

Piotr Dniestrzański

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

UKŁAD RÓŻNICZKOWY**1. Wstęp**

Nie trzeba przypominać znaczenia funkcji trygonometrycznych $y = \sin x$ i $y = \cos x$ w zagadnieniach aproksymacyjnych i, ogólniej, w teorii pomiaru. Nieco niedoceniane w tym względzie były pozostałe dwie główne funkcje trygonometryczne $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$. Okazuje się, że być może niesłusznie. W artykule przedstawiony zostanie aktualny stan wiedzy o znaczeniu funkcji odwrotnej do funkcji $y = \operatorname{tg} x$ w zagadnieniach aproksymacyjnych. Dokładniej chodzi o układ funkcji, których funkcja $y = \operatorname{arctg} x$ jest swoistym generatorem. Układowi nadano roboczą nazwę *układ różniczkowy*.

Układy ortogonalne w odpowiednich przestrzeniach funkcyjnych pełnią zasadniczą funkcję w analizie danych statystycznych. W artykule przedstawione są rozważania nad mało znanym układem w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem na prostej rzeczywistej ($L_2(R)$). Celem artykułu jest umiejscowienie układu w klasie znanych układów ortogonalnych, przedstawienie aktualnego stanu wiedzy o układzie oraz zasugerowanie kierunku, w jakim powinny pójść dalsze badania. Umiejscowienie układu będzie miało *charakter rodowodowy*. To znaczy porównany zostanie mechanizm powstawania kolejnych funkcji układu w odniesieniu do najbardziej znanych układów wykorzystywanych w modelowaniu ekonometrycznym.

Funkcje układu powstają przez operację różniczkowania funkcji $y = \operatorname{arctg} x$. Zatem, jeżeli n -tą funkcję układu oznaczymy symbolem f_n , to

$$f_n(x) = \frac{d^n(\operatorname{arctg} x)}{dx^n}.$$

Układ można również zdefiniować indukcyjnie jak poniżej

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ f_{n+1}(x) = \frac{d[f_n(x)]}{dx}; \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Robocza nazwa *układ różniczkowy* wiąże się oczywiście ze sposobem powstawania kolejnych funkcji układu. W dalszej części artykułu przedstawione zostaną własności układu i przykłady zastosowań w aproksymacji.

2. Wybrane układy ortogonalne

Na użytek dalszych rozważań dokonany zostanie krótki przegląd wybranych układów ortogonalnych. Będą to w kolejności układy wielomianów ortogonalnych, układy falkowe i wielomiany trygonometryczne.

Wielomiany ortogonalne

Przypomnimy trzy najbardziej popularne układy wielomianów ortogonalnych. Skupimy się jedynie na sposobie ich powstawania, pomijając użyteczność w zastosowaniach.

1° Wielomiany Legendre'a

Są to wielomiany określone wzorami:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n; \quad n = 0, 1, \dots$$

Wzór definiujący $P_n(x)$ nosi nazwę Rodriguesa.

Wielomiany Legendre'a dostaniemy również, jeżeli układ funkcji $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, ... za pomocą metody Grama-Schmidta sprowadzimy do układu ortogonalnego, a następnie unormujemy. Wielomiany Legendre'a tworzą układ ortonormalny w przestrzeni $L_2[-1, 1]$.

2° Wielomiany Hermite'a

Są to wielomiany określone wzorami:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}); \quad n = 0, 1, \dots$$

Wielomiany Hermite'a tworzą układ ortogonalny w przestrzeni $L_2(R)$ z wagą $p(x) = e^{-x^2}$, tzn.

$$\int_R e^{-x^2} H_n(x) \cdot H_m(x) dx = 0 \quad \text{dla } n \neq m.$$

3° Wielomiany Laguerre'a

Są to wielomiany określone wzorami:

$$L_n(x) = e^x \cdot \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} \cdot x^n); \quad n = 0, 1, \dots$$

Wielomiany Laguerre'a tworzą układ ortonormalny w przestrzeni $L_2[0, \infty)$ z wagą $p(x) = e^{-x}$.

Zauważmy, że wymienione wielomiany ortogonalne wykorzystują w procesie powstawania kilka operacji:

- **operację różniczkowania**,
- mnożenie przez stałą,
- mnożenie przez ustaloną funkcję.

W pierwszym przypadku (wielomiany Legendre'a) n -ta funkcja układu jest n -tą pochodną (z dokładnością do stałej) funkcji $y = (x^2 - 1)^n$. W układzie następnym (wielomiany Hermite'a) funkcją generującą jest funkcja $y = e^{-x^2}$. Kolejne funkcje układu powstają przez pomnożenie n -tej pochodnej funkcji generującej przez odpowiednią stałą i przez funkcję $y = e^{x^2}$. Układ ostatni (wielomiany Laguerre'a) tworzą funkcje będące iloczynem n -tej pochodnej funkcji $y = e^{-x} \cdot x^n$, odpowiedniej stałej i funkcji $y = e^x$. Pomijamy w tym miejscu to, że wszystkie wymienione układy można zdefiniować również w inny sposób. Nie ma to bowiem znaczenia dla dalszych rozważań. Na przykład wspomniane zostało jedynie przy okazji wielomianów Legendre'a o możliwym innym ich rodowodzie.

Układy falkowe

Funkcję rzeczywistą Ψ nazywamy falką (lub falką-matką), gdy rodzina funkcji

$$\Psi_{n,k}(x) = 2^{\frac{-n}{2}} \Psi\left(2^{\frac{n}{2}}x - k\right) \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

tworzy bazę ortonormalną przestrzeni $L_2(\mathbb{R})$. Rodzina funkcji $\Psi_{n,k}$ powstaje z falki Ψ przez operacje skalowania i przesuwania. Nazywamy ją *układem falkowym*. Układy falkowe, bardzo popularne w ostatnich kilkunastu latach, mają szerokie zastosowania nie tylko w analizach ekonometrycznych.

Wielomiany trygonometryczne

Najbardziej rozpowszechnionym w zastosowaniach układem funkcji ortogonalnych są tzw. wielomiany trygonometryczne. Jest to układ funkcji postaci

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

Funkcje te tworzą układ ortogonalny w przestrzeni $L_2[-\pi, \pi]$. Jest to układ liniowo zupełny (czyli bazowy) w tej przestrzeni. Stosunkowa łatwość odpowiednich obliczeń powoduje, że jest to bardzo użyteczne narzędzie w wielu zagadnieniach ekonometrycznych (m.in. w analizie szeregów czasowych). Zauważmy, że funkcje układu powstają z dwóch funkcji trygonometrycznych $y = \sin x$ i $y = \cos x$ przez operacje skalowania.

3. Własności układu różniczkowego

Układ różniczkowy wpisuje się w naturalny sposób do rodziny układów ortogonalnych z perspektywą dużej użyteczności. Znane są następujące fakty dotyczące układu.

Twierdzenie 1 [Bukietyński, Smoluk 1968]:

Funkcje układu różniczkowego można przedstawić w postaci

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x^2)^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{n-(2k+1)},$$

gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą z liczby y .

Twierdzenie 2 [Bukietyński, Smoluk 1968]:

Funkcje układu różniczkowego są liniowo niezależne w przestrzeni $L_2(R)$.

Twierdzenie 3 [Dniestrzański 1999]:

Ciąg funkcji danych wzorem (1) jest liniowo gęstym podzbiorem przestrzeni $L_2(R)$.

Powyższe twierdzenia, a zwłaszcza ostatnie z nich, pozwalają na weryfikację przydatności układu różniczkowego w modelowaniu ekonometrycznym. Zauważmy, że funkcje układu różniczkowego mają wspólną cechę, jeśli rozważymy sposób powstawania układu, zarówno z układami falkowymi (jedna funkcja generująca), jak i z wielomianami ortogonalnymi (operacja różniczkowania jako metoda tworzenia kolejnych funkcji). Funkcję $y = \arctg x$ (w analogii do układów falkowych) proponuje się nazywać **falką różniczkową**. W artykule [Dniestrzański 2003a] zaproponowano uogólnienie definicji falki, a w związku z tym również rozszerzenie pojęcia układu falkowego.

Oznaczmy przez $\mathbf{A}$ pewną ustaloną klasę przekształceń z $L_2(R)$ w $L_2(R)$.

Definicja:

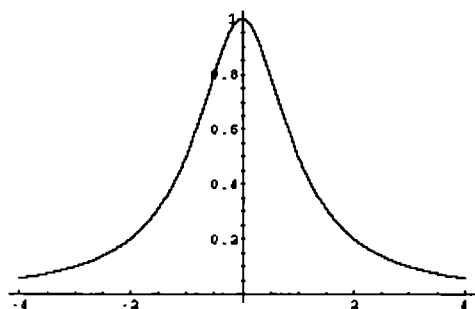
Funkcję $f \in L_2(R)$ nazywamy **falką względem klasy $\mathbf{A}$** , jeżeli rodzina funkcji

$$\{h(f) : h \in \mathbf{A}\}$$

jest układem liniowo gęstym i niezależnym w przestrzeni $L_2(R)$. Otrzymany układ nazywamy **układem falkowym względem funkcji f i klasy $\mathbf{A}$** .

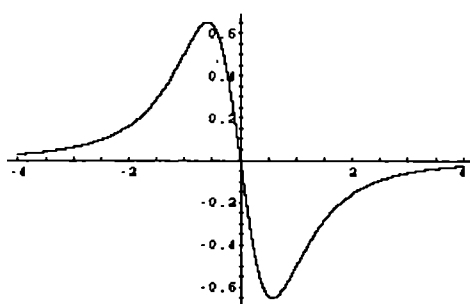
Oczywiście zarówno falka, jak i falka różniczkowa są szczególnymi przypadkami falki względem klasy $\mathbf{A}$. W pierwszym przypadku $\mathbf{A}$ zawiera operacje skalowania i przesuwania, a w drugim przypadku $\mathbf{A}$ jest klasą kolejnych operacji różniczkowania.

Na rysunkach 1-3 przedstawiono wykresy 3 pierwszych funkcji układu różniczkowego po operacji ortogonalizacji metodą Grama-Schmidta i oznaczono je symbolami $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$.



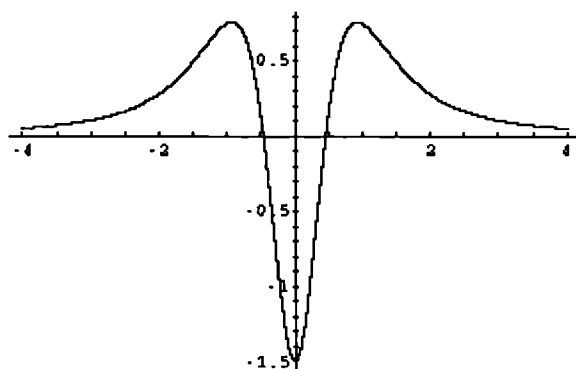
Rys. 1. Wykres funkcji $g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Wykres funkcji $g_2(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Wykres funkcji $g_3(x) = \frac{-3+14x^2+x^4}{2(1+x^2)^3}$

Źródło: opracowanie własne.

Metodą Grama-Schmidta można oczywiście zortogonalizować dowolną część układu, ale niestety metoda ta jest tutaj niezbyt efektywna z powodów obliczeniowych. Mimo zastosowania pakietów matematycznych wyznaczanie kolejnych funkcji układu zortogonalizowanego (sprowadzające się do obliczania coraz bardziej złożonych całek oznaczonych) zajmuje zbyt dużo czasu. Sytuacja komplikuje się jeszcze bardziej przy próbach wykorzystania układu w zagadnieniach aproksymacyjnych. Nie jest ciągle znana postać analityczna funkcji układu zortogonalizowanego (tak jak udało się to zrealizować w układzie przed ortogonalizacją – twierdzenie 1). Jest to jedno z ważniejszych zagadnień, z jakim należałoby się uporać, aby móc prowadzić dalsze zaawansowane badania nad układem. Przeprowadzone

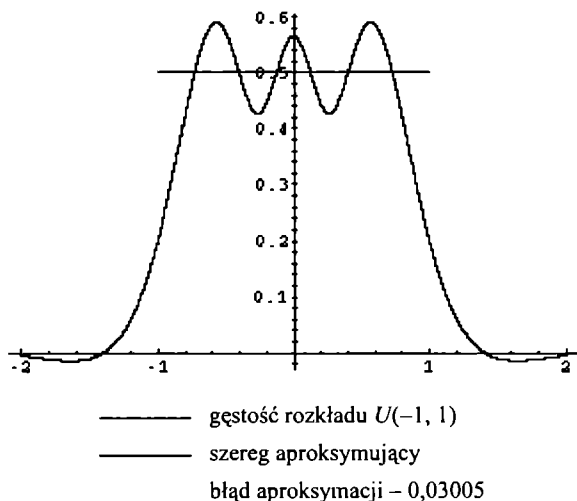
próby wykorzystania układu w zagadnieniach aproksymacyjnych dały zadowalające rezultaty. Na rysunkach 4 i 5 przedstawiono wyniki aproksymacji funkcjami zortogonalizowanego układu funkcji gęstości rozkładów: jednostajnego na odcinku $[-1,1]$ i standardowego normalnego. Wykorzystano do tego celu 8 pierwszych funkcji układu różniczkowego. W przypadku każdej aproksymacji wykonano następujące czynności:

1. Wyznaczono uogólnione współczynniki Fouriera szeregu aproksymującego;
2. Graficznie przedstawiono wyniki analizy. Na rysunkach przedstawiono wykresy szeregu aproksymującego i funkcji aproksymowanej;
3. Wyznaczono błąd aproksymacji. Za błąd przyjęto całkę oznaczoną w granicach od $-\infty$ do ∞ z kwadratu różnicy szeregu aproksymującego i funkcji aproksymowanej.

Współczynniki szeregu aproksymującego $c_1, \dots, c_8$ wyznaczone zostały (zgodnie z teorią uogólnionych szeregów Fouriera) ze wzoru

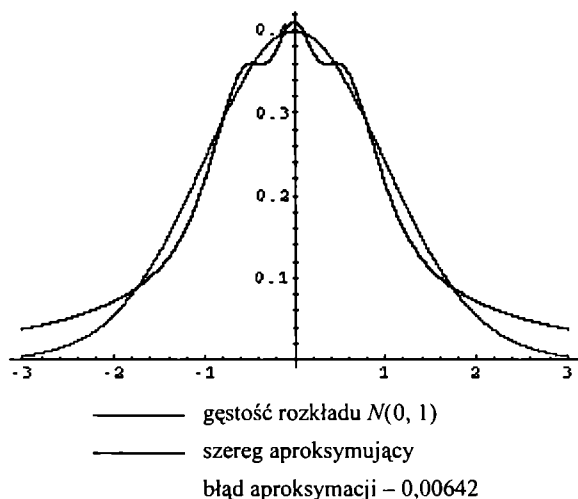
$$c_i = \frac{\langle f, g_i \rangle}{\|g_i\|^2}$$

i wynoszą $c_1 = 0,5$, $c_2 = 0$, $c_3 = -0,05465$, $c_4 = 0$, $c_5 = -0,01974$, $c_6 = 0$, $c_7 = -0,00092$, $c_8 = 0$ (dla rozkładu jednostajnego) oraz $c_1 = 0,41742$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0,08284$, $c_4 = 0$, $c_5 = -0,00273$, $c_6 = 0$, $c_7 = -0,00017$, $c_8 = 0$ (dla rozkładu normalnego). Jak widać, współczynniki szeregu aproksymującego o indek-



Rys. 4. Aproksymacja rozkładu jednostajnego

sach parzystych wynoszą zero. Jest to oczywiście konsekwencją tego, że funkcje układu (zarówno przed ortogonalizacją, jak i po ortogonalizacji) są na przemian parzyste (funkcje o indeksach nieparzystych) i nieparzyste (funkcje o indeksach parzystych), podczas gdy obydwie aproksymowane funkcje gęstości są funkcjami parzystymi.



Rys. 5. Aproksymacja rozkładu normalnego

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki aproksymacji są obiecujące ze względu na niewielkie błędy – wynoszą one zaledwie 3% (dla rozkładu jednostajnego) i ok. 0,64% (dla rozkładu normalnego), co świadczy o stosunkowo szybkiej zbieżności szeregu. Przeprowadzone dodatkowe analizy dla kilku innych funkcji gęstości dały równie obiecujące rezultaty, chociaż najlepsze efekty aproksymacji otrzymano dla rozkładów o funkcjach gęstości symetrycznych względem osi OY . Błędy aproksymacji są małe również w sytuacji, gdy aproksymowane funkcje mają (tak jak w przypadku rozkładu jednostajnego) punkty nieciągłości, co zdecydowanie pogarsza efekty.

Przeprowadzone dodatkowe symulacje z wykorzystaniem 4 i 6 funkcji układu wskazują na szybki spadek wartości błędu przy zwiększaniu ilości użytych do aproksymacji funkcji.

4. Podsumowanie

Kolejne pochodne funkcji $y = \arctg x$ tworzące układ zupełny w przestrzeni $L_2(R)$ są stosunkowo nowym i mało zbadanym narzędziem mogącym mieć duże zastosowania w modelowaniu ekonometrycznym. Aby móc rozstrzygnąć kwestię jego użyteczności, należy odpowiedzieć na wiele pytań. Przede wszystkim pomocne byłoby wyznaczenie postaci analitycznej n -tej funkcji układu zortogonalizowa-

nego. Pozwoli to na badanie własności granicznych szeregów aproksymujących w bazie układu. Łatwiej będzie również wówczas dokonać porównania użyteczności układu z innymi układami ortogonalnymi. Przypomniane w artykule wyniki pierwszych zastosowań aproksymacyjnych pokazują, że układ jest narzędziem o potencjalnie dużych możliwościach aplikacyjnych. Przeprowadzone analizy wykazują szybką zbieżność szeregu ortogonalnego w bazie układu.

Literatura

- Brandt S., *Analiza danych*, PWN, Warszawa 1999.
- Bukietyński W., Smoluk A., *O pewnej klasie funkcji liniowo niezależnych w $L_2(-\infty, \infty)$* , Prace Naukowe Wyższej Szkoły Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1, Wrocław 1968, s. 45-47.
- Dniestrzański P., *Układ zupełny a pomiar*, *Ekonomia Matematyczna* 3, AE, Wrocław 1999, s. 65-68.
- Dniestrzański P., *Falka różniczkowa*, *Ekonomia Matematyczna* 7, AE, Wrocław, 2003a, s. 95-106.
- Dniestrzański P., *Aproksymacja układem różniczkowym*, *Wrocławski Biuletyn Gospodarczy* nr 32, *Matematyka a ekonomia*. Wydawnictwo Polskiego Towarzystwa Ekonomicznego Oddział we Wrocławiu, Wrocław 2003b, s. 91-98.
- Smoluk A., *O pomiarze preferencji*, [w:] A. Smoluk (red.), *Elementy metrologii ekonomicznej*, AE, Wrocław, s. 101-131.
- Wojtaszczyk P., *Teoria falek*, PWN, Warszawa 2000.

DIFFERENTIAL SEQUENCE

Summary

In the paper the author presents the most important properties of the differential sequence. It is the sequence of $\{f_n\}$ where $f_n(x) = (\arctg x)^{(n)}$; $n = 1, 2, \dots$. This sequence is linearly independent in $L_2(R)$ and it is the linearly dense subset at $L_2(R)$ space. Moreover, in some cases, functions $\{f_n\}$ are useful in approximation problems. The author discusses connections between the differential sequence and other orthogonal sequences. The function $y = \arctg x$ is called differential wavelet.