

Monika Miśkiewicz

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

ZASTOSOWANIE WYKŁADNIKÓW LAPUNOWA DO PROGNOZOWANIA ZJAWISK EKONOMICZNYCH OPISANYCH ZA POMOCĄ SZEREGÓW CZASOWYCH

*Inwestycja jest, w istocie,
bieżącym wyrzeczeniem dla przyszłych korzyści.
Ale teraźniejszość jest względnie dobrze znana,
natomiast przyszłość to zawsze tajemnica.*

[Hirschleifer 1965]

1. Wstęp

Jednym z narzędzi teorii nieliniowych systemów dynamicznych są wykładniki Lapunowa, które mierzą wrażliwość systemów na zmianę warunków początkowych. Określają one jak szybko sąsiednie trajektorie rozchodzą się w przestrzeni stanów. Dodatni wykładnik mierzy rozciąganie się przestrzeni stanów. Ujemny wykładnik Lapunowa jest miarą zbieżności punktów przestrzeni stanów. W opracowaniu przedstawiona zostanie metoda predykcji szeregów czasowych, wrażliwych na zmianę warunków początkowych, wykorzystująca wykładnik Lapunowa. Metoda polega na rekonstrukcji przestrzeni stanów, a następnie za pomocą największego wykładnika Lapunowa prognozuje się nieznaną wartość punktu przestrzeni stanów. Po odpowiedniej transformacji tego punktu przestrzeni stanów otrzymuje się prognozowaną wartość szeregu czasowego.

Celem artykułu jest wyznaczenie przyszłych wartości szeregów czasowych, utworzonych z wybranych kursów walut.

2. Wykładniki Lapunowa

Pojęcie wykładników Lapunowa zostało rozwinięte przy charakteryzowaniu wrażliwości na zmianę warunków początkowych deterministycznych systemów dynamicznych.

System dynamiczny opisany równaniem

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

gdzie $f: X \rightarrow X$; $X \subset R^m$,
 X – przestrzeń stanów,
 $x_t, x_{t+1} \in X$,

jest wrażliwy na zmianę warunków początkowych, jeżeli istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdego $x \in X$ oraz dla każdego otoczenia U punktu x istnieje $y \in U$, oraz $n \geq 1$ takie, że $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \varepsilon$, gdzie f^n oznacza n -krotne złożenie odwzorowania f , tzn. po skończonej liczbie iteracji odległość pomiędzy dowolnymi bliskimi punktami x i y zwiększy się o więcej niż ε .

Miarą tej wrażliwości systemu są wykładniki Lapunowa. Dla systemu dynamicznego opisanego za pomocą (1) z warunkiem początkowym x_0 wykładniki Lapunowa są zdefiniowane wzorem

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)|, \text{ dla } m = 1; \quad (2)$$

uogólniając na przypadek wielowymiarowy

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\mu_i(n, x_0)|, \quad i = 1, \dots, m, \text{ dla } m \geq 1, \quad (3)$$

gdzie $\mu_i(n, x_0)$ – wartości własne macierzy $Df^n(x_0)$,

$Df^n(x_0)$ – macierz Jacobiego odwzorowania f^n równa $Df^n(x_0) = Df(x_{n-1}) \cdot \dots \cdot Df(x_1) Df(x_0)$,

gdzie $Df(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right]$, f_j są składowymi odwzorowania f , $i, j = 1, 2, \dots, m$.

Wielkość $\lambda(x_0)$ pokazuje (w przybliżeniu), ile razy średnio w jednej iteracji zwiększa się lub zmniejsza odległość między sąsiednimi trajektoriami. Dodatnia wartość wykładnika wskazuje na rozciąganie się przestrzeni stanów, natomiast ujemny wykładnik jest miarą zbieżności punktów przestrzeni stanów. Dla m -wymiarowego systemu dynamicznego istnieje m wykładników Lapunowa spełniających warunek $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, dla $i = 1, \dots, m-1$. Dodatnia wartość największego wykładnika Lapunowa wskazuje na wrażliwość systemu na zmianę warunków początkowych.

W latach osiemdziesiątych XX w. pojawiły się różne metody pozwalające oszacować wiele wykładników Lapunowa lub chociaż ten największy. W przypadku danych pochodzących z doświadczeń wyznaczenie całego spektrum nie jest możliwe. Jednak istnieje opracowany przez A. Wolfa algorytm obliczania największe-

go wykładnika na podstawie szeregu czasowego [Wolf i in. 1995]. Metoda polega na mierzeniu oddalania się sąsiadujących ze sobą punktów w zrekonstruowanej przestrzeni stanów. Najpierw wybiera się dwa sąsiednie punkty. Następnie mierzy odległość pomiędzy nimi po upływie określonego czasu. Jeśli punkty oddalają się za bardzo, znajduje się punkt zastępczy po to, aby pominąć etap kurczenia się systemu, ponieważ wykładnik Lapunowa mierzy oddalanie się punktów w przestrzeni stanów, a nie ich zbliżanie.

3. Rekonstrukcja przestrzeni stanów

Rekonstrukcja przestrzeni stanów polega na odtworzeniu, jedynie na podstawie jednowymiarowego szeregu obserwacji, przestrzeni stanów. W 1981 roku F. Takens, wykorzystując zmienne opóźnione, zaproponował metodę rekonstrukcji zwaną metodą opóźnień. Polega ona na wykorzystaniu d -historii, które są d -elementowymi ciągami postaci

$$x_i^d = (x_i, x_{i-\tau}, x_{i-2\tau}, \dots, x_{i-(d-1)\tau}), \quad (4)$$

gdzie: $i = (d-1)\tau + 1, \dots, n$,

d – wymiar zrekonstruowanej przestrzeni (zwany również wymiarem zanurzenia),

τ – opóźnienie.

Stąd w zrekonstruowanej d -wymiarowej przestrzeni stanów element szeregu czasowego x_i jest związany z punktem postaci (4).

Takens udowodnił (por. [Takens 1981]), że dla $d \geq 2m + 1$, gdzie m jest wymiarem atraktora, a d jest wymiarem zanurzenia, zrekonstruowana przestrzeń stanów będzie topologicznie równoważna z „oryginalną” przestrzenią. Wyboru parametru d dokonuje się zwykle metodą prób i błędów. Tradycyjnym podejściem jest obliczanie wymiaru korelacyjnego. Natomiast czas opóźnień τ można wyznaczyć za pomocą funkcji autokorelacji lub funkcji wzajemnej informacji oraz za pomocą całki korelacyjnej. Metody wyboru parametrów d i τ zostały omówione w pracy [Zeug 2005].

W opracowaniu czas opóźnień wyznaczano za pomocą całki korelacyjnej, a wymiar zanurzenia $d = 1, 2, \dots, 5$.

4. Algorytm prognozowania

Rozważmy szereg czasowy złożony z n obserwacji $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Przy danym opóźnieniu czasowym τ i wymiarze zanurzenia d otrzymujemy punkty zrekonstruowanej przestrzeni stanów postaci:

3. Rekonstruujemy przestrzeń stanów dla wybranych wartości τ oraz d . Otrzymujemy $n - (d - 1)\tau$ punktów w zrekonstruowanej d -wymiarowej przestrzeni stanów.

4. Wyznaczamy punkt $Y(\min_dist)$ położony najbliżej, w sensie odległości euklidesowej, punktu $Y(n - (d - 1)\tau)$.

5. Obliczamy odległość między punktami $Y(\min_dist)$ oraz $Y(n - (d - 1)\tau)$.

6. Obliczamy odległość między punktami $Y(\min_dist + 1)$ oraz $Y(n - (d - 1)\tau + 1)$.

7. Znając współrzędne punktu $Y(\min_dist + 1)$ w zrekonstruowanej przestrzeni stanów, prognozujemy za pomocą największego wykładnika Lapunowa kolejną wartość szeregu czasowego x_{n+1} .

8. Zmieniamy wymiar zanurzenia d i przechodzimy do kroku 2.

5. Dokładność otrzymanych prognoz

Do oceny poprawności (trafności) prognozy wykorzystano bezwzględny błąd prognozy w momencie T

$$d_T = x_T - \hat{x}_T \quad (8)$$

oraz względny błąd prognozy w momencie T

$$D_T = \left| \frac{x_T - \hat{x}_T}{x_T} \right| \cdot 100\%, \quad (9)$$

gdzie: x_T – wartość badanej zmiennej w momencie T ,

$\hat{x}_T$ – prognoza wartości zmiennej w momencie T .

Dokładność sformułowanych prognoz w całym przedziale weryfikacji można ocenić, obliczając średni błąd prognozy *ex post*, który definiowany jest jako pierwiastek kwadratowy z wariancji prognozy

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} (x_T - \hat{x}_T)^2}, \quad T = n + 1, \dots, n + h, \quad (10)$$

gdzie: x_T – wartość badanej zmiennej w momencie T ,

$\hat{x}_T$ – prognoza wartości zmiennej w momencie T ,

h – liczba naturalna oznaczająca odległość okresu prognozowanego od okresu bieżącego.

Wartość średniego błędu prognozy *ex post* mierzy, o ile średnio odchylają się rzeczywiste realizacje zmiennej prognozowanej od obliczonych prognoz. W zastosowaniach praktycznych wygodniej posługiwać się względnym błędem średnim predykcji danym wzorem

$$V_T = \frac{\sigma_T}{\hat{x}_T}. \quad (11)$$

Mała wartość średniego błędu oznacza dobre dopasowanie modelu prognostycznego do rzeczywistych realizacji zmiennej prognozowanej.

Do zbadania trafności prognoz w całym przedziale weryfikacji wykorzystano również współczynnik Theila wyrażony wzorem

$$I^2 = \frac{\sum_{T=n+1}^{n+h} (x_T - \hat{x}_T)^2}{\sum_{T=n+1}^{n+h} x_T^2} = \frac{h\sigma_T^2}{\sum_{T=n+1}^{n+h} x_T^2}, \quad T = n + 1, \dots, n + h. \quad (12)$$

W przypadku idealnie dokładnej predykcji I^2 przybiera wartość równą zero. Pierwiastek kwadratowy z tego wyrażenia informuje, jaki był przeciętny błąd prognozy w prognozowanym okresie, bez względu na to, co było przyczyną takiego stanu rzeczy.

6. Otrzymane prognozy kursów walutowych

Przedstawiony w rozdziale 4 algorytm prognozowania wykorzystano do wyznaczenia przyszłych wartości szeregów czasowych utworzonych z notowań kursów wybranych walut. Pod uwagę wzięto: euro (EURO), dolara amerykańskiego (USD), jena japońskiego (JPY), funta brytyjskiego (GBP) oraz dolara australijskiego (AUD), w okresie 1.01.1999 r.–30.10.2004 r., obejmującym 1474 notowania. Szczegółowe wyniki dla różnych wartości parametru d zawierają tab. 1-5. MD oznacza zastosowanie metody wielowymiarowej (*multi-dimension phase space time series prediction method*), polegającej na wyznaczeniu prognoz dla poszczególnych wartości wymiaru zanurzenia $d = 1, 2, \dots, 5$, a następnie obliczeniu średniej arytmetycznej otrzymanych prognoz. T oznacza horyzont prognozy. Pogrubioną czcionką zaznaczono wyniki, dla których błędy prognoz są najmniejsze.

Analiza wyników predykcji (tab. 1-5) wykazuje, że rząd dokładności wnioskowania w przyszłość był dobry. Świadczą o tym małe wartości średniej arytmetycznej popełnionych błędów prognozy oraz niskie wartości odchyłeń standardowych błędów prognozy. Najmniejsze błędy prognozy d_T , D_T uzyskano dla wymiaru zanurzenia równego 2, dla walut GBP oraz USD. Dla JPY najdokładniejsze prognozy otrzymano dla parametru $d = 3$ lub $d = 4$. Natomiast dla EURO najlepsze wyniki otrzymano dla wymiaru zanurzenia równego 2 lub 5, a także dla metody MD.

W tabeli 6 przedstawiono średni błąd prognozy oraz współczynnik Theila wyznaczonych prognoz w całym przedziale weryfikacji. Pogrubioną czcionką zaznaczono wyniki, dla których błędy prognoz są najmniejsze.

Tabela 1. Wyniki prognozowania kursu EURO

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_T	4,2968	4,3125	4,3638	4,3492	4,3414	4,3316	4,3113	4,3093	4,3081	4,2943
$d = 2$	$\hat{x}_T$	4,315051	4,314526	4,313685	4,312392	4,314921	4,317162	4,31948	4,322016	4,324869
	d_T	-0,01825	-0,00203	0,050115	0,03711	0,029008	-0,00586	-0,01018	-0,01392	-0,03057
	D_T	0,00423	0,00047	0,011618	0,008606	0,006727	0,003865	0,002357	0,00322	0,007068
	V_T	0,003839	0,00384	0,003841	0,003842	0,00384	0,003838	0,003835	0,003833	0,003831
	$\hat{x}_T$	4,332031	4,328512	4,322094	4,32345	4,33267	4,340556	4,356708	4,365714	4,375668
$d = 3$	d_T	-0,03523	-0,01601	0,041706	0,02575	0,00873	-0,00896	-0,04741	-0,05761	-0,08137
	D_T	0,008133	0,003699	0,00965	0,005956	0,002015	0,002063	0,010882	0,013197	0,018596
	V_T	0,00533	0,005335	0,005343	0,005341	0,00533	0,00532	0,0053	0,005289	0,005277
	$\hat{x}_T$	4,352273	4,349679	4,345785	4,339532	4,327112	4,334637	4,350862	4,380971	4,397664
	d_T	-0,05547	-0,03718	0,018015	0,009668	0,014288	-0,00304	-0,03956	-0,07287	-0,10337
$d = 4$	D_T	0,012746	0,008548	0,004145	0,002228	0,003302	0,000701	0,009093	0,016634	0,023505
	V_T	0,006326	0,006329	0,006335	0,006344	0,006362	0,006351	0,006328	0,006284	0,00626
	$\hat{x}_T$	4,354995	4,35368	4,352001	4,349831	4,346974	4,343095	4,337511	4,327245	4,340705
	d_T	-0,05819	-0,04118	0,011799	-0,00063	-0,00557	-0,01149	-0,02621	-0,01883	-0,04641
	D_T	0,013363	0,009459	0,002711	0,000145	0,001282	0,002647	0,006043	0,004424	0,010691
$d = 5$	V_T	0,004756	0,004757	0,004759	0,004762	0,004765	0,004769	0,004775	0,004786	0,004772
	$\hat{x}_T$	4,338589	4,336599	4,333391	4,331226	4,329787	4,333302	4,338488	4,342492	4,359727
	d_T	-0,04179	0,0241	0,030409	0,017974	0,011613	-0,0017	-0,02719	-0,03319	-0,04089
	D_T	0,009632	0,005557	0,007017	0,00415	0,002682	0,000393	0,006267	0,007644	0,015007
	V_T	0,004484	0,004486	0,00449	0,004492	0,004493	0,00449	0,004484	0,00448	0,004474
MD										

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Wyniki prognozowania kursu USD

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_T	3,4052	3,3705	3,4077	3,409	3,4123	3,396	3,3922	3,3928	3,3633	3,3397
$\hat{x}_T$	3,426776	3,428791	3,430928	3,433225	3,435718	3,438444	3,441438	3,44474	3,448392	3,452438
d_T	-0,02158	-0,05829	-0,02323	-0,02422	-0,02342	-0,02244	-0,04924	-0,05194	-0,08505	-0,11274
D_T	0,006296	0,017001	0,00677	0,007056	0,006816	0,012344	0,014307	0,015078	0,024676	0,032655
V_T	0,008941	0,008936	0,00893	0,008924	0,008918	0,008911	0,008903	0,008895	0,008885	0,008875
$\hat{x}_T$	3,436103	3,439241	3,442556	3,446092	3,449891	3,453996	3,448449	3,463293	3,468578	3,474354
d_T	-0,0309	-0,06874	-0,03486	-0,03709	-0,03759	-0,058	-0,06625	-0,07049	-0,10528	-0,13465
D_T	0,008994	0,019987	0,010125	0,010763	0,010896	0,016791	0,019156	0,020354	0,030352	0,038757
V_T	0,011025	0,011014	0,011004	0,010993	0,01098	0,010967	0,010953	0,010938	0,010921	0,010903
$\hat{x}_T$	3,461555	3,460178	3,458494	3,456415	3,453812	3,450485	3,446085	3,439861	3,429119	3,433336
d_T	-0,05636	-0,08968	-0,05079	-0,04741	-0,04151	-0,05449	-0,05388	-0,4706	-0,06582	-0,09364
D_T	0,01628	0,025917	0,014687	0,013718	0,012019	0,015791	0,015637	0,013681	0,019194	0,027273
V_T	0,010328	0,010332	0,010337	0,010344	0,010351	0,010361	0,010375	0,010393	0,010426	0,010413
$\hat{x}_T$	3,546991	3,465536	3,473917	3,482356	3,490996	3,499944	3,509289	3,51911	3,529482	3,540472
d_T	-0,05179	-0,09504	-0,06692	-0,07336	-0,0787	-0,10394	-0,11709	-0,12631	-0,16618	-0,20078
D_T	0,014982	0,027423	0,019061	0,021065	0,22542	0,029699	0,033365	0,035893	0,047084	0,056709
V_T	0,017594	0,01755	0,017508	0,017465	0,017422	0,017378	0,017331	0,017283	0,017232	0,017179
$\hat{x}_T$	3,445356	3,448437	3,451474	3,454522	3,447604	3,460717	3,463815	3,466751	3,468893	3,475151
d_T	-0,04016	-0,07794	-0,04377	-0,04502	-0,0453	-0,06472	-0,07162	-0,07395	-0,10559	-0,13545
D_T	0,011655	0,022601	0,012683	0,013177	0,013103	0,018701	0,020675	0,021332	0,03044	0,038977
V_T	0,01166	0,01165	0,01164	0,011629	0,011619	0,011608	0,011598	0,011588	0,011581	0,01156

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Wyniki prognozowania kursu JPY

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_T	3,1607	3,1711	3,1935	3,1949	3,2103	3,2056	3,1853	3,1715	3,1601	3,1444
x	3,206215	3,209534	3,213305	3,217686	3,22845	3,228967	3,236272	3,245018	3,255512	3,268124
d_T	-0,04551	-0,03843	-0,0198	-0,02279	-0,01254	-0,02337	-0,05097	-0,06752	-0,09541	-0,12372
D_T	0,014196	0,011975	0,006163	0,0007082	0,003892	0,007237	0,01575	0,020807	0,029308	0,037858
V_T	0,010236	0,010226	0,010214	0,01102	0,010183	0,010164	0,010141	0,010114	0,010081	0,010042
$\hat{x}_T$	3,163674	3,159916	3,15232	3,156874	3,167332	3,177032	3,187265	3,198616	3,1211536	3,122646
d_T	-0,00297	0,011184	0,04118	0,038026	0,042968	0,028568	-0,00197	-0,02112	-0,05144	-0,08206
D_T	0,00094	0,003539	0,013063	0,012045	0,013566	0,008992	0,000617	0,006602	0,016016	0,025435
V_T	0,007186	0,007194	0,007212	0,007201	0,007177	0,007155	0,0071333	0,007107	0,007079	0,007046
$\hat{x}_T$	3,186994	3,13615	3,200312	3,207492	3,215423	3,224336	3,234463	3,246053	3,259385	3,274774
d_T	-0,02629	-0,02252	-0,00681	-0,01259	-0,00512	-0,01874	-0,04916	-0,06855	-0,09929	-0,13037
D_T	0,00825	0,00705	0,002129	0,003926	0,001593	0,005811	0,0152	0,021119	0,030461	0,039811
V_T	0,010532	0,01051	0,010488	0,010465	0,010439	0,01041	0,010378	0,010341	0,010298	0,01025
$\hat{x}_T$	3,21863	3,228465	3,239738	3,252749	3,267836	3,285388	3,2305855	3,2329759	3,2357711	3,2390422
d_T	-0,05793	-0,05736	-0,04624	-0,05785	-0,05754	-0,07979	-0,12056	-0,15226	-0,19761	-0,24602
D_T	0,017998	0,017768	0,014272	0,017785	0,017607	0,024286	0,036467	0,045727	0,058853	0,072564
V_T	0,021516	0,021491	0,021416	0,021333	0,021232	0,021118	0,020987	0,020838	0,020663	0,020464
$\hat{x}_T$	3,193878	3,197883	3,201419	3,2087	3,218359	3,228931	3,40964	3,54862	3,71036	3,89946
d_T	-0,03318	-0,02678	-0,00792	-0,0138	-0,00806	-0,02333	-0,05566	-0,07736	-0,11004	-0,14555
D_T	0,010388	0,008375	0,002473	0,004304	0,002504	0,007226	0,017175	0,023768	0,033915	0,04424
V_T	0,011695	0,011681	0,011668	0,011641	0,011606	0,011568	0,011526	0,011476	0,01142	0,011354

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Wyniki prognozowania kursu GBP

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_T	6,2119	6,2095	6,2707	6,2596	6,2484	6,2245	6,2176	6,2399	6,2018	6,151
$d = 2$	$\hat{x}_T$	6,252665	6,248375	6,241471	6,249432	6,2563,9	6,263208	6,270819	6,279559	6,289812
	d_T	-0,04076	-0,022325	-0,018129	-0,00103	-0,03181	-0,04561	-0,03092	-0,07776	-0,13881
	D_T	0,00652	0,006655	0,003573	0,002905	0,005084	0,007282	0,004931	0,012383	0,022069
	V_T	0,0005112	0,005114	0,005116	0,005121	0,005115	0,005109	0,005104	0,005057	0,00582
	$\hat{x}_T$	6,281269	6,27291	6,269024	6,285923	6,300291	6,315208	6,31711	6,30538	6,27392
$d = 3$	d_T	-0,06937	-0,06341	-0,01676	-0,02632	-0,05189	-0,09071	-0,11411	-0,11064	-0,17059
	D_T	0,011044	0,010109	0,000267	0,004188	0,008236	0,014363	0,018022	0,017422	0,026771
	V_T	0,005845	0,005858	0,005864	0,005838	0,005815	0,005792	0,005767	0,005738	0,005704
	$\hat{x}_T$	6,362323	6,359653	6,355865	6,350409	6,342352	6,329871	6,308136	6,286159	6,333938
	d_T	-0,15042	-0,15015	-0,08516	-0,09081	-0,09395	-0,10537	-0,09054	-0,04626	-0,13214
$d = 4$	D_T	0,023643	0,02361	0,013399	0,0143	0,014813	0,016647	0,014352	0,020862	0,007359
	V_T	0,01049	0,010495	0,010501	0,01051	0,010523	0,010544	0,010581	0,010617	0,010537
	$\hat{x}_T$	6,307095	6,323323	6,339223	6,355343	6,372025	6,389525	6,408059	6,427824	6,449018
	d_T	-0,0952	-0,11382	-0,06852	-0,09574	-0,12362	-0,16502	-0,19046	-0,18792	-0,24721
	D_T	0,015093	0,018001	0,010809	0,015065	0,019401	0,025827	0,029722	0,029236	0,038334
$d = 5$	V_T	0,01486	0,014821	0,014784	0,014747	0,014708	0,014668	0,014625	0,01458	0,014533
	$\hat{x}_T$	6,300838	6,301747	6,303122	6,308287	6,316025	6,322728	6,327229	6,333835	6,358726
	d_T	0,08894	-0,09225	-0,03242	-0,04869	-0,06763	-0,09823	-0,11018	-0,09394	-0,15683
	D_T	0,014115	0,014638	0,005144	0,007718	0,010707	0,015536	0,017412	0,014831	0,024679
	V_T	0,009574	0,009573	0,00957	0,009563	0,009551	0,009541	0,009533	0,009524	0,009487
MD										

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Wyniki prognozowania kursu AUD

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_T	2,51	2,5223	2,5164	2,5425	2,5533	2,5355	2,5263	2,5418	2,5398	2,5296
$\hat{x}_T$	2,567442	2,56632	2,564728	2,562432	2,559036	2,553759	2,544476	2,537346	2,556515	2,571839
d_T	-0,05744	-0,04402	-0,01833	-0,01993	-0,00574	-0,01826	-0,01818	0,004455	-0,01672	-0,04224
D_T	0,022373	0,017153	0,007146	0,007779	0,002242	0,00715	0,07143	0,001756	0,006538	0,016424
V_T	0,006517	0,00652	0,006524	0,00653	0,006538	0,006552	0,006576	0,006594	0,006545	0,006506
$\hat{x}_T$	2,522226	2,530062	2,536288	2,54238	2,548753	2,555042	2,563235	2,571705	2,581231	2,592008
d_T	-0,01223	-0,00776	0,010112	0,00012	0,004547	-0,02014	-0,03693	-0,0299	-0,04143	-0,06241
D_T	0,004847	0,003068	0,003987	0,0000471	0,001784	0,007881	0,014409	0,011628	0,016051	0,024077
V_T	0,00816	0,008134	0,008114	0,008095	0,008075	0,008053	0,008029	0,008003	0,007973	0,00794
$\hat{x}_T$	2,531376	2,525541	2,524878	2,533489	2,540355	2,546884	2,553492	2,560396	2,567749	2,575681
d_T	-0,02138	-0,00324	0,021522	0,009011	0,012945	-0,01138	-0,02719	-0,0186	-0,02795	-0,04608
D_T	0,008444	0,001283	0,008524	0,003557	0,005096	0,00447	0,010649	0,007263	0,010885	0,017891
V_T	0,006407	0,006421	0,006423	0,006401	0,006384	0,006368	0,006351	0,006334	0,006316	0,006296
$\hat{x}_T$	2,533675	2,526395	2,528017	2,538195	2,546828	2,555354	2,564266	2,57386	2,584372	2,596023
d_T	-0,02367	-0,0041	0,018383	0,004305	0,006472	-0,01985	-0,03797	-0,03206	-0,04457	-0,06642
D_T	0,009344	0,001621	0,007272	0,001696	0,0025841	0,00777	0,014806	0,012456	0,017247	0,025586
V_T	0,008498	0,008522	0,008517	0,008483	0,008454	0,008426	0,008396	0,008365	0,008331	0,008294
$\hat{x}_T$	2,53868	2,537079	2,538478	2,544124	2,548743	2,55291	2,556367	2,560826	2,572467	2,583888
d_T	-0,02868	-0,01478	0,007922	-0,00162	0,004557	-0,01741	-0,03007	-0,01903	-0,03267	-0,05429
D_T	0,011297	0,005825	0,003121	0,000638	0,001788	0,00682	0,011762	0,00743	0,012699	0,02101
V_T	0,00663	0,006634	0,006631	0,006616	0,006604	0,006593	0,006584	0,006573	0,006543	0,006514

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 6. Błędy otrzymanych prognoz w przedziale ich weryfikacji – porównanie dla poszczególnych wartości wymiaru zanurzenia

		$d = 2$	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$	MD
EURO	σ_T	0,016567	0,023091	0,027531	0,020713	0,019456
	I^2	0,0000146945	0,0000285463	0,0000405773	0,0000229679	0,0000202651
USD	σ_T	0,03064	0,037881	0,035752	0,060821	0,040174
	I^2	0,0000817405	0,000124946	0,000111294	0,000322088	0,000140525
JPY	σ_T	0,032819	0,022733	0,033566	0,069382	0,057354
	I^2	0,000106486	0,0000510923	0,000111386	0,000475908	0,000137945
GBP	σ_T	0,031965	0,06184	0,066743	0,093721	0,060324
	I^2	0,0000263803	0,0000987321	0,00011501	0,000226773	0,0000939506
AUD	σ_T	0,016732	0,020581	0,016218	0,02153	0,016832
	I^2	0,0000435733	0,0000659234	0,0000409352	0,0000725474	0,0000440933

Źródło: opracowanie własne.

Dla każdej wartości parametru d średnie błędy prognozy σ_T w całym przedziale weryfikacji są małe. Najlepsze wyniki otrzymano dla wymiaru zanurzenia równego 2 (EURO, USD, GBP), 3 (JPY) lub 4 (AUD). Współczynniki rozbieżności również są zbliżone do zera. Zatem można wnioskować, że otrzymane prognozy są dość dokładne. Analizując dane zawarte w tab. 6, można również stwierdzić, że metoda MD daje dokładniejsze prognozy niż w przypadku, gdy $d = 4$ lub 5.

7. Podsumowanie

W opracowaniu wyznaczono przyszłe wartości szeregów czasowych utworzonych z wybranych kursów walut (EURO, USD, JPY, GBP, AUD) w okresie 1.01.1999 r. – 30.10.2004 r. obejmującym 1474 notowania. Do prognozowania przyszłych notowań wykorzystano metodę opartą na rekonstrukcji przestrzeni stanów oraz największy wykładnik Lapunowa, a także metodę wielowymiarową MD, polegającą na uśrednieniu wartości otrzymanych prognoz dla różnych wartości wymiaru zanurzenia. Najdokładniejsze prognozy otrzymano dla wymiaru zanurzenia równego 2, 3 lub 4.

Literatura

- Farmer J.D., Sidorowich J.J., *Predicting Chaotic Time Series*, „Physical Review Letters” 1987, vol. 59, no. 8, s. 845-848.
- Miśkiewicz M., *Wrażliwość na zmianę warunków początkowych w szeregach czasowych kursów akcji notowanych na GPW w Warszawie*, [w:] *Postępy ekonometrii*, red. A.S. Barczak, Katowice 2004, s. 193-200.
- Peters E.E., *Teoria chaosu a rynki kapitałowe. Nowe spojrzenie na cykle, ceny i ryzyko*, WIG-Press, Warszawa 1997.

- Takens F., *Detecting Strange Attractors Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin 1981.
- Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A., *Determining Lyapunov Exponents from a Time Series*, Physica 16D, 1985, s. 285-317.
- Zawadzki H., *Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane przykłady ekonomiczne*, Prace Naukowe AE w Katowicach, Katowice 1996.
- Zeliaś A., *Teoria prognozy*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1997.
- Zeug K., *Rekonstrukcja przestrzeni stanów na podstawie jednowymiarowego ekonomicznego szeregu czasowego*, Studia Ekonomiczne 36, Prace Naukowe AE w Katowicach, Katowice 2005, s. 227-241.
- Zhang J., Lam K.C., Yan W.J., Gao H., Li Y., *Time Series Prediction Using Lyapunov Exponents in Embedding Phase Space*, Computers & Electrical Engineering 2004, 30, s. 1-15.

THE APPLICATION OF LYAPUNOV EXPONENTS TO THE PREDICTION OF TIME SERIES

Summary

The paper presents the new method of chaotic series prediction. This method is based on a basic characteristic of chaotic systems which is sensitive dependence upon initial conditions (SDUIC). These figures referred to as Lyapunov exponents are a measure of the SDUIC. They measure the rate of the divergence of trajectories in state space. The method involves, first, the reconstruction of a phase space using a time series and then the prediction of unknown phase space point making use of the Lyapunov exponents as a qualitative parameter. As a result of the transformation of this phase space point the predicted time series data can be obtained. Numerical examples have proved that the method is effective.