

Alicja Grześkowiak

ZASTOSOWANIE ANALIZY DYSKRYMINACYJNEJ DO BADANIA STAŁOŚCI WARIANCJI SKŁADNIKÓW LOSOWYCH W JEDNORÓWNIANOWYCH MODELACH EKONOMETRYCZNYCH*

1. Wstęp

Model ekonometryczny stanowi przybliżony opis wybranego fragmentu rzeczywistości. Jako konstrukcja formalna przedstawia zasadnicze powiązania pomiędzy analizowanymi zjawiskami ekonomicznymi, uwzględniając główne czynniki mające wpływ na kształtowanie się danego zjawiska. Wszelkie inne przyczyny zmian reprezentowane są przez składniki losowe modelu, o których formułuje się szereg założeń, stanowiących podstawę wyboru metody estymacji parametrów. W trakcie weryfikacji modelu należy sprawdzić słuszność przyjętych założeń.

Celem pracy jest przedstawienie możliwości weryfikowania założeń odnoszących się do rozkładu składników losowych za pomocą analizy dyskryminacyjnej, co stanowi alternatywę do podejścia klasycznego opartego na konstrukcji testów statystycznych. Zaproponowano także koncepcję wykorzystania szeregu Neumana do otrzymywania przybliżonej macierzy odwrotnej. Praca obok celu prezentacji teoretycznego ujęcia proponowanych rozwiązań podejmuje również zagadnienie aplikacji omówionych metod do problemu szacowania linii charakterystycznych akcji notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie.

2. Postać macierzy kowariancji składników losowych a wybór metody estymacji parametrów modelu

Przedmiotem rozważań jest wybór metody estymacji jednorównaniowego liniowego modelu ekonometrycznego postaci:

* Praca finansowana ze środków na naukę w latach 2005-2006 jako projekt badawczy nr 1 H02B 025 29.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

gdzie: $\mathbf{y}$ – wektor wartości zmiennej objaśnianej,
 $\mathbf{X}$ – macierz obserwacji zmiennych objaśniających,
 $\boldsymbol{\beta}$ – wektor parametrów,
 $\boldsymbol{\varepsilon}$ – wektor składników losowych.

Wartości zmiennej objaśnianej są wyrażone jako liniowa kombinacja wartości zmiennych objaśniających. Zależność ta zakłócana jest przez nieobserwowalne zakłócenia – tzw. składniki losowe, o których zakłada się, że mają wartość oczekiwaną równą zero, gdyż odchylenia *in plus* oraz *in minus* mają tendencję do wzajemnej redukcji. Do estymacji parametrów modelu stosuje się metodę najmniejszych kwadratów (MNK) lub uogólnioną metodę najmniejszych kwadratów (UMNK). Wybór metody estymacji zależy od postaci macierzy kowariancji składników losowych.

Jeżeli macierz kowariancji składników losowych jest macierzą skalarną postaci:

$$\Sigma_{\varepsilon sk} = \sigma^2 \mathbf{I}, \quad (2)$$

to do estymacji parametrów modelu stosuje się metodę najmniejszych kwadratów (MNK). W macierzy (2) na głównej przekątnej wszystkie elementy są takie same (σ^2), co oznacza stałość wariancji (homoskedastyczność), natomiast wszystkie elementy poza główną przekątną są równe zero, czyli składniki losowe nie są ze sobą skorelowane. Estymator MNK postaci:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (3)$$

jest wówczas estymatorem najlepszym w klasie nieobciążonych estymatorów liniowych w sensie twierdzenia Gaussa-Markowa: każdy inny estymator nieobciążony i liniowy ma macierz kowariancji większą o pewną macierz określoną nieujemnie.

Jeżeli macierz kowariancji składników losowych jest nieskalarna o postaci:

$$\Sigma_{\varepsilon nsk} = \sigma^2 \mathbf{V}, \quad \mathbf{V} \neq \mathbf{I}, \quad (4),$$

to właściwą metodą estymacji jest uogólniona metoda najmniejszych kwadratów (UMNK). Składniki losowe o macierzy kowariancji (4) mają różne wariancje (są heteroskedastyczne) lub są ze sobą skorelowane (występuje autokorelacja) lub oba te zjawiska występują jednocześnie. Estymator UMNK przyjmujący postać:

$$\mathbf{b}^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}, \quad (5)$$

jest wówczas estymatorem najlepszym w klasie nieobciążonych estymatorów liniowych w sensie twierdzenia Aitkena: każdy inny estymator nieobciążony i liniowy ma macierz kowariancji większą o pewną macierz określoną nieujemnie.

Zasadniczym problemem pojawiającym się przy wyborze metody estymacji jest brak znajomości macierzy kowariancji składników losowych. Zakłócenia ϵ są wielkościami nieobserwowalnymi o nieznanach wariancjach i kowariancjach. O składnikach losowych wnioskuje się na podstawie wektora reszt $\mathbf{e}$, czyli różnic pomiędzy wartościami rzeczywistymi zmiennej objaśnianej $\mathbf{y}$, a jej wartościami teoretycznymi $\hat{\mathbf{y}}$ wynikającymi z oszacowanego modelu. W metodzie najmniejszych kwadratów wektor reszt przybiera postać:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}. \quad (6)$$

Można wykazać (zob. [9, s. 133]), że wektor reszt oraz wektor składników losowych są ze sobą powiązane relacją:

$$\mathbf{e} = \mathbf{M}\epsilon, \quad (7)$$

gdzie macierz $\mathbf{M}$ jest macierzą idempotentną postaci:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T. \quad (8)$$

Dlatego, gdy macierz kowariancji składników losowych jest skalarna, macierz kowariancji wektora reszt przybiera postać:

$$\Sigma_{sk} = \sigma^2 \mathbf{M}. \quad (9)$$

Natomiast w przypadku nieskalarnej macierzy kowariancji składników losowych macierz kowariancji wektora reszt wyraża się formułą:

$$\Sigma_{nsk} = \sigma^2 \mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{M}. \quad (10)$$

W ujęciu klasycznym zakłada się, że rozkład składników losowych jest normalny o zerowym wektorze wartości oczekiwanych i macierzy kowariancji postaci (2) lub (4). Wówczas rozkład reszt jest również rozkładem normalnym o zerowym wektorze wartości oczekiwanych oraz macierzy kowariancji postaci (9) lub (10). Stanowiąc będzie to punkt wyjścia do rozpoznawania, czy składniki losowe mają skalarną czy nieskalarną macierz kowariancji, i prowadzić do wyboru metody estymacji parametrów modelu.

3. Koncepcja zastosowania analizy dyskryminacyjnej do wnioskowania o postaci macierzy kowariancji składników losowych

Prace ekonometryków w zakresie weryfikowania założenia metody najmniejszych kwadratów o skalarnej macierzy kowariancji skupiają się na konstrukcji testów statystycznych pozwalających wnioskować o homoskedastyczności lub heteroskedastyczności, występowaniu autokorelacji lub jej braku. Zastosowanie testów

statystycznych powoduje określone konsekwencje. Konkurujące ze sobą hipotezy zerowa i alternatywna są traktowane w odmienny sposób: zakładane jest z góry prawdopodobieństwo α złego sklasyfikowanie zmiennej o rozkładzie określonym przez hipotezę zerową, a prawdopodobieństwo β złego sklasyfikowania zmiennej z rozkładu określonego hipotezą alternatywną ustalane jest dopiero w trakcie badania.

Proponowaną alternatywą do klasycznego postępowania, czyli testowania hipotez, jest zastosowanie analizy dyskryminacyjnej, w której konkurujące ze sobą hipotezy traktuje się równoprawnie, a minimalizuje się prawdopodobieństwo błędnej klasyfikacji.

Analiza dyskryminacyjna polega na konstrukcji reguły umożliwiającej określenie przynależności danej obserwacji do jednej z g populacji. Zakłada się istnienie g populacji: $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_g$, $g \geq 2$. Populacje te są scharakteryzowane przez funkcje

gęstości $f_i(\mathbf{z})$ określone na R^n . Posiadając n -wymiarową obserwację $\mathbf{z}$ należy przydzielić do jednej i tylko jednej z g populacji, przy czym pożądana jest taka budowa reguły dyskryminacyjnej, by liczba błędnych alokacji była jak najmniejsza.

Przestrzeń R^n podlega podziałowi na rozłączne obszary $R_1, R_2, \dots, R_g$ pokrywające całą tę przestrzeń. Regułę alokacyjną (dyskryminacyjną, klasyfikacyjną) definiuje się następująco:

zaliczyć obserwację $\mathbf{z}$ do populacji π_j wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{z} \in R_j$.

Jedną z reguł dyskryminacyjnych jest reguła największej wiarygodności (*maximum likelihood rule*) stosowana, gdy znane są rozkłady populacji $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_g$ o funkcjach gęstości odpowiednio $f_1(\mathbf{z}), f_2(\mathbf{z}), \dots, f_g(\mathbf{z})$. Wiarygodność $L_i(\mathbf{z})$, rozumiana jako funkcja parametrów przy ustalonych wartościach zmiennych, stanowi podstawę do sformułowania następującej zasady: obserwację $\mathbf{z}$ należy przydzielić do tej populacji, dla której wiarygodność $\mathbf{z}$ jest największa:

$$L_j(\mathbf{z}) = \max_i L_i(\mathbf{z}).$$

Jeżeli badaniu podlegają dwie populacje π_1 oraz π_2 o funkcjach gęstości odpowiednio $f_1(\mathbf{z})$ i $f_2(\mathbf{z})$, to regułę największej wiarygodności można zapisać w kategoriach ilorazu wiarygodności Welcha (zob. [7]):

$$\lambda = \frac{f_1(\mathbf{z})}{f_2(\mathbf{z})}. \quad (11)$$

Regułę decyzyjną opartą na ilorazie (11) można wyrazić następująco: jeżeli $\lambda > 1$, to obserwację $\mathbf{z}$ należy przydzielić do populacji nr 1, a w przeciwnym przypadku do populacji nr 2. Ze względu na monotoniczność funkcji logarytmicznej tę regułę dyskryminacyjną można równoważnie przedstawić następująco: jeżeli $\ln \lambda > 0$, to

obserwację z należy przydzielić do populacji nr 1, a w przeciwnym przypadku do populacji nr 2.

Korzystając z reguły największej wiarygodności, można konstruować reguły decyzyjne pozwalające wnioskować o postaci macierzy kowariancji składników losowych. Stosując klasyczny model regresji liniowej, badacz ma do wyboru dwie możliwości:

1. Składniki losowe są sferyczne, tj. homoskedastyczne i nieskorelowane ze sobą, czyli mają rozkład normalny o parametrach $(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$.
2. Składniki losowe nie są sferyczne, tj. występuje heteroskedastyczność lub autokorelacja lub oba te zjawiska jednocześnie i rozkład jest scharakteryzowany za pomocą parametrów $(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{V})$.

Ponieważ składniki losowe są nieobserwowalne, wnioskowanie o postaci rozkładu może zostać przeprowadzone na podstawie wektora reszt otrzymanego na podstawie modelu oszacowanego metodą najmniejszych kwadratów. Dla dwóch wskazanych uprzednio sytuacji badacz może formułować sądy, korzystając z tego, że w dwóch wskazanych sytuacjach reszty mają rozkład normalny oraz znane są wektory wartości oczekiwanych oraz macierze kowariancji reszt:

1. Jeżeli spełnione jest założenie o sferyczności składników losowych, to wektor wartości oczekiwanych reszt jest wektorem zerowym, a macierz kowariancji przybiera postać $\sigma^2 \mathbf{M}$.
2. Jeżeli nie jest spełnione założenie o sferyczności składników losowych, to wektor wartości oczekiwanych reszt jest wektorem zerowym, a macierz kowariancji przybiera postać $\sigma^2 \mathbf{MVM}$.

4. Propozycja zastosowania szeregu Neumanna do wyznaczania przybliżonej macierzy odwrotnej

Do konstrukcji reguły dyskryminacyjnej największej wiarygodności niezbędna jest znajomość funkcji gęstości. Dla wielowymiarowego rozkładu normalnego wyraża się ona formułą:

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z} - E(\mathbf{z}))^T \Sigma^{-1} (\mathbf{z} - E(\mathbf{z})) \right], \quad (12)$$

gdzie: $E(\mathbf{z})$ – wektor wartości oczekiwanych,

Σ – macierz kowariancji.

Do wyznaczenia funkcji gęstości potrzebna jest znajomość macierzy odwrotnej do macierzy kowariancji. Macierze kowariancyjne wektora reszt (9) i (10) są

macierzami osobliwymi, gdyż macierz $\mathbf{M}$ z równania (8) ma rząd równy $n - K$, gdzie n to liczba obserwacji, a K to liczba szacowanych parametrów modelu. Nie istnieje więc macierz odwrotna do macierzy $\mathbf{M}$. W dalszej części pracy przedstawiono propozycję zastosowania pewnego przybliżenia opartego na szeregu Neumanna. Można wykazać, że (zob. [6, s. 182]):

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k.$$

W przypadku macierzy $\mathbf{M}$ zachodzi:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T. \quad (13)$$

Macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą idempotentną:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T = \mathbf{A},$$

dlatego kolejne potęgi macierzy $\mathbf{A}$ przybierają postać:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I},$$

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T,$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T,$$

Uogólniając:

$$\mathbf{A}^k = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{dla } k = 0, \\ \mathbf{A} & \text{dla } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Przy $n \rightarrow \infty$ proponowana przybliżona macierz odwrotna do macierzy $\mathbf{M}$ przybiera postać:

$$\mathbf{M}_n^{-1} = \mathbf{A}^0 + \mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{I} + (n-1)\mathbf{A} = \mathbf{I} + (n-1)\mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T. \quad (14)$$

Korzystając z równania (14), można otrzymać przybliżone macierze odwrotne do macierzy kowariancji wektora reszt otrzymanego na podstawie modelu szacowanego metodą najmniejszych kwadratów. Ich postać zależy od postaci macierzy kowariancji składników losowych:

1. Jeżeli składnik losowy jest sferyczny, wówczas przybliżona macierz odwrotna do macierzy kowariancji wektora reszt przybiera postać:

$$\left(\Sigma_{sk}^*\right)^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{M}_n^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\mathbf{I} + (n-1) \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \right). \quad (15)$$

2. Jeżeli składnik losowy nie jest sferyczny, wówczas przybliżona macierz odwrotna do macierzy kowariancji wektora reszt jest postaci:

$$\begin{aligned} \left(\Sigma_{nsk}^*\right)^{-1} &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{M}_n^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{M}_n^{-1} = \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\mathbf{I} + (n-1) \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \right) \mathbf{V}^{-1} \left(\mathbf{I} + (n-1) \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Nieznany parametr σ^2 szacuje się według formuły:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{n-K}, \quad (17)$$

gdzie: $\mathbf{e}$ – wektor reszt,

n – liczba obserwacji,

K – liczba szacowanych parametrów modelu.

Do wyznaczenia funkcji gęstości wektora reszt potrzebna jest znajomość wyznacznika macierzy kowariancji. Wyznaczniki macierzy kowariancji wektora reszt są równe zero, nie istnieje więc funkcja gęstości określona wzorem (12). Pewne przybliżenie zaproponowano na podstawie rezultatu (16) otrzymanego przy wykorzystaniu szeregu Neumanna oraz tego, że dla dowolnej nieosobliwej macierzy $\mathbf{B}$ zachodzi:

$$\det \mathbf{B} = \frac{1}{\det \mathbf{B}^{-1}}. \quad (18)$$

Korzystając z przybliżonej za pomocą szeregu Neumanna macierzy odwrotnej do macierzy $\mathbf{M}$, otrzymuje się następujące odpowiedniki funkcji gęstości wektora reszt:

$$f_1^*(\mathbf{e}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left| \left(\Sigma_{sk}^* \right)^{-1} \right|^{-\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \left(\Sigma_{sk}^* \right)^{-1} \mathbf{e} \right], \quad (19)$$

jeżeli spełnione jest założenie o sferyczności składników losowych, oraz:

$$f_2^*(\mathbf{e}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left| \left(\Sigma_{nsk}^* \right)^{-1} \right|^{-\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \left(\Sigma_{nsk}^* \right)^{-1} \mathbf{e} \right], \quad (20)$$

jeżeli założenie o sferyczności składników losowych nie jest spełnione.

Funkcje (19) i (20) stanowią podstawę do konstrukcji ilorazu wiarygodności:

$$\lambda = \frac{f_1^*(\mathbf{e})}{f_2^*(\mathbf{e})}. \quad (21)$$

Wartość λ pozwala na wnioskowanie o postaci macierzy kowariancji składników losowych – czy jest ona skalarna, czy też nie. Jeżeli $\lambda > 1$ (lub równoważnie $\ln \lambda > 0$), stwierdza się, iż składniki losowe charakteryzują się homoskedastycznością i brakiem autokorelacji. Do estymacji modelu należy zastosować metodę najmniejszych kwadratów. W przypadku przeciwnym występuje któreś z tych zjawisk lub oba jednocześnie i właściwą metodą szacowania parametrów jest uogólniona metoda najmniejszych kwadratów.

5. Badanie empiryczne

Zaproponowana reguła dyskryminacyjna, oparta na ilorazie wiarygodności i wykorzystująca szereg Neumanna do wyznaczenia przybliżonej odwrotności macierzy $\mathbf{M}$, została zastosowana do badania stałości wariancji w czasie w modelu Sharpe'a. Równanie linii charakterystycznej akcji stanowi jednorównaniowy model ekonometryczny postaci:

$$R_s = \alpha + \beta R_M + \varepsilon, \quad (22)$$

gdzie: R_s – stopa zwrotu akcji danej spółki,

R_M – stopa zwrotu wskaźnika rynku,

α – współczynnik alfa,

β – współczynnik beta,

ε – składnik losowy.

Równanie (22) przedstawia liniową zależność stopy zwrotu pojedynczej akcji od stopy zwrotu wskaźnika rynku. Zależność ta nie jest dokładna, podlega działaniu innych czynników niż zmiany zachodzące na całym rynku, które reprezentowane są w modelu przez składnik losowy. Z punktu widzenia inwestora kluczowym elementem równania linii charakterystycznej jest współczynnik beta będący miarą ryzyka systematycznego. Informuje on, o ile punktów procentowych zmieni się przeciętnie stopa zwrotu akcji danej spółki, jeżeli stopa zwrotu indeksu giełdowego wzrośnie o jeden punkt procentowy. Parametr beta nie jest wielkością obserwowalną, dostępne są natomiast notowania umożliwiające obliczenie stóp zwrotu akcji spółek oraz indeksu giełdowego. Na podstawie danych historycznych można oszacować parametry modelu i ocenić ryzyko związane z inwestycją w dany papier wartościowy. Wybór metody estymacji zależy od spełnienia bądź niespełnienia założenia o sferyczności składników losowych. Wnioskowanie o stałości wariancji przeprowadzono przy wykorzystaniu funkcji gęstości rozkładu reszt (19) i (20) oraz zbudowanego na ich podstawie ilorazu wiarygodności (21). Rezultaty otrzymane przy użyciu reguły dyskryminacyjnej porównano z wnioskami wynikającymi

z tradycyjnego postępowania polegającego na weryfikowaniu hipotezy o stałości wariancji w czasie. W podejściu klasycznym stosuje się dwa tryby postępowania: użycie testu niekonstruktywnego, który pozwala stwierdzić wystąpienie heteroskedastyczności bez określania jej postaci, lub zastosowanie testu konstruktywnego, w którym postać heteroskedastyczności jest określona w hipotezie alternatywnej.

Badaniem objęto pięćdziesiąt akcji spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Do analizy zastosowano proste miesięczne stopy zwrotu (obliczane na koniec miesiąca). Okres badania obejmował trzy lata – od czerwca 2002 r. do czerwca 2005 r., co daje liczebność próby $n = 36$. Wybór analizowanych spółek był uwarunkowany dostatecznie długim okresem notowań oraz kompletnością danych.

Punktem wyjścia do analizy modelu akcji danej spółki było oszacowanie metodą najmniejszych kwadratów linii charakterystycznej akcji postaci (22) i wyznaczenie wektora reszt, który posłużył następnie do wyznaczania odpowiednich funkcji gęstości. Rozpatrzono dwie możliwe sytuacje – homoskedastyczność i heteroskedastyczność składników losowych modelu. Określając model heteroskedastyczności przyjęto, że wariancja ulega zmianom w czasie, a do opisu zmian zastosowano model trendu postaci:

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 t. \quad (23)$$

Przy estymacji parametrów modelu (23) zamiast wielkości σ_t przyjęto wartości bezwzględne reszt otrzymanych z modelu oszacowanego metodą najmniejszych kwadratów. Wartości teoretyczne $\hat{\sigma}_t$ wyznaczone z równania (23) posłużyły do określenia diagonalnych elementów macierzy V , których znajomość jest niezbędna do znalezienia macierzy kowariancji Σ_{nsk} z równania (16) i do zastosowania UMNK.

Ponieważ przyjęty został określony model heteroskedastyczności (23), do porównania otrzymanych proponowaną metodą rezultatów z wynikami postępowania klasycznego można zastosować konstruktywny test Glejsera (zob. [2, s. 68]), w którym bada się istotność parametru kierunkowego równania (23). Na istnienie niejednorodności wariancji wskazuje istotność parametru α_1 , natomiast jeśli parametr ten jest nieistotny, stwierdza się, że heteroskedastyczność określonego rodzaju nie występuje.

Zastosowanie testu Glejsera oraz reguły dyskryminacyjnej nie zawsze prowadzi do takich samych rezultatów. Na pięćdziesiąt linii charakterystycznych akcji poddanych analizie dla trzydziestu ośmiu uzyskano zgodne rezultaty dotyczące występowania bądź nie zmienności wariancji w czasie (w kolejności alfabetycznej: AMICA, BUDIMEX, BZWBK, CERASANIT, COMARCH, COMPUTERLAND, DĘBICA, ECHO, EFEKT, ELBUDOWA, ELEKTRIM, ELZAB, HANDLOWY, INGBSK, JUPITER, KGHM, KREDYTBANK, KROSNO, MENNICA,

MIESZKO, MOSTOSTAL WARSZAWA, OPTIMUS, ORBIS, PEKAO, PGF, POLIFARB, PROCHEM, PROKOM, RAFAKO, RELPOL, ROLIMPEX, SOKOŁÓW, STALEXPORT, STRZELEC, TIM, TPSA, VISTULA).

W dwunastu przypadkach przy zastosowaniu funkcji dyskryminacyjnej otrzymano inne wyniki niż za pomocą testu Glejsera przeprowadzonego na poziomie istotności 0,05. Zestawienie wartości $\ln \lambda$ funkcji dyskryminacyjnej oraz p -value testu Glejsera dla modeli, w których zastosowanie różnych metod wnioskowania prowadzi do podjęcia odmiennych decyzji, przedstawia tab. 1.

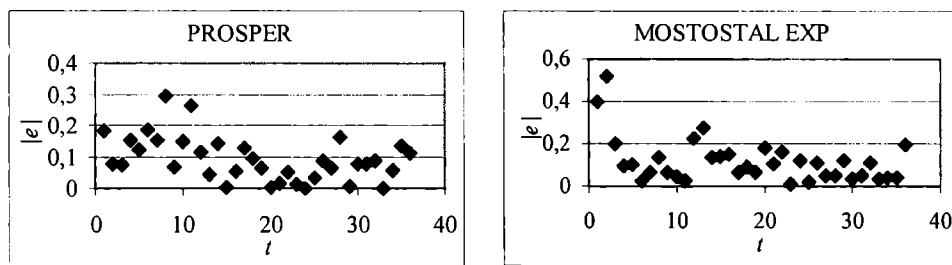
Tabela 1. Zestawienie rezultatów dla linii charakterystycznych akcji, dla których zastosowanie różnych metod prowadzi do odmiennych wniosków dotyczących wariancji składników losowych

Nazwa spółki	Wartość $\ln \lambda$	p -value dla testu Glejsera	Wniosek z reguły dyskryminacyjnej	Wniosek z testu Glejsera (poziom istotności 0,05)	R^2	Wartość statystyki Durbina-Watsona
AGORA	23,46	0,030775	homoskedastyczność	heteroskedastyczność	0,437	1,901
BRE	18,03	0,000908	homoskedastyczność	heteroskedastyczność	0,516	2,512
FORTE	11,85	0,014919	homoskedastyczność	heteroskedastyczność	0,224	1,517
KABLE	-4,68	0,697592	heteroskedastyczność	homoskedastyczność	0,224	1,767
KRUSZWICA	-6,71	0,442818	heteroskedastyczność	homoskedastyczność	0,419	1,808
MOSTOSTAL EXP	4,40	0,008658	homoskedastyczność	heteroskedastyczność	0,192	1,947
MOSTOSTAL ZAB	7,75	0,040794	homoskedastyczność	heteroskedastyczność	0,317	2,094
PROSPER	9,85	0,009492	homoskedastyczność	heteroskedastyczność	0,428	1,542
SOFTBANK	10,15	0,021217	homoskedastyczność	heteroskedastyczność	0,136	1,592
SWARZĘDZ	-0,59	0,627972	heteroskedastyczność	homoskedastyczność	0,317	2,015
WÓLCZANKA	-4,33	0,192176	heteroskedastyczność	homoskedastyczność	0,107	1,811
ZYWIEC	25,88	0,011305	homoskedastyczność	heteroskedastyczność	0,285	2,370

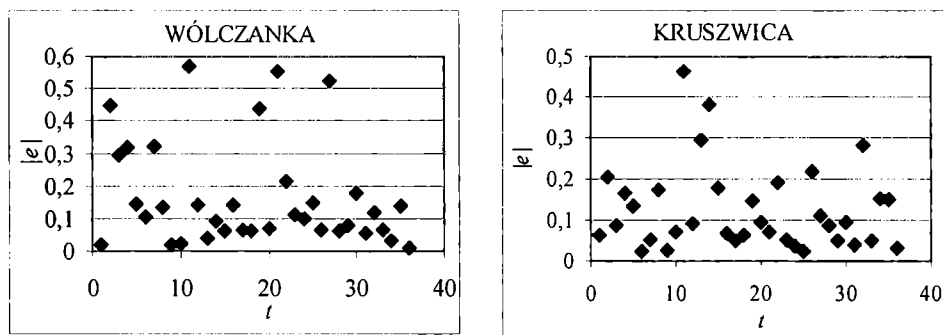
Źródło: obliczenia własne.

Wyniki zaprezentowane w tab. 1 wskazują na istnienie sytuacji, w których test Glejsera wskazuje na brak jednorodności wariancji, a reguła dyskryminacyjna pozwala sądzić, że składniki losowe są heteroskedastyczne. Z kolei w przypadku linii charakterystycznych akcji spółek KABLE, KRUSZWICA, SWARZĘDZ, WÓLCZANKA występuje sytuacja przeciwna – podejmując decyzję na podstawie funkcji dyskryminacyjnej, należy przyjąć model z heteroskedastycznymi składnikami losowymi, stosując zaś test Glejsera, można przypuszczać, że wariancje nie zmieniają się w czasie. Dwa podejścia – klasyczne z wykorzystaniem testu statystycznego oraz proponowana metoda bazująca na konstrukcji funkcji dyskryminacyjnej, nie zawsze prowadzą do otrzymania jednakowych rezultatów.

Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono przykładowe układy wartości bezwzględnych reszt MNK dla modeli, w których test oraz reguła dyskryminacyjna dały przeciwne rezultaty.



Rys. 1. Układ reszt MNK dla modeli, w których reguła dyskryminacyjna wskazuje na homoskedastyczność składników losowych, a test Glejsera sugeruje heteroskedastyczność składników losowych



Rys. 2. Układ reszt MNK dla modeli, w których reguła dyskryminacyjna wskazuje na heteroskedastyczność składników losowych, a test Glejsera sugeruje homoskedastyczność składników losowych

Zastosowanie koncepcji wnioskowania o postaci macierzy kowariancji składników losowych różnej od tradycyjnie stosowanej weryfikacji hipotez skutkuje w niektórych przypadkach dojściem do odmiennych konkluzji. Przyczyny tego zjawiska są trudne do określenia, wydaje się, że w poszczególnych przypadkach odmienne efekty mogą być wywoływane przez różne czynniki, np. dla reszt modelu dla akcji spółki WÓLCZANKA zaobserwować można spory zespół reszt znacznie większych co do modułu od pozostałych, czego nie widać na wykresie reszt dla modelu akcji spółki PROSPER. Przyjęcie przez badacza postawy równoprawnego traktowania konkurujących ze sobą hipotez, bez preferowania żadnej z nich, może stanowić alternatywę do podejścia klasycznego.

Literatura

- [1] Elton E.J., Gruber M.J., *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa 1998.
- [2] *Estymacja modeli ekonometrycznych*, red. S. Bartosiewicz, PWE, Warszawa 1990.

-
- [3] Jajuga K., *Statystyczna analiza wielowymiarowa*, PWN, Warszawa 1993.
 - [4] Kolonko J., *Analiza dyskryminacyjna i jej zastosowania w ekonomii*, PWN, Warszawa 1980.
 - [5] McLachlan G.J., *Discriminant Analysis and Statistical Pattern Recognition*, Wiley, New York 1992.
 - [6] Maurin K., *Analiza*, cz. I, PWN, Warszawa 1977.
 - [7] Morrison D.F., *Wielowymiarowa analiza statystyczna*, PWN, Warszawa 1990.
 - [8] Tarczyński W., *Rynki kapitałowe. Metody ilościowe*, vol. II, Placet, Warszawa 1997.
 - [9] Theil H., *Zasady ekonometrii*, PWN, Warszawa 1970.

USING OF THE DISCRIMINANT ANALYSIS IN THE PROCESS OF EVALUATING THE STABILITY OF THE VARIANCE OF DISTURBANCES IN THE SINGLE-EQUATION ECONOMETRIC MODELS

Summary

The paper presents the application of the discriminant analysis to the evaluation of chosen assumptions of the econometric model is presented. The approximation of the inverse matrix by the Neumann's series is proposed. The empirical examination referring to the security characteristic lines was carried out applying the proposed method. The results were compared with the results obtained from classic approach – hypotheses testing.

Mgr Alicja Grześkowiak jest asystentką w Katedrze Ekonometrii Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.