Politechnika Wrocławska
Wydział Elektryczny
Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii

Rozprawa doktorska

Zaawansowane metody analizy czasowo – częstotliwościowej w zastosowaniu do estymacji parametrów niestacjonarnych sygnałów elektrycznych

mgr inż. Tomasz Sikorski

Promotor:
prof. dr hab. inż. Tadeusz Łobos

Wrocław 2004

Podziękowania:

Mojej Żonie, Justysi i całej Rodzinie, za wsparcie i wyrozumiałość.

Ogromne podziękowania dla prof. Tadeusza Łobosa, dr Piotra Ruczewskiego i dr Jacka Rezmera, za niekończące się rozmowy na tematy naukowe i nie tylko.

Spis treści

Wykaz oznaczeń v

Przedmowa 1

Cel pracy 3

Teza pracy 3

Układ pracy 3

1. Opis sygnałów w dziedzinie czasu i dziedzinie częstotliwości 6
1.1. Parametry rzeczywistych sygnałów deterministycznych w dziedzinie czasu 6
1.2. Parametry rzeczywistych sygnałów deterministycznych w dziedzinie częstotliwości . 9
1.3. Parametry widma sygnału 11

2. Biliniowe reprezentacje czasowo-częstotliwościowe 15
2.1. Transformacja Wignera - energetyczna klasa czasowo-częstotliwościowych reprezentacji sygnału 18
2.1.1. Właściwości przekształcenia Wignera i ich znaczenie 19
2.1.2. Pseudo-transformata Wignera oraz jej wersja wygładzona 23
2.1.3. Transformacja Wignera-Ville'a 25
2.1.4. Globalne i lokalne momenty transformacji Wignera jako wskaźniki niestacjonarności 26
2.1.5. Przykłady analitycznego wyznaczania transformacji Wignera 31
2.2. Funkcja nieoznaczoności - korelacyjna klasa czasowo-częstotliwościowych reprezentacji sygnału 40
2.2.1. Właściwości funkcji nieoznaczoności 41
2.2.2. Funkcja nieoznaczoności a przekształcenie Wignera – dualność klas energetycznej i korelacyjnej 43
2.3. Przekształcenia klasy Cohena - uogólnienie energetycznej klasy przekształceń czasowo-częstotliwościowych 46
2.3.1. Pożądane właściwości reprezentacji czasowo-częstotliwościowych 47
2.3.2. Alternatywne postacie funkcji jądra 49
2.3.3. Alternatywne postacie równania Cohena 51
2.3.4. Właściwości funkcji jądra a właściwości reprezentacji 54
2.3.5. Pseudo – reprezentacje klasy Cohena oraz ich wersje wygładzone 56
2.3.6. Przekształcenia klasy Cohena, ich funkcje jądra oraz właściwości 57
2.3.7. Afiniczne przekształcenia czasowo-częstotliwościowe a klasa Cohena 70

3. Wyniki badań 72
3.1. Grupa 1 – badania wstępne 73
3.2. Grupa 2 – badania właściwe 91
3.3. Grupa 3 – badania rozszerzone 118

4. Wnioski 124

Dodatek – analityczne wyprowadzenia wybranych właściwości transformacji Wignera 127
D.1. Transformata Wignera sygnału a transformata Wignera widm 127
D.2. Transformata Wignera sumy sygnałów 128
D.3. Lokalne momenty częstotliwościowe 130
D.4. Rozdzielczość reprezentacji Wignera-Ville'a i spektrogramu 133

Literatura 135

Wykaz oznaczeń

Oznaczenie	Opis
$\mathrm{AF}_x(\theta,\tau)$	funkcja nieoznaczoności
$\mathrm{AFW}_x(\theta,\tau)$	szerokopasmowa funkcja nieoznaczoności
$\mathrm{BJD}_x(t,\omega)$	transformata Borna-Jordana
$\mathrm{BUD}_x(t,\omega)$	transformata Butterworth'a
$\mathrm{CBBD}_x(t,\omega)$	transformata Costa-Boudreaux'a-Bartelsa
$\mathrm{CWD}_x(t,\omega)$	transformata Choi-Williamsa
$e_x(t)$	chwilowa energia sygnału (ang. instantaneous energy)
E_x	całkowita energia sygnału
f	częstotliwość
$\mathrm{F}_t, \mathrm{F}_\tau$	prosta transformata Fouriera względem zmiennej wskazanej w indeksie
$\mathrm{F}_\omega^{-1}, \mathrm{F}_\theta^{-1}$	odwrotna transformata Fouriera względem zmiennej wskazanej w indeksie
$\mathrm{GCWD}_x(t,\omega)$	uogólniona transformata Choi-Williamsa
$\mathrm{GWD}_x(t,\omega)$	uogólniona transformata Wignera
$\mathrm{g}(t)$	funkcje okien wygładzających w czasie
$\mathrm{h}(t)$	funkcje okien wygładzających w częstotliwości
$\mathrm{LD}_x(t,\omega)$	transformata Levina
$\overline{\mathrm{m}_x^r}$	moment zwykły rzędu r dla sygnału
$\overline{\mathrm{m}_{x^2}^r}$	moment zwykły rzędu r dla kwadratu sygnału
$\overline{\mathrm{m}_{WD_x}^0}$	globalny czasowy moment zerowego rzędu dla reprezentacji Wignera
$\overline{\mathrm{m}_{WD_x}^0}(\omega)$	lokalny czasowy moment zerowego rzędu dla reprezentacji Wignera
$\overline{\mathrm{M}_X^r}$	moment zwykły rzędu r dla widma
$\overline{\mathrm{M}_{\lvert X\rvert^2}^r}$	moment zwykły rzędu r dla kwadratu widma
$\overline{\mathrm{M}_{WD_x}^0}$	globalny częstotliwościowy moment zerowego rzędu dla reprezentacji Wignera
$\overline{\mathrm{M}_{WD_x}^0}(t)$	lokalny częstotliwościowy moment zerowego rzędu dla reprezentacji Wignera
$\mathrm{MHD}_x(t,\omega)$	transformata Margineau'a-Hilla
$\mathrm{ND}_x(t,\omega)$	transformata Nutalla

Oznaczenie	Opis
P_x	moc średnia sygnału
$PD_x(t,\omega)$	transformata Page'a
$PWD_x(t,\omega)$	pseudo-transformata Wignera
$r(\tau)$	funkcja autokorelacji sygnału
$r_t(\tau)$	chwilowa funkcja autokorelacji sygnału
$R(\theta)$	funkcja autokorelacja sygnału zdefiniowana w oparciu o jego widmo
$R_x(t,\tau)$	wygładzona chwilowa funkcja autokorelacji
$RD_x(t,\omega)$	transformata Rihaczka
$RGWD_x(t,\omega)$	uogólniona transformata Wignera o wartościach rzeczywistych
$SPEC_x(t,\omega)$	spektrogram
$SWD_x(t,\omega)$	wygładzona wersja transformaty Wignera
$SPWD_x(t,\omega)$	wygładzona wersja pseudo-transformaty Wignera
t	czas
$\overline{t_x^r}$	unormowany moment zwykły rzędu r dla sygnału
$\overline{t_{x^2}^r}$	unormowany moment zwykły rzędu r dla kwadratu sygnału
$\overline{t_{WD_X}^1}$	globalny unormowany czasowy moment pierwszego rzędu dla reprezentacji Wignera
$\overline{t_{WD_X}^1}(\omega)$	lokalny unormowany czasowy moment pierwszego rzędu dla reprezentacji Wignera
$TF^{(C)}(\theta,\tau)$	korelacyjna klasa biliniowych przekształceń czasowo-częstotliwościowych
$TF^{(E)}(t,\omega)$	energetyczna klasa biliniowych przekształceń czasowo-częstotliwościowych
$TFC^{(E)}(t,\omega)$	uogólnione równanie Cohena opisujące energetyczną klasę biliniowych przekształceń czasowo-częstotliwościowych
u	dodatkowa zmienna całkowania czasu
$WD_x(t,\omega)$	transformata Wignera sygnału x(t)
$WD_{x,y}(t,\omega)$	wzajemna transformata Wignera sygnałów x(t) i y(t)
$WD_X(\omega,t)$	transformata Wignera sygnału x(t) wyznaczona w oparciu o jego widmo
$WD_{X,Y}(\omega,t)$	wzajemna transformata Wignera sygnałów x(t) i y(t) wyznaczona w oparciu o ich widma
$WVD_x(t,\omega)$	transformata Wignera-Ville'a
$x(t)$	sygnał
$X(\omega)$	transformata Fouriera sygnału, widmo
$\lvert X(\omega)\rvert$	widmo amplitudowe
$\overline{x}$	wartość średnia sygnału
$ZAMD_x(t,\omega)$	transformata Zhao-Atlasa-Marks'a

Oznaczenie	Opis
δ_x^r	moment centralny rzędu *r* dla sygnału
$\delta_{x^2}^r$	moment centralny rzędu *r* dla kwadratu sygnału
σ_x^r	unormowany moment centralny rzędu *r* dla sygnału
$\sigma_{x^2}^r$	unormowany moment centralny rzędu *r* dla kwadratu sygnału
η	dodatkowa zmienna całkowania pulsacji
θ	przesunięcie pulsacji
λ	dodatkowa zmienna całkowania przesunięcia częstotliwościowego
μ	przesunięcie częstotliwościowe
$\phi_x(\omega)$	chwilowe widmo gęstości energii
$\phi_{ft}(\mu,\tau)$	funkcja jądra – postać częstotliwość-czas
$\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$	funkcja jądra – postać pulsacja-czas
$\phi_{tt}(t,\tau)$	funkcja jądra – postać czas-czas
$\phi_{tf}(t,f)$	funkcja jądra – postać czas-częstotliwość
$\phi_{t\omega}(t,\omega)$	funkcja jądra – postać czas-pulsacja
$\phi_{ff}(\mu,f)$	funkcja jądra – postać częstotliwość-częstotliwość
$\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)$	funkcja jądra – postać pulsacja-pulsacja
$\sigma_{WD_x}^2$	globalny unormowany czasowy moment centralny drugiego rzędu dla reprezentacji Wignera
$\sigma_{WD_x}^2(\omega)$	lokalny unormowany czasowy moment centralny drugiego rzędu dla reprezentacji Wignera
τ	przesunięcie czasowe
$\varphi(\omega)$	widmo fazowe
ω	pulsacja
$\overline{\omega_X^r}$	unormowany moment zwykły rzędu *r* dla widma
$\overline{\omega_{\lvert X\rvert^2}^r}$	unormowany moment zwykły rzędu *r* dla kwadratu widma
Γ_X^r	moment centralny rzędu *r* dla widma
$\Gamma_{\lvert X\rvert^2}^r$	moment centralny rzędu *r* dla kwadratu widma
Δt	przedział czasu
$\Delta\omega$	przedział częstotliwości
$\Delta t \times \Delta\omega$	przedział czasowo-częstotliwościowy („komórka", „kostka" czasowo-częstotliwościowa)
ΔT_x	szerokość średniokwadratowa sygnału
$\Delta\Omega_X$	szerokość średniokwadratowa widma
Σ_X^r	unormowany moment centralny rzędu *r* dla widma
$\Sigma_{\lvert X\rvert^2}^r$	unormowany moment centralny rzędu *r* dla kwadratu widma
$\Sigma_{WD_x}^2$	globalny unormowany częstotliwościowy moment centralny drugiego rzędu dla reprezentacji Wignera

Oznaczenie	Opis
$\Sigma^2_{WD_x}(t)$	lokalny unormowany częstotliwościowy moment centralny drugiego rzędu dla reprezentacji Wignera
$\Phi(\omega), \lvert X(\omega)\rvert^2$	widmo gęstości energii
$\overline{\Omega^1_{WD_X}(t)}$	lokalny unormowany częstotliwościowy moment pierwszego rzędu dla reprezentacji Wignera
$\overline{\Omega^1_{WD_X}}$	globalny unormowany częstotliwościowy moment pierwszego rzędu dla reprezentacji Wignera

Przedmowa

Niestacjonarność sygnałów stawia metodom analizy widmowej szereg problemów i nowych wymagań. Wyznaczenie jedynie widma gęstości energii sygnału niestacjonarnego pozwala uzyskać ogólną informację o charakterze sygnału, a cała informacja o zmienności czasowej widma jest przy tym podejściu tracona. Naruszenie podstawowego założenia analizy fourierowskiej, warunku stacjonarności sygnału, może być rozwiązane poprzez poszukiwanie reprezentacji sygnału opisanej w połączonej dziedzinie czasu i częstotliwości.

Pierwsze obszary zastosowań reprezentacji czasowo-częstotliwościowych dotyczyły problemów mechaniki kwantowej. Prace Wignera, Gabora, Ville'a czy Moyala z początku lat czterdziestych ubiegłego stulecia, wskazały pierwsze kierunki tworzenia dziedziny czasowo-częstotliwościowej. Kolejne dwa dziesięciolecia przyniosły szereg prac, takich autorów jak Page, Rihaczek, Levin czy Mark, które zaowocowały wprowadzeniem szeregu nowych reprezentacji czasowo-częstotliwościowych, adoptowanych zwłaszcza dla potrzeb analizy sygnałów. Jednak dopiero gwałtowny wzrost mocy obliczeniowej komputerów uczynił te metody bardzo atrakcyjnymi. W ślad za nowymi możliwościami aplikacyjnymi pojawiły się publikacje, które poza wspomnianymi wcześniej pracami, stanowią dziś bazę teoretyczną przekształceń czasowo-częstotliwościowych. Mowa tu o pracach Classena i Mecklenbräukera, szczegółowo opisujących przekształcenie Wignera wraz z problemami jego dyskretyzacji, czy pracach Boashasha, wskazujących na możliwości implementacji omawianej grupy przekształceń. Na szczególną uwagę, zwłaszcza z punktu widzenia niniejszej pracy, zasługują publikacje Leona Cohena, wprowadzające uogólnione równanie energetycznej klasy przekształceń czasowo-częstotliwościowych. Do tej grupy zaliczyć można również prace Hlawatscha i Boudreaux-Bartelsa. O znaczeniu przekształceń czasowo-częstotliwościowych świadczyć może również zwiększająca się liczba pozycji książkowych. Dzięki takim autorom jak Quian i Chen, Papandrou-Suppappola, Poularikas, Boashash czy Zieliński, problemy analizy czasowo-częstotliwościowej zostały zebrane i opracowane całościowo.

Współczesne możliwości aplikacyjne pozwoliły wykorzystać metody analizy czasowo-częstotliwościowej w dziedzinie przetwarzani sygnałów mowy [1, 23, 58, 60], czy analizie danych sejsmicznych [10] i ekonomicznych [15]. Jedno z ostatnich zastosowań dotyczy sygnałów biomedycznych, zwłaszcza badań elektroencefalogramów [9,24,48,55,56]. Specjalna grupa przekształceń czasowo-częstotliwościowych tzw. korelacyjna grupa przekształceń, znalazła zastosowanie w technice radarowej [13].

Autor dostrzega możliwości zastosowania przekształceń czasowo-częstotliwościowych również w elektrotechnice. Główną motywację stanowią sygnały, jakie towarzyszą pracy współczesnych układów elektrycznych. Można tu wspomnieć o wpływie układów przekształtnikowych czy pieców łukowych, gdzie oprócz składowych charakterystycznych możemy mieć do czynienia ze składowymi niecharakterystycznymi, a nawet inter – oraz subharmonicznymi. Nie bez znaczenia pozostają stany przejściowe, których czas trwania np. w sieciach wysokiego napięcia, może osiągać nawet wartości od 5 do 10 okresów składowej podstawowej. W takich przypadkach klasyczna analiza Fourierowska może okazać się niewystarczająca. Inne nowoczesne metody estymacji

widma, takie jak statystyki wyższych rzędów czy grupa przekształceń parametrycznych, wymagają przyjęcia pewnych początkowych założeń. Problemy wyboru ilości estymowanych składników bądź szerokości okna pomiarowego mogą być rozwiązane na drodze wstępnego przekształcenia sygnału za pomocą omawianych nieparametrycznych przekształceń czasowo-częstotliwościowych.

W obszarze elektrotechniki podjęto również pierwsze próby wykorzystania reprezentacji czasowo-częstotliwościowych. Obecnie najpopularniejszą reprezentacją jest krótkoczasowa transformata Fouriera, a coraz większe zainteresowanie wzbudza transformata falkowa. Prace takich autorów jak Łobos z zespołem [34,36,37,42,43], Mindykowski [47], Rosołowski [53], wskazują na rosnące zainteresowanie transformacjami czasowo-częstotliwościowymi również wśród elektryków.

Ujęta w niniejszej pracy próba adaptacji przekształceń czasowo-częstotliwościowych klasy Cohena dla potrzeb elektrotechniki wydaje się zatem celowa.

Cel pracy

Celem pracy jest zbadanie możliwości wykorzystania nieparametrycznych przekształceń czasowo – częstotliwościowych klasy Cohena do badania niestacjonarnych sygnałów występujących w elektrotechnice i elektroenergetyce. Pożądanym jest wybór optymalnych reprezentacji, określenie obszaru ich zastosowań, cech charakterystycznych, zarówno korzystnych jak i ograniczających celowość ich wykorzystania.

Teza pracy

Dzięki modyfikacji właściwości badanej klasy przekształceń, poprzez dobór odpowiedniej funkcji jądra, można uzyskać przekształcenia dopasowane do danej klasy sygnału. Umożliwi to dokładniejsze wyznaczenie parametrów mocno zniekształconych sygnałów oraz lepszą diagnozę stanu pracy układów elektrycznych. Poprawa dokładności dotyczy parametrów w dziedzinie czasu i dziedzinie częstotliwości, w porównaniu do parametrów wyznaczonych z zastosowaniem algorytmu Fouriera.

Układ pracy

Niniejszą pracę otwiera przegląd podstawowych parametrów sygnału, zdefiniowanych w dziedzinie czasu, oraz parametrów widma sygnału, zdefiniowanych w dziedzinie częstotliwości. Podkreślone zostają wzajemne relacje pomiędzy obiema dziedzinami, a interpretacje niektórych parametrów, takich jak odcięta środka ciężkości czy wariancja, są szczególnie ukierunkowane na zdefiniowaną później połączoną dziedzinę czasu i częstotliwości.

Rozdział drugi poświęcony jest biliniowym nieparametrycznym przekształceniom czasowo-częstotliwościowym. Nakreślono w nim dwa główne nurty interpretacyjne omawianych przekształceń, które prowadzą do korelacyjnej lub energetycznej klasy przekształceń. Jako przykład podejścia korelacyjnego opisano funkcje nieoznaczoności. Ze względu na cel pracy, główny nacisk położono na szczegółowy opis energetycznej klasy przekształceń.

W podrozdziale 2.1 zawarto opis przekształcenia Wignera, które można traktować jako bazowe z punktu widzenia budowy innych przekształceń grupy energetycznej. W podrozdziale 2.1.1 autor postanowił zebrać wszystkie właściwości przekształcenia

Wignera wraz z ich interpretacją, mając na celu późniejsze powiązanie z pożądanymi właściwościami przekształceń czasowo-częstotliwościowych. Podrozdział 2.1.2 objął swoim zakresem wpływ obciążenia sygnału funkcją okna, która prowadzi do tzw. pseudo-reprezentacji Wignera, wraz z jej wersją uśrednioną tzw. wygładzoną wersją pseudo-reprezentacji Wignera. Autor przytacza informacje istotne z punktu widzenia możliwości tłumienia niepożądanych składowych krzyżowych, które są charakterystyczną cechą biliniowych reprezentacji czas-częstotliwość. W podrozdziale 2.1.3 ujęto również, szczególnie ważną z punktu widzenia przetwarzania sygnałów rzeczywistych, kwestię reprezentacji Wignera sygnału analitycznego, zwanej również transformatą Wignera-Ville'a. Jedna z proponowanych w niniejszej pracy możliwości wykorzystania omawianych przekształceń polega na wyznaczaniu jednowymiarowych charakterystyk lokalnych momentów reprezentacji czasowo-częstotliwościowych. Podrozdział 2.1.4 zawiera definicje i interpretacje momentów transformacji Wignera, zarówno lokalnych jak i globalnych, ze szczególnym wskazaniem na możliwość wykorzystania uzyskanych charakterystyk jako wskaźników niestacjonarności. Wreszcie w podrozdziale 2.1.5 autor wyprowadza dwa przykłady analitycznego wyznaczania transformacji Wignera sygnałów ograniczonych, które służyć mają uwidocznieniu natury omawianego przekształcenia.

Podrozdział 2.2 poświęcono opisowi przekształcenia zwanego funkcją nieoznaczoności. Choć przekształcenie to należy do korelacyjnej grupy przekształceń i nie znajduje większego zastosowania w elektrotechnice, zagadnienie to stanowi podstawę interpretacji uogólnionego równania energetycznych reprezentacji czas-częstotliwość. W podrozdziale 2.2.1 zebrano więc podstawowe właściwości funkcji nieoznaczoności dla porównania z właściwościami przekształcenia Wignera. Dla podkreślenia dualności obu grup, w podrozdziale 2.2.2 przedstawiono wzajemne relacje pomiędzy funkcją nieoznaczoności a przekształceniem Wignera, wraz z przykładem.

Podrozdział 2.3 poświęcono zagadnieniu uogólnionego równania nieparametrycznych biliniowych przekształceń czasowo-częstotliwościowych, wprowadzonego przez Leona Cohena. Idea uogólnionego równania Cohena bazuje na tzw. funkcji jądra, charakterystycznej dla konkretnego przekształcenia i mającej ścisły związek z jego właściwościami. Pierwszy etap tej części pracy realizuje podrozdział 2.3.1, w którym zebrano szereg pożądanych właściwości przekształceń czasowo-częstotliwościowych. W podrozdziale 2.3.2 przeanalizowano cztery alternatywne postacie funkcji jądra, powstałe przez odpowiednią zamianę zmiennych, wraz z wzajemnymi relacjami między nimi. Podążając śladem różnych postaci funkcji jądra, w podrozdziale 2.3.3 przedstawiono cztery alternatywne postacie równania Cohena, uzupełnione o ocenę numeryczną ich wykorzystania. W podrozdziale 2.3.4 zestawiono związki pomiędzy pożądanymi właściwościami przekształcenia czasowo-częstotliwościowego a właściwościami funkcji jądra. W podrozdziale 2.3.5 rozszerzono przedstawiony przy opisie pseudo-reprezentacji Wignera wpływ obciążenia sygnału funkcją okna oraz splotu reprezentacji z dodatkową funkcją wygładzającą, na ogólną pseudo- i wygładzoną pseudo-reprezentację klasy Cohena. W podrozdziale 2.3.6 autor usystematyzował przekształcenia klasy Cohena poprzez tabelaryczne zestawienie równań definicyjnych, postaci funkcji jądra oraz właściwości uzyskanych przekształceń. Ułatwia to podjęcie decyzji o wstępnym wyborze przekształceń, choćby ze względu na spełniane właściwości. Analizując rodzinę przekształceń klasy Cohena, autor zwrócił szczególną uwagę na podgrupę, spełniającą warunek afiniczności. Możliwości tłumienia składowych krzyżowych, jakie przynosi specjalna budowa funkcji jądra wskazanej podgrupy, zostały opisane w podrozdziale 2.3.7. To właśnie tę podgrupę autor uznaje za szczególnie użyteczną do analizy sygnałów z dziedziny elektrotechniki.

W rozdziale trzecim zawarto wyniki badań. Badania postanowiono skoncentrować w trzech grupach. Pierwsza grupa, ujęta w podrozdziale 3.1, dotyczy badań wstępnych.

Porównano tu reprezentację Wignera-Ville'a (WVD), pseudo-reprezentację Wignera-Ville'a (PWVD) oraz jej wersję wygładzoną (SPWVD) w celu określenia wpływu szerokości funkcji wygładzających w czasie i częstotliwości na uzyskaną reprezentację. Dokonano również jakościowej analizy wpływu funkcji jąder przekształceń należących do afinicznej podgrupy klasy Cohena (np. Choi-Williams (CWD), Born-Jordan (BJD), Margineau-Hill (MHD)). Badania wstępne przeprowadzono bazując na symulowanych sygnałach sumy składników cosinusoidalnych oraz prądu w gałęzi RLC, załączanej na napięcie sinusoidalne. Grupę drugą stanowią badania właściwe, obejmujące swoim zakresem symulowane oraz rzeczywiste sygnały, odwzorowujące problemy niestacjonarności w układach elektrycznych. W podrozdziale 3.2 znalazły się więc analizy symulowanych sygnałów załączania baterii kondensatorów, zwarcia w układzie przekształtnika oraz sygnałów pomiarowych zasilania pieca łukowego. Porównano tu wpływ różnych funkcji jądra reprezentacji z podgrupy afinicznej w celu dokonania jakościowej oceny uzyskanych reprezentacji. Dla wybranych metod przeanalizowano celowość dodatkowego wygładzania reprezentacji funkcjami okien (np. wygładzona wersja pseudo-transformaty Choi-Williamsa (SPCWD), transformata Zhao-Atlas-Marksa (ZAMD)). Autor przytoczył również wyniki badanych sygnałów uzyskane na podstawie metod jakościowo innych od badanych w niniejszej pracy. Mowa tu o reprezentacjach z grupy parametrycznej czy transformacji falkowej. Trzecia grupa analiz, zawarta w podrozdziale 3.3, dotyczy badań rozszerzonych, obejmujących swoim zakresem wyznaczanie lokalnych momentów częstotliwościowych. Wyznaczone jednowymiarowe charakterystyki momentów autor proponuje traktować jako wskaźniki niestacjonarności, które można wykorzystać w diagnostyce pracy układów elektrycznych.

Niniejszą pracę zamyka rozdział czwarty, w którym zawarto wnioski końcowe, oraz dodatek, w którym umieszczono wybrane analityczne wyprowadzenia właściwości transformaty Wignera.

1. Opis sygnałów w dziedzinie czasu i dziedzinie częstotliwości

W rozdziale tym dokonano przeglądu podstawowych parametrów sygnału, określonych zarówno w dziedzinie czasu jak i częstotliwości. Zadaniem takiego przybliżenia jest omówienie zależności między obiema dziedzinami, ściśle początkowo rozdzielanymi, które pozwolą na późniejsze wyeksponowanie warunków koniecznych do stworzenia reprezentacji sygnału w połączonej dziedzinie czasu i częstotliwości.

1.1. Parametry rzeczywistych sygnałów deterministycznych w dziedzinie czasu

W przypadku sygnałów deterministycznych możemy mówić o opisie sygnału dowolną, rzeczywistą lub zespoloną funkcją czasu lub dystrybucją czasu. Istnieje szereg parametrów charakteryzujących właściwości sygnału, pozwalających przypisać sygnał do pewnych wyodrębnionych klas, takich jak klasa sygnałów o ograniczonej energii, o ograniczonej mocy średniej, zarówno gdy sygnał jest sygnałem o skończonym lub nieskończonym czasie trwania. Niektóre z podanych definicji, zwłaszcza dotyczące właściwości energetycznych sygnału czy też kształtu i położenia względem środka osi czasu lub punktu skupienia, mają szczególne znaczenie ze względu na relacje występujące między reprezentacją sygnału w dziedzinie czasu i dziedzinie częstotliwości [54,57,63].

- Wartość średnia sygnału x(t) określonego w przedziale czasu $\langle t_1, t_2 \rangle$:

$$\bar{x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

- Wartość średnia sygnału x(t) o nieskończonym czasie trwania:

$$\bar{x} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} x(t)\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

- Wartość średnia sygnału okresowego x(t) o okresie T:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

gdzie t_0 jest dowolnym punktem osi czasu

Druga grupa parametrów jest związana z właściwościami energetycznymi sygnału.

- Energia sygnału x(t)

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\mathrm{d}t \tag{1.4}$$

- Moc średnia sygnału x(t) określonego w przedziale $\langle t_1, t_2 \rangle$

$$P_x(t_1,t_2) = \overline{x^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\mathrm{d}t \tag{1.5}$$

Dla wielu sygnałów o nieskończonym czasie trwania, w tym sygnałów okresowych, energia sygnału jest nieskończona. Dla energetycznego opisu tej klasy sygnałów wprowadzono pojęcie mocy średniej.

- Moc średnia sygnału x(t) o nieskończonym czasie trwania

$$P_x = \overline{x^2} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2(t)\mathrm{d}t \tag{1.6}$$

- Moc średnia sygnału okresowego x(t) o okresie T

$$P_x = \overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)\mathrm{d}t \tag{1.7}$$

gdzie t_0 jest dowolnym punktem osi czasu.

Bazując na przedstawionej powyżej grupie parametrów można zdefiniować klasę sygnałów o ograniczonej energii, dla których $0 < E_x < \infty$ oraz klasę sygnałów o ograniczonej mocy średniej, dla których $0 < P_x < \infty$.

Dla dokładniejszego opisu pewnych specyficznych cech sygnału takich jak kształt i położenie względem środka osi czasu lub punktu skupienia konieczne jest zdefiniowanie dalszych parametrów.

- Momenty zwykłe rzędu r:

$$\overline{m_x^r} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r x(t)\mathrm{d}t, r = 1,2,... \tag{1.8}$$

Dla przybliżenia interpretacji momentów zwykłych może posłużyć moment zwykły rzędu drugiego, czyli $\overline{m_x^2}$, nazywany momentem bezwładności sygnału x(t), charakteryzujący rozkład kształtu sygnału wokół osi czasu.

$$\overline{m_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 x(t)\mathrm{d}t \tag{1.9}$$

- Unormowane momenty zwykłe rzędu r:

$$\overline{t_x^r} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^r x(t)\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{d}t}, r = 1,2,... \tag{1.10}$$

Proces normowania momentów względem pola ograniczonego wykresem sygnału prowadzi do wymiaru czasu w r-tej potędze. Ze względu na interpretację praktyczną na szczególną uwagę zasługuje unormowany moment zwykły rzędu pierwszego, czyli $\overline{t_x^1}$, nazywany odciętą środka ciężkości sygnału, określający punkt osi czasu, wokół którego sygnał jest skupiony.

$$\overline{t_x^1} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t x(t)\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{d}t} \tag{1.11}$$

Unormowany moment zwykły rzędu drugiego, czyli $\overline{t_x^2}$, nazywany jest średnim kwadratem odciętej środka ciężkości, a pierwiastek $\sqrt{\overline{t_x^2}}$ - promieniem bezwładności.

$$\overline{t_x^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 x(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt} \tag{1.12}$$

Odcięta środka ciężkości sygnału $\overline{t_x^1}$ może jednak nie wyznaczać dokładnie punktu skupienia, ze względu na ścisły związek tego parametru z całką sygnału. Przy małych wartościach całki sygnału, co jest możliwe dla wielu typów sygnałów np. sygnałów oscylacyjnych, parametr ten przyjmuje duże wartości. Dla uniknięcia tego typu rozbieżności przyjęto charakteryzować punkt koncentracji sygnału odciętą środka ciężkości kwadratu sygnału $\overline{t_{x^2}^1}$, gdzie punkt koncentracji wyznacza punkt koncentracji energii sygnału:

$$\overline{t_{x^2}^1} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t x^2(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt} \tag{1.13}$$

- Momenty centralne rzędu *r*:

$$\delta_x^r = \overline{\left(t - \overline{m_x^1}\right)^r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - \overline{m_x^1}\right)^r x(t)dt \tag{1.14}$$

- Unormowane momenty centralne rzędu *r*:

$$\sigma_x^r = \overline{\left(t - \overline{t_x^1}\right)^r} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - \overline{t_x^1}\right)^r x(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt} \tag{1.15}$$

Podobnie jak w przypadku unormowanych momentów zwykłych, wśród unormowanych momentów centralnych można znaleźć parametry, które zasługują na szczególną uwagę ze względów interpretacyjnych. Takim parametrem jest moment rzędu drugiego σ_x^2, zwany wariancją sygnału i będący miarą rozrzutu sygnału wokół odciętej środka ciężkości $\overline{t_x^1}$:

$$\sigma_x^2 = \overline{\left(t - \overline{t_x^1}\right)^2} = \overline{t_x^2} - \left(\overline{t_x^1}\right)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - \overline{t_x^1}\right)^2 x(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt} \tag{1.16}$$

Dla sygnałów, których pole jest równe lub bliskie zero, tak określona miara rozrzutu nie jest wystarczająca i prowadzi do zastąpienia badania rozkładu sygnału wzdłuż osi czasu badaniem rozkładu jego energii wzdłuż osi czasu, czyli określenia wariancji kwadratu sygnału $\sigma_{x^2}^2$:

$$\sigma_{x^2}^2 = \overline{\left(t - \overline{t_{x^2}^2}\right)^2} = \overline{t_{x^2}^2} - \left(\overline{t_{x^2}^1}\right)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - \overline{t_{x^2}^1}\right)^2 x(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt} \tag{1.17}$$

Unormowanie wariancji kwadratu sygnału odbywa się względem energii tego sygnału w odniesieniu do środka ciężkości kwadratu sygnału. Można zatem mówić o mierze rozrzutu energii sygnału wokół środka ciężkości kwadratu sygnału lub o stopniu koncentracji sygnału. Im wartość wariancji jest mniejsza tym szerokość przedziału czasu, w którym energia jest zgromadzona, jest mniejsza. Jeśli podobnie jak w przypadku promienia bezwładności zastosować pierwiastek z wariancji kwadratu sygnału, to otrzymana średnia szerokość przedziału koncentracji energii przyjmie wymiar czasu. Parametr ten nosi nazwę szerokości średniokwadratowej.

- Szerokość średniokwadratowa sygnału x(t):

$$\Delta T_x = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t-\overline{t^1_{x^2}}\right)^2 x^2(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt}} = \sqrt{\overline{t^2_{x^2}}-\left(\overline{t^1_{x^2}}\right)^2} \tag{1.18}$$

Przedstawienie powyższych definicji parametrów sygnału w dziedzinie czasu ma na celu sprecyzowanie zagadnień potrzebnych do określenia warunków stworzenia łącznej czasowo-częstotliwościowej reprezentacji sygnału. Następnym krokiem ku realizacji tego zadania jest omówienie analogicznych parametrów sygnału przedstawionego w dziedzinie częstotliwości. Niezbędnym zatem jest wprowadzenie pojęcia przekształcenia Fouriera i zagadnień z nim związanych.

1.2. Parametry rzeczywistych sygnałów deterministycznych w dziedzinie częstotliwości

Przekształcenie całkowe Fouriera czy trygonometryczny lub zespolony szereg Fouriera są pojęciami, na których opierają się podstawy reprezentacji sygnału w dziedzinie częstotliwości. Określone na ich podstawie częstotliwościowe charakterystyki sygnału oraz tzw. charakterystyki wtórne, którymi są widmo gęstość energii – dla sygnałów o ograniczonej energii oraz widmo gęstość mocy – dla sygnałów o ograniczonej mocy, stanowią opis struktury sygnału w kategoriach częstotliwościowych [28,41,54,57].
Prostą transformatę Fouriera X(ω) sygnału x(t) nazwano widmem sygnału:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1.19}$$

Widmo sygnału, będące miarą korelacji sygnału z poszczególnymi zespolonymi funkcjami harmonicznymi w postaci $e^{-j\omega t} = \cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)$, określa amplitudę i fazę składowych harmonicznych. Dla sygnału transformowalnego w sensie zwykłym charakterystykę taką można przedstawić jako zespoloną funkcję zmiennej rzeczywistej ω:

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = \mathrm{Re}\,X(\omega) + j\,\mathrm{Im}\,X(\omega) \tag{1.20}$$

gdzie funkcje $|X(\omega)|, \varphi(\omega), \mathrm{Re}\,X(\omega), \mathrm{Im}\,X(\omega)$ są funkcjami zmiennej rzeczywistej ω, mającej interpretację pulsacji, i noszą odpowiednio nazwy: widmo amplitudowe, widmo fazowe, widmo rzeczywiste, widmo urojone, pomiędzy którymi zachodzą następujące związki:

$$|X(\omega)| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}\,X(\omega)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\,X(\omega)\right)^2},\ \varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}\,X(\omega)}{\mathrm{Re}\,X(\omega)} \tag{1.21}$$

Gdy mowa o sygnałach rzeczywistych transformowalnych w sensie zwykłym, widmo amplitudowe i fazowe dla $\omega \geq 0$ opisuje odpowiednio gęstości rozkładu amplitudy i fazy sygnału wzdłuż osi pulsacji.

Warto podkreślić, że wprowadzone pojęcie widma można rozszerzyć na sygnały transformowalne w sensie granicznym. Widma takich sygnałów należy wówczas zdefiniować jako sumę części funkcyjnych i dystrybucyjnych. Części funkcyjne widma opisują zależności jak dla sygnałów transformowalnych w zwykłym sensie. Jeżeli zaś w widmie sygnału w punkcie ω_0 występuje dystrybucja Diraca $2\pi c\delta(\omega-\omega_0)$, gdzie c=a+jb, to w części dystrybucyjnej widma amplitudowego, rzeczywistego i urojonego wystąpią w punkcie ω_0 odpowiednio dystrybucje Diraca: $2\pi|c|\delta(\omega-\omega_0), 2\pi a\delta(\omega-\omega_0)$, $2\pi b\delta(\omega-\omega_0)$. Wartość widma fazowego w punkcie ω_0 jest przy tym równa $\arg c = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Odwrotne przekształcenia Fouriera definiuje wyrażenie:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{1.22}$$

które wskazuje na możliwość odtworzenia sygnału w sposób jednoznaczny na podstawie widma.

Traktując więc widmo jako równoważny sposób przedstawienia sygnału, należy spodziewać się, że wszystkie szczególne cechy jakie sygnał posiadał w dziedzinie czasu, można również opisać używając reprezentacji sygnału w dziedzinie częstotliwości. Ponadto, chcąc scharakteryzować samo widmo sygnału, poszukując choćby punktu jego koncentracji czy miary rozrzutu widma wokół środka ciężkości, można zdefiniować analogiczne parametry widma, jak w przypadku przedstawionych wcześniej parametrów czasowych sygnału. Wzajemne relacje, jakie występują pomiędzy obiema dziedzinami, bazują na właściwościach przekształcenia Fouriera. Podane poniżej zależności mają na celu przybliżyć tok rozumowania przyjęty przy formalizowaniu zagadnień związanych z połączoną dziedziną czasu i częstotliwości. Pierwsze podejście do omawianego problemu będzie zatem dotyczyć przedstawienia parametrów sygnału na podstawie jego charakterystyk widmowych.

Parametry sygnału wyznaczone na podstawie charakterystyk widmowych [28,57,63]**:**

- Energia sygnału x(*t*) (twierdzenie Parsevala):

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \tag{1.23}$$

- Momenty zwykłe rzędu *r*:

$$\overline{m_x^r} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r x(t)dt = (j)^r X^{(r)}(0), r=1,2,... \tag{1.24}$$

- Moment zwykły rzędu drugiego – moment bezwładności sygnału:

$$\overline{m_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 x(t)dt = -X''(0) \tag{1.25}$$

- Unormowane momenty zwykłe rzędu *r*:

$$\overline{t_x^r} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^r x(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt} = (j)^r \frac{X^{(r)}(0)}{X(0)}, r=1,2,... \tag{1.26}$$

- Unormowany moment zwykły rzędu pierwszego – odcięta środka ciężkości sygnału:

$$\overline{t_x^1} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{x}(t)\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}(t)\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\frac{\mathrm{X}'(0)}{\mathrm{X}(0)} \tag{1.27}$$

- Unormowany moment zwykły rzędu drugiego – średni kwadrat odciętej środka ciężkości:

$$\overline{t_x^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{x}(t)\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}(t)\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{X}''(0)}{\mathrm{X}(0)} \tag{1.28}$$

- Pierwiastek średniego kwadratu odciętej środka ciężkości – promień bezwładności:

$$\sqrt{\overline{t_x^2}} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{x}(t)\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}(t)\mathrm{d}t}} = \sqrt{-\frac{\mathrm{X}''(0)}{\mathrm{X}(0)}} \tag{1.29}$$

- Wariancja sygnału:

$$\sigma_x^2 = \overline{\left(t-\overline{t_x^1}\right)^2} = \overline{t_x^2} - \overline{\left(t_x^1\right)^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(t-\overline{t_x^1}\right)^2 \mathrm{x}(t)\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}(t)\mathrm{d}t} = -\frac{X''(0)}{X(0)} + \left[\frac{X'(0)}{X(0)}\right]^2 \tag{1.30}$$

Interpretacja zdefiniowanych teraz na podstawie charakterystyk widmowych parametrów sygnału została podkreślona przy omawianiu dziedziny czasu. Drugim wspomnianym już problemem jest określenie charakterystycznych cech samego widma, poprzez zdefiniowanie choćby punktu koncentracji widma czy jego rozrzutu wokół środka ciężkości. Celowym zatem wydaje się przeniesienie definicji parametrów podkreślających specyficzne cechy funkcji na grunt osi pulsacji i związanego z nią widma sygnału.

1.3. Parametry widma sygnału

W większości przypadków mamy do czynienia z rzeczywistym zarejestrowanym sygnałem, w praktyce zatem sygnałem o skończonym czasie trwania, czego konsekwencją jest również ograniczenie energii. Poniżej zdecydowano więc przedstawić definicje oraz interpretacje parametrów widma dla tej klas sygnałów.

Przed rozpoczęciem tego etapu należy jednak zdefiniować dodatkową charakterystykę częstotliwościową – widmo gęstości energii. Widmo gęstości energii definiowane jest jako kwadrat widma amplitudowego:

$$\Phi(\omega) = \left|\mathrm{X}(\omega)\right|^2 \tag{1.31}$$

Korzystając z twierdzeń dotyczących transformacji Fouriera, kwadrat widma amplitudowego, a co za tym idzie widmo gęstości energii, można zdefiniować bazując na funkcji autokorelacji sygnału $\mathrm{r}(\tau)$:

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)dt, \\ \Rightarrow & \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = |X(\omega)|^2 = \Phi(\omega) \end{aligned} \tag{1.32}$$

Ponadto, dla sygnałów rzeczywistych funkcja autokorelacji jest rzeczywista i parzysta, co prowadzi do wniosku, że i widmo gęstości energii jest rzeczywiste i parzyste. Warto zauważyć, że dla $\tau = 0$ funkcja autokorelacji wskaże wartość energii całkowitej sygnału:

$$r(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x \tag{1.33}$$

W końcu, wyrażenie funkcji autokorelacji jako transformaty odwrotnej widma gęstości energii doprowadzi dla $\tau = 0$ do twierdzenia Parsevala:

$$r(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega, \Rightarrow E_x = r(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \tag{1.34}$$

Wyprowadzenie powyższych zależności pozwala interpretować widmo gęstości energii jako charakterystykę opisującą rozkład energii wzdłuż osi pulsacji.

Wykorzystując wprowadzoną charakterystykę widma gęstości energii oraz stosując analogię do parametrów opisujących sygnał w dziedzinie czasu, możemy przejść do definicji parametrów widma sygnału i widma gęstości energii.

Parametry widma sygnału [28,57,63]**:**

- Momenty zwykłe rzędu *r* dla widma:

$$\overline{M_X^r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^r X(\omega)d\omega \tag{1.35}$$

- Momenty zwykłe rzędu *r* dla kwadratu widma (widma gęstości energii):

$$\overline{M_{|X|^2}^r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^r |X(\omega)|^2 d\omega \tag{1.36}$$

- Moment zwykły zerowego rzędu dla widma – wartość średnia widma:

$$\overline{M_X^0} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega \tag{1.37}$$

- Moment zwykły rzędu pierwszego dla widma:

$$\overline{M_X^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^1 X(\omega)d\omega \tag{1.38}$$

określający punkt skupienia widma bez jego normalizacji.

- Moment zwykły rzędu drugiego dla widma – moment bezwładności widma:

$$\overline{M_X^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 X(\omega)d\omega \tag{1.39}$$

określający rozrzut widma wokół osi częstotliwości.

- Unormowany moment zwykły rzędu *r* dla widma:

$$\overline{\omega_X^r} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^r X(\omega)\,d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,d\omega} \tag{1.40}$$

- Unormowany moment zwykły rzędu 1 dla widma – odcięta środka ciężkości widma:

$$\overline{\omega_X^1} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega X(\omega)\,d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,d\omega} \tag{1.41}$$

charakteryzujący punkt na osi pulsacji, wokół którego widmo jest skupione.

- Unormowany moment zwykły rzędu 1 dla kwadratu widma – odcięta środka ciężkości kwadratu widma amplitudowego (widma gęstości energii) :

$$\overline{\omega_{|X|^2}^1} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega |X(\omega)|^2\,d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega} \tag{1.42}$$

- Momenty centralne rzędu *r* dla widma:

$$\Gamma_X^r = \overline{\left(\omega - \overline{M_X^1}\right)^r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\omega - \overline{M_X^1}\right)^r X(\omega)\,d\omega \tag{1.43}$$

- Momenty centralne rzędu *r* dla kwadratu widma:

$$\Gamma_{|X|^2}^r = \overline{\left(\omega - \overline{M_{|X|^2}^1}\right)^r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\omega - \overline{M_{|X|^2}^1}\right)^r |X(\omega)|^2\,d\omega \tag{1.44}$$

- Unormowane momenty centralne rzędu *r* dla widma:

$$\Sigma_X^r = \overline{\left(\omega - \overline{\omega_X^1}\right)^r} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\omega - \overline{\omega_X^1}\right)^r X(\omega)\,d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,d\omega} \tag{1.45}$$

- Unormowany moment centralny rzędu drugiego dla widma - wariancja widma:

$$\Sigma_X^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\omega - \overline{\omega_X^1}\right)^2 X(\omega)\,d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,d\omega} \tag{1.46}$$

będący miarą rozrzutu widma wokół odciętej środka ciężkości widma.

- Unormowany moment centralny rzędu drugiego dla kwadratu widma – wariancja kwadratu widma amplitudowego (widma gęstości energii):

$$\Sigma_{|X|^2}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\omega - \overline{\omega_{|X|^2}^1}\right)^2 |X(\omega)|^2\,d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega} \tag{1.47}$$

- Szerokość średniokwadratowa widma (kwadratu widma amplitudowego czyli widma gęstości energii):

$$\Delta\Omega_X = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\omega-\overline{\omega^1_{|X|^2}}\right)^2\left|X(\omega)\right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|X(\omega)\right|^2 d\omega}} \tag{1.48}$$

Ważnym wnioskiem płynącym z rozważań nad interpretacją przytoczonych parametrów może być fakt, że szerokość średniokwadratowa widma sygnału $\Delta\Omega_X$, jako pierwiastek wariancji kwadratu widma amplitudowego czyli widma gęstości energii, jest miarą koncentracji energii sygnału w dziedzinie częstotliwości, a dokładniej mówiąc, miarą średniej szerokości pasma wokół odciętej środka ciężkości kwadratu widma amplitudowego.
Przyjmując szerokości średniokwadratowe sygnału ΔT_x i widma $\Delta\Omega_x$ jako miary średniego czasu trwania i średniej szerokości jego widma można sformułować zasadę nieoznaczoności:

$$\Delta T_x \cdot \Delta\Omega_x \geq \frac{1}{2} \tag{1.49}$$

Z zasady nieoznaczoności można wywnioskować, że nie jest możliwe jednoczesne osiągnięcie dostatecznie dużej koncentracji energii sygnału w dowolnie małych przedziałach czasu i częstotliwości. Oznacza to, że można skupić energię sygnału w wąskim przedziale czasu, ale wówczas przedział częstotliwości, w którym ta energia jest skupiona nie może przekraczać progu $\Delta\Omega_x \geq \frac{1}{2\Delta T_x}$ wynikającego z zasady nieoznaczoności.

Niniejszy rozdział miał za zadanie przybliżyć pewne wyodrębnione parametry zarówno sygnału przedstawionego w dziedzinie czasu jaki i jego reprezentacji częstotliwościowej, czyli widma. Wprowadzone pojęcia, takie jak energia i widmo gęstości energii, szerokość średniokwadratowa sygnału i jego widma czy odcięta środka ciężkości kwadratu sygnału i odcięta kwadratu widma amplitudowego, posłużą do sformułowania założeń, jakie powinna spełnić czasowo-częstotliwościowa reprezentacja sygnału.

2. Biliniowe reprezentacje czasowo-częstotliwościowe

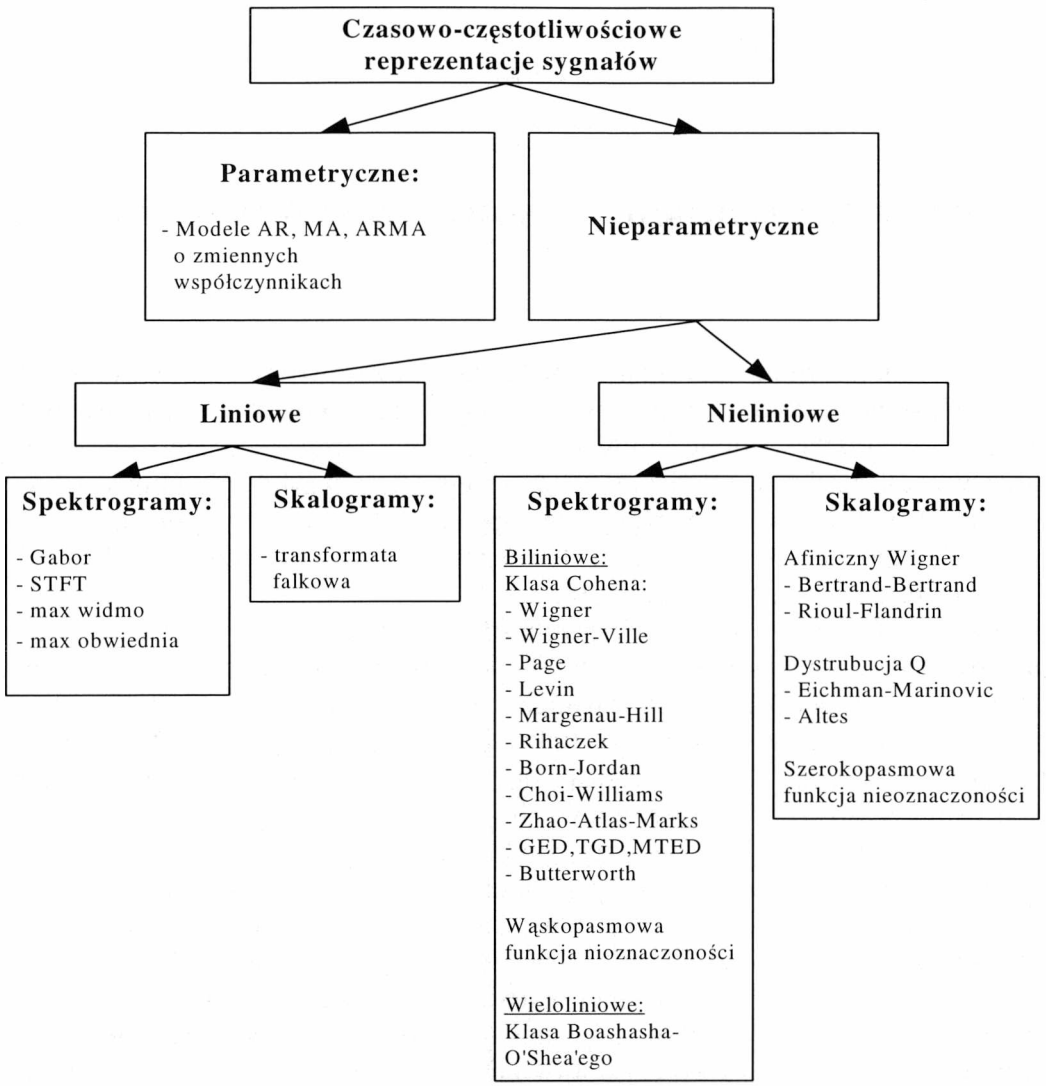
W literaturze istnieje wiele definicji reprezentacji czasowo-częstotliwościowych oraz sposobów ich klasyfikacji [8,33,63]. Interesujący podział zaproponowano w pracy [62] biorąc pod uwagę charakter obliczeniowy estymacji (reprezentacje parametryczne i nieparametryczne), strukturę równania definicyjnego (liniowa lub nieliniowa operacja na sygnale) wraz z występowaniem bądź nie operacji skalowania argumentu czasu lub częstotliwości: (odpowiednio: skalogram lub spektrogram). Powyższy podział ilustruje rysunek 2.1 w całości zaczerpnięty z pracy [62].

W przeciwieństwie do liniowych przekształceń czasowo-częstotliwościowych, które bazują na rozkładzie sygnału na składniki podstawowe (atomy), celem biliniowych przekształceń (ang. bilinear) zwanych również kwadratowymi (ang. quadratic) jest ujęcie niestacjonarności sygnału w oparciu o funkcję gęstości energii lub funkcję korelacji [2,19,20,25,26,27,40]. Stąd też wywodzą się dwa podstawowe kierunki interpretacji biliniowych widm czasowo-częstotliwościowych, pozwalające zgrupować je w dwie odrębne klasy: energetyczną i korelacyjną. Pierwszy z nich dotyczy ujęcia energetycznego i wskazuje widmo czasowo-częstotliwościowe jako przebieg tzw. chwilowego widma gęstości energii (ang. instantaneous energy density spectrum), która jest kwadratową formą reprezentacji sygnału. Można więc mówić o przejściu z dziedziny czasu do połączonej dziedziny czasu i częstotliwości. W przypadku korelacyjnej klasy przekształceń, uzyskiwana reprezentacja określona jest na połączonej dziedzinie przesunięć czasowych i częstotliwościowych i może być interpretowana jako czasowo-częstotliwościowa funkcja autokorelacji. Niezależnie jednak od wspomnianej klasyfikacji, podstawową własnością, jaką powinny spełniać przekształcenia całkowe jest warunek zachowania energii. W pierwszym kroku należy więc określić warunki brzegowe dotyczące dwuwymiarowych reprezentacji, rozumianych zarówno w sensie energetycznym jak i korelacyjnym.

Nawiązując do opisanych wcześniej parametrów sygnału w dziedzinie czasu i częstotliwości można zdefiniować chwilową energię sygnału (ang. instantaneous energy) $e_x(t)$, wyrażającą intensywność czy też gęstość energii na jednostkę czasu w chwili t, oraz chwilowe widmo gęstości energii (ang. instantaneous energy density spectrum) $\phi_x(\omega)$, rozumiane jako intensywność energii na jednostkę pulsacji dla pulsacji ω [19,26,27]:

$$\begin{aligned} e_x(t) &= \left|\mathrm{x}(t)\right|^2 \\ \phi_x(\omega) &= \left|\mathrm{X}(\omega)\right|^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Przyjmując pewien przedział czasu Δt możemy opisać częściową energię (ang. fractional energy) zawartą w przedziale czasu Δt w chwili t jako iloczyn $\left|\mathrm{x}(t)\right|^2 \times \Delta t$. Analogicznie częściową energię zawartą w przedziale $\Delta\omega$ dla pulsacji ω wyraża iloczyn $\left|\mathrm{X}(\omega)\right|^2 \times \Delta\omega$.



Rys. 2.1. Uproszczony podział czasowo-częstotliwościowych reprezentacji sygnałów ze względów obliczeniowych: rodzaj sposobu estymacji widma (parametryczny lub nieparametryczny) i struktura równania definicyjnego (liniowa lub nieliniowa operacja na sygnale) oraz występowanie (skalogram) lub niewystępowanie (spektrogram) operacji skalowania czasu lub częstotliwości

Z energetycznego punktu widzenia głównym celem reprezentacji czasowo-częstotliwościowych jest więc stworzenie funkcji dwóch zmiennych czasu i częstotliwości (pulsacji) $\mathrm{TF}^{(\mathrm{E})}(t,\omega)$, która będzie odwzorowywać energię lub intensywność (gęstość) energii w jednostce czasu na jednostkę częstotliwości. Iloczyn $\mathrm{TF}^{(\mathrm{E})}(t,\omega)\times\Delta t\times\Delta\omega$ wskazywać będzie częściową energię zawarta w czasowo-częstotliwościowej komórce $\Delta t\times\Delta\omega$ o środku w punkcie (t,ω). Powyższe rozumowanie prowadzi do określenia warunków brzegowych dowolnej reprezentacji czasowo-częstotliwościowej rozumianej w sensie energetycznym [19]:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{TF}^{(\mathrm{E})}(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega &= e_x(t) = \left|\mathrm{x}(t)\right|^2 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{TF}^{(\mathrm{E})}(t,\omega)\,\mathrm{d}t &= \phi_x(\omega) = \left|\mathrm{X}(\omega)\right|^2\end{aligned} \tag{2.2}$$

Spełnienie powyższych warunków pozwala na wyrażenie całkowitej energii zawartej w sygnale za pomocą reprezentacji czasowo-częstotliwościowej:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{TF}^{(\mathrm{E})}(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t = \mathrm{E}_x \tag{2.3}$$

Odmienny kierunek wyznaczania czasowo-częstotliwościowych reprezentacji wykazuje podejście korelacyjne. W tym przypadku poszukiwana jest dwuwymiarowa funkcja autokorelacji $\mathrm{TF}^{(\mathrm{C})}(\theta,\tau)$, wyznaczona w oparciu o jednowymiarowe funkcje autokorelacji zdefiniowane w dziedzinie czasu $\mathrm{r}(\tau)$ oraz częstotliwości $\mathrm{R}(\theta)$ [26,27]:

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}(t)\,\mathrm{x}^*(t-\tau)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}(t+\tau)\,\mathrm{x}^*(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x}^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{d}t \\ \mathrm{R}(\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}(\omega)\,\mathrm{X}^*(\omega-\theta)\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}(\omega+\theta)\,\mathrm{X}^*(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}\left(\omega+\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{X}^*\left(\omega-\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{2.4}$$

Zmienne τ oraz θ oznaczają przesunięcie (opóźnienie) odpowiednio w dziedzinie czasu i częstotliwości. Korelacyjne warunki graniczne, które powinna spełnić poszukiwana czasowo-częstotliwościowa funkcja autokorelacji $\mathrm{TF}^{(\mathrm{C})}(\theta,\tau)$ przedstawiają poniższe wyrażenia [26,27]:

$$\begin{aligned}\mathrm{TF}^{(\mathrm{C})}(\theta,0) &= \mathrm{R}(\theta) \\ \mathrm{TF}^{(\mathrm{C})}(0,\tau) &= \mathrm{r}(\tau)\end{aligned} \tag{2.5}$$

Spełnienie powyższych warunków oraz związki pomiędzy funkcją autokorelacji a energią pozwalają na wyznaczenie całkowitej energii sygnału na bazie zdefiniowanej dwuwymiarowej reprezentacji:

$$\mathrm{TF}^{(\mathrm{C})}(0,0) = \mathrm{E}_x \tag{2.6}$$

Energetyczna klasa przekształceń czasowo-częstotliwościowych prowadzi więc do uzyskania funkcji opisującej zmiany energii sygnału bezpośrednio na płaszczyźnie czas-częstotliwość. Korelacyjna klasa przekształceń pozwala uzyskać funkcję, która nie jest bezpośrednio funkcją czasu i częstotliwości (pulsacji) lecz przesunięć, odpowiednio w dziedzinach czasu i częstotliwości, wciąż zachowując informację o niestacjonarności sygnału.

Wyodrębniając te dwie klasy przekształceń czasowo-częstotliwościowych warto również wspomnieć o pewnego rodzaju uogólnieniu, które niejako łączy w sobie zarówno podejście energetyczne jak i korelacyjne. Uogólnienie to bazuje na jednowymiarowym związku pomiędzy funkcją autokorelacji sygnału $\mathrm{r}(\tau)$ i jego widmem gęstości energii $\Phi(\omega)$ [57]:

$$\Phi(\omega) = \left|\mathrm{X}(\omega)\right|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{r}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}d\tau \tag{2.7}$$

Wprowadzając tzw. lokalną (chwilową) funkcję autokorelacji $\mathrm{r}_t(\tau)$ zależną od chwili t można uzyskać dwuwymiarową funkcję czasu i częstotliwości rozumianą w sensie energetycznym $\mathrm{TF}^{(\mathrm{E})}(t,\omega)$, definiując ją jako transformatę Fouriera funkcji $\mathrm{r}_t(\tau)$:

$$TF^{(E)}(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_t(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{2.8}$$

Przy wyborze funkcji $r_t(\tau)$ należy jednak pamiętać, że naturalnym kierunkiem jest uzyskanie rzeczywistej dwuwymiarowej funkcji $TF^{(E)}(t,\omega)$, a co za tym idzie potrzeby spełnienia przez chwilową funkcję autokorelacji warunku:

$$r_t(\tau) = r_t^*(-\tau) \tag{2.9}$$

Rozważając ten aspekt rozwoju czasowo-częstotliwościowych reprezentacji warto wspomnieć o tzw. wygładzonej wersji chwilowej funkcji autokorelacji, która powstaje z wykorzystaniem dodatkowej funkcji jądra. Kierunek ten prowadzi do wprowadzonej przez Leona Cohena [19] wspólnej rodziny przekształceń czasowo-częstotliwościowych i zostanie szczegółowo wyodrębniony w dalszej części pracy.

Wspomniana już chwilowa funkcja autokorelacji może posłużyć również do wyznaczenia korelacyjnej klasy przekształceń poprzez zmianę zmiennej całkowania z τ na t, co prowadzi do ogólnego wyrażenia:

$$TF^{(C)}(\theta,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_t(\tau) e^{-j\theta t} dt \tag{2.10}$$

Przedstawione powyżej relacje miały za zadanie przybliżyć podstawy i główne nurty nieparametrycznych, biliniowych przekształceń czasowo-częstotliwościowych. W dalszej części pracy szczegółowo omówiona zostanie transformacja Wignera, jako podstawowy przykład energetycznej klasy przekształceń, oraz symetryczna funkcja nieoznaczoności, jako przykład klasy korelacyjnej. Wprowadzona funkcja chwilowej funkcji autokorelacji może być potraktowana jako pewnego rodzaju łącznik pomiędzy dziedzinami (t,ω) oraz (θ,τ), co zostanie wykorzystane do wskazania wzajemnych relacji pomiędzy transformatą Wignera a funkcją nieoznaczoności i nakreśli cechę wzajemnej dualności przekształceń obu klas.

2.1. Transformacja Wignera - energetyczna klasa czasowo-częstotliwościowych reprezentacji sygnału

Transformacja Wignera jest podstawowym przykładem czasowo-częstotliwościowych reprezentacji w ujęciu energetycznym. Idea dwuwymiarowej reprezentacji Wignera została wprowadzona w 1932 roku przez Wignera dla potrzeb mechaniki kwantowej. W 1948 roku Ville podjął próbę adaptacji transformaty Wingera w obszarze analizy sygnałów. Splot funkcji podcałkowej tej transformacji z dodatkowymi funkcjami jest również kierunkiem do wyznaczania innych transformacji czasowo-częstotliwościowych. Dlatego też zdecydowano poświecić rozdział niniejszej pracy szczegółowemu omówieniu właściwości reprezentacji czasowo-częstotliwościowych na przykładzie transformacji Wignera.

Podstawowe pytania o właściwości przekształcenia czasowo-częstotliwościowego dotyczą zachowania energii sygnału, wpływu podstawowych operacji na sygnale, takich jak przesunięcie w dziedzinie czasu i częstotliwości, czy też obciążenia sygnału funkcją okna. Pierwsza grupa właściwości, przedstawiona w niniejszym rozdziale, ma za zadanie przybliżyć pożądane właściwości przekształcenia oraz sposoby ich udowodnienia. Druga grupa właściwości skupiona została wokół parametrów przekształcenia, jakimi są momenty dwuwymiarowych reprezentacji. Dwuwymiarowość przekształcenia, opisująca doskonale zmiany sygnału, niesie ze sobą trudności aplikacyjne. Analiza momentów, zwłaszcza

rozumianych w sensie lokalnym, prowadzi do jednowymiarowych charakterystyk, które traktować można jako wskaźniki niestacjonarności.
Wzajemne przekształcenie Wignera sygnałów x(t) i y(t) definiuje równanie [16,51,52,59]:

$$\mathrm{WD}_{x,y}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{y}^{*}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{2.11}$$

Własne przekształcenie Wignera sygnału x(t) przyjmie więc postać:

$$\mathrm{WD}_{x}(t,\omega)=\mathrm{WD}_{x,x}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x}^{*}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{2.12}$$

Powyższe definicje odnoszą się do sygnałów traktowanych jako funkcje czasu. Spełnienie wymogu dotyczącego zachowania energii, stawianego transformacjom czasowo-częstotliwościowym, pozwala wyrazić przekształcenie Wignera w oparciu o widma sygnałów:

$$\mathrm{WD}_{X,Y}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{X}\left(\omega+\frac{\eta}{2}\right)\mathrm{Y}^{*}\left(\omega-\frac{\eta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\eta t}\mathrm{d}\eta \tag{2.13}$$

$$\mathrm{WD}_{X}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{X}\left(\omega+\frac{\eta}{2}\right)\mathrm{X}^{*}\left(\omega-\frac{\eta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\eta t}\mathrm{d}\eta \tag{2.14}$$

co prowadzi do istotnej relacji:

$$\mathrm{WD}_{x,y}(t,\omega)=\mathrm{W}_{X,Y}(\omega,t) \tag{2.15}$$

Wyrażenie powyższe podkreśla możliwość wyrażenia przekształcenia Wignera widm sygnałów jedynie poprzez zamianę zmiennych w postaci przekształcenia wyznaczonego na bazie sygnałów. Ilustruje to wzajemną symetrię pomiędzy definicjami w dziedzinie czasu i dziedzinie częstotliwości. Szereg pozostałych właściwości przekształcenia Wignera, ujętych w poniższym podrozdziale, pozwoli na głębsze zrozumienie charakteru uzyskanych reprezentacji.

2.1.1. Właściwości przekształcenia Wignera i ich znaczenie

W. 1. rzeczywisty charakter przekształcenia Wignera

$$\begin{aligned}\mathrm{WD}_{x,y}(t,\omega)&=\mathrm{W}^{*}_{x,y}(t,\omega)\\ \mathrm{WD}_{x}(t,\omega)&=\mathrm{W}^{*}_{x}(t,\omega)\end{aligned} \tag{2.16}$$

Zarówno dla sygnałów rzeczywistych jak i zespolonych przekształcenie Wignera jest funkcją rzeczywistą, a w przypadku sygnałów rzeczywistych jest dodatkowo parzystą funkcją częstotliwości:

$$\mathrm{WD}_{x}(t,\omega)=\mathrm{W}_{x^{*}}(t,-\omega) \tag{2.17}$$

W. 2. zachowanie przesunięcia w czasie

Jeśli $\mathrm{x}_1(t)=\mathrm{x}(t-t_0)$, $\mathrm{y}_1(t)=\mathrm{y}(t-t_0)$ to:

$$\begin{aligned}\mathrm{WD}_{x_1,y_1}(t,\omega)&=\mathrm{W}_{x,y}(t-t_0,\omega)\\ \mathrm{WD}_{x_1}(t,\omega)&=\mathrm{W}_{x}(t-t_0,\omega)\end{aligned} \tag{2.18}$$

W. 3. zachowanie przesunięcia w dziedzinie częstotliwości

Jeśli $\mathrm{x}_1(t)=\mathrm{x}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$, $\mathrm{y}_1(t)=\mathrm{y}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ to:

$$\begin{aligned} \mathrm{WD}_{x_1,y_1}(t,\omega) &= \mathrm{W}_{x,y}\left(t,\omega-\omega_0\right) \\ \mathrm{WD}_{x_1}(t,\omega) &= \mathrm{W}_{x}\left(t,\omega-\omega_0\right) \end{aligned} \tag{2.19}$$

W. 4. zachowanie skalowania sygnału w dziedzinie czasu

Jeśli $\mathrm{x}_1(t)=\sqrt{|a|}\mathrm{x}(at)$, $\mathrm{y}_1(t)=\sqrt{|a|}y(at)$ to:

$$\mathrm{WD}_{x_1,y_1}(t,\omega)=\mathrm{WD}_{x,y}\left(at,\frac{\omega}{a}\right) \tag{2.20}$$

W. 5. przekształcenie Wignera sygnałów o ograniczonym czasie trwania

Ograniczenie sygnałów w czasie przejawia się ograniczeniem czasowym reprezentacji Wignera:

$$\begin{aligned} &\mathrm{x}(t)=0 \text{ lub } \mathrm{y}(t)=0 \text{ dla } t\notin(t_a,t_b)\Rightarrow \mathrm{WD}_{x,y}\left(t,\omega\right)=0 \text{ dla } t\notin(t_a,t_b) \\ &\mathrm{x}(t)=0 \text{ dla } t\notin(t_a,t_b)\Rightarrow \mathrm{WD}_{x}\left(t,\omega\right)=0 \text{ dla } t\notin(t_a,t_b) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Analogiczną relację można przedstawić dla sygnałów przyczynowych:

$$x(t)=0 \text{ dla } t<0\Rightarrow WD_x\left(t,\omega\right)=0 \text{ dla } t<0,\forall\,\omega \tag{2.22}$$

W. 6. przekształcenie Wignera sygnałów o ograniczonym paśmie częstotliwości

Ograniczenie widma sygnału przejawia się ograniczeniem częstotliwościowym jego reprezentacji Wignera:

$$\begin{aligned} &\mathrm{X}(\omega)=0 \text{ lub } \mathrm{Y}(\omega)=0 \text{ dla } \omega\notin(\omega_a,\omega_b)\Rightarrow \mathrm{WD}_{x,y}\left(t,\omega\right)=0 \text{ dla } \omega\notin(\omega_a,\omega_b) \\ &\mathrm{X}(\omega)=0 \text{ dla } \omega\notin(\omega_a,\omega_b)\Rightarrow \mathrm{WD}_{x}\left(t,\omega\right)=0 \text{ dla } \omega\notin(\omega_a,\omega_b) \end{aligned} \tag{2.23}$$

W. 7. modulacja sygnałów a ich przekształcenie Wignera

Przekształcenie Wignera sygnałów zmodulowanych przejawia się splotem transformacji Wignera sygnałów i fali nośnych w dziedzinie częstotliwości. Dla $x_m(t)=x(t)m_x(t)$, $\mathrm{y}_m(t)=y(t)m_y(t)$ wzajemne przekształcenie Wignera dane jest równaniem:

$$\mathrm{WD}_{x_m,y_m}(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x,y}(t,\eta)\mathrm{WD}_{m_x,m_y}(\mathrm{t},\omega\text{-}\eta)\,\mathrm{d}\eta \tag{2.24}$$

W. 8. przejście sygnałów przez liniowy system stacjonarny a ich przekształcenie Wignera

Sygnały na wyjściu liniowego systemu stacjonarnego opisuje splot sygnałów i odpowiedzi impulsowych systemu. Splot ten przenosi się na splot w dziedzinie czasu przekształceń Wignera sygnałów i odpowiedzi impulsowych. Jeśli więc sygnały na wyjściu systemów liniowych o odpowiedziach impulsowych $\mathrm{h}_x(t)$ oraz $\mathrm{h}_y(t)$ opiszemy jako $\mathrm{x}_c(t)=\mathrm{x}(t)*\mathrm{h}_x(t)$, $\mathrm{y}_c(t)=\mathrm{y}(t)*\mathrm{h}_y(t)$, to ich przekształcenie Wignera można określić splotem przekształceń w dziedzinie czasu:

$$\mathrm{WD}_{x_c,y_c}(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x,y}(\tau,\omega)\mathrm{WD}_{h_x,h_y}(\mathrm{t}\text{-}\tau,\omega)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.25}$$

W. 9. transformata Fouriera a przekształcenie Wignera

Równanie definicyjne przekształcenia Wignera pozwala traktować je jako transformatę Fouriera iloczynu $x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)y^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$ przyjmując jako zmienną τ przy ustalonym parametrze t. Stąd odwrotna transformata Fouriera przekształcenia Wignera oznacza:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x,y}(t,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega=\mathrm{x}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{y}^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \tag{2.26}$$

W. 10. całkowita energia sygnału

Jak już wspomniano zachowanie chwilowej energii sygnału i widmowej gęstości energii owocuje zachowaniem całkowitej energii sygnału. Podkreśla to poniższe rozumowanie.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathrm{x}(t)\right|^2\mathrm{d}t=(x,x)=\|x\|^2=\mathrm{E}_x\\ \frac{1}{2\pi}\int_{t_a}^{t_b}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t &= \int_{t_a}^{t_b}\left|\mathrm{x}(t)\right|^2\mathrm{d}t=\mathrm{E}_x\Big|_{t_a}^{t_b}\end{aligned} \tag{2.27}$$

Wyrażenia (2.27) określają odpowiednio całkowitą energię sygnału x(t) oraz energię zawartą w przedziale czasu $t_a < t < t_b$ wyrażone na podstawie przekształcenia Wignera sygnału.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathrm{X}(\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega=(X,X)=\|X\|^2=\mathrm{E}_X\\ \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_a}^{\omega_b}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_a}^{\omega_b}\left|\mathrm{X}(\omega)\right|^2\mathrm{d}t=\mathrm{E}_X\Big|_{\omega_a}^{\omega_b}\end{aligned} \tag{2.28}$$

Analogicznie, całkowanie przekształcenia Wignera sygnału x(t) po osi czasu od $-\infty < t < +\infty$ dla $-\infty < \omega < +\infty$ oraz dla $\omega_a < \omega < \omega_b$ wyznacza odpowiednio całkowitą energie sygnału oraz energię sygnału zawartą w przedziale (ω_a, ω_b).

W. 11. twierdzenie Moyala – twierdzenie o iloczynie skalarnym (unitarność)

Twierdzenie to można traktować jako pewną analogię do twierdzenia Parsevala.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x,y}(t,\omega)\,\mathrm{WD}^*_{f,g}(t,\omega)\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega &= (x,f)(y,g)^*\\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\omega)\,\mathrm{WD}^*_x(t,\omega)\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathrm{x}(t)\right|^2\mathrm{d}t\right|^2=\|x\|^4\end{aligned} \tag{2.29}$$

W. 12. warunki brzegowe dla czasu

Przyjmując za $t+\frac{\tau}{2}=t_1$ oraz $t-\frac{\tau}{2}=t_2$ możemy wyrazić t, τ jako $t=\frac{t_1+t_2}{2}$ oraz $\tau=t_1-t_2$.

Stąd równanie (2.26) przyjmie postać:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x,y}\left(\frac{t_1+t_2}{2},\omega\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t_1-t_2)}\mathrm{d}\omega=\mathrm{x}(t_1)\,\mathrm{y}^*(t_2) \tag{2.30}$$

W szczególności dla $t_1=t_2=t$ uzyskujemy:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x,y}(t,\omega)\mathrm{d}\omega &= \mathrm{x}(t)\,\mathrm{y}^*(t)\\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{d}\omega &= \left|\mathrm{x}(t)\right|^2\end{aligned} \tag{2.31}$$

Oznacza to, że całkowanie przekształcenia Wignera po częstotliwości dla określonego t prowadzi do chwilowej energii sygnału określonej w chwili t. Właściwość ta jest jedną z pożądanych właściwości jakie winny spełniać nieparametryczne przekształcenia czasowo-częstotliwościowe.

Przyjmując dalej $t_1=t, t_2=0$ możliwe jest podjęcie problemu odzyskania sygnału z jego transformacji Wignera:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x,y}\left(\frac{t}{2},\omega\right)\mathrm{d}\omega &= \mathrm{x}(t)\,\mathrm{y}^{*}(0)\\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x}\left(\frac{t}{2},\omega\right)\mathrm{d}\omega &= \mathrm{x}(t)\,\mathrm{x}^{*}(0)\end{aligned} \tag{2.32}$$

Wyrażenie (2.32) podkreśla możliwość odzyskania oryginału sygnału z jego transformaty Wignera przez odwrotną transformatę Fouriera w chwili $\frac{t}{2}$ wyskalowaną przez stały współczynnik $x^{*}(0)$.

W. 13. warunki brzegowe dla częstotliwości

Podobne rozumowanie jak w przypadku czasowych warunków brzegowych można przeprowadzić w dziedzinie częstotliwości wykorzystując własność symetrii przekształcenia Wignera. Równanie (2.13) opisujące przekształcenie Wignera na bazie widm sygnałów pozwala traktować je jako odwrotną transformatę Fouriera składnika $\mathrm{X}\left(\omega+\frac{\eta}{2}\right)\mathrm{Y}^{*}\left(\omega-\frac{\eta}{2}\right)$ przyjmując jako zmienną η przy ustalonym parametrze ω. Poszukując zatem funkcji podcałkowej należy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{X,Y}(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\eta t}\mathrm{d}t = \mathrm{X}\left(\omega+\frac{\eta}{2}\right)\mathrm{Y}^{*}\left(\omega-\frac{\eta}{2}\right) \tag{2.33}$$

Przyjmując za $\omega+\frac{\eta}{2}=\omega_1$ oraz $\omega-\frac{\eta}{2}=\omega_2$ możemy wyrazić ω, η jako $\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ oraz $\eta=\omega_1-\omega_2$, co prowadzi do:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{X,Y}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2},t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_1-\omega_2)t}\mathrm{d}t = \mathrm{X}(\omega_1)\,\mathrm{Y}^{*}(\omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x,y}\left(t,\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_1-\omega_2)t}\mathrm{d}t \tag{2.34}$$

W szczególności dla $\omega_1=\omega_2=\omega$ uzyskujemy:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{X,Y}(\omega,t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x,y}(t,\omega)\mathrm{d}t = \mathrm{X}(\omega)\,\mathrm{Y}^{*}(\omega)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{X}(\omega,t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x}(t,\omega)\mathrm{d}t = \left|\mathrm{X}(\omega)\right|^{2}\end{aligned} \tag{2.35}$$

Oznacza to, że całkowanie przekształcenia Wignera po czasie dla określonego ω prowadzi do widma gęstości energii określonej dla przyjętej wartości ω. Powyższa właściwość wraz ze wspomnianą już właściwością zachowania chwilowej energii sygnału leżą u podstaw wymagań stawianym nieparametrycznym czasowo-częstotliwościowym reprezentacjom sygnału, bowiem jedynie wtedy możliwe jest by zachowana została całkowita energia sygnału.

Wybór $\omega_1=\omega,\ \omega_2=0$ prowadzi do odzyskania widma sygnału z jego transformacji Wignera:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{X,Y}\left(\frac{\omega}{2},t\right)\mathrm{d}t &= \mathrm{X}(\omega)\,\mathrm{Y}^{*}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{X,Y}\left(\frac{\omega}{2},t\right)\mathrm{d}t\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{X}\left(\frac{\omega}{2},t\right)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x}\left(t,\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{X}(\omega)\,\mathrm{X}^{*}(0)\end{aligned} \tag{2.36}$$

W. 14. iloczyn zmiennej „t" i sygnałów

Jeśli $\mathrm{x}_1(t)=t\mathrm{x}(t),\ \mathrm{y}_1(t)=t\mathrm{y}(t)$ to:

$$\mathrm{WD}_{x_1,y}(t,\omega)+\mathrm{WD}_{x,y_1}(t,\omega)=2t\mathrm{WD}_{x,y}(t,\omega) \tag{2.37}$$

W. 15. iloczyn zmiennej „ω" i sygnałów

Jeśli $\mathrm{x}_1(t)=\omega\mathrm{x}(t)$, $\mathrm{y}_1(t)=\omega\mathrm{y}(t)$ to:

$$\mathrm{WD}_{x_1,y}(t,\omega)+\mathrm{WD}_{x,y_1}(t,\omega)=2\omega\mathrm{WD}_{x,y}(t,\omega) \tag{2.38}$$

W. 16. biliniowa natura przekształcenia a sygnały wieloskładnikowe

Jeśli $\mathrm{x}_1(t)=\mathrm{x}_{11}(t)+\mathrm{x}_{12}(t)$, $\mathrm{y}_1(t)=y_{11}(t)+y_{12}(t)$ to:

$$\begin{aligned}\mathrm{WD}_{x_1,y_1}(t,\omega)&=\mathrm{WD}_{x_{11},y_{11}}(t,\omega)+\mathrm{WD}_{x_{11},y_{12}}(t,\omega)+\mathrm{WD}_{x_{12},y_{11}}(t,\omega)+\mathrm{WD}_{x_{12},y_{12}}(t,\omega)\\ \mathrm{WD}_{x_1}(t,\omega)&=\mathrm{WD}_{x_{11}}(t,\omega)+\mathrm{WD}_{x_{12}}(t,\omega)+2\,\mathrm{Re}\{\mathrm{WD}_{x_{11},x_{12}}(t,\omega)\}\end{aligned} \tag{2.39}$$

Przekształcenie Wignera sumy sygnałów nie jest jedynie sumą przekształceń Wignera składowych sygnału, lecz również ich wzajemnych przekształceń Wignera. Pierwsze z nich przyjęto nazywać auto-składowymi (ang. auto-term), zaś składniki wzajemne noszą nazwę składowych krzyżowych (ang. cross-term). Składniki krzyżowe mają charakter oscylacyjny i umiejscowione są w częstotliwościowych środkach geometrycznych auto-składowych.

2.1.2. Pseudo-transformata Wignera oraz jej wersja wygładzona

Z punktu widzenia zastosowania przekształcenia Wignera w numerycznych obliczeniach, konieczne jest rozważenie problemu obciążenia sygnałów funkcją okna. Oznacza to, że zamiast wyznaczenia transformacji sygnałów x(*t*) oraz y(*t*) do rozważań przyjmuje się rodzinę funkcji $x_t(\tau)=x(t)h_x(\tau-t)$ oraz $y_t(\tau)=y(t)h_y(\tau-t)$, powstałą dla różnych położeń okien $h_x(\tau)$, $\mathrm{h}_y(\tau)$ w zależności od *t*. Podążając za macierzystą definicją transformacji Wignera, wzajemną oraz własną pseudo-transformatę Wignera (ang. Pseudo-Wigner Distribution, PWD) opisuje wyrażenie [16,27,50,51,61]:

$$\begin{aligned}\mathrm{PWD}_{x_t,y_t}(t,\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{y}^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{h}_x\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{h}_y^*\left(-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\\ \mathrm{PWD}_{x_t}(t,\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x}^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{h}_x\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{h}_x^*\left(-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{2.40}$$

Dla ustalonego *t* obliczona transformata Wignera sygnałów $x_t(\tau)$, $\mathrm{y}_t(\tau)$ może być wyrażona za pomocą splotu przekształceń Wignera sygnałów oryginalnych i funkcji okien zgodnie z wyrażeniem (2.24):

$$\begin{aligned}\mathrm{WD}_{x_t,y_t}(\tau,\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x,y}(\tau,\eta)\mathrm{WD}_{h_x,h_y}(\tau\text{-}t,\omega\text{-}\eta)\mathrm{d}\eta\\ \mathrm{WD}_{x_t}(\tau,\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x}(\tau,\eta)\mathrm{WD}_{h_x}(\tau\text{-}t,\omega\text{-}\eta)\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{2.41}$$

W powyższym równaniu *t* pojawia się jako parametr określający położenie okna na osi czasu. Dla $\tau=t$ otrzymujemy pseudo-transformatę Wignera wyrażoną jako:

$$\begin{aligned}\mathrm{PWD}_{x,y}(t,\omega)&=WD_{x_t,y_t}(\tau,\omega)\big|_{\tau=t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x,y}(t,\eta)\mathrm{WD}_{h_x,h_y}(0,\omega\text{-}\eta)\mathrm{d}\eta\\ \mathrm{PWD}_{x}(t,\omega)&=WD_{x_t}(\tau,\omega)\big|_{\tau=t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_{x}(t,\eta)\mathrm{WD}_{h_x}(0,\omega\text{-}\eta)\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{2.42}$$

Zgodnie w powyższym wyrażeniem wzajemna lub własna pseudo-transformata Wignera jest splotem reprezentacji Wignera sygnałów nieobciążonych z niezależną od czasu funkcją odpowiednio $\mathrm{WD}_{h_x,h_y}(0,\omega-\eta)$ bądź $\mathrm{WD}_{h_x}(0,\omega-\eta)$. Dla ustalonego t przekształcenie Wignera jest jedynie funkcją ω. Zatem okienkowanie można traktować jako operację filtracji oryginalnej funkcji $\mathrm{WD}_{x,y}$ filtrem o odpowiedzi impulsowej $\mathrm{WD}_{h_x,h_y}(0,\omega)$, gdzie rolę czasu w charakterystyce impulsowej przejmuje ω. Przyjmując rzeczywistą, parzystą funkcję okna $h_x(\tau)=h_y(\tau)$, omawianą odpowiedź impulsowa można opisać zależnością:

$$WD_{h_x}(0,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h_x{}^2\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{2.43}$$

Stąd funkcja transmitancji takiego filtru ma postać kwadratu okna, a co za tym idzie filtr taki będzie zawsze filtrem dolnoprzepustowym. Przyjmując okno prostokątne o długości T uzyskamy efekt filtracji idealnym filtrem dolnoprzepustowym, który stłumi zmiany częstotliwości w oryginalnym dwuwymiarowym widmie Wignera poza $T/2$. Pseudo-transformata Wignera jest więc wygładzoną wersją oryginalnej transformaty jedynie wzdłuż osi częstotliwości.

Kolejnym krokiem jest wygładzenie (uśrednienie) wzdłuż osi czasu. Należy dodać, że kierunek ten jest szczególnie ważny ze względu na możliwość wyzerowania oscylacyjnych składowych krzyżowych w reprezentacji Wignera. Omówione obecnie zagadnienie dotyczy wygładzonej wersji pseudo-reprezentacji Wignera (ang. Smoothed Pseudo-Wigner Distribution, SPWD), która niesie ze sobą możliwość niezależnego wyboru uśrednienia czasowego i częstotliwościowego. Z punktu widzenia pseudo-reprezentacji Wignera wygładzenie po osi czasu uzyskane jest przez splot w dziedzinie czasu pseudo-reprezentacji z dodatkową funkcją okna $g(t)$ [27,51,62]:

$$\mathrm{SPWD}_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{g}(t-u)\,\mathrm{PWD}_x(u,\omega)\mathrm{d}u \tag{2.44}$$

Wracając do definicji PWD opartej na sygnale obciążonym funkcją okna $\mathrm{h}(t)$, równanie powyższe można również przedstawić jako:

$$\mathrm{SPWD}_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)\,x\left(u+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{d}u\;e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{2.45}$$

a wykorzystując $\mathrm{H}(\omega)$ jako transformatę Fouriera funkcji $\mathrm{h}(t)$ [27,51,62]:

$$\mathrm{SPWD}_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)\,\mathrm{H}(\omega\text{-}\eta)\,\mathrm{WD}_x(u,\eta)\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta \tag{2.46}$$

Podejście to daje możliwość niezależnego wyboru stopnia uśrednienia względem częstotliwości i czasu, bowiem wygładzanie oparte jest na splocie z dwuwymiarową funkcją będącą iloczynem niezależnych, jednowymiarowych funkcji $g(t)H(\omega)$. Cecha ta jest szczególnie użyteczna jeśli przywołamy na myśl problemy krótkoczasowej transformaty Fouriera, gdzie istnieje ścisły związek pomiędzy rozdzielczością w czasie i rozdzielczością w częstotliwości. Omawiając ten problem warto zauważyć, że klasyczny spektrogram może być wyrażony również za pomocą reprezentacji Wignera. Możemy wtedy mówić o wygładzonej reprezentacji Wignera (ang. Smoothed Wigner Distribution, SWD), która nie posiada już cechy niezależności rozdzielczości czasowej i częstotliwościowej.

$$\mathrm{SWD}_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_h(u-t,\eta-\omega)\mathrm{WD}_x(u,\eta)\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta=\mathrm{SPEC}_x(t,\omega) \tag{2.47}$$

Wygładzanie jest tu więc efektem splotu z dwuwymiarową funkcją wygładzającą, którą stanowi transformata Wignera $WD_h(-t,-\omega)$ funkcji okna $h(t)$ z uwzględnieniem zmiany znaku zmiennych. W tym przypadku całkowity zasięg czasowo-częstotliwościowy omawianej funkcji wygładzającej podlega ściśle zasadzie nieoznaczoności. Konsekwencją tego jest z jednej strony słaba koncentracja czasowo-częstotliwościowa, ale i wysoki stopień złagodzenia składowych krzyżowych.

2.1.3. Transformacja Wignera-Ville'a

Jedną z właściwości przekształcenia Wignera jest ograniczenie pasma częstotliwości reprezentacji sygnałów o ograniczonym widmie. Pewnym szczególnym przypadkiem takiego sygnału jest zespolony sygnał analityczny $x_a(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$, którego część urojona $\hat{x}(t)$ jest transformatą Hilberta sygnału rzeczywistego $x(t)$. Związek pomiędzy widmem sygnału analitycznego $X_a(\omega)$ a widmem pierwotnego sygnału rzeczywistego $X(\omega)$ opisuje poniższe równanie [16,52]:

$$X_a(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \text{dla } \omega > 0 \\ X(0) & \text{dla } \omega = 0 \\ 0 & \text{dla } \omega < 0 \end{cases} \Rightarrow WD_x(t,\omega) = 0 \text{ dla } \omega < 0 \qquad (2.48)$$

Omawiany przypadek adoptowany został przez Ville'a dla potrzeb analizy sygnałów i zaowocował pojęciem transformaty Wignera-Ville'a, gdzie przekształceniu Wignera poddawana jest analityczna postać sygnału rzeczywistego [6,7,25,27,46,52,63].

$$WVD_x(t,\omega) = WD_{x_a}(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a\left(t+\frac{\tau}{2}\right) x_a^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \qquad (2.49)$$

Efektem takiego wstępnego przygotowania sygnału są zerowe wartości przekształcenia Wignera-Ville'a dla ujemnej części osi częstotliwości.

Warto tu zatem podkreślić znaczenie formy Wignera-Ville'a, która przez wyzerowanie składników w ujemnej części osi częstotliwości, redukuje liczbę składowych krzyżowych, wynikających z fluktuacji pomiędzy auto-składowymi widma, leżącymi w jego ujemnej i dodatniej części osi częstotliwości. Ma to szczególne znaczenie praktyczne, kiedy przetwarzaniu poddawane są sygnały rzeczywiste, których widmo jest parzyste, a całą informację o śledzonych zmianach widma odczytać można z dodatniej części osi częstotliwości. Istnieją jednak przypadki, kiedy użycie formy Wignera-Ville'a mogłoby spowodować utratę informacji. Ma to miejsce wtedy, gdy przetwarzaniu poddawany jest sygnał zespolony, jak na przykład podczas analizy wektora przestrzennego. Wykorzystanie reprezentacji czasowo-częstotliwościowych do badania tego rodzaju sygnału jest jednym z proponowanych w niniejszej pracy obszarów zastosowań dla potrzeb elektrotechniki Poza tym używając analitycznej formy sygnału należy być świadomym pewnej niedogodności. Nawiązując do własności transformaty Wignera sygnałów ograniczonych w czasie można spodziewać się zachowania czasowego ograniczenia w reprezentacji Wignera. Sygnał analityczny wprowadza niestety rozmycie czasowe nie zachowując wspomnianej własności. Związek pomiędzy transformatą Wignera a Wignera-Ville'a podkreśla poniższe równanie [52]:

$$\mathrm{WVD}_x(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2\omega\tau)}{\tau}\mathrm{WVD}_x(t-\tau,\omega)\mathrm{d}\tau \tag{2.50}$$

Wcześniejsze pojęcia pseudo-reprezentacji i wygładzonej pseudo-reprezentacji można adoptować na gruncie równania Wignera-Ville'a. Wprowadzenie funkcji okna czasowego $\mathrm{h}(t)$ dla sygnału rzeczywistego $\mathrm{x}(t)$ prowadzi do równań pseudo-reprezentacji Wignera-Vill'a (ang. Pseudo-Wigner-Ville Distribution) [46,59]:

$$\mathrm{PWVD}_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x_a}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x_a}^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{h}\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{h}^*\left(-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{2.51}$$

i owocuje uśrednianiem wzdłuż osi częstotliwości.
Uzyskanie wygładzenia wzdłuż osi czasu uzyskane jest przez splot w dziedzinie czasu pseudo-reprezentacji Wignera –Ville'a z dodatkową funkcją okna $g(t)$ i owocuje wygładzoną pseudo-reprezentacją Wignera-Ville'a (ang. Smoothed Pseudo-Wigner-Ville Distribution) :

$$\mathrm{SPWVD}_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{g}(t-u)\mathrm{PWVD}_x(u,\omega)\mathrm{d}u \tag{2.52}$$

co w połączeniu z sygnałem obciążonym funkcją okna $\mathrm{h}(t)$, można również przedstawić jako:

$$\mathrm{SPWVD}_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}g(t-u)\,x_a\left(u+\frac{\tau}{2}\right)x_a^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{d}u\;e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{2.53}$$

Podobnie jak w przypadku wygładzonej pseudo-reprezentacji Wignera, wygładzona wersja pseudo-transformaty Wignera-Ville'a niesie możliwość wyzerowania oscylacyjnych składowych krzyżowych w reprezentacji Wignera-Ville'a wraz z zachowaniem niezależnego wyboru stopnia uśrednienia czasowego i częstotliwościowego. Zredukowanie ilości składowych krzyżowych poprzez wykorzystanie analitycznej formy sygnału oraz dalsze ich wygładzanie w czasie i częstotliwości, czynią omawianą postać szczególnie użyteczną dla potrzeb analizy rzeczywistych sygnałów wieloskładnikowych.

2.1.4. Globalne i lokalne momenty transformacji Wignera jako wskaźniki niestacjonarności

Omówione powyżej własności przekształcenia Wignera podkreślają możliwość opisu dystrybucji energii sygnału w połączonej dziedzinie czasu i częstotliwości. Nie zawsze konieczne jest wykorzystanie pełnej reprezantacji na płaszczyźnie (t,ω), zwłaszcza jeśli zmierzamy ku praktycznym zastosowaniom dwuwymiarowych przekształceń. Celom takim służyć mogą momenty przekształcenia Wignera.

Wprowadzając definicję lokalnych momentów, reprezentację Wignera traktuje się jako funkcję czasu przy ustalonej częstotliwości lub funkcję częstotliwości przy ustalonym czasie. Stąd uzyskane momenty lokalne są odpowiednio jednowymiarowymi funkcjami częstotliwości lub czasu, wciąż zachowując informację o zmianach sygnału w czasie lub częstotliwości. W przypadku momentów globalnych, uzyskanych przez całkowanie po całej płaszczyźnie (t,ω), informacje o zmianach energii w funkcji czasu czy częstotliwości zostają utracone.

Dalsze różnice ujawniają się w przypadku wyznaczania momentów lokalnych czy globalnych nie dla przekształcenia Wignera, lecz dla jego kwadratu. Mając na uwadze fakt,

że przekształcenie Wignera nie jest zawsze funkcją dodatnią, takie podejście może okazać się konieczne ze względów interpretacyjnych.

Rolą niniejszego rozdziału jest wprowadzenie definicji i interpretacji momentów przekształcenia Wignera w nawiązaniu do definicji i interpretacji momentów sygnału i jego widma.

Lokalne momenty częstotliwościowe [16] **:**

- lokalny częstotliwościowy moment zwykły zerowego rzędu

$$\overline{\mathrm{M}^{0}_{WD_x}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}WD_x(t,\omega)\mathrm{d}\omega=\left|\mathrm{x}(t)\right|^2 \tag{2.54}$$

Dla ustalonego t średnia z przekształcenia Wignera po częstotliwości określa chwilową energię sygnału. Niezerowa wartość tego momentu pozwala zdefiniować unormowane momenty wyższych rzędów.

- lokalny unormowany częstotliwościowy moment pierwszego rzędu

$$\overline{\Omega^{1}_{WD_x}}(t)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\omega\mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{d}\omega} \tag{2.55}$$

Pierwsza interpretacja tej charakterystyki wskazuje na średnią częstotliwość przekształcenia Wignera w chwili t. Korzystając z własności przekształcenia powyższą charakterystykę można również wyznaczyć z zależności:

$$\overline{\Omega^{1}_{WD_x}}(t)=\mathrm{Im}\frac{\mathrm{x}'(t)}{\mathrm{x}(t)}=\mathrm{Im}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\mathrm{x}(t) \tag{2.56}$$

Przekształcenie Wignera sygnałów rzeczywistych jest parzystą funkcją częstotliwości, czego efektem jest zerowa wartość parametru $\overline{\Omega^{1}_{WD_x}}$ dla tej klasy sygnałów. W przypadku sygnałów zespolonych $\mathrm{x}(t)=v(t)\mathrm{e}^{j\varphi(t)}$, gdzie $v(t)$ oraz $\varphi(t)$ są funkcjami rzeczywistymi, średnia częstotliwość przekształcenia Wignera sygnału stanowi pochodną fazy, co prowadzi do interpretacji unormowanego częstotliwościowego momentu pierwszego rzędu jako chwilowej częstotliwości sygnału (ang. instantaneous frequency):

$$\overline{\Omega^{1}_{WD_x}}(t)=\varphi'(t) \tag{2.57}$$

- lokalny unormowany częstotliwościowy moment centralny drugiego rzędu

$$\Sigma^{2}_{WD_x}(t)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\omega-\overline{\Omega^{1}_{WD_x}}(t)\right)^2\mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{d}\omega} \tag{2.58}$$

Przekształcenie Wignera nie jest zawsze dodatnie, co powoduje, że charakterystyka $\Sigma^{2}_{WD_x}(t)$ również może przyjmować wartości niezerowe. Efektem tego jest pewna trudność w bezpośredniej interpretacji omawianego momentu jako miary rozrzutu częstotliwości wokół punktu skupienia widma w chwili t. Jednocześnie własności przekształcenia Wignera dają możliwość wyrażenia $\Sigma^{2}_{WD_x}(t)$ w następującej formie:

$$\Sigma^{2}_{WD_x}(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{x}'(t)}{\mathrm{x}(t)} \tag{2.59}$$

co w przypadku sygnałów zespolonych $x(t)=\nu(t)e^{j\varphi(t)}$, prowadzi do:

$$\Sigma^2_{WD_x}(t)=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\nu'(t)}{\nu(t)}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\ln|\nu(t)| \tag{2.60}$$

Globalne momenty częstotliwościowe [16]*:*

Momenty globalne, uzyskane na drodze całkowania po całej płaszczyźnie (t,ω), są stałymi wskaźnikami, charakteryzującymi przekształcenie w sensie ogólnym.

- globalny częstotliwościowy moment zwykły zerowego rzędu

$$\overline{\mathrm{M}^0_{WD_x}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\omega)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega=\|\mathrm{x}(t)\|^2=\|\mathrm{X}(\omega)\|^2=\mathrm{E}_x \tag{2.61}$$

Moment ten określa więc całkowitą energię zawartą w sygnale.

- globalny unormowany częstotliwościowy moment pierwszego rzędu

$$\overline{\Omega^1_{WD_x}}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega\mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega} \tag{2.62}$$

Wybór t jako pierwszej zmiennej całkowania prowadzi do wyrażenia:

$$\overline{\Omega^1_{WD_x}}=\frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega|\mathrm{X}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}{\|\mathrm{X}(\omega)\|^2} \tag{2.63}$$

a wykorzystanie twierdzenia Parsevala pozwala wyznaczyć $\overline{\Omega^1_{WD_x}}$ jako:

$$\overline{\Omega^1_{WD_x}}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\Omega^1_{WD_x}}(t)|\mathrm{x}(t)|^2\,\mathrm{d}t}{\|\mathrm{x}(t)\|^2} \tag{2.64}$$

Powyższe równania pozwalają interpretować globalny unormowany moment częstotliwościowy pierwszego rzędu jako średnia częstotliwość spektrum sygnału lub jako średnią ważoną chwilowej mocy sygnału, gdzie chwilowa moc sygnału jest funkcją wagi.

- globalny unormowany częstotliwościowy moment centralny drugiego rzędu

$$\Sigma^2_{WD_x}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\omega-\overline{\Omega^1_{WD_x}}\right)^2\mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t}=\frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\omega-\overline{\Omega^1_{WD_x}}\right)^2|\mathrm{X}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}{\|\mathrm{X}(\omega)\|^2} \tag{2.65}$$

Powyższe równanie wskazuje na dodatni charakter $\Sigma^2_{WD_x}$ co pozwala interpretować ten moment jako miarę rozrzutu spektrum sygnału wokół częstotliwościowego punktu skupienia.

Lokalne momenty czasowe [16]*::*

- lokalny czasowy moment zwykły zerowego rzędu

$$\overline{\mathrm{m}^0_{WD_x}}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{d}t=|\mathrm{X}(\omega)|^2 \tag{2.66}$$

Analogicznie do interpretacji częstotliwościowego momentu zwykłego zerowego rzędu, $\overline{\mathrm{m}^0_{WD_x}}(\omega)$ opisuje chwilowe widmo gęstości energii dla ustalonej ω.

- lokalny unormowany czasowy moment pierwszego rzędu

$$\overline{t^1_{WD_x}}(\omega)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t\,WD_x(t,\omega)\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} WD_x(t,\omega)\,dt} \tag{2.67}$$

Interpretacja tego momentu jako średniego czasu dla danej częstotliwości może być pogłębiona przy wykorzystaniu własności przekształcenia Wignera:

$$\overline{t^1_{WD_x}}(\omega)=-\mathrm{Im}\frac{X'(\omega)}{X(\omega)}=-\frac{d}{d\omega}\ln X(\omega) \tag{2.68}$$

Stąd dla $X(\omega)=|X(\omega)|e^{j\psi(\omega)}$, gdzie $|X(\omega)|$ oraz $\psi(\omega)$ są funkcjami rzeczywistymi, lokalny unormowany moment czasowy można traktować jako przeciwną pochodną charakterystyki fazowej widma. Ma to szczególne znaczenie jeśli poddanym przekształceniu Wignera będzie sygnał odpowiedzi impulsowej liniowego systemu stacjonarnego. Wtedy przeciwna pochodna charakterystyki fazowej transmitancji widmowej takiego systemu wskaże opóźnienie grupowe systemu (ang. group-delay).

- lokalny unormowany czasowy moment centralny drugiego rzędu

$$\sigma^2_{WD_x}(\omega)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t-\overline{t^1_{WD_x}}(\omega)\right)^2 WD_x(t,\omega)\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} WD_x(t,\omega)\,dt} \tag{2.69}$$

Własności przekształcenia Wignera pozwalają dowieść, że moment ten zależy jedynie od charakterystyki amplitudowej.

$$\sigma^2_{WD_x}(\omega)=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\frac{d}{d\omega}\frac{X'(\omega)}{X(\omega)}=-\frac{1}{2}\frac{d}{d\omega}\frac{|X(\omega)'|}{|X(\omega)|}=-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\omega^2}\ln|X(\omega)| \tag{2.70}$$

Globalne momenty czasowe [16]**::**

Momenty globalne, uzyskane na drodze całkowania po całej płaszczyźnie (t,ω), są stałymi wskaźnikami, charakteryzującymi przekształcenie w sensie ogólnym.

- globalny czasowy moment zwykły zerowego rzędu

$$\overline{m^0_{WD_x}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} WD_x(t,\omega)\,d\omega dt=\|X(\omega)\|^2=\|x(t)\|^2=E_x \tag{2.71}$$

Moment ten, podobnie jak globalny częstotliwościowy moment zerowego rzędu, określa całkowitą energię zawartą w sygnale.

- globalny unormowany czasowy moment pierwszego rzędu

$$\overline{t^1_{WD_x}}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} t\,WD_x(t,\omega)\,d\omega dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} WD_x(t,\omega)\,d\omega dt} \tag{2.72}$$

Wybór ω jako pierwszej zmiennej całkowania prowadzi do wyrażenia:

$$\overline{t^1_{WD_x}}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t|x(t)|^2\,dt}{\|x(t)\|^2} \tag{2.73}$$

a wykorzystanie twierdzenia Parsevala pozwala wyznaczyć $\overline{t^1_{WD_x}}$ jako:

$$\overline{t^1_{WD_x}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{t^1_{WD_x}}(\omega)\left|X(\omega)\right|^2 d\omega}{\left\|X(\omega)\right\|^2} \tag{2.74}$$

Powyższe równania pozwalają interpretować globalny unormowany moment czasowy pierwszego rzędu jako globalny średni czas sygnału lub jako średnią ważoną opóźnienia grupowego, gdzie funkcją wagi jest widmo gęstości energii.

- globalny unormowany czasowy moment centralny drugiego rzędu

$$\sigma^2_{WD_x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t-\overline{t^1_{WD_x}}\right)^2 WD_x(t,\omega)dtd\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} WD_x(t,\omega)dtd\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t-\overline{t^1_{WD_x}}\right)^2\left|x(t)\right|^2 dt}{\left\|x(t)\right\|^2} \tag{2.75}$$

Powyższe równanie wskazuje na dodatni charakter $\sigma^2_{WD_x}$, co pozwala interpretować ten moment jako miarę rozrzutu sygnału wokół czasowego punktu skupienia.

Przedstawione zależności, opisujące momenty przekształcenia Wignera oraz ich interpretacje, są pewnego rodzaju wprowadzeniem do zaproponowanego w niniejszej rozprawie kierunku wykorzystania przekształceń czasowo-częstotliwościowych. Dwuwymiarowość uzyskanych wyników, choć szalenie użyteczna z punktu widzenia określenia choćby rodzaju niestacjonarności, może okazać się niekorzystną własnością tego typu przekształceń, gdy zmierzać będziemy ku praktycznym możliwością ich wykorzystania. Jednowymiarowe charakterystyki unormowanych lokalnych momentów częstotliwościowych pierwszego rzędu $\overline{\Omega^1_{WD_x}}(t)$ możemy interpretować jako przebieg zmian w czasie punktu skupienia widma Wignera. Jeśli zatem w analizowanym sygnale nastąpiłaby zmiana składu jego spektrum, to skupienie uwagi na analizie zmian charakterystyki $\overline{\Omega^1_{WD_x}}(t)$ może zaowocować wyznaczeniem charakterystycznych punktów niestacjonarności na osi czasu. Taki kierunek postępowania może być jednak zakłócony podstawową własnością wynikającą z parzystości auto-reprezentacji Wignera względem osi częstotliwości dla sygnałów rzeczywistych, a te przecież są materiałem badań w większości przypadków. Efektem wspomnianej własności jest zerowa wartość lokalnego momentu widma, a więc żadna użyteczna informacja. Stąd należałoby zastanowić się, czy charakterystyki $\overline{\Omega^1_{WD_x}}(t)$ nie można by wyznaczać na podstawie dodatniej jedynie części widma Wignera, definiując w ten sposób pseudo-moment lokalny. Takie rozwiązanie wydaje się nie wprowadzać błędu w przyjętym kierunku rozumowania. Kiedy bowiem pominięcie części ujemnej widma Wignera może okazać się niewłaściwym krokiem? Jedynie przypadek sygnałów zespolonych i to nie analitycznych wymagałby rozpatrywania całej osi częstotliwości, a to ze względu na różnice widma w dodatniej i ujemnej części. Ta właściwość przekształcenia Wignera może być użyteczna przy badaniu wektora przestrzennego, który jako sygnał zespolony utworzony z trzech sygnałów układu trójfazowego niesie ze sobą informacje o składowych symetrycznych takiego układu. Obserwacja reprezentacji czasowo-częstotliwościowej wektora przestrzennego dla dodatniej osi częstotliwości przyniesie informacje o zmianach w czasie składowej zgodnej układu, ujemna zaś oś częstotliwości zawierać będzie informacje o niestacjonarności składowej przeciwnej.

Zespolony sygnał analityczny charakteryzuje się zerowymi wartościami reprezentacji Wignera dla ujemnej części osi częstotliwości. Ta właściwość jest podstawą transformacji Wignera-Ville'a, gdzie sygnał rzeczywisty najpierw poddawany jest transformacie Hilberta

dla uzyskania sygnału analitycznego, a dopiero później transformacie Wignera. Świadome wyzerowanie ujemnej części widma pozwala na uniknięcie dodatkowych składowych krzyżowych pomiędzy składowymi widma dodatniej i ujemnej części osi częstotliwości. W przypadku więc transformacji Wignera-Ville'a, zdefiniowanie lokalnych momentów widma ma sens jedynie dla dodatniej części osi częstotliwości.

W związku z powyższym, przyjęcie kierunku wyznaczania lokalnych pseudo-momentów częstotliwościowych na podstawie dodatniej jedynie części osi częstotliwości reprezentacji Wignera bądź Wignera-Ville'a pozwoli zredukować wielowymiarowość przekształceń i traktować uzyskane jednowymiarowe charakterystyki jako pewnego rodzaju wskaźnik niestacjonarności. Poniższe równania opisują zaproponowane podejście na przykładzie lokalnych unormowanych pseudo-momentów częstotliwościowych reprezentacji Wignera i Wignera-Ville'a, wskazujących na średnią, lokalną częstotliwość badanego sygnału rzeczywistego:

$$\overline{\overline{\Omega^1_{WD_x}}}(t)=\frac{\int_0^{+\infty}\omega \mathrm{WD}_x(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega}{\int_0^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega}$$

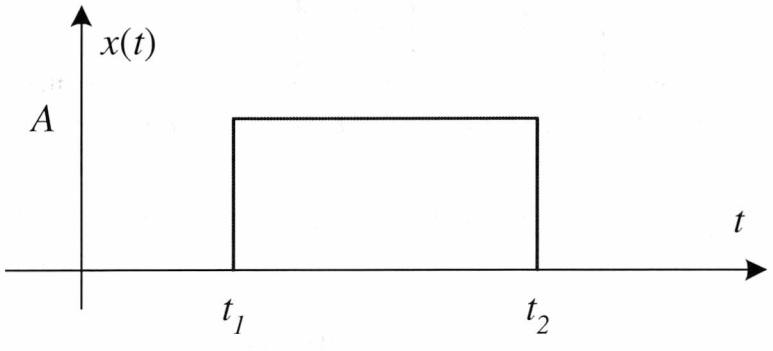
$$\overline{\overline{\Omega^1_{WVD_x}}}(t)=\frac{\int_0^{+\infty}\omega \mathrm{WVD}_x(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega}{\int_0^{+\infty}\mathrm{WVD}_x(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega} \tag{2.76}$$

2.1.5. Przykłady analitycznego wyznaczania transformacji Wignera

W niniejszym rozdziale postanowiono zamieścić dwa przykłady analitycznego wyznaczania transformacji Wignera sygnałów ograniczonych w czasie, w celu przybliżenia natury omawianego przekształcenia. Transformacji poddano sygnał prostokątny oraz ograniczony w czasie sygnał cosinusoidalny

Przykład 1:

$$\mathrm{x}(t)=A\left[\mathbf{1}(t-t_1)-\mathbf{1}(t-t_2)\right] \tag{2.77}$$



Rysunek 2.2. Przykładowy sygnał poddany transformacji Wignera.

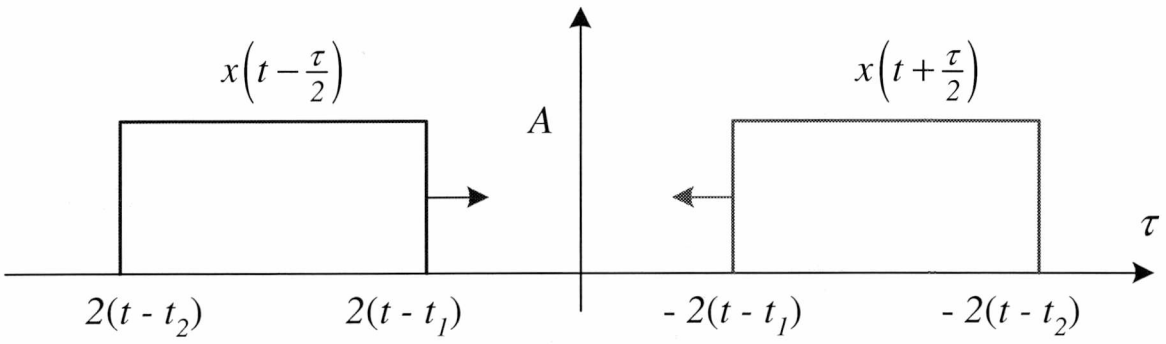
Składniki podcałkowe możemy opisać jako:

$$x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)=A\left[1\left(t+\frac{\tau}{2}-t_1\right)-1\left(t+\frac{\tau}{2}-t_2\right)\right]$$
$$\mathrm{x}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)=A\left\{1\left[\tau+2\left(t-t_1\right)\right]-1\left[\tau+2\left(t-t_2\right)\right]\right\} \tag{2.78}$$

$$\mathrm{x}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)=A\left[1\left(t-\frac{\tau}{2}-t_1\right)-1\left(t-\frac{\tau}{2}-t_2\right)\right]$$
$$\mathrm{x}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)=A\left\{1\left[-\left(\tau-2\left(t-t_1\right)\right)\right]-1\left[-\left(\tau-2\left(t-t_2\right)\right)\right]\right\} \tag{2.79}$$

Granice całkowania względem zmiennej τ oraz niezerowe wartości całki Wignera można wyznaczyć na bazie analizy wzajemnego położenia okien sygnału.

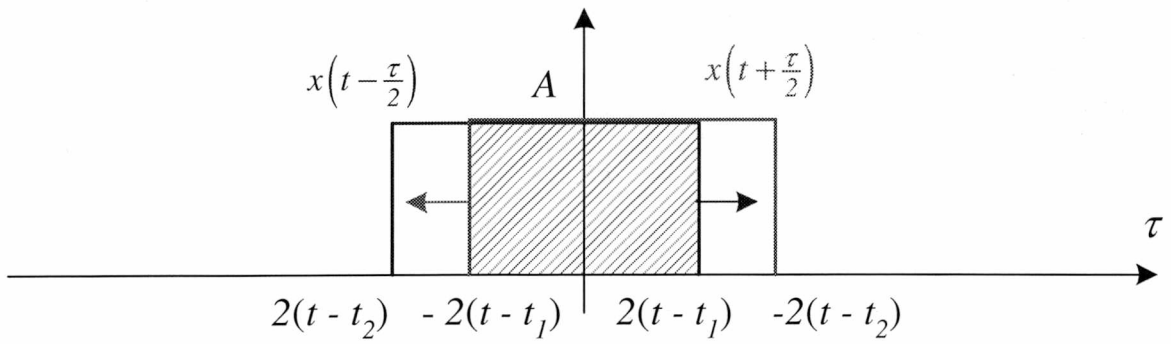
a. $t<t_1$



Rysunek 2.3. Ilustracja wzajemnego położenia okien składników całki Wignera dla $t<t_1$

$$\mathrm{WD}_{x,x}\left(t,\omega\right)=0 \tag{2.80}$$

b. $t_1<t<\frac{1}{2}\left(t_1+t_2\right)$

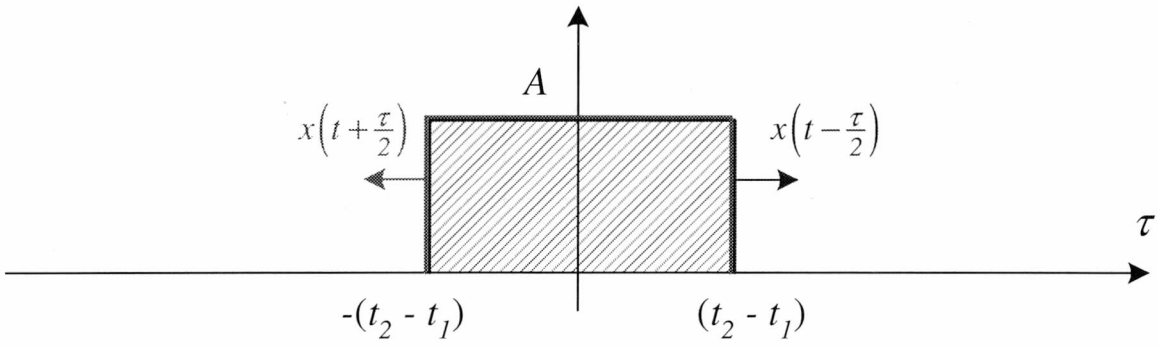


Rysunek 2.4. Ilustracja wzajemnego położenia okien składników całki Wignera dla $t_1<t<\frac{1}{2}\left(t_1+t_2\right)$

$$\mathrm{WD}_{x,x}\left(t,\omega\right)=\int_{-2\left(t-t_1\right)}^{2\left(t-t_1\right)}A^2e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau=A^2\frac{1}{-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\Bigg|_{-2\left(t-t_1\right)}^{2\left(t-t_1\right)}=\frac{A^2}{-\mathrm{j}\omega}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega\left(t-t_1\right)}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega\left(t-t_1\right)}\right]$$

$$\mathrm{WD}_{x,x}(t,\omega)=\frac{2A^2}{\omega}\sin\left[2\omega(t-t_1)\right] \tag{2.81}$$

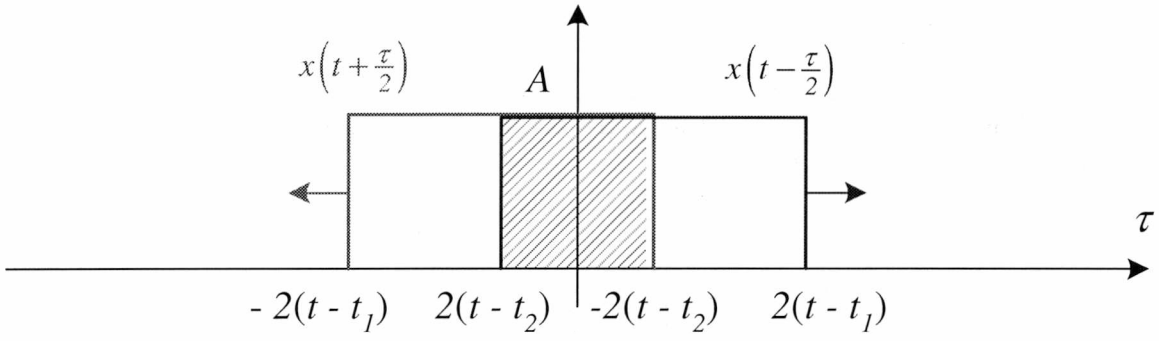
$t=\frac{1}{2}(t_1+t_2)=t_0$ tj. gdy: $2(t-t_2)=-2(t-t_1)$



Rysunek 2.5. Ilustracja wzajemnego położenia okien składników całki Wignera dla $t=\frac{1}{2}(t_1+t_2)=t_0$

$$\mathrm{WD}_{x,x}(t_0,\omega)=\frac{2A^2}{\omega}\sin\left[\omega(t_2-t_1)\right] \tag{2.82}$$

c. $\frac{1}{2}(t_1+t_2)<t<t_2$

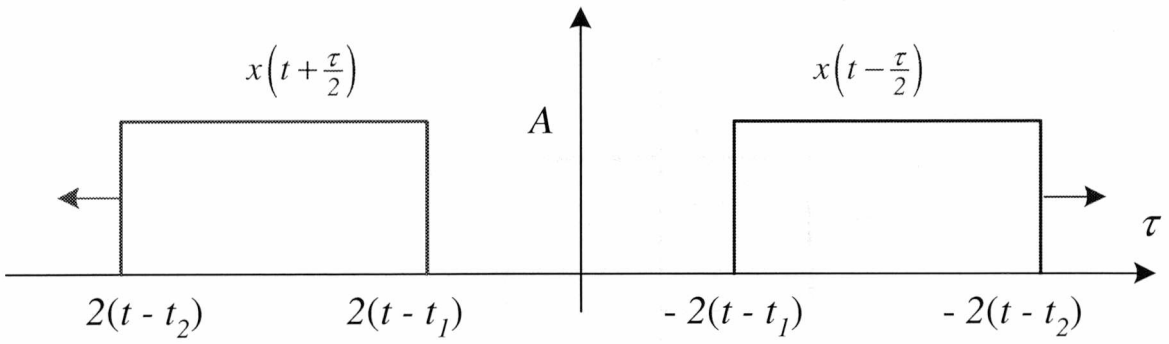


Rysunek 2.6. Ilustracja wzajemnego położenia okien składników całki Wignera dla $\frac{1}{2}(t_1+t_2)<t<t_2$

$$\mathrm{WD}_{x,x}(t,\omega)=\int_{2(t-t_2)}^{-2(t-t_2)}A^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau=A^2\frac{1}{-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\Bigg|_{2(t-t_2)}^{-2(t-t_2)}=\frac{A^2}{-\mathrm{j}\omega}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega(t-t_2)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega(t-t_2)}\right]$$

$$\mathrm{WD}_{x,x}(t,\omega)=-\frac{2A^2}{\omega}\sin\left[2\omega(t-t_2)\right] \tag{2.83}$$

d. $\frac{1}{2}(t_1+t_2)<t<t_2$



Rysunek 2.7. Ilustracja wzajemnego położenia okien składników całki Wignera dla $t > t_2$

$$\mathrm{WD}_{x,x}(t,\omega)=0 \tag{2.84}$$

Ostatecznie transformację Wignera sygnału prostokątnego ograniczonego w czasie od t_1 do t_2 możemy zapisać w postaci:

$$\mathrm{WD}_{\Delta,\Delta}(t,\omega)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad t\le t_1\\ \frac{2A^2}{\omega}\sin\left[2\omega(t-t_1)\right] & \text{dla} \quad t_1<t\le\frac{1}{2}(t_1+t_2)\\ -\frac{2A^2}{\omega}\sin\left[2\omega(t-t_2)\right] & \text{dla} \quad \frac{1}{2}(t_1+t_2)<t<t_2\\ 0 & \text{dla} \quad t\ge t_2\end{cases} \tag{2.85}$$

Dla zilustrowania charakteru otrzymanej postaci poniżej zamieszczono przykład wyznaczenia przebiegu wybranej składowej transformacji Wignera tj. przy określonym ω dla $A=10, t_1=0, t_2=0.2$ oraz $t_2=0.3$.

$$\mathrm{WD}_{\Delta,\Delta}(t,0)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad t\le t_1\\ \lim\limits_{\omega\to 0}\left(\frac{2A^2}{\omega}\sin\left[2\omega(t-t_1)\right]\right) & \text{dla} \quad t_1<t\le\frac{1}{2}(t_1+t_2)\\ -\lim\limits_{\omega\to 0}\left(\frac{2A^2}{\omega}\sin\left[2\omega(t-t_2)\right]\right) & \text{dla} \quad \frac{1}{2}(t_1+t_2)<t<t_2\\ 0 & \text{dla} \quad t\ge t_2\end{cases}$$

$$\mathrm{WD}_{\Delta,\Delta}(t,0)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad t\le t_1\\ 4A^2(t-t_1) & \text{dla} \quad t_1<t\le\frac{1}{2}(t_1+t_2)\\ -4A^2(t-t_2) & \text{dla} \quad \frac{1}{2}(t_1+t_2)<t<t_2\\ 0 & \text{dla} \quad t\ge t_2\end{cases} \tag{2.86}$$

Skąd dla $A=10, t_1=0, t_2=0.2$ otrzymujemy:

$$\mathrm{WD}_{\Delta,\Delta}(t,0)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad t\le 0\\ 4A^2t=400t & \text{dla} \quad 0<t\le 0.1\\ -4A^2(t-t_2)=-400(t-0.2) & \text{dla} \quad 0.1<t<0.2\\ 0 & \text{dla} \quad t\ge 0.2\end{cases}$$

W szczególności dla $t=\frac{1}{2}(t_1+t_2)=0.1s$, $\mathrm{WD}_{\Delta\Delta}(0.1,0)=400\times 0.1=40$

Podobnie dla $A=10, t_1=0, t_2=0.3$:

$$\mathrm{WD}_{\Delta,\Delta}(t,0)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad t\le 0\\ 4A^2t=400t & \text{dla} \quad 0<t\le 0.15\\ -4A^2(t-t_2)=-400(t-0.3) & \text{dla} \quad 0.1<t<0.3\\ 0 & \text{dla} \quad t\ge 0.3\end{cases}$$

a w szczególności dla $t=\frac{1}{2}(t_1+t_2)=0.15s$, $\mathrm{WD}_{\Delta\Delta}(0.15,0)=400\times 0.15=60$.

Podobnie można przeanalizować dowolne składowe $\omega=\omega_0$ dwuwymiarowej reprezentacji:

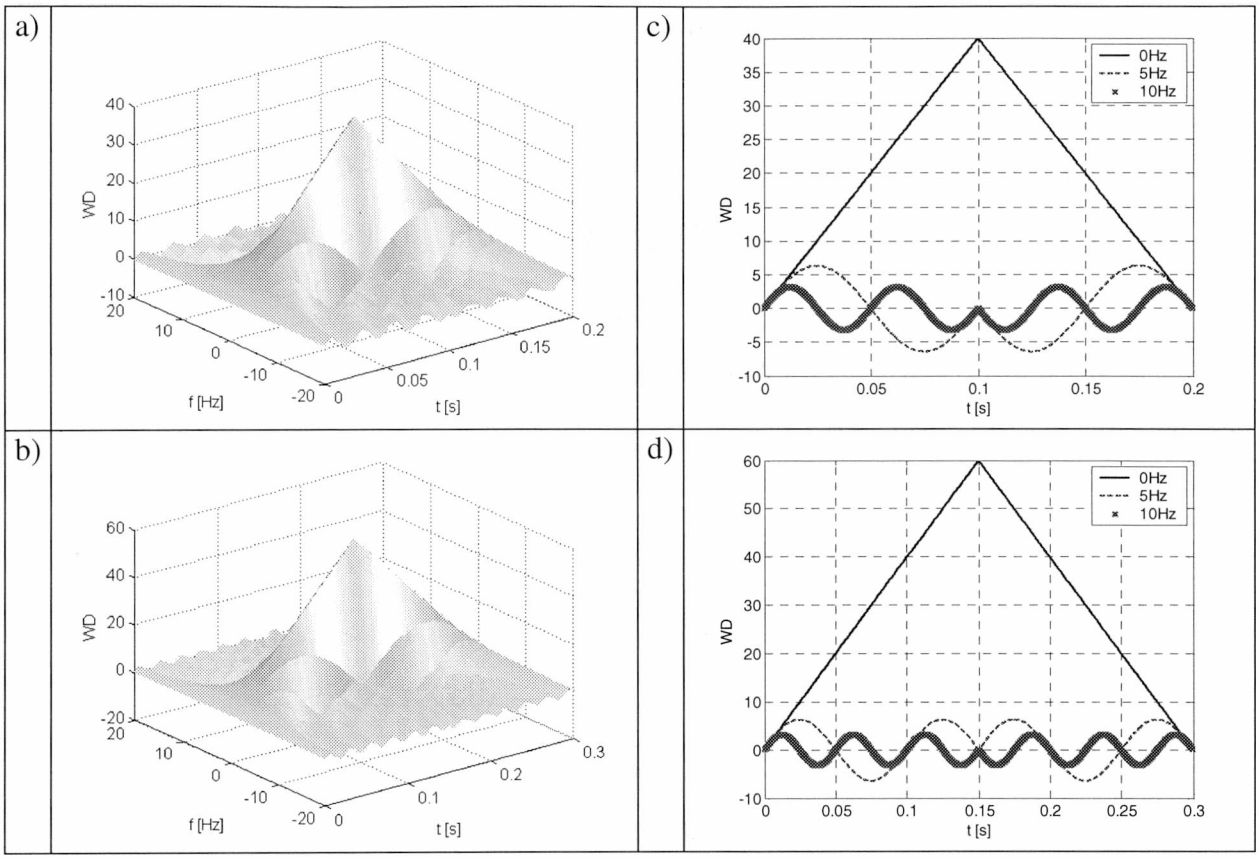
$$\mathrm{WD}_{\Delta,\Delta}(t,\omega_0)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad t\le t_1\\ \frac{2A^2}{\omega_0}sin\left[2\omega_0(t-t_1)\right] & \text{dla} \quad t_1<t\le\frac{1}{2}(t_1+t_2)\\ -\frac{2A^2}{\omega_0}sin\left[2\omega_0(t-t_2)\right] & \text{dla} \quad \frac{1}{2}(t_1+t_2)<t<t_2\\ 0 & \text{dla} \quad t\ge t_2\end{cases} \tag{2.87}$$

Skąd dla $A=10, t_1=0, t_2=0.2$ oraz wybranej $\omega_0=10\pi(f_0=5Hz)$ otrzymujemy:

$$\mathrm{WD}_{\Delta,\Delta}(t,10\pi)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad t\le 0\\ \frac{20}{\pi}sin\left[20\pi(t)\right] & \text{dla} \quad 0<t\le 0.1\\ -\frac{20}{\pi}sin\left[20\pi(t-0.2)\right] & \text{dla} \quad 0.1<t<0.2\\ 0 & \text{dla} \quad t\ge 0.2\end{cases}$$

W szczególności dla $t=\frac{1}{2}(t_1+t_2)=0.1s$, $\mathrm{WD}_{\Delta\Delta}(0.1,0)=\frac{20}{\pi}sin(2\pi)=0$ bądź dla $t=\frac{1}{8}(t_1+t_2)=0.025s$, $\mathrm{WD}_{\Delta\Delta}(0.025,0)=\frac{20}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{20}{\pi}\approx 6.37$

Rysunek 2.8 przedstawia transformaty Wignera omawianych sygnałów oraz przebiegi wybranych składowych (0,5,10)Hz



Rysunek 2.8. Transformata Wignera sygnału prostokątnego dla $A=10, t_1=0, t_2=0.2$ (a) oraz $t_2=0.3$ (b), jak też charakter przebiegu wybranych składowych (0,5,10)Hz (c,d).

Przykład 2

Niech zadanym sygnałem będzie ograniczony w czasie sygnał cosinusoidalny:

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(t) &= A\cos(\omega_0 t+\psi)\left[1(t-t_1)-1(t-t_2)\right] \\ \mathrm{x}(t) &= \frac{A}{2}\left[e^{j(\omega_0 t+\psi)}+e^{-j(\omega_0 t+\psi)}\right]\left[1(t-t_1)-1(t-t_2)\right] \end{aligned} \tag{2.88}$$

Transformatę Wignera tak opisanego sygnału można wyrazić jako:

$$\mathrm{WD}_{x,x}(t,\omega)=\frac{A^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left[\omega_0\left(t+\frac{\tau}{2}\right)+\psi\right]}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left[\omega_0\left(t+\frac{\tau}{2}\right)+\psi\right]}\right]\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left[\omega_0\left(t-\frac{\tau}{2}\right)+\psi\right]}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left[\omega_0\left(t-\frac{\tau}{2}\right)+\psi\right]}\right]\times$$

$$\times\underbrace{\left[1\left(t+\frac{\tau}{2}-t_1\right)-1\left(t+\frac{\tau}{2}-t_2\right)\right]}_{\Delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)}\cdot\underbrace{\left[1\left(t-\frac{\tau}{2}-t_1\right)-1\left(t-\frac{\tau}{2}-t_2\right)\right]}_{\Delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{2.89}$$

Dalsze przekształcenia prowadzą do poniższych wyrażeń:

$$\mathrm{WD}_{x,x}(t,\omega)=\frac{A^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2(\omega_0 t+\psi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2(\omega_0 t+\psi)}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\tau}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0\tau}\right]\Delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\Delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=$$

$$=\frac{A^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2\cos 2(\omega_0 t+\psi)+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\tau}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0\tau}\right]\Delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\Delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{2.91}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{WD}_{x,x}(t,\omega)=&\frac{A^2}{2}\cos 2(\omega_0 t+\psi)\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\Delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau+\\&+\frac{A^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)\tau}\Delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\Delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)d\tau+\frac{A^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+\omega_0)\tau}\Delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\Delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{2.92}$$

Auto-transformatę $\mathrm{WD}_{x,x}(t,\omega)$ ograniczonego sygnału cosinusoidalnego można więc zapisać w postaci:

$$\mathrm{WD}_{x,x}(t,\omega)=\frac{A^2}{2}\cos 2(\omega_0 t+\psi)\,\mathrm{WD}_{\Delta,\Delta}(t,\omega)+\frac{A^2}{4}\left[\mathrm{WD}_{\Delta,\Delta}(t,\omega-\omega_0)+\mathrm{WD}_{\Delta,\Delta}(t,\omega+\omega_0)\right] \tag{2.93}$$

a wykorzystując wyrażenia (2.85) opisujące $\mathrm{WD}_{\Delta,\Delta}(t,\omega)$ otrzymujemy :

$$WD_{x,x}(t,\omega)=\begin{cases}0,\ \text{dla } t\le t_1\\ \dfrac{A^2}{\omega}\cos 2(\omega_0 t+\psi)\sin\left[2\omega(t-t_1)\right]+\\ +\dfrac{A^2}{2}\left\{\dfrac{1}{\omega-\omega_0}\sin\left[2(\omega-\omega_0)(t-t_1)\right]+\dfrac{1}{\omega+\omega_0}\sin\left[2(\omega+\omega_0)(t-t_1)\right]\right\}\\ \text{dla } t_1<t\le\dfrac{1}{2}(t_1+t_2)\\ -\dfrac{A^2}{\omega}\cos 2(\omega_0 t+\psi)\sin\left[2\omega(t-t_2)\right]+\\ -\dfrac{A^2}{2}\left\{\dfrac{1}{\omega-\omega_0}\sin\left[2(\omega-\omega_0)(t-t_2)\right]+\dfrac{1}{\omega+\omega_0}\sin\left[2(\omega+\omega_0)(t-t_2)\right]\right\}\\ \text{dla } \dfrac{1}{2}(t_1+t_2)<t<t_2\\ 0,\ \text{dla } t>t_2\end{cases} \tag{2.94}$$

Dla zilustrowania charakteru otrzymanej postaci poniżej zamieszczono przykład wyznaczenia przebiegu $\mathrm{WD}_{x,x}(t,0)$ sygnału $\mathrm{x}(t)=10\cos(100\pi t)\left[1(t)-1(t-0.2)\right]$

$$\mathrm{WD}_{x,x}(t,0)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad t\le 0\\ 200t\cos(200\pi t)+\dfrac{1}{\pi}\sin(200\pi t) & \text{dla} \quad 0<t\le 0.1\\ -200(t-0.2)\cos(200\pi t)-\dfrac{1}{\pi}\sin(200\pi(t-0.2)) & \text{dla} \quad 0.1<t<0.2\\ 0 & \text{dla} \quad t\ge 0.2\end{cases}$$

W szczególności dla $t=\frac{1}{2}(t_1+t_2)=0.1s,\ \mathrm{WD}_{xx}(0.1,0)=20cos(20\pi)+\frac{1}{\pi}sin(20\pi)=20.$

Analogicznie wyprowadzić możemy zależność opisującą przebieg przekształcenia Wignera dla wybranej pulsacji ω_0:

$$WD_{x,x}(t,\omega_0)=\begin{cases}0, \text{ dla } t\le t_1\\ \frac{A^2}{\omega_0}cos(2\omega_0 t)sin(2\omega_0 t)+\frac{A^2}{2}\left\{2t+\frac{1}{2\omega_0}sin\left[4\omega_0(t)\right]\right\}=\\ =\frac{3}{4}\frac{A^2}{\omega_0}sin(4\omega_0 t)+A^2 t, & \text{dla } t_1<t\le\frac{1}{2}(t_1+t_2)\\ -\frac{A^2}{\omega_0}cos(2\omega_0 t)sin\left[2\omega_0(t-t_2)\right]+\\ -\frac{A^2}{2}\left\{2(t-t_2)+\frac{1}{2\omega_0}sin\left[4\omega_0(t-t_2)\right]\right\}, & \text{dla } \frac{1}{2}(t_1+t_2)<t<t_2\\ 0, \text{ dla } t>t_2\end{cases} \tag{2.95}$$

Jeśli również $t_2=kT_0, T_0=2\pi/\omega_0$ to wyrażenie powyższe upraszcza się do postaci:

$$WD_{x,x}(t,\omega_0)=\begin{cases}0, \text{ dla } t\le t_1\\ \frac{3}{4}\frac{A^2}{\omega_0}sin(4\omega_0 t)+A^2 t, & \text{dla } t_1<t\le\frac{1}{2}(t_1+t_2)\\ -\frac{3}{4}\frac{A^2}{\omega_0}sin(4\omega_0 t)-A^2(t-t_2), & \text{dla } \frac{1}{2}(t_1+t_2)<t<t_2\\ 0, \text{ dla } t>t_2\end{cases}$$

a w przypadku omawianego przykładu $\mathrm{x}(t)=10cos(100\pi t)\left[1(t)-1(t-0.2)\right]$

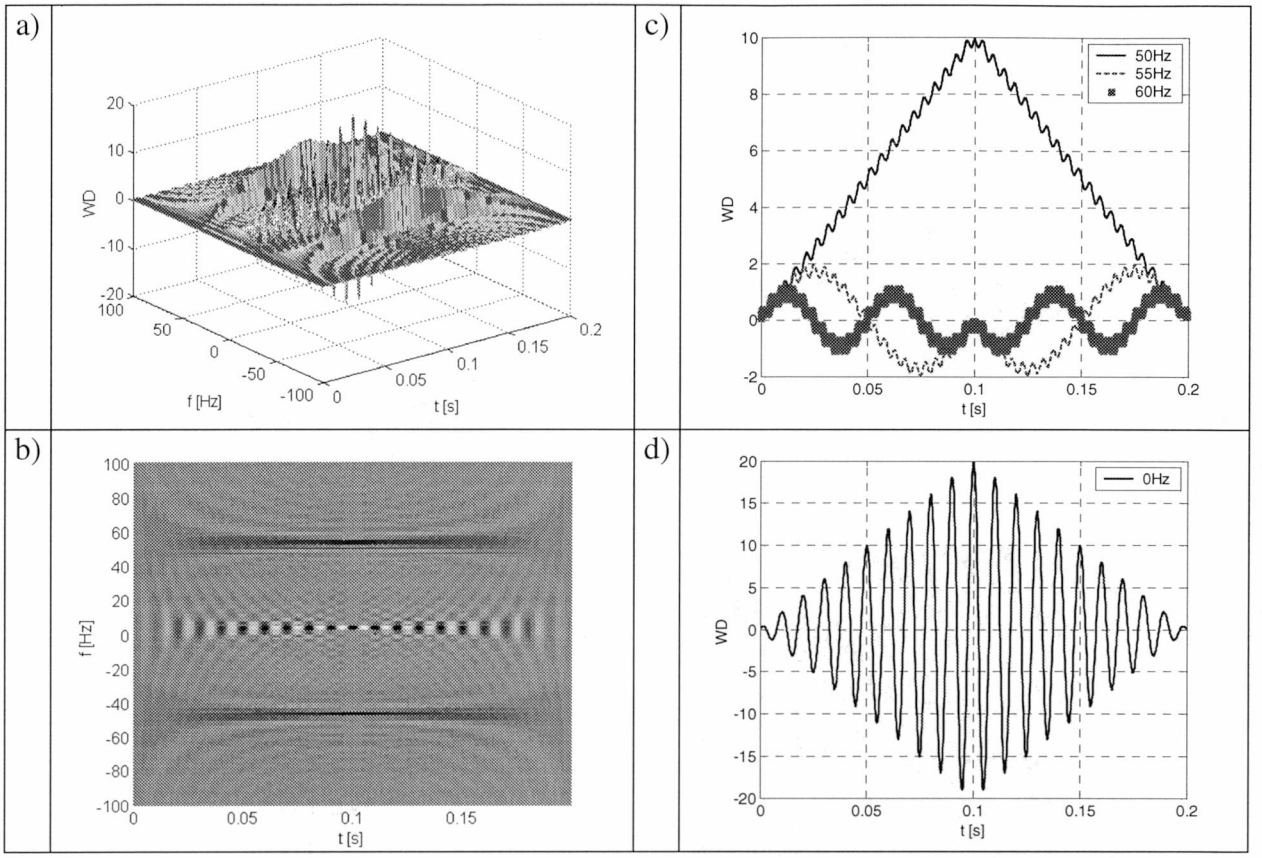
$$WD_{x,x}(t,100\pi)=\begin{cases}0, \text{ dla } t\le 0\\ \frac{3}{4\pi}sin(400\pi t)+100t, & \text{dla } 0<t\le 0.1\\ -\frac{3}{4\pi}sin(400\pi t)-100(t-0.2), & \text{dla } 0.1<t<0.2\\ 0, \text{ dla } t>0.2\end{cases}$$

W szczególności dla $t=\frac{1}{2}(t_1+t_2)=0.1s,\ \mathrm{WD}_{xx}(0.1,100\pi)=10$ bądź dla:

$t=\frac{1}{8}(t_1+t_2)=0.025s,\ \mathrm{WD}_{xx}(0.025,100\pi)=100\times0.025=2.5$

$t=\frac{5}{8}(t_1+t_2)=0.125s,\ \mathrm{WD}_{xx}(0.125,100\pi)=-100(0.125-0.2)=7.5$

Rysunek 2.9 przedstawia transformaty Wignera omawianego sygnału oraz przebiegi wybranych składowych (0,50,55,60)Hz



Rys. 2.9. Transformata Wignera ograniczonego sygnału cosinusoidalnego $x(t)=10cos(100\pi t)\left[1(t)-1(t-0.2)\right]$ (a,b) oraz charakter wybranych składowych (50,55,60)Hz (c) oraz 0Hz (d).

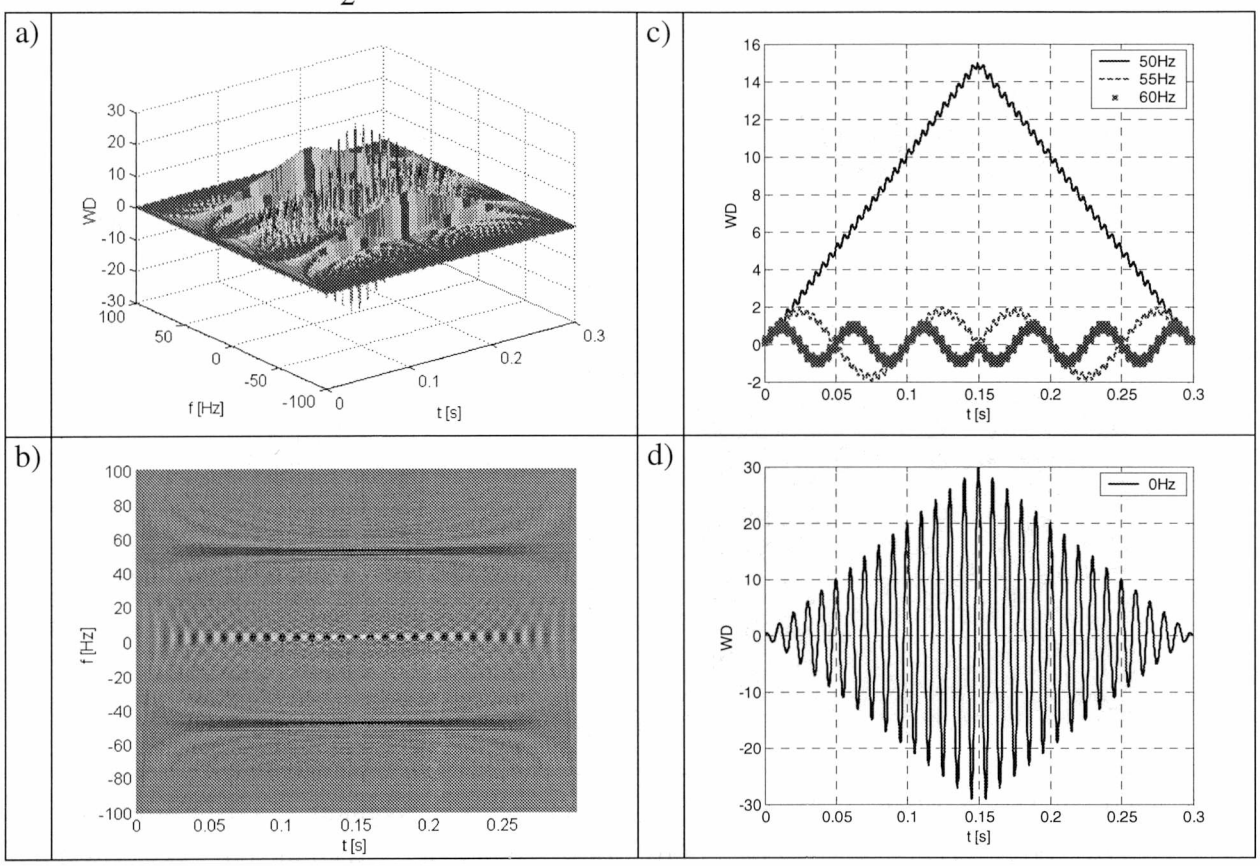
Dla porównania poniżej przybliżono również charakter transformaty Wignera sygnału ograniczonego dla t_2=0.3s, tj. $x(t)=10cos(100\pi t)\left[1(t)-1(t-0.3)\right]$ (rys 2.10). Wtedy:

$$WD_{x,x}(t,0)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad t\le 0\\ 200t\,cos(200\pi t)+\dfrac{1}{\pi}sin(200\pi t) & \text{dla} \quad 0<t\le 0.15\\ -200(t-0.3)cos(200\pi t)-\dfrac{1}{\pi}sin(200\pi(t-0.3)) & \text{dla} \quad 0.15<t<0.3\\ 0 & \text{dla} \quad t\ge 0.3\end{cases}$$

W szczególności dla $t=\frac{1}{2}(t_1+t_2)=0.1s$, $WD_{xx}(0.15,0)=30cos(30\pi)+\frac{1}{\pi}sin(30\pi)=30$.

$$WD_{x,x}(t,100\pi)=\begin{cases}0, \text{ dla } t\le 0\\ \dfrac{3}{4\pi}sin(400\pi t)+100t, & \text{dla } 0<t\le 0.15\\ -\dfrac{3}{4\pi}sin(400\pi t)-100(t-0.2), & \text{dla } 0.1<t<0.3\\ 0, \text{ dla } t>0.3\end{cases}$$

W szczególności dla $t=\frac{1}{2}(t_1+t_2)=0.15s$, $\mathrm{WD}_{xx}(0.15,100\pi)=15$.



Rys. 2.10. Transformata Wignera ograniczonego sygnału cosinusoidalnego $x(t)=10cos(100\pi t)\left[1(t)-1(t-0.3)\right]$ (a,b); charakter wybranych składowych (50,55,60)Hz (c) oraz składowej krzyżowej (0Hz) (d).

2.2. Funkcja nieoznaczoności - korelacyjna klasa czasowo-częstotliwościowych reprezentacji sygnału

W klasie korelacyjnych przekształceń czasowo-częstotliwościowych podstawowym przykładem jest tzw. funkcja nieoznaczoności (ang. ambiguity function). Wprowadzona przez Ville'a i Moyal'a została w latach pięćdziesiątych adoptowana przez Woodward'a do analizy sygnałów techniki radarowej [19,27] . Jak już wspomniano efektem przekształcenia czasowo-częstotliwościowego rozumianego w sensie korelacyjnym jest dwuwymiarowa funkcja przesunięć czasowych i częstotliwościowych. W technice radarowej głównym problemem jest estymacja odległości i prędkości przesuwającego się obiektu. Przeniesienie sygnału do połączonej dziedziny przesunięć pozwala powiązać zmienną przesunięcia czasowego z odległością oraz zmienną przesunięcia częstotliwości z prędkością czy też opóźnieniem Dopplerowskim.

Wspomniano już, że czasowo-częstotliwościową reprezentację można uzyskać poprzez transformację Fouriera tzw. chwilowej funkcji autokorelacji (wyrażenie (2.8)). Przyjęcie symetrycznej postaci chwilowej funkcji autokorelacji $r_t(\tau)=x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$

oraz zmiana zmiennej całkowania z τ na t prowadzi do korelacyjnej klasy przekształceń, a dokładnie do wyrażenia opisującego symetryczną funkcję nieoznaczoności (ang. symmetric ambiguity function) [2,26,27,51,52,62]:

$$\mathrm{AF}_x(\theta,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x}^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta t}\mathrm{d}t \tag{2.96}$$

Podobnie jak transformatę Wignera, funkcję nieoznaczoności można wyrazić również za pomocą widma sygnału $\mathrm{X}(j\omega)$, tj.

$$\mathrm{AF}_x(\theta,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{X}\left(\omega+\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{X}^*\left(\omega-\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega \tag{2.97}$$

Funkcja AF, rozumiana jest jako czasowo-częstotliwościowa korelacja, wskazując stopień podobieństwa sygnału x(t) i jego czasowo-częstotliwościowej reprezentacji. W odróżnieniu od zmiennych czasu t oraz pulsacji ω jako wartości bezwzględnych, zmienne τ oraz θ są wartościami względnymi skojarzonymi odpowiednio z przesunięciem czasowym i częstotliwościowym. W literaturze spotkać można wyodrębnienie powyższej definicji jako wąskopasmowej funkcji nieoznaczoności [62], ze względu na klasyczne zastosowanie tego przekształcenia w wąskopasmowej radiolokacji powietrznej. Wprowadzenie dodatkowego współczynnika do definicji (2.96), mającego na celu zamodelowanie wpływu środowiska na rozchodzenia się sygnału, prowadzi do szerokopasmowej funkcji nieoznaczoności [62]:

$$\begin{aligned}\mathrm{AFW}_{x,y}(\theta,\tau)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right]\mathrm{y}^*\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta t}\mathrm{d}t\\ \mathrm{AFW}_{x,x}(\theta,\tau)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right]\mathrm{x}^*\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta t}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2.98}$$

W powyższym równaniu η oznacza współczynnik skalujący bliski 1, x(t) oraz y(t) reprezentują impulsowy sygnał odebrany i wysyłany. Dla y(t)=x(t) analizie jest poddawany tylko sygnał odebrany. Jako przykład znaczenia szerokopasmowej funkcji nieoznaczoności można podać jej zastosowanie w radiolokacyjnych systemach nawigacji morskiej. Skalowanie współczynnikiem η dotyczy w tym przypadku sygnału wysyłanego i ma na celu fizyczne modelowanie efektu Dopplera w środowisku wodnym [62].
Warto w tym miejscu wspomnieć, że w literaturze napotkać można na definicję funkcji nieoznaczoności opartą na odwrotnej transformacie Fouriera [19,21,25,29,30,40]:

$$\mathrm{AF}_x(\theta,\tau)=\mathrm{AF}_{x,x}(\theta,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x}^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta t}\mathrm{d}t \tag{2.99}$$

Przyjęcie takiej definicji ma pewien wpływ na sformułowanie uogólnionego równania reprezentacji czasowo-częstotliwościowej. W niniejszej pracy zdecydowano pozostać przy wprowadzonej przez Woodwarda, oryginalnej wersji równania definicyjnego funkcji nieoznaczoności (równanie (2.96)).

2.2.1. Właściwości funkcji nieoznaczoności

Poniżej podano kilka właściwości funkcji nieoznaczoności (2.96) tak, by możliwe było porównanie ich z własnościami transformacji Wignera [27,51]:

A. 1. zespolony charakter funkcji nieoznaczoności

W przeciwieństwie do auto-transformacji Wignera, która jest funkcją rzeczywistą, funkcja nieoznaczoności jest funkcją zespoloną i nie spełnia równania $\mathrm{AF}_x(\theta,\tau) \neq \mathrm{AF}_x^*(\theta,\tau)$. Dla sygnałów rzeczywistych funkcja ta spełnia Hermitowski warunek parzystości:

$$\mathrm{AF}_x(\theta,\tau) = \mathrm{AF}_{x^*}(-\theta,-\tau) \tag{2.100}$$

A. 2. przesunięcie w czasie

Jeśli $\mathrm{x}_1(t) = \mathrm{x}(t-t_0)$ to:

$$\mathrm{AF}_{x_1}(\theta,\tau) = \mathrm{AF}_x(\theta,\tau)e^{-j\theta t_0} \tag{2.101}$$

A. 3. przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

Jeśli $\mathrm{x}_1(t) = \mathrm{x}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ to:

$$\mathrm{AF}_{x_1}(\theta,\tau) = \mathrm{AF}_x(\theta,\tau)e^{j\omega_0\tau} \tag{2.102}$$

A. 4. skalowanie sygnału w dziedzinie czasu

Jeśli $\mathrm{x}_1(t) = \sqrt{|a|}\mathrm{x}(at)$ to:

$$\mathrm{AF}_{x_1}(\theta,\tau) = \mathrm{AF}_x\left(\frac{\theta}{a}, a\tau\right) \tag{2.103}$$

A. 5. funkcja nieoznaczoności sygnałów o ograniczonym czasie trwania

Ograniczenie sygnałów w czasie przejawia się ograniczeniem funkcji nieoznaczoności wzdłuż osi przesunięcia czasowego τ:

$$\mathrm{x}(t) = 0 \text{ dla } t \notin (t_a, t_b) \Rightarrow \mathrm{AF}_x(\theta,\tau) = 0 \text{ dla } |\tau| > (t_b - t_a) \tag{2.104}$$

A. 6. funkcja nieoznaczoności sygnałów o ograniczonym paśmie częstotliwości

Ograniczenie spektrum sygnałów przejawia się ograniczeniem funkcji nieoznaczoności wzdłuż osi opóźnienia Dopplerowskiego:

$$\mathrm{X}(\omega) = 0 \text{ dla } \omega \notin (\omega_a, \omega_b) \Rightarrow \mathrm{AF}_x(\theta,\tau) = 0 \text{ dla } |\theta| > (\omega_b - \omega_a) \tag{2.105}$$

Warto zauważyć, że w przypadku sygnałów analitycznych funkcja nieoznaczoności nie osiąga wartości zerowych dla ujemnej części osi przesunięcia częstotliwości.

A. 7. modulacja sygnału a postać funkcji nieoznaczoności

Przekształcenie AF sygnału zmodulowanego przejawia się splotem funkcji nieoznaczoności sygnału i fali nośnej w dziedzinie częstotliwości. Dla $x_m(t) = x(t)m_x(t)$ auto-funkcję nieoznaczoności można wyrazić równaniem:

$$\mathrm{AF}_{x_m}(\theta,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{AF}_x(\lambda,\tau)\mathrm{WD}_{m_x}(\theta\text{-}\lambda,\tau)\,\mathrm{d}\lambda \tag{2.106}$$

A. 8. biliniowa natura przekształcenia a sygnały wieloskładnikowe

Jeśli $\mathrm{x}_1(t) = \mathrm{x}_{11}(t) + \mathrm{x}_{12}(t)$ to:

$$\mathrm{AF}_{x_1}(\theta,\tau) = \mathrm{AF}_{x_{11}}(\theta,\tau) + \mathrm{AF}_{x_{12}}(\theta,\tau) + \mathrm{AF}_{x_{11},x_{12}}(\theta,\tau) + \mathrm{AF}_{x_{12},x_{11}}(\theta,\tau) \tag{2.107}$$

Podobnie jak w przypadku przekształcenia Wignera, funkcja nieoznaczoności sumy sygnałów jest sumą przekształceń składowych sygnału oraz składowych interferencyjnych. W odróżnieniu jednak od przekształcenia Wignera składniki własne umiejscowione będą w środku układu współrzędnych płaszczyzny (θ,τ), a położenie składników interferencyjnych zależeć będzie od wzajemnych przesunięć czasowo-częstotliwościowych. Dokładnie zagadnienie to omówione zostanie nieco później, kiedy podany zostanie przykład funkcji nieoznaczoności oraz transformacji Wignera-Ville'a sumy sygnałów Gaussowskich.

2.2.2. Funkcja nieoznaczoności a przekształcenie Wignera – dualność klas energetycznej i korelacyjnej

Równanie definicyjne symetrycznej funkcji nieoznaczoności (2.96) pozwala traktować je jako transformatę Fouriera sygnału $x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)y^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$, przyjmując jako zmienną całkowania t przy ustalonym parametrze τ. Stąd odwrotna transformata Fouriera pozwala wyrazić funkcję podcałkową jako:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{AF}_x(\theta,\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta t}\mathrm{d}\theta = \mathrm{x}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x}^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \tag{2.108}$$

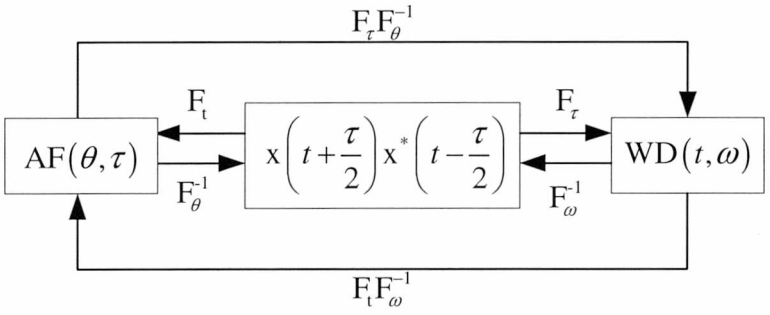
Podobne rozumowanie zastosowane do transformacji Wignera, gdzie zmienną całkowania jest τ przy ustalonym parametrze t, prowadzi do wyrażenia funkcji podcałkowej poprzez:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega = \mathrm{x}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x}^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \tag{2.109}$$

Wykorzystując powyższe równania możliwe jest znalezienie związku pomiędzy transformacją Wignera a funkcją nieoznaczoności [27,52]:

$$\begin{aligned}\mathrm{WD}_x(t,\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{AF}_x(\theta,\tau)\mathrm{e}^{j\theta t}\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau \\ \mathrm{AF}_x(\theta,\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{WD}_x(t,\omega)\mathrm{e}^{-j\theta t}\mathrm{e}^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2.110}$$

Równania powyższe wskazują na pewien dualny charakter przekształceń Wignera i funkcji nieoznaczoności, a co za tym idzie możliwość „przenoszenia" pomiędzy dziedzinami (t,ω) i (θ,τ). Wzajemne relacje pomiędzy transformacją Wignera a funkcją nieoznaczoności przedstawia poniższy rysunek [52] .



Rys. 2.11. Wzajemne relacje pomiędzy transformacją Wignera a funkcją nieoznaczoności.

Dla przybliżenia związków pomiędzy energetyczną a korelacyjną klasą przekształceń poniżej przedstawiono przykład transformacji Wignera-Ville'a i funkcji nieoznaczoności dwuskładnikowej funkcji Gaussa [25,57]:

$$\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}_1(t)+\mathrm{x}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_1^2}}\mathrm{e}^{\frac{(t-t_1)^2}{2\alpha_1^2}}\mathrm{e}^{j\omega_1 t} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_2^2}}\mathrm{e}^{\frac{(t-t_2)^2}{2\alpha_2^2}}\mathrm{e}^{j\omega_2 t} \tag{2.111}$$

Składniki powyższej funkcji skupione są odpowiednio wokół (t_1, ω_1) oraz (t_2, ω_2). Biliniowy charakter omawianych przekształceń objawi się istnieniem składowych własnych (ang. auto-terms) i krzyżowych (ang. cross-terms). Ich położenie na płaszczyznach czas-częstotliwość,

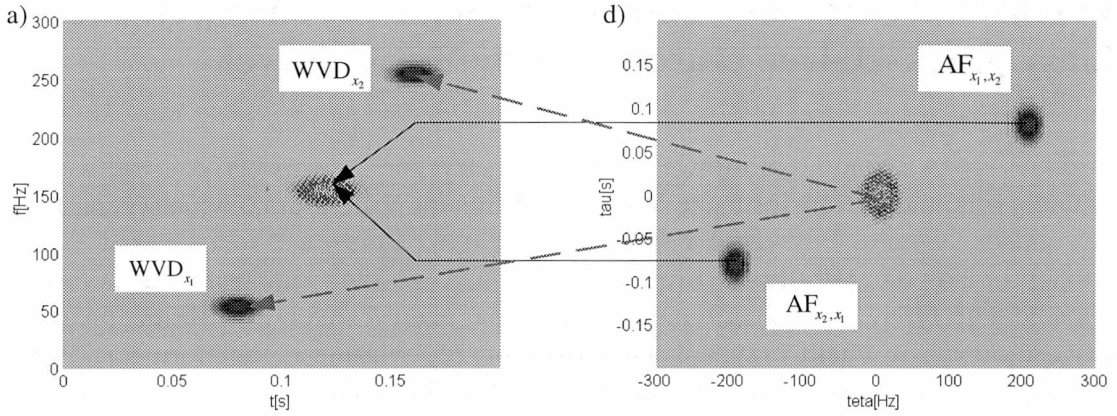
w przypadku transformacji Wignera-Ville'a, czy przesunięć czasowych i częstotliwościowych, dla funkcji nieznaczoności, można ściśle określić wprowadzając parametry opisujące wzajemne relacje pomiędzy punktami skupienia składników Gaussowskich [52]:

$$t_g = \frac{t_1 + t_2}{2}, \quad t_d = t_2 - t_1$$
$$\omega_g = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \omega_d = \omega_2 - \omega_1 \tag{2.112}$$

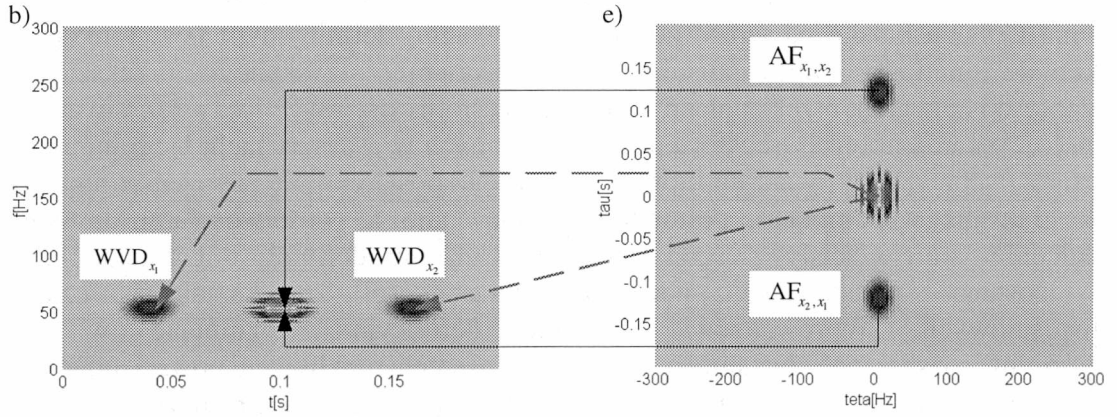
gdzie: t_g oraz ω_g wyznaczają środki geometryczne, a t_d oraz ω_d odstępy pomiędzy składnikami Gaussowskimi, odpowiednio na osi czasu i częstotliwości (pulsacji).
Zgodnie z przedstawionymi właściwościami dotyczącymi transformacji Wignera-Ville'a oraz funkcji nieoznaczoności sygnałów wieloskładnikowych, poszukiwane reprezentacje dla omawianego przykładu można opisać wyrażeniem:

$$\begin{aligned} \mathrm{WVD}_x(t,\omega) &= \mathrm{WVD}_{x_1}(t,\omega) + \mathrm{WVD}_{x_2}(t,\omega) + \mathrm{WVD}_{x_1,x_2}(t,\omega) + \mathrm{WVD}_{x_2,x_1}(t,\omega) \\ \mathrm{AF}_x(\theta,\tau) &= \mathrm{AF}_{x_1}(\theta,\tau) + \mathrm{AF}_{x_2}(\theta,\tau) + \mathrm{AF}_{x_1,x_2}(\theta,\tau) + \mathrm{AF}_{x_2,x_1}(\theta,\tau) \end{aligned} \tag{2.113}$$

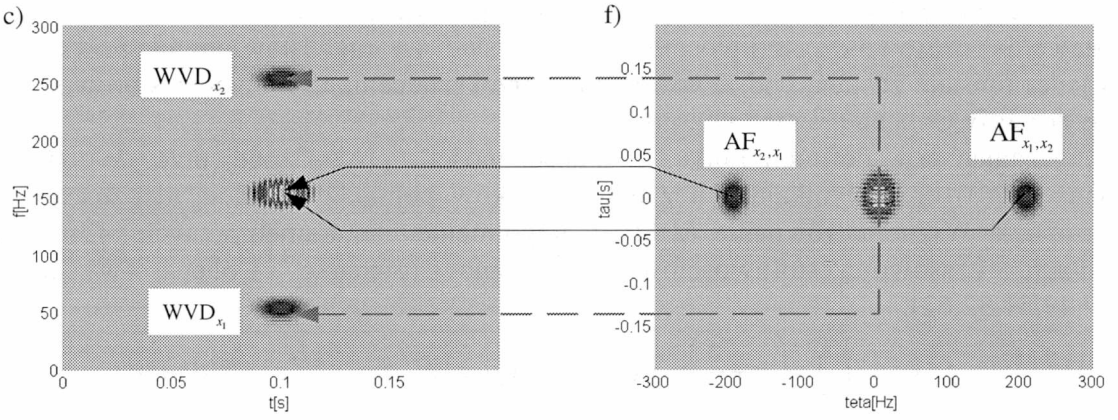
Rys. 2.12 przedstawia położenie składników własnych i krzyżowych kwadratu modułów WVD oraz AF dla różnych punktów skupienia składników Gaussowskich. Warto zauważyć, że przedstawienie sygnału na płaszczyźnie czas-częstotliwość (WVD) wskazuje bezpośrednio punkty skupienia składników sygnału, a składowe krzyżowe skupione są w geometrycznym środku (t_g,ω_g). Reprezentacja sygnału na płaszczyźnie przesunięć czasowych i częstotliwościowych (AF) skupia składniki sygnału w środku układu współrzędnych, wyraźnie wskazując wzajemne położenie między nimi (t_d, ω_d) oraz $(-t_d, -\omega_d)$.



Punkty skupienia składników Gaussowskich: (0.08s,50Hz), (0.16s,250Hz) - $t_g = 0.12s, f_g = 150Hz, t_d = 0.08s, f_d = 200Hz$



Punkty skupienia składników Gaussowskich: (0.04s,50Hz), (0.16s,50Hz) - $t_g = 0.1s, f_g = 50Hz, t_d = 0.12s, f_d = 0Hz$



Punkty skupienia składników Gaussowskich: (0.1s,50Hz), (0.1s,250Hz) - $t_g = 0.1s, f_g = 150Hz, t_d = 0s, f_d = 200Hz$

Rys. 2.12. Kwadrat modułu transformacji Wignera-Ville'a (WVD - a,b,c) oraz funkcji nieoznaczoności (AF –d,e,f) dla różnych punktów skupienia składników Gaussowskich.

2.3. Przekształcenia klasy Cohena - uogólnienie energetycznej klasy przekształceń czasowo-częstotliwościowych

Dotychczas, rozważając biliniowe nieparametryczne czasowo-częstotliwościowe reprezentacje, omówiono transformację Wignera i Wignera-Ville'a oraz symetryczną funkcję nieoznaczoności sygnału. Powyższe przekształcenia mają kluczowe znaczenie w obszarze transformacji czasowo-częstotliwościowych. Jak niedługo zostanie pokazane nie są to jedyne transformacje tego typu, ale wyznaczenie innych nieparametrycznych transformacji czasowo-częstotliwościowych w wielu przypadkach można oprzeć właśnie o transformację Wignera bądź funkcję nieoznaczoności. Intensywne prace w tym kierunku prowadził w latach 70-80 Leon Cohen, czego efektem było uogólnienie pewnej klasy biliniowych czasowo-częstotliwościowych reprezentacji, zwanej później klasą Cohena [19,20]. Główna idea uogólnienia Cohena bazuje na wprowadzeniu w równaniu definicyjnym tzw. funkcji jądra (ang. kernel function), odpowiedzialnej za właściwości uzyskanego przekształcenia, prowadzącej do znanych przekształceń czasowo-częstotliwościowych czy też stwarzającej możliwość uzyskania nowych transformacji o określonych właściwościach. Uogólnienie tego typu niesie za sobą szereg pytań, na których odpowiedź postarano się zawrzeć w niniejszym rozdziale. Jak już wspomniano, pomiędzy funkcją jądra a właściwościami uzyskanego przekształcenia istnieje ścisły związek. Po wprowadzeniu definicji uogólnienia Cohena podane zostaną podstawowe pożądane właściwości przekształceń czasowo-częstotliwościowych. Wprowadzone równanie definicyjne, rozumiane w sensie energetycznym, rozszerzone zostanie o wskazanie czterech możliwych postaci uogólnienia Cohena, w zależności od przyjętych definicji funkcji jądra, jak również od wyboru budowy równania, opartego na transformacji Wignera bądź też na funkcji nieoznaczoności sygnału. Dalszym krokiem będzie powiązanie postaci funkcji jądra z właściwościami uzyskanego przekształcenia czasowo-częstotliwościowego. W ślad za przedstawionymi przykładami funkcji jądra opisane zostaną podstawowe znane przekształcenia czasowo-częstotliwościowe należące do klasy Cohena oraz ich właściwości.

Pozostając przy definicji funkcji nieoznaczoności wprowadzonej przez Woodwarda (równanie (2.96)) oraz wynikających z niej związków pomiędzy funkcją nieoznaczoności i transformacją Wignera (równanie (2.110)), uogólnienie nieparametrycznych biliniowych reprezentacji czasowo-częstotliwościowych opisuje równanie Cohena w postaci [2,26,27,49,51,52,62]:

$$\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(u+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\phi_{ft}(\mu,\tau)\,e^{j2\pi\mu t}e^{-j2\pi f\tau}e^{-j2\pi\mu u}\,du\,d\tau\,d\mu$$

$$\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(u+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\,e^{j\theta t}e^{-j\omega\tau}e^{-j\theta u}\,du\,d\tau\,d\theta \qquad (2.114)$$

Jeśli przyjąć zmodyfikowaną definicję funkcji nieoznaczoności jako odwrotnej transformaty Fouriera chwilowej funkcji autokorelacji względem zmiennej t (równanie (2.99)), to w równaniu opisującym uogólnienie Cohena należy zmienić znak przy składnikach $\exp(j\theta t)$ oraz $\exp(-j\theta u)$ oraz uzupełnić wzór o współczynnik $1/2\pi$ [14,25,29,30,40]:

$$\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(u+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\phi_{ft}(\mu,\tau)\,e^{-j2\pi\mu t}e^{-j2\pi f\tau}e^{j2\pi\mu u}\,du\,d\tau\,d\mu$$

$$\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(u+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\,e^{-j\theta t}e^{-j\omega\tau}e^{j\theta u}\,du\,d\tau\,d\theta \qquad (2.115)$$

2.3.1. Pożądane właściwości reprezentacji czasowo-częstotliwościowych

W poprzednich rozdziałach, dotyczących transformacji Wignera oraz funkcji nieoznaczoności, przytoczono kilka podstawowych własności tych przekształceń. Niektóre z nich, takie jak zachowanie przesunięcia w czasie czy częstotliwości, są bardzo użyteczne. Omawiając klasę Cohena należy pamiętać, że wszystkie transformacje uzyskane drogą uogólnionego równania powinny spełniać właściwość przesunięcia czasowego i częstotliwościowego. Choć różne funkcje jądra mogą zaowocować uzyskaniem lub utratą szeregu innych właściwości, tak warunek przesunięć zostaje zachowany. Stąd w literaturze klasę Cohena określa się czasem mianem klasy zachowującej przesunięcia (ang „shift-invariant") [27]. W tabeli 2.1 , w całości zaczerpniętej z prac [27] i [62], zamieszczono szereg pożądanych własności przekształceń czasowo-częstotliwościowych. Warto być świadomym, że wybrana do badania konkretnego sygnału reprezentacja czasowo-częstotliwościowa nie musi spełniać wszystkich wymienionych własności. Zbiór własności, oprócz wspomnianej już własności zachowania przesunięcia czasowo-częstotliwościowego, można ograniczyć w zależności od celu przetwarzania sygnału i w dużej mierze od charakteru niestacjonarności badanego sygnału.

Tabela 2.1 Zestawienie pożądanych właściwości reprezentacji czasowo-częstotliwościowych rozumianych w sensie energetycznym [27,62]

Nr	Własność	Wyrażenie
P1	*rzeczywisty charakter przekształcenia*	$\mathrm{TF}_x^{(E)}(t,\omega)=\mathrm{TF}_x^{(E)*}(t,\omega)$
P2	*zachowanie przesunięcia czasowego*	Jeśli $\mathrm{x}_1(t)=\mathrm{x}(t-t_0)$ to: $\mathrm{TF}_{x_1}^{(E)}(t,\omega)=\mathrm{TF}_x^{(E)}(t-t_0,\omega)$
P3	*zachowanie przesunięcia częstotliwościowego*	Jeśli $\mathrm{x}_1(t)=\mathrm{x}(t)\exp(\mathrm{j}\omega_0 t)$ to: $\mathrm{TF}_{x_1}^{(E)}(t,\omega)=\mathrm{TF}_x^{(E)}(t,\omega-\omega_0)$
P4	*zachowanie skalowania w dziedzinie czasu*	Jeśli $\mathrm{x}_1(t)=\sqrt{a}\,\mathrm{x}(at)$ to: $\mathrm{TF}_{x_1}^{(E)}(t,\omega)=\mathrm{TF}_x^{(E)}\left(at,\frac{\omega}{a}\right)$
P5	*zachowanie ograniczenia w dziedzinie czasu*	Jeśli $\mathrm{x}(t)=0$ dla $t\notin(t_1,t_2)$ to: $\mathrm{TF}_x^{(E)}(t,\omega)=0$ dla $t\notin(t_1,t_2)$
P6	*zachowanie ograniczenia w dziedzinie częstotliwości*	Jeśli $\mathrm{X}(\omega)=0$ dla $\omega\notin(\omega_1,\omega_2)$ to: $\mathrm{TF}_x^{(E)}(t,\omega)=0$ dla $\omega\notin(\omega_1,\omega_2)$
P7	*reakcja na iloczyn sygnału (modulacja) splotem reprezentacji w dziedzinie częstotliwości*	Jeśli $\mathrm{x}_m(t)=\mathrm{x}(t)\,\mathrm{m}(t)$ to: $\mathrm{TF}_{x_m}^{(E)}(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{TF}_x^{(E)}(t,\lambda)\mathrm{TF}_m^{(E)}(\mathrm{t},\omega\text{-}\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$
P8	*reakcja na splot sygnału (przejście sygnału przez SLS) splotem reprezentacji w dziedzinie czasu*	Jeśli $\mathrm{x}_1(t)=\mathrm{x}(t)*\mathrm{h}(t)$ to: $\mathrm{TF}_{x_1}^{(E)}(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{TF}_x^{(E)}(\tau,\omega)\mathrm{TF}_h^{(E)}(\mathrm{t}\text{-}\tau,\omega)\,\mathrm{d}\tau$

Tabela 2.1 c.d Zestawienie pożądanych właściwości reprezentacji czasowo-częstotliwościowych rozumianych w sensie energetycznym [27,62]

Nr	Własność	Wyrażenie
P9	*spełnienie równości Moyala (unitarność)*	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{TF}_{x,y}^{(E)}(t,\omega)\mathrm{TF}_{f,g}^{(E)*}(t,\omega)\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega = (x,f)(y,g)^{*}$
P10	*zachowanie energii chwilowej (warunki brzegowe dla czasu)*	$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{TF}_{x}^{(E)}(t,\omega)\mathrm{d}\omega = \lvert\mathrm{x}(t)\rvert^{2}$
P11	*zachowanie widma gęstości energii (warunki brzegowe dla częstotliwości)*	$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{TF}_{x}^{(E)}(t,\omega)\mathrm{d}t = \lvert\mathrm{X}(\omega)\rvert^{2}$
P12	*zachowanie momentów czasowych n-tego rzędu*	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}t^{n}\mathrm{TF}_{x}^{(E)}(t,\omega)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}t^{n}\lvert\mathrm{x}(t)\rvert^{2}\mathrm{d}t$
P13	*zachowanie momentów częstotliwościowych n-tego rzędu*	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^{n}\mathrm{TF}_{x}^{(E)}(t,\omega)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\omega^{n}\lvert\mathrm{X}(\omega)\rvert^{2}\mathrm{d}\omega$
P14	*możliwość wyznaczenia częstotliwości chwilowej sygnału zespolonego*	$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\omega\mathrm{TF}_{x}^{(E)}(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{TF}_{x}^{(E)}(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\arg\{\mathrm{x}(t)\}$
P15	*możliwość wyznaczenia opóźnienia grupowego sygnału*	$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{TF}_{x}^{(E)}(t,\omega)\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{TF}_{x}^{(E)}(t,\omega)\,\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\omega}\arg\{\mathrm{X}(\omega)\}$
P16	*reakcja na zamianę zmiennych w transformacie Fouriera sygnału*	Jeśli $\mathrm{X}(j\omega) = F\{\mathrm{x}(t)\}$ a $\mathrm{y}(t) = \sqrt{a}\mathrm{X}(at)$ to: $\mathrm{TF}_{y}^{(E)}(t,\omega) = \mathrm{TF}_{x}^{(E)}\left(-\frac{\omega}{a}, at\right)$
P17	*reakcja na iloczyn sygnału z liniową modulacją częstotliwości*	Jeśli $x_1(t) = x(t)\exp\left\{j2\pi\frac{c}{2}t^{2}\right\}$ to: $\mathrm{TF}_{x_1}^{(E)}(t,f) = \mathrm{TF}_{x}^{(E)}(t, f-ct)$
P18	*reakcja na splot sygnału z liniową modulacją częstotliwości*	Jeśli $x_1(t) = x(t) * \exp\left\{j2\pi\frac{c}{2}t^{2}\right\}$ to: $\mathrm{TF}_{x_1}^{(E)}(t,f) = \mathrm{TF}_{x}^{(E)}\left(t-\frac{f}{a}, f\right)$

Wszystkie reprezentacje należące do klasy Cohena zachowują przesunięcie czasowe i częstotliwościowe (własności *P2,P3* , tabela 2.1). Jeśli dodatkowo jądro przekształcenia $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$ zależy tylko od iloczynu zmiennych θ i τ, czyli jest spełniony warunek $\phi_{\omega t}(\theta,\tau) = \hat{\phi}_{\omega t}(\theta\tau)$, to reprezentacje te spełniają również właściwość skalowania w dziedzinie czasu, zgodnie z właściwością *P4*.

2.3.2. Alternatywne postacie funkcji jądra

Poza przedstawioną podstawową definicją klasy Cohena (2.114) istnieją jeszcze cztery alternatywne postacie tego równania, które można otrzymać przez odpowiedni wybór zmiennych w funkcji jądra. Warto podkreślić, że pomiędzy różnymi postaciami funkcji jądra istnieją relacje oparte na jedno lub dwuwymiarowej transformacie Fouriera. Chcąc wyraźnie wskazać kierunki formułowania postaci równania klasy Cohena, funkcje jądra opisano dodatkowymi indeksami, które odpowiadają interpretacji ich zmiennych: t-czas, ω-pulsacja, τ-przesunięcie (opóźnienie) czasowe, θ-przesunięcie (opóźnienie) pulsacji. W tabeli 2.2 zebrano oznaczenia oraz wzajemne relacje pomiędzy tak zdefiniowanymi funkcjami jądra, zaczerpnięte z prac Hahna [25] oraz Hlawatsha [27].

Tabela 2.2 Cztery postacie funkcji jądra uogólnienia Cohena (2.114) i ich wzajemne relacje

Cztery alternatywne postacie funkcji jądra:			
Postać 1	*Postać 2*	*Postać 3*	*Postać 4*
częstotliwość-czas (pulsacja-czas)	czas-czas	czas-częstotliwość (czas-pulsacja)	częstotliwość-częstotliwość (pulsacja-pulsacja)
$\phi_{ft}(\mu,\tau)$ $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$	$\phi_{tt}(t,\tau)$	$\phi_{tf}(t,f)$ $\phi_{t\omega}(t,\omega)$	$\phi_{ff}(\mu,f)$ $\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)$
Wzajemne relacje pomiędzy różnymi postaciami funkcji jądra oparte na jednowymiarowej transformacie Fouriera:			
Postać 1 $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)=F_t\{\phi_{tt}(t,\tau)\}$ $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)=F_\omega^{-1}\{\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)\}$	$\phi_{ft}(\mu,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tt}(t,\tau)e^{-j2\pi\mu t}dt;$ $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tt}(t,\tau)e^{-j\theta t}dt;$	$\phi_{ft}(\mu,\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{ff}(\mu,f)e^{j2\pi f\tau}df$ $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$
Postać 2 $\phi_{tt}(t,\tau)=F_\theta^{-1}\{\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\}$ $\phi_{tt}(t,\tau)=F_\omega^{-1}\{\phi_{t\omega}(t,\omega)\}$	$\phi_{tt}(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{ft}(\mu,\tau)e^{j2\pi\mu t}d\mu;$ $\phi_{tt}(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)e^{j\theta t}d\theta;$	$\phi_{tt}(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tf}(t,f)e^{j2\pi f\tau}df$ $\phi_{tt}(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{t\omega}(t,\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$
Postać 3 $\phi_{t\omega}(t,\omega)=F_\theta^{-1}\{\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)\}$ $\phi_{t\omega}(t,\omega)=F_\omega\{\phi_{tt}(t,\tau)\}$	$\phi_{tf}(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{ff}(\mu,f)e^{j2\pi\mu t}d\mu;$ $\phi_{t\omega}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)e^{j\theta t}d\theta;$	$\phi_{tf}(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tt}(t,\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$ $\phi_{t\omega}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tt}(t,\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$
Postać 4 $\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)=F_t\{\phi_{t\omega}(t,\omega)\}$ $\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)=F_\tau\{\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\}$	$\phi_{ff}(\mu,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tf}(t,f)e^{-j2\pi\mu t}dt;$ $\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{t\omega}(t,\omega)e^{-j\theta t}dt;$	$\phi_{ff}(\mu,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{ft}(\mu,\tau)e^{-j2\pi f\tau}d$ $\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$

Tabela 2.2 c.d. Cztery postacie funkcji jądra uogólnienia Cohena (2.114) i ich wzajemne relacje

Cztery alternatywne postacie funkcji jądra:			
Postać 1	*Postać 2*	*Postać 3*	*Postać 4*
częstotliwość-czas (pulsacja-czas)	czas-czas	czas-częstotliwość (czas-pulsacja)	częstotliwość-częstotliwość (pulsacja-pulsacja)
$\phi_{ft}(\mu,\tau)$ $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$	$\phi_{tt}(t,\tau)$	$\phi_{tf}(t,f)$ $\phi_{t\omega}(t,\omega)$	$\phi_{ff}(\mu,f)$ $\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)$

Wzajemne relacje pomiędzy różnymi postaciami funkcji jądra oparte na dwuwymiarowej transformacie Fouriera :

Postać 1 $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)=F_t F_\omega^{-1}\{\phi_{t\omega}(t,\omega)\}$	$\phi_{ft}(\mu,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tf}(t,f)e^{j2\pi(f\tau-\mu t)}\mathrm{d}f\mathrm{d}t;$ $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{t\omega}(t,\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{e}^{-j\theta t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t$
Postać 2 $\phi_{tt}(t,\tau)=F_\theta^{-1}F_\omega^{-1}\{\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)\}$	$\phi_{tt}(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{ff}(\mu,f)e^{j2\pi(f\tau+\mu t)}\mathrm{d}f\mathrm{d}\mu;$ $\phi_{tt}(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)e^{j\omega\tau}e^{j\theta t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\theta$
Postać 3 $\phi_{t\omega}(t,\omega)=F_\theta^{-1}F_\tau\{\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\}$	$\phi_{tf}(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{ft}(\mu,\tau)e^{j2\pi(\mu t-f\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu;$ $\phi_{t\omega}(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)e^{-j\omega\tau}e^{j\theta t}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta$
Postać 4 $\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)=F_t F_\tau\{\phi_{tt}(t,\tau)\}$	$\phi_{ff}(\mu,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tt}(t,\tau)e^{-j2\pi(f\tau+\mu t)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t;$ $\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tt}(t,\tau)e^{-j\omega\tau}e^{-j\theta t}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$

Sprawdzenie:

Postać 1 $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)=F_t F_\omega^{-1}\{\phi_{t\omega}(t,\omega)\}$

$$\phi_{\omega t}(\theta,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{t\omega}(t,\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{e}^{-j\theta t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{t\omega}(t,\omega)e^{j\omega\tau}d\omega\right]e^{-j\theta t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tt}(t,\tau)e^{-j\theta t}dt=\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$$

bądź: $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)=F_\omega^{-1}F_t\{\phi_{t\omega}(t,\omega)\}$

$$\phi_{\omega t}(\theta,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{t\omega}(t,\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{e}^{-j\theta t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{t\omega}(t,\omega)e^{-j\theta t}dt\right]e^{j\omega\tau}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$$

Postać 2: $\phi_{tt}(t,\tau)=F_\theta^{-1}F_\omega^{-1}\{\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)\}$

$$\phi_{tt}(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)e^{j\omega\tau}e^{j\theta t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\theta=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega\right]e^{j\theta t}\mathrm{d}\theta=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)e^{j\theta t}\mathrm{d}\theta=\phi_{tt}(t,\tau)$$

bądź: $\phi_{tt}(t,\tau)=F_\omega^{-1}F_\theta^{-1}\{\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)\}$

$$\phi_{tt}(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)e^{j\omega\tau}e^{j\theta t}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)e^{j\theta t}\mathrm{d}\theta\right]e^{j\omega\tau}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{t\omega}(t,\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega=\phi_{tt}(t,\tau)$$

Postać 3: $\phi_{t\omega}(t,\omega)=F_{\theta}^{-1}F_{\tau}\left\{\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\right\}$

$$\phi_{t\omega}(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)e^{-j\omega\tau}e^{j\theta t}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{j\theta t}\mathrm{d}\theta=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{t\omega}(\theta,\omega)e^{j\theta t}\mathrm{d}\theta=\phi_{t\omega}(t,\omega)$$

bądź: $\phi_{t\omega}(t,\omega)=F_{\tau}F_{\theta}^{-1}\left\{\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\right\}$

$$\phi_{t\omega}(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)e^{-j\omega\tau}e^{j\theta t}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)e^{j\theta t}\mathrm{d}\theta\right]e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tt}(t,\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\phi_{t\omega}(t,\omega)$$

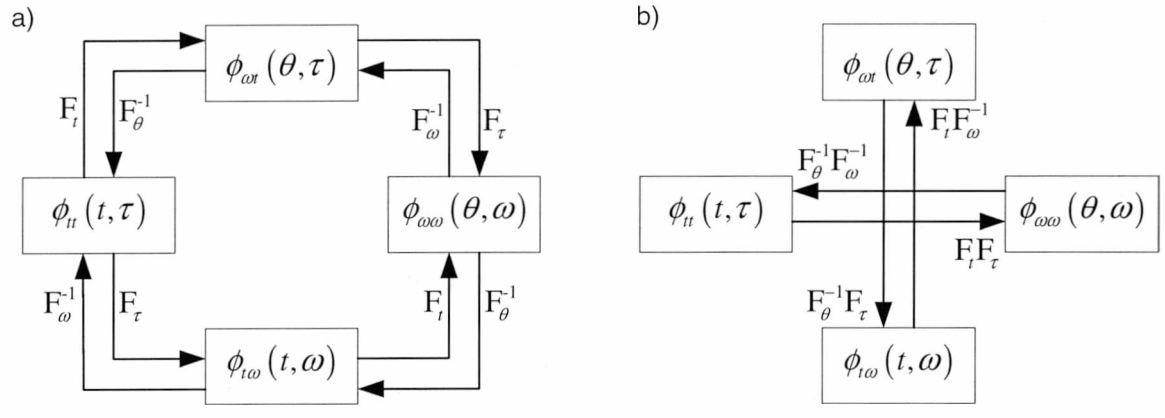
Postać 4: $\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)=F_{t}F_{\tau}\left\{\phi_{tt}(t,\tau)\right\}$

$$\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tt}(t,\tau)e^{-j\omega\tau}e^{-j\theta t}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tt}(t,\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{-j\theta t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{t\omega}(t,\omega)e^{-j\theta t}\mathrm{d}t=\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)$$

bądź: $\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)=F_{\tau}F_{t}\left\{\phi_{tt}(t,\tau)\right\}$

$$\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tt}(t,\tau)e^{-j\theta t}e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{tt}(t,\tau)e^{-j\theta t}\mathrm{d}t\right]e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)$$

Graficznie wzajemne relacje pomiędzy omawianymi czterema postaciami jądra przedstawia rysunek 2.13.



Rys. 2.13. Relacje pomiędzy czterema alternatywnymi postaciami funkcji jądra oparte na jednowymiarowej (a) i dwuwymiarowej transformacie Fouriera (b)

2.3.3. Alternatywne postacie równania Cohena

Nawiązując do odpowiednich relacji pomiędzy zmiennymi funkcji jądra, można zapisać główne równanie klasy Cohena w czterech alternatywnych postaciach: częstotliwość-czas (pulsacja-czas), czas-czas, czas-częstotliwość (czas-pulsacja) oraz częstotliwość-częstotliwość (pulsacja-pulsacja).

Postać 1 równania Cohena - częstotliwość-czas (pulsacja-czas):
Wychodząc bezpośrednio z równania (2.114) oraz przyjmując u jako pierwszą zmienną całkowania, otrzymujemy wyrażenie na $\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,f)$ bądź $\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,\omega)$, jako wynik dwuwymiarowej transformaty Fouriera iloczynu funkcji jądra $\phi_{ft}(\mu,\tau)$ i funkcji nieoznaczoności $\mathrm{AF}(\mu,\tau)$ lub odpowiednio $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$ i $\mathrm{AF}(\theta,\tau)$ [26,27,49,51,52,62]:

$$\begin{aligned}
\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,f) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{AF}(\mu,\tau)\phi_{ft}(\mu,\tau)\mathrm{e}^{j2\pi\mu t}\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu \\
\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{AF}(\theta,\tau)\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\mathrm{e}^{j\theta t}\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta \\
\text{gdzie: } \mathrm{AF}(\mu,\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x}^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-j2\pi\mu u}\mathrm{d}u \\
\mathrm{AF}(\theta,\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x}^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-j\theta u}\mathrm{d}u
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Iloczyn $\phi_{ft}(\mu,\tau)\mathrm{AF}(\mu,\tau)$ czy $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\mathrm{AF}(\theta,\tau)$ przyjęto nazywać uogólnioną funkcją nieoznaczoności (ang. generalized ambiguity function) [7,19,21].
Postać 2 równania Cohena – czas-czas:
W równaniu definicyjnym (2.114) , ze względu na zmienną μ (θ), można wyodrębnić podcałkowy człon:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{ft}(\mu,\tau)\mathrm{e}^{j2\pi\mu t}\mathrm{e}^{-j2\pi\mu u}\mathrm{d}\mu &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{ft}(\mu,\tau)\mathrm{e}^{j2\pi\mu(t-u)}\mathrm{d}\mu \\
\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\mathrm{e}^{j\theta t}\mathrm{e}^{-j\theta u}\mathrm{d}\theta &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\mathrm{e}^{j\theta(t-u)}\mathrm{d}\theta
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Nawiązując do tabeli 2.2 oraz możliwości zapisu funkcji jądra w postaci ϕ_{tt} za pomocą ϕ_{ft} ($\phi_{\omega t}$) jako $\phi_{tt}(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{ft}(\mu,\tau)\mathrm{e}^{j2\pi\mu t}\mathrm{d}\mu=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\mathrm{e}^{j\theta t}\mathrm{d}\theta$, równania powyższe można traktować jako $\phi_{tt}(t-u,\tau)$, skąd uzyskiwana jest druga alternatywna forma równania Cohena [26,27,49,51,52,62]:

$$\begin{aligned}
\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,f) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x}^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\phi_{tt}(t-u,\tau)\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau \\
\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x}^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\phi_{tt}(t-u,\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau
\end{aligned} \tag{2.118}$$

Jeśli dodatkowo przypomnimy wprowadzone wcześniej pojęcie lokalnej (chwilowej) symetrycznej funkcji autokorelacji $\mathrm{r}_t(\tau)=x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$, to omawianą alternatywną postać równania Cohena traktować możemy jako przekształcenie Fouriera względem zmiennej τ wygładzonej, chwilowej symetrycznej funkcji autokorelacji [27,62]:

$$\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{R}_x(t,\tau)\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{R}_x(t,\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$\text{gdzie: } R_x(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x}^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\phi_{tt}(t-u,\tau)\mathrm{d}u \tag{2.119}$$

$$\phi_{tt}(t-u,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{ft}(\mu,\tau)\mathrm{e}^{j2\pi\mu(t-u)}\mathrm{d}\mu=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{ft}(\mu,\tau)\mathrm{e}^{j2\pi\mu t}\mathrm{e}^{-j2\pi\mu u}\mathrm{d}\mu$$

$$\text{bądź: } \phi_{tt}(t-u,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\mathrm{e}^{j\theta(t-u)}\mathrm{d}\theta=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\mathrm{e}^{j\theta t}\mathrm{e}^{-j\theta u}\mathrm{d}\theta$$

Postać 3 równania Cohena – czas-częstotliwość (czas-pulsacja):

Wykorzystując relacje $\phi_{tf}(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{ft}(\mu,\tau)e^{j2\pi(\mu t-f\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu$ oraz $\phi_{t\omega}(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)e^{-j\omega\tau}e^{j\theta t}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta$, reprezentację klasy Cohena można również przedstawić jako wyniki dwuwymiarowego splotu reprezentacji Wignera (Wignera-Ville'a) sygnału z funkcją jądra ϕ_{tf} bądź $\phi_{t\omega}$, jako [26,27,49,51,52,62]:

$$\begin{aligned}\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,f)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(u,\lambda)\phi_{tf}(t-u,f-\lambda)\mathrm{d}u\mathrm{d}\lambda=\mathrm{WD}_x(t,f)*\phi_{tf}(t,f)\\ \mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(u,\eta)\phi_{t\omega}(t-u,\omega-\eta)\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta=\mathrm{WD}_x(t,\omega)*\phi_{tf}(t,\omega)\end{aligned} \tag{2.120}$$

Postać 4 równania Cohena – częstotliwość-częstotliwość (pulsacja-pulsacja):
Ostatnia alternatywna forma równania Cohena oparta jest na związku pomiędzy funkcją jądra w postaci ϕ_{ft} czy też $\phi_{\omega t}$ a funkcją jądra wyrażoną w formie ϕ_{ff} czy też $\phi_{\omega\omega}$, w oparciu o widmo sygnału X($j\omega$) [27,49,51]:

$$\begin{aligned}\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,f)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}X\left(\lambda-\frac{\mu}{2}\right)X^*\left(\lambda-\frac{\mu}{2}\right)\phi_{ff}(\mu,f-\lambda)\mathrm{e}^{j2\pi\mu t}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\\ \mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}X\left(\eta-\frac{\theta}{2}\right)X^*\left(\eta-\frac{\theta}{2}\right)\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega-\eta)\mathrm{e}^{j\theta t}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{2.121}$$

Należy podkreślić, że wszystkie omówione postacie są jedynie alternatywną formą głównego równania definicyjnego (2.114) i opisują tę samą rodzinę przekształceń czasowo-częstotliwościowych. Wskazanie jednak różnych możliwości opisu klasy Cohena pozwala zastanowić się nad wyborem postaci, które może być najbardziej efektywna np. z punktu widzenia budowy algorytmu przetwarzania sygnału, możliwości optymalnego, adaptacyjnego doboru kształtu funkcji jądra $\phi_{ft}(\mu,\tau)$ czy też $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$ w zależności od rodzaju sygnału i związaną z tym redukcją pasożytniczych interferencji [6,14,29].

Ocenę numeryczną omawianych postaci dokonano w pracach [3,7,62]. Wyznaczenie reprezentacji Cohena bezpośrednio z równania definicyjnego (2.114) jest sposobem najmniej

efektywnym, wymagającym wykonania trzech transformat Fouriera i nie stwarzającym możliwości adaptacyjnej optymalizacji funkcji jądra. Postać 1 (równanie (2.116)), choć złożona obliczeniowo, dzięki właściwościom funkcji nieoznaczoności daje możliwość adaptacyjnej analizy. Składowe własne sygnałów występujące w funkcji nieoznaczoności $\mathrm{AF}(\theta,\tau)$ skoncentrowane są w środku układu współrzędnych ($\theta=0,\tau=0$), a składowe interferencyjne w pewnym oddaleniu od niego. Stąd możliwe jest takie kształtowanie funkcji jądra $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$ by przepuszczało ono z funkcji $\mathrm{AF}(\theta,\tau)$ jedynie składowe własne sygnału przy jednoczesnym tłumieniu interferencyjnych składowych wzajemnych [3,4,5,31].

Niniejsza rozprawa nie obejmuje swoim zakresem problemu automatycznej adaptacji funkcji jądra do rodzaju sygnału, a kładzie nacisk na możliwość wykorzystania znanych reprezentacji czasowo-częstotliwościowych, a więc o określonych funkcjach jądra, do analizy niestacjonarnych sygnałów elektrycznych. W związku z powyższym bardzo interesująca wydaje się być postać 2, traktująca reprezentację jako przekształcenie Fouriera wygładzonej wersji chwilowej funkcji autokorelacji, równanie (2.119). Przy zadanej funkcji jądra $\phi_{ft}(\mu,\tau)$ czy $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$ jej alternatywna postać $\phi_{tt}(t,\tau)$ obliczana jest tylko raz na początku i jest stała podczas obliczeń. Kolejnym krokiem tej metody jest wyznaczenie chwilowej funkcji autokorelacji $\mathrm{r}_t(\tau)=x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$, a następnie jej wersji wygładzonej $\mathrm{R}_x(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x}^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\phi_{tt}(t-u,\tau)\,\mathrm{d}u$, uśrednionej względem t, by ostatecznie wynikową reprezentację czasowo-częstotliwościową uzyskać jako transformatę Fouriera $\mathrm{R}_x(t,\tau)$ względem zmiennej τ. Postać ta wydaje się być najwygodniejsza z punktu widzenia budowy algorytmu wyznaczania reprezentacji klasy Cohena.

I wreszcie postać 3, równanie (2.120), bazująca na dwuwymiarowym splocie reprezentacji Wignera z funkcją jądra w postaci ϕ_{tf} bądź $\phi_{t\omega}$, gdzie $\phi_{tf}(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{ft}(\mu,\tau)e^{j2\pi(\mu t-f\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu$ czy też $\phi_{t\omega}(t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)e^{-j\omega\tau}e^{j\theta t}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta$, przynosi jasny kierunek co do możliwości redukcji wpływu składowych interferencyjnych na uzyskaną reprezentację czasowo-częstotliwościową. Ponieważ składowe interferencyjne mają charakter oscylacyjny, istnieje możliwość ich wygładzenia czy też stłumienia poprzez odpowiedni dobór funkcji jądra. Kierunek ten jest na tyle istotny, że w literaturze można napotkać na własną nazwę omawianej postaci 3, jako wygładzonej reprezentacji Wignera (ang. smoothed Wigner distribution) [27,46,62].

2.3.4. Właściwości funkcji jądra a właściwości reprezentacji

Po przedstawieniu uogólnionej idei biliniowych przekształceń czasowo-częstotliwościowych nasuwa się pytanie o wpływ funkcji jądra na właściwości uzyskanej transformacji. Wcześniej, w tabeli 2.1, zestawiono szereg pożądanych właściwości jakie powinny spełniać reprezentacje czasowo-częstotliwościowe. Należy być jednak świadomym, że obciążenie dodatkową funkcją może spowodować utratę niektórych z nich. Z drugiej jednak strony funkcja jądra przynosi redukcję składowych krzyżowych. Wybór zatem funkcji jądra jest pewnego rodzaju

„transakcją wiązaną", gdzie przedmiotem sporu jest rodzaj niestacjonarności występujący w badanym sygnale i jakość uzyskanej reprezentacji. Niemniej jednak warto zastanowić się, jakie warunki musi spełniać funkcja jądra, by dana właściwość transformacji została zachowana. Tabela 2.3 zawiera zestawienie warunków dla funkcji jądra, powodujących zachowanie omówionych wcześniej, pożądanych właściwości transformacji czasowo-częstotliwościowych.

Tabela 2.3 Zestawienie warunków dla funkcji jądra, powodujących zachowanie pożądanych właściwości transformacji czasowo-częstotliwościowych

Nr	Właściwość transformacji (tabela 2.1)	Warunek dla funkcji jądra
P1	*rzeczywisty charakter przekształcenia*	$\phi^{*}_{\omega t}(\theta,\tau)=\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$
P2	*zachowanie przesunięcia czasowego*	brak warunku, właściwość zawsze zachowana
P3	*zachowanie przesunięcia częstotliwościowego*	brak warunku, właściwość zawsze zachowana
P4	*zachowanie skalowania w dziedzinie czasu*	$\phi_{\omega t}\left(\frac{\theta}{a},a\tau\right)=\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$, dla $a\neq 0$
P5	*zachowanie ograniczenia w dziedzinie czasu*	$\phi_{tt}(t,\tau)=0$ dla $\left\|\frac{t}{\tau}\right\|>\left(\frac{1}{2}\right)$, tj. $t\notin\left(-\frac{1}{2}\tau,\frac{1}{2}\tau\right)$
P6	*zachowanie ograniczenia w dziedzinie częstotliwości*	$\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)=0$ dla $\left\|\frac{\omega}{\theta}\right\|>\left(\frac{1}{2}\right)$, tj. $\omega\notin\left(-\frac{1}{2}\theta,\frac{1}{2}\theta\right)$
P7	*reakcja na iloczyn sygnału (modulacja) splotem reprezentacji w dziedzinie częstotliwości*	$\phi_{\omega t}(\theta_1+\theta_2,\tau)=\phi_{\omega t}(\theta_1,\tau)\phi_{\omega t}(\theta_2,\tau)$
P8	*reakcja na splot sygnału (przejście sygnału przez SLS) splotem reprezentacji w dziedzinie czasu*	$\phi_{\omega t}(\theta,\tau_1+\tau_2)=\phi_{\omega t}(\theta,\tau_1)\phi_{\omega t}(\theta,\tau_2)$
P9	*spełnienie równości Moyala (unitarność)*	$\left\|\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\right\|=1$
P10	*zachowanie energii chwilowej (warunki brzegowe dla czasu)*	$\phi_{\omega t}(\theta,0)=1$
P11	*zachowanie widma gęstości energii (warunki brzegowe dla częstotliwości)*	$\phi_{\omega t}(0,\tau)=1$
P12	*zachowanie momentów czasowych n-tego rzędu*	$\phi_{\omega t}(\theta,0)=1$
P13	*zachowanie momentów częstotliwościowych n-tego rzędu*	$\phi_{\omega t}(0,\tau)=1$
P14	*możliwość wyznaczenia częstotliwości chwilowej sygnału zespolonego*	$\begin{cases}\phi_{\omega t}(\theta,0)=1\\ \frac{\partial}{\partial\tau}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\Big\|_{\tau=0}=0\end{cases}$
P15	*możliwość wyznaczenia opóźnienia grupowego sygnału*	$\begin{cases}\phi_{\omega t}(0,\tau)=1\\ \frac{\partial}{\partial\theta}\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\Big\|_{\theta=0}=0\end{cases}$

Tabela 2.3 c.d. Zestawienie warunków dla funkcji jądra powodujących zachowanie pożądanych właściwości transformacji czasowo-częstotliwościowych

Nr	Właściowść transformacji (tabela 2.1)	Warunek dla funkcji jądra
P16	*reakcja na zamianę zmiennych w transformacie Fouriera sygnału*	$\phi_{\omega t}\left(c\tau,-\frac{\theta}{c}\right)=\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$, dla $c\neq 0$
P17	*reakcja na iloczyn sygnału z liniową modulacją częstotliwości*	$\phi_{\omega t}(\theta-c\tau,\tau)=\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$, dla $c\neq 0$
P18	*reakcja na splot sygnału z liniową modulacją częstotliwości*	$\phi_{\omega t}\left(\theta,\tau-\frac{\theta}{c}\right)=\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$

2.3.5. Pseudo – reprezentacje klasy Cohena oraz ich wersje wygładzone

Kończąc omawianie rodziny przekształceń Cohena warto również odwołać się do wspomnianego już przy okazji pseudo-reprezentacji Wignera i jej wersji wygładzonej problemu obciążenia sygnału funkcją wygładzającą i splotu otrzymanej reprezentacji z dodatkową funkcją wygładzającą. Wskazane relacje pomiędzy funkcją wagi sygnału a wygładzaniem w dziedzinie częstotliwości oraz splotem reprezentacji z dodatkową funkcją wygładzającą a wygładzaniem w dziedzinie czasu, można również przenieść na grunt uogólnienia Cohena, wprowadzając pojęcia pseudo-reprezentacji klasy Cohena bądź jej wersji wygładzonej. Należy jednak ponownie podkreślić, że omawiane podejście ma szczególne znaczenie z punktu widzenia tłumienia składowych krzyżowych i wiąże się ze świadomą zgodą na pogorszenie rozdzielczości czasowej bądź częstotliwościowej. W przypadku wykorzystania funkcji jądra, której podstawowym zadaniem jest utrzymanie pożądanych własności przekształcenia przy jednoczesnym tłumieniu składowych krzyżowych, wprowadzenie dodatkowych funkcji wygładzających może okazać się niepotrzebne. Niemniej jednak ujmując całościowo problematykę biliniowych przekształceń czasowo-częstotliwościowych, zagadnienie pseudo-reprezentację klasy Cohena bądź jej wersji wygładzonej powinno zostać poruszone.

Uogólnione równanie pseudo-reprezentacji klasy Cohena opisuje poniższe wyrażenie:

$$\mathrm{PTFC}_x^{(E)}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{x}^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{h}\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{h}^*\left(-\frac{\tau}{2}\right)\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\mathrm{e}^{j\theta t}\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{e}^{-j\theta u}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta \tag{2.122}$$

Obciążenie sygnału dodatkową funkcją okna $\mathrm{h}(\tau)$ ujawni się więc splotem w dziedzinie częstotliwości, którego efektem jest dodatkowe uśrednianie reprezentacji wzdłuż osi częstotliwości:

$$\mathrm{PTFC}_x^{(E)}(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{TFC}_x^{(E)}(t,\eta)\mathrm{TFC}_h^{(E)}(0,\omega-\eta)\mathrm{d}\eta \tag{2.123}$$

Dodatkowe wygładzenie wzdłuż osi czasu uzyskane jest przez splot w dziedzinie czasu pseudo-reprezentacji z dodatkową funkcją okna $g(t)$:

$$\mathrm{SPTFC}_x^{(E)}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{g}(t-u)\,\mathrm{PTFC}_x^{(E)}(u,\omega)\mathrm{d}u \tag{2.124}$$

Wykorzystując widmo funkcji wagi $\mathrm{H}(\omega)$ powyższe równanie można wyrazić jako:

$$\mathrm{SPTFC}_x^{(E)}(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)\,\mathrm{H}(\omega-\eta)\,\mathrm{TFC}_x^{(E)}(u,\eta)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta \qquad (2.125)$$

Podejście to nawiązuje do omawianej już w przypadku transformacji Wignera możliwości niezależnego wyboru stopnia uśrednienia względem częstotliwości i czasu, bowiem wygładzanie oparte jest na splocie z dwuwymiarową funkcją będącą iloczynem niezależnych, jednowymiarowych funkcji $g(t)H(\omega)$. Ścisły związek pomiędzy rozdzielczością w czasie i rozdzielczością w częstotliwości, tak charakterystyczny dla krótkoczasowej transformaty Fouriera, zostaje tu przerwany.

Ostatnią kwestią istotną z punktu widzenia tłumienia składowych krzyżowych jest wstępne przetransformowanie sygnałów rzeczywistych do zespolonej postaci analitycznej podobnie, jak w przypadku transformacji Wignera-Ville'a. Wcześniej podkreślono już parzystość widma sygnałów rzeczywistych oraz zerowe wartości widma postaci analitycznej w ujemnej części osi częstotliwości. Zatem uogólnione równanie Cohena dla sygnałów analitycznych będzie charakteryzować się redukcją składowych krzyżowych pomiędzy składnikami dodatniej i ujemnej części osi częstotliwości. Ponownie należy podkreślić, że wspomniane podejście może okazać się niekorzystne w przypadku reprezentacji sygnałów zespolonych. W obszarze analizy sygnałów rzeczywistych, wstępne przygotowanie sygnału w postaci analitycznej należy uznać za wskazane.

2.3.6. Przekształcenia klasy Cohena, ich funkcje jądra oraz właściwości

By podsumować przedstawione rozważania, w tabelach 2.4, 2.5, 2.6 zebrano funkcje jądra wybranych reprezentacji czasowo-częstotliwościowych w czterech alternatywnych postaciach, wyrażenia definiujące wybrane reprezentacje czasowo-częstotliwościowe oraz właściwości uzyskanych reprezentacji [27,51,62]. Celem takiego usystematyzowania jest chęć katalogowego wręcz zestawienia różnych reprezentacji z klasy Cohena, co usprawnić ma porównanie ich właściwości czy uwypuklić podstawowe różnice.

Tabela 2.4 Cztery alternatywne postacie funkcji jądra (tabela 2.2) wybranych reprezentacji klasy Cohena

L.p.	Transformacja	Funkcja jądra Postać 1 - $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$	Funkcja jądra Postać 2 - $\phi_{tt}(t,\tau)$	Funkcja jądra Postać 3 - $\phi_{t\omega}(t,\omega)$	Funkcja jądra Postać 4 - $\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)$
1	Wigner (WD)	1	$\delta(t)$	$\delta(t)\delta(\omega)$	$\delta(\omega)$
2	Uogólniony Wigner (GWD)	$e^{j\alpha\theta\tau}$	$\delta(t+\alpha\tau)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert}e^{j\frac{\omega}{\alpha}t}$	$\delta(\omega-\alpha\theta)$
3	Uogólniony Wigner o wartościach rzeczywistych (RGWD)	$\cos(\alpha\theta\tau)$	$\frac{1}{2}\left[\delta(t+\alpha\tau)+\delta(t-\alpha\tau)\right]$	$\frac{1}{\alpha}\cos\left(\frac{\omega}{\alpha}t\right)$	$\frac{1}{2}\left[\delta(\omega-\alpha\theta)+\delta(\omega+\alpha\theta)\right]$
4	Pseudo-Wigner (PWD)	$h\left(\frac{\tau}{2}\right)h^*\left(-\frac{\tau}{2}\right)$	$\delta(t)h\left(\frac{\tau}{2}\right)h^*\left(-\frac{\tau}{2}\right)$	$\delta(t)\,\mathrm{WD}_h(0,\omega)$	$\mathrm{WD}_h(0,\omega)$
5	Wygładzony pseudo-Wigner (SPWD)	$h\left(\frac{\tau}{2}\right)h^*\left(-\frac{\tau}{2}\right)G(\theta)$	$h\left(\frac{\tau}{2}\right)h^*\left(-\frac{\tau}{2}\right)g(t)$	$\mathrm{WD}_h(0,\omega)\,g(t)$	$\mathrm{WD}_h(0,\omega)G(\omega)$
6	Levin (LD)	$e^{j\pi\mu\lvert\tau\rvert}=e^{j(\theta/2)\lvert\tau\rvert}$; $\theta=2\pi\mu,\omega=2\pi f$	$\delta\left(t+\frac{\lvert\tau\rvert}{2}\right)$	$F_\tau\{\phi_{tt}(t,\tau)\}$	$\frac{1}{2}\left(\delta\left(f+\frac{\mu}{2}\right)+\delta\left(f-\frac{\mu}{2}\right)\right)+$ $-\frac{1}{2}\left(j\frac{\mu}{\pi\left(f^2-\mu^2/4\right)}\right)$
7	Page (PD)	$e^{-j\pi\mu\lvert\tau\rvert}=e^{-j(\theta/2)\lvert\tau\rvert}$; $\theta=2\pi\mu,\omega=2\pi f$	$\delta\left(t-\frac{\lvert\tau\rvert}{2}\right)$	$F_\tau\{\phi_{tt}(t,\tau)\}$	$\frac{1}{2}\left(\delta\left(f+\frac{\mu}{2}\right)+\delta\left(f-\frac{\mu}{2}\right)\right)+$ $+\frac{1}{2}\left(j\frac{\mu}{\pi\left(f^2-\mu^2/4\right)}\right)$
8	Rihaczek (RD)	$e^{-j2\pi\mu\tau}=e^{-j\theta\tau}$; $\theta=2\pi\mu,\omega=2\pi f$	$\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$	$2e^{-j4\pi tf}=2e^{-j2\omega t}$	$\delta\left(\omega+\frac{\theta}{2}\right)$

Tabela 2.4 c.d. Cztery alternatywne postacie funkcji jądra (tabela 2.2) wybranych reprezentacji klasy Cohena

L.p.	Transformacja	Funkcja jądra Postać 1 - $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$	Funkcja jądra Postać 2 - $\phi_{tt}(t,\tau)$	Funkcja jądra Postać 3 - $\phi_{t\omega}(t,\omega)$	Funkcja jądra Postać 4 - $\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)$
9	Margineau-Hill (MHD)	$\cos(\pi\tau\mu)=\cos\left(\frac{\theta}{2}\tau\right);$ $\theta=2\pi\mu,\omega=2\pi f$	$\frac{1}{2}\left[\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$	$2\cos(4\pi tf)=2\cos(2\omega t)$	$\frac{1}{2}\left[\delta\left(\omega-\frac{\theta}{2}\right)+\delta\left(\omega+\frac{\theta}{2}\right)\right]$
10	Born-Jordan (BJD)	$\frac{\sin(\pi\mu\tau)}{\pi\mu\tau}=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\tau\right)}{\frac{\theta}{2}\tau};$ $\theta=2\pi\mu,\omega=2\pi f$	$\begin{cases}\frac{1}{\lvert\tau\rvert}, \text{ dla } \left\lvert\frac{t}{\tau}\right\rvert<\frac{1}{2} \text{ tj. } t\in\left(-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right)\\ 0 \text{ , dla } \left\lvert\frac{t}{\tau}\right\rvert>\frac{1}{2} \text{ tj. } t\notin\left(-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right)\end{cases}$	$F_\tau\{\phi_{tt}(t,\tau)\}$	$\begin{cases}\frac{1}{\lvert\theta\rvert}, \text{ dla } \left\lvert\frac{\omega}{\theta}\right\rvert<\frac{1}{2} \text{ tj. } t\in\left(-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right)\\ 0 \text{ , dla } \left\lvert\frac{\omega}{\theta}\right\rvert>\frac{1}{2} \text{ tj. } t\notin\left(-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}\right)\end{cases}$
11	Zhao-Atlas-Marks (ZAMD)	$h(\tau)\lvert\tau\rvert\frac{\sin(\pi\mu\tau)}{\pi\mu\tau}=$ $=h(\tau)\lvert\tau\rvert\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\tau\right)}{\frac{\theta}{2}\tau};$ $\theta=2\pi\mu,\omega=2\pi f$	$\begin{cases}h(\tau), \text{ dla } \left\lvert\frac{t}{\tau}\right\rvert<\frac{1}{2} \text{ tj. } t\in\left(-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right)\\ 0 \text{ , dla } \left\lvert\frac{t}{\tau}\right\rvert>\frac{1}{2} \text{ tj. } t\notin\left(-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right)\end{cases}$	$F_\tau\{\phi_{tt}(t,\tau)\}$	$F_\tau\{\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\}$
12	Spektrogram (SPEC)	$\mathrm{AF}_h(-\theta,-\tau)$	$h\left(-t-\frac{\tau}{2}\right)h^*\left(-t+\frac{\tau}{2}\right)$	$WD_h(-t,-\omega)$	$H\left(-\omega-\frac{\theta}{2}\right)H\left(-\omega+\frac{\theta}{2}\right),$ $H(j\omega)=F_t\{h(t)\}$

Tabela 2.4 c.d. Cztery alternatywne postacie funkcji jądra (tabela 2.2) wybranych reprezentacji klasy Cohena

L.p.	Transformacja	Funkcja jądra Postać 1 - $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$	Funkcja jądra Postać 2 - $\phi_{tt}(t,\tau)$	Funkcja jądra Postać 3 - $\phi_{t\omega}(t,\omega)$	Funkcja jądra Postać 4 - $\phi_{\omega\omega}(\theta,\omega)$
13	Choi-Williams (CWD)	$e^{-\frac{(\theta\tau)^2}{\sigma}}$	$\sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}}\frac{1}{\lvert\tau\rvert}e^{-\frac{\sigma}{4}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\lvert q\rvert}e^{-\frac{\sigma}{4}\left(\frac{t}{q}\right)^2}e^{-j\omega q}\mathrm{d}q$	$\sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}}\frac{1}{\lvert\theta\rvert}e^{-\frac{\sigma}{4}\left(\frac{\omega}{\theta}\right)^2}$
14	Uogólniony Choi-Williams (GCWD)	$e^{-\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{2N}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{2M}}$	$F_\theta^{-1}\{\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\}$ np. dla N=1: $\frac{\mu_0}{2\sqrt{\pi}}\left\lvert\frac{\tau_0}{\tau}\right\rvert^M e^{-\frac{\mu_0^2\tau_0^{2M}t^2}{4\tau^{2M}}}$; $\theta=2\pi\mu;\theta_0=2\pi\mu_0$	$F_\tau\{\phi_{tt}(t,\tau)\}$	$F_\tau\{\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\}$ np. dla M=1: $\frac{\tau_0}{2\sqrt{\pi}}\left\lvert\frac{\mu_0}{\mu}\right\rvert^M e^{-\frac{\tau_0^2\mu_0^{2N}f^2}{4\mu^{2N}}}$; $\theta=2\pi\mu,\ \theta_0=2\pi\mu_0$
15	Nutall (ND)	$e^{\left\{-\pi\left[a^2+b^2+2rab\right]\right\}}$; $a=\frac{\theta}{\theta_0},b=\frac{\tau}{\tau_0}$	$F_\theta^{-1}\{\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\}$	$F_\tau\{\phi_{tt}(t,\tau)\}$	$F_\tau\{\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\}$
16	Costa-Boudreaux-Bartels (CBBD)	$e^{\left\{-\pi\left[(A+B+C)^2\right]^\lambda\right\}}$; $a=\frac{\theta}{\theta_0},b=\frac{\tau}{\tau_0}$ $A=a^{2\alpha}b^2,B=a^2b^{2\alpha}$ $C=2r\left((ab)^\beta\right)^\gamma$	$F_\theta^{-1}\{\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\}$	$F_\tau\{\phi_{tt}(t,\tau)\}$	$F_\tau\{\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\}$
17	Butterworth (BUD)	$\frac{1}{1+\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{2N}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{2M}}$	$F_\theta^{-1}\{\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\}$	$F_\tau\{\phi_{tt}(t,\tau)\}$	$F_\tau\{\phi_{\omega t}(\theta,\tau)\}$

Tabela 2.5 Wybrane reprezentacje z klasy Cohena i ich wyrażenia

L.p.	Transformacja	Wyrażenie $TFC_x^{(E)}(t,f)$ bądź $TFC_x^{(E)}(t,\omega)$, gdzie $\omega = 2\pi f, \theta = 2\pi\mu$
1	Wigner (WD)	$\mathrm{WD}_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$ $\mathrm{WD}_x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$
2	Uogólniony Wigner (GWD)	$\mathrm{GWD}_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t+\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\tau\right)x^*\left(t-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\tau\right)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$ $\mathrm{GWD}_x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t+\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\tau\right)x^*\left(t-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\tau\right)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$
3	Uogólniony Wigner o wartościach rzeczywistych (RGWD)	$\mathrm{RGWD}_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(2\pi\mu\alpha\tau)\,\mathrm{AF}_x(\mu,\tau)e^{j2\pi(\mu t-f\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu$ $\mathrm{RGWD}_x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\alpha\theta\tau)\,\mathrm{AF}_x(\theta,\tau)e^{j\theta t}e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta$
4	Pseudo-Wigner (PWD)	$\mathrm{PWD}_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)h\left(\frac{\tau}{2}\right)h^*\left(-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\lambda)\mathrm{WD}_h(0,f-\lambda)\mathrm{d}\lambda$ $\mathrm{PWD}_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)h\left(\frac{\tau}{2}\right)h^*\left(-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WD}_x(t,\eta)\mathrm{WD}_h(0,\omega-\eta)\mathrm{d}\eta$

Legenda zmiennych	czas	częstotliwość/pulsacja	przesunięcie czasowe	przesunięcie częstotliwościowe
$TFC_x^{(E)}(t,f)$	t, *u- dodatkowa zmienna całkowania*	f	τ	μ, λ *- dodatkowa zmienna całkowania*
$TFC_x^{(E)}(t,\omega)$	t, *u- dodatkowa zmienna całkowania*	ω	τ	θ, η *- dodatkowa zmienna całkowania*

Tabela 2.5 c.d. Wybrane reprezentacje z klasy Cohena i ich wyrażenia

L.p.	Transformacja	Wyrażenie $TFC_x^{(E)}(t,f)$ bądź $TFC_x^{(E)}(t,\omega)$, gdzie $\omega = 2\pi f, \theta = 2\pi\mu$
5	Wygładzony pseudo-Wigner (SPWD)	$\mathrm{SPWD}_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)\,\mathrm{PWD}_x(u,f)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)\,\mathrm{WD}_x(u,\lambda)\mathrm{WD}_h(0,f-\lambda)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}\lambda$ $\mathrm{SPWD}_x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)\,\mathrm{PWD}_x(u,\omega)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)\,\mathrm{WD}_x(u,\eta)\mathrm{WD}_h(0,\omega-\eta)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta$
6	Levin (LD)	$\mathrm{LD}_x(t,f) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\lvert\int_t^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau\right\rvert^2$ $\mathrm{LD}_x(t,\omega) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\lvert\int_t^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right\rvert^2$
7	Page (PD)	$\mathrm{PD}_x(t,f) = 2\,\mathrm{Re}\left\{x^*(t)e^{j2\pi ft}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau\right\}$ $\mathrm{PD}_x(t,\omega) = 2\,\mathrm{Re}\left\{x^*(t)e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right\}$
8	Rihaczek (RD)	$\mathrm{RD}_x(t,f) = x(t)X^*(f)e^{-j2\pi ft}$ $\mathrm{RD}_x(t,\omega) = x(t)X^*(\omega)e^{-j\omega t}$; $X(\omega) = F_t\{x(t)\}$
9	Margineau-Hill (MHD)	$\mathrm{MHD}_x(t,f) = \mathrm{Re}\{x(t)X^*(f)e^{-j2\pi ft}\}$ $\mathrm{MHD}_x(t,\omega) = \mathrm{Re}\{x(t)X^*(\omega)e^{-j\omega t}\}$

Tabela 2.5 c.d. Wybrane reprezentacje z klasy Cohena i ich wyrażenia

L.p.	Transformacja	Wyrażenie $TFC_x^{(E)}(t,f)$ bądź $TFC_x^{(E)}(t,\omega)$, gdzie $\omega = 2\pi f, \theta = 2\pi\mu$
10	Born-Jordan (BJD)	$\mathrm{BJD}_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\mu\tau)}{\pi\mu\tau} \mathrm{AF}_x(\mu,\tau) e^{j2\pi(\mu t - f\tau)} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lvert\tau\rvert} \int_{t-\frac{\lvert\tau\rvert}{2}}^{t+\frac{\lvert\tau\rvert}{2}} x\left(u+\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} \mathrm{d}u\mathrm{d}\tau$ $\mathrm{BJD}_x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\tau\right)}{\frac{\theta}{2}\tau} \mathrm{AF}_x(\theta,\tau) e^{j\theta t} e^{-j\omega\tau} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lvert\tau\rvert} \int_{t-\frac{\lvert\tau\rvert}{2}}^{t+\frac{\lvert\tau\rvert}{2}} x\left(u+\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} \mathrm{d}u\mathrm{d}\tau$
11	Zhao-Atlas-Marks (ZAMD)	$\mathrm{ZAMD}_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\lvert\tau\rvert \frac{\sin(\pi\mu\tau)}{\pi\mu\tau} \mathrm{AF}_x(\mu,\tau) e^{j2\pi(\mu t - f\tau)} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{h}(\tau) \int_{t-\frac{\lvert\tau\rvert}{2}}^{t+\frac{\lvert\tau\rvert}{2}} x\left(u+\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} \mathrm{d}u\mathrm{d}\tau$ $\mathrm{ZAMD}_x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\lvert\tau\rvert \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\tau\right)}{\frac{\theta}{2}\tau} \mathrm{AF}_x(\theta,\tau) e^{j\theta t} e^{-j\omega\tau} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{h}(\tau) \int_{t-\frac{\lvert\tau\rvert}{2}}^{t+\frac{\lvert\tau\rvert}{2}} x\left(u+\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} \mathrm{d}u\mathrm{d}\tau$

Legenda zmiennych	czas	częstotliwość/pulsacja	przesunięcie czasowe	przesunięcie częstotliwościowe
$TFC_x^{(E)}(t,f)$	t, *u- dodatkowa zmienna całkowania*	f	τ	μ, λ *- dodatkowa zmienna całkowania*
$TFC_x^{(E)}(t,\omega)$	t, *u- dodatkowa zmienna całkowania*	ω	τ	θ, η *- dodatkowa zmienna całkowania*

Tabela 2.5 c.d. Wybrane reprezentacje z klasy Cohena i ich wyrażenia

L.p.	Transformacja	Wyrażenie $TFC_x^{(E)}(t,f)$ bądź $TFC_x^{(E)}(t,\omega)$, gdzie $\omega = 2\pi f, \theta = 2\pi\mu$
12	Spektrogram (SPEC)	$\mathrm{SPEC}_x(t,f) = \left\|\mathrm{STFT}_x(t,f)\right\|^2 = \left\|\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\tau-t)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau\right\|^2 = \left\|\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)H(\lambda-f)e^{j2\pi\lambda t}\mathrm{d}\lambda\right\|^2$ $\mathrm{SPEC}_x(t,\omega) = \left\|\mathrm{STFT}_x(t,\omega)\right\|^2 = \left\|\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\tau-t)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right\|^2 = \left\|\int_{-\infty}^{+\infty} X(\eta)H(\eta-\omega)e^{j\eta t}\mathrm{d}\eta\right\|^2$
13	Choi-Williams (CWD)	$\mathrm{CWD}_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(2\pi\mu\tau)^2}{2}}\mathrm{AF}_x(\mu,\tau)e^{j2\pi(\mu t-f\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}}\frac{1}{\lvert\tau\rvert}e^{\left[-\frac{\sigma}{4}\left(\frac{t-u}{\tau}\right)^2\right]}x\left(u+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau$ $\mathrm{CWD}_x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(\theta\tau)^2}{2}}\mathrm{AF}_x(\theta,\tau)e^{j\theta t}e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}}\frac{1}{\lvert\tau\rvert}e^{\left[-\frac{\sigma}{4}\left(\frac{t-u}{\tau}\right)^2\right]}x\left(u+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau$
14	Uogólniony Choi-Williams (GCWD)	$\mathrm{GCWD}_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[-\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{2M}\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{2N}\right]}\mathrm{AF}_x(\mu,\tau)e^{j2\pi(\mu t-f\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu$ $\mathrm{GCWD}_x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[-\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{2M}\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{2N}\right]}\mathrm{AF}_x(\theta,\tau)e^{j\theta t}e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta$

Legenda zmiennych	czas	częstotliwość/pulsacja	przesunięcie czasowe	przesunięcie częstotliwościowe
$TFC_x^{(E)}(t,f)$	t, *u- dodatkowa zmienna całkowania*	f	τ	μ, λ *- dodatkowa zmienna całkowania*
$TFC_x^{(E)}(t,\omega)$	t, *u- dodatkowa zmienna całkowania*	ω	τ	θ, η *- dodatkowa zmienna całkowania*

Tabela 2.5 c.d. Wybrane reprezentacje z klasy Cohena i ich wyrażenia

L.p.	Transformacja	Wyrażenie $TFC_x^{(E)}(t,f)$ bądź $TFC_x^{(E)}(t,\omega)$, gdzie $\omega = 2\pi f, \theta = 2\pi\mu$	
15	Nutall (ND)	$\mathrm{ND}_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left\{-\pi\left[\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^2+\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2+2r\left(\frac{\tau\mu}{\tau_0\mu_0}\right)\right]\right\}} \mathrm{AF}_x(\mu,\tau)e^{j2\pi(\mu t - f\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu$ $\mathrm{ND}_x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left\{-\pi\left[\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^2+\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2+2r\left(\frac{\tau\theta}{\tau_0\theta_0}\right)\right]\right\}} \mathrm{AF}_x(\theta,\tau)e^{j\theta t}e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta$	
16	Costa-Boudreaux-Bartels (CBBD)	$\mathrm{CBBD}_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left\{-\pi\left[(A+B+C)^2\right]^\lambda\right\}} \mathrm{AF}_x(\mu,\tau)e^{j2\pi(\mu t - f\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu$ $\mathrm{CBBD}_x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left\{-\pi\left[(A+B+C)^2\right]^\lambda\right\}} \mathrm{AF}_x(\theta,\tau)e^{j\theta t}e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta$	$a = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\theta}{\theta_0}, b = \frac{\tau}{\tau_0},$ $A = a^{2\alpha}b^2, B = a^2b^{2\alpha},$ $C = 2r\left((ab)^\beta\right)^\gamma$
17	Butterworth (BUD)	$\mathrm{BUD}_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{2N}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{2M}} \mathrm{AF}_x(\mu,\tau)e^{j2\pi(\mu t - f\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu$ $\mathrm{BUD}_x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{2N}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{2M}} \mathrm{AF}_x(\theta,\tau)e^{j\theta t}e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta$	

Legenda zmiennych	czas	częstotliwość/pulsacja	przesunięcie czasowe	przesunięcie częstotliwościowe
$TFC_x^{(E)}(t,f)$	t, *u- dodatkowa zmienna całkowania*	f	τ	μ, λ *- dodatkowa zmienna całkowania*
$TFC_x^{(E)}(t,\omega)$	t, *u- dodatkowa zmienna całkowania*	ω	τ	θ, η *- dodatkowa zmienna całkowania*

Tabela 2.6 Właściwości (tabela 2.1)wybranych reprezentacji klasy Cohena (tabela 2.5)

L.p.	Transformacja/Warunek	Posiadane właściwości (tabela 2.1)																	
		P1	*P2*	*P3*	*P4*	*P5*	*P6*	*P7*	*P8*	*P9*	*P10*	*P11*	*P12*	*P13*	*P14*	*P15*	*P16*	*P17*	*P18*
1	Wigner (WD)	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√
2	Uogólniony Wigner (GWD)	–	√	√	√	–	–	√	√	√	√	√	√	√	–	–	–	–	–
	$\lvert\alpha\rvert \le 1/2$					√	√												
3	Uogólniony Wigner o wartościach rzeczywistych (RGWD)	√	√	√	√	–	–	–	–	–	√	√	√	√	√	√	√	–	–
	$\lvert\alpha\rvert \le 1/2$					√	√												
4	Pseudo-Wigner (PWD)	√	√	√	–	√	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$\lvert h(0)=1 \rvert$										√	–	√	–	√				
5	Wygładzony pseudo-Wigner (SPWD)	–	√	√	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$g(t) \in R$	√																	

Legenda właściwości:

P1 – rzeczywisty charakter przekształcenia	*P7* – reakcja na iloczyn sygnału z funkcją modulującą	*P13* – zachowanie momentów częstotliwościowych
P2 – zachowanie przesunięcie w dziedzinie czasu	*P8* – reakcja na splot sygnału z funkcją modulującą	*P14* – wyznaczenie częstotliwości chwilowej
P3 – zachowanie przesunięcia w częstotliwości	*P9* – spełnienie równości Moyala (unitarność)	*P15* – wyznaczenie opóźnienia grupowego
P4 – zachowanie skalowania w dziedzinie czasu	*P10* – zachowanie energii chwilowej sygnału	*P16* – reakcja na zamianę zmiennych
P5 – zachowanie ograniczenia w czasie	*P11* – zachowanie widma gęstości energii sygnału	*P17* – iloczyn z liniową modulacją częstotliwości
P6 – zachowanie ograniczenia w częstotliwości	*P12* – zachowanie momentów czasowych	*P18* – splot z liniową modulacją częstotliwości

Tabela 2.6 c.d. Właściwości (tabela 2.1)wybranych reprezentacji klasy Cohena (tabela 2.5)

L.p.	Transformacja/Warunek	Posiadane właściwości (tabela 2.1)																	
		P1	*P2*	*P3*	*P4*	*P5*	*P6*	*P7*	*P8*	*P9*	*P10*	*P11*	*P12*	*P13*	*P14*	*P15*	*P16*	*P17*	*P18*
6	Levin (LD)	√	√	√	–	√	–	√	–	√	√	√	√	√	–	–	–	–	–
7	Page (PD)	√	√	√	–	√	–	√	–	√	√	√	√	√	–	–	–	–	–
8	Rihaczek (RD)	–	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	–	–	–	–	–
9	Margineau-Hill (MHD)	–	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	–	–	–	–	–
10	Born-Jordan (BJD)	√	√	√	√	√	√	–	–	–	√	√	√	√	√	√	√	–	–
11	Zhao-Atlas-Marks (ZAMD)	–	√	√	–	√	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$h(\tau)$ - funkcja parzysta	√																	
12	Spektrogram (SPEC)	√	√	√	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
13	Choi-Williams (CWD)	√	√	√	√	–	–	–	–	–	√	√	√	√	√	√	√	–	–

Legenda właściwości:

P1 – rzeczywisty charakter przekształcenia	*P7* – reakcja na iloczyn sygnału z funkcją modulującą	*P13* – zachowanie momentów częstotliwościowych
P2 – zachowanie przesunięcie w dziedzinie czasu	*P8* – reakcja na splot sygnału z funkcją modulującą	*P14* – wyznaczenie częstotliwości chwilowej
P3 – zachowanie przesunięcia w częstotliwości	*P9* – spełnienie równości Moyala (unitarność)	*P15* – wyznaczenie opóźnienia grupowego
P4 – zachowanie skalowania w dziedzinie czasu	*P10* – zachowanie energii chwilowej sygnału	*P16* – reakcja na zamianę zmiennych
P5 – zachowanie ograniczenia w czasie	*P11* – zachowanie widma gęstości energii sygnału	*P17* – iloczyn z liniową modulacją częstotliwości
P6 – zachowanie ograniczenia w częstotliwości	*P12* – zachowanie momentów czasowych	*P18* – splot z liniową modulacją częstotliwości

Tabela 2.6 c.d. Właściwości (tabela 2.1)wybranych reprezentacji klasy Cohena (tabela 2.5)

L.p.	Transformacja/Warunek	Posiadane właściwości (tabela 2.1)																	
		P1	*P2*	*P3*	*P4*	*P5*	*P6*	*P7*	*P8*	*P9*	*P10*	*P11*	*P12*	*P13*	*P14*	*P15*	*P16*	*P17*	*P18*
14	Uogólniony Choi-Williams (GCWD)	√	√	√	–	–	–	–	–	–	√	√	√	√	–	–	–	–	–
	$M > 1/2$														√				
	$N > 1/2$															√			
	$M = 1/2$								√										
	$N = 1/2$							√							–	–			
	$M = N$				√			–	–								√		
15	Nutall (ND)	√	√	√	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Legenda właściwości:

P1 – rzeczywisty charakter przekształcenia	*P7* – reakcja na iloczyn sygnału z funkcją modulującą	*P13* – zachowanie momentów częstotliwościowych
P2 – zachowanie przesunięcie w dziedzinie czasu	*P8* – reakcja na splot sygnału z funkcją modulującą	*P14* – wyznaczenie częstotliwości chwilowej
P3 – zachowanie przesunięcia w częstotliwości	*P9* – spełnienie równości Moyala (unitarność)	*P15* – wyznaczenie opóźnienia grupowego
P4 – zachowanie skalowania w dziedzinie czasu	*P10* – zachowanie energii chwilowej sygnału	*P16* – reakcja na zamianę zmiennych
P5 – zachowanie ograniczenia w czasie	*P11* – zachowanie widma gęstości energii sygnału	*P17* – iloczyn z liniową modulacją częstotliwości
P6 – zachowanie ograniczenia w częstotliwości	*P12* – zachowanie momentów czasowych	*P18* – splot z liniową modulacją częstotliwości

Tabela 2.6 c.d. Właściwości (tabela 2.1)wybranych reprezentacji klasy Cohena (tabela 2.5)

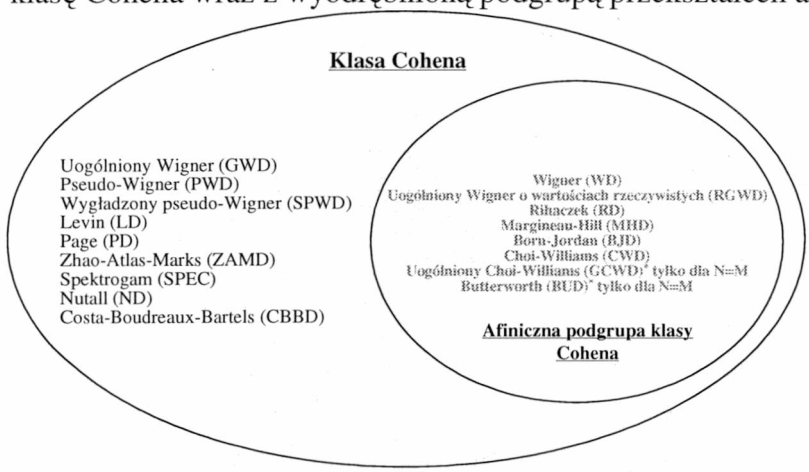
L.p.	Transformacja/Warunek	Posiadane właściwości (tabela 2.1)																	
		P1	*P2*	*P3*	*P4*	*P5*	*P6*	*P7*	*P8*	*P9*	*P10*	*P11*	*P12*	*P13*	*P14*	*P15*	*P16*	*P17*	*P18*
16	Costa-Boudreaux-Bartels (CBBD)	√	√	√	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$\alpha \neq 0$										√	√	√	√	√	√			
	$\alpha = 1$				√												√		
	$\alpha = 1, r = 0, \lambda = 1/4$				–			√	√		–	–	–	–	–	–	–		
17	Butterworth (BUD)	√	√	√	–	–	–	–	–	–	√	√	√	√	–	–		–	–
	$M > 1/2$														√				
	$N > 1/2$															√			
	$M = N$				√										–	–	√		

Legenda właściwości:

P1 – rzeczywisty charakter przekształcenia	*P7* – reakcja na iloczyn sygnału z funkcją modulującą	*P13* – zachowanie momentów częstotliwościowych
P2 – zachowanie przesunięcie w dziedzinie czasu	*P8* – reakcja na splot sygnału z funkcją modulującą	*P14* – wyznaczenie częstotliwości chwilowej
P3 – zachowanie przesunięcia w częstotliwości	*P9* – spełnienie równości Moyala (unitarność)	*P15* – wyznaczenie opóźnienia grupowego
P4 – zachowanie skalowania w dziedzinie czasu	*P10* – zachowanie energii chwilowej sygnału	*P16* – reakcja na zamianę zmiennych
P5 – zachowanie ograniczenia w czasie	*P11* – zachowanie widma gęstości energii sygnału	*P17* – iloczyn z liniową modulacją częstotliwości
P6 – zachowanie ograniczenia w częstotliwości	*P12* – zachowanie momentów czasowych	*P18* – splot z liniową modulacją częstotliwości

2.3.7. Afiniczne przekształcenia czasowo-częstotliwościowe a klasa Cohena

Obserwując wpływ jądra na właściwości uzyskanych przekształceń czasowo-częstotliwościowych, wśród opisanych wyżej reprezentacji wyodrębnić można podgrupę przekształceń o bardzo istotnej właściwości. Mowa tu o przekształceniach zachowujących jednocześnie właściwości przesunięcia i skalowania w czasie (*P2*,*P4*, tabela 2.1) oraz zachowujących przesunięcie w częstotliwości (*P3*, tabela 2.1). Warto podkreślić, że spełnienie przez reprezentacje jedynie pierwszych dwóch właściwości tj. zachowania przesunięcia i skalowania w czasie, pozwala przyporządkować je do grupy tzw. afnicznych przekształceń (ang. affine). Jednocześnie wspomniano już, iż domeną klasy Cohena jest zachowanie przesunięcia nie tylko w czasie ale i częstotliwości, co w literaturze anglojęzycznej przyjęto określać mianem „shift-invariant class". Wyodrębnienie zatem reprezentacji spełniających jednocześnie trzy omawiane właściwości prowadzi do afinicznej podgrupy klasy Cohena (ang. „shift-scale invariant class"). Podkreśla to poniższy rysunek, przedstawiający klasę Cohena wraz z wyodrębnioną podgrupą przekształceń afinicznych.



Rys. 2.14. Wyodrębnienie reprezentacji afinicznych wśród reprezentacji klasy Cohena

Reprezentacje klasy Cohena, należące do podgrupy afinicznej, zasługują na szczególną uwagę nie tylko ze względu na spełnienie jednocześnie trzech, istotnych własności przekształceń czasowo-częstotliwościowych, ale również ze względu na budowę funkcji jądra, opartej na iloczynie zmiennych θ i τ:

$$\phi_{\omega t}(\theta,\tau)=\hat{\phi}_{\omega t}(\theta\tau)=\hat{\phi}_{\omega t}(\beta)\Big|_{\theta\tau=\beta} \tag{2.126}$$

Taka budowa funkcji jądra stwarza możliwości tłumienia składowych krzyżowych. Jeśli bowiem za $\hat{\phi}_{\omega t}(\beta)$ przyjąć funkcję taką, że $\hat{\phi}_{\omega t}(0)=1$, co przekłada się na postać $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$ jako $\phi_{\omega t}(0,\tau)=\phi_{\omega t}(\theta,0)=1$, uzyskana reprezentacja spełniać będzie warunki brzegowe dla czasu i częstotliwości. Jeśli dodatkowo funkcja $\hat{\phi}_{\omega t}(\beta)$ będzie funkcją malejącą, a ściślej rzecz ujmując, skupioną wokół $\beta=0$, to odpowiadająca jej funkcja $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)$ będzie w równaniu Cohena odpowiedzialna za tłumienie składowych krzyżowych [2,27]. Typowym przykładem może być transformacja Choi-Williamsa, gdzie zastosowano funkcję jądra o charakterze funkcji Gaussa $\phi_{\omega t}(\theta,\tau)=\hat{\phi}_{\omega t}(\theta\tau)=e^{-\frac{(\theta\tau)^2}{\sigma}}=\hat{\phi}_{\omega t}(\beta)\Big|_{\theta\tau=\beta}=e^{-\frac{\beta^2}{\sigma}}$.

Im mniejsza jest wartość parametru σ tym większy jest stopień tłumienia składowych krzyżowych. I odwrotnie, dla $\sigma \to +\infty$ uzyskujemy bogatą w udział składowych krzyżowych reprezentację Wignera.

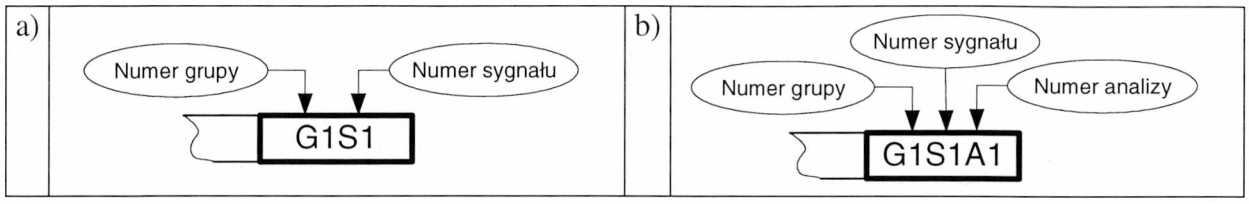
Omówione w niniejszym podrozdziale zagadnienie afinicznej podgrupy klasy Cohena ma szczególne znaczenie dla niniejszej pracy. Głównym bowiem celem rozprawy jest określenie możliwości zastosowania klasy Cohena do badania sygnałów elektrycznych. Sygnały takie charakteryzują się w większości przypadków udziałem wielu składników częstotliwościowych, a co za tym idzie, zakłóceniem uzyskanych reprezentacji przez znaczną ilością niepożądanych składowych krzyżowych. Autor wyodrębniając afiniczną podgrupę klasy Cohena, kieruje się możliwościami tłumienia składowych krzyżowych już na poziomie równania definicyjnego. Należy pamiętać, że dodatkową redukcję składowych krzyżowych może przynieść obciążenie sygnału funkcją okna czy splot reprezentacji z dodatkowym oknem wygładzającym (pseudo i wygładzona pseudo-reprezentacja). Jednak działania te sztucznie wpływają na poprawę interpretacji uzyskanych wyników i mają niebagatelny wpływ na rozdzielczości czasowe i częstotliwościowe uzyskanych reprezentacji.

3. Wyniki badań

W niniejszej pracy postanowiono skoncentrować badania w trzech grupach. Pierwsza grupa, ujęta w podrozdziale 3.1, dotyczy badań wstępnych. Porównano tu reprezentację Wignera-Ville'a (WVD), pseudo-reprezentację Wignera-Ville'a (PWVD) oraz jej wersję wygładzoną (SPWVD) w celu określenia wpływu szerokości funkcji wygładzających w czasie i częstotliwości na uzyskaną reprezentację. Dokonano również jakościowej analizy wpływu funkcji jąder przekształceń należących do afinicznej podgrupy klasy Cohena (np. Choi-Williams (CWD), Born-Jordan (BJD), Margineau-Hill (MHD)). Badania wstępne przeprowadzono bazując na symulowanych sygnałach sumy składników cosinusoidalnych oraz prądu w gałęzi RLC załączanej na napięcie zmienne. Grupę drugą stanowią badania właściwe, obejmujące swoim zakresem symulowane oraz rzeczywiste sygnały, odwzorowujące problemy niestacjonarności w układach elektrycznych. W podrozdziale 3.2 znalazły się więc analizy symulowanych sygnałów załączania baterii kondensatorów, zwarcia w układzie przekształtnika oraz sygnałów zarejestrowanych w układzie zasilania pieca łukowego. Porównano tu wpływ różnych funkcji jądra reprezentacji z podgrupy afinicznej w celu dokonania jakościowej oceny uzyskanych reprezentacji. Dla wybranych metod przeanalizowano celowość dodatkowego wygładzania reprezentacji funkcjami okien (np. wygładzona wersja pseudo-transforamty Choi-Williamsa (SPCWD), transformata Zhao-Atlas-Marksa (ZAMD)). Trzecia grupa analiz, zawarta w podrozdziale 3.3, dotyczy badań rozszerzonych, obejmujących swoim zakresem wyznaczanie lokalnych momentów częstotliwościowych uzyskanych reprezentacji. Zaproponowane przez autora jednowymiarowe charakterystyki momentów można traktować jako wskaźniki niestacjonarności.

Dla usystematyzowania badań w niniejszej pracy zdecydowano wykorzystać system kart informacyjnych sygnałów i analiz. Karty informacyjne sygnałów zawierają podstawowe informacje numeryczne, przebieg sygnału oraz opis matematyczny bądź charakterystykę symulowanego obwodu. Karty te umieszczone są na początku każdego podrozdziału, dotyczącego wspomnianych już trzech grup analiz. Karty analiz zawierają płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe oraz przebiegi chwilowe składników własnych (a-t) i krzyżowych (c-t), zgrupowane w kolumnach nazwanych skrótem użytych reprezentacji. W razie potrzeby nazwa reprezentacji uzupełniona jest o informacje dotyczące rodzaju i szerokości okien wygładzających. W nagłówku każdej karty analizy odnaleźć można temat analizy oraz informacje dotyczące wykrytych składowych własnych oraz krzyżowych.

Kluczowe znaczenie dla usprawnienia poruszania się po prezentowanych wynikach ma przyjęte nazewnictwo kart i ich lokalizacja (rys. 3.1). Struktura nazwy sygnału zawiera informacje o grupie oraz numerze kolejnym sygnału. W nazwie analizy powtórzona zostaje informacja o badanym sygnale wraz z kolejnym numerem analizy. Nazwa sygnału oraz analizy przewidziana została w prawym górnym rogu karty każdej karty. Pozwala to na usprawnienie korzystania z prezentowanych wyników. Dodatkowo każdy podrozdział podsumowuje zwięzłe omówienie wyników.



Rys. 3.1. Fragment karty sygnału (a) oraz karty analizy (b) z przykładową strukturą nazw.

3.1. Grupa 1 – badania wstępne

Celem badań opartych na sygnałach wstępnych jest porównanie reprezentacji Wignera-Ville'a i ich modyfikacji w świetle spektrogramu, uzyskanego drogą algorytmu Fouriera. Przejście z oryginalnej reprezentacji do tzw. pseudo-reprezentacji zostaje naświetlone zwłaszcza z powodu uzyskania możliwości śledzenia tzw. unormowanej energii sygnału. Dalsza modyfikacja pseudo-reprezentacji, w celu jej wygładzenia z jednoczesnym stłumieniem składowych krzyżowych, zostaje sprawdzona zwłaszcza ze względu na wpływ zastosowanych okien wygładzających $h(\tau)$ oraz $g(t)$. Omówiona we wstępie teoretycznym właściwość niezależnego wpływu na rozdzielczość czasową i częstotliwościową zostaje tu sprawdzona i potwierdzona.

Zestawienie wyników przynależnych do danej grupy rozpoczynają zawsze analizy z wykorzystaniem algorytmu Fouriera, co w przypadku Grupy 1 dotyczy analiz „*G1S1A0*" i „*G1S2A0*". W kartach analiz zamieszczono badany sygnał, jego transformatę Fouriera oraz spektrogramy z dwoma szerokościami funkcji okien $h(\tau)$. Analizy te mają służyć jako punkt odniesienia do jakościowego porównania z badanymi reprezentacjami klasy Cohena.

Analizy „*G1S1A1*" oraz „*G1S2A1*" mają na celu przybliżyć charakter reprezentacji Wignera-Ville'a (WVD), pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a (PWVD) oraz jej wersji wygładzonej (SPWVD). W kartach omawianych analiz wyróżnić można trzy kolumny. W nagłówku każdej z nich znajdują się skróty nazw użytych reprezentacji, wraz z dodatkowymi informacjami dotyczącymi rodzaju i długości użytych funkcji wygładzających i wykrytych składowych własnych (a-t) i krzyżowych (c-t). Pierwsza kolumna kart, wiersze „a" i „d", przedstawia płaszczyznę czasowo-częstotliwościową reprezentacji Wignera-Ville'a oraz przebiegi chwilowe składników własnych i związanych z nimi składników krzyżowych. Przebiegi te uzyskuje się poprzez „cięcie" wzdłuż osi czasu dla wybranej częstotliwości. W przypadku sygnału „*G1S1*" mowa tu o składnikach własnych 50Hz i 250Hz oraz składowej krzyżowej 150Hz. Dla sygnału „*G1S2*", składniki własne reprezentacji tworzą składowa 50Hz oraz zanikająca składowa 160Hz, czego efektem jest pojawienie się składowej krzyżowej 105Hz. Druga kolumna kart, wiersze „b" i „e", pokazuje wpływ obciążenia sygnału oknem Hamminga, o szerokości równej pięciu okresom składowej podstawowej, co prowadzi do pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a. Trzecia kolumna, wiersze „c" i „f", zawiera płaszczyznę czasowo-częstotliwościową oraz przebiegi chwilowe składników, po dodatkowym wygładzeniu pseudo-reprezentacji wzdłuż osi czasu oknem Hamminga o szerokości równej dwóm okresom składowej podstawowej, czyli składniki wygładzonej wersji pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a.

Wygładzona wersja pseudo-reprezentacji Wignera wykazuje duży stopień tłumienia składowych krzyżowych. Wyraźny jest jednak wpływ okien na otrzymaną reprezentację. Analizy „*G1S1A2*" oraz „*G1S2A2*" służą uwypukleniu wpływu szerokości okna $h(\tau)$, którego zadaniem jest wygładzenie reprezentacji wzdłuż osi częstotliwości. Zachowując stałą szerokości okna $g(t)$, równą dwu okresom składowej podstawowej, w trzech kolumnach

omawianych analiz, zawarto płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe oraz chwilowe przebiegi składników własnych i krzyżowych, odpowiednio dla szerokości okna h(τ) równej trzem, czterem i pięciu okresom składowej podstawowej. Analogicznie kolejne dwie analizy, „*G1S1A3*" oraz „*G1S2A3*", pokazują wpływ szerokości okna g(t), uśredniającego pseudo-reprezentację Wignera-Ville'a wzdłuż osi czasu, przy ustalonej szerokości okna h(τ), równej pięciu okresom składowej podstawowej. W kolumnach kart analiz zamieszczono płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe oraz chwilowe przebiegi składników własnych i krzyżowych, dla trzech szerokości okna g(t): jeden, dwa oraz trzy okresy składowej podstawowej.

Kolejne analizy „*G1S1A4*" oraz „*G1S2A4*" dotyczą porównania transformacji Wignera-Ville'a oraz Choi-Williamsa (CWD). Wpływ jądra wykładniczego objawia się możliwościami tłumienia składowych krzyżowych już na poziomie równania definicyjnego. Siła redukcji składowych krzyżowych oraz wpływ na składniki własne jest tu podkreślony na podstawie reprezentacji dla dwóch różnych współczynników tłumienia σ=1.0 oraz σ=0.05, odpowiedzialnych za kształt funkcji jądra.

Analizy „*G1S1A5*" oraz „*G1S2A5*" zawierają pozostałe reprezentacje związane z podgrupą afiniczną : reprezentację Margineau-Hill (MHD) z jądrem cosinusoidalnym, Born-Jordan (BJD) z jądrem typu „sinc" oraz jej wersją wygładzoną wzdłuż osi częstotliwości Zhao-Atlas-Marks (ZAMD). Celem tych analiz jest nakreślenie charakteru omawianych przekształceń zwłaszcza ze względu na przebiegi składników własnych i krzyżowych. Niekorzystne z tego punktu widzenia położenie składników krzyżowych reprezentacji Margineau-Hill zostaje tu podkreślone.

Podane poniżej karty informacyjne sygnałów dotyczą zatem omawianej pierwszej grupy analiz. Pierwszy sygnał, oznaczony jako „G1S1", bazuje na sumie ograniczonych sygnałów cosinusoidalnych, gdzie druga składowa pojawia się w badanym fragmencie z opóźnieniem. Drugi z sygnałów, „G1S2", opisuje sygnał prądu w gałęzi szeregowej RLC, załączanej na źródło sinusoidalne. Symulację zjawiska wykonano w środowisku oprogramowania EMTP i sprawdzono analitycznie.

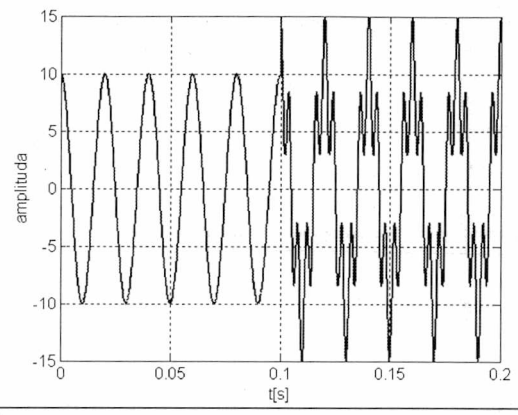
KARTA SYGNAŁU: *Suma składników cosinusoidalnych* **G1S1**

Parametry numeryczne sygnału:

f_{pr}	5kHz
T_x	(0,0.2)s
N_x	1001
t_p	0.1s

Legenda parametrów:
f_{pr} - częstotliwość próbkowania w [Hz]
T_x - długość sygnału w [s]
N_x - długość sygnału w próbkach
t_p - początek niestacjonarności w [s]

Przebieg sygnału:



Opis matematyczny:

$$x(t) = 10\cos(100\pi t)[1(t) - 1(t-0.2)] + \\ + 5\cos(500\pi t)[1(t-0.1) - 1(t-0.2)]$$

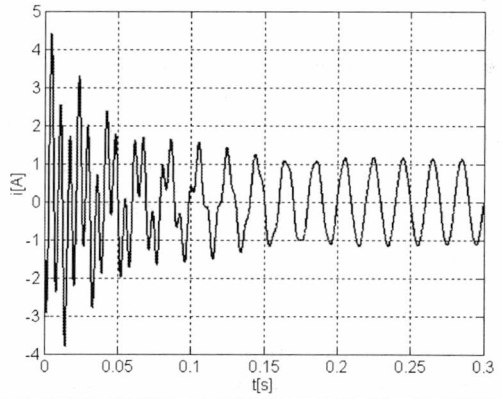
KARTA SYGNAŁU: *Załączanie gałęzi RLC na wymuszenie sinusoidalne* **G1S2**

Parametry numeryczne sygnału:

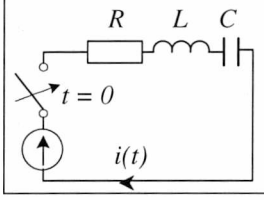
f_{pr}	5kHz
T_x	(0,0.3)s
N_x	1501
t_p	0.0s

Legenda parametrów:
f_{pr} - częstotliwość próbkowania w [Hz]
T_x - długość sygnału w [s]
N_x - długość sygnału w próbkach
t_p - początek niestacjonarności w [s]

Przebieg sygnału:



Model:



Parametry modelu:

$e(t) = 230\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^o)V$

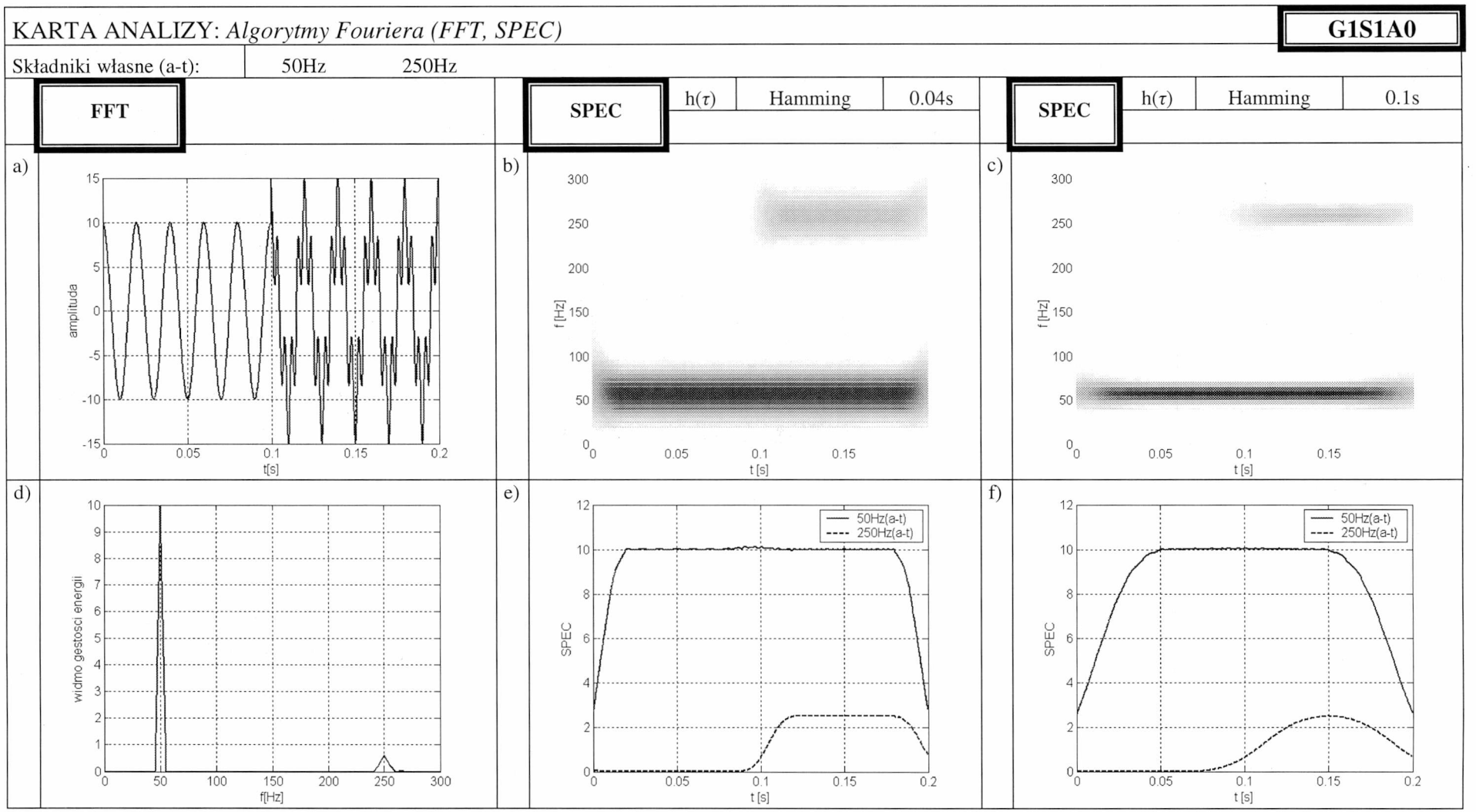
$R = 4\Omega,\ L = 0.1\text{H},\ \text{C}=10\mu\text{F}$

$\Rightarrow \text{R}<2\sqrt{\frac{\text{L}}{\text{C}}},\ \varphi \approx \psi_e = -90^o$

Opis matematyczny:

$$i(t) \approx 1.13 \cdot \left(\sin(2\pi \cdot 50 \cdot t) - 3.18 \cdot e^{-20t}\sin(2\pi \cdot 160 \cdot t)\right)1(t)$$

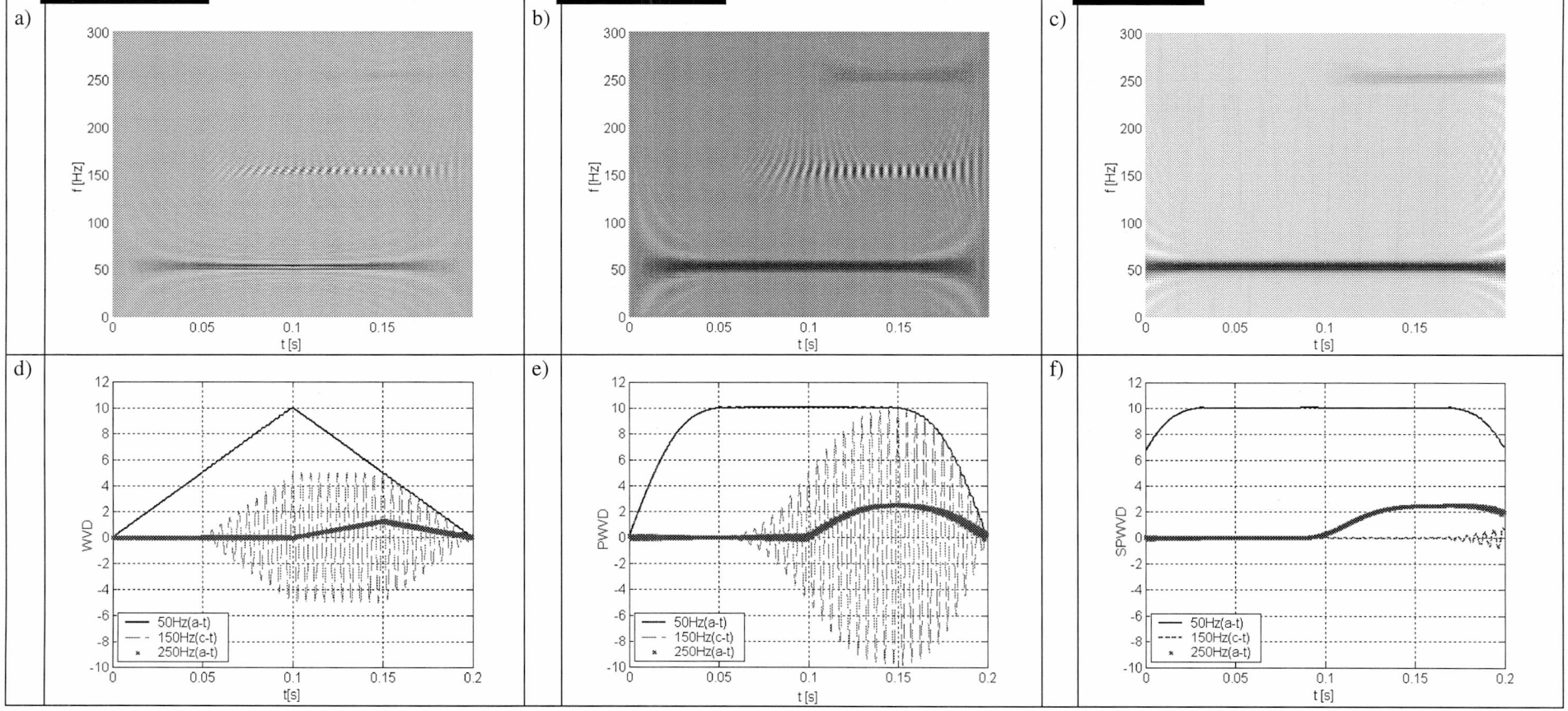
SKOROWIDZ ANALIZ GRUPY 1		G1
Nazwa analizy	Nazwa sygnału	Temat i zawartość analizy
G1S1A0 Rys. 3.2	G1S1	*Temat: Algorytmy Fouriera (FFT, SPEC)* Analizowany sygnał wraz z widmem gęstości energii, płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe spektrogramu z oknem Hamminga o szerokości równej odpowiednio dwóm oraz pięciu okresom składowej podstawowej; przebiegi składników własnych.
G1S2A0 Rys. 3.8	G1S2	
G1S1A1 Rys. 3.3	G1S1	*Temat: Transformacje Wignera-Ville'a (WVD) i jej wersje wygładzone (PWVD, SPWVD)* Porównanie reprezentacji Wignera-Ville'a oraz pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a i jej wersji wygładzonej na podstawie płaszczyzn czasowo-częstotliwościowych oraz chwilowych przebiegów składników własnych oraz krzyżowych.
G1S2A1 Rys. 3.9	G1S2	
G1S1A2 Rys. 3.4	G1S1	*Temat: Wpływ szerokości funkcji okna h(τ) przy ustalonym oknie g(t) na reprezentację SPWVD* Porównanie wpływu funkcji h(τ) na wygładzoną pseudo-reprezentację Wignera-Ville'a, przy stałej szerokości funkcji wygładzającej g(*t*): płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe, chwilowe przebiegi składników własnych oraz krzyżowych dla szerokości h(τ) równej odpowiednio dwóm, czterem oraz pięciu okresom składowej podstawowej.
G1S2A2 Rys. 3.10	G1S2	
G1S1A3 Rys. 3.5	G1S1	*Temat: Wpływ szerokości funkcji okna g(t) przy ustalonym oknie h(τ) na reprezentacje SPWVD* Porównanie wpływu funkcji g(*t*) na wygładzoną pseudo-reprezentację Wignera-Ville'a, przy stałej szerokości funkcji wygładzającej h(τ): płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe, chwilowe przebiegi składników własnych oraz krzyżowych dla szerokości g(*t*) równej odpowiednio jednemu, dwóm oraz trzem okresom składowej podstawowej.
G1S2A3 Rys. 3.11	G1S2	
G1S1A4 Rys. 3.6	G1S1	*Temat: Transformacje Wignera-Ville'a (WVD) i Choi-Williamsa (CWD)* Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe transformacj Wignera-Ville'a i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ oraz przebiegi składników własnych i krzyżowych
G1S2A4 Rys. 3.12	G1S2	
G1S1A5 Rys. 3.7	G1S1	*Temat: Transformacje Margineau-Hilla (MHD), Born-Jordana (BJD), Zhao-Atlas-Marksa (ZAMD)* Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe transformacji Margineau-Hilla, Born-Jordana i Zhao-Atlas-Marksa z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości pięciu okresów składowej podstawowej; przebiegi składników własnych i krzyżowych uzyskanych reprezentacji.
G1S2A5 Rys. 3.13	G1S2	



Rys. 3.2. Analizowany sygnał wraz z widmem gęstości energii (a,d); płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe spektrogramu (b,c) oraz przebiegi składników własnych (e,f) z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości równej odpowiednio dwóm oraz pięciu okresom składowej podstawowej, na przykładzie analizy sygnału „*G1S1*".

KARTA ANALIZY: *Transformacje Wignera-Ville'a (WVD) i jej wersje wygładzone (PWVD, SPWVD)* **G1S1A1**

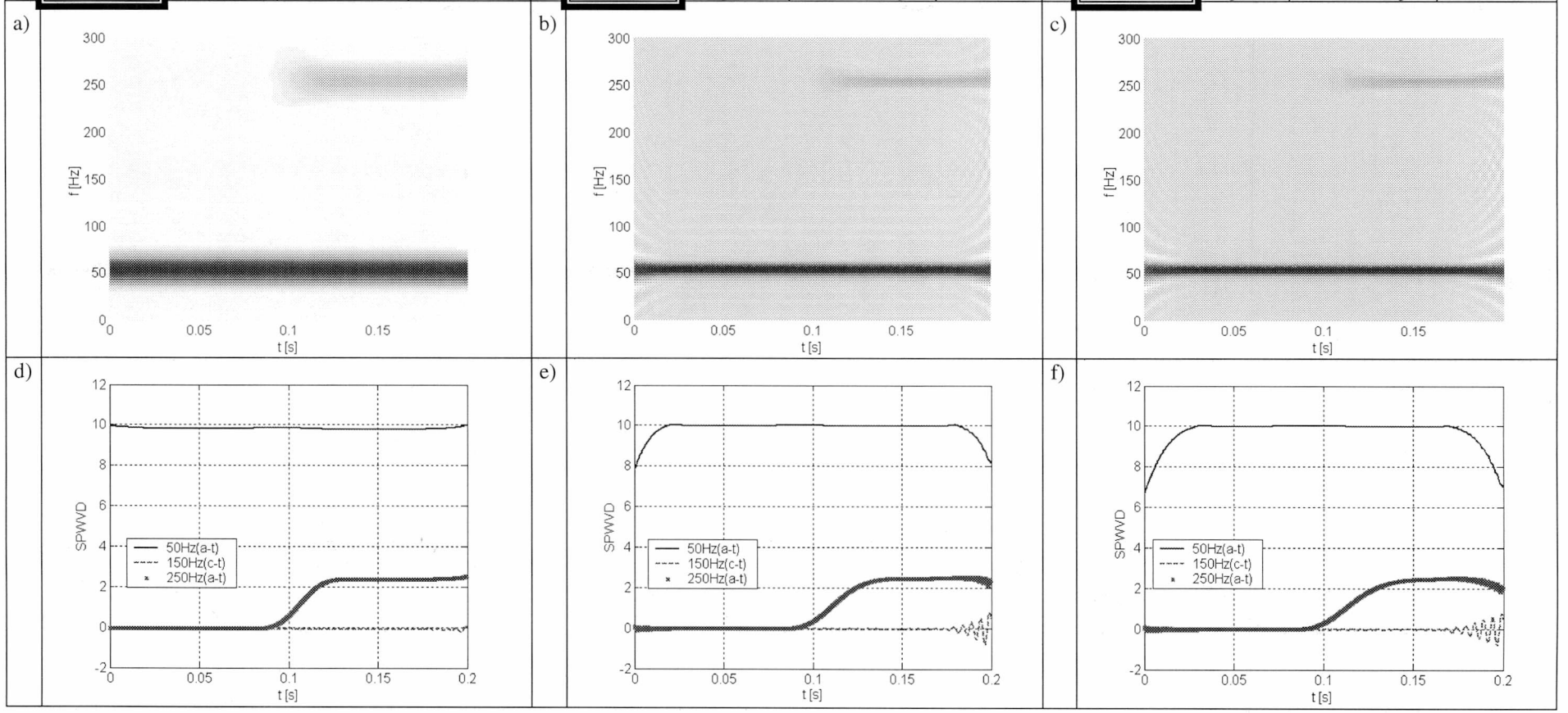
Składniki własne (a-t):	50Hz	250Hz	Składniki krzyżowe (c-t):	150Hz	
WVD					
PWVD	$h(\tau)$	Hamming	0.1s		
SPWVD	$h(\tau)$	Hamming	0.1s		
	$g(t)$	Hamming	0.04s		



Rys. 3.3. Porównanie reprezentacji Wignera-Ville'a oraz pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a i jej wersji wygładzonej na podstawie płaszczyzn czasowo-częstotliwościowych (a,b,c) oraz chwilowych przebiegów składników własnych oraz krzyżowych (d,e,f) na przykładzie analizy sygnału „*G1S1*".

KARTA ANALIZY: *Wpływ szerokości funkcji okna h(τ) przy ustalonym oknie g(t) na reprezentację SPWVD* **G1S1A2**

Składniki własne (a-t):		50Hz	250Hz	Składniki krzyżowe (c-t):		150Hz	
SPWVD	h(τ)	Hamming	0.04s	**SPWVD**	h(τ)	Hamming	0.08s	**SPWVD**	h(τ)	Hamming	0.1s
	g(t)	Hamming	0.04s		g(t)	Hamming	0.04s		g(t)	Hamming	0.04s



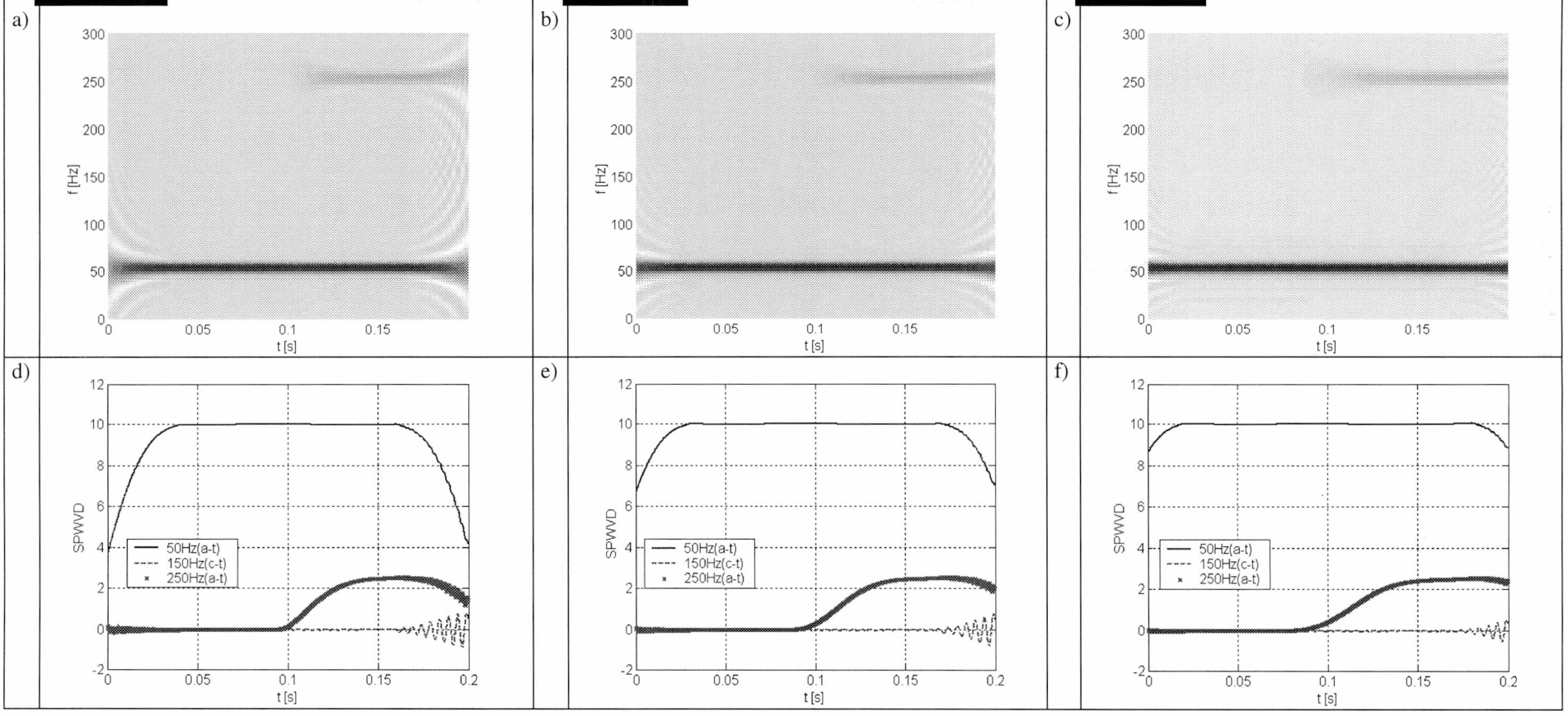
Rys. 3.4. Porównanie wpływu funkcji h(τ) na wygładzoną pseudo-reprezentację Wignera-Ville'a, przy stałej szerokości funkcji wygładzającej g(*t*): (a),(b),(c) - płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe, (d),(e),(f) – chwilowe przebiegi składników własnych oraz krzyżowych dla szerokości h(τ) równej odpowiednio dwóm, czterem oraz pięciu okresom składowej podstawowej, na przykładzie analizy sygnału „*G1S1*".

KARTA ANALIZY: *Wpływ szerokości funkcji okna g(t) przy ustalonym oknie h(τ) na reprezentacje SPWVD* **G1S1A3**

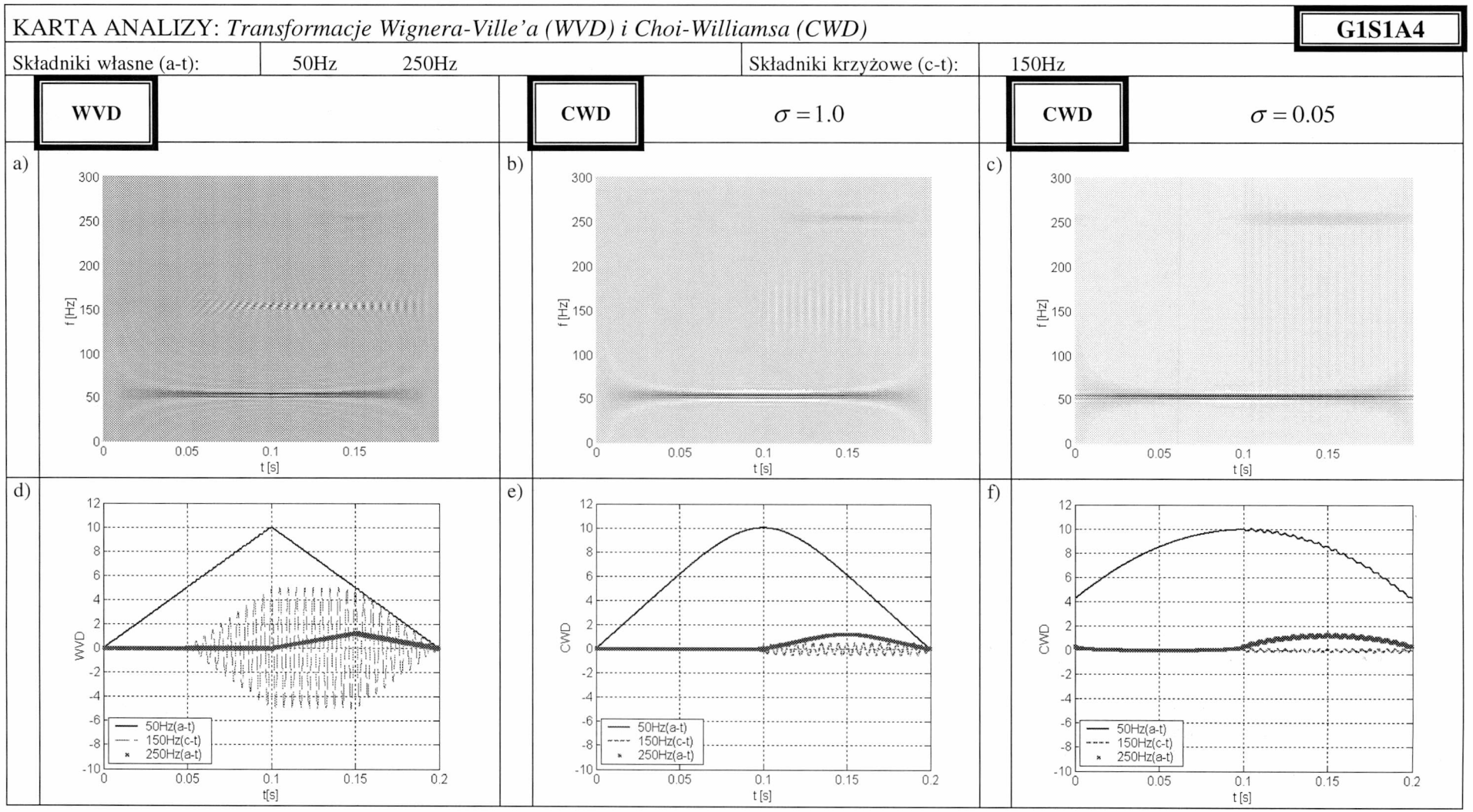
Składniki własne (a-t):		50Hz	250Hz
SPWVD	h(τ)	Hamming	0.1s
	g(t)	Hamming	0.02s

Składniki krzyżowe (c-t):		150Hz	
SPWVD	h(τ)	Hamming	0.1s
	g(t)	Hamming	0.04s

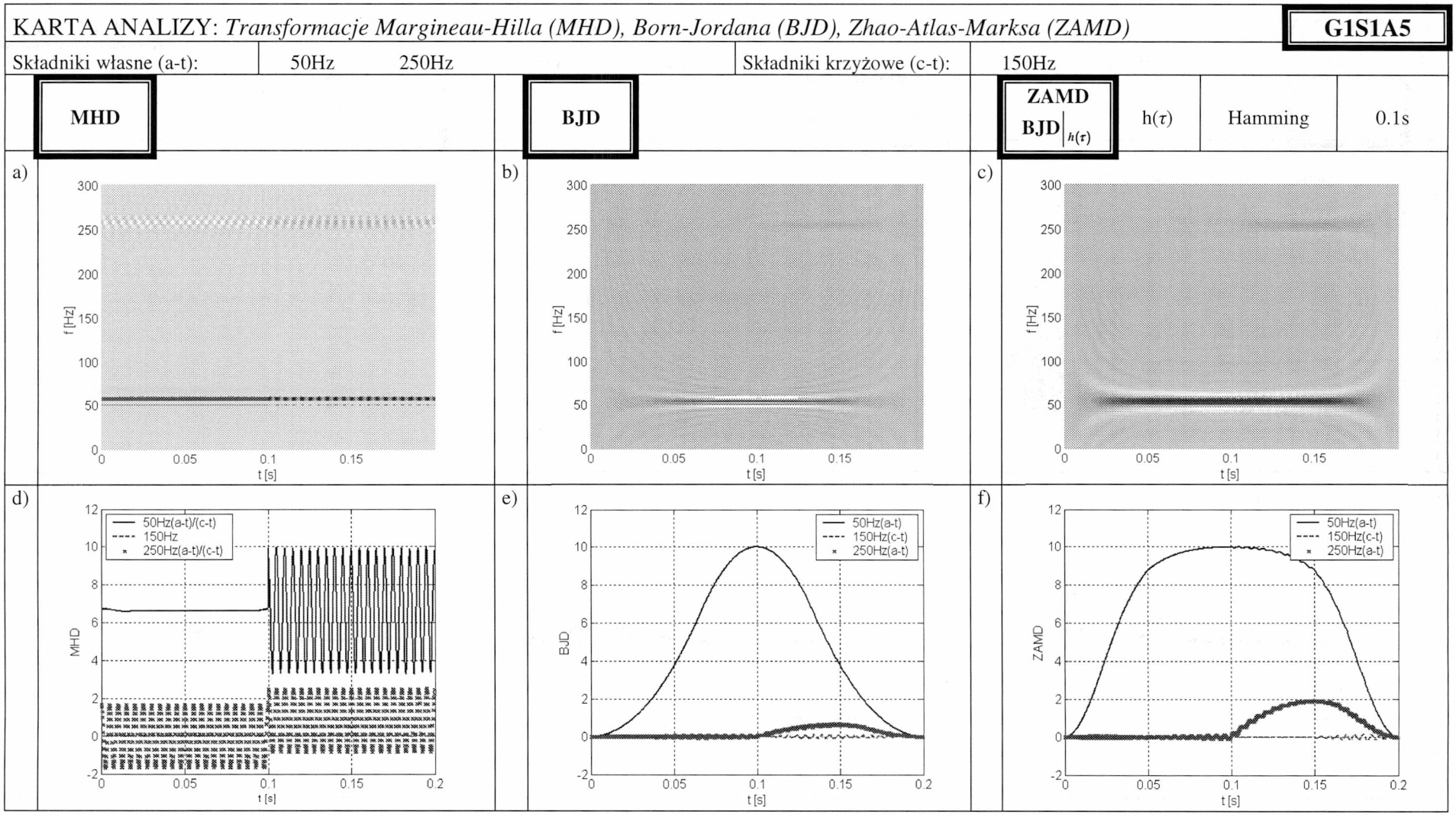
		150Hz	
SPWVD	h(τ)	Hamming	0.1s
	g(t)	Hamming	0.06s



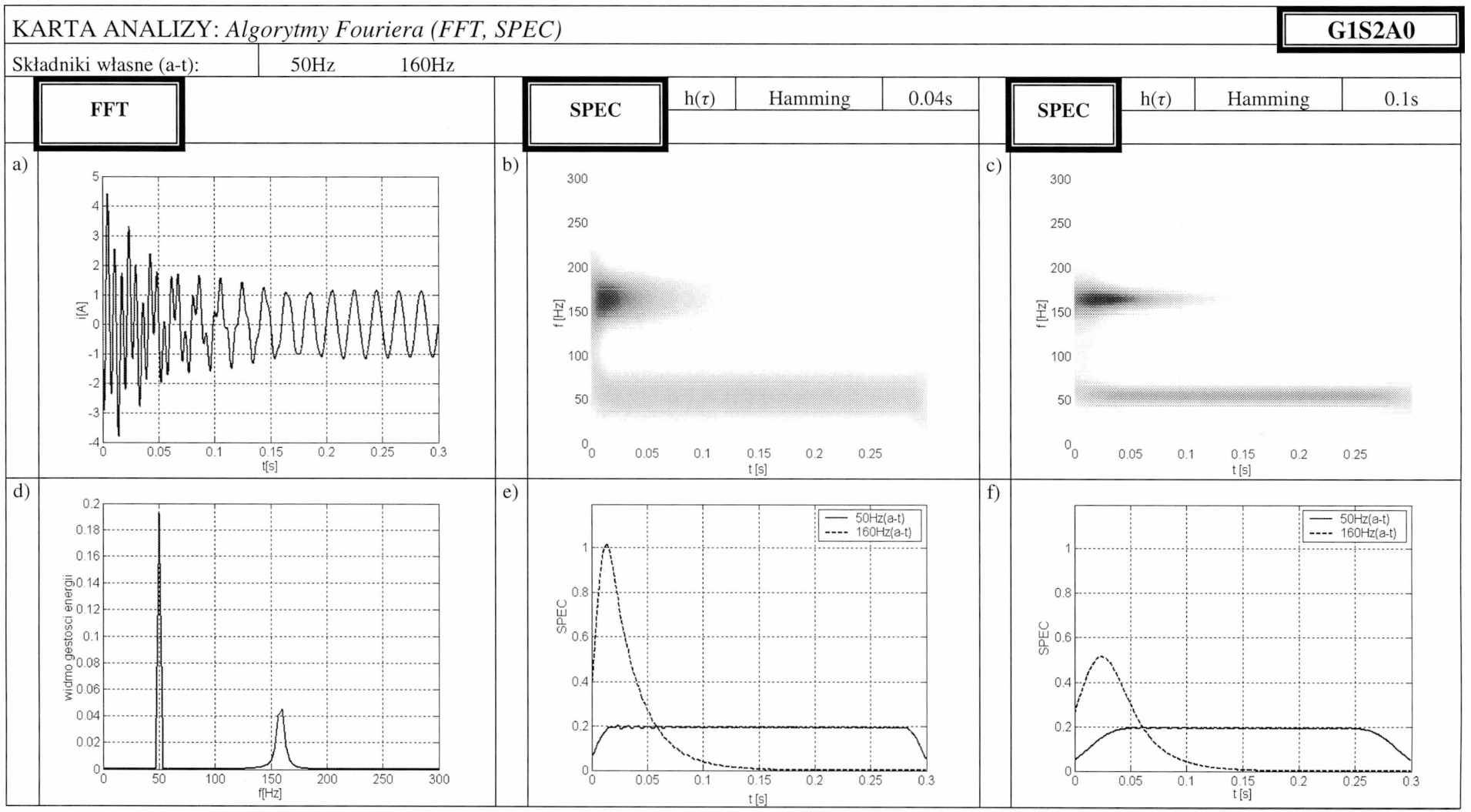
Rys. 3.5. Porównanie wpływu funkcji g(*t*) na wygładzoną pseudo-reprezentację Wignera-Ville'a, przy stałej szerokości funkcji wygładzającej h(τ): (a),(b),(c) - płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe, (d),(e),(f) – chwilowe przebiegi składników własnych oraz krzyżowych dla szerokości g(*t*) równej odpowiednio jednemu, dwóm oraz trzem okresom składowej podstawowej, na przykładzie analizy sygnału „*G1S1*".



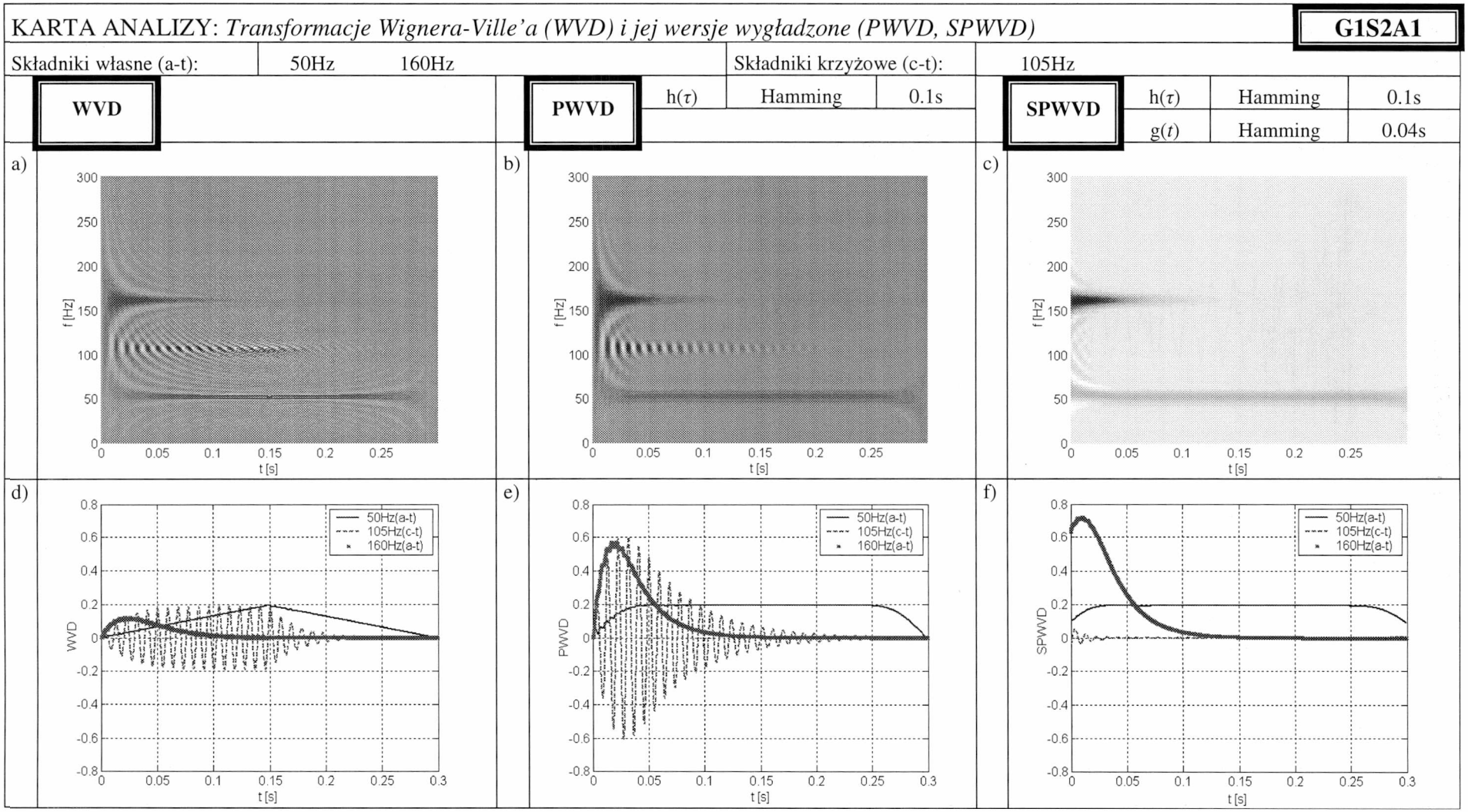
Rys. 3.6. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe transformacji Wignera-Wille'a (a) i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ (b,c) oraz przebiegi składników własnych i krzyżowych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G1S1*".



Rys. 3.7. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe transformacji Margineau-Hilla (a), Born-Jordana (b) i Zhao-Atlas-Marksa z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości pięciu okresów składowej podstawowej (c) oraz przebiegi składników własnych i krzyżowych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analiz sygnału „*G1S1*".



Rys. 3.8. Analizowany sygnał wraz z widmem gęstości energii (a,d); płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe spektrogramu (b,c) oraz przebiegi składników własnych (e,f) z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości równej odpowiednio dwóm oraz pięciu okresom składowej podstawowej, na przykładzie analizy sygnału „*G1S2*".



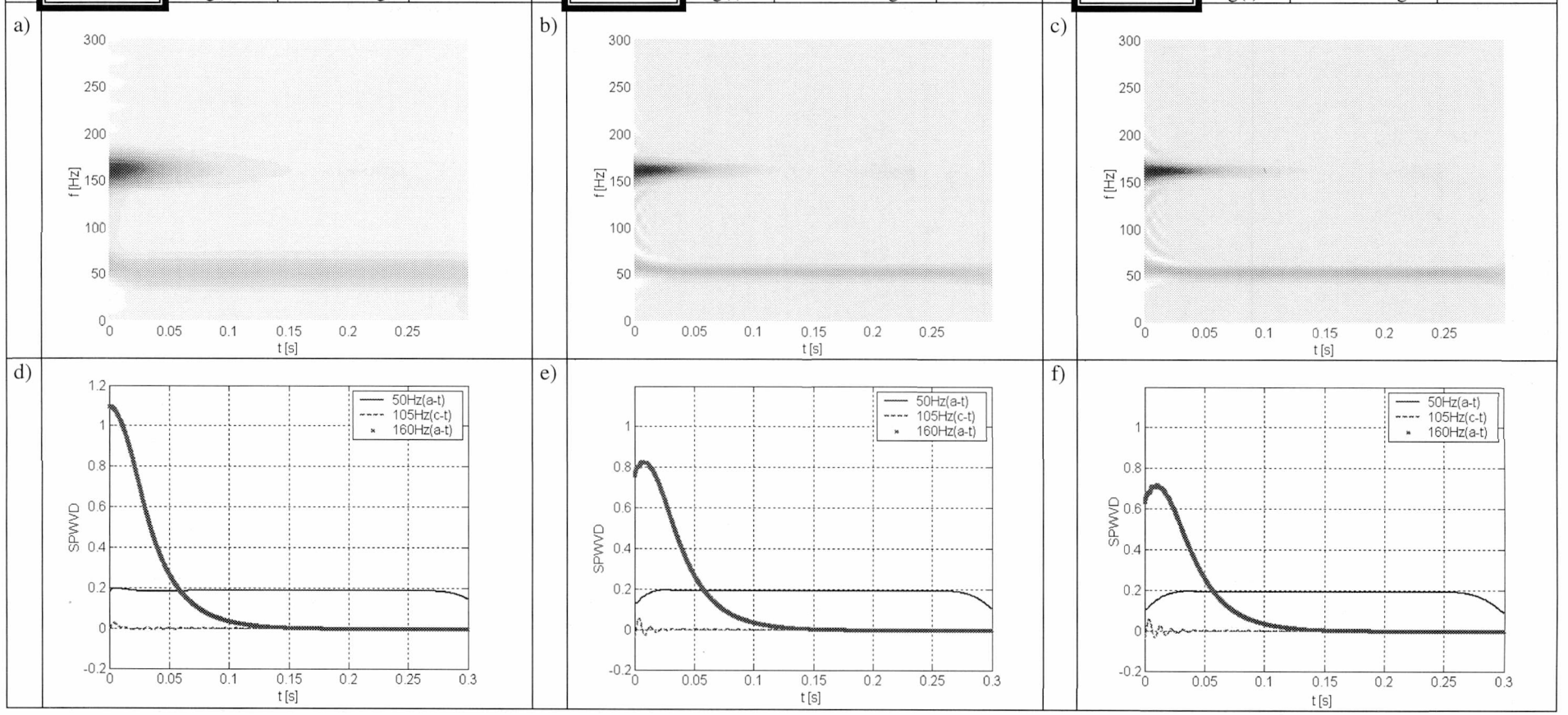
Rys. 3.9. Porównanie reprezentacji Wignera-Ville'a oraz pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a i jej wersji wygładzonej na podstawie płaszczyzn czasowo-częstotliwościowych (a,b,c) oraz chwilowych przebiegów składników własnych oraz krzyżowych (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G1S2*".

KARTA ANALIZY: *Wpływ szerokości funkcji okna h(τ) przy ustalonym oknie g(t) na reprezentację SPWVD* **G1S2A2**

Składniki własne (a-t):		50Hz	160Hz
SPWVD	h(τ)	Hamming	0.04s
	g(t)	Hamming	0.04s

Składniki krzyżowe (c-t):		105Hz	
SPWVD	h(τ)	Hamming	0.08s
	g(t)	Hamming	0.04s

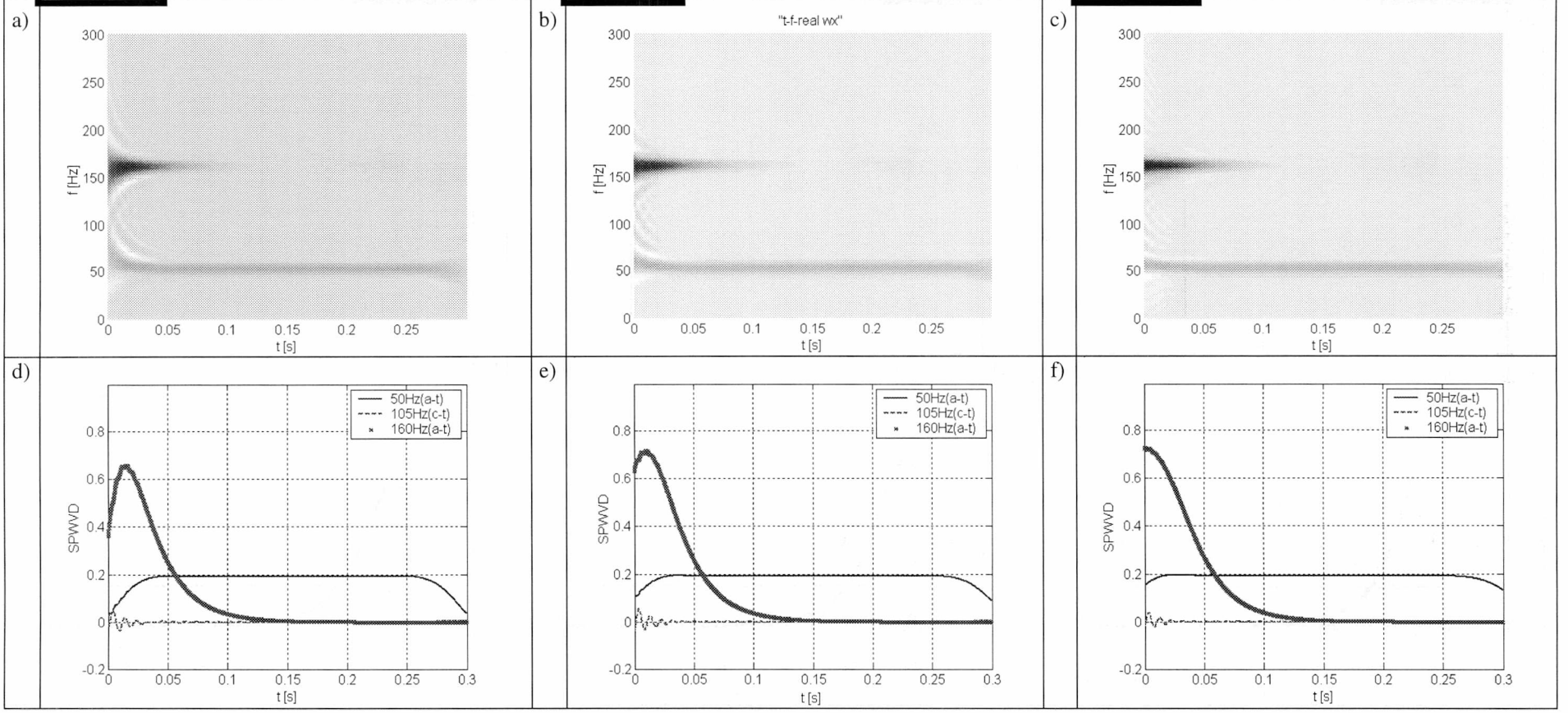
SPWVD	h(τ)	Hamming	0.1s
	g(t)	Hamming	0.04s



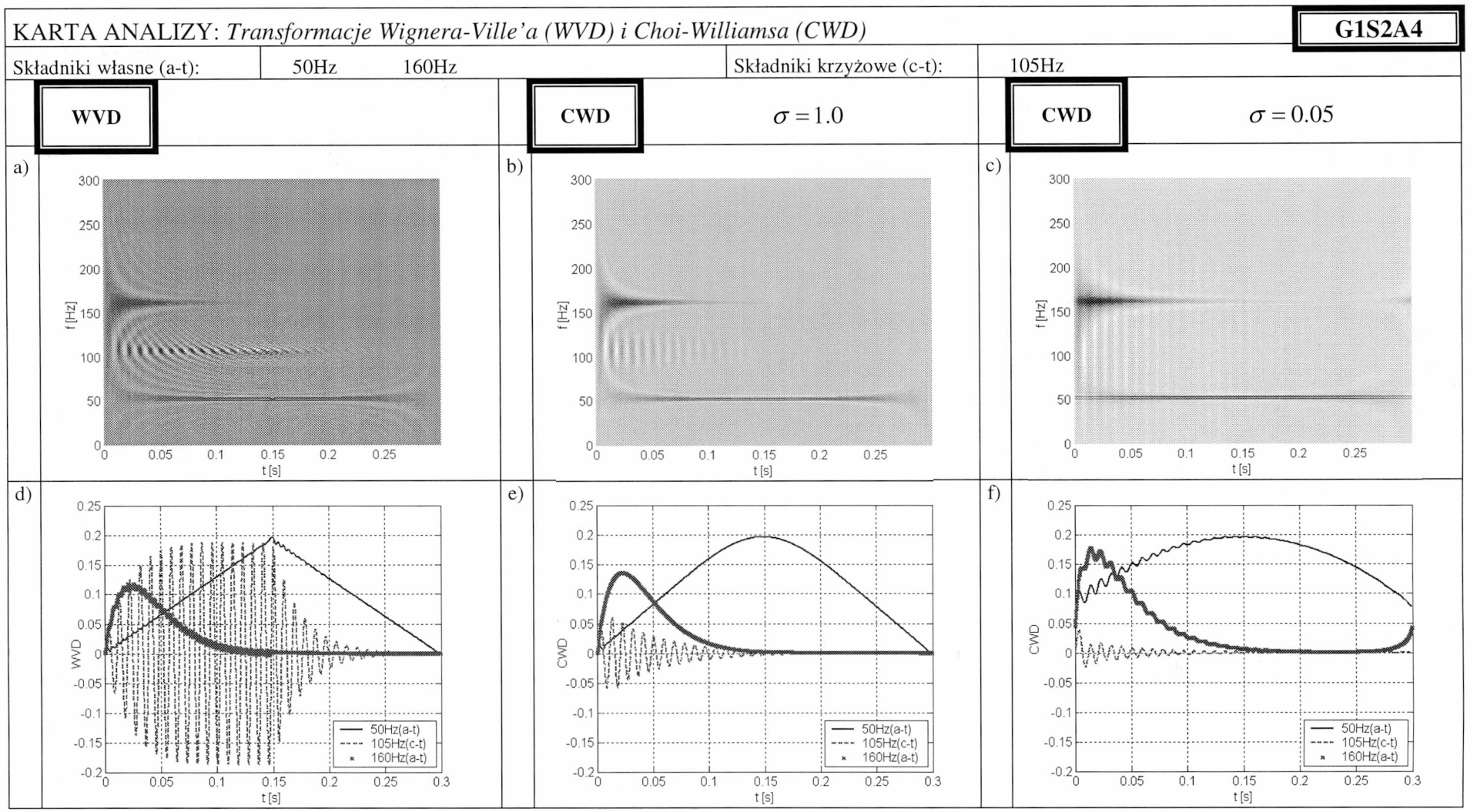
Rys. 3.10. Porównanie wpływu funkcji h(τ) na wygładzoną pseudo-reprezentację Wignera-Ville'a, przy stałej szerokości funkcji wygładzającej g(*t*): (a),(b),(c) - płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe, (d),(e),(f) – chwilowe przebiegi składników własnych oraz krzyżowych dla szerokości h(τ) równej odpowiednio dwóm, czterem oraz pięciu okresom składowej podstawowej, na przykładzie analizy sygnału „*G1S2*".

KARTA ANALIZY: *Wpływ szerokości funkcji okna g(t) przy ustalonym oknie h(τ) na reprezentacje SPWVD* **G1S2A3**

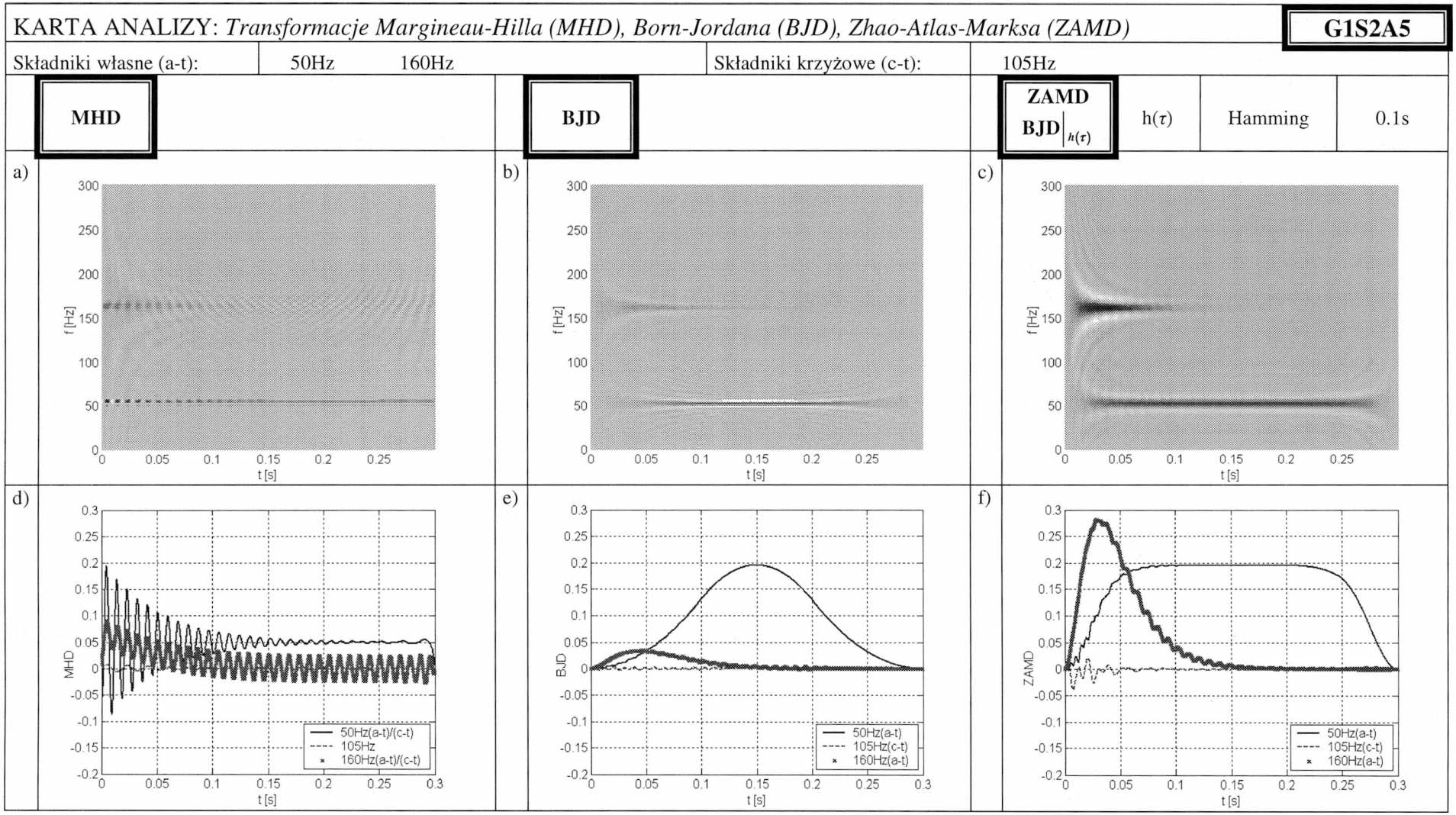
Składniki własne (a-t):		50Hz	160Hz	Składniki krzyżowe (c-t):		105Hz	
SPWVD	h(τ)	Hamming	0.1s	**SPWVD**	h(τ)	Hamming	0.1s	**SPWVD**	h(τ)	Hamming	0.1s
	g(t)	Hamming	0.02s		g(t)	Hamming	0.04s		g(t)	Hamming	0.06s



Rys. 3.11. Porównanie wpływu funkcji g(*t*) na wygładzoną pseudo-reprezentację Wignera-Ville'a, przy stałej szerokości funkcji wygładzającej h(τ): (a),(b),(c) - płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe, (d),(e),(f) – chwilowe przebiegi składników własnych oraz krzyżowych dla szerokości g(*t*) równej odpowiednio jednemu, dwóm oraz trzem okresom składowej podstawowej, na przykładzie analizy sygnału „*G1S2*".



Rys. 3.12. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe transformacji Wignera-Wille'a (a) i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ (b,c) oraz przebiegi składników własnych i krzyżowych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G1S2*".



Rys. 3.13. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe transformacji Margineau-Hilla (a), Born-Jordana (b) i Zhao-Atlas-Marksa z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości pięciu okresów składowej podstawowej (c) oraz przebiegi składników własnych i krzyżowych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analiz sygnału „*G1S2*".

Omówienie wyników analiz Grupy 1:

Sygnały analizowane w tej grupie charakteryzowały się znanym, symulowanym typem niestacjonarności. Informacje zawarte w analitycznym opisie zostały uwypuklone za pomocą omawianych metod, a jednocześnie pozwoliły na jakościowe porównanie otrzymanych wyników. W przypadku sygnału „*G1S1*" widoczny jest stały, w analizowanym odcinku czasu (0-0.2)s, charakter energii składowej 50Hz (a-t). Moment pojawienia się składowej 250Hz (a-t) jest również rozpoznawalny. Pojawieniu się drugiej składowej towarzyszy człon interferencyjny 150Hz. Sygnał „*G1S2*" charakteryzuje się stałą energią składnika 50Hz i zanikającą ekspotencjalnie energią składnika 160Hz. Składowa krzyżowa, 105Hz, ma w związku z tym charakter zanikających oscylacji. To zaplecze wiedzy o zmienności analizowanych sygnałów wykorzystano do porównania reprezentacji afinicznej podgrupy klasy Cohena z klasycznym spektrogramem, jak również do zbadania wpływu szerokości okien wygładzających na wygładzoną pseudo-reprezentację Wignera-Ville'a i wpływu samych funkcji jądra na uzyskane wyniki. Poniżej opisano omówienie wyników.

- Reprezentacja Wignera-Ville'a (WVD) (Rys.3.3,3.9), choć bogata w udział składowych krzyżowych, charakteryzuje się najlepszą rozdzielczością częstotliwościową. Informacja o energii składników cosinusoidalnych zawarta jest jednak w ich geometrycznych środkach ciężkości, co utrudnia śledzenie zmian z punktu widzenia czasu.
- Pseudo-reprezentacja i jej wersja wygładzona pozwala śledzić zmiany tzw. unormowanej energii składowych sygnału. Wspomniany wyżej, „niewygodny" wynik transformacji Wignera-Ville'a zostaje tu przełamany na korzyść informacji o zmianach unormowanej energii (Rys. 3.3, 3.9).
- Obciążenie sygnału funkcją okna $h(\tau)$ (Rys.3.4,3.10) objawia się pogorszeniem rozdzielczości częstotliwościowej. Im szersze jest okno wygładzające $h(\tau)$ tym rozdzielczość częstotliwościowa jest lepsza, ale skuteczność tłumienia składowych krzyżowych spada. W granicznym przypadku tj. dla okna prostokątnego o szerokości okna równej długości analizowanego sygnału otrzymuje się reprezentację Wignera-Ville'a.
- Splot pseudo-reprezentacji z dodatkową funkcją wygładzającą $g(t)$ (Rys.3.5,3.11) ma bardzo duży wpływ na tłumienie składowych krzyżowych, ze względu na uśrednianie reprezentacji wzdłuż osi czasu. Oscylacyjny charakter składowych krzyżowych jest tym bardziej redukowany im szersze jest okno $g(t)$. Jednocześnie wygładzający charakter zastosowanej funkcji powoduje spadek rozdzielczości czasowej uzyskanej reprezentacji. Im szersze okno bierze udział w operacji splotu tym dłuższa jest odpowiedź algorytmu.
- Należy jednak wyraźnie podkreślić, że w przypadku wygładzonej pseudo-reprezentacji, rozdzielczości czasowe i częstotliwościowe są zupełnie odseparowane. Szerokość okna $h(\tau)$ odpowiada za ostrość reprezentacji wzdłuż osi częstotliwości, zaś szerokość okna $g(t)$ odpowiedzialna jest za ostrość reprezentacji wzdłuż osi czasu. Cecha ta wyraźnie odróżnia wygładzoną pseudo-reprezentację od spektrogramu, gdzie istnieje ścisły związek pomiędzy rozdzielczością czasową i częstotliwościową.
- Wyraźnie też widoczne jest dwukrotnie większe rozmycie czasowo-częstotliwościowe spektrogramu (Rys.3.2,3.8) w porównaniu do wygładzonej wersji pseudo-transformaty Wignera-Ville'a, przy zachowaniu tej samej szerokości okien $h(\tau)$.
- Wykorzystanie jądra ekspotencjalnego (transformacja Choi-Williamsa) owocuje redukcją składowych krzyżowych z zachowaniem rozdzielczości czasowej i częstotliwościowej na poziomie reprezentacji Wignera-Ville'a (Rys.3.6,3.12). Zależność pomiędzy współczynnikiem tłumienia σ a własnościami reprezentacji jest następująca. Im mniejsza jest wartość parametru σ tym większy jest stopień tłumienia składowych krzyżowych, ale jednocześnie zaobserwować można wpływ na składniki własne. Im większa jest

wartość parametru σ tym mniejszy jest stopień tłumienia. W granicznym przypadku tj. dla $\sigma \to +\infty$ uzyskujemy reprezentację Wignera-Vill'a.

- Reprezentacja Margineau-Hill (Rys.3.7,3.13) jest nieużyteczna do badania sygnałów elektrycznych, gdzie w większości przypadków mamy do czynienia z wieloskładnikowym sygnałem, w którym dodatkowo składowa podstawowa istnieje w całym badanym odcinku. Reprezentację tą dyskwalifikuje położenie składników krzyżowych, które skupione są tu na przemian w czasowych i częstotliwościowych środkach ciężkości składników. Efektem tego jest nakładanie się składowych krzyżowych na składowe własne i trudności w ich odseparowaniu.
- Reprezentacja Born-Jordana (Rys.3.7,3.13), choć zachowuje rozdzielczość czasowo-częstotliwościową na poziomie Wignera-Vill'a charakteryzuje się dodatkowym tłumieniem składowych własnych wyższych częstotliwości. Poprawę przynosi dodatkowe wygładzenie wzdłuż osi częstotliwości przez obciążenie sygnału oknem $h(\tau)$, co prowadzi do reprezentacji Zhao-Atlas_Marks (Rys.3.7,3.13). Wygładzenie to owocuje, jak w każdym przypadku pseudo-reprezentacji, zmniejszeniem rozdzielczości częstotliwościowej.

3.2. Grupa 2 – badania właściwe

Celem badań przeprowadzonych w obrębie tej grupy sygnałów jest sprecyzowanie możliwości zastosowania przekształceń Cohena w obszarze elektrotechniki. Szczególne zainteresowanie skierowano w kierunku afinicznej podgrupy klasy Cohena, która dzięki specyficznej budowie funkcji jądra wykazuje zdolności tłumienia składowych krzyżowych już na poziomie równania definicyjnego. Wyniki analiz przyjęto prezentować na bazie modułów uzyskanych reprezentacji. Takie podejście nie ma wpływu na składowe własne reprezentacji, które osiągają rzeczywiste wartości dodatnie, a jedynie na składowe krzyżowe, teraz rozpoznawane jako wartości bezwzględne oscylacji. To sztuczne ograniczenie wartości reprezentacji uwydatnia cechy składników własnych i ułatwia interpretację płaszczyzn czasowo-częstotliwościowych.

Dwa pierwsze sygnały tej grupy dotyczą symulacji załączania baterii kondensatorów w układzie linii średniego napięcia („*G2S1*") oraz zwarcia w układzie przekształtnika („*G2S2*"). Obie symulacje wykonano w środowisku EMTP.

Podobnie jak dla Grupy 1, tak badania Grupy2 rozpoczynają zawsze analizy z wykorzystaniem algorytmu Fouriera: „*G2S1A0*", „*G2S2A0*". W kartach analiz zamieszczono badany sygnał, jego transformatę Fouriera oraz spektrogramy z dwoma szerokościami funkcji okien $h(\tau)$. Analizy te mają służyć za punkt odniesienia do jakościowego porównania z badanymi reprezentacjami klasy Cohena.

Analizy „*G2S1A1*" , „*G2S2A1*", dotyczą porównania transformacji Wignera-Ville'a (WVD) oraz Choi-Williamsa (CWD). Wpływ jądra wykładniczego objawia się możliwościami tłumienia składowych krzyżowych już na poziomie równania definicyjnego. Siła redukcji składowych krzyżowych oraz wpływ na składniki własne zostaje uwypuklona na podstawie reprezentacji dla dwóch różnych współczynników tłumienia, odpowiedzialnych za kształt funkcji jądra. W kolejnych kolumnach karty analizy zawarto zatem płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe wraz z przebiegami chwilowymi składników własnych reprezentacji Wignera-Ville'a i transformacji Choi-Williamsa dla dwóch współczynników tłumienia: σ=1.0 oraz σ=0.05.

Analizy „*G2S1A2*", „*G2S2A2,* dotyczą problemu wygładzania transformacji Choi-Williamsa za pomocą dodatkowych funkcji okien. Wygładzona pseudo-reprezentacja Choi-Williamsa (SPCWD), ze współczynników tłumienia σ=1.0 oraz σ=0.05, porównana jest z wygładzoną pseudo-reprezentacją Wignera-Ville'a dla różnych szerokości okien $h(\tau)$ ($h(\tau)$ – pięć okresów składowej podstawowej i $g(t)$ – dwa okresy składowej podstawowej oraz $h(\tau)$ – dwa okresy składowej podstawowej i $g(t)$ – dwa okresy składowej podstawowej).

Analizy „*G2S1A3*", „*G2S2A3*" zawierają pozostałe reprezentacje związane z podgrupą afiniczną. Do zbadania charakteru analizowanych sygnałów wykorzystano reprezentację Born-Jordana (BJD) z jądrem typu „sinc" oraz jej wersję wygładzoną wzdłuż osi częstotliwości Zhao-Atlas-Marks (ZAMD), z dwoma szerokościami funkcji $h(\tau)$. Celem tych analiz jest nakreślenie charakteru omawianych przekształceń zwłaszcza ze względu na przebiegi składników własnych i krzyżowych.

Karty „*G2S1AP*" oraz „*G2S2AP*" to analizy porównawcze. Pierwsza z nich zawiera płaszczyznę czasowo- częstotliwościową sygnału „*G2S1*", uzyskaną przy pomocy transformaty falkowej oraz przebiegi składowych, estymowanych przy użyciu metody Prony'ego. Druga karta porównawcza zawiera płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe sygnału „*G2S2*" wyznaczone transformatą falkową i metodą Min-Norm z przesuwanym oknem. Zamieszczone wyniki mają na celu podkreślić różnice wynikające z budowy algorytmów.

Analizie poddano również rzeczywisty sygnał pomiarowy pochodzący z układu zasilania pieca łukowego, udostępniony przez partnerski Uniwersytet w Neapolu („*G2S3*"). Sygnał ten posiada składową podstawową o przeważającej energii oraz bardzo wiele charakterystycznych harmonicznych związanych z pracą przekształtnika. Wyniki analiz takiego sygnału sprawiają ogromne problemy interpretacyjne ze względu na dużą ilość składowych krzyżowych o wysokiej amplitudzie. Dodatkowym problemem jest „nakładanie się" składowych krzyżowych na składniki własne. Problemy te nakreślono w analizie „*G2S3A0*".

Chcąc określić charakter niestajonarności badanego sygnału postanowiono przyjrzeć się zachowaniu składników w ograniczonym zakresie częstotliwości. W tym celu sygnał oryginalny poddano filtracji pasmowej (FIR, rząd filtru 150) w wybranym zakresie 300-600Hz. Tak otrzymany sygnał, o nazwie „*G2S3a*", poddano transformacjom czasowo-częstotliwościowym. Zaobserwowano wahania częstotliwości charakterystycznych harmonicznych, jak również pojawienie się chwilowych składników interharmonicznych.

Badania sygnału „*G2S3a*" rozpoczynają analizy z wykorzystaniem algorytmu Fouriera. Transformata Fouriera oraz spektrogramy z dwoma szerokościami funkcji okien $h(\tau)$ dają wstępny obraz wykrytej niestacjonarności.

Analiza „*G2S3aA1*" dotyczy porównania transformacji Wignera-Ville'a (WVD) oraz Choi-Williamsa (CWD). W kolejnych kolumnach karty analizy zawarto zatem płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe wraz z przebiegami chwilowymi składników własnych reprezentacji Wignera-Ville'a i transformacji Choi-Williamsa dla dwóch współczynników tłumienia: σ=1.0 oraz σ=0.05.

Wygładzone wersje pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a (SPWVD) oraz Choi-Williamsa (SPCWD) zamieszczono w kartach analizy „*G2S3aA2*". Porównanie reprezentacji obejmuje dwie grupy szerokości okien wygładzających: $h(\tau)$ – pięć okresów składowej podstawowej i $g(t)$ – dwa okresy składowej podstawowej oraz $h(\tau)$ – dwa okresy składowej podstawowej i $g(t)$ – dwa okresy składowej podstawowej.

Na koniec do analizy sygnału „*G2S3a*" wykorzystano reprezentację Born-Jordana (BJD) oraz Zhao-Atlas-Marksa (ZAMD) z dwoma szerokościami funkcji $h(\tau)$ – analiza „*G2S3aA3*".

Porównanie wyników z odrębną grupą przekształceń zawarto w karcie porównawczej „*G3S3aAP*". Wahania wybranych składowych sprawdzono metodą Prony'ego oraz metodą root-Music z przesuwanym oknem.

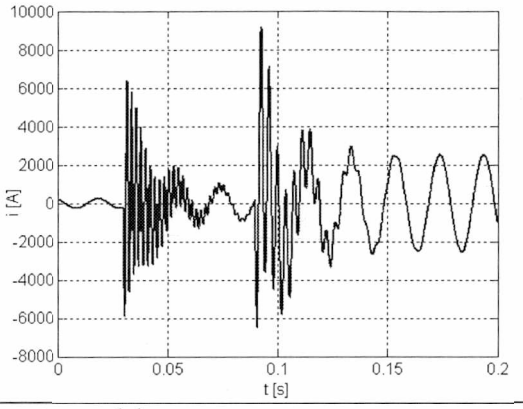
KARTA SYGNAŁU: *Załączanie baterii kondensatorów* **G2S1**

Parametry numeryczne sygnału:

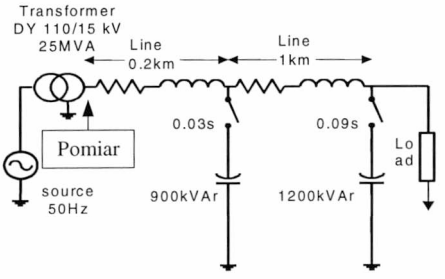
f_{pr}	10kHz
T_x	(0,0.2)s
N_x	2001
t_{p1}	0.03s
t_{p2}	0.09s

Legenda parametrów:
f_{pr} - częstotliwość próbkowania w [Hz]
T_x - długość sygnału w [s]
N_x - długość sygnału w próbkach
t_{p1} - załączanie baterii Q_1 w [s]
t_{p2} - załączanie baterii Q_2 w [s]

Przebieg sygnału:



Model:



Parametry modelu:

Bateria kondensatorów Q_1: 900kVar, oddalona 0.2km od stacji, moment załączenia t_{p1}=0.03s
Bateria kondensatorów Q_2: 1200kVar, oddalona 1.2km od stacji, moment załączenia t_{p2}=0.09s
Napięcie pracy: U_N=15kV
Transformator: U_N=110/15kV, S_N=25MVA, w układzie połączeń Δ-Y.

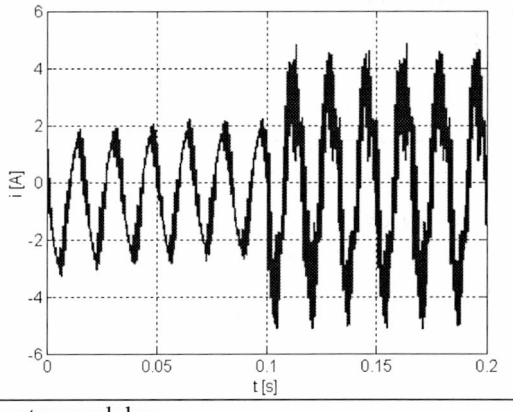
KARTA SYGNAŁU: *Zwarcie w układzie przekształtnika* **G2S2**

Parametry numeryczne sygnału:

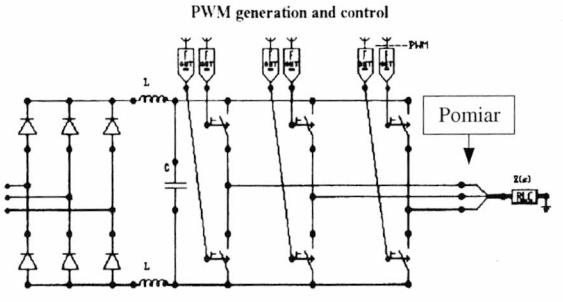
f_{pr}	5kHz
T_x	(0,0.2)s
N_x	1001
t_p	0.1s

Legenda parametrów:
f_{pr} - częstotliwość próbkowania w [Hz]
T_x - długość sygnału w [s]
N_x - długość sygnału w próbkach
t_p - początek zwarcia w [s]

Przebieg sygnału:



Model:



Parametry modelu:

Przekształtnik: PWM, częstotliwość modulacyjna 1kHz S_N=3kVA
Silnik: dwubiegunowy silnik asynchroniczny, U_N=230V, P_N=1.1kW, współczynnik mocy cosφ=0.81, poślizg 6%

Rodzaj zwarcia: międzyfazowe zwarcie z rezystancją miejsca zwarcia 100Ω, czas powstania zwarcia - t_p=0.1s

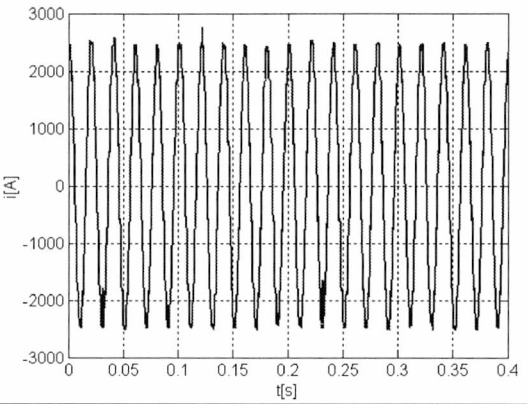
KARTA SYGNAŁU: *Prąd w układzie zasilania pieca łukowego* **G2S3**

Parametry numeryczne sygnału:

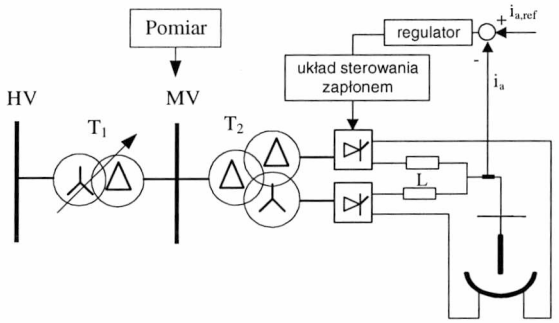
f_{pr}	5kHz
T_x	(0,0.4)s
N_x	2001

Legenda parametrów:
f_{pr} - częstotliwość próbkowania w [Hz]
T_x - długość sygnału w [s]
N_x - długość sygnału w próbkach

Przebieg sygnału:



Schemat układu zasilania pieca łukowego:



Parametry układu:

Moc łuku: 80 MW
Transformator T_1: U_N=220kV/21kV, S_N=80 MVA, w układzie połączeń Y-Δ
Transformator T_2: U_N=21kV/0.638kV/0.638kV, S_N=87 MVA, w układzie połączeń Δ-Δ-Y
Miejsce pomiaru: szyna średniego napięcia (MV)

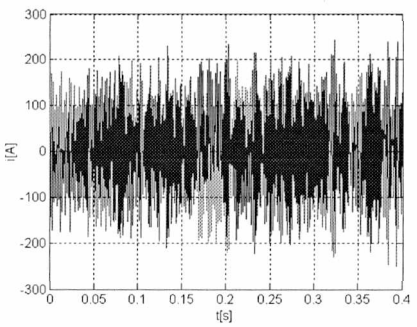
KARTA SYGNAŁU: *Prąd w układzie zasilania pieca łukowego po filtracji ograniczającej ilość składowych (300-600Hz)* **G2S3a**

Parametry numeryczne sygnału:

f_{pr}	5kHz
T_x	(0,0.4)s
N_x	2001

Legenda parametrów:
f_{pr} - częstotliwość próbkowania w [Hz]
T_x - długość sygnału w [s]
N_x - długość sygnału w próbkach

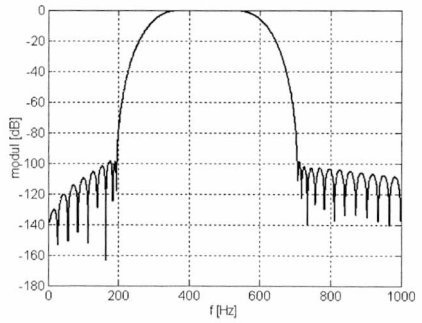
Przebieg sygnału:



Parametry numeryczne filtru:

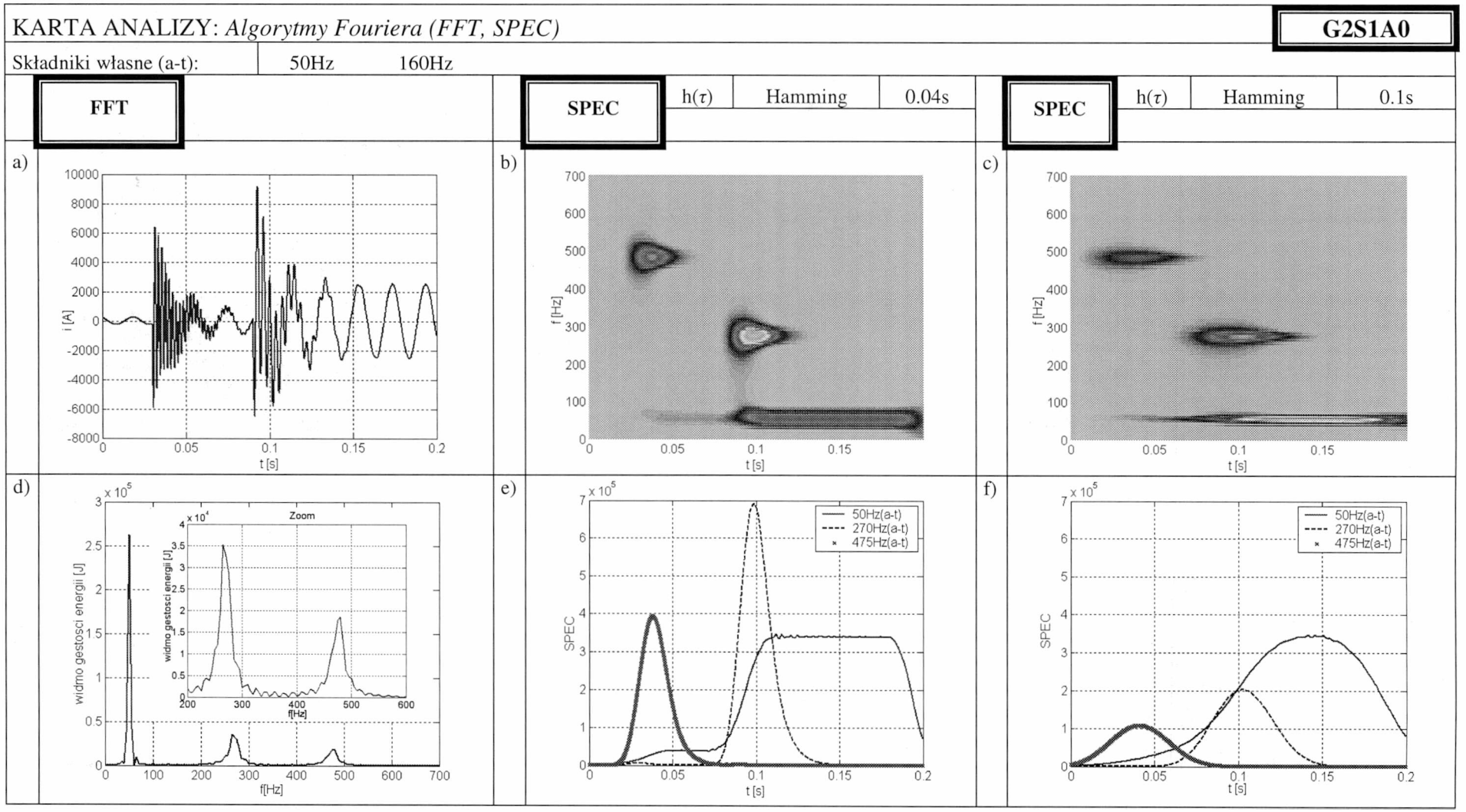
Typ	pasmowo-przepustowy typu FIR
Szerokość pasma	300-600Hz
Rząd filtru	150

Charakterystyka amplitudowa filtru

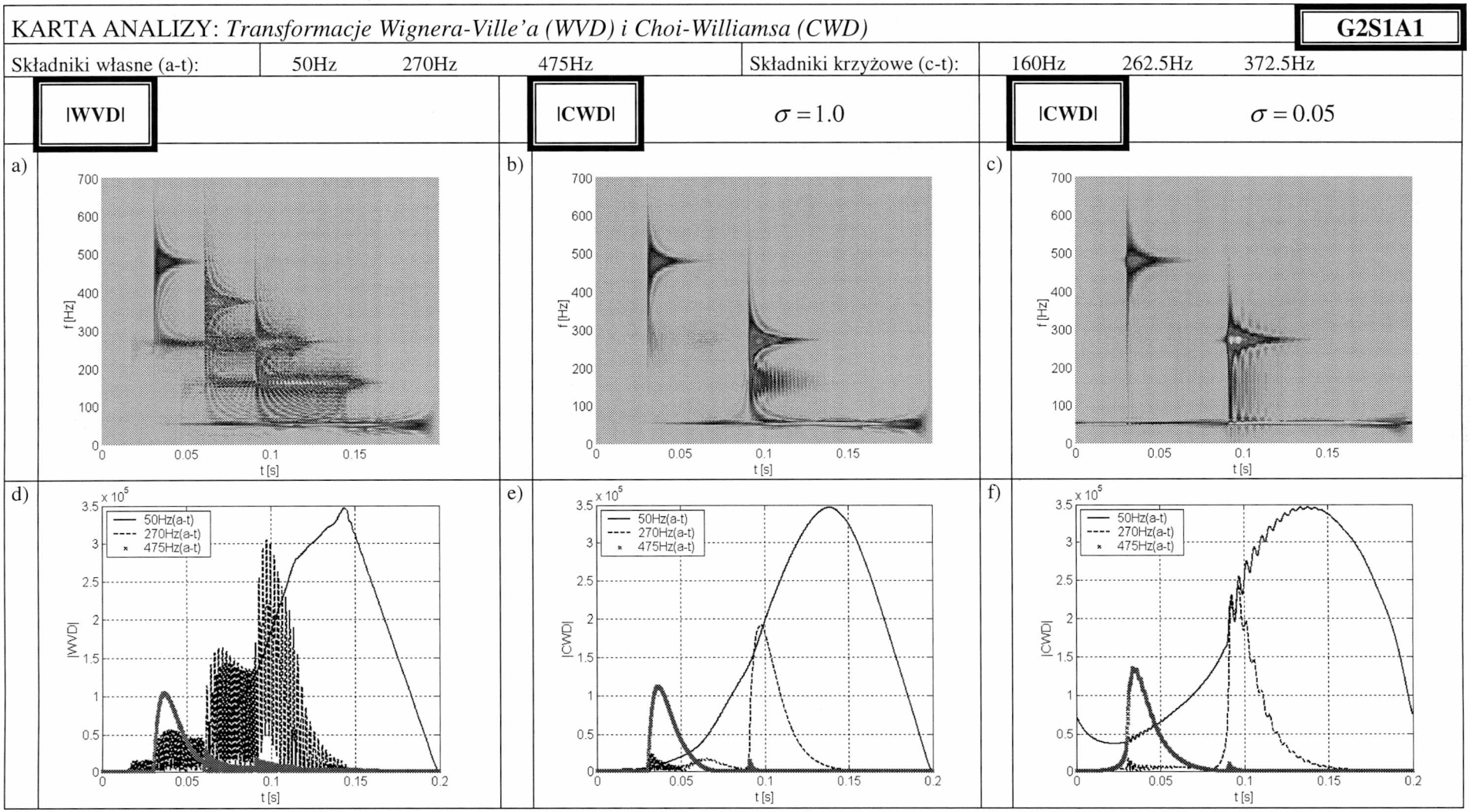


SKOROWIDZ ANALIZ GRUPY 2		G2
Nazwa analizy	Nazwa sygnału	Temat i zawartość analizy
G2S1A0 Rys. 3.14	G2S1	*Temat: Algorytmy Fouriera (FFT, SPEC)* Analizowany sygnał wraz z widmem gęstości energii; płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe spektrogramu z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości równej odpowiednio dwóm oraz pięciu okresom składowej podstawowej oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji.
G2S2A0 Rys. 3.20	G2S2	
G2S1A1 Rys. 3.15	G2S1	*Temat: Transformacje Wignera-Ville'a (WVD) i Choi-Williamsa (CWD)* Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu transformacji Wignera-Ville'a i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji.
G2S2A1 Rys. 3.21	G2S2	
G2S1A2 Rys. 3.16 Rys. 3.17	G2S1	*Temat: Wygładzone pseudo-reprezentacje Wignera-Ville'a (SPWVD) i Choi-Williamsa (SPCWD)* Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu wygładzonej pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji ; strona 1 analizy: h(τ) – okno Hamminga o szerokości pięciu okresów składowej podstawowej, g(t) – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej; strona 2 analizy: h(τ) – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej, g(t) – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej.
G2S2A2 Rys. 3.22 Rys. 3.23	G2S2	
G2S1A3 Rys. 3.18	G2S1	*Temat: Transformacje Born-Jordana (BJD) i Zhao-Atlas-Marksa (ZAMD)* Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu transformacji Born-Jordana i Zhao-Atlas-Marksa z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości pięciu i dwóch okresów składowej podstawowej oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji.
G2S2A3 Rys. 3.24	G2S2	
G2S1AP Rys. 3.19	G2S1	*Temat: Transformata falkowa i metoda Prony'ego* Płaszczyzna czasowo-częstotliwościowa transformaty flakowej oraz przebiegi składników częstotliwościowych fragmentów sygnału „*G2S1*"uzyskane za pomocą metody Prony'ego. Wyniki porównawcze zaczerpnięto z prac [36,38] oraz [44].
G2S2AP Rys. 3.25	G2S2	*Temat: Transformata falkowa i metoda Min-Norm* Płaszczyzna czasowo-częstotliwościowa transformaty flakowej oraz metody Min-Norm z przesuwającym oknem o szerokości 80 próbek. Wyniki porównawcze zaczerpnięto z prac [36,38].

SKOROWIDZ ANALIZ GRUPY 2 - c.d.		G2
Nazwa analizy	Nazwa sygnału	Temat i zawartość analizy
G2S3A0 Rys. 3.26	G2S3	*Temat: Problemy interpretacji analizy sygnału wieloskładnikowego ze składową o przeważającej energii* Analizowany sygnał wraz z widmem gęstości energii; fragment płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu transformacji Wignera-Ville'a, Choi-Williamsa z dwoma wartościami współczynnika tłumienia σ i Zhao-Atlas-Marksa z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości równej pięciu okresom składowej podstawowej,
G2S3aA0 Rys. 3.27	G2S3a	*Temat: Algorytmy Fouriera (FFT, SPEC)* Analizowany sygnał wraz z widmem gęstości energii; płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe spektrogramu z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości równej odpowiednio dwóm oraz pięciu okresom składowej podstawowej oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji.
G2S3aA1 Rys. 3.28	G2S3a	*Temat: Transformacje Wignera-Ville'a (WVD) i Choi-Williamsa (CWD)* Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu transformacji Wignera-Wille'a i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji.
G2S3aA2 Rys. 3.29 Rys. 3.30	G2S3a	*Temat: Wygładzone pseudo-reprezentacje Wignera-Ville'a (SPWVD) i Choi-Williamsa (SPCWD)* Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu wygładzonej pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji ; strona 1 analizy: $h(\tau)$ – okno Hamminga o szerokości pięciu okresów składowej podstawowej, $g(t)$ – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej; strona 2 analizy: $h(\tau)$ – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej, $g(t)$ – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej.
G2S3aA3 Rys. 3.31	G2S3a	*Temat: Transformacje Born-Jordana (BJD) i Zhao-Atlas-Marksa (ZAMD)* Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu transformacji Born-Jordana i Zhao-Atlas-Marksa z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości pięciu i dwóch okresów składowej podstawowej oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji.
G2S3aAP Rys. 3.32	G2S3a	*Temat: Metoda Prony'ego i metoda root-Music* Wahania składników częstotliwościowych w zakresie 300-600Hz uzyskane metodą Prony'ego z przesuwającym się oknem o szerokości 22 próbek oraz metodą root-Music z przesuwającym oknem o szerokości 500 próbek Wyniki porównawcze zaczerpnięto z prac [11,12].



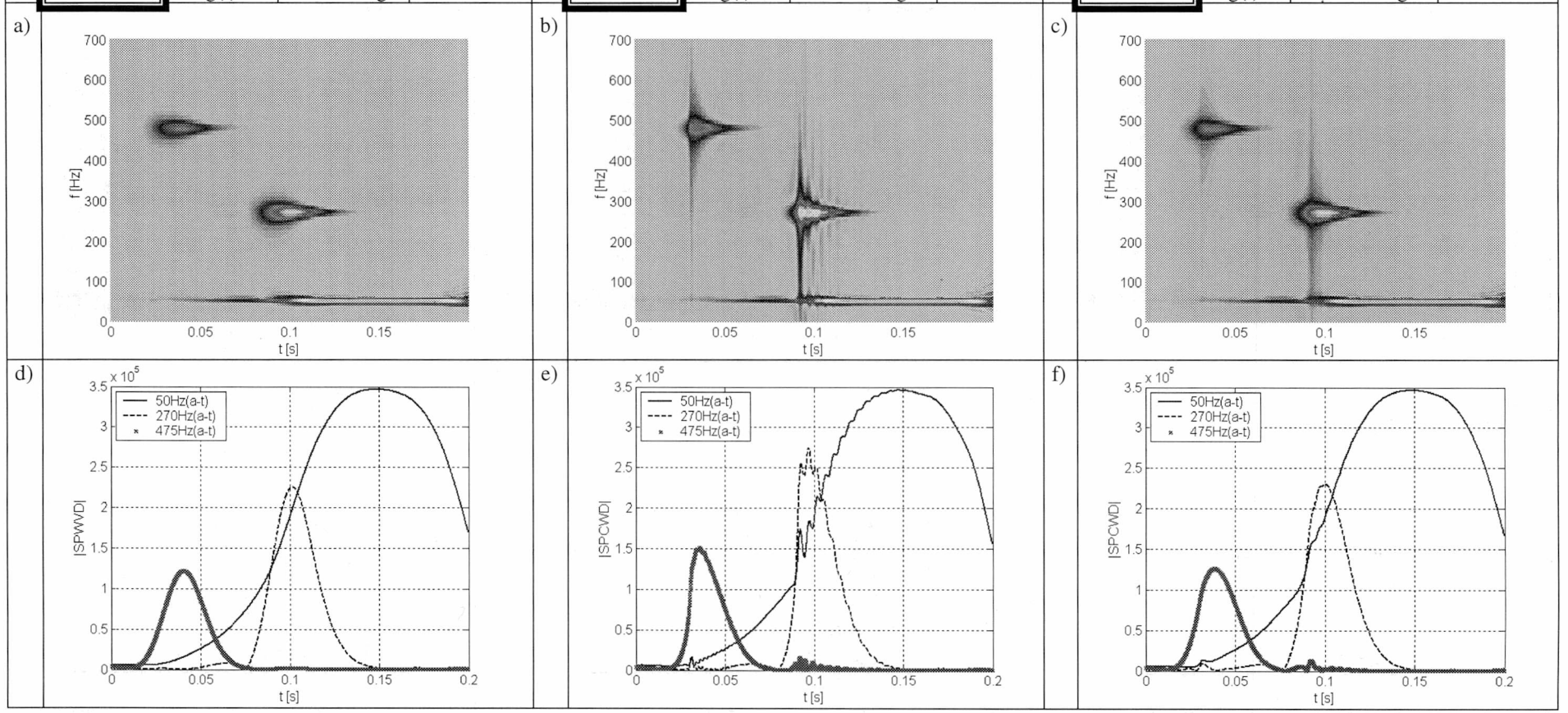
Rys. 3.14. Analizowany sygnał wraz z widmem gęstości energii (a,d); płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe spektrogramu z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości równej odpowiednio dwóm oraz pięciu okresom składowej podstawowej (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S1*".



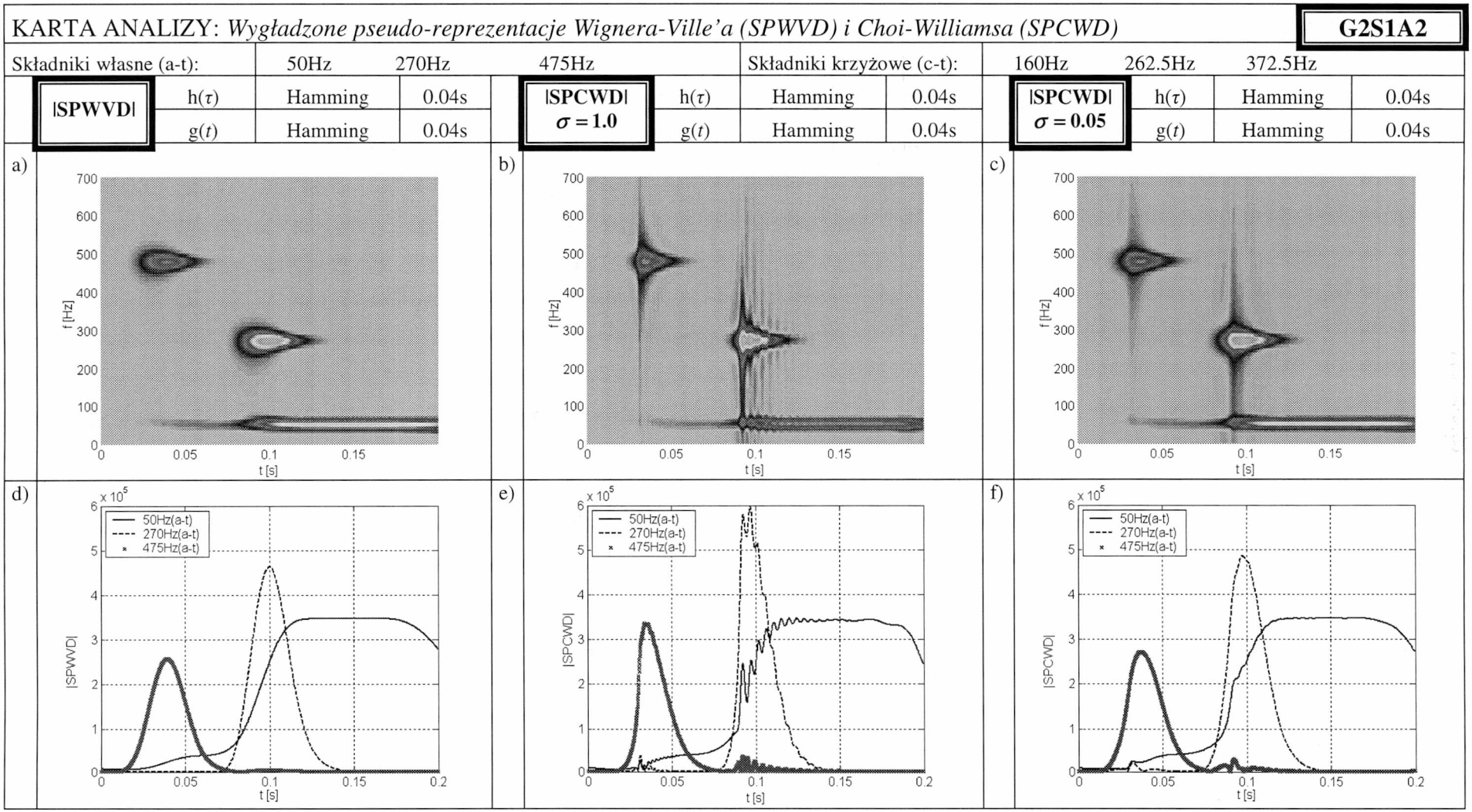
Rys. 3.15. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu transformacji Wignera-Wille'a (a) i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S1*".

KARTA ANALIZY: *Wygładzone pseudo-reprezentacje Wignera-Ville'a (SPWVD) i Choi-Williamsa (SPCWD)* **G2S1A2**

Składniki własne (a-t):		50Hz	270Hz	475Hz	Składniki krzyżowe (c-t):		160Hz	262.5Hz	372.5Hz	
|SPWVD|	$h(\tau)$	Hamming	0.1s	**|SPCWD| $\sigma = 1.0$**	$h(\tau)$	Hamming	0.1s	**|SPCWD| $\sigma = 0.05$**	$h(\tau)$	Hamming	0.1s
	$g(t)$	Hamming	0.04s		$g(t)$	Hamming	0.04s		$g(t)$	Hamming	0.04s



Rys. 3.16. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu wygładzonej pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a (a) i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S1*"; $h(\tau)$ – okno Hamminga o szerokości pięciu okresów składowej podstawowej, $g(t)$ – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej.

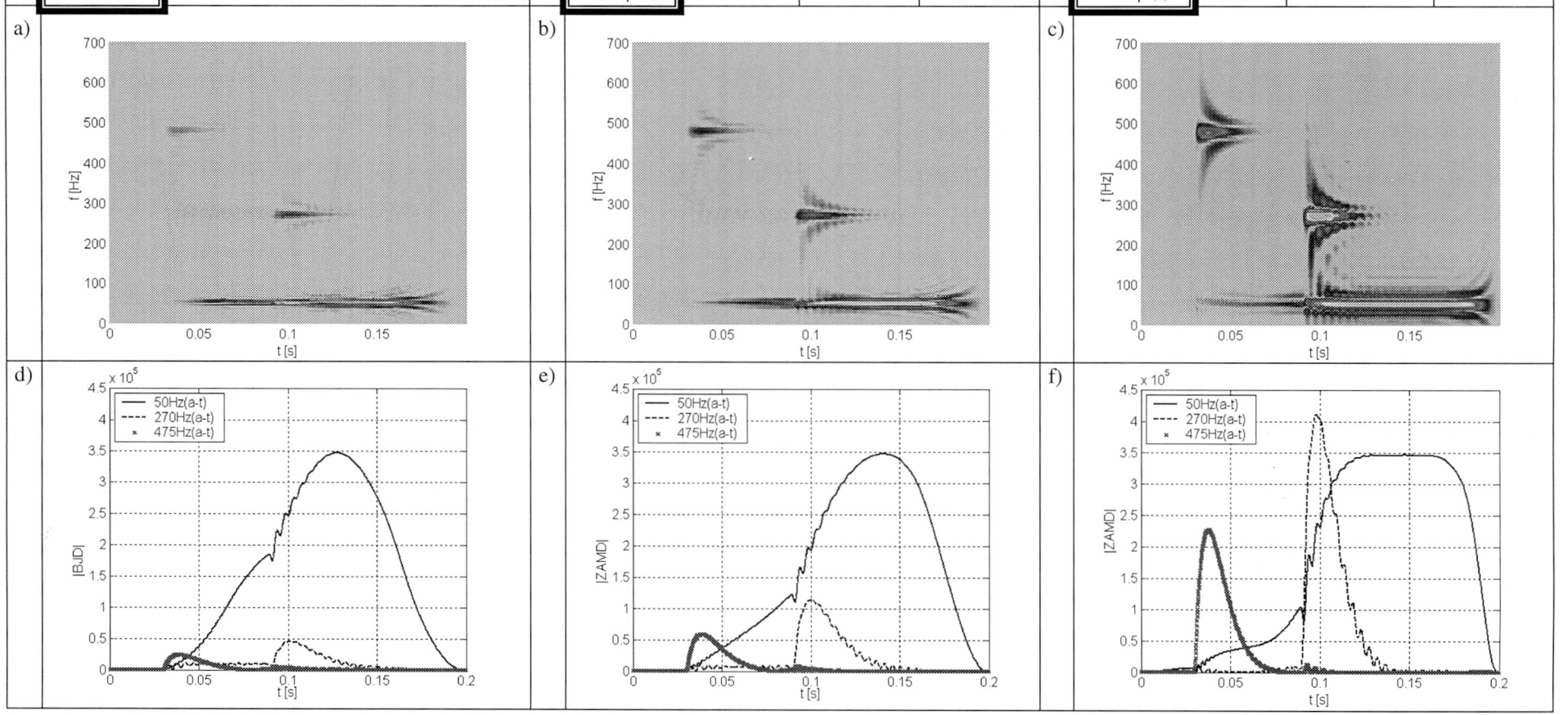


Rys. 3.17. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu wygładzonej pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a (a) i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S1*"; h(τ) – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej, g(t) – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej.

KARTA ANALIZY: *Transformacje Born-Jordana (BJD) i Zhao-Atlas-Marksa (ZAMD)* **G2S1A3**

Składniki własne (a-t):	50Hz	270Hz	475Hz	Składniki krzyżowe (c-t):	160Hz	262.5Hz	372.5Hz

|BJD|	**|ZAMD| BJD$\|_{h(\tau)}$**	h(τ)	Hamming	0.1s	**|ZAMD| BJD$\|_{h(\tau)}$**	h(τ)	Hamming	0.04s



Rys. 3.18. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu transformacji Born-Jordana (a) i Zhao-Atlas-Marksa z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości pięciu i dwóch okresów składowej podstawowej (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S1*".

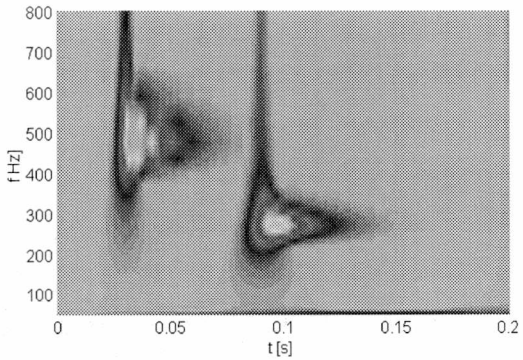
KARTA ANALIZY PORÓWNAWCZEJ: *Transformata falkowa i metoda Prony'ego*

G2S1AP

WT Płaszczyzna czasowo-częstotliwościowa

Składniki: 50Hz, 272Hz, 478Hz

a)



$$\mathrm{WT}(t,a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\underline{g}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt$$

Zespolona falka Morleta:

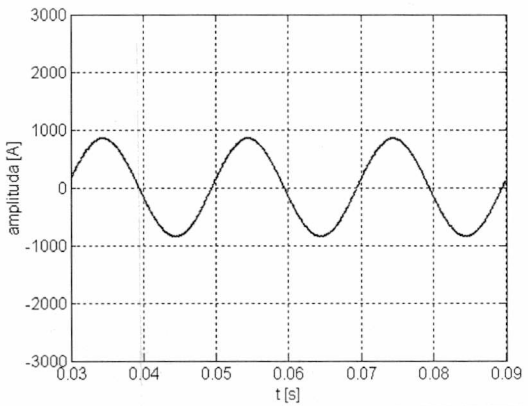
$$\underline{g}(t)=\sqrt{\pi\cdot f_B}\cdot e^{j2\pi f_C t}\cdot e^{-\frac{t^2}{f_B}}$$

f_B=1; f_C=5, zakres skali=9:2:300

Prony Estymacja składników sygnału „G2S1" w zakresie t(0.03-0.09)s

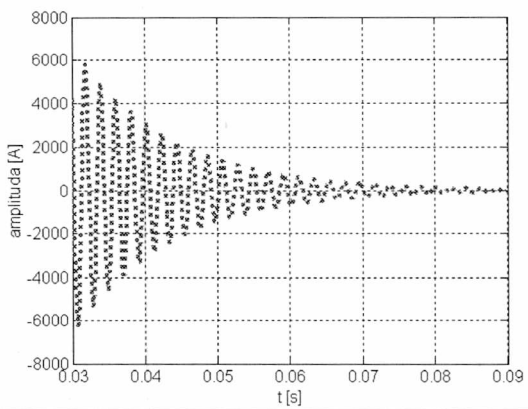
Składnik 1: 50.00Hz

b)



Składnik 2:475.91Hz

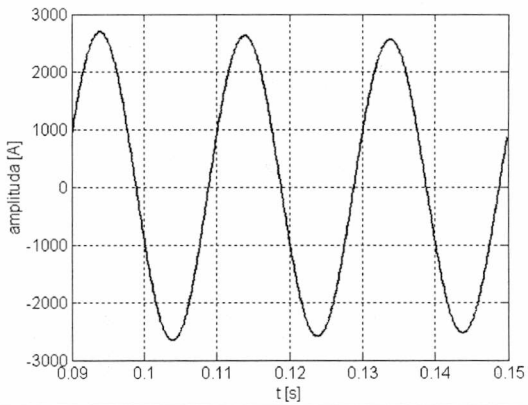
c)



Prony Estymacja składników sygnału „G2S1" w zakresie t(0.09-1.5)s

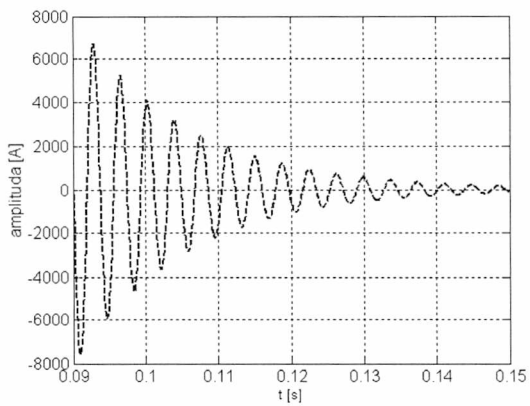
Składnik 1: 50.00Hz

d)

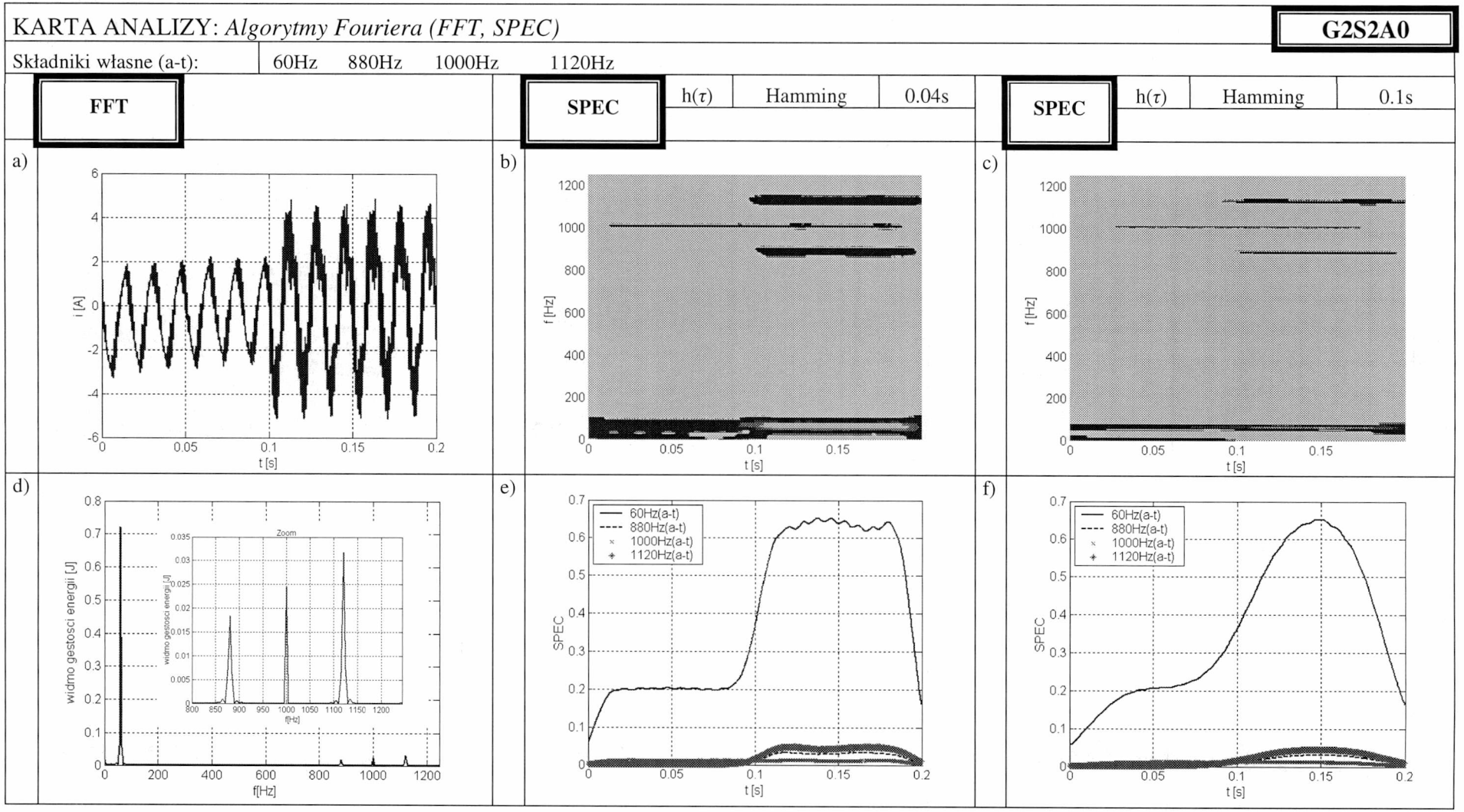


Składnik 2: 269.64 Hz

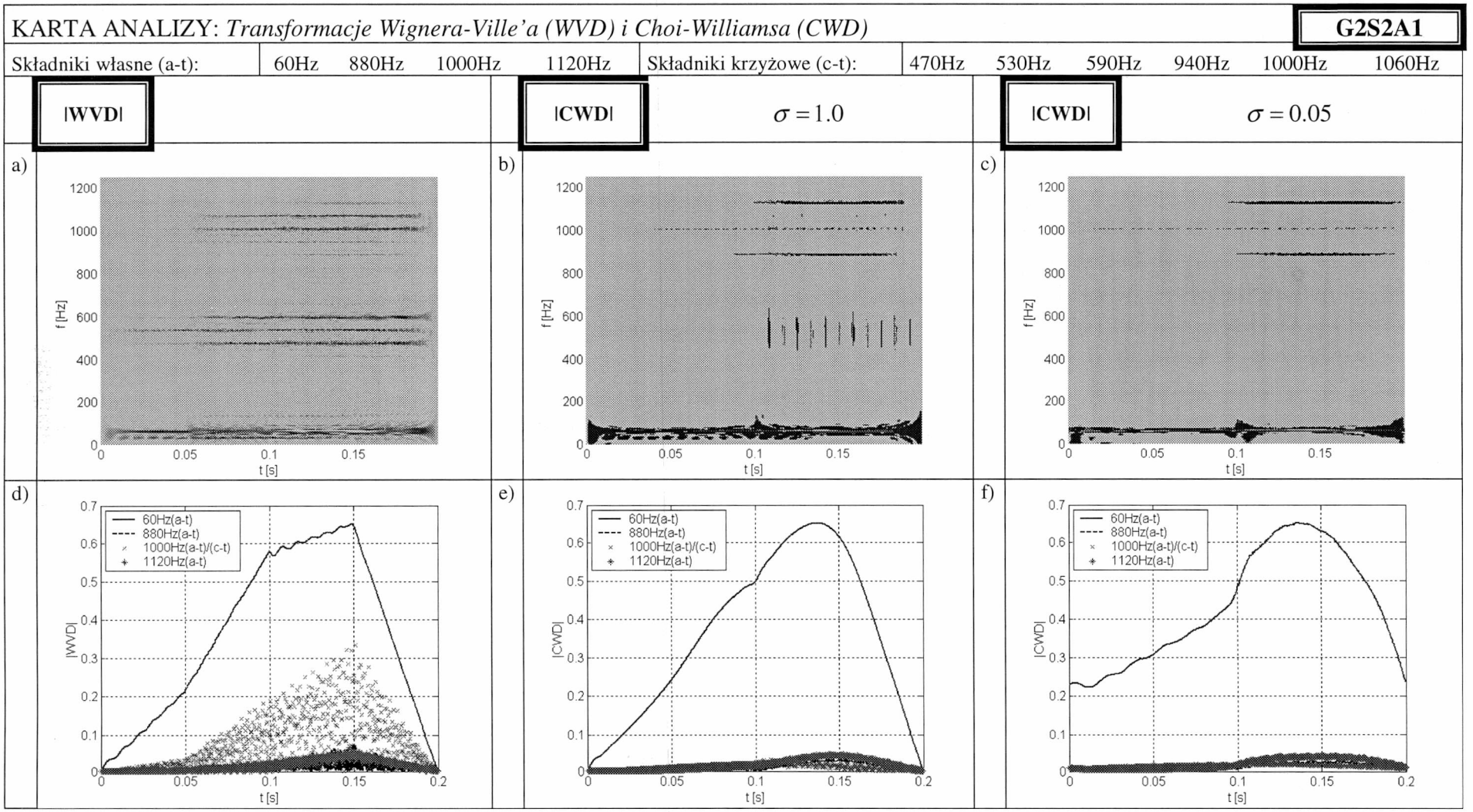
e)



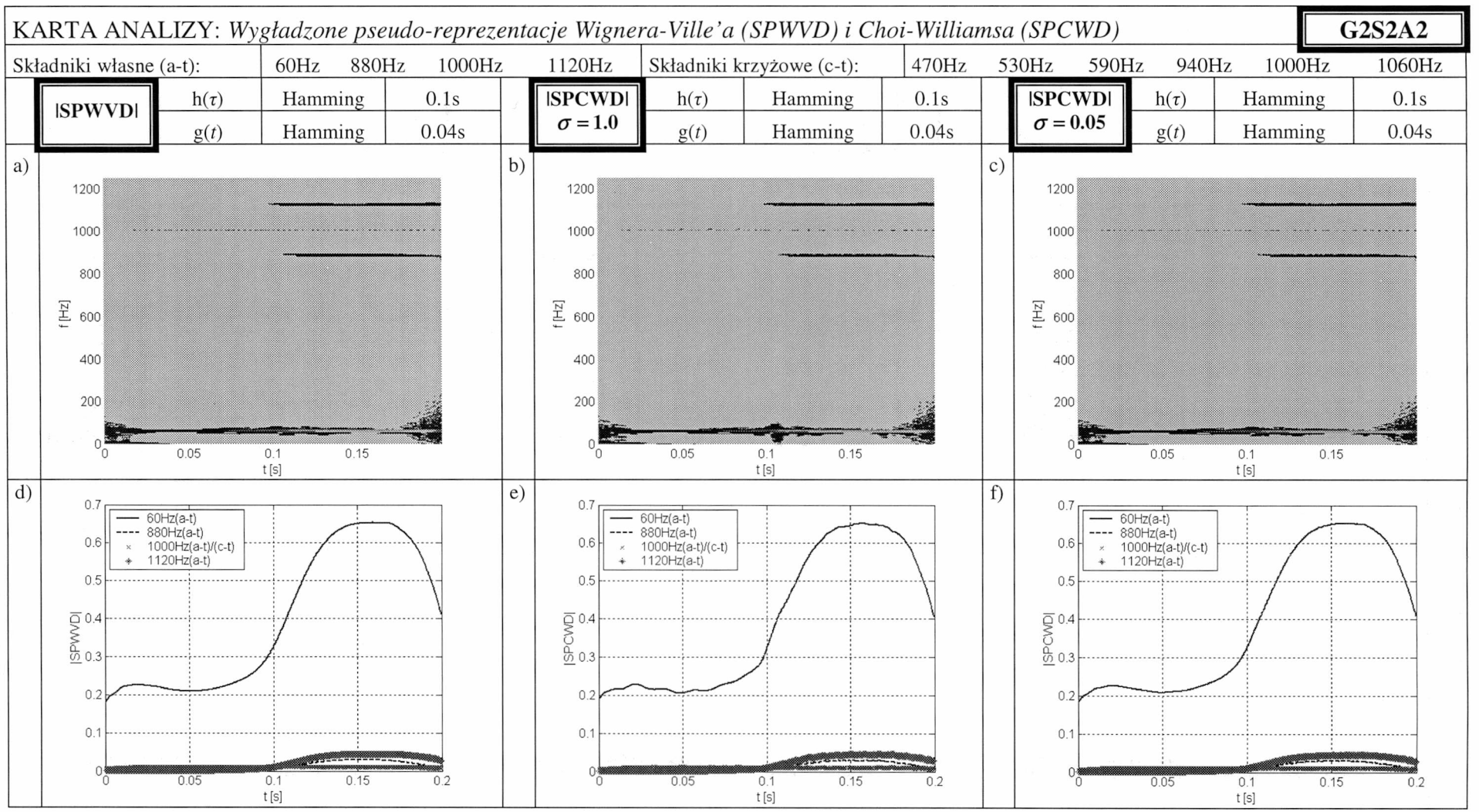
Rys. 3.19. Płaszczyzna czasowo-częstotliwościowa transformaty flakowej (a) oraz przebiegi składników częstotliwościowych fragmentów sygnału „*G2S1*"(a,b-fragment t(0.03-0.09)s; d,e-fragment t(0.09-1.5)s uzyskane za pomocą metody Prony'ego. Wyniki porównawcze zaczerpnięto z prac [36,38] oraz [44].



Rys. 3.20. Analizowany sygnał wraz z widmem gęstości energii (a,d); płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe spektrogramu z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości równej odpowiednio dwóm oraz pięciu okresom składowej podstawowej (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S2*".

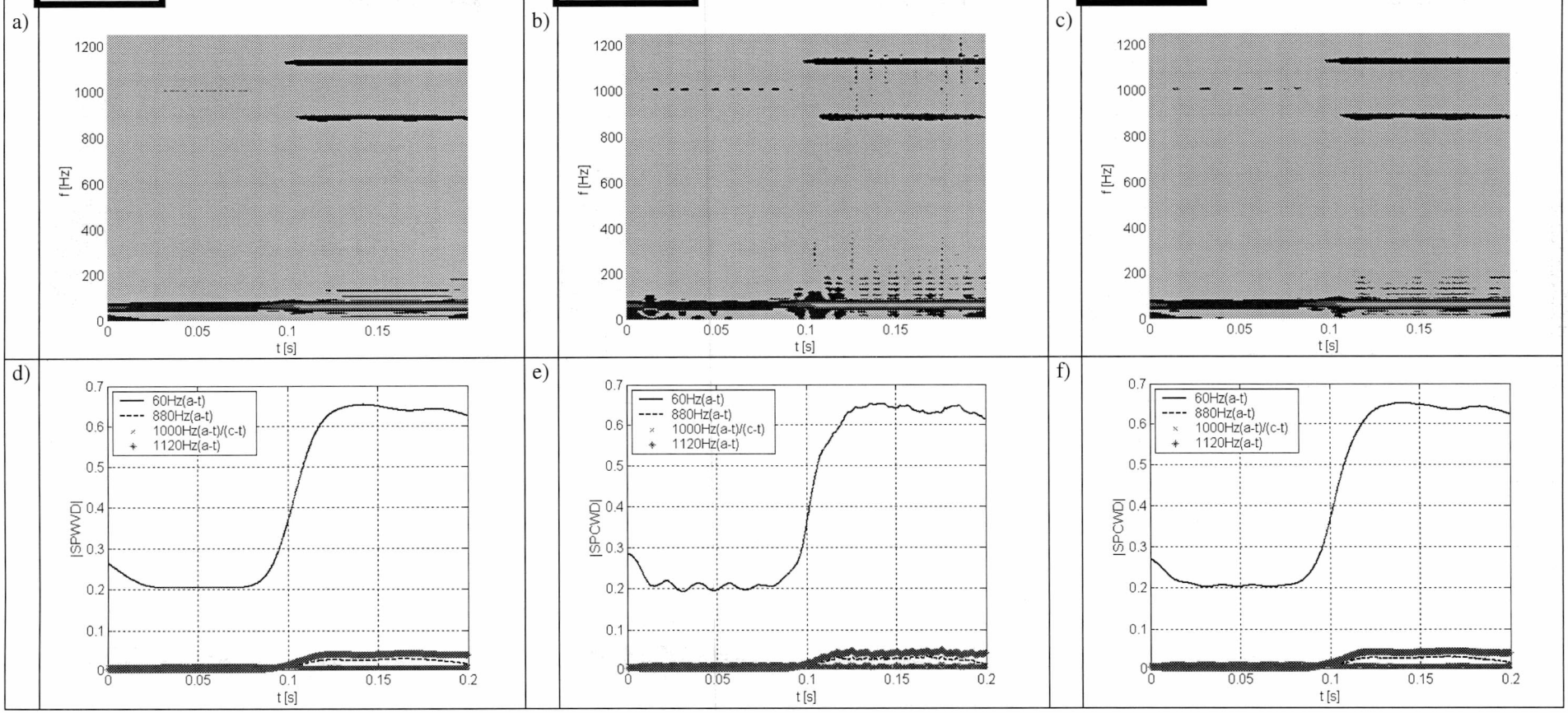


Rys. 3.21. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu transformacji Wignera-Wille'a (a) i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S2*".

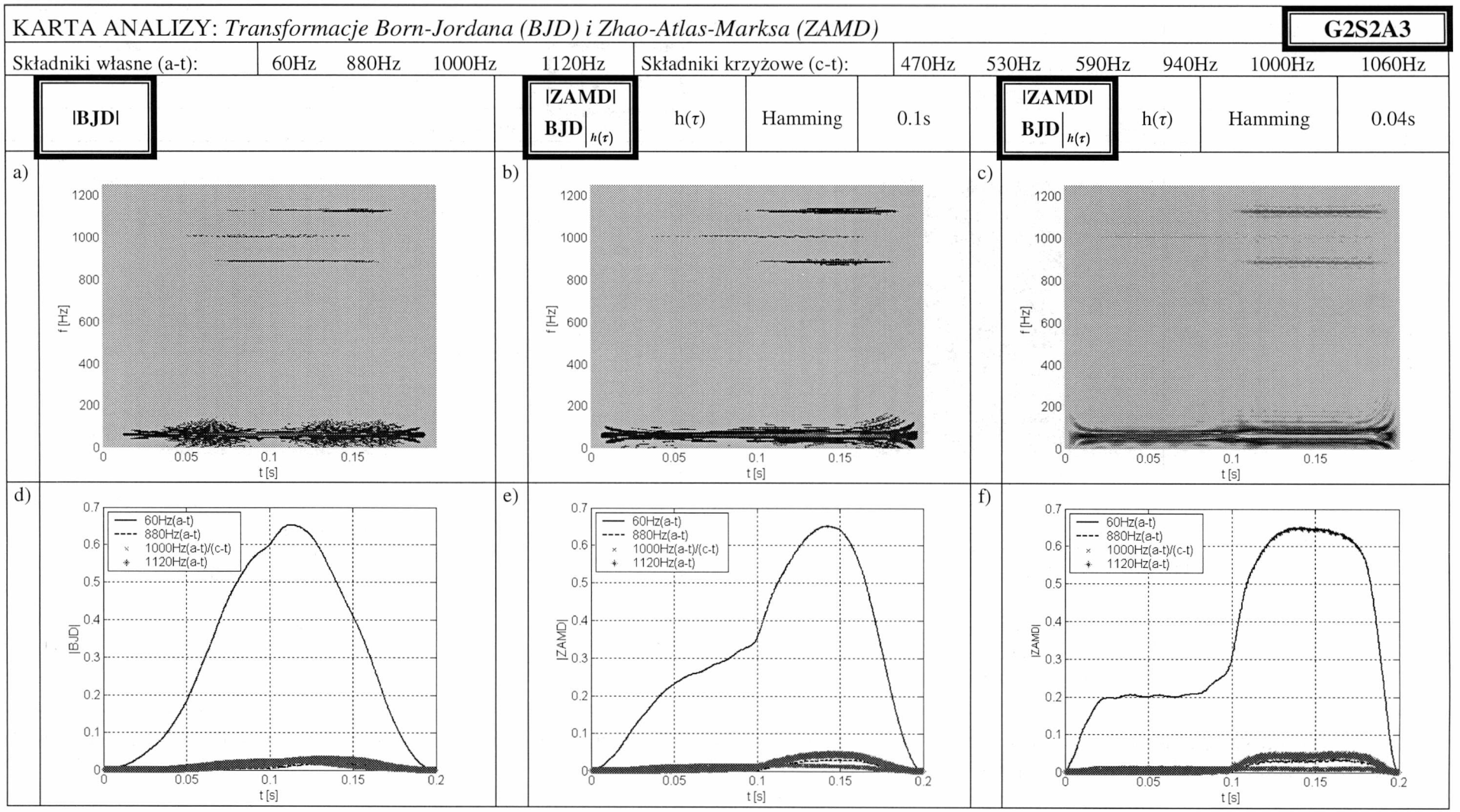


Rys. 3.22. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu wygładzonej pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a (a) i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S2*"; h(τ) – okno Hamminga o szerokości pięciu okresów składowej podstawowej, g(t) – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej.

KARTA ANALIZY: *Wygładzone pseudo-reprezentacje Wignera-Ville'a (SPWVD) i Choi-Williamsa (SPCWD)*												**G2S2A2**
Składniki własne (a-t):	60Hz	880Hz	1000Hz	1120Hz	Składniki krzyżowe (c-t):	470Hz	530Hz	590Hz	940Hz	1000Hz	1060Hz	
|SPWVD|	h(τ)	Hamming	0.04s		**|SPCWD| $\sigma = 1.0$**	h(τ)	Hamming	0.04s		**|SPCWD| $\sigma = 0.05$**	h(τ)	Hamming	0.04s
	g(t)	Hamming	0.04s			g(t)	Hamming	0.04s			g(t)	Hamming	0.04s



Rys. 3.23. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu wygładzonej pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a (a) i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S2*"; h(τ) – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej, g(t) – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej.



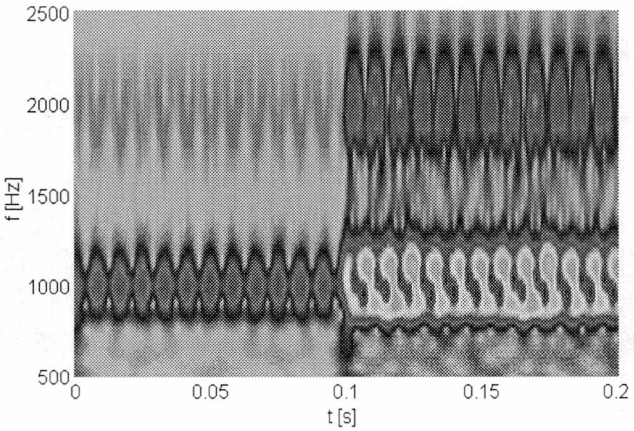
Rys. 3.24. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu transformacji Born-Jordana (a) i Zhao-Atlas-Marksa z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości pięciu i dwóch okresów składowej podstawowej (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S2*".

KARTA ANALIZY PORÓWNAWCZEJ: *Transformata falkowa i metoda Min-Norm* **G2S2AP**

WT Płaszczyzna czasowo-częstotliwościowa - fragment

Składniki: 880Hz, 1000Hz, 1100Hz, 1930Hz

a)



$$\mathrm{WT}(t,a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\underline{g}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt$$

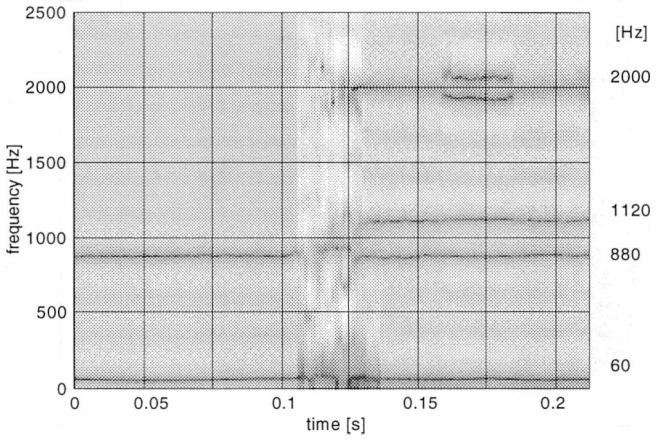
Zespolona falka Morleta: $\underline{g}(t)=\sqrt{\pi\cdot f_B}\cdot e^{j2\pi f_C t}\cdot e^{-\frac{t^2}{f_B}}$

f_B=1; f_C=1, zakres skali=0.1:0.1:10

Min-Norm Płaszczyzna czasowo-częstotliwościowa

Składniki: 60Hz, 880Hz, 1120Hz, 2000Hz

b)



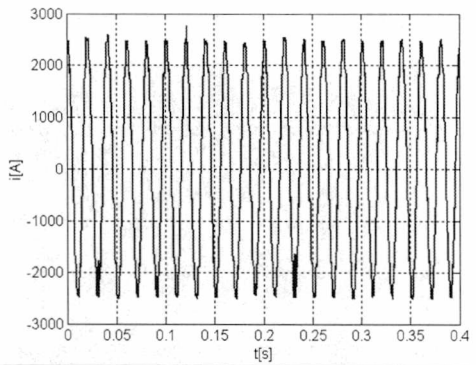
metoda Min-Norm
szerokość okna 80 próbek,
częstotliwość próbkowania 20 kHz

Rys. 3.25. Płaszczyzna czasowo-częstotliwościowa transformaty flakowej (a) oraz metody Min-Norm z przesuwającym oknem o szerokości 80 próbek (b). Wyniki porównawcze zaczerpnięto z prac [36,38].

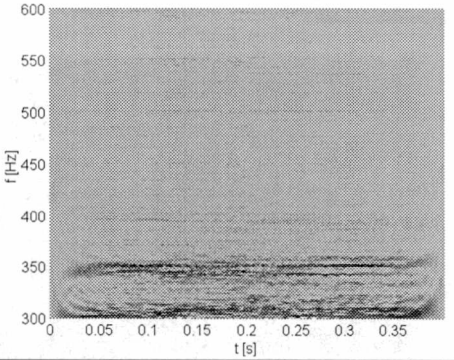
KARTA ANALIZY: *Problemy interpretacji analizy sygnału wieloskładnikowego ze składową o przeważającej energii* **G2S3A0**

Sygnał | **|WVD|** | **|CWD|** $\sigma = 1.0$

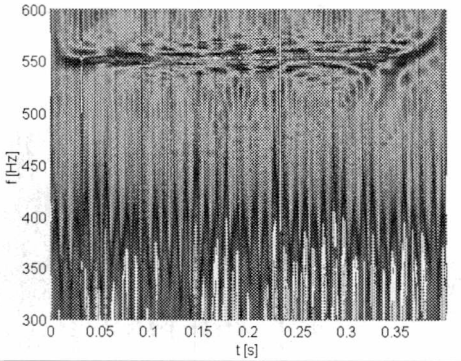
a)



b)

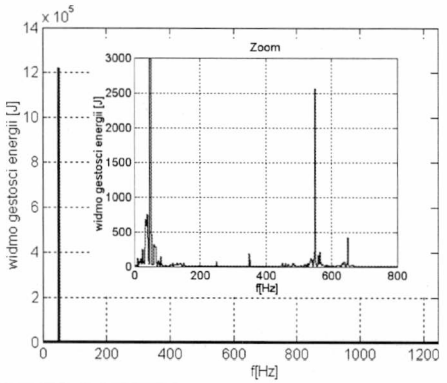


c)

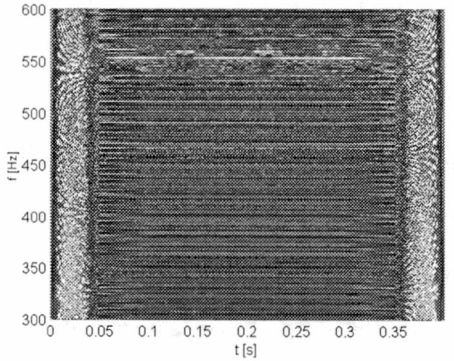


FFT | **|ZAMD|** $\left|\mathbf{BJD}\right|_{h(\tau)}$ | $h(\tau)$ | Hamming | 0.1s | **|CWD|** $\sigma = 0.005$

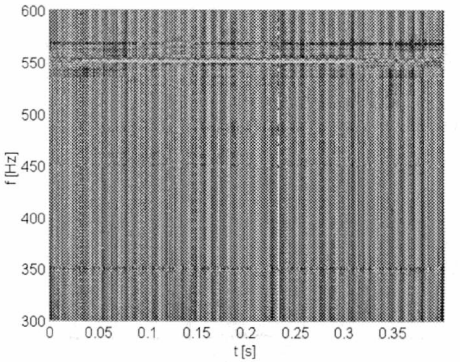
d)



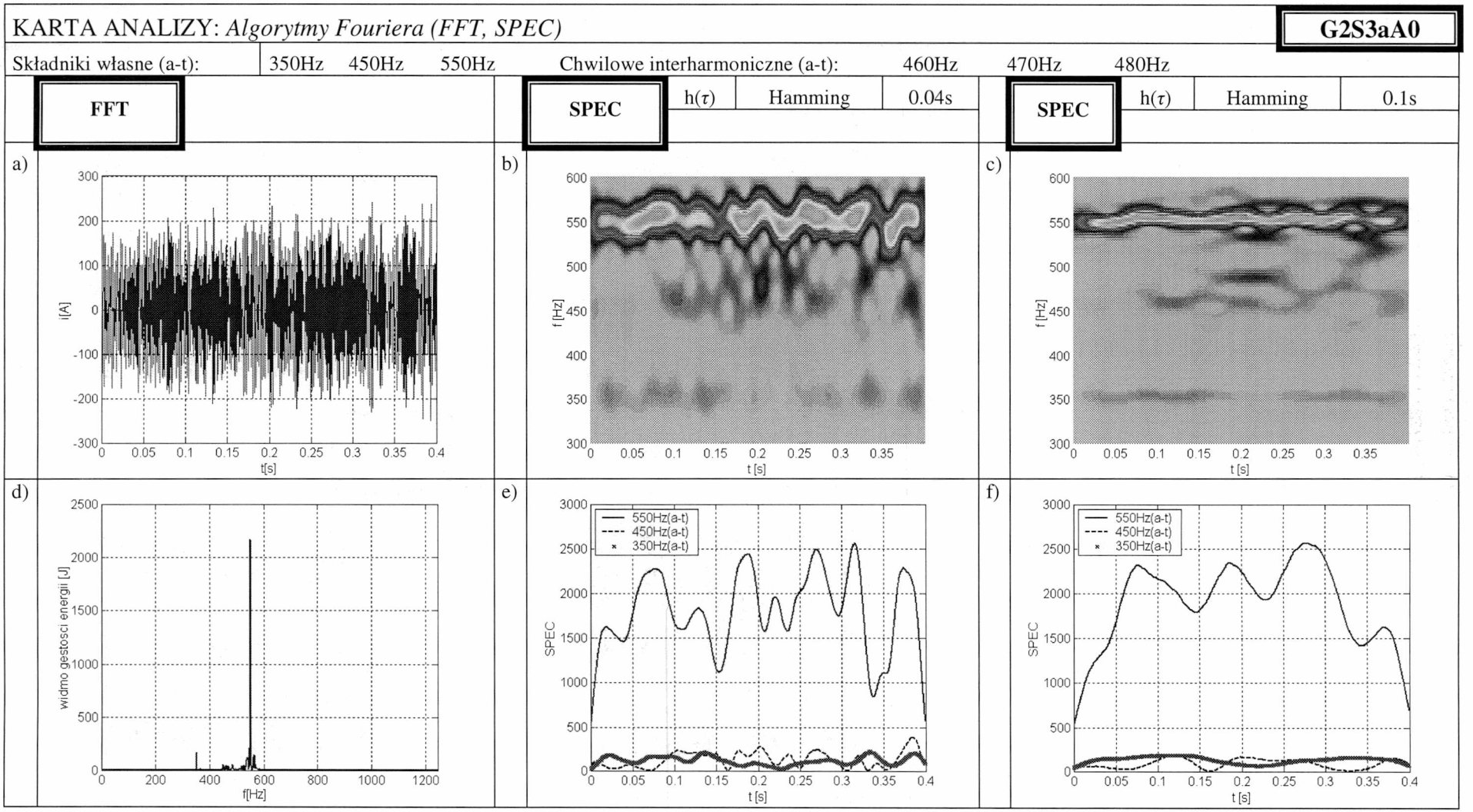
e)



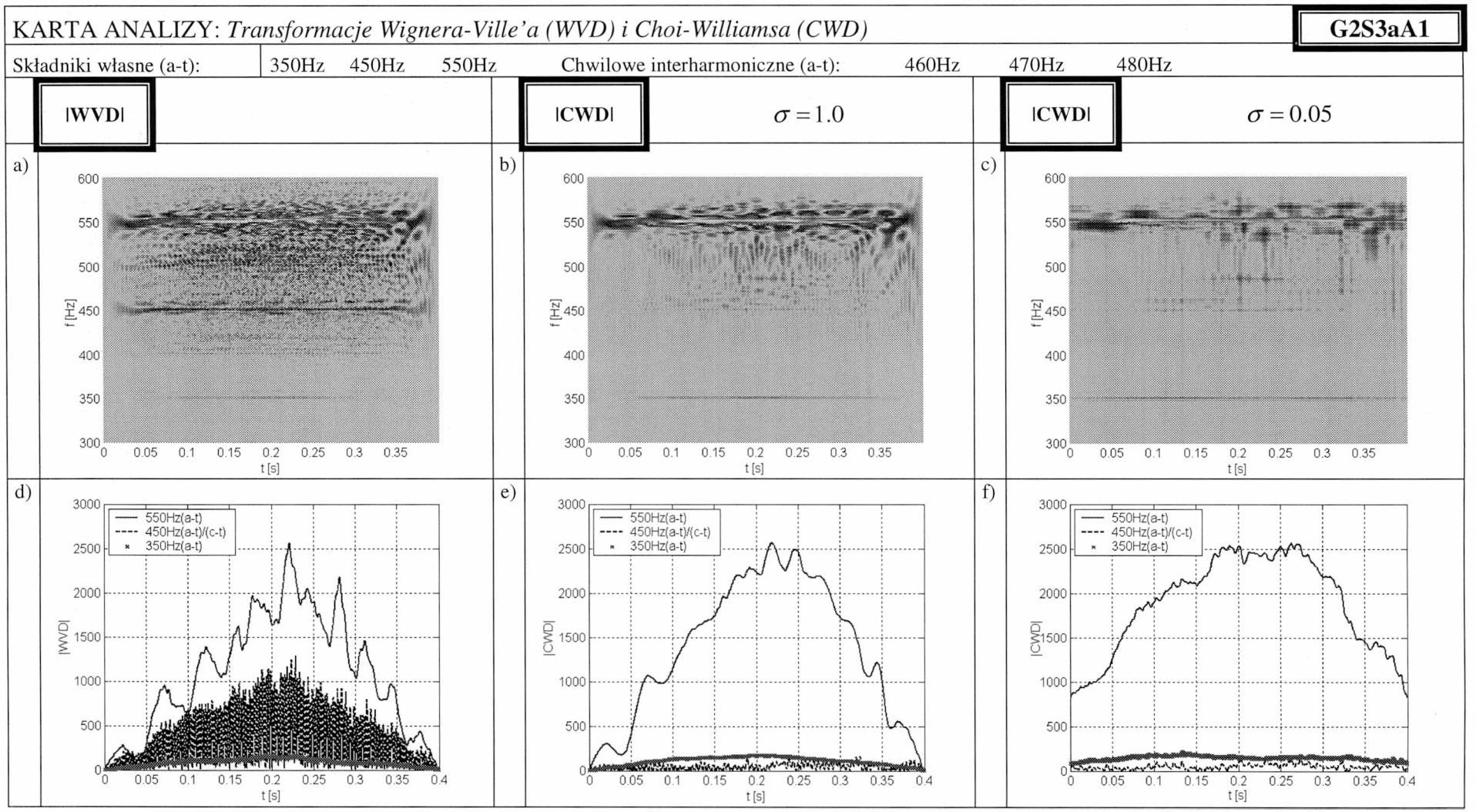
f)



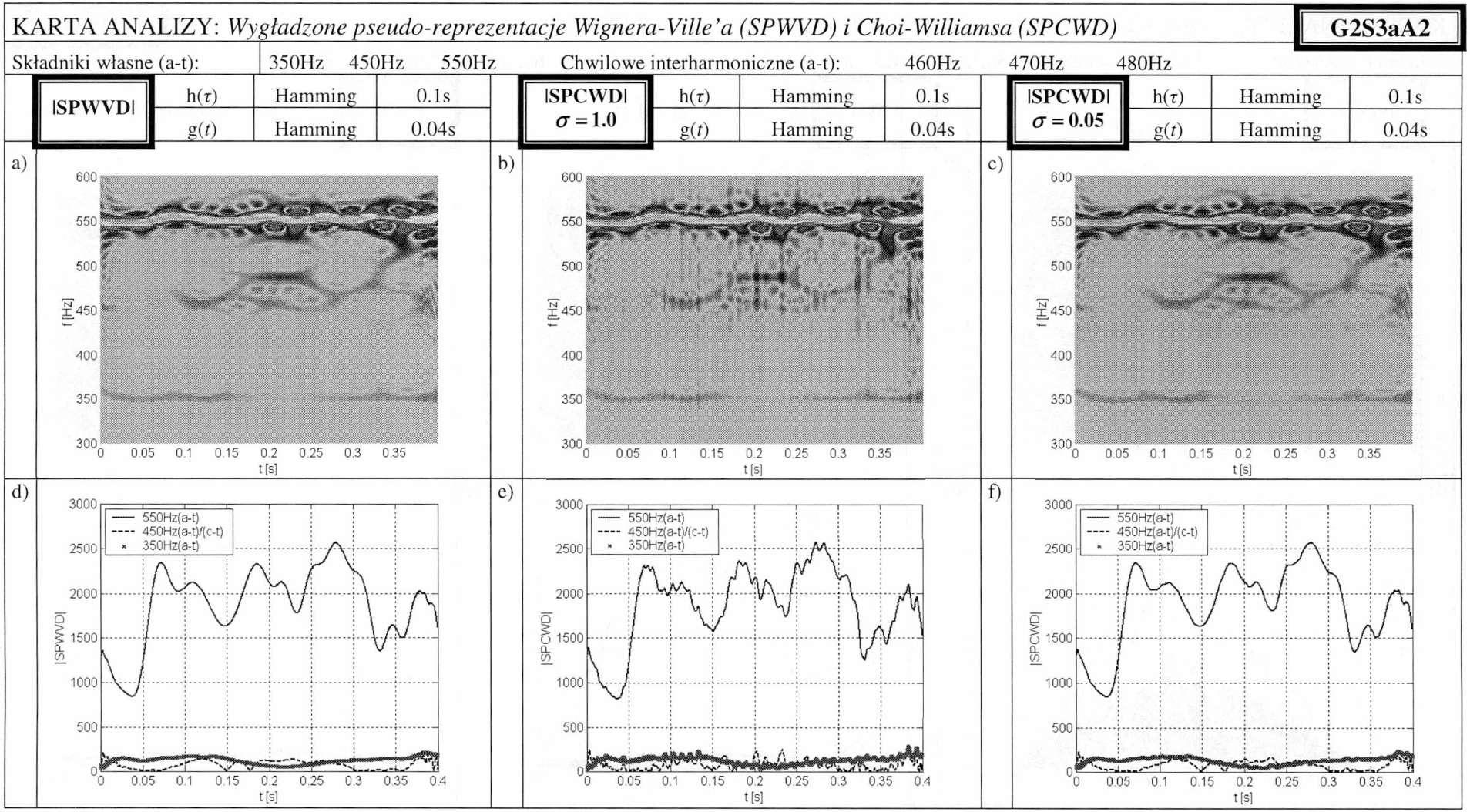
Rys. 3.26. Analizowany sygnał wraz z widmem gęstości energii (a,d); fragment płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu transformacji Wignera-Ville'a (b), Choi-Williamsa z dwoma wartościami współczynnika tłumienia σ (c,f) i Zhao-Atlas-Marksa (e) z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości równej pięciu okresom składowej podstawowej, na przykładzie analizy sygnału „*G2S3*".



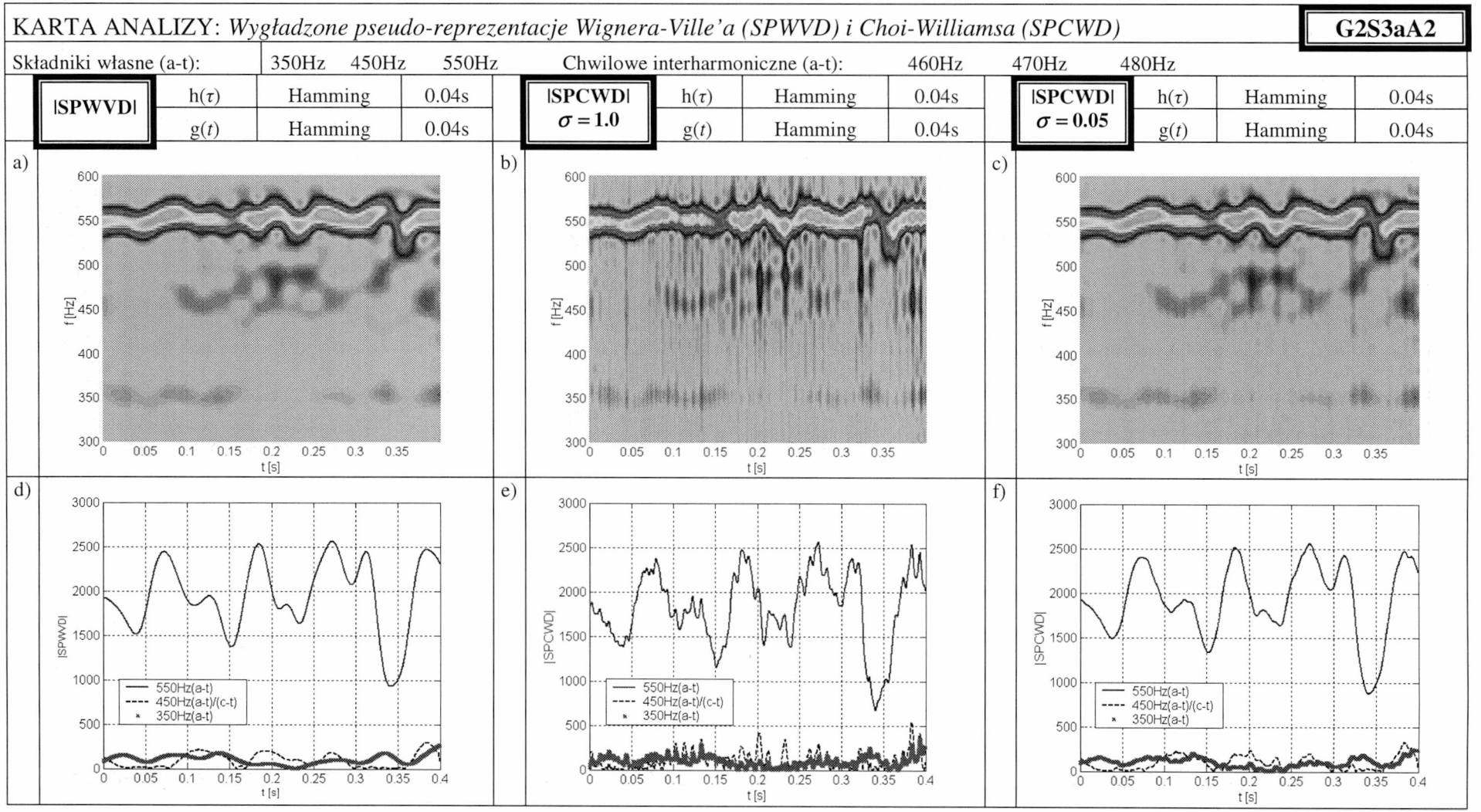
Rys. 3.27. Analizowany sygnał wraz z widmem gęstości energii (a,d); płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe spektrogramu z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości równej odpowiednio dwóm oraz pięciu okresom składowej podstawowej (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S3a*".



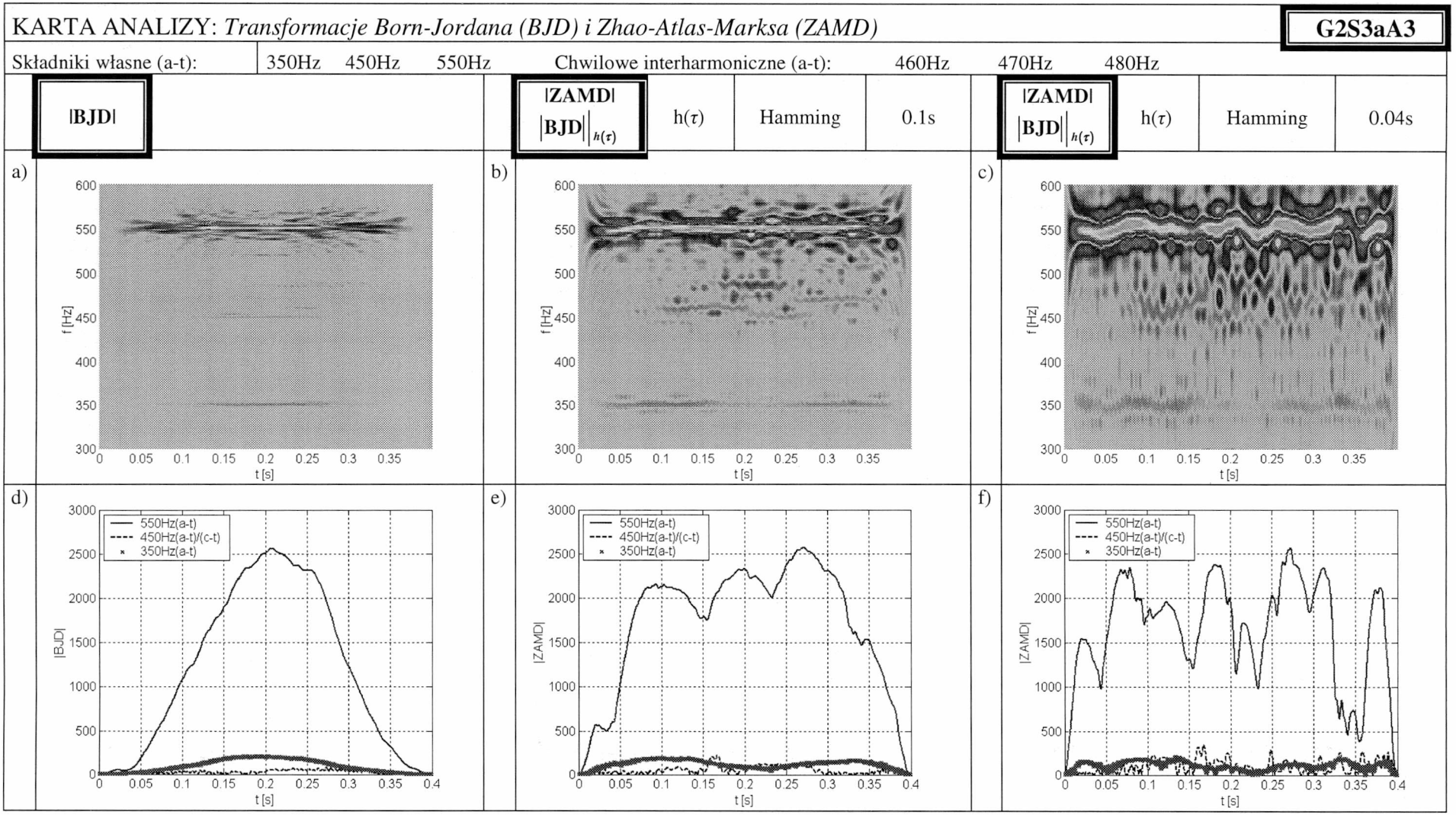
Rys. 3.28. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu transformacji Wignera-Wille'a (a) i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S3a*".



Rys. 3.29. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu wygładzonej pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a (a) i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S3a*"; h(τ) – okno Hamminga o szerokości pięciu okresów składowej podstawowej, g(t) – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej.

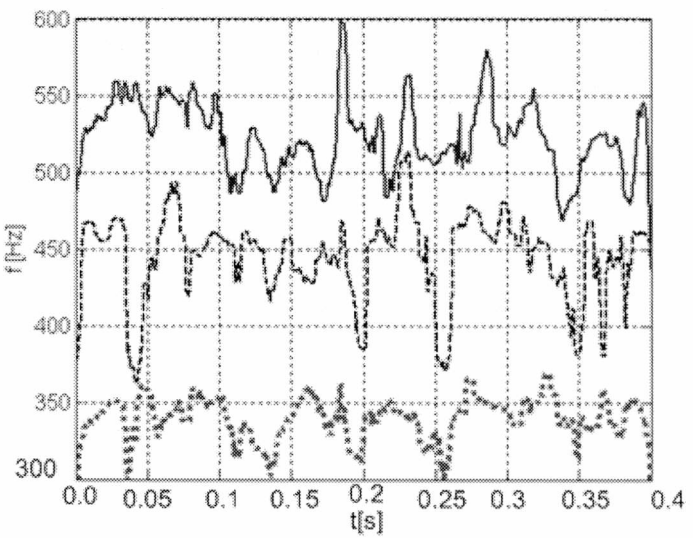
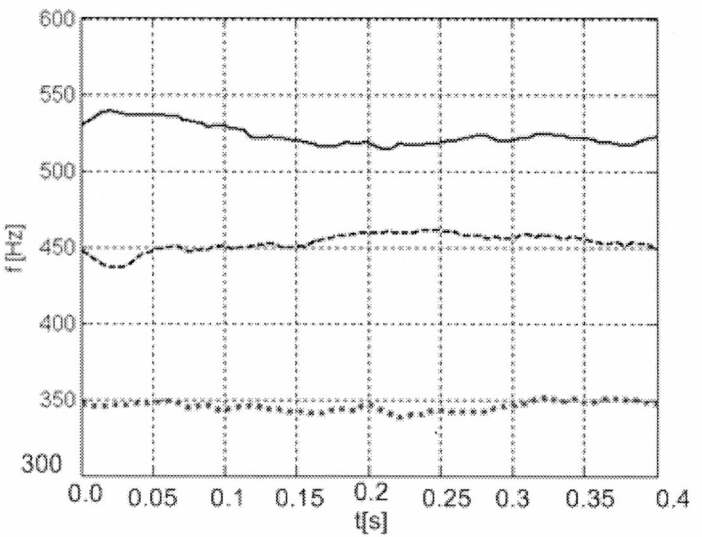


Rys. 3.30. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu wygładzonej pseudo-reprezentacji Wignera-Ville'a (a) i Choi-Williamsa z różnymi wartościami współczynnika tłumienia σ (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S3a*"; h(τ) – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej, g(t) – okno Hamminga o szerokości dwóch okresów składowej podstawowej.



Rys. 3.31. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe modułu transformacji Born-Jordana (a) i Zhao-Atlas-Marksa z wygładzającym oknem Hamminga o szerokości pięciu i dwóch okresów składowej podstawowej (b,c) oraz przebiegi składników własnych uzyskanych reprezentacji (d,e,f), na przykładzie analizy sygnału „*G2S3a*".

KARTA ANALIZY PORÓWNAWCZEJ: *Metoda Prony'ego i metoda root-Music* **G2S3aAP**

	Prony	Płaszczyzna czasowo-częstotliwościowa (fragment)	**root-Music**	Płaszczyzna czasowo-częstotliwościowa (fragment)
	Składniki: 350Hz, 450Hz, 550Hz		Składniki: 350Hz, 450Hz, 550Hz	
a)		metoda Prony'ego szerokość okna – 22 próbki krok przesuwu okna – 10 próbek wyniki uśrednione filtrem medianowym – rząd filtru: 50		metoda root-Music szerokość okna – 500 próbek krok przesuwu okna – 20 próbek

Rys. 3.32. Wahania składników częstotliwościowych w zakresie 300-600Hz uzyskane metodą Prony'ego z przesuwającym się oknem o szerokości 22 próbek (a) oraz metodą root-Music z przesuwającym oknem o szerokości 500 próbek (b). Wyniki porównawcze zaczerpnięto z prac [11,12].

Omówienie wyników Grupy 2:

Prezentowane wyniki miały za zadanie sprecyzować jakościowe możliwości wykorzystania reprezentacji Cohena w elektrotechnice. Analizowane sygnały załączania baterii kondensatorów, zwarcia w układzie przekształtnika oraz pomiarowy sygnał prądu w układzie zasilania pieca łukowego, odwzorowywały możliwe stany pracy układów elektrycznych. Ich analiza metodami czasowo-częstotliwościowymi pozwoliła wyodrębnić informacje o charakterze zmian składników częstotliwościowych. Szczegółowe komentarze zamieszczono poniżej.

- Transformację Wignera-Ville'a (Rys.3.15,3.21,3.28), ze względu na dużą liczbę składowych własnych reprezentacji i związaną z tym dużą ilością składowych krzyżowych można traktować jedynie jako wstępną reprezentację. Wymaga ona dalszych zabiegów uśredniających składniki krzyżowe poprzez stosowanie wygładzających funkcji okna (Rys.3.16,3.17,3.22,3.23,3.29,3.30). Efektem tego jest jednak zmniejszenie rozdzielczości czasowo-częstotliwościowej. Należy jednak podkreślić, że w porównaniu do algorytmu Fouriera o takiej samej szerokości okna $h(\tau)$ (Rys.3.14,3.20,3.27), wygładzona pseudo-transformacja Wignera-Ville'a charakteryzuje się dwukrotnie lepszą rozdzielczością czasowo-częstotliwościową.
- Efektywniejszym kierunkiem jest wpływ na redukcję składowych krzyżowych na poziomie równania definicyjnego, poprzez zmianę funkcji jądra. Wykorzystanie jądra eksponencjalnego (transformacja Choi-Williamsa) owocuje redukcją składowych krzyżowych z zachowaniem rozdzielczości czasowej i częstotliwościowej na poziomie reprezentacji Wignera-Ville'a.
- Wybór wartości współczynnika tłumienia zależy od wzajemnych relacji energetycznych składników badanego sygnału. Jeśli bowiem sygnał posiada składowe o zbliżonych amplitudach to prezentowany w pracy zakres współczynnika σ, w granicach od 0.05 do 1.0, jest wystarczający. Warto zauważyć, że wybór σ=0.05 dla sygnału zwarcia w układzie przekształtnika (Rys.3.21) poprawił tłumienie i nie miał wpływu na przebieg składników własnych. Taka sama wartość współczynnika tłumienia, zastosowana w przypadku sygnału załączania baterii kondensatorów (Rys.3.15), zaowocowała jednak wyraźnym wpływem na składniki własne. Ostatecznego wyboru wartości σ można dokonać zatem, poprzez „wyostrzanie" reprezentacji z jednoczesnym unikaniem wpływu na składniki własne.
- Dopiero sygnał zasilania pieca łukowego, który posiada składową przewyższającą pozostałe składniki ponad 20-krotnie, pokazuje trudności w tłumieniu składowych krzyżowych (Rys.3.26). Wówczas tłumienie jądrem Gaussowskim ze współczynnikiem σ=0.005 pozwoliło wytłumić składowe krzyżowe, ale wpływ na składniki własne był już bardzo zauważalny.
- Choć istnieje dalsza możliwość wygładzenia reprezentacji Choi-Williamsa przez dodatkowe funkcje wygładzające (Rys.3.16,3.17,3.22,3.23), to spowodowana takim działaniem strata rozdzielczości czasowej czy częstotliwościowej, w porównaniu do jakości tłumienia składowych krzyżowych, pozwala stwierdzić, iż działanie takie nie zawsze jest potrzebne.
- Przykład analiz sygnał zasilania pieca łukowego *„G2S3"* pokazuje ogromne trudności interpretacyjne wyników użytych przekształceń w przypadku sygnałów wieloskładnikowych (Rys.3.26). Badany sygnał zawierał składową podstawową o znacznie przeważającej energii oraz szeroki zakres charakterystycznych harmonicznych związanych z pracą przekształtnika, a także wiele interharmonicznych będących skutkiem chaotycznej natury zjawiska łuku. Tak duża ilość składowych własnych niesie za sobą dużą ilość składowych krzyżowych, niejednokrotnie „nakładających się" na składniki

własne. Trzeba pamiętać, że amplituda oscylacji składowych krzyżowych zależy od wzajemnych energii składników własnych. Zatem istnienie składowej podstawowej o dużej energii zaowocowało pojawieniem się składowych krzyżowych o dużej amplitudzie. Wstępne ograniczenie ilości składowych przez odfiltrowanie wybranego zakresu częstotliwości może okazać się niekiedy jedyną metodą do zdobycia informacji o charakterze zmienności badanego sygnału. Przytoczone w pracy analizy zakresu 300-600Hz pozwoliły podkreślić możliwości wykorzystania badanych metod do sygnałów charakteryzujących się wahaniami częstotliwości, czy też wykrycia krótkotrwałych interharmonicznych (Rys.3.27,3.28,3.29,3.30,3.31).

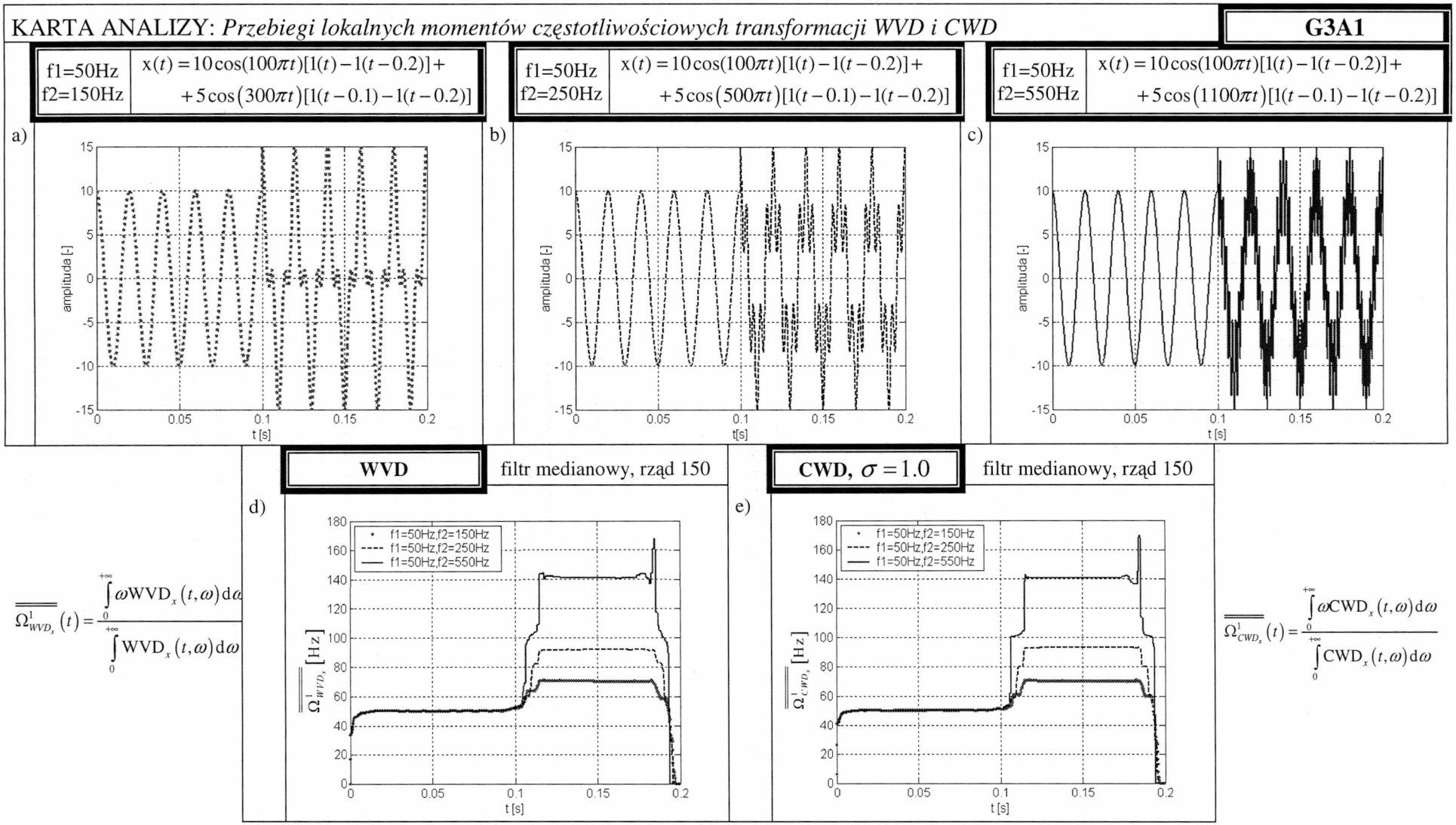
- Metody parametryczne, takie jak algorytm Prony'ego czy statystyki wyższych rzędów, wymagają przyjęcia pewnych założeń wstępnych dotyczących choćby rzędu przyjętego modelu czy szerokości okna pomiarowego. Podobnie dokładność reprezentacji uzyskanej za pomocą transformaty falkowej silnie zależy od przyjętej częstotliwości falki bazowej i zakresu skali, co nie pozwala z jednakową dokładnością obserwować dowolnie szerokiego zakresu częstotliwości. Reprezentacje z klasy Cohena, można zatem wykorzystać jako źródło informacji dla ustalenia parametrów innych metod (Rys.3.32).

3.3. Grupa 3 – badania rozszerzone

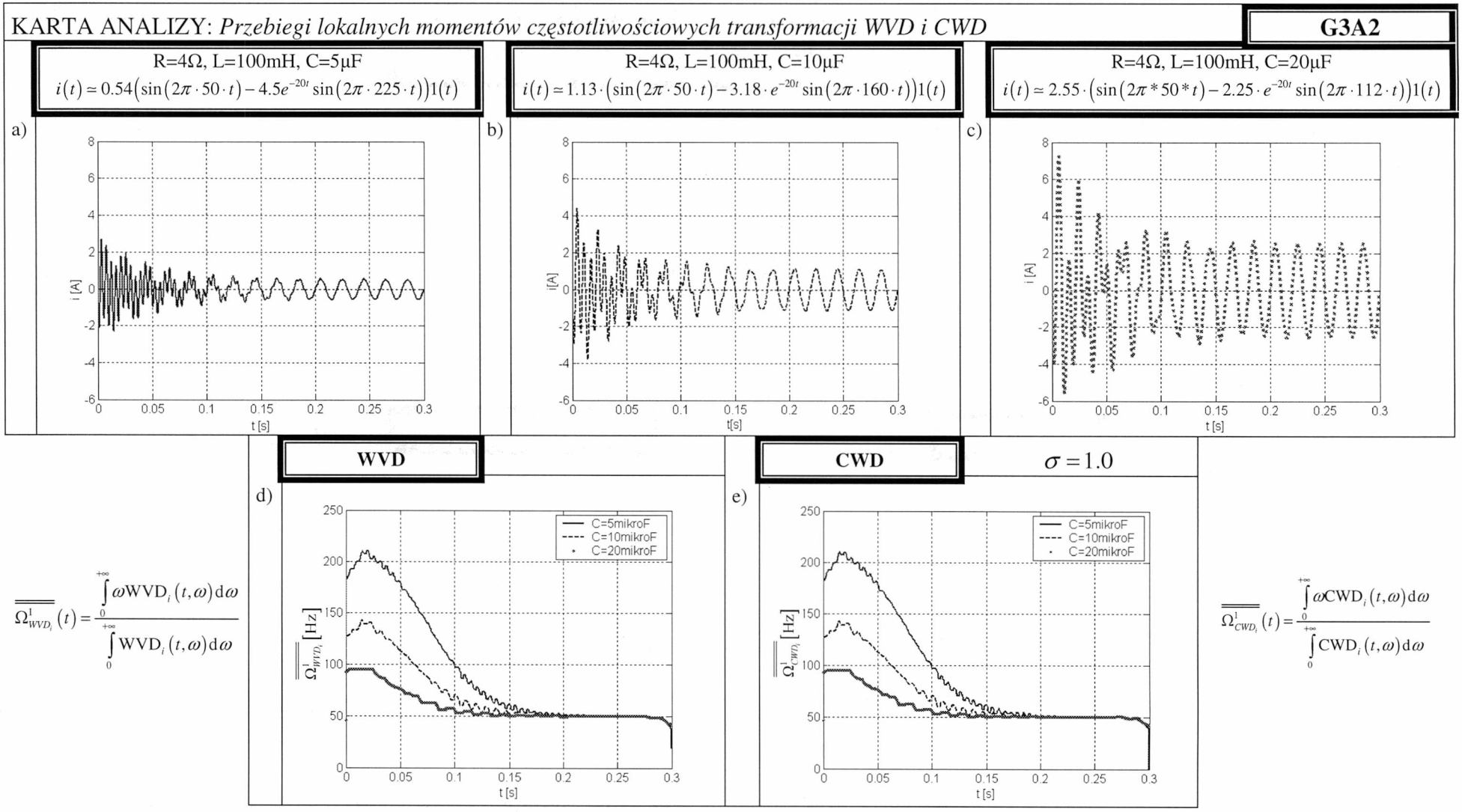
Wskazane we wstępie teoretycznym definicje i interpretacje lokalnych momentów transformacji czasowo-częstotliwościowych wskazują na możliwość uzyskania jednowymiarowych charakterystyk, które traktować można jako porównawcze wskaźniki niestacjonarności. W niniejszym podrozdziale zaprezentowane zostaną charakterystyki lokalnych momentów częstotliwościowych reprezentacji Wignera-Ville'a, które reprezentują chwilową, średnią częstotliwość sygnału. Inaczej mówiąc, charakterystyka lokalnych momentów częstotliwościowych pozwoli śledzić częstotliwościowy punkt skupienia widma sygnału w funkcji czasu. Pojawienie się dodatkowych składowych przesunie punkt skupienia widma, a zatem i kształt krzywej, w kierunku pojawiającej się składowej częstotliwościowej bądź średniego punktu skupienia zbioru częstotliwości w nowym stanie pracy układu elektrycznego. Zredukowanie wymiaru płaszczyzny czasowo-częstotliwościowej do jednowymiarowej charakterystyki spowoduje utratę informacji o szczegółach chwilowego spektrum, ale wciąż zachowane zostaną informacje o czasie trwanie i początku niestacjonarności. Zatem proponowane charakterystyki można zastosować jako porównawcze wskaźniki stanu pracy badanego układu elektrycznego i wykorzystać np. jako elementy uczące sieci neuronowych. Przypomnijmy, że w niniejszej pracy przyjęto wyliczać lokalne momenty częstotliwościowe na podstawie jedynie dodatniej części osi częstotliwości płaszczyzny czasowo-częstotliwościowej, wyrażenie (2.76). We wszystkich bowiem przypadkach w analizach używano analitycznej formy sygnałów rzeczywistych, czego efektem były zerowe wartości transformacji w ujemnej części osi częstotliwości. Jednocześnie należy uściślić, że nie wszystkie reprezentacje, nawet te z grupy afinicznej, spełniają właściwość zachowania momentów częstotliwościowych i możliwości wyznaczenia częstotliwości chwilowej (właściwości *P13* i *P14* tabeli 2.6). Właściwość tę tracą wszystkie wygładzone pseudo-reprezentacje, takie jak wygładzony pseudo-Wigner-Ville' (SPWVD), wygładzony pesudo-Choi-Williams (SPCWD), ale również transformacje Zhao-Atlas-Marksa (ZAMD) i Margineau-Hilla (MHD). Możliwości śledzenia chwilowej częstotliwości nie posiada również spektrogram (SPEC).

Poniżej podano przebiegi lokalnych momentów częstotliwościowych transformacji Wignera-Ville'a i Choi-Williamsa sygnału sumy składników cosinusoidalnych („*G1S1*") dla różnych wartości częstotliwości drugiej składowej, sygnału prądu w gałęzi RLC załączanej na napięcie sinusoidalne („*G1S2*") z różnymi wartościami pojemności i wreszcie sygnału prądu w układzie załączania baterii kondensatorów („*G2S1*"). Wyznaczone charakterystyki lokalnych momentów częstotliwościowych zebrano w kartach analiz: „*G3A1*", „*G3A2*", „*G3A3*". Należy dodać, że na wartość lokalnych momentów częstotliwościowych mają wpływ również składowe krzyżowe, a poprawna wartość średniej częstotliwości osiągana jest jedynie, gdy oscylacje przyjmują zerowe wartości. Dla wyeliminowania wpływu składowych krzyżowych i uwypuklenia proponowanego kierunku wykorzystania reprezentacji czasowo-częstotliwościowych, wyniki lokalnych momentów częstotliwościowych poddano uśrednieniu filtrem medianowym. Rząd filtru przyjęto na poziomie 150 próbek, by stłumić wpływ składowych krzyżowych na przebieg momentu i jednocześni zachować dynamikę zmian badanego zjawiska.

SKOROWIDZ ANALIZ GRUPY 3		G3
Nazwa analizy	Nazwa sygnału	Temat i zawartość analizy
G3A1 Rys. 3.33	G1S1	*Temat: Przebiegi lokalnych momentów częstotliwościowych transformacji WVD i CWD* Przebiegi sygnału „*G1S1*" dla trzech wartości częstotliwości drugiej składowej oraz charakterystyki lokalnych momentów częstotliwościowych uzyskanych na podstawie transformacji Wignera-Ville'a oraz Choi-Williamsa. W celu uśrednienia wpływu składowych krzyżowych, charakterystyki uśredniono filtrem medianowym rzędu 150.
G3A2 Rys. 3.34	G1S2	*Temat: Przebiegi lokalnych momentów częstotliwościowych transformacji WVD i CWD* Przebiegi sygnału „*G1S2*" dla trzech wartości pojemności oraz charakterystyki lokalnych momentów częstotliwościowych uzyskanych na podstawie transformacji Wignera-Ville'a oraz Choi-Williamsa. W celu uśrednienia wpływu składowych krzyżowych, charakterystyki uśredniono filtrem medianowym rzędu 150.
G3A3 Rys. 3.35	G2S1	*Temat: Przebiegi lokalnych momentów częstotliwościowych transformacji WVD i CWD* Przebieg sygnału „*G2S1*" oraz charakterystyki lokalnych momentów częstotliwościowych uzyskanych na podstawie transformacji Wignera-Ville'a oraz Choi-Williamsa. W celu uśrednienia wpływu składowych krzyżowych, charakterystyki uśredniono filtrem medianowym rzędu 150.

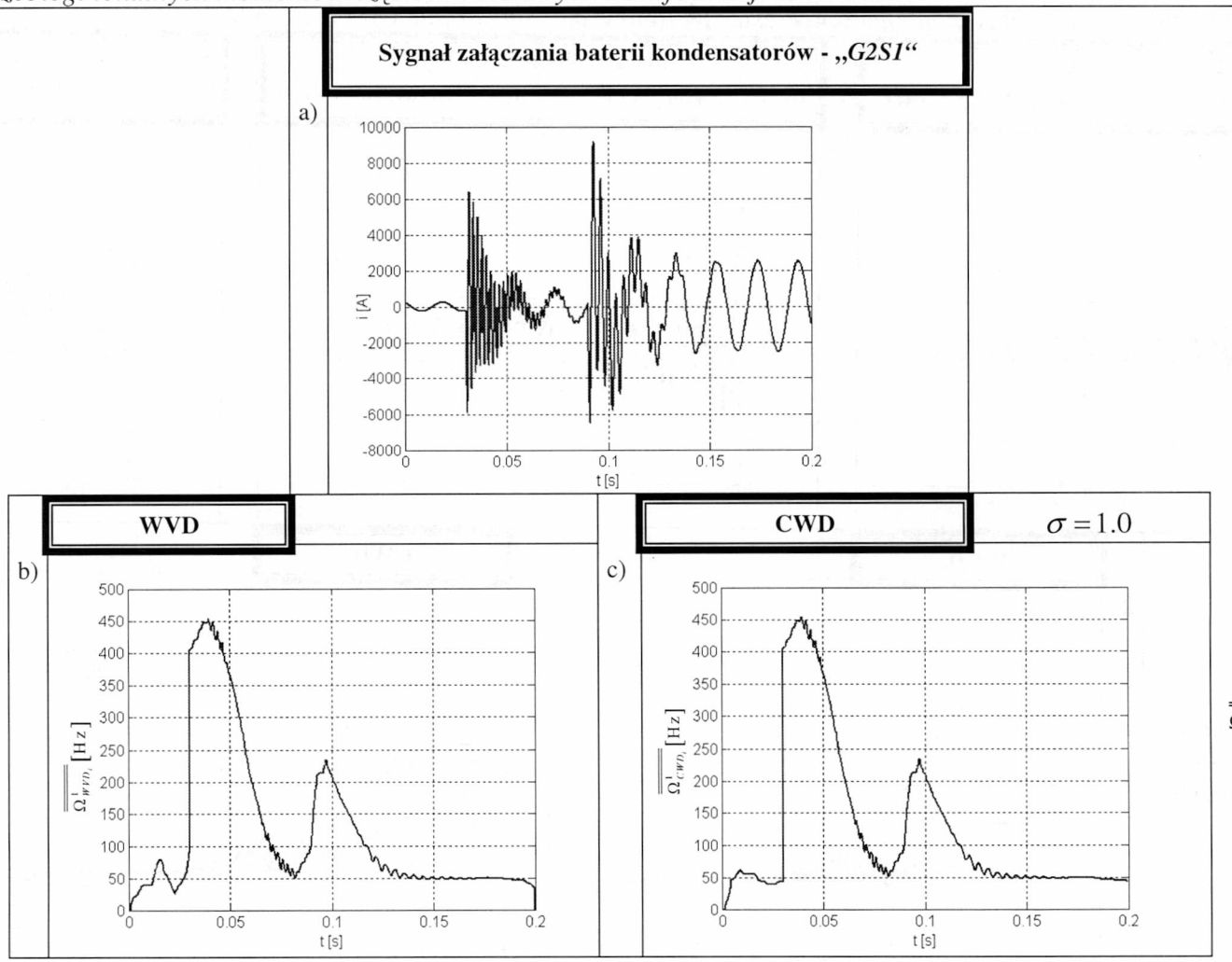


Rys. 3.33.Przebiegi sygnału „*G1S1*" dla trzech wartości częstotliwości drugiej składowej (a,b,c) oraz charakterystyki lokalnych momentów częstotliwościowych uzyskanych na podstawie transformacji Wignera-Ville'a oraz Choi-Williamsa (d,e). W celu uśrednienia wpływu składowych krzyżowych, charakterystyki uśredniono filtrem medianowym rzędu 150.



Rys. 3.34. Przebiegi sygnału „*G1S2*" dla trzech wartości pojemności (a,b,c) oraz charakterystyki lokalnych momentów częstotliwościowych uzyskanych na podstawie transformacji Wignera-Ville'a oraz Choi-Williamsa (d,e). W celu uśrednienia wpływu składowych krzyżowych, charakterystyki uśredniono filtrem medianowym rzędu 150.

KARTA ANALIZY: *Przebiegi lokalnych momentów częstotliwościowych transformacji WVD i CWD* **G3A3**



$$\overline{\overline{\Omega^1_{WVD_i}}}(t)=\frac{\int_0^{+\infty}\omega \mathrm{WVD}_i(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega}{\int_0^{+\infty}\mathrm{WVD}_i(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega}$$

$$\overline{\overline{\Omega^1_{CWD_i}}}(t)=\frac{\int_0^{+\infty}\omega \mathrm{CWD}_i(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega}{\int_0^{+\infty}\mathrm{CWD}_i(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega}$$

Rys. 3.35. Przebieg sygnału „*G2S1*" (a) oraz charakterystyki lokalnych momentów częstotliwościowych uzyskanych na podstawie transformacji Wignera-Ville'a oraz Choi-Williamsa (b,c). W celu uśrednienia wpływu składowych krzyżowych, charakterystyki uśredniono filtrem medianowym rzędu 150.

Omówienie wyników Grupy 3:

Zaproponowane w niniejszej pracy charakterystyki lokalnych momentów częstotliwościowych zwracają uwagę na dodatkowe możliwości wykorzystania wyznaczonych transformat czasowo-częstotliwościowych. Śledzenie zmian punktu skupienia widma sygnału w funkcji czasu zachowuje informacje o czasowym charakterze niestacjonarności. Szczegóły dotyczące zmiany składu widma zostają przy tym podejściu utracone, pozostawiając jedynie ogólne informacje o kierunkach przesunięć środka ciężkości widma ku wyższym bądź niższych częstotliwościom. A zatem:

- Uzyskane charakterystyki można wykorzystać do detekcji momentu powstania i czasu trwania stanu przejściowego.
- Zredukowanie wymiaru płaszczyzny czasowo-częstotliwościowej pozwala porównywać uzyskane jednowymiarowe charakterystyki np. dla różnych parametrów układów elektrycznych. To zaś niesie nowe możliwość diagnostyczne, czy też pozwala traktować uzyskane charakterystyki jako elementy uczące i decyzyjne sieci neuronowych.
- Ograniczeniem jest fakt, że nie wszystkie transformaty czasowo-częstotliwościowe spełniają właściwości zachowania momentów częstotliwościowych i wyznaczania chwilowej częstotliwości. Tabela 2.6, własności wybranych reprezentacji klasy Cohena, została opracowana z myślą o usprawnieniu podejmowania metodycznych decyzji przy wyborze reprezentacji. Tabela ta pozwala stwierdzić, iż w przypadku afinicznej podgrupy klasy Cohena, do wyznaczania lokalnych momentów częstotliwościowych wykorzystać można jedynie transformatę Wignera-Ville'a (WVD, Choi-Williamsa (CWD) oraz Born-Jordana (BJD). Pozostałe transformacje tej podgrupy oraz ich wersje wygładzone nie spełniają właściwości *P13*, *P14*, leżących u podstaw charakterystyk lokalnych momentów częstotliwościowych.

4. Wnioski

Motywacją powstania niniejszej pracy stała się potrzeba dokładnego wyznaczania parametrów niestacjonarnych sygnałów elektrycznych w dziedzinie czasu i częstotliwości. W tym celu przeprowadzono badania możliwości wykorzystania nieparametrycznych przekształceń czasowo-częstotliwościowych, należących do klasy Cohena. Analizowane w pracy sygnały podkreślają różne źródła i charakter badanych niestacjonarności. Jednak w większości przypadków sygnały z zakresu elektrotechniki posiadają jedną wspólną cechę, którą autor uznał za podstawowe kryterium przy wyborze reprezentacji z klasy Cohena. Otóż istnienie w całym odcinku badanego sygnału składowej podstawowej implikuje niepożądane składowe krzyżowe, pomiędzy składową podstawową a częstotliwościami pojawiającymi się w stanie przejściowym. Stąd też autor wskazuje afiniczną podgrupę klasy Cohena, jako szczególnie użyteczną w zakresie elektrotechniki. Ta bowiem grupa, o szczególnej budowie funkcji jądra, pozwala na tłumienie składowych krzyżowych już na poziomie równania definicyjnego. Choć autor podkreśla możliwości dodatkowego tłumienia składowych krzyżowych za pomocą okien wygładzających, to jednak kierunek ten, należy traktować jako środek dodatkowy, mający duży wpływ na rozdzielczości czasowo-częstotliwościowe. Badania zaprezentowane w niniejszej rozprawie pozwoliły podkreślić poprawę dokładności wyznaczania parametrów mocno zniekształconych sygnałów elektrycznych w porównaniu do spektrogramu, bazującego na krótkoczasowej transformacie Fouriera. Charakterystyczne cechy algorytmów afinicznej podgrupy klasy Cohena, korzystne i ograniczające celowość ich wykorzystania w dziedzinie elektrotechniki, podsumowano poniżej.

1. *Poprawa dokładności w stosunku do algorytmu Fouriera*
   Stosując algorytmy omawianej klasy otrzymuje się dwukrotne polepszenie rozdzielczości w stosunku do spektrogramu, bazującego na krótkoczasowej transformacie Fouriera (wyraźnie większe rozmycie płaszczyzn czasowo-częstotliwościowych spektrogramu). Zakres obserwacji zostaje ograniczony z ½ do ¼ częstotliwości próbkowania.
2. *Rozdzielenie związku pomiędzy rozdzielczością czasową i częstotliwościową*
   Charakterystyczną cechą spektrogramu jest bezpośredni związek pomiędzy szerokością funkcji okna a rozdzielczością czasowo-częstotliwościową. Zwiększanie szerokości funkcji okna poprawia rozdzielczość częstotliwościową, ale wydłuża czas odpowiedzi algorytmu. W przypadku wygładzonych pseudo-reprezentacji klasy Cohena, stosowane są dwie funkcje okien: funkcja wymnażana z sygnałem, która odpowiedzialna jest za rozdzielczość częstotliwościową, oraz funkcja splatana z reprezentacją względem czasu, mająca wpływ na rozdzielczość czasową. Prowadzi to do niezależności w sterowaniu poziomami rozdzielczości czasowej i częstotliwościowej.
3. *Składowe krzyżowe – niepożądana właściwość transformacji klasy Cohena*
   Biliniowe reprezentacje czasowo-częstotliwościowe charakteryzują się zawartością dwóch rodzajów składników. Jedynie składniki własne zawierają użyteczną informacje o częstotliwościach występujących w zmiennym widmie badanego sygnału. W geometrycznych czasowo-częstotliwościowych środkach ciężkości składników własnych znajdują się niepożądane, oscylacyjne składniki krzyżowe. Składniki te

powodują trudności w interpretacji płaszczyzn czasowo-częstotliwościowych. Jak pokazują przykłady przeprowadzonych analiz, istnieje nawet możliwość zniekształcenia składowych własnych przez pokrywające je składowe krzyżowe. Zjawisko to towarzyszy najsilniej transformacji Margineau-Hilla o jądrze cosinusoidalnym, gdzie położenie składników krzyżowych pokrywa się z położeniem składników własnych. Ta niekorzystna właściwość reprezentacji Marginau-Hilla całkowicie eliminuje ją z grupy przekształceń użytecznych dla potrzeb elektrotechniki. Poprawę przynosi dopiero sztuczne uśrednianie funkcjami wygładzającymi.

4. *Możliwości tłumienia składowych krzyżowych na trzech poziomach*

Poziom 1: Sygnał rzeczywisty, sygnał zespolony a postać analityczna

W przypadku badań sygnałów rzeczywistych, których widmo jest parzystą funkcją częstotliwości, w algorytmach należy stosować postacie analityczne sygnałów, uzyskane np. drogą transformaty Hilberta. Charakteryzują się one zerowymi wartościami widma w ujemnej części osi częstotliwości, co owocuje redukcją składowych krzyżowych pomiędzy składnikami widma leżącymi w ujemnej i dodatniej części osi częstotliwości. Zastosowanie postaci analitycznej do badań sygnałów zespolonych może spowodować utratę ważnych informacji, zawartych w ujemnej części osi częstotliwości. Przykładem mogą być analizy wektora przestrzennego [35,45]. Płaszczyzny czasowo-częstotliwościowe wektora przestrzennego zawierają jednocześnie informacje o zmianach składowej zgodnej i przeciwnej, które reprezentowane są odpowiednio wzdłuż dodatniej i ujemnej części osi częstotliwości.

Poziom 2: Dobór funkcji jądra o właściwościach wygładzających

Dobór funkcji jądra, a co za tymi idzie wskazanie reprezentacji klasy Cohena użytecznej dla potrzeb elektrotechniki, jest jednym z głównych celów niniejszej pracy. Bardzo dobre efekty uśredniania składowych krzyżowych, z jednoczesnym zachowaniem rozdzielczości czasowo-częstotliwościowej na poziomie transformacji Wignera-Ville'a, przynosi zastosowanie jądra Gaussowskiego (transformacja Choi-Williamsa). Dodatkowo, budowa funkcji jądra tego przekształcenia pozwala powiązać siłę tłumienia z jednym współczynnikiem, współczynnikiem tłumienia σ. Wybór wartości współczynnika tłumienia zależy od wzajemnych relacji energetycznych składników badanego sygnału. Przy wyborze należy dążyć do uzyskania charakterystyki o najmniejszej amplitudzie składowych krzyżowych i braku wpływu funkcji jądra na składniki własne. Jeśli sygnał posiada składowe o zbliżonych amplitudach to prezentowany w pracy zakres współczynnika σ, w granicach od 0.05 do 1.0, jest wystarczający. Dopiero wieloskładnikowy sygnał zasilania pieca łukowego, który posiada składową przewyższającą pozostałe składniki ponad 20-krotnie, pokazuje trudności w tłumieniu składowych krzyżowych. Wówczas tłumienie jądrem Gaussowskim ze współczynnikiem σ=0.005 pozwoliło wytłumić składowe krzyżowe, ale wpływ na składniki własne był już bardzo zauważalny.

Wykonane analizy wskazują również transformację o jądrze stożkowym (Zhao-Atlas-Marks) jako użyteczną dla potrzeb elektrotechniki. Można ją traktować jako pseudo-reprezentację Born-Jordana, przez co reprezentację o mniejszej rozdzielczości częstotliwościowej niż transformacja oryginalna. Ta ostatnia wykazuje jednak negatywny efekt tłumienia składowych o wyższych częstotliwościach.

Poziom 3: Sztuczne uśrednianie składowych krzyżowych – wygładzone pseudo-reprezentacje

Ostatnią drogą tłumienia składowych krzyżowych jest wyznaczanie wygładzonych pseudo-reprezentacji klasy Cohena, uzyskiwanych na drodze obciążenia sygnału funkcją okna oraz splotu pseudo-reprezentacji z dodatkową funkcją okna. Obciążenie sygnału funkcją okna owocuje wygładzaniem reprezentacji wzdłuż osi częstotliwości,

ale okupione jest zmniejszeniem rozdzielczości częstotliwościowej. Im szersze jest okno wymnażane z sygnałem, tym lepszą osiąga się rozdzielczość częstotliwościową. Wyniki analiz wskazują na szerokość okna wymnażanego z sygnałem nie większą niż pięć okresów składowej podstawowej. Zaletą pseudo-reprezentacji jest możliwość wykreślania unormowanej energii sygnału. W przypadku transformacji oryginalnej informacja o energii składników własnych zawarta jest w czasowym środku ciężkości występowania danej składowej. Pseudo-reprezentacje wskazują stałe poziomy energii w odcinkach stacjonarności sygnału oraz zmiany dopiero w trakcie pojawienia się niestacjonarności.
Charakter i lokalizacja składowych krzyżowych w reprezentacjach większości sygnałów z zakresu elektrotechniki sprawia, że efektywną redukcję składowych krzyżowych przynosi splot wzdłuż osi czasu pseudo-reprezentacji z dodatkową funkcją okna. Efektem takiego podejścia jest wygładzona pseudo-reprezentacja. Użycie dodatkowego okna powoduje zmniejszenie rozdzielczości czasowej. Im szersze jest okno splotu, tym dłuższy jest czas odpowiedzi algorytmu. Okno biorące udział w splocie pseudo-reprezentacji bardzo dobrze wygładza składowe krzyżowe już przy szerokościach dwóch, trzech okresów składowej podstawowej.

5. *Lokalne momenty częstotliwościowe jako jednowymiarowe wskaźniki niestacjonarności*
   W pracy zaproponowano szersze wykorzystanie transformacji czasowo-częstotliwościowych, bazujące na jednowymiarowych charakterystykach lokalnych momentów częstotliwościowych. Choć szczegóły dotyczące zmian składu widma zostają przy tym podejściu utracone, informacje o czasowych właściwościach badanej niestacjonarności są zachowane. Uzyskane charakterystyki można zatem wykorzystać do detekcji momentu powstania i czasu trwania stanu przejściowego. Ponadto, zredukowanie liczby wymiarów do jednowymiarowej funkcji czasu, pozwala wykorzystać charakterystyki lokalnych momentów częstotliwościowych jako wskaźniki różnych stanów pracy układu, co owocuje perspektywami wykorzystania w obszarze diagnostyki.
6. *Transformacje klasy Cohena a inne metody estymacji parametrów niestacjonarnych sygnałów elektrycznych*
   Metody parametryczne, takie jak algorytm Prony'ego czy statystyki wyższych rzędów, wymagają przyjęcia pewnych założeń wstępnych, dotyczących choćby rzędu przyjętego modelu czy szerokości okna pomiarowego. Podobnie, dokładność reprezentacji uzyskanej za pomocą transformaty falkowej silnie zależy od przyjętej częstotliwości falki bazowej i zakresu skali, co nie pozwala z jednakową dokładnością obserwować dowolnie szerokiego zakresu częstotliwości. Reprezentacje z klasy Cohena, można zatem wykorzystać jako źródło informacji dla ustalenia parametrów innych metod.

W świetle zaprezentowanych wyników oraz głównych celów rozprawy można stwierdzić, że wskazana przez autora afiniczna podgrupa klasy Cohena jest użyteczną formą reprezentacji niestacjonarnych sygnałów elektrycznych. Transformacje te można traktować jako pewnego rodzaju wypośrodkowane rozwiązanie pomiędzy „rozmytym" Fourierowskim spektrogramem, a „wyostrzoną", choć bogatą w składniki krzyżowe, transformacją Wignera-Ville'a. Poprawa dokładności wyznaczania parametrów niestacjonarnych sygnałów elektrycznych w porównaniu do algorytmu Fouriera zostaje zatem osiągnięta.

Dodatek – analityczne wyprowadzenia wybranych właściwości transformacji Wignera

D.1. Transformata Wignera sygnału a transformata Wignera widm

Jeśli

$$\mathrm{WD}_{x_1,x_2}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau \tag{D.1}$$

i

$$\mathrm{WD}_{X_1,X_2}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1\left(\omega+\tfrac{\lambda}{2}\right)X_2^*\left(\omega-\tfrac{\lambda}{2}\right)e^{j\lambda t}d\lambda \tag{D.2}$$

to:

$$\mathrm{WD}_{x_1,x_2}(t,\omega)=\mathrm{WD}_{X_1,X_2}(\omega,t) \tag{D.3}$$

Wyprowadzenie:

$$\begin{aligned}\mathrm{WD}_{x_1,x_2}(t,\omega)&=\mathrm{F}\left\{x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)\right\}=\mathrm{F}\left\{x_1\left(\tfrac{1}{2}(\tau+2t)\right)x_2^*\left(-\tfrac{1}{2}(\tau-2t)\right)\right\}=\\&\frac{1}{2\pi}\mathrm{F}\left\{x_1\left(\tfrac{1}{2}(\tau+2t)\right)\right\}*\mathrm{F}\left\{x_2^*\left(-\tfrac{1}{2}(\tau-2t)\right)\right\}\end{aligned} \tag{D.4}$$

$$X_1(\omega)=F\{x_1(t)\},\quad X_2(\omega)=F\{x_2(t)\} \tag{D.5}$$

$$F\left\{x_1\left(\tfrac{1}{2}(\tau+2t)\right)\right\}=F\left\{x_1\left(\tfrac{1}{2}\tau\right)\right\}e^{j2\omega t}=2X_1(2\omega)e^{j2\omega t} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\left\{x_2^*\left(-\tfrac{1}{2}(\tau-2t)\right)\right\}&=\left[\mathrm{F}\left\{x_2\left(-\tfrac{1}{2}(\tau-2t)\right)\right\}\Big|_{(-\omega)}\right]^*=\left[\left(\mathrm{F}\left\{x_2\left(-\tfrac{1}{2}\tau\right)\right\}e^{-j2\omega t}\right)\Big|_{(-\omega)}\right]^*=\\&=\left[2X_2(-2\omega)e^{-j2\omega t}\Big|_{(-\omega)}\right]^*=2X_2^*(2\omega)e^{-j2\omega t}\end{aligned} \tag{D.7}$$

$$\mathrm{WD}_{x_1,x_2}(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\left(2X_1(2\omega)e^{j2\omega t}\right)*\left(2X_2^*(2\omega)e^{-j2\omega t}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2X_1(2p)e^{j2pt}2X_2^*\left(2(\omega-p)\right)e^{-j2(\omega-p)t}dp= \tag{D.8}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}4X_1(2p)X_2^*\left(2(\omega-p)\right)e^{j2(2p-\omega)t}dp$$

$$2p-\omega=\frac{\lambda}{2}\Rightarrow dp=\frac{1}{4}d\lambda\,,\quad X_1(2p)=X_1\left(\omega+\tfrac{\lambda}{2}\right), \tag{D.9}$$

$$X_2^*(2\omega-2p)=X_2^*\left(\omega-\tfrac{\lambda}{2}\right)$$

Stąd:

$$\mathrm{WD}_{x_1,x_2}(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_1\left(\omega+\tfrac{\lambda}{2}\right)X_2^*\left(\omega-\tfrac{\lambda}{2}\right)e^{j\lambda t}d\lambda=\boldsymbol{W}_{X_1,X_2}(\omega,t) \tag{D.10}$$

Wykorzystane własności transformaty Fouriera:

$$\mathrm{F}\left\{x(t-t_0)\right\}=X(\omega)e^{-j\omega t_0}\,,\quad \mathrm{F}\left\{x(at)\right\}=\frac{1}{|a|}X\left(\tfrac{\omega}{a}\right), \tag{D.11}$$

$$\mathrm{F}\left\{x^*(t)\right\}=X^*(-\omega)$$

D.2. Transformata Wignera sumy sygnałów

Jeśli:

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t) \tag{D.12}$$

to:

$$\mathrm{WD}_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)+x_2\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)\right]\left[x_1\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)+x_2\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)\right]^*e^{-j\omega\tau}d\tau \tag{D.13}$$

$$\mathrm{WD}_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_1^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}x_2\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}x_2\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_1^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau= \tag{D.14}$$

$$=\mathrm{WD}_{x_1}(t,\omega)+\mathrm{WD}_{x_2}(t,\omega)+\mathrm{WD}_{x_1,x_2}(t,\omega)+\mathrm{WD}_{x_2,x_1}(t,\omega)$$

Ogólnie dla sygnałów zespolonych zachodzi także związek:

$$\mathrm{WD}_{x_2,x_1}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_2\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_1^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau \underset{\substack{\tau\to-\tau\\ d\tau\to-d\tau}}{=}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_2\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)x_1^*\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)e^{j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}\right]^*d\tau= \qquad \text{(D.15)}$$

$$=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau\right\}^*=\mathrm{WD}^*_{x_1,x_2}(t,\omega)$$

Jeżeli zaś $x_1(t)$ i $x_2(t)$ są sygnałami rzeczywistymi, wówczas:

$$\mathrm{WD}_{x_2,x_1}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_2\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_1\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau \underset{\substack{\tau\to-\tau\\ d\tau\to-d\tau}}{=}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_2\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)e^{j\omega\tau}d\tau= \qquad \text{(D.16)}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_2\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j(-\omega)\tau}d\tau=\mathrm{WD}_{x_1,x_2}(t,-\omega)$$

Czyli:

$$\mathrm{WD}_x(t,\omega)=\mathrm{WD}_{x_1}(t,\omega)+\mathrm{WD}_{x_2}(t,\omega)+2\,\mathbf{Re}\left\{\mathrm{WD}_{x_1,x_2}(t,\omega)\right\} \qquad \text{(D.17)}$$

lub w szczególności dla sygnałów rzeczywistych:

$$\mathrm{WD}_x(t,\omega)=WD_{x_1}(t,\omega)+\mathrm{WD}_{x_2}(t,\omega)+\mathrm{WD}_{x_1,x_2}(t,\omega)+\mathrm{WD}_{x_1,x_2}(t,-\omega) \qquad \text{(D.18)}$$

Przypadek ogólny – sygnały będące sumą dowolnej ilości składowych:

$$x(t)=\sum_k x_k(t) \qquad \text{(D.19)}$$

$$WD_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_k x_k\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)\right]\left[\sum_i x_i^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)\right]e^{-j\omega\tau}d\tau= \qquad \text{(D.20)}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_k\sum_i x_k\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_i^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau=$$

$$=\sum_k\sum_i\int_{-\infty}^{\infty}x_k\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_i^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Stąd: $$\mathrm{WD}_x(t,\omega)=\sum_k \mathrm{WD}_{x_k}(t,\omega)+2\,\mathbf{Re}\sum_{i>k}\mathrm{WD}_{x_k,x_i}(t,\omega) \tag{D.21}$$

D.3. Lokalne momenty częstotliwościowe

Ogólnie lokalny zwykły moment częstotliwościowy n-tego rzędu można opisać wyrażeniem:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{M}^n_{WD_{x_1,x_2}}}(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^n\mathrm{WD}_{x_1,x_2}(t,\omega)\,d\omega\\ \overline{\mathrm{M}^n_{WD_x}}(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^n\mathrm{WD}_x(t,\omega)\,d\omega\end{aligned} \tag{D.22}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{M}^n_{WD_{x_1,x_2}}}(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^n WD_{x_1,x_2}(t,\omega)\,d\omega=\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^n\left\{\int_{-\infty}^{\infty}x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau\right\}d\omega=\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^n\,x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\omega\,d\tau=\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\omega^n\,e^{-j\omega\tau}d\omega\right\}d\tau=(*)\end{aligned} \tag{D.23}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^n\,e^{-j\omega\tau}d\omega&=\frac{1}{(-j)^n}\int_{-\infty}^{\infty}(-j\omega)^n\,e^{-j\omega\tau}d\omega=\\ &=j^n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^n}{\partial\tau^n}e^{-j\omega\tau}d\omega=j^n\frac{d^n}{d\tau^n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}d\omega=j^n2\pi\,\delta^{(n)}(\tau)\end{aligned} \tag{D.24}$$

$$\begin{aligned}(*)&=j^n2\pi\int_{-\infty}^{\infty}x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)\delta^{(n)}(\tau)\,d\tau=\\ &=j^n2\pi\frac{\partial^n}{\partial\tau^n}\left[x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)\right]\Big|_{\tau=0}\end{aligned} \tag{D.25}$$

W szczególnym przypadku, gdy $n = 0$

$$\overline{\mathrm{M}^{0}_{WD_{x_1,x_2}}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{WD}_{x_1,x_2}(t,\omega)\,d\omega = 2\pi\, x_1(t)\,x_2^*(t) \tag{D.26}$$

bądź dla $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$

$$\overline{\mathrm{M}^{0}_{WD_x}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{WD}_x(t,\omega)\,d\omega = 2\pi\, x(t)\,x^*(t) = 2\pi \left| x(t) \right|^2 \tag{D.27}$$

Lokalny moment częstotliwościowy zerowego rzędu wskazywał będzie na chwilową energię sygnału. Jest to związane z warunkami brzegowymi dla czasu, jakie muszą spełnić reprezentacje czasowo-częstotliwościowe.

Lokalny zwykły moment częstotliwościowy pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{M}^{1}_{WD_{x_1,x_2}}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega \mathrm{WD}_{x_1,x_2}(t,\omega)\,d\omega \\ \overline{\mathrm{M}^{1}_{WD_x}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega \mathrm{WD}_x(t,\omega)\,d\omega \end{aligned} \tag{D.28}$$

$$\overline{\mathrm{M}^{1}_{WD_{x_1,x_2}}}(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right) x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\, x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right) x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau\, d\omega = \tag{D.29}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\, x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right) x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\omega\, d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right) x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{-j\omega\tau} d\omega \right\} d\tau = (*)$$

gdzie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{-j\omega\tau} d\omega = j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\tau} e^{-j\omega\tau} d\omega = j \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\omega = j2\pi\, \delta'(\tau) \tag{D.30}$$

$$(*) = j2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right) x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right) \delta'(\tau)\,d\tau = -j2\pi \frac{\partial}{\partial\tau} \left\{ x_1\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right) x_2^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right) \right\}\Big|_{\tau=0} \tag{D.31}$$

Czyli:

$$\overline{\mathrm{M}^{l}_{WD_{x_1,x_2}}}(t) = -j\pi\left\{x_1'(t)x_2^*(t) - x_1(t)\left[x_2^*(t)\right]'\right\} = \\ = j\pi\left\{x_1(t)\left[x_2^*(t)\right]' - x_1'(t)x_2^*(t)\right\} \tag{D.32}$$

Bądź:

$$\overline{\mathrm{M}^{l}_{WD_{x_1,x_2}}}(t) = j\pi x_1(t)x_2^*(t)\left\{\left(\frac{x_2'(t)}{x_2(t)}\right)^* - \frac{x_1'(t)}{x_1(t)}\right\} = \\ = j\pi x_1(t)x_2^*(t)\frac{d}{dt}\left\{\left[\boldsymbol{log}\, x_2(t)\right]^* - \boldsymbol{log}\, x_1(t)\right\} = j\pi x_1(t)x_2^*(t)\frac{d}{dt}\left\{\boldsymbol{log}\frac{x_2^*(t)}{x_1(t)}\right\} \tag{D.33}$$

Dla sygnałów zespolonych: $x_1(t) = |x_1(t)|e^{j\psi_1(t)}$, $x_2(t) = |x_2(t)|e^{j\psi_2(t)}$

$$\overline{\mathrm{M}^{l}_{WD_{x_1,x_2}}}(t) = j\pi|x_1(t)||x_2(t)|e^{j[\psi_1(t)-\psi_2(t)]}\frac{d}{dt}\left\{\boldsymbol{ln}\left|\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right| - j[\psi_1(t)+\psi_2(t)]\right\} \tag{D.34}$$

Dla sygnału zespolonego $x(t) = x_1(t) = x_2(t)$

$$\overline{\mathrm{M}^{l}_{WD_x}}(t) = j\pi|x(t)|^2\left\{\left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)^* - \frac{x'(t)}{x(t)}\right\} = 2\pi|x(t)|^2\,\boldsymbol{Im}\frac{x'(t)}{x(t)} \tag{D.35}$$

lub

$$\overline{\mathrm{M}^{l}_{WD_x}}(t) = 2\pi|x(t)|^2\,\boldsymbol{Im}\frac{d}{dt}\{\boldsymbol{log}\, x(t)\} \tag{D.36}$$

Zapisując sygnał zespolony w postaci wykładniczej

$$x(t) = |x(t)|e^{j\psi(t)} \tag{D.37}$$

otrzymujemy:

$$\overline{\mathrm{M}^{l}_{WD_x}}(t) = 2\pi|x(t)|^2\,\boldsymbol{Im}\frac{d}{dt}\left\{\boldsymbol{log}\left[|x(t)|e^{j\psi(t)}\right]\right\} = \\ = 2\pi|x(t)|^2\frac{d}{dt}\{\boldsymbol{ln}|x(t)| + j\psi(t)\} = 2\pi\psi'(t)|x(t)|^2 \tag{D.38}$$

Dla sygnałów rzeczywistych

$$\overline{\mathrm{M}^{l}_{WD_{x_1,x_2}}}(t) = \pm j\pi|x_1(t)||x_2(t)|\frac{d}{dt}\left\{\boldsymbol{ln}\left|\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right|\right\} \tag{D.39}$$

W przypadku, gdy sygnał $x(t)$ jest rzeczywisty, wówczas faza sygnału może przyjmować dwie wartości:

$$\psi(t) = 0 \quad \text{lub} \quad \psi(t) = \pi \tag{D.40}$$

Czyli:

$$\overline{\mathrm{M}^{l}_{WD_x}}(t) = 0 \tag{D.41}$$

Charakterystyka lokalnego momentu zwykłego transformaty Wignera sygnałów zespolonych zawiera w sobie informacje o zmianach pochodnej fazy, a zatem możliwe jest śledzenie

chwilowej częstotliwości. W przypadku sygnałów rzeczywistych, ze względu na parzystość widma, wyznaczone lokalne momenty częstotliwościowe przyjmują wartość zero, co uniemożliwia wykorzystanie proponowanej charakterystyki do badania częstotliwości chwilowej. Zmiana fazy sygnału z $\psi(t)=0$ na $\psi(t)=\pi$ umożliwi lokalizację przejścia sygnału przez zero. Chcąc odnaleźć chwilową częstotliwości sygnału rzeczywistego w pracy zaproponowano wyznaczanie lokalnych momentów transformacji jedynie na bazie dodatniej części osi częstotliwości.

D.4. Rozdzielczość reprezentacji Wignera-Ville'a i spektrogramu

Najczęściej spotykanym sposobem porównania rozdzielczości reprezentacji czasowo-częstotliwościowych jest wyznaczanie pola powierzchni płaszczyzny czasowo-częstotliwościowej potrzebnej do reprezentacji unormowanej funkcji Gaussa [32,52]. Jeśli zatem badanym sygnałem będzie funkcja Gaussa:

$$\mathrm{x}(t)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}t^2} \tag{D.42}$$

to transformata Wignera-Ville'a przyjmie postać:

$$\begin{aligned}\mathrm{WVD}_x(t,\omega)&=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}\left\{\left(t+\frac{\tau}{2}\right)^2\right\}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}\left\{\left(t-\frac{\tau}{2}\right)^2\right\}}\mathrm{e}^{-j\omega\tau}d\tau=\\&=\mathrm{e}^{\left(-\alpha t^2\right)}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\left(-\alpha\tau^2\right)}\mathrm{e}^{-j\omega\tau}d\tau=2\mathrm{e}^{\left\{-\left(\alpha t^2+\frac{1}{\alpha}\omega^2\right)\right\}}\end{aligned} \tag{D.43}$$

Wyrażenie powyższe wskazuje, że transformata Wignera-Ville'a sygnału Gaussowskiego skoncentrowana jest w środku układu współrzędnych płaszczyzny czasowo-częstotliwościowej, a parametr badanej funkcji α, odpowiada za rozmycie reprezentacji wzdłuż kierunków czasu i częstotliwości. Im większe są wartości α, tym reprezentacja skupiona jest bardziej wzdłuż osi czasu lecz bardziej rozmyta wzdłuż osi częstotliwości i odwrotnie. Istotne jest, że pole powierzchni potrzebne do koncentracji energii takiego sygnału ma kształt elipsy. W szczególności, dla amplitudy widma równej e^{-1}, pole elipsy reprezentującej sygnał Gaussowski przez transformację Wignera-Ville'a, przyjmie wartość $A=\pi$.

Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić dla klasycznego spektrogramu, uzyskanego na podstawie krótkoczasowej transformaty Fouriera, o funkcji okna tego samego typu, co badany sygnał. A zatem jeśli funkcją analizująca $\mathrm{h}(\tau)$ będzie również funkcją Gaussa:

$$\mathrm{h}(\tau)=\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\tau^2} \tag{D.44}$$

wtedy krótkoczasową transformatę Fouriera opisze poniższe wyrażenie:

$$\mathrm{STFT}_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(\tau-t)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\left(\frac{\alpha\beta}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\left(-\frac{\alpha}{2}\tau^2\right)}e^{\left(-\frac{\beta}{2}(\tau-t)^2\right)}e^{-j\omega\tau}d\tau=$$
$$=\left(\frac{\alpha\beta}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\left\{-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\tau^2+\beta t\tau-\frac{\beta}{2}t^2\right\}}e^{-j\omega\tau}d\tau \tag{D.45}$$

Wyrażenie to można przedstawić w formie:

$$\mathrm{STFT}_x(t,\omega)=\left(\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\left\{-\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}t^2-\frac{1}{2(\alpha+\beta)}\omega^2+j\frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\omega t\right\}} \tag{D.46}$$

Ostatecznie poszukiwany spektrogram:

$$\mathrm{SPEC}_x(t,\omega)=\left|\mathrm{STFT}_x(t,\omega)\right|=\left(\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\right)e^{\left\{-\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}t^2-\frac{1}{2(\alpha+\beta)}\omega^2\right\}} \tag{D.47}$$

Podobnie jak dla reprezentacji Wignera-Ville'a, spektrogram funkcji Gaussowskiej skupiony będzie wokół środka układu współrzędnych, a kontur przyjmie kształt elipsy. Poszukując jednak pola elipsy dla widma o amplitudzie e^{-1}, otrzymamy:

$$A=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\pi \tag{D.48}$$

W granicznym przypadku, najlepszą rozdzielczość uzyska się, jeśli szerokość funkcji analizującej będzie taka sama jak długość analizowanego sygnału, a zatem dla $\alpha=\beta$. Ale nawet wtedy pole elipsy potrzebne do reprezentacji badanego sygnału Gaussowskiego przyjmie wartość $A=2\pi$.

Powyższe wyprowadzenie pokazuje dwukrotnie lepszą rozdzielczość transformacji Wignera-Ville'a w porównaniu do klasycznego spektrogramu.

Literatura

[1] Atlas L.E., Loughlin P.J., Pitton J.W., *Signal Analysis with Cone Kernel Time-Frequency Distribution and their Application to Speech*, [w:] *Time-Frequency Signal Analysis. Methods and applications*, Longman Cheshire, Melbourne or Willey Halsted Press, New Jork 1992, s. 375-389.

[2] Auger F., Flandrin P., Goncalves P., Lemoine O., *Time-Frequency Toolbox for use with Matlab*, Centre National de la Recherche Scientifique, Rice University, 1995-1996.

[3] Baraniuk R., Jones D., *A Signal Dependent Time-Frequency Representation: Optimal Kernel Design*, IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, vol. 41, no. 4, pp. 1589-1602.

[4] Baraniuk R., Jones D., *A Signal Dependent Time-Frequency Representation: Fast Algorithm for Optimal Kernel Design*, IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, vol. 42, no. 1, pp. 134-146.

[5] Baraniuk R., Jones D., *A Signal Dependent Time-Frequency Analysis Using a Radially Gaussian Kernel*, Signal Processing, 1993, vol. 32, no. 3, pp. 263-283.

[6] Boashash B., Black P. J., *An Efficient Real-Time Implementation of the Wigner-Ville Distribution*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1987, vol. 35, no. 11, pp. 1611-1618.

[7] Boashash B., *Time-Frequency Signal Analysis. Methods and applications*, Longman Cheshire, Melbourne or Willey Halsted Press, New Jork 1992.

[8] Boashash B., Powers E., Zoubir A., *Higher-order Statistical Signal Processing*, Longman Cheshire, Melbourne or Willey Halsted Press, New Jork 1995.

[9] Boashash B. Mesbach M., *Time-Frequency Methodology for Newborn EEG Seizure Detection*, [w:] *Application in Time-Frequency Signal Processing*, CRC Press, Boca Raton, Florida 2003, pp. 339-370.

[10] Boles P.J., Boashash B., *Application of the Cross-Wigner-Ville Distribution to Seismic Data Processing*, [w:] *Time-Frequency Signal Analysis. Methods and applications*, Longman Cheshire, Melbourne or Willey Halsted Press, New Jork 1992, pp. 445-467.

[11] Bracale A., Carpinelli G., Lauria D., Leonowicz T., Lobos T., Rezmer J., *On Some Spectrum Estimation Methods for Analysis of Non-Stationary Signals in Power Systems Part I: Theoretical Aspects*, 11-th International Conference on Harmonics and Quality of Power, Lake Placid, New York 2004, Session: Harmonic Propagation, paper no. - "f"

[12] Bracale A., Carpinelli G., Lauria D., Leonowicz T., Lobos T., Rezmer J., *On Some Spectrum Estimation Methods for Analysis of Non-Stationary Signals in Power Systems Part I: Numerical Applications*, 11-th International Conference on Harmonics and Quality of Power, Lake Placid, New York 2004, Session: Harmonic Propagation, paper no. - "g"

[13] Chen V., Trintinalia L., Ling H., *Aplication of JTFA to Radar Image Processing*, [w:] *Joint Time-Frequency Analysis. Methods and Applications,* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 1996, pp. 213-240.

[14] Choi H.I., Williams W.J., *Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Usign Exponential Kernels*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989,vol. 37, no. 6, pp. 862-971.

[15] Chen P., *Economic Data Analysis*, [w:] *Joint Time-Frequency Analysis. Methods and Applications,* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 1996, pp. 253-264.

[16] Claasen T. A. C. M., Mecklenbräuker W. F. G., *The Wigner Distribution – A Tool for Time-Frequency Signal Analysis. Part I: Continous-Time Signals*, Philips Journal of Research, 1980, vol. 35, no. 3, pp. 217-250.

[17] Claasen T. A. C. M., Mecklenbräuker W. F. G., *The Wigner Distribution – A Tool for Time-Frequency Signal Analysis. Part II: Discrete-Time Signals*, Philips Journal of Research, 1980, vol. 35, nos. 4/5, pp. 277-300.

[18] Claasen T. A. C. M., Mecklenbräuker W. F. G., *The Wigner Distribution – A Tool for Time-Frequency Signal Analysis. Part III: Relations with Other Time-Frequency Signal Transformation*, 1980, Philips Journal of Research, vol. 35, nos. 4/5, pp. 372-389.

[19] Cohen L., *Time – Frequency Distibution – A Review*, Proceedings of the IEEE, 1989, vol. 77, no. 7, pp. 941-981.

[20] Cohen L., *Generalized Phase-Space Distribution Function„* Journal of Mathematical Physics, 1966, vol. 7, no. 5, pp. 781-786.

[21] Cohen L., Posch T. E., *Positive Time-Frequency Distribution*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1985, vol. ASSP-33, no. 1, pp.31-37.

[22] Cohen L., *Generalized Ambiguity Functions*, Proceedings IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1985, pp.1025-1028.

[23] Droppo J., Atlas L., *Quadratic Time-Frequency Features for Speech Recognition*, [w:] *Application in Time-Frequency Signal Processing*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 2003, pp. 317-396

[24] Grzanka A., Hatzopoulos S., *Przegląd metod czasowo-częstotliwościowych w odniesieniu do analizy sygnałów otoemisji akustycznych*, Audiofonologia XIII, 1998, s. 41-53

[25] Hahn S. L., *A Review of Methods for Time-Frequency Analysis with Extension for Signal Plane-Frequency Plane Analysis*, Kleinheubacher Berichte, 2001, Band 44, pp. 163-182.

[26] Hlawatsch F., *Duality and Classification of Bilinear Time-Frequency Signal Representaions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, vol. 39, no. 7, pp. 1564-1574

[27] Hlawatsch F., *Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations*, IEEE Signal Processing Magazine , 1992, pp. 21-67.

[28] Izydorczyk J., Płonka G., Tyma G., *Teoria sygnałów – wstęp*, Wydawnictwo HELION, Gliwice 1999.

[29] Jeong J., Williams W. J., *Kernel Design for Reduce Interference Distributions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, vol. 40, no. 2, pp. 402-412.

[30] Jeong J., Williams W. J., *Alias-Free Generalized Discrete-Time Time-Frequency Distributions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, vol. 40, no. 11, pp. 2757-2765.

[31] Jones D. L., Parks T. W., *A High Resolution Data-Adaptive Time-Frequency Representation*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1990, vol. 38, no. 12, pp. 2127-2135.

[32] Jones D. L., Parks T. W., *A Resolution Comparison of Several Time-Frequency Representations*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1992, vol. 40, no. 2, pp. 413-420.

[33] Kay S. M., *Modern spectral estimation: Theory and application,* Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1988.

[34] Leonowicz Z., Łobos T., *Analysis of Three-Phase Signals Using Wigner Spectrum*, XVI IMEKO World Congress, Vienna 2000, vol. VI, pp. 215-220.

[35] Leonowicz Z., Łobos T., Sikorski T., *Time-Frequency Analysis of Three-Phase Signals Using Wigner Distribution*, IV International Workshop "Computational Problems of Electrical Engineering", Zakopane 2002, pp. 17-20.

[36] Leonowicz Z., Łobos T., Rezmer J., *Spectrum Estimation of Non-Stationary Signals in Power Systems*, 5th International Conference on Power System Transients IPST'03, New Orleans LA 2003, paper number 15-3.

[37] Leonowicz Z., Lobos T., Rezmer J., *Advanced spectrum estimation methods for signal analysis in power electronics*, IEEE Trans. on Industrial Electronics, June 2003, vol. 50, no. 3, pp. 514-519.

[38] Leonowicz Z., Łobos T., Rezmer J., *Analiza spektralna niestacjonarnych sygnałów elektrycznych*, 26-th Seminar of Fundamentals of Electrotechnics and Circuit Theory, SPETO 2003, Gliwice-Ustroń, vol. II, pp. 411-414.

[39] Leonowicz Z., *Zaawansowane metody analizy widmowej sygnałów elektrycznych*, rozprawa doktorska, Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.

[40] Loughlin P. J., Pitton J. W., Atlas L. E., *Bilinear Time-Frequency Representations: New Insights and Properties*, IEEE Transactions on Signal Processing, 1993. vol. 41, no. 2, pp. 750-767.

[41] Lyons R. G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1999.

[42] Łobos T., Leonowicz Z., Rezmer J., *Harmonics and Interharmonics Estimation Using Advanced Signal Processing Methods*, 9th IEEE Int. Conf. on Harmonics and Quality of Power, Orlando (USA) 2000, vol. I, pp. 335-340.

[43] Łobos T., *Zaawansowane metody przetwarzania sygnałów w elektrotechnice*, 24-th Seminar of Fundamentals of Electrotechnics and Circuit Theory, SPETO 2001, Gliwice-Ustroń, vol. I, pp. 7-17.

[44] Łobos T., Rezmer J., *Badanie stanów przejściowych w układach z bateriami kondensatorów*, Konferencja Jakości Użytkowania Energii Elektrycznej, Kraków 2001, tom. VII, s. 159-162.

[45] Łobos T., Sikorski T., Leonowicz Z., *Time-Frequency Analysis of Complex Space-Phasor in Power Electronics*, 21-th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, Como, Italy 2004, vol. 3, pp. 2115-2119.

[46] Martin W., Flandrin P., *Wigner-Ville Spectral Analysis of Non-stationary Processes*, IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1985, vol. 33, no. 6, pp. 1461-1470.

[47] Mindykowski J., *Assessment of Electric Power Quality in Ship Systems Fitted with Converter Subsytems*, Shipbuilding & Shipping Ltd, Gdańsk 2003.

[48] Moczko J. A., Kramer L., *Cyfrowe metody przetwarzania sygnałów biomedycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2001.

[49] Papandreou-Suppappola A., *Aplication in Time-Frequency Signal Processing*, CRC Press, Boca Raton, Florida 2003

[50] Peyrin F., Prost R., *A Unified Definition for The Discrete-Time, Discrete-Frequency, and Discrete-Tiem/Frequency Wigner Distribution*, IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing, 1986, vol. 34, no. 4, pp. 858-867.

[51] Poularikas D. A., *The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing,* CRC Press LLC, Boca Raton, Florida 1999.

[52] Quian S., Chen D., *Joint Time-Frequency Analysis. Methods and Applications,* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 1996.

[53] Rosołowski E., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów w automatyce elektroenergetycznej*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2002.

[54] Stoica P., Moses R. L., *Introduction to Spectral Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 1997.

[55] Sun M., Sclabassi R.J., *Localization of Brain Functions by Joint Time-Frequency Representations*, [w:] *Joint Time-Frequency Analysis. Methods and Applications,* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 1996, pp. 241-250.

[56] Sclabassi R.J., Sun M., Krieger D.N., Jasiukaitis P., Scher M.S., *Time-Frequency Domain Problems in the Neurosciences*, [w:] *Time-Frequency Signal Analysis. Methods and applications*, Longman Cheshire, Melbourne or Willey Halsted Press, New Jork 1992, pp. 498-519.

[57] Szabatin J., *Podstawy teorii sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2000.

[58] Szlachetko B., *Parametryczne transformacje czasowo – częstotliwościowe sygnałów losowych*, rozprawa doktorska, Instytut Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001.

[59] Velez E. F., Absher R. G., *Spectral Estimation Based on The Wigner-Ville Representation*, Signal Processing, 1990, vol. 20, no. 4, pp. 325-346.

[60] Velez E. F. , Garudadri H., *Speech Analysis Based on Smoothed Wigner-Ville Distribution*, [w:] *Time-Frequency Signal Analysis. Methods and applications*, Longman Cheshire, Melbourne or Willey Halsted Press, New Jork 1992, pp. 351-374.

[61] Waldo D., Chitrapu P. R., *Short communication on the Wigner Ville distribution of finite duration signals*, Signal Processing, 1991, vol. 24,no. 2, pp. 231-237.

[62] Zieliński T. P., *Reprezentacje sygnałów niestacjonarnych typu czas – częstotliwość i czas – skala*, rozprawa monograficzna, Wydawnictwa AGH, Kraków 1994.

[63] Zielinski T. P., *Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydział EAIiE AGH, Kraków 2002.