

Witold Miszczak

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

ANALIZA POPYTU KONSUMENCKIEGO

Konsument dysponuje określonym dochodem, który stara się w sposób racjonalny spożytkować na konkretne dobra, chcąc przy tym osiągnąć maksymalną satysfakcję. Załóżmy, że dochody i gusta konsumenta są znane. Znane są też ceny na rynku. Konsument jest świadom alternatyw i może zmieniać zdanie. Zakłada się też, że układ preferencji konsumenta jest stabilny i satysfakcja, którą osiąga w wyniku nabycia określonych dóbr, może być opisana za pomocą funkcji użyteczności. Wynika z tego, że każdy konsument wybiera szczególny koszyk dóbr maksymalizujący jego funkcję użyteczności.

Przez konsumenta będziemy rozumieć pojedyncze gospodarstwo domowe, gdzie sądzi się, że wszyscy jego członkowie mają podobne funkcje użyteczności i satysfakcja z osiągnięcia maksymalnej wartości tej funkcji dla całego gospodarstwa jest równomiernie rozłożona na poszczególnych jego członków. Jest to pewne uproszczenie, zwykle konieczne, gdyż trudno jest o dane pozwalające ocenić preferencje poszczególnych jego członków.

Niech q_i oznacza ilości każdego z n artykułów nabywane w chwili t ($i = \overline{1, n}$). Satysfakcja z ich nabycia mierzona jest za pomocą funkcji użyteczności:

$$U(\mathbf{q}) = U(q_1, \dots, q_n), \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)'$. Racjonalny konsument wybiera $\mathbf{q}^* > \mathbf{0}$ maksymalizujące U przy ograniczeniu, że wartość nabywanych dóbr jest równa jego dochodowi y :

$$y = \mathbf{p}'\mathbf{q}, \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)'$ jest wektorem cen indywidualnych. Zakłada się, że (1) ma ciągle pochodne do trzeciego rzędu, przy dodatniej pierwszej pochodnej. Oznacza to, że wzrostowi nabywanych ilości towarzyszy wzrost użyteczności.

Na podstawie przyjętych założeń Hessjan

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{q}^2} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right], \quad i, j = \overline{1, n},$$

jest symetryczny i ujemnie określony. Punkt $\mathbf{q}^*$ jest w takim przypadku punktem maksimum $U(\mathbf{q})$ lub punktem siodłowym. Wyznaczmy ten punkt

$$L = U(\mathbf{q}) - \lambda \mathbf{p}' \mathbf{q},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

$$\lambda \mathbf{p}' \mathbf{q} = \lambda y = \left(\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)' \mathbf{q},$$

$$\lambda = \left(\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)' \frac{\mathbf{q}}{y},$$

gdzie $\left(\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)'$ jest transponowanym wektorem kolumnowym pochodnych

$$\left(\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q_1}, \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q_n} \right)'.$$

Stąd

$$\mathbf{p} = y \frac{\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}}{\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \right)' \mathbf{q}}. \quad (4)$$

Rozwiązując (4), otrzymuje się $\mathbf{q}^*$. Zauważmy, że wzrost cen z jednoczesnym urealnieniem dochodów w stosunku do stanu poprzedniego o tę samą wielkość nie zmienia popytu $\mathbf{q}$.

Rozważmy funkcję użyteczności, która zależy tylko od nabywanych ilości koszyka dóbr ([1] cyt. za [2])

$$U(\mathbf{q}) = \beta' \log(\mathbf{q} - \gamma), \quad (5)$$

gdzie β i γ są pewnymi parametrami, przy czym $\mathbf{q} - \gamma > \mathbf{0}$, co dla dodatniego wektora γ można interpretować jako nadwyżkę zakupywanych dóbr ponad nie-

zbędne do godnego życia ustalone minimum. Wektor $\log(\mathbf{q} - \gamma) = (\log(q_1 - \gamma_1) \dots \log(q_n - \gamma_n))'$. Wtedy

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{a}}' \log(\mathbf{q} - \gamma)}{\partial \mathbf{q}} = \hat{\mathbf{a}} \odot \mathbf{Q},$$

gdzie $\mathbf{Q} = \left(\frac{1}{q_1 - \gamma_1} \quad \dots \quad \frac{1}{q_n - \gamma_n} \right)'$ i $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = (x_1 y_1 \dots x_n y_n)'$ jest iloczynem Schura-Hadamarda wektorów.

Zauważmy, że iloczyn skalarny wektorów da się zapisać jako

$$\mathbf{1}'(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) = \mathbf{x}'\mathbf{y}.$$

Z założonej dodatniości pierwszej pochodnej wynika, że $\beta > 0$.

Założmy dodatkowo, że $\mathbf{1}'\beta = 1$. Wtedy

$$L = \beta' \log(\mathbf{q} - \gamma) - \lambda \mathbf{p}'\mathbf{q} - \delta \mathbf{1}'\beta.$$

A zatem:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \beta \odot \mathbf{Q} - \lambda \mathbf{p} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \beta} = \log(\mathbf{q} - \gamma) - \delta \mathbf{1} = 0. \end{cases}$$

Rozwiązując pierwsze z równań, otrzymujemy:

$$\beta \odot \mathbf{Q} = \lambda \mathbf{p} \Rightarrow \beta = \lambda (\mathbf{p} \odot \mathbf{q} - \mathbf{p} \odot \gamma) \Rightarrow \mathbf{1}'\beta = \lambda \mathbf{1}'(\mathbf{p} \odot \mathbf{q} - \mathbf{p} \odot \gamma) \Rightarrow 1 = \lambda (y - \mathbf{p}'\gamma). \quad (6)$$

Stąd

$$\lambda = \frac{1}{y - \mathbf{p}'\gamma},$$

$$(y - \gamma'\mathbf{p})\beta = \mathbf{p} \odot \mathbf{q} - \mathbf{p} \odot \gamma,$$

$$\mathbf{p} \odot \mathbf{q} = \mathbf{p} \odot \gamma + y\beta - \gamma'\mathbf{p}\beta. \quad (7)$$

Równanie (7) opisuje wydatki na każdy z n artykułów w budżecie konsumenta jako funkcję cen $\mathbf{p}$ i dochodu y . Co więcej

$$y \left(\frac{\mathbf{p} \odot \mathbf{q}}{\mathbf{1}'(\mathbf{p} \odot \mathbf{q})} - \beta \right) = \gamma'\mathbf{p} \left(\frac{\gamma \odot \mathbf{p}}{\mathbf{1}'(\gamma \odot \mathbf{p})} - \beta \right), \quad (8)$$

gdzie po obu stronach występują wskaźniki struktury odpowiednio rzeczywistych wydatków i wydatków minimalnych zapewniających zaspokojenie niezbędnych potrzeb.

Z drugiego równania układu otrzymujemy:

$$\delta \mathbf{1} = \log(\mathbf{q} - \gamma) \Rightarrow \delta = U(\mathbf{q}).$$

Z tego wynika, że funkcja użyteczności (5) postaci przyjmuje wartość maksymalną, gdy składowe wektora β są zerami poza jedną równą jeden. Wtedy $U(\mathbf{q}) = \log(q_i - \gamma_i)$, gdzie i odpowiada takiej różnicy $q_i - \gamma_i$, dla której zachodzi $\max_i (q_i - \gamma_i)$.

Przykład 1.

Niech będzie dana następująca informacja o koszyku dóbr (dane fikcyjne) oraz dochodzie konsumenta.

Koszyk	Ceny jednostkowe	Ilości w sztukach
Artykuł I	10	q_1
Artykuł II	50	q_2
Artykuł III	100	q_3

Dochód konsumenta jest równy z założenia wartości koszyka i wynosi 2750 jednostek pieniężnych.

Napiszmy równanie popytu (7):

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} + 2750 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} - (\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3) \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Maksymalną użyteczność otrzymujemy wtedy, gdy istnieją oszacowania ekspertów dotyczące wektora γ , np. $\gamma = (50, 20, 3)$. Obliczmy różnice między wektorami $\mathbf{q}$ i γ dla trzech możliwych wektorów $\beta_1 (1, 0, 0)'$, $\beta_2 (0, 1, 0)'$, $\beta_3 (0, 0, 1)'$. Wtedy $\mathbf{q}_1 = (145 - 50, 20, 3)$, $\mathbf{q}_2 = (50, 39 - 20, 3)$, $\mathbf{q}_3 = (50, 20, 12,5 - 3)$. Stąd wektory β_i i $\mathbf{q}_i$ maksymalizują funkcję użyteczności.

Użyteczność takiego koszyka dóbr jest równa

$$U \left(\begin{pmatrix} 145 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \log 95 = 4,5539$$

(zauważmy, że $\lim_{x \rightarrow 0} (x \log x) = 0$).

Funkcja użyteczności (5) nie jest zbyt realistyczna, gdyż osiąga maksimum, gdy w ramach dochodu y maksymalizujemy zakup jednego dobra, ilości pozostałych dóbr zostawiając na podstawowym poziomie. Może to być argumentem za tym, że w tego rodzaju badaniach nie powinno się opierać tylko i wyłącznie na funkcji użyteczności opisanej za pomocą pojedynczego równania, ale być może powinny one być wielowariantowe w zależności od wartości brzegowych ilości zakupionych dóbr.

Na równanie (7) można spojrzeć jak na pewien model nieliniowy ze względu na parametry β i γ wyrażające wydatki na i -ty artykuł jako funkcję obserwowanych cen i dochodu. Zapiszmy więc ten model dla H jednostek badania i T momentów. Wtedy układ n równań określający wektor wydatków na n różnych dóbr w h -tym gospodarstwie domowym w momencie t przybiera postać:

$$\frac{p_{ht} \odot q_{ht}}{y_{ht}} = \beta + \frac{p_{ht} \odot \gamma}{y_{ht}} - \beta \odot \frac{\gamma' p_{ht}}{y_{ht}} + \varepsilon_{ht} = \gamma \odot \frac{p_{ht}}{y_{ht}} + \beta \odot \left(\frac{y_{ht} - \gamma' p_{ht}}{y_{ht}} \right) \mathbf{1} + \varepsilon_{ht}, \quad h = \overline{1, H}, \quad t = \overline{1, T}, \quad (9)$$

gdzie ε_{ht} jest błędem losowym, $\varepsilon_{ht} \sim \text{IID}(0, \Psi_{ht})$, gdzie

$$\Psi_{ht} = \begin{bmatrix} \psi_{ht1}^2 & 0 & & 0 \\ 0 & \psi_{ht2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_{htn}^2 \end{bmatrix}.$$

Błąd losowy jest zmienną losową, której rozkład jest związany z czasem, gospodarstwem i rodzajem nabywanego artykułu.

Założenia dotyczące błędów losowych formalnie można zapisać następująco [2]:

1. Heteroskedastyczność:

$$E(\varepsilon_{ht} \odot \varepsilon_{ht}) = \text{diag}(\Psi_{ht}). \quad (10)$$

2. Niezależność względem gospodarstw (przekrojowa):

$$E(\varepsilon_{ht} \odot \varepsilon_{kt}) = 0, \quad \text{dla } h \neq k. \quad (11)$$

3. Autoregresja 1 rzędu:

$$\varepsilon_{ht} = \rho_h \odot \varepsilon_{h(t-1)} + \eta_{ht}, \quad \text{z } \eta_{ht} \sim N(0, \Xi_h) \quad (12)$$

$$\Xi_h = \begin{bmatrix} \xi_{h1}^2 & 0 & & 0 \\ 0 & \xi_{h2}^2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_{hn}^2 \end{bmatrix}.$$

Z (12) wynika, że parametr autoregresji błędu losowego może być inny dla każdego gospodarstwa. Dodatkowo

$$\varepsilon_{ht} \sim N(0, \mathbf{a}'_h \mathbf{\Xi}_h), \quad \mathbf{a}'_h = \left(\frac{1}{1-\rho_{h1}^2} \quad \frac{1}{1-\rho_{h2}^2} \quad \dots \quad \frac{1}{1-\rho_{hn}^2} \right) \quad (13)$$

i $E(\varepsilon_{h(t-1)} \odot \eta_{ht}) = 0$ dla wszystkich h .

$$E(\varepsilon_{ht} \odot \varepsilon_{hs}) = \rho_h^{t-s} \odot \text{diag}(\mathbf{\Sigma}_h) \quad \text{dla } t > s \quad \text{i} \quad E(\varepsilon_{ht} \odot \varepsilon_{kt}) = 0 \quad \text{dla } h \neq k, \quad (14)$$

gdzie

$$\mathbf{\Sigma}_h = \begin{bmatrix} \sigma_{h1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{h2}^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{hn}^2 \end{bmatrix}.$$

Dla układu równań składającego się z HT równań dla popytu na i -te dobro w układzie (9)

$$\frac{p_{hi} q_{hti}}{y_{ht}} = \gamma_i \frac{p_{hi}}{y_{ht}} + \beta_i \left(1 - \frac{\gamma' \mathbf{p}_{ht}}{y_{ht}} \right) + \varepsilon_{hti}, \quad t = \overline{1, T}, \quad h = \overline{1, H},$$

przy założeniach 1, 2, 3 macierz kowariancji wektora losowego

$$\varepsilon_i = (\varepsilon_{11i} \quad \varepsilon_{12i} \quad \dots \quad \varepsilon_{1Ti} \quad \varepsilon_{21i} \quad \dots \quad \varepsilon_{2Ti} \quad \dots \quad \varepsilon_{H1i} \quad \dots \quad \varepsilon_{HTi})'$$

przybiera postać

$$\mathbf{\Omega}_i = \begin{bmatrix} \sigma_{1i}^2 \mathbf{V}_{1i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_{2i}^2 \mathbf{V}_{2i} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \sigma_{Hi}^2 \mathbf{V}_{Hi} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

gdzie macierze autoregresji $\mathbf{V}_{hi}$ są równe

$$\mathbf{V}_{hi} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{hi} & \rho_{hi}^2 & \dots & \rho_{hi}^{T-1} \\ \rho_{hi} & 1 & \rho_{hi} & \dots & \rho_{hi}^{T-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{hi}^{T-1} & \rho_{hi}^{T-2} & \rho_{hi}^{T-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Macierze kowariancji różnią się dla różnych dóbr.

Jeżeli założymy, że $\rho_{hi} = \rho_i$ to $\mathbf{V}_{hi} = \mathbf{V}_i$.

Model (9) dla ustalonego h i t z założeniami (10)-(16) opisuje podział budżetu konsumpcyjnego na n artykułów jako liniową funkcję dochodu konsumenta i n cen

jednostkowych. Wtedy wektory parametrów β i γ są n -wymiarowe. Po wylosowaniu próby k -elementowej gospodarstw z jednorodnej podpopulacji gospodarstw w ustalonym momencie t i zaobserwowaniu struktury wydatków na poszczególne dobra można próbować wyestymować nieznane wektory parametrów. Równania tego modelu nie są liniowe ze względu na parametry β i γ , dlatego nie mogą być estymowane za pomocą zwykłej metody najmniejszych kwadratów. Stają się one liniowe ze względu na jeden z wektorów parametrów, gdy drugi jest ustalony. Ogólnie najprostszą drogą estymacji (9) dla ustalonych h i t jest droga dwustopniowa: należy najpierw estymować parametry dochodów β i po wstawieniu ich do równań estymować γ . Robi się to tak długo, aż w dwu kolejnych iteracjach wartości wyznaczonych parametrów się nie zmieniają.

Estymator zgodny Ω_i może być znaleziony poprzez wyznaczenie powyższą metodą parametrów modelu i obliczeniu reszt e_{ht} . Z tych reszt można otrzymać estymator zgodny współczynników autokorelacji ρ_h , będący empiryczną autokorelacją między kolejnymi wektorami reszt e_{ht} i $e_{h(t-1)}$:

$$r_{hi} = \frac{\sum_{t=2}^T e_{hti} e_{h(t-1)i}}{\sqrt{\sum_{t=2}^T e_{hti}^2} \sqrt{\sum_{t=2}^T e_{h(t-1)i}^2}}.$$

Następnym krokiem jest użycie r_{hi} do przekształcenia obserwacji w (9) w proces nieautoregresyjny:

$$w_{hti}^* = \gamma_i z_{hti}^* + \beta_i \left(1 - \sum_{j=1}^n \gamma_j z_{htj}^* \right) + \varepsilon_{hti}^*,$$

gdzie

$$w_{hti} = \frac{p_{hti} q_{hti}}{y_{ht}},$$

$$z_{hti} = \frac{p_{hti}}{y_{ht}},$$

$$w_{hti}^* = w_{hti} \sqrt{1 - r_{hi}^2} \quad \text{dla } t = 1,$$

$$w_{hti}^* = w_{hti} - r_{hi} w_{h(t-1)i} \quad \text{dla } t = \overline{2, T},$$

$$z_{hti}^* = z_{hti} \sqrt{1 - r_{hi}^2} \quad \text{dla } t = 1,$$

$$z_{hti}^* = z_{hti} - r_{hi} z_{h(t-1)i} \quad \text{dla } t = \overline{2, T}.$$

Z przekształconego modelu otrzymujemy zgodny estymator σ_{hi} :

$$s_{hi}^2 = \frac{v_{hi}^2}{1 - r_{hi}^2}, \quad \text{gdzie } v_{hi}^2 = \frac{\sum_{t=1}^T u_{hti}^2}{T - K}$$

i u_{hti} są estymatorami reszt η_{hti} , K jest liczbą estymowanych parametrów. Mając zgodne estymatory σ_{hi} i ρ_{hi} możemy zbudować macierze Ω_i i wyestymować parametry regresji za pomocą uogólnionej MNK.

Dla pełnego układu, gdy h i t nie są ustalone, nie można powyższą metodą wyznaczyć parametrów układu równań popytu (9), gdyż prowadzi to do różnych ocen γ dla tych samych dóbr. W założeniach przyjęliśmy, że oceny te są takie same dla różnych gospodarstw i chwil.

Ponieważ wszystkie równania w (9) mają tę samą postać, układ może być sprowadzony do pojedynczego równania wektorowego. W tym celu tworzymy wektor $\mathbf{w}$, którego składowymi są wektory $\mathbf{w}_i$ o HT składowych odpowiadających poszczególnym nabywanym artykułom. Wektor $\mathbf{w}$ zawiera łącznie nHT obserwacji.

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_i \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } \mathbf{w}_i = \begin{pmatrix} w_{11i} \\ \vdots \\ w_{1Ti} \\ w_{21i} \\ \vdots \\ w_{2Ti} \\ \vdots \\ w_{HTi} \end{pmatrix},$$

gdzie w_{hti} jest konsumpcją i -tego artykułu w h -tym gospodarstwie domowym w momencie t .

$$w_{hti} = \frac{p_{hti} q_{hti}}{y_{ht}}.$$

Teraz sprowadzamy układ równań popytu (9) do pojedynczego równania wektorowego:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n \end{bmatrix} \gamma - \begin{bmatrix} \beta_1 \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \beta_2 \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \beta_n \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix} \gamma + \epsilon, \quad (17)$$

gdzie $\mathbf{1}$ i $\mathbf{0}$ są HT -wymiarowymi wektorami kolumnowymi składającymi się odpowiednio z samych jedynek lub samych zer, β i γ są n -wymiarowymi wektorami nieznanymi parametrów, z_i są wektorami HT -wymiarowymi przeskalowanych

obserwacji cen, $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową $HT \times HT$ i $\mathbf{O}$ jest macierzą zerową $HT \times HT$; ϵ zaś jest wektorem nHT -wymiarowym składników losowych.

$$\mathbf{z}_i = (z_{1i} \quad \cdots \quad z_{1Ti} \quad z_{2i} \quad \cdots \quad z_{2Ti} \quad \cdots \quad z_{Hi} \quad \cdots \quad z_{HTi})', \text{ gdzie } z_{hti} = \frac{p_{hti}}{y_{ht}}.$$

Zanim przystąpimy do estymacji układu popytu (9) z danych empirycznych, musimy wziąć pod uwagę to, że jest ono uproszczeniem rzeczywistości, gdyż konsumpcja gospodarstwa domowego jest kompleksowym zjawiskiem i obok dochodów i cen w jej określaniu prawdopodobnie ważną rolę odgrywa wiele innych czynników: całkowity majątek, zapasy środków trwałych, poziom zobowiązań (długów), przeszłe i przyszłe oczekiwane dochody i pewne czynniki demograficzne. Jeśli takie zmienne są dostępne, wskazane jest dodanie ich do modelu, który przybierze postać:

$$\mathbf{w}_{ht} = \mathbf{z}_{ht} \odot \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta} \odot (1 - \boldsymbol{\gamma}' \mathbf{z}_{ht}) + \boldsymbol{\Theta} \mathbf{s}_{ht} + \epsilon_{ht}, \quad h = \overline{1, H}, \quad t = \overline{1, T}, \quad (18)$$

gdzie $\boldsymbol{\Theta}$ jest macierzą współczynników $n \times L$ spełniająca warunek $\boldsymbol{\Theta} \mathbf{1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{s}_{ht}$ reprezentuje L zmiennych ekonomicznych i demograficznych wpływających na konsumpcję i ϵ_{ht} jest składową losową. Wektory $\mathbf{w}_{ht}$, $\mathbf{z}_{ht}$ i $\mathbf{s}_{ht}$ przybierają postać

$$\mathbf{w}_{ht} = \begin{pmatrix} w_{ht1} \\ w_{ht2} \\ \vdots \\ w_{hti} \\ \vdots \\ w_{htn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}_{ht} = \begin{pmatrix} z_{ht1} \\ z_{ht2} \\ \vdots \\ z_{hti} \\ \vdots \\ z_{htn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_{ht} = \begin{pmatrix} s_{ht1} \\ s_{ht2} \\ \vdots \\ s_{hti} \\ \vdots \\ s_{htL} \end{pmatrix}.$$

Dla różnych H i T wyrażenie (18) można przedstawić w tej samej postaci co równanie wektorowe (17).

Przy standardowych założeniach klasycznej regresji liniowej związanych z wielowymiarowym rozkładem normalnym estymatory MNK współczynników są nieobciążone i efektywne pod warunkiem, że dysponujemy kompletem dostępnej informacji o modelu regresji. Jeśli pewne informacje o charakterystykach modelu nie zostały uwzględnione, to MNK może tracić swoje własności. Taka sytuacja powstaje w układzie popytowym (17), gdzie błędy losowe w równaniu popytu dla i -tego i j -tego artykułu są skorelowane.

Przy tych założeniach systemowa macierz kowariancji $\boldsymbol{\Omega}$ nie będzie diagonalna. W klasycznym modelu normalnej regresji liniowej przy powyższych założeniach estymatory MNK dla pojedynczego równania będą asymptotycznie nieobciążone, ale nieefektywne. W celu otrzymania estymatorów asymptotycznie efektywnych każde z n równań musi być estymowanych jednocześnie.

Można to zrealizować metodą estymacji SUR Zellnera (*seemingly unrelated regressions*), gdzie kowariancje są estymowane za pomocą MNK z kolejnych n reszt otrzymanych z oryginalnych równań układu. Estymatory MNK macierzy kowariancji są nieobciążone oraz zgodne i w kolejnym kroku będą użyte do estymacji macierzy kowariancji W dla całego układu n równań. Gdy W jest wyestymowane, może być użyte do reestymacji całego układu za pomocą GLS (uogólnionej MNK), co pozwala otrzymać efektywne estymatory dla parametrów modelu. Estymator ten nazywany jest dwuetapowym estymatorem Aitkena. Jest on asymptotycznie efektywny i ma asymptotycznie rozkład normalny. W małych próbach estymator Aitkena zalicza się do nieobciążonych i efektywnych w stosunku do estymatorów MNK [2].

Dostępne dane statystyczne są zwykle zagregowane i trudno jest o obserwacje dla każdej jednostki statystycznej wykorzystywane w podobnych badaniach. Jest to źródłem komplikacji w weryfikowaniu założeń teoretycznych nieliniowych modeli popytu w praktycznych zastosowaniach. Dostępne są np. informacje o wielkości gospodarstwa, ale nie o jego składzie.

Zauważmy, że porównywanie szeregów czasowych z danymi przekrojowymi musi być dokonywane z uwagą nie tylko z powodu nieuniknionych błędów próbkowania, ale także swoistej dynamiki obserwacji, będącej konsekwencją modyfikacji wprowadzanych do modelu z roku na rok. Jest to problem wspólny dla każdej analizy i niestety nieunikniony.

Literatura

- [1] Klein L.R., Rubin H., *A Constant Utility Index of the Cost of Living*, „Review of Economic Studies” nr 15, 1947-1948.
- [2] Michelini C. (2000), *The Analysis of Consumer Demand with Applications to Household Survey Data*, Collana Studi e Ricerche, Università Degli Studi Di Milano, Mediolan.
- [3] Ostoja-Ostaszewski A. (1996), *Matematyka w ekonomii. Modele i metody*, Wyd. Naukowe PWN. Warszawa.

THE ANALYSIS OF CONSUMER DEMAND

Summary

Theory of consumption tries to explain why consumers will divide their incomes on goods services which satisfy their needs. Satisfaction for all consumers is measured by utility function

$$U(q) = \beta' \log(q - \gamma)$$

and

$$y = Q'p,$$

where β, γ are some parameters and $\mathbf{q}$ is a vector of quantities consumed.

$$\mathbf{Q} = (q_1, \dots, q_k).$$

When we observe a $\mathbf{p}$ vector of prices and vector of consumers income or total expenditure, we can solve demand set equations numerically with SUR and GLS methods described in [2].