

Krzysztof Dmytrów, Sebastian Gnat

Uniwersytet Szczeciński

ZASTOSOWANIE METODY BOOTSTRAPOWEJ W MODELU $\langle Q, r \rangle$ Z PEŁNĄ INFORMACJĄ O KOSZTACH

1. Wstęp

W klasycznym modelu gospodarki zapasami typu $\langle Q, r \rangle$ jednym z najważniejszych problemów jest prawidłowe oszacowanie gęstości rozkładu zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw. Najlepszym rozwiązaniem byłoby dopasowanie do danych empirycznych konkretnego rozkładu (np. normalnego, gamma, logarytmiczno-normalnego itd.) za pomocą metod parametrycznych. Jest to podejście najczęściej spotykane w praktyce modelowania zapasów, jednakże nie zawsze jest ono możliwe. Jeżeli nie dysponujemy wystarczającą liczbą obserwacji bądź rozkład zapotrzebowania jest np. wielomodalny, to nie da się zastosować tych metod.

Wyjściem z takiej sytuacji jest zastosowanie metod nieparametrycznych, które na ogół dają gorsze wyniki w sensie optymalnych wielkości oczekiwanych łącznych kosztów gospodarki zapasami, jednakże można je zastosować nawet wtedy, gdy nie jesteśmy w stanie dopasować do danych żadnego rozkładu teoretycznego. Ogólnie można stosować następujące podejścia nieparametryczne:

1. Podejście typu *minmax*, zakładające niepełną informację o zapotrzebowaniu, zaproponowane przez Gallego.
2. Jądrowa estymacja funkcji gęstości rozkładu zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw.
3. Podejście empiryczne, zakładające wystarczająco dużą liczbę obserwacji.
4. Metoda bootstrapowa.

Podejście typu *minmax* zakłada, że znana jest jedynie wartość średnia oraz odchylenie standardowe zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw. Metoda ta zawyża (dla danego poziomu zmienności i dla danych parametrów) oczekiwane łączne koszty gospodarki zapasami w porównaniu z podejściem parametrycznym. Można ją stosować nawet wtedy, gdy mamy bardzo niewielką bazę danych dotyczącą zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw.

Druga z proponowanych metod pozwala na dopasowanie do danych empirycznych funkcji gęstości za pomocą estymacji jądrowej. Zaletą tej metody jest to, iż rozkład zapotrzebowania może mieć dowolny kształt, jej wadą zaś jest duża czasochłonność obliczeniowa (nawet na relatywnie szybkim sprzęcie komputerowym).

Podejście empiryczne polega na wyznaczeniu optymalnych wielkości zmiennych decyzyjnych wprost z danych rzeczywistych, co daje wynik najbliższy rzeczywistości. Jej wadą jest to, że powinniśmy dysponować dużą liczbą danych oraz to, że takie same, konkretne wielkości zapotrzebowania wcale nie muszą się powtórzyć w przyszłości – może wystąpić problem z ekstrapolacją otrzymanych wyników. Dlatego też wyniki uzyskane za pomocą tej metody mogą służyć jako punkt odniesienia do wyników uzyskanych innymi metodami.

Metoda bootstrapowa była do tej pory najrzadziej stosowana i (zgodnie z wiedzą autorów na ten temat) wykorzystano ją jedynie do wyznaczania optymalnej wielkości poziomu zamawiania w modelach z mieszaniną zaległych zamówień.

W niniejszym artykule autorzy podjęli próbę zastosowania podejścia bootstrapowego do modelu z pełną informacją o kosztach i ograniczeniach poziomu obsługi oraz porównania otrzymanych wyników z rezultatami otrzymanymi metodą parametryczną, z założeniem niepełnej informacji o zapotrzebowaniu oraz z podejściem empirycznym.

2. Oznaczenia i model

W artykule wykorzystano klasyczny model sterowania zapasami $\langle Q, r \rangle$ dla mieszaniny zaległych zamówień i utraconej sprzedaży. W modelu tym przyjęto następujące oznaczenia:

- A – koszt złożenia i realizacji pojedynczego zamówienia;
- π – jednostkowy koszt niedoboru;
- IC – jednostkowy koszt magazynowania;
- λ – roczne zapotrzebowanie na produkt;
- r – poziom zamawiania;
- $\bar{\eta}(r)$ – oczekiwana liczba niedoborów w jednym cyklu przy danym poziomie zamawiania r ;
- $f(x)$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw;
- $F(x)$ – dystrybuenta rozkładu zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw;
- μ – nadzieja matematyczna zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw;
- σ – odchylenie standardowe zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw;
- Q – wielkość zamówienia;
- ζ – frakcja odłożonego popytu w czasie występowania niedoborów.

Funkcja celu w modelu $\langle Q, r \rangle$ z mieszaniną zaległych zamówień i utraconej sprzedaży wygląda następująco (por. [Harriga, Ben-Daya 1999, s. 44]):

$$K(Q, r) = \frac{\lambda}{Q} A + IC \left(\frac{Q}{2} + r - \mu \right) + \left[IC(1 - \zeta) + \frac{\pi\lambda}{Q} \right] \bar{\eta}(r) \quad (1)$$

gdzie $0 \leq \zeta \leq 1$.

Jest to funkcja oczekiwanych, łącznych kosztów zamawiania, magazynowania i niedoborów w ciągu jednostkowego okresu, najczęściej roku.

Wielkość $\bar{\eta}(r)$ liczy się według wzoru (por. [Hadley, Whithin 1963, s. 166]):

$$\bar{\eta}(r) = \int_r^{\infty} (x - r) f(x) dx \quad (2)$$

Optymalne wielkości Q oraz r otrzymuje się poprzez obliczenie pierwszych pochodnych równania (1) według Q i r oraz przyrównanie ich do zera:

$$\frac{\partial K(Q, r)}{\partial Q} = \frac{\partial K(Q, r)}{\partial r} = 0.$$

W związku z powyższym, optymalna wielkość Q^* liczona jest według wzoru:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda[A + \pi\bar{\eta}(r^*)]}{IC}} \quad (3)$$

a optymalną wielkość r^* można wyliczyć następująco:

$$F(r^*) = \frac{\pi\lambda - ICQ\zeta}{\pi\lambda + ICQ(1 - \zeta)} \quad (4)$$

gdzie $F(r) = \int_0^r f(x) dx$.

Procedura numeryczna wyznaczania optymalnych wielkości Q^* i r^* jest następująca (por. [Hadley, Whithin 1963, s. 70]):

1. Używamy klasycznej optymalnej wielkości zamówienia wyznaczonej za pomocą wzoru Harrisa-Wilsona: $EOQ = \sqrt{\frac{2A\lambda}{IC}}$ jako Q_1 .

2. Podstawiamy wielkość Q_1 do wzoru (4) i wyznaczamy wielkość r_1 .

3. Wstawiamy wielkość r_1 do $\bar{\eta}(r)$ występującego we wzorze (3) i wyznaczamy wielkość Q_2 .

4. Wielkość Q_2 podstawiamy do (4) i wyznaczamy wielkość r_2 .

Powyższą procedurę powtarzamy tak długo, aż kolejne wielkości Q oraz r zbiegną się do optymalnych wielkości Q^* oraz r^* . W praktyce zbieżność taką uzyskuje się w bardzo niewielu krokach.

3. Założenie niepełnej informacji o zapotrzebowaniu

W podejściu *minmax* zakłada się, że dysponujemy jedynie informacją o wartości średniej i odchyleniu standardowym zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw. Przy założeniu niepełnej informacji o zapotrzebowaniu, wzór (2) przyjmie następującą postać (por. [Gallego 1992, s. 56]):

$$\bar{\eta}(r) = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \Delta^2} - \Delta}{2} \quad (5)$$

gdzie $\Delta = r - \mu$.

Podstawiając (5) do (1), uzyskamy:

$$K(Q, \Delta) = \frac{\lambda}{Q} A + IC \left(\frac{Q}{2} + \Delta \right) + \left[IC(1 - \zeta) + \frac{\pi\lambda}{Q} \right] \frac{\sqrt{\sigma^2 + \Delta^2} - \Delta}{2} \quad (6)$$

Znalezienie optymalnych wielkości Q^* oraz Δ^* polega na obliczeniu pierwszych pochodnych (6) względem Q i Δ . Odpowiednie warunki są następujące (por. [Gallego 1992, s. 56]):

$$\frac{\partial K(Q, \Delta)}{\partial Q} = 0,$$

$$\frac{\partial K(Q, \Delta)}{\partial \Delta} \geq 0.$$

W związku z powyższym optymalna wielkość Q będzie dana wzorem:

$$Q = \sqrt{\frac{\lambda [2A + \pi (\sqrt{\sigma^2 + \Delta^2} - \Delta)]}{IC}} \quad (7)$$

Natomiast drugi warunek jest równoważny z:

$$\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \sigma^2}} \geq 1 - \frac{2ICQ}{ICQ(1 - \zeta) + \pi\lambda}.$$

Powyższy warunek można przekształcić w celu otrzymania wielkości $\Delta \geq 0$. Wówczas uzyskamy:

$$\Delta = \frac{\sigma [\pi\lambda - ICQ(1 + \zeta)]}{2\sqrt{ICQ(\pi\lambda - ICQ\zeta)}} \quad (8)$$

Należy jednakże pamiętać, że warunek, z którego został wyznaczony wzór (8), jest nierównością, dlatego też otrzymane wielkości Δ trzeba traktować jako dolną granicę, minimalizującą łączne koszty.

4. Idea metody bootstrapowej

Za pomocą metody bootstrapowej można szacować parametry nieznanego rozkładu zmiennej losowej (opracowano na podstawie [Krysicki i in. 2000, s. 260-262]).

Zakłada się, że bada się populację ze względu na zmienną losową X o nieznanym rozkładzie F . Próba $x = X_1, X_2, \dots, X_n$ jest prostą próbą wylosowaną z tej zbiorowości, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest realizacją próby x .

Rozkład prawdopodobieństwa postaci:

$$P(X_B = x_k) = \frac{1}{n}, \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

nazywa się rozkładem bootstrapowym z próby i oznacza się go przez $\hat{F}$.

Próba bootstrapową nazywa się wektor losowy $x^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_m^*)$ taki, że X_k^* dla $k = 1, 2, \dots, m$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie (9), a m jest ustaloną liczbą naturalną. Realizację próby bootstrapowej oznacza się przez $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$.

Parametry nieznanego rozkładu zmiennej losowej można szacować, stosując estymację punktową lub przedziałową. W niniejszym przypadku ograniczono się do estymacji punktowej. Dokonano tego, stosując aproksymację Monte Carlo.

Jeżeli θ będzie szacowanym parametrem rozkładu zmiennej losowej X , to R jest estymatorem tego parametru. Ażeby wyznaczyć bootstrapową ocenę dla θ , generuje się N razy ($N \geq 1000$) wartości $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ według rozkładu (9), gdzie $x_1, x_2, \dots, x_n$ są wartościami zaobserwowanymi w próbie wylosowanej niezależnie z populacji. Dla każdego ciągu $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ wyznacza się wartość statystyki R^* i otrzymuje w ten sposób ciąg realizacji zmiennej losowej $R^* : r_1^*, r_2^*, \dots, r_N^*$. Za oszacowanie parametru θ przyjmuje się wartość daną następującym wzorem:

$$\bar{r}^* = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r_k^* \quad (10)$$

Metodę bootstrapową w szacowaniu optymalnej wielkości poziomu zamawiania po raz pierwszy zastosowali w 1989 r. J.H. Bookbinder oraz A.E. Lordahl (por. [Booklinder, Lordahl 1989]).

Optymalne wielkości zmiennych decyzyjnych za pomocą metody bootstrapowej oblicza się następująco:

1. Dla każdej próby bootstrapowej optymalne wielkości Q oraz r oblicza się według takiej samej procedury, jak w metodzie empirycznej.

2. W wyniku obliczeń otrzymujemy następujący zbiór optymalnych wartości $Q^* : Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_N^*$ oraz $r^* : r_1^*, r_2^*, \dots, r_N^*$.

3. Bootstrapowe oceny wartości Q oraz r liczy się według następujących wzorów:

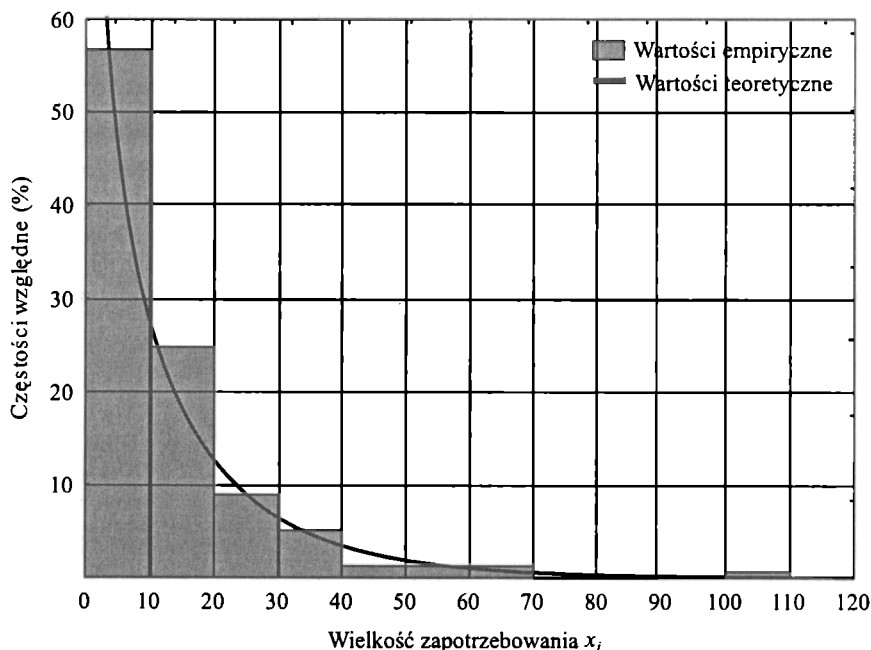
$$\bar{Q}^* = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Q_k^* \quad (11)$$

$$\bar{r}^* = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r_k^* \quad (12)$$

Optymalne wielkości $\bar{Q}^*$ i $\bar{r}^*$ są wówczas wstawione do wzoru (1) i oblicza się optymalną wartość $K\langle\bar{Q}^*, \bar{r}^*\rangle$.

5. Przykład numeryczny

W badaniu wykorzystano dane pochodzące z przedsiębiorstwa produkcyjnego. Dotyczą one trzech lat: 1999-2001. Rozkład zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw był skrajnie prawostronnie asymetryczny. Do danych dopasowano rozkład gamma (por. [Krysicki i in. 2000, s. 97-99]) o parametrach: parametr kształtu 0,630, parametr skali zaś 19,112. Rozkład badanych obserwacji i dopasowaną krzywą teoretyczną przedstawiano na rys. 1.



Rys. 1. Rozkład zapotrzebowania na badany materiał w okresie realizacji dostaw

Źródło: opracowanie własne.

Badany materiał charakteryzował się następującymi parametrami: $\lambda = 630$ jednostek, $A = 150$ zł, $IC = 10$ zł, $\pi = 40$ zł, $\tau = 1/53$ roku, $\lambda\tau = 12,091$ jednostek. W metodzie bootstrapowej dokonano $N = 1000$ próbkowań zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw.

Wyniki uzyskane za pomocą badanych czterech podejść przedstawiono w tab. 1.

Tabela 1. Optymalne wartości zmiennych decyzyjnych oraz kosztów uzyskane za pomocą badanych metod

ζ	0	0,25	0,5	0,75	1
Metoda parametryczna					
Q	154,77	155,03	155,30	155,57	155,86
r	40,10	39,83	39,55	39,26	38,97
$\bar{\eta}(r)$	1,003	1,019	1,035	1,052	1,070
$K(Q, r)$	1 837,77 zł	1 835,25 zł	1 832,68 zł	1 830,07 zł	1 827,42 zł
Metoda empiryczna					
Q	145,47	145,58	145,70	145,82	145,94
r	29,00	28,89	28,77	28,64	28,53
$\bar{\eta}(r)$	0,449	0,455	0,462	0,469	0,476
$K(Q, r)$	1 628,28 zł	1 627,20 zł	1 626,09 zł	1 624,94 zł	1 623,78 zł
Niepełna informacja o zapotrzebowaniu					
Q	169,67	168,94	168,24	167,55	166,89
Δ	27,17	27,97	28,77	29,58	30,40
r	39,27	40,06	40,86	41,67	42,49
$\bar{\eta}(r)$	1,962	1,913	1,866	1,820	1,776
$K(Q, \Delta)$	1 988,02 zł	1 983,41 zł	1 979,36 zł	1 975,87 zł	1 972,91 zł
Metoda bootstrapowa					
Q	167,96	168,33	168,71	169,10	169,71
r	34,72	34,47	34,21	33,95	33,67
$\bar{\eta}(r)$	1,877	1,901	1,927	1,953	1,994
$K(Q, r)$	2 006,60 zł	2 003,24 zł	1 999,85 zł	1 996,40 zł	1 994,75 zł

Źródło: opracowanie własne.

Jak widać z porównania otrzymanych wyników z wynikami dla podejścia empirycznego, najbliższy wynik dała metoda parametryczna – wygenerowała najniższe oczekiwane łączne koszty, najbliższe kosztom uzyskanym metodą empiryczną. Jest to potwierdzenie faktu, że metoda empiryczna (jeśli można ją zastosować) daje najlepsze wyniki.

Patrząc na wyniki uzyskane za pomocą pozostałych dwóch podejść nieparametrycznych, można stwierdzić, że są one znacznie gorsze od wyników uzyskanych dla metody parametrycznej. Podejście zakładające niepełną informację o zapotrzebowaniu wygenerowało oczekiwane łączne roczne koszty gospodarki zapasami

wyższe o około 8%, metoda bootstrapowa zaś – o ponad 9%. Metoda bootstrapowa dała wyniki nieco gorsze od podejścia zakładającego niepełną informację o zapotrzebowaniu, co mogłoby świadczyć o tym, że jest ona nieefektywna. Nie musi to jednak być prawda, ponieważ założenie niepełnej informacji o zapotrzebowaniu daje tym lepsze rezultaty, im mniejszy jest współczynnik zmienności rozkładu zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw oraz im mniejszy jest stosunek jednostkowych kosztów niedoboru π do kosztów złożenia zamówienia A . Przy większych wartościach tych wielkości sytuacja mogłaby być odwrotna.

6. Wnioski

Otrzymane wyniki stanowią potwierdzenie faktu, że metoda parametryczna daje lepsze wyniki od metod nieparametrycznych. Z dwóch porównywanych z sobą metod nieparametrycznych lepsze wyniki osiągnięto, stosując podejście zakładające niepełną informację o zapotrzebowaniu. Jednakże nie dyskwalifikuje to metody bootstrapowej, gdyż należałoby sprawdzić, jak podejście to będzie się sprawdzało w przypadku, gdy metoda *minmax* będzie dawała relatywnie gorsze wyniki (przy dużym współczynniku zmienności rozkładu zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw oraz dużym stosunku jednostkowych kosztów niedoboru π do kosztów złożenia zamówienia A).

Tak więc dalszym etapem badania przydatności metody bootstrapowej w gospodarowaniu zapasami będzie sprawdzenie jej dla większych wartości współczynnika zmienności rozkładu zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw oraz dużych wartościach stosunku jednostkowych kosztów niedoboru π do kosztów złożenia zamówienia A .

Dodatkowo zostaną poczynione próby przystosowania tego podejścia do modeli zapasów $\langle Q, r \rangle$ z ograniczeniami obsługi typu β oraz do modeli o okresowym przeglądzie zapasów $\langle R, T \rangle$.

Literatura

- Bookbinder J.H., Lordahl A.E., *Estimation of Inventory Re-order Levels Using the Bootstrap Statistical Procedure*, IIE Transactions 1989 vol. 21 nr 4, s. 302-312.
- Domański Cz., Pruska K., *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE, Warszawa 2000.
- Gallego G., *A Minimax Distribution Free Procedure for the $\langle Q, r \rangle$, Inventory Model*, „Operational Research Letters” 1992 vol. 11, s. 55-60.
- Hadley G., Whitin T.M., *Analysis of Inventory Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1963.
- Hariga M., Ben-Daya M., *Some Stochastic Inventory Models with Deterministic Variable Time*, „European Journal of Operational Research” 1999 vol. 113, s. 42-51.
- Krysicki W. i in., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach. Część I. Rachunek prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 2000.

APPLICATION OF BOOTSTRAP STATISTICAL PROCEDURE IN $\langle Q, R \rangle$ INVENTORY MODEL WITH FULL COST INFORMATION

Summary

Estimation of probability density distribution of lead-time demand is a very important part of inventory management. This can be done both by means of parametric or non-parametric methods. One of non-parametric methods is bootstrap statistical procedure. Up to this time it has been used only for inventory management models with service level constraints of alpha type. The goal of this article is a trial of application of this method in models with mixture of backorders and lost sales with full cost information and comparing it to other methods.