

Jacek Juzwiszyn

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

**BIAPROKSYMACJA WIROWYCH ZJAWISK
EKONOMICZNYCH****1. Wstęp**

Określmy trójwymiarowy (kartezjański) układ współrzędnych¹.

$$R_+^3 = Q \times P \times T. \quad (1)$$

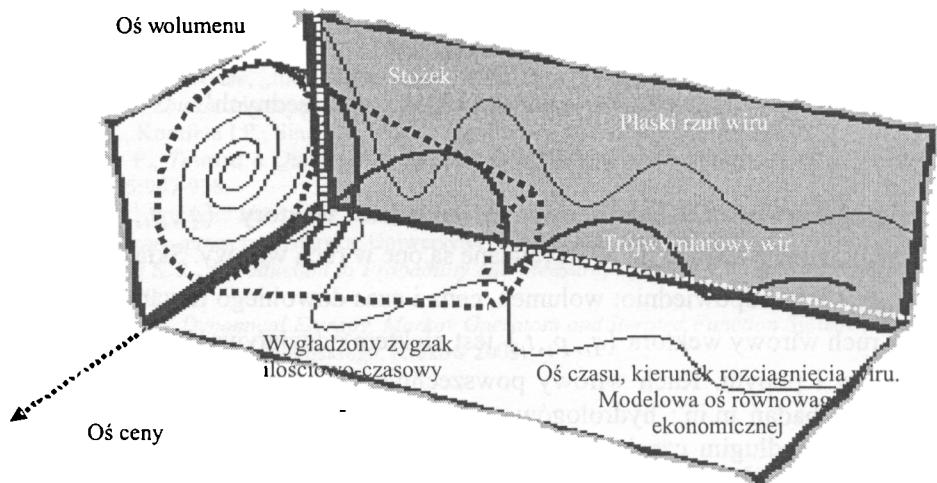
Umieszczając w tak zdefiniowanym układzie wektory (q_i, p_i, t_i) , gdzie $i \in N \cup \{0\}$, można zauważyć, że wprowadzane są one w ruch wirowy. Składowe wektora (q_i, p_i, t_i) to odpowiednio: wolumen, cena i czas dowolnego towaru. Zaobserwowany ruch wirowy wektora (q_i, p_i, t_i) jest efektem oddziaływania na ów wektor „sił” podaży i popytu. Ruch wirowy powszechnie występuje w naturze. Jest on przedmiotem badań m.in.: hydrologów, meteorologów, astrofizyków, aerologów. Być może w niedługim czasie do tego liczego grona badaczy ruchu wirowego dołączą również ekonomiści. Charakter dynamiki zjawisk wirowych jest chaotyczny i na ogół nieprzewidywalny [Schuster 1993]. Z tych też powodów numeryczny opis zjawisk wirowych jest bardzo trudny. Chaotyczny charakter mają również wirowe zjawiska ekonomiczne. Wirowy rodzaj ruchu punktu, jak również trajektorii, którą ów punkt zakreśla, jest wspólny dla wszystkich przypadków, w których analizowane są czasowe zmiany wolumenów i cen. Trójwymiarowe trajektorie wirowo-spiralne są dostrzegalne na wykresach przedstawiających np.: wolumeny i wartości indeksów giełdowych, ilości i ceny sprzedawanych zbóż, liczbę kupowanych mieszkań – uzależnioną od średniej ceny m² powierzchni, ceny i ilości wydobycia węgla kamiennego itp. Warty zaznaczenia w tym miejscu jest również przykład występowania trajektorii wirowo-spiralnej w momencie przedstawiania zależności między bezrobociem a inflacją [Dorbusch, Fischer 1981, s. 420]².

¹ R_+^3 w sumie z początkiem układu współrzędnych jest zdefiniowany tutaj jako 1/8 układu R^3 .

² R. Dorbusch i S. Fischer na płaskim dwuwymiarowym wykresie przedstawiają procentowe zależności między bezrobociem i inflacją w latach 1963-1979. Wykres ten przedstawiający płaskie spirale powstaje w wyniku ortogonalnego rzutu trójwymiarowej trajektorii wirowo-spiralnej na płaszczyznę opisaną osiami przedstawiającymi bezrobocie i inflację (s. 420, rys. 13-1. *Inflation and Unemployment*).

Trajektorie wyznaczone przez ruch wektora (q_i, p_i, t_i) zachowują swój wirowo-spiralny charakter niezależnie od tego, w jakich układach czasowych są analizowane. Dotyczy to zarówno wykresów tworzonych w skalach krótkookresowych (np. minutowej, godzinowej, dziennej), jak i wykresów długookresowych (tygodniowych, miesięcznych, rocznych itp.).

Potwierdzeniem samego istnienia trójwymiarowych wirowo-spiralnych trajektorii rynkowych są płaskie dwuwymiarowe wykresy. Powstają one w wyniku ortogonalnych rzutów trajektorii na trzy wzajemnie prostopadłe do siebie płaszczyzny. Poniższe trzy przekształcenia (2) przedstawiają ortogonalne rzuty trajektorii. Rzuty takie zostały zilustrowane na rys. 1.



Rys. 1. Trójwymiarowy model ekonomicznej trajektorii wirowej wyznaczającej powierzchnię boczną stożka wraz z jej trzema ortogonalnymi rzutami na trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny*.

Procesujące stożki równowagi

* Pierwszy model trójwymiarowej trajektorii wirowej autor monografii wykonał z miedzianego drutu w 2001 r. Rzuty (jak również równania) owego modelu były wówczas prezentowane na kolejnych seminariach naukowych, m.in.: w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Instytucie Zastosowań Matematyki w Ekonomii oraz Instytucie Finansów i Ubezpieczeń Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.

Źródło: opracowanie własne na podstawie Mathematica Wolfram 3.0.

$$p: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, \quad p: (Q \times P \times T) \rightarrow (P \times T),$$

$$q: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, \quad q: (Q \times P \times T) \rightarrow (Q \times T), \quad (2)$$

$$s: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, \quad s: (Q \times P \times T) \rightarrow (Q \times P).$$

W przypadku dwóch pierwszych przekształceń p i q otrzymujemy wykresy funkcji segmentowych (płaskie zygzaki), natomiast w wyniku zrealizowania trzeciego przekształcenia s otrzymujemy krzywą przypominającą swoim kształtem spiralę [Siedlecka 1993, s. 136]³. Sam fakt wykorzystywania trajektorii spiralnych do opisu zjawisk cyklicznych w ekonomii jest ogólnie znany.

2. Trójwymiarowa trajektoria ekonomiczna

Spirala logarytmiczna jest krzywą przestępną mającą tę własność, że kąt, jaki jest utworzony między styczną w dowolnym punkcie i promieniem wodzącym – wychodzącym z jej ogniska, jest w każdym punkcie spirali stały [Leja 1961, s. 157].

Równanie spirali logarytmicznej we współrzędnych biegunowych jest następującej postaci:

$$r = ae^{\lambda\varphi}, \quad (3)$$

gdzie r jest promieniem wodzącym, $a > 0$ jest stałą długością podstycznej biegunowej, $\lambda > 0$ wyraża stałą wartość cotangensa kąta ψ , jaki tworzy styczna do spirali z promieniem wodzącym r w dowolnym jej punkcie, φ stanowi wartość kąta, jaki tworzy promień wodzący z osią odciętych Ox .

Dowolny punkt płaskiej spirali logarytmicznej daje się przedstawić jako para współrzędnych:

$$(x, y) = (x_\varphi, y_\varphi) = (ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi, ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi). \quad (4)$$

Jeżeli w układzie R^3_+ spiralę logarytmiczną (4) nawiniemy na stożek (5)

$$\frac{x^2}{s^2} + \frac{y^2}{s^2} = \frac{z^2}{l^2}, \quad (5)$$

to dowolny punkt powstałej trójwymiarowej trajektorii zadany będzie jako (6)

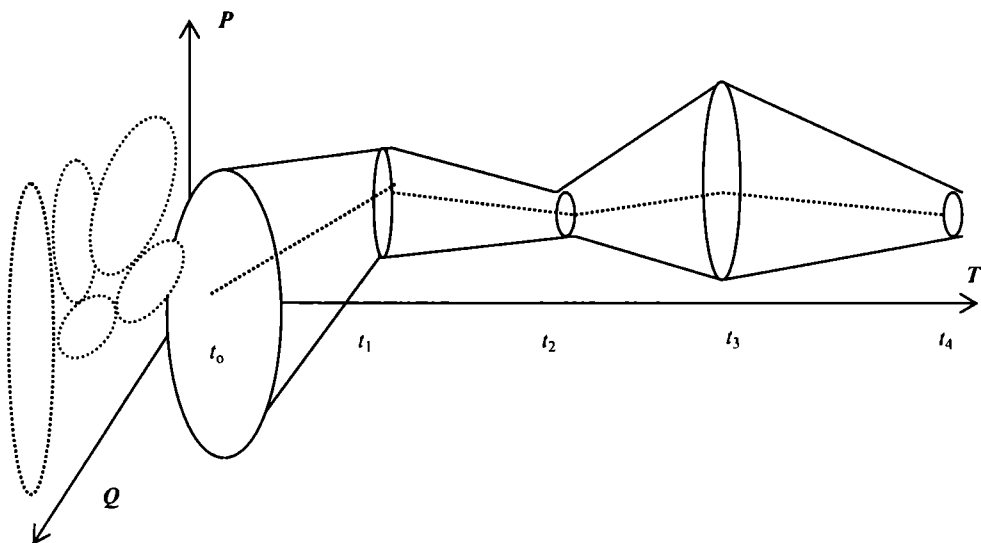
$$(x, y, z) = (x_\varphi, y_\varphi, z_\varphi) = (ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi, ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi, a\frac{l}{s}e^{\lambda\varphi}). \quad (6)$$

Dysponując wektorem danych typu $(q_i, p_i, t_i) \in Q \times P \times T$ (wolumen, ilość, czas)⁴, można posłużyć się metodą najmniejszych kwadratów i spróbować wyznaczyć trzy parametry trójwymiarowej spirali, tj.: a – długość podstycznej biegunowej, λ – wartość cotangensa kąta ψ , jaki tworzy styczna do spirali z promieniem wodzącym r ,

³ U. Siedlecka w pracy tej wskazuje m.in. na celowość estymacji parametrów trajektorii spiralnych, które opisują cykliczne zależności zmiennych dynamicznych (s. 136, rys. 5.8. Trajektorie zależności zmiennych).

⁴ „...rzut trójwymiarowej trajektorii na płaszczyznę opisaną osiami ilości i ceny jest płaską spiralą, która swoim kształtem przypomina model pajęczynowy. Biegun – punkt asymptotyczny modelu pajęczynowego, traktowany jest jako poziom równowagi chwilowej rynku” [Juzwiszyn 2004a, s. 184-191].

oraz wartość s , która jest długością promienia stożka utworzonego przez tzw. spiralę ekonomiczną w R^3_+ . Wartości wyestymowanych parametrów: a , λ , s umożliwiają opisywanie toru ruchu wektora (q_i, p_i, t_i) za pomocą trójwymiarowej trajektorii wirowo-spiralnej $S_L(\varphi) = (ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi, ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi, a\frac{l}{s}e^{\lambda\varphi})$. Spiralna linia regresji wektora (q_i, p_i, t_i) wyznacza w przestrzeni $R^3_+ = Q \times P \times T$ stożek (rodzinę stożków).



Rys. 2. Rodzina stożków i jej ortogonalne rzuty wyznaczone przez trajektorie wirowo-spiralne w przestrzeni trójwymiarowej

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 2 została przedstawiona przykładowa rodzina stożków wygenerowanych przez trajektorie wirowo-spiralne wektora o składowych: wolumen, cena, czas.

3. Aproksymacja trajektorii wirowo-spiralnej

Zadajmy parametrycznie w przestrzeni trójwymiarową krzywą wirowo-spiralną

$$S_L(\varphi) = (ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi, ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi, a\frac{l}{s}e^{\lambda\varphi}) \quad (7)$$

i określmy ΔS_L jako

$$\Delta S_L(\varphi) = \sum_{i=1}^n [(ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi, ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi, a\frac{l}{s}e^{\lambda\varphi}) - (q, p, t)]^2 \rightarrow \min, \quad (8)$$

gdzie: dla uproszczenia zapisu pomija się iterację, która przebiega po p , q , t i φ .

$\varphi_i = \arctg \frac{q_i}{p_i}$ (zależność ta zostanie pokazana w dalszej części artykułu).

Parametry: a, λ, s powinniśmy otrzymać z rozwiązań jednorodnego układu równań

$$\left(\frac{\partial \Delta S_L(\varphi)}{\partial a}, \frac{\partial \Delta S_L(\varphi)}{\partial \lambda}, \frac{\partial \Delta S_L(\varphi)}{\partial s} \right) = 0, \quad (9)$$

przyrównując wartość pierwszej pochodnej cząstkowej do zera, otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta S_L(\varphi)}{\partial a} &= 2 \sum_{i=1}^n [(ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi - q, \quad ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi - p, \\ &\quad a \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi} - t)(e^{\lambda\varphi} \cos \varphi, \quad e^{\lambda\varphi} \sin \varphi, \quad \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi})] = 0. \\ \sum_{i=1}^n [ae^{2\lambda\varphi} \cos^2 \varphi - qe^{\lambda\varphi} \cos \varphi + ae^{2\lambda\varphi} \sin^2 \varphi - pe^{\lambda\varphi} \sin \varphi + \\ &\quad + a \frac{l^2}{s^2} e^{2\lambda\varphi} - t \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi}] = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n [ae^{2\lambda\varphi} (1 + \frac{l^2}{s^2}) - e^{\lambda\varphi} (q \cos \varphi + p \sin \varphi + t \frac{l}{s})] = 0, \quad (11)$$

z którego wyznaczamy wartość parametru a

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n e^{\lambda\varphi} (q \cos \varphi + p \sin \varphi + t \frac{l}{s})}{(1 + \frac{l^2}{s^2}) \sum_{i=1}^n e^{2\lambda\varphi}}. \quad (12)$$

Przyrównując kolejną pochodną cząstkową do zera, mamy

$$\frac{\partial \Delta S_L(\varphi)}{\partial \lambda} = 0. \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta S_L(\varphi)}{\partial \lambda} &= 2 \sum_{i=1}^n [(ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi - q, \quad ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi - p, \quad a \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi} - t) \cdot \\ &\quad \cdot (a\varphi e^{\lambda\varphi} \cos \varphi, \quad a\varphi e^{\lambda\varphi} \sin \varphi, \quad a\varphi \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi})] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^n (a^2 \varphi e^{2\lambda\varphi} \cos^2 \varphi - qa\varphi e^{\lambda\varphi} \cos \varphi + a^2 \varphi e^{2\lambda\varphi} \sin^2 \varphi - pa\varphi e^{\lambda\varphi} \sin \varphi +$$

$$+ a^2 \varphi \frac{l^2}{s^2} e^{2\lambda\varphi} - t a \varphi \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi} = 0, \quad (15)$$

$$a(1 + \frac{l^2}{s^2}) \sum_{i=1}^n \varphi e^{2\lambda\varphi} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda\varphi} (q \cos \varphi + p \sin \varphi + t \varphi \frac{l}{s}), \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi e^{2\lambda\varphi} = \frac{\sum_{i=1}^n e^{\lambda\varphi} (q \cos \varphi + p \sin \varphi + t \varphi \frac{l}{s})}{a(1 + \frac{l^2}{s^2})}. \quad (17)$$

Ostatnim z warunków układu (9) jest:

$$\frac{\partial S_L(\varphi)}{\partial s} = 0. \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Delta S_L(\varphi)}{\partial s} = 2 \sum_{i=1}^n [(a e^{\lambda\varphi} \cos \varphi - q, \quad a e^{\lambda\varphi} \sin \varphi - p, \\ a \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi} - t)(0, \quad 0, \quad -a \frac{l}{s^2} e^{\lambda\varphi})] = 0. \quad (19)$$

$$s = \frac{a l \sum_{i=1}^n e^{2\lambda\varphi}}{\sum_{i=1}^n t e^{\lambda\varphi}}. \quad (20)$$

Poniższy układ (21) tworzą nieliniowe równania: (12), (17) i (20).

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n e^{\lambda\varphi} (q \cos \varphi + p \sin \varphi + t \varphi \frac{l}{s})}{(1 + \frac{l^2}{s^2}) \sum_{i=1}^n e^{2\lambda\varphi}}, \\ \sum_{i=1}^n \varphi e^{2\lambda\varphi} = \frac{\sum_{i=1}^n e^{\lambda\varphi} (q \cos \varphi + p \sin \varphi + t \varphi \frac{l}{s})}{a(1 + \frac{l^2}{s^2})}, \quad (21) \\ s = \frac{a l \sum_{i=1}^n e^{2\lambda\varphi}}{\sum_{i=1}^n t e^{\lambda\varphi}}.$$

Jak widać, w układzie tym parametry trajektorii są od siebie zależne.

Jednoznaczne wyznaczenie wartości a , λ , s , zależnych tylko od znanych wartości: q_i , p_i , t_i , φ_i i l , jest niemożliwe dla tego typu spirali. Mniej skomplikowane równania regresji wirowo-spiralnej otrzymamy, gdy posłużymy się równaniami parametrycznymi spirali hiperbolicznej $r = a\varphi^{-1}$, $S_H = (\frac{a}{\varphi} \cos \varphi, \frac{a}{\varphi} \sin \varphi, \frac{a}{\varphi} \frac{l}{s})$

lub spirali Archimedesesa $r = a\varphi$, $S_A = (a\varphi \cos \varphi, a\varphi \sin \varphi, a\varphi \frac{l}{s})$ (zadanych oczywiście we współrzędnych biegunowych).

Wyjaśnienia wymaga jeszcze fakt związany z wartością kąta φ_i . Jeżeli przekroju trajektorii dokonamy płaszczyzną prostopadłą do osi czasu w chwili t_i , to otrzymany punkt (q_i, p_i) będzie miał współrzędne:

$$q_i = ae^{\lambda\varphi_i} \cos \varphi_i, \quad p_i = ae^{\lambda\varphi_i} \sin \varphi_i, \quad (22)$$

z których wyznaczymy

$$e^{\lambda\varphi_i} = \frac{q_i}{a \cos \varphi_i} = \frac{p_i}{a \sin \varphi_i}, \quad (23)$$

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{\sin \varphi_i}{\cos \varphi_i} = \operatorname{tg} \varphi_i, \quad (24)$$

$$\varphi_i = \operatorname{arctg} \frac{p_i}{q_i}. \quad (25)$$

Zatem znane wartości q_i i p_i pozwalają na obliczenie wartości kąta φ_i . Kąt ten zawarty jest pomiędzy promieniem wodzącym trajektorii r i osią OQ (osią wolumenu).

4. Stożki równowagi

Wirowanie wektora (q_i, p_i, t_i) wyznacza trajektorię spiralną. Jednak niezależnie od powstawania trajektorii tor ruchu wektora wyznacza powierzchnie stopnia drugiego. Można przypuszczać, że trajektoria wirowa jest nawijana na takie powierzchnie, z których wymienić należy np.: stożek, walec, elipsoide, paraboloidę, hiperboloidę, pseudosferę itp. Zakładamy, że powierzchnie te zmieniają się w czasie trwania ruchu wirowego wektora (q_i, p_i, t_i) .

Jeżeli teraz ograniczymy nasze główne założenie tylko do stożków, to będzie to oznaczało, że po upływie pewnego okresu i wyznaczeniu w tym przedziale stożka trajektoria punktu rozpoczyna wyznaczanie nowego stożka itp.⁵.

⁵ Obserwacje szeregów czasowych w $R_+^3 = Q \times P \times T$ (poczynione przez autora w ostatnim czasie) ośmielają go do postawienia jeszcze jednej hipotezy dotyczącej ruchu wektora o składowych (q_i, p_i, t_i) . Otóż stożki wyznaczone przez trajektorię w pewnych przedziałach czasowych

Stożek przedstawiony w równaniu (26) zadajmy we współrzędnych biegunowych (27)

$$\frac{q^2}{s^2} + \frac{p^2}{s^2} = \frac{t^2}{l^2}, \quad (26)$$

$$g_\varphi = (s \cos \varphi, s \sin \varphi, l). \quad (27)$$

Postępując analogicznie jak w przypadku próby aproksymacji trajektorii wirowej, skorzystajmy raz jeszcze z MNK dla Δg_φ .

$$\Delta g_\varphi = \sum_{i=1}^n [(s \cos \varphi, s \sin \varphi, l) - (q_i, p_i, t_i)]^2 \rightarrow \min \quad (28)$$

i obliczmy

$$\left(\frac{\partial \Delta g_\varphi}{\partial s}, \frac{\partial \Delta g_\varphi}{\partial l} \right) = 0. \quad (29)$$

Podobnie jak powyżej pomijamy iterację dla q_i, p_i, t_i, φ_i .

$$\frac{\partial \Delta g_\varphi}{\partial s} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^n (s \cos \varphi - q, s \sin \varphi - p, l - t)(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) = 0, \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^n (s \cos^2 \varphi - q \cos \varphi + s \sin^2 \varphi - p \sin \varphi) = 0, \quad (31)$$

$$s = \sum_{i=1}^n (q \cos \varphi + p \sin \varphi), \quad (32)$$

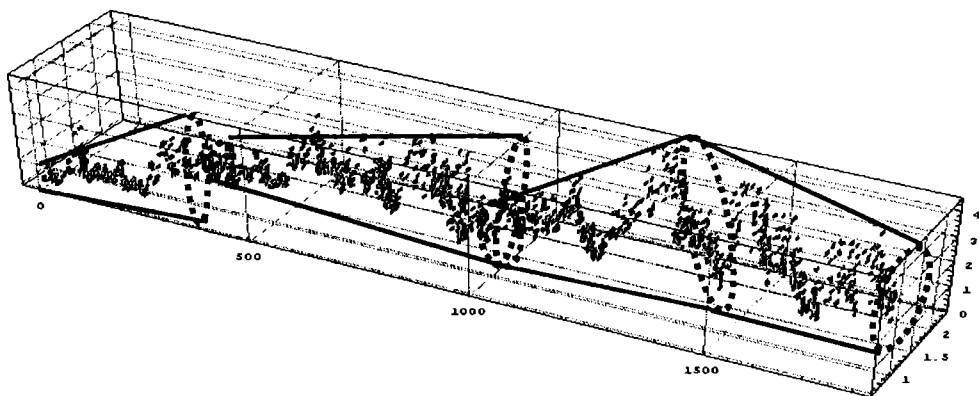
gdzie:

$$\varphi_i = \arctg \frac{q_i}{p_i} = \arccos \frac{q_i}{\sqrt{q_i^2 + p_i^2}}. \quad (33)$$

Z warunku $\frac{\partial \Delta g_\varphi}{\partial l} = 0$ wynika, że

$$l = \sum_{i=1}^n t. \quad (34)$$

również wykazują tendencję do wirowania wokół pewnej hipotetycznej linii. To kinematyczne zjawisko swoim charakterem przypomina ruch precesyjny (precesję), występujący wówczas, gdy ciało obracające się dookoła osi zostanie poddane momentowi siły posiadającemu składową prostopadłą do momentu pędu. Wówczas to oś obrotu ciała zaczyna wykonywać ruch, kreśląc sobą powierzchnię w kształcie bocznej powierzchni stożka. Precesja jest odpowiedzialna za stabilność wirujących obiektów. Precesji może towarzyszyć nutacja, a wówczas pojawiają się dodatkowe „wahnięcia” drgania, które to powodują podtrzymywanie ruchu wirowego obiektu. Sam fakt precesyjnego wirowania stożków należy utożsamiać ze stanami równowagi ogólnej; oś stożka wyznaczonego przez trajektorię wirowo spiralną będzie nazywana osią równowagi chwilowej (zaobserwowanej w przedziale czasu, w którym stożek został wyznaczony).



Rys. 3. Trójwymiarowa wirowa trajektoria indeksu WIG z wyznaczonymi precesującymi stożkami w okresie od 18 kwietnia 1994 r. do 18 kwietnia 2002 r. (w układzie: indeks, wolumen, czas)

Źródło: opracowanie własne.

5. Aproksymacja wirów równowagi okręgami

Wirowo-spiralne trójwymiarowe trajektorie wyznaczają w pewnych przedziałach czasu stożki, które również wirują. Ortogonalne rzuty takich stożków przedstawione zostały na rys. 4. Zrzutowana rodzina stożków z R^3 utworzy nam rodzinę wirujących okręgów (elips) na R^2 . Okrąg (torus) po zrzutowaniu stożka (stożka ściętego) otrzymamy wtedy i tylko wtedy, gdy oś stożka będzie położona równolegle do osi czasu T . Niespełnienie tego warunku spowoduje, że po zrzutowaniu ortogonalnym stożka otrzymamy elipsę. W dalszej części zajmować się będziemy tylko aproksymacją okręgu.

Skorzystajmy z tego, iż każda skończona rodzina punktów na płaszczyźnie (nieleżących na jednej prostej) może być aproksymowana okręgiem⁶. W tym celu zadajmy okrąg równaniem:

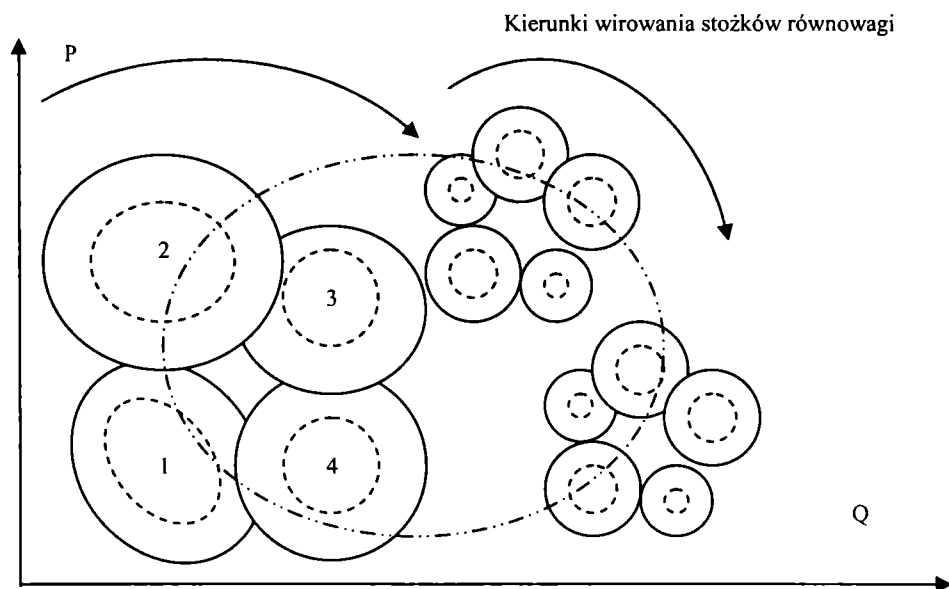
$$q^2 + p^2 - aq - bp - c = 0. \quad (35)$$

Niech

$$\Delta_o(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (q_i^2 + p_i^2 - aq_i - bp_i - c)^2 \rightarrow \min, \quad (36)$$

gdzie a, b, c są parametrami jednoznacznie wyznaczającymi położenie okręgu na płaszczyźnie. Przyrównajmy wszystkie pochodne cząstkowe $\Delta_o(a, b, c)$ do zera.

⁶ Twierdzenie o aproksymacji okręgiem; dla każdego skończonego układu punktów płaszczyzny nie leżących na jednej prostej w rodzinie wszystkich okręgów tej płaszczyzny istnieje tylko jeden okrąg najlepiej aproksymujący dany układ punktów [Antoniewicz 1988].



Rys. 4. Schematyczna rodzina stożków równowagi zrzutowana na płaszczyznę $Q \times P$

Źródło: opracowanie własne.

$$\begin{aligned}\Delta'_{o,a}(a,b,c) &= -2 \sum_{i=1}^n (q_i^2 + p_i^2 - a q_i - b p_i - c) q_i = 0, \\ \Delta'_{o,b}(a,b,c) &= -2 \sum_{i=1}^n (q_i^2 + p_i^2 - a q_i - b p_i - c) p_i = 0, \\ \Delta'_{o,c}(a,b,c) &= -2 \sum_{i=1}^n (q_i^2 + p_i^2 - a q_i - b p_i - c) 1 = 0.\end{aligned}\tag{37}$$

Przyjmując oznaczenia $\sum_{i=1}^n q_i p_i = [qp]$ i opuszczając iterację w celu skrócenia zapisu, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned}a[q^2] + b[q][p] + c[q] &= [q^3] + [p^2 q], \\ a[q][p] + b[p^2] + c[p] &= [q^2 p] + [p^3], \\ a[q] + b[p] + c[1] &= [q^2] + [p^2],\end{aligned}\tag{38}$$

z którego wyznaczamy wartości parametrów a, b, c . Znając współrzędne środków okręgów, zauważamy, że wyznaczają one krzywą zbliżoną do okręgu. Wobec tego raz jeszcze powtarzamy całą procedurę związaną ze znajdowaniem równania okręgu najlepiej opisującego położenie punktów (środków wyestymowanych okręgów).

Postępując w ten sposób, szybko można zauważyć, że wyestymowane okręgi (otrzymane wskutek aproksymacji ortogonalnych rzutów trójwymiarowej trajektorii wirowej rozpinającej w R^3 stożek) również podawane są ruchowi wirowemu. Otrzymane w ten sposób okręgi o niewielkich promieniach z punktu widzenia fizyki opisywać będą zjawiska ruchu o niewielkich zawirowaniach. Natomiast z punktu widzenia ekonomii opisywać one będą te dobra ekonomiczne, których dynamika cen i wolumenów jest stosunkowo niewielka – stabilna⁷. Okręgi o dużych promieniach będą aproksymowały wiry, które opisują niestabilne, wręcz turbulentne zmiany cen i ilości wytwarzanych dóbr.

Literatura

- Antoniewicz R., *Metoda najmniejszych kwadratów dla zależności niejawnych i jej zastosowania w ekonomii*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 445, AE, Wrocław 1988.
- Do Carmo M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.
- Dorbusch R., Fischer S., *Macro-economics*, McGraw-Hill Book Co., New York 1981.
- Hansen B., *Przegląd systemów równowagi ogólnej*, PWN, Warszawa 1976.
- Hellwig Z., *Równowaga ekonomiczna. Pojęcie kontrowersyjne*, [w:] *Metody ilościowe w ekonomii. Pisma wybrane*, AE, Wrocław 1981.
- Juzwiszyn J., *Concerning the Revolution of Financial Spheres. Applications of Physics in Financial Analises 4*, University of Technology, Warsaw 2003a.
- Juzwiszyn J., *Efektywność. Wirowa równowaga rynkowa*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1060, AE, Wrocław 2004a.
- Juzwiszyn J., *Estymacja stożków równowagi*, AE, Katowice 2004b.
- Juzwiszyn J., *Spiralna ekstrapolacja rynków finansowych*, AE, Katowice 2003c.
- Juzwiszyn J., *Trójwymiarowa kinematyka rynku, Zastosowania statystyki i matematyki w ekonomii*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1006, AE, Wrocław 2003b.
- Juzwiszyn J., *Wirowo-spiralne krzywe giełdowe*, AE, Wrocław 2006.
- Juzwiszyn J., Krzywicki A., *Równania hydrodynamiki a modele ekonomiczne*, AE, Wrocław 2005.
- Leja F., *Geometria analityczna*, PWN, Warszawa 1961.
- Oprea J., *Geometria różniczkowa i jej zastosowania*, PWN, Warszawa 2002.
- Schuster H.G., *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*, PWN, Warszawa 1993.
- Siedlecka U., *Prognozy ostrzegawcze*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 651, AE, Wrocław 1993.
- Siedlecki J., *Szkice o równowadze gospodarczej*, Ossolineum, Wrocław–Warszawa–Kraków 1995.
- Siedlecki J., *Równowaga a wzrost gospodarczy*, PWN, Warszawa–Wrocław 2000.
- Smoluk A., Zamorski J., *Współczynniki warunków ekstremalności uogólnionych funkcji spiralnych*, Roczniki PTM, Seria I, Prace Matematyczne, Wrocław 1962.
- Smoluk A., *Giełda, fale Elliotta, stożki i walce*, [w:] T. Kufel, M. Piłatowska (red.), *Dynamiczne modele ekonometryczne*, UMK, Toruń 2003.
- Taylor E., *Historia rozwoju ekonomiki*, t. 1, 2, Wydawnictwo „Delfin”, Lublin 1991.

⁷ W pracy [Juzwiszyn, Krzywicki 2005] omawiane są zagadnienia stabilności trajektorii oraz niestabilności – turbulencji trajektorii. Pomiar wirów ekonomicznych był również rozważany w pracy autora dotyczącej tzw. ekonomicznego wskaźnika ostrzegawczego Reynoldsa.

BIAPPROXIMATION OF ROTATIONAL ECONOMIC PHENOMENA

Summary

Rotational-spiral trajectories appear in the three-dimensional space, in which are observed vectors of the volume, price and time components. The trajectories define cones' side superficies in certain time intervals. The cones cut ortogonally and projected onto a plane, which is extended on volume and price axes, will construct families of rotating circles (ellipses). In the article there is considered the idea of double approximation of the family of rotating circles.