

Rafał Siedlecki, Tomasz Słoński

WYZNACZANIE OPTYMALNEGO CZASU TRWANIA INWESTYCJI RZECZOWYCH

1. Wstęp

Ocena efektywności inwestycji rzeczowych wymaga przeprowadzenia analizy parametrów technicznych, marketingowych i finansowych owej inwestycji. Powinna być więc ona przeprowadzana pod kątem jej wpływu na wzrost zamożności właścicieli przedsiębiorstwa. Oznacza to, że obszerny zbiór danych ma zostać przetworzony i wystandaryzowany tak, aby mógł on być w prosty i jasny sposób przedstawiony właścicielom. Standaryzacja oceny efektywności danej inwestycji umożliwia porównywanie jej na rynku aktywów rzeczowych i kapitałowych.

Wycena inwestycji jest procesem dynamicznym, w którym uzyskany wynik może wpływać na założenia początkowe. Analityk finansowy przeprowadza analizę wszystkich wariantów inwestycyjnych w poszukiwaniu takiego, dla którego jej wartość jest największa. Działanie takie nie tylko zmusza do przeanalizowania założeń finansowych i marketingowych, ale również rozpatrzenia różnych wariantów zakupu aktywów o odmiennych parametrach technicznych. Taki tryb postępowania jest rzadko spotykany w przedsiębiorstwach, w których z reguły dział produkcyjny (operacyjny) zgłasza zapotrzebowanie na konkretny składnik majątku, określa okres jego użytkowania i sposób jego odtworzenia.

Analiza problemu długości trwania inwestycji rozpoczyna się od analizy czasu trwania pojedynczego projektu inwestycyjnego. W dalszej części artykułu przedstawimy analizę czasu trwania inwestycji dla różnych wariantów.

2. Trudności związane z oceną inwestycji o różnych czasach trwania

Tradycyjne metody obliczeniowe pozwalają na wyznaczenie wartości generowanej przez projekt w zadanym horyzoncie inwestycyjnym. Konieczność ustalenia okresu użytkowania aktywów zmusza do stosowania metod oceny inwestycji o różnych ich długościach. Analiza tego typu inwestycji napotyka problemy trojakięgo rodzaju:

- 1) nie wszystkie inwestycje można powtarzać,
- 2) inwestycje różnią się wielkością ponoszonych nakładów i tym samym oszczędności związane z realizacją „tańszej” inwestycji mogą być przeznaczone na inne inwestycje,
- 3) nie można bezpośrednio porównać wartości generowanych przez inwestycje w różnych odcinkach czasu,

Problemy 1 i 2 są ze sobą ściśle związane, ponieważ dotyczą reinwestycji środków uzyskanych w trakcie realizacji inwestycji. W problemie 1, jeżeli projekt można powtórzyć, to uzyskane środki będą przeznaczone na ponowne uruchomienie tej samej inwestycji. W problemie 2 „zaoszczędzone” środki, którymi będzie dysponował zarząd, będą przeznaczone na inne inwestycje.

Wprowadzenie do rozważań dodatkowych inwestycji (innych od wzajemnie wykluczających się) otwiera puszkę Pandory, ponieważ nie pozwala na wybór najlepszego wariantu inwestycyjnego spośród wielu wzajemnie się wykluczających. W takiej sytuacji najlepszy wybór to grupa inwestycji, która maksymalizuje wartość generowaną przez cały budżet inwestycyjny. W artykule, aby nie komplikować wyводу, założono, że przedsiębiorstwo może wybrać jeden z wzajemnie się wykluczających wariantów inwestycyjnych. Pozostałe środki będzie inwestował, osiągając zwrot równy kosztowi kapitału – wartość bieżąca nowych inwestycji będzie równa zeru.

Jeżeli jednego z wzajemnie wykluczających się wariantów inwestycyjnych nie można powtórzyć, to wybieramy ten, którego wartość pojedynczego powtórzenia jest największa. Problem ustalenia długości trwania tego typu inwestycji zostanie rozwiązany w następnym punkcie.

W praktyce, aby rozwiązać problem 3 (tj. różne horyzonty inwestycyjne porównywanych wariantów), stosuje się wiele metod obliczeniowych, zakładających powtarzalność projektów inwestycyjnych (por. [2]).

Pierwszym sposobem na porównanie wariantów inwestycyjnych jest wielokrotne ich powtarzanie do momentu zrównania się horyzontów inwestycyjnych. Następnie porównuje się wartość generowaną przez wszystkie powtórzenia. Wybiera się ten wariant inwestycyjny, w którym wartość generowana przez wszystkie powtórzenia jest największa. Wadą tej metody jest to, że liczba powtórzeń poszczególnych wariantów może okazać się duża, a procedura obliczeniowa pracochłonna.

Drugim sposobem jest wyliczenie wartości tworzonej przez wariant inwestycyjny w nieskończonej liczbie powtórzeń. Wartość taka nosi nazwę nieskończonego NPV (NPV_{∞}). Wzór opisujący sposób obliczenia NPV_{∞} dla kapitalizacji ciągłej to:

$$NPV_{\infty} = \frac{NPV}{PVIFA_{\infty, k}} = \frac{NPV}{1 - e^{-kN}}, \quad (1)$$

gdzie: NPV_{∞} – nieskończone NPV ,

NPV – wartość bieżąca netto inwestycji,

k – koszt kapitału,

$PVIFA_{\infty, k}$ – mnożnik wartości obecnej renty dla nieskończonej liczby okresów,

N – liczba okresów funkcjonowania pojedynczego powtórzenia.

Zupełnie inne podejście jest wykorzystywane w sposobie trzecim. Polega on na tym, że dla każdego wariantu inwestycyjnego oblicza się ekwiwalentny przepływ roczny (EAR – *Equivalent Annual Rate*). Ekwiwalentny przepływ roczny to wartość wariantu inwestycyjnego przeliczona na jeden rok trwania inwestycji z uwzględnieniem zmiany wartości pieniądza w czasie. Wartość ekwiwalentnego przepływu rocznego wylicza się ze wzoru:

$$EAR = \frac{NPV}{PVIFA_{n, k}}, \quad (2)$$

gdzie: EAR – ekwiwalentny przepływ roczny,

$PVIFA_{n, k}$ – mnożnik wartości bieżącej renty rocznej dla n liczby lat i kosztu kapitału równego k .

Oczywiście wybór okresów rocznych jest arbitralny. W praktyce przelicza się wartość inwestycji na okresy o różnych długościach. Najwyższa wartość EAR wskazuje na najlepszy wariant inwestycyjny. Pomimo że procedury obliczeniowe są do siebie zbliżone, nie zawsze dają takie same rezultaty. Taka sytuacja ma miejsce, jeżeli projekty inwestycyjne charakteryzują się odmiennym ryzykiem – są im przypisane różne stopy dyskonta. Nieskończone NPV wskazuje na to, że im wyższe ryzyko inwestycji, tym mniejsza wartość jest tworzona dla właścicieli. Wykorzystanie metody EAR może w niektórych sytuacjach dać odmienny rezultat. Punktem odniesienia pozostaje jednak metoda nieskończonego NPV (por. [1]).

3. Ustalenie czasu trwania pojedynczego projektu inwestycyjnego bez możliwości jego powtórzenia

3.1. Ustalenie czasu trwania za pomocą kryterium NPV

W tej części artykułu zakładamy, że projektu inwestycyjnego nie można powtórzyć, a stopa reinwestycji uzyskanych środków jest równa kosztowi kapitału. W takiej sytuacji spośród różnych możliwych okresów zakończenia projektu inwestycyjnego wybieramy ten, dla którego wartość bieżąca netto jest największa. Wartość bieżąca netto pojedynczego powtórzenia przy kapitalizacji ciągłej wyznacza się ze wzoru:

$$NPV = \sum_{t=0}^N FCF_t e^{-kt}, \quad (3)$$

gdzie: FCF_t – to „wolne” przepływy środków pieniężnych w okresie t .

W artykule, w celu uzyskania większej przejrzystości wywodu, przedstawiono inwestycje, które charakteryzuje występowanie wyłącznie dwóch przepływów: nakładu początkowego (FCF_0), którego wartość jest mniejsza od zera, i wartości uzyskanej w momencie zakończenia inwestycji. Dodatkowo, ostatni przepływ jest opisywany przez funkcję, która pokazuje zmianę jego wartości w czasie. Po uwzględnieniu tych uwag wzór (3) można zapisać następująco:

$$NPV = FCF_0 + FCF(t)e^{-kt}, \quad (4)$$

gdzie: FCF_0 – nakład początkowy,

$FCF(t)$ – funkcja wartości przepływów pieniężnych.

Aby znaleźć maksimum NPV , należy obliczyć pierwszą pochodną względem t i przyrównać ją do zera. Pierwsza pochodna równania (4) względem t przyrównana do zera przybiera postać:

$$NPV' = FCF'(t)e^{-kt} - kFCF(t)e^{-kt} = 0, \quad (5)$$

skąd

$$FCF'(t)/FCF(t) = k. \quad (6)$$

Oznacza to, że inwestycja powinna być kontynuowana aż do momentu, w którym krańcowy koszt kapitału zrówna się z krańcową stopą zwrotu z inwestycji.

Przykład 1

Ustalono, że wzrost wartości pewnej inwestycji opisuje funkcja logistyczna. Funkcja ta dobrze nadaje się do opisu zjawisk ekonomicznych i przyrodniczych. Jest ona jedynym rozwiązaniem równania różniczkowego noszącego w ekonomii nazwę prawa Robertsona (por. [3, s. 134-136]). Funkcja ta wyraża się wzorem:

$$FCF(t) = \frac{a}{1 + e^{b-ct}}, \quad (7)$$

gdzie parametry a , b , c oraz t są większe od zera.

Po podstawieniu funkcji $FCF(t)$ do równania (4) otrzymujemy postać:

$$NPV = FCF_0 + \frac{a}{1 + e^{b-ct}} e^{-kt}. \quad (8)$$

Pierwsza pochodna funkcji (8) względem t wynosi:

$$\frac{dNPV}{dt} = -\frac{ace^{2ct-kt}}{(e^b + e^{ct})^2} + \frac{ace^{ct-kt}}{e^b + e^{ct}} - \frac{ake^{ct-kt}}{e^b + e^{ct}}. \quad (9)$$

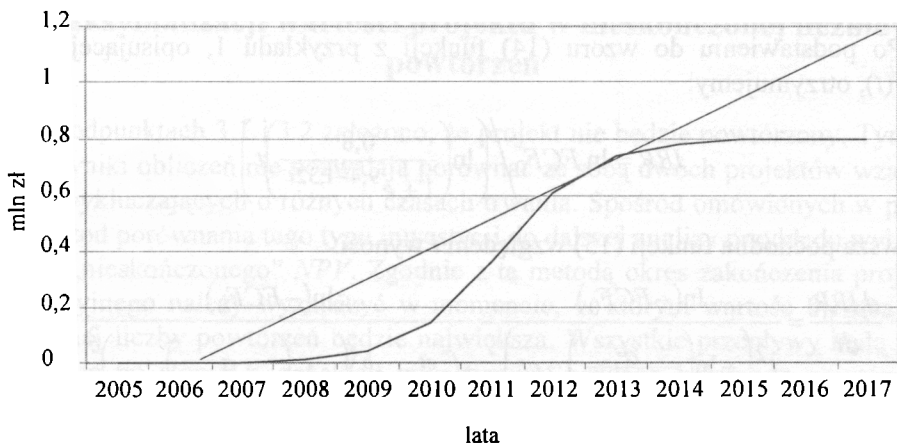
Przyrównując pochodną funkcji (8) do zera, otrzymujemy:

$$t = \frac{\ln \frac{c-k}{k}}{c} + \frac{b}{c}. \quad (10)$$

Założmy, że zmiany przepływu środków pieniężnych w okresie $t > 0$ opisuje funkcja:

$$FCF(t) = \frac{0,8}{1 + e^{9,4-1,32t}}, \quad (11)$$

FCF_0 to 100 tys. zł, a koszt kapitału to 15%. Po podstawieniu parametrów funkcji do wzoru 10 otrzymano optymalny czas zakończenia inwestycji równy 8,68 roku. Zmianę wartości inwestycji przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Optymalny moment zakończenia inwestycji według metody NPV

Źródło: opracowanie własne.

Czas trwania inwestycji równy 8,68 roku wyznacza maksimum wartości bieżącej netto inwestycji. W tym punkcie przebiega styczna do wykresu funkcji obrazującej zmiany wartości inwestycji (zob. rys. 1).

Warto zaznaczyć, że moment zakończenia inwestycji nie zależy od wielkości nakładów początkowych. Inwestycja przyniesie maksymalną korzyść, jeżeli wartość terminalna inwestycji będzie maksymalizowana.

3.2. Ustalenie czasu trwania inwestycji za pomocą kryterium *IRR*

Kryterium *IRR* ocenia projekt inwestycyjny na podstawie wewnętrznej stopy zwrotu z inwestycji. Czas trwania inwestycji powinien być ustalony tak, aby *IRR* inwestycji była jak największa. Wewnętrzna stopa zwrotu jest to stopa k , która zrównuje *NPV* inwestycji do zera. Aby wyznaczyć optymalny czas trwania inwestycji za pomocą kryterium *IRR*, wzór (4) został przekształcony do następującej postaci:

$$NPV = 0 = FCF_0 + FCF(t)e^{-tIRR} \quad (12)$$

i

$$0 = \ln(-FCF_0) + \ln FCF(t)(-tIRR). \quad (13)$$

Ze wzorów (12) i (13) wynika, że:

$$IRR = \ln(-FCF_0) / (\ln FCF(t)t). \quad (14)$$

Następnym krokiem jest wyznaczenie maksymalnej wartości *IRR*. W tym celu należy obliczyć pierwszą pochodną funkcji wyrażonej wzorem (14) i przyrównać ją do zera.

Przykład 2

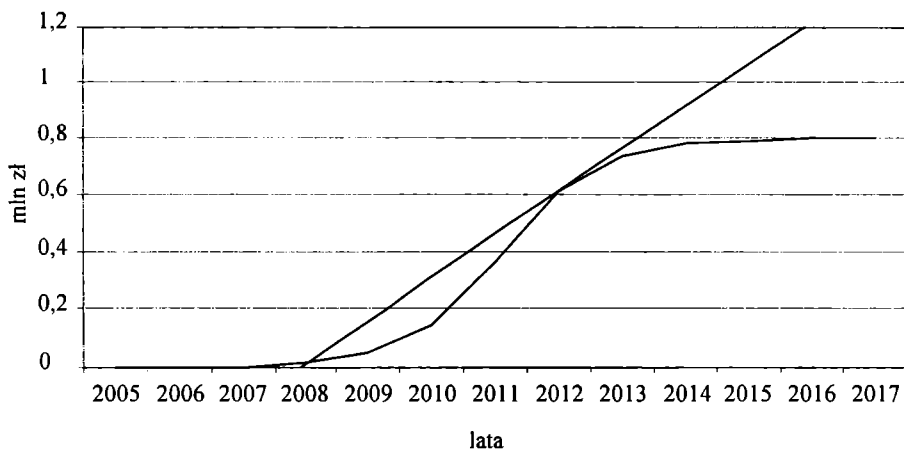
Po podstawieniu do wzoru (14) funkcji z przykładu 1, opisującej zmiany $FCF(t)$, otrzymujemy:

$$IRR = \ln FCF_0 / \left(\ln \left(\frac{0,8}{1 + e^{9,4-1,32t}} \right) t \right). \quad (15)$$

Pierwsza pochodna funkcji (15) względem t wynosi:

$$\frac{dIRR}{dt} = \frac{\ln(-FCF_0)}{t^2 \left(-\ln \left(\frac{a}{e^{ct} + e^b} \right) - ct \right)} - \frac{c \ln(-FCF_0)}{t(e^{ct} + e^b) \left(-\ln \left(\frac{a}{e^{ct} + e^b} \right) - ct \right)^2}. \quad (16)$$

Do wyznaczenia maksimum funkcji (15) można wykorzystać na przykład Microsoft Solver ® lub QSB. Maksimum funkcji (15) zostało wyznaczone dla czasu trwania inwestycji równego 8,31 roku (zob. rys. 2).



Rys. 2. Optymalny moment zakończenia inwestycji według kryterium *IRR*

Źródło: opracowanie własne.

W tym wariantcie obliczeniowym optymalny czas trwania inwestycji zależy od wielkości nakładów początkowych. Dzieje się tak dlatego, ponieważ według kryterium *IRR* przepływ początkowy jest reinwestowany zgodnie ze stopą równą *IRR*. Dla danych w przykładzie *IRR* inwestycja będzie dawała największe *IRR* (tj. 25,75%) po upływie 8,31 roku. Czterokrotne zwiększenie nakładów początkowych powoduje spadek maksymalnego *IRR* do poziomu 6,86%, a optymalny czas zakończenia inwestycji to 9,32 roku.

4. Ustalenie czasu trwania inwestycji na podstawie maksymalizacji wartości projektu w nieskończonej liczbie powtórzeń

W podpunktach 3.1 i 3.2 założono, że projekt nie będzie powtórzony. Tym samym, wyniki obliczeń nie pozwalają porównać ze sobą dwóch projektów wzajemnie się wykluczających o różnych czasach trwania. Spośród omówionych w punkcie 2 metod porównania tego typu inwestycji do dalszej analizy przykładu wybrano metodę „nieskończonego” *NPV*. Zgodnie z tą metodą okres zakończenia projektu inwestycyjnego należy wyznaczyć w momencie, w którym wartość bieżąca nieskończonej liczby powtórzeń będzie największa. Wszystkie przepływy będą reinwestowane po stopie k , a nakład inwestycyjny każdego kolejnego powtórzenia będzie taki sam.

W tej części artykułu maksymalizowana jest wartość nieskończonego *NPV*. Równanie opisujące NPV_{∞} dla inwestycji analizowanych w artykule wyprowadza się na podstawie wzorów (1) i (4):

$$NPV_{\infty} = \frac{FCF_0 + FCF(t)_t e^{-kt}}{1 - e^{-kt}}. \quad (16)$$

Aby określić czas zakończenia inwestycji, należy obliczyć pierwszą pochodną funkcji (16) względem t i przyrównać je do zera.

Przykład 3

Po podstawieniu danych opisujących inwestycję z przykładu 1 wzór (16) przybiera postać:

$$NPV_{\infty} = \frac{-0,1 + \frac{0,8}{1 + e^{9,4-1,32t}} e^{-0,15t}}{1 - e^{-0,15t}}. \quad (17)$$

Maksimum funkcji wyznaczono za pomocą programu Microsoft Solver ®. Czas trwania inwestycji, który maksymalizuje wartość nieskończonej liczby powtórzeń, to 8,53 roku.

5. Zakończenie

W artykule przedstawiono metody wyznaczania czasu trwania inwestycji wykorzystujące popularne kryteria oceny projektów inwestycyjnych. Do wyznaczenia wartości przepływów środków pieniężnych wykorzystano jedną z najpopularniejszych w ekonomii funkcji – funkcję logistyczną. Każda z przedstawionych w artykule propozycji wyznacza inny czas zakończenia inwestycji (por. tab. 1).

Tabela 1. Czas zakończenia inwestycji według różnych kryteriów oceny projektów inwestycyjnych

Nazwa kryterium oceny	Optymalny czas zakończenia inwestycji (w latach)
NPV	8,68
IRR	8,31
NPV_{∞}	8,53

Źródło: opracowanie własne.

Optymalny czas trwania inwestycji różni się w zależności od przyjętej metody. Pomimo że parametry w tab. 1 różnią się umiarkowanie, nie oznacza to, że przy innych założeniach początkowych różnice nie będą większe. Różnice wynikają m.in. z odmiennego podejścia do reinwestycji osiąganych korzyści.

Na szczególną uwagę zasługuje wykorzystanie kryterium NPV_{∞} . Kryterium to przyjmuje powtarzalność inwestycji, przy założeniu ponoszenia takich samych nakładów inwestycyjnych w każdym powtórzeniu. Stosując kryte-

rium IRR można również wykorzystać założenie o powtarzalności projektów inwestycyjnych – procedura obliczeniowa jest podobna do przedstawionej w podpunkcie 3.2 – z tym że nakłady inwestycyjne w każdym powtórzeniu będą kapitalizowane po stopie IRR .

Literatura

- [1] Copeland T.E., Weston F.J., *Financial Theory and Corporate Policy*, Addison-Weseley, Reading 1988.
- [2] Jajuga T., Słoński T., *Finanse spółek. Długoterminowe decyzje finansowe*, wyd. 3, AE, Wrocław (w druku).
- [3] Siedlecki R., *Metoda wyznaczania finansowych sygnałów ostrzegawczych w cyklu życia przedsiębiorstwa*, praca doktorska, AE, Wrocław 2005.

THE INVESTMENT'S OPTIMAL DURATION PROBLEM

Summary

This paper deals with investment's optimal duration problem. In order to find optimal solution three popular investment valuation methods (NPV , IRR , NPV_{∞}) were used. While estimating cash flow forecast, the authors took advantage of logistic function. Investment's optimal duration depends on reinvestment rate assumption.

Dr Rafał Siedlecki i dr Tomasz Słoński są adiunktami w Katedrze Zarządzania Finansami Przedsiębiorstwa Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.