

Cyprian Kozyra

KONSTRUKCJA I ZASTOSOWANIA WYKRESU TRÓJKĄTNEGO

1. Wstęp

Wykres trójkątny (*ternary graph*) znajduje zastosowania w licznych działach nauki – kartografii, geologii, a także ekonomii (por. [2, s. 71-73]). W różnych dziedzinach wiedzy wykres ten nosi różne nazwy, m.in. nazywany jest trójkątem Ossana (por. [3, s. 79]). Podstawowym zastosowaniem tego wykresu jest graficzna prezentacja udziału trzech kategorii w pewnej wielkości, przy czym udziały te muszą sumować się do stałej (zazwyczaj stała jest równa jedności, czyli 100%). Przykładem takich zastosowań może być przedstawienie udziału trzech sektorów gospodarki – usług, przemysłu i rolnictwa – w wielkościach makroekonomicznych bądź udziału trzech grup ludności – w wieku przedprodukcyjnym, produkcyjnym i poprodukcyjnym – w ogóle społeczeństwa. Wykres trójkątny nie jest dostępny w standardowych arkuszach kalkulacyjnych oraz w większości pakietów statystycznych. Nie jest również omawiany w wielu podręcznikach statystycznej analizy danych, które prezentują wiele wykresów wykorzystywanych w analizie wielowymiarowej (np. [5]). Można go jednak utworzyć, korzystając z pakietu *Statistica* lub za pomocą specjalnych programów przeznaczonych do tworzenia wykresów trójkątnych, w tym darmowych, które można ściągnąć z Internetu (np. biblioteka procedur *ade4* w systemie statystycznym *R*). Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie matematycznych podstaw konstrukcji wykresu trójkątnego i podanie wzorów do wykorzystania w standardowym arkuszu kalkulacyjnym, jakim jest np. *MS Excel* (wszystkie wykresy utworzono za pomocą tego programu), a także ilustracja zastosowań tego wykresu w badaniach ekonomicznych.

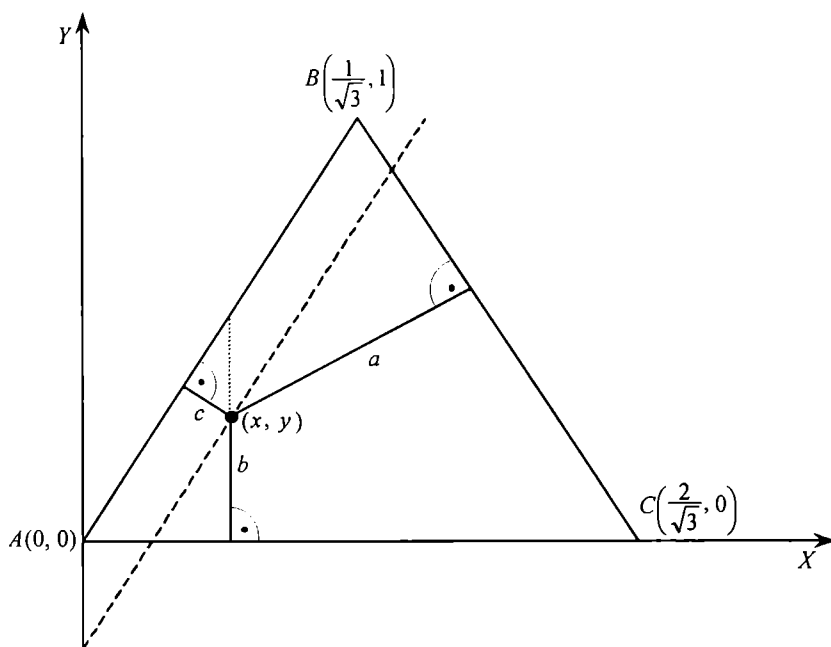
2. Współrzędne punktów na wykresie trójkątnym

W pracy W. Ostasiewicza (por. [2, s. 71-73]) punkt na wykresie trójkątnym otrzymuje się jako punkt w trójwymiarowej przestrzeni na powierzchni simpleksu spełniającego relację

$$a + b + c = 1, \quad (1)$$

gdzie a , b i c są udziałami trzech kategorii odkładanymi na trzech osiach układu współrzędnych. Następnie poprzez obrót simpleksu przechodzi się do przestrzeni dwuwymiarowej, jednak wzory służące do znalezienia współrzędnych punktu na tak otrzymanym wykresie są dość skomplikowane. Znacznie prościej można otrzymać współrzędne punktów w przestrzeni dwuwymiarowej, korzystając z następującej własności: suma odległości dowolnego punktu należącego do trójkąta równobocznego od boków tego trójkąta jest równa wysokości trójkąta. Dowód tej własności przedstawiono na rys. 1.

Na rysunku 1 przedstawiono trójkąt równoboczny wyznaczony przez trzy wierzchołki: $A(a = 1, b = 0, c = 0)$, $B(a = 0, b = 1, c = 0)$ i $C(a = 0, b = 0, c = 1)$, dla których udział jednej kategorii w ogóle wielkości wynosi 100%. Otrzymany trójkąt równoboczny ma wysokość równą 1, a bok trójkąta ma długość równą $2/\sqrt{3}$.



Rys. 1. Punkt na wykresie trójkątnym

Zgodnie z twierdzeniami geometrii analitycznej (por. [1, s. 166]) odległość punktu (x_p, y_p) od prostej $Ax + By + C = 0$ wynosi

$$d = \frac{|Ax_p + By_p + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2)$$

Boki trójkąta na rys. 1 leżą na trzech prostych o parametrach:

$$1) A_1 = \sqrt{3}, B_1 = 1, C_1 = -2,$$

$$2) A_2 = 0, B_2 = 1, C_2 = 0,$$

$$3) A_3 = -\sqrt{3}, B_3 = 1, C_3 = 0.$$

Zgodnie ze wzorem (2) suma odległości punktu należącego do trójkąta od trzech boków wynosi

$$a + b + c = \frac{|\sqrt{3}x + y - 2|}{2} + \frac{|y|}{1} + \frac{|-\sqrt{3}x + y|}{2} = \frac{-\sqrt{3}x - y + 2 + 2y + \sqrt{3}x - y}{2} = 1. \quad (3)$$

Wartości bezwzględne w równaniu (3) opuszczono zgodnie z warunkami

$$\begin{cases} y \leq -\sqrt{3}x + 2, \\ y \geq 0, \\ y \leq \sqrt{3}x, \end{cases}$$

które są spełnione przez punkty należące do trójkąta. Przemnażając współrzędne wierzchołków trójkąta przez dowolną stałą $s > 0$, można otrzymać trójkąt równoboczny o wysokości równej s . Po przemnożeniu odległości a, b i c również zmienia się s -krotnie i suma odległości wynosić będzie s , zatem równanie (3) kończy dowód.

Po udowodnieniu własności trójkąta równobocznego należy obliczyć wartości współrzędnych punktów danych. Przyjmujemy, że dla dowolnego punktu należącego do trójkąta udział kategorii w ogóle wielkości jest równy odległości tego punktu od boku leżącego naprzeciwko wierzchołka wyrażającego stuprocentowy udział danej kategorii. Tak wykreślone udziały a, b i c spełniają oczywiście relację (1) na mocy udowodnionej wyżej własności.

Współrzędne dowolnego punktu (x, y) , należącego do trójkąta na rys. 1, są następujące:

$$y = b, \quad (4)$$

natomiast współrzędną x wyznaczamy z równania prostej równoległej do boku trójkąta zaznaczonej kreskowaną linią, która jest obniżona wobec boku trójkąta

$$\text{o } \frac{c}{\sin 30^\circ}:$$

$$y = x \cdot \sqrt{3} - \frac{c}{\sin 30^\circ} = x \cdot \sqrt{3} - 2c \Rightarrow x = \frac{y + 2c}{\sqrt{3}} = \frac{b + 2c}{\sqrt{3}}. \quad (5)$$

Niekiedy wykresy trójkątne uzupełnia się o skalę, odznaczając na wykresie odcinki oznaczające równy poziom udziału danej kategorii (jednostką skali jest zwykle 1/3, 1/4, 1/5, 10% lub 1%). Współrzędne końców odcinków można otrzymać, podstawiając do wzorów (4) i (5) odpowiednie wartości przy zerowym udziale jednej kategorii. W tabeli 1 przedstawiono współrzędne dla wartości skali wyrażonej jako k/m , gdzie m oznacza dokładność skali (np. 3, gdy jednostką jest 1/3), a $k = 1, 2, \dots, m - 1$.

Tabela 1. Współrzędne końców odcinków skali wykresu trójkątnego

Kategoria A		Kategoria B		Kategoria C	
$x_1 = \frac{m-k}{m\sqrt{3}}$	$y_1 = \frac{m-k}{m}$	$x_1 = \frac{2m-k}{m\sqrt{3}}$	$y_1 = \frac{k}{m}$	$x_1 = \frac{m+k}{m\sqrt{3}}$	$y_1 = \frac{m-k}{m}$
$x_2 = \frac{2(m-k)}{m\sqrt{3}}$	$y_2 = 0$	$x_2 = \frac{k}{m\sqrt{3}}$	$y_2 = \frac{k}{m}$	$x_2 = \frac{2k}{m\sqrt{3}}$	$y_2 = 0$

Źródło: opracowanie własne.

Otrzymane współrzędne wierzchołków trójkąta, końców odcinków skali oraz punktów danych należy wprowadzić do arkusza i umieścić jako serie danych na wykresie rozrzutu XY . Przykładowe wykresy zaprezentowano w następnym punkcie.

3. Przykłady zastosowania wykresu trójkątnego

Zastosowanie wykresu trójkątnego zostanie przedstawione na przykładzie udziału trzech głównych części gospodarki w ogólnej liczbie zatrudnionych i w wartości dodanej brutto, która jest głównym składnikiem PKB. W naukach ekonomicznych przyjmuje się, że obecnie dominującą rolę w gospodarce odgrywa sektor usług, i że jego rola stale rośnie. Aby zilustrować tę tezę, z Rocznika Statystycznego [4] zaczerpnięto dane z lat 1995 i 2000 dla Polski i UE, które przedstawiono w tab. 2 i 3.

Wykres trójkątny bez skali dla ogólnej liczby zatrudnionych jest przedstawiony na rys. 2, a wykres trójkątny ze skalą (jednostką jest 20%) dla wielkości dodanej brutto przedstawiono na rys. 3.

Interpretacja uzyskanych wykresów jest następująca – im dalej od boku leżącego naprzeciwko wierzchołka przedstawiającego stuprocentowy udział danej kategorii, tym większy udział tej kategorii. Na obu wykresach punkty danych dla Polski i UE dążą w kierunku wierzchołka C wyrażającego stuprocentowy udział usług. Z tych wykresów zatem wynika, że wraz z rozwojem gospodarczym Polski wzrasta udział sektora usług w podstawowych wielkościach makroekonomicznych kosztem

Tabela 2. Udział sektorów gospodarczych w ogólnej liczbie zatrudnionych w Polsce i Unii Europejskiej

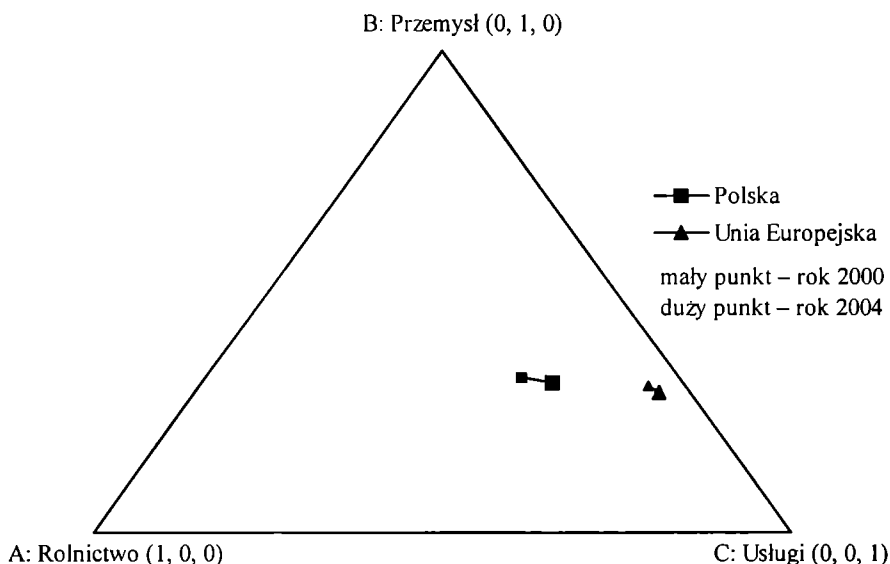
Rok	Unia Europejska		Polska	
	1995	2000	1995	2000
Struktura zatrudnienia ogółu pracujących (w %):				
– sektor rolnictwa, leśnictwa i rybołówstwa (a)	5,3	4,3	22,6	18,8
– sektor przemysłu i budownictwa (b)	30,2	29	32	30,8
– sektor usług (c)	64,5	66,7	45,4	50,4
Razem	100	100	100	100

Źródło: opracowanie własne na podstawie [4, s. 616].

Tabela 3. Udział sektorów gospodarczych w wartości dodanej brutto w Polsce i Unii Europejskiej

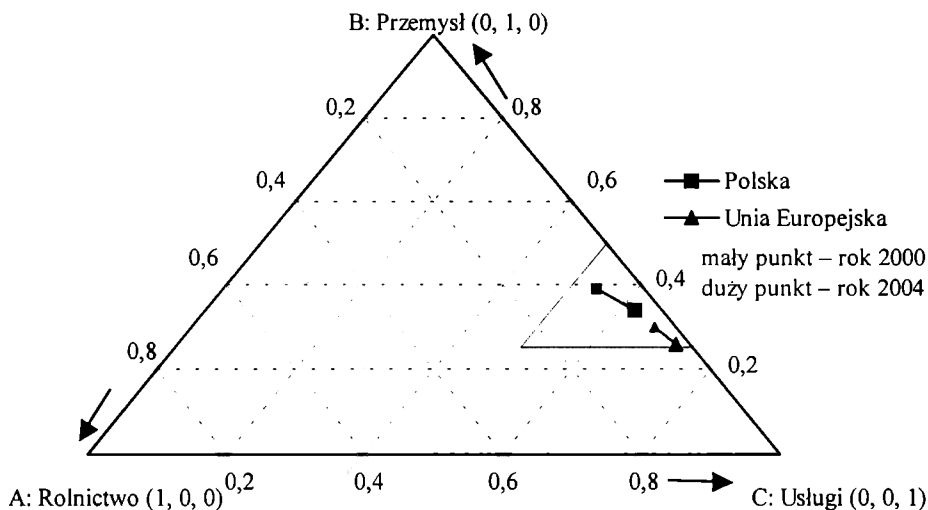
Rok	Unia Europejska		Polska	
	1995	2000	1995	2000
Struktura wartości dodanej brutto (w %):				
– sektor rolnictwa, leśnictwa i rybołówstwa (a)	3	2	7	4
– sektor przemysłu i budownictwa (b)	30	26	39	34
– sektor usług (c)	67	72	54	62
Razem	100	100	100	100

Źródło: opracowanie własne na podstawie [4, s. 617].



Rys. 2. Wykres udziału sektorów gospodarczych w ogólnej liczbie zatrudnionych

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Wykres udziału sektorów gospodarczych w wartości dodanej brutto

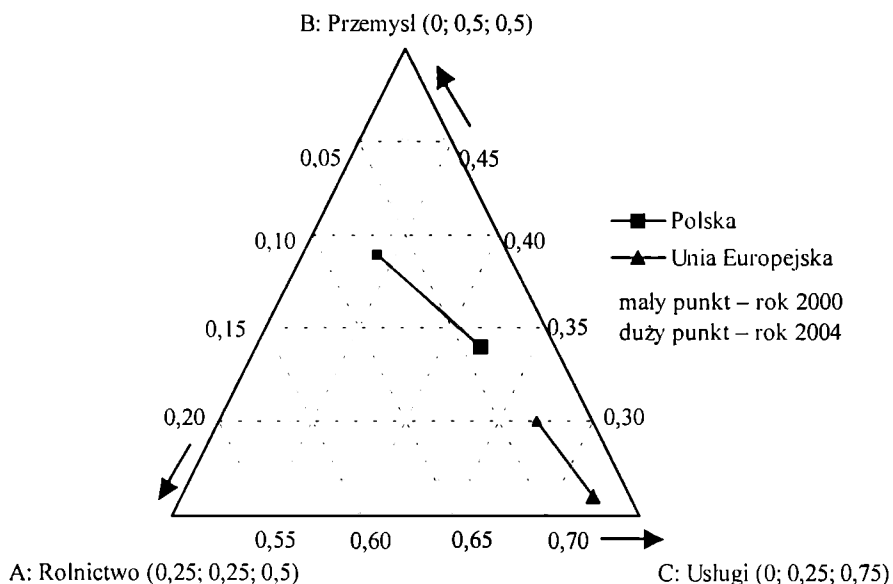
Źródło: opracowanie własne.

udziału pozostałych dwu sektorów, przy czym wzrost ten jest silniejszy w przypadku wartości dodanej brutto niż zatrudnienia. Wykresy trójkątne pokazują również, że kierunek rozwoju Polski jest mocno zbliżony do kierunku rozwoju krajów „starej” Unii Europejskiej. W ten sposób za pomocą wykresów trójkątnych można potwierdzić tezę o dominującym i rosnącym udziale sektora usług we współczesnej gospodarce. Inne przykłady wykresów trójkątnych w badaniach ekonomicznych można znaleźć np. w pracach [2] i [3].

Gdy punkty danych grupują się tylko w jednej części wykresu trójkątnego, jak na rys. 1 i 2, sensowne jest „wycięcie” z całego wykresu tylko części trójkąta i przeskalowanie wyciętej części. Na przykład można ograniczyć się do mniejszego trójkąta zaznaczonego na rys. 3, który jest wyznaczony przez wartości udziałów: $a_{\min} = 0$, $a_{\max} = 0,25$, $b_{\min} = 0,25$, $b_{\max} = 0,5$, $c_{\min} = 0,5$, $c_{\max} = 0,75$. Pierwotne wartości udziałów z tab. 2 należy przeskalować zgodnie ze wzorami

$$a' = \frac{a - a_{\min}}{a_{\max} - a_{\min}}, \quad b' = \frac{b - b_{\min}}{b_{\max} - b_{\min}}, \quad c' = \frac{c - c_{\min}}{c_{\max} - c_{\min}} = 1 - (a' + b'). \quad (6)$$

Współrzędne punktów danych na przeskalowanym wykresie oblicza się, podstawiając wartości b' i c' zamiast b i c we wzorach (4) i (5). Na takim wykresie należy również zmodyfikować wartości udziałów kategorii w wierzchołkach i na



Rys. 4. Przeskalowany wykres udziału sektorów gospodarczych w wartości dodanej brutto

Źródło: opracowanie własne.

skali trójkąta. W rezultacie otrzymano wykres trójkątny przedstawiony na rys. 4. Przeskalowanie wykresu jest szczególnie użyteczne w przypadku występowania dużej liczby punktów danych na małej części pierwotnego wykresu trójkątnego.

4. Podsumowanie

W pracy przedstawiono szczegółowo matematyczne zasady konstrukcji wykresu trójkątnego. Umożliwia to zainteresowanemu czytelnikowi tworzyć takie wykresy za pomocą powszechnie dostępnego oprogramowania. W celu zilustrowania możliwości zastosowań tego wykresu w naukach ekonomicznych przeanalizowano za jego pomocą zmiany udziałów trzech sektorów gospodarki w wielkościach makroekonomicznych. Autor ma nadzieję, że niniejsza publikacja będzie sprzyjać, choć w małym stopniu, upowszechnieniu wykorzystania wykresu trójkątnego.

Literatura

- [1] Leitner R., *Zarys matematyki wyższej dla studentów. Część I*, wyd. 8. WNT, Warszawa 1994.
- [2] Ostasiewicz W., *Zastosowanie zbiorów rozmytych w ekonomii*. PWN, Warszawa 1986.
- [3] *Przemiany konsumpcji w Polsce*, red. A. Styś, Monografie i opracowania nr 46., AE, Wrocław 1988.
- [4] *Rocznik Statystyczny Rzeczypospolitej Polskiej 2002*, ZWS GUS, Warszawa 2002.
- [5] *Statystyczne metody analizy danych*, red. W. Ostasiewicz, wyd. 2, AE, Wrocław 1999.

CONSTRUCTION AND APPLICATIONS OF THE TERNARY GRAPH

Summary

Mathematical principles of ternary graph construction are presented in the paper in order to make readers able to develop such graphs using only standard spreadsheet software. The main application of this graph is visualization of three categories shares in some magnitude, when these shares sum to 100 % of magnitude. Changes of three economic sectors shares in macroeconomic magnitudes are analyzed in order to present possibilities of ternary graph application in economics.

Dr Cyprian Kozyra jest pracownikiem Katedry Statystyki w Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.