

Henryk Zawadzki

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

**O PROBLEMIE TRZECH CIAŁ,
TRAJEKTORIACH HOMOKLINICZNYCH
I DETERMINISTYCZNYM CHAOSIE****1. Problem trzech ciał niebieskich**

Problem trzech ciał (w skrócie PTC) jest znanym od stuleci problemem mechaniki nieba, polegającym na wyznaczeniu trajektorii ruchu trzech ciał niebieskich (np. Słońca, Ziemi i Księżyca), oddziałujących na siebie za pomocą sił grawitacji, przy danych położeniach początkowych, prędkościach początkowych i masach tych ciał (zob. np. [Barrow-Green 1997; Valtonen, Karttunen 2006]). PTC można formalnie zapisać jako układ nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych postaci

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^3 \frac{G m_i m_j (x_j - x_i)}{\|x_j - x_i\|^3} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

w którym przez $x_i = x_i(t)$ oraz m_i oznaczone są odpowiednio współrzędne początkowe oraz masa i -tego ciała, a G jest stałą grawitacji (zob. [Rybka 1970; Thirring 1985]).

Rozwiązanie tego problemu próbowali znaleźć m.in.: I. Newton, autor wydanej w roku 1687 pracy *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, w której opisane są prawa rządzące ruchem punktów materialnych, L. Euler¹, P.S. Laplace, J.L. Lagrange, C.G. Jacobi, W.R. Hamilton, S.D. Poisson oraz – za pomocą nowych, topologicznych metod – J.H. Poincaré i G.D. Birkhoff. Chociaż każdy z wymienionych wyżej uczonych uzyskał interesujące (głównie z matematycznego, a nie astronomicznego punktu widzenia) rezultaty i choć zbadano wiele przypadków szczególnych PTC, nikomu nie udało się znaleźć ogólnego rozwiązania ukła-

¹ Newton i Euler rozwiązali wcześniej problem dwóch ciał – Słońca i Ziemi, potwierdzając obserwacje poczynione wcześniej przez J. Keplera.

du (1). Poincaré dowiódł, że w ogólnym przypadku znalezienie postaci analitycznej tego rozwiązania jako funkcji czasu, położenia i prędkości początkowych nie jest możliwe².

W roku 1887 Paryska Akademia Nauk ogłosiła konkurs na pracę, która miała odpowiedzieć na pytanie: „Czy Układ Słoneczny jest stabilny?”. Nagrodą główną w tym konkursie było 2500 koron ufundowanych przez króla Szwecji i Norwegii Oskara II z okazji jego sześćdziesiątych urodzin. Nagrodę w 1890 r. zdobył Poincaré za liczącą ponad 200 stron rozprawę pt. *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique*³. W pracy tej Poincaré wprowadził m.in. takie pojęcia, jak trajektorie homokliniczne (które nazywał trajektoriami podwójnie asymptotycznymi) oraz „funkcja pierwszego powrotu”, która dziś nazywana jest odwzorowaniem Poincarégo. Uważa się często [Aubin, Dalmenico 2002], że badając problem trzech ciał, Poincaré był pierwszym, który odkrył chaotyczny układ dynamiczny. We wspomnianej pracy oraz opublikowanej w 1897 r. monografii pt. *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* Poincaré wskazał matematykom nowe kierunki badań układów dynamicznych generowanych przez równania różniczkowe. Wymienione pozycje można zatem uważać za pierwsze (źródłowe) teksty z teorii układów dynamicznych i teorii chaosu.

2. O trajektoriach homoklinicznych i chaosie

We wspomnianych wyżej pracach Poincaré odkrył, że gdy układ dynamiczny oprócz hiperbolicznego punktu stałego p ma tzw. transwersalny punkt homokliniczny, to dynamika układu staje się bardzo złożona. W przestrzeni stanów pojawia się wtedy m.in. „płatanina homokliniczna”, utworzona z przecinających się nieskończenie wiele razy zbiorów stabilnych i niestabilnych punktu p . Występuje również wrażliwość na zmianę warunków początkowych – jeden z podstawowych atrybutów deterministycznego chaosu, o której skutkach pisał Poincaré w pracy *Nauka i metoda*⁴.

„Bardzo drobna, umykająca naszej uwadze przyczyna, powoduje znaczny efekt, którego nie możemy nie zauważyć; mówimy wtedy, że efekt ten spowodowany jest przez przypadek. Gdybyśmy znali dokładnie prawa natury oraz sytuację wszechświata w chwili początkowej, byłibyśmy w stanie dokładnie przewidywać stan tego wszechświata w następnych chwilach. Jednakże nawet wtedy, gdy prawa natury przestaną być dla nas sekretem, stan początkowy będziemy mogli poznać jedynie w przybliżeniu”.

² W roku 1912 K.F. Sundman przedstawił rozwiązanie PTC w postaci szeregów funkcyjnych (zob. np. [Arnold 1985]), gdzie przedstawiono również wiele innych rezultatów dotyczących PTC.

³ J.H. Poincaré otrzymał wspomnianą nagrodę 21 stycznia 1889 r. Po wręczeniu nagrody w pracy wykryto błąd, jednakże fakt ten ukryto, pozwalając autorowi dostarczyć poprawioną wersję pracy, która ukazała się w „Acta Mathematica” w 1890 r.

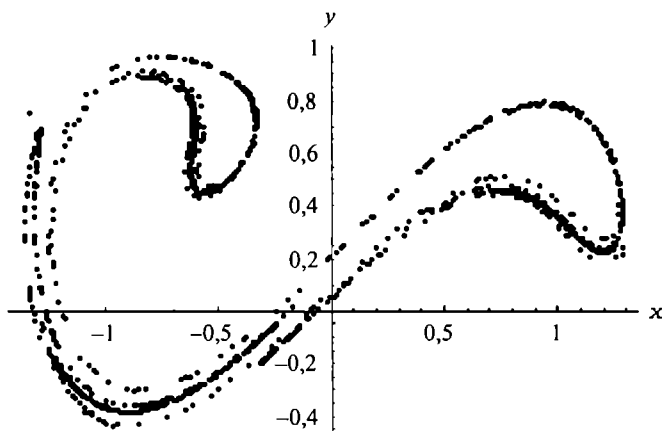
⁴ Cytat ten podajemy za [Ekeland 1999].

Badania Poincarégo dowiodły m.in., że determinizm układu i jego przewidywalność stanowią w istocie dwa różne problemy, lub inaczej, że determinizm nie musi w praktyce oznaczać przewidywalności.

Poincaré badał układy dynamiczne z czasem ciągłym (równania różniczkowe), stosując m.in. tzw. odwzorowanie pierwszego powrotu (*first return map*), nazywane dzisiaj odwzorowaniem Poincarégo i oznaczane najczęściej literą P . Odwzorowanie Poincarégo pozwala sprowadzić badanie dynamiki układu dynamicznego z czasem ciągłym do badania dynamiki układu z czasem dyskretnym o niższym wymiarze. Konstrukcja tego odwzorowania dla układów autonomicznych i nieautonomicznych jest na ogół zadaniem trudnym [Wiggins 1988; Parker, Chua 1989]. Sposób konstrukcji odwzorowania Poincarégo dla układu Duffinga

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ y &= -ky + x - x^3 + \Gamma \cos \omega t\end{aligned}\quad (2)$$

podają Guckenheimer, Holmes [1983]. Na rysunku 1 pokazano jeden z „dziwnych atraktorów” odwzorowania P otrzymany dla $k = 0,3$, $\Gamma = 0,4$, $\omega = 1,2$ przy warunkach początkowych $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.



Rys. 1. „Dziwny atraktor” odwzorowania Poincarégo dla układu (2)

Źródło: opracowanie własne.

Jednym z podstawowych wyników teorii układów dynamicznych traktujących o punktach i trajektoriach homoklinicznych jest twierdzenie Smale’a-Birkhoffa [Guckenheimer, Holmes 1983; Nitecki 1971; Wiggins 1988; Zawadzki 1996]. W twierdzeniu tym mowa jest o układzie (X, f) z czasem dyskretnym, jednak pośrednio dotyczy ono również układów dynamicznych z czasem ciągłym. Odwzorowaniem (dyfeomorfizmem) f może bowiem być wspomniane wyżej odwzorowanie Poincarégo $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$ z odpowiednio dobraną przestrzenią stanów Σ .

W twierdzeniu Smale'a-Birkhoffa występuje wiele „technicznych” pojęć z topologii oraz teorii układów dynamicznych, które (siłą rzeczy skrótowo) przedstawiamy poniżej. Szersze omówienie tych pojęć oraz dowód twierdzenia można znaleźć w wymienionych wcześniej pozycjach.

Niech (X, f) będzie układem dynamicznym z czasem dyskretnym, w którym przestrzeń stanów $X \subset R^m$ ($m \geq 1$) jest zbiorem niepustym i otwartym, a $f = (f_1, \dots, f_m)$ jest dyfeomorfizmem klasy C^r ($r \geq 0$) przestrzeni X w siebie, czyli odwzorowaniem odwracalnym klasy C^r takim, że odwzorowanie odwrotne f^{-1} też jest klasy C^r ⁵.

Dodatnią półtrajektorią punktu $x \in X$ nazywamy ciąg $(f^n(x))$, w którym f^n oznacza n -krotne złożenie f ze sobą oraz $f^0 \equiv id_X$, a ujemną półtrajektorią tego punktu ciąg $(f^{-n}(x))$, w którym f^{-n} jest n -krotnym złożeniem f^{-1} . Ciąg $(\dots, f^{-n}(x), \dots, f^{-1}(x), x, f(x), \dots, f^n(x), \dots)$ nazywamy trajektorią punktu x .

Punkt $p \in X$ nazywamy punktem stałym układu (X, f) , jeżeli $f(p) = p$. Punkt stały p nazywa się hiperbolicznym, gdy wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego $Df(p) = [\partial f_i(p)/\partial x_j]$ mają moduł różny od 1. Przede wszystkim punkt hiperboliczny, dla którego $Df(p)$ posiada wartości własne o module zarówno większym, jak i mniejszym od jednego, nazywa się punktem siodłowym lub krótko – siodłem.

Niech p będzie hiperbolicznym punktem stałym układu (X, f) . Globalnym zbiorem stabilnym i globalnym zbiorem niestabilnym punktu p nazywamy odpowiednio zbiory

$$W^s(p) = \{x \in X : \|f^n(x) - p\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\},$$

$$W^u(p) = \{x \in X : \|f^{-n}(x) - p\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}.$$

Punkt $q \in X$ nazywamy punktem homoklinicznym punktu p , jeżeli $q \neq p$ oraz $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$. Punkty homokliniczne są więc punktami „podwójnie asymptotycznymi”, których dodatnie i ujemne półtrajektorie zbiegają do p , gdy $n \rightarrow \infty$.

Założmy, że zbiory $W^s(p)$ i $W^u(p)$ są rozmaitościami różniczkowymi w R^m . Rozmaitości różniczkowe, zwane też k -wymiarowymi hiperpowierzchniami ($k \leq m$), są wielowymiarowymi uogólnieniami takich pojęć, jak krzywa czy powierzchnia. Dokładniej, k -wymiarowa rozmaitość jest to zbiór $M \subset R^m$, który lokalnie (tj. w otoczeniu każdego punktu $x \in M$) wygląda jak „kawałek” przestrzeni R^k , i taki, że w każdym punkcie $x \in M$ istnieje hiperpłaszczyzna styczna do M ⁶.

Mówimy, że $W^s(p)$ i $W^u(p)$ są transwersalne w punkcie q , jeżeli $q \notin W^s(p) \cap W^u(p)$ lub $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$ oraz $T_q(W^s(p)) \oplus T_q(W^u(p)) = R^m$, gdzie „ $\oplus$ ”

⁵ Dyfeomorfizmy klasy C^0 , czyli odwzorowania odwracalne i ciągłe wraz z f^{-1} , nazywają się homeomorfizmami.

⁶ Formalną definicję k -wymiarowej rozmaitości różniczkowej klasy C^r w R^m można znaleźć np. w [Zawadzki 1996].

oznacza sumę prostą przestrzeni stycznych $T_q(W^s(p))$ i $T_q(W^u(p))$ odpowiednio do rozmaitości $W^s(p)$ i $W^u(p)$ w punkcie q [Zawadzki 1996]. O rozmaitościach, które są transwersalne, mówi się, że są względem siebie „w ogólnym położeniu”. Szczególnie gdy $W^s(p)$ i $W^u(p)$ są krzywymi, ich transwersalność oznacza, że styczne poprowadzone do nich w punkcie q nie pokrywają się.

Punkt q nazywamy transwersalnym punktem homoklinicznym punktu p , gdy $W^s(p)$ i $W^u(p)$ są transwersalne w punkcie q .

Układy dynamiczne (X, f) oraz (Y, g) , w których $X, Y \subset R^m$ oraz f i g są dyfeomorfizmami klasy C nazywamy topologicznie równoważnymi (lub topologicznie sprzężonymi), jeżeli istnieje homeomorfizm $h : X \rightarrow Y$ taki, że dla każdego $x \in X$ zachodzi równość $h[f(x)] = g[h(x)]$. O układach dynamicznych, które są topologicznie równoważne, mówi się, że mają równoważną dynamikę lub że są jakościowo identyczne.

Niech $N \geq 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $S = \{1, 2, \dots, N\}$. Zdefiniujmy zbiór ciągów „podwójnie nieskończonych” o elementach ze zbioru S

$$\Sigma^N = \dots \times S \times S \times S \times \dots = \prod_{i=-\infty}^{\infty} S_i,$$

gdzie $S_i = S$ dla każdego $i \in \mathbb{Z}$. W zbiorze Σ^N można zdefiniować metrykę wzorem

$$d(s, \bar{s}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{1 + |s_i - \bar{s}_i|},$$

w którym $s = (\dots, s_{-n}, \dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots, s_n, \dots)$, $\bar{s} = (\dots, \bar{s}_{-n}, \dots, \bar{s}_{-1}, \bar{s}_0, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n, \dots) \in \Sigma^N$. Zbiór Σ^N jest wtedy przestrzenią metryczną. Jest on ponadto zbiorem domkniętym, brzegowym i doskonałym⁷, czyli jest zbiorem Cantora.

Przesunięcie na n symbolach jest układem dynamicznym (Σ^N, σ) , w którym odwzorowanie $\sigma : \Sigma^N \rightarrow \Sigma^N$, czyli przesunięcie, zdefiniowane jest następująco:

dla $s = (\dots, s_{-n}, \dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots, s_n, \dots) \in \Sigma^N$,

$$\sigma(s) = (\dots, s_{-n}, \dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots, s_n, \dots).$$

Można dowieść [Wiggins 1988], że układ dynamiczny (Σ^N, σ) jest chaotyczny w sensie Devaney [1987], tzn. jest w zbiorze Σ^N wrażliwy na zmianę punktów początkowych, jest topologicznie mieszający, a zbiór punktów okresowych tego układu jest zbiorem gęstym⁸ w Σ^N .

Układ dynamiczny (X, f) jest (w X) wrażliwy na zmianę warunków początkowych, jeżeli istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdego $x \in X$ oraz każdego otoczenia U

⁷ Zbiór jest brzegowy, gdy jedynym jego podzbiorem otwartym jest zbiór pusty. Zbiór jest doskonały, gdy jest domknięty i każdy jego punkt jest jednocześnie punktem skupienia tego zbioru.

⁸ Zbiór $A \subset X$ (X – przestrzeń metryczna) jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, gdy część wspólna tego zbioru z każdym otwartym podzbiorem X jest niepusta.

punktu x istnieją $y \in U$ oraz $n \geq 1$ takie, że $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \varepsilon$. Układ ten jest topologicznie mieszający, gdy dla dowolnych otwartych zbiorów $U, V \subset X$ istnieje liczba $n \geq 0$ taka, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

3. Twierdzenie homokliniczne Smale'a-Birkhoffa

Niech $f : R^m \rightarrow R^m$ ($m \geq 1$) będzie dyfeomorfizmem mającym hiperboliczny punkt stały p i niech $q \neq p$ będzie transwersalnym punktem homoklinicznym punktu p . Wtedy istnieje zbiór $A \subset R^m$ zawierający punkt q , domknięty, brzegowy, doskonały i taki, że $f(A) = A$, w którym f jest topologicznie równoważne z przesunięciem σ na n symbolach.

Ponieważ występujące w tezie twierdzenia przesunięcie σ jest odwzorowaniem chaotycznym, chaotyczne w A jest również odwzorowanie f . Twierdzenie Smale'a-Birkhoffa można więc z dzisiejszej perspektywy uważać za jedno z (nielicznych) twierdzeń podających kryteria występowania deterministycznego chaosu.

4. Uwagi końcowe

Badania Poincarégo dotyczące „wewnętrznej” chaotyczności zaobserwowanej w modelach ruchu ciał niebieskich i innych układach równań różniczkowych, choć kontynuowane, przez długi okres nie były należycie doceniane przez matematyków. Jednym z powodów takiej sytuacji było zapewne to, że rozwiązania rozważanych przez niego chaotycznych układów dynamicznych można otrzymać jedynie numerycznie, za pomocą komputera, a ich trajektorie można obserwować wyłącznie dzięki grafice komputerowej. Takimi narzędziami jednak ani Poincaré, ani współcześni mu uczeni nie dysponowali, a szkoda. Gdyby bowiem dysponowali, teoria nieliniowych układów dynamicznych byłaby z pewnością bogatsza o wiele wartościowych wyników.

Literatura

- Arnold V.I. (red.), *Dynamical Systems*, t. 3, Springer-Verlag, 1985.
 Aubin D., Dalmenico A.D., *Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: Longue Durée and Revolution, Disciplines and Cultures*, *Historia Mathematica* 2002, 29, s. 273-339.
 Barrow-Green June, *Poincaré and the Three Body Problem*, AMS, 1997.
 Devaney R.L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City Ca, 1987.
 Ekeland I., *Chaos*, Wydawnictwo „Książnica”, Katowice 1999.
 Guckenheimer J., Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
 Nitecki Z., *Differentiable Dynamics. An Introduction to the Orbit Structure of Diffeomorphisms*, The MIT Press, Cambridge 1971.

- Parker T.S., Chua L.O., *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer-Verlag 1989.
- Poincaré J.H., *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique*, „Acta Mathematica” 1890, 13, s. 1-270; Oeuvres, t. VII, s. 262-479.
- Poincaré J.H., *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 1, Gauthier-Villars, Paris 1897.
- Poincaré J.H., *Science et méthode*, Flammarion, Paris 1908.
- Rybka E., *Astronomia ogólna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1970.
- Thirring, *Fizyka matematyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, t. 1, Warszawa 1985.
- Valtonen M., Karttunen H., *The Three-Body Problem*, Cambridge University Press, Cambridge 2006.
- Wiggins S., *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods*, Springer-Verlag 1988.
- Zawadzki H., *Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane przykłady ekonomiczne*, AE, Katowice 1996.

ABOUT THE PROBLEM OF THREE BODIES, HOMOCLINIC, TRAJECTORIES AND DETERMINISTIC CHAOS

Summary

J.H. Poincaré (1854-1912), an outstanding French mathematician, astronomer, physicist and philosopher died long before the word “chaos” (in the sense of irregular, unpredictable behavior of trajectories of deterministic dynamical systems) appeared in mathematical literature. But many intuitions and results he obtained in his research in the field of differential equations and their applications in the modeling of celestial mechanics can be regarded as a part of chaos theory which arose in the second half of the twentieth century. In this article its author presents famous three-body problem of celestial mechanics and the Smale-Birkhoff homoclinic theorem, which gives sufficient conditions for existing of deterministic chaos in nonlinear dynamic systems.