

Artur Zaborski

PRZEGLĄD WYBRANYCH MODELI RÓŻNIC INDYWIDUALNYCH W SKALOWANIU WIELOWYMIAROWYM

1. Wstęp

Przy badaniu relacji zachodzących między obiektami często korzysta się z opinii wielu respondentów. Ponieważ podstawą przeprowadzenia skalowania wielowymiarowego jest macierz $\Delta = [\delta_{ij}]_{n \times n}$, której elementy δ_{ij} przedstawiają niepodobieństwa między obiektami i oraz j ($i, j = 1, 2, \dots, n$, gdzie n jest liczbą obiektów), mamy do czynienia z sytuacją, kiedy danych jest m macierzy $\Delta_k = [\delta_{ij,k}]$ ($k = 1, 2, \dots, m$), przy czym każda macierz Δ_k przedstawia różnice między obiektami postrzegane przez k -tego respondenta. Na podstawie m macierzy Δ_k określa się wspólną dla wszystkich respondentów konfigurację punktów $\mathbf{X} = [x_{ia}]$, gdzie $a = 1, 2, \dots, r$, reprezentującą badane obiekty w r -wymiarowej przestrzeni, która nazywana jest grupową przestrzenią zmiennych (*group stimulus space*).

Ponieważ każdy z respondentów zazwyczaj różni się w ocenie ważności wpływu określonych zmiennych na podobieństwa między obiektami, w modelach różnic indywidualnych wprowadza się wagi w_{ka} zmiennej a dla indywiduum k , tworzące przestrzeń wag $\mathbf{W} = [w_{ka}]$. Geometrycznie punkty w przestrzeni wag przedstawiają respondentów, a współrzędne tych punktów to wagi przypisywane poszczególnym wymiarom przez daną osobę.

Dla ustalonej konfiguracji $\mathbf{X}$ indywidualne konfiguracje punktów dla k -tego respondenta $\mathbf{X}_k$ otrzymuje się, mnożąc współrzędne punktów z grupowej przestrzeni przez odpowiednie wagi. Elementy macierzy $\mathbf{X}_k$ wynoszą:

$$x_{ika} = w_{ka} \cdot x_{ia}$$

lub w zapisie macierzowym

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}\mathbf{W}_k,$$

gdzie $\mathbf{W}_k$ jest diagonalną macierzą wag o wymiarach $r \times r$ k -tego respondenta.

Odległości między punktami $\mathbf{X}_k$ są równe:

$$d_{ij,k} = \left[\sum_{a=1}^r w_{ka}^2 (x_{ia} - x_{ja})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{a=1}^r (x_{ika} - x_{jka})^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Modele różnic indywidualnych pozwalają na badanie interesujących nas zjawisk w różnych aspektach. W wyniku ich stosowania otrzymujemy (zob. [6, s. 67]):

- wspólną dla wszystkich respondentów konfigurację punktów przedstawiającą w przestrzeni r -wymiarowej relacje zachodzące między badanymi obiektami, przy uwzględnieniu preferencji respondentów;
- przestrzeń wag, której punktami są badane osoby; w przestrzeni tej można porównywać osoby pod względem wag przypisywanych wymiarom;
- konfiguracje indywidualne umożliwiające badanie relacji między obiektami w ramach kryteriów ocen stosowanych przez określonego respondenta.

W artykule zaprezentowano trzy modele, których podstawowe różnice wynikają z tego, co jest punktem wyjścia do wyznaczenia konfiguracji wspólnej oraz przestrzeni wag. Modelami tymi są:

- a) ważony model euklidesowy – punktem wyjścia identyfikacji różnic indywidualnych są macierze niepodobieństw;
- b) model INDSCAL – konfiguracja wspólna oraz przestrzeń wag wyznaczane są na podstawie macierzy produktów skalarnych;
- c) model PINDIS – punktem wyjścia są tu konfiguracje indywidualne poszczególnych respondentów.

2. Wazony model euklidesowy

W ważonym modelu euklidesowym poszukuje się takich konfiguracji $\mathbf{X}_k$, aby wartość funkcji dopasowania STRESS:

$$\sigma^2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m) = \sum_{k=1}^m \sum_{i < j} (\delta_{ijk} - d_{ij}(\mathbf{X}_k))^2 \quad (1)$$

osiągała wartość najmniejszą, przy założeniu, że $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}\mathbf{W}_k$.

Proces minimalizacji wartości STRESS-u obejmuje dwa etapy (zob. [1, s. 283-284]), na które składają się:

- 1) wyznaczenie macierzy konfiguracji indywidualnych $\bar{\mathbf{X}}^* = [\bar{\mathbf{X}}_1 \ \bar{\mathbf{X}}_2 \ \dots \ \bar{\mathbf{X}}_m]^T$ na podstawie macierzy niepodobieństw Δ_k ($k = 1, 2, \dots, m$);
- 2) wyznaczenie konfiguracji $\mathbf{X}$ oraz macierzy wag $\mathbf{W}_k$ minimalizujących wartość wyrażenia:

$$\sum_{k=1}^m \text{tr } n(\mathbf{X}\mathbf{W}_k - \bar{\mathbf{X}}_k)^T (\mathbf{X}\mathbf{W}_k - \bar{\mathbf{X}}_k). \quad (2)$$

Macierze $\bar{\mathbf{X}}_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) szacowane są za pomocą transformacji Guttmana. Po u -tym cyklu iteracyjnym $\bar{\mathbf{X}}_k$ przyjmuje wartość (por. [1, s. 150-155; 6, s. 70-74]):

$$\bar{\mathbf{X}}_k^u = \mathbf{V}_k^+ \mathbf{B}(\mathbf{Y}_k) \mathbf{Y}_k, \quad (3)$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{B}(\mathbf{Y}_k) - \text{macierz o elementach } b_{ijk} = \begin{cases} \frac{-w_{ijk} \delta_{ijk}}{d_{ij}(\mathbf{Y}_k)} & \text{dla } i \neq j \text{ i } d_{ij}(\mathbf{Y}_k) \neq 0, \\ 0 & \text{dla } i \neq j \text{ i } d_{ij}(\mathbf{Y}_k) = 0, \\ -\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n b_{ijk} & \text{dla } i = j, \end{cases}$$

$\mathbf{Y}_k$ – macierz współrzędnych punktów reprezentujących obiekty otrzymanych w poprzednim cyklu iteracyjnym,

$\mathbf{V}_k^+ = (\mathbf{V}_k + \mathbf{1}\mathbf{1}^T) - n^{-2} \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ – macierz odwrotna Moore'a-Penrose'a ($\mathbf{1}$ – wektor kolumnowy złożony z jedynek),

$$\mathbf{V}_k - \text{macierz o elementach } v_{ijk} = \begin{cases} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n w_{ijk} & \text{dla } i = j, \\ -w_{ijk} & \text{dla } i \neq j, \end{cases}$$

$w_{ijk} = 1$ jeżeli δ_{ijk} jest dane (w przeciwnym wypadku $w_{ijk} = 0$).

Dla ustalonych $\bar{\mathbf{X}}_k$ minimalizacja wyrażenia (2) ze względu na $\mathbf{X}$ oraz wagi $\mathbf{W}_k$ jest równoznaczna z minimalizacją:

$$\sum_{a=1}^P \text{tr}(\mathbf{x}_a \mathbf{w}_a^T - \bar{\mathbf{X}}_a)^T (\mathbf{x}_a \mathbf{w}_a^T - \bar{\mathbf{X}}_a), \quad (4)$$

gdzie: $\mathbf{x}_a$ – a -ta kolumna macierzy $\mathbf{X}$,

$\mathbf{w}_a$ – wektor wag w_{aak} a -tego wymiaru dla k -tego respondenta o wymiarach $m \times 1$,

$\bar{\mathbf{X}}_a$ – macierz o wymiarach $n \times m$, w której elementy poszczególnych kolumn przedstawiają a -te współrzędne obiektów k -tego respondenta.

W kolejnych cyklach iteracyjnych, wyrażenie (4) jest minimalizowane oddzielnie dla każdego wymiaru a , ze względu na $\mathbf{x}_a$ przy założeniu, że $\mathbf{w}_a$ jest ustalone, a następnie ze względu na $\mathbf{w}_a$ przy założeniu, że wyznaczone wcześniej $\mathbf{x}_a$ jest dane.

3. Model INDSCAL

W modelu INDSCAL (*INDividual Differences SCALing*), zaproponowanym przez J.D. Carolla i J.J. Changa [2], punktem wyjścia do stworzenia grupowej przestrzeni zmiennych oraz przestrzeni wag są macierze produktów skalarnych $\mathbf{B}_k$. Wyznaczane są one, w odniesieniu do każdego respondenta, na podstawie macierzy niepodobieństw lub macierzy odległości, a jej elementy są równe (por. [3, s. 207]):

$$b_{ij,k} = \sum_{a=1}^r w_{ka} x_{ia} x_{ja} = -\frac{1}{2} \left(d_{ij,k}^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_{ij,k}^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij,k}^2 \right) = \mathbf{H} \circ \mathbf{A}_k \circ \mathbf{H},$$

gdzie $\mathbf{A}_k$ jest macierzą o elementach $a_{ij,k} = -\frac{1}{2} d_{ij,k}^2$, a $\mathbf{H} = \mathbf{I} \frac{1}{n} \mathbf{1} \circ \mathbf{1}^T$, przy czym $\mathbf{I}$ oznacza macierz jednostkową, $\mathbf{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ zaś jest wektorem n jedynek.

Jeżeli macierze $\mathbf{B}_k$ nie są wyznaczone na podstawie macierzy odległości, ale na podstawie macierzy niepodobieństw Δ_k , często nie są one nieujemnie określone. Dzieje się tak wtedy, gdy wartości niepodobieństw $\delta_{ij,k}$ nie spełniają postulatu metryki (własność nierówności trójkąta). Najprostszym przekształceniem monotonicznym transformującym niemetryczne niepodobieństwa w metryczne odległości jest procedura dodawania do każdego $\delta_{ij,k}$ (z wyjątkiem $i = j$) możliwie najmniejszej stałej $c_k = \max_{i,j,k} \{(\delta_{ij,k} - \delta_{jl,k} - \delta_{il,k}), 0\}$.

Na podstawie średniej macierzy produktów skalarnych $\mathbf{B}$ o elementach

$b_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m b_{ij,k}}{m}$ wyznacza się, przy użyciu metody głównych składowych, konfigurację wyjściową punktów $\mathbf{X}$ w przestrzeni r -wymiarowej.

W algorytmie zaproponowanym przez Carrolla i Changa zarówno wagi, jak i współrzędne punktów są wyznaczane z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów tak, aby minimalizowały wartość funkcji dopasowania (por. [3, s. 207]):

$$\sigma^2 = \sum_i \sum_j \sum_k \left(b_{ij,k} - \sum_{a=1}^r w_{ka} x_{ia} x_{ja} \right)^2. \quad (5)$$

W celu odróżnienia dwóch estymatorów współrzędnych punktów konfiguracji wspólnej oznaczmy x_{ia} i x_{ja} indeksami P i L (prawy i lewy). Funkcja dopasowania będzie miała wtedy postać:

$$\sigma^2 = \sum_i \sum_j \sum_k \left(b_{ij,k} - \sum_{a=1}^r w_{ka} x_{ia}^P x_{ja}^L \right)^2. \quad (6)$$

Wartość σ^2 w pierwszej kolejności jest minimalizowana ze względu na wagi w_{ka} przy x_{ia}^P i x_{ja}^L wyznaczonych z macierzy produktów skalarnych. Jeżeli $x_{ia}^P \cdot x_{ja}^L$ zapiszemy w macierzy $\mathbf{G} = [g_{\alpha\alpha}]_{n^2 \times r}$, gdzie elementy $g_{\alpha\alpha} = x_{ia}^P \cdot x_{ja}^L$, przy czym $\alpha = n(i-1) + j$, a wielkości $b_{ij,k}$ w macierzy $\mathbf{F} = [f_{k\alpha}]_{m \times n}$, gdzie elementy $f_{k\alpha} = b_{ij,k}$, to wtedy estymatory najmniejszych kwadratów wag $\mathbf{W} = [w_{ka}]_{m \times r}$ będą równe:

$$\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{F} \circ \mathbf{G} \circ (\mathbf{G}^T \circ \mathbf{G})^{-1}. \quad (7)$$

Następnie dla wyznaczonych wag w_{ia} oraz współrzędnych x_{ia}^P szacuje się estymatory najmniejszych kwadratów współrzędnych x_{ja}^L . Niech $\mathbf{P}$ będzie teraz macierzą o wymiarach $mn \times r$, której elementy $p_{\chi\alpha} = w_{ka} \cdot x_{ia}^P$, gdzie $\chi = n(k-1) + j$, $\mathbf{Q}$ zaś macierzą o wymiarach $n \times nm$, której elementy $q_{\chi\gamma} = b_{ija}$, przy czym $\chi = i$, $\gamma = n(k-1) + j$. Jeżeli $\mathbf{X}^L$ będzie macierzą o wymiarach $n \times r$ o elementach x_{ja}^L , to estymatory najmniejszych kwadratów $\mathbf{X}^L$ dla wyznaczonych wcześniej wag w_{ka} oraz współrzędnych x_{ia}^P będą równe:

$$\hat{\mathbf{X}}^L = \mathbf{P} \circ \mathbf{Q} \circ (\mathbf{Q}^T \circ \mathbf{Q})^{-1}. \quad (8)$$

Podobnie jak w ostatnim kroku najpierw wyznacza się estymatory najmniejszych kwadratów $\mathbf{X}^P$, wykorzystując w tym celu oszacowane wcześniej wagi w_{ka}

oraz współrzędne x_{ja}^L , a następnie przechodzi się do kolejnego cyklu iteracyjnego.

Szacowanie parametrów odbywa się tak długo, aż nastąpi zbieżność pomiędzy $\hat{\mathbf{X}}^L$ i $\hat{\mathbf{X}}^P$ ($\hat{\mathbf{X}}^L = \hat{\mathbf{X}}^P \circ \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ jest niezerową macierzą diagonalną o wymiarach $r \times r$ [3, s. 208]). Wtedy przyjmuje się, że $\hat{\mathbf{X}}^L = \hat{\mathbf{X}}^P$ i po raz ostatni wyznacza się $\hat{\mathbf{W}}$.

4. Model PINDIS

Jeżeli danych jest m macierzy Δ_k ($k = 1, 2, \dots, m$) przedstawiających niepodobieństwa między tymi samymi obiektami postrzegane przez różnych respondentów, można na ich podstawie wyznaczyć k konfiguracji punktów $\mathbf{X}_k$ reprezentujących obiekty. Otrzymujemy w ten sposób trójwymiarową kostkę zmiennych o współrzędnych x_{iak} ,

gdzie: $i = 1, 2, \dots, n$ – liczba badanych obiektów,

$a = 1, 2, \dots, r$ – wymiar przestrzeni, w której prezentowane są wyniki skalowania wielowymiarowego,

$k = 1, 2, \dots, m$ – liczba konfiguracji punktów.

Wzrokowe porównanie $\mathbf{X}_k$ może być utrudnione, ponieważ nie zawsze różnice w układach konfiguracji punktów na mapach percepcyjnych wynikają z różnic w postrzeganiu obiektów przez poszczególnych respondentów (zob. [5]). W związku z tym porównanie wyników skalowania wielowymiarowego poprzedzone jest analizą Procrustes.

Dla dwóch wyników skalowania wielowymiarowego $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n]^T$ i $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \dots \ \mathbf{y}_n]^T$ (punkty obydwu konfiguracji reprezentują te same obiekty lub zmienne co oznacza, że punkt $\mathbf{x}_i$ odpowiada punktowi $\mathbf{y}_i$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$) analiza Procrustes polega na takim wzajemnym ich dopasowaniu, aby zostały zachowane proporcje odległości między punktami. W celu dopasowania do konfiguracji $\mathbf{Y}$, zbiór punktów $\mathbf{X}$ poddaje się przekształceniom, którymi są translacja, rotacja i jednokładność.

Dopasowanie obydwu konfiguracji jest najlepsze, jeżeli suma kwadratów odległości między odpowiadającymi sobie punktami $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ jest najmniejsza, czyli gdy funkcja dopasowania przyjmująca postać:

$$R^2 = \text{tr}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad (9)$$

osiąga wartość najmniejszą.

W nieważonej analizie Procrustes dopasowanie konfiguracji $\mathbf{X}$ do konfiguracji $\mathbf{Y}$, przy minimalizacji funkcji dopasowania (9), przebiega w następujących etapach (zob. [3, s. 128; 5]):

1. Translacja $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ tak, aby ich środki ciężkości znajdowały się w początku układu współrzędnych.
2. Wymnożenie macierzy $\mathbf{X}$ przez macierz rotacji $\mathbf{A} = (\mathbf{X}^T \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \mathbf{X})^{\frac{1}{2}} (\mathbf{Y}^T \mathbf{X})^{-1}$.
3. Znalezienie obrazu $\mathbf{X}$ przy jednokładności o stosunku $\hat{\varphi} = \frac{tr(\mathbf{X}^T \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \mathbf{X})^{\frac{1}{2}}}{tr(\mathbf{X}^T \mathbf{X})}$.
4. Obliczenie miary dopasowania $R^2 = 1 - \frac{\left(tr(\mathbf{X}^T \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \mathbf{X})^{\frac{1}{2}} \right)^2}{tr(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) tr(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})}$.

W analizie Procrustes'a etap pierwszy jest pomijany, gdy środki ciężkości $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ są w początku układu współrzędnych, etap trzeci zaś – gdy suma kwadratów odległości punktów od początku układu współrzędnych jest dla obydwu konfiguracji taka sama.

Dla wielu wyników skalowania wielowymiarowego dokonuje się transformacji indywidualnych konfiguracji $\mathbf{X}_k$ tak, aby każda z nich została jak najlepiej dopasowana do pozostałych. Podobnie jak w analizie dla dwóch wyników skalowania wielowymiarowego, dopuszczalnymi przekształceniami są translacja, rotacja i jednokładność. Prowadzi to do wyznaczenia takich $\tilde{\mathbf{X}}_k$, dla których funkcja dopasowania (por. [1, s. 362]):

$$R^2 = \sum_{k < l}^m tr(\tilde{\mathbf{X}}_k - \tilde{\mathbf{X}}_l)^T (\tilde{\mathbf{X}}_k - \tilde{\mathbf{X}}_l), \quad (10)$$

przyjmuje wartość najmniejszą, gdzie $\tilde{\mathbf{X}}_k = \varphi_k \mathbf{X}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{1} \mathbf{b}_k^T$ ($k, l = 1, 2, \dots, m$).

Algorytm minimalizujący wartość funkcji R^2 ma charakter iteracyjny i polega na cyklicznym dopasowywaniu kolejnych konfiguracji punktów (tak jak w przypadku analizy Procrustes'a dla dwóch wyników skalowania) przy założeniu, że pozostałe są ustalone (zob. [4]).

W pierwszym etapie dokonuje się translacji i wyskalowania $\mathbf{X}_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$), aby ich środki ciężkości znajdowały się w początku układu współrzędnych, a średni kwadrat odległości punktów od początku układu współrzędnych był równy jeden, tzn. $tr(\mathbf{X}_k^T \mathbf{X}_k) = 1$.

Następnie szacowana jest konfiguracja wspólna $\mathbf{X}$. W tym celu dopasowuje się $\mathbf{X}_2$ do $\mathbf{X}_1$, a następnie wyznacza macierz $\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_1 + \tilde{\mathbf{X}}_2)$. Po dopasowaniu $\mathbf{X}_3$

do oszacowanej wcześniej $\mathbf{X}$ obliczana jest nowa wartość $\mathbf{X} = \frac{1}{3}(\mathbf{X}_1 + \tilde{\mathbf{X}}_2 + \tilde{\mathbf{X}}_3)$. Proces ten powtarzany jest tak długo, aż wykorzystane zostaną wszystkie konfiguracje $\mathbf{X}_k$.

W kolejnym etapie, po ponownym dopasowaniu wszystkich konfiguracji $\tilde{\mathbf{X}}_k$ do oszacowanej $\mathbf{X}$, oblicza się miarę dopasowania:

$$h = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left(1 - R_k^2(\tilde{\mathbf{X}}_k, \mathbf{X})\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

gdzie $R^2(\tilde{\mathbf{X}}_k, \mathbf{X}) = \frac{\left(\text{tr}(\tilde{\mathbf{X}}_k^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{X}}_k)\right)^{\frac{1}{2}}}{\text{tr}(\tilde{\mathbf{X}}_k^T \tilde{\mathbf{X}}_k) \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})}$ jest miarą dopasowania $\tilde{\mathbf{X}}_k$ do $\mathbf{X}$.

Po wyznaczeniu nowej wartości $\mathbf{X}$, jako średniej z otrzymanych w poprzednim etapie $\tilde{\mathbf{X}}_k$, wszystkie $\tilde{\mathbf{X}}_k$ znowu są dopasowywane kolejno do $\mathbf{X}$, a następnie obliczana jest miara dopasowania h . Proces iteracyjny powtarzany jest tak długo, aż różnica pomiędzy h wyznaczonymi w kolejnych cyklach przestanie ulegać zmianie lub będzie mniejsza od ustalonej stałej.

Ponieważ respondenci różnią się w ocenie ważności wpływu określonych zmiennych na podobieństwa między obiektami, przez co przypisują różne znaczenie poszczególnym wymiarom konfiguracji wspólnej, istnieją takie macierze $\mathbf{W}_k$, dla których $\tilde{\mathbf{X}} \approx \mathbf{X} \mathbf{W}_k$ ($\mathbf{W}_k$ jest diagonalną macierzą o wymiarach $r \times r$ niezerowych wag poszczególnych wymiarów, $\mathbf{X} \mathbf{W}_k$ zaś – ważoną konfiguracją wspólną k -tego respondenta). Dla ustalonych konfiguracji $\mathbf{X}$ i $\mathbf{X}_k$ należy zaleźć taką macierz $\mathbf{W}_k$, aby funkcja dopasowania:

$$R^2 = (\mathbf{X} \mathbf{W}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k)^T (\mathbf{X} \mathbf{W}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k) \quad (12)$$

przyjmowała wartość najmniejszą.

Jeżeli $\mathbf{x}_a$ i $\mathbf{x}_{ak}$ są odpowiednio kolumnami macierzy $\mathbf{X}$ i $\mathbf{X}_k$, natomiast x_{ia} i x_{iak} i -tymi elementami tych wektorów, wtedy znalezienie w_a , który jest a -tym elementem diagonalnym $\mathbf{W}_k$, sprowadza się do minimalizacji wyrażenia:

$$\sum_{i=1}^n (w_a x_{ia} - x_{iak})^2. \quad (13)$$

Po zróżniczkowaniu (13) i przyrównaniu do zera otrzymujemy:

$$w_a = \frac{\sum_{i=1}^n x_{iak} x_{ia}}{\sum_{i=1}^n x_{ia}^2}. \quad (14)$$

Wyznaczone w ten sam sposób dla każdego $a=1,2,\dots,r$ i dla każdego $k=1,2,\dots,m$ wagi tworzą przestrzeń wag $\mathbf{W}=[w_{ka}]$. Punkty przestrzeni wag (wiersze) przedstawiają respondentów, a współrzędne tych punktów – wagi przypisywane przez nich poszczególnym wymiarom.

5. Podsumowanie

Zaprezentowane modele skalowania wielowymiarowego są ważnym narzędziem w badaniach zależności między obiektami, które opierają się na opinii wielu respondentów. Geometryczna prezentacja w postaci mapy percepcyjnej zależności przeprowadzona na podstawie uśrednionej macierzy niepodobieństw nie zawsze w pełni odzwierciedla różniące się często oceny respondentów. W zależności od tego, czy dysponujemy macierzami niepodobieństw, macierzami odległości, czy też indywidualnymi konfiguracjami poszczególnych respondentów, przez wykorzystanie odpowiedniego modelu możemy otrzymać zarówno grupową konfigurację, jak i „porównywalne” konfiguracje indywidualne oraz przestrzeń wag, co umożliwia badanie relacji między obiektami w ramach różnych (indywidualnych) kryteriów ocen.

Literatura

- [1] Borg I., Groenen P., *Modern Multidimensional Scaling. Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York 1997.
- [2] Carroll J.D., Chang J.J., *Analysis of Individual Differences in Multidimensional Scaling via an N-way Generalization of „Eckart-Young” Decomposition*, „Psychometrika” 1970, nr 35, s. 238-319.
- [3] Cox T.F., Cox M.A.A., *Multidimensional Scaling*, second edition, Chapman and Hall, London 2001.
- [4] Lingoes J.C., Borg I., *A Direct Approach to Individual Differences Scaling Using Increasingly Complex Transformations*, „Psychometrika” 1978, nr 4, s. 491-519.
- [5] Zaborski A., *Porównywanie wyników skalowania wielowymiarowego metodą Procrustes*, *Ekonomometria* 14, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1021, AE, Wrocław 2004, s. 51-59.
- [6] Zaborski A., *Skalowanie wielowymiarowe w badaniach marketingowych*, AE, Wrocław 2001.

REVIEW OF SELECTED INDIVIDUAL DIFFERENCES MODELS IN MULTIDIMENSIONAL SCALING

Summary

The paper presents three individual differences models that make possible to obtain a group stimulus space, individual configurations and subject space (space of weights). Especially the paper refers to:

- the weighted Euclidean model in which stimulus space, individual configurations and subject space can be found directly from the set of m proximity matrices,
- model INDSCAL based on the scalar-product matrix,
- model PINDIS in which individual differences of respondents are found by comparing individual configurations using the Procrustes analysis.

Dr Artur Zaborski jest adiunktem w Katedrze Ekonometrii i Informatyki Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.