

**INSTYTUT BUDOWNICTWA
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ**

Raport serii PRE 17/04

*Nośność graniczna
zespoleń belek stalowo-betonowych
sprężanych kablami zewnętrznymi*

mgr inż. Wojciech Lorenc

Rozprawa doktorska

Promotor: dr hab. inż. Ernest Kubica, prof. PWr.

Słowa kluczowe: belki zespolone, sprężenie zewnętrzne, wzmacnianie konstrukcji, podatność zespolenia, badanie doświadczalne

117288



320330 L/1

Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej



100100054576

2005/0221/D

SPIS TREŚCI

1.	WSTĘP.....	5
1.1.	WPROWADZENIE.....	5
1.2.	PRZEDMIOT, CEL I ZAKRES OPRACOWANIA	6
1.3.	SKRÓTY PRZYJĘTE W OPRACOWANIU	6
2.	OMÓWIENIE STANU WIEDZY	7
2.1.	BELKI ZESPOLONE BZ.....	7
2.2.	STALOWE BELKI SPRĘŻONE SBS	7
2.3.	BELKI ZESPOLONE SPRĘŻONE ZBS I ZBWS.....	8
2.3.1.	<i>Badania modelowe zespolonych belek sprężonych</i>	<i>8</i>
2.3.2.	<i>Modelowanie teoretyczne ZBS i ZBWS</i>	<i>13</i>
2.3.3.	<i>Normowe procedury obliczeniowe</i>	<i>15</i>
2.4.	MODELOWANIE BZ.....	15
2.5.	POLSKA PRAKTYKA INŻYNIERSKA W ZAKRESIE ZBS I ZBWS.....	18
2.6.	KIERUNKI ROZWOJU.....	18
2.7.	PODSUMOWANIE	19
3.	TEZY	20
4.	MODEL ANALITYCZNY ZESPOLONEJ BELKI SPRĘŻONEJ.....	21
4.1.	PODSTAWY TEORETYCZNE - ROZWIĄZANIE BEZ UWZGLĘDNIENIA PODATNOŚCI ZESPOLENIA	22
4.2.	ROZWINIĘCIE MODELU - UWZGLĘDNIENIE PODATNOŚCI ZESPOLENIA.....	29
4.3.	PROGRAM KOMPUTEROWY PRESTCOMP	32
4.3.1.	<i>Algorytm programu.....</i>	<i>32</i>
4.3.2.	<i>Analizy wybranych modeli belek</i>	<i>35</i>
4.3.3.	<i>Analizy modeli belek do badań.....</i>	<i>36</i>
5.	BADANIA ELEMENTÓW SKŁADOWYCH BELEK.....	37
5.1.	STAL KONSTRUKCYJNA.....	37
5.2.	STAL ZBROJENIOWA.....	39
5.3.	STAL SPRĘŻAJĄCA	39
5.4.	SIŁOMIERZE DO SPLOTÓW	40
5.5.	BETON	41
5.6.	ŁĄCZNIKI ŚCINANE	43
5.6.1.	<i>Program badań</i>	<i>44</i>
5.6.2.	<i>Przebieg badań.....</i>	<i>46</i>
5.6.2.1	<i>Próbka Z1</i>	<i>46</i>
5.6.2.2	<i>Próbka Z2</i>	<i>46</i>
5.6.2.3	<i>Próbka Z3</i>	<i>47</i>
5.6.3.	<i>Interpretacja wyników.....</i>	<i>49</i>
6.	PROJEKT, WYKONANIE I BADANIA MODELOWE BELEK	52
6.1.	CHARAKTERYSTYKI MATERIAŁÓW ZASTOSOWANYCH W BELKACH.....	52
6.2.	PROJEKTY BELEK	52
6.2.1.	<i>Nośność przekroju poprzecznego</i>	<i>53</i>
6.2.2.	<i>Sprężenie zewnętrzne.....</i>	<i>54</i>
6.2.3.	<i>Zespolenie.....</i>	<i>56</i>
6.2.3.1	<i>Ścinanie od sił pionowych.....</i>	<i>56</i>
6.2.3.2	<i>Ścinanie od sprężenia</i>	<i>57</i>
6.2.4.	<i>Zbrojenie płyty.....</i>	<i>58</i>
6.2.5.	<i>Elementy konstrukcji stalowej.....</i>	<i>58</i>
6.3.	WYKONANIE MODELI.....	59
6.4.	PRZEBIEG BADAŃ.....	60
6.4.1.	<i>Stanowisko badawcze</i>	<i>61</i>
6.4.2.	<i>Urządzenia pomiarowe i czujniki.....</i>	<i>63</i>
6.4.3.	<i>Realizacja sprężenia.....</i>	<i>68</i>
6.4.4.	<i>Obciążenie próbne belki B1</i>	<i>70</i>

**Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych
sprężanych kablami zewnętrznymi**

6.4.5.	Przebieg badań belki B2.....	71
6.4.6.	Przebieg badań belki B3.....	74
6.4.7.	Przebieg badań belki B4.....	76
6.4.8.	Przebieg badań belki B5.....	80
6.4.9.	Przebieg badań belki B1.....	82
6.4.10.	Przebieg badań belki B6.....	85
7.	WYBRANE WYNIKI BADAŃ	87
7.1.	BELKA NIESPRĘŻONA B2.....	88
7.2.	BELKA SPRĘŻONA PROSTYM CIĘGNIEM B6	91
7.3.	BELKA SPRĘŻONA CIĘGNIEM ODGIĘTYM B3	95
8.	ANALIZY TEORETYCZNE	98
8.1.	MODEL DA	98
8.1.1.	Charakterystyki materiałowe.....	98
8.1.1.1	Beton.....	99
8.1.1.2	Stal konstrukcyjna.....	99
8.1.1.3	Stal zbrojeniowa.....	99
8.1.1.4	Sprężenie kablami prostymi.....	100
8.1.1.5	Zespolenie.....	100
8.1.2.	Parametry analizy.....	100
8.2.	MODEL MES.....	102
8.2.1.	Modelowanie konstrukcji.....	102
8.2.2.	Materiały i nieliniowości materiałowe	103
8.2.3.	Model dyskretny – wariant 1	104
8.2.4.	Obciążenia.....	106
8.2.5.	Wnioski z obliczeń dla wariantu nr 1	106
8.2.6.	Model dyskretny – wariant 2	107
8.2.7.	Parametry analizy.....	108
9.	ANALIZA WYNIKÓW	110
9.1.	PORÓWNANIE WYNIKÓW TEORETYCZNYCH I DOŚWIADCZALNYCH DLA WYBRANYCH BELEK	110
9.1.1.	Belka B2 niesprężona	110
9.1.2.	Belka B3 sprężona kablem odgiętym	112
9.1.3.	Belka B6 sprężona kablem prostym.....	113
9.2.	PORÓWNANIE WYBRANYCH WYNIKÓW DOŚWIADCZALNYCH BELEK B2, B3 I B6	115
9.3.	PORÓWNANIE WYBRANYCH WYNIKÓW ANALIZ NUMERYCZNYCH BELEK B2, B3 I B6	116
9.4.	ANALIZA UKŁADU NAPRĘŻEŃ W ŚRODKU ROZPIĘTOŚCI BELEK	119
9.4.1.	Rozkład naprężeń i odkształceń w przekroju środkowym belki B2.....	119
9.4.2.	Rozkład naprężeń i odkształceń w przekroju środkowym belki B6.....	120
9.5.	ANALIZA ZJAWISKA NAGŁEGO WZROSTU ODKSZTAŁCEŃ W PASIE GÓRNYM BELKI STALOWEJ W $\frac{1}{4}$ I $\frac{3}{4}$ ROZPIĘTOŚCI.....	122
9.6.	OPIS ZACHOWANIA SIĘ BELEK POD WPLYWEM OBCIĄŻENIA	124
9.6.1.	Belka niesprężona.....	124
9.6.2.	Belka sprężona.....	126
10.	WNIOSKI	127
11.	LITERATURA	130

1. WSTĘP

1.1. WPROWADZENIE

Belki zespolone stalowo-betonowe stosowane są na dużą skalę przede wszystkim w mostownictwie, gdzie ich rozwój datuje się od początku lat czterdziestych ubiegłego wieku w Kanadzie i USA, a w Europie - od czasu zakończenia II wojny światowej. W budownictwie ogólnym stosowane są głównie w stropach parkingów wielopoziomowych. W pierwszych realizacjach mostów zespolonych nie w pełni zdawano sobie sprawę z istoty zespolenia, tj. ze współpracy płyty betonowej z dźwigarem stalowym. Z biegiem czasu zaczęto świadomie kształtować elementy konstrukcji zespolonych, wykorzystując coraz lepiej właściwości stali i betonu. Obecnie następuje ciągły rozwój konstrukcji przęseł zespolonych, zwłaszcza w mostach i wiaduktach drogowych zarówno na świecie, jak i w kraju. Przykładem może być wprowadzana obecnie w Polsce, po udanych realizacjach na terenie Niemiec (pierwsze realizacje krajowe w 2004 r.), technologia wykorzystująca prefabrykowane dźwigary zespolone z betonowym deskowaniem aktywnym [56]. Wyprowadzono wiele teorii i modeli obliczeniowych umożliwiających trafny opis zachowania się konstrukcji zespolonych, a dostępne obecnie oprogramowanie komputerowe umożliwia bezpieczne i ekonomiczne ich projektowanie z uwzględnieniem wielu skomplikowanych zjawisk zachodzących w tych elementach.

Sprężanie jako działanie polegające na wprowadzeniu pewnego założonego stanu naprężeń do elementu konstrukcyjnego, jest praktyką bardzo szeroko stosowaną w budownictwie. Najpowszechniej jest ono stosowane z wykorzystaniem cięgien (kabli) o wysokiej wytrzymałości i w odniesieniu do konstrukcji z betonu. W przypadku projektowania nowych konstrukcji stalowych, sprężanie stosuje się rzadziej i to głównie w przypadku konstrukcji o dużych rozpiętościach. Najczęściej są to konstrukcje linowe i wiszące. Sprężanie blachownic o mniejszych rozpiętościach jest praktyką spotykaną raczej rzadko. Projektując tego rodzaju nowe elementy należy liczyć się z tym, że są lepsze i mniej skomplikowane metody uzyskania odpowiedniej nośności elementu. Znacznie częściej, aniżeli w stosunku do konstrukcji nowoprojektowanych [9], sprężenie zewnętrzne, polegające na dołożeniu kabli sprężających do dźwigara stalowego, stosuje się do wzmacniania konstrukcji istniejących. Technikę tę stosuje się w celu zwiększenia nośności dźwigarów mostowych zarówno stalowych, jak i zespolonych. O ile w pierwszym przypadku tematyczna literatura krajowa jest stosunkowo bogata, to w przypadku konstrukcji zespolonych autorowi niniejszej pracy nie udało się znaleźć praktyczne żadnych krajowych pozycji literaturowych, traktujących o wpływie sprężania na belki zespolone, w kontekście ich projektowania i odpowiedniego modelowania.

Należy podkreślić, że w krajowej praktyce inżynierskiej z powodzeniem przeprowadza się sprężanie belek zespolonych czego przykłady podano w punkcie 2.5. Pomijając przypadki sprężania stref nadpodporowych belek ciągłych, sprężenie zewnętrzne, podobnie jak w przypadku belek stalowych, w przypadku konstrukcji zespolonych ma za zadanie wstępne zmniejszenie naprężeń w dolnych włóknach dźwigara stalowego, stanowiącego element belki zespolonej, co docelowo zwiększa nośność konstrukcji. Monosymetria przekroju belki zespolonej względem osi poziomej zwiększa efektywność sprężenia, a płyta betonowa skutecznie zabezpiecza całość przed utratą stateczności. Argument ten, w połączeniu z coraz lepszym komercyjnym oprogramowaniem do mode-

lowania konstrukcji (rozwój MES) oraz niezawodnością i w ostatnim czasie spadkiem kosztów sprężania [128], pozwala przypuszczać, że w przyszłości nastąpi rozwój sprężonych konstrukcji zespolonych. Ciągły rozwój konstrukcji zespolonych oraz przeprowadzane wzmocnienia przez sprężenie kablami zewnętrznymi konstrukcji istniejących, skłaniają do podjęcia problemu, zwłaszcza, że jest on przedstawiony w stosunkowo niewielu publikacjach. Należy podkreślić tutaj złożoność problemu. Występują tutaj zagadnienia związane zarówno z konstrukcjami zespolonymi, jak i sprężonymi.

1.2. PRZEDMIOT, CEL I ZAKRES OPRACOWANIA

Przedmiotem opracowania są belki zespolone składające się z monosymetrycznego dwuteowego przekroju stalowego i płyty żelbetowej, sprężone cięgnami zewnętrznymi po zespoleniu. Schemat statyczny stanowi belka jednoprzęsłowa swobodnie podparta. Rozpatruje się belki bez sprężenia, sprężone kablami prostymi oraz sprężone kablami odgiętymi.

Celem opracowania jest określenie efektywności sprężenia, tj. określenie nośności belek sprężonych w stosunku do niesprężonych, a także zbadanie zachowania się belki w trakcie sprężenia oraz po sprężeniu pod wpływem obciążenia zewnętrznego w całym zakresie obciążeń, z uwzględnieniem nieliniowych zależności fizycznych dla materiałów belki (stal, beton, zbrojenie) oraz nieliniowych charakterystyk sztywności zespolenia (nieliniowa charakterystyka łącznika oraz rozkład łączników wzdłuż belki).

Zakres opracowania obejmuje:

- omówienie obecnego stanu wiedzy na temat zespolonych belek sprężonych,
- sformułowanie tez,
- badania doświadczalne na modelach,
- zbudowanie modelu teoretycznego do opisu zjawiska,
- wykonanie analiz numerycznych,
- sformułowanie wniosków.

1.3. SKRÓTY PRZYJĘTE W OPRACOWANIU

- ALC – algorytm *arc-length control* przy rozwiązywaniu układu równań za pomocą NR i MNR,
 BNS – belki niesprężone,
 BS – belki sprężone,
 BZ – belki zespolone,
 DC – algorytm *displacement control* przy rozwiązywaniu układu równań za pomocą NR i MNR,
 EC4 – normy składające się na Eurokod 4, opis ten stosowano powołując się na filozofię prezentowaną w tych normach, a nie na konkretne rozdziały lub uaktualnienia tego Eurokodu,
 EC4.1. – Eurokod 4 w odniesieniu do konstrukcji ogólnobudowlanych, pod kątem jak EC4 bez rozgraniczania na konkretne wydania i uaktualnienia tejże normy,
 EC4.2. – Eurokod 4 w odniesieniu do konstrukcji mostowych, pod kątem jak EC4 bez rozgraniczania na konkretne wydania i uaktualnienia tejże normy,
 FC – algorytm *force control* przy rozwiązywaniu układu równań za pomocą NR i MNR,
 MES – metoda elementów skończonych,
 MNR – zmodyfikowana metoda Newtona-Raphsona (*modified Newton-Raphson method*),
 NR – metoda Newtona-Raphsona (*Newton-Raphson method*),

SBS – stalowe belki sprężone,
ŚRS – ścieżka równowagi statycznej,
ZBS – zespolone belki sprężone (sprężenie wykonywane po zespoleniu płyty z belką),
ZBWS – zespolone belki wstępnie sprężone (sprężany jest dźwigar stalowy przed zespoleniem z płytą).

2. OMÓWIENIE STANU WIEDZY

Przedmiotem pracy są ZBS i zasadniczo pod kątem tej tematyki dokonano przeglądu i analizy literatury. Nie można jednak przy tym pominąć tematyki obejmującej BZ, SBS i BZWS, jako że wszystkie zagadnienia dotyczące konstrukcji zespolonych, takie jak nieliniowa podatność zespolenia, wpływ obciążeń cyklicznych itd. przekładają się wprost na problemy dotyczące ZBS. Zestawienie tej literatury związanej tematycznie sprowadza się tu do pozycji wybranych, interesujących pod kątem tematu ZBS.

2.1. BELKI ZESPOLONE BZ

Dorobek nauki polskiej w zakresie BZ obszernie podsumowali Kmita i Biliński [55]. Od tego czasu pojawiło się wiele nowych pozycji, zarówno w literaturze krajowej, jak i zagranicznej. Dorobek naukowy w tym zakresie jest bardzo bogaty i nie przytaczano poszczególnych pozycji, jakkolwiek podkreślić należy monografię Furtaka [35], gdzie obszernie przedstawiono praktycznie wszystkie problemy dotyczące projektowania zespolonych dźwigarów mostowych. Zasady projektowania mostów zespolonych bez wchodzenia w zagadnienia naukowe przedstawiono w [97]. W odniesieniu do konstrukcji ogólnobudowlanych istotna jest monografia Kucharczyka [61]. Pozycje wybrane, istotne z punktu widzenia niniejszego opracowania, przytaczano w dalszej części opracowania.

2.2. STALOWE BELKI SPRĘŻONE SBS

Ponieważ istnieje polski dorobek naukowy wyczerpująco opisujący tematykę SBS, przytoczono pozycje krajowe, gdzie dokonano wielu analiz i badań zarówno w obszarze liniowym, jak i nieliniowym oraz rozważono problemy dotyczące stateczności tego typu konstrukcji. Wyciągnięte wnioski pozwalają obecnie sprawnie projektować tego typu konstrukcje. W przypadku SBS, problem jest w zasadzie elementarny gdy rozpatruje się zakres sprężysty bez uwzględnienia efektów drugiego rzędu. Zasadniczymi problemami były: stateczność elementów, zachowanie się konstrukcji w fazie sprężysto-plastycznej oraz efekty drugiego rzędu. Zasady projektowania i opis zachowania się SBS już w latach 60-tych ubiegłego wieku, podali Bogucki [11] oraz Bródka i Kłobukowski [12]. Następnie problem poruszali Taraszkiewicz [92], Król [58] i Bryś [14]. W międzyczasie powstała monografia Karczewskiego [49]. Powstały również dwie prace doktorskie; na temat stateczności SBS pisał Bryś [13], odnosząc się do prac Eimara [31], a zachowanie się SBS w zakresie sprężysto-plastycznym opisał Król [58]. Z pozycji zagranicznych przytoczyć należy monografię [34], gdzie szeroko opisano problem konstrukcji stalowych sprężonych.

2.3. BELKI ZESPOLONE SPRĘŻONE ZBS I ZBWS

Pomimo zbliżonej tematyki zagadnienia ZBS do ZBWS, są jednak różnice w zachowaniu się tych konstrukcji i występujących problemów. Różnica polega na tym, że w przypadku ZBS występuje problem wpływu sprężenia na zachowanie się zespolenia podatnego; nie występuje natomiast problem utraty stateczności globalnej elementu stalowego (jest on oddzielnym problemem i został dobrze rozpoznany jako zagadnienie dotyczące SBS) a jedynie możliwość utraty stateczności pasa ściskanego podczas sprężenia. W przypadku ZBWS konstrukcję należy rozpatrywać jako SBS w fazie sprężania i w zasadzie jako BZ po wykonaniu płyty. Tematem niniejszego opracowania są ZBS. Ponieważ jednak poznana literatura dotycząca zarówno ZBS jak i ZBWS jest stosunkowo uboga, przeanalizowano pozycje dotyczące jednych i drugich konstrukcji.

2.3.1. Badania modelowe zespolonych belek sprężonych

Opracowania dotyczące badań zespolonych belek sprężonych zaczęły pojawiać się w literaturze wraz z upowszechnieniem się w praktyce inżynierskiej konstrukcji, w których stosowano belki zespolone. Dotyczy to więc głównie konstrukcji obiektów mostowych. W punkcie tym przedstawiono dorobek nauki w zakresie badań eksperymentalnych sprężonych belek zespolonych, jaki udało się autorowi niniejszej rozprawy znaleźć w poznanej literaturze technicznej.

Pierwsze opisy badań ZBS pojawiły się w końcu lat 50-tych [84] i początku lat 60-tych XX wieku. Hoadley [46] przedstawił wtedy opis zachowania się swobodnie podpartej belki, sprężonej wstępnie prostymi ciągnami o wysokiej wytrzymałości a Tachibana i inni [85] wykonali badania dwóch belek z ciągnami odgiętymi. Pierwsza belka była wstępnie sprężona a druga sprężona po zespoleniu z płytą. Podsumowując wyniki stwierdzono, że obydwie belki miały podobną nośność graniczną. W rok później Tachibana i inni [86] wykonali badania trzech modeli wstępnie sprężonych mostów, składających się z dwóch dźwigarów i płyty. Model A był jednoprzęsłowy, a modele B i C dwuprzęsłowe. Modele A i C zostały sprężone w poziomie półek dolnych dźwigarów, w miejscach dodatnich momentów zginających, przed zespoleniem płyty z dźwigarami, a model B został sprężony po zespoleniu. Nie analizowano zachowania się konstrukcji w zakresie pozasprężystym. We wnioskach stwierdzono, że rejon belki, w którym działa moment ujemny powinien być sprężany po zespoleniu.

Stras [83] przeprowadził badania trzech zespolonych belek jednoprzęsłowych poddanych działaniu dodatniego momentu. Wyniki porównano z wartościami uzyskanymi teoretycznie, uzyskując zadowalającą zgodność.

Reagan [77] zaproponował metodę analizy BZWS przyjmując liniowy rozkład odkształceń wzdłuż wysokości belki, za wyjątkiem nieciągłości na styku belka-płyta, na skutek dołożenia płyty. Nie uwzględniano podatności zespolenia. Po wykonaniu badań na serii belek stwierdził, że zniszczenie belki następuje w wyniku zniszczenia betonu w strefie ściskanej a nie w wyniku zerwania cięgna.

Lata 70-te XX wieku są okresem zastoju, jeżeli chodzi o literaturę dotyczącą ZBS. Już w latach 80-tych przeprowadzono programy badań i analiz, które szczegółowo omówiono poniżej. Podano szereg wniosków a uzyskane wyniki badań wskazują na problemy, które mogą pojawiać się podczas projektowania ZBS.

Troitsky i inni [94] przeprowadzili analizę i badania jednoprzęsłowych belek wstępnie sprężonych, a także belek sprężonych po zespoleniu. Przeprowadzone analizy zakładały sprężysty zakres pracy konstrukcji i pełne zespolenie (brak poślizgu pomiędzy płytą i belką). Wyprowadzono

wzory na przyrost siły w ciągnię, od założonego obciążenia, dla trzech kształtów trasy ciągną: (1) prostoliniowej na całej długości, (2) prostoliniowej krótsze niż rozpiętość belki oraz (3) zakrzywionej na końcach (kotwione w osi bezwładności przekroju zespolonego). Przeprowadzone badania potwierdziły, że przyrost siły w ciągnię jest najmniejszy dla ciągnien odgiętych, większy dla ciągnien prostych o długości równej długości belki i największy dla ciągnien prostych krótkich; w tym przypadku przyrost siły w ciągnię może wynosić do 25% wstępnej siły sprężającej. Przeprowadzono także pomiary odkształceń w belce od sprężenia, w zależności od wartości siły sprężającej i kształtu trasy. Dla belek sprężonych po zespoleniu przedstawiono wykresy odkształceń wzdłuż długości belki dla półki dolnej i górnej dźwigara stalowego. Dla ciągnien odgiętych uzyskuje się dobrą zgodność odkształceń w górnej półce belki. Dla odkształceń półki dolnej również uzyskuje się zgodność, jednak dla większych wartości obciążenia wartości teoretyczne są większe od pomierzonych. Dla prostych ciągnien występuje duża rozbieżność pomiędzy pomierzonymi a obliczonymi odkształceniami w półce górnej (zarówno kształt wykresu jak i wartości). W półce dolnej kształt wykresu wzdłuż belki jest zbliżony dla odkształceń pomierzonych i obliczonych, jednakże wartości obliczone są większe od pomierzonych. Dla belek sprężonych wstępnie przed zespoleniem przedstawiono wykresy odkształceń wzdłuż belki dla półki dolnej i górnej dźwigara stalowego dla belek z ciągnami prostymi. Zbieżność pomiędzy pomierzonymi a obliczonymi odkształceniami w półce górnej i dolnej jest dużo większa aniżeli w przypadku belek sprężanych po zespoleniu. W podsumowaniu autorzy zwracają uwagę na potrzebę analizy stanu naprężeń w miejscach zakotwienia przy końcach belek. Nie uwzględniano nieliniowości materiałowych oraz problemów związanych z podatnością zespolenia.

Saadatmanesh i inni [78] wykonali badania jednoprzęsłowych belek (ZBWS) poddanych działaniu dodatniego i ujemnego momentu zginającego. W pierwszym przypadku ciągną umieszczono poniżej pasa dolnego dwuteownika a w drugim przypadku pod pasem górnym. Przypadek momentu ujemnego nie jest brany pod uwagę w ramach niniejszego opracowania. W przypadku belki poddanej działaniu momentu dodatniego, belka stalowa została wstępnie sprężona a dopiero potem dokonano zespolenia z płytą. Rozpiętość teoretyczna belek wynosiła 4,575 m, belka składała się z dwuteownika W360x45 i płyty żelbetowej o szerokości 915 mm i grubości 76 mm. Zespolenie stanowiły sworznie o średnicy 13 mm, równomiernie rozmieszczone w dwóch rzędach; jest to więc zespolenie podatne. Ciągna stanowiły dwa pręty $\phi 16$ mm ze stali o wytrzymałości 1090 MPa. Obciążenie belki było symetryczne i stanowiły je dwie siły pionowe w rozstawie 0,915 m. Obciążenie zwiększano monotonicznie aż do zniszczenia belek. Pomierzono odkształcenia belki stalowej, ciągną i płyty betonowej oraz przemieszczenie w środku rozpiętości. Zespolenie projektowano jako pełne i nie rozpatrywano poślizgu pomiędzy płytą a belką. W trakcie badań stwierdzono, że beton ma większą wytrzymałość, aniżeli przewidywano. Ponieważ zespolenie (ilość i typ łączników) projektowane były przy założeniu słabszego betonu, wykonane zespolenie należało traktować jako częściowe. Uzyskana ścieżka równowagi statycznej dla przemieszczenia w środku rozpiętości jest typowa, tzn. składa się z liniowego odcinka, po którym następuje typowa zależność nieliniowa. W trakcie obciążania przy wartości siły odpowiadającej końcowi odcinka liniowego nastąpiło ścięcie połączenia, powodując poślizg pomiędzy płytą a belką. Po tym zdarzeniu sztywność belki gwałtownie zmalała; nastąpiło uplastycznienie włókien dolnych belki stalowej a później ciągną. Następnie belka została odciążona całkowicie i w końcu obciążona do zniszczenia. Zniszczeniu uległ beton w strefie ściskanej. We wnioskach autorzy stwierdzają że:

- dodanie ciągnien i wstępne sprężenie belki zwiększa nośność sprężystą oraz graniczną,
- im większe jest oddalenie ciągnien od osi bezwładności tym większy jest wzrost nośności,

- odpowiednia liczba punktów kontaktu cięgna z belką zapewnia, że trasa cięgna po obciążeniu odpowiada krzywiznie belki i co za tym idzie, nie ma zmniejszenia nośności na skutek zmniejszenia mimośrodowość siły z cięgna,
- dodanie cięgien zmniejsza naprężenia w betonie (w stosunku do belki bez cięgien), ponieważ wraz ze wzrostem obciążenia wzrasta ujemny moment zginający od przyrostu siły w cięgniach.

Rozstaw sworzni zespolenia jest stały i nie jest zagęszczony nad zakotwieniem kabli. Podczas badań nie mierzono przemieszczeń na styku stal-beton (poślizgu) i autorzy nie ustosunkowują się co do tego zjawiska. Do analizy teoretycznej wykorzystano metodę równowagi sił wewnętrznych i założyli ciągłość odkształceń w przekroju, tj. model Bernoulliego. Metoda ta została przedstawiona w [79]. Zakłada ona liniowy rozkład odkształceń w belce zespolonej, pełne zespolenie, tj. nie występuje poślizg pomiędzy płytą i belką, małe odkształcenia, brak odkształceń rezydualnych w belce stalowej, stałą odległość pomiędzy cięgnem a belką, niepodpartą konstrukcję w fazie montażu i brak wpływu odkształceń postaciowych. Założono nieliniowe zależności konstytutywne dla stali i betonu oraz zbrojenia podłużnego płyty i cięgna. Dla betonu zależność tę opisuje wielomian trzeciego rzędu, a dla stali jest to typowa zależność sprężysto – idealnie plastyczna. Zastosowana metoda jest metodą przyrostową, pod kontrolą odkształcenia we włóknie dolnym belki stalowej. Wychodząc z liniowego rozkładu odkształceń wzdłuż wysokości oraz znanego rozkładu momentu zginającego i siły ściskającej w belce, wyznacza się odkształcenia w pozostałych włóknach belki, w funkcji nieznanej wartości d_N , wyznaczającej położenie osi bezwładności. Odkształcenie w cięgniach uzyskuje się przez scałkowanie odkształceń fikcyjnego włókna belki w poziomie cięgna, a następnie podzieleniu przez długość cięgna. Poprzez odpowiednie scałkowanie odkształceń wraz z odpowiednimi zależnościami konstytutywnymi uzyskuje się siły wewnętrzne w przekroju i położenie osi bezwładności. Wychodząc z sił wewnętrznych uzyskuje się siły zewnętrzne działające na układ. Mając krzywiznę z odkształceń uzyskuje się funkcję ugięcia belki. Wykorzystując powyższą metodę autorzy zweryfikowali wyniki doświadczenia. Przeprowadzono symulacje dla trzech przypadków: (1) gdy belka jest bez cięgna, (2) belka jest z cięgnem ale wstępna siła sprężająca jest równa zero oraz (3) dla belki jak w z badań [78]. Uzyskano wyniki, na podstawie których oszacowano wpływ cięgna oraz siły sprężającej na nośność belki zespolonej. Na podstawie uzyskanych wyników autorzy stwierdzili, że:

- przyjęte nieliniowe zależności dla betonu i stali dobrze modelują rzeczywiste zachowanie się belki pod obciążeniem w obszarze nieliniowym,
- nośność graniczna belki zespolonej może być wyznaczana przy założeniu pełnego uplastycznienia i prostokątnego rozkładu odkształceń po wysokości,
- wstępne sprężenie cięgna zwiększa nośność sprężystą ale nie zwiększa nośności granicznej (nośność tą zwiększa samo dodanie kabli a sprężenie nie ma znaczenia).

Ostatniego wniosku autorzy nie potwierdzili doświadczalnie. W opracowaniu zwrócono uwagę na korzyści wynikające ze wstępnego sprężania belek zespolonych, wynikające ze wzrostu nośności granicznej, mniejszego ciężaru konstrukcji oraz zwiększenia nośności belki w kontekście zmęczenia. To ostatnie odnosi się do alternatywnego sposobu wzmacniania poprzez dospawanie nakładki do pasa dolnego. Przebadano tylko jedną belkę z płytą ściskaną.

Ayyub i inni [6] przeprowadzili badania trzech belek zginanych dodatnim momentem. Przedmiotem badań były trzy belki różniące się następującymi parametrami: belka A została sprężona prostoliniowym cięgnem z pręta, belka B prostoliniowym cięgnem ze splotu stalowego o wysokiej wytrzymałości a belka C cięgnem ze splotu, ale trasa cięgna stanowiła linię łamaną (odgięcie przy końcach). Celem było określenie wpływu typu materiału cięgna i kształtu trasy cięgna na zachowanie się i nośność belki. Podobnie jak we wcześniejszych badaniach, belki zostały najpierw

sprężone, a dopiero następnie zespolone z płytą. W celu weryfikacji wyników przeprowadzono analizę teoretyczną. Do analizy, w obszarze liniowym, zastosowano podejście zakładające pełne zespolenie i zamianę pola przekroju płyty na adekwatne stalowe. Do analizy, w obszarze zarówno liniowym, jak i nieliniowym, zastosowano metodę równowagi sił wewnętrznych i ciągłości odkształceń. Podczas badań pomierzono przemieszczenia oraz odkształcenia, zarówno w belce, jak i w cięgni. W przypadku belki A, wraz ze wzrostem obciążenia, po wejściu belki w sprężysto-plastyczny zakres pracy, uplastycznieniu uległa zarówno półka dolna, środnik jak i ciągnio, a także nastąpiło zmiżdżenie betonu na górze płyty. Od spodu płyty pojawiło się rozciąganie. Zauważono także poślizg na końcach belki, co świadczy o podatności zespolenia. Belka B zachowywała się podobnie, osiągając jednak ostatecznie nieco większą nośność przy nieco mniejszych ugięciach. Przy obciążeniu granicznym zmiżdżeniu uległ beton na górze płyty, podobnie jak w belce A, zauważono także poślizg pomiędzy belką i płytą. Belka C zachowywała się podobnie jak B osiągając podobną nośność; nieco wcześniej jednak uległa uplastycznieniu. W przypadku wszystkich belek sztywność, już w obszarze sprężystym, była mniejsza w stosunku do teoretycznej, co wynikało zdaniem autorów z podatności zespolenia. Autorzy wysunęli następujące wnioski:

- sprężenie podnosi nośność sprężystą oraz graniczną
- przyjęcie pełnego zespolenia może być niewłaściwe podczas analiz, ponieważ zauważono poślizg, a także ugięcia większe od spodziewanych,
- zwiększenie pola przekroju poprzecznego cięgna zwiększa sztywność belki oraz jej nośność graniczną,
- preferowane jest używanie do sprężenia splotów, ponieważ są mocniejsze i lżejsze niż pręty,
- zastosowanie cięgien odgiętych zwiększa „ciągliwość” belki w obszarze sprężysto-plastycznym, w stosunku do belki z ciągnem prostym,
- w ostatecznym rozrachunku koszt cięgna prostego jest mniejszy niż odgiętego (uwzględniając montaż).

W ramach badań przebadano tylko jedną belkę danego typu (kable proste i kable odgięte) co może być niewystarczające dla analizy porównawczej. Na podstawie uzyskanych rezultatów, analiz doświadczalnych i symulacji teoretycznych Saadatmanesh i inni [80] przedstawili propozycje projektowania i wymiarowania wstępnie sprężanych belek zespolonych. Przedstawione podejście, tak jak w przeprowadzonych badaniach dotyczy belek, które najpierw poddane zostają sprężeniu, a dopiero następnie są zespalane z płytą. Autorzy podają przykład zastosowania, w przypadku wzmocnienia mostu, gdy następuje całkowita wymiana płyty pomostowej. Podsumowując przeprowadzony cykl badań modelowych i teoretycznych można stwierdzić, że Saadatmanesh i inni [78, 79, 80] oraz Ayyub i inni [6] przeprowadzili kompleksową analizę modelową i teoretyczną jednoprzęsłowych belek zespolonych swobodnie podpartych, w których sprężenie zostało zrealizowane przed zespoleniem płyty z belką. W podejściu teoretycznym nie uwzględniano podatności połączenia zespolonego na zachowanie się belek pod obciążeniem, ale w trakcie badań stwierdzono wpływ tego czynnika na wyniki badań. Przebadano pojedyncze belki, więc analiza porównawcza wpływu poszczególnych czynników konstrukcyjnych na zachowanie się przedmiotowych belek jest mało miarodajna.

W kontekście przedmiotu opracowania kluczową pozycją jest program badań wykonanych w latach 80-tych XX wieku w USA, w Iowa State University i sponsorowany przez Iowa Department of Transportation, Highway Division [7, 8, 28, 29, 30, 50, 51, 52, 53, 54]. Dzięki uprzejmości prof. Wayne’a Klaibera [130] uzyskano wiele opracowań i informacji dotyczących tego programu badawczego. W latach 1930 –1960 wybudowano w stanie Iowa dużą liczbę jednoprzęsłowych mostów o konstrukcji nośnej, złożonej z belek stalowych zespolonych z płytą żelbetową. W roku 1957, w wytycznych do projektowania, zmieniony został udział belek skrajnych w przenoszeniu obciążeń

nia ruchomego wyznaczonego na podstawie linii rozdziału poprzecznego obciążenia. Wcześniejsze standardy AASHTO (*American Association of State Highway and Transportation Officials „Standard Specifications for Highway Bridges”*) dopuszczały zmniejszenie tak wyznaczonego obciążenia dla belek skrajnych w stosunku do środkowych. Następnie w latach 80-tych Iowa State Legislature zwiększył dopuszczalne obciążenia ruchome na mostach na obszarze stanu Iowa. Te dwa czynniki spowodowały, że wystąpiła konieczność zwiększenia nośności istniejących mostów, zwłaszcza w kontekście ich okresowych napraw związanych z bieżącym utrzymaniem. Skutkiem tego był program badań, którego celem była odpowiedź na pytanie „jak wzmacniać takie mosty aby było dobrze?”. Klaiber i inni [50] przeprowadzili analizy mające określić skuteczność zewnętrznego sprężania zespolonych mostów, w celu zwiększenia ich nośności. Rozważano sprężanie bez wymiany płyty pomostowej, a więc belek już zespolonych z płytą i wcześniej wielokrotnie obciążanych. Przeprowadzono analizy teoretyczne wykorzystując teorię płyty ortotropowej oraz wykonano badania modelowe na moście czterobelkowym w skali 1:2. Wyniki badań potwierdziły, że sprężanie zewnętrzne jest skutecznym sposobem wzmacniania dźwigarów zespolonych. Ze względu na złożoność problemu i potrzebę określenia wpływu poszczególnych parametrów na efektywność sprężania i nośność SBZ, Klaiber i inni [51] przeprowadzili dalsze badania i analizy. W ramach badań wykonano sprężenie dwóch czterobelkowych mostów o rozpiętości około 17 oraz 23 m, badania belek wyciętych z obiektu modelowego z poprzednich badań oraz badania łączników na ścinanie. Badania na rzeczywistych obiektach obejmowały analizę rozdziału poprzecznego sprężenia w przęśle, a sprężeniu poddawano tylko dźwigary zewnętrzne. Następnie analizowano układ odkształceń i przemieszczenia pod rzeczywistym obciążeniem użytkowym. Wyniki badań potwierdziły, że sprężenie zewnętrzne jest skutecznym sposobem zwiększenia nośności przęsła. Wycięte z modelu mostu belki zespolone poddano sprężeniu i następnie zginaniu do zniszczenia. Przed wykonaniem badań niszczących, belki poddano obciążeniu stanowiącemu około 30% obciążenia niszczącego, po uprzednim sprężeniu ich siłami o różnych wartościach. Dwie belki zostały uprzednio wzmocnione w strefie zespolenia, poprzez dodanie dodatkowych łączników (istniejące zespolenie stanowiły łączniki typu kątownik+płaskownik (*angle-plus-bar*). W trakcie badań pomierzono odkształcenia i przemieszczenia. Wyniki badań pokazały, że belki mają sztywność giętą znacznie mniejszą aniżeli wskazywały na to wyniki obliczeń. Uzyskane profile odkształceń wskazują na istnienie poślizgu pomiędzy płytą i belką, pomimo zastosowania bardzo sztywnych łączników. Autorzy pracy nie przeprowadzali szczegółowej analizy teoretycznej, ograniczając się do podania sztywności belki, dla liniowych zależności materiałowych i sztywnego pełnego zespolenia. Jednakże zamieszczone w ich opracowaniu wyniki badań pozwalają na przeprowadzenie szczegółowej analizy w zakresie nieliniowym i ocenę przyczyn zaobserwowanego zachowania się belek, co uczyniono w pracy [66].

Kontynuację przeprowadzonych w Iowa badań stanowiły dalsze analizy i prace badawcze dotyczące wzmacniania mostów zespolonych przez sprężenie zewnętrzne. Beck i inni [7, 8] przeprowadzili badania zachowania się mostu wzmocnionego przez sprężenie zewnętrzne i uzyskane wyniki zweryfikowali numerycznie przy pomocy MES, uzyskując dobrą zgodność. W kolejnym opracowaniu Dunker i inni [29] przeprowadzili analizę czynników nie uwzględnianych w poprzednich opracowaniach, a także zamieścili wnioski z obserwacji zachowania się po upływie czasu obiektów, wzmocnionych w ramach poprzednich badań. Analizowano zagadnienia wpływu zmian temperatury na pracę konstrukcji, a także zagadnienia dotyczące rozdziału poprzecznego obciążenia, zarówno dla momentu zginającego, jak i siły osiowej od sprężenia oraz dla obciążenia zewnętrznego. Stwierdzono, że:

- zarówno zmiany temperatury, jak i zjawiska związane z relaksacją, w okresie dwóch lat, nie wpływają znacząco na siłę sprężającą w cięgnach,

- rozdział poprzeczny powinien być osobno dokonywany dla momentu zginającego, a osobno dla siły osiowej,
- należy wyznaczyć rozkład sił wewnętrznych od sprężania dla obciążeń granicznych,
- należy przeanalizować problem dla odgiętych ciągnięć („*king-post*”); sprężanie można wtedy przeprowadzać z poziomu płyty pomostu a nie pod obiektem,
- nie ma danych na temat dynamicznego zachowania się belek sprężonych i ich wytrzymałości zmęczeniowej; badania w tym zakresie można by było wykonać na tych samych modelach.

Na podstawie rezultatów uzyskanych w ramach przeprowadzonego programu badań przedstawiono wytyczne [28] do projektowania wzmocnienia poprzez sprężenie średnich i małych mostów zespolonych trójdźwigarowych i czterodźwigarowych. We wnioskach stwierdzono między innymi, że sprężenie nie zmniejsza znacząco przemieszczeń od obciążenia użytkowego. W kontekście uzyskania zadowalających wyników dla przęseł swobodnie podpartych, przeprowadzono analogiczny program badań dla przęseł ciągłych [30, 52, 54].

Badania zmęczeniowe belek zespolonych przeprowadzili Albrecht i Li [1]. Wnioski przydatne do projektowania przedstawili Li i inni [63]. Miyamoto i inni [73] przeprowadzili analizy teoretyczne oraz badania modelowe zespolonych belek sprężonych o długości 3 m mające na celu określenie wpływu poszczególnych parametrów na częstotliwość drgań własnych ZBS. Stwierdzono, że przy mniejszym mimośrodku ciągnia w stosunku do osi belki, częstość drgań własnych jest mniejsza i zwiększa się wraz ze wzrostem mimośrodu, co jest związane ze wzrostem sztywności giętnej. Przytoczone wzory pozwalają określić częstość drgań własnych ZBS.

Warto również przytoczyć badania belek zespolonych (niesprężonych), które wykonali Amadio i inni [4], jako że były one wykonywane w ostatnim czasie i zastosowane w nich procedury badawcze można odnosić do badań wykonanych w ramach niniejszej pracy.

2.3.2. Modelowanie teoretyczne ZBS i ZBWS

Modelowanie nieliniowe ZBS i ZBWS jest skomplikowane i wymaga bardzo dobrej znajomości zarówno zachowania się samych konstrukcji zespolonych, jak i odpowiedniego warsztatu matematycznego. Nakład pracy na modelowanie konstrukcji zespolonych jest dużo większy aniżeli na modelowanie stali i betonu osobno. Są to z pewnością jedne z najbardziej złożonych konstrukcji inżynierskich. Dołożenie elementu w postaci sprężenia sprawę jeszcze bardziej komplikuje. Jest to powodem tego, że tematem tym zajmuje się na świecie niewielu naukowców; konkretnie istnieją obecnie dwa mocne ośrodki tj. Włochy i Chiny, przy czym ośrodek pierwszy, w którym liderem jest prof. Andrea Dall'Asta, wyróżnia się pod względem osiągnięć i liczby publikacji. Poniżej przytoczono dokonania tego zespołu, ponieważ zostały one wykorzystane do stworzenia modelu teoretycznego ZBS, w ramach niniejszego opracowania.

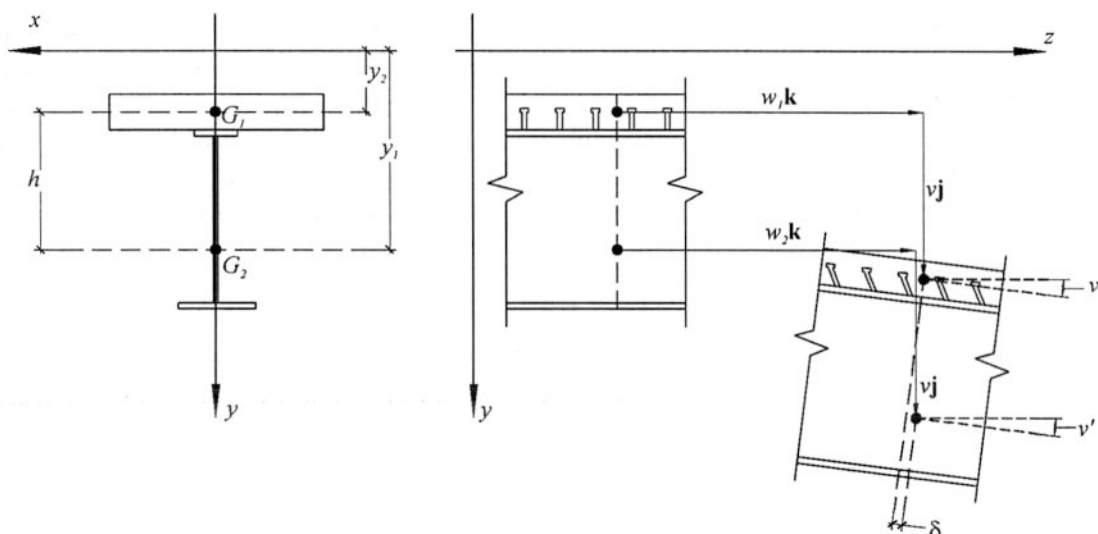
Podstawy teoretyczne, na podstawie których wyprowadzono następnie podejścia do modelowania ZBS przedstawił Dall'Asta [18]. Podał on podstawy matematycznego opisu modeli, w których następuje kontakt pomiędzy trójwymiarowym ciałem a kablami, taki, że w punktach kontaktu nie występuje tarcie.

Następnie Dall'Asta i Leoni [19] zaprezentowali zastosowanie metody Ritza w analizie belek z ciągnięciami, przeprowadzając szereg symulacji. Pokazano podejście, w którym analizuje się ZBS jako całą strukturę, wychodząc z zasady minimum energii układu. Analizy przeprowadzano dla zginania w jednej płaszczyźnie, przy liniowych zależnościach konstytutywnych i przy założeniu płaskiego przekroju belki. Następnie Dall'Asta & Dezi [20] rozwinęli tę metodę i podali algorytm umożliwiający analizę belek zespolonych sprężanych ciągnięciami w obszarze nieliniowym. Założono tu zgi-

nanie w jednej płaszczyźnie belek o przekroju monosymetrycznym i wprowadzono nieliniowe zależności konstytutywne dla betonu, stali konstrukcyjnej i zbrojeniowej. W przedstawionym algorytmie nie uwzględniano poślizgu pomiędzy belką a płytą. Równanie równowagi dla całego układu ma postać

$$\int_0^L \int_{A_s} \sigma_s \cdot \delta \varepsilon_s dA_s dx + \int_0^L \int_{A_b} \sigma_b \cdot \delta \varepsilon_b dA_b dx + \Lambda \cdot A_c \cdot \sigma_c \delta \varepsilon_c = \int_0^L \int_{A_s+A_b} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dx, \quad (1)$$

gdzie A_s , A_b i A_c są polami przekroju poprzecznego, odpowiednio belki stalowej, płyty i cięgna, a $\mathbf{f}$ jest wektorem opisującym rozkład sił zewnętrznych na jednostkę długości belki. Autorzy stworzyli program komputerowy wykorzystujący zaprezentowane podejście i wykonali szereg symulacji ZBS. Do rozwiązania nieliniowego układu równań wykorzystano metodę NR. Ponieważ podejście to zostało bezpośrednio wykorzystane w dalszej części pracy przez autora rozprawy do stworzenia własnego modelu, zostało ono szczegółowo opisane w części teoretycznej niniejszego opracowania. Kluczowymi pozycjami są [21] oraz [25], gdzie przedstawiono model ZBS (również ZBWS) uwzględniający podatność zespolenia – jest to rozwinięcie modelu proponowanego wcześniej w [20].



Rys. 2.1. Model kinematyczny belki zespolonej z zespoleniem podatnym

Przedstawiono wpływ sztywności zespolenia na nośność i zachowanie się pod obciążeniem ZBS, a także pokazano układ sił ścinających w zespoleniu po sprężeniu belki kablem odgiętym. Autor niniejszej rozprawy nawiązał kontakt z tamtejszym ośrodkiem [129] i konsultował kolejne rozwiązania w trakcie tworzenia własnego modelu teoretycznego. Obecnie zespół ten pracuje nad wyprowadzaniem nowych podejść MES na polu belek zespolonych [27], co przekłada się również na nowe podejścia z zakresu ZBS i ZBWS. Zaowocowało to przejściem z metody Ritza na MES [26] przy rozwiązywaniu problemów ZBS z wykorzystaniem tego samego modelu, który przedstawiono w [25]. Przejście na MES, który jest metodą ogólniejszą, umożliwia modelowanie bardziej skomplikowanych konstrukcji (np. zmienny przekrój, złożone ustroje statycznie niewyznaczalne), a także umożliwiło uzyskiwanie zbieżności podczas obliczeń przy zastosowaniu materiałów, w których zależności konstytutywne nie są monotoniczne, np. beton rozciągany.

Dall'Asta i inni [21] poruszyli także problem zjawisk reologicznych występujących w ZBS. Pokazano, że siła w sprężeniu nie ulega większym zmianom wraz z upływem czasu, następuje natomiast redystrybucja stanu naprężenia w belce zespolonej.

Tematem ZBS zajmował się również ośrodek chiński [81, 98, 99, 100, 101, 102]. Interesującą pozycją podsumowującą dokonania oraz przedstawiającą przyszłe perspektywy rozwoju w zakresie zespolonych konstrukcji sprężanych jest [101]. Można znaleźć w niej odniesienia do większości pozycji cytowanych w ramach niniejszego opracowania.

2.3.3. Normowe procedury obliczeniowe

Normy krajowe [111, 112] dotyczące projektowania belek zespolonych nie odnoszą się w ogóle do konstrukcji sprężonych kablami zewnętrznymi. Są to normy ogólnobudowlane. Krajowa norma mostowa, dotycząca projektowania konstrukcji zespolonych nie istnieje, są tylko „zgłoszone oddolnie” zasady projektowania [97] powstałe w nawiązaniu do wytycznych IBDiM. Konstrukcje te należy projektować mając na uwadze [114], [115] i [116]. Eurokody EC4.1., dotyczące projektowania konstrukcji zespolonych ogólnobudowlanych [105, 109], również nie odnoszą się do projektowania konstrukcji sprężonych.

Pewne wskazówki dotyczące projektowania ZBS podaje EC4.2. [106]. Dopuszcza się tu stosowanie nieliniowej teorii dla wytrzymałości na zginanie konstrukcji sprężonych cięgnami. Nieliniowa teoria powinna obejmować nieliniowości materiałowe oraz poślizg zespolenia. Teoria plastyczności (p. 4.4.1.2 cytowanej normy) nie może być stosowana do elementów sprężanych cięgnami. Elementów sprężonych kablami zewnętrznymi dotyczy zapis stanowiący, że „Siły w cięgnach bez przyczepności należy traktować jako obciążenie zewnętrzne”. **„W zasadzie konieczne jest uwzględnienie odkształceń całego elementu dla określenia sił w cięgnach stale pozbawionych przyczepności.”** EC4.2. w ostatnich wersjach [110] podtrzymuje tę filozofię, jednoznacznie precyzując w punkcie 6.2.1.3.3: *„For the determination of forces in permanently unbonded tendons, the deformations of the whole member should normally be taken into account.”* Należy podkreślić, że EC4.2. nakazuje uwzględniać efekty działania sił skupionych, przyłożonych osobno do elementu stalowego i betonowego. Podaje konkretne wzory umożliwiające projektowanie zespolenia w strefie zakotwienia kabla.

2.4. MODELOWANIE BZ

Literatura dotycząca belek stalowo-betonowych z zespoleniem podatnym jest stosunkowo bogata. Problemy dotyczące modelowania podatności zespolenia [36] zostały już w zasadzie rozwiązane. Analizowano także problemy związane z problemem szerokości współpracującej i zjawisk reologicznych [42, 43]. Poniżej przedstawiono wybrane pozycje z zakresu belek zespolonych, jako że zagadnienia w nich poruszane przenoszą się wprost na ZBS i zostały w pewnym stopniu wykorzystane w ramach niniejszego opracowania.

Jasim [48], wychodząc z teorii zespolenia częściowego, wyprowadził równania różniczkowe linii ugięcia belek zespolonych (tylko w obszarze liniowym). Rozwiązując te równania dla belek swobodnie podpartych określił stosunki ugięcia w środku rozpiętości belek z częściowym zespoleniem do ugięcia belek z zespoleniem pełnym. Wyniki zostały zestawione w tabeli, w zależności od sztywności zespolenia, dla stałego i liniowego rozkładu łączników. Wyniki prac zostały wykorzystane do kontroli wyników uzyskanych za pomocą programu komputerowego, napisanego w ramach niniejszego opracowania.

Oven i inni [76] przedstawili element skończony oraz model MES opisujący zachowanie się belek zespolonych w obszarze nieliniowym. Założono zginanie w jednej płaszczyźnie i monosymetrię przekroju. Uwzględniono podatność zespolenia. Do rozwiązania układu równań użyto metody NR+FC, co narzuciło monotoniczne zależności konstytutywne. Wyniki porównano z wynikami z badań. Uzyskano dobrą zbieżność, co potwierdza poprawne założenie odnośnie przyjęcia funkcji monotonicznych. Równanie równowagi elementu przyjmuje tu postać:

$$\int_0^L \int_{As} \sigma_s \cdot \delta \varepsilon_s dA_s dx + \int_0^L \int_{Ab} \sigma_b \cdot \delta \varepsilon_b dA_b dx + \int_L F \cdot \delta \Delta s dx = Q \cdot \delta q, \quad (2)$$

gdzie

$$\int_L F \cdot \delta \Delta s dx = \int_L K \cdot \Delta s \cdot \delta \Delta s dx, \quad (3)$$

a pozostałe oznaczenia przedstawiono w części niniejszego opracowania dotyczącej tworzenia modelu teoretycznego.

Gatesco [40] również przedstawił element skończony oraz model MES opisujący zachowanie się belek zespolonych w obszarze nieliniowym. W swoim modelu zastosował on MNR z wykorzystaniem techniki umożliwiającej kontrolę zlinearyzowanej długości łuku - ALC. Takie podejście umożliwiło autorowi zastosowanie zależności konstytutywnych, nie będących funkcjami monotonicznymi, a co za tym idzie uwzględnienie nie tylko sztywności łączników ale także kohezji na styku stal – beton. Wyniki z badań porównano z wynikami symulacji, uzyskując bardzo dobrą zgodność. Dall'Asta i Zona [24], wykorzystując model kinematyczny Newmarka, przeprowadzili analizy MES, za pomocą 8, 10 i 16-to węzłowych elementów. Do wyznaczenia wektora obciążenia, wektora wewnętrznych sił węzłowych i macierzy sztywności posłużono się całkowaniem numerycznym (metoda trapezów). W rozwiązaniach iteracyjnych wykorzystano NR oraz MNR. W stworzonym programie wykorzystano zarówno procedury FC, DC jak i ALC.

Fabbrocino i inni [32] przedstawili inne podejście teoretyczne do problemu, nie bazujące na minimalizacji energii układu. W podejściu również uwzględniono podatność zespolenia. Wyniki badań porównano z wynikami symulacji, uzyskując dobrą zgodność.

Zaawansowane podejścia, uwzględniające nieliniową podatność zespolenia w kontekście MES, przedstawili także m. in. Dall'Asta [23], Faella i inni [33], Mari i inni [72]. Ayoub i Filippou [5] przedstawili podejście, umożliwiające uwzględnienie charakterystyk łącznika, zmiennych na skutek cyklicznego obciążenia. Nieliniowe modelowanie konstrukcji sprężonych ciągnami przy wykorzystaniu podejścia wbudowanego przedstawił Antoniuk [3].

Przytoczone powyżej pozycje, dotyczące badań i analiz BZ, a co za tym idzie i ZBS, wskazują na znaczący wpływ sztywności zespolenia w analizie tego typu konstrukcji. W związku z powyższym, przytoczono poniżej wybrane pozycje literaturowe, odnoszące się do tematyki belek zespolonych w zakresie sztywności zespolenia i charakterystyki łączników. Przytoczono jedynie pozycje stosunkowo nowe i mające bezpośredni związek z przedmiotem niniejszej rozprawy. Nie stworzono kompleksowego przeglądu całości literatury dotyczącej tych zagadnień, jako że nie jest to przedmiotem niniejszego opracowania.

Obszerną pracę dotyczącą zachowania się belek zespolonych, pod cyklicznym obciążeniem, wykonał Taplin [87, 88, 89, 90, 91]. Przeprowadzono badania modelowe na czterech belkach zespolonych oraz badania łączników w celu poprawnego wyznaczenia ich charakterystyk. Stworzono model teoretyczny opisujący zachowanie się belek po obciążeniu cyklicznym. Charakterystyki łączników, otrzymane z badań dwóch rodzajów łączników, odbiegają od krzywych przedstawianych w literaturze jako krzywe odpowiadające tym charakterystykom. W literaturze, m. in. [38, 39], najczęściej stosowany jest model na bazie krzywej potęgowej

$$Q = Q_u \cdot (1 - e^{-\beta \cdot s})^\alpha, \quad (4)$$

gdzie

Q – siła w łączniku,

Q_u – nośność łącznika,

s – przemieszczenie na kierunku siły,

α, β – parametry w zależności od geometrii i materiału łącznika.

An i Cederwall [2], cytując Ollgard'a [75], podają zależność

$$Q = Q_u \cdot \frac{80s}{1 + 80s} \quad (5)$$

i stwierdzają, że po zmodyfikowaniu współczynników zależność ta dobrze oddaje zachowanie się łącznika, poddawanego wcześniej obciążeniom cyklicznym. Należy zaznaczyć, że w przypadku pierwszej zależności pochodna po s w zerze wynosi nieskończoność, co może sprawiać problemy obliczeniowe przy wykorzystywaniu podejścia bazującego na stycznej macierzy sztywności. W przypadku zależności drugiej, problem ten nie występuje.

Rezultaty uzyskane przez Taplina [90] pokazują, że zależność dla badanych łączników typu stud była prawie liniowa dla przemieszczenia poniżej 0,25 mm. Podobne wyniki, i w przybliżeniu liniową zależność w pierwszej fazie pracy łącznika, uzyskali także Zong i Che [98]. Nakajima i inni [74] przeprowadzili badania mające na celu zbadanie zachowania się łączników pod cyklicznym obciążeniem. Przeprowadzono testy przy stałym i zmiennym zwrocie siły a uzyskane wyniki potwierdziły wyniki uzyskane przez Taplina. Przeprowadzone badania [87, 90] pozwalają na określenie charakterystyki łącznika w przypadku, gdy był on poddawany obciążeniom cyklicznym. Zdaniem autorów, odpowiedni jest w tej sytuacji model, w którym sztywność łącznika jest początkowo równa zero a następnie zmienia się liniowo; długość odcinka o zerowej sztywności jest tu funkcją ilości cykli obciążenia, któremu poddany był łącznik oraz wartości tego obciążenia w stosunku do nośności łącznika. Taplin i Grundy [91] przedstawili wpływ tego czynnika na nośność i sztywność belek zespolonych pod obciążeniem cyklicznym. Przeprowadzone badania na czterech belkach zespolonych oraz analizy teoretyczne potwierdzają, że historia obciążenia jest czynnikiem, który ma wpływ na sztywność, a także nośność belek zespolonych. Problem zmiany charakterystyki zespolenia pod wpływem obciążeń cyklicznych i podatności połączenia ścinanego pojawia się nie tylko w konstrukcjach zespolonych ale również w konstrukcjach metalowych [44], gdzie może decydować o nośności giętej całego elementu. Obecnie pojawiają się matematyczne modele opisujące zachowanie się modeli z pętlą histerezy (tak jak w przypadku cyklicznych obciążeń zespolenia) napisane pod kątem ich implementacji do MES [62]. Można więc oczekiwać w przyszłości lepszych procedur MES do modelowania tego typu zjawisk w konstrukcjach inżynierskich.

Pod kątem modelowania zespolenia w belce, pracującej w fazie sprężysto-plastycznej, warto podkreślić pozycję [15], w której zwrócono uwagę na problem zmiennej charakterystyki siła-poślizg dla sworznia w zespoleniu, w zależności od klasy betonu. Zwiększenie wytrzymałości betonu na ściskanie skutkuje wzrostem nośności zespolenia na ścinanie przy jednoczesnym spadku ciągliwości.

Osobnym problemem są zjawiska związane ze skurczem i pęczaniem w belkach zespolonych. Istnieje również korelacja pomiędzy tymi zjawiskami a zachowaniem się belek zespolonych pod obciążeniami cyklicznie zmiennymi. Problemem tym nie zajmowano się w ramach niniejszego opracowania. Istnieje na ten temat bogata literatura, zarówno najnowsza zagraniczna, jak np. [95], jak i krajowa; w latach siedemdziesiątych problemem tym w Politechnice Wrocławskiej zajmował się Biliszczuk [10]. W odniesieniu do ZBS problem poruszali Dall'Asta i inni [22].

2.5. POLSKA PRAKTYKA INŻYNIERSKA W ZAKRESIE ZBS I ZBWS

W krajowej praktyce inżynierskiej sprężanie zewnętrzne konstrukcji zespolonych jest stosowane ale ogranicza się do wzmacniania konstrukcji istniejących. Realizacje w tym zakresie zostały już wykonane. Jest to związane z przestąpieniem Polski do UE i narzuconym zwiększeniem nośności dźwigarów głównych obiektów mostowych na drogach krajowych do klasy B, wg [115]. Przykładem mogą tu być dwa obiekty mostowe na Dolnym Śląsku. Pierwszym jest most w miejscowości Ścibórz w ciągu drogi krajowej nr 408 Kłodzko – Gliwice, gdzie występują obecnie ZBWS [69]. Machelski i Biliszczyk [68], w ramach nadzoru naukowego nad remontem tego obiektu, stwierdzili, że konstrukcja po sprężeniu zachowuje się tak jak przewidywano w projekcie, potwierdzając tym samym skuteczność przyjętej metody wzmocnienia. W przypadku tego obiektu przyjęto technologię sprężania w postaci prostych kabli pod półką dolną dźwigarów w przęsłach przed wylaniem płyty pomostowej i zespoleniu jej z dźwigarami stalowymi. Przykładem zastosowania ZBS może być wspomniany drugi obiekt mostowy, którym jest most przez rzekę Widawę w ciągu ul. Kamieńskiego we Wrocławiu. Obiekt ten, w którym konstrukcje nośną stanowią dźwigary stalowe ażurowe zespolone z płytą pomostu, tzw. „Bażykówki”, został wzmocniony poprzez sprężenie zewnętrzne ze względu na przejazd ponadnormatywny. Ciężna kotwiono w górnej części belek. Kształt trasy ciężna determinuje odgięcie na poprzecznicach. Machelski i inni [71], w ocenie efektywności sprężenia, stwierdzili zgodność pomiarów w trakcie sprężania z przyjętymi założeniami. W [70] przedstawiono przypadek powyższego obiektu jako przykład wzmacniania przęseł z belek zespolonych, zwracając uwagę na potrzebę poszukiwania odpowiednich rozwiązań konstrukcyjnych przy modernizacji przęseł tego typu. Sprężenie zewnętrzne stosuje się także do wzmacniania przęseł zespolonych, w których dźwigarami są kratownice stalowe. Jako przykład, w odniesieniu do ZBWS, można podać tutaj remont mostu przez San w Brandwicy [82]. Przedstawione realizacje podano jako przykładowe. Analogicznych przykładów na terenie kraju jest więcej.

2.6. KIERUNKI ROZWOJU

Ostatnie osiągnięcia w zakresie konstrukcji zespolonych w USA i kierunki rozwoju przedstawił Galambos [37]. Zong [101], podsumowując dokonania w zakresie BZWS oraz BZS w odniesieniu do nośności granicznej, wytrzymałości zmęczeniowej, stateczności, efektów reologicznych oraz opracowania metod projektowania i norm, przedstawił problemy badawcze, jakie należałoby uwzględnić w przyszłości. Podkreślił między innymi konieczność opracowania procedur projektowania BZWS oraz BZS z uwzględnieniem pozasprężystej pracy tego typu konstrukcji, stworzenia modeli dobrze uwzględniających efekty reologiczne oraz poślizg w połączeniu ścinanym. W opracowaniu autor skupił się głównie na projektowaniu konstrukcji nowych.

Kravanja i Silih [57] przeprowadzili analizy teoretyczne mające na celu porównanie kosztów budowy konstrukcji zespolonych z belek pełnościennych i konstrukcji kratowych. Konstrukcje zaprojektowano zgodnie z EC4 zarówno dla stanów granicznych nośności jak i stanów granicznych użytkowania. Celem było znalezienie takich obciążeń i długości przęseł, przy których dane konstrukcje są bardziej ekonomiczne (wzmacnianie konstrukcji zespolonych z dźwigarów kratowych i płyty pomostowej poprzez sprężanie zewnętrzne jest obecnie w kraju stosowane, np. [82]).

Interesującą koncepcję budowy przęseł ciągłych zespolonych mostów o przekroju skrzynkowym, z zastosowaniem sprężenia zewnętrznego oraz wewnętrznego sprężenia płyty, przedstawili

Hyung-Keun Ryu i inni [47]. Wykonano model przęsła w skali naturalnej i badania niszczące. Zwrócić tu należy uwagę na zamkniętą konstrukcję skrzynkową dźwigara z pochylonymi środnikami, co jest ostatnio w kraju stosowane, zarówno do przęseł swobodnie podpartych jak i ciągłych [126, 127], a za granicą obecnie do dźwigarów będących w planie w łuku [93]. Mając na uwadze analogię do konstrukcji kablobetonowych o przekroju skrzynkowym z kablami wewnątrz skrzynki, można rozważać tu możliwość podobnego sprężania konstrukcji zespolonych. Potrzebne są tu jednak analizy, zarówno z zakresu wytrzymałości konstrukcji oraz jej niezawodności, jak i technologiczno – ekonomiczne.

2.7. PODSUMOWANIE

Przytoczone powyżej pozycje literaturowe pozwalają stwierdzić, że istnieją obecnie odpowiednie opisy matematyczne umożliwiające sprawne modelowanie ZBS oraz ZBWS. Wyprowadzono wiele modeli i wykonano symulacje komputerowe, jednak cała ta wiedza sprowadza się praktycznie do jednego, a właściwie dwóch ośrodków na świecie (na podstawie dostępnej literatury światowej – autorowi niniejszej rozprawy nie udało się dotrzeć do innych materiałów, jeżeli takowe istnieją). Poza Chinami [102] nie przeprowadzono w ostatnich latach eksperymentalnych badań ZBS, a poprzednie szeroko zakrojone badania pochodzą sprzed około dwudziestu lat (stosowano tam inne rodzaje zespolenia). Zespół z Włoch nie dysponuje odpowiednim laboratorium i zajmuje się wyłącznie modelowaniem teoretycznym [129]. Istnieje zatem luka – nie ma wykonanego wspólnie programu badań, w którym połączono by eksperyment z teorią. W kontekście rosnącego zainteresowania konstrukcjami zespolonymi, co jest związane zarówno z rozwojem techniki i technologii jak i narzędzi umożliwiających zaawansowane modelowanie konstrukcji w obszarach nieliniowych, autor podjął się próby stworzenia pracy stanowiącej połączenie badań doświadczalnych i modelowania teoretycznego.

3. TEZY

W świetle przeprowadzonego rozeznania literaturowego na temat belek zespolonych sprężonych kablami zewnętrznymi, o schemacie statycznym belki swobodnie podpartej, i obciążanych obciążeniem pionowym w przęśle powodującym powstanie dodatniego momentu zginającego, stawia się następujące tezy:

1. Sprężenie zespolonych belek stalowo-betonowych za pomocą kabli zewnętrznych jest efektywnym sposobem zwiększania ich nośności.
2. Możliwe jest opracowanie niezależnych modeli analitycznych i numerycznych do opisu zachowania się zespolonych belek sprężonych, uwzględniających jednocześnie:
 - złożony przekrój belki (różne materiały tworzące przekrój, uwzględnienie zbrojenia w płycie i różnych parametrów wytrzymałościowych stali belki; innych dla środka i pólek),
 - nieliniowe charakterystyki materiałów tworzących przekrój,
 - nieliniową zależność siła ścinająca-poślizg dla łącznika zespolenia,
 - nierównomierny rozkład łączników wzdłuż belki,
 - zamocowanie kabla w dyskretnych punktach kontaktu,
 - kontakt kabla z belką w dyskretnych punktach uwzględniający poślizg w tych punktach.
3. Nie ma znaczącej różnicy w odniesieniu do przemieszczeń i odkształceń w środku rozpiętości w zachowaniu się pod obciążeniem pionowym belek z kablem prostym, a kablem odgiętym na dewiatorach.
4. W przypadku belek zaprojektowanych przy założeniu zespolenia pełnego zgodnie z wymaganiami normowymi i przy zastosowaniu w zespoleniu obecnie stosowanych sworzni, w obszarze sprężystym podatność zespolenia nie wpływa znacząco na wartości odkształceń w środku rozpiętości na spodzie pasa dolnego belki stalowej i na górze płyty betonowej.

4. MODEL ANALITYCZNY ZESPOLONEJ BELKI SPRĘŻONEJ

W celu wykonania teoretycznej symulacji zachowania się belki w trakcie sprężania i pod obciążeniem zewnętrznym należało opracować nowe modele teoretyczne lub wykorzystać istniejące.

Metodą uniwersalną, umożliwiającą opis zachowania się tak złożonej konstrukcji, jest MES. Zdecydowano się na wykorzystanie dostępnych systemów obliczeniowych i model konstrukcji jako klasy e^2+e^1, p^3 . Sprowadziło się to do wykorzystania istniejącego systemu; założenia i wyniki obliczeń przedstawiono w dalszej części opracowania. Z drugiej strony zdecydowano się na stworzenie modelu ZBS w przestrzeni dwuwymiarowej sprowadzając problem do pręta o zadanej osi. W tym celu wykorzystano model, który zaprezentowali Dall'Asta i Dezi [20] i odpowiednio go modyfikując, stworzono nowy model. Na potrzeby niniejszego opracowania model ten, w odróżnieniu od MES, nazwano DA. Następnie napisano odpowiedni program komputerowy wykorzystujący stworzony model i posłużono się nim do obliczeń ZBS o założonych parametrach i zmieniających się danych.

Do opisanego zachowania się ZBS w obszarze nieliniowym stworzono odpowiedni model kinematyczny, następnie opisano zachowanie się tego modelu i na tej podstawie napisano program komputerowy PRESTCOMP, umożliwiający obliczenia ZBS przy następujących założeniach:

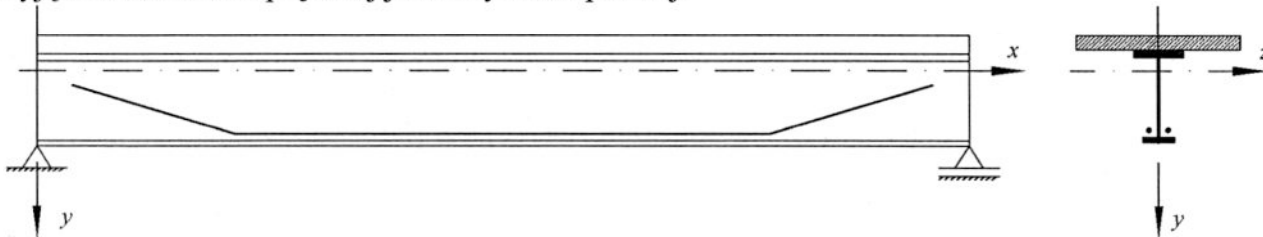
- przekrój belki zespolonej złożony z wielu materiałów (różne parametry stali konstrukcyjnej; inne dla pasów, środka i nakładki, przyjęcie modelu zbrojenia podłużnego górnego i dolnego płyty betonowej),
- zginanie jednokierunkowe,
- poślizg w zespoleniu (zespolenie podatne),
- poślizg kabli na dewiatorach,
- nieliniowe zależności konstytutywne dla wszystkich materiałów zastosowanych w konstrukcji,
- nieliniowa zależność siła-poślizg w zespoleniu,
- nierównomierny rozkład sworzni zespolenia wzdłuż belki.

Model opracowany przez autora powstał w wyniku rozbudowania modelu zaprezentowanego w [20], tj. modelu ZBS nie uwzględniającego poślizgu w zespoleniu. Jest on w zasadzie odpowiednikiem modelu zaprezentowanego następnie w [25], a różni się od niego innym schematem przyjęcia funkcji bazowych przemieszczeń, co zostało opisane w dalszej części. Należy podkreślić, że modele te powstały niezależnie. Autor niniejszego opracowania pracował nad rozbudowaniem modelu zaprezentowanego w [20] celem uwzględnienia poślizgu na styku stal beton nie dysponując opracowaniem [25]. Stworzony model skonsultowano z ośrodkiem włoskim [129], a wyniki prac zaprezentowano w [60, 65, 67].

4.1. PODSTAWY TEORETYCZNE - ROZWIĄZANIE BEZ UWZGLĘDNIENIA PODATNOŚCI ZESPOLENIA

Poniżej przedstawiono model zaproponowany w [20] wraz z niezbędnymi wyprowadzeniami, jako że po rozszerzeniu i niezbędnych modyfikacjach, model ten stał się podstawą do stworzenia modelu ZBS, uwzględniającego podatność zespolenia w ramach niniejszej rozprawy. Starano się zachować oryginalne oznaczenia stosowane przez autorów.

Przyjęto model belki sprężonej jak na rysunku poniżej:



Rys. 4.1. Schemat belki z zaznaczonymi kierunkami osi.

Dla przyjętego modelu pierwotne położenie każdego punktu belki możemy zapisać jako:

$$\mathbf{P}_0 = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad (6)$$

gdzie jednostkowe wektory $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ stanowią układ ortogonalny i są zorientowane tak jak osie x , y i z . Współrzędne y i z opisują położenie punktu w przekroju belki, a współrzędna x opisuje położenie punktu na długości belki. Wstępnie można przyjąć, że osie y i z są głównymi centralnymi osiami bezwładności a oś x jest do nich prostopadła.

Przy założeniu jednokierunkowego zginania i osiowego ściskania (rozciągania) przemieszczenie każdego punktu belki można opisać jako:

$$\mathbf{U} = [u(x) - y v'(x)] \mathbf{i} + v(x) \mathbf{j}, \quad (7)$$

Funkcje $u(x)$ i $v(x)$ są szukanymi funkcjami opisującymi przemieszczenia poziome wzdłuż osi x i pionowe (oś y). Funkcje $u'(x)$, $v'(x)$ i $v''(x)$ są odpowiednimi pochodnymi funkcji $u(x)$ i $v(x)$ względem zmiennej x . Punkty, które początkowo zajmowały pozycję $\mathbf{P}_0$ znajdują się obecnie w położeniu

$$\mathbf{P} = [x + u(x) - y v'(x)] \mathbf{i} + [y + v(x)] \mathbf{j} + z \mathbf{k}. \quad (8)$$

Przyjęte pole odkształceń powoduje, że w belce wystąpią tylko osiowe odkształcenia

$$\varepsilon_b = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u'(x) - y \cdot v''(x), \quad (9)$$

Przyjmujemy, że kabel jest zakotwiony na swoich końcach do belki i jego trasa składa się z odcinków prostych tworzących linię łamaną. W pośrednich punktach kontaktu możliwy jest poślizg kabla względem belki, tak że na całej długości kabla panuje w nim stałe odkształcenie. Ponieważ

przekrój belki jest monosymetryczny, pierwotne położenie punktów kontaktu kabla z belką możemy opisać jako

$$\mathbf{Q}_d = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} . \quad (10)$$

Jeżeli przyjmiemy oznaczenie dwóch sąsiednich punktów kontaktu jako $(d-1)$ oraz (d) , to położenie wszystkich punktów ciągu na odcinku między punktami $(d-1)$ oraz (d) można zapisać jako funkcję zmiennej x :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}_{d-1} + \frac{x - x_{d-1}}{x_d - x_{d-1}} (\mathbf{Q}_d - \mathbf{Q}_{d-1}) , \quad (11)$$

lub przyjmując jako $\Delta_d x = x_d - x_{d-1}$ oraz $\Delta_d y = y_d - y_{d-1}$ otrzymujemy

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}_{d-1} + (x - x_{d-1}) \left[\mathbf{i} + \frac{\Delta_d y}{\Delta_d x} \mathbf{j} \right] , \quad (12)$$

gdzie x_d oraz y_d są współrzędnymi punktów kontaktu.

Gdy pod wpływem obciążenia belka ulega deformacji, punkt kontaktu (d) zajmuje nowe położenie, które można opisać jako:

$$\mathbf{q}_d = [x_d + u(x_d) - y_d v'(x_d)] \mathbf{i} + [y_d + v(x_d)] \mathbf{j} . \quad (13)$$

Wektor przemieszczenia punktu kontaktu (d) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{s}_d = \mathbf{q}_d - \mathbf{Q}_d = [u(x_d) - y_d v'(x_d)] \mathbf{i} + v(x_d) \mathbf{j} . \quad (14)$$

Ponieważ po deformacji trasa kabla pomiędzy sąsiednimi punktami wciąż pozostaje linią prostą położenie jej punktów po deformacji można opisać funkcją zmiennej x :

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_{d-1} + \frac{x - x_{d-1}}{x_d - x_{d-1}} (\mathbf{q}_d - \mathbf{q}_{d-1}) . \quad (15)$$

Długość kabla przed deformacją można zapisać jako

$$\Lambda = \sum_1^D |\mathbf{Q}_d - \mathbf{Q}_{d-1}| = \sum_1^D \sqrt{(\Delta_d x)^2 + (\Delta_d y)^2} , \quad (16)$$

natomiast po deformacji

$$\lambda(u_d, v_d, v'_d) = \sum_1^D |\mathbf{q}_d - \mathbf{q}_{d-1}| = \sum_1^D \sqrt{(\Delta_d x + \Delta_d u + \Delta_d (y \cdot v'))^2 + (\Delta_d y + \Delta_d v)^2}, \quad (17)$$

gdzie $u = u(x_d)$, $v = v(x_d)$, $v' = v'(x_d)$,

oraz $\Delta_d x = x_d - x_{d-1}$, $\Delta_d y = y_d - y_{d-1}$, $\Delta_d (y \cdot v') = y_d v'_d - y_{d-1} v'_{d-1}$.

Rozwinięcie w szereg Taylora długości $|\mathbf{a}|$ wektora $\mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{b}$ w sąsiedztwie $\mathbf{A}$ jeżeli weźmiemy pod uwagę tylko pierwszą liniową część wyrażenia, wyraża się jako:

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{A}| + \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{A}|}. \quad (18)$$

Wyrażenie na długość kabla po deformacji ma zatem postać

$$\lambda = \Lambda + \sum_1^D \frac{(\mathbf{Q}_d - \mathbf{Q}_{d-1}) \cdot (\mathbf{s}_d - \mathbf{s}_{d-1})}{|\mathbf{Q}_d - \mathbf{Q}_{d-1}|}, \quad (19)$$

co po podstawieniu daje

$$\lambda = \Lambda + \sum_1^D \frac{\Delta_d x (\Delta_d u - \Delta_d (y \cdot v')) + (\Delta_d y \cdot \Delta_d v)}{\sqrt{(\Delta_d x)^2 + (\Delta_d y)^2}}. \quad (20)$$

Dla każdego odcinka łączącego dwa sąsiednie punkty kontaktu wpływ na odkształcenie osiowe cięgna ma tylko przemieszczenie, które jest równoległe do kierunku odcinka łączącego dwa sąsiednie punkty kontaktu w pierwotnym położeniu. Odkształcenie w cięgnię można wyrazić jako:

$$\varepsilon_c(u_d, v_d, v'_d) = \frac{\lambda - \Lambda}{\Lambda} = \frac{1}{\Lambda} \sum_1^D \alpha_d [\Delta_d u - \Delta_d (y \cdot v')] + \beta_d \Delta_d v, \quad (21)$$

gdzie:

$$\alpha_d = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{(\Delta_d x)^2 + (\Delta_d y)^2}},$$

$$\beta_d = \frac{\Delta_d y}{\sqrt{(\Delta_d x)^2 + (\Delta_d y)^2}}.$$

Jak widać, odkształcenie cięgna zależy od przemieszczeń punktów kontaktu, a więc od szukanych funkcji $u(x)$ i $v(x)$.

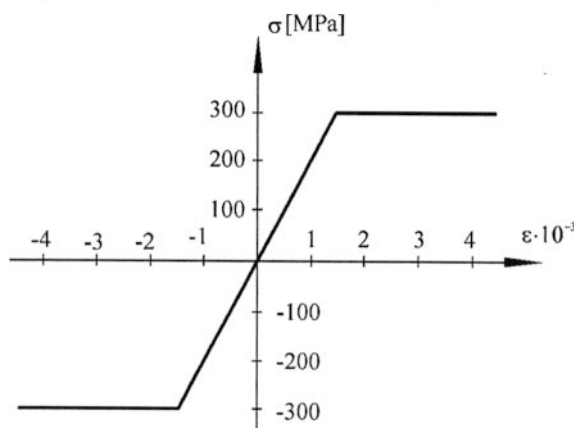
Dla materiałów belki (stal konstrukcyjna i zbrojeniowa, beton, zbrojenie) zależność naprężenia od odkształcenia układu i położenia punktu w przekroju belki można zapisać jako:

$$\sigma_b = G_b(y, z; \varepsilon - \varepsilon_0), \quad (22)$$

natomiast dla cięgna jako

$$\sigma_c = G_c (\varepsilon_c - \varepsilon_{c0}), \quad (23)$$

gdzie funkcje G_b i G_c są funkcjami monotonicznymi opisującymi zależność naprężenia od odkształcenia w jednoosiowym stanie naprężenia, mogą być to funkcje analityczne bądź zawierające funkcje Heaviside'a (np. jak dla stali model sprężysto - idealnie plastyczny). Im funkcje te są prostsze, tym łatwiej przebiegają późniejsze obliczenia.



Rys. 4.2. Przykładowa funkcja G_b .

Odkształcenia ε_0 i ε_{c0} pozwalają wprowadzić do modelu wstępne pole odkształceń związane z wcześniejszym sprężeniem układu.

Korzystając z metody energetycznej, otrzymujemy globalne równanie równowagi dla całego układu

$$\int_0^L \int_{A_b} \sigma_b \cdot \delta \varepsilon_b dA_b dx + \Lambda \cdot A_c \cdot \sigma_c \delta \varepsilon_c = \int_0^L \int_{A_b} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dx, \quad (24)$$

gdzie A_b i A_c są polami przekroju poprzecznego, odpowiednio belki i cięgna, a $\mathbf{f}$ jest wektorem opisującym rozkład sił zewnętrznych na jednostkę długości belki i tak

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} n \\ q \\ m \end{bmatrix} \text{ oraz } \delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta v' \end{bmatrix}, \quad (25)$$

gdzie

$$n = \int_{A_b} \sigma_b dA, \quad q = \int_{A_b} \tau_b dA, \quad m = \int_{A_b} (-y) \cdot \sigma_b dA,$$

a wektor $\delta \mathbf{u}$ jest wektorem wariacji funkcji $u(x)$, $v(x)$ oraz pochodnej funkcji przemieszczeń pionowych $v'(x)$.

Równanie globalne można zatem wyrazić jako:

$$\int_0^L [N_b(u', v'') \delta u'] dx + \int_0^L [M_b(u', v'') \delta v''] dx + \Lambda \cdot T_c(u_d, v_d, v'_d) \delta \varepsilon_c(u_d, v_d, v'_d) = \int_0^L [n \delta u + q \delta v + m \delta v'], \quad (26)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} N_b &= \int_{Ab} G_b(y, z; u'(x) - y \cdot v''(x) - \varepsilon_{ob}) dA, \\ M_b &= - \int_{Ab} y \cdot G_b(y, z; u'(x) - y \cdot v''(x) - \varepsilon_{ob}) dA, \\ T_c &= A_c \cdot G_c \left(\sum_1^D [\alpha_d (\Delta_d u - \Delta_d (y \cdot v')) + \beta_d \Delta_d v] - \varepsilon_{c0} \right). \end{aligned}$$

Wariację odkształcenia w cięgnię otrzymujemy z równania

$$\delta \varepsilon_c = \sum_1^D [\alpha_d (\Delta_d \delta u - \Delta_d (y \cdot \delta v')) + \beta_d \Delta_d \delta v], \quad (27)$$

które jest liniowe względem wariacji δu , δv , oraz $\delta v'$.

Funkcje $u(x)$ i $v(x)$ można aproksymować za pomocą skończonej liczby funkcji liniowo niezależnych, wybranych z ortogonalnej bazy zupełnej i spełniających zadane warunki brzegowe:

$$u(x) = \sum_1^I u_i \cdot \phi_i(x) = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad (28)$$

$$v(x) = \sum_1^J v_j \cdot \psi_j(x) = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}). \quad (29)$$

Gdy rozpatrzmy przypadek belki swobodnie podpartej o długości L , to warunki brzegowe możemy zapisać w postaci $v(0) = v(L) = 0$ oraz $u(L/2) = 0$. Dla tego przypadku funkcję $u(x)$ możemy aproksymować wielomianami Legendra, a funkcję $v(x)$ szeregiem trygonometrycznym:

$$\phi_i(x) = f_i^L \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) \text{ dla } i = 1 \dots I, \quad (30)$$

$$\psi_j(x) = \sin \left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \text{ dla } j = 1 \dots J. \quad (31)$$

W przypadku symetrycznego obciążenia belki, można rozpatrywać tylko parzyste j .

Dla określonych już funkcji, można zapisać odkształcenie w belce jako

$$\varepsilon_b = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\phi}' - y \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi}'', \quad (32)$$

oraz odkształcenie w cięgnię jako:

$$\varepsilon_c = \sum_1^D [\alpha_d (\Delta_d (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\Phi}) - \Delta_d (\gamma \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Psi})) + \beta_d \Delta_d (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Psi})]. \quad (31)$$

Aby globalne równanie równowagi było spełnione dla każdej funkcji bazowej, należy wykonać jego różniczkowanie po szukanych współczynnikach funkcji bazowych, stanowiących wyrazy wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$, co daje nieliniowy układ I + J równań w postaci:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0 & dla \quad i = 1 \dots I \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v_j} = 0 & dla \quad j = I + 1 \dots J \end{cases}, \quad (32)$$

co po podstawieniu daje

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^L \int_{A_b} G_b(y, z; \varepsilon_b - \varepsilon_{b0}) \cdot \phi_h' dA_b dx + A_c G_c(\varepsilon_c - \varepsilon_{c0}) \cdot \sum_1^D \alpha_d \Delta_d \phi_h = \\ & = \int_0^L \int_{A_b} \sigma_x \phi_h dA_b dx \quad h = 1 \dots I \\ & - \int_0^L \int_{A_b} G_b(y, z; \varepsilon_b - \varepsilon_{b0}) \cdot y \cdot \psi_{h-1}'' dA_b dx + A_c G_c(\varepsilon_c - \varepsilon_{c0}) \cdot \sum_1^D [\beta_d \Delta_d \psi_{h-1} - \alpha_d \Delta_d (y \cdot \psi_{h-1}')] = \\ & = \int_0^L \int_{A_b} [r_y \psi_{h-1} - y \cdot \sigma_x \psi_{h-1}] dA_b dx \quad h = I + 1 \dots I + J \end{aligned} \right. \quad (33)$$

W powyższym układzie równań występują dwie grupy równań, co jest związane z operacją różniczkowania po współczynnikach funkcji $u(x)$ i $v(x)$. W przypadku gdy rozpatrujemy belkę zespoloną składającą się np. ze stali i betonu, to człon odpowiedzialny za energię sprężystą samej belki będzie miał postać

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_{A_b} G_b(y, z; \varepsilon_b - \varepsilon_{b0}) \cdot \phi_h' dA_b dx = \\ & \int_0^L \int_{A_{b1}} G_{b1}(y, z; \varepsilon_b - \varepsilon_{b0}) \cdot \phi_h' dA_b dx + \int_0^L \int_{A_{b1}} G_{b2}(y, z; \varepsilon_b - \varepsilon_{b0}) \cdot \phi_h' dA_b dx \end{aligned}, \quad (34)$$

dla energii ściskania (rozciągania) i analogicznie dla energii zginania.

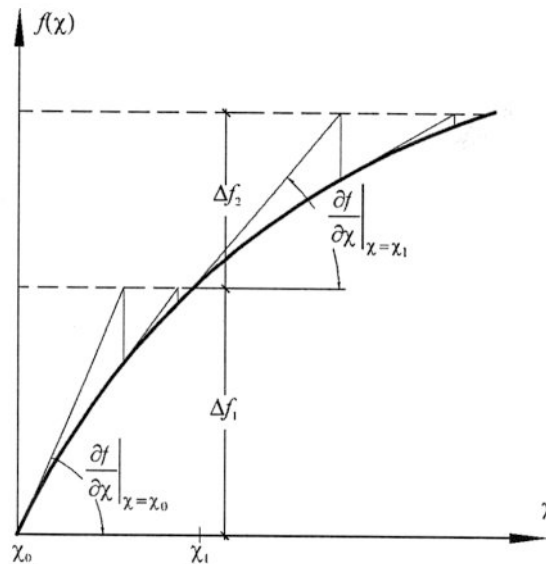
Szukanymi niewiadomymi są wyrazy wektora $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1, \dots, u_I, v_{I+1}, \dots, v_J]$ czyli współczynniki funkcji bazowych. Przyjęcie nieliniowych funkcji G_b powoduje powstanie nieliniowego układu

równań (dla zależności liniowych powstaje układ liniowy). Należy zaznaczyć, że już nieliniowe względem χ wyrażenia należy jeszcze dodatkowo scałkować, przy czym dla belek o przekrojach, w których krawędzie są do siebie prostopadłe, występujące całki potrójne zamienić można na całki podwójne pomnożone przez stałe wymiary odpowiadające współrzędnej z. W ogólnej formie taki układ równań można zapisać jako:

$$\mathbf{a}(\chi) - \mathbf{b} = 0, \quad (35)$$

gdzie $\mathbf{a}$ jest nieliniowym operatorem macierzowym powstałym ze scałkowania energii wewnętrznej belki i cięgna, a $\mathbf{b}$ jest znanym wektorem i wyraża prace obciążenia zewnętrznego na wirtualnych przemieszczeniach.

Do rozwiązania układu równań zastosowano podejście iteracyjne z wykorzystaniem metody NR [16].



Rys. 4.3. Ilustracja metody Newtona- Raphsona

Dla danego przyrostu obciążenia dla iteracji k-tej wektor χ ma postać:

$$\chi^{(k)} = \chi^{(k-1)} + (\nabla a(\chi^{(k)}))^{-1} (b - b^{(k)}), \quad (36)$$

gdzie (k) oznacza bieżący krok iteracyjny, a macierz gradientu $\nabla a(\chi^{(k)})$ o wymiarze $(I + J)^2$ składa się z wyrazów:

$$[\nabla a(\chi)]_{hm} = \frac{\partial [a(\chi)]_h}{\partial [\chi]_m}. \quad (37)$$

Gradient $\mathbf{a}$ jest macierzą symetryczną, tak więc można wyznaczać tylko połowę wyrazów co skraca czas obliczeń.

Do wyznaczenia składników gradientu $\mathbf{a}$ można wykorzystać zależność

$$\frac{d}{dy} \iint_B f(x, y) dx = \iint_B \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \quad (38)$$

Ponieważ

$$\frac{\partial}{\partial A_i} G(\varepsilon(A_i)) = \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_i}, \quad (39)$$

gdzie A_i oznacza współczynnik funkcji bazowej, po którym różniczkujemy, ogólnie możemy wyraz gradientu przedstawić jako:

$$[\nabla a(\chi)]_{hm} = \int_0^L \int_{Ab} \frac{\partial G_b}{\partial \varepsilon_b} \cdot \frac{\partial \varepsilon_b}{\partial A_i} \cdot \theta(x, y) dA_b dx + \frac{\partial G_c}{\partial \varepsilon_{cb}} \cdot \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial A_i} \sum_1^D g(x_d, y_d), \quad (40)$$

gdzie $\theta(x, y)$ oznacza funkcje występujące w równaniu i zależne od x oraz y a niezależne od współczynnika A_i (różne dla różnych równań) oraz $g(x_d, y_d)$ oznacza wartości pewnych funkcji zależnych od x i y a niezależnych od współczynnika A_i w punkcie kontaktu (d) (również różne dla różnych równań).

Zaproponowane powyżej podejście zakłada model belki Bernouliego, nie uwzględniając poślizgu w zespoleniu. Założono zginanie jednokierunkowe, monosymetrię przekroju i nieliniowe zależności materiałowe, poślizg kabla w pośrednich punktach kontaktu oraz liniową charakterystykę materiałową dla kabla.

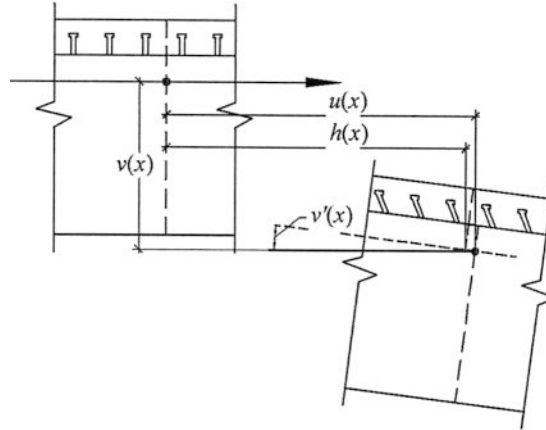
4.2. ROZWINIĘCIE MODELU - UWZGLĘDNIENIE PODATNOŚCI ZESPOLENIA

Aby umożliwić uwzględnienie podatności zespolenia, stan odkształceń należy opisać za pomocą trzech funkcji przemieszczeń. Dall'Asta i Leoni [25] zrobili to, przyjmując funkcje opisujące przemieszczenie pionowe, oraz niezależnie przemieszczenia poziome środka płyty betonowej i środka ciężkości przekroju stalowego. W niniejszym opracowaniu przyjęto inne podejście; funkcje opisują odpowiednio:

$u(x)$ – przemieszczenie poziome wzdłuż osi x punktów belki stalowej znajdujących się na osi x , gdzie oś x przechodzi przez środek bezwładności przekroju zespolonego w stanie zerowym,

$h(x)$ – funkcja opisująca przemieszczenie poziome wzdłuż osi x punktów płyty żelbetowej będące wynikiem poślizgu na styku stal – beton

$v(x)$ – przemieszczenie pionowe wzdłuż osi y punktów belki stalowej i płyty żelbetowej.



Rys. 4.4. Przyjęty model kinematyczny i funkcje

Przyjęty opis przemieszczeń powoduje, że odkształcenia w belce stalowej, płycie i poślizg mają odpowiednio postać:

$$\varepsilon_s = u'(x) - y \cdot v''(x), \quad \varepsilon_b = h'(x) - y \cdot v''(x), \quad s = u(x) - h(x). \quad (41a,b,c)$$

Opis odkształceń kabla pozostaje bez zmian w stosunku do przedstawionego w [20] przy założeniu, że kabel kontaktuje się z tylko belką stalową, jak mamy do czynienia w ZBS. Powyższe trzy funkcje umożliwiają modelowanie belki z uwzględnieniem nieliniowych zależności konstytutywnych dla materiałów składowych przekroju belki zespolonej oraz zespolenia. Należy dodatkowo wprowadzić funkcję $v(x)$ opisującą nierównomierny rozkład sworzni wzdłuż belki a zależności konstytutywne należy poszerzyć o zależność dla łącznika:

$$F_z = G_z(s - s_0). \quad (42)$$

Uwzględniając przekrój stalowy o zmiennych charakterystykach materiałowych stali w zależności od położenia w przekroju, dwa poziomy zbrojenia podłużnego oraz nierównomierny rozkład sworzni wzdłuż belki, opisany funkcją $v(x)$, równanie równowagi dla całego układu ma obecnie postać:

$$\int_0^L \int_{A_s} \sigma_s \cdot \delta \varepsilon_s dA_s dx + \int_0^L \int_{A_b} \sigma_b \cdot \delta \varepsilon_b dA_b dx + \int_L \nu(x) \cdot G_z(s) \cdot \delta s \cdot dx + \Lambda \cdot A_c \cdot \sigma_c \delta \varepsilon_c = \int_L \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}^T dx. \quad (43)$$

Wektor $\mathbf{f}$ pozostaje bez zmian, gdy rozpatruje się tylko obciążenia pionowe. Przyjmując aproksymację szukanego rozwiązania w postaci:

$$u(x) = \sum_1^I u_i \cdot \phi_i(x), \quad h(x) = \sum_1^I h_i \cdot \eta_i(x), \quad v(x) = \sum_1^J v_i \cdot \psi_i(x), \quad (44 \text{ a,b,c})$$

nieliniowy układ równań (32) przyjmuje postać, składającą się obecnie z trzech grup równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0 & dla \quad i = 1 \dots I, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial h_i} = 0 & dla \quad i = I+1 \dots K, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = 0 & dla \quad i = K+1 \dots J, \end{cases} \quad (45)$$

co po podstawieniach daje:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^L \int_{As} G_s(y, z; \varepsilon_s - \varepsilon_{s0}) \cdot \phi_h' dA_s dx + \int_0^L \nu(x) \cdot G_z(s - s_0) \cdot \phi_h dx + \\ & + A_c G_c(\varepsilon_c - \varepsilon_{c0}) \cdot \sum_1^D \alpha_d \Delta_d \phi_h = \int_0^L \int_{As} \sigma_s \phi_h dA_s dx, \quad h = 1 \dots I, \\ & \int_0^L \int_{Ab} G_b(y, z; \varepsilon_b - \varepsilon_{b0}) \cdot \eta_h' dA_b dx - \int_0^L \nu(x) \cdot G_z(s - s_0) \cdot \eta_h dx = \\ & = \int_0^L \int_{Ab} \sigma_{bs} \eta_h dA_b dx, \quad h = I+1 \dots K, \\ & - \int_0^L \int_{As} G_s(y, z; \varepsilon_s - \varepsilon_{s0}) \cdot y \cdot \psi_h'' dA_s dx - \int_0^L \int_{Ab} G_b(y, z; \varepsilon_b - \varepsilon_{b0}) \cdot \psi_h'' dA_b dx + \\ & + A_c G_c(\varepsilon_c - \varepsilon_{c0}) \cdot \sum_1^D [\beta_d \Delta_d \psi_h - \alpha_d \Delta_d (y \cdot \psi_h')] = \\ & = \int_0^L \int_{As+Ab} [\tau_y \psi_h - y \cdot \sigma_x \psi_h'] dA dx, \quad h = K+1 \dots J. \end{aligned} \right. \quad (46)$$

W powyższym układzie równań występują obecnie trzy grupy równań, co daje dziewięć różnych typów składników macierzy gradientu. Z uwagi na symetrię macierzy, można rozpatrywać tylko składniki na głównej przekątnej i ponad nią.

Pochodne równań typu u po współczynnikach typu u :

$$\begin{aligned} [\nabla a]_{hm} &= \int_0^L \phi_h' \cdot \phi_m' \left\{ \int_{Ac} \frac{\partial G_s(y, z; \varepsilon_s - \varepsilon_{s0})}{\partial \varepsilon_s} dA_s \right\} dx + \int_0^L \nu(x) \cdot \frac{\partial G_z(s - s_0)}{\partial s} \cdot \phi_h \cdot \phi_m dx + \\ & + A_c \frac{\partial G_c(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_c} \cdot \sum_1^D [\alpha_d \Delta_d \phi_h] \cdot \sum_1^D [\alpha_d \Delta_d \phi_m] . \end{aligned} \quad (47)$$

Pochodne równań typu u po współczynnikach typu h :

$$[\nabla a]_{hm} = - \int_0^L \nu(x) \cdot \frac{\partial G_z(s - s_0)}{\partial s} \cdot \phi_h \cdot \eta_m . \quad (48)$$

Pochodne równań typu u po współczynnikach typu v :

$$[\nabla a]_{hm} = - \int_0^L \varphi'_h \psi''_m \left\{ \int_{As} y \cdot \frac{\partial G_s(y, z; \varepsilon_s - \varepsilon_{s0})}{\partial \varepsilon_s} dA_s \right\} dx +$$

$$+ A_c \frac{dG_c(\varepsilon)}{d\varepsilon_c} \cdot \sum_1^D [\alpha_d \Delta_d \varphi_h] \cdot \sum_1^D [\beta_d \Delta_d \psi_m - \alpha_d \Delta_d (y \psi'_m)] . \quad (49)$$

Pochodne równań typu h po współczynnikach typu h :

$$[\nabla a]_{hm} = \int_0^L \eta'_h \cdot \eta'_m \left\{ \int_{Ab} \frac{\partial G_b(y, z; \varepsilon_b - \varepsilon_{b0})}{\partial \varepsilon_b} dA_b \right\} dx + v(x) \cdot \frac{\partial G_z(s - s_0)}{\partial s} \cdot \eta_h \cdot \eta_m . \quad (50)$$

Pochodne równań typu h po współczynnikach typu v :

$$[\nabla a]_{hm} = - \int_0^L \eta'_h \cdot \psi''_m \left\{ \int_{Ab} y \frac{\partial G_b(y, z; \varepsilon_b - \varepsilon_{b0})}{\partial \varepsilon_b} dA_b \right\} dx . \quad (51)$$

Pochodne równań typu v po współczynnikach typu v :

$$[\nabla a]_{hm} = - \int_0^L \psi''_h \cdot \psi''_m \left\{ \int_{As} y^2 \cdot \frac{\partial G_s(y, z; \varepsilon_s - \varepsilon_{s0})}{\partial \varepsilon_s} dA_s \right\} dx -$$

$$- \int_0^L \psi''_h \cdot \psi''_m \left\{ \int_{Ab} y^2 \cdot \frac{\partial G_b(y, z; \varepsilon_b - \varepsilon_{b0})}{\partial \varepsilon_b} dA_b \right\} dx +$$

$$+ A_c \frac{\partial G_c(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \cdot \sum_1^D [\beta_d \Delta_d \psi_h - \alpha_d \Delta_d (y \psi'_h)] \cdot \sum_1^D [\beta_d \Delta_d \psi_m - \alpha_d \Delta_d (y \psi'_m)] . \quad (52)$$

4.3. PROGRAM KOMPUTEROWY PRESTCOMP

Na podstawie przytoczonych wzorów napisano w środowisku MATHEMATICA® [41, 96] program PRESTCOMP. Kod źródłowy programu podano na końcu opracowania.

4.3.1. Algorytm programu

Przedstawiono w punktach algorytm programu. Stosowano oznaczenia przyjęte w kodzie źródłowym.

rozpoczęcie obliczeń

1. Przyjęcie geometrii przekroju poprzecznego belki zespolonej (szerokości i grubości pasów belki stalowej oraz półki betonowej, rozmieszczenie i przekrój zbrojenia).
2. Przyjęcie wstępnych charakterystyk materiałów składowych belki w stanie zerowym.
3. Przyjęcie schematu obciążenia.
4. Przyjęcie geometrii i przekrojów kablów sprężających oraz wstępnego pola odkształceń
5. Wprowadzenie wstępnego pola odkształceń w zadanych elementach składowych konstrukcji (nie wykorzystywane w ramach niniejszego opracowania) za pomocą funkcji u_0 i v_0 .

6. Przyjęcie liczby funkcji bazowych n_ψ , n_ϕ , n_η .
7. Utworzenie macierzy operatorów **MacOp1s**, **MacOp1b**, **MacOp1zes**, składających się z wyrazów 0, -1, 1, $-y$, y , y^2 ; dla $n_\psi = n_\phi = n_\eta = 2$ mają one postać:

$$\begin{pmatrix} y^2 & y^2 & -y & -y & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & -y & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 & y^2 & 0 & 0 & -y & -y \\ 0 & y^2 & 0 & 0 & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Ustalenie wartości zerowych dla macierzy i zmiennych wykorzystywanych podczas dalszych obliczeń; tj. wektora szukanych współczynników dla sumy kroków przyrostowych **MACwspA**, wektora lewej strony **LL0**, wektora prawej strony **$\Delta\Gamma\mathbf{BB}$** , wektora szukanych współczynników w ramach jednego kroku **$\Delta\Gamma\mathbf{wspA}$** .

pierwszy krok przyrostowy

9. Przyjęcie wartości obciążenia w ramach bieżącego kroku przyrostowego.
10. Zdefiniowanie zmiennych A_i dla $i = 1$ do n_b , gdzie $n_b = n_\psi + n_\phi + n_\eta$.
11. Zwolnienie zmiennych *MacAo*, *epsst* i *epsb* (wykorzystywane w dalszej części programu i określające odpowiednio szukane współczynniki A_i oraz odkształcenia w stali i betonie).
12. Ustalenie parametrów całkowania numerycznego.
13. Zdefiniowanie w postaci list jednowymiarowych **FunkcjePsi**, **FunkcjeFi**, **FunkcjeEta** funkcji bazowych Psi_i , Fi_j oraz Eta_k , stanowiących kolejne wyrazy szeregu trygonometrycznego i kolejne wielomiany Legendra.
14. Zdefiniowanie list jednowymiarowych:
ffPsi – pierwsze pochodne funkcji Psi_i ,
ffFi – zerowe pochodne funkcji Fi_j ,
ffEta – zerowe pochodne funkcji Eta_k ,
dfPsi – drugie pochodne funkcji Psi_i ,
dfFi – pierwsze pochodne funkcji Fi_j ,
dfEta – pierwsze pochodne funkcji Eta_k ,
15. Zdefiniowanie list jednowymiarowych **Funs** = Join[**ffPsi**, **ffFi**, **ffEta**] oraz **dFuns** = Join[**dfPsi**, **dfFi**, **dfEta**].
16. Utworzenie z list **Funs** i **dFuns** odpowiadających im macierzy pochodnych funkcji bazowych (symetryczne macierze kwadratowe) **MacFundZesp** i **MacFundStB**.
17. Zdefiniowanie pola odkształceń w stali $\epsilon_{stal} = \epsilon_{psst} + \epsilon_{bs0}$.
18. Zdefiniowanie funkcji $GS1(\epsilon_{stal})$, $GS2(\epsilon_{stal})$ i $GS3(\epsilon_{stal})$ stanowiących charakterystyki materiałowe dla poszczególnych elementów przekroju stalowego.
19. Zdefiniowanie pochodnych funkcji $GS1(\epsilon_{stal})$, $GS2(\epsilon_{stal})$ i $GS3(\epsilon_{stal})$ względem ϵ_{stal} ; tj. $dGS1new(\epsilon_{stal})$, $dGS2new(\epsilon_{stal})$ i $dGS3new(\epsilon_{stal})$.
20. Określenie jak dla stali konstrukcyjnej odpowiednich zależności GB i $dGBnew$ dla betonu płyty i GZp oraz $dGZp$ dla zbrojenia wiotkiego płyty.

21. Zdefiniowanie funkcji $Gstud(slip)$, określającej charakterystykę siła-poślizg dla pojedynczego bolca zespolenia oraz funkcji $dGstud(slip)$ stanowiącej pochodną funkcji $Gstud(slip)$ względem zmiennej $slip$.
22. Zdefiniowanie funkcji $fStud(x)$ określającej rozmieszczenie bolców zespolenia wzdłuż belki.
23. Zdefiniowanie funkcji Kf jako iloczynu funkcji $Gstud$ i $fStud$ oraz zdefiniowanie funkcji dKf jako iloczynu funkcji $dGstud$ i $fStud$.
24. Zdefiniowanie pomocniczych zmiennych $stau$, $etau$ i $zast$.
25. Przypisanie zmiennym odpowiednich funkcji w zadanej kolejności (wynika to ze specyfiki programu MATHEMATICA®):

$$epsst = stau - zast \cdot y \quad (A25.1)$$

$$epsb = etau - zast \cdot y \quad (A25.2)$$

$$v(x) = \sum_{i=1}^{f\psi count} A_i P s i_i(x) \quad (A25.3)$$

$$u(x) = \sum_{i=1+f\psi count}^{f\psi count+f\phi count} A_i F i_i(x) \quad (A25.4)$$

$$h(x) = \sum_{i=1+f\psi count+f\phi count}^{f\psi count+f\phi count+f\eta count} A_i E t a_i(x) \quad (A25.5)$$

$$zast = \frac{\partial v(x)}{\partial^2 x} \quad (A25.6)$$

$$stau = \frac{\partial u(x)}{\partial x} \quad (A25.7)$$

$$etau = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \quad (A25.8)$$

$$slip = (u(x) + u0wst) - (h(x) + h0wst) \quad (A25.9)$$

26. Wyznaczenie odpowiednich macierzy **MacPoch**; stanowią one iloczyn odpowiednich macierzy operatorów **MacOp**, funkcji pochodnych charakterystyk materiałowych **dG** lub **dK** oraz macierzy funkcji bazowych **MacFund**. Każdy składnik odpowiedniej macierzy **MacPoch** stanowi funkcję wielu zmiennych; tj. x , y oraz współczynników A_i . Mogą występować funkcje Heaviside'a, w przypadku wykorzystania ich w charakterystykach materiałowych lub w funkcji opisującej rozkład łączników wzdłuż belki.
27. Zapisanie odpowiednich macierzy **MacPoch** w formie list jednowymiarowych.
28. Wyznaczenie wektora **BB0int** (składnik prawej strony). Poszczególne wyrazy tego wektora wyrażają pracę obciążenia zewnętrznego dla odpowiedniej funkcji bazowej i wartości obciążenia w kroku i . Wyrazy odpowiadające funkcjom Fi i Eta mają wartość zero.
29. Wyznaczenie wektora prawej strony **BB0** dla iteracji i stanowiącego różnicę wektora pracy sił zewnętrznych dla zadanego obciążenia i lewej strony równania z kroku $i-1$.
30. Przypisanie współczynnikom A_i wartości wyznaczonych w iteracji $i-1$.
31. Wyznaczenie poszczególnych składników macierzy gradientu poprzez całkowanie funkcji dwóch zmiennych x i y (dla energii wewnętrznej belki) i sumowanie (dla energii wewnętrznej kabli).
32. Wyznaczenie macierzy gradientu ΔA .
33. Wyznaczenie macierzy odwrotnej do macierzy gradientu **KAA**.

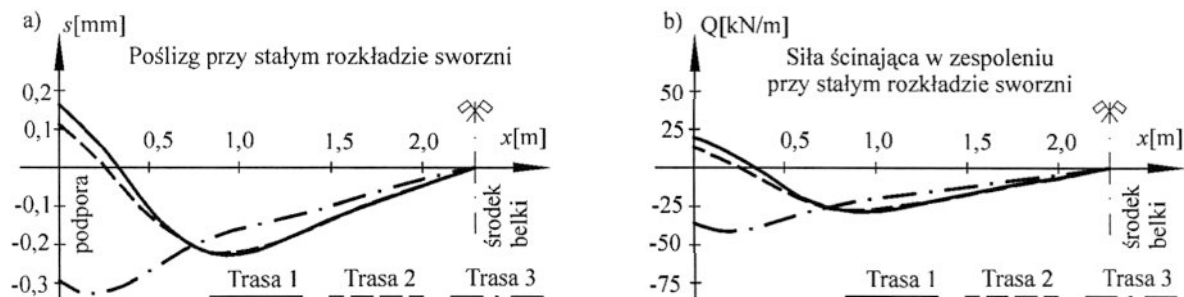
34. Wyznaczenie wektora $\Lambda\Lambda$ (przyrost współczynników A_i w danej iteracji) poprzez wektorowe pomnożenie macierzy $K\Lambda\Lambda$ i wektora prawej strony $BB0$.
35. Aktualizacja wektora $MACwspA$, tj. dodanie do niego wektora $\Lambda\Lambda$ i zapisanie do pamięci komputera na nowo jako $MACwspA$.
36. Wyznaczenie szukanego wektora MMA (współczynniki A_i).
37. Wyznaczenie odpowiednich wektorów operatorów **Operatoryst**, **OperatorBet**, **OperatorZesp**; dla $n_\psi = n_\phi = n_\eta = 2$ mają one postać odpowiednio: $\{-Y, -Y, 1, 1, 0, 0\}$, $\{-Y, -Y, 0, 0, 1, 1\}$, $\{0, 0, 1, 1, -1, -1\}$.
38. Wyznaczenie odpowiednich składników wektorów składowych lewej strony; stanowią one iloczyn odpowiednich wektorów operatorów **Operator**, funkcji charakterystyk materiałowych **G** lub **K** oraz wektorów odpowiednich pochodnych funkcji bazowych **Funs** lub **dFuns**. Każdy składnik odpowiedniego wektora stanowi funkcję zmiennych x oraz y . Mogą występować funkcje Heaviside'a, w przypadku wykorzystania ich w charakterystykach materiałowych lub w funkcji opisującej rozkład łączników wzdłuż belki.
39. Wyznaczenie poszczególnych składników wektora lewej strony poprzez całkowanie funkcji dwóch zmiennych x i y (dla energii wewnętrznej belki) i sumowanie (dla energii wewnętrznej kabli) i na tej podstawie wyznaczenie wektora lewej strony **LL0**.
40. Wyznaczenie rezyduala rozumianego jako różnica pomiędzy wektorem prawej strony i wektorem lewej strony.
41. Sprawdzenie kryterium zbieżności; jeżeli kryterium nie jest spełnione to powrót do początku procedury iteracyjnej a jeżeli jest, to przejście do kolejnego kroku przyrostowego. W takim przypadku aktualizacja wektorów $\Delta\Gamma wspA$ i $\Delta\Gamma BB$ i zapisanie ich do pamięci komputera. Usunięcie z pamięci komputera wektora $\Delta\Gamma wspA$.

W rozpatrywanych zagadnieniach pojawiają się nieciągłości. W związku z tym zastosowano odpowiednie funkcje umożliwiające pokonanie tego problemu. Ponieważ wykorzystywano program Mathematica 4.0, stosowano w niniejszej pracy nazewnictwo funkcji takie, jak w programie; funkcja UnitStep jest tu funkcją Heaviside'a, a funkcja DiracDelta jest deltą Diraca.

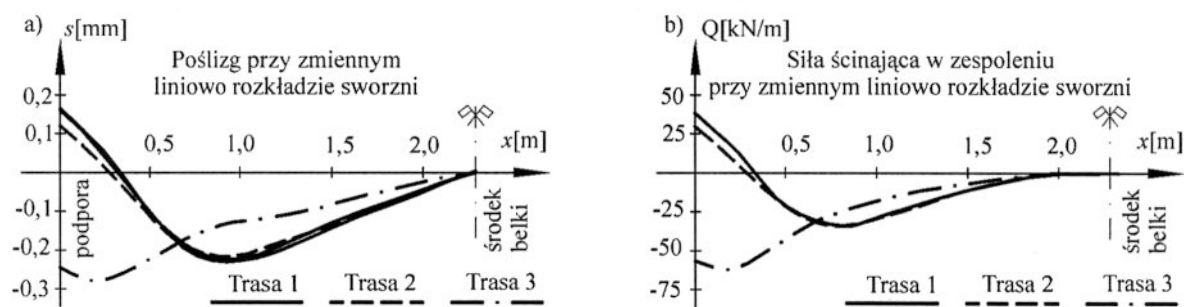
4.3.2. Analizy wybranych modeli belek

Dysponując napisanym programem wykonano wstępne analizy, mające na celu porównanie wyników badań dostępnych w literaturze z rezultatami z programu. Osiągnano dobrą zgodność. Sprawdzono wpływ liczby funkcji bazowych na dokładność i czas rozwiązania problemu określając optymalne parametry analizy. Dokonano symulacji komputerowych wykonując obliczenia dla różnych zmiennych parametrów, mających na celu określenie wpływu poszczególnych czynników na zachowanie ZBS. Dysponując kompletem informacji i opracowań na temat wyników badań eksperymentalnych ZBS z USA [29], przeprowadzono analizę porównawczą otrzymanych wyników i zaprezentowano wnioski dotyczące przeprowadzonej analizy oraz skomentowano wyniki eksperymentalne [66]. Następnie dokonano oceny wpływu kształtu trasy kabli na układ sił ścinających w zespoleniu; [59, 67]; poniżej przedstawiono wybrane wykresy z opracowania [67]. Na rysunkach 4.4. i 4.5. pokazano rozkład poślizgu i sił w zespoleniu dla różnych kształtów trasy ciągnącej tj.: 1) ciągnąco zakotwione w poziomie pasa górnego belki stalowej i odgięte w odległości 1,20 m od punktów podparcia belki, 2) ciągnąco zakotwione w poziomie osi bezwładności przekroju zespolonego i odgięte w odległości 1,20 m od punktów podparcia belki i 3) ciągnąco zakotwione w poziomie pasa

dolnego belki stalowej bez pośrednich punktów kontaktu. Układ jest symetryczny – pokazano połowę długości belki.



Rys. 4.5. Rozkład wzdłuż belki a) poślizgu i b) siły ścinającej w zespoleniu, dla stałego rozkładu łączników wzdłuż belki



Rys. 4.5. Rozkład wzdłuż belki a) poślizgu i b) siły ścinającej w zespoleniu, dla liniowo zmiennego rozkładu łączników wzdłuż belki (zero w środku rozpiętości i maksymalna wartość gęstości zespolenia na końcach belki)

4.3.3. Analizy modeli belek do badań

Wykonano wiele analiz porównawczych, przy założeniu różnych zmiennych, takich jak: geometria przekroju poprzecznego belki, jej rozpiętość, wytrzymałość betonu i splotów itp., których celem było odpowiednie zaprojektowanie belek zespolonych do badań. Umożliwiło to prześledzenie wpływu danego czynnika na zachowanie się belki w obszarze liniowym i nieliniowym a tym samym umożliwiło trafniejsze przyjęcie na etapie projektowania odpowiednich zmiennych, takich jak geometria belek i materiały konstrukcyjne.

5. BADANIA ELEMENTÓW SKŁADOWYCH BELEK

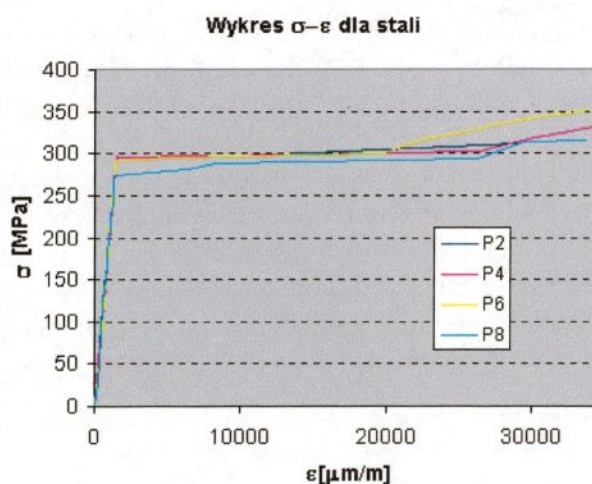
Przedstawiono poniżej założenia, opis przebiegu oraz wyniki badań elementów składowych belek wraz z interpretacją wyników. Przeprowadzono badania:

- stali konstrukcyjnej,
- stali zbrojeniowej,
- stali sprężającej,
- siłomierzy do splotów,
- betonu,
- połączeń ścinanych i stali sworznia,

Na podstawie uzyskanych wyników określono między innymi zależności konstytutywne, które wykorzystano następnie w modelowaniu konstrukcji.

5.1. STAL KONSTRUKCYJNA

Z konstrukcji stalowej, po zniszczeniu, wycięto 8 próbek normowych [122] pięciokrotnych. Wycięto dwie próbki pionowo ze środka (nr 1 i 4), dwie próbki poziomo ze środka (nr 2 i 3), dwie z pasa (nr 7 i 8) oraz dwie z nakładki belki B2 (nr 7 i 8). Na próbkach nr 2, 4, 6 i 8 umieszczono po dwa tensometry typu 8/120 z obu stron próbki. Próbki poddano badaniu na rozciąganie w maszynie wytrzymałościowej [117]. Dodatkowo po przeanalizowaniu wyników wycięto dwie próbki (9 i 10) z nakładki belki B3. Belki opisano w punkcie 6.



Rys. 5.1. Próbki stalowe przed i po zniszczeniu oraz uzyskany wykres $\sigma - \epsilon$

**Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych
sprężanych kablami zewnętrznymi**

W tabelach 5.1 i 5.2. przedstawiono numer, opis i wymiary próbek (g – grubość, b – szerokość, A – pole przekroju, L – długość bazy) oraz uzyskane wyniki (F_e – siła uplastyczniająca próbkę, F_m – siła zrywająca próbkę, R_e – granica plastyczności, R_m – wytrzymałość na rozciąganie, ΔL – wydłużenie po zerwaniu, A_5 – wydłużenie po zerwaniu).

Tab. 5.1. Wartości uzyskane dla poszczególnych próbek – cz. 1

Nr próbki	Opis próbki	g [mm]	b [mm]	A [mm ²]	F_e [kN]	F_m [kN]
1	Środek - pionowa	8.46	24.94	211	62.0	89.0
2	Środek - pozioma	8.45	25.01	211	62.5	90.2
3	Środek - pozioma	8.52	25.00	213	62.0	88.0
4	Środek - pionowa	8.47	25.00	212	62.0	90.6
5	Nakładka b. B2	10.16	25.24	256	74.0	114.0
6	Nakładka b. B2	10.06	25.25	254	75.0	115.3
7	Pas dolny	12.22	24.95	305	80.0	122.0
8	Pas dolny	12.48	24.96	312	82.0	126.3
9	Nakładka b. B3	10.5	33,00	347	122,0	182,0
10	Nakładka b. B3	10.5	33,00	347	126,0	182,0

Tab. 5.2. Wartości uzyskane dla poszczególnych próbek – cz. 2

Nr próbki	R_e [MPa]	R_m [MPa]	L [mm]	ΔL [mm]	A_5 [%]
1	294	422	80	25.34	31.5
2	296	427	80	29.40	37.0
3	291	413	80	28.20	35.0
4	293	428	80	27.95	35.0
5	289	445	90	30.62	34.0
6	295	454	90	30.80	34.0
7	262	400	100	36.39	36.5
8	263	405	100	38.80	39.0
9	352	524	-	-	-
10	363	524	-	-	-

Uzyskana wartość modułu Younga wynosi dla poszczególnych próbek od 202 do 209 GPa, średnia wartość wynosi 207 GPa. Wszystkie próbki były ciągłe, wydłużenie A_5 po zniszczeniu wynosi ponad 30%, występuje długi przystanek plastyczny. W dalszej części nie brano pod uwagę tego obszaru, ponieważ dla badanych belek największe odkształcenia przy zniszczeniu nie przekraczały 20000 $\mu\text{m/m}$, a dla badanych próbek obszar wzmocnienia zaczyna się po znacznym przekroczeniu tej wartości. Do dalszych obliczeń teoretycznych przyjęto model sprężysto – plastyczny dla stali konstrukcyjnej; wartość modułu Younga wynosi 207 GPa, a granica plastyczności wynosi 293 MPa dla stali średnika belek stalowych i nakładki belki B2 oraz 262 MPa dla pasów belek stalowych. Odkształcenia, przy których stal ulega uplastycznieniu, wynoszą odpowiednio 1415 $\mu\text{m/m}$ oraz 1266 $\mu\text{m/m}$. Zbadana stal jest stalą z gatunku St3. Dla nakładki belki B3 granica plastyczności wynosi 358 MPa. Jest to zatem stal o wytrzymałości na rozciąganie odpowiadającej stalom z gatunku 18G2.

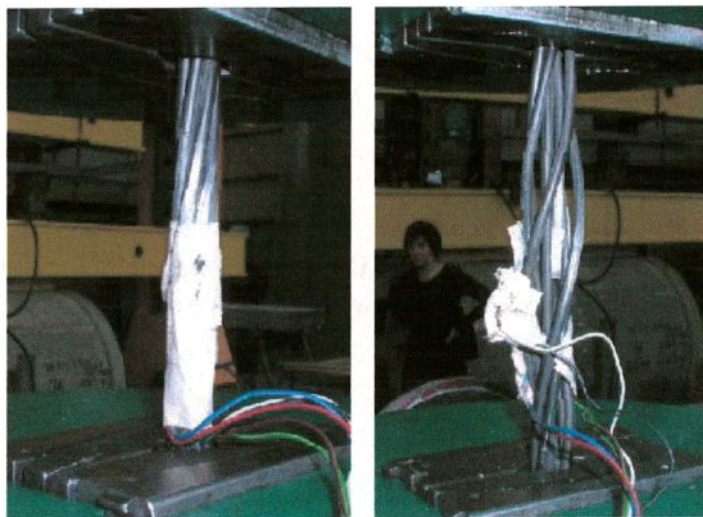
5.2. STAL ZBROJENIOWA

W belkach stosowano pręty żebrowane o średnicy 8 mm ze stali 18G2-b. Przebadano pręty w maszynie wytrzymałościowej; wykonano próbę rozciągania stali. Otrzymano wartości umownej granicy plastyczności i wytrzymałości na rozciąganie wynoszące odpowiednio $R_{0,2} = 428$ MPa oraz $R_m = 657$ MPa. Podobnie jak w przypadku stali belki, podczas badań belek, pręty zbrojenia nie wchodziły w obszar wzmocnienia stali, jednak przy wartościach obciążenia pionowego bliskich granicznemu górne pręty zbrojenia wchodziły w obszar plastyczny. Tak więc do dalszych obliczeń teoretycznych przyjęto model sprężysto – plastyczny; wartość modułu Younga wynosi 207 GPa a umowna granica plastyczności wynosi 428 MPa.

5.3. STAL SPRĘŻAJĄCA

Stosowano sploty $\varnothing 0,6''$ składające się z siedmiu drutów, ze stali o nominalnej wytrzymałości na rozciąganie 1860 MPa. Przeprowadzono dwa niezależne badania splotów zastosowanych do sprężenia. Pierwsze badania zostały przeprowadzone dnia 06.05.2003 r. w Hiszpanii w wytwórni splotów. Określono tam moduł Younga dla splotu na 197,8 GPa i wytrzymałość splotu na 181,1 kN. Granica proporcjonalności wynosi około 214 kN, wydłużenie przy zerwaniu wynosi 5,3 %.

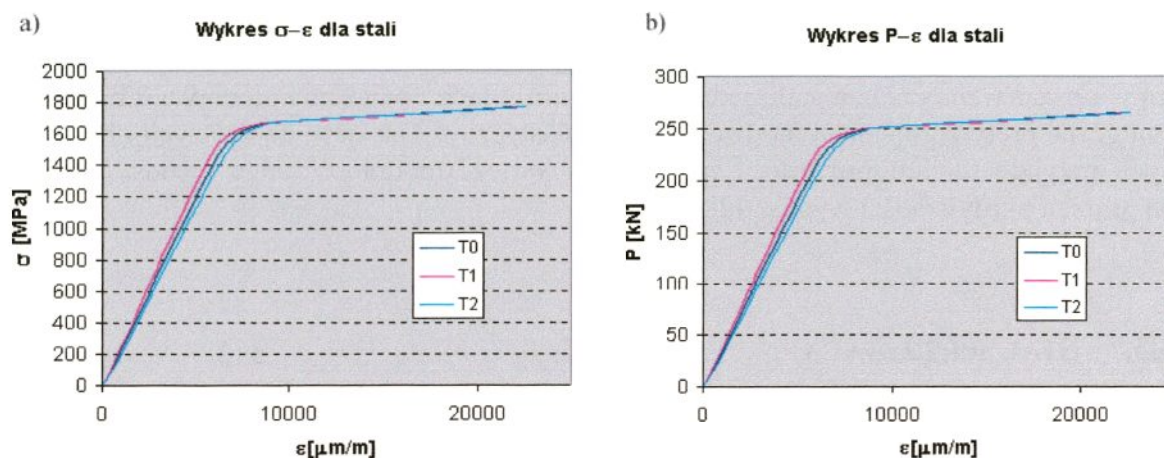
Niezależnie od tego, w ramach niniejszej pracy przeprowadzono badanie polegające na rozciąganiu splotu z naklejonymi na nim trzema tensometrami elektrooporowymi typu 8/120. Tensometry zostały naklejone na pojedynczych drutach.



Rys. 5.2. Splot w maszynie wytrzymałościowej przed i po zniszczeniu

W ten sposób określono wytrzymałość splotu oraz zależność pomiędzy siłą w splocie a odkształceniem w pojedynczym drucie, którą określa pomocniczy moduł E_{zast} . Zależności tej nie można było otrzymać wprost wychodząc z modułu Younga dla splotu, ponieważ druty nie są proste, lecz ułożone spiralnie, należało ją określić doświadczalnie. Ten zabieg badawczy był potrzebny, gdyż zamierzano podczas badań belek naklejać tensometry na pojedyncze druty, niezależnie od stosowania siłomierzy, celem kontrolowania siły w splotach. Maksymalna siła jaką przeniósł splot wyniosła 265 kN, po jej przekroczeniu uległ zerwaniu pierwszy drut i siła już malała, następnie ulegały ze-

rwaniu kolejne druty. Taki mechanizm zniszczenia spowodowany był tym, że badano stosunkowo krótki odcinek splotu i druty nie były równomiernie obciążone. Splot był zakotwiony w takich samych szczękach jak podczas badania belek.



Rys. 5.3. Wykresy dla splotu dla trzech tensometrów: a) $\sigma - \varepsilon$, b) $P - \varepsilon$

Uzyskana z badań uśredniona zastępcza wartość modułu wynosi $E_{zast} = 242$ GPa. Siłę w splocie z naklejonym tensometrem można zatem obliczyć ze wzoru:

$$S = A \cdot \varepsilon \cdot E_{zast}, \quad (53)$$

gdzie:

A – pole przekroju splotu,

ε – odkształcenie z tensometru,

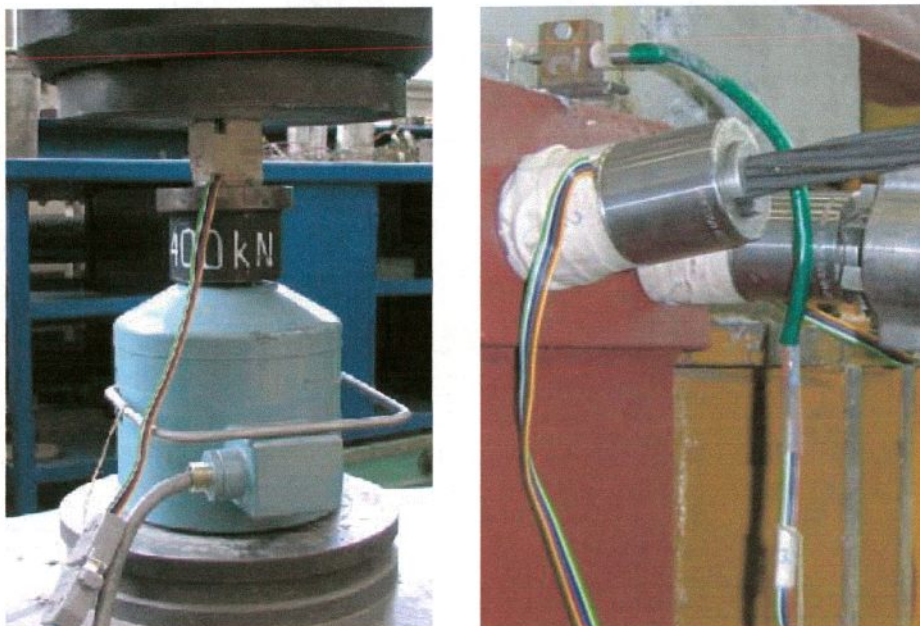
E_{zast} – wyznaczony moduł.

Podczas badań stosowano zakotwienia składające się z głowic kotwiących BBR CONA Compact 106 oraz szczęk potrójnych o długości 43 mm. Są to rozwiązania systemowe i elementy te miały odpowiednie atesty i certyfikaty [128], tak więc nie ma konieczności wykonywania dodatkowych badań.

5.4. SIŁOMIERZE DO SPLOTÓW

Do określenia siły w splocie, podczas badań belek, zaprojektowano urządzenie nazwane na potrzeby niniejszego opracowania siłomierzem tensometrycznym. Urządzenie to składa się z głowicy kotwiącej BBR CONA Compact 106, z naklejonym na niej układem sześciu tensometrów; cztery tensometry naklejono wzdłuż tworzącej co 90° , a dwa na obwodzie. Wykonano cztery takie siłomierze, które następnie wycechowano w maszynie wytrzymałościowej, porównując odczyty z tensometrów z odczytami z zewnętrznego wyskalowanego siłomierza. Maksymalna siła podczas badań wynosiła 300 kN. Otrzymano zależności, które można było bardzo dobrze zaaproboksymować funkcjami liniowymi. Parametrem określającym zależność pomiędzy zredukowanym odczytem z układu tensometrów a przyłożoną siłą jest mnożnik oznaczany jako $m_{s(i)}$, gdzie indeks i oznacza

numer siłomierza od 1 do 4. Otrzymano wartości tego mnożnika dla siłomierzy S1, S2, S3 i S4 wynoszące odpowiednio 1,46, 1,41, 1,43 i 1,37.

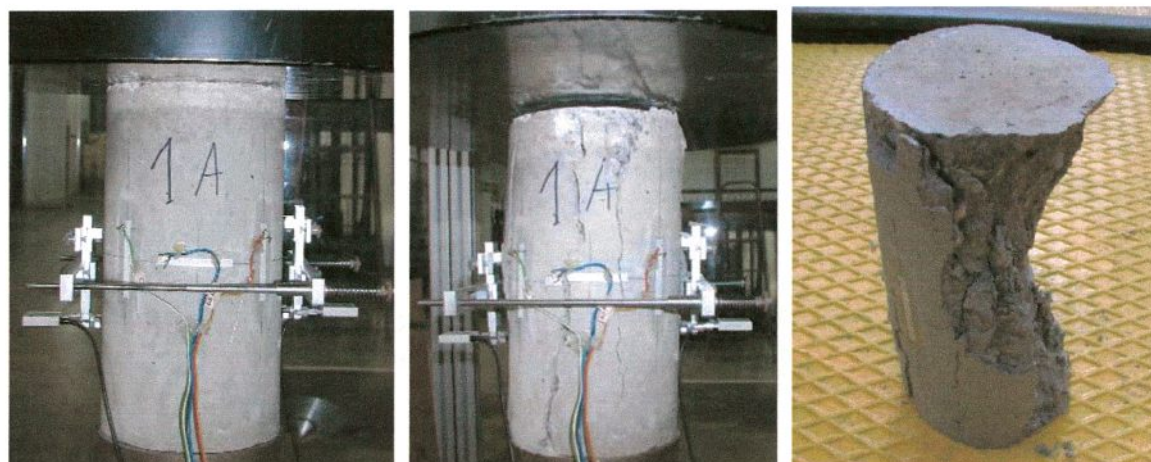


Rys. 5.4. Siłomierz tensometryczny w maszynie wytrzymałościowej i podczas badań belek

Odpowiednio wycechowane siłomierze tensometryczne umieszczano podczas badań belek pomiędzy głowicą kotwiącą a płytą oporową belki. Warunki pracy odpowiadały więc tym podczas cechowania. Wprowadzenie do programu komputerowego CATMAN odpowiednich mnożników pozwalało na dynamiczne śledzenie zmian sił w splotach przy zakotwieniach, określanie tarcia na dewiatorach itd.

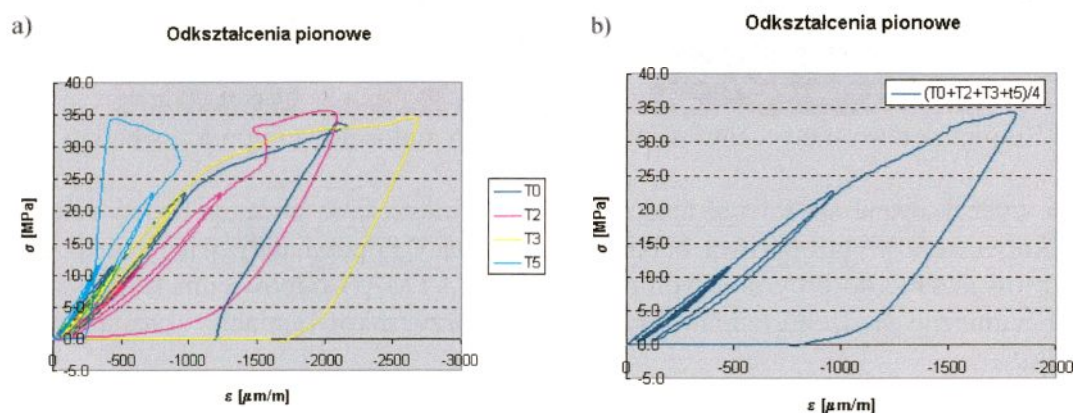
5.5. BETON

Próbki do badania cech betonu wykonano i zbadano zgodnie z normami [118, 119, 120, 121] oraz instrukcją [123]. Był to beton B30 wykonany na kruszywie zwyczajnym. Próbki stanowiły walce o wysokości 300 mm i średnicy 150 mm. Beton próbek jest tym samym, z którego wykonano płyty belek oraz modele próbne do badań łączników ścinanych. Wykonano 6 sztuk próbek, po trzy dla każdego betonowania, które następnie poddano badaniom niszczącym w celu wyznaczenia wytrzymałości betonu na ściskanie, współczynnika sprężystości i współczynnika Poissona. Na podstawie otrzymanych wyników określono krzywą (charakterystykę materiałową) opisującą zależność $\sigma(\epsilon)$ dla badanego betonu. Rejestrowano niezależnie odkształcenia z tensometrów naklejonych wzdłuż tworzącej i na obwodzie oraz zależność siła – przemieszczenie na zadanej bazie z maszyny wytrzymałościowej za pośrednictwem osobnego mostka indukcyjnego. Układ tensometrów na próbce stanowiły cztery tensometry pionowe co 90° oraz dwa tensometry naklejone na obwodzie co 180° . Mostek stanowi układ dwóch indukcyjnych czujników na kierunku pionowym.



Rys. 5.5. Próbką w maszynie wytrzymałościowej i po zniszczeniu.

Na wykresach pokazano, jako przykładowe, wyniki uzyskane dla próbki B4, tj. odczyty z tensometrów naklejonych na próbkę oraz wyniki z maszyny wytrzymałościowej i mostka indukcyjnego.



Rys. 5.6. Wykres $\sigma - \varepsilon$: a) oraz dla poszczególnych tensometrów, b) uśredniony

Uzyskano zbliżone wartości modułu siecznego w obu metodach. Wyniki z tensometrów traktowano jako kontrolne. Do wyznaczenia charakterystyk posłużono się wynikami z maszyny wytrzymałościowej i mostka indukcyjnego. Wartości przedstawiono w tabeli 5.3.:

Tab. 5.3. Wartości uzyskane dla poszczególnych próbek

Próbka	Betonowanie	Siła niszcząca [kN]	Naprężenie przy zniszczeniu f_{ck} [MPa]	Współczynnik sprężystości E_c [GPa]
B1	I	454	24,72	—
B2	II	689	38,24	29,43
B3	I	607	33,25	30,07
B4	II	592	32,43	24,42
B5	II	552	30,42	49,02
B6	I	559	30,83	26,41

Odrzucono skrajne wartości i obliczono średnią wartość wytrzymałości na ściskanie f_{ck} oraz współczynnika sprężystości E_c , które następnie przyjęto do określenia charakterystyki $\sigma - \varepsilon$ dla betonu płyt belek:

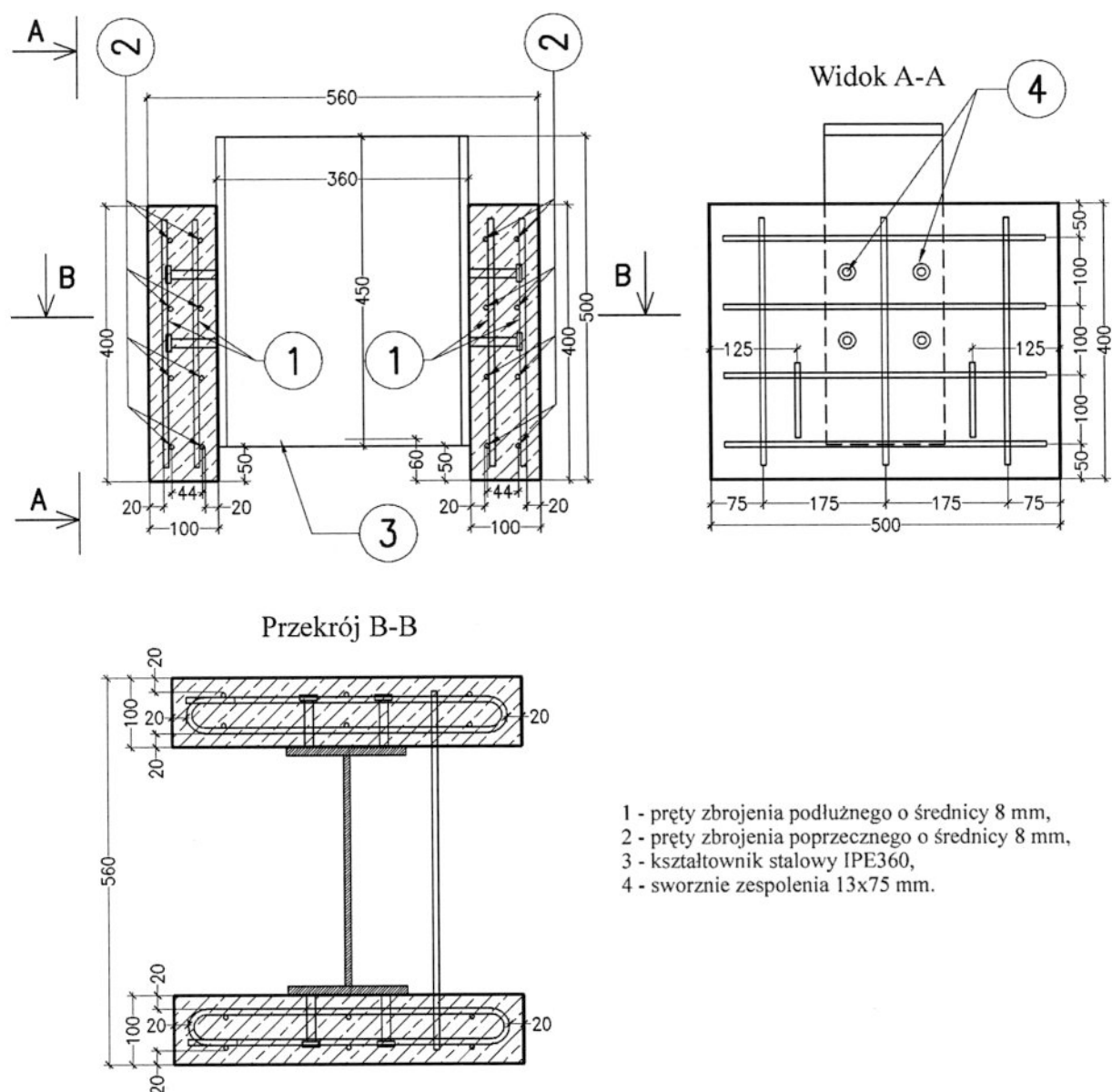
$$f_{ck} = 31,7 \text{ MPa}$$

$$E_c = 28,6 \text{ GPa}$$

5.6. ŁĄCZNIKI ŚCINANE

Parametry wytrzymałościowe samego sworznia nie mają kluczowego znaczenia dla badań belek; znaczenie ma charakterystyka całego zespolenia, tj. sworznie + stal + beton. Celem kompletności wykonanych badań oraz pod kątem wykonania modelu MES wykonano także badanie polegające na rozciąganiu pojedynczych sworzni w maszynie wytrzymałościowej. Siła uplastyczniająca i zrywająca wynosiły odpowiednio 63 kN i 69 kN, a wyznaczone na tej podstawie wartości granicy plastyczności i wytrzymałości na rozciąganie wynoszą odpowiednio $R_{0,2} = 515 \text{ MPa}$ oraz $R_m = 564 \text{ MPa}$.

Wykonano 3 szt. połączeń ścinanych. Próbki zaprojektowano i wykonano zgodnie z EC4.1. [105, 109]. Elementy zastosowane w próbkach odpowiadają zastosowanym w belkach (sworznie, beton, stal konstrukcyjna i zbrojeniowa). Identyczny jest układ sworzni i zbrojenia oraz grubość płyty. Szerokość płyty jest mniejsza aniżeli w belkach i wynosi 500 mm. Szczegóły konstrukcyjne pokazano na rysunku 5.7.

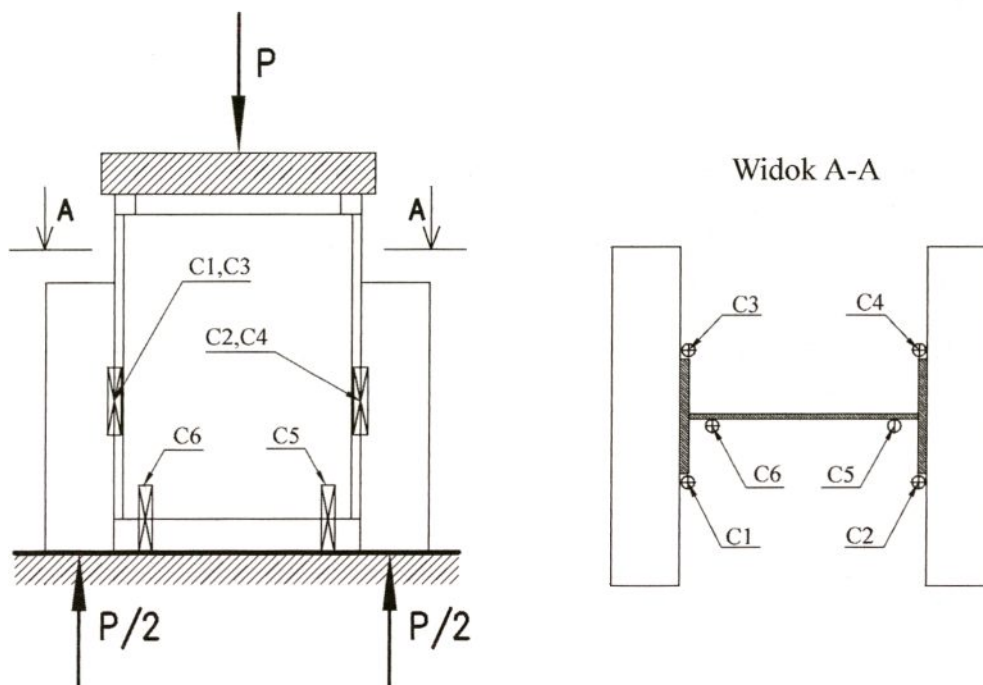


Rys. 5.7. Model próbny do badań łączników ścinanych

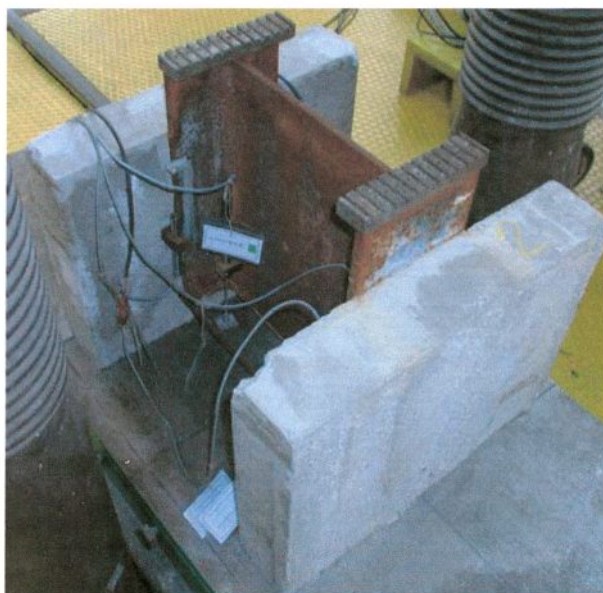
5.6.1. Program badań

Program badań obejmował badania niszczące wszystkich trzech próbek. Każdą z próbek wstawiono do maszyny wytrzymałościowej tak, aby opierała się na płytach betonowych. Następnie za pośrednictwem przekładek wywierano siłę na element stalowy powodując jego pionowy przesuw względem płyt betonowych, aż do ścięcia łączników. Do pomiarów wykorzystano 6 czujników indukcyjnych; 4 do pomiaru poślizgu i 2 pomiędzy elementem stalowym a podłożem celem kontroli uzyskanych wyników. Układ czujników i schemat obciążenia pokazano na rysunkach 5.8. i 5.9. Program obciążenia obejmował ciągłe obciążanie aż do zniszczenia bez przystanków (próbki Z1 i Z3) oraz obciążanie do około 30% siły niszczącej, odciążenie i ciągłe obciążanie do zniszczenia (próbka Z2). Program obciążenia ustalono tak, aby określić charakterystykę siła-poślizg przy cią-

głym obciążaniu (próbki Z1 i Z3) oraz aby określić wielkość poślizgu trwałego w próbce – pętla histerezy (próbka Z2).



Rys. 5.8. Model próbny – schemat z układem czujników



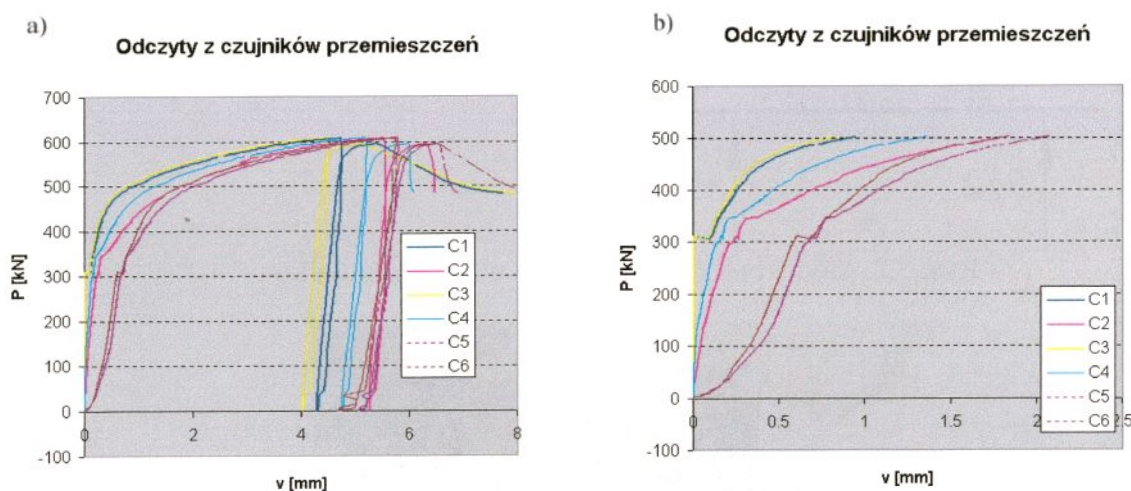
Rys. 5.9. Próbką ścinaną na stanowisku przygotowana do badań

Odczyty wykonywano z częstotliwością 100 Hz co pozwala na dokładną interpretację uzyskanych wyników. Próbki oznaczono zgodnie z kolejnością wykonywanych badań jako Z1, Z2 i Z3. Przewidywano, że zniszczenie próbek przez ściecie nastąpi przy sile nieprzekraczającej 600 kN i na takie obciążenie przygotowano prasę. Wyniki zaprezentowano w formie wykresów przedstawiających odczyty ze wszystkich 6 czujników (C1 do C6), co pozwala poprawnie interpretować dane.

5.6.2. Przebieg badań

5.6.2.1 Próbką Z1

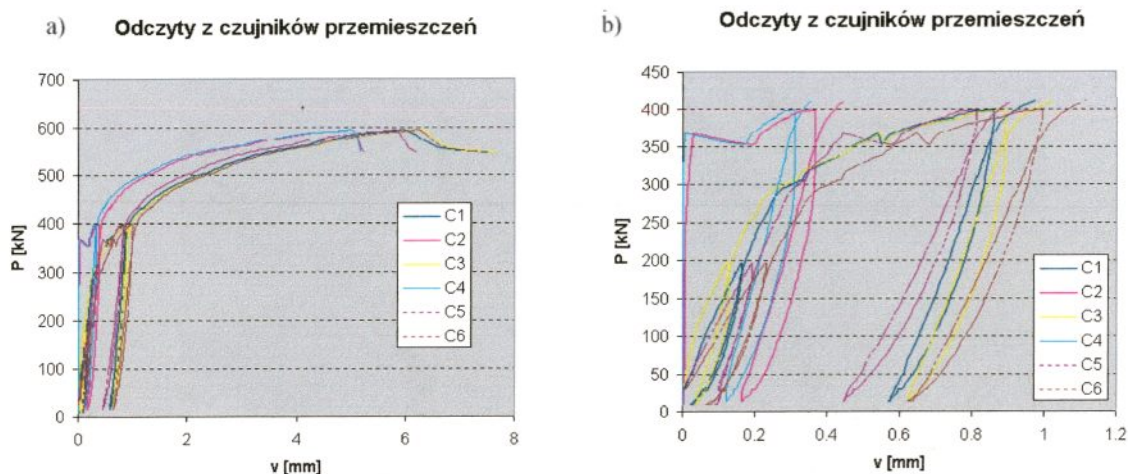
Próbkę obciążano monotonicznie, bez zmniejszania obciążenia i bez przystanków. Gdy osiągnięto wartość 608 kN, próbka była już w fazie intensywnego płynięcia i praktycznie nie występował już żaden znaczący przyrost siły. Ze względu na przyjętą wstępnie wartość maksymalną i wynikające z tego ograniczenie w prasie zmniejszono obciążenie do zera i obciążano próbkę od nowa. Podczas powtórnego obciążania maksymalna siła nie przekroczyła uzyskanej podczas pierwszej próby. Uległy ścięciu sworznie od strony czujników C3 i C4, po drugiej stronie sworznie zostały znacznie uplastycznione. Wartość maksymalna siły wyniosła 608 kN.



Rys. 5.10. Odczyty z czujników indukcyjnych dla: a) całego, b) początkowego zakresu obciążenia

5.6.2.2 Próbką Z2

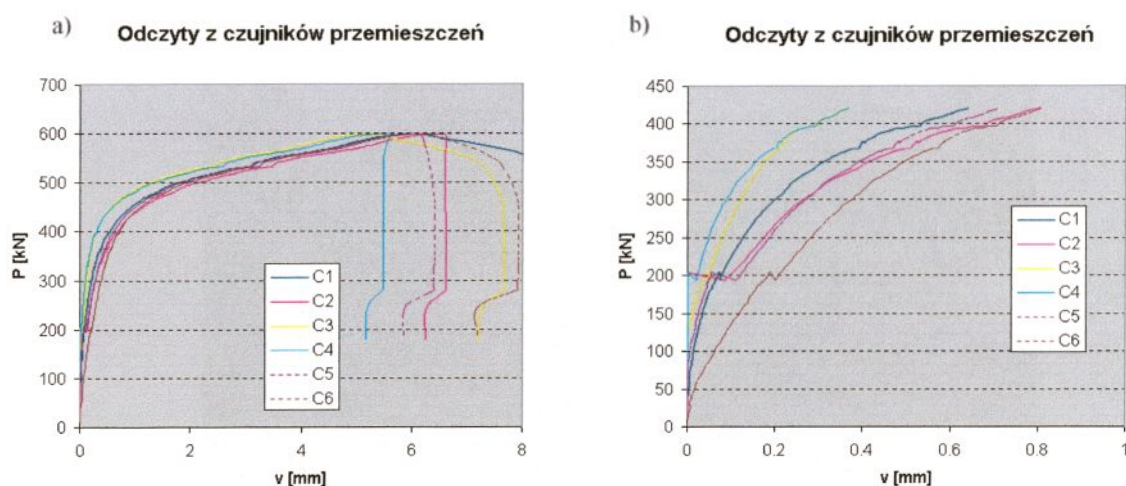
Próbkę obciążano do siły około 200 kN, następnie obciążenie zmniejszano aż do zera, a dalej do około 400 kN i ponownie obciążenie zmniejszano aż do zera i w kolejnym przyroście obciążenie zwiększano aż do zniszczenia. Pierwsze uległy ścięciu sworznie po jednej stronie, przeciwnej niż poprzednio. Wartość maksymalna siły wyniosła 592 kN.



Rys. 5.11. Odczyty z czujników indukcyjnych dla: a) całego, b) początkowego zakresu obciążenia

5.6.2.3 Próbką Z3

Próbkę obciążano monotonicznie aż do zniszczenia. Zniszczenie polegało na zerwaniu części łączników – nie zerwały się do końca wszystkie sworznie po jednej stronie. Wartość maksymalna siły wyniosła 599 kN.



Rys. 5.12. Odczyty z czujników indukcyjnych dla: a) całego, b) początkowego zakresu obciążenia



Rys. 5.13. Zniszczona próbka ścinana – łączniki uplastycznione (próbka Z1)



Rys. 5.14. Zniszczona próbka ścinana – łączniki ścięte (próbka Z1)



Rys. 5.15. Zniszczona próbka ścinana – rysy ukośne w płycie betonowej (próbka Z1)



Rys. 5.16. Zniszczona próbka ścinana – łączniki zerwane (próbka Z1)

5.6.3. Interpretacja wyników

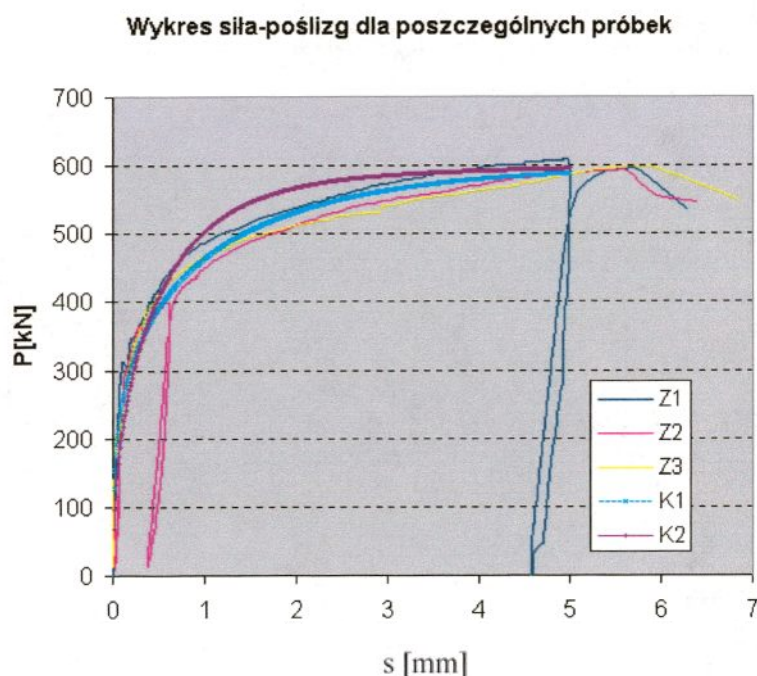
Do opisu charakterystyki siła – poślizg dla łącznika stosuje się najczęściej zaproponowaną przez Ollgarda [75] krzywą potęgową:

$$F = F_{\max} (1 - e^{-\beta \cdot s})^{\alpha}, \quad (54)$$

gdzie $F_{\max}$ oznacza nośność łącznika, s oznacza poślizg a parametry α oraz β można przyjmować z badań celem dopasowania krzywej. Dall'Asta [23] przyjmuje $\alpha = 0,558$, $\beta = 1,0 \text{ mm}^{-1}$, Gattesco [39, 40] przyjmuje $\alpha = 0,8$, $\beta = 0,7 \text{ mm}^{-1}$, proponując również [38] krzywą:

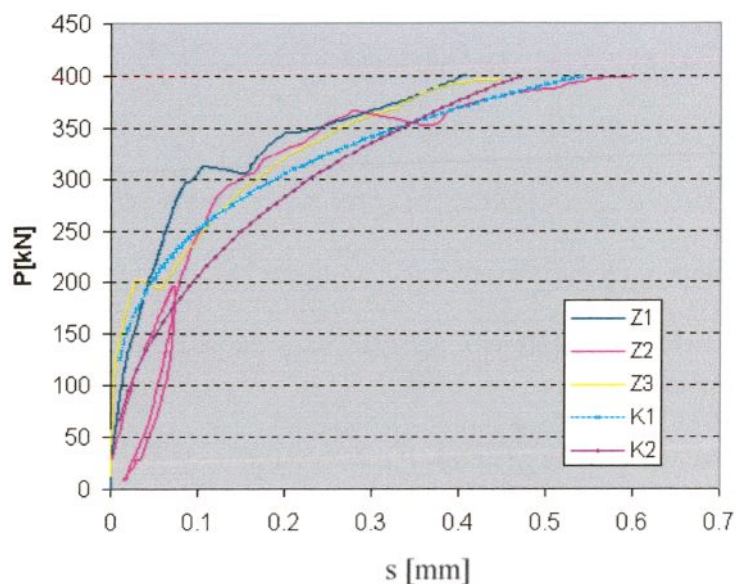
$$F = F_{\max} \left[\alpha \left(1 - e^{-\frac{\beta \cdot s}{\alpha}} \right)^{0,5} + \gamma \cdot s \right], \quad (55)$$

ze współczynnikami $\alpha = 0,97$, $\beta = 1,3 \text{ mm}^{-1}$ a $\gamma = 0,0045 \text{ mm}^{-1}$. Na wykresach przedstawiono wyniki badań próbek Z1, Z2 i Z3 wraz z krzywymi; proponowaną przez Ollgarda [75] ze współczynnikami $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,55 \text{ mm}^{-1}$ (krzywa K1) i proponowaną przez Gattesco [38] ze współczynnikami $\alpha = 0,97$, $\beta = 1,3 \text{ mm}^{-1}$ a $\gamma = 0,0045 \text{ mm}^{-1}$ (krzywa K2). Wyniki próbek przedstawiono jako uśrednione, tj. wartość poślizgu jest sumą odczytów z czujników C1 do C4 podzieloną przez cztery. Na rys. 5.17. i 5.18. przedstawiono wielkości dla pełnego zakresu obciążenia oraz dla 2/3 maksymalnej wartości obciążenia.



Rys. 5.17. Wykres P - s dla poszczególnych próbek i krzywe teoretyczne – cały zakres obciążenia

Wykres siła-poślizg dla poszczególnych próbek



Rys. 5.18. Wykres $P-s$ dla poszczególnych próbek i krzywe teoretyczne – początkowy zakres obciążenia.

Na podstawie przedstawionych danych można stwierdzić, że krzywa K1 lepiej przybliża zachowanie się badanych próbek. Ponieważ w połączeniu jest 8 sworzni, do obliczeń teoretycznych przyjęto zatem zależność dla jednego łącznika:

$$F = F_{\max} \left(1 - e^{-\beta \cdot s}\right)^{\alpha}, \quad (56)$$

gdzie:

$$\alpha = 0,3,$$

$$\beta = 0,55 \text{ mm}^{-1},$$

$$F_{\max} = 600/8 = 75 \text{ kN}.$$

6. PROJEKT, WYKONANIE I BADANIA MODELOWE BELEK

6.1. CHARAKTERYSTYKI MATERIAŁÓW ZASTOSOWANYCH W BELKACH

Przyjęto i zastosowano następujące materiały:

- stal konstrukcyjna: IPE360 St3S + bl.100x10 (St3S dla belki B2 oraz o parametrach jak 18G2 dla pozostałych belek),
- stal zbrojeniowa 18G2-b, pręty $\varnothing 8$ mm,
- stal sprężająca o wytrzymałości 1860 MPa, sploty 0,6”
- sworznie KB 13x75 mm, S235 J2G3+C450,
- beton B30.

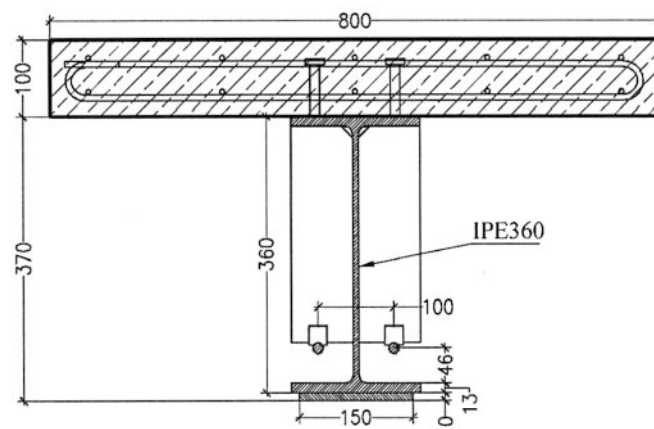
Parametry i szczegółowy opis zastosowanych materiałów przedstawiono w rozdziale nr 5.

6.2. PROJEKTY BELEK

W projektowaniu belek należało ustalić następujące zmienne decyzyjne:

- rozpiętość belek,
- przekrój poprzeczny,
- materiały zastosowane w belkach.

Rozpiętość i przekrój poprzeczny belek przyjęto mając na uwadze sprzęt dostępny w laboratorium oraz wyniki eksperymentów przeprowadzanych już przez innych badaczy [6, 51, 78, 94]. Przyjęto rozpiętość teoretyczną belek 5524 mm oraz przekrój poprzeczny jak na rys. 6.1.



Rys. 6.1. Przekrój poprzeczny w środku rozpiętości belki sprężonej cięgnem odgiętym

Przekrój składa się z dwuteownika IPE360 z nakładką 150×10 mm przyspawaną do pasa dolnego (oba elementy ze stali St3S) oraz płyty żelbetowej o wymiarach 800×100 mm. Przyjęte wymiary przekroju przy założonym schemacie obciążenia belki powodują, że podczas zniszczenia belek siła z pras będzie znajdowała się w przedziale 60% do 80% ich siły maksymalnej. W rzeczywistych konstrukcjach mostowych przęseł zespolonych z dźwigarów stalowych dwuteowych szerokość współpracująca jest zazwyczaj równa rozstawowi dźwigarów. Przyjęta grubość i szerokość płyty zapewnia możliwie mały wpływ efektu skali (w porównaniu do rzeczywistych wymiarów takich konstrukcji) oraz odpowiednie położenie osi bezwładności i włączenie do współpracy całej szerokości płyty. Zespolenie i sprężenie zaprojektowano dla tak przyjętego przekroju.

6.2.1. Nośność przekroju poprzecznego

Belkę zespoloną zaprojektowano zgodnie z EC4.2. [106], koncepcja zespolenia częściowego nie może być tu stosowana. Na tym etapie belkę projektowano jako zespoloną bez uwzględnienia sprężenia, gdyż istniejące normy nie podają szczegółowych wytycznych w tym zakresie. Pozycje [105] i [111] w ogóle tego problemu nie poruszają. EC4.2. [106] podaje, że teoria plastyczności zgodnie z p. 4.4.1.2 nie może być stosowana w przypadku sprężenia cięgnami bez przyczepności i że „w zasadzie konieczne jest uwzględnienie odkształceń całego elementu dla określenia sił w cięgnach stale pozbawionych przyczepności”. Zgodnie z p. 4.4.1.3 dopuszcza się jednak zastosowanie nieliniowej teorii dla przekrojów zespolonych dowolnej klasy (biorąc pod uwagę stosunek naprężenie – odkształcenie materiału), zarówno przy zastosowaniu, jak i braku sprężania cięgnami. W najnowszej wersji tej normy EC4.2. [110] podtrzymano wcześniejsze podejście podając, że dla wyznaczenia sił w cięgnach pozbawionych przyczepności należy uwzględniać odkształcenia całego elementu (konstrukcji), natomiast wstępne sprężenie w przypadku wyznaczania nośności giętnej przekroju na podstawie teorii nieliniowej, należy przyjmować na podstawie krzywych projektowych podanych w [103].

Dla przedmiotowej konstrukcji przewidywany mechanizm zniszczenia polega na uplastycznieniu stali w pasie dolnym belki, a dopiero po uplastycznieniu znacznej części przekroju stalowego i przy znacznych ugięciach belki następuje zmiążdżenie betonu płyty pod wpływem naprężeń ściskających.

Zgodnie z EC4.2.

Zgodnie z EC4.2. [106] p. 4.3.3.1 klasyfikację środnika przeprowadzono zgodnie z tab 4.2. EC4.1. [105]. Przekrój jest w klasie pierwszej.

Dla charakterystyk materiałowych:

$$\begin{aligned}f_y &= 235 \text{ MPa} , \\E_s &= 210 \text{ GPa} , \\ \gamma_a &= 1,1 , \\f_{ck} &= 30 \text{ MPa} , \\E_{cm} &= 32 \text{ GPa} , \\ \gamma_a &= 1,5\end{aligned}$$

i zadanej geometrii przekroju nośność przekroju na zginanie zgodnie z 4.4.1.2 EC4.2. wynosi:

$$M_{pl,Rd} = 452 \text{ kNm},$$

a oś obojętna w stanie plastyczności znajduje się w środku półki górnej dwuteownika. Stosunek $z_{pl}/h = 0,21$ i jest w przedziale od 0,15 do 0,30; nie ma więc potrzeby określania nieliniowej nośności przekroju na zginanie zgodnie z p. 4.4.1.3 EC4.2.

Zgodnie z EC4.1.

W przypadku gdy projektuje się zgodnie z EC4.1. [105] przy założeniu pełnego zespolenia, przyjęta procedura i wyznaczona nośność giętna jest taka sama jak wyznaczona zgodnie z EC4.2.

Zgodnie z PN-82/B-03300

Sprawdzono również nośność belki zgodnie z [111] przyjmując zgodne z tą normą charakterystyki materiałowe. Przyjęto $\delta = 1 \text{ mm}$. Wyznaczona obliczeniowa nośność przekroju zespolonego wynosi:

$$M_0 = 424 \text{ kNm}.$$

Nośność sprężysta

Celem kontroli i sprawdzenia wyężenia betonu i stali w fazie sprężystej obliczono nośność sprężystą przekroju przy założeniu modelu belki Bernoulego. Założono obliczeniowe charakterystyki materiałowe zgodnie z [111] a nośność przekroju zdefiniowano jako minimalny moment zginający, który powoduje powstanie w stali lub betonie naprężeń równych wytrzymałości obliczeniowej danego materiału. Wyznaczona w ten sposób wartość momentu zginającego wynosi:

$$M_{sp} = 383 \text{ kNm},$$

a o nośności decyduje stal (rozciąganie), dla naprężeń we włóknach dolnych dźwigara stalowego wyężenie włókien górnych betonu płyty (stosunek naprężeń występujących do wytrzymałości obliczeniowej przy ściskaniu) wynosi 0,982.

Stosunek nośności plastycznej przekroju na zginanie zgodnie z EC4.2. do nośności sprężystej przekroju wynosi:

$$\alpha_{pl} = M_{pl,Rd}/M_{sp} = 452/383 = 1,18.$$

Ponieważ zgodnie EC4.2 zespolenie projektuje się z uwzględnieniem skupionych sił poziomych przykładanych do elementu stalowego bądź betonowego, najpierw zaprojektowano sprężenie (zakładając pełne zespolenie) a w dalszej kolejności zespolenie.

6.2.2. Sprężenie zewnętrzne

Przyjęto sprężenie w systemie BBR CONA – Single z zastosowaniem splotów $\varnothing 0,6''$ o wytrzymałości charakterystycznej 1860 MPa. Pole przekroju poprzecznego splotu wynosi 150 mm^2 . Nośność charakterystyczna pojedynczego splotu wynosi $F_u = 279 \text{ kN}$ a nośność obliczeniowa $F_0 = 0,8F_u =$

223,2 kN. Sprężenie stanowią dwa sploty umieszczone ponad pasem dolnym belki, po jednym, symetrycznie po obu stronach środka, jak na rys 6.1. Rozpatruje się dwa przypadki sprężenia; trasa ciągu jest prosta lub ciągnie jest odgięte na dewiatorach i zakotwiczone w pobliżu osi bezwładności belki [64]. Belkę należało zaprojektować tak, aby mechanizm zniszczenia belki polegał na uplastycznieniu stali belki i zmięczeniu betonu a nie na zerwaniu ciągu.

Analizując wyniki badań, które przeprowadzili Klaiber [51] i Saadatmanesh [78], stwierdzono, że przyrost naprężeń w splotach, w chwili zniszczenia belek, wynosił odpowiednio 352 MPa w pierwszym i 342 MPa w drugim przypadku. Jest to związane z dużymi przemieszczeniami belek w fazie sprężysto – plastycznej. Zakładając na korzyść bezpieczeństwa nieco większe przemieszczenia belki w chwili zniszczenia (co potwierdziły badania) i przyrost naprężeń $\Delta\sigma = 380$ MPa otrzymano przyrost siły w ciągu

$$\Delta F = \Delta\sigma \times A = 380 \times 1,5 \times 10^{-4} = 0,057 \text{ MN} = 57 \text{ kN}$$

Wstępna siła sprężająca, przy której podczas badań nie przekroczono by nośności obliczeniowej ciągu, wynosiłaby zatem

$$S_0 = 0,8 F_u - \Delta F = 223,2 - 57 = 166,2 \text{ kN}.$$

Zgodnie z [115] i [116] docelowa siła sprężająca powinna wynosić

$$S_0 = \frac{F_u}{1,2 \cdot 1,5} = \frac{279}{1,8} = 155 \text{ kN}.$$

a siła podczas sprężania przy krótkotrwałym przeciążeniu ciągów

$$S_{0w} = 1,15 \times S_0 = 1,15 \times 155 = 178,3 \text{ kN}.$$

Realizacja sprężenia na tak krótkim odcinku nie jest sprawą prostą pod kątem uzyskania zamierzonej siły w ciągu z dużą dokładnością. Jest to związane ze stratami przy poślizgu ciągów w urządzeniu kotwiącym. Dla sprawdzenia naprężeń przy sprężaniu założono zatem siłę $S_0 = 150,0$ kN w jednym splocie co przy dwóch splotach daje w sumie siłę sprężającą dla belki wynoszącą 300 kN. Dla takiej siły naprężenia wyznaczone w środku rozpiętości belki, przy założeniu modelu Bernoulliego, wynoszą odpowiednio dla stali pasa dolnego i górnej powierzchni płyty betonowej:

$$\begin{aligned}\sigma_d &= -49,8 \text{ MPa}, \\ \sigma_g &= 0,54 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

Podczas krótkotrwałego przeciążenia ciągów dla siły sprężającej $S_{0w} = 178,3$ kN naprężenia wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned}\sigma_d &= -59,2 \text{ MPa}, \\ \sigma_g &= 0,64 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

Nie są zatem przekroczone wytrzymałości obliczeniowe zarówno stali jak i betonu przy rozciąganiu. Sprawdzono również możliwość utraty stateczności przy ściskaniu w pasie dolnym belki podczas sprężenia i stwierdzono, że taka utrata stateczności nie wystąpi.

6.2.3. Zespolecie

Założono równomierny rozkład sworzni ze względu na stałą wartość siły ścinającej pomiędzy siłownikiem a podporą. Następnie zagęszczono rozstaw sworzni w strefach zakotwienia kabli. Zespolecie zaprojektowano zgodnie z EC4.2. [106]. Sprawdzono również, zgodnie z pozostałymi normami. Norma EC4.2. [106] uwzględnia, jako jedyna z przytoczonych, wpływ skupionych sił poziomych działających równolegle do osi podłużnej elementu, przykładanych osobno do elementu stalowego bądź betonowego. Stosowano oznaczenia takie jak w normach, zatem nie komentowano poszczególnych składników.

Przyjęto sworznie KB 13x75 mm, S235 J2G3+C450. Zgodnie z [104, 107] dla przyjętych sworzni $f_u = 360$ MPa. Wytrzymałość sworznia na ścinanie odpowiednio ze względu na stal sworznia oraz beton płyty wynosi odpowiednio:

$$P_{Rd1} = 0,8 \cdot f_u \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{1}{\gamma_v} = 0,8 \cdot 360 \cdot 10^3 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,0127^2}{4} \cdot \frac{1}{1,25} = 29,9 \text{ kN},$$

$$P_{Rd2} = 0,29 \cdot \alpha \cdot d^2 \cdot \sqrt{f_{ck} E_{cm}} \cdot \frac{1}{\gamma_v} = 0,29 \cdot 1 \cdot 0,0127^2 \cdot \sqrt{30 \cdot 10^3 \cdot 32 \cdot 10^6} / 1,25 = 36,67 \text{ kN}.$$

Do obliczeń dalszych przyjęto wartość mniejszą

$$P_{Rd} = 29,9 \text{ kN}.$$

6.2.3.1 Ścinanie od sił pionowych

Projektowana maksymalna siła ścinająca (reakcja):

$$P_{max} = M_{pl,Rd} / (0,5(L-r)) = 452 / (0,5(5,524 - 1,0)) = 200 \text{ kN}.$$

Wartości sprowadzone dla stalowego przekroju zastępczego:

$$I_x = 55724 \text{ cm}^4 \text{ (moment bezwładności przekroju),}$$

$$S_x = 80 \times 10 \times (15,8 - 0,5 \times 10) \times 32 / 210 = 1316 \text{ cm}^3 \text{ (moment statyczny odciętej części przekroju).}$$

Ścinanie podłużne na jednostkę długości w zespolecie wynosi:

$$v_{Sd} = V \times S_x / I_x = 200 \times (1316 \times 10^{-6}) / (55724 \times 10^{-8}) = 472 \text{ kN/m}.$$

Maksymalny rozstaw, przy założeniu dwóch rzędów łączników, wynosi:

$$r_s = 2 \times P_{Rd} / v_{Sd} = 2 \times 29,9 / 472 = 0,127 \text{ m}.$$

Sprawdzono zespolecie zgodnie z EC4.1. [105]. Nośność łącznika jest taka sama jak wyznaczono zgodnie z EC4.2. [106]. Inne jest podejście w stosunku do wyznaczenia siły ścinającej łączniki. Jest

ona tu odnoszona do nośności przekroju płyty betonowej oraz belki stalowej, a nie wyznaczana zgodnie z teorią sprężystości.

$$F_{cf1} = \frac{A_a \cdot f_y}{\gamma_a} = \frac{87,7 \cdot 10^{-4} \cdot 235 \cdot 10^3}{1,1} = 1874 \text{ kN},$$

$$F_{cf2} = \frac{0,85 \cdot A_c \cdot f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{0,85 \cdot 0,08 \cdot 30 \cdot 10^3}{1,5} = 1360 \text{ kN},$$

$$V_L = \min(F_{cf1}, F_{cf2}) = 1360 \text{ kN}.$$

Maksymalny rozstaw przy założeniu dwóch rzędów łączników wynosi:

$$r_s = 2 \times P_{Rd} / (V_L / (0,5(L-r))) = 2 \times 29,9 / (1360 / 2,262) = 0,099 \text{ m}.$$

Sprawdzono również nośność zgodnie z [111]. Nośność obliczeniowa łącznika, zgodnie z tą normą, jest mniejsza niż wyznaczona zgodnie z poprzednimi normami, a siła przenoszona przez sworznie jest odnoszona nie do ścinania podłużnego, zgodnie z teorią sprężystości, lecz do siły w płycie betonowej w stanie granicznym nośności.

Nośność obliczeniowa łącznika:

$$T_{col} = 0,8 \cdot R_s \cdot F_c = 0,8 \cdot 215 \cdot 10^3 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,0127^2}{4} = 21,8 \text{ kN},$$

$$T_{co2} = \frac{\beta \cdot d^2 \cdot \sqrt{f_{ck} E_{cm}}}{\gamma_{con}} = 0,36 \cdot 0,0127^2 \cdot \sqrt{22,2 \cdot 10^3 \cdot 32,4 \cdot 10^6} / 1,3 = 37,7 \text{ kN},$$

$$T_{co} = \min(T_{col}, T_{co2}) = 21,8 \text{ kN}.$$

Maksymalny rozstaw łączników wynosi, zgodnie z normą, $r_s = 0,072 \text{ m}$.

Ostatecznie przyjęto rozstaw łączników wynoszący $r_s = 0,10 \text{ m}$.

6.2.3.2 Ścinanie od sprężenia

Obliczono, że przy sile z jednego siłownika (równej jednocześnie reakcji podporowej) wynoszącej 200 kN i założonym wstępnie sprężeniu, wartość siły sprężającej w jednym splocie wyniesie około 60% jego wytrzymałości charakterystycznej. Przyjęto również, że belka na takim etapie obciążenia znajduje się w obszarze sprężystym. Założenia takie zostały później potwierdzone wynikami badań. Obliczenia zespolenia przeprowadzono dla cięgna odgiętego na dewiatorach, jako dla przypadku mniej korzystnego.

Pozioma siła skupiona przykładana do elementu stalowego:

$$F_d = 2 \times 0,60 \times F_u = 2 \times 167,4 = 334,8 \text{ kN}.$$

$$A_a = 84,9 \times 10^{-4} \text{ m}^2,$$

$$\begin{aligned}A_{rc} &= 0,0828 \times 32 / 210 = 0,0126 \text{ m}^2, \\A &= A_a + A_{rc} = 84,9 \times 10^{-4} + 0,0126 = 0,0211 \text{ m}^2, \\V_L &= F_d \times A_{rc} / A = 334,8 \times 0,0126 / 0,0211 = 200 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Odległość środka ciężkości przekroju zespolonego (położenie osi obojętnej w stanie sprężystym) wynosi 0,158 m od górnej krawędzi płyty betonowej. Siła jest rozłożona wzdłuż styku:

$$\begin{aligned}e_v &= 0,158 - 0,10 = 0,058 \text{ m}, \\b_{eff} &= 0,80 \text{ m},\end{aligned}$$

$$v_{d,max} = 2 \times V_L / (e_v + b_{eff}) = 2 \times 200 / (0,058 + 0,80) = 466 \text{ kN/m},$$

$$L_v / 2 = 0,5 \times (e_v + b_{eff}) = 0,429 \text{ m}.$$

Należy zaprojektować połączenie na dodatkowe ścinanie $v_{d,max} = 466 \text{ kN/m}$ przyłożone na odcinku $L_v / 2 = 0,429 \text{ m}$ przy końcach belki. Minimalna liczba dodatkowych łączników na takim odcinku musi być większa niż:

$$n_{pot} = V_L / P_{Rd} = 200 / 29,9 = 6,68.$$

Założono na odcinku 0,45 m przy końcach belki zmniejszenie rozstawu łączników do 0,08 m i dołożenie jednego rzędu łączników. Otrzymuje się zatem liczbę łączników do przeniesienia dodatkowej siły ścinającej:

$$n_{ist} = 6 + (0,45 / 0,08 - 0,45 / 0,10) = 7,12$$

Warunek nośności jest spełniony ponieważ $n_{pot} = 6,68 < n_{ist} = 7,12$.

6.2.4. Zbrojenie płyty

Stosowano pręty $\varnothing 8 \text{ mm}$ ze stali 18G2-b. Na kierunku podłużnym przyjęto w sumie 10 prętów, symetrycznie rozmieszczonych, po 5 sztuk górą i dołem płyty. Na kierunku poprzecznym przyjęto pręty w postaci zamkniętych strzemion w rozstawie równym rozstawowi sworzni tj. 0,10 m. W strefie przy podporach zagęszczono rozstaw zbrojenia dostosowując go do rozstawu łączników. Zbrojenie to spełnia warunki nośności zgodnie ze wszystkimi cytowanymi normami. Nie przytaczano szczegółowych procedur wymiarowania zbrojenia; celem porównania wartości odniesiono się do wytyżenia. Wytyżenie zbrojenia poprzecznego, ze względu na ścinanie w strefie przy zespoleniu, wynosi 0,69 zgodnie z EC4.2. [106] oraz 0,90 zgodnie z normą [111].

6.2.5. Elementy konstrukcji stalowej

W belce występują dodatkowe stalowe elementy konstrukcyjne:

- zebrza pionowe w punktach przyłożenia sił skupionych,
- dewiatory w miejscach załamania trasy ciągu,
- płyty czołowe (podporowe) na końcach belki,

- płyty oporowe w miejscach zakotwienia splotów,
- żebra poziome i ukośne w miejscach zakotwienia splotów.

Nie przedstawiano szczegółowych procedur wymiarowania tych elementów oraz połączeń spawanych, były one wymiarowane zgodnie z zaleceniami norm [104, 108, 113, 114]. Szczegóły konstrukcyjne i wymiary pokazano na rysunkach konstrukcyjnych przekazanych wykonawcy modeli. Całkowita długość kształtownika walcowanego IPE360 w świetle blach czołowych wynosi 5500 mm, grubość blach czołowych wynosi 24 mm zatem rozpiętość teoretyczna belki mierzona w środku blach czołowych wynosi 5524 mm. Nakładka przyspawana do pasa dolnego o przekroju 150×10 mm ma długość 4500 mm. Belka jest symetryczna, rozstaw żeber pod siłami skupionymi wynosi 1000 mm, odległość osiowa dewiatorów od żeber wynosi 650 mm.

6.3. WYKONANIE MODELI

Modele wykonywane były w Bytomiu przez firmę BOLCSPAW specjalizującą się w wykonywaniu konstrukcji zespolonych, a następnie w całości przetransportowane do hali Instytutu Budownictwa Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej gdzie znajduje się akredytowane laboratorium badawcze. Wykonano 6 belek zespolonych. Modele wykonano w miesiącach czerwcu i lipcu 2003 roku. Jako pierwsze wykonano konstrukcje stalowe belek, na których następnie wykonano sworznie zespolenia. Równolegle wykonywano konstrukcje stalowe prób ścinanych. Następnie wykonano zbrojenie płyt. W ostatniej kolejności wykonano płyty betonowe belek. Belki betonowane były w dwóch turach, najpierw 3 sztuki i po rozdeskowaniu i złożeniu form na nowo kolejne 3 sztuki belek. Próby ścinane wykonywano równolegle z belkami, przy betonowaniu wykonano także próbki betonowe celem wyznaczenia charakterystyk zastosowanego betonu (w sumie 6 próbek, po trzy na jedno betonowanie). Próbkę te wykonano zgodnie z postanowieniami norm [118, 119].



Rys. 6.2. Belki stalowe ze sworzniami przed wykonaniem płyty betonowej



Rys. 6.3. Sworznie zespolenia i zbrojenie belki

Po wykonaniu badań na belkach i wycięciu próbek stali okazało się, że granica plastyczności stali nakładki belki niesprężonej odpowiada wartości jak dla stali z gatunku St3 natomiast dla pozostałych belek (badanych jako sprężone) dla stali z gatunku 18G2.

6.4. PRZEBIEG BADAŃ

Badania przeprowadzono w Akredytowanym Laboratorium Badawczym Instytutu Budownictwa Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej. Pięć belek przewidziano do badań jako sprężone, a jedną belkę jako niesprężoną (zwykła belka zespolona). Wykonano badania niszczące, mierzono przemieszczenia pionowe i poziome, przemieszczenie poziome płyty betonowej względem belki stalowej (w niniejszym opracowaniu przyjęto określenie poślizg w zespoleniu), odkształcenia w stali i betonie oraz siły w splotach sprężających. Wszystkie belki miały taki sam przekrój poprzeczny, rozpiętość teoretyczną 5,524 m i były swobodnie podparte. Schemat obciążenia był taki sam dla wszystkich belek, różnica polegała na zmiennej trasie ciągu (ciągną proste i odgięte). Belki oznaczono numerami od 1 do 6 zgodnie z kolejnością badania (pierwszego ustawienia na stanowisku). Rozpiętość belki wynosiła $L = 5,524$ m, a rozstaw pomiędzy punktami przyłożenia sił wynosił $r = 1,0$ m (symetryczne obciążenie dwoma siłami skupionymi). Układ konstrukcyjny i schemat obciążenia jest symetryczny. Przebadano 6 belek w następującej konfiguracji:

- Belka B1:
Belka sprężana ciągnem odgiętym (betonowanie nr 2).
- Belka B2:
Belka niesprężana (betonowanie nr 1).
- Belka B3:
Belka sprężana ciągnem odgiętym (betonowanie nr 1).

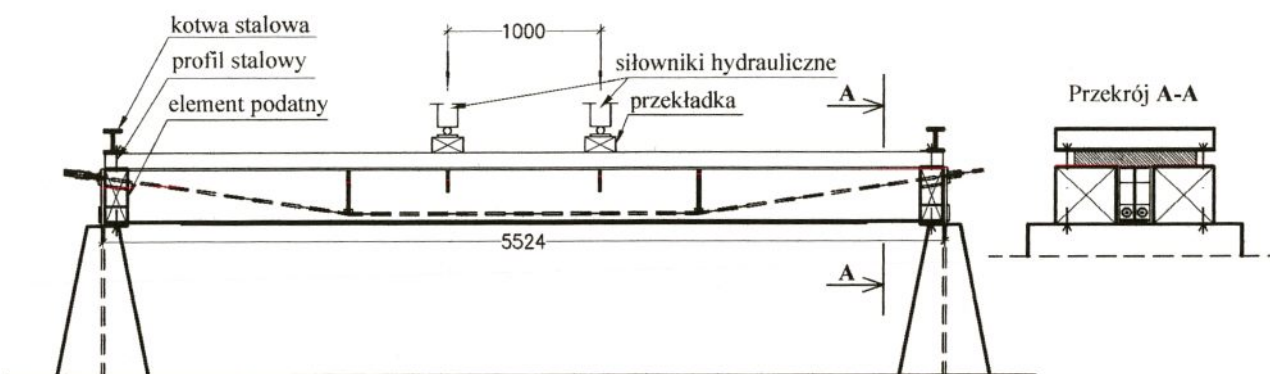
- Belka B4:
Belka sprężana ciągnem prostym (betonowanie nr 2).
- Belka B5:
Belka sprężana ciągnem odgiętym (betonowanie nr 2).
- Belka B6:
Belka sprężana ciągnem prostym (betonowanie nr 1).

Powyższy układ pozwala określić ewentualny wpływ czynników związanych z dwoma cyklami betonowania na uzyskane wyniki. Podczas badań wykorzystywano dla każdej belki zasadniczo ten sam zestaw czujników, jednak pojedyncze czujniki (dotyczy to tensometrów na splotach, siłomierzy na splotach i jednego z czujników podporowych) występowały na niektórych belkach w komplecie, podczas gdy na innych nie. Było to związane z tym, że podczas badań wykorzystywano praktycznie cały sprzęt elektroniczny dostępny w laboratorium i potrzebny do badań. Wykonywano po kolei badania każdej belki, zgodnie z numeracją od B1 do B6, aż do zniszczenia danej belki. Przebieg badań każdej belki wyglądał podobnie, aczkolwiek występowały pewne różnice, które opisano dalej dla poszczególnych belek. Po ustawieniu belki na stanowisku wykonywano obciążenie statyczne bez sprężenia belki w zakresie sprężystym, sprężano belkę i na koniec sprężoną już belkę obciążano do zadanej wielkości obciążenia, a następnie do zniszczenia. Przebieg badań każdej belki opisano oddzielnie.

6.4.1. Stanowisko badawcze

Stanowisko badawcze zaprojektowano tak, aby zrealizować swobodne podparcie. Podpory belki stanowiły dwa kozły stalowe a siły pionowe, przykładane do belki, wymuszane były przez siłowniki hydrauliczne systemu INSTRON, zamocowane do ramy stalowej. Samą ramę stalową ustawiono z dostosowaniem do geometrii belki. Należało przewidzieć możliwość wystąpienia sił znacznie większych od projektowej nośności belki. Siłowniki były w stanie wymusić maksymalną siłę o wartości 500 kN każdy. Projektowa nośność belki niesprężonej (przeliczając na siłę w jednym siłowniku) wynosiła 200 kN. Oprócz zaprojektowania belek wykonano równoległe symulację komputerową za pomocą programu opracowanego w tym celu przez autora. Założono wstępną siłę sprężającą w splocie o wartości 150 kN. Dla belki sprężonej (przy założeniu spodziewanych wytrzymałości materiałów, tj. betonu na ściskanie 30 MPa i granicy plastyczności stali wynoszącej 250 MPa) otrzymano zniszczenie belki przy sile wynoszącej 305 kN, w każdym z siłowników. Siła w każdym splocie wzrosła do 200 kN. Na podstawie otrzymanych wyników i przy założeniu możliwych jeszcze większych wytrzymałości materiałów, zwłaszcza betonu, spodziewano się uzyskać siły w siłownikach nawet do 400 kN oraz siły w splotach, w chwili zniszczenia, bliskie wytrzymałości obliczeniowej splotów.

Belki opierane były blachami czołowymi bezpośrednio nad środkiem kozła, schemat statyczny za każdym razem był taki sam: belka swobodnie podparta o rozpiętości 5524 mm obciążona symetrycznie dwiema siłami, w rozstawie 1000 mm. Podparcie widelkowe na podporach zrealizowano za pomocą poprzeczki z dwóch zespalanych ze sobą ceowników, kotew oraz przekładek podatnych. Sprzęt do wymuszenia siły i wykonywania odczytów stanowił system INSTRON, dwa oddzielne komputery oraz pozostały sprzęt elektroniczny opisany w dalszej części.

**Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych
sprężanych kablami zewnętrznymi**

Rys. 6.4. Schemat stanowiska badawczego



Rys. 6.5. Stanowisko badawcze



Rys. 6.6. Widelkowe podparcie belki



Rys. 6.7. Widok ogólny belki

6.4.2. Urządzenia pomiarowe i czujniki

Podczas badań mierzono zasadniczo przemieszczenia za pomocą czujników indukcyjnych i odkształcenia za pomocą tensometrów elektrooporowych mierzących duże odkształcenia. Czujniki indukcyjne wykorzystano do pomiaru przemieszczeń pionowych i poziomych belek oraz do pomiaru poślizgu w zespoleniu (na styku stal-beton). Tensometry wykorzystano do pomiaru odkształceń belki stalowej, płyty betonowej oraz splotów. Ponadto wykonano urządzenia służące do pomiaru sił w splotach. Urządzenie składa się z tulei stalowej z otworem dla przepuszczenia splotu i układu 6 odpowiednio podłączonych tensometrów, (4 sztuki równoległe do kierunku działania sił i 2 naklejone na obwodzie). Siłomierz umieszczany był pomiędzy bocznią kotwiącą a blachą oporową, zarówno w zakotwieniu biernym, jak i czynnym. Pozwalało to mierzyć siłę podczas sprężania, po

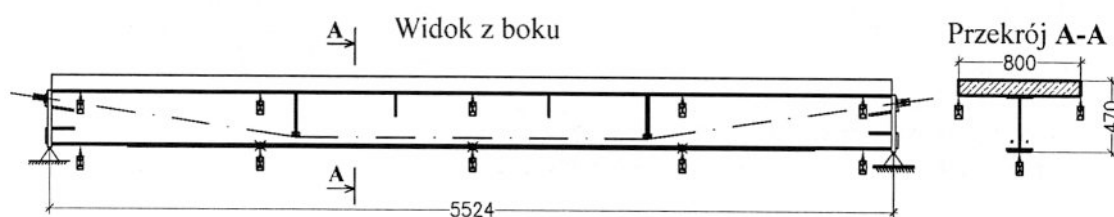
sprężeniu, straty itd. Podczas badań gdy wykorzystywano pełen zestaw czujników, jednocześnie wykonywane były odczyty z 89 tensometrów i 23 czujników indukcyjnych. Wykorzystano wzmacniacze tensometryczne w postaci jednego urządzenia typu UPM 100 oraz trzech typu SPIDER 8.

Rozmieszczenie czujników

Do pomiaru przemieszczeń pionowych belki wykorzystano układ 21 czujników indukcyjnych. Czujniki umieszczone były w pięciu przekrojach belki ($0, 0,25L, 0,5L, 0,75L, L$), po trzy w każdym (po jednym pod płytą na krawędziach i jeden pod belką stalową). Czujniki nominalnie umieszczone w przekroju 0 oraz L , w rzeczywistości były odsunięte o 200 mm od końca belki. Do kontroli przemieszczeń poziomych belki zastosowano 2 czujniki zegarowe (jeden w poziomie pasa dolnego belki stalowej i jeden w poziomie płyty betonowej). Czujniki te umożliwiały śledzenie na bieżąco zachowania się belki, zwłaszcza przydatne były tuż przed zniszczeniem belki, kiedy zaczynała ona doznawać nagłego wzrostu przemieszczeń poziomych. Informacja ta pozwalała uważnie śledzić moment zniszczenia belki. Numerację przyjęto od C8 do C21, jest to związane z numeracją kanałów. Układ i numerację czujników pokazano na rys. 6.8. i 6.9.

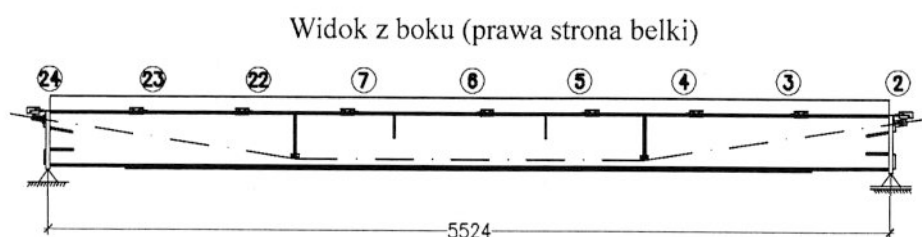


Rys. 6.8. Układ i numeracja czujników indukcyjnych przemieszczeń pionowych



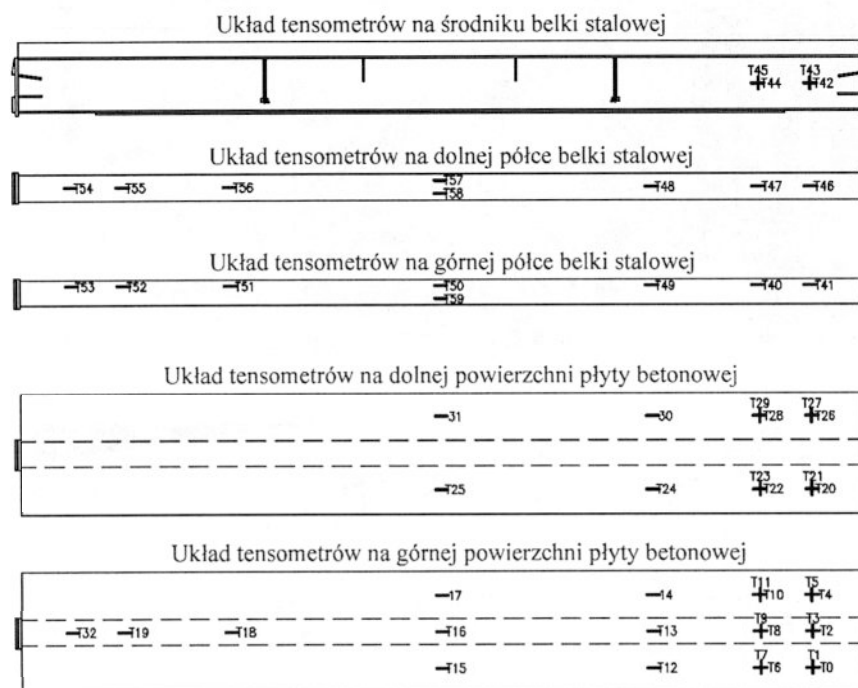
Rys. 6.9 Rozmieszczenie czujników przemieszczeń w płaszczyźnie pionowej

Do pomiaru poślizgu (wzajemne przemieszczenie poziome na styku stali i betonu) w zespoleniu wykorzystano 9 czujników indukcyjnych rozmieszczonych w równych odległościach wzdłuż styku. Układ i numerację czujników pokazano na rys 6.10.



Rys. 6.10. Układ i numeracja czujników indukcyjnych poślizgu

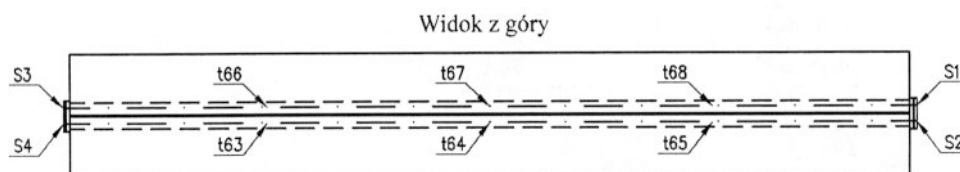
Na belce stalowej i płycie betonowej umieszczono na różnych kierunkach łącznie 53 tensometry elektrooporowe, w tym 33 tensometry na płycie betonowej (nr od 0 do 32) i 20 tensometrów na belce stalowej (nr od 40 do 59). Układ tensometrów i przedstawiono na rys 6.11.



Rys. 6.11. Układ i numeracja tensometrów na belce stalowej i płycie betonowej

Do pomiaru odkształceń i sił w splotach wykorzystano tensometry naklejane bezpośrednio na splot oraz opisane już wcześniej siłomierze tensometryczne. Siłomierze zostały wcześniej wykalibrowane w prasie, a w programie odczytującym wprowadzono procedurę przeliczającą wartości z układu tensometrów na siłę [kN]. Umożliwiało to śledzenie na bieżąco siły w splotach podczas badań oraz uprościło obróbkę pliku wyjściowego. Tensometry na splotach umieszczano pomiędzy punktami kontaktu splotu z belką. W przypadku splotów prostych tensometry skrajne nie występują.

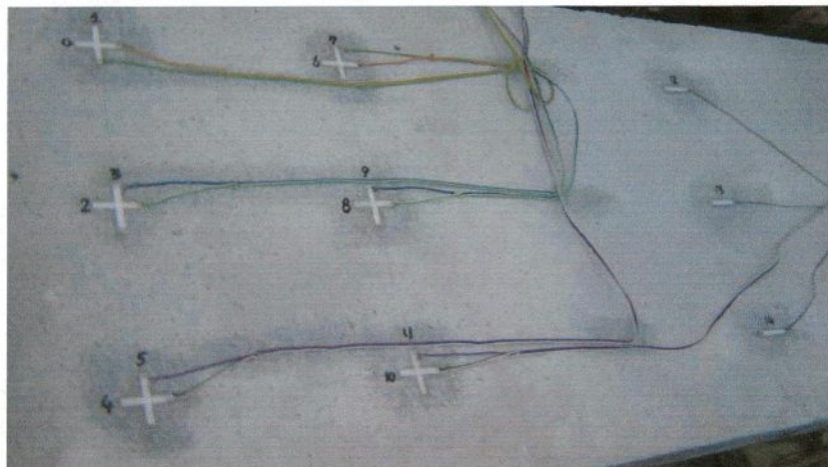
Układ tensometrów i siłomierzy wraz z numeracją przedstawiono na rys 6.12.



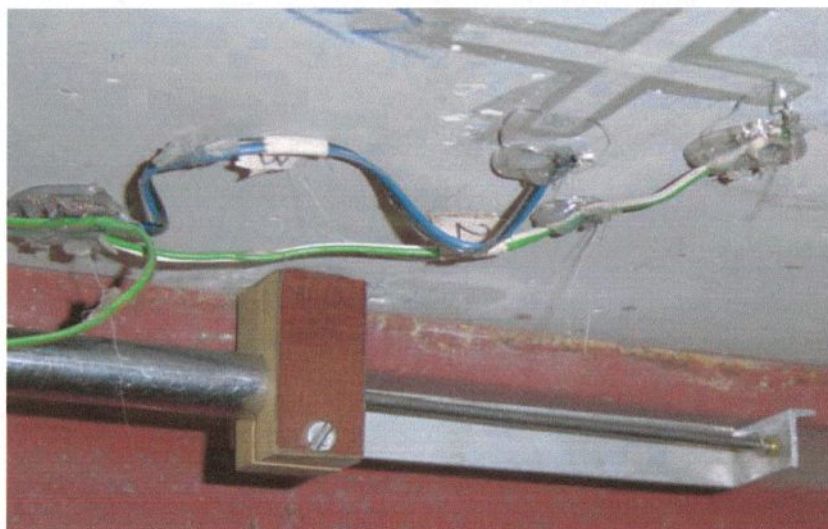
Rys. 6.12. Układ tensometrów i siłomierzy



Rys. 6.13. Widok ogólny belki z boku



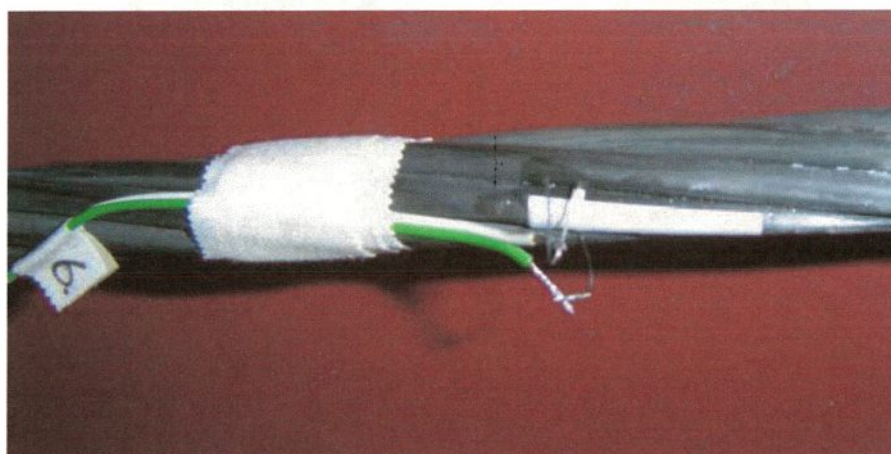
Rys. 6.14. Tensometry na płycie betonowej



Rys. 6.15. Czujnik poślizgu i tensometry na spodzie płyty betonowej



Rys. 6.16. Czujniki na pasie dolnym belki stalowej (tensometry, czujnik indukcyjny i zegarowy)



Rys. 6.17. Tensometr na splocie.



Rys. 6.18. Siłomierze tensometryczne i czujnik poślizgu na końcu belki

6.4.3. Realizacja sprężenia

Wstępnie rozważano możliwość wprowadzania sił do splotów za pośrednictwem systemu nakrętek, zaprojektowano już nawet odpowiednie urządzenie wykorzystujące pręty gwintowane typu MACALLOY o średnicy 32 mm ze stali o wytrzymałości 1032 MPa. Teoretycznie zgodnie z danymi projektowymi możliwe było uzyskanie wymaganej siły sprężającej w splocie przy momencie dokręcającym nakrętkę równym 1,2 kNm. Praktyka dotycząca wprowadzania tak dużych sił przy pomocy nakrętek nie potwierdza założeń teoretycznych [128] – w rzeczywistości ciężko jest uzyskać tak duże siły. Innym czynnikiem przemawiającym na niekorzyść takiego rozwiązania jest podatność takiego urządzenia, mogłaby ona mieć duży wpływ na wyniki badań, zwłaszcza dynamicznych.



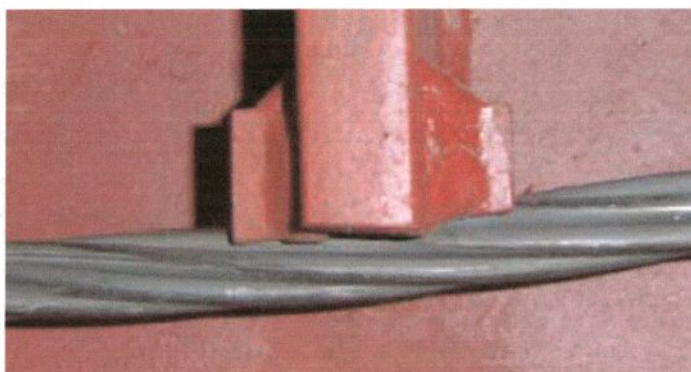
Rys. 6.19. Sprężanie belki

Po przeanalizowaniu powyższego, zdecydowano się na sprężenie w pełni profesjonalne, tj. wykonane przez wykwalifikowany personel i z zastosowaniem specjalistycznego sprzętu. Nawiązano współpracę z zespołem firmy BBR Polska, zajmującej się profesjonalnie sprężaniem konstrukcji. Do sprężenia wykorzystano system BBR CONA-Single®. Sprężenie stanowią dwa sploty o nominalnej średnicy $\varnothing 0,6''$, każdy splot składa się z 7 drutów. Wytrzymałości charakterystyczna stali splotu wynosi 1860 MPa. Pole przekroju poprzecznego splotu wynosi 150 mm^2 , nośność charakterystyczna pojedynczego splotu wynosi $F_u = 279 \text{ kN}$ a nośność obliczeniowa $F_d = 223,2 \text{ kN}$. Zakotwienie zarówno czynne, jak i bierne stanowią głowice kotwiące BBR CC 106 wraz ze szczękami trójdzielnymi. Pomiedzy głowice kotwiące a blachę oporową umieszczono siłomierz tensometryczny umożliwiający pomiar siły w splocie.



Rys. 6.20. Zakotwienie

Rozważano dwa kształty trasy cięgna: cięgno proste i odgięte na dewiatorach, jako że takie rozwiązania są stosowane w praktyce. W przypadku cięgna prostego, spłot nie kontaktuje się z belką w innych miejscach poza zakotwieniem, tzn. nie ma pośrednich punktów kontaktu a cięgno kotwione jest w pobliżu pasa dolnego belki. W przypadku cięgna odgiętego zagięcie cięgna następuje na zaprojektowanych w tym celu dewiatorach. W miejscu kontaktu z cięgnem dewiator wyposażony jest w element stalowy odpowiednio wyprofilowany, tak aby spełnić warunek minimalnego promienia zagięcia spłotu (por. rys. 6.21.).



Rys. 6.21. Dewiator w miejscu kontaktu ze spłotem

Zestaw do sprężania składał się z prasy typu MONOJACK i pompy z manometrem o zakresie do 60 MPa. Podczas naciągania spłotów kontrolowano naciąg na dwa niezależne sposoby tj. poprzez kontrolę ciśnienia w pompie, które przeliczano na siłę w splocie za pomocą odpowiedniej funkcji liniowej oraz poprzez kontrolę odczytów z siłomierzy tensometrycznych. Sprężanie odbywało się etapowo, najpierw naciągano jeden spłot do określonej siły, następnie naciągano drugi spłot. Podjęto taki tok postępowania, aby uniknąć nadmiernego przeciążenia belki na skutek zginania w płaszczyźnie poziomej. W zależności od belki, cięgno było naciągane do docelowej siły w trzech lub nawet pięciu etapach. Straty siły sprężającej na skutek poślizgu spłotów w szczękach wynosiły około 20 do 40 kN, maksymalna siła podczas krótkotrwałego przeciągania spłotów wynosiła około 180 kN, co jest wartością zbliżoną do wyznaczonej z obliczeń 178,3 kN przy krótkotrwałym przeciążeniu spłotów. Docelowa siła sprężająca w poszczególnych belkach wynosiła od 140 kN do 150 kN. Siły sprężające zostały tak dobrane, aby przy sprężaniu nie następowało zarysowanie górnej powierzchni płyty betonowej (występują tam wówczas naprężenia rozciągające).



Rys. 6.22. Prasa

Podczas sprężania należało uważać, aby nie przekroczyć zadanej wartości siły, gdyż nie ma możliwości zmniejszenia wprowadzonej już siły sprężającej. Z drugiej strony, nie można było przykładać sprężenia w zbyt wielu krokach, ponieważ ze względu na małą długość cięgna, i co za tym idzie małe jego wydłużenia, następowało wielokrotne zaciskanie szczęk na jednym odcinku splotu, co po paru takich operacjach powoduje, że splot zaczyna się ślizgać w szczękach. Jeżeli do tego dołoży się stosunkowo dużą (pośrednio z tym związaną) wartość strat od poślizgu w zakotwieniu, to uzyskanie zamierzonej siły sprężającej, podobnej w obu splotach, dla 5 belek, z dokładnością do kilku kN, jest sprawą trudną. Jeżeli założymy tak jak w przypadku rzeczywistych realizacji, gdzie długość splotu jest nieporównywalnie większa, że dokładność wprowadzenia siły wynosi 5%, to należy stwierdzić, że sprężenie wszystkich belek zostało przeprowadzone właściwie.



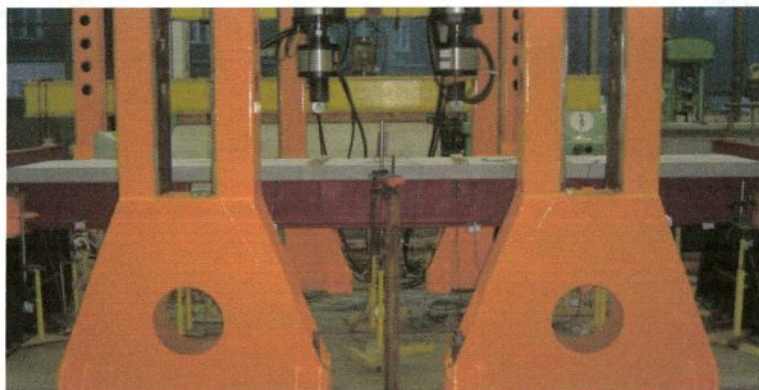
Rys. 6.23. Prasa na splocie podczas sprężania

6.4.4. Obciążenie próbne belki B1

Belka B1 została ustawiona na stanowisku badawczym i przebadana w zakresie sprężystym bez sprężenia, a następnie odstawiona do późniejszego sprężenia i kolejnych badań. Było to obciążenie próbne. Postąpiono tak, aby zweryfikować poprawność przyjętych wstępnie założeń projektowych, sprawdzić czy działa cała aparatura pomiarowa oraz, po analizie otrzymanych wyników, stwierdzić czy nie występują podczas badań jakieś inne zjawiska, których wcześniej nie przewidywano. Ponieważ założono małe obciążenia, na tym etapie zrezygnowano z pomiaru poślizgu (założono, że nie występuje, co potwierdziły późniejsze badania). Dodatkowe czujniki, normalnie służące do pomiaru poślizgu, zastosowano tutaj do pomiaru przemieszczeń poziomych płyty betonowej i pasa dolnego belki. Umożliwiało to sprawdzenie, czy belka nie ulega np. skręcaniu.

Belkę obciążono 5 razy do wartości 20 kN w każdym siłowniku. Po przeanalizowaniu wyników stwierdzono poprawność podłączenia sprzętu, wszystkie czujniki poza jednym (uszkodzony kanał) działały. Sztywność belki odpowiadała projektowanej.

Następnie obciążano belkę do 50 kN w siłowniku, utrzymano to obciążenie przez 1 minutę i odciążano do zera, poczekano jedną minutę i powtórzono cykl ale z obciążeniem o wartości 100 kN. Po zdjęciu obciążenia wykonano odczyt po 5 i 10 minutach. Stan zerowy odpowiadał obciążeniu 0,37 kN w punktach przyłożenia siły (przekładki i klocki stalowe). Następnie belkę zdjęto ze stanowiska i przeznaczono do późniejszych badań ze sprężeniem.



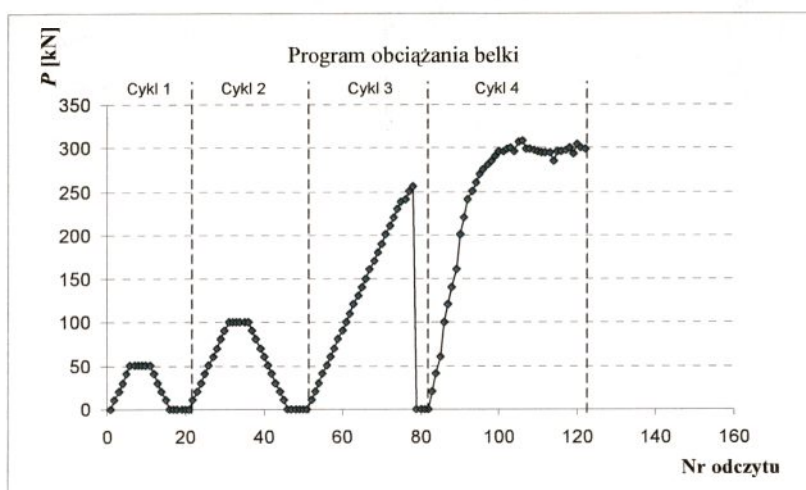
Rys. 6.24. Belka B1 na stanowisku

6.4.5. Przebieg badań belki B2

Belkę tę badano jako niesprężoną, aby następnie można było określić wzrost nośności na skutek sprężenia. Belkę ustawiono na stanowisku, wykonano badania dynamiczne a następnie wykonano badania statyczne. Program obciążenia był następujący; najpierw obciążano belkę do wartości 50 kN, odciążono, następnie do wartości 100 kN, odciążono, następnie do wartości około 250 kN (belka znajduje się poza zakresem sprężystym), odciążono i następnie obciążano belkę już do zniszczenia. Cykl obciążenia pokazano na rys. 6.26. Pierwsza rysa na spodzie płyty pojawiła się pod siłą przy wartości siły wynoszącej 210 kN, przy 230 kN pojawiły się widoczne rysy w zespoleniu na końcu belki, które propagowały ze wzrostem obciążenia. Przy 255 kN rozległ się odgłos trzasku w elementach zespolenia w przedniej części belki. Następny trzask rozległ się przy wartości obciążenia 265 kN, a zaraz po nim dwa kolejne. Przy 290 kN pojawiły się rysy w betonie nad zespoleniem na końcu i początku belki i rozległ się cichy trzask z prawej, a następne przy 295 kN. Przy wartości około 300 kN siła utrzymywała się na prawie niezmiennym poziomie, zmniejszając się i zwiększając o około 5 kN, podczas gdy przemieszczenia pionowe wciąż stale rosły – widoczne płynięcie belki. Ponieważ zakres czujników w środku rozpiętości i siłowników nie przewidywał tak dużych przemieszczeń, należało przezbroid siłowniki, wyjęto czujniki w środku rozpiętości, zdjęto obciążenie i następnie po zmianie ustawień siłowników obciążano belkę do końcowego zniszczenia. Belka przenosiła jeszcze nieco większe obciążenie, nawet do 326 kN (najprawdopodobniej efekt wzmocnienia) ale nie było ono stałe, czasami rosło a czasami malało nawet do 280 kN. Pojawiły się widoczne rysy pionowe w prześle na spodzie płyty betonowej o zasięgu aż do środka płyty, oraz rysy ukośne na spodzie płyty w pobliżu podpór. Stal belki w prześle cały czas płynęła (ponieważ zaczęła odpadać farba z belki stalowej). Po kształcie spękań można było wnioskować o trajektoriach naprężeń. Mechanizm zniszczenia polegał na zmiędzeniu betonu górnej części płyty.



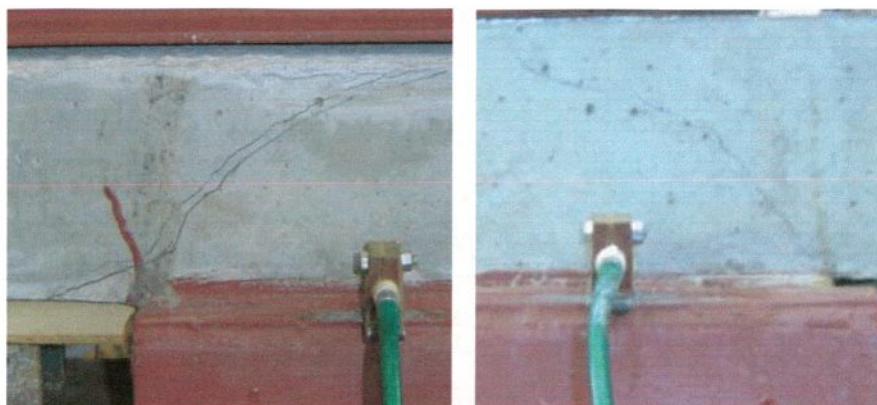
Rys. 6.25. Belka B2 na stanowisku



Rys. 6.26. Program obciążenia



Rys. 6.27. Rysa w zespoleniu na końcu belki



Rys. 6.28. Rysy nad zespoleniem na końcach belki w trakcie badań



Rys. 6.29. Rysa nad zespoleniem na końcu belki po zniszczeniu



Rys. 6.30. Przesło belki po zniszczeniu – widok od spodu



Rys. 6.31. Przesło belki po zniszczeniu – zmiażdżony beton płyty



Rys. 6.32. Rysy ukośne w strefie podparcia

6.4.6. Przebieg badań belki B3

Belkę ustawiono na stanowisku i wstępnie obciążono 2 razy do 50 kN. Następnie wykonano badania dynamiczne i obciążono belkę do 50 kN, a potem do 100 kN. Następnie belkę sprężono cięgnami odgiętymi, siłomierze były umieszczone w zakotwieniu biernym. Po sprężeniu siła w splocie pierwszym wynosiła 139 kN a w splocie drugim 142 kN. Następnie belkę sprężoną obciążano do 50 kN, potem do 100 kN (utrzymując obciążenie przez 5 minut, przerwy po zdjęciu obciążenia wynosiły również 5 minut). Następnie belkę obciążano do maksymalnej wartości obciążenia. Podczas obciążania rozległ się trzask w elementach zespolenia przy wartości obciążenia wynoszącej 350 kN. Przy dalszym wzroście obciążenia pojawiały się rysy nad zespoleniem na końcach belki i rysy na spodzie płyty w przęśle. Belka doznawała dużych przemieszczeń, bliskich 90 mm w środku rozpiętości. Gdy siła w splocie przekroczyła wartość 228 kN, a więc nośność obliczeniową splotu, obciążenie zmniejszono do zera. Postąpiono tak ze względu na BHP (niebezpieczeństwo zerwania splotu przy dużej liczbie osób w laboratorium), ponieważ nie przewidywano tak dużych sił w splotach (założono wcześniejsze zniszczenie belki i siły w splotach miałyby wtedy wartość rzędu 200 kN). Ponieważ beton okazał się mocniejszy niż się spodziewano, belka doznawała większych ugięć nie ulegając zniszczeniu co skutkowało znacznym wzrostem siły w sprężeniu. Ponieważ rysy pionowe w płycie betonowej w przęśle sięgały już środka płyty, a ugięcia rosły bardzo szybko przy minimalnym wzroście wartości siły w siłownikach, można uznać że osiągnięto nośność belki. Pojawiły się również rysy ukośne w płycie w strefach podparcia. Prawdopodobnie nieznaczne już zwiększenie przemieszczenia w środku rozpiętości spowodowałoby zniszczenie betonu płyty w strefie ściskanej (potwierdziły to badania na kolejnych belkach). Dzięki zdjęciu obciążenia przed zniszczeniem płyty, można było zbadać stan odkształceń w belce i płycie dla belki, która doznała tak dużych przemieszczeń. Pozwala to wnioskować np. o nośności tak znacznie przeciążonych (uszkodzonych) belek pod kątem ich eksploatacji w rzeczywistych konstrukcjach. Po zdjęciu obciążenia siła w splotach wynosiła około 200 kN w każdym. Należy podkreślić, że po przekroczeniu wytrzymałości obliczeniowej splotu nie uległ on zerwaniu w miejscu znacznego załamania na dewiatorze, gdzie jego nośność jest znacznie obniżona [12] ze względu na promień odgięcia. Po zdjęciu belki ze stanowiska sploty odcięto palnikiem. Podczas odcinania pojedyncze druty pękały po kolei, nie nastąpiło gwałtowne zerwanie całego splotu, jest więc to bezpieczna metoda usunięcia splotu z panującą w nim tak dużą siłą.

splotu z panującą w nim tak dużą siłą. Maksymalna siła do jakiej obciążano belkę B3 wyniosła 404 kN.



Rys. 6.33. Belka B3 na stanowisku



Rys. 6.34. Deformacja belki pod obciążeniem



Rys. 6.35. Układ rys w płycie betonowej po odciążeniu



Rys. 6.36. Rysa nad zespoleniem na końcu belki



Rys. 6.37. Rysy ukośna w strefie podparcia

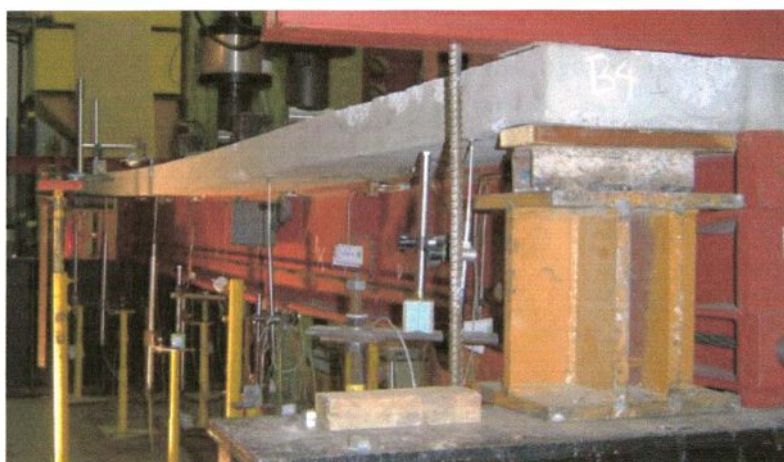
6.4.7. Przebieg badań belki B4

Belkę ustawiono na stanowisku i obciążono do 50 kN, a potem do 100 kN. Następnie belkę sprężono cięgnami prostymi, siłomierze były umieszczone w zakotwieniu biernym. Po sprężeniu siła w splocie pierwszym wynosiła 141 kN, a w splocie drugim 148 kN. Następnie belkę sprężoną obciążano do 50 kN, potem do 100 kN (utrzymując obciążenie przez 5 minut, przerwy po zdjęciu obciążenia wynosiły również 5 minut). Następnie belkę obciążano do maksymalnej wartości obciążenia. Podczas obciążania rozległ się trzask w zespoleniu z prawej strony przy wartości obciążenia wynoszącej 206 kN. Przy dalszym wzroście obciążenia, przy wartości 230 kN, trzeszczały cicho elementy zespolenia z tej samej strony; spadła nieco siła w pierwszym splocie a w drugim wzrosła. Przy wartości siły do 250 kN pojawiały się rysy w zespoleniu na końcach belki, nastąpił bardzo

głośny trzask w elementach zespolenia z drugiej strony, przy końcu belki. Przy 260 kN trzeszczały elementy zespolenia z lewej strony, przy 330 kN rozległ się trzask w środku przęsła, przy 347 kN pojawiają się rysy na farbie belki stalowej. Zniszczenie nastąpiło poprzez gwałtowne zniszczenie betonu w strefie ściskanej przy wartości obciążenia wynoszącej 372 kN. Zniszczenie płyty betonowej przebiegło bardzo gwałtownie, powodując w konsekwencji gwałtowną utratę stateczności uplastycznionej w środku belki. Na skutek działania dużej siły ściskającej (siły w splotach 206 kN i 222 kN) w miejscu osłabionego przekroju (płyta przenosząca ściskanie została wyłączona ze współpracy) nastąpiło gwałtowne wygięcie belki w płaszczyźnie poziomej (do tyłu) połączone z lokalnym wyboczeniem uplastycznionego środka i półki górnej.



Rys. 6.38. Belka B4 na stanowisku podczas badań



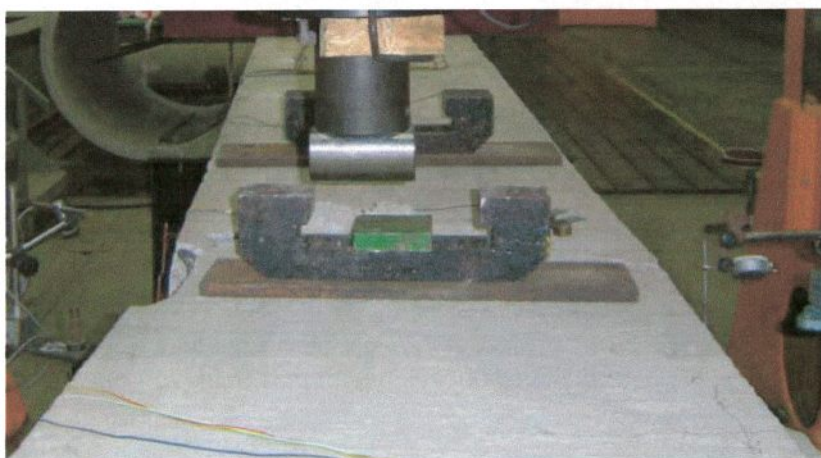
Rys. 6.39. Belka B4 podczas badań pod obciążeniem



Rys. 6.40. Mechanizm zniszczenia – widok z prawej strony belki



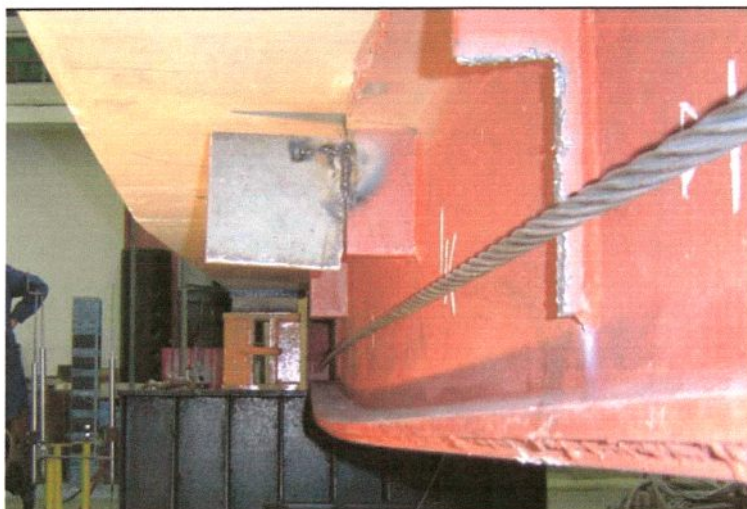
Rys. 6.41. Mechanizm zniszczenia – widok z lewej strony belki



Rys. 6.42. Mechanizm zniszczenia – widok z góry



Rys. 6.43. Mechanizm zniszczenia – lewa strona belki



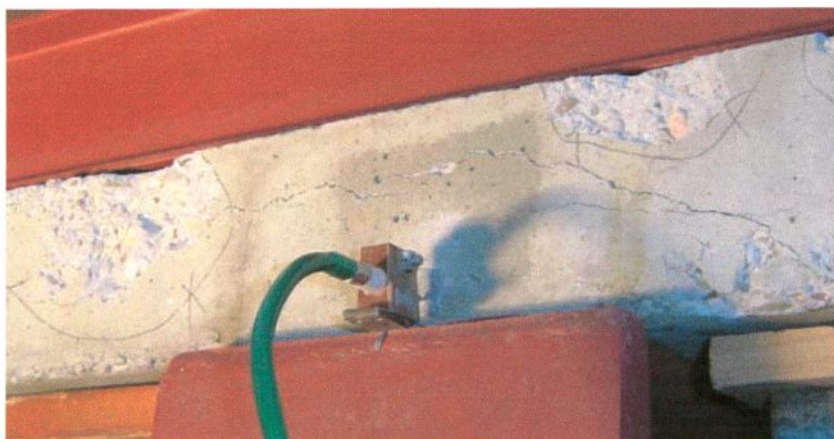
Rys. 6.44. Mechanizm zniszczenia – prawa strona belki



Rys. 6.45. Mechanizm zniszczenia – płyta z prawej strony belki



Rys. 6.46. Mechanizm zniszczenia – płyta z lewej strony belki



Rys. 6.47. Rysa nad zespoleniem na końcu belki

6.4.8. Przebieg badań belki B5

Belkę ustawiono na stanowisku i obciążono do 100 kN. Następnie belkę sprężono cięgnami odgiętymi, siłomierze były umieszczone w zakotwieniu biernym i czynnym. Po sprężeniu siła w splocie pierwszym wynosiła 147 kN i w splocie drugim też 147 kN. Następnie belkę sprężoną obciążano do 100 kN (utrzymując obciążenie przez 5 minut, przerwy po zdjęciu obciążenia wynosiły również 5 minut). Następnie belkę obciążano do maksymalnej wartości obciążenia, lecz przy wartości siły 310 kN wyłączono prąd w całej dzielnicy. Spowodowało to spadek obciążenia do zera i utratę części danych (obciążanie belki), dane ze sprężania pozostały wcześniej zapisane. Przemieszczenie trwale w środku rozpiętości wynosiło około 4 mm. Następnego dnia wznowiono badania obciążając belkę do 200 kN, odciażając do zera, obciążając do 320 kN, odciażając do zera i następnie obciążając aż do zniszczenia. Przy 320 kN rozległ się trzask w elementach zespolenia, przy 330 kN trzeszczy pod prawym siłownikiem, przy 350 kN trzask z jednej strony. Przy 370 kN pojawiły się spękania farby na stali. Kolejny trzask pojawił się przy 380 kN i przy 400 kN. Maksymalna siła wyniosła 400 kN. Siły w splotach w chwili zniszczenia belki wynosiły 225 kN i 228 kN, a przemieszczenie w środku rozpiętości wynosiło ponad 80 mm. Mechanizm zniszczenia był taki sam jak dla belki B4 ze zniszczeniem betonu płyty w strefie ściskanej i gwałtowną utratą stateczności

belki. W belce pojawiły się również rysy ukośne w płycie w strefach podparcia oraz rysy nad zespoleniem na końcach belki.



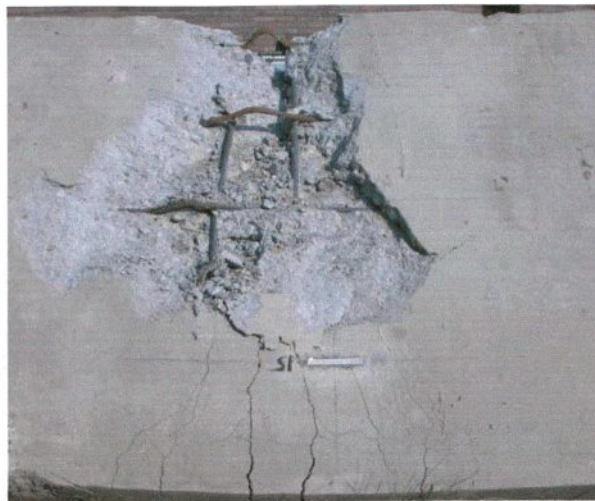
Rys. 6.48. Belka B5 na stanowisku



Rys. 6.49. Belka B5 podczas badań pod obciążeniem



Rys. 6.50. Belka po zniszczeniu



Rys. 6.51. Płyta po zniszczeniu – widok z góry



Rys. 6.52. Płyta po zniszczeniu – widok od spodu

6.4.9. Przebieg badań belki B1

Belkę ustawiono na stanowisku i obciążono do 100 kN. Następnie sprężono ją cięgnami odgiętymi, siłomierze były umieszczone w zakotwieniu biernym i czynnym. Po sprężeniu siła w splocie pierwszym wynosiła 141 kN, a w splocie drugim 156 kN. Trudno było wyrównać siły, ponieważ w jednym ze splotów szczęki zaczęły się ślizgać. W czasie sprężania rozległ się cichy trzask w elementach zespolenia. Następnie belkę sprężoną obciążano do 100 kN (utrzymując obciążenie przez 2 minuty) i odciążono do zera. Następnie belkę obciążano do maksymalnej wartości obciążenia. Przy 300 kN elementy zespolenia zaczęły trzeszczeć i rozległ się trzask oraz pojawiły się rysy nad zespoleniem przy początku belki, przy 310 kN trzaski, a przy 320 kN rozległ się trzask i pojawiły się spękania farby na stali. Mechanizm zniszczenia był podobny jak przy poprzednich belkach. Najpierw w prześle z przodu belki w górnej części płyty pojawiła się rysa ukośna na bocznej powierzchni płyty. Następnie uległ zniszczeniu beton ściskany na całej szerokości płyty, nie było to

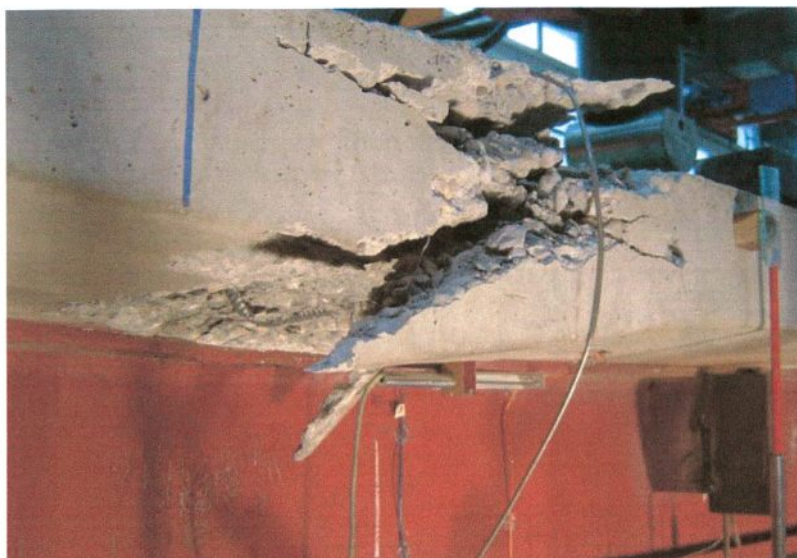
tak gwałtowne jak w przypadku poprzednich belek, przebiegało nieco wolniej, z trzeszczeniem. Potem nastąpiła globalna i lokalna utrata stateczności w obszarze sprężysto-plastycznym i belka została wygięta w płaszczyźnie poziomej w prawą stronę, tak jak w poprzednich przypadkach. Maksymalna siła w siłowniku przed zniszczeniem belki wynosiła 370 kN, siły w splotach 186 kN i 205 kN a ugięcie ponad 40 mm. W belce pojawiły się również rysy ukośne w płycie w strefach podparcia oraz rysy nad zespoleniem na końcach belki.



Rys. 6.52. Belka B1 na stanowisku



Rys. 6.53. Belka po zniszczeniu



Rys. 6.54. Zniszczenie płyty z prawej strony belki



Rys. 6.55. Zniszczenie belki – widok z lewej strony belki



Rys. 6.56. Wyboczenie środnika i pasa górnego

6.4.10. Przebieg badań belki B6

Belkę ustawiono na stanowisku i sprężono prostymi cięgnami tak, że siła w splocie pierwszym wynosiła 145 kN a w splocie drugim 155 kN. Następnie belkę sprężoną ażano do 100 kN (utrzymując obciążenie przez 2 minuty) i odciążono do zera. Potem belkę obciążano do maksymalnej wartości obciążenia. Przy 120 kN rozległ się trzask a przy 250 kN kolejny oraz pojawiły się rysy nad zespoleniem przy końcu, przy początku belki rysa nad zespoleniem nie pojawiła się przy obciążeniu mniejszym niż 300 kN. Przy 310 kN rozległ się kolejny trzask, przy 380 kN trzeszczenie. Mechanizm zniszczenia był podobny jak przy poprzednich belkach. Najpierw w prześle z przodu belki w górnej części płyty pojawiła się rysa ukośna na bocznej powierzchni płyty. Następnie uległ zniszczeniu beton ściskany na całej szerokości płyty, nie było to tak gwałtowne jak w przypadku poprzednich belek, przebiegało nieco wolniej, z trzeszczeniem. Potem nastąpiła globalna i lokalna utrata stateczności w obszarze sprężysto-plastycznym i belka została wygięta w płaszczyźnie poziomej do przodu, tak jak w poprzednich przypadkach. Maksymalna siła w siłowniku przed zniszczeniem belki wynosiła 396 kN, siły w splotach 259 kN i 221 kN a ugięcie około 80 mm. W belce pojawiły się również rysy ukośne w płycie w strefach podparcia oraz rysy nad zespoleniem na końcach belki.



Rys. 6.57. Belka B6 na stanowisku i sprzęt do sprężania



Rys. 6.58. Mechanizm zniszczenia – widok z lewej strony belki



Rys. 6.59. Mechanizm zniszczenia – widok z prawej strony belki



Rys. 6.60. Rysa nad zespoleniem

Obszerna dokumentacja całości badań w postaci zdjęć i filmów w formie cyfrowej jest w posiadaniu autora opracowania.

7. WYBRANE WYNIKI BADAŃ

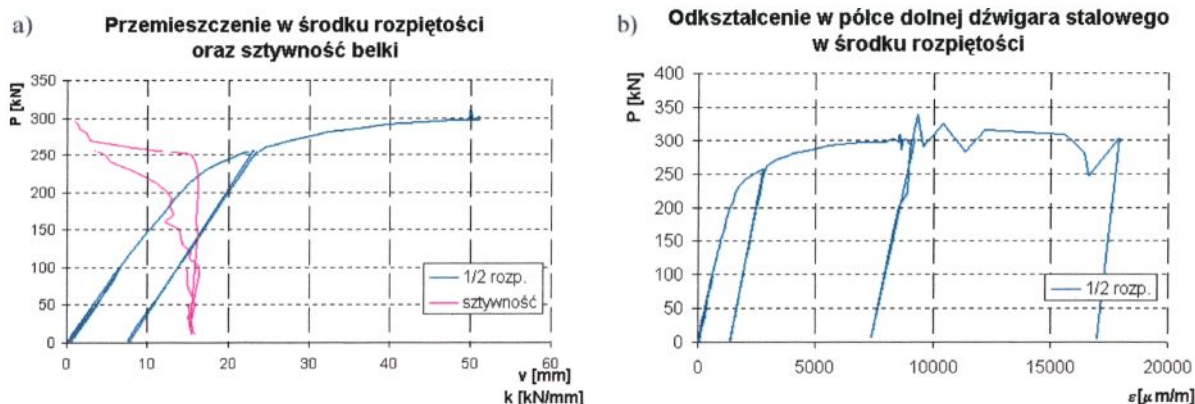
W czasie badań mierzono wiele różnych wielkości i prezentacja wszystkich otrzymanych wyników jest praktycznie niemożliwa. Przedstawiono jedynie wybrane wyniki badań.

Wyniki badań belek starano się zaprezentować tak, aby możliwa była analiza porównawcza. Badane były w zasadzie belki trzech typów, tj. belka niesprężona, belki sprężone kablem prostym oraz belki sprężone kablem odgiętym, w dwojaki sposób. Belki jednego typu zachowują się podobnie, w związku z tym zdecydowano się w pierwszej kolejności przedstawić na wykresach wybrane wielkości dla każdego z trzech typów belek, na przykładzie jednej belki wybranej z danej grupy. W pierwszej kolejności pokazano mierzone wielkości dla wybranych kolejnych poziomów obciążenia, co daje ogólny pogląd na pracę konstrukcji. Przedstawiono przemieszczenia pionowe, poślizg (przemieszczenie na styku stal-beton) oraz odkształcenia w punktach pomiarowych, rozmieszczonych wzdłuż belki, oraz pokazano profile odkształceń. Prezentowano wielkości dla następujących poziomów obciążenia:

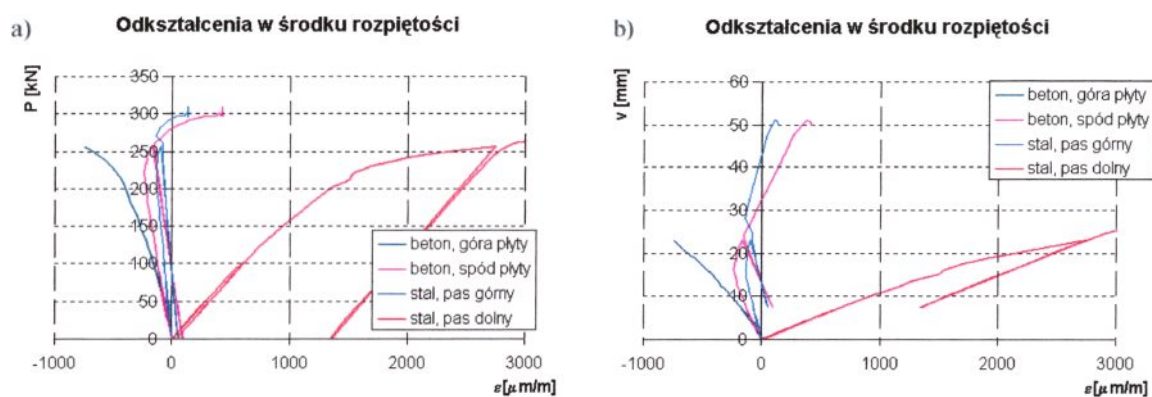
- 50 kN przed sprężeniem belki,
- 100 kN przed sprężeniem belki,
- po zdjęciu obciążenia przed sprężeniem belki,
- po sprężeniu belki przy zerowym obciążeniu poprzecznym,
- po sprężeniu belki przy obciążeniu odpowiednio 100, 200, 250, 300, 330, 360, 390 kN,
- po sprężeniu belki przy obciążeniu maksymalnym przed zniszczeniem.

Wartość siły P na wykresach odnosi się do siły z jednego siłownika (belki obciążane były dwoma siłami). W przypadku nieciągłości na wykresach lub braku wykresu dla zadanego poziomu obciążenia należy to interpretować, że nie dysponuje się odczytem z zadanego czujnika (np. zerwanie tensometru) oraz że pomiar przy zadanej wartości obciążenia nie był wykonywany. Pomierzone wartości pokazano w funkcji siły P oraz przemieszczenia v w środku rozpiętości, co pozwoliło lepiej zinterpretować niektóre zjawiska zachodzące w belkach.

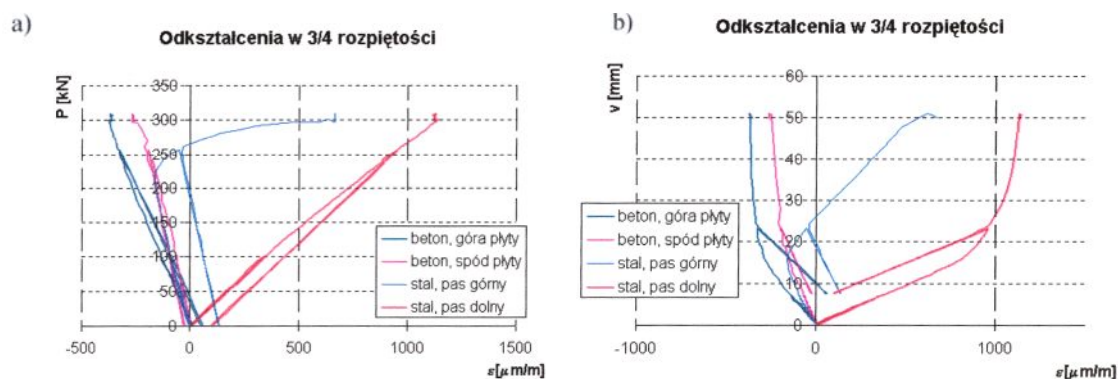
7.1. BELKA NIESPRĘŻONA B2



Rys. 7.1. Wykresy: a) przemieszczenie w środku rozpiętości i sztywność belki, b) odkształcenie w płóce dolnej dźwigara stalowego w środku rozpiętości

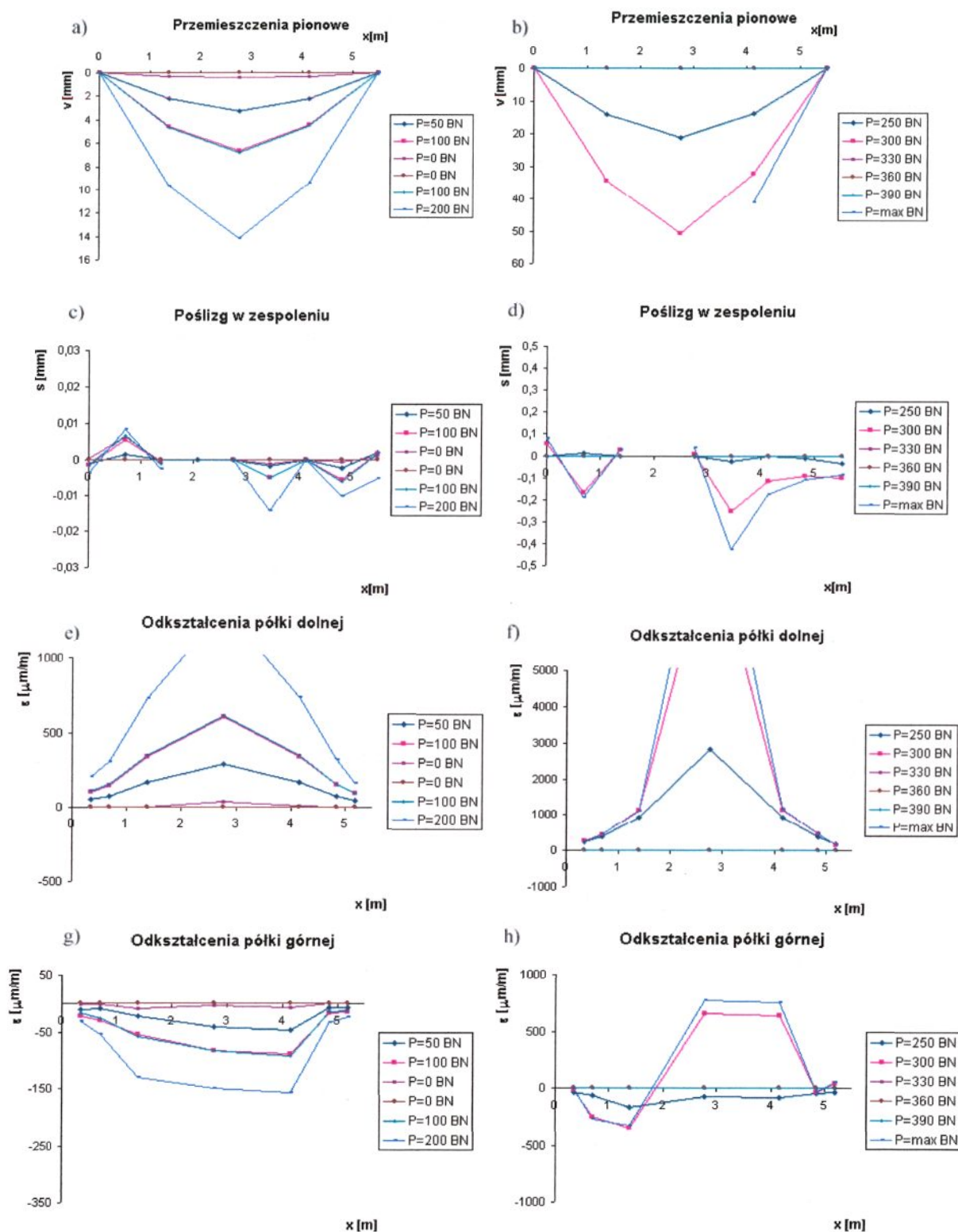


Rys. 7.2. Wykresy odkształceń w przekroju w środku rozpiętości a) w funkcji siły, b) w funkcji przemieszczenia w środku rozpiętości



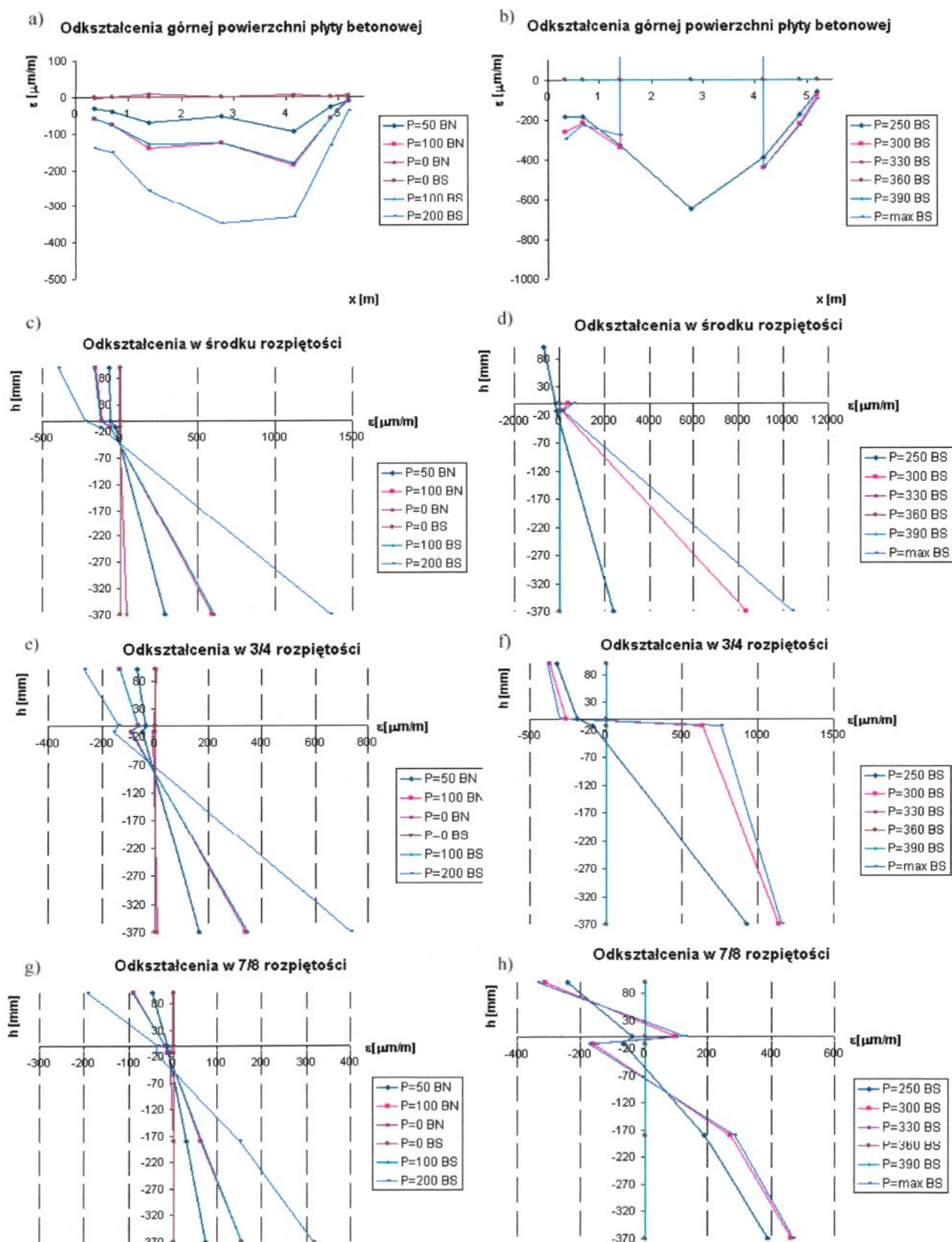
Rys. 7.3. Wykresy odkształceń w przekroju w 3/4 rozpiętości a) w funkcji siły, b) w funkcji przemieszczenia w środku rozpiętości

Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych sprężanych kablami zewnętrznymi



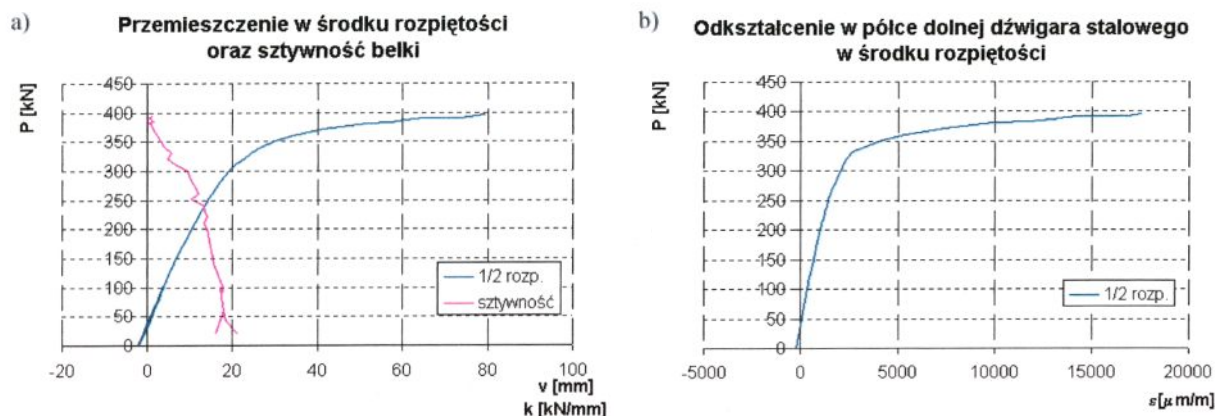
Rys 7.4. a – h: Wykresy wybranych wartości w punktach pomiarowych rozmieszczonych wzdłuż belki dla kolejnych wartości obciążenia pionowego (przemieszczenia, poślizg i odkształcenia belki stalowej, opis przedstawianej wartości nad każdym wykresem)

Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych
sprężanych kablami zewnętrznymi

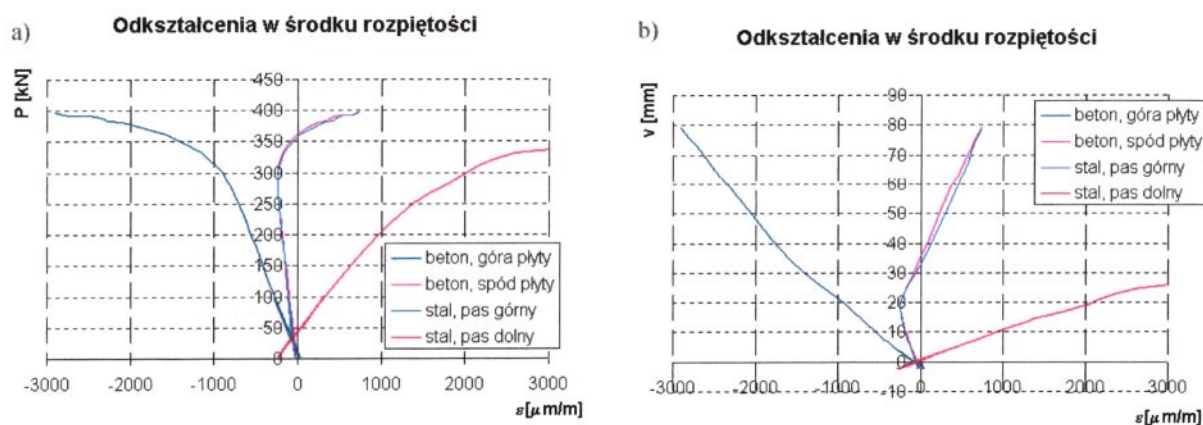


Rys 7.5. a – h: Wykresy wybranych wartości w punktach pomiarowych rozmieszczonych wzdłuż belki oraz profile odkształceń dla kolejnych wartości obciążenia pionowego

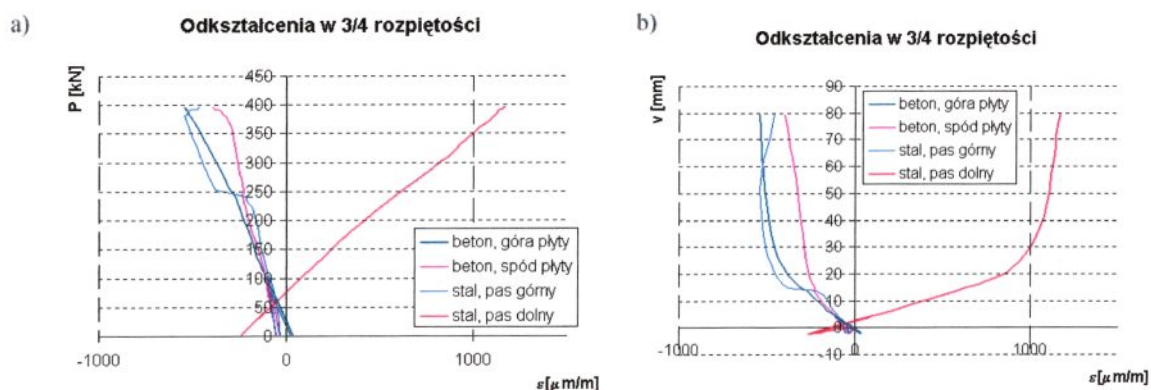
7.2. BELKA SPRĘŻONA PROSTYM CIĘGIEM B6



Rys. 7.6. Wykresy: a) przesunięcie w środku rozpiętości i sztywność belki, b) odkształcenie w płacie dolnym dźwigara stalowego w środku rozpiętości

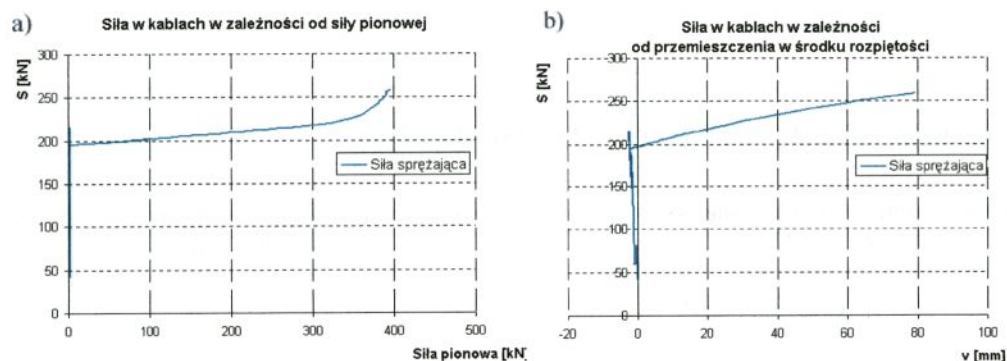


Rys. 7.7. Wykresy odkształceń w przekroju w środku rozpiętości a) w funkcji siły, b) w funkcji przesunięcia w środku rozpiętości

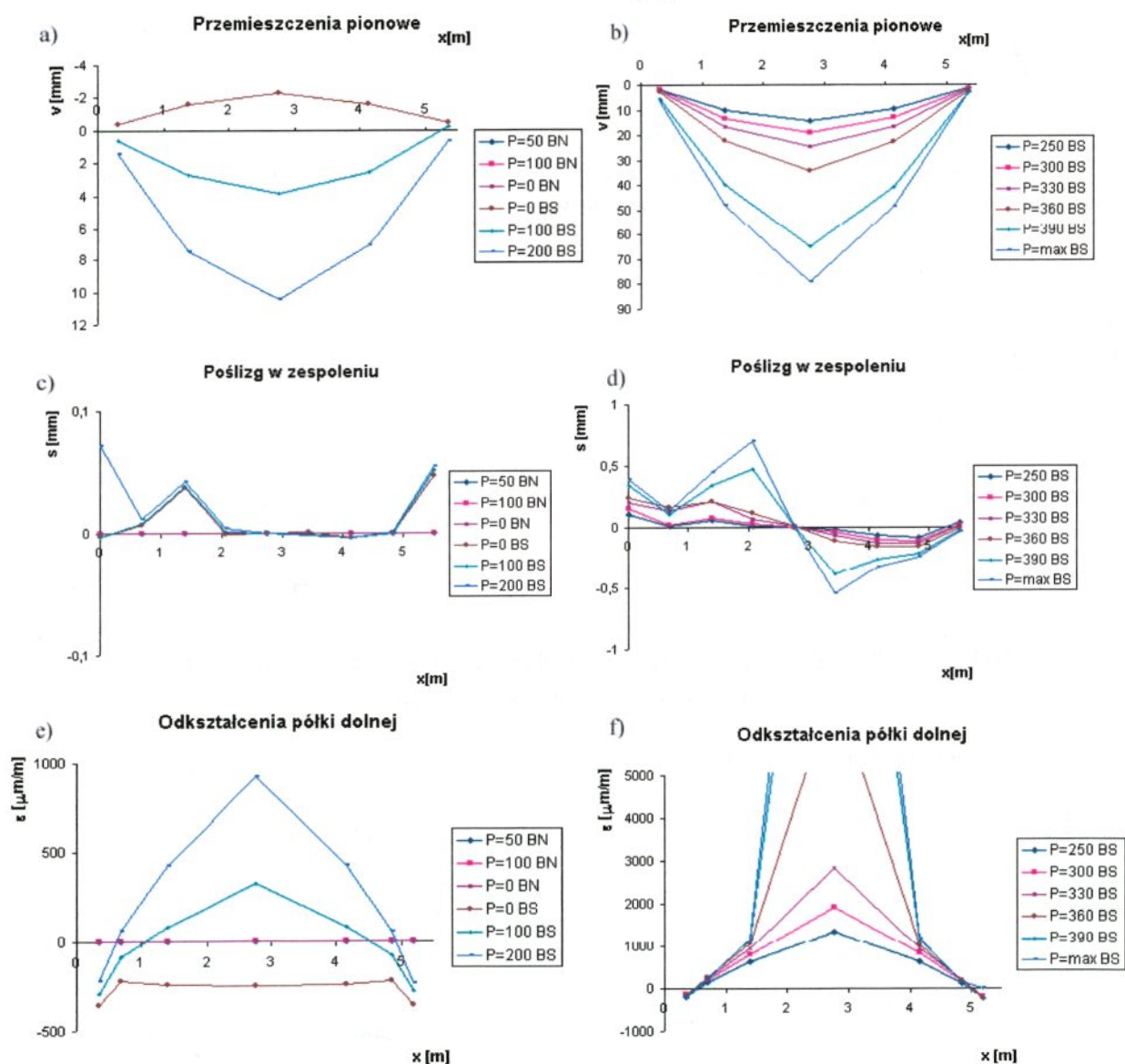


Rys. 7.8. Wykresy odkształceń w przekroju w 3/4 rozpiętości a) w funkcji siły, b) w funkcji przesunięcia w środku rozpiętości

Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych sprężanych kablami zewnętrznymi

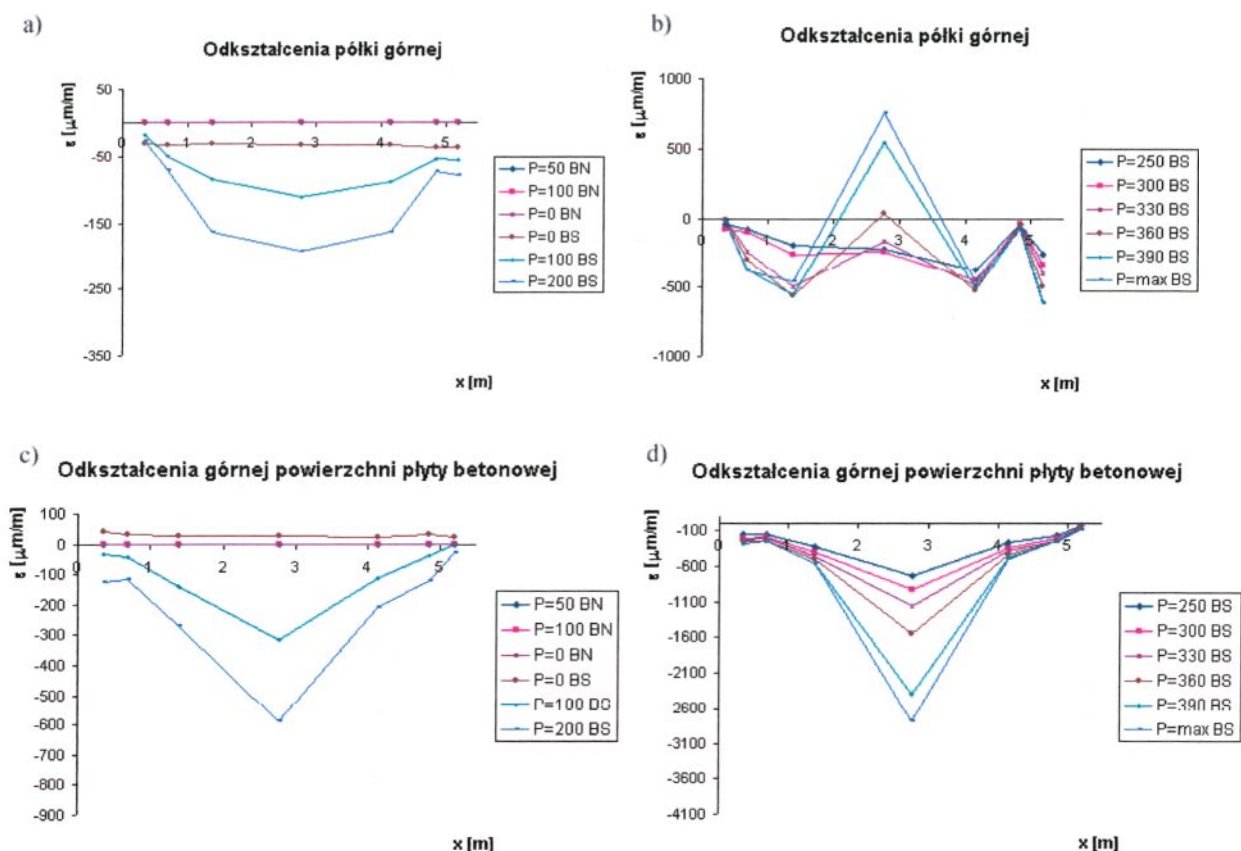


Rys. 7.9. Wykresy wartości siły sprężającej w kablach a) w funkcji siły, b) w funkcji przemieszczenia w środku rozpiętości

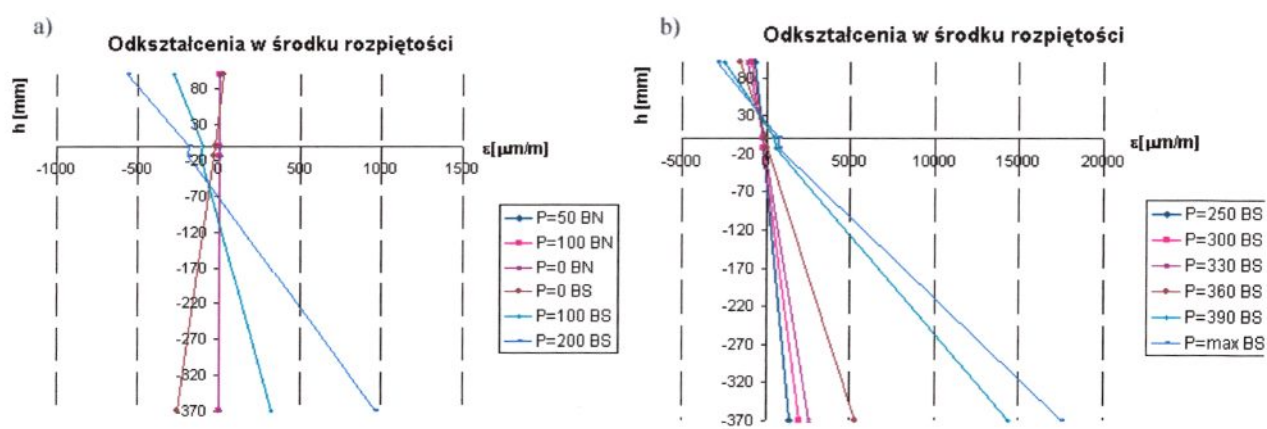


Rys. 7.10. a – f: Wykresy wybranych wartości w punktach pomiarowych rozmieszczonych wzdłuż belki dla kolejnych wartości obciążenia pionowego (przemieszczenia, poślizg i odkształcenia belki stalowej, opis przedstawianej wartości nad każdym wykresem)

Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych sprężanych kablami zewnętrznymi

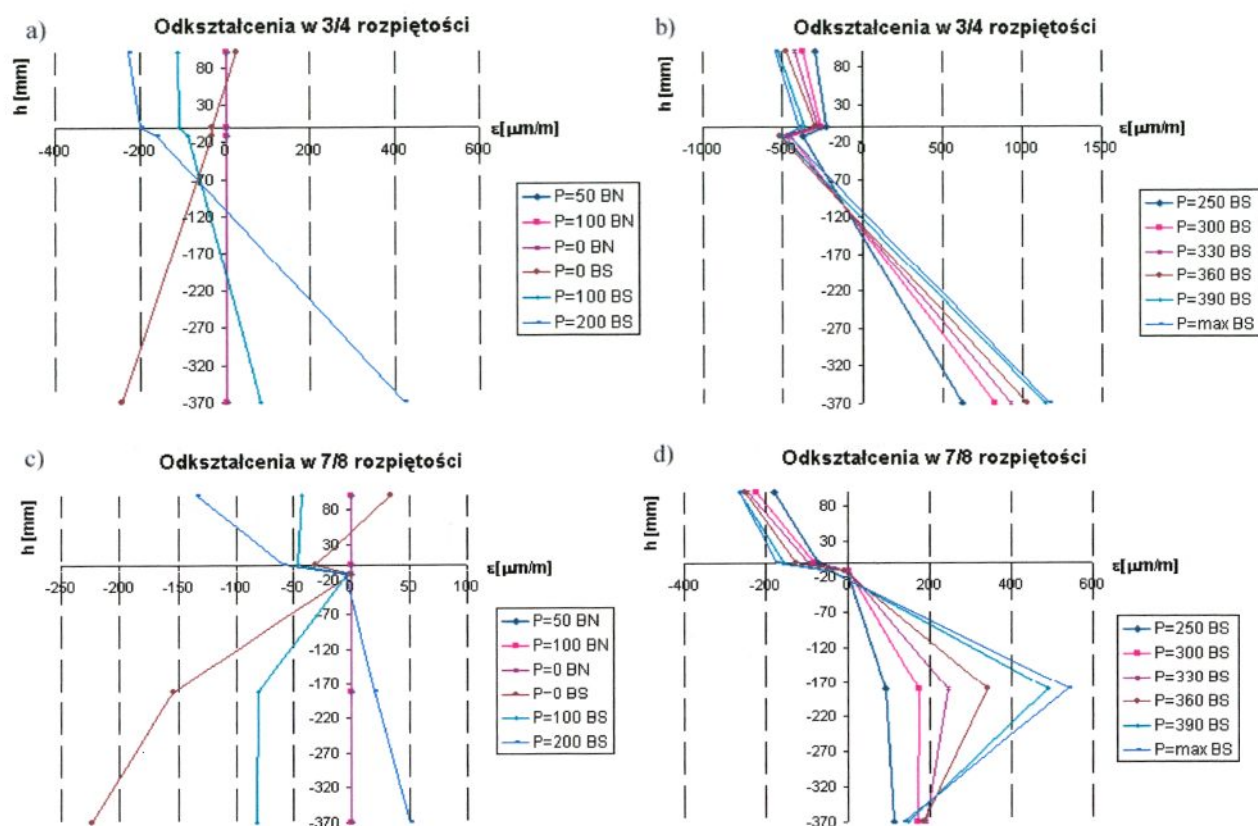


Rys 7.11. a – d: Wykresy wybranych wartości w punktach pomiarowych rozmieszczonych wzdłuż belki dla kolejnych wartości obciążenia pionowego (odkształcenia belki stalowej i płyty betonowej, opis przedstawianej wartości nad każdym wykresem)



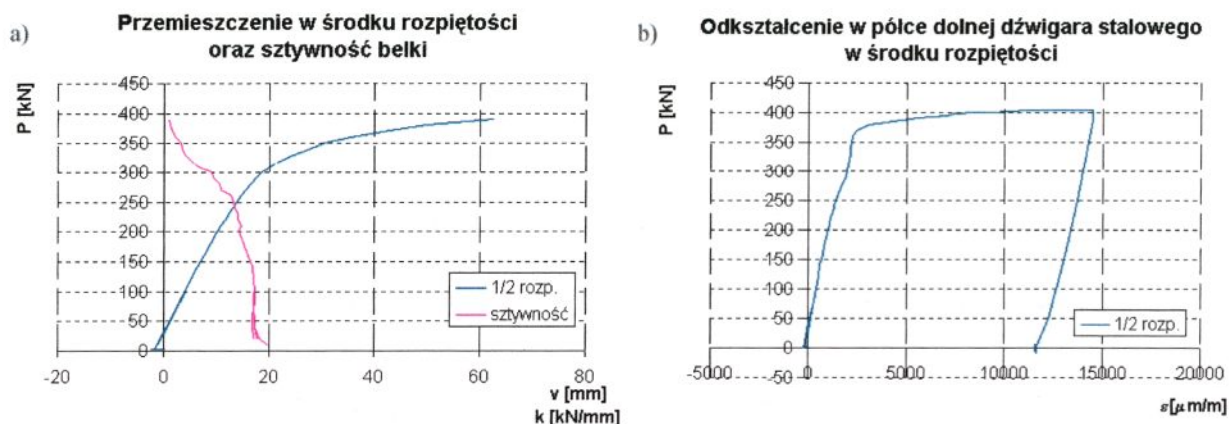
Rys 7.12. a – b: Wykresy odkształceń dla kolejnych wartości obciążenia pionowego

Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych
sprężanych kablami zewnętrznymi

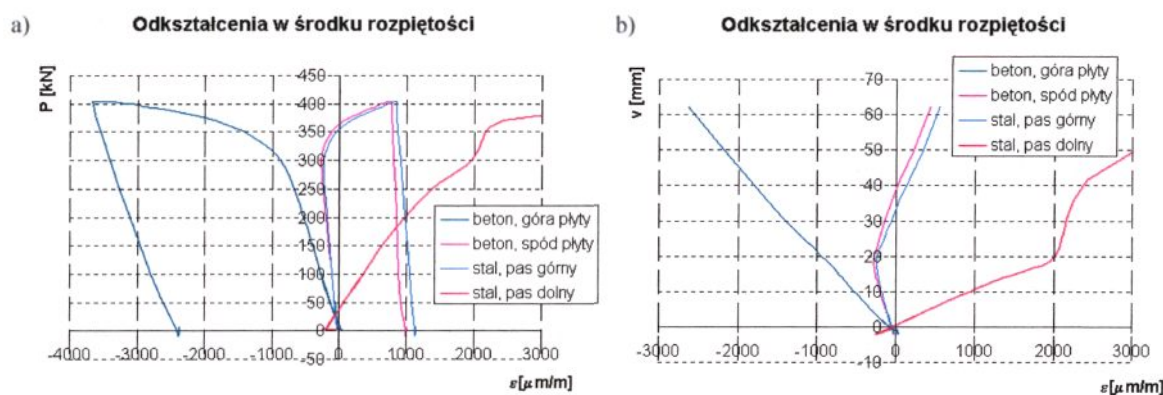


Rys 7.13. a – d: Wykresy odkształceń dla kolejnych wartości obciążenia pionowego

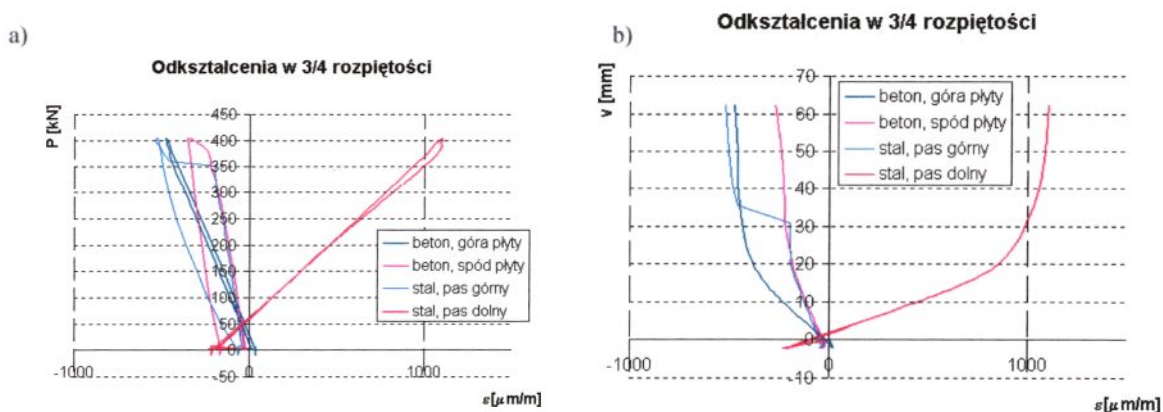
7.3. BELKA SPRĘŻONA CIĘGNIEM ODGIĘTYM B3



Rys. 7.14. Wykresy: a) przemieszczenie w środku rozpiętości i sztywność belki, b) odkształcenie w półce dolnej dźwigara stalowego w środku rozpiętości

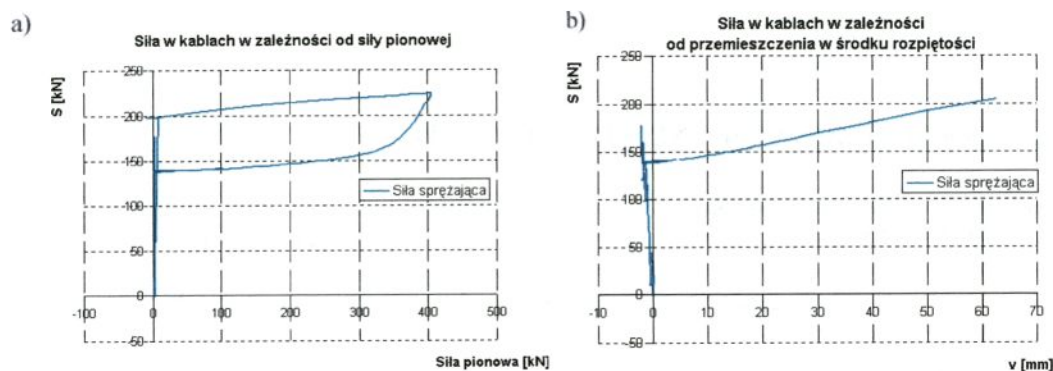


Rys. 7.15. Wykresy odkształceń w przekroju w środku rozpiętości a) w funkcji siły, b) w funkcji przemieszczenia w środku rozpiętości

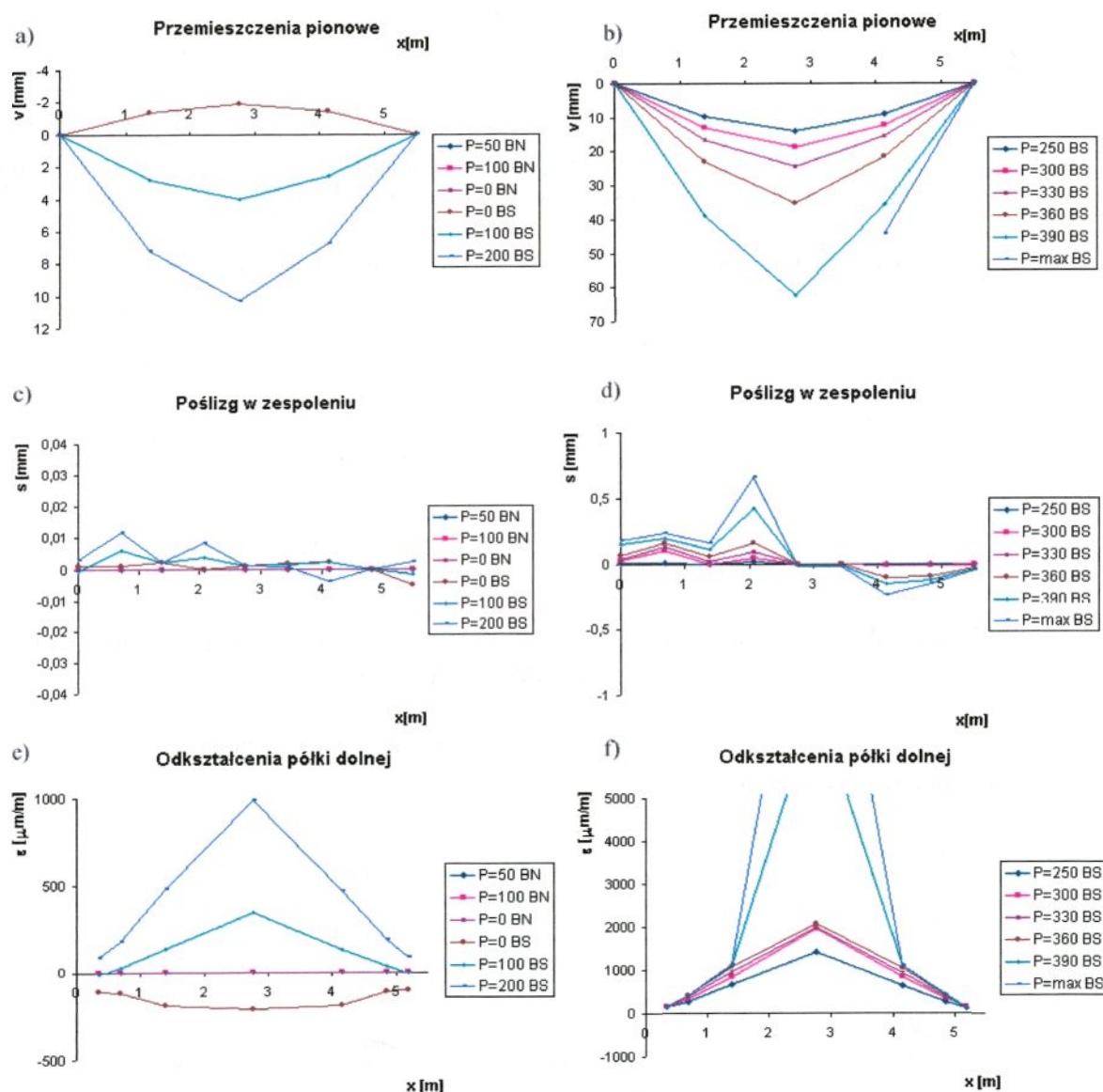


Rys. 7.16. Wykresy odkształceń w przekroju w 3/4 rozpiętości a) w funkcji siły, b) w funkcji przemieszczenia w 3/4 rozpiętości

Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych sprężanych kablami zewnętrznymi

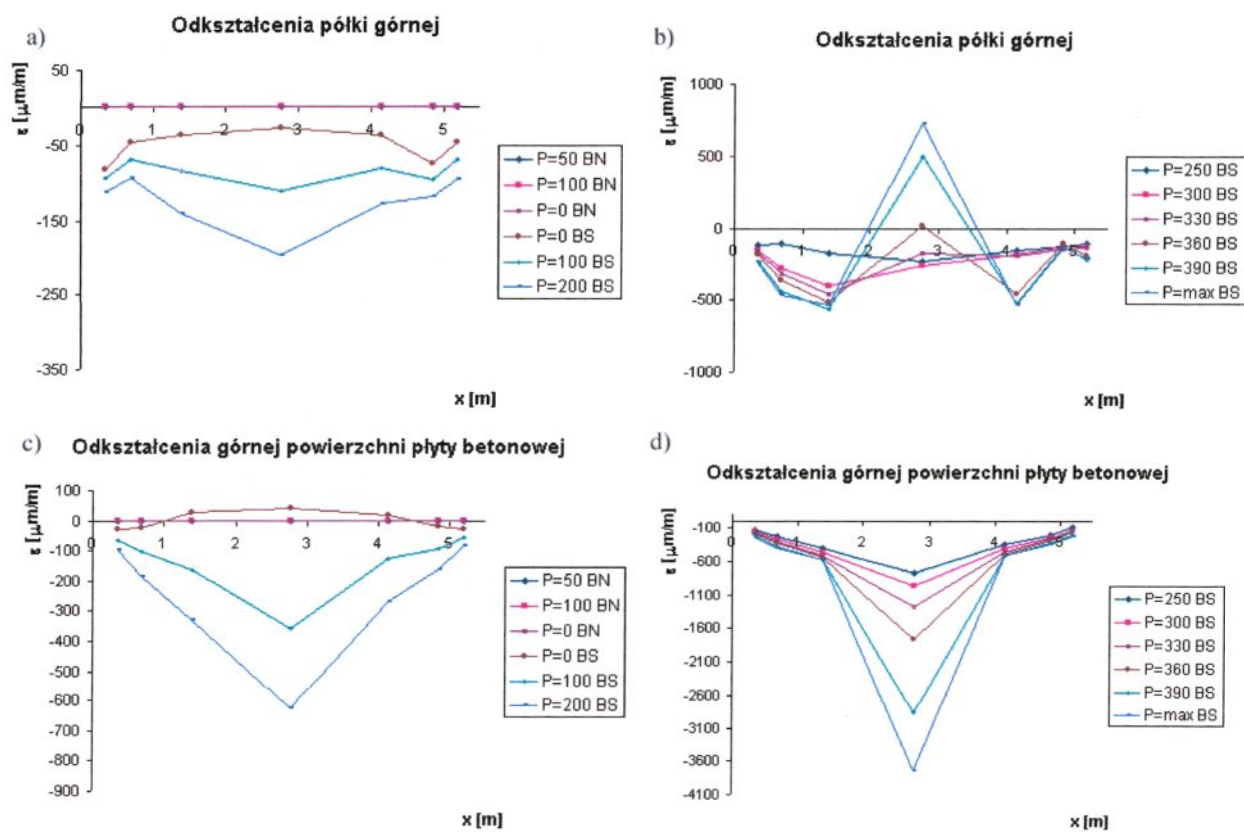


Rys. 7.17. Wykresy wartości siły sprężającej w kablach a) w funkcji siły, b) w funkcji przemieszczenia w środku rozpiętości

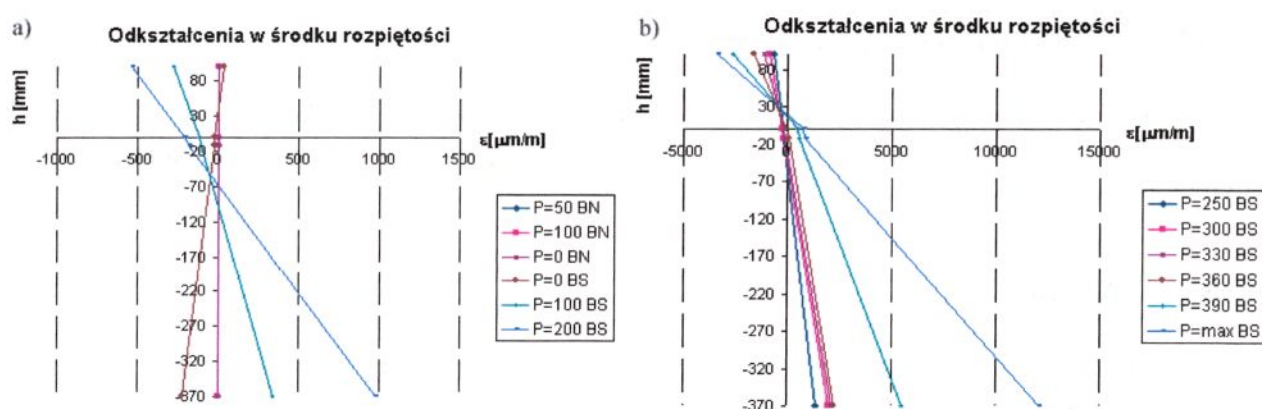


Rys. 7.18. a – f: Wykresy wybranych wartości w punktach pomiarowych rozmieszczonych wzdłuż belki dla kolejnych wartości obciążenia pionowego (przemieszczenia, poślizg i odkształcenia belki stalowej, opis przedstawianej wartości nad każdym wykresem)

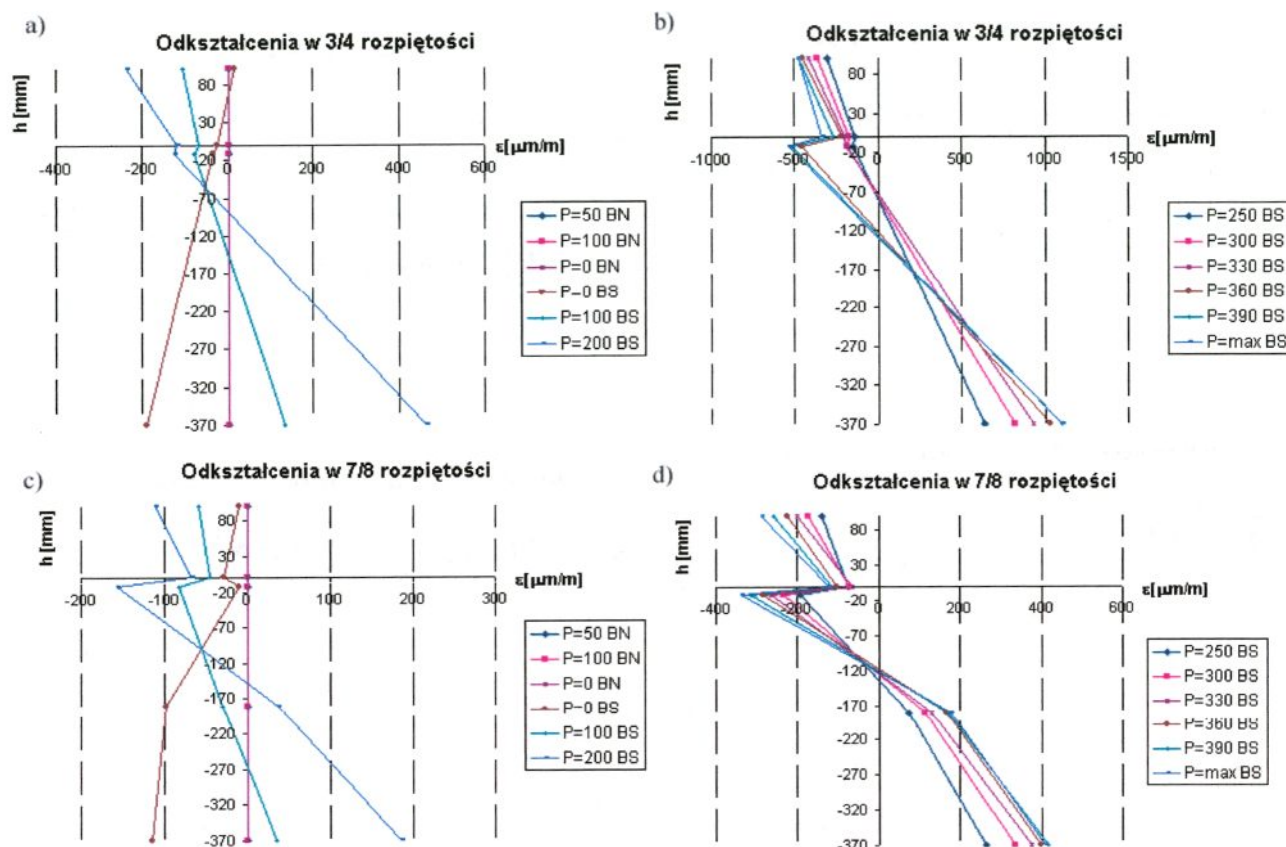
Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych sprężanych kablami zewnętrznymi



Rys 7.19. a – d: Wykresy wybranych wartości w punktach pomiarowych rozmieszczonych wzdłuż belki dla kolejnych wartości obciążenia pionowego (odkształcenia belki stalowej i płyty betonowej, opis przedstawianej wartości nad każdym wykresem)



Rys 7.20. a – b: Wykresy odkształceń dla kolejnych wartości obciążenia pionowego



Rys 7.21. a – d: Wykresy odkształceń dla kolejnych wartości obciążenia pionowego

8. ANALIZY TEORETYCZNE

W modelach teoretycznych przyjęto geometrię przekroju jak dla badanych belek. Pominięto wyokrąglenia kształtownika IPE 360 oraz pole spoiny pachwinowej, łączącej nakładkę z pasem dolnym belki stalowej.

8.1. MODEL DA

Podstawy modelu opisano w poprzednich rozdziałach, tutaj przedstawiono założenia do obliczeń.

8.1.1. Charakterystyki materiałowe

Do obliczeń przyjęto charakterystyki materiałowe odpowiadające uzyskanym z badań dla poszczególnych elementów konstrukcji.

8.1.1.1 Beton

Dla ściskania w przedziale odkształceń od zera do odpowiadających wytrzymałości na ściskanie, zastosowano charakterystykę normową wg [103] i stosowaną w większości opracowań, również tych bezpośrednio związanych z tematem niniejszej rozprawy, m in. [20] i [40]. Dla rozciągania przyjęto odpowiednio funkcję ArcTan, a dla ściskania dla odkształceń, przekraczających odpowiadające wytrzymałości na ściskanie, przyjęto funkcję stałą. Jest to związane z algorytmem zastosowanym w programie PRESTCOMP, narzucającym konieczność dodatkowego określania niektórych macierzy, występujących podczas rozwiązywania zagadnienia. Parametry występujące w funkcji, tj. f_{ck} i E_c wyznaczone podczas badań i mają wartości:

$$f_{ck} = 31,7 \text{ MPa},$$

$$E_c = 28,6 \text{ GPa}.$$

Funkcja opisująca zależność dla betonu ma postać:

$$\sigma(\varepsilon) = f_{ck} \cdot H(\varepsilon - \varepsilon_{cl}) + \frac{k_c \cdot \varepsilon_{c0} - \varepsilon_{c0}^2}{1 + (k_c - 2) \cdot \varepsilon_{c0}} f_{ck} \cdot H(-\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_{cl})) + \Omega_b \cdot f_{ctb} \cdot \text{ArcTan}\left(\frac{E_b}{\Omega_b \cdot f_{ctb}} \cdot \varepsilon\right) \cdot H(\varepsilon), \quad (57)$$

gdzie:

$$f_{ck} = 31,7 \text{ MPa},$$

$$\varepsilon_{c0} = \varepsilon / \varepsilon_{cl},$$

$$k_b = E_b \times \varepsilon_{cl} / f_{ck},$$

$$\varepsilon_{cl} = -0,0022,$$

$$f_{ctb} = 3,2 \text{ MPa},$$

$$E_b = 28600 \text{ MPa},$$

$$\Omega_b = 0,7,$$

a $H(x)$ jest funkcją Heaviside'a.

Wykres funkcji dla przedstawiono na rys. 8.3. (dla naprężeń ściskających jest ona identyczna jak w modelu MES). Płyta betonowa ma przekrój o wymiarach 800x100 mm. Pominięto zmniejszenie pola płyty na skutek występowania tam prętów zbrojenia podłużnego.

8.1.1.2 Stal konstrukcyjna

Przyjęto model Prandtla symetryczny dla ściskania i rozciągania. Wytrzymałość na rozciąganie i ściskanie wynosi odpowiednio 293 MPa dla stali środnika i nakładki pasa dolnego belki B2, 262 MPa dla stali pasów dwuteownika i 358 MPa dla nakładki pozostałych belek. Moduł Younga wynosi dla stali konstrukcyjnej belki 207 GPa. Przekrój zamodelowano jako składający się z prostokątów (pominięto wyokrąglenia); pasy 170x12,7 mm, środnik 334,6x8,45 mm, nakładka 150x10,1 mm. Nakładka zaczyna się w odległości 512 mm od punktów podparcia belki.

8.1.1.3 Stal zbrojeniowa

Przyjęto model Prandtla, symetryczny dla ściskania i rozciągania. Wytrzymałość na rozciąganie i moduł Younga wynoszą odpowiednio 428 MPa i 207 GPa.

Zbrojenie podłużne płyty stanowią pręty $\varnothing 8$ mm (5 szt. prętów w warstwie górnej i 5 szt. prętów w warstwie dolnej). Zbrojenie to opisano jako dwa prostokąty, o wysokości równej średnicy prętów tj. 8 mm i szerokości wyznaczonej tak, aby pole przekroju prostokąta równe było polu przekroju prętów danej warstwy. Środek ciężkości prostokąta pokrywa się ze środkiem ciężkości zbrojenia danej warstwy. Pole przekroju 5 szt. prętów $\varnothing 8$ mm wynosi 251 mm^2 . Odległość osi zbrojenia od spodu płyty wynosi 32 mm dla zbrojenia dolnego i 76 mm dla zbrojenia górnego.

8.1.1.4 Sprężenie kablami prostymi

Przyjęto model liniowy dla splotów, wartość modułu Younga wynosi 197,8 GPa. Sumaryczne pole przekroju kabli wynosi 300 mm^2 , długość kabli mierzona wzdłuż osi x wynosi 5524 mm. Kabel kontaktuje się z belką tylko w punktach zakotwienia. Wstępne sprężenie zamodelowano jako energię sprężystą kabli odkształconych osiowo odkształceniem o wartości 0,005. Po wykonaniu obliczeń otrzymano, że energia ta przekłada się na energię układu belka+kable tak, że wstępna siła sprężająca w obydwu splotach wynosi około 284 kN (układ zrównoważony).

8.1.1.5 Zespolenie

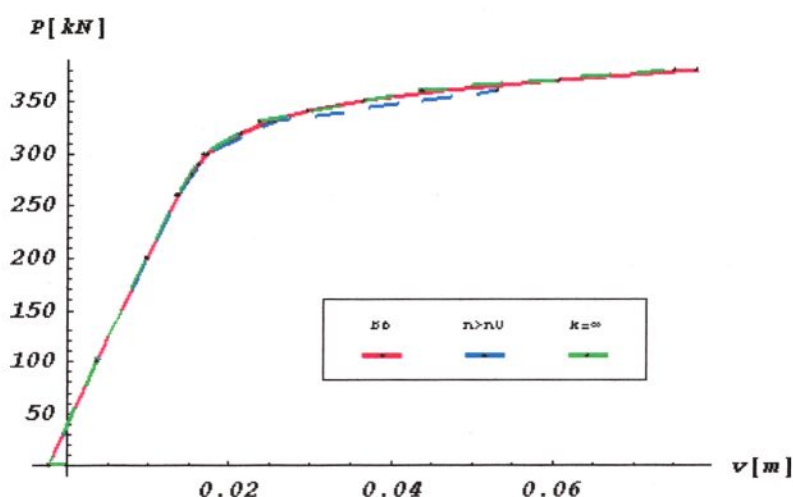
Podczas badań poślizgi w zespoleniu osiągały zwykle maksymalne wartości wynoszące nieco ponad 0,5 mm, dla dużych wartości obciążenia pionowego, gdy belka była już w fazie plastycznej. Nie ma zatem konieczności modelowania całej krzywej dla sworzni aż do siły niszczącej. Funkcję G_s (poślizg – siła ścinająca) dla pojedynczego sworzni, zamodelowano z wykorzystaniem kombinacji funkcji liniowej i ArcTan w dla poślizgów, w przedziale dla od -1 do 1 mm. Dla poślizgów o wartości bezwzględnej mniejszych od 0,05 mm, funkcja jest liniowa. Modelowanie takie w tym obszarze jest uzasadnione [25], zwłaszcza dla belek wielokrotnie obciążanych [90]. Funkcję przedstawiono na rysunku 8.5. (jest ona bardzo zbliżona do zastosowanej w modelu MES). Funkcję gęstości rozkładu sworzni wzdłuż belki przyjęto jako odpowiadającą rzeczywistemu rozkładowi, tj. stałą w przęśle, z zagęszczeniem przy podporach. Zastosowano w tym celu funkcję Heaviside'a.

8.1.2. Parametry analizy

Przyjęto aproksymację rozwiązania za pomocą czterech funkcji bazowych, odpowiednio dla każdej z trzech funkcji poszukiwanych. W przypadku przemieszczeń pionowych są to cztery pierwsze nieparzyste wyrazy sinusowego ciągu trygonometrycznego, a w przypadku funkcji przemieszczeń poziomych, cztery pierwsze wielomiany Legendra. Przyjęcie czterech funkcji bazowych jest uzasadnione; trzy funkcje nie zapewniają odpowiedniej dokładności rozwiązania a pięć funkcji znacznie wydłuża czas obliczeń, nie wpływając znacząco na wyniki (w przypadku czterech funkcji macierz gradientu składa się ze 144 składników a w przypadku pięciu z 225).

Do rozwiązania nieliniowego układu równań zastosowano metodę NR. Kryterium zbieżności określono analogicznie, jak często stosuje się to w przypadku MES. Jeżeli jako rezydual określimy wektor będący różnicą wektora prawej i lewej strony, to każdy wyraz wektora będącego ilorazem rezyduala i lewej strony musi być mniejszy od 10^{-5} co do wartości bezwzględnej. Nie dotyczy to wyrazów o wartości -1 , odpowiadających za energię związaną z przemieszczeniami poziomymi (prawa strona równa zero). Podczas obliczeń stosowano zmienny przyrost kroku obciążenia; tj. 100 kN na początku w fazie sprężystej i 10 kN w fazie plastycznej, przy końcu cyklu obciążenia. Zbieżność

uzyskiwano zwykle po 5 iteracjach. Przeanalizowano wpływ zwiększenia sztywności zespolenia do $k = \infty$ oraz wpływ zwiększenia liczby funkcji bazowych z 4 do 5. Na rys. 8.1. na czerwono przedstawiono wyniki dla belki sprężonej kablem prostym przy założeniu czterech funkcji bazowych każdego typu i rzeczywistym zespoleniu (tak jak w przypadku pozostałych obliczeń w ramach niniejszego opracowania), na zielono, dla zespolenia o sztywności większej o kilka rzędów i czterech funkcji bazowych każdego typu, a na niebiesko dla rzeczywistego zespolenia i pięciu funkcji bazowych każdego typu. Wpływ obydwu tych czynników jest praktycznie niezauważalny. Świadczy to o tym, że zespolenie można traktować jako pełne w rozumieniu EC4 oraz, że prawidłowo i optymalnie dobrano liczbę funkcji bazowych pod kątem analizowanego problemu.



Rys. 8.1. Przemieszczenie w środku rozpiętości dla przyjętych zmiennych

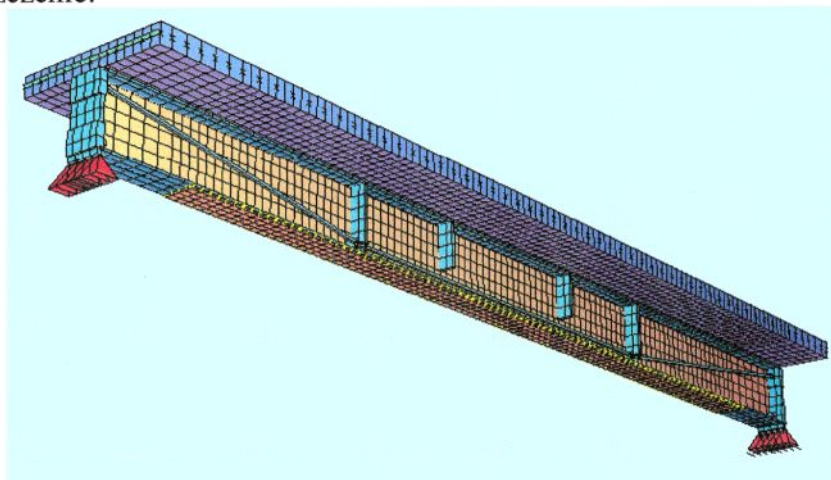
8.2. MODEL MES

Aby stworzyć model możliwie wiernie odzwierciedlający zachowanie się badanej konstrukcji, wykorzystano metodę elementów skończonych (MES). Należało wybrać taki program (system), który umożliwiał odpowiednie zamodelowanie i analizę konstrukcji w obszarze nieliniowym przy zastosowaniu wielu materiałów, różnych rodzajów elementów klasy e^1 i e^2 jednocześnie uwzględnieniu wielu nieliniowości materiałowych i geometrycznych. Rozpatrywano zasadniczo programy: ABAQUS, SOFiSTiK, LUSAS i COSMOS-M (w tym ostatnim przeprowadzano obliczenia wstępne dla belki stalowej sprężonej). Jako spełniający założone wymagania wybrano system SOFiSTiK, [124]. System ten jest ustawicznie rozwijany, regularnie wydawane są aktualizacje do danej wersji a stosowane algorytmy i podejścia bazują na najnowszych osiągnięciach z dziedziny MES. Podkreślić należy fakt, że system nie jest „czarną skrzynką”; wszystkie algorytmy są jasno przedstawione [45], istnieje możliwość manualnej i świadomej ingerencji w procedury iteracyjne przy problemach nieliniowych, parametry takie jak energia układu i rezydual są jawne itd. Do obliczeń wykorzystano pliki z pakietu SOFiSTiK v.21 z 2003 r. z aktualizacjami z roku 2004.

8.2.1. Modelowanie konstrukcji

Konstrukcję opisano jako przestrzenną klasy e^1+e^2, p^3 . Model zbudowany jest z następujących elementów:

- powłokowych typu SHELL stanowiących zasadniczą konstrukcję, tj. czterowęzłowe elementy dostosowane typu Wilsona o 6 stopniach swobody w węźle, czyli takie jakie wykorzystywane są w programie ABAQUS,
- typu TRUSS oraz CABL, są to elementy jednowymiarowe o trzech stopniach swobody w węźle
- jednowymiarowych typu SPRING o zadanych charakterystykach nieliniowych siła-przemieszczenie.



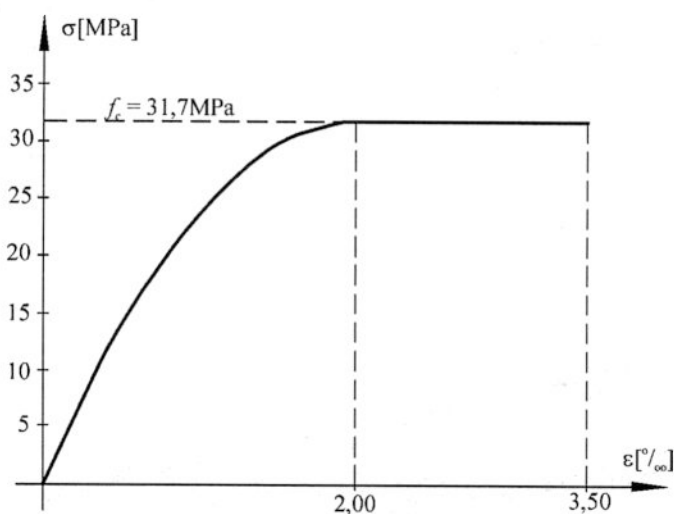
Rys. 8.2. Model dyskretny – widok ogólny z wizualizacją

8.2.2. Materiały i nieliniowości materiałowe

Modele były wykonane z następujących materiałów:

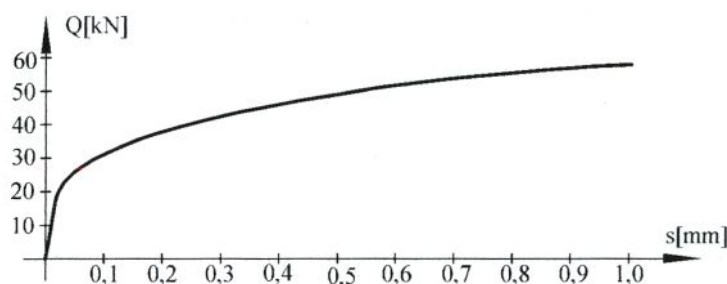
1. stal pasów belki stalowej,
2. stal środka,
3. stal nakładki belki stalowej,
4. stal zbrojeniowa w płycie betonowej,
5. stal splotów sprężających,
6. beton płyty,
7. krzywa materiałowa modelująca sworzeń zespolenia.

Dla stali przyjęto charakterystyki nieliniowe jak do programu PRESCOMP, tj. liniową zależność dla stali splotów (nie wchodzi w obszar plastyczny) i nieliniowe zależności (model Prandla) dla pozostałych stali (mat. nr 1, 2, 3 i 4). Dla betonu płyty przyjęto zależność nieliniową zgodnie z normą [103] dla wytrzymałości na ściskanie wyznaczonej podczas badań i wynoszącej 31,7 MPa (rys. 8.3.).



Rys. 8.3. Charakterystyka σ - ε betonu dla ściskania

Celem wyznaczenia sztywności sworznia w kierunku osiowym przyjęto, że siła osiowa przekazywana jest w miejscu spodu łba sworznia, tj. długość rozciąganego odcinka sworznia wynosi 67 mm. Dla $E = 207$ GPa i średnicy sworznia 12,48 mm wydłużenie przy sile 63 kN wynosi $1,67 \times 10^{-4}$ m. W modelowaniu krzywej $F(u)$ dla sworznia przyjęto model liniowy, tj. pominięto w krzywej obszar sprężysto-plastyczny. Uzasadnia się to tym, że sworznie na żadnym etapie obciążenia nie wkraczają w ten obszar, a jego wprowadzenie do modelu, pomimo że nie nastręcza żadnych trudności, pośrednio wydłuża niepotrzebnie obliczenia. Charakterystykę sworznia ścinanego opisano jako krzywą siła-poślizg otrzymaną z badań dla pojedynczego sworznia i pokazano na rys. 8.4.

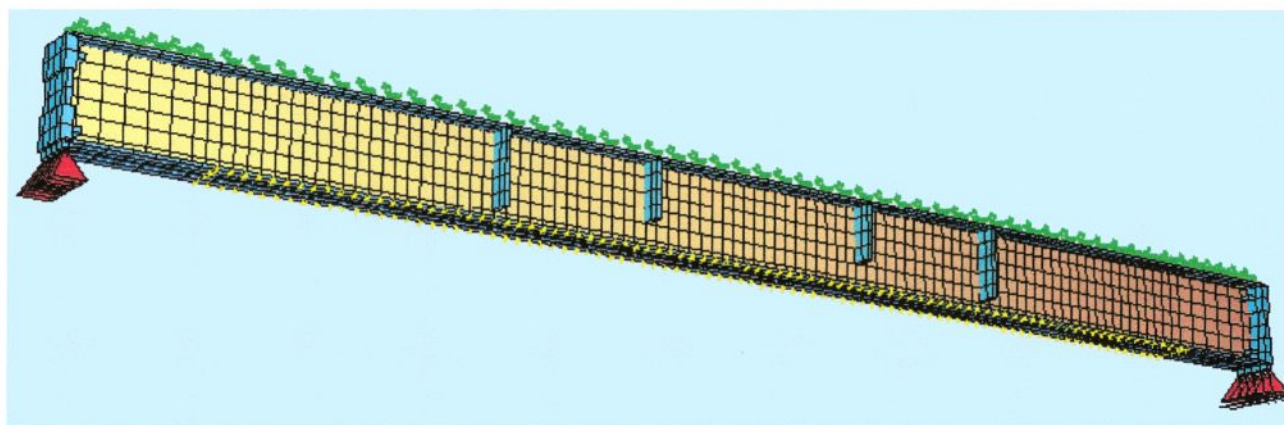


Rys. 8.4. Charakterystyka siła-poślizg dla sworznia

Po zdefiniowaniu odpowiednich charakterystyk materiałowych przystąpiono do modelowania konstrukcji.

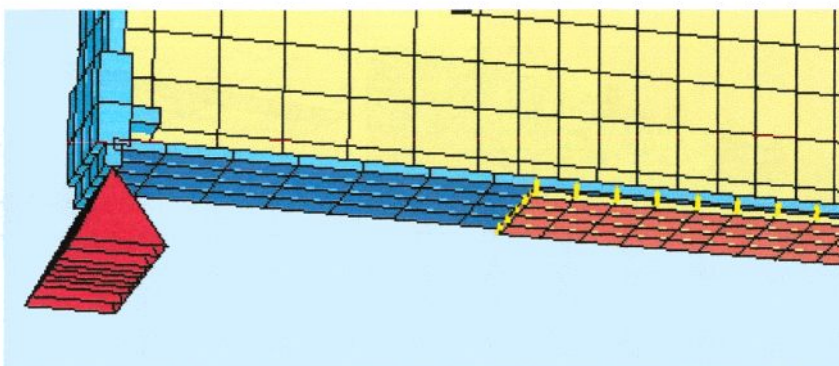
8.2.3. Model dyskretny – wariant 1

Konstrukcję opisano tak, aby geometria modelu była jak najbardziej zbliżona do rzeczywistej konstrukcji. W pierwszej kolejności wygenerowano model belki stalowej (bez nakładki). Tę część modelu tworzą w całości elementy powłokowe. Środek i pasy modelują odpowiednio materiały nr 1 i 2, natomiast żebra materiał nr 5 – jest to podyktowane uniknięciem lokalnych niestabilności na skutek przyłożenia punktowych sił w miejscach sprężenia a ponadto z założenia (i jak pokazały badania) elementy te nie wchodzi w zakres plastyczny. Wszystkie grubości elementów odpowiadają rzeczywistym grubościom konstrukcji i przyjętym w programie PRESTCOMP. Siatkę elementów przyjęto tak, aby możliwe było następnie odpowiednie umiejscowienie elementów modelujących sworznie i połączeń sztywnych z nakładką.



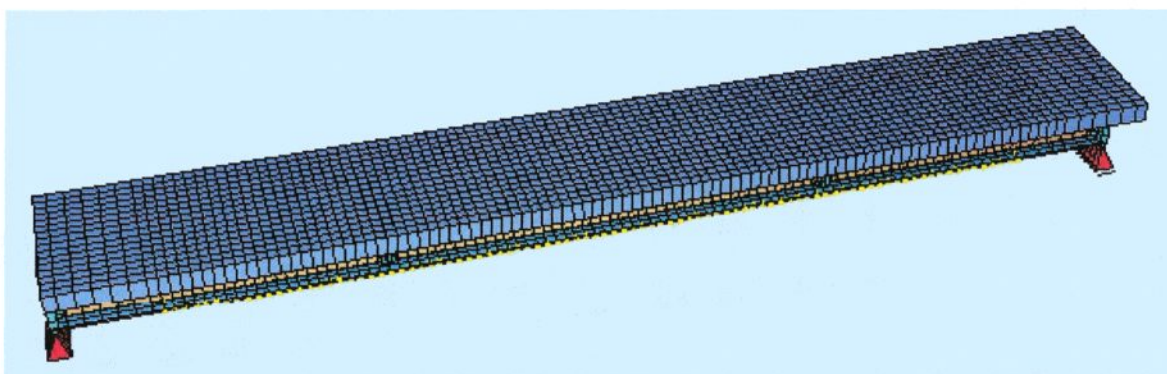
Rys. 8.5. Krok 1 - model belki stalowej (wizualizacja grubości elementów powłokowych)

Następnie zamodelowano nakładkę pod pasem dolnym przypisując jej materiał nr 3. Spoinę łączącą nakładkę z pasem zamodelowano poprzez wprowadzenie elementów nieskończenie sztywnych (widoczne na żółto na rys 8.5.). Rozwiązanie takie wprawdzie rozszerza szerokość półpasma macierzy sztywności i tym samym objętość pamięci jaką zajmuje macierz, jednakże przy wykorzystaniu komputera o odpowiedniej mocy obliczeniowej nie stanowi to problemu, a wiernie odwzorowuje rzeczywistą konstrukcję. Alternatywnie rozważano zamodelowanie pasa wraz z nakładką elementami powłokowymi warstwowymi [125], rozwiązanie to jednak byłoby kłopotliwe ze względu na zmienną szerokość nakładki i konieczność przesunięcia osi ciężkości elementów w dół.



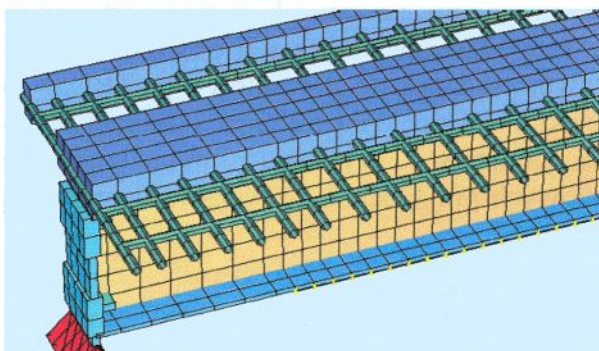
Rys. 8.6. Krok 2 - Model belki stalowej po dodaniu nakładki

Kolejnym krokiem było wygenerowanie elementów powłokowych modelujących płytę betonową, elementom tym przypisano materiał nr 6.



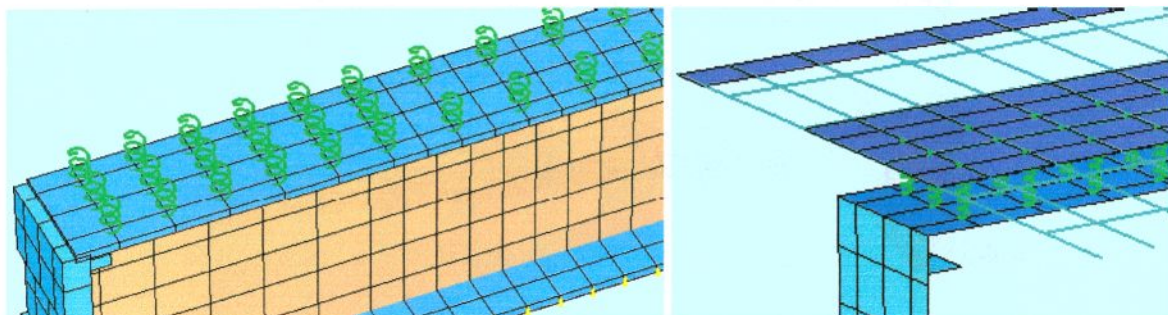
Rys. 8.7. Krok 3 - Model belki stalowej po dodaniu płyty betonowej

Zbrojenie płyty zamodelowano elementami typu TRUSS, zastępując odpowiednie pręty górne i dolne pojedynczymi elementami leżącymi w osi płyty i połączonymi z nią w węzłach. W planie układ zbrojenia odpowiada rzeczywistemu, pole przekroju pojedynczego elementu odpowiada polu przekroju dwóch prętów $\varnothing 8$ mm. Elementom przypisano charakterystykę materiałową odpowiadającą materiałowi nr 4.



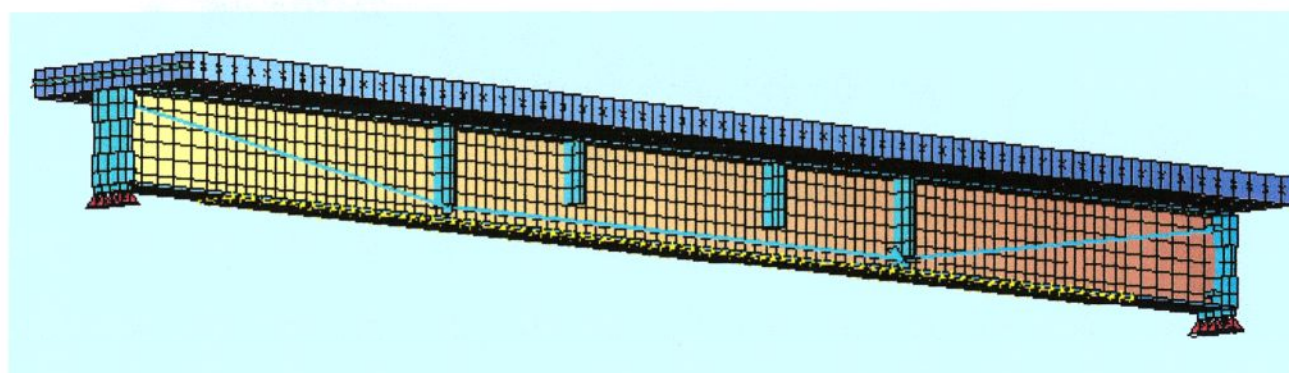
Rys. 8.8. Krok 4 – elementy typu TRUSS „wplecione” w płytę

Następnie wygenerowano elementy modelujące zespolenie. Każdy sworzeń zamodelowano elementem typu SPRING, położenie elementów odpowiada położeniu sworzni (3 rzędy przy podporach, dwa w przęśle). Elementom tym przypisano zdefiniowane wcześniej zależności nieliniowe opisujące zachowanie się zespolenia (materiał nr 7).



Rys. 8.9. Krok 5 – elementy typu SPRING „wplecione” w płytę, a) pokazane na belce stalowej z wizualizacją, b) pokazane w połączeniu z płytą

Ostatnim etapem było zamodelowanie kabli sprężających. Wykorzystano w tym celu elementy typu TRUSS, przypisano im materiał nr 5. Punkt kontaktu na dewiatorze umożliwia przesuw punktu zagięcia kabla na kierunku poziomym.



Rys. 8.10. Krok 6 – Kompletny model po dodaniu elementów modelujących kable sprężające

8.2.4. Obciążenia

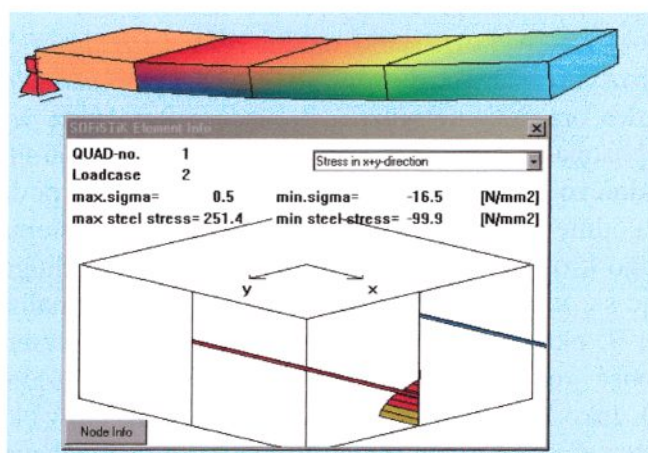
Sprężenie konstrukcji zamodelowano tak jak w przypadku modelu DA tj. wychodząc z energii ciągną z panującym w nim odkształceniem o wartości 0,005. Odpowiadającą temu odkształceniu wstępną siłę sprężającą wprowadzono do elementów typu TRUSS modelujących kable. Algorytm rozwiązania problemu belki obciążonej siłą sprężającą jest taki sam w przypadku modelu DA i MES, jako że w obu przypadkach mamy do czynienia z minimalizacją energii potencjalnej układu. Obciążenia w postaci sił pionowych przykładano do węzłów elementów pasa górnego belki stalowej nad żebrami.

8.2.5. Wnioski z obliczeń dla wariantu nr 1

Zbudowany model dobrze odzwierciedlał pracę konstrukcji w obszarze sprężystym, jednak występowały pewne trudności związane z uwzględnieniem uplastycznienia w elementach modelujących zbrojenie. Zdecydowano się również uwzględnić w inny sposób poślizg kabli na dewiatorach. Z tego powodu zdecydowano się wprowadzić zmiany do modelu, celem wierniejszego zamodelowania kabli i zbrojenia w płycie.

8.2.6. Model dyskretny – wariant 2

Po wykonaniu obliczeń i przeanalizowaniu wyników zdecydowano się wprowadzić do modelu modyfikacje. Zrezygnowano z elementów typu TRUSS modelujących zbrojenie. Zamiast nich zastosowano dla płyty betonowej elementy powłokowe „z wbudowanym zbrojeniem”, tj. elementy warstwowe złożone z dwóch materiałów, modelujących beton i stal [125]. W elemencie uwzględnione jest odpowiednie położenie w dwóch warstwach prętów zbrojenia podłużnego i poprzecznego oraz ich średnice. Podejście takie nie zmniejsza wprawdzie liczby równań w układzie, ale lepiej odzwierciedla rzeczywistą pracę konstrukcji. Dla obu materiałów uwzględnionych w elemencie zastosowano charakterystyki nieliniowe. Aby przedstawić możliwości obliczeniowe (analiza z głębokim zarysowaniem elementu) i opis zachowania się takiego elementu pod obciążeniem, pokazano przykład belki wspornikowej zamodelowanej czterema elementami i obciążonej na końcu siłą pionową ku górze. Wykres naprężeń w modelu i w elemencie zaznaczonym na pomarańczowo pokazano na rys. 8.11. (dolna powierzchnia wspornika jest górną powierzchnią przedstawionego poniżej elementu – tak dobrano lokalny układ współrzędnych). Wyraźnie widoczne jest zarysowanie elementu, naprężenia w zbrojeniu ściskanim i rozciąganiem oraz nieliniowy układ naprężeń w strefie ściskanej.



Rys. 8.11. Układ naprężeń od zginania w powłokowym elemencie czterowarstwowym modelującym płytę żelbetową z dwoma warstwami zbrojenia

Wprowadzone procedury umożliwiają uwzględnienie niesprężystej pracy elementu żelbetowego przy obciążeniu cyklicznym. Przykładowo, po obciążeniu elementu powyżej granicy proporcjonalności dla danego materiału i odciążeniu w elemencie pozostaje układ zrównoważonych sił wewnętrznych w zbrojeniu i betonie oraz odkształcenia (przemieszczenia) trwałe.

Próbowano wprowadzać elementy typu SPRING o dużej sztywności w miejscach przyłożenia sił, co w praktyce sprowadza się do zmiany metody rozwiązywania równań nieliniowych z FC na DC [16], ale okazało się to zbędne. W rozpatrywanej konstrukcji nie ma opadającego fragmentu ŚRS; bez takiego podejścia zbieżność rozwiązania była zadowalająca.

Zastosowano także inne podejście do zamodelowania kabli. Zrezygnowano z elementów typu TRUSS oraz wahaczowego połączenia ich z belką. W to miejsce zastosowano elementy kablowe typu CABL. Zastosowano w modelu specjalną procedurę SLIP, umożliwiającą uwzględnienie poślizgu kabla w punkcie kontaktu na dewiatorze, w przypadku kabli odgiętych. Algorytm ten polega na wyrównaniu sił w trzech elementach tworzących jeden kabel wychodząc z zasady równości energii odkształcenia sprężystego całego kabla i sumy energii elementów tworzących. Sprężenie konstrukcji zamodelowano tak, aby metodycznie odpowiadało ono zamodelowaniu sprężenia w

programie PRESTCOMP. Ponieważ zarówno program PRESTCOMP jak i SOFiSTiK wykorzystują podejście energetyczne (zasada minimalizacji energii układu), założono, że wstępna energia sprężysta odkształcenia kabla (przed przekazaniem siły z kabli na belkę i rozwiązaniem układu) jest taka sama w obydwu przypadkach, i odpowiada odkształceniu kabla wynoszącemu 0,5%. Odpowiadająca temu siła w pojedynczym kablu wynosi 148,35 kN, co jest bliskie średniej sile z jaką sprężano kable belek. Po wprowadzeniu do modelu procedury SLIP, model sprężenia jest taki sam jak w programie PRESTCOMP. Bez uwzględniania nieliniowości geometrycznych podejście do rozwiązania problemu w obu przypadkach jest zatem takie samo.

Pozostałe elementy modelu pozostają bez zmian w stosunku do wariantu nr 1.

8.2.7. Parametry analizy

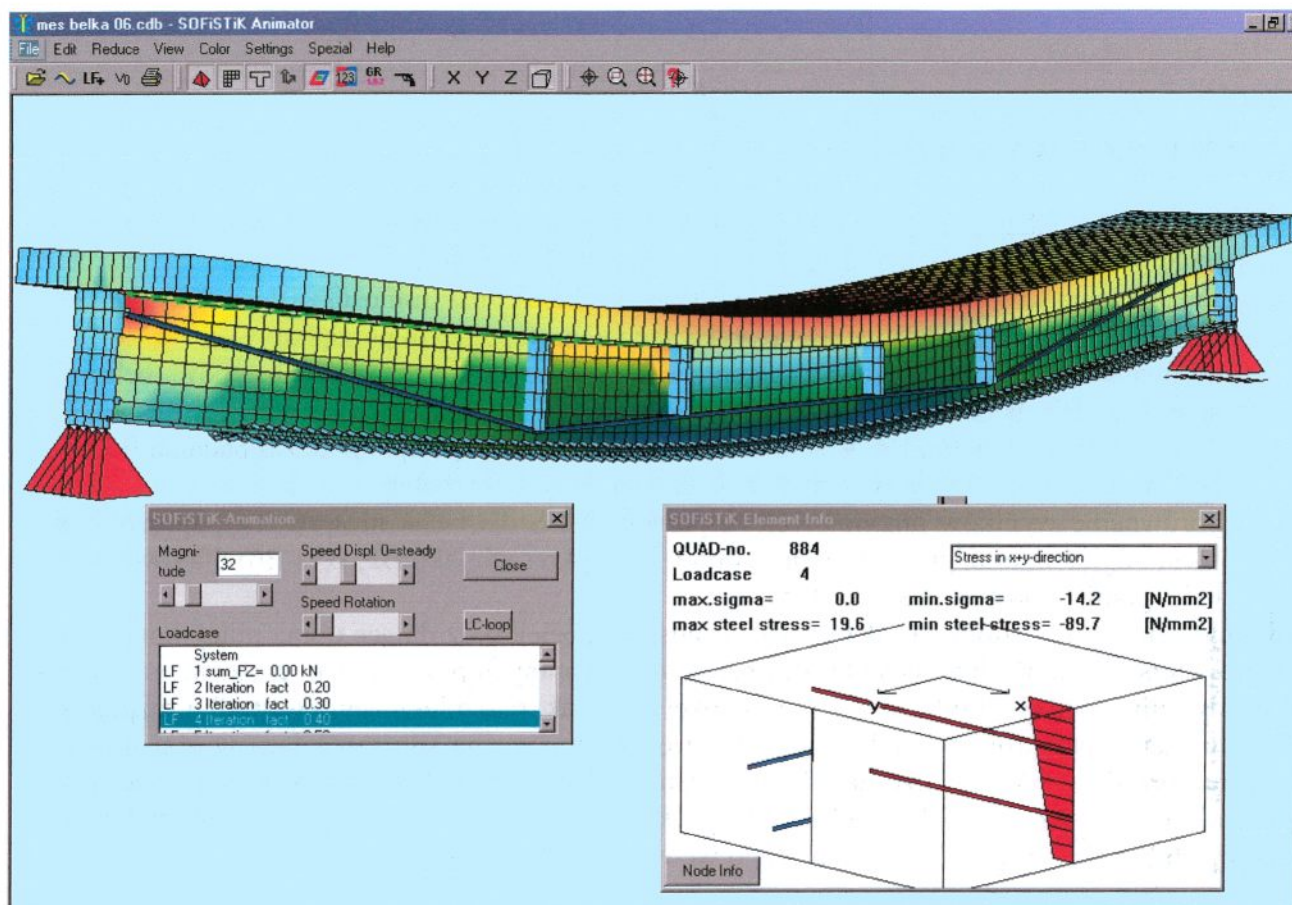
Jak w przypadku wszystkich programów MES, problem sprowadza się do iteracyjnego rozwiązania nieliniowego układu równań. O ile w przypadku programu PRESTCOMP wystarczyła klasyczna metoda Newtona-Raphsona (NR), o tyle w przypadku programu SOFiSTiK wykorzystywane są o wiele bardziej zaawansowane procedury [17].

Do rozwiązania problemu wykorzystano moduł ASE (*Advanced Solution Engine, VERSION: 11.47-21*). Metodą rozwiązania układu równań jest *Direct Gauss block solver*. Uwzględniano nieliniowości materiałowe oraz geometryczne. Procedura iteracyjna wykorzystuje zmodyfikowaną metodę Newtona-Raphsona (MNR) oraz technikę *Linesearch* z parametrami proponowanymi przez Crisfielda [17]. Zasadniczo styczna macierz sztywności jest stała podczas iteracji, jednak gdy zachodzi konieczność, to zgodnie z przyjętymi parametrami analizy następuje uaktualnienie tej macierzy podczas pojedynczego kroku. Przyjęto, że skalar f wyrażający długość kroku w procedurze *Linesearch* musi znajdować się w granicach od 0,25 do 4,00 a maksymalna wartość β_{ls} , zgodnie z nomenklaturą Crisfielda [17], określająca dokładność rozwiązania *Linesearch* wynosi 0,60. Użytkownik w ten sposób zbieżność rozwiązania jest zadowalająca, gdyż parametr ten jest mniejszy od sugerowanej wartości 0,80. Jako kryterium zbieżności przyjęto, że największy co do wartości bezwzględnej wyraz wektora rezyduala ma być mniejszy niż 0,001 największej siły węzłowej. Dodatkowo stosowano na całym etapie kontrolę zbieżności rozwiązania tj. wartości energii wewnętrznej układu (rozumianej tutaj jako suma odpowiednich iloczynów naprężeń i odkształceń w elementach w punktach Gaussa) oraz wartości rezyduala (rozumianego tutaj jako wektor sił resztkowych).

Siłę pionową przykładano w krokach podobnie jak w przypadku modelu DA. Krok obciążenia jest zmienny; na początku wynosi dla jednej siły 100 kN, a w końcowej fazie obciążania belki, gdy pracuje ona już w fazie sprężysto-plastycznej, wartość kroku obciążenia wynosi 10 kN.

Na rys. 8.12. pokazano okno podprogramu z pakietu SOFiSTiK wraz z modelem dyskretnym belki; pokazano belkę z kablami odgiętymi pod zadaniem obciążeniem pionowym oraz układ naprężeń w wybranym elemencie płyty w przęśle, skala deformacji jest skażona.

Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych
sprężanych kablami zewnętrznymi



Rys. 8.12. Okno podprogramu ANIMATOR programu SOFiSTiK, model belki pod obciążeniem

9. ANALIZA WYNIKÓW

Dokonano analizy porównawczej wyników otrzymanych z badań eksperymentalnych oraz otrzymanych teoretycznie dwiema niezależnymi metodami DA i MES.

Celem wyciągnięcia wniosków odnośnie zachowania się belek oraz trafności zastosowanych modeli teoretycznych, wyniki przedstawiono na wykresach w następującym porządku:

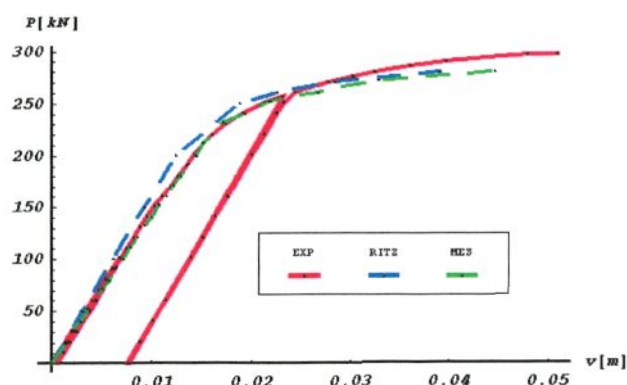
- porównanie wyników z badań i teoretycznych dla belek poszczególnych typów (belki niesprężonej B2, belki sprężonej kablem odgiętym B3 i prostym B6), wybrano te belki ze względu na słaby beton B4, wstępne obciążenie B1 i awarię prądu podczas badania B5.
- porównanie wyników otrzymanych z badań dla wszystkich belek,
- porównanie wyników otrzymanych za pomocą MES dla belek niesprężonej, sprężonej kablem odgiętym oraz prostym (oznaczono je na wykresach jako B2, B3 i B6) dla dwóch wartości granicy plastyczności nakładki.

Porównywano wyniki istotne, tj. decydujące o nośności belek oraz dające obraz pracy konstrukcji. Przedstawiono zatem poślizg na styku stal-beton, dla wybranych poziomów obciążenia oraz wartości w odwrotnej funkcji przyłożonej siły pionowej takie jak: przemieszczenie w środku rozpiętości, odkształcenia w przekroju w środku rozpiętości oraz sumaryczną siłę sprężającą w obu splotach. Następnie przedstawiono analizę układu naprężeń w środku rozpiętości dla belki sprężonej i niesprężonej oraz analizę zjawiska nagłej zmiany układu naprężeń w półce górnej belki stalowej w przekrojach $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$ rozpiętości, występującego we wszystkich belkach sprężonych.

9.1. PORÓWNANIE WYNIKÓW TEORETYCZNYCH I DOŚWIADCZALNYCH DLA WYBRANYCH BELEK

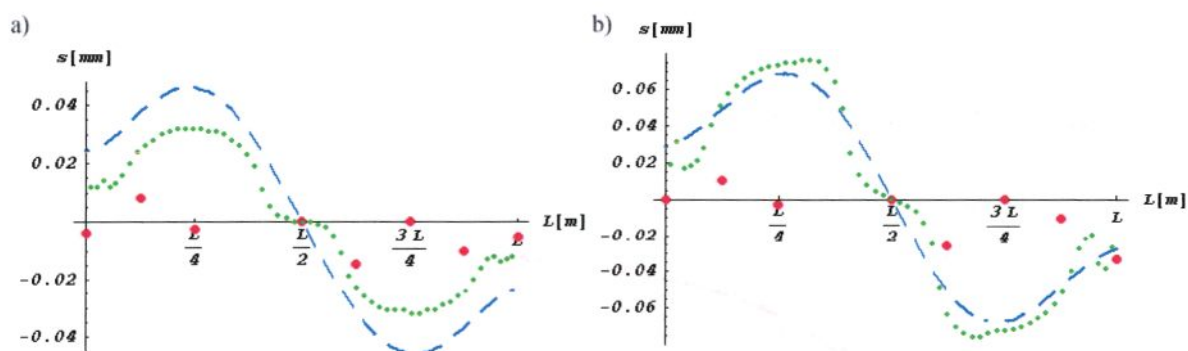
Wartości otrzymane z eksperymentu oznaczono kolorem czerwonym, wartości otrzymane z programu PRESTCOMP kolorem niebieskim a otrzymane za pomocą MES kolorem zielonym. Zastosowano odpowiednie indeksy EXP, RITZ i MES.

9.1.1. Belka B2 niesprężona

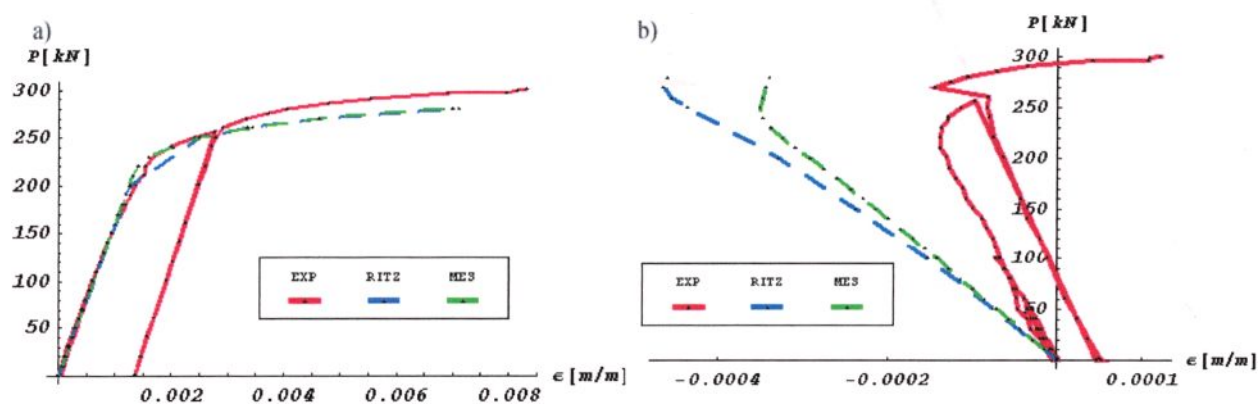


Rys. 9.1. ŚRS – przemieszczenie pionowe w środku rozpiętości

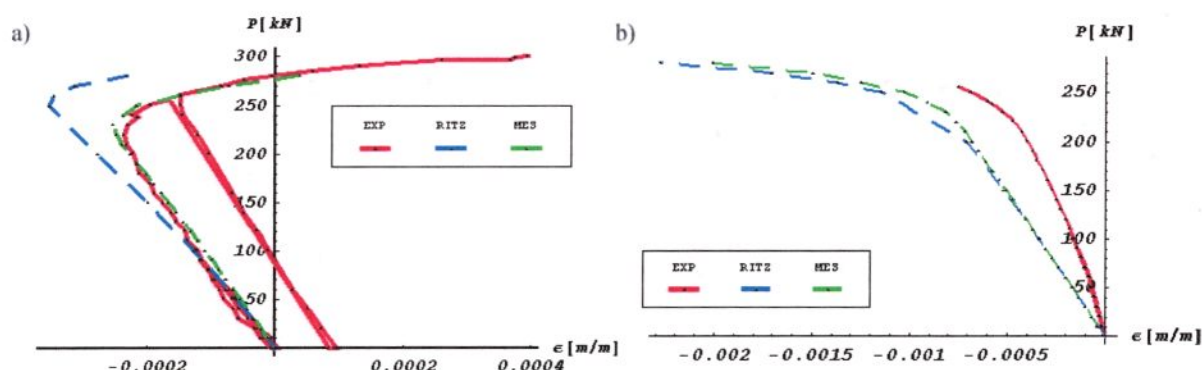
Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych sprężanych kablami zewnętrznymi



Rys. 9.2. Poślizg wzdłuż belki odpowiednio dla a) $P = 200$ kN, i b) $P = 250$ kN



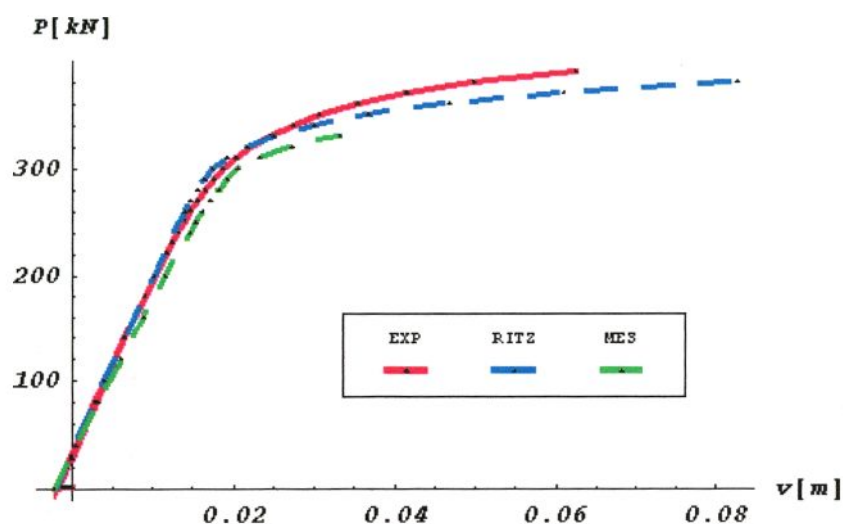
Rys. 9.3. Odkształcenia odpowiednio w a) nakładce i b) pasie górnym belki stalowej



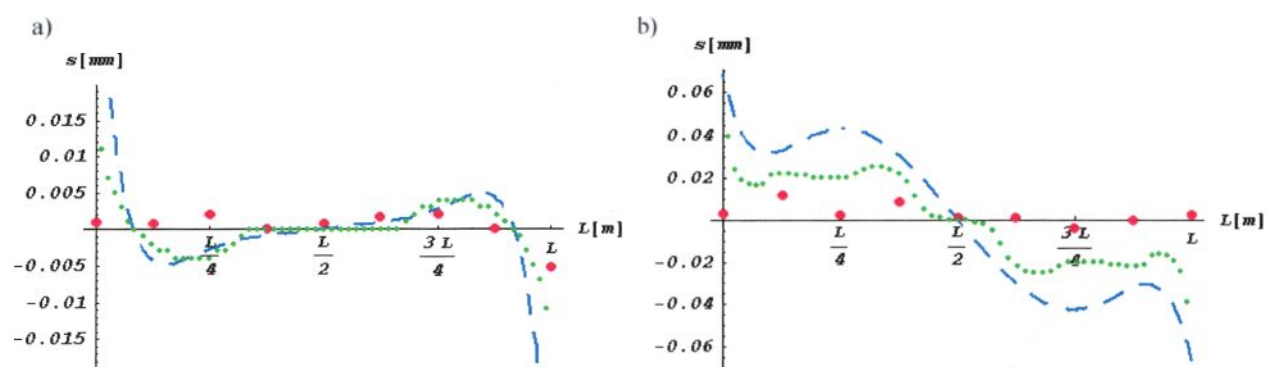
Rys. 9.4. Odkształcenia odpowiednio na a) spodzie i b) górze płyty betonowej

Załamanie krzywych przedstawiających wyniki otrzymane metodą DA (niebieska krzywa) związane jest z przyjętym krokiem obciążenia; kolejnymi wartościami były 200 i 250 kN a linia prosta jest tylko liniową interpolacją pomiędzy punktami.

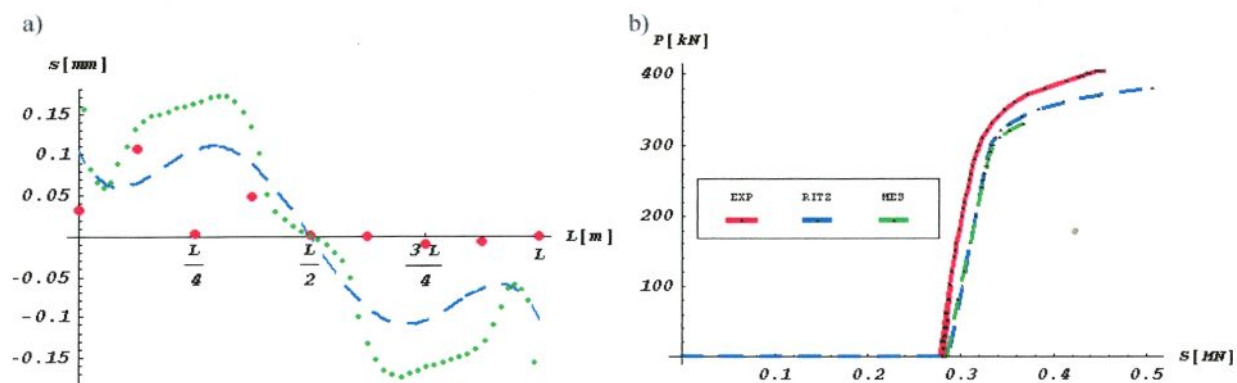
9.1.2. Belka B3 sprężona kablem odgiętym



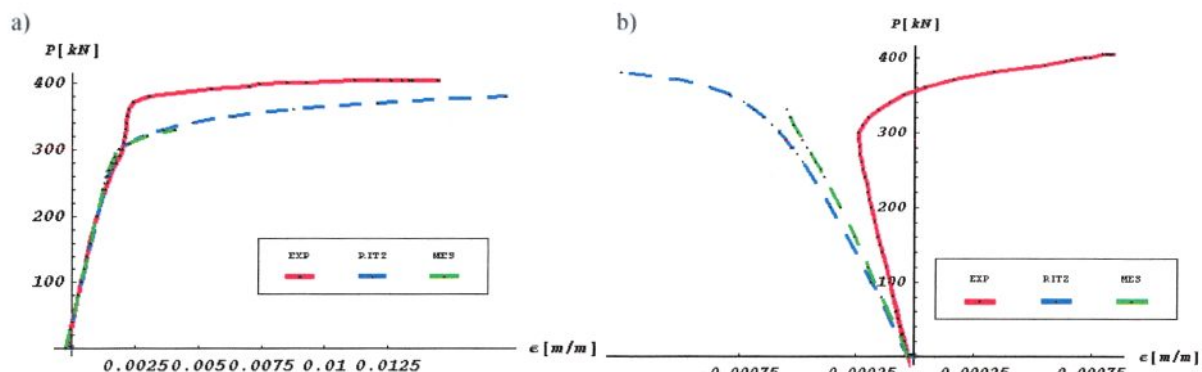
Rys. 9.5. ŚRS – przemieszczenie pionowe w środku rozpiętości



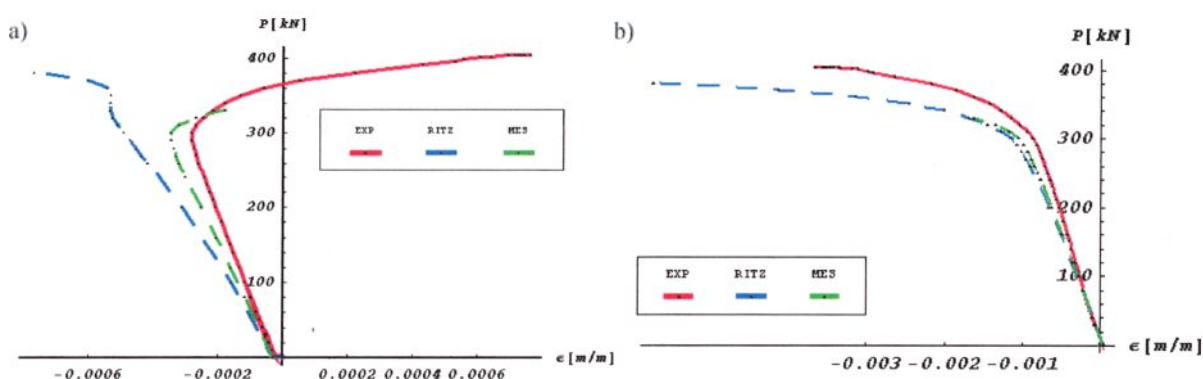
Rys. 9.6. Poślizg wzdłuż belki odpowiednio dla a) sprężenia i b) $P = 200$ kN



Rys. 9.7. a) Poślizg wzdłuż belki dla $P = 300$ kN i b) siła w kablach

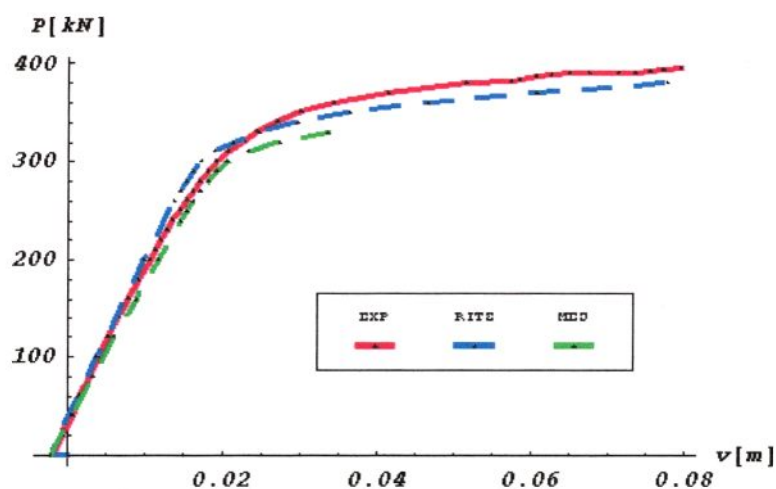


Rys. 9.8. Odształcenia odpowiednio w a) nakładce i b) pasie górnym belki stalowej



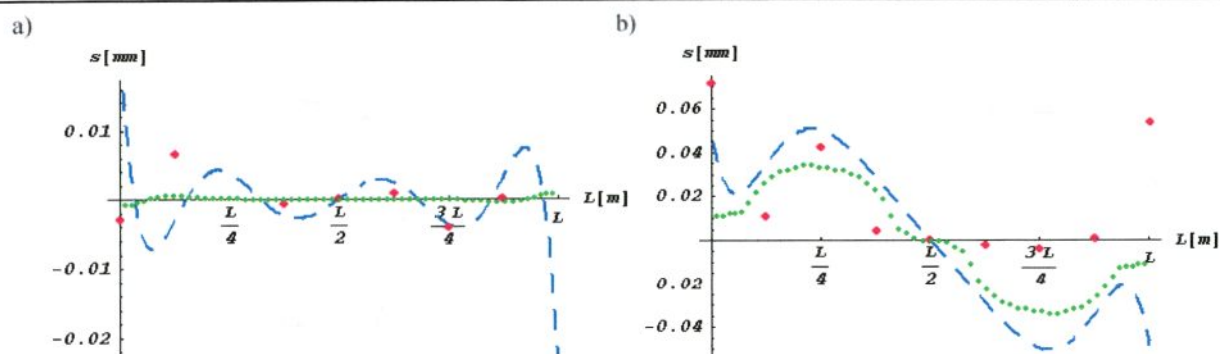
Rys. 9.10. Odształcenia odpowiednio na a) spodzie i b) górze płyty betonowej

9.1.3. Belka B6 sprężona kablem prostym

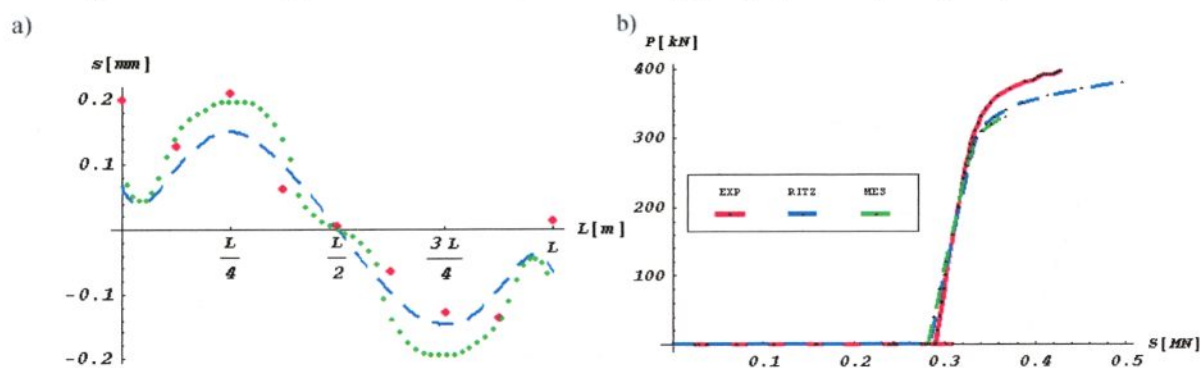


Rys. 9.11. ŚRS – przemieszczenie pionowe w środku rozpiętości

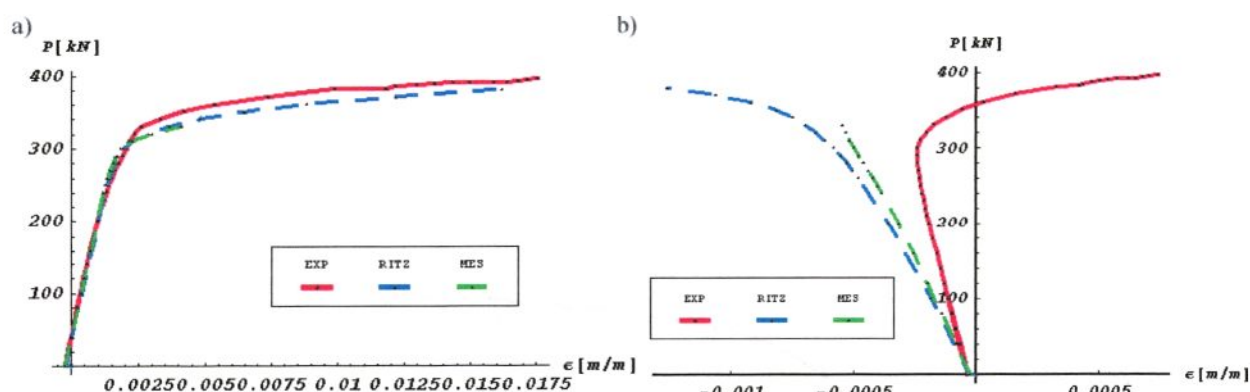
Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych sprężanych kablami zewnętrznymi



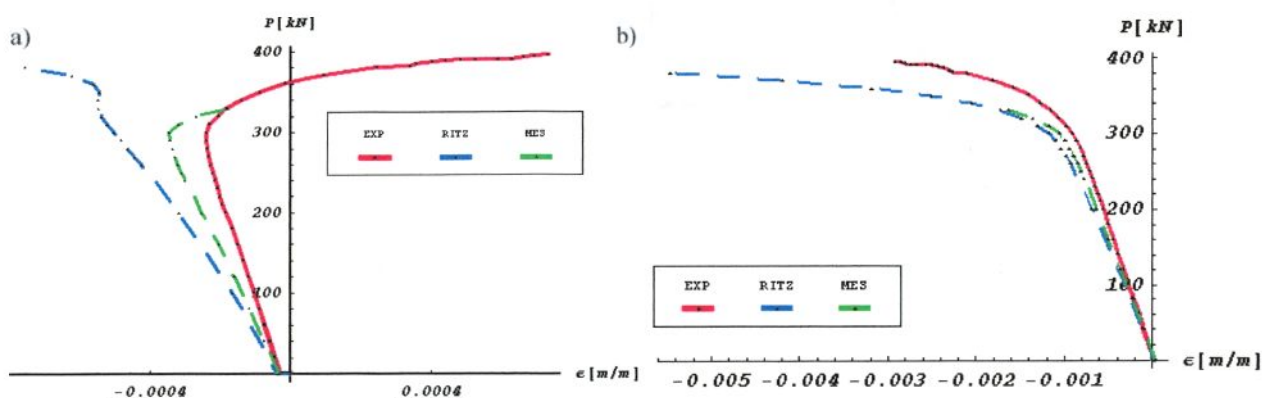
Rys. 9.12. Poślizg wzdłuż belki odpowiednio a) po sprężeniu ($P = 0$) i b) dla $P = 200$ kN



Rys. 9.13. a) Poślizg wzdłuż belki dla $P = 330$ kN i b) siła w kablach



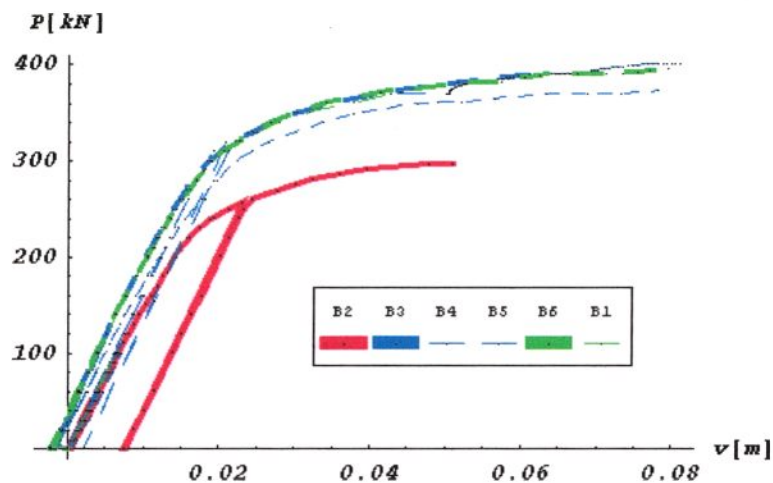
Rys. 9.14. Odkształcenia odpowiednio a) w nakładce i b) pasie górnym belki stalowej



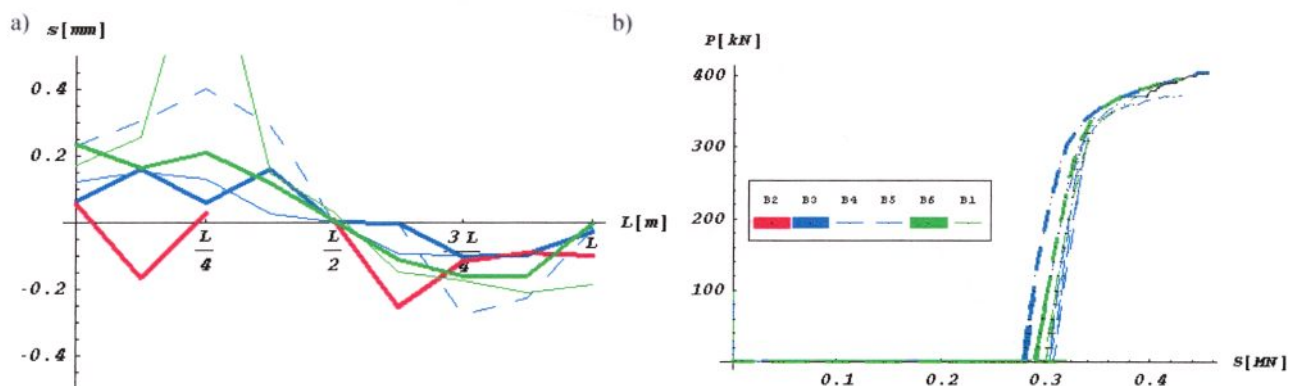
Rys. 9.15. Odkształcenia odpowiednio a) spodzie i b) górze płyty betonowej

9.2. PORÓWNANIE WYBRANYCH WYNIKÓW DOŚWIADCZALNYCH BELEK B2, B3 I B6

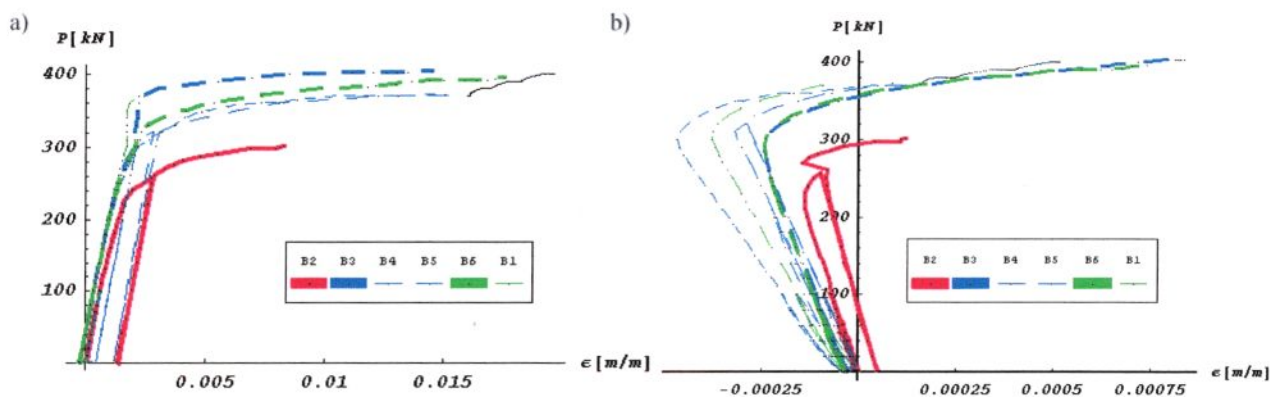
Przedstawiono wyniki eksperymentalne dla belek B2, B3 i B6. Na poszczególnych wykresach zestawiono odpowiednie wyniki dla belki niesprężonej (kolor czerwony), sprężonej kablem odgiętym (kolor niebieski) oraz kablem prostym (kolor zielony).



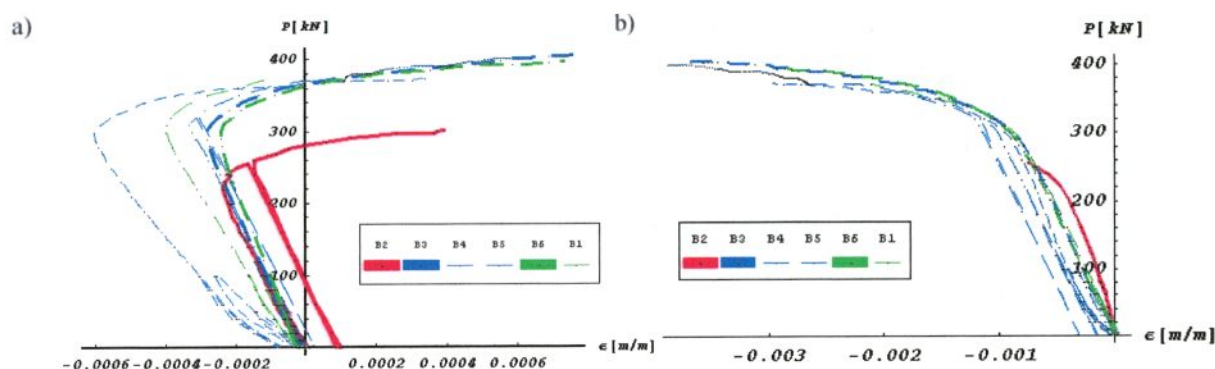
Rys. 9.16. ŚRS – przemieszczenie pionowe w środku rozpiętości



Rys. 9.17. a) Poślizg wzdłuż belki dla $P = 360$ kN i b) siła w kablach



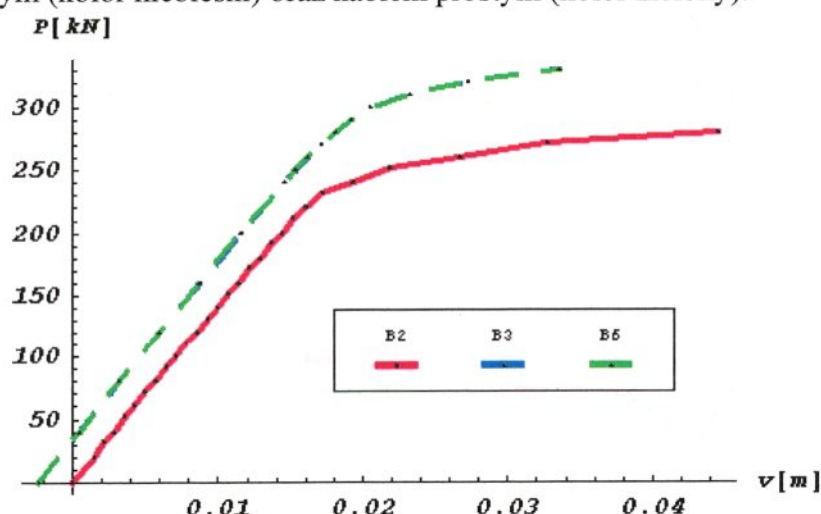
Rys. 9.18. Odształcenia odpowiednio w a) nakładce i b) pasie górnym belki stalowej



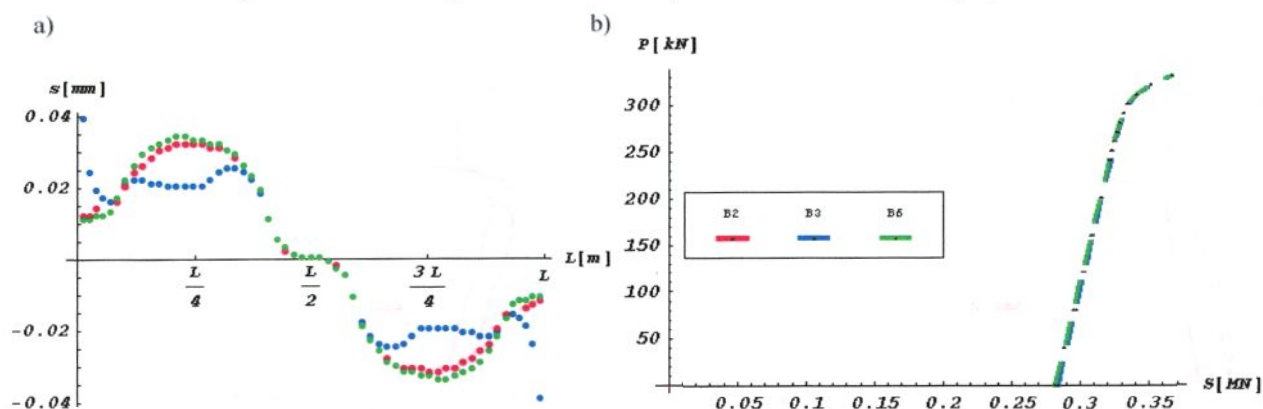
Rys. 9.19. Odształcenia odpowiednio na a) spodzie i b) górze płyty betonowej

9.3. PORÓWNANIE WYBRANYCH WYNIKÓW ANALIZ NUMERYCZNYCH BELEK B2, B3 I B6

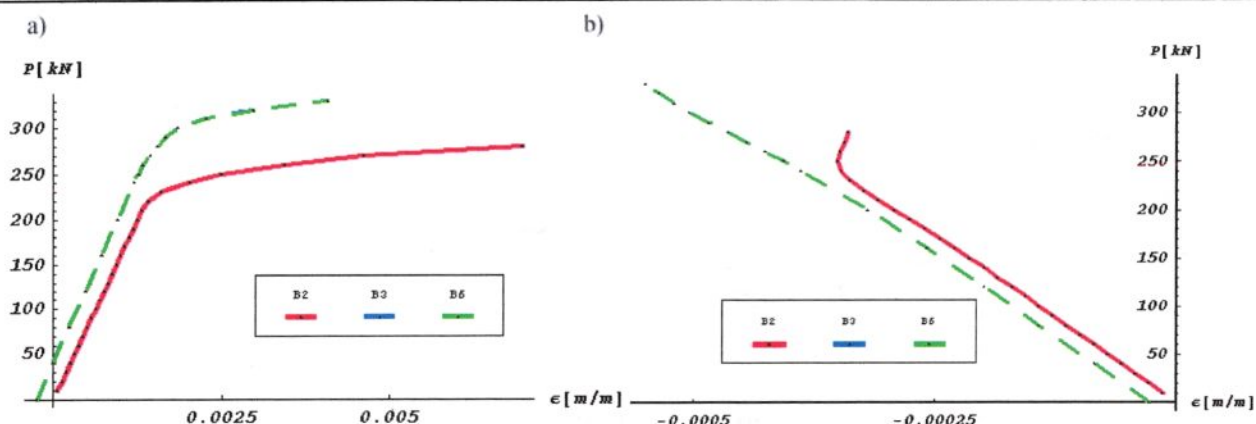
Przedstawiono wyniki otrzymane za pomocą MES dla belek B2, B3 i B6. Na poszczególnych wykresach zestawiono odpowiednie wyniki dla belki niesprężonej (kolor czerwony), sprężonej kablem odgiętym (kolor niebieski) oraz kablem prostym (kolor zielony).



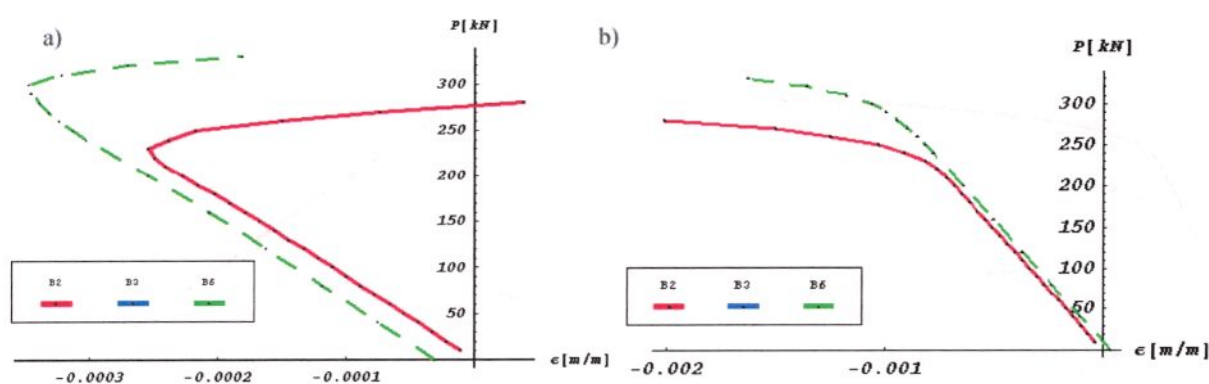
Rys. 9.20. ŚRS – przemieszczenie pionowe w środku rozpiętości

Rys. 9.21. a) Poślizg wzdłuż belki dla $P = 200$ kN i b) siła w kablach

Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych sprężanych kablami zewnętrznymi

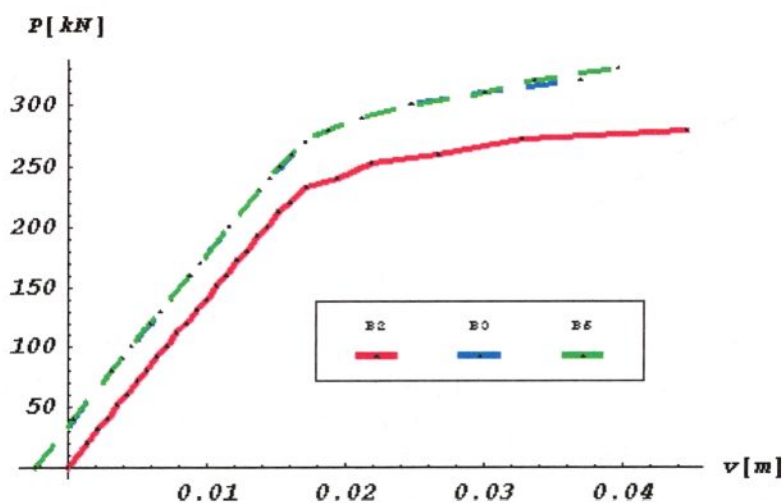


Rys. 9.22. Odształcenia odpowiednio w a) nakładce i b) pasie górnym belki stalowej

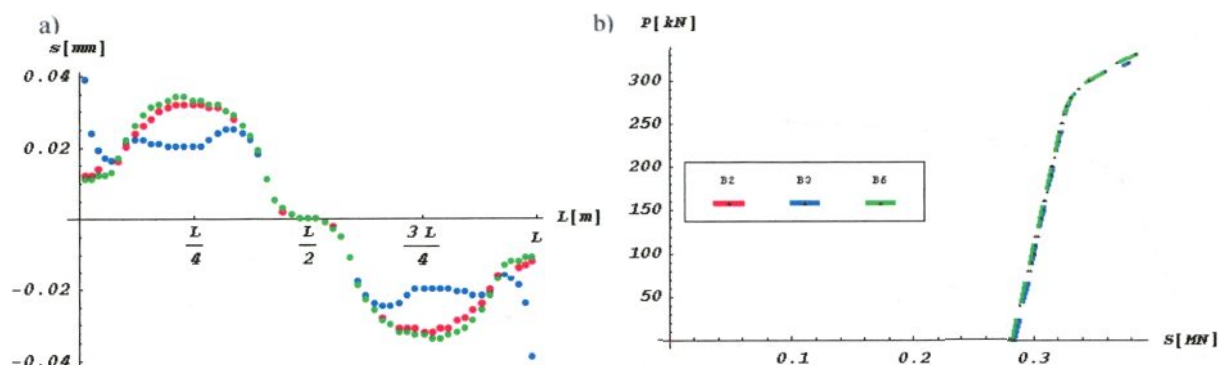


Rys. 9.23. Odształcenia odpowiednio na a) spodzie i b) górze płyty betonowej

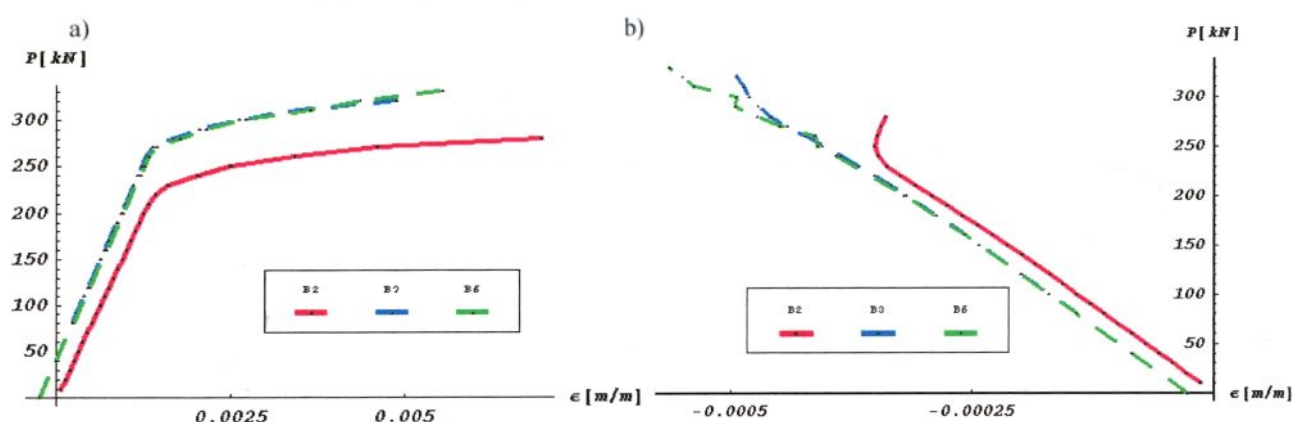
Poza poślizgiem nie istnieje różnica (w odniesieniu do prezentowanych wielkości) w zachowaniu się belek sprężonych kablem prostym i odgiętym. Ponieważ istnieje różnica w wytrzymałości nakładki dla belki B2 i pozostałych belek (sprężonych), porównano również wyniki otrzymane za pomocą MES dla modelu belki B2 i belek sprężonych, ale z parametrami nakładki jak belka B2.



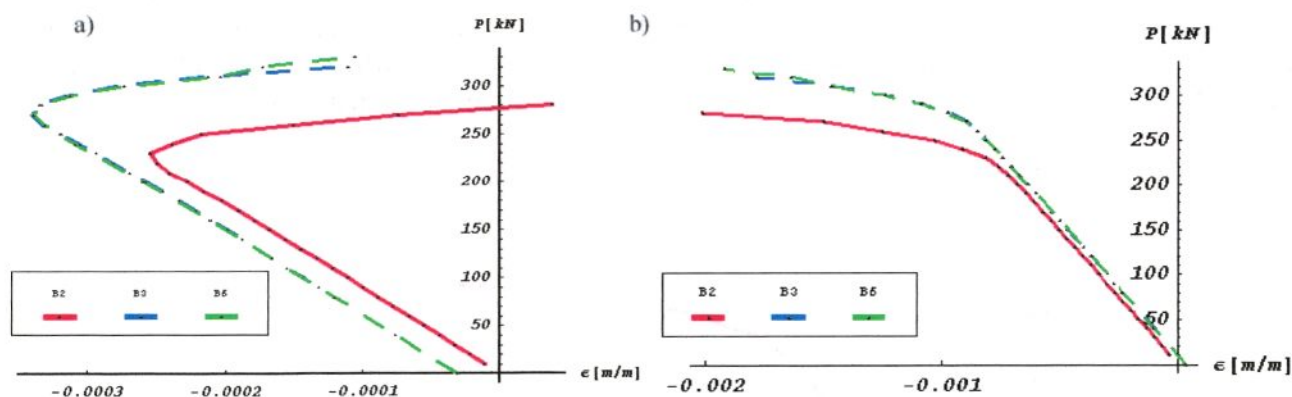
Rys. 9.24. ŚRS – przemieszczenie pionowe w środku rozpiętości



Rys. 9.25. a) Poślizg wzdłuż belki dla $P = 200$ kN i b) siła w kablach



Rys. 9.26. Odkształcenia odpowiednio w a) nakładce i b) pasie górnym belki stalowej



Rys. 9.27. Odkształcenia odpowiednio na a) spodzie i b) górze płyty betonowej

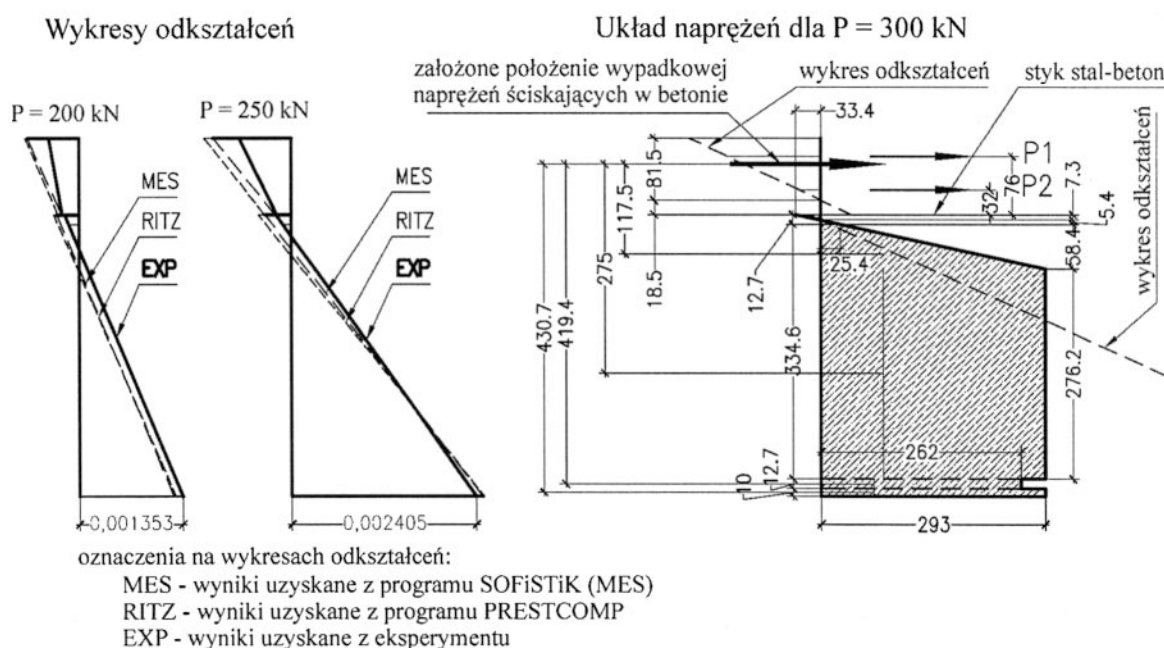
Największe różnice pomiędzy wynikami z eksperymentu a teoretycznymi występują w poślizgu na styku stal-beton i odkształceniach w pasie górnym belki stalowej. Należy to tłumaczyć zjawiskiem przyczepności stali do betonu w zespoleniu. Zjawiska tego nie uwzględniano w charakterystyce zespolenia (wy tłumaczenie w p. 9.5.), a w zakresie obciążeń małych znacząco zwiększa ono sztywność zespolenia na ścinanie. Efektem tego jest znaczna rozbieżność pomiędzy wynikami eksperymentu a teoretycznymi dla małych wartości obciążenia, podczas gdy w zakresie obciążeń dużych zbieżność jest zadowalająca (por. rys. 9.12.a a 9.13.a). Niezgodności w odkształceniach w półce górnej belki stalowej oraz na spodzie płyty betonowej są pochodną tego zjawiska (większy poślizg – większe ściskanie w zakresie sprężystym w górnej półce belki stalowej).

9.4. ANALIZA UKŁADU NAPRĘŻEŃ W ŚRODKU ROZPIĘTOŚCI BELEK

Dokonano porównania belki niesprężonej B2 oraz belki sprężonej na przykładzie belki B6 (pozostałe belki zachowują się podobnie). Rozpatrywano przekrój środkowy jako decydujący o nośności konstrukcji.

9.4.1. Rozkład naprężeń i odkształceń w przekroju środkowym belki B2

Rozpatrywano belkę przy obciążeniu 200 kN (sprężysta faza pracy), 250 kN (sprężysto-plastyczna faza pracy) oraz przy maksymalnym obciążeniu, tj. 300 kN, (ale nie tuż przed zniszczeniem, lecz osiągniętym po raz pierwszy). Na rysunku pokazano rozkład odkształceń z badań i wyniki teoretyczne oraz układ naprężeń w elementach stalowych dla maksymalnego obciążenia (na podstawie badanych próbek stali konstrukcji). Wymiary geometryczne podano w mm a naprężenia w MPa.



Rys. 9.28. Rozkład odkształceń i naprężeń w przekroju środkowym belki niesprężonej

Sprawdzono równowagę sił wewnętrznych w przekroju i sił zewnętrznych. Siła rozciągająca w elementach modelowych belki stalowej wynosi:

$$\begin{aligned}
 F_I &= 293 \times 0,15 \times 0,01 + 262 \times 0,17 \times 0,0127 + 293 \times 0,2762 \times 0,00845 + (293 + 25,4) \times 0,05848 \times 0,00845 / 2 \\
 &\quad + 25,4 \times 0,17 \times 0,0054 / 2 - 33,4 \times 0,17 \times 0,0073 / 2 = \\
 &= 0,4395 + 0,5657 + 0,6830 + 0,0787 + 0,0117 - 0,0207 = 1,758 \text{ MN}
 \end{aligned}$$

Dodatkowo występują wyokrąglenia przy półce dolnej i podobnym przy górnej i spoina łącząca nakładkę z pasem. Wstępnie pominięto, podobnie jak wpływ betonu rozciąganego (zarysowanie).

Siły w zbrojeniu górnym i dolnym wyznaczone na podstawie odkształceń betonu i założeniu prawa płaskiego przekroju dla płyty mają wartości:

$$P_1 = \varepsilon \times E \times A = 12,7 \times 10^{-4} \times 207 \times 10^3 \times (5 \times 0,503 \times 10^{-4}) = -0,063 \text{ MN}$$

$$P_2 = \varepsilon \times E \times A = 3,34 \times 10^{-4} \times 207 \times 10^3 \times (5 \times 0,503 \times 10^{-4}) = -0,017 \text{ MN}$$

Rzeczywisty rozkład naprężeń w betonie nie jest znany. Wiadomo, że wypadkowa mieści się w przedziale 0,5 do 0,66 wysokości strefy ściskanej (rozkład prostokątny, rozkład trójkątny). Przyjęto wartość średnią 0,58; scałkowano, z pominięciem strefy rozciąganej betonu, gdzie pojawiły się rysy. Przy założeniu pełnego przekroju płyty (bez odejmowania przekroju zbrojenia) i naprężeń f_{ck} na całej wysokości strefy ściskanej, wypadkowa naprężeń ściskających w betonie ma wartość:

$$W_{B1} = A \times f_{ck} = -0,08 \times 0,8 \times 31,7 = -2,029 \text{ MN}$$

Dla rozkładu trójkątnego wypadkowa naprężeń ściskających w betonie ma wartość:

$$W_{B2} = A \times f_{ck} / 2 = -0,08 \times 0,8 \times 31,7 / 2 = -1,014 \text{ MN}.$$

Z warunku równowagi sił w przekroju otrzymuje się wartość wypadkowej:

$$W_B = 1,758 - 0,063 - 0,0117 = 1,683 \text{ MN}$$

Wartość ta, zgodnie z oczekiwaniami znajduje się w wyznaczonym przedziale, można uznać ją za poprawną. Przyjmując położenie wypadkowej w 0,58 wysokości strefy ściskanej wyznaczono moment wewnętrzny w przekroju względem tego punktu (siły z elementów stalowych – jasno określone). Pominięto wpływ momentu z półki górnej oraz z dolnego i górnego zbrojenia jako niewielkie.

$$M_{W0} = 0,4395 \times 0,4307 + 0,5657 \times 0,4194 + 0,6830 \times 0,275 + 0,0787 \times 0,115 = \mathbf{0,623 \text{ MNm}}$$

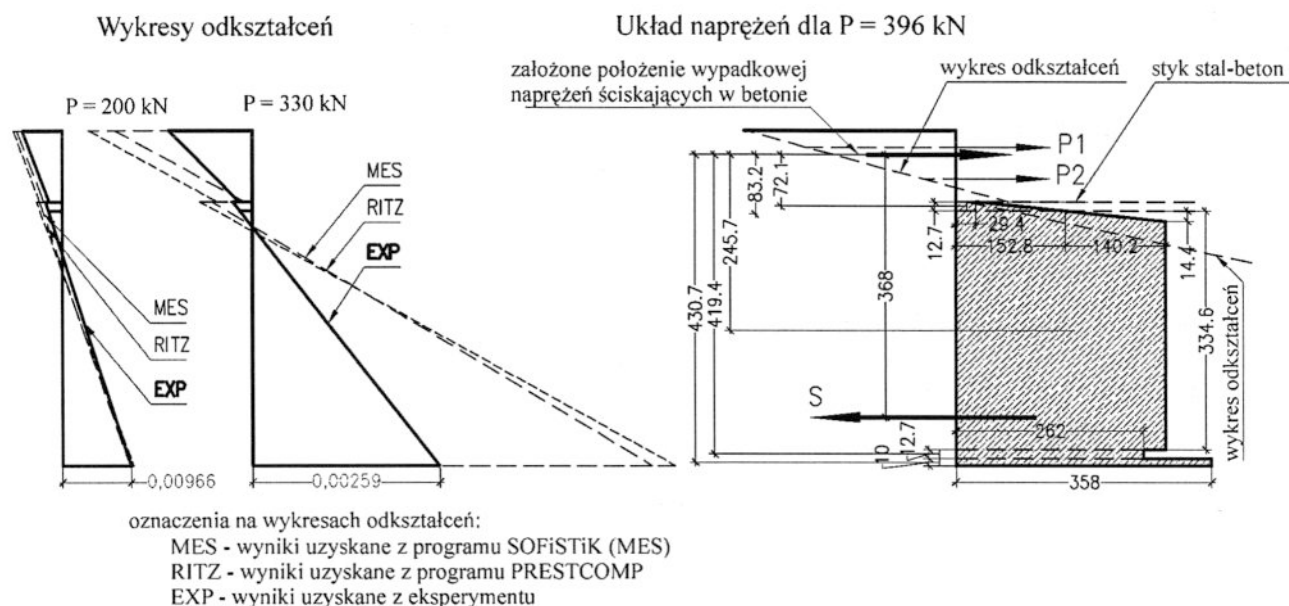
Moment od sił zewnętrznych wynosi:

$$M_Z = 0,300 \times 2,262 = \mathbf{0,679 \text{ MNm}}.$$

Po uwzględnieniu wpływu czynników nieuwzględnionych (wyokraglenia, spoina, beton rozciągany) otrzymuje się zwiększenie wartości M_{W0} o około 0,038 MN. Wartości M_W i M_Z są zatem bardzo zbliżone.

9.4.2. Rozkład naprężeń i odkształceń w przekroju środkowym belki B6

Rozpatrywano belkę przy obciążeniu 200 kN (sprężysta faza pracy), 330 kN (sprężysto-plastyczna faza pracy w dalszej fazie) oraz przy maksymalnym obciążeniu, tj. 396 kN, w chwili zniszczenia. Na rysunku 9.29. pokazano rozkład odkształceń z badań i teoretyczne oraz układ naprężeń w elementach stalowych dla maksymalnego obciążenia (na podstawie badanych próbek stali konstrukcji).



Rys. 9.29. Rozkład odkształceń i naprężeń w przekroju środkowym belki sprężonej

Siła rozciągająca w elementach belki stalowej wynosi:

$$F_I = 358 \times 0,15 \times 0,01 + 262 \times 0,17 \times 0,0127 + 293 \times 0,3346 \times 0,00845 - 140,2 \times 0,0144 \times 0,00845/2 + \\ + (29,4 + 152,8) \times 0,17 \times 0,0127/2 = 0,5370 + 0,5657 + 0,8284 - 0,0085 + 0,1967 = 2,1193 \text{ MN}$$

Siła w kablach wynosi $S = 0,427 \text{ MN}$

$$M_I = 0,5370 \times 0,4307 + 0,5657 \times 0,4194 + 0,8284 \times 0,2457 - 0,00854 \times 0,0832 + 0,1967 \times 0,0721 = 0,6856 \text{ MNm}$$

Moment od kabli w momencie zniszczenia (uwzględniono efekt drugiego rzędu polegający na zmniejszeniu mimośrodów na skutek ugięcia w danej chwili):

$$M_S = 0,427 \times (0,368 - 0,0793) = 0,1233 \text{ MNm}$$

$$M_{W0} = M_I + M_S = 0,8089 \text{ MNm}$$

Uwzględniono dodatkowe elementy odpowiedzialne za moment wewnętrzny:

- wyokrąglenia: $1,4 \times 0,0001 \times 293 \times 0,413 + 1,4 \times 0,0001 \times 152,2 \times 0,0784 = 0,0186 \text{ MNm}$,
- spoiny: $1,0 \times 0,0001 \times 400 \times 0,4257 = 0,0170$
- beton rozciągany: $0,02 \text{ MNm}$,

Uwzględnienie tych czynników powoduje zwiększenie momentu M_{W0} o $dM_w = 0,0556 \text{ MNm}$. Moment wewnętrzny wynosi zatem

$$M_W = M_{W0} + dM_w = 0,8089 + 0,0556 = \mathbf{0,8645 \text{ MNm}}$$

Moment od sił zewnętrznych

$$M_z = 2,262 \times 0,396 = \mathbf{0,8958 \text{ MNm}}$$

Podobnie jak w przypadku belki niesprężonej zachodzi zbieżność pomiędzy momentem zewnętrznym i wewnętrznym, występuje prawidłowość, że M_Z jest nieznacznie większy od M_W , co oznacza, że belka przenosi więcej, aniżeli obliczono z uproszczonego całkowania naprężeń. Występują zatem dodatkowe elementy zwiększające moment wewnętrzny, co jest zgodne z oczekiwaniami. Sprawdzono naprężenia w betonie. Siły w zbrojeniu górnym i dolnym przy założeniach jak dla belki B2:

$$P_1 = \varepsilon \times E \times A = 20,47 \times 10^{-4} \times 207 \times 10^3 \times (5 \times 0,503 \times 10^{-4}) = -0,107 \text{ MN}$$

$$P_2 = \varepsilon \times E \times A = 4,38 \times 10^{-4} \times 207 \times 10^3 \times (5 \times 0,503 \times 10^{-4}) = -0,023 \text{ MN}$$

Siła, którą musi przenieść beton z równowagi sił w przekroju wynosi:

$$W_{Bn} = F_I + S - P_I - P_2 = 2,1193 + 0,427 - 0,107 - 0,023 = 2,4163 \text{ MN}$$

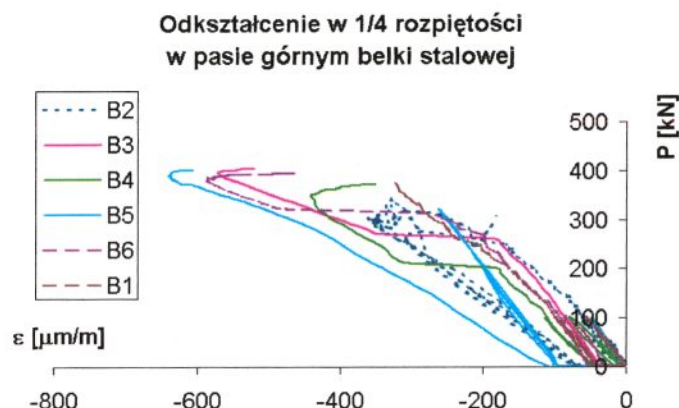
W rzeczywistości siła ta jest jeszcze większa (dodatkowe elementy rozciągane oraz różnica pomiędzy M_W i M_Z). Porównując tę wartość do B_{W1} oraz B_{W2} wnioskuje się, że wytrzymałość betonu na ściskanie w konstrukcji była znacznie większa, aniżeli wyznaczona na próbkach walcowych. Jeżeli zakłada się paraboliczny rozkład naprężeń (jak w EC2, jest on bliski rzeczywistemu), to otrzymuje się wytrzymałość betonu w konstrukcji odpowiadającą klasie ponad B50.

9.5. ANALIZA ZJAWISKA NAGLEGO WZROSTU ODKSZTAŁCEŃ W PASIE GÓRNYM BELKI STALOWEJ W $\frac{1}{4}$ I $\frac{3}{4}$ ROZPIĘTOŚCI

Podczas badań zaobserwowano zjawisko polegające na nagłym wzroście odkształceń przy pewnym poziomie obciążenia w pasie górnym belki stalowej w $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$ rozpiętości. Polegało ono na tym, że po przekroczeniu pewnego poziomu obciążenia następował nagły wzrost odkształceń o około 100%. Odkształcenia w pozostałych punktach charakterystycznych przekroju (górze płyty, spód nakładki) nie ulegały znacznym zmianom. Zjawisko występowało po obu stronach belki (przekroje $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$ rozpiętości) lub tylko po jednej stronie (przekrój $\frac{1}{4}$ lub $\frac{3}{4}$ rozpiętości). Wartości przedstawiono w tabeli, dla poziomów obciążenia przy których następował skok.

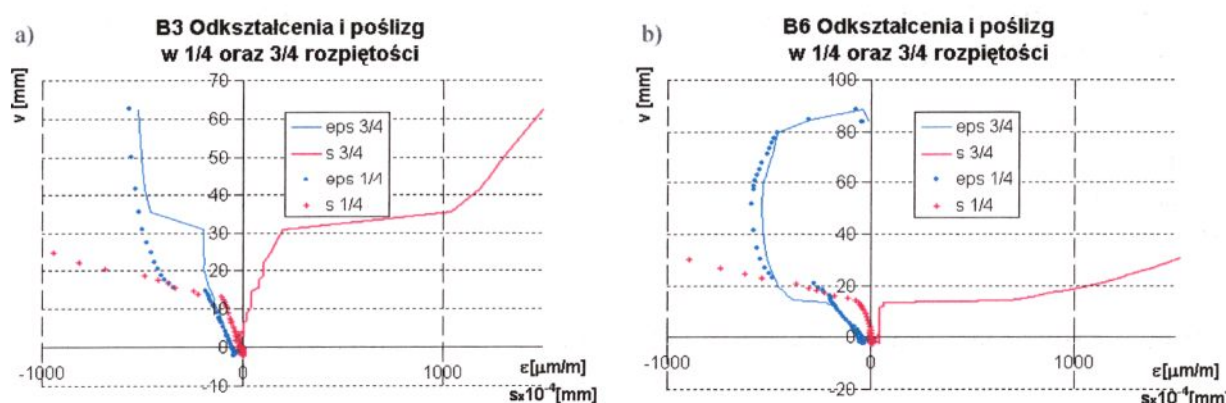
Tab. 9.1.

Belka	Poziom obciążenia P [kN]	
	$\frac{1}{4}$ rozpiętości	$\frac{3}{4}$ rozpiętości
B1	-	310
B2	250	-
B3	260	350
B4	200	240
B5	-	350
B6	310	240



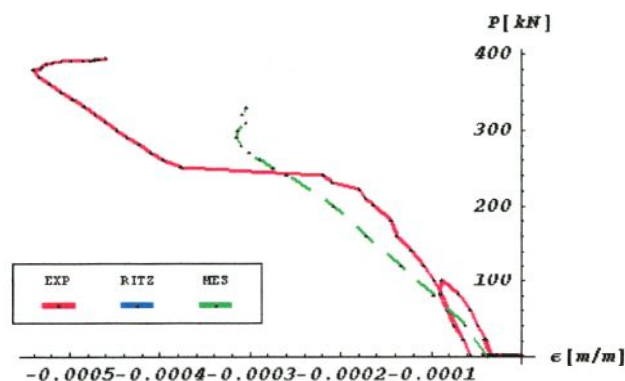
Rys. 9.30. Odształcenia w 1/4 rozpiętości dla poszczególnych belek.

Celem wyjaśnienia zjawiska wykonano analizę porównawczą dla belek B3 i B6. Na wykresach przedstawiono odkształcenia w 1/4 i 3/4 rozpiętości z odpowiadającymi im odczytami poślizgu na styku stal-beton odpowiednio w 3/8 i 3/4 rozpiętości (w przekroju 1/4 nie odnotowano większych wartości poślizgu w przypadku belki B3 a w przypadku B6 podobne jak w przekroju 3/8). Linia niebieska oznacza odkształcenia a czerwona poślizg, linia przerywana dotyczy przekroju 1/4 a ciągła dotyczy przekroju 3/4. Na osi poziomej pokazano odkształcenia i poślizg a na osi pionowej przemieszczenie w środku rozpiętości.



Rys. 9.31. Układ odkształceń w pasie górnym belki stalowej i poślizgi w 1/4 i 3/4 rozpiętości dla belek a) B3 i b) B6.

Wyraźnie widać, że przyrostowi odkształceń odpowiada przyrost poślizgu. Pozwala to wysunąć wniosek, że następuje nagły poślizg w zespoleniu, co skutkuje przyrostem odkształceń w półce górnej belki stalowej w przekrojach 1/4 i 3/4. Przekroje te są najbardziej wyężone ze względu na siłę ścinającą w zespoleniu. Należy zauważyć, że dla belki B3 odnotowano przy wartości siły pionowej wynoszącej 350 kN nagły odgłos w postaci trzasku. Dla belki B6 zjawisko to wystąpiło odpowiednio przy 250 kN i przy 310 kN siły (przy tej wartości wyraźnie w 1/4 rozpiętości). Odgłos ten musi mieć związek z nagłą zmianą układu sił w zespoleniu (np. utrata przyczepności na styku stal-beton). Potwierdza to wyciągnięte powyżej wnioski. Celem skonfrontowania zaobserwowanego zjawiska z teorią, porównano wyniki eksperymentalne z wynikami otrzymanymi za pomocą MES. Wybrano belkę B6 i przekrój w 3/4 rozpiętości.



Rys. 9.32. Odkształcenia w pasie górnym belki stalowej w $\frac{3}{4}$ rozpiętości.

Na wykresie przedstawiono otrzymane wyniki, czerwona linia to wyniki z badań a zielona z MES. Wyraźnie widać, że teoretycznie zjawisko nie występuje, podczas gdy z badań otrzymuje się nagły wzrost poślizgu dla siły pionowej o wartości około 250 kN. Przyczyn zjawiska należy upatrywać w nagłej utracie przyczepności na pewnym obszarze na styku stal-beton po przekroczeniu określonego poziomu naprężeń ścinających. Należy zaznaczyć, że zgodnie z normami [105] (konstrukcje ogólnobudowlane) i [106] (mosty) przyczepności nie uwzględnia się w projektowaniu zespolonych elementów zginanych (nie dotyczy dźwigarów obetonowanych), można ją uwzględniać tylko przypadku zespolonych elementów ściskanych (słupy zespolone) a ponadto w przypadku mostów tylko w sytuacjach obciążenia dodatkowego. Występowanie zjawiska przyczepności potwierdzają wykresy na rys. 6.9., 6.10. i 6.11. Przy rosnącej sile ścinającej występuje praktycznie zerowy przyrost poślizgu dla czujników po jednej stronie próbki (dla obciążeń nieprzekraczających wartości od 200 do 350 kN w zależności od próbki), podczas gdy po stronie przeciwnej występuje wyraźny poślizg. Schemat obciążenia i podparcia próbki (rys. 5.8.) uzasadniają takie zachowanie się próbki; stronę po której następuje pierwszy poślizg determinują losowy charakter zjawiska oraz imperfekcje w schemacie obciążenia i podparcia próbki.

9.6. OPIS ZACHOWANIA SIĘ BELEK POD WPLYWEM OBCIĄŻENIA

9.6.1. Belka niesprężona

Belka pracuje sprężysto do chwili uplastycznienia nakładki i pasa dolnego. Ze względu na różne granice plastyczności oba te elementy ulegają uplastycznieniu praktycznie w tej samej chwili. Beton „spokojnie” przenosi ściskanie i oś bezwładności przesuwa się do góry. W chwili w której rozpatrywano układ naprężeń (siła pionowa 300 kN) uplastyczniona jest już większość przekroju stalowego. Oś zerowych naprężeń w stali znajduje się w środku półki górnej. Występuje poślizg na styku stal-beton, oś naprężeń zerowych w betonie jest około 1,8 cm od spodu płyty. Dalszemu przyrostowi odkształceń w środku rozpiętości nie towarzyszy już wzrost siły, ponieważ ze względu na stal, nie jest już możliwy przyrost momentu wewnętrznego w belce – belka nie jest w stanie przenieść już większego obciążenia. Wraz ze wzrostem przemieszczenia następuje dalszy wzrost odkształceń w stali i betonie, ale zachodzą tu następujące zjawiska: oś zerowa w stali pozostaje na tym samym poziomie w środku półki a oś zerowa w betonie przesuwa się do góry. Na podstawie tego można stwierdzić, że o nośności decyduje tutaj stal rozciągana a beton ma duże zapasy nośności; wytrzymałość elementu żelbetowego w konstrukcji jest znacznie większa aniżeli określona na

podstawie badań próbek walcowych. Ponieważ musi występować równowaga sił w przekroju a wzrastają odkształcenia w górnych włóknach płyty na skutek ugięć, oś zerowa w betonie musi przesuwac się do góry. Towarzyszy temu wzrost poślizgu na styku stal-beton. Następuje dalszy wzrost odkształceń w górnych włóknach płyty betonowej, nie ma natomiast znacznej zmiany siły wypadkowej. Zniszczenie płyty następuje zatem nie przez wyczerpanie nośności płyty jako elementu, ale przez zniszczenie lokalne, polegające na zmiędzeniu betonu górnej powierzchni płyty, na skutek dużych odkształceń (beton niezależnie od klasy nie przenosi większych odkształceń aniżeli graniczne, około 0,3%). Mechanizm pracy belki i zniszczenia jest zatem taki: na skutek uplastycznienia stali pasa dolnego i środnika nie jest możliwy dalszy znaczący wzrost momentu wewnętrznego i belka pracując plastycznie doznaje dużych odkształceń stali rozciąganej pasa dolnego i co za tym idzie, doznaje dużych przemieszczeń. Efektem dużych przemieszczeń są duże odkształcenia na górnej powierzchni płyty będące skutkiem dużej krzywizny. Oś zerowych naprężeń w betonie musi przesuwac się do góry tak, aby układ pozostawał w równowadze przy wzrastających odkształceniach górnej powierzchni płyty. Oś obojętna w stali pozostaje w fazie plastycznej na tym samym poziomie (środek półki górnej) ponieważ nie ma przyrostu wypadkowej z rozciąganej stali, gdyż nie ma znacznego przyrostu momentu wewnętrznego (środek pracujący sprężysto w pobliżu osi zerowej daje niewielki moment). Efektem tego jest przekroczenie odkształceń granicznych w betonie na powierzchni płyty, przy niedużym wyężeniu betonu w środkowych włóknach płyty. Taki tok rozumowania potwierdza obserwacja mechanizmu zniszczenia belki. Beton uległ zmiędzeniu na górnej powierzchni płyty „spokojnie” i zasięg strefy zniszczonej nie był głęboki. Nie było gwałtownego zniszczenia, tylko ciche, świadczące o tym, że płyta jako całość nie była znacząco wyężona, tylko jej górne włókna. Podkreślić należy fakt, że przed zniszczeniem, od poziomu 300 kN belka została odciążona do zera. Zjawisko poślizgu, na styku stal beton występuje w fazie sprężystej (niewielkie) i pogłębia się w fazie plastycznej. Na skutek podniesienia osi zerowej w betonie zjawisko to ulega zintensyfikowaniu. Jest to związane ze wzrostem podatności układu sworzeń-beton, na skutek zmniejszenia naprężeń w betonie dookoła sworzni. Problem ten jest analogiczny do występującego podczas porównywania pracy sworzni w płytach z betonu zwykłego i o wysokiej wytrzymałości [15]. W fazie, gdy beton spodu płyty zaczyna się rysować, następuje następujące zjawisko: na skutek wzrostu ugięć następuje większy poślizg, a większy poślizg generuje wzrost ugięć – efekty te zapoczątkowane same się następnie „napędzają”. Otrzymany wykres przemieszczenia w środku rozpiętości jest zbliżony dla wyników z doświadczenia oraz uzyskanych z MES. Porównywane wartości, uzyskane dwiema metodami analitycznymi, są bardzo zbliżone, przy czym model MES odzwierciedla nieco lepiej pracę belki, aniżeli model DA. Wartości te natomiast nieco różnią się od wyników doświadczenia. Analiza wyników pozwala stwierdzić, że zespolenie jest sztywniejsze, aniżeli wynika to z teorii (bazującej na wynikach eksperymentalnych, uzyskanych podczas badania prób ścinanych). Jest to analogia do betonu, który jest mocniejszy i sztywniejszy w konstrukcji aniżeli na próbkach. Praktycznie wpływ podatności zespolenia ujawnia się dopiero przy dużych ugięciach belki. Należy więc przypuszczać, że zachodzi tu zjawisko zwiększenia podatności na ścinanie układu sworzeń-beton na skutek przesunięcia się wypadkowej bryły naprężeń w betonie do góry [15]. Mniejsza rzeczywista podatność zespolenia w fazie sprężystej powoduje, że odkształcenia w środku rozpiętości, w pasie górnym belki stalowej oraz na spodzie płyty betonowej, uzyskane teoretycznie są większe aniżeli uzyskane z eksperymentu. Odkształcenia w pasie dolnym belki stalowej są praktycznie takie same z eksperymentu jak i dla obu modeli teoretycznych. Jest to związane z tym, że w prawidłowo zaprojektowanej belce zespolonej, wzrost podatności zespolenia nie wpływa znacząco na odkształcenia w pasie dolnym w fazie sprężystej, ponieważ zmienne jest położenie osi naprężeń zerowych w przekroju stalowym. Rysy nad zespoleniem na końcach belki i rysy ukośne na spodzie w tych miejscach są związane najprawdopodobniej z niewystarczającą ilo-

ścią zbrojenia poprzecznego. Przy podporach zagęszczono rozstaw łączników i tym samym prętów, nie dołożono jednak dodatkowych prętów mogących przenieść siły z dodatkowych łączników w trzecim rzędzie. Prawdopodobnie ściecie i tak by wystąpiło ze względu na duże siły ścinające i małą grubość płyty, ale rysy byłyby mniejsze.

9.6.2. Belka sprężona

W przypadku belki sprężonej sprawa jest bardziej skomplikowana. Występuje tutaj wstępne sprężenie, wydłużające sprężystą fazę pracy belki, a w chwili zniszczenia układ sił wewnętrznych jest w belce inny aniżeli poprzednio. Przede wszystkim cała stal jest rozciągana - nie występuje oś zerowa w obrębie przekroju stalowego. Wprawdzie, w przypadku belki niesprężonej było podobnie, ale dopiero po odciążeniu do zera od poziomu obciążenia niszczącego – wcześniej oś była w obrębie półki górnej. Siła przenoszona przez BS wynosi około 400 kN, a przez BNS wynosi około 300 kN. Jest więc widoczny znaczny wzrost nośności. Jest to związane z dwoma czynnikami: sprężeniem i wyższą granicą plastyczności nakładki pasa dolnego. Podobnie jak w przypadku belki niesprężonej następuje najpierw uplastycznienie stali pasa dolnego i belka wchodzi w obszar sprężysto-plastycznej pracy. Ze względu na sprężenie, możliwy jest jednak ciągły wzrost przykładanego obciążenia, ponieważ kabel pracuje sprężysto. Zjawiska związane z poślizgiem na styku stal-beton przebiegają tak jak w przypadku belki B2 i ich znaczący wpływ ujawnia się dopiero przy większych ugięciach. Wartość poślizgu, przy zadanym poziomie obciążenia, jest mniejsza dla belki sprężonej, a w chwili zniszczenia jest podobna dla BS i BNS; maksymalnie 0,5 mm. To, że jest to związane bezpośrednio z ugięciami a tylko pośrednio z siłą, należy tłumaczyć tym, że przy stałej sile 300 kN, dla belki B2, następował w końcowej fazie znaczny wzrost poślizgów, podczas gdy dla belek sprężonych przy 300 kN poślizgi nie są znaczące. Na podstawie badań eksperymentalnych stwierdza się, że jedyna różnica w przypadku rozkładu poślizgów pomiędzy belkami sprężonymi kablem prostym i odgiętym polega na tym, że w przypadku belek sprężonych kablem odgiętym poślizgi są nieco mniejsze pod znaczącym obciążeniem pionowym. Jest to związane ze składową pionową siłą w kablu, zmniejszającą wartości sił ścinających w zespoleniu. Podejście takie potwierdza wyniki uzyskane dla modeli teoretycznych. Na podstawie wyników teoretycznych określić można także układ sił w zespoleniu po sprężeniu belki. Jest on inny w przypadku belki sprężonej kablem prostym i odgiętym. Wyniki te trudno jest potwierdzić doświadczalnie ze względu na małe wartości sił i co za tym idzie poślizgów, jakkolwiek w przypadku belki sprężonej kablem odgiętym można dopatrzeć się prawidłowości, porównując wyniki z eksperymentu oraz uzyskane dla modeli teoretycznych. Ponieważ efekty te występują lokalnie w miejscu przyłożenia siły, lepszą metodą jest tutaj MES aniżeli podejście DA, które z założenia „wygładzi” te obszary. Poza niewielkimi różnicami w układzie poślizgów i układem naprężeń w strefach blisko podpór, nie zauważa się różnic w układzie naprężeń w środku rozpiętości, dla różnych tras kabli. Potwierdzają to również wyniki teoretyczne. Stwierdza się, że w przypadku belek sprężonych istnieje taka sama zależność między wynikami teoretycznymi i z doświadczenia, jak w przypadku belki B2. Jest to uzasadnione, ponieważ występują tutaj te same zjawiska.

Podkreślić należy bardzo wysoką wytrzymałość płyty żelbetowej jako elementu. Tłumaczyć należy to jej zbrojeniem (mały rozstaw strzemion – analogia do słupa uzwojonego), mocnym betonem płyty oraz krzywizną (pręty powstrzymują wypchnięcie betonu do góry). Dodatkowo w obrębie sworzni i zbrojenia tworzy się trójosiowy stan naprężeń. Występuje tu znaczne zwiększenie naprężeń w stosunku do pozostałych obszarów płyty, w związku z czym nie występują duże odkształcenia przy panujących tam dużych naprężeniach. Potwierdzeniem dużego wytrzymałości płyty jako całości jest

mechanizm jej zniszczenia. Jest on bardzo gwałtowny, nie jak w przypadku BNS. Beton ulega zniszczeniu gwałtownie, z hukiem, jest zniszczony na znacznej głębokości strefy ściskanej. Praktycznie płyta niszczy się jako cały element, a nie jak w przypadku BNS tylko włókna górne. Odkształcenia w betonie na górze płyty i w stali pasa dolnego są podobne w chwili zniszczenia dla BS i BNS.

Siła w kablach przyrasta podobnie, niezależnie od trasy kabli. Jej przyrost jest związany bezpośrednio z przyrostem przemieszczeń. W przypadku przedmiotowych belek wstępna siła sprężająca wynosiła około 145 kN, podczas gdy w chwili zniszczenia wynosiła około 225 kN, co jest praktycznie równe obliczeniowej nośności splotu na rozciąganie. Przyrost siły w kablach w chwili zniszczenia stanowił zatem około 55% początkowej siły sprężającej. Nie stwierdzono wpływu zmiany mimośrodowej siły z kabli (na skutek ugięć) na nośność belek. Belki z dewiatorami, gdzie nie występowała znacząca zmiana mimośrodowej oraz bez dewiatorów, gdzie efekt występował, osiągały taką samą nośność i przebieg ŚRS był taki sam.

Zwrócić należy uwagę na ogólnie mniejszą sztywność i nośność belki sprężonej B4. Belka ta doznawała dla zadanych poziomów obciążenia, zarówno większych przemieszczeń jak i odkształceń, dla wszystkich charakterystycznych punktów przekroju przeszłowego. Większe były także wartości poślizgu w zespoleniu dla zadanych poziomów obciążenia. Jest to związane najprawdopodobniej z gorszej jakości betonem płyty w tej belce. Beton był porysowany, układ rys wskazywał na skurcz; beton łatwiej ulegał tu lokalnym uszkodzeniom na skutek uderzenia.

10. WNIOSKI

1. Sprężenie zewnętrzne jest efektywnym sposobem zwiększania nośności stalowo-betonowych belek zespolonych. Dotyczy to zarówno nośności sprężystej, jak i plastycznej.
2. Efektywność sprężenia zewnętrznego, w odniesieniu do zmniejszenia naprężeń rozciągających w pasie dolnym belki stalowej, w przypadku belek zespolonych, jest związana z charakterystycznym dla tych konstrukcji wysokim położeniem środka ciężkości przekroju, co skutkuje dużym mimośrodem siły sprężającej i dużym momentem sprężenia.
3. Maksymalny wzrost nośności granicznej badanych belek sprężonych z mocniejszą nakładką, w stosunku do belki niesprężonej ze słabszą nakładką, wynosił maksymalnie 32%. Wzrost nośności jest tym większy, im większa jest wstępna siła sprężająca. Odejmując od momentu zewnętrznego dla belki sprężonej wartość składową momentu wewnętrznego, spowodowaną różnicą w granicy plastyczności nakładek i odnosząc się do momentu zewnętrznego dla belki niesprężonej, można stwierdzić, że maksymalny wzrost nośności granicznej przedmiotowych belek, spowodowany sprężeniem, wynosiłby około 25%.
4. Nośność graniczna, wyznaczona w badaniach modelowych, jest większa, aniżeli w modelach teoretycznych, szczególnie w odniesieniu do belek sprężonych.
5. Mechanizm zniszczenia ZBS polegał na uplastycznieniu praktycznie całej belki stalowej, pod wpływem naprężeń rozciągających, a następnie zmięczeniu betonu płyty w strefie ściskanej. Po zniszczeniu betonu płyty, belka gwałtownie ulegała lokalnej (wyboczenie środnika w przeszle) i globalnej (wygięcie belki w płaszczyźnie poziomej) niesprężystej utracie stateczności, pod wpływem siły ściskającej, przekazywanej przez kable na belkę. Kable nie ulegały zerwaniu a w chwili zniszczenia belki, panująca w nich siła równa była ich nośności obliczeniowej.

6. O nośności sprężystej przedmiotowych belek zespolonych decyduje stal pasa dolnego belki. Beton ma duże zapasy nośności i ulega zniszczeniu dopiero w końcowej fazie pracy belki, gdy odkształcenia w nim przekraczają 0,3%.
7. Podczas sprężenia BZ nie występował problem utraty stateczności globalnej belki. Płyta betonowa o odpowiedniej sztywności stanowi dobre zabezpieczenie przed zwichrzeniem.
8. Opracowane modele teoretyczne dobrze odzwierciedlają pracę konstrukcji, przy odpowiednio zadanych parametrach materiałowych. Pozwalają na sprawne modelowanie takich układów, również w obszarze nieliniowym.
9. W modelach teoretycznych, dotyczących ZBS, jednoczesne uwzględnienie nieliniowości materiałowych oraz nieliniowej podatności zespolenia jest zadaniem skomplikowanym i wymaga zastosowania odpowiednich procedur iteracyjnych wraz z odpowiednim doбором parametrów odpowiedzialnych za obliczenia w ramach tych procedur.
10. W przedmiotowych belkach, zaprojektowanych zgodnie z wymaganiami normowymi (np. EC4.2.) nie stwierdza się wpływu podatności zespolenia na zachowanie się belki w obszarze sprężystym; wpływ ten może być widoczny w obszarze sprężysto-plastycznym. Tłumaczyć to należy zjawiskiem przyczepności na styku stal-beton.
11. We wszystkich belkach następowało zjawisko nagłego wzrostu poślizgu w zespoleniu, w przekrojach oddalonych o około $\frac{1}{4}$ rozpiętości od punktów podparcia belki. Towarzyszył temu odgłos głośniego trzasku i następowała redystrybucja naprężeń w tych przekrojach. Zjawisko to ma charakter gwałtowny. Powstające odkształcenia w zespoleniu są trwałe, a zjawisko nie występuje w modelach teoretycznych. Tłumaczyć to należy zjawiskiem utraty przyczepności na styku stal-beton przy pewnym poziomie obciążenia. Aby uwzględnić to zjawisko w modelach teoretycznych należy odpowiednio zmodyfikować charakterystykę zespolenia.
12. Wytrzymałość betonu w konstrukcji może być znacznie większa, aniżeli określona na próbkach.
13. Wytrzymałość betonu płyty decyduje o maksymalnych przemieszczeniach belki, a więc o jej „ciągliwości”.
14. Kształt trasy kabli nie ma większego wpływu na nośność oraz sztywność belki. Rozpatrywano dwa najczęściej stosowane układy kabli, przedmiotowe belki odpowiadały pod względem geometrii powszechnie stosowanym, pomijając efekt skali.
15. Podejście normowe (EC4.2.), dopuszczające obliczanie ZBS za pomocą analizy nieliniowej, a nie zezwalające na projektowanie przy założeniu nośności plastycznej, wydaje się być słuszne. Założenie, że należałoby wyznaczać nośność plastyczną przekroju belki sprężonej kablem zewnętrznym, analogicznie jak nośność plastyczną przekroju bez sprężenia, ale dodatkowo uwzględniać zwiększenie momentu wewnętrznego o siłę z kabla pomnożoną przez odpowiedni mimośród (np. ramię działania siły w odniesieniu do środka płyty), jest zbyt daleko idącym uproszczeniem. Uwzględnienie odpowiednio wytrzymałego betonu, zapewniającego równowagę sił w przekroju nie stanowi problemu. Problemem może okazać się natomiast wyznaczenie siły sprężającej. Przyjęcie do równowagi sił w przekroju w chwili zniszczenia wstępnej siły sprężającej może być zbyt asekuracyjne, a nośności kabli, zbyt optymistyczne. W przypadku przedmiotowych belek wstępna siła sprężająca stanowiąca 63% nośności obliczeniowej splotu, wzrosła pod wpływem przemieszczeń tak, że osiągnęła nośność obliczeniową splotu w chwili zniszczenia. Siła rzeczywista w chwili zniszczenia zależy od przemieszczeń całego układu. W zależności od geometrii i cech materiałowych danej belki oraz sztywności zespolenia i wstępnej siły sprężającej, mechanizm zniszczenia może być różny; belka może ulec całkowitemu uplastycznieniu i zniszczeniu przez zmiażd-

dzenie betonu zanim, w kablu pojawi się siła równa jego nośności obliczeniowej, lub zanim belka osiągnie swą nośność plastyczną, kabel ulegnie zerwaniu, co doprowadzi do nagłego zniszczenia całej konstrukcji. Optymalnym jest zatem przypadek jak w badaniach, gdzie beton ulegał zniszczeniu w momencie, gdy w kablach panowała siła równa ich nośności.

16. W ramach badań doświadczalnych zespolonych belek sprężonych kablami zewnętrznymi wykonano badania prób zespolenia podatnego zgodnie z EC4 oraz badania zespolonej belki stalowo-betonowej z zespoleniem podatnym. Wyniki tych badań mogą być wykorzystane w opracowaniach dotyczących tych elementów.

11. LITERATURA

- [1] Albrecht P., Li W., *Fatigue strength of prestressed composite beams*. NTIS Rep. No. PB89223317, Dept. of Civ. Engrg., Univ. of Maryland 1989.
- [2] An L., Cederwall K., *Push-out tests on studs in high strength and normal strength concrete*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 36 (1996), pp. 15 – 29.
- [3] Antoniuk D., *Nieliniowe modelowanie konstrukcji sprężonych cięgnami. Raport III serii PRE 5/2000*. Praca doktorska. Politechnika Wrocławska, Wrocław 2000.
- [4] Amadio C., Fedrigo C., Fragiaco M., Macorini L., *Experimental evaluation of effective width in steel–concrete composite beams*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 60 (2004), pp. 199 – 220.
- [5] Ayoub A., Filippou F.C., *Mixed formulation of nonlinear steel-concrete composite beam element*. Journal of Structural Engineering, vol. 126 (2000), pp. 371 – 381.
- [6] Ayyub B.M., Sohn Y.G., Saadatmanesh H., *Prestressed composite girders under positive moment*. Journal of Structural Engineering, vol. 116 (1990), pp. 2931 – 2951.
- [7] Beck B.L., Klaiber F.W., Sanders W.W., Jr, *Field testing of county road 54 bridge over Anclole River, Pasco County, Florida, ERI Project 1730, ISU-ERI-Ames 85417*, Engineering Research Institute, Iowa State University 1984.
- [8] Beck B.L., Klaiber F.W., Sanders W.W. Jr, *Strengthening of two continuous-span steel stringer bridges*. Construction and Building Materials, vol. 12 (1984), pp. 151 – 159.
- [9] Biliński T., Misztal G., *Ustalenie efektywnego sprężenia montażowego belki stalowej stropu zespolonego stalowo-betonowego*. Inżynieria i Budownictwo, nr 10 – 11, 1987.
- [10] Biliszczuk J., *Reologiczna redystrybucja stanu naprężenia w niejednorodnych izostatycznych konstrukcjach betonowych*. PWN Warszawa-Lódź 1982.
- [11] Bogucki W., *Projektowanie stalowych konstrukcji sprężonych*. Mały Poradnik Konstruktor miesięcznika Inżynieria i Budownictwo nr 1(29), 2(30) i 3(31), Warszawa 1964.
- [12] Bródka J., Kłobukowski J., *Sprężone konstrukcje stalowe*. ARKADY, Warszawa 1965.
- [13] Bryś G., *Nośność krytyczna elementów sprężonych o przekroju monosymetrycznym. Raport serii PRE nr 44/83*. Praca doktorska. Instytut Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1983 r.
- [14] Bryś G., *Szywność skretna stalowych belek wstępnie sprężonych cięgnami*. XLVI Konferencja Naukowa Wrocław – Krynica 2000.
- [15] Bull S., Di Marco R., *A simplified method for assessing the ductile behaviour of stud connectors in composite beams with high strength concrete slab*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 60 (2004), pp. 1387 – 1408.
- [16] Crisfield M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 1: ESSENTIALS*. John Wiley & Sons, Chichester 1991.
- [17] Crisfield M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 2: ADVANCED TOPICS*. John Wiley & Sons, Chichester 1997.
- [18] Dall'Asta A., *On the coupling between three-dimensional bodies and slipping cables*. International Journal of Solids & Structures, vol. 33 (1996), pp. 3587 – 3600.

-
- [19] Dall'Asta A. & Leoni G., *Numerical analysis of thin walled beams with internal unbonded cables by the Ritz method*. International Journal of Solids & Structures, vol. 35 (1997), pp. 51 – 67.
- [20] Dall'Asta A. & Dezi L., *Nonlinear behaviour of externally prestressed composite beams: analytical model*. Journal of Structural Engineering, vol. 124 (1998), pp. 588-597.
- [21] Dall'Asta A., Dezi L., Leoni G., *Flexible connection influence on the ultimate capacity of externally prestressed composite beams*. Advances in Steel Structures. Proceedings of The Second International Conference on Advances in Steel Structures. Hong Kong 1999.
- [22] Dall'Asta A., Dezi L., Leoni G., *Long term analysis of externally prestressed composite beams*. Advances in Steel Structures. Proceedings of The Second International Conference on Advances in Steel Structures. Hong Kong 1999.
- [23] Dall'Asta A., *Composite beams with weak shear connection*. International Journal of Solids & Structures, vol. 38 (2001), pp. 5605 – 5624.
- [24] Dall'Asta A., Zona A., *Non-linear analysis of composite beams by a displacement approach*. Computers & Structures, vol. 80 (2002), pp. 2217 – 2228.
- [25] Dall'Asta A., Leoni G., *Failure mechanisms of externally prestressed composite beams with partial shear connection*. Steel & Composite Structures, vol. 2, No. 5 (2002) pp. 315 – 330.
- [26] Dall'Asta A., Leoni G., Zona A., *Effects of shear connection limited ductility in steel concrete composite beams prestressed by unbonded tendons*. Strutture miste acciaio-calcestruzzo legno-calcestruzzo aspetti generali e sviluppi recenti atti del IV workshop italiano sulle strutture composte a cura di Nunzio Scibilia. Dario Flaccovio Editore 2002.
- [27] Dall'Asta A., Alessandro Z., *Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with deformable shear connection*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 40 (2004), pp. 425 – 448.
- [28] Dunker K.F., Klaiber F.W., Sanders W.W. Jr, *Design manual for strengthening of single-span composite bridges by post-tensioning. Final Report – part III, ERI Project 1536, ISU-ERI-Ames 85229*. Engineering Research Institute, Iowa State University 1985.
- [29] Dunker K.F., Klaiber F.W., Beck B.L., Sanders W.W. Jr, *Strengthening of existing single span steel beam and concrete deck bridges. Final Report – part II, ERI Project 1536, ISU-ERI-Ames 85231*. Engineering Research Institute, Iowa State University 1985.
- [30] Dunker K.F., Klaiber F.W., Daoud F.K., Wiley W.E., Sanders W.W. Jr, *Strengthening of existing continuous composite bridges. Final Report, ERI Project 1846, ISU-ERI-Ames 88007*. Engineering Research Institute, Iowa State University 1987.
- [31] Eimar C., *O stateczności ustrojów sprężonych kablami swobodnymi*. Archiwum Inżynierii Lądowej nr 3-4/1965.
- [32] Fabbrocino G., Manfredi G., Cosenza E., *Non-linear analysis of composite beams under positive bending*. Computers & Structures, vol. 70 (1999), pp. 77 – 89.
- [33] Faella C., Martinelli E., Nigro E., *Steel and concrete composite beams with flexible shear connection: „exact” analytical expression of the stiffness matrix and applications*. Computers & Structures, vol. 80 (2002), pp. 1001 – 1009.
- [34] Ferjenčik P., Tocháček M., *Die Vorspannung im Stahlbau. Theorie und Konstruktionspraxis*. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1975.
- [35] Furtak K., *Mosty zespolone* PWN Warszawa 1999.
- [36] Furtak K., *Ocena wpływu poślizgu oraz niepełnej współpracy płyty żelbetowej z dźwigarem stalowym na ugięcia belek zespolonych*. Inżynieria i Budownictwo, nr 3, 1999.

-
- [37] Galambos T.V., *Recent research and design developments in steel and composite steel-concrete structures in USA*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 55 (2000), pp. 289–303.
 - [38] Gattesco N., Giuriani E., *Experimental study on stud shear connectors subjected to cyclic loading*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 38 (1996), pp. 1–21.
 - [39] Gattesco N., *Non-linear analysis of composite beams under positive bending*. Computers & Structures, vol. 70 (1999), pp. 77–89.
 - [40] Gattesco N., *Analytical modeling of nonlinear behavior of composite beams with deformable connection*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 52 (1999), pp. 195–218.
 - [41] Glabisz W., *MATHEMATICA® w zagadnieniach mechaniki konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2003.
 - [42] Gosowski B., Kubica E., Machelski C., *Raport serii SPR nr 17/97. Analiza szerokości współpracującej stalowo-betonowej płyty stropowej zespolonej ze stalowymi podciągami*. Instytut Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1997.
 - [43] Gosowski B., Kubica E., Machelski C., *Ocena wpływu szerokości współpracującej płyty na wyężenie podciągów zespolonych*. V konferencja „Konstrukcje zespolone”, Zielona Góra 1999.
 - [44] Gosowski B., Kubów M., Kowaliszyn S., *Raport serii SPR nr 18/2001. Badania doświadczalne prętów złożonych, wykonanych ze stalowych kształtowników giętych*. Instytut Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001.
 - [45] Hartmann F., Katz C., *Statik mit finiten Elementen*. Springer Berlin 2002.
 - [46] Hoadley P.G., *Behavior of prestressed composite steel beams*. Journal of Structural Division, ASCE, 89 (1963), pp. 21–34.
 - [47] Hyung-Keun Ryu, Chang-Su Shim, Sung-Pil Chang, Chul-Hun Chung, *Inelastic behaviour of externally prestressed continuous composite box-girder bridge with prefabricated slabs*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 60 (2004), pp. 989–1005.
 - [48] Jasim N.A., *Deflections of partially composite beams with linear connector density*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 49 (1999), pp. 241–254.
 - [49] Karczewski J., *Sprężone konstrukcje stalowe*. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1981.
 - [50] Klaiber F.W., Dunker K.F., Sanders W.W. Jr, *Feasibility study of strengthening existing single span steel beam concrete deck bridges. Final Report, ISU-ERI-Ames 81251*. Engineering Research Institute, Iowa State University 1981.
 - [51] Klaiber F.W., Dedic D.J., Dunker K.F., Sanders W.W. Jr, *Strengthening of existing single span steel beam and concrete deck bridges. Final Report – part I, ERI Project 1536, ISU-ERI-Ames 83185*. Engineering Research Institute, Iowa State University 1983.
 - [52] Klaiber F.W., Dunker K.F., Planck S.M., Sanders W.W. Jr, *Strengthening of existing continuous-span, steel-beam, concrete-deck bridge by post-tensioning, Iowa DOT Project HR-308, ISU-ERI-Ames 90210*. Engineering Research Institute, Iowa State University 1990.
 - [53] Klaiber F.W., Wipf T.J., Fanous F.S., Bosh T.E., El-Arabaty H., *Strengthening of existing continuous-span, steel-stringer, concrete-deck bridge, Iowa DOT Project HR-333, ISU-ERI-Ames- 94403*. Engineering Research Institute, Iowa State University 1993.
 - [54] Klaiber F.W., Fanous F.S., Wipf T.J., El-Arabaty H., *Design manual for strengthening of existing continuous-span composite bridges, Iowa DOT Project HR-333, ISU-ERI-Ames-94404*. Engineering Research Institute, Iowa State University 1993.

-
- [55] Kołakowski T., Kosecki W., Marecki A., *VFT® - prtefabrykowane dźwigary zespolone z betonowym deskowaniem aktywnym*. Inżynieria i Budownictwo Nr 3/2003.
- [56] Kmita J., Biliński T., *Dorobek nauki polskiej w zakresie konstrukcji zespolonych*. V Konferencja Naukowa Konstrukcje Zespolone. t. III, Zielona Góra 1999.
- [57] Kravanja S., Silih S., *Optimization based comparison between composite I beams and composite trusses*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 59 (2003), pp. 609 – 625.
- [58] Król H., *Modelowanie zachowania się belki sprężonej cięgnami z uwzględnieniem efektów II rzędu*. XXXIX Konferencja Naukowa Warszawa – Krynica – Rzeszów 1993.
- [59] Król H., *Modelowanie stalowej belki sprężonej cięgnem z wykorzystaniem plastycznych właściwości stali w fazie eksploatacji*. Rozprawa doktorska. Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, Warszawa 2001.
- [60] Kubica E., Lorenc W., *Analiza wpływu trasy kabli sprężających i rozkładu łączników na układ sił ścinających w zespoleniu podczas sprężania belki zespolonej*. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Zielonogórskiego, str. 387 – 392. Zielona Góra 2003.
- [61] Kucharczyk W. *Belki zespolone stalowo-betonowe w konstrukcjach budowlanych*. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2001.
- [62] Li S.J., Yu H., Suzuki Y., *Identification of non-linear hysteretic systems with slip*. Computers & Structures, vol. 82 (2004), pp. 157 – 165.
- [63] Li W., Albrecht P., Saadatmanesh H., *Strengthening of composite steel-concrete bridges*. Journal of Structural Engineering, vol. 121 (1995), pp. 1842 – 1849.
- [64] Lorenc W., Kubica E., *Kształtowanie trasy cięgna w belkowo-cięgnowych konstrukcjach wsporczych rurociągów*. Budownictwo w Energetyce: III konferencja naukowo-techniczna, Szklarska Poręba, 4-6 kwietnia 2002. Wrocław 2002.
- [65] Lorenc W., Kubica E., *Nieliniowe modelowanie belki zespolonej sprężanej kablami zewnętrznymi z uwzględnieniem podatności zespolenia*. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Zielonogórskiego, str.243 – 348. Zielona Góra 2003.
- [66] Lorenc W., Kubica E., Adrjan P., *Analiza zachowania się belek zespolonych sprężonych kablami zewnętrznymi*. XLIX Konferencja Naukowa „Krynica 2003”, Krynica-Warszawa 2003.
- [67] Lorenc W., Kubica E., *Nonlinear modelling of composite beams prestressed with external tendons*. Archives of Civil and Mechanical Engineering, vol. IV (2004), pp.83 – 93.
- [68] Machelski C., Biliszczyk J., *Raport serii SPR nr 21/96. Nadzór naukowy nad remontem mostu w miejscowości Ścibórz w ciągu drogi krajowej nr 408 Kłodzko – Gliwice. Badania efektywności sprężenia dźwigarów głównych przy pomocy prostoliniowych kabli odcinkowych*. Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1996.
- [69] Machelski C., Biliszczyk J., Strojecka M., *Raport serii SPR nr 52/96. Projekt techniczny próbnego obciążenia mostu przez kanał ulgi Jeziora Otmuchowskiego w Ściborzu*. Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1996.
- [70] Machelski C., Onysyk J., Prabucki P., *Wzmocnienie mostu zespolonego ze względu na przejazd nienormatywny*. Współczesne metody wzmocniania i przebudowy mostów – VIII seminarium. Poznań 1998.
- [71] Machelski C., Kamiński L., Onysyk J., *Raport serii SPR nr 97/97. Ocena efektywności wzmocnienia mostu przez Widawę w ciągu ul. Kamińskiego we Wrocławiu oraz ocena stanu technicznego czterech obiektów inżynierskich w ciągu ul. Kamińskiego we Wrocławiu*. Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1997.

-
- [72] Mari A., Mirambell E., Estrada I., *Effects of construction process and slab prestressing on serviceability behavior of composite bridges*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 59 (2003), pp. 135 – 163.
 - [73] Miyamoto A., Tei K., Nakamura H., Bull J.W., *Behavior of prestressed beam strengthened with external tendons*. Journal of Structural Engineering, vol. 126 (2000), pp. 1033 – 1044.
 - [74] Nakajima A., Saiki I., Kokai M., Doi K., Takabayashi Y., Ooe H., *Cyclic shear force– slip behavior of studs under alternating and pulsating load condition*. Engineering Structures vol. 25 (2003), pp. 537– 545.
 - [75] Ollgard J.G., Slutter R.G., Fisher J.W., *Shear strength of studs connectors in lightweight and normal-weight concrete*. AISC Engng J., vol. 8 (1971), pp. 55 – 64.
 - [76] Owen V.A., Burgess I.W., Plank R.J., Abdul Vali A.A., *An analytical model for the analysis of composite beams with partial interaction*. Computers & Structures, vol. 62 (1997) pp. 493 – 504.
 - [77] Reagan R.S., *An analytical study of the behavior of prestressed composite beams*. Thesis presented to Rice University, Houston, Texas, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Engineering. Houston 1966.
 - [78] Saadatmanesh H., Albrecht P., Ayyub B.M., *Experimental study of prestressed composite beams*. Journal of Structural Engineering, vol. 115 (1989), pp. 2348 – 2363.
 - [79] Saadatmanesh H., Albrecht P., Ayyub B.M., *Analytical study of prestressed composite beams*. Journal of Structural Engineering, vol. 115 (1989), pp. 2364 – 2381.
 - [80] Saadatmanesh H., Albrecht P., Ayyub B.M., *Guidelines for design of prestressed composite beams*. Journal of Structural Engineering, vol. 115 (1989), pp. 2944 – 2961.
 - [81] Shen W.M., Zong Z.H., Fang Z.Z., *Experimental study on external prestressed steel-concrete composite supported beams*. Journal of Fuzhou University (NSE), vol. 29:5 (2001), pp. 77 – 80.
 - [82] Sołek A., *Remont mostu drogowego przez San w Brandnicy*. Inżynieria i Budownictwo nr 1-2/2004.
 - [83] Stras J.C., *An experimental and analytical study of prestressed composite beams*. Thesis presented to Rice University, Houston, Texas, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science. Houston 1964.
 - [84] Szilard R., *Design of prestressed composite steel structures*. Journal of Structural Division, ASCE, 85:9 (1959), 97 – 124.
 - [85] Tachibana Y., Kondo K., Ito K., *Experimental study on composite beams prestressed with wire cables*. Symp., Use of High-Strength Steel Struct., Japan Soc. for Promotion of Sci., Tokyo 1963.
 - [86] Tachibana Y., Kondo K., Ito K., *Experimental study on composite beams prestressed with wire cables*. Final report, Intern. Assoc. for Bridge and Struct. Engrg., 7th Congress, pp. 677 – 683, Rio de Janeiro 1964.
 - [87] Taplin G., Grundy P., *The incremental slip behaviour of stud shear connectors*. Proceedings of the Fourteen Australian Conference on the Mechanics of Structures and Materials, Hobart 1995.
 - [88] Taplin G., Grundy P., *The incremental collapse of composite bridge*. Proceedings of the Monash Industry Geomechanics & Structures Symposium, Monash 1996.
 - [89] Taplin G., Grundy P., *Incremental slip of stud shear connectors under repeated loading*. Proceedings of the International Conference on Composite Construction, Innsbruck 1997.

-
- [90] Taplin G., *The behaviour of composite beams under repeated loading*. A thesis submitted in fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Civil Engineering, Monash University, Monash 1999.
 - [91] Taplin G., Grundy P., *Steel – concrete composite beams under repeated load*. Sixteen Australian Conference on the Mechanics of Structures and Materials, Sydney 1999.
 - [92] Taraszkiewicz C., *Stan graniczny i ugięcie stalowej belki sprężonej*. Inżynieria i Budownictwo v. 09 (1967), pp. 353 – 360.
 - [93] Topkaya C., Williamson E., Frank K., *Behaviour of curved steel trapezoidal box-girders during construction*. Engineering Structures, vol. 26 (2004), pp. 721 – 733.
 - [94] Troitsky M.S., Zielinski Z.A., Nouraeyan A., *Pre-tensioned and posttensioned composite girders*. Journal of Structural Engineering, vol. 115 (1989), pp. 3142 – 3153.
 - [95] Virtuoso F., Vieira R., *Time dependent behaviour of continuous composite beams with flexible connection*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 60 (2004), pp. 451 – 463.
 - [96] Wolfram S., *The MATHEMATICA® book. Third edition. Mathematica Version 3*. Wolfram Research, Inc. 1996.
 - [97] Wołowicki W., Karlikowski J., Madaj A., *Mostowe konstrukcje zespolone stalowo-betonowe. Zasady projektowania*. Współczesne Metody Wzmacniania i Przebudowy Mostów, X seminarium, ISSN 1429-8929. Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Poznańskiej, Poznań 2000.
 - [98] Zong Z.H., Che H.M., *Experimental study of shear connector under static and fatigue loading*. Journal of Fuzhou University (NSE), vol. 27:6 (1999), pp. 61 – 66.
 - [99] Zong Z.H., Che H., *Fatigue behavior of prestressed composite steel-concrete beams*. Journal of the China Railway Society, vol. 22:3 (2000), pp. 92 – 95.
 - [100] Zong Z.H., Che H.M., Fang Z.Z., *Nonlinear analysis of prestressed composite steel-concrete beams by the finite element method*. China Journal of Highway and Transport, vol. 13:2 (2000), pp. 56-61.
 - [101] Zong Z.H., *State-of-the-Art Research and Application of Prestressed Composite Bridges*. Seventh International Symposium on Structural Engineering for Young Experts, August 28-31 2002, Tianjin 2002.
 - [102] Zong Z.H., Zheng, Z.Q., Fang Z.Z., Che H.M., *Experimental study on external prestressed steel-concrete continuous composite beams*. China Journal of Highway and Transport, vol. 15:1 (2002), pp. 44 – 49.
 - [103] ENV 1992-1-1:1991 Wersja polska prenormy europejskiej. Eurokod 2: *Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1: Reguły ogólne i reguły dla budynków*.
 - [104] ENV 1993-1-1:1992 Wersja polska. Eurokod 3: *Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Przepisy ogólne i przepisy dla budynków*.
 - [105] ENV 1994-1-1:1992 Wersja polska. Eurokod 4: *Projektowanie zespolonych konstrukcji stalowo – betonowych. Część 1-1: Zasady ogólne i reguły dla budynków*.
 - [106] ENV 1994-2:1997 Wersja polska prenormy europejskiej. Eurokod 4: *Projektowanie konstrukcji zespolonych stalowo – betonowych. Część 2: Mosty zespolone*.
 - [107] prEN 1993-1-1:2003 English version (stage 34 draft). Eurocode 3: *Design of steel structures. Part 1-1: General rules and rules for buildings*.
 - [108] prEN 1993-2:2003 English version (stage 34 draft). Eurocode 3: *Design of steel structures. Part 2: Steel bridges*.
 - [109] prEN 1994-1-1:2002 English version (examination document). Eurocode 4: *Design of composite steel and concrete structures. Part 1.1 General rules and rules for buildings*.

- [110] prEN 1994-2:2003 English version (stage 34 draft). Eurocode 4: *Design of composite steel and concrete structures. Part 2: Rules for bridges.*
- [111] PN-82/B-03300 *Konstrukcje zespolone stalowo – betonowe. Obliczenia statyczne i projektowanie. Belki zespolone krepie.*
- [112] PN-82/B-03301 *Konstrukcje zespolone stalowo – betonowe. Obliczenia statyczne i projektowanie. Belki zespolone smukłe.*
- [113] PN-90/B-03200 *Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.*
- [114] PN-82/S-10052 *Obiekty mostowe. Konstrukcje stalowe. Projektowanie.*
- [115] PN-85/S-10030 *Obiekty mostowe. Obciążenia.*
- [116] PN-91/S-10042 *Obiekty mostowe. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Projektowanie.*
- [117] PN-EN 10002-1:2002 *Metale – Próba rozciągania – Część 1: Metoda badania w temperaturze otoczenia.*
- [118] PN-EN 12390-1:2001 *Badania betonu. Część 1: Kształt, wymiary i inne wymagania dotyczące próbek do badania i form.*
- [119] PN-EN 12390-2:2001 *Badania betonu. Część 2: Wykonywanie i pielęgnacja próbek do badań wytrzymałościowych.*
- [120] PN-EN 12390-3:2002 *Badania betonu. Część 3: Wytrzymałość na ściskanie próbek do badania.*
- [121] PN-EN 12390-4:2001 *Badania betonu. Część 4: Wytrzymałość na ściskanie. Wymagania dla maszyn wytrzymałościowych.*
- [122] PN-EN ISO 377:2000 *Stal i wyroby stalowe. Pobieranie i przygotowywanie odcinków próbnych i próbek do badań własności mechanicznych.*
- [123] ITB *Instrukcja ITB nr 194/98: Badania cech mechanicznych betonu na próbkach wykonanych w formach.*
- [124] *SOFiSTiK Analysis Programs. Version 12.00.* SOFiSTiK AG, Oberschleissheim 2002.
- [125] *Nonlinear analysis of plates and shells. 10.12.2002.* SOFiSTiK AG, Sofistik press 2002.
- [126] TRANSPROJEKT GDAŃSKI *Projekt techniczny. Obwodnica miasta Karlina w ciągu drogi krajowej nr 6. Most nad rz. Parsętą w km 1+108,75, km rzeki 45+420.* Gdańsk 1997.
- [127] TRANSPROJEKT GDAŃSKI *Projekt techniczny. Obwodnica miasta Karlina w ciągu drogi krajowej nr 6. Most nad rz. Radew w km 4+152,55, km rzeki 4+250.* Gdańsk 1997.

Ponadto w opracowaniu wykorzystano informacje uzyskane od następujących osób (za ich zgodą):

- [128] mgr inż. Tomasz Jendernal (BBR Polska): Konsultacje i wymiana doświadczeń na budowie Mostu Millenijnego we Wrocławiu oraz podczas sprężania modeli belek w ramach badań do niniejszej pracy doktorskiej.
- [129] dr Grazziano Leoni (Institute of Structural Engineering, University of Ancona, Ancona, Italy): Korespondencja elektroniczna.
- [130] prof. Wayne Klaiber (Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa, USA): Korespondencja elektroniczna.

ZAŁĄCZNIK NR 1

Kod źródłowy programu PRESTCOMP napisany w środowisku MATHEMATICA®:

(* 3. Rozpoczęcie obliczeń od zera*)

(* bb musi być większe od b2*)

y of =.; y =.;

b1 = 0.17; t1 = 0.0127; b2 = 0.17; t2 = 0.0127; hw = 0.3346; tw = 0.00845; bb = 0.8; tb = 0.1; bplt = 0; tplt = 0; bnn = 0.15;

tnn = 0.0101;

x1nak = 0.512; x2nak = 5.012;

bpdd = 0; tpdd = 0;

$L = 5.524; F_c = 0.00; kF_c = 2 \frac{1.5}{10000};$

$xSila1 = 0.5 L - \frac{1}{2}; xSila2 = 0.5 L + \frac{1}{2};$

(* charakterystyki const law dla betonu płyty*)

EB = 28600;

fckb = -31.7;

fctb = 3.2;

$\epsilon_{c1b} = -0.0022;$

$\alpha_b = 0.7;$

(* charakterystyki const law dla stali pasów belki*)

EY = 207000;

sigyld1 = 262;

epsyld1 = sigyld1 / EY;

(* charakterystyki const law dla stali środniaka i nakładki belki B2*)

sigyld2 = 293;

epsyld2 = sigyld2 / EY;

(* charakterystyki const law dla stali środniaka i nakładki belki B3*)

sigyld3 = 358;

epsyld3 = sigyld3 / EY;

(* charakterystyki const law dla betonu gzymsu*)

EBc = 207000;

(* charakterystyki const law dla stali zbrojeniowej belki*)

EZb = 207000;

(* charakterystyki const law dla stali zbrojeniowej płyty*)

EZp = 207000;

sigyldz = 428;

epsyldz = sigyldz / EZp;

(* charakterystyki const law dla stali ciągną*)

Ec = 197800;

Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych sprężanych kablami zewnętrznymi

(* charakterystyki konst law dla stali kabli istn. *)

$$k_{Ec} = 197800;$$

(* rozmieszczenie zbrojenia *)

$$A_{z1} = 0.000215; (* \text{pole powierzchni zbr. górnego płyty} *)$$

$$A_{z2} = 0.000215; (* \text{pole powierzchni zbr. dolnego płyty} *)$$

$$A_{z3} = 0.000; (* \text{pole powierzchni zbr. górnego belki} *)$$

$$A_{z4} = 0.000; (* \text{pole powierzchni zbr. dolnego belki} *)$$

$$y_{z1} = 0.076; (* \text{odl. osi zbr. górnego płyty od górnjej krawędzi półki górnjej belki} *)$$

$$y_{z2} = 0.032; (* \text{odl. osi zbr. dolnego płyty od górnjej krawędzi półki górnjej belki} *)$$

$$y_{z3} = 0.08; (* \text{odl. osi zbr. górnego belki od górnjej krawędzi półki górnjej belki} *)$$

$$y_{z4} = 1.04; (* \text{odl. osi zbr. dolnego belki od górnjej krawędzi półki górnjej belki} *)$$

$$\Delta y_{zb} = 0.004; (* \text{na potrzeby całkowania – połowa wysokości prostokąta zbrojenia} *)$$

$$zz1 = A_{z1} / (2 \Delta y_{zb}); zz2 = A_{z2} / (2 \Delta y_{zb}); zz3 = A_{z3} / (2 \Delta y_{zb}); zz4 = A_{z4} / (2 \Delta y_{zb});$$

$$n = E_Y / E_B;$$

$$n1 = E_Y / E_{Zp};$$

$$n2 = E_Y / E_{Zb};$$

(* uwzględnienie wstępnego obciążenia belki *)

$$ebs0 = 0; (* \text{wstępne odksz w belce} *)$$

$$ebb0 = 0; (* \text{wstępne odksz w płycie} *)$$

$$u0wst = 0;$$

$$h0wst = 0;$$

$$\text{deltay} = 0;$$

$$kepsc0 = -0.005;$$

$$\text{epsc0} = 0;$$

(* Kable istniejące *)

$$kxc0 = 0; ky c0 = 0 + \text{deltay};$$

$$kxc1 = 1.611; ky c1 = 0.239583 + \text{deltay};$$

$$kxc2 = 1.612; ky c2 = 0.239583 + \text{deltay};$$

$$kxc3 = 3.912; ky c3 = 0.239583 + \text{deltay};$$

$$kxc4 = 5.524; ky c4 = 0 + \text{deltay};$$

$$\Delta kdx1 = kxc1 - kxc0; \Delta kdy1 = ky c1 - ky c0;$$

$$\Delta kdx2 = kxc2 - kxc1; \Delta kdy2 = ky c2 - ky c1;$$

$$\Delta kdx3 = kxc3 - kxc2; \Delta kdy3 = ky c3 - ky c2;$$

$$\Delta kdx4 = kxc4 - kxc3; \Delta kdy4 = ky c4 - ky c3;$$

$$\alpha_{kd1} = \frac{\Delta kdx1}{\sqrt{\Delta kdx1^2 + \Delta kdy1^2}};$$

$$\beta_{kd1} = \frac{\Delta kdy1}{\sqrt{\Delta kdx1^2 + \Delta kdy1^2}};$$

$$\alpha_{kd2} = \frac{\Delta kdx2}{\sqrt{\Delta kdx2^2 + \Delta kdy2^2}}; \beta_{kd2} = \frac{\Delta dy2}{\sqrt{\Delta kdx2^2 + \Delta kdy2^2}};$$

$$\alpha_{kd3} = \frac{\Delta kdx3}{\sqrt{\Delta kdx3^2 + \Delta kdy3^2}}; \beta_{kd3} = \frac{\Delta kdy3}{\sqrt{\Delta kdx3^2 + \Delta kdy3^2}};$$

$$\alpha_{kd4} = \frac{\Delta kdx4}{\sqrt{\Delta kdx4^2 + \Delta kdy4^2}}; \beta_{kd4} = \frac{\Delta kdy4}{\sqrt{\Delta kdx4^2 + \Delta kdy4^2}};$$

$$k_{\Lambda} = \sqrt{\Delta kdx1^2 + \Delta kdy1^2} + \sqrt{\Delta kdx2^2 + \Delta kdy2^2} + \sqrt{\Delta kdx3^2 + \Delta kdy3^2} + \sqrt{\Delta kdx4^2 + \Delta kdy4^2};$$

(* CIĘGNO*)

xc0 = 0; yc0 = 0;

xc1 = 5.25; yc1 = 0.814;

xc2 = 15.75; yc2 = 0.814;

xc3 = 21; yc3 = 0;

$\Delta dx1 = xc1 - xc0; \Delta dy1 = yc1 - yc0;$

$\Delta dx2 = xc2 - xc1; \Delta dy2 = yc2 - yc1;$

$\Delta dx3 = xc3 - xc2; \Delta dy3 = yc3 - yc2;$

$$\alpha_{d1} = \frac{\Delta dx1}{\sqrt{\Delta dx1^2 + \Delta dy1^2}}; \beta_{d1} = \frac{\Delta dy1}{\sqrt{\Delta dx1^2 + \Delta dy1^2}};$$

$$\alpha_{d2} = \frac{\Delta dx2}{\sqrt{\Delta dx2^2 + \Delta dy2^2}}; \beta_{d2} = \frac{\Delta dy2}{\sqrt{\Delta dx2^2 + \Delta dy2^2}};$$

$$\alpha_{d3} = \frac{\Delta dx3}{\sqrt{\Delta dx3^2 + \Delta dy3^2}}; \beta_{d3} = \frac{\Delta dy3}{\sqrt{\Delta dx3^2 + \Delta dy3^2}};$$

$$\Lambda = \sqrt{\Delta dx1^2 + \Delta dy1^2} + \sqrt{\Delta dx2^2 + \Delta dy2^2} + \sqrt{\Delta dx3^2 + \Delta dy3^2};$$

rec1 = Graphics[Rectangle[Scaled[{0, 0}], Scaled[{b1, t1}]]];

rec2 = Graphics[Rectangle[Scaled[{0.5(b1 - tw), t1}], Scaled[{0.5(b1 + tw), t1 + hw}]]];

rec3 = Graphics[Rectangle[Scaled[{-0.5(b2 - b1), t1 + hw}], Scaled[{-0.5(b2 - b1) + b2, t1 + hw + t2}]]];

rec4 =

Graphics[{GrayLevel[.77], Rectangle[Scaled[{-0.5(bb - b1), t1 + hw + t2}],

Scaled[{0.5(bb + b1), t1 + hw + t2 + tb}]]];

rec5 =

Graphics[{GrayLevel[.77], Rectangle[Scaled[{-0.5(bplt - b1), t1 + hw + t2 + tb}],

Scaled[{0.5(bplt + b1), t1 + hw + t2 + tb + tplt}]]];

rec6 =

Graphics[{GrayLevel[.77], Rectangle[Scaled[{-0.5(b2 - b1) - bpdd, t1 + hw}],

Scaled[{-0.5(b2 - b1), t1 + hw + tpdd}]]];

rec7 =

Graphics[{GrayLevel[.77], Rectangle[Scaled[{0.5(b2 + b1), t1 + hw}],

Scaled[{bpdd + 0.5(b2 + b1), t1 + hw + tpdd}]]];

rec8 = Graphics[Rectangle[Scaled[{-0.5(bnn - b1), 0}], Scaled[{0.5(bnn + b1), -tnn}]]];

Show[rec1, rec2, rec3, rec4, rec5, rec6, rec7, rec8, AspectRatio -> 1, PlotRange -> All];

(* moment statyczny względem góry półki górnej kształtownika*)

$$M_{s1} = -bplt \, tplt \, \frac{1}{n} (0.5 \, tplt + tb) - bb \, tb \, \frac{1}{n} 0.5 \, tb + 2 \, bpdd \, tpdd \, \frac{1}{n} 0.5 \, tpdd + b2 \, t2 \left(\frac{t2}{2} \right) + hw \, tw (0.5 \, hw + t2) +$$

$$b1 \, t1 \left(hw + \frac{t1}{2} + t2 \right) + bnn \, tnn \left(hw + t1 + t2 + \frac{tnn}{2} \right) - \frac{1}{n1} (Az1 \, yz1 + Az2 \, yz2) + \frac{1}{n2} (Az3 \, yz3 + Az4 \, yz4);$$

(* moment statyczny względem górnej krawędzi płyty*)

**Nośność graniczna zespolonych belek stalowo-betonowych
sprężanych kablami zewnętrznymi**

```

Ared = bplt tplt  $\frac{1}{n}$  + bb tb  $\frac{1}{n}$  + 2 bpdd tpdd  $\frac{1}{n}$  + b2 t2 + hw tw + b1 t1 + bnn tnn +  $\frac{1}{n1}$  (Az1 + Az2) +  $\frac{1}{n2}$  (Az3 + Az4);
(* pole belki+plyta+zbrojenie wiotkie zredukowane jak dla materiału belki*)
y of = Ms1 / Ared;
y0 = 0;
ynak = (hw + t1 + t2 + tnn - y of);
y1 = (hw + t1 + t2 - y of);
Print["Odległość spodu belki (spodu półki dolnej dźwigara) od środka ciężkości: ", y1]
y2 = (hw + t2 - y of);
y3 = t2 - y of;
y4 = -y of;
y5 = -y of - tb;
y6 = -y of - tplt - tb;
yrz1 = -(y of + yz1); yrz2 = -(y of + yz2); yrz3 = -(y of - yz3); yrz4 = -(y of - yz4);
fψcount = 2; (*Liczba funkcji ψ*)
fφcount = 2; (*Liczba funkcji φ*)
fηcount = 2; (*Liczba funkcji η*)
MatDim = fψcount + fφcount + fηcount;
MacUpside1 = Table[UnitStep[j - i], {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
MacUpside2 = Table[UnitStep[j - i - 1], {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
MatrixForm[MacUpside1]
MatrixForm[MacUpside2]
Tabela1s = Table[y^2 (UnitStep[(i - 0 - 1)] UnitStep[(fψcount - i)] UnitStep[(j - 0 - 1)] UnitStep[(fψcount - j)]),
  {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
Tabela2s =
  Table[-y (UnitStep[(i - 0 - 1)] UnitStep[(fψcount - i)] UnitStep[(j - fψcount - 1)] UnitStep[(fψcount + fφcount - j)]),
    {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
Tabela3s =
  Table[
    0 (UnitStep[(i - 0 - 1)] UnitStep[(fψcount - i)] UnitStep[(j - fψcount - fφcount - 1)]
      UnitStep[(fψcount + fφcount + fηcount - j)]), {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
Tabela4s =
  Table[
    1 (UnitStep[(i - fψcount - 1)] UnitStep[(fψcount + fφcount - i)] UnitStep[(j - fψcount - 1)]
      UnitStep[(fψcount + fφcount - j)]), {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
Tabela5s =
  Table[
    0 (UnitStep[(i - fψcount - 1)] UnitStep[(fψcount + fφcount - i)] UnitStep[(j - fψcount - fφcount - 1)]
      UnitStep[(fψcount + fφcount + fηcount - j)]), {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
Tabela6s =
  Table[
    0 (UnitStep[(i - fψcount - fφcount - 1)] UnitStep[(fψcount + fφcount + fηcount - i)]
      UnitStep[(j - fψcount - fφcount - 1)] UnitStep[(fψcount + fφcount + fηcount - j)]), {i, 1, MatDim},
    {j, 1, MatDim}];
MacOp1s = (Tabela1s + Tabela2s + Tabela3s + Tabela4s + Tabela5s + Tabela6s) MacUpside1;
Tabela1b = Table[y^2 (UnitStep[(i - 0 - 1)] UnitStep[(fψcount - i)] UnitStep[(j - 0 - 1)] UnitStep[(fψcount - j)]),
  {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
Tabela2b =
  Table[0 (UnitStep[(i - 0 - 1)] UnitStep[(fψcount - i)] UnitStep[(j - fψcount - 1)] UnitStep[(fψcount + fφcount - j)]),
    {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];

```

```

Tabela3b =
    Table[
        -y (UnitStep[(i - 0 - 1)] UnitStep[(f $\psi$ count - i)] UnitStep[(j - f $\psi$ count - f $\varphi$ count - 1)]
        UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count + f $\eta$ count - j)]), {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
Tabela4b =
    Table[
        0 (UnitStep[(i - f $\psi$ count - 1)] UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count - i)] UnitStep[(j - f $\psi$ count - 1)]
        UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count - j)]), {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
Tabela5b =
    Table[
        0 (UnitStep[(i - f $\psi$ count - 1)] UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count - i)] UnitStep[(j - f $\psi$ count - f $\varphi$ count - 1)]
        UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count + f $\eta$ count - j)]), {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
Tabela6b =
    Table[
        1 (UnitStep[(i - f $\psi$ count - f $\varphi$ count - 1)] UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count + f $\eta$ count - i)]
        UnitStep[(j - f $\psi$ count - f $\varphi$ count - 1)] UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count + f $\eta$ count - j)]), {i, 1, MatDim},
        {j, 1, MatDim}];
MacOp1b = (Tabela1b + Tabela2b + Tabela3b + Tabela4b + Tabela5b + Tabela6b) MacUpside1;
Tabela1zes = Table[0 (UnitStep[(i - 0 - 1)] UnitStep[(f $\psi$ count - i)] UnitStep[(j - 0 - 1)] UnitStep[(f $\psi$ count - j)]),
    {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
Tabela2zes =
    Table[0 (UnitStep[(i - 0 - 1)] UnitStep[(f $\psi$ count - i)] UnitStep[(j - f $\psi$ count - 1)] UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count - j)]),
    {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
Tabela3zes =
    Table[
        0 (UnitStep[(i - 0 - 1)] UnitStep[(f $\psi$ count - i)] UnitStep[(j - f $\psi$ count - f $\varphi$ count - 1)]
        UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count + f $\eta$ count - j)]), {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
Tabela4zes =
    Table[
        1 (UnitStep[(i - f $\psi$ count - 1)] UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count - i)] UnitStep[(j - f $\psi$ count - 1)]
        UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count - j)]), {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
Tabela5zes =
    Table[
        -1 (UnitStep[(i - f $\psi$ count - 1)] UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count - i)] UnitStep[(j - f $\psi$ count - f $\varphi$ count - 1)]
        UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count + f $\eta$ count - j)]), {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}];
Tabela6zes =
    Table[
        1 (UnitStep[(i - f $\psi$ count - f $\varphi$ count - 1)] UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count + f $\eta$ count - i)]
        UnitStep[(j - f $\psi$ count - f $\varphi$ count - 1)] UnitStep[(f $\psi$ count + f $\varphi$ count + f $\eta$ count - j)]), {i, 1, MatDim},
        {j, 1, MatDim}];
MacOp1zes = (Tabela1zes + Tabela2zes + Tabela3zes + Tabela4zes + Tabela5zes + Tabela6zes) MacUpside1;
MACwspA = Table[0, {i, 1, MatDim}]; (* Sumaryczna wstępna macierz współczynników A *)
LL0 = Table[0, {i, 1, MatDim}]; (* Sumaryczna wstępna macierz lewej strony *)
 $\Delta$ ΓBB = Table[0, {i, 1, MatDim}]; (* Sumaryczna wstępna macierz prawej strony *)
 $\Delta$ ΓwspA = Table[0, {i, 1, MatDim}]; (* Sumaryczna wstępna macierz współczynników *)
Obc = 0; Ugiecie = 0; Sigma = 0; MacObcSig = {{0, 0}}; MacObcUg = {{0, 0}}; MacObcEpsD = {{0, 0}};
MacObcEpsG = {{0, 0}}; MacSilaCiegno = {{0, 0}}; MacObcEpsPD = {{0, 0}}; MacObcEpsPG = {{0, 0}};
EndSlip2 = {{0, 0}}; fnumb = 0; funtable = {};
Obctable = {};

```

(*4. Obliczenia zasadnicze*)

zast =.; stau =.; slip =.;

(*qwstepne=0.00;qnowe=0.002112;*)

$$qwstepne = \frac{0}{1000}; qnowe = 0.0; q = qwstepne + qnowe; obcK = \frac{10}{1000};$$

Table[A_i =., {i, 1, MatDim}]; MacAo =.; epsst =.; epsb =.; xA = 0.01 L; xB = 0.99 L;

dAcGoal = 4; dPrecGoal = 3; dMaxRec = 8; dIntMeth = Automatic;

cAcGoal = 4; cPrecGoal = 3; cMaxRec = 8; cIntMeth = Automatic; ATSSes = AbsoluteTime[];

$$\text{FunkcjePsi} = \text{Table}\left[\text{Psi}_i[x] = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\frac{(-1+2i)\pi x}{L}\right], \{i, 1, \#count\}\right]$$

$$\text{FunkcjeFi} = \text{Table}\left[\text{Fi}_{i+\#count}[x] = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{LegendreP}\left[(-1+2i), \frac{2x}{L} - 1\right], \{i, 1, \#count\}\right]$$

$$\text{FunkcjeEta} = \text{Table}\left[\text{Eta}_{i+\#count+\#count}[x] = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{LegendreP}\left[(-1+2i), \frac{2x}{L} - 1\right], \{i, 1, \#count\}\right]$$

dfPsi = Table[Psi_i'[x], {i, 1, #count}]; dfFi = Table[Fi_i'[x], {i, #count + 1, #count + #count}];

dfEta = Table[Eta_i'[x], {i, #count + #count + 1, #count + #count + #count}]; dFuns = Join[dfPsi, dfFi, dfEta];

ffPsi = Table[Psi_i'[x], {i, 1, #count}]; fffFi = Table[Fi_i[x], {i, #count + 1, #count + #count}];

ffEta = Table[Eta_i[x], {i, #count + #count + 1, #count + #count + #count}]; Funs = Join[ffPsi, fffFi, ffEta];

FunCount = Length[dFuns]; MacFundStB = Table[dFuns[[i]] dFuns[[j]], {i, 1, FunCount}, {j, 1, FunCount}];

MacFundZesp = Table[Funs[[i]] Funs[[j]], {i, 1, FunCount}, {j, 1, FunCount}];

(*Const Law dla belki*)

estal = epsst + ebs0;

GS1 = -sigyld1 UnitStep[-estal - epsyld1] - EY estal UnitStep[-estal - epsyld1] +

EY estal UnitStep[-estal + epsyld1] + sigyld1 UnitStep[estal - epsyld1];

dGS1new = -EY UnitStep[-ebs0 - epsst - epsyld1] + EY UnitStep[-ebs0 - epsst + epsyld1];

GS2 = -sigyld2 UnitStep[-estal - epsyld2] - EY estal UnitStep[-estal - epsyld2] +

EY estal UnitStep[-estal + epsyld2] + sigyld2 UnitStep[estal - epsyld2];

dGS2new = -EY UnitStep[-ebs0 - epsst - epsyld2] + EY UnitStep[-ebs0 - epsst + epsyld2];

GS3 = -sigyld3 UnitStep[-estal - epsyld3] - EY estal UnitStep[-estal - epsyld3] +

EY estal UnitStep[-estal + epsyld3] + sigyld3 UnitStep[estal - epsyld3];

dGS3new = -EY UnitStep[-ebs0 - epsst - epsyld3] + EY UnitStep[-ebs0 - epsst + epsyld3];

(*Const Law dla betonu płyty*)

$$kb = \frac{EB\epsilon_{1b}}{f_{kb}}; \epsilon_{0b} = \frac{eb}{\epsilon_{1b}}; eb = epsb + ebb0;$$

$$\sigma_{bet} = f_{kb} \text{UnitStep}[-(eb - \epsilon_{1b})] + \frac{kb \epsilon_{0b} - \epsilon_{0b}^2}{1 + (kb - 2) \epsilon_{0b}} f_{kb} \text{UnitStep}[-eb (eb - \epsilon_{1b})] + EB eb \text{UnitStep}[eb];$$

$$d\sigma_{bet} = EB \text{UnitStep}[ebb0 + epsb] -$$

$$\left(f_{ckb} \left(\frac{EB(ebb0 + epsb)}{f_{ckb}} - \frac{(ebb0 + epsb)^2}{\epsilon c1b^2} \right) \left(-2 + \frac{EB \epsilon c1b}{f_{ckb}} \right) \text{UnitStep}[(-ebb0 - epsb)(ebb0 + epsb - \epsilon c1b)] \right) /$$

$$\left(\epsilon c1b \left(1 + \frac{(ebb0 + epsb) \left(-2 + \frac{EB \epsilon c1b}{f_{ckb}} \right)}{\epsilon c1b} \right)^2 \right) +$$

$$\left(f_{ckb} \left(\frac{EB}{f_{ckb}} - \frac{2(ebb0 + epsb)}{\epsilon c1b^2} \right) \text{UnitStep}[(-ebb0 - epsb)(ebb0 + epsb - \epsilon c1b)] \right) /$$

$$\left(1 + \frac{(ebb0 + epsb) \left(-2 + \frac{EB \epsilon c1b}{f_{ckb}} \right)}{\epsilon c1b} \right);$$

$$GB = \sigma_{bet}; \quad dGB_{new} = d\sigma_{bet};$$

(* Const Law dla studia*)

$$msila = 0.4; F_{zespmax} = 75; m_{zesp} = 1000; slints = 0.00005;$$

$$G_{studplus} = F_{zespmax} \left(\frac{0.8}{\pi} \text{ArcTan}[20 m_{zesp} \text{slip}] + \frac{20000 \text{slip} + 10}{F_{zespmax}} \right);$$

$$G_{studminus} = -F_{zespmax} \left(\frac{0.8}{\pi} \text{ArcTan}[-20 m_{zesp} \text{slip}] + \frac{-20000 \text{slip} + 10}{F_{zespmax}} \right);$$

$$\rho_{40} = (G_{studplus} / \text{slip} \rightarrow \text{slints}) / \text{slints}; \quad G_{studstala} = \rho_{40} \text{slip};$$

$$G_{stud} = G_{studminus} \text{UnitStep}[-\text{slip} - \text{slints}] + G_{studstala} \text{UnitStep}[(\text{slip} + \text{slints})(-\text{slip} + \text{slints})] +$$

$$G_{studplus} \text{UnitStep}[(\text{slip} - \text{slints})]; \quad dG_{stud} = \partial_{\text{slip}} G_{stud};$$

$$f_{stud}[x] = \frac{1}{1000} (37.5 \text{UnitStep}[-x + 0.512] + 20 \text{UnitStep}[(x - 0.512)(-x + 0.512)] + 37.5 \text{UnitStep}[(x - 0.512)]);$$

$$K_f = G_{stud} f_{stud}[x]; \quad dK_f = dG_{stud} f_{stud}[x];$$

(* Const Law dla zbrojenia płyty*)

$$GZp = -\text{sigyldz} \text{UnitStep}[-eb - \text{epsyldz}] - EY eb \text{UnitStep}[-eb - \text{epsyldz}] + EY eb \text{UnitStep}[-eb + \text{epsyldz}] +$$

$$\text{sigyldz} \text{UnitStep}[eb - \text{epsyldz}];$$

$$dGZp = -EY \text{UnitStep}[-eb - \text{epsyldz}] + EY \text{UnitStep}[-eb + \text{epsyldz}];$$

$$\text{epsst} = \text{stau} - \text{zast} y; \quad \text{epsb} = \text{etau} - \text{zast} y;$$

$$v[x] = \sum_{i=1}^{f_{\text{count}}} A_i \text{Psi}_i[x]; \quad u[x] = \sum_{i=1+f_{\text{count}}}^{f_{\text{count}}+f_{\text{count}}} A_i \text{Fi}_i[x]; \quad h[x] = \sum_{i=1+f_{\text{count}}+f_{\text{count}}}^{f_{\text{count}}+f_{\text{count}}+f_{\text{count}}} A_i \text{Eta}_i[x];$$

$$\text{zast} = v'[x]; \quad \text{stau} = u'[x]; \quad \text{etau} = h'[x]; \quad \text{slip} = (u[x] + u0wst) - (h[x] + h0wst);$$

$$\text{MacPochS1} = \text{MacOp1s} dGS1_{new} \text{MacFundStB}; \quad \text{MacPochS2} = \text{MacOp1s} dGS2_{new} \text{MacFundStB};$$

$$\text{MacPochS3} = \text{MacOp1s} dGS3_{new} \text{MacFundStB}; \quad \text{MacPochB} = \text{MacOp1b} dGB_{new} \text{MacFundStB};$$

$$\text{MacPochZp} = \text{MacOp1b} dGZp \text{MacFundStB}; \quad \text{MacPochZesp} = \text{MacOp1zes} dK_f \text{MacFundZesp};$$

$$\text{MatrixForm}[\text{MacPochS1}]; \quad \text{MatrixForm}[\text{MacPochS2}]; \quad \text{MatrixForm}[\text{MacPochS3}]; \quad \text{MatrixForm}[\text{MacPochB}];$$

$$\text{MatrixForm}[\text{MacPochZp}]; \quad \text{MatrixForm}[\text{MacPochZesp}];$$

$$\text{Flat1S} = \text{Flatten}[\text{MacPochS1}]; \quad \text{Flat2S} = \text{Flatten}[\text{MacPochS2}]; \quad \text{Flat3S} = \text{Flatten}[\text{MacPochS3}];$$

$$\text{FlatB} = \text{Flatten}[\text{MacPochB}]; \quad \text{FlatZp} = \text{Flatten}[\text{MacPochZp}];$$

$$\text{FlatZesp} = \text{Flatten}[\text{MacPochZesp}];$$

(* PRAWA STRONA RÓWNANIA*)

MacObcqPsi = Table[Psi_i[x], {i, 1, f_i/count}]; MacObcKPsi = Table[Psi_i[xSila1] + Psi_i[xSila2], {i, 1, f_i/count}];

PrawaQInt =

q((NIntegrate[#, {x, 0, L}, AccuracyGoal → dAcGoal, PrecisionGoal → dPrecGoal, MaxRecursion → dMaxRec] &)/@
MacObcqPsi);

PrawaKInt = obcK MacObcKPsi; BB0PsiC = PrawaQInt + PrawaKInt; BB0FiEta = Table[0, {i, 1, f_pcount + f_icount}];

BB0int = Join[BB0PsiC, BB0FiEta]; BB0 = ΔΓBB + BB0int - LL0; Print["Wektor BB0: ", BB0];

(* WYZNACZENIE MACIERZY POCHODNYCH*)

MacAo = ΔΓwspA + MACwspA

WspATable = Table[A_i = MacAo[[i]], {i, 1, MatDim}];

Print["Całkowanie numeryczne pochodnych składników macierzy gradientu"];

(* kable istniejące*);

kSunPsiTable =

Table[kPsiSum_i = -α_kd₁ (kyc₁ Psi_i'[kxc₁] - kyc₀ Psi_i'[kxc₀]) + β_kd₁ (Psi_i[kxc₁] - Psi_i[kxc₀]) -
α_kd₂ (kyc₂ Psi_i'[kxc₂] - kyc₁ Psi_i'[kxc₁]) + β_kd₂ (Psi_i[kxc₂] - Psi_i[kxc₁]) -
α_kd₃ (kyc₃ Psi_i'[kxc₃] - kyc₂ Psi_i'[kxc₂]) + β_kd₃ (Psi_i[kxc₃] - Psi_i[kxc₂]) -
α_kd₄ (kyc₄ Psi_i'[kxc₄] - kyc₃ Psi_i'[kxc₃]) + β_kd₄ (Psi_i[kxc₄] - Psi_i[kxc₃]), {i, 1, f_i/count}];

kSunFiTable =

Table[kFiSum_i = α_kd₁ (Fi_i[kxc₁] - Fi_i[kxc₀]) + α_kd₂ (Fi_i[kxc₂] - Fi_i[kxc₁]) + α_kd₃ (Fi_i[kxc₃] - Fi_i[kxc₂]) +
α_kd₄ (Fi_i[kxc₄] - Fi_i[kxc₃]), {i, f_icount + 1, f_icount + f_pcount}];

kSunEtaTable = Table[0, {i, f_icount + f_pcount + 1, f_icount + f_pcount + f_icount}];

kMSuml = Join[kSunPsiTable, kSunFiTable, kSunEtaTable];

kMpSumA = $\left(kFc \frac{kEc}{k\Lambda} \right) (Table[kMSuml[[i]] kMSuml[[j]], {i, 1, MatDim}, {j, 1, MatDim}]);$

kMpSynSumA = kMpSumA MacUpside1; kMpSumAFlat = Flatten[kMpSynSumA];

ATSpoch = AbsoluteTime[];

MpAnak =

(NIntegrate[#, {y, y1, ynak}, {x, x1nak, x2nak}, AccuracyGoal → dAcGoal, PrecisionGoal → dPrecGoal,
MaxRecursion → dMaxRec] &)/@ Flat3S;

MpApd =

(NIntegrate[#, {y, y2, y1}, {x, 0, L}, AccuracyGoal → dAcGoal, PrecisionGoal → dPrecGoal,
MaxRecursion → dMaxRec] &)/@ Flat1S;

MpAsr =

(NIntegrate[#, {y, y3, y2}, {x, 0, L}, AccuracyGoal → dAcGoal, PrecisionGoal → dPrecGoal,
MaxRecursion → dMaxRec] &)/@ Flat2S;

MpApg =

(NIntegrate[#, {y, y4, y3}, {x, 0, L}, AccuracyGoal → dAcGoal, PrecisionGoal → dPrecGoal,
MaxRecursion → dMaxRec] &)/@ Flat1S;

```

MpAbet =
  bb
  ((NIntegrate[#, {y, y5, y4}, {x, 0, L}, AccuracyGoal → dAcGoal, PrecisionGoal → dPrecGoal,
    MaxRecursion → dMaxRec] &)/@ FlatB) +
  2 bpdd
  ((NIntegrate[#, {y, y4, y3}, {x, 0, L}, AccuracyGoal → dAcGoal, PrecisionGoal → dPrecGoal,
    MaxRecursion → dMaxRec] &)/@ FlatB);

MpAZpg =
  (NIntegrate[#, {y, yz1 - Δyzb, yz1 + Δyzb}, {x, 0, L}, AccuracyGoal → dAcGoal, PrecisionGoal → dPrecGoal,
    MaxRecursion → dMaxRec] &)/@ FlatZp;

MpAZpd =
  (NIntegrate[#, {y, yz2 - Δyzb, yz2 + Δyzb}, {x, 0, L}, AccuracyGoal → dAcGoal, PrecisionGoal → dPrecGoal,
    MaxRecursion → dMaxRec] &)/@ FlatZp;

MpZesp =
  (NIntegrate[#, {x, 0, L}, AccuracyGoal → dAcGoal, PrecisionGoal → dPrecGoal, MaxRecursion → dMaxRec] &)/@
  FlatZesp;

MpAFlat = bnn MpAnak + b1 MpApd + tw MpAsr + b2 MpApg + MpAbet + zz1 MpAZpg + zz2 MpAZpd +
  MpZesp + kMpSumAFlat;

Print["Składniki macierzy gradientu obliczone"]; ATEpoch = AbsoluteTime[];
TUpoch = ATEpoch - ATSpoch; MpD1 = Partition[MpAFlat, MatDim]; MpD2 = Transpose[MpD1 MacUpside2];
MpD = MpD1 MacUpside1 + MpD2; ΔA = MpD; KΔA = Inverse[ΔA];
Print["Macierz odwrotna pochodnych", MatrixForm[KΔA]];
ΛΛ = KΔA.BB0; MACwspA = ΛΛ + MACwspA (*Macierz szukanych współczynników*);
Print["Macierz przyrostu współczynników w danej iteracji", MatrixForm[ΛΛ]];
MMA = ΔΓwspA + MACwspA; WspATable = Table[Ai = MMA[[i]], {i, 1, MatDim}]; (*Wektor współczynników A*);
Operatoryst = Join[Table[-y, {i, 1, fcount}], Table[1, {i, 1, fcount}], Table[0, {i, 1, fcount}]];
Operatoryst = Join[Table[-y, {i, 1, fcount}], Table[0, {i, 1, fcount}], Table[1, {i, 1, fcount}]];
Operatoryst = Join[Table[0, {i, 1, fcount}], Table[1, {i, 1, fcount}], Table[-1, {i, 1, fcount}]];
st1 = Operatoryst dFuns GS1; st2 = Operatoryst dFuns GS2; st3 = Operatoryst dFuns GS3;
bet = OperatorystBet dFuns GB; zbr = OperatorystBet dFuns GZp; Maczesp = OperatorystZesp dFuns Kf;
Print["Całkowanie numeryczne lewej strony (belka) po xi y ..."];
ATScal = AbsoluteTime[];

Lnak =
  (NIntegrate[#, {y, y1, ynak}, {x, x1nak, x2nak}, AccuracyGoal → cAcGoal, PrecisionGoal → cPrecGoal,
    MaxRecursion → cMaxRec] &)/@ st3;

Lpd =
  (NIntegrate[#, {y, y2, y1}, {x, 0, L}, AccuracyGoal → cAcGoal, PrecisionGoal → cPrecGoal,
    MaxRecursion → cMaxRec] &)/@ st1;

```


Lsr =

(NIntegrate[#, {y, y3, y2}, {x, 0, L}, AccuracyGoal → cAcGoal, PrecisionGoal → cPrecGoal,
MaxRecursion → cMaxRec] &)/@ st2;

Lpg =

(NIntegrate[#, {y, y4, y3}, {x, 0, L}, AccuracyGoal → cAcGoal, PrecisionGoal → cPrecGoal,
MaxRecursion → cMaxRec] &)/@ st1;

Lbet =

bb

((NIntegrate[#, {y, y5, y4}, {x, 0, L}, AccuracyGoal → dAcGoal, PrecisionGoal → dPrecGoal,
MaxRecursion → dMaxRec] &)/@ bet) +

2 bpdd

((NIntegrate[#, {y, y4, y3}, {x, 0, L}, AccuracyGoal → dAcGoal, PrecisionGoal → dPrecGoal,
MaxRecursion → dMaxRec] &)/@ bet);

LZpg =

(NIntegrate[#, {y, yz1 - Δyzb, yz1 + Δyzb}, {x, 0, L}, AccuracyGoal → cAcGoal, PrecisionGoal → cPrecGoal,
MaxRecursion → cMaxRec] &)/@ zbr;

LZpd =

(NIntegrate[#, {y, yz2 - Δyzb, yz2 + Δyzb}, {x, 0, L}, AccuracyGoal → cAcGoal, PrecisionGoal → cPrecGoal,
MaxRecursion → cMaxRec] &)/@ zbr;

EnSlip = (NIntegrate[#, {x, 0, L}, AccuracyGoal → cAcGoal, PrecisionGoal → cPrecGoal, MaxRecursion → cMaxRec] &)/@

Maczesp;

(* kable istn.*);

kepsc =

$$\frac{1}{k\Lambda} (\alpha kd1 (u[kxc1] - u[kxc0]) + \alpha kd2 (u[kxc2] - u[kxc1]) + \alpha kd3 (u[kxc3] - u[kxc2]) + \alpha kd4 (u[kxc4] - u[kxc3]) -$$

$$\alpha kd1 (kyc1 v'[kxc1] - kyc0 v'[kxc0]) + \beta kd1 (v[kxc1] - v[kxc0]) - \alpha kd2 (kyc2 v'[kxc2] - kyc1 v'[kxc1]) +$$

$$\beta kd2 (v[kxc2] - v[kxc1]) - \alpha kd3 (kyc3 v'[kxc3] - kyc2 v'[kxc2]) + \beta kd3 (v[kxc3] - v[kxc2]) -$$

$$\alpha kd4 (kyc4 v'[kxc4] - kyc3 v'[kxc3]) + \beta kd4 (v[kxc4] - v[kxc3]));$$

kAcGc = kFc kEc (kepsc - kepsc0);

kSS = kAcGc kMSuml; Print["Całkowanie zakończone"];

LewaB = bnn Lnak + b1 Lpd + twLsr + b2 Lpg + Lbet + zz1 LZpg + zz2 LZpd + EnSlip; ATEcal = AbsoluteTime[];

TUcal = ATEcal - ATScal; LL0 = LewaB + kSS; Print["Lewa strona równania:", MatrixForm[LL0]];

Print["Prawa strona równania:", MatrixForm[N[ΔΓBB + BB0int]]]; BB1n = ΔΓBB + BB0int - LL0;

Print["Macierz sumaryczna szukanych współczynników", MatrixForm[MMA]];

Print["Wektor B1 (rezydual) do zrównoważenia", MatrixForm[BB1n]];

MacTolerance = BB1n / LL0;

Print["Wektor stosunku rezydualu do lewej strony", MatrixForm[MacTolerance]];

```

(*Kolejny przyrost obciążenia*)
 $\Delta \Gamma_{wspA} = \Delta \Gamma_{wspA} + MAC_{wspA}$ ;
MACwspA = Table[0, {i, 1, MatDim}]; (*Zresetowanie A aby liczyć  $\Delta A$ *)
 $\Delta \Gamma_{BB} = \Delta \Gamma_{BB} + BB0int$ ; Obc = Obc + 1 (1000 obcK)
SigSd = Function[{x, y}, Evaluate[GS1]](0.5 L, y1);
(*SigB=Function[{x,y},Evaluate[GB]](0.5 L,y5);*)
ug = v(0.5 L); SigmaSd = SigSd; Ugiecie = ug; Print["Przyrosty obciążenia: ", Obc];
Print["Napężenie w środku rozp w półce dolnej: ", SigmaSd];
Print["Ugięcie w środku rozp: ", Ugiecie]; MacObcSig1 = {Obc, SigmaSd};
Print["Napężenia w środku rozpiętości: "];
MacObcSig = Append[MacObcSig, MacObcSig1]; MacObcUg1 = {Obc, Ugiecie};
Print["Ugięcie w środku rozpiętości – liczone od stanu już po sprężeniu: "];
MacObcUg = Append[MacObcUg, MacObcUg1]
EpsilonD = epsst /. x -> 0.5 L /. y -> ynak;
MacObcEpsD1 = {Obc, EpsilonD};
Print["Odkształcenie w środku rozp. spód półki dolnej belki – liczone od stanu już po sprężeniu: "];
MacObcEpsD = Append[MacObcEpsD, MacObcEpsD1]
EpsilonG = epsst /. x -> 0.5 L /. y -> y4; MacObcEpsG1 = {Obc, EpsilonG};
Print["Odkształcenie w środku rozp. góra półki górnej belki – liczone od stanu już po sprężeniu: "];
MacObcEpsG = Append[MacObcEpsG, MacObcEpsG1]
EpsilonPD = epsb /. x -> 0.5 L /. y -> y5; MacObcEpsPD1 = {Obc, EpsilonPD};
Print["Odkształcenie w środku rozp. góra płyty – liczone od stanu już po sprężeniu: "];
MacObcEpsPD = Append[MacObcEpsPD, MacObcEpsPD1]
EpsilonPG = epsb /. x -> 0.5 L /. y -> y4; MacObcEpsPG1 = {Obc, EpsilonPG};
Print["Odkształcenie w środku rozp. beton na styku z belką – liczone od stanu już po sprężeniu: "];
MacObcEpsPG = Append[MacObcEpsPG, MacObcEpsPG1]
SilaCiegno = kAcGc; MacSilaCiegno1 = {Obc, SilaCiegno}; Print["Siła w ciągnię: "];
MacSilaCiegno = Append[MacSilaCiegno, MacSilaCiegno1]
EndSlip = (u[x] - h[x]) /. x -> 0; MacEndSlip1 = {Obc, EndSlip};
Print["End slip – liczone od stanu już po sprężeniu: "]; EndSlip2 = Append[EndSlip2, MacEndSlip1]
funb += 1; funfunb = slip; funtableadd = funfunb; funtable = Append[funtable, funtableadd];
Plot[Evaluate[funtable], {x, 0, L}];
Obctable = Append[Obctable, Obc];

```

Kod przedstawiono w takiej postaci, w jakiej funkcjonuje on w programie. Występujące opisy tekstowe mają charakter pomocniczy dla autora kodu.

