieć istotny wpływ na dokładność otrzymywanych rezultatów. Macierze operacyjne całkowania pokazywane w cytowanej literaturze są szczególnym przypadkiem – przy $\gamma = 0.5$ – uogólnionych macierzy operacyjnych całkowania.

Na rys. 5.1 pokazano, na przykładzie falki Haara, jak interpretować poszczególne elementy (wiersze p_i) macierzy operacyjnej całkowania przy stopniu aproksymacji $j = 1$.



$$\int_0^{\tau} h_i d\tau \Big|_{\gamma=0.5} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right] \longrightarrow P_i \Big|_{\gamma=0.5} = \left[\frac{1}{4}, 0 \right]$$

$$\int_0^{\tau} h_i d\tau \Big|_{\gamma=1.0} = \left[\frac{1}{2}, 0 \right] \longrightarrow P_i \Big|_{\gamma=1.0} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]$$

$$\int_0^{\tau} h_i d\tau \Big|_{\gamma=0.0} = \left[0, \frac{1}{2} \right] \longrightarrow P_i \Big|_{\gamma=0.0} = \left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right]$$

Rys. 5.1. Interpretacja graficzna elementów (wierszy) uogólnionej macierzy operacyjnej przy $j = 1$

Przykładowe uogólnione macierze operacyjne całkowania przy $\gamma = 0.0$, $\gamma = 0.5$ i $\gamma = 1.0$ przy $j = 3$ dla bazy Haara mają odpowiednio następujące postacie:

$$\mathbf{P}_{8 \times 8} \Big|_{\gamma=0.0} = \begin{bmatrix} \frac{7}{16} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & 0 & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{64} & -\frac{1}{32} & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & 0 & 0 \\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{64} & 0 & \frac{1}{32} & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{64} & 0 & -\frac{1}{32} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{8 \times 8}|_{\gamma=0.5} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{64} & -\frac{1}{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{64} & 0 & \frac{1}{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{64} & 0 & -\frac{1}{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{8 \times 8}|_{\gamma=1.0} = \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{64} & -\frac{1}{32} & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{64} & 0 & \frac{1}{32} & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{64} & 0 & -\frac{1}{32} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

Operacyjne macierze całkowania najprościej można otrzymać wykorzystując drugą z relacji (5.5), choć można również – wzorem Glabisa [47, 48] – szukać ich analitycznych postaci.

Drugi składnik lewej strony równania (5.6) stanowi rozwinięcie w bazie $\mathbf{H}$ iloczynu macierzy $\mathbf{A}$ i wektora warunków początkowych $\mathbf{q}_0$. Liczba k kolumn $\mathbf{A}\mathbf{q}_0$ w tym składniku zależy od przyjętej bazy pakietowej i parametru s i jest $k=1$ dla bazy Haara i bazy Walsh, a przy innych bazach pakietowych k jest równa liczbie funkcji bazowych

z podprzestrzeni V_1 najniższego rzędu w dekompozycji sygnału V przy danym parametrze s (Glabisz [47, 48]).

Jeżeli relację (5.6) w sposób elementarny przekształcimy i uwzględnimy (5.3), to otrzymamy następujący związek:

$$\mathbf{A} \mathbf{q} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}(\tau) - \underbrace{\left[\mathbf{A} \mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{A} \mathbf{q}_0, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0} \right]}_k \mathbf{H}(\tau) - t_i \mathbf{B} \mathbf{q} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{H}(\tau) -$$

$$t_i \mathbf{C} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{H}(\tau) = \mathbf{R} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{1,1} & \dots & r_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n,1} & \dots & r_{n,m} \end{bmatrix}}_{\tau=0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\tau=1} \quad (5.7)$$

Elementy $r_{i,j}$ macierzy $\mathbf{R}$ w (5.7) przy poprawnym doborze parametrów identyfikowanego układu powinny być wszystkie równe zero.

Wartości elementów poszczególnych wierszy macierzy $\mathbf{R}$ obrazują błąd niespełnienia kolejnych równań układu (5.2) w analizowanym czasie t_i . Jak łatwo zauważyć, w przypadku układów dyskretnych opisywanych n równaniami rzędu drugiego, dla którego mamy $2n$ równań rzędu pierwszego (5.2), n z tych równań jest spełniona tożsamościowo – elementy odpowiednich wierszy macierzy $\mathbf{R}$ są wszystkie równe zero. Pozostałe n wierszy macierzy $\mathbf{R}$ wiążących poszukiwane parametry układu i dane wektory $\mathbf{q}, \mathbf{q}_0$ i $\mathbf{C}$ zgodnie z relacją (5.7) powinny – przy stosownym doborze identyfikowanych parametrów – zerować się.

W przypadku, gdy układ (5.2) wynika z zastąpienia jednego równania różniczkowego rzędu n , spośród n równań układu (5.2) $n-1$ z nich jest spełniona tożsamościowo, a jedno z tych równań (z reguły ostatnie w tradycyjnym uporządkowaniu wektora $\mathbf{q}$) jest podstawą do wyznaczenia poszukiwanych parametrów.

Wartości poszukiwanych parametrów powinny być dobierane w taki sposób, aby wszystkie elementy macierzy $\mathbf{R}$ jednocześnie przyjmowały wartość równą zero. Z reguły stosuje się wtedy metodę najmniejszych kwadratów (głównie dalej wykorzystywaną) biorąc pod uwagę wszystkie elementy r_{ij} niespełnionych tożsamościowo równań (5.7). Postępując w ten sposób otrzymujemy – z warunku minimum funkcjonału typu (4.9) – układ liniowych równań algebraicznych na poszukiwane parametry. Można także postulować zerowanie się

wszystkich elementów r_{ij} macierzy $\mathbf{R}$, co z reguły generuje istotnie większą liczbę równań od liczby poszukiwanych parametrów i jest czasochłonne. Rozwiązanie dla poszukiwanych parametrów uzyskać można formułując warunki znikania równań, które wynikają z postulatu zerowania się pochodnych po parametrach (w tych elementach występujących) z kwadratów (r_{ij}^2) elementów macierzy $\mathbf{R}$, co odpowiada żądaniu minimalizacji kwadratów lokalnych błędów niespełnienia równań różniczkowych. Taki sposób generowania równań prowadzi (podobnie jak w przypadku równań wynikających z postulatu zerowania się r_{ij}) do liniowego, nadokreślonego układu liniowych równań algebraicznych, który symbolicznie zapisać można w postaci:

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{p} \quad (5.8)$$

gdzie macierz $\mathbf{K}$ (o wymiarze $k \times e$, gdzie e jest liczbą poszukiwanych parametrów, a $k > e$) jest macierzą współczynników przy wektorze $\mathbf{x}$ (o wymiarze $e \times 1$) poszukiwanych parametrów, a wektor $\mathbf{p}$ (o wymiarze $k \times 1$) jest wektorem wyrazów wolnych poszczególnych równań.

Rozwiązanie układu równań (5.8) metodą najmniejszych kwadratów prowadzi do następującego układu równań algebraicznych na poszukiwane parametry $\mathbf{x}$

$$\mathbf{K}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{K}^T \mathbf{p} \quad (5.9)$$

Równanie (5.9) wyznacza – uśrednione po czasie trwania obserwacji t_i – wartości poszukiwanych parametrów identyfikowanego układu.

Jeżeli parametry układu zależą od czasu t , to – jak wcześniej wspomniano – wprowadzając podział odpowiedzi układu $\mathbf{q}$ i wymuszenia $\mathbf{C}$ na stosowną liczbę przedziałów o czasie trwania t_i , można w każdym z tych przedziałów wyznaczyć wektor $\mathbf{x}$ poszukiwanych (z założenia stałych w każdym z tych przedziałów) parametrów pamiętając o stosownym uaktualnianiu warunków początkowych $\mathbf{q}_0$ na początku każdego z tych przedziałów.

W punkcie następnym tego rozdziału pokazane będzie praktyczne funkcjonowanie sformułowanego algorytmu.

5.3. Analiza numeryczna

W punkcie tym przedstawiona będzie procedura identyfikacji zaproponowana przez Ghanem'a i Romeo [40], a na przykładzie jej praktycznego wykorzystania pokazane zostaną jej słabe strony. Następnie na różnych przykładach dyskretnych układów dynamicznych zaprezentowane będzie funkcjonowanie – zaproponowanej w punkcie poprzednim – procedury identyfikacji bazującej na funkcjach Walsha. Procedura testowana będzie na przykładach liniowych układów o jednym i dwóch stopniach swobody, których parametry są stałe, bądź zmienne w czasie.

5.3.1. Procedura Ghanem'a i Romeo w parametrycznej identyfikacji układu liniowego

Istota algorytmu zaproponowanego przez Ghanem'a i Romeo [40, 41] pokazana będzie na przykładzie identyfikacji parametrów następującego równania:

$$m(t)\ddot{q}(t) + c(t)\dot{q}(t) + k(t)q(t) = P(t). \quad (5.10)$$

Ghanem i Romeo rozwinęli funkcje $q(t)$ i $P(t)$ w bazie funkcji skalujących Daubechies $\varphi(2^j t - k)$:

$$q(t) = \sum_{k=I}^J \bar{\alpha}_k 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) \quad (5.11)$$

$$P(t) = \sum_{k=I}^J \bar{\beta}_k 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) \quad (5.12)$$

We wzorach (5.11) i (5.12) j jest parametrem skali, natomiast k parametrem przesunięcia. Granice sumowania I oraz J zależą od dziedziny funkcji skalującej Daubechies. W zadaniu przyjęto, że M oznacza liczbę znikających momentów (patrz. rozdz. 2.3.5.), wtedy $I = k_0 - L + 2$, a $J = k_1 - 1$, gdzie $L = 2M$, $k_0 = 2^j t_0$, $k_1 = 2^j t_1$. Wartości t_0 i t_1 są odpowiednio wartością początkową i końcową analizowanego przedziału czasowego. Wyznaczając pochodne rozwinięcia (5.11) sygnału $q(t)$, oraz

podstawiając $\alpha_{j,k} = \bar{\alpha}_k 2^{j/2}$, $\beta_{j,k} = \bar{\beta}_k 2^{j/2}$, $y = 2^j t$ i przyjmując przykładowo, że $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, równanie (5.10) można zapisać jako:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{y}{2^j} \right) 2^{2j} \sum_{k=2-L}^{2^j-1} \alpha_{j,k} \ddot{\varphi}(y-k) + c \left(\frac{y}{2^j} \right) 2^j \sum_{k=2-L}^{2^j-1} \alpha_{j,k} \dot{\varphi}(y-k) + \\ k \left(\frac{y}{2^j} \right) \sum_{k=2-L}^{2^j-1} \alpha_{j,k} \varphi(y-k) = \sum_{k=2-L}^{2^j-1} \beta_{j,k} \varphi(y-k) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Jeżeli dokona się podstawienia $y - k = z$ w wyrażeniu $\varphi(y - k)$ oraz wykorzysta się właściwość ortogonalności funkcji skalujących, wyrażenie (5.13) można zapisać jako:

$$m_l \sum_{k=2-L}^{2^j-1} \alpha_{j,k} \Gamma_{k-l}^{(2)} + c_l \sum_{k=2-L}^{2^j-1} \alpha_{j,k} \Gamma_{k-l}^{(1)} + k_l \alpha_{j,k} = \beta_{j,l} \quad \text{dla } l = 2-L, \dots, 2^j-1 \quad (5.14)$$

W równaniu (5.14) $\Gamma_k^{(n)}$ oznaczają współczynniki wpływu, gdzie n jest n -tą pochodną funkcji skalującej. Wyznaczenie współczynników wpływu na drodze numerycznej jest praktycznie niemożliwe, ze względu na oscylacyjny charakter pochodnych funkcji skalujących, wykorzystanych do obliczeń. Obliczanie współczynników wpływu wymaga zastosowania żmudnych procedur rekurencyjnych, co dodatkowo komplikuje stosowanie przedstawionej przez Ghanem'a i Romeo procedury identyfikacji.

W analizowanym przykładzie założono, że poszukiwane parametry m , c , k są stałe w czasie. W przykładzie przyjęto: $m = 1$, $c = 1.26$, $k = 39$, $M = 3$, $j = 7$ oraz przykładowe warunki początkowe $q(0) = 0$ i $\dot{q}(0) = 0$. Wymuszenie układu przyjęto w postaci: $P(t) = 10 \sin(6.91t) + 10 \sin(5.65t)$. W ogólnym przypadku, dla funkcji skalujących o dziedzinie $s = L-1$ l -te równanie (5.14) pozwala na uzyskanie informacji, na temat analizowanego układu, w granicach przedziału $[t_{l-s-1}, t_{l+s-1}]$. Autorzy przyjęli, że $t_i = i\Delta t$, gdzie Δt jest krokiem analizy. W prezentowanym przykładzie przyjęto do analizy przedział czasowy $[0, 1]$. Znając współczynniki $\alpha_{j,k}$ i $\beta_{j,l}$ rozwinięcia odpowiednio $q(t)$ i wymuszenia $P(t)$ można równania (5.14) rozwiązać ze względu na poszukiwane, identyfikowane parametry m , c i k . Określając granice sumowania dla $l = 2-L, \dots, 2^j-1$ otrzymano układ 132 równań na poszukiwane niewiadomymi. Stosując metodę

najmniejszych kwadratów i rozwiązując zagadnienie dla różnej liczby otrzymanych równań uzyskano wyniki przedstawione w tabeli 5.1.

Tabela 5.1. Wartości identyfikowanych parametrów równania (5.10) dla $t \in (0,1)$

Równania wykorzystane do identyfikacji	Uwarunkowanie macierzy układu równań	Identyfikowane parametry (wartości ściśle: $m = 1.0$, $c = 1.26$, $k = 39.0$)					
		m	Błąd %	c	Błąd %	k	Błąd %
wszystkie – 132	$1.598 \cdot 10^7$	-0.0005	-100.05	0.4407	-65.023	8.80634	-77.419
po odrzuceniu 8 pierwszych i 7 ostatnich	14710.8	0.9977	-0.23	1.2638	0.301	38.9942	-0.015
losowo wybrane 9, 69, 129	$2.510 \cdot 10^9$	-0.0076	-100.76	7.3224	481.142	0.0173	-99.95
losowo wybrane 10, 52, 94	14059.9	1.0000	0.00	1.2600	0.00	39.002	0.005
równania 27 – 29	$1.392 \cdot 10^{10}$	1.0216	2.16	0.8443	-32.99	42.5887	9.201
równania 39 – 41	$1.160 \cdot 10^9$	0.7227	-27.73	2.3796	88.85	26.0796	-33.129
równania 56 – 58	$7.118 \cdot 10^9$	0.9838	-1.62	1.3450	6.746	38.3435	-1.683
równania 71 – 79	$3.824 \cdot 10^8$	0.9978	-0.22	1.2643	0.341	38.9157	-0.216
równania 85 – 87	$2.071 \cdot 10^{11}$	0.9623	-3.77	1.3365	6.071	37.4453	-3.986

Biorąc pod uwagę wszystkie 132 równania otrzymujemy wynik niezadowalający (tabela 5.1.). Tak duży błąd rozwiązania wynika z faktu zwykle w rozwinięciach falkowych występujących zaburzeniach na brzegach, co powodowane jest tym, że dziedziny skrajnych (na początku i końcu czasu obserwacji) funkcji skalujących znajdują się poza dziedziną sygnału. Stosowanie – wspomnianych w rozdziale poprzednim – różnych typów warunków brzegowych przyjmowanych zwykle w analizie falkowej, pozwala przy pewnych typach analizowanych sygnałów uniknąć znacznych zaburzeń. Dzieje się tak na przykład w analizie sygnału periodycznego, o okresie równym czasowi obserwacji i przy przyjęciu – w tej sytuacji oczywistych – tak zwanych periodycznych warunków brzegowych. Na ogół jednak przyjęcie warunków brzegowych w analizie falkowej nie jest oczywiste i skutkuje istotnymi, brzegowymi zakłóceniami. Odrzucenie tych równań, w których występują wspomniane zaburzenia skutkuje radykalną poprawą rozwiązań, które w tym przypadku uznać można za idealne. Chociaż Ghanem i Romeo [40] sugerują, że zadowalające rezultaty uzyskać można korzystając z dowolnych równań (5.14), których liczba jest zgodna z liczbą identyfikowanych parametrów, to w ogólności tak postępując otrzymać można rozwiązania

obarczone dużym błędem. Oczywiście, przy liczbie równań identycznej z liczbą identyfikowanych parametrów, nie stosujemy metody najmniejszych kwadratów. Przyczyną tych błędów jest na ogół bardzo słabe uwarunkowanie macierzy współczynników tak dobieranych równań. W tabeli 5.1 pokazano uwarunkowanie każdego z analizowanych układów równań.

Ghanem i Romeo [40, 41] zastosowali proponowaną procedurę do analizy układów o wielu stopniach swobody z losowo zaburzoną odpowiedzią, niektórych układów nieliniowych, a także do analizy układów z wolno w czasie zmiennymi parametrami. Dla układów ze zmiennymi w czasie parametrami wspomniani autorzy uzyskali wyniki, których błąd sięgał nawet 50% estymowanej wartości parametru.

Występujące w procedurze identyfikacji proponowanej przez Ghanema i Romeo [40, 41] istotne problemy numeryczne związane z koniecznością obliczania współczynników wpływu, a także stosowanie przez tych autorów elementów analizy statystycznej, skłoniły autorkę do zbudowania własnego algorytmu identyfikacji opisanego w rozdziale 5.2, którego funkcjonowanie pokazano w następnych podrozdziałach.

5.3.2. Identyfikacja parametrów liniowego układu o jednym stopniu swobody

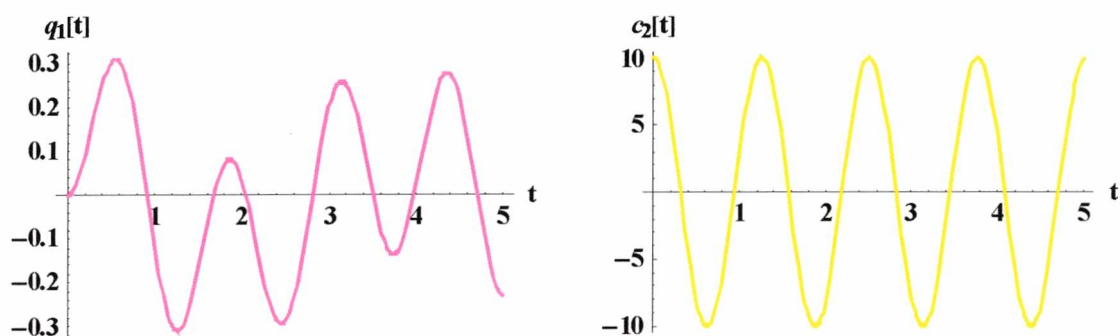
Funkcjonowanie przedstawionego w punkcie 5.2. algorytmu identyfikacji testowano na przykładzie układu o jednym stopniu swobody, opisanego liniowym równaniem różniczkowym rzędu drugiego i danymi (przykładowymi), zerowymi warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) &= 10\cos(5t) \\
 m = 2 \quad c = 1.0 \quad k &= 5.0 \\
 0 \leq t \leq 5, \quad q(0) = \dot{q}(0) &= 0.0
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

Sprowadzając równanie (5.15) do układu równań różniczkowych rzędu pierwszego otrzymujemy równanie typu (5.1), gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10\cos(5t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}
 \tag{5.16}$$

Składowa $q_1(t)$ odpowiedzi układu (5.15) ($q_1(t)$ jest pierwszym elementem wektora $\mathbf{q}$) i wymuszenie $c_2(t)$ ($c_2(t)$ jest drugim elementem wektora $\mathbf{C}$), które wraz z danymi warunkami początkowymi $\mathbf{q}_0$ będzie podstawą identyfikowanych parametrów układu pokazano na rysunku 5.2.



Rys. 5.2. Odpowiedź $q_1(t)$ układu (5.15) i przebieg siły $c_2(t)$ wymuszającej drgania

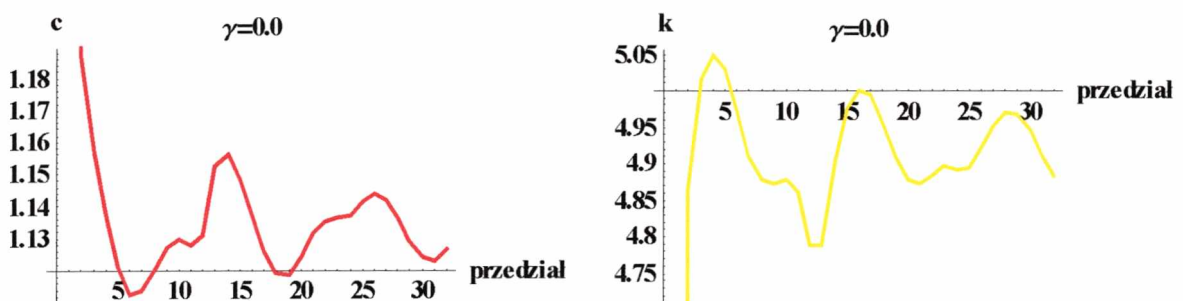
Zadanie identyfikacji parametrów równania (5.15) rozwiązywane będzie przy założeniach, że znane są: masa układu $m = 2$, odpowiedź układu $q(t)$ i wymuszenie $c(t)$ próbkowane z taką częstością, że przebiegi pokazane na rysunku 5.2 opisane są 1024 elementowymi ciągami liczb. Procedura identyfikacji dotyczyć będzie tutaj wyznaczenia parametrów c i k . W tabeli 5.2 pokazano wartości uzyskanych parametrów w funkcji parametru γ odpowiedzialnego za postać modyfikowanej macierzy operacyjnej całkowania. Przyjęto, że analizowane dyskretne przebiegi podzielono na 8 równolicznych ciągów, z czego wynika, że $t_i = 5/8$. Zgodnie z przedstawioną procedurą identyfikacji odpowiedź układu $q(t)$ poddano jednemu etapowi falkowej analizy pakietowej, co pozwoliło na wyznaczenie pierwszej pochodnej analizowanego sygnału. Tym samym identyfikację parametrów układu prowadzono na podstawie wektora $\mathbf{q} = [q, \dot{q}]^T$, którego elementy tworzyły ciągi 512 liczb. W każdym z przedziałów $t_i = 5/8$ uzyskiwano wartości poszukiwanych parametrów na podstawie ciągów 64-elementowych. W analizie przyjęto $s = 2^6$ i wykorzystywano bazę Haara.

Jak wynika z pokazanych rezultatów i wielu innych przeprowadzonych testów, wartość parametru γ istotnie wpływa na dokładność identyfikowanych parametrów. Identyfikowane wartości oscylują w granicach wartości ścisłych z błędem względnym na ogół nie przekraczającym 10%.

Tabela 5.2. Identyfikacja parametrów c i k modelu (5.15) w funkcji parametru γ

Parametr γ	Identyfikowane parametry (wartości ściśle $c = 1.0$, $k = 5.0$)																Wartości średnie i błędy parametrów $0 \leq t \leq 5$			
	$0 \leq t \leq \Delta t$		$\Delta t \leq t \leq 2\Delta t$		$2\Delta t \leq t \leq 3\Delta t$		$3\Delta t \leq t \leq 4\Delta t$		$4\Delta t \leq t \leq 5\Delta t$		$5\Delta t \leq t \leq 6\Delta t$		$6\Delta t \leq t \leq 7\Delta t$		$7\Delta t \leq t \leq 8\Delta t$		c		k	
	c	k	c	k	c	k	c	k	c	k	c	k	c	k	c	k	Wartość średnia	Błąd [%]	Wartość średnia	Błąd [%]
1.0	1.10787	4.03770	0.90889	4.05548	0.60131	3.58367	1.03534	3.88637	0.86713	3.92004	0.71136	3.60654	0.97359	3.79877	0.83809	3.82718	0.88045	-11.955	3.83947	-23.210
0.7	1.12397	4.33791	0.96691	4.33162	0.76220	3.99094	1.06872	4.22075	0.94013	4.23629	0.84028	4.01008	1.02286	4.15487	0.92184	4.17079	0.95586	-4.414	4.18166	-16.366
0.5	1.13695	4.53311	1.00609	4.51087	0.86789	4.25197	1.0926	4.43815	0.98916	4.44157	0.92572	4.26983	1.05693	4.38644	0.97797	4.39386	1.00666	0.666	4.40323	-11.935
0.4	1.14413	4.62915	1.02582	4.59899	0.92025	4.37929	1.10502	4.54511	1.01378	4.54249	0.96827	4.39686	1.07432	4.5004	1.00612	4.50354	1.03222	3.222	4.51198	-9.760
0.3	1.15178	4.72411	1.04564	4.68609	0.97227	4.50445	1.11778	4.65088	1.03846	4.64225	1.01071	4.52197	1.09196	4.61311	1.03432	4.61196	1.05787	5.787	4.61935	-7.613
0.2	1.1599	4.81797	1.06556	4.77215	1.02396	4.62745	1.13087	4.75543	1.06321	4.74081	1.05303	4.64513	1.10985	4.72454	1.06256	4.71909	1.08362	8.362	4.72532	-5.493
0.1	1.1685	4.91068	1.08557	4.85716	1.07531	4.74827	1.1443	4.85873	1.08802	4.83818	1.09521	4.76634	1.12797	4.83468	1.09086	4.82493	1.10947	10.947	4.82987	-3.402
0.0	1.17758	5.00224	1.10567	4.94111	1.1263	4.86689	1.15806	4.96076	1.11289	4.93432	1.13727	4.88557	1.14634	4.94349	1.11919	4.92944	1.13541	13.541	4.93298	-1.340

Jeżeli – przy tych samych danych wejściowych – procedurę identyfikacji prowadzić będziemy na przykład przy czterokrotnie bardziej gęstym podziale ($t_i = 5/32$) analizowanego czasu $t = 5$ dla różnych wartości parametru γ uzyskamy zadawalające wyniki identyfikacji. Na rysunku 5.3 pokazano wartości parametrów c i k dla poszczególnych przedziałów w funkcji parametru γ . W analizie przyjęto $s = 2^4$ i bazę Haara. Przy parametrze $\gamma = 0.0$ wartość oczekiwana, wariancja i odchylenie standardowe dla parametru c i k odpowiednio wynoszą (1.134 , 0.00021 , 0.015) i (4.9203 , 0.0038 , 0.063). Należy podkreślić, że wartości tych parametrów były wyznaczone na podstawie jedynie 16-elementowych ciągów danych w każdym z 32 przedziałów. Jeżeli identyfikację przeprowadzimy na podstawie 128-elementowych ciągów danych, to wspomniane statystyki dla parametru c i k odpowiednio wyniosą: (1.016 , 0.00000289 , 0.0017) i (4.99212 , 0.0000511 , 0.00727). Dalej na ogół przyjmowane będą mało liczne zbiory danych w celu pokazania dużej efektywności proponowanego tutaj podejścia; w każdym z pokazywanych przykładów uzyskuje się – zwiększając liczbę próbek – bardzo dobrą dokładność (błąd względny mniejszy od 1%) estymowanych parametrów. W kolejnych przykładach nie oblicza się statystyk uzyskiwanych wyników – co zwykle w literaturze jest wykorzystywane – dlatego, że operowanie charakterystykami uśrednionymi po czasie obserwacji nie zawsze pozwala na obiektywną ocenę zastosowanego algorytmu.



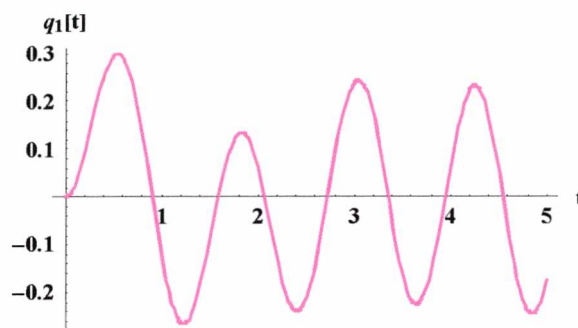
Rys. 5.3. Identyfikowane parametry c i k równania (5.15) w poszczególnych przedziałach podziału czasu obserwacji dla różnych wartości parametrów γ

W obliczeniach testowano również wpływ na otrzymywane rezultaty wykorzystywanej bazy pakietowej. Jak się okazuje, co potwierdza wnioski zawarte w pracach Glabisza [47, 48], każda z możliwych baz pakietowych prowadzi do identycznych rezultatów numerycznych, choć czas obliczeń zależy od dziedziny funkcji bazowych. Czas obliczeń jest dłuższy dla tych baz pakietowych, w których funkcje bazowe

określane są dla większych przedziałów zmiennej τ . Oczywiście, w przypadku wykorzystania funkcji bazowych Walsha, z których każda określona jest dla $\tau \in [0,1)$ czas obliczeń jest najdłuższy.

Skuteczność przedstawionej procedury przy identyfikacji parametrów zmiennych w czasie przedstawimy na przykładzie układu (5.15) przy założeniu że: $m = 2.0$, $c(t) = 1.0 + t$ i $k(t) = 5.0 + t^2$.

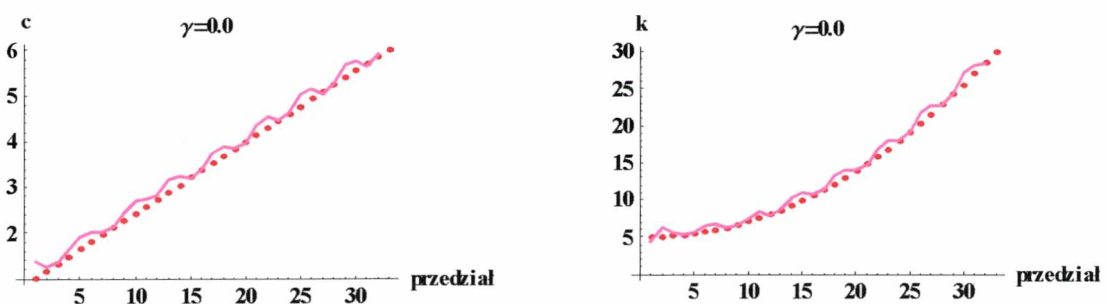
Podstawą identyfikacji tego układu będzie dyskretna reprezentacja sygnału pokazana na rysunku 5.4. Identyfikację prowadzono przy identycznej – jak w zadaniu poprzednim – częstotliwości próbkowania odpowiedzi układu i wymuszenia.



Rys. 5.4. Odpowiedź $q(t)$ układu (5.15) przy $m = 2.0$, $c(t) = 1.0 + t$ i $k(t) = 5.0 + t^2$

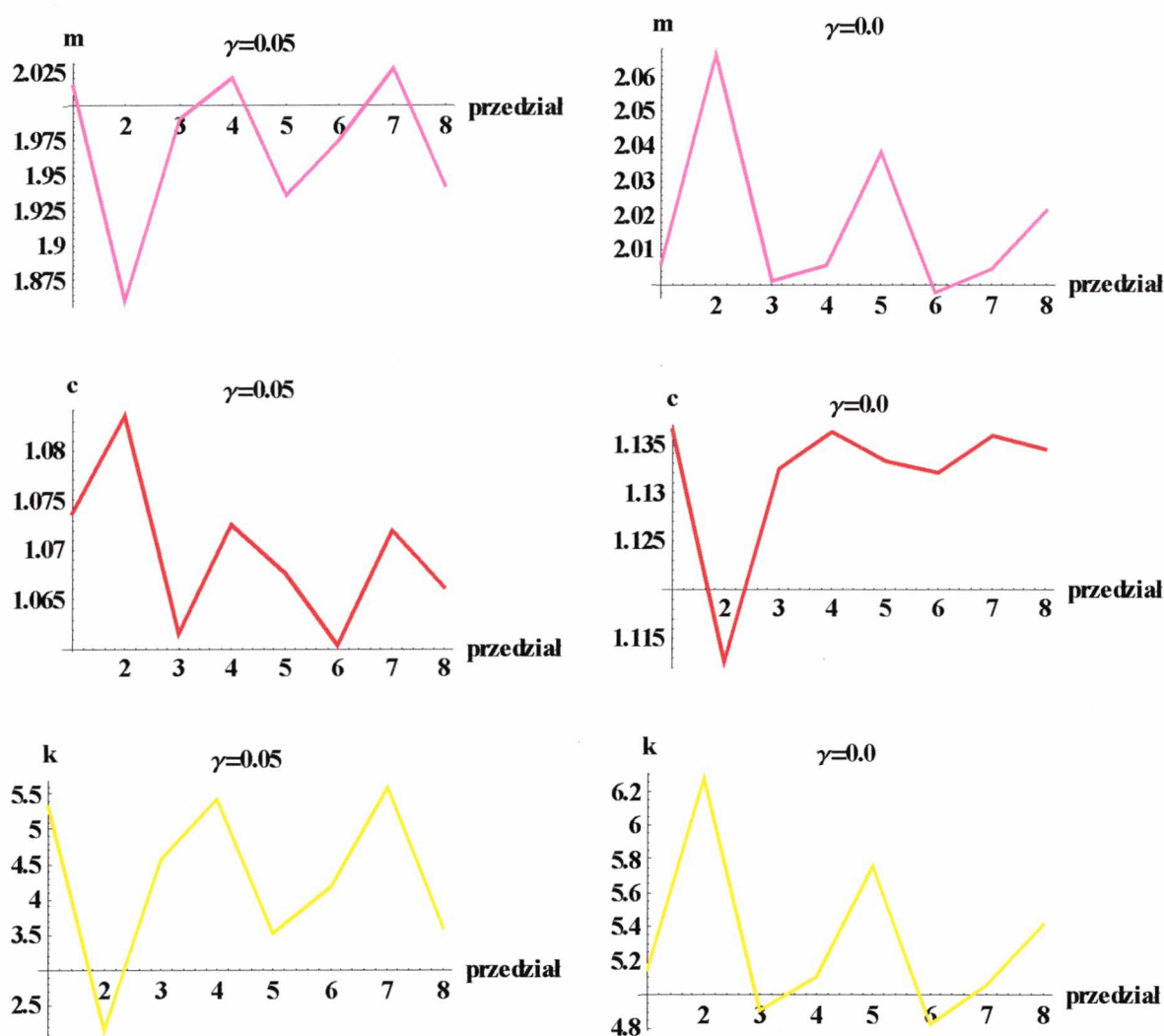
Na rysunku 5.5 pokazano (przy różnych parametrach γ) wykresy identyfikowanych parametrów układu c i k (linie ciągłe) na tle ścisłych zmienności tych parametrów (linie kropkowane). Identyfikację prowadzono przy $t_i = 5/32$, $s = 2^4$ wykorzystując bazę Haara.

Na rysunkach 5.2 i 5.4 pokazano odpowiedzi układu dla krótkich czasów obserwacji w obszarach ich drgań przejściowych dla podkreślenia efektywności prezentowanej procedury identyfikacji, która nawet przy niezbyt licznych pomiarach (były to ciągi 1024 elementowe) okazuje się bardzo skuteczna.



Rys. 5.5. Rezultaty identyfikacji układu (5.15) o zmiennych parametrach; linią ciągłą oznaczone identyfikowane parametry, a linią kropkowaną ich zadane zmienności

Założmy, że w układzie (5.15) o stałych współczynnikach (o wartościach jak poprzednio) identyfikujemy wszystkie trzy jego parametry (m , c , k). Podstawą identyfikacji są dane (odpowieź układu i wymuszenie) w postaci ciągów liczbowych identycznych z tymi, które wykorzystywano przy identyfikacji dwóch parametrów (c i k). Identyfikację prowadzono przy podziale czasu obserwacji drgań i wymuszenia ($t=5$) na 8 równych odcinków, a w każdym z nich bazą pakietową były funkcje Walsha przy $s = 2^6$. Na rysunku 5.6 pokazano wyniki identyfikacji przy dwóch parametrach γ .



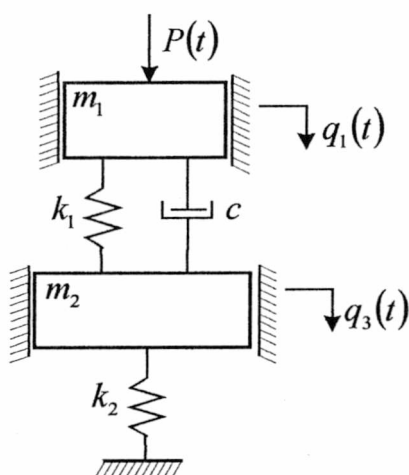
Rys. 5.6. Identyfikowane parametry m , c i k równania (5.15) w poszczególnych przedziałach podziału czasu obserwacji dla różnych wartości parametrów γ

Przy identyfikacji większych zbiorów parametrów, liczba danych (liczebność ciągów odpowiedzi układu i jego wymuszenia) w poszczególnych czasach obserwacji t_i powinna

być większa od tych, które mogą być wykorzystywane przy poszukiwaniu mniej licznych zbiorów parametrów. Pokazane na rysunku 5.6 rozwiązania uzyskano przy 64 (512/8) elementowych ciągach reprezentujących odpowiedź układu i jego wymuszenie.

5.3.3. Identyfikacja parametryczna układu liniowego o dwóch stopniach

Rozpatrzmy dyskretny układ o dwóch stopniach swobody, którego schemat pokazano na rysunku 5.7. Model ten może dobrze opisywać np. drgania dwukondygnacyjnego budynku, jeżeli w jego opisie uwzględnimy wyłącznie przemieszczenie poziome stropów.



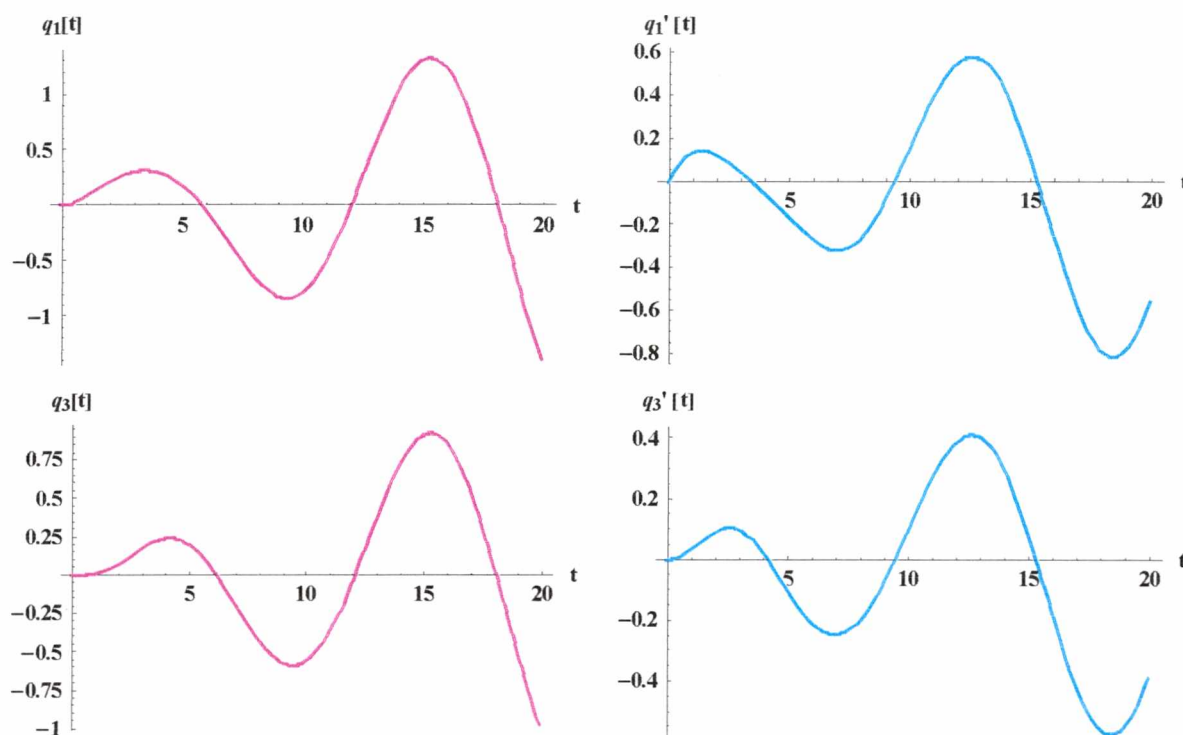
Rys. 5.7. Schemat dynamiczny układu o dwóch stopniach swobody

Po sprowadzeniu modelu matematycznego tego układu do równań różniczkowych rzędu pierwszego otrzymujemy równanie typu (5.1), gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_2 & -c & k_1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 & c & -(k_1 + k_2) & -c \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ P(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{q}_1(t) = q_2(t), \quad \dot{q}_3(t) = q_4(t)$$

Założmy, że – jak poprzednio – mamy daną odpowiedź układu w postaci przebiegów $q_1(t)$ i $q_3(t)$ oraz przyjmijmy, że znane jest wymuszenie w postaci $P(t) = 2 \cos(0.5t)$. Na rysunku 5.8 pokazano dane przebiegi i identyfikowane (przy pomocy pakietowej transformacji falkowej) postaci ich pierwszych pochodnych.

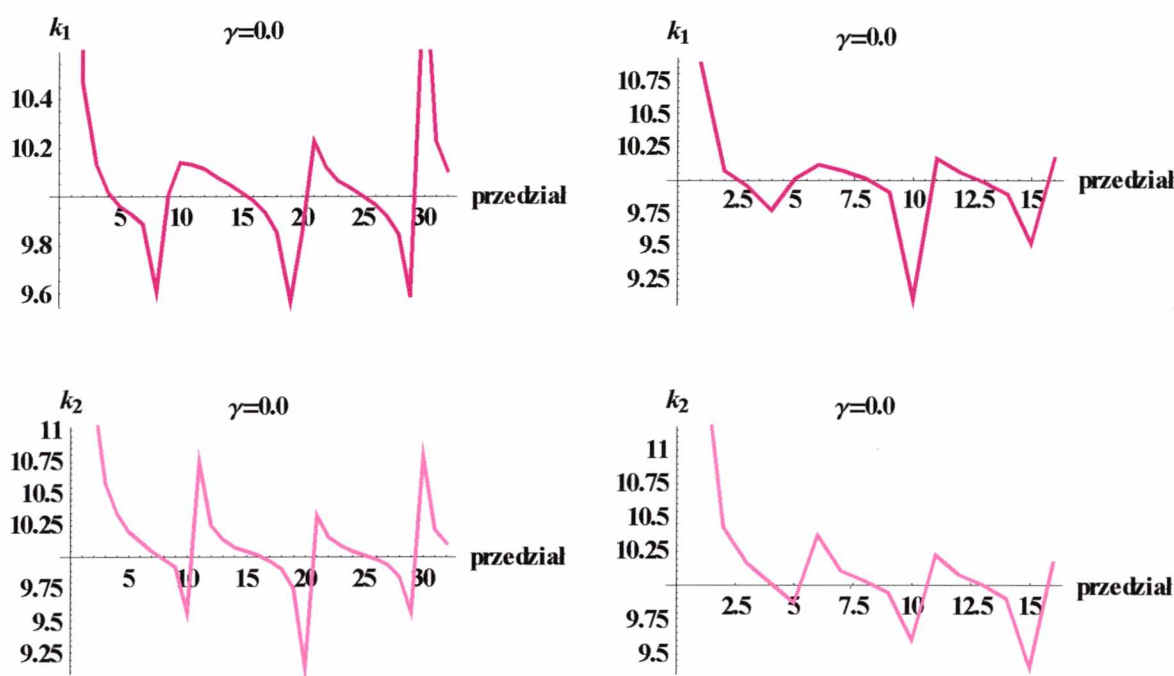


Rys. 5.8. Przebiegi składowych wektora $\mathbf{q}$ układu pokazanego na rysunku 5.7 przy $m_1 = 10$, $m_2 = 20$, $c = 5$, $k_1 = k_2 = 10$ i $P(t) = 2 \cos(0.5t)$

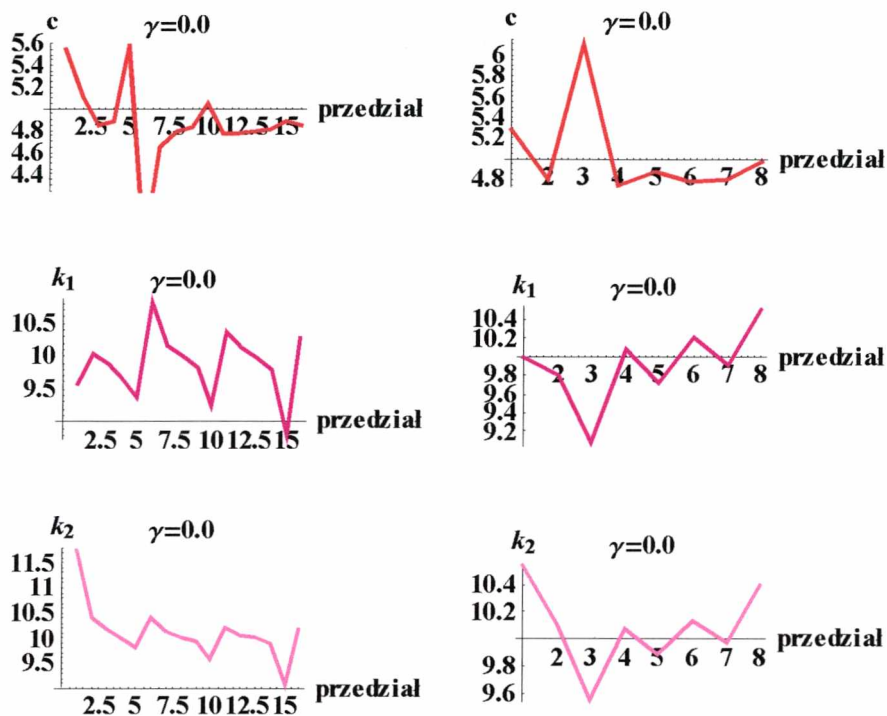
Identyfikację prowadzono na podstawie obszaru przejściowego drgań w czasie $0 \leq t \leq 20$. Reprezentacje sygnałów wejściowych i wymuszenia stanowiły 1024 elementowe ciągi liczbowe. Należy zaznaczyć, że po pierwszym etapie pakietowej analizy falkowej reprezentacje sygnałów i ich pochodnych, które stanowią dane do procedury identyfikacji są ciągami 512 elementowymi. Zadanie testowano na tak mało licznych reprezentacjach przebiegów i w obszarze drgań przejściowym dla podkreślenia dużej skuteczności proponowanego algorytmu identyfikacji.

Identyfikację prowadzono szukając: dwóch jego parametrów (k_1 i k_2 przy danych $m_1 = 10$, $m_2 = 20$ i $c = 5$), trzech parametrów (k_1 , k_2 i c przy danych $m_1 = 10$ i $m_2 = 20$), czterech parametrów (k_1 , k_2 , c i m_1 przy danych $m_2 = 20$) i wszystkich pięciu parametrów (k_1 , k_2 , c , m_1 i m_2). Wyniki identyfikacji przedstawiono na rysunkach, w funkcji liczby

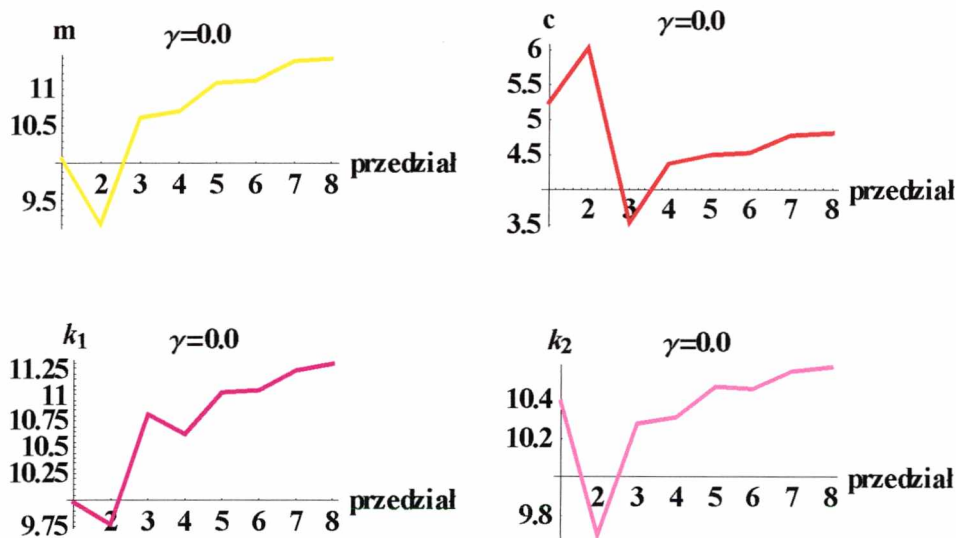
przedziałów, na które dzielono czas całej obserwacji. Wynikami dokładnymi, które pozwalają na ocenę uzyskanych rozwiązań są: $m_1 = 10$, $m_2 = 20$, $c = 5$, $k_1 = k_2 = 10$. Identyfikację przeprowadzono przy podziale czasu obserwacji drgań i wymuszenia ($t = 20$) na: 32 równe odcinki (przyjmując $s = 2^4$), 16 równych odcinków (przyjmując $s = 2^5$), 8 równych odcinków (przyjmując $s = 2^6$) i 4 równe odcinki (przyjmując $s = 2^7$), a w każdym z nich bazą pakietową były funkcje Walsha.



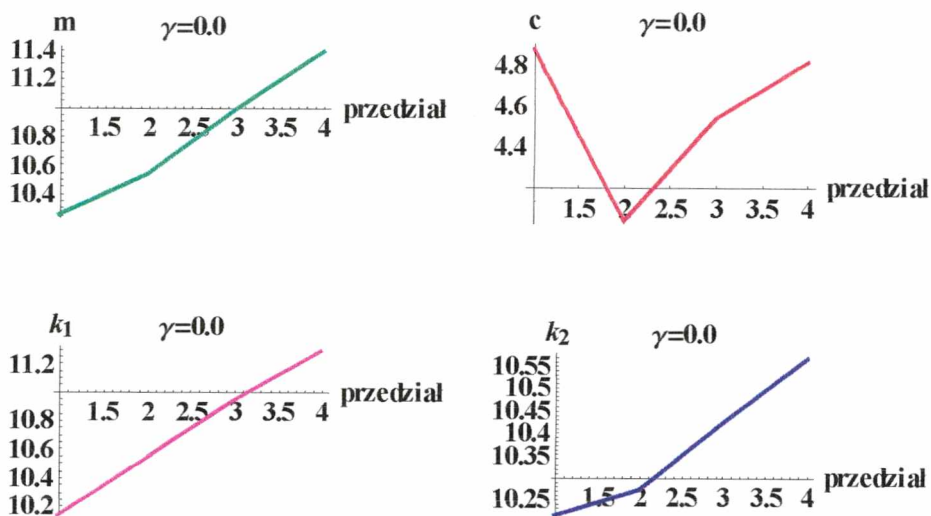
Rys. 5.9. Wyniki identyfikacji k_1 i k_2 przy danych $m_1 = 10$, $m_2 = 20$ i $c = 5$ układu z rysunku 5.7 przy podziale czasu obserwacji na 32 i 16 przedziałów



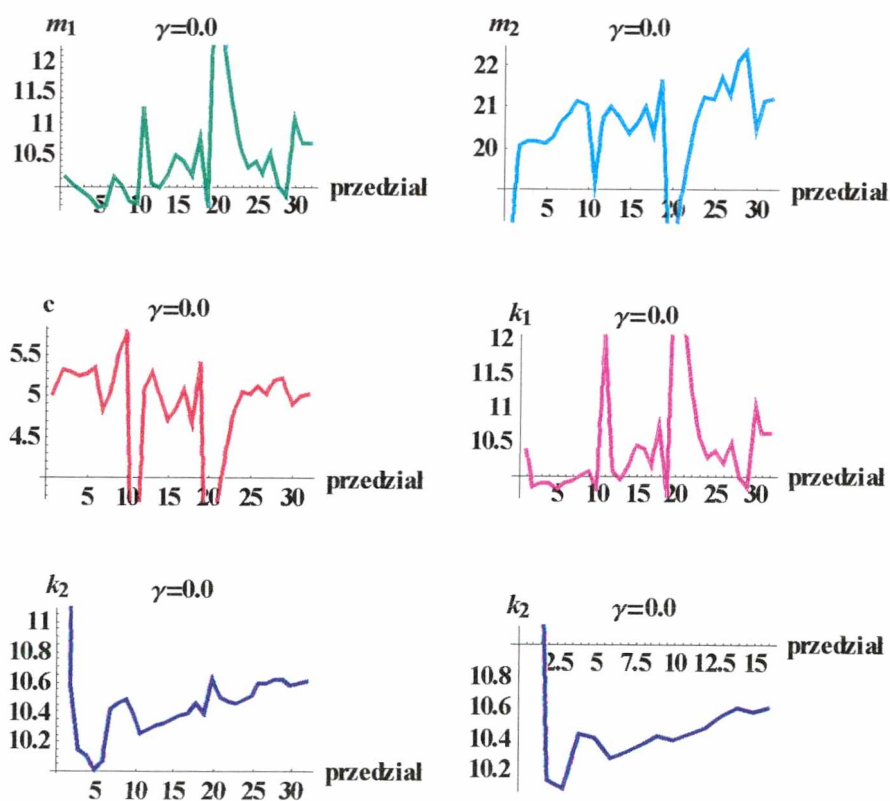
Rys. 5.10. Wyniki identyfikacji c , k_1 oraz k_2 przy danych $m_1 = 10$ i $m_2 = 20$ układu z rysunku 5.7 przy podziale czasu obserwacji na 16 i 8 przedziałów



Rys. 5.11. Wyniki identyfikacji m_1 , c oraz k_1 i k_2 przy danych $m_2 = 20$ układu z rysunku 5.7 przy podziale czasu obserwacji na 8 przedziałów

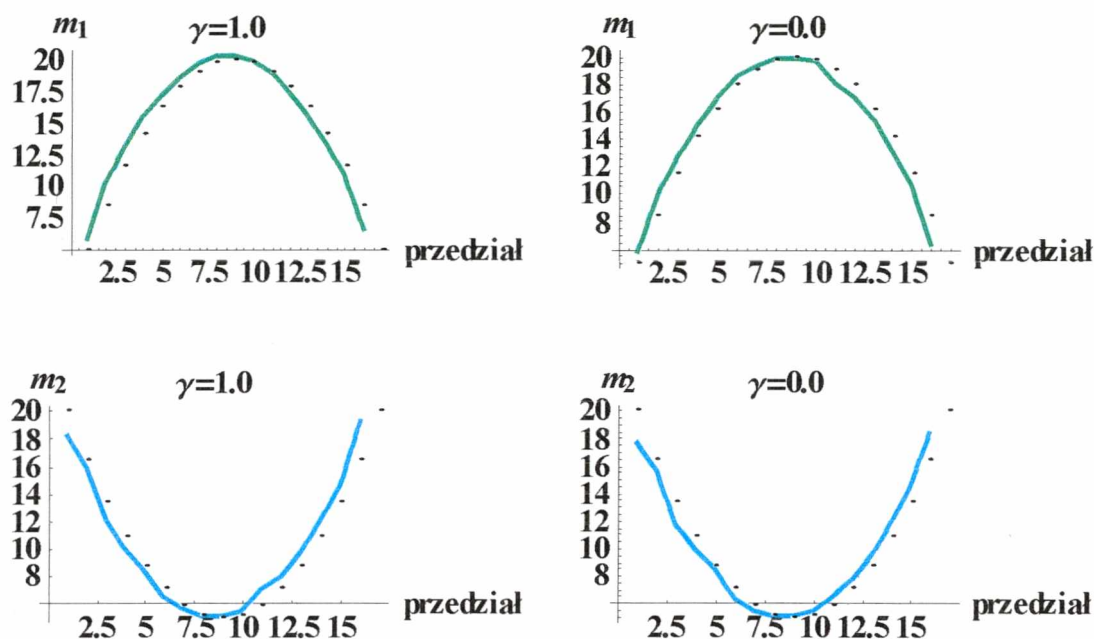


Rys. 5.12. Wyniki identyfikacji m_1 , c oraz k_1 i k_2 przy danych $m_2 = 20$ układu z rysunku 5.7 przy podziale czasu obserwacji na 4 przedziały



Rys. 5.13. Wyniki identyfikacji m_1 i m_2 , c oraz k_1 i k_2 , układu z rysunku 5.7 przy podziale czasu obserwacji na 32 i 16 przedziałów

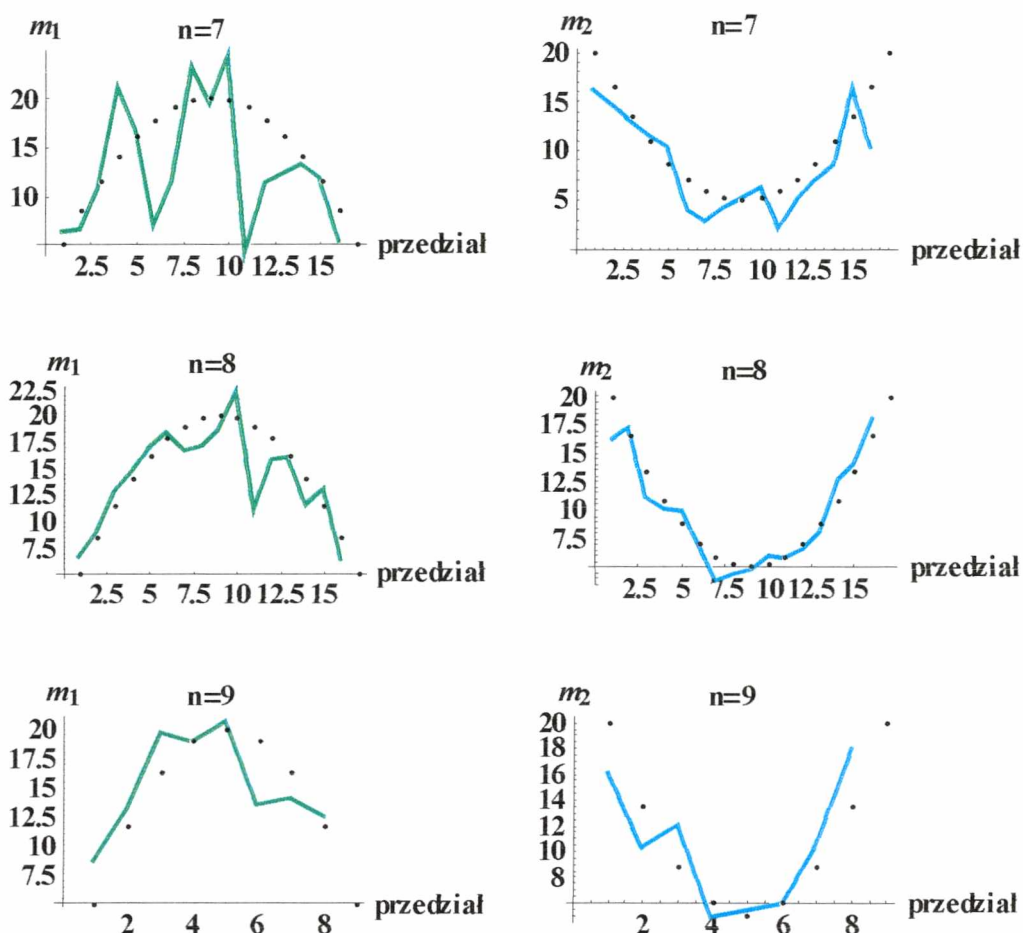
Na rysunku 5.14 pokazano (przy różnych parametrach γ) wykresy identyfikowanych, zmiennych w czasie, parametrów m_1 i m_2 układu (linie ciągłe) na tle ścisłych zmienności tych parametrów (linie kropkowane). Identyfikację prowadzono przy $t_i = 20/16$, $s = 2^6$ wykorzystując bazę Haara. W tym przypadku bazowano na 2048 elementowych ciągach danych przebiegów drgań i wymuszenia.



Rys. 5.14. Rezultaty identyfikacji układu z rysunku 5.7 o zmiennych parametrach m_1 i m_2 ; linią ciągłą oznaczone identyfikowane parametry, a linią kropkowaną ich zadane, dokładne wartości

Jak widać na rysunku 5.14. identyfikowane parametry są zbieżne do wartości ścisłych, co potwierdza skuteczność algorytmu w estymacji również parametrów zmiennych w czasie.

Na rysunku 5.15 pokazano rezultaty identyfikacji zmiennych w czasie parametrów m_1 i m_2 (o zmienności identycznej z pokazaną na rysunku 5.14) na podstawie losowo zakłócanych (w zakresie $\pm 2\%$ amplitud składowych sygnałów) danych wejściowych q_1 i q_3 . W tym przypadku przyjęto znacznie wyższą częstość próbkowania sygnału (sygnały opisywane były 32768 elementowymi ciągami), a filtrowanie zakłóceń prowadzono do etapu n analizy pakietowej.



Rys. 5.15. Rezultaty identyfikacji losowo zakłóconego układu z rysunku (5.7) o zmiennych parametrach m_1 i m_2 w funkcji etapu n analizy pakietowej; linią ciągłą oznaczone identyfikowane parametry, a linią kropkową ich zadane, dokładne wartości

Jak pokazano, prezentując wyniki niektórych testów numerycznych, zaproponowana procedura identyfikacji daje zadowalające wyniki w analizie układów liniowych ze stałymi i zmiennymi w czasie parametrami. Proponowaną procedurę można wykorzystać także do analizy układów z losowymi zakłóceniami, po wcześniejszym odfiltrowaniu zakłóceń przez poddanie sygnałów kilku etapom analizy pakietowej i na ich podstawie – zgodnie z rozdziałem 4. – odtwarzać postać sygnału wejściowego i jego pochodnej (lub pochodnych, dla równań rzędu wyższego od 2). Należy podkreślić, że identyfikowane parametry wyznaczone były z warunku minimalizacji kwadratów błędów wszystkich elementów macierzy $\mathbf{R}$ w czasie t_i . Ghanem i Romeo [40, 41] wykorzystując falki Daubechies dopuszczają możliwość wyznaczenia poszukiwanych parametrów na podstawie dowolnej sekwencji równań z uzyskanego metodą Galerkin nadokreślonego układu równań. Wydaje

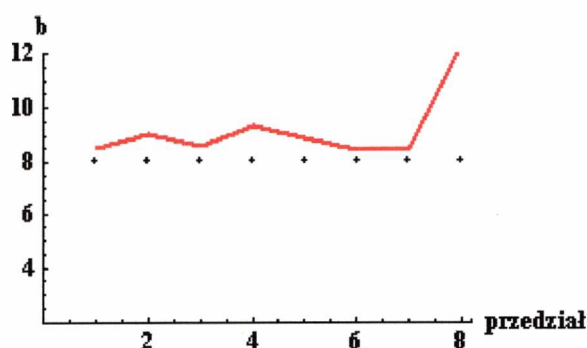
się, co potwierdzono w testach numerycznych powtarzających procedurę stosowaną przez tych autorów (pkt. 5.3.1.), że dobierając stosowną liczbę równań do liczby szukanych parametrów nie można w ogólności uzyskać zadowalających rezultatów. Jest to podyktowane zmiennym, na ogół słabym, uwarunkowaniem macierzy współczynników w ten sposób budowanych układów równań. Oczywiście znając (w zadaniach testowych) szukane parametry bez trudu można pokazać, że spełniają one każde z tak dobieranych równań, ale ich wyznaczenie z tych równań może być obciążone niedopuszczalnie dużym błędem. Spostrzeżenie to potwierdzono także i w tutaj proponowanej procedurze identyfikacji.

5.3.4. Identyfikacja parametrów równania rzędu czwartego

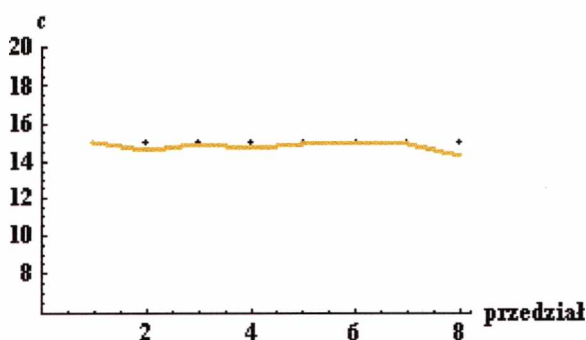
Procedurę identyfikacji wykorzystującą pakietowe funkcje bazowe Walsha testowano także na równaniach wyższego rzędu. Przykładowe równanie (4.14) można sprowadzić do postaci równania typu (5.1), gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -e & -d & -c & -b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \cos(t) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

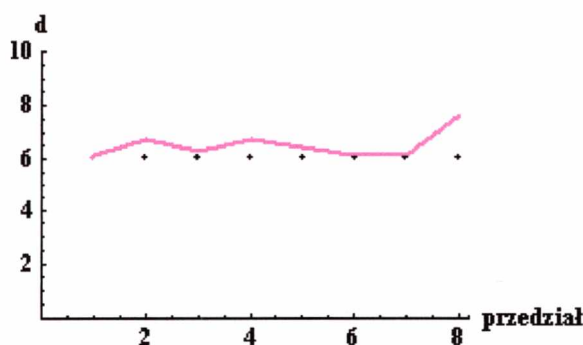
Na rysunkach 5.16, 5.17 i 5.18 przedstawiono wyniki identyfikacji odpowiednio parametru b , c i d , przy założeniu, że $a=30$, $e=2$ i wszystkich zerowych warunkach początkowych. Analizowany czas $t=20$ sek. podzielono na 8 równych odcinków i przyjęto, że $s=2^7$, a pochodne sygnału (do trzeciego rzędu włącznie) odtwarzano na podstawie piątego etapu analizy pakietowej. Dokładnymi wartościami identyfikowanych parametrów były: $b=8$, $c=15$ i $d=6$; na rysunkach wartości dokładne oznaczono kropkami, a otrzymane wyniki liniami ciągłymi.



Rys. 5.16. Wyniki identyfikacji parametru b równania (4.14)



Rys. 5.17. Wyniki identyfikacji parametru c równania (4.14)



Rys. 5.18. Wyniki identyfikacji parametru d równania (4.14)

Jak wynika z przedstawionych w tym rozdziale wyników i szeregu innych testów numerycznych, przedstawiona procedura jest efektywna i pozwala zadowalająco identyfikować parametry układów liniowych, choć czas obliczeń – z uwagi na duże rozmiary ($s = 2^j$) macierzy bazy – jest dłuższy od czasu analizy bazującej na podejściu przedstawionym w rozdziale 4. Pokazany w tym rozdziale algorytm pozwala na obniżenie (o 1) rzędu koniecznych w identyfikacji pochodnych i dlatego winien być stosowany wtedy, kiedy istnieją trudności przy wyznaczaniu pochodnych wyższych rzędów pojawiające się wtedy, kiedy podstawą identyfikacji są na przykład sygnały zakłócone.

6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W pracy zastosowano pakietową analizę falkową w parametrycznej identyfikacji dyskretnych układów dynamicznych. Uogólniono algorytm wyznaczania pochodnych sygnału, które są podstawą identyfikacji parametrów dyskretnych układów liniowych i nieliniowych o stałych i zmiennych współczynnikach. Zbudowano procedurę bazującą na pakietowych funkcjach bazowych Walsha, którą wykorzystano do identyfikacji parametrów dyskretnych układów liniowych o stałych i zmiennych współczynnikach. Na przykładach wybranych układów dyskretnych pokazano skuteczność pakietowej analizy falkowej w identyfikacji parametrów analizowanych układów.

W rozdziale pierwszym dokonano przeglądu literatury dotyczącej zastosowań analizy falkowej w identyfikacji parametrów konstrukcji inżynierskich.

W rozdziale drugim opisano podstawy analizy falkowej oraz algorytmy analizy falkowej i pakietowej. Pokazano, często w zagadnieniach praktycznych wykorzystywane, rodzaje funkcji skalujących i towarzyszące im falki.

Rozdział trzeci obejmuje przegląd metod identyfikacji, jakie stosuje się w zadaniach identyfikacji parametrów modeli matematycznych. W rozdziale tym przedstawiono także wybrane zagadnienia matematyczne, na których bazują opisane metody identyfikacji.

W rozdziale czwartym zaproponowano algorytm, oparty na pakietowej analizie falkowej, pozwalający na generowanie pochodnych sygnału. Przedstawiony algorytm pozwala na odtworzenie pochodnych sygnału na podstawie uzyskanych – w wyniku pakietowej analizy falkowej z filtrem Haara – bloków współczynników rozwinięcia sygnału wejściowego. Sformułowany algorytm wykorzystujący metodę najmniejszych kwadratów testowano na przykładach układów liniowych i nieliniowych opisanych równaniami drugiego rzędu o stałych i zmiennych współczynnikach, a także na przykładach równań różniczkowych rzędu czwartego. Podstawę prowadzonych analiz stanowiły niezakłócone i losowo zakłócone sygnały odpowiedzi układów. W rozdziale tym przedstawiono także problem wyboru modelu matematycznego w zagadnieniach nieliniowych i zagadnienie doboru czasu obserwacji odpowiedzi identyfikowanych układów.

Rozdział piąty prezentuje procedurę identyfikacji parametrów liniowych układów dyskretnych, bazującą na pakietach falkowych z filtrem Haara oraz na filtrowanych postaciach sygnałów wejściowych i ich pochodnych. Proponowane w tym rozdziale podejście wykorzystuje właściwości filtrowania sygnału w jego analizie pakietowej.

i pozwala obniżyć – w stosunku do podejścia przedstawionego w rozdziale czwartym – rząd generowanych pochodnych sygnałów wejściowych. Sformułowany algorytm testowano na przykładach układów liniowych o stałych i zmiennych współczynnikach.

Na podstawie przedstawionych w rozdziale czwartym i piątym oryginalnych – bazujących na właściwościach pakietowej analizy falkowej z filtrem Haara – algorytmów identyfikacji parametrów układów dynamicznych można ogólnie stwierdzić, że:

- Pakietowa analiza falkowa Walsha odpowiedzi układów dynamicznych stanowi podstawę efektywnego generowania pochodnych tych odpowiedzi, które wykorzystane w metodzie najmniejszych kwadratów pozwalają na zbudowanie skutecznego algorytmu identyfikacji parametrów liniowych i nieliniowych modeli matematycznych tych układów.
- Bazy pakietowe Walsha i ich macierze operacyjne całkowania umożliwiają obniżenie rzędu koniecznych w procedurze identyfikacji pochodnych sygnałów analizowanych układów i algebraizację ich opisów matematycznych, co – w połączeniu z właściwościami falkowej analizy pakietowej z filtrem Haara – decyduje o dużej skuteczności zbudowanej na ich podstawie procedury identyfikacji parametrycznej układów liniowych.

Przedstawione wyżej ogólne wnioski należy uzupełnić następującymi wnioskami szczegółowymi, które są istotne w praktycznym stosowaniu sformułowanych algorytmów identyfikacji:

- Bloki każdego z etapów pakietowej analizy falkowej Walsha mogą stanowić podstawę efektywnego odtwarzania filtrowanej postaci sygnału i jego pochodnych, a miejsce ich występowania na diagramie analizy pakietowej i konieczne w procesie odtwarzania współczynniki są dane prostymi schematami rekurencyjnymi,
- Stosowny – do rzędu równania różniczkowego przyjętego modelu matematycznego – etap analizy pakietowej może być podstawą odtwarzania pochodnych na podstawie różnych bloków współczynników rozwinięć falkowych, które w przypadku sygnałów nie zakłócanych są równoważne, a w przypadku sygnałów zakłócanych najlepsze wyniki uzyskuje się wykorzystując pierwsze z tych bloków,
- Poziom pakietowej analizy falkowej przyjmowany przy odtwarzaniu sygnału i jego pochodnych wynika z wyboru pomiędzy liczebnością zbiorów, a etapem filtrowania sygnału, co jest szczególnie istotne w analizie bazującej na sygnałach z losowymi zakłóceniami,

- Wartości globalnych błędów rozwiązań mogą stanowić podstawę decyzji o wyborze etapu analizy pakietowej, której wynik jest wykorzystywany w procedurze identyfikacji,
- Wartości globalnych błędów rozwiązań są istotną wskazówką przy ocenie trafności doboru modelu matematycznego w zagadnieniach nieliniowych,
- Funkcje wrażliwości parametrów modelu matematycznego mogą być użyteczne przy wyborze czasu rozpoczęcia i czasu zakończenia obserwacji identyfikowanego obiektu; wybór czasu obserwacji, w którym prowadzone są pomiary może istotnie wpływać na wartości otrzymywanych parametrów.

Zaproponowane algorytmy, poparte przedstawionymi w rozdziałach czwartym i piątym analizami, potwierdzają skuteczność i efektywność pakietowej analizy falkowej w identyfikacji parametrów dyskretnych liniowych i nieliniowych układów dynamicznych.

Pomimo tego, że pakietowa analiza falkowa jest nowym, dotychczas niewykorzystywanym narzędziem w identyfikacji parametrycznej dyskretnych układów dynamicznych, autorka pracy ma nadzieję, że podejście to – z uwagi na dużą skuteczność i łatwość stosowania – z czasem zyska na popularności i będzie stosowane na równi z innymi metodami identyfikacji.

Tabela 4.9. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.10) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$ oraz 5% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia pierwszej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia I-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=2$, $b=0.1$, $c=5$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
9	32	1	1.4806	-25.97	0.0576	-42.4	4.3746	-12.508	45.9513
		2	1.4807	-25.965	0.0613	-38.7	4.3749	-12.502	45.6273
		3	1.4805	-25.975	0.0601	-39.9	4.3746	-12.508	45.7485
		4	1.4820	-25.9	0.0552	-44.8	4.3738	-12.524	45.8882
10	16	1	1.9423	-2.885	0.1041	4.1	5.0990	1.98	14.7009
		2	1.9424	-2.88	0.1055	5.5	5.0981	1.962	14.6101
		3	1.9425	-2.875	0.1057	5.7	5.0984	1.968	14.6119
		4	1.9423	-2.885	0.1060	6.0	5.0981	1.962	14.6168
11	8	1	1.8389	-8.055	0.1045	4.5	5.1225	2.45	30.2992
		2	1.8392	-8.04	0.1099	9.9	5.1233	2.466	30.1474
		3	1.8393	-8.035	0.1115	11.5	5.1223	2.446	30.035
		4	1.8391	-8.045	0.1114	11.4	5.1220	2.44	30.0482

Tabela 4.10. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.10) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$ oraz 5% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia drugiej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia II-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=2$, $b=0.1$, $c=5$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
9	32	1	1.4806	-25.97	0.0576	-42.4	4.3746	-12.508	45.9513
		2	0.9567	-52.165	0.1199	19.9	3.5665	-28.67	86.2384
		3	0.4059	-79.705	0.1066	6.6	2.288	-54.24	95.5541
		4	0.2552	-87.24	0.0849	-15.1	2.1610	-56.78	94.6817
10	16	1	1.9423	-2.885	0.1041	4.1	5.0990	1.98	14.7009
		2	1.8699	-6.505	0.0853	-14.7	4.7904	-4.192	7.3686
		3	1.7282	-13.59	0.0895	-10.5	4.8208	-3.584	29.6565
		4	1.4658	-26.71	0.1545	54.5	4.0696	-18.608	24.9122
11	8	1	1.8389	-8.055	0.1045	4.5	5.1225	2.45	30.2992
		2	1.9059	-4.705	0.0806	-19.4	5.2056	4.112	26.5837
		3	2.0577	2.885	0.1211	21.1	5.3741	7.482	16.2594
		4	1.8898	-5.51	0.0820	-18.0	5.1644	3.288	26.4069

Tabela 4.11. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.10) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$ oraz 10% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia pierwszej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia I-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $\alpha=2$, $b=0.1$, $c=5$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
9	32	1	0.896	-55.2	0.1546	54.6	2.9360	-41.28	70.085
		2	0.8966	-55.17	0.1554	55.4	2.9393	-41.214	69.9977
		3	0.8963	-55.185	0.1575	57.5	2.9405	-41.19	69.8268
		4	0.9046	-54.77	0.1589	58.9	2.9476	-41.048	68.3465
10	16	1	1.8892	-5.54	0.1296	29.6	4.9466	-1.068	12.378
		2	1.8890	-5.55	0.1321	32.1	4.9466	-1.068	12.3983
		3	1.8888	-5.56	0.1304	30.4	4.9485	-1.030	12.5511
		4	1.8877	-5.615	0.1218	21.8	4.9484	-1.02	12.7656
11	8	1	1.8273	-8.635	0.1066	6.6	5.1158	2.316	31.438
		2	1.8281	-8.595	0.1123	12.3	5.1171	2.342	31.2342
		3	1.8275	-8.625	0.1134	13.4	5.1168	2.336	31.2676
		4	1.8266	-8.67	0.1115	11.5	5.1160	2.320	31.3988

Tabela 4.12. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.10) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$ oraz 10% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia drugiej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia II-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=2$, $b=0.1$, $c=5$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
9	32	1	0.896	-55.20	0.1546	54.60	2.9360	-41.280	70.085
		2	0.4666	-76.670	0.1182	18.20	2.2875	-54.250	103.094
		3	0.1589	-92.055	-0.0063	-106.30	1.9735	-60.530	151.749
		4	0.2034	-89.830	0.0994	-0.60	1.8668	-62.664	100.339
10	16	1	1.8892	-5.540	0.1296	29.60	4.9466	-1.068	12.378
		2	1.7756	-11.220	0.0552	-44.80	4.6875	-6.250	17.2457
		3	1.3408	-32.960	0.1614	61.40	3.6018	-27.964	26.414
		4	1.4226	-28.870	-0.0178	-117.80	4.1490	-17.020	52.7447
11	8	1	1.8273	-8.635	0.1066	6.60	5.1158	2.316	31.438
		2	1.8470	-7.650	0.0790	-21.0	5.0298	0.596	24.7916
		3	2.0134	0.670	0.1392	39.20	5.2281	4.562	13.3834
		4	1.7444	-12.780	0.2124	112.40	4.8375	-3.250	25.6913

Tabela 4.15. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.8) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$ oraz 5% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia pierwszej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia I-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=1$, $b=0.1$, $c=1$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
9	32	1	0.9956	-0.4347	0.1046	4.6938	1.0598	5.9847	9.80947
		2	0.9956	-0.4372	0.1061	6.1367	1.0598	5.9804	9.73271
		3	0.9956	-0.4379	0.1064	6.4850	1.0597	5.9794	9.7067
		4	0.9956	-0.4381	0.1065	6.5714	1.0597	5.9792	9.7017
10	16	1	0.9647	-3.5216	0.0864	-13.5223	1.2393	23.9322	33.4533
		2	0.9639	-3.6081	0.0858	-14.1038	1.2396	23.961	33.6773
		3	0.9637	-3.6247	0.0860	-13.9414	1.2395	23.9554	33.6855
		4	0.9637	-3.6285	0.0861	-13.885	1.2395	23.9543	33.6737
11	8	1	0.6388	-36.1168	0.4083	308.394	1.8112	81.12	53.7946
		2	0.6583	-34.1681	0.5478	447.897	1.8197	81.9712	53.9383
		3	0.6543	-34.564	0.5676	467.69	1.8229	82.2973	54.2641
		4	0.6537	-34.6281	0.5726	472.626	1.8225	82.2565	54.3316

Tabela 4.16. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.8) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$ oraz 5% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia drugiej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia II-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=1$, $b=0.1$, $c=1$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
9	32	1	0.9956	-0.4347	0.1046	4.6938	1.0598	5.9847	9.80947
		2	1.0024	0.2402	0.1052	5.2812	1.0605	6.0509	7.3683
		3	1.0271	2.7169	0.1081	8.1781	1.0607	6.0791	4.0758
		4	1.0040	0.4027	0.1054	5.4097	1.0606	6.0640	6.77747
10	16	1	0.9647	-3.5216	0.0864	-13.5223	1.2393	23.9322	33.4533
		2	0.9886	-1.1324	0.0586	-41.3125	1.2382	23.8261	32.8488
		3	1.0698	6.9857	-0.0678	-167881	1.2033	20.3305	54.1916
		4	0.9942	-0.5727	0.0517	-48.2203	1.2381	23.8117	32.7546
11	8	1	0.6388	-36.1168	0.4083	308.394	1.8112	81.12	53.7946
		2	0.6639	-33.6041	0.4781	378.176	1.8100	81.00	53.3256
		3	0.6184	-38.1542	0.8451	745.129	1.7301	73.01	59.6729
		4	0.6709	-32.9049	0.4854	385.472	1.8105	81.05	53.1913

Tabela 4.17. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.8) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$ oraz 10% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia pierwszej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia I-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=1, b=0.1, c=1$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
9	32	1	0.9971	-0.290	0.0768	-23.2	1.0736	7.36	13.5321
		2	0.9970	-0.30	0.0808	-19.2	1.0734	7.34	13.0653
		3	0.9970	-0.30	0.0776	-22.4	1.0734	7.34	13.4473
		4	0.9969	-0.31	0.0801	-19.9	1.0731	7.31	13.1482
10	16	1	0.9570	-4.30	0.0994	-0.6	1.2303	23.03	33.0424
		2	0.9560	-4.40	0.0983	-1.7	1.2307	23.07	33.3487
		3	0.9556	-4.44	0.0984	-1.6	1.2303	23.03	33.3919
		4	0.9556	-4.44	0.0988	-1.2	1.2305	23.05	33.364
11	8	1	0.6370	-36.3	0.4079	307.9	1.8098	80.98	53.8374
		2	0.6570	-34.3	0.5496	449.6	1.8191	81.91	53.9918
		3	0.6523	-34.77	0.5660	456.0	1.8222	82.22	54.3147
		4	0.6509	-34.91	0.5739	473.9	1.8187	81.87	54.4234

Tabela 4.18. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.8) o jednym stopniu swobody dla $N = 16384$ oraz 10% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia drugiej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakietowej	Liczba elementów l	Kolejny zbiór odtworzenia II-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=1$, $b=0.1$, $c=1$)						Błąd δ %
			a		b		c		
			Estymacja	Błąd λ_a %	Estymacja	Błąd λ_b %	Estymacja	Błąd λ_c %	
9	32	1	0.9971	-0.29	0.0768	-23.2	1.0736	7.36	13.5321
		2	0.9753	-2.47	0.1678	67.8	0.9991	-0.09	13.6339
		3	0.7763	-22.37	-0.0152	-115.2	0.9651	-3.49	74.7047
		4	0.7607	-23.93	0.0617	-38.3	0.8881	-11.19	55.1835
10	16	1	0.9570	-4.3	0.0994	-0.6	1.2303	23.03	33.0424
		2	1.0091	0.91	0.0363	-63.7	1.2639	26.39	33.375
		3	1.0983	9.83	-0.1053	-205.3	1.2430	24.3	66.2636
		4	0.9699	-3.01	0.0341	-65.9	1.2120	21.2	39.472
11	8	1	0.6370	-36.3	0.4079	307.9	1.8098	80.98	53.8374
		2	0.6616	-33.84	0.4805	380.5	1.8039	80.39	53.3608
		3	0.6207	-37.93	0.8561	756.1	1.7255	72.55	59.7788
		4	0.6722	-32.78	0.4843	384.3	1.8082	80.82	53.149

Tabela 4.20. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.12) dla $N = 16384$ przy różnych zbiorach odtworzenia drugiej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakieto- wej	Liczba elemen- tów l	Kolejny zbiór odtworzenia II-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=30, b=8, c=15, d=6, e=2$)										Błąd δ %
			a		b		c		d		e		
			Estyma- cja	Błąd λ_a %	Estyma- cja	Błąd λ_b %	Estyma- cja	Błąd λ_c %	Estyma- cja	Błąd λ_d %	Estyma- cja	Błąd λ_e %	
9	32	1	28.7604	-4.132	8.5151	6.439	13.1979	-12.014	6.4462	7.437	1.4703	-26.485	2.9918
		2	28.7552	-4.149	8.5151	6.439	13.1978	-12.015	6.4463	7.438	1.4703	-26.485	2.9780
		3	28.7362	-4.213	8.5147	6.434	13.1991	-12.006	6.4461	7.435	1.4705	-26.475	2.9230
		4	28.7541	-4.153	8.5151	6.439	13.1979	-12.014	6.4462	7.437	1.4703	-26.485	2.9751
10	16	1	30.2587	0.862	7.8769	-1.539	15.2979	1.986	5.8915	-1.808	2.0784	3.920	0.2583
		2	30.2355	0.785	7.8768	-1.54	15.2981	1.987	5.8914	-1.810	2.0785	3.925	0.2475
		3	30.1413	0.471	7.8775	-1.531	15.2969	1.979	5.8920	-1.800	2.0782	3.910	0.4317
		4	30.2296	0.765	7.8769	-1.539	15.298	1.987	5.8915	-1.808	2.0784	3.920	0.2497
11	8	1	30.6317	2.106	8.1040	1.3	15.2567	1.711	6.1269	2.115	2.0468	2.340	1.3354
		2	30.5386	1.795	8.1039	1.299	15.2569	1.713	6.1268	2.113	2.0469	2.345	1.3349
		3	30.1619	0.540	8.1036	1.295	15.2556	1.704	6.1265	2.108	2.0469	2.345	2.0305
		4	30.5155	1.718	8.1040	1.3	15.2567	1.711	6.1269	2.115	2.0469	2.345	1.3473

Tabela 4.21. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.12) dla $N = 16384$ przy różnych zbiorach odtworzenia trzeciej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakieto- wej	Liczba elemen- tów l	Kolejny zbiór odtworzenia III-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=30, b=8, c=15, d=6, e=2$)										Błąd δ %
			a		b		c		d		e		
			Estyma- cja	Błąd λ_a %	Estyma- cja	Błąd λ_b %	Estyma- cja	Błąd λ_c %	Estyma- cja	Błąd λ_d %	Estyma- cja	Błąd λ_e %	
9	32	1	28.7604	-4.132	8.5151	6.439	13.1979	-12.014	6.4462	7.437	1.4703	-26.485	2.9918
		2	28.7617	-4.128	8.5150	6.438	13.2007	-11.995	6.4454	7.423	1.4712	-26.44	2.9853
		3	28.7667	-4.111	8.5137	6.421	13.2134	-11.911	6.4411	7.352	1.4752	-26.24	2.9578
		4	28.7835	-4.055	8.5313	6.641	13.2254	-11.831	6.4512	7.52	1.4770	-26.15	2.8719
10	16	1	30.2587	0.862	7.8769	-1.539	15.2979	1.986	5.8915	-1.808	2.0784	3.92	0.2583
		2	30.2591	0.864	7.8812	-1.485	15.299	1.993	5.8927	-1.788	2.0790	3.95	0.2673
		3	30.2628	0.876	7.8975	-1.281	15.3063	2.042	5.8964	-1.727	2.0824	4.12	0.3186
		4	30.2861	0.954	7.9462	-0.672	15.3557	2.371	5.8990	-1.683	2.1016	5.08	0.5950
11	8	1	30.6317	2.106	8.1040	1.300	15.2567	1.711	6.1269	2.115	2.0468	2.34	1.3354
		2	30.6389	2.130	8.1158	1.448	15.2713	1.809	6.1269	2.115	2.0525	2.625	1.3972
		3	30.6668	2.223	8.1643	2.054	15.3281	2.187	6.1278	2.130	2.0742	3.71	1.6727
		4	30.7842	2.614	8.3623	4.529	15.5683	3.789	6.1291	2.152	2.1660	8.30	2.9350

Tabela 4.22. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.12) dla $N = 16384$ przy różnych zbiorach odtworzenia czwartej pochodnej

Poziom n falkowej analizy pakieto- wej	Liczba elemen- tów l	Kolejny zbiór odtworzenia IV-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: $a=30$, $b=8$, $c=15$, $d=6$, $e=2$)										Błąd δ %
			a		b		c		d		e		
			Estyma- cja	Błąd λ_a %	Estyma- cja	Błąd λ_b %	Estyma- cja	Błąd λ_c %	Estyma- cja	Błąd λ_d %	Estyma- cja	Błąd λ_e %	
9	32	1	28.7604	-4.132	8.5151	6.4387	13.1979	-12.014	6.4462	7.4366	1.4703	-26.485	2.9918
		2	28.9385	-3.538	8.4413	5.5162	13.442	-10.386	6.3903	6.505	1.5375	-23.125	2.5812
		3	29.6841	-1.053	8.1437	1.7962	14.4442	-3.7053	6.1722	2.87	1.8099	-9.505	0.9479
		4	30.4346	1.448	8.0426	0.5325	15.6234	4.156	5.9201	-1.3316	2.2398	11.99	1.5733
10	16	1	30.2587	0.8623	7.8769	-1.5387	15.2979	1.986	5.8915	-1.8083	2.0784	3.92	0.2583
		2	30.286	0.9533	7.8741	-1.5737	15.3242	2.1613	5.8926	-1.79	2.0843	4.215	0.3017
		3	30.5091	1.697	7.8322	-2.0975	15.5538	3.692	5.8849	-1.9183	2.1376	6.88	0.8003
		4	29.996	-0.0133	8.3862	-7.6725	14.3355	-4.43	6.4653	7.755	1.7408	-12.96	1.6497
11	8	1	30.6317	2.1056	8.1040	1.3	15.2567	1.7113	6.1269	2.115	2.0468	2.34	1.3354
		2	30.6612	2.204	8.1024	1.28	15.2783	1.8553	6.1264	2.1066	2.0514	2.57	1.3924
		3	30.7142	2.3806	8.1175	1.4687	15.2669	1.7793	6.1409	2.3483	2.0409	2.045	1.5561
		4	30.8848	2.9493	8.2042	2.5525	15.1911	1.274	6.2198	3.6633	1.9956	-0.22	2.2430

Tabela 4.24. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.13) dla $N = 16384$ przy różnych zbiorach odtworzenia drugiej pochodnej

Poziom <i>n</i> falkowej analizy pakieto- wej	Liczba elemen- tów <i>l</i>	Kolejny zbiór odtworzenia II- ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: <i>a</i> =30, <i>b</i> =8, <i>c</i> =15, <i>d</i> =6, <i>e</i> =2)										Błąd <i>δ</i> %
			<i>a</i>						<i>d</i>		<i>e</i>		
			Estyma- cja	Błąd <i>λ_a</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_b</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_c</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_d</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_e</i> %	
8	64	1	27.2284	-9.239	9.4888	18.610	12.3	-18.0	6.3675	6.125	1.8813	-5.935	10.9342
		2	27.2272	-9.243	9.4888	18.610	12.2999	-18.001	6.3675	6.125	1.8813	-5.935	10.9394
		3	27.2225	-9.258	9.4887	18.609	12.3	-18.0	6.3674	6.123	1.8813	-5.935	10.9571
		4	27.227	-9.243	9.4888	18.610	12.3	-18.0	6.3674	6.123	1.8813	-5.935	10.9391
9	32	1	30.0223	0.074	7.2884	-8.895	15.3619	2.413	5.5805	-6.992	1.9930	-0.350	2.1977
		2	30.0164	0.055	7.2884	-8.895	15.3619	2.413	5.5805	-6.992	1.9930	-0.350	2.1930
		3	29.9935	-0.022	7.2884	-8.895	15.3624	2.416	5.5806	-6.990	1.9931	-0.345	2.1800
		4	30.0149	0.050	7.2884	-8.895	15.362	2.413	5.5805	-6.992	1.9930	-0.350	2.1912
10	16	1	30.8831	2.944	6.6443	-16.946	15.9678	6.452	5.3957	-10.072	2.0611	3.055	3.1001
		2	30.8587	2.862	6.6443	-16.946	15.9678	6.452	5.3957	-10.072	2.0611	3.055	3.0180
		3	30.7617	2.539	6.6434	-16.958	15.9694	6.463	5.3949	-10.085	2.0612	3.060	2.7710
		4	30.8526	2.842	6.6444	-16.945	15.9677	6.451	5.3957	-10.072	2.0611	3.055	2.9992
11	8	1	35.0627	16.876	-0.6871	-108.589	22.2087	48.058	1.5182	-74.697	2.3337	16.685	15.7123
		2	34.9267	16.422	-0.6867	-108.584	22.2085	48.057	1.5182	-74.697	2.3337	16.685	15.0889
		3	34.3728	14.576	-0.6778	-108.473	22.2028	48.019	1.5188	-74.687	2.3339	16.695	13.0435
		4	34.8934	16.311	-0.6872	-108.590	22.2088	48.059	1.5182	-74.697	2.3337	16.685	14.9398

Tabela 4.25. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.13) dla $N = 16384$ przy różnych zbiorach odtworzenia trzeciej pochodnej

Poziom <i>n</i> falkowej analizy pakieto- wej	Liczba elemen- tów <i>l</i>	Kolejny zbiór odtworzenia III- ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: <i>a</i> =30, <i>b</i> =8, <i>c</i> =15, <i>d</i> =6, <i>e</i> =2)										Błąd <i>δ</i> %
			<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>		<i>d</i>		<i>e</i>		
			Estyma- cja	Błąd <i>λ_a</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_b</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_c</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_d</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_e</i> %	
8	64	1	27.2284	-9.239	9.4888	18.610	12.3	-18.000	6.3675	6.125	1.8813	-5.935	10.9342
		2	27.2269	-9.244	9.4897	18.621	12.2988	-18.008	6.3676	6.127	1.8813	-5.935	10.9397
		3	27.2169	-9.277	9.4988	18.735	12.2894	-18.071	6.3696	6.160	1.8811	-5.945	10.9564
		4	27.2139	-9.287	9.5123	18.904	12.2756	-18.163	6.3798	6.330	1.8806	-5.970	10.957
9	32	1	30.0223	0.074	7.2884	-8.895	15.3619	2.413	5.5805	-6.992	1.993	-0.350	2.1977
		2	30.02	0.067	7.2927	-8.841	15.3579	2.386	5.5828	-6.953	1.993	-0.350	2.1971
		3	30.0112	0.037	7.3077	-8.654	15.3441	2.294	5.5897	-6.838	1.9927	-0.365	2.1938
		4	29.9842	-0.053	7.3702	-7.873	15.2877	1.918	5.6245	-6.258	1.9917	-0.415	2.1637
10	16	1	30.8831	2.944	6.6443	-16.946	15.9678	6.452	5.3957	-10.072	2.0611	3.055	3.1001
		2	30.8765	2.922	6.6572	-16.785	15.9557	6.371	5.4027	-9.955	2.0608	3.040	3.0919
		3	30.8502	2.834	6.7082	-16.148	15.9081	6.054	5.4303	-9.495	2.0598	2.990	3.0577
		4	30.7411	2.470	6.9206	-13.492	15.7093	4.729	5.5458	-7.570	2.0556	2.780	2.9249
11	8	1	35.0627	16.876	-0.6871	-108.589	22.2087	48.058	1.5182	-74.697	2.3337	16.685	15.7123
		2	35.062	16.873	-0.6885	-108.606	22.2079	48.053	1.5174	-74.710	2.3336	16.680	15.7272
		3	35.0583	16.861	-0.6932	-108.665	22.2036	48.024	1.5150	-74.750	2.3329	16.645	15.7843
		4	35.0309	16.770	-0.6977	-108.721	22.1652	47.768	1.5131	-74.782	2.3296	16.480	16.0472

Tabela 4.26. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.13) dla $N = 16384$ przy różnych zbiorach odtworzenia czwartej pochodnej

Poziom <i>n</i> falkowej analizy pakieto- wej	Liczba elemen- tów <i>l</i>	Kolejny zbiór odtworzenia IV-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ściśle: <i>a</i> =30, <i>b</i> =8, <i>c</i> =15, <i>d</i> =6, <i>e</i> =2)										Błąd <i>δ</i> %
			<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>		<i>d</i>		<i>e</i>		
			Estyma- cja	Błąd <i>λ_a</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_b</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_c</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_d</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_e</i> %	
8	64	1	27.2284	-9.23867	9.4888	18.61	12.3	-18.0	6.3675	6.125	1.8813	-5.935	10.934
		2	27.4582	-8.47267	9.3955	17.4438	12.5076	-16.616	6.3508	5.8466	1.892	-5.4	9.8301
		3	28.412	-8.62667	8.9711	12.1387	13.429	-10.4733	6.2434	4.0566	1.9383	-3.085	5.3816
		4	29.2912	-2.36267	7.8263	-2.1712	14.2936	-4.7093	5.7455	-4.2416	1.8998	-5.01	6.0861
9	32	1	30.0223	0.74333	7.2884	-8.895	15.3619	2.4126	5.5805	-6.9916	1.9930	-0.35	2.1977
		2	30.0862	0.28733	7.3182	-8.5225	15.3839	2.5593	5.6115	-6.475	1.9977	-0.115	1.8646
		3	30.2771	0.92366	7.4656	-6.68	15.4596	3.064	5.7107	-4.8216	2.0183	0.915	0.7097
		4	30.7544	2.51467	7.7231	-3.4612	15.3795	2.53	6.1363	2.2716	2.0493	2.465	0.8653
10	16	1	30.8831	2.94367	6.6443	-16.9462	15.9678	6.452	5.3957	-10.0717	2.0611	3.055	10.721
		2	30.8882	2.96067	6.6593	-16.7588	15.9463	6.3086	5.4140	-9.7666	2.0600	3.0	3.1259
		3	30.8906	2.96867	6.7938	-15.0775	15.8135	5.4233	5.5229	-7.5229	2.0567	2.835	3.0935
		4	30.7817	2.60567	6.9660	-12.925	15.4788	3.192	5.6581	-5.6983	2.0375	1.875	4.1067
11	8	1	35.0627	16.8757	-0.6871	-108.589	22.2087	48.058	1.5182	-74.6967	2.3337	16.685	15.712
		2	35.1115	17.0383	-0.7234	-109.043	22.2409	48.2727	1.5122	-74.7967	2.3336	16.68	15.781
		3	35.2758	17.586	-0.8624	-110.78	22.3467	48.978	1.4892	-75.12	2.3321	16.605	16.106
		4	35.9158	19.7193	-1.4263	-117.829	22.7543	51.6953	1.3848	-76.92	2.3227	16.135	17.641

Tabela 4.27. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.12) dla $N = 16384$ oraz 0,001% amplitudzie zakłócenia
przy różnych zbiorach odtworzenia drugiej pochodnej

Poziom <i>n</i> falkowej analizy pakieto- wej	Liczba elemen- tów <i>l</i>	Kolejny zbiór odtworzenia II-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: <i>a</i> =30, <i>b</i> =8, <i>c</i> =15, <i>d</i> =6, <i>e</i> =2)										Błąd <i>δ</i> %
			<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>		<i>d</i>		<i>e</i>		
			Estyma- cja	Błąd <i>λ_a</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_b</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_c</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_d</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_e</i> %	
9	32	1	0.4607	-98.464	28.9405	261.756	-30.4758	-303.172	21.8508	264.180	-10.2202	-611.010	3587.2
		2	0.4634	-98.455	28.9356	261.695	-30.4733	-303.155	21.8426	264.043	-10.2176	-610.880	3591.9
		3	0.4597	-98.468	28.9741	262.176	-30.5566	-303.711	21.8772	264.620	-10.2416	-612.080	3629.2
		4	0.4631	-98.456	28.9438	261.798	-30.4929	-303.286	21.8556	264.260	-10.2215	-611.075	3594.1
10	16	1	27.3669	-8.777	10.2258	27.822	9.3605	-37.597	8.0473	34.122	0.1183	-94.085	12.736
		2	27.3572	-8.809	10.222	27.775	9.3679	-37.547	8.0445	34.075	0.1203	-93.985	12.686
		3	27.3304	-8.899	10.196	27.450	9.4238	-37.175	8.0225	33.708	0.1367	-93.165	12.442
		4	27.3631	-8.790	10.2146	27.683	9.3859	-37.427	8.0373	33.955	0.1261	-93.695	13.246
11	8	1	30.616	2.053	8.1366	1.707	15.2444	1.629	6.1488	2.480	2.0434	2.170	1.4444
		2	30.5227	1.742	8.1370	1.713	15.2437	1.625	6.1493	2.488	2.0432	2.160	1.4743
		3	30.1471	0.490	8.1347	1.684	15.2451	1.634	6.1471	2.452	2.0442	2.210	2.2020
		4	30.4999	1.666	8.1364	1.705	15.2443	1.629	6.1490	2.483	2.0432	2.160	1.4944

Tabela 4.28. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.12) dla $N = 16384$ oraz 0,001% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia czwartej pochodnej

Poziom <i>n</i> falkowej analizy pakietowej	Liczba elemen- tów <i>l</i>	Kolejny zbiór odtworzenia IV-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: <i>a</i> =30, <i>b</i> =8, <i>c</i> =15, <i>d</i> =6, <i>e</i> =2)										Błąd <i>δ</i> %
			<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>		<i>d</i>		<i>e</i>		
			Estyma- cja	Błąd <i>λ_a</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_b</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_c</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_d</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_e</i> %	
9	32	1	0.4607	-98.464	28.9405	261.756	-30.4758	-303.172	21.8508	264.180	-10.2202	-611.010	3587.2
		2	0.1307	-99.564	28.745	259.313	-30.644	-304.293	21.604	260.067	-10.2479	-612.395	4353.1
		3	-0.0260	-100.087	28.9434	261.793	-31.0796	-307.197	21.854	264.233	-10.4149	-620.745	1.22·10 ⁴⁸²⁰
		4	0.0417	-99.861	29.0261	262.826	-31.4353	-309.569	22.198	269.967	-10.6422	-632.110	4825.8
10	16	1	27.3669	-8.777	10.2258	27.822	9.3605	-37.597	8.0473	34.122	0.1183	-94.085	12.736
		2	18.0069	-39.977	18.5271	131.589	-5.8620	-139.080	14.1992	136.653	-3.6859	-284.295	62.2769
		3	5.8738	-80.421	25.8337	222.921	-22.3852	-249.235	19.4521	224.202	-8.1269	-506.345	695.69
		4	2.7441	-90.853	28.2013	252.516	-27.8287	-285.525	21.3775	256.292	-9.5362	-576.810	1670.97
11	8	1	30.616	2.053	8.1366	1.707	15.2444	1.629	6.1488	2.480	2.0434	2.170	1.4444
		2	30.3153	1.051	8.6186	7.733	14.1497	-5.669	6.7190	11.983	1.6413	-17.935	3.0583
		3	31.5172	5.057	6.7557	-15.554	16.9263	12.842	5.1269	-14.552	2.4127	20.635	1.2172
		4	31.9207	6.402	6.1409	-23.239	17.6774	17.849	4.5151	-24.748	2.6296	31.480	2.7515

Tabela 4.29. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.12) dla $N = 16384$ oraz 0,02% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia drugiej pochodnej

Poziom <i>n</i> falkowej analizy pakieto- wej	Liczba elemen- tów <i>l</i>	Kolejny zbiór odtworzenia II-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: <i>a</i> =30, <i>b</i> =8, <i>c</i> =15, <i>d</i> =6, <i>e</i> =2)										Błąd <i>δ</i> %
			<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>		<i>d</i>		<i>e</i>		
			Estyma- cja	Błąd <i>λ_a</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_b</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_c</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_d</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_e</i> %	
10	16	1	0.9897	-96.701	29.9647	274.559	-29.433	-296.220	21.7602	262.670	-9.4605	-573.025	1854.7
		2	0.9823	-96.726	29.8774	273.468	-29.3869	-295.913	21.661	261.017	-9.4379	-571.895	1896.4
		3	1.0001	-96.666	30.002	275.025	-29.5909	-297.273	21.7394	262.323	-9.4771	-573.855	1922.0
		4	1.0138	-96.621	29.9198	273.998	-29.3435	-295.623	21.6578	260.963	-9.4192	-570.960	1853.6
11	8	1	28.7169	-4.277	10.4132	30.165	12.2175	-18.550	7.8012	30.020	1.4328	-28.360	2.6852
		2	28.6431	-4.523	10.4116	30.145	12.2222	-18.519	7.7994	29.990	1.4349	-28.255	2.8511
		3	28.3845	-5.385	10.3636	29.545	12.288	-18.080	7.7656	29.427	1.4488	-27.560	3.6551
		4	28.6329	-4.557	10.4011	30.014	12.2364	-18.424	7.7914	29.857	1.4391	-28.045	2.8726

Tabela 4.30. Wyniki identyfikacji układu liniowego (4.12) dla $N = 16384$ oraz 0,02% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia czwartej pochodnej

Poziom <i>n</i> falkowej analizy pakietowej	Liczba elemen- tów <i>l</i>	Kolejny zbiór odtworzenia IV-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: <i>a</i> =30, <i>b</i> =8, <i>c</i> =15, <i>d</i> =6, <i>e</i> =2)										Błąd <i>δ</i> %
			<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>		<i>d</i>		<i>e</i>		
			Estyma- cja	Błąd <i>λ_a</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_b</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_c</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_d</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_e</i> %	
10	16	1	0.9897	-96.701	29.9647	274.559	-29.433	-296.220	21.7602	262.670	-9.4605	-573.025	1854.7
		2	0.1820	-99.393	29.7042	271.303	-31.7128	-311.419	22.6889	278.148	-10.6055	-630.275	3857.6
		3	-0.0701	-100.234	29.8976	273.720	-32.2238	-314.825	22.9658	282.763	-10.7541	-637.705	1.2·10 ¹⁸³⁹
		4	0.0616	-99.795	30.5089	281.361	-32.7505	-318.337	23.553	292.550	-10.9665	-648.325	3804.08
11	8	1	28.7169	-4.277	10.4132	30.165	12.2175	-18.550	7.8012	30.020	1.4328	-28.360	2.6852
		2	27.7903	-7.366	10.0492	25.615	14.065	-6.233	5.6201	-6.332	3.3990	69.950	99.6875
		3	23.9783	-20.072	14.2542	78.178	9.8094	-34.604	8.0059	33.432	1.0067	-49.665	213.212
		4	12.812	-57.293	21.9704	174.630	-13.2684	-188.456	16.9296	182.160	-6.2104	-410.520	201.619

Tabela 4.31. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.13) dla $N = 16384$ oraz 0,001% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia drugiej pochodnej

Poziom <i>n</i> falkowej analizy pakieto- wej	Liczba elemen- tów <i>l</i>	Kolejny zbiór odtworzenia II-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: <i>a</i> =30, <i>b</i> =8, <i>c</i> =15, <i>d</i> =6, <i>e</i> =2)										Błąd <i>δ</i> %
			<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>		<i>d</i>		<i>e</i>		
			Estyma- cja	Błąd <i>λ_a</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_b</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_c</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_d</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_e</i> %	
9	32	1	1.1983	-96.006	14.6612	83.265	-7.3557	-149.038	4.1352	-31.080	0.5754	-71.230	3.42·10 ¹⁹⁴
		2	1.1987	-96.004	14.6676	83.345	-7.3624	-149.083	4.1393	-31.012	0.5753	-71.235	8.36·10 ¹⁸¹
		3	1.2035	-95.988	14.6562	83.203	-7.3556	-149.037	4.1285	-31.192	0.5750	-71.250	8.42·10 ²⁰⁸
		4	1.1981	-96.006	14.6498	83.123	-7.3469	-148.979	4.1246	-31.257	0.5753	-71.235	1.27·10 ²⁰¹
10	16	1	30.0162	0.054	6.8342	-14.573	14.8849	-0.767	5.6575	-5.708	1.9600	-2.000	8.332
		2	29.9948	-0.017	6.8347	-14.566	14.8853	-0.765	5.6582	-5.697	1.9601	-1.995	8.3406
		3	29.9062	-0.313	6.8310	-14.612	14.892	-0.720	5.6540	-5.767	1.9605	-1.975	8.423
		4	29.9907	-0.031	6.8296	-14.630	14.8898	-0.735	5.6553	-5.745	1.9601	-1.995	8.3472
11	8	1	35.004	16.680	-0.5746	-107.183	22.0789	47.193	1.5687	-73.855	2.3297	16.485	15.9168
		2	34.8688	16.229	-0.5743	-107.179	22.0788	47.192	1.5688	-73.853	2.3297	16.485	15.2951
		3	34.3194	14.398	-0.5672	-107.090	22.0757	47.171	1.5684	-73.860	2.3300	16.500	13.2419
		4	34.8368	16.123	-0.5771	-107.214	22.0816	47.211	1.5672	-73.880	2.3297	16.485	15.1342

Tabela 4.32. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.13) dla $N = 16384$ oraz 0,001% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia czwartej pochodnej

Poziom <i>n</i> falkowej analizy pakietowej	Liczba elemen- tów <i>l</i>	Kolejny zbiór odtworzenia IV-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: <i>a</i> =30, <i>b</i> =8, <i>c</i> =15, <i>d</i> =6, <i>e</i> =2)										Błąd <i>δ</i> %
			<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>		<i>d</i>		<i>e</i>		
			Estyma- cja	Błąd <i>λ_a</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_b</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_c</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_d</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_e</i> %	
9	32	1	1.1983	-96.006	14.6612	83.265	-7.3557	-149.038	4.1352	-31.080	0.5754	-71.230	3.42·10 ¹⁹⁴
		2	0.5334	-98.222	14.7807	84.759	-7.8355	-152.237	4.1568	-30.720	0.5087	-74.565	7.69·10 ¹⁸⁸
		3	0.0292	-99.903	14.5534	81.918	-7.8883	-152.589	3.7290	-37.850	0.4982	-75.090	1.64·10 ²⁰⁰
		4	0.0988	-99.671	14.6866	83.583	-7.7694	-151.796	3.6738	-38.770	0.5129	-74.355	1.52·10 ²¹⁵
10	16	1	30.0162	0.054	6.8342	-14.573	14.8849	-0.767	5.6575	-5.708	1.9600	-2.000	8.332
		2	22.7485	-24.172	10.4769	30.961	9.1506	-38.996	5.3822	-10.297	1.7191	-14.045	39.2555
		3	27.0383	-9.872	2.8428	-64.465	17.8787	19.191	0.4047	-93.255	1.8058	-9.710	26.6048
		4	8.7537	-70.821	15.3727	92.159	-3.5295	-123.530	5.7380	-4.367	0.9503	-52.485	849.774
11	8	1	35.004	16.680	-0.5746	-107.183	22.0789	47.193	1.5687	-73.855	2.3297	16.485	15.9168
		2	35.1355	17.118	-0.6293	-107.866	22.1802	47.868	1.5827	-73.622	2.3362	16.810	15.5682
		3	35.3975	17.992	-0.8988	-111.235	22.3451	48.967	1.5393	-74.345	2.3333	16.665	16.2788
		4	36.6453	22.151	-2.9814	-137.268	24.4118	62.745	0.4015	-93.308	2.3753	18.765	18.566

Tabela 4.33. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.13) dla $N = 16384$ oraz 0,02% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia drugiej pochodnej

Poziom <i>n</i> falkowej analizy pakieto- wej	Liczba elemen- tów <i>l</i>	Kolejny zbiór odtworzenia II-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: <i>a</i> =30, <i>b</i> =8, <i>c</i> =15, <i>d</i> =6, <i>e</i> =2)										Błąd <i>δ</i> %
			<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>		<i>d</i>		<i>e</i>		
			Estyma- cja	Błąd <i>λ_a</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_b</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_c</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_d</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_e</i> %	
10	16	1	0.6997	-97.668	15.5234	94.043	-8.2823	-155.215	4.3562	-27.397	0.5531	-72.345	8.48·10 ¹⁹⁸
		2	0.7075	-97.642	15.5026	93.782	-8.2811	-155.207	4.3449	-27.585	0.5522	-72.390	6.10·10 ¹⁸⁸
		3	0.7063	-97.646	15.4748	93.435	-8.2822	-155.215	4.3048	-28.253	0.5501	-72.495	4.55·10 ¹⁹³
		4	0.7124	-97.625	15.4941	93.676	-8.2719	-155.146	4.3356	-27.740	0.5531	-72.345	2.10·10 ¹⁹³
11	8	1	33.1309	10.436	0.1441	-98.199	21.2244	41.496	1.0648	-82.253	2.2679	13.395	18.8391
		2	33.0372	10.124	0.1201	-98.499	21.2607	41.738	1.0599	-82.335	2.2696	13.480	18.1492
		3	32.5994	8.665	0.0491	-99.386	21.3651	42.434	1.0311	-82.815	2.2750	13.750	16.2611
		4	33.0002	10.001	0.1047	-98.691	21.2717	41.811	1.0448	-82.587	2.2702	13.510	18.1402

Tabela 4.34. Wyniki identyfikacji układu nieliniowego (4.13) dla $N = 16384$ oraz 0,02% amplitudzie zakłócenia przy różnych zbiorach odtworzenia czwartej pochodnej

Poziom <i>n</i> falkowej analizy pakietowej	Liczba elemen- tów <i>l</i>	Kolejny zbiór odtworzenia IV-ej pochodnej	Identyfikowane parametry (wartości ścisłe: <i>a</i> =30, <i>b</i> =8, <i>c</i> =15, <i>d</i> =6, <i>e</i> =2)										Błąd <i>δ</i> %
			<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>		<i>d</i>		<i>e</i>		
			Estyma- cja	Błąd <i>λ_a</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_b</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_c</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_d</i> %	Estyma- cja	Błąd <i>λ_e</i> %	
10	16	1	0.6997	-97.668	15.5234	94.043	-8.2823	-155.215	4.3562	-27.397	0.5531	-72.345	8.48·10 ¹⁹⁸
		2	-0.1247	-100.416	15.7312	96.640	-8.7115	-158.077	4.0186	-33.023	0.5432	-72.840	2.21·10 ³²³
		3	-0.9532	-103.177	18.0185	125.231	-10.5405	-170.270	4.9031	-18.282	0.5377	-73.115	3.00·10 ³⁰⁷
		4	0.2440	-99.187	17.6061	120.076	-9.9329	-166.219	5.6540	-5.767	0.5719	-71.405	3.47·10 ¹⁸⁹
11	8	1	33.1309	10.436	0.1441	-98.199	21.2244	41.496	1.0648	-82.253	2.2679	13.395	18.8391
		2	34.9347	16.449	-2.7582	-134.477	25.5614	70.409	-2.0189	-133.648	2.4836	24.180	25.406
		3	26.1572	-12.809	1.9040	-76.200	14.7383	-1.745	1.4106	-76.490	1.9476	-2.620	127.9
		4	22.0693	-26.436	10.3027	28.784	3.2563	-78.291	6.6018	10.030	1.4230	-28.850	148.868

Literatura:

1. ABOUFADEL E., SHLICKER S.: 1999, *Discovering Wavelets*, A Wiley-Interscience Publication.
2. ADAMS D.E., ALLEMANG R.J.: 1998, *Survey of nonlinear detection and identification techniques for experimental vibrations*, Proceedings of ISMA nr 23, vol. 1, s. 269 – 281.
3. AKAY M.: 1997, *Time-Frequency and Wavelets in Biomedical Signal Processing*, IEEE Engineering in Medicine & Biology.
4. ALDROUBI A., UNSER M.: 1996, *Wavelets in Medicine and Biology*, CRC Press.
5. AL-HADID M.A., WRIGHT J.R.: 1989, *Development of the force-state mapping technique for nonlinear systems and the extension of the location of nonlinear elements in a lumped-parameter system*, Journal of Mechanical Systems and Signal Processing, nr 3, vol. 3, s. 269 – 290.
6. AL-HADID M.A.: 1990, *Identification of non-linear dynamics systems using the force-state mapping technique*, praca doktorska, Department of Aeronautical Engineering, Queen Mary College, Londyn.
7. ALVIN K.F., ROBERTSON A.N., REICH G.W. PARK K.C.: 2003, *Structural system identification: from reality to models*, Computers and Structures, nr 81, s. 1149 – 1176.
8. ARGYRIS J., FAUST G., HAASE M.: 1994, *An exploration of chaos*, Amsterdam, ELSEVIER SCIENCE B.V.
9. BASU B., GUPTA V.K.: 1998, *Seismic response of SDOF systems by wavelet modeling of nonstationary processes*, Journal of Engineering Mechanics, nr 10, vol. 124, s. 1142 – 1150.
10. BASU B., GUPTA V.K.: 1999, *Wavelet-based analysis of the non-stationary response of a slipping foundation*, Journal of Sound and Vibration, nr 222, vol. 4, s. 547 – 563.
11. BATKO W., MIKULSKI A.: 1999, *Wavelet transform of impulse signal*, Machine Dynamics Problems, nr 2, vol. 23, s. 139 – 146.
12. BEGG R.D., MACKENZIE A.C., DODDS C.J., LOLAND O.: 1976, *Structural integrity monitoring using digital processing of vibration signals*, w Proceedings 8th Annual Offshore Technology Conference, Houston, TX, s. 305 – 311.
13. BEYLKIN G.: 1993, *On wavelet based algorithms for solving differential equations*, materiały dostępne w J.J. Benedetto et al. (Eds.), *Wavelets: mathematics and applications*, CRC Press, Boca Raton, FL s. 449 – 466.
14. BIAŁASIEWICZ J.T.: 2000, *Falki i aproksymacje*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
15. BISHOP C.M.: 1994, *Neural networks and their applications*, Review of Scientific Instrumentation, nr 65, vol. 6, s. 1803-1832.
16. BLEISTEIN N.: 1984, *Mathematical Methods for Wave Phenomena*, Elsevier Science and Technology.
17. BOULAHBAL D., GOINARAGHI M. F., ISMAIL F.: 1997, *Detection of Fatigue Cracks in Gears with the Continuous Wavelet Transform*, American Gear Manufacturers Association.
18. BOULAHBAL D., GOLNARAGHI M.F., ISMAIL F.: 1999, *Amplitude and phase wavelet maps for the detection of cracks in geared systems*, Mechanical Systems and Signal Processing, nr 13, vol. 3, s. 423 – 436.
19. CAWLEY P., ADAMS R.D.: 1979, *The locations of defects in structures from measurements of natural frequencies*, Journal of Strain Analysis 14(2), s. 49 – 57.

20. CHEN C.F., HSIAO C.H.: 1975, *A state-space approach to Walsh series solution of linear systems*, International Journal of Systems Science, vol. 6, nr 9, s. 833 – 858.
21. CHEN C.F., HSIAO C.H.: 1997, *Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems*, IEE Proceeding Control Theory Applied, vol. 144, nr 1, s. 87 – 94.
22. CHEN C.F., HSIAO C.H.: 1999, *Wavelet approach to optimizing dynamic systems*, IEE Proceeding Control Theory Applied, vol. 146, nr 2, s. 213 – 219.
23. CHEN C.F., TSAY Y.T., WU T.T.: 1977, *Walsh operational matrices for fractional calculus and their application to distributed systems*, Journal of The Franklin Institute, vol. 303, nr 3, s. 833 – 858.
24. CHEN Q., TOMLINSON G.R.: 1996, *Parametric identification of systems with dry friction and nonlinear stiffness using a time series model*, ASME, vol. 18, s.252 – 263.
25. CHENG Z., PILKEY W. D.: 1999, *Wavelet-based limiting performance analysis of mechanical systems subject to transient disturbances*, Finite Elements In Analysis and Design, s. 233 – 245.
26. CHUI Ch. K.: 1992, *An introduction to wavelets*, Academic Press, San Diego California.
27. COCA D., BILLINGS S.A.: 1997, *Continuous-time system identification for linear and nonlinear systems using wavelet decompositions*, International Journal of Bifurcation and Chaos, nr 7, s. 87 – 96.
28. CORRINGTON M.S.: 1973, *Solution of differential and integral equations with Walsh functions*, IEEE Transactions on Circuit Theory, vol. CT-20, nr 5, s. 470 – 476.
29. DAUBECHIES I., GILBERT A.: 1997, *Harmonic analysis, wavelets and application*, lecture 1- 8.
30. DAUBECHIES I.: 1988, „*Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets*” Comm. Pure Applied Math., vol. 41, s. 906 – 966.
31. DOEBLING S. et al.: 1996, *Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review*, Los Alamos National Laboratory, s. 1 – 127.
32. FANG L.C., THEWS R.L.: 1998, *Wavelets in physics*, World Scientific Publishing Company, Incorporated
33. FARRAR Ch. et al.: 1994, *Dynamic characterization and damage detection in the I-40 bridge over the Rio Grande*, Los Alamos National Laboratory report LA-12767-MS.
34. FÖRSTH M.: 2000, *Turbulence and fractal analysis using wavelets*, Astrophysical Dynamics, s. 7 – 26.
35. FOUFOULA-GEORGIOU E., KUMAR P.: 1994, *Wavelets in Geophysics*, vol. 4, Academic Press.
36. FOX C.H.J.: 1992, *The location of defects in structures: a comparison of the use in natural frequency and mode shape data*, w materiałach 10th International Modal Analysis Conference, s. 522 – 528.
37. FRANK P. M.: 1978, *Introduction to system sensitivity theory*, Academic Press, New York.
38. FRITZEN C.: 1986, *Identification of mass, damping and stiffness matrices of mechanical systems*, ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, nr 108, s. 9 – 16.
39. GENÇAY R., SELÇUK F., WHITCHER B.: 2001, *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*, Academic Press.

40. GHANEM R., ROMEO F.: 2000, *A wavelet-based approach for the identification of linear time-varying dynamical systems*, Journal of Sound and Vibration, nr 234, vol. 4, s. 555 – 576.
41. GHANEM R., ROMEO F.: 2001, *A wavelet-based approach for the model and parameter identification of non-linear systems*, International Journal of Non-Linear Mechanics, nr 234, s. 835 – 859.
42. GIFFORD S., TOMLINSON G.R.: 1989, *Recent advances in the application of functional series to non-linear structures*, Journal of Sound and Vibration, nr 135, s. 289 – 317.
43. GLABISZ W., KOŹBIAŁ T., NAPIÓRKOWSKA M.: 2000, *Falki w wybranych zagadnieniach mechaniki*, XLVI konferencja KILiW PAN i KN PZITB, Wrocław – Krynica, s. 59 – 67.
44. GLABISZ W., KOŹBIAŁ T., NAPIÓRKOWSKA M.: 2001, *Transformacja falkowa w identyfikacji wybranych parametrów konstrukcji inżynierskich*, XLVII konferencja KILiW PAN i KN PZITB, Opole – Krynica, s. 43 – 50.
45. GLABISZ W., KOŹBIAŁ T., NAPIÓRKOWSKA M.: 2003, *Nonparametric identification technique for nonlinear dynamic systems based on wavelet expansion*, konferencja GAMM 2003, Włochy.
46. GLABISZ W.: 2001, *Identification of linear and non-linear systems with Walsh wavelets packets*, Archives of Civil and Mechanical Engineering, vol. 1, nr 1, s. 47 – 62.
47. GLABISZ W.: 2003, *State analysis of time-varying linear systems via Walsh-wavelet packets*, Archives of Civil and Mechanical Engineering, vol. 3, nr 1, s. 59 – 75.
48. GLABISZ W.: 2004, *The use of Walsh-wavelet packets in linear boundary value problems*, Computers and Structures, nr 82, s. 131 – 141.
49. GRAPS A.: 1995, *An Introduction to Wavelets*, IEEE Computational Science and Engineering, vol. 2, nr 2, s. 50 – 61, wersja elektroniczna dostępna pod adresem: http://www.amara.com/IEEEwave/TW_history.html
50. GROSSMAN A., MORLET J.: 1985, *Decomposition of functions into wavelets of constant shape, and related transforms*, w: Mathematics+Physics, Lectures on Recent Results, vol. 1 Edition. L Streit, Singapore: World Scientific.
51. GU J.S., JIANG W.S.: 1996, *The Haar wavelets operational matrix of integration*, International Journal of Systems Science, vol. 27, nr 7, s. 623 – 628.
52. GUDMUNDSON P.: 1982, *Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches, or other geometrical changes*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 30(5), s. 339 – 353.
53. GURLEY K., KAREEM A.: 1999, *Applications of wavelets transforms in earthquake, wind & ocean engineering*, Engineering Structures, nr 21, s. 149 – 167.
54. HAAR A.: 1910, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Mathematische Annalen, vol. 69, s. 331 – 371.
55. HANS S., IBRAIM E., PERNOT S., BOUTIN C., LAMARQUE C.-H.: 2000b, *Damping identification in multi-degree-of-freedom systems via a wavelet-logarithmic decrement-part 2: study of a civil engineering building*, Journal of Sound and Vibration, nr 235, vol. 3, s. 375 – 403.
56. HONG J.C., KIM Y.Y., LEE H.C., LEE Y.W.: 2002, *Damage detection using Lipschitz exponent estimated by the wavelet transform: application to vibration modes of a beam*, International Journal of Solids and Structures, nr 39, s. 1803 – 1816.

57. HSIAO C.H., WANG W.J.: 1998, *State analysis and optimal control of linear time-varying systems via Haar wavelets*, Optimal Control Applications and Methods, nr 19, s. 423 – 433.
58. HSIAO C.H., WANG W.J.: 1999, *State analysis of time-varying nonlinear systems via Haar wavelets*, Mathematics and Computers in Simulation, nr 51, s. 91 – 100.
59. HSIAO C.H., WANG W.J.: 2000, *State analysis and parameter estimation of bilinear systems via Haar Wavelets*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 42, nr 2, s. 246 – 250.
60. HSIAO C.H., WANG W.J.: 2001, *Haar wavelets approach to nonlinear stiff systems*, Mathematics and Computers in Simulation, nr 57, s. 347 – 353.
61. HSIAO C.H.: 1997, *State analysis of linear delayed systems via Haar wavelets*, Mathematics and Computers in Simulation, nr 44, s. 457 – 470.
62. HUANG T.J., LIANG Z., LEE G.C.: 1996, *Structural damage detection using energy transfer ratios ETR*, w Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, s. 126 – 132.
63. HUNTER N.F., PAEZ T., GREGORY D.L.: 1989, *Force state mapping using experimental data*, Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Los Angeles, s. 843 – 869.
64. JANISZOWSKI K.: 2002, *Identyfikacja modeli parametrycznych w przykładach*, Warszawa, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT.
65. JENSEN Arne, JENSEN A., A. la COUR-HARBO: 2001, *Ripples in mathematics: the discrete wavelet transform*, Springer-Verlag New York.
66. KITADA Y.: 1998, *Identification of nonlinear structural dynamic systems using wavelets*, Journal of Engineering Mechanics, nr 10, vol. 124, s. 1059 – 1066.
67. KOH C.G., CHEN Y.F., LIAW C.-Y.: 2003, *A hybrid computational strategy for identification of structural parameters*, Computers and Structures nr 81, s. 107 – 117.
68. KORENBERG, BILLINGS S.A., LIU Y.P., McILROY P.J.: 1988, *Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear stochastic systems*, International Journal of Control, vol. 48, nr 1, s. 193 – 210.
69. KULISIEWICZ M., PIESIAK S.: 1994, *Metodologia modelowania i identyfikacji mechanicznych układów dynamicznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.
70. LAMARQUE C.-H., PERNOT S.: CUER A., 2000a, *Damping identification in multi-degree-of-freedom systems via a wavelet-logarithmic decrement-part 1: theory*, Journal of Sound and Vibration, nr 235, vol. 3, s. 361 – 374.
71. LAMBREGTS F., LEURIDAN J., BRUSSEL H.V.: 1988, *Frequency domain direct parameter identification for modal analysis: state space formulation*, Proceedings of the 13th International Seminar on Modal Analysis, Katholieke University, Leuven, sesja 6C, 54.
72. LATTO A., RESNIKOFF H.L., TENENBAUM E.: 1991, *The evaluation of connection coefficients of compactly supported wavelets*, Proceedings of the French-USA Workshop on Wavelets and Turbulence, Princeton, Springer-Verlag, New York.
73. LEURIDAN J.: 1984, *Some direct parameter model identification methods applicable for multiple input modal analysis*, praca doktorska, Department of Mechanical and Industrial Engineering, Uniwersytet Cincinnati, USA.
74. LIANG Z., TONG M., LEE G.C.: 1995, *Modal energy measurements of a long steel Bridge*, w Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference, s. 226 – 232.

75. LIEW K.M., WANG Q.: 1998, *Application of wavelet theory for crack identification in structures*, Journal of Engineering Mechanics, s. 152 – 157.
76. LIM T.W.: 1995, *Structural Damage detection using constrained eigenstructure assignment*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 18(3), s. 411 – 418.
77. LIN R.M., EWINS D.J.: 1990, *On the location of structural nonlinearity from modal testing- a feasibility study*, in proc. of the 8th International Modal Analysis Conference, s. 358 – 364.
78. LIND R., SNYDER K., BRENNER M.: 2001, *Wavelet analysis to characterize nonlinearities and predict limit cycles of an aeroelastic system*, Mechanical Systems and Signal Processing, nr 15, vol. 2, s. 337 – 356.
79. LIU B., LING S.-F.: 1999, *On the selection of informative wavelets for machinery diagnosis*, Mechanical Systems and Signal Processing, nr 13, vol. 1, s. 145 – 162
80. LJUNG L.: 1987, *System identification: theory for the user*, Prentice Hall PTR, New Jersey.
81. LOLAND O., DODDS C.J.: 1976, *Experience in developing and operating integrity monitoring system in North Sea*, w Proceedings 8th Annual Offshore Technology Conference, Houston, TX, s. 313 – 319.
82. MALLAT S.: 1989a, *A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation*, IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, nr 11, s. 674 – 693.
83. MALLAT S.: 1989b, *Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models*, IEEE Transaction in Acoustic Speech and Signal Processing, nr 37, s. 2091 – 2110.
84. MALLAT S.: 1989c, *Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of L_2* , Transaction of the American Mathematical Society, nr 315, s. 69 – 87.
85. MALLAT S.: 1999, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, Paryż.
86. MAŃCZAK K., NAHORSKI Z.: 1983, *Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych*, PWN, Warszawa.
87. MANSON G.K. et al.: 1993, *Pseudo-fault induction in engineering structures*, ASME Adaptive Structures and Materials Systems, AD 35, s. 449 – 455.
88. MARR D., VAINA L.: 1982, *Representation and recognition of the movements of shapes*, Proceedings of the Royal Society of London B, nr 214, s. 501 – 524.
89. MASRI S.F., SASSI H., CAUGHEY T.K.: 1979, *A nonparametric identification technique for non-linear dynamics problems*, ASME, Journal of Applied Mechanics, nr 49, s. 433 – 447.
90. MASRI S.F., SASSI H., CAUGHEY T.K.: 1982, *Nonparametric identification of nearly arbitrary nonlinear systems*, ASME, Journal of Applied Mechanics, nr 49, s. 619 – 628.
91. MASTRODDI F., BETOLI A.: 1999, *Wavelet analysis for HOPF bifurcation with aeroelastic applications*, Journal of Sound and Vibration, nr 225, vol. 5, s. 887 – 913.
92. MEYER Y.: 1993, *Wavelets: algorithms and applications*, SIAM, Philadelphia.
93. MILLER K. S., MURRAY F. J.: 1953, *The mathematical basis for the error analysis of differential analyzers*, Journal of Math Phys. (Cambridge, Mass.)
94. MILLER K. S., MURRAY F. J.: 1954, *Error analysis for differential analyzers*, WADC TR s.54 – 252
95. MOHAMMAD K.S., WORDEN K., TOMLINSON G.R.: 1992, *Direct parameter estimation for linear and non-linear structures*, Journal of Sound and Vibration, vol. 152, nr 3, s. 471 – 499.

96. MOTARD R.L., BABU J.: 1994, *Wavelet Applications in Chemical Engineering*, Kluwer Academic Publishers.
97. MOYO P., BROWNJOHN J. M. W.: 2002, *Detection of anomalous structural behavior using wavelet analysis*, Mechanical Systems and Signal Processing, nr 16, vol. 2-3, s. 429 – 445.
98. NEWLAND D. E. E.: 1996, *An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*, Addison-Wesley, Londyn.
99. NIELSEN O. M.: 1998, *Wavelets in scientific computing*, rozprawa doktorska, Technical University of Denmark, wersja elektroniczna dostępa pod adresem:
<http://www.imm.dtu.dk/~omni/thesis.html>
100. OJALVO I.U., PILON D.: 1988, *Diagnostics for geometrically locating structural math model errors from modal test data*, in proc. of 29th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference, s. 1174 – 1186.
101. OKHITA M., KOBAYASHI Y.: 1986, *An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-33, nr 9, s. 853 – 862.
102. OKHITA M.: 1987, *An application of rationalized Haar functions to the solution of delay-differential systems*, Mathematics and Computers in Simulation, nr 28, s. 477 – 491.
103. PETSOUNIS K., FASSOIS S.D.: 2001, *Parametric time-domain methods for the identification of vibrating structures – a critical comparisons and assessment*, Mechanical Systems and Signal Processing, nr 6, vol. 15, s. 1031 – 1060.
104. PIOMBO B.A.D., FASANA A., MARCHESIELLO S., RUZZENE M.: 2000, *Modeling and identification of the dynamic response of a supported bridge*, Mechanical Systems and Signal Processing, nr 14, vol. 1, s. 75 – 89.
105. PITTER S., SCHNEID J., UEBERHUBER Ch. W.: 1993, *Wavelet Literature Survey*, Technical University Vienna, Wiedeń.
106. POTTER R., RICHARDSON M.: 1974, *Mass stiffness and damping from measured modal analysis data*, ISA Paper nr 74-630, s. 1 – 15.
107. QIAN S.: 2001, *Introduction to Time-Frequency and Wavelet Transform*, Prentice Hall Professional Technical Reference.
108. QUAN WANG, XIAOMIN DENG: 1999, *Damage detection with spatial wavelets*, International Journal of Solids and Structures, nr 36, s. 3443 – 3468.
109. RESNIKOFF H. L., WELLS R. O. Jr: 1998, *Wavelet analysis. The scalable structure of information*, Springer-Verlag New York, Inc.
110. ROBERTSON A.N., PARK K.C., ALVIN K.F.: 1998, *Identification of structural dynamics models using wavelet-generated impulse response data*, Journal of Vibration and Acoustics, vol. 120, s. 261 – 266.
111. ROMINE C.H., PEYTON B.W.: 1997, *Computing connection coefficients of compactly supported wavelets on bounded intervals*, Oak Ridge National Laboratory / TM-13413, wersja elektroniczna dostępa pod adresem:
<http://www.epm.ornl.gov/~romine/propercc.ps>
112. RUBINI R., MENEGHETTI U.: 2001, *Application of the envelope and wavelet transform analyses for the diagnosis of incipient faults in ball bearings*, Mechanical Systems and Signal Processing, nr 15, vol. 2, s. 287 – 302.
113. RUZZENE M., FASANA A., GARIBALDI L., PIOMBO B.: 1997, *Natural frequencies and dampings identification using wavelet transform: application to real data*, Mechanical Systems and Signal Processing, nr 11, vol. 2, s. 207 – 218.

114. SARKAR T.K., SALAZAR-PALMA M.: 2002, *Wavelet Applications in Engineering Electromagnetics*, Artech House.
115. SHYE K., RICHARDSON M.: 1987, *Mass, stiffness and damping matrix estimates from structural measurements*, Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, Londyn, s. 756 – 761.
116. SMITH C.B., WERELEY N.M.: 1999, *Nonlinear damping identification from transient data*, AIAA Journal, nr 12, vol. 37, s. 1625 – 1632.
117. SÖDERSTRÖM T., STOICA P.: 1997, *Identyfikacja systemów*, PWN, Warszawa.
118. STASZEWSKI W. J., TOMLINSON G.R.: 1994, *Application of the wavelet transform to fault detection in a spur gear*, AP (Academic Press) Journal of Sound and Vibration, s. 289 – 307.
119. STASZEWSKI W.J.: 1998, *Identification of non-linear systems using multi-scale ridges and skeletons of the wavelet transform*, Journal of Sound and Vibration, nr 214, vol. 4, s. 639 – 658.
120. STASZEWSKI W.J.: 1998, *Wavelet based compression and feature selection for vibration analysis*, Journal of Sound and Vibration, nr 211, vol. 5, s. 735 – 760.
121. STRANG G., NGUYEN T.: 2000, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press.
122. STRUZIK Z.: 2001, *Wavelet method in (financial) time-series processing*, Physica A, nr 296, s. 307 – 319.
123. STUBBS N., OSEGUEDA R.: 1990, *Global non-destructive damage evaluation in solids*, Modal Analysis: The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 5(2), s. 67 – 79.
124. SUNG C.K., TAI H.M., CHEN C.W.: 2000, *Locating defects of a gear system by the technique of wavelet transform*, Mechanism and Machine Theory, nr 35, s. 1169 – 1182.
125. SZMELTER J.: 1980, *Metody komputerowe w mechanice*, Warszawa, BNI.
126. UEDA M., LODHA S.: 1995, *Wavelets: an elementary introduction and examples*, Computer Engineering and Information Sciences, Santa Cruz, USA.
127. URBAN K.: 2002, *Wavelets in Numerical Simulation: Problem Adapted Construction and Applications*, Springer-Verlag New York.
128. van de BERG J.C.: 2003, *Wavelets in physics*, Cambridge University Press.
129. WALCZAK J.: 1999, *Wybrane zastosowania transformacji falkowych w identyfikacji sygnałów*, Podstawowe Problemy Energoelektroniki i Elektromechaniki – VIII Sympozjum PPEE'99 – Ustroń, s. 524 – 528.
130. WALKER J.S., KRANTZ S.G.: 1999, *A Primer on Wavelets and Their Scientific Applications*, CRC Press.
131. WANG W.J., McFADDEN P.D.: 1996, *Application of wavelets to gearbox vibration signals for fault detection*, Journal Of Sound And Vibration, nr 234, vol. 4, s. 927 – 939.
132. WEISS G., COIFMAN R.: 1968, *Representation of compact groups and spherical harmonics*, L'Enseign. Math., tom XIV, vol.2, s. 121 – 173.
133. WEISS G., COIFMAN R.: 1970, *Theoremes sur les multiplicateurs de Fourier sur SU(2) et $\mathcal{E}_2$* , C.R. Acad. Sc. Paris, nr 271, s. 928 – 930.
134. WEISS G., COIFMAN R.: 1971, *Analyse Harmonique non Commutative sue Certains Espaces Homogens*, Lecture notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, nr 242.
135. WEISS G., COIFMAN R.: 1972, *Invariant systems of conjugate harmonic functions associated with compact Lie groups*, Studia Math. XLIV, s.301 – 308.

136. WEISS G., COIFMAN R.: 1977, *Some examples of transference methods in harmonic analysis*, Proceedings of the Conference in Harmonic Analysis, vol. XXII, s. 33 – 45, Academic Press, London.
137. WEISS i inni: 2002, *Wavelets and applications*, Lecture Notes, vol. 1, IMUB, Barcelona.
138. WORDEN K. : 1990, *Data processing and experimental design for restoring force surface method. Part I: integration and differentiation of measured time data*, Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 4, nr 4, s 295 – 319.
139. WORDEN K., TOMLINSON G.R.: 1988, *Developments in force state mapping for nonlinear systems*, Proceedings of the International Model Analysis Conference, s. 1471 – 1479.
140. WORDEN K., TOMLINSON G.R.: 1988, *Identification of linear/nonlinear restoring force surfaces in single and multi-mode systems*, 3th International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics Southampton, s. 299 – 309.
141. WORDEN K., TOMLINSON G.R.: 1989, *Application of the restoring force surface method to nonlinear elements*, Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Los Angeles, s. 1347 – 1355.
142. YANG J.C.S. CHEN J., DAGALAKIS N.G.: 1984, *Damage detection in offshore platforms by the random decrement technique*, ASME Journal of Energy Resources Technology, 106, s. 38 – 42.
143. YANG Y., IBRAHIM S.R.: 1985, *A nonparametric identification technique for a variey of discrete nonlinear vibrating systems*, ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability In Design, nr 107, s. 60 – 66.
144. ZABEL V., BUCHER C.: 2002, *Parametric system identification by means of the wavelet transformation*, Structural Dynamics, EURODEX2002, s. 1027 – 1032.
145. ZHOU Y.-H., WANG J., ZENG X.J., JIANG Q.: 2000, *Vibration control of variable thickness plates with piezoelectric sensors and actuators based on wavelet theory*, Journal of Sound and Vibration, nr 237, vol. 3, s. 395 – 410.
146. ZIMMER A.: 1998, *Identyfikacja obiektów i sygnałów*, Kraków, Wydawnictwa Politechniki Krakowskiej.

