

Helena Jasiulewicz

ROZKŁADY FAZOWE I ICH ZASTOSOWANIE DO WYZNACZANIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA RUINY UBEZPIECZYCIELA

1. Procesy Markowa

Rozkłady fazowe (*phase-type distributions*) są związane z jednorodnymi procesami Markowa o skończonej liczbie stanów. Rozkłady te mają pożyteczną interpretację probabilistyczną i są wygodne w obliczeniach numerycznych. Ponadto dowolny rozkład na $\mathbb{R}_+$ można aproksymować rozkładami fazowymi. W artykule zostaną podane oznaczenia i własności procesów Markowa potrzebne do zdefiniowania tych rozkładów.

Niech $\{X(t), t \geq 0\}$ będzie jednorodnym procesem Markowa o skończonej przestrzeni stanów $E' = \{0, 1, 2, \dots, l\}$. Niech $p_{ij}(h) = \Pr(X(t+h) = j | X(t) = i)$, $i, j \in E'$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j w czasie o długości h . Niech $\alpha_i = \Pr(X(0) = i)$, $i \in E'$. Rozkład początkowy będziemy oznaczać przez wektor $\alpha' = [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_l]$. Jednorodny proces Markowa $X(t)$ jest jednoznacznie określony przez rozkład początkowy α' i macierz przejścia $P(h) = [p_{ij}(h)]$. Zamiast macierzy $P(h)$ można podać operator infinitesimalny (macierz intensywności) $Q = [q_{ij}]$, gdzie

$$q_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h) - \delta_{ij}}{h} = \left. \frac{d}{dh} p_{ij}(h) \right|_{h=0}$$

oraz

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j, \\ 0, & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Dla procesu Markowa o skończonej liczbie stanów intensywności przejścia q_{ij} istnieją i są skończone. Gdy $i = j$, wówczas zachodzi związek

$$q_{ij} = - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{ij}(h)}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{j \neq i} p_{ij}(h)}{h} = - \sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

Własności macierzy intensywności Q :

- 1) $q_{ij} \geq 0$ dla $i \neq j$,
- 2) $q_{ii} \leq 0$,
- 3) $Qe^T = 0^T$, tzn. wiersze sumują się do zera, gdzie $e = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ oraz $0 = [0 \ 0 \ \dots \ 0]$.

Niech I będzie macierzą jednostkową, $P'(h)$ – macierzą pochodnych funkcji przejścia,

$$P'(h) = \left[\frac{d}{dt} p_{ij}(h) \right]$$

oraz e^{hQ} – macierzą funkcji wykładniczych

$$e^{hQ} = I + \frac{hQ}{1!} + \frac{(hQ)^2}{2!} + \frac{(hQ)^3}{3!} + \dots$$

Po rozwiązaniu retrospektywnych równań Kołmogorowa $P'(h) = QP(h)$ z warunkami początkowymi $P(0) = I$ albo prospektywnych równań Kołmogorowa $P'(h) = P(h)Q$ z warunkami początkowymi $P(0) = I$ otrzymujemy $P(h) = e^{hQ}$.

Niech $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_l$ będą wartościami własnymi macierzy Q . Jeżeli wartości własne są różne, to reprezentacja spektralna macierzy Q^n ma postać:

$$Q^n = \sum_{i=1}^l \theta_i^n \Phi_i^T \Psi_i \quad (1)$$

gdzie Φ_i jest prawym wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej θ_i , tzn. $Q\Phi_i^T = \theta_i\Phi_i^T$, zaś Ψ_i jest lewym wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej θ_i , tzn. $\Psi_i Q = \theta_i \Psi_i$.

Korzystając z reprezentacji spektralnej (1) dla Q^n , macierz funkcji wykładniczych $P(h) = e^{hQ}$ można przedstawić w prostszej postaci:

$$P(h) = \sum_{i=0}^l e^{h\theta_i} \Phi_i^T \Psi_i.$$

Jeśli mamy rozkład początkowy i macierz intensywności, to możemy podać konstrukcję jednorodnego procesu Markowa ze skończoną przestrzenią stanów (zob. [3]).

2. Rozkład czasu absorpcji

Załóżmy, że stan 0 jest stanem pochłaniającym dla procesu $X(t)$ oraz żaden z pozostałych stanów $i \in E = \{1, 2, \dots, l\}$ nie jest stanem pochłaniającym. Ponieważ $p_{0j}(h) = 0$ dla $j = 1, 2, \dots, l$, $q_{0j} = p'_{0j}(0^+) = 0$. Zatem

$$q_{00} = -\sum_{j=1}^l q_{0j} = 0.$$

Wówczas macierz intensywności można przedstawić następująco:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1l} \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{l0} & q_{l1} & q_{l2} & \dots & q_{ll} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Macierz $\mathbf{Q}$ będziemy zapisywać w nieco innej postaci, wygodniejszej w dalszych rozważaniach. Oznaczmy $b_i = q_{i0}$, $b_{ij} = q_{ij}$ dla $i, j = 1, 2, \dots, l$ oraz wektor $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_l]$, natomiast macierz $\mathbf{B} = [b_{ij}]$. Wówczas

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_2 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_l & b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{ll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

gdzie $\mathbf{b}^T = -\mathbf{B}\mathbf{e}^T$ oraz $\mathbf{e} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$. Również rozkład początkowy α' procesu $X(t)$ będziemy przedstawiać w następujący sposób:

$$\alpha' = [\alpha_0 \ \underbrace{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_l}_{\alpha}] = [\alpha_0 \ \alpha]. \quad (4)$$

Ze wzorów (3) i (4) wynika, że proces $X(t)$ jest określony przez podanie wektora α i macierzy $\mathbf{B}$.

Czas osiągnięcia stanu pochłaniającego 0 przez proces $X(t)$ nazywamy czasem absorpcji albo czasem pochłonięcia i oznaczamy przez η , czyli

$$\eta = \inf\{t \geq 0: X(t) = 0\}.$$

Gdyby macierz $\mathbf{B}$ była macierzą intensywności, wówczas czas pochłonięcia η byłby nieskończony z prawdopodobieństwem 1, ponieważ proces $X(t)$ nigdy nie osiągnąłby stanu pochłaniającego 0, startując ze stanu należącego do $E = \{1, 2, \dots, l\}$. Z tego powodu będziemy zakładać, że macierz $\mathbf{B}$ jest macierzą podintensywności,

tzn. $b_{ij} \geq 0$ dla $i \neq j$, $b_{ii} \leq 0$, $\sum_{j=1}^l b_{ij} \leq 0$, gdzie przynajmniej dla jednego stanu $i \in E$

zachodzi $\sum_{j=1}^l b_{ij} < 0$. Konsekwencją tego jest, że wektor $\mathbf{b}$ ma współrzędne nieujemne i co najmniej jedną współrzędną dodatnią.

Definicja

Rozkład zmiennej losowej η nazywa się rozkładem fazowym, charakteryzowanym przez dwa parametry $(\alpha, \mathbf{B})$. Oznaczamy go przez $PH(\alpha, \mathbf{B})$.

Twierdzenie 1

Dla każdego $t \geq 0$ rozkład fazowy $PH(\alpha, \mathbf{B})$ czasu absorpcji η wyraża się wzorem

$$1 - F(t) = \Pr(\eta > t) = \alpha e^{t\mathbf{B}} \mathbf{e}^T. \quad (5)$$

Ponieważ

$$\Pr(\eta = 0) = \Pr(\inf\{t \geq 0: X(t) = 0\} = 0) = \Pr(X(0) = 0) = \alpha_0,$$

dystrybuanta $F(t)$ ma skok w $t = 0$ wielkości α_0 . Również należy zaznaczyć, że z dodatnim prawdopodobieństwem proces $X(t)$ może nigdy nie osiągnąć stanu pochłaniającego 0. Twierdzenie 2 podaje warunek konieczny i dostateczny na skończoność czasu absorpcji η .

Twierdzenie 2

Czas absorpcji η jest skończony z prawdopodobieństwem 1, dla każdego rozkładu α (być może ułomnego, tzn. $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l < 1$) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz podintensywności $\mathbf{B}$ jest nieosobliwa.

Twierdzenie 3

Niech $\mathbf{B}$ będzie nieosobliwą macierzą podintensywności oraz $\alpha_0 = 0$. Jeżeli czas absorpcji η ma dystrybuentę F typu fazowego $PH(\alpha, \mathbf{B})$, to F jest ciągła oraz

a) gęstość jest postaci:

$$F'(t) = f(t) = \alpha e^{t\mathbf{B}} \mathbf{b}^T,$$

b) transformata Laplace'a gęstości jest postaci:

$$\hat{l}(s) = \alpha(s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \mathbf{b}^T,$$

c) n -ty momenty zwykły jest skończony oraz

$$m_n = (-1)^n n! (\alpha \mathbf{B}^{-n} \mathbf{e}^T), \quad n \geq 1.$$

Przykład 1

Jeżeli przestrzeń stanów $E' = \{0, 1\}$, rozkład początkowy $\alpha' = (0, 1)$ oraz $\mathbf{B}$ ma wymiar 1×1 , $\mathbf{B} = [-\lambda]$, gdzie $\lambda > 0$, to rozkład fazowy $PH(\alpha, \mathbf{B})$ jest rozkładem wykładniczym z parametrem λ .

Przykład 2

Jeżeli $l \geq 1$, $\alpha = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ oraz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_l \end{bmatrix},$$

to rozkład fazowy $PH(\alpha, \mathbf{B})$ jest rozkładem Erlanga z parametrem $\lambda > 0$ i l stopniami swobody. Gęstość tego rozkładu dla $t > 0$ jest postaci:

$$f(t) = \frac{\lambda^l t^{l-1} e^{-\lambda t}}{(l-1)!}.$$

Rozkład Erlanga jest szczególnym przypadkiem rozkładu gamma.

Przykład 3

Niech $l \geq 1$, $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_l]$ będzie niezdegenerowanym rozkładem na zbiorze $\{1, 2, \dots, l\}$, tzn. istnieje α_i takie, że $0 < \alpha_i < 1$ oraz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_l \end{bmatrix},$$

gdzie $\lambda_i > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, l$. Wówczas rozkład fazowy $PH(\alpha, \mathbf{B})$ jest mieszkanką rozkładów wykładniczych, tzn. jego gęstość jest postaci

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \alpha_k \lambda_k e^{-\lambda_k t}.$$

Dyskretne rozkłady fazowe określa się analogicznie. Zamiast jednorodnego procesu Markowa rozważa się jednorodny łańcuch Markowa (zob. [2]).

3. Operacje na rozkładach fazowych

Przestrzeń stanów E' procesu $X(t)$ będziemy zapisywać w postaci sumy $E' = \{0\} \cup E$, gdzie $E = \{1, 2, \dots, l\}$. W tym rozdziale wygodnie będzie zaznaczyć w oznaczeniu rozkładu fazowego również zbiór stanów niepochłaniających E procesu $X(t)$, czyli zamiast $PH(\alpha, \mathbf{B})$ będziemy stosować zapis $PH(\alpha, \mathbf{B}, E)$. Również zakładamy, że wszystkie występujące macierze podintensywności są nieosobliwe. Rozważmy dwa rozkłady fazowe $PH(\alpha^{(i)}, \mathbf{B}_i, E_i)$, $i = 1, 2$, gdzie $E_1 = \{1, 2, \dots, l_1\}$, $E_2 = \{l_1 + 1, l_1 + 2, \dots, l_1 + l_2\}$. Współrzedną β_i wektora β będziemy oznaczać przez $(\beta)_i$.

Twierdzenie 4

Splot rozkładów fazowych $PH(\alpha^{(1)}, \mathbf{B}_1, E_1)$ i $PH(\alpha^{(2)}, \mathbf{B}_2, E_2)$ jest rozkładem fazowym $PH(\alpha, \mathbf{B}, E)$, gdzie $E = E_1 \cup E_2$,

$$(\alpha)_i = \alpha_i = \begin{cases} (\alpha^{(1)})_i, & \text{gdy } i \in E_1, \\ (\alpha^{(1)})_0 (\alpha^{(2)})_i, & \text{gdy } i \in E_2, \end{cases}$$

oraz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{b}_1^T \alpha^{(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{b}_k^T = -\mathbf{B}_k \mathbf{e}^T$ dla $k = 1, 2$.

Twierdzenie 4 można uogólnić na splot skończonej liczby rozkładów fazowych.

Twierdzenie 5

Splot n rozkładów fazowych $PH(\alpha^{(1)}, \mathbf{B}_1, E_1)$, $PH(\alpha^{(2)}, \mathbf{B}_2, E_2)$, ..., $PH(\alpha^{(n)}, \mathbf{B}_n, E_n)$ jest rozkładem fazowym $PH(\alpha, \mathbf{B}, E)$, gdzie

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i,$$

$$(\alpha)_i = \begin{cases} (\alpha^{(1)})_i, & \text{gdy } i \in E_1, \\ \prod_{j=1}^{k-1} (\alpha^{(j)})_0 (\alpha^{(k)})_i, & \text{gdy } i \in E_k, k = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

oraz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{b}_1^T \alpha^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{b}_2^T \alpha^{(3)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{b}_{n-1}^T \alpha^{(n)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{B}_n \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 6

Niech $0 < p < 1$. Mieszanaka dwóch rozkładów fazowych

$$pPH(\alpha^{(1)}, \mathbf{B}_1, E_1) + (1-p)PH(\alpha^{(2)}, \mathbf{B}_2, E_2)$$

jest rozkładem fazowym $PH(\alpha, \mathbf{B}, E)$, gdzie $E = E_1 \cup E_2$,

$$(\alpha)_i = \begin{cases} p(\alpha^{(1)})_i, & \text{gdy } i \in E_1, \\ (1-p)(\alpha^{(2)})_i, & \text{gdy } i \in E_2 \end{cases}$$

oraz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 6 można uogólnić na $n \geq 2$ mieszanek rozkładów fazowych.

Twierdzenie 7

Niech $p_1, p_2, \dots, p_n$ będzie rozkładem prawdopodobieństwa. Wówczas mieszanaka n rozkładów fazowych

$$\sum_{k=1}^n p_k PH(\alpha^{(k)}, \mathbf{B}_k, E_k)$$

ma rozkład fazowy $PH(\alpha, \mathbf{B}, E)$, gdzie $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$, $(\alpha)_i = p_k (\alpha^{(k)})_i$

dla $i \in E_k, k = 1, 2, \dots, n$ oraz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_n \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 8

Niech zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ będą niezależne o jednakowym rozkładzie fazowym $PH(\alpha, \mathbf{B})$, a zmienna losowa K ma rozkład geometryczny $p_k = \Pr(K=k) = p^k(1-p)$, $k=1,2,\dots$. Jeżeli $K, X_1, X_2, \dots$ są niezależne, to zmienna losowa $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_K$ ma rozkład fazowy $PH(p\alpha, \mathbf{B} + p\mathbf{b}^T\alpha)$, gdzie $\mathbf{b}^T = -\mathbf{B}\mathbf{e}^T$.

Twierdzenie 9

Niech nieujemna zmienna losowa X ma dystrybuantę $F(x)$ oraz wartość oczekiwaną μ . Niech $F^s(t)$ będzie dystrybuantą określoną wzorem

$$F^s(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F(x)) dx.$$

Jeżeli F jest dystrybuantą rozkładu fazowego $PH(\alpha, \mathbf{B})$, przy czym $(\alpha)_1 + (\alpha)_2 + \dots + (\alpha)_l = 1$, to F^s jest dystrybuantą rozkładu fazowego $PH(\alpha^s, \mathbf{B})$, gdzie $\alpha^s = -\mu^{-1}\alpha\mathbf{B}^{-1}$.

Twierdzenie 10

Rodzina rozkładów fazowych jest gęsta w zbiorze wszystkich rozkładów na $\mathbb{R}_+$, tzn. dla każdej dystrybuanty F zmiennej losowej nieujemnej, istnieje ciąg dystrybuant F_n rozkładów fazowych takich, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

w każdym punkcie ciągłości dystrybuanty F .

Z twierdzenia 10 wynika, że rozkłady na $\mathbb{R}_+$ można aproksymować rozkładami fazowymi.

4. Zastosowania w ubezpieczeniach

4.1. Proces nadwyżki finansowej

Rozkłady fazowe wykorzystuje się w ubezpieczeniach przede wszystkim do wyznaczenia prawdopodobieństwa ruiny. Wprowadzimy teraz opis modelu ubezpieczeń, w którym będziemy rozważać ten problem.

Niech $\{N(t), t \geq 0\}$ oznacza liczbę wypłat w portfelu w okresie $(0, t]$ oraz niech $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ oznaczają momenty zgłoszeń wypłat generowanych przez proces $\{N(t), t \geq 0\}$. Zakładamy, że $\Pr(N(0) = 0) = 1$. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą wielkościami kolejnych wypłat w portfelu w rozważanym okresie. Zakładamy, że

1. Proces stochastyczny $\{N(t), t \geq 0\}$ jest procesem punktowym.
2. Wielkości kolejnych wypłat $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowej dystrybucji F_X , średniej μ i wariancji σ^2 .
3. Liczba wypłat $N(t)$ oraz wielkości wypłat $X_1, X_2, \dots$ są niezależne.

Całkowitą wypłatę w portfelu w okresie $(0, t]$ określamy następująco:

$$S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)} \quad (6)$$

oraz $S(t) = 0$, gdy $N(t) = 0$. Wzór (6) opisuje model ryzyka kolektywnego.

Zmienną losową $S(t)$ nazywa się zmienną losową złożoną, a jej rozkład -- rozkładem złożonym, określonym przez parę rozkładów $(\{p_k\}, F_X)$, gdzie $p_k = \Pr(N(t) = k)$. Najczęściej stosowanym procesem punktowym $N(t)$ jest proces Poissona z intensywnością λ . W tym przypadku rozkład zmiennej $S(t)$ nazywa się złożonym rozkładem Poissona i oznacza się go przez $CP(\lambda, F_X)$.

Definicja

Niech $c > 0$. Dla $u > 0$ i wszystkich $t \geq 0$ proces określony wzorem

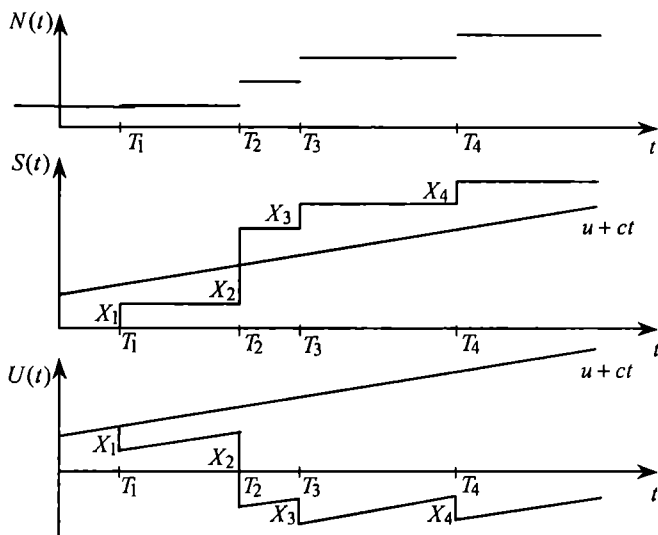
$$U(t) = u + ct - S(t)$$

nazywamy procesem nadwyżki finansowej albo procesem ryzyka.

Interpretacja:

- c jest intensywnością napływu składki tak, że ct jest osiągniętym dochodem ze składki do chwili t ,
- u jest kapitałem początkowym,
- $\{U(t), t \geq 0\}$ jest generowany przez proces liczby wypłat, intensywność składki i kapitał początkowy.

Model nadwyżki finansowej opisany powyżej jest bardzo prostym i wyidealizowanym modelem, aby zachować prostotę matematyczną. Nie powinien on być postrzegany jako absolutnie realistyczny model, raczej jako ważna informacja o ry-

Rys. 1. Procesy generowane przez $N(t)$

Źródło: opracowanie własne.

zyku finansowym związanym z portfelem. Te informacje są niezwykle przydatne w długoterminowym planowaniu i dla zachowania wypłacalności ubezpieczyciela. Realistyczny model nadwyżki finansowej ubezpieczyciela musi uwzględniać dochód z inwestycji, koszty i inne pozycje wpływające na przepływ gotówki w firmie ubezpieczeniowej. Prawdopodobieństwo przetrwania firmy ubezpieczeniowej można określić przez prawdopodobieństwo ruiny.

Niech

$$T = \inf\{t \geq 0: U(t) < 0\}. \quad (7)$$

Jeżeli $T = \infty$, to $U(t) > 0$ dla $t \geq 0$. Zmienna losowa T oznacza moment ruiny.

Na rysunku 1 moment ruiny $T = T_2$. W przypadku czasu ciągłego prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym określane jest przez

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty | U(0) = u) = \Pr(U(t) < 0 \text{ dla pewnego } t \geq 0 | U(0) = u),$$

w horyzoncie czasowym skończonym zaś przez

$$\psi(u, \tau) = \Pr(T < \tau | U(0) = u) = \Pr(U(t) < 0 \text{ dla pewnego } t \leq \tau | U(0) = u).$$

Oczywiście,

$$\psi(u) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \psi(u, \tau).$$

Czasami wygodnie jest rozważać funkcję przeżycia $\phi(u) = 1 - \psi(u)$.

Prawdopodobieństwo ruiny będzie rozpatrywane przy następujących założeniach.

Założenie 1: Proces $N(t)$ jest jednorodnym procesem Poissona z parametrem λ .

Założenie 2: Szybkość napływu składki $c > \lambda\mu$, gdzie $\mu = EX_i$.

Gdy $c \leq \lambda\mu$, to

$$EU(t) = u + ct - ct\lambda\mu = u + t(c - \lambda\mu) \leq 0$$

dla dostatecznie dużego t . Zatem z prawdopodobieństwem 1 ruina nastąpi w skończonym czasie. Założenie 2 można zapisać następująco: $c = (1 + \theta)\lambda\mu$, gdzie $\theta > 0$. Parametr θ nazywany jest względnym współczynnikiem bezpieczeństwa albo współczynnikiem narzutu na bezpieczeństwo.

4.2. Maksymalna zagregowana wypłata

Niech $S(t)$ ma złożony rozkład Poissona $CP(\lambda, F_X)$ oraz szybkość napływu składki jest stała w jednostce czasu i wynosi $c = (1 + \theta)\lambda\mu$. Określimy maksymalną zagregowaną wypłatę L w następujący sposób:

$$L = \max_{t \geq 0} (S(t) - ct). \quad (8)$$

Zmienna losowa L jest nieujemna z prawdopodobieństwem 1, ponieważ $S(t) - ct = 0$ dla $t = 0$.

Podany zostanie związek między rozkładem zmiennej losowej L a prawdopodobieństwem ruiny. Najniższy poziom procesu $U(t)$ będzie równy $u - L$, gdzie u jest kapitałem początkowym. Jeżeli $u - L \geq 0$, to ruiny nie będzie. Zatem

$$1 - \psi(u) = \varphi(u) = \Pr(L \leq u), \quad u > 0. \quad (9)$$

W szczególności

$$1 - \psi(0) = \Pr(L \leq 0) = \Pr(L = 0) = \Pr(S(t) \leq ct \text{ dla każdego } t \leq 0).$$

Ponieważ $\psi(0) = 1/(1 + \theta)$ jest z przedziału $(0, 1)$, zmienna losowa L ma atom w zerze. Rozkład zmiennej losowej L znajdziemy, wykorzystując stacjonarność i niezależność przyrostów procesu $S(t)$ spowodowane niezależnością i stacjonarnością przyrostów procesu Poissona $N(t)$. Jeżeli proces $U(t)$ startuje z kapitału początkowego u , to prawdopodobieństwo, że $U(t)$ spadnie poniżej poziomu u , będzie takie samo, jak prawdopodobieństwo, że $U(t)$ spadnie poniżej zera, gdy startuje z zerowego kapitału początkowego i to prawdopodobieństwo wynosi $\psi(t)$. Wynika to ze stacjonarności i niezależności przyrostów procesu $U(t)$. Niech zmienna losowa L_1 oznacza wielkość, o jaką spadnie po raz pierwszy proces $U(t)$ poniżej kapitału początkowego u .

Twierdzenie 11

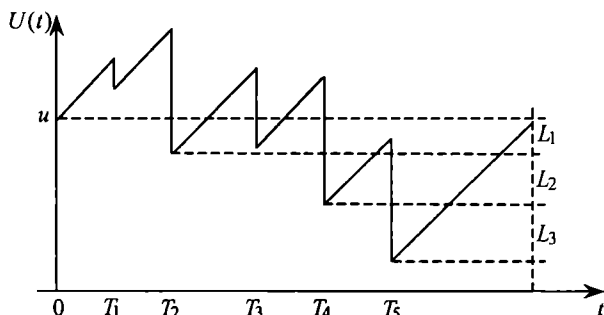
Jeżeli są spełnione założenia 1 i 2, to dystrybuita zmiennej losowej L_1 wyraża się wzorem:

$$F_{L_1}(y) = \frac{1}{\mu} \int_0^y (1 - F_X(x)) dx, \quad (10)$$

zaś jej gęstość wzorem:

$$f_{L_1}(y) = \frac{1 - F_X(y)}{\mu}, \quad (11)$$

dla $y \geq 0$, gdzie $F_X(x)$ jest dystrybuitą wielkości wypłaty X_i . Dowód tego twierdzenia można znaleźć w [1].



Rys. 2. Maksymalna zagregowana wypłata

Źródło: opracowanie własne.

Jeżeli proces $U(t)$ po raz pierwszy spadnie poniżej wartości początkowej u o wielkość y , to natychmiast po spadku proces $U(t)$ ma wartość $u - y$, po czym zaczyna rosnąć. Wartość $u - y$ nazywamy pierwszą wartością rekordową. Na rysunku 2 pierwszą wartością rekordową jest $U(T_2) = u - L_1$. Jeżeli $u - y > 0$, to prawdopodobieństwo ruiny wynosi $\psi(u - y)$. Wynika to ze stacjonarności i niezależności procesu $U(t)$. Jeżeli $u - y \leq 0$, to ruina zdarzy się w momencie pierwszego spadku poniżej u . Z powodu braku pamięci procesu Poissona proces $N(t)$ startuje od nowa po każdym spadku. Jeżeli $u - y > 0$, to prawdopodobieństwo pierwszego spadku procesu $U(t)$ poniżej $u - y$ wynosi $\psi(0)$, a wielkość spadku L_2 jest niezależna od L_1 i ma gęstość jak L_1 . Wartość $u - y - L_2$ nazywa się drugą wartością rekordową. Na rysunku 2 jest to $U(T_4) = u - L_1 - L_2$. Kontynuując to rozumowanie otrzymujemy ciąg zmiennych losowych niezależnych $L_1, L_2, \dots$ o jednakowym rozkładzie danym wzorem (10).

Jeżeli K oznacza całkowitą liczbę wartości rekordowych, to jej rozkład jest geometryczny i wyraża się wzorem:

$$\Pr(K = k) = (\psi(0))^k (1 - \psi(0)), \quad (12)$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$

Zdarzenie $\{K = 0\}$ zajdzie wtedy, gdy proces $U(t)$ nigdy nie spadnie poniżej u , a to zachodzi z prawdopodobieństwem $1 - \psi(0)$. Zdarzenie $\{K = 1\}$ zajdzie wtedy, gdy proces $U(t)$ spadnie tylko jeden raz poniżej u , osiągając pierwszą wartość drabinową równą $u - L_1$ i nigdy więcej $U(t)$ nie osiągnie wartości mniejszej od $u - L_1$. Prawdopodobieństwo tego wynosi $\psi(0)(1 - \psi(0))$. Jeżeli $K = 2$, to $U(t)$ osiąga tylko dwie wartości drabinowe. Pierwszą wartość drabinową osiąga z prawdopodobieństwem $\psi(0)$, drugą wartość drabinową osiąga z takim samym prawdopodobieństwem co pierwszą, a prawdopodobieństwo tego, że już jej nigdy więcej nie osiągnie, wynosi $1 - \psi(0)$. Jeśli skorzystamy z niezależności i stacjonarności przyrostów procesu $U(t)$, to otrzymujemy:

$$\Pr(K = 2) = (\psi(0))^2 (1 - \psi(0)).$$

Analogicznie można uzasadnić wzór (12) dla dowolnych k .

Maksymalną zagregowaną wypłatę L można przedstawić w następujący sposób:

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_K,$$

jeśli $K > 0$ oraz $L = 0$, jeśli $K = 0$. Zmienne losowe $L_1, L_2, \dots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie oraz są niezależne od K . Zatem rozkład zmiennej losowej L jest złożonym rozkładem geometrycznym określonym przez parę rozkładów $p_k = \Pr(K = k)$ oraz F_{L_1} . Po skorzystaniu ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, prawdopodobieństwo, że ruiny nie będzie, można zapisać wzorem:

$$\varphi(u) = \Pr(L \leq u) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(K = k) \Pr(L_1 + L_2 + \dots + L_k \leq u | K = k).$$

Stąd

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{\theta}{1 + \theta} \right)^k F_{L_1}^{*k}(u), \quad u \geq 0, \quad (13)$$

gdzie

$$F_{L_1}^{*0}(y) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } y < 0, \\ 1, & \text{jeżeli } y \geq 0, \end{cases}$$

a $F_{L_1}^{*k}$ jest k -tą potęgą splotową rozkładu F_{L_1} . Wzór (13) został wyprowadzony w złożonym modelu Poissona, w którym wielkość pojedynczej wypłaty może mieć rozkład o zarówno lekkich, jak i o ciężkich ogonach. Jednakże zastosowanie tego wzoru do wyznaczenia prawdopodobieństwa ruiny nie jest proste, nawet w obliczeniach numerycznych.

Prawdopodobieństwo ruiny dane wzorem (13) będzie przedstawione dla wielkości wypłat o rozkładzie fazowym. Niech $p = 1/(1 + \theta)$,

$$F_{L_1}(u) = F^s(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^u (1 - F(x)) dx.$$

Twierdzenie 12

Jeżeli wielkość wypłaty X_i ma rozkład fazowy $PH(\alpha, \mathbf{B})$, gdzie $\alpha_0 = 0$ oraz $\mathbf{B}$ jest nieosobliwą macierzą podintensywności, to prawdopodobieństwo ruiny

$$\Psi(u) = p\alpha^s \exp(u(\mathbf{B} + p\mathbf{b}^T\alpha^s))\mathbf{e}^T, \quad (14)$$

dla $u \geq 0$, gdzie $\alpha^s = \mu^{-1}\alpha\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{b}^T = -\mathbf{B}\mathbf{e}^T$. Twierdzenie 12 wynika z natychmiast z twierdzeń 5, 8 i 9.

Niech zmienna losowa Y oznacza wielkość deficytu w momencie ruiny, czyli $Y = -U(T) = L - u$. Rozważmy wielowymiarową funkcję ruiny $\Psi(u, y)$ uwzględniającą wielkość deficytu w momencie ruiny, tzn.

$$\Psi(u, y) = \Pr(T < \infty, Y > y | U(0) = u)$$

dla $u, y > 0$. Funkcja $\Psi(u, y)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że ruina zdarzy się w skończonym czasie i w momencie ruiny niedobór finansowy będzie większy od y , gdy kapitał początkowy wynosi u .

Twierdzenie 13

Niech wielkość wypłaty X_i ma rozkład fazowy $PH(\alpha, \mathbf{B})$, gdzie $\alpha_0 = 0$ i macierz podintensywności $\mathbf{B}$ jest nieosobliwa. Wówczas dla każdego $u, y > 0$

$$\begin{aligned} \Psi(u, y) = \frac{p}{1-p} & \left((\alpha^s \exp(y\mathbf{B}), 0) \exp \left(u \begin{bmatrix} \mathbf{B} & p\mathbf{b}^T\alpha^s \\ 0 & \mathbf{B} + p\mathbf{b}^T\alpha^s \end{bmatrix} \right) \mathbf{e}^T - \right. \\ & \left. - p\alpha^s \exp(u(\mathbf{B} + p\mathbf{b}^T\alpha^s))\mathbf{e}^T \right). \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie $p = 1/(1 + \theta)$, $\alpha^s = \mu^{-1}\alpha\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{b}^T = -\mathbf{B}\mathbf{e}^T$.

Wzory (14) i (15) są dogodne do obliczeń numerycznych, ponieważ istnieją programy, w których działania na macierzach są efektywnie zaimplementowane.

Literatura

- [1] Jasiulewicz H., *Proces nadwyżki finansowej*, [w:] *Modele aktuarialne*, red. W. Ostasiewicz, AE, Wrocław 2000.
- [2] Neuts M.F., *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*, Johns Hopkins University Press, Baltimore 1981.
- [3] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, Chichester 1998.

PHASE-TYPE DISTRIBUTIONS AND THEIR APPLICATION TO CALCULATING THE INSURER'S RUIN PROBABILITY

Summary

In the paper the phase-type distributions were defined by Markov processes. The properties of the distributions and convolutions and mixtures of those distributions were discussed. Applications to determine ruin probability were given.

Dr Helena Jasiulewicz jest pracownikiem Instytutu Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej.